



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



16718JB

філія (вул. Сеченова)

Ц 40.00

ВИПУСК №2 2011

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Яхєвич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, доцент;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макарець Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtnv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння	7
Дудченко І.В. Нефробеніусові алгебри Фуджити	12
Кириченко В.В., Плахотник М.В. Супермінімальні матриці показників	20
Муминов М.С., Рихимов Г.М. Об оценке вероятности хвоста максимума гауссовского поля	23
Полосьмак О.В. Оцінювання коваріантних функцій гаусових випадкових процесів за допомогою вейвлет розкладів	30
Пыпка А.А., Семко Н.Н. (младший) Группы, имеющие только два типа пронормальных подгрупп	36
Семеновська Н.В. Одна статистична задача для кореляційної моделі Уїттла-Матерна	42
Турка Т.В. Будова решітки ідеалів на напівгрупі відповідностей скінченної групи	45

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Лучко В.М. Двоточкова крайова задача для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку	51
Мазнев О.В. Регулярні прецесії гіростата із змінним гіростатичним моментом в узагальненій задачі динаміки	55
Таран Є.Ю., Кондрат Р.Я. Реологічна поведінка розведених розчинів недеформівних ланцюгових макромолекул в однорідному полі швидкості	59
Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стійкість основних рухів ізольованої системи, складеної з обертового тіла і двох маятників	63

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Буй Д.Б., Глушко І.М. Розширення реляційної (табличної) алгебри: огляд літератури	71
Гришанович Т.О. Про часову складність алгоритму розкладання числових графів за допомогою їх кістяків	83
Джалладова І.А. Стійкість розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами та сталими запізненнями аргументів	87
Замковий О.В. Застосування типізації веб-простору та агентного підходу для покращення результатів пошуку в Інтернет	91
Каленський А. А. Групові цифрові підписи. Методи безпечного видалення члена з групи	97
Компан С.В. Формалізація поняття об'єкта, класу, успадкування класів, життєвий цикл об'єкта в об'єктно-орієнтованих базах даних	111
Кузьмін А.В. Моделювання розповсюдження поверхневих хвиль при обтіканні зануреного тіла	119
Кухаренко О.В. Умови існування розв'язку першої крайової задачі системи рівнянь із запізненнями	125
Мащенко С.О., Бовсунівський О.М. Прийняття рішень за нечіткою множиною відношень переваг	131
Порхун О.В. Інтерпретація результатів атрибуції художніх творів системою Attributer	137
Сільвейструк Л.М. Узагальнена кардинальність участі в моделі „сутність-зв'язок”	142
Скобелев В.В. Про деякі властивості кубічних кривих ліній над кільцями	147
Скобелев В.Г. Про один клас автоматно-алгебраїчних моделей дискретних перетворювачів інформації	151
Тарануха В.Ю. Використання генетичних алгоритмів для забезпечення якості автоматично згенерованих рефератів	155
Терещенко В.М., Скляр П.В. Оптимізація структур даних в методах локалізації точки	159
Шарапов М.М., Наврузов Ф., Дорошенко С., Жулідова К. Оцінювання ймовірностей подій в умовах невизначеності	163

РАДІОФІЗИКА

Дмитрієв М.В., Іванісік А.І., Коротков П.А. Вплив параметричних процесів на індикатрису вимушеного комбінаційного розсіяння світла	171
Зуб С.С. Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл	176
Кононов М.В., Судаков О.О., Храмов В.В., Скоропісов В. С. Особливості моделювання лісових пожеж на кластерах в Grid	185
Костенко В.І., Нечипорук О.Ю., Сорочак А.М., Чамор Т.Г., Чевнюк Л.В. Властивості спектрів ФМР поглинання в епітаксіальних плівках бар'єрного гексафериту при зміні товщини підкладки	193
Первак Ю.О., Онищук В.М. Синтез багат шарових структур з високою часовою і просторовою дисперсією	197
Первак Ю.О., Федоров В.В. Особливості спектральних характеристик багат шарових структур з трьома півхвильовими резонаторами	201
Соломенко Ок.В., Присяжневич І.В., Черняк В.Я., Зражевський В.А. Властивості електричного мікророзряду в повітрі	205
Сохацький В.П. Перемагнічування спин-залежного транзистора	208

СУЧАСНА ФІЗИКА

Войтешенко І.С. Структурно-динамічні властивості низькомолекулярних сполук, що моделюють кістяк 2'- дезоксирибонуклеотидів, у яких фосфор заміщено на арсен	213
Коваленко М.В., Вербінська Г.М., Британ А.В., Карбовський В.Л. Вплив газу та ультрафіолетового опромінення на швидкість випаровування крапель води	217
Погорслов В.Є., Дорошенко І.Ю., Борзда Т.В., Шаблінська В. Вплив молекулярної кластеризації на коливальні спектри молекул метанолу в області валентних С-О коливань	221
Храпатий С.В. Фотоелектричні властивості структур Ag/n-GaAs/n ⁺ -GaAs/In	225
Штомпель В.І., Саса Б.С. Формування наноструктур в об'ємі поліелектролітних комплексів на основі Na солі карбоксиметилцелюлози та полі-4-винілпіридинхлориду	229

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент

**Гранична поведінка автономної
коливної системи четвертого порядку
під дією випадкових збурень у випадку
комплексних коренів характеристичного
рівняння**

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу "білого" та Пуассонівського шумів. Розглядається випадок пари спряжених комплексних із від'ємною дійсною частиною коренів та пари спряжених чисто уявних коренів характеристичного рівняння.

Ключові слова: метод усереднення, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння.

odb@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Автономні і неавтономні коливні системи третього порядку під дією малих збурень типу "білого шуму" та "Пуассонівського шуму" вивчалися у роботах ([1], [2], [3]). Автономні коливні системи четвертого порядку під дією малих збурень типу "білого шуму" та "Пуассонівського шуму" вивчалися у роботі [4], де розглядався випадок пари різних дійсних від'ємних коренів та пари чисто уявних спряжених коренів характеристичного рівняння.

У даній роботі досліджується поведінка при $\varepsilon \rightarrow 0$, автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \\ = \varepsilon^{k_1} f_1(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + \\ + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

з невинпадковими початковими умовами $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, де $\varepsilon > 0$ – це малий параметр, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ – це

O.D. Borysenko, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko, Ph.D., Associate Professor

**Limit behavior of autonomous fourth
order oscillating system under the
action of random perturbations in the
case of complex roots of characteristic
equation**

The asymptotic behavior of autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear external perturbations of "white noise" and "Poisson noise" types is studied. It is studied the case of two complex with negative real part conjugate roots and two pure imaginary complex roots of characteristic equation.

Key Words: Averaging method, autonomous oscillating system, stochastic differential equation.

винадкова функція, така що

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) ds = \\ = \varepsilon^{k_2} \int_0^t f_2(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) dw(s) + \\ + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R f_3(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \hat{\nu}(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = 1, 2, 3$; $f_i, i = 1, 2, 3$ – це невинадкові функції, $w(t)$ – це стандартний вінерів процес; $\hat{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\nu(dt, dy)$ – це міра Пуассона незалежна від $w(t)$; $\Pi(A)$ – це скінченна міра на борелевих множинах в R .

Допоміжні результати

Із [5], використавши очевидні зміни ми одержимо такі результати

Лема 1. Нехай для кожного $x \in \mathbb{R}^d$ існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt = \bar{f}(x),$$

функція $\bar{f}(x)$ є обмеженою і неперервною, функція $f(t, x)$ є обмеженою і неперервною по x рівномірно відносно (t, x) у кожній області $t \in [0, \infty)$, $|x| \leq K$, випадкові процеси $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, $\eta(t) \in \mathbb{R}$ є неперервними, тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s)\right) ds = \int_0^t \bar{f}(\xi(s)) ds$$

майже напевне для $\forall t \in [0, T]$.

З а у в а ж е н н я. Нехай функція $f(t, x, z)$ обмежена і рівномірно неперервна по x відносно $t \in [0, \infty)$ і $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leq K$, $x \in \mathbb{R}^d$. Нехай $\Pi(\cdot)$ – це скінченна міра на σ -алгебрі борелевих множин в $\mathbb{R}$ і нехай $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, z) dt = \bar{f}(x, z)$, для кожного $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$, де функція $\bar{f}(x, z)$ обмежена, рівномірно неперервна по x відносно $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leq K$. Тоді для неперервних випадкових процесів $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$ і $\eta(t) \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s), z\right) \Pi(dz) ds = \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(\xi(s), z) \Pi(dz) ds. \end{aligned}$$

Основні результати

Ми будемо досліджувати асимптотичну поведінку даної коливної системи при $\varepsilon \rightarrow 0$ у випадку коли існують стійкі гармонічні коливання у системі при умові $\varepsilon = 0$. При цій умові відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0.$$

У даній роботі ми розглянемо випадок: $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > b_1 b_3 / 4$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. Характеристичне рівняння має корені

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\eta + i\nu, \quad \lambda_2 = -\eta - i\nu, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \text{ де} \\ \eta = \frac{b_1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1(4b_4 - b_1 b_3)}{b_3}}, \quad \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}. \end{aligned}$$

Рівняння (1) ми будемо розуміти як систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1,3} \\ dy_4(t) &= [-(b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_1} f_1(y(t))]dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} f_2(y(t))dw(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} f_3(y(t), z) \bar{\nu}(dt, dz), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \{y_i(t)\}_{i=\overline{1,4}}, \quad b = (b_4, b_3, b_2, b_1), \\ y_i(0) &= x_0^{(i)}, \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Тут $(b \cdot y)$ означає скалярний добуток векторів y і b .

При $\varepsilon = 0$ рівняння (1) має загальний розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\eta t} (C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t) + \\ &+ A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} C(t) &= (C_1(t), C_2(t), A_1(t), A_2(t)), \\ \Phi(t) &= (e^{-\eta t} \cos \nu t, e^{-\eta t} \sin \nu t, \cos \omega t, \sin \omega t). \end{aligned}$$

Розглянемо таке представлення процесу $y(t)$:

$$y_i(t) = \left(C(t) \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \Phi(t) \right), \quad i = \overline{1,4}. \quad (3)$$

Розв'язавши цю систему відносно процесів $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$, де $N_i(t) = C_i(t)e^{-\eta t}$, $i = 1, 2$ і застосувавши формулу Іто до цих процесів, ми одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= -\eta N_1(t) dt + \\ &+ \frac{2\eta\nu \cos \nu t + (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin \nu t}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta N_2(t) dt + \\ &+ \frac{2\eta\nu \sin \nu t - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos \nu t}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dA_1(t) &= -\frac{2\eta\omega \cos \omega t + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \sin \omega t}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dA_2(t) &= -\frac{2\eta\omega \sin \omega t + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \cos \omega t}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= \varepsilon^{k_1} \bar{f}_1(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} \bar{f}_2(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) dw(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_3(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \bar{\nu}(dt, dz), \end{aligned}$$

де $\bar{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ одержано з $f_i(y(t))$, $i = 1, 2$ і $\bar{f}_3(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2, z)$ одержано з $f_3(y(t), z)$ підстановкою (3).

Теорема 1. Нехай $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_1, 2k_2, 2k_3)$. Припустимо, що функції f_i , $i = \overline{1,3}$ обмежені і задовольняють умову Ліпшиця відносно змінних y_i , $i = \overline{1,4}$. Якщо наведена нижче матриця $\sigma^2(A_1, A_2)$ є додатно визначеною, тоді

1. При $k_1 = 2k_2 = 2k_3$ випадковий процес $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ слабо збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до випадкового процесу $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, де $\bar{A}(t) =$

$(\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ – це розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

де

$$\bar{\alpha}(A_1, A_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) d\phi,$$

$$\bar{\sigma}(A_1, A_2) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} \times \\ \times \begin{pmatrix} -2\eta\omega \cos \phi - (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \sin \phi \\ -2\eta\omega \sin \phi + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}_i(\phi, A_1, A_2) = \bar{f}_i(\phi, 0, 0, A_1, A_2), \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{f}_3(\phi, A_1, A_2, z) = \bar{f}_3(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z).$$

$$\bar{f}(\phi, A_1, A_2) = \bar{f}_2^2(\phi, A_1, A_2, t) + \\ + \int_R \bar{f}_3^2(\phi, A_1, A_2, z) \Pi(dz),$$

$\Psi^T(\phi)$ – це вектор транспонований до вектора $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = 1, 2)$, $w_i(t), i = 1, 2$ – це незалежні одновимірні вінерові процеси.

2. Якщо $k < k_1$ тоді в системі (5) потрібно покласти $\bar{f}_1 \equiv 0$; якщо $k < 2k_2$, тоді в (5) потрібно покласти $\bar{f}_2 \equiv 0$; якщо $k < 2k_3$ тоді в (5) потрібно покласти $\bar{f}_3 \equiv 0$.

Доведення. Зробимо заміну $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ у системі (4) і одержимо для процесу $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dN_1^\varepsilon(t) = -\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) dt + \\ + \frac{2\eta\nu \cos(\nu t/\varepsilon^k) + (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH_\varepsilon(t),$$

$$dN_2^\varepsilon(t) = -\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt + \\ + \frac{2\eta\nu \sin(\nu t/\varepsilon^k) - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH_\varepsilon(t),$$

$$dA_1^\varepsilon(t) = \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t),$$

$$dA_2^\varepsilon(t) = \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t),$$

$$dH_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k_1-k} \bar{f}_1(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dt + \\ + \varepsilon^{k_2-k/2} \bar{f}_2(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dw_\varepsilon(t) + \\ + \varepsilon^{k_3} \int_R \bar{f}_3(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z) \bar{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

де $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ – це компоненти вектора $\Psi(\phi)$, $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w(t/\varepsilon^k)$, $\bar{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, тут A борелева множина у $\mathbb{R}$. При кожному $\varepsilon > 0$ процес $w_\varepsilon(t)$ є вінерів процес, а $\bar{\nu}_\varepsilon(t, A)$ – центрована міра Пуассона незалежна від $w_\varepsilon(t)$.

Маємо $N_i^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta t/\varepsilon^k\} C_i(t/\varepsilon^k)$, $i = 1, 2$. Введемо позначення

$$m_1^\varepsilon(t) = \frac{2\eta\nu \cos(\nu t/\varepsilon^k) + (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]}, \\ m_2^\varepsilon(t) = \frac{2\eta\nu \sin(\nu t/\varepsilon^k) - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]}.$$

Процеси $C_i^\varepsilon(t) = C_i(t/\varepsilon^k)$ задовольняють стохастичні диференціальні рівняння

$$dC_i^\varepsilon(t) = e^{\eta t/\varepsilon^k} m_i^\varepsilon(t) dH_\varepsilon(t), \quad i = 1, 2,$$

де $|C_i^\varepsilon(0)| \leq K, i = 1, 2$. Тут і надалі ми будемо позначати через $K > 0$ різні константи, які не залежать від малого параметру ε . Із обмеженості функцій $m_i^\varepsilon(t), i = 1, 2$, $f_i, i = 1, 3$ і умови $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ ми можемо одержати оцінку

$$E|N_i^\varepsilon(t)|^2 \leq K[e^{-\frac{2\eta t}{\varepsilon^k}} + \varepsilon^k(1 - e^{-\frac{2\eta t}{\varepsilon^k}}) \times \\ \times (t\varepsilon^{2(k_1-k)} + \varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})], \quad i = 1, 2.$$

Тому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E|N_i^\varepsilon(t)|^2 = 0, i = 1, 2$ і достатньо вивчати поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) \times \\ \times [\varepsilon^{k_1-k} \bar{f}_1(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dt + \\ + \varepsilon^{k_2-k/2} \bar{f}_2(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dw_\varepsilon(t) + \\ + \varepsilon^{k_3} \int_R \bar{f}_3(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z) \bar{\nu}_\varepsilon(dt, dz)], \quad (6)$$

з початковими умовами $A_i^\varepsilon(0) = A_i(0), i = 1, 2$.

Позначимо $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Використавши умови на коефіцієнти системи (6) і властивості стохастичних інтегралів одержимо оцінки

$$E|A_\varepsilon(t)|^2 \leq K[1 + t^2\varepsilon^{2(k_1-k)} + t(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})],$$

$$E|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)|^2 \leq K[|t - s|^2\varepsilon^{2(k_1-k)} + \\ + |t - s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})]$$

Аналогічно для процесу $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, де з матричною характеристикою

$$\begin{aligned} \zeta_i^\varepsilon(t) &= \\ &= \varepsilon^{k_2 - \frac{1}{2}} \int_0^t \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_2 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s) \right) d\omega_\varepsilon(s) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_3 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z \right) \tilde{\nu}_\varepsilon(ds, dz), \\ &\quad \langle \zeta_i^\varepsilon, \zeta_j^\varepsilon \rangle(t) = \\ &= \int_0^t \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \gamma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi(dz) ds, \\ &\quad i, j = 1, 2, \text{ де} \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ ми виводимо оцінки

$$\begin{aligned} E\|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 &\leq Kt(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}), \\ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^2 &\leq K|t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}). \end{aligned}$$

Таким чином для випадкового процесу $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ виконуються умови слабкої компактності [6]

$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} P\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

для всіх $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} P\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

а тому для довільної послідовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n = 1, 2, \dots$ існує підпослідовність $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0$, $m = 1, 2, \dots$, імовірнісний простір $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, випадкові процеси $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ визначені на цьому імовірнісному просторі, такі що $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, і скінченномірні розподіли $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ співпадають з скінченномірними розподілами процесів $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Оскільки ми цікавимося граничною поведінкою розподілів, то ми можемо розглядати процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ замість процесів $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. Із (6) одержимо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_m}(t) &= A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (7)$$

де $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_1-k} \Psi_i \left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_i \left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2 \right),$$

$i = 1, 2$. Зауважимо, що процес $\zeta_\varepsilon(t)$ – це векторнозначний квадратично інтегровний мартингал

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) &= \\ &= \varepsilon^{k_2-k/2} \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_2 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) &= \\ &= \varepsilon^{k_3} \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_3 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z \right), \\ &\quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Для процесів $A_\varepsilon(t)$ і $\zeta_\varepsilon(t)$ мають місце такі оцінки

$$\begin{aligned} E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^4 &\leq K[\varepsilon^{4(k_1-k)}|t-s|^4 + \\ &+ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 &\leq K[(\varepsilon^{4k_2-2k} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-2k})|t-s|^2 + \varepsilon^{4k_3-3k/2}|t-s|^{3/2} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-k}|t-s|], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K, \\ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K. \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, то використовуючи (10), одержимо із (8) і (9) оцінки

$$\begin{aligned} E\|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 &\leq K(|t-s|^4 + |t-s|^2), \\ E\|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 &\leq C|t-s|^2. \end{aligned}$$

Тому процеси $\bar{A}(t)$ і $\bar{\zeta}(t)$ задовольняють умову неперервності Колмогорова [7].

Розглянемо випадок $k_1 = 2k_2 = 2k_3$. При цій умові маємо для $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) ds &= \bar{\alpha}_i(A_1, A_2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. & \quad (11) \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi(dz) \right] ds =$$

$$= \bar{\sigma}_{ij}^2(A_1, A_2),$$

де $\bar{\alpha}(A_1, A_2) = (\bar{\alpha}_1(A_1, A_2), \bar{\alpha}_2(A_1, A_2))$, а $\bar{\sigma}_{ij}^2(A_1, A_2)$, $i, j = 1, 2$ – елементи матриці $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$. Оскільки процеси $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ неперервні, то із леми та співвідношень (7), (11) випливає

$$\bar{A}(t) = A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t),$$

$$A(0) = (A_1(0), A_2(0)), \quad (12)$$

де $\bar{\zeta}(t)$ – це неперервний векторно-значний мартингал з матричною характеристикою

$$\langle \bar{\zeta}_i, \bar{\zeta}_j \rangle(t) = \int_0^t \bar{\sigma}_{ij}^2(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, \quad i, j = 1, 2.$$

Значить [8] існує вінерів процес $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = 1, 2)$, такий що

$$\bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s). \quad (13)$$

Співвідношення (12), (13) означають, що процес $\bar{A}(t)$ задовольняє рівняння (5). При виконанні умов теореми рівняння (5) має єдиний розв'язок. Таким чином процес $\bar{A}(t)$ не залежить від вибору підпослідовності $\varepsilon_m \rightarrow 0$, і скінченномірні розподіли процесу $A_{\varepsilon_m}(t)$ збігаються до скінченномірних розподілів процесу $\bar{A}(t)$. Оскільки процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\bar{A}(t)$ є процеси Маркова, то використовуючи умови слабкої збіжності процесів Маркова [7] ми завершуємо доведення твердження 1) теореми.

Розглянемо випадок $k < k_1$. Тоді коефіцієнти $\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ рівняння (7) збігаються до нуля, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Повторивши з очевидними змінами доведення першого твердження теореми ми одержимо доведення твердження 2).

У випадку $k < 2k_2$ в (11) ми маємо $\sigma_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_2-k})$, $i, j = 1, 2$. Тому ми можемо завершити доведення теореми як і у попередньому випадку. Аналогічно доводиться твердження 2) у випадку $k < 2k_3$. $\square$

Список використаних джерел

1. Борисенко А.Д., Борисенко О.В. Асимптотическое поведение стохастической динамической системы / А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Теория оптимальных решений. – 1999. – С.38-44.
2. Борисенко А.Д., Борисенко О.В., Малышев И.Г. Предельное поведение динамической системы под воздействием малых случайных возмущений в нерезонансном случае / А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, И.Г. Малышев // Теория оптимальных решений. – 2002. – Вып. 1. – С.70-78.
3. Borysenko O.D., Borysenko O.V. Limit behaviour of non-autonomous random oscillating system of third order under random periodic external disturbances in resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol. 14(30). – no. 3-4. – p. 17-26.
4. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Метод усреднения для автономной колебательной системы четвертого порядка под действием случайных возмущений / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2010. – №4. – С.11-15.
5. Borysenko O.D., Malyshev I.G. The limit behaviour of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter / O.D. Borysenko, I.G. Malyshev // Theory of Stochastic Processes. – 2001. – Vol. 7(23). – no. 1-2. – p. 30-36.
6. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход. – К.: Изд. Киевского университета, 1961. – 216 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1971. – 664 с.
8. Ватанабэ С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ватанабэ С., Икеда Н. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Надійшла до редколегії 16.01.2011

УДК 512.552

Ірина В. Дудченко, кандидат фізико-математичних наук

Нефробеніусові алгебри Фуджити.

Розглянуто сильнозв'язні сагайдаки з числом вершин $p=4$ та їх алгебри Фуджити. Встановлено, які з перелічених алгебр є фробеніусовими.

Ключові слова: сильнозв'язний сагайдак, алгебра Фуджити, фробеніусова алгебра.

E-mail: dudchira@meta.ua

Статтю представив доктор ф.-м.наук, професор Кириченко В.В.

1. Вступ.

Японський математик Фуджита ввів до розгляду A -повні матричні алгебри. Вони грають важливу роль в дослідженні різних класів кілець, зокрема черепичних порядків [4, гл.14]. Зокрема в статті [5] вивчаються фробеніусові A -повні матричні алгебри.

В цій статті подається перелік всіх сильнозв'язних сагайдаків без кратних дуг та петель з числом вершин $p=4$. Кожному такому сагайдаку відповідає одна алгебра Фуджити.

Для будь-якого сильнозв'язного простого сагайдака без петель Q існує алгебра Фуджити A , така що $Q[A]=Q$ і R – радикал Джекобсона.

2. Сильнозв'язні сагайдаки з числом вершин $p=4$ та їх алгебри Фуджити.

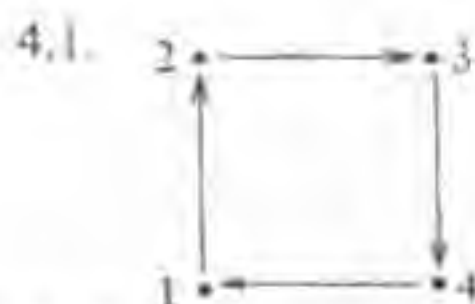
Квазіфробеніусове кільце A називається фробеніусовим, якщо $p_{v(i)}=p_i$ для всіх $i=1, \dots, s$.

Зрозуміло, що підстановка v визначена з точністю до спряженості в симетричній групі на s літерах. Ці спряження відповідають перенумераціям головних модулів $P_1, \dots, P_s$.

Нагадаємо, що сагайдак, що має більш однієї вершини, називається сильнозв'язним, якщо існує орієнтований шлях з довільної його вершини в іншу, яка може співпадати з початковою.

Перебираємо всі сагайдаки з перелічених в [6], кількість вершин яких дорівнює чотирьом і задовольняють нашим умовам.

Так само, як і в попередній статті [7] для кожного сагайдака ми знаходимо $\text{soc} P_i$ та визначаємо: чи є алгебра Фуджити фробеніусовою, чи ні.



©І.В. Дудченко, 2011

Irina V. Dudchenko, k.pf.-m.n.

Nonrobenius Fujita algebras.

The strongly connected quivers with $p=4$ and their Fujita algebras are considered. For these Fujita algebras those which are Frobenius algebras is established.

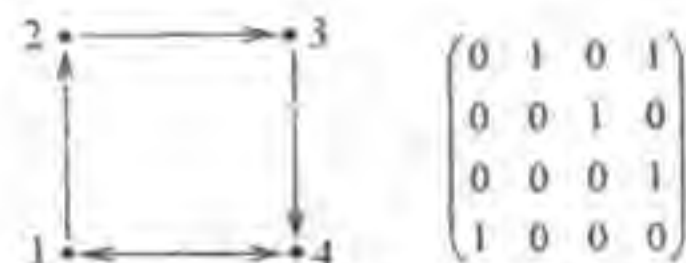
Key Words: strongly connected quiver, Fujita's algebra, Frobenius algebra.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1=U_4$, $\text{soc} P_2=U_1$, $\text{soc} P_3=U_2$, $\text{soc} P_4=U_3$.

Ця алгебра Фуджити є фробеніусовою.

4.2.

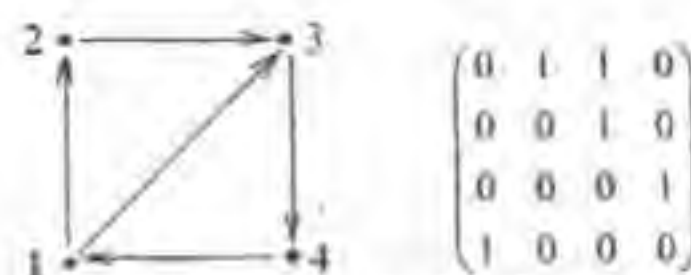


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1=U_3$, $\text{soc} P_2=U_1$, $\text{soc} P_3=U_2$, $\text{soc} P_4=U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.3.

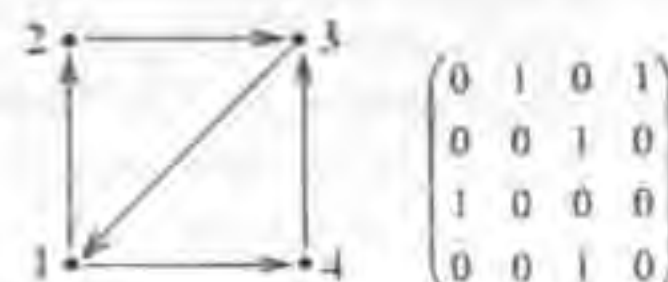


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1=U_4$, $\text{soc} P_2=U_1$, $\text{soc} P_3=U_2$, $\text{soc} P_4=U_2 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.4.

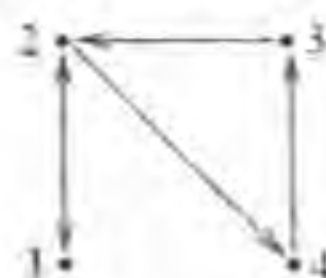


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1=U_3$, $\text{soc} P_2=U_4$, $\text{soc} P_3=U_2 \oplus U_4$, $\text{soc} P_4=U_1 \oplus U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.5.

