



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 3

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



17488JB

фот. вул. Сеченова

Ц 40.00

ВИПУСК №3 2011

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2011
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Яхєвич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Сжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, доцент;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макарещь Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezuscha@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khameluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Авдєєва Т.В. Централізатори елементів малих рангів симетричної напівгрупи	7
Білицький А.Р. Операції над скінченими метричними просторами	14
Довгай Б.В. Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння	18
Сршов А.В. Гранічні теореми для випадкових ламаних	24
Зельдіч М.В. Про можливість реалізації знакозмінної групи підстановок A_n в якості групи ізометрій	29
Касянюк М.В. Про квазіфробеніусові кільця	32
Кириченко В.В., Плахотник М.В. Опис $(0, 1)$ -матриць показників	34
Костишин Э.М. Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$	37
Курченко О.О., Сиянєвська О.О. Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі	40
Шви́ров В.В. Розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець	46

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану із врахуванням розвантаження матеріалу	53
Бойко М.Я. Про розв'язки із заданими значеннями на границі різнищевих рівнянь, що залежать від двох індексів	57
Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці	61
Ефімова Т.Л. Вільні коливання незамкнених циліндричних оболонок з неоднорідних матеріалів	65
Кузенков О.О. Класифікаційна система точок рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь третього порядку	69
Плахтєнко М.П., Забуга А.Т. Поступальні коливання твердого тіла з електромагнітним фрикційним демпфером в механізмі сейсмоізоляції	75
Сиротенко А.В., Городній М.Ф. Про інтегровні з r -м степенем розв'язки операторно-диференціального рівняння	79
Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти	83
Чайковський А.В. Про наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу	87

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бомба А.Я., Терєбус А.В. Про один підхід до моделювання просторової квазіідеальної течії	93
Бондарєць І.М. Прогнозування часових рядів на прикладі курсів валют за допомогою нейронних мереж	99
Буй Д.Б., Пузікова А.В. Повнота аксіоматики Армстронга	103
Верченко А.П., Кобзар А.Ю. Про один алгоритм побудови панорамних знімків	109
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації греблі із зосередженим шляхом фільтрації в її ядрі в умовах тепло-солепереносу	115
Гарашенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Оцінки областей практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями і їх використання	123
Головенко А.Д. Обчислювальні технології та алгоритми для побудови автоматизованих моделюючих систем в будівельній аеродинаміці	131
Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Перерозподіл за централізації і децентралізації	139
Демків І.І. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробі для функціоналів від двох змінних	143

Жмихова Т.В. Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (B, S) - ринок та витратами на рекламу	149
Зінченко А.Ю. Параметрична ідентифікація динамічних систем на основі хаотичної синхронізації та адаптивного контролю	153
Катеринич Л.О. Експертна система Н-Гомеопат	163
Костогриз В.П. ПЛІС і GPU обчислення в біоінформатиці	169
Кудін В.І., Кудін Г.І., Оноцький В.В. Про точний алгоритм методу базисних матриць розв'язання задач лінійного програмування	177
Кудичицький В.О. Молекулярна електроніка	181
Лялецький О.О. Базові властивості (θ) -неперервних функцій, які діють на біповних частково впорядкованих множинах	187
Марценюк В.П., Федорук П.І., Пікуляк М.В. Побудова бази знань в адаптивній навчальній системі	193
Марченко О.О., Циганок Д.В. Засоби та методи автоматичного заповнення онтологічних баз знань	200
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу	204
Скобелєв В. В. Про множини автоматів над скінченням кільцем, які визначено у термінах ідеалів	212
Філатова І.А., Федорчук Н.А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах	218
Хусаїнов Д.Я., Джалалова І.А., Штирко О.А. Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною	227

РАДІОФІЗИКА

Находкін М.Г., Федорченко М.І. Адсорбція As на поверхні Ge(113)	233
Павлюк С.П., Тіщенко І.Ю. Кінетика шигування струму у КНІ транзисторах	238
Прокопенко О.В., Павлов Д.І. Можливість аномальної температурної залежності порога чутливості мікрохвильового детектора на основі магнітних наноструктур в області низьких температур	244

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Абдікарімов Б.Ж. Датчик вимірювання тиску в неоднорідних системах поблизу критичної точки - мікроплавневий манометр	251
Жабітенко О.М., Бурлій П.В., Козаченко В.В. Дослідження хвиль Лемба в електрично та акустично зв'язаних пластинках LiNbO_3 .	253
Онанко А.П. Вплив електричного струму, зміни дефектної наноструктури на непружні та пружні характеристики GeSi	257
Плющай І.В., Макара В.А., Плющай О.І. Ab initio розрахунок електронних спектрів крайової дислокації в кремнії	261
Порядько Л.В. Фізичні процеси, що відбуваються при обробці матеріалів лазерним випромінюванням	263
Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Спектральна еліпсометрія кристалу $\text{Al}_3\text{YSO}_{12}$: з домішками Nd^{3+} .	269
Рудніков Є.Г., Остапчук Ю.Л., Білоус О.І. Застосування симетричної алгебри флуктуюючих величин до Ван-дер-Ваальсової моделі газу флуктуацій параметра порядку	273
Селищев П.О., Москаленко Л.В. Автоколивання розміру виділень другої фази в бінарних сплавах під опроміненням	279
Шашкевич І.А., Лендел В.В., Медьниченко Л.Ю. Багатопроменева інтерференція в ультракороткохвильовому радіодіапазоні	283

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.53

Тетяна В. Авдеева

Централізатори елементів малих рангів симетричної напівгрупи

У роботі вивчається будова централізаторів елементів рангів 1 і 2 симетричної напівгрупи, обчислюються порядки централізаторів та кількість елементів спеціального вигляду (ідемпотентів, підстановок, односторонніх нулів) у централізаторах.

Ключові слова: централізатор елемента, напівгрупа, ідемпотент, підстановка.

Avdeeva_t1@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В. В. Кириченко

Вступ.

Теорія напівгруп належить до числа відносно молодих розділів алгебри. Перші дослідження з теорії напівгруп відносяться до 20-х років минулого століття та пов'язані з іменем А.К. Сушкевича. Однією з основних задач теорії напівгруп є класифікація можливих напівгруп та дослідження їх будови. Зокрема, при дослідженні конкретних напівгруп природними є питання про будову різних класів піднапівгруп. Один із таких класів утворюють централізатори елементів. У даній роботі досліджується будова централізаторів елементів малих рангів скінченної симетричної напівгрупи T_n . Вивченню цієї напівгрупи присвячено сотні робіт (див., наприклад, [1], [2] і вказану там літературу). Централізатори різних класів елементів напівгрупи T_n уже вивчалися різними авторами (наприклад, централізатори підстановок – в [9], централізатори ідемпотентів – в [7]). Деякі загальні властивості централізаторів елементів T_n вивчалися у роботах [3], [4], [5], [6], [8].

Централізатори елементів рангу 1. Нехай $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n > 2$. Сукупність T_n всіх відображень множини N в себе утворює напівгрупу відносно суперпозиції відображень. Елементи T_n зручно записувати у вигляді $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_n \end{pmatrix}$, де $\tau_i = \tau(i)$. Порядок

Tetiana V. Avdeeva

Centralizers of elements of small rank of symmetric semigroup

It is studied the construction of centralizer of element of small rank (rank 1, 2) in symmetric semigroup. It is calculated the order of the elements centralizers and calculated elements special form (idempotents, permutations and nulls) of the centralizers.

Key Words: element centralizer, semigroup, idempotent, permutation.

множини значень $\text{ran}(\tau) = \{\tau(N)\}$ називають рангом елемента τ напівгрупи T_n . Якщо S – напівгрупа, то централізатором $C(\tau)$ елемента τ напівгрупи S називають множину елементів які є переставками з τ , тобто $C(\tau) = \{g \in S : g\tau = \tau g\}$. Очевидно, що централізатор довільного елемента є піднапівгрупою. Множина ідемпотентів напівгрупи S (тобто таких елементів α , що $\alpha^2 = \alpha$) позначається $E(S)$. Дві підмножини H_1, H_2 напівгрупи T_n називаються подібними, якщо існує підстановка $\alpha \in S_n$, така що $\alpha^{-1} \cdot H_1 \cdot \alpha = H_2$, при цьому записують $H_1 \sim H_2$. Подібні підмножини мають однакову потужність. У випадку одноелементних множин мову ведуть про подібні елементи.

Лема 1. Централізатори подібних елементів є подібними.

Доведення. Нехай елементи τ і φ подібні і $\varphi = \alpha^{-1} \cdot \tau \cdot \alpha$, де $\alpha \in S_n$. Тоді для довільного $g \in C(\tau)$ маємо: $\alpha^{-1} g \alpha \cdot \varphi = \alpha^{-1} g \alpha \cdot \alpha^{-1} \tau \alpha = \alpha^{-1} g \tau \alpha = \alpha^{-1} \tau g \alpha = \alpha^{-1} \tau \alpha \cdot \alpha^{-1} g \alpha = \varphi \cdot \alpha^{-1} g \alpha$.

Отже, $\alpha^{-1} g \alpha \in C(\varphi)$. Позаяк елемент $g \in C(\tau)$ довільний, то $\alpha^{-1} C(\tau) \alpha \subseteq C(\varphi)$. Аналогічно доводиться зворотнє включення. $\square$

Нагадаємо, що елемент α напівгрупи T_n буде ідемпотентом тоді й лише тоді, коли кожна точка

образу є нерухомою. Як відомо, у напівгрупі T_n елемент g має ранг 1 тоді і тільки тоді, коли він є правим нулем, тобто має вигляд

$$g_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ k & k & \dots & k & k & \dots & k \end{pmatrix}, \quad (1)$$

для деякого $k \in N$. У напівгрупі існує n таких елементів.

Твердження 1. *Нехай g_k – правий нуль вигляду (1). Тоді:*

$$C(g_k) = \{h : h(k) = k\}, \quad |C(g_k)| = n^{n-1}$$

$$i \quad |E(C(g_k))| = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} i^{n-i}.$$

Централізатори довільних двох правих нулів побудовані.

Доведення. Розглянемо елемент g_k вигляду (1), $h \in C(g_k)$. Якщо $h(k) = k$, то для довільного x маємо $(gh)(x) = h(g(x)) = h(k) = k = g(h(x)) = (hg)(x)$.

Отже, $gh = hg$. Навпаки з рівності $gh = hg$ отримуємо:

$$k = g(h(k)) = (hg)(k) = (gh)(k) = h(g(k)) = h(k).$$

Це доводить першу частину твердження. Рівність $|C(g_k)| = n^{n-1}$ тепер випливає з того, що для різних точок $x \neq k$ їх образи $h(x)$ можна вибирати незалежно і довільно. Нехай $e \in C(g_k)$ – ідемпотент рангу i . Позаяк $k \in \text{ran}(e)$, то $\text{ran}(e)$ можна вибрати $\binom{n-1}{i-1}$ способами. Якщо вже $\text{ran}(e)$ вибрано, то відображення $\text{ran}(e) \rightarrow \text{ran}(e)$ можна задати i^{n-i} способами. Сумуючи за можливими значеннями рангу e , отримуємо:

$$|E(C(g_k))| = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} i^{n-i}.$$

Остання частина твердження випливає з Лемми 1. $\square$

Централізатори елементів рангу 2. Розглянемо тепер елемент g рангу 2. Нехай множина образів має вигляд $\text{ran}(g) = \{a, b\}$. Позначимо: $X = \{x : g(x) = a\} \setminus \{a, b\}$, $Y = \{y : g(y) = b\} \setminus \{a, b\}$. Тоді із точністю до спряженості g є елементом одного з трьох наступних типів:

$$(I) \quad g = \begin{pmatrix} a & b & X & Y \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad Y \neq \emptyset;$$

$$(II) \quad g = \begin{pmatrix} a & b & X & Y \\ a & b & a & b \end{pmatrix};$$

$$(III) \quad g = \begin{pmatrix} a & b & X & Y \\ b & a & a & b \end{pmatrix}.$$

Твердження 2. *У напівгрупі T_n кількість елементів типу (I), (II) і (III) дорівнює відповідно $n(n-1)(2^{n-2}-1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)2^{n-2}$ і $\frac{1}{2}n(n-1)2^{n-2}$.*

Доведення. Точки a і b у випадку елемента типу (I) є нерівноправними. Точку a вибираємо n способами, тоді точку b можна вибрати $n-1$ способами. Вибрати непусту множину Y з решти можна $2^{n-2}-1$ способами. Тому загальна кількість елементів типу (I) дорівнює $n(n-1)(2^{n-2}-1)$. Для елементів типу (II) точки a і b є рівноправними, тому їх можна вибрати $\frac{1}{2} \cdot n(n-1)$ способами. Вибрати множину Y з решти можна 2^{n-2} способами (у цьому випадку множина Y може бути порожньою). Загальна кількість елементів типу (II) дорівнює $\frac{1}{2}n(n-1)2^{n-2}$. Аналогічно доводиться, що кількість елементів типу (III) у напівгрупі T_n дорівнює $\frac{1}{2}n(n-1)2^{n-2}$. $\square$

Твердження 3. *Нехай елемент g є елементом типу (I) та $|X| = k_1$, $|Y| = k_2$, $0 \leq k_1 \leq n-3$. Тоді*

$$1) \quad C(g) = \left\{ \begin{array}{l} h : h(a) = a, h(b) = a, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a, b\}, \\ h(Y) \subseteq X \cup \{a, b\} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} h : h(a) = a, h(b) = b, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a, b\}, h(Y) \subseteq Y \end{array} \right\};$$

$$2) \quad |C(g)| = (k_1+2)^{n-2} + (k_1+2)^{k_1} k_2^{k_2};$$

$$3) \quad \text{правий нуль } g_a \text{ є двостороннім нулем централізатора } C(g);$$

$$4) E(C(g)) = \left\{ \begin{array}{l} e: e(a) = e(b) = a, \\ e(x) = x \\ \text{для всіх } x \in X' \subseteq X, \\ e(X \cup Y) \subseteq X' \cup \{a\} \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} e: e(a) = a, e(b) = b, \\ e(z) = z \text{ для всіх } z \in Z \subseteq X \cup Y, \\ e(X) \subseteq (Z \cap X) \cup \{a, b\}, \\ e(Y) \subseteq Z \cap Y \end{array} \right\};$$

$$5) |E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+2)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j)^{k_2-j};$$

6) централізатор $C(g)$ містить $k_1!k_2!$ підстановок.

Доведення. Нехай $h \in C(g)$. Тоді з рівності

$$gh = hg$$

маємо: $gh(a) = h(g(a)) = h(a) = c$ та

$$hg(a) = g(h(a)) = g(c) = c.$$

Оскільки елемент g має одну нерухому точку a , то $h(a) = a$. Із рівностей $gh(b) = h(g(b)) = h(a) = a$ тепер випливає, що $h(b) \in \{a, b, X\}$. Аналогічно доводиться, що для довільного $x \in X$ маємо $h(x) \in \{a, b, X\}$. Нехай $h(b) = a$. Тоді для довільного $y \in Y$ виконується $g(h(y)) = h(g(y)) = h(b) = a$, звідки $h(y) \in \{a, b, X\}$.

Нехай тепер $h(b) = b$. Тоді для довільного $y \in Y$ буде $g(h(y)) = h(g(y)) = h(b) = b$, звідки $h(y) \in Y$.

Нарешті, якщо $h(b) \in X$, то маємо

$$g(h(y)) = h(g(y)) = h(b) \in X.$$

Але $g(a) \cap X = \emptyset$. Отже, цей випадок неможливий. Таким чином, елемент h централізатора $C(g)$ має вигляд

$$h = \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & X_3 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ a & a & a & b & X & a & b & X \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\text{або} \quad h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & X_3 & Y \\ a & b & a & b & X & Y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Безпосередньо перевіряється, що кожен з таких елементів справді належить централізатору $C(g)$. Це завершує доведення пункту 1 твердження.

Легко бачити, що кількість елементів вигляду (2) дорівнює $(k_1 + 2)^{n-2}$, а кількість елементів вигляду (3) дорівнює $(k_1 + 2)^{k_1} k_2^{k_2}$. Це доводить пункт 2. Те, що g_a є двостороннім нулем в $C(g)$, випливає з рівностей

$$h(g_a(x)) = h(a) = a = g_a(x) = g_a(h(x)).$$

Елемент h вигляду (2) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $X_2 = Y_2 = \emptyset$, $X' \subseteq X$, причому h діє на X' тотожно і $h(X \cup Y) \subseteq X' \cup \{a\}$. Через Z позначимо множину нерухомих точок множини $X \cup Y$ (тобто $h(z) = z$ для всіх $z \in Z$). Елемент h вигляду (3) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $e(X) \subseteq (Z \cap X) \cup \{a, b\}$, $e(Y) \subseteq Z \cap Y$. Це доводить пункт 4. Розбиваючи ідемпотенти вигляду (2) на класи в залежності від потужності множини X' одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i}$$

(кожен елемент із $(X \cup Y) \setminus X'$ може переходити в довільний елемент з $X' \cup \{a\}$). Розбиваючи ідемпотенти вигляду (3) на класи в залежності від потужностей множин $Z \cap X$ та $Z \cap Y$ (щो множини можна вибирати незалежно) одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+2)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j)^{k_2-j}$$

(кожен елемент із $X \setminus Z$ може переходити в довільний елемент з $(Z \setminus Y) \cup \{a, b\}$, а кожен елемент із $Y \setminus Z$ може переходити в довільний елемент із $Z \cap Y$). Остаточню маємо

$$|E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+2)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j)^{k_2-j}.$$

Для доведення останнього пункту, зауважимо, що підстановкою може бути тільки елемент вигляду (3) при умові $X_1 = X_2 = \emptyset$, $X_3 = X$, і кожне з обмежень на X та на Y повинне бути підстановкою. Із цього випливає, що загальна кількість підстановок в централізаторі $C(g)$ дорівнює $k_1!k_2!$. $\square$

Твердження 4. Нехай елемент g є елементом типу (II) та $|X| = k_1$, $|Y| = k_2$, $0 \leq k_1 \leq n-2$. Тоді

$$1) C(g) = \left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = a, \quad h(b) = a, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a\}, \\ h(Y) \subseteq X \cup \{a\} \end{array} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = a, \quad h(b) = b, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a\}, \quad h(Y) \subseteq Y \cup \{b\} \end{array} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = b, \quad h(b) = a, \\ h(X) \subseteq Y \cup \{b\}, \quad h(Y) \subseteq X \cup \{a\} \end{array} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = b, \quad h(b) = b, \\ h(X) \subseteq Y \cup \{b\}, \quad h(Y) \subseteq Y \cup \{b\} \end{array} \right\};$$

$$2) |C(g)| = (k_1 + 1)^{n-2} + (k_1 + 1)^{k_1} \cdot (k_2 + 1)^{k_2} + (k_2 + 1)^{k_1} \cdot (k_1 + 1)^{k_2} + (k_2 + 1)^{n-2};$$

3) централізатор $C(g)$ містить два провіз нулі g_a, g_b ;

$$4) E(C(g)) = \left\{ \begin{array}{l} e: e(a) = e(b) = a, \\ e(x) = x \\ \text{для всіх } x \in X', \quad X' \subseteq X, \\ e(X \cup Y) \subseteq X' \cup \{a\} \end{array} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} e: e(a) = a, \quad e(b) = b, \\ e(z) = z \text{ для всіх } z \in Z \subseteq X \cup Y, \\ e(X) \subseteq (Z \cap X) \cup \{a\}, \\ e(Y) \subseteq (Z \cap Y) \cup \{b\} \end{array} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} e: e(a) = e(b) = b, \\ e(y) = y \text{ для всіх } y \in Y', \quad Y' \subseteq Y, \\ e(X \cup Y) \subseteq Y' \cup \{b\} \end{array} \right\};$$

$$5) |E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i} + \\ + \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_2-j} + \\ + \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_1+k_2-j};$$

6) при $k_1 \neq k_2$ централізатор $C(g)$ містить $k_1!k_2!$ підстановок;
при $k_1 = k_2$ централізатор $C(g)$ містить $2(k_1!)^2$ підстановок.

Доведення. Елемент g має дві верхові точки, a та b , які є рівноправними. Нехай $h \in C(g)$. Позначимо $h(a) = c$. Тоді з рівності $gh = hg$ маємо:
 $gh(a) = h(g(a)) = h(a) = c$ та
 $hg(a) = g(h(a)) = g(c) = c$.

Отже, $h(a)$ є верховою точкою елемента g . Тому $h(a) \in \{a, b\}$. Аналогічно показується, що $h(b) \in \{a, b\}$. Розглянемо тепер можливі випадки.

1) $h(a) = a, h(b) = a$. Для довільного $x \in X$ маємо $gh(x) = h(g(x)) = h(a) = a$ та $hg(x) = g(h(x)) = a$ тобто $h(x) \in \{a\} \cup X$. Аналогічно доводиться, що для довільного $y \in Y$ маємо $h(y) \in \{a\} \cup X$. Отже, до централізатора $C(g)$ належать елементи

$$\left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = a, \quad h(b) = a, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a\}, \quad h(Y) \subseteq X \cup \{a\} \end{array} \right\}.$$

2) $h(a) = a, h(b) = b$. Для довільного $x \in X$ маємо $gh(x) = h(g(x)) = h(a) = a$ та $hg(x) = g(h(x)) = a$, тобто $h(x) \in \{a\} \cup X$. Для довільного $y \in Y$ маємо

$$gh(y) = h(g(y)) = h(b) = b.$$

З іншого боку $hg(y) = g(h(y)) = b$, тому $h(y) \in \{b\} \cup Y$. Отже, до централізатора $C(g)$ належать елементи

$$\left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = a, \quad h(b) = b, \\ h(X) \subseteq X \cup \{a\}, \quad h(Y) \subseteq Y \cup \{b\} \end{array} \right\}.$$

3) $h(a) = b, h(b) = a$. Повторюючи попередні міркування, отримаємо, що для довільного $x \in X$ маємо $h(x) \in \{b\} \cup Y$, для довільного $y \in Y$ маємо $h(y) \in \{a\} \cup X$. Отже, до централізатора $C(g)$ належать елементи

$$\left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = b, \quad h(b) = a, \\ h(X) \subseteq Y \cup \{b\}, \quad h(Y) \subseteq X \cup \{a\} \end{array} \right\}.$$

4) $h(a) = b, h(b) = b$. Будемо мати для довільних $x \in X, y \in Y$,

$$h(x) \in \{b\} \cup Y, h(y) \in \{b\} \cup Y.$$

Тому до централізатора $C(g)$ належать елементи вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} h: h(a) = b, \quad h(b) = b, \\ h(X) \subseteq Y \cup \{b\}, \quad h(Y) \subseteq Y \cup \{b\} \end{array} \right\}.$$

Таким чином, елемент централізатора $C(g)$ має вигляд: або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ a & a & a & X & a & X \end{pmatrix}, \quad (4)$$

або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ a & b & a & X & b & Y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ b & a & b & Y & a & X \end{pmatrix}, \quad (6)$$

або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ b & b & b & Y & b & Y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Безпосередньо перевіряється, що кожен з таких елементів справді належить централізатору $C(g)$. Це завершує доведення пункту 1 твердження 4. Легко бачити, що кількість елементів вигляду (4)–(7) дорівнює відповідно

$$\begin{aligned} & (k_1 + 1)^{n-2}, \\ & (k_1 + 1)^{k_1} \cdot (k_2 + 1)^{k_2}, \\ & (k_2 + 1)^{k_1} \cdot (k_1 + 1)^{k_2}, \\ & (k_2 + 1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Тому

$$|C(g)| = (k_1 + 1)^{n-2} + (k_1 + 1)^{k_1} \cdot (k_2 + 1)^{k_2} + (k_2 + 1)^{k_2} \cdot (k_1 + 1)^{k_2} + (k_2 + 1)^{n-2},$$

що доводить пункт 2. Неважко переконатися, що g_a та g_b є правими нулями $C(g)$. Покажемо, що немає інших правих нулів. Припустимо, що q – правий нуль. Тоді для довільного $h \in C(g)$ маємо $hq = q$. Крім того, $gq = gq = q$. Тоді

$$gq(a) = q(g(a)) = q(a) \in \{a; b\},$$

$$gq(b) = q(g(b)) = q(b) \in \{a; b\}.$$

Для довільного $x \in X$ маємо

$$q(x) = q(g(x)) = q(a)$$

та для довільного $y \in Y$ маємо

$$q(y) = q(g(y)) = q(b).$$

Якщо $q(a) = q(b) = a$, то $q = g_a$.

Якщо $q(a) = q(b) = b$, то $q = g_b$.

Якщо $q(a) = a$, $q(b) = b$, то

$$q = g = \begin{pmatrix} a & b & X & Y \\ a & b & a & b \end{pmatrix}.$$

Розглянемо елемент $h \in C(g)$ вигляду (6). Тоді

$$hq(a) = q(h(a)) = q(b) = b \neq a = q(a).$$

Отже, $hq \neq q$ і в цьому випадку q не є правим нулем.

Нехай нарешті, $q(a) = b$, $q(b) = a$. Тоді

$$q = \begin{pmatrix} a & b & X & Y \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

Розглянемо елемент $h \in C(g)$ вигляду (7). Тоді

$$hq(a) = q(h(a)) = q(b) = a \neq b = q(a).$$

Отже, $hq \neq q$ і в цьому випадку q також не є правим нулем. Це завершує доведення пункту 3.

Елемент h вигляду (4) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли на множині $X' \subseteq X$ він діє тотожно і $h(X \cup Y) \subseteq X' \cup \{a\}$. Позначимо $Z = \{z \in X \cup Y : h(z) = z\}$. Елемент h вигляду (5) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $e(X) \subseteq (Z \cap X) \cup \{a\}$, $e(Y) \subseteq (Z \cap Y) \cup \{b\}$. Елемент h вигляду (7) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли на множині $Y' \subseteq Y$ елемент h діє тотожно і $h(X \cup Y) \subseteq Y' \cup \{b\}$. Це доводить справедливості пункту 4.

Розбиваючи ідемпотенти вигляду (4) на класи в залежності від потужності множини X' , одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i}$$

(кожен елемент із $(X \cup Y) \setminus X'$ може переходити в довільний елемент з $X' \cup \{a\}$). Розбиваючи ідемпотенти вигляду (5) на класи в залежності від потужностей множин $Z \cap X$ та $Z \cap Y$ (ці множини можна вибирати незалежно), одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_2-j}$$

(кожен елемент із $X \setminus Z$ може переходити в довільний елемент з $(Z \cap Y) \cup \{a\}$, а кожен елемент із $Y \setminus Z$ може переходити в довільний елемент із $(Z \cap X) \cup \{b\}$). Розбиваючи ідемпотенти вигляду (7) на класи в залежності від потужності множини Y' , одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_1+k_2-i}$$

(кожен елемент із $(X \cup Y) \setminus Y'$ може переходити в довільний елемент з $Y' \cup \{b\}$). Остаточно маємо:

$$|E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i} + \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_2-j} + \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_1+k_2-j}.$$

Для доведення останнього пункту, зауважимо, що підстановкою може бути елемент вигляду (5) при умові $X_1 = Y_1 = \emptyset$, тобто $X_2 = X$, $Y_2 = Y$ і кожне з обмежень h на X та на Y повинні бути підстановкою. Кількість таких підстановок в централізативі $C(g)$ дорівнює $k_1!k_2!$. У випадку $k_1 = k_2$ підстановкою також може бути елемент вигляду (6) за умови, що $X_2 = X$, $Y_2 = Y$ і кожне з обмежень h на ці множини є бієкцією між X та Y . Тому додатково з'являється ще $k_1!k_1!$ підстановок. $\square$

Твердження 5. Нехай елемент g є елементом типу (III), та $|X| = k_1$, $|Y| = k_2$, $0 \leq k_1 \leq n-2$. Тоді

$$1) C(g) = \left\{ \begin{array}{l} h : h(a) = a, \quad h(b) = b, \\ h(X) \subseteq X \cup \{b\}, \\ h(Y) \subseteq Y \cup \{a\} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} h : h(a) = b, \quad h(b) = a, \\ h(X) \subseteq Y \cup \{a\}, \quad h(Y) \subseteq X \cup \{b\} \end{array} \right\};$$

$$2) |C(g)| = (k_2 + 1)^{k_1} (k_1 + 1)^{k_2} + (k_1 + 1)^{k_1} (k_2 + 1)^{k_2};$$

3) централізатор $C(g)$ не містить нулів;

$$4) E(C(g)) = \left\{ \begin{array}{l} e : e(a) = a, \quad e(b) = b, \\ e(z) = z \\ \text{для всіх } z \in Z \subseteq X \cup Y, \\ e(X) \subseteq (X \cap Z) \cup \{b\}, \\ e(Y) \subseteq (Y \cap Z) \cup \{a\} \end{array} \right\};$$

$$5) |E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_2-j}$$

6) при $k_1 \neq k_2$ централізатор $C(g)$ містить $k_1!k_2!$ підстановок;
при $k_1 = k_2$ централізатор $C(g)$ містить $2(k_1!)^2$ підстановок.

Доведення. Зауважимо, що елемент g не має нерухомих точок. Нехай $h \in C(g)$. Тоді з рівності $gh = hg$ маємо:

$$hg(a) = g(h(a)) = g(c) \in \{a, b\}$$

та

$$gh(a) = h(g(a)) = h(b) \in \{a, b\}.$$

Нехай $h(b) = a$, тоді з

$$hg(b) = g(h(b)) = g(a) = b = h'(g(b)) = h(a)$$

отримаємо

$$h(a) = b.$$

Для довільного $x \in X$ з рівності

$$gh(x) = h(g(x)) = h(a) = b = g(h(x))$$

маємо $h(x) \in \{a, Y\}$. Для довільного $y \in Y$ з рівності

$$gh(y) = h(g(y)) = h(b) = a = g(h(y))$$

отримаємо $h(y) \in \{b, X\}$. Нехай тепер $h(b) = b$. Тоді з

$$hg(b) = g(h(b)) = g(b) = a = h(g(b)) = h(a)$$

отримаємо $h(a) = a$. Аналогічно попередньому доводиться, що для довільного $x \in X$ отримаємо

$$h(x) \in \{b, X\},$$

а для довільного $y \in Y$ відповідно $h(y) \in \{a, Y\}$. Нехай $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$. Тоді елемент h централізатора $C(g)$ має вигляд або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ b & a & a & Y & b & X \end{pmatrix}, \quad (8)$$

або

$$h \in \begin{pmatrix} a & b & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ a & b & b & X & a & Y \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де $X_1 \cup X_2 = X$, $Y_1 \cup Y_2 = Y$.

Безпосередньо перевіряється, що кожен з таких елементів справді належить централізатору $C(g)$. Це завершує доведення пункту 1. Легко бачити, що кількість елементів вигляду (8) дорівнює $(k_2 + 1)^{k_1} (k_1 + 1)^{k_2}$, а кількість елементів вигляду (9) дорівнює $(k_1 + 1)^{k_1} (k_2 + 1)^{k_2}$. Це доводить пункт 2. Припустимо, що h є правим

нулем $C(g)$. Тоді з рівності $gh = h$ маємо, що $gh(a) = h(a)$. Але

$$gh(a) = h(g(a)) = h(b) \neq h(a).$$

Таким чином, отримали суперечність. Аналогічно доводиться, що централізатор не має лівих нулів.

Позначимо $Z = \{z \in X \cup Y : h(z) = z\}$. Елемент h вигляду (9) буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли

$$e(X) \subseteq (Z \cap X) \cup \{b\}, \quad e(Y) \subseteq (Z \cap Y) \cup \{a\}.$$

Це доводить пункт 4. Розбиваючи ідемпотенти вигляду (9) на класи в залежності від потужностей множин $Z \cap X$ та $Z \cap Y$ (ці множини можна вибирати незалежно) одержуємо, що кількість таких ідемпотентів дорівнює

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j+1)^{k_2-j}$$

(кожен елемент із $X \setminus Z$ може переходити в довільний елемент з $(Z \setminus Y) \cup \{a\}$, а кожен елемент із $Y \setminus Z$ може переходити в довільний елемент із $(Z \cap Y) \cup \{b\}$). Отже,

$$|E(C(g))| = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+1)^{k_1+k_2-i} + \\ + \sum_{i=0}^{k_1} \binom{k_1}{i} (i+2)^{k_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} (j)^{k_2-j}.$$

Доведення останнього пункту дослівно повторює доведення аналогічного пункту з попереднього твердження. $\square$

Висновки

У роботі вивчена будова централізаторів елементів рангів 1 і 2 симетричної напівгрупи, наведені формули для обчислення порядків централізаторів та кількості елементів спеціального вигляду (ідемпотенти, підстановки, односторонні нулі) у централізаторах.

Список використаних джерел

1. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical finite transformation semigroups: an introduction. Algebras and applications, 9. Springer-Verlag, 2009.
2. Higgins, P.M. Techniques of semigroup theory. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.
3. Higgins, P.M. Digraphs and the semigroup of all functions on a finite set. Glasgow Math. J. 30 (1988), 41-57.
4. Лисковец В.А., Фейнберг В.З. О перестановочности отображений. Докл. Акад. наук БССР, 7 (1963), 366-369.
5. Лисковец В.А., Фейнберг В.З. О порядке централізатора отображения. Докл. Акад. наук БССР, 12 (1968), 596-598.
6. Konieczny, J., Lipscomb, S. Centralizers in the semigroup of partial transformations. Math.Japon 48 (1998), 367-376.
7. Konieczny, J. Semigroups of transformations commuting with idempotents. Algebra Colloquium 9:2 (2002), 121-134.
8. Konieczny, J. Regular, inverse and completely regular centralizers of permutations. Math.Bohemica 2 (2003), 179-186.
9. Weaver M.W. On the commutativity of a correspondence and a permutation. Pacific J. Math. 10 (1960), 705-711.

Надійшла до редколегії 23.01.2011

УДК 519.21

А.Р. Білицький

Операції над скінченими метричними просторами

У роботі вивчається можливість продовження метрик зі скінчених метричних просторів на їхні декартові добутки, а також питання стійкості цих продовжень відносно ізоморфізму.

Ключові слова: скінченний метричний простір, добуток метричних просторів, ізоморфізм.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В. В. Кириченко

Вступ

Скінченні метричні простори (скорочено смп) виникають у різних розділах дискретної математики: теорії кодування, теорії графів, теорії асоціативних схем, тощо. Вони вивчаються як разом із природно пов'язаними з ними іншими об'єктами (кодами, графами, скінченими топологіями і т.п.; див., наприклад, [3] або [2]), так і як самостійні комбінаторні об'єкти (див., наприклад, збірник робіт [5]).

Розглядаючи на класі всіх смп різні природні відношення еквівалентності, можна отримувати різні класифікації смп (див. [1]). Чи не найприроднішою з них є класифікація за точністю до ізоморфізму: два смп (X, ρ) і (Y, σ) називаються ізоморфними, якщо існує бієктивне відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, яке задовольняє такі дві умови:

- (i) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_3, x_4) \Rightarrow \tau(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \sigma(\varphi(x_3), \varphi(x_4))$,
- (ii) $\rho(x_1, x_2) > \rho(x_3, x_4) \Rightarrow \tau(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) > \sigma(\varphi(x_3), \varphi(x_4))$.

У даній роботі ми розглядаємо деякі способи визначення метрики на декартовому добутку $X \times Y$ смп, узгодженої з метриками на початкових просторах X та Y , а також стійкість цих конструкцій відносно ізоморфізму метричних просторів.

A.R. Belitsky

Operations over finite metric spaces

We consider the possibility of extensions of metrics from the initial spaces to the metric on their Cartesian product and the issue of their stability regarding isomorphism.

Key Words: finite metric space, product of metrics metrics spaces, isomorphism.

Метрики на декартових добутках скінчених метричних просторів.

Для метричного простору (X, ρ) через $\text{Sp} \rho$ позначимо множину значень метрики ρ .

Нехай тепер (X, ρ) і (Y, σ) — два смп. Будемо говорити, що метрика $\bar{\rho}$ на декартовому добутку $X \times Y$ узгоджена з метриками ρ і σ на множниках, якщо існує функція

$$f: \text{Sp} \rho \times \text{Sp} \sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

яка задовольняє такі дві умови узгодженості:

$$\bar{\rho}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = f(\rho(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2)) \quad (1)$$

$$f(\rho, 0) = a, \quad f(0, \sigma) = b. \quad (2)$$

Умова (2) означає, що точки з $X \times Y$ із фіксованою другою (відповідно першою) компонентою утворюють копію простору (X, ρ) (відповідно (Y, σ)).

Визначену рівністю (1) функцію $\bar{\rho}$ будемо позначати через $f(\rho, \sigma)$. Зрозуміло, що для кожної функції $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ функція $f(\rho, \sigma)$ буде симетричною функцією на декартовому добутку $X \times Y$ метричних просторів (X, ρ) і (Y, σ) . Однак метрикою на $X \times Y$ функція $f(\rho, \sigma)$ буде не завжди.

Означення 1. Функцію $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ назвемо допустимою, якщо вона задовольняє умову (2) і для довільних смп (X, ρ) і (Y, σ) функція $f(\rho, \sigma)$ є метрикою на $X \times Y$.

Необхідну умову того, що функція $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ є допустимою, дає

Твердження 1. Якщо дана функція $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ є допустимою, то для всіх $a, b \geq 0$ виконуються нерівності

$$a + b \geq f(a, b) \geq \max\{a, b\}. \quad (3)$$

Доведення. Розглянемо смп (X, ρ) і (Y, σ) , де $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $\rho(x_1, x_2) = a$, $\sigma(y_1, y_2) = b$. Якщо функція f узгоджена з метриками ρ і σ , то

$$\begin{aligned} \bar{\rho}((x_1, y_1), (x_2, y_1)) + \bar{\rho}((x_2, y_1), (x_2, y_2)) &\geq \\ &\geq \bar{\rho}((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

тобто $a + b \geq f(a, b)$.

Розглянемо тепер смп (X, ρ) і (Y, σ) , де $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_3) = a$, $\rho(x_1, x_3) = 2a$, $\sigma(y_1, y_2) = b$. Тоді нерівність трикутника для точок (x_1, y_1) , (x_2, y_2) і (x_3, y_1) дає $f(a, b) + f(a, b) \geq 2a$, звідки $f(a, b) \geq a$. Аналогічно доводиться нерівність $f(a, b) \geq b$. $\square$

Виконання умови (2) і нерівностей (3) недостатньо, щоб функція f була допустимою. Справді, функція

$$f(a, b) = \begin{cases} \max\{a, b\}, & \text{якщо } x, y \leq 1; \\ a + b, & \text{якщо } x > 1 \text{ або } y > 1, \end{cases}$$

ці умови задовольняє. Однак якщо взяти смп X де $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_3) = 1$, $\rho(x_1, x_3) = 2$, і $Y = X$, то функція f не буде узгодженою з метриками.

Твердження 2. Множина F допустимих функцій є опуклою (тобто для довільних допустимих функцій f_0 і f_1 та числа $\alpha \in [0, 1]$ функція $f = \alpha f_0 + (1 - \alpha)f_1$ також є допустимою).

Доведення. Очевидно, що коли кожна з функцій f_0 і f_1 задовольняє умову (2), то й функція f задовольняє цю умову. Тому щоб показати, що для довільних (X, ρ) і (Y, σ) функція $f(\rho, \sigma)$ є метрикою на $X \times Y$, досить перевірити виконання нерівності трикутника. Для спрощення записів введемо такі позначення (точки x_1, x_2, x_3 і, відповідно, y_1, y_2, y_3 , не обов'язково попарно різні):

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho(x_1, x_2), & a_2 &= \rho(x_2, x_3), & a_3 &= \rho(x_1, x_3), \\ b_1 &= \sigma(y_1, y_2), & b_2 &= \sigma(y_2, y_3), & b_3 &= \sigma(y_1, y_3). \end{aligned}$$

Зокрема, $a_1, a_2, a_3 \geq 0$, $a_1 + a_2 \geq a_3$, $b_1, b_2, b_3 \geq 0$, $b_1 + b_2 \geq b_3$, а нерівність трикутника для функції $\bar{\rho}$ набуває вигляду

$$f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \geq f(a_3, b_3). \quad (4)$$

Але з допустимості функцій f_0 і f_1 випливає виконання нерівностей

$$\begin{aligned} f_0(a_1, b_1) + f_0(a_2, b_2) &\geq f_0(a_3, b_3), \\ f_1(a_1, b_1) + f_1(a_2, b_2) &\geq f_1(a_3, b_3). \end{aligned}$$

Якщо тепер першу з цих нерівностей помножити на α , а другу — на $1 - \alpha$, і додати, то отримаємо (4). $\square$

З відомої нерівності Мінковського випливає, що для кожного $p \in (0, +\infty)$ функція $f_p(x, y) = \sqrt[p]{x^p + y^p}$ є допустимою. Сюди ж можна долучити і функцію $f_\infty(x, y) := \max\{x, y\}$. Множина цих функцій континуальна. Але в [1] показано, що для кожного натурального n існує лише скінченна кількість попарно неізоморфних смп потужності n . Отже, при фіксованих потужностях множників функції f_p дають лише скінченну кількість неізоморфних метрик $f_p(\rho, \sigma)$ на добутку просторів. Більше того, не кожну метрику на множині $X \times Y$ можна отримати таким чином.

Твердження 3. Якщо $|X| > 1$ і $|Y| > 1$, то на множині $X \times Y$ можна визначити таку метрику τ , що простір $(X \times Y, \tau)$ буде неізоморфний жодному простору $(X \times Y, f(\rho, \sigma))$ для довільних метрик ρ і σ та допустимої функції f .

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Тоді для довільних метрик ρ і σ та допустимої функції f

$$\begin{aligned} f(\rho, \sigma)((x_1, y_1), (x_2, y_1)) &= \\ &= f(\rho, \sigma)((x_1, y_2), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Але на кожній скінченній множині можна визначити метрику таким чином, щоб усі віддалі були попарно різними (див. [1]). $\square$

Нестійкість метрик $f(\rho, \sigma)$ відносно ізоморфізму.

Розглянемо смп (X, ρ) , де $X = \{a, b\}$, $\rho(a, b) = 1$, та (Y, σ) , де $Y = \{c, d\}$, $\sigma(c, d) = 2$. Очевидно, що ці простори ізоморфні.

Твердження 4. Для вказаних вище двоелементних слів (X, ρ) і (Y, σ) та довільних допустимих функцій f і g , не обов'язково різних, простори $(X \times X, f(\rho, \rho))$ і $(X \times Y, g(\rho, \sigma))$ не ізоморфні.

Доведення. Із умови (2) випливає, що в просторі $(X \times X, f(\rho, \rho))$

$$f(\rho, \rho)((a, a), (a, b)) = f(\rho, \rho)((a, b), (b, b)) = \\ = f(\rho, \rho)((b, b), (b, a)) = f(\rho, \rho)((b, a), (a, a)) = 1,$$

а з нерівності (3) — що

$$f(\rho, \rho)((a, a), (b, b)) = f(\rho, \rho)((a, b), (b, a)) = \\ = f(1, 1) \geq \max(1, 1) = 1.$$

Аналогічно в просторі $(X \times Y, g(\rho, \sigma))$ маємо:

$$g(\rho, \sigma)((a, c), (b, c)) = g(\rho, \sigma)((a, d), (b, d)) = 1, \\ g(\rho, \sigma)((a, c), (a, d)) = g(\rho, \sigma)((b, c), (b, d)) = 2, \\ g(\rho, \sigma)((a, c), (b, d)) = g(\rho, \sigma)((a, d), (b, c)) = \\ = g(1, 2) \geq \max(1, 2) = 2,$$

Оскільки при ізоморфізмі менша віддаль має переходити в меншу, а однакові віддалі — в однакові, то простори $(X \times X, f(\rho, \rho))$ і $(X \times Y, g(\rho, \sigma))$ не ізоморфні. $\square$

Наслідок 1. Жодна допустима функція не є стійкою відносно ізоморфізму.

Розглянемо знову функції $f_p(x, y)$, де $p \in (0, +\infty)$. Хоча, як уже зазначалося в попередньому розділі, для фіксованих порядків множників X і Y маємо лише скінченну кількість попарно неізоморфних просторів $X \times Y$, наступний факт показує, що кожна з функцій $f_p(x, y)$ "реагує" на відношення ізоморфізму повсюду.

Твердження 5. Для довільних $p, q \in (0, +\infty]$, $p \neq q$, існують такі метричні простори (X, ρ) , та (Y, σ) , що

$$(X \times X, f_p(\rho, \rho)) \simeq (X \times X, f_q(\rho, \rho)), \\ (Y \times Y, f_p(\sigma, \sigma)) \not\simeq (Y \times Y, f_q(\sigma, \sigma)).$$

Доведення. Перша частина твердження очевидна: якщо (X, ρ) — рівносторонній трикутник зі стороною a , то метрика $f_p(\rho, \rho)$ набуває всього двох ненульових значень a і $a\sqrt{2}$. Тому легко перевіряється, що для довільних p і q простори

$(X \times X, f_p(\rho, \rho))$ і $(X \times X, f_q(\rho, \rho))$ будуть ізоморфні, причому ізоморфізмом буде тотожне відображення $\text{id} : X \times X \rightarrow X \times X$.

Для доведення другої частини розглянемо рівносторонній трикутник (Y, σ) із сторонами $1, 1+x, 1+y$, де $0 < x < y$. Далі без обмеження загальності можна вважати, що $p < q$. Виберемо у так, щоб виконувалася нерівність $(1+y)^q < 2$. При цих припущеннях ненульовими значеннями метрики $f_p(\sigma, \sigma)$ можуть бути лише числа

$$1, \quad 1+x, \quad 1+y, \quad \sqrt[2]{2}, \quad \sqrt[2]{1+(1+x)^p}, \\ \sqrt[2]{1+(1+y)^p}, \quad \sqrt[2]{(1+x)^p+(1+y)^p}, \\ \sqrt[2]{(1+x)^p+(1+y)^p}, \quad \sqrt[2]{(1+y)^p+(1+y)^p},$$

причому для них виконуються нерівності

$$1 < 1+x < 1+y < \sqrt[2]{2} < \sqrt[2]{1+(1+x)^p} < A < \\ < \sqrt[2]{(1+x)^p+(1+y)^p} < \sqrt[2]{(1+y)^p+(1+y)^p},$$

де A — будь-яке з чисел $\sqrt[2]{1+(1+y)^p}$ або $\sqrt[2]{(1+x)^p+(1+y)^p}$.

Аналогічні співвідношення виконуються для метрики $f_q(\sigma, \sigma)$ (з природною заміною p на q).

Покажемо тепер, що можна так вибрати $0 < x < y$, щоб пара (x, y) задовольняла систему

$$\sqrt[2]{1+(1+y)^p} = \sqrt[2]{(1+x)^p+(1+x)^p}, \\ \sqrt[2]{1+(1+y)^q} \neq \sqrt[2]{(1+x)^q+(1+x)^q}.$$

Для цього досить показати, що існує пара (x, y) , яка задовольняє тільки перше з рівнянь системи

$$1+(1+y)^p = (1+x)^p + (1+x)^p, \quad (5)$$

$$1+(1+y)^q \neq (1+x)^q + (1+x)^q. \quad (6)$$

Справді, пара (x, y) задовольняє рівняння (5), якщо

$$y = \sqrt[2]{2(1+x)^p - 1} - 1.$$

Якщо тепер ця пара задовольняє і рівняння (6), то

$$\sqrt[2]{2(1+x)^p - 1} - 1 = \sqrt[2]{2(1+x)^q - 1} - 1,$$

звідки

$$(2(1+x)^p - 1)^q - (2(1+x)^q - 1)^p = 0.$$

Однак розклад лівої частини в ряд за степенями x має вигляд

$$(2(1+x)^p - 1)^q - (2(1+x)^q - 1)^p = \\ = pq(q-p)x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Позаяк $pq(q-p) \neq 0$, то при достатньо малих x цей ряд не дорівнює 0. Отже, при достатньо малих x пара $(\sqrt[2]{2(1+x)^p - 1}, x)$ задовольнятиме лише перше з рівнянь (5) і (6). Але це означає, що при такому виборі чисел x і y метрика $f_p(\sigma, \sigma)$ набуває 8 ненульових значень, а метрика $f_q(\sigma, \sigma) = 9$. Тому простори $(Y \times Y, f_p(\sigma, \sigma))$ і $(Y \times Y, f_q(\sigma, \sigma))$ не ізоморфні. $\square$

Твердження 6. Існують такі допустимі функції f і смп (X_1, ρ_1) , (X_2, ρ_2) , (Y_1, σ_1) , (Y_2, σ_2) , що

$$(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2) \text{ і } (Y_1, \sigma_1) \simeq (Y_2, \sigma_2),$$

але для довільних $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$ виконується умова

$$(X_1 \times Y_1, f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2)) \neq \\ \neq (X_2 \times Y_2, f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4)).$$

Доведення. Легко перевіряється, що функція $f(x, y) = x + y \in$ допустимою. Покладемо

$$|X_1| = |X_2| = |Y_1| = |Y_2| = 3,$$

$$\text{Sp } \rho_1 = \text{Sp } \rho_2 = \text{Sp } \sigma_1 = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\text{Sp } \sigma_2 = \{0, 4, 8, 12\}.$$

Очевидно, що

$$(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2) \simeq (Y_1, \sigma_1) \simeq (Y_2, \sigma_2).$$

Покажемо, що для таких просторів не існує таких чисел $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$, що

$$(X_1 \times Y_1, f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2)) \simeq \\ \simeq (X_2 \times Y_2, f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4)).$$

Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай такі $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$ існують. Множина ненульових значень метрики $f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2)$ збігається з множиною (можливо, із повтореннями):

$$\{1+c_1, 1+c_2, 2+c_1, 2+c_2, 2+c_1+c_2, 3+c_1, 3+c_2, \\ 3+c_1+c_2, 4+c_1+c_2, 5+c_1+c_2, 6+c_1+c_2\}.$$

Аналогічно множина ненульових значень метрики $f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4)$ збігається з множиною

$$\{1+c_3, 2+c_3, 3+c_3, 4+c_4, 5+c_3+c_4,$$

$$6+c_3+c_4, 7+c_3+c_4, 8+c_4,$$

$$9+c_3+c_4, 10+c_3+c_4, 11+c_3+c_4, 12+c_4,$$

$$13+c_3+c_4, 14+c_3+c_4, 15+c_3+c_4\}.$$

Для $a > 0$ введемо позначення

$$\#_{(X,\rho)}(a) := \frac{|(x,y) \in X^2 | \rho(x,y) = a|}{2}.$$

Величину $\#_{(X,\rho)}(a)$ будемо називати кратністю значення a метрики ρ на X . Найбільшими значеннями метрик $f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2)$ і $f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4)$ є відповідно $6 + c_1 + c_2$ і $15 + c_3 + c_4$. Наступними за величиною значеннями цих метрик будуть відповідно $5 + c_1 + c_2$ і $14 + c_3 + c_4$. Кратності цих значень відповідно дорівнюють

$$\#_{((X_1 \times Y_1), f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2))}(5 + c_1 + c_2) = 2$$

$$\#_{((X_2 \times Y_2), f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4))}(14 + c_3 + c_4) = 1.$$

Але для ізоморфних просторів кратності відповідних значень метрики мають бути однакові. Отримана суперечність доводить, що

$$(X_1 \times Y_1, f(\rho_1 + c_1, \sigma_1 + c_2)) \neq \\ \neq (X_2 \times Y_2, f(\rho_2 + c_3, \sigma_2 + c_4)). \quad \square$$

Література

1. Ганюшкин А.Г., Цвикурнов В.В. О классификации конечных метрических пространств // Мат. заметки. Т. 56 (1994), вып. 4., С. 48-58.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.
3. Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А. Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
4. Milman V.D., Wolfson H. / (eds) Topics in finite metric spaces // Israel seminar on geometrical aspects of functional analysis 71, Tel Aviv, 1983-1984.
5. Dere M.-M., Frankl P., Rosenberg J.G. / (eds) Algebraic, extremal and metric combinatorics // London Math. Soc., Lecture Notes Series, V. 131, London, 1987.

Надійшла до редакції 23.02.2011

УДК 519.2

Б.В. Довгай, к.ф.-м.н.

Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння

Робота присвячена побудові моделі розв'язку гіперболічного рівняння з випадковою строго φ -субгауссовою правою частиною та нульовими початковими і крайовими умовами, яка наближає цей розв'язок із заданою точністю та надійністю в рівномірній нормі.

Ключові слова: строго φ -субгауссові випадкові процеси, гіперболічне рівняння математичної фізики, моделювання.

E-mail: bogdov@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботах [1],[2] отримані достатні умови існування розв'язку гіперболічного рівняння з однорідними початковими та граничними умовами та φ -субгауссовою правою частиною у вигляді збіжного за ймовірністю в рівномірній нормі ряду та знайдені оцінки розподілу супремуму розв'язку. В даній роботі ці результати використовуються для моделювання цього розв'язку.

Робота складається з трьох розділів. Другий розділ викладає без доведення результати, отримані в роботі [1]. Побудовано модель розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами та φ -субгауссовою правою частиною. Ця модель наближає розв'язок із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

2 Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u - p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ = -p(x)\xi(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

B.V.Dovgay, Ph.D.

Simulation of solution of hyperbolic equation

The paper is devoted to construction of model of hyperbolic equation solution with strictly φ -sub-Gaussian random right-hand side and zero initial and boundary conditions which approximate this solution with given reliability and accuracy in uniform norm.

Key Words: strictly φ -sub-Gaussian random process, hyperbolic equations of mathematical physics, simulation.

$$x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T],$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad (3)$$

де $T > 0$ — деяка стала, функція $p(x)$, $x \in [0, \pi]$ — тричі неперервно диференційовна, $p(x) > 0$; $q(x)$, $x \in [0, \pi]$ — неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geq 0$; $\xi(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ — вибірково неперервне з ймовірністю 1 строго φ -субгауссове випадкове поле, $\varphi(x) = c|x|^p$ при $x > 1$, $p > 1$, $c > 0$.

Позначимо $B(x, y, t, s) = E\xi(x, t)\xi(y, s)$, $(x, y, t, s) \in [0, \pi]^2 \times [0, T]^2$.

Припустимо, що $B(0, y, t, s) = B(\pi, y, t, s) = 0$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$;

$B(x, 0, t, s) = B(x, \pi, t, s) = 0$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t, s) \in [0, T]^2$ продовжимо функцію $B(x, y, t, s)$ як функцію від x, y на всю площину $\mathbb{R}^2$ так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності

$$B(-x, y, t, s) = -B(x, y, t, s) = B(x, -y, t, s).$$

Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Продовжимо функції $p(x)$ та $q(x)$ на всю пряму так, щоб вони були періодичними функціями з періодом 2π та щоб виконувались умови

$$p(x)=p(-x), \quad q(x)=q(-x).$$

Припустимо також, що продовжені на всю пряму функції $p(x)$ — двічі неперервно диференційовна, $q(x)$ — неперервно диференційовна.

Розв'язок задачі (1)–(3) записується у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)du, \tag{4}$$

де

$$\zeta_n(t)=\int_0^\pi\xi(x,t)X_n(x)p(x)dx,$$

$\mu_n>0$; $\lambda_n=\mu_n^2$, $X_n(x)$ — власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right)-qX+\lambda pX=0, \tag{5}$$

$$X(0)=X(\pi)=0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Якщо $\xi(x,t)$ — строго φ -субгауссове випадкове поле, $\varphi(x)=c|x|^p$ при $x>1$, $p>1$, $c>0$.*

Для того, щоб з ймовірністю 1 існував двічі неперервно диференційований розв'язок задачі (1)–(3) в області $0\leq x\leq\pi$, $0\leq t\leq T$, який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю в нормі $C([0,\pi]\times[0,T])$ ряду (4), достатньо, щоб виконувались умови:

1) у продовженій на всю площину по x , у функції $B(x,y,t,s)$ існують неперервні похідні

$$\frac{\partial^{i+j}B(x,y,t,s)}{\partial x^i\partial y^j}, \quad 0\leq i+j\leq 4, \quad i\leq 3, \quad j\leq 3;$$

2) для функції $B^*(x,y,t,s)$ $=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(p(x)p(y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B(x,y,t,s)\right)$ та довільного $\beta\in[0,\pi]\setminus\{1\}$ виконується умова:

$$\sup_{\substack{x\in[0,\pi] \\ t\in[0,T] \\ s\in[0,T]}}\int_{-\pi}^\pi\left|\Delta_\beta\left(B^*(x,y,t,s)\cdot\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|dx\leq\frac{C}{|\ln\beta|^{2\gamma}}$$

для деяких $C>0$, $\gamma>2-\frac{1}{p}$, де $\Delta_\beta f(x,y,t,s)=f(x+\beta,y,t,s)-f(x,y,t,s)$.

3) існують такі $C'>0$, $\delta>1-\frac{1}{p}$ та $\beta>0$, що для довільних $t,s\in[0,T]$ таких, що $|t-s|<\beta$ мають місце нерівності

$$\sup_{\substack{x\in[-\pi,\pi] \\ y\in[-\pi,\pi]}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}\bar{B}(x,y,t,s)\right|\leq C'\ln|t-s|^{-2\delta},$$

$$0\leq i\leq 2, \quad 0\leq j\leq 2,$$

$$\partial_\varepsilon\bar{B}(x,y,t,s)=B(x,y,t,t)-B(x,y,t,s)-B(x,y,s,t)+B(x,y,s,s).$$

За умов теореми 1 побудуємо модель розв'язку задачі (1)–(3), що наближає його із заданою надійністю та точністю в нормі $C([0,\pi]\times[0,T])$.

Нехай $\xi(x,t)$ — модель випадкового поля $\xi(x,t)$. Позначимо

$$\hat{\zeta}_n(t)=\int_0^\pi\xi(x,t)X_n(x)p(x)dx.$$

Моделлю процесу $u(x,t)$ називатимемо суму

$$\hat{u}^N(x,t)=\sum_{n=1}^NX_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-u)\hat{\zeta}_n(u)du. \tag{7}$$

Означення 2.1. Модель $\hat{u}^N(x,t)$ наближає розв'язок задачі (1)–(3) $u(x,t)$, що зображений у вигляді ряду (4) із заданою надійністю $1-\omega$ ($\omega\in[0,1]$) та точністю s в нормі $C([0,\pi]\times[0,T])$, якщо

$$P\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi] \\ t\in[0,T]}}|\hat{u}^N(x,t)-u(x,t)|>s\right\}\leq\omega.$$

Зробимо позначення

$$\Delta_N(x,t,N)=u(x,t)-\hat{u}^N(x,t)=u_N(x,t)+V_N(x,t),$$

де

$$u_N(x,t)=\sum_{n=N+1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)du,$$

$$V_N(x,t)=\sum_{n=1}^NX_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-u)\left(\zeta_n(u)-\hat{\zeta}_n(u)\right)du.$$

Теорема 2. Нехай $\xi(x, t)$ — строго φ -субгауссове випадкове поле, $\varphi(x) = c|x|^p$ при $x > 1$, $p > 1$, $c > 0$, та для задачі (1)–(3) виконуються умови теореми 1. Нехай модель $\xi(x, t)$ така, що

$$\int_0^x \int_0^T \sqrt{E(\xi(x, u) - \xi(x, u))^2} du dx < \chi.$$

Тоді випадкове поле $\hat{u}^N(x, t)$, визначене у (7), є моделлю, що наближає випадкове поле $u(x, t)$ з надійністю $1 - \omega$ та точністю s в нормі $C([0, \pi] \times [0, T])$, якщо ω , s та N такі, що для деяких $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, $\beta \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, 1]$, $\theta \in (0, 1)$ виконується умова

$$2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{s(1-\theta)}{\varepsilon_0(N)} \right) \right\} \left(\frac{(\pi T)^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma, \beta})^{2\alpha}}{4^\alpha (1-4\alpha)} \right. \\ \times \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{4\alpha}} + \frac{(\pi^\alpha + T^\alpha) (C_\Delta^2 A_N^{\gamma, \beta})^\alpha}{2^\alpha (1-2\alpha)} \\ \left. \times \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{2\alpha}} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \omega,$$

де

$$A_N^{\gamma, \beta} = \left((\tilde{D}_N^\beta)^{1/2} + \left(2\chi^2 C_p^2 C_X^4 \sum_{n,k=1}^N [\mu_k^2 C_1 + 2C_X \mu_k]^\gamma [\mu_n^2 C_1 + 2C_X \mu_n]^{1-\gamma} \right)^{1/2} \right)^2, \\ \varepsilon_0(N) = C_\Delta \left(C_X T \left(\sum_{n,k=N+1}^\infty \frac{\tilde{C}_{n,k}}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2} + \chi C_X^2 C_p \left(\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2} \right).$$

C_Δ , $\tilde{D}_N^\beta$ визначено в роботі [1], $\lambda_k = \mu_k^2$, $X_k(x)$ — власні значення та власні функції задачі Штурма-Лувілла (5)–(6),

$$C_X = \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ k \geq 1}} |X_k(x)|, \quad C_p = \max_{x \in [0, \pi]} |p(x)|.$$

Доведення. Оскільки $\Delta_N(x, t, N)$ — строго φ -субгауссове випадкове поле, то для будь-якого $0 < \theta < 1$ для всіх $s > 0$, $\alpha > 0$ таких, що

$$\int_0^{\varepsilon_0} \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)} \left(\frac{t}{C_\Delta} \right)} + 1 \right)^\alpha$$

$$\times \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)} \left(\frac{t}{C_\Delta} \right)} + 1 \right)^\alpha dt < \infty,$$

можна записати

$$P \left\{ \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} |\Delta_N(x, t, N)| > s \right\} \leq 2A_\alpha(s, \theta), \quad (8)$$

де

$$A_\alpha(s, \theta) = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{s(1-\theta)}{\varepsilon_0} \right) \right\} \left(\frac{I_\alpha(\theta \varepsilon_0)}{\theta \varepsilon_0} \right)^{1/\alpha}, \quad (9)$$

ε_0 — будь-яке число таке, що

$$\varepsilon_0 \geq C_\Delta \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|\Delta_N(x, t, N)|^2)^{1/2}.$$

$$I_\alpha(\theta \varepsilon_0) = \int_0^{\theta \varepsilon_0} \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)} \left(\frac{t}{C_\Delta} \right)} + 1 \right)^\alpha \\ \times \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)} \left(\frac{t}{C_\Delta} \right)} + 1 \right)^\alpha dt \quad (10)$$

де $\sigma(h)$ — така невід'ємна монотонно зростаюча функція, що $\sigma(0) = 0$,

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|\Delta_N(x, t, N) - \Delta_N(y, s, N)|^2)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

Легко бачити, що

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|\Delta_N(x, t, N) - \Delta_N(y, s, N)|^2)^{1/2} = \sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|u_N(x, t) + V_N(x, t) - u_N(y, s) - V_N(y, s)|^2)^{1/2} \\ \leq \sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|u_N(x, t) - u_N(y, s)|^2)^{1/2} + \sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2)^{1/2}. \quad (11)$$

$$\sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|\Delta_N(x, t, N)|^2)^{1/2}$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|u_N(x, t)|^2)^{1/2} \\ + \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|V_N(x, t)|^2)^{1/2}. \quad (12)$$

За відповідними твердженнями з [1]

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|u_N(x, t) - u_N(y, s)|^2)^{1/2} \leq (\bar{D}_N^\beta h)^{1/2}, \\ \forall h \geq 0 \quad \forall \beta \in [0, 1].$$

Позначимо

$$Q_{n,k}(t, s) = \int_0^t \int_0^s \sin \mu_n(t-u) \sin \mu_k(s-v) \\ \times E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v)) dv du.$$

Тоді $\forall \gamma \in [0, 1]$

$$E|V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2 = E \left| \sum_{n=1}^N X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \right. \\ \times \int_0^t \sin \mu_n(t-u) (\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u)) du \\ \left. - \sum_{n=1}^N X_n(y) \frac{1}{\mu_n} \int_0^s \sin \mu_n(s-u) (\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u)) du \right|^2 \\ = \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} (X_n(x) X_k(x) Q_{n,k}(t, t) \\ - X_n(x) X_k(y) Q_{n,k}(t, s) \\ - X_n(y) X_k(x) Q_{n,k}(s, t) + X_n(y) X_k(y) Q_{n,k}(s, s)) \\ \leq \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} [|X_n(x)| (|X_k(x) - X_k(y)| |Q_{n,k}(t, t)| \\ + |Q_{n,k}(t, t) - Q_{n,k}(t, s)| |X_k(y)|) \\ + |X_n(y)| (|X_k(y) - X_k(x)| |Q_{n,k}(s, s)| \\ + |Q_{n,k}(s, s) - Q_{n,k}(s, t)| |X_k(x)|)]^2 \\ \times [|X_k(x)| (|X_n(x) - X_n(y)| |Q_{n,k}(t, t)| \\ + |Q_{n,k}(t, t) - Q_{n,k}(s, t)| |X_n(y)|) \\ + |X_k(y)| (|X_n(y) - X_n(x)| |Q_{n,k}(s, s)| \\ + |Q_{n,k}(s, s) - Q_{n,k}(t, s)| |X_n(x)|)]^{1-\gamma}.$$

Далі для всіх $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$, $n = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, N}$

$$|Q_{n,k}(t, t)| \\ \leq \int_0^T \int_0^T |E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v))| du dv$$

$$\leq \int_0^T (E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))^2)^{1/2} du \\ \times \int_0^T (E(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v))^2)^{1/2} dv.$$

Тоді

$$E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))^2 \\ = E \left(\int_0^s X_n(x) p(x) (\xi(x, u) - \dot{\xi}(x, u)) dx \right)^2 \\ = \int_0^s \int_0^s X_n(x) X_n(y) p(x) p(y) \\ \times E(\xi(x, u) - \dot{\xi}(x, u))(\xi(y, u) - \dot{\xi}(y, u)) dx dy \\ \leq C_X^2 C_p^2 \int_0^s \int_0^s E(|\xi(x, u) - \dot{\xi}(x, u)| \\ \times |\xi(y, u) - \dot{\xi}(y, u)|) dx dy \\ \leq C_X^2 C_p^2 \left(\int_0^s (E(\xi(x, u) - \dot{\xi}(x, u))^2)^{1/2} dx \right)^2,$$

де $C_p = \max_{x \in [0, \pi]} |p(x)| > 0$.
Маємо

$$|Q_{n,k}(t, t)| \\ \leq \left(C_X C_p \int_0^s \int_0^T \sqrt{E(\xi(x, u) - \dot{\xi}(x, u))^2} du dx \right)^2 \\ \leq \chi^2 C_X^2 C_p^2.$$

Нехай для визначеності $s < t$. Тоді

$$|Q_{n,k}(t, t) - Q_{n,k}(t, s)| \\ = \left| \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \left[\int_0^t \sin \mu_k(t-v) E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v)) dv - \int_0^s \sin \mu_k(s-v) \right. \right. \\ \left. \times E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v)) dv \right] du \right| \\ \leq \int_0^t \left| \int_0^t (\sin \mu_k(t-v) - \sin \mu_k(s-v)) E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v)) dv + \int_s^t \sin \mu_k(s-v) \right. \\ \left. \times E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v)) dv \right| du \\ \leq 2 \left| \sin \frac{\mu_k}{2}(t-s) \right| \int_0^T \int_0^T |E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u)) \\ \times (\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v))| du dv + \int_0^T \int_s^t \mu_k |s-v| \\ \times |E(\zeta_n(u) - \dot{\zeta}_n(u))(\zeta_k(v) - \dot{\zeta}_k(v))| dv du \\ \leq 2 \mu_k |t-s| \chi^2 C_X^2 C_p^2.$$

Зрозуміло, що ця нерівність має місце і при $t < s$, де $\sigma(h) = (A_N^{\gamma, \beta} h)^{1/2}$, $\forall \gamma \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |Q_{n,k}(t, t) - Q_{n,k}(s, t)| &= |Q_{k,n}(t, t) - Q_{k,n}(t, s)| \\ &\leq 2\mu_n |t - s| \chi^2 C_X^2 C_p^2 \\ |X_n(x) - X_n(y)| &\leq \mu_n^2 |x - y| C_1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\max_{s \in [0, \pi]} (v'(s))^2 \int_0^s p(s) u^2(s) ds \right. \\ &\quad + \max_{s \in [0, \pi]} (u'(s))^2 \int_0^s p(s) v^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^s p(s) \left(\max_{z \in [0, \pi]} |u'(z)| |v(s)| \right. \\ &\quad \left. \left. + \max_{z \in [0, \pi]} |v'(z)| |u(s)| \right)^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ця константа, визначена в [1].

$$|X_n(x)| \leq C_X, \quad x \in [0, \pi], \quad n \geq 1.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &E|V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2 \\ &\leq \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} [C_X (\mu_k^2 C_1 |x - y| \chi^2 C_X^2 C_p^2 \\ &\quad + 2C_X^3 \mu_k |t - s| \chi^2 C_p^2) + C_x (\mu_k^2 C_1 |x - y| \\ &\quad \times \chi^2 C_X^2 C_p^2 + 2C_X^3 \mu_n |t - s| \chi^2 C_p^2)]^\gamma \\ &\times [C_X (\mu_n^2 C_1 |x - y| \chi^2 C_X^2 C_p^2 + 2C_X^3 \mu_n |t - s| \chi^2 C_p^2) \\ &\quad + C_x (\mu_n^2 C_1 |x - y| \chi^2 C_X^2 C_p^2 \\ &\quad + 2C_X^3 \mu_n |t - s| \chi^2 C_p^2)]^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n,k=1}^N \frac{2}{\mu_n \mu_k} h \chi^2 C_p^2 C_X^3 [\mu_k^2 C_1 + 2C_X \mu_k]^\gamma [\mu_n^2 C_1 \right. \\ &\quad \left. + 2C_X \mu_n]^{1-\gamma} \right)^{1/2} = h^{1/2} \chi \left(2C_p^2 C_X^3 \sum_{n,k=1}^N [\mu_k^2 C_1 \right. \\ &\quad \left. + 2C_X \mu_k]^\gamma [\mu_n^2 C_1 + 2C_X \mu_n]^{1-\gamma} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тепер маємо, що

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|\Delta_N(x, t, N) - \Delta_N(y, s, N)|^2)^{1/2} \leq \sigma(h),$$

$$\begin{aligned} A_N^{\gamma, \beta} &= \left((\tilde{D}_N^{\beta})^{1/2} + \left(2\chi^2 C_p^2 C_X^3 \sum_{n,k=1}^N [\mu_k^2 C_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2C_X \mu_k]^\gamma [\mu_n^2 C_1 + 2C_X \mu_n]^{1-\gamma} \right)^{1/2} \right)^2. \end{aligned}$$

З доведення відповідної теореми з [1] випливає, що

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|u_N(x, t)|^2)^{1/2} \\ &\leq C_X T \left(\sum_{n,k=N+1}^{\infty} \frac{\tilde{C}_{n,k}}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned} E|V_N(x, t)|^2 &= E \left| \sum_{n=1}^N X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \right. \\ &\quad \times (\zeta_n(u) - \tilde{\zeta}_n(u)) du \Big|^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N X_n(x) X_k(x) \\ &\quad \times \frac{1}{\mu_n \mu_k} \int_0^t \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \sin \mu_k(t-v) \\ &\quad \times E(\zeta_n(u) - \tilde{\zeta}_n(u)) (\zeta_k(v) - \tilde{\zeta}_k(v)) du dv \\ &\leq C_X^2 \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \int_0^T \int_0^T |E(\zeta_n(u) - \tilde{\zeta}_n(u)) (\zeta_k(v) \\ &\quad - \tilde{\zeta}_k(v))| du dv \leq \chi^2 C_X^4 C_p^2 \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|V_N(x, t)|^2)^{1/2} \\ &\leq \chi C_X^2 C_p \left(\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Нарешті,

$$\sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|\Delta_N(x, t, N)|^2)^{1/2}$$

$$\leq C_X T \left(\sum_{n,k=N+1}^{\infty} \frac{\tilde{C}_{n,k}}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2} + \chi C_X^2 C_P \left(\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2}$$

□

Покладемо

$$\varepsilon_0(N) = C_\Delta \left(C_X T \left(\sum_{n,k=N+1}^{\infty} \frac{\tilde{C}_{n,k}}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2} + \chi C_X^2 C_P \left(\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{\mu_n \mu_k} \right)^{1/2} \right)$$

Підставивши знайдені значення $\sigma(h)$ та ε_0 у рівність (2), отримаємо ($z = \theta \varepsilon_0(N)$)

$$\begin{aligned} I_\alpha(z) &= \int_0^z \left(\frac{\pi C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta}}{2\varepsilon^2} + 1 \right)^\alpha \left(\frac{T C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta}}{2\varepsilon^2} + 1 \right)^\alpha d\varepsilon \\ &\leq \int_0^z \left(\frac{\pi^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha \varepsilon^{2\alpha}} + 1 \right) \\ &\quad \times \left(\frac{T^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha \varepsilon^{2\alpha}} + 1 \right) d\varepsilon \\ &= \frac{(\pi T)^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^{2\alpha}}{4^\alpha (1-4\alpha)} z^{1-4\alpha} \\ &\quad + \frac{(\pi^\alpha + T^\alpha) (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha (1-2\alpha)} z^{1-2\alpha} + z \end{aligned}$$

при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Тоді (9) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_\alpha(s, \theta) &= \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{s(1-\theta)}{\varepsilon_0(N)} \right) \right\} \\ &\times \left(\frac{1}{\theta \varepsilon_0(N)} \left(\frac{(\pi T)^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^{2\alpha}}{4^\alpha (1-4\alpha)} (\theta \varepsilon_0(N))^{1-4\alpha} \right. \right. \\ &\quad + \frac{(\pi^\alpha + T^\alpha) (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha (1-2\alpha)} (\theta \varepsilon_0(N))^{1-2\alpha} \\ &\quad \left. \left. + \theta \varepsilon_0(N) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{s(1-\theta)}{\varepsilon_0(N)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left(\frac{(\pi T)^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^{2\alpha}}{4^\alpha (1-4\alpha)} \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{4\alpha}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi^\alpha + T^\alpha) (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha (1-2\alpha)} \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{2\alpha}} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \frac{1}{4}$, $\gamma \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$.

Отже, щоб при точності s отримати модель розв'язку, яка має надійність $1 - \omega$, потрібно, щоб для деяких $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, $\beta \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, 1]$, $\theta \in (0, 1)$ виконувалась умова

$$\begin{aligned} &2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{s(1-\theta)}{\varepsilon_0(N)} \right) \right\} \\ &\times \left(\frac{(\pi T)^\alpha (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^{2\alpha}}{4^\alpha (1-4\alpha)} \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{4\alpha}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi^\alpha + T^\alpha) (C_\Delta^2 A_N^{\gamma,\beta})^\alpha}{2^\alpha (1-2\alpha)} \frac{1}{(\theta \varepsilon_0(N))^{2\alpha}} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \omega. \end{aligned}$$

3 Висновки

В роботі розглянуто рівняння коливання неоднорідної струни з нульовими початковими і граничними умовами та φ -субгауссовою правою частиною. Побудовано модель розв'язку цього рівняння, що наближає його з заданими надійністю та точністю в рівномірній нормі.

Список використаних джерел

1. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right side // Random operators and stochastic equations, - 2009, - Vol. 17, - pp. 221-241.
2. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. The condition for application of Fourier method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right hand side // Random operators and stochastic equations, - 2005, - Vol. 13, No. 3, - pp. 281-296.

Надійшла до редакції 15.06.2011

УДК 519.21

А.В. Єршов, асистент

Граничні теореми для випадкових ламаних

У роботі знайдено умови слабкої збіжності функціоналів інтегрального типу від марковських послідовностей випадкових величин, а також умови слабкої збіжності випадкових ламаних, побудованих за послідовностями серій випадкових величин з довільною залежністю, до процесів дифузійного типу.

Ключові слова: послідовність серій ланцюгів Маркова, нерегулярна залежність локальних характеристик ланцюгів Маркова від номера серії, випадкова ламана, слабка збіжність, стохастичне диференціальне рівняння, процеси дифузійного типу.

a_yershov@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Нехай $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$ – послідовність випадкових величин, пов'язаних в кожній серії в однорідний ланцюг Маркова, $0 = t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nk_n} = 1$ – розбиття відрізка $[0, 1]$, таке, що $\lambda_n = \max_{k} \Delta t_{nk}$ прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, де $\Delta t_{nk} = t_{nk+1} - t_{nk}$.

Нехай

$$E\{\Delta \xi_{nk} | \xi_{nk} = x\} = a_n(x) \Delta t_{nk},$$

$$E\{[\Delta \xi_{nk}]^2 | \xi_{nk} = x\} = (a_n(x) \Delta t_{nk})^2 + \sigma_n^2(x) \Delta t_{nk}, \quad \sigma_n(x) > 0.$$

Побудуємо випадкову ламану $\zeta_n(t)$ з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}) , де $\zeta_{nk} = G_n(\xi_{nk})$, а $G_n(x)$ – певна сім'я двічі неперервно диференційовних функцій.

У роботі [1] було знайдено умови, при яких випадкові ламані, локальні характеристики яких можуть вельми нерегулярно залежати від номера серії, слабо збігаються до розв'язків стохастичного рівняння

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t a_0(\zeta(s)) ds +$$

A.V. Yershov, assistant

Limit theorems for random polygons

In the paper conditions, under which integral type functionals of sequences of Markov chains and conditions, under which random polygons, based on sequences of series of random variables with arbitrary dependence, converge weakly to the diffusion type processes, are found.

Key Words: a sequence of series of Markov chains, non-regular dependence of the local characteristics of Markov chains on the number of series, random polygon, weak convergence, stochastic differential equation, diffusion type processes.

$$+ \int_0^t \sigma_0(\zeta(s)) dw(s), \quad (1)$$

де $w(s)$ – вінерівський процес. Розглянуто випадок неперервних коефіцієнтів рівняння (1) та випадок коефіцієнтів зі стрибками.

У даній роботі знайдено умови, при яких випадкова ламана $\eta_n(t)$ з вершинами в точках

$$(t_{nk}, \sum_{i=0}^k g_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni})$$

при $n \rightarrow \infty$ слабо збігається до процесу

$$\eta(t) = 2 \left[\int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du - \int_0^t g(\zeta(s)) a_0(\zeta(s)) ds - \int_0^t g(\zeta(s)) \sigma_0(\zeta(s)) dw(s) \right],$$

де $\zeta(t)$ – розв'язок стохастичного рівняння (1), $g(u)$ – певна функція.

Крім того, знайдено умови, при яких випадкові ламані, побудовані за послідовностями серій випадкових величин з довільною залежністю, збігаються до розв'язків рівняння (1).

Умови слабкої збіжності випадкових ламанних до процесів дифузійного типу

Результати даної роботи спираються на дві теорема, які було доведено у роботі [1].

Перша теорема стосується випадку, коли коефіцієнти граничного рівняння є неперервними.

Теорема 1. *Нехай існує сім'я необмежених двічі неперервно диференційованих функцій $G_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, така, що:*

1) для певної сталої $K > 0$ виконується нерівність

$$[LG_n(x)]^2 + [G'_n(x) \sigma_n(x)]^2 \leq K(1 + [G_n(x)]^2)$$

при всіх x і n , де

$$LG_n(x) = G'_n(x) a_n(x) + \frac{1}{2} G''_n(x) \sigma_n^2(x);$$

2) для довільного $N > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} |\eta_{ni}| \chi_{ni}^{(N)} \right)^2 = 0,$$

де

$$\eta_{ni} = \int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}} \int_{\xi_{ni}}^x [G'_n(u) - G'_n(\xi_{ni})] du dx,$$

$\chi_{ni}^{(N)} = \chi_{[-N, N]}(\zeta_{ni})$ – індикатор події $\{\zeta_{ni} \in [-N, N]\}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} E [G'_n(\xi_{ni})]^2 |\Delta \xi_{ni}|^4 \chi_{ni}^{(N)} = 0$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G'_n(x)| [a_n^2(x) + |a_n(x) \sigma_n(x)|] = 0$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G'_n(x) \sigma_n^2(x)|^2 = 0$;

6) $E |G_n(\xi_{n0})|^2 \leq C$;

7) $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_k |\zeta_{nk}| > N \right\} = 0$;

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left| \frac{\Delta \xi_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^4 \chi_{ni}^{(N)} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^3 \sup_{|G_n(x)| \leq N} \left| \frac{g_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^4 = 0.$$

Припустимо, що існують неперервні функції $a_0(y)$, $\sigma_0(y)$, такі, що

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} E [LG_n(\xi_{ni}) -$

$$-a_0(G_n(\xi_{ni}))] \chi_{ni}^{(N)} \Delta t_{nk} = 0;$$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} E [G'_n(\xi_{nk}) \sigma_n(\xi_{nk}) - \sigma_0(G_n(\xi_{nk}))]^2 \chi_{nk}^{(N)} \Delta t_{nk} = 0$;

11) стохастичне рівняння (1) має єдиний слабкий розв'язок.

Тоді випадкова ламана $\zeta_n(t)$ слабо збігається при $n \rightarrow \infty$ до розв'язку $\zeta_0(t)$ рівняння (1).

Наступна теорема стосується випадку, коли коефіцієнти рівняння, якому задовольняє граничний процес, можуть мати стрибки.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 2) – 11) теореми 1 і нехай додатково виконуються наступні умови:*

12) $|LG_n(x)|^2 + |G'_n(x) \sigma_n(x)|^2 \leq K$;

13) існує таке $\delta > 0$, що $G'_n(x) \sigma_n(x) \geq \delta$.

Тоді твердження теореми 1 має місце у випадку, коли коефіцієнти рівняння $a_0(x)$, $\sigma_0(x)$ є неперервними, за виключенням, можливо, скінченного числа точок розриву l -го роду на відрізку $[-N; N]$ для довільного $N < \infty$.

Слабка збіжність функціоналів інтегрального типу від марковських послідовностей випадкових величин

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 і нехай послідовність функцій $g_n(x)$ задовольняє наступним умовам:*

1) для довільного $N > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} g_n^2(x) = 0;$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \sup_{|G_n(x)| \leq N} |g_n(x)| \left(\frac{g_n(x)}{\sigma_n(x)} \right)^2 = 0$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|G_n(x)| \leq N} g_n^2(x) \sum_{k=0}^{k_n-1} E \left| \frac{\Delta \xi_{nk}}{\sigma_n(\xi_{nk})} \right|^4 \chi_{nk}^{(N)} = 0$;

4) $\sup_{|G_n(x)| \leq N} \left| \int_0^x \frac{g_n(u)}{G'_n(u) \sigma_n^2(u)} du \right| \leq K_N$,

де K_N – деяка стала;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} E \left[\int_{\xi_{nk}}^{\xi_{nk+1}} \int_{\xi_{nk}}^x |Q'_n(u) - Q'_n(\xi_{nk})| du dx \right] \chi_{nk}^{(N)} = 0$,

де

$$Q_n(x) = 2 \int_0^x G'_n(u) \int_0^u \frac{g_n(v)}{G'_n(v) \sigma_n^2(v)} dv du;$$

6) функція $G_n(x)$ – строго монотонна;

7) існує функція $g(x)$, для якої

$$\int_{G_n(\varphi_n)}^x \frac{g_n(\varphi_n(u))}{[G'_n(\varphi_n(u)) \sigma_n(\varphi_n(u))]^2} du \rightarrow g(x)$$

($\varphi_n(x)$ - функція, обернена до $G_n(x)$) при $n \rightarrow \infty$ рівномірно в кожному компактї, за виключенням, можливо, скінченної множини точок.

Тоді випадкова ламана $\eta_n(t)$ з вершинами в точках

$$\left(t_{nk}, \sum_{i=0}^k g_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$ слабо збігається до процесу

$$\eta(t) = 2 \left[\int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du - \int_0^t g(\zeta(s)) d\zeta(s) \right],$$

де $\zeta(t)$ - розв'язок стохастичного рівняння (1).

Доведення. Введемо позначення:

$$\dot{\zeta}_n(t) = \varphi_n(\zeta_n(t)).$$

Має місце співвідношення

$$\begin{aligned} \sup_t |\eta_n(t) - \eta(t)| &\leq \\ &\leq \sup_k \sup_{t \in [t_{nk}, t_{nk+1})} |\eta_n(t) - \\ &- [Q_n(\dot{\zeta}_n(t)) - Q_n(\dot{\zeta}_n(0))] + \\ &+ 2 \sum_{i=0}^k \int_0^{\xi_{ni}} \frac{g_n(v)}{G_n(v) \sigma_n^2(v)} dv LG_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} + \\ &+ \left| \int_0^t Q'_n(\dot{\zeta}_n(s)) \sigma_n(\dot{\zeta}_n(s)) d\omega_n(s) \right| + \\ &+ \sup_t \left| [Q_n(\dot{\zeta}_n(t)) - Q_n(\dot{\zeta}_n(0))] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du \right| + \\ &+ \sup_k \sup_{t \in [t_{nk}, t_{nk+1})} \left| 2 \sum_{i=0}^k \int_0^{\xi_{ni}} \frac{g_n(v)}{G_n(v) \sigma_n^2(v)} dv \times \right. \\ &\times \left[G_n(\xi_{ni}) a_n(\xi_{ni}) + \frac{1}{2} G_n''(\xi_{ni}) \sigma_n^2(\xi_{ni}) \right] \Delta t_{ni} - \\ &\quad \left. - 2 \int_0^t g(\zeta(s)) a_0(\zeta(s)) ds \right| + \\ &+ \sup_t \left| \int_0^t Q'_n(\dot{\zeta}_n(s)) \sigma_n(\dot{\zeta}_n(s)) d\omega_n(s) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^t g(\zeta(s)) \sigma_0(\zeta(s)) d\omega(s) \right| = \end{aligned}$$

$$= J_n^{(1)} + J_n^{(2)} + J_n^{(3)} + J_n^{(4)}.$$

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо представлення

$$Q_n(\xi_{nk+1}) - Q_n(\xi_{n0}) =$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \left[Q'_n(\xi_{ni}) a_n(\xi_{ni}) + \frac{1}{2} Q_n''(\xi_{ni}) \sigma_n^2(\xi_{ni}) \right] \Delta t_{ni} + \\ + \sum_{i=0}^k Q'_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \Delta \omega_{ni} + \beta_{nk}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \beta_{nk} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k Q_n''(\xi_{ni}) a_n^2(\xi_{ni}) [\Delta t_{ni}]^2 + \\ + \sum_{i=0}^k Q_n''(\xi_{ni}) a_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} \Delta \omega_{ni} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k Q_n''(\xi_{ni}) \sigma_n^2(\xi_{ni}) [(\Delta \omega_{ni})^2 - \Delta t_{ni}] + \\ + \sum_{i=0}^k \int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}} \int_{\xi_{ni}}^x [Q_n''(u) - Q_n''(\xi_{ni})] du dx. \end{aligned}$$

Використовуючи це представлення та співвідношення

$$\begin{aligned} Q'_n(x) a_n(x) + \frac{1}{2} Q_n''(x) \sigma_n^2(x) = \\ = 2 \int_0^x \frac{g_n(v)}{G_n(v) \sigma_n^2(v)} dv \times \\ \times \left[G_n(x) a_n(x) + \frac{1}{2} G_n''(x) \sigma_n^2(x) \right] + g_n(x), \end{aligned}$$

отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} J_n^{(1)} \leq \sup_k \sup_{t \in [t_{nk}, t_{nk+1})} |Q_n(\xi_{nk+1}) - Q_n(\dot{\zeta}_n(t))| + \\ + \sup_k \sup_{t \in [t_{nk}, t_{nk+1})} |g_n(\xi_{nk+1}) \Delta t_{nk+1}| + \\ + \sup_k |\beta_{nk}|, \end{aligned}$$

звідки, в силу виконання умов теореми 1 та умов 1) - 5) теореми 3, отримуємо збіжність $J_n^{(1)}$ до нуля за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$.

З умови 7) теореми та нерівності

$$\begin{aligned} J_n^{(2)} \leq \sup_t | [Q_n(\dot{\zeta}_n(t)) - Q_n(\dot{\zeta}_n(0))] - \\ - 2 \int_{\zeta_n(0)}^{\zeta_n(t)} g(u) du | + \end{aligned}$$

$$+ \sup_t \left| 2 \int_{\zeta_n(t)}^{\zeta_n(t)} g(u) du - 2 \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du \right|$$

випливає, що для довільної підпослідовності $n_k \rightarrow \infty$ знайдеться така підпослідовність $n' \rightarrow \infty$, що має місце збіжність $J_{n'}^{(2)}$ до нуля за ймовірністю при $n' \rightarrow \infty$.

В силу умови 9) теореми 1, умови 7) теореми 3 та нерівності

$$J_n^{(3)} \leq \sup_k \left| \sum_{i=0}^k \int_0^{\zeta_{n_i}} \frac{g_n(v)}{G_n(v) \sigma_n^2(v)} dv (LG_n(\zeta_{n_i}) - a_0(\zeta_{n_i})) \Delta t_{n_i} \right| +$$

$$\sup_k \left| \sum_{i=0}^k \left[\int_0^{\zeta_{n_i}} \frac{g_n(v)}{G_n(v) \sigma_n^2(v)} dv - g(\zeta_{n_i}) \right] a_0(\zeta_{n_i}) \Delta t_{n_i} \right| +$$

$$\sup_k \sup_{t \in [t_{n_k}, t_{n_{k+1}})} \left| \sum_{i=0}^k g(\zeta_{n_i}) a_0(\zeta_{n_i}) \Delta t_{n_i} - \int_0^t g(\zeta(s)) a_0(\zeta(s)) ds \right|$$

має місце збіжність $J_{n'}^{(3)}$ до нуля за ймовірністю при $n' \rightarrow \infty$.

При доведенні збіжності $J_{n'}^{(4)}$ до нуля за ймовірністю при $n' \rightarrow \infty$ використовуємо нерівність

$$J_n^{(4)} \leq \sup_k \left| \sum_{i=0}^k [Q'(\zeta_{n_i}) \sigma_n(\zeta_{n_i}) - 2g(\zeta_{n_i}) \sigma_0(\zeta_{n_i})] \Delta \omega_{n_i} \right| +$$

$$+ \sup_k \sup_{t \in [t_{n_k}, t_{n_{k+1}})} \left| 2 \sum_{i=0}^k g(\zeta_{n_i}) \sigma_0(\zeta_{n_i}) \Delta \omega_{n_i} - 2 \int_0^t g(\zeta(s)) \sigma_0(\zeta(s)) d\omega(s) \right|$$

та умову 10) теореми 1.

Таким чином,
 $\sup_t |\eta_{n'}(t) - \eta(t)| \xrightarrow{P} 0$ при $n' \rightarrow \infty$.

Оскільки послідовність $n' \rightarrow \infty$ довільна, то з доведеної збіжності випливає остаточне твердження теореми. $\square$

Теорема 4. Нехай виконуються умови теорем 2 та 3.

Тоді твердження теореми 3 має місце і у випадку, коли коефіцієнти рівняння (1) є неперервними, за виключенням лише скінченного числа точок розриву 1-го роду на відрізку $[-N; N]$ для довільного $N < \infty$.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню теореми 3. $\square$

Збіжність випадкових ламаних, побудованих за послідовністю серій випадкових величин з довільною залежністю, до процесів дифузійного типу

Розглянемо послідовність серій випадкових величин $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$ з довільною залежністю. Позначимо через $\mathcal{F}_{nk}$ найменшу σ -алгебру, породжену випадковими величинами $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk}$.

Нехай

$$E\{\Delta \xi_{nk} | \mathcal{F}_{nk}\} = a_{nk} \Delta t_{nk},$$

$$E\{|\Delta \xi_{nk}|^2 | \mathcal{F}_{nk}\} = \sigma_{nk}^2 \Delta t_{nk} + (a_{nk} \Delta t_{nk})^2,$$

$\zeta_n(t)$ – ламана з вершинами в точках (t_{nk}, ζ_{nk}) , де $\zeta_{nk} = G_n(\xi_{nk})$.

Теорема 5. Нехай існують невідкладні функції $a_n(x)$ та $\sigma_n(x)$, такі, що для довільного $N > 0$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k E \left[\frac{\sigma_{nk} - \sigma_n(\zeta_{nk})}{\sigma_n(\zeta_{nk})} \right]^4 \chi_{nk}^{(N)} = 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k E \left[\frac{\sigma_{nk} - \sigma_n(\zeta_{nk})}{\sigma_n(\zeta_{nk})} \right]^4 \chi_{nk}^{(N)} = 0;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G_n'(x) \sigma_n^2(x)|^2 \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k_n-1} E \left[\frac{\sigma_{nj} - \sigma_n(\zeta_{nj})}{\sigma_n(\zeta_{nj})} \right]^4 \chi_{nj}^{(N)} \Delta t_{nj} = 0,$$

$$l = 2, 4;$$

$$4) \frac{\sigma_n(\zeta_{nk})}{\sigma_{nk}} \chi_{nk}^{(N)} \leq K_N \text{ з ймовірністю } 1,$$

і послідовність серій випадкових величин з функціями $a_n(x)$ та $\sigma_n(x)$ задовольняють умовам теореми 1.

Тоді твердження теореми 1 має місце і для процесу $\zeta_n(t)$.

Доведення. Доведення теореми можна провести за тією ж схемою, за якою доводилась теорема 1, але з відповідними модифікаціями.

Наприклад, для того, щоб довести збіжність

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k_n-1} \left| G'_n(\xi_{ni}) \alpha_{ni} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G''_n(\xi_{ni}) \sigma_{ni}^2 - a_0(\zeta_{ni}) \right| \Delta t_{ni} \xrightarrow{P} 0, \quad (2) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, використовуємо таку оцінку.

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sum_{i=0}^{k_n-1} |G'_n(\xi_{ni}) \alpha_{ni} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G''_n(\xi_{ni}) \sigma_{ni}^2 - a_0(\zeta_{ni})| \Delta t_{ni} > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_k |\zeta_{nk}| > N \right\} + \\ & + \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 K (1 + N^2) \sup_k E \left[\frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right]^2 \chi_{ni}^{(N)} + \\ & + \frac{4}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k_n-1} E |G'_n(\xi_{ni}) a_n(\xi_{ni}) + \\ & + \frac{1}{2} G''_n(\xi_{ni}) \sigma_n^2(\xi_{ni}) - a_0(\zeta_{ni})| \chi_{ni}^{(N)} \Delta t_{ni} + \\ & + \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{4} \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G''_n(x) \sigma_n^2(x)|^2 \times \\ & \times \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left[\frac{\sigma_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right]^4 \chi_{ni}^{(N)} \Delta t_{ni} + \\ & + \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \sup_{|G_n(x)| \leq N} |G''_n(x) \sigma_n^2(x)|^2 \times \\ & \times \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left[\frac{\sigma_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right]^2 \chi_{ni}^{(N)} \Delta t_{ni}. \end{aligned}$$

Таким чином, збіжність (2) впливає з умов 7), 11) теореми 1 та умов 1) – 3) теореми 5. $\square$

Наступна теорема відповідає випадку коефіцієнтів зі стрибками.

Теорема 6. *Нехай існують не випадкові функції $a_n(x)$ та $\sigma_n(x)$, що задовольняють умовам 1) – 4) теореми 5.*

Якщо послідовність серій випадкових величин з функціями $a_n(x)$ та $\sigma_n(x)$ задовольняють умовам теореми 2, то твердження теореми 2 має місце і для процесу $\zeta_n(t)$.

Доведення. Доведення цього твердження проводиться аналогічно доведенню теореми 5. $\square$

Висновки

У статті знайдено умови, при яких випадкові ламані з вершинами в точках

$$\left(t_{nk}, \sum_{i=0}^k g_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$ слабо збігаються до процесу

$$\eta(t) = 2 \left[\int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du - \int_0^t g(\zeta(s)) d\zeta(s) \right],$$

де $\zeta(t)$ – розв'язок стохастичного рівняння (1) у випадку, коли коефіцієнти цього рівняння неперервні, а також у випадку, коли коефіцієнти рівняння мають стрибки.

Крім того, знайдено умови збіжності випадкових ламаних, побудованих за послідовностями серій випадкових величин із довільною залежністю (тобто, без умови марковості), до процесів дифузійного типу.

Результати, сформульовані в теоремах 3, 4, 5 та 6, є новими, оскільки в існуючих результатах [2] розглядався випадок нульового коефіцієнту переносу в рівнянні (1), причому в ситуації, коли функції $G_n(x)$ мають спеціальний вигляд, а саме,

$$G_n(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^u \frac{a_n(v)}{\sigma_n^2(v)} dv \right\} du.$$

Список використаних джерел

1. Єришов А.В. Про слабку збіжність випадкових ламаних до процесів дифузійного типу / А.В. Єришов // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 2009. – Вип. 22. – С.35-39.
2. Кулінич Г.Л. Некоторые предельные теоремы для последовательности цепей Маркова / Г.Л. Кулінич // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1975. – № 12. – С.77-89.

Надійшла до редакції 09.03.2011

УДК 512.647

М.В. Зельдіч, старший наук. співробітник

Про можливість реалізації знакозмінної групи підстановок A_n в якості групи ізометрій

*Доводиться неможливість реалізації
знакозмінної групи парних підстановок A_n
для $n > 2$ в якості групи ізометрій.*

Ключові слова: група підстановок на скін-
ченній множині, скінченний метричний
простір, група ізометрій скінченного ме-
тричного простору.

E-mail: zeldich@mail.ru

Статтю представив д.ф.м.н., проф. Кириченко В.В.

Проблеми реалізації груп і груп підстановок автоморфізмами різних типів дискретних структур, зокрема графів і метричних просторів з різними обмеженнями, добре відомі ще з тридцятих років минулого сторіччя (див. оглядову статтю [1]). Перша з них, тобто проблема реалізації абстрактних груп для більшості класів дискретних структур, що розглядаються, розв'язується позитивно. Наприклад відомо, що кожна абстрактна група реалізується як повна група автоморфізмів деякого графа, деякого часткового порядку на множині або як група ізометрій скінченного метричного простору [1]. Проблема ж конкретної реалізації, тобто реалізації груп підстановок у вигляді повних груп автоморфізмів дискретних структур з того чи іншого класу, значно важча і повне її розв'язання невідоме для переважної більшості класів дискретних структур. Наприклад, добре відомо, що не кожна група підстановок може бути реалізована, як повна група автоморфізмів графа, чи повна група ізометрій метричного простору, але питання, які саме групи так реалізуються - це відомі важкі проблеми [1]. Як справедливо зауважив рецензент даної роботи, прикладами груп підстановок, які не реалізуються як повні групи ізометрій метричних просторів є власні кратно транзи-

M.V. Zeldich, Senior Scientific Researcher

On realizability of alternating permutation group A_n as isometry group

*Nonrealizability of alternating group of
even permutations A_n for $n > 2$ as isome-
try group is
proved.*

Key Words: permutation group on finite set,
finite metric space, isometry group of finite
metric space.

тивні підгрупи повної симетричної групи S_n , якими, зокрема, будуть і знакозмінні групи підстановок A_n при $n \geq 4$, але доведення цих фактів вимагає певних знань з теорії груп підстановок. Натомість, в даній роботі ми пропонуємо нове, абсолютно елементарне (яке спирається лише на матеріал з алгебри в обсязі першого курсу математичного факультету) доведення того факту, що знакозмінна група в її природному зображенні підстановками не реалізується як повна група ізометрій метричного простору.

Будемо казати, що група підстановок (G, X) (де X — множина, G — група бієктивних перетворень множини X) може бути реалізованою в якості групи ізометрій, якщо існує метрика d_X на множині X така, що (G, X) є ізоморфією груп ізометрій $I_S X$ метричного простору (X, d_X) (як група підстановок). Умовимось надалі для простоти скорочено казати, що група підстановок (G, X) містить іншу задану групу підстановок (H, Y) (і позначати це звичайним включенням: $G \supset H$), якщо існують такі підмножини $X_0 \subset X$ множини X та група (G_0, X_0) підстановок на множині X_0 , а також підгрупа $G_1 < G$ групи G підстановок на X , які задовольняють наступним властивостям:

1. усі точки доповнення $X \setminus X_0$ підмножи-

ни X_0 у множині X є нерухомими для кожної підстановки з групи G_1

- звуження перетворень з групи підстановок (G_1, X) на підмножину X_0 множини X утворюють групу G_0 підстановок на множині X_0 , ізоморфну (як група підстановок) заданій групі підстановок $(H, Y) : (G_0, X_0) \simeq (H, Y)$ (зауважимо, що при цьому, очевидно G_0 та G_1 ізоморфні, як звичайні абстрактні групи). Будемо також для простоти скорочено казати, що група підстановок (G, X) дорівнює групі підстановок (H, Y) і позначати це звичайною рівністю $G = H$, якщо в попередньому означенні $X_0 = X$ та $G_0 = G_1 = G$, тобто, іншими словами, якщо група підстановок (G, X) та задана група підстановок (H, Y) є ізоморфними (як групи підстановок).

Теорема 0.1. Нехай $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ — скінченний метричний простір на n точках і $G = G_M$ — група ізометрії M . Тоді, якщо G — нетривіальна (тобто не одинична) підгрупа S_n , яка містить A_n , то $G = S_n$.

Наслідок 1. В умовах теореми, якщо $G = A_n$, то $n \leq 2$ і G — тривіальна (тобто одинична) підгрупа S_n . Отже, знакозмінна група парних підстановок може бути реалізованою в якості групи ізометрії лише при $n \leq 2$, тобто коли вона є тривіальною (одиничною) підгрупою повної групи підстановок S_n .

Далі наведено повне елементарне доведення цієї теореми.

Означення 0.1. В метричному просторі M елементи (точки) x та x' назвемо близьокими (і будемо писати: $x \sim x'$), якщо для довільної точки $y \neq x, x'$: $d(x, y) = d(x', y)$.

Лема 1. Нехай група $G = G_M$ ізометрії метричного простору M містить 2 попарно різних цикли: (x_1, x_2, x) та (x_1, x_2, y) , де x_1, x_2, x та y — різні елементи (точки)

простору M . Тоді $x_1 \sim x_2$, тобто x_1 та x_2 є близьокими.

Доведення. Треба показати, що для довільного елементу $z \in M$, відмінного від x_1 та x_2 , $d(x_1, z) = d(x_2, z)$. Дійсно, нехай зафіксовано такий елемент z . Оскільки за умовою леми 1, x та y — різні елементи, то $z \neq x$ або $z \neq y$. Нехай, наприклад, $z \neq x$ (випадок $z \neq y$ абсолютно симетричний і розглядається аналогічно). Розглянемо $\sigma = (x_1, x_2, x)$. Тоді $d(x_2, z) = d(\sigma(x_1), z) = d(\sigma(x_1), \sigma(z)) = d(x_1, z)$, оскільки за умовами леми 1, σ є ізометрією, а елемент z за його вибором не входить у потрібний цикл σ , і тому залишається при його дії неперворухним

Лема 2. Якщо $x \sim x'$ — близьокі в метричному просторі M , то транспозиція $\tau = \tau_{x, x'} = (x, x')$ елементів x та x' є ізометрією, тобто $\tau_{x, x'} \in G = G_M$.

Доведення. Достатньо перевірити, що для довільних двох різних елементів m та n з M :

$$d(\tau(m), \tau(n)) = d(m, n) \quad (*).$$

Якщо m та n обидва не належать множині $\{x, x'\}$, то $\tau(m) = m$, $\tau(n) = n$, звідки випливає рівність (*). Якщо $\tau(m)$ та $\tau(n)$ обидва належать множині $\{x, x'\}$, то $\tau(m) = n$, а $\tau(n) = m$, звідки рівність (*) випливає в силу симетричності метрики $d : d(\tau(m), \tau(n)) = d(n, m) = d(m, n)$. Нарешті, в разі, якщо один з двох елементів m та n належить множині $\{x, x'\}$, а інший не належить цій множині (будемо для певності вважати, що $m \in \{x, x'\}$, $n \notin \{x, x'\}$, інший випадок — симетричний, і розглядається аналогічно) маємо: $d(\tau(m), \tau(n)) = d(\tau(m), n)$; при цьому, в свою чергу, $d(\tau(m), n) = d(m, n)$, оскільки $\tau(m)$ та m є близькими (бо $m \in \{x, x'\}$, а τ переставляє близьокі x та x' місцями). Отже, остаточно, і в цьому випадку маємо: $d(\tau(m), \tau(n)) = d(m, n)$

З вищенаведених лем випливає наступне

Твердження 1. Нехай M — метричний простір на n точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, $G = G_M$

— група усіх ізометрій $\mathcal{M}$. Тоді, при $n \geq 4$, якщо $G \supset A_n$, то $G = S_n$.

Доведення. Дійсно, якщо $G \supset A_n$, то оскільки A_n містить усі потрібні цикли (і навіть більш того, як відомо, ними ж і породжується), з леми 1 в силу умови $n \geq 4$ випливає, що для будь-яких двох різних елементів $x_1 \neq x_2$ простору $\mathcal{M}$: $x_1 \sim x_2$, тобто x_1 та x_2 є близьнюками, оскільки в групі ізометрії $G = G_{\mathcal{M}}$ є, зокрема, потрібні цикли (x_1, x_2, x) та (x_1, x_2, y) для довільних двох різних елементів $x \neq y \in \mathcal{M}$, відмінних від x_1 та x_2 (зазначимо при цьому, що такі елементи x та y зобов'язані існувати завдяки умові $n \geq 4$ твердження, що доводиться). Але тоді, згідно леми 2, для близьнюків x_1 та x_2 транспозиція $\tau = \tau_{x_1, x_2}$ є ізометрією, тобто $\tau \in G = G_{\mathcal{M}}$. Але ж τ — непарна підстановка, спряжена з транспозицією сусідніх $\tau_{x_1, x_2} = \langle (12) \rangle$ (далі ми для простоти отождествлюємо елемент x_i з його номером i , а групу $G = G_{\mathcal{M}}$ з відповідною групою підстановок на номерах елементів $\mathcal{M}$).

Отже, з одного боку, $G \supset A_n$ з іншого, $G \supset \langle (12) \rangle$, звідки $G \supset \langle A_n, \langle (12) \rangle \rangle = S_n$, тобто $G = S_n$. $\square$

Випадки $n \leq 3$ розглядаються окремо для кожного n , цей розгляд резюмує наступне

Твердження 2. Нехай $\mathcal{M}$ — метричний простір на n елементах з групою ізометрії $G = G_{\mathcal{M}}$, причому число елементів $n \leq 3$. Тоді:

1. при $n = 1$ $G = A_n = S_n = \{id\}$ (одиночна група)
2. при $n = 2$ або $G = A_2 = \{id\}$ (одиночна група), або $G = S_2$

3. при $n = 3$ розглянемо трикутник $\mathcal{M} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

а) якщо $\mathcal{M}$ — рівносторонній трикутник, тобто відстані $d(x_1, x_2)$, $d(x_2, x_3)$ та $d(x_3, x_1)$ — попарно відмінні між собою, то

$G_{\mathcal{M}} = \langle id \rangle$ — одиночна група;

б) якщо $\mathcal{M}$ — рівносторонній трикутник, тобто

$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_1)$, то $G_{\mathcal{M}} = S_3$ — повна група підстановок S_3 ;

в) якщо $\mathcal{M}$ — рівнобедрений трикутник, тобто, з точністю до нумерації, можна вважати, що $d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3)$, але $\mathcal{M}$ не є рівностороннім ($d(x_1, x_2) \neq d(x_2, x_3) = d(x_3, x_1)$), то в цьому випадку $G_{\mathcal{M}} = \langle \tau_{x_1, x_2} \rangle = \{id, (12)\} = S_2$.

Зауважимо нарешті, що теорема щодо можливості реалізації знакозміної групи парних підстановок A_n в якості групи ізометрії впливає, очевидним чином, з доведених вище тверджень 1 та 2.

Насамкінець, автор висловлює щире подяку рецензенту за цінні зауваження та обговорення результату.

Список використаних джерел

1. Laszlo Babai, Automorphisms group, isomorphism, reconstruction. In: Handbook of combinatorics (R.L.Graham, M.Groetschel, L.Lovaiz eds), Elsevier, 1996, P. 1447 - 1541

Надійшла до редколегії 07.06.2011

УДК 512.552

М. В. Касянюк, аспірант

Про квазіфробеніусові кільця

У даній роботі вивчаються квазіфробеніусові кільця та досліджуються напівланцюгові квазіфробеніусові кільця.

Ключові слова: квазіфробеніусові кільця, сагайдик, спадкове кільце.

E-mail: marinasayenko@gmail.com

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В. В.

1 Вступ

Дана стаття присвячена вивченню квазіфробеніусових кілець. Клас квазіфробеніусових кілець був представлений Накаямою в 1939 році як узагальнення квазіфробеніусових алгебр. Це один з найбільш цікавих класів артинових кілець.

2 Спадкові кільця

Твердження 1. Нехай A -спадкове справа кільце. Тоді для будь-якого ненульового ідемпотента $e^2 = e \in A$ кільце eAe також спадкове справа.

Лема 1. Якщо кільце A -спадкове справа, тоді будь-який ненульовий гомоморфізм $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ нерозкладних проективних правих A -модулів є мономорфізмом. [р.138]

Нехай $P_1, \dots, P_s$ -неізоморфні головні праві A -модулі і нехай $Q_1, \dots, Q_s$ -неізоморфні головні ліві A -модулі двостороннього артинового кільця A . І нехай $A_A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ (${}_A A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$)-розклад правого(лівого) регулярного A -модуля в пряму суму головних правих(лівих) A -модулів.

Означення 2. Двостороннє артинове кільце A називається квазіфробеніусовим, якщо A допускає перестановку Накаяма $\nu(A)$ з $\{1, 2, \dots, s\}$. Квазіфробеніусове кільце A називається фробеніусовим, якщо $n_{\nu(i)} = n_i$ для всіх $i = 1, \dots, s$.

M. V. Kasyanuk, PhD student

On QF- rings

In this paper the QF- rings are learning and the serial QF rings are investigated.

Key Words: QF- rings, a quiver, a hereditary ring.

Точніше, ν визначає зв'язок симетричної групи з s літер, а зв'язки відповідають прономерованим головним ідеалам $P_1, \dots, P_s$.

Для будь-якого кільця A правий регулярний модуль A_A вільний і, таким чином, є проєктивним модулем. Але в загальному випадку модуль A_A не ін'єктивний.

Означення 3. Кільце A називається самоін'єктивним справа, якщо правий регулярний модуль A_A -ін'єктивний. Ліве самоін'єктивне кільце визначається аналогічно. [2,р.193]

Твердження 2. Якщо кільце A -праве самоін'єктивне, тоді воно задовольняє наступні умови:

1) для будь-яких правих ідеалів H_1, H_2 $\ell(H_1 \cap H_2) = \ell(H_1) + \ell(H_2)$, де ℓ -анулятор;

2) для будь-якого скінченнопородженого лівого ідеала H $\ell(r(H)) = H$, де r -правий анулятор. [2,р.194]

Теорема 2.1. (Фейса-Уокера) Наступні умови еквівалентні:

- 1) A -квазіфробеніусове кільце;
- 2) правий(або лівий) A -модуль M проєктивний тоді і тільки тоді, якщо він ін'єктивний. [3]

3 Напівланцюгові квазіфробеніусові кільця

Теорема 3.1. (Хопкінса) Радикал R правого артинового кільця A є нільпотентним. [1,р.72]

Теорема 3.2. *Праве артинове кільце A є правим нетеровим. [1, p.73]*

Твердження 3. *(Лема Фітінга). Нехай M - нерозкладний модуль, який одночасно є артиновим та нетеровим. Тоді будь-який ендоморфізм модуля M є або автоморфізмом, або нільпотентним. [1, p.62]*

Наслідок 1. *Кільце ендоморфізмів артинового та нетероваго модуля локальне.*

Нехай A - квазіфробеніусове кільце. Тоді правий регулярний A -модуль A_A розкладається в пряму суму нерозкладних проєктивних A -модулів:

$$A_A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$$

(M^n - пряма сума n -екземплярів модуля M , $M^0 = 0$).

Нагадаємо, що праві A -модулі $P_1, \dots, P_s$ попарно неізоморфні і нерозкладні. Крім того, в силу теореми Фейса-Уокера всі вони ін'єктивні.

Твердження 4. *Нехай $\varphi : P_i \rightarrow P_j$ - гомоморфізм нерозкладних проєктивних модулів над квазіфробеніусовим кільцем. Тоді $\text{Ker} \varphi \neq 0$*

Доведення. Нехай $\text{Ker} \varphi = 0$, тоді φ є мономорфізмом модуля P_i в модуль P_j . Р ін'єктивності модуля P_i випливає, що $P_j \subseteq \text{Im} \varphi \oplus X$. З нерозкладності модуля P_j випливає, що $P_j \subseteq P_i$. Отримуємо протиріччя. Тому $\text{Ker} \varphi \neq 0$.

Теорема 3.3. *Напівланцюгове нетерове кільце є напівланцюговим тоді і тільки тоді, якщо його праві і ліві сагайдаки є незв'язним об'єднаним циклом і ланцюгом.*

Нехай A - напівланцюгове нерозкладне кільце. З теореми 2.2 випливає, що кільце напівланцюгове тоді і тільки тоді, коли правий та лівий сагайдаки цього кільця є незв'язним об'єднаним циклом і ланцюгом.

Означення 4. Сагайдак називається сильно зв'язним, якщо існує шлях між будь-якими двома його вершинами. За згодою, одноточковий граф є сильно зв'язним.

Теорема 3.4. *(Гріна) Сагайдак нерозкладного квазіфробеніусового кільця сильно зв'язний. [4]*

Нехай A є напівланцюгове квазіфробеніусове кільце, тоді за теоремою Гріна його сагайдак є простим циклом. Доведемо, що тоді довжини всіх модулів $P_1, \dots, P_s$ рівні. З твердження 4 випливає, що $\ell(P_1) < \ell(P_2)$, де ℓ - довжина композиційного ряду модуля P , якщо існує гомоморфізм $\varphi : P_i \rightarrow P_j$. Нехай A - нерозкладне квазіфробеніусове кільце і

$$Q(A) = 1 \xrightarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} s-1 \xrightarrow{\quad} s$$

Зауважимо, якщо в сагайдаку $Q(A)$ існує стрілка $i \rightarrow j$, то $P_i^R / P_i^{R^2} \cong u_j$, де u_j - простий A -модуль і існує гомоморфізм $\varphi : P_j \rightarrow P_i$. Тому $\ell(P_j) \leq \ell(P_i)$. З того, що сагайдак є простим циклом, випливає $\ell(P_1) \geq \ell(P_2) \geq \dots \geq \ell(P_s)$. З цього випливає, що довжини всіх нерозкладних головних модулів співпадають між собою. Якщо довжини співпадають і дорівнюють 2, тоді підстановка Накаяма кільця A є простим циклом $(1, 2, \dots, s)$. А якщо довжина дорівнює m , то підстановка Накаяма кільця A є простим циклом $(1, 2, \dots, s)^{m-1}$. Таким чином, ми довели теорему.

Теорема 3.5. *Напівланцюгове кільце A є квазіфробеніусовим тоді і тільки тоді, коли всі гомоморфізми нерозкладних проєктивних модулів мають ненульове ядро.*

Список використаних джерел

1. Michiel Hazewinkel, Nadya Gubareni, V.V.Kirichenko *Algebras, Rings and Modules, volume 1*, Netherlands: Springer.-2007.- 380 p.
2. Michiel Hazewinkel, Nadya Gubareni, V.V.Kirichenko *Algebras, Rings and Modules, volume 2*, Netherlands: Springer.-2007.- 400 p.
3. C.Faith, E.A.Walker *Direct-sum representations of injective moduls*, J. Algebra, v.5, 1967, p.203-221
4. Edward L.Green, *Frobenius algebras and their quivers*, Can. J. Math., v.30, N 5, 1978, p. 1029- 1044

Надійшла до редколегії 20.01.2011

УДК 519.21

Володимир В. Кириченко, док. ф-м. наук,
Макар В. Плахотник, канд. ф-м. наук

Опис $(0, 1)$ -матриць показників

У статті описано $(0, 1)$ -матриці показників як елементи частково впорядкованої множини в сенсі поелементного порівняння матриць та поразовано ширину цієї частково впорядкованої множини. Робота є природним продовженням роботи авторів, надрукованої в номері 2 цього журналу за 2011р.

Ключові слова: матриця показників, $(0, 1)$ -матриця.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Козаченко Ю.В.

Матриці показників були введені в роботу [5] у зв'язку з описом напівмаксимальних кілець, тобто напівдосконалих напівпервинних нетерових з двох боків кілець, у яких всі кільця ендоморфізмів є дискретно нормованими кільцями.

Означення. Цілочислова ненульова матриця (α_{ij}) розміру n називається матрицею показників, якщо діагональні елементи матриці нульові та для кожної трійки чисел i, j, k виконується нерівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. Перераховані нерівності називаються кільцевими.

В [5] доведено, що кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне прямому добутку кілець вигляду $\Lambda = \sum_{i,j=1}^n \epsilon_{ij} \pi^i \circ \pi^j \circ \pi^k$, де $n \geq 1$, π - дискретно нормоване кільце з простим елементом π , ϵ_{ij} - матричні одиниці, перестановочні з елементами з π , (α_{ij}) - матриця показників.

З комбінаторної точки зору значно простішим за матриці показників об'єктом є горенштейнові матриці.

Означення. Матриця показників називається горенштейнковою, якщо існує перестановка σ без нерухомих точок, така що для всіх можливих індексів виконуються рівності $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$. Ці рівності називаються горенштейновими.

В роботі [7] доведено, що черепичний порядок є горенштейновим тоді і лише тоді, коли

V.V. Kirichenko, Doc. Ph-Math Sci,
M. V. Plakhotnyk, Kand. Ph.-Math. Sci.

The description of $(0, 1)$ -exponent matrices

The description of $(0, 1)$ -exponent matrices is given in the article in the sense of description of elements of partially ordered set of matrices with their natural ordering are described in the article. This work is natural continuation one by authors, which was published at No 2 for 2011 in this journal.

Key Words: exponent matrix, $(0, 1)$ -matrix.

його матриця показників є горенштейнковою.

Матриці, для яких виконуються лише горенштейнові рівності (але не виконуються кільцеві), не представляють жодного інтересу в класифікаційних задачах алгебри, оскільки там горенштейнові рівності виникають саме як додаткова умова, яка виконується в матрицях показників.

Для вивчення матриць показників достатньо вивчати їх з точністю до еквівалентності, вважаючи еквівалентними дві матриці показників, якщо одну з них можна отримати з іншої композицією таких перетворень:

(i) Відніманням деякого числа від кожного елемента деякого рядка матриці з одночасним додаванням цього числа до кожного елемента того стовпця матриці, чий номер збігається з номером стовпця, від елементів якого робилося віднімання;

(ii) Переставленням двох рядків матриці та переставленням стовбців з тими самими номерами.

Важливо, що зазначені перетворення зберігають властивість матриці показників бути горенштейнковою.

Кожен клас матриць, еквівалентних в сенсі частини (i) означення, містить єдину матрицю, всі елементи першого рядка якої нульові. Відомо, що з умови рівності нулю першого рядка матриці показників випливає невід'ємність

її елементів. Враховуючи це, не обмежуючи загальності, можемо вважати таке.

Домовленість. Вважатимемо, що всі елементи матриць показників, які розглядаємо, невід'ємні.

Протягом попередніх років було написано ряд статей, котрі так чи інакше стосувалися опису певних класів горенштейнових матриць. Так, в роботі [4] розглядаються горенштейнові матриці, відповідна перестановка яких є циклом і перший рядок яких нульовий. Для таких матриць легко показати, що кожен їх елемент має бути невід'ємним. Одним з результатів вказаної роботи є теорема про те, що невід'ємність елементів цілочислової матриці з першим нульовим рядком, для якої виконуються горенштейнові рівності для циклічної перестановки, є достатньою для того, щоб матриця була горенштейнковою. Крім того, отримано явні формули, котрі виражають елементи горенштейнкової матриці, якій відповідає циклічна перестановка, через відому кількість параметрів.

Зазначений результат роботи [4] можна розглядати як опис таких горенштейнових матриць, яким відповідає циклічна перестановка.

Також роботи [2, 3] містять опис горенштейнових (0, 1)-матриць. Для формулювання цього опису необхідно розглянути два приклади матриць.

Приклад. Позначимо через H_n квадратну матрицю розміру n , всі наддіагональні елементи якої нульові і всі піддіагональні елементи якої дорівнюють одиниці. Матриця H_n є горенштейнковою з відповідною перестановкою

$$\sigma(H_n) = (n, n-1, \dots, 2, 1).$$

Приклад. Розглянемо матрицю

$$G_{2m} = \left(\begin{array}{c|c} H_m & H_m^{(1)} \\ \hline H_m^{(1)} & H_m \end{array} \right), \text{ де } H_m^{(1)} = E + H_m.$$

Ця матриця є горенштейнковою з перестановкою $\sigma(G_{2m}) = (1, 2m)(2, 2m-1) \dots (m, m+1)$.

Теорема 1. [2, 3] Горенштейнкова (0, 1)-матриця, еквівалентна або H_n , або G_{2m} .

Дана робота є продовженням роботи [6], в якій введено супермінімальні матриці.

Означення. Супермінімальною (0, 1)-матрицею показників називається така (0, 1)-матриця показників, яка є знаходиться у відношенні $\geq$ з жодною іншою невід'ємною матрицею показників.

В роботі [6] доведено, що кожна супермінімальна матриця з точністю до еквівалентності, реалізованої лише перетвореннями (і) означення еквівалентних матриць, має вигляд

$$A_{n,k} = \left(\begin{array}{c|c} O_k & U \\ \hline O & O_{n-k} \end{array} \right),$$

де $0 < k < n$, O_k та O_{n-k} - нульові квадратні матриці розміру k та $n-k$ відповідно. Матриця O нульова, усі елементи U дорівнюють 1.

Матрицю показників, утворену з матриці A одночасним переставленням рядків та стовпчиків, визначених перестановкою σ , позначатимемо через A^σ .

Розглядаючи (0, 1)-матриці показників визначимо їх множини дію об'єднання.

Означення [6]. Об'єднанням (0, 1)-матриць показників $A = (\alpha_{ij})$ та $B = (\beta_{ij})$ називатимемо матрицю $C = (\gamma_{ij}) = A \cup B$, елементи якої визначаються як $\gamma_{ij} = \max\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$.

Теорема 2. Об'єднання (0, 1)-матриць показників є (0, 1)-матрицею показників.

Доведення. Нехай цілочислова матриця $C = (\gamma_{ij})$ є об'єднанням (0, 1)-матриць показників $A = (\alpha_{ij})$ та $B = (\beta_{ij})$.

Вигляд кільцевих нерівностей такий, що (0, 1)-матриця C не є матрицею показників лише в тому разі, коли існують такі числа i, j, k , що $\gamma_{ij} = \gamma_{jk} = 0$ і при цьому $\gamma_{ik} = 1$.

Втім, рівності $\gamma_{ij} = \gamma_{jk} = 0$ означають, що $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \alpha_{jk} = \beta_{jk} = 0$. Ці рівності, враховуючи те, що матриці A та B є матрицями показників, означають, що $\alpha_{ik} = \beta_{ik} = 0$, але звідси випливає, що $\gamma_{ik} = 0$.

Останнє доводить теорему. $\square$

Теорема 3 (Опис (0, 1)-матриць показників). Кожна (0, 1)-матриця показників є об'єднанням супермінімальних матриць.

Доведення. Для супермінімальної матриці теорема тривіальна.

Нехай $A = (\alpha_{ij})$ - довільна (0, 1)-матриця показників. Розглянемо всі супермінімальні матриці показників $B_1, \dots, B_t$, для яких виконуються нерівності $B_s \leq A$ при $1 \leq s \leq t$.

З нерівностей $B_1 \leq A$ та $B_2 \leq A$ випливає, що $B_1 \cup B_2 \leq A$. Це так, бо як означення часткового порядку, визначеного на матрицях, так

і конструкція об'єднання матриць є поелементними.

Аналогічним чином з міркувань індукції отримуємо, що

$$B_1 \cup \dots \cup B_t \leq A. \quad (1)$$

Покажемо, що виконується рівність

$$B_1 \cup \dots \cup B_t = A. \quad (2)$$

Враховуючи виконання нерівності (1), порушення рівності (2) означає, що існує елемент $\alpha_{ij} = 1$ матриці A , при тому, що для кожного елементу $\beta_{ij}^{(s)}$ матриці B_s , $1 \leq s \leq t$ виконується рівність $\beta_{ij}^{(s)} = 0$. Але вказана ситуація свідчить або про те, що матриця A є супермінімальною, або що список матриць B_s , $1 \leq s \leq t$ не є повним списком супермінімальних матриць, що знаходяться у відношенні $\leq$ з матрицею A .

Останнє доводить теорему. $\square$

Оскільки $(0, 1)$ -матриці показників утворюють частково впорядковану множину, то для неї застосовні всі поняття та справедливі всі ті теоретичні міркування, з допомогою яких вивчають частково впорядковані множини.

Однією важливих теорем, які описують частково впорядковані множини є доведена Ділворсом в роботі [1] теорема.

Теорема 4. Будь-яку частково впорядковану множину можна подати у вигляді об'єднання ланцюгів, кількість яких дорівнює ширині частково впорядкованої множини.

З означення супермінімальних матриць ясно, що ці матриці утворюють максимальний ланцюг попарно непорівняльних елементів частково впорядкованої множини $(0, 1)$ -матриць показників.

В роботі [6] показано, що кількість супермінімальних матриць розміру n становить $2^n - 2$.

Враховуючи скінченність множини $(0, 1)$ -матриць показників, довжина ланцюга цих матриць скінченна.

Теорема 5. Максимальна довжина ланцюга $(0, 1)$ -матриць показників розміру n дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$.

Доведення. Розглянемо матрицю $A_{n,n-1}$, тобто матрицю показників, у якій останній рядок, за винятком діагонального елементу дорівнюють одиниці, а решта елементів - нулі.

Об'єднуючи $A_{n,n-1}$ з матрицями $A_{n,n-2}$ та $A_{n,n-2}^{(34)}$, отримуємо матрицю $C_2 = A_{n,n-1} \cup A_{n,n-2} \cup A_{n,n-2}^{(34)}$, у якій останні два стовпчики, на винятком діагональних елементів дорівнюють одиниці, а решта - нулі.

Для кожного k , $2 \leq k \leq n$, побудуємо матрицю

$$C_k = C_{k-1} \cup_{i=n-k+1}^{n-k+1} A_{n,n-k}^{(n-k+1,i)}$$

З побудови випливає як відсутність довшого ланцюга $(0, 1)$ -матриць показників, так і те, що довжина побудованого ланцюга дорівнює сумі перших n натуральних чисел. $\square$

Література

1. Dilworth, Robert P. A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets, *Annals of Mathematics* T. 51 (1), 1950, p.p. 161-166.
2. M.A. Dokuchaev, V.V. Kirichenko, A.V. Zelensky, V.N. Zhuravlev, *Gorenstein Matrices*, // *Algebra and Discrete Math.* 2005, no. 1, pp. 8-29.
3. Kirichenko, V.V., Khibina, M.A. and Zhuravlev, V.N., *Gorenstein tiled orders with hereditary ring of multipliers of Jacobson radical* // *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, Vol. 9(1), 2001, 59-72.
4. Журавлев В.М., Черноусова Ж.Т., Циклічні горенштейнові порядки з малим числом вершин // *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.* 2002. №2. с. 33-40.
5. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами, *Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР*, 57 (1976), 100-116.
6. Кириченко В.В., Платотних М.В., Супермінімальні горенштейнові матриці // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*, №2, 2011, с. 20-22.
7. Кириченко В.В. О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках, *Труды мат. инст. им. Стеклова*, 148, (1978), 168-174.

Надійшла до редакції 04.03.2011

УДК 512.53, 512.64

Э. М. Костишин, студентка

**Об абсолютно неразложимых
немодулярных матричных
представлениях полугрупп
 $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$**

В работе описаны конечномерные матричные неразложимые представления полугрупп вида $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$ над полем характеристики $p \neq 2$ (T_2 – полугруппа всех преобразований двухэлементного множества), такие что их ограничения на все сомножители T_2 являются неразложимыми представлениями.

Ключевые слова: матрица, полугруппа, представление, абсолютная неразложимость.

E-mail: elina.kostyshyn@mail.ru

Статью представил доктор физ.-мат. наук, профессор Кириченко В.В.

1 Введение

Матричные представления полугрупп над полями изучены не в такой степени, как представления групп. Наибольшее число работ посвящено изучению неприводимых представлений полугрупп (в частности, изучению полугрупп, все неразложимые представления которых являются неприводимыми [1, 2]). Среди других случаев следует выделить случай конечной вполне простой полугруппы [3] и случай полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением [4].

Каждая конечная полугруппа изоморфна некоторой подполугруппе конечной симметрической полугруппы (полугруппы всех отображений конечного множества в себя). Отсюда следует, что изучение симметрических полугрупп является важным не только для самих полугрупп, но и для их матричных представлений. Матричные представления (а точнее соответствующие им модули) симметрических групп в немодулярных случаях изучались в работах [5, 6]. В частности, в первой из этих работ описаны представления полугруппы T_2 всех преобразований множества из двух элементов над полем характеристики $p \neq 2$ (модулярные

E. M. Kostyshyn, student

**On absolutely indecomposable
non-modular matrix representations of
the semigroups $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$**

This paper describes the finite-dimensional matrix indecomposable representations of the semigroups of the form $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$ (T_2 denotes the semigroup of all transformations of a two-element set) such that their restrictions to all factors T_2 are indecomposable representations.

Key Words: matrix, semigroup, representation, absolutely indecomposableness.

матричные представления полугруппы T_2 , т.е. над полем характеристики 2, описаны в работе [7]). В настоящей работе изучаются представления полугрупп $T_2 \times T_2 \times \dots \times T_2$ (число сомножителей равно $m > 1$) над полем характеристики $p \neq 2$.

2 Предварительные сведения

Пусть T_2 обозначает полугруппу всех преобразований множества $\{1, 2\}$, а k поле характеристики $p \neq 2$. Полугруппа T_2 состоит из четырех элементов e, a, b, c : $e(1) = 1, e(2) = 2; a(1) = 2, a(2) = 1; b(1) = 2, b(2) = 2; c(1) = 1, c(2) = 1$. Конечномерные неразложимые модули над полугрупповой алгеброй kT_2 описаны (с точностью до изоморфизма) в работе [5]. Чтобы переформулировать этот результат на языке матричных представлений, зафиксируем систему образующих полугруппы T_2 , взяв в качестве образующих элементы e, a, b (это система образующих, поскольку $c = ba$). Учитывая, что элемент e является единицей полугруппы и, кроме того, $a^2 = e, b^2 = b, ab = b, ba = c, c^2 = c, ac = c, bc = c, ca = b, cb = b$, легко видеть (после подстановки ba вместо c), что для образующих e, a, b определяющими являются следующие соотношения:

- 1) $e^2 = e, ea = ae = a, eb = be = b;$
- 2) $a^2 = e, b^2 = b;$
- 3) $ab = b.$

Матричное представление размерности n полугруппы T_2 над полем k — это (согласно общему определению матричного представления полугруппы) произвольный гомоморфизм $X : T_2 \rightarrow M_n(K)$ полугруппы T_2 в полугруппу $M_n(K)$ всех квадратных матриц порядка n над полем k (n — натуральное число). Будем считать при этом, что $X(e)$ является единичной матрицей E (это условие не является по сути ограничением общности, так как при этом теряется всего лишь одно неразложимое представление, которое имеет размерность 1 и каждому элементу полугруппы сопоставляет нулевую матрицу; см., например, работу [7]); аналогичное условие будем налагать также на матричные представления всех полугрупп, которые встречаются ниже. Тогда представление $X : T_2 \rightarrow M_n(K)$ однозначно задается парой матриц

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

которые удовлетворяют следующим равенствам: $A^2 = E, B^2 = B, AB = B$. Мы будем в дальнейшем отождествлять матричное представление X с соответствующей ему парой матриц R .

Сформулируем теперь упоминаемый выше результат работы [5] на языке матричных представлений.

Теорема 1. *Неразложимые матричные представления полугруппы T_2 над полем k (характеристики $p \neq 2$) исчерпываются, с точностью до эквивалентности, следующими представлениями:*

- 1) $a \rightarrow 1, \quad b \rightarrow 0;$
- 2) $a \rightarrow -1, \quad b \rightarrow 0;$
- 3) $a \rightarrow 1, \quad b \rightarrow 1;$
- 4) $a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Таким образом, полугруппа T_2 имеет конечный представленийский тип над произвольным полем характеристики $p \neq 2$.

Указанные в теореме неразложимые представления будем обозначать соответственно через R_1, R_2, R_3, R_4 .

3 Основной результат

Пусть $T(m)$, где $m > 1$ — натуральное число, обозначает полугруппу $T_2^{(1)} \times T_2^{(2)} \times \dots \times T_2^{(m)}$, где $T_2^{(1)} = T_2^{(2)} = \dots = T_2^{(m)} = T_2$. Образующие e, a, b полугруппы $T = T_2^{(i)}$ будем обозначать через $e^{(i)}, a^{(i)}, b^{(i)}$. Поле k , как и выше, имеет характеристику, отличную от двух. Ограничение матричного представления R полугруппы $T(m)$ на сомножитель $T_2^{(i)}$ будем обозначать через $R^{(i)}$.

Матричное представление X полугруппы $T(m)$ называется абсолютно неразложимым, если его ограничения на все сомножители $T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, \dots, T_2^{(m)}$ являются неразложимыми представлениями (это определение предложил профессор В. М. Бондаренко).

Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 2. а) *Все абсолютно неразложимые представления полугруппы $T(m)$ над полем k являются одномерными.*

б) *Любое абсолютно неразложимое представление R полугруппы $T(m)$ над полем k имеет следующий вид: $R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \dots, R^{(m)} = R_{p_m}$, где $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_m \leq 3$ (представление R существует для любых $p_1, p_2, \dots, p_m$).*

4 Доказательство теоремы 2

Докажем сначала одно свойство, связанное с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

неразложимого представления R_4 полугруппы T_2 . А именно, если матрица

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что $AY = YA$ и $BY = YB$, то Y является скалярной матрицей.

После умножения матриц в левой и правой частях первого (соответственно второго) матричного равенства получаем четыре скалярные равенства, которые будем обозначать $a(1,1), a(1,2), a(2,1), a(2,2)$ (соответственно $b(1,1), b(1,2), b(2,1), b(2,2)$); здесь пара (i,j)

после символа a (соответственно b) означает, что соответствующее скалярное равенство получается умножением i -ой строки матрицы A (соответственно матрицы B) на её j -ый столбец. Легко видеть, что указанные скалярные равенства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a(1,1) : y_{11} &= y_{11}, \\ a(1,2) : y_{12} &= -y_{12}, \\ a(2,1) : -y_{21} &= y_{21}, \\ a(2,2) : -y_{22} &= -y_{22}, \\ b(1,1) : y_{11} + y_{21} &= y_{11}, \\ b(1,2) : y_{12} + y_{22} &= y_{11}, \\ b(2,1) : 0 &= y_{21}, \\ b(2,2) : 0 &= -y_{21}. \end{aligned}$$

Поскольку характеристика поля k не равна двум, то равенство $a(1,2)$ эквивалентно равенству $y_{12} = 0$, а равенство $a(2,1)$ эквивалентно равенству $y_{21} = 0$. Значит матрица Y является диагональной. Поскольку $y_{12} = 0$, то равенство $b(1,2)$ означает, что $y_{22} = y_{11}$, а значит диагональная матрица Y является скалярной, что и требовалось доказать.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.

Рассмотрим сначала её первое утверждение а). Пусть R — абсолютно неразложимое представление полугруппы $T(m)$. Из теоремы 1 и определения абсолютно неразложимых представлений следует, что представление R одномерно или двумерно. Предположим, что R двумерно (и покажем, что в этом случае имеем противоречие). Тогда (опять же в силу определения абсолютно неразложимых представлений) ограничение $R^{(1)}$ представления R на подполугруппу $T_2^{(1)}$ эквивалентно представлению R_4 . Без ограничения общности можно считать, что $R^{(1)} = R_4$ (так как представление R можно заменить любым эквивалентным ему представлением).

Положим $A^{(1)} = R(a^{(1)})$, $B^{(1)} = R(b^{(1)})$, $A^{(2)} = R(a^{(2)})$, $B^{(2)} = R(b^{(2)})$. Поскольку в полугруппе $T(m)$ элементы подполугрупп $T_2^{(1)}$ и $T_2^{(2)}$ попарно коммутируют, то $A^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}A^{(1)}$, $A^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}A^{(1)}$, $B^{(1)}A^{(2)} =$

$A^{(2)}B^{(1)}$, $B^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}B^{(1)}$. Значит, если положить $A = A^{(1)}$, $B = B^{(1)}$ и $Y = A^{(2)}$ (соответственно $Y = B^{(2)}$), то из доказанного выше свойства матриц имеем, что матрица $A^{(2)}$ (соответственно $B^{(2)}$) является скалярной, а отсюда следует что представление $R^{(2)}$ разложимо, что противоречит тому, что R абсолютно неразложимо. Итак, представление R одномерно, что и требовалось доказать.

Утверждение б) теоремы 2 вытекает из утверждения а) и теоремы 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. М. Бондаренку за постановку задачи и ценные советы.

Литература

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — Т. 1 — Москва: "Мир", 1972. — 285 с.
2. Okninski, J. Linear representations of semigroups. — World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
3. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — 28. — С. 154–163.
4. Bondarenko Vitaliy M., Tertychna Olena M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. — 2008. — № 4. — Р. 15–22.
5. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1987. — Vol. 160. — С. 229–238.
6. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. — 2000. — № 3. — Р. 429–434.
7. Бондаренко В. М., Костишин Е. М. Модулярные изображения на полугруппе T_2 // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. — 2011. — Вип. 22. — С. 26–34.

Надійшла до редколегії 12.04.2011

УДК 519.21

Курченко О.О., д.ф.-м.н., професор,
Синявська О.О., аспірантка

Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі

Застосовано бакстерівський підхід для побудови сильно консистентної оцінки коефіцієнта регресії в одній спеціальній моделі. Знайдені інтервали надійності та оцінена швидкість збіжності.

Ключові слова: коефіцієнт регресії, гауссівський випадковий процес, бакстерівські суми, інтервал надійності, консистентна оцінка.

E-mail: olkurchenko@ukr.net, olja_sunjavska@ua.fm.

Статтю представив д.ф.-м. н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Теореми бакстерівського типу для випадкових процесів беруть початок від роботи П.Леві [11], в якій для стандартного броунівського руху $w(t), t \in [0, 1]$

$$\sum_{i=1}^{2^n} \left(w\left(\frac{i}{2^n}\right) - w\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right)^2 \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

з ймовірністю одиниці. Г.Бакстер [7] узагальнив цей результат для більш широкого класу гауссових випадкових процесів.

Останнім часом бакстерівські теореми для випадкових процесів та полів успішно застосовують для оцінювання у статистиці випадкових функцій. Прості в обчисленнях, ці статистики дозволяють отримати консистентні оцінки та побудувати області надійності без застосування граничних теорем у багатьох моделях. Так О.В. Бескліська та Р.С. Майборода [1] за допомогою бакстерівських статистик побудували оцінки та інтервали надійності для деяких параметрів коваріаційних функцій стаціонарних гауссових випадкових процесів, зокрема процесу Ориштейна-Уленбека. Р.С. Майборода [3] встановив асимптотичну нормальність бакстерівських оцінок для певного класу випадкових процесів. О.О. Курченко [4] застосував бакстерівський підхід для побудови сильно консистентної оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху. В останні роки дослідження даної тематики активно продовжується. Дж.-Кр. Бретон, І. Нурдін, Дж. Пецати [7], використовуючи бакстерівські статистики,

О.О. Курченко, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor

О.О. Synjavska, PhD student

Baxter estimate the regression coefficient in one model

We applied Baxter sums to construct a strong consistent estimate of the regression coefficient in one special model. The confidence interval and speed of convergence was found.

Key Words: regression coefficient, Baxter sum, Gaussian random process, confidence interval, consistent estimate.

побудували довірчі інтервали для параметру Хюрста одновимірний дробового броунівського руху із застосуванням нерівності концентрацій. Ж. Істас та Г. Ленг в [8] вивчали послідовність квадратів варіацій гауссового процесу і побудували консистентні оцінки індексу Гельдера.

Постановка задачі оцінювання

Нехай $\xi_1(t), \xi_2(t), t \in R$ – незалежні стаціонарні гауссові процеси з нульовим математичним сподіванням та коваріаційними функціями $r_1(t), r_2(t), t \in R$ відповідно.

За спостереженнями випадкового процесу

$$X(t) = \theta \xi_1(t) + \xi_2(t), t \in [0, 1], \quad (1)$$

у точках $\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n, n \geq 1$ потрібно побудувати консистентну оцінку коефіцієнта регресії, якщо відомо, що $\theta \in [0, d]$, знайти інтервали надійності та оцінити швидкість збіжності. Випадковий процес $\xi_2(t), t \in R$ у такій постановці задачі оцінювання – заважаючий параметр.

У цій статті ми побудуємо оцінку коефіцієнта регресії θ за допомогою бакстерівських статистик у наступних припущеннях:

(i) існують сталі $c > 0, a \geq 0, \alpha \in (0, 2), \delta > 0$ такі, що

$$|1 - r_1(h) - ch^a| \leq ah^{\alpha+\delta}, h \in (0, 1];$$

(ii) $r_1 \in C^{(2)}(R \setminus \{0\})$ та існує $L > 0$:

$$|r^*(\tau)| \leq \frac{L}{\tau^{2-\alpha}}, \tau \in (0,1];$$

(iii) існують сталі $\beta > \alpha$ та $b \geq 0$ такі, що

$$|1 - r_2(h)| \leq bh^\beta, h \in (0,1].$$

Перша й друга умова забезпечують збіжність з ймовірністю одиниці нормованої послідовності бакстерівських сум для випадкового процесу ξ_i

$$\tilde{S}_n^{(1)} = 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi_1 \left(\frac{k}{2^n} \right) - \xi_1 \left(\frac{k-1}{2^n} \right) \right)^2, n \geq 1.$$

до детермінованої додатної сталої $2c$. Завдяки третій умові

$$\tilde{S}_n^{(2)} = 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi_2 \left(\frac{k}{2^n} \right) - \xi_2 \left(\frac{k-1}{2^n} \right) \right)^2 \rightarrow 0$$

з ймовірністю одиниці при $n \rightarrow \infty$.

Покладемо

$$\tilde{S}_n = 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(X \left(\frac{k}{2^n} \right) - X \left(\frac{k-1}{2^n} \right) \right)^2, n \geq 1.$$

Для скорочення записів введемо наступні позначення:

$$\xi_{k,n}^{(1)} = \xi_1 \left(\frac{k}{2^n} \right) - \xi_1 \left(\frac{k-1}{2^n} \right),$$

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi_2 \left(\frac{k}{2^n} \right) - \xi_2 \left(\frac{k-1}{2^n} \right),$$

$$X_{k,n} = X \left(\frac{k}{2^n} \right) - X \left(\frac{k-1}{2^n} \right), 1 \leq k \leq 2^n, n \geq 1.$$

Теорема 1. Статистика $\tilde{\theta}_n = \sqrt{\frac{\tilde{S}_n}{2c}}, n \geq 1$ – сильно

консистентна оцінка коефіцієнта регресії θ .

Доведення. Обчислимо математичне сподівання $\tilde{S}_n$:

$$\begin{aligned} E\tilde{S}_n &= 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} E \left(\theta^2 \left(\xi_{k,n}^{(1)} \right)^2 + \left(\xi_{k,n}^{(2)} \right)^2 + 2\theta \xi_{k,n}^{(1)} \xi_{k,n}^{(2)} \right) = \\ &= 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\theta^2 E \left(\xi_{k,n}^{(1)} \right)^2 + E \left(\xi_{k,n}^{(2)} \right)^2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\theta^2 \left(1 - r_1 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) + \left(1 - r_2 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \right) = \\ &= 2^{n(a-1)} \cdot 2^n \left(\theta^2 \left(1 - r_1 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) + \left(1 - r_2 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

З припущення (i) випливає, що

$$1 - r_1 \left(\frac{1}{2^n} \right) \sim \frac{c}{2^{an}}, n \rightarrow \infty.$$

Тому

$$2^{n(a-1)} \cdot 2^n \cdot \theta^2 \left(1 - r_1 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \rightarrow 2c\theta^2, n \rightarrow \infty.$$

Далі, завдяки умові (iii),

$$\begin{aligned} 2^{n(a-1)} \cdot 2^n \cdot \theta^2 \left(1 - r_2 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) &\leq 2^{n(a-1)} \cdot b \cdot 2^n \cdot \\ &\cdot 2^n \cdot \left(\frac{1}{2^n} \right)^\beta = 2^{n(a-\beta)} \cdot 2b \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, $E\tilde{S}_n \rightarrow 2c\theta^2, n \rightarrow \infty$.

Тепер перейдемо до оцінки дисперсії $D\tilde{S}_n = E\tilde{S}_n^{(2)} - (E\tilde{S}_n)^2, n \geq 1$. Для обчислення дисперсії застосуємо формулу [5, с. 29] при числі змінних $n = 4$:

$$\begin{aligned} E(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) &= E(\eta_1 \eta_2) E(\eta_3 \eta_4) + \\ &+ E(\eta_1 \eta_3) E(\eta_2 \eta_4) + E(\eta_1 \eta_4) E(\eta_2 \eta_3) \end{aligned} \quad (2)$$

де випадкові величини $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням. Маємо:

$$\begin{aligned} E\tilde{S}_n^{(2)} &= 2^{2n(a-1)} \sum_{k,j=1}^{2^n} E(X_{k,n}^2 X_{j,n}^2) = \\ &= 2^{2n(a-1)} \sum_{k,j=1}^{2^n} \left(EX_{k,n}^2 X_{j,n}^2 + 2(EX_{k,n} X_{j,n})^2 \right); \\ D\tilde{S}_n &= E\tilde{S}_n^{(2)} - (E\tilde{S}_n)^2 = 2 \cdot 2^{2n(a-1)} \left(\sum_{k=1}^{2^n} (EX_{k,n}^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{2^n} (EX_{k,n} X_{j,n})^2 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Оцінимо $EX_{k,n}^2$ та $E(X_{k,n}X_{j,n})$. Маємо

$$\begin{aligned} EX_{k,n}^2 &= E(\theta \xi_{k,n}^{(1)} + \xi_{k,n}^{(2)})^2 \leq \\ &\leq 2E(\theta^2 (\xi_{k,n}^{(1)})^2 + (\xi_{k,n}^{(2)})^2). \end{aligned}$$

Із припущень (i), (iii) випливає, що

$$E(\xi_{k,n}^{(1)})^2 = 2 \left(1 - r_1 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \leq 2(c+a) \frac{1}{2^{2n}}; \quad (4)$$

$$E(\xi_{k,n}^{(2)})^2 = 2 \left(1 - r_2 \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \leq 2b \frac{1}{2^{2n}}. \quad (5)$$

Отже,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^{2n(a-1)} \sum_{k=1}^{2^n} (EX_{k,n}^2)^2 &= 2 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2^n (EX_{k,n}^2)^2 \leq \\ &\leq 2 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2^n \left(2\theta^2(c+a) \frac{1}{2^{2n}} + 2b \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \leq \\ &\leq 16 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2^n \left(\theta^4(c+a)^2 \frac{1}{2^{2n}} + b^2 \frac{1}{2^{2n}} \right) = \\ &= 16(\theta^4(c+a)^2 2^{-n} + b^2 2^{-n} 2^{2n(a-\theta)}). \quad (6) \end{aligned}$$

Далі, при $k < j$

$$\begin{aligned} E(X_{k,n}X_{j,n}) &= E(\theta \xi_{k,n}^{(1)} + \xi_{k,n}^{(2)})(\theta \xi_{j,n}^{(1)} + \xi_{j,n}^{(2)}) = \\ &= \theta^2 E(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)}) + E(\xi_{k,n}^{(2)} \xi_{j,n}^{(2)}), (E(X_{k,n}X_{j,n}))^2 \leq \\ &\leq 2\theta^4 (E(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)}))^2 + 2(E(\xi_{k,n}^{(2)} \xi_{j,n}^{(2)}))^2. \quad (7) \end{aligned}$$

Другий доданок правої частини нерівності (6) оцінимо за допомогою нерівності Коші-Буняковського та припущення (iii):

$$(E(\xi_{k,n}^{(2)} \xi_{j,n}^{(2)}))^2 \leq E(\xi_{k,n}^{(2)})^2 E(\xi_{j,n}^{(2)})^2 \leq 4b^2 \frac{1}{2^{2n\theta}}. \quad (8)$$

Тоді відповідна складова дисперсії $D\tilde{S}_n$ оцінюється так:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k < j}}^{2^n} 2E(\xi_{k,n}^{(2)} \xi_{j,n}^{(2)})^2 &\leq 8 \cdot 2^{2n(a-1)} \times \\ &\times 4b^2 \cdot 2^{2n} \frac{1}{2^{2n\theta}} = 32 \cdot b^2 \cdot 2^{2n(a-\theta)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Доданок $(E(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)}))^2$ при $k < j$ оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} (E(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)}))^2 &= \left(r_1 \left(\frac{j-k-1}{2^n} \right) - 2r_1 \left(\frac{j-k}{2^n} \right) + \right. \\ &\left. + r_1 \left(\frac{j-k+1}{2^n} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Покладемо $j-k=l$. Вираз

$r_{l,n} = r_1 \left(\frac{l-1}{2^n} \right) - 2r_1 \left(\frac{l}{2^n} \right) + r_1 \left(\frac{l+1}{2^n} \right)$ — це приріст другого порядку функції $r_1(\cdot)$ на відрізку $\left[\frac{l-1}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right]$. Тому з формули для приросту n -го порядку функції при $n=2$ [6, с. 244] слідує, що існує $\theta \in \left(\frac{l-1}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right)$:

$$r_{l,n} = r_1''(\theta_{l,n}) \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

При цьому відповідна складова дисперсії $D\tilde{S}_n$ оцінюється так:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2\theta^4 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k < j}}^{2^n} (E(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)}))^2 &= \\ &= 8 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot \theta^4 \sum_{l=1}^{2^n} (2^n - l) r_{l,n}^2 \leq 8 \cdot 2^{2n(a-1)} \times \\ &\times \theta^4 \left(2^n(c+a)^2 \frac{1}{2^{2na}} + \sum_{l=2}^{2^n-1} (2^n - l) \left(\frac{L}{\theta_{l,n}^{2-n}} \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \right) \leq \\ &\leq 8 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot \theta^4 \left(2^n(c+a)^2 \frac{1}{2^{2na}} + \right. \\ &\left. + 2^n \sum_{l=2}^{2^n-1} \left(\frac{L^2}{(l-1)^{2(2-n)}} \frac{1}{2^{4n}} \right) \right) = 8\theta^4(c+a)^2 2^{-n} + \\ &+ 8\theta^4 \cdot 2^{2n(a-1)} \cdot 2^n \sum_{l=2}^{2^n-1} \frac{L^2 2^{-2na}}{(l-1)^{2(2-n)}}. \end{aligned}$$

Для оцінки останнього доданка зауважимо,

що при $\alpha < \frac{3}{2}$ одержимо: $\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i^{2(2-\alpha)}} \leq \zeta(2(2-\alpha))$,

де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана, при $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i^{2(2-\alpha)}} \leq 1 + n \ln 2, \quad \text{а при } \alpha \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) -$$

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i^{2(2-\alpha)}} \leq 1 + \frac{2^{n(2\alpha-3)}}{2\alpha-3}.$$

Тоді при $\alpha < \frac{3}{2}$ вираз

$$8\theta^4 \cdot 2^{2\alpha(\alpha-1)} \cdot 2^n \cdot L^2 2^{-2\alpha} \sum_{i=2}^{2^n-1} \frac{1}{(i-1)^{2(2-\alpha)}} \text{ не пере-}$$

вищує вираз $2^{-n} \zeta(2(2-\alpha))$, при $\alpha = \frac{3}{2}$ не пере-

вищує $2^{-n}(1 + n \ln 2)$, а при $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ – вираз

$$2^{-n} + \frac{2^{-n(4-2\alpha)}}{2\alpha-3}.$$

Враховуючи співвідношення (3), (5), (8) та припущення $\theta \in [0, d]$, отримусмо наступну оцінку для дисперсії $D\hat{S}_n$:

$$D\hat{S}_n \leq 16(d^4(c+a)^2 2^{-n} + 2^{-n} 2^{2\alpha(\alpha-\beta)} b^2) + 32 \cdot 2^{2\alpha(\alpha-\beta)} + 8 \cdot d^4 L^2 m_n, \quad (10)$$

де при $\alpha < \frac{3}{2}$ буде $m_n = 2^{-n} \zeta(2(2-\alpha))$, при

$\alpha = \frac{3}{2}$ маємо $m_n = 2^{-n}(1 + n \ln 2)$, а при $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

$$\text{буде } m_n = 2^{-n} + \frac{2^{-n(4-2\alpha)}}{2\alpha-3}.$$

Для всіх значень параметра $\alpha \in (0, 2)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} D\hat{S}_n$ збігається, а тому [2, с. 24] $\hat{S}_n - E\hat{S}_n \rightarrow 0$ з ймовірністю одиниці при $n \rightarrow \infty$. Оскільки

$$E\hat{S}_n \rightarrow 2c\theta^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

то $\hat{S}_n \rightarrow 2c\theta^2$ з ймовірністю одиниці при $n \rightarrow \infty$, звідки випливає твердження теореми.

Приклад 1. Нехай $\xi_i(t)$, $t \in R$ – випадковий гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією $r_i(t) = e^{-\gamma|t|}$, $t \in R$ (процес Орнштейна-Уленбека), де $\gamma > 0$. Припущення (i) виконуються для

$\alpha = 1, c = \gamma, a = \frac{\gamma^2}{2}, \delta = 1$. Припущення (ii) також виконуються для $L = 1$.

Нехай $\xi_i(t)$, $t \in R$ – стаціонарний гауссовий процес, для якого умова (iii) виконуються.

Внаслідок теореми 1, $\hat{\theta}_n = \sqrt{\frac{\hat{S}_n}{2c}}$, $n \geq 1$ – сильно-но консистентна оцінка коефіцієнта регресії θ у моделі (1).

Інтервал надійності

Теорема 2. Нехай виконані припущення (i)-(iii). Тоді інтервал $(\sqrt{I_n(p)}, \sqrt{r_n(p)})$, де

$$I_n(p) = \max\left(0, \frac{\hat{S}_n - \alpha_n}{2c}\right), \quad r_n(p) = \frac{\hat{S}_n + \alpha_n}{2c},$$

$$\alpha_n = 2 \max\left(u_n, \sqrt{\frac{v_n}{p}}\right), \quad u_n = 2\left(\frac{ad^2}{2^{n\alpha}} + \frac{b}{2^{n(\beta-\alpha)}}\right),$$

v_n – права частина нерівності (10), ϵ інтервалом надійності для коефіцієнта регресії θ з коефіцієнтом довіри $1 - p$.

Доведення. Спочатку оцінимо $|E\hat{S}_n - 2c\theta^2|$, $n \geq 1$. Маємо:

$$|E\hat{S}_n - 2c\theta^2| = |2^{n(\alpha-1)} 2 \cdot 2^n \left(\theta^2 \left(1 - r_1\left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{c}{2^{n\alpha}} \right) + \left(1 - r_2\left(\frac{1}{2^n}\right) \right) \right)| \leq 2 \left(\frac{ad^2}{2^{n\alpha}} + \frac{b}{2^{n(\beta-\alpha)}} \right) =: u_n.$$

Для заданого рівня довіри $1 - p$ визначимо α_n так, щоб виконувалась нерівність

$$P\left\{\hat{S}_n - 2c\theta^2 > \alpha_n\right\} \leq p$$

Оскільки

$$|\hat{S}_n - 2c\theta^2| \leq |\hat{S}_n - E\hat{S}_n| + |E\hat{S}_n - 2c\theta^2|, \text{ то}$$

$$P\left\{\hat{S}_n - 2c\theta^2 > \alpha_n\right\} \leq P\left\{\hat{S}_n - E\hat{S}_n > \frac{\alpha_n}{2}\right\} +$$

$$+ P\left\{|E\hat{S}_n - 2c\theta^2| > \frac{\alpha_n}{2}\right\}.$$

Внаслідок нерівності Чебишова тром $\gamma = 1$. При цьому

$$P\left\{\left|\bar{S}_n - E\bar{S}_n\right| > \frac{\alpha_n}{2}\right\} \leq \frac{4D\bar{S}_n}{\alpha_n^2} \leq p, \quad \text{звідки} \quad \alpha = 1, \delta = 1, c = 1, a = \frac{1}{2}, L = 1.$$

Нехай, далі,
 $a_n \geq 2\sqrt{\frac{D\bar{S}_n}{p}}$. Якщо $\alpha_n \geq 2\left|E\bar{S}_n - 2c\theta^2\right|$, то $d = 1, b = 1, \beta = 2$. Тоді при $n \geq 5$
 $u_n = \frac{3}{2^n}, v_n \leq \frac{51}{2^n}$. При $p = 0.1$

$$P\left\{\left|E\bar{S}_n - 2c\theta^2\right| > \frac{\alpha_n}{2}\right\} = 0.$$

Отже, можна покласти

$$\alpha_n = 2 \max\left(u_n, \sqrt{\frac{v_n}{p}}\right).$$

Таким чином, нерівність

$$\left|\bar{S}_n - 2c\theta^2\right| \leq \alpha_n \quad (11)$$

виконується з ймовірністю, не меншою рівня до-
 віри $1 - p$. Залишилось помітити, що нерівність
 (11) еквівалентна ланцюжку нерівностей

$$\frac{\bar{S}_n - \alpha_n}{2c} \leq \theta^2 \leq \frac{\bar{S}_n + \alpha_n}{2c}.$$

Зокрема, при $\bar{S}_n \geq \alpha_n$ виконується

$$\sqrt{\frac{\bar{S}_n - \alpha_n}{2c}} \leq \theta \leq \sqrt{\frac{\bar{S}_n + \alpha_n}{2c}}.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Довжина інтервалу надійності
 не перевищує $\sqrt{\frac{\alpha_n}{c}}$.

Дійсно, якщо $\alpha_n \leq \bar{S}_n$, то

$$\sqrt{r_n(p)} - \sqrt{l_n(p)} = \sqrt{\frac{\bar{S}_n + \alpha_n}{2c}} - \sqrt{\frac{\bar{S}_n - \alpha_n}{2c}} =$$

$$= \frac{\frac{2\alpha_n}{2c}}{\sqrt{\frac{\bar{S}_n + \alpha_n}{2c}} + \sqrt{\frac{\bar{S}_n - \alpha_n}{2c}}} \leq \frac{\frac{2\alpha_n}{2c} \sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha_n}} = \sqrt{\frac{\alpha_n}{c}}.$$

При $\bar{S}_n < \alpha_n$ маємо:

$$\sqrt{r_n(p)} - \sqrt{l_n(p)} = \sqrt{\frac{\bar{S}_n + \alpha_n}{2c}} - 0 \leq \sqrt{\frac{\alpha_n}{c}}.$$

Приклад 2. Нехай, як і у прикладі 1, $\xi(\cdot)$ – ви-
 падковий процес Орнштейна-Уленбека з параме-

Як впливає із зауваження 1, довжина інтервалу
 надійності не перевищує $\sqrt{\alpha_n}$. Так при $n = 30$
 $\sqrt{\alpha_{30}} \approx 0.037$.

Приклад 3. Нехай $\xi_1(t), t \in R$ – випадковий га-
 усовський процес з нульовим математичним
 сподіванням та коваріаційною функцією

$$r_1(t) = 1 - \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma, \quad t \in R, \quad \text{де } \gamma \in (0, 1).$$

Дана коварі-
 аційна функція належить сімейству Дегума ізот-
 ропних коваріаційних функцій [7]. Припущення
 (i) виконується для $\alpha = \gamma, c = 1, a = 1, \delta = 1$. При-
 пущення (ii) також виконується для $L = 5$.

Нехай $\xi_2(t), t \in R$ – стаціонарний гауссовий
 процес, для якого умова (iii) виконується.

Покладемо далі $\alpha = 1, d = 1, b = 1, \beta = 2$. Тоді
 при $n \geq 5$ $u_n = \frac{4}{2^n}, v_n \leq \frac{393}{2^n}$. При $p = 0.1$

$$\alpha_n = 2 \max\left(\frac{4}{2^n}, \sqrt{\frac{3930}{2^n}}\right) < \frac{126}{\sqrt{2^n}}.$$

Як впливає із зауваження 1, довжина інтервалу
 надійності не перевищує $\sqrt{\alpha_n}$. Так при $n = 30$
 $\sqrt{\alpha_{30}} \approx 0.062$.

Швидкість збіжності оцінки

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір. θ –
 істинне значення коефіцієнта регресії.
 Означення. Нехай запис $V(n)$ означає, що твер-
 дження V виконується для натурального числа n .
 Кажуть, що твердження $V(\cdot)$ виконується зреш-
 тою на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , якщо
 існує $A \in F, P(A) = 0$ така, що для кожного
 $\omega \in \Omega \setminus A$ існує натуральне число $N(\omega) \in \Omega$, так-
 що для всіх $n \geq N(\omega)$ має місце $V(n)$.

Теорема 3. Нехай виконані припущення (i)-(iii).
Тоді зрештою виконуються нерівність:

$$|\hat{\theta}_n - \theta| < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{c}} \ln n \sqrt{v_n},$$

де v_n – права частина нерівності (10).

Доведення. Розглянемо послідовність

$$p_n = \frac{1}{n \ln^2 n}, n \geq 3. \text{ Для цієї послідовності}$$

$$P\{\theta \in (\sqrt{l_n(p_n)}, \sqrt{r_n(p_n)})\} \leq p_n.$$

Ряд із загальним членом $p_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$ збіжний і тому, внаслідок леми Бореля-Кантеллі, співвідношення $\theta \in (\sqrt{l_n(p)}, \sqrt{r_n(p)})$ з ймовірністю одиниця виконуються не більш, ніж для скінченного числа номерів. Для достатньо великих n , $n \ln n \sqrt{v_n} > u_n$. Враховуючи зауваження 1, отримуємо твердження теореми 3. Теорема доведена.

Зауваження 2. В ролі заважаючого параметра $\xi_2(\cdot)$ може виступати також випадкова функція $f_2(t)$, що задовольняє умові Ліпшиця із сталою $L_2 > 0$ та показником $\alpha_2 \in (0, 2)$, тобто

$$|f_2(t+h) - f_2(t)| \leq Lh^{\alpha_2}, \text{ де } \alpha_2 > \frac{\alpha}{2}.$$

Висновки

В роботі показано, що бакстерівські статистики можна застосовувати для побудови сильно козистентної оцінки коефіцієнта регресії θ за спостереженнями

$$X(t) = \theta \xi_1(t) + \xi_2(t), t \in [0, 1],$$

де випадковий процес $\xi_1(t)$ є бакстерівським, більш регулярним, ніж випадковий процес $\xi_2(t)$. При цьому вдається побудувати неасимптотичні області надійності та оцінити швидкість збіжності з ймовірністю одиниця.

На прикладі випадкового процесу Орнштейна-Уленбека та випадкового процесу із сімейства Дегума показано знаходження інтервалу надійності.

Список використаних джерел

1. Бескинская Е.П., Майборода Р.Е. О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов // Теория Вероятностей и Математическая Статистика. – 1990. – Вып. 43. – С. 13-19.
2. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории. – Киев: Вища школа. Головное изд-во: Пер. с англ., 1983. – 224 с.
3. Майборода Р.Е. Асимптотична нормальність бакстерівських оцінок параметрів нестационарних процесів // Теорія Ймовірностей і Математична Статистика. – 1995. – Вип. 53. – с. 97-102.
4. Курченко О.О. Однa сильно козистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія Ймовірностей і Математична Статистика. – 2002. – Вип. 67. – с. 45-54.
5. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы – М.: Наука, 1970. – 384 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // В 3-х т. – Т.1. – М.: Наука, 1969. – 607 с.
7. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – Vol. 7 (3). – 1956. – P. 522-527.
8. Berg C., Mateu J., Porcu E. The Dagum of isotropic correlation functions // Bernoulli Journal. – Vol. 14 (4). – 2008. – P. 1134-1149.
9. Breton J.-C., Nourdin I., Peccati G. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – Vol. 3. – 2009. – P. 416-425.
10. Istas J., Lang G. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – Vol. 33 (4). – 1997. – P. 407-436.
11. Levy P. Le mouvement Brownian plan // Amer. J. Math. – Vol. 62. – 1940. – P. 487-550.

Надійшла до редколегії 25.03.2011

УДК 512.55

В'ячеслав В. Швыров, асистент

Розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець

У роботі вивчається розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, нетерове кільце, кусково нетерове кільце, розмірність Круля кілець.

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1 Вступ. Основні визначення.

Розмірність Круля напівланцюгових кілець вивчалася багатьма авторами. Чаттерс у [7] доводить структурну теорему для первинних напівланцюгових кілець зі скінченною розмірністю Круля. М. Анхам [4] отримує структурну теорему для неінгугулярних напівланцюгових кілець з розмірністю Круля одиниця.

Напівланцюгові кусково нетерові кільця вперше з'явилися в роботі Н.М. Губарені і В.В. Кириченко [2]. Метою роботи є описання будови нерозкладних напівланцюгових кусково нетерових кілець і вивчення розмірності Круля таких кілець, а також вивчення властивостей напівланцюгових кілець зі скінченною розмірністю Круля. В роботі істотно використовуються результати робіт М. Анхам (Райт) [4], Н.М. Губарені, В.В. Кириченко [1], [2], Г. Пуніського [5].

Означення 1.1. Модуль M називається ланцюговим, якщо гратка його підмодулів утворює ланцюг, тобто множина всіх підмодулів модулю M є лінійно впорядкована відносно включення. Модуль називається напівланцюговим, якщо він розкладається у скінченну пряму суму ланцюгових модулів.

Означення 1.2. Кільце R називається ланцюговим справа, якщо R_R є правим ланцюговим модулем, тобто гратка правих ідеалів є лінійно впорядкована.

Означення 1.3. Кільце R називається напівланцюговим справа, якщо R_R є напівланцюговим модулем. Кільце яке є напівланцюгове справа та зліва називається напівланцюговим.

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

Krull dimension of serial piecewise noetherian rings

We learn Krull dimension of serial piecewise noetherian rings.

Key Words: serial ring, noetherian ring, piecewise noetherian ring, Krull dimension of the ring.

Означення 1.4. Нехай M – правий R -модуль. Розмірність Круля модуля M будемо позначати через $Kdim(M)$ і визначимо наступним чином: якщо $M = 0$, тоді $Kdim(M) = -1$; якщо α – ординал і $Kdim(M) \neq \alpha$, тоді $Kdim(M) = \alpha$, якщо не існує нескінченного убиваючого ланцюга

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

підмодулів M_i , таких, що для $i = 1, 2, \dots$ $Kdim(M_i/M_{i+1}) \neq \alpha$.

Якщо не існує ординалу α , такого, що $Kdim(M) = \alpha$, то будемо говорити, що M не має розмірності Круля.

Означення 1.5. Правую розмірність Круля кільця R називається розмірність Круля правого регулярного модуля R_R і будемо позначати її через $Kdim(R)$.

2 Розмірність Круля напівланцюгових кілець.

Для напівланцюгових кілець права та ліва розмірність Круля, якщо вони є визначені збігаються [9].

Визначимо для кільця R за допомогою трансфінітної індукції послдовність двобічних ідеалів $J(\alpha)(R)$. Покладемо $J(0)(R) = Jac(R)$ і $J(\alpha)(R) = \bigcap_{\beta < \alpha} J(\beta)(R)$, якщо α граничний ординал. Для $\alpha = \beta + 1$ ми покладемо $J(\alpha)(R) = \bigcap_{\eta \in \omega} J^\eta(\beta)(R)$.

Якщо кільце R має $Kdim(R_R) \leq \alpha$, тоді $J(\alpha)(R)$ – нільпотентний ідеал (див. [5]).

Твердження 1. ([5]) Нехай R – напівланцюгове кільце і α – найменший ординал, такий, що ідеал $J(\alpha)(R)$ нільпотентний. Тоді ліва і права розмірність Круля кільця R дорівнює α . В інших випадках обі розмірності не визначені.

Наступне твердження дає можливість обчислювати розмірність Круля напівланцюгового кільця за допомогою розмірностей діагональних компонентів.

Твердження 2. ([5]) Для кожного напівланцюгового кільця R і натурального t $Kdim(R) \geq t$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(R_i) \geq t$ для кожного i .

Первинний радикал $Pr(R)$ напівланцюгового кільця R з розмірністю Круля є нільпотентним ([7]).

Напівланцюгові неінгулярні базисні вивчалися у ([5]), якщо R напівланцюгове базисне нерозкладне неінгулярне кільце з розмірністю Круля одиниця 1. Тоді R ізоморфне кільцю виду

$$\begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_1 & \dots & D & \dots & D \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1 & \dots & V_1 & \dots & D & \dots & D \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & V_n & \dots & V_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & J_n & \dots & V_n \end{pmatrix},$$

де V_i ланцюгові нетерові області цілісності з радикалом Джекобсона J_i і загальним тілом часток D .

Наступний факт ([3]) корисний при обчислюванні розмірності Круля модулів з розмірністю Круля. Якщо модуль M має розмірність Круля, тоді $Kdim(M) \leq \sup\{Kdim(M/E) + 1 \mid E - \text{істинний підмодуль } M\}$.

Якщо R – спадкове нетерове первинне кільце, тоді $Kdim(R) \leq 1$ ([3]).

За визначенням розмірність Круля будь-якого артинового кільця є нуль. Отже напівланцюгові артинові кільця мають розмірність Круля нуль.

Твердження 3. Нехай R – напівланцюгове нетерове зліва і справа кільце. Тоді $Kdim(R) \leq 1$.

Доведення. Нехай J – радикал Джекобсона кільця R . Для напівланцюгових нетерових кілець $\cap J^n = 0$ ([7]). З цього $J(1) = \cap J^n = 0$ і

$J(1)$ є нільпотентний, за твердженням 1, якщо α є найменший ординал, такий, що $J(\alpha)$ є нільпотентний, тоді розмірність Круля дорівнює α . У артиновому випадку розмірністю Круля дорівнює нулю, з цього маємо $Kdim(R) \leq 1$.

Твердження 4. Нехай R напівланцюгове нетерове справа базисне кільце. Якщо сагайдак кільця R є цикла, то розмірність Круля кільця R дорівнює 1. Якщо сагайдак R є ланцюг, тоді розмірність Круля кільця R дорівнює 0.

Доведення. Нехай сагайдак кільця R є цикл. Тоді, за лемою 7.12 [5], якщо R є напівланцюгове нетерове справа кільце і сагайдак якого є цикл, тоді R є двобічно нетерове і $J(1)(R) = \cap_k Jac^k(R) = 0$. З цього випливає, що розмірність Круля R дорівнює 1.

Нехай сагайдак R є ланцюг, за лемою 7.6. [5], якщо R – напівланцюгове базисне нетерове справа, тоді всі модулі $e_i R$ мають скінченну довжину. Оскільки R є артинове і має розмірність Круля 0.

3 Розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець.

Означення 3.1. Кільце A називається кусково нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

- A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n$, таких, що $1 = e_1 + \dots + e_n$.
- $e_i A e_i$ – нетерове справа для кожного примітивного ідемпотента e_i , $i = 1, \dots, n$ (див. [1]).

Аналогічно визначаються кусково нетерові зліва кільця. Кусково нетерове зліва й справа кільце називається кусково нетеровим.

Відзначимо, що кожне нетерове справа кільце є кусково нетеровим. Кусково нетерові кільця можна розглядати як деяке узагальнення нетерових (справа, зліва) кілець, яке пов'язане з наступною теоремою

Теорема. (теорема 3.6.1. див. [1]) Нехай A довільне кільце з ідемпотентом $e^2 = e \in A$. Покладемо $f = 1 - e$, $eAf = X$, $fAe = Y$ і

$$A = \begin{pmatrix} eAe & X \\ Y & fAf \end{pmatrix}$$

відповідна декомпозиція Пірса кільця A . Тоді кільце A є нетеровим справа (артиновим) тоді

і тільки тоді, коли кільця eAe і fAf є нетеровими справа (артиновими), X – це скінченно породжений fAf -модуль і Y – скінченно породжений eAe -модуль.

Зокрема, відзначимо, що кожне напівланцюгове кільце є напівдосконалим, звідки – умова (i) означення завжди справедлива для таких кілець.

Наведемо також наступні факти про кусково нетерові кільця (див. [2]).

Зважаючи на теорему 3.6.1. [1] Напівланцюгове кусково нетерове справа кільце є кусково нетеровим зліва ([2]). Крім того, напівланцюгове кусково нетерове напівпервинне кільце є нетеровим див. [2].

Означення 3.2. Нехай $Pr(A)$ – первинний радикал кільця A . Кільце $A/Pr(A)$ називається діагональною A .

Теорема. ([3]) Якщо A напівланцюгове кусково нетерове кільце, тоді

- (1) первинний радикал $Pr(A)$ – нілпотентен;
- (2) діагональ A є нетеровою.

4 Властивості напівланцюгових кусково нетерових кілець.

Лема 1. Нехай A – кусково нетерове кільце, таке, що всі eAe для будь-якого локального ідемпотенту e є дискретно нормовані кільця. Тоді A є несингулярне напівспадкове кільце.

Доведення. За умовою eAe – дискретно нормовані кільця, для будь-якого локального ідемпотенту e , у цьому випадку $Pr(eAe) = ePr(A)e = 0$ і первинний радикал $Pr(A) = 0$. Через те, що сингулярний ідеал $Sing(A)$ міститься у первинному радикалі кільця, $Sing(A) = 0$. Звідси кільце A є несингулярне. За [11] напівланцюгове несингулярне кільце є напівспадковим зліва та справа.

Теорема 1. Якщо A нерозкладне напівланцюгове кусково нетерове кільце, таке, що eAe – дискретно нормовані кільця, для всіх локальних ідемпотентів e , тоді

- (a) A є несингулярне;
- (b) розмірність Круля кільця A дорівнює одиниці;
- (c) існують несингулярні, нерозкладні напівланцюгові нетерові кільця $T_1, T_2, \dots, T_n$ та T_i - T_j -бімодулі M_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, такі, що

(i) для $i > j > k$, $M_{ij} \otimes M_{jk} = M_{ik}$ і для $i < j$, $M_{ij} = 0$.

(ii) для $i > j$, як лівий T_i -модуль M_{ij} є прямою сумою t_j копій єдиного несингулярного нерозкладного ін'єктивного лівого T_i -модуля, де $t_j = \text{rank}(T_j)$;

(iii) для кожного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ існує точний несингулярний ланцюговий правий T_j -модуль X_j , який залежить тільки від j , такого, що для $i > j$, $M_{ij} \cong \otimes_{t_i}^i X_j$, де $t_i = \text{rank}(T_i)$;

(iv) для $i > j$ і для будь-якого скінченного породженого правого ідеалу $A \subseteq T_j$, каноничне відображення $\text{Hom}(T_j, M_{ij}) \rightarrow \text{Hom}(A, M_{ij})$ є епіморфізмом;

$$R \cong \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_{21} & T_2 & 0 & & 0 \\ M_{31} & M_{32} & T_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \dots & T_n \end{bmatrix}$$

Доведення. За умовою eAe – дискретно нормовані кільця для будь-якого локального ідемпотенту e . Отже, у цьому випадку $Pr(eAe) = ePr(A)e = 0$ і $Pr(A) = 0$. Через те, що сингулярний ідеал $Sing(A)$ міститься у первинному радикалі кільця, $Sing(A) = 0$. Звідси кільце A є несингулярне і пункт (a) доведено.

Покладемо $A_i = e_i A e_i$, $i = 1, \dots, n$. Зважаючи на твердження 2 і той факт, що A_i є двобічно нетерові кільця, які мають розмірність Круля, то й кільце A має розмірність Круля (ліву і праву).

За теоремою 9.6.3 (див. [1]) дискретно нормовані кільця є спадковими справа і зліва.

Будемо розглядати A_i як регулярний правий модуль (відповідно лівий). Через те, що кільце A_i – нетерове і спадкове, то всі праві (ліві) ідеали є скінченно породженими проективними підмодулями регулярного правого (лівого регулярного) модуля A_i , за [6], якщо P – модуль над нетеровим з двох боків кільцем, такий, що має розмірність Круля і такий, що всі його підмодулі є проективні, тоді $Kdim(P) \leq 1$. Отже $Kdim(A_i) \leq 1$ для кожного $i = 1, \dots, n$. За умовою A_i є дискретно нормованими кільцями, які є двобічно нетеровими і ланцюговими і мають розмірність Круля одиниця. Отже з твердження 2 випливає, що $Kdim(A) \geq t$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(A_i) \geq t$ для деякого натурального числа t . Звідси випливає.

що розмірність Круля напівланцюгового кусково нетерового кільця залежить від розмірностей Круля діагональних компонент розкладу. Одже $Kdim A = 1$, пункт (b) доведено.

Через те, що кільце є кусково нетерове $T_i = e_i R e_i$, де e_i – локальні ідемпотенти, T_i є напівланцюгові двобічно нетеріві нерозкладні і не-сінгулярні. Зважаючи на пункти (a) та (b) кільце A задовільняє всім умовам теореми 2.11 роботи [4] і (c) є вже доведено.

Теорема 2. Якщо A – нерозкладне напівланцюгове кусково нетерове кільце, таке, що $eAe = e$ тіла, для всіх локальних ідемпотентів e , тоді

(a) розмірність Круля кільця A дорівнює нулю;

(b) кільце A є двобічно артиновим кільцем.

Доведення. Позначимо $A_i = e_i A e_i$, $i = 1, \dots, n$, за умовою A_i є тіло, одже є просте і артинове кільце, розмірність Круля артинових кілець дорівнює 0. Отже, аналогічно доведено-му вище, маємо $Kdim A = 0$.

Діагональ кільця A є артиновою, отже для доведення (b) достатньо скористатися теоремою 4.11 (див. [2]), за якою напівланцюгове кільце з артиновою діагоналлю і T -нільпотентним первинним радикалом є двобічно артиновим. Через те, що первинний радикал у кільцях з артиновою діагоналлю збігається з радикалом Джекобсона кільця є досконалими справи і зліва див. 4.10 [2].

Твердження 5. Кожне напівланцюгове кусково нетерове кільце R з розмірністю Круля одиниця має класичне кільце часток яке є артинове і спадкове.

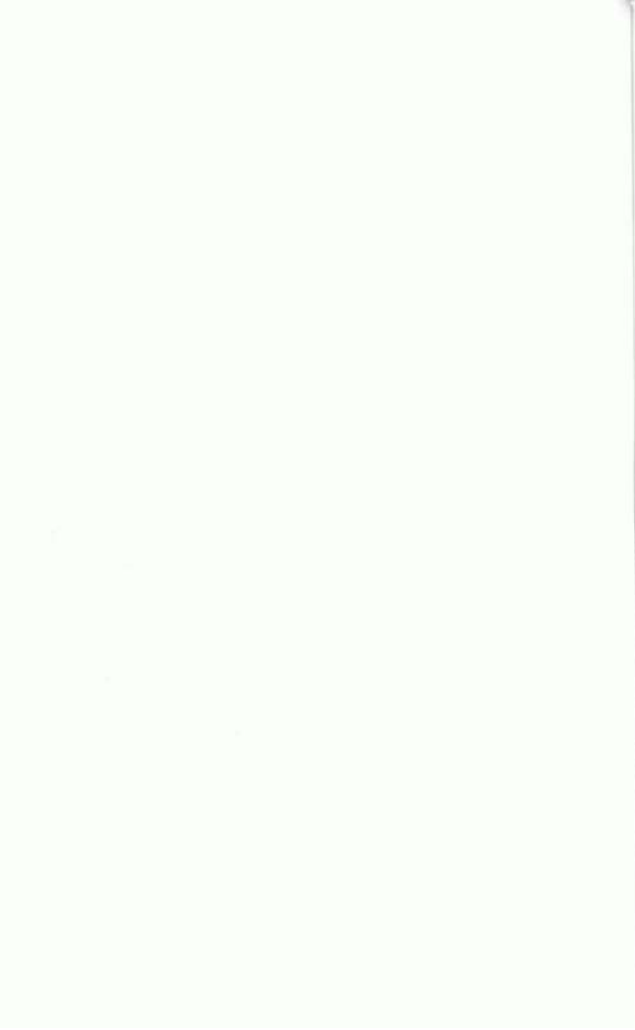
Доведення. За лемою 1 і з того, що $Kdim(R) = 1$ кільце R є несігулярне, за 5.12 [5] кожне несігулярне напівланцюгове кільце має класичне кільце часток, яке є артинове і спадкове. Отже через те, що R є несігулярне R має класичне артинове спадкове кільце часток.

Література

1. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Rings and Modules.*// Czestochowa. - 2001. - 306 p.
2. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.*// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings.*// Graduate Studies in Mathematics v. 30, -2001.
4. M. H. Upham, *Serial rings with right Krull dimension one.*// J. Algebra 109 (1987), 319-333.
5. G. Puninski, *Serial Rings.*// Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
6. S. Jondrup, *Projective modules with Krull dimension.*// Math. Scand. 51 (1982), 227-231
7. A.W. Chatters, *Serial rings with Krull dimension,* Glasgow Math. J. 32 (1990). 71-78.
8. Wright M. H. *Serial rings with Krull dimension one.* II. J. Algebra, 117 (1988), 99-116.
9. Wright M. H. *Krull dimension in serial rings.* J. Algebra, 124 (1989), 317-328.
10. Gordon R., Robson J.C., *Krull dimension.* Memoirs of the AMS, no. 133. 1973.
11. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules* // J. Algebra, v. 37 (1975), p.187-222.

Надійшла до редколегії 24.03.11

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**



УДК 620.179

Богданов В.Р., к.ф.-м.н., с.н.с., Сулим Г.Т., д.ф.-м.н., проф.

Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану із врахуванням розвантаження матеріалу

З використанням різницевих методів досліджується плоский напружений стан із врахуванням процесу розвантаження матеріалу тонкого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підростає за локальним критерієм крихкого руйнування.

Ключові слова: компактний зразок, пластична деформація, ріст тріщини.

*E-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Мелешко В.В.

1. Вступ. У працях [2-9] було запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. У публікації [6] розв'язана задача плоского деформованого стану. Просторовий напружено-деформований стан матеріалу визначається в роботі [3]. У публікації [4] розв'язана задача плоского напруженого стану з тріщиною, що рухається за умови відсутності максимальних напружень на вістрі тріщини. У публікаціях [5] і [7] розв'язуються плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого стану з тріщиною, що рухається за локальним критерієм крихкого руйнування. У публікаціях [2], [8] і [9] в'язкість руйнування визначається відповідно на основі зв'язку плоского напруженого стану, плоского деформованого стану і просторової задачі у припущенні, що тріщина є нерухомою. Запропоновані моделі дали можливість істотно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. В публікації [12] визначається напружено-деформований стан жорсткопластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

У цьому дослідженні на відміну від [5] враховується процес розвантаження матеріалу.

V. R. Bogdanov*, PhD, G. T. Sulym, Professor.

The Crack Growing in Compact Specimen by Plastic-Elastic Model of Planar Stress State with Counting of the Unloading of the Material

On the base of developed method of solving problems of planar stress state in non-stationary plastic-elastic model the problem of crack growing was solved using method of finite differences when non-stationary pressure is applied and material is under process of loading and unloading. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing by local criterion of brittle destruction.

Key Words: compact specimen, plastic deformation, crack growing.

2. Математичне формулювання задачі.

Розглядається деформування балкового зразка (компактного зразка) у формі прямокутника $\Sigma = L \times B$ ($0 \leq y \leq B$; $-L/2 \leq x \leq L/2$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$ і контактує з двома нерухомими опорами уздовж $\{L \leq |x| \leq L + a; y = 0\}$. Товщина w зразка вважається настільки малою, щоб можна було використовувати залежності плоского напруженого стану. Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Його дію на тіло замінимо рівномірною розподіленою в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = P_{01} + P_{02}t$. З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу тіла (рис. 1а). Вважатимемо, що матеріал є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх похідних, зокрема й похідних інтенсивності пластичних de_i^p , а також параметра Олківста $\kappa = \int de_i^p$ будемо нижче здійснювати на основі

числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу. Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії. Компоненти вектора зміщень $u = (u_x, u_y)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші. Рівняння руху середовища густиною ρ мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$



Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

Початкові і крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакцій, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статистики, запишуться так:

$$\begin{aligned} x=0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x=0, \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x=L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=0, \quad 0 < x < L: & \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0; \\ y=0, \quad L < x < L+a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=0, \quad L+a < x < L/2: & \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0; \\ y=B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \end{aligned}$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_y|_{x=0} = 0, \quad l|_{x=0} = l_0. \quad (1)$$

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичного течіння середовища із зміщенням за умови текучості Губера - Мізеса. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо [14]. Відповідно цієї моделі рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями мають вид [1]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^p, \quad \varepsilon_y^e = \frac{1}{2G} s_y + K\sigma, \quad d\varepsilon_y^p = s_y d\lambda. \quad (2)$$

тут $s_y = \sigma_y - \delta_y \sigma$ - компоненти девіатора тензора напружень; δ_y - символ Кронекера; G - модуль зсуву; $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$, $K = 3K_1$ - модуль об'ємного стиску, що зв'язує у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma$ об'ємне розширення 3ε ; E - модуль пружності; $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ - середнє напруження; ν - коефіцієнт Пуассона; $d\lambda$ - деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і квадратично залежить від компонент девіатора напружень s_y [14].

$$d\lambda = \begin{cases} 0 & (f = \sigma_y^2 - \sigma_s^2(T) < 0), \\ \frac{3d\varepsilon^p}{2\sigma_s} & (f = 0) \end{cases}$$

Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η . [13]: $\sigma_s(T) = \sigma_{s0}(T_0)(1 + \kappa(T)/\varepsilon_0)^\eta$,

$$\varepsilon_0 = \sigma_{s0}(T_0)/E, \quad T_0 = 20^\circ\text{C}, \quad (3)$$

де $\sigma_s(T)$ - межа текучості після зміцнення матеріалу за температури T , ε^p - інтенсивність деформацій як і в [2, 4, 5].

3. Схема розв'язування задачі.

Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t_1]$. Як і в [2, 4, 5] проводимо числове інтегрування за часом із використанням квадратурної формули Грегорі [15] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n і проводячи такі ж самі викладки отримаємо вирази для напружень і приростів деформацій як і в [2, 4, 5].

Для урахування фізичної нелінійності застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2, 4, 5]:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \quad \psi^{(n)} (|Q_i| < Q); \quad \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)} (Q_i > Q) \right\}, \quad Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T). \quad (4)$$

де Q - найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміщеної межі текучості; стала $0 \leq p \leq 1$.

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначалася для кожної елементарної комірки із числового розв'язку. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують із граничних значень коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_1 , отриманим із лінійно пружного розв'язку, то для опису зміни ок-

ремих характеристик у багатьох залежностях в ролі незалежного параметра (змінної) виберемо наближене значення КІН K_I^e (нижче називатимемо його пружним КІН) для багатьох залежностей для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [13]:

$$K_I^e = 12F\sqrt{l} \left[1,93 - 3,07(l/B) + 14,53(l/B)^2 - 25,11(l/B)^3 + 25,8(l/B)^4 \right] / \sqrt{Bh}. \quad (9)$$

Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався такий локальний критерій крихкого руйнування. Якщо в комірці 1, головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $S_C(\kappa) = [C_1 + C_2 \exp(-A_0 \kappa)]^{1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff} = \sigma_1 - \sigma_{02}$ при $\sigma_{02}(T) = a - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [5, 8], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки так, щоб біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри [8] a, c, b, h, C_1, C_2 і A_0 цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу. Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, тоді пластичні деформації зупиняють збільшуватися і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальних значень.

4. Числова реалізація. Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15X2НМФА застосовано метод скінчених різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox і Oy (N і M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір [2] комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). Використання методу скінчених різниць обґрунтовується в [10], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше ніж $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно

невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні і розв'язок задачі є суто лінійно пружним, збігалися із розрахованими для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей [13, п. 1.2] з використанням виразу (9) для КІН пружного розв'язку. На рис. 2 і 3 відображено результати обчислення величин за таких значень параметрів: $\eta = 0,05$; $L=60$ мм; $B=10$ мм; $l_0=3$ мм; $\Delta t=5 \cdot 10^{-4}$ с; $A=2,5$ мм; $p_{01}=8$ МПа; $p_{02}=10$ МПа; $M=60$; $N=77$, $T=50^\circ$.

Графіки розрахованої залежності напружень біля вістря тріщини (комірка 1, рис. 1б) (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу деформування зразка в разі перевищення пружним КІН K_I^e рівня $K_I^e = K_I^*, = 90,5$ МПа $\sqrt{м}$, напруження у цій точці монотонний характер збільшення змінюють на коливний.

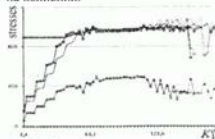


Рис. 2. Залежність напружень у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_I^e

Суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} напруження текучості σ_s та інтенсивність напружень σ_e . Пунктирна [5], пунктирна з трикутником, пунктирна з хрестиком і пунктирна з кружечком лінії стосуються відповідно таких же напружень задачі без врахування процесу розвантаження.

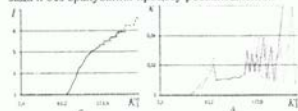


Рис. 3. Залежність від КІН K_I^e а). довжини тріщини l ; б). параметра Одкавіста κ у комірці 1.

На рис. 3 суцільна і пунктирна лінії відповідно дають результатам розрахунків відповідно із і без [5] врахування процесу розвантаження матеріалу. Обчислення виявили (рис. 3а), що довжина трі-

щини починає відрізнятися коли $K_I^* > K_{I,lim}^* = 126,9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$. Значення параметру Одквіста (рис. 3б) співпадають, коли пружний КІН набуває значень з інтервалу $75,3 \leq K_I \leq 120,8 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$.

Висновок. Розв'язування задачі плоского напруженого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на тріщинковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні із врахуванням процесу розвантаження з

врахуванням підростання тріщини за локальним критерієм крихкого руйнування дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, ніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского напруженого стану, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

Список використаних джерел

1. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану / В.Р. Богданов // Вісник Київського нац. університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56.
3. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини / В.Р. Богданов // Вісник Київського нац. університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56.
4. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
5. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
6. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теоретическая и прикладная механика, Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
7. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование подростания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механі-
- ки і міцності конструкцій», Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
8. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 152–160.
9. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений». – 2010. – № 33. – С. 153–166.
10. Зюкина Е.Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения / Е.Л. Зюкина // Труды математич. центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – т.26. – 2004 – С. 151–160.
11. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко – Киев: «Наукова думка», 1976. – 320 с.
12. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Прикл. механика – 2010. – 46, №3. – С. 70 – 76.
13. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов / М.П. Саврук // Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: «Наукова думка», 1988. – 620 с.
14. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с.
15. Хемминг Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг // – М.: Наука, 1972. – 399 с.

Надійшла до редколегії 15.09.11

УДК 517.949

Михайло Я. Бойко, аспірант

Про розв'язки із заданими значеннями
на границі різницевих рівнянь,
що залежать від двох індексів

Наведено достатні умови існування єдиного розв'язку із заданими значеннями на границі для різницевих рівнянь, що залежать від двох індексів, у дискретному та неперервному випадках.

Ключові слова: різницеве рівняння, розв'язок із заданими значеннями на границі, матричний вигляд, неперервний аналог.

E-mail: mishaboiko@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д. фіз.-м. н. М. О. Перестюк

1 Вступ

Мета цієї статті — отримати достатні умови існування єдиного розв'язку із заданими значеннями на границі для різничевого рівняння, що залежить від двох індексів, у дискретному та неперервному випадках. Дискретна система, що розглядається, є частковим випадком системи Россера зі зворотним зв'язком за станом [2]. Аналогічні результати для дискретного рівняння, що залежить від одного індекса, отримані у роботі [1].

2 Дискретний випадок

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір. Зафіксуємо натуральні числа p, q . В цьому просторі розглянемо систему рівнянь

$$x_{k,l} = x_{k-1,l} + x_{k,l-1} + F_{k,l}(x_{k-1,l}, x_{k,l-1}), \quad (1)$$

$$2 \leq k \leq p, \quad 2 \leq l \leq q,$$

де $F_{k,l}$ — відображення, що діють з $B \times B$ в B . Без обмеження загальності будемо вважати, що $p \geq q$. Будемо досліджувати питання існування єдиного розв'язку системи (1) за таких

Mykhailo Y. Boiko, PhD student

On the solutions with the values given on the boundaries of difference equations which depend on two indexes

For discrete and continuous cases we give sufficient conditions of existence and uniqueness of solution with the values given on the boundaries of difference equations which depends on two indexes.

Key Words: difference equation, solution with the values given on the boundary, matrix form, continuous analogue.

початкових умов:

$$x_{1,l} = a_l, \quad 2 \leq l \leq q-1; \quad (2)$$

$$x_{k,q} = b_k, \quad 1 \leq k \leq p,$$

причому значення $x_{1,1}$ нас не цікавить.

Запишемо рівняння системи (1) у такому порядку:

$$\begin{cases} x_{2,2} = x_{1,2} + x_{2,1} + F_{2,2}(x_{1,2}, x_{2,1}), \\ x_{3,2} = x_{2,2} + x_{3,1} + F_{3,2}(x_{2,2}, x_{3,1}), \\ \dots \\ x_{p,2} = x_{p-1,2} + x_{p,1} + F_{p,2}(x_{p-1,2}, x_{p,1}), \\ x_{2,3} = x_{1,3} + x_{2,2} + F_{2,3}(x_{1,3}, x_{2,2}), \\ x_{3,3} = x_{2,3} + x_{3,2} + F_{3,3}(x_{2,3}, x_{3,2}), \\ \dots \\ x_{p,3} = x_{p-1,3} + x_{p,2} + F_{p,3}(x_{p-1,3}, x_{p,2}), \\ \dots \\ x_{2,q} = x_{1,q} + x_{2,q-1} + F_{2,q}(x_{1,q}, x_{2,q-1}), \\ x_{3,q} = x_{2,q} + x_{3,q-1} + F_{3,q}(x_{2,q}, x_{3,q-1}), \\ \dots \\ x_{p,q} = x_{p-1,q} + x_{p,q-1} + F_{p,q}(x_{p-1,q}, x_{p,q-1}). \end{cases}$$

Це дозволить записати систему (1) у матричному вигляді. Для цього позначимо $\mathbf{x} := (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p-1)})^T$, де

$$\bar{x}^{(i)} = (x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{p,i})^T, 1 \leq i \leq q-1;$$

$$\bar{d} := (\bar{d}^{(1)}, \bar{d}^{(2)}, \dots, \bar{d}^{(q-1)})^T,$$

$$\text{де } \bar{d}^{(i)} = (a_{i+1}, 0, \dots, 0)^T, 1 \leq i \leq q-2,$$

$$\bar{d}^{(q-1)} = (b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{p-1} - b_p)^T;$$

$$A := \left(\begin{array}{ccccc} E & D & \dots & O & O \\ O & E & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E & D \\ O & O & \dots & O & E \end{array} \right)_{q-1};$$

$$E := \left(\begin{array}{ccccc} I & O & \dots & O & O \\ O & I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & I & O \\ O & O & \dots & O & I \end{array} \right),$$

$$O := \left(\begin{array}{ccccc} O & O & \dots & O & O \\ O & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & O & O \\ O & O & \dots & O & O \end{array} \right),$$

$$D := \left(\begin{array}{ccccc} -I & O & \dots & O & O \\ I & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & -I & O \\ O & O & \dots & I & -I \end{array} \right),$$

де E , O та D — матриці розмірності $(p-1) \times (p-1)$; $\bar{x}^{(i)}$, $\bar{d}^{(i)}$ — вектори розмірності $(p-1)$; I та O — одиничний та нульовий оператори в просторі B відповідно. Покладемо

$$F := (F_{2,2}, F_{3,2}, \dots, F_{p,2}, F_{2,3}, F_{3,3}, \dots, \\ F_{p,3}, \dots, F_{2,q}, F_{3,q}, \dots, F_{p,q})^T,$$

$$\text{тобто } F(\bar{x})_{((l-1)(p-1)+k-1)} = F_{k,l}(x_{k-1,l}, x_{k,l-1}), \\ 2 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q.$$

Отримаємо

$$-A\bar{x} = \bar{d} + F(\bar{x}). \quad (3)$$

Тут $\bar{x}$, $\bar{d}$ — елементи з простору $X := B^{(p-1)(q-1)}$, A — лінійний неперервний оператор, що діє з X в X і задається матрицею A , F — визначене вище відображення, що діє з X в X .

В просторі X введемо таку норму. Для $\bar{x} \in X$, $\|\bar{x}\|_X := \max_{1 \leq i \leq (p-1)(q-1)} \|x_i\|$.

Теорема 2.1. Нехай

$$\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in X: \|F(\bar{x}') - F(\bar{x}'')\|_X \leq C \|\bar{x}' - \bar{x}''\|_X, \quad (4)$$

причому стала C така, що $C \cdot (2^{q-1} - 1) < 1$.
Тоді рівняння (3) має єдиний розв'язок.

Доведення.

Легко переконатись, що оператор A має неперервний обернений оператор A^{-1} , який задається матрицею

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E & -D & \dots & (-1)^{q-3} D^{q-3} & (-1)^{q-2} D^{q-2} \\ O & E & \dots & (-1)^{q-4} D^{q-4} & (-1)^{q-3} D^{q-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E & -D \\ O & O & \dots & O & E \end{pmatrix},$$

де в свою чергу

$$D^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} I & O & \dots & O & O \\ K_n^1 I & I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_n^{p-3} I & K_n^{p-4} I & \dots & I & O \\ K_n^{p-2} I & K_n^{p-3} I & \dots & K_n^1 I & I \end{pmatrix}.$$

Тут під множенням матриці на число мається на увазі множення кожного елементу матриці на це число. Також $K_n^i = (-1)^i C_n^i$, де C_n^i — біноміальний коефіцієнт при $i \leq n$, $C_n^i = 0$ при $i > n$. Подіємо на (3) оператором A^{-1} . Дістанемо

$$-\bar{x} = A^{-1}\bar{d} + A^{-1}F(\bar{x}). \quad (5)$$

Будемо доводити, що права частина рівняння (5) є відображенням стиску. Для цього оцінимо норму оператора A^{-1} в просторі X . Просто показати, що коли оператор G задається в просторі X матрицею з елементами g_{ij} , то

$$\|G\| = \max_{1 \leq i \leq (p-1)(q-1)} \sum_{j=1}^{(p-1)(q-1)} |g_{ij}|.$$

В нашому випадку, цей максимум буде досягнутись в $p-1$ рядку. Тому

$$\|A^{-1}\| = \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{l=0}^k C_k^l = \sum_{k=0}^{q-2} 2^k = 2^{q-1} - 1.$$

Звідси випливає, що $A^{-1}\mathbf{F}(\bar{x}) + A^{-1}\bar{d}, x \in X$ — відображення стиску, а отже, внаслідок теореми Банаха про стискаючі відображення, рівняння (5) має єдиний розв'язок. Звідси випливає, що рівняння (3) має єдиний розв'язок. Теорему 2.1 доведено.

Зауваження 1. Умова (4) виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови.

Для будь-яких $k, l: 3 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q-1$, для будь-яких $x', x'', y', y'' \in B$ виконується

$$\|F_{k,l}(x', y') - F_{k,l}(x'', y'')\| \leq C \cdot \max\{\|x' - x''\|, \|y' - y''\|\}. \quad (6)$$

Для будь-яких $l: 2 \leq l \leq q-1$, для будь-яких $y', y'' \in B$ виконується

$$\|F_{2,l}(a_l, y') - F_{2,l}(a_l, y'')\| \leq C\|y' - y''\|. \quad (7)$$

Для будь-яких $k: 2 \leq k \leq p$, для будь-яких $x', x'' \in B$ виконується

$$\|F_{k,q}(b_{k-1}, x') - F_{k,q}(b_{k-1}, x'')\| \leq C\|x' - x''\|. \quad (8)$$

Доведення.

Достатність випливає із таких співвідношень:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\bar{x}') - \mathbf{F}(\bar{x}'')\|_X = & \max_{2 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q} \|F_{k,l}(x'_{k-1,l}, x'_{k,l-1}) - \\ & F_{k,l}(x''_{k-1,l}, x''_{k,l-1})\| \leq \\ & C \cdot \max_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q, 1 \leq k+l \leq q+p} \|x'_{k,l} - x''_{k,l}\| \leq \\ & C\|\bar{x}' - \bar{x}''\|_X. \end{aligned}$$

Необхідність. Нехай $\exists k^*, l^*, 3 \leq k^* \leq p, 2 \leq l^* \leq q-1$ такі, що

$$\begin{aligned} \exists x', x'', y', y'' \in B: \\ \|\mathbf{F}_{k^*,l^*}(x', y') - \mathbf{F}_{k^*,l^*}(x'', y'')\| > \\ C \cdot \max\{\|x' - x''\|, \|y' - y''\|\}. \end{aligned}$$

Розглянемо такі $\bar{x}', \bar{x}'' \in X$, що $x'_{k^*-1,l^*} = x', x'_{k^*,l^*-1} = y', x''_{k^*-1,l^*} = x'', x''_{k^*,l^*-1} = y''$. Для всіх інших $k, l, 2 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q-1$ виконується $x'_{k,l} = x''_{k,l}$. Тоді

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\bar{x}') - \mathbf{F}(\bar{x}'')\|_X = & \max_{2 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q} \|F_{k,l}(x'_{k-1,l}, x'_{k,l-1}) - \\ & F_{k,l}(x''_{k-1,l}, x''_{k,l-1})\| \geq \\ & \geq \|F_{k^*,l^*}(x', y') - F_{k^*,l^*}(x'', y'')\| > \\ & C \cdot \max\{\|x' - x''\|, \|y' - y''\|\} = C\|\bar{x}' - \bar{x}''\|_X. \end{aligned}$$

Отже умови (6) необхідні. Аналогічно доводиться необхідність умов (7,8).

3 Неперервний випадок

Нехай x — неперервна функція, що діє з $[0, p] \times [0, q]$ в R . Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} x(k+t, l+t) = \\ x(k-1+t, l+s) + x(k+t, l-1+s) + \\ f_{k,l}(x(k-1+t, l+s), x(k+t, l-1+s)), \\ 1 \leq k \leq p-1, 1 \leq l \leq q-1, \quad (9) \end{aligned}$$

з такими початковими умовами

$$\begin{aligned} x(t, s) = a(t, s), t \in [0, 1], s \in [1, q-1] \\ x(t, s) = b(t, s), t \in [0, p], s \in [q-1, q], \quad (10) \end{aligned}$$

причому $a(t, q-1) = b(t, q-1), t \in [0, 1]$,

де p, q — фіксовані натуральні числа; $f_{k,l}: R^2 \rightarrow R, 1 \leq k \leq p-1, 1 \leq l \leq q-1; a: [0, 1] \times [1, q-1] \rightarrow R, b: [0, p] \times [q-1, q] \rightarrow R$ — фіксовані неперервні функції. Без обмеження загальності будемо вважати, що $p \geq q$.

Для отримання потрібного результату в системі (1, 2) покладемо $B := C([0, 1])$ з рівномірною нормою, та

$$\begin{aligned} F_{k+1,l+1}(x, y)(t, s) &:= f_{k,l}(x(t, s), y(t, s)), \\ t, s \in [0, 1], 1 \leq k \leq p-1, 1 \leq l \leq q-1; \\ a_l(t, s) &:= a(t, s+l-1), 2 \leq l \leq q-1, \\ b_k(t, s) &:= b(t+k-1, s+q-1), \\ 1 \leq k \leq p; t, s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Далі система (1, 2) розглядатиметься саме у цьому випадку.

Справедлива така лема.

Лема 1. Наступні твердження еквівалентні:

- система (9, 10) має єдиний розв'язок.
- система (1, 2) має єдиний розв'язок, для якого виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} x_{k,l}(t, 1) &= x_{k,l+1}(t, 0), t \in [0, 1], \\ 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q-1, \\ x_{k,l}(1, s) &= x_{k+1,l}(0, s), s \in [0, 1], \\ 1 \leq k \leq p-1, 1 \leq l \leq q. \end{aligned} \quad (11)$$

Доведення. i) $\Rightarrow$ ii) нехай x — єдиний розв'язок системи (9, 10). Покладемо

$$x_{k,l}(t, s) := x(k-1+t, l-1+s), \\ 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q, t, s \in [0, 1].$$

Легко переконатись, що $\{x_{k,l}, 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\}$ — буде розв'язком системи (1, 2) і будуть виконуватись співвідношення (11).

Припустимо $\{\tilde{x}_{k,l}, 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\}$ — розв'язок системи (1, 2) для якого виконуються співвідношення (11), відмінний від $\{x_{k,l}, 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\}$. Покладемо

$$\tilde{x}(k-1+t, l-1+s) := \tilde{x}_{k,l}(t, s), \\ 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q, t, s \in [0, 1].$$

Легко переконатись, що $\tilde{x}$ — буде розв'язком системи (9, 10), що суперечить єдиності розв'язку системи (9, 10).

Імплікація ii) $\Rightarrow$ i) перевіряється аналогічно. Лему доведено.

Лема 2. Якщо для будь-яких k, l таких, що

$$1 \leq k \leq p-1, 1 \leq l \leq q-1 \quad \forall t', t'', s', s'' \in R$$

виконується

$$|f_{k,l}(t', s') - f_{k,l}(t'', s'')| \leq \\ C \cdot \max\{|t' - t''|, |s' - s''|\}, \quad (12)$$

то справедлива умова (4).

Доведення. Для довільних k, l , таких, що $2 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q$ і довільних $x', x'', y', y'' \in C[0, 1]$ виконується

$$\|F_{k,l}(x', y') - F_{k,l}(x'', y'')\| = \\ |f_{k-1,l-1}(x'(t^*, s^*), y'(t^*, s^*)) - \\ f_{k-1,l-1}(x''(t^*, s^*), y''(t^*, s^*))| \leq \\ C \cdot \max\{|x'(t^*, s^*) - x''(t^*, s^*)|, \\ |y'(t^*, s^*) - y''(t^*, s^*)|\} \leq \\ C \cdot \max\{\|x' - x''\|, \|y' - y''\|\}.$$

Тут t^*, s^* — точка в якій досягається значення норми.

Для будь-яких $x', x'' \in X$ виконується

$$\|F(x') - F(x'')\|_X = \\ \max_{2 \leq k \leq p, 2 \leq l \leq q} \|F_{k,l}(x'_{k-1,l}, x'_{k,l-1}) - \\ F_{k,l}(x''_{k-1,l}, x''_{k,l-1})\| \leq \\ C \cdot \max_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q, 1 \leq k+l \leq q+p} \|x'_{k,l} - x''_{k,l}\| = \\ C\|x' - x''\|_X.$$

Лему доведено.

Теорема 3.1. Нехай виконуються умова (12), причому стала C така, що $C \cdot (2^{q-1} - 1) < 1$. Тоді система (1, 2) має єдиний розв'язок. Якщо, додатково, для розв'язку системи (1, 2) виконуються умови (11), то система (9, 10) має єдиний розв'язок.

Доведення. Оскільки виконуються умова (12), то з леми 2 випливає, що виконуються умова (4), а отже можна застосувати теорему 2.1. Тому система (1, 2) має єдиний розв'язок. З леми 1 випливає друга частина твердження теореми. Теорему 3.1 доведено.

4 Висновки

У даліш роботі отримано достатні умови існування єдиного розв'язку із заданими значеннями на границі для різнищевих рівняння (1, 2) та його неперервного аналога (9, 10).

Список використаних джерел

- Бойко М. Я., Городній М. Ф. Про продовжуваність "вільно" розв'язків різнищевих рівняння. // Нелінійні коливання. — 2007. — т. 10, № 3. — С. 298–302.
- Гайшун И. В. Многопараметрические системы управления — Мн., Наука и техника. 1996. — 200с.

Надійшла до редколегії 1.07.2011

УДК 539.3

Григоренко О.Я., д.ф.-м.н., проф., Яремченко
Н.П., к.ф.-м.н., н.с., Яремченко С.М., к.ф.-м.н.,
с.н.с.

Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці

Розроблено підхід до дослідження напружено-деформованого стану гофрованих пластин, що базується на гіпотезі прямої лінії. Для зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної використано метод сплайноколлації, а одновимірну крайову задачу розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз напружено-деформованого стану пластин в залежності від частоти і амплітуди гофрування.

Ключові слова: гофрована пластина, уточнена постановка, напружено-деформований стан.

Grigorenko A.Ya., prof., Yaremchenko N.P., Ph.D.,
Yaremchenko S.N., Ph.D.

Design of stress-strain state of corrugated plates in refined formulation

The approach based on straight line hypothesis is developed for investigation of stress-strain state of corrugated plates. To reduce two-dimensional boundary value problem described stress-strain state of shell to one-dimensional one spline collocation method was used and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. The plates stress-strain state analysis was carried out in dependency on frequency and amplitude of corrugation.

Key Words: corrugated plates, refined formulation, stress-strain state.

E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Сучасні технології дозволяють створювати оболонкові конструкції різної форми з різних, в тому числі композитних, матеріалів. Тому часто необхідно перед створенням тієї чи іншої конструкції спрогнозувати вплив її форми на характер розподілу напружень і переміщень в заданому об'єкті.

В даній статті розглядається напружено-деформований стан гофрованих пластин в залежності від частоти і амплітуди гофрування при заданих навантаженнях і граничних умовах. Дослідження проводяться в рамках неklasичної теорії оболонок на основі уточненої моделі прямолинійного елемента [1, 2].

Слід відмітити, що аналізу механічних характеристик гофрованих об'єктів присвячена значна кількість робіт. Але, в більшості з них досліджуються замкнуті циліндричні тіла і оболонки як з повздожним [3, 5, 7], так і з коловим [5, 8-10] гофруванням. Деякі прості наближені методи розрахунку гофрованих мембран запропоновані в [6]. В статті [11] вивчалась стійкість гофрованих пластин, причому гофрована пластина розглядалась як полого оболонка.

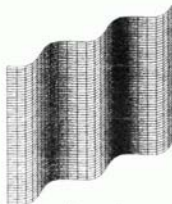


Рис.1. Вигляд гофрованої пластини

Дослідження вільних коливань гофрованих пластин проводилось в [2].

В даній роботі проведено розрахунок напружено-деформованого стану нетонких гофрованих пластин з використанням уточненої теорії типу Тимошенка [3].

Для розв'язання поставленої задачі було запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на зведенні двовимірної крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з допомогою застосування методу

сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків [4]. Отримана одновимірною крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації [1].

2. Постановка задачі

Будемо розглядати гофровану пластину як циліндричну оболонку з напрямною, яка задається рівнянням

$$x = t, \quad y = a \sin\left(\frac{\pi n t}{a}\right), \quad (1)$$

де a – довжина пластини по координаті x (тобто $0 \leq t \leq a$), a – амплітуда, n – частота гофрування.

Вінеємо середину поверхню оболонки до ортогональної системи координат s, t . Нехай y – координата, що перпендикулярна до поверхні оболонки, а b – довжина пластини по координаті s (тобто $0 \leq s \leq b$).

Перша квадратична форма серединної поверхні оболонки в цьому випадку

$$dS^2 = A_1^2 ds^2 + A_2^2 dt^2. \quad (2)$$

Для випадку циліндричної оболонки з довільною формою напрямної параметри Ламе $A_1 = 1, A_2 = A_2(t)$.

Якщо напрямна задана в вигляді (1), то середина поверхні оболонки буде мати вигляд, показаний на рис. 1 ($n=5$), при цьому $A_2 = \sqrt{1 + (y')^2}$, а кривизна оболонки визначається формулою

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

У відповідності з прийнятою гіпотезою для оболонки отримуємо лінійний закон розподілу переміщень по товщині

$$u_i(s, t, \gamma) = u_i(s, t) + \gamma \psi_i(s, t),$$

$$u_i(s, t, \gamma) = w_i(s, t). \quad (4)$$

В (4) u – переміщення точок координатної поверхні в напрямках s, t відповідно; ψ_s, ψ_t – повні кути повороту прямолінійного елемента.

Тоді вирази для деформацій будуть мати такий вигляд

$$\begin{aligned} e_s(s, t, \gamma) &= \varepsilon_s(s, t) + \gamma \kappa_s(s, t), \\ e_t(s, t, \gamma) &= \varepsilon_t(s, t) + \gamma \kappa_t(s, t), \\ e_{st}(s, t, \gamma) &= \varepsilon_{st}(s, t) + \gamma 2\kappa_{st}(s, t), e_{ss}(s, t, \gamma) = \gamma_s(s, t), \\ e_{tt}(s, t, \gamma) &= \gamma_t(s, t), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_t = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial t} + kw,$$

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s},$$

$$\kappa_t = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_t}{\partial t} - k\varepsilon_s, \quad 2\kappa_{st} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} + \frac{\partial \psi_t}{\partial s} - \frac{k}{A_2} \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\gamma_s = \psi_s - \theta_s, \quad \gamma_t = \psi_t - \theta_t,$$

$$\theta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \theta_t = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial t} + kv. \quad (6)$$

Рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{st}}{\partial t} + q_s = 0,$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial N_{st}}{\partial s} + kQ_t + q_t = 0,$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial Q_t}{\partial t} - kN_t + q_s = 0,$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{st}}{\partial t} - Q_s = 0,$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial s} - Q_t = 0. \quad (7)$$

Співвідношення пружності

$$N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, \quad N_t = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t,$$

$$N_{st} = C_{66}\varepsilon_{st} + 2kD_{66}\kappa_{st}, \quad N_{ss} = C_{66}\varepsilon_{ss},$$

$$M_s = D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_t, \quad M_t = D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_t,$$

$$M_{st} = M_{ts} = 2D_{66}\kappa_{st}, \quad Q_s = K_1\gamma_s, \quad Q_t = K_2\gamma_t, \quad (8)$$

де

$$C_{11} = \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_t}, \quad C_{12} = \nu_t C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_t h}{1 - \nu_s \nu_t},$$

$$C_{66} = G_{st} h, \quad D_{11} = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)},$$

$$D_{12} = \nu_t D_{11}, \quad D_{22} = \frac{E_t h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}, \quad D_{66} = \frac{G_{st} h^3}{12},$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{st}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{tr}. \quad (9)$$

В (9) h – товщина оболонки; E_s, E_t, ν_s, ν_t – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона по напрямках координатних осей, G_{st}, G_{tr}, G_{ss} – модулі поперечного зсуву.

Виберемо за невідомі функції компоненти вектора переміщення серединної поверхні оболонки u, v, w і повні кути повороту ψ_s, ψ_t , і запишемо розв'язувальну систему рівнянь в частинних похідних, яка описує напружений стан ортотропних циліндричних оболонок у вигляді:

$$L\bar{U} = 0, \quad (10)$$

де L – лінійний диференціальний оператор другого порядку, а $\bar{y} = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}$ – шукана вектор-функція.

Якщо краї пластини закріплені жорстко, то на всьому контурі мають місце такі граничні умови:

$$\bar{y} = 0. \quad (11)$$

Система рівнянь (10) разом з граничними умовами (11) утворюють двовимірну крайову задачу.

3. Метод розв'язання

Оскільки кривизна напрямної серединної поверхні пластини може значно змінюватись, то сплайн-апроксимацію будемо проводити вздовж твірної.

Розв'язок задачі представимо в вигляді:

$$\bar{y} = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j(t) \cdot \bar{\varphi}_j(s). \quad (12)$$

В (12) $\bar{a}_j(t) = \{u_j(t), v_j(t), w_j(t), \psi_{xj}(t), \psi_{yj}(t)\}$ – невідомі функції, а $\bar{\varphi}_j(s)$ – лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці [4], які задовольняють граничні умови (11). Тут $\cdot$ позначено покомпонентне множення векторів.

Підставляючи вирази (12) в розв'язувальні рівняння (10) і граничні умови (11), будемо вимагати точного їх задоволення в $N+1$ точці колокації s , вздовж твірної. В результаті отримаємо одновимірну крайову задачу, яку можна представити в вигляді:

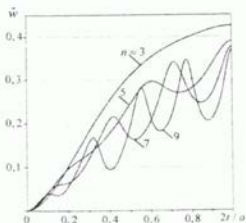


Рис. 2. Прогини $\hat{w} = \frac{wE}{q_0 10^3}$ вздовж координати t при $s = b/2$ в залежності від частоти гофрування

$$\frac{d\bar{z}}{d\theta} = A\bar{z} + \bar{f}; \quad (13)$$

$$B_1 \bar{z} = \bar{b}_1(t = t_1), B_2 \bar{z} = \bar{b}_2(t = t_2),$$

де $\bar{z} = \{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_N, \bar{a}'_0, \dots, \bar{a}'_N\}$ – вектор-функція від t ; $\bar{f}$ – вектор правих частин; A – квадратна матриця, елементи якої залежать від t ; B_1 та B_2 – матриці граничних умов, $\bar{b}_1$ і $\bar{b}_2$ – відповідні вектори. Одновимірна крайова задача (13) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [1]. Після підстановки значень $\bar{a}_j$ в (12) отримаємо розв'язок двовимірної крайової задачі.

4. Результати розрахунків

Розглянемо задачу про напружений стан ізотропної гофрованої пластини з поперечним перерізом у вигляді (2) товщини h при жорсткому закріпленні всіх країв, що знаходиться під дією нормально розподіленого тиску $q_y = q_0 = \text{const}$. Задача розв'язана при таких вихідних даних: $a = b = 10$; $h = 0.5$; $\nu = 0.3$.

На рис. 2 наведені розподіли прогинів $\hat{w} = \frac{wE}{q_0 10^3}$ вздовж координати t при $s = b/2$ в залежності від частоти гофрування (оскільки графіки симетричні, то вони наведені на інтервалі $0 \leq t \leq a/2$). Як видно з рисунка, зростання частоти істотно впливає на характер

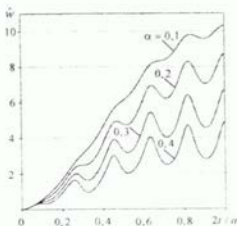


Рис. 3. Прогини $\hat{w} = \frac{wE}{q_0 10^3}$ вздовж координати t в перерізі $s = b/2$ в залежності від амплітуди гофрування

розподілу прогинів. При $n=3$ вплив гофрування на графіку для прогину помітати складно, але вже при $n=5$ монотонність пропадає, і маємо хвилястий характер поведінки прогинів. Максимальні прогини зменшуються зі збільшенням частоти гофрування. Піки на графіках для значень $n=5$, $n=7$ і $n=9$ співпадають з вершинами і впадинами гофра.

На рис. 3 наведені розподіли прогинів w вздовж координати t в перерізі $s=b/2$ в залежності від амплітуди гофрування при

$a=b=10$; $h=0,5$; $\nu=0,3$, $n=11$. Як видно із графіків, при $\alpha=0,1$ вплив гофрування на розподіли прогинів незначний, а крива прогину монотонна майже на всьому інтервалі. Але зі зростанням амплітуди до $\alpha=0,2$ картина істотно змінюється, і у кривій розподілу прогину з'являються піки. Слід також відмітити, що зі збільшенням α від 0,1 до 0,4 максимальні прогини зменшуються більш ніж у 2 рази.

Список використаних джерел

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // *Успехи мат. наук.* – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский., А.И. Шинкарь. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Григоренко Я.М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Г.П. Голуб. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
4. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, В.Л. Мирошнинченко. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
5. Немчи Ю.Н., Чернопиский Д.И. Упругое равновесие гофрированных тел / Ю.Н. Немчи, Чернопиский Д.И. – Киев: Наук. Думка, 1983. – 188 с.
6. Пономарев С.Д. Расчет упругих элементов машин и приборов / С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреева. – Москва: Машиностроение, 1980. – 326 с.
7. Семенюк Н.П. Устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова, И.Ю. Бабич // *Теор. и прикл. механика.* – 2009. Вып. 45. – С. 106–113.
8. Яремченко С.М. Напряжено-деформированный стан гофрированных цилиндрических оболочек в уточненной постановке / С.М. Яремченко // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 4. – С. 66–69.
9. Grigorenko Ya.M. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders / Ya.M. Grigorenko, L.S. Rozhok // *International Applied Mechanics.* – 2006 – 42, № 12. – P. 1389–1397.
10. Grigorenko Ya.M. Design of corrugated cylindrical shells under different end conditions / Ya.M. Grigorenko, L.I. Zakhariichenko // *International Applied Mechanics.* – 1999 – 35, № 9. – P. 897–905.
11. Kirilenko V.F. Stability of corrugated plates realized from an orthotropic material / V.F. Kirilenko // *International Applied Mechanics.* – 1976 – 12, № 2. – P. 122–125.

Надійшла до редколегії 17.08.2011

УДК 539.3

Тетяна Л.Єфімова, к.ф.-м.н., старший науковий співробітник.

Вільні коливання незамкнених циліндричних оболонок з неоднорідних матеріалів

Досліджуються вільні коливання неоднорідних незамкнених циліндричних оболонок при різних граничних умовах на краях на основі теорії Тимошенка – Міндіна. Для розрахунку частот застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку.

Ключові слова: неоднорідна циліндрична оболонка, вільні коливання, теорія Тимошенка – Міндіна, сплайн – апроксимація.

E-mail: Efimovatl@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

1 Вступ

Незамкнені циліндричні оболонки в якості конструктивних елементів знаходять широке застосування в сучасній техніці. Оскільки використання тривимірної моделі в багатьох випадках пов'язано зі значними труднощами, то при дослідженні динамічних характеристик оболонок середньої товщини використовується уточнена теорія оболонок. В науковій літературі є ряд робіт, присвячених дослідженню коливань однорідних і неоднорідних циліндричних оболонок постійної та змінної товщини на основі різних теорій [1-5].

В даному повідомленні для дослідження вільних коливань тонких циліндричних оболонок, неоднорідних в напрямку напружальності, в рамках уточненої теорії оболонок Тимошенка – Міндіна застосовується ефективна чисельна методика, яка базується на використанні сплайн – апроксимації даних, а також методу дискретної ортогоналізації з методом покрокового пошуку [2,4,5]. одновимірна крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації.

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу про вільні коливання кругових циліндричних оболонок в уточненій

Tatiana L. Efimova, PhD (Phys.-Math.), senior researcher

Natural vibrations of unclosed cylindrical shells from inhomogeneous materials

The problem on natural vibrations of inhomogeneous unclosed cylindrical shells under various boundary conditions on the basis of Timoshenko – Mindlin theory is considered. The numerically-analytical method is developed based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods.

Key Words: inhomogeneous cylindrical shell, natural vibration, Timoshenko – Mindlin theory, spline-approximation.

постановці, яка базується на гіпотезі прямої лінії. В відповідності до неї в системі координат γ, θ, z ($-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq z \leq L$) переміщення можна записати у вигляді

$$u_\gamma(\gamma, \theta, z) = w(\theta, z), \quad (1)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = v(\theta, z) + \psi_\theta(\theta, z),$$

$$u_z(r, \theta, z) = u(\theta, z) + \psi_z(\theta, z).$$

де $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$ – переміщення точок координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, z)$, $\psi_z(\theta, z)$ – функції, які характеризують повний поворот прямолінійного елемента. В відповідності до формул (1) вирази для деформацій приймуть вигляд

$$\epsilon_\theta(r, \theta, z) = \epsilon_\theta(\theta, z) + \gamma \kappa_\theta(\theta, z),$$

$$\epsilon_z(r, \theta, z) = \epsilon_z(\theta, z) + \gamma \kappa_z(\theta, z),$$

$$\epsilon_{rz}(r, \theta, z) = \epsilon_{rz}(\theta, z) + 2\gamma \kappa_{rz}(\theta, z), \quad (2)$$

$$\epsilon_{r\theta}(r, \theta, z) = \gamma_\theta(\theta, z),$$

$$\epsilon_{\theta z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z),$$

де

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\kappa_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\kappa_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_\theta &= \psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v.\end{aligned}$$

В (2,3) $\epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_{\theta z}$ – тангенціальні, $\kappa_\theta, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – згинні деформації координатної поверхні, γ_θ, γ_z – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння руху мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta + \rho h \omega^2 v &= 0, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \rho h \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \frac{h^3}{12} \psi_z &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial z} - Q_\theta + \rho \frac{h^3}{12} \psi_\theta &= 0,\end{aligned} \quad (4)$$

причому $N_{\theta z} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$. В (4) $N_z, N_\theta, N_{\theta z}, N_{\theta z}$ – тангенціальні, Q_θ, Q_z – перерізуючі зусилля; $M_\theta, M_z, M_{\theta z}, M_{\theta z}$ – згинні та зкрутучуючі моменти; $\rho(\theta, z)$ – густина матеріалу оболонки, h – товщина оболонки.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно серединної поверхні запишемо у вигляді

$$N_z = C_{11} \epsilon_z + C_{12} \epsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12} \epsilon_z + C_{22} \epsilon_\theta, \quad (5)$$

$$N_{\theta z} = C_{66} \epsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \kappa_{\theta z}, \quad M_z = D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta,$$

$$M_\theta = D_{12} \kappa_z + D_{22} \kappa_\theta, \quad M_{\theta z} = M_{\theta z} = 2D_{66} \kappa_{\theta z},$$

$$Q_\theta = K_2 \gamma_\theta, \quad Q_z = K_1 \gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66} \epsilon_{\theta z},$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{13}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{23},$$

де $G_{13}(\theta, z), G_{23}(\theta, z), G_{12}(\theta, z)$ – модулі поперечних зсувів, $E_1(\theta, z), E_2(\theta, z)$ – модулі Юнга, $\nu_1(\theta, z), \nu_2(\theta, z)$ – коефіцієнти Пуассона.

На криволінійних контурах $z=0$ і $z=L$ розглянемо такі граничні умови:

1) жорстке закріплення

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_z = 0;$$

2) шарнірне обпирання (контур вільний з напрямку твірної)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_\theta = 0.$$

При $\theta = \theta_1$ і $\theta = \theta_2$ можна задати один з видів таких граничних умов:

1) контур жорстко закріплений

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_z = 0;$$

2) контур шарнірно обертий

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0;$$

3) умови симетрії (для замкнених оболонок при $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ та симетрично неодиордних відносно $\theta = \theta_1$)

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0$$

Оскільки всі точки оболонки коливаються гармонічно з круговою частотою ω , переміщення та повні кути повороту можна представити у вигляді (надалі знак $-$ опускається).

$$u_r(\theta, z, t) = \tilde{u}_r(\theta, z) \exp(i\omega t),$$

$$u_\theta(\theta, z, t) = \tilde{u}_\theta(\theta, z) \exp(i\omega t),$$

$$u_z(\theta, z, t) = \tilde{u}_z(\theta, z) \exp(i\omega t),$$

$$\psi_\theta(\theta, z, t) = \tilde{\psi}_\theta(\theta, z) \exp(i\omega t),$$

$$\psi_z(\theta, z, t) = \tilde{\psi}_z(\theta, z) \exp(i\omega t). \quad (6)$$

Вибравши за невідомі функції компоненти вектора переміщення серединної поверхні оболонки u, v, w та повні кути повороту ψ_θ, ψ_z розв'язувальну систему рівнянь у частинних похідних можна записати у вигляді [2]

$$L_i \bar{f} = 0, \quad (7)$$

де L_i ($i = \overline{1,5}$) – лінійні диференціальні оператори другого порядку, а $\bar{f} = \{u(\theta, z), v(\theta, z), w(\theta, z), \psi_\theta(\theta, z), \psi_z(\theta, z)\}$.

Система рівнянь (7) з відповідними граничними умовами на контурах $z=0, L$ та $\theta=\theta_1, \theta_2$ являє собою двовимірну крайову задачу на власні значення.

3 Метод розв'язання

Задачу (7) з відповідними граничними умовами можна розв'язати з використанням методу сплайнів-колокації [2,4,5].

Розв'язувальні функції $u(\theta, z), v(\theta, z), w(\theta, z), \varphi_\theta(\theta, z), \varphi_z(\theta, z)$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} u(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(z), \quad v(\theta, z) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(z), \\ w(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(z), \quad \varphi_\theta(\theta, z) = \sum_{i=0}^N \varphi_{\theta i}(\theta) \varphi_{4i}(z), \\ \varphi_z(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N \varphi_{zi}(\theta) \varphi_{5i}(z). \end{aligned} \quad (8)$$

де $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \varphi_{\theta i}(\theta), \varphi_{zi}(\theta)$ – шукані функції змінної θ ; $\varphi_j(z)$ ($j=1,5, i=0, N$) – лінійні комбінації В-сплайнів на рівномірній сітці $\Delta: z=z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ з врахуванням граничних умов при $z=0$ та $z=L$. В розв'язувальну систему (7) входять похідні по координаті z не вище другого порядку, отже можна обмежитися апроксимацією сплайн-функціями третього степеня. Підставляючи вирази (8) в рівняння (7), вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно виконувались в $N+1$ точці колокації $\xi_k \in [0, L]$, $k=0, N$ [2,5,6]. В результаті отримаємо одновимірну крайову задачу

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega) \bar{Y}, \quad (9)$$

$$B_1 \bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_1,$$

$$B_2 \bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_2,$$

де $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\varphi}_\theta, \bar{\varphi}_z\}$, $\bar{u} = \{u_0, \dots, u_N\}$, $\bar{v} = \{v_0, \dots, v_N\}$, $\bar{w} = \{w_0, \dots, w_N\}$, $\bar{\varphi}_\theta = \{\varphi_{\theta 0}, \dots, \varphi_{\theta N}\}$, $\bar{\varphi}_z = \{\varphi_{z 0}, \dots, \varphi_{z N}\}$, A – квадратна матриця порядку $10(N+1) \times 10(N+1)$, B_1 та B_2 – прямокутні матриці граничних умов порядку $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь (9) з відповідними граничними умовами

розв'язувались стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації разом з застосуванням метода покровового пошуку [1].

Після підстановки $\bar{Y}$ в (8) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

4 Результати розрахунків

Для оцінки точності запропонованої методики та перевірки достовірності отриманих результатів проводилося порівняння перших трьох безрозмірних частот $\bar{\omega}_i = \omega_i h \sqrt{\rho/G}$ коливань циліндричної ізотропної однорідної оболонки з коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.3$ у таких випадках: А) незамкнена циліндрична оболонка з чотирма шарнірно обертими краями в рамках теорії Тимошенка – Міндліна ($\theta_1=0, \theta_2=\pi$); В) замкнена циліндрична оболонка з умовами симетрії при $\theta_1=0$ та $\theta_2=\pi$ [2]; С) замкнена циліндрична оболонка в рамках тривимірної моделі [5]. Геометричні параметри оболонок – $h=2$, $R=10$, $L=20$. При порівнянні відповідних частот (табл.1) виявлено повне співпадіння частот, отриманих для оболонок в рамках моделі Тимошенка – Міндліна, та незначне розходження з частотами оболонок в рамках тривимірної теорії.

Таблиця 1

ω_i	А	В	С
ω_1	0.0707	0.0707	0.0694
ω_2	0.0939	0.0939	0.0938
ω_3	0.0987	0.0987	0.0990

Досліджувались вільні коливання оболонок з гіпотетичного градієнтного матеріалу з напрямком градієнту вздовж координати θ . Вивчався вплив характеру зміни модуля Юнга на частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i h \sqrt{\rho/G}$ незамкненої оболонки з жорстко закріпленими торцями при $z=0, L$ та $\theta=0, \pi$. Закон зміни модуля Юнга був обраний у вигляді

$$E = E_0 \left(1 + a \left(6 \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right).$$

При такому виборі закону зміни модуля Юнга його середнє значення при будь-яких a дорівнює E_0 . Вважалося, що густина матеріалу та коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$ залишались постійними вздовж напрямку градієнта. Геометричні параметри незамкненої оболонки –

$h = 2$, $R = 10$, $L = 20$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$.
Проводилося порівняння частот коливань для різних значень параметра α (табл. 2). Максимальне розходження відповідних частот для розглянутих значень параметра α не перевищує 3%.

Таблиця 2

ω_i	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$
ω_1	0.1115	0.1097	0.1095
ω_2	0.1202	0.1177	0.1187
ω_3	0.1665	0.1684	0.1667

Розглядалися вільні коливання оболонки з полімерного градієнтного матеріалу з напрямком градієнту вздовж координати θ (табл. 3). Вивчався вплив зміни модуля Юнга на перші чотири частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i \frac{h}{2} \sqrt{\rho_{cp} / E_{cp}}$ незамкнутої оболонки з жорстко закріпленими торцями при $z = 0, L$ та $\theta = 0, \theta_2$. Закон зміни модуля Юнга вздовж координати θ вибирався у вигляді [4]

$$E = E_0 \left(243 - 59.6 \frac{\theta}{\theta_2} + 6.5 \frac{\theta^2}{\theta_2^2} \right)$$

($E_0 = 1$ МПа), причому вважалося, що коефіцієнт Пуассона залишається постійним $\nu = 0.4$ вздовж напрямку градієнта, що пов'язано з незначною відмінністю коефіцієнтів Пуассона утворюючих градієнтний матеріал полімерних матеріалів. Густина градієнтного матеріалу вважалася постійною і такою, що дорівнює усередненому

по θ значенню $\rho = \rho_{cp}$. Геометричні параметри оболонки – $h = 2$, $R = 10$, $L = 20$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/3$. Для порівняння в табл. 3 наведено частоти коливань $\bar{\omega}_i = \omega_i \frac{h}{2} \sqrt{\rho / E}$ однорідної незамкнутої циліндричної оболонки з вказаними вище геометричними параметрами та з $\nu = 0.4$: $E = E_{cp}$.

Таблиця 3

ω_i	Градiєнтний матеріал	Однорiдний матеріал
ω_1	0.1388	0.1097
ω_2	0.1618	0.1177
ω_3	0.2049	0.1684
ω_4	0.2172	0.2201

Максимальне розходження відповідних частот не перевищує 3%.

5 Висновки

- 1) Розроблено чисельно-аналітичну методику розрахунку частот вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок і неоднорідних матеріалів з застосуванням методу сплайні – апроксимації.
- 2) З використанням запропонованої методики досліджено поведінку частот незамкнутих жорстко закріплених циліндричних оболонок з градієнтних матеріалів, що мають квадратичний закон зміни модуля Юнга.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Теор. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 43. – С. 111–117.
3. Leissa A.W. Vibrations of shells. – NASA SP-288. – 1973. – 587 с.
4. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Бровко А.А., Горбач Л.Н. О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально градиентных материалов // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 92–99.
5. Ефимова Т.Л. Численное решение задачи о неосесимметричных свободных колебаниях ортотропных неоднородных цилиндров на основе метода сплайні – козлокації // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – №3 – С. 58–64.

Надійшла до редакції 09.03.11

УДК 519.8

Кузенков О.О., аспірант

Класифікаційна система точок рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь третього порядку

В роботі зроблена спроба систематизації простих та складних типів точок рівноваги лінійної системи трьох диференціальних рівнянь при різних характеристичних числах системи. Запропонована можлива класифікаційна система простих та складних станів рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь третього порядку.

Ключові слова: класифікація, фазовий портрет, точка рівноваги.

*E-mail: kuzenkov1986@mail.ru

Статтю представив акад. Перестюк М.О.

Вступ. Вперше класифікація особливих точок автономних лінійних систем диференціальних рівнянь другого порядку була запропонована в науковій роботі А. Пуанкаре.

В своєму підручнику В.І. Арнольдом та Ю.С. Ізьяшенко [1] не тільки було запропоновано повну класифікаційну систему точок рівноваги автономних лінійних систем диференціальних рівнянь другого порядку, але й наведено означення топологічної еквівалентності систем лінійних диференціальних рівнянь.

В роботі [2] розглянуто питання поведінки інтегральних кривих у випадку наявності уявних та відсутності нульових коренів характеристичного рівняння автономної лінійної системи диференціальних рівнянь в R^2 .

Серед книг зарубіжних авторів, в яких викладаються питання класифікації автономних лінійних систем диференціальних рівнянь в R^2 слід виділити книги таких авторів як С. Лефшец [3], Дж. Сансоне [4], Ф. Трикоми [5], Р. Деїст, С. David Levermore, С. Eugene Wayne [6] та ін.. При цьому в книзі [4] викладені лише можливі типи точок рівноваги для випадку дійсних коренів характеристичного рівняння.

Аналогічні результати були отримані і для автономних лінійних систем диференціальних рівнянь третього порядку, але повного опису точок рівноваги для таких систем досі не розроблено. Так, в роботі Арнольда [7]

О.О. Kuzenkov, post graduate student

The classification system of stationary points of 3-d linear system of differential equations

In this work made the attempt of systematization rational and irrational type of stationary point of phase space of 3-d linear system of differential equation of the way correspondent different characteristic number. Proposed the classification system of irrational and rational phase space stationary points of phase space of 3-d linear system of differential equation.

Key Words: classification, phase portrait, stationary point.

розглянуто можливі комбінації власних чисел для простих точок рівноваги лінійної системи в R^3 . Випадки коли дійсні частини власних чисел дорівнюють нулю винесені читачу на самостійний розгляд. Серед вироджених випадків досліджено лише вироджені випадки ковимірності 1. При цьому лише чотири топологічно нееквівалентні фазові портрети проілюстровані відповідними рисунками. Назви, аналогічно двовимірному випадку не запропоновані.

Повніший виклад питань, пов'язаних з класифікацією фазових портретів лінійних автономних систем в R^3 міститься в підручнику А.М.Самойленка [8], де подано варіанти гіперболічних та еліптичних не вироджених особливих точок лінійної системи в R^3 . Деякі точки проілюстровано фазовими портретами. Розглянуті деякі, але не всі випадки, пов'язані з рівністю нулю дискримінанту характеристичного рівняння. Як і у випадку попередньої роботи вироджені випадки досліджені лише для ковимірності 1, а розробки класифікаційної системи, що містила б повний перелік типів особливих точок, їх назв та відповідних фазових портретів не було зроблено.

В контексті питання класифікації лінійних систем важливою є теорема Гробмана-Хартмана [9], що говорить про топологічну еквівалентність нелінійних систем своїй лінійній частині в $\mathbb{R}^n$

околі особливий точки. Вона доводить, що використання класифікаційної системи для точок рівноваги лінійної системи є актуальним і у випадку дослідження нелінійних систем в R^n .

Підкреслимо, що при вирішенні прикладних задач, саме вироджені стани системи можуть якісно окреслити її загально-динамічні тенденції в станах біфуркації при катастрофах, колапсах та інших перебудовах.

В даній роботі запропонована одна з можливих, класифікаційних систем особливих точок лінійних систем диференціальних рівнянь в R^3 , що складається з 31-го типу.

Основний зміст. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь третього порядку у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z \\ \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z \\ \dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) має особливу точку $M(0;0;0)$. В своїй роботі Н. Н. Баутин та Е. А. Леонтович [10] пропонують називати особливу точку *простою* якщо $\Delta = \det(J)_M \neq 0$.

Очевидно, що якщо характеристичне рівняння має три дійсні, нерівні між собою корені, існує таке не вироджене перетворення

$$\begin{cases} \zeta = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ \eta = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ \rho = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{cases}, \text{ що приводить систему (1)}$$

до вигляду

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda_1 \zeta \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta \\ \dot{\rho} = \lambda_3 \rho \end{cases} \quad (2)$$

характеристична матриця якої матиме вигляд

$$G_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \text{ Інтегруючи (2) отримаємо}$$

$$\begin{cases} \zeta = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \eta = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \rho = C_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases}. \text{ Для якісного аналізу поведінки}$$

фазових траєкторій системи (1) в околі особливий точки – початку координат, перейдемо до границі.

Отже якщо

$$1. \lambda_1 > 0, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty; \lambda_1 < 0, \text{ а } \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0;$$

$$2. \lambda_2 > 0, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty; \lambda_2 < 0, \text{ а } \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0;$$

$$3. \lambda_3 > 0, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \infty; \lambda_3 < 0, \text{ а } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0.$$

Відомо, що за умови рівності нулю дискримінанта характеристичного рівняння системи (1) один з коренів характеристичного рівняння матиме кратність два (три). У такому випадку характеристична матриця системи (1) може приймати одну з таких можливих конфігурацій:

$$G_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

У випадку коли пара власних значень λ_2 та λ_3 є комплексно-спряженою матриця G_1 набуде

$$\text{комплексного вигляду } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

Для того щоб привести систему до найбільш простого, дійсного вигляду шляхом не виродженого перетворення виконаємо перехід

$$\begin{cases} \zeta = \zeta \\ \eta = U + iV \\ \rho = U - iV \end{cases} \text{ від } \eta, \rho \text{ до } U, V \text{ наступним чином}$$

звідки отримаємо

$$\begin{cases} U = (\eta + \rho)/2 \\ V = (\eta - \rho)/(2i) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{З (3) використовуючи (2) маємо } \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{\eta} + \dot{\rho}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_2 \eta + \lambda_3 \rho) = \frac{1}{2}[(\alpha + i\beta)(U + iV) + (\alpha - i\beta)(U - iV)] =$$

$$= \alpha U + \beta V \text{ аналогічно } \dot{V} = \alpha V - \beta U. \text{ Отже при умові коли в системі (2) } \lambda_2, \lambda_3 - \text{ комплексно-спряжені, існує таке не вироджене перетворення, що приводить систему (1) до вигляду}$$

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda_1 \zeta \\ \dot{U} = \alpha U + \beta V \\ \dot{V} = -\beta U + \alpha V \end{cases} \quad (4)$$

Характеристична матриця такої системи матиме вигляд

$$G_6 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Зробимо перехід в системі (4) до циліндричної системи координат.

$$\begin{cases} \zeta = \zeta \\ U = r \cos \theta \\ V = r \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

Шляхом перетворень, використовуючи рівність $U^2 + V^2 = r^2$ та (4) отримаємо $\dot{r} = \alpha \cdot r$, а згідно системи (5) маємо $\tan \theta = \frac{V}{U}$. Диференціюючи отримане тригонометричне рівняння, використавши (4) та (5) отримаємо $\dot{\theta} = \beta$. В результаті інтегрування системи (5) маємо:

$$\begin{cases} \zeta = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \beta \cdot t + \theta_0 \end{cases} \quad (6)$$

Перейдемо до границі:

1. $\alpha > 0$ то $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$; $\alpha < 0$ то $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$;
2. $\beta > 0$ то $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$; $\beta < 0$ то $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = -\infty$;
3. $\alpha = 0$ то $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \text{const}$;

Аналогічним чином можна довести, що коли два з трьох коренів характеристичного рівняння є повністю уявними але $\text{Det}(J) \neq 0$, характеристична матриця набуде вигляду

$$G_7 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

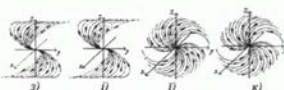
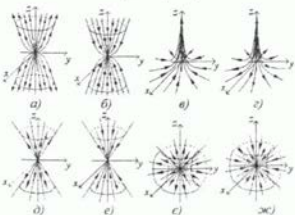


Рис.1 а - "Трьохвісний нестійкий вузол", б - "Трьохвісний стійкий вузол", в - "Стойке сідло", г - "Нестійке сідло", д - "Нестійкий двофазно-зірковий вузол", е - "Стойкий двофазно-зірковий вузол", ж - "Нестійкий трифазно-зірковий вузол", з - "Стойкий трифазно-зірковий вузол", и - "Нестійкий двофазно-вироджений вузол", і - "Стойкий двофазно-вироджений вузол", ї - "Нестійкий трифазно-вироджений вузол", к - "Стойкий трифазно-вироджений вузол".

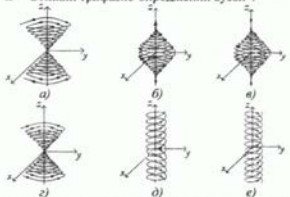


Рис.2 а - "Розбіжний нестійкий фокус", б - "Розбіжний стійкий фокус", в - "Збіжний нестійкий фокус", г - "Збіжний стійкий фокус", д - "Розбіжний центр", е - "Збіжний центр".

У випадку коли всі власні числа характеристичної матриці системи (1) дійсні та менше (більше) нуля, при проєкції фазових траєкторій на всі три площини буде утворений стійкий (нестійкий) вузол. Тому вважаємо за доцільне застосувати для таких особливих точок назви "Трьохвісний стійкий вузол", "Трьохвісний нестійкий вузол" відповідно.

Особлива точка початку координат системи (1), з дійсними власними числами характеристичної матриці, є сідловою за умови коли хоча б одна пара власних значень характеристичної матриці системи (1) має протилежні знаки. Проекція фазових траєкторій на площину xOy при цьому утворює стійкий (рис.1 в) та нестійкий (рис.1 г) вузол відповідно. При проєкції на площини xOz та yOz утворюється сідло. Виходячи з роздумів покладених вище вважаємо за доцільне використати для таких точок рівноваги наступні

Типи простих точок рівноваги системи (1)

Рис	G	Назва	Додаткові умови
1-а	G_1	Трьохвісний нестійкий вузол	$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$
1-б	G_1	Трьохвісний стійкий вузол	$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$
1-в	G_1	Стійке сідло	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$
1-г	G_1	Нестійке сідло	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$
1-д	G_2	Нестійкий двофазно зірковий вузол	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$
1-е	G_2	Стійкий двофазно зірковий вузол	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
1-є	G_3	Нестійкий трифазно зірковий вузол	$\lambda_1 > 0$
1-ж	G_3	Стійкий трифазно зірковий вузол	$\lambda_1 < 0$
3-з	G_4	Нестійкий двофазно вироджений вузол	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$
1-і	G_4	Стійкий двофазно вироджений вузол	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
1-ї	G_5	Нестійкий трифазно вироджений вузол	$\lambda_1 > 0$
1-к	G_5	Стійкий трифазно вироджений вузол	$\lambda_1 < 0$
2-а	G_6	Розбіжний нестійкий фокус	$\lambda_3 > 0, \alpha > 0$
2-б	G_6	Розбіжний стійкий фокус	$\lambda_3 > 0, \alpha < 0$
2-в	G_6	Збіжний нестійкий фокус	$\lambda_3 < 0, \alpha > 0$
2-г	G_6	Збіжний стійкий фокус	$\lambda_3 < 0, \alpha < 0$
3-д	G_7	Розбіжний центр	$\lambda_1 > 0$
3-е	G_7	Збіжний центр	$\lambda_1 < 0$

назви: "Стійке сідло" для випадку представленою на рис.1-в та "Нестійке сідло" для випадку представленою на рис.1-г.

Випадки гіперболічних точок представлених на рис.1(д-к) характерні кратністю коренів характеристичного рівняння та є частинним випадком "Трьохфазного вузла". У випадках представлених на рис.1(д, е, з, і) найбільша кратність кореня характеристичного рівняння дорівнює двом (тому вважаємо за доцільне використати для них назви "(Не)стійкий двофазно-зірковий вузол" та "(Не)стійкий двофазно-вироджений вузол" відповідно).

Для випадків представлених на рис.1(є, ж, ї, к) найбільша кратність кореня характеристичного рівняння дорівнює трьом (тому вважаємо за доцільне використати для них назви "(Не)стійкий трифазно-зірковий вузол" та "(Не)стійкий трифазно-вироджений вузол" відповідно).

Коли пара власних чисел характеристичної матриці є комплексно-спряженою при проєкції на площину xOy фазові траєкторії утворюють стійкий (рис.2(б, г)) фокус, нестійкий (рис.2(а, в)) фокус та центр (рис.2(д, е)). Вважаємо за доцільне назву точок рівноваги з парою комплексно-спряжених власних чисел характеристичної матриці формувати в

залежності від знаку λ_1 (дійсного власного числа характеристичної матриці системи (1)) та знаку α (дійсної частини пари комплексно-спряжених власних значень характеристичної матриці системи (1)). Якщо дійсне власне значення більше (менше) нуля пропонуємо до основи застосовувати префіксну форму "Розбіжний" ("Збіжний"). За основу, як і у випадку R^2 використаємо назву "Нестійкий фокус" ($\alpha > 0$), "Стійкий фокус" ($\alpha < 0$) та "Центр" ($\alpha = 0$).

В таблиці 1 запропонована класифікаційна система не вироджених типів точок рівноваги з відповідними їм аналітичними умовами виникнення та назвами. В таблиці 1 та нижче використовуватимуться наступні позначення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - дійсні власні значення характеристичної матриці системи у точці рівноваги M , α - дійсна частина пари комплексно-спряжених власних значень характеристичної матриці системи (1).

Для системи (1) існує ряд складних точок рівноваги ковимірності n , тобто таких які обумовлені рівністю нулю n коренів характеристичного рівняння. Легко довести, що найпростіший вигляд характеристичної матриці системи (1), що в початку координат має складу

Таблиця 2

Алгебраїчні типи складних точок рівноваги ковимірності 1, системи (1)

Рис	G	Назва	Додаткові умови
3-а	G_8	Однофазно-вироджений стійкий вузол	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
3-б	G_8	Однофазно-вироджений нестійкий вузол	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$
3-в	G_8	Вироджене сідло	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
3-г	G_9	Нестійкий вироджено-зірковий вузол	$\lambda_1 > 0$
3-д	G_9	Стійкий вироджено-зірковий вузол	$\lambda_1 < 0$
3-е	G_{10}	Нестійкий вироджений циліндр	$\lambda_1 > 0$
3-є	G_{10}	Стійкий вироджений циліндр	$\lambda_1 < 0$
3-ж	G_{11}	Вироджений нестійкий фокус	$\alpha > 0$
3-з	G_{11}	Вироджений стійкий фокус	$\alpha < 0$
3-і	G_{12}	Вироджений центр	$\alpha = 0$

точку рівноваги ковимірності 1, може бути представлена лише наступним чином.

$$G_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad G_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad G_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

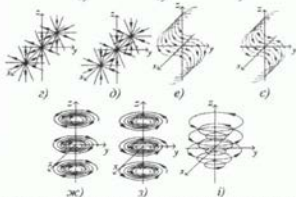
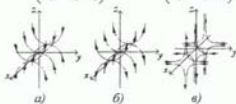


рис.3.а - "Однофазно-вироджений стійкий вузол", б - "Однофазно-вироджений нестійкий вузол", в - "Вироджене сідло", г - "Нестійкий вироджено-зірковий вузол", д - "Стійкий вироджено-зірковий вузол", е - "Нестійкий вироджений циліндр", ж - "Стійкий вироджений циліндр", з - "Вироджений нестійкий фокус", з - "Вироджений стійкий фокус", і - "Вироджений центр".

Фазові портрети, що представлені на рис.3 характерні наявністю одного нульового кореня характеристичного рівняння. При проекції фазових портретів на площину, що відповідають ненульовим дійсним або парі комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння утворюється "Стійкий вузол" (рис.3.а), "Нестійкий вузол" (рис.3.б), "Сідло" (рис.3.в), "Нестійкий-зірковий вузол" (рис.3.г), "Стійкий-зірковий вузол" (рис.3.д), "Нестійкий-вироджений вузол" (рис.3.е), "Стійкий-вироджений вузол" (рис.3.є), "Нестійкий фокус" (рис.3.ж), "Стійкий фокус" (рис.3.з) та "Центр" (рис.3.і) відповідно.

Класифікаційна система складних точок рівноваги ковимірності 1 наведена в табл.2.

Легко довести, що характеристична матриця системи (1), що в околі початку координат має складну точку рівноваги ковимірності 2 може

бути приведена лише до виду $G_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

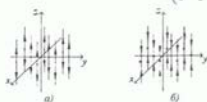


Рис. 4 а) - "Нестійка стаціонарна площина", б) - "Стійка стаціонарна площина".

Виходячи з того, що фазовий простір системи (1) у випадку зображеному на рис.4(а, б) містить нескінченну кількість точок рівноваги, що розташовані нескінченно близько одна до одної та утворюють деяку стаціонарну поверхню (у випадку лінійної системи - площину) до якої

Алгебраїчні типи складних точок рівноваги ковимірності 2, системи (1)

Рис	G	Назва	Додаткові умови
4-а	G_{13}	Нестійка стаціонарна площина	$\lambda_1 > 0$
4-б	G_{13}	Стійка стаціонарна площина	$\lambda_1 < 0$

фазові траєкторії або наближаються (атрактор) або від якої віддаляються (репеллер). Виходячи з роздумів покладених вище вважаємо за доцільне використати для таких рівноважних станів назви "Нестійка стаціонарна площина" та "Стійка стаціонарна площина" відповідно.

Окрім представлених вище точок рівноваги системи (1), може виникнути випадок коли система у всіх станах є стаціонарною "Стаціонарний простір". Зрозуміло, що характеристична матриця системи (1), що відповідає такому стану буде нульовою, а фазовий портрет повністю складатиметься із стаціонарних точок (див рис.5.).



Рис.5. Фазовий портрет системи (1) у випадку нульової характеристичної матриці.

Список використаних джерел

1. В.И. Арнольд, Ю.С. Изъяненко. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамические системы – I, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, I, ВИННИТИ, М., 1985. 149 с.
2. Немыцкий В. В. Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М.-Л. : гос. изд. техн. - теор. лит., 1947.
3. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений : пер. с англ. / С. Лефшец ; пер. с англ. под ред. В. В. Немыцкого и В. М. Алексеева. – М. : изд-во иностр. лит., 1961.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. Т. 2 / Дж. Сансоне ; пер. с итал. под ред. Н. Я. Виленкина с пред. В.В. Немыцкого. – М. : изд. ин-ст. лит., 1953. – 346 с.
5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения : пер. с англ. / Ф. Трикоми ; пер. с англ. под ред. А. Д. Мышкиса. – М. : изд. иностр. лит., 1962. – 352 с.
6. Deift P., C.David Levermore, C.Eugene Wayne. Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations. V.31;1995. 268 p.
7. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Арнольд В.И. / Ижевск.: Удмуртский гос. университет, ред. жур. "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 367с.
8. Самойленко А. М. та ін. Диференціальні рівняння: Підручник / А.М.Самойленко, М.О. Пересток, І.О.Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с. (Hartman F., Ordinary differential equations, Wiley, 1964)
10. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости: Л.Н.Баутин,Е.А.Леонтович.-М.:Наука,1990.-488с.

Надійшла до редколегії 11.03.11

УДК 539.3

Плакхтінко М.П., д.ф.-м.н., пров.н.с., Забуга
А.Т., м.н.с.

Поступальні коливання твердого тіла з електромагнітним фрикційним демпфером в механізмі сейсмоізоляції

Запропоновано спосіб дослідження
дисипативних властивостей при коливаннях
твердого тіла, облаштованого механізмом
сейсмодампінгації, що містить керований за
прискоренням електромагнітний фрикційний
демпфер

Ключові слова: тверде тіло, механізм
сейсмоізоляції, електромагнітний демпфер,
керування за прискоренням

M.P. Plakhtienko, doctor of physical and
mathematical sciences, leading scientific, A.T.
Zabuga, researcher fellow

Translational oscillations of rigid body with an electromagnetic damper in the mechanism of seismic isolation

The method of research of dissipative properties
of the vibrating rigid body with the mechanism of
seismic amortization, which contains the
electromagnetic frictional damper guided on
acceleration is offered

Key Words: rigid body, mechanism of seismic
isolation, electromagnetic damper, control on
acceleration

E-mail: model@inmech.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., член редколегії професор В.В. Мелешко

1. Вступ. Поряд з використанням традиційних
рідинних демпферів для поліпшення
дисипативних властивостей сейсμοзахисних
пристроїв твердих тіл (споруд) можна
застосувати механізми сейсмоізоляції (МС) різної
конструкції. Схеми таких МС приведені в [2 – 4].
У даному дослідженні розглядається МС, який
містить електромеханічний фрикційний демпфер
з магніто-м'яким осердям електромагніта (ЕМ).
Струм I в ЕМ генерується аперіодичним
контуром керування, що містить вимірювач
прискорення та підсилювач струму.

демпфер у вигляді соленоїда, який вільно
переміщується по вертикальних напрямних. За
навантаженості струму I в соленоїді він притискується
з силою $N(I)$ до феромагнітної поверхні S
фундаментної плити, яка є складовою частиною
МС. Згідно законів механіки, електротехніки та
автоматичного керування, можна побудувати
сукупність диференціальних рівнянь, що описує
динаміку такої електромеханічної системи при її
поступальному русі у вигляді

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu (a_M I^2 + m_0 g) \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + cx = e(t), \quad (1)$$

$$T \frac{dI}{dt} + I = K \frac{dx}{dt}, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0, \quad (2)$$

x – декартова координата рухомої точки, $T \geq 0$,
 $m, m_0, \mu, a_M, g, K, c$ – постійні додатні параметри,
 $e(t)$ – зовнішня збудовувальна сила.

Тут знехтувано електроємністю контура
керування струмом електромагніта.

Описана електромеханічна коливальна
система структурно близька до більш складних
електромеханічних систем типу Кононенко-
Краснопольської, в яких проявляється ефект
взаємодії динамічних систем з обмеженням за
потужністю джерелом енергії [5, 6]. У цій роботі
потужність джерела струму в котушці
електромеханічної вважається необмеженою.

При малих значеннях параметрів
 $\mu a_M / m, \mu m_0 g / m$ і величин $e(t) / m = f(t)$
система (1), (2) може бути зведена до стандартної

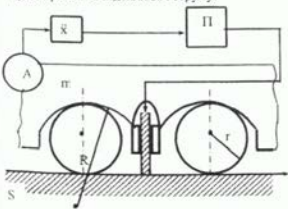


Рис. 1. Розрахункова схема коливань твердого
тіла з електромагнітним фрикційним демпфером

2. Постановка задачі. На рис. 1 зображено
тверде тіло з опорно-кульовим механізмом
сейсмоізоляції, що містить електромагнітний

по Боголюбову системи диференціальних рівнянь і проінтегрована методом осереднення.

Цікавим є випадок, коли постійна часу T є малою величиною. Тоді приходимо до сингулярно збуреної системи з малим параметром при вищій похідній. Метою дослідження є визначення дисипативних властивостей системи (1), (2) у випадку її виродження, тобто при $T = 0$.

3. Інтегрування системи рівнянь для випадку безінерційного контуру управління струмом. Розглянемо випадок, коли $T \rightarrow 0$, тобто контур керування є безінерційним. У цій ситуації $I = K\ddot{x}(t)$ і замість двох рівнянь (1), (2) маємо одне диференціальне рівняння 2-го порядку та другої степені, яке запишеться у вигляді

$$\ddot{x} + h\dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} = -n \operatorname{sign} \dot{x} - \omega^2 x + f(t) \quad (3)$$

при $h = \mu\omega_m K^2 / m$, $n = \mu g \frac{m_0}{m}$, $\omega^2 = c/m$.

Воно містить вищу похідну в другій степені, що відображає дію нелінійної дисипативної сили і не може бути інтерпретована як нелінійна інерційність. Його можна розв'язувати методом стикання на кожному інтервалі знакопостійності процесу $\dot{x}(t)$. Для реалізації методу стикання розв'яжемо рівняння (3) відносно старшої похідної для двох послідовних інтервалів знакопостійності похідної $\dot{x}(t)$. В результаті отримуємо

$$\ddot{x} = \begin{cases} \Phi^+(x, f(t), h, n) & \dot{x}(t) > 0 \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \Phi^-(x, f(t), h, n) & \dot{x}(t) < 0 \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]. \end{cases} \quad (4)$$

$$\Phi^\pm(\dots) = \frac{1}{2h} \left(\mp I \pm \sqrt{I^2 - 4h(\pm \omega^2 x + n \mp f(t))} \right). \quad (5)$$

У моменти зупинок, тобто при $\dot{x}(t_{i+1}) = 0$, необхідно перевірити здатність системи рухатись у зворотному напрямку. Такий рух можливий лише при умові, що збурююча сила більша сили кулонового тертя спокою:

$$|\omega^2 x(t_{i+1}) - f(t_{i+1})| - n = F(x(t_{i+1}), f(t_{i+1}), n) > 0. \quad (6)$$

Якщо ця умова не виконується, система попадає в $i+1$ -у зону застою. У цій зоні замість рівнянь (4) мають місце рівняння зони застою

$$\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0, x = x_{i+1} = \text{const}, I(t) \rightarrow 0 \quad \forall t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$

де t_{i+2} – кінцевий момент часу існування i -ї зони застою. Він визначається із умови $F(x_{i+1}, f(t_{i+2}), n) \geq 0$. Для згасаючого зовнішнього збурення $f(t)$ момент часу t_{i+2} може не існувати, тобто рух системи припиниться в $i+1$ -й зоні застою.