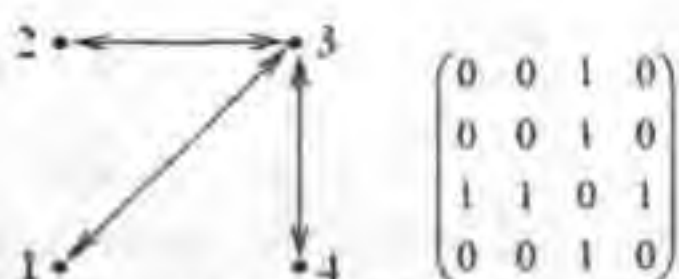


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_3$,
 $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

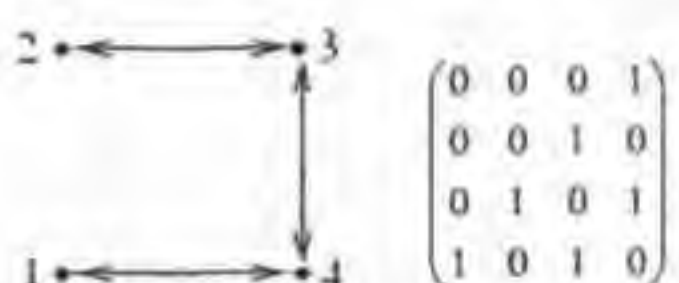
4.6.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1 \oplus U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

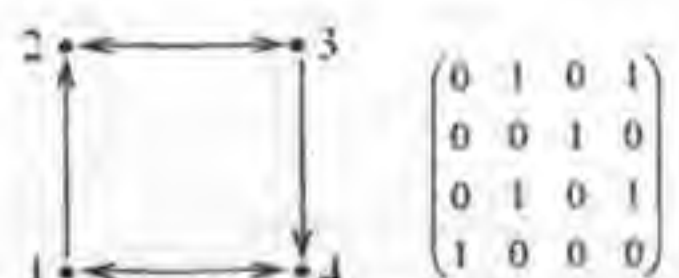
4.7.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1$,
 $\text{soc } P_3 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

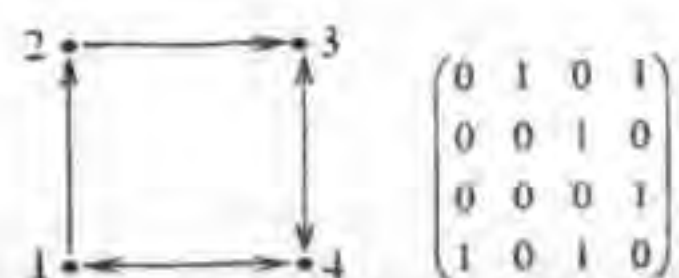
4.8.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1$,
 $\text{soc } P_3 = U_2$, $\text{soc } P_4 = U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

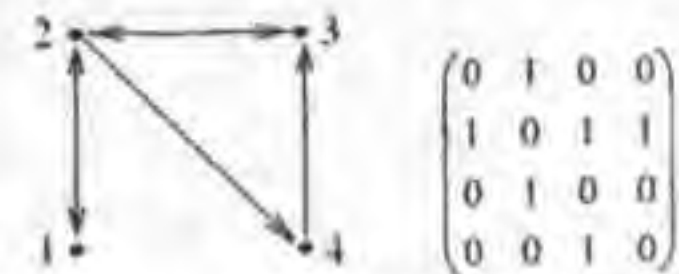
4.9.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1$, $\text{soc } P_3 = U_2$,
 $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

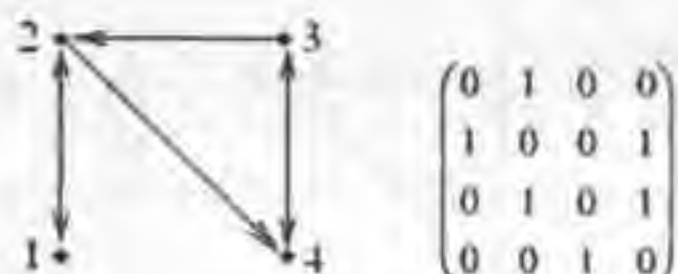
4.10.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

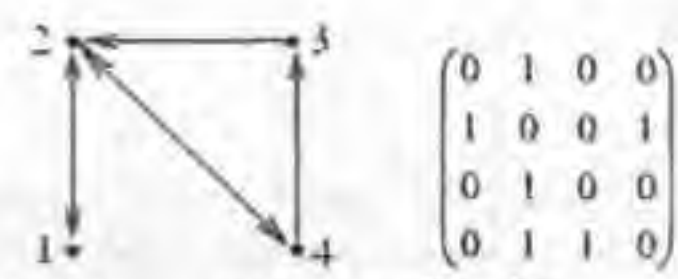
4.11.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_3$,
 $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

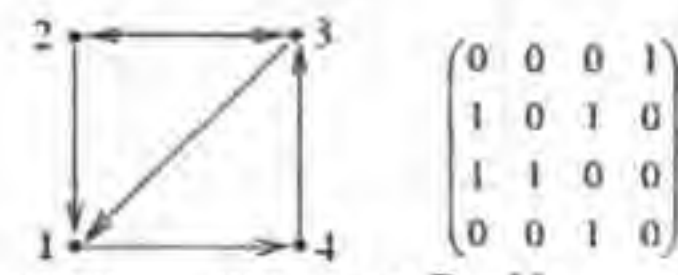
4.12.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_3$,
 $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

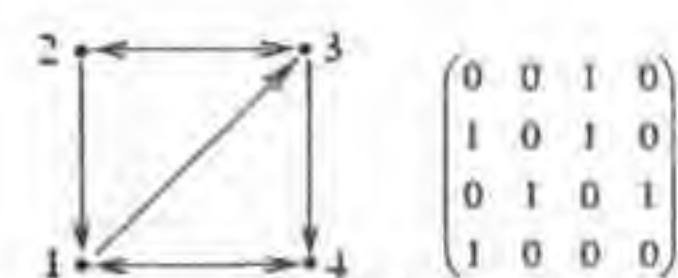
4.13.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

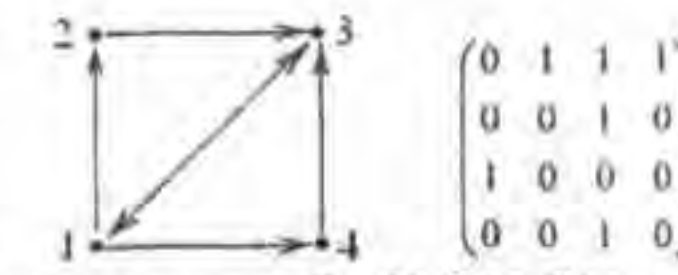
4.14.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

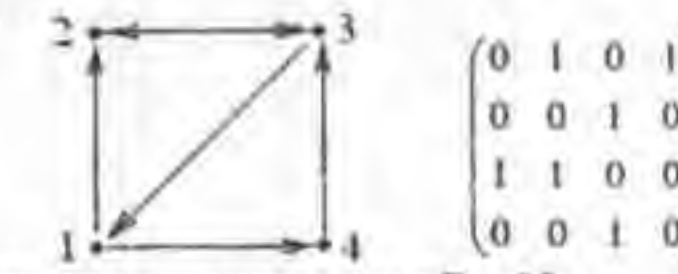
4.15.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_2$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

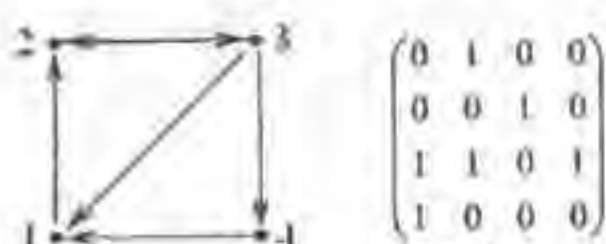
4.16.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_4$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

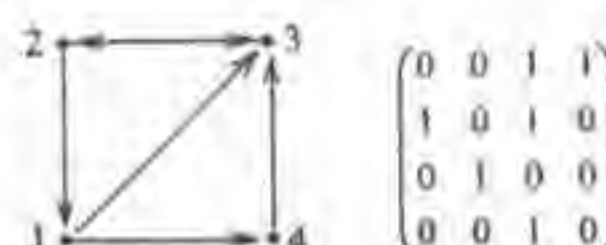
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.17.



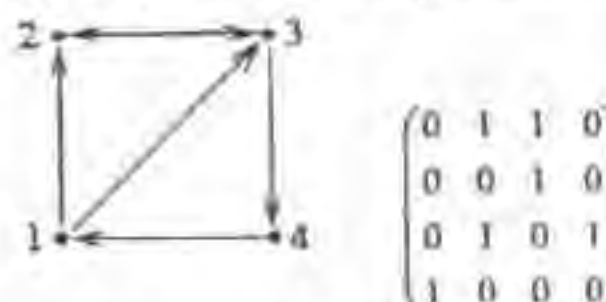
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_4$, $\text{soc}P_2=U_1$, $\text{soc}P_3=U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.18.



Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_1 \oplus U_3$, $\text{soc}P_3=U_1 \oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.19.



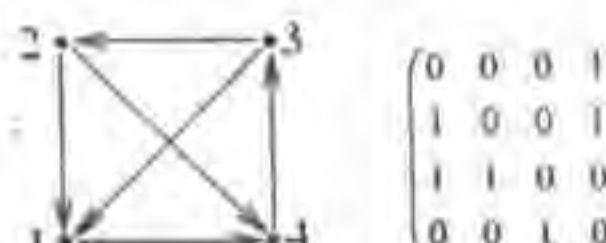
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_4$, $\text{soc}P_2=U_1$, $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.20.



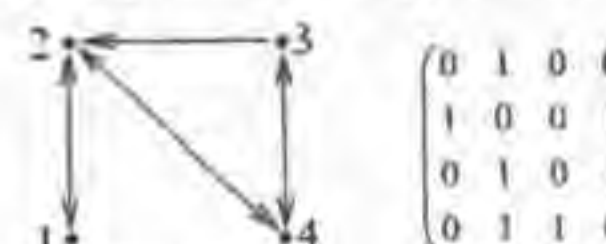
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_4$, $\text{soc}P_2=U_1$, $\text{soc}P_3=U_2$, $\text{soc}P_4=U_2 \oplus U_3$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.21.



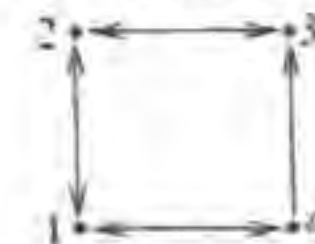
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_1$, $\text{soc}P_3=U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.22.



Визначили, що $\text{soc}P_1=U_3$, $\text{soc}P_2=U_3$, $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

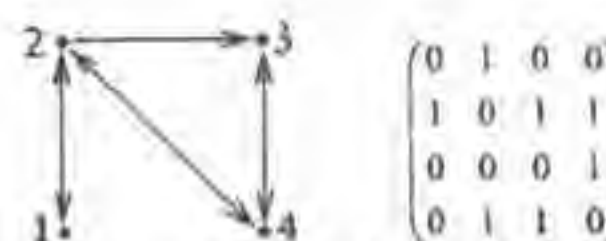
4.23.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

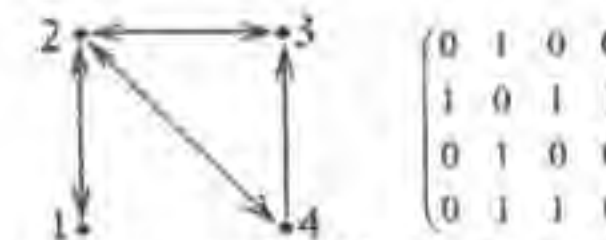
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2 \oplus U_3$, $\text{soc}P_2=U_4$, $\text{soc}P_3=U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.24.



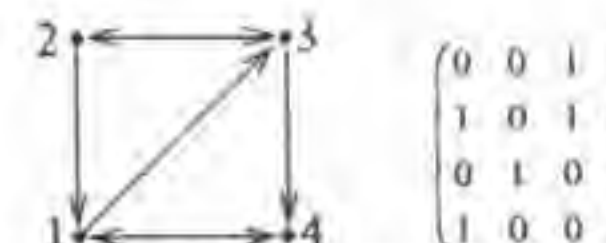
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_3 \oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.25.



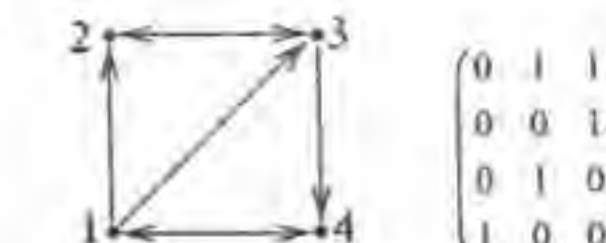
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_3$, $\text{soc}P_2=U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc}P_3=U_1 \oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.26.



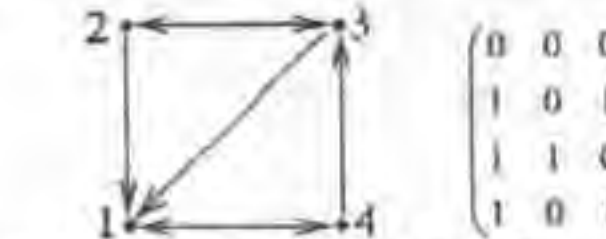
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_4$, $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.27.



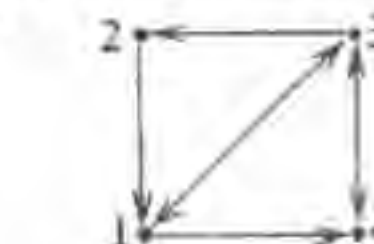
Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_1$, $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.28.



Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_4$, $\text{soc}P_3=U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

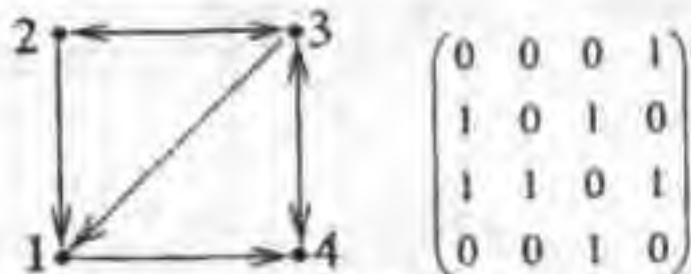
4.29.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3\oplus U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

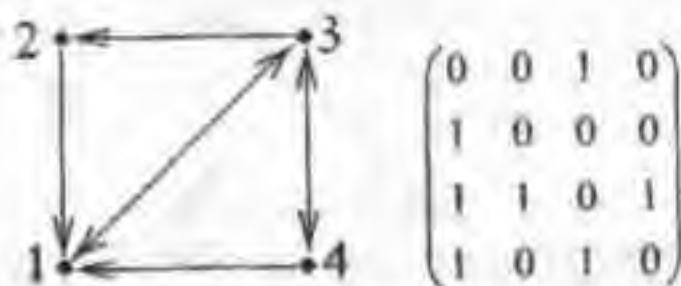
4.30.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

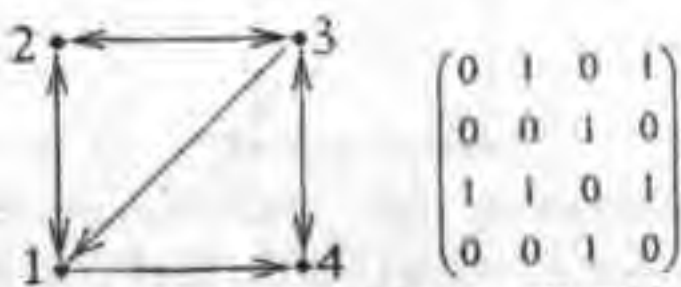
4.31.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

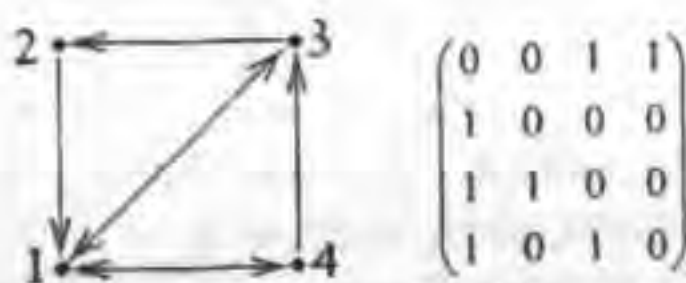
4.32.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_3$, $\text{soc}P_2=U_4$, $\text{soc}P_3=$
 $U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

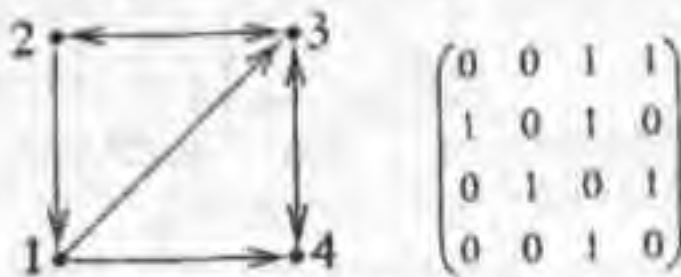
4.33.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3$,
 $\text{soc}P_3=U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

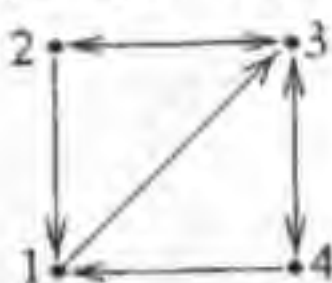
4.34.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

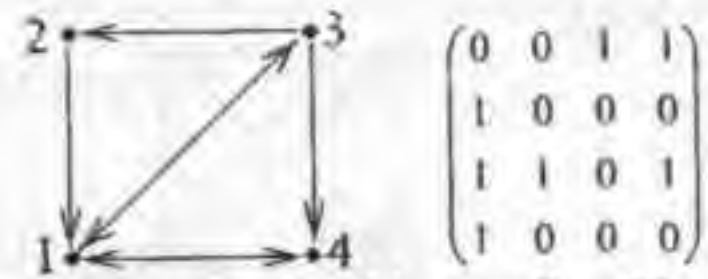
4.35.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_1\oplus U_3$,
 $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

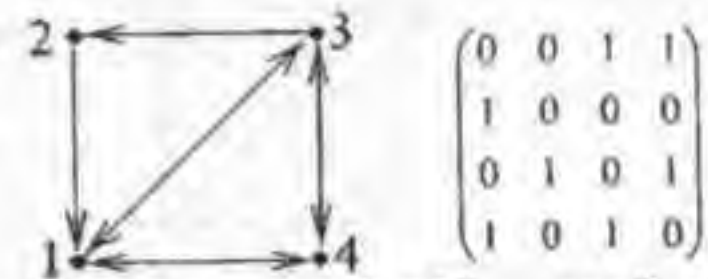
4.36.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_4$, $\text{soc}P_3=$
 $U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

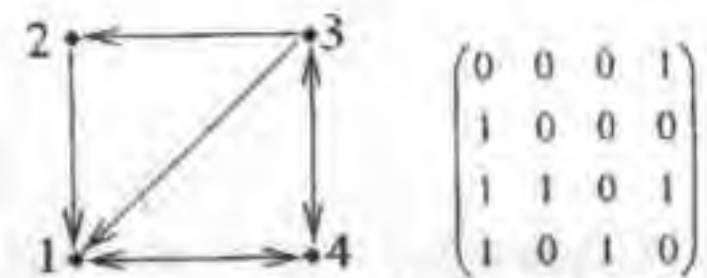
4.37.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3\oplus U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

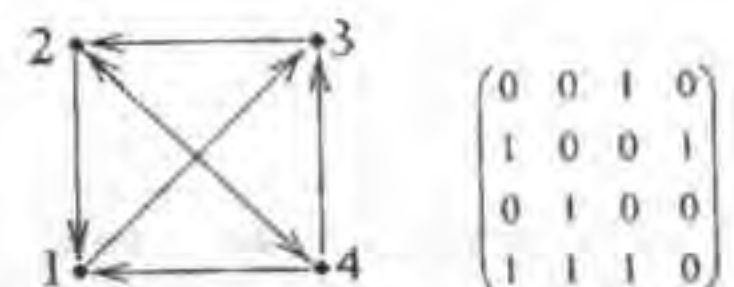
4.38.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3$, $\text{soc}P_3=$
 $U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

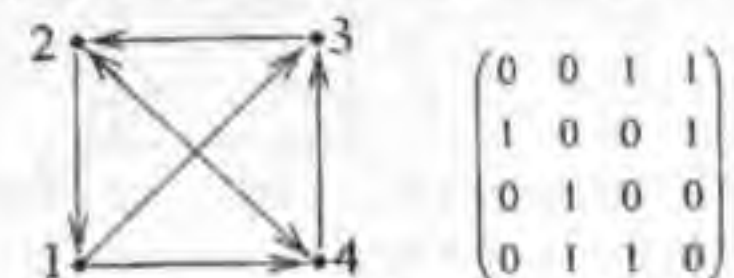
4.39.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3$,
 $\text{soc}P_3=U_1$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

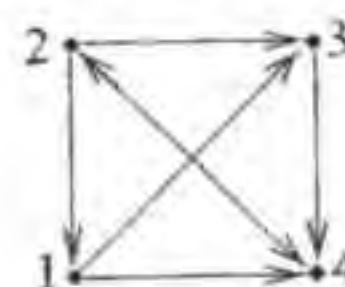
4.40



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3$, $\text{soc}P_3=$
 $U_1\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1$.
Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.41.

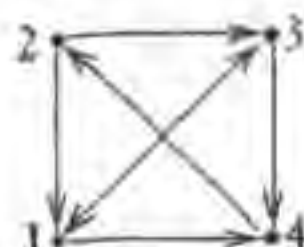


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.42.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_2$, $\text{soc} P_4 = U_1 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.43.

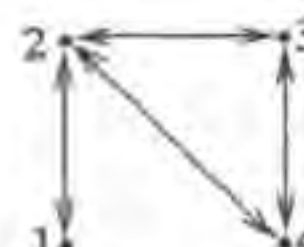


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_3$,
 $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_1 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.44.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_3 \oplus U_4$, $\text{soc} P_2 =$
 $U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.45.

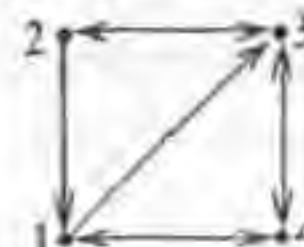


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_3$, $\text{soc} P_2 = U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити є фробеніусовою.

4.46.

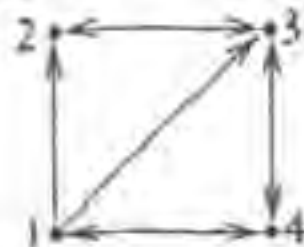


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.47.

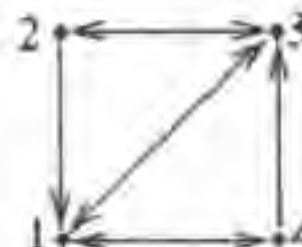


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc} P_2 = U_1$,
 $\text{soc} P_3 = U_1$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.48.

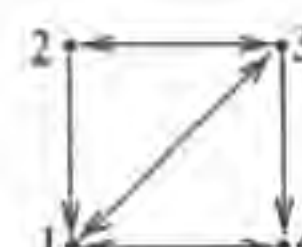


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_4$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.49.

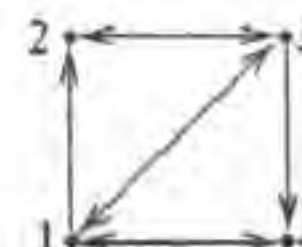


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_4$, $\text{soc} P_3 =$
 $U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.50.

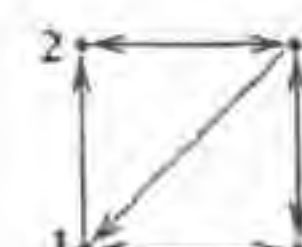


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc} P_2 =$
 $U_1 \oplus U_4$, $\text{soc} P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc} P_4 = U_2 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.51.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_3$, $\text{soc} P_2 = U_1 \oplus U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.52.

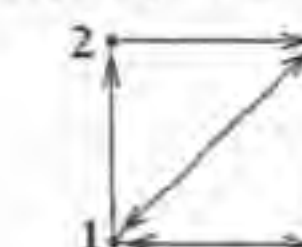


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc} P_1 = U_2$, $\text{soc} P_2 = U_4$,
 $\text{soc} P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc} P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.53.

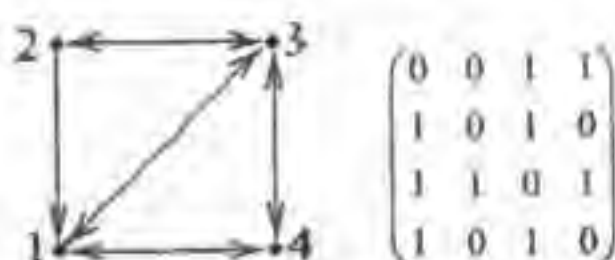


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$,
 $\text{soc } P_3 = U_1$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

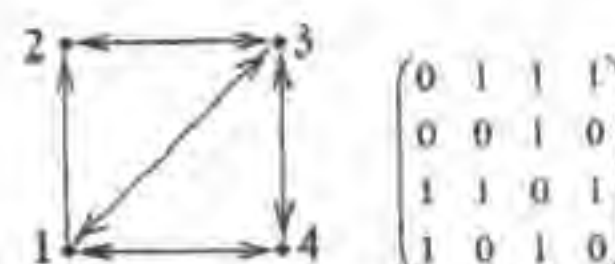
4.66.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

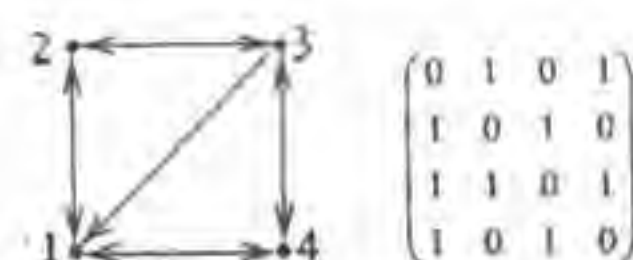
4.67.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

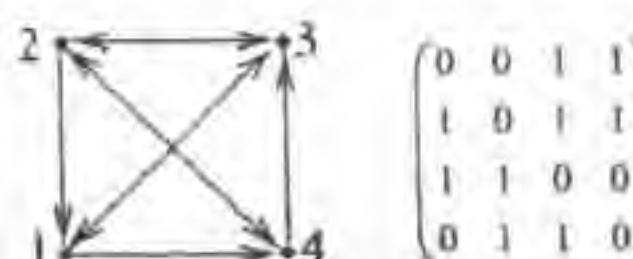
4.68.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

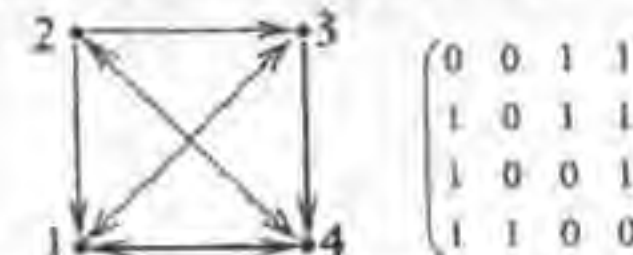
4.69.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

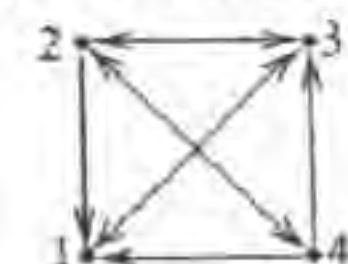
4.70.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_2$, $\text{soc } P_4 = U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.71.