При $f(t) = 0$ маємо автономне рівняння типу (4), яке допускає аналітичне інтегрування зведенням до квадратур на кожному із інтервалів часу, де $\dot{x}(t) > 0$ або $\dot{x}(t) < 0$ $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots$. Таке рівняння має вигляд

$$\ddot{x} = \begin{cases} \Phi^+(x, h, n) & \text{при } \dot{x} > 0, \\ \Phi^-(x, h, n) & \text{при } \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Phi_0^\pm(x, h, n) = \Phi^\pm(x, 0, h, n).$$

Після стандартних перетворень та інтегрування отримуємо перші інтеграли рівнянь (7) у формі

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2 \left[P^\pm(x, h, n) - P^\pm(x_0(t_i), h, n) \right] = 0. \quad (8)$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x \in [x(t_i), x(t_{i+1})], \quad x_i = x(t_i),$$

$$\text{де } P^\pm(x, h, n) = \int_{x_i}^x \Phi_0^\pm(u, h, n) du, \quad h \neq 0.$$

Тут на інтервалі $(t_{i+1} - t_i)$ швидкість руху системи має постійний знак. Розділяючи у рівнянні (8) змінні та інтегруючи вдруге, отримуємо таку квадратурну формулу залежності $t = t(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_i}^x [P^\pm(u, h, n) - P^\pm(x_i, h, n)]^{-\frac{1}{2}} du = t - t_i. \quad (9)$$

Позначимо через $x_{i+1} \neq x_i$ наступний корінь рівняння, який перетворює знаменник цього підінтегрального виразу в нуль:

$$P^\pm(x_{i+1}, h, n) - P^\pm(x_i, h, n) = 0.$$

Згідно формули (9) отримуємо значення часу $t = t_{i+1}$, що відповідає наступній $(i+1)$ зупинці рухомої точки: $x(t_{i+1}) = x_{i+1}$, $\dot{x}(t_{i+1}) = 0$. Підінтегральний вираз формули (9) зазнає розриву при $x = x_i, x_{i+1}$, тому в загальному випадку при застосуванні числових квадратур

необхідно виключати точки нерегулярності із інтервалу числового інтегрування.
В частинному випадку це можна зробити, розклавши підінтегральний вираз квадратурної формули (9) в околі точок розриву $x \in [x_i, x_i(1 \pm \varepsilon)] \quad i = 0, 1, \dots$ в ряд Тейлора та виконати наближене аналітичне інтегрування в інтервалах, які містять точки розриву, а числове – в інтервалах, що таких точок не містять.
При малих значеннях параметрів h, n член $(n + h\ddot{x}^2) \operatorname{sign} \dot{x}$ можна перенести у праву частину рівняння і застосувати метод осереднення.
Розглядувана система з розривною правою частиною не має коливних режимів руху, тому законність осереднення випливає з робіт [1, 7].
4. Метод осереднення для диференціального рівняння з розривною характеристикою дисипативної сили, що залежить від прискорення. Викладаємо наближений розв'язок рівняння типу (3), яке запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t, \varepsilon) \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (10)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

методом осереднення.
Будемо вважати, що функція $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t, \varepsilon)$ має n частинних похідних по аргументу $\ddot{x}$. Тоді, використовуючи формулу Тейлора, маємо таке розвинення правої частини рівняння (10) в степеневий ряд в околі точки $\ddot{x} = -\omega^2 x$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon g(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \varepsilon^{i+1} \Phi_i(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon) \times (\ddot{x} + \omega^2 x)^i, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon g(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \varepsilon^{i+1} \Phi_i(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon) \times (\ddot{x} + \omega^2 x)^i, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Phi_i(\dots) = \left. \frac{\partial^i g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t, \varepsilon)}{\partial \ddot{x}^i} \right|_{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

При $n=1$ маємо з похибкою $\sim \varepsilon^3$

$$(\ddot{x} + \omega^2 x)(1 - \varepsilon^2 \Phi_1(\dots)) = \varepsilon g(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon).$$

Звідси знаходимо рівняння

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \\ &= \varepsilon g(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon) (1 + \varepsilon^2 \Phi_1(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon)) \end{aligned}$$

права частина якого не залежить від $\ddot{x}$.

Отже, нехтуючи відносною похибкою $\sim \varepsilon^3$, маємо рівняння, яке адекватне рівнянню (10)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(x, \dot{x}, -\omega^2 x, t, \varepsilon).$$

Перейдемо в останньому рівнянні до нових змінних a, θ згідно формул

$$x = a \cos(\omega t + \theta), \quad \dot{x} = -a \omega \sin(\omega t + \theta),$$

де $a = a(t), \theta = \theta(t)$ – шукані функції часу, що повільно змінюються. Диференціюючи ці формули та підставляючи їх у попереднє рівняння з урахуванням рівності

$$a \cos(\omega t + \theta) - a \theta \sin(\omega t + \theta) = 0,$$

отримасмо систему 2-х рівнянь першого порядку в стандартному по Боголюбову вигляді. Застосуємо цей підхід до рівняння (3).

В результаті стандартних обчислень маємо рівняння першого наближення

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \left(\frac{2n}{\pi \omega} + \frac{a^2 \omega^2 h}{3\pi} \right) \quad \text{при } a > 0, \\ \frac{da}{dt} &= 0 \quad \text{при } a = 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння для $a(t)$ має вигляд

$$a(t) = \frac{u}{v} \operatorname{tg} \left[v u (t_0 - t) + \arctg \left(\frac{v}{u} a_0 \right) \right], \quad (11)$$

$$\theta = \text{const},$$

$$\text{де } u = \sqrt{2n / (\omega \pi)}, \quad v = \sqrt{h \omega^2 / (3\pi)}, \quad u \neq 0, \quad v \neq 0.$$

В результаті згідно рівняння (3) закон згасання власних коливань координати $x(t)$ з похибкою $\sim \varepsilon^2$ представимо у формі

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \theta_0) \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (12)$$

Момент часу t_1 задовольняє умові потрапляння коливальної системи в зону застою:

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad |x(t_1)| \leq n / \omega^2, \quad t_1 = (\ell \pi - \theta_0) / \omega.$$

Тут ℓ – найменше ціле число, при якому виконується нерівність

$$\Delta(t) = \left| \omega^2 a(t_\ell) \cos(\omega t_\ell + \theta_0) \right| - n \leq 0.$$

Скінченне значення t_ℓ має місце тільки при $n \neq 0$.

Для t_ℓ маємо таку оцінку: $a(t_\ell) \geq 0$, або прирівнюючи $a(t_\ell) = 0$, знаходимо

$$t_\ell \leq t_0 + \frac{1}{\omega n} \arctg \left(\frac{v}{n} a \right) = t_\ell(n, h).$$

Для $t > t_\ell$ рівняння (3) при $f(t) = 0$ набирає вигляду

$$\ddot{x}(t) = 0, \dot{x}(t) = 0, x(t) \approx a(t_\ell) \cos(\omega t_\ell + \theta_0) = \text{const}$$

і визначає знаходження координати $x(t)$ в зоні застою.

На рис. 2 зображені процеси $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\Delta(t)$ системи (3), обчислені за формулами (11), (12), для початкових умов $a_0 = 1$; $\theta_0 = 0$ та значень параметрів $n = 0.2$; $h = 0.15$; $\omega = 1$

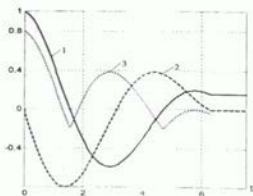


Рис. 2 – Процеси зміни переміщення (1), швидкості (2) та величини $\Delta(t)$ (3) осцилятора з кулоновим та акселеративно-фрикційним тертям.

Викладений спосіб побудови розв'язку рівнянь (1), (5) тривіально розповсюджується на випадок нелінійних пружин, тобто коли $c = c(x)$.

Список використаних джерел

1. Самойленко А.М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В кн. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко. – Изд-во АН УССР, К., 1963, с. 90 – 95.
2. Kelly J.M. The role of damping in seismic isolation / J.M. Kelly // Earthquake Engng. and Struct. Dyn. – 1999. – 25. – P.3 – 20.
3. Плахтиенко Н.П. Моделирование механической колебательной системы с управляемым по ускорению фрикционным электромагнитным демпфером / Н.П. Плахтиенко // Прикл. механика. – 2011. – 47. – № 1. – С. 119 – 130.
4. Плахтиенко Н.П. Нелинейная динамика системы твердых тел с управляемыми электромагнитными демпферами в механизме сейсмоизоляции / Н.П. Плахтиенко, А.Т. Забуга // Прикл. механика. – 2010. – 46. – № 9. – С. 111 – 122.
5. Кононенко В.О. Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний / В.О. Кононенко, Т.С. Краснопольская // Вибротехника. – 1977. – 28. – № 4. – С. 105 – 120.
6. Краснопольская Т.С. Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором / Т.С. Краснопольская // Прикл. мех. – 1977. – 13. – № 2. – С. 108 – 113.
7. Плахтиенко Н.П. К исследованию движения тел под воздействием разрывных сил методом усреднения / Н.П. Плахтиенко // Прикл. мех. – 1985. – 21. – № 8. – С. 84 – 91.

Надійшла до редколегії 24.06. 2011

УДК 517.98

Сиротенко А. В.*, аспірант,
Городній М. Ф.**, професор

Про інтегровні з p -м степенем розв'язки операторно-диференціального рівняння.

Встановлено необхідні і достатні умови, при виконанні яких розв'язок задачі Коші $x(0) = x_0$, $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \geq 0$, є інтегровним з p -м степенем для кожного $x_0 \in W$ і кожної неперервної і інтегрованої з p -м степенем функції $f : [0, +\infty) \rightarrow W$. Тут A — лінійний обмежений оператор в комплексному банаховому просторі B , $W = \{x \in B \mid \left(\int_0^{+\infty} \|e^{At}x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$.

Ключові слова: інтегровна зі степенем p функція, лінійний обмежений оператор.

*E-mail: toshikupml@bigmir.net

**E-mail: gorodnii@yandex.ru

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1 Вступ

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$; $C([0, +\infty), B)$ і $C^1([0, +\infty), B)$ — множини відповідно неперервних та неперервно диференційованих (за нормою) B -значних функцій, заданих на $[0, +\infty)$.

Зафіксуємо $p \in [1, +\infty)$ і покладемо

$$L_p^0(B) := \{f \in C([0, +\infty), B) \mid \|f\|_p := \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\};$$

$$L_p^1(B) := L_p^0(B) \cap C^1([0, +\infty), B).$$

Нехай A — лінійний неперервний оператор, що діє із B в B . Покладемо

$$W := \{x \in B \mid \|x\|_W := \left(\int_0^{+\infty} \|e^{At}x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}.$$

В подальшому вважаємо, що $W \neq \{0\}$

Syrotenko A. V., PhD student,

Gorodnii M. F., professor

On p th power integrable solutions for an operator differential equation.

We establish necessary and sufficient conditions under which the solution of the Cauchy problem $x(0) = x_0$, $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \geq 0$, is p th power integrable for every $x_0 \in W$ and every continuous and p th power integrable function $f : [0, +\infty) \rightarrow W$.

Here, A is linear bounded operator in a complex Banach space B , $W = \{x \in B \mid \left(\int_0^{+\infty} \|e^{At}x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$.

Key Words: integrable with p th power function, linear bounded operator.

Зауважимо, що коли для спектра $\sigma(A)$ оператора A виконується включення

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}, \quad (1)$$

то $W = B$.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

у якій $x_0 \in W$, f — така функція, що $f \in L_p^0(B)$, $f : [0, +\infty) \rightarrow W$.

У даній статті досліджуються умови на оператор A , при виконанні яких справджується

Умова сумовності. Для довільної функції $f : [0, +\infty) \rightarrow W$, такої, що $f \in L_p^0(B)$, і довільного $x_0 \in W$ задача Коші (2) має розв'язок x у множині $L_p^1(B)$.

Для різницевого аналогу задачі Коші (2) аналогічний результат отримано в роботі [4].

2 Допоміжні твердження

У подальшому використовуються такі леми.

Лема 1 Якщо для спектра $\sigma(A)$ оператора A виконується включення (1), то задача Коші (2) має для довільного $x_0 \in B$ і довільної функції $f \in L_p^0(B)$ розв'язок x у множині $L_p^1(B)$.

Доведення. З виконання (1) випливає, що

$$\exists \nu > 0 \exists M > 0 \forall t \geq 0 : \|e^{At}\| \leq M e^{-\nu t}. \quad (3)$$

Відомо ([1, с.105]), що задача Коші (2) має для довільної неперервної на $[0, +\infty)$ функції $f(t)$ єдиний розв'язок. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Оскільки $f \in L_p^0(B)$, то, враховуючи (3), неважко переконатися, що $x \in L_p^1(B)$. Лему 1 доведено.

Лема 2 $(W, \|\cdot\|_W)$ — банахів простір.

Доведення. Очевидно, що W — лінійний простір і $\|\cdot\|_W$ — норма на W . Доведемо його повноту.

Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ — фундаментальна послідовність в W . Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall k \geq 0 :$$

$$\|x_n - x_{n-k}\|_W^p = \int_0^{+\infty} \|e^{At}(x_n - x_{n-k})\|^p dt < \varepsilon^p.$$

Звідси випливає, що послідовність $\{e^{At}x_n, t \in [0, +\infty), n \geq 1\}$ є фундаментальною за мірою Лебега. А це в свою чергу означає ([3, с.116]), що вона містить підпослідовність $\{e^{At}x_{n_k}, t \in [0, +\infty), k \geq 1\}$, яка збігається майже скрізь за мірою Лебега на $[0, +\infty)$ до деякої функції $y(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Таким чином, $\exists t_0 : x_{n_k} \rightarrow x = e^{-At_0}y(t_0)$, $k \rightarrow \infty$.

Оскільки послідовність $\{e^{At}x_n, n \geq 1\}$ — фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_p$, то ([2, с.162]) вона збігається за нормою $\|\cdot\|_p$ до деякої функції $u(t)$, $t \in [0, +\infty)$.

З іншого боку $e^{At}x_{n_k} \rightarrow e^{At}x$, $k \rightarrow \infty$ поточно на $[0, +\infty)$.

Таким чином, $u(t) = e^{At}x$, $t \in [0, +\infty)$, а отже, послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ збіжна за $\|\cdot\|_W$ до x . Лему 2 доведено.

Лема 3 Простір $(W, \|\cdot\|)$ — повний тоді і лише тоді, коли $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_W$, тобто

$$\exists C_1, C_2, 0 < C_1 \leq C_2, \forall x \in W :$$

$$C_1\|x\| \leq \|x\|_W \leq C_2\|x\|. \quad (5)$$

Доведення. Достатність випливає з леми 2.

Необхідність. Нехай $(W, \|\cdot\|)$ — повний простір. Розглянемо оператор $\tilde{A}$ — звуження оператора A на W . Тоді $\tilde{A} : W \rightarrow W$ і

$$\forall x \in W : \int_0^{+\infty} \|e^{\tilde{A}t}x\|^p dt < +\infty.$$

Покладемо

$$U := \{e^{\tilde{A}s}x, s \in [0, 1], x \in W\}$$

і для довільного $y(s) = e^{\tilde{A}s}x$, $s \in [0, 1]$ із U

$$\|y\|_U := \left(\int_0^1 \|e^{\tilde{A}s}x\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

За допомогою міркувань, подібних до використаних при доведенні леми 2, можна переконатися, що $(U, \|\cdot\|_U)$ — повний простір.

Визначимо лінійний обмежений оператор $T : U \rightarrow U$, що діє за правилом $(Ty)(s) = e^{\tilde{A}s}e^{\tilde{A}s}x$, $s \in [0, 1]$, і нарешті, покладемо

$$W_1 := \{y \in U \mid \|y\|_{W_1} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n y\|_U^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

З урахуванням введених позначень можна записати:

$$\begin{aligned}\|x\|_W &= \left(\int_0^{+\infty} \|e^{\tilde{A}t} x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \|e^{\tilde{A}n} e^{\tilde{A}(t-n)} x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n y\|_U^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|y\|_{W_1} < +\infty, \quad (6)\end{aligned}$$

де $y(s)$ будується за допомогою елемента x , як це показано вище.

В [4] показано, що $(W_1, \|\cdot\|_{W_1})$ — повний простір. Крім того, з (6) випливає, що $W_1 = U$ як множини. Отже, $(W_1, \|\cdot\|_U)$ — повний простір. А це внаслідок [4] означає, що

$$\|\cdot\|_U \sim \|\cdot\|_{W_1}. \quad (7)$$

Визначимо лінійний обмежений оператор $J : W \rightarrow U$, що діє за правилом $Jx = e^{\tilde{A}s} x$, $s \in [0, 1]$. Для цього оператора справедливо наступне

$$\begin{aligned}\|y\|_U &= \|Jx\|_U = \left(\int_0^1 \|e^{\tilde{A}s} x\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \|e^{\tilde{A}s}\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|. \quad (8)\end{aligned}$$

Крім того, J — бієкція, тому існує обернений оператор J^{-1} і

$$\|x\| \leq \|J^{-1}\| \|y\|_U, \quad (9)$$

де $y(s)$ будується за допомогою елемента x .

З урахуванням (6), (7), (8) і (9), отримаємо (5). Лему 3 доведено.

3 Основний результат

Справджується наступна теорема.

Теорема 1 Для задачі Коші (2) умова сумовності виконується тоді і лише тоді, коли:

1. Простір $(W, \|\cdot\|)$ — повний;
2. Для спектра $\sigma(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ виконується вклюдження (1).

Доведення. Достатність випливає з леми 1. Зауважимо, що для довільного $s \in [0, +\infty)$, $x(s)$ визначений за допомогою (4) належить простору W . Справді,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \|e^{\tilde{A}t} x(s)\|^p dt &\leq \int_0^{+\infty} \|e^{\tilde{A}(t+s)} x_0\|^p dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} \left\| \int_0^s e^{\tilde{A}(t+s-u)} f(u) du \right\|^p dt < +\infty,\end{aligned}$$

оскільки $x_0 \in W$, $f \in L_p^0(B)$ і справджується оцінка (3).

Необхідність. Нехай виконується умова сумовності. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}l_p(B) &:= \{x = \{x_n : n \geq 0\} \subset B \mid \|x\|_p^* := \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\};\end{aligned}$$

$$V := \{x \in B \mid \|x\|_V := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|e^{\tilde{A}n} x\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}.$$

Покажемо, що для довільної послідовності $\{y_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$ такої, що для кожного $n \geq 0$ $y_n \in V$, послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$, задана різницевою рівнянням

$$\begin{cases} x_{n+1} = e^{\tilde{A}} x_n + y_{n+1}, n \geq 0, \\ x_0 = y_0, \end{cases} \quad (10)$$

належить $l_p(B)$.

Зафіксуємо невід'ємну неперервну функцію $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таку що $\psi(0) = \psi(1) = 0$ і $\int_0^1 \psi(s) ds = 1$.

Для заданої послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ визначимо

$$f(n + \tau) = e^{(\tau-1)\tilde{A}} y_{n+1} \psi(\tau), \tau \in [0, 1].$$

Легко показати, що $f \in L_p^0(B)$, а також $f : [0, +\infty) \rightarrow W$. Тому з умови сумовності випливає, що для такої f і довільного $x_0 \in W$ задача Коші (2) має розв'язок $x \in L_p^1(B)$. Цей розв'язок має вигляд (4).

Беручи до уваги той факт, що $\int_n^{n+1} e^{\lambda(n+1-s)} f(s) ds = y_{n+1}$, легко переконалися, що $\{x(n) : n \geq 0\}$ — розв'язок (10).

Покажемо, що $\{x(n) : n \geq 0\} \in l_p(B)$. Оскільки $x \in L_p^1(B)$ (зокрема $x \in C([0, +\infty), B)$), то за теоремою про середнє $\forall n \geq 0 \exists \theta_n \in [n, n+1]$:

$$\|x(\theta_n)\|^p = \int_n^{n+1} \|x(\tau)\|^p d\tau. \quad (11)$$

Таким чином $\{x(\theta_n) : n \geq 0\} \in l_p(B)$, оскільки згідно з (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x(\theta_n)\|^p = \|x\|_p^p$.

Тому для кожного $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{\lambda(n-\theta_{n-1})} x(\theta_{n-1}) + \\ &+ \int_{\theta_{n-1}}^n e^{\lambda(n-s)} f(s) ds = e^{\lambda(n-\theta_{n-1})} x(\theta_{n-1}) + \\ &+ \int_{\theta_{n-1}-(n-1)}^1 y_n \psi(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

Оскільки $\left\| \int_{\theta_{n-1}-(n-1)}^1 y_n \psi(\beta) d\beta \right\| \leq \|y_n\|$, то $\{x_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$ як сума двох елементів з $l_p(B)$.

Ми показали, що для довільної послідовності $\{y_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$ такої, що для

кожного $n \geq 0$ $y_n \in V$, задана за допомогою (10) послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$ належить $l_p(B)$. Тому ([4]) $(V, \|\cdot\|)$ — повний простір і для спектрального радіуса $r(e^{\hat{A}})$ оператора $e^{\hat{A}}$ виконується нерівність

$$r(e^{\hat{A}}) < 1. \quad (12)$$

З (12) і теореми Данфорда про відображення спектра отримуємо, що для спектра $\sigma(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ справджується включення (1).

І нарешті, з (5) і доведеної в [4] еквівалентності норм $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_V$ випливає, що $W = V$ як множини. Теорему 1 доведено.

Список використаних джерел

1. Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Москва: Наука, 1970. - 536 с.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. (пер. с англ.) - Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. - 896 с.
3. Круглов В. М. Дополнительные главы теории вероятностей. - Москва: Высшая школа, 1984. - 264 с.
4. Вятчанінов О. В. Сумовні зі степенем p рекурентні послідовності у банаховому просторі. // Вісник Київського університету, Серія: Фізико-математичні науки. - 2010. - №2. - С. 40-44.

Надійшла до редколегії 01.06.11.

УДК 629.7.015

Харитонов* О.М., к. ф.-м. н., доц.,
Дехтяр* О.Т., аспірант.

Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти

У статті досліджено внутрішню задачу загальної проблеми оптимізації міжпланетного перельоту космічного апарату в рамках модифікованого методу сфер впливу. Внутрішня задача полягає в оптимізації маневру перельоту зі стислої еліптичної орбіти на гіперболічну орбіту із заданою асимптотичною швидкістю. На відміну від класичних робіт, ураховано обмеженість тяги космічного апарату. Відповідна задача оптимального керування розв'язана із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна. За допомогою чисельних розрахунків підтверджено оптимальність розв'язку, знайденого із застосуванням необхідних умов оптимальності.

Ключові слова: міжпланетний переліт,
оптимізація траєкторій, обмежена тяга,
принцип максимуму Понтрягіна.

O.M. Kharytonov*, Associate Professor,
O.T. Dekhtiar*, PhD student.

The optimization of a space vehicle manoeuvre between planetocentric elliptical orbit and the sphere of influence

In this article the internal problem of a space vehicle interplanetary transfer is considered. The Patched Conic Approximation is used. The internal problem consists in the optimization of a finite-thrust manoeuvre between near-planet elliptic orbit and escape hyperbolic orbit with a given asymptotic velocity. Contrary to the traditional approaches the thrust finiteness is taken into consideration. The Pontryagin's maximum principle is applied to the solution of the correspondent optimal control problem. The numerical solutions prove the optimality of the results, obtained from the necessary optimality conditions.

Key words: interplanetary transfer, trajectory
optimization, finite-thrust, Pontryagin's maximum
principle.

*E-mail: kharytonov@univ.kiev.ua, oleks.d@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

Задачі оптимізації маневрів космічних апаратів (КА) з двигунами великої тяги традиційно розв'язують застосовуючи підхід імпульсної апроксимації активних ділянок траєкторії [1]. Такий підхід виправданий, коли тягоозброєність КА $a_g = P_{max} / (M_0 g)$ (де P_{max} – максимальна тяга, M_0 – стартова маса, g – прискорення вільного падіння на Землі) значно більша за одиницю. Міжпланетні експедиції, що плануються у найближчому майбутньому, будуть здійснюватися із застосуванням КА з ядерними ракетними двигунами (ЯРД). Тягоозброєність яких має порядок одиниці [2, 3]. Отже, при розрахунку маневрів КА з ЯРД необхідно враховувати обмеженість тяги.

Задачам оптимізації маневрів КА з двигунами великої обмеженої тяги присвячено небагато робіт [4, 5], що зумовлює актуальність задачі, розглянутої в даній статті.

2. Постановка задачі

Розглядається задача оптимізації міжпланетного перельоту Земля-Марс за критерієм максимуму корисного навантаження $m_c \rightarrow \max$. Прийmemo плоску крутову модель руху планет навколо Сонця і припустимо, що міжпланетна траєкторія містить по одній активній дузі для маневрів відльоту та підльоту. Використаємо модифікований метод сфер впливу (ММСВ) для того, щоб звести задачу до вивчення геліоцентричного та двох планетоцентричних маневрів навколо Землі та Марсу. Припустимо, що розв'язок геліоцентричної задачі відомий. Отже, на границях сфер впливу Землі та Марсу задані вектори швидкості, які повинні мати КА для виконання міжпланетного перельоту. Таким чином, внутрішня задача ММСВ полягає в оптимізації маневру переведення КА зі стислої навколоземної еліптичної орбіти на гіперболічну орбіту, що характеризується заданим вектором асимптотичної швидкості.

Для постановки задачі введемо інерційну декартову систему координат Oxy з початком координат у центрі Землі. Вісь Oy направлена за вектором швидкості $\Delta \vec{V}_{Earth} = \vec{v}_m$ на границі сфери впливу Землі. Відповідно до ММСВ цей вектор вважається вектором асимптотичної швидкості планетоцентричної гіперболічної орбіти, по якій КА виходить за межі сфери впливу. Тому внутрішня задача ММСВ може бути сформульована як задача оптимізації маневру переведення КА з заданої навколоземної еліптичної орбіти на оптимальну гіперболічну орбіту, асимптотична швидкість $\vec{v}_m$ якої задана розв'язком зовнішньої задачі ММСВ. Якщо враховувати обмеженість тяги, то програма управління тягою, а також параметри траєкторії мають бути оптимізовані при розв'язанні загальної варіаційної задачі оптимізації. Вищезгаданими параметрами для маневру відлігу є аргумент перицентру гіперболічної орбіти ϑ_{hyp} та істинної аномалії ω_0, φ_1 , які визначають початкове та кінцеве положення КА, як показано на рис. 1.

Будемо вважати, що траєкторія на активній ділянці лежить в межах тонкого сферичного шару: $\Delta r/r_g \ll 1$, де r_g – деякий характерний радіус шару, а Δr – його товщина. В такому випадку може бути використана модель центрального однорідного гравітаційного поля (ЦОГП) [1]: $\mu_{Earth} \cdot \vec{r}/r^3 \approx \mu_{Earth} \cdot \vec{r}/r_g^3$, де μ_{Earth} – гравітаційний параметр Землі.

Приймемо що величина тяги є фіксованою та відповідає максимуму швидкості витікання реактивного струменя [6]. В такому випадку задачу максимізації корисного навантаження $m_s \rightarrow \max$ зведено до задачі максимальної швидкодії $\tau(t_1) \rightarrow \min$. Постановка задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = \frac{a_0 P \cos \theta}{1 - a_0 q t} - c x, & t = 1, \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = \frac{a_0 P \sin \theta}{1 - a_0 q t} - c y, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \omega_0, \varphi_1, \vartheta_{hyp} &\rightarrow opt, & J = \tau(t_1) &\rightarrow \min, \\ \omega_0, \varphi_1, \vartheta_{hyp}, \theta(\tau) &\in [0; 2\pi], \end{aligned} \quad (2)$$

де x, y, v_x, v_y – складові радіус-вектора та вектора швидкості центра мас КА; τ – тривалість

активної ділянки; $c = C/r_g^3$, $C = \mu \cdot g/V_*^4$ – безрозмірний гравітаційний параметр Землі. В (1, 2) використані безрозмірні величини, формули переходу містяться в [6].



Рис. 1 Схема виконання маневру між еліптичною та оптимальною гіперболічною орбітами.

Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{P_{ell} \cos \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; & \tau(t_0) &= 0; \\ y(t_0) &= \frac{P_{ell} \sin \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; \\ v_x(t_0) &= \frac{-K}{\sqrt{P_{ell}}} (e_{ell} \sin \vartheta_{ell} + \sin \omega_0); \\ v_y(t_0) &= \frac{K}{\sqrt{P_{ell}}} (e_{ell} \cos \vartheta_{ell} + \cos \omega_0); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \frac{P_{hyp} \cos \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})}; & \tau(t_1) &\rightarrow \min; \\ y(t_1) &= \frac{P_{hyp} \sin \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})}; \\ v_x(t_1) &= \frac{-K}{\sqrt{P_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \varphi_1); \\ v_y(t_1) &= \frac{K}{\sqrt{P_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \varphi_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Де K – це безрозмірний комплекс. Параметри орбіт вибрано таким чином: $\vartheta_{ell} = 5,3014$, $e_{ell} = 0,15$, $P_{ell} = r_{p,ell}(1 + e_{ell})$, де $r_{p,ell}$ – радіус перицентру еліптичної орбіти, $e_{hyp} = -1/\sin \vartheta_{hyp}$ та $P_{hyp} = K^2(1 + e_{hyp}^2)/v_m^2$, де v_m^2 – гіперболічний надлишок швидкості.

3. Розв'язання задачі та аналіз результатів

Аналіз оптимального керування виконано використовуючи принцип максимуму Понтрягіна. Згідно з ним, тільки те керування є оптимальним, яке зумовлює максимум функції Гамільтона (4).

$$H = \psi_x v_x + \psi_y v_y + \psi_z + \\ + \psi_\alpha \left(\frac{a_0 P \cos \theta}{1 - a_0 q \tau} - c x \right) + \psi_\gamma \left(\frac{a_0 P \sin \theta}{1 - a_0 q \tau} - c y \right) \quad (4)$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_\alpha, \psi_\gamma, \psi_z$ – сопряженими функціями.

При використанні моделі ЦОГП можна знайти аналітичний розв'язок сопряженої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \psi_x &= D_2 \sin \sqrt{c} t + D_1 \cos \sqrt{c} t, \\ \psi_y &= D_4 \sin \sqrt{c} t + D_3 \cos \sqrt{c} t, \\ \psi_\alpha &= (D_2 \cos \sqrt{c} t - D_1 \sin \sqrt{c} t) / \sqrt{c}, \\ \psi_\gamma &= (D_4 \cos \sqrt{c} t - D_3 \sin \sqrt{c} t) / \sqrt{c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Внаслідок застосування принципу максимуму задача оптимального керування зводиться до двоточкової крайової задачі, яка розв'язується чисельно. Пошук п'яти невідомих констант $D_1, D_2, D_3, D_4, \theta_{hyp}$, ϕ_1 виконується методом пристрілки з п'яти умов на правому кінці траєкторії: чотирьох крайових умов (3.6) та першого інтеграла $H = 0$.

Чисельні розрахунки проведено для таких значень параметрів задачі: $\Delta v_{Earth} = 2945$ м/с, $M_0 = 10^3$ кг, $T_{max} = 2900$ К, $v_{Smax} = 9090$ м/с, $\gamma = 168.7924$, $C_p = 15595$ Дж/кг·К, $h_0 = 1500$ км – висота перигею еліптичної орбіти.

В табл. 1 наведено оптимальні значення параметрів $\omega_0, \theta_{hyp}, \phi_1$ – 3 метою оцінки

Оптимальні розв'язки задачі.

P , кН	ω_0	ϕ_1	θ_{hyp}
402	4,9433	5,6268	5,2618
502	5,0037	5,5536	5,2612
603	5,0443	5,5040	5,2609

ефективності оптимізації вказаних параметрів, а також підтвердження достовірності результатів, проведено розв'язання задачі для випадку, коли значення одного з параметрів відрізняється від оптимального. На рис. 2 показана залежність маси корисного навантаження m_c при зміні значення кожного з вказаних параметрів. Як видно з рис. 2, максимуму m_c відповідають оптимальні значення з табл. 1.

Відзначимо, що значення функціоналу m_c є дуже чутливим до зміни аргументу перигею гіперболічної орбіти θ_{hyp} , що свідчить про важливість точного оптимального вибору гіперболічної орбіти.

4. Покращення точності моделі ЦОГП

Точність моделі ЦОГП $G = \mu_{Earth} \cdot \tilde{r} / r_g^2$, розраховану за формулою (6), можна підвищити правильним вибором r_g , як це впливає з рис. 3.

$$err = \frac{(v_{as} - v_{rm,s})^2 + (v_{rs,s} - v_{rm,s})^2}{v_{rm,s}^2 + v_{rs,s}^2} \times 100\% \quad (6)$$

Де $\tilde{v}_{as}$ – асимптотична швидкість, необхідна для виконання міжпланетного перельоту. $\tilde{v}_{rs}$ – реальна швидкість, отримана при підстановці наближено оптимального закону керування в систему рівнянь руху, записану для ЦНГП.

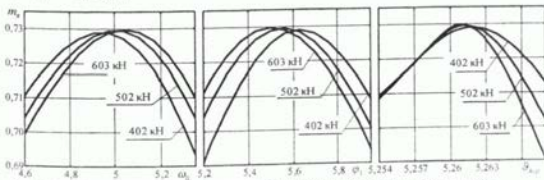


Рис. 2 Залежність маси корисного навантаження від вибору параметрів активної дії.

Таблиця 2

Похибка вектора асимптотичної швидкості для різних значень r_g

$P, \text{кН}$	мін етт для ЦОГП		ЦОГП (5 ітерацій)		ЦОГП	
	$r_{g\text{min}}$	err, %	r_{g1}	err, %	r_{g1}	err, %
402	1,021250	2,2579	1,014289	2,5433	1	4,3352
502	1,012500	0,9481	1,008880	1,0663	1	2,1708
603	1,007500	0,4638	1,006096	0,5230	1	1,2279

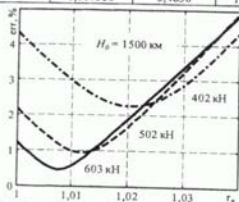


Рис. 3 Залежність похибки вектора асимптотичної швидкості від вибору r_g .

Для пошуку значень r_g , що забезпечують близьку до мінімальної похибку ЦОГП запропоновано ітераційний алгоритм, який ґрунтується на розв'язанні задачі і розрахунку середньо-інтегрального радіуса дуги активної ділянки $r_{g1} = \int r(t) dt / t_1$.

На рис. 4 показано зменшення похибки (6) у визначенні асимптотичної швидкості. Порівняння розрахунків показано у табл. 2. Як випливає з таблиці, п'ять ітерацій дозволяють зменшити похибку більш ніж вдвічі у порівнянні із $r_{g1} = r_g$.

5. Висновки

Розв'язано задачу про переліт з заданої еліптичної орбіти на оптимальну гіперболічну орбіту, вектор асимптотичної швидкості якої фіксований. На відміну від класичних робіт, задача розв'язана в припущенні обмеженості тяги.

При використанні моделі центрального однорідного гравітаційного поля побудовано розв'язок оптимізаційної задачі в квадратурах.

Запропоновано ітераційний підхід, який дозволяє покращити точність розв'язку, отриманого за допомогою моделі ЦОГП.

Проаналізовано ефективність оптимізації параметрів задачі та підтверджено оптимальність отриманого розв'язку.

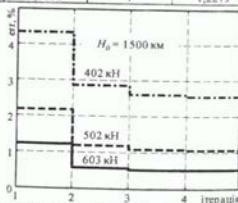


Рис. 4 Зменшення похибки асимптотичної швидкості із кроками ітераційного алгоритму.

Список використаних джерел

1. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука. 1976. – 744 с.
2. M. Taraba, K. Zwintz, C. Bombardelli et al., Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031, Acta Astronaut., 58 (2006) pp. 88-104.
3. Borowski, S.K., "An overview of NTR /BNTR propulsion concepts, vehicle designs and future missions applications," in Proceedings of Space Nuclear Conference, San Diego, California, June 2005.
4. E.A. Willis Optimal finite-thrust transfer between planet-approach and departure asymptotes with specified intermediate orbit, NASA Technical note, NASA TN D-4534-1968. 1968.
5. Azimov, D.M., Bishop, R.H., "Transfer between Circular and Hyperbolic Orbits using Analytical Maximum Thrust Arcs", J. Spacecraft Rockets, 2003, vol. 40, no. 3, pp 433-436.
6. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С.120-135.

Надійшла до редакції 26.09.2011р.

УДК 517.98

А. В. Чайковський, к. ф.-м. н., доцент

Про наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу

Наведені достатні умови для наближення обмежених на осі розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі розв'язками відповідних різницьових рівнянь. Отримана оцінка точності наближення.

Ключові слова: лінійне диференціальне рівняння, зсуви аргументу, банахов простір, різницеве рівняння, наближення.

ChaikovskiyAV@ukr.net

Статтю представив доктор ф.-м.н., професор, академік НАН України М.О. Перестіюк

1 Вступ

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B , $M \in \mathbb{N}$, $\{A_k : -M \leq k \leq M, 0 \leq l \leq m-1\} \subset L(B)$ – набір попарно комутуючих операторів. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x^{(m)}(t) = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} x^{(l)}(t-k) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де $y \in C(\mathbb{R}, B)$ – відома обмежена за нормою на всій осі функція, $x \in C^m(\mathbb{R}, B)$ – невідома обмежена функція, що має обмежені похідні до порядку m включно. Для цього рівняння існування і єдиність обмеженого розв'язку досліджені в [1], зокрема отримана така теорема.

Позначимо

$$\Phi(z) := -z^m + \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} z^l e^{-zk}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. Рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, B)$ єдиний обмежений разом з усіма похідними на всій осі розв'язок $x \in C^m(\mathbb{R}, B)$ тоді і лише тоді, коли справджується умова

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \{\Phi(i\alpha)\}^{-1} \in L(B). \quad (2)$$

A. V. Chaikovskiy, candidate of physics and mathematics sciences

On approximation of bounded solutions of differential equations with argument's delays

Sufficient conditions are proved for approximation of bounded on the axis solutions of differential equations with argument's shifts in Banach space by solutions of corresponding difference equations. Estimate for accuracy of approximation is obtained.

Key words: linear differential equation, argument's shifts, Banach space, difference equation, approximation.

Наслідок. З наведеної теореми та теореми Банаха про обернене відображення випливає, що для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, B)$ та відповідного єдиного обмеженого розв'язку $x = x_y \in C^m(\mathbb{R}, B)$ справджується оцінка

$$\exists L_0 > 0 \quad \forall y \in C(\mathbb{R}, B) : \|x_y\|_{\infty} \leq L_0 \|y\|_{\infty}.$$

В цій роботі буде показано, що обмежений розв'язок рівняння (1) за умови (2) може бути наближений розв'язками відповідних різницьових рівнянь, в яких похідні замінені на симетричні різниці. Показано, як точність наближення залежить від гладкості функції y . Отримані результати узагальнюють твердження з роботи [2], одержані для рівняння першого порядку з одним відхиленням аргументу.

2 Різницеве рівняння

Розглянемо різницеве рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню (1)

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^m \Delta^{(m)} u_n = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^l \Delta^{(l)} u_{n-kN} + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} N \in \mathbf{N}, \quad \Delta^{(0)} u_p &:= u_p, \\ \Delta^{(l)} u_p &:= \Delta^{(l-1)} u_{p+1} - \Delta^{(l-1)} u_{p-1}, \\ p \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leq l &\leq m-1. \end{aligned}$$

Лема 1. Нехай виконана умова (2) та одна з двох умов:

- i) при непарних значеннях виразу $k+l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише непарне;
- ii) при непарних значеннях виразу $l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише парне.

Позначимо

$$\begin{aligned} \Psi(z) &:= -\left(\frac{N}{2}(z - z^{-1})\right)^m I + \\ &+ \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \left(\frac{N}{2}(z - z^{-1})\right)^l z^{-kN}, \quad z \in S, \end{aligned}$$

де $S := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Тоді при всіх досить великих непарних натуральних N

$$\forall z \in S \exists (\Psi(z))^{-1} \in L(X),$$

$$\|\Psi^{-1}\|_1 = \begin{cases} O(\ln N), & m=1, \\ O(\frac{1}{N}), & m \geq 2, \end{cases} \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\|(\Psi^{-1})^{(p)}\|_1 = O(\frac{1}{N}), \quad N \rightarrow \infty, \quad p \in \mathbf{N},$$

де

$$\|h\|_1 := \int_S \|h(z)\| dz.$$

Доведення. Нехай $z \in S$, $z = e^{it}$, $t \in \mathbf{R}$, при цьому $\frac{N}{2}(z - z^{-1}) = Ni \sin t$. Покладемо

$$\Omega := \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \|(\Phi(i\alpha))^{-1}\| < +\infty,$$

$$R := 1 + 2 \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} \|A_{kl}\|.$$

1. Нехай $|N \sin t| \geq R$. Маємо

$$\|\Psi(z) + (Ni \sin t)^m I\| \leq \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} \|A_{kl}\| \cdot |N \sin t|^l$$

$$\leq \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} \|A_{kl}\| \cdot |N \sin t|^{m-1} \leq \frac{1}{2} |N \sin t|^m,$$

отже існує $\exists (\Psi(z))^{-1}$ і $\|(\Psi(z))^{-1}\| \leq \frac{2}{|N \sin t|^m}$.

2. Нехай $N|\sin t| < R$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тоді

$$\begin{aligned} \Psi(z) - \Phi(iNt) &= (iNt)^m - (iN \sin t)^m - \\ &- \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} ((iNt)^l - (iN \sin t)^l) e^{-ikNt}. \end{aligned}$$

Тому, враховуючи оцінку

$$\forall l \in \mathbf{N} \exists C_l > 0 \quad \forall \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) :$$

$$|\sin^l \alpha - \alpha^l| \leq C_l |\sin \alpha|^{l+2},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \|\Psi(z) - \Phi(iNt)\| &\leq C_m R^{m+2} N^{-2} + \\ &+ \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} \|A_{kl}\| C_l R^{l+2} N^{-2} < \frac{1}{2N}, \end{aligned}$$

де остання нерівність виконується при всіх досить великих натуральних N . Тоді існує $\exists (\Psi(z))^{-1}$ і $\|(\Psi(z))^{-1}\| \leq 2N$.

3. Нехай $N|\sin t| < R$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Тоді

$$\begin{aligned} \Psi(z) - (-1)^m \Phi(iN(t-\pi)) &= (-1)^m ((iN(t-\pi))^m - \\ &- (iN \sin(t-\pi))^m + \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \times \\ &\times ((iN(t-\pi))^l - (iN \sin(t-\pi))^l) e^{-ikN(t-\pi)}), \end{aligned}$$

де остання рівність випливає з того, що за умов i) або ii) $(-1)^{kN+l+m} = 1$, якщо оператор A_{kl} ненульовий. Подальші оцінки проводяться аналогічно випадку 2.

Підсумовуючи отримані оцінки, отримаємо

$$\begin{aligned} \|\Psi^{-1}\|_1 &\leq 4 \arcsin(R/N) \cdot (2N) + \\ &+ \int_{\arcsin(R/N)}^{\pi - \arcsin(R/N)} \frac{2dt}{|N \sin t|^m}, \end{aligned}$$

аналогічні оцінки робляться для похідних. Звідси і випливає твердження леми. $\square$

Лема 2. Нехай виконана умова (2) та одна з двох умов:

- i) при непарних значеннях виразу $k+l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише непарне;
- ii) при непарних значеннях виразу $l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише парне.

Тоді для довільної обмеженої послідовності у існує єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (3) та при непарних N справджується оцінка

$$\|x\|_{\infty} = \|y\|_{\infty} \begin{cases} O(\sqrt{\ln N}), & m = 1, \\ O(1), & m \geq 2, \end{cases} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Доведення. З результатів роботи [3] випливає, що необхідною і достатньою умовою існування і єдиності обмеженого розв'язку різницевого рівняння (3) для довільної обмеженої послідовності $y \in l_{\infty}$ є умова

$$\forall z \in S \exists (\Psi(z))^{-1} \in L(X).$$

Правильність цієї умови випливає з леми 1. Крім того, з результатів роботи [2] випливає оцінка

$$\|x\|_{\infty} \leq C \sqrt{\|\Psi^{-1}\|_1 \cdot \|(\Psi^{-1})''\|_1} \|y\|_{\infty},$$

де стала $C > 0$ залежить лише від простору. Враховуючи оцінки з леми 1, отримуємо потрібне твердження. $\square$

3 Наближення обмеженого розв'язку
Нехай $y \in C(\mathbf{R}, B)$ – обмежена на осі функція,

$$\omega(y, h) := \sup_{t \in \mathbf{R}} \|y(t+h) - y(t)\|, \quad h > 0$$

– її модуль неперервності. Нехай також $N \in \mathbf{N}$,

$$y_n := y\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$\{u_n : n \in \mathbf{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок рівняння (3), а $x \in C^m(\mathbf{R}, B)$ – єдиний обмежений разом з похідними розв'язок рівняння (1),

$$x_n := x\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Наведена далі теорема показує, з якою точністю розв'язок різницевого рівняння наближає розв'язок диференціального в залежності від гладкості функції y .

Теорема 2. Нехай виконана умова (2) та одна з двох умов:

i) при непарних значеннях виразу $k+l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише непарне;

ii) при непарних значеннях виразу $l+m$ операторні коефіцієнти A_{kl} нульові, N розглядається лише парне.

Тоді при $m = 1$

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|u_n - x\left(\frac{n}{N}\right)\| = O(\sqrt{\ln N} \cdot \omega(y, \frac{1}{N})), \quad N \rightarrow \infty,$$

і при $m \geq 2$

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|u_n - x\left(\frac{n}{N}\right)\| = O(\omega(y, \frac{1}{N})), \quad N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Покладемо

$$w_n := u_n - x\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тоді, враховуючи (3), маємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N}{2}\right)^m \Delta^{(m)} w_n = \\ &= \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \left(\frac{N}{2}\right)^l \Delta^{(l)} w_{n-kN} + v_n, \quad n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

де

$$v_n := y_n - \left(\frac{N}{2}\right)^m \Delta^{(m)} x_n +$$

$$\sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \left(\frac{N}{2}\right)^l \Delta^{(l)} x_{n-kN}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тоді твердження теореми випливає з леми 2, якщо показати, що

$$\|v\|_{\infty} = O(\omega(y, \frac{1}{N})), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (1) $m-1$ раз по проміжку $[\tau - \frac{1}{N}, \tau + \frac{1}{N}]$ та один раз по проміжку $[\frac{n-1}{N}, \frac{n+1}{N}]$, отримаємо

$$\Delta^{(m)} x_n = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \Delta^{(l)} x_{n-kN}^{(m-l)} + y_n^{(m)}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

де

$$x^{(0)}(t) = x(t),$$

$$x^{(p+1)}(t) := \int_{t-1/N}^{t+1/N} x^{(p)}(s) ds, \quad p \geq 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x_n^{(p)} := x^{(p)}\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad p \geq 0.$$

Тому

$$\begin{aligned} v_n = & \sum_{k=-M}^M \sum_{l=0}^{m-1} A_{kl} \left(\left(\frac{N}{2}\right)^l \Delta^{(l)} x_{n-kN} - \Delta^{(l)} x_{n-kN}^{(m-l)}\right) + \\ & + y_n - y_n^{(m)}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|v\|_{\infty} = O(\omega(x, \frac{1}{N}) + \omega(y, \frac{1}{N})), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Але для довільного $h > 0$ функція $x(t+h) - x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, є розв'язком рівняння (1), в якому функція $y(t)$, $t \in \mathbf{R}$, замінена на $y(t+h) - y(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Тому

$$\omega(x, h) \leq L_0 \omega(y, h), \quad h > 0. \quad \square$$

Наслідок. Розглянемо при деякому $K \in \mathbb{N}$ диференціальне рівняння першого порядку

$$x'(t) = \sum_{k=-K}^{K+1} A_k x(t-2k+1) + y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

яке є частинним випадком рівняння (1).

Якщо виконується умова

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \left(i\alpha - \sum_{k=-K}^{K+1} A_k e^{-i\alpha(2k-1)} \right)^{-1},$$

то для непарних N

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n - x(\frac{n}{N})\| = O(\sqrt{\ln N} \cdot \omega(y, \frac{1}{N})), \quad N \rightarrow \infty.$$

Приклад. Наведемо приклад, який ілюструє, чому в останньому наслідку розглянуті лише непарні зсуви.

Нехай $B = \mathbb{C}^2$, норма евклідова. Розглянемо рівняння

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Умова існування та єдиності обмеженого розв'язку цього рівняння виглядає так:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists (i\alpha I - A_0 - A_1 e^{-i\alpha})^{-1} \in L(B),$$

а умова існування та єдиності обмеженого розв'язку відповідного різницевого рівняння буде такою:

$$\forall t \in \mathbb{R} \exists (iN \sin t \cdot I - A_0 - A_1 e^{-iNt})^{-1} \in L(B).$$

Якщо обрати довільне

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{i\alpha}{1+e^{-i\alpha}}, \frac{i\alpha}{1-e^{-i\alpha}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

та покласти

$$A_0 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

то легко бачити, що перша з цих умов виконується, а друга порушується при $t = \pi$ незалежно від парності N .

Отже, різницеве рівняння, що відповідає диференціальному, може не мати обмеженого розв'язку або мати неєдиний обмежений розв'язок при як завгодно великих значеннях N .

4 Висновки

В роботі досліджені лінійні диференціальні рівняння довільного порядку з запізненнями та випередженнями аргументу щодо функцій зі значеннями у банаховому просторі. Знайдені достатні умови наближення обмежених розв'язків розглянутих рівнянь розв'язками відповідних різницевого рівнянь. Знайдена оцінка точності наближення, залежна від гладкості відомої функції.

Список використаних джерел

1. Чайковський А.В. Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – №8. – С. 33-37.
2. Чайковський А.В. Функції від оператору зсуву та їх застосування до різницевого рівняння // Укр. мат. журн. – 2010. – №10. – С. 1408-1419.
3. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. – 1991. – 43, № 1. – С. 41-46.

Надійшла до редколегії 18.05.2011

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.6

Бомба А.Я.¹, д.т.н., проф.,
Теребус А.В.², аспірантка

Про один підхід до моделювання просторової квазіідеальної течії

Задачу моделювання квазіідеальної фільтраційної течії у деякому неоднорідному криволінійному паралелепіпеді, обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, зведено до задачі на просторове квазіконформне відображення даного паралелепіпеда на прямокутний. Сформовано системи алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів, апроксимуючих квазіпотенціал та просторово квазікомплексно-спряжені до нього функції течії, а також функції, що здійснюють відповідне обернене відображення.

Ключові слова: квазіконформне відображення, квазігармонічні многочлени, просторово квазікомплексно-спряжені многочлени.

E-mail: ¹abomba@ukr.net, ²anna.terebus@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Як відомо, при моделюванні плоских квазіідеальних полів ефективним є використання інструментів комплексного аналізу [4]. Зважаючи на те, що узагальнення методів теорії функцій комплексної змінної на простір пов'язане з чималою кількістю нерозв'язних проблем, аналітичні підходи до моделювання просторової квазіідеальної течії представляють особливий інтерес.

Ідея наближення аналітичних функцій многочленами належить Рунге [9]. Моделювання на цій основі плоских ідеальних (чи квазіідеальних) полів не викликає значних труднощів (див., зокрема [5]). У роботі [7], навіть, здійснено апроксимацію просторових ідеальних полів плоскими гармонічними многочленами, шляхом їх задання у різних геометричних площинах. Нами запропоновано [6] методологію використання просторових гармонічних многочленів та просторово комплексно-спряжених до них многочленів при моделюванні та прогнозуванні ідеальної течії у криволінійному паралелепіпеді, обмеженому парно ортогональними між собою екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. У представлений роботі таку методологію

Bomba A.Ya.¹, D. Sc., Prof.
Terebus A.V.², Graduate Student

On one approach to spatial quasiideal flow modelling

The problem of modeling of quasiideal filtration flow in a heterogeneous curvilinear parallelepiped, which is restricted by two equipotential surfaces and four stream surfaces, is reduced to the problem on spatial quasiconformal mapping of this parallelepiped to a rectangular. The systems of algebraic equations for finding of unknown coefficients of polynomials, which approximate quasipotential and spatially complex conjugate to it stream functions and functions, which realize the corresponding mapping, are formulated.

Key Words: quasiconformal mapping, quasiharmonic polynomials, spatially complex conjugate polynomials.

розв'язання крайових задач на конформні відображення поширено на випадки квазіконформних відображень.

Загальна постановка задачі. Розглянемо модельну нелінійну задачу знаходження квазігармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y, z)$ (квазіпотенціалу) в криволінійному паралелепіпеді $G_\tau = A_\tau B_\tau C_\tau D_\tau A'_\tau B'_\tau C'_\tau D'_\tau$ ($\tau = (x, y, z)$), обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями $A'_\tau A_\tau B_\tau B'_\tau = \{\tau: x = F_1(y, z)\}$, $C'_\tau C_\tau D_\tau D'_\tau = \{\tau: x = F_2(y, z)\}$ та чотирма поверхнями течії $A_\tau B_\tau C_\tau D_\tau = \{\tau: z = F_3(x, y)\}$, $A'_\tau B'_\tau C'_\tau D'_\tau = \{\tau: z = F_4(x, y)\}$, $A'_\tau D'_\tau D_\tau A_\tau = \{\tau: y = F_5(x, z)\}$, $B'_\tau C'_\tau C_\tau B_\tau = \{\tau: y = F_6(x, z)\}$ (гладкими, взаємно ортогональними між собою):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0; \quad (1)$$

$$\varphi|_{A_\tau B_\tau A_\tau} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_\tau C_\tau C_\tau} = \varphi^*,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{ADD_0A_0 \cup A_0D_0C_0B_0 \cup B_0C_0CB \cup ADCB} = 0, \quad (2)$$

де $\kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi)$ – обмежена достатньо гладка функція, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій, $-\infty < \varphi < \varphi^* < +\infty$, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні. Більш загальну задачу на просторове квазіконформне відображення $\omega = \omega(\tau) = \omega(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$ даної області G_1 на відповідну просторову область комплексного квазіпотенціалу $G_w = \{\omega = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0, 0 < \chi < Q^0\}$ сформулюємо у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

за крайових умов:

$$\begin{cases} \varphi|_{ADD_0A_0} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCB_0D_0} = \varphi^*, \quad \psi|_{ADD_0A_0} = 0, \\ \psi|_{DCB_0D_0} = Q_0, \quad \chi|_{ADCB} = 0, \quad \chi|_{ADD_0A_0} = Q^0. \end{cases} \quad (4)$$

Зауважимо, що хоч параметри Q_0 та Q^0 , які характеризують перерозподіл течії відповідно вздовж горизонтального та вертикального одиничних прошарків, є невідомими, та знаходження їх значень в процесі розв'язку є непринциповим. Далі визначатимемо лише потік через довільний поперечний переріз течії:

$$Q = Q^0 Q_0 = \iint_S \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{n} \, dS, \quad (5)$$

де S – площа перерізу, $\vec{n}$ – додатний одиничний вектор біжучої нормалі.

Відповідна (3)-(4) обернена задача на просторове квазіконформне відображення $G_w \rightarrow G_1$ [1] набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial \chi} \right), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \chi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial z}{\partial \chi} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \chi} \right); \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y(\varphi_*, \psi, \chi) = F_1(x(\varphi_*, \psi, \chi), z(\varphi_*, \psi, \chi)), \\ y(\varphi^*, \psi, \chi) = F_2(x(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi)), \\ z(\varphi, \psi, 0) = F_3(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0)), \\ z(\varphi, \psi, Q^0) = F_4(x(\varphi, \psi, Q^0), y(\varphi, \psi, Q^0)), \\ x(\varphi, 0, \chi) = F_5(y(\varphi, 0, \chi), z(\varphi, 0, \chi)), \\ x(\varphi, Q_0, \chi) = F_6(y(\varphi, Q_0, \chi), z(\varphi, Q_0, \chi)). \end{cases} \quad (7)$$

Розв'язки такого роду задач будуватимемо у вигляді квазігармонічних многочленів та квазікомплексно-спряжених до них многочленів. При цьому зауважимо, що в більшості методів, зокрема, варіаційних, базисні функції підбираються так, щоб виконувались крайові умови, а коефіцієнти – щоб задовольнялося рівняння. Ми ж на початку «вимагатимемо» від згаданих вище многочленів квазігармонічності та «квазіспряженості», а далі, використовуючи крайові умови, доповнюватимемо відповідні системи алгебраїчних рівнянь з метою отримання єдиного розв'язку.

Розв'яжемо спочатку наближено задачу (1)-(2) знаходження квазіпотенціалу.

Представимо шукану квазігармонічну у

вигляді ряду: $\varphi(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^n a_{i,j,k} x^i y^j z^k$. Пока-

жемо також $\kappa = \kappa(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^n \kappa_{i,j,k} x^i y^j z^k$.

Внаслідок підстановки таких представлень в (1) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях, одержимо нескінченну лінійну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=0}^n \sum_{i_1+j_1+k_1=0}^n & ((i_1+1)(i-i_1+1)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1, j_1, k_1} + \\ & + (i_1+1)(i_1+2)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1+2, j_1, k_1} + \\ & + (j_1+1)(j-j_1+1)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1, j_1+1, k_1} + \\ & + (j_1+1)(j_1+2)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1, j_1+2, k_1} + \\ & + (k_1+1)(k-k_1+1)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1, j_1, k_1+1} + \\ & + (k_1+1)(k_1+2)\kappa_{i-i_1, j-j_1, k-k_1} a_{i_1, j_1, k_1+2}) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $i+j+k = n$, $n = 0, \infty$.

Апроксимацію крайових умов (2) можна здійснити з використанням методу невизначених коефіцієнтів (попередньо розклавши обмежуючу паралелепіпед поверхні у степеневі ряди). В такий спосіб для умови заданої на поверхні

$$A^*A, B, B^* = \left\{ \tau: \quad x = F_1(y, z) = \sum_{q+j=0}^{\infty} \beta_{q,j}^{(1)} x^q z^j \right\}, \quad y$$

[6] сформовано наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i=0, \\ \text{mod}(N, j)}}^{\bar{i}-k} \max_{\substack{m=0, \\ i=0, \\ k=0}}^{m=0, \dots, j} \max_{\substack{n=0, \\ j=0}}^{n=0, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{i}-k}{2} \right\rfloor} \left(\sum_{j=0}^{m+n-k-i-j, n-1} \dots \sum_{j=n=0}^{\left(\frac{\bar{i}-k-\sum_{\eta=2}^m \eta_1 j_\eta}{m_1} \right)} \right) (a_{n-i-k, j}) \\
& \cdot \overline{P_{n-i-k}} \left(\bar{i}-i-\sum_{\eta=2}^m s_1 j_\eta, \frac{1}{m_1} (\bar{k}-k-\sum_{\eta=2}^m (m_1-2s_1) j_\eta - \right. \\
& \left. -\bar{i}+i), j_m \right) \left(\beta_{0, m_1}^{(1)} \right)^{\bar{i}-i-\sum_{\eta=2}^m \eta_1 j_\eta} \left(\prod_{\eta=2}^m \beta_{\eta, m_1-\eta}^{(1)} \right)^{j_\eta} \\
& \cdot \left(\beta_{0, m_1-1}^{(1)} \right)^{\frac{1}{m_1} (\bar{k}-k-\sum_{\eta=2}^m (m_1-2\eta) j_\eta -\bar{i}+i)}.
\end{aligned}$$

де $\bar{i} + \bar{k} = N$, $N = \overline{0, \infty}$, $\bar{P}_r(r_1, r_2, \dots, r_l) = r_l / (r_1! \dots r_l!)$ – кількість перестановок з повторенням, $[x]$ – найбільше ціле число, що не перевищує x . Як бачимо, записані співвідношення є досить громіздкими. Крім цього, врахувавши всі рівняння для крайових умов, отримаємо систему з надлишковістю. Знаходження її розв'язку чисельними методами пов'язане з певними труднощами [2].

3 метою спрощення розв'язання, при формуванні апроксимуючих крайові умови систем використаємо метод колокацій [8]. При цьому в (8) «залишимо» перших $\frac{(m^2 - 1)m}{6}$

рівнянь, утворених прирівнюванням коефіцієнтів при $x^i y^j z^k$, таких, що $i+j+k=0, m$. У відповідну неповну систему ввійде

$$(x_p^{(4)}, y_p^{(4)}, z_p^{(4)}), \quad (x_p^{(5)}, y_p^{(5)}, z_p^{(5)}), \quad (x_p^{(6)}, y_p^{(6)}, z_p^{(6)}).$$

$p = 1,6(l+1)^2$. Внаслідок підстановки координат вибраних таким чином точок у (2), одержимо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(a_{i,j,k} (x_p^{(1)})^i (y_p^{(1)})^j (z_p^{(1)})^k \right), \\ \Phi^* &= \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(a_{i,j,k} (x_p^{(2)})^i (y_p^{(2)})^j (z_p^{(2)})^k \right), \\ 0 &= \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(i a_{i,j,k} (x_p^{(r)})^{i-1} (y_p^{(r)})^j (z_p^{(r)})^k \right) F_{r,x}^* (x_p^{(r)}, y_p^{(r)}) + \\ &+ \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(j a_{i,j,k} (x_p^{(r)})^i (y_p^{(r)})^{j-1} (z_p^{(r)})^k \right) F_{r,y}^* (x_p^{(r)}, y_p^{(r)}) - \\ &- \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(k \cdot a_{i,j,k} (x_p^{(r)})^i (y_p^{(r)})^j (z_p^{(r)})^{k-1} \right), \\ 0 &= \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(i a_{i,j,k} (x_p^{(l)})^{i-1} (y_p^{(l)})^j (z_p^{(l)})^k \right) F_{r,x}^* (x_p^{(l)}, y_p^{(l)}) - \\ &- \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(j \cdot a_{i,j,k} (x_p^{(l)})^i (y_p^{(l)})^{j-1} (z_p^{(l)})^k \right) + \\ &+ \sum_{i+j+k=0}^{m+2} \left(k a_{i,j,k} (x_p^{(l)})^i (y_p^{(l)})^j (z_p^{(l)})^{k-1} \right) F_{r,z}^* (x_p^{(l)}, y_p^{(l)}), \end{aligned}$$

$$r = \overline{3,4}, \quad l = \overline{5,6}, \quad p = \overline{1,6(l+1)^2}.$$

Для відшукування невідомого значення квазіпотенціалу ми одержали систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язок якої можливо знайти, як числовими, так і аналітичними, в простіших випадках, методами. Зауважимо, при цьому, що метод колокацій було дещо модифіковано, адже, традиційно «колокації» використовуються для рівнянь, а не крайових умов.

За знайденням квазіпотенціалом значення потоку через довільний поперечний переріз течії (зокрема бічну грань A^*A,B,B^*) можна обчислити, з використанням (5), наступним чином:

$$Q = \sum_{i+j+k=0}^m ((i+1)a_{i+1,j,k}P_{i,j,k} + (j+1)a_{i,j+1,k}Q_{i,j,k} + (k+1)a_{i,j,k+1}R_{i,j,k}), \quad (9)$$

$$\text{де } P_{i,j,k} = - \sum_{n=1}^{M,N} \left(\Phi_{n,i} F_i \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) y'_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \cdot z_{n-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^k \right), Q_{i,j,k} = \sum_{n=1}^{M,N} \left(\Phi_{n,i} F_i \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& F_1^i \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^j z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k, R_{i,j,k} = \\
& = \sum_{n=1}^{M+N} \left(\Phi_{n,i} F_{1z} \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^j z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k \right. \\
& \quad \cdot F_1^i \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \Big), \Phi_{n,i} = \delta S_{n,i}, \\
& \quad \kappa \left(F_1 \left(y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right), y_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}, z_{n-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right), \\
& \quad y_{n-1} = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}, \quad z_{n-1} = \frac{z_{n-1} + z_n}{2},
\end{aligned}$$

$\delta S_{u,v}$ – площа чотирикутника з вершинами в точках $(y_{u-1,v-1}, z_{u-1,v-1})$, $(y_{u-1,v}, z_{u-1,v})$, $(y_{u,v}, z_{u,v})$, $(y_{u,v-1}, z_{u,v-1})$; $u = \overline{0, M}$, $v = \overline{0, N}$ – деяке рівномірне розбиття проєкції A^*AB, B^* на площину yOz .

Для розв'язання задачі (3)-(4) на просторове квазіконформне відображення області G_1 на відповідну область $G_0 = \{\omega = (\varphi, \psi, \chi): \varphi, \psi \in \mathcal{Q}, \quad 0 < \psi < Q_0, \quad 0 < \chi < Q^0\}$ подамо функції $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ аналогічно до $\varphi = \varphi(x, y, z)$ у вигляді рядів:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^{\infty} b_{i,j,k} x^i y^j z^k, \quad \chi(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^{\infty} c_{i,j,k}^{(\sigma)} x^i y^j z^k.$$

Після їх підстановки в (3), прирівнювання доданків при однакових степенях $x^i y^j z^k$, $i+j+k=m$, одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=0, j_1=0, k_1=0}^{i, j, k} (i_1 + 1) x_{-q, j-j_1, k-k_1} a_{q, j_1, k_1} = \\
& = \sum_{q=0, j_1=0, k_1=0}^{i, j, k} ((j-j_1+1)(k_1+1) b_{-q, j-j_1, k-k_1} c_{q, j_1, k_1+1} - \\
& \quad -(k-k_1+1)(j_1+1) b_{-q, j-j_1, k-k_1+1} c_{q, j_1+1, k_1}), \\
& \sum_{q=0, j_1=0, k_1=0}^{i, j, k} (j_1+1) x_{-q, j-j_1, k-k_1} a_{q, j_1+1, k_1} = \\
& = \sum_{q=0, j_1=0, k_1=0}^{i, j, k} ((k-k_1+1)(i_1+1) b_{-q, j-j_1, k-k_1+1} c_{q, j_1, k_1} - \\
& \quad -(i-i_1+1)(k_1+1) b_{-q, j-j_1, k-k_1} c_{q, j_1+1, k_1}), \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{i,j=0 \\ k_1=0}}^{i,j=0}^{i,j=0} (k_1+1) \kappa_{i-j, j-j_1, k-k_1} a_{i-j_1, k_1+1} =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=0 \\ k_1=0}}^{i,j=0}^{i,j=0} ((i-i_1+1)(j_1+1) b_{i-j_1+1, j-j_1, k-k_1} c_{i-j_1+1, k_1} -$$

$$-(j-j_1+1)(i_1+1) b_{i-j, j-j_1+1, k-k_1} c_{i, j_1+1, k_1}),$$

де $i + j + k = n$, $n = \overline{0, m}$.

Доповнимо систему (10), до складу якої входить $\frac{1}{2}m(m+1)(m+2)$ рівнянь та $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)(m+3)$ невідомих, $\frac{3}{2}(m+1)(m+2)$ рівняннями, сформованими з крайових умов (4) (для знаходження $a_{i,j,k}$, $b_{i,j,k}$, $c_{i,j,k}$, $i+j+k=\overline{0, m+1}$). Тут аналогічно до попередньої задачі доцільно використати колокації. Покладемо, наприклад, $m=4l+2$ і виберемо на кожній з обмежуючих поверхонь по $(4l+3)(l+1)$ точок. В тих самих позначеннях, що і в попередній задачі, матимемо:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(a_{i,j,k} (x_p^{(1)})' (y_p^{(1)})' (z_p^{(1)})^k \right), \\ \Phi_n^* &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(a_{i,j,k} (x_p^{(2)})' (y_p^{(2)})' (z_p^{(2)})^k \right), \\ 0 &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(c_{i,j,k} (x_p^{(3)})' (y_p^{(3)})' (z_p^{(3)})^k \right), \quad (11) \\ Q^0 &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(c_{i,j,k} (x_p^{(4)})' (y_p^{(4)})' (z_p^{(4)})^k \right), \\ 0 &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(b_{i,j,k} (x_p^{(5)})' (y_p^{(5)})' (z_p^{(5)})^k \right), \\ Q_0 &= \sum_{i+j+k=0}^{n-1} \left(c_{i,j,k} (x_p^{(6)})' (y_p^{(6)})' (z_p^{(6)})^k \right). \end{aligned}$$

$$p = \overline{1, (4l + 3)(l + 1)}.$$

Для доповнення системи (10)-(11) ще одним рівнянням (врахувавши, що один з параметрів Q_0 та Q^0 є невідомим) використаємо рівняння (9).

У випадку залежності коефіцієнта провідності від потенціалу та функції течії $\kappa = \kappa(\phi, \psi, \chi)$, що актуально при розв'язанні різного роду модельних задач, доцільно розв'язувати задачу на обертене просторове квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ (6)-(7). Для цього функції $x = x(\phi, \psi, \chi)$, $y = y(\phi, \psi, \chi)$

$z = z(\varphi, \psi, \chi)$, $\kappa = \kappa(\varphi, \psi, \chi)$ представимо у ви-

гляді: $x(\varphi, \psi, \chi) = \sum_{i+j+k=0}^n \alpha_{i,j,k} \varphi^i \psi^j \chi^k$, $y(\varphi, \psi, \chi) =$

$= \sum_{i+j+k=0}^n \beta_{i,j,k} \varphi^i \psi^j \chi^k$, $z(\varphi, \psi, \chi) = \sum_{i+j+k=0}^n \gamma_{i,j,k} \varphi^i \psi^j \chi^k$,

$\kappa(\varphi, \psi, \chi) = \sum_{i+j+k=0}^n \kappa_{i,j,k} \varphi^i \psi^j \chi^k$. Підставимо такі

представлення в систему (6), прирівняємо доданки при однакових степенях $\varphi^i \psi^j \chi^k$, $i+j+k=n$, $n=0, \overline{m}$, одержимо:

$$(i+1)\alpha_{i+1,j,k} - \sum_{\substack{q=0, j_1=0, \\ k_1=0}}^{i+j-k} \sum_{\substack{q_1=0, j_2=0, \\ k_2=0}}^{i-j-k-j_1} (\kappa_{i-q-j_2, j-j_1-j_2, k-k_1-k_2} \cdot$$

$$\langle (j_1+1)(k_2+1) \beta_{q_1, j_1+1, k_1} \gamma_{q_2, j_2, k_2+1} - \\ - (k_1+1)(j_2+1) \beta_{q_1, j_1, k_1+1} \gamma_{q_2, j_2+1, k_2} \rangle = 0,$$

$$(i+1)\beta_{i+1,j,k} - \sum_{\substack{q=0, j_1=0, \\ k_1=0}}^{i+j-k} \sum_{\substack{q_1=0, j_2=0, \\ k_2=0}}^{i-j-k-j_1} (\kappa_{i-q-j_2, j-j_1-j_2, k-k_1-k_2} \cdot$$

$$\langle (j_1+1)(k_2+1) \gamma_{q_1, j_1+1, k_1} \alpha_{q_2, j_2, k_2+1} - \\ - (k_1+1)(j_2+1) \gamma_{q_1, j_1, k_1+1} \alpha_{q_2, j_2+1, k_2} \rangle = 0, \quad (12)$$

$$(i+1)\gamma_{i+1,j,k} - \sum_{\substack{q=0, j_1=0, \\ k_1=0}}^{i+j-k} \sum_{\substack{q_1=0, j_2=0, \\ k_2=0}}^{i-j-k-j_1} (\kappa_{i-q-j_2, j-j_1-j_2, k-k_1-k_2} \cdot$$

$$\langle (j_1+1)(k_2+1) \alpha_{q_1, j_1+1, k_1} \beta_{q_2, j_2, k_2+1} - \\ - (k_1+1)(j_2+1) \alpha_{q_1, j_1, k_1+1} \beta_{q_2, j_2+1, k_2} \rangle = 0.$$

Таку задачу зручніше розв'язувати, коли система (1)-(2) – розв'язана і значення Q є відомим. В такому разі систему (12) потрібно доповнити $\frac{3}{2}(m+1)(m+2)$ рівняннями для

крайових умов (7) (аналогічно до попереднього випадку). У випадку, коли значення Q – невідоме, систему, для крайових умов (7) можливо формулювати, як і у [6] з використанням методу невизначених коефіцієнтів, або, на різних гранях встановлювати різні кількості точок колокації.

На практиці аналітичне, або числово-аналітичне розв'язання можна реалізувати поетапно: спочатку розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для задачі (1)-(2) таким чином, знайшовши квазіпотенціал (а також, на цій основі компоненти вектора швидкості та повну витрату Q). Далі, розв'язувати систему

лінійних рівнянь для знаходження (залежно від певних параметрів) однієї з функцій течії, сформовану з умов ортогональності градієнтів квазіпотенціалу і цієї функції течії та крайових умов для неї. Після цього підстановкою знайдених величин у систему (10) та з врахуванням решту крайових умов визначити розв'язок задачі (3)-(4).

Проїлюструємо таку методику на конкретному прикладі: $A^*A, B, B^* = \{ \tau: x^2 - y^2 = 1 \}$, $C^*C, D, D^* = \{ \tau: x^2 - y^2 = 4 \}$, $A, B, C, D, = \{ \tau: z = 0 \}$, $A^*B^*C^*D^* = \{ \tau: z = 1 \}$, $A^*D^*D, A = \{ \tau: xy = 1 \}$, $B^*C^*C, B = \{ \tau: xy = 2 \}$, $\varphi = 0$, $\varphi^* = 3$, $\kappa = 1$, $x, y > 0$.

Розв'язавши систему, утворену зі співвідношень (8) та рівнянь, одержаних підстановкою розкладів в ряди Тейлора рівнянь поверхонь A^*A, B, B^* та C^*C, D, D^* (відповідно:

$$x = 1 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{16}y^6 - \dots, \quad x = 2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{64}y^6 + \dots)$$

у перші дві із крайових умов (2) і прирівнюванням доданків при однакових степенях, матимемо: $\varphi(x, y, z) = -1 + x^2 - y^2$. Враховуючи умову ортогональності: $\text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \chi = 0$ та крайові умови для

$\chi = \chi(x, y, z)$ одержимо: $\chi(x, y, z) = (Q^0 - c_{0,0,2} - c_{0,0,3} - \dots)z + c_{0,0,2}z^2 + c_{0,0,3}z^3 + \dots$. В результаті розв'язання системи (10) матимемо: $\chi(x, y, z) = Q^0 z$, $\psi(x, y, z) = b_{0,0,0} + b_{0,1,1}xy$, $b_{0,1,1}Q^0 = 2$ а з урахуванням крайових умов для $\psi = \psi(x, y, z)$ – $\psi(x, y, z) = -Q_0 + Q_0 xy$, $Q = Q_0 Q^0 = 2$.

Покладемо, не зменшуючи загальності $Q^0 = 1$, тоді $\chi(x, y, z) = z$, $\psi(x, y, z) = -2 + 2xy$. Очевидно, що одержаний розв'язок співпадає з очікуванням. Справді, запропоновану в якості прикладу задачу можна було б відразу розглядати як плоску. При цьому, шуканий потенціал $\varphi = \varphi(x, y)$ та функція течії $\psi = \psi(x, y)$ співпадають з дійсною та уявною частинами функції $w = z^2$ [3]. Отриманий результат підтверджує правильність теоретичних обґрунтувань.

Висновки. Задачу моделювання квазіідеальної фільтраційної течії у деякому

неоднорідному криволінійному паралелепіпеді, обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, зведено до задачі на просторове квазіконформне відображення даного паралелепіпеда на прямокутний. Сформовано системи алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів, апроксимуючих квазіпотенціал та просторово квазікомплексно-спряжені до нього функції течії, а також функції, що здійснюють відповідне обернене відображення. При цьому, на відміну від [6], при апроксимації крайових умов використано метод колокацій, що

забезпечує можливість довільного (не обов'язково многочленного) задання обмежуючих паралелепіпед поверхонь та встановлення відповідностей між кількостями рівнянь та невідомих. Запропоновану методику проілюстровано на конкретному прикладі, одержаний при цьому результат підтверджує правильність теоретичних обґрунтувань. У перспективі досліджень – побудова просторового базису гармонічних та просторово комплексно-спряжених до них многочленів стосовно розв'язання окреслених типів задач.

Список використаних джерел

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький // – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука. – 1977. – 304с.
3. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука. – 1977. – 407 с.
4. Рауэ Х. Механика жидкости / Х. Рауэ. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
5. Бомба А. Я. Один клас крайових задач на конформні відображення і їх наближене розв'язання методом гармонічних многочленів // А. Я. Бомба, А. В. Терещук / Волинський математичний вісник. Серія "прикладна математика" – 2010. – 7 (16). – С. 30-42.

6. Бомба А. Я. Просторові гармонічні многочлени та аналоги задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, А. В. Терещук // Волинський математичний вісник. Серія "прикладна математика". – 2008. – 5 (14). – С. 39-63.
7. Hromadka T. V. Approximating three-dimensional steady-state potential flow problems using two-dimensional complex polynomials / T. V. Hromadka, R. J. Whitley / Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2005. – Volume 29. – Issue 2. – Pp. 190-194.
8. Karageorghis A. Satisfaction of boundary conditions for Chebyshev collocation methods in cuboidal domains / A. Karageorghis // Computers & Mathematics with Applications. – Volume 27, Issue 12. – June 1994. – Pp. 85-90.
9. Runge C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / C. Runge // Acta Math. – Vol. 6. – 1885. – Pp. 229-244.

Надійшла до редакції 24.06.11

УДК 519.168

Бондарець І. М.

Прогнозування часових рядів на прикладі курсів валют за допомогою нейронних мереж

В статті описано розроблену напівавтоматичну систему прогнозування часових рядів *Neuro* та розглядаються її застосування для прогнозування курсів валют на ринку *Forex*.

Ключові слова: нейронна мережа, багатошаровий перцептрон, двонаправлена автоасоціативна пам'ять, часовий ряд.

E-mail: ibondarets@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анисимов А.В.

Вступ

Прогнозування часових рядів (ЧР) є досить актуальною науково-технічною проблемою, оскільки дозволяє передбачити поведінку різних факторів в екологічних, економічних, соціальних та інших системах. Таким чином, основною метою будь-якого прогнозування є створення певного "оракула", який дозволяє передбачити зміни тенденції того чи іншого фактору [1]. Такий "оракул" в більшості випадків базується на побудові багатокрокової моделі авторегресії на часовому ряді, який дозволяє здійснювати екстраполяцію на декілька кроків вперед.

Будь яка залежність виду з нелінійною функцією може бути відтворена за допомогою багатошарового перцептрона. Апарат штучних нейронних мереж передбачає мінімальну участь аналітика в формуванні моделі, оскільки, вони мають властивість самонавчання, а алгоритми навчання адаптують вагові коефіцієнти у відповідності зі структурою даних, представлених для навчання. Тому будь які моделі класичного статистичного аналізу можна більш ефективно реалізувати за допомогою нейронних мереж.

Побудова нейромережевої системи прогнозування часових рядів *Neuro*

Для розробки напівавтоматичної системи прогнозування часових рядів *Neuro* був використаний багатошаровий перцептрон з навчанням методом зворотного розповсюдження помилки. Архітектура мережі

I. N. Bondarets

Forecasting time series by the example of exchange rates using neural networks

The developed forecasting semi-automatic system of time series *Neuro* is described. Using this system for forecasting exchange rates on *Forex* is considered.

Key Words: neural network, multilayer perceptron, bidirectional associative memory, time series.

формується користувачем: задаються входи, кількість та розмір проміжних шарів.

На початку аналізу необхідно вивчити досліджувану область, дослідити саму можливість передбачення, тобто довести, що даний часовий ряд взагалі можна спрогнозувати. Потім визначають часовий інтервал та фактори, які впливають на результат. Даний етап пропонується виконувати за допомогою класичного статистичного аналізу.

Оскільки, прогнозований часовий ряд x_t часто нестационарний, то в системі застосовується перший різницьовий оператор $y_t = x_t - x_{t-1} = \Delta x_t$, для того щоб отримати стаціонарний ряд. Після введення даних система автоматично їх нормує.

Далі система створює навчальну, вхідну та тестову вибірки. Перша використовується для навчання, друга – для безпосереднього прогнозу, а третя – для контролю якості прогнозу системи.

Для зменшення розмірності векторів використовується двонаправлена автоасоціативна пам'ять (ДАП) (Рис. 1).

Топологія ДАП визначається наявністю двох шарів формальних нейронів з пошаровою організацією зв'язків між ними. Однак, на відміну від перцептрона з одним прихованим шаром, вихідний сигнал другого шару формальних нейронів подається на входи першого шару, забезпечуючи тим самим глобальну нелінійність зворотного зв'язку. Матриці ваг, що з'єднують ці два шари,

отримуються шляхом транспонування – це ще одна істотна характеристика структури ДАП.

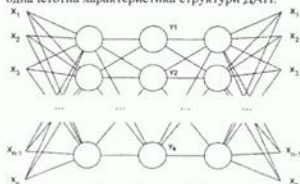


Рис. 1. Модель ДАП

На вхід мережі подається вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який повинен бути отриманий і на виході мережі. Таким чином у прихованому шарі ми отримаємо вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, $k < n$ вже меншої розмірності, який буде зберігати



Рис. 2. Послідовність використання НМ для задач однокрокового прогнозування

При багатокроковому прогнозуванні ЧР на входи НМ подається вектор відомих значень: $x(t), x(t_2), \dots, x(t_m), z(t), z(t_2), \dots, z(t_m)$ (можливо, що $z = \emptyset$), а на виході формується прогнозована величина $x(t_{m+1})$ та $z(t_{m+1})$, яка визначає вектор прогнозованих виходів і одночасно додається до значень навчальної вибірки, тобто, приймається як достовірні. Далі на входи подається вектор $x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_{m+1}), z(t_2), z(t_3), \dots, z(t_{m+1})$, а на виході отримаємо $x(t_{m+2})$ та $z(t_{m+2})$, і так продовжуємо процес до тих пір, поки не отримаємо прогноз на R кроків вперед. Зазначимо, що при малому l значень z може не

необхідну інформацію з вхідного вектора, але в стиснутому вигляді.

Система дозволяє розв'язувати одно- та багатопараметричні задачі прогнозування на один та більше кроків. В однопараметричній задачі прогнозування використовується лише прогнозований ЧР x , а в багатопараметричній ще й інші ЧР (позначимо їх як z), які мають вплив на прогнозований.

Задача однокрокового прогнозування зводиться до задачі відображення, коли один вхідний вектор відображається на вихідний (рис. 2).

Багатокрокове прогнозування (рис. 3) характеризується збільшенням часу, на який здійснюється прогноз (на час випередження $T_{\text{вип}} = l \cdot R$, де R – кількість кроків прогнозування; l – крок дискретизації параметру (наприклад, рік, місяць, день,...).

вистачати, тому їх слід інтерполювати, що здійснює побудована система.

Багатокрокове прогнозування дозволяє виконувати короткі і середньотермінові прогнози, оскільки суттєвий вплив на точність має накопичення похибки на кожному кроці прогнозування. При застосуванні довгострокового багатокрокового прогнозування спостерігається характерне для багатьох систем прогнозування поступове затухання процесу, фазові зсуви й інші спотворення прогнозу. Такий тип прогнозування підходить для стаціонарних ЧР з невеликою випадковою складовою.



Рис. 3. Послідовність використання НМ для задач багатокрокового прогнозування

Прогнозування з перенавчанням (рис. 4) дозволяє при великих інтервалах випередження усунути затухання прогностичних властивостей мережі за рахунок постійного корегування вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків.

На вході мережі в режимі функціонування надходить остання реалізація навчальної множини $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m), z(t_1), z(t_2), \dots, z(t_m)$. Далі отримуємо прогноз на R^* кроків: $x(t_1), x(t_{m+1}), \dots, x(t_{m+R^*}), z(t_{m+1}), z(t_{m+2}), \dots, z(t_{m+R^*})$.



Рис. 4. Послідовність використання НМ для задач багатокрокового прогнозування

Після навчання НМ отримаємо розв'язок на кількість кроків, що дорівнює розміру тестової вибірки. Критерії якості отриманого розв'язку базуються на використанні наступних похибок прогнозу:

- 1) Абсолютна похибка прогнозу:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - d_i|$$

- 2) Абсолютна похибка прогнозу, виражена у відсотках:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{|y_i - d_i|}{|y_i|} \right) \cdot 100\%$$

- 3) Середньоквадратична похибка:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - d_i)^2$$

- 4) Середньоквадратична похибка, виражена у відсотках:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i - d_i}{y_i} \right)^2} \cdot 100\%$$

- 5) Модифікована абсолютна похибка, виражена у відсотках:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \left(\alpha_i - \frac{\alpha_i + \alpha_N}{N} \right) \frac{|y_i - d_i|}{|y_i|} \right) \cdot 100\%$$

де ε – помилка системи, y_i – спрогнозоване значення (при $y_i = 0$ беремо $y_i = y_{i-1}$), d_i – реальне значення (y_i, d_i – пронормовані), α_i, α_N – коефіцієнти значимості першого та N-ого спрогнозованого значення (у роботі $\alpha_i = 0.5, \alpha_N = 0$). Ця формула враховує, що перші

Ці значення відкладається у векторі прогнозованих вихідних значень і в якості достовірного додається до реальних значень навчальної множини. Навчальна множина збільшується. Відбувається процес перенавчання мережі на збільшеній навчальній множині. Далі робимо прогноз на наступні R^* кроків. Так продовжуємо доти, доки не зробимо прогноз на R кроків.

спрогнозовані значення більш важливі, ніж подальші.

Оцінивши адекватність розв'язку системою прогнозування користувач може перенавчити мережу, включивши дані тестової вибірки у навчальну.

Для покращення результату пропонуємо використання декількох експертів (експертних систем), які зробили прогноз x_i та мають рівень довіри c_i ($0 < c_i < 1, \sum_{i=1}^n c_i = 1$) $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді

загальний результат прогнозу можна обчислити за формулою:

$$x_i = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Прогнозування курсу EURUSD за допомогою отриманої системи

Як часовий ряд було взято курс EURUSD на ринку Forex за травень 2011 року. Значення курсів були вибрані з інтервалом у хвилину.

На ринку Forex, як і на інших біржах, можна проводити прогноз цін: закриття (Close), максимальної (Max) та мінімальної (Min) цін. Якість отриманого прогнозу виявилася різною для кожної з них. Було виявлено, що найбільш ефективним є прогнозування максимальної та мінімальної цін. Найгірший результат було отримано при прогнозуванні ціни закриття. Це можна пояснити тим, що ціна закриття є останньою у прогнозованому інтервалі та мало залежить від попередніх значень.

Нейронна мережа складалась із 20 вхідних нейронів та 1 вихідного, проміжний шар складався з 37 нейронів.

Перший навчальний приклад: вхід – $(x_{11}, x_{15}, \dots, x_{300})$, вихід – x_{311} . Другий навчальний вектор: вхід – $(x_{15}, x_{30}, \dots, x_{311})$, вихід – x_{330} . Було взято 500 навчальних прикладів. Вхідні вектори стискалися за допомогою ДАП на 25%. Результат прогнозування представлено на рис. 5.

За допомогою даної системи було отримано прогнози і для інших курсів валют, акцій.

Система майже завжди, коли це можливо, передбачає майбутній тренд. Проте досить часто виникали ситуації, коли ринок ставав

непрогнозованим та система давала неправильний результат.

Наприклад, траплялися випадки, коли на початку певного періоду відбулася певна подія, яка призвела до сильної зміни курсу, тоді похибка прогнозу була дуже великою. Це спричинено тим, що НМ ще не знала про цю подію. При донавчанні мережі з даними, які описують цю подію, можна отримати вже правильний прогноз.

Для зменшення такого роду помилок необхідно надавати додаткову інформацію на вхід нейронної мережі про фундаментальні події, що відбуваються на ринку.

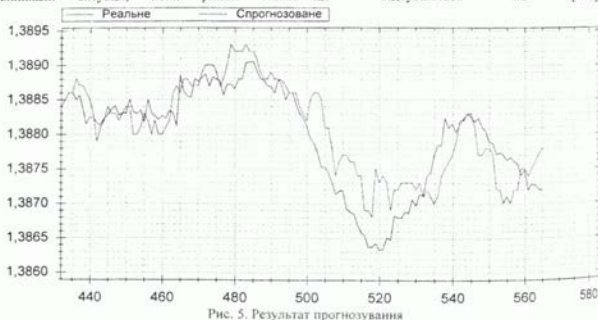


Рис. 5. Результат прогнозування

Одним із основних способів для включення такої інформації є використання технології ExpertLine. При її використанні на вхід системи прогнозування крім стандартного набору подається суб'єктивна думка експерта про ситуацію на ринку. Використання технології ExpertLine дозволяє отримати достатньо малі помилки прогнозів по мірі розвитку ситуації на ринку [3].

Список використаних джерел

1. А.С. Козадаев, А.А. Арзамасцев. Прогнозирование временных рядов с помощью аппарата искусственных нейронных сетей. Краткосрочный прогноз

- температуры воздуха. Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. - Тамбов, 2006. - Т. 11. - Вып. 3. - С. 299-304.
2. В. П. Боровников. Нейронные сети. Statistica Neural Networks. Методология и технологии современного анализа данных. Москва: Горячая линия – Телеком, 2008.
3. П. Памфилов. Прогнозирование курсов валют на рынке Forex. Современный трейдинг, №1, 2001.
4. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation – New York: MacMillan College Publishing Co., 1994. – 696 p.

Надійшла до редакції 04.10.11

УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м.н., проф., Пузікова А.В.

Повнота аксіоматики Армстронга

У статті наведено строге та повне доведення повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке наслідок традиції встановлення повноти в математичній логіці: введені відношення синтаксичного та семантичного слідування та показана їх збіжність. В якості математичного апарата використані властивості теоретико-множинної конструкції обмеження функції за множиною.

Ключові слова: аксіоматика Армстронга, повнота, функціональна залежність, реляційні бази даних.

E-mail: buy@unicyb.kiev.ua, anna_inf@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анисимов А.В.

Огляд наукової та навчальної літератури показав, що в ній відсутнє обґрунтування повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке б задовольняло стандартним вимогам строгості та повноти математичного доведення.

Метою роботи є побудова повного вичерпного доведення відомого класичного результату в теорії реляційних баз даних про повноту аксіоматики Армстронга для функціональних залежностей.

Всі неозначувані тут поняття та позначення використовуються в розумінні монографії [1], зокрема, $s|X$ – обмеження рядка s за множиною атрибутів X .

Нехай t – таблиця, R – схема таблиці t (скінченна множина атрибутів), X, Y, W, Z – підмножини схеми R , s, s_1, s_2 – рядки таблиці t .

В подальшому розгляді множина R зафіксована, крім того, фіксується універсальний домен D – множина, з якої атрибути приймають значення в інтерпретаціях.

Скажемо, що на таблиці t виконується функціональна залежність (ФЗ) (див., наприклад, [1, с. 71]) $X \rightarrow Y$, якщо для двох довільних рядків s_1, s_2 таблиці t , які збігаються на множині атрибутів X , має місце їх рівність і на множині атрибутів Y , тобто:

С.Д.Б. Буй, А.В. Пузікова, 2011

Buy D.B., the doctor of physical and mathematical sciences, the professor, Puzikova A.V.

Completeness of Armstrong's axiomatic

This paper presents a rigorous and convincing proof of completeness of Armstrong's axiomatic system (as for the functional dependences of relational databases) within the paradigm of mathematical logic: the relations of syntactic and semantic entailment are introduced and it is shown that they coincide. The properties of set-theoretic function restriction have been used as mathematical framework.

Key Words: Armstrong's axiomatic, completeness, functional dependence, relational databases.

$$(X \rightarrow Y)(t) = \text{True} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall s_1, s_2 \in t(s_1|X = s_2|X \Rightarrow s_1|Y = s_2|Y).$$

Отже, з семантичної точки зору ФЗ – це предикат, заданий двома (скінченними) множинами атрибутів.

Скажемо, що таблиця t схеми R є моделлю множини ФЗ F , якщо кожна ФЗ $X \rightarrow Y \in F$ виконується на таблиці t :

$$t \text{ модель } F \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall (X \rightarrow Y)(X \rightarrow Y \in F \Rightarrow (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}).$$

Отже, довільна таблиця є моделлю порожньої множини ФЗ.

Семантичне слідування ($\models$). ФЗ $X \rightarrow Y$ семантично слідує з множини ФЗ F , якщо на кожній таблиці $t(R)$, яка є моделлю множини ФЗ F , виконується також ФЗ $X \rightarrow Y$:

$$F \models X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall t(R) (t \text{ модель } F \Rightarrow (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}).$$

Вище запис $t(R)$ означає, що таблиця t має схему R .

Лема 1 (аксіома рефлексивності Армстронга).

$$\forall t (X \rightarrow Y)(t) = \text{true}, \text{ де } Y \subseteq X.$$

Доведення. Розглянемо рядки таблиці t , для яких виконується $s_1|X = s_2|X$. Обмежимо обидві

частини цієї рівності за множиною Y :
 $(s_1|X)Y = (s_2|X)Y$. За властивістю оператора
обмеження $((U|Y)Z = U|(Y \cap Z))$ згідно з [1, с. 24;
2]) маємо $s_1|(X \cap Y) = s_2|(X \cap Y)$. Звідси і з умови
 $Y \subseteq X$ випливає $s_1|Y = s_2|Y$, а отже
 $(X \rightarrow Y)(t) = \text{true}$. $\square$

Наслідок 1. $\emptyset \models X \rightarrow Y$ для $Y \subseteq X$. $\square$

ФЗ вигляду $X \rightarrow Y$, де $Y \subseteq X$, називається
тривіальною.

Таким чином, тривіальні залежності
виконуються на довільній таблиці; іншими
словами, тривіальні залежності семантично
слідують з порожньої множини ФЗ.

Лема 2 (правило поповнення Армстронга).

$(X \rightarrow Y)(t) = \text{true} \Rightarrow (X \cup Z \rightarrow Y \cup Z)(t) = \text{true}$ для
 $Z \subseteq R$. $\square$

Доведення. Нехай на таблиці t виконується
ФЗ $X \rightarrow Y$, покажемо, що на цій таблиці
виконується і ФЗ $X \cup Z \rightarrow Y \cup Z$. Для цього
розглянемо довільні рядки $s_1, s_2 \in t$, такі, що
виконується $s_1|(X \cup Z) = s_2|(X \cup Z)$, звідси за
аксіомою рефлексивності випливає:
 $s_1|X = s_2|X$ і $s_1|Z = s_2|Z$. Використовуючи
властивість дистрибутивності обмежень відносно
об'єднань [1, с. 24; 2], попередні рівності і
імплікацію $s_1|X = s_2|X \Rightarrow s_1|Y = s_2|Y$, маємо
ланцюжок рівностей $s_1|(Y \cup Z) = s_1|Y \cup s_1|Z =$
 $= s_2|Y \cup s_2|Z = s_2|(Y \cup Z)$. $\square$

Наслідок 2.

$F \models X \rightarrow Y \Rightarrow F \models X \cup Z \rightarrow Y \cup Z$ для
 $Z \subseteq R$. $\square$

Доведення. Нехай ФЗ $X \rightarrow Y$ семантично
слідують з множини ФЗ F . Нехай далі таблиця t –
довільна модель множини ФЗ F . Тоді за умовою
 $(X \rightarrow Y)(t) = \text{true}$. За попередньою лемою 2
(правило поповнення) $(X \cup Z \rightarrow Y \cup Z)(t) = \text{true}$.
Отже, на довільній моделі множини ФЗ F
виконується ФЗ $X \cup Z \rightarrow Y \cup Z$. Значить, за
означенням семантичного слідування
 $F \models X \cup Z \rightarrow Y \cup Z$. $\square$

Лема 3 (правило транзитивності
Армстронга).

$(X \rightarrow Y)(t) = \text{true}$ & $(Y \rightarrow Z)(t) = \text{true} \Rightarrow$
 $(X \rightarrow Z)(t) = \text{true}$. $\square$

Доведення. Нехай на таблиці t виконуються
ФЗ $X \rightarrow Y$ і $Y \rightarrow Z$; покажемо, що тоді на цій
самій таблиці t виконується і ФЗ $X \rightarrow Z$. Для

цього розглянемо довільні рядки $s_1, s_2 \in t$, такі,
що $s_1|X = s_2|X$. Тоді, очевидно, що
 $s_1|Y = s_2|Y$. З останньої рівності випливає
шукана рівність $s_1|Z = s_2|Z$. $\square$

Наслідок 3.

$F \models X \rightarrow Y$ & $F \models Y \rightarrow Z \Rightarrow F \models X \rightarrow Z$. $\square$

Доведення. Припустимо, що ФЗ
 $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$ семантично слідують з множини
ФЗ F . Нехай далі таблиця t – довільна модель
множини ФЗ F . Тоді за умовою $(X \rightarrow Y)(t) = \text{true}$
та $(Y \rightarrow Z)(t) = \text{true}$. Звідси за правилом
транзитивності (лема 3) маємо $(X \rightarrow Z)(t) = \text{true}$.
Отже, ФЗ $X \rightarrow Z$ виконується на довільній
моделі множини ФЗ F ; тобто $F \models X \rightarrow Z$. $\square$

Правила поповнення та транзитивності
назвемо *правилами виведення*; вони мають
синтаксичну природу.

Синтаксичне слідування $(\vdash)$. Скажемо, що
функціональна залежність $X \rightarrow Y$ *синтаксично*
слідують з множини ФЗ F ($F \vdash X \rightarrow Y$), якщо існує
скінченна послідовність ФЗ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$,
така, що $\varphi_n = X \rightarrow Y$ і $\forall i = 1, n-1$ кожна φ_i
або аксіома рефлексивності, або належить F , або
отримана за яким-небудь правилом виведення
(поповнення, транзитивності) з попередніх у цій
послідовності ФЗ φ_j, φ_k , $j, k < i$ [3, с. 65].

Послідовність $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ назвемо
доведенням, наслідуючи традиції математичної
логіки.

Нехай задана деяка множина ФЗ F .
Замикання $[F]$ – це множина усіх ФЗ, які
синтаксично слідують з F :

$$[F] \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow Y \mid F \vdash X \rightarrow Y\}.$$

В наступній лемі викладено деякі
природні властивості замикання.

Лема 4. Виконуються властивості:

- 1) $F \subseteq [F]$ (зростання);
- 2) $[[F]] = [F]$ (ідемпотентність);
- 3) $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$ (монотонність). $\square$

Доведення. Доведемо перше твердження.
Нехай ФЗ $X \rightarrow Y \in F$, тоді $F \vdash X \rightarrow Y$ оскільки
послідовність одиначної довжини $\{X \rightarrow Y\}$ і є
доведенням ФЗ $X \rightarrow Y$.

Доведемо друге твердження. За властивістю
1) маємо: $[F] \subseteq [[F]]$. Доведемо обернене
включення $[[F]] \subseteq [F]$. Нехай $X \rightarrow Y$ – довільна

ФЗ, така, що $X \rightarrow Y \in [F]$. Тоді існує доведення

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \rightarrow Y$ і для

$\forall i = 1, m-1$ кожна φ_i є або аксіома рефлексивності, або належить $[F]$, або отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ $\varphi_j, \varphi_k, j, k < i$. Утворимо нову послідовність за такими правилами:

- якщо φ_i є аксіома рефлексивності, то запишемо цю ФЗ без змін;

- якщо $\varphi_i \in [F]$, то за означенням замикаання ця ФЗ має скінченне доведення $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ з F .

Замість ФЗ φ_i вставимо її доведення;

- якщо φ_i отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ $\varphi_j, \varphi_k, j, k < i$, то запишемо ФЗ φ_i без змін.

Очевидно, побудована таким чином послідовність є доведенням ФЗ $X \rightarrow Y$ з F , тобто $F \vdash X \rightarrow Y$, а отже $X \rightarrow Y \in [F]$.

Ці властивості замикаання наведені в [4, с. 57].

Доведемо третє твердження. Нехай $X \rightarrow Y$ – довільна ФЗ, така, що $X \rightarrow Y \in [F]$. Тоді існує

доведення $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \rightarrow Y$ і для

$\forall i = 1, m-1$ кожна φ_i є або аксіома рефлексивності, або належить F , або отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ $\varphi_j, \varphi_k, j, k < i$. Оскільки

множина ФЗ F є підмножиною множини ФЗ G , то, очевидно, що дане доведення є доведенням для ФЗ $X \rightarrow Y$, виходячи з множини ФЗ G :

$X \rightarrow Y \in [G]$. □

Таким чином, за термінологією [5] оператор

$F \mapsto [F]$ є оператором замикаання.

Нехай задана деяка множина ФЗ F , і нехай

$\mathfrak{F}_F$ – сімейство усіх множин ФЗ G , які містять F , таких, що при застосуванні до них аксіом та

правил виведення Армстронга не можна отримати жодної функціональної залежності, яка б не належала G :

$$\mathfrak{F}_F \stackrel{\text{def}}{=} \{G \mid F \subseteq G \wedge [G] \subseteq G\}.$$

Очевидно, що сім'я $\mathfrak{F}_F$ не порожня, вона містить, наприклад, множину всіх ФЗ

$\{X \rightarrow Y \mid X \subseteq R \wedge Y \subseteq R\}$.

Лема 5. Сім'я $\mathfrak{F}_F$ замкнена відносно довільних перетинів. □

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}'_F$ – деяка підсім'я сім'ї

$$\mathfrak{F}_F \quad (\mathfrak{F}'_F \subseteq \mathfrak{F}_F); \text{ покажемо, що } G^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{G \in \mathfrak{F}'_F} G \in \mathfrak{F}_F.$$

Для цього перевіримо дві умови на множині ФЗ, що є елементами сім'ї $\mathfrak{F}_F$. Покажемо, по-перше,

що $F \subseteq G^*$. Дійсно $F \subseteq G$ для всіх $G \in \mathfrak{F}'_F$, тому очевидно, що $F \subseteq \bigcap_{G \in \mathfrak{F}'_F} G = G^*$.

Покажемо, по-друге, що $[G^*] \subseteq G^*$. Для цього розглянемо довільну ФЗ $X \rightarrow Y$, таку, що

$X \rightarrow Y \in [G^*]$, і перевіримо, що виконується належність $X \rightarrow Y \in G^*$. Оскільки $X \rightarrow Y \in [G^*]$,

то існує відповідне доведення (послідовність ФЗ). Шукає твердження доведемо індукцією по довжині доведення, де довжина доведення –

кількість його елементів.

Базис індукції. Довжина доведення дорівнює одиниці. Тобто ФЗ $X \rightarrow Y$ є тривіальною або

$X \rightarrow Y \in G^*$. В обох випадках $X \rightarrow Y \in G^*$ (використали той очевидний факт, що кожна

множина $G, G \in \mathfrak{F}'_F$ містить всі тривіальні залежності, отже, і перетин $G^* = \bigcap_{G \in \mathfrak{F}'_F} G$ містить

всі тривіальні залежності. *

Індуктивний крок. Нехай $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, m \geq 2$,

– доведення ФЗ $X \rightarrow Y$, виходячи з множини ФЗ G^* . Розглянемо всі можливі випадки для

$\varphi_m = X \rightarrow Y$.

Випадок, коли ФЗ $X \rightarrow Y$ тривіальна або $X \rightarrow Y \in G^*$, розглядається аналогічно як в базисі індукції. *

Нехай ФЗ $X \rightarrow Y$ отримується з ФЗ φ_i, φ_j , де

$1 < i, j < m$ за правилом транзитивності. Очевидно, що послідовності $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_j$ є

доведеннями довжини відповідно i та j , де $i, j < m$. Очевидно, що $\varphi_i, \varphi_j \in [G^*]$, причому

довжини доведень менші ніж m . Згідно з індуктивним припущенням $\varphi_i, \varphi_j \in G^*$. Отже,

$\varphi_i, \varphi_j \in G$ для всіх $G \in \mathfrak{F}'_F$; звідси за означенням сім'ї $\mathfrak{F}_F$, ФЗ $X \rightarrow Y \in G$ для всіх $G \in \mathfrak{F}'_F$, тобто

$X \rightarrow Y \in G^* = \bigcap_{G \in \mathfrak{F}'_F} G$.

Випадок, коли ФЗ $X \rightarrow Y$ отримується з попереднього елемента доведення за правилом

поповнення, розглядається повністю аналогічно. □

Нехай $F^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{G \in \mathfrak{Z}_F} G$ перетин всіх множин $\Phi\mathfrak{Z}$ з сім'ї $\mathfrak{Z}_F$. З попередньої леми безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. $F^* \in \mathfrak{Z}_F$.

Зауважимо, що сім'я $\Phi\mathfrak{Z}$ по суті є муровською сім'єю в розумінні абстрактної теорії решіток (див., наприклад, [6, глава V, §1, с. 148]).

Лема 6. Виконується рівність: $[F] = F^*$.

Доведення. Покажемо спочатку включення $F^* \subseteq [F]$. Дійсно, оскільки $F \subseteq [F]$ та $[[F]] = [F]$ згідно з першими двома пунктами леми 4, то множина $[F]$ належить сім'ї $\mathfrak{Z}_F$: $[F] \in \mathfrak{Z}_F$.

Покажемо тепер обернене включення $[F] \subseteq F^*$. Дійсно, для довільної множини $\Phi\mathfrak{Z}$ $G \in \mathfrak{Z}_F$ маємо включення $F \subseteq G$, звідси за третім пунктом леми 4 маємо включення $[F] \subseteq [G]$; оскільки $[G] \subseteq G$, то $[F] \subseteq G$. Оскільки останнє включення виконується для всіх $G \in \mathfrak{Z}_F$, то $[F] \subseteq F^*$.

Висновок. Замикання $[F]$ – це найменша (в розумінні включення $\subseteq$) множина, що містить F , така, що при застосуванні до неї аксіом та правил виведення Армстронга не можна отримати жодної функціональної залежності, яка б не належала $[F]$.

З описаних вище аксіом і правил виведення можна отримати інші правила виведення (для спрощення практичного обчислення замикання $[F]$ множини $\Phi\mathfrak{Z}$ F).

Лема 7 (правило композиції).

$$\{X_1 \rightarrow Y_1, X_2 \rightarrow Y_2\} \vdash X_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup Y_2.$$

Доведення. Побудуємо доведення для $\Phi\mathfrak{Z}$ $X_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup Y_2$:

- $X_1 \rightarrow Y_1$;
- $X_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup X_2$ (з 1 за правилом поповнення);
- $X_2 \rightarrow Y_2$;
- $Y_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup Y_2$ (з 3 за правилом поповнення);
- $X_1 \cup X_2 \rightarrow Y_1 \cup Y_2$ (з 2 і 4 за правилом транзитивності). $\square$

Звідси безпосередньо випливає наступний наслідок, якщо скористатися ідемпотентністю теоретико-множинного об'єднання.

Наслідок 5.

$$\{X \rightarrow Y_1, X \rightarrow Y_2\} \vdash X \rightarrow Y_1 \cup Y_2.$$

Наслідок 6. Для $n = 2, 3, \dots$ має місце $\{X \rightarrow Y_1, \dots, X \rightarrow Y_n\} \vdash X \rightarrow Y_1 \cup \dots \cup Y_n$.

Доведення побудується індукцією по n .

Лема 8. (правило декомпозиції).

$$X \rightarrow Y_1 \cup Y_2 \vdash X \rightarrow Y_1, \quad X \rightarrow Y_1 \cup Y_2 \vdash X \rightarrow Y_2.$$

Доведення. Побудуємо доведення для $\Phi\mathfrak{Z}$ $X \rightarrow Y_1$:

- $X \rightarrow Y_1 \cup Y_2$;
- $Y_1 \cup Y_2 \rightarrow Y_1$ (аксіома рефлексивності);
- $X \rightarrow Y_1$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності).

Аналогічно будуватиметься доведення для $\Phi\mathfrak{Z}$ $X \rightarrow Y_2$.

Правила композиції і декомпозиції наведені в [7].

Замиканням $[X]_F$ множини X (відносно множини $\Phi\mathfrak{Z}$ F) називається об'єднання правих частин всіх $\Phi\mathfrak{Z}$ вигляду $X \rightarrow Y$, які слідують (синтаксично) з множини F :

$$[X]_F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{X \rightarrow Y \in F} Y.$$

В наступній лемі викладено властивості замикання множини X .

Лема 9. Виконуються властивості.

- $X \subseteq [X]$;
- $F \vdash X \rightarrow [X]$;
- $X \rightarrow Z \in F \Rightarrow Z \in [X] \wedge [X] \in R$.

Доведення. Перший пункт випливає з того факту, що тривіальні $\Phi\mathfrak{Z}$ містяться в замиканні довільної множини $\Phi\mathfrak{Z}$; тобто $X \rightarrow X \in F$.

Доведемо другий пункт. Замикання $[X]$ є скінченною множиною, нехай, для визначеності $[X] = \{A_1, \dots, A_n\}$, де A_i – атрибути. Тоді, згідно з означенням замикання $[X]$, для кожного $i = 1, \dots, n$ існує схема Y_i , така, що $A_i \in Y_i$ та $F \vdash X \rightarrow Y_i$. Згідно з правилом декомпозиції (лема 8) для кожного $i = 1, \dots, n$ маємо $X \rightarrow Y_i \vdash X \rightarrow \{A_i\}$. Таким чином, маємо твердження $F \vdash X \rightarrow \{A_1\}, \dots, F \vdash X \rightarrow \{A_n\}$. Залишається застосувати наслідок 6, згідно з яким $\{X \rightarrow \{A_1\}, \dots, X \rightarrow \{A_n\}\} \vdash X \rightarrow [X]$.

Доведемо останній пункт від супротивного. Нехай $X \rightarrow Z \notin [F]$, але заключення імплікації хибне. Тут можливі два випадки.

$[X] = R$. Оскільки за доведеним другим пунктом $F|-X \rightarrow [X]$, а значить $[X] \rightarrow Z$ тривіальна (нагадаймо, що $[X] = R$, а $Z \subseteq R$), то $F|-X \rightarrow Z$, тобто $X \rightarrow Z \in [F]$, прийшли до протиріччя.

$Z \subseteq [X]$. Цей випадок розглядається аналогічно попередньому: $F|-X \rightarrow [X]$, $[X] \rightarrow Z$ тривіальна, звідки $F|-X \rightarrow Z$, що суперечить припущенню. $\square$

Твердження 1 (коректність аксіоматики Армстронга). Якщо ФЗ $X \rightarrow Y$ синтаксично виводиться з множини ФЗ F , то ФЗ $X \rightarrow Y$ виводиться з F семантично:

$$F|-X \rightarrow Y \Rightarrow F|=X \rightarrow Y. \square$$

Доведення проводиться індукцією по довжині доведення.

Базис індукції. Довжина доведення дорівнює одиниці. Тобто ФЗ $X \rightarrow Y$ є або тривіальною або $X \rightarrow Y \in F$. В обох випадках (для першого треба скористатися наслідком 1) виконується $F|=X \rightarrow Y$.

Індуктивний крок. Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, $m \geq 2$, доведення ФЗ $X \rightarrow Y$, виходячи з множини ФЗ F . Розглянемо всі можливі випадки для останнього елементу доведення $\varphi_m = X \rightarrow Y$.

Випадок, коли ФЗ $X \rightarrow Y$ тривіальна або належить множині ФЗ F , розглядається повністю аналогічно як в базисі індукції. *

Нехай ФЗ φ_m отримується з ФЗ φ_i , де $i < m$, за правилом поповнення. Очевидно, що $F|- \varphi_i$; за індуктивним припущенням маємо $F|= \varphi_i$. Залишається скористатися наслідком 2. *

Випадок, коли ФЗ φ_m отримується з попередніх ФЗ доведення за правилом транзитивності, розглядається аналогічно з заміною наслідку 2 на наслідок 3. $\square$

Зауважимо, що логічна схема доведення попереднього твердження та сама, що і для доведення леми 5 (точніше кажучи, доведення включення $[G^*] \subseteq G^*$).

Твердження 2 (повнота аксіоматики Армстронга). Якщо ФЗ $X \rightarrow Y$ семантично виводиться з множини ФЗ F , то ФЗ $X \rightarrow Y$ синтаксично виводиться з F :

$$F|=X \rightarrow Y \Rightarrow F|-X \rightarrow Y. \square$$

Доведення проводиться від супротивного. Отже, нехай множина ФЗ F та ФЗ $X \rightarrow Y$ такі,

що $F|=X \rightarrow Y$, але не виконується $F|-X \rightarrow Y$, тобто $X \rightarrow Y \notin [F]$.

Прийдемо до протиріччя (з $F|=X \rightarrow Y$), побудувавши таку модель множини ФЗ F , що на ній ФЗ $X \rightarrow Y$ не буде виконуватися.

Зафіксуємо в універсальному домені два різних елементи a та b . Нехай схема R складається з атрибутів $A_1, \dots, A_n$. Таблиця t схеми R містить рядки s_1, s_2 , які задані наступним чином:

$$s_1(A_1) = \dots = s_1(A_n) = a,$$

$$s_2(A_i) = \begin{cases} a, & \text{якщо } A_i \in [X], \\ b, & \text{якщо } A_i \notin [X], \end{cases}$$

$$\text{де } i = 1, \dots, n.$$

З третього пункту леми 9 випливає, що $[X] \subseteq R$; значить, рядки s_1, s_2 розрізняються на всіх атрибутах з $R \setminus [X]$ (див. рис. 1).

	$[X]$			$R \setminus [X]$		
	A_1	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
s_1	a	...	a	a	...	a
s_2	a	...	a	b	...	b

Рисунок 1. Таблиця $t = \{s_1, s_2\}$ з доведення твердження 2

Згідно з пунктом 1 леми 9 $X \subseteq [X]$, а згідно з пунктом 3 — $Y \notin [X] \subseteq R$, тобто $Y \cap (R \setminus [X]) \neq \emptyset$. З побудови рядків s_1, s_2 випливає, що $s_1|X = s_2|X$, але $s_1|Y \neq s_2|Y$, таким чином $(X \rightarrow Y)(t) = \text{false}$.

Залишається показати, що таблиця t є моделлю множини ФЗ F . Для цього розглянемо довільну ФЗ $W \rightarrow Z$ з F та покажемо, що $(W \rightarrow Z)(t) = \text{true}$, тобто імплікація $s_1|W = s_2|W \Rightarrow s_1|Z = s_2|Z$ виконується.

Для множини атрибутів W можливі два випадки.

По-перше, нехай $W \cap (R \setminus [X]) \neq \emptyset$, тоді $s_1|W \neq s_2|W$ і імплікація тривіально істинна.

По-друге, нехай $W \cap (R \setminus [X]) = \emptyset$, тобто $W \subseteq [X]$; тоді (нагадаймо, що $X \subseteq [X]$ згідно з першим пунктом леми 9) $s_1|W = s_2|W$, тому треба перевірити рівність $s_1|Z = s_2|Z$. Цю

рівність ми доведемо, довівши включення $Z \subseteq [X]$. Для цього розглянемо наступне доведення, виходячи з множини ФЗ F :

1. доведення ФЗ $X \rightarrow [X]$ з F (нагадаймо, що згідно другого пункту леми 9 $F|-X \rightarrow [X]$);
2. $[X] \rightarrow W$, (аксіома рефлексивності; нагадаймо, що розглядається випадок $W \subseteq [X]$);
3. $X \rightarrow W$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $X \rightarrow [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 1, та ФЗ $[X] \rightarrow W$ з пункту 2);
4. $W \rightarrow Z$ (елемент множини F);
5. $X \rightarrow Z$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ з пунктів 3 та 4).

Отже, маємо $F|-X \rightarrow Z$, тобто $Z \subseteq [X]$; звідси випливає, що $s_1|Z = s_2|Z$ за побудовою рядків s_1, s_2 . $\square$

Твердження про повноту аксіоматики Армстронга наводиться в [4, с. 58].

Теорема 1. Відношення семантичного та синтаксичного слідування збігаються:

$$F \models X \rightarrow Y \Leftrightarrow F|-X \rightarrow Y. \square$$

Детальний аналіз наведеного доведення основного результату про збіжність відношень про $|-$ та $\models$ показує, що воно проведено в припущенні: $|D| \geq 2$ та $|R| \geq 2$, тобто універсальний домен містить не менше 2 елементів та схема R має щонайменше 2 атрибути. Для повноти викладення треба розглянути і решту випадків, коли $|D| \leq 1$ або $|R| \leq 1$, це буде зроблено в наступній роботі.

Наприкінці зробимо декілька зауважень про отриманий побічний результат. Виявляється, що оператор $X \mapsto [X]$ є теж оператором замикання.

Твердження 3. Виконуються властивості:

- 1) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$ (монотонність);
- 2) $[[X]] = [X]$ (ідемпотентність). $\square$

Доведення. Доведемо перший пункт. Покажемо включення $[X] \subseteq [Y]$, побудувавши доведення для ФЗ $Y \rightarrow [X]$ (виходячи з множини ФЗ F):

1. $Y \rightarrow X$, (аксіома рефлексивності; нагадаймо, що $X \subseteq Y$);
2. доведення ФЗ $X \rightarrow [X]$ з F (згідно другого пункту леми 9 $F|-X \rightarrow [X]$);
3. $Y \rightarrow [X]$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $Y \rightarrow X$ з пункту 1 та

ФЗ $X \rightarrow [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 2).

Отже, $F|-Y \rightarrow [X]$, а це означає, що множина атрибутів $[X]$ включається в замикання $[Y]$ множини атрибутів Y , тобто $[X] \subseteq [Y]$.

Доведемо другий пункт. Включення $[X] \subseteq [[X]]$ випливає з пункту 1) леми 9, тому доведемо обернене включення $[[X]] \subseteq [X]$. Нехай атрибут $A \in [[X]]$; покажемо, що $A \in [X]$. Для цього побудуємо доведення для ФЗ $X \rightarrow A$ (виходячи з множини ФЗ F):

1. доведення ФЗ $[X] \rightarrow A$ з F ($F|- [X] \rightarrow A$ за означенням замикання $[[X]]$ множини $[X]$);
2. доведення ФЗ $X \rightarrow [X]$ з F (згідно другого пункту леми 9 $F|-X \rightarrow [X]$);
3. $X \rightarrow A$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $X \rightarrow [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 2, та ФЗ $[X] \rightarrow A$, яка також є останнім елементом доведення з пункту 1).

Отже, $F|-X \rightarrow A$; за означенням замикання $[X]$ множини X випливає, що $A \in [X]$. $\square$

Список використаних джерел

1. Редько В.Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.І. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім – Академперіодика, 2001. – 198 с.
2. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232–240.
3. Линдон Р. Заметки по логике / Линдон Р. – Москва: Мир, 1968. – 128 с.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
5. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.
6. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.
7. Ділт КДЖе. Введение в системы баз данных, 8-е издание: Пер. с англ. – М: Издательский дом – Вильямс, 2005. – 1328 с.

Надійшла до редколегії 05.09.11

УДК 004.932.2

Верченко А.П., к.ф.-м.н.;
Кобзар А.Ю., магістр

Про один алгоритм побудови панорамних знімків

Описано алгоритм побудови панорамних знімків в режимі реального часу, деталізовано основні його етапи. Зроблено порівняльний аналіз алгоритму з описаними в літературі підходами.

На основі запропонованого алгоритму реалізовано програмне забезпечення, яке апробовано на мобільному пристрої на реальних зображеннях, отриманих з камери даного пристрою.

Ключові слова: панорамні знімки, ресестрація зображень, обробка зображень.

*E-mails: An.Verchenko@gmail.com, taras55@gmail.com

Статтю представив доктор технічних наук Гаращенко Ф.Г.

Вступ

З розвитком потужностей обчислювальної техніки стали актуальними алгоритми ресестрації зображень, оскільки з'явилась можливість їх застосування в режимі реального часу. Наглядним прикладом їх використання є процедура зшивання панорамних знімків. Дана тематика піднімається у великій кількості джерел, зокрема в [1–3].

Для автоматизації процесу зшивання панорамних знімків слід виділяти окремі, найбільш значущі, фрагменти зображень. На наступному кроці для кожного з цих фрагментів обчислюється вектор ознак, на основі якого фрагменти з різних зображень попарно порівнюються. Далі ведеться пошук взаємного розташування зображень в рамках геометричної моделі та відкидання помилково знайдених пар. Останнім кроком побудови панорами є проектування отриманих знімків на певну геометричну основу (сферу, куб, циліндр або площину).

Пошук фрагментів

Ефективність роботи алгоритму залежить від всіх його етапів, зокрема при виділенні фрагментів важливим параметром є повторюваність. Суттєвим, при цьому, є не велика кількість фрагментів, а стійке виділення об'єкту на різних зображеннях. Крім того,

A. Verchenko, PhD;
A. Kobzar, master

About one of the algorithms of panoramic images building

The algorithm of panoramic images building in real time is described and its main stages are refined. Comparative analysis of the algorithm with the described in the literature approaches is made.

On the basis of the proposed algorithm the software which was tested on a mobile device was realized, as well as real images, got from the camera of the particular device.

Key words: panoramic shots, image registration, image processing.

зменшення кількості фрагментів зменшує обчислювальні затрати на наступних етапах виконання алгоритму.

Провівши аналіз існуючих підходів, в якості основи було обрано MSER-алгоритм [4]. Він показав один з найкращих результатів по повторюваності та швидкодії. Ефективна реалізація MSER-алгоритму описана в [5]. Результатом його роботи є «темні» фрагменти на «світлому» фоні, для отримання «світлих» фрагментів на «темному» фоні слід застосувати алгоритм повторно для інвертованого зображення. Результати роботи алгоритму представлені на рис. 1.

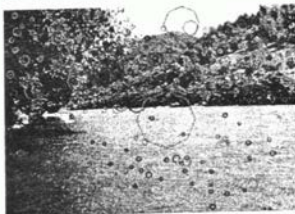


Рис. 1 Характерні фрагменти, виділені на основі використання алгоритму MSER.

Опис фрагментів

Самою виправданою моделлю побудови вектора ознак є модель, подібна до тієї, що функціонує в людському мозку. Вона базується на розподілі градієнтів по напрямках в деякому околі центральної точки фрагменту. Зокрема, ця ідея використовується в таких алгоритмах як SIFT [6] та SURF [7].

В даній роботі спочатку для кожної точки зображення знаходиться градієнт, на основі якого будується 8-ми компонентна гістограма орієнтацій в цій точці. Далі для зменшення чутливості до різних перетворень зображення, проводиться розмиття в кожній з площин. Для того щоб забезпечити стійкість до повороту зображення, на базі гістограм в центральній точці фрагменту знаходиться домінуюча орієнтація і всі подальші розрахунки ведуться з її врахуванням. В якості вектора ознак беруться скорочені до 4-ох компонент гістограми в 12-ти точках навколо фрагменту.

Побудова пар фрагментів

З таким вектором ознак задача зв'язування фрагментів різних зображень в пари зводиться до пошуку в 48-ми вимірному просторі. Для цих цілей краще всього підходять деревовидні структури, зокрема KD-дерево [8]. Для оптимізації пошуку використовується модифікований алгоритм BBF [8], в якому вузли обходяться в порядку віддалення від шуканої точки. Також на цьому етапі доцільно обмежити кількість ітерацій при пошуку для уникнення «зависання» на несприятливих даних.

Геометрична модель

Введемо декартову систему координат в просторі та зобразимо на ній одиничну сферу (рис. 2). Початок координат будемо вважати центром проекції.

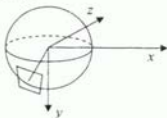


Рис. 2 Система координат.

Розглянемо спрощену модель задачі, в якій параметри камери вважаємо фіксованими та однаковими для всіх зображень панорами. Тоді кожне зображення можна представити у вигляді

прямокутника фіксованого розміру, який своїм центром дотикається до одиничної сфери. Його положення описується трьома кутами α , γ , β , які визначають кути повороту прямокутника з центром в точці $(0,0,1)$ навколо відповідних осей координат. Таким же чином задається положення одного зображення відносно іншого.

Для кожного зображення будемо зберігати дерево всіх ключових точок та глобальне дерево вибраних ключових точок з усіх зображень. При додаванні нового зображення спочатку будуться пари на основі глобального дерева, після чого положення знаходиться за допомогою ітеративної процедури. На основі положення можна виділити в дереві зображення, сусідні до поточного. Використовуючи подібну ітеративну процедуру, встановлюються зв'язки з підходящими сусідами, що потрібно для подальшої калібровки положення зображень.

Ітеративна процедура співставлення

Для знаходження положення нового зображення на даному етапі програма має список пар відповідних фрагментів, в яких відоме глобальне положення в просторі але обробленого фрагменту, а положення іншого задається в локальній системі координат зображення, що додається. Таким чином задача полягає в знаходженні зміщення системи координат нового зображення відносно глобальної так, щоб мінімізувати відстань між точками знайдених пар.

У випадку, коли точки знаходяться в одній площині, потрібно розв'язати задачу:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha + x_2 \\ y_1 = x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha + y_2 \end{cases}$$

де $x_{1i}, y_{1i}, x_{2i}, y_{2i}$ – координати відповідних точок в парах, а α, x_0, y_0 визначають перетворення системи координат зображення з глобальної, тобто положення зображення. Для розв'язку цієї задачі зробимо заміну $c = \cos \alpha, s = \sin \alpha$ та перепишемо у вигляді системи лінійних рівнянь відносно c, s, x_0, y_0 :

Y_0 :

$$\begin{cases} cx_{11} - sy_{11} + x_0 = x_{21} \\ sx_{11} + cy_{11} + y_0 = y_{21} \\ \dots \\ cx_{1n} - sy_{1n} + x_0 = x_{2n} \\ sx_{1n} + cy_{1n} + y_0 = y_{2n} \end{cases}$$

Аналітично розв'язавши систему методом
найменших квадратів, отримаємо шукане
перетворення:

$$x_u = \frac{-\sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2) \sum_{i=1}^n x_{2i} + \sum_{i=1}^n x_u \sum_{i=1}^n (x_u x_{2i} + y_u y_{2i}) + \sum_{i=1}^n y_u \sum_{i=1}^n (y_u x_{2i} - x_u y_{2i})}{\left(\sum_{i=1}^n x_u\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_u\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2)};$$

$$y_u = \frac{-\sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2) \sum_{i=1}^n y_{2i} + \sum_{i=1}^n y_u \sum_{i=1}^n (x_u x_{2i} + y_u y_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_u \sum_{i=1}^n (y_u x_{2i} - x_u y_{2i})}{\left(\sum_{i=1}^n x_u\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_u\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2)};$$

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n x_u \sum_{i=1}^n x_{2i} + \sum_{i=1}^n y_u \sum_{i=1}^n y_{2i} - n \sum_{i=1}^n (x_u x_{2i} + y_u y_{2i})}{\left(\sum_{i=1}^n x_u\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_u\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2)};$$

$$c = \frac{-\sum_{i=1}^n y_u \sum_{i=1}^n x_{2i} + \sum_{i=1}^n x_u \sum_{i=1}^n y_{2i} + n \sum_{i=1}^n (y_u x_{2i} - x_u y_{2i})}{\left(\sum_{i=1}^n x_u\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_u\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_u^2 + y_u^2)}.$$

Кут повороту знаходиться за формулою

$\alpha = \arctan \frac{s}{c}$, при цьому значення масштабу
ігноруються.

Але в нашому випадку перетворення ведуться
не в площині, а на поверхні сфери, що не
дозволяє звести задачу до лінійної. Однак можна
розглянути проекції точок на площину нового
зображення. В цій площині можна аналітично
знайти перетворення за описаною схемою та
згідно нього розрахувати положення зображення
в просторі.

Через нелінійність поверхні сфери знайдена
позиція буде відрізнятися від потрібної, однак
застосувавши дану процедуру декілька разів ми
можемо достатньо точно наблизитись до
розв'язку.

Така ітераційна схема стає можливою,
оскільки лінійне перетворення на площині дає
всю потрібну інформацію для відновлення
перетворення на сфері для випадку фіксованих
параметрів камер. Класично ж дану задачу
розв'язують для невідомих параметрів камер. Це
змушує вести обробку зразу всіх зображень, що
помітно відбивається на швидкодії через
«прокляття розмірності», адже їх кількість
пропорційна загальній кількості зображень. Така
схема описана в [3], де для всіх зображень
будується функція похибки з $4n$ (n – кількість
зображень) змінними, яка мінімізується методом
Левенберга-Марквардта.

Відкидання хибних пар

Знайшовши пари відповідних фрагментів,
неможливо застрахуватись від помилкових.
Однак, знаючи перетворення, можна відкинути
пари з великою похибкою, але водночас не
можна допускати щоб на знайдене перетворення
впливали хибні пари. З цього випливає, що
відкидання пар слід інтегрувати в пошук
перетворення.

Для подібних задач розроблено ряд
алгоритмів, найпопулярнішим з яких є RANSAC
[9]. В рамках даної статті на його основі було
розроблено оригінальний алгоритм для вибору
підходящих пар.

Рішення щодо вибору пар приймається на
основі похибки, однак, не знаючи перетворення,
сказати її величину неможливо. Тому слід
оцінити наближене значення похибки. Для цього
довільним чином вибирається декілька пар, на
основі яких будується перетворення. Якщо
вибрані пари мають на цьому перетворенні
невелику похибку (меншу певного порогу), то це
перетворення вважається коректним і за ним
шукать похибки для певної кількості пар з
загальною переліку. Побудова перетворення
повторюється деяку кількість разів (співвимірну з
кількістю пар) і таким чином знаходяться
усереднені значення похибок для всіх пар
(рис. 3).

На їх основі відмічаються пари з похибкою,
меншою порогового значення і вся описана
процедура повторюється декілька разів, тільки
вибір точок для перетворень ведеться лише з

відмічених пар. Такий крок дає можливість використовувати точніші моделі і, як наслідок, точніше знаходити похибки. Після декількох таких ітерацій множина пар та значення похибок стабілізуються.

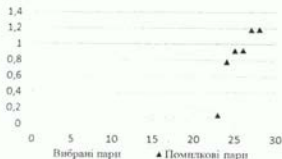


Рис. 3. Значення похибок пар.

Далі серед вибраних пар відкидаються такі, похибка яких не попадає в межі 3σ . Якщо кількість вибраних пар більше заданої константи, то пошук вважається успішним і на їх основі будується шукане перетворення.

Корекція положень

В процесі зйомки утворюється ланцюжок зв'язаних зображень, де кожен зв'язок вносить якусь похибку. Таким чином ця похибка поступово накопичується. Якщо розглянути побудову кругової панорами, то довжина ланцюжка складатиме приблизно 15 елементів (для кута огляду камери 50°), це призводить до шлком помітного зміщення і виключає можливість коректної побудови таких панорам.

Для уникнення такої ситуації доцільно при додаванні нового зображення перераховувати позиції всіх зображень на основі зв'язків з сусідами. Ця процедура здійснюється декілька разів, щоразу зменшуючи крок для стабільного результату. Таким чином накопичена помилка частково компенсується за рахунок додаткової інформації про зв'язки з новим зображенням.

Також важливою проблемою при побудові панорамних знімків є знаходження положення горизонту. Враховуючи апаратне забезпечення, на якому реалізована програма, для розв'язку задачі можна скористатись даними з датчика прискорення. Оскільки на Землі постійно діє сила гравітації, то за допомогою цього датчика для кожного зображення ми можемо знайти вектор, направлений вниз. Горизонтом же буде являтися площина, перпендикулярна цьому вектору.

Проектування зображень

Після отримання на попередніх етапах набору зображень з їх розташуваннями, завдання полягає в їх безпосередньому зшиванні. Основною проблемою на цьому етапі є досить помітні границі через різкі перепади яскравості.

В якості першого наближення припустимо що зміна яскравості має лінійний характер. Тоді для кожного зображення введемо коефіцієнти яскравості k_i і запишемо цільову функцію:

$$\sum_{i,j=1}^n S_{ij} (k_i c_{ij} - k_j c_{ji})^2 \rightarrow \min,$$

з обмеженням:

$$\sum_{i=1}^n k_i = n,$$

де c_{ij} – сума інтенсивностей фрагментів i -ого зображення, які сполучені з відповідними фрагментами j -ого зображення, S_{ij} – площа перекриття i -ого та j -ого зображень, n – загальна кількість зображень. Використовуючи метод множників Лагранжа можемо переписати задачу в вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} k_i = \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij} c_{ji} S_{ij} k_j - \lambda}{\sum_{j=1}^n c_{ij} c_{ji} S_{ij}}, i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n k_i = n \end{cases}$$

яка розв'язується наближеними методами. Це дає вагомий приріст в швидкодії, оскільки велика кількість елементів матриці системи є нульовими.

Розв'язавши таку оптимізаційну задачу окремо для кожного кольорового каналу, отримаємо компенсацію середніх яскравості і контрастності.

Однак, проблеми зі швами цей метод повністю не вирішує, оскільки на зображеннях присутні нелінійні зміни кольорів. Тому при проектуванні також використовується алгоритм, запропонований в [10]. Можна легко побачити, що при стикуванні сусідніх зображень проблеми виникають на низьких частотах, тобто на загальному перепаді кольорів. Якщо на цих частотах розмити границі, то можна отримати кращий результат. Розвинувши цю ідею можна використовувати декілька частотних інтервалів і збільшувати степінь розмиття зі зменшенням частоти.

Комбінація двох описаних методів дозволяє ефективно приховати місця стиковки зображень панорам.

Таблиця 1

Порівняльний аналіз алгоритмів

Етапи алгоритму	Алгоритм з [3]	Запропонований алгоритм
Визначення фрагментів	DoG (екстремуми різниці гаусіанів): - Більша швидкість; - Велика кількість фрагментів.	MSER [4]: Краща повторюваність знайдених фрагментів.
Опис фрагментів	На основі гістограм градієнтів (128 компонент вектору ознак): - Більшість розрахунків ведеться безпосередньо при знаходженні вектору ознак; - Велика кількість пар змушує працювати з великим об'ємом даних.	На основі гістограм градієнтів (48 компонент вектору ознак): - Більшість розрахунків ведеться на етапі підготовки; - Менша розмірність вектора ознак прискорює процес побудови пар.
Побудова пар	BBF [8].	BBF [8]: Модифікація дозволяє будувати загальну базу даних.
Пошук взаємного положення зображень	Мінімізація функції похибки методом Левенберга-Марквардта: Дозволяє знаходити параметри камер.	Запропоновано оригінальну ітеративну процедуру: - Дозволяє обробляти зображення попарно; - Використовує геометричні особливості.
Відкидання хибних пар	RANSAC [9].	Запропоновано оригінальний метод на основі RANSAC [9]: Більша швидкість.
Маскування швів	Пошук коефіцієнтів яскравості та частотне змішування [10].	Пошук коефіцієнтів яскравості та частотне змішування [10].

Аналіз отриманих результатів

В даній статті описана схема алгоритму побудови панорамних знімків, яку можна порівняти зі схемою запропонованою в [3]. В таблиці 1 представлено порівняння основних етапів алгоритму.

Як можна побачити з приведеного порівняння, схема алгоритмів досить схожа, однак запропонований в даній статті алгоритм розроблявся з акцентом на загальне збільшення швидкості. Зокрема, на першому етапі був вибраний більш ефективний алгоритм, що зменшує кількість розрахунків на кожному з наступних кроків. При побудові вектору ознак була зменшена його розмірність, що значно підвищило швидкість побудови пар. Для Гаусового розмиття був застосований алгоритм на базі центральної граничної теореми. На рівні програмної реалізації широко використовуються таблиці попереднього обчислення, в які наперед зберігають значення «важких» для обчислення функцій, таких як тригонометричні та ділення.

Основним показником при розрахунку швидкості виконання алгоритму є площа зображення, від неї залежать всі етапи роботи програми. Для прискорення, при виділенні фрагментів та обчисленні вектору характерних ознак розглядаються зменшені варіанти вхідних зображень. Експериментально встановлено, що для пошуку позиції зображення на відшукати достатньо зображення розміром 320x240 точок, а для додавання зображення в базу – 640x480 точок. Така оптимізація дає достатню кількість точок для розв'язування поставленої задачі зшивання зображень у панораму (рис. 4).

На базі описаного алгоритму було розроблено програмне забезпечення для побудови панорамних знімків на мобільному телефоні Samsung Wave S8500 з процесором ARM Cortex A8, що має частоту 1 ГГц. Для цього використовувалась мова програмування C++ та середовище Eclipse.

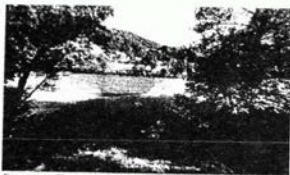


Рис. 4 Перспективна проекція побудованого
програмою панорамного знімку з кутом огляду
120°.

Пошук положення зображення з видошукача
ведеться менш ніж за 0,5 секунди. Додавання
зображення до бази даних ведеться за 3 секунди.
Такої швидкодії достатньо для комфортної
побудови панорамних знімків в режимі
реального часу.

Список використаних джерел

1. Zoghiani I., Faugeras O., Deriche R. Using geometric corners to build a 2D mosaic from a set of images // International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, June 1997, Puerto Rico: proceedings.- 1997.- P.420-425.
2. McLauchlan P., Jaenicke A. Image mosaicing using sequential bundle adjustment // British Machine Vision Conference, September 11-14, 2000, Bristol, UK: proceedings.- 2000.- Vol.20.- P.751-759.
3. Brown M., Lowe D. Automatic panoramic image stitching using invariant features // International Journal of Computer Vision.- 2007.- Vol.74, Issue 1.- P.59-73.
4. Matas J., Chum O., Urba M., Pajdla T. Robust wide baseline stereo from maximally stable extremal regions // British Machine Vision Conference, September 2-5, 2002, Cardiff, UK: proceedings.- 2002.- Vol.1.- P.384-396.
5. Nister D., Stewenius H. Linear Time Maximally Stable Extremal Regions // 10th European Conference on Computer Vision, October 12-18, 2008, Marseille, France: proceedings. -Lecture

Висновки

В наш час апаратне забезпечення мобільних пристроїв достатньо розвинуте для реалізації таких «громіздких» алгоритмів як побудова панорамних знімків. Це дозволяє створювати велику кількість різноманітних програм на основі ресстрації зображень. Зокрема, це програми для розпізнавання тривимірних об'єктів та, на їх основі, програми для керування різноманітними транспортними засобами.

При реалізації даного алгоритму було продемонстровано ефективність підходу, ґрунтованого на виділенні та співставленні кругових фрагментів.

Слід зауважити, що кінцевий продукт можна ефективно використовувати для аматорської панорамної зйомки. А при доопрацюванні програма буде корисна і професійним фотографам, адже алгоритм, описаний в [3], вже активно використовується в цій сфері.

- Notes in Computer Science.- 2008.- Vol.5303/2008.- P.183-196.
6. Lowe D. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision.- Vol.60, Issue 2.- 2004.- P.91-110.
7. Bay H., Ess A., Tuytelaars T., Gool L. SURF: Speeded Up Robust Features // Computer Vision and Image Understanding (CVIU).- Vol. 110, No.3. - 2008.- P.346-359.
8. Beis J., Lowe D. Shape indexing using approximate nearest-neighbour search in highdimensional spaces // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, June 17-19, 1997, San Juan, Puerto Rico: proceedings.- P.1000-1006.
9. Fischler M., Bolles R. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with application to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM.- Vol.24, Issue 6.- 1981.- P.381-395.
10. Burt P., Adelson E. A multiresolution spline with application to image mosaics // ACM Transactions on Graphics.- Vol.2, Issue 4.- 1983.- P.217-236.

Надійшла до редколегії 30.08.11

УДК 519.876.5:624.131.542

Власюк А.П., д.т.н., проф.,
Мартинюк П.М., к.ф.-м.н., доц.

Математичне моделювання фільтраційної консолідації греблі із зосередженням шляхом фільтрації в її ядрі в умовах тепло-соленпереносу

Побудовано математичну модель
фільтраційної консолідації тіла ґрунтової
греблі із зосередженням шляхом фільтрації в її
ядрі з урахуванням можливості контактного
розмиву ґрунту в її основі за наявності переносу
солей в неізотермічних умовах. В областях
зосередженої фільтрації та контактного
розмиву враховано рух суспензії. Чисельний
розв'язок відповідної двовимірної крайової
задачі знайдено методом радіальних базисних
функцій. Проведено ряд чисельних
експериментів, які засвідчили небезпеку
руйнування гідротехнічної споруди при
наявності зосереджених шляхів фільтрації.

Ключові слова: зосереджений шлях
фільтрації, контактний розмив, фільтраційна
консолідація, тепло-соленперенесення, метод
радіальних базисних функцій.

E-mail: Vlasyuk.rv@gmail.com, Martinjuk@ukr.net
Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. В роботі [1] наведено класифікацію
видів фільтраційного руйнування ґрунтів.
Зокрема, виділено наступні основні види таких
руйнувань: випір під дією висхідного
фільтраційного потоку; суфозія; контактний
випір; контактний розмив. Одним із наслідків
фільтраційного руйнування ґрунтів є утворення
зосереджених шляхів фільтрації. В роботі [2]
вказано, що на 2% великих ґрунтових гребель
(висотою більше 15 метрів) траплялись
інциденти, пов'язані з утворенням зосереджених
шляхів фільтрації (статистичні дані наведені до
1986-го року). Час від зафіксованого початку до
повного руйнування греблі в 20% випадків
становить менше 12-ти годин, а в 18% - менше 6-
ти годин. Тобто, якщо процес руйнування
розпочався, то його зупинити практично
неможливо. А тому важливого значення набуває
прогнозування, в тому числі, на основі
математичного та комп'ютерного моделювання,
для передбачення і недопущення критичних
ситуацій при експлуатації гідротехнічних споруд.

A.P.Vlasyuk*, Doctor of technical sciences,
P. M. Martinyuk*, Candidate of physics and
mathematics sciences

The mathematical modeling of a soil dam filtration consolidation with taking into account heat and salt transfer and piping zone

The mathematical model of a soil dam filtration
consolidation problem with taking into account soil
wash-out below one, piping zone and salt transfer
in no isothermal conditions has been formulated.
The suspension flows in the zone of erosion and
piping zone have been taken into account too. The
numerical solution of the correspondent two-
dimensional boundary-value problem has been
found by the radial basis function method with
discontinuous radial basis ones. The numerical
experiments have been lead. There has been shown
that proposed method can be effective one.

Key Words: piping zone; filtration erosion;
filtration consolidation; heat and mass transfer;
radial basis function method.

Питання щодо механізмів та причин
утворення зосереджених шляхів фільтрації, їх
негативного впливу на гідротехнічні споруди,
деякі аспекти математичного моделювання цих
поцесів досліджено в роботах [3-9]. В роботах [5-
7] побудовано математичні моделі розмиву та
збільшення діаметру зосередженого шляху
фільтрації, використано встановлений авторами
критерій розмиву. Однак, загалом, питання
математичного моделювання виникнення та
розвитку зосереджених шляхів фільтрації
залишається відкритим. Складність дослідження
вказаних явищ проявляється не лише на
теоретичному рівні, але і на рівні натурних
експериментів. Тому в даній статті дослідимо
наявність вже сформованого зосередженого
шляху фільтрації в глинистому ядрі ґрунтової
греблі і його вплив на фільтраційне руйнування
та утворення зони розмиву в тілі гідротехнічної
споруди. Математичне моделювання виникнення
та поширення зосереджених шляхів фільтрації
буде предметом подальших робіт авторів.

В роботах [10, 11] досліджено питання фільтраційної консолідації ґрунтових гребель в умовах тепло-селепереносу. Процес фільтраційної консолідації супроводжується підвищеними напорами в порах ґрунту, що збільшує швидкість руху порової рідини. Тому ризик фільтраційного руйнування підвищується, якщо гідротехнічна споруда та її основа перебувають в стані фільтраційної консолідації.

Математичні моделі контактного розмиву, фільтраційної консолідації та тепло-масопереносу були розвинуті та досліджені в роботах [12-16]. Однак, питання про зосереджені шляхи фільтрації в даних роботах не розглядалися. Тому метою даної статті є урахування взаємних процесів фільтраційної консолідації тіла та основи ґрунтової греблі, контактний розмив, наявності зосередженого шляху фільтрації, а також залежності параметрів фільтрації від теплового та сольового режимів порової рідини.

2. Постановка задачі та її математична модель. Нехай тіло ґрунтової греблі та її основа під впливом власної ваги ґрунту знаходяться в стані фільтраційної консолідації (рис. 1). Тіло греблі містить глинисте ядро (області Ω_2 та Ω_4), в якому утворилась тріщина і сформувався зосереджений шлях фільтрації. В результаті фільтрації суспензії через зосереджений шлях фільтрації в області Ω_1 може утворитись зона розмиву Ω_3 . Область Ω_2 , яку займає суспензія, утворюється в результаті контактного розмиву ґрунту основи греблі вздовж межі контакту AD [15, 16]. Між кожними областями є межі спряження, які для уникнення зайвої громіздкості на рис. 1 не позначені. Надалі вважаємо, що межа спряження Γ_y знаходиться на контакті областей Ω_i та Ω_j , $i < j$.

Математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла греблі та її основи з урахуванням перенесення солей в неізотермічному режимі, наявності областей контактного розмиву та зосередженого шляху фільтрації можна описати наступною крайовою задачею [10, 16]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+\varepsilon)(1+\xi)}{2\mu} \nabla \cdot (K_k(c, T) \nabla h - K_t(c, T) \nabla c - K_f(c, T) \nabla T), \quad X \in \Omega_g, t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u \nabla u_1 = v \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad X \in \Omega_1, t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u \nabla u_2 = v \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad X \in \Omega_2, t > 0, \quad (3)$$

$$\Delta h(X, t) = \frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \quad X \in \Omega_2, \quad (4)$$

$$n \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c(c, T) \nabla c + D_T(c, T) \nabla T) - u \nabla c - \gamma_m (c - C_m), \quad X \in \Omega, t > 0, \quad (5)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(c, T) \nabla T) - \rho c_p u \nabla T, \quad X \in \Omega, t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla s) - (u - w) \nabla s, \quad X \in \Omega_1, t > 0, \quad (7)$$

$$h|_{\Gamma_1^{(k)}} = H_1(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(k)}, \quad (u, n)|_{\Gamma_1^{(k)}} = 0, \quad (8)$$

$$c|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (q_c, n)|_{\Gamma_1^{(c)}} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (q_T, n)|_{\Gamma_1^{(T)}} = 0, \quad (10)$$

$$u_1|_{\Gamma_1^{(u)}} = U_1(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(u)}, \quad (11)$$

$$u_2|_{\Gamma_1^{(u_2)}} = U_2(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(u_2)}, \quad (12)$$

$$h|_{\Gamma_1^{(w)}} = H_2(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(w)}, \quad (\nabla h, n)|_{\Gamma_1^{(w)}} = 0, \quad (13)$$

$$s|_{\Gamma_1^{(s)}} = S(X, t), \quad X \in \Gamma_1^{(s)}, \quad (q_s, n)|_{\Gamma_1^{(s)}} = 0, \quad (14)$$

$$(q, n)|_{\Gamma_y} = -(1-n)\Gamma_y, \quad \Gamma_y \in \{\Gamma_{37}; \Gamma_{13}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}\}, \quad (15)$$

$$[h]_{\Gamma_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma_y} = 0, \quad \Gamma_y \in \{\Gamma_{37}; \Gamma_{13}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}\}, \quad (16)$$

$$[u]_{\Gamma_2} = 0, \quad (16)$$

$$[c]_{\Gamma_2} = 0, \quad [q_c]_{\Gamma_2} = 0, \quad (17)$$

$$[T]_{\Gamma_2} = 0, \quad [q_T]_{\Gamma_2} = 0, \quad (18)$$

$$h|_{\Gamma \setminus \Gamma_2} = y, \quad (u, n)|_{\Gamma} = m\phi(X, t), \quad X \in \Gamma, \quad (19)$$

$$k_{cr}^{(v)} S(X, t) [(v, n) + (v, d)] = -(1-n)\rho_T \Gamma_y, \quad X \in \Gamma_y, \quad \Gamma_y \in \{\Gamma_{37}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}\}, \quad (20)$$

$$u = cv - K_k(c, T) \nabla h + K_c(c, T) \nabla c + K_T(c, T) \nabla T, \quad X \in \Omega_g, \quad (21)$$

$$q_c = uc - D_c(c, T) \nabla c - D_T(c, T) \nabla T, \quad X \in \Omega, \quad (22)$$

$$q_T = \rho c_p u T - \lambda(c, T) \nabla T, \quad X \in \Omega, \quad (23)$$

$$q_s = (u - w)s - D_s \nabla s, \quad X \in \Omega, \quad (24)$$

$$v = F(X, t, u), \quad X \in \Gamma_{13} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{37}, \quad (25)$$

$$h(X, 0) = h_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}_g, \quad (26)$$

$$u(X,0) = u_0(X), \quad s(X,0) = s_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}, \quad (27)$$

$$c(X,0) = c_0(X), \quad T(X,0) = T_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}. \quad (28)$$

Рівняння (1) описує процеси фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі та масиву ґрунту в її основі. Рівняння (2)-(4) є системою рівнянь Нав'є-Стокса і описують процес руху суспензії в зонах розмиву Ω_3 та Ω_7 [17]. Рівняння (5), (6) описують сольовий та тепловий режим ґрунту і суспензії в зоні розмиву. При цьому в зоні розмиву пористість $n = 1$. Рівняння (7) описує зміну концентрації суспензії в зонах розмиву Ω_3 та Ω_7 [18]. Припускається, що на межах контакту Γ_θ областей Ω_i та Ω_j , $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$, $i < j$, виконуються умови спраження ідеального контакту (16)-(18) [19]. Функція $v = F(X, t, u)$ в (25) пов'язує вектор швидкості фільтрації $u = (u_1; u_2)$ та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту $v = (v_1; v_2)$ на рухомих межах областей розмиву. Залежність $\varphi(X, t) = h(X, t) - y$ задає рівняння вільної поверхні Γ [19]. Умова (20) задає кінематичну граничну умову на межах можливого контактного розмиву [16]. Тут: $h(X, t)$ - надлишковий напір; $c(X, t)$ - масова концентрація солей в поровій рідині; $T(X, t)$ - температура; $s(X, t)$ - об'ємна концентрація суспензії в областях розмиву; e , $\bar{e}$ - коефіцієнт пористості ґрунту та його осереднене значення; ρ_t - густина твердих частинок ґрунту; $k_{\sigma\sigma}^{(g)}$ - коефіцієнт розмиву ґрунту на межі Γ_θ [5-7]; γ - питома вага порової рідини; α - коефіцієнт стискуваності ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; ν - кінематична в'язкість суспензії; g - прискорення вільного падіння; c_T - об'ємна теплоємність; c_p - питома теплоємність порового розчину; K_α - тензор коефіцієнтів фільтрації; K_ϵ , K_T - тензори коефіцієнтів хімічного та термічного осмосів; D_ϵ , D_T - тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії; D_s - тензор коефіцієнтів дисперсії суспензії; λ - тензор коефіцієнтів теплопровідності; n - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; d - вектор напрямних косинусів дотичної; $w = (w_1; w_2)$ - вектор швидкості осідання твердих частинок

$$\text{суспензії}; \quad X = (x, y); \quad \Gamma_2 = \bigcup_{i=1, j=1}^7 \Gamma_{ij}, \quad i < j;$$

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^7 \Omega_i; \quad \Omega_g = \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i \bigcup_{i=4}^6 \Omega_i; \quad \Omega_r = \Omega_3 \cup \Omega_7. \quad \text{В}$$

граничних умовах (8), (13), наприклад, для функції надлишкових напорів $h(X, t)$: $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)}$ - зовнішня межа області Ω_g ; $\Gamma_1^{(u)} \cup \Gamma_2^{(u)}$ - зовнішня межа області Ω_r . Це ж саме стосується граничних умов для інших функцій.

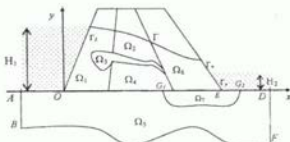


Рис.1. Фільтраційна консолідація та контактний розмив ґрунту в основі греблі за наявності зосередженого шляху фільтрації

Зрозуміло, що значення всіх вищенаведених коефіцієнтів залежать від того, в якій області досліджується процес. Для уникнення зайвої індексації та громіздкості, ми не будемо даний аспект відображати у формулах, але будемо мати його на увазі.

3. Чисельне розв'язання методом радіальних базисних функцій (РБФ). Для чисельного розв'язання крайової задачі (1)-(28) безсітковим методом РБФ [16, 20] покريمо замикання області $\bar{\Omega}$ вузловими точками $X_j = (x_j^x; y_j^y)$, $j = \overline{1, \omega}$ та колокаційними точками $Y_i = (x_i^x; y_i^y)$, $i = \overline{1, k}$, причому $k \geq \omega$. Введемо наступні позначення: 1) k^{Ω_i} - множини номерів колокаційних точок, які належать для областей Ω_i , $i = \overline{1,7}$; 2) $k^{\Omega_r} = k^{\Omega_3} \cup k^{\Omega_7}$, $k^{\Omega_g} = k^{\Omega_1} \cup k^{\Omega_2} \cup k^{\Omega_4} \cup k^{\Omega_5} \cup k^{\Omega_6}$; 3) $k^{\Omega} = \bigcup_{i=1}^7 k^{\Omega_i}$; 4) $k_{\Gamma_\theta}^{\Omega_i}$, $k_{\Gamma_\theta}^{\Omega_j}$ - множини номерів колокаційних точок, які лежать на межі спраження Γ_θ зі сторони областей Ω_i та Ω_j відповідно; 5) $k_{\Gamma_r}^{\Omega_i}$ - множини номерів колокаційних точок, які належать межам спраження Γ_{13} , Γ_{23} , Γ_{34} або Γ_{37} з боку

відповідних областей розриву. Також визначимо множини номерів колокаційних точок, які належать відповідним елементам зовнішніх меж областей. Наприклад, $k^{(k)}$ - множина номерів колокаційних точок, які належать межі $\Gamma_i^{(k)}$. В загальному випадку множини вузлових точок X_j , $j = \overline{1, \omega}$ та колокаційних точок Y_i , $i = \overline{1, k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу такий випадок не виключається.

Наближений розв'язок крайової задачі (1)-(28) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(X, t) &= \sum_{j=1}^{\omega} h_j(t) \varphi_j(r_j, e_k), \quad c(X, t) = \sum_{j=1}^{\omega} c_j(t) \varphi_j(r_j, e_c), \\ T(X, t) &= \sum_{j=1}^{\omega} T_j(t) \varphi_j(r_j, e_T), \quad s(X, t) = \sum_{j=1}^{\omega} s_j(t) \varphi_j(r_j, e_s), \\ u_i(X, t) &= \sum_{j=1}^{\omega} u_j^i(t) \varphi_j(r_j, e_u^i), \quad i = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (29)$$

де $h_j(t), c_j(t), T_j(t), s_j(t), u_j^i(t)$, $j = \overline{1, \omega}$, $i = \overline{1, 2}$, - невідомі коефіцієнти, $\varphi_j(r_j, e)$, $j = \overline{1, \omega}$, - відомі розривні РБФ [16], причому $r_j = \|X - X_j\|_2$; $e_k > 0$, $e_c > 0$, $e_T > 0$, $e_s > 0$, $e_u^i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, - параметри форми.

Тоді, використовуючи модифікований метод РБФ [20], із крайової задачі (1)-(28) отримуюмо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $h(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^{\omega}$, $C(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^{\omega}$, $T(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^{\omega}$, $S(t) = \{s_j(t)\}_{j=1}^{\omega}$, $U^i(t) = \{u_j^i(t)\}_{j=1}^{\omega}$, $i = \overline{1, 2}$:

$$M^{(k)} \cdot \frac{dU^1}{dt} + L^{(k)} \cdot U^1(t) = L^{(k1)} \cdot h(t) + F^{(k)}, \quad (30)$$

$$M^{(5)} \cdot \frac{dU^2}{dt} + L^{(5)} \cdot U^2(t) = L^{(51)} \cdot h(t) + F^{(5)}, \quad (31)$$

$$M^{(4)} \cdot \frac{dS}{dt} + L^{(4)}(h, C, T) \cdot S = F^{(4)}, \quad (32)$$

$$M^{(3)} \cdot \frac{dT}{dt} + L^{(3)}(h, C, T) \cdot T = F^{(3)}, \quad (33)$$

$$M^{(2)} \cdot \frac{dC}{dt} + L^{(2)}(h, C, T) \cdot C = L^{(21)} \cdot T(t) + F^{(2)}, \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} h^{(0)} &= (h_j(0))_{j=1}^{\omega}, \quad C^{(0)} = (c_j(0))_{j=1}^{\omega}, \quad T^{(0)} = (T_j(0))_{j=1}^{\omega}, \\ S^{(0)} &= (s_j(0))_{j=1}^{\omega}, \quad U^{\alpha(0)} = (u_j^{\alpha}(0))_{j=1}^{\omega}, \quad \alpha = \overline{1, 2}, \\ M^{(\alpha)} &= (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{\omega}, \quad L^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{\omega}, \\ F^{(\alpha)} &= (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \quad \alpha = \overline{1, 6}, \quad L^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{\omega}, \\ L^{(1\alpha)} &= (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{\omega}, \quad \alpha = \overline{2, 3}, \quad \tilde{M}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{\omega}, \\ \tilde{F}^{(\alpha)} &= (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \quad \alpha = \overline{1, 6}, \quad L^{(\alpha 1)} = (l_{ij}^{(\alpha 1)})_{i,j=1}^{\omega}, \\ \alpha &= \overline{5, 6}; \quad m_{ij}^{(3)} = c_j \varphi_j(r_{ij}, e_T), \end{aligned}$$

$$m_{ij}^{(2)} = n \varphi_j(r_{ij}, e_c), \quad i \in k^{\Omega}, \quad f_i^{(2)} = C_i(Y_i, t), \quad i \in k^{T(2)};$$

$$m_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ij}, e_k), \quad i \in k^{\Omega_k}; \quad f_i^{(1)} = T_i(Y_i, t), \quad i \in k^{T(1)};$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, e_s), \quad m_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ij}, e_u^2),$$

$$m_{ij}^{(6)} = \varphi_j(r_{ij}, e_u^1), \quad i \in k^{\Omega_u};$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_T)) + \\ + \rho c_p u \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_T), \quad i \in k^{\Omega}; \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_T) + \\ + \rho c_p u \cdot \varphi_j(r_{ij}, e_T), n), \quad i \in k^{T(3)}; \\ \varphi_j(r_{ij}, e_T), \quad i \in k^{T(3)}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(4)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (D \cdot \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_s)) + \\ + (u - w) \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_s), \quad i \in k^{\Omega_s}; \\ (-D \cdot \nabla \varphi_j(r_{ij}, e_s) + \\ + (u - w) \cdot \varphi_j(r_{ij}, e_s), n), \quad i \in k^{T(4)} \cup k_s; \\ \varphi_j(r_{ij}, e_s), \quad i \in k^{T(4)}; \end{cases}$$

$$f_i^{(4)} = \begin{cases} -(1-n) \frac{dT}{dt} \Big|_{x_s, y_i}, \quad i \in k_{T_0}^{(4)}; \\ S(Y_i, t), \quad i \in k^{T(4)}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(5)} = \begin{cases} -\nu \Delta \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^2) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^2), & i \in k^{\Omega_r}; \\ \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^2), & i \in k^{\Gamma_2^{(v_2)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(51)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha})}{\partial y},$$

$$I_{\eta}^{(61)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha})}{\partial x}, \quad i \in k^{\Omega_r};$$

$$I_{\eta}^{(6)} = \begin{cases} -\nu \Delta \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^1) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^1), & i \in k^{\Omega_r}; \\ \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^1), & i \in k^{\Gamma_2^{(v_2)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_{\varepsilon} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c), & i \in k^{\Omega}; \\ (-\mathbf{D}_{\varepsilon} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}; \\ \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c), & i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(21)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T)), & i \in k^{\Omega}; \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(12)} = \begin{cases} -\frac{(1+\varepsilon)(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{K}_{\varepsilon} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c)), & i \in k^{\Omega_{\varepsilon}}; \\ (\mathbf{K}_{\varepsilon} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(13)} = \begin{cases} -\frac{(1+\varepsilon)(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T)), & i \in k^{\Omega_{\varepsilon}}; \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}; \end{cases}$$

$$I_{\eta}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{(1+\varepsilon)(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{K}_{\alpha} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha})), & i \in k^{\Omega_{\varepsilon}}; \\ \Delta \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}), & i \in k^{\Omega_r}; \\ (-\mathbf{K}_{\alpha} \nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}; \\ \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}} \cup k^{\Gamma_1^{(u)}}; \\ (\nabla \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(u)}}; \end{cases}$$

$$f_{\eta}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}_i}, & i \in k^{\Omega_r}; \\ H_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}; \\ H_2(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(u)}}; \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{\eta}^{(1)} = \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}), \quad i \in k^{\Omega_{\varepsilon}}; \quad \tilde{m}_{\eta}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c),$$

$$\tilde{m}_{\eta}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \quad i \in k^{\Omega}; \quad \tilde{m}_{\eta}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_{\varepsilon}),$$

$$\tilde{m}_{\eta}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_{\alpha}^2), \quad \tilde{m}_{\eta}^{(6)} = \varphi_j(r_{\mu}, \varepsilon_{\alpha}^1), \quad i \in k^{\Omega_r};$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{Y}_i), \quad i \in k^{\Omega_{\varepsilon}}; \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i),$$

$$i \in k^{\Omega}; \quad \tilde{f}_i^{(4)} = S_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(5)} = u_0^2(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(6)} = u_0^1(\mathbf{Y}_i), \quad i \in k^{\Omega_r}; \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2.$$

Особливого визначення вимагають елементи матриці та вектор-стовпців задачі Коші (30)-(36) для колокаційних точок, які лежать на межах спряження Γ_{η} . Для прикладу розглянемо систему рівнянь (33), яка відповідає рівнянню теплопровідності (6). Також розглянемо лише межу Γ_{12} . Для інших систем рівнянь із задачі Коші (30)-(36) та інших меж спряження нижчеописана процедура здійснюється по аналогії. Нехай $\mathbf{Y}_{\alpha}$ та $\mathbf{Y}_{\beta}$ дві колокаційні точки, координати яких співпадають $i \in k^{\Omega_{12}}, \beta \in k^{\Omega_{12}}$. Тоді, всі елементи рядків під номерами α та β системи рівнянь (33) обнуляються і для них присвоюються значення згідно наступного правила:

$$I_{\alpha, j}^{(3)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{\alpha}, \varepsilon_T), & j \in k^{\bar{\Omega}_1}; \\ -\varphi_j(r_{\beta}, \varepsilon_T), & j \in k^{\bar{\Omega}_2}; \end{cases}$$

$$I_{\beta, j}^{(3)} = \begin{cases} (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{\alpha}, \varepsilon_T) + \\ + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in k^{\bar{\Omega}_1}; \\ -(-\lambda \nabla \varphi_j(r_{\beta}, \varepsilon_T) + \\ + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in k^{\bar{\Omega}_2}. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор-стовпця задачі Коші (30)-(36) згідно вищевведених формул не визначений, то він приймається рівним нулю.

Чисельний розв'язок задачі Коші (30)-(36) можна знайти, аналогічно роботам [10, 16, 19].

Кінематичні граничні умови (20) використовуються для апроксимації положення меж розмиву $\Gamma_{\eta}(\mathbf{X}, t)$, $\Gamma_{\eta} \in \{\Gamma_{11}; \Gamma_{12}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}\}$. Якщо на часовому шарі під номером (S) крайова задача (1)-(28) розв'язана, то положення $\Gamma_{\eta}^{(S+1)}$ межі $\Gamma_{\eta}(\mathbf{X}, t)$ на часовому шарі $(S+1)$ визначається з умови

$$\frac{\Gamma_{\eta}^{(S+1)}(\mathbf{X}) - \Gamma_{\eta}^{(S)}(\mathbf{X})}{\tau} = k_{cr}^{(y)} \left(\langle \mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{d} \rangle \right).$$

Умови (19) використовуються для апроксимації положення вільної межі Г ґрунтової греблі. Схема апроксимації аналогічна, як і для меж розмиву.

4. Результати чисельних експериментів.

Вивчення впливу наявності зосередженого шляху фільтрації в глинистому ядрі греблі, можливості контактного розмиву її основи у випадку фільтраційної консолідації та в умовах впливу тепло-солонееносу проведено на тестовому прикладі. В зв'язку з цим розглянуто задачу, де зосереджений шлях фільтрації є тріщиною діаметром 20 см, паралельною до осі ox . Нижня межа BF області Ω_2 теж приймалась паралельною до осі координат ox . При цьому координати деяких точок областей в розглядуваній задачі наступні: $A(-10; 0)$, $B(-10; -10)$, $E(68; 0)$, $D(78; 0)$, $F(78; -10)$.

Розмірність визначається у метрах. Висота тіла греблі – 20 метрів, а довжина верхньої основи – 8 метрів. Довжина нижньої основи тіла греблі складає 68 метрів. Довжина верхньої основи глинистого ядра складає 2 метри, а нижньої основи – 12 метрів. Гребля є рівнобедреною трапецією, як і її глинисте ядро. Крім того, глинисте ядро розміщене симетричне відносно областей Ω_1 та Ω_2 . Зосереджений шлях фільтрації розміщений на висоті 5 метрів від нижньої основи тіла греблі.

ґрунти основи та тіла греблі вважались ізотропними за своїми характеристиками. Коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі $T = 20^\circ\text{C}$ для ґрунтів різних областей покладатися рівними $k^{(1)} = k^{(6)} = 0,1 \text{ м/доба}$, $k^{(2)} = k^{(4)} = 0,01 \text{ м/доба}$, $k^{(3)} = 0,5 \text{ м/доба}$, де верхній індекс означає номер області. Залежності коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей, а також його апроксимація методом РБФ, взята з роботи [16].

Вважалось, що початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто, $h_0(x, y) = y_T \cdot \gamma_T / \gamma + y$, де y_T – вертикальна відстань від точки з координатами (x, y) до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки); $\gamma_T = 1,95 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^3$ – питома вага ґрунту, яка для спрощення покладатися однаковою в усіх

областях; $\gamma = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ Н/м}^3$ – питома вага порового сольового розчину.

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}_1$, визначався як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\nabla \cdot (K_s \nabla h_0(x, y)) = 0, (x, y) \in \Omega_1,$$

$$(u, n)_{AB} = (u, n)_{DE} = (u, n)_{BF} = 0,$$

$$h_0|_{AO} = H_1, h_0|_{E37} = H_2, h_0|_{D20} = H_2, h_0|_{OG} = q,$$

$$u = -K_s \nabla h_0(x, y), (x, y) \in \Omega_1,$$

де q – величина напору на межі ґрунту, яка еквівалентна величині прикладеного зовнішнього навантаження у вигляді тіла ґрунтової греблі. Напір у верхньому б'єсфі покладатися рівним $H_1 = 20 \text{ м}$, а у нижньому – $H_2 = 1 \text{ м}$.

Параметри тепло-масоперееносу вибирались наступними:

$$g = 10 \text{ м}^2/\text{с}; v = 0,08 \text{ м}^2/\text{доба}, \rho = 1100 \text{ кг/м}^3;$$

$$c_p^{(i)} = 4,2 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}, c_s^{(i)} = 2137 \text{ кДж/м}^3 \cdot ^\circ\text{C},$$

$$D_c^{(i)} = 0,001 \text{ м}^2/\text{доба}, \lambda_c^{(i)} = 108 \text{ кДж/м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба},$$

$$D_T^{(i)} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{доба} \cdot ^\circ\text{C}, i = \overline{1,7}; \gamma^{(i)} = 0 \text{ доба}^{-1},$$

$$a^{(i)} = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}, k_c^{(i)} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{доба},$$

$$\xi^{(i)} = 0,75, e^{(i)} = 0,70, k_T^{(i)} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/^\circ\text{C} \cdot \text{доба},$$

$$i \in \{1, 2, 4, 5, 6\}.$$

Тут індекс зверху означає номер області.

Чисельні експерименти проводились при початковій кількості колокаційних та вузлових точок в областях: $n^{(1)} = n^{(6)} = 448$, $n^{(2)} = 90$, $n^{(3)} = 62$, $n^{(4)} = 76$, $n^{(5)} = 1155$. Для дискретизації в часі використовувалась повністю неявна різницєва схема з кроком $\tau = 5 \text{ дб}$. Для розв'язання перевизначених СЛАР, які отримуються із задачі Коші (1)-(28) після проведення дискретизації в часі, використовувався метод найменших квадратів [21, 22]. В ході обчислень в околі меж Γ_3 та Γ_5 проводилось згущення вузлових та колокаційних сіток.

Для проведення чисельних експериментів та побудови розривних РБФ використовувалась мультікватратична РБФ $\phi(r, c) = \sqrt{1 + (rc)^2}$, $\alpha > 0$ – так званий параметр форми. В області

грунту покладалося $\epsilon = 1.3$, а в областях розмиву $\epsilon = 10^7$.

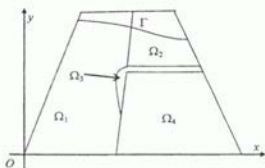


Рис. 2. Зона розмиву

Початковий розподіл концентрації солей та температури $c_0(X) = C_{\min}$, $T_0(X) = T_{\min}$, $X \in \bar{\Omega}$, де $C_{\min} = 5$ г/літр, $T_{\min} = 10^\circ\text{C}$. В області верхнього б'єфу концентрація солей покладалася рівною $C_{\max} = 160$ г/літр, в області нижнього б'єфу $c = C_{\min}$, а температура $T|_{\Gamma \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} = T_{\max}$, де $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$; $T|_{\Gamma} = yT_{\max} + \frac{H_1 - y}{H_1}T_{\min}$, $y \in \Gamma$.

В якості співвідношення (25) приймалася залежність $v = \alpha^* / n \cdot u$, де $\alpha^* = \begin{cases} (1-s/(1-n)), u \geq u_{kr}; \\ 0, u < u_{kr}. \end{cases}$ Критична швидкість фільтрації покладалася рівною $u_{kr}^{(3)} = 0.2$ м/доба, $u_{kr}^{(7)} = 0.5$ м/доба, а коефіцієнти розмиву $k_{cr}^{(3)} = 0.1$, $k_{cr}^{(7)} = 0.01$.

Як показують результати чисельних експериментів в початковий момент часу розмив розпочинається на межі контакту тіла та основи ґрунтової греблі (область Ω_2). Це пояснюється наявністю великих надлишкових напорів в тілі та основі ґрунтової греблі і відповідною спрямованістю фільтраційного потоку вздовж межі контакту в напрямку осі координат ox . Так, через $t = 100$ діб після початку процесу консолідації глибина області розмиву Ω_2 складала 102 см, а довжина 626 см. Однак, при розсіюванні надлишкових напорів, темпи зростання величини зони розмиву Ω_2

зменшуються. Так, при $t = 250$ діб після початку процесу консолідації розміри області розмиву Ω_2 залишаються такими ж, як і при $t = 100$ діб, а далі незначно зростають.

Область Ω_3 починає поширюватись в область Ω_1 лише через $t = 200$ діб після початку процесу консолідації. Це пояснюється тим, що напори в глинистому ядрі зменшуються і концентрація солей та температура починають в області Ω_1 збільшуватись. В результаті коефіцієнт фільтрації, а отже і швидкість фільтрації починають теж зростати. Тому в певний момент часу швидкість фільтрації стає більшою за критичну. Спочатку розмив являє собою зосереджений шлях фільтрації вздовж межі контакту ґрунту в областях Ω_1 та Ω_4 (рис. 2). При $t = 250$ діб довжина даного шляху 34 см, а ефективний діаметр 7 см. При $t = 500$ діб довжина даного шляху 188 см, а діаметр 11 см. В процесі подальшого розсіювання надлишкових напорів, поширення забруднень та зростання температури, форма розмиву починає набувати форми каверни. При $t = 1000$ діб найбільша довжина даного розмиву вздовж контакту областей Ω_1 та Ω_4 складає 305 см, а діаметр 165 см.

У випадку без урахування впливу тепло-масопереносу, при вказаних параметрах, протягом досліджуваного проміжку часу розмиву через зосереджений шлях фільтрації взагалі не відбувається. Це вказує на те, що величина зони розмиву значно залежить від урахування процесів тепло-солепереносу.

5. Висновки. Отже, в даній роботі поставлена і чисельно розв'язана задача про вплив зосередженого шляху фільтрації на процес розмиву тіла греблі та про контактний розмив основи ґрунтової греблі в умовах тепло-солепереносу. Як свідчать результати чисельних експериментів, величина зони розмиву за рахунок зосередженого шляху фільтрації в глинистому ядрі греблі значно залежить від вказаних чинників.

Список використаних джерел

1. Международный семинар по фильтрационной прочности плотин и оснований // Гидротехника. – 2009. - №2. – С. 6-7.
2. Foster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by

- internal erosion and piping / *M.Foster, R.Fell* // 20th Congress on Large Dams, Beijing. – 2000. – Pp. 237-259.
3. *Ojha C.S.P.* Influence of porosity on piping models of levee failure / *C.S.P. Ojha, V.P. Singh, D.D. Adrian* // *J. Geotechnical and Geoenvironmental Eng.* – 2001. – Vol. 127, №12. – P. 1071-1074.
4. *Ojha C.S.P.* Determination of critical head in soil piping / *C.S.P. Ojha, V.P. Singh, D.D. Adrian* // *J. Hydraulic Eng.* – 2003. – №7. – P. 511-518.
5. *Lachouette D.* One-dimensional modelling of piping flow erosion / *D. Lachouette, F. Golay, S. Bonelli* // *C. R. Mecanique.* – 2008. – V.336, №9. – P. 731-736.
6. *Golay F.* Interfacial erosion: a three-dimensional model / *F. Golay, D. Lachouette, S. Bonelli, P. Seppacher* // *C. R. Mecanique.* – 2010. – V.338, №6. – P. 333-337.
7. *Bonelli S.* The scaling law of piping erosion / *S. Bonelli, O. Brivois, D. Lachouette* // 18th Congres Francais de Mecanique, Grenoble. – 2007. – Pp. 1-6.
8. *Mattsson H.* On internal erosion in embankment dams / *H. Mattsson, J. G. I. Hellstrom, T. S. Lundstrom* // Research report Lulea University of Technology. – 2008. – №14. – 47 p.
9. *Jianhua Y.* FE modelling of seepage in embankment soils with piping zone / *Y. Jianhua* // *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering.* – 1998. – №6. – Pp. 679-686.
10. *Власюк А.П.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації соляових розчинів в неізотермічних умовах / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
11. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язування задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі в умовах тепло-масоперенесення методом радіальних базисних функцій / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. ін форм. – 2009. – Вип.15. – С. 196-207.
12. *Власюк А.П.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флюїдом з урахуванням контактного розмиву / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2008. – Вип.2. – С. 77-82.
13. *Власюк А.П.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах тепло-масопереносу з урахуванням контактного розмиву / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2009. – Вип.1. – С. 92-97.
14. *Власюк А.П.* Математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах тепло-солепереносу та руху суспензії в області контактного розмиву / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2010. – Вип.1. – С. 59-64.
15. *Власюк А.П.* Математичне моделювання взаємних процесів фільтраційної консолідації тіла греблі та розмиву ґрунту в її основі в умовах тепло-солепереносу / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2010. – Вип.2. – С. 105-110.
16. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / *А.П. Власюк, П.М. Мартинюк* – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
17. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика / *П. Роуч* – М.: Мир, 1980. – 616 с.
18. *Van Rijn L.C.* Three-dimensional modeling of sand and mud transport in current and waves / *L.C. Van Rijn, K. Meijer* // *Int. Symp. "The transport of suspended sediments and its mathematical modeling"*, Florence, Italy. – 1991. – Pp. 683-708.
19. *Сергійченко Н.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / *Н.В. Сергійченко, В.В. Скопецкий, В.С. Дегінека* – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.
20. *Least-squares collocation meshless method* / *X. Zhang, X.-H. Liu, K.-Z. Song, M.-W. Lu* // *Int. J. Numer. Methods Engin.* – 2001. – Vol.51. – P. 1089-1100.
21. *Исаев В.И.* Развитие метода колокаций и наименьших квадратов / *В.И. Исаев, В.П. Шатеев* // Труды ин-та математики и механики. – 2008. – Т.14, №1. – С. 41-60.
22. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / *И.Н. Молчанов* – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.

Надійшла до редколегії 31.03.2011

УДК 517.925.51

Гарашенко Ф.Г., професор,
Кручинін Д.С., аспірант

**Оцінки областей практичної стійкості з
еліпсоїдальними фазовими обмеженнями
і їх використання**

В даній роботі досліджуються задачі практичної стійкості динамічних систем з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями. Розроблені алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та структурно-параметричної оптимізації застосовуються для дослідження рівнянь руху пучків заряджених частинок з різною формою задання прискорюючих та фокусуєючих полів.
Ключові слова: динамічні системи, фазові обмеження, трубка дрейфа.

*E-mail: garash@unicyb.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

При розв'язуванні багатьох прикладних задач необхідні конструктивні алгоритми оцінки областей практичної стійкості динамічних систем як при лінійних так і нелінійних фазових обмеженнях [1, 2]. В реальних ситуаціях нелінійні фазові обмеження часто являються квадратичними. Зокрема, при проектуванні прискорюючо-фокусуєючих систем в ролі фазових обмежень можуть виступати електроди в формі еліпсоїдальних циліндрів [3-5]. Дана робота присвячена розробці чисельних алгоритмів для оцінки областей практичної стійкості при еліпсоїдальних фазових обмеженнях. Таку область практичної стійкості в системах прискорення та фокусування називають областю захвата частинок у режимі прискорення [1-3].

Постановка задачі

Розглянемо математичну модель, яка відповідає реальним процесам в різних прискорюючо-фокусуєючих системах, в такій формі

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(x, t)u \tag{2}$$

F.G. Garashchenko, professor,
D.S.Kruchynin aspirant

**Estimates of the practical stability domains
with ellipsoidal phase limitations and their
use**

We consider the problems of practical stability of dynamic systems with ellipsoidal phase limitations. The constructed algorithms for numerical calculations of the domains of stability and for the structural parametric optimization are applied to the study of the equations of motion of beams of charged particles in accelerating and focusing fields set in various ways.
Key Words: dynamic systems, phase limitations, drift tube.

на відрізьку $[t_0, T]$. Тут підсистема (1) є нелінійною, в якій x - n -вимірний вектор, $f(x, t)$ -вектор-функція розмірності n , друга підсистема (2) являється лінійною за u , u - вектор розмірності m , $A(x, t)$ - квадратна матриця розмірності $m \times m$. Припустимо, що праві частини системи (1), (2) задовольняють умовам теореми Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

Початкові умови для вектора x в момент t_0 задовольняють співвідношення

$$x(t_0) = x^{(0)} \in M_0, \tag{3}$$

де M_0 - задана компактна множина, а для вектора u можна вибирати в наступній структурній формі

$$u(t_0) = u^{(0)} \in G_0 = \{u: u^T B u \leq c^2\}. \tag{4}$$

Тут і надалі верхній індекс T - знак транспонування, B - задана додатно-визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, c - додатна стала, яка визначає множину G_0 і буде фігурувати в умовах стійкості.

Розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ деякими точками

$$0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{2N} = T$$

на підвідвізці $[t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, N$, на яких задані фазові обмеження в формі еліптичних циліндрів

$$y(t) \in \Phi_t^{(i)} = \{y : y^T G^i(t) y \leq 1\}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \\ i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Введемо наступне означення.

Означення 1. Будемо говорити, що система (1), (2) має якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості, якщо $y(t, t_0, y^{(0)}, x^{(0)}) \in \Phi_t^{(i)}$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, N$ для будь-якого $x^{(0)} \in M_0$ та $y^{(0)} \in G_0$.

Нехай l - заданий одиничний вектор розмірності m . Введемо означення стійкості при розглянутих фазових обмеженнях за напрямком l по вектору y для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Означення 2. Будемо говорити, що система (1), (2) має якість $\{M_0, k, l, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості, якщо для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ та будь-яких $y^{(0)} = k^{(i)} l$, $0 \leq k^{(i)} \leq k$ виконується умова $y(t, t_0, y^{(0)}, x^{(0)}) \in \Phi_t^{(i)}$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. Задача полягає не тільки в тому, щоб сформулювати твердження про стійкість в силу означень 1 та 2, а й розробити конструктивні критерії визначення областей стійкості.

Основні твердження та критерії стійкості

Використовуючи результати робіт [1, 2, 5] сформулюємо наступні твердження.

Теорема 1 (достатня умова практичної стійкості). Нехай для системи (1), (2) знайдеться неперервна і не зростаюча на розв'язках функція Ляпунова $V(y, t, x^{(0)})$, яка задовольняє умовам:

$$\{y \in R^m : V(y, t, x^{(0)}) \leq 1\} \subset \Phi_t^{(i)}, \\ t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$;

$$G_0 \subset \{y \in R^m : V(y, t, x^{(0)}) \leq 1\}, \quad (7)$$

для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$,

то система (1), (2) має якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості.

Теорема 2 (необхідна умова практичної стійкості). Нехай система (1), (2) має якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості. Тоді існує функція Ляпунова $V(y, t, x^{(0)})$, яка є неперервною та незростаючою на розв'язках системи (1), (2) і при цьому виконуються умови (6), (7).

Доведення сформульованих теорем можна провести по аналогії з доведеними теоремами в роботі [5]. Необхідно зауважити, що сформульовані теореми справедливі не тільки для систем спеціального вигляду (1), (2) та еліпсоїдальних фазових обмежень, а й для досить загальних випадків.

Відзначимо, що функцію $V(y, t, x^{(0)})$, за допомогою якої будемо перевіряти умови практичної стійкості, будемо в наступному вигляді

$$V(y, t, x^{(0)}) = \frac{1}{c} \phi^T(t, t_0, y, x^{(0)}) B \phi(t, t_0, y, x^{(0)}), \quad (8)$$

де $\phi(t, t_0, y, x^{(0)})$ - інтеграл підсистеми (2) для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Для нашого випадку, коли підсистема (2) є лінійною за y , загальний інтеграл $\phi(t, t_0, y, x^{(0)})$ буде мати вигляд

$$\phi(t, t_0, y, x^{(0)}) = Y(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) y.$$

$$x^{(0)} \in M_0. \quad (9)$$

Тут $Y(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)}))$ - нормована за моментом t_0 фундаментальна матриця підсистеми (2) для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$, яка обчислюється наступним чином

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), x(t_0) = x^{(0)} \in M_0.$$

$$\frac{dY}{dt} = A(x(t, t_0, x^{(0)}), t) Y, Y(t_0, t_0, x^{(0)}) = E, t \in [t_0, T]. \quad (10)$$

Тоді функція (8) для нашого випадку буде визначатися через введену фундаментальну матрицю

$$V(y, t, x^{(0)}) = \frac{1}{c^2} y^T Y^T(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) \times \\ \times BY(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) y. \quad (11)$$

На основі сформульованих теорем та побудованої функції (11) приведемо наступне твердження.

Твердження 1. Для того, щоб система (1), (2) мала якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\{y \in R^m : y^T Y^T(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) \times \\ \times BY(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) y \leq c^2\} \subset \Phi_t^{(i)}, \\ t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

для будь-якого $x^{(0)} \in M_0$.

В (12) фазові обмеження $\Phi_t^{(i)}$ можуть бути досить загальними, якщо ж обмеження будуть еліпсоїдальними, типу (5), то твердження 1 переписється наступним чином.

Твердження 2. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями необхідно і достатньо, щоб

$$\{y \in R^m : y^T Y^T(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) \times \\ \times BY(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) y \leq c^2\} \subset \{y : y^T G^{(i)}(t) y \leq 1\}, \\ t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Таким чином, необхідні та достатні умови $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості зводяться до вибору таких параметрів початкових даних, для яких би виконувалось співвідношення (13).

Якщо ж припустити, що фазові обмеження (5) на кожному з відрізків $[t_{2i-1}, t_{2i}]$ являються лінійними

$$\Phi_t^{(i)} = \Gamma_t^{(i)} = \{y : |y^{(s)}(t)| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N\}, \\ t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad (14)$$

то включення (13) перепишемо в наступному вигляді:

$$\{y \in R^m : y^T Y(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) \times$$

$$\times BY(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})) y \leq c^2\} \subset \{y : |I_t^{(i)}(t) y| \leq 1, \\ s = 1, 2, \dots, N_i, \quad t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

На основі робіт [1, 2, 5] і включення (15) запишемо критерій $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості.

Критерій 1. Для $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,N_i} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} A,$$

$$A = I_t^{(i)T}(t) Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) B^{-1} Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) \quad (16)$$

Для того, щоб скористатися результатом (16) для еліпсоїдальних фазових обмежень представимо їх в наступному вигляді [1]

$$\{y : y^T G^{(i)}(t) y \leq 1\} = \left\{ y : \frac{p^T G^{(i)}(t) y}{\sqrt{p^T G^{(i)}(t) p}} \leq 1 \right\},$$

$$\forall p \in R, \quad \|p\| = 1. \quad (17)$$

Приймаючи до уваги апроксимацію (17), умови $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості сформулюємо у вигляді критерію.

Критерій 2. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{p \in \|p\|=1} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \frac{C}{D},$$

$$C = p^T G^{(i)}(t) p,$$

$$D = p^T G^{(i)}(t) Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) \times \\ \times B^{-1} Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) K^{(i)}(t) p. \quad (18)$$

Іноколи, замість оцінки (18), краще в обчислювальному плані користуватися наступною, яка носить лише достатній характер.

Критерій 3. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \frac{K}{L},$$

$$K = \rho_{\min}(G^{(i)}(t)),$$

$$L = \rho_{\max}(G^{(i)}(t))Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) \times$$

$$\times B^{-1}Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))G^{(i)}(t). \quad (19)$$

В (19) $\rho_{\min}(G^{(i)}(t))$ - мінімальне власне значення матриці $G^{(i)}(t)$ в момент t , $\rho_{\max}(G^{(i)}(t))Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))B^{-1}Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) \times G^{(i)}(t)$ - максимальне власне значення цієї матриці в момент t .

Нехай $Q(t, x^{(0)}) = Y^T(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) \times B^{-1}Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))$ - додатно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$. Легко перекоонатися, що ця матриця для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ задовольняє матричне диференціальне рівняння Ляпунова

$$\frac{dQ}{dt} = A^T(x(t, t_0, x^{(0)}), t)Q + Q A(x(t, t_0, x^{(0)}), t),$$

$$Q(t_0, x^{(0)}) = B^{-1}, \quad x^{(0)} \in M_0. \quad (20)$$

Тоді сформульовані критерії можна переписати в більш компактній формі.

Критерій 4. Для $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} J,$$

$$J = [\Gamma_t^{(i)}(t)Q(t, x^{(0)})\Gamma_t^{(i)}(t)]^{-1}. \quad (21)$$

Критерій 5. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{p \in [p^-, p^+]} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} Z,$$

$$Z = \frac{p^+ G^{(i)}(t)p}{p^+ G^{(i)}(t)Q(t, x^{(0)})G^{(i)}(t)p}. \quad (22)$$

По аналогії переписується через матрицю $Q(t, x^{(0)})$ і критерій 3.

Необхідно відмітити, що організація обчислювальних схем для представлених двох груп критеріїв різна. Для перших трьох критеріїв необхідно обчислювати фундаментальну

матрицю $Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))$. Це значить, що для кожного $x^{(0)} \in M_0$ необхідно чисельним методом розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь розмірності m^2 . Для останніх двох критеріїв необхідно для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ обчислювати матрицю $Q(t, x^{(0)})$ згідно матричний задачі Коші (21). В силу симетричності матриці $Q(t, x^{(0)})$ для цього необхідно розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь розмірності $\frac{m(m+1)}{2}$.

тобто майже вдвічі меншої розмірності. Для знаходження оптимальних за виключенням (об'ємом) множин стійкості приведемо два критерії стійкості за напрямком l згідно означення 2 для лінійних та еліпсоїдальних фазових обмежень.

Критерій 6. Для $\{M_0, k, l, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} E,$$

$$E = [\Gamma_t^{(i)}(t)Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))M]^{-1}. \quad (23)$$

Критерій 7. Необхідні та достатні умови $\{M_0, k, l, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ - стійкості системи (1), (2) при еліпсоїдальних фазових обмеженнях мають вигляд

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} S,$$

$$S = [\Gamma_t^{(i)}Y^T(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))G^{(i)}(t)Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))Y]^{-1} \quad (24)$$

Відмітимо, що в подальшому для (24) будемо брати $k > 0$ та $\bar{k}(l) > 0$. Знаючи $\bar{k}(l)$, оптимальну за об'ємом область практичної стійкості можна записати наступним чином

$$G_0^{(nom)} = \{y \in R^n : y = kl, \quad 0 \leq k \leq \bar{k}(l)$$

$$\forall l \in R^n, \quad \|l\| = 1\}. \quad (25)$$

Результати проведення обчислювального експерименту

Динаміку пучка в лінійних резонансних прискорюючо-фокусуєючих системах з тубодрейфа можна записати так [1, 4]

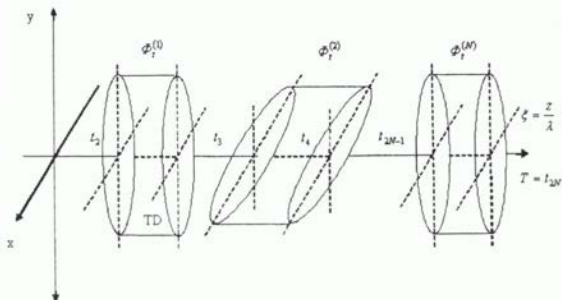


Рис. 1. ТД - трубка лєйда, ПЗ - прискорюючий зазор

$$\frac{dy}{d\xi} = \alpha(\xi) \cos \varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}},$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right] x - \alpha(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right\} \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right] y - \alpha(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right\} \cos \varphi,$$

$$\xi \in [0, T]. \quad (26)$$

Тут γ та φ - приведена енергія та фаза

частинки, x, y - радіальні координати, $\xi = \frac{z}{\lambda}$ - безрозмірна повздожня координата, λ - довжина хвилі високочастотного поля, $\alpha(\xi) -$

неперервно диференційована функція, яка відповідає амплітуді напруженості поля на осі, $g(\xi)$ - функція керування, яка визначається несиметричне поле в прискорюючих зазорах шляхом використання електродів в формі еліптичних циліндрів (рис. 1).

Система звичайних диференціальних рівнянь (26) має форму (1), (2), причому $n=2, m=4$, $x^T = (x_1, x_2) = (\gamma, \varphi)$, $y^T = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$, в якості множини M_0 часто вибирають таку $M_0 = \{y(0), \varphi(0) : y(0) = const, a \leq \varphi(0) \leq b\}$, a та b задані числа,

$t = \xi$, $f^T(x, t) = (\alpha(\xi) \cos \varphi, \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}})$, матриця

$A(\gamma, \varphi, \xi)$ має розмірність 4×4 і її запишемо в такій формі

$$A(\gamma, \varphi, \xi) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\alpha) \right) \cos \varphi & -\frac{\alpha(\xi)\gamma}{\gamma^2 - 1} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right) \cos \varphi & -\frac{\alpha(\xi)\gamma}{\gamma^2 - 1} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

В якості еліпсоїдальних фазових обмежень можна взяти наступні

$$\Phi_i^{(i)} = \{y \in R^4 : c_i(t)y_1^2 + d_i(t)y_3^2 \leq 1\},$$

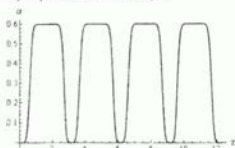


Рис. 2. Графік функції $\alpha(z)$



Рис. 3. Графік функції $g(z)$

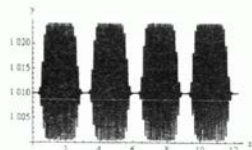


Рис. 4. Залежність енергії частинки від повздожної координати

$$i \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N.$$

При визначенні оптимальної геометрії електродів додатні функції $c_i(t)$ та $d_i(t)$ можна вибирати оптимальним чином. На першому етапі функції $c_i(t)$ та $d_i(t)$ можна взяти сталими, а довжини півосей сусідніх еліпсоїдів можна взяти рівними, якщо один з них повернути на 90° .

Враховуючи структуру матриці $A(\gamma, \varphi, \xi)$, очевидно, фундаментальна матриця матиме такий вигляд.



Рис. 5. Початковий проміжок залежності енергії частинки від повздожної координати

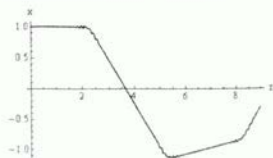


Рис. 6. Залежність радіальної координати x від повздожної координати

$$Y = \begin{pmatrix} Y^{(1)} & 0 \\ 0 & Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_3^{(1)} & 0 & 0 \\ y_2^{(1)} & y_4^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{(2)} & y_3^{(2)} \\ 0 & 0 & y_2^{(2)} & y_4^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Без великих труднощів сформульовані вище критерії легко переписати для даної моделі (26). Тим самим, ми визначимо область захвату частинок у режимі прискорення в структурній формі (4) або ж оптимальну за об'ємом в формі (25).

Наведемо результати чисельного моделювання запропонованої моделі.

Для чисельного аналізу системи (26) виберемо модельні функції, які показані на рис. 2 і 3.

Отримані в результаті розрахунків зміни енергії частинки у прискорювачі в залежності від повздожної координати зображено на рис. 4 і 5.

Залежність радіальних координат частинок від повздожних координат показано на рис. 6 і 7.

На рис. 8 і 9. показано відповідні проєкції траєкторій частинок у фазовому просторі.

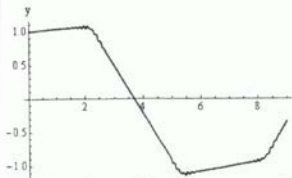


Рис. 7. Залежність радіальної координати y від подовжної координати.

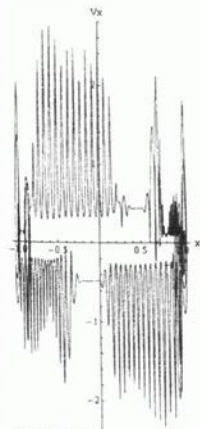


Рис. 8. Фазова площина

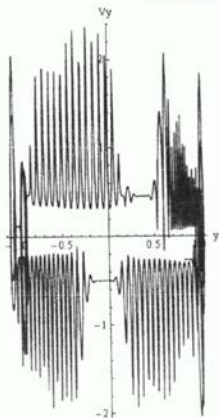


Рис. 9. Фазова площина

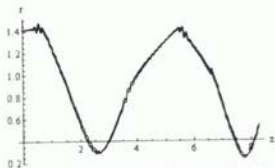


Рис. 10. Траскторії для декількох реалізацій в межах області, в яких змінювались початкові значення швидкостей

Видно, що вивчення динаміки пучка дозволяє проводити аналіз траскторій частинок з допомогою використання методів практичної стійкості та розроблених чисельних алгоритмів оцінки областей захвату.

Приведені результати розрахунків показують стійкість задачі до змін початкових умов в залежності від швидкості частинок. Введемо

координати $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. На графіках (рис.10-13) показано траскторії, початкові швидкості яких знаходяться в межах $0.01 < v_r < 0.02$ та $0.02 < v_r < 0.04$.

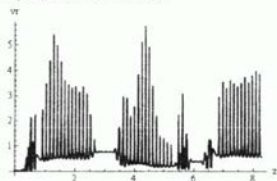


Рис. 11. Залежність швидкості від координат у межах області, в якій змінювалися початкові значення швидкостей

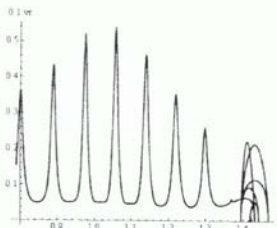


Рис. 12. Фазова площина для однієї реалізації

Необхідно відмітити, що нестійкість траєкторій часто приводить до некоректної постановки математичних задач. В багатьох випадках для їх розв'язування використовуються спеціальні методи регуляризації.

Застосування методів регуляризації дозволяє будувати ефективні чисельні алгоритми для аналізу динаміки траєкторій в прискорюючих та фокусуєючих системах, з допомогою яких вивчається поведінка збурених траєкторій.

Використання такого підходу було застосовано для квантового аналізу систем та в квантових тунельних ефектах Джозефсона [6-7].

Висновки

В даній роботі досліджені задачі практичної стійкості динамічних систем з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями.

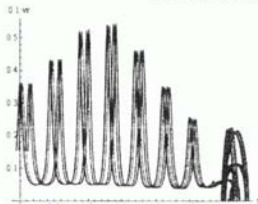


Рис. 13. Фазова площина для декількох реалізацій межі області, в якій змінювалися початкові значення швидкостей

Для широкого класу динамічних систем приведені критерії аналізу практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями.

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наука думка, 1985. – 305 с.
2. Гаращенко Ф.Г. О численном подходе решения задач устойчивости на конечном интервале времени. – Докл. АН УССР. – 1981. – Сер. А. – № 11. – С. 78–81.
3. Капчицкий И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. – М.: Атомиздат, 1966. – 310 с.
4. Овсюников Д.А. Математические методы управления пучками. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 228 с.
5. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пичур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2000. – 197с.
6. Kruchinin S., Klepikov V., Novikov F., Kruchinin D. Nonlinear current oscillations in a fractal Josephson junction. Materials Science, 23 (4), 2005, p. 1009-1013.
7. Garashchenko F., Kruchinin D., Novikov F. Quantum analysis of oscillatory processes in fractal media. International Journal of Modern Physics, Vol.22, 2008, p. 3923-3929.

Надійшла до редколегії 29.05.11

УДК 519.642.7:532.5.013.2

Головенко А.Д., аспірант

Обчислювальні технології та алгоритми для побудови автоматизованих моделюючих систем в будівельній аеродинаміці

В статті розглянуто та систематизовано вимоги до алгоритмів обробки даних при побудові обчислювальних технологій на основі методу дискретних особливостей. Ефективність запропонованих алгоритмів продемонстровано на прикладі адекватного моделювання аерогідродинамічних процесів та коректного розв'язування двовимірних нелінійних нестационарних задач будівельної аеродинаміки.

Ключові слова: метод дискретних особливостей, МДО, аерогідродинаміка, алгоритми.

*E-mail: golovenko@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Гарашенко Ф.Г.

1. Вступ

Принциповою особливістю аерогідродинамічних процесів, що супроводжують обтікання конструкцій та споруд, є не тільки нестационарність течії, а ще і змінність режимів течії поблизу конструкцій [1-4]. Тому, для визначення аерогідродинамічних навантажень на конструкції та споруди недостатньо використання традиційних інженерних методів їх розрахунку [5,6]. Принциповою необхідністю є адекватне математичне моделювання для прогнозування розвитку усього аерогідродинамічного процесу, виділення домінуючих режимів та виявлення найбільш впливових факторів обтікання. Пряме чисельне моделювання на основі повних рівнянь Нав'є-Стокса нашовахується на принципові перепони, що пов'язані із застосуванням додаткових емпіричних даних, необхідністю розв'язування окремої задач побудови сітки для кожної окремої області течії, високої вартістю необхідного технічного ресурсу та тривалим часом виконання обчислень. Необхідність створення спеціалізованих автоматизованих систем визначення аерогідродинамічних навантажень вимагає математичних методів, що

A. D. Golovenko

Computer applications and algorithms for the construction of the automated modeling systems in the building aerodynamics

The article reviewed and systematized requirements for data processing algorithms in the construction of computing technologies based on the method of discrete singularities. The effectiveness of the proposed algorithms is demonstrated on the example of adequate design of aerohydrodynamic processes and proper solution of nonlinear two-dimensional nonstatic problems of building aerodynamics.

Key Words: discrete singularities, method of discrete singularities, aerodynamics, algorithms.

позбавлені перелічених вище недоліків. До таких методів можна віднести метод дискретних особливостей МДО, який дозволяє створювати автоматизовані системи для розв'язування нелінійних початково-краєвих гідродинамічних задач, хоча й у обмеженому, але найбільш важливому діапазоні параметрів [1-4]. Перевагою методу порівняно з прямим моделюванням на основі рівнянь Нав'є-Стокса є невеликі обчислювальні витрати та більша швидкість обчислень. Це дозволяє застосовувати МДО для моделювання в режимі реального часу і дає значно ширші можливості використання методу на існуючій обчислювальній техніці [7-14]. Хоча математична постановка задачі достатньо проста, алгоритм моделювання при застосуванні МДО містить ряд особливостей, зумовлених дискретизацією моделі. Для забезпечення необхідної точності розрахунків, адекватності процесу моделювання з виділенням найбільш важливих режимів обтікання, дискретизація вхідних даних задачі повинна відповідати достатньо жорстким умовам. Виконання даних умов при обробці вхідних даних забезпечить необхідну точність результатів, що вимагаються нормативними документами (наприклад, у випадку застосування в цивільному будівництві,

Державними Будівельними Нормами (ДБН) та Строительними нормами и правилами (СНИП)).

При створенні автоматизованої програмно-модельної системи (для потреб будівельної аеродинаміки), яка побудована на основі МДО, розглянуто і систематизовано вимоги до підготовки (оцифрування) контурів для двовимірних аерогідродинамічних задач та наведено алгоритми задоволення цих вимог.

2. Математична модель

Розглядається плоска модель нестационарного відривного поперечного обтікання ідеальною нестисливою рідиною контуру L_d , з формуванням вихрового сліду, що складається з складок тонких вихрових шарів, які представляються згорнутими поверхнями L_v розриву тангенціальної складової швидкості (Рис.1).

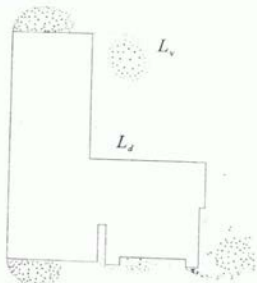


Рис. 1. Обтікання контуру.

Для потенційної течії ідеальної нестисливої рідини D^* в області поза границями: L_d - контуру, що обтікається, L_v - вихрових структур в струмені, ставиться наступна задача для знаходження потенціалу φ , для якого швидкість

$$\vec{V} = \nabla \varphi;$$

$$t \geq t_0: \quad \Delta \varphi = 0 \text{ в } D^* \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = W_n^* \text{ на } L_d \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^- \text{ на } L_v \quad (3)$$

$$p^+ = p^- \text{ на } L_v \quad (4)$$

$$|\nabla \varphi| < \infty \text{ на } L \text{ (на гострих кутах)} \quad (5)$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = V_\infty \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} \quad (7)$$

$$t = t_0: \quad \sigma_d(t_0), \varphi^*|_{r=r_0} = \varphi_0^* \quad (8)$$

Рішення даної задачі проводиться із застосуванням методу дискретних особливостей.

3. Загальне представлення вхідної інформації

У загальному двовимірному випадку модель об'єкту складається з одного чи кількох контурів. Контур будівлі початково задається в розмірному вигляді. Значення координат вузлових точок задані в метрах. Для вирішення задачі відривного нестационарного обтікання необхідно обезрозмірити і віднормувати всі розміри характеристики контуру, а також необхідна додаткова дискретизація контуру і виділення кутових точок.

Кожен контур представлений послідовністю вузлів: (x_i, y_i) , $i = 1, n$. Відкритий контур задається вузлами, послідовно від початку до кінця контуру. Замкнений контур задається починаючи з довільного вузла контуру і останній вузол замикається з першою. Контури не повинні перетинатись один з одним чи містити самоперетини.

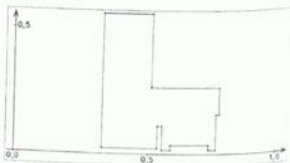


Рис. 2. Переріз будівлі.

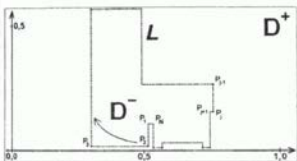


Рис. 3. Контур будівлі та області зовні та всередині контуру.

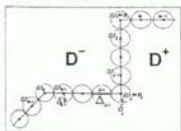


Рис. 4. Наближення контуру з деякою точністю множиною точок.

4. Принципові вимоги до представлення та обробки даних

I) Порядок обходу контуру:

Вимога: задання замкнутого контуру з напрямком обходу вузлів за годинниковою стрілкою.

Забезпечує: однозначну інтерпретацію значень тиску на замкнутому контурі.

II) Відсутність вузлів на контурі, що не впливають на його форму:

Вимога: жоден вузол контуру не лежить на прямій між двома його сусідніми вузлами.

Забезпечує: збіжність обчислень завдяки рівномірному розбиттю контуру.

III) Відсутність перетинів та самоперетинів контурів:

Вимога: жодні два контури не перетинаються, жоден контур не містить точок самоперетину.

Забезпечує: коректність дискретизації контуру.

IV) Однозначність задання контуру множиною вузлів:

Вимога: для будь-якого вузла контуру найближчими до нього є сусідні вузли контуру.

Забезпечує: коректність дискретизації контуру.

Наприклад: контури на рис. 5 і 6 не задовольняють дану вимогу.



Рис. 5. Близькі контури. Відстань між вузлами різних контурів менша відстані між вузлами кожного з контурів.

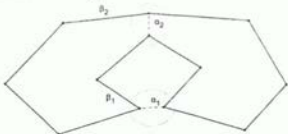


Рис. 6. Складний контур. Відстань між не-сусідніми вузлами менша відстані між сусідніми.

V) Достатня деталізація розбиття:

Вимога: середня відстань δ між вузлами контуру мінімум втричі менша найменшої сторони початкового контуру (контурів).

Забезпечує: збіжність обчислень завдяки рівномірному розбиттю контуру.

VI) Рівномірність розбиття контуру:

Вимога: мінімізація середньоквадратичного відхилення довжин відрізків розбиття для заданої середньої довжини δ .

Забезпечує: збіжність обчислень.

VII) Нормалізація контуру (приведення до одиничного розміру):

Вимога: сукупність контурів має характерний розмір (діаметр) 1 (див. Розділ 5.2).

Забезпечує: використання результатів для різних розмірів контуру та напрямків потоку.

VIII) Переміщення моделі в початок координат:

Вимога: центр мас усіх вузлів контурів співпадає з початком координат.

Забезпечує: збільшення точності обчислень (за рахунок особливостей представлення чисел в EOM).

5. Характерний розмір

Відповідно до ДБН і СНІП необхідні динамічні характеристики визначаються для об'єктів, усі розміри яких віднесено до характерного розміру. Найбільш поширені методи визначення характерного розміру:

5.1. Місцевий переріз (рис. 7.) – найбільша довжина перерізу моделі прямою, перпендикулярною напрямку потоку.

Переваги: простота обчислення (тому використовується у ДБН і СНІП).

Недоліки: при зміні напрямку потоку змінюється максимальна довжина перерізу.

5.2. Діаметр (рис. 8.) – відстань між двома найбільш віддаленими вузлами контуру (усіх контурів). Для контуру, що складаються зі скінченної кількості вузлів, з'єднаних відрізками, рівна відстані між двома найбільш віддаленими точками контуру. Наприклад, для прямокутника це довжина діагоналі, для правильного N-кутника – найбільша діагональ, для трикутника – довжина найдовшої сторони і т.д.

Переваги: незалежність від напрямку потоку.

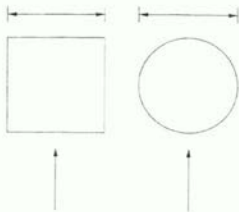


Рис. 7. Місцевий переріз

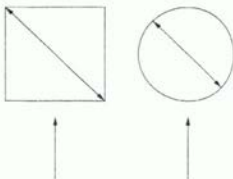


Рис. 8. Діаметр

6. Алгоритмічне забезпечення вимог

I) Задання замкнутого контуру з напрямком обходу вузлів за годинниковою стрілкою.

Формула орієнтованої площі багатокутника:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_i - y_{i+1}) \quad [15].$$

$S > 0$ – обхід за годинниковою стрілкою;

$S < 0$ – обхід проти годинникової стрілки.

Для кожного замкнутого контуру визначається S_i – орієнтована площа. Якщо $S_i < 0$, вузли контуру перенумеровуються в оберненому порядку.

II) Жоден вузол контуру не лежить на прямій між двома його сусідніми вузлами.

Для кожного вузла контуру обчислюється кут між векторами двох суміжних з цим вузлом частин контуру (рис. 9). Якщо цей кут менший 0.1° , то даний вузол відлучається з контуру.

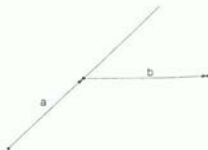


Рис. 9. Кут між суміжними відрізками контуру

V) Середня відстань δ між вузлами контуру мінімум вітчі менша найменшої сторони початкового контуру (контурів).

Крок 1. Визначається m – довжина найменшої сторони оригінального контуру (контурів).

Крок 2. Якщо $\delta < m$, то $\delta = m$.

VI) Мінімізація середньоквадратичного відхилення довжин відрізків розбиття для заданої середньої відстані δ між вузлами контуру.

Крок 1. Відрізки усіх контурів (N відрізків) нумеруються від 1 до N , порядок нумерації значення не має. Нехай довжина i -го відрізка рівна L_i .

Крок 2. Визначаються

$$l'_i = \frac{L_i}{\left\lceil \frac{L_i}{\delta} \right\rceil}, i = \overline{1, N}.$$

$$l''_i = \frac{L_i}{\left\lceil \frac{L_i}{\delta} \right\rceil + 1}, i = \overline{1, N}.$$

Крок 3. усі значення $l'_i, l''_i, i = \overline{1, N}$ сортується в порядку зростання, видаляються повторі і перенумеруються в δ_k , $k = \overline{1, M}, M \leq 2N$

Крок 4. для кожного δ_k будується розбиття R_k : для i -го відрізка вибирається довжина частини

$$l_i = \begin{cases} l'_i, \text{ якщо } |l'_i - \delta_k| \leq |l''_i - \delta_k| \\ l''_i, \text{ якщо } |l'_i - \delta_k| > |l''_i - \delta_k| \end{cases}$$

Крок 5. для побудованого розбиття R_k шукається середнє квадратичне відхилення Δ_k довжин усіх відрізків нового розбиття.

Крок 6. серед отриманих розбиттів R_k обирається розбиття з найменшим середнім квадратичним відхиленням Δ_k .

III) Жодні два контури не перетинаються, жоден контур не містить точок самоперетину.

IV) Для будь-якого вузла контуру найближчими до неї є сусідні вузли контуру.

Ці дві вимоги перевіряються одночасно, після вимоги VI.

Для кожного вузла A кожного з уже рівномірно перерозбитих контурів визначається більша з відстаней до сусідніх двох вузлів контуру: λ . Якщо в радіусі λ є ще хоча б один вузол B (цього чи інших контуру), перерозбиття проводиться заново зі зменшенням δ . Виключення становить випадок, коли обидва вузли (A і B)

лежать на сторонах оригінального контуру, які дотикаються кутів $< 60^\circ$ (в цьому випадку перерозбиття не призведе до виконання вимоги).

VII) Сукупність контурів має характерний розмір (діаметр) 1.

Крок 1. Визначається характерний розмір: максимальна з відстаней для усіх можливих пар вузлів заданих контурів.

Крок 2. Координати усіх вузлів контурів діляться на характерний розмір.

VIII) Центр мас усіх вузлів контурів співпадає з початком координат.

Крок 1. Визначається центр мас вузлів контурів – середнє арифметичне по кожній з координат: $C(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i)$.

Крок 2. Усі контури зміщуються на вектор $\overrightarrow{CO}$ (O – початок координат).

7. Результати обчислювального експерименту

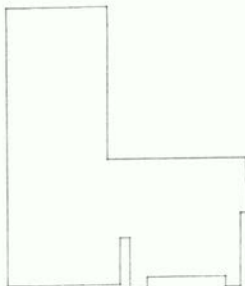


Рис. 10. Первинний контур. Елементи розбиття лише в кутових точках.

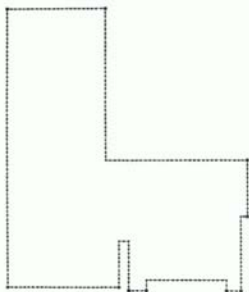


Рис. 11. Модифікований контур. Контур розбитий достатньо рівномірно.

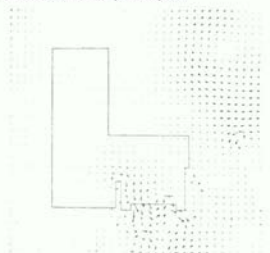


Рис. 12. Представлення поля швидкості на первинному контурі (див. рис. 10). Видиме порушення непроникувості контуру.

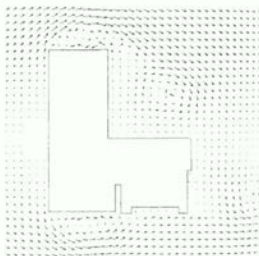


Рис. 13. Представлення поля швидкості на модифікованому контурі. Поле швидкостей вказує на обтікання контуру. Всередині контуру руху течії немає.

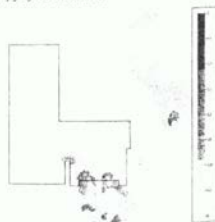


Рис. 14. Модуль швидкості на первинному контурі. Видиме порушення – наявний рух течії всередині контуру. Розподіл швидкості хаотичний.

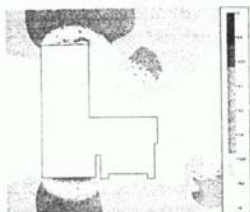


Рис. 15. Модуль швидкості на модифікованому контурі. Всередині контуру течії немає. Видиме збільшення швидкості потоку при обтіканні контуру. Видиме зменшення швидкості потоку на навітренній та підвітренній частинах контуру.

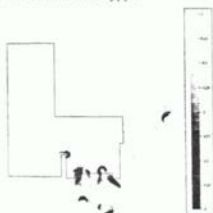


Рис. 16. Модуль тиску на первинному контурі. Розподіл тиску хаотичний.

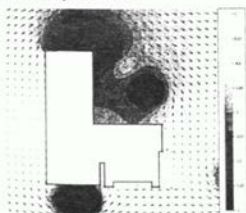


Рис. 17. Модуль тиску на модифікованому контурі. Розподіл тиску корелює з розподілом швидкості.

Різниця в представленні результатів моделювання вихрового обтікання контурів, які задовольняють (Рис. 11, 13, 15, 17) та не задовольняють на (Рис. 10, 12, 14, 16) вищенаведеним вимогам демонструє, що адекватне відображення процесу вихроутворення можливо (Рис. 15, 17) тільки при виконанні умов коректної дискретизації границі (контурів).

8. Висновки

Вирішення проблем прогнозування аерогідродинамічних впливів в будівництві пов'язано з необхідністю побудови автоматизованих програмно-моделюючих систем, ядро яких базується на чисельній реалізації математичних моделей і методах обчислень. Але необхідною умовою адекватного прогнозування є коректна обробка вхідних (навіть попередньо оцифрованих) даних.

Розглянуто та систематизовано вимоги до вхідних даних для застосування методу дискретних особливостей та наведено алгоритми обробки вхідних геометричних даних до форми, що задовольняє цим вимогам. Порівняння результатів моделювання без та з врахуванням вимог МДО показує ефективність запропонованих алгоритмів.

На прикладі задачі будівельної аеродинаміки продемонстровано необхідність коректної обробки вхідних даних. Запропоновані умови, вимоги та правила припускають створення загального алгоритму, який може бути застосовано при побудові автоматизованої програмно-моделюючої системи інженерного призначення.

Список використаних джерел

1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. - М.: Наука, 1988. - 232с.
2. Гутников В.А., Кирякин В.Ю., Лифанов И.К., Сетуха А.Н. Математическое моделирование аэродинамики городской застройки. - М.: Пасьява, 2002. - 244с.

3. Довгий С.О., Лифанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування.-К.: Наукова думка, 2004.

4. Рекомендації по оцінці аерації території в жилой застройки г.Москва./Отв.ред. Лифанов И.К.-М.: Макс-Пресс, 2006.-160с.

5. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // Обчислювана та прикладна математика.-К.: КУ, 1997. – Вип. 2(82).- С.112-123.

6. Черний Д.И. Метод и алгоритмы вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон, 2007.-С.319-322.

7. Головенко А.Д., Голубев С.А. Вычислительные особенности нестационарных течений // Обчислювана та прикладна математика.-К.: КУ, 2010. – Вип. 4(103).- С.51-56.

8. Головенко А.Д., Довгий С.О., Гаркуша В.И., Черний Д.И. Программно-моделирующая система для эколого-аэрационной экспертизы промышленных зон и сооружений // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ'2007.-г.Херсон, 2007.-С.117-120.

9. Головенко А.Д., Довгий С.О., Сфимчук В.В., Климентова І.А., Черний Д.І. Автоматизована програмно-моделююча система прогнозування аераційних та аеродинамічних процесів поблизу висотних споруд. // V Міжнародна науково-технічна конференція «Нові технології в будівництві». Тема: «Надійність та безпека висотних будинків і споруд», 28-29 травня 2009р.-К.: НДІБВ.-с.81-84.

10. Головенко А.Д., Довгий С.А., Климентова И.А., Черний Д.И. Новые технологии обеспечения автоматизированной эколого-аэрационной экспертизы проектов массивов городской застройки и промышленных зон. // Праці 8 Міжнародної науково-практичної конференції Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях, 7-11 вересня 2009, с. Рибаче (Крим) .-с. 359-367

11. Головенко А.Д., Довгий С.О., Климентова І.О., Черний Д.І. Виявлення небезпечних наслідків прийняття

необґрунтованих рішень при розробці містобудівельних проектів та проектів промислових зон // International Workshop "PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES" (PDMU-2009), Abstracts, April 27-30, 2009, Skhidnytsia.-с.193-194.

12. Головенко А.Д., Климентова, И.А. Черний Д.И. Математическое моделирование опасных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки // Труды XIV Международного симпозиума МДОЗМФ-2009, Харьков-Херсон, 2009.-с.67-70.

13. Черний Д.І., Головенко А.Д. Технологія експрес-прогнозу нестационарних нелінійних аераційних та гідрологічних процесів// International Workshop "PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES" (PDMU-2008), Abstracts, September 22-27, 2008, Crimea (Novy Svit) .-pp.127-128.

14. Черний Д.И., Довгий С.О., Головенко А.Д. Особенности моделирования аэродинамики высотной застройки и строительных конструкций // Труды XII Международного симпозиума МДОЗМФ'2005, г.Херсон, 2005.-С.375-377.

15. Площадь многоугольника [Електронний ресурс] . – Режим доступа: http://algotist.manual.ru/maths/geom/polygon/are_a.php

Надійшла до редколегії 19.02.11

УДК 519.8

Горбачук В.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Гаркуша Н.І., к.е.н.

Перерозподіл за централізації і децентралізації

Співвідношення, отримані для податків, приватного та громадського споживання, суспільного добробуту за централізації і децентралізації, вказують, зокрема, на оптимальність вищих податків у бідних регіонах за децентралізації.

Ключові слова: добробут, оптимальність, централізація, децентралізація.

E-mail: GorbachukWasyli@netscape.net, NGarkusha@gmail.com

Статтю представив проф., док. ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Питання регіонального перерозподілу є актуальним для багатьох держав світу, а також для міждержавних утворень, наприклад, для Європейського Союзу. Це питання є актуальним і для України [4], особливо при переході від централізації колишнього Радянського Союзу до сучасної децентралізації, закріпленої Бюджетним кодексом [3].

Для моделювання міжрегіонального перерозподілу ризику застосуємо простий фінансовий федералізм [8] між двома регіонами, різнорідними за доходами [5, 6]: припустимо, країну складають рівні за кількістю населення (нормовано до 1) бідніший регіон B з доходом (wealth) w і багатший регіон A з доходом $k w$, $k \geq 1$. Якщо регіони мають однорідні переваги (переваги можуть бути різнорідними [5, 6]), то нехай корисність (utility) регіону $i = A, B$ становить $U_i = \ln(c_i) + \ln(g_i)$ [2, 7], де c_i – чистий доход (приватне споживання) (consumption) після податків регіону i , g_i – витрати на громадський продукт (good) регіону i (вважаємо, що U_i не залежить від g_j , $j \neq i$).

Припустимо, громадський продукт фінансується через пропорційний податок (tax) на доход за ставкою $t_i \in (0, 1)$ в регіоні $i = A, B$, а функція W соціального добробуту (welfare) країни загалом за устроєм рівняється незважений сумі виду Бентама (Bentham) $U_A + U_B$. Тоді $c_A = k w(1 - t_A)$, $c_B = w(1 - t_B)$, а перший найкращий (first best) розв'язок максимізує по t_A , t_B , g_A , g_B функцію

V. M. Gorbachuk, PhD,
N. I. Garkusha*, PhD

Redistribution under centralization and decentralization

The relationships obtained for taxes, private and public consumption, social welfare under centralization and decentralization indicate, in particular, to the optimality of higher taxes in poor regions under decentralization.

Key words: welfare, optimality, centralization, decentralization.

$W = \ln[k w(1 - t_A)] + \ln[w(1 - t_B)] + \ln(g_A) + \ln(g_B)$
при $g_A + g_B = t_A k w + t_B w = w(k t_A + t_B)$.

Використовуючи функцію Лагранжа (Lagrange) $L = W + \lambda[w(k t_A + t_B) - g_A - g_B]$, де $\lambda > 0$ – множник Лагранжа, випишемо умови першого порядку оптимізації централізованого перерозподілу:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial t_A} = \frac{-k w}{k w(1 - t_A)} + \lambda k w = \frac{\partial L}{\partial t_B} = \frac{-w}{w(1 - t_B)} + \lambda w =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial g_A} = \frac{1}{g_A} - \lambda = \frac{\partial L}{\partial g_B} = \frac{1}{g_B} - \lambda,$$

$$\lambda = \frac{1}{g_B} = \frac{1}{g_A} = \frac{1}{w(1 - t_B)} = \frac{1}{c_B} = \frac{1}{k w(1 - t_A)} = \frac{1}{c_A}.$$

Звідси випливає рівність споживання і громадських витрат в обох регіонах:

$$g_A^{FB} = c_A^{FB} = k w(1 - t_A^{FB}) = w(1 - t_B^{FB}) = c_B^{FB} = g_B^{FB},$$

$$k - k t_A^{FB} = 1 - t_B^{FB}, \quad k t_A^{FB} = t_B^{FB} + k - 1;$$

$$2 w(1 - t_B^{FB}) = g_A^{FB} + g_B^{FB} = w(k t_A^{FB} + t_B^{FB}) =$$

$$= w(t_B^{FB} + k - 1 + t_B^{FB}) = w(2 t_B^{FB} + k - 1),$$

$$2 - 2 t_B^{FB} = 2 t_B^{FB} + k - 1, \quad t_B^{FB} = \frac{3 - k}{4};$$

$$t_A^{FB} = \frac{t_B^{FB} + k - 1}{k} = \frac{3 - k + 4(k - 1)}{4k} = \frac{3k - 1}{4k};$$

$$c_A^{FB} = g_A^{FB} = g_B^{FB} = c_B^{FB} =$$

$$= w \left(1 - \frac{3 - k}{4} \right) = \frac{w(4 - 3 + k)}{4} = \frac{(k + 1)w}{4},$$

звідки

$$U_A^{FB} = U_B^{FB} = \ln(c_B^{FB}) + \ln(g_B^{FB}) = 2 \ln[0.25(k + 1)w];$$

$$W^{FB} = U_A^{FB} + U_B^{FB} = 4 \ln[0.25(k+1)w].$$

Коли регіони приймають рішення окремо, без перерозподілу, то $g_A = k w t_A$, а незалежний (independent) розв'язок регіону A максимізує $U_A = \ln[k w (1-t_A)] + \ln(t_A k w)$ по t_A :

$$0 = \frac{\partial U_A}{\partial t_A} = \frac{-k w}{k w (1-t_A)} + \frac{k w}{t_A k w} = \frac{1}{1-t_A} - \frac{1}{t_A},$$

$$t_A = 1 - t_A, \quad t_A^I = 0.5 \leq t_A^{FB};$$

$$U_A^I = 2 \ln(0.5 k w) \geq 2 \ln[0.25(k+1)w] = U_A^{FB}$$

в силу

$$0.5 k w - 0.25(k+1)w = 0.25 w(2k - k - 1) \geq 0.$$

Аналогічно незалежний розв'язок регіону B максимізує $U_B = \ln[w(1-t_B)] + \ln(t_B w)$ по t_B :

$$0 = \frac{\partial U_B}{\partial t_B} = \frac{-w}{w(1-t_B)} + \frac{w}{t_B w} = \frac{1}{1-t_B} - \frac{1}{t_B},$$

$$t_B^I = 0.5 \geq t_B^{FB};$$

$$U_B^I = 2 \ln(0.5 w) \leq 2 \ln[0.25(k+1)w] = U_B^{FB}$$

в силу

$$0.5 w - 0.25(k+1)w = 0.25 w(2 - k - 1) \leq 0.$$

Зазначимо, що

$$W^I = U_A^I + U_B^I =$$

$$= 2 \ln(0.5 k w) + 2 \ln(0.5 w) = 2 \ln(0.25 k w^2),$$

$$W^I - W^{FB} =$$

$$= 2 \ln(0.25 k w^2) - 2 \ln[0.125(k+1)^2 w^2] < 0$$

в силу

$$0.25 k w^2 - 0.125(k+1)^2 w^2 =$$

$$= 0.125 w^2 (2k - k^2 - 2k - 1) < 0 \quad \forall k.$$

Незалежні розв'язки регіонів A і B є Парето-ефективними, оскільки будь-який перерозподіл до регіону B відбувається за рахунок регіону A .

Припустимо, обидва регіони становлять федеративну чи унітарну державу, устрій (конституція) якої передбачає виробництво громадського продукту для регіонів, а податкова і трансфертна політика якої може бути централізованою чи децентралізованою [1].

За централізованої (centralized) податкової системи устрій передбачає загальнодержавну податкову ставку на дохід, однакову для всіх регіонів, і відсутність бюджетного дефіциту у кожному регіоні. Централізована система може надавати право центральному уряду: i) накладати паушальний (lump sum) податок на мешканців багатіших регіонів, щоб фінансувати програми з від'ємним податком для мешканців бідніших регіонів; ii) встановлювати міжрегіональні

трансфертні програми, за якими багатіші регіони передають фінансові ресурси до бідніших регіонів.

Нехай громадські витрати кожного регіону фінансуються через його власні податкові надходження (центральный уряд не має влади втілювати міжрегіональні трансфертні програми). Якщо центральный уряд обирає податкову ставку t і паушальний трансферт θ від репрезентативного мешканця регіону A до репрезентативного мешканця регіону B , щоб максимізувати функцію соціального добробуту

$$W^C = \ln[k w (1-t) - \theta] + \ln[w(1-t) + \theta] +$$

$$+ \ln(k w t) + \ln(w t),$$

то з умов першого порядку оптимізації централізованого перерозподілу маємо:

$$0 = \frac{\partial W^C}{\partial \theta} = \frac{-1}{k w (1-t) - \theta} + \frac{1}{w(1-t) + \theta},$$

$$k w (1-t) - \theta = w(1-t) + \theta, \quad \theta = 0.5 w(1-t)(k-1);$$

$$0 = \frac{\partial W^C}{\partial t} = \frac{-k w}{k w (1-t) - \theta} + \frac{-w}{w(1-t) + \theta} + \frac{k w}{k w t} + \frac{w}{w t},$$

$$\frac{2}{w t} = \frac{k}{k w (1-t) - \theta} + \frac{1}{w(1-t) + \theta} =$$

$$= \frac{k w (1-t) + k \theta + k w (1-t) - \theta}{[k w (1-t) - \theta][w(1-t) + \theta]},$$

$$2[k w (1-t)][w(1-t) + \theta] = w t [2 k w (1-t) + \theta(k-1)];$$

$$2[k w (1-t) - 0.5 w(1-t)(k-1)] \times$$

$$\times [w(1-t) + 0.5 w(1-t)(k-1)] =$$

$$= w t [2 k w (1-t) + 0.5 w(1-t)(k-1)^2],$$

$$2[k - 0.5(k-1)][1 + 0.5(k-1)] w(1-t) =$$

$$= w t [2 k + 0.5(k-1)^2],$$

$$0.5(k+1)^2(1-t) = 2(0.5 k + 0.5)^2(1-t) =$$

$$= t(k + 0.5 k^2 + 0.5) = 0.5 t(k+1)^2,$$

$$1-t = t, \quad t^C = 0.5;$$

$$\theta^C = 0.5 w(1-t^C)(k-1) = 0.25 w(k-1);$$

$$g_A^C = k w t^C = 0.5 k w = g_A^I;$$

$$g_B^C = w t^C = 0.5 w = g_B^I \leq g_A^C;$$

$$c_A^C = k w (1-t^C) - \theta^C = 0.5 k w - 0.25 w(k-1) =$$

$$= 0.25 k w + 0.25 w = 0.25 w(k+1) = c_A^{FB} \leq g_A^C;$$

$$c_B^C = w(1-t^C) + \theta^C = 0.5 w + 0.25 w(k-1) =$$

$$= 0.25 w + 0.25 w k = 0.25 w(k+1) = c_B^C = c_B^{FB} \geq g_B^C;$$

$$U_A^C = \ln(c_A^C) + \ln(g_A^C) = \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.5 k w];$$

$$U_B^C = \ln(c_B^C) + \ln(g_B^C) =$$

$$= \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.5 w] \leq U_A^C;$$

$$W^C = U_A^C + U_B^C = 2 \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.25 k w^2].$$

Нерівності $g_A^C \geq g_A^{FB} = g_B^{FB} \geq g_B^C$ вказують на деяку неефективність перерозподілу між приватним і громадським споживанням (відносно розв'язку першого найкращого), спричинену тим, що центральний уряд обмежують у податкових інструментах (делегуючи йому право і) й не делегуючи право ii)).

Якщо центральному уряду делегують право ii), а він обирає податкову ставку $t \in (0,1)$ та міжрегіональний трансферт ϑ від регіону A до регіону B , щоб максимізувати функцію соціального добробуту

$$W^{C2} = \ln[k w(1-t)] + \ln[w(1-t)] + \ln[k w t - \vartheta] + \ln[w t + \vartheta],$$

то з умов першого порядку оптимізації централізованого перерозподілу маємо:

$$0 = \frac{\partial W^{C2}}{\partial \vartheta} = \frac{-1}{k w t - \vartheta} + \frac{1}{w t + \vartheta},$$

$$w t + \vartheta = k w t - \vartheta, \quad \vartheta = 0.5 w t(k-1);$$

$$0 = \frac{\partial W^{C2}}{\partial t} = \frac{-k w}{k w(1-t)} + \frac{-w}{w(1-t)} + \frac{k w}{k w t - \vartheta} + \frac{w}{w t + \vartheta},$$

$$\frac{2}{1-t} = \frac{k w}{k w t - 0.5 w t(k-1)} + \frac{w}{w t + 0.5 w t(k-1)} =$$

$$= \frac{k w + w}{0.5 k t w + 0.5 w t} = \frac{2(k+1)}{t(k+1)} = \frac{2}{t},$$

$$1-t=t, \quad t^{C2} = 0.5 = t^C;$$

$$\vartheta^{C2} = 0.25 w(k-1) = \vartheta^C;$$

$$g_A^{C2} = k w t^{C2} - \vartheta^{C2} = 0.5 k w - 0.25 w(k-1) =$$

$$= 0.25 w(k+1) = g_A^{FB};$$

$$g_B^{C2} = w t^{C2} + \vartheta^{C2} = 0.5 w + 0.25 w(k-1) =$$

$$= 0.25 w(k+1) = g_A^{FB} = g_B^{FB};$$

$$c_A^{C2} = k w(1-t^{C2}) = 0.5 k w = c_A^I \geq g_A^{C2};$$

$$c_B^{C2} = w(1-t^{C2}) = 0.5 w = c_B^I \leq g_B^{C2};$$

$$U_A^{C2} = \ln(g_A^{C2}) + \ln(c_A^{C2}) =$$

$$= \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.5 k w] = U_A^C;$$

$$U_B^C = \ln(g_B^{C2}) + \ln(c_B^{C2}) =$$

$$= \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.5 w] = U_B^C;$$

$$W^{C2} = U_A^{C2} + U_B^{C2} =$$

$$= 2 \ln[0.25 w(k+1)] + \ln[0.25 k w^2] = W^C.$$

Припустимо, за устроєм регіональні уряди мають податкову автономію, а центральний уряд

максимізує функцію соціального добробуту, використовуючи право i) або ii). Оскільки рішення центрального та регіональних урядів приймаються в різний час, але є взаємозалежними, то можливі такі бюджетні процедури: а) спочатку рішення приймають регіональні уряди, а потім рішення приймає центральний уряд; б) спочатку рішення приймає центральний уряд, а потім рішення приймають регіональні уряди. У реалістичнішому варіанті б) кожний регіональний уряд $i = A, B$ обирає свою податкову ставку t_i , виходячи з даної ставки t_j , $j \neq i$, і даного паушального податку θ за правом i), а потім центральний уряд обирає θ , максимізуючи децентралізовану (decentralized) функцію соціального добробуту

$$W^D = \ln[k w(1-t_A) - \theta] + \ln[w(1-t_B) + \theta] + \ln(k w t_A) + \ln(w t_B);$$

$$0 = \frac{\partial W^D}{\partial \theta} = \frac{-1}{k w(1-t_A) - \theta} + \frac{1}{w(1-t_B) + \theta},$$
$$k w(1-t_A) - \theta = w(1-t_B) + \theta,$$

$$\theta^D = 0.5[k w(1-t_A) - w(1-t_B)].$$

Виходячи з даного паушального податку θ^D , регіональний уряд A обирає t_A , максимізуючи функцію корисності

$$U_A = \ln[k w(1-t_A) - \theta^D] + \ln(k w t_A) =$$

$$= \ln[0.5 k w(1-t_A) + 0.5 w(1-t_B)] + \ln(k w t_A);$$

$$0 = \frac{\partial U_A}{\partial t_A} = \frac{-0.5 k w}{0.5 k w(1-t_A) + 0.5 w(1-t_B)} + \frac{k w}{k w t_A},$$

$$\frac{1}{k w(1-t_A) + w(1-t_B)} = \frac{1}{k w t_A},$$
$$k w t_A = k w(1-t_A) + w(1-t_B).$$

Виходячи з даного паушального податку θ^D , регіональний уряд B обирає t_B , максимізуючи функцію корисності

$$U_B = \ln[w(1-t_B) + \theta^D] + \ln(w t_B) =$$

$$= \ln[0.5 w(1-t_B) + 0.5 k w(1-t_A)] + \ln(w t_B);$$

$$0 = \frac{\partial U_B}{\partial t_B} = \frac{-0.5 w}{0.5 w(1-t_B) + 0.5 k w(1-t_A)} + \frac{w}{w t_B},$$

$$\frac{1}{w(1-t_B) + k w(1-t_A)} = \frac{1}{w t_B},$$

$$w t_B = k w(1-t_A) + w(1-t_B) = k w t_A;$$

$$t_B = k t_A;$$

$$k w t_A = k w(1-t_A) + w(1-k t_A) =$$

$$= k w - k w t_A + w - k w t_A.$$

$$t_A^D = \frac{w(k+1)}{3kw} = \frac{k+1}{3k} > t_A^C;$$

$$t_B^D = kt_A^D = \frac{k(k+1)}{3k} = \frac{k+1}{3} > t_B^C;$$

$$\theta^D = 0.5[kw(1-t_A^D) - w(1-kt_A^D)] = \\ = 0.5w(k-1) > \theta^C;$$

$$c_A^D = kw(1-t_A^D) - \theta^D = kw\left(1 - \frac{k+1}{3k}\right) - 0.5w(k-1) = \\ = \frac{k w(3k - k - 1) - 1.5kw(k-1)}{3k} = \\ = \frac{w(2k-1) - 1.5w(k-1)}{3} = \frac{w(2k-1-1.5k+1.5)}{3} = \\ = \frac{w(0.5k+0.5)}{3} = \frac{(k+1)w}{6} < c_A^C;$$

$$c_B^D = w(1-t_B^D) + \theta^D = w\left(1 - \frac{k+1}{3}\right) + 0.5w(k-1) = \\ = \frac{w(3-k-1) + 1.5w(k-1)}{3} = \\ = \frac{w(2-k) + 1.5w(k-1)}{3} = \frac{(k+1)w}{6} = c_A^D < c_B^C;$$

$$g_A^D = kw t_A^D = \frac{k w(k+1)}{3k} = \frac{(k+1)w}{3} > g_A^C;$$

$$g_B^D = wt_B^D = \frac{w(k+1)}{3} = g_A^D > g_B^C;$$

$$U_A^D = \ln \frac{(k+1)w}{6} + \ln \frac{(k+1)w}{3} =$$

$$= \ln \frac{(k+1)^2 w^2}{18} = U_B^D;$$

$$U_A^D - U_A^C = \ln \frac{(k+1)^2 w^2}{18} - \ln \frac{(k+1)kw^2}{8} < 0 \\ \forall k \geq 1$$

в силу

$$\frac{k+1}{18} - \frac{k}{8} = \frac{4k+4-9k}{72} = \frac{4-5k}{72} < 0;$$

$$U_B^D - U_B^C = \ln \frac{(k+1)^2 w^2}{18} - \ln \frac{(k+1)w^2}{8} < 0$$

при $k \in (1, 1.25)$ в силу

$$\frac{k+1}{18} - \frac{1}{8} = \frac{4k+4-9}{72} = \frac{4k-5}{72} < 0;$$

$$W^D = U_A^D + U_B^D = 2 \ln \frac{(k+1)^2 w^2}{18};$$

$$W^D - W^C = 2 \ln \frac{(k+1)^2 w^2}{18} - \ln \frac{(k+1)^2 k w^4}{8^2} < 0$$

при $k \in \left(1, \frac{(9+\sqrt{17})^2}{64}\right)$ в силу

$$\frac{(k+1)^2}{18^2} - \frac{k}{8^2} = \frac{8^2(k+1)^2 - 18^2 k}{(18 \times 8)^2} =$$

$$= \frac{(8k+8+18\sqrt{k})(8k+8-18\sqrt{k})}{(18 \times 8)^2} < 0,$$

тобто суспільний добробут за децентралізації може зменшуватися.

Список використаних джерел

1. Горбачук В. М. Про умови еквівалентності оптимального розміщення ресурсів в централізованій і децентралізованій економіці // Моделювання та методи системного аналізу в економіці. – К.: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 1999. – С. 50–63.
2. Горбачук В. М. Метод дворівневого страхування для визначення оптимальних часток центрального та регіонального бюджетів на безпеку регіонів // Праці IV-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". – Ужгород: УжНУ, 2008. – С. 69–70.
3. Горбачук В. М., Гудима А. В. Еволюція формули розподілу обсягу міжбюджетних трансфертів // Науковий вісник Буковинської державної фінансової академії. Економічні науки. – 2008. – Випуск 2 (11). – С. 407–414.

4. Сторошук Б. Д., Скрашук Л. В. Моделювання економічної безпеки регіону // Науковий вісник Чернівецького національного університету. Економіка. – 2009. – Вип. 456. – С. 145–149.
5. Alesina A., Angeloni I., Etro F. International unions // American economic review. – 2005. – 95:3. – P. 602–615.
6. Besley T., Coate S. Centralized versus decentralized provision of local public goods: a political economy approach // Journal of public economics. – 2003. – 87:12. – P. 2611–2637.
7. Gorbachuk V. Two-level method of insurance and transit / Nonlinear analysis and applications. – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – P. 108.
8. Persson T., Tabellini G. Federal fiscal constitutions: risk sharing and redistribution // Journal of political economy. – 1996. – 104:5. – P. 979–1009.

Надійшла до редакції 01.09.2011

УДК 519.65

Демків І.І., к.ф.-м.н., доц.

Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробу для функціоналів від двох змінних

Досліджується інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб, що інтерполює нелинійні функціонали від двох змінних на континуативній множині вузлів і є природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу для функцій від двох змінних.

Ключові слова: інтерполяція, функціонал, континуативні вузли.

*E-mail: ibor.demkiv@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Вперше інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробу (ІЛД) були введені у роботі [1]. У [1] доведено, що вказане там визначення алгебри є необхідною умовою, щоб інтегральний ланцюговий дріб був інтерполяційним на континуативній множині вузлів

$$x^*(z, \xi^*) = x_0 + \sum_{i=1}^n H(z - \xi_i) [x_i(z) - x_{i-1}(z)] \quad (1)$$

$$\xi^* = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \overline{\Omega_n} = \{z^* : 0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n \leq 1\}$$

для функціоналів $F: L_1(0,1) \rightarrow R^1$. Тут через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i=0,1,\dots$ позначені довільні, фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ – кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Достатні умови інтерполяційності інтегрального дробу з [1] були знайдені у роботі [2] і вони вимагають виконання правила підстановки. Умови, які треба накласти на функціонал $F(x(\cdot))$, щоб він задовольняв правило підстановки наводяться у [3].

I. I. Demkiv*, PhD

Interpolation integral chain fractions for two-variable functionals

Interpolation integral chain fraction that interpolates nonlinear two-variable functionals on continual knot set and is a natural generalization of interpolation chain fraction for two-variable function is investigated.

Key words: interpolation, functional, continual knots.

Але досліджуваний у [1] та [2] ІЛД має одну ваду. Якщо покласти замість вузлів інтерполяції (1) $x_i(z) = x_i = \text{const}$, $i=0,n$, $x(z) = x = \text{const}$, то ІЛД не перейде у інтерполяційний ланцюговий дріб для функції однієї змінної. Щоб позбутися цієї вади у [4] уведений новий клас ІЛД вигляду

$$Q_n^I(x(\cdot)) = K_0^I + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \quad (2)$$

де

$$q_m(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^*) \prod_{i=1}^m [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz_i.$$

Нехай функціонал $F(x(\cdot))$ визначено на просторі $Q[0,1]$.

Правильна така теорема [4].

Теорема 1. Для того щоб ІЛД (2) був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$: $Q[0,1] \rightarrow R^1$ на континуативній множині вузлів (1), необхідно, щоб його ядра визначалися за формулами

$$K_p^I(\xi^*) = (-1)^p \prod_{i=1}^p [x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i)]^{-1} \frac{\partial^p}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_p} D \frac{q_{p-1}(x^*(\cdot, \xi^*))}{-1},$$

$$q_m(x^*(\cdot, \xi^*)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^*) \prod_{i=1}^m [x^*(z_i, \xi^*) - x_{i-1}(z_i)] dz_i, \quad m=1,2,\dots,n, \quad p=2,3,\dots,n.$$

$$q_0(x^*(\cdot, \xi^*)) = F(x_0(\cdot)) - F(x^*(\cdot, \xi^*)), \quad K_0^I = F(x_0(\cdot)).$$

$$q_0(x^p(\cdot, \xi^p)) = F(x_0(\cdot)) - F(x^p(\cdot, \xi^p)), \quad K_0^I = F(x_0(\cdot)),$$

$$K_1^I(\xi_1) = -[x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1)]^{-1} \times \frac{\partial}{\partial \xi_1} F(x_0(\cdot)) + H(\cdot - \xi_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)). \quad (3)$$

Теорема 2. Для того щоб ІЛП (2) з ядрами, що визначаються формулами (3), був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$:

$Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ на континуальній множині вузлів (1), достатньо, щоб функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняв правило підстановки

$$\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} \left[F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1})) \right]_{z_{p+1}=z_p} = \left[\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1})) \right]_{z_{p+1}=z_p} \frac{x_{p+1}(z_p) - x_{p-1}(z_p)}{x_p(z_p) - x_{p-1}(z_p)},$$

$$p = 1, n. \quad (4)$$

Метою цієї роботи є побудова та дослідження інтерполяційного ІЛД, що інтерполює нелінійні функціонали від двох змінних

При цьому залишається вимога, щоб вузли інтерполяції були континуальними по кожній змінній окремо.

$$F(x(\cdot), y(\cdot)): Q[0,1] \times Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

N – поверховий ІЛД

Розв'язок задачі інтерполювання нелінійних функціоналів від двох змінних ІЛД на континуальній множині вузлів

$$(x^n(\cdot, \xi^n), y_0(\cdot)), (x^{n-1}(\cdot, \xi^{n-1}), y^1(\cdot, \eta_1)), (x^{n-2}(\cdot, \xi^{n-2}), y^2(\cdot, \eta^2)), \dots, (x_0(\cdot), y^n(\cdot, \eta^n)). \quad (5)$$

$$\text{де } x^n(z, \xi^n) = x_0 + \sum_{i=1}^n H(z - \xi_i) [x_i(z) - x_{i-1}(z)], \quad y^n(t, \eta^n) = y_0 + \sum_{j=1}^n H(t - \eta_j) [y_j(t) - y_{j-1}(t)],$$

$$\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \eta^n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \quad 0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq 1, \quad 0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n \leq 1$$

будемо шукати у вигляді

$$Q_n^I(x(\cdot), y(\cdot)) = K_0^I + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x(\cdot), y(\cdot))}{1}, \quad (6)$$

$$\text{де } q_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 K_{1,0}^I(z_1) [x(z_1) - x_0(z_1)] dz_1 + \int_0^1 K_{0,1}^I(t_1) [y(t_1) - y_0(t_1)] dt_1,$$

$$q_2(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 K_{2,0}^I(z^2) \prod_{i=1}^2 [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz^2 + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^I(z_1, t_1) [x(z_1) - x_0(z_1)] [y(t_1) - y_0(t_1)] dz_1 dt_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,2}^I(t^2) \prod_{i=1}^2 [y(t_i) - y_{i-1}(t_i)] dt^2,$$

$$q_n(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{n,0}^I(z^n) \prod_{i=1}^n [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz^n +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{n-1,1}^I(z^{n-1}, t_1) \prod_{i=1}^{n-1} [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] [y(t_1) - y_0(t_1)] dz^{n-1} dt_1 +$$

$$+ \int_0^1 \dots \int_{z_{n-3}}^1 \int_0^1 \int_{z_1}^1 K_{n-2,2}'(z^{n-2}, t^2) \prod_{i=1}^{n-2} [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] \prod_{j=1}^2 [y(t_j) - y_{j-1}(t_j)] dt^2 dz^{n-2} + \dots +$$

$$+ \int_0^1 \int_{t_{n-1}}^1 \dots \int_{t_1}^1 K_{0,n}'(t^n) \prod_{j=1}^n [y(t_j) - y_{j-1}(t_j)] dt^n. \quad (7)$$

Ядра ІЛД (6), (7) шукаємо з умови, що цей дріб є інтерполяційним на континуальній множині вузлів (5).

Введемо наступні позначення

$$D_{z^{j-k}, t^k} = \frac{\partial^j}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_{j-k} \partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_k},$$

$$dz^j = dz_j dz_{j-1} \dots dz_1;$$

$$f_n(x^{n-k}, z^{n-k}) y^k(t^k) =$$

$$= D_{z^{n-k}} \frac{f_{n-k}(x^{n-k}, z^{n-k}) y^k(t^k)}{-1},$$

$$K_{2,0}'(z^2) = \prod_{i=1}^2 [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} D_{z^2} (f_2(x^2, z^2) y_0(t) - 1),$$

$$K_{0,2}'(t^2) = \prod_{j=1}^2 [y_j(t_j) - y_{j-1}(t_j)]^{-1} D_{t^2} (f_2(x_0(t), y^2(t^2)) - 1),$$

$$K_{1,1}'(z_1, t_1) = [x_1(z_1) - x_0(z_1)]^{-1} [y_1(t_1) - y_0(t_1)]^{-1} D_{z_1 t_1} (f_1(x^1(z_1), y^1(t_1)) - 1),$$

$$K_{p,0}'(z^p) = (-1)^p \prod_{i=1}^p [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} D_{z^p} [f_p(x^p(z^p), y_0(t)) - 1],$$

$$K_{0,p-1}'(z^{p-1}, t_1) = (-1)^p \prod_{i=1}^{p-1} [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} \cdot [y_1(t_1) - y_0(t_1)]^{-1} D_{z^{p-1} t_1} [f_p(x^{p-1}(z^{p-1}), y^1(t_1)) - 1],$$

$$K_{p-k,k}'(z^{p-k}, t^k) = (-1)^p \prod_{i=1}^{p-k} [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} \prod_{j=1}^k [y_j(t_j) - y_{j-1}(t_j)]^{-1} D_{z^{p-k} t^k} [f_p(x^{p-k}(z^{p-k}), y^k(t^k)) - 1].$$

$$K_{0,p}'(t^p) = (-1)^p \prod_{j=1}^p [y_j(t_j) - y_{j-1}(t_j)]^{-1} D_{t^p} [f_p(x_0(t), y^p(t^p)) - 1], \quad p = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (8)$$

Теорема 4. Для того щоб ІЛД (6), (7), (8) був інтерполяційним для функціоналу $F(x(\cdot), y(\cdot)): \mathcal{Q}[0,1] \times \mathcal{Q}[0,1] \rightarrow R^1$ на континуальній множині вузлів (5), достатньо, щоб функціонал

$F(x(\cdot), y(\cdot))$ задовольняв правило підстановки (4) по кожній змінній окремо.

Доведення цих теорем здійснюється аналогічно як це робилося в [4] для функціоналу від

однієї змінної. Для доведення теореми 4 були використані наступні дві лема.

Лема 1. Якщо для функціоналу $F(x(\cdot), y(\cdot))$ виконується правило підстановки по кожній із

$$\begin{aligned} \frac{x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1)}{x_2(\xi_1) - x_0(\xi_1)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F(x^2(\cdot, (\xi_1, \xi_1)^T), y_0(\cdot)) &= \frac{d}{d\xi_1} F(x^1(\cdot, \xi_1), y_0(\cdot)), \\ \frac{x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1)}{x_2(\xi_1) - x_0(\xi_1)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F(x^2(\cdot, (\xi_1, \xi_1)^T), y^1(\cdot, \eta_1)) &= \frac{d}{d\xi_1} F(x^1(\cdot, \xi_1), y^1(\cdot, \eta_1)) \\ \frac{y_1(\eta_1) - y_0(\eta_1)}{y_2(\eta_1) - y_0(\eta_1)} \frac{\partial}{\partial \eta_1} F(x_0(\cdot), y^2(\cdot, (\eta_1, \eta_1)^T)) &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} F(x_0(\cdot), y^1(\cdot, \eta_1)) \\ \frac{y_1(\eta_1) - y_0(\eta_1)}{y_2(\eta_1) - y_0(\eta_1)} \frac{\partial}{\partial \eta_1} F(x^1(\cdot, \xi_1), y^2(\cdot, (\eta_1, \eta_1)^T)) &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} F(x^1(\cdot, \xi_1), y^1(\cdot, \eta_1)). \end{aligned}$$

Доведення. Умови, які треба накласти на функціонал від однієї змінної $F(x(\cdot))$, щоб він задовольняв правилу підстановки наводяться в [3].

змінних, то будуть мати місце наступні тотожності

Ними є представлення $F(x(\cdot))$ у вигляді $F(x(\cdot)) = P_n'(x(\cdot)) + R_n(x(\cdot))$, де поліном

$$P_n(x(\cdot)) = K_0' + \int_0^1 K_1'(z) [x(z) - x_0(z)] dz + \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 K_n'(z^n) \prod_{i=1}^n [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz_n \dots dz_1,$$

$$K_p'(z^p) = (-1)^p \prod_{i=1}^p [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} \frac{\partial^p}{\partial z_1 \dots \partial z_p} F(x^p(\cdot, z^p)), \quad p = \overline{1, n},$$

$$R_n(x(\cdot)) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} F(x^{n+1}(\cdot, z^{n+1}))}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_{n+1}} \prod_{i=1}^n \left[\frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \right] dz_{n+1} \dots dz_1, \text{ при } x_{n+1}(z) = x(z).$$

У нашому випадку при $n=1$ маємо

$$F(x(\cdot), y_0(\cdot)) = F(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) -$$

$$\int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \left[\frac{\partial F(x^2(\cdot, z^2), y_0(\cdot))}{\partial z_1} \right]_{z_2=\eta_1} dz_1.$$

Далі підставимо в попередню рівність замість $x(z_1) = x^1(z_1, \xi_1)$ та використаємо правило підстановки. Маємо $F(x^1(\cdot, \xi_1)) = F(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) -$

$$- \int_0^1 \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[F(x^2(\cdot, z^2), y_0(\cdot)) \right]_{z_2=\eta_1} dz_1.$$

Звідси одержуємо перше твердження лема. Інші твердження одержуються аналогічно. Лема доведено.

Лема 2. Якщо для функціоналу $F(x(\cdot), y(\cdot))$ виконується правило підстановки по кожній із змінних, то будуть мати місце наступні тотожності

$$\begin{aligned} D_{x^{n-k-1}, x^k} \left[q_{n-k} (x^{n-k}(\cdot, z^{n-k}), y^k(\cdot, t^k)) \right]_{z_{n-k+2}, \dots, z_{n-k-1}} &= \\ = \frac{x_{n-k}(z_{n-k+1}) - x_{n-k-1}(z_{n-k+1})}{x_{n-k-1}(z_{n-k+1}) - x_{n-k-2}(z_{n-k+1})} \left[D_{x^{n-k-1}, x^k} q_{n-k} (x^{n-k}(\cdot, z^{n-k}), y^k(\cdot, t^k)) \right]_{z_{n-k+2}, \dots, z_{n-k-1}}, \end{aligned}$$

$$D_{x^{n-k-1}, x^k} \left[q_{n-k} (x^{n-k}(\cdot, z^{n-k}), y^k(\cdot, t^k)) \right]_{z_{n-k+2}, \dots, z_{n-k-1}} = \frac{y_k(t_{k-1}) - y_{k-2}(t_{k-1})}{y_{k-1}(t_{k-1}) - y_{k-2}(t_{k-1})} \left[D_{x^{n-k-1}, x^k} q_{n-k} (x^{n-k}(\cdot, z^{n-k}), y^k(\cdot, t^k)) \right]_{t_{k-2}, \dots, t_{k-1}}.$$

Доведення. Для доведення першої тотожності підставимо в (7) континуальний вузол $(x^{n-k}(\cdot, \xi^{n-k}), y^k(\cdot, \eta^k))$ та продиференціюємо

обидві частини по $\xi_1, \dots, \xi_{n-k-1}, \eta_1, \dots, \eta_k$, а тоді покладемо $\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}$. Одержимо

$$\left[D_{x^{n-k-1}, x^k} q_{n-k} (x^{n-k}(\cdot, \xi^{n-k}), y^k(\cdot, \eta^k)) \right]_{z_{n-k+2}, \dots, z_{n-k-1}} =$$

$$= \left[D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[\int_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_2 \xi_1} \dots \int_{\xi_{n-k-1} \eta_1}^{\xi_{n-k} \eta_2} \dots \int_{\eta_{k-1} \eta_k}^{\eta_k} \int (-1)^n \left[D_{x^{n-k-1}, y^k} \left[f_n \left((x^{n-k-1}, y^k), t^k \right) \right] - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - D_{x^{n-k-1}, y^k} \left[f_n \left((x^{n-k-1}, \xi_{n-k}^k), t^k \right) \right] \right] dt^k dz^{n-k-1} \right]_{\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}} = \left[D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[f_n \left(\xi^{n-k}, \eta^k \right) \right] \right]_{\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}}. \quad (9)$$

Оскільки $f_n \left((x^{n-k-1}, y^k), t^k \right) = 1$, тому

$$D_{x^{n-k-1}, y^k} \left[f_n \left((x^{n-k-1}, y^k), t^k \right) \right] = 0.$$

З другого боку підставимо в (7) континуальний вузол $(x^{n-k}, \xi_{n-k}^k, y^k, \eta^k)$ та покладемо $\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}$ і продиференціюємо обидві частини по $\xi_1, \dots, \xi_{n-k-1}, \eta_1, \dots, \eta_k$, тоді одержимо

$$D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[q_{n-k} \left(x^{n-k}, \xi_{n-k}^k, y^k, \eta^k \right) \right]_{\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}} = \\ = D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[\int_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_2 \xi_1} \dots \int_{\xi_{n-k-2} \xi_{n-k-1}}^{\xi_{n-k-1} \xi_{n-k-2}} \int_{\xi_{n-k-1} \eta_1}^{\eta_1} \dots \int_{\eta_{k-1} \eta_k}^{\eta_k} \int (-1)^n \frac{x_{n-k} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-1} (z_{n-k-1})}{x_{n-k-1} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-2} (z_{n-k-1})} D_{x^{n-k}, y^k} \left[f_n \left(x^{n-k}, t^k \right) \right] dt^k dz^{n-k} \right] = \\ = D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[\int_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_2 \xi_1} \dots \int_{\xi_{n-k-2} \xi_{n-k-1}}^{\xi_{n-k-1} \xi_{n-k-2}} \int_{\xi_{n-k-1} \eta_1}^{\eta_1} \dots \int_{\eta_{k-1} \eta_k}^{\eta_k} \int (-1)^{n+1} \frac{x_{n-k} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-2} (z_{n-k-1})}{x_{n-k-1} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-2} (z_{n-k-1})} \times \right. \\ \left. \times \left[D_{x^{n-k-1}, y^k} \left[f_n \left(x^{n-k}, t^k \right) \right] \right]_{\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}} dt^k dz^{n-k-1} \right] = \\ = \frac{x_{n-k} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-2} (z_{n-k-1})}{x_{n-k-1} (z_{n-k-1}) - x_{n-k-2} (z_{n-k-1})} \left[D_{\xi^{n-k-1}, \eta^k} \left[f_n \left(\xi^{n-k}, \eta^k \right) \right] \right]_{\xi_{n-k} = \xi_{n-k-1}}.$$

Далі використаємо (9) і одержимо першу тотожність. Аналогічно доводиться друга тотожність леми. Лему доведено.

Подібно до того, як це робились у [4] наведено представлення функціоналу через введений інтегральний ланцюговий дріб вигляду (6), (7), (8). Правильна така теорема.

Теорема 5. Нехай для функціоналу $F(x(\cdot), y(\cdot)) : Q[0,1] \times Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ виконується правило підстановки по кожній із змінних, тоді для нього має місце представлення

$$F(x(\cdot), y(\cdot)) = K_0' + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i(x(\cdot), y(\cdot))}{1},$$

де ядра $q_p(x(\cdot), y(\cdot))$, $p = \overline{0, n}$ визначаються за формулами (8), а ядра

$$q_{n+1}(x(\cdot), y(\cdot)) = q_{n+1}^g(x(\cdot), y(\cdot))$$

одержуються з (8) при $p = n+1$, $x_{n+1}(z) = x(z)$, $y_{n+1}(t) = y(t)$.

На $q_{n+1}(x(\cdot), y(\cdot))$ слід дивитися, як на залишковий член.

Знайдемо тепер, якого вигляду набуває ІЛД

$$(6), (7), (8) \text{ коли } x_i(z) = x_i = \text{const}, \quad i = \overline{0, n},$$

$$x(z) = x = \text{const}, \quad y_i(t) = y_i = \text{const}, \quad i = \overline{0, n},$$

$y(t) = y = \text{const}$. Далі будемо використовувати наступні позначення

$$\Delta x_k = F(x_k, y_0) - F(x_0, y_0),$$

$$\Delta y_k = F(x_0, y_k) - F(x_0, y_0),$$

$$\Delta(x_k, y_m) = F(x_k, y_m) - F(x_0, y_0), \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Після нескладних перетворень одержуємо

$$Q_n'(x, y) = F(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x, y)}{1}, \quad (10)$$

$$q_i(x, y) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \Delta x_i + \frac{y - y_0}{y_i - y_0} \Delta y_i,$$

$$q_2(x, y) = - \prod_{i=1}^2 \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \left[\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} - \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right] - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \left[1 - \frac{\Delta x_1 + \Delta y_1}{\Delta(x_1, y_1)} \right] - \prod_{i=1}^2 \frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}} \left[\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0} - \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} \right],$$

$$q_3(x, y) = - \prod_{i=1}^3 \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \prod_{j=1}^2 \frac{x_j-x_{j-1}}{x_3-x_{j-1}} [1 - f_3(x_3, y_0)] - \prod_{i=1}^2 \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} [1 - f_3(x_2, y_1)] -$$

$$- \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \prod_{i=1}^2 \frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}} \frac{y_1-y_0}{y_2-y_0} [1 - f_3(x_1, y_2)] - \prod_{i=1}^3 \frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}} \prod_{j=1}^2 \frac{y_j-y_{j-1}}{y_3-y_{j-1}} [1 - f_3(x_0, y_3)],$$

$$q_p(x, y) = - \sum_{m=0}^p \prod_{i=1}^{p-m} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \prod_{j=1}^m \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} \prod_{l=1}^{p-m-1} \frac{x_l-x_{l-1}}{x_{p-m}-x_{l-1}} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{y_k-y_{k-1}}{y_m-y_{k-1}} [1 - f_p(x_{p-m}, y_m)], \quad p = 4, 5, \dots,$$

$$f_n(x_{n-k}, y_k) = D \frac{q_{n-k}(x_{n-k}, y_k)}{-1}, \quad q_0 = -\Delta(x_{n-k}, y_k),$$

$$k = \overline{0, n}, \quad x^0(\cdot, z^0) = x_0(\cdot), \quad y^0(\cdot, t^0) = y_0(\cdot), \quad \prod_{i=1}^k U_i = 1 \text{ при } k \leq 0. \quad (11)$$

Правильна така теорема.

Теорема 6. Ланцоговий дріб (10), (11) є інтерполяційним для функції

$F(x, y): [a, b] \times [c, d] \rightarrow R^1$ з вузлами (x_{n-i}, y_i) ,

$i = \overline{0, n}$, де $x_k \in [a, b]$, $k = \overline{0, n}$, $y_l \in [c, d]$, $l = \overline{0, n}$.