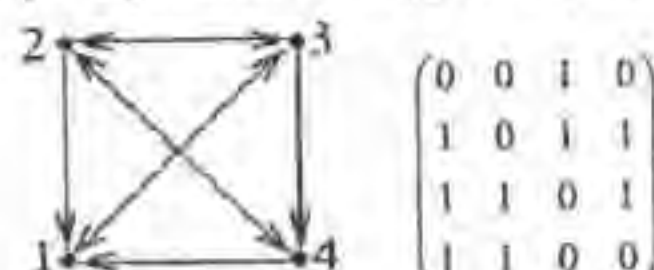


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

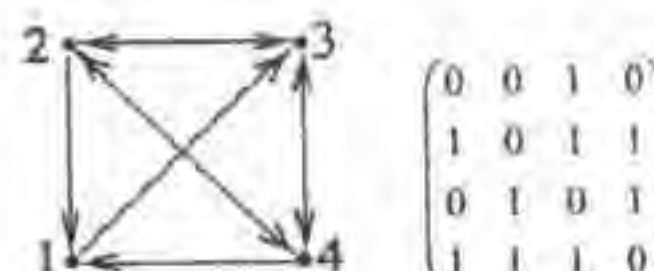
4.72.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, $\text{soc } P_4 = U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

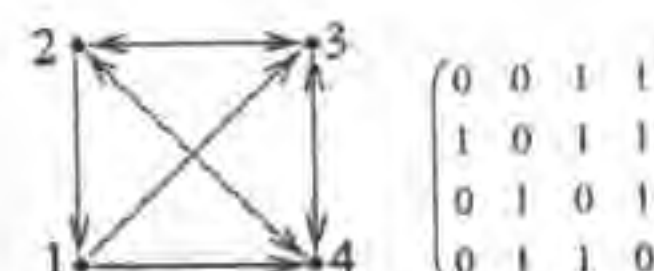
4.73.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1$, $\text{soc } P_4 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

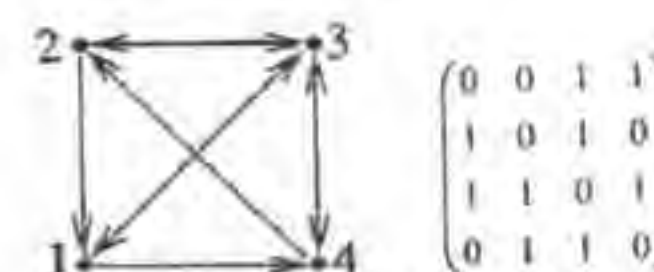
4.74.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

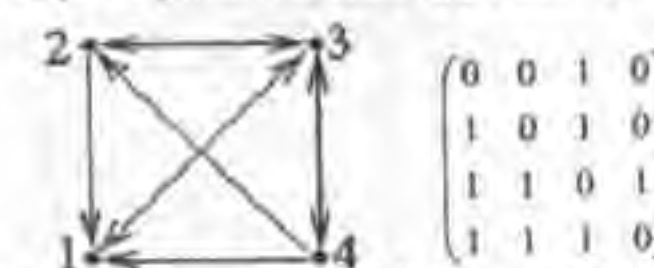
4.75.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

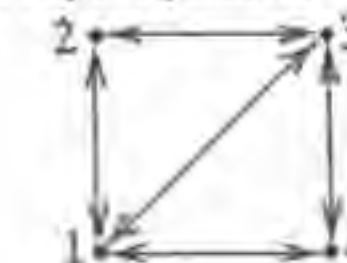
4.76.



Визначили, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_4$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4$, $\text{soc } P_4 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.77.

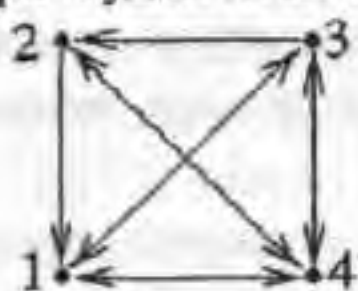


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2\oplus U_3\oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_2$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.78.

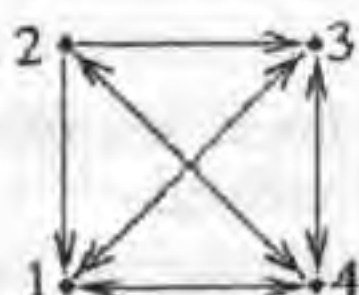


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_3$, $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.79.

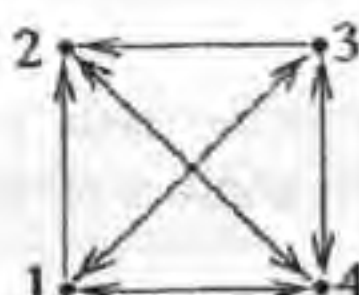


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_1\oplus U_3\oplus U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_2$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.80.

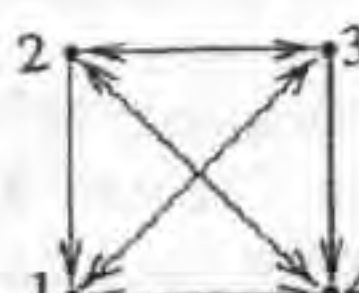


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2\oplus U_3\oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_1\oplus U_3$, $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.81.

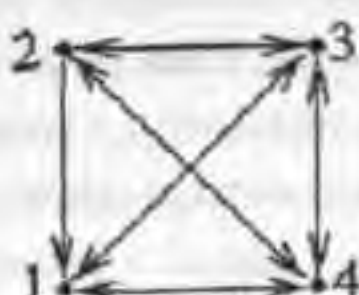


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2$, $\text{soc}P_2=U_1\oplus U_3\oplus U_4$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.82.

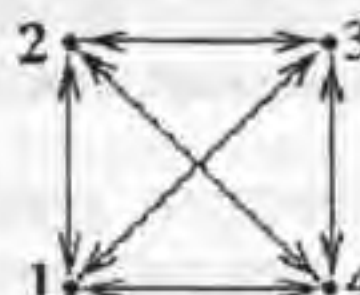


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2\oplus U_3\oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_1$,
 $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

4.83.

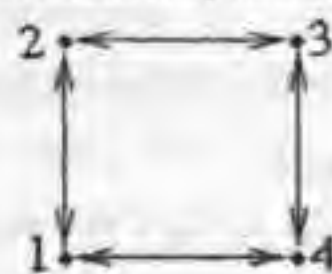


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначили, що $\text{soc}P_1=U_2\oplus U_3\oplus U_4$, $\text{soc}P_2=U_1\oplus U_3\oplus U_4$, $\text{soc}P_3=U_1\oplus U_2\oplus U_4$, $\text{soc}P_4=U_1\oplus U_2\oplus U_3$.

Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

Отже маємо, що з усього вище вказаного переліку сагайдаків, лише для двох



та



існують алгебри, що є фробеніусовими.

Список використаних джерел

1. H. Fujita and Y. Sakai and D. Simson, Minor degenerations of the full matrix algebra over a field // J.Math. Soc.Japan, 59. – 2007, – С. 1–33;
2. H. Fujita and Y. Sakai and D. Simson, On Frobenius full matrix algebras with rtructure systems // Algebra and discrete mathematics. – №1. – 2007, – С. 13-28;
3. H. Fujita and Y. Sakai, Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders, // Comm.Algebra, 34. – 2006, – С. 1181-12034;
4. M.Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko, Algebras, Rings and modules // Kluwer Academic Publishers, 2004, 380 p;
5. H. Fujita and Y. Sakai, Communications in Algebra v.3, (2006) p. 1181-1203. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders;
6. И.В Дудченко, Властивості алгебр Фуджити // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. – Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – № 6. – С. 126–130.
7. И.В Дудченко, Алгебри Фуджити // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. - Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – №4.

Надійшла до редколегії 11.11.2010

УДК 512.552

Володимир В. Кириченко, док. ф.-м. наук,
Макар В. Плахотник, канд. ф.-м. наук

Супермінімальні матриці показників.

У статті розглядаються невід'ємні матриці показників, які є мінімальними в сенсі природного часткового порядку, на множині цілочислових матриць. Пораховано кількість таких матриць залежно від розміру матриці.

Ключові слова: матриця показників, невід'ємна матриця.

vkir@univ.kiev.ua

makar_plakhotnyk@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н. Ю.В. Козаченко

Матриці показників відіграють важливу роль в теорії кілець, зокрема в задачі опису черепних порядків.

Означення. Цілочислова ненульова матриця (α_{ij}) розміру n називається матрицею показників, якщо діагональні елементи матриці нульові та для кожної трійки чисел i, j, k виконується нерівність

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}.$$

При цьому нерівності наведеного вигляду називаються кілецевими.

Матриця показників називається горенштейнковою, якщо існує перестановка σ без верхомих точок, така що для всіх можливих індексів виконуються рівності

$$\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}.$$

Ці рівності називаються горенштейновими.

Матриці показників та, зокрема, горенштейнові матриці, вивчалися в [2]. Серед іншого, робота [2] (теорема 2.6) містить опис всіх горенштейнових матриць показників, які складаються з нулів та одиниць.

Супермінімальні матриці, котрі є предметом вивчення цієї роботи, також складаються лише з нулів та одиниць. З іншого боку, не кожна матриця показників, яка складається з нулів та одиниць, є супермінімальною (і навіть не обов'язково є мінімальною) в сенсі означень, які будуть дані нижче.

Для вивчення матриць показників достатньо вивчати їх з точністю до еквівалентності, вважаючи еквівалентними дві матриці показників,

V.V. Kirichenko, Doc. Ph-Math Sci,
M. V. Plakhotnyk, Kand. Ph.-Math. Sci.

Superminimal exponent matrices.

Nonnegative exponent matrices which are minimal in the sense of natural partial ordering of integer matrices are considered in this article. The quantity of such exponent matrices is calculated.

Key Words: exponent matrix, nonnegative matrix.

якщо одну з них можна отримати з іншої композицією таких перетворень:

(i) Відніманням деякого числа від кожного елемента деякого рядка матриці з одночасним додаванням цього числа до кожного елемента того стовпця матриці, чий номер збігається з номером стовпця, від елементів якого робилося віднімання;

(ii) Переставленням двох рядків матриці та переставленням стовбців з тими самими номерами.

Кожен клас матриць, еквівалентних в сенсі частини (i) означення, містить єдину матрицю, всі елементи першого рядка якої нульові.

Легко помітити, що у випадку, коли деякий рядок матриці показників нульовий, то з кілецевих нерівностей випливає, що всі елементи цієї матриці невід'ємні. Справді, якщо $\alpha_{1i} = 0$ при всіх i , то з нерівності $\alpha_{1i} + \alpha_{ik} \geq \alpha_{1k}$ маємо невід'ємність елементів матриці.

Це виправдовує вивчення невід'ємних матриць показників, без вимоги того, щоб один з рядків цих матриць був нульовим.

Надалі в цій роботі нас цікавитимуть лише ті еквівалентні матриці, одну з яких можна отримати з іншої переставленням двох рядків матриці та переставленням стовбців з тими самими номерами. Саме їх ми матимемо на увазі, говорячи про еквівалентні матриці та позначатимемо $A \sim B$.

Звернемо увагу на те, що невід'ємні матриці показників утворюють напівгрупу відносно додавання. Згідно [1] ця напівгрупа скінченно породжена. Найприроднішим точним матричним зображенням вказаної напівгрупи є її зображення тими невід'ємними матрицями, з опису яких ця

напівгрупа виникла.

З іншого боку, на множині невід'ємних матриць є природний частковий порядок, за яким дві матриці знаходяться у відношенні $\geq$ тоді і лише тоді, коли їх елементи з однаковими індексами знаходяться в цьому ж відношенні.

Назвемо невід'ємну матрицю показників мінімальною, якщо вона є твірним елементом напівгрупи невід'ємних матриць показників.

Нагадаємо, що з напівгрупових міркувань мінімальність матриці показників означає, що вона не може бути записана як сума двох ненульових невід'ємних матриць показників.

Назвемо невід'ємну матрицю показників супермінімальною, якщо ця матриця не знаходиться у відношенні $\geq$ з жодною іншою невід'ємною матрицею показників.

Зауважимо, що кожна супермінімальна матриця є мінімальною, але не навпаки.

Для формулювання основного результату роботи позначимо через $A_{n,k}$, $0 < k < n$ блочну матрицю розміру n , яка має вигляд

$$A_{n,k} = \left(\begin{array}{c|c} O_k & U \\ \hline O & O_{n-k} \end{array} \right),$$

де O_k та O_{n-k} - нульові квадратні матриці розміру k та $n - k$ відповідно. Матриця O нульова, усі елементи U дорівнюють 1.

Матрицю $A_{n,k} = (\alpha_{ij})$ можна описати з допомогою рівностей так:

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = 1 & \text{якщо } i \leq k < j; \\ \alpha_{ij} = 0 & \text{якщо } i > k, \text{ або } j \leq k. \end{cases}$$

Лема 1. Для кожних n, k матриця $A_{n,k}$ є матрицею показників.

Доведення. Враховуючи, що матриця $A_{n,k}$ складається лише з нулів та одиниць, кільцева нерівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jt} \geq \alpha_{it}$ може бути порушена лише в тому разі, коли $\alpha_{ij} = \alpha_{jt} = 0$ та $\alpha_{it} = 1$.

Рівність $\alpha_{it} = 1$ означає, що $i \leq k$ та $t > k$. Порівнюючи j з k , маємо, що обов'язково виконується одна з нерівностей $j \leq k$, або $j > k$. В першому разі отримаємо суперечність з рівністю $\alpha_{jt} = 0$, а в другому - суперечність з рівністю $\alpha_{ij} = 0$. $\square$

Теорема 1. Для кожної невід'ємної матриці показників A розміру n існує матриця $A_{n,k}$ та матриця $B \sim A$, такі що $B \geq A_{n,k}$.

Доведення. Нехай матриця показників має у першому рядку k нулів та, відповідно, $n - k$ додатних елементів.

Тоді, переставивши в разі потреби рядки та стовпчики матриці (не рухаючи при цьому перший рядок і перший стовпчик) можемо отримати матрицю $B = (\beta_{ij}) \sim A$, перші k елементів першого рядка якої дорівнюють нулю, а решта елементів першого рядка додатні.

Розглянемо кільцеву нерівність $\beta_{1i} + \beta_{ip} \geq \beta_{1p}$ при $i \leq k$. Враховуючи попереднє, ця нерівність може бути переписана у вигляді $\beta_{ip} \geq \beta_{1p}$. З останньої нерівності при $p > k$ випливає, що $\beta_{ip} > 0$, і це доводить, що $B \geq A_{n,k}$. $\square$

Зауваження 1. Доведену теорему можна переформулювати так: Множина з матриць B таких, що $B \sim A_{n,k}$ при деякому k , збігається з множиною всіх супермінімальних невід'ємних матриць розміру n .

Зауваження 2. Для кожної пари чисел n, k , кількість матриць B , таких що $B \sim A_{n,k}$, дорівнює C_n^k , де C_n^k - біноміальний коефіцієнт.

Справедливість зауваження випливає з комбінаторної інтерпретації C_n^k як кількості можливостей вибору k елементів з множини з n елементів.

Наслідок 1. Кількість супермінімальних невід'ємних матриць показників розміру n дорівнює $2^n - 2$.

Наслідок випливає з комбінаторного співвідношення $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$, того, що при побудові матриць $A_{n,k}$ розглядаються лише числа $0 < k < n$ та того, що $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Приклад 1. Розглянемо невід'ємні матриці показників розмірності 3.

Згідно теореми 1, маємо, що супермінімальні матриці розміру 3 - це ті матриці, всі недиагональні елементи деякого рядку або стовпця дорівнюють одиниці, а решта елементів - нулі.

Безпосереднім підрахунком, зробленим методами, запропонованими в [1], можна показати, що твірні напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 3 - це крім супермінімальних матриць ще матриці, у яких всі недиагональні елементи деякого рядку та деякого стовпця з різними номерами дорівнюють одиниці, а решта елементів матриць - нулі.

Таким чином розмірність напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 3 дорівнює 12.

Приклад 2. Розглянемо невід'ємні матриці показників розмірності 4.

Безпосереднім підрахунком, виконаним методами з роботи [1], можна показати, що розмірність напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 4 дорівнює 164. При цьому серед твірних цієї напівгрупи є не лише матриці з нулів та одиниць, але і матриці, що мають серед своїх елементів двійку, див. приклад 4.

Звернувши увагу на значне перевищення кількості твірних напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 4 над кількістю супермінімальних матриць, доцільно ввести характеристику, яка описуватиме степінь перевищення кількості твірних напівгрупи над кількістю супермінімальних елементів.

Фактично, множина супермінімальних матриць не є групою характеристикою напівгрупи, оскільки залежить від того, яким чином введено частковий порядок на елементах напівгрупи. Водночас множина мінімальних елементів цілком визначається груповими властивостями напівгрупи, оскільки є множиною твірних.

Нехай маємо матричне зображення деякої напівгрупи. Воно не єдине. Втім, при конкретному зображенні на матрицях, котрі зображають елементи напівгрупи, є частковий порядок $\geq$.

Висотою зображення напівгрупи елементами частково впорядкованої множини називається найбільша довжина спадного ланцюга, елементами якого є твірні напівгрупи.

Природним зображенням напівгрупи невід'ємних матриць показників назвемо те зображення, при якому елементи напівгрупи зображаються матрицями показників.

Приклад 3. Висота природного зображення напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 3 дорівнює 2.

Ланцюг твірних, про який ідеться, наприклад такий:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Висота природного зображення напівгрупи невід'ємних матриць показників розміру 4 дорівнює 6.

В якості ланцюга твірних, про який ідеться, можна розглянути, наприклад, такий:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Також елементи

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є першими елементами зростаючих 6-ти елементних зростаючих ланцюгів твірних напівгрупи невід'ємних матриць розміру 4.

Наведені два приклади а також відомості про розмірності і максимальні довжини ланцюгів твірних елементів отримані комп'ютерним перебором.

Зауваження 3. Звернемо увагу на те, що серед мінімальних матриць розмірності 4 є не лише матриці з нулів та одиниць.

Список використаних джерел

1. Платотник В.В. Про мінімальні елементи множини цілих невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. - Серія фіз.-мат. науки. - 2000. - №3, стор. 74-77.
2. M.A. Dokuchaev, V.V. Kirichenko, A.V. Zelensky, V.N. Zhuravlev, Gorenstein Matrices, // Algebra and Discrete Math. 2005, no. 1, pp. 8-29.

Надійшла до редколегії 18.11.2010

УДК 519.21

М.С. Муминов, к.ф.-м.н.,
Г.М. Рахимов, к.ф.-м.н.

Об оценке вероятности хвоста
максимума гауссовского поля

В работе рассматривается гауссовское поле $X(t)$, $t \in T \subset R^v$, $v \geq 1$ со средним $m(t)$ и коэффициентом корреляции $\rho(t, s)$ с непрерывными вероятностными единицами траекториями. Установлена оценка сверху вероятности $P\left(\max_{t \in T} X(t) > u\right)$.

Ключевые слова: Гауссовское поле, непрерывная траектория, вероятность хвоста, энтропия, интеграл Дадли.

M.Muhammad@rambler.ru

Статью представил д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Введение

В математической статистике задача построения доверительного интервала для неизвестной плотности вероятности с помощью эмпирической плотности распределения приводится к нахождению предельного распределения максимума гауссовского нестационарного процесса. Последняя задача, в свою очередь, связана с исследованием распределения максимума гауссовского нестационарного процесса и оценкой распределения максимума неоднородного поля.

Не только в математической статистике, но и в статистической радиотехнике ученые столкнулись с необходимостью вычисления вероятности достижения заданного уровня случайным сигналом на заданном отрезке времени. Поэтому задача имеет важное значение [1], [2]. С целью аппроксимации этой вероятности С.О. Райс [3] вывел свою знаменитую формулу для среднего числа выходов случайного сигнала за уровень $y = u$. В.И. Питербарг в работах [4] (гл. III), [5] уточняет точность аппроксимации этой вероятности методом Райса, для гауссовского стационарного сигнала. Он оценивает распределение максимума при помощи первых двух моментов числа пересечений уровня u . При этом немаловажную роль играет точность аппроксимации вероятности превыше-

M.S. Muminov, PhD
G.M. Rakhimov, PhD

On estimation of the tail probability of
the maximum of a Gaussian field

The Gaussian field $X(t)$, $t \in T \subset R^v$, $v \geq 1$ having the mean $m(t)$ and correlation coefficient $\rho(t, s)$ with continuous with probability one trajectories is considered. The upper bound for the probability $P\left(\max_{t \in T} X(t) > u\right)$ is established.

Key Words: Gaussian field, continuous trajectories, tail probability, entropy, Duddley integral.

ния некоторого уровня максимумом нестационарного гауссовского процесса и неоднородного гауссовского поля.

Несмотря на актуальность рассматриваемых задач до недавнего времени эта проблема не была достаточно изучена для нестационарного случая. В работе [6] выведены формулы вычисления среднего значения и факториальных моментов высокого порядка для числа пересечений уровня u нестационарным гауссовским процессом. Применяя полученную в работе [6] формулу в [7] установлено асимптотическое разложение для вероятности достижения заданного уровня u не стационарным гауссовским процессом на отрезке времени $[0, T]$, $0 < T \leq \infty$.

На практике часто встречаются случайные процессы с многомерным параметром t , где $t = (t_1, \dots, t_v) \in R^v$. И в этом случае, методом Райса желаемого результата получить пока не удается. Эта связано с трудностью вычисления факториальных моментов первого и второго порядков для числа стационарных точек случайного поля. Для оценки вероятности достижения случайным полем уровня u применяются, так называемые, энтропийные методы [4], [8]-[10]. В.И.Питербарг в [4] (лемма 6.4) этим методом оценивает распределение хвоста максимума неоднородного гауссовского поля. Одна-

ко, в прикладних задачах цього результату недостатньо из-за неопределенности константы в этих оценках. В настоящей работе автор уточняет неравенства В.И.Питербарга [4] (леммы 6.3, 6.4).

Следует отметить, что в работах [11] и [12] методом двойной суммы найдено предельное распределение величины $P\left(\sup_{t \in T} X(t) > u\right)$ при $u \rightarrow \infty$, когда $X(t)$ — локально-стационарное гауссовское поле на гладком многообразии $T \subseteq R^v$, со средним нуль и не постоянной соответственно. В работе [13] авторы изучают аналогичную задачу для однородного и изотропного гауссовского поля со средним нуль, дисперсией единица и специально выбранной ковариационной функцией.

В работах [11] — [13] авторы также столкнулись с оценкой вероятности хвоста двойного максимума и только утверждают стремление к нулю этой величины при $u \rightarrow \infty$ (см., напр., теорему 2.5 в [13]). Однако для получения оценки скорости сходимости в предельной теореме о вероятности хвоста максимума гауссовского поля, возникающей при решении определенных задач из области непараметрической статистики, основные теоремы в работах [11] — [13] не позволяют получить ожидаемые результаты.

2 Формулировка вспомогательных и основных результатов

Приведем два вспомогательных результата, в которых поставленная задача решается энтропийным методом.

Пусть $X(t)$ — гауссовское случайное поле на T , где T — некоторое множество в R^v , $v \geq 1$. Кроме того, пусть

$$EX(t) = 0, \sigma^2(t) = EX^2(t) \leq 1.$$

Введем следующие обозначения:

$d(t, s) = \{E(X(t) - X(s))^2\}^{1/2}$ — псевдометрика, порожденная гауссовским полем $X(t)$, здесь $(t, s) \in T \times T$;

$B(t, \delta) = \{\theta : d(t, \theta) \leq \delta\}$ — δ — шар с центром в точке t относительно псевдометрики d ;

$S(\varepsilon)$ — ε -сеть на топологическом пространстве (T, d) , т.е. такое множество точек θ , что

$$T \subseteq \bigcup_{\theta \in S(\varepsilon)} B(\theta, \varepsilon),$$

$N(\varepsilon)$ — минимально возможное число точек в ε -сети, т.е. минимальное число шаров радиуса ε в пространстве (T, d) , покрывающих T ,

$H(\varepsilon) = \log N(\varepsilon)$ — относительная ε -энтропия пространства (T, d) .

Аналогично, для каждого шара $B(t, \delta)$ ε -сетью на нем назовем множество точек $S(t, \delta, \varepsilon) \subset B(t, \delta)$ такое, что

$$B(t, \delta) \subseteq \bigcup_{\theta \in S(t, \delta, \varepsilon)} B(t, \theta).$$

Далее, $N(t, \delta, \varepsilon)$ и $H(t, \delta, \varepsilon)$ определяются аналогично $N(t)$ и $H(t)$.

Определим функции

$$\varphi(t, \delta, \varepsilon) = \int_0^\varepsilon H^{1/2}(t, \delta, x) dx,$$

$$\varphi(\delta, \varepsilon) = \sup_{t \in T} \varphi(t, \delta, \varepsilon),$$

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon H^{1/2}(x) dx.$$

Последний интеграл называется интегралом Дадли.

Приведем следующий результат В.А. Дмитриевского [10].

Если $X(t)$ — сепарабельное гауссовское поле, $EX(t) = 0$, $\sigma^2(t) = EX^2(t) \leq 1$, $t \in T$, тогда при всех $u \geq 1 + 4\sqrt{2}\varphi(1)$

$$P\left(\max_{t \in T} X(t) > u\right) \leq 4,8 \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2 + \theta(u)\right\},$$

где $\theta(u) = \inf_{\delta > 0} (2u^2\delta^2 + 4\sqrt{2}\varphi(\delta, \delta) + H(\delta) + \log \delta)$.

Теперь приведем неравенства Д.Слепяна [12]: Пусть T — произвольное множество и пусть $X(t)$, $Y(t)$, $t \in T$ — сепарабельные гауссовские поля, удовлетворяющие условиям

$$EX(t) = EY(t), \text{Var}X(t) = \text{Var}Y(t), t \in T$$

и

$$\text{cov}(X(t), X(s)) \leq \text{cov}(Y(t), Y(s)), t, s \in T.$$

Тогда для всех x

$$P\left(\sup_{t \in T} X(t) < x\right) \leq P\left(\sup_{t \in T} Y(t) < x\right).$$

Пусть теперь $X(t)$, $t \in T$ — гауссовское поле с $m(t) = EX(t)$, $\sigma^2(t) = \text{Var}X(t)$. Обозначим

$$\rho(t, s) = \text{cov}\left(\frac{X(t) - m(t)}{\sigma(t)}, \frac{X(s) - m(s)}{\sigma(s)}\right)$$

$$m = \sup_{t \in T} m(t), \sigma^2 = \sup_{t \in T} \sigma^2(t), (t, s) \in T \times T.$$

Обозначим через T и $D^{1/\alpha}T$ следующие v -мерные параллелепипеды

$$T = [0, T_1] \times \dots \times [0, T_v], T_i > 0, \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, v,$$

$$D^{1/\alpha}T = [0, D^{1/\alpha}T_1] \times \dots \times [0, D^{1/\alpha}T_v], D > 0, \alpha > 0.$$

Возможны следующие случаи:

$$1) D^{1/\alpha}T \subseteq [0, v^{-1/\alpha}]^v;$$

$$2) \text{ Для } i = i_1, i_2, \dots, i_k \text{ выполнено } D^{1/\alpha}T_i \geq v^{-1/\alpha}, \text{ и } D^{1/\alpha}T_i \leq v^{-1/\alpha} \text{ для остальных } i = i_{k+1}, \dots, i_v;$$

$$3) D^{1/\alpha}T \supseteq [0, v^{-1/\alpha}]^v.$$

Приведем основные теоремы:

Теорема 2.1. Пусть $X(t), t \in T \subset R^v$ — гауссовское однородное поле со средним m , дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции

$$\rho(t) = E \left(\frac{X(s+t) - m}{\sigma} \cdot \frac{X(s) - m}{\sigma} \right) =$$

$$1 - D \|t\|^\alpha (1 - R(t)), t \rightarrow 0,$$

где $0 < D < \infty, 0 < \alpha \leq 2, R(t) \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow 0, R(t), t \in T$ равномерно непрерывно, и в случаях 1), 2) справедливо $\sup_{t \in T} |R(t)| < 1$, а в

случае 3) выполняется $0 \leq 1 - R(t/D^{1/\alpha}) \leq 1$, когда $t \in [0, v^{-1/\alpha}]^v$. Тогда для всех $\frac{u-m}{\sigma} \geq 1$

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) \geq u \right) \leq$$

$$CD^{v/\alpha} \prod_{i=1}^v T_i \cdot \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2v}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Здесь C — положительная постоянная, зависящая только от α и v .