Доведення здійснюється через перевірку виконання умов інтерполяції

$$F(x_{n-i}, y_i) = Q'_i(x_{n-i}, y_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Список використаних джерел

1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів / Б.Р. Михальчук // УМЖ. – 1999. – 51. – №3. – С. 364–375.
2. Макаров В.Л. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробі / В.Л. Макаров, В.В. Хлобистов, Б.Р. Михальчук // УМЖ. – 2003. – 55. – №4. – С. 479–488.
3. Макаров В.Л. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів /

Таким чином поставлена на початку роботи задача про побудову ІЛД такого, щоб він був природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу для функцій від двох змінних, розв'язана.

Слід зауважити, що інтерполяційний дріб (10), (11) відрізняється від інтерполяційних гіллястих ланцюгових дробів, запропонованих у [5], [6].

В.Л. Макаров, І.І. Демків, Б.Р. Михальчук // Доп. НАН України. – 2003. – № 7. – С. 7–12.

4. Макаров В.Л. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів / В.Л. Макаров, І.І. Демків // Доп. НАН України. – 2008. – №11. – С. 17–23.

5. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дробі / Х.Й. Кучмінська. – Львів: ІПММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.

6. Скоробогатыко В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В.Я. Скоробогатыко. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.

Надійшла до редколегії 16.06.11

УДК 519.21

Жмихова Т.В. н.с., асистент

Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (B,S)- ринок та витратами на рекламу.

В статті розглядалась задача оптимізації діяльності накопичувально-споживчого фонду з функціями страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S) - ринку та робить витрати на рекламу.

Ключові слова: накопичувально-споживчий фонд, оптимальні керування.

E-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Вступ

В даній статті розглядається задача оптимізації діяльності накопичувально-споживчого фонду з функціями страхової компанії, який працює на фінансовому (B,S) - ринку, ціна ризикового активу описується моделлю Самуельсона, величини позовів, що подаються, є випадковими; враховуються витрати на рекламу. Знайдені оптимальні керування портфелем активів та оптимальною часткою коштів, що інвестують в рекламу, при яких функціонал якості набуває найбільшого значення.

Слід зазначити, що схожа до цієї задача, але з іншим функціоналом якості розглядалась в роботі [1], але в ній не робилось припущення про проведення фондом рекламних компаній.

1. Постановка задачі та виведення балансового рівняння

Розглянемо накопичувальний фонд з функціями страхової компанії [1], що на момент часу t має капітал $X_s(t)$ ($X(0) = x$), сумарні премії, що фонд отримав за час $[t; t + \Delta t]$, складають $cX_s(t)\Delta t$, де c ($c > 0$) - швидкість надходження премій в фонд.

Нехай $\eta = \frac{\xi}{K}$ - управляючі величини, де ξ - величина позову до фонду, $K > 0$ - деяке число, що може бути достатньо великим, тоді

T.V. Zhmykhova, staff scientist, assistant

The consumer fund control with opportunity to invest in financial (B,S)- market and charges on advertisement.

In the paper the consumer fund activity optimization problem is considered with the functions of insurance company, that works on financial (B,S) - market and charges are taken into account on an advertisement.

Key Words: consumer fund, optimal managements.

$$\chi(\eta, \beta) = \begin{cases} \frac{\xi}{K}, & 0 < \frac{\xi}{K} < \beta < 1, \\ \beta, & \frac{\xi}{K} \geq \beta. \end{cases}$$

Отже сумарні виплати за позовами за час $[t; t + \Delta t]$ складають $\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} X_s(t) \chi\left(\frac{\xi_j}{K}, \beta\right)$, де $N(t)$ - процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$ ($MN(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), $N(t)$ інтерпретується як число позовів, що подаються у фонд за час $(0, t]$; ξ_j - незалежні від $N(t)$, невід'ємні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$, ($F(0) = 0$), $X_s(t) \chi\left(\frac{\xi}{K}, \beta\right)$ - величина виплати за позовом, що визначається як:

$$\chi\left(\frac{\xi}{K}, \beta\right) X_s(t) = \begin{cases} \frac{\xi}{K} X_s(t), & 0 < \frac{\xi}{K} < \beta < 1, \\ \beta X_s(t), & \frac{\xi}{K} \geq \beta. \end{cases} \quad (1)$$

В силу подання складного процесу Пуассона у виді стохастичного інтегралу за пуассоновою мірою [2] маємо:

$$\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} X_s(t) \chi\left(\frac{s}{K}, \beta\right) \approx \\ \approx \int_0^{t+\Delta t} \int_0^\infty X_s(s) \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) \nu(dy, ds),$$

$\nu(A, t)$ - пуассонова міра, $M\nu(A, t) = \lambda t \int_A dF(x)$.

Нехай задано фінансовий (B, S) - ринок, що складається з двох активів: B - безризикового та S - ризикового. Ціна безризикового активу (банківського рахунку) описується рівнянням:

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) > 0, \quad (3)$$

де r - процентна ставка банку, причому $r(t) = r > 0$, $B(0)$ - сума на депозиті в початковий момент часу. Ціна ризикового активу (акції) описується моделлю Самуельсона [3]:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad (4)$$

де $\mu > 0$, $\sigma > 0$, $W(t)$ - стандартний вінерів процес.

Нехай фонд розміщує свій капітал $X_s(t), t \geq 0, (X_s(0) = x)$ на фінансовому (B, S) - ринку, ціни активів якого описуються рівняннями (3)-(4), причому $uX_s(t), 0 < u < 1$ - частина капіталу, що вкладена в акції, відповідно $(1-u)X_s(t)$ - це та частина капіталу, яку фонд розміщує на банківському депозиті. Будемо вважати, що фонд працює тільки з власним капіталом, надходження коштів ззовні не розглядається, причому має виконуватись нерівність $\mu > r$, інакше мішане інвестування цілком недоцільно. Якщо в момент часу t ціна акції складає $S(t)$, тоді на суму $uX_s(t)$ можна

буде купити $\frac{uX_s(t)}{S(t)}$ акцій.

В момент часу $t + \Delta t$ кожна акція, ціна якої описується формулою (4), коштуватиме:

$$S(t + \Delta t) \approx S(t)(1 + \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)), \quad (5)$$

тут $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$. Вартість банківської інвестиції становитиме:

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r\Delta t). \quad (6)$$

Таким чином, на момент часу $t + \Delta t$ від інвестиційної діяльності на (B, S) - ринку

інвестиційний фонд за рахунок пакета акцій матиме:

$$(2) \quad \frac{uX_s(t)}{S(t)} S(t + \Delta t) = uX_s(t)(1 + \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)), \quad (7)$$

а за рахунок розміщення коштів на банківському депозиті

$$(1-u)X_s(t)(1 + r\Delta t). \quad (8)$$

Будемо вважати, що фонд частину капіталу виділяє на рекламу, що характеризується часткою α ($0 < \alpha < \alpha_0 < 1$) та змінює коефіцієнт пропорційності c на $c(1 + \alpha)$, тоді сума величина премій за час $[t; t + \Delta t]$ складе величину $c(1 + \alpha)X_s(t)\Delta t$.

Внаслідок (7) та (8), а також, беручи до уваги рекламну стратегію фонду, на момент часу $t + \Delta t$ капітал фонду складе:

$$X_s(t + \Delta t) \approx uX_s(t)(1 + \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)) + \\ + (1-u)X_s(t)(1 + r\Delta t) - \alpha X_s(t)\Delta t + \\ + (1 + \alpha)cX_s(t)\Delta t -$$

$$\int_0^{t+\Delta t} X_s(t) \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) (\nu_{\lambda(1+\alpha)}(dy, t + \Delta t) - \nu_{\lambda(1+\alpha)}(dy, t))$$

де $\nu_{\lambda(1+\alpha)}(A, \Delta t)$ - нова пуассонова міра,

$$M\nu_{\lambda(1+\alpha)}(A, \Delta t) = \lambda(1 + \alpha)\Delta t \int_A dF(x), \quad \text{тобто}$$

інтенсивність потоку позовів в фонд змінюється в залежності тільки від частки капіталу α , що виділяється на рекламу, а не від грошового еквівалента цієї долі - $\alpha X_s(t)$.

З (9) отримуємо балансове рівняння:

$$dX_s(t) = X_s(t)(u\mu + (1-u)r)dt + \\ + u\sigma X_s(t)dW(t) - \alpha X_s(t)dt + \\ + (1 + \alpha)cX_s(t)dt - \\ - \int_0^{t+\Delta t} X_s(t) \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) \nu_{\lambda(1+\alpha)}(dy, dt).$$

В силу того, що з [4, с.273] рівняння (10) при додатному початковому капіталі $x(x > 0)$ має додатний розв'язок - фонд, динаміка якого описується балансовим рівнянням (10), ніколи не розориться.

Оскільки для пуассонової міри справедливо подання:

$$v_{\lambda(1+\alpha)}(A, t) = \tilde{v}_{\lambda(1+\alpha)}(A, t) + \lambda(1+\alpha) \int_A dF(x),$$

балансове рівняння (10) переписеться у виді:

$$dX_s(t) = X_s(t) \left[u\mu + (1-u)r - \alpha + c(1+\alpha) - \right. \\ \left. - \lambda(1+\alpha) \int_0^{+\infty} \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) F(dy) v_{\lambda(1+\alpha)}(dy, dt) \right] dt + \\ + u\alpha X_s(t) dW(t) - X_s(t) \int_0^{+\infty} \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) \tilde{v}_{\lambda(1+\alpha)}(dy, dt).$$

Задача полягає в знаходженні таких керувань u ($0 \leq u \leq 1$) та α ($0 < \alpha < \alpha_0 < 1$), що максимізують термінальну плату:

$$f_{i,s}(\alpha, u) = M(X_{i,s}(T))^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1$$

для накопичувально - споживчого фонду з функціями страхової компанії, що працює на фінансовому (B, S) - ринку, ціни активів якого описуються рівняннями (3) та (4), а розміри виплат за позовами, що подаються в фонд, випадкові та описуються системою (1).

2. Знаходження оптимальних керувань та ціни керування.

Розв'яземо задачу оптимізації за допомогою рівняння Р. Беллмана [1], [5]:

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \max_{u, \alpha} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) [xu\mu + x(1-u)r + \right. \quad (12)$$

$$\left. + (c(1+\alpha) - \alpha)x \right] + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) +$$

$$\left. \int_0^{+\infty} V\left(t, x - x\chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right)\right) - V(t, x) \right] \lambda(1+\alpha) F(dy) \Bigg\},$$

$$V(T, x) = x^{\gamma}.$$

Ціну шукатиму у вигляді $V(t, x) = g(t)x^{\gamma}$

($0 < \gamma < 1$), $g(T) = 1$, тоді з (12) матимемо:

$$-g'(t)x^{\gamma} = \max_{u, \alpha} \left\{ u\mu + (1-u)r + \right. \\ \left. + (c(1+\alpha) - \alpha) \right\} g(t)\gamma x^{\gamma} + \\ + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) g(t)x^{\gamma} + \\ + g(t)x^{\gamma} \int_0^{+\infty} \kappa \lambda(1+\alpha) F(dy) \Bigg\}. \quad (13)$$

$$g(T) = 1, \quad \kappa = \left[1 - \chi\left(\frac{y}{K}, \beta\right) \right]^{\gamma} - 1.$$

Або після скорочення на x^{γ} (13) переписеться у вигляді:

$$-g'(t) = \max_{u, \alpha} \left\{ u\mu + (1-u)r + (c(1+\alpha) - \alpha) \right\} g(t)\gamma \\ + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) g(t) + \\ + g(t) \int_0^{+\infty} \kappa \lambda(1+\alpha) F(dy) \Bigg\}. \quad (14)$$

$$g(T) = 1.$$

Знайдемо оптимальні керування. Нехай

$$\varphi(u) = [u\mu + (1-u)r] \gamma + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1)$$

Дорівнюючи похідну $\varphi'(u)$ до нуля, отримаємо: $\varphi'(u) = \gamma(\mu - r) + \gamma(\gamma-1)u\sigma^2 = 0$, звідки

$$\bar{u} = \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma^2}. \quad (15)$$

Тоді

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \varphi(u) =$$

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1)}{2} + (\bar{u}(\mu - r) + r)\gamma, & 0 < \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma^2} < 1, \\ \frac{\sigma^2 \gamma(1 - \gamma)}{2} + r\gamma, & \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma^2} \geq 1. \end{cases}$$

Нехай

$$\psi(\alpha) = (c(1+\alpha) - \alpha)\gamma + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda(1+\alpha) F(dy). \quad (16)$$

Знайдемо похідну $\psi'(\alpha)$, отримаємо:

$$\psi'(\alpha) = \gamma(c-1) + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda F(dy).$$

тоді

$$\max_{0 < \alpha < \alpha_0, \alpha_0 < 1} \psi(\alpha) = \psi(\bar{\alpha}) = \begin{cases} (c(1+\alpha_0) - \alpha_0)\gamma + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda(1+\alpha_0) F(dy), \\ \text{якщо } \gamma(c-1) + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda F(dy) > 0, \\ c\gamma + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda F(dy), \text{ якщо } \gamma(c-1) + \int_0^{+\infty} \kappa \lambda F(dy) \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння:

$$g'(t) = -\left\{ \bar{u}\mu + (1-\bar{u})r + (c(1+\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}) \right\} \gamma + \\ + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) + \int_0^{\infty} \kappa \lambda (1+\bar{\alpha}) F(dy) \Big\} g(t),$$

(17)

$$g(T) = 1.$$

Отримасмо:

$$g(t) = C \exp \left\{ -t \left\{ \bar{u}\mu + (1-\bar{u})r + (c(1+\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}) \right\} \gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) + \int_0^{\infty} \kappa \lambda (1+\bar{\alpha}) F(dy) \right\}. \quad (18)$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} \kappa \lambda (1+\bar{\alpha}) F(dy) = \lambda(1+\bar{\alpha}) \left(\int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{y}{K} \right)^{\gamma} - 1 \right] F(dy) + \right. \\ \left. + \left[(1-\beta)^{\gamma} - 1 \right] (1 - F(\beta K)) \right),$$

то

$$C = \exp \left\{ T \left\{ \bar{u}\mu + (1-\bar{u})r + (c(1+\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}) \right\} \gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) + \right. \\ \left. + \lambda(1+\bar{\alpha}) \left(\int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{y}{K} \right)^{\gamma} - 1 \right] F(dy) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[(1-\beta)^{\gamma} - 1 \right] (1 - F(\beta K)) \right) \right\} \quad (19)$$

Підставивши (19) в (18) отримаємо:

$$g(t) = \\ = \exp \left\{ (T-t) \left\{ \bar{u}\mu + (1-\bar{u})r + (c(1+\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}) \right\} \gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) + \right. \\ \left. + \lambda(1+\bar{\alpha}) \left(\int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{y}{K} \right)^{\gamma} - 1 \right] F(dy) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[(1-\beta)^{\gamma} - 1 \right] (1 - F(\beta K)) \right) \right\} \quad (20)$$

Тобто ціна керування дорівнює:

$$V(t, x) = \\ = x^{\gamma} \exp \left\{ (T-t) \left\{ \bar{u}\mu + (1-\bar{u})r + (c(1+\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}) \right\} \gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \sigma^2 \gamma(\gamma-1) + \right. \\ \left. + \lambda(1+\bar{\alpha}) \left(\int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{y}{K} \right)^{\gamma} - 1 \right] F(dy) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[(1-\beta)^{\gamma} - 1 \right] (1 - F(\beta K)) \right) \right\}. \quad (21)$$

ВИСНОВКИ

Знайдені оптимальні керування портфелем активів та оптимальна частка коштів, що відраховується на рекламу, при яких функціонал якості набуває найбільшого значення для накопичувально – споживчого фонду з функціями страхової компанії, що працює на фінансовому (B, S) - ринку, ціна ризикового активу на якому описується моделлю Самуельсона. Було враховане те, що виплати за позовами відбуваються залежно від наявності коштів.

Список використаних джерел

1. Бондарев Б.В. Управление накопительно – потребительским фондом с функциями страховой компании/ Б.В.Бондарев, А.В. Бася //Український математичний вісник.-2006.- №2., Т.3.-С.166-186.
2. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании/ Б.В. Бондарев.- Донецк: Изд-во Апеке, 2002.-116с.
3. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing/ P.A. Samuelson //Industrial Management Review. - 1965.-V.6. - P.13-31.
4. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения/ И.И. Гихман, А.В. Скороход.- Киев: Наукова думка, 1968. - 354 с.
5. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы/ И.И. Гихман, А.В. Скороход. - Киев: Наукова думка, 1977. - 251 с.

Надійшла до редколегії 4.09.11

Зінченко А.Ю., аспірант

Параметрична ідентифікація динамічних систем на основі хаотичної синхронізації та адаптивного контролю

В роботі запропоновано алгоритм параметричної ідентифікації на основі хаотичної синхронізації та адаптивного контролю. На прикладі системи Рössler показано, що вплив шуму на неавтономну динамічну систему, що зноходиться на границі встановлення синхронізації, призводить до появи в часових реалізаціях інтервалів синхронного руху, що містить асинхронні ділянки. Показана принципова можливість застосування методу на малих вибірках та при спостереженні функції від всіх координат системи. Приведені результати порівняння із методом часової затримки, на основі якого зроблена повна реконструкція динамічної системи Лоренца.

Ключові слова: параметрична ідентифікація, хаотична синхронізація, адаптивний контроль.

E-mail: arrttem@yandex.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Дослідження нелінійної динаміки, процесів самоорганізації в просторово-розподілених системах різної природи (фізичних, хімічних, економічних та інших) та ідентифікація параметрів і структур математичних моделей складних процесів і систем на основі точних і неповних вимірів активно вивчається в останній час і привертає до уваги багатьох дослідників [1]. Зайнявність до даного напрямку досліджень зумовлено великою фундаментальною та практичною цінністю даного питання у зв'язку з тим, що більшість важливих систем є дисипативними, розподіленими і демонструють складні, в тому числі хаотичні режими коливань. До аналізу просторово-неперервних моделей, що демонструють просторово-часовий хаос і процеси утворення структур, зводяться багато задач радіофізики, фізики плазми, наноелектроніки, економіки, екології і т. д. Задача моделювання гранично ускладнюється, якщо інформація про об'єкт дослідження обмежена одновимірною реалізацією однієї із

Zinchenko A. Yu., postgraduate student

Parametric identification of dynamic systems, based on chaotic synchronization and adaptive control

In this paper, algorithm of parametric identification based on chaotic synchronization and adaptive control is offered. By way of Rössler system example it's shown that noise influence on the nonautonomous dynamic system which is near to border of a synchronous mode establishment, leads to appearance in time realization intervals of synchronous dynamics interrupted with asynchronous intervals. Possibility in principle of use of a method on small samples, and of function observing from all system co-ordinates is shown. Results of comparison from a time delay method on which basis full reconstruction of Lorenz dynamic system is made are presented.

Key Words: parametric identification, chaotic synchronization, adaptive control.

координат стану системи або наявністю лише спостережуваних скалярних часових послідовностей на аттракторі (неповних вимірів). В цьому випадку для побудови математичних моделей в [2] був запропонований алгоритм глобальної реконструкції, що реалізується в 3 етапи: на першому етапі виконується візуалізація ряду, виділення тренду, виявлення перехідного режиму, процесу накопичення даних, сталого процесу хаотичних коливань, ідентифікація та аналіз хаотичної динаміки; на другому – визначається розмірність простору вкладень, часова затримка та реконструюються замкнені траєкторії за скалярним часовим рядом $x_i = x(i\Delta t), i = 1, \dots, N$; на третьому – здійснюється апіорне задання системи звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку заданої структури і визначення оператора еволюції, наприклад, методом найменших квадратів (МНК). Для точних даних, отриманих від хаотичного режиму динамічної системи, перший етап можна пропустити. Зрозуміло, що як для

цього алгоритму, так і для інших (наприклад, метод послідовного диференціювання) для повного опису поведінки складних систем та реальних процесів третій етап істотно залежить від похибки апроксимації методами регресійного аналізу (наприклад, рекурентний МНК), точності обчислення похідних, наявності шуму в даних, що обмежують застосування алгоритмів для просторів вкладених великої розмірності. Тому актуальними задачами, що частіше виникають, є задачі параметричної ідентифікації при відомій структурі системи.

В даній роботі розглядається застосування хаотичної синхронізації [3, 4] та адаптивного контролю [5] до задачі параметричної ідентифікації. Для прискорення синхронізації однонаправлених осциляторів запропоновано застосовувати релейний алгоритм, що є частинним випадком стандартного алгоритму швидкісного псевдоградієнта. Крім того, запропоновано замість стандартної вектор-функції швидкості зміни гладкої цільової функції використовувати клас функцій (наприклад, тригонометричних), який повністю задовольняє умовам псевдоградієнтності алгоритму, досконалості, існування "ідеального керування" та опуклості функції зворотного зв'язку по відповідному вектору стана керованої системи (див. І розділ). Показана важливість дослідження нульової ляпуновської експоненти. На прикладі системи Лоренца показана ефективність застосування вектор-функції $\arctg(x)$ в порівнянні зі стандартною. Крім того, на прикладі цієї системи проведена параметрична ідентифікація при спостереженнях не лише однієї координати системи, а функції від всіх координат. Для цього випадку виведені формули та наведені умови збіжності методу. Також на прикладі системи Лоренца показана можливість застосування алгоритму для малих вибірок, зокрема наведені результати збіжності методу при спостереженні функції від всіх координат системи. Для перевірки ефективності алгоритму наведені результати порівняння запропонованого методу зі стандартним, що базується на апроксимації. Крім того, на основі останнього методу наводиться приклад повної реконструкції динамічної системи Лоренца при спостереженні функції від всіх координат системи.

Структура статті наступна: в першій частині наведені загальні відомості про хаотичну синхронізацію двох осциляторів та нульову ляпуновську експоненту, запропоновано модифікації для прискорення збіжності методу; в другій частині наведена структура алгоритму із

пропозиціями автора та розглянуто стандартний метод ідентифікації із сімейства апроксимаційних методів; в третій частині наведені результати дослідження.

I. Хаотична синхронізація двох однонаправлених зв'язаних осциляторів

В останній час спостерігається великий інтерес щодо дослідження синхронізації в складних нелінійних системах, які складаються з великої кількості елементів із різноманітними зв'язками. Для систем із малим числом степенів свободи в даний час вивчені основні закономірності явища хаотичної синхронізації, виділено декілька різних типів синхронної поведінки зв'язаних хаотичних систем: повної, узагальненої, індукованої шумом, асимптотичної, фазової, синхронізації часових масштабів та інші. Проте використання хаотичної синхронізації для параметричної ідентифікації просторово-неперервних автоколивальних систем високих порядків є новим напрямком досліджень, мало вивченим і вперше запропонованим в роботах [6–8]. Саме тому виникає потреба дати власне визначення синхронізації динамічних систем для параметричної ідентифікації.

Розглянемо k динамічних систем $\sum_i (i=1, \dots, k)$, кожна із яких формально описується шестіркою:

$$\sum_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, i=1, \dots, k,$$

де T – загальна множина моментів часу; U_i, X_i, Y_i – множина входів, станів і виходів відповідно; $\phi_i: T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ – відображення переходів; $h_i: T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ – відображення виходів. Припустимо, що дано l функціоналів $g_i: Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k \times T_i \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i=1, \dots, l$. Тут Y_i представляють собою множини всіх функцій на T зі значеннями в Y_i , тобто $Y_i = \{y: T \rightarrow Y_i\}$. Будемо вважати, що множина моментів $T \in \mathbb{R}^1$ або додатною віссю $T = \mathbb{R}^1$ (неперервний час), або множиною натуральних чисел $T = \mathbb{Z}^1$ (дискретний час). Для будь-якого $t \in T$ визначимо σ_t як оператор зсуву на t , тобто $\sigma_t: Y_i \rightarrow Y_i$ визначено як $(\sigma_t y)(i) = y(i+t)$ для будь-яких $y \in Y_i$, $i \in T$. Позначимо через $y_i(t)$ функцію виходу системи $\sum_i$: $y_i(t) = h_i(x, u, t)$, $t \in T$, $i=1, \dots, k$. Нехай $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ – розв'язки

системи $\sum_1 \dots \sum_k$ з початковими станами $x^{(1)}(0), \dots, x^{(k)}(0)$ відповідно – визначені для всіх $t \in T$. Тоді можемо дати визначення синхронізації динамічних систем.

Означення 1. Називатимемо процеси $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ в системах $\sum_1 \dots \sum_k$ синхронізованими (а системи повністю синхронізованими) по відношенню до функціоналів $g_1, \dots, g_l$, якщо тотожності $g_j(\sigma_1, y_1(t), \dots, \sigma_l, y_l(t), t) = 0, j = 1, \dots, l$ вірні для всіх $t \in T$ і деяких $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$.

Означення 2. Називатимемо також системи $\sum_1 \dots \sum_k$ асимптотично синхронізованими по відношенню до функціоналів $g_1, \dots, g_l$, якщо для деяких $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(\sigma_1, y_1(t), \dots, \sigma_l, y_l(t), t) = 0, j = 1, \dots, l.$$

В подальших наших дослідженнях ми зупинимося на задачі асимптотичної координатної синхронізації (координатну синхронізацію часто називають повною), яка є найбільш оптимальною щодо помилки синхронізації та добре збіжною (в порівнянні з іншими) [9, 10] для параметричної ідентифікації динамічних систем. Будемо розуміти її як виконання співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\| = 0, \quad (1)$$

де $x^{(1)}, x^{(2)}$ – вектори стану динамічних систем, які синхронізуються. Опишемо коротко загальний спосіб розв'язання такої задачі. Для простоти припустимо, що маємо дві підсистеми, що описані афінними моделями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(1)} &= f_1(x_1^{(1)}) + g_1(x_1^{(1)})u_1, \\ \dot{x}_1^{(2)} &= f_2(x_1^{(2)}) + g_2(x_1^{(2)})u_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Початкові системи не пов'язані між собою. Поставимо задачу асимптотичної координатної синхронізації підсистем: знайти алгоритм управління $u_i = U_i(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), i = 1, 2$, такий, щоб забезпечити ціль управління (1). Розв'язання задачі тривіальне, якщо праві частини (2) можна змінювати довільно і незалежно, тобто якщо розмірність $m = n$, $g_1(x_1^{(1)}) = g_2(x_1^{(2)}) = I_n$, де I_n – одинична $n \times n$ -матриця. Тоді, взявши, наприклад, $u_1 = 0, u_2 = K(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})$, де $K > 0$ –

коефіцієнт посилення, отримаємо рівняння помилки синхронізації у вигляді

$$\dot{e} = f(x_1^{(1)}(t)) - f(x_1^{(2)}(t) - e) - Ke, \quad (3)$$

де $x_1^{(1)}(t)$ – розв'язок першого рівняння (2) на заданому інтервалі часу при $u_1 = 0$. Якщо матриця Якобі $A(x^{(2)}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{(2)}), j = 1, \dots, n$

обмежена в деякій області Ω , яка містить розв'язок системи (2), то при достатньо великому $K > 0$ власні числа симетричної матриці $A(x^{(2)}) + A^T(x^{(2)}) - 2KJ_e$ лежить лівише уявної вісі при $x^{(2)} \in \Omega$. При цьому сама система буде мати властивість конвергентності в Ω , тобто всі її траєкторії, що лежать в Ω , збігаються при $t \rightarrow \infty$ до єдиного обмеженого розв'язку. А оскільки $e(t) = 0$ є таким розв'язком, то до нього і сходяться всі траєкторії. Отже, синхронізація двох систем має місце при посиленні зворотного зв'язку між підсистемами, параметри яких потрібно оцінити. Зауважимо, що для синхронізації систем не потрібна гладкість правих частин і існування матриці Якобі: достатньо вимагати виконання умов Ліпшица $|f(x_1^{(1)}) - f(x_1^{(2)})| \leq L|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}|$ для деякого $L > 0$ [10].

Як алгоритм управління (метод адаптації) в даній роботі був вибраний релейний (знаковий) алгоритм, що є частинним випадком стандартного алгоритму швидкісного псевдоградієнта [10]. Останній записується так:

$$u(t) = u_0 - \gamma \psi(x(t), u(t), t),$$

де $\gamma > 0$ – скалярний множник кроку (коефіцієнт підсилення або константа зворотного зв'язку), u_0 – деяке початкове (опорне) значення управління (звичай береться $u_0 = 0$), а вектор-функція $\psi(x, u, t)$ задовольняє умові псевдоградієнтності $\psi(x, u, t)^T \nabla_u w(x, u, t) \geq 0$, де $w(x, u, t)$ – швидкість зміни гладкої цільової функції (функція зворотного зв'язку), а $\nabla_u = (\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n})^T$ – вектор градієнта. Оскільки для оцінювання параметрів ведучої системи (див. нижче) у векторі стану $x_i, i = 1, \dots, n$ керування $u = x'_i$, де x'_i – відповідний вектор стану керованої системи (див. нижче), то релейний (знаковий) алгоритм прийме вигляд

$$\dot{x}'_i(t) = x'_0 - \gamma \text{sign} \nabla_{x'_i} w(x(t), x'(t), t), \quad (4)$$

де знак sign для вектора розуміється покомпонентно: для вектора стану $x'_i = \text{col}(x'_1, \dots, x'_n)$ маємо $\text{sign}(x'_i) = \text{col}(\text{sign}(x'_1), \dots, \text{sign}(x'_n))$. Для збіжності даного алгоритму вимагається ряду умов [10]. Основні з яких – це опуклість функції $w(x, x', t)$ по x'_i та існування “ідеального керування” – вектора x'_i такого, щоб $w(x, x'_i, t) \leq 0$ для всіх x (умова досяжності).

На практиці автором при моделюванні синхронізації для параметричної ідентифікації системи Ресслера, Лоренца, генераторів Ван-дер-Поля, Релея та інших систем (наприклад, в роботах [11–13]) було встановлено, що застосування деяких функцій зворотного зв'язку, які задовольняють вище перерахованим умовам, пришвидшує синхронізацію та покращує адаптацію. Так при виборі функції зворотного зв'язку $\gamma \text{sign} \nabla_{x'_i} \arctg(x'(t) - x(t))$, на відміну від стандартної [3, 4, 10] $\gamma(x'(t) - x(t))$ для синхронізації і запропонованої в роботах [6–8] для параметричної ідентифікації із використанням синхронізації, при однаковому виборі початкових умов, метод збігається приблизно удвічі швидше. Результати моделювання на прикладі системи Лоренца подані нижче (див. рис. 3, 4).

Розглянемо тепер поведінку двох односторонніх зв'язаних осциляторів

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H(x, \alpha), \\ \dot{x}' &= G(x', \alpha') + \gamma w(x, x'), \end{aligned} \quad (5)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ – вектори станів ведучої та керованої (“drive-response”) системи відповідно, H і G визначають векторне поле розглянутих систем, α і α' – векторами параметрів, доданок w відповідає за односторонній зв'язок між системами, а параметр γ – константа зворотного зв'язку, що визначає силу зв'язку між цими системами.

Поведінка односторонніх зв'язаних осциляторів (5) при розмірностях фазових просторів n і n' відповідно може бути охарактеризована за допомогою спектру ляпуновських характеристичних показників $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+n'}$. Оскільки поведінка ведучої системи не залежить від стану керованого осцилятора, спектр ляпуновських характеристичних показників може бути

розділений на дві частини: ляпуновські показники ведучої системи $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ і умовні ляпуновські показники $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_{n'}$, які характеризують поведінку керованої системи. При зміні параметра зворотного зв'язку у ляпуновські показники ведучої системи залишаються незмінними, оскільки динаміка ведучої системи ніяк не залежить від інтенсивності зв'язку, тоді ж значення умовних ляпуновських показників змінюються. Очевидно, що даний підхід може бути застосований і для опису неавтономної поведінки осцилятора, що знаходиться під зовнішнім впливом: в цьому випадку доречно розглядати тільки спектр умовних ляпуновських показників $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_{n'}$, що відповідають з поведінку систем (5), а величину зворотного зв'язку γ слід інтерпретувати як управляючий параметр, що визначає амплітуду зовнішньої дії. Хоча, як показано вище, головною умовою синхронізації є умова конвергентності власні числа матриці Якобі

$$A(x') = \frac{\partial f}{\partial x'}(x'), j = 1, \dots, n' \text{ рівномірно від'ємні при}$$

всіх значеннях x' , і ця умова набагато легше піддається перевірці, ніж умова від'ємності всіх умовних ляпуновських показників, проте дослідження спектру ляпуновських показників зв'язаних систем біля границі синхронізації (будь-якого виду) є важливим. Так взаємодійні системи можуть характеризуватися як хаотичною, так і періодичною динамікою. Якщо розглядати хаотичні динамічні системи, то старші ляпуновські експоненти кожної із них (як мінімум, λ_1 і λ'_1) є додатними. В будь-якому випадку при відсутності зв'язку між системами ($\gamma = 0$) в кожному із спектрів ляпуновських експонент обов'язково існує нульова ляпуновська експонента ($\lambda_i = 0$ і $\lambda'_i = 0$ відповідно), яка відповідає за еволюцію малого збурення, що описує зсув зображаючої точки вздовж фазової траєкторії у фазовому просторі розглянутої системи. У випадку періодичних систем ці нульові ляпуновські експоненти є старшими (тобто $i = 1, j = 1$). Зі збільшенням параметра зв'язку γ між системами нульова ляпуновська експонента ведучої системи залишається як і раніше нульовою, а умова нульова ляпуновська експонента, що характеризує поведінку керованої системи, може змінюватися. Відомо [4], що для системи із періодичною поведінкою за відсутності зв'язку

Λ_0 стає від'ємною якраз в той час, коли керована система синхронізується діючим на неї періодичним сигналом (керуванням) зі сторони ведучої системи. Складніша ситуація виникає, коли на ведучу систему впливає шум (не важливо, детермінований чи випадковий). В цьому випадку, як показано в [14], умова ляпуновська експонента Λ_0 стає від'ємною ще до початку встановлення синхронного режиму і її величина залежить від параметра зворотного зв'язку так:

$$\Lambda_0(\gamma) \approx \begin{cases} -\frac{1}{|\gamma - \gamma_c|}, & \gamma < \gamma_c, \\ \ln |1 - \beta \sqrt{\gamma - \gamma_c}|, & \gamma > \gamma_c, \end{cases}$$

де γ – параметр зворотного зв'язку між взаємодіючими осциляторами, параметр γ_c відповідає біфуркаційному значенню параметра зворотного зв'язку, при якому за відсутності шуму встановлюється синхронний режим, а параметр β визначається властивостями досліджуваних систем.

Зміна знаку ляпуновської експоненти свідчить в загальному про якісні зміни, що відбулися в динаміці системи. Перехід однієї ляпуновської експоненти в область від'ємних значень пов'язують із виникненням синхронної поведінки, наприклад, у випадку синхронізації періодичних коливань чи при встановленні повної хаотичної синхронізації. В той же час для зв'язаних хаотичних осциляторів при встановленні режиму асимптотичної координатної синхронізації умова ляпуновська експонента Λ_0 є вже істотно від'ємною [14]. Тому, приймаючи до уваги від'ємність нульової ляпуновської експоненти Λ_0 , потрібно припускати, що в цьому випадку нижче границі фазової синхронізації повинні проявлятися деякі риси синхронної поведінки, хоча сам режим синхронізації ще не встановився і тому застосування параметричної ідентифікації в таких випадках є недоцільним. Саме тому дослідження нульової ляпуновської експоненти часто використовують як критерій усталеного синхронного зв'язку і знаходження параметр зворотного зв'язку, що відповідає границі синхронізації.

II. Оцінювання невідомих параметрів

Не зважаючи на здатність успішно синхронізувати дві однонаправлені зв'язані

динамічні системи за формулою (4) із виконанням всіх умов синхронізації, оцінити невідомі параметри ведучої системи неможливо. Саме для цього використовують адаптивне керування по невідомому параметру

$$\alpha'_i = h((x'_i(t) - x_i(t)) \frac{\partial g}{\partial \alpha'_i}), i = 1, \dots, n, i \neq l, n = n', \alpha'_i -$$

невідомий параметр, який потрібно оцінити. В роботах [6–8] запропоновано використовувати адаптивне керування (рівняння адаптивного контролю) наступного виду

$$\dot{\alpha}'_i = -\delta(x'_i(t) - x_i(t)) \frac{\partial g}{\partial \alpha'_i}, \text{ де } \delta - \text{параметр}$$

адаптації. В даній роботі ми будемо придержуватися алгоритму (4). Тоді в загальному випадку система (5) із використанням запропонованого алгоритму (4) для синхронізації і рівняння адаптивного контролю по невідомому параметру $\alpha'_i, i = 1, \dots, n, i \neq l$ запишеться так

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H(x, \alpha), \\ \dot{x}'_j &= f_j(x', \{\alpha_j | j \neq l\}, \alpha'_i) - \gamma \text{sign} \nabla_{x'_j} u(x_j, x'_j, t) = \\ &= f_j(x', \{\alpha_j | j \neq l\}, \alpha'_i) - \gamma \text{sign} \nabla_{x'_j} \arctg(x'_j(t) - x_j(t)), \\ \dot{x}'_i &= f_i(x', \{\alpha_j | j \neq l\}, \alpha'_i), i = 1, \dots, n, \\ \dot{\alpha}'_i &= -\delta \text{sign} \nabla_{x'_i} \arctg(x'_i(t) - x_i(t)) \frac{\partial f_i}{\partial \alpha'_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $x_i(t) - k$ -та координата ведучої системи, яку спостерігаємо (керування або керуюча змінна [8]), $(f_1, \dots, f_l, \dots, f_n) = G$ із системи (5).

У випадках оцінювання невідомих параметрів при керуванні іншими координатами $\dot{x}$ виникають складнощі диференціювання. В [8] запропоновані для цього випадку наступна формула. Розглянемо приріст керуючої змінної за один крок часової дискретизації керованої системи при умовах збіжності алгоритму (4)

$$\Delta x'_s = \Delta f'_s dt = \frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i} \Delta \alpha'_i dt = \frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i} \Delta f'_i (dt)^2 = \frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i} \frac{\partial f'_i}{\partial \alpha'_i} \Delta \alpha'_i (dt)^2,$$

де $x'_s - s$ -та координата $x_s(t)$, рівняння якого містить невідомий параметр α'_i . Тоді можемо записати, що $\frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i} \approx \frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i} \frac{\partial f'_i}{\partial \alpha'_i}$. У випадку, коли

невідомий параметр з'являється в різних координатах вектора x m раз, обчислення $\frac{\partial f'_s}{\partial \alpha'_i}$

проводиться так [8]. Знову розглянемо приріст керуючої змінної за один крок часової

дискретизації керуваної системи при умовах збіжності алгоритму (4)

$$\Delta x'_i \approx \Delta f_i dt \approx \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \Delta x'_i dt \approx \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \Delta f_i (dt)^2 \approx \left(\sum_n \frac{\partial f_i}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial x'_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \Delta \alpha'_i (dt)^2 \approx \left(\sum_n \frac{\partial f_i}{\partial x'_n} \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \Delta \alpha'_i (dt)^3.$$

Звідси $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha'_i} \approx \left(\sum_n \frac{\partial f_i}{\partial x'_n} \frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial x'_i}$. Далі, щоб чисельно

оцінити невідомий параметр α'_i ведучої системи, потрібно розв'язуючи одночасно дві системи (6) ітераційним методом, наприклад методом Рунге-Кутти четвертого чи п'ятого порядку зі змінним кроком чисельного інтегрування, наприклад із корегуючою процедурою Дорманда-Прінса, що дозволяє забезпечити локальну точність величини порядку $O(10^{-12})$ – $O(10^{-15})$. Зауважимо, що помилка синхронізації (3) для даного методу визначається як $e(\alpha'_i, t) = (x'_i - x_i)^2$, де $x_i(t)$ – керуюча змінна (керування). Із даного рівняння можемо записати, що помилка оцінювання невідомого параметра

$$\dot{\alpha}'_i < -\text{sign} \nabla_{\alpha'_i} \arctg(x'_i - x_i) \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha'_i}, \quad \text{оскільки}$$

$$\dot{\alpha}'_i < -\frac{\partial e(\alpha'_i, t)}{\partial \alpha'_i}. \quad \text{При малих порядках } dt \text{ приріст}$$

керуючої змінної можна записати як

$$\Delta x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha'_i} \Delta \alpha'_i dt. \quad \text{Звідси}$$

$$\dot{\alpha}'_i < -\text{sign} \nabla_{\alpha'_i} \arctg(x'_i - x_i) \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha'_i}.$$

Оскільки хаотична синхронізація двох однонаправлених зв'язаних осциляторів суттєво залежить від початкових умов, то запропонована схема алгоритму параметричної ідентифікації збігається при досить малих розмірах вибірки спостережень керуючої змінної (близько 30 базових коливань для системи Лоренца). При цьому кінцеві умови розбіжності методу покладаються початковими і метод запускається знову. Результати дослідження приведені на рис. 6.

Нехай спостерігаємо замість однієї координати ведучої системи $x_i(t)$ функцію $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тоді для цього випадку авторами запропоновано використовувати вектор-функцію $\psi(x, u, t)$ для рівняння адаптивного контролю та синхронізації наступного виду $\dot{\psi}(x, u, t) = \gamma \text{sign} \nabla_{\alpha'_i} \arctg(F' - F)$, де $F' = F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. При цьому крім загальних

умов алгоритму (4) та синхронізації додається

умова $\frac{\partial F'}{\partial x'_i} \neq 0$, де x'_i взяте із системи (6).

Для порівняння ефективності методу порівняємо його із стандартним методом часової затримки, який використовує апроксимації (рекурентний МНК) для ідентифікації. Єдиною перевагою даного методу є гарантована можливість глобальної реконструкції динамічної системи за умови адекватного розкладу функцій системи в потрібний ряд.

Задамо структуру динамічної системи звичайними диференціальними рівняннями 1-го порядку $\dot{x} = F_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Тоді для отримання конкретного виду еволюційного оператора функції F_j представляють у вигляді розкладання за деяким базисом, обмежуючись при цьому скінченним числом членів розкладання. В простішому випадку задання F_j може здійснюватися поліномом деякої степені v :

$$F_j(x_i) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=0}^v C_{j_1, j_2, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n x_{i, j_i}^{j_i}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n j_i \leq v,$$

де $C_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно розв'язати систему N лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_{i, j+1} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=0}^v C_{j_1, j_2, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n x_{i, j_i}^{j_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

з невідомими $C_{j_1, j_2, \dots, j_n}$, в якій N – кількість точок псевдофазової реконструкції скалярного часового ряду $x_i(t)$ (детальніше для знаходження алгоритмів часової затримки та розмірності вкладення див. [1]), що використовуються для апроксимації правих частин, а v – степінь полінома. Для апроксимації можуть застосовуватися поліноми Лежандра або може використовуватися більш складна методика. При заданих n і v число коефіцієнтів K полінома (8) в загальному випадку може бути визначене з формулою $K = (n+v)! / (n!v!)$. Як правило,

$N \geq K$, тому для конкретизації еволюційного оператора система рівнянь (8) розв'язується методом найменших квадратів. Математична модель, що отримується в результаті, є громіздкою, але за умови вдалого вибору загального вигляду нелінійних функцій її розв'язання є успішним. Зрозуміло, що для параметричної ідентифікації даний алгоритм завжди збігається і є значно точнішим, проте помилка апроксимації залишається.

$$\dot{x} = -\omega y - z,$$

$$\dot{y} = \omega x + \alpha y,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c),$$

$$\dot{x}' = -\omega' y' - z' - \gamma \text{sign} \nabla_{x'} \arctg(x'(t) - x(t)),$$

$$\dot{y}' = \omega' x' + \alpha y',$$

$$\dot{z}' = b + z'(x' - c),$$

(9)

де (x, y, z) і (x', y', z') – вектори ведучого та керуваного осцилятора відповідно; γ – параметр зворотного зв'язку; ω – параметр, що визначає основну власну частоту коливань (були вибрані такі значення $\omega = 0.93, \omega' = 0.95$); інші стандартні параметри були вибрані такими $\alpha = 0.15, b = 0.2, c = 10$. При такому виборі керуючих параметрів зв'язані системи демонструють координатно-когерентну синхронізацію. Як було написано вище, спектр ляпуновських показників ведучої системи ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) не залежить від величини параметра зв'язку γ , в той час як умовні ляпуновські експоненти ($\lambda'_1 > \lambda'_2 > \lambda'_3$)

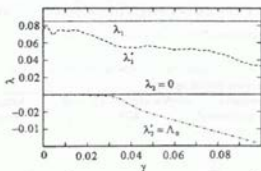


Рис. 1. Залежність ляпуновських експонент від параметра зворотного зв'язку γ

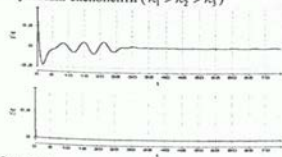


Рис. 2. Асимптотична координатна синхронізація двох односторонніх осциляторів Ресслера (9) і оцінювання невідомого параметра α при $\gamma = 1$ і $\delta = 1, b = 0.2, c = 10, \omega = 0.93, \omega' = 0.95$.

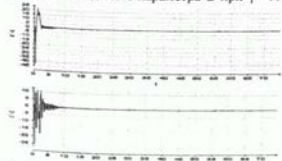


Рис. 3. Асимптотична координатна синхронізація двох односторонніх осциляторів Лоренца (10) і оцінювання невідомого параметра α при $\gamma = 1$ і $\delta = 1$ зі стандартним вибором функцій

$w(x, x', t) = \gamma(x'(t) - x(t))$ для запропонованого алгоритму (4). Спостерегіасмо функцію (керування) $F(x_1, x_2, x_3) = 1/2x^2 + 1.1y$.

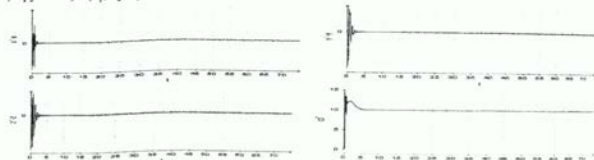


Рис. 4. Асимптотична координатна синхронізація двох однонаправлених осциляторів Лоренца (10) і оцінювання невідомого параметра α при $\gamma=1$ і $\delta=1$ із запропонованим вибором функції $w(x, x', t) = \gamma \text{sign} \nabla_{x'} \arctg(x'(t) - x(t))$ для алгоритму (4). Спостерегіасмо функцію (керування) $F(x_1, x_2, x_3) = 1/2x^2 + 1.1y$

Таблиця 1. Оцінювання невідомого параметра σ системи Лоренца та коефіцієнти повної реконструкції її математичної моделі

Значення коефіцієнтів апроксимації, спостережень	800	$C_{j,i} \neq 0$, $j = 1, 2, 3$; $i = 1, \dots, 10$	Кількість ітерацій перенормування вектора стану для рекурсивного МНК	Оцінка невідомого параметра σ	Кількість спостережень для оцінювання
$C_{1,3}$		1	6	-0.060716	20 000
$C_{2,4}$		1	55	5.765032	10 000
$C_{3,0}$		0,186	239	14.763964	5 000
$C_{3,1}$		0,415	47	4.724031	3 000
$C_{3,2}$		-1.223	1673	-4.006437	2 000
$C_{3,3}$		1.176	1000	0.429730	1 000
$C_{3,4}$		-0.005	7	-0.75322	800
$C_{3,7}$		0.007	11	21.632804	500
$C_{3,10}$		-0.0073	5	-33.060716	300

змінюються зі збільшенням γ . На рис. 1 показані залежності 4 ляпуновських експонент від величини γ .

Інші дві ляпуновські експоненти суттєві від'ємні (≈ -10), тому на синхронізацію не впливають. Для обчислення ляпуновських експонент використовувався алгоритм Бенеттіні [1]. Експоненти $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 = 0$ відповідають поведінці ведучої системи, тому їх значення постійні. При відсутності зв'язку між системами ($\gamma = 0$) $\lambda_1' > 0$ і $\lambda_2' = 0$. Оскільки саме перша експонента характеризує хаотичну динаміку керуючої системи, то $\lambda_2' = \Lambda_0$ – нульова експонента зі збільшенням якої вже при $\gamma = 0.03$, як видно з рис.1, встановлюється режим

часткової хаотичної синхронізації. Від'ємність $\lambda_2' = \Lambda_0$ спричиняє синхронізацію осциляторів (9), хоч і не всі умовні ляпуновські показники вже від'ємні. Координатна синхронізація відбувається на деяких часових інтервалах біля границі усталеного режиму, але повністю режим асимптотичної координатної синхронізації не встановлюється. Тому застосуємо параметричну ідентифікацію до другої координати вектора (x, y, z) . Результати моделювання представлені на рис. 2. Моделювання всіх рисунків виконувалося на мові програмування Java.

Розглянемо тепер поведінку двох однонаправлено зв'язаних систем Лоренца при спостереженні функції (керування) $F(x_1, x_2, x_3) = 1/2x^2 + 1.1y$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), & \dot{x}' &= \sigma(y'-x') - \gamma \operatorname{sign} \nabla_{x'} \arctg(1/2x'^2 + 1.1y' - (1/2x'^2 + 1.1y)), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, & \dot{y}' &= rx' - y' - x'z', \\ \dot{z} &= xy - bz, & \dot{z}' &= x'y' - bz', \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{\sigma}' = -\delta \operatorname{sign} \nabla_{x'} \arctg(1/2x'^2 + 1.1y' - (1/2x'^2 + 1.1y))(y' - x').$$

Матриця Якобі цієї системи запишеться так

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma - \gamma \operatorname{sign}(x') \frac{x'}{1 + (1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y)^2} & \sigma - \gamma \operatorname{sign}(x') \frac{1.1}{1 + (1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y)^2} & 0 & y' - x' \\ r - z & -1 & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ -\delta \operatorname{sign}(x') (\arctg(1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y) + \frac{1}{1 + (1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y)^2} (y' - x')) & -\delta \operatorname{sign}(x') (\arctg(1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y) + \frac{1.1}{1 + (1/2x'^2 + 1.1y' - 1/2x'^2 - 1.1y)^2} (y' - x')) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рис. 3 і 4 показана параметрична ідентифікація невідомого параметра σ системи Лоренца при спостереженні функції $F(x_1, x_2, x_3) = 1/2x^2 + 1.1y$ із застосуванням алгоритму (4) при запропонованій вектор-функції $w(x, x', t) = \gamma \operatorname{sign} \nabla_{x'} \arctg(x'(t) - x(t))$ і при застосуванні стандартного її виду. При цьому точність оцінювання, використовуючи метод Рунге-Кутти четвертого порядку із корегуючою процедурою Дорманда-Прінса для змінного кроку чисельного інтегрування, склала порядок 10^{-7} . На рис. 5. показані діапазони вибору керуючих параметрів (адаптації та зворотного зв'язку), при яких метод збігається, тобто всі дійсні частини власних значень матриці Якобі J менші за нуль. На рис.6 показана збіжність методу для системи (10) при малій виборці, спостерігаючи $F(x_1, x_2, x_3) = 1/2x^2 + 1.1y$, із застосуванням алгоритму (4) при запропонованій вектор-функції

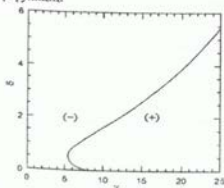


Рис. 5. Збіжність методу в залежності від параметрів для системи (10). В зоні (-) є збіжність, в зоні (+) – немає

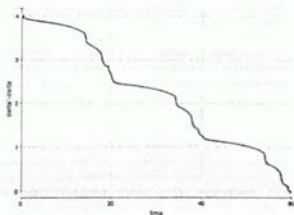


Рис. 6. Збіжність методу для системи (10) на малій виборці спостережень (20 базових коливань) при заміні кінцевих значень розходження на початкові умови

$w(x, x', t) = \gamma \operatorname{sign} \nabla_{x'} \arctg(x'(t) - x(t))$. Показано, що навіть при 20 базових коливань у виборці метод збігається, приймаючи початкові умови за ті, при яких метод розійшовся.

Висновки

В даній роботі для задачі параметричної ідентифікації запропоновано новий алгоритм на основі хаотичної синхронізації та адаптивного контролю. Так прискорення синхронізації односторонніх осциляторів відбувається завдяки використанню в якості метода адаптації релейного алгоритму, що є частинним випадком стандартного алгоритму швидкісного псевдоградієнта. Крім того, запропоновано використовувати замість стандартної вектор-функції швидкості зміни гладкої цільової функції

клас функцій (наприклад, тригонометричних), який задовольняє умовам псевдоградієнтності, досяжності, існування "ідеального керування" та опуклості функції зворотного зв'язку по відповідному вектору стану керованої системи (див. 1 розділ). Автором встановлено, що при застосуванні вектор-функції $\arctg(x)$, що повністю задовольняє цим умовам, при однаковому виборі початкових умов динамічної системи, метод збігається приблизно удвічі швидше. Ця функція зворотного зв'язку використовувалася і у рівнянні адаптивного контролю для оцінювання невідомих параметрів. На прикладі системи Ресслера показано вплив нульової ляпуновської експоненти на синхронізацію двох однонаправлених зв'язаних осциляторів цієї системи при керуванні першою координатою, розраховано спектр ляпуновських характеристичних показників. При цьому хоч і відбувається асимптотична координатна синхронізація через від'ємність нульової ляпуновської експоненти, проте вона є інтервально-фазовою, тому ідентифікація неможлива. На прикладі системи Лоренца показана ефективність застосування вектор-функції $\arctg(x)$ в порівнянні зі стандартною. Крім того, на прикладі цієї системи проведена параметрична ідентифікація при спостереженнях не лише однієї координати системи, а функції від всіх координат. Для цього випадку виведені формули та наведені умови збіжності методу. Також на прикладі системи Лоренца показана можливість застосування алгоритму для малих вибірок, зокрема наведені результати збіжності методу при спостереженні функції від всіх координат системи. Для перевірки ефективності алгоритму наведені результати порівняння запропонованого методу зі стандартним, що базується на апроксимації. Крім того, на основі останнього методу наводиться приклад повної реконструкції динамічної системи Лоренца при спостереженні функції від всіх координат системи.

Список використаних джерел

1. Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. Синергетичні методи аналізу. – К.: НТУУ "КПІ", 2011. – 340 с.
2. Crutchfield J. P., McNamara B. S. Equations of motion from a data series // Complex Systems. – 1987. № 1. P. 417 – 452.
3. А. С. Пиковский, М. Г. Розенблум, Ю. Курте Синхронизация. Фундаментальное

нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003. – 496 с.

4. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.T. The synchronization of chaotic systems. – Physics Reports. – Vol. 366, 2002. P. 1–101
5. B.A.Huberman, E.Lumer. Dynamics of adaptive systems— IEEE Trans. Circ. Syst., Vol. 37, 1990. – P. 547–550.
6. Wang J., Wang X. Parametric adaptive control in nonlinear dynamical systems // Int. J. Bifurcation Chaos. –Vol.8.– 1998.–P.2215–2223.
7. Yang T., Yang C.M., Yang L.B. A detailed study of adaptive control of chaotic systems with unknown parameters // Dynamics and Control.– Vol.8.– 1998.–P. 252–267.
8. A. Maybhatе and R. E. Amritkar Use of synchronization and adaptive control in parameter estimation from a time series, Phys. Rev. E, 59 (1999), pp. 284–293.
9. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050–1060.
10. Фрадков А. Л. Беспорисковые методы. // Фрадков А.: Наука, 1990. – 148с.
11. Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. Синергетичні методи аналізу: Методичні вказівки і завдання до виконання самостійних робіт. [Електр. ресурс] – К.: НТУУ "КПІ", "ІПСА". – 2011р. – 222с. <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/891>
12. Данилов В.Я., Зінченко А. Ю., Марчук П. П. Розробка інформаційної технології ідентифікації динамічного хаосу та псевдофазової реконструкції аттракторів одновимірних реалізацій // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2011. –№2.–С. 59–68
13. Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. До реалізації інструментарію дослідження хаотичної та регулярної поведінки динамічних систем і реконструкції оператора еволюції динамічних систем // Наукові праці ЧДУ ім. Петра Могили. Серія: комп'ютерні технології. – 2010. – том. 130, вип. 143. – С.30 – 38.
14. Nramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // Phys. Rev. E. – Vol. 78. – 2008. – P.36 – 212.

Надійшла до редколегії 06.10.2011

УДК 004.75:004.272.26:004.032.26:519.1

Катериніч Л.О., к.ф.-м.н.

Експертна система Н-Гомеопат

У статті розглядається експертна система Н-Гомеопат, яка побудована з використанням нейронних мереж. Мета статті – розгляд та можливість застосування концептуальних вищо до побудови ЕС Н-Гомеопат. Також розглянуті основні етапи побудови ЕС Н-Гомеопат, а також алгоритм функціонування системи в цілому.

Ключові слова: інтелектуальні системи, експертні системи, нейронні мережі, нейронні експертні системи.

E-mail: katerinich@rambler.ru

Статтю представив: д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ

Останнім часом найбільш розповсюдженим і вживаним став термін інтелектуальні системи (ІС), оскільки для розв'язання складних задач вони використовують методи штучного інтелекту, що ґрунтуються на використанні знань. Розвиток методів штучного інтелекту призвів до розробки практично діючих ІС. Структура таких систем досить складна, оскільки повинна складатися з таких обов'язкових компонентів, як база знань і підсистем придбання знань, формування цілі, виведення нових знань, діалогового спілкування, обробка внутрішньої і зовнішньої інформації, навчання і самонавчання, контролю та діагностики.

Знання

Знання з конкретної предметної області складають основу ІС. У межах предметної області системи розв'язують задачі шляхом обробки знань. Отже, знання – це система (модель) подання предметної області у вигляді фактів і їх відношень або об'єктів та їх зв'язків. Задача з конкретної області може бути представлена конкретними сутностями і їх поданням у формі, що визначається обраною моделлю знань. Система здатна розв'язувати таку задачу, якщо вона має засоби обробки знань в обраній формі. Знання відрізняються від звичайних даних присутністю специфічної

L.O.Katerynych, the candidate of physical and mathematical sciences

Expert system the N-Homeopath

In article the expert system the N-Homeopath which is constructed with use of neural networks is considered. Article purpose – consideration and possibility of application of conceptual requirements to construction of ES the N-Homeopath. Also the basic stages of construction of ES the N-Homeopath, and also algorithm of functioning of system, as a whole are considered.

Key words: intellectual systems, neural networks, expert systems, neural expert systems.

структури і додатковими властивостями, серед яких можна виділити наступні:

- *інтерпретованість*. Знання мають змістовну інтерпретацію, а дані завжди інтерпретуються конкретно програмою;
- *відношення класифікації*. Знання дозволяють описати структуру знань «клас-підклас». Клас об'єднує однакову інформацію для всіх «підкласів» і у разі необхідності передає «підкласу».
- *ситуаційний зв'язок*. Співпадіння окремих фактів в одній предметній області визначають ситуаційні зв'язки. Вони дозволяють будувати процедури аналізу знань. При використанні даних це важко організувати.

Знання в конкретній предметній області при використанні їх у системі об'єднуються у бази знань (БЗ), так само як дані у бази даних (БД). Знання не відкидають дані. БЗ і БД розглядаються як різні рівні представлення інформації.

Одним з різновидів інтелектуальних систем є експертні системи (ЕС), узагальнену структуру яких можна представити схемою, приведеною на рис.1. Архітектура ЕС суттєво відрізняється від усіх інших обов'язковою наявністю додаткових модулів обробки БЗ, пояснень та накопичення знань.

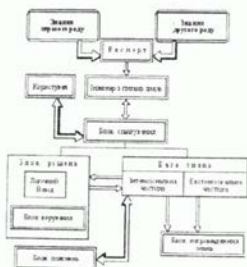


Рис.1 Узагальнена структура ЕС.

Для функціонування системи БЗ має бути наповнена знаннями. Для цього запрошують висококваліфікованих спеціалістів у тій галузі, для якої розробляється система (вони відіграють роль експертів). Їх завданням є – описати всі відомі знання для функціонування ЕС. У БЗ мають бути наявні знання першого та другого родів. Знання першого роду – це загальновідомі факти, явища та закономірності, які є в даній предметній області. Знання другого роду – це набір емпіричних правил та інтуїтивних висновків, якими користуються спеціалісти, приймаючи рішення в умовах невизначеності за наявності неповної суперечливої інформації. Відомості про ці знання, як правило, не опубліковані. У базі знань ЕС переважно містяться знання першого роду, але мають бути й знання другого роду. Якщо ці знання відсутні, то це означає поганий вибір експертів (вони не вміють формулювати свої знання чи навпаки: не хочуть цього робити, щоб зберегти за собою статус унікальних спеціалістів).

Інженер з питань знань має такі обов'язки: знання, що їх подали експерти, він структурує і заносить у базу знань з урахуванням правил побудови моделі знань ЕС, що проектується. Усі знання, які подані в базі знань поділяються на інтенціональні та екстенціональні.

Інтенціональні, або абстрактні, знання являють собою понятійні (концептуальні) знання про об'єкти предметної області і зв'язки між ними. **Екстенціональні (конкретні)** знання – це кількісні характеристики інтенціональної частини знань, тобто база даних ЕС.

Блок *рішень* необхідний для пошуку та побудови логічних висновків, які видає користувачеві ЕС. Дії цього блока подібні до міркувань людини-експерта, яка оцінює проблему і пропонує її гіпотетичне вирішення. Цей блок виконує функції управління процесом пошуку розв'язків, тобто він визначає спосіб і послідовність використання різних правил та процедур. Кожна ЕС має містити певну кількість таких правил та процедур. Кількість правил, що їх містить середня ЕС, перевищує 500, а для великої ЕС може перевищувати й 1000. Здебільшого блок розв'язків складається з двох частин: блоку логічного виведення та управляючого блоку.

Блок *логічного виведення* виконує дії, аналогічні до інтелектуальної діяльності спеціаліста, коли той приймає рішення. Функції цього блока – побудова логічного висновку на базі існуючих знань, які зберігаються в БЗ.

Блок *управління* керує процесом пошуку розв'язання, тобто визначає послідовність використання різних правил і процедур міндування знаннями.

Блок *пояснень* слугує для видачі за запитом користувача послідовності логічних висновків та міркувань, якими оперувала система у процесі пошуку рішення. Наявність такого блоку в ЕС дає змогу використовувати її не лише для прийняття рішень, а й для процесу навчання в навчальну систему. Проблема пояснень та обґрунтування правильності міркувань – важлива й складна задача. Адже попри те, що система містить знання експертів та надає поради, відповідальність за прийняте рішення несе особисто користувач. Досі немає правових актів, які б визначали відповідальність експертів за знання, надані системі, а також за рішення, які приймаються в результаті консультування користувачів з ЕС, яка містить знання даного експерта чи групи експертів.

Оцінка ЕС користувачем значною мірою залежить від того, наскільки праця з експертною системою схожа на співробітництво з експертом і, відповідно, істотно залежить від якості пояснень, що їх надає система користувачеві на ті запитання, які викликають у нього сумніви. Усі питання, які можуть виникнути в користувача при роботі з ЕС, можна поділити на такі групи пов'язані з процесом рішення проблеми (як і чому? з якою метою? з яким результатом? з чого це випливає?); стосовно значень термінів, які прийняті в ЕС при організації діалогу з користувачем, про причини виникнення певних

запитання у процесі експертизи; стосовно наслідків, які випливають із даної користувачем відповіді на запитання, поставлене системою (наприклад, що буде, коли?). Для того щоб ЕС змогла швидко і якісно пояснювати правильність своїх відповідей, а також доцільність поставлених запитань, вона записує в робочій пам'яті хід своїх міркувань та їх послідовність.

Блок спілкування з користувачем або інтерфейс користувача необхідний для організації діалогової взаємодії між системою і користувачем. Основна вимога до цього блока – це реалізація спілкування природною мовою користувача.

Блок нагромадження знань. ЕС здебільшого будується для таких предметних областей, які характеризуються необхідністю актуалізації та розширення знань. З огляду на це ЕС містить блок, який дає змогу експерту завантажувати базу знань, а також виконувати редагування знань, які зібрані в базі. Усе більший інтерес викликає питання автоматизованого набуття знань експертною системою (актуалізація, коригування та розширення знань ЕС через процес навчання). Проблему навчання можна звести до створення нових понять та правил на базі існуючих, а також підключення їх в базу знань таким чином, аби не було суперечливості знань.

Отже, функція цього блока полягає у формуванні емпіричних залежностей із неповних знань, тобто здобуття знань першого роду на основі знань другого роду. Але через складність реалізації цих функцій не всі ЕС мають у своєму складі такий блок.

Створення нових знань повністю автоматизованим способом – це дуже проблематичний підхід, запропонований занадто захопленими прибічниками штучного інтелекту [1]. Будь-які знання (особливо нові) потребують дуже ретельної перевірки, яку можуть виконати лише експерти.

Основою на знаннях (інтелектуальні) або експертні комп'ютерні системи мають значні переваги у порівнянні з людиною (що не є експертом) в плані продуктивності праці при розв'язанні різних проблем. Це досягається за допомогою використання баз знань та спеціальних евристичних методів.

При проектуванні системи Н-Гомеопат висувались вимоги до:

- архітектури;
- типів користувачів;
- моделі даних;

- функцій користувача (use-cases);
- інтерфейсу користувача (опис екранів та форм);
- опису як все це інтегрується з іншим програмним та апаратним забезпеченням (включаючи точну версію ОС, БД та веб-серверів, по потребі);
- безпеки та конфіденційності;
- ліцензійної політики, де документується як продукт буде розповсюджуватись замовником і, відповідно, які сторонні компоненти сумісні по ліцензійним міркуванням;
- інші вимоги, за потребою.

Виходячи з огляду існуючих програмних продуктів можна зазначити, що при розробці системи слід враховувати наступну інформацію:

- опитування пацієнта і оформлення історії захворювання;
- пошук по симптоматичному та нозологічному принципу;
- сортування та аналіз знайденої інформації;
- визначення захворювання і формування гомеопатичного рецепту;
- бази даних найбільш часто вживаних запитів;
- банк даних рецептурних прописів;
- щоденник лікаря.

Поряд з цим програмний продукт має бути легко налаштовуватись під потреби користувача:

- вільна зміна розміщення основних та додаткових вікон;
- зміна відображуваної інформації безпосередньо під час роботи програми
- програма не повинна бути занадто велика за обсягами
- легко інсталюватись та бути легко поширюваною.

Також для оптимальної роботи і зручності лікаря-гомеопата база даних повинна мати наступні функціональні можливості, щодо перегляду та редагування інформації:

- формування рубрик та підрубрик;
- встановлення перехресних посилань;
- визначати синоніми;
- додавати та вилучати ліки та посилання на авторів;
- змінювати бал вказаних ліків.

Нейронні мережі (НМ) мають широкое коло застосувань, серед яких, як зазначалося, значне місце посідають експертні системи. Експертна система – це програмний комплекс, яка використовує технологічні можливості середовища розробки та знання експерта

предметної області продукують рекомендації на рівні експерта.

Важливою рисою, що відрізняє ЕС від інших систем є те, що знання, яким оперує ЕС, вона отримує в процесі спілкування з експертом [2]. ЕС, які використовують НМ для отримання знань, проходять ще один додатковий етап, що певною мірою покращує їх рівень знань. Вони проходять стадію навчання з використанням певних алгоритмів і відповідно самостійно підвищують свій рівень знань. Оскільки принцип побудови та організація роботи НМ було запозичено з людських аналогів, то навчання мережі так як і людини не може завжди бути стовідсотковим. Але відкидаючи певні обмеження і суперечності, щодо вимог до НМ [3], можна використовуючи ці дві складові навчання – експерта і самонавчання мережі, суттєво підвищити ефективність роботи ЕС. Така система отримала назву нейронна експертна система (НЕС) (рис. 2).



Рис. 2. Узагальнена структура НЕС

Концептуальні вимоги до системи Н-Гомеопат

У експертній системі Н-Гомеопат потрібно за представленими симптоми захворювання пацієнта встановити діагноз і призначити лікування.

Впровадження НМ, як засіб для розв'язання цієї задачі вимагає не лише технічної реалізації, а й оптимально побудованого робочого місця лікаря-гомеопата. Оскільки лікар не є фахівцем у сфері засобів розробки відповідних систем, програмні продукти повинні мати інтуїтивно зрозумілий інтерфейс.

Виходячи з цього та огляду відомих програмних продуктів, можна зазначити, що при

розробці системи в першу чергу слід враховувати наступне:

- опитування пацієнта і оформлення історії захворювання;
- пошук по симптоматичному та нозологічному принципу;
- сортування та аналіз знайденої інформації;
- визначення захворювання і формування гомеопатичного рецепту;
- БД найбільш часто вживаних запитів;
- банк даних рецептурних прописів;
- щоденник лікаря.

Поряд з цим програмний продукт має бути легко налаштовуватися під потреби користувача, а відтак забезпечувати:

- вільну зміну розміщення основних та додаткових вікон;
- зміну відображуваної інформації безпосередньо під час роботи програми;
- оптимальні розміри програмного коду;
- легку інсталяцію та легку поширюваність.

Також для оптимальної роботи і зручності лікаря гомеопата база даних повинна мати наступні функціональні можливості щодо перегляду та редагування інформації:

- формування рубрик та підрубрик;
- встановлення перехресних посилань;
- визначення синонімів;
- актуалізація основних понять (ліки, посилання, характеристичні числа тощо).

Навчання системи відбувається за обраним алгоритмом навчання НМ, зокрема алгоритмом зворотного поширення помилки [4,5]. Первинні дані (симптоми та/або гомеопатичні препарати) для навчання спеціалізованих НМ готують і вводять до системи Н-Гомеопат експерти відповідної предметної області. НМ повинна бути навчена навчаючих вибірках (формує експерт), а після навчання (тобто у робочому режимі роботи) до системи входять дані (симптоми) вводяться користувачем системи.

Всі дії з обробки даних, які будуть передані до спеціалізованих НМ виконують комутаційний елемент реалізований за допомогою НМ [6-8]. Завданням такого елемента у загальному випадку є класифікація вхідної інформації з подальшим розподілом її по мережах, які оптимально розв'язують задачі конкретної предметної області. Вхідною інформацією на першому етапі будуть коректні симптоми захворювання.

Експертна система Н-Гомеопат побудована та функціонує на нейромережовій структурі, що у

свою чергу дозволяє прискорити в цілому реакцію всієї системи на представлену інформацію. Комутаційний елемент через свої функціональні властивості дозволяє класифікувати представлену на вхід інформацію і на виході надавати інформацію з тією структурою даних, яка є вхідною для НМ, що розв'язує задачі певного класу. Також слід зазначити, що однією з ключових функцій комутаційного елемента є можливість обробки вхідної інформації з подальшим вибором алгоритму і архітектури мережі.

Основні етапи розробки ЕС Н-ГОМЕОПАТ

Відомо, що створення різного роду діагностичних систем пов'язане з використання системи управління базами даних (СУБД). Це обумовлено тим, що процес діагностики передбачає обробку великої кількості інформації, яка з метою забезпечення ефективності використання повинна мати чітку структуру. Процес побудови діагностичної системи ЕС Н-Гомеопат складається з наступних етапів:

1. Постановка цілей і задач.
2. Створення БД, яка містить всю необхідну для діагностики інформацію.
3. Розробка стратегії діагностики.
4. Створення програмного забезпечення, використовуючи сучасні СУБД.

Для вирішення поставлених задач було детально вивчено і проаналізовано предметну область.

Базові множини, які визначають процес діагностики в системі є множини СИМПТОМИ і ПРЕПАРАТИ. Множина СИМПТОМИ – це опис відхилень від нормального стану організму. Характеристиками елементів цієї множини можна вважати множину, яка складається з областей прояву недугу (наприклад, органи травлення, зору, слуху, серце, судини, кров та ін.), а також множину ключових слів, які лаконічно характеризують симптоми.

Множина ПРЕПАРАТИ містить лікувальні засоби. Її характеристиками можна вважати множини латинських, російських, народних назв, а також спосіб приготування, подібні засоби лікування, характерні ознаки та ін. Крім того, кожний препарат пов'язаний з конкретним набором симптомів, а кожен симптом пов'язаний з не менше ніж одним препаратом. З урахуванням існуючих характеристик, а також на основі проведеного аналізу, утворюються сутності і відповідні таблиці для подання

інформації як показано на рис. 3 - рис. 6, нижче (кожній базовій множині відповідає таблиця, а кожній характеристиці – поле в таблиці):

№	Ім'я столбця	Тип даних	Разрешит...
1	num	int	☐
2	preparat	varchar(MAX)	☒
3	opis	varchar(MAX)	☒

Рис.3 Таблиця "Препарати"

№	Ім'я столбця	Тип даних	Разрешит...
1	num	int	☐
2	diagnoz_n	int	☒
3	simptom	varchar(MAX)	☒
4	v1	int	☒
5	v2	int	☒
6	v3	int	☒
7	v4	int	☒
8	v5	int	☒

Рис.4 Таблиця "Симптоми"

№	Ім'я столбця	Тип даних	Разрешит...
1	num_p	int	☐
2	diagnoz_n	int	☒
3	fas	varchar(MAX)	☒
4	name	varchar(MAX)	☒
5	age	varchar(MAX)	☒
6	oblast	int	☒

Рис.5 Таблиця "Пацієнт"

№	Ім'я столбця	Тип даних	Разрешит...
1	diagnoz_n	int	☐
2	nazva	varchar(MAX)	☒
3	opis	varchar(MAX)	☒
4	preparat	varchar(MAX)	☒

Рис.6 Таблиця "Діагноз"

Для проектування ЕС Н-Гомеопат використовувалась СУБД Microsoft SQL Server 2008 та інтегроване середовище розробки програмного забезпечення Microsoft Visual Studio 2008, а саме компонент Visual C#.

ЕС Н-Гомеопат містить наступні БД (таб.1):

Таблиця 1

Бази даних ЕС Н-Гомеопат

База Даних	Опис
base_NeuronNetwork	Використовується для зберігання вхідних та вихідних векторів.
gomeopat	Використовується для зберігання інформації про пацієнтів, симптомів, препаратів, діагнозів.
NeuronNetwork	Використовується для зберігання проміжних результатів навчання НМ.

Алгоритм функціонування ЕС Н-Гомеопат

Розробка стратегії полягає в аналізі зв'язків між базовими множинами та їх характеристиками з метою визначення відповідних відношень, характер яких впливає на процес діагностики.

В основу стратегії діагностики ЕС Н-Гомеопат покладено метод покрокових уточнень, суть якого полягає в тому, що кінцева мета - призначення препаратів, досягається шляхом послідовного уточнення простору пошуку. Цей метод виправдовує своє застосування при роботі з великою кількістю взаємозв'язаних даних.

Для визначення необхідного препарату здійснюється детальний аналіз зв'язків між елементами базових множин СИМПТОМИ і ПРЕПАРАТИ та встановлюється логічний ланцюжок пошуку потрібного препарату за наявністю набору симптомів.

Відповідно до даного методу, спочатку визначається область прояву нездужання. Потім із запропонованого переліку ключових слів обирається слово, яке найкраще визначає відхилення від нормального стану організму. З цим словом пов'язана певна кількість симптомів, повний опис яких можна отримати, обравши ключове слово. В свою чергу кожний симптом пов'язаний з одним або декількома препаратами, а, отже, і з іншими симптомами. В такий спосіб будується логічний ланцюжок, який має вигляд: область $\rightarrow$ слово $\rightarrow$ симптоми $\rightarrow$ препарати $\rightarrow$ симптоми $\rightarrow$ препарат.

Цей ланцюжок будується за рахунок встановлених зв'язків між множинами СИМПТОМИ і ПРЕПАРАТИ, приклад яких наведено на рис.7 нижче:

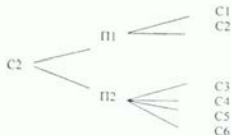


Рис.7 Ланцюжок між множинами СИМПТОМИ і ПРЕПАРАТИ

Симптоми є характеристиками препаратів, тому в залежності від наявності симптомів, пов'язаних з препаратом, можна або призначити препарат, або ні. Так як обраний симптом може бути характеристикою більше ніж одного препарату, то наявність деякого симптому у пацієнта пов'язана з можливим існуванням інших (прихованих) симптомів, пов'язаних з попередньо обраним за рахунок препаратів. Отже, область пошуку необхідного препарату дещо розширюється. Це дозволяє визначити додаткові симптоми, які в свою чергу детально аналізуються. Так продовжується до тих пір, поки не будуть враховані всі симптоми, пов'язані з обраними.

Список використаних джерел

1. Андон Ф.И., Балабанова А.С. Выявление знаний и изыскания в базах данных: подходы, модели, методы и системы //Проблемы программирования. -2000. - N1-2. - С.513-526.
2. Элли Дж., Кумбс М. Экспертные системы: концепции и примеры. М.: Финансы и статистика, 1987. - 191 с.
3. Рутковская Д., Пилицкий М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. - М.: Горячая линия - Телеком, 2006. - 452с.
4. Крутлов В. В., Дзи М. И., Годунов Р. Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб. пособие. - М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. - 224 с.
5. Уинстон П. Искусственный интеллект. - М.: Мир, 1980. - 519с.
6. Bargiela, Andrzej and Pedrycz. *Wald Granular Computing: An introduction*. - Kluwer Academic Publishers, 2003. - 5p.
7. Hall L.O. The choice of ply operator in fuzzy intelligent systems. *Fuzzy Sets and Systems*. - 1990. - V. 34, 135-144.
8. Jacek Leski. *Systemy neuronowo-rozmyte*. - Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2008. - 686 s.

Надійшла до редакції 27.09.11

УДК 519.65

Костогриз* В.П., аспірант

ПЛІС і GPU обчислення в біоінформатиці

Біоінформатика і обчислювальна біологія – дві суміжні (подібні) області, що використовують методи прикладної математики, інформатики, статистики та штучного інтелекту для розв'язання специфічних задач (які потребують надскладних обчислень) в біологічних системах. Ці обчислення не можуть бути проведені на звичайних комп'ютерних системах за прийнятний час. Єдиний спосіб розв'язання таких задач – це використання суперкомп'ютерів та різних технологій для прискорення обчислень. Саме про такі технології йдеться у цій статті.

Ключові слова: ПЛІС, GPU, ДНК

V. P. Kostogryz*, PhD student

FPGA and GPU computing in Bioinformatics

Bioinformatics and computational biology are two related fields, using methods of applied mathematics, computer science, statistics and artificial intelligence to solve specific problems (requiring toughest computing) in biological systems. These calculations can not be performed on conventional computer systems within a reasonable time. The only way to solve these problems – is the use of supercomputers and various technologies for faster computing. It was on such technologies described in this article.

Key words: FPGA, GPU, DNA

*E-mail: bioinfo@ukr.net

Статтю представив д.т.н, проф. Ф.Г. Гаращенко

Introduction

Genomics research requires analysis of large sequence databases and is heavily dependent upon bioinformatics computation. Several complementary computing strategies are available to perform the analysis in reasonable time. The most common hardware solutions are HPC and dedicated bioinformatics hardware accelerators.

Searching for similarities in protein and DNA databases has become a routine procedure in Molecular Biology. The Smith-Waterman algorithm has been available for more than 25 years and now is adapted for GPU devices. It is based on a dynamic programming approach that explores all the possible alignments between two sequences, as a result it returns the optimal local alignment. Unfortunately, the computational cost is very high, requiring a number of operations proportional to the product of the length of two sequences. Furthermore, the exponential growth of protein and DNA databases makes the Smith-Waterman algorithm unrealistic for searching similarities in large sets

of sequences. For these reasons heuristic approaches such as those implemented in FASTA and BLAST tend to be preferred, allowing faster execution times at the cost of reduced sensitivity.

The Aho-Corasick algorithm is adapted for execution in field programmable gate array (FPGA) devices in a manner that optimizes space and performance. FPGA hardware-based accelerators have better price/performance for response time and throughput, but are less flexible.

In practice, implementing a bioinformatics system requires benchmarking of the different options to determine the optimal solution, which in many cases may be a combination of cluster and hardware accelerator.

FPGA and GPU computing

The core of bioinformatics sequence analysis is a simple sequence. A string of characters representing nucleotides: Adenine(A), Guanine(G), Cytosine(C) and Thymine(T). All

complexity and diversity comes from the scale of these sequences. The human genome for instance is approximately 4 billion characters long with data about all observed variations being databases terabytes in size. FPGA and GPU computing offer an opportunity to help process this large amount of information.

A Field-programmable Gate Array (FPGA) is an integrated circuit designed to be configured by the customer or designer after manufacturing—hence “field-programmable”. The FPGA configuration is generally specified using a hardware description language (HDL), similar to that used for an application-specific integrated circuit (ASIC) (circuit diagrams were previously used to specify the configuration, as they were for ASICs, but this is increasingly rare). FPGAs can be used to implement any logical function that an ASIC could perform. The ability to update the functionality after shipping, partial re-configuration of the portion of the design and the low non-recurring engineering costs relative to an ASIC design (notwithstanding the generally higher unit cost), offer advantages for many applications.

FPGAs contain programmable logic components called “logic blocks”, and a hierarchy of reconfigurable interconnects that allow the blocks to be “wired together”—somewhat like many (changeable) logic gates that can be inter-wired in (many) different configurations. Logic blocks can be configured to perform complex combinational functions, or merely simple logic gates like AND and XOR. In most FPGAs, the logic blocks also include memory elements, which may be simple flip-flops or more complete blocks of memory.

In addition to digital functions, some FPGAs have analog features. The most common analog feature is programmable slew rate and drive strength on each output pin, allowing the engineer to set slow rates on lightly loaded pins that would otherwise ring unacceptably, and to set stronger, faster rates on heavily loaded pins on high-speed channels that would otherwise run too slow. Another relatively common analog feature is differential comparators on input pins designed to be connected to differential signaling channels. A few “mixed signal FPGAs” have integrated peripheral Analog-to-

Digital Converters (ADCs) and Digital-to-Analog Converters (DACs) with analog signal conditioning blocks allowing them to operate as a system-on-a-chip. Such devices blur the line between an FPGA, which carries digital ones and zeros on its internal programmable interconnect fabric, and field-programmable analog array (FPAA), which carries analog values on its internal programmable interconnect fabric [1].

GPU computing or GPGPU is the use of a GPU (graphics processing unit) to do general purpose scientific and engineering computing.

The model for GPU computing is to use a CPU and GPU together in a heterogeneous co-processing computing model. The sequential part of the application runs on the CPU and the computationally-intensive part is accelerated by the GPU. From the user's perspective, the application just runs faster because it is using the high-performance of the GPU to boost performance.

Graphics chips started as fixed function graphics pipelines. Over the years, these graphics chips became increasingly programmable, which led NVIDIA to introduce the first GPU or Graphics Processing Unit. In the 1999-2000 timeframe, computer scientists in particular, along with researchers in fields such as medical imaging and electromagnetics started using GPUs for running general purpose computational applications. They found the excellent floating point performance in GPUs led to a huge performance boost for a range of scientific applications. This was the advent of the movement called GPGPU or General Purpose computing on GPUs.

The problem was that GPGPU required using graphics programming languages like OpenGL and Cg to program the GPU. Developers had to make their scientific applications look like graphics applications and map them into problems that drew triangles and polygons. This limited the accessibility of tremendous performance of GPUs for science.

NVIDIA realized the potential to bring this performance to the larger scientific community and decided to invest in modifying the GPU to make it fully programmable for scientific applications and added support for high-level

languages like C, C++, and Fortran. This led to the CUDA architecture for the GPU. The CUDA parallel hardware architecture is accompanied by the CUDA parallel programming model that provides a set of abstractions that enable expressing fine-grained and coarse-grain data and task parallelism. The programmer can choose to express the parallelism in high-level languages such as C, C++, Fortran or driver APIs such as OpenCL™ and DirectX™-11 Compute.

NVidia CUDA is a general purpose parallel computing architecture that leverages the parallel compute engine in NVidia graphics processing units to solve many complex computational problems in a fraction of the time required on a CPU. It includes the CUDA Instruction Set Architecture and the parallel compute engine in the GPU. No GPU parallel computing architecture has been more in the spotlight than NVidia's CUDA either.

CUDA performs two major functions that consumers should be aware of – it helps reduce or match CPU usage by engaging the GPU's stream processors and it can accelerate any computing process where CUDA is enabled.

NVidia claims to have sold more than 100 million CUDA-enabled GPUs to date which is probably accurate, and they are also being supported by thousands of software developers who NVidia says are already using the free CUDA software development tools to solve problems in a variety of professional and home applications [2].

AMD realized a GPU technology too, well known as ATI Stream technology. It's based off a set of advanced hardware and software technologies that enable AMD graphics processors, working in concert with the system's central processor, to accelerate many applications beyond just graphics. Stream technology enables hundreds of parallel Stream cores inside AMD graphics processors to accelerate general purpose applications.

These capabilities will allow ATI Stream-enabled programs to operate with optimized performance or with new functionality.

ATI Stream uses parallel computing architecture that will take advantage of the graphics card's stream processors to compute

problems, applications or tasks that can be broken down into parallel, identical operations and run simultaneously on a single processor device.

Stream computing also takes advantage of a SIMD methodology (single instruction, multiple data) whereas a CPU is a modified SISD methodology (single instruction, single data); modifications taking various parallelism techniques into account [3].

Acceleration in FPGA Hardware for Bioinformatics Research

String set matching is an important operation in computational biology. For example, when proteomics data is used for genome annotation in a process called proteogenomic mapping, a set of peptide identifications obtained using mass spectrometry is matched against a target genome translated in all six reading frames. Given a large number of peptides and long translated genome strings, the fundamental problem here is to efficiently search for a large set of *pattern* strings (i.e., the set of peptides) in a larger *text* string (i.e., the translated genome) [4-8].

Efficient substring search algorithms such as Boyer-Moore and Knuth-Morris-Pratt that locate single pattern strings within a larger text string can be used in a multi-pass manner (i.e., one pass for each string in the set of peptides). However, this approach does not scale well with an increasing number of pattern strings. In particular, assuming p patterns with an average length of n and a text string of length m , naive, multi-pass, approaches have computational complexity of $O(p(m+n))$ [9, 10].

The Aho-Corasick algorithm provides a scalable solution to the string set matching problem in that it incorporates the search mechanism for the entire set of patterns into a single finite state machine (FSM).

The power of Aho-Corasick stems from the ability of the algorithm to find the location of the strings in the pattern set in the text string in a single pass.

The computational complexity of Aho-Corasick search is $O(m+k)$ where k is the total

number of occurrences of the pattern strings in the text. This linear processing time complexity has resulted in the widespread use of Aho-Corasick in string matching applications [11].

The performance of the Aho-Corasick algorithm can be further enhanced by implementing it in hardware. Tan and Sherwood were the first to describe an area-efficient hardware approach for implementing the Aho-Corasick for network intrusion detection systems implemented in application specific integrated circuits (ASICs). However, the complexity and costs associated with ASIC development is a significant impediment in their adoption in computational biology. Field programmable gate array (FPGA) devices, on the other hand, can be repeatedly reconfigured to create a variety of application-specific processing elements. This reconfigurable nature makes FPGAs a popular low-cost alternative to the development of specialized ASICs for a variety of application domains, including computational biology [12].

Although the fundamental Aho-Corasick algorithm is identical for all string set matching applications, optimization for specific applications and target hardware results in significant performance and storage efficiencies. The main contribution of the Dandass's et al. paper [13] is a case-study demonstrating how an Aho-Corasick architecture and finite state machine (FSM) organization can be specifically optimized for incorporation into proteogenomic pipeline using field programmable gate array (FPGA) hardware. This paper also demonstrates how the 18-kbit random access memory (RAM) blocks available on Xilinx's Virtex-4 FPGAs and 9-kbit RAM blocks available in Altera's FPGAs can be utilized to create resource-efficient amino acid sequence set matching engines. Furthermore, the use of RAM instead of FPGA logic resources for encoding FSM state transitions enable the FPGA to be quickly reconfigured for matching different peptide sets.

FPGAs provide a large number of embedded memory blocks that enable more efficient implementation of FSMs than possible using the FPGA logic fabric. Furthermore, the synthesized tile-based design can be reused for different peptide sets by simply initializing the

RAM block content with appropriate bit-split FSM state data. This is much faster than having to rerun the significantly time consuming "placing and routing" synthesis stages required for logic-based implementations in FPGA fabric for each new peptide set.

Empirical results show that the FPGA-based implementation outperforms the workstation implementation by a factor of 20. This result shows that using specialized hardware to solve the string set matching problem can make a significant impact on the runtime of a number of computational biology processes where exact string matching is commonly required. The throughput of FPGA implementation described here is essentially limited by the data transfer speed of the ATA disk drives. Higher frequency implementations utilizing Serial ATA (SATA) disk drives, parallel disk arrays, and gigabit Ethernet interfaces under investigation as part of ongoing implementation efforts and future research.

This paper also demonstrates that the significantly smaller string alphabets found in computational biology enable more space efficient designs for string matching as compared to previously published implementations focused on network intrusion detection. Although the case study focused on exact string matching, the Aho-Corasick algorithm can also accommodate regular expressions. The implementation described can easily be adapted for other types of search using, for example, spaced seeds.

The implementation presented here is restricted to searching for a maximum of 4,000 peptides. Two different approaches can be used to overcome this limitation. The simplest technique is to perform multiple passes over the string data such that a different subset of the peptides is encoded in the tiles during each pass. This approach requires only a single FPGA, but increases the overall search time by a factor given by the following expression. In other words, the complexity of the search becomes $O(F \times (m + k))$.

A more performance oriented approach would be to use F separate FPGAs performing the search on separate subsets of the peptides in parallel. The cost of replicating the reading

frame data for a large F can be eliminated by implementing a data streaming interface between the separate FPGA boards. Tools to facilitate building such interfaces are typically provided by the FPGA vendors. Using such an interface, only one board needs to be connected to a single disk drive containing the reading frames while the other boards are connected to each other in a chain. This way, the reading frame data can be streamed from the disk drive to each board (*i.e.*, as soon as an FPGA board receives a byte of data, it forwards the data to the next board in the chain). The runtime complexity of this latter implementation is essentially $O(m + k + \lambda)$, where λ represents the cumulative latency of transmitting a single character over the entire chain. The λ value will typically be negligibly small because modern FPGAs are capable of performing serial communication at gigabit per second (or faster) rates [13].

CUDA as efficient hardware accelerator for Smith-Waterman sequence alignment

Exhaustive tests have been performed to compare the implementation of Smith-Waterman in CUDA with:

- the results of W. Liu as reported in his paper. His solution was implemented in OpenGL and was tested on a NVidia GeForce 7900 GPU
- BLAST and SSEARCH, running on a 3 GHz Intel Pentium IV processor
- the results of the SIMD implementation by Farrar as reported in his paper. His tests were run on a 2.4 GHz Xeon Core 2 Duo processor.

Was tested a solution on a workstation, having the 2.4 GHz Intel Q6600 processor and two NVidia GeForce 8800 GTX graphic cards. We have measured the performance by running the application both on single and on double GPU configurations. By doubling the computing resources we observed that the overall performance of the application also doubles. This shows that the solution can benefit from a nearly linear speed improvement when adding more graphic boards to the system. It must be mentioned that the Nvidia SLI option, available for multi-GPU systems, is designed for

OpenGL. Therefore, SLI must be disabled for CUDA, which requires direct programming of every installed GPU [14- 18].

Smith-Waterman in CUDA

A great number of parallel threads have to be launched simultaneously to fully exploit the huge computational power of the GPU. The strategy adopted in our implementation in CUDA was to make each GPU thread compute the whole alignment of the query sequence with one database sequence. As explained in the section about the CUDA programming model, the threads are grouped in a *grid of blocks* when running on the graphics card. In order to make the most efficient use of the GPU resources the computing time of all the threads in the same *grid* must be as near as possible. For this reason we found it was important to pre-order the sequences of the database in function of their length. So when running, the adjacent threads will need to align the query sequence with two database queries having the nearest possible sizes.

Following is the optimal configuration of threads allowing for the best performance:

- number of threads per *block*: 64
- number of *blocks*: 450
- total number of threads per *grid*: 28800

The ordered database is stored in the *global* GPU memory, while the query-profile is saved into a *texture*. For each alignment the matrix is computed column by column in order parallel to the query sequence. To compute a column we need all the H and E values from the previous one. We store them in the *local memory* of the thread. More precisely, we use two buffers: one for the previous values and one for the newly computed ones. At the end of each column we swap them and so on. *Local memory* is not cached, so it is very important to choose the right access pattern to this space. The GPU is able to read and write up to 128 bits of the *local memory* with a single instruction. So each thread reads at once four H and four E values (16 bits long) from the loading buffer plus the respective four values from the profile. It computes the four results for the new column, then it stores

them in the storing buffer. To fully take advantage of the memory bandwidth of the graphics card we package the profile in the *texture*, saving four successive values (always minor than 255) into the four bytes of a single unsigned integer. Thus, each thread can gather all the data needed to compute four cells of the alignment matrix with only two read instructions (one from the local buffer and one from the *texture*) [18].

Smith-Waterman in CUDA functioning.

Each thread executes this code on a different database sequence. The pseudo-code for the Smith-Waterman implementation is made up of the outer loop, which cycles on the database sequence characters, followed by the inner loop, which does the basic dynamic programming calculations. Each thread gathers four E and H values from the load buffer (first read operation) and four values from the profile (second read operation: the four values are packaged in a single unsigned integer of the query-profile). The Smith-Waterman algorithm is then applied to these data and the results are saved in the storing buffer (a single write operation). The alignment also requires two supplementary values: an *f_north* and an *h_north*. In this case, there is no need to save an entire column, but only two temporary numbers updated at each cell computation.

Before running Smith-Waterman, the implementation automatically detects the number of computational resources available. A dynamic load balancing is achieved according to the number of devices and their computational power. The database is split in the same number of segments as the number of GPUs. Each GPU then computes the alignment of the query with one database segment. The size of the segment depends upon the power of that GPU. The speed of each device is computed after every alignment. A new partitioning of the database is done for the successive query on the base of a weighted average of the performances detected during previous runs. Pre-fixed weights are used for the first run [18].

Smith-Waterman in CUDA vs. Liu's implementation

For this test five protein sequences of different length (from 63 to 511 residues) were run against the SwissProt database (250,296 proteins and 91,694,534 amino acids). The substitution matrix BLOSUM50 with a gap-open penalty of 10 and a gap-extension penalty of 2 were used.

Liu obtained on the same sequences an average of 392.2 MCUPS and a peak of 533 MCUPS. The solution on a single GPU was completed in a time of 63.5 sec with an average of 1830 MCUPS and a peak of 1889 MCUPS. Our implementation on two GPUs achieved a search time of 33.63 sec with an average of 3480 MCUPS and a peak of 3612 MCUPS. These results indicate that our implementation of Smith-Waterman is up to 18 times faster than that of Liu [18].

Smith-Waterman in CUDA vs. BLAST and SSEARCH

For this test we used the same sequences, database and substitution matrix described in the previous paragraph. SSEARCH completed the search in 960 sec with an average of 1192 MCUPS and a peak of 123 MCUPS. BLAST completed the search in 53.3 sec with an average of 2018 MCUPS and a peak of 2691 MCUPS.

The execution times of CUDA implementation were up to 30 times faster than SSEARCH and up to 2.4 times faster than BLAST [18].

Smith-Waterman in CUDA vs. Farrar's implementation

This last test was done running 11 sequences of different length (from 143 to 567 residues) against the SwissProt database (Rel. 49.1 – 208,005 proteins and 75,841,138 amino acids). The substitution matrix is the BLOSUM50 with a gap-open penalty of 10 and a gap-extension penalty of 2.

The Farrar's approach is based on the following consideration: for most cells in the alignment matrix, F remains at zero and does not contribute to the value of H . Only when H is greater than $G_{int} + G_{ext}$ will F start to influence the value of H . So firstly F is not considered. Then, if required, a second step tries to correct the introduced errors. Farrar's solution completed the search in 161 sec with an average of 1630 MCUPS and a peak of 2045 MCUPS. The solution running on a single GPU turned in a slightly better time of 154.95 sec with an average of 1783.3 MCUPS and a peak of 1845 MCUPS. On two GPU devices the search was completed in 79.65 sec with an average of 3792.2 MCUPS and a peak of 3575 MCUPS.

Farrar's solution improves its performances on the longer sequences, but on the average, it takes longer than our solution running even on a single GPU. So Smith-Waterman in CUDA is up to 3 times faster than Farrar's implementation [18].

Conclusion

The growth of sequence data has been accompanied by an increasing need to analyze data on distributed HPC systems.

The most common hardware solutions are HPC systems and dedicated bioinformatics hardware accelerators.

Next-generation DNA sequencing machines are generating an enormous amount of sequence data, placing unprecedented demands on traditional single-processor read mapping algorithms.

This bit-split organization of the Aho-Corasick implementation enables efficient utilization of the limited random access memory (RAM) resources available in typical FPGAs. The use of on-chip RAM as opposed to FPGA logic resources for FSM implementation also enables rapid reconfiguration of the FPGA without the place and routing delays associated with complex digital designs.

Experimental results show storage efficiencies of over 80% for several data sets. Furthermore, the FPGA implementation executing at 100 MHz is nearly 20 times faster

than an implementation of the traditional Aho-Corasick algorithm executing on a 2.67 GHz workstation.

The results show that graphic cards are now sufficiently advanced to be used as efficient hardware accelerators for sequence alignment. Their performance is better than any alternative available on commodity hardware platforms. The solution presented in this paper allows large scale alignments to be performed at low cost, using the exact Smith-Waterman algorithm instead of the largely adopted heuristic approaches.

The results of this work show that the new CUDA compatible graphic cards are now advanced enough to be considered as efficient hardware accelerators for the Smith-Waterman algorithm. High speed can be obtained with the greatest sensitivity. But this work also opens interesting perspectives as similar strategies of acceleration could be applied to a number widely used algorithms in bioinformatics. Thus equal investments in terms of hardware may lead to much better performances.

References:

1. Field-programmable gate array. Online. Available HTTP: http://en.wikipedia.org/wiki/Field-programmable_gate_array. (accessed September 07, 2011)
2. CUDA. Online. Available HTTP: <http://www.nvidia.com/>. (accessed September 07, 2011)
3. ATI Stream technology. Online. Available HTTP: <http://www.amd.com/>. (accessed September 07, 2011)
4. Jaffe J. D., Berg H. C., Church G. M. Proteogenomic mapping as a complementary method to perform genome annotation. // *Proteomics*. – 2004. – 4, №1. – P. 59-77.
5. Jaffe J. D., Stange-Thomann N., Smith C., DeCaprio D., Fisher S., Butler J., Calvo S., Elkins T., FitzGerald M. G., Hafez N., Kodira C. D., Major J., Wang S., Wilkinson J., Nicol R., Nusbaum C., Birren B., Berg H. C., Church G. M. The complete genome and

- proteome of *Mycoplasma mobile*. // *Genome Res.* – 2004. – 14, №8. – P. 1447-1461.
6. Kalume D. E., Peri S., Reddy R., Zhong J., Okulate M., Kumar N., Pandey A. Genome annotation of *Anopheles gambiae* using mass spectrometry-derived data. // *BMC Genomics.* – 2005. – 6. – 28 p.
7. Kuster B., Mortensen P., Andersen J. S., Mann M. Mass spectrometry allows direct identification of proteins in large genomes. // *Proteomics.* – 2001. – 1, №5. – P. 641-650.
8. McCarthy F. M., Cooksey A. M., Wang N., Bridges S. M., Pharr G. T., Burgess S. C. Modeling a whole organ using proteomics: the avian bursa of Fabricius. // *Proteomics.* – 2006. – 6, №9. – P. 2759-2771.
9. Boyer R. S., Moore J. S. A Fast String Searching Algorithm. // *Communications of the ACM.* – 1977. – 20. – P. 762-772.
10. Knuth D. E., Morris J. H., Pratt V. B. Fast pattern matching in strings. // *SIAM Journal of Computing.* – 1977. – 6. – P. 323-350.
11. Aho A., Corasick M. Efficient string matching: an aid to bibliographic search. // *Communications of the ACM.* – 1975. – 18. – P. 333-340.
12. Tan L., Sherwood T. A High Throughput String Matching Architecture for Intrusion Detection and Prevention. // *Madison, Wisconsin US.* – 2005.
13. Dandass Y. S., Burgess S. C., Lawrence M., Bridges S. M. Accelerating String Set Matching in FPGA Hardware for Bioinformatics Research. // *BMC Bioinformatics.* – 2008. – 9. – 197 p.
14. Pearson W. R., Lipman D. J. Improved tools for biological sequence comparison. // *Proc Natl Acad Sci U S A.* – 1988. – 85. – P. 2444-2448.
15. Farrar M. Striped Smith-Waterman speeds database searches six times over other SIMD implementations. // *Bioinformatics.* – 2007. – 23, №2. – P. 156-161.
16. Liu W., Schmidt B., Voss G., Schroeder A., Muller-Wittig W. Bio-Sequence Database Scanning On GPU. // *IPDSP 2006, Rhode Island, Greece.* – 2006.
17. Pearson W. Searching protein sequence libraries: comparison of the sensitivity and selectivity of the Smith-Waterman and FASTA algorithms // *Genomics.* – 1991. – 11. – P. 635-650.
18. Manavski S.A., Valle G. CUDA compatible GPU cards as efficient hardware accelerators for Smith-Waterman sequence alignment // *BMC Bioinformatics.* – 2008. – 9. – 10 p.

Надійшла до редакції 22.09.11

УДК 517.977.1

Кудін В.І., д.т.н., с.м.с., Кудін Г.І., к.ф.-м.н.,
доц., Оноцький¹ В.В.

Про точний алгоритм методу базисних матриць розв'язання задач лінійного програмування

В роботі запропоновано алгоритм та комп'ютерну реалізацію методу базисних матриць в середовищі Matlab та Microsoft Visual C++ з використанням технології точного представлення обчислень. Наведено результати обчислювального експерименту, в якому тестові моделі лінійного програмування генерувалися, зокрема, на основі матриць Гільберта різної розмірності.

Ключові слова: задача лінійного програмування, базисна матриця, точне представлення обчислень.

¹E-mail: onotsky@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Аналіз властивостей розв'язків лінійних систем рівнянь (СЛАР) та нерівностей (СЛАН) залишається предметом тривалих досліджень математиків різних поколінь, бо за можливими своїми структурними властивостями такі моделі в прикладних сферах належать до багатомірних та некоректних, із проявами властивості поганої обумовленості. Для дослідження СЛАР та СЛАН з квадратною матрицею обмежень розроблено ряд точних методів [1-3]. Для тестування схем розв'язання такого класу задач розроблено ряд бібліотек моделей систем з погано обумовленими матрицями обмежень, наприклад, до таких матриць належить матриця Гільберта. Задачі лінійного програмування (ЗЛП) можна розглядати як ускладнення моделей СЛАР та СЛАН, адже елементом ітераційного методу розв'язання ЗЛП є крок розв'язання СЛАР.

В даному дослідженні алгоритм проведення обчислень за схемою МБМ [1,2] доповнено використанням технології довгої арифметики для моделей з раціональними елементами, яку реалізовано у вигляді бібліотеки "Longnum" на мові C++ для більш складного класу лінійних моделей - ЗЛП.

© В.І. Кудін, Г.І. Кудін,
В.В. Оноцький, 2011

V.I. Kudin, d. t. s., G.I. Kudin, c. of p.- m. s.,
V.V. Onotsky¹

About exact algorithm of base matrices' method to solve of linear programming problems

The base matrices' algorithm and its computer implementation in Matlab and Microsoft Visual C++ environment with technology of exact presentation of computation are proposed in the paper. Results of computation experiment where test models of linear programming were generated with using Gilbert matrices in various dimensions.

Key Words: linear programming problem, base matrix, exact presentation of computation.

В сучасних ЕОМ, як правило, використовуються стандарті типи цілих чисел, розмір яких не перевищує 64 байта. Подолання такого апаратного обмеження можна вирішити програмним шляхом, а саме, розробкою власного типу даних. Прикладом є клас Large[4]. Бібліотека "Longnum" розроблена мовою C++ з використанням стандартної бібліотеки шаблонів STL (Standard Template Library).

Постановка задачі

В рамках методу базисних матриць (МБМ) досліджуються властивості розв'язків для погано обумовлених лінійних систем при використанні алгоритмів з точним проведенням обчислень (в раціональних числах).

Введемо з розгляд допоміжну (з відомими властивостями) СЛАР вигляду

$$Iu = K, \quad (1)$$

де I — одинична матриця $(m \times m)$,

$K = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m)^T$ — вектор розмірності m ,

$$\text{СЛАН вигляду} \quad (2)$$

$$Au \leq C,$$

де матриця A розмірності $(n \times m)$, з рядками

$$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}), \quad j \in J = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\text{вектори } C = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T.$$

$n \square m, T$ — знак транспонування та цільову функцію вигляду $\max B u$,
де $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Означення 1. Підматрицю A_δ матриці A , складену із m лінійно незалежних векторів-рядків (з номерами $j \in J_\delta = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset J$) обмежень (2), будемо називати допустимою базисною, а розв'язок u_0 відповідної їй системи рівнянь $A_\delta u = C_\delta$, де $C_\delta = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})^T$ підвектор C допустимим базисним при виконанні $a_j u_0 - c_j \leq 0, j = \overline{1, n}$ для (2).

Дві базисні матриці з відмінними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай e_n — елементи матриці A_n^{-1} , оберненої до A_n ; $e_i = (A_n^{-1})_i$ — стовпець оберненої матриці; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rm})$ — вектор розвинення нормалі обмеження $a_i u_i \leq c_i$ за рядками базисної матриці A_δ , $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (3) за рядками базисної матриці A_δ , $\Delta_r = a_i u_0^T - c_i$ — нев'язка r -го обмеження (2) в вершині u_0 ; $J_\delta, J_n, J = J_\delta \cup J_n$ — множини індексів базисних і небазисних обмежень (2).

Основою запропонованого МБМ є ідея допустимої порядковості базисної матриці. Довільна базисна матриця в ході ітерацій послідовно перетворюється вводом-виводом із неї рядків-нормалей обмежень задачі. Відомо, що довільна базисна матриця може бути перетворена в допустиму, а в решті-решт і в оптимальну при розв'язності задачі [1,2].

В роботах [1,2] встановлено формули взаємозв'язків: поміж коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (2), цільової функції за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень, значеннями цільової функції (3) в двох суміжних базисних матрицях та умова оптимальності. При знаходженні формул та основних співвідношень поміж елементами методу при переході від одної базисної матриці до наступної вважаємо, що $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ — нормалі обмежень $(a_i u^T \leq c_i, j \in J_\delta)$, які утворюють рядки базисної матриці A_δ , зокрема, a_i — нормаль

обмеження $a_i u_i \leq c_i$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im})$ — коефіцієнти розвинення вектора a_i за рядками базисної матриці A_δ , а саме:

$$\bar{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{rk}}, \bar{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{rk}} \alpha_{ri}, \quad r = \overline{0, n};$$

$$i = \overline{1, m}; \quad i \neq k; \quad (4)$$

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{rk}}, \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{rk}} \alpha_{ri},$$

$$r = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, m}; \quad i \neq k; \quad (5)$$

$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{jk}} \Delta_k, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\bar{\Delta}_k = -\frac{\Delta_k}{\alpha_{kk}}, \bar{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{kk}} \Delta_k, \quad r = \overline{1, n}; \quad r \neq k \quad (7)$$

причому умовою опорності наступної базисної матриці при вводі вектору нормалі a_i обмеження $a_i u^T \leq c_i$ на k -ту позицію базисної матриці A_δ є виконання $\alpha_{ik} \neq 0$.

Теорема 1. Для оптимальності базисного розв'язку u_0 необхідно і достатньо невід'ємності коефіцієнтів розвинення вектору нормалі цільової функції (3) за векторами-рядками базисної матриці A_δ , тобто $\alpha_{ik} \geq 0$ для всіх $k = \overline{1, m}$.

Особливості МБМ: на першому етапі на основі (1) будеться початкова базисна матриця, встановлюється величина рангу для (2)). На другому етапі будеться допустима та оптимальні базисні матриці (2)-(3).

Теорема 2. Для повноти рангу матриці обмежень (2) ($\text{rank}(A) = m$) необхідно і достатньо, щоб існували $\alpha_{ik}^{(i)} \neq 0, i = \overline{1, m}$, де $\alpha_{ik}^{(i)}$ — ведучі елементи симплексної ітерації МБМ по заміненню рядків базисної матриці (1) нормальми обмежень (2).

Наслідок 1. Ранг системи (2) визначається кількістю коректних (з точки зору виконання умов теореми 2) заміщень рядків матриці обмежень (1) векторами нормальми (2).

Максимальна кількість ітерацій по знаходженню рангу системи (2) (при невід'ємності) обмежена числом m .

Про вплив малих збурень (неточностей) на точність обчислень вказує наступна

Теорема 3. Для того, щоб обмеження $a_j u^T \leq c_j$, $j \in J_0$, нормаль якого займає k -ту позицію в базисній матриці, при змінах в елементах у вигляді

$$(a_j + \bar{a}_j) u \leq c_j + \bar{c}_j, \quad j \in J_0, \quad \bar{\Delta}_j(u_0) \neq 0$$

зберігало опорність, оптимальність та допустимість розв'язку достатньо виконання співвідношень

$$1 + \bar{a}_j / \bar{\Delta}_j(u_0) \geq 0 \quad (8)$$

$$\alpha_k \geq \bar{a}_j [-\alpha_k (A_0^{-1})_k + \alpha_{\bar{a}_k} (A_0^{-1})_i], \quad (9)$$

$$i = \bar{m}$$

$$\Delta_r < -\bar{a}_j [(A_0^{-1})_k \Delta_r - \alpha_k u_0^T] - \bar{c}_j \alpha_k, \quad (10)$$

$$r \in J_b$$

Концепція представлення цілих чисел

Для реалізації довгих цілих чисел довільного розміру та відповідних раціональних чисел в C++ був використаний об'єктно-орієнтований підхід (ООП), який полягає у співставленні реальному об'єкту предметної області так званого об'єктного типу або класу об'єктів, що є узагальненням структурного типу [5]. Операції '+', '-', '*', '/' реалізовані за класичними алгоритмами додавання, віднімання, множення, ділення в стовпчик і не виключають можливість оптимізації як за часом, так і за використаними ресурсами ЕОМ.

В [5] наведено основні стадії алгоритмічної схеми знаходження величини рангу, початкової базисної матриці та розв'язку задачі (2)-(3) з раціональними елементами, що ґрунтується на технології точних обчислень.

Схема розширеного аналізу лінійної системи на основі МБМ

1. Якщо існує базисна матриця A_0 така, що

$\alpha_{rk} \geq 0, k = \bar{1}, \bar{m}$, то дана базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальний, причому при $\alpha_{rk} > 0, k = \bar{1}, \bar{m}$ розв'язок єдиний, при $\exists k_0, \alpha_{rk_0} = 0$ розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує $k, \alpha_{rk} < 0$, що $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх небазисних r , то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує базисна матриця A_0 та розв'язок u_0 такий, що $\alpha_{rk} \leq 0, k = \bar{1}, \bar{m}$, $\Delta_r(u_0) > 0$ то задача нерозв'язна за несумісністю обмежень.

4. Якщо існує $k, \alpha_{rk} < 0, \alpha_{rk} < 0$, то з допомогою перетворень можна перейти до нової базисної матриці та опорного розв'язку з більшим значенням цільової функції.

5. Якщо існує базисна матриця A_0 та розв'язок u_0 такі, що $\alpha_{rk} \geq 0, k = \bar{1}, \bar{m}$, то обмеження $a_r u^T \leq c_r$ пасивне

6. Якщо існує на деякій ітерації оптимально-базисна матриця $A_{(k)}^{(0)}, k = \bar{1}, \bar{m}$ відносно якої $\alpha_{rk} \geq 0, k = \bar{1}, \bar{m}$, то обмеження $a_r u^T \leq c_r$ неактивне.

Розв'язування ЗЛП МБМ з використанням бібліотеки longnum

Технологія "роботи" МБМ дослідження подається на елементарному прикладі, а саме, знайти

$$\max Bu = \max(u_1 + u_2) \\ \text{при обмеженнях} \\ u_1 + 2u_2 \leq 2; 2u_1 + u_2 \leq 2; u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

Початкова таблиця обчислень (ітерація 0)

r	α_{r1}	α_{r2}	Δ_r
0	-1	-1	0
1	-1	-2	-2
2	-2	-1	-2
3	1	0	0
4	0	1	0

Обернена матриця та розв'язок:

i_j	e_1	e_2	$u_0 = (u_{01}, u_{02})$
3	-1	0	0
4	0	-1	0

Допустимий розв'язок: $u_0 = (u_1, u_2) = (0, 0)$, $k=1$ рядок виводиться з базисної матриці, а нормаль обмеження 1-2 заміщає рядок базисної матриці:

Проміжна таблиця обчислень (ітерація 1)

r	α_{r1}	α_{r2}	Δ_r
0	$\frac{1}{2}$	$-1/2$	1
1	$\frac{1}{2}$	$-3/2$	-1
2	1	0	0
3	$-1/2$	$-1/2$	-1
4	0	1	0

Обернена матриця та розв'язок:

i_j	e_1	e_2	$u_0 = (u_{01}, u_{02})$
2	$\frac{1}{2}$	$1/2$	1
4	0	-1	0

Допустимий розв'язок: (1,0), рядок $k=2$ виводиться з базисної матриці, а нормальне обмеження $l=1$ вводиться до базисної матриці:

Проміжна таблиця обчислень (ітерація 2)

r	α_{r1}	α_{r2}	Δ_r
0	$1/3$	$1/3$	$4/3$
1	0	1	0
2	1	0	0
3	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$
4	$1/3$	$-2/3$	$-2/3$

Обернена матриця та розв'язок:

i_j	e_1	e_2	$u_0 = (u_{01}, u_{02})$
1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$
2	$-1/3$	$2/3$	$2/3$

Оптимальний розв'язок: (2/3, 2/3).

Розглянуто також і складніші варіанти ЗЛП, що побудовані на основі поганобумовлених систем обмежень з матрицею Гілберта A_i , в якій елементи

$$a_{ij} = 1/(i + j - 1), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, m}, c_i = 1, i = \overline{1, m} [6].$$

Було встановлено, що для випадків $m \leq 6$ алгоритм МБМ збігався як у стандартних комп'ютерних числових типах (double), так і в точній арифметиці (з використанням класу rational3 [4]).

Для випадків $m = \overline{7, 200}$ метод збігався в точній арифметиці (клас rational3) з отриманням точного оптимального розв'язку (2), (3). Крім

цього, (зокрема, для $m = 200$) отримано 200 точних розв'язків, обернених матриць для поганобумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Висновки

Застосування симплексної ідеології на основі МБМ дає змогу: досліджувати властивості розв'язків; проводити аналіз властивостей системи при зміні значень окремих елементів та її компонент; розробляти механізм поетапного перетворення виродженої матриці обмежень в невиводжену. Розробка алгоритмічного та програмного забезпечення проведення обчислень і в точних (раціональних) числах можна вважати (в багатьох випадках), як еталонне при перевірці ефективності нових методів та алгоритмів. Особливо це є важливим для задач, що є некоректними (поганобумовленими), тобто чутливими до малих збурень (неточностей) у поданні моделі.

Список використаних джерел

1. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудим В.И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика. - 1987. - N4. - С. 79-86.
2. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудим В.И. Релаксационная схема двойственного строчного симплекса метода // Автоматика. - 1988. - N 1, с.39-46.
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. Гл. рел. физико-математической литературы, - М: "Наука", - 1977. - 303с.
4. Страуструп Б. Язык программирования С++. Специальное издание. Бинум. Лаборатория знаний. Невский диалект, 2006. - 1104с.
5. Ляшко С.И., Оноцкий В.В. О технологии длинной арифметики при построении алгоритмов исследования линейных систем. Компьютерная математика, - 2009. - №2. - С. 101-109

Надійшла до редколегії 06.10.2011р.

УДК 004.7; 621.38

Кульчицький В.О., аспірант

Молекулярна електроніка

Подано огляд деяких існуючих технологій молекулярної електроніки, починаючи від будови логічних схем і закінчуючи технологією їх вироблення. Описані властивості молекулярних провідників і перемикачів, принцип роботи молекулярного обчислювача.

Ключові слова: молекулярна електроніка, молекулярні перемикачі, молекулярна сітка, молекулярна самозбірка.

E-mail: volodymyr.kulchytskyi@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В наш час технологія побудови електронних обчислювачів на основі сучасних мікросхем дійшла межі свого розвитку. З кожним роком виробництво процесорів стає все дорожчим, а їх швидкодія майже не змінюється. Закон Мура, який передбачав експоненційне зростання кількості транзисторів, вже перестав діяти.

Натомість, з'являються нові перспективні технології, які вже в найближчому майбутньому можуть замінити традиційні. Одна з них – молекулярна. Вона дозволяє будувати обчислювачі на основі перемикачів, які складаються з одної або кількох молекул. Далі буде розглянута саме ця технологія.

Програма «Moletronics»

Про перспективність цієї технології свідчить той факт, що агентство DARPA, яке в свій час винайшло Інтернет, ще в кінці 90-х років 20-го століття організувало програму «Moletronics», що займається дослідженнями молекулярної електроніки [1]. Ця програма являє собою колективну роботу багатьох команд, кожна з яких займається окремою, незалежною частиною досліджень в цій галузі.

Як зазначено в [1], ці розробки дадуть можливість створити обчислювачі, які будуть в один мільйон разів щільніші ніж сучасні

V.O. Kulchytskyi, PhD student

Molecular electronics

The article describes some of the modern molecular electronic technologies. Some properties of molecular wires and switches are given. A molecular crossbar technology is described, as well as self-assembly method of molecular component fabrication.

Key words: molecular electronics, molecular switches, molecular crossbar, molecular self assembly.

комп'ютери, за кількістю перемикачів на одиницю площі.

Кожна команда поставила за мету якусь окрему частину кінцевого результату – побудови справжнього молекулярного комп'ютера. Так, Ranganathan Shashidar з військово-морської лабораторії США займається досить екзотичними дослідженнями – буде пам'ять і логічні ланцюги з часток вірусів. ДНК вірусу модифікується таким чином, щоб вирощувати у великій кількості вірусні частинки з такими властивостями, які дозволяють легко з'єднувати їх із золотими контактами.

Команда з університету Колорадо намагається побудувати повноцінну логічну схему всередині однієї молекули. Тобто, молекула, потенційно, може замінити цілу сучасну мікросхему, будучи при цьому незрівнянно меншою за площею.

Історія

Перша публікація на тему молекулярної електроніки [2] вийшла ще 1974 року. В ній описаний одномолекулярний випрямляч. Як виявилось, одна молекула може реалізовувати повноцінний рп-перехід, який є основою побудови сучасних діодів і транзисторів. Однак, на той час це була чисто теоретична розробка. Практична реалізація подібного пристрою була майже неможлива. Для цього потрібно було створити шар ізолятору нанометрової товщини між двома електродами [3]. На сьогодні успішно

проведено багато практичних експериментів, які показують що побудова такого пристрою є реальною.

Один з авторів згаданої публікації сьогодні є експертом програми «Moletronics» з механізмів молекулярної провідності і перемикачів.

Відкриття скануючого тунельного мікроскопа відкрило нові горизонти для дослідження молекулярної електроніки. Він може показувати окремі молекули, а також дозволяє маніпулювати ними. За його допомогою було показано, що окремі молекули можуть проводити електричний струм [3].

Як і очікувалось, струм, що проходить крізь молекули, відносно малий. Проте, його щільність надзвичайно висока. В секунду крізь один квадратний нанометр мономолекулярного напівпровідника проходить $1 \cdot 10^{12}$ електронів [1]. Карбонова нанотрубка, наприклад, має щільність струму в $1 \cdot 10^6$ разів більшу за мідний провідник.

Пізніше були продемонстровані перемикачі, які можна переводити з одного стану в інший. Було показано, що вони мають велику від'ємну диференціальну провідність. У той же час були винайдені пристрої молекулярної пам'яті, які мають достатній час втримання біту при кімнатній температурі.

Проходження струму крізь молекули

В традиційних провідниках, механізми проходження заряду є загально відомими і широко вивчені. Було б добре, якби теорія, розроблена для звичайних електронних пристроїв, діяла і для молекулярних. Але це не так. Причина - квантові ефекти, що мають місце при таких малих розмірах. Для повного розуміння провідності струму в молекулах потрібна квантова механіка.

Для звичайних провідників, проходження заряду є омичним, тобто опір є прямо пропорційним довжині провідника. Але, наприклад, для лінійних ланцюгів (алканів), що з'єднують два електроди, один з яких є донором, а інший - акцептором, опір зростає експоненційно. Це було показано в 1961 р. Гарденом МакКоннелом [4]. Це наближення справедливе для провідників певної довжини і відносно малих напруг. Алкан виступає як простий енергетичний бар'єр, що розділяє два електроди.

Однак, якщо з'єднати електроди молекулою, що складається з донора, акцептора і містка (ДМА) між ними, механізми проходження струму можуть бути різними. Перший з них - класичне перестрибування електронів з донора до акцептора за рахунок термального збудження. Але має місце і інший, квантовий, процес - тунелювання електронів. Якщо електрону недостатньо енергії для подолання бар'єру, то за принципами класичної фізики він мав би залишатися на місці. Однак, місток має малу товщину, і хвильова функція електрона, яка задає ймовірність його перебування в точці простору, покриває обидва стани донора і акцептора. Тобто є ймовірність, що електрон опиниться на

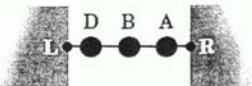


Рис. 1 ДМА з'єднання [4]

акцепторі, так, наче бар'єру для нього і не існувало.

Ці процеси відбуваються одночасно. Щоб визначити природу провідності через ДМА з'єднання, потрібно знати їхні взаємні пропорції, тобто те, наскільки часто буде переважати той чи інший механізм. Це залежить від структури молекули.

Ця різноманітність механізмів проходження струму дає змогу модифікувати електричні властивості у з'єднаннях, за допомогою хімічних модифікацій. У звичайній електроніці, електроди, як правило, не відрізняються за провідністю. Але в молекулярній, ми можемо окремо обирати кожен компонент з потрібними властивостями. Можна зробити енергетичну природу пристрою асиметричною навіть без застосування напруги.

Окрім того що молекули відрізняються одна від одної за своїми характеристиками початково, деякі молекули можуть змінювати властивості при отриманні заряду, або при розташуванні їх в сильному електричному полі.

Це створює необмежену кількість можливих імплементацій електронних перемикачів і логічних схем. Створення нового пристрою може бути результатом навіть малої зміни хімічної формули одного з компонентів, або структури пристрою.

Проходження заряду крізь молекулу ДНК є ще більш цікавим. Вона була описана в різних публікаціях як ізолятор, напівпровідник, провідник і надпровідник [4]. Це означає, що ДНК має різні властивості, що залежать від її довжини.

Одномолекулярний перемикач і діод

Як виявляється, одна молекула не лише проводить струм, (що стало відомо лише відносно недавно), а може й виступати в якості перемикача, навіть поєднуючи в собі декілька функцій. Так, в [5] наведено молекулу, що є

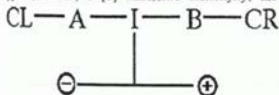


Рис. 2 Хімічна структура одномолекулярного перемикача [5]

одночасно діодом і перемикачем. В цьому патенті наведено хімічну структуру цієї молекули, що зображена на Рис. 2.

Так як хімічні властивості елементів не є

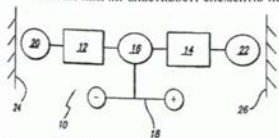


Рис. 3 Структура одномолекулярного перемикача в стані 1 [5]

важливими для розуміння основного принципу, роботу даного пристрою розглянемо на основі схематичного рисунку 3.

16 – це ізолятор між 12 і 14, він має відносно велику ВЗМО-НВМО прогалину. ВЗМО – вища зайнята молекулярна орбіталь, НВМО – нижча вільна молекулярна орбіталь. Перша відповідає зоні валентності, в якій електрони утримуються навколо атома. Друга – зоні провідності, в якій електрони переходять з одного атома на інший, тобто тече електричний струм. Таким чином, 16 погано проводить струм.

12 і 14 мають відносно малі ВЗМО - НВМО прогалини і мають, таким чином, гарну

провідність. Водночас, їхні відповідні ВЗМО і НВМО лежать на різних енергетичних рівнях.

В основі роботи молекули лежить дипольна частина 18, що зображена знизу, як «+» і «-». Вона є бістабільною, тобто може перебувати в двох протилежно направлених положеннях. На малюнку, вона знаходиться в стані 1 – «+» розташований праворуч від «-». За рахунок дії електричного поля її можна перевести в протилежний стан 2 – «+» буде знаходитись ліворуч від «-».

Вона з'єднана з молекулою таким чином, що обертання не вимагає великої кількості енергії.

Так як ця дипольна частина розташована асиметрично відносно 12 і 14, то вона зсуває їх енергетичні рівні в протилежних напрямках. Окрім того, зсуви мають різний знак в станах 1 і 2. Тому енергетична різниця між НВМО 12 і 14 зменшиться в стані 1 але збільшиться в стані 2.

В стані 1, при позитивній напрузі 1 вольт, енергії НВМО в 12 і 14 співпадають (вони ще більше зсуваються за рахунок напруги і тому стають рівними; зсув пропорційний відстані від електрода 24) і ми маємо чудову провідність струму. Однак в стані 2, молекула залишиться діелектриком, оскільки зсув за рахунок напруги в 1 вольт буде недостатнім.

Якщо ж застосувати негативну напругу, зсув енергетичних рівнів буде в іншому напрямку, і тому прогалина між двома НВМО лише збільшиться. Ми отримаємо діелектрик. В стані 2, прогалина початково ще більша, і її збільшення дасть ще меншу провідність, отже ми в обох станах маємо діелектрик при негативній напрузі.

Отже, існує діапазон напруг, в яких дана молекула діє як комбінація діода і перемикача: в стані 1 вона діє як діод, в стані два – як діелектрик. Операція перемикачання полягає в переводі її зі стану діода в стан діелектрика.

Молекулярна сітка («molecular crossbar»)

Одна з найбільш перспективних технологій побудови молекулярних обчислювачів була винайдена в компанії Hewlett Packard в 2001 році під назвою «molecular crossbar». Як показано в [6], вже існують технології для виробництва подібних пристроїв. Вони є достатньо нечутливими до дефектів і збоїв, що робить їх надзвичайно привабливими для молекулярної пам'яті і логічних схем. Також

вони споживають дуже мало струму, і мають високу щільність.

«molecular crossbar» - це сітка, що сформована перетинами молекулярних провідників. В перетинах розміщені молекулярні пристрої. Кожен перетин при цьому може виконувати функцію зберігання біту інформації, з'єднання, або перемикачання.

Сітки можуть бути побудовані так, щоб містити різні електронні компоненти, такі як транзистори, резистори, діоди і провідники. Вихід однієї такої обчислювальної сітки може

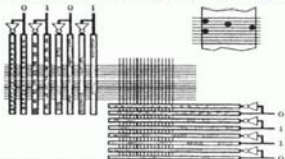


Рис. 4 пам'ять на основі молекулярної сітки [4]

бути спрямований в наступну, а сигнали при цьому можуть бути інвертовані.

Найпростіша схема, що може бути створена за допомогою даної технології, це схема пам'яті. Подібна схема була експериментально продемонстрована [1].

Вона має два основні компоненти. Перший з них - центральна сітка, яка є перетином горизонтальних і вертикальних провідників. Для n вертикальних і n горизонтальних провідників, ми маємо n^2 бітів даних. Кожен перетин представляє один біт, і забезпечується бістабільною молекулою.

Такі молекули описані в [7]. Вони діють за принципом збереження стану високої провідності, що відповідає «1», і низької, що відповідає «0». Спершу молекула знаходиться в стані «0». Після цього, під дією імпульсу напруги, вона переходить в стан високої провідності. Подальші імпульси читання не впливають на цей стан. Під дією негативної напруги, молекула знову переходить в стан «0», тобто відбувається стирання біту.

Другий компонент - це мультиплексор. Він складається з більших провідників і здатний виконувати перехід з мікронних масштабів своїх провідників до нанометрового масштабу провідників в центральній сітці. Приклад такого пристрою описаний в [8].

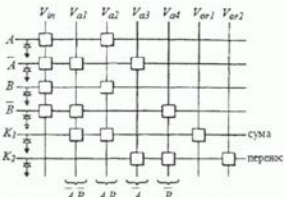


Рис. 5 Молекулярна сітка (суматор) [9]

На подібних принципах ґрунтуються і використання таких сіток для логіки. Молекули, що здатні зберігати стан провідності чи невідності, можуть використовуватися як перемикачі. В [9] описане подібне використання. На рис. 5 наведений спрощений малюнок описаного в цій статті суматора.

В перетинах розташовані молекулярні перемикачі. Розімкнений перемикач має високий опір і відповідає стану «1». Замкнутий перемикач має високу провідність і відповідає «0». Отже, кожен перемикач виконує функцію зберігання біту інформації. Однак цим роль перемикачів не вичерпується, вони також використовуються для виконання обчислень. На рис. 6 зображені такі перемикачі. Якщо падіння напруги на перемикачі вище за V_0 , перемикач замикається. Якщо ж воно менше за V_0 , він розмикається.

Вертикальні провідники виконують

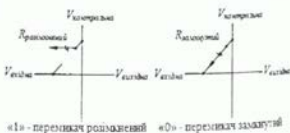


Рис. 6 Стани провідності перемикачів [9]

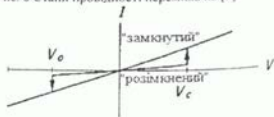


Рис. 7 Стан перемикача в залежності від напруги [9]

контролюючи функцію, подача напруги на них відбувається синхронізовано, на кожному кроці напруга надходить лише на деякі з них. Це дозволяє змінювати стан одних перемикачів в залежності від стану інших. Горизонтальні провідники лише передають інформацію між перемикачами.

Суматор працює покроково, зліва направо. При подачі зверху контрольної напруги (в цей час напруга на стовпці зліва відсутня), перемикач перейде в такий же стан, як і перемикач ліворуч. Це відбувається тому, що падіння напруги ділиться між розімкненими перемикачами, адже вони мають великий опір. Якщо ж зліва перемикач замкнений, то падіння напруги на поточному перемикачі дорівнює контрольній напрузі зверху, а вона якраз достатня для перемикачання.

Всі перемикачі початково розімкнені і знаходяться в стані «1». Першим перемикається лівий стовпець, на який зліва надходять входні дані. Для цього зверху в нього подається напруга V_m . Ті перемикачі, до яких прийшов «0» зліва (а це означає що зліва знаходиться замкнений перемикач, що створює велике падіння напруги), переходять в стан провідності «0».

На кроці 2 обчислюється значення $\bar{A} \& \bar{B}$, бо до перемикачів другого стовпця приєднані лише сигнали від $\bar{A}$ і $\bar{B}$. Якщо $\bar{A} = 0$ і $\bar{B} = 0$, то відповідні перемикачі другого стовпця перейдуть в стан провідності «0» під час подачі напруги V_{out} . Окрім цього в стан провідності перейде нижній перемикач в стовпці.

Після цього одночасно будуть подані напруги V_m і V_{out} . Таким чином, якщо між

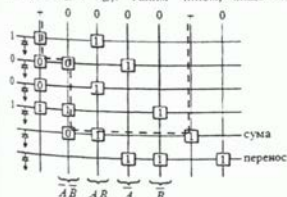


Рис. 8 Суматор на кроці 2 при $A=1$, $B=0$. Існує шлях між позитивними напругами через замкнуті перемикачі в стані «0», і розімкнений перемикач суми в стані «1». Через це значення суми на цьому кроці залишається «1», інакше б воно стало «0».

перемикачем, що обчислює суму, існує замкнений шлях до V_m (тобто $\bar{A} \& \bar{B} = 0$), падіння напруги на вихідному перемикачі, що обчислює суму, буде недостатнім для перемикачання. Інакше він перейде в стан «0». Так само він перейде в стан «0», якщо $A \& B = 1$ на кроці 3 (якщо він ще не був в цьому стані після кроку 2).

Як і очікувалось, значення суми буде:

$$(\bar{A} \& \bar{B}) \& (A \& B) = A \oplus B$$

Аналогічним чином відбувається обчислення переносу

$$\bar{A} \& \bar{B} = A \& B$$

Молекулярна самозбірка

Один з найперспективніших методів

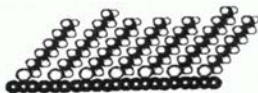


Рис. 9 Самозбірний моношар [3]

побудови молекулярних пристроїв має назву «молекулярна самозбірка» (molecular self assembly). Виявляється, молекули мають здатність розташовуватися у певні структури самостійно, в залежності від їх типів і типу матеріалу на якому вони знаходяться. Цей процес утворює самозбірний моношар (self assembled monolayer).

Він є впорядкованою структурою, що формується при адсорбції активної речовини на твердій поверхні. Молекули спонтанним чином орієнтуються до поверхні, на яку вони потрапляють, і формують цілісний шар за принципом найменшої енергії. Кожна молекула має функціональну головну групу, яка хімічно взаємодіє з субстратом. Ця система намагається досягти термодинамічно-стабільного стану завдяки глобальній мінімізації вільної енергії.

Одна з найбільш цікавих властивостей самозбірних моношарів – це їхня здатність самостійно виправляти помилки і дефекти, які з'являються під час їх виробництва. Структура намагається усунути дефективні частини, щоб мінімізувати енергію.

Окрім цього, може бути досягнута висока функціональна щільність. Не потрібно напружувати окремих молекул, а можна утворити схему пам'яті і логіки лише змішавши у правильній пропорції всі речовини. Однак на сьогодні є можливим утворення лише найпростіших структур, а про такі складні логічні схеми, як в сучасних процесорах, мова поки не йде.

Одна така технологія самозбірки ґрунтується на гідрофобних і гідрофільних властивостях молекул. Гідрофобні частинки намагаються уникнути контактів з водою, а гідрофільні, навпаки, завжди прямують до води. Таким чином, стало можливим змусити провідники сітки прямувати один до одного і утворювати перетини.

В [10] запатентований метод утворення таким способом тривимірних структур. Молекулярна збірка включає в себе багато етапів, на кожному з яких утворюється один шар. Спочатку формується початковий шар молекул, що буде виступати субстратом, на якому будуть нашірвані один за одним наступні шари.

Другий шар формується над першим, так само як в двовимірній збірці. Він складається з активних молекул, які мають роторні і статорні

частини. Кожна роторна частина знаходиться між двома статорними. Потім, наступний моношар формується над ним. Між кожними двома сусідніми шарами існує взаємно-однозначна відповідність між їхніми молекулами, 1 до 1. Другий і третій шари далі повторюються довільну кількість разів, на кожному кроці зберігається взаємно-однозначна відповідність, всі шари мають однакову кількість молекул.

Висновки

Молекулярна електроніка є надзвичайно перспективною технологією. Пристрої мають малі розміри, високу щільність і швидкодію. Різноманітність компонентів з яких складаються пристрої, а також варіантів їх комбінацій потенційно необмежена. Пристрої можуть самі збирати себе за рахунок хімічних властивостей. Однак логічні схеми, які можна будувати для молекулярних пристроїв, мають не таку структуру і властивості, як у звичайній напівелектроніці. Виникає потреба в подальшому дослідженні властивостей таких схем для розробки ефективних методів їх побудови.

Список використаних джерел

1. Kwok K. S. Molecular electronics – the future of computing. / K. S. Kwok, J.S. Ellenbogen. // *Materials Today*, February 2002. – P. 28-36.
2. Aviram A. Molecular Rectifiers / A. Aviram, M. A. Ratner // *Chemical Physics Letters* 29. – 1974. – P. 277-283.
3. Chen J. Molecular Wires, Switches and Memories. / J. Chen // *Yale University Ph.D. Dissertation*, December 2000. – P. 20-22.
4. Heath J.R. Molecular electronics. / J.R. Heath, M. A. Ratner. // *Physics Today*, May 2003. – P. 44-48.
5. Kornilovich P. Single molecule realization of the switch and diode combination. / P. Kornilovich. // *Unites States patent application publication*. 2003. – P. 4-5.

6. Snider G. S. Nanowire crossbar implementations of logic gates using configurable, tunneling resistor junctions. / G. S. Snider. // *Unites States patent application publication*. – 2009. – P. 1-12.

7. Chen. J. Molecular electronic devices. / J. Chen, T. Lee, J. Su, W. Wang, M.A. Reed and others. // *Molecular Nanoelectronics by American Scientific Publishers*. Chapter M. – 2003 – P. 66-72

8. Kuekes P.J. Demultiplexer for a molecular wire crossbar network. / P. J. Kuekes, S Williams. // *Unites States patent*. – 2001. – P. 2-3.

9. Snider G. S. Architecture and methods for computing with reconfigurable resistor crossbars. / G. S. Snider. // *United States Patent*. – 2007. – P. 6-10.

10. Zhang X. A. 3-D molecular assembly and its applications for molecular display and moletronics. / X. A. Zhang, S. H. Leung, K. D. Vincent, Z. L. Zhou. // *Unites States patent application publication*. – 2005 – P. 9.

Надійшла до редколегії 30.08.2011

УДК 515.126.2

Лялещкий О.О., провідний інженер

Базові властивості (θ) -неперервних функцій, які діють на біповних частково впорядкованих множинах

Стаття присвячена дослідженню спеціального поняття неперервності функцій, яка діє на біповних частково впорядкованих множинах. Доводиться теорема про теоретико-порядкову характеристику класу таких функцій, та наводяться деякі базові властивості цих функцій як наслідки з цієї характеристичної теореми.

Ключові слова: неперервність функцій, біповна частково впорядкована множина, збіжність спрямованості.

E-mail: forola@mail.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., професор Анісімов А.В.

Неперервні функції грають важливу роль в побудові теоретико-множинних моделей теорії лямбда. В даній роботі вводиться та досліджується спеціальне поняття неперервності функцій, яке в подальшому планується використовувати для цієї цілі.

(θ) - та (θ) -збіжні спрямованості

Будемо вважати, що читач знайомий з базовими поняттями та результатами теорії частково впорядкованих множин. Лише нагадаємо, що частково впорядкована множина (ч.в.м.) називається біповною, якщо вона є замкненою відносно супремумів непорожніх спрямованих множин та інфімумів непорожніх ко-спрямованих множин.

Щодо спрямованостей, в даній роботі будуть використовуватися наступні означення. Спрямованість на множині A – це деяка функція $D: I \rightarrow A$, де I – непорожня спрямована ч.в.м.; елементи множини I називаються індексами, а множини-образу $D(I)$ – елементами спрямованості D . Якщо $D': I' \rightarrow A$ – деяка інша спрямованість на A , де $I' \subseteq I$, то D' називається конфінальною підспрямованістю D , якщо, поперше, спрямована ч.в.м. I' є конфінальною підмножиною I (з індукованим порядком), та, по-друге, $D'(i') = D(i')$ для кожного $i' \in I'$; іншими словами, це означає, що D' є звуженням $D|_{I'}$.

A.A. Lyaletsky, leading engineer

Basic properties of (θ) -continuous functions acting on bicomplete partially ordered sets

The paper is devoted to investigations of a special notion of continuity of a function acting on bicomplete partially ordered sets. The theorem providing with an order-theoretic characterization of the class of these functions is proved. Some basic properties of these functions are given as simple corollaries of this characterizing theorem.

Key Words: continuity of a function, bicomplete partially ordered set, convergence of a net.

функції D на конфінальну підмножину I' множини I , причому порядок на I' наслідуються з I . (Зауважимо, що в топології, як правило, розглядають інші, більш загальні, але більш складні поняття спрямованості та конфінальної підспрямованості. Але, як це можна перевірити, ці топологічні поняття не нададуть нічого істотно нового з точки зору тих питань і конструкцій, що розглядатимуться.) Ясно, що відношення "бути конфінальною підспрямованістю" є транзитивним.

Для кожної спрямованості $D: I \rightarrow A$ та будь-якої функції $f: A \rightarrow B$, де A і B – довільні множини, через $f(D)$ будемо позначати нову спрямованість $f(D): I \rightarrow B$, що є композицією D та f , тобто $f(D)$ визначається за правилом:

$$f(D)(i) = f(D(i)) \text{ для кожного } i \in I.$$

Всі спрямованості, які будуть розглядатися, починаючи з цього місця, будуть задані на відповідних частково впорядкованих множинах. Спрямованість $D: I \rightarrow A$ на ч.в.м. A називається зростаючою (спадаючою), якщо D , що розглядається як функція, яка діє з ч.в.м. I у ч.в.м. A , є монотонною (відповідно анти-монотонною). Якщо D – зростаюча спрямованість, то через $\sup D$ будемо позначати супремум множини всіх її елементів (якщо він існує); аналогічно, $\inf D$ буде позначати інфімум множини всіх елементів спадаючої спрямованості D . Зауважимо, що якщо

ч.в.м. A є замкнутою відносно супремумів непорожніх спрямованих множин, то $\sup D$ існує для кожної зростаючої спрямованості на A ; для спадаючих спрямованостей має місце дуальне твердження.

Ми збираємося ввести два нові означення збіжності спрямованості, яку задано на біповній ч.в.м. У якості відправного пункту візьмемо наступне просте та відоме спостереження: якщо D є послідовністю дійсних чисел (або, більш загальною, спрямованістю на $\mathbb{R}$), то D збігається до деякого числа x (або до $+\infty$ чи $-\infty$) в звичайній топології $\Leftrightarrow$ до x збігається кожна зростаюча або спадаюча підпослідовність D , причому ліміт кожної зростаючої (спадаючої) підпослідовності дорівнює супремуму (відповідно інфімуму) множини всіх її елементів. Отже, умова біповності ч.в.м. A , на якій задано D , є необхідною для того, щоб гарантувати існування $\sup D$ для кожної зростаючої підспрямованості D та $\inf D$ для кожної спадаючої підспрямованості D .

Нехай D – довільна спрямованість на біповній ч.в.м. A ; через $M(D)$ позначимо сукупність всіх конфінальних зростаючих або спадаючих підспрямованостей D . Кажуть, що D (θ') -збігається до деякої точки $x \in A$, якщо $M(D) \neq \emptyset$ та для кожної зростаючої (спадаючої) підспрямованості $D' \in M(D)$ виконується співвідношення $\sup D' = x$ (відповідно $\inf D' = x$). В цьому випадку ми будемо називати x (θ') -лімітом спрямованості D і позначати це записом $(\theta')\text{-}\lim D = x$. Спрямованість D називається (θ') -збіжною, якщо D (θ') -збігається до деякої точки x ; у протилежному випадку D називається (θ') -розбіжною.

Твердження 1. На довільній біповній ч.в.м. A виконуються наступні властивості щодо (θ') -збіжності:

- кожна спрямованість D на A (θ') -збігається не більше ніж до однієї точки;
- якщо D є зростаючою, то $(\theta')\text{-}\lim D = \sup D$; якщо D є спадаючою, то $(\theta')\text{-}\lim D = \inf D$;
- якщо множина індексів спрямованості $D: I \rightarrow A$ має найбільший елемент $i_{\max}$, то D є (θ') -збіжною, причому $(\theta')\text{-}\lim D = D(i_{\max})$;
- для довільного індексу $j \in I$ нехай $D|_j$ позначає спрямованість $D|_{\{i \in I : i \leq j\}}$; тоді D та $D|_j$ або обидві (θ') -збігаються, або обидві (θ') -розбігаються, причому в першому випадку $(\theta')\text{-}\lim D|_j = (\theta')\text{-}\lim D$;
- для того, щоб конфінальна підспрямованість D' (θ') -збіжної спрямованості D була

(θ') -збіжною, достатньо, щоб $M(D') \neq \emptyset$, причому в цьому разі $(\theta')\text{-}\lim D' = (\theta')\text{-}\lim D$.

Доведення кожного з пунктів а)-е) твердження 1 є елементарним прямим наслідком означень та, інколи, властивості транзитивності відношення "бути конфінальною підспрямованістю".

Зауважимо, що якщо біповна ч.в.м. множина A не є лінійною, то можуть існувати (θ') -збіжні спрямованості (навіть послідовності) D на A , які містять елементи, що "не беруть участі" у визначенні (θ') -ліміту D .

Приклад 1. Покладемо $A = \{a_n, b_n, 0, 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ та визначимо на A наступний порядок:

$$\leq = \{<0, x> \mid x \in A\} \cup \{<x, 1> \mid x \in A\} \cup \{<b_n, b_i> \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{<a_n, a_j> \mid i \leq j\},$$

який оснащує A структурою біповного часткового порядку. Розглянемо послідовність

$$D = a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$$

Очевидно, що $(\theta')\text{-}\lim D = 1$, і що D містить (θ') -розбіжну підпослідовність $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$.

У зв'язку з наведеним прикладом, введемо наступні означення. Елемент спрямованості D на біповній ч.в.м. A називається *нейтральним*, якщо він не є елементом жодної підспрямованості D з $M(D)$. Кажуть, що $D: I \rightarrow A$ (θ) -збігається до деякої точки $x \in A$, якщо D (θ') -збігається до x та, починаючи з деякого індексу, D не містить нейтральні елементи, (тобто, існує такий індекс $i_0 \in I$, що для будь-якого $i \in I$ з $i \geq i_0$ випливає, що $D(i)$ не є нейтральним елементом). Якщо D (θ) -збігається до x , то ми позначатимемо цей факт через $(\theta)\text{-}\lim D = x$.

Легко перевірити, що поняття (θ) -збіжності спрямованості задовольняє всім умовам твердження 1, а також ще одній додатковій умові:

г) якщо спрямованість D (θ) -збігається до точки x , то, починаючи з деякого індексу, кожний елемент D є порівнюваним з x (відносно часткового порядку, який задано на A).

Наказь, на нелінійних біповних ч.в.м. все ще можуть існувати (θ) -збіжні спрямованості, які містять (θ) -розбіжні конфінальні підспрямованості.

Приклад 2. Нехай множину $A = \mathbb{N}^2 \cup \{0, 1\}$ оснащено наступним відношенням біповного часткового порядку:

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{aligned} &x = y = 0 \text{ (при будь-якому } y), \\ &\text{або } y = 1 \text{ (при будь-якому } x), \\ &\text{або } x = \langle i, j_i \rangle, y = \langle i, j_j \rangle \text{ та } j_i \leq j_j, \end{aligned}$$

де x, y – довільні елементи A . Розглянемо спрямованість $D =$

$$= \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \dots, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots$$

(множиною індексів $D \in \omega^2$, де ω позначає найменший нескінченний ординал). Легко побачити, що D (θ) -збігається до x , але її "діагональна" конфінальна підспрямованість $D' = \langle 0, \theta \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle i, i \rangle, \dots \in (\theta)$ -розбіжною.

Очевидно, що на лінійних біповних ч.в.м. поняття (θ') - та (θ) -збіжностей спрямованостей є еквівалентними. Більш того, для випадку природно впорядкованої розширеної дійсної числової прямої $\mathbb{R}$ має місце наступна властивість, що є відомою в аналізі, але в дещо іншому вигляді.

Твердження 2. На $\mathbb{R}$ кожне з понять (θ') - та (θ) -збіжності спрямованості еквівалентно збіжності спрямованості відносно звичайної топології.

(θ) -неперервні функції

Загальновідомим є той факт, що дійсна унарна функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною відносно звичайної топології на $\mathbb{R}$ в тому і тільки тому разі, коли f зберігає ліміти всіх збіжних послідовностей (тобто, якщо D – збіжна послідовність дійсних чисел, то $f(D)$ також є збіжною, причому $f(\lim D) = \lim f(D)$). Аналогічно, функція $f: T_0 \rightarrow T_1$, де T_0, T_1 – довільні топологічні простори, тоді і тільки тоді є топологічно неперервною, коли f зберігає ліміти всіх топологічно збіжних спрямованостей на T_0 ; причому ця характеристика часто навіть береться в якості означення топологічної неперервності функції. Ці приклади мотивують наступні природні означення.

Функція $f: A_0 \rightarrow A_1$, де A_0, A_1 – довільні біповні ч.в.м., називається (θ) -неперервною, якщо f зберігає ліміти всіх (θ) -збіжних спрямованостей на A_0 ; поняття (θ') -неперервності функції вводиться таким же чином.

На лінійних біповних ч.в.м. поняття (θ') - та (θ) -неперервності функції є еквівалентними, причому з твердження 2 випливає наступна характеристика (θ') - та (θ) -неперервних дійсних унарних функцій.

Твердження 3. На розширеній числовій прямій $\mathbb{R}$ кожне з понять (θ') - та (θ) -неперервності функції еквівалентно звичайному поняттю неперервності.

В подальшому (θ) -неперервні функції залишаться поза нашою увагою; насправді поняття (θ') -збіжності спрямованості було введено як допоміжне поняття для того, щоб з його допомогою ввести поняття (θ) -збіжності спрямованості та (θ) -неперервності функцій.

Ясно, що якщо ч.в.м. A_0 є скінченною, то кожна функція $f: A_0 \rightarrow A_1$, де A_1 – довільна біповна ч.в.м., є (θ) -неперервною. Дійсно, в цьому випадку кожна (θ) -збіжна спрямованість D на A_0 складається, починаючи з деякого індексу, з єдиного елемента $x \in A_0$, і тому $(\theta)\text{-}\lim D = x$. Очевидно, що тоді $f(D)$ (θ) -збігається до $f(x)$.

На противагу цьому, дослідження (θ) -неперервних функцій, які діють на нескінчених біповних ч.в.м., на основі самого визначення (θ) -неперервності є дуже ускладненим, навіть щодо встановлення самих базових властивостей таких функцій. Зокрема, незрозуміло, як можна безпосередньо довести, що композиція двох (θ) -неперервних функцій також є (θ) -неперервною функцією. У зв'язку з цим, нашою наступною метою є побудова теоретико-порядкової характеристики властивості функції "бути (θ) -неперервною". Згідно пункту с) твердження 1, будь-яка функція $f: A_0 \rightarrow A_1$, де A_0, A_1 – довільні біповні ч.в.м., зберігає (θ) -ліміт кожної спрямованості D на A_0 , множина індексів якої має найбільший елемент. Отже, при побудові цієї характеристики ми можемо обмежитися дослідженням тільки таких спрямованостей, множини індексів яких не містять найбільшій елементи. Тому в подальшому ми будемо вважати, що *можлива індексів будь-якої спрямованості, що розглядається, не містить найбільшого елемента*, зокрема, що вона не є скінченною. Побудову шуканої теоретико-порядкової характеристики ми будемо здійснювати на основі наступних двох спостережень.

По-перше, будь-яка (θ) -збіжна спрямованість D на біповній ч.в.м. A_0 має конфінальну підспрямованість D' , яка не містить нейтральних елементів, причому з пункту d) твердження 1 випливає, що D' також є (θ) -збіжною і що $(\theta)\text{-}\lim D' = (\theta)\text{-}\lim D = x$. Тому множина $E_{D'}$ всіх елементів D' має ту властивість, що кожний елемент $E_{D'}$ є порівнюваним з x . Навпаки, кожний впорядкований парі $\langle B, v \rangle$, де B є нескінченною підмножиною A_0 та $v \in A_0$ є порівнюваним з кожним елементом B , можна природним чином співставити декілька (θ) -збіжних спрямованостей; такі впорядковані пари ми будемо називати конусами (точніше означення див. нижче). Це вказує на те, що при побудові шуканої теоретико-порядкової характеристики природно фокусувати увагу саме на конусах.

По-друге, якщо з будь-якої спрямованості D на біповній ч.в.м. викреслити скінчену кількість індексів, то отримаємо спрямованість D' ,

властивості якої щодо (θ) -збіжності будуть такими ж самими, як й у D . Враховуючи вказану відповідність між (θ) -збіжними спрямованостями та конусами, це вказує на те, що при розгляді властивостей конусів $\langle B, v \rangle$ ми можемо знехтувати скінченною кількістю елементів $F \subseteq B$. Це спостереження приводить до наступного загального визначення.

Нехай задані довільні біповні ч.в.м. A_0 та A_1 , властивості P_0 та P_1 підмножин A_0 та A_1 відповідно та деяку функцію $f: A_0 \rightarrow A_1$. Через Q позначимо нову властивість функції f , яка стверджує, що якщо $X \subseteq A_0$ задовольняє P_0 , то $f(X)$ задовольняє P_1 . Тоді кажуть, що f майже задовольняє властивості Q , якщо для кожного $X \subseteq A_0$ з того, що $X \subseteq A_0$ задовольняє P_0 , випливає існування такої скінченної підмножини $F \subseteq X$, що множина-образ $f(X/F)$ задовольняє P_1 .

Впорядкована пара $\langle B, v \rangle$, де B – підмножина біповної ч.в.м. A та $v \in A$, називається *порядковим конусом*, або просто *конусом з вершиною v* , якщо B є нескінченною та кожен елемент B є порівнюваним з v . Зауважимо, що необов'язково, щоб $v \in B$. Ясно, що якщо $\langle B, v \rangle$ є конусом, то $\langle B/F, v \rangle$ також є конусом для кожної скінченної $F \subseteq B$. Допускаючи деяку неточність, в тих випадках, коли це не призводить до неоднозначностей, конус $\langle B, v \rangle$ ми також будемо позначати як B і розглядати його як підмножину A .

Кажуть, що *висота* конуса B з вершиною v є *локально скінченною*, якщо він не містить нескінчених ланцюгів.

Кажуть, що конус B з вершиною v задовольняє умові *злічених ланцюгів* (яку ми для стислості будемо позначати CC), якщо для його кожного елемента $c > v$ не існує елементів $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, таких, що $c_i \in B$ для кожного $i \in \mathbb{N}$ та

$$c < c_0 < c_1 < \dots < c_i < \dots$$

й, дуально, для його кожного елемента $d < v$ не існує елементів $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$, таких, що $d_i \in B$ для кожного $i \in \mathbb{N}$ та

$$d > d_0 > d_1 > \dots > d_i > \dots$$

Іншими словами, конус B з вершиною v тоді і тільки тоді задовольняє CC , коли для кожного нескінченного ланцюга C , для якого v є нижньою границею, виконуються співвідношення $\inf C = v$ й, дуально, для кожного нескінченного ланцюга D , для якого v є верхньою границею, виконуються співвідношення $\sup C = v$. Отже, кожний конус, який задовольняє CC , може містити не більш ніж злічені ланцюги; але не кожний конус, всі ланцюги якого є не більш ніж зліченими, задо-

вольняє CC . Також очевидно, що якщо висота деякого конуса є локально скінченною, то він задовольняє CC .

Непорожня спрямована (ко-спрямована) підмножина X біповної ч.в.м. називається *тілесною*, якщо $\sup X \in X$ (відповідно $\inf X \in X$). Для тілесної X покладемо $\lim X$ рівним $\sup X$, якщо X є спрямованою, і рівним $\inf X$, якщо X є ко-спрямованою. Конус B з вершиною v називається *тілесним*, якщо він містить спрямовану або ко-спрямовану тілесну підмножину X , таку, що $\sup X = v$ у першому випадку та $\inf X = v$ у другому. Очевидно, що кожна тілесна спрямована або ко-спрямована підмножина X є нескінченною, і що якщо $F \subseteq X$ є скінченною, то множина $X \setminus F$ також є тілесною; те ж саме залишається вірним й для конусів.

Розглянемо такі властивості довільної функції $f: A_0 \rightarrow A_1$, яка діє на біповних ч.в.м. A_0 та A_1 :

(C₀) якщо $B \subseteq A_0$ – конус з вершиною v , висота якого є локально скінченною, то його образ $f(B)$ є або одноеlementною множиною $\{f(v)\}$, або нескінченим конусом з вершиною $f(v)$, який задовольняє CC ;

(C₁) якщо тілесна спрямована підмножина $X \subseteq A_0$ є областю монотонності функції f , то $f(\sup X) = \sup f(X)$, якщо антимонотонності – то $f(\sup X) = \inf f(X)$; для ко-спрямованої тілесної X мають місце дуальні рівності;

(C₂) якщо $X \subseteq A_0$ є тілесною спрямованою (ко-спрямованою) множиною, то вона містить конфінальну (відповідно ко-конфінальну) підмножину $X' \subseteq X$, таку, що її образ $f(X')$ є або одноеlementною множиною $\{f(\lim X)\}$, або тілесним конусом з вершиною $f(\lim X)$.

Зауважимо, що довільна функція $f: A_0 \rightarrow A_1$ тоді і тільки тоді задовольняє (C₂), коли f майже задовольняє (C₂).

Лема 1. Кожна (θ) -неперервна функція майже задовольняє (C₀).

Доведення. Нехай $f: A_0 \rightarrow A_1$ – довільна (θ) -неперервна функція, $B \subseteq A_0$ – конус з вершиною v , висота якого є локально скінченною. Доведемо декілька допоміжних тверджень.

i) Нехай S – це послідовність на A_0 вигляду:

$$S = b_0, v, b_1, v, b_2, v, \dots, b_n, v, \dots$$

де $b_i \in B$ для кожного i та всі b_i є попарно незрівняними. Тоді S (θ) -збігається до v .

Дійсно, кожний b_i є порівнюваним з v ; отже, S не містить нейтральних елементів. З іншого боку, оскільки B має локально скінченну висоту, кожна зростаюча або спадаюча підпослідовність S містить тільки v , починаючи з деякого номера. $\square$

ii) Для кожного елементу $y \in f(B) \setminus \{f(v)\}$ його прообраз $f^{-1}(y) \cap B$ в B є скінченною множиною.

Припустимо протилежне. Тоді B містить нескінченну підмножину $B' \subseteq B$, таку, що множини-образ $f(B')$ є одноелементною, $f(B') = \{y\}$ для деякого $y \in A_1$, та $y \neq f(v)$. Без втрати загальності ми можемо вважати множину B' зліченою (інакше ми можемо замінити її на злічену підмножину), $B = \{b_i \mid i \in N\}$. Розглянемо послідовність

$$S = b_0, v, b_1, v, b_2, v, \dots, b_n, v, \dots$$

За i), S є (θ) -збіжною. Але її послідовність-образ

$$f(S) = y, f(v), y, f(v), y, f(v), \dots, y, f(v), \dots$$

є (θ) -розбіжною, оскільки вона має дві різні стаціонарні підпослідовності: $(y)_{i \in N}$ та $(f(v))_{i \in N}$. Отже, f не є (θ) -неперервною. $\square$

З i) випливає, що якщо образ $f(B)$ є скінченим, то існує така скінченна множина $F \subseteq A$, що $f(B \setminus F)$ є одноелементною множиною $\{f(v)\}$, тобто f майже задовольняє (C_1) . Дійсно, покладемо

$$F = \bigcup_{y \in f(B) \setminus \{f(v)\}} f^{-1}(y) \cap B \mid y \in f(B) \setminus \{f(v)\}.$$

Тоді множина F є скінченною та $f(B \setminus F) = \{f(v)\}$.

У зв'язку з цим надалі ми будемо припускати, що $f(B)$ є нескінченною.

iii) Існує така скінченна підмножина $F \subseteq B$, що $f(B \setminus F)$ є нескінченим конусом з вершиною $f(v)$.

Дійсно, у протилежному випадку з ii) випливає, що існує така нескінченна підмножина $Y \subseteq A_1$, кожний елемент якої є непорівнюваним з v . Без втрати загальності ми можемо вважати Y зліченою, $Y = \{y_i \mid i \in N\}$. Для кожного натурального i зафіксуємо елемент $b_i \in B$, такий, що $f(b_i) = y_i$, та розглянемо послідовність

$$S = b_0, v, b_1, v, b_2, v, \dots, b_n, v, \dots$$

За i), S (θ) -збігається до v , а оскільки f є (θ) -неперервною, послідовність $f(S)$ є (θ) -збігається до $f(v)$. З іншого боку, $f(S)$ має підпослідовність $(f(b_i))_{i \in N}$, чії елементи є непорівнюваними з v – протиріччя з пунктом i) твердження 1. $\square$

iv) Існує така скінченна підмножина $F \subseteq B$, що $f(B \setminus F)$ є нескінченим конусом з вершиною $f(v)$, який задовольняє CC .

Без втрати загальності ми можемо вважати $f(B)$ конусом (інакше, згідно з iii), ми можемо замінити $f(B)$ конусом $f(B \setminus F')$, де F' – деяка скінченна множина B). Припустимо, що наше твердження не є вірним, тобто конус $f(B \setminus F)$ не задовольняє CC для кожної скінченної $F \subseteq B$. Тоді існує нескінченний, а отже й злічений ланцюг $C \subseteq f(B)$, $C = \{c_i \mid i \in N\}$, такий, що або

$c_0 < c_0 < c_1 < \dots < c_i < \dots$, $\inf C \notin C$, $\inf C \neq f(v)$, або

$c > c_0 > c_1 > \dots > c_i > \dots$, $\sup C \notin C$, $\sup C \neq f(v)$, причому, оскільки B є конусом з локально скінченною висотою, ми можемо без применшення загальності вважати, що всі c_i є попарно непорівнюваними. Для кожного натурального i фіксуємо такий $b_i \in B$, що $f(b_i) = c_i$, та розглянемо послідовність

$$S = b_0, v, b_1, v, b_2, v, \dots, b_n, v, \dots$$

За i), S (θ) -збігається до v . З іншого боку, її послідовність-образ

$$f(S) = c_0, v, c_1, v, c_2, v, \dots, c_n, v, \dots$$

є (θ) -розбіжною, оскільки вона має дві (θ) -збіжні підпослідовності: стаціонарну $(v)_{i \in N}$ та зростаючу або спадуючу $(c_i)_{i \in N}$, (θ) -ліміти яких не співпадають. Таким чином, f не є (θ) -неперервною. $\square$

Отже, якщо $f(B)$ є нескінченною, то з iv) випливає існування такої скінченної підмножини $F \subseteq B$, що $f(B \setminus F)$ є нескінченим конусом з вершиною $f(v)$, який задовольняє CC , тобто що f майже задовольняє (C_0) . $\square$

Лема 2. Кожна (θ) -неперервна функція майже задовольняє (C_1) .

Доведення. Нехай задано якусь (θ) -неперервну функцію $f: A_0 \rightarrow A_1$ та тілесну спрямовану підмножину $X \subseteq A_0$, причому X є областю монотонності функції f . За множиною X побудуємо зростаючу спрямованість $D_X: X \rightarrow A_0$, де D_X – тотожне відображення, порядок на множині індексів X якої наслідуються з A_0 . Тоді $(\theta)\text{-}\lim D_X = \lim X$. З того, що X є областю монотонності функції f , випливає, що спрямованість-образ $f(D_X)$ також є "майже" зростаючою; отже маємо:

$$(\theta)\text{-}\lim f(D_X) = \sup f(D_X) = \sup f(X).$$

Інші 3 випадки розглядаються аналогічно. $\square$

Лема 3. Кожна (θ) -неперервна функція задовольняє (C_2) .

Доведення. Нехай задані довільна (θ) -неперервна функція $f: A_0 \rightarrow A_1$ та тілесна спрямована чи ко-спрямована підмножина $X \subseteq A_0$. Через D_X позначимо спрямованість $D_X: X \rightarrow A_0$, де D_X – тотожне відображення, порядок на множині індексів X якої наслідуються з A_0 ; тоді $(\theta)\text{-}\lim D_X = \lim X = x$. Оскільки f є (θ) -неперервною, спрямованість-образ $f(D_X)$ (θ) -збігається до $f(x)$. Можливі два наступні випадки:

1. $f(D_X)$ має стаціонарну підспрямованість, яка складається тільки з елемента $f(x)$. Покладемо X' рівною множині індексів цієї підспрямованості. Легко бачити, що X' є конфінальним в X і що $f(X') = \{f(x)\}$.

2. $f(D_X)$ не має стаціонарної підспрямованості. Оскільки $f(D_X)$ (θ) -збігається до $f(x)$, $f(D_X)$ має

зростаючу або спадаючу тілесну підспрямованість D' , яка (θ) -збігається до $f(x)$. $\square$

Теорема. Довільна функція f , яка діє на біповних ч.в.м., тоді і тільки тоді є (θ) -неперервною, коли f майже задовольняє (C_0) та задовольняє (C_1) і (C_2) .

Доведення (схема). Необхідність є прямим наслідком лем 1-3. Достатність доводиться від супротивного. Тобто припускається що існує деяка функція $f: A_0 \rightarrow A_1$, де A_0 і A_1 – якісь біповні ч.в.м., яка майже задовольняє (C_0) та задовольняє (C_1) і (C_2) , але не є (θ) -неперервною. Це означає, що існує така (θ) -збіжна спрямованість D на A_0 , спрямованість-образ $f(D)$ якої (θ) -розбігається. З (C_2) та з (θ) -збіжності D випливає, що $M(f(D)) \neq \emptyset$. Отже, D може (θ) -розбігатися тільки якщо $M(f(D))$ містить дві підспрямованості G' та G'' на A_1 , які (θ) -збігаються до різних (θ) -лімітів. Потім розбирається декілька випадків для різних "типів" G' та G'' , і кожний з них, за допомогою (C_0) та (C_1) , зводиться до протиріччя з тим, що спрямованість D (θ) -збігається. $\square$

Наслідок 1. Композиція двох (θ) -неперервних функцій є (θ) -неперервною функцією.

Доведення. Очевидно, що якщо функції $f_0: A_0 \rightarrow A_1$ та $f_1: A_1 \rightarrow A_2$ задовольняють (C_1) , то їх композиція $f_0 \circ f_1$ також задовольняє (C_1) ; те ж саме стосується (C_2) . Також легко побачити, що якщо якась функція $g: B_0 \rightarrow B_1$ майже задовольняє (C_0) та задовольняє (C_1) , то g також майже задовольняє наступній властивості: якщо $B \subseteq A_0$ – конус з вершиною v має властивість CC , то його образ $g(B)$ є або односторонньою множиною $\{g(v)\}$, або нескінченим конусом з вершиною $g(v)$, який теж має властивість CC . Отже, якщо f_0 та f_1 майже задовольняють (C_0) та задовольняють (C_1) і (C_2) то їх композиція $f_0 \circ f_1$ також має ці властивості. За характеристичною теоремою тоді $f_0 \circ f_1$ також є (θ) -неперервною. $\square$

Наслідок 2. Функція $f: A_0 \times A_1 \rightarrow B$, де A_0, A_1 , та B – біповні п.ч.в.м., є (θ) -неперервною тоді і тільки тоді, коли f є (θ) -неперервною за кожним аргументом.

Доведення. Зводиться до очевидної перевірки умов характеристичної теореми. $\square$

Наслідок 3. Для функцій вигляду $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ – розширена числова пряма та $n > 1$, поняття (θ) -неперервності не є еквівалентним поняттю неперервності відносно звичайної топології.

Доведення. Дійсно, в загальному випадку, наприклад, бінарні дійсні функції на задовольняють імплікації:

f є неперервною за кожним аргументом

$\Downarrow$

f є неперервною в звичайному сенсі, але, як це випливає з наслідку 2, (θ) -неперервні функції задовольняють цю імплікацію. $\square$

Висновок

Властивості (θ) -неперервних функцій, які сформульовано в наслідках 1 та 2, є двома з чотирьох умов можливості застосування методу Койманса побудови нетривіальних теоретико-множинних моделей нетипізованої теорії лямбда. Але вже зараз зрозуміло, що при переході від довільної біповної частково впорядкованої множини A до покоординатно впорядкованої сукупності $[A \rightarrow A]_\theta$ всіх (θ) -неперервних унарних операцій на A , може нарушитися умова біповності. А оскільки метод Койманса потребує залучення саме таких конструкцій, це природно підводить до потреби знаходження розповсюдження поняття (θ) -неперервності функцій на більш широкі класи частково впорядкованих множин.

Список використаних джерел

1. Барендрегт Х. Лямбда-числення. Его синтаксис і семантика / М.: Мир.-1985.– 606 с.
2. Лялецький О.О. Неперервність функцій в інтенціональних моделях лямбда-подібних числень (автореферат дисертації) / Київ, ВПЦ "Київський університет".–2009.–16 с.
3. Gierz G. et al. Continuous Lattices and Domains / Cambridge University Press.–2003.–628 p.
4. Hindley J., Longo G. Lambda calculus models and extensionality // Z. Math. Logik Grundl Math.–1980.–С. 289-310.
5. Koymans K. Models of the lambda calculus // Information & Control.–1982.–52.– С. 306-332.

Надійшла до редколегії 09.09.2011

УДК 004.416.3:004.891

Марценюк В.П., д.т.наук,
Федорук П.І., д.т.наук,
Пікулак М.В., асистент

Побудова бази знань в адаптивній навчальній системі

У статті розглянуто технологію застосування сценарних прикладів для побудови експертних правил бази знань адаптивної системи дистанційного навчання. Обробка експертних правил у домені-експерті реалізована на основі матричного методу, що дозволяє підсилити адаптивний ефект навчальної системи.

Ключові слова: адаптивне навчання, сценарні приклади, експертні правила, матричний метод.

V.P. Martsenyuk, PhD,
P.I. Fedoruk, PhD,
M.W. Pikulyak, assistant

Construction of knowledge base in adaptive learning system

The article reveals technology of use of script examples for expert rules construction in adaptive system of distance learning. Expert rules processing in domen-expert is realized with the help of matrix methods use, that let us strengthen adaptive effect of a learning system.

Key Words: adaptive learning, script examples, expert rules, matrix method.

E-mail: fedorukpavlo@gmail.com, mykolapikulyak@gmail.com

Статтю представив доктор фізико-математичних наук Буй Д.Б.

Вступ

Сучасні навчальні системи являють собою складні програмні комплекси, побудовані на різноманітних моделях представлення знань, серед яких найбільш широко використовуються продукційні правила, фрейми, семантичні мережі та логічні моделі.

Побудова індивідуальної навчальної траєкторії у системі дистанційного навчання і контролю знань здійснюється на основі домену-експерту, управління яким досягається за рахунок продукційних правил, кожне з яких представлено сценарним прикладом, розробленим експертом. Такі експертні системи проводять поточний аналіз засвоєння знань студентом, надають допомогу для ефективного продовження навчання у вигляді підказок і консультацій та направляють по індивідуальній навчальній траєкторії, яка найбільш точно відповідала поточному рівню його знань.

Застосування саме систем, заснованих на правилах, було обумовлене наступними причинами [1]:

1) модульна організація – кожне правило чи окрема його одиниця інформації можуть бути видалені, змінені або додані незалежно від всіх інших, завдяки чому спрощується представлення вхідної інформації, отриманої із студентської моделі та можливе розширення експертної системи по методу інкрементної розробки;

2) простота інтерпретації (або її ще називають прозорістю) – тобто здатність системи до пояснення прийнятих рішень та отриманих результатів, що дає можливість відслідковувати правила, які були активовані, та деталізувати факти, необхідні для запуску даного правила;

3) природність – наявність аналогії з пізнавальною діяльністю людини, оскільки правила відтворюють природний спосіб моделювання навчального процесу людиною.

Метою даної роботи є розробка і дослідження ефективності використання технології, яка б забезпечувала об'єднання експертних знань (правил) та реальних даних, отриманих за результатами вивчення певного навчального курсу з метою побудови індивідуальної траєкторії навчання студента у системі передачі знань.

Застосування експертних правил як математичного засобу побудови навчальної моделі забезпечує високу ступінь формалізації та зручність представлення логічних зв'язків у сценарних прикладах.

Структура бази знань навчального контенту

Згідно загальної структури навчальної системи під час адаптивного навчання відбувається взаємодія декількох модулів, починаючи від навчального, в якому студент отримує на опрацювання деяку порцію

теоретичного матеріалу, і завершуючи доменом-експертом, який, використовуючи результати тестування, сформовані студентським модулем, вибудовує подальшу траєкторію руху студента.

Оснoву такої розробленої системи складають дві взаємопов'язані бази знань: база знань навчального матеріалу та база сценарних прикладів навчальних знань (СПНЗ).

Перша реалізована на основі квантової моделі [2]. Таке представлення носить дидактичний характер з елементами застосування інженерії знань.

Весь навчальний курс S розглядається як складна ієрархія трьох рівнів (рис. 1):

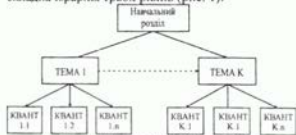


Рис. 1. Структура навчального курсу

$$S = \{R, T, K\}.$$

де $R = (R_i, P_R, H_R)$ – верхній рівень ієрархії, що відображає представлення матеріалу на рівні розділів.

Тут R_i – агрегат-розділ, тобто частина, що відповідає за розділ.

P_p – відношення черговості розділів,

H_R – оцінка загальних характеристик розділів (наприклад, час – необхідний для вивчення, форма контролю чи оцінка відносної складності матеріалу розділу для сприйняття студентом).

$T = (T_i, P_i, H_i)$ – рівень ієрархії, що визначає представлення матеріалу на рівні тем.

де T_i – множина тем, що входять до розділу,

P_T – відношення черговості (послідовність вивчення) тем.

H_T – сукупність загальних характеристик всіх тем.

$K = (K_i, P_K, H_K)$ – рівень ієрархії представлення матеріалу на рівні квантів (терміни, означення, аксіоми, теореми і т.д.).

де K_i — множина квантів, що входять в окрему тему.

P_K – відношення порядку на множині квантів,

H_k – множина характеристик квантів.

В межах кожної теми T_i множина квантів K_i представлена наступними квантовими моделями (рис. 2):



Рис. 2. Ієрархічна модель представлення навчального контенту

$K_{\text{ос}}$ – модель квантів основного матеріалу;

$K_{\text{д}}$ – модель квантів допоміжного матеріалу

організації, таблиці, малюнки, схеми, діаграми).

 K – модель квантів для закріплення

K – модель квантів для повторення;

 A_{ip} – модель квантів для повторення,

Кожен із рівнів забезпечує вирішення окремих задач навчального процесу. Якщо на рівні розділів вибудовується загальний план навчання, то на рівні квантів йдеться досягати навчального ефекту завдяки подачі на вивчення матеріалу окремими елементарними порціями.

Таку структуру навчального контенту можна зобразити у вигляді направленного графа (рис. 3).

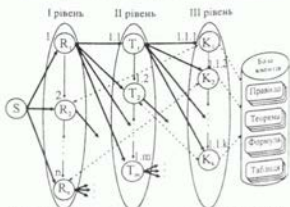


Рис. 3. Графовая структура начального контента

вершинами якого будуть елементи кожного з рівнів, а ребрами – відношення між цими елементами.

Між вершинами графа встановлені відношення трьох типів [3]:

1) ієрархічні, що утворюють деревоподібну структуру – у відповідності з якими структурним одиницям навчального матеріалу присвоєні індекси, що використовуються для їхньої ідентифікації та адресації (на малюнку позначені жирними стрілками). Індекси відображають шлях до відповідної вершини від кореневої.

2) оглядові послідовності – визначаються на множині вершин одного ієрархічного рівня і служать для опису послідовності переходів чи навігації по навчальному матеріалу. Завдяки адаптивній направленості навчального матеріалу такі послідовності представлені складними розгалуженими структурами. На малюнку позначені гіперребрами, а відношення між ним – тонкими стрілками.

3) семантичні, що утворюють мережеву структуру – вони пов'язують пари структурних одиниць навчального матеріалу, зміст яких має певну смислову кореляцію. Як правило, такі відношення двохнаправлені. На малюнку позначені пунктирними (двохнаправленими) стрілками.

Механізм формування бази СПНЗ

База сценарних прикладів представлена бібліотекою експертних правил, кожне з яких каже собою окреме педагогічне рішення, подане у вигляді математичної моделі, яка відображає відношення між навчальними квантами.

Такі сценарні приклади належать до експертних систем із прямим логічним введенням, і побудовані на твердженнях, що складаються із правил IF-THEN, фактів (значень студентських параметрів P_i) та інтерпретатора, який визначає правило, що має бути активоване в залежності від фактів у певний проміжок часу. Якщо параметри P_i в задачі задовольняють правило "IF", тоді виконується дія, що визначається частиною "THEN". Забезпечуючи природний спосіб опису процесів, що відбуваються під час навчального процесу, за допомогою правил будуються певні етапи міркувань, які відображають реакцію експертної системи на зміну вхідних даних.

Кожне окремо взяте продукційне правило після отримання вхідного рядка (антецедента) виробляє новий рядок (консеквент). Із групи

продукційних правил будуються сценарні приклади, кожен з яких складається із одного чи декількох антецедентів та одного консеквента.

Наприклад:

1) рівень знань – «низький» → подати на опрацювання додаткові кванти знань;

2) ступінь засвоєння – «середній» → подати на опрацювання незасвоєні кванти знань;

3) рівень знань – «низький» і час проходження тесту – «високий» → повторне опрацювання тих самих квантів.

Тобто, кожний сценарний приклад має наступну структуру:

ЯКЩО P_1 і P_2 і ... P_j , ТО R_k .

де P_i – студентські параметри,

R_k – номер відповідного правила.

Використання СПНЗ у адаптивній системі передбачає два етапи: складання (побудова) і застосування. Перший етап індуктивний, другий – дедуктивний.

На першому етапі відбувається опрацювання даних багаточисельних спостережень за поведінкою студента під час засвоєння квантів інформації і на основі отриманих знань будується певне правило. Другий етап передбачає застосування описаного правила для випадку, якщо йому відповідають вхідні дані.

На етапі побудови виявляються деякі закономірності, характерні для засвоєння знань. Сукупність подібних закономірностей виступає в подальшому моделлю навчальної області, яка і складає основу бази знань. Саме на основі моделі вирішується задача розпізнавання властивостей студентських параметрів P_i , подальше продовження навчання, зв'язок засвоєних квантів з невивченими, тобто вирішення задачі побудови індивідуальної траєкторії навчання по одному із навчальних режимів.

Побудова сценарних прикладів достатньо тривала та трудомістка процедура, яка вимагає від інженера з інформаційних технологій (експерта) паралельно із високими професійними знаннями з області інформаційних дисциплін також глибокого розуміння основ психології, педагогіки, системного аналізу та математичної логіки. Адже кожне правило повинно відтворювати природний стиль поведінки користувача під час здобуття знань. Побудовані правила набувають вигляду готових фрагментів знань у відповідності із структурами, закладеними експертом.

Від наповненості та професійності побудови сценарних прикладів залежить, наскільки вони достовірно та повною мірою відображають весь можливий сценарій поведінки студента.

Вся сукупність сценарних прикладів – це база знань, що складається з різного роду правил продукцій, кожне з яких містить множину посилань, що описують деяку навчальну ситуацію та множину дій, які необхідно виконати у випадку, якщо посилання будуть задоволені.

Кожну окрему навчальну ситуацію можна представити у вигляді направленного графа, коренем якого є вихідний стан – початковий рівень знань студента, вершини відповідають різним станам (значенням P_i), а ребра – операціям, що виконуються. Процес вивчення студентом навчального курсу полягає у переміщенні по ребрам від вершини до вершини аж до досягнення цільових вершин, що відповідають за завершальні етапи навчання. У тих випадках, коли процес пошуку набуває розгалуженого вигляду, рішення приймається на основі вагових коефіцієнтів, які експерти присвоїли різним ребрам.

Кожен з параметрів P_i може мати по три терми (значення): «низький», «середній», «високий». Кожен терм характеризується діапазоном значень з проміжкою $[0..1]$, «низький» – $[0..0.4]$, «середній» – $[0.4..0.8]$, «високий» – $[0.8..1]$.

Приклад. Правило 1. Якщо 1) рівень знань – «середній» і 2) час проходження – «низький» і 3) ступінь засвоєння – «середній» і 4) швидкість проходження – «низька» і 5) якість засвоєння знань – «низька», то з достовірністю 0.3 можна запустити правило 1, яке навчальну траєкторію спрямовує на повторне вивчення незасвоєного матеріалу.

Як бачимо, з кожним правилом пов'язаний коефіцієнт достовірності (КД), що приймає значення від 0 до 1, який відображає більшу чи меншу достовірність активації відповідного правила.

Кожне правило може бути представлене наступним чином:

<предмет> <об'єкт> <визначення> <оцінка>.

Значна частина таких правил – це результат багаточисельних висновків та допоміжних міркувань. Співставлення у правилі частин «ЯКЩО» із фактами може породити так званий ланцюг виведення.

Наприклад, міркування «із A виходить B » ($A \rightarrow B$) може бути деталізоване наступним ланцюгом виведення допоміжних подій:

$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ або $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$.

Так, на рис. 4 відображено, як система використовує правила для висновку про те, що студента необхідно направити на повторне вивчення певної теми із залученням додаткових квантів знань.



Рис. 4. Приклад ланцюга виведення

Правила дають можливість на кожному кроці оцінити навчальну ситуацію і виконати відповідні дії. Їх використання спрощує пояснення того, що і як зробила програма, тобто яким способом вона прийшла до даного висновку.

Наведемо зразок створення сценарного прикладу:

Таблиця 1

Сценарний приклад

ЯКЩО				ТО
P_1	P_2	...	P_i	$R_{i,j}, j=1,2,3$
C	H		H	$R_1 \rightarrow 0.1$
...				...
C	B		C	$R_2 \rightarrow 0.4$
...				...
B	C		B	$R_3 \rightarrow 0.9$

де $P_1, P_2, \dots, P_i$ – параметри оцінки засвоєння знань студентом;

R_1, R_2, R_3 – відповідно режим перенавчання, донавчання та навчання;

B; C; H – відповідно «високий», «середній», «низький» значення параметрів P_i .

Кожен рядок табл. 1 представляє ланцюжок між можливими значеннями параметрів P_i та значеннями імплікації R_i , що відповідає їм.

Наведений сценарний приклад доцільно представити у формі термінального кванта 2-го рівня, що дозволяє подальше його опрацювання за допомогою рівнянь алгебри предикатів [4]:

$$\begin{aligned} & P_1 | C : P_2 | H : \dots : P_i | H : R_1 (\rightarrow) = 0.1 \\ & \dots \\ & P_1 | C : P_2 | B : \dots : P_i | C : R_2 (\rightarrow) = 0.4 \\ & \dots \\ & P_1 | B : P_2 | C : \dots : P_i | B : R_3 (\rightarrow) = 0.9 \end{aligned} \quad (1)$$

З продукційних рядків (1) формується набір «правил» між об'єктами окремого уроку: база даних об'єктів і база даних правил. Отримавши відповіді на тестові запитання у вигляді числових значень навчальних параметрів (база даних об'єктів), адаптивний алгоритм формує подальшу траєкторію навчання шляхом пошуку СПНЗ через об'єкти.

Принципи роботи експертної системи

Експертна система, що покладена в основу розробленої навчальної програми, складається із бази знань (бази знань навчального контенту та бази СПНЗ), робочої області (значень студентських параметрів) і програмного інтерпретатора. Робоча область постійно оновлюється за результатами, що поступають від студентського модуля.

Відповідно до результатів проходження контрольного тестування для кожного того, хто навчається, визначаються значення параметрів студентської моделі P_i . Дані параметри передаються в експертну систему, на основі яких та із використанням відповідних предикатних правил програмний інтерпретатор формує відповіді системи у вигляді експертних знань. Дані знання представляють набір квантів, необхідних для продовження навчального процесу – рис. 5.

Така експертна система функціонує як паралельна програма, у якій правила діють як незалежні процесори знань. Технологія експертних систем може включати спеціальні мови експертних систем, а також програмні і

апаратні засоби, призначені для забезпечення розробки та експлуатації даних систем [1].

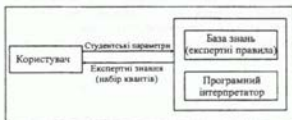


Рис. 5. Схема процесу функціонування експертної системи

Окремий крок (елементарний цикл) програмного інтерпретатора відбувається за наступною схемою: умови правил співставляються із поточними студентськими параметрами, і ті правила, умовам яких задовольняють поточні значення, стають претендентами на виконання. Потім за певним критерієм виконується вибір одного правила серед претендентів і подальше його виконання (тобто виконання дій, вказаних у правилі) – рис. 6.



Рис. 6. Логічна схема роботи програмного інтерпретатора

Застосування в якості цих правил у розглянутій експертній системі сценарних прикладів дозволяє:

- 1) змодельовати механізм мислення та поведінки студента стосовно до прийняття рішення у певній предметній галузі знань;
- 2) сформувати набір навчальних квантів, що характеризують подальший напрямок індивідуальної траєкторії навчання;
- 3) завдяки ієрархічній структурі побудови та можливості отримання з протоколу інформації про правила, що були активовані, одержати детальне роз'яснення, чому саме затушене дане правило для певного студента та обґрунтувати доцільність його використання.

Важливою рисою застосування експертних правил є їх здатність до постійного наповнення

по мірі додавання нових правил та коректування існуючих. Це дає змогу шляхом внесення поправок уникнути розбіжності та помилок у знаннях експерта чи в системі, тим самим покращити її продуктивність, що веде до підсилення адаптивного ефекту процесу передачі знань.

Методи фільтрації експертних правил

В процесі опрацювання експертних правил виникають випадки, коли під входні параметри можуть бути активовано декілька правил. Для того, щоб програмний інтерпретатор зміг визначити з декількох можливих той СПНЗ, який може бути найбільш ефективний, необхідно в кожному сеансі роботи інтерпретатора значення P_i студентських параметрів (що знаходяться у правилах) привести у відповідність із отриманими за допомогою так званих процедур «кваліфікації» або «фільтрації» [5].

Уніфікація виступає фундаментальним механізмом, що лежить в основі роботи продукційних систем. В цілому вона дозволяє відповісти на питання, чи існують такі комбінації підстановок змінних, які дозволяють отримати дві логічно ідентичні формули [5].

Для вирішення подібних конфліктних ситуацій можна застосувати кілька методів.

Ньюелл і Сеймон використали підхід, в якому правила, що введені у систему в першу чергу, набувають по замовчуванню найвищий пріоритет [6].

У мові OPS5 найвищий пріоритет отримують правила з більш складними шаблонами [7].

У мові CLIPS правила мають по замовчуванню однаковий пріоритет, якщо експертом не присвоєно інший пріоритет деяким з них. Швидкий засіб співставлення із шаблонами тут досягається за рахунок використання так званого Rete-правил [8]. Алгоритм, що використовує дане правило, містить повну інформацію про всі шаблони і може активувати будь-яке потрібне правило, не перевіряючи при цьому кожне із них. Це досягається завдяки тому, що в Rete-алгоритмі в кожному циклі контролюються тільки ті значення, які за результатами тестування зазнали зміни. Незмінені входні параметри даним алгоритмом не опрацьовуються.

Описані вище методи використовують одну з наступних процедур:

1) вичерпний перебір – пошук та активація необхідного правила відбувається шляхом зваженого аналізу всіх можливих правил;

2) вибір правила за допомогою оцінки – вибирається перше знайдене правило, яке задовільняє необхідні умови;

3) управління за допомогою метаправил – активується те правило, яке необхідно запустити в кожній конкретній ситуації в залежності від стану системи.

У розроблений нами навчальній системі обробка сценарних прикладів та подальша фільтрація виконана матричним методом із застосуванням марковського алгоритму [9]. Завдяки попередній індексації семантичних правил у базі при співпаданні входних даних із шаблоном активується перше знайдене правило. Якщо правило з найвищим пріоритетом не підпадає під входні дані, то береться до уваги наступне правило в порядку пріоритету і т.д.

В подальшому для вдосконалення роботи системи та з метою більш ефективного опрацювання входних параметрів пропонується застосувати Rete-алгоритм.

Справа в тому, що після вивчення додаткових квантів або повторного проходження попередніх значення деяких студентських параметрів залишаються незмінними. У випадку застосування Rete-алгоритму в кожному циклі контролюються тільки ті значення, які за результатами тестування зазнали зміни. Завдяки цьому немає необхідності в кожному циклі співставляти всі факти (параметри) з кожним правилом, що істотно впливає на підвищення швидкості співставлення параметрів з антецедентами, оскільки параметри, що не зазнали змін від одного тестування до наступного, ігноруються системою.

Висновок

В роботі проаналізовано складові розробки експертних правил для вирішення задачі побудови індивідуальної навчальної траєкторії в адаптивній системі передачі знань. Пошук експертною системою можливих варіантів продовження навчання заключається у виборі домен-експертом набору правил для найбільш ефективного продовження навчання і подальшого їх застосування.

Для обробки експертних правил та пошуку найбільш ефективного напрямку продовження навчання запропоновано матричний метод із застосуванням марковського алгоритму, що дає

можливість за рахунок оптимізації обчислень числових параметрів підсилити адаптивний ефект процесу передачі знань.

Вирішення цієї задачі дозволяє значно підвищити ефективність навчання за рахунок забезпечення індивідуального підходу до кожного студента шляхом подання на вивчення навчального матеріалу за наперед розробленими сценарними прикладами.

Список використаних джерел

1. Джарратано Дж. Экспертные системы: принципы разработки и программирование / Джозеф Джарратано, Гари Райли. – 4-е издание: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д.Вильямс», 2007. – 1152 с.
2. Федорук П.І. Адаптивна система дистанційного навчання та контролю знань на базі інтелектуальних Інтернет-технологій / П.І. Федорук. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету ім. Василя Стефаника, 2008. – 315 с.
3. Башмаков А.И. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем [Текст] /

А.И. Башмаков, И.А. Башмаков. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 2003. – 616 с.

4. Сироджа И.Б. Квантовые модели и методы искусственного интеллекта для принятия решений и управления / И.Б. Сироджа. – К.: Наук. думка, 2002. – 427 с.

5. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта: Пер. с франц. / Ж.-Л. Лорьер. – М.: Мир, 1991. – 558 с.

6. Ньюэлл А. GPS – программа, моделирующая процесс человеческого мышления / А. Ньюэлл, Г. Сеймон // Вычислительные машины и мышление. М: Мир, 1967, С. 283–300.

7. Режим доступу: <http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/ru/OPS5>.

8. Частиков А.П. Разработка экспертных систем. Среда CLIPS / А.П. Частиков, Т.А. Гаврилова, Д.Л. Белов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 608 с.

9. Кирий В.Г. Применение марковской модели для оценки уровня знаний при адаптивном тестировании / В.Г. Кирий, Д.А. Ульянов // Вестник ИрГТУ. – 2004. – №3 (19). – С. 21–26.

Надійшла до редколегії 31.05.11.

УДК 618.3

Марченко О.О., доц., к.ф.-м.н.

Циганок Д.В.*, аспірант

Засоби та методи автоматичного заповнення онтологічних баз знань

Одним з ключових питань щодо майбутнього семантичного вебу (semantic web) є проблема поповнення семантичної мережі (онтології) структурованими даними. В даній статті розглянуто, як з неструктурованої або напів-структурованої інформації в мережі Інтернет отримувати дані для поповнення онтології.

Велика кількість інформації опублікована в Інтернеті на природній мові. Якщо перенести її в структуровану базу знань, яка містить факти про сутності та відношення між ними, можна створити автоматично наповнювану онтологію.

Ключові слова: семантичні мережі, системи безперервного навчання, макрочитання, напів-контрольовані методи навчання

Marchenko O.O., docent, PhD

Tsyganok D.V., PhD student

Automatically populated ontological knowledge bases

A key question regarding the future of the semantic web is "how will we acquire structured information to populate the semantic web on a vast scale?". The article describes how to obtain data from unstructured or semi-structured sources in the Internet for populating the ontology.

A great wealth of knowledge is presented on the web in natural language form. Translating this into a structured knowledge base that contains facts about entities and relations between those entities, the automatically populated ontology could be developed.

Key Words: semantic web, never-ending language learner, macro-reading, semi-supervised bootstrap learning methods.

*E-mail: denis.tsyganok@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Дана стаття являється оглядовою і оснований на працях вчених університету Карнегі-Меллон [1-4].

Центральним об'єктом їх дослідження є система безперервного навчання природної мови. Під «системою безперервного навчання» розуміють комп'ютерну систему, яка постійно працює, та виконує два типи задач:

1) Задачу зчитування: добування інформації з текстів Мережі для подальшого наповнення бази знань, яка складається зі структурованих фактів.

2) Задачу навчання: кожного дня навчатися зчитувати краще, ніж напередодні. Тобто повернутися до вчорашніх текстових джерел та отримати з них більше інформації з більшою точністю.

Основний принцип, який лежить в основі дослідження – це те що більшість інформації в Інтернеті представлена по декілька разів порізно (один й той самий факт може бути викладений у різній формі). Саме це дозволяє сконцентруватися на "макрочитанні" замість "мікрочитання" і досягти успіху у машинному навчанні.

У одній зі статей [4] описується загальний підхід до побудови системи безперервного навчання природній мові, що використовує методи напів-керованого навчання, різноманітні методи зчитування, та гнучке представлення бази знань, яке дозволяє використовувати результати цих методів. Автори розглядають архітектурні принципи для реалізації цього підходу.

Також приводиться прототип реалізації даного підходу, названого NELL. На момент написання статті NELL отримував два види знань:

1) знання про те, які іменникові словосполучення до яких зазначених семантичних категорій відносяться, наприклад, категорії місто, компанія, спортивна команда.

2) знання про те, які пари словосполучень які семантичні зв'язки задовольняють, наприклад, містить-знаходиться (організація, міське роташування).

NELL навчається здобувати ці два типи знань багатьма способами. Вивчає шаблонні вирази для отримання знань з текстів Мережі, навчається тому, як отримувати ці знання з напів-структурованих даних, таких як таблиці та списки. Система також вивчає морфологію

закономірності екземплярів категорій, та вивчає ймовірнісні правила диз'юнкції Хорна, які дозволяють зробити висновок про нові екземпляри зв'язків з інших зв'язків, які вже вивчені.

Пов'язані роботи

Розглянемо деякі попередні роботи у напрямку машинного навчання. Окремо можна було виділити такі наступні роботи: SOAR (Laird, Newell, and Rosenbloom 1987), PRODIGY (Carbonell et al. 1991), EURISKO (Lenat 1983), ACT-R (Anderson et al. 2004), and ICARUS (Langley et al. 1991). На відміну від цих робіт, вчені з університету Карнегі-Мелоні сфокусувалися на напів-керованому навчанні, з меншим акцентом на вирішення проблеми пошуку. Тим не менш, ранні роботи інших вчених забезпечують різноманітність архітектурних принципів. Наприклад роль БЗ (база знань, KB, knowledge base) у новому підході схожа на роль "дошки" ("dashboard") у ранніх системах розпізнавання мови [Erman, 1980], а фреймо-орієнтоване представлення БЗ це аналог системи THEO (Mitchell, 1991).

Існують також попередні дослідження «нескінченного» навчання, такі як Thurn та Mitchell (1995), які фокусувалися на використанні раніше вивчених функцій (наприклад, функції наступного стану робота) для впливу на вивчення нових функцій (наприклад функції контролю робота). Banko та Etzioni (2007) розглядали налаштування «нескінченного» навчання, коли агент будуватиме теорію домену, та досліджує різні стратегії для прийняття рішення, а саме, яку з багатьох задач навчання вирішувати наступною. І хоча система, що розглядається використовує простішу стратегію - тренування усіх функцій на кожній ітерації, вибір що вивчати на наступному кроці - є важливим для системи «нескінченного» навчання. [2]

Підхід авторів використовує напів-контрольовані методи навчання з самоналаштуванням, які починають з невеликого набору мічених даних, навчають модель, а далі використовують цю модель для мічення інших даних. Yarowsky (1995) використовує навчання з самоналаштуванням при тренуванні класифікатора для визначення змісту слів. Такий підхід до навчання також успішно використовується у багатьох програмах, включаючи класифікацію веб-сторінок (Blum та Mitchell 1998), та класифікацію іменованих сутностей.

Але такі підходи часто можуть страждати від «семантичного дрейфу», коли помилки мічення у процесі навчання можуть накопичуватися (Riloff та Jones 1999; Curran, Murphy, та Scholz 2007). Існує доведення того, що «обмеження» навчального процесу допомагає пом'якшити цю проблему. Наприклад, якщо класи є взаємовиключними, вони можуть давати протилежні екземпляри один для одного (Yangarber 2003). Співвідношення аргументів також можна перевірити на відповідність типів, для забезпечення того, що вони мають очікуваний тип (Pascas, 2006). Carlos(2010), застосовував такі стратегії і використовував декілька методів зчитування, які мають бути узгоджені між собою.

Pennacchiotti та Pantel (2009) презентували фреймворк для об'єднання результатів декількох методів зчитування, який вони назвали Семантичний Ансамбль ("Ensemble Semantics"). Цей підхід використовує більш складний метод ранжування ніж новий, що використовують Mitchell та ін., але він не є ітераційним. Проте саму ідею можна додатково використати для поліпшення ранжування.[4]

Інша схожа робота демонструє, що методи добування фактів на основі шаблонів та на основі списків можуть бути об'єднані для досягнення істотних поліпшень у повторних викликах (Etzioni, 2004). Downey, Etzioni, та Soderland (2005) представили ймовірнісну модель для використання та навчання «мультизчитувачів» (multiple extractors), де зчитувачі (в їхній роботі різні шаблонні зчитувачі) роблять некорельовані помилки.

Nahm та Mooney (2000) вперше продемонстрували, що правила виводу можуть бути отримані при зчитуванні вірогідних фактів з тексту.

Роботи [1-4] також можуть бути розглянуті як приклад багатозадачного навчання, у якому кілька різних функцій навчаються разом, як у (Caruana 1997; Yang, Kim, та Xing 2009), з метою поліпшення точності навчання.

Підхід

Сам підхід будується на основі спільної бази знань (БЗ), яка безперервно зростає та використовується сукупністю підсистем навчання/зчитування, які реалізують додаткові методи здобування знань. Початкова база знань визначається як онтологія (колекцію предикатів що визначають категорії та зв'язки), та початкові приклади для кожного предикату у цій онтології. Мета підходу - безперервно нарощувати базу

знань шляхом зчитування, та навчання для ще кращого зчитування [2].

Екземпляри категорій та зв'язків, які додаються до БЗ поділяються на факти-кандидати (candidate facts) та вірогідні факти (beliefs). Підсистемні компоненти можуть зчитувати з БЗ та зв'язуватись з іншими зовнішніми джерелами (такими як Корпус або Мережа), а потім пропонувати нові факти-кандидати. Компоненти забезпечують ймовірність для кожного запропонованого кандидата та джерела з якими він пов'язаний. Інтегратор знань (ІЗ) перевіряє запропоновані факти-кандидати і найбільш ймовірні перетворює у вірогідні факти. У початковій реалізації цей цикл повторюється ітераційно. На кожній ітерації, кожна підсистема працює з урахуванням нинішньої БЗ, а потім ІЗ приймає рішення, які з запропонованих кандидатів додаються до бази знань. БЗ зростає від ітерації до ітерації, додаючи все більше і більше вірогідних фактів, які потім використовуються підсистемами для перенавчання себе для кращого зчитування на наступній ітерації. Таким чином підхід можна розглядати як реалізацію зв'язного, напів-керованого методу навчання, в якому різні підсистеми навчаються та діляться додатковими видами знань під наглядом ІЗ. Можна розглядати цей підхід як наближення алгоритму максимізації очікування (МО), де крок «очікування» включає в себе ітеративну оцінку істинності для дуже великого набору фактів-кандидатів у загальній БЗ, а крок «максимізації» включає перенавчання методів зчитування різних підсистем.

Цей вид ітеративного навчання може постраждати, якщо помилки навчання будуть накопичуватись. Щоб пом'якшити цю проблему, автори дозволяють системі взаємодіяти з людиною протягом 10-15 хвилин кожного дня, щоб допомогти їй залишатися у допустимих межах. Однак вони намагаються обмежити людське втручання.

Наступні принципи важливі для реалізації такого підходу до навчання [1]:

1) Використовувати підсистеми, які роблять некорельовані помилки. Коли підсистеми роблять некорельовані помилки, ймовірність того, що вони всі зроблять одну й ту саму помилку – низька, набагато нижча за встановлений поріг.

2) Вивчати різні типи взаємопов'язаних знань. Наприклад, вони використовують одну компоненту для вивчення як виявляти екземпляри предикатів з текстових джерел, а

інша компонента вивчає як виводити екземпляри зв'язків з інших вірогідних фактів у БЗ. Це дає декілька незалежних один від одного джерел отримання одного типу вірогідних фактів.

3) Використовувати пов'язані напів-керовані методи навчання для використання обмежень між предикатами, що вивчаються (Carlson, 2010). Це потрібно, щоб забезпечити можливість організації зв'язку категорій та зв'язками між ними у таксономію, яка визначає яка категорія є підмножиною іншої, та які пари категорій є взаємовиключними. Крім того, визначає очікувану категорію для кожного з аргументів функції зв'язку, для перевірки типів. Підсистемні компоненти та ІЗ можуть отримати вигоду з методів, які використовують зв'язки.

Реалізація

NELL складається з таких підсистем [4]:

1) Блок зчитування пов'язаних шаблонів [Coupled Pattern Learner (CPL)]: модуль, який зчитує дані з текстів, вивчає та використовує контекстні шаблони. Наприклад «мер міста X» – є шаблоном для отримання назв міст (екземпляр категорії місто), або «X грає за Y» означає, що X – гравець, а Y – назва команди (приклад екземплярів категорій «гравець» та «команда», та зв'язку «грати» між ними). CPL використовує статистику спільної появи словосполучень та контекстних шаблонів (обидва визначаються використовуючи залежності між частинами мови) для навчання зчитувачів шаблонів для кожного пов'язаного предикату, а потім використовуючи ці шаблони для знаходження додаткових екземплярів для кожного предикату. Взаємозв'язок між предикатами використовується для фільтрації шаблонів, які є більш загальними (наприклад «X – людина» більш загальне, ніж «X – гравець команди»). CPL детально описаний у роботі Carlson (2010). Вірогідність зчитування підсистемою CPL екземпляра в кандидата є евристичним і вираховується за деякою формулою. В експериментах, блоку CPL було дано 2 млрд речень, які були сгенеровані пакетом OpenNLP для зчитування, а також речення з 500 млн веб-сторінок з множини знайденої парсером ClueWeb09 (Callan) [3].

2) Блок SEAL (CSEAL): модуль, для зчитування напів-структурованих даних, який задає запити до веб-сторінок і для множини вірогідних фактів з кожної категорії чи відношення у таблицях та списках знаходить нові екземпляри для відповідних предикатів. (Наприклад, якщо відомо що «Динамо» та

«Шахтар» є футбольними командами, то зустрівши ці назви у списку разом з «Металістом» модуль має занести дані, що «Металіст – є футбольною командою» у факти-кандидати). CSEAL використовує взаємно-виключні відношення для знаходження протилежних екземплярів, які використовуються для фільтрації надто загальних списків і таблиць. CSEAL також був описаний Carlon (2010) і базується на вихідному коді розробленому Wang та Cohen (2009). Фактам-кандидатам отриманим блоком CSEAL також призначаються ймовірності (тобто «Металіст – є футбольною командою» з деякою ймовірністю) у той самий спосіб, що й для модулю CPL [3].

3) Пов'язаний морфологічний класифікатор (CMC): множина бінарних L2-регулярних логістичних регресійних моделей – одна для кожної категорії – яка класифікує іменникові словосполучення, базується на різноманітних морфологічних особливостях (слова з великої літери, частини мови, і т.п.). Вірогідні факти з БЗ використовуються як навчальні екземпляри, але на кожній ітерації CMC обмежується предикатами, які мають принаймні 100 доданих екземплярів. Так само як і в CSEAL, взаємно-виключні взаємозв'язки використовуються для виявлення протилежних екземплярів. CMC перевіряє факти-кандидати запропоновані іншими компонентами, та класифікує до 30 нових вірогідних фактів на один предикат за одну ітерацію, з мінімальною ймовірністю в 0.75. Ці евристичні заходи допомагають забезпечити високу точність [4].

4) Блок навчання правил (RL): Алгоритм вивчення зв'язків першого порядку, схожий на FOIL (Quinlan та Cameron-Jones 1993), який навчається ймовірнісним диз'юнкціям Хорна. Ці вивчені правила використовуються для виводу нових екземплярів відношень з інших, які вже є у базі знань.

Висновки

Задача макро-читання для заповнення онтології є набагато більш простим завданням ніж вирішення повної задачі розуміння природної мови (NLP) [1]. Відзначимо також, що мікро-читання буде також важливим, особливо для анотування окремих веб-сторінок та для зчитування інформації, яка з'являлася в інтернеті лише зрідка. Цікавою задачею може бути покращення мікро-читання використовуючи результати макро-читання. Щодо результатів реалізації вище описаної системи, вчені з

Карнегі-Мелонн, після запуску через 67 днів отримали 242 000 фактів з оцінкою точності в 74%. Цей результат показує переваги використання різноманітних методів зчитування знань, а також бази знань, яка дозволяє зберігати факти-кандидати та вірогідні факти.

Результати можна покращувати використовуючи деякі оптимізації, наприклад такі як:

- 1) використання більш складної ймовірнісної моделі для управління роботою системи;
- 2) додати можливість вилучення вірогідних фактів з системи;
- 3) для поліпшення ранжування розвинення ідеї, яка використовується у Семантичному Ансамблі;
- 4) оптимізація людського втручання у систему;
- 5) мінімізація впливу на систему початкових даних про екземпляри категорій та зв'язки між ними.

Список використаних джерел

1. Coupling Semi-Supervised Learning of Categories and Relations. A. Carlson, J. Betteridge, E.R. Hruschka Jr. and T.M. Mitchell. In Proceedings of the NAACL HLT Workshop on Semi-supervised Learning for Natural Language Processing, 2009.
2. Populating the Semantic Web by Macro-Reading Internet Text. T.M. Mitchell, J. Betteridge, A. Carlson, E.R. Hruschka Jr., and R.C. Wang. Invited Paper, In Proceedings of the International Semantic Web Conference (ISWC), 2009.
3. Coupled Semi-Supervised Learning for Information Extraction. A. Carlson, J. Betteridge, R.C. Wang, E.R. Hruschka Jr. and T.M. Mitchell. In Proceedings of the ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM), 2010.
4. Toward an Architecture for Never-Ending Language Learning. A. Carlson, J. Betteridge, B. Kiesel, B. Settles, E.R. Hruschka Jr. and T.M. Mitchell. In Proceedings of the Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 2010.

Надійшла до редколегії 26.05.11

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.

Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу

На основі композиційно-номінативного підходу побудовано та досліджено нові класи спеціальних програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Запропоновано композиційно-номінативні мультимодальні та епістемічні логіки. Досліджено семантичні властивості композиційно-номінативних логік темпорального, мультимодального та епістемічного типу на реномінативному та першопорядкових рівнях.

Ключові слова: логіка, предикат, композиційно-номінативний підхід, семантика.

E-mail: trp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Бурхливий розвиток інформаційних технологій виводить на перший план задачу створення надійних та ефективних програмних систем. Успішне вирішення цієї задачі неможливе без широкого використання апарату математичної логіки. На даний момент розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1, 2]), які з великим успіхом використовуються в програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування. На основі класичної будуються спеціальні логіки, орієнтовані на вирішення тих чи інших конкретних задач. Важливе місце серед них посідають модальні логіки [3–5], в першу чергу темпоральні та епістемічні. На базі темпоральних логік побудовано низку систем специфікації та верифікації програм. Епістемічні логіки застосовуються для опису інтелектуальних інформаційних систем, баз даних і баз знань.

Поява нових застосувань логіки в інформатиці та програмуванні висвітила принципи обмеження класичної логіки предикатів та будованих на її основі спеціальних логік, що істотно ускладнює їх використання. Класична логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, вона недостатньо враховує неповноту, частко-

M.S.Nikitchenko, Doctor Sciences (Phys.-Math.),
Professor, O.S.Shkilniak, PhD, S.S.Shkilniak,
Doctor Sciences (Phys.-Math.), Ass. Professor.

Construction of modal logics of temporal and epistemic type on the basis of composition-nominative approach

On the basis of composition-nominative approach we specify and investigate new classes of special-purpose program-oriented logical formalisms. We introduce composition-nominative multimodal and epistemic logics. Semantic properties of composition-nominative logics of temporal, multimodal and epistemic type at renominative and first-order levels are studied.

Key words: logic, predicate, composition-nominative approach, semantics.

вість, структурованість інформації про предметну область. Водночас в програмуванні широко використовуються часткові відображення над складними іменними (номінативними) даними.

Обмеження класичної логіки предикатів виводять на перший план проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів на спільній для логіки і програмування основі. За таку основу природно взяти композиційно-номінативний підхід [6] до побудови моделей програм і орієнтованих на них логік. На базі цього підходу розроблено низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. Важливе місце серед них посідають композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [7], які синтезують можливість традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [8]. Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, особливе значення мають транзитивні КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого. Окремими їх випадками є загальні транзитивні та темпоральні КНМЛ, вони вивчалися, зокрема, в [7–9].

Метою даної роботи є побудова нових класів модальних логік часткових предикатів на основі композиційно-номінативного підходу. Запропоновано композиційно-номінативні мультимодаль-

льні логіки, в межах яких виділено КНМЛ епістемічного типу. Описано семантичні моделі та мови і досліджено семантичні властивості традиційних КНМЛ темпорального, мультимодального та епістемічного типу на реномінативному та першопорядкових (кванторному та кванторно-екзакційному) рівнях.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [8, 9].

1. Основні принципи композиційно-номінативного підходу

На основі розгляду з семантичного погляду основних конструкцій традиційних мов програмування та їх формалізацій можна зробити висновки, які є основоположними для побудови програмно-орієнтованих логік.

- формалізація здійснюється на базі різних видів алгебр даних та програмних алгебр (алгебр функцій);

- побудова складних даних із простіших відбувається на основі відношень іменування (номінативних відношень);

- побудова складних функцій, що задають семантику програм (програмних функцій), відбувається за допомогою композицій (алгебраїчних операцій над функціями);

- фундаментальними властивостями програмних функцій є їх еквівалентність та монотонність.

Таким чином, провідну роль при побудові програмно-орієнтованих логік посідають алгебраїчні та композиційно-номінативні аспекти. Тому основою побудови нових логік є композиційно-номінативний підхід (КНП). Він задає принципи визначення і дослідження формальних мов програм та логічних систем. Композиційно-номінативний підхід походить від розробленого В.Н.Редьком композиційного програмування і є подальшим його розвитком. Цей підхід опирається на загальнометодологічний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного і базується на таких основних принципах:

- інтегрованості інтенціональних та екстенціональних аспектів; це означає, що поняття мають бути подані в єдності їх інтенціональних та екстенціональних аспектів, причому інтенціональний аспект в цій єдності має провідну роль (інтенціонал традиційно тлумачимо як зміст поняття, екстенціонал – як його обсяг);

- пріоритетності семантики над синтаксисом; це означає, що семантичний та синтаксичний аспекти об'єкта мусять спочатку вивчатись окремо, потім сумісно із пріоритетом семантичного аспекту;

- композиційності;
- номінативності.

Принцип композиційності трактує засоби побудови програм (функцій, предикатів) як алгебраїчні операції (композиції). Для логіки це означає зведення логічних зв'язок і кванторів до композицій предикатів.

Принцип номінативності вимагає використання відношень іменування для побудови семантичних моделей та опису програм (функцій, предикатів).

Наведені принципи визначають напрямки та особливості експлікації основних понять логіки та програмування, вони є основою, ядром композиційно-номінативного підходу до побудови програмних і логічних систем.

Згідно КНП програмні поняття формалізують за допомогою композиційно-номінативних систем. Центральним поняттям логіки є поняття предиката. З математичного погляду предикати – це спеціальні функції вигляду $D \rightarrow \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних (булевих) значень. Тому класи предикатів можна задавати композиційно-номінативними системами. Це дозволяє подавати і вивчати логічні та програмні системи в єдиному стилі.

Логіки, збудовані на основі КНП, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Передумовою їх виникнення стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язку нових задач інформатики й програмування.

КНЛ будують за семантико-синтаксичною схемою. Це означає наступне.

1. Спочатку задаємо інтенціональні (змістовні) моделі логік. Такі моделі найперше визначаються рівнями розгляду даних, тому для їх задання фіксуємо рівень абстракції розгляду. Інтенціональні моделі індукують мову логіки відповідного рівня.

2. Будуємо відповідні розглянутому рівню екстенціональні моделі, які задають семантичні аспекти логік, – предикатні композиційні системи. Предикатна композиційна система – це трійка (D, Pr, C) , де D – множина (клас) даних, Pr – множина (клас) предикатів, заданих на D , C – множина (клас) композицій (операцій) породження нових предикатів, вона задається множиною базових композицій відповідного рівня. Така система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних (D, Pr) та алгебру предикатів (Pr, C) , терми якої трактуються як формули мови логіки. Центральним тут є поняття композиції, адже саме композиції визначають універсальні методи

побудови предикатів, виступаючи ядром логіки певного типу.

3. Будемо формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти логік. Основні їх типи – формальні системи гільбертівського типу і системи генценівського типу (секвенційні числення, системи натурального виведення).

Побудову КНЛ починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня розгляду даних. Можна виділити пропозиційний, сингулярний (тут не розглядаємо) та номінативний рівні.

На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно, як "чорні скриньки". Предикати мають вигляд $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – сукупність абстрактних даних. Базовими композиціями є сильні Клінісі зв'язки $\vee$ та $\wedge$.

На номінативному рівні дані розглядаються як "сірі" скриньки, побудовані з "білих" (гранично конкретних) і "чорних" (гранично абстрактних). Такі дані називаються номінатами. Номінативний рівень розпадається на низку підрівнів. Найважливішим є підрівень однозначних номінатів – іменних множин (ІМ). Іменні множини – це множини пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – значення цього імені. Функції та предикати, задані на ІМ, називають квазіарними.

Демо формально визначення ІМ.

I -ІМ над A – це однозначна функція вигляду $\delta: V \rightarrow A$. Тут V та A трактуємо як множини предметних імен та предметних значень.

Клас всіх I -ІМ над A позначимо V_A .

I -ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \rightarrow a_1, \dots, v_n \rightarrow a_n]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для ІМ вводим функцію $im: V_A \rightarrow 2^V$ так:

$$im(\delta) = \{v \in V \mid v \rightarrow a \in \delta \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Визначасмо $\delta \parallel X = \{v \rightarrow a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$.

Замість $\delta \parallel (V \setminus X)$ пишемо $\delta \parallel_{-X}$.

Операцію накладки вводим так:

$$\delta_1 \vee \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \parallel_{-im(\delta_2)}).$$

Операцію реномінації $r_{x_1, \dots, x_n}^{y_1, \dots, y_n}: V_A \rightarrow V_A$

задаємо наступним чином:

$$r_{x_1, \dots, x_n}^{y_1, \dots, y_n}(\delta) = [v_1 \rightarrow \delta(x_1), \dots, v_n \rightarrow \delta(x_n)] \cup (\delta \parallel (V \setminus \{v_1, \dots, v_n\})).$$

Замість запису вигляду $y_1, \dots, y_n$ будемо також скорочено писати $\bar{y}$.

Функцію вигляду $P: V_A \rightarrow \{T, F\}$ називають I -квазіарним предикатом на A . Клас I -квазіарних предикатів на A позначасмо P_A^I .

Областю істинності та областю хибності предиката $P: V_A \rightarrow \{T, F\}$ назвемо множини

$$T(P) = \{d \in V_A \mid P(d) = T\} \text{ та}$$

$$F(P) = \{d \in V_A \mid P(d) = F\}.$$

I -квазіарний предикат (частково) істинний, якщо $F(P) = \emptyset$.

На рівні ІМ можна виділити реномінативний та першопорядковий рівні. Із першопорядкових обмежимо розглядом логік кванторного та кванторно-екваційного рівня.

На реномінативному рівні базовими композиціями є $\neg$, $\vee$ та реномінації R_x^y . На кванторному рівні базовими композиціями є $\neg$, $\vee$, R_x^y та $\exists x$.

На кванторно-екваційному рівні до них додаються спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності $=_x$, вони задають слабку (з точністю до визначеності) рівність компонентів даного з іменами x та y .

Демо визначення зазначених композицій. Для цього задамо предикати $\neg P$, $P \vee Q$, $R_x^y(P)$, $\exists x P$, $=_x$ через їх області істинності та хибності:

$$T(\neg P) = F(P); F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q); F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(R_x^y(P)) = r_x^y(T(P)); F(R_x^y(P)) = r_x^y(F(P));$$

$$T(\exists x P) = \{d \in V_A \mid P(d \vee x \rightarrow a) = T \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists x P) = \{d \in V_A \mid P(d \vee x \rightarrow a) = F \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$T(=_x) = \{d \in V_A \mid d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\};$$

$$F(=_x) = \{d \in V_A \mid d(x) \downarrow, d(y) \downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\}.$$

Дуже важливою для програмування є властивість еквітонності, вона означає збереження прийнятого предикатом значення при розширенні даних. Ця властивість притаманна формульним предикатам класичної логіки.

Предикат $P: V_A \rightarrow \{T, F\}$ еквітонний, якщо з умови $P(d) \downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') \downarrow = P(d)$.

Тут і далі $P(d) \downarrow$ означає, що $P(d)$ визначено; $P(d) \uparrow$ означає, що $P(d)$ невизначено.

Для логік еквітонних предикатів справджуються основні закони класичної логіки, тому вони названі неокласичними. Водночас такі логіки мають більші виразні можливості та ширші класи семантичних моделей. Саме КНМЛ еквітонних предикатів вивчаються в даній роботі.

2. Композиційно-номінативні модальні системи

Поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [7] є основним поняттям КНМЛ. Такі системи описують світи розгляду модальної логіки. Дуже важливим класом КНМС є транзитивні модальні системи (ТМС), в межах яких природним чином можуть розглядатися тра-

дійсні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо. Окремими випадками ТМС є загальні транзитивні та темпоральні. На основі спеціального уточнення поняття КНМС побудовано і досліджено [9] нові класи загальних транзитивних і темпоральних КНМЛ реномінального та першопорядкових рівнів.

Під КНМС будемо розуміти об'єкт вигляду $M = (Cms, Fm, Jm)$. Тут:

- Cms – композиційна модальна система;
- Fm – множина формул відповідної мови;
- Jm – відображення інтерпретації формул на станах світу.

Композиційні модальні системи (КМС) задають семантичні аспекти світу, їх можна віднести до моделей реляційного типу.

КМС мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$. Тут

- S – множина станів світу;
- R – відображення відношень на S вигляду $R \subseteq S \times S^*$;
- Pr – множина предикатів на станах світу;
- C – множина композицій на Pr ; визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями.

Для КНМЛ номінативних рівнів запропоноване (див. [9]) спеціальне уточнення поняття КНМС. Суть уточнення полягає в тому, що S конкретизуємо як множину неокласичних [8] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквіфонних предикатів вигляду $Pr_\alpha \rightarrow \{T, F\}$. Тоді $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ та $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ – це відповідно множина предикатів усіх станів світу та множина усіх базових даних світу.

Транзитивні модальні системи (ТМС) – це КНМС, у яких множина R складається з відношень вигляду $R \subseteq S \times S$. Ці відношення трактуємо як відношення переходу на станах.

ТМС, у яких R складається з єдиного бінарного відношення $\triangleright$, а базовою модальною композицією є $\Box$ (необхідно), називають загальними.

ТМС, у яких R складається з єдиного бінарного відношення $\triangleright$, а базовими модальними композиціями є $\Box_1$ (завжди буде) та $\Box_2$ (завжди було), називають темпоральними (ТмМС).

ТМС із $R = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i , $i \in I$, у яких кожному $\triangleright_i$ зіставлено відповідну K_i , назвемо мультимодальними.

Мультимодальні ТМС скорочено називатимемо ММС.

Загальні ТМС є окремим випадком ММС, для них R складається з єдиного відношення $\triangleright$ та

наявна єдина базова модальна композиція K , за дією ідентична $\Box$. Для загальних ТМС традиційно задають дуальну композицію $\Diamond$ (можливо): $\Diamond P$ означає $\neg \Box \neg P$.

Для ММС для кожної K_i аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого відношення $\triangleright_i$, $i \in I$.

Для ТмМС традиційно задають дуальні композиції $\Diamond_1$ (колись буде) і $\Diamond_2$ (колись було): $\Diamond_1 P$ означає $\neg \Box_1 \neg P$, $\Diamond_2 P$ означає $\neg \Box_2 \neg P$.

Опишемо мову ММС кванторного рівня. Алфавіт мови: множина V предметних імен та P_s предикатних символів; символи базових композицій $\neg, \vee, R_2^V, \exists x$; модальна сигнатура $M_s = \{K_i \mid i \in I\}$ (множина символів базових модальних композицій).

Множину Fm формул мови визначасмо так:

- FA) кожний $p \in P_s$ – (атомарна) формула;
- FP) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg \Phi$ та $\vee \Phi \vee \Psi$ – формула;
- FR) нехай Φ – формула; тоді $R_2^V(\Phi)$ – формула;
- F3) нехай Φ – формула; тоді $\exists x \Phi$ – формула;
- FM) нехай Φ – формула, $K_i \in M_s$; тоді $K_i \Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I: P_s \times S \rightarrow Pr$, при цьому $I(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Таке I продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Jm: Fm \times S \rightarrow Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

- IA) $Jm(p, \alpha) = I(p, \alpha)$ для кожного $p \in P_s$;
- IP) $Jm(\neg, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$;

$$Jm(\vee \Phi \vee \Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha));$$

$$IR) Jm(R_2^V \Phi, \alpha) = R_2^V(Jm(\Phi, \alpha));$$

$$IE) Jm(\exists x \Phi, \alpha)(d) =$$

$$\begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d \forall x \mapsto a) = T \\ & \text{для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d \forall x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$IM) Jm(K_i \Phi, \alpha)(d) =$$

$$\begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β , що $\alpha \triangleright_i \beta$, то вважаємо $Jm(K_i \Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in A_\alpha$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α , позначасмо Φ_α .

Аналогічно опишемо мову ММС реномінативного рівня, тільки у відповідних визначеннях треба опустити пункти, пов'язані з кванторами.

Опишемо мову MMC кванторно-еквіаційного рівня.

Алфавіт мови: множини V предметних імен та P_s предикатних символів; символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\alpha}^{\beta}, \exists x, =_{\alpha}$; модальна сигнатура $M_s = \{K, I \in \Gamma\}$. Множина формул мови F_m визначається так, як для випадку MMC кванторного рівня, із додаванням п. FE:

FE) кожний $=_{\alpha}$ (атомарна) формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I: P_s \times S \rightarrow Pr$. При цьому $I(p, \alpha) \in Pr_{\alpha}$ та $I(=_{\alpha}) = =_{\alpha}$ для всіх $x, y \in V$.

Таке I продовжимо до $Jm: F_m \times S \rightarrow Pr$ так, як це зроблено для випадку MMC кванторного рівня, додаючи при цьому п. IE для $=_{\alpha}$:

IE) $Jm(=_{\alpha}, \alpha) = I(=_{\alpha}, \alpha)$ для всіх $x, y \in V$.

Замість $=_{\alpha}$ традиційно писатимемо $x = y$.

Рівність об'єктів (базових даних) ми трактуємо як їх тотожність, тому для кожного $d \in {}^V A_{\alpha}$ неможливо в одному стані $d(x) \downarrow = d(y) \downarrow$, а в іншому $-d(x) \downarrow \neq d(y) \downarrow$.

У випадку загальних TMC алфавіт мови має єдиний символ базової модальної композиції $\Box$. Тоді п. FM визначення формули набуває вигляду:

F $\Box$) нехай Φ – формула; тоді $\Box\Phi$ – формула.

При визначенні відображення інтерпретації $Jm: F_m \times S \rightarrow Pr$ п. IM набуває вигляду:

$Jm(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$

Якщо для α не існує такого β , що $\alpha \triangleright \beta$, то вважаємо $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A_{\alpha}$.

У випадку TmMC алфавіт мови має два символи базових модальних композицій $\Box_1$ та $\Box_2$. Тоді п. FM визначення формули набуває вигляду:

F $\Box_1$) нехай Φ – формула; тоді $\Box_1\Phi$ та $\Box_2\Phi$ – формули.

При визначенні відображення інтерпретації $Jm: F_m \times S \rightarrow Pr$ п. IM набуває вигляду:

$Jm(\Box_1\Phi, \alpha)(d) =$

$\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$

$Jm(\Box_2\Phi, \alpha)(d) =$

$\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \delta \triangleright \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \delta \triangleright \alpha \text{ та } Jm(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$

Якщо для стану α не існує такого β , що $\alpha \triangleright \beta$, то вважаємо $Jm(\Box_1\Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A_{\alpha}$;

якщо для α не існує такого β , що $\beta \triangleright \alpha$, то вважаємо $Jm(\Box_2\Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A_{\alpha}$.

Для TmMC і MMC так, як і для загального випадку KMMC [7–9], даємо визначення типу TmMC та типу MMC, істинної в стані та в TmMC чи MMC формули, всюди істинної формули.

Φ істинна в стані α (позначаємо $\alpha \models \Phi$), якщо предикат Φ_{α} є істинним.

Φ істинна в TmMC чи MMC M (позначаємо $M \models \Phi$), якщо $\alpha \models \Phi$ для кожного $\alpha \in S$.

Φ всюди істинна (позначаємо $\models \Phi$), якщо $M \models \Phi$ для всіх TmMC чи MMC M одного типу.

3. Композиційно-номінативні системи епістемічного типу.

Залежно від властивостей відношень $\triangleright$, можна визначати різні класи MMC.

Традиційно розглядають випадки, коли $\triangleright$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо всі $\triangleright$, рефлексивні, то в назві MMC пишемо символ R ; якщо всі $\triangleright$ транзитивні, то пишемо T ; якщо всі $\triangleright$, симетричні, то пишемо S .

Отримуємо такі чисті типи MMC:

R -MMC, T -MMC, S -MMC,

RT -MMC, RS -MMC, TS -MMC, RTS -MMC.

Аналогічно, розглядаючи випадки, коли єдине відношення $\triangleright$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним, отримуємо відповідні класи загальних TMC та TmMC:

R -TMC, T -TMC, S -TMC,

RT -TMC, RS -TMC, TS -TMC, RTS -TMC;

R -TmMC, T -TmMC, S -TmMC,

RT -TmMC, RS -TmMC, TS -TmMC, RTS -TmMC.

Водночас для загального випадку MMC можливі багато складніші, змішані типи.

Наприклад, відношення $\triangleright_1$ транзитивне, $\triangleright_2$ транзитивне та рефлексивне, $\triangleright_3$ симетричне і т.п.

MMC із скінченними множинами одностіпневих відношень $\triangleright$, назвемо епістемічними, або MMC епістемічного типу. Загальні TMC є окремим випадком епістемічних MMC.

MMC епістемічного типу тісно пов'язані з базовими системами традиційної епістемічної логіки. Епістемічна модальна логіка [1, 3] досліджує різні аспекти знання. В останній час помітно зростає зацікавленість до логічного аналізу знання з боку інформатики, особливо в плані подання знання в формальних моделях. Тому епістемічна логіка знаходить все більше застосування при побудові інтелектуальних інформа-

ційних систем, експертних систем та баз знань.

Відомо багато різновидностей епістемічної логіки. Найпростіші з них використовують єдиний модальний оператор знання K . Це відповідає наявності єдиного суб'єкта знання (агента, експерта). Загальнішими є епістемічні системи із скінченною множиною суб'єктів знання. У цьому випадку кожному такому суб'єкту (агенту) зіставляється відповідний модальний оператор знання.

Реляційна семантика є дуже природною для систем епістемічної логіки. При цьому стану світу можна трактувати як стани знання, ситуації. Для систем із n агентами маємо модальні оператори знання $K_1, \dots, K_n$ та відповідні їм відношення досяжності $\triangleright_1, \dots, \triangleright_n$. При цьому, $\alpha \triangleright_i \beta$ означає: k -й агент в ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

В базових епістемічних системах постулюють [1, 3] такі аксіоми знання агентів:

AE) $K_i(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (K_i\Phi \rightarrow K_i\Psi)$ – замкненості знання щодо імплікації (впливності);

AR) $K_i\Phi \rightarrow \Phi$ – реальності знання

AP) $K_i\Phi \rightarrow K_iK_i\Phi$ – позитивної рефлексії (позитивної інтроспективності);

AN) $\neg K_i\Phi \rightarrow K_i\neg K_i\Phi$ – негативної рефлексії (негативної інтроспективності).

Відомо [1], що істинність цих аксіом в реляційних системах пов'язана з властивостями відповідних відношень досяжності цих систем. Істинність аксіом AR рівносильна рефлексивності відношень досяжності, істинність аксіом AP рівносильна їх транзитивності, істинність аксіом AN рівносильна транзитивності й симетричності відношень досяжності.

Системи епістемічної логіки з n агентами знання та рефлексивними відношеннями $\triangleright_i$ названі [1] $T_{(n)}$ -системами, із рефлексивними й транзитивними відношеннями $\triangleright_i$ – $S4_{(n)}$ -системами, із рефлексивними, транзитивними й симетричними $\triangleright_i$ – $SS_{(n)}$ -системами.

Традиційні системи епістемічної логіки знання можна природним чином розглядати в межах MMC епістемічного типу. Зокрема, R -MMC, RT -MMC, RTS -MMC є узагальненнями відповідних епістемічних $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $SS_{(n)}$ -систем.

4. Семантичні властивості модальних систем

При умові $d \in A_k$ постає питання: як визначити $\Phi(d)$? Залежно від відповіді на нього можна виділити [9] TMC із сильною умовою та TMC із загальною умовою визначеності на станах.

Нехай при $d \in A_k$ маємо $\Phi(d) \uparrow$. Це рівносильно умові $\Phi(d) \downarrow \Rightarrow d \in A_k$. Така властивість

названа сильною умовою визначеності на станах. TMC із такою умовою назвемо St -TMC.

Зокрема, так отримуємо загальні St -TMC, St -TmMC, St -MMC.

У випадку St -MMC із $(K, \Phi)_\alpha(d) = T$ впливає $d \in A_k$ для всіх δ таких, що $\alpha \triangleright_i \delta$. Це означає, що базові об'єкти (базові дані) не можуть зникати при переході до стану-наступника.

В [9] наведено приклад загальної St -TMC, який засвідчує порушення еквітонності предикатів при дії модальної композиції. Але загальні TMC – це окремий випадок MMC, тому цей приклад є фактично прикладом St -MMC. Аналогічний приклад можна збудувати для St -TmMC. Отже, модальні композиції St -MMC та St -TmMC не зберігають еквітонність предикатів. Проте вони зберігають слабку умову – слабку еквітонність.

Предикат $P: A \rightarrow \{T, F\}$ слабо еквітонний [9], якщо із умов $d \leq d'$, $P(d) \downarrow$ та $P(d') \downarrow$ випливає $P(d) = P(d')$.

Теорема 1. Базові модальні композиції St -MMC і St -TmMC зберігають слабку еквітонність.

Відповідна теорема для композиції $\Box$ загальних TMC доведена в [9]. Доведення теореми 1 фактично повторює це доведення.

Таким чином, базові композиції St -MMC та St -TmMC зберігають слабку еквітонність.

Тепер при $d \in A_k$ задамо $\Phi_\beta(d) = \Phi_\beta(d_\beta)$, де d_β – скорочене позначення $IM [y \mapsto a \in d | a \in A_\beta]$. Така властивість – це загальна умова визначеності на станах.

TMC із цією умовою назвемо Gn -TMC.

Зокрема, так отримуємо загальні Gn -TMC, Gn -TmMC, Gn -MMC.

Теорема 2. Базові модальні композиції Gn -MMC та Gn -TmMC зберігають еквітонність.

Доведення наведемо для випадку Gn -MMC.

Нехай Φ_α еквітонний та для кожного β такого, що $\alpha \triangleright_i \beta$, де $i \in I$, предикат Φ_β еквітонний.

Нехай $d, d' \in A_\alpha$, $d \leq d'$, $(K, \Phi)_\alpha(d) \downarrow$.

Можливі два випадки.

Нехай $(K, \Phi)_\alpha(d) = F$. Тоді для деякого β такого, що $\alpha \triangleright_i \beta$, маємо $\Phi_\beta(d_\beta) = F$. Але $d \leq d' \Rightarrow d_\beta \leq d'_\beta$, тому за еквітонністю Φ_β маємо $\Phi_\beta(d'_\beta) = F$, звідки $(K, \Phi)_\alpha(d') = F$.

Нехай $(K, \Phi)_\alpha(d) = T$. Тоді для кожного γ такого, що $\alpha \triangleright_i \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d_\gamma) = T$. При $d \leq d'$ маємо $d_\gamma \leq d'_\gamma$, тому $\Phi_\gamma(d'_\gamma) = T$ за еквітонністю Φ_γ . Це вірно для кожного γ такого, що $\alpha \triangleright_i \gamma$, звідки $(K, \Phi)_\alpha(d') = T$. Отже, $(K, \Phi)_\alpha$ еквітонний.

Звідси отримуємо:

Наслідок 1. Базові композиції Gn -MMC та

Gn-ТММС зберігають еквітонність.

Символи модальних композицій ММС та ТММС можна проносити через реномінації:

Теорема 3. $R_K^0 \mathfrak{M} \Phi(d) = \mathfrak{M} R_K^0 \Phi(d)$ для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$, $\Phi, d \in \mathcal{V}_{A_n}$.

Тут $Ms = \{K_i | i \in I\}$ для випадку ММС та $Ms = \{\square_1, \square_2\}$ для випадку ТММС.

Теорема вірна як для St-MMC та St-TMMC, так і для Gn-MMC та Gn-TMMC. Аналогічні теореми у випадках загальних St-TMC та загальних Gn-TMC для $\square$ композицій доведено в [9], теорема 3 доводиться подібним чином.

Звідси отримуємо:

Наслідок 2. Формули $R_K^0 \mathfrak{M} \Phi(d) \leftrightarrow \mathfrak{M} R_K^0 \Phi(d)$, де $\mathfrak{M} \in Ms$, всюди істинні

Тут $Ms = \{K_i | i \in I\}$ для випадку ММС та $Ms = \{\square_1, \square_2\}$ для випадку ТММС.

Розглянемо взаємодію в ТМС модальних композицій та кванторів.

Нехай M – довільна ТМС, яка може бути St-MMC, St-TMMC, Gn-MMC, Gn-TMMC.

Теорема 4. Для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$ масмо $M \models \exists x \mathfrak{M} \Phi \rightarrow \mathfrak{M} \exists x \Phi$.

Доведення наведемо для випадку Gn-MMC. Тоді $Ms = \{K_i | i \in I\}$.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha \in S$ та $d \in \mathcal{V}_{A_n}$ $(K_i \forall x \Phi)_\alpha(d) = T$ та $(\forall x K_i \Phi)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що для деякого $a \in A_n$ масмо $(K_i \Phi)_\alpha(d \nabla x \rightarrow a) = F$, тому для деякого стану $\beta \in S$ такого, що $\alpha \triangleright \beta$, масмо $\Phi_\beta(d \nabla x \rightarrow a)_\beta = F$. Згідно $(K_i \forall x \Phi)_\alpha(d) = T$ масмо $(\forall x \Phi)_\beta(d_\beta) = T$ для такого β , звідки $\Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow b) = T$ для всіх $b \in A_\beta$.

Можливі два випадки: $a \in A_\beta$ та $a \notin A_\beta$.

Якщо $a \in A_\beta$, то $(d \nabla x \rightarrow a)_\beta = d_\beta \nabla x \rightarrow a$, звідки $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow a)_\beta) = \Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow a) = F$. Але для всіх $b \in A_\beta$ масмо $\Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow b) = T$, звідки отримуємо $\Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow a) = T$. Дістали суперечність.

Якщо $a \notin A_\beta$, то $(d \nabla x \rightarrow a)_\beta = (d_\beta)_\beta$, звідки $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow a)_\beta) = \Phi_\beta(d_\beta)_\beta = F$. Але $d_\beta \subseteq d_\beta \nabla x \rightarrow b$ для кожного $b \in A_\beta$, звідки $\Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow b) = F$ за еквітонністю Φ_β . Це суперечить тому, що $\Phi_\beta(d_\beta \nabla x \rightarrow b) = T$ для всіх $b \in A_\beta$.

Наслідок 3. Для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$ масмо $M \models \forall x \mathfrak{M} \Phi \rightarrow \mathfrak{M} \forall x \Phi$.

Наслідок 4. Для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$ масмо $M \models \exists x \mathfrak{M} \Phi \rightarrow \mathfrak{M} \exists x \Phi$ та $M \models \forall x \mathfrak{M} \Phi \rightarrow \mathfrak{M} \forall x \Phi$.

Зокрема, для загальних St-TMC та Gn-TMC масмо:

$$\models \exists x \square \Phi \rightarrow \square \exists x \Phi \text{ та } \models \square \forall x \Phi \rightarrow \forall x \square \Phi;$$

для St-MMC та Gn-MMC масмо;

$$\models \exists x K_i \Phi \rightarrow K_i \exists x \Phi \text{ та } \models K_i \forall x \Phi \rightarrow \forall x K_i \Phi;$$

для St-TMMC та Gn-TMMC масмо;

$$\models \exists x \square_1 \Phi \rightarrow \square_1 \exists x \Phi, \models \square_1 \forall x \Phi \rightarrow \forall x \square_1 \Phi,$$

$$\models \exists x \square_2 \Phi \rightarrow \square_2 \exists x \Phi, \models \square_2 \forall x \Phi \rightarrow \forall x \square_2 \Phi.$$

Водночас формули $\forall x \mathfrak{M} \Phi \rightarrow \mathfrak{M} \forall x \Phi$ та $\mathfrak{M} \exists x \Phi \rightarrow \exists x \mathfrak{M} \Phi$ не є всюди істинними.

Відповідні контрмоделі для загальних ТМС та $\square$ наведено в [9], аналогічні контрмоделі можна збудувати для випадків ММС та ТММС.

Розглянемо властивості ТМС, пов'язані з предикатами рівності.

Теорема 5. Для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$ масмо $\models x = y \rightarrow \mathfrak{M} x = y$ та $\models \mathfrak{M} x = y \rightarrow x = y$.

Тут $Ms = \{K_i | i \in I\}$ для випадку ММС, $Ms = \{\square_1, \square_2\}$ для випадку ТММС, $Ms = \{\square\}$ для випадку загальних ТМС.

Доведення наведемо для випадку Gn-MMC.

Доводимо $\models x = y \rightarrow K_i x = y$. Припустимо супротивне: для деяких M , $\alpha \in S$ та $d \in \mathcal{V}_{A_n}$ масмо $(x = y)_\alpha(d) = T$ та $(K_i x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає: для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \triangleright \beta$, масмо $(x = y)_\beta(d) = F$. Звідси $d(x) \neq d(y)$. Але із $(x = y)_\alpha(d) = T$ масмо $d \in \mathcal{V}_{A_n}$, $d(x) \downarrow$, $d(y) \downarrow$ та $d(x) = d(y)$. Отримали суперечність.

Доводимо $\models K_i x = y \rightarrow x = y$. Припустимо супротивне: для деяких ММС M , $\alpha \in S$ та $d \in \mathcal{V}_{A_n}$ масмо $(K_i x = y)_\alpha(d) = T$ та $(x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає: $d \in \mathcal{V}_{A_n}$, $d(x) \downarrow$, $d(y) \downarrow$ та $d(x) \neq d(y)$. Умова $(K_i x = y)_\alpha(d) = T$ означає, що для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$, масмо $(x = y)_\beta(d) = T$. Але тоді $d(x) \downarrow$, $d(y) \downarrow$ та $d(x) = d(y)$. Знову отримали суперечність.

Наслідок 5. Для довільних $\mathfrak{M} \in Ms$ масмо $\models x = y \leftrightarrow \mathfrak{M} x = y$.

Зауважимо, що при розгляді на окремих станах формули вигляду $x = y \leftrightarrow \mathfrak{M} x = y$ можуть і не бути істинними. Це випливає із наведеного в [9] прикладу загальних ТМС, який засвідчує можливість $\alpha \models \square x = y$ та $\alpha \not\models x = y$.

Водночас неможливо одночасно $\alpha \models x = y$ та $\alpha \not\models \mathfrak{M} x = y$, де $\mathfrak{M} \in Ms$ (тут $Ms = \{K_i | i \in I\}$ для ММС, $Ms = \{\square_1, \square_2\}$ для ТММС, $Ms = \{\square\}$ для загальних ТМС). Покажемо це для випадку ММС.

Нехай масмо супротивне: $\alpha \models x = y$ та для деякого $d \in \mathcal{V}_{A_n}$ масмо $(K_i x = y)_\alpha(d) \downarrow = F$. Це означає: $(x = y)_\beta(d) = F$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \triangleright \beta$. Звідси випливає: $d(x) \downarrow$, $d(y) \downarrow$, $d(x) \neq d(y)$. Згідно $d \in \mathcal{V}_{A_n}$ звідси $d(x) \in A_n$, $d(y) \in A_n$, $d(x) \neq d(y)$, що дає $(x = y)_\alpha(d) = F$. Але це суперечить $\alpha \models x = y$.

Висновки

Композиційно-номінативний підхід є потужним засобом розробки програмно-орієнтованих логічних систем. На його основі в роботі побудовано та досліджено нові класи спеціальних логік часткових предикатів. Запропоновано композиційно-номінативні мультимодальні логіки, в межах яких виділено логіки епістемічного типу. Описано семантичні моделі та мови композиційно-номінативних логік темпорального, мультимодального та епістемічного типу на реномінативному, кванторному, кванторно-екваційному рівнях. Виділено транзитивні модальні системи зазначених типів із сильною та загальною умовами визначеності на станах, досліджено взаємодію реномінацій та кванторів із модальними композиціями.

Для запропонованих логік планується дослідження властивостей логічного наслідку для множин специфікованих станами формул та побудова числені секвенційного типу.

Список використаних джерел

1. Андон Ф.И. Логические модели интеллектуальных информационных систем / Ф.И. Андон, А.Е. Яшунин, В.А. Резниченко. – К.: Наукова думка, 1999. – 396 с.

2. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.
3. Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки / А.Т. Ішмуратов. – К.: Абрис, 1997. – 350 с.
4. Фейс Р. Модальная логика. / Р. Фейс. – М.: Наука. – 1974. – 520 с.
5. Cocchiarella N.B. Modal logic / N.B. Cocchiarella, M.A. Freund. – Oxford Univ. Press, 2008. – 267 p.
6. Нікітченко Н.С. Композиційно-номінативний підхід к уточненню поняття програми / Н.С. Нікітченко // Пробл. програмування. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
7. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні модальні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.
8. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
9. Шкільняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.

Надійшла до редколегії 30.06.2011

УДК 512.552+519.713

Скобелев В. В., к.ф.-м.н.

Про множини автоматів над скінченим кільцем, які визначено у термінах ідеалів

Досліджено множини багатовимірних автоматів Мілі і Мура над скінченими асоціативно-комутативними кільцями, для яких функції переходів і виходів є алгебраїчними сумами функцій від стану автомата і функцій від вхідного символу за умовою, що для функцій від стану автомата значення кожної компоненти належить фіксованому ідеалу кільця. У явному вигляді отримано формули для обчислення потужностей множин автоматів, що досліджуються та підмножин відповідних зворотних автоматів. Встановлено деякі глобальні характеристики автоматних відображень вхідної напівгрупи у вихідну напівгрупу, які реалізуються моделями, що досліджуються.

Ключові слова: асоціативно-комутативні кільця, скінченні автомати, ідеали.

E-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив: чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Вступ

Дослідження автоматно-алгебраїчних моделей над скінченими кільцями є актуальною задачею у наслідок систематичного переходу від комбінаторних до комбінаторно-алгебраїчних моделей на сучасному етапі розвитку криптографії [1,2]. В [3,4] досліджено автомати Мілі і Мура над скінченими асоціативно-комутативними кільцями з одиницею, для яких функції переходів і виходів є алгебраїчними сумами функцій від стану автомата і функцій від вхідного символу.

Під час дослідження, отримано властивості многовидів і, зокрема, алгебраїчних кривих [4-6] методами алгебраїчної геометрії [7,8] роблять дуже привабливою спробу розробки такого ж самого підходу для аналізу властивостей автоматів над скінченими кільцями. При цьому ключову роль мають саме ті властивості функцій переходів і виходів автомата, які визначаються у термінах ідеалів кільця [9,10].

У даній роботі досліджено множини багатовимірних автоматів Мілі і Мура, над скінченим асоціативно-комутативним кільцем $K = (K, +, \cdot)$, для яких функції переходів і виходів є алгебраїчними сумами функцій від стану автомата та функцій від вхідного символу за

V. V. Skobelev, Cand. Phys.-Math. Sci.

On some sets of automata over finite ring determined via terms of ideals

It is analyzed the sets of multidimensional Mealy and Moore automata over finite associative-commutative rings for which transition and output mappings are algebraic sums of mappings of the set of states and the set of inputs under condition that for the mappings of the set of states the values of components are elements of some fixed ideals of the ring. Formulae for computing cardinalities of the sets of investigated automata and the subsets of corresponding invertible automata are deduced in the explicit form. Some global characteristics of automata mappings of the input semigroup into the output semigroup realized by investigated models are established.

Key Words: associative-commutative rings, finite automata, ideals.

умовою, що для функцій від стану автомата значення кожної компоненти належить фіксованому ідеалу кільця.

1. Моделі дослідження

Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $A_{n,1}$ множину усіх автоматів Мілі над кільцем K , які визначено системою рівнянь

$$M_1: \begin{cases} q_{i+1} = f_1(q_i) + f_3(x_{i+1}) \\ y_{i+1} = f_2(q_i) + f_4(x_{i+1}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+), \quad (1)$$

а через $A_{n,2}$ – множину усіх автоматів Мура над кільцем K , які визначено системою рівнянь

$$M_2: \begin{cases} q_{i+1} = f_1(q_i) + f_3(x_{i+1}) \\ y_{i+1} = f_2(q_{i+1}) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{Z}_+), \quad (2)$$

де $f_i: K^n \rightarrow K^n$ ($i=1, \dots, 4$), а $q_i, x_i, y_i \in K^n$ є, відповідно, внутрішній стан автомата, вхідний та вихідний символ у момент часу $i \in \mathbb{Z}_+$.

Якщо множина K^n інтерпретується, відповідно, як вхідний алфавіт, множина внутрішніх станів, або вихідний алфавіт автомата $M_i \in A_{n,i}(I_1, I_2)$ ($i=1,2$), будемо позначати цю множину, відповідно, через X_n , Q_n і Y_n .

Позначимо через $A_{n,i}^{inv}$ ($i=1,2$) множину усіх зворотних автоматів $M_i \in A_{n,i}$.

Відомо (див., напр., [4]), що:

1) $M_1 \in A_{n,1}^{mv}$ у тому, та лише у тому випадку, якщо $f_1 \in$ біскістю множини K^n на себе;

2) $M_2 \in A_{n,2}^{mv}$ у тому, та лише у тому випадку, якщо f_2 та $f_1 \in$ біскістями множини K^n на себе.

Для автомата $M_1 \in A_{n,1}^{mv}$ зворотним автоматом є автомат

$$M_1^{-1}: \begin{cases} q_{i+1} = f_1(q_i) + f_2(f_1^{-1}(x_{i+1} - f_2(q_i))) \\ y_{i+1} = f_1^{-1}(x_{i+1} - f_2(q_i)) \end{cases} \quad (i \in Z_+)$$

а для автомата $M_2 \in A_{n,2}^{mv}$ зворотним автоматом є автомат

$$M_2^{-1}: \begin{cases} q_{i+1} = f_2^{-1}(x_{i+1}) \\ y_{i+1} = f_2^{-1}(f_2^{-1}(x_{i+1}) - f_1(q_i)) \end{cases} \quad (i \in Z_+).$$

Значимо, що якщо пара зворотних автоматів (M_i, M_i^{-1}) ($i=1,2$) розглядається як математична модель поточного шифру, то у процесі «шифрування-розшифрування» автомати M_i та M_i^{-1} рухаються в просторі станів уздовж однієї і тієї траєкторії в одному і тому ж напрямку.

Для довільного ідеалу I кільця K у фактор-кільці $K/I = (K/I, +, \cdot)$ множина K/I є розбиттям множини K на $|K/I| \cdot |I|^{-1}$ блоків, кожен з яких складається з $|I|$ елементів. Звідси випливає, що для довільного вектора $I = (I_1, \dots, I_n)$, де I_j ($j=1, \dots, n$) є ідеал кільця K , у фактор-кільці

$$K^n/I_1 = \times_{j=1}^n K/I_j = (\times_{j=1}^n K/I_j, +, \cdot)$$

множина $\times_{j=1}^n K/I_j$ є розбиттям множини K^n на

$|K|^n \cdot \prod_{j=1}^n |I_j|^{-1}$ блоків, кожен з котрих містить

$\prod_{j=1}^n |I_j|$ елементів. При цьому для довільних

елементів $a_i = (a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) \in K^n$

$$a_i = a_j \pmod{I} \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq n) (a_i^{(j)} = a_j^{(j)} \pmod{I_j}).$$

Кожні два вектора

$$I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)}) \quad (r=1,2), \quad (3)$$

де $I_j^{(r)}$ ($r=1,2; j=1, \dots, n$) є ідеал кільця K ,

визначають множини автоматів

$$A_{n,i}(I_1, I_2) = \{M_i \in A_n \mid (\text{Val } f_1 = I_1) \& \\ \& (\text{Val } f_2 = I_2)\} \quad (i=1,2).$$

Таким чином для кожного автомата $M \in A_{n,1}(I_1, I_2) \cup A_{n,2}(I_1, I_2)$ мають місце рівності

$$|Q_n / \ker f_1| = |I_1| \quad (4)$$

$$|Q_n / \ker f_2| = |I_2|. \quad (5)$$

Позначимо через $A_{n,i}^{mv}(I_1, I_2)$ ($i=1,2$) множину усіх зворотних автоматів $M_i \in A_{n,i}(I_1, I_2)$. Оскільки

$$I_2 \neq (\underbrace{K, \dots, K}_n) \Rightarrow A_{n,2}^{mv}(I_1, I_2) = \emptyset,$$

то для скорочення запису позначимо $A_{n,2}^{mv}(I_1)$

замість $A_{n,2}^{mv}(I_1, I_2)$, де $I_2 = (\underbrace{K, \dots, K}_n)$.

Саме дослідження властивостей визначених вище підмножин автоматів $A_{n,i}(I_1, I_2)$ ($i=1,2$) і $A_{n,i}^{mv}(I_1, I_2)$ ($i=1,2$) є метою даної роботи.

2. Комбінаторні характеристики множин моделей, що досліджуються

Встановимо оцінки потужностей множин моделей, що досліджуються.

Твердження 1. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$|A_{n,i}| = |K|^{(1-i)n(K)} \quad (i=1,2). \quad (6)$$

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ кількість відображень $f: K^n \rightarrow K^n$ дорівнює $|K|^{n(K)}$.

Оскільки при побудові автомату $M_i \in A_{n,i}$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i=1, \dots, 4$), то

$$|A_{n,i}| = |K|^{4n(K)}. \quad (7)$$

Оскільки при побудові автомату $M_2 \in A_{n,2}$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i=1,2,3$), то

$$|A_{n,2}| = |K|^{3n(K)}. \quad (8)$$

З рівностей (7) і (8) випливає (6).

Твердження доведено.

Твердження 2. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$|A_{n,i}^{mv}| = \left(\frac{|K|}{|K|^{(K)}} \right)^n |A_{n,i}| \quad (i=1,2). \quad (9)$$

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ кількість біскідей $f: K^n \rightarrow K^n$ дорівнює $(|K|)^n$.

Оскільки при побудові автомату $M_1 \in A_{n,1}^{mv}$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i = 1, \dots, 4$), то, враховуючи (7), отримуємо

$$|A_{n,1}^{mv}| = |K|^{2n(K)} (|K|!)^n = \left(\frac{|K|!}{|K|^{(K)}} \right)^n |A_{n,1}|. \quad (10)$$

Оскільки при побудові автомату $M_2 \in A_{n,2}^{mv}$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i = 1, 2, 3$), то, враховуючи (8), отримуємо

$$|A_{n,2}^{mv}| = |K|^{n(K)} (|K|!)^{2n} = \left(\frac{|K|!}{|K|^{(K)}} \right)^{2n} |A_{n,2}|. \quad (11)$$

З рівностей (10) і (11) випливає (9).

Твердження доведено.

Наслідок 1. Мають місце асимптотичні рівності

$$|A_{n,j}^{mv}| = \{ \sqrt{2\pi |K|} \cdot e^{-|K|} (1 + O(|K|^{-1}))^n |A_{n,j}| \} \quad (|K| \rightarrow \infty) \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

Доведення. З формули Стирлінга випливає, що

$$|K|! = (\sqrt{2\pi |K|} \cdot |K|^{(K)} e^{-|K|}) (1 + O(|K|^{-1})) \quad (|K| \rightarrow \infty). \quad (13)$$

З рівностей (9) і (13) випливає (12).

Наслідок доведено.

Теорема 1. При $i = 1, 2$ для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для всіх векторів $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r = 1, 2$), де $I_j^{(r)}$ ($r = 1, 2; j = 1, \dots, n$) є ідеал кільця K , має місце рівність

$$|A_{n,j}(I_1, I_2)| = \frac{|A_{n,j}|}{|K|^{2n(K)}} \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right). \quad (14)$$

Доведення. Відомо (див., напр., [11]), що для кожних натуральних чисел $l, m \in \mathbb{N}$ ($m \leq l$) кількість сюр'єкцій l -елементної множини на m -елементну множини дорівнює

$$s_{l,m} = \sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} (m-h)^l. \quad (15)$$

З рівності (15) випливає, що для кожного вектора $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r = 1, 2$), де $I_j^{(r)}$ ($r = 1, 2; j = 1, \dots, n$) є ідеал кільця K кількість усіх відображень $f_r: K^n \rightarrow K^n$ ($r = 1, 2$), що задовольняють умові $\text{Val } f_r = I_r$, дорівнює

$$t_{1r} = \prod_{j=1}^n s_{|K|, |I_j^{(r)}|} = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right) \quad (r = 1, 2). \quad (16)$$

При побудові автомату $M_1 \in A_{n,1}(I_1, I_2)$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i = 1, \dots, 4$). Тому рівностей (7) і (16) випливає, що

$$|A_{n,1}(I_1, I_2)| = t_{11} t_{12} |K|^{2n(K)} = \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right) |K|^{2n(K)} = \frac{|A_{n,1}|}{|K|^{2n(K)}} \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right). \quad (17)$$

При побудові автомату $M_2 \in A_{n,2}(I_1, I_2)$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i = 1, 2, 3$). Тому з рівностей (8) і (16) випливає, що

$$|A_{n,2}(I_1, I_2)| = t_{11} t_{12} |K|^{n(K)} = \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right) |K|^{n(K)} = \frac{|A_{n,2}|}{|K|^{2n(K)}} \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right). \quad (18)$$

З рівностей (17) і (18) випливає (14).

Теорему доведено.

Теорема 2. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожних векторів $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r = 1, 2$), де $I_j^{(r)}$ ($r = 1, 2; j = 1, \dots, n$) є ідеал кільця K , має місце рівність

$$|A_{n,j}^{mv}(I_1, I_2)| = \frac{|A_{n,j}^{mv}|}{|K|^{2n(K)}} \prod_{r=1}^2 \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{(K)} \right). \quad (19)$$

Доведення. Оскільки при побудові автомату $M_1 \in A_{n,1}^{mv}(I_1, I_2)$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i = 1, \dots, 4$), то з рівностей (10) і (16) випливає, що

$$\begin{aligned} |A_{n,1}^{mv}(I_1, I_2)| &= t_{I_1} t_{I_2} (|K|!)^n |K|^{n(K)} = \\ &= \frac{(|K|!)^n |K|^{2n(K)}}{|K|^{2n(K)}} t_{I_1} t_{I_2} = \frac{|A_{n,1}^{mv}|}{|K|^{2n(K)}} t_{I_1} t_{I_2} = \\ &= \frac{|A_{n,1}^{mv}|}{|K|^{2n(K)}} \prod_{r=1}^n \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(r)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(r)}|}{h} (|I_j^{(r)}| - h)^{|K|} \right). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Теорема 3. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожного вектора $I_1 = (I_1^{(1)}, \dots, I_1^{(n)})$ ($r=1,2$), де $I_j^{(r)}$ ($j=1, \dots, n$) є ідеал кільця K , має місце рівність

$$\begin{aligned} |A_{n,2}^{mv}(I_1)| &= \\ &= \frac{|A_{n,2}^{mv}|}{|K|^{n(K)}} \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(1)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(1)}|}{h} (|I_j^{(1)}| - h)^{|K|} \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки при побудові автомата $M_2 \in A_{n,2}(I_1, I_2)$ здійснюється незалежний вибір відображень f_i ($i=1,2,3$), то з рівностей (10) і (16) випливає, що

$$\begin{aligned} |A_{n,2}^{mv}(I_1)| &= t_{I_1} (|K|!)^{2n} = \frac{(|K|!)^{2n} |K|^{n(K)}}{|K|^{n(K)}} t_{I_1} = \\ &= \frac{|A_{n,2}^{mv}|}{|K|^{n(K)}} \prod_{j=1}^n \left(\sum_{h=0}^{|I_j^{(1)}|} (-1)^h \binom{|I_j^{(1)}|}{h} (|I_j^{(1)}| - h)^{|K|} \right). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

З встановлених оцінок потужностей випливає, що моделі, які досліджуються визначають достатньо широкі множини автоматів, які містять у собі нетривіальні множини зворотних автоматів.

3. Структурні властивості моделей, що досліджуються

Позначимо через $f_{(M,q_0)}$ відображення вхідної напівгрупи X_n^* у вихідну напівгрупу Y_n^* , яке реалізує ініціальний автомат (M, q_0) ($M \in A_{n,1}(I_1, I_2) \cup A_{n,2}(I_1, I_2), q_0 \in Q_n$).

Внутрішні стани автомата називають станами-близнюками, якщо по кожному вхідному символу вони переходять у той же самий стан, а вихідні символи, які видає про цьому автомат співпадають. З систем рівнянь (1) і (2) випливає, що множини станів-близнюків автомата $M_i \in A_{n,j}(I_1, I_2)$ співпадають з елементами фактор-множини $Q_n / \ker f_1 \cap \ker f_2$, а множини

станів-близнюків автомата $M_2 \in A_{n,2}(I_1, I_2)$ співпадають з елементами фактор-множини $Q_n / \ker f_1$. Звідси випливає, що потужність множини автоматних відображень

$$F_M = \{f_{(M,q_0)} \mid q_0 \in Q_n\},$$

які реалізує автомат $M \in A_{n,1}(I_1, I_2) \cup A_{n,2}(I_1, I_2)$ задовольняє наступним нерівностям:

$$|F_M| \leq |Q_n / \ker f_1 \cap \ker f_2|, \quad (21)$$

якщо $M \in A_{n,1}(I_1, I_2)$ і

$$|F_M| \leq |Q_n / \ker f_1|, \quad (22)$$

якщо $M \in A_{n,2}(I_1, I_2)$.

З (4), (5), (21) і (22) випливає, що

$$|F_M| \leq \min\{|Q_n|, |I_1| \cdot |I_2|\},$$

якщо $M \in A_{n,1}(I_1, I_2)$ і

$$|F_M| \leq |I_1|,$$

якщо $M \in A_{n,2}(I_1, I_2)$.

Дамо характеристику структури множини відображень F_M ($M \in A_{n,1}(I_1, I_2) \cup A_{n,2}(I_1, I_2)$) більш детальніше.

Розглянемо автомат $M_1 \in A_{n,1}(I_1, I_2)$.

Визначимо на вхідному алфавіті X_n наступні два відношення еквівалентності: для довільних елементів $x^*, x' \in X_n$

$$x' \sim_{n,1} x^* \Leftrightarrow f_3(x') = f_3(x^*) \pmod{I_1} \quad (23)$$

і

$$x' \sim_{n,2} x^* \Leftrightarrow f_4(x') = f_4(x^*) \pmod{I_2}. \quad (24)$$

З (23) і (24) випливає, що

$$\ker f_3 \subseteq \sim_{n,1}, \quad (25)$$

і

$$\ker f_4 \subseteq \sim_{n,2}. \quad (26)$$

Нехай

$$\sim_{n,12} = \sim_{n,1} \cap \sim_{n,2}. \quad (27)$$

Відзначимо, що з (23)-(27) випливає, що

$$\ker f_3 \cap \ker f_4 \subseteq \sim_{n,12}.$$

Поширимо еквівалентності $\sim_{n,j}$ ($j=1,2$) та $\sim_{n,12}$ на множину $X_n^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_n^i$ наступним чином:

для кожного числа $k \in \mathbb{N}$ та для довільних вхідних послідовностей $u' = x'_1 \dots x'_k \in X_n^k$ та

$$u'' = x''_1 \dots x''_k \in X_n^k$$

$$u' \sim_{n,j} u'' \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k)(x'_j \sim_{n,j} x''_j) \quad (i=1,2), \quad (28)$$

$$u' \sim_{n,12} u'' \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k)(x'_j \sim_{n,12} x''_j). \quad (29)$$

Теорема 4. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожних векторів $I_r = (I_r^{(1)}, \dots, I_r^{(n)})$ ($r=1,2$), де

$I_j^{(r)}$ ($r=1,2; j=1,\dots,n$) є ідеал кільця K , при
кожному значенні числа $k \in \mathbb{N}$ для довільних
вхідних послідовностей $u' = x'_1 \dots x'_k \in X_n^k$ і
 $u'' = x''_1 \dots x''_k \in X_n^k$ має місце формула

$$u' \sim_{n,12} u'' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall q'_0, q''_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \& \\ \& (y'_j = y''_j \pmod{I_2}). \quad (30)$$

Доведення. З 1-го рівняння системи (1)
випливає, що для усіх чисел $j = 0,1,\dots,k-1$

$$q'_{j+1} - q'_{j+1} = \\ = (f_1(q'_j) - f_1(q'_j)) + (f_2(x'_{j+1}) - f_2(x'_{j+1})). \quad (31)$$

Оскільки $f_1(q'_j) - f_1(q'_j) \in I_1$ ($j = 0,1,\dots,k-1$)
для довільних $q'_j, q''_j \in Q_n$, то з (23), (28) і (31)
випливає, що

$$(\forall q'_0, q''_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k) (f_2(x'_j) = f_2(x''_j) \pmod{I_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u' \sim_{n,2} u''. \quad (32)$$

З 2-го рівняння системи (1) випливає, що для
усіх чисел $j = 0,1,\dots,k-1$

$$y'_{j+1} - y'_{j+1} = \\ = (f_2(q'_j) - f_2(q'_j)) + (f_4(x'_j) - f_4(x'_j)). \quad (33)$$

Оскільки $f_2(q'_j) - f_2(q'_j) \in I_2$ ($j = 0,1,\dots,k-1$)
для довільних $q'_j, q''_j \in Q_n$, то з (24), (28) і (33)
випливає, що

$$(\forall q'_0, q''_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (y'_j = y''_j \pmod{I_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k) (f_4(x'_j) = f_4(x''_j) \pmod{I_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u' \sim_{n,2} u''. \quad (34)$$

З формул (27), (32) і (34) випливає (30).