Теорема 2.2. Пусть $X(t), t \in T \subset R^v$ — гауссовское поле с вероятностью единица непрерывными траекториями, со средним $m(t)$, дисперсией $\sigma^2(t)$ и коэффициентом корреляции $\rho(t, s)$, удовлетворяющим условию

$$1 - \rho(t, s) \leq D \|t - s\|^\alpha,$$

для некоторых $0 < D < \infty$ и $0 < \alpha \leq 2$. Тогда для всех $\frac{u-m}{\sigma} \geq 1$ справедливо неравенство

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq$$

$$CD^{v/\alpha} \prod_{i=1}^v T_i \cdot \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2v}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от α и v .

Теорема 2.3. При условии теоремы 2 и $\frac{u-m^+}{\sigma} \geq 1$ справедливо неравенство

$$P \left(\max_{t \in T} |X(t)| > u \right) \leq$$

$$2CD^{v/\alpha} \prod_{i=1}^v T_i \cdot \left(\frac{u-m^+}{\sigma} \right)^{\frac{2v}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m^+)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где $m^+ = \sup_{t \in T} |EX(t)|$, C — положительная постоянная, зависящая только от α и v .

Пусть теперь $X(t), t \in T \subseteq R$ — сепарабельный гауссовский процесс со средним нуль и дисперсией единица, имеющий при всех t среднеквадратичную производную $X'(t)$. Будем употреблять обозначения

$$\rho(t, s) = \text{cov}(X(t), X(s)),$$

$$\beta(t) = \text{var} X'(t), B_T = \sup_{t \in T} \beta(t),$$

$$\alpha(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, s), \beta(s, t) = \frac{\partial^2 \rho(t, s)}{\partial t \partial s}.$$

По изложенным выше условиям траектории процесса $X(t)$ с вероятностью единица непрерывны и непрерывны $\alpha(t, s), \beta(t, s)$ [14]. Заметим, что $\beta(t) = \text{Var} X'(t) = \beta(t, t)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.4. Пусть $0 < B_T < \infty$ и при $i \neq j$ замкнутые интервалы I_i, I_j содержатся в T и не пересекаются. Тогда при $i \neq j$ и для всех $u \geq 1$

$$P \left(\max_{t \in I_i} X(t) > u, \max_{s \in I_j} X(s) > u \right) \leq$$

$$C \lambda(I_i) \lambda(I_j) \frac{B_T}{\bar{\sigma}_+^4} \cdot u \cdot \exp \left\{ -2u^2 / \bar{\sigma}_+^2 \right\},$$

где C — положительная абсолютная постоянная, $\lambda(I)$ — лебегова мера интервала I ,

$$\bar{\sigma}_+^2 = \bar{\sigma}_+^2(i, j) = 2 \sup_{t \in I_i, s \in I_j} (1 + \rho(t, s)),$$

$$\bar{\sigma}_+ = \bar{\sigma}_+(i, j) = 2 \inf_{t \in I_i, s \in I_j} (1 + \rho(t, s)).$$

Введем еще обозначения $\bar{\sigma}_-^2 = \bar{\sigma}_-^2(i, j) = 2 \sup_{t \in I_i, s \in I_j} (1 - \rho(t, s))$, $\bar{\sigma}_+^2 = \bar{\sigma}_+^2(i, j) = 2 \inf_{t \in I_i, s \in I_j} (1 - \rho(t, s))$. Тогда справедлива следующая

Теорема 2.5. При условиях теоремы 4 и для всех $u \geq 1$ справедливо неравенство

$$P \left(\max_{t \in I_i} X(t) > u, \max_{s \in I_j} (-X(s)) > u \right) \leq C \lambda(I_i) \cdot \lambda(I_j) \frac{B_T}{\bar{\sigma}_-^4} \exp \left\{ -\frac{2u^2}{\bar{\sigma}_-^2} \right\},$$

где C — положительная абсолютная постоянная, $\lambda(I)$ — лебегова мера интервала I .

Замечание 1. Основное неравенство В.И. Питербарга ([4], Лемма 6.4) имеет следующий вид:

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq C \prod_{i=1}^v T_i \cdot u^{\frac{2v}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где положительная константа C зависит от D, α, ν, T_0, m и σ . Согласно нашей теореме 2

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq C D^{v/\alpha} \prod_{i=1}^v T_i \cdot \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2v}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от α, ν и при $m = 0, \sigma = 1$, а также $C_1 = C D^{\frac{v}{\alpha}}$ получаем результат В.И. Питербарга [4], приведенный в лемме 6.3.

Замечание 2. В статистике задача построения доверительного интервала для неизвестной плотности распределения по простой выборке объема n приводится к нахождению распределения максимума гауссовского поля со средним нулем и ковариационной функцией $r_n(t)$, удовлетворяющей условию

$$r_n(t) = 1 - q_n \|t\|^\alpha (1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0,$$

где $q_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Например, для оценки Парзена-Розенблатта, сплайн-оценки [15] и для оценки, построенной с помощью системы тригонометрических функций [16] величина $q_n \sim C \cdot n^{2\delta}$, $0 < \delta < 1$. Естественно,

в этом случае леммы 6.3 и 6.4 из [4] применить нельзя, так как в этих леммах константа $C = C(\alpha, \nu, q_n)$. В этих задачах настоящие теоремы 1-5 дают ожидаемые результаты.

3 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Из полувывуклости функционала максимума следует, что

$$\max_{t \in T} X(t) \leq \max_{t \in T} (X(t) - m) + m. \quad (1)$$

Легко видеть, что

$$\max_{t \in T} (X(t) - m) = \max_{t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T} \left(X\left(\frac{t}{D^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - m \right),$$

где $D^{\frac{1}{\alpha}} T = [0, D^{\frac{1}{\alpha}} T_1] \times \dots \times [0, D^{\frac{1}{\alpha}} T_v]$.

Через $Y(t)$ обозначим величину $X\left(\frac{t}{D^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - m$, т.е.

$$Y(t) = \sigma^{-1} \left(X\left(\frac{t}{D^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - m \right), \quad t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq P \left(\max_{t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right). \quad (3)$$

Возможны следующие случаи: 1) $D^{\frac{1}{\alpha}} T \subseteq [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$; 2) для $i = i_1, i_2, \dots, i_k$ выполнено $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \geq \nu^{-\frac{1}{\alpha}}$, и $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \leq \nu^{-\frac{1}{\alpha}}$ для остальных $i = i_{k+1}, \dots, i_v$; 3) $D^{\frac{1}{\alpha}} T \supset [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$.

Сначала рассмотрим случай 1), т.е. $D^{\frac{1}{\alpha}} T \subseteq [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$. Кроме того, пусть для некоторого T_0 выполнены соотношения $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \geq T_0 / \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$ для всех $\frac{u-m}{\sigma} \geq 1$.

Заметим, что псевдометрика $d(t, s)$, порожденная гауссовским полем $Y(t), t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T$, имеет следующий вид: $d^2(t, s) = 2(1 - \rho(t, s)) = 2\|t - s\|^\alpha (1 - R(t - s))$, $\|t - s\| \rightarrow 0$. Следовательно, $1 - \rho(t) = \|t\|^\alpha (1 - R(t))$, $t \rightarrow 0$ где $R(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и $R(t)$ -равномерно непрерывна. Из соотношения $0 \leq 1 - \rho(t) \leq 2$ и из условия теоремы следует, что $-1 < R(t) < 1, \forall t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T \subseteq [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$. Очевидно, что $1 - \rho(t) \leq 2 \cdot \|t\|^\alpha, \forall t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T \subseteq [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$.

Далее, пусть $Y^*(t)$ — гауссовское однородное поле со средним m и ковариационной функцией $\rho^*(t) = 1 - 2\|t\|^\alpha$, когда $t \in \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} T$.

Учитывая однородность поля $Y^*(t)$ и применяя неравенство Д. Слепяна [12], получим, что

$$P\left(\max_{t \in D^{\frac{1}{\alpha}} T} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma}\right) \leq \left(2^{\frac{1}{\alpha}} + 1\right)^v P\left(\max_{t \in T^*} \tilde{Y}(t) > \frac{u-m}{\sigma}\right), \quad (4)$$

где $\tilde{Y}(t) = Y^*\left(\frac{t}{2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$, $T^* = D^{\frac{1}{\alpha}} T$. В силу определения $\tilde{Y}(t)$, псевдометрика, порожденная этим полем, определяется равенством $\tilde{d}^2(t, s) = 2\|t - s\|^\alpha$. При этих обозначениях ε -шар с центром в точке t имеет следующий вид:

$$B(t, \varepsilon) = \left\{ \theta : \|\theta - t\|^\alpha \leq \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}.$$

Минимальное количество ε -шаров, покрывающих ν -мерный параллелепипед $T^* = D^{\frac{1}{\alpha}} T$, будет не больше, чем число кубиков со сторонами $a = 2\nu^{-\frac{1}{\alpha}}(\varepsilon/\sqrt{2})^{\frac{2}{\alpha}}$, покрывающих T^* . Не нарушая общности можно считать, что радиусы описанных шаров на таких кубиках $r = \frac{a}{2} = \nu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}(\varepsilon/\sqrt{2})^{\frac{2}{\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Следовательно, мощность минимальной ε -сети $N(\varepsilon)$ параллелепипеда T^* в метрике $\tilde{d}$ удовлетворяет соотношению

$$N(\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^v \left[\frac{D^{\frac{1}{\alpha}} T_i}{2^{1-\frac{1}{\alpha}} \nu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{2}{\alpha}}} + 1 \right] \leq CD^{\frac{\nu}{\alpha}} \varepsilon^{-\frac{2\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i,$$

где $[x]$ — целая часть числа x , C — абсолютная постоянная, зависящая только от α и ν . Для соответствующей ε -энтропии справедливо неравенство

$$H(\varepsilon) \leq \frac{2\nu}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \left(D^{\frac{\nu}{\alpha}} \cdot \prod_{i=1}^v T_i \right). \quad (5)$$

Далее, $B(t, \delta)$ -шар радиуса δ содержится в кубе с центром в точке t и длиной стороны $a = 2\delta^{\frac{2}{\alpha}}$, так как максимальное значение каждого слагаемого $|\theta_1 - t_1|^\alpha + \dots + |\theta_\nu - t_\nu|^\alpha$ не больше, чем δ^2 , когда остальные слагаемые равняются нулю. По заданному $\varepsilon > 0$ ν -мерный куб со сторонами $a = 2\delta^{\frac{2}{\alpha}}$ разделим на кубики со сторонами $a_0 = 2\nu^{-\frac{1}{\alpha}}(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^{\frac{2}{\alpha}}$ и с центром в точке t , т.е. получаем кубики со сторонами $|\theta_i - t_i| \leq \nu^{-\frac{1}{\alpha}}(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^{\frac{2}{\alpha}}$, $i = 1, \dots, \nu$. Тогда минимальное количество ε -шаров, покрывающих

$B(t, \delta)$, удовлетворяет неравенству $N(t, \delta, \delta) \leq \left[2^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{\delta \nu^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{\alpha}} + 1 \right]^\nu \leq C_2 \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{2\nu}{\alpha}}$. Здесь и в дальнейшем $C_2, C_3, \dots$ положительные константы зависящие только от α и ν . Поэтому

$$H(t, \delta, \varepsilon) \leq \frac{2\nu}{\alpha} \log \frac{\delta}{\varepsilon} + C_3.$$

Теперь величину $\psi(\delta, \delta)$ оценим как в работе [4]. Интегрируя обе части последнего соотношения для достаточно малых δ , имеем

$$\psi(\delta, \delta) \leq \int_0^\delta \left(\frac{2\nu}{\alpha} \log \frac{\delta}{x} \right)^{\frac{1}{2}} dx + C_4 \delta$$

Применяя формулу замены переменной $0 \leq (t = \frac{\delta}{x})$ и неравенство

$$\log t < t, t \in [1, \infty),$$

находим, что

$$\psi(\delta, \delta) \leq C_5 \left(\frac{2\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \delta. \quad (6)$$

Выбирая δ равенством $\delta = \frac{\sigma C_6}{(u-m)}$ и учитывая (5) и (6), находим, что

$$\theta(u) \leq 2C_7^2 + 4\sqrt{2}C_8 \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}} + \log \frac{\sigma C_6}{u-m} + \frac{2\nu}{\alpha} \log \frac{u-m}{\sigma C_6} + \log \left(D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i \right) + \log C_9 \vee 0,$$

откуда, используя неравенство В.А. Дмитровского [10], получаем, что

$$P\left(\max_{t \in T^*} \tilde{Y}(t) > \frac{u-m}{\sigma}\right) \leq CD^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2\nu}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (7)$$

при 1) и $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \geq T_0 / \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$ и

$$\frac{u-m}{\sigma} \geq 1.$$

Пусть теперь $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \geq T_0 / \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$ для всех $\frac{u-m}{\sigma} \geq 1$. В этом случае $D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i \leq$

$T_0^v \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{-2\nu}{\alpha}}$. Учитывая это соотношение и выбирая

$$\delta = C_{10} \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{-(\frac{2\nu}{\alpha}-1)} D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i,$$

имеем, что $H(\delta) = 0$. В силу (6)

$$\begin{aligned} \theta(u) &\leq C_{11} + \log(D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i) - (\frac{2\nu}{\alpha}-1) \log \left(\frac{u-m}{\sigma} \right) \\ &\leq C_{11} + \log(D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i) + (\frac{2\nu}{\alpha}-1) \log \left(\frac{u-m}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Применяя опять неравенство В.А. Дмитровско-го и в этом случае получаем

$$\begin{aligned} P \left(\max_{t \in T} \tilde{Y}_n(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right) &\leq \\ C D^{\frac{\nu}{\alpha}} \prod_{i=1}^v T_i \left(\frac{u-m}{\sigma} \right)^{\frac{2\nu}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь константа C зависит только от α и ν . Тогда из (1)-(4), (7) и (8) вытекает доказательство теоремы 1 в случае 1), т.е. когда $D^{\frac{1}{\alpha}} T \subseteq [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$.

Пусть теперь выполнено 3), т.е. $D^{\frac{1}{\alpha}} T \supset [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu$. Тогда из однородности гауссовского поля $X(t)$ имеем, что

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq$$

$$\prod_{i=1}^v \left((D^{\frac{1}{\alpha}} T_i + 1) P \left(\max_{t \in [0,1]^\nu} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right) \right).$$

Далее, в силу соотношения

$$P \left(\max_{t \in [0,1]^\nu} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right) \leq$$

$$(\nu^{\frac{1}{\alpha}} + 1) P \left(\max_{t \in [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}]^\nu} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right)$$

доказательство сводится к случаю 1).

Пусть теперь выполнено 2), т.е. для $i = i_1, \dots, i_k$ $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \geq \nu^{-\frac{1}{\alpha}}$, а для остальных $i = i_{k+1}, \dots, i_v$ $D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \leq \nu^{-\frac{1}{\alpha}}$. В этом случае, учитывая однородность $X(t)$, получим

$$P \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right) \leq$$

$$\prod_{i=1}^{i_k} \left((D^{\frac{1}{\alpha}} T_i \nu^{\frac{1}{\alpha}} + 1) P \left(\max_{t \in \tilde{T}} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right) \right),$$

где $\tilde{T} = [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}] \times \dots \times [0, \nu^{-\frac{1}{\alpha}}] \times [0, D^{\frac{1}{\alpha}} T_{i_{k+1}}] \times \dots \times [0, D^{\frac{1}{\alpha}} T_{i_v}]$. Теперь вероятность $P \left(\max_{t \in \tilde{T}} Y(t) > \frac{u-m}{\sigma} \right)$ оценивается, как в случае 1).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 доказывается, как и лемма 6.4 из [4]. При этом вместо леммы 6.3 [4] используется теорема 1.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, что

$$\{ \max_{t \in T} |X_n(t)| > u \} =$$

$$\{ \max_{t \in T} X(t) > u \} \cup \{ \max_{t \in T} (-X(t)) > u \}.$$

В силу полуаддитивности вероятностей меры и симметричности распределения гауссовского поля получаем, что

$$P(\max_{t \in T} |X(t)| > u) \leq 2P(\max_{t \in T} X(t) > u).$$

Теперь доказательство теоремы вытекает из теоремы 2.

Доказательство теоремы 4. Легко получим, что

$$\begin{aligned} &\left\{ \max_{t \in I_i} X(t) > u, \max_{s \in I_j} X(s) > u \right\} \\ &\subseteq \left\{ \max_{t \in I_i, s \in I_j} (X(t) + X(s)) > 2u \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$P \left(\max_{t \in I_i} X(t) > u, \max_{s \in I_j} X(s) > u \right) \leq$$

$$P \left(\max_{t \in I_i, s \in I_j} (X(t) + X(s)) > 2u \right). \quad (9)$$

Из гауссовости случайного процесса $X(t)$, $t \in T$ следует, что $\Delta X(t, s) = X(t) + X(s)$ — также гауссовское поле со средним нуль и дисперсией $\sigma^2(t, s) = 2(1 + \rho(t, s))$, $t, s \in T$.

Определим гауссовское поле $Y(t_1, t_2)$, $t_1 \in I_i, t_2 \in I_j, i \neq j$ соотношением

$$Y(t_1, t_2) = \Delta X(t_1, t_2) / \sigma(t_1, t_2).$$

Тогда $EY(t_1, t_2) = 0$, $\text{var} Y(t_1, t_2) = 1$ и квадрат псевдо-метрики

$$E(Y(t_1, t_2) - Y(s_1, s_2))^2 =$$

$$\begin{aligned}
 & E \left(\frac{\Delta X(t_1, t_2)}{\sigma(t_1, t_2)} - \frac{\Delta X(s_1, s_2)}{\sigma(s_1, s_2)} \right)^2 \leq \\
 & \leq 2E(\Delta X(t_1, t_2) - \Delta X(s_1, s_2))^2 / \sigma^2(t_1, t_2) + \\
 & + 2E \left(\frac{\Delta X(s_1, s_2) (\sigma^2(s_1, s_2) - \sigma^2(t_1, t_2))}{\sigma(s_1, s_1) \sigma(s_1, s_2) (\sigma(t_1, t_2) + \sigma(s_1, s_2))} \right)^2 \\
 & \quad 4(E(X(t_1) - X(s_1))^2 + \\
 & \quad E(X(t_2) - X(s_2))^2) / \sigma^2(t_1, t_2) + \\
 & + 4E \left(\frac{\rho(s_1, s_2) - \rho(t_1, t_2)}{\sigma(t_1, t_2) (\sigma(t_1, t_2) + \sigma(s_1, s_2))} \right)^2 \leq \\
 & \quad 4((t_1 - s_1)^2 B_T + (t_2 - s_2) B_T) / \bar{\sigma}_+^2 + \\
 & + 2((t_1 - s_1)^2 B_T + (t_2 - s_2)^2 B_T) / \bar{\sigma}_+^4 \leq \\
 & \quad 18((t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2) B_T / \bar{\sigma}_+^4. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Теперь из (9), (10) и теоремы 2 вытекает доказательство теоремы 4.

Теорема 5 доказывается методами, аналогичными примененным в теореме 4.

Список использованной литературы

1. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выборки траекторий случайных процессов. – М.: Наука, 1987.
2. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь. – 1991. – 608 с.
3. Rice S.O. Mathematical analysis of random noise// Bell. Syst. Tesh. T., – 1944, 1945, – V. 23, p 282-332, – V. 24. – P. 409-416.
4. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. – М.: МГУ. – 1988. – 175с.
5. Питербарг В.И. Метод райса для гауссовских случайных полей// Фундаментальная и прикладная математика – 1996. – №2. – С. 187-204.
6. Muminov M.S. The higher order moments of the number of crossing of a level by Gaussian process// JSTA – 2004. – v.3, №4. – P. 307-314.
7. Muminov M.S. On asymptotical distribution of maximum of the Nonstationary Gaussian processes// JAPS (to appear).
8. Duddley R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes// J. Funct. Analysis – 1967. – №1. – P. 290-330.
9. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений// Труды МИАН СССР им В.А. Стеклова, CXLI. Ленинград. "Наука". – 1976.
10. Дмитриевский В.А. Оценки распределения максимума гансовского поля. Случайные процессы и поля. – М.: МГУ. – 1979. – С. 22-31.
11. Михалева Т.Л., Питербарг В.И. О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии// Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – 41, №2. С. 438- 451.
12. Piterbarg, V., Stamatovich S. On maximum of Gaussian non-centered fields indexed on smooth manifolds// Asymptotic methods in probability and statistics with applications. N.Balakrisnan, I.A.Ibragimov, V.B.Nevzorov editors, Boston-Basel-Berlin, 2001, p.189-203.
13. Chan H.P., Lai T.L. Maxima of asymptotically Gaussian random fields and moderate deviation appoximatoin to boundary crossing probabilities of sums of random variables with multidimensional indices// Ann. Probab. – 2006. – v.34, No 1. – P.80-121.
14. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука. 1977. – 567 с.
15. Муминов М.С. О статистическом оценивании плотности распределения сплайн-функциями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Ташкент. 1985. – 110 с.
16. Muminov M.S. Estimation of convergence rate of distribution of maximal deviation of empirical density and curve regression// Proc. of sixth Int. Conf. Computer Intensive Methods, Minsk, Belarus, – 2001, v.3. – p. 63-70.

Надійшла до редколегії 7.10.2010

УДК 519.21

О.В.Полосьмак, к. ф.-м. н.

Оцінювання коваріаційних функцій гауссових випадкових процесів за допомогою вейвлет розкладів

Запропоновано метод оцінювання коваріаційних функцій гауссових випадкових процесів за допомогою вейвлет розкладів та вивчено властивості цих оцінок за допомогою вейвлет розкладів випадкових процесів з простору Орліча експоненціального типу.

Ключові слова: випадковий процес, вейвлет-розклад, оцінювання коваріаційних функцій.

olgapolosmak@yandex.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Методи, основані на вейвлетах, розвиваються в таких напрямках статистики, як регресійний аналіз, оцінювання щільностей та функцій розподілу випадкових величин, факторний аналіз, моделювання та прогнозування, в просторовій статистиці. При розв'язанні багатьох задач виявляється, що деякі методи, основані на теорії вейвлетів є більш ефективними, ніж інші засоби теорії ймовірностей.

В даній роботі запропоновано метод оцінювання коваріаційних функцій гауссових випадкових процесів за допомогою вейвлет розкладів та вивчено властивості цих оцінок.

Робота складається з чотирьох розділів. В другому розділі наведено необхідні відомості з вейвлет аналізу та метод оцінювання коваріаційних функцій випадкових процесів за допомогою вейвлет розкладів. В третьому розділі наведено формулювання теорем про умови та швидкість рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет розкладів випадкових процесів з простору Орліча експоненціального типу. В четвертому розділі доведено теорему, в якій одержано оцінку для ймовірності того, що $\sup_{t \in T} |r(t) - \hat{r}(t)| > x$, де $r(t)$ – коваріаційна функція гауссового випадкового процесу, $\hat{r}(t)$ – оцінка коваріаційної функції.

O.V. Polosmak, PhD.

Estimation of covariance function of Gaussian random processes using wavelet expansions

In this paper estimator of covariance function of Gaussian random processes using wavelet expansions and properties of this estimators are studied by means of wavelet expansions for stochastic processes from Orlicz spaces of exponential type.

Key Words: random process; wavelet representation; estimator of covariance function.

2 Вейвлет-зображення коваріаційних функцій випадкових процесів

Нехай $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – функції з простору $L_2(\mathbb{R})$ та $\hat{\phi}(y)$ – перетворення Фур'є ϕ :

$$\hat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \phi(x) dx. \quad (1)$$

Припустимо, що виконується така умова:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(y + 2\pi k)|^2 = 1$$

майже скрізь.

Нехай існує така 2π -періодична функція $m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$, що:

$$\hat{\phi}(y) = m_0[y/2] \hat{\phi}[y/2],$$

$\hat{\phi}(0) \neq 0$, та функція $\hat{\phi}(y)$ неперервна в 0. В цьому випадку функція $\phi(x)$ називається f -вейвлетом.

Нехай $\psi(x)$ – обернене перетворення Фур'є до функції:

$$\hat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \cdot \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \cdot \hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{\psi}(y) dy$$

називається m -вейвлетом.

Позначимо:

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k);$$

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Будь-яка функція $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ може бути представлена у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x), \quad (2)$$

$$\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0k}(x)} dx, \beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{jk}(x)} dx.$$

Зображення (2) називається вейвлет-розкладом функції f .

Означення 2.1. [2] Нехай ϕ – це f -вейвлет. Для ϕ виконується припущення S , якщо існує функція $\Phi = \{\Phi(x), x \geq 0\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ спадає при $x \geq 0$, $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$ майже скрізь та

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) dx < \infty.$$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ – стандартний ймовірнісний простір. Розглянемо дійсний, центрований, стаціонарний в широкому розумінні випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ з неперервною коваріаційною функцією $r(\tau)$. Розглянемо вейвлет-розклад коваріаційної функції:

$$r(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{0k} \phi_{0k}(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk} \psi_{jk}(\tau),$$

де

$$\begin{aligned} \xi_{0k} &= \int_{\mathbb{R}} r(\tau) \overline{\phi_{0k}(\tau)} d\tau, \\ \eta_{jk} &= \int_{\mathbb{R}} r(\tau) \overline{\psi_{jk}(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

За оцінку коваріаційної функції візьмемо наступну функцію:

$$\hat{r}(\tau) = \sum_{|k| \leq k_0} \hat{\xi}_{0k} \phi_{0k}(\tau) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} \hat{\eta}_{jk} \psi_{jk}(\tau),$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{0k} &= \int_{-A}^A \hat{r}_T(\tau) \overline{\phi_{0k}(\tau)} d\tau, \\ \hat{\eta}_{jk} &= \int_{-A}^A \hat{r}_T(\tau) \overline{\psi_{jk}(\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\hat{r}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t + \tau) X(t) dt.$$

При доведенні основної теореми знадобиться лема 2 з роботи [6], в якій одержано нерівності для коефіцієнтів ξ_{0k} , η_{jk} та їх оцінок. Формулювання цієї леми наведено нижче.

Лема 1. Нехай коефіцієнти ξ_{0k} , η_{jk} задані формулами (3), а їхні оцінки $\hat{\xi}_{0k}$, $\hat{\eta}_{jk}$ задані формулами (4). Нехай

$$\int_0^{\infty} r^2(\tau) d\tau < \infty.$$

Нехай T настільки велике, що:

$$\frac{1}{T} \sup_{|\tau| \leq A} \int_0^T (r^2(u) + r(u - \tau) r(u + \tau)) du < \delta.$$

Оберемо A так, щоб:

$$\int_{|\tau| > A} r^2(\tau) d\tau < \varepsilon.$$

Тоді справедливі такі оцінки:

$$\begin{aligned} E(\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k})^2 &\leq 2A\delta + \varepsilon, \\ E(\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk})^2 &\leq 2A\delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

3 Умови та швидкість збіжності вейвлет-зображень процесів з простору Орліча експоненціального типу.

В даному розділі наведено дві теореми, при доведенні яких було отримано нерівності, необхідні при оцінюванні коваріаційних функцій гауссових випадкових процесів.

Означення 3.1. [1] Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C -функцією, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{L}, P\}$ – стандартний ймовірнісний простір.

Означення 3.2. [1] Нехай $U(x)$ – довільна C -функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називаємо таку сім'ю випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$ така, що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Означення 3.3. [1] Простір $L_U(\Omega)$ називається простором Орліча експоненціального типу, якщо він породжується функцією вигляду $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$ – деяка S -функція. Згідно з [1] простори Орліча експоненціального типу позначатимемо $\text{Exp}_\varphi(\Omega)$, а норму в цьому просторі – $\|\cdot\|_{\text{Exp}_\varphi}$.