Теорему доведено.

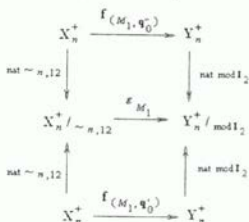
Позначимо через $Y_n^* / \sim_{n,12}$ фактор-множину
множини Y_n^* , яка визначена наступним чином:
для кожного числа $k \in \mathbb{N}$ та для довільних
вхідних послідовностей $v' = y'_1 \dots y'_k \in Y_n^k$ та
 $v'' = y''_1 \dots y''_k \in Y_n^k$

$$v' = v'' \pmod{I_2} \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k) (y'_j = y''_j \pmod{I_2}).$$

Безпосереднім наслідком теореми 4 є
наступне твердження.

Наслідок 2. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для
кожного вектору $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r=1,2$), де
 $I_j^{(r)}$ ($r=1,2; j=1,\dots,n$) є ідеал кільця K , при
кожному значенні числа $k \in \mathbb{N}$ для кожного

автомата $M_1 \in A_{n,1}(I_1, I_2)$ та всіх початкових
станів $q'_0, q''_0 \in Q_n$ має місце діаграма



де відображення g_{M_1} визначено автоматом M_1 .

Таким чином, кожен з початкових станів
 $q'_0, q''_0 \in Q_n$ відображення $f_{(M_1, q'_0)}$ і $f_{(M_1, q''_0)}$
реалізує одне і теж відображення g_{M_1} класів
фактор-множини $X_n^* / \sim_{n,12}$ у класи фактор-
множини $Y_n^* / \sim_{n,12}$.

Розглянемо автомат $M_2 \in A_{n,2}(I_1, I_2)$.

Нехай на множині X_n^* еквівалентність $\sim_{n,1}$
визначено формулою (28) (при $i=1$). Визначимо
на множині X_n^* еквівалентність $\sim_{n,1}$ наступним
чином: для довільних вхідних послідовностей
 $u' = x'_1 \dots x'_k \in X_n^k$ та $u'' = x''_1 \dots x''_k \in X_n^k$

$$u' \sim_{n,1} u'' \Leftrightarrow u' \sim_{n,2} u'' \&$$

$$\& (\forall q'_0, q''_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{\ker f_2}). \quad (35)$$

Теорема 5. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для
кожних векторів $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r=1,2$), де
 $I_j^{(r)}$ ($r=1,2; j=1,\dots,n$) є ідеал кільця K , при
кожному значенні числа $k \in \mathbb{N}$ для довільних
вхідних послідовностей $u' = x'_1 \dots x'_k \in X_n^k$ і
 $u'' = x''_1 \dots x''_k \in X_n^k$ має місце формула

$$u' \sim_{n,1} u'' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall q'_0, q''_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \& \\ \& (y'_j = y''_j). \quad (36)$$

Доведення. Оскільки у системах (1) і (2)
перші рівняння співпадають, то з формул (32) і
(35) випливає, що

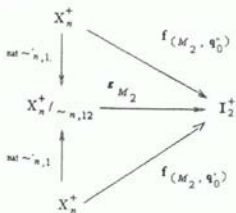
$$u' \sim_{n,1} u'' \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (\forall q'_0, q'_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \& \\ & \& (\forall q'_0, q'_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_2}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\forall q'_0, q'_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \& \\ & \& (\forall q'_0, q'_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (y'_j = y''_j) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\forall q'_0, q'_0 \in Q_n) (\forall 1 \leq j \leq k) (q'_j = q''_j \pmod{I_1}) \& \\ & \& (y'_j = y''_j). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Безпосереднім наслідком теореми 5 є наступне твердження.

Наслідок 3. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожного вектору $I_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$ ($r=1,2$), де $I_j^{(r)}$ ($r=1,2; j=1, \dots, n$) є ідеал кільця K , при кожному значенні числа $k \in \mathbb{N}$ для кожного автомата $M_2 \in A_{n,2}(I_1, I_2)$ та кожного початкового стану $q'_0, q'_0 \in Q_n$ має місце діаграма



де відображення g_{M_2} визначено автоматом M_1 .

Таким чином, кожен початковий стан $q'_0, q'_0 \in Q_n$ відображення $f_{(M_2, q'_0)}$ і $f_{(M_2, q'_0)}$ реалізує одне і теж відображення g_{M_2} класів фактор-множини $X_n^+ / \sim_{n,1}$ у множину I_2^+ .

Висновки

У роботі досліджено властивості множини багатовимірних автоматів Мілі і Мура над скінченним асоціативно-комутативним кільцем для яких функції переходів і виходів є алгебраїчними сумами функцій від стану автомата і функції від вхідного символу за

умовою, що для функції від стану автомата значення кожної компоненти належить фіксованому ідеалу кільця.

Подальше дослідження може бути пов'язано з характеристикою множини моделей, що досліджуються, в залежності від співвідношень між визначаючими їх ідеалами кільця.

Інший напрямок пов'язаний з розробкою математичного апарату, який призначено для безпосереднього дослідження глобальних характеристик автоматних відображень вхідної напівгрупи у вихідну напівгрупу методами алгебраїчної геометрії, зокрема методами теорії схем.

Список використаних джерел

1. Харин Ю.С., Берник В.И., Мамсеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
2. Азферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С. и др. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
3. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. Донецк: ИПММ НАН Украины, 2009. – 479 с.
4. Скобелев В.В., Глазун Н.М., Скобелев В.Г. Многообразия над кольцами. Теория и приложения. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2011. – 323 с.
5. Коблиц Н. Введение в эллиптические и модулярные формы. – М.: Мир, 1988. – 320 с.
6. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. – М.: Мир, 2000. – 687 с.
7. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.1,2. – М.: Наука, 1988. – 656 с.
8. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1,2. – М.: Мир, 1982. – 862 с.
9. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
10. Зарисский О., Самозель П. Коммутативная алгебра. Т. 1,2. – М.: ИЛ, 1963. – 811 с.
11. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 213 с.

Надійшла до редколегії 30.08.11

Філатова І.А., Федорчук* Н.А., аспірант
Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах

В статті сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задач напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в складних гідрогеологічних умовах (в ізо- та неізотермічних умовах). Реалізовано чисельне конформне відображення криволінійної складеної області, що містить область фільтрації та область сухого ґрунту, на параметричний прямокутник в оберненій постановці та отримано чисельний розв'язок відповідних крайових задач методом скінченних різниць.

Ключові слова: напружено-деформований стан, масоперенесення, тепло-масоперенесення, метод скінченних різниць, чисельні конформні відображення.

*E-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

1. Вступ. При проектуванні гідротехнічних, енергетичних об'єктів та споруд цивільного будівництва особлива увага приділяється дослідженню напружено-деформованого стану (НДС) основ ґрунтового середовища. При експлуатації даних об'єктів НДС ґрунтових основ, на яких вони побудовані, може значно змінюватись. Як відомо, НДС ґрунтових основ будівель і споруд істотно залежить від фізико-механічних характеристик ґрунтів, гідрогеологічних умов ґрунтового середовища та типу навантажень, зокрема: фільтрації підземних вод, масоперенесення, теплоперенесення розчинених речовин фільтраційними потоками (розчинення та вимивання порід).

Важливий вплив на стійкість споруд має також і положення вільної поверхні ґрунтових вод, зміна положення якої може призвести до зміни НДС ґрунтових основ об'єктів і врешті до негативних явищ, пов'язаних з аварією цих споруд.

Суть проблеми полягає в тому, що картина НДС ґрунтових основ в складних гідрогеологічних умовах описується нелінійними крайовими задачами математичної фізики в областях з криволінійними межами (рухомими або нерухожими), розв'язання яких потребує знань потужних чисельних методів (скінченних

I.A. Filatova, N.A.Fedorchuk, PhD student

Mathematical modeling of stressed deformed state of soil masses under complicated hydrogeological conditions

In the article was formulated the statement and carried out the mathematical modelling of problems of stressed deformed state (SDS) of soil masses under complicated hydrogeological conditions (under isothermal and non-isothermal conditions). There is implemented the numerical conformal mapping of curvilinear composite area containing the area of filtration and the area of dry ground on parametric rectangle in inverse statement and is obtained the numerical solution of respective boundary problems by the method of finite differences.

Key words: stressed deformed state, mass transfer, heat-mass transfer, method of finite differences, numerical conformal mappings.

різниць, скінченних або граничних елементів, радіальних базисних функцій та ін.).

В роботах [1] досліджено НДС ґрунтових основ гідротехнічних споруд при наявності фільтрації ґрунтових вод та без неї, причому розглядалась фільтрація чистої води. Подальшим дослідженням в цьому напрямку з врахуванням процесів масоперенесення та тепло-масоперенесення при фільтрації підземних вод присвячені роботи [2-10].

Зважаючи на актуальність, в даній роботі для розв'язування задачі НДС ґрунтових масивів з врахуванням масоперенесення та тепло-масоперенесення при фільтрації солових розчинів та наявності рухомої вільної поверхні ґрунтових вод запропоновано застосування чисельних конформних відображень в оберненій постановці в поєднанні з методом скінченних різниць.

2. Постановка задачі. Розглядається процес інтенсивної відкачки ґрунтових вод на укосі при плоско-вертикальній безнапірній фільтрації солових розчинів в складних гідрогеологічних умовах за наявності рухомої вільної поверхні ґрунтових вод (рис.1).

На рис.1 введені наступні позначення: Ω_1 – область водонасиченого ґрунту; Ω_2 – область ґрунту в природному стані; H_1, H_2 –

гідростатичні напори відповідно на межі відкачування та на контурі живлення; D_1C_1 – верхня межа ґрунту; DC – положення вільної поверхні ґрунтових вод (кривої депресії); DE – проміжок височування ґрунтових вод; AB – непроникий водоупір (глина, кам'яна скеля).

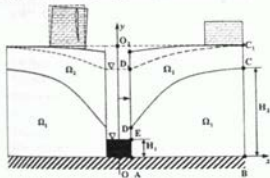


Рис. 1. Розрахункова схема до прогнозування осідання земної поверхні при пониженні вільної поверхні ґрунтових вод в результаті відкачки рідини із дренажної щілини

Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є. НДС досліджується в рамках лінійної теорії пружності, що описується рівняннями Ламе.

Внаслідок зміни положення кривої депресії утворюється депресійна лунка, що призводить до зміни напружено-деформованого стану (НДС) в оточуючому масиві ґрунту. Це може призвести до осідання земної поверхні, утворення тріщин в ній та порожнин. Як приклад, може слугувати проблема водозабору.

3. Математичні моделі задач НДС в змінних x , у фізичній області

3.1. Математична модель задачі НДС в ізотермічних умовах. Математичну модель задачі НДС ґрунтового масиву за наявності масоперенесення при фільтрації солевих розчинів в ізотермічних умовах та рухомої вільної поверхні ґрунтових вод в двохвимірній постановці в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1-7]:

$$\mu(c)\Delta U + (\lambda(c) + \mu(c))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left[\frac{\partial \lambda(c)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = X, \quad (1)$$

$$\mu(c)\Delta V + (\lambda(c) + \mu(c))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left[\frac{\partial \lambda(c)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = Y,$$

$$\nabla \cdot (D(c)\nabla c) - v\nabla c - \gamma(c - C_\infty) = n\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (K(c)\nabla H - v, (c)\nabla c) = a\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\tilde{u} = -K(c)\nabla H + v, (c)\nabla c, \quad \text{div } \tilde{u} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_{CD} = n\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi(x, y, t) = (y - H(x, y, t))|_{CD} = 0, \quad H|_{CD, DE} = y, \quad (5)$$

$$U_n = U_t = 0, \quad (x, y) \in AB, \quad (6)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_x = 0, \quad (x, y) \in AE \cup ED \cup BC \cup DC \cup CC_1 \cup C_1D, \quad (7)$$

$$[U_n] = [U_t] = 0, \quad [\sigma_x] = [\tau_x] = 0, \quad (x, y) \in CD, \quad (8)$$

$$I_1 H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \tilde{H}_1(x, y, t), \quad I_2 c(x, y, t)|_{\Gamma_2} = \tilde{C}_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (9)$$

$$H(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

Тут: (1) – це рівняння НДС для масиву ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах з врахуванням масоперенесення для водонасиченого ґрунту; (2) описує процес масоперенесення при фільтрації солевих розчинів (3), (4) в ізотермічних умовах. Співвідношення (5) задають вільну поверхню CD . Граничні умови та умови спряження ідеального контакту для змінних мають вигляд (6) – (8). Крайові умови для напорів та концентрації солей мають вигляд (9) – (10) відповідно.

3.2. Математична модель задачі НДС в неізотермічних умовах. Математична модель сформульованої вище задачі в неізотермічних умовах на основі робіт [1-13] описується наступною крайовою задачею:

$$\mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} = X,$$

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \sigma_T \frac{\partial T}{\partial y} = Y, \right. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) - v \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (12)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_p v \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla H - v_s(c) \nabla c - v_T \nabla T) = a \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\tilde{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla H + v_s(c) \nabla c + v_T \nabla T, \quad \text{div } \tilde{u} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$(\tilde{u} \cdot \mathbf{n})|_{CD} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \alpha(x, y, t) = (\gamma - H(x, y, t))|_{CD} = 0, \quad H|_{CD, \partial \Omega} = Y, \quad (16)$$

$$U_n = U_t = 0, \quad (x, y) \in AB, \quad (17)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_x = 0, \quad (x, y) \in AE \cup ED \cup BC \cup DD' \cup CC' \cup CD, \quad (18)$$

$$[U_n] = [U_t] = 0, \quad [\sigma_x] = [\tau_x] = 0, \quad (x, y) \in CD, \quad (19)$$

$$l_1 H(x, y)|_{\Gamma_1} = \tilde{H}_1(x, y, t), \quad l_2 c(x, y, t)|_{\Gamma_2} = \tilde{C}_1(x, y, t),$$

$$l_3 T(x, y, t)|_{\Gamma_3} = \tilde{T}_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (20)$$

$$[T]_{CD} = 0, \quad [q_T]_{CD} = 0, \quad (21)$$

$$H(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1(t), \quad (22)$$

$$T(x, y, 0) = \tilde{T}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2(t), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (23)$$

Тут: (11) – це рівняння НДС для масиву ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах з врахуванням тепло-масоперенесення для водонасиченого ґрунту та лише теплоперенесення для ґрунту в природному стані; (12), (13) описують процеси масоперенесення та тепло-масоперенесення при фільтрації солових розчинів (14), (15) в неізотермічних умовах. Співвідношення (16) задають вільну поверхню CD . Крайові умови та умови спряження ідеального контакту для зміщень та температури, а також крайові умови для напорів та концентрації солей мають вигляд (17) – (23) відповідно.

В крайових задачах (1)-(10) та (11)-(23) використані наступні позначення: $U(x, y)$, $V(x, y)$ – зміщення в ґрунтовому масиві вдовж осі Ox та Oy відповідно; $c(x, y, t)$ – концентрація солового розчину; $T(x, y, t)$ – температура; $h(x, y, t)$ – п'єзометричний напір; $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_T$, λ_1 , $\mathbf{K}$, v_s , v_T – тензори відповідно коефіцієнтів конвективної дифузії, термодифузії, ефективної

теплопровідності вологого ґрунту, фільтрації, хімічного та термічного осмосів; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості фільтрації солового розчину в неізотермічних умовах; $\mathbf{q}_T$ – вектор потоку тепла; $\mathbf{n}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області; X , Y – масові сили; λ , μ – коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації фільтруючого розчину ($\lambda = \lambda(c)$, $\mu = \mu(c)$) для крайової задачі (1)-(10) та від концентрації фільтруючого розчину та температури ($\lambda = \lambda(c, T)$, $\mu = \mu(c, T)$) для крайової задачі (11)-(23); γ – константа швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення; n – пористість ґрунту; ρ , c_p – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – питома теплоємність ґрунту при сталому об'ємі; α – коефіцієнт гідропружності; $\tilde{H}_i(x, y, t)$, $\tilde{C}_i(x, y, t)$, $\tilde{T}_i(x, y, t)$, $\tilde{H}_0(x, y)$, $\tilde{C}_0(x, y)$, $\tilde{T}_0(x, y)$, $i = \overline{1, 2}$ – задані функції; l_i , $i = \overline{1, 3}$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно для напору, концентрації солей та температури на бічній поверхні Γ_T циліндра $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$; t – час; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

4. Математичні моделі задач НДС в змінних ξ , η області параметричного прямокутника. Для чисельного розв'язування задач (1)-(10) та (11)-(23) використано метод скінчених різниць із застосуванням чисельних конформних відображень в обернений постановці [14]. Для цього здійснено чисельне конформне відображення області Ω площини (x, y) (рис.2) на параметричний прямокутник Ω_ξ площини (ξ, η) (рис.3).

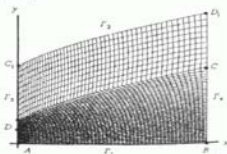


Рис. 2. Конформна різницєва сітка в фізичній області

Координати точок областей Ω і Ω_ξ при оберненому конформному відображенні зв'язані умовами Коші-Рімана [14]:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

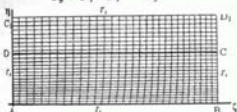


Рис. 3. Образ конформної різницевої сітки в параметричному прямокутнику
На сторонах параметричного прямокутника і вільній поверхні задаються наступні крайові умови:

$$\begin{aligned} x(0, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in AE \cup ED \cup DD_1, \\ x(a, \eta) &= a, \quad (\xi, \eta) \in BC \cup CC_1, \\ y(\xi, 0) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in AB, \\ y(\xi, b_1) &= f(\eta), \quad (\xi, \eta) \in C_1D_1, \\ y(\xi, b_2) &= h, \quad (\xi, \eta) \in CD, \end{aligned}$$

де $f(\eta)$ – деяка функція, що характеризує процес просідання верхньої межі ґрунту; h – значення ізометричного напору на вільній межі (кривій депресії) CD .

При конформному відображенні областей маємо наступний зв'язок між похідними:

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{y_x}{J_1}, \\ \xi_y = -\frac{x_x}{J_1}, \\ \xi_z = -x_z \xi_x - \xi_y y_z, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_x = -\frac{y_z}{J_1}, \\ \eta_y = \frac{x_z}{J_1}, \\ \eta_z = -x_z \eta_x - \eta_y y_z. \end{cases} \quad (25)$$
$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{J_1} = \frac{1}{x_z y_x - x_y y_z}.$$

де J , J_1 – якобіани прямого та оберненого відображень відповідно, $J_1 = x_z y_x - x_y y_z = y_x^2 + y_z^2$.

На основі (25) отримуються аналогічні зв'язки для других похідних ξ_{xx} , ξ_{xy} , ξ_{yy} , η_{xx} , η_{xy} , η_{yy} .

Надалі в результаті застосування конформних перетворень до крайових задач (1)-(10) та (11)-(23), наведено їх запис в нових змінних ξ , η .

4.1. Математична модель задачі НДС (1)-(10) в змінних ξ , η в ізотермічних умовах.

Перетворені рівняння НДС (1) в змінних ξ , η області параметричного прямокутника при залежності параметрів Ламе від концентрації фільтруючого розчину приймуть вигляд

$$(24) \quad \begin{aligned} P_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + P_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + P_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + P_4 \frac{\partial U}{\partial \xi} + P_5 \frac{\partial U}{\partial \eta} &= F_1(V), \\ L_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + L_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + L_3 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + L_4 \frac{\partial V}{\partial \xi} + L_5 \frac{\partial V}{\partial \eta} &= F_2(U), \end{aligned} \quad (26)$$

де P_i , L_i , $i = \overline{1,5}$, $F_1(V)$, $F_2(U)$ – відомі функції коефіцієнтів $\lambda(c)$, $\mu(c)$ та похідних функцій $\lambda(c)$, $\mu(c)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ по змінних ξ , η .

Рівняння масопереносу (2) при перетворенні до змінних ξ , η області параметричного прямокутника для випадку $D_1(c) = D_2(c) = D(c)$ прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + Q_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + Q_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} + Q_3(c - C_\infty) = Q_4 \frac{\partial c}{\partial t} \quad (27)$$

де

$$Q_1 = -\frac{1}{D(c)} \left[(\bar{V}_1 - n x_z) y_x - (\bar{V}_2 - n y_z) x_x \right]$$

$$Q_2 = -\frac{1}{D(c)} \left[(-\bar{V}_1 + n x_z) y_z + (\bar{V}_2 - n y_z) x_z \right]$$

$$Q_3 = \frac{-\gamma \cdot J_1}{D(c)}, \quad Q_4 = \frac{n \cdot J_1}{D(c)},$$

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{J_1} \left[\left(k(c) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta} \right) y_z - \left(k(c) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \xi} \right) y_x \right],$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{J_1} \left[- \left(k(c) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta} \right) x_z + \left(k(c) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \xi} \right) x_x \right].$$

Фільтрація підземних вод в ґрунтового масиві в стаціонарному випадку описується наступною крайовою задачею при перетворенні до нових змінних ξ , η :

$$\bar{A}_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \bar{C}_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \bar{D}_0 \frac{\partial H}{\partial \xi} + \bar{E}_0 \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad (28)$$

де

$$\bar{A}_0 = \bar{C}_0 = \frac{k(c)}{J_1}, \quad \bar{D}_0 = \frac{1}{J_1} \frac{\partial k(c)}{\partial \xi}, \quad \bar{E}_0 = \frac{1}{J_1} \frac{\partial k(c)}{\partial \eta},$$

$$H_{\omega 0} = H(0, y) = H(0, \eta) = H_1,$$

$$H|_{\kappa c} = H(l, y) = H(l, \eta) = H_2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} \Big|_{\omega s} = \frac{\partial H}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{J_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial \xi} x_x + \frac{\partial H}{\partial \eta} x_z \right) = 0,$$

$$H|_{\omega \omega \omega} = \eta.$$

Компоненти вектора швидкості фільтрації рідини при перетворенні до нових змінних ξ , η області параметричного прямокутника приймуть вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{J_1} \left[-k(c) \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial H}{\partial \eta} y_\xi \right) + v_1(c) \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_\xi \right) \right] \\ u_2 &= \frac{1}{J_1} \left[-k(c) \left(-\frac{\partial H}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial H}{\partial \eta} x_\xi \right) + v_1(c) \left(-\frac{\partial c}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_\xi \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогічно перетворюються граничні умови та умови спряження для зміщень, а також крайові умови для напорів та концентрації солей при переході до змінних ξ, η відповідно.

4.2. Математична модель задачі НДС (11)-(23) в змінних ξ, η в неізотермічних умовах. Перетворені рівняння НДС (11) в змінних ξ, η області параметричного прямокутника при залежності параметрів Ламе від концентрації фільтруючого розчину та температури приймуть вигляд

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + P_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + P_3 \frac{\partial U}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial U}{\partial \eta} + P_5 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} &= F_1(V, T), \\ I_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + I_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + I_3 \frac{\partial V}{\partial \xi} + I_4 \frac{\partial V}{\partial \eta} + I_5 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} &= F_2(U, T), \end{aligned} \quad (30)$$

де $P_i, I_i, i=1,5, F_1(V, T), F_2(U, T)$ – відомі функції коефіцієнтів $k(c, T), \mu(c, T)$ та похідних функцій $k(c, T), \mu(c, T), x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ по змінних ξ, η .

Рівняння масопереносу (12) при перетворенні до змінних ξ, η області параметричного прямокутника для випадку $D_1(c) = D_2(c) = D(c)$ та $D_\xi = D_\eta = D_\tau = \text{const}$ прийме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + Q_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + Q_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} + Q_3 (c - C_\infty) + \\ + Q_4 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) = Q_5 \frac{\partial c}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{D(c)} \left\{ \bar{V}_1 - n x_\tau y_\eta - (\bar{V}_2 - n y_\tau x_\xi) \right\} \\ Q_2 &= -\frac{1}{D(c)} \left\{ -\bar{V}_1 + n x_\tau y_\xi + (\bar{V}_2 - n y_\tau x_\xi) \right\}, \quad Q_3 = -\frac{\gamma \cdot J_1}{D(c)}, \\ Q_4 &= \frac{D_\tau}{D(c)}, \quad Q_5 = \frac{n \cdot J_1}{D(c)}, \\ \bar{V}_1 &= \frac{1}{J_1} \left[k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta} \right] y_\xi - \left(k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \xi} \right) y_\eta, \\ \bar{V}_2 &= \frac{1}{J_1} \left[-k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta} \right] x_\xi + \left(k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \xi} \right) x_\eta. \end{aligned}$$

Рівняння теплопереносу (13) при перетворенні до змінних ξ, η області параметричного

прямокутника для випадку $\lambda_\xi = \lambda_{\eta_1} = \lambda_\tau$ прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + Z_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + Z_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} = Z_3 \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1}{\lambda_\tau} \left\{ \bar{V}_1 - c_\tau x_\tau y_\eta - (\bar{V}_2 - c_\tau y_\tau x_\xi) \right\} \\ Z_2 &= -\frac{1}{\lambda_\tau} \left\{ -\bar{V}_1 + c_\tau x_\tau y_\xi + (\bar{V}_2 - c_\tau y_\tau x_\xi) \right\}, \quad Z_3 = \frac{c_\tau \cdot J_1}{\lambda_\tau}, \\ \bar{V}_1 &= \frac{1}{J_1} \left[\left(\alpha_\tau k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_\tau}{\partial \eta} \right) y_\xi - \left(\alpha_\tau k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_\tau}{\partial \xi} \right) y_\eta \right], \\ \bar{V}_2 &= \frac{1}{J_1} \left[-\left(\alpha_\tau k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_\tau}{\partial \eta} \right) x_\xi + \left(\alpha_\tau k(c, T) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_\tau}{\partial \xi} \right) x_\eta \right] \end{aligned}$$

Фільтрація підземних вод в ґрунтовому масиві в стаціонарному випадку при перетворенні до нових змінних ξ, η описується наступною крайовою задачею:

$$\bar{A}_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \bar{C}_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \bar{D}_0 \frac{\partial H}{\partial \xi} + \bar{E}_0 \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad (33)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 = \bar{C}_0 = \frac{k(c, T)}{J_1}, \quad \bar{D}_0 = \frac{1}{J_1} \frac{\partial k(c, T)}{\partial \xi}, \quad \bar{E}_0 = \frac{1}{J_1} \frac{\partial k(c, T)}{\partial \eta}, \\ H|_{AD} = H(0, y) = H(0, \eta) = H_1, \\ H|_{BC} = H(l, y) = H(l, \eta) = H_2, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \eta} \right|_{AB} = \left. \frac{\partial H}{\partial \eta} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{J_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial \xi} x_\tau + \frac{\partial H}{\partial \eta} x_\xi \right) = 0, \\ H|_{CD=ED} = \eta. \end{aligned}$$

Компоненти вектора швидкості фільтрації рідини при перетворенні до нових змінних ξ, η області параметричного прямокутника приймуть вигляд

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{J_1} \left[-k(c, T) \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial H}{\partial \eta} y_\xi \right) + v_1(c) \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_\xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + v_1 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial T}{\partial \eta} y_\xi \right) \right], \\ v_2 &= \frac{1}{J_1} \left[-k(c, T) \left(-\frac{\partial H}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial H}{\partial \eta} x_\xi \right) + v_1(c) \left(-\frac{\partial c}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_\xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + v_1 \left(-\frac{\partial T}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial T}{\partial \eta} x_\xi \right) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогічно перетворюються крайові умови та умови спряження для зміщень та температури, а також крайові умови для напорів та концентрації солей при переході до змінних ξ, η відповідно.

5. Різницьові схеми крайових задач. Для побудови різницьових схем розглянутих вище задач побудуємо чисельне конформне

відображення області Ω_c на область Ω , використовуючи розроблений в [14] алгоритм. В результаті реалізації такого відображення (рис.2, рис.3), обчислимо значення координат $x_{ij}, y_{ij}, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ отриманої різничевої сітки як прообразів точок $(\xi_{ij}, \eta_{ij}), i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ параметричного прямокутника у вигляді двох двовимірних масивів, на основі чого знаходимо значення п'єзометричних напорів у всіх вузлових точках.

Наближені значення п'єзометричного напору знаходяться із розв'язку відповідної крайової задачі фільтрації з використанням ітераційного методу Гауса-Зейделя

$$H_{ij}^{(n+1)} = a_{1j} H_{i-1,j}^{(n)} + a_{2j} H_{i+1,j}^{(n)} + a_{3j} H_{i,j-1}^{(n)} + a_{4j} H_{i,j+1}^{(n)}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \frac{(2\overline{A_{0j}} - h_1 \overline{D_{0j}}) h_1^2}{4(h_1^2 \overline{A_{0j}} + h_1^2 \overline{C_{0j}})}, \quad a_{2j} = \frac{(2\overline{A_{0j}} + h_1 \overline{D_{0j}}) h_1^2}{4(h_1^2 \overline{A_{0j}} + h_1^2 \overline{C_{0j}})}, \\ a_{3j} &= \frac{(2\overline{C_{0j}} - h_1 \overline{E_{0j}}) h_1^2}{4(h_1^2 \overline{A_{0j}} + h_1^2 \overline{C_{0j}})}, \quad a_{4j} = \frac{(2\overline{C_{0j}} + h_1 \overline{E_{0j}}) h_1^2}{4(h_1^2 \overline{A_{0j}} + h_1^2 \overline{C_{0j}})}, \\ \overline{A_{0j}} &= \frac{k_{ij}}{J_{ij}}, \quad \overline{C_{0j}} = \frac{k_{ij}}{J_{ij}}, \quad \overline{D_{0j}} = \frac{1}{J_{ij}} \left(\frac{k_{i+1,j} - k_{i-1,j}}{h_1} \right), \\ \overline{E_{0j}} &= \frac{1}{J_{ij}} \left(\frac{k_{i,j+1} - k_{i,j-1}}{h_2} \right). \end{aligned}$$

$$J_{ij} = \frac{1}{4h_1 h_2} ((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})).$$

Тут: $H_{ij}^{(n+1)}$ – сіткова функція п'єзометричного напору; h_1, h_2 – кроки різничевої сітки в параметричному прямокутнику відповідно по осях $O\xi, O\eta$; s – номер ітерації; J_{ij} – різничеве значення якобіана відображень.

Обчислення за формулою (35) проводять до тих пір, поки не буде виконуватись задана точність ε між двома сусідніми ітераціями

$$|H_{ij}^{(n+1)} - H_{ij}^{(n)}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

Компоненти швидкості фільтрації та квадрат швидкості фільтрації обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} u_{ij} &= -\frac{k_{ij}}{h_1} \frac{(h_{i,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{(h_{i,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}, \\ v_{ij} &= -\frac{k_{ij}}{h_2} \frac{-(h_{i,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + (h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}{(h_{i,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - (h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}, \\ i &= \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

$$v^2 = v_{ij}^2 + v_{ij}^2.$$

Для розв'язання задачі масоперенесення розіб'ємо рівність (2) на дві, використовуючи локально-одновимірну схему Самарського [15]

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} - 0.5\bar{f}(c - C_m) = 0.5\bar{\sigma} \frac{\partial c}{\partial \xi}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + v_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} - 0.5\bar{f}(c - C_m) = 0.5\bar{\sigma} \frac{\partial c}{\partial \eta}. \quad (38)$$

Згідно даного методу запишемо різницеву схему для кожного рівняння.

Тоді для (37), (38) маємо:

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \right)^{(n+1)} + v_1 \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)^{(n+1)} - 0.5\bar{f} \left(c^{(n+1)} - C_m \right) = \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)^{(n+1)}, \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \right)^{(n+1)} + v_2 \left(\frac{\partial c}{\partial \eta} \right)^{(n+1)} - 0.5\bar{f} \left(c^{(n+1)} - C_m \right) = \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial \eta} \right)^{(n+1)}. \quad (40)$$

Для рівняння (39) використаємо монотонну різницеву схему

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} \frac{c_{i,j}^{(n+1)} - 2c_{i,j}^{(n)} + c_{i,j}^{(n-1)})}{h_1^2} + r_1^+ \frac{c_{i,j}^{(n+1)} - c_{i,j}^{(n)}}{h_1} + \\ + r_1^- \frac{c_{i,j}^{(n)} - c_{i,j}^{(n-1)}}{h_1} - 0.5\bar{f} \left(c_{i,j}^{(n+1)} - C_m \right) = 0.5\bar{\sigma} \frac{c_{i,j}^{(n+1)} - c_{i,j}^{(n)}}{0.5h_1}. \end{aligned} \quad (41)$$

де

$$\mu_{ij} = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot h_1 \cdot |r_1|}, \quad r_1 = r_1^+ + r_1^-,$$

$$r_1^+ = 0.5(r_1 + |r_1|) \geq 0, \quad r_1^- = 0.5(r_1 - |r_1|) \leq 0, \quad r_1 = v_1,$$

$$v_1 = \frac{1}{D(c)} (V_1 J_1 + \sigma(c, y_s - y_{s,0})),$$

$$V_1 = -\frac{1}{J_1} \left(\left(V_s - \frac{\partial D(c)}{\partial x} \right) y_s - \left(V_s - \frac{\partial D(c)}{\partial y} \right) x_s \right),$$

$$y_s = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_2}, \quad x_s = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_2}, \quad x_s = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_2}, \quad y_s = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_2},$$

$$\frac{\partial D(c)}{\partial x} = \frac{1}{J_{ij}} \left(\frac{D_{i,j+1}^{(n)} - D_{i,j}^{(n)}}{h_1} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_2} - \frac{D_{i,j+1}^{(n)} - D_{i,j}^{(n)}}{h_2} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_1} \right),$$

$$\frac{\partial D(c)}{\partial y} = \frac{1}{J_{ij}} \left(\frac{D_{i,j+1}^{(n)} - D_{i,j}^{(n)}}{h_1} \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_2} - \frac{D_{i,j+1}^{(n)} - D_{i,j}^{(n)}}{h_2} \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_1} \right),$$

$$D(c) = D_{i,j}^{(n)} = D_m + \lambda |V_{i,j}^{(n)}|, \quad |V(c)| = |V_{i,j}^{(n)}| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}.$$

Розв'язок різничевої схеми (41) знайдемо методом прогонки

$$c_{i,j}^{(n+1)} = \alpha_{i,j}^{(n)} \cdot c_{i,j}^{(n)} + \beta_{i,j}^{(n)},$$

де

$$\alpha_{i,j}^{(n)} = \frac{b_{i,j}}{c_i - a_i \alpha_{i,j}^{(n)}}, \quad \beta_{i,j}^{(n)} = \frac{a_i \beta_{i,j}^{(n)} + f_{i,j}^{(n)}}{c_i - a_i \alpha_{i,j}^{(n)}}, \quad \alpha_{i,j}^{(1)} = 1, \quad \beta_{i,j}^{(1)} = 0,$$

$$a_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_1}{h_1}, \quad b_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_1}{h_1},$$

$$c_1 = \frac{2\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_1}{h_1} - \frac{r_1}{h_1} + \frac{\bar{y}}{2} + \frac{\bar{\sigma}}{\tau}, \quad f_1 = \frac{\bar{y}C_m}{2} + \frac{\bar{\sigma}C_{1,j}}{\tau}.$$

Для рівняння (40) використаємо монотонну різницеву схему

$$\begin{aligned} & \mu_2 \frac{c_{i,j+1}^{(n+1)} - 2c_{i,j}^{(n+1)} + c_{i,j-1}^{(n+1)}}{h_2^2} + r_2^* \frac{c_{i,j+1}^{(n+1)} - c_{i,j}^{(n+1)}}{h_2} + \\ & + r_2^* \frac{c_{i,j}^{(n+1)} - c_{i,j-1}^{(n+1)}}{h_2} - 0,5\bar{\gamma}(c_{i,j}^{(n+1)} - C_m) = 0,5\bar{\sigma} \frac{c_{i,j}^{(n+1)} - c_{i,j}^{(n)}(f_2)}{0,5\tau}, \end{aligned} \quad (42)$$

де

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + 0,5h_2|r_2|}, \quad r_2 = r_2^* + r_2^*,$$

$$r_2^* = 0,5(r_2 + |r_2|) \geq 0, \quad r_2^* = 0,5(r_2 - |r_2|) \leq 0, \quad r_2 = v_2,$$

$$v_2 = \frac{1}{D(c)}(V_2J_1 + \sigma(-x_2y_2 + y_2x_2)),$$

$$V_2 = -\frac{1}{J_1} \left(- \left(V_1 - \frac{\partial D(c)}{\partial x} \right) y_2 + \left(V_1 - \frac{\partial D(c)}{\partial y} \right) x_2 \right),$$

$$y_2 = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{h_1}, \quad x_2 = \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{h_1}.$$

Розв'язок різницевої схеми (42) знайдемо методом прогонки

$$c_{i,j+1}^{(n+1)} = \alpha_{i,j+1}^{(n+1)} c_{i,j}^{(n+1)} + \beta_{i,j+1}^{(n+1)},$$

де

$$\alpha_{i,j+1}^{(n+1)} = \frac{b_2}{c_2 - a_2 \alpha_{i,j}^{(n+1)}}, \quad \beta_{i,j+1}^{(n+1)} = \frac{a_2 \beta_{i,j}^{(n+1)} + f_2}{c_2 - a_2 \alpha_{i,j}^{(n+1)}}, \quad \alpha_{i,1}^{(n+1)} = 0, \quad \beta_{i,1}^{(n+1)} = c_{i,2}^{(n+1)},$$

$$a_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_2}{h_2}, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_2}{h_2},$$

$$c_2 = \frac{2\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_2}{h_2} - \frac{r_2}{h_2} + \frac{\bar{y}}{2} + \frac{\bar{\sigma}}{\tau}, \quad f_2 = \frac{\bar{y}C_m}{2} + \frac{\bar{\sigma}C_{1,j}}{\tau}.$$

Ітераційні рівняння рівноваги, записані згідно методу Гауса-Зейделя, мають вигляд

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{(n+1)} &= a_{10} U_{i-1,j}^{(n+1)} + a_{20} U_{i+1,j-1}^{(n+1)} + a_{30} U_{i,j-1}^{(n+1)} + a_{40} U_{i+1,j+1}^{(n+1)} + \\ &+ b_{10} U_{i,j}^{(n)} + b_{20} U_{i+1,j}^{(n)} + b_{30} U_{i,j+1}^{(n)} + b_{40} U_{i+1,j+1}^{(n)} + f_{10}, \\ V_{i,j}^{(n+1)} &= a_{10}' V_{i-1,j}^{(n+1)} + a_{20}' V_{i+1,j-1}^{(n+1)} + a_{30}' V_{i,j-1}^{(n+1)} + a_{40}' V_{i+1,j+1}^{(n+1)} + \\ &+ b_{10}' V_{i,j}^{(n)} + b_{20}' V_{i+1,j}^{(n)} + b_{30}' V_{i,j+1}^{(n)} + b_{40}' V_{i+1,j+1}^{(n)} + f_{20}, \end{aligned} \quad (43)$$

де $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40}, b_{10}, b_{20}, b_{30}, b_{40}, f_{10}, f_{20}, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$ - деякі відомі коефіцієнти.

Ітерації в (43) продовжують до тих пір, поки не виконається деяка задана точність

$$|U_{i,j}^{(n+1)} - U_{i,j}^{(n)}| \leq \varepsilon, \quad |V_{i,j}^{(n+1)} - V_{i,j}^{(n)}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Аналогічно знайдено розв'язки задачі теплоперенесення (13) методом прогонки,

використовуючи локально-одновимірний метод О.А. Самарського[15].

Згідно розробленого вище алгоритму знайдено чисельний розв'язок задачі НДС в неізотермічних умовах.

6. Результати чисельних експериментів. Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС в ґрунтовому масиві товщиною $l = 50$ м з урахуванням впливу масоперенесення та тепломасоперенесення при фільтрації солових розчинів та наявності РГВ. Значення вхідних даних брались наступними:

$$n_p = 0,2, \quad D = 0,002 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_2 = 0,002 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$\alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_p = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$$

$$c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad \lambda_T = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}},$$

$$\gamma = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ доба}^{-1}, \quad \bar{C}_1(t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \bar{C}_2(t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\bar{T}_1(t) = 5^\circ \text{C}, \quad \bar{T}_2(t) = 25^\circ \text{C}, \quad \bar{H}_1 = 0 \text{ м}, \quad \bar{H}_2 = 1 \text{ м},$$

$$\bar{C}_c(x) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \bar{T}_c(x) = 5^\circ \text{C}.$$

Прийнято наступні залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солового розчину та температури, коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації солового розчину [5, 11]:

$$k_1(c) = a_1' \cdot c^3 + a_2' \cdot c^4 + a_3' \cdot c^3 + a_4' \cdot c^2 + a_5' \cdot c + a_6',$$

де $a_1' = 5,9404 \cdot 10^{-2}$, $a_2' = -1,6703 \cdot 10^{-4}$, $a_3' = 1,7051 \cdot 10^{-1}$, $a_4' = -7,4311 \cdot 10^{-2}$, $a_5' = 1,0563 \cdot 10^{-2}$, $a_6' = 1,0054 \cdot 10^{-3}$;

$$k_2(T) = b_1 \cdot T^3 + b_2 \cdot T^4 + b_3 \cdot T^3 + b_4 \cdot T^2 + b_5 \cdot T + b_6,$$

де $b_1 = 1,4154 \cdot 10^{-2}$, $b_2 = -2,6097 \cdot 10^{-2}$, $b_3 = 1,0819 \cdot 10^{-2}$, $b_4 = 1,2844 \cdot 10^{-4}$, $b_5 = 1,0404 \cdot 10^{-2}$, $b_6 = 3,0925 \cdot 10^{-1}$, $T \in [0,1]$ - безрозмірна величина.

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури покладалась наступною:

$$k(c, T) = \frac{1}{k_0} k_1(c) \cdot k_2(T), \quad k_0 = 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{доба}}.$$

де k_0 - коефіцієнт фільтрації для чистої води при температурі 20°C .

$$\lambda(c) = a_1'' \cdot c^3 + a_2'' \cdot c^2 + a_3'' \cdot c + a_4'',$$

де $a_1'' = -1798,96$, $a_2'' = 4314,732$, $a_3'' = -2615,37$, $a_4'' = 2545,743$;

$$\mu(c) = a_1''' \cdot c^3 + a_2''' \cdot c^2 + a_3''' \cdot c + a_4''',$$

де $a_1''' = -1205,28$, $a_2''' = 2880,321$, $a_3''' = -1741,92$, $a_4''' = 1696,324$;

$$E(c) = a_1^* \cdot c^3 + a_2^* \cdot c^2 + a_3^* \cdot c + a_0^*,$$

де $a_1^* = -0,000393$, $a_2^* = 0,1878866$, $a_3^* = -22,70202$,
 $a_0^* = 4410,552$, $c \in [0,1]$ – безрозмірна величина.

Час, протягом якого розглядався процес НДС,
дорівнював 4 рокам.

Нижче наведено результати чисельних
експериментів у вигляді графіків для задачі
дослідження НДС ґрунтових основ при
фільтрації сольових розчинів в ізотермічних
умовах.



Рис. 4. Поверхня розподілу концентрації солей
при $k = \text{const}$



Рис. 5. Поверхня розподілу концентрації
сольових розчинів при $k = k(c)$

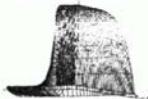


Рис. 6. Поверхня компоненти вектора зміщень
 U_y



Рис. 7. Поверхня компоненти вектора зміщень V_y



Рис. 8. Поверхня квадрату вектора модуля
зміщень



Рис. 9. Поверхня деформації



Рис. 10. Поверхня напружень

На основі розрахунку поля швидкості
фільтраційного потоку по області фільтрації
можна зробити висновок, що швидкість
фільтрації спадає від межі відкачування рідини
до кінця розглядуваної області. На основі аналізу
графіків вектора зміщень можна зробити
висновок, що при розміщенні рівня ґрунтових
вод на висоті 7 м зміщення значно збільшуються
нижче кривої депресії, де наявний фільтраційний
потік. Як видно з графіків задача, де параметри
Ламе задаються поліноміально дають більш
точний розв'язок. Спостерігається відсутність
стрибків функцій на краях області. Крім того,
всередині області деформації обраховуються з
більшою точністю.

Аналізуючи значення та графіки компонент
тензорів деформацій та напружень, можна
зробити висновок, що найбільших деформацій
підлягають області рівня ґрунтових вод та
нижньої межі ґрунту, в якому наявний
фільтраційний потік.

Також були проведені дослідження з
визначення впливу тепло-масопереносу при
фільтрації сольових розчинів на картину НДС
ґрунтового масиву при пониженні вільної
поверхньої ґрунтових вод. Як показали результати
чисельних експериментів, зміщення значно
збільшуються при врахуванні тепло-

масопереносу в порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масопереносу.

7. Висновки. В роботі сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задач НДС ґрунтового масиву в складних гідрогеологічних умовах (при наявності процесів фільтрації, масоперенесення, тепло-масоперенесення). Реалізовано чисельне конформне відображення криволінійної складеної області, що містить область фільтрації та область сухого ґрунту, на параметричний

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергієнко., В.В. Скопєцький, В.С. Дєйнека. – К.: Наукова думка, 1991. – 432с.
2. Власюк А.П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення / А.П. Власюк, С.І.Катерина // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ., 1999. – Вип.1. – С. 50-55.
3. Власюк А.П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А.П. Власюк // Вісник РДТУ – Рівне, – Вип. 3(5), 4.2. – 2000. – С. 57-62.
4. Кузло М.Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / М.Т. Кузло, І.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2005. – Вип. 2(30). – С. 282-287.
5. Кузло М.Т. Дослідження впливу концентрації солевих розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів / М.Т. Кузло, І.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36), 4.2. – С. 209-214.
6. Філатова І.А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багатошарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / І.А. Філатова // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. науки. – Вип. 1. – 2008. – С. 161-165.
7. Філатова І.А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану шару ґрунту з врахуванням масопереносу при фільтрації солевих розчинів / І.А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2009. – Вип. 4(36), 4.2 – С. 332-339.
8. Власюк А.П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багатошарового ґрунтового

прямокутника в оберненій постановці та отримано чисельний роз'язок відповідних крайових задач методом скінчених різниць. Проведено серію чисельних експериментів та їх аналіз. Це дало можливість спрогнозувати осідання земної поверхні, оцінити зміну НДС та несучу здатність ґрунтового масиву і стійкість споруд, що знаходяться на даній поверхні при зміні положення кривої депресії.

- масиву при наявності рівня ґрунтових вод / А.П. Власюк, Н.А. Федорчук // Тез. доп. Міжнарод. наук. конференції "Прийняття рішень в умовах невизначеності". – Київ-Рівне, 2008. – С.73-75.
9. Федорчук Н.А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод / Н.А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам'янець-Подільський: Кам.-Под. нац. ун-т ім. І.Огієнка, 2010. – Вип. 4 – С. 204-215.
10. Власюк А.П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / А.П. Власюк, Н.А. Федорчук // Тез. доп. XVII Міжнарод. наук. конференції "Прийняття рішень в умовах невизначеності". – Східниця, 2011. – С. 46-48.
11. Власюк А.П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах: [монографія] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув., 2008. – 416с.
12. Власюк А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій: [монографія] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув., 2010. – 277 с.
13. Коваленко А.Д. Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 216с.
14. Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей: Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 91.57 / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – Киев: 1991. – 56с.
15. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М: Наука, 1989. – 616с.

Надійшло до редакції 08.09.2011

УДК 517.929.4

Хусайнов Д.Я., д. ф.-м. н., проф., Джалладова
І.А., д. ф.-м. н., проф., Шатирко О.А. студ.

Оцінка області стійкості диференціальної
системи з квадратичною правою частиною

Розглядаються нелінійні системи
диференціальних рівнянь з квадратичною
правою частиною. Дослідження проводиться з
використанням прямого методу Ляпунова.
Розглянуто задачу побудови гарантованої
області стійкості нульового стану рівноваги.
Наведено оцінки області стійкості для випадку
стійкої системи лінійного наближення.

Ключові слова: функція Ляпунова,
асимптотична стійкість, система з
квадратичною правою частиною.

Khusainov D.Ya., Prof. Dr.Sc., Dzhalladova I.A.,
Prof., Dr.Sc., Shatyрко O.A., student.

Estimation of stability region of differential
systems with quadratic right-hand side

We consider nonlinear systems of differential
equations with quadratic right-hand side. Research
carried out using the direct method of Lyapunov.
The problem of constructing guaranteed region of
stability of zero equilibrium is solved. An estimation
of stability region for the case of a stable system of
linear approximation is constructed.

Key Words: Lyapunov function, asymptotic
stability, system with quadratic right-hand side.

E-mail: khusainov@unicyb.kiev.ua, irada_05@mail.ru, lek9a91@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

В роботі розглядаються системи
звичайних диференціальних рівнянь з
квадратичною нелінійністю і асимптотично
стійкою лінійною частиною. Системи
записуються в спеціальній векторно-матричній
формі. Дослідження систем такого типу
раніше проводилось в роботах [1-3]. Як
випливає з теорії стійкості руху динамічних
систем, нульовий стан рівноваги таких систем
буде асимптотично стійким [4,5]. Актуальним
питанням є оцінка області стійкості нульового
стану рівноваги. В роботі запропонований
алгоритм оцінки гарантованої області стійкості
в фазовому просторі нульового стану
рівноваги. Алгоритм базується на
використанні другого методу Ляпунова з
функцією квадратичного вигляду [3], і
властивостях симетричних додатно
визначених матриць [6].

1. Стійкість за лінійним наближенням в нелінійних системах

Розглянемо нелінійну систему
диференціальних рівнянь з виділеною
лінійною частиною

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(t) \in R^n. \quad (1.1)$$

Нелінійна функція $f(x)$ задовольняє умові

$$|f(x)| \leq M|x|^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Вважасмо, що матриця A асимптотично
стійка, тобто всі її власні числа мають від'ємні
дійсні частини, $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \quad i = \overline{1, n}$. Тоді при
довільній додатно визначеній матриці C
матричне рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C \quad (1.3)$$

має єдиний розв'язок – додатно визначену
матрицю H . Розглянемо в якості функції
Ляпунова для вихідної системи (1.1)
квадратичну форму $V(x) = x^T H x$. Її повна
похідна в силу системи (1.1) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= [Ax(t) + f(x(t))]^T H x(t) + \\ &+ x^T(t) H [Ax(t) + f(x(t))] = \\ &= x^T(t) [A^T H + HA] x(t) + 2x^T(t) H f(x(t)). \end{aligned}$$

Або

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -x^T(t) C x(t) + 2x^T(t) H f(x(t)).$$

Беручи до уваги нерівність (1.2), отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(C)\|x(t)\|^2 + 2\|H\|M\|x(t)\|^{2+\alpha} = -$$

$$= -\left[\lambda_{\min}(C) - 2\|H\|M\|x(t)\|^{\alpha}\right]\|x(t)\|^2.$$

Таким чином, в області

$$G_0 = \left\{x \in R^n : \|x\| < \left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\|H\|M}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \quad (1.4)$$

повна похідна квадратичної функції Ляпунова буде від'ємно визначеною.

Позначимо

$$G_r = \{x \in R^n : x^T H x < r^2\}. \quad (1.5)$$

Тоді «гарантованою» областю стійкості нульового розв'язку нелінійної системи (1.1) буде

$$G_\infty = \max_{r>0} \{G_r : G_r \subset G_0\}. \quad (1.6)$$

2. Системи з квадратичною правою частиною

Розглянемо системи з нелінійністю спеціального вигляду, а саме системи з квадратичною правою частиною, які записані в векторно-матричній формі, запропонованій в роботі [3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)Bx(t). \quad (2.1)$$

Тут $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}^T$ прямокутна $n^2 \times n$ -матриця, що складається з симетричних квадратних $n \times n$ -матриць $B_i, i = \overline{1, n}$,

$$B_i = \begin{bmatrix} b'_{i1} & b'_{i2} & \dots & b'_{in} \\ b'_{i2} & b'_{i2} & \dots & b'_{i2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b'_{in} & b'_{i2n} & \dots & b'_{inn} \end{bmatrix}, i = \overline{1, n},$$

$X^T(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$, прямокутна $n \times n^2$ -матриця, що складається з квадратних $n \times n$ -матриць $X_i(t)$, у яких на i -х строках стоять вектори $x(t)$, а інші елементи нульові, тобто

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Нехай, як і раніше, матриця A лінійної частини є асимптотично стійкою. Тоді, як випливає з теорії про стійкість за лінійним наближенням, нульовий розв'язок нелінійної системи також буде асимптотично стійким. Якщо брати в якості функції Ляпунова квадратичну форму $V(x) = x^T H x$, то її повна похідна в силу системи (2.1) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [Ax(t) + X^T(t)Bx(t)]^T H x(t) +$$

$$+ x^T(t)H[Ax(t) + X^T(t)Bx(t)] =$$

$$= x^T(t)[(A^T H + H A) + (B^T X(t)H + H X^T(t)B)]x(t).$$

Або, враховуючи, що H є розв'язком рівняння Ляпунова, отримаємо наступне

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^T(t)[C - (B^T X(t)H + H X^T(t)B)]x(t) \quad (2.2)$$

Областю стійкості є множина, що міститься всередині поверхні рівня функції Ляпунова $V(x) = r > 0$, яка лежить всередині області

$$G_0 = \{x \in R^n : C - B^T X H - H X^T B > \Theta\},$$

де під символом

$$C - B^T X H - H X^T B > \Theta \quad (2.3)$$

розуміється додатна визначеність матриці. Замінімо умову (2.3) більш «грубою» умовою, але такою, що легше перевіряється. Оскільки, в силу вибраних матричних та векторних норм буде виконуватись

$$\|X(t)\| = \|x(t)\|,$$

то для повної похідної функції Ляпунова (2.2) має місце

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -[\lambda_{\min}(C) - 2\|H\|B\|x(t)\|]\|x(t)\|^2.$$

Тому залежність (1.4) отримає вигляд

$$G_0 = \left\{x \in R^n : \|x\| < \left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\|H\|B}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \quad (2.4)$$

а область «гарантованої» стійкості має вигляд залежності (1.6)

$$G_0 = \max_{r>0} \{G_r : G_r \subset G_0\},$$

$$G_r = \{x \in R^n : x^T H x < r^2\}.$$

Як випливає з (2.4), треба помістити еліпсоїд $x^T H x = r^2$ всередину сфери радіуса

$$R = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H) \|B\|}$$

і «розтягувати» $r \rightarrow \infty$ до того моменту, поки еліпс не торкнеться сфери.

3. Алгоритм обчислення області стійкості

Розглянемо наступний алгоритм обчислення гарантованої області асимптотичної стійкості системи (2.1), тобто обчислення величини r_0 . Алгоритм базується на повороті системи до положення, при якому головні осі еліпсоїда поверхні рівня функції Ляпунова співпадають з вісями координат. Після цього обчислюється точка дотикання перетвореної поверхні рівня функції Ляпунова й сфери, всередині якої повна похідна є від'ємною визначеною.

Нехай матриця C_0 вибрана і фіксована, а H_0 є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (1.3). Оскільки H_0 є симетричною, додатно визначеною матрицею, то завжди існує неособливе ортогональне перетворення U (матриця поворотів), що зводить H_0 до головних осей, тобто існує матриця $U : U^T U = I$, I – одинична матриця, така що

$$U^T H_0 U = \Lambda, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ – власні числа матриці H_0 .

Після перетворення

$$x = Uy$$

матриця $X(t)$ приймає вигляд

$$X^T(t) = Y^T(t) U_0, \quad Y^T(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)\},$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} U^T & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & U^T & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \dots & U \end{bmatrix}.$$

І вихідна система (2.1) запишеться

$$U \dot{y}(t) = AUy(t) + Y^T(t) U_0 B U y(t). \quad (3.1)$$

Введемо наступну $n^2 \times n^2$ матрицю

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & \bar{U}_{12} & \dots & \bar{U}_{1n} \\ \bar{U}_{21} & \bar{U}_{22} & \dots & \bar{U}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{U}_{n1} & \bar{U}_{n2} & \dots & \bar{U}_{nn} \end{bmatrix},$$

де

$$\bar{U}_{11} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{11} \end{bmatrix},$$

$$\bar{U}_{12} = \begin{bmatrix} u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{12} \end{bmatrix},$$

$$\bar{U}_{nn} = \begin{bmatrix} u_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{nn} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (3.1) можна переписати у вигляді

$$\dot{y}(t) = U^T A U y(t) + U^T Y^T(t) U_0 \bar{U} B y(t).$$

Або, після перетворення, у стандартному вигляді квадратичної системи

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) + Y^T(t) B_1 y(t), \quad A_1 = U^T A U,$$

$$B_1 = \bar{U} U_0 B U. \quad (3.2)$$

В результаті наведених перетворень матричне рівняння Ляпунова приймає вигляд

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = C_1, \quad C_1 = U^T C_0 U, \quad (3.3)$$

а функція Ляпунова буде мати вигляд квадратичної форми, що приведена до головних осей

$$V(y) = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

При поворотах, окіл, який є границею області G_0 (2.4), не змінюється і точка дотикання

еліпсоїда, приведеного до головних осей околу радіуса

$$R = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H) \|B\|}$$

визначається значенням

$$y_1 = \pm \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H) \|B\|}, y_2 = 0, \dots, y_n = 0.$$

Тому еліпсоїд, який визначас область стійкості, має вигляд

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_1 \left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H) \|B\|} \right)^2, \quad (3.4)$$

тобто

$$r_0^2 = \lambda_1 \left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H) \|B\|} \right)^2.$$

4. Системи на площині

Більш конструктивні результати можна отримати, якщо розглядати систему з квадратичною правою частиною на площині. Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}x_1^2 + 2b_{22}x_1x_2 + b_{22}x_2^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Перепишемо її у векторно-матричній формі, запропонованій в [3]

$$\dot{x} = Ax + X^T Bx, \quad (4.2)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} b_{21}^2 & b_{22}^2 \\ b_{22}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}, X^T = \{X_1^T, X_2^T\}, X_1^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ X_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

І вираз для повної похідної функції Ляпунова вздовж розв'язків системи буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \\ &= -x^T(t) \left[(A + X^T(t)B)^T H + H(A + X^T(t)B) \right] x(t) = \\ &= -x^T(t) \left[C - (B^T X(t)H + HX^T(t)B) \right] x(t). \end{aligned}$$

Або

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 0 \\ 0 & x_1(t) \\ 0 & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} - \\ &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \\ b_{22}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Використовуючи залежність (2.2), для повної похідної функції Ляпунова будемо мати наступне

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -[\lambda_{\min}(C) - 2\|H\| \|B\| x(t)] x(t)^2,$$

де

$$\|H\| = \lambda_{\max}(H),$$

$$\|B\| = \left\{ \lambda_{\max}(B^T B) \right\}^{1/2} = \left\{ \lambda_{\max}(B_1^T B_1 + B_2^T B_2) \right\}^{1/2}.$$

Гарантованою областю стійкості буде

$$h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2 \leq r_0^2,$$

$$r_0^2 = \lambda_1 \left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H) \|B\|} \right)^2.$$

Список використаної літератури

1. Сибирский К.С. Введение в алгебраическую теорию инвариантов. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 168 с.
2. Белозеров В.Е., Волкова С.А. Геометрический подход к проблеме стабилизации систем управления. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского национального университета, 2006. – 440 с.
3. Хусайнов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 1992. – С.27-33.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
5. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.385.833

Находкін М.Г., акад. НАН України, проф.,
д-р фіз.-мат. наук, Федорченко М.І., канд.
фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Адсорбція As на поверхні Ge(113)

За допомогою методів електронної спектроскопії досліджено електронні властивості адсорбційної системи Ge(113):As і характерні її поверхневі структури 1x1 та 2x1. Визначені умови утворення цих надструктур і роботи виходу, які характерні для них ($\approx 5,05$ eV і $\approx 4,18$ eV, відповідно). Запропоновано робочу модель, яка пояснює поведінку електронних властивостей системи Ge(113):As.

Ключові слова: As, Ge(113), адсорбція, робота виходу, загин зон, поверхневі стани, вбудовування.

E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д-р фіз.-мат. наук Скришевський В.А.

Вступ

Останнім часом спостерігається зростання інтересу до більш детального вивчення структури та електронних властивостей поверхонь (113) Si та Ge [1, 2], оскільки вони разом з поверхнями (100) і (111) є найбільш стабільними поверхнями атомних напівпровідників Si та Ge, на основі яких створюються сучасні напівпровідникові електронні прилади. Крім того відомо, що навіть на поверхнях (100), наприклад на Si(100), утворюються фасетки (113) [1, 2], що також збільшує необхідність отримання більш точних даних про структуру та електронні властивості поверхонь (113) Si та Ge.

Дослідження адсорбції атомів As, Sb і Bi на поверхнях Si та Ge проводяться з метою в'ясування процесів, що відбуваються при використанні поверхнево-активних речовин (сурфактантів) для одержання високоякісних гетероструктур із квантовими властивостями [3, 4]. Окрім того, поверхні, які закінчуються атомами As, виявились вдалим стартовим поверхнями підкладки для вирощування на них напівпровідникових структур $A_{III}B_V$, наприклад, для багатопшарових сонячних елементів, монолітних оптоелектронних інтегральних схем і резонаторів.

© М.Г. Находкін, М.І. Федорченко, 2011

Nakhodkin M.G., acad. of NAS of Ukraine, prof.,
D. Sc., Fedorchenko M.I., Ph. D.

Adsorption of As on Ge(113) surface

The electronic properties of the Ge(113):As adsorption system and their characteristic surface structure 1x1 and 2x1 were investigated using electron spectroscopy methods. The preparation conditions of these superstructures and their work functions (≈ 5.05 eV and ≈ 4.18 eV, accordingly) are determined. The preliminary model which explains the electronic properties of the Ge(113):As system is proposed.

Keywords: As, Ge(113), adsorption, work function, band bending, surface states, intermixing.

нашних тунельних діодів навіть тоді, коли до складу $A_{III}B_V$ не входить As [5].

У наших попередніх роботах було проведено дослідження адсорбції атомів Bi та Sb на поверхнях Si та Ge з різною кристалографічною орієнтацією, у тому числі й на поверхні Ge(113)-3x1. У роботах вивчалися електронні властивості атомарно чистих поверхонь та їх зміни при адсорбції атомів Bi та Sb. Було встановлено, що Bi та Sb насичують вільні поверхневі зв'язки, пасивують поверхню й обидва є ефективними сурфактантами, але відрізняються впливом на деякі електронні властивості, зокрема на роботу виходу та на вигин зон поблизу поверхні [6–8].

Метою цієї роботи було експериментальне вивчення взаємозв'язку між структурою та електронними властивостями інтерфейсів As/Ge(113) (структура верху валентної зони, робота виходу, загин зон поблизу поверхні) залежно від товщини адсорбованої плівки As і температури відпалу утвореного інтерфейсу.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисокому вакуумі (базовий тиск $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ Тор з використанням методик Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ульт-

рафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у 7,7 еВ. У цьому діапазоні енергій квантів вдається більш чітко визначити зміни роботи виходу.

As наносився на поверхню з потоку його парів. Він випаровувався з нагрітої очищеної поверхні монокристала GaAs, закріпленої на вольфрамовій пластинці, яка нагрівалась за допомогою пропускання в ній струму. Із літературних джерел [9, 10] відомо, що тиск насиченої пари As над розігрітим до температури $T=500^\circ\text{C}$ зразком GaAs значно перевищує тиск насиченої пари Ga, тому вважаємо, що за цієї температури з пластинки GaAs випаровуються переважно молекули As₂ [10].

Адсорбція As відбувалась на очищену та відпалену поверхню Ge(113). Зразок германію був вирізаний з монокристала ($\rho=50\text{ Ом}\cdot\text{см}$), відшліфований і очищений у перексиді водню та деіонізованій воді. Після розміщення його у вакуумній камері подальше очищення його поверхні здійснювалось циклами бомбардування іонами Ar⁺ і прогріванням за температури $T=700^\circ\text{C}$ упродовж 2-3 хв. Такі цикли очищення проводилися доти, поки на картинах ДПЕ не з'являлась чітка картина рефлексів 3x1, а в оже-спектрах не зникли лінії різноманітних домішок.

Атомний склад шарів As на поверхні інтерфейсу As/Ge(113) перевірявся за допомогою ОЕС. На кожному етапі досліджень, ресертувались фотоелектронні спектри, оже-спектри та картини ДПЕ. Визначення роботи виходу поверхні (ϕ) відбувалось за величиною зсуву низькоенергетичного краю кривих фотоелектронного спектра (ФЕС), отриманих за енергії квантів світла 7,7 еВ.

Результати експериментів та їх інтерпретація

Упорядкована атомарно чиста поверхня Ge(113) формувала чітку картину рефлексів ДПЕ, яка вказувала на наявність на поверхні надструктури (3x1). Адсорбція атомів As на поверхні Ge(113)-3x1 зменшувала інтенсивність дифракційних рефлексів й за ступеня покриття арсеном $\Theta_{\text{As}}=1,5\text{ МШ}$ вони зовсім зникли, що вказує на аморфізацію поверхні інтерфейсу As/Ge(113). Для порівняння, повна аморфізація приповерхневого шару Ge(113)-3x1 при адсорбції атомів Sb настає лише за $\Theta_{\text{Sb}}\approx 5\text{ МШ}$ [11]. Значна різниця значень Θ_{As} і Θ_{Sb} необхідних для аморфізації поверхні цих інтерфейсів, вказує на більш сильну взаємодію атомів Ge з адатомами As порівняно з адатомами Sb.

Адатоми As також змінюють ФЕС від поверхні інтерфейсу As/Ge(113). На рис. 1 (крива а) наведений типовий ФЕС за $h\nu = 7,7\text{ еВ}$ для атомарно чистої поверхні Ge(113)-1x3. Він дозволяє оцінити роботу виходу цієї поверхні, яка виявилась рівною $\phi=4,5\text{ еВ}$. Після адсорбції на цю поверхню As за кімнатної температури ($\Theta_{\text{As}}=0,7\text{ МШ}$) спостерігається зсув низькоенергетичного краю ФЕС (крива б, рис. 1) на 0,27 еВ у напрямку до рівня Фермі (E_F), що вказує на збільшення роботи виходу поверхні до $\approx 4,77\text{ еВ}$. При цьому після адсорбції As замість чітких рефлексів картини ДПЕ, притаманних поверхні Ge(113)-1x3, формуються малоінтенсивні розмиті рефлексі надструктури 1x1. При відпалі інтерфейсу рефлексі надструктури стають більш чіткими, а низькоенергетичний край ФЕС зсувається ще ближче до рівня Фермі. Наприклад, після прогрівання за 260°C протягом 5 хв (крива в, рис. 1) додатковий зсув становить 0,26 еВ, тобто робота виходу збільшується до $\phi=5,03\text{ еВ}$.

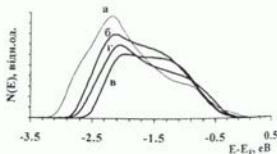


Рис. 1. Фотоелектронні спектри атомарно чистої поверхні Ge(113) (а), з $\Theta_{\text{As}} = 0,7\text{ МШ}$ (б) і відпаленням системи до 260°C (в) та 360°C (г)

Прогрівання інтерфейсу до $T=360^\circ\text{C}$ зсуває низькоенергетичний край ФЕС у бік від E_F , тобто зменшує роботу виходу на $\Delta\phi=0,22\text{ еВ}$. Збільшення та зменшення роботи виходу є наслідком зміни ефективної електронної спорідненості поверхні через утворення на ній відповідного дипольного шару, оскільки ФЕС не виявили зміни загнути зон поблизу поверхні. Зменшення інтенсивності ФЕС поблизу рівня Фермі при напilenні As є ознакою зменшення густини поверхневих електронних станів за рахунок насичення обірваних орбіталей поверхневих атомів Ge атомами As.

На рис. 2 наведено узагальнені дані зміни ϕ поверхонь Ge(113) залежно від ступеня покриття їх атомами As і температури відпалу. Із рисунка

видно, що за ступеня покриття $\Theta_{As} < 1$ МШ у всьому діапазоні температур (від кімнатної температури до температури повної десорбції атомів As) ϕ більша або дорівнює ϕ атомарно чистої поверхні Ge(113).

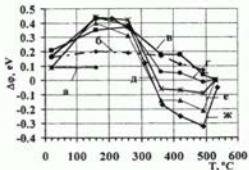


Рис. 2. Залежність зміни роботи виходу $\Delta\phi$ системи As/Ge(113) від температури прогрівання інтерфейсу: а) $\Theta_{As} \approx 0,3$ МШ; б) $\Theta_{As} \approx 0,5$ МШ; в) $\Theta_{As} \approx 1$ МШ; г) $\Theta_{As} \approx 1,5$ МШ; д) $\Theta_{As} \approx 5$ МШ

Найбільше значення ϕ ($\approx 4,95$ – $5,05$ eV) відповідає $\Theta_{As} \approx 1$ МШ і температурі відпалу $T \approx 160$ – 260 °C. За $\Theta_{As} > 1$ МШ у діапазоні температур $T \approx 360$ – 490 °C залежність $\phi(T)$ змінюється. Робота виходу стає меншою від ϕ атомарно чистої поверхні Ge(113).

Нанесення As за кімнатної температури приводить до збільшення ϕ поверхні Ge(113) для всіх використаних Θ_{As} . При відпалі до $T \leq 300$ °C ϕ збільшується для всіх $\Theta_{As} > 0,5$ МШ. При цьому на картині ДПЕ ресструється картина рефлексів 1×1 .

Подальший відпал інтерфейсів у діапазоні температур ≈ 360 – 490 °C викликає зменшення ϕ . Якщо відпалюються інтерфейси з $\Theta_{As} < 1$ МШ, то ϕ поступово зменшується до ϕ атомарно чистої поверхні Ge(113). Структура поверхні поступово переходить з 1×1 до 3×1 . При відпалі інтерфейсів з $\Theta_{As} > 1$ МШ ϕ зменшується до значень, нижчих від ϕ атомарно чистої поверхні Ge(113), а на картині ДПЕ ресструється надструктура 2×1 .

Для значень $\Theta_{As} > 5$ МШ ϕ за $T \approx 490$ °C зменшується до значення $\approx 4,18$ eV. При цьому спостерігалась найбільш чітка структура 2×1 .

На рис. 3 наведено оже-ділянки електронних спектрів інтерфейсу зі ступенем покриття $\Theta_{As} \approx 5$ МШ після його відпалу за різних температур. На спектрах розрізняються оже-лінії Ge з енергіями 47 та 52 eV, енергетичні положення яких, як і ліній зі більшими енергіями, збігаються з енергіями, які наводяться у довідниках [12], і не залежить ні від температури відпалу, ні від ступеня покриття інтерфейсу арсеном.

Поява додаткового малоінтенсивного оже-піку за 55 eV, який з'являється після прогрівання інтерфейсу до $T > 310$ °C, є частиною більш складного MMV оже-піку Ge, що узгоджується з даними в роботі [13]. Окрім оже-піків Ge на рис. 2 розрізняються ще й оже-піки As з енергіями 34, 41 та 46 eV, енергетичні положення яких не залежали від температури відпалу, але зменшували свою інтенсивність при збільшенні T відпалу й зникали за $T > 500$ °C, коли відбувається десорбція As. Така сама поведінка була характерною й для високоенергетичного оже-піку As $L_{2,3}M_{4,5}M_{4,5}$ з енергією 1225 eV. Незалежність положення оже-ліній від температури дозволяє вважати, що хімічний зв'язок атомів на поверхні інтерфейсу не залежить від температури у використаному інтервалі температур. Інтенсивність оже-ліній залежить від температури, наприклад, у As вона спочатку за $T < 160$ °C майже не змінюється, за $T > 160$ °C починає зменшуватись і за $T > 500$ °C наближається до нуля, що вказує на випаровування As за цих температур.

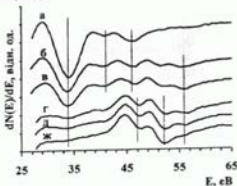


Рис. 3. Оже-спектри поверхні Ge(113) з $\Theta_{As} \approx 3,0$ МШ за різних температур прогрівання інтерфейсу: а) 0° C; б) 165° C; в) 265° C; г) 420° C; д) 490° C; ж) 530° C

Виходячи з отриманих даних ми пропонуємо таку робочу модель взаємодії адатомів As з поверхнею Ge(113). Адатоми As на поверхні Ge(113) насичують обірвані зв'язки поверхневих атомів Ge, викликаючи перерозподіл електронної густини між атомами Ge та As відповідно до значень їх електронегативностей (2,02 і 2,11 для Ge та As, відповідно [14]). У приповерхневій області утворюється шар диполів, який викликає збільшення ϕ поверхні. Збільшення концентрації адатомів As на поверхні Ge(113) у межах, коли $\Theta_{As} < 1$ МШ, збільшує ϕ поверхні. Однак при цьому збіль-

шується і ступінь розупорядкування приповерхневої області, на що вказує розмиття, і навіть зниження рефлексів у картині ДПЕ. Розупорядкування приповерхневої області збільшує дезорієнтацію диполів, унаслідок чого спостерігається більш повільне зростання ϕ при збільшенні Θ_{As} . При відпалі інтерфейсів As/Ge(113) відбувається упорядкування приповерхневої області, десорбція атомів As та їх дифузія в приповерхневу область. У діапазоні температур відпалу 160–260°С головним фактором є упорядкування розташування диполів, що збільшує ϕ поверхні з $\Theta_{As} > 0,5$ МШ, коли попереднє розупорядкування при адсорбції As за кімнатної температури починає відігравати помітну роль. Максимальне значення ϕ у наших експериментах, обумовлене утворенням упорядкованого шару диполів As–Ge, дорівнювало 5,05 еВ.

Зі збільшенням температури відпалу до 420–490°С основними процесами стають десорбція атомів As та їх дифузія в приповерхневу область. Процес дифузії стає більш ефективним зі збільшенням концентрації атомів As на поверхні. Дифузія атомів As у приповерхневу область Ge спричиняє додатковий перерозподіл електронної густини поблизу поверхні. Відпал інтерфейсів з $\Theta_{As} > 1$ МШ призводить до того, що за температури $\approx 490^\circ\text{C}$ обірвані зв'язки поверхневих атомів Ge повністю звільнюються від атомів As, але в приповерхневій області ще залишаються атоми As. Це й обумовлює той факт, що ϕ поверхні Ge(113):As з налеструктурою 2x1 стає меншою, ніж ϕ атомарно чистої поверхні Ge(113)–3x1.

Не виключено, що можливе утворення δ-легованого атомами As приповерхневого шару інтерфесу або нового напівпровідникового матеріалу GeAs, що потребує додаткових досліджень.

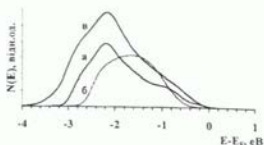


Рис. 4. Фотоелектронні спектри атомарно чистої поверхні Ge(113) (а), з $\Theta_{As} = 5$ МШ та прогрівом до 160°С (б), з $\Theta_{As} = 5$ МШ та прогрівом до 490°С (в)

Наша робоча модель підтверджується даними ФЕС на рис. 4. ФЕС атомарно чистої поверхні Ge(113)–3x1 (крива а) має металічний характер поверхневих станів, про що свідчить особливість електронної структури біля самого рівня Фермі. При нанесенні атомів As з $\Theta_{As} = 5$ МШ і прогріванні системи до $T = 160^\circ\text{C}$ (крива б) густина поверхневих станів поблизу рівня Фермі значно зменшується (насичуються обірвані зв'язки поверхневих атомів) і різко збільшується ϕ унаслідок перерозподілу електронної густини між атомами Ge та As. Прогрівання системи з $\Theta_{As} = 5$ МШ до температури $\approx 490^\circ\text{C}$ (крива в) призводить до такого стану, коли атоми As звільняють обірвані зв'язки поверхневих атомів і залишаються лише в приповерхневій області.

Висновки

1. Досліджено електронні властивості адсорбційної системи Ge(113):As і характерні їй поверхневі структури 1x1 та 2x1.

2. Структура Ge(113):As–1x1 утворюється при відпалі системи Ge(113):As з $\Theta_{As} > 0,5$ МШ до температури 160–260°С. Поверхня з такою структурою має роботу виходу $\approx 5,05$ еВ. Найбільш імовірним механізмом збільшення роботи виходу є насичення обірваних орбіталей поверхневих атомів Ge адатомами As й утворення шару впорядкованих диполів з переносом електронної густини від атомів Ge до атомів As відповідно до значень їх електронегативностей.

3. Структура Ge(113):As–2x1 утворюється при відпалі системи Ge(113):As з $\Theta_{As} > 1$ МШ до температур 420–490°С. Робота виходу цієї структури менша від роботи виходу атомарно чистої поверхні Ge(113). Найчіткіші рефлекси 2x1 картини ДПЕ і найменша робота виходу 4,18 еВ притаманна структурі відпаленої системи Ge(113):As з попередньо нанесеним при кімнатній температурі шаром As з $\Theta_{As} > 5$ МШ. Найбільш імовірним механізмом утворення структури 2x1 є дифузія та вбудовування атомів As у приповерхневу область Ge(113).

Робота виконувалась за бюджетного фінансування і часткового фінансування Міносвіти та науки України, грант М/212–2011

Список використаних джерел

1. Dabrowski J. Silicon Surfaces Formation of Interfaces. Basic Science in the Industrial World [Текст] / Dabrowski J., Müssing H.-J. // World

Scientific. – Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 2000.

2. Stekolnikov, A.A. Adatoms, dimers and interstitials on group-IV(113) surfaces: First-principles studies of energetical, structural and electronic properties [Текст] / A.A. Stekolnikov, J. Furthmuller // Phys. Rev. B. – 2003. – V.67. – P. 195332–10.

3. Hirnet, A. Novel Sb Induced Reconstruction of the (113) Surface of Ge [Текст] / A. Hirnet, K. Schroeder // Phys. Rev. Lett. – 2002. – V.88, N 22. – P. 226102.

4. Haight, R. Antibonding state on the Ge(111):As surface: Spectroscopy and dynamics [Текст] / R. Haight, D.R. Peale // Phys. Rev. Lett. V.70, 3979–3982, 1993. Issue 25.

5. Drok, T. Surface science studies including low-temperature RDS on MOCVD-prepared, As-terminated Si(100) surfaces [Текст] / T. Drok, W.E. McMahon, J.M. Olson, T. Hannappel // Jour. of Crystal Growth, 2007, V.208, P. 54–58.

6. Находкін М.Г. Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступеня покриття її вісмутом [Текст] / М.Г. Находкін, М.І. Федорченко // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, 2004. – Вип. 4. – С. 373–378.

7. Находкін М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) [Текст] / М.Г. Находкін, М.І. Федорченко // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, 2006. – Вип. 4. – С. 323–332.

8. Fedorchenko, M. Formation of the Sb/Ge(100) interface [Текст] / M. Fedorchenko, B. Lepiavko, M. Nakhodkin // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 264–268.

9. Ільченко В.В. Керування процесами випаровування та формування складу поверхні кристалів GaAs [Текст] / В.В. Ільченко, О.І. Кравченко, Б.І. Михайлівський, В.М. Телега // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, 2001. – Вип. 1. – С. 346–355.

10. Mokwa, W. Hydrogen adsorption on GaAs(110) studied by temperature-programmed desorption [Текст] / W. Mokwa, D. Kohl and G. Heiland // Phys. Rev. B, 1984. – 29, N 12. – P. 6709–6715.

11. Находкін, М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(113) [Текст] / М.Г. Находкін, М.І. Федорченко. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 323–332.

12. L.V. Dvies *Handbook of Auger electron spectroscopy* [Текст] / L.V. Dvies, M.C. MacDonald, P.W. Palmberg et al. – Eden, 1976, 144 p.

13. Di Cicco, A. Metallization of the Ge(111) surface at high-temperature probed by energy-loss and Auger spectroscopies [Текст] / A. Di Cicco, B. Giovenalia, R. Gunnella, et al. // Solid State Communications, 2005. – V. 134/ – P. 577–582.

14. Олдред А. Взаимосвязь электроотрицательности и строения элементов [Текст] / А. Олдред, Е.В. Рохов // Неорганическая химия, 1958. – V.5, № 6, С.264–272.

Надійшла до редколегії 01.09.2011 р.

УДК 621.315.59

Павлюк С.П., к.ф.-м.н., доц., Тіщенко І.Ю.,
аспірант.

Кінетика шунування струму у КНІ транзисторах

У напівпровіднику з ВАХ S-типу, струм по
перерізу розподілений нерівномірно.
Відбувається утворення шунів струму.
Досліджено протікання імпульсу струму з
густотою до 10^4 А/см² крізь прямозмещений р-п
перехід КНІ пальцевого транзистора. Отримані
осцилограми дозволили побудувати вольт-
амперні характеристики з S-подібною
областю. Показано, що ця область пов'язана з
утворенням шунів струму. Візуальні
спостереження підтвердили появу одного
повного шуну та декілька його зародків.

Ключові слова: диференціальний опір, КНІ
транзистор, шунування струму, шунування.

E-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Сучасний електронний світ все більше
прагне до мінімалізму, але аж не як не в плані
потужностей та швидкостей, а саме з точки зору
розмірів. Великі струми та напруги в
мікроелектроніці при дуже малих робочих
об'ємах напівпровідникових приладів можуть
привести до нестабільної роботи, погіршення
характеристик, виходу зі строю. Саме тому
питання прохолодження струмів великої густини
крізь напівпровідникові діодові структури –
важливе й потребує детального вивчення.

В попередній роботі [4] увагу було приділено
проходженню ударних струмів крізь кристали
промислових напівпровідникових діодів, що
мають досить суттєвий розмір. Було виявлено,
що при умові протікання струму екстремально-
великої густини крізь кристал діоду, внаслідок
сильного неоднорідного розігріву в області р-п
переходу виникають глибокі рекомбінаційні
центри, що впливають на час життя неосновних
носіїв заряду, а отже і на електронні параметри
діодів. Робота по дослідженню протікання
струмів крізь структури значно менших розмірів
(зокрема КНІ) є логічним продовженням
попередньої роботи, тому що зважаючи на дуже

S.P. Pavlyuk*, Ph.D., I.Y. Tishchenko*,
post.grad.stud.

Current pinching kinetics in SOI transistors

Current is irregular in cross-section of
semiconductor devices with S-type current-voltage
characteristic. Pinch effect could be observed.
Current pulse flow, with density up to 10^4 A/cm²,
through the direct biased SOI transistors p-n
junction was studied. Obtained oscillograms
enabled to build current-voltage characteristics
with the S-type region. It is showed that this S-type
region is the result of current pinch appearing.
Visual data confirm the appearance of one or some
pinches.

Key Words: incremental resistance, SOI
transistor, current pinching, shunting.

сильний відбір тепла за рахунок конструктивного
виконання КНІ структур, ми можемо припустити,
що повинні виникати зовсім інші ефекти,
дослідження яких може мати суттєве значення.

Розглянемо деякі данні по шунуванню
струму в напівпровідникових діодних структурах
при наявності від'ємного диференційного опору.
Одним з механізмів утворення від'ємного
диференційного опору є тепловий механізм. При
протіканні струму через структуру, що
складається з р-п переходу та деякої базової
області, виділяється тепло. Це також може бути
причиною підсилення додатнього зворотнього
зв'язку та утворення від'ємного диференційного
опору. Розігрів базової області призводить до
збільшення концентрації носіїв у ній. Опір бази
зменшується. Відбувається перерозподіл падінь
напруги між р-п переходом та базою в сторону
збільшення напруги на р-п-переході. Внаслідок
чого збільшується інжекція носіїв заряду через р-
п перехід, опір бази зменшується ще більше, що
призводить до подальшого перерозподілу падінь
напруги [1].

Вплив розігріву зразка протікаючим струмом
може проявляти себе не тільки в зростанні

концентрації носіїв заряду. Із зростанням температури змінюються рухливості носіїв заряду, відношення рухливостей та часів життя.

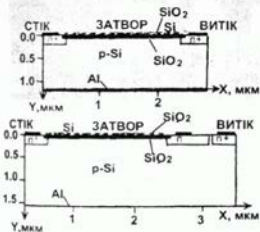


Рис. 1. Структура для проведення чисельного моделювання [6].

Відповідні зміни цих величин також можуть призводити до утворення ділянки від'ємного диференційного опору [2]. Все це призводить до того, що в напівпровідникових структурах, що мають S-подібну ВАХ відбувається шнурування струму.

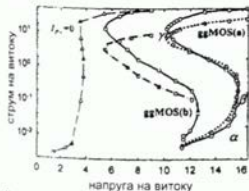


Рис. 3. ВАХ отримані в результаті чисельного моделювання [6].

Таким чином, в напівпровіднику з ВАХ S-типу струм по перерізу розподілений нерівномірно. Відбувається утворення шнурів з більшою густиною струму ніж в іншому перерізі. Це є однією з властивостей приладів з ВАХ S-типу, незалежно від фізичного механізму їх роботи. Утворення шнурів призводить до неповного використання площі приладу та

існування гістерезису на ВАХ. Зростання струму через структуру, де утворився шнур струму, відбувається практично при постійній напрузі - "вертикаль" на ВАХ. Це зумовлено тим, що із зростанням струму канал з більшою провідністю розширюється при практично постійній напрузі [5].

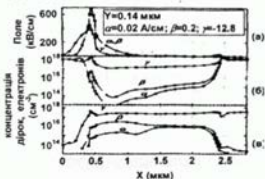


Рис. 2. Розподіл електричного поля та концентрації носіїв заряду [6].

1. Чисельне моделювання проходження струму екстремальної густини крізь напівпровідникову структуру

Було проведено чисельне моделювання розподілу концентрації носіїв струму в зразках зображених на рис. 1. [6]. Були отримані ВАХ S-типу рис. 2. На ній розглядається три ділянки: α - лавинного пробію, β - від'ємного диференційного опору, γ - високої провідності. Моделювання проводилось використовуючи такі параметри $E_g = 1.125$, $T_g = 300K$, $\tau_{n0} = \tau_{p0} = 10^{-9}s$, $N_D = 10^{15}cm^{-3}$, $C_n = C_p = 10^{-31}cm^2s$, $\delta = 0.5$. Концентрація домішок в n'-області, p-області та p'-області: $N_D^+ = 10^{18}$, $N_A^- = 10^{16}cm^{-3}$ та $N_A^- = 2 \cdot 10^{18}cm^{-3}$ відповідно. Довжина p'-області $L_p = L_n = 0.41 \mu m$.

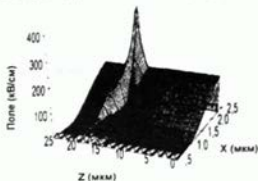


Рис. 4. Розподіл поля в структурі [6].

Для точок, зазначених на ВАХ (α , β , γ) побудовано розподіл електричного поля густини носіїв заряду рис.3, чим підтверджується наявність високої польової області.

В результаті моделювання виникнення шнура струму було отримано розподіл поля в структурі, при струмі близькому до I_0 рис. 4. Виявилось, що за даних умов в таких структурах при протіканні струмів $0.05-0.5 \text{ А/см}^2$ спостерігається ділянка з від'ємним диференціальним опором. Розподіл густини струму по перерізу зразка виявився неоднорідним, виникли шнури струму шириною $1-10 \text{ мкм}$ та часом утворення $0.5-3 \text{ нс}$.



Рис.5 Схематичне зображення КНІ транзистора



Рис.6 Фотографії досліджуваних зразків

У деяких транзисторах плівки кремнію мали два бічні зони для вимірів у них ЕРС Хола. Концентрація електронів та їхня рухомість у цих плівках становили $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ і $1400 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ відповідно.

Оскільки дослідження проводились при протіканні струму в прямому напрямі, то на досліджуваних зразках, до p^+ області прикладався позитивний потенціал, а до n^+ - негативний.

2.2 Методика дослідження

Методика дослідження докладно описана у роботі [7]. Відповідно до неї під час проведення досліджень від генератора струму крізь КНІ транзистор у прямому відносно $p-n$ переходу напрямку пропускався одиничний прямокутний імпульс струму. Тривалість імпульсу регулювалась в межах від 10 мкс до 1 с . При дослідженні кінетики зміни падіння напруги на початку імпульсу струму його тривалість змінювалась від 20 мкс до 200 мкс .

За максимальним та мінімальним значеннями падіння напруги будувалися вольт-амперні характеристики для різних моментів часу.

Одночасно із проходженням імпульсу струму за допомогою мікроскопа та відеокамери фіксували зображення поверхні КНІ структури та за допомогою комп'ютера записували відеоряд зображення. Розкладаючи такий ряд на окремі кадри можна фіксувати стадії розвитку шнура струму. У цьому випадку тривалість імпульсу струму встановлювалась такою, щоб апаратні засоби встигли візуально зафіксувати світіння його шнура. Ця тривалість складала $10 \text{ мс} - 100 \text{ мс}$.

Під час проведення досліджень використовували режим постійного струму $I = \text{const}$, тому що цей режим дозволяє

2. Експериментальна частина

У роботі досліджено протікання імпульсу струму з густиною до 10^4 А/см^2 крізь прямозміщений $p-n$ перехід КНІ польового транзистора. Отримані осцилограми дозволили побудувати вольт-амперні характеристики, з S-подібною областю. Показано, що ця область пов'язана з утворенням шнура струму. Візуальні спостереження підтвердили появу одного повного шнура та декілька його зародків.

2.1 Конструкція транзисторів

На рис. 5 наведено схематичне зображення досліджуваних КНІ транзисторів (затвор не зображено) а на рис.6а і 6б зображено зовнішній вигляд досліджуваних зразків, отриманих за допомогою мікроскопа. У них довжина «а» плівки кремнію p -типу складала $2, 3, 10, 45 \text{ мкм}$, ширина цієї плівки «в» була 100 мкм , а товщина «с» - $0,4 \text{ мкм}$. Товщини вбудованого оксиду, кремнієвої підкладки, полікремнієвого затвору та підзатворного оксиду складали відповідно $1, 400, 1$ та $0,1 \text{ мкм}$.

Частина використаних транзисторів не мала затвору. У них шар фосфоросилікатного скла товщиною 1 мкм захищав верхню поверхню плівки кремнію. Під час вимірів затвор залишали

стабілізувати виділену в кристалі потужність і захищати кристал від виходу з ладу [11].

2.3 Осцилограми падіння напруг на досліджуваних зразках

На Рис. 7-9 показано найбільш типові осцилограми падіння напруги на КНІ транзисторі.

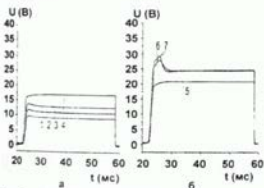


Рис.7 Осцилограми падіння напруги для структури п'пр', при збільшенні амплітуди струму

Розглянемо структуру, зображену на рис. 6. Осцилограми для вказаної структури зображено на рис. 7(а,б). З приведених осцилограм видно, що спочатку, при невеликих амплітудах струму, падіння напруги повторює форму імпульсу струму (рис. 7а), криві 1-4. Потім на кривій 5 (рис. 7, б) - спостерігається невеликий перегин, а на наступній кривій 6, уже чітко спостерігається пік падіння напруги. Крива 7 також має пік. Розглядаючи криві 6, 7, а також криві 8,9,10 на рис. 8 видно, що пік імпульсу поступово ушліщується.

На рис. 8 тривалість імпульсу – така ж, як і для попередніх осцилограм, але для зручності приведені в масштабі, що дозволяє чітко розгледіти ушліщення піку падіння напруги.

При подальшому збільшенні амплітуди струму на осцилограмі спостерігалась поява «сходінки» (крива 13 на рис. 9а). Далі відбувалось поступове ушліщення піку падіння напруги (рис. 9 а,б,в,г) та стабілізація значення падіння напруги в кінці імпульсу. Враховуючи той факт, що збільшення номеру відповідних осцилограм є не лише порядковим номером, а ще й вказує на поступове збільшення амплітуди струму, то з приведених осцилограм можна зробити висновок, що в нас повинна бути

отримана S - подібна вольт-амперна характеристика, що й буде показано далі.

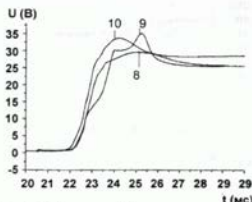


Рис.8 Ушліщення піків осцилограм падіння

При досягненні певного максимального значення амплітуди імпульсу струму досліджувана структура виходила з ладу, що було спричинено, тепловим пошкодженням, тому що не встигав відбуватися відбір тепла. Окрім вище зазначеного, на осцилограмах приведених в рис.9 чітко спостерігається стабілізація падіння напруги в кінці імпульсу.

2.4 Вольт-амперні характеристики досліджуваних зразків

Вольт-амперні характеристики показано на рис. 10. Як видно з рисунка, ВАХ має декілька областей. Поки пік напруги не спостерігається, ВАХ має стандартний вид. Після появи піка напруги на ВАХ для кінця імпульсу з'являється S-подібна область. Далі вона переходить у область зі зростаючим значенням напруги, а за нею - у другу S-подібну область.

Вольт-амперна характеристика, яка показана кривою 2, побудована для максимальних значень падіння напруги, тобто для піка напруги. На ній ніяких S-подібних ділянок не спостерігається. Зокрема видно, що для кінця кривої 1 на рис. 2.6 присутня область де значення падіння напруги стабілізується в певному діапазоні значень струмів.

2.5 Випромінювання з досліджуваних структур

З літератури [5] відомо, що в системі з S-подібною характеристикою повинен виникати шнур струму. Цей шнур починає шунтувати частину базової області, що призводить до

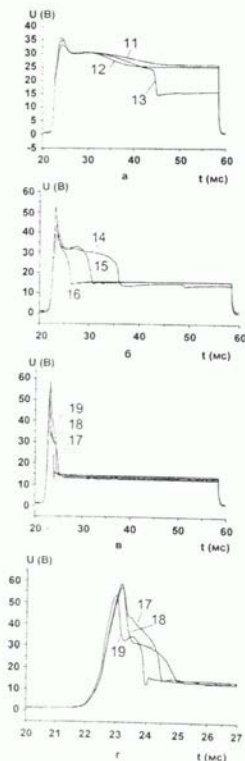


Рис. 2.5 Осцилограми падіння напруги при

падіння напруги на ній. Збільшення струму в певних межах не змінює величину падіння напруги, що й спостерігалось на отриманих вольт-амперних характеристиках. Це, можливо, пояснюється тим, що при збільшенні струму збільшується діаметр шнура.

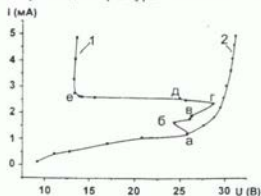


Рис.10 Вольт-амперна характеристика КНІ транзистора

За допомогою відеокамери, для якої в якості об'єктива було використано окуляр мікроскопа, було отримано зображення, що підтверджує виникнення шнура струму в області р-п переходу досліджуваних структур. Отримані наступні зображення (на ВАХ для кінця імпульсу (рис. 11), вказано точки, позначені буквами, що відповідають зображенню світіння шнура струму з відповідним індексом на рис. 10).

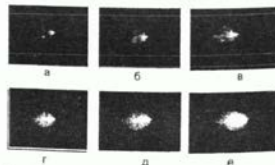


Рис. 11 Отримані зображення світіння в області бази для структури p^+pr^+

2.6. Обговорення триманих результатів

В результаті проходження імпульсу струму екстремальної густини відбулась поява світіння в області р-п переходу. Для першої S-подібної ділянки ВАХ ми бачимо, що світіння досить

слабке. Воно зосереджене в області електроні-
дільного переходу та напрямлене до
негативного контакту n^+ , що для даного типу
транзистора при прямому протіканні струму є
антисепієм. При переході до другої S-подібної
ділянки світіння стало значно яскравішим, та й
сам перехід на ділянці, є значно більш різким.
Чим більший струм протікає через КНІ
структуру, тим далі в середину зразка проникає
світловий розмір шнур (порівняйте фотографії
на рис. 11).

Відповідно до [6] відомо, що в системі з S-
подібною характеристикою повинен виникати
шнур струму. Цей шнур починає шунтувати
частину базової області, що призводить до
падіння напруги на ній. Збільшення струму в
певних межах не змінює величину падіння
напруги.

На осцилограмі присутні дві сходинки
падіння напруги, а на ВАХ – дві S-подібні
ділянки. Це можна пояснити наступним чином:
спочатку відбувається шунтування області р-п
переходу, що відповідає першій S-подібній
ділянці, потім відбувається шунтування області
бази – друга S-подібна ділянка. Доказом таких
припущень є еволюція поширення шнура струму,
спостережувана візуально.

Другий стрибок напруги, також, може бути
пов'язаний із появою другого шнура струму, який
розташований на певній відстані від першого.
Відповідно до [3], у таких системах повинно
відбуватися розшарування струму на шнури.

Список використаних джерел

1. Бонч-Бруевич В.Л. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках [Текст]: учеб. пособие / В.Л. Бонч-Бруевич, И.П.Звягин, А.Г.Миронов; Наука. - М., С. 1972. - 412
2. Смит Р. Полупроводники [Текст]: учеб. пособие; ИЛ. - М., 1962, С. 487.
3. Зи С. Физика полупроводниковых приборов [Текст]: учеб. пособие; Мир.- М.,- 1984. - С.с. 80-91, 252-254.
4. Кушніренко В.В. Воздействие импульсов прямого тока на время жизни неосновных носителей заряда в р+-п диоде [Текст] / В.В. Кушніренко, Г.К.Нинидзе, С.П.Павлюк, С.М.Саницкий, О.В.Третяк //Технология и конструирование радиоэлектронной аппаратуры. -2007.- № 1(67), - С. 33-35.

Можна припустити, що в широкому та короткому зразку може виникати значно більше шнури. Описовим доказом правильності пояснення може бути той факт, що в мікроскопі візуально спостерігався один шнур, який проходить від одного контакту до іншого й, залежно від величини струму, – декілька зародків інших шнурів у вигляді ділянок, що світяться.

Приведені в роботі осцилограми, ВАХ, та зображення світіння є найбільш наочними. Для інших типів структур КНІ видно, що характер вказаних залежностей та зображень в цілому залишається схожим на якісному рівні.

Висновки

1. Показано, що при протіканні струму великої густини, крізь КНІ структури з р-п переходом на вольт-амперній характеристиці з'являється S- подібна ділянка, або декілька таких ділянок. Поява таких ділянок супроводжується виникненням шнура струму та випромінювання з нього.

2. Візуально досліджено динаміку виникнення та розвитку шнура струму. Показано, що з ростом струму розмір шнура зростає. Це призводить до стабілізації напруги при зміні струму.

3. Показано, що перша S- подібна ділянка пов'язана з шунтуванням р-п переходу, а друга ділянка – шунтування області бази.

5. Блонские В. S-образная вольт-амперная характеристика и шнурование тока в кремниевых n^+-p-n^+ структурах с различными площадями контактов / В. Блонские, О. Василец, К. Репшас // ФТП. -1983. -8 -С. 1512-1515.

6. Vashenko V.A. Electrical Instability and Filamentation in ggMOS Protection Structures / V.A. Vashenko, Y.B.Martynov, V.F. Sinkevitch // Solid-State Electronics.-1997.-41, No.11. - P.1761-1767.

7. Кушніренко В.В. Исследование кремниевых диффузионных резисторов при протекании импульса тока большой плотности / В.В. Кушніренко, Г.К.Нинидзе, Л.Д.Коноваленко, С.П.Павлюк // Технология и конструирование радиоэлектронной аппаратуры. -2005. -№5(59). -С. 23-26.

Надійшла до редакції 17.05.2011 р.

УДК 537.6/.8

Прокопенко О.В.^{*}, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Павлов Д.І., студ.

Можливість аномальної температурної залежності порога чутливості мікрохвильового детектора на основі магнітних наноструктур в області низьких температур

Проаналізовано шумові властивості мікрохвильового детектора на основі тунельних магнітних наноструктур (МНС), керованих спін-поляризованим струмом, в області низьких температур. Показано, що за умови використання у заданих МНС матеріалів з достатньо великим значенням температурного коефіцієнта опору, найбільша чутливість (тобто найменша потужність зовнішнього сигналу) мікрохвильового детектора на основі МНС може досягатись при низьких, але скінченних температурах. Отже, для одержання найкращої чутливості таких детекторів їх не потрібно охолоджувати до дуже низьких температур.

Ключові слова: тунельна магнітна наноструктура, спін-поляризований струм, мікрохвильовий детектор, температура, чутливість детектора.

^{*}E-mail: ovp@univ.kiev.ua, Oleksandr.Prokopenko@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В.В.

Вступ

Ефект переносу спінового магнітного моменту (the spin transfer torque effect) у шаруватих магнітних структурах, теоретично передбачений Слончевським і Берже [1–2] та експериментально спостережений у роботах [3–8, 10–11], дозволяє керувати напрямом намагніченості у магнітних наноструктурах (МНС), пропускаячи крізь них спін-поляризований електричний струм. Зокрема, цей ефект може використовуватись для перемикання намагніченості у “вільному” шарі (ВШ) МНС [3–4] (рис. 1), для генерації електромагнітних коливань [5–9] та для детектування електромагнітних коливань за рахунок так званого діодного ефекту в МНС [10–11].

Діодний ефект в МНС, відкритий у 2005 році [10], полягає у появі постійної електричної напруги U_{ix} на МНС під дією мікрохвильового

Prokopenko O.V.^{*}, Ph. D., Asc. Prof.,
Pavlov D.I., stud.

A possibility of anomalous temperature dependence of the spin-torque microwave detector' sensitivity threshold at low temperatures

The noise properties of a spin-torque microwave detector based on magnetic tunnel junction (MTJ), driven by a spin-polarized current, are analyzed at low temperatures. It is shown that the most high sensitivity threshold (it means the minimum detectable microwave power) of a spin-torque microwave detector based on MTJ can be achieved at low but finite temperatures in the case of the MTJ made from the materials with large enough value of temperature coefficient of resistance. Thus, in order to obtain the best sensitivity threshold of such detectors it is not necessary to cool them to the very low temperatures.

Keywords: magnetic tunnel junction, spin-polarized current, spin-torque microwave detector, temperature, detector' sensitivity.

сигналу з потужністю P_{in} . У “традиційному” режимі роботи МНС (коли під дією зовнішнього сигналу збуджуються малі коливання намагніченості навколо її рівноважного положення – див. рис. 1) цей ефект є квадратичним відносно амплітуди змінного сигналу, тобто вихідна напруга U_{ix} на МНС пропорційна потужності вхідного мікрохвильового сигналу P_{in} :

$$U_{ix} = \varepsilon P_{in}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{res} \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (1)$$

де ε – вольт-ватна чутливість детектора, ε_{res} – резонансна вольт-ватна чутливість детектора, розрахована у роботі [12], ω – частота (квазі-мономонхроматичного) сигналу, ω_0 – власна частота детектора (частота феромагнітного резонансу (ФМР) в МНС), Γ – ширина лінії ФМР в МНС.

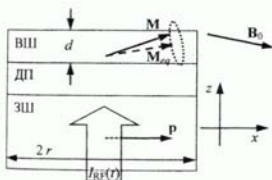


Рис. 1 Поперечний переріз трьохшарової циліндричної МНС з радіусом r : ВШ – “вільний” магнітний шар товщиною d , ДП – діелектричний прошарок, ЗШ – “закріплений” магнітний шар. Під дією змінного струму $I_R(t)$ у ВШ збуджується прецесія вектора намагніченості $\mathbf{M}$ навколо рівноважного положення вектора намагніченості $\mathbf{M}_{eq}$ (траєкторію руху намагніченості схематично показано пунктирною лінією). $\mathbf{p}$ – одиничний вектор, що визначає напрямок намагніченості у ЗШ у зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}_0$.

3 (1) випливає, що детектор на основі МНС працює як вузькосмуговий резонансний квадратичний детектор мікрохвильових сигналів. Оцінки проведені у роботі [12] та результати експериментів [11, 13–15] свідчать, що за своїми характеристиками детектори на основі МНС (не тільки резонансні квадратичні) близькі до комерційних моделей напівпровідникових детекторів, а по деяким параметрам (зокрема, по вольт-ваттній чутливості $\varepsilon \sim \varepsilon_{res}$) можуть бути помітно кращими за них [14–15].

Як відомо, властивості будь-якого детектора суттєво залежать від шумів, наявність яких погіршує його характеристики. Тому важливою задачею є визначення характеристик резонансного квадратичного мікрохвильового детектора (РКМД) на основі МНС у присутності шумів. Частково ця задача вирішена у роботі [16] для випадку теплових шумів у пасивному детекторі за кімнатних температур (при температурі $T = 300$ К). Однак, у зазначеній роботі не проаналізовані властивості детектора в області низьких температур, при температурах $T < 300$ К. Це і є предметом дослідження даної роботи.

Актуальність таких досліджень пов'язана з тим фактом, що для одержання кращих

експериментальних характеристик такі системи часто охолоджують до достатньо низьких, часто-густо, гелієвих, температур, що вимагає використання спеціальної кріотехніки та складних експериментальних методик. Однак, навіть охолодження детектора не завжди дозволяє досягти його прийнятних характеристик – тобто проблема залишається не розв'язаною. У даній роботі розглянуто деякі фізичні процеси, що відбуваються в РКМД на основі МНС при низьких температурах та зроблено рекомендації щодо практичного використання таких систем в області низьких температур.

Теоретична модель

Основні ідеї, покладені в основу теоретичної моделі РКМД на основі МНС, достатньо повно викладено у роботі [16], тому лише коротко перелічимо обмеження та припущення моделі:

- розгляд динаміки намагніченості у ВШ РКМД проводиться у наближенні макроспіна;
- вважається, що намагніченість у ЗШ РКМД не може рухатись – намагніченість цього шару є ідеально “закріпленою”;
- розглядається випадок пасивного детектора для якого постійний струм зміщення, що задає робочу точку системи, дорівнює нулю;
- мікрохвильовий струм $I_R(t)$, що відповідає зовнішньому мікрохвильовому сигналу, і температура системи T , вважаються настільки малими, що відгук намагніченості на зовнішній сигнал та теплові флуктуації можна вважати лінійним;
- втрати у системі є малими, тобто виконується співвідношення $\omega_0 \gg \Gamma$;
- робоча смуга частот Δf детектора є малою, тобто виконується співвідношення $\Delta f \ll \Gamma / 2\pi$;
- детектор перебуває у рівноважному ізоtermічному стані при деякій температурі T .

Враховуючи зроблені припущення, передбачається, що у РКМД на основі МНС існують лише три джерела шумів:

- Низькочастотний (НЧ) шум Джонсона-Найквиста (ДН) характеризується шумовою напругою $U_N(t)$, яка залежить від опору МНС. Цей тип шуму є адитивним і не залежить від динаміки намагніченості у ВШ МНС. Характерне значення флуктуацій

вихідної постійної напруги, що відповідає цьому джерелу шуму, будемо позначати U_{IN} .

- Високочастотний шум ДН характеризується шумовим мікрохвильовим струмом $I_N(t)$, який перетворюється у НЧ шумову напругу U_{IN} після взаємодії з мікрохвильовими коливаннями опору МНС, які викликані зовнішнім мікрохвильовим сигналом $I_{IN}(t)$.
- Магнітний шум, викликаний тепловими флуктуаціями напрямку намагніченості у ВШ МНС, які призводять до появи флуктуацій опору структури. Взаємодія цих флуктуацій опору структури з зовнішнім мікрохвильовим струмом $I_{IN}(t)$ призводить до появи НЧ шумової напруги U_{IN} .

Основні результати теоретичного аналізу РКМД на основі МНС стисло наведено у роботі [16] (зараз також готується робота [17], в якій ці питання будуть висвітлені найбільш повно), що дозволяє відразу ж перейти до основних результатів, передбачених теоретичною моделлю.

Середньоквадратичне значення флуктуацій постійної напруги U_{IN} на виході РКМД дається виразом:

$$\Delta U_{IN} = U_{IN} \sqrt{1 + \frac{U_{IN}}{U_{IN}} + \frac{U_{IN}}{U_{IN}}}, \quad (2)$$

де зазвичай $U_{IN} \gg U_{IN}$, U_{IN} , U_{IN} , а тому другим доданком у (2) можна знехтувати. Відповідно, співвідношення сигнал/шум буде мати вигляд

$$SNR = \frac{U_{IN}}{\Delta U_{IN}} = \frac{P_{IN}}{P_{IN}} \sqrt{\frac{P_{IN}}{P_{IN} + P_{IN}}}, \quad (3)$$

де $P_{IN} = U_{IN} / \epsilon$, $P_{IN} = U_{IN} / \epsilon$, $P_{IN} = U_{IN} / \epsilon$, ϵ – вольт-ватна чутливість детектора. З умови $SNR = 1$ можна визначити мінімальне значення потужності мікрохвильового сигналу $P_{min} = P_{IN}$, яке може бути зафіксоване детектором:

$$P_{min} = P_{IN} \frac{P_{IN} + \sqrt{P_{IN}^2 + 4P_{IN}^2}}{2P_{IN}}, \quad (4)$$

Якщо припустити, що РКМД на основі МНС присланий до мікрохвильової лінії передачі з імпедансом $R_{IN} = 50$ Ом, мікрохвильова потужність, яка буде реально сприйматись детектором (з урахуванням угодження імпедансів) буде описуватись виразом:

$$P_{min}[50\Omega] = \frac{1}{4} P_{min} \frac{(R_0 + R_{IN})^2}{R_0 R_{IN}}, \quad (5)$$

де R_0 – опір РКМД у рівноважному стані.

Розглянемо випадок типового планарного РКМД на основі МНС, який намагнічений у площині $x-y$ (див. рис. 1), для якого

$$U_{IN} = \sqrt{4k_B T R_0 \Delta f}, \quad U_{IN} = (\gamma h / 2e) B_0 / P,$$

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{B_0 (B_0 + \mu_0 M_N)}$$

$$\Gamma = \alpha \gamma (B_0 + \mu_0 M_N / 2), \quad R_0 = \frac{R_L}{1 + P^2 \cos^2 \beta_0},$$

$$R_L = \frac{RA}{\pi r^2}, \quad k_B - \text{ стала Больцмана,}$$

$\gamma \approx 2\pi \cdot 28$ ГГц/Тл – модуль гіромагнітного відношення, h – стала Планка, e –

елементарний електричний заряд, B_0 – індукція зовнішнього постійного магнітного поля, P – спінова поляризація струму, α – безрозмірна стала затухання Гільберта, μ_0 – магнітна стала,

$M_N = |\mathbf{M}|$ – довжина вектора намагніченості у ВШ МНС, β_0 – кут між рівноважними положеннями намагніченості у ВШ та у ЗШ МНС, R_L – рівноважний опір МНС при $\beta_0 = \pi/2$, RA – добуток опору МНС на її площу (характеризує технологію виготовлення МНС), r – радіус МНС.

Результати та їх обговорення

Очевидно, що із зменшенням температури характерна потужність P_{IN} може змінюватись. Якщо припустити, що рівноважний опір структури R_0 не залежить від температури T , P_{IN} буде змінюватись із зміною температури за законом $\sqrt{T}$, тобто буде зменшуватись (припускається, що зміна геометричних розмірів системи з температурою є несуттєвою). Відповідно буде зменшуватись і величина P_{min} (див. (4)). У цьому випадку, очевидно, що чим нижче температура T – тим меншою є величина $P_{min}[50\Omega]$. Тобто детектор має тим кращий (тобто менший) поріг чутливості чим нижче його температура, а значить треба намагатись охолоджувати його до якомога нижчих температур.

Однак, у реальній ситуації опір МНС R_0 залежить від температури T , причому, загалом кажучи, залежить нелінійно [18–19]. Для не дуже низьких температур ($T > 4 \div 10$ К) ця залежність може бути описана наближенням виразом

$$R_0(T) = R_0(0)(1 - \chi T), \quad (6)$$

де χ – температурний коефіцієнт опору. У цьому випадку при зміні температури T відбувається одночасна зміна як величини $P_{IN} \sim \sqrt{T}$ так і опору структури $R_0(T)$. Обидва ці параметри визначають потужність $P_{min}[50\Omega]$ – поріг чутливості детектора – залежність якого від температури вже може бути немонотонною.

При кімнатних температурах, параметр P_{IN} є, умовно кажучи, "великим", а опір структури є достатньо "малим" (по відношенню до значень цих параметрів при деякій значно нижчій температурі). У цьому випадку поріг чутливості детектора є великим і обумовлюється в основному величиною P_{IN} , тобто наявністю теплових шумів. За достатньо низьких температур все відбувається навпаки – P_{IN} стає, умовно кажучи, "малим", але значно збільшується опір структури $R_0(T)$, а тому завдяки неузгодженню імпедансів детектора та лінії передачі величина $P_{min}[50\Omega]$ залишається малою.

Очевидно, що при деякій низькій, але скінченній температурі $T = T_{opt}$ поріг чутливості детектора може досягти оптимального значення, яке відповідає мінімуму на кривій $P_{min}[50\Omega](T)$. У цій точці потужність НЧ теплового шуму ДН є достатньо малою порівняно з потужністю шуму при кімнатній температурі, і в той же час втрати енергії за рахунок неузгодження імпедансів МНС та лінії передачі не є достатньо великими. Очевидно, що існування такого мінімуму безпосередньо пов'язане із значенням коефіцієнта χ . При малих

χ мінімум на кривій $P_{min}[50\Omega](T)$ не проявляється за рахунок малих змін опору структури, які, фактично, не впливають на узгодження імпедансів. У той же час при великих значеннях параметра χ зміна опору структури залежно від температури може бути значною, що, у свою чергу, призведе до помітної зміни з температурою величини $P_{min}[50\Omega](T)$ і до

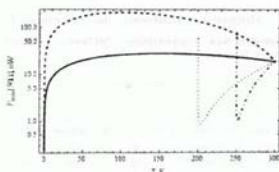


Рис. 2 Залежність порогу чутливості детектора $P_{min}[50\Omega](T)$ від температури T для різних значень температурного коефіцієнта опору χ : $\chi = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ – суцільна лінія, $\chi = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ – штрихова лінія, $\chi = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ – пунктирна лінія, $\chi = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ – штрих-пунктирна лінія.

появи мінімуму на цій залежності.

На рис. 2 показано залежності $P_{min}[50\Omega](T)$, розраховані у рамках числового експерименту, для декількох характерних значень χ . Під час розрахунків використовувались наступні типові параметри РКМД на основі МНС: $r = 50$ нм, товщина ВШ МНС $d = 1$ нм, $P = 0.7$, $\beta_0 = \pi/4$, $R_0 = 500$ Ом (що дає $RA = 5.29$ Ом·мкм²), $\alpha = 0.01$, $\mu_0 M_S = 800$ мТл, $B_0 = 38$ мТл (що дає $\omega_0 = 2\pi \times 5$ ГГц), $\Delta f = 1$ МГц, $\epsilon_{ext} \approx 700$ В/Вт [16].

З рис. 2 видно, що для значень χ більших за критичне значення $\chi_c \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ на залежності $P_{min}[50\Omega](T)$ спостерігається помітний мінімум. Це означає, що охолодження таких систем слід проводити лише до температури $T = T_{opt}$. Подальше охолодження детектора лише призведе до погіршення його порогу чутливості.

З іншого боку при $\chi < \chi_c$ залежність $P_{min}[50\Omega](T)$ є немонотонною, але на ній вже спостерігається не мінімум, а максимум. Очевидно, що наявність цього максимуму свідчить про неоптимальні умови роботи детектора, що, у свою чергу, треба враховувати при розгляді задач оптимізації конкретних практичних систем.

Наприкінці відмітимо, що значення $T_{\text{оп}}$ визначається параметрами системи, у першу чергу її геометрією.

Висновки

У результаті аналізу властивостей мікрохвильового детектора на основі МНС в області низьких температур показано, що залежність порогу чутливості таких систем від температури $P_{\text{min}}[50\Omega](T)$ може бути немонотонною. Зокрема, для систем з великим значенням температурного коефіцієнта опору може спостерігатись мінімум на залежності $P_{\text{min}}[50\Omega](T)$ при температурі $T = T_{\text{оп}}$. Охолодження таких систем доцільно проводити лише до температури, яка відповідає цьому мінімуму.

Робота була підтримана грантом М/212-2011 Державного агентства з питань науки, інновацій та інформатизації України та грантом УУ34/008 Державного фонду фундаментальних досліджень України.

Список використаних джерел

- Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1996. – **159**. – P. L1–L7.
- Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current // *Phys. Rev.* – 1996. – **B54**. – P. 9353–9358.
- Katine J.A., Albert F.J., Buhrman R.A. et al. Current-driven magnetization reversal and spin-wave excitations in Co/Cu // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – **84**. – P. 3149–3152.
- Urazhdin S., Birge N.O., Pratt W.P., Jr., Bass J. Current-Driven Magnetic Excitations in Permalloy-Based Multilayer Nanopillars // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – **91**. – P. 146803.
- Kiselev S.I., Sankey J.C., Krivorotov I.N. et al. Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current // *Nature*. – 2003. – **425**. – P. 380–383.
- Lee K.J., Deac A., Redon O. et al. Excitations of incoherent spin waves due to spin-transfer torque // *Nature Mater.* – 2004. – **3**. – P. 877–881.
- Krivorotov I.N., Emley N.C., Sankey J.C. et al. Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques // *Science*. – 2005. – **307**. – P. 228–231.
- Ruotolo A., Criv V., Georges B. et al. Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices // *Nature Nanotech.* – 2009. – **4**. – P. 528–532.
- Slavin A., Tiberkevich V. Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current // *IEEE Trans. on Magn.* – 2009. – **45**, № 4. – P. 1875–1918.
- Tulapurkar A.A., Suzuki Y., Fukushima A. et al. Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions // *Nature*. – 2005. – **438**. – P. 339–342.
- Ishibashi S., Seki T., Nozaki T. et al. Large diode sensitivity of CoFeB/MgO/CoFeB magnetic tunnel junctions // *Appl. Phys. Express*. – 2010. – **3**. – P. 073001.
- Wang C., Cui Y.-T., Sun J.Z. et al. Sensitivity of spin-torque diodes for frequency tunable resonant microwave detection // *J. Appl. Phys.* – 2009. – **106**. – P. 053905.
- Ishibashi S., Seki T., Nozaki T. et al. Magnetic field angular dependence of spin torque diode voltages in magnetic tunnel junctions // Abstracts of the IEEE 7th International Symposium on Metallic Multilayers (MML 2010). **1-40**. Berkeley, California, September 2010.
- Cheng X., Boone C.T., Zhu J., Krivorotov I.N. Nonadiabatic stochastic resonance of a nanomagnet excited by spin torque // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – **105**. – P. 047202.
- Cheng X., Boone C.T., Zhu J., Krivorotov I.N. Spin Torque Diode Detectors with Sensitivity Exceeding that of Schottky Diodes // Abstracts of the 55th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials (55th MMM), EC-3, Atlanta, Georgia, USA, November 2010.
- Prokopenko O., Melkov G., Bankowski E. et al. Noise properties of a resonance-type spin-torque microwave detector // *Appl. Phys. Lett.* – 2011. – **99**. – P. 032507.
- Prokopenko O., Tiberkevich V., Slavin A. The influence of thermal noise on a spin-torque microwave detector // in preparation.
- MacDonald A.H., Jungwirth T., Kasner M. Temperature dependence of itinerant electron junction magnetoresistance // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – **81**. – P. 705.
- Shang C.H., Nowak J., Jansen R., Moodera J.S. Temperature dependence of magnetoresistance and surface magnetization in ferromagnetic tunnel junctions // *Phys. Rev.* – 1998. – **B58**. – P. R2917.

Надійшла до редколегії 10.10.2011

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альошин О.Д., докт. ф.-м. н., проф.,
Абдікарімов Б.Ж., к. ф.-м. н., доцент

Датчик вимірювання тиску в неоднорідних системах поблизу критичної точки - мікроплавневий манометр

Раніше оптичними методами розсіяння світла та рефрактометричним показано, що під дією поля гравітації Землі в неоднорідній рідині виникає висотна зміна тиску, що значно перевищує висотну зміну польової змінної гравітаційного поля Землі. Для перевірки цього висновку в даній роботі пропонується мікроплавневий манометр, що дозволяє проводити прямі вимірювання тиску в неоднорідній системі поблизу критичної точки.

Ключові слова: критична точка,
гравітаційний ефект, метод мікроплавнів

*E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

Раніше в роботах [1,2,3] одночасне використання двох оптичних методів: розсіяння світла $I(z,1)-dp^*/dm^*$ і рефрактометричного $dn/dz(z,1)-dp^*/dh$ дозволило вперше розрахувати величину градієнта хімічного потенціалу $dp^*/dh=(dp^*/dh)(dp^*/dm^*)^{-1}$ і його висотну зміну $\Delta p^*=dm^*/dh \cdot h$ у полі гравітації Землі $b^*=rg\Delta z/P$, поблизу критичних напрямків критичної ізохори й критичної ізотерми. Висота Δz відлігується від рівня із критичною густиною речовини.

На підставі цих досліджень у роботах [1,2,3,4] зроблений висновок, що дія поля гравітації Землі поблизу критичної точки (КТ) приводить до появи в рідині неоднорідного поля $U(h)$, пов'язаного з великомасштабними флуктуаціями параметра порядку. Зміна цього поля $|\Delta U(h)|=|\Delta \mu(h)|=(10^{-10}h) \gg |h|$ значно перевищує величину зміни гідростатичного тиску $|h|$.

Виходячи з вище зазначеного, значний інтерес представляють безпосередні вимірювання тиску і його градієнта на різних висотах досліджуваної неоднорідної системи.

Alekhin O.D., Dr. Sci., Prof.,
Abdikarimov B.Zh., Ph.D., Ass. Prof.

Micro-float manometer as measuring of pressure in inhomogeneous systems near the critical point

In the previously investigation by optical methods of light scattering and of refractometry have been shown that under the action of the gravity field of the Earth in the inhomogeneous liquid the high-altitude change in the pressure have been appeared, which considerably exceeds a high-altitude change in the field variable of the gravity field of the Earth. The micro-float manometer, which makes it possible to carry out the direct measurements of pressure in the inhomogeneous system near the critical point, in this work have been proposed for checking the conclusion make.

Keywords: critical point, effect of gravity,
micro-float method

Для реалізації цієї мети в даній роботі був використаний мікроплавневий метод [5], що дозволяє визначати висотні розподіли густини неоднорідної речовини поблизу КТ рідина-пара.

Даний метод уперше був запропонований ще на початку XX століття С. Тейчнером [6]. Цей метод у роботі [7] був використаний при аналізі висотного розподілу густини $\rho(Z)$ CO_2 поблизу КТ.

Найбільш повно метод мікроплавнів для визначення висотного розподілу густини неоднорідної речовини був використаний на кафедрі молекулярної фізики КНУ ім'я Т.Шевченка у роботах Ю.И.Шиманського, Е.Т.Шиманської [5]. Суть методу полягала у тому, що розміщення у неоднорідному середовищі поблизу КТ досить великої кількості плавнів ($n \geq 10$) з відомою середньою густиною дозволяє прямим методом визначити густину неоднорідної речовини у точках розташування плавнів.

Для ілюстрації на рисунку 1. наведено картину висотного розподілу кварцевих мікроплавнів із різною середньою густиною в неоднорідному бензолі при різних температурах.

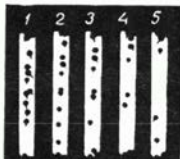


Рис. 1. Висотний розподіл кварцевих мікроплавнів поблизу КТ із різною середньою густиною в неоднорідному бензолі при різних температурах

Для порівняння на рис. 2. представлено експериментальні дані висотного розподілу густини неоднорідної речовини - бензолу, отримані рефрактометричним методом Тейлера поблизу критичної точки. Ці дані гравітаційного ефекту $\rho(z)$ відповідають даним методу мікроплавнів, показаним на рис. 1.

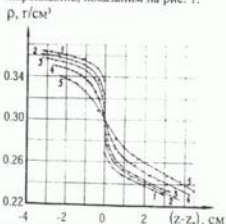


Рис. 2. Висотний розподіл густини в неоднорідному бензолі при різних температурах за даними метода Тейлера

Наступним закономірним кроком до застосування методу мікроплавнів є його використання як датчик тиску - мікроплавневого манометру для вимірювань висотного розподілу тиску в неоднорідних системах поблизу КТ. Для цього пропонується манометр необхідно проградувати за даними P-V-T вимірювань поблизу КТ при постійній температурі речовини.

Таблиця 1.

$z, \text{ м}$	$P, \text{ МПа}$	$\rho, \text{ г/см}^3$	$\Delta P = (P - P_0)/P_0$	$\Delta \rho = (\rho - \rho_0)/\rho_0$	β	$\beta P/\rho$
0,035	4,923	263,65	-0,002027	-0,000	$2,168 \cdot 10^{-3}$	93,5
0,038	4,925	269,95	-0,001622	-0,000	$1,734 \cdot 10^{-3}$	93,5
0,041	4,927	277,58	-0,001216	-0,000	$1,302 \cdot 10^{-3}$	93,5
0,044	4,929	286,85	-0,000811	-0,000	$8,672 \cdot 10^{-4}$	93,5
0,007	4,931	297,87	-0,000405	-0,000	$4,336 \cdot 10^{-4}$	93,5
0	4,933	310,03	0	0	0	0
-0,007	4,935	321,73	0,00041	0,00077	$-4,336 \cdot 10^{-4}$	93,5
-0,014	4,937	331,42	0,00081	0,00150	$-8,672 \cdot 10^{-4}$	93,5
-0,021	4,939	338,95	0,00122	0,00233	$-1,301 \cdot 10^{-3}$	93,5
-0,028	4,941	344,81	0,00162	0,00312	$-1,734 \cdot 10^{-3}$	93,5
-0,035	4,943	349,54	0,00203	0,00377	$-2,168 \cdot 10^{-3}$	93,5

У таблиці 1. представлені градувальні дані P-V-T вимірювань при температурі $\Delta T = T - T_c = 0,5$ в області зміни густини $\rho = (249,54 + 363,65)$ в оптичній камері на висотах $\Delta z = (-3,5 + 3,5)$ см.

Як видно із цієї таблиці, в області зміни висот $|\Delta z| = (0 + 0,35)$ см величина приведенного тиску $|\Delta P| = (P - P_0)/P_0$ змінюється у межах величин $|\Delta P| = (0 + 10^{-2})$. У той же час у межах цих висот зміна гідростатичного тиску становить величину $|h| = \rho_0 g |\Delta z| / P_0 = (0 + 10^{-4})$. Цей результат свідчить про те, що зміна тиску $|\Delta P|$ значно перевищує величину $|h|$: $|\Delta P|/|h| \approx 10^2 \gg 1$. Отриманий результат підтверджує представлені вище результати про величину градієнта тиску речовини в неоднорідних системах $|\Delta P|/|h| \gg 1$ за даними методів Тейлера [5], рис. 2 і P-V-T вимірювань [8].

Цей висновок підтверджує результати експериментальних досліджень величини градієнта тиску й хімічного потенціалу, отримані раніше оптичними методами світлорозсіювання та рефрактометричним [1-4].

1. Алексин А.Д. // УФЖ - 1983. - Т. 28, № 8. - С.1261-1263.
2. Алексин А.Д. // Известия вузов. Физика. - 1985. - № 7. - С. 104-107.
3. Алексин А.Д. Критические явления жидкостепар в гравитационном поле: Дис... д-ра физ.-мат.наук: 01.04.14. - Киев, 1994. - 296 с.
4. Alekhin A.D. // J. Molecular Liquids. 2006. V. 127, P. 62.
5. Шиманская Е.Т., Шиманский Ю.И., Завалин И.В. // УФЖ 1964. 9, № 5, 491
6. Teicher C. // Ann. Phys., 1904, 4, Bd13, 595.
7. Sengers J.V., Levelt-Sengers J.M.H. // Chem. Eng. News, 1968, 46, 104.
8. Polt, A.; Platzer, B.; Maurer, G. // Chem. Tech. (Leipzig), 1992, 44, 6, 216-224.

Надійшла до редколегії 1.09.2011

УДК 519.9

Жабітенко О.М., інж.
Бурлій П.В., канд. фіз.-мат. наук., ст. наук. спів.,
Козаченко В.В., канд. фіз.-мат. наук., доц.

Дослідження хвиль Лемба в електрично та акустично зв'язаних пластинах LiNbO_3 .

Досліджено поведінку фазової та групової швидкості хвиль Лемба в системі з двох п'єзоелектричних пластин із акустичним та електричним контактом між шарами та тільки з електричним. Також отримані амплітудно-частотні залежності в даній системі. Дослідження показали, що для шаруватої структури без акустичного контакту пік амплітуди знаходиться між амплітудно-частотними залежностями для окремих пластин, з яких складається структура. А при акустичному контакті зміщується в бік низьких частот, що пояснюється "гальмуванням" швидких мод повільними. Акустичний контакт між пластинами призводить до збільшення групової швидкості. Фазова ж швидкість в шаруватій структурі зростає, як при наявності акустичного контакту, так і без нього. Це дає змогу створювати специфічні датчики на основі даної структури.

Ключові слова: ніобат літію, хвилі Лемба, дисперсійні залежності.