Означення 3.4. [1] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$.

Означення 3.5. [10] Випадковий процес $X(t) \in L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо існує константа C_T , така що для будь-яких $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ та $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення $\|\sum_{k=1}^n c_k X(t_k)\|_U < C_T \sqrt{E \sum_{k=1}^n c_k X(t_k)}$.

Далі буде наведено теорему, в якій одержано умови, за яких має місце рівномірна збіжність за ймовірністю на $[0, T]$ вейвлет-розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу. З доведенням цієї теореми можна ознайомитись в роботі [5] (теорема 4.1).

Теорема 3.1. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго Орлічевий випадковий процес із простору $\text{Exp}_\varphi(\Omega)$ з неперервною коваріаційною функцією $R(t, s)$. Нехай для f -вейвлета ϕ та m -вейвлета ψ , відповідного до ϕ , виконуються наступні умови:

- 1) $\exists \hat{\psi}'(u), \hat{\psi}''(u), \hat{\psi}(0) = 0, \hat{\psi}'(0) = 0;$
- 2) $\exists c_\phi = \sup_u |\hat{\phi}(u)| < \infty,$
 $c_{\phi'} = \sup_u |\hat{\phi}'(u)| < \infty,$
 $c_{\psi''} = \sup_u |\hat{\psi}''(u)| < \infty;$
- 3) $\hat{\phi}(u) \rightarrow 0, u \rightarrow \pm\infty, \hat{\psi}(u) \rightarrow 0, u \rightarrow \pm\infty;$
- 4) $\exists \int_{\mathbb{R}} (\ln(1 + |u|))^\alpha |\hat{\psi}(u)|^\beta du < \infty,$
 $\int_{\mathbb{R}} (\ln(1 + |u|))^\alpha |\hat{\phi}(u)|^\beta du < \infty,$
 $0 < \beta \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1;$
- 5) $\exists \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k+l} \hat{R}_2(z, w)}{\partial w \partial z} \right| |w|^t |z|^s dw dz < \infty,$
 $k, l = 0, 1; t, s = 0, 2;$

$$6) |\hat{R}_2(t, s)| < c < \infty.$$

Тоді $X_{n, k_j}(t) \rightarrow X(t)$ при $n \rightarrow \infty, k_j \rightarrow \infty, \forall j = 0, 1, \dots$ рівномірно за ймовірністю на кожному інтервалі $[0, T]$.

Наступна теорема дає швидкість рівномірної збіжності за ймовірністю на $[0, T]$ вейвлет-розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу. З доведенням цієї теореми можна ознайомитись в роботі [8] (теорема 3).

Теорема 3.2. Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $\text{Exp}_\varphi(\Omega)$. Нехай виконуються умови теореми 3.1 та для всіх $\varepsilon > 0$ збігається інтеграл

$$\int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\left(\frac{c}{t} \right)^{1/\alpha} \right) dt < \infty.$$

Тоді

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - X_{n, k_j}(t)| > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{\varepsilon}{D_\varphi(t_0)} \right) \right\},$$

де

$$D_\varphi(t_0) = B_{n, k_j} + \frac{\exp\{\varphi(2)\} \varphi^{(-1)}(\ln T)}{\theta(1 - \theta)} \times \int_0^{\frac{\varepsilon \theta}{\alpha}} \varphi^{(-1)} \left(\left(\frac{\tilde{c}}{t} \right)^{1/\alpha} \right) dt,$$

$B_{n, k_j}, \tilde{c}$ – константи, що прямують до 0 за умови, що $n, k_j \rightarrow \infty$.

4 Оцінювання коваріаційних функцій за допомогою вейвлет-розкладів.

Наведемо теорему, яка буде використана при отриманні основного результату цієї роботи. Доведення теореми міститься в монографії [4] Ю. В. Козаченка, А. О. Пашка, І. В. Розори.

Теорема 4.1. [4] Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес, для якого виконується умова:

$$\sup_{\rho(t, s) \leq h} \|X(t) - X(s)\| \leq \sigma(h),$$

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|} \right) \right)^\alpha}, \quad (5)$$

де $\alpha > 0, C > 0$. Якщо для $x > 0$, цілого $M > 1$,

$$x > \frac{\sqrt{2}\gamma_0 M \ln(e^\alpha + \frac{2}{T})}{\alpha - 1} \\ \times \max \left\{ 1; \left(\frac{C}{\left(\gamma_0 \ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}) \right)^\alpha} \right)^{\frac{M+\alpha}{\alpha(M-1)}} \right\},$$

то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > x \right\} \leq K_{\alpha,1} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{2}\gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{2}\gamma_0} + K_{\alpha,1}^M \cdot x^{\frac{M}{M+\alpha}} \right\},$$

де $K_{\alpha,1} = 2D^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$,

$$K_{\alpha,1}^M = (M + \alpha) \cdot (\sqrt{2}\gamma_0 M)^{-\frac{M}{M+\alpha}} \\ \times \left(\frac{\ln(e^\alpha + \frac{2}{T})}{\alpha - 1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+M}},$$

$$D = \max \left\{ e^{-\alpha}, \frac{2}{T} \right\}, \quad \gamma_0 = \sup_{t \in T} \|X(t)\|.$$

Сформулюємо та доведемо основну теорему цієї роботи для коваріаційної функції гауссового випадкового процесу:

Теорема 4.2. Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – сепарабельний гауссовий випадковий процес, $r(\tau) = EX(t+\tau)X(t)$. Нехай виконуються умови лемми 1 та теореми 3.2. Якщо для $x > 0$, цілого $M > 1$, має місце нерівність

$$x > \frac{\sqrt{2}\gamma_{n,k_j} M \ln(e^\alpha + \frac{2}{T})}{\alpha - 1} \\ \times \max \left\{ 1; \left(\frac{C_{n,k_j}}{\left(\gamma_{n,k_j} \ln(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}) \right)^\alpha} \right)^{\frac{M+\alpha}{\alpha(M-1)}} \right\},$$

то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} |r(t) - \hat{r}(t)| > x \right\} \leq K_{\alpha,1} \left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\gamma_{n,k_j}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{2}\gamma_{n,k_j}} + K_{\alpha,1}^M \cdot x^{\frac{M}{M+\alpha}} \right\},$$

де $K_{\alpha,1} = 2D^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$,

$$K_{\alpha,1}^M = (M + \alpha) \cdot (\sqrt{2}\gamma_{n,k_j} M)^{-\frac{M}{M+\alpha}} \\ \times \left(\frac{\ln(e^\alpha + \frac{2}{T})}{\alpha - 1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+M}},$$

$$D = \max \left\{ e^{-\alpha}, \frac{2}{T} \right\},$$

C_{n,k_j} визначено формулою (8), γ_{n,k_j} визначено формулою (9).

Зауваження 1. Відмітимо, що C_{n,k_j} та γ_{n,k_j} прямує до нуля, за умови, що n та k_j прямує до нескінченності. Таким чином, збіжність в теоремі зі швидкістю, обмеженою $\exp \left\{ -\frac{\text{const}}{\gamma_{n,k_j}} \right\} \gamma_{n,k_j}^{-1/2}$.

Доведення. При доведенні теореми будемо мати справу з процесом, що має вигляд $X(t) = r(t) - \hat{r}(t)$, який належить до класу Орлічевих випадкових процесів експоненціального типу, адже є квадратично-гауссовим. Спочатку перевіримо виконання умови (5):

$$\begin{aligned} & (E|r(t) - \hat{r}(t) - (r(s) - \hat{r}(s))|^2)^{1/2} \\ & \leq \left(E \left| \sum_{|k| \leq k_0} (\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k})(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)) \right. \right. \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} (\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk})(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)) \\ & \quad + \sum_{|k| > k_0} \xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)) \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| > k_j} \eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)) \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)) \right|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \sum_{|k| \leq k_0} (E|(\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k})(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s))|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} (E|(\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk})(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{|k| > k_0} (E|\xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s))|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| > k_j} (E|\eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (E|\eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

За лемою 1

$$\begin{aligned} E(\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k})^2 & \leq 2A\delta + \varepsilon, \\ E(\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk})^2 & \leq 2A\delta + \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

де T вибирається настільки велике, що

$$\frac{1}{T} \sup_{|\tau| \leq A} \left(\int_0^T (r^2(u) + r(u-\tau)r(u+\tau)) du \right) \leq \delta,$$

де A таке, що

$$\int_{|\tau| > A} (r^2(\tau)) d\tau \leq \varepsilon.$$

Враховуючи оцінки, одержані в роботі [5], маємо:

$$|\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s)|^2 \leq \frac{2^{j(1+2\beta)} j^{2\alpha}}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^{2\alpha}} \cdot \frac{(c_\psi)^2}{|k|^{2\beta}},$$

$$|\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s)|^2 \leq \frac{1}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^{2\alpha}} \cdot \frac{(c_\phi)^2}{|k|^{2\beta}}.$$

Скориставшись нерівностями, одержаними в роботі [8], маємо:

$$\sum_{|k| > k_0} (E|\xi_{0k}(\phi_{0k}(t) - \phi_{0k}(s))|^2)^{1/2} \leq \frac{c_{\beta,\phi}}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{k_0^\beta},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| > k_j} (E|\eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2)^{1/2} \leq \frac{c_{\beta,\psi}}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{k_j^\beta},$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (E|\eta_{jk}(\psi_{jk}(t) - \psi_{jk}(s))|^2)^{1/2} \leq \frac{c_{\beta,\psi}^1}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{n}.$$

Перші два доданки нерівності (6) можуть бути оцінені наступним чином:

$$\sum_{|k| \leq k_0} (2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \frac{c_\phi}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{|k|^\beta} \leq (2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \frac{c_\phi \cdot (2^{1-\beta} k_0 + 2)}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} (2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \frac{2^{j(\frac{1}{2}+\beta)} j^\alpha}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha} \cdot \frac{c_\psi}{|k|^\beta} \leq (2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \frac{c_\psi \cdot (2^{1-\beta} k_j + 2) \cdot n^\alpha \cdot 2^{n(\frac{1}{2}+\beta)}}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & (E|r(t) - \hat{r}(t) - (r(s) - \hat{r}(s))|^2)^{1/2} \\ & \leq \left[(2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \left(c_\phi \cdot (2^{1-\beta} k_0 + 2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + c_\psi \cdot (2^{1-\beta} k_j + 2) \cdot n^\alpha 2^{n(\frac{1}{2}+\beta)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{c_{\beta,\phi}}{k_0^\beta} + \frac{c_{\beta,\psi}}{k_j^\beta} + \frac{c_{\beta,\psi}^1}{n} \right] \cdot \frac{1}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha}. \end{aligned}$$

Отже, дійсно

$$\begin{aligned} & (E|r(t) - \hat{r}(t) - (r(s) - \hat{r}(s))|^2)^{1/2} \\ & \leq \frac{C_{n,k_j}}{\left(\ln \left(e^\alpha + \frac{1}{|t-s|}\right)\right)^\alpha}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} C_{n,k_j} &= \frac{c_{\beta,\phi}}{k_0^\beta} + \frac{c_{\beta,\psi}}{k_j^\beta} + \frac{c_{\beta,\psi}^1}{n} \\ &+ (2A\delta + \varepsilon)^{1/2} \left(c_\phi \cdot (2^{1-\beta} k_0 + 2) \right. \\ &\quad \left. + c_\psi \cdot (2^{1-\beta} k_j + 2) \cdot n^\alpha 2^{n(\frac{1}{2}+\beta)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Розглянемо тепер

$$\begin{aligned} & (E|\tau(t) - \hat{\tau}(t)|^2)^{1/2} \\ & \leq \sum_{|k| \leq k_0} (E|(\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k})\phi_{0k}(t)|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} (E|(\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk})\psi_{jk}(t)|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{|k| > k_0} (E|\xi_{0k}\phi_{0k}(t)|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| > k_j} (E|\eta_{jk}\psi_{jk}(t)|^2)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (E|\eta_{jk}\psi_{jk}(t)|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Останні три доданки оцінені в роботі [8] за допомогою B_{n,k_j} , визначеною за формулою

$$B_{n,k_j} = \frac{2(A^\phi)^{1/2} B_1^\phi}{k_0} + 2(A^\psi)^{1/2} B_1^\psi \left(\frac{1}{k_j} + \frac{\bar{q}}{2^{n/2}} \right).$$

отже, треба оцінити перші два доданки:

$$\begin{aligned} & \sum_{|k| \leq k_0} \left(E |(\xi_{0k} - \hat{\xi}_{0k}) \phi_{0k}(t)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \sum_{|k| \leq k_0} (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{B_1^\phi}{|k|} \\ & \leq (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot B_1^\phi \cdot (k_0 + 2), \\ & \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} \left(E |(\eta_{jk} - \hat{\eta}_{jk}) \psi_{jk}(t)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq k_j} (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2^j B_1^\psi}{|k|} \\ & \leq (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot B_1^\psi \cdot (k_j + 2) 2^n. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} & (E |r(t) - \hat{r}(t)|^2)^{1/2} \\ & \leq \frac{2(A^\phi)^{\frac{1}{2}} B_1^\phi}{k_0} + 2(A^\psi)^{\frac{1}{2}} B_1^\psi \left(\frac{1}{k_j} + \frac{\bar{q}}{2^{n/2}} \right) \\ & + (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(B_1^\phi \cdot (k_0 + 2) + B_1^\psi (k_j + 2) 2^n \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \sup_{t \in T} \|X(t)\| &= \frac{2(A^\phi)^{\frac{1}{2}} B_1^\phi}{k_0} + (2A\delta + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(B_1^\phi \cdot (k_0 + 2) + B_1^\psi (k_j + 2) 2^n \right) \\ & + 2(A^\psi)^{\frac{1}{2}} B_1^\psi \left(\frac{1}{k_j} + \frac{\bar{q}}{2^{n/2}} \right) =: \gamma_{n,k_j}. \end{aligned} \quad (9)$$

□

Висновок

В даній роботі проведено дослідження властивостей оцінок коваріаційних функцій гауссових випадкових процесів за допомогою вейвлет-розкладів (використано факти, отримані при доведенні теорем про умови та швидкість рівномірної збіжності вейвлет-розкладів випадкових процесів з простору Орліча експоненціального типу).

Список використаних джерел

1. V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. Metric characterization of random variables and random processes// American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

2. W. Hardle, G. Kerkycharian, D. Picard, A. Tsybakov. Wavelet. Approximation and statistical applications// Springer, New York, 1998.
3. Yu.V. Kozachenko, A.Ya. Olenko, O.V. Polosmak. Uniform convergence of wavelet expansions of Gaussian random processes// Stochastic Analysis and Applications - 2011. - Vol. 29. - P. 169-184.
4. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, І. В. Розора. Моделювання випадкових процесів та полів//К.: ВПЦ -Задруга-, 2007. - 230 с.
5. Ю.В. Козаченко, О.В. Полосьмак. Умови рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет розкладів випадкових процесів з $Exp_\varphi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та мат. статистика. - 2009. - 81. - С. 76-87.
6. О.В. Діденко. (О.В. Полосьмак) Оцінювання коваріаційної функції випадкового процесу за допомогою вейвлет розкладів// Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. - 2006. - №1-2. - С. 101-106.
7. О.В. Полосьмак. Умови та швидкість рівномірної збіжності розкладів процесів з $L_2(\Omega)$ по вейвлетам Баттл-Лемарі// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2009. - 3. - С. 36-41.
8. О.В. Полосьмак. Швидкість рівномірної збіжності вейвлет розкладів процесів з простору Орліча експоненціального типу// Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. - 2009. - 18. - С. 121-132.
9. Yu.V. Kozachenko, O.V. Polosmak. Uniform convergence in probability of wavelet expansions of random processes from $L_2(\Omega)$ // Random oper. and stochastics equ. (ROSE) - 2008. - Vol. 16. - P. 325-355.
10. E. Barrasa de le Krus, Yu. V. Kozachenko. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with stricly Orlicz random initial conditions// Random operators and stochastic equations. - 1995. - 3, №3 - С. 201-220.

Надійшла до редакції 17.01.2011 р.

УДК 512.544

А.А. Пыпка, аспирант,
Н.Н. Семко (младший)

Группы, имеющие только два типа пронормальных подгрупп

Вивчаються деякі типи нескінченних груп, у яких усі пронормальні підгрупи або нормальні, або абнормальні.

Ключові слова: група, нормальна підгрупа, абнормальна підгрупа, пронормальна підгрупа.

A.A. Pypka, PhD student,
N.N. Semko (younger)

Groups having only two types of pronormal subgroup

We study some types of infinite groups in which all pronormal subgroups are either normal or abnormal.

Key Words: groups, normal subgroups, abnormal subgroups, pronormal subgroups.

E-mail: n_semko@mail.ru

Статью представил д. ф.-м. наук, профессор Кириченко В.В.

Введение

Подгруппа H группы G называется *абнормальной* в G , если $g \in \langle H, H^g \rangle$ для всякого элемента $g \in G$. Абнормальные подгруппы были введены Ф. Холлом в работе [1], а сам термин "абнормальная подгруппа" принадлежит Р. Картеру [2]. Абнормальные подгруппы являются антиподами нормальных подгрупп и их обобщений (абнормальная подгруппа может быть нормальной лишь тогда, когда она совпадает со всей группой). Так, например, абнормальная подгруппа H всегда самонормализуема, $H = N_G(H)$, и является контранормальной, т.е. $H^G = G$. Подгруппы такого рода играют достаточно серьезную роль в теории конечных групп. Весьма широким обобщением абнормальных подгрупп являются пронормальные подгруппы. Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G , если для каждого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Пронормальные подгруппы также были введены в рассмотрение Ф. Холлом. Важными примерами пронормальных подгрупп являются силовские p -подгруппы конечных групп, силовские p -подгруппы конечных разрешимых групп, картеровы подгруппы конечных разрешимых групп и др. Если абнормальные подгруппы являются антиподами нормальных подгрупп, то пронормальные подгруппы могут быть нормальными. Более того, каждая подгруппа,

которая одновременно пронормальна и субнормальна, будет нормальной. В бесконечных группах исследования пронормальных и связанных с ними подгрупп были начаты в обзоре М.С. Ба и З.И. Боревица [3] и работах Н.Ф. Кузенного и И.Я. Субботина [4 – 7]. Эти работы стимулировали дальнейший интерес к исследованиям пронормальных и связанных с ними подгрупп, а также их связей. Некоторый обзор этих исследований был дан в статье [8].

Как уже отмечалось, нормальные и абнормальные подгруппы представляют собой два крайних полюса в семействе всех пронормальных подгрупп. Поэтому естественно возникает вопрос о строении групп, всякая пронормальная подгруппа которых является подгруппой одного из этих двух типов. В данной работе начинается изучение некоторых бесконечных групп с этим свойством. Изучение этих групп проводится в статье при некоторых естественных ограничениях. Это связано с тем обстоятельством, что в бесконечных группах практически нет хороших критериев пронормальности и абнормальности.

В данной работе детально описано строение периодических почти локально нильпотентных групп, всякая пронормальная подгруппа которых либо нормальна, либо абнормальна, а затем найдены некоторые типы групп, которые при указанном ограничении будут почти локально нильпотентными.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Лемма. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если L – нормальная подгруппа G , то всякая пронормальная подгруппа G/L либо нормальна, либо абнормальна.

Доказательство. Пусть H/L – пронормальная подгруппа G/L . Но тогда подгруппа H является пронормальной в G (см., например, [3, § 8, теорема 9]). Но тогда либо H нормальна в G , либо H будет абнормальной. В первом случае H/L будет нормальной, а во втором – абнормальной в G/L .

1.2. Лемма. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если собственная нормальная подгруппа L группы G включает в себя подгруппу K , которая пронормальна в G , то K будет нормальной подгруппой в G .

Доказательство. Напомним, что всякая пронормальная подгруппа обладает свойством Фраттини (см., например, [3, § 8, теорема 3]). Таким образом, имеем тогда $G = L N_G(K)$. Если допустить, что K – абнормальна, то она самонормализуема, так что будем иметь $G = LK = L$, а это противоречит тому факту, что L – собственная подгруппа. Полученное противоречие показывает, что K – нормальна в G .

1.3. Следствие. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Предположим, что L – такая собственная нормальная подгруппа G , что силовские p -подгруппы любой подгруппы из L сопряжены, где p – простое число. Тогда L имеет единственную силовскую p -подгруппу, которая нормальна в G .

Доказательство. Пусть P – некоторая силовская p -подгруппа L . Из условий данного следствия получаем тогда, что P – пронормальна в G . Тогда лемма 1.2 показывает, что P – нормальна в G .

1.4. Следствие. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если L – конечная собственная нормальная подгруппа G , то L – нильпотентна.

Из леммы 1.1 и следствия 1.4 непосредственно получаем

1.5. Следствие. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если U, V – такие нормальные подгруппы G , что $U \leq V \neq G$ и V/U – конечна, то V/U – нильпотентна.

1.6. Следствие. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если L – собственная локально конечная нормальная подгруппа G , всякая силовская p -подгруппа которой конечна для некоторого простого числа p , то L имеет единственную силовскую p -подгруппу, которая нормальна в G .

Доказательство. В самом деле, тот факт, что силовские p -подгруппы L конечны, влечет конечность силовских p -подгрупп в любой подгруппе из L , а это, в свою очередь влечет их сопряженность в указанной подгруппе. Остается теперь использовать следствие 1.3.

1.7. Следствие. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна и пусть L – ее собственная периодическая нормальная подгруппа. Если L – почти локально нильпотентна, то она локально нильпотентна.

Доказательство. Пусть D – произвольная подгруппа L . Тогда D включает в себя такую нормальную локально нильпотентную подгруппу K , что D/K – конечна. Пусть $p \in \Pi(D)$ и обозначим через P силовскую p -подгруппу D . Пусть, далее, S – единственная силовская p -подгруппа K . Тогда S – D -инвариантна, в частности, SP будет p -подгруппой. Ввиду выбора P будем иметь $P = SP$ или $S \leq P$. Отсюда вытекает, что $P \cap K = S$. Так как S – нормальная p -подгруппа D , то P/S будет силовской p -подгруппой в D/S . Ввиду выбора $S, p \in \Pi(K/S)$. Отсюда вытекает конечность силовских p -подгрупп D/S . В свою очередь, это влечет за собой их сопряженность. Поскольку S – нормальная p -подгруппа, то силовские p -подгруппы D сопряжены. Используя следствие 1.3, получим, что L имеет единственную силовскую p -подгруппу. Отметим в заключение, что это верно для любого $p \in \Pi(L)$, а это означает, что L – локально нильпотентна.

1.8. Лемма. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна

или абнормальна. Если L – ее нормальная подгруппа конечного индекса, то фактор-группа G/L – разрешима.

Доказательство. Пусть S/L – разрешимый радикал фактор-группы G/L и предположим, что $S \neq G$. Тогда G/S не включает в себя неединичных нормальных разрешимых подгрупп. Пусть $p \in \Pi(G/S)$ и пусть P/S – силовская p -подгруппа G/S . Будучи нильпотентной, P/S не может быть нормальной ввиду выбора S . С другой стороны, P/S – пронормальна в G/S , и из леммы 1.1 получаем, что она абнормальна, а это влечет за собой равенство $P/S = N_{G/S}(P/S)$ (см., например, [3, § 6, теорема 1]). В частности, подгруппа $N_{G/S}(P/S)$ будет p -нильпотентной. Поскольку это имеет место для любого простого $p \in \Pi(G/S)$, то фактор-группа G/S – нильпотентна [9, теорема 2]. Полученное противоречие доказывает равенство $G/L = S/L$.

2. СТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП, ПРОНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ЛИБО НОРМАЛЬНЫ, ЛИБО АБНОРМАЛЬНЫ

2.1. Теорема. Пусть G – периодическая группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если G – почти локально нильпотентная группа, то либо она локально нильпотентна, либо G удовлетворяет следующим условиям:

(i) $G = Q \rtimes P$, где P – силовская p -подгруппа G , а Q – ее силовская p' -подгруппа, p – простое число;

(ii) $P = D\langle x \rangle$ для некоторого элемента x , подгруппа D – G -инвариантна и $x^p \in D$ (таким образом, $Q \rtimes D$ – локально нильпотентный радикал G);

(iii) если H – G -инвариантная подгруппа Q , то $C_{Q/H}(xH) = \langle 1 \rangle$;

(iv) $\langle x \rangle^G = G$;

(v) подгруппа Q – нильпотентна.

Доказательство. Пусть L – локально нильпотентный радикал группы. Предположим, что $L \neq G$. Будучи конечной, фактор-группа G/L разрешима ввиду леммы 1.8. Тогда G/L включает в себя такую нормальную подгруппу S/L , что $|G:S| = p$ – простое число. Из

следствия 1.7 вытекает, что S – локально нильпотентна, т.е. $S = L$. Итак $|G/L| = p$. Если $x \in L$, то имеем $G = \langle x \rangle L$. Легко видеть, что элемент x может быть выбран таким образом, чтобы он был p – элементом. Имеем $x^p \in L$. Так как L – локально нильпотентна, то $L = Q \times D$, где D – силовская p -подгруппа L , Q – ее силовская p' -подгруппа. Так как $|G/L| = p$, то Q будет силовской p' -подгруппой и для всей группы G . Нетрудно показать, что $P = D\langle x \rangle$ будет силовской p -подгруппой группы G . Из равенств $G = \langle x \rangle L$ и $L = Q \times D$ получаем, что $G = QP$, а поскольку $Q \cap P = \langle 1 \rangle$, то $G = Q \rtimes P$.

Если допустить, что $\langle x \rangle^G$ – собственная подгруппа G , то из следствия 1.7 вытекает, что $\langle x \rangle^G$ – локально нильпотентна. Но в этом случае ее силовская p -подгруппа R будет нормальной во всей группе G . Тогда RD – нормальная в G p -подгруппа, включающая в себя P . С другой стороны, P – силовская p -подгруппа G , а потому $P = RD$. В частности, отсюда вытекает, что P – нормальна в G , так что $G = Q \times P$, а значит, G – локально нильпотентна. Однако это противоречит нашему допущению. Полученное противоречие доказывает равенство $G = \langle x \rangle^G$.

Равенство $G = Q \rtimes P$ влечет за собой равенство $G/H = Q/H \rtimes PH/H$, а из него уже несложно получить тот факт, что PH/H – силовская p -подгруппа G/H . Так как группа G/H почти локально нильпотентна, то используя рассуждения, которые уже приводились в доказательстве следствия 1.7, получим, что силовские p -подгруппы сопряжены в любой подгруппе G/H , а это влечет за собой пронормальность подгруппы PH/H в группе G/H . Это утверждение справедливо для любой G -инвариантной подгруппы H из Q , в частности, для $H = \langle 1 \rangle$. Итак, P пронормальна в G . Поскольку P не нормальна, она будет абнормальной. Но тогда $N_G(P) = P$, $C_Q(P) = N_Q(P) = \langle 1 \rangle$ (см., например, [3, § 6, теорема 1]). Допустим, что $C_Q(x) = C \neq \langle 1 \rangle$. Из равенства $[H, D] = \langle 1 \rangle$ получаем включение $C \leq N_G(P)$, в частности, $N_G(P) \neq P$. Полученное противоречие и доказывает равенство $C_Q(x) = \langle 1 \rangle$.

Пусть теперь H – неединична. Лемма 1.1 показывает, что либо PH/H нормальна в G/H , либо она абнормальна. Если PH/H – абнормальна, то как и выше получим равенство $C_{Q/H}(xH) = \langle 1 \rangle$. Допустим, что PH/H –

нормальна в G/H . Тогда $G/H = Q/H \times PH/H$. Пусть $g \in P(Q/H)$, и обозначим через R силовую g -подгруппу G . Ввиду такого выбора, R – нормальна в G и $[RH/H, PH/H] = \langle 1 \rangle$, так что $[R, P] \leq R \cap H \neq R$. Из предложения 2.12 работы [10] получаем равенство $R = C_R(x)[R, x]$. Из равенств $P = D\langle x \rangle$ и $[H, D] = \langle 1 \rangle$ вытекает, что $[R, P] = [R, x]$, так что $[R, x] \neq R$. В свою очередь, это влечет за собой неравенство $C_R(x) \neq \langle 1 \rangle$, которое противоречит доказанному выше.