E-mail: stalker19@ukr.net

Акустоелектронні елементи знайшли широке розповсюдження на сьогодні в різноманітних приладах завдяки використанню комбінації властивостей акустичних та електромагнітних хвиль. Однак, більшість таких елементів базується на використанні поверхневих хвиль в п'єзоелектриках. Це пов'язано з тим, що акустична поверхнева хвиля чутлива до умов на границі розділу п'єзоелектрик-оточуюче середовище та прилеглому оточуючому середовищі. Однак, використання саме поверхневих акустичних хвиль в таких приладах накладає ряд обмежень, пов'язаних з їх властивостями. В той же час розробники таких приладів приділяють недостатньо уваги

O. M. Zhabitenko, eng., P. V. Burliy, c.ph.-m.n.,
V. V. Kozachenko c.ph.-m.n.

The researching of phase and group velocity in electrically and acoustically coupled plates of LiNbO_3 .

The behavior of the phase and group velocity Lamb waves in a system of two piezoelectric plates with acoustic and electrical contact between layers and only electric was investigated. Also amplitude-frequency dependence in this system was obtained. Researches have shown that for layered structures without acoustic contact the peak amplitude located between the amplitude-frequency dependence for individual plates that make up the structure. And by the acoustic contact is shifted toward low frequencies, due to "slowdown" fast mode slow. Acoustic contact between the plates increases the group velocity. The phase velocity in the layered structure increases as the presence of acoustic contact, and without it. This enables you to create specific sensors based on this structure.

Key Words: lithium niobat, layer structure, phase velocity, group velocity.

використанню хвиль Лемба в п'єзоелектричних пластинах. Це, в першу чергу, пов'язано з меншою їх чутливістю до зміни умов в прилеглому оточуючому середовищі, по відношенню до поверхневих хвиль. Однак, хвилі Лемба мають ряд переваг при їх використанні перед поверхневими акустичними хвилями. А саме: швидкість, а значить і довжина хвиль Лемба, на відміну від поверхневих хвиль, залежить від частоти, що дає можливість, навіть при високих частотах, збуджувати хвилі з великою швидкістю. Це дає змогу збуджувати хвилі в п'єзоелектрику, п'єзоелектричне поле яких виходить за межі на велику віддаль. Друга особливість хвиль Лемба полягає в тому, що

п'єзоелектричні поля проникають за межі пластини з двох сторін і будь-який вплив на електричне поле з однієї сторони пластини, призводить до суттєвих змін величини поля з іншої сторони. Третьою особливістю хвиль Лемба є те, що в пластині можна збудити багато мод цих хвиль, які мають різні властивості. Зокрема, деякі моди мають таку унікальну властивість, як протилежно направлені фазова і групові швидкості. Ці моди отримали назву зворотніх акустичних хвиль. [1,2]. Крім того, підвищити чутливість хвиль Лемба до змін в оточуючому середовищі можливо, якщо збудити одночасно їх в двох п'єзоелектричних пластинах, так, щоб електричні поля хвиль Лемба взаємодіяли між собою. Тоді, поширення хвиль Лемба в окремих пластинах буде суттєво залежати від ступеню зв'язку між електричними полями хвиль в окремих пластинах [3], а отже і фізичних умов між цими пластинами.

В даній роботі досліджується поведінка хвиль Лемба в системі з двох пластин ніобату літія з акустичним контактом між ними та без.

Для дослідження було вибрано структуру, яка складається з двох пластин LiNbO_3 YZ-зрізу, з різними товщинами: 965 мкм (пластина №1) та 860 мкм (пластина №2). Пластини були довжиною 3,5 см і шириною 2,5 см. Блок-схема експериментальної установки була такою ж самою, як і в роботі [4]. З допомогою генератора імпульсів та генератора височастотного сигналу (ВЧ-генератора) в модуляторі формувалася радіочастотний імпульс з тривалістю 2-10 мкс. Після підсилення він подавався на збуджуючий електрод досліджуваної пластини LiNbO_3 . В якості електрода для збудження акустичних хвиль використовувалася металічна пластинка шириною 1 мм. За рахунок зворотного п'єзоэффекту в пластині збуджувалася акустична хвиля, яка ресструвалася електродом, який можна було зміщувати вздовж пластини за допомогою мікрометричного гвинта. З ресструючого електрода сигнал подавався на один із входів двоканального осцилографа. На інший вхід осцилографа від ВЧ-генератора через

фазозсувач подавався опорний сигнал. В режимі складання сигналів опорний та робочий сигнали ресструвались осцилографом. Це давало можливість визначати фазу робочого сигналу і завдяки цьому вимірювати довжину акустичної хвилі (ресструвались два положення електрода на зразку для яких робочий сигнал був в одній і тій же фазі по відношенню до опорного сигналу).

Двошарова структура з пластин ніобату літія приведена на рис. 1. Віддаль між пластинами була рівна 30 мкм. Ця віддаль визначалася товщиною збуджуючого та приймаючого електродів, які були виготовлені із мідної фольги. Режим акустично зв'язаних пластин забезпечувався заповненням щілини між пластинами силіконовим маслом.

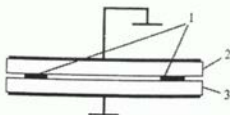


Рис.1 Схема шаруватої структури. 1 – збуджуючий та приймаючий електроди, 2 – пластина № 1, 3 – пластина № 2.

Для з'ясування частотного діапазону в якому можна проводити експериментальні дослідження було теоретично оцінено частоти народження (критичні частоти f_{cp}) хвиль Лемба для окремих пластин по товщинним резонансах. Швидкості для розрахунків f_{cp} об'ємних хвиль в напрямку Y використовувались із довідника [5]. f_{cp} для п'яти перших мод приведені в таблиці 1 (для пластини №1) та в таблиці 2 (для пластини №2) де через QL і QT позначено хвилі, що народжуються як квазіповерхові і квазіпоперечні по товщині пластини, відповідно.

Таблиця 1

Критичні частоти хвиль Лемба для пластини № 1 LiNbO₃ товщиною 965 мкм

	QT ₁	QL ₁	QT ₂	QL ₂	QT ₃
f _{кр} , кГц	2329	3566	4658	7132	6987

Таблиця 2

Критичні частоти хвиль Лемба для пластини № 2 LiNbO₃ товщиною 860 мкм

	QT ₁	QL ₁	QT ₂	QL ₂	QT ₃
f _{кр} , кГц	2613	4001	5226	8002	7839

амплітудно-частотними залежностями окремих

Експериментально досліджувались спектри збудження хвиль Лемба, дисперсійні залежності фазової та групових швидкостей як для окремих пластин так і для акустично і електрично зв'язаних. Спектри збудження хвиль Лемба приведені на рис.2.

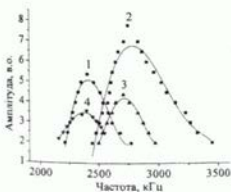


Рис.2 Амплітудно-частотна залежність в пластинках LiNbO₃ 1 – АЧХ для пластини № 1, 2 – АЧХ для пластини № 2, 3 – АЧХ для електрично зв'язаних пластин, 4 – АЧХ для електрично та акустично зв'язаних пластин.

Як видно з рис.2 пік амплітуди для двох електрично зв'язаних пластин знаходиться між

пластин. А при акустичному контакті зсувається в бік низьких частот. Така поведінка спектрів збудження може бути пов'язана з тим, що при акустичному контакті пластин утворюється пластина з ефективною товщиною рівною сумі товщин її складових, і очевидно спектр збудження такої пластини має зміститися в бік більш низьких частот. Непропорційність зміщення збільшенню ефективної товщини такої пластини ймовірно пов'язане зі взаємодією електричних полів, що супроводжують хвилі Лемба в п'єзоелектрику. За відсутності акустичного контакту, мода хвиль Лемба в окремій пластині, що має більшу швидкість, взаємодіючи через електричне поле більш повільною модою в іншій пластині, гальмується, при цьому збільшуючи швидкість повільної моди.

Дисперсія групової та фазової швидкості для окремих пластин та для акустично і електрично зв'язаних приведена на рис. 3 та рис.4., відповідно.

Як видно з рис.3 характер кривої, що описує дисперсію групової швидкості в зв'язаних пластинках має складний вигляд. При електричному контакті величина групової швидкості для системи з двох пластин залишається подібною до групової швидкості

пластини №2, спектр збудження якої лежить в області більш високих частот, а при наявності ще й акустичного контакту – суттєво зростає.

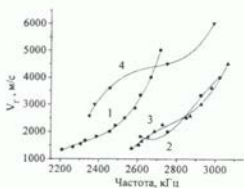


Рис.3. Дисперсія групової швидкості в пластинках LiNbO_3 1 – дисперсія групової швидкості для пластини № 1, 2 – дисперсія групової швидкості для пластини №2, 3 – дисперсія групової швидкості для електрично зв'язаних пластин, 4 – дисперсія групової швидкості для електрично та акустично зв'язаних пластин.

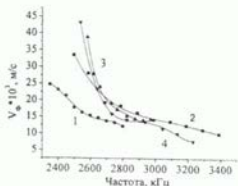


Рис.4. Дисперсія фазової швидкості в пластинках LiNbO_3 1 – дисперсія фазової швидкості для пластини № 1, 2 – дисперсія фазової швидкості для пластини № 2, 3 – дисперсія фазової швидкості для електрично зв'язаних пластин, 4 – дисперсія фазової швидкості для електрично та акустично зв'язаних пластин.

Як видно з рис.4, максимальні значення фазової швидкості в шаруватій структурі як з акустичним контактом, так і без нього, суттєво більші, ніж в окремих пластинках. В низькочастотній області існування мод в окремих пластинках фазова швидкість в електрично та акустично зв'язаних пластинках приблизно рівна сумі фазових швидкостей в окремих пластинках. Крім того частотна область існування моди в системі з двох пластин із акустичним контактом значно ширша ніж без нього.

Таким чином, дослідження показали, що поведінка хвиль Лемба в системі із п'єзоелектричних пластин з акустичним контактом між ними та без, відрізняється від їх поведінки в окремих пластинках. Крім того, така структура дуже чутлива до характеристик наповнювача між пластинками.

Список використаних джерел

1. Бурлій П.В., Кучеров І.Я. Обратные упругие волны в пластинках // Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 9, стр. 644 – 647 1977р.
2. И.А. Бородин, Б.Д. Зайцева, И.Е. Кузнецова, А.А. Теплых Гибридизация обратных акустических волн в пьезоэлектрических пластинках // Письма в ЖЭТФ, том 34, вып. 1, стр. 26 – 32 2008 р.
3. Д.А. Андрусенко, П.В. Бурлій, І.Я. Кучеров Поширення ультразвукових хвиль в електрично зв'язаній багатошаровій структурі без акустичного контакту // Український фізичний журнал. 1994. Т.39, №9,10.
4. П.В. Бурлій, В.В. Козаченко, О.М. Жабітенко. Дослідження передачі енергії хвиль Лемба в електрично зв'язаних пластинках LiNbO_3 . Укр. фіз. журн. 2010. Т. 55, № 6 ст.712 – 715.
5. Акустические кристаллы. Справочник / А.А. Блыстанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чкалова и др.; под ред. М.П. Шаскольской –М.; Наука, 1982.–632 с.

Надійшла до редколегії 30.06.11

УДК 548:539.32, 534.222.2

Онанко А.П., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Вплив електричного струму, зміни дефектної наноструктури на непружні та пружні характеристики GeSi

Розглянуто вплив постійного та змінного електричного струму при одночасній дії ультразвукової деформації на внутрішнє тертя і модуль пружності монокристалу GeSi після різки та шліфування. Викрито зменшення модуля пружності E та ріст внутрішнього тертя Q^{-1} при досягненні критичної величини електричного струму. Вивчена кінетика відпаду структурних дефектів.

Ключові слова: структурні дефекти, ультразвукова деформація, внутрішнє тертя, модуль пружності, електричний струм.

E-mail: onanko@univ.kiev.ua

Вступ

Вимірювання амплітудо-залежного внутрішнього тертя (АЗВТ) можна використовувати як високочутливий метод контролю нанопластичної деформації GeSi. Вимірювання АЗВТ дозволяє фіксувати момент відриву дислокаційних сегментів L_c від стопорів. Тому метою даної роботи було вивчення впливу електричного струму I на відрив від стопорів дислокаційних сегментів L_c при одночасній ультразвуковій деформації σ_{ul} кристалів GeSi орієнтації [111].

Експеримент

Для вимірювання температурних залежностей ВТ та модуля пружності E після механічного різання і шліфування GeSi використовувалися методику чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті $f \approx 118$ кГц і згінних резонансних коливань на частоті $f = 1$ кГц при значимій механічній деформації $\epsilon = 10^{-4}$ у вакуумі $P = 10^{-3}$ Па [1-3]. Модуль пружності E визначався за формулою:

$$E = 38,24 \cdot \rho l^4 f^2 / h^2 (1 - \alpha T), \quad (1)$$

де l , h – довжина, товщина зразка, ρ – густина, f – резонансна частота коливань

© А. П. Онанко, 2011

Onanko A.P., PhD, Sen. Sci. Res.

Influence of electrical current, changing of defect nanostructure irradiation on inelastic and elastic characteristics of GeSi

Influence of direct and variable electrical current is considered at simultaneous act of ultrasonic deformation on internal friction and elastic module of GeSi single-crystal after cutting and polishing. The diminishing of elastic module E of and the growth of internal friction Q^{-1} is found out at achievement of critical value of electrical current. Kinetics of annealing of structural defects is studied.

Key words: structure defects, ultrasonic deformation, internal friction, elastic module, electrical current.

зразка, α – коефіцієнт лінійного розширення зразка, T – температура. Погіршність виміру відносної зміни модуля пружності $\Delta E/E \approx 0,1\%$, а виміру ВТ $\Delta Q^{-1}/Q^{-1} \approx 2\%$.

Результати і їх обговорення

У межах дислокаційного механізму загасання пружних коливань у напівпровідниках під впливом зовнішніх полів (електричного та магнітного) на ВТ можливо пояснити при моделюванні руху заряджених дислокацій GeSi у прикладених полях. Розглянемо кристал GeSi орієнтації [111] з густиною дислокацій $N_s = 10^8$ м⁻² при $T = 296$ К і сталої амплітуди ультразвукової деформації $\epsilon_{ul} = 2 \cdot 10^{-4}$ до якого прикладена періодична механічна напруга $\tau = \tau_0 e^{i\omega t}$ та який знаходиться під впливом зовнішнього електричного поля напруженості E та зовнішнього магнітного поля з індукцією B . Якщо дислокаційний сегмент $\xi(x, y)$, що коливається під дією напруги τ , є зарядженим, то на нього діятимуть додаткові сили $F_e = e\rho(\xi)E$ та $F_m = e\rho(\xi)[\frac{\partial \xi}{\partial t}, B]$, де $\rho(\xi)$ – це функція розподілу густини електричного заряду на дислокаційному сегменті.

Коефіцієнт Пуассону рівний [3]:

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Махара В.А.

$$\mu = \frac{\left(\frac{1}{2}V_z^2 - V_{**}^2\right)}{(V_z^2 - V_{**}^2)}, \quad (2)$$

де V_z - поздовжня швидкість ультразвуку (УЗ), V_{**} - поперечна швидкість. В рамках струнної моделі дислокації система рівнянь, що описує рух зарядженої дислокації під впливом механічного, електричного E та магнітного полів B , набуває наступного вигляду:

$$M \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -V_d \frac{\partial \xi}{\partial x} - Q \frac{\partial \xi}{\partial t} + b \tau - N_j \frac{\partial U}{\partial \xi} + q_1 E + q_2 B \frac{\partial \xi}{\partial t} A, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = \rho b \frac{\partial^2}{\partial t^2} < \int \left| \int \xi(x) dq N(l) dl \right|, \quad (4)$$

де $(M \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2)$ - інерційна сила, $M \approx \rho b^2$ - ефективна маса одиниці довжини дислокації, ρ - густина кристалу, b - вектор Бюргерсу, t - час. $(V_d \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2)$ - сила, яка обумовлена ефективним натягом зогнутої дислокаційної лінії, $V_d \approx G b^2$ для гвинтових дислокацій, $V_d \approx G b^2 (1 - \mu)$ для крайових, G - модуль зсуву, μ - коефіцієнт Пуассона, $(Q \cdot \partial \xi / \partial t)$ - сила в'язкого гальмування, Q - постійна демпфування, тобто коефіцієнт в'язкого гальмування, $b \tau$ - зовнішня сила, яка діє на одиницю довжини дислокації, $b \tau_0$ - сила, яка діє на одиницю довжини дислокації і обумовлена напружками σ , які виникають внаслідок потенційного рельєфу кристалічної ґратки, $(N_j \cdot \partial U / \partial \xi)$ - сила, яка діє на одиницю довжини дислокації з боку точкових дефектів, які взаємодіють з дислокацією і розташовані на дислокаційній лінії з густиною $N_j(x)$, $U(\xi)$ - потенційна енергія взаємодії, l - довжина дислокаційного сегменту, $N(l)$ - функція розподілу дислокаційних сегментів по довжинам, яка обумовлена $N_j(x)$.

Практично цікаві випадки, коли, по-перше, зовнішні електричне і магнітне поля - періодичні, тобто: $E = E_0 e^{i\omega_1 t}$, $B = B_0 e^{i\omega_2 t}$. По-друге, - коли частота густини змінного електричного струму J^- співпадає з частотою УЗ коливань $\omega_1 = \omega_2$. Проводились

дослідження впливу величини J^- на ВТ $Q^{-1}(J^-)$ на рис. 1 та модуль пружності $E(J^-)$ на рис. 2.

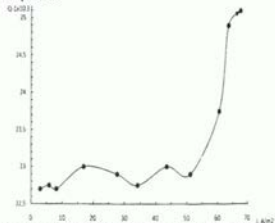


Рис. 1. Струмова залежність внутрішнього тертя $Q^{-1}(J^-)$ монокристалу GeSi після різки та шліфування від щільності змінного електричного струму тієї ж частоти, що УЗ $\omega_1 = \omega_2$.

Для отримання змінного електричного струму J^- , що проходить через зразок, у фазі з напругою U , що подається на п'єзоелектричний вібратор і що призводить до ультразвукової деформації ϵ_{yz} , обидва ці сигнали U подавались з різних виходів одного і того ж генератора сигналів ГЗ-117.

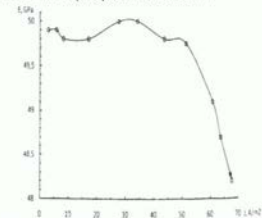


Рис. 2. Струмова залежність модуля пружності $E_{111}(J^-)$ монокристалу GeSi після різки та шліфування від щільності змінного електричного струму тієї ж частоти, що УЗ $\omega_1 = \omega_2$.

Як видно з рис. 3, для змінного струму J^- при досягненні критичного значення густини

струму $J_{cr}^* \approx 60 \cdot 10^3$ А/м² спостерігається зростання ВТ $Q^-(J^-)$ з одночасним зменшенням величини модуля пружності $E(J^-)$ при подальшому збільшенні густини струму.

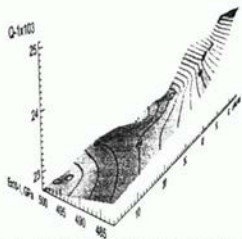


Рис. 3. Струмова залежність внутрішнього тертя $Q^-(J^-)$ і модуля пружності $E_{111}(J^-)$ (вказівної поверхні непружно-пружного тіла) монокристалу GeSi після різки та шліфування від шільності змінного електричного струму тієї ж частоти, що УЗ $\omega_1 = \omega_{УЗ}$.

Для пояснення кореляцій $Q^-(J^-)$ і $E(J^-)$ розглянемо рівняння (3) і (4). Порівнюючи рівняння (3) і (4) з експериментальними результатами на рис. 1, рис. 2 і рис. 3 можливо зробити висновок, що ефективність впливу електричного струму на ВТ $Q^-(J^-)$ і модуль пружності $E(J^-)$ різко зростає в випадку рівності частот УЗ і змінного електричного струму $\omega_1 = \omega_{УЗ}$.

Збільшення ВТ $Q^-(J^-)$ пов'язано з тим, що електрони певної енергії взаємодіють з дислокаційними сегментами L_C , які коливаються під дією УЗ деформації $\epsilon_{УЗ}$, і сприяють їх відриву від стопорів – точкових дефектів. Зміна абсолютного значення амплітуди $\epsilon_{УЗ}$ УЗ деформації не впливала на якісний хід залежності ВТ від електричного струму $Q^-(J^-)$, хоч при цьому амплітуда УЗ деформації зростала до $\epsilon_{УЗ} \approx 4 \cdot 10^{-6}$, одночасно при температурах $T \leq 470$ К спостерігалось АНЗВТ. Зменшення критичної величини струму при збільшенні температури свідчить, що з ростом температури зростають термофлуктуаційні коливання дислокаційних

сегментів L_C , що у свою чергу дозволяє малому потоку електронів відривати дислокації від стопорів. Зміна крутизни кривих залежностей ВТ від струму $Q^-(J^-)$ і $E(J^-)$ при постійній УЗ деформації на рис. 1, рис. 2 і рис. 3 може розглядатися як індикатор відриву – закріплення дислокацій. Збіг прямого і зворотного ходів залежності ВТ від струму $Q^-(J^-)$ відображає відсутність необоротних змін дислокаційної структури у процесі вимірювання ВТ.

Вузли перетину дислокацій є “сильними” стопорами, а домішкові атоми Si, вакансії V, їх комплекси V-V-V – “слабкі” центри. При деформаціях, більших ніж критична амплітуда $\epsilon \geq \epsilon_{кр}^*$, виникає АЗВТ $Q^-(\epsilon)$ унаслідок відриву від “слабких” стопорів дислокацій [4-8]:

$$Q_{AZ}^{-1} = \frac{L_N^3}{L_C} \cdot \frac{n f B}{\sigma F_a} \cdot \exp\left(-\frac{\Omega}{\sigma}\right), \quad (5)$$

де L_N – довжина петлі дислокації, що визначається відстанню між “сильними” стопорами закріплення, L_C – довжина дислокаційного сегменту, n – щільність дислокацій, ω – частота ультразвуку, σ – амплітуда напруги ультразвуку, B – стала, F_a – лінійний натяг дислокації, $\Omega = \frac{\pi F_a}{4bL_C}$ –

характеристичний рівень механічної напруги, F_0 – максимальна сила зв'язку між дислокацією та стопором, b – вектор Бюргерсу.

На рис. 4 і рис. 5 наведена мікроструктура монокристалу GeSi і плівки потрійний системи $\text{SiO}_2/\text{TiO}_2/\text{ZrO}_2$ товщиною $h \approx 200$ нм на підкладці Si (100).

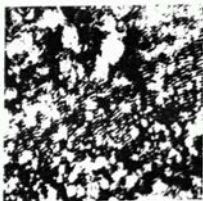


Рис. 4. Мікроструктура монокристалу GeSi.

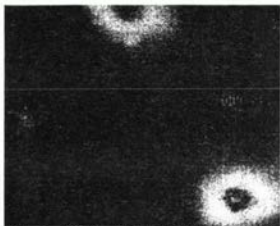


Рис. 5. Мікроструктура плівки потрійний системи $\text{SiO}_2+\text{TiO}_2+\text{ZrO}_2$ товщиною $h \approx 200$ нм на підкладці Si (100).

Однорядний ланцюжок атомів домішки під екстраплощиною не може забезпечити повну релаксацію пружного поля дислокації σ , [4]. Атоми Si осідають в площинах, перпендикулярних до лінії дислокації, до повної компенсації її поля σ , [5]. Начало залежності $\text{BT } Q^{-1}(J, \varepsilon, T)$ від температури відповідає виходу периферійних атомів Si з атмосфери стопору, що приводить до зниження ефекту закріплення дислокаційних сегментів L_c . При подальшому підвищенні температури відбувається розсмоктування атмосфер навколо стопорів. Після завершення цього процесу починається збільшення відстані між стопорами – зріст середній ефективної довжини дислокаційних сегментів L_c . Коли розсмоктування домішкових атмосфер навколо стопорів закінчується, спостерігається інтенсивне зменшення величини $\text{BT } Q^{-1}(J, \varepsilon, T)$ з ростом температури. При температурі, яка відповідає повній відсутності закріплюючих центрів, значення критичної амплітуди деформації стабілізуються.

Висновки

Таким чином, в монокристалі орієнтації [111] твердого розчину GeSi виявлено вплив постійного J і змінного $J_{\text{зм}}$ електричного струму на зростання $\text{BT } Q^{-1}(J)$ і на одночасне зменшення абсолютної величини модуля пружності $E(J)$, обумовлені тим, що потік електронів сприяє відриву від стопорів дислокаційних сегментів L_c , які коливаються під дією УЗ деформації $\varepsilon_{\text{УЗ}}$. Отримано, що при наявності змінного $J_{\text{зм}}$ електричного струму

той же частоти f і фази ϕ , що напруга U , що призводить до УЗ деформації $\varepsilon_{\text{УЗ}}$, критичне значення змінного електричного

струму майже на порядок менше, як в випадку постійного J електричного струму, що необхідно для спостереження зросту $\text{BT } Q^{-1}(J)$ при збільшенні постійного струму. Запропоновано високочутливий метод контролю нанопластичної деформації кристалів GeSi шляхом вимірювання АЗВТ.

1. Lyashenko O. V., Onanko A. P. Influence of electrical current on elastic and unelastic properties of GeSi // Photoelectronics. - 2006. - №15. - P. 95-97.
2. Александров Л. Н., Зотов М. И. Внутреннее трение и дефекты в полупроводниках. - Новосибирск : Наука, 1979. - 158 с.
3. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. - М. : Атомиздат, 1975. - 472 с.
4. Шпак А. П., Куницкий Ю. А., Карбовский В. Л. Кластеры и наноструктурные материалы - Киев : Академперіодика, 2001. - 588 с.
5. Хіврич В. І. Ефекти компенсації та проникаючої радіації в монокристалах CdTe. - Київ : Ін-т ядерних досл., 2010. - 122 с.
6. Вашипанов Ю. А., Смытнына В. А. Адсорбционная чувствительность полупроводников. - Одесса : Астропринт, 2005. - 216 с.
7. Примаченко В. Е., Кононец Я. Ф., Булах Б. М. и др. Электрофизический свойства пористого кремния, модифицированного нанокристаллами золота // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнології. - 2005. - Т. 3, № 2. - С. 399-412.
8. Молодкин В. Б., Низкова А. И., Шпак А. П. и др. Дифрактометрия наноразмерных дефектов и гетерослоев кристаллов. - Киев : Академперіодика, 2005. - 364 с.

Надійшла до редколегії 29.04.11

УДК 538.915

Плющай І.В.*, к.ф.м.н., доц.,
Макара В.А., д.ф.м.н., проф.,
Плющай О.І., к.ф.м.н., с.н.с.

Ab initio розрахунок електронних спектрів крайової дислокації в кремнії

Атомна будова та електронні спектри простої крайової дислокації в кристалічному кремнії розраховані методом функціоналу густини в узагальненому градієнтному наближенні. Атомна структура ядра дислокації змодельована за допомогою чисельного відпаду. Обговорюються зміни густини електронних станів надкомірки, що містить дислокаційний диполь. Показано, що дислокаційна підзона формується над границею валентної зони. За нашими оцінками зайва енергія розглянутої дислокації становить 0.21 eV на атом.

Ключові слова: кремній, крайова дислокація, електронна структура.

* E-mail: innapl@univ.kiev.ua

Вступ. Монокристалічний кремній є основою сучасної мікроелектроніки. Наявність в монокристалах кремнію дефектів, зокрема дислокацій, впливає на технологічно важливі властивості елементів електронних пристроїв [1-2]. Тому вивчення як будови дислокацій, так і їх впливу на фізичні властивості кремнію є важливою науковою задачею, яка по мірі розвитку розрахункових можливостей постійно привертає увагу дослідників [3-6].

В даній статті наведені результати *ab initio* моделювання атомної будови та електронних спектрів простої крайової дислокації в кремнії.

Методика розрахунку. Розрахунок проводився методом функціоналу густини [6] в узагальненому градієнтному наближенні [7] за допомогою пакета програм ABINIT [8]. Числовий віддал положень атомів проводився за алгоритмом [9].

Для розрахунку крайової дислокації нами була обрана надкомірка, що містила 128 атомів ($a_x=8a$, $a_y=a$, $a_z=2a$, де $a = 0.357$ нм – період гратки монокристалічного кремнію). Половина атомів з однієї атомної площини (001) були видалені (8 атомів). Таким чином надкомірка містить диполь з двох крайових дислокацій з протилежно спрямованими векторами Бюргерса: лінійна дислокація спрямована вздовж напрямку [010], вектор Бюргерса спрямований вздовж [001], площина ковзання - (100) (рис.1). Періодичне повторення цієї надкомірки у

I.V.Plyushchay, PhD., docent,
V.A.Makara, Dr.Sci., Prof.,
O.I.Plyushchay, PhD., Sen. Sci. Res.

Ab initio calculation of edge dislocation electronic spectra in silicon

The atomic structure and electronic spectra of the simple edge dislocation in crystalline Si are calculated by the density functional theory (DFT) in the general gradient approximation (GGA). The atomic structure of the dislocation core is modeled by simulating annealing. Changes in the density of electronic states of the supercell with dislocation dipole are discussed. We have demonstrated that the dislocation sub-band is formed above the valence-band edge. By our estimation the extra energy of examined dislocation is 0.21 eV per atom.

Key Words: silicon, edge dislocation, electronic structure.

просторі формує своєрідний «ліс» з паралельних дислокацій густиною $\sim 10^{13} \text{ см}^{-2}$. Зрозуміло це досить висока концентрація дислокацій, яка може реалізуватися лише поблизу границі гетеропереходу в епітаксійних гетероструктурах на основі Si [10]. Крім того лінії дислокацій в гетероструктурах розташовані вздовж напрямку росту, відповідно при нарощуванні шарів на поверхню типу {100} можуть реалізуватися розраховані нами дислокаційні структури.

Електронні спектри. Проведений розрахунок цілком очікувано показав, що така «вихідна» дефектна структура має «зайву» енергію в порівнянні з ідеальним монокристалом кремнію – 0.24 eV в розрахунку на атом. Розрахована енергетична залежність густини електронних станів надкомірки представлена на рис.2, 6. Якщо порівняти її з електронним спектром бездефектного кристалу кремнію (рис.2, а), то можна помітити, що в цілому валентна зона нашої надкомірки відповідає валентній зоні кремнію (ті ж самі основні три піки). Але біля вершини валентної зони формуються додаткові електронні стани, так звана дислокаційна підзона, що відповідає якісному аналізу [3, 11]. Рівень Фермі, позначений на рис.2 стрілочками, потрапляє в область вищезазначеної дислокаційної підзони.

Був проведений чисельний віддал «вихідної» дефектної надкомірки. На першому етапі відпаду атомні позиції змінювалися у відповідності з

діючими на атоми силами, розрахованими з перших принципів. На другому етапі чисельного відпаду крім зміни атомних позицій була дозволена також зміна розмірів надкомірки вздовж вектора Бюргерса, у відповідності з діючими напруженнями. На рис.1 добре видно, як змістилися атоми, що були сусідами видаленої напівплощини – відбулася релаксація ядра дислокації.

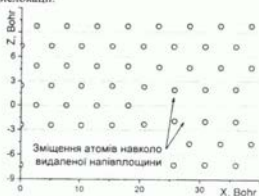


Рис.1. Проекція «зреласованої» надкомірки.

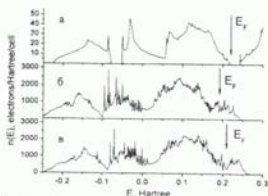


Рис.2. Енергетична залежність густини електронних станів: а – кристалічного Si, б – «вихідної» надкомірки, що містить дислокаційний диполь, в – «зреласованої» надкомірки.

Енергетична залежність густини електронних станів «зреласованої» надкомірки представлена на рис.2, в. Порівнюючи цю криву з електронним спектром «вихідної» надкомірки (рис.2, б), можна помітити деякі зміни в дислокаційній підзоні. Утворюється локальний мінімум, що відділяє дислокаційну підзону від валентної зони. Рівень Фермі лежить в околі цього локального мінімуму, що призводить до зменшення енергії електронної підсистеми «зреласованої» надкомірки кремнію, що містить дислокаційний диполь. Як показують наші

розрахунки, в результаті релаксації атомної структури, «зайва» енергія надкомірки зменшується і становить – 0,21 eВ в розрахунок на атом.

Добре відомо [1], що площиною ковзання в Si є площина (111), відповідно найбільш розповсюдженими в кремнії є дислокації, вектор Бюргерса яких лежить саме в цій площині. В подальшому планується розрахувати електронні спектри таких дислокацій і порівняти зі спектрами, отриманими в даній роботі.

Список використаних джерел

1. Судзуки Т., Есинага Х., Такеути С. Динамика дислокацій и пластичность. – М.: Мир, 1989. – 296 с.
2. Kittler M. et al Dislocations in Silicon as a Tool to be used in Optics, Electronics and Biology // Solid State Phen. – 2008. – V. 131-133. – p. 289-292.
3. Kveder V., Sekiguchi T., Sumino K. Electronic states associated with dislocations in p-type silicon studied by means of electric-dipole-spin-resonance and deep-level-transient-spectroscopy // Phys.Rev. B – 1995. – 51. – p. 16721-16727.
4. Liu F, Mostoller M, Milman V, Chisholm M F and Kaplan T Electronic and elastic properties of edge dislocations in Si//Phys. Rev. B. – 1995. – 51. – p.17192-17195.
5. Lehto N Shallow electron states of bounded intrinsic stacking faults in silicon // Phys. Rev. B. – 1997. – 55. – p. 15601-15607.
6. Gonze X., Amadon B., et al. ABINIT : First-principles approach of materials and nanosystem properties // Computer Phys. Comm. – 2009. – 180. – p. 2582-2615.
7. J.P.Perdew, K.Burke, M.Ernzerhof Generalized Gradient Approximation Made Simple // Phys. Rev. Lett. – 1996. – 77. – p. 3865-3868.
8. <http://www.abinit.org/>
9. Schlegel H. B. Optimization of equilibrium geometries and transition structures // J. Comput. Chem. – 1982. – 3. – p. 214-218.
10. Bolkhovityanov Yu. B., Pchelyakov O. P. III-V Compounds-on-Si: Heterostructure Fabrication, Application and Prospects // Open Nanoscience Journal. – 2009. – V. 3. – p.20-33.
11. Shklyayev A. A. et al Electroluminescence of dislocation-rich Si layers grown using oxidized Si surfaces // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2011. – 44. – p. 025402-8.

Надійшла до редколегії 29.06.2011

УДК 519.9

Породько Л. В., асп.

Фізичні процеси, що відбуваються при обробці матеріалів лазерним випромінюванням

У даній роботі дослідження розширені на напівпрозорі матеріали (діелектрики, напівпровідники), у яких область поглинання значно перевищує умовний приповерхневий шар.

Процес взаємодії лазерного випромінювання з речовиною умовно можна розділити на наступні стадії: відбивання – поглинання світла; нагрівання матеріалу; плавлення, руйнування матеріалу шляхом випаровування й виносу розплаву й остигання після закінчення світлового впливу.

Ключові слова: монохроматичний, імпульсний режим, інтенсивність.

E-mail: lilphys@mail.ru

Вступ

Останнім часом широко використовується лазерні технології в операціях, де обробка матеріалів за допомогою лазерів здійснюється з меншими енергетичними й трудовими витратами в порівнянні з іншими технологіями (наприклад, для обробки тендітних, твердих і термостійких матеріалів). У багатьох процесах виявилось можливим сполучити лазерний вплив з іншими видами енергії, наприклад, з дією плазми, електричного розряду, вибухової хвилі, ультразвуку, механічного й хімічного впливу. Це значно розширило коло завдань, розв'язуваних за допомогою лазерної технології.

Дуже часто лазерна обробка проводиться в присутності хімічних, газових та інших робочих середовищ, що дозволяє проводити ряд робіт, нездійсненних в інших технологіях.

L.V. Porodko, PhD stud.

Physical processes that occur in the processing of materials by laser radiation

In this paper we study expanded on translucent materials (dielectrics, semiconductors), in which region the absorption is much higher than conventional subsurface layer.

The process of interaction of laser radiation with matter can be divided into the following stages: reflection - absorption of light, heating the material, melting, destruction of material by evaporation and removal of the melt and cooling after light exposure.

Key words: monochromatic, pulse, intensity.

Більшість технологічних операцій, здійснюваних за допомогою лазерів, заснована на тепловому впливі світла на оброблювані матеріали. Перевагою лазерних технологій є простота керування лазерним пучком, висока точність обробки й оперативність. У роботах [1 – 5] процеси взаємодії речовини з випромінюванням розглянуті стосовно до металів, сильно поглинаючих напівпровідників і діелектриків. В сучасному світі лазер є єдиним джерелом когерентного випромінювання, можливість одержання якого зробила справжню революцію в науці й техніці [3, 6]. Когерентність припускає наявність таких властивостей випромінювання, як монохроматичність, направленість, висока яскравість та потужність. Властивість лазерів генерувати короткі імпульси означає концентрацію енергії в часі, і аналогічна властивість монохроматичності, що є

концентрацію енергії у вузькому діапазоні довжин хвиль.

Під яскравістю джерела розуміють потужність випромінювання з одиниці поверхні в одиничний тілесний кут. В наслідок малої розбіжності лазерного пучка, енергія випромінювання переноситься в даному напрямку з невеликими втратами. Крім того, яскравість знаходиться в прямій залежності від потужності випромінювача. Як правило, потужність лазерів має величину від 10 до 100 кВт.

Щоб одержати таку потужність когерентного (монохроматичного) випромінювання шляхом розігріву тіла, останнє повинно мати температуру порядку 10^{13} К. Тому яскравість навіть малопотужних газових лазерів на багато порядків перевищує яскравість Сонця, рівну 130 Вт/см^2 , у той час коли яскравість потужних твердотільних лазерів становить величину $\approx 10^{17} \text{ Вт/см}^2$.

Застосування лазерів різноманітне. Здатність лазерів концентрувати світлову енергію в просторі, у часі та спектральному інтервалі може бути використана наступним чином: 1) взаємодія потужних світлових потоків із речовиною в неперервному та імпульсному режимах (лазерна технологія, лазерний термоядерний синтез та інше); 2) селективна дія на атоми, іони, молекули та молекулярні утворення, що викликають процеси фото дисоціації, фотохімічні реакції. Лазерне опромінення стимулює активацію хімічних реакцій на поверхні речовини й у приповерхньому прогрітому шарі. У металургії лазери дозволяють отримати надчисті метали, що виплавляються у вакуумі, або в контрольованому газовому середовищі і т.д.

Основні розрахункові формули

При врахуванні відбитої частини випромінювання, його інтенсивність на глибини

z залежить від інтенсивності випромінювання лазера I_0 , і визначається законом Бутера – Ламберта – Бера: $I(z) = I_0(1 - R)\exp(-\alpha \cdot z)$, де α і R – відповідно коефіцієнти поглинання й відбиття. Ця формула застосовна в широкому діапазоні інтенсивностей і до різних матеріалів. Значення величин α і $1 - R$ визначається виразами [3]:

$$\alpha = 4\sqrt{\pi n^2 / m_e^* / c}, \quad 1 - R = v_e \sqrt{m_e^* / (\pi n^2 c)}.$$

Тут e і m_e^* – заряд та ефективна маса електрона, n – концентрація вільних електронів у металі, c – швидкість світла у вакуумі, v_e – частота зіткнень електрона, при якому відбувається зміна імпульсу.

Залежно від матеріалу механізми поглинання світла й переходу його в тепло за рахунок передачі енергії сильно розрізняються.

У металах [3] елементарними процесами, що супроводжують акти поглинання фотонів, є електрон – фононні v_{ef} взаємодії із частотами $10^4 + 10^9 \text{ с}^{-1}$, електрон – електронні $v_{ee} \approx 10^{14} + 10^{15} \text{ с}^{-1}$, електрон – іонні $v_{ei} \approx 10^{11} \text{ с}^{-1}$ та іон – іонні $v_{ii} \approx 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Таким чином на початку розігрівуються електрони провідності (час розігріву $\tau_e \leq 10^{-14} \text{ с}$), при цьому температура ґратки практично не змінюється. Вважається [3], що при значеннях $\tau_e > 10^{-11} \text{ с}$ температури електронного газу й ґратки вирівнюються, і саме з цього моменту можна користуватися загальними термодинамічними поняттями, зокрема, температури. Порівняння всіх частот показує, що швидкість нагрівання металу дімітується тільки швидкістю введення енергії випромінювання, і тому можна вважати, що механізми нагрівання металу «відстежують»

зміну світлового потоку практично без
запізнення при $\tau \geq 10^{-11}$ с.

У напівпровідниках і діелектриках, на
відміну від металів, поглинання світла
визначається в основному зв'язаними носіями.
Сильно поглинати випромінювання на частоті ν
напівпровідники будуть тоді, коли $h\nu > E_g$

(E_g – ширина забороненої зони). При цьому
валентні електрони будуть переходити в зону
провідності в результаті внутрішнього
фотоэффекта. Не зважаючи на процеси
рекомбінації, через $\sim 10^{-9} + 10^{-8}$ с при
інтенсивності $I > 10^6 \text{ А} \cdot \text{В} / \text{м}^2$ концентрація
вільних носіїв досягає величини $10^{20} + 10^{21} \text{ см}^{-3}$
і механізми передачі енергії наближаються до
таких, як у металів.

У випадку $h\nu < E_g$ поглинання
здійснюється існуючими електронами
провідності від донорних домішок. При $h\nu \approx E_g$
механізм поглинання в основному пов'язаний з
акцепторними домішками. Поступовий розігрів,
як домішкових, так і валентних електронів
приводить до додаткової термічної їх іонізації та
появи нових електронів у зоні провідності, або
дірок у валентній зоні, що викликають
самоприскорюваний процес нагрівання ґратки.

Розрахунки та їхній аналіз

В результаті поглинання світла й
переходу його в тепло починається нагрівання
матеріалу шляхом передачі цієї енергії за
допомогою різних механізмів передачі тепла та
променевого теплообміну. Розмір прогрітої
області спочатку визначається величиною шару
 δ , а потім за рахунок теплопровідності веде себе
як функція $(\zeta \cdot t)^{1/2}$, де ζ –
температуропровідність; t – час. Механізми
теплопровідності визначаються досягнутою
температурою T . При $T < 100\text{K}$ істотна фоновна

теплопровідність χ_f , при $T \approx (10^2 + 10^4)\text{K}$
переважає електронна теплопровідність χ_e при
 $T > 10^4\text{K}$ потрібно враховувати променевий
теплообмін χ_r . Як правило, при технологічній
обробці матеріалів температура не перевищує
температури випаровування $T_b \approx 10^3\text{K}$. Тому
основний механізм теплопровідності –
електронний.

Лазерне випромінювання, що падає на
поверхню матеріалу, частково відбивається від
неї, а частково проникає в середину матеріалу,
поглинаючись у ньому й нагріваючи його. У
загальному випадку зміна температури довільної
точки твердого тіла в часі визначається
нелінійним диференціальним рівнянням
теплопровідності, аналітичний розв'язок якого
отримати важко [3 – 13].

Залежно від конкретних технологічних
операцій може використатися просте нагрівання,
плавлення або випаровування. Однак механізми
поширення тепла в глиб матеріалу залежно від
конкретної технологічної ситуації істотно
розразняються. Так, для обробки матеріалів
використовується фокусування світлового пучка
до розмірів $d \approx 10 + 20 \text{ мкм}$; а оскільки при цих
значеннях $d \approx (\zeta \cdot t)^{1/2}$, то при $t = 10^{-3}$ с істотною
роль грає відвід тепла вбік від місця нагрівання
(область нагрівання $\approx 100 + 300 \text{ мкм}$), що різко
сповільнює темп нагрівання. За умови
використання виразу для сталої (стаціонарної)
температури для сфокусованого пучка розміром
 $d: T = (I_0 \cdot d) / \chi_e$. Також, беручи до уваги, що
глибина прогрітого шару $z_{1/2} = 10 \cdot d$, в роботі
[2] оцінено мінімальні інтенсивності світла, що
поглинається. За допомогою величин, які
визначаються температурними показниками,
оцінено критичні інтенсивності для трьох стадій
нагрівання: просто нагрівання, плавлення й
випаровування [2, 14]. Зрозуміло, що для
процесу просто нагрівання інтенсивність

випромінювання повинна бути менше критичної інтенсивності I_{01} , достатньої для досягнення на поверхні температури плавлення $T = T_l$:

$$I_{01} = \sqrt{\pi} \cdot [(T_l \cdot \chi_e) / (\zeta \cdot t_e)^{1/2}] / 2, \quad (1)$$

де ζ – коефіцієнт температуропровідності; χ_e – коефіцієнт електронної теплопровідності; t_e – час, достатній для досягнення на поверхні металу точки плавлення.

Плавлення можна здійснити при інтенсивностях, менших, але близьких до інтенсивностей, при яких досягається відчутне випаровування поверхневих шарів матеріалу I_{01} , а саме:

$$I_{02} = \sqrt{\pi} \cdot [(T_k \cdot \chi_e) / (\zeta \cdot t_k)^{1/2}] / 2, \quad (2)$$

де T_k – температура кипіння, t_k – час, достатній для досягнення на поверхні металу точки кипіння.

Для опису процесу інтенсивного випаровування використовується вираз

$$I_{03} = L_v \cdot \rho \cdot (\zeta \cdot t_v)^{1/2}. \quad (3)$$

Тут L_v – питома теплота випаровування в одиницю часу, t_v – тривалість імпульсу, при якому швидкість випаровування порядку швидкості поширення тепла, ρ – густина матеріалу.

Результати оцінок інтенсивностей, визначених за наведеними вище формулами I_{01}, I_{02}, I_{03} , наведені в таблиці 1.1 [3]. У цій таблиці наведені дані для двох довжин імпульсів 10^{-3} с та 10^{-8} с.

За розрахунками, які отримані в [3] та приведені в табл. 1.1, можна помітити, що чим меншою є довжина імпульсу тим більшої інтенсивності має бути потік випромінювання для отримання однакового результату на поверхні опроміненої речовини.

Таблиця 1.1

Критичні інтенсивності лазерного опромінювання для ряду металів при тривалості імпульсу:

$$\tau = 10^{-3} \text{ с} ; \tau = 10^{-8} \text{ с}.$$

Матеріал	χ_e , Вт/см К	ζ , см ² /с	T_l , К	T_k , К	I_{01} , Вт/см ²	I_{02} , Вт/см ²	I_{03} , Вт/см ²	τ , с
Мідь	3,89	1,12	1365	2868	$1,1 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^6$	10^{-3}
					$3,6 \cdot 10^7$	$8,6 \cdot 10^7$	$4,5 \cdot 10^8$	10^{-8}
Алюміній	2,07	0,87	933	2720	$4,1 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	10^{-3}
					$1,3 \cdot 10^7$	$4,8 \cdot 10^7$	$2,6 \cdot 10^8$	10^{-8}
Вольфрам	1,30	0,65	3653	5803	$1,5 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$2,4 \cdot 10^6$	10^{-3}
					$4,8 \cdot 10^7$	$7,9 \cdot 10^7$	$7,7 \cdot 10^8$	10^{-8}
Хром	0,67	0,22	2176	2915	$7,6 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$8,0 \cdot 10^5$	10^{-3}

					$2,4 \cdot 10^7$	$3,4 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^8$	10^{-8}
Титан	0,15	0,06	1941	3553	$3,0 \cdot 10^8$	$5,8 \cdot 10^8$	$3,4 \cdot 10^9$	10^{-3}
					$9,4 \cdot 10^8$	$1,8 \cdot 10^9$	$1,1 \cdot 10^9$	10^{-8}

У цій таблиці наведені дані для двох довжина імпульсу верхня $\tau = 10^{-3}$ с та нижня $\tau = 10^{-8}$ с.

Висновки

Аналіз взаємодії лазерного випромінювання з поверхнею твердого тіла показав, що при різних потужностях лазерного випромінювання виникають три типи поведінки речовини на поверхнях.

При низьких інтенсивностях ($10^4 + 10^5 \text{ Å} \cdot \text{W} / \text{m}^2$) відбувається нагрівання матеріалу без зміни агрегатного стану речовини, передача енергії відбувається за рахунок теплопровідності, при підвищеній інтенсивності до ($10^5 + 10^6 \text{ Å} \cdot \text{W} / \text{m}^2$) відбувається плавлення поверхні без виносу матеріалу, при ще більшій інтенсивності ($10^6 + 10^7 \text{ Å} \cdot \text{W} / \text{m}^2$) дозволяє робити нагрівання з видаленням речовини із зони теплового впливу, і нарешті характерний рівень енергії, з перевищенням якого починається активне випаровування та руйнування, для більшості металів становить ($> 10^7 + 10^8 \text{ Å} \cdot \text{W} / \text{m}^2$), тобто при дуже високих потужностях відбувається сублімація. Раніше нами було досліджено процес поширення тепла за рахунок теплопровідності [15]. Згідно з табл. 1.1 при менших довжинах імпульсу відбувається збільшення порогів випромінювання по інтенсивності.

З'єднання високої інтенсивності випромінювання з імпульсним багаторазовим впливом випромінювання дає можливість здійснювати обробку поверхні більш ефективно. Частота, з якою

посилають імпульси, становить десятки й сотні герц. Подібні режими вимагають менших енерговитрат, ніж режими з неперервним випромінюванням. Результат впливу обумовлюється загальним часом впливу імпульсів.

Список використаних джерел

1. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С., Ходыко Ю.В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970. – 632 с.
2. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В. и др. Лазерная обработка материалов. М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
3. Жигалов В. С. Лазерные технологии. Красноярск: Сибирская аэрокосмическая академия им. академика М. Ф. Решетнева, 1998. – 114 с.
4. Чернига Р.М., Однороженко И.Г. Исследование процессов плавления и испарения металлов при действии серии импульсов лазерного излучения //Промышленная теплотехника. – 1991. – т.13, N4. – С. 51 – 59.
5. Чернига Р.М., Однороженко И.Г. Точные решения нелинейной задачи плавления и испарения металла при действии мощного потока энергии //Докл. АН

- УССР. Сер. А. Физ. – мат. и техн. науки. –1990. – №12. –С. 46–48.
6. *Проворов А.С., Сизых А.Г., Сорокин А.В.* Применение лазеров в науке, технике и технологии. Красноярск: Изд-во КГУ, 1988. –84 с.
7. *Казанцев С.Г.* Лазерная стойкость перспективных материалов силовой ИК – оптики //Известия ВУЗов. Физика.– 1998. –N10.– С. 68 – 84.
8. *Блистанов А.А., Казанцев С.Г., Кугаенко О.М.* ЩГК как материал окон CO₂-лазеров //Известия ВУЗов. Материалы электронной техники. – 2002. –N 1. – С. 4 – 15.
9. *Казанцев С.Г.* Лучевая прочность оптических элементов из монокристаллов ZnSe и KCl // Оптический журнал. – 1997. – Т. 64, N 6.– С. 63 – 65.
10. *Казанцев С.Г.* Создание проходной оптики мощных TEA CO₂-лазеров и методы повышения лазерной стойкости материалов силовой ИК – оптики//Известия ВУЗов. Физика. – 2001. –N 11.– С. 67 – 77.
11. *Казанцев С.Г., Блистанов А.А., Кугаенко О.М., Петраков В.С.* Морфология повреждения оптических элементов на основе ЩГК излучением широкоапертурного CO₂-лазера //Кристаллография. –1999.–Т.44, N 4.– С. 689 – 693.
12. *Казанцев С.Г.* Лазерная стойкость перспективных материалов силовой ИК – оптики. Часть 1. Механизмы повреждения материалов силовой ИК оптики. Часть 2. Способы повышения лазерной стойкости и срока службы оптических элементов //Оптика атмосферы и океана.– 2003.– Т.16, N 4. – С. 390–401.
13. *Казанцев С.Г.*//Перспективные материалы проходной оптики мощных ИК лазеров// <http://www.uniphys.ru/journal/N1-05/toparticle/toparticle.htm>
14. *Супрун А.Д., Усенко К.В.* Определение порога разрушения поверхности материала по величине потока импульсного излучения и времени последствия импульса //Поверхность. Физика, химия, механика. – 1994. –N 6. – С. 118 – 124.
15. *L.G. Grechko, L.V.Porodko, L.B. Lerman, O.Yu. Semichuk.* Spatial and temporal distribution of temperature on a surface of the solid state, caused by one dimensional laser interference pattern // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2010, №.1. – 277 – 280.
- Надійшла до редколегії 29.10.1999

УДК 539.194

Розуван* К.П., к.ф.-м.н., Розуван С.Г., к.ф.-м.н.,
Шайкевич І.А., проф., д.ф.-м.н.

Спектральна еліпсометрія кристалу $\text{Al}_3\text{Y}_5\text{O}_{12}$ з домішками Nd^{3+} .

Кристал алюмоітрієвого гранату з домішками іонів неодиму був експериментально досліджений за допомогою спектральних еліпсометричних вимірювань. Криві величини зсуву фаз між p - та s -компонентами відбитого світла різко показали сильну залежність від кута падіння світла. Були проведені чисельні розрахунки кривих густини електронних станів для кристалу та зонних структур для різних надкомірок кристалу. Показано, що енергетичні рівні іону неодиму мають сильну анізотропію поблизу поверхні кристалу.

Ключові слова: алюмоітрієвий гранат, надкомірка, зонна структура, спектральна еліпсометрія.

*E-mail: sgr@univ.kiev.ua

Спектральна еліпсометрія являє собою потужний інструмент для визначення дисперсійних кривих оптичної провідності, дійсної та уявної частин показника заломлення широкого класу матеріалів. Ця методика, внаслідок зміни поляризаційних характеристик світла при його відбитті, які в основному чутливі до стану речовини саме в приповерхневому шарі, являє собою чутливий спосіб дослідження процесів на поверхні речовини. Товщина приповерхневого шару, де падаюче світло взаємодіє із зразком має порядок довжини хвилі світла [1]. Очевидно також, що властивості речовини в тонкому приповерхневому шарі можуть різнитися від властивостей цієї ж речовини, але вже на глибині під поверхню [2].

Однією з можливостей дослідження приповерхневих процесів могла би бути еліпсометрія зразків з тонкими спектральними лініями поглинання і порівняння результатів, наприклад, з результатами спектrophотометричних вимірювань, які відображають властивості великого об'єму досліджуваного зразка. Для більшості елементів в кристалічному тілі їх лінійчаті спектри поглинання трансформуються в широкі зони під впливом періодичного потенціалу іонів

K.P.Rozuvan*, PhD, S.G. Rozuvan, PhD,
I.A. Shaykevich, Prof., Dr. Sci.

Spectral ellipsometry of Nd^{3+} doped $\text{Al}_3\text{Y}_5\text{O}_{12}$ crystal.

Neodymium doped yttrium aluminum garnet was experimentally studied by spectral ellipsometry technique. Phase shift between reflected p - and s -light components curves demonstrated strong dependence from an incident angle. Numerical simulation of density of electronic states and band structure curves for supercells of the crystal in different states were conducted. It was shown that energy levels of neodymium ion have strong anisotropical character near a crystal surface.

Key Words: yttrium aluminum garnet, supercell, band structure, spectral ellipsometry.

кристалічної ґратки. Як виняток, рідкоземельні елементи додані у вигляді домішок до аморфної речовини або до кристалу слабо взаємодіють з оточуючими іонами, оскільки інтеграли перекриття незаповненої внутрішньої оболонки таких елементів та періодичної хвильової функції решітки мають порівняно невеликі значення. Такі властивості рідкоземельних елементів й визначають їх використання для розв'язку широкого класу наукових та інженерних задач (супермагніти, твердотільні лазері, тощо) [3].

Для теоретичних розрахунків та експериментальних досліджень нами був вибраний алюмоітрієвий гранат активований іонами неодиму ($\text{Al}_3\text{Y}_5\text{O}_{12}:\text{Nd}^{3+}$) - рис.1. По-перше, оптичні властивості цього матеріалу є досить добре вивченими, оскільки ці кристали широко використовуються для твердотільних лазерів та підсилювачів [4]. По-друге, спектри поглинання таких кристалів мають чітко виражені смуги, які складаються з вузьких енергетичних рівнів іона неодиму [5].

Для розрахунків нами використовувався пакет програм ABINIT [6] для середовища LINUX, який є розробкою групи при Université Catholique de Louvain.

Електронна структура кристалу з урахуванням граничних умов в наближенні

Борна-Опенгеймера[7] знаходиться шляхом наближеного розв'язку стаціонарного рівняння Шредінгера:

$$\hat{H}\Phi = U\Phi \quad (1)$$

Хвильова функція Φ (розв'язок для системи), яка описує стани всіх електронів та атомних ядер для основного стану системи.

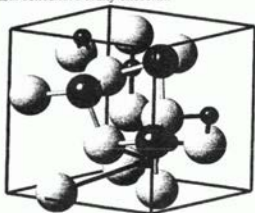


Рис.1 Елементарна комірка алюмоітрієвого гранату. Білі кульки- атоми кисню, темні великі кульки- атоми алюмінію, темні маленькі- атоми ітрію.

Загальний розв'язок рівняння Шредінгера може бути знайдений, використовуючи наближення Кон-Шлама [8,9], при якому загальна енергія системи виражається у вигляді функціоналу електронної густини $n(r)$ та V_{eff} – потенціалу впливу ґратки:

$$n(r) = \sum_i |\phi_i|^2 \quad (2)$$

$$U = U_{kin}(n) + U_H(n) + U_{ec}(n) + \int V_{eff}(r)n(r)dr \quad (3)$$

Таким чином, задача для багатоелектронної системи з $3N$ ступенями свободи зводиться до задачі з 3 ступенями свободи для одного електрона, $\hat{H}$ описує електрон i який рухається в ефективному полі V_{eff} , створюваному іншими електронами та ядрами. Таким чином,

$$\hat{H}\phi_i = U_i\phi_i$$

$$\left[-(\hbar^2/2m)\Delta + V_{eff}[n(r)] \right] \phi_i(r) = U_i \phi_i(r) \quad (4)$$

$$\text{де } V_{eff}[n(r)] = V_H(r) + V_{xc}(r) + V_{eff}(r)$$

В співвідношеннях (4) $-\hbar^2\Delta/2m$ – оператор кінетичної енергії, V_H – фокіан, V_{xc} – потенціал кореляційної взаємодії [10].

Розв'язок системи рівнянь (4) у вигляді системи хвильових функцій ϕ_i знаходиться шляхом ітерацій. Спочатку конструюється початкова електронна густина n_0 , з якої визначається початковий потенціал. Далі знаходяться власні функції рівняння Шредінгера і знаходиться нова електронна густина n_{new} , яка є початковою густиною для наступного ітераційного кроку. Процес повторюється поки не досягнеться потрібна точність.

Розв'язок системи (3)-(4) може бути записаний як сума плоских хвиль

$$\phi_i = \sum_D C_{i,k+D} \exp(i(k+D)r) \quad (5)$$

Тоді система рівнянь (4) набуває форми [11]:

$$\sum_D H_{k+D,k+D'} C_{i,k+D'} = U_i C_{i,k+D} \quad (6)$$

з матричними елементами

$$H_{k+D,k+D'} = (\hbar^2/2m)[k+D]^2 \delta_{D,D'} + V_H(D-D') + V_{xc}(D-D') + V_{ext}(D-D') \quad (7)$$

Система рівнянь (6,7) може бути розв'язана незалежно для кожної точки першої зони Бріллюєна шляхом діагоналізації. Це дозволяє визначати зонну структуру кристалу.

Для розрахунків нами було взято декілька типів надкомірок, які склались з набору елементарних комірок з рис.1. Для розгляду кристалу гранату без домішок не враховуючи поверхневих ефектів нами була взята надкомірка $4 \times 4 \times 4$ (всього 1280 атомів). Результати розрахунків густини електронних станів зображені на рис.2. Видно, що перед нами діелектрик з широкою забороненою зоною. Результати розрахунків в цілому співпадають з результатами досліджень інших груп [12].

Оптична анізотропія кристалу напрямку пов'язана з зоною структурою кристалу. Для даної надкомірки залежності величин енергетичних рівнів від хвильового вектора зображена на рис.3. З рисунка видно, що кристал алюмоітрієвого гранату без домішок представляє собою ізотропне середовище.

На рис.4 зображена розрахована зонна структура надкомірки $4 \times 4 \times 4$ кристалу

використовувалися в наших розрахунках (один іон в кожній 64й елементарній комірці).

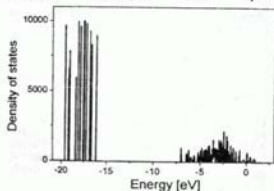


Рис.2 Розрахована густина електронних станів алюмоїтристого гранату

алюмоїтристого гранату (всього 1281 атомів) з домішковим іоном неодиму в одній з 64 елементарних комірок надкомірки.

З рисунка видно, що розрахований кристал з домішкою є також ізотропним середовищем. Слід

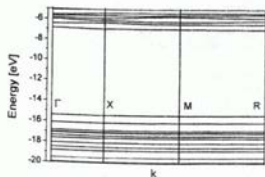


Рис.3 Розрахована заборонена зона алюмоїтристого гранату. Γ, X, M, R - відповідно центр, центр грані, центр ребра, вершина першої зони Брилюєна для кубічної ґратки.

відмітити, що розрахунки домішкових рівней в забороненій зоні велись з деякими припущеннями. Різниця експериментально отриманих спектрів $Al_2Y_3O_{12}:Nd^{3+}$ [13] і розрахунків рис.4 полягає в тому, що по-перше, при розрахунках не враховувались збуджені стани неодиму, які відповідають за велику кількість ліній поглинання кристалу в видимій та ближній інфрачервоній областях спектра. По-друге реальні концентрації домішок неодиму в алюмоїтристому гранаті є на декілька порядків нижчими, ніж ті концентрації, що

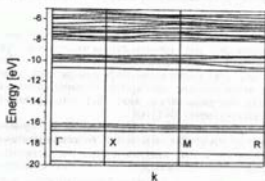


Рис.4 Розрахована заборонена зона надкомірки алюмоїтристого гранату з іоном неодима.

На рис.5 зображена розрахована заборонена зона надкомірки з поверхневим шаром (всього $4 \times 4 \times 5$ елементарних комірок). Фактично дана надкомірка представляє собою надкомірку рис.4 з додатковим поверхневим шаром ($4 \times 4 \times 1$) алюмоїтристого гранату. Товщина поверхневого шару була нами взята на 20% більшою від довжини базисних векторів для симуляції впливу поверхні.

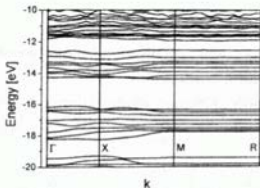


Рис.5 Розрахована заборонена зона надкомірки алюмоїтристого гранату з іоном неодима та поверхневим шаром.

З рисунка видно, що зонна структура такої надкомірки має чітко виражений анізотропний характер. З загальних міркувань така зонна структура приведе й до анізотропії для показника заломлення світла. Світло, розповсюджуючись по кристалу, буде наводити в ньому диполь по схемі основний-збуджений стани або основний-віртуальний стани. Хвильові функції періодичного кристалу по теоремі Блоха залежать

від хвильового вектора оскільки мають фазовий множник $\exp(i\vec{k}\vec{r})$. Тобто зонна структура кристалу відображає анізотропію його показника заломлення.

При проведенні експериментів ми використовували таку ж методику спектральної еліпсометрії, яка використовувалась нами при проведенні експериментів в [14,16]. Для спектральних еліпсометричних вимірювань нами була взята частина монокристалу вирощеного по методу Чохральського, який був зшліфований перпендикулярно [001] осі.

На рис.6 зображені спектральний хід кривих косинусу зсуву фаз між p - та s - компонентами при різних кутах падіння світла на поверхню кристалу. З рисунка видно, що при кутах падіння близьких до $\pi/2$ вузькі лінії поглинання іону неодиму приводять до появи структури на залежностях. В той же час, при зменшенні кута

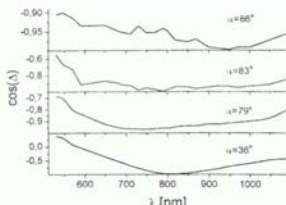


Рис.6 Дані спектральних еліпсометричних вимірювань кристалу алюмітритового гранату при різних кутах падіння α .

падіння залежності стають гладкими. Подібні залежності можуть бути пояснені використовуючи апарат розроблений для аналізу селективного поляризаційного фотоэффекту [17].

Результати даної роботи дозволяють кількісно дослідити вклад поверхневого шару кристалу в поведінку його оптичної провідності. З точки зору спектральної еліпсометрії металів та напівпровідників, було б перспективним розширити даний підхід на випадок полікристалів. Очевидно, що це пов'язано зі значними обчислювальними труднощами, оскільки потрібно обчислювати властивості довільно орієнтованої надкомірки великих розмірів і неправильної форми.

Список використаних джерел.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. том 4. Оптика. -Москва: Физматлит, 2005. -592 с.
2. Horn K., Scheffler M. Handbook of Surface Science. vol.2. Electronic Structure, - Amsterdam:North Holland; 2000. -1072 p.

3. Spedding F., Daane A.H. The Rare Earths, - New York:John Wiley & Sons, Inc., 1961. 516 p.
4. Rohrer G. S. Structure and Bonding in Crystalline Materials. -Cambridge:University press. 2001. -426p.
5. Sekita M. Optical Properties of Rare-Earth-Doped Y3Al5O12 Single-Crystals Grown by a Floating Zone Method and Transparent Ceramics. Dissertation in Physics, Osaka University Japan, 1992.
6. X. Gonze, G.-M. Rignanese, M. Verstraete, J.-M. Beuken, Y. Pouillon, R. Caracas, F. Jollet, M. Torrent, G. Zerah, M. Mikami, P. Ghosez, M. Veithen, J.-Y. Raty, V. Olevano, F. Bruneval, L. Reining, R. Godby, G. Onida, D.R. Hamann, and D.C. Allan. A brief introduction to the ABINIT software package. Zeitschrift für Kristallographie, 220, 558-562, 2005.
7. M. Born and J.R. Oppenheimer. Zur Quantentheorie der Molekeln. Annalen der Physik, 84:457-484, 1927.
8. P. Hohenberg and W. Kohn. Inhomogeneous electron gas. Phys. Rev., 136:B864, 1964.
9. W. Kohn and L.J. Sham. Self-consistent equations including exchange and correlation effects. Phys. Rev, 140:A1133, 1965.
10. R. M. Martin. Electronic Structure. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
11. M.C. Payne, M.P. Teter, D.C. Allan, T.A. Arias, and J.D. Joannopoulos. Iterative minimization techniques for ab initio total-energy calculations - molecular dynamics and conjugate gradients. Rev. Mod. Phys., 64:1045, 1992.
12. Yong-Nian Xu and W. Y. Ching Electronic structure of yttrium aluminum garnet Y3Al5O12 Physical Review B v. 59, N16, 1999.
13. Справочник по лазерам под редакцией Прохорова т.2 М.: Советское радио 1978, 401с.
14. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Лінійна і нелінійна спектроскопія - зв'язків у політиофені // Вісник Київського університету. - 2008. - №1, С. 227-230.
15. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Розрахунки енергій оптичного переходу лазерного барвника // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. - 2009. - №1, С.275-280.
16. Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Розрахунки форми смуги поглинання лазерного барвника. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. - 2009. - №3, С.329-334.
17. Савостьянова М.В. Селективний фотоэффект. // Успехи физических наук. - 1934. - т.14. - вып.1. С.7-34.

Надійшло 12.04.2011

УДК 532.536

Рудніков Є.Г., к. ф.-м. н.
Остапчук Ю.Л., к. ф.-м. н.
Білоус О.І., к. ф.-м. н.

Застосування симетричної алгебри флуктуючих величин до Ван-дер- Ваальсової моделі газу флуктуацій параметра порядку

У роботі проведений аналіз представленої в науковій літературі алгебри флуктуючих величин. Розроблено нову симетричну алгебру флуктуючих величин з n критичними полями, у якій рівноправно представлені польові та густинні змінні, а також включено у розгляд неасимптотичні доданки; запропонована симетрична алгебра флуктуючих величин приведена до форми, придатної для аналізу експериментальних даних; Ван-дер-Ваальсова модель газу флуктуацій параметра порядку сформульована у термінах симетричної алгебри флуктуючих величин.

Ключові слова: критична точка, алгебра
флуктуючих величин, Ван-дер-Ваальсова
модель газу флуктуацій

* E-mail: rudnieu@univ.kiev.ua

На даний час залишається актуальною задача знаходження розширеного рівняння стану поблизу критичних точок (КТ). Для реалізації цієї задачі одним з ефективних підходів є широке використання методу алгебри флуктуючих величин (АФВ), запропонованого Покровським В.І. [1].

У зв'язку із цим дана робота присвячена подальшому застосуванню методу АФВ при дослідженні критичного стану речовини. Згідно з АФВ, флуктуації параметра порядку та енергії не є статистично незалежними ($\langle \Delta\phi\Delta E \rangle \neq 0$). Це приводить до відомих співвідношень АФВ для параметра порядку $\Delta\phi$ та енергії ΔE [1]. Пряме та зворотне перетворення АФВ можуть бути представлені у вигляді матриць рангу 2, у якості незалежних елементів яких виступають коефіцієнти АФВ u та v . Фізичний зміст величин u і v описаний в [2,3]. Виходячи з вимоги ізоморфності рівняння стану рідини та магнетика у роботах Мартинця В.Г. [4], запропоновані наступні зміни: "поля" $h_1 \Rightarrow H$ і $h_2 \Rightarrow t$ та "густини" $A_1 \Rightarrow M$ і $A_2 \Rightarrow S = S_S$. Це дало можливість записати рівняння стану речовини

Rudnikov Ye.G., Ph.D.
Ostapchuk Yu.L., Ph.D.
Bilous O.I., Ph.D.

Application of symmetrical algebra of fluctuating values to Van der Waals model of gas of the fluctuations of order parameter

Algebra of fluctuating values represented in the scientific literature has been analyzed in the work. The new symmetrical algebra of the fluctuating values with n critical fields has been developed. Field and density variables are symmetrically presented. Nonasymptotic corrections are also considered. Proposed symmetrical algebra of fluctuating values is given in the suitable form for the analysis of experimental data. Van der Waals model of gas of fluctuations of order parameter has been presented in the terms of symmetrical algebra of fluctuating values.

Keywords: critical point, algebra of the
fluctuating values, Van der Waals model of gas of
fluctuations

[3,4] з використанням "лінійної моделі" параметричного рівняння стану [5].

Надалі Фішером М. [6] було запропоновано вибрати тиск як третю польову змінну АФВ. Це дозволило пояснити наявність так званої "2 β - сингулярності" для кривих співвідношення, в основному подвійних розчинів. Третя польова змінна ΔP залежить від двох інших t і $\Delta\phi$ згідно з співвідношенням Гіббса-Дюгема. Виходячи з [7], у критичній області істотними є два незалежних критичних "поля". Підхід роботи [6] (complete scaling) погоджує розширені рівняння стану з термодинамічним співвідношенням робіт Yang C.N., Yang C.P. [8]: $C_{\phi\phi} = VT(d^2P/d^2t) - NT(d^2\mu/dT^2)$, яке є наслідком рівняння Гіббса-Дюгема.

Подальший розвиток цієї ідеї запропонований у роботах Анісімова М.А. [9,10]. У цих роботах вводиться третє поле, "подібне до тиску" [9]: $\Delta P^* = (\Omega - \Omega_c)/V$, де Ω - флуктуаційна частина великого термодинамічного потенціалу. Віднесення до одиниці об'єму, цей потенціал має характеристичні зміни t , $\Delta\phi$ ($\Omega/V = \Omega/V(t, \Delta\phi)$). Виходячи з цього, в [10] запропонована ідея про

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

два джерела асиметрії кривої співіснування подвійних розчинів.

Виходячи з вище викладеного, у даній роботі були проаналізовані наступні моменти у використанні АФВ.

1. У роботах [9,10] третє поле $\Delta P^* = C_6 R_c^{-3}$ якісно відмінно від польової змінної – приведенного тиску ΔP . Дійсно, ΔP^* звертається в нуль тільки в критичній точці, коли $R_c \rightarrow \infty$. Умова ж $\Delta P = 0$ визначає критичну лінію – критичну ізобару.

2. Фішером М. запропонована термінологія критичних “полів” і спряжених ним “густин”. Кількість “полів” дорівнює кількості “густин”. Що стосується третього “поля” робіт [9,10] – ΔP^* є енергетичною характеристикою системи, пов’язаною із радіусом кореляції R_c [4]. Величини μ і β спряжені величинам $\partial P^* / \partial \mu = N/V$, і $\partial P^* / \partial \beta = S/V$ відповідно, а сама величина P^* не має собі спряженої величини. Тому в представленому в роботах [6,9,10] формалізмі АФВ із трьома полями відсутня симетрична форма представлення, подібна до АФВ з двома полями [1,3,4].

3. Використання в АФВ парного корелятора ентропії в околі КТ [4] має перевагу порівняно із використанням корелятора внутрішньої енергії [1,3]. Згідно з [11], корелятор флуктуацій ентропії $\langle \overline{\Delta S^2} \rangle_V$ та корелятор флуктуацій внутрішньої енергії $\langle \overline{\Delta E^2} \rangle_V$

визначаються як $\langle \overline{\Delta S^2} \rangle_V = k_B C_v$, $\langle \overline{\Delta E^2} \rangle_V = T^2 k_B C_v$, відповідно. Але слід звернути увагу на те, що на відміну від ентропії, вираз $\langle \overline{\Delta E^2} \rangle_V = T^2 k_B C_v$ ґрунтується на використанні співвідношення $dE/dT = C_v$. Це співвідношення виводиться в [12] у припущенні, що з точністю до константи, внутрішня енергія $E = C_v T k_B$, де як в ідеальному газі $C_v(T) = \text{const}$. Але поблизу КТ ця умова не виконується ($C_v \sim t^{-\alpha}$). У варіанті АФВ роботи [4] замість $\langle \overline{\Delta E^2} \rangle_V$ використовується $\langle \overline{\Delta S^2} \rangle_V$.

Виходячи із проведеного аналізу 1, 2, 3, мета даної роботи – розробка симетричної алгебри флуктуючих величин (САФВ), у якій рівноправно представлені польові та густинні змінні, а також включено у розгляд неасимптотичні поправки; представлення САФВ у формі, придатній для аналізу експериментальних даних; застосування САФВ

до Ван-дер-Ваальсової моделі газу флуктуючий параметр порядку.

Спочатку була поставлена задача – визначити таке сполучення термодинамічних змінних, при якому три “поля” ΔT , $\Delta \mu$, ΔP записувалися б рівноправним чином щодо спряжених ним “густинних” термодинамічних змінних a_T , a_μ , a_P . При цьому форма запису АФВ повинна мати симетричний вигляд, подібно до [4]. Відшукати змінні a_T , a_μ , a_P можливо в такий спосіб. Запишемо вираз для диференціала внутрішньої енергії $E(S, V, N)$

$$dE = -PdV + TdS + \mu dN \quad (1)$$

Зафіксуємо енергію системи, тобто виділимо підсистему з фіксованою енергією $E = \text{const}$ ($dE = 0$). Такою підсистемою може бути, наприклад, флуктуація густини з енергією $\approx k_B T$, або підсистема, що складається з фіксованого числа N_0 таких флуктуацій з енергією $N_0 k_B T = \text{const}$. Тоді на підставі (1) маємо

$$-Pd(V/E) + Td(S/E) + \mu d(N/E) = 0 \quad (2)$$

Порівняємо (2) з рівнянням Гіббса-Дюгема $-VdP + SdT + Nd\mu = 0$, записуючи його в еквівалентній формі

$$-(V/E)dP + (S/E)dT + (N/E)d\mu = 0 \quad (3)$$

Як видно, рівняння (3) має повну симетрію стосовно рівняння (2). “Польові” змінні ΔP , ΔT , $\Delta \mu$ термодинамічно спряжені “густинним” змінним $a_P = -\Delta(V/E)$, $a_T = \Delta(S/E)$, $a_\mu = \Delta(N/E)$ відповідно. З використанням (1)-(3) доводиться однозначність такої відповідності. Тоді можна записати САФВ з трьома полями у вигляді, подібному до АФВ роботи [4] з двома полями.

$$\begin{aligned} \Delta(V/E) &= \Delta(V/E)' + g_{12}\Delta(S/E)' + g_{13}\Delta(N/E)' \\ \Delta(S/E) &= g_{21}\Delta(V/E)' + \Delta(S/E)' + g_{23}\Delta(N/E)' \\ \Delta(N/E) &= g_{31}\Delta(V/E)' + g_{32}\Delta(S/E)' + \Delta(N/E)' \\ \Delta P' &= \Delta P + g_{21}\Delta T + g_{31}\Delta \mu \\ \Delta T' &= g_{12}\Delta P + \Delta T + g_{32}\Delta \mu \\ \Delta \mu' &= g_{13}\Delta P + g_{23}\Delta T + \Delta \mu \end{aligned} \quad (4)$$

Величини зі штрихом відповідають симетричній моделі рівняння стану. Зворотні перетворення стосовно (4) одержуються із використанням співвідношень лінійної алгебри. Для зворотних перетворень АФВ із трьома "поллями" можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta P &= k^{-1}[\Delta P' - (g_{21} - g_{23}g_{31})\Delta T' - (g_{31} - g_{32}g_{21})\Delta \mu'] \\ \Delta T &= k^{-1}[-(g_{12} - g_{13}g_{32})\Delta P' + \Delta T' - (g_{32} - g_{31}g_{12})\Delta \mu'] \\ \Delta \mu &= k^{-1}[-(g_{13} - g_{12}g_{23})\Delta P' - (g_{23} - g_{21}g_{13})\Delta T' + \Delta \mu'] \quad (5) \\ \Delta(V/E)' &= k^{-1}[\Delta(V/E) - (g_{21} - g_{23}g_{31})\Delta(S/E) - (g_{31} - g_{32}g_{21})\Delta(N/E)] \\ \Delta(S/E)' &= k^{-1}[-(g_{21} - g_{23}g_{31})\Delta(V/E) + \Delta(S/E) - (g_{31} - g_{32}g_{21})\Delta(N/E)] \\ \Delta(N/E)' &= k^{-1}[-(g_{31} - g_{32}g_{21})\Delta(V/E) - (g_{32} - g_{31}g_{21})\Delta(S/E) + \Delta(N/E)] \end{aligned}$$

Тут $k=1+g_{21}g_{32}g_{13}+g_{12}g_{23}g_{31}-g_{21}g_{12}-g_{13}g_{31}-g_{23}g_{32}$ або $k=1-g_{21}g_{12}-g_{13}g_{31}-g_{23}g_{32}$. Незалежних коефіцієнтів в (4), (5) – шість. У цій загальній формі запису коефіцієнти g_{ij} можуть бути як додатними, так і від'ємними. Неврахування змінних $\Delta P'$ та $\Delta(V/E)'$ (тобто внесок тиску не враховується) дозволяє перетворити (4), (5) у формули [4], як граничний випадок. При цьому $g_{12} \Rightarrow v$, $g_{13} \Rightarrow u$.

Як видно, в (4) густинні змінні несиметричної задачі (без штриха) виражаються через густинні змінні симетричної задачі (зі штрихом) з тими ж коефіцієнтами, що й польові змінні симетричної задачі через польові змінні несиметричної задачі. У формулах (5) ситуація протилежна. У зв'язку із цим природним представлялось знайти таку, схожу на (4), (5), форму запису цих рівнянь, при якій густинні та польові змінні будуть виражатись формулами САФВ з однаковим коефіцієнтом перед сумою. Розрахунки показують, що це можливо одним способом:

$$\begin{aligned} \Delta(V/E)' &= k^{-10}[\Delta(V/E)' + g_{21}\Delta(S/E)' + g_{31}\Delta(N/E)'] \\ \Delta(S/E)' &= k^{-10}[g_{21}\Delta(V/E)' + \Delta(S/E)' + g_{31}\Delta(N/E)'] \\ \Delta(N/E)' &= k^{-10}[g_{31}\Delta(V/E)' + g_{21}\Delta(S/E)' + \Delta(N/E)'] \\ \Delta P &= k^{-10}[\Delta P' + f_{21}\Delta T' + f_{31}\Delta \mu'] \\ \Delta T &= k^{-10}[f_{21}\Delta P' + \Delta T' + f_{31}\Delta \mu'] \\ \Delta \mu &= k^{-10}[f_{31}\Delta P' + f_{21}\Delta T' + \Delta \mu'] \\ \Delta P' &= k^{-10}[\Delta P + g_{21}\Delta T + g_{31}\Delta \mu] \\ \Delta T' &= k^{-10}[g_{21}\Delta P + \Delta T + g_{31}\Delta \mu] \\ \Delta \mu' &= k^{-10}[g_{31}\Delta P + g_{21}\Delta T + \Delta \mu] \quad (6) \\ \Delta(V/E)' &= k^{-10}[\Delta(V/E)' + f_{21}\Delta(S/E)' + f_{31}\Delta(N/E)'] \\ \Delta(S/E)' &= k^{-10}[f_{21}\Delta(V/E)' + \Delta(S/E)' + f_{31}\Delta(N/E)'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(N/E)' &= k^{-10}[f_{31}\Delta(V/E)' + f_{21}\Delta(S/E)' + \Delta(N/E)'] \\ g_{21} &= -(f_{12} - f_{13}f_{32}), \quad f_{31} = -(g_{13} - g_{12}g_{23}). \end{aligned}$$

Однак форма запису системи рівнянь (6) незручна ані для опису експериментальних даних, ані для аналізу модельних розширених рівнянь стану. Перепишемо ці рівняння в іншій формі.

Рівняння (1) можна записати ще в трьох еквівалентних формах

$$\begin{aligned} dV &= 1/P \cdot dE + T/P \cdot dS + \mu/P \cdot dN \quad (1') \\ dS &= P/T \cdot dV + 1/T \cdot dE - \mu/T \cdot dN \quad (1'') \\ dN &= P/\mu \cdot dV - T/\mu \cdot dS + 1/\mu \cdot dE \quad (1''') \end{aligned}$$

Із цих рівнянь за допомогою узяття часткових похідних можуть бути отримані різні термодинамічні відгуки. На основі цих співвідношень та з використанням способу виведення рівняння Гіббса-Дюгема маємо:

$$\begin{aligned} -(1/P) \cdot d(E/V) + (T/P) \cdot d(S/V) + (\mu/P) \cdot d(N/V) &= 0 \quad (2') \\ -(E/V) \cdot d(1/P) + (S/V) \cdot d(T/P) + (N/V) \cdot d(\mu/P) &= 0 \quad (3') \\ (P/T) \cdot d(V/S) + (1/T) \cdot d(E/S) - (\mu/T) \cdot d(N/S) &= 0 \quad (2'') \\ (V/S) \cdot d(P/T) + (E/S) \cdot d(1/T) - (N/S) \cdot d(\mu/T) &= 0 \quad (3'') \\ (P/\mu) \cdot d(V/N) - (T/\mu) \cdot d(S/N) + (1/\mu) \cdot d(E/N) &= 0 \quad (2''') \\ (V/N) \cdot d(P/\mu) - (S/N) \cdot d(T/\mu) + (E/N) \cdot d(1/\mu) &= 0 \quad (3''') \end{aligned}$$

Симетрія цих рівнянь, за аналогією з (2) та (3), приводить до висновку, що можна утворити пари термодинамічно сполучених величин в алгебрі флуктуюючих величин із трьома критичними полями наступними чотирма способами (табл. 1.), які, по суті, і являють собою справжній complete scaling

Таблиця 1. Пари змінних САФВ.

	1	2		3		4
P	-V/E	1/P	-E/V	P/T	V/S	P/ μ
T	S/E	T/P	S/V	1/T	E/S	T/ μ
μ	N/E	μ/P	N/V	μ/T	-N/S	1/ μ
						E/N

У цій таблиці змінні в 1 способі побудови САФВ перетворюються згідно з (6). Спосіб 3 містить змінні 1/T, P/T і μ/T , часто використані в науковій літературі при запису формул статистичної фізики; змінні 1/T і μ/T неважно припускаються у формулах початкового варіанту АФВ [1], причому для цього широко вживається

термін „густина внутрішньої енергії“ $\Delta E \cdot t^{-1-\alpha}$, що згідно [13], фізично не є досить вдалим.

Для систем із чотирма польовими змінними, наприклад для подвійних розчинів поблизу КТ рідина-пара із змінними ΔP , ΔT , $\Delta \mu$ та $\Delta \mu^*$ (або для потрійних розчинів поблизу КТ рідина-рідина) симетрична АФВ буде записуватися за допомогою матриць 4 рангу та 12-ма незалежними елементами g_{ij} . Для розчину неврахування одиниці із змінних (різницею хімічного потенціалу $\Delta \mu^*$, тобто робиться формальний перехід до однокомпонентної системи) зведе цю задачу до формул, аналогічних (4), (5) як до граничного випадку. У загальному випадку, аналогічно може бути використаний симетричний формалізм АФВ для n -компонентного розчину поблизу КТ рідина-пара у вигляді матриць рангу $2+n$ із числом незалежних елементів $(2+n)(1+n)$:

$$\Delta A = k^{-1/2} (\Delta A' + \sum_{j=1}^n g_{1j} \Delta A'_j), \quad \Delta B_i = k^{-1/2} (\Delta B_i + \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta B_j) \\ \Delta A'_i = k^{-1/2} (\Delta A_i + \sum_{j=1}^n g_{ji} \Delta A'_j), \quad \Delta B'_i = k^{-1/2} (\Delta B_i + \sum_{j=1}^n f_{ji} \Delta B_j) \quad (7)$$

де A_i – гутинні, B_i – польові змінні; $g_{ij} \neq g_{ji}$, $f_{ij} \neq f_{ji}$, а коефіцієнти матриць g_{ij} та f_{ij} переходу від симетричної системи термодинамічних змінних до несиметричних та навпаки пов'язані між собою формулами лінійної алгебри, причому $g_{ij} = -f_{ji} + \sum_{k,j=1}^n f_{kj} f_{ki} - \dots$

$f_{ij} = -g_{ji} + \sum_{k,j=1}^n g_{kj} g_{ki} - \dots$. У модельному випадку $g_{ij} = g_{ji}$, число незалежних компонентів в (7)

зменшується вдвічі. Можна припустити, що як і для симетрії лінійних коефіцієнтів $L_{ij} = L_{ji}$

Онзагера, співвідношення лінійної АФВ $g_{ij} = g_{ji}$ може бути фізично обґрунтовано. Крім того, запропонований симетричний формалізм АФВ, можливо, дозволить також перевірити виконання співвідношення $g_{ij} = g_{ji}$ експериментально.

Проведений нами теоретичний аналіз також показав, що для АФВ [1,3,4] коректним є розгляд лише випадків, коли одночасно $u \neq 0$, $v \neq 0$ (або $v=0$, $u=0$, що означає відсутність асиметрії). Термодинамічні розрахунки показують, що випадки $u \neq 0$, $v=0$ або $u=0$, $v \neq 0$ приводять до порушення термодинамічних співвідношень Максвелла. Наслідком цього є також висновок, що всі коефіцієнти g_{ij} у симетричній АФВ із n критичними полями або одночасно не

дорівнюють нулю, або слід розглядати АФВ із меншим значенням n .

Для використання запропонованої симетричної АФВ із метою порівняння з Вандер-Ваальсовою моделлю газу флуктуацій параметра порядку [14,15] корисним виявився 2 спосіб побудови САФВ (табл. 1). Тоді система рівнянь, аналогічна (6), запишеться у вигляді

$$\Delta(E/V) = k^{-1/2} [\Delta(E/V) + g_{11} \Delta(S/V) + g_{12} \Delta(N/V)] \\ \Delta(S/V) = k^{-1/2} [g_{21} \Delta(E/V) + \Delta(S/V) + g_{22} \Delta(N/V)] \\ \Delta(N/V) = k^{-1/2} [g_{31} \Delta(E/V) + g_{32} \Delta(S/V) + \Delta(N/V)] \\ \Delta(1/P) = k^{-1/2} [\Delta(1/P) + f_{12} \Delta(T/P) + f_{13} \Delta(\mu/P)] \\ \Delta(T/P) = k^{-1/2} [f_{21} \Delta(1/P) + \Delta(T/P) + f_{23} \Delta(\mu/P)] \\ \Delta(\mu/P) = k^{-1/2} [f_{31} \Delta(1/P) + f_{32} \Delta(T/P) + \Delta(\mu/P)] \\ \Delta(1/P) = k^{-1/2} [\Delta(1/P) + g_{21} \Delta(T/P) + g_{22} \Delta(\mu/P)] \quad (8) \\ \Delta(T/P) = k^{-1/2} [g_{31} \Delta(1/P) + \Delta(T/P) + g_{32} \Delta(\mu/P)] \\ \Delta(\mu/P) = k^{-1/2} [g_{11} \Delta(1/P) + g_{12} \Delta(T/P) + \Delta(\mu/P)] \\ \Delta(E/V) = k^{-1/2} [\Delta(E/V) + f_{12} \Delta(S/V) + f_{13} \Delta(N/V)] \\ \Delta(S/V) = k^{-1/2} [f_{21} \Delta(E/V) + \Delta(S/V) + f_{22} \Delta(N/V)] \\ \Delta(N/V) = k^{-1/2} [f_{31} \Delta(E/V) + f_{32} \Delta(S/V) + \Delta(N/V)] \\ g_{ij} = -(f_{ji} - f_{ij} f_{ji}), \quad f_{ij} = -(g_{ji} - g_{ij} g_{ji}).$$

У (8) коефіцієнти g_{ij} і f_{ij} відрізняються від аналогічних коефіцієнтів g_{ij} і f_{ij} формули (6).

Проведений аналіз показує, що за допомогою формалізму АФВ можна також розглядати й неасимптотичні внески. Це слідує з рівнянь (6) і (8): на зміну знаків g_{ij} , g_{ji} не накладено обмежень. Доданки з коефіцієнтами виду g_{ij} (у формулах (6), (8) всі $g_{ij}=1$, або для зручності можна покласти, що $g_{ij}=k^{-1/2}$, тоді $g_{ij}=k^{-1/2}=1$) відповідають симетричним

асимптотичним внескам, а доданки виду $g_{ij}(i \neq j)$ описують асиметрію розширеного рівняння стану. Якщо потребувати, щоб на знаки g_{ij} були накладені умови, що враховують для ізотермі відсутності зміни його знака при $\Delta p \rightarrow -\Delta p$, $\Delta \mu \rightarrow -\Delta \mu$, у той час як знаки g_{ij} асиметричних доданків змінюються (або навпаки для кривої співіснування), можна включити у розгляд і неасимптотичні доданки. Але при цьому варто враховувати наступне. Оскільки при аналізі розширених рівнянь стану врахування асиметричних та неасимптотичних симетричних внесків проводиться незалежно, можна незалежно врахувати неасимптотичні внески за допомогою САФВ із двома критичними полями

або до, або після застосування САФВ із трьома критичними полями (6), (8) для обліку асиметрії розширеного рівняння стану.

Систему рівнянь (8) можна застосувати для опису експериментальних даних розширеними рівняннями стану. Проведемо аналіз розширених рівнянь стану на основі Ван-дер-Ваальсової моделі газу флуктуацій параметра порядку [14,15].

Як приклад розглянемо випадок криві співіснування. Відповідно до цієї моделі приведена густина уздовж криві співіснування може бути описана рівнянням [15]

$$\Delta\rho = \frac{dF}{d\mu} = \pm B_2 |t|^2 \pm B_3 |t|^{\beta+2} + B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{\beta+2} - B_4 |t|^{\beta+2} + \dots \quad (9)$$

В (9) асиметричний доданок $B_2 |t|^{2\beta}$ враховує власний об'єм флуктуацій в системі й згідно з АФВ [6,9,10] пояснюється врахуванням впливу тиску в рівнянні стану речовини. Наступний асиметричний доданок (9) $B_3 |t|^{\beta+2}$ пояснюється врахуванням впливу хімічного потенціалу в рівнянні стану речовини. Асиметричний негативний доданок ($-B_4 |t|^{\beta+2} < 0$), згідно Ван-дер-Ваальсової моделі, враховує сили притягання між флуктуаціями на відстанях $r > R_c$. Неасимптотичний доданок $\pm B_1 |t|^{\beta+2}$, аналогічно ідеям Ван-дер-Ваальса, визначає ступінь асоціації флуктуацій. Перепишемо (9) у формі

$$\Delta\rho = \pm \Delta\rho' + f_{\text{ва}} \Delta E'_{\text{ва}} + f_{\text{ва},2} \Delta E'_{\text{ва},2} + f_3 S' - f_{\text{прит}} \Delta E'_{\text{прит}} \quad (10)$$

Слід зазначити, що в рівнянні Ван-дер-Ваальса [12] відхилення від ідеальності із силами внутрішньої енергії пов'язане із силами притягання, у той час як відхилення від ідеальності для ентропії пов'язане із силами відштовхування:

$$E = E_{\text{ва}} - N^2 a/V; S = S_{\text{ва}} + N \ln(1 - Nb/V) \quad (11)$$

Виходячи із цього, останній доданок в (10) записано у формі $-f_{\text{прит}} \Delta E'_{\text{прит}}$, тоді третій доданок, пов'язаний з ефективним відштовхуванням – забороненням об'ємом (упорядкованою частиною флуктуації в моделі [15]) записаний у вигляді $+f_{\text{ва},2} \Delta E'_{\text{ва},2}$, а доданок, пов'язаний з ефективним відштовхуванням – ентропійним внеском (розв'язаного частинною флуктуації в моделі) у вигляді $+f_3 S'$.

Неасимптотичний доданок, записаний у вигляді $\pm f_{\text{ва}} \Delta E'_{\text{ва}}$, пов'язаний з пологовою зміною, яка відповідає за зміну енергії системи в результаті асоціювання флуктуацій при відході від критичної точки. Згідно моделі це поле, в залежності від знаку відповідного доданка в (10), може приводити як до додаткового ефективного притягання, так і до додаткового ефективного відштовхування молекул. Можна припустити, що ефект асоціювання флуктуацій при подальшому відході від КТ приводить до відомого для області кросовера явища коагуляції флуктуацій (захоплення, «поїдання» одних флуктуацій іншими).

Порівнюючи (10) з одним із рівнянь системи (8)

$$\Delta(N/V)' = k^{-1} [f_1 \Delta(E/V) + f_{12} \Delta(S/V) + f_{12} \Delta(N/V)] \approx \approx f_{\text{ва}} \Delta(E/V) + f_{\text{ва}} \Delta(S/V) + \Delta(N/V), f_{12} = k^{1/2} \approx 1, \quad (12)$$

можна зробити наступні висновки.

1. Неасимптотичний симетричний доданок розглядається окремо від асиметричних.
2. Врахування внеску ентропії в рівнянні стану при підході до КТ: $f_{12} = f_2$.
3. Оскільки, як слідує з (8), величина E/V термодинамічно спряжена $1/P$, відповідний доданок враховує внесок тиску в рівнянні (12), тобто $f_{12} = f_{\text{ва}}$.
4. Останній доданок у (12) враховує притягання колективів молекул на відстанях $r > R_c$, як це проявляється у методі колективних змінних [16]; крім того в (9) $(1 - \alpha + \nu)$, і цей внесок можна розглядати окремо, а можна математично об'єднати з f_3 : $f^* = f_3 - f_{\text{прит}}$.

Наведемо приклад обробки експериментальних даних рівняннями (12) (табл. 2.). Для води крива співіснування в приведених координатах енергії одиниці об'єму E/V – температура T , ентропія одиниці об'єму S/V – температура T , густина $\Delta\rho' = N/V$ – температура T , а також відповідні баричні залежності були описані рівняннями Ван-дер-Ваальсової моделі газу флуктуацій параметра порядку

$$\begin{aligned} \Delta\eta' &= \pm B_2 |t|^2 \pm B_3 |t|^{\beta+2} + B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{\beta+2} - B_4 |t|^{\beta+2} + \dots \\ \Delta\eta' &= \pm B_2 |P'|^2 \pm B_3 |P'|^{\beta+2} + B_2 |P'|^{2\beta} + B_3 |P'|^{\beta+2} - B_4 |P'|^{\beta+2} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$t = (T - T_c)/T_c, \quad P' = (P - P_c)/P_c$$

із використанням значень критичних індексів, отриманих методом „малого параметра” [17].

Таблиця 2. Коефіцієнти в (13) для води [18].

Властивість $\Delta \eta^*$	B_0	B_1	B_2	$B_3 = B_3 - B_4$
$(N/V)^*(t)$	2,15	0,18	0,14	1,3
$(S/V)^*(t)$	0,41	0,4	0,02	0,2
$(E/V)^*(t)$	0,6	0,02	0,02	0,2
$(N/V)^*(P)$	1,05	0,2	0,025	0,25
$(S/V)^*(P)$	0,22	0,02	0,02	0,2

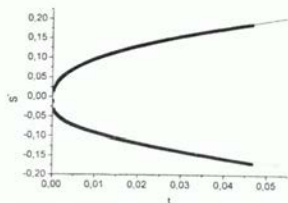


Рис. 1. Температурна залежність приведенної ентропії від приведенної температури уздовж кривої співзвучування води. Суцільна лінія відповідає рівнянню (9) з коефіцієнтами з табл. 2.

На рис. 1 наведені експериментальні дані кривої співзвучування води, перераховані [18] для наведеної ентропії $(S/V)^*(t) = S^* = (S - S_0)/S_0$. Із цього рисунка та табл. 2. зроблено висновок, що основним доданком є знакозмінний симетричний доданок $\pm B_0|t|^2$, а не асиметричний доданок $B_1|t|^3$, як це слідує з формул АФВ [1,3,4]. Звідси слідує важливий висновок, що АФВ у застосованій у науковій літературі формі [1,4] приводить до помилкових висновків для калоричних властивостей речовини, оскільки роздільно не враховує знаки симетричних і асиметричних доданків. Запропонована в даній роботі методика використання симетричної АФВ (6)-(8), доповнена врахуванням знаків коефіцієнтів алгебри, вільна від цього недоліку, а також на основі єдиного підходу включає в розгляд неасимптотичні розширення рівняння стану.

- 1 Покровский В.Л. // Письма в ЖЭТФ – 1973, – Т. 17, N 4. – С. 219–221.
- 2 J. Kestin, J.V. Sengers, B. Kamgar-Parsi, J.M.H. Levelt Sengers // Phys. Chem. Ref. Data, 1984, v. 13, p. 175.
- 3 Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. / М.: Наука. – 1987. – 271 с.
- 4 Мартынец В.Г. Термодинамические свойства бинарных растворов вблизи критической точки растворителя: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук: 02.00.04 / Ин-т неорг.хим. СО РАН – Новосибирск, 1999. – 36 с.
- 5 Schofield P. // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V.22, N 12. – P.606.
- 6 Y.C. Kim, M.E. Fisher, G. Orkoulas // Phys. Rev. E. – 2003. 67. – 061506
- 7 Вильсон К., Коут Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение / Пер. с англ. – М.: Мир. – 1975 (Новости фундаментальной физики, вып. 5).
- 8 Yang C.N., Yang C.P. // Phys. Rev. Lett. 1964. – 13. – 303.
- 9 Anisimov M.A., Wang J. // Phys. Rev. Lett. 2006. 97. 025703.
- 10 Wang J., Cerdeirina C.A., Anisimov M.A., Sengers J.V. // Phys. Rev. E, 2008, 77, 031127.
- 11 Сивухин Д.В. Оптика. // М. Физматлит. – 2005. – 792 с.
- 12 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. / 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1976. – 584 с.
- 13 Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 2-е изд., перераб. 1982. — 382 с.
- 14 Алехин А.Д. // Известия вузов. Физика. – 1983. – Вып.3. – С. 103–105.
- 15 Алехин А. Д., Абдикаримов Б. Ж., Остапчук Ю. Л., Рудников Е. Г. // Журнал Физической Химии, 2010, том 84, № 8, с. 1–7
- 16 Юхновский И., Козловский М., Пилюк И. Микроскопическая теория фазовых переходов в трехмерных системах: Львов 2001. Евросвіт. – 588 с.
- 17 Alekhin A.D. // Journal of Molecular Liquids – 2005. – 120/1-3 – P. 43-45.
- 18 Wagner, W.; Pruss, A., // J. Phys. Chem. Ref. Data, 2002, 31, 2, 387-535.

Надійшла до редколегії 2.09.2011

УДК 519.9

Селищев П.О., д.ф.м.н., проф.,
Москаленко Л.В., асп.

Автоколивання розміру виділень другої фази в бінарних сплавах під опроміненням

Теоретично встановлено, що при опроміненні бінарного А-В сплаву, який містить скупчення атомів А-сорту, може відбуватися автоколивання їх розміру. Автоколивання виникають завдяки нелінійному взаємодію з'язку поглинаючої здатності виділення від його розміру.

Була проведена чисельна оцінка частоти автоколивань радіуса сферичних скупчень міжвузольних атомів для Cu-Ni сплаву в залежності від значень параметрів вихідної системи.

Ключові слова: бінарний сплав, скупчення міжвузольних атомів, автоколивання.

*E-mail: mos_le@ukr.net

Структурні зміни за рахунок виділень другої фази можуть суттєво змінювати властивості матеріалу [1-2], вони викликають такі процеси як радіаційно-індуковане окрихнення, розпухання і т.д. Структурні перетворення являють собою великий інтерес в зв'язку з проблемою радіаційної стійкості матеріалів для ядерних та термоядерних реакторів. Вирішення даної проблеми неможливо без розуміння фізичних механізмів, що лежать в основі даних явищ. Наприклад, радіаційно-індуковане зміцнення і, як наслідок, окрихнення сплавів пояснюється утворенням під опроміненням точкових дефектів (вакансій і міжвузольних атомів), які перешкоджають ковзанню дислокацій і сприяють концентрації внутрішніх напружень [3]. Перенасичення матеріалу міжвузольними атомами та вакансіями веде до формування їх скупчень у вигляді кластерів або сегрегацій, кількість і стійкість яких залежить від багатьох параметрів.

Так в [2] показано, що підвищення крихкості корпусної сталі після реакторного опромінення пов'язано з появою в її складі включень фосфору сферичної форми діаметром близько 10 нм, густина яких складала близько $\sim 7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. В роботі [4] встановлено, що в залежності від вмісту титану в сплавах $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{50}\text{Fe}_3$ і $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{50}$ суттєво залежить радіус скупчень точкових дефектів, які

P. O. Selyshchev, Dr. Sci., Prof.
L. V. Moskalenko, PhD stud.

Auto-oscillation of second phase accumulation size in binary alloys under irradiation

Theoretically it was determined that in binary A-B alloy under irradiation, which contains segregations of A-sort atoms, the oscillation of its size can occur. Auto-oscillations occur due to non-linear interaction of segregation absorptance and its size.

It was numerically estimated the frequency of radius oscillation of spherical segregations with interstitial atoms for Cu-Ni alloy depending on the parameters of the original system.

Key Words: binary alloy, interstitial atoms segregations, auto-oscillation.

також мали сферичну форму. Наприклад, в радіаційно-індукованому сплаві $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{50}\text{Fe}_3$ середній радіус скупчень $R=0,44 \text{ нм}$, а в бінарному сплаві $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{50}$ за аналогічних умов $R=8,5 \text{ нм}$. Таким чином, процеси накопичення точкових дефектів і зміна їх концентрації та розмірів стають взаємопов'язаними, а кінетика росту скупчень – більш складною.

В загальному випадку процес кластеризації або формування скупчень можна розглядати в три стадії [5]. На першій стадії відбувається зародження виділень другої фази. На другій стадії – змінюється розмір скупчень при практично постійній їх кількості.

В даній роботі досліджується ріст скупчень міжвузольних атомів в бінарному сплаві під опроміненням за умов, коли домінує потік атомів по міжвузольним положенням. Нас цікавить саме еволюція розміру скупчень, а не процеси їх зародження.

Розглядається бінарний А-В сплав під опроміненням, в якому вже існує початкова кількість скупчень міжвузольних атомів сорту А. Скупчення моделюються сферичною формою [6,7]. Припускаємо, що енергія необхідна для утворення міжвузольних атомів сорту А менша за енергію утворення міжвузольних атомів сорту В, тому концентрацію міжвузольних атомів сорту В ми нехтуємо.

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.м.н., проф. Махара В.А.

Розглянемо усталену стадію розвитку виділень, тобто другу стадію яка характеризується постійною густиною дислокацій і концентрацією скупчень. В цьому випадку рівняння, що описують зміну

концентрації міжвузольних атомів сорту А (n_i^a) і розмірів сферичних скупчень (R), приймають вигляд:

$$\frac{dn_i^a}{dt} = K \left(n_a - \frac{4}{3} \pi N n_0 R^3 \right) - \frac{n_i^a - n_i^{ae}}{\tau_i^a} - 4 \pi R N Z_i^a D_i^a (n_i^a - n_i^{aeq}) \quad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_i^a Z_i^a}{R} (n_i^a - n_i^{aeq}) \quad (2)$$

де K – відносне число атомів сорту А, що міжвузольному положенні за одиницю часу, n_a – концентрація частинок сорту А у вузлах сплаву, N – густина скупчень, n_0 – концентрація атомів сорту А у скупченні, $n_i^{ae} = n_0^a \exp\left(-\frac{E_i^a}{T}\right)$ –

вибиваються зовнішнім опроміненням в атомний об'єм, T – температура опроміненого сплаву. Повне число атомів сорту А N_a – постійне, воно складатиметься із числа частинок сорту А у вузлах сплаву, в міжвузольних положеннях і в складі скупчень:

$$N_a = n_a + n_i^a + \frac{4}{3} \pi N n_0 R^3 \quad (3)$$

Дане рівняння накладе умову на застосування моделі, яка використовується, оскільки усі доданки цього рівняння повинні бути додатні.

Оскільки концентрація міжвузольних атомів звичай мале, то другим доданком у виразі (3) нехтуємо, виразивши із нього n_a через R і підставивши в (1) отримаємо замкнуте рівняння для n_i^a і R .

Стационарний розв'язок системи (1)-(2) визначається перетином головних ізоклін, що мають вигляд:

$$n_i^a = n_{i,j}^a(R, K, N_a) = K \tau_i^a \left(N_a - \frac{4}{3} \pi N n_0 R^3 \right) + n_i^{ae} \quad (4)$$

$$n_i^a = n_{i,b}^a(R) = n_i^{ae} \exp\left(\frac{2\sigma\omega}{RT}\right) \quad (5)$$

термодинамічна рівноважна концентрація міжвузольних атомів далеко від скупчення, $\tau_i^a = (z_d \rho_d D_i^a)^{-1}$ – час життя міжвузольних атомів по відношенню до їх відходу на дислокації, густина яких ρ_d , z_d – фактор переважного поглинання дислокацією міжвузольних атомів, Z_i^a – фактор переважного поглинання виділенням міжвузольних атомів, $D_i^a = D_i^0 \exp\left(-\frac{E_m^a}{kT}\right)$ – коефіцієнт дифузії міжвузольних атомів, E_m^a – енергія міграції, k – постійна Больцмана, $n_i^{aeq} = n_i^{ae} \exp\left(\frac{2\sigma\omega}{RT}\right)$ – термодинамічно рівноважна концентрація поблизу скупчення, σ – поверхнева енергія, ω –

Із вигляду головних ізоклін видно, що в залежності від значень параметрів системи можливий їх перетин в двох точках, в одній або взагалі ці дві криві не перетинаються (рис. 1(а)-1(в)). Варто зазначити, що розв'язки, які фізично реалізуються, будуть існувати в обмеженій області, яка визначається за умови максимально допустимих значень радіуса виділень і концентрації атомів А-сорту. Максимальне

значення n_i^a буде при $n_a = N_a$ і $R \rightarrow 0$, тобто коли всі атоми А сорту будуть перебувати у вузлових положеннях $x_{1,max} = K \tau_i^a N_a + n_i^{ae}$, коли ж всі атоми А-сорту будуть у скупченнях, тоді

$$x_{2,max} = \sqrt{\frac{3N_a}{4\pi N n_0}}$$

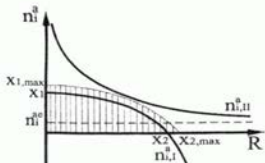
Дослідимо стійкість стаціонарних розв'язків

системи (1)-(2), розглянувши еволюцію їх малих збурень δn_i^a і $\delta R \sim \exp(\lambda t)$.

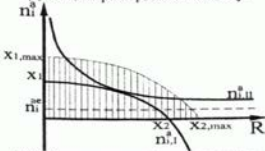
Характеристичне рівняння для декремента

$$p = -\frac{\partial f_1}{\partial n_i^a} - \frac{\partial f_2}{\partial R} = -\frac{1}{\tau_i^a} - 4\pi R_a N Z_i^a D_i^a + \frac{2D_i^a Z_i^a \sigma \omega n_i^{aeqR}}{R_a^3 T} \quad (6)$$

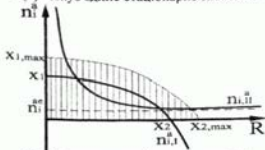
$$q = \frac{\partial f_1}{\partial n_i^a} \frac{\partial f_2}{\partial R} - \frac{\partial f_1}{\partial R} \frac{\partial f_2}{\partial n_i^a} = -\frac{2D_i^a Z_i^a \sigma \omega n_i^{aeqR}}{R_a^3 \tau_i^a T} + 4\pi N n_0 K R_a D_i^a Z_i^a \quad (7)$$



l(a) - стаціонарних розв'язків не існує



l(б) - існує єдине стаціонарне значення



l(в) - існує два стаціонарних значення

Рис. 1 Можливі варіанти перетину головних ізоклін системи (1)-(2). Товсті суцільні лінії – головні ізокліни. Заштрихована область відповідає області існування стаціонарних значень, що фізично реалізуються.

Точки перетину є осями n_i^a і R :

$$x_1 = K \tau_i^a N_a + n_i^{ae}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3(K \tau_i^a N_a + n_i^{ae})}{4\pi N n_0 K \tau_i^a}}$$

затухання малих флуктуацій прийматиме вигляд $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, де

Стаціонарні рішення є стійкими, коли дійсна частина декремента затухання від'ємна, якщо ж дійсна частина хоча б одного кореня характеристичного рівняння додатна, то розв'язок – нестійкий.

В результаті аналізу системи рівнянь (1)-(2) встановлено, що перший стаціонарний розв'язок нестійкий $(n_i^{a,1}, R_1)$ і його топологічний тип «сідло». Стійкість другого стаціонарного розв'язку $(n_i^{a,2}, R_2)$ залежить від знаку p . При $q > 0$ і $p > 0$ стаціонарний розв'язок нестійкий, і його топологічний тип «вузол» (при $D = p^2 - 4q > 0$) або «фокус» (при $D = p^2 - 4q < 0$). Якщо $q > 0$ і $p < 0$, то стаціонарне рішення стійке, його топологічний тип «вузол» (при $D = p^2 - 4q > 0$) або «фокус» (при $D = p^2 - 4q < 0$).

Із (6) випливає, що рівняння $p=0$ має єдиний корінь R_a , значення якого не залежить ні від K , ні від N_a . Для $R < R_a$ величина $p > 0$, тоді другий стаціонарний розв'язок – стійкий, в області $R > R_a$ величина $p < 0$, другий стаціонарний розв'язок – нестійкий. При зміні знаку p стаціонарний стан стає нестійким і встановлюються автоколивання концентрації дефектів та радіуса виділень. Фазові траєкторії при даних параметрах, ніби намотуються на замкнуту криву (граничний цикл), до якої вони наближаються із зовнішньої та внутрішньої сторони (рис. 2).

Частота автоколивань поблизу точки біфуркації ($p=0$) буде визначатися як $\lambda = \pm i\sqrt{q(K, R)} = i\omega$, де R і K визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} K \left(N_a - \frac{4}{3} \pi N n_0 R^3 \right) + n_i^{ae} - n_0^{ae} \exp\left(\frac{2\sigma\omega}{RT}\right) = 0 \\ p(R) = 0 = -\frac{1}{\tau_i^a} - 4\pi R_a N Z_i^a D_i^a + \frac{2D_i^a Z_i^a \sigma \omega n_i^{ae} \exp\left(\frac{2\sigma\omega}{RT}\right)}{R_a^3 T} \end{cases}$$

Фазовий портрет системи рівнянь (1)-(2) для значень параметрів, при яких утворюються автоколивання зображений на рисунку 2. Напрямок обертання траєкторій поблизу другої стаціонарної точки визначається рівнянням для полярного кута, яке отримуємо шляхом переходу до полярної системи координат.

Була проведена чисельна оцінка частоти автоколивань радіуса сферичних скупчень міжвузольних атомів для Cu-Ni сплаву. В залежності від зміни параметрів системи таких як температура ($T=1000-1300$ K) та швидкість генерації міжвузольних атомів ($K=10^{-2}-10^{-7}$ сна/с) встановлено, що частота автоколивань лежить в інтервалі $(1.2 \cdot 10^5 - 2.6 \cdot 10^6)$ с при незмінній концентрації атомів А-сорту в зразку.

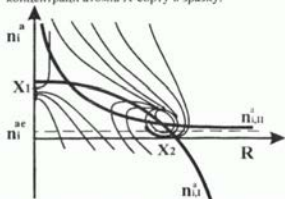


Рис. 2 Фазовий портрет системи (1)-(2), перший стаціонарний розв'язок – «сідло», друге – нестійкий «фокус», що виходить на граничний цикл. Товсті суцільні лінії – головні бісектриси.

Висновки

Дослідження зміни розміру скупчень А-сорту по міжвузольному механізму показали, що існують такі умови опромінення при яких виникають автоколивання розміру виділень другої фази. В залежності від властивостей зразка та умов радіаційного опромінення (швидкості генерації міжвузольних атомів опроміненням, концентрації А-атомів у сплаві та ін.) може існувати три шляхи еволюції системи. При малій концентрації атомів А сорту в сплаві початкові скупчення розчиняються при малих температурах і швидкостях опромінення. Якщо концентрацію А-атомів збільшувати, то при швидкості генерації більшій за деяке граничне значення стає можливе стаціонарне існування скупчень А-атомів. На початку опромінення скупчення середніх розмірів, що мають розмір менше стаціонарного, немонотонно прямують до стаціонарного значення, тобто спочатку розмір

зменшується до деякого мінімального значення, а потім монотонно зростає до стаціонарного, а концентрація міжвузольних атомів навпаки спочатку збільшується, а потім зменшується. При високих значеннях концентрації атомів А-сорту та швидкості генерації міжвузольних атомів розмір скупчень може змінюватися періодично з частотою, яка в залежності від параметрів лежить в інтервалі $(1.2 \cdot 10^5 - 2.6 \cdot 10^6)$ с.

Список використаних джерел

1. Мильвидский М.Г., Чалдышев В.В. Наноразмерные атомные кластеры в полупроводниках – новый подход к формированию свойств материалов // Физика и техника полупроводников – 1998 – том 32, №5 – с. 513-522
2. Gurovich B.A., Kuleshova E.A., Nikolaev Zu.A., Shtrombakh Za.I. Assessment of relative contributions from different mechanisms to radiation embrittlement of reactor pressure vessel steels // Journal of Nuclear Materials – 1997 – v. 246 – p. 91-120.
3. Дубинко В.И., Клетиков В.Ф. Влияние неравновесных флуктуаций на пластичность металлов под облучением // Вісник Харківського університету – 2005 – №710 – с.87-92
4. Пархоменко В.Д., Дубинко С.Ф., Теплоухов С.Г. Влияние химического состава на аморфизацию быстрыми нейтронами сплавов на основе никелида титана // Физика твердого тела – 2008 – том 50, вып. 10 – с. 1737-1740
5. Гусева М.Б. Ионная стимуляция в процессах образования тонких пленок на поверхности твердого тела // Соросовский образовательный журнал – 1998 – №10 – с. 106-112
6. Булярский С.В., Светухин В.В., Приходько О.В. Моделирование неоднородной по объему приципитации кислорода в кремнии // Физика и техника полупроводников – том 33, вып. 11 (1999) – с.1281-1286
7. Светухин В.В., Сидоренко О.Г. К вопросу о моделировании радиационного упрочнения и радиационного охрупчивания металлов и сплавов // Известия высших учебных заведений поволжский регион, Физико-математические науки. Физика – 2007 – №2 – с.49-58

Надійшла до редколегії 08.06.2011

УДК 534.24

Шайкевич І.А., д.ф.-м.н., проф.,
Лендел В.В., провідний інженер
Мельниченко Л.Ю., к.ф.-м.н., ст.н.с.

Багатопротинева інтерференція в ультракорткохвильовому радіодіапазоні

За допомогою рекурентних формул Ейрі проведени розрахунки коефіцієнта відбивання системи тонка алюмінієва плівка – діелектричний шар – масивне алюмінієве дзеркало в ультракорткохвильовому радіодіапазоні. В ролі діелектричного шару були вибрані тонкі пластинки слюди і плавленого кварцу. Показник заломлення і показник поглинання алюмінію для ультракортких радіохвиль були розраховані по теорії вільних електронів. Показники заломлення слюди і кварцу для ультракортких радіохвиль були розраховані на основі літературних даних по пропусканню цих речовин. Проведені розрахунки показати, що в діапазоні ультракортких радіохвиль існує багатопротинева інтерференція. Ця інтерференція при певних товщинах діелектричної і металічної плівок може привести до майже повної відсутності відбитої хвилі.

Ключові слова: тонкі плівки, коефіцієнт відбивання, багатопротинева інтерференція

E-mail: shaykevi@univ.kiev.ua

Вступ

Багатопротинева інтерференція давно і добре відома в оптичному діапазоні спектру. Саме завдяки цьому явищу працюють інтерферометр Фабрі-Перо, багатошарові тонкоплівочні пристрої такі, як інтерференційні діелектричні лазерні дзеркала, інтерференційні світлофільтри і т.ін. З іншого боку добре відомо, що і в радіодіапазоні спостерігаються такі хвильові явища, як дифракція, інтерференція, відбивання і заломлення хвиль і т.ін.

Отже можна сподіватися, що багатопротинева інтерференція теж може спостерігатися в діапазоні ультракортких радіохвиль. Саме цьому питанню і присвячена дана робота.

Методика розрахунку

В оптичному діапазоні спектру розрахунки пристроїв з багатопротиневою інтерференцією проводять за допомогою формул Ейрі [1]. Для розрахунку в багатопротиневих системах

I.A. Shaykevich, Dr. Sci., Prof.
V.V. Lendel, Chief Eng.
L.Yu. Melnichenko, PhD, Sen. Sci.

Multibeam interference in ultrashort wave radio range

By means of recurrence Airy formulas calculations of the reflection coefficient of the system: thin aluminum film- dielectric layer – massive aluminum mirror in ultrashort wave radio range were made. As dielectric layer fine plates of the mica and fused quartz were chosen. Index of refraction and index of absorption of aluminum for ultrashort radio waves were calculated using theories for free electrons. The index of refraction of mica and quartz for ultrashort radio waves were calculated on the base of literature data concerning transmissivity of these materials. The calculations have shown that within the range of ultrashort radio waves multibeam interference exist. This interference under specific thicknesses of dielectric and metallic layer can result in almost full absence of the reflected wave.

Key Words: thin films, reflection coefficient, multibeam interference.

застосовуються або матричні методи, доведення яких знову ж таки засновано на формулах Ейрі, або рекурентні співвідношення [1,2]. В даній роботі ми розглядаємо систему шарів, яка представлена на рис.1.

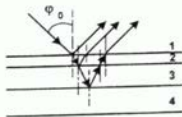


Рис.1.

На рис.1 речовина 1 – це повітря, 2 – тонка плівка алюмінію, 3 – діелектрична підкладка, а 4 – масивне алюмінієве дзеркало. Ми будемо

розглядати нормальне падіння електромагнітної хвилі на систему при $\varphi_0=0$ і застосовувати рекурентні співвідношення на основі формул Ейрі.

Тоді формули для розрахунку коефіцієнта відбивання системи, приведеної на рис.1 будуть такі:

$$R_2 = \frac{r_2 + r_3 e^{2\alpha_3}}{1 + r_2 r_3 e^{2\alpha_3}} \quad (1)$$

$$R_1 = \frac{r_1 + R_2 e^{2\alpha_2}}{1 + r_1 R_2 e^{2\alpha_2}} \quad (2)$$

$$R_0 = |R_1|^2 \quad (3)$$

У формулах (1), (2) r_1, r_2, r_3 – це френелівські коефіцієнти амплітудного відбивання на межах поділу 1 – 2, 2 – 3 і 3 – 4. Вони відповідно дорівнюють:

$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad r_2 = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}; \quad r_3 = \frac{n_3 - n_4}{n_3 + n_4} \quad (4)$$

де n_1, n_2, n_3, n_4 – показники заломлення середовищ 1, 2, 3, 4, показаних на рис.1. Слід відзначити, що в нашому випадку показники заломлення n_2 і n_4 – комплексні. Енергетичний коефіцієнт відбивання від системи R_0 (формула (3)). Величини g_2 і g_3 у формулах (1) і (2) відповідно дорівнюють

$$g_2 = 2\pi n_2 \frac{d_2}{\lambda}; \quad g_3 = 2\pi n_3 \frac{d_3}{\lambda} \quad (5)$$

де d_2 і d_3 – товщини шарів 2 і 3 на рис.1, а λ – довжина хвилі.

Проблема розрахунку коефіцієнта відбивання R_0 по формулам (1)–(5) полягає в тому, що ми не знаємо показників заломлення для ультракоротких радіохвиль як для алюмінію, так і для відповідних діелектричних підкладок. Показники заломлення n_2 і n_4 відповідають комплексному показнику заломлення алюмінію $n = n' + i\kappa$, де n' – дійсний показник заломлення, а κ – показник поглинання.

Для визначення n і κ алюмінію в радіочастотному діапазоні можна скористатися дисперсійними формулами для вільних електронів, оскільки саме вільні електрони відповідають за дисперсію як в радіодіапазоні,

так і в оптичній інфрачервоній ділянці спектру, яка граничить з ділянкою ультракоротких радіохвиль.

Ці співвідношення мають наступний вигляд:

$$\epsilon = 1 - 4\pi \frac{Ne^2}{m} \left(\frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right); \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \left(\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \right); \quad (7)$$

де ϵ – дійсна частина діелектричної сталої металу, а σ – оптична провідність металу:

$$\epsilon = n^2 - \kappa^2; \quad \sigma = n\kappa \frac{\omega}{2\pi} \quad (8)$$

У співвідношеннях (6) і (7):

N – концентрація вільних електронів,

m – маса електрона,

e – заряд електрона,

γ – частота співударів електронів,

ω – кругова частота електромагнітної хвилі.

В [3] наведені значення $\frac{N}{m}$ і γ для алюмінію,

визначені по вимірних n і κ в інфрачервоній ділянці спектру, e – таблична величина. Довжину хвилі ми вибрали $\lambda=1$ см. Для неї $\omega=1,88 \cdot 10^{11}$ рад/сек.

Таким чином легко обчислити праві частини рівнянь (6) і (7) і з цих двох рівнянь знайти невідомі величини n і κ при $\lambda=1$ см для алюмінію. Вони виявилися такими:

$$n = 2,107 \cdot 10^3; \quad \kappa = 2,211 \cdot 10^3.$$

Те, що n і κ досить великі справедливо, бо в оптичній інфрачервоній ділянці спектру вони мають теж значну величину. Залишається ще знайти показники заломлення деяких діелектричних підкладок n_3 для довжини $\lambda=1$ см. В [4] приведені дані по пропусканню для пластинок плавленого кварцу і слюди для $\lambda=0,06$ см. Використовуючи формулу для пропускання [1] можна записати, що

$$\frac{4n}{(n+1)^2} = \sqrt{T} \quad (9)$$

де T – вимірний коефіцієнт пропускання плоскопаралельної пластинки. По формулі (9) були знайдені показники заломлення для

плавлених кварцу $n_{\text{кв}} = 1,963$ і слюди $n_{\text{сл}} = 4,54$. Слід відзначити, що формула (9) не враховує поглинання в плоскопаралельних пластинках кварцу і слюди. Крім того показники заломлення були одержані для $\lambda = 0,06$ см. Ми ж застосували ці значення для $\lambda = 1$ см, що є сильним наближенням.

Результати та їх обговорення

На рис.2 представлені результати розрахунку коефіцієнту відбивання системи, показаної на рис.1 для $\lambda = 1$ см, а саме залежності R_0 від товщини шару алюмінію d_2 для різних товщин підкладки із слюди d_1 . Масштаб на осі абсцис логарифмічний. Як видно з кривих 1-3 всі вони мають мінімум при товщині плівки Al порядку 0,2 нм-1 нм, при чому цей мінімум зміщується вздовж осі d_2 в залежності від товщини підкладки d_1 що свідчить про його інтерференційний характер.

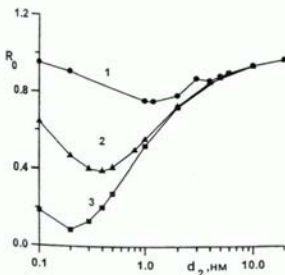


Рис.2. Залежність коефіцієнту відбивання R_0 від товщини плівки алюмінію d_2 для підкладки із слюди 3 різної товщини (крива 1 – $d_1 = 0,02$ см, крива 2 – $d_1 = 0,04$ см, крива 3 – $d_1 = 0,06$ см)

Оскільки при розрахунках R_0 ми застосовували саме багатопроменеву інтерференцію, то останнє свідчить, що ця інтерференція існує і в радіодіапазоні для ультракоротких хвиль. Цікаво, що для товщини плівки алюмінію $d_2 = 20$ нм всі криві сходяться до одних значень 0,968, що є близькими до R_0 чистого масивного алюмінію, для якого $R_0 = 0,999$.

Останнє пояснюється тим, що при вищевказаних товщинах відбивання від межі поділу 1-2 на рис.1 значно зростає і інтенсивність хвиль, що інтерферують в діелектричному шарі 3, сильно зменшується.

На рис.3 наведена залежність R_0 від товщини плівки алюмінію d_2 для кварцової підкладки 3. Масштаб на осі абсцис логарифмічний. Як видно і в цьому випадку існує інтерференційний мінімум при $d_2 = 0,5$ нм. Отже багатопроменева інтерференція спостерігається при різних діелектричних підкладках з різними показниками заломлення.

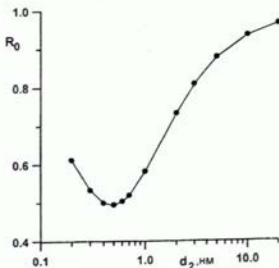


Рис.3. Залежність коефіцієнту відбивання R_0 від товщини плівки алюмінію d_2 для кварцової підкладки 3 ($d_1 = 0,05$ см)

Оскільки інтерференційна картина як в двопробієвій інтерференції, так і в багатопроменевій зумовлена не тільки товщиною плівок і їх показниками заломлення, а і довжиною хвилі λ , то була перевірена і ця залежність для системи, зображеної на рис.1.

На рис.4 наведено залежності коефіцієнта відбивання вищевказаної системи для кварцової підкладки товщиною $d_1 = 0,05$ см від товщини шару алюмінію 2 для трьох довжин хвиль. Масштаб на осі абсцис логарифмічний.

Як впливає з рис.4, на всіх на всіх трьох графіках спостерігається інтерференційний мінімум. Але вони значно зміщені один від одного. Якщо на кривій 1 ($\lambda = 1$ см) мінімум відповідає товщині плівки Al 5 Å, то на кривій 2

($\lambda=2$ см) мінімум відповідає товщині плівки Al 20 Å, а на кривій 3 ($\lambda=3$ см) цей мінімум взагалі значно зміщується в бік більших товщин плівки Al і відповідає 45 Å. Цікавим на рис.4 є і той факт, що при збільшенні довжини хвилі λ значення коефіцієнта відбивання R для великих товщин плівки Al зменшується.

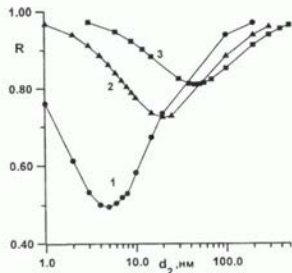


Рис.4. Залежності коефіцієнта відбивання R від товщини плівки алюмінію d_2 для трьох довжин хвиль. (крива 1 – $\lambda=1$ см, крива 2 – $\lambda=2$ см, крива 3 – $\lambda=3$ см). Товщина підкладки з кварцу $d_1=0,05$ см.

Останнє може бути пояснене тим, що глибина скін-шару, тобто глибина проникнення хвилі в метал, яка визначається як $\delta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}$, збільшується із збільшенням довжини хвилі λ , що дає відповідне збільшення енергії хвилі, що пройшла скрізь плівку Al і відповідне зменшення коефіцієнта відбивання R.

На рис.5 зображена залежність коефіцієнта відбивання від довжини хвилі для кварцової підкладки товщиною $d_1=0,05$ см і товщини плівки Al $d_2=5$ Å. Цей рисунок теж демонструє наявність мінімуму для $\lambda=0,8$ см, тобто залежність інтерференційної картини від довжини хвилі. Слід відзначити, що при розрахунках даних, наведених на рис.4 і рис.5 не враховано дисперсію оптичних сталей Al і ϵ та дисперсію показника заломлення кварцу.

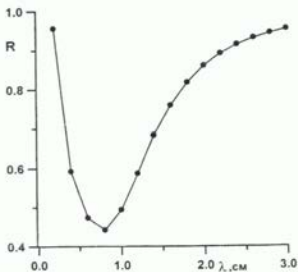


Рис.5 Залежність коефіцієнта відбивання від довжини хвилі для кварцової підкладки товщиною $d_1=0,05$ см і товщини плівки Al $d_2=5$ Å.

Висновки. Показано для системи алюмінієве дзеркало – діелектричний шар – тонка алюмінієва плівка, що в ній існує багатопроменева інтерференція для ультракоротких радіохвиль з $\lambda=1$ см. Ця інтерференція при певних товщинах діелектричної і металічної плівок і певних довжинах хвиль може привести до майже повної відсутності відбитої хвилі.

Список використаних джерел

1. Бори Е.М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 855 с.
2. Бернинг П.А. Теория и методы расчета оптических свойств тонких пленок. Физика тонких пленок. Т.1. М.: Мир. – 1970. – 855 с.
3. Носков М.М. Оптические и магнитооптические свойства металлов. Свердловск: ИИЦ АН СССР. – 1983. – 219 с.
4. Воронкова Е.М., Гречушиников Б.Н., Дистлер Г.И., Петров И.П. Оптические материалы для инфракрасной техники. М.: Наука. – 1965. – 335 с.

Надійшла до редколегії 26.04.11 р.

Підп. до друку 21.04.2011.
Формат 70х100¹/₁₆. Папір офс.
Ум. друк. арк. 19,21. Наклад 350.
Зам. 206.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел./факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