Наконец, применение классических теорем Томпсона и Хигмена показывает, что подгруппа Q – нильпотентна (см., например, [1], теорема 1.1)).

Теорема 2.1 описывает строение периодических почти локально нильпотентных групп, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Сейчас мы укажем некоторые типы периодических групп, всякая пронормальная подгруппа которых нормальна или абнормальна, которые оказываются почти локально нильпотентными.

Группа G называется *гиперконечной*, если она обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп, каждый фактор которого конечен.

2.2. Теорема. Пусть G – группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если группа G – гиперконечна, то она почти локально нильпотентна.

Доказательство. Пусть

$\langle 1 \rangle = K_0 \leq K_1 \leq \dots K_\alpha \leq K_{\alpha+1} \leq \dots K_\gamma = G$ – возрастающий ряд нормальных подгрупп, факторы которого конечны. Пользуясь трансфинитной индукцией, покажем, что если $K_\alpha \neq G$, то K_α – локально нильпотентна. Будучи конечной, подгруппа K_1 – нильпотентна ввиду следствия 1.4. Предположим теперь, что $\alpha > 1$ и пусть уже доказана локальная нильпотентность подгрупп K_β для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$. Если α – предельное порядковое число, то $K_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$, так что K_α , будучи объединением возрастающей последовательности локально нильпотентных подгрупп, сама локально нильпотентна. Предположим теперь, что число $\alpha - 1$ существует. Ввиду индуктивного допущения, $K_{\alpha-1}$ – локально нильпотентна, так что K_α – почти локально нильпотентная собственная нормальная подгруппа G . Из следствия 1.7 вытекает, что K_α – локально нильпотентна.

Если γ – предельное порядковое число, то $G = K_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} K_\alpha$, так что G – локально нильпотентна. Если же γ – не предельное порядковое число, то группа G будет почти локально нильпотентной.

Пусть G – группа. Если g – элемент G , то обозначим через g^G подмножество, состоящее из всех элементов, сопряженных с g , т.е. $g^G = \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$. Далее, положим

$$FC(G) = \{g \in G \mid g^G \text{ — конечно}\}.$$

Нетрудно видеть, что $FC(G)$ является характеристической подгруппой G . Подгруппа $FC(G)$ называется *FC-центром* группы G . Если $G = FC(G)$, то G называется *FC-группой*.

Отметим, что если G – периодическая FC-группа, то для любого ее элемента g нормальное замыкание $\langle g \rangle^G$ будет конечным (см., например, [12, следствие 3.4]). В частности, периодическая FC-группой является гиперконечной, так что получаем

2.3. Следствие. Пусть G – бесконечная группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если G – периодическая FC-группа, то она локально нильпотентна.

Доказательство. Из теоремы 2.2 получаем, что G включает в себя такую нормальную локально нильпотентную подгруппу L , что G/L – конечна. Тогда существует такая конечная подгруппа F , что $G = FL$. Положим $K = F^G$, тогда подгруппа K – конечна (см., например, [12, следствие 3.4]). Из следствия 1.4 получаем, что K – нильпотентна. Поэтому группа G , будучи произведением нильпотентной и локально нильпотентной нормальных подгрупп, локально нильпотентна.

Группа G называется *гипоконечной*, если она обладает убывающим рядом нормальных подгрупп, каждый фактор которого конечен.

2.4. Теорема. Пусть G – локально конечная группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если группа G – гипоконечна, то она почти локально нильпотентна.

Доказательство. Пусть

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \dots K_\alpha \geq K_{\alpha+1} \geq \dots K_\gamma = \langle 1 \rangle$$

убывающий ряд нормальных подгрупп, факторы которого конечны. Пользуясь трансфинитной индукцией, покажем, что если K_1/K_α – локально нильпотентная группа для любого $\alpha > 1$. Из

следствия 1.5 получаем, что K_1/K_2 – объединение всех членов $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{S}$; в частности, для каждого неединичного элемента $x \in G$ объединение V_x всех членов $\mathcal{S}$, не содержащих элемента x , принадлежит $\mathcal{S}$, пересечение Λ_x всех членов $\mathcal{S}$, содержащих элемент x , принадлежит $\mathcal{S}$;

Предположим теперь, что $\alpha > 2$ и пусть уже доказана локальная нильпотентность фактор-групп K_1/K_β для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$. Если α – предельное порядковое число, то из равенства $K_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta$ получаем, что K_1/K_α аппроксимируется локально нильпотентными группами. Будучи локально конечной, фактор-группа K_1/K_α сама локально нильпотентна. Предположим теперь, что число $\alpha - 1$ существует. Ввиду индуктивного допущения, $K_1/K_{\alpha-1}$ – локально нильпотентна, а фактор $K_\alpha/K_{\alpha-1}$ – конечен. Положим $U = K_\alpha$, $V = K_{\alpha-1}$. Из конечности фактора V/U вытекает конечность $(K_1/U)(K_1/U \cap C_{G/U}(V/U))$. Положим $Z/U = K_1/U \cap C_{G/U}(V/U)$. Из соотношений

$$\begin{aligned} (Z/U)/(V/U \cap Z/U) &\cong \\ &\cong (V/U)(Z/U)/(V/U) \cong VZ/V \leq K_1/V \end{aligned}$$

получаем, что $(Z/U)/(V/U \cap Z/U)$ – локально нильпотентна. Из включения $(V/U \cap Z/U) \leq \zeta(Z/U)$ следует тогда локальная нильпотентность фактора Z/U . Таким образом, K_1/K_α будет почти локально нильпотентной группой. Из леммы 1.1 и следствия 1.7 вытекает, что фактор K_1/K_α – локально нильпотентен.

При $\alpha = \gamma$ получаем, что $K_1 \cong K_1/\langle 1 \rangle = K_1/K_\gamma$ – локально нильпотентна.

2.5. Следствие. Пусть G – локально конечная группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если группа G – финитно аппроксимируема, то она почти локально нильпотентна.

Группа G называется *силовски p -цельной*, p – простое число, если в любой ее подгруппе H силовские p -подгруппы сопряжены (см., например, [13, определение 2.3.1]).

Пусть G – группа и $\mathcal{S}$ – семейство подгрупп G . $\mathcal{S}$ называется *системой Куроша-Черникова*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(КС 1) $\langle 1 \rangle, G \in \mathcal{S}$;

(КС 2) для каждой пары A, B подгрупп системы $\mathcal{S}$ либо $A \leq B$, либо $B \leq A$;

(КС 3) для каждой подсистемы $\mathcal{L}$ системы $\mathcal{S}$ пересечение всех членов $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{S}$ и

(КС 4) для каждого неединичного элемента $x \in G$ подгруппа V_x нормальна в Λ_x .

Фактор-группы Λ_x/V_x называются *факторами системы $\mathcal{S}$* .

Если каждая подгруппа системы $\mathcal{S}$ нормальна во всей группе G , то $\mathcal{S}$ называется *нормальной системой Куроша-Черникова*.

Системы такого рода были введены в рассмотрение в работе А.Г. Куроша и С.Н. Черникова [14], давно ставшей классической. В этой работе были доказаны локальные теоремы для важных классов групп, в частности, было доказано, что локально разрешимая группа обладает нормальной системой Куроша-Черникова, факторы которой элементарные абелевы (см. [14, § 6]).

2.6. Теорема. Пусть G – периодическая локально разрешимая группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если группа G – силовски p -цельна для любого простого числа p , то она почти локально нильпотентна.

Доказательство. Будучи локально разрешимой, G имеет нормальную систему Куроша-Черникова $\mathcal{S}$, факторы которой элементарные абелевы. Имеет место одна из следующих двух возможностей: (1) система $\mathcal{S} \setminus \{G\}$ имеет максимальный элемент M ; (2) система $\mathcal{S} \setminus \{G\}$ не имеет максимального элемента, и в этом случае группа G будет объединением всех собственных подгрупп, принадлежащих системе $\mathcal{S}$. Если $L \in \mathcal{S} \setminus \{G\}$, то из следствия 1.3 вытекает, что силовская p -подгруппа L нормальна для любого простого числа p . Но тогда подгруппа L – локально нильпотентна. Отсюда получаем, что во втором случае группа G – локально нильпотентна. Рассмотрим теперь первый случай. Тогда фактор-группа G/M будет элементарной абелевой p -группой для некоторого простого числа p . В этом случае группа G включает в себя нормальную

подгруппу K конечного индекса. Применяя опять следствие 1.3, получим, что подгруппа K – локально нильпотентна, а значит G – почти локально нильпотентна.

2.7. Следствие. Пусть G – периодическая локально разрешимая группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если силовские p -подгруппы G – черниковские для любого простого числа p , то она почти локально нильпотентна.

Доказательство. В самом деле, группа G является силовски p -цельной для любого простого числа p (см., например, [13, теорема 3.5.17]), поэтому мы можем применить теорему 2.6.

2.8. Следствие. Пусть G – локально конечная группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если силовские p -подгруппы G – черниковские для любого простого числа p , то она почти локально нильпотентна.

Доказательство. В самом деле, группа G является почти локально разрешимой ввиду теоремы В.Я. Беляева (см., например, [13, теорема 3.5.15]), поэтому мы можем применить следствие 2.7.

2.9. Следствие. Пусть G – локально конечная группа, всякая пронормальная подгруппа которой нормальна или абнормальна. Если силовские p -подгруппы G – конечны для любого простого числа p , то она почти локально нильпотентна.

Список использованной литературы

1. Hall P. On system normalizers of soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1937. – 43. – P. 507 – 528.
2. Carter R.W. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. – 1961. – 75. – P. 136 – 139.
3. Ба М.С., Борович З.И. О расположении промежуточных подгрупп // Кольца и линейные группы. – Краснодар: Кубанский университет, 1988. – С. 14 – 41.
4. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 3. – С. 325 – 329.
5. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 11. – С. 77 – 79.
6. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Новые характеристики локально нильпотентных $\overline{IN}$ -групп // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, № 3. – С. 322 – 326.
7. Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я. Группы с пронормальными примарными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 3. – С. 323 – 327.
8. Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya. On properties of abnormal and pronormal subgroups in some infinite groups // Groups St Andrews 2005. Volume 2. London Mathematical Society. Lecture Note Series 339, Cambridge Univ. Press., 2007. – P. 597 – 604.
9. Баллестер-Болинчес А., Шеметков Л.А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. – 1999. – 40, № 1. – С. 3 – 5.
10. Ballester-Bolinches A., Kurdachenko L.A., Otal J., Pedraza T. Infinite groups with many permutable subgroups // Revista Mat. Iberoamericana. – 2008. – 24, № 3. – P. 745 – 764.
11. Shumyatsky P. Locally finite groups with an automorphism whose centralizer is small // Topics in infinite groups, Quaderni di Matematica. – 2002. – 8. – P. 278–296.
12. Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya. Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.
13. Dixon M.R. Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups. – Singapore: World Scientific, 1994. – 304 p.
14. Курош А.Г., Черников С.Н. Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи матем. наук. – 1947. – 2, № 3. – С. 18 – 59.

Подано к печати 20.10.10

УДК 519.2

Н.В. Семеновська, к.ф.-м.н.

Одна статистична задача для кореляційної моделі Уіттла-Матерна

Розглянуто задачу екстраполяції однорідного та ізотропного випадкового поля з кореляційною функцією Уіттла-Матерна за спостереженнями на n -вимірній сфері.

Ключові слова: випадкове поле, екстраполяція, кореляційна модель Уіттла-Матерна.

E-mail: semenovska@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі Н.В.Семеновської [1] вивчалася задача екстраполяції ізотропних та однорідних випадкових полів за спостереженнями на сфері радіусу r . В даній роботі отримані раніше результати досліджуються на предмет асимптотики.

Робота складається з трьох розділів. Другий розділ містить результати, отримані в роботі [1], без доведення. Досліджено асимптотичну поведінку екстраполяційних формул при $r \rightarrow \infty$.

2 Кореляційна модель Уіттла-Матерна

Розглянемо клас Уіттла-Матерна кореляційних функцій

$$\varphi_\nu(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} r^\nu K_\nu(r), \quad (1)$$

де K — модифікована функція Бесселя, $\nu > 0$. Цінність моделі Уіттла-Матерна полягає в тому, що до її виразу входять параметр ν , який контролює рівень гладкості випадкового поля, що відповідає цій моделі. Якщо $\nu = k + 1/2$, де k — невід'ємне ціле, (1) може бути записане як добуток e^{-r} і полінома порядку k відносно r (див. [3], 8.468). Зокрема, покладаючи $\nu = 1/2$, отримаємо популярну експоненціальну

N.V.Semenovska, Ph.D.

One statistic problem for Whittle-Matern correlation model.

The extrapolation problem of an homogeneous and isotropic random field with Whittle-Matern correlation function by observations on the n -dimensional sphere is investigated.

Key Words: random field, extrapolation, Whittle-Matern correlation model.

кореляцію $\varphi_{1/2}(r) = e^{-r}$, а $\nu = 3/2$ дає модель $\varphi_{3/2}(r) = (1+r)e^{-r}$.

Для однорідного та ізотропного випадкового поля з кореляційною функцією з класу Уіттла-Матерна розглянемо наступну статистичну задачу. Нехай випадкове поле $\xi(x)$ з кореляційною функцією $\varphi_\nu(r)$ спостерігається на сфері і необхідно знайти лінійну екстраполяційну формулу для $\xi(y)$ в центрі сфери S_n радіуса r , найкращу в розумінні мінімуму середньоквадратичної помилки. В роботі [1] було отримано наступний результат.

Теорема 1. Спектральна щільність для кореляційної моделі Уіттла-Матерна

$$\varphi_\nu(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} r^\nu K_\nu(r), \quad (2)$$

має вигляд

$$f_\nu(\lambda) = \frac{2\lambda^{n-1}}{B(\nu, n/2)(\lambda^2 + 1)^{n/2+\nu}}, \quad n > \nu \quad (3)$$

Інтеграл

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^\infty \lambda^{2-n} J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r) d\Phi(\lambda) = \\ &= \frac{B(1/2, (n-1)/2 + \nu) r^{n-2}}{\pi B(\nu, n/2)} \times \\ &\times \left(\frac{B((n-1)/2, \nu)}{\Gamma(n-1)} \cdot {}_1F_2((n-1)/2; 1-\nu, n-1; r^2) + \right. \\ &\left. + \frac{r^{2\nu} \Gamma(-\nu)}{\Gamma(n+\nu-1)} \cdot {}_1F_2((n-1)/2 + \nu; n+\nu-1, \nu+1; r^2) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $\Phi(\lambda)$ — спектральна функція випадкового поля $\xi(x)$, а ${}_pF_q$ — узагальнений гіпергеометричний ряд ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$.

Інтеграл $I(r)$ входить до складу екстраполяційної формули та відповідної середньоквадратичної похибки наступним чином:

$$\widehat{\xi(0)} = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{r^{n-2}\varphi(r)}{I(r)} \int_{S_n} \xi(x) d\mu_n$$

$$\sigma^2(0, r) = \Phi(+\infty) - \frac{1}{2^{n-2}\Gamma^2(\frac{n}{2})} \cdot \frac{r^{n-2}\varphi^2(r)}{I(r)}$$

Екстраполяційна формула в центрі сфери має вигляд

$$\widehat{\xi(0)} = c(r) \int_{S_n} \xi(x) d\mu_n,$$

$$c(r) = \frac{2^{2-n-\nu}\pi^{\frac{2-n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)B(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}+\nu)} \cdot \frac{K_\nu(r)}{r^{-\nu}G_1(r)+r^\nu G_2(r)} \quad (5)$$

$c(r)$ надалі будемо називати екстраполюючий множник.

Середньоквадратична похибка екстраполяції дорівнює

$$\sigma^2(0, r) = 1 - \frac{\pi^{2^{4-n-2\nu}}\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\nu)B(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}+\nu)} \times \times \frac{K_\nu^2(r)}{r^{-2\nu}G_1(r)+G_2(r)}, \quad (6)$$

де

$$G_1(r) = \frac{B((n-1)/2, \nu)}{\Gamma(n-1)} \times \times {}_1F_2((n-1)/2; 1-\nu, n-1; r^2), \quad (7)$$

$$G_2(r) = \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(n+\nu-1)} \times \times {}_1F_2((n-1)/2 + \nu; n+\nu-1, \nu+1; r^2).$$

Дослідимо асимптотичну поведінку отриманих раніше формул при необмеженому зростанні радіусу r сфери S_n . Доведемо наступне твердження.

Теорема 2. При $r \rightarrow \infty$ інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2-n} J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r) d\Phi(\lambda)$ має асимптотику

$$\int_0^\infty \lambda^{2-n} J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r) d\Phi(\lambda) = \frac{2}{B(\nu, n/2)} I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1) r^{-n} + o(r^{-n}), \quad (8)$$

екстраполяційна формула в центрі сфери має вигляд

$$\widehat{\xi(0)} = c(r) \int_{S_n} \xi(x) d\mu_n,$$

$$c(r) = \frac{2^{1/2-n-\nu}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)I_{\frac{n-2}{2}}(1)K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+\nu-1/2} e^{-r} + o(r^{n+\nu-1/2} e^{-r}), \quad (9)$$

а середньоквадратична похибка екстраполяції дорівнює

$$\sigma^2(0, r) = 1 - \frac{2^{2-n-2\nu}\pi}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)\Gamma(\nu)I_{\frac{n-2}{2}}(1)K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+2\nu-1} e^{-2r} - o(r^{n+2\nu-1} e^{-2r}). \quad (10)$$

Доведення. В доведенні використаємо теорему

Теорема 3. ([2], I, §2). Припустимо, що в інтегралі

$$\int_0^\infty K(\lambda R) \lambda^\alpha g(\lambda) d\lambda$$

а) $g(\lambda)$ — неперервна функція в деякому околі нуля ($g(0) \neq 0$; $g(\lambda)$ обмежена на $[0, +\infty)$);

б) $K(z)z^\alpha$ абсолютно інтегрована на $[0, +\infty)$);

$$\text{в) } \int_0^\infty K(z)z^\alpha d\lambda = \gamma_\alpha, \quad \int_0^\infty |K(z)|z^\alpha d\lambda = \gamma'_\alpha.$$

Тоді при $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty K(\lambda R) \lambda^\alpha g(\lambda) d\lambda = \gamma_\alpha g(0) R^{-\alpha-1} + o(R^{-\alpha-1}). \quad (11)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^\infty (\lambda r)^{2-n} J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r) d\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}} \frac{2\lambda^{n-1}}{B(\nu, n/2)(\lambda^2+1)^{n/2+\nu}} d\lambda.$$

Покладемо $K(\lambda r) = \frac{J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}((\lambda r)^2+1)}$, $g(\lambda) = \frac{2((\lambda r)^2+1)}{B(\nu, n/2)(\lambda^2+1)^{n/2+\nu}}$. $K(\lambda r)$ та $g(\lambda)$ відповідають вимогам теореми 3. $g(0) = \frac{2}{B(\nu, n/2)}$,

$$\int_0^\infty K(z)z^{n-1} dz = |[3], 6.535| = I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1).$$

Отже, за теоремою 3

$$\int_0^\infty (\lambda r)^{2-n} J_{\frac{n-2}{2}}^2(\lambda r) d\Phi(\lambda) = \frac{2}{B(\nu, n/2)} I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1) r^{-n} + o(r^{-n}).$$

Врахуємо співвідношення 8.451.6 [3]

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (2r)^{-k} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu-k+1/2)} + \varepsilon_1 (2r)^{-N} \frac{\Gamma(\nu+N+1/2)}{N! \Gamma(\nu-N+1/2)} \right)$$

при $r \rightarrow \infty$, де $|\varepsilon_1| \leq 1$ при $N \geq \nu - 1/2$.

Таким чином, екстраполюючий множник $c(r)$ при $r \rightarrow \infty$ дорівнює

$$c(r) = \frac{2^{3/2-n-\nu} r^{\nu-1/2} e^{-r}}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\nu)} \times \\ \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (2r)^{-k} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu-k+1/2)} + \varepsilon_1 (2r)^{-N} \frac{\Gamma(\nu+N+1/2)}{N! \Gamma(\nu-N+1/2)} \right)}{\left(2r^{-n} \frac{I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)}{B(\nu, n/2)} + o(r^{-n}) \right)} = \\ = \frac{2^{3/2-n-\nu} r^{\nu-1/2} e^{-r}}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\nu)} \times \\ \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (2r)^{-k} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu-k+1/2)} + o(r^{-N}) \right)}{\frac{I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)}{2r^{-n} \frac{I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)}{B(\nu, n/2)}} (1+o(1))}$$

Враховуючи те, що $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$ та $r^\alpha = o(r^\beta)$, $r \rightarrow \infty$, $\alpha < \beta$, отримаємо

$$c(r) = \frac{2^{1/2-n-\nu}}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + \nu) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \times \\ \times r^{n+\nu-1/2} e^{-r} + o(r^{n+\nu-1/2} e^{-r}).$$

Відповідна середньоквадратична похибка дорівнює

$$\sigma^2(0, r) = 1 - \frac{2^{3-n-2\nu} \pi r^{2\nu-1} e^{-2r}}{\Gamma^2(\frac{n}{2}) \Gamma^2(\nu)} \times \\ \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (2r)^{-k} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu-k+1/2)} + \varepsilon_1 (2r)^{-N} \frac{\Gamma(\nu+N+1/2)}{N! \Gamma(\nu-N+1/2)} \right)^2}{\left(2r^{-n} \frac{I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)}{B(\nu, n/2)} + o(r^{-n}) \right)} = \\ = 1 - \frac{2^{2-n-2\nu} \pi B(\nu, n/2)}{\Gamma^2(\frac{n}{2}) \Gamma^2(\nu) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+2\nu-1} e^{-2r} \times \\ \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (2r)^{-k} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu-k+1/2)} + o(r^{-N}) \right)^2}{(1+o(1))} = \\ = 1 - \frac{2^{2-n-2\nu} \pi}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} + \nu) \Gamma(\nu) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+2\nu-1} e^{-2r} - \\ - o(r^{n+2\nu-1} e^{-2r}).$$

□

Розглянемо модель $\varphi(r) = (1+r)e^{-r}$. Як ми зазначали вище, ця кореляційна модель відповідає моделі $\varphi_{3/2}(r)$ Уіттла-Матерна.

При $r \rightarrow \infty$ екстраполяційна формула в центрі сфери має асимптотику

$$\widehat{\xi}(0) = c(r) \int_{S_n} \xi(x) d\mu_n, \\ c(r) = \frac{2^{-n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n+3}{2}) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+1} e^{-r} + \\ + o(r^{n+1} e^{-r}),$$

а середньоквадратична похибка екстраполяції дорівнює

$$\sigma^2(0, r) = 1 - \frac{2^{-n} \sqrt{\pi} r^{n+1} e^{-2r}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n+3}{2}) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} - \\ - o(r^{n+2} e^{-2r}).$$

Нехай $\varphi(r) = (1+r+r^2/3)e^{-r}$. Ця кореляційна модель відповідає моделі $\varphi_{5/2}(r)$ Уіттла-Матерна.

При $r \rightarrow \infty$ екстраполяційна формула в центрі сфери має вигляд

$$\widehat{\xi}(0) = c(r) \int_{S_n} \xi(x) d\mu_n, \\ c(r) = \frac{2^{-n-2}}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n+5}{2}) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot r^{n+2} e^{-r} + \\ + o(r^{n+2} e^{-r}),$$

а середньоквадратична похибка екстраполяції дорівнює

$$\sigma^2(0, r) = 1 - \frac{2^{-n-1} \sqrt{\pi} r^{n+4} e^{-2r}}{3\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n+5}{2}) I_{\frac{n-2}{2}}(1) K_{\frac{n-2}{2}}(1)} - \\ - o(r^{n+4} e^{-2r}).$$

3 Висновки

В роботі розглянуто задачу екстраполяції однорідного та ізотропного випадкового поля зі кореляційною функцією з класу Уіттла-Матерна в центрі сфери за спостереженнями на сфері. Знайдений раніше розв'язок цієї задачі досліджується на предмет асимптотичної поведінки при необмеженому зростанні радіусу сфери.

Список використаних джерел

1. Семеновська Н., Ядренко М.Й. Явні екстраполяційні формули для деяких кореляційних моделей однорідних та ізотропних випадкових полів // Теорія ймовіри, і матем. статист. - 2003. - №69. - С.162-171.
2. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. - Киев: Выща школа, 1980. - 208с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: ФМ, 1963.

Надійшла до редколегії 29.12.2010

УДК 512.53

Тетяна В. Турка

Будова решітки ідеалів на напівгрупі
відповідностей скінченної групи

Описано решітку ідеалів на напівгрупі від-
повідностей скінченної групи. Одержано умо-
ви, коли ідеали такої напівгрупи утворюють
ланцюг.

Ключові слова: ідеал, решітка ідеалів, лан-
цюг ідеалів, напівгрупа відповідностей.

tvturka@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко

1 Вступ

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо підал-
гебру з $G \times G$ розглядати як бінарне відноше-
ння на G , то множина $S(G)$ всіх підалгебр з
 $G \times G$ є напівгрупою відносно деморганівського
добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називає-
ться напівгрупою відповідностей алгебри G .

Задачу вивчення напівгруп відповідностей
поставив Курош ([4]). Перші роботи в цьому на-
прямі належать Іскандеру ([2], [3]). У нашій ро-
боті вивчається будова решітки ідеалів напів-
групи відповідностей скінченної групи G . По-
казано, що ця решітка природним чином кон-
струюється з решітки факторів групи G . Де-
тальніше проаналізовано випадок, коли ідеали
утворюють ланцюг.

2 Будова решітки ідеалів

Якщо A і B — такі підгрупи групи G , що A
є нормальною підгрупою в B , то факторгрупа
 B/A називається фактором групи G . При цьо-
му ізоморфні фактори ототожнюються.

Нехай G — скінченна група,
 $\mathcal{F}_G = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ — множина всіх факторів
групи G . Покладемо $F_i \preceq F_j$ тоді і тільки тоді
коли F_i є фактором групи F_j . Покажемо, що

Tetyana V. Turka

The structure of lattice of the ideals at
the semigroup of correspondences of the
finite group

The lattice of ideals is described at semi-
groups of correspondences of finite group. There
are conditions when ideals of such semigroup
form a chain.

Key Words: ideal, lattice of ideals, chain of
ideals, the semigroup of correspondence.

відношення $\preceq$ на множині $\mathcal{F}_G$ є відношенням
часткового порядку. Очевидно, що це відноше-
ння рефлексивне. Якщо $F_i \preceq F_j$, то із скінчен-
ності факторів випливає, що $|F_i| \leq |F_j|$. Тому
якщо $F_i \preceq F_j$ і $F_j \preceq F_i$, то $|F_i| = |F_j|$. Із цієї
рівності і того, що F_i є фактором F_j , випливає,
що $F_i = F_j$. Отже, відношення $\preceq$ є антисиме-
тричним.

Припустимо тепер, що $F_i \preceq F_j$ і $F_j \preceq F_k$.
Тоді існують такі підгрупи A і A_1 із F_k , що
 $A_1 \trianglelefteq A$ та $A/A_1 \simeq F_j$, і такі підгрупи B і B_1
із F_j , що $B_1 \trianglelefteq B$ та $B/B_1 \simeq F_i$. За теоремою
про відповідність підгруп (див., наприклад, [1])
існують такі підгрупи C і C_1 із A , що $C_1 \trianglelefteq C$ та
 $C/C_1 \simeq F_i$. Оскільки $A \leq F_k$, то $C_1 \trianglelefteq C$ є фа-
ктором групи F_k . Отже, $F_i \preceq F_k$, що доводить
транзитивність відношення $\preceq$.

Лема 1. Нехай

$$(G'_1/H'_1 \times_{F'} G'_2/H'_2) \cdot (G''_1/H''_1 \times_{F''} G''_2/H''_2) = \\ = (G_1/H_1 \times_F G_2/H_2).$$

Тоді $F \preceq F'$, $F \preceq F''$.

Доведення. За означенням множення в напів-
групі відповідностей $S(G)$ маємо: $G_1 \leq G'_1$ і
 $H_1 \geq H'_1$. Тому факторгрупа $F = G_1/H_1$ є фа-
ктором групи $F' = G'_1/H'_1$. Отже, $F \preceq F'$. Ана-
логічно доводиться, що $F \preceq F''$. $\square$

У [6] показано, що $\mathcal{D}$ -клас, який містить елемент $a = G_1/H_1 \times_F G_2/H_2$, повністю визначається фактором F , причому ця відповідність між $\mathcal{D}$ -класами та факторами групи G взаємно однозначна. У скінченній напівгрупі відношення Гріна $\mathcal{D}$ і $\mathcal{J}$ збігаються ([5]). Тому головний ідеал напівгрупи $S(G)$, породжений елементом $a = G_1/H_1 \times_F G_2/H_2$, також повністю визначається фактором F . У зв'язку з цим головний ідеал, породжений елементом a , будемо позначати J_F .

Теорема 1. Елемент $G_1/H_1 \times_{F'} G_2/H_2$ належить головному ідеалу J_F тоді і тільки тоді, коли $F' \preceq F$.

Доведення. Необхідність. Нехай

$$a = G_1/H_1 \times_F G_2/H_2.$$

Елемент $b = G'_1/H'_1 \times_{F'} G'_2/H'_2$ належить ідеалу $J_F = \langle a \rangle = S(G) \circ a \circ S(G)$ тоді і тільки тоді, коли існують такі $x, y \in S(G)$, що $b = x \circ a \circ y$. Тепер необхідність одразу випливає із леми 1 і транзитивності відношення $\preceq$.

Достатність. Нехай $b = G'_1/H'_1 \times_{F'} G'_2/H'_2$ і $F' \preceq F$. Тоді існують такі $G_1 \geq G'_1 \geq H'_1 \geq H_1$, що $G'_1/H'_1 \simeq F'$. Покладемо $G''_1 = G'_1$, $H''_1 = H'_1$. Розглянемо довільні елементи x, y вигляду

$$x = G'_1/H'_1 \times_{F'} G''_1/H''_1, \quad y = G''_2/H''_2 \times_{F'} G'_2/H'_2.$$

Як твірний елемент ідеалу J_F візьмемо $a = (H_1, G_1, H_1, G_1, \varepsilon)$, де $G_1/H_1 \simeq F$. Покажемо, що елементи b і $xa y$ належать одному $\mathcal{D}$ -класу. Нехай

$$xa y = G'''_1/H'''_1 \times_{F'''} G'''_2/H'''_2.$$

Включення $G'''_1 \leq G'_1$ та $H'''_1 \geq H'_1$ очевидні. Доведемо зворотні включення.

Нехай $g_1 \in G'_1$. Тоді існує таке $g_2 \in G''_1$, що $(g_1, g_2) \in x$. Крім того, $(g_2, g_2) \in a$. Далі, існує таке $g_3 \in G'_2$, що $(g_2, g_3) \in y$. Отже, $(g_1, g_3) \in xa y$. Оскільки $g_1 \in G'_1$ довільний, то $G'_1 \leq G'''_1$.

Нехай $h_1 \in H'_1$. Тоді $(h_1, e) \in xa y$. Тому існують такі h_2, h_3 , що

$$(h_1, h_2) \in x, \quad (h_2, h_3) \in a, \quad (h_3, e) \in y.$$

Із $(h_3, e) \in y$ випливає, що $h_3 \in H'_2$, а з $(h_2, h_3) \in a$ — що $h_2 = h_3 \cdot h$ для деякого $h \in H_1$.

Оскільки $H'_2 = H''_2$ і $H_1 \leq H'_1$, то $h_2 \in H'_1$. Але тоді $(h_1, h_2) \in H'_1 \times H'_1$ і $h_1 \in H'_1$. Із довільності елемента $h_1 \in H'_1$ випливає, що $H'_1 \subseteq H'''_1$.

Таким чином $G'''_1 = G'_1$, $H'''_1 = H'_1$ і $F''' = F'$.

Отже, елементи b і $xa y$ належать одному $\mathcal{D}$ -класу, а тому породжують один і той же головний ідеал. Тому кожен ідеал, який містить один із цих елементів, містить і другий. Оскільки $a \in J_F$, то $xa y \in J_F$, а тому $b \in J_F$. $\square$

Наслідок 1. $J_{F_1} \subseteq J_{F_2} \Leftrightarrow F_1 \preceq F_2$.

Для частково впорядкованої множини $(M, \leq)$ через $\text{Ach}(M)$ позначимо множину всіх антиланцюгів з M . Для довільних антиланцюгів

$$L_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{ і } L_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

покладемо $L_1 \preceq L_2$ тоді і тільки тоді, коли для кожного a_i знайдеться такий b_j , що $a_i \leq b_j$. Легко перевіряється, що відношення $\preceq$ на множині $\text{Ach}(M)$ є відношенням часткового порядку.

Кожному антиланцюгу $L = \{F_{i_1}, \dots, F_{i_m}\}$ із $\text{Ach}(\mathcal{F}_G)$ поставимо у відповідність ідеал $J_L = J_{F_{i_1}} \cup \dots \cup J_{F_{i_m}}$.

Теорема 2. а) Відображення $L \mapsto J_L$ є бієкцією між $\text{Ach}(\mathcal{F}_G)$ і множиною всіх ідеалів $S(G)$.
б) $J_{L_1} \subseteq J_{L_2} \Leftrightarrow L_1 \preceq L_2$.

Доведення. а) Кожен ідеал є об'єднанням головних ідеалів. Звідси і з наслідку 1 випливає, що кожен ідеал має вигляд J_L для деякого антиланцюга L . Тому відображення $L \mapsto J_L$ є сюр'єктивним. Для завершення доведення першої частини теореми лишилось показати, що різні антиланцюгам відповідають різні ідеали.

Нехай L_1 і L_2 — два різних антиланцюги. Без обмежень загальності можемо вважати, що існує фактор F , який належить L_1 і не належить L_2 . Зауважимо, що тоді $\mathcal{D}$ -клас $\mathcal{D}_F$ належить ідеалу J_{L_1} . Далі можливі два випадки:

I) $\mathcal{D}_F \not\subseteq J_{L_2}$. Тоді, очевидно, $J_{L_1} \neq J_{L_2}$.

II) $\mathcal{D}_F \subseteq J_{L_2}$. Тоді клас $\mathcal{D}_F$ повинен міститися в якомусь головному ідеалі $J_{F'}$ для деякого $F' \in L_2$. За теоремою 1 $F \preceq F'$. Оскільки $F \notin L_2$, то $F \prec F'$. Тоді $\mathcal{D}$ -клас $\mathcal{D}_{F'}$ належить ідеалу J_{L_2} і не належить ідеалу J_{L_1} . Справді, якби було $\mathcal{D}_{F'} \subseteq J_{L_1}$, то існував би такий фактор $F'' \in L_1$, що $\mathcal{D}_{F'} \subseteq J_{F''}$. Тоді за теоремою

1 було б $F' \preceq F''$, звідки $F \prec F''$. А це суперечить тому, що L_1 — антиланцюг. Отже, і в цьому випадку $J_{L_1} \neq J_{L_2}$.

b) *Необхідність.* Нехай $L_1 = \{F'_{i_1}, \dots, F'_{i_m}\}$ і $L_2 = \{F''_{j_1}, \dots, F''_{j_n}\}$ — два антиланцюги з $(\mathcal{F}_G, \preceq)$, причому $J_{L_1} \subseteq J_{L_2}$. Розглянемо ідеали $J_{L_1} = J_{F'_{i_1}} \cup \dots \cup J_{F'_{i_m}}$ і $J_{L_2} = J_{F''_{j_1}} \cup \dots \cup J_{F''_{j_n}}$. Тоді $J_{L_1} \supseteq \mathcal{D}_{F'_{i_1}} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{F'_{i_m}}$. Візьмемо довільний D -клас $\mathcal{D}_{F'_{i_p}}$ ($1 \leq p \leq m$). Тоді $\mathcal{D}_{F'_{i_p}}$ міститься в якомусь $J_{F''_{j_q}}$. За теоремою 1 $F'_{i_p} \preceq F''_{j_q}$. Оскільки p — довільне, то $L_1 \preceq L_2$.

Достатність. Нехай $L_1 \preceq L_2$ і $J_{L_1} = J_{F'_{i_1}} \cup \dots \cup J_{F'_{i_m}}$, $J_{L_2} = J_{F''_{j_1}} \cup \dots \cup J_{F''_{j_n}}$. Розглянемо довільний головний ідеал $J_{F'_{i_p}}$ ($1 \leq p \leq m$). Тоді знайдеться такий фактор F''_{j_q} , що $F'_{i_p} \preceq F''_{j_q}$. За наслідком 1 $J_{F'_{i_p}} \subseteq J_{F''_{j_q}}$. Отже, $J_{L_1} \subseteq J_{L_2}$. $\square$

Для напівгрупи $S(G)$ позначимо через $J(S(G))$ впорядковану за включенням решітку двосторонніх ідеалів.

Наслідок 2. Решітка $J(S(G))$ ізоморфна решітці $\text{Ach}(\mathcal{F}_G, \preceq)$.

Доведення. Із теореми 2 випливає, що відображення $L \mapsto J_L$ є ізоморфізмом часткового впорядкованої множини $\text{Ach}(\mathcal{F}_G, \preceq)$ на частково впорядковану множину ідеалів $J(S(G))$. $\square$

Наслідок 3. Ідеали напівгрупи відповідностей $S(G)$ утворюють ланцюг тоді і тільки тоді, коли решітка $(\mathcal{F}_G, \preceq)$ є ланцюгом.

Доведення. Це випливає з наслідку 2. $\square$

3 Випадок ланцюга ідеалів

Твердження 1. Якщо G — циклічна p -група або скінченна елементарна абелева p -група, то ідеали в напівгрупі відповідностей $S(G)$ утворюють ланцюг.

Доведення. Фактори циклічної p -групи також є циклічними p -групами, причому якщо $k < m$, то циклічна група C_{p^k} є фактором групи C_{p^m} .

Тому фактори циклічної p -групи утворюють ланцюг.

Аналогічно фактори елементарної абелевої p -групи також є елементарними абелевими p -групами, причому якщо $k < m$, то елементарна абелева p -група порядку p^k є фактором елементарної абелевої p -групи порядку p^m . Тому фактори такої групи також утворюють ланцюг.

Обидві частини твердження тепер випливають з наслідку 3. $\square$

Теорема 3. Нехай G — скінченна група. Якщо ідеали напівгрупи $S(G)$ утворюють ланцюг, то або G — циклічна p -група, або G — група експоненти p .

Доведення. Якщо порядок групи G ділиться на різні прості числа p і q , то за теоремою Силова в G є циклічна підгрупа C_p порядку p і циклічна підгрупа C_q порядку q . Тоді фактори $C_p/E \simeq C_p$ і $C_q/E \simeq C_q$ непорівняльні, а тому, за теоремою 2 ідеали J_{C_p} та J_{C_q} також непорівняльні. Отже, в цьому випадку ідеали не утворюють ланцюг.

Таким чином група G має бути p -групою. Розглянемо два можливі випадки.

a) G — абелева p -група. Тоді $G \simeq C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times \dots \times C_{p^{k_m}}$. Якщо $m > 1$ та існує таке i , що $k_i > 1$, то група G має непорівняльні фактори C_{p^2} і $C_p \times C_p$. За теоремою 2 відповідні цим факторам ідеали також будуть непорівняльні, а тому ідеали групи G не будуть утворювати ланцюг. Отже, якщо ідеали напівгрупи $S(G)$ утворюють ланцюг, то або $m = 1$ (і в цьому випадку група G є циклічною), або всі k_i дорівнюють одиниці (і в цьому випадку група G є елементарною абелевою і має експоненту p).

b) G — неабелева p -група. Тоді $|G| \geq p^3$. Нехай k — найменше число, для якого існує нециклічний фактор F порядку p^k . Тоді $k \geq 2$.

Якщо фактор F — абелевий, то $F \simeq C_p \times \dots \times C_p$. Серед факторів цього фактора є група $C_p \times C_p$, яка буде фактором і групи G . Якби група G містила елемент порядку, більшого ніж p , то вона містила б і елемент порядку p^2 , а тим самим і непорівняльний з $C_p \times C_p$ фактор C_{p^2} . Отже, якщо ідеали напівгрупи $S(G)$ утворюють ланцюг, то в G немає елементів порядку, більшого ніж p . Тому G є групою експоненти p .

Лишилося розглянути випадок, коли фактор F — неабелевий. За теоремою про відповідність підгруп фактор фактора групи G сам є фактором групи G . Тому $F/Z(F)$, де $Z(F)$ — центр групи F , також є фактором групи G . Але, з одного боку, фактор неабелевої групи за центром не може бути циклічним, а з іншого, $|F/Z(F)| < |F|$. Останнє суперечить тому, що F — нециклічний фактор найменшого можливого порядку. Отже, цей випадок не є можливим. $\square$

Зауважимо, що для неабелевої групи G умова бути групою експоненти p є лише необхідною для того, щоб ідеали напівгрупи $S(G)$ утворювали ланцюг.

Приклад 1. Якщо G — неабелева група порядку p^3 і експоненти p , то ідеали напівгрупи $S(G)$ утворюють ланцюг.

Фактор B/A групи G порядку p^3 може бути циклічною групою порядку p^2 лише у двох випадках: або $A = E$ і B — циклічна підгрупа порядку p^2 , або $|A| = p$ і $B = G$. У групі експоненти p перший випадок неможливий. У другому випадку A як нормальна підгрупа має бути об'єднанням класів спряжених елементів. А оскільки $|A| = p$, то всі ці класи одноелементні, то $A \subseteq Z(G)$. Але тоді факторгрупа $G/Z(G)$ буде циклічною, що неможливо, коли група G неабелева.

Отже, в нашому випадку маємо лише 4 фактори: $\{E, C_p, C_p \times C_p, G\}$. Очевидно, що вони утворюють ланцюг.

Приклад 2. Якщо G — неабелева група порядку p^3 та експоненти p , то група $G \times C_p$ також має експоненту p , але ідеали напівгрупи $S(G \times C_p)$ ланцюг не утворюють.

Справді, серед факторів групи $G \in C_p \times C_p$. Тому $C_p \times C_p \times C_p$ буде фактором групи $G \times C_p$. Серед факторів групи $G \times C_p$ є також G . Але фактори $C_p \times C_p \times C_p$ і G непорівняльні.

Література

1. Ганюшкін О.Г., Безущак О.О. Теорія груп: Навч. посібник для студентів механіко-математичного факультету. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2005.
2. Искандер А.А. Структура соответствий универсальной алгебры. Изв. АН СССР, серия матем. 29 (1965), 1357–1372.
3. Искандер А.А. Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий. Матем. сб. 70 (1960), 438–456.
4. Курош А.Г. Общая алгебра (лекции 1969–70 учебного года). — М.: Наука, 1974.
5. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985.
6. Турка Т. Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи. Вісник Київського університету, випуск № 4. Серія: фіз.-мат. науки, 2010. С. 38–42.

Надійшла до редакції 10.01.2011

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 517.956.4

В. М. Лучко*, к.ф.-м.н., асистент

Двоточкова крайова задача для
параболічного псевдодиференціального
рівняння вищого порядку

Доведено існування та встановлено оцінки
розв'язку двоточної крайової задачі для
параболічного псевдодиференціального рівняння
вищого порядку по t .

Ключові слова: двоточкова крайова задача,
псевдодиференціальне рівняння параболічного
типу, функція Гріна.

*E-mail: vmluchko@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

Уперше на доцільність і необхідність
використання нелокальних умов з точки
зору загальної теорії крайових задач вказав
О.О. Дезін [1], який досліджував розв'язні
розширення диференціальних операторів,
породжені загальною диференціальною
операцією зі сталими коефіцієнтами, та
можливість опису цих розширень за
допомогою крайових умов. Б.Й. Пташником
[2] досліджено коректність крайових задач з
нелокальними (у тому числі періодичними)
умовами за виділеною змінною та певними
умовами за іншими координатами для
широких класів лінійних та квазілінійних
рівнянь і систем рівнянь із частинними
похідними (гіперболічних, параболічних,
безтипових) скінченного порядку, а також
лінійних рівнянь нескінченного порядку
та диференціально-операторних рівнянь.
Дослідження параболічного псевдодиферен-
ціального рівняння з сталим однорідним
символом було розпочато С.Д. Ейдельманом
і Я.М. Дрінем в [3]. М.В. Федорюком у
праці [4] була знайдена точна асимптотика
фундаментального розв'язку при $|x| \rightarrow$
 ∞ , яка виявилася не експоненціальною, як
для диференціальних рівнянь параболічного
типу [6], а степеневою. У 1988 році
вийшла праця А.Н. Кочубея [5], яка
присвячена побудові і дослідженню
фундаментального розв'язку задачі Коші, де

V. M. Luchko*, Cand.Sci (Phys.-Math.),
Assistant Professor

The two-point boundary problem for
parabolic pseudodifferential equation of
higher order

The was proved and estimated the solution of the
two-point boundary problem for parabolic pseudodif-
ferential equation of higher order according t .

Key words: the two-point boundary problem,
pseudodifferential equation of parabolic type, the
Green function.

псевдодиференціальні оператори трактуються
як гіперсингулярні інтеграли. Я.М. Дрінем
[8] для псевдодиференціального рівняння
параболічного типу у класі узагальнених
функцій типу розподілів встановлена коректна
розв'язність нелокальної багатоточної задачі.

У шарі $\Pi_T = \{(t, x), t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^n\}$
розглянемо рівняння довільного порядку

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = Au(t, x) + f(t, x), \quad (1)$$

з двоточковими умовами

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=T} = \varphi_j(x), j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де

$$Au(t, x) = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left(\sum_{k_0 + \gamma = m, \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{\partial^{k_0} V}{\partial t^{k_0}} \right),$$

$V(t, \sigma) = F_{x \rightarrow \sigma} u(t, x)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \geq 1$,
 $k_0 < m$, $F_{x \rightarrow \sigma}$ та $F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}$ – відповідно пряме
та обернене перетворення Фур'є. Функції
 $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ та $f(t, x)$ відомі, які апіорі
допускають перетворення Фур'є.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у
вигляді

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma, x)} V(t, \sigma) d\sigma, \quad (3)$$

де $u(t, x)$ – розв'язок двоточної крайової
задачі для звичайного диференціального

рівняння в якому σ на правах параметра

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{d^{k_0} V}{dt^{k_0}} + \tilde{f}(t, \sigma), \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^{j-1} V}{dt^{j-1}} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{d^{j-1} V}{dt^{j-1}} \right|_{t=T} = \tilde{\varphi}_j(\sigma), \quad (5)$$

$j = \overline{1, m}$.

Означення. Рівняння (1) будемо називати параболічним, якщо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^m - \sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \lambda^{k_0} = 0, \quad (6)$$

задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leq -a_0 |\sigma|^\gamma, \quad (7)$$

$a_0 > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, m}$.

Розв'язок рівняння (4) подається у вигляді

$$V(t, \sigma) = \sum_{j=1}^m c_j K_j(t, \sigma) + \int_0^t K(t-\tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau,$$

де $\tilde{K}(t, \sigma) \equiv \{K_j(t, \sigma)\}_{j=1}^m$ – нормальна фундаментальна система розв'язків та $K(t, \sigma)$ – функція Гріна задачі Коші побудовані в праці [9].

Для отримання розв'язку задачі (4), (5) задовольнимо крайові умови (5), після чого отримаємо систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо $c_1, \dots, c_m$

$$\sum_{j=1}^m c_j \left[\left. \frac{d^{l-1} K_j(t, \sigma)}{dt^{l-1}} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{d^{l-1} K_j(t, \sigma)}{dt^{l-1}} \right|_{t=T} \right] =$$

$$= \tilde{\varphi}_l(\sigma) + \mu \int_0^T \left. \frac{d^{l-1} K(t-\tau, \sigma)}{dt^{l-1}} \right|_{t=T} \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (8)$$

$l = \overline{1, m}$, або в матричному вигляді

$$(E - \mu A)C = \tilde{\varphi} + \tilde{F},$$

де E – одинична матриця, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$.

Припустимо, що існує обернена матриця, $(E - \mu A)^{-1}$, тоді знаходимо

$$C = (E - \mu A)^{-1} \tilde{\varphi} + (E - \mu A)^{-1} \tilde{F}.$$

Розв'язок задачі (4), (5) набуде вигляду

$$V(t, \sigma) = \tilde{K}(E - \mu A)^{-1} \tilde{\varphi} + \tilde{K}(E - \mu A)^{-1} \tilde{F} + K * \tilde{f}. \quad (9)$$

Підставимо функцію $V(t, \sigma)$ з (9) у формулу (3) та скористаємося теоремою Фубіні, отримаємо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(t, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_2(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi \equiv u_1 + u_2 + u_3, \quad (10)$$

де вжито такі позначення

$$G_0(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \sigma)} K(t, \sigma) d\sigma,$$

$$G_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \sigma)} \tilde{K}(t, \sigma) (E - \mu A)^{-1} d\sigma,$$

$$G_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \sigma)} \tilde{K}(t, \sigma) (E - \mu A)^{-1} \tilde{F} d\sigma.$$

Якщо для норми матриці (μA) виконується нерівність

$$\|\mu A\| \leq \mu_0 < 1, \quad (11)$$

$\sigma \in \mathbb{R}^n$, тоді допустиме розв'язання в ряд

$$(E - \mu A)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p A^p.$$

Використовуючи теорему про інтегрування ряду, можна поміняти місцями порядки інтегрування та сумування в функціях $G_1(t, x)$ та $G_2(t, x)$

$$G_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \sigma)} \tilde{K}(t, \sigma) \mu^p A^p d\sigma,$$

$$G_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \sigma)} \tilde{K}(t, \sigma) \mu^p A^p \tilde{F} d\sigma.$$

Згідно лем 1, 2 та зображення функцій $\tilde{K}(t, \sigma) \equiv \{K_j(t, \sigma)\}_{j=1}^m$, $K(t, \sigma)$ з [9], прийдемо

до оцінок функцій $G_1(t, x)$, $G_2(t, x)$ та їх похідних

$$\|G_1(t, x)\| \leq c \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p \frac{(t+pT)^m}{\left((t+pT)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{n+\gamma}}, \quad (12)$$

$$\|G_2(t, x)\| \leq c \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p \frac{(t+pT+T)^m}{\left((t+pT+T)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{n+\gamma}}, \quad (13)$$

$$\|D_t^{k_0} G_1(t, x)\| \leq c \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p \frac{(t+pT)^{m-1}}{\left((t+pT)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{n+\gamma k_0}}, \quad (14)$$

$$\|D_t^{k_0} G_2(t, x)\| \leq c \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p \frac{(t+pT+T)^{m-1}}{\left((t+pT+T)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{n+\gamma k_0}}, \quad (15)$$

$k_0 \geq 1$.

Позначимо через $H^{(1,\alpha)}$ клас функцій $u \in C_x^{(\alpha)}(\Pi_T) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ з нормою [7], а $H^{(1,0)} \equiv C(\Pi_T) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. Нехай символи $P_{\nu k_0}(\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, $N \geq 2n + [\gamma] + 1$, рівняння (1) є параболічним і виконується умова (11), тоді для довільних функцій $\varphi_j \in H^{(1,0)}$, $j = \overline{1, m}$, $f \in H^{(1,\alpha)}$, розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою (10), а для його похідних правильні нерівності

$$|D_t^{k_0} u(t, x)| \leq c \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_j|_{H^{(1,0)}} + |f|_{H^{(1,\alpha)}} \right).$$

Доведення. Оцінки (12)-(15) дозволяють розширити область визначення оберненого оператора задачі (1), (2), який діє на сумовні функції $(\varphi_j, f)_{j=1}^m$ за формулою (10).

Вивчимо властивості похідних функції $u_1(t, x)$. Використовуючи оцінку (12) та припускаючи, що $\varphi_j \in H^{(1,0)}$, отримаємо

$$|u_1(t, x)| \leq c \sum_{j=1}^m |\varphi_j|_{H^{(1,0)}} \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p (t+pT)^{m-1} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma}} dz \leq c_1 \sum_{j=1}^m |\varphi_j|_{H^{(1,0)}}.$$

Треба зауважити, що в останній нерівності ряд збіжний при $|\mu| < 1$.

Для оцінки похідних функції $u_1(t, x)$ скористаємося оцінкою (14)

$$|D_t^{k_0} u_1(t, x)| \leq c \sum_{j=1}^m |\varphi_j|_{H^{(1,0)}} \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p (t+pT)^{m-k_0} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma k_0}} dz \leq c_1 \sum_{j=1}^m |\varphi_j|_{H^{(1,0)}}.$$

Проводячи попередні міркування, для другого доданку (10), можна отримати аналогічні оцінки.

Перейдемо до оцінки третього доданку формули (10). Для похідних функції $G_0(t, x)$ з [9] правильною є така оцінка

$$|D_t^{k_0} G_0(t, x)| \leq c \frac{t^{m-1}}{\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{n+\gamma k_0}}.$$

Використовуючи останню нерівність, приходимо до оцінки похідних функції $u_3(t, x)$

$$|D_t^{k_0} u_3(t, x)| \leq c \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau, \xi)| \times \\ \times \frac{(t-\tau)^{m-1}}{\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x-\xi|\right)^{n+\gamma k_0}} d\xi.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $z = \frac{x-\xi}{t^{\frac{1}{\gamma}}}$ та будемо припускати, що $f \in C(\Pi_T)$, тоді отримаємо

$$|D_t^{k_0} u_3(t, x)| \leq c |f|_C \int_0^t (t-\tau)^{m-k_0-1} d\tau \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma k_0}} dz.$$

З останньої нерівності можна побачити, що інтеграл по τ збіжний тільки при $k_0 < m$, а це означає, що похідна по t до порядку $m-1$ одержуються безпосереднім диференціюванням. Покажемо, що при підвищенні гладкості до умови Гельдера на функцію $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi_T)$ існує старша похідна, яка буде обчислюватися за допомогою спеціальної формули. Припустимо, що $f(t, x)$ задовольняє умову Гельдера по змінній x , тоді старша похідна обчислюється за формулою

$$D_t^m u_3(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau, \xi) - f(\tau, x)| \times$$

$$\times D_t^m G_0(t-\tau, x-\xi) d\xi + f(t, x).$$

Розглянемо функцію

$$u_3^{(h)}(t, x) = \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Продиференціювавши останню рівність m раз за t та скориставшись властивістю функції $G_0(t, x-\xi)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_0(t, x-\xi) d\xi = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

одержимо

$$D_t^m u_3^{(h)}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G_0(h, x-\xi) f(t-h, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G_0(t-\tau, x-\xi) [f(\tau, \xi) - f(\tau, x)] d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G_0(t-\tau, x-\xi) d\xi f(\tau, x).$$

Зауважимо, що перший доданок останнього виразу отримується під час диференціювання по верхній межі. Розглянемо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G_0(h, x-\xi) f(t-h, \xi) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G_0(h, x-\xi) d\xi f(t-h, x) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G_0(h, x-\xi) [f(t-h, \xi) - f(t-h, x)] d\xi.$$

При $h \rightarrow 0$ рівномірно по t , для фіксованого x , перший доданок прямує до $f(t, x)$ згідно властивостей дельтаподібності функції $D_t^{m-1} G_0(t-\tau, x-\xi)$, а другий доданок оцінюємо з використанням умови, що $f \in C_x^{(\alpha)}(P_T)$. Отримаємо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G_0(h, x-\xi) [f(t-h, \xi) - f(t-h, x)] d\xi \right| \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |x-\xi|^\alpha \frac{h^{-\frac{n}{\gamma}}}{\left(1 + \frac{|x-\xi|}{h^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{n+\gamma(m-1)}} d\xi =$$

$$= c|h|^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |z|^\alpha \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma(m-1)}} dz \leq c|h|^\alpha,$$

тому при $h \rightarrow 0$ він прямує до нуля. Теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Дезин А. А. Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия / А. А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1967. — Т. 31, № 1. — С. 61–86.

2. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. — К.: Наукова думка, 2002. — 416 с.

3. Эйдельман С. Д. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Матем. исслед. — Кишинев, 1981. — Вып. 63. — С. 18–33.

4. Федорюк М. В. Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения / М. В. Федорюк // Дифф. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 7. — С. 1296–1301.

5. Кочубей А. Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А. Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1988. — Т. 52, № 5. — С. 909–934.

6. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М.: Наука, 1964. — 444 с.

7. Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі / М. І. Матійчук. — К.: Ін-т математик НАН України, 1999. — 176 с.

8. Дринь Я. М. Нелокальна багатоточкова задача для псевдодифференціальних рівнянь параболического типу / Я. М. Дринь // Науковий вісник Чернівецького університету: 36. наук. пр. Вип. 501. Математика. — Чернівці: Рута, 2010. — С. 24–32.

9. Лучко В. М. Задача Коші для параболического псевдодифференціального рівняння вищого порядку / В. М. Лучко // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. Вип. 2. — 2008. — С. 19–25.

Надійшла до редколегії 17.02.2011

УДК 531.38

Мазнев О.В., к.ф.-м.н., доц.

Регулярні прецесії гіростата із змінним гіростатичним моментом в узагальненій задачі динаміки

Досліджені умови існування регулярних прецесій гіростата в припущенні, що гіростатичний момент залежить від часу. Отримано новий розв'язок рівнянь Кірхгофа-Пуассона, який узагальнює розв'язок задачі про рух важкого гіростата із змінним гіростатичним моментом.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, регулярна прецесія.

E-mail: maznev_av@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

Введення

Рівняння руху гіростата [5] можуть бути використані й у важливому для додатків випадку, коли величина гіростатичного моменту залежить від часу. У роботах [1,2,3] розглянуті умови існування простих класів прецесійних рухів у задачі про рух тіла в полі сили тяжіння.

У даній роботі досліджені умови існування регулярних прецесій у задачі про рух гіростата під дією потенційних та гіроскопічних сил [6]. Вказано новий розв'язок рівнянь руху несиметричного гіростата відносно вертикалі.

Постановка задачі.

Розглянемо задачу про рух гіростата під дією потенційних та гіроскопічних сил [8]. Припускаємо, що гіростатичний момент залежить від часу, а ротори не намагнічені і вільні від електричних зарядів. Тоді рівняння руху гіростата можна записати у вигляді [5,8]

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega - \lambda(t)\alpha - \lambda(t)(\omega \times \alpha) +$$

$$+ \omega \times Bv + v \times (Cv - s),$$

$$v = v \times \omega, \quad (2)$$

де: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор кутової швидкості тіла-носія; $v = (v_1, v_2, v_3)$ – одиничний вектор

O.V. Maznyev, cand. phys. and math. sc., Associate Prof.

Regular precessions of gyrostat with a variable gyrostatic moment in the generalized task of dynamics

The existence terms of regular gyrostat precessions in case that a gyrostatic moment depends on time are investigated. The new decision of Kirkhgoff-Poisson's equalizations is discovered. It generalizes the decision of a problem on heavy gyrostat movement with a variable gyrostatic moment.

KeyWord: gyrostat, gyrostatic moment, regular precession.

вертикалі; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – сталий одиничний вектор гіростатичного моменту $\lambda(t) = \lambda(t)\alpha$; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор узагальненого центру мас гіростата; $A = (A_{ij})$ – тензор інерції гіростата; $B = (B_{ij}), C = (C_{ij})$ – сталі симетричні матриці третього порядку; крапка над змінними означає відносну похідну за часом.

Рівняння (1),(2) допускають перші інтеграли

$$v \cdot v = 1, \quad (A\omega + \lambda(t)\alpha) \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k, \quad (3)$$

де k – довільна стала.

Нехай a – одиничний вектор, незмінно зв'язаний з гіростатом. Регулярну прецесію гіростата опишемо співвідношеннями [4]

$$a \cdot v = a_0, \quad \omega = na + mv, \quad (4)$$

де $a_0 = \cos\theta_0$, θ_0 – сталий кут між векторами a і v , а m та n – сталі, які характеризують швидкості власного обертання і прецесії гіростата.

Покладемо $a = (0, 0, 1)$, першому співвідношенню з (3) і рівнянню (2) задовольнимо функціями [4]

$$v_1 = a'_0 \sin nt, \quad v_2 = a'_0 \cos nt, \quad v_3 = a_0, \quad (5)$$

$$(a'_0 = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin\theta_0).$$

Внесемо вираз ω з (4) в рівняння (1) і з урахуванням (2) розглянемо проекції отриманої векторної рівності на незалежні вектори a , v , $a \times v$

$$\alpha_1 \dot{\lambda}(t) = a_0' m \alpha_1 \lambda(t) \cos nt + F_1(t), \quad (6)$$

$$(a_0' \alpha_1 \sin nt + a_0 \alpha_3) \dot{\lambda}(t) = -a_0' n \alpha_1 \lambda(t) \cos nt + F_2(t), \quad (7)$$

$$a_0' \alpha_1 \cos nt \cdot \dot{\lambda}(t) = a_0' [\alpha_1 (n + a_0 m) \sin nt - a_0' \alpha_3 m] \lambda(t) + F_3(t), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} F_1(t) &= P_2' \sin 2nt - P_2 \cos 2nt - P_1' \sin nt + \\ &+ P_1 \cos nt, \\ F_2(t) &= Q_2 \cos 2nt - Q_2' \sin 2nt - Q_1 \cos nt + \\ &+ Q_1' \sin nt, \\ F_3(t) &= -R_2 \cos 2nt - R_2' \sin 2nt + R_1 \cos nt + \\ &+ R_1' \sin nt - R_0. \end{aligned} \quad (9)$$

У рівняннях (6)-(9) покладено, що $\alpha = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$, чого можна добитися поворотом рухомої системи координат навколо третьої осі.

У співвідношеннях (9) введені позначення

$$\begin{aligned} P_2 &= a_0'^2 (C_{12} + m B_{12} - m^2 A_{12}), \\ P_2' &= \frac{a_0'^2}{2} [C_{22} - C_{11} + m(B_{22} - B_{11}) - \\ &- m^2 (A_{22} - A_{11})], \\ P_1 &= a_0' [s_1 - a_0 (C_{13} + m B_{13} - m^2 A_{13})], \\ P_1' &= a_0' [s_2 - a_0 (C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23})], \\ Q_2 &= a_0'^2 n (B_{12} - 2m A_{12}), \\ Q_2' &= \frac{a_0'^2 n}{2} [B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})], \\ Q_1 &= a_0' n [(n + 2a_0 m) A_{13} - a_0 B_{13}], \\ Q_1' &= a_0' n [(n + 2a_0 m) A_{23} - a_0 B_{23}], \\ R_2 &= a_0 P_2' + Q_2', \quad R_2' = a_0 P_2 + Q_2, \\ R_1 &= a_0 (P_1' + Q_1') + a_0'^2 (C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23}), \\ R_1' &= a_0 (P_1 + Q_1) + a_0'^2 (C_{13} + m B_{13} - m^2 A_{13}), \\ R_0 &= a_0'^2 \left\{ s_3 + \frac{a_0}{2} [C_{11} + C_{22} - 2C_{33} + \right. \\ &+ m(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) - m^2 (A_{11} + A_{22} - 2A_{33})] + \\ &+ \left. \frac{n}{2} (B_{11} + B_{22}) + mn A_{33} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Вивчимо умови існування розв'язків системи (6)-(8) у припущенні, що жодна з величин α_1, α_3 не дорівнює нулю.

Умови існування регулярних прецесій.

Рівняння (7) дозволяє знайти функцію $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2n(a_0' \alpha_1 \sin nt + a_0 \alpha_3)} (Q_2 \sin 2nt + Q_2' \cos 2nt - 2Q_1 \sin nt - 2Q_1' \cos nt + 2nQ_0), \quad (11)$$

де Q_0 – довільна стала.

Для визначення умов існування прецесій підставимо вираз (11) у рівняння (6), (8) і будемо вимагати, щоб отримані рівності були тотожностями по t . Тоді отримаємо систему алгебраїчних рівнянь на параметри задачі. Випишемо ряд з них

$$2C_{12} + m B_{12} = 0, \quad 2(C_{22} - C_{11}) + m(B_{22} - B_{11}) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha_1 (C_{13} + m B_{13} - m^2 A_{13}) - \alpha_3 [C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{22} - A_{11})] = 0, \quad (13)$$

$$\alpha_1 (C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23}) + 2\alpha_3 (C_{12} + m^2 A_{12}) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} ms_1 &= (n + 2a_0 m) C_{13} + m(n + a_0 m) B_{13}, \\ ms_2 &= (n + 2a_0 m) C_{23} + m(n + a_0 m) B_{23}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$a_0 C_{23} + m(n + a_0 m) A_{23} = 0, \quad (16)$$

$$a_0'^2 \alpha_1^2 (C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23}) - 2a_0 \alpha_3 [a_0 C_{23} + m(n + a_0 m) A_{23}] = 0. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_0^2 (C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23}) - \\ - 2A_{23} (n + a_0 m)^2 = 0, \\ a_0^2 \alpha_3^2 (n + a_0 m) C_{23} - a_0'^2 a_0 \alpha_1^2 m^2 B_{23} + \\ + mA_{23} [a_0'^2 \alpha_1^2 m(n + 2a_0 m) + \\ + a_0 \alpha_3^2 (n + a_0 m)^2] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу (16) з (14), (15), (17) випливають рівності

$$\begin{aligned} C_{23} + m B_{23} - m^2 A_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \\ a_0 B_{23} - (n + 2a_0 m) A_{23} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$C_{12} + m^2 A_{12} = 0. \quad (20)$$

Із співвідношень (18) і з урахуванням першої і третьої рівності, що входить в систему (19) отримаємо

$$A_{23} = 0, \quad a_0 B_{23} = 0, \quad a_0 C_{23} = 0. \quad (21)$$

Нехай в (21) $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$). Знаменник формули (11), коли $t = \frac{\pi k}{n}$ ($k \in N$), обертається в нуль. Це означає, що для збереження властивості обмеженості функції $\lambda(t)$ з (11) необхідно вимагати, щоб при цих значеннях t і чисельник її обертався в нуль. Тоді функція $\lambda(t)$ прийме вигляд

$$\lambda(t) = \kappa_1 \sin nt + \kappa_0. \quad (22)$$

На підставі (6)-(8) отримаємо наступні умови існування прецесій (4),(5)

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad s_2 = 0, \quad A_{23} = 0, \quad C_{23} = -mB_{23}, \\ B_{12} = 2mA_{12}, \quad C_{12} = -m^2 A_{12}, \\ 2(C_{22} - C_{11}) + m(B_{22} - B_{11}) = 0, \\ ms_1 = n(C_{13} + mB_{13}), \\ s_3\alpha_1 + \frac{n\alpha_1}{2}(B_{22} + B_{11}) + \alpha_1 mnA_{33} - \\ - \alpha_3 mnA_{13} = 0, \quad 2\alpha_1(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}) - \\ - \alpha_3 m[2m(A_{22} - A_{11}) - (B_{22} - B_{11})] = 0, \\ \kappa_1 = \frac{1}{2\alpha_1}[2m(A_{22} - A_{11}) - (B_{22} - B_{11})], \\ \kappa_0 = -\frac{nA_{13}}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Якщо $C_{ij} = 0, B_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1,3}$), то з (23) випливає

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \\ A_{23} = 0, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = -\frac{A_{13}}{A_{22} - A_{11}}, \\ s_3\alpha_1 + mn(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

а функція $\lambda(t)$ з (22) набуде вигляду

$$\lambda(t) = \frac{m}{\alpha_1}(A_{22} - A_{11}) \sin nt - \frac{nA_{13}}{\alpha_1}.$$

З рівності (24) випливає, що α належить головній площині еліпсоїда інерції; вектор s коли-

неарен вісі власного обертання; $\lambda(t)$ – тригонометричний многочлен першого порядку по $\sin nt$.

Нехай $a_0 \neq 0$. З (21) випливає, що $B_{23} = 0, C_{23} = 0$. Аналіз системи алгебраїчних рівнянь на параметри задачі дозволяє визначити величини R_0 і Q_0 . Тоді формула (11) значно спрощується

$$\lambda(t) = \lambda_1 \sin nt + \lambda_0, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a'_0(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13})}{m\alpha_3}, \\ \lambda_0 &= -\frac{a_0 C_{13} + m(n + a_0 m)A_{13}}{m\alpha_1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Випишемо всі умови існування прецесії гіростата, враховуючи позначення (10) і рівності (12)-(15), (19)-(21)

$$\begin{aligned} s_2 = 0, \quad C_{12} = -m^2 A_{12}, \quad B_{12} = 2mA_{12}, \\ C_{22} - C_{11} = \frac{m}{2}(B_{11} - B_{22}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0,$$

$$s_1 = \frac{1}{m}[(n + 2a_0 m)C_{13} + m(n + a_0 m)B_{13}],$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}) - \\ - \alpha_3[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})] = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_1\alpha_3\left\{s_3 + \frac{a_0}{2}[C_{11} + C_{22} - 2C_{33} + \right. \\ \left. + m(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) - \right. \\ \left. - m^2(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})\right\} - \\ + \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22}) + mnA_{33}\left\} - \right. \\ \left. - a_0\alpha_1^2(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}) - \right. \\ \left. - 2\alpha_3^2[a_0 C_{13} + m(n + a_0 m)A_{13}] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Рівність $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$ і умову (28) можна розглядати як рівняння для визначення α_1, α_3 . У другому, третьому, четвертому рівняннях системи (28) параметр m можна вважати вільним. Восьме рівняння системи є рівнянням для визначення параметра n . Умова (29) зв'язує всі параметри задачі і може бути інтерпретована як умова на s_3 .

Якщо $C_{ij} = 0, B_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1,3}$) з системи (27)-(29) отримаємо

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \quad s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_1} &= -\frac{A_{13}}{A_{22} - A_{11}}, \\ \alpha_1^2 [s_3 - a_0 m^2 (A_{22} - A_{33}) + mn A_{33}] + \\ &+ \alpha_3^2 m(n + a_0 m)(A_{22} - A_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким чином, отримано умови існування регулярних прецесій (4),(5) в задачі (1),(2). При цьому виникають два варіанти. У першому варіанті $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ і виконуються умови (23), з яких випливає, що вектори a, α і z не лежать в головній площині еліпсоїда інерції. У другому варіанті $a_0 \neq 0$ і елементи матриць A, B, C з індексами два і три дорівнюють нулю. Для класичного варіанту маємо умови (30).

Особливий інтерес представляє варіант, коли рівності (27)-(29) виконуються для всіх значень параметра m (параметр n фіксований). Тоді отримаємо наступні умови

$$\begin{aligned} A_{12} &= 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{13} = 0, \\ B_{23} &= 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = 0, \\ C_{23} &= 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad \alpha_1 A_{13} + \\ &+ \alpha_3 (A_{22} - A_{11}) = 0, \quad a_0 (A_{22} - A_{33}) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

Список використаних джерел

1. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 30-35.
2. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
3. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
4. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк.: ДонНУ, 2009. – 222 с.

$$\begin{aligned} n [A_{13}^2 + A_{33}(A_{22} - A_{11})] + \\ + a_0 (B_{11} - B_{33}) = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ s_3 + a_0 (C_{11} - C_{33}) + n B_{11} = 0. \end{aligned}$$

Припустимо, що в системі (31) $a_0 = 0$. Тоді з системи (31) маємо

$$A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}), \quad s_3 + n B_{11} = 0. \quad (32)$$

Якщо прийняти до уваги умову $s \parallel a$, яка випливає з (31), то перша рівність з (32) означає, що центр мас гіростата лежить на перпендикулярі до кругового перетину гіраційного еліпсоїда. Тобто перша умова з (32) описує умову Гесса [7]. Отримана властивість істотно відрізняється від властивостей регулярної прецесії у випадку сталого гіростатичного моменту.

Висновок

У статті досліджено умови існування прецесійних рухів гіростата під дією потенційних та гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. У припущенні, що $\lambda = \lambda(t)$ отримано новий розв'язок рівнянь Кірхгофа-Пуассона.

5. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.

6. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura et Appl. – 1947. – V.4, 26, f. 3-4. – P. 271-281.

7. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – B.37, H. 2. – S. 153-181.

8. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V.5, № 5. – P. 742-745

Донецький національний університет.
Надійшла до редакції 23.02.2010

УДК 519.9

Євген Ю. Таран*, д.ф.-м.н., професор,
Роман Я. Кондрат, к.ф.-м.н.

Реологічна поведінка розведених розчинів недеформівних ланцюгових макромолекул в однорідному полі швидкості

Вивчається реологічна поведінка розведеного розчину недеформівних ланцюгових макромолекул у течіях з однорідним полем швидкості. Як приклад, отримується залежність ефективної в'язкості такого розчину від градієнта швидкості течії чистого зсуву.

Ключові слова: реологія, розведений розчин, недеформівні ланцюгові макромолекули, однорідне поле швидкості, течія чистого зсуву

*E-mail: taran@univ.kiev.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

1 Вступ

У роботах [1, 2] показано, що реологічна поведінка розведених розчинів недеформівних вільнопротічних ланцюгових макромолекул Сайто [3] (надалі – модельних макромолекул Сайто) залежить від градієнта швидкості течії, а також від геометрії течії. Зокрема встановлено, що ефективна в'язкість таких розчинів зменшується у простій зсувній течії і збільшується у течії одновісного розтягу зі збільшенням відповідних градієнтів швидкостей у цих течіях.

Результати, які одержано в роботах [1, 2], узагальнюються у даній роботі при дослідженні реологічної поведінки розведених розчинів модельних макромолекул Сайто у течії з однорідним полем швидкості. Можливість використання цього узагальнення демонструється вивченням реологічної поведінки таких розчинів у течії чистого зсуву.

Для досліджень у даній роботі, як і в роботах [1, 2], використовуються визначальні реологічні рівняння розведених розчинів модельних макромолекул Сайто, отриманих у [1] за допомогою структурно-феноменологічного методу [4].

2 Реологічна модель розведених розчинів модельних макромолекул Сайто

Напружений стан у розведених розчинах модельних макромолекул Сайто визначається реологічним рівнянням [1]

© Є.Ю. Таран, Р.Я. Кондрат, 2011

Ye.Yu. Taran*, D.Sci.(Phys.-Math.), Full Professor,
R.Ya. Kondrat, PhD (Phys.-Math.)

Rheological behaviour of dilute solutions of undeformable chain macromolecules in uniform velocity field

Rheological behaviour of dilute solution of undeformable chain macromolecules in flows with uniform velocity field is studied. As an example it is found the dependence of an apparent viscosity of such solution on the velocity gradient in a pure shear flow.

Key words: rheology, dilute solution, undeformable chain macromolecules, uniform velocity field, pure shearing flow

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \mu_1 \langle n_i n_j \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ij} + \mu_2 d_{km} \times \\ \times \langle n_k n_m n_i n_j \rangle + 2\mu_3 (d_{jk} \langle n_k n_i \rangle + d_{ik} \langle n_k n_j \rangle). \quad (2.1)$$

У (2.1) T_{ij} – тензор напруження у розчині; p – тиск; δ_{ij} – символ Кронекера; d_{ij} – тензор швидкостей деформації, $d_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$; v_i – швидкість течії; n_i – одиничний вектор, який визначає орієнтацію модельної макромолекули Сайто у лабораторній системі координат [1]; μ, μ_1, μ_2, μ_3 – реологічні сталі, які визначаються співвідношеннями

$$\mu = \mu_0 \left(1 + n_0 \frac{\xi P}{2\mu_0} \right), \quad \mu_1 = 3n_0 \xi (R - P) D_r, \\ \mu_2 = n_0 \xi \frac{(R - P)^2}{R + P}, \quad \mu_3 = n_0 \xi \frac{P(R - P)}{2(R + P)}. \quad (2.2)$$

У (2.2) μ_0 – в'язкість ньютонівського розчинника; n_0 – кількість макромолекул в одиниці об'єму розчину; ξ – коефіцієнт опору тертя бусинки модельної макромолекули Сайто у ньютонівському розчиннику; величини R і P разом з Q ($P = Q$) згідно з [3] визначають геометричну структуру модельних макромолекул Сайто,

$$R = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k^2, \quad P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k^2, \quad Q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \zeta_k^2,$$

де $(\rho_k, \eta_k, \zeta_k)$ – координати k -ої бусинки модельної макромолекули Сайто в системі координат $O\rho\eta\zeta$, яка зв'язана з головними осями інерції макромолекули.

Кутові дужки у (2.1) означають осереднення у просторі можливих орієнтацій модельних макромолекул Сайто за допомогою функції розподілу F , яка визначається рівнянням [1]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_i} \{ \omega_{ik} n_k + \Lambda (d_{ik} n_k - d_{km} n_k n_m n_i) \} F = D_r \left(\Delta F - 2n_k \frac{\partial F}{\partial n_k} + n_k n_m \frac{\partial^2 F}{\partial n_k \partial n_m} \right) \quad (2.3)$$

У (2.3) t – час; ω_{ik} – тензор вихору швидкості, $\omega_{ik} = (1/2)(v_{i,k} - v_{k,i})$; Λ – параметр, який визначається геометрією модельної макромолекули Сайто,

$$\Lambda = \frac{R-P}{R+P}; \quad (2.4)$$

D_r – коефіцієнт обертальної броунівської дифузії модельної макромолекули Сайто,

$$D_r = \frac{kT}{\xi(R+P)},$$

де k – стала Больцмана, T – абсолютна температура; Δ – оператор Лапласа.

3 Реологічна поведінка розведених розчинів модельних макромолекул Сайто в однорідному полі швидкості

У даному розділі визначальні рівняння (2.1)–(2.4) використовуються для вивчення реологічної поведінки розведених розчинів модельних макромолекул Сайто у течіях з однорідним полем швидкості

$$\vec{v} = \hat{S} \vec{r}, \quad (3.1)$$

де $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – вектор положення точки у деякій нерухомій декартовій системі координат; $\hat{S}$ – тензор градієнта швидкості, компоненти якого не залежать від координат і часу. До таких течій належать проста зсувна течія і течія одновісного розтягу, які вивчалися у роботах [1, 2].

Тензор градієнта швидкості $\hat{S}$ можна представити у вигляді суми $\hat{S} = \hat{D} + \hat{\Omega}$, де $\hat{D}$ – тензор швидкостей деформації; $\hat{\Omega}$ – тензор вихору швидкості. Вибираючи координатну

систему за напрямками головних осей тензора швидкостей деформації, матимемо

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} d_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & d_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Для отримання аналітичного виразу для ефективної в'язкості μ_e розведеного розчину модельних макромолекул Сайто у течії (3.1), (3.2) використовується співвідношення [4]

$$\mu_e = \frac{T_{ij} d_{ij}}{2 d_{km} d_{km}} \quad (3.3)$$

У подальших розрахунках, як і в роботах [1, 2], модельна макромолекула Сайто замінюється гідродинамічно еквівалентним еліпсоїдом обертання. При цьому параметри R і P визначаються співвідношеннями [1]

$$R = \frac{2}{3} \frac{\pi a^3 \mu_0 g(p_0)}{\xi} \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{p_0^2 + 1} \right), \quad (3.4)$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{\pi a^3 \mu_0 g(p_0)}{\xi} \left(1 - \frac{p_0^2 - 1}{p_0^2 + 1} \right),$$

$$\text{де } g(p_0) = \frac{p_0^4 - 1}{p_0^4 \left(\frac{2p_0^2 - 1}{2p_0 \sqrt{p_0^2 - 1}} \ln \left(\frac{p_0 + \sqrt{p_0^2 - 1}}{p_0 - \sqrt{p_0^2 - 1}} \right) - 1 \right)};$$

$p_0 = a/b$; a і b – півосі еквівалентного еліпсоїда обертання. Параметр Λ (2.4) при цьому набирає вигляду

$$\Lambda = \frac{p_0^2 - 1}{p_0^2 + 1}, \quad (3.5)$$

а рівняння (2.3) співпадає з відповідним рівнянням для розведеної суспензії еліпсоїдів обертання [4]. Це дає можливість знайти функцію розподілу F орієнтацій модельних макромолекул Сайто у полі швидкості (3.1), (3.2), використовуючи розв'язок рівняння (2.3), знайдений у роботі [5] для розведеної суспензії еліпсоїдів обертання для малих градієнтів швидкості у вигляді розвинення по комбінаціях компонентів вектора n_i , тензора швидкостей деформації d_{ij} і тензора вихору швидкості ω_{ij}

$$F = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2D_r} \Lambda d_{ik} n_i n_k - \frac{1}{6D_r^2} \Lambda d_{ij} \omega_{jk} n_i n_k + \right.$$

$$+\frac{1}{8D_r^2}\Lambda^2 d_{xx}d_{yy}n_xn_yn_zn_z-\frac{1}{60D_r^2}\Lambda^2 d_{xx}d_{xx}+\dots\} \quad (3.6)$$

Із [1–4] відомо, що осереднення компонентів T_{ij} тензора напружень (2.1) слід виконувати у сферичних координатах (φ, θ) , в яких компоненти одиничного вектора орієнтації макромолекул Сайто визначаються співвідношеннями

$$n_x = \cos \varphi \sin \theta, \quad n_y = \sin \varphi \sin \theta, \quad n_z = \cos \theta. \quad (3.7)$$

Ненульові компоненти тензора напруження T_{ij} розведених розчинів модельних макромолекул Сайто у течії (3.1), (3.2) з врахуванням (3.7), набувають вигляду

$$T_{xx} = -p + 2\mu d_{xx} + \mu_1 \left(\langle \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \rangle - \frac{1}{3} \right) + \\ + \mu_2 (d_{xx} \langle \cos^4 \varphi \sin^4 \theta \rangle + \frac{1}{4} d_{yy} \langle \sin^2 2\varphi \sin^4 \theta \rangle + \\ + \frac{1}{4} d_{zz} \langle \cos^2 \varphi \sin^2 2\theta \rangle) + 4\mu_3 d_{xx} \langle \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \rangle, \quad (3.8)$$

$$T_{yy} = -p + 2\mu d_{yy} + \mu_1 \left(\langle \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \rangle - \frac{1}{3} \right) + \\ + \mu_2 (\frac{1}{4} d_{xx} \langle \sin^2 2\varphi \sin^4 \theta \rangle + d_{yy} \langle \sin^4 \varphi \sin^4 \theta \rangle + \\ + \frac{1}{4} d_{zz} \langle \sin^2 \varphi \sin^2 2\theta \rangle) + 4\mu_3 d_{yy} \langle \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \rangle, \quad (3.9)$$

$$T_{zz} = -p + 2\mu d_{zz} + \mu_1 \left(\langle \cos^2 \theta \rangle - \frac{1}{3} \right) + \\ + \mu_2 (\frac{1}{4} d_{xx} \langle \cos^2 \varphi \sin^2 2\theta \rangle + \frac{1}{4} d_{yy} \langle \sin^2 \varphi \times \\ \times \sin^2 2\theta \rangle + d_{zz} \langle \cos^4 \theta \rangle) + 4\mu_3 d_{zz} \langle \cos^2 \theta \rangle. \quad (3.10)$$

Осереднення у (3.8)–(3.10) виконується за формулою

$$\langle a(\varphi, \theta) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a(\varphi, \theta) F(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi$$

з допомогою функції розподілу $F(\varphi, \theta)$

$$F(\varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2D_r} \Lambda (d_{xx} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + d_{yy} \times \right. \\ \times \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + d_{zz} \cos^2 \theta) - \frac{1}{3D_r^2} \Lambda [(d_{yy} - d_{xx}) \times$$

$$\times \omega_x \sin 2\varphi \sin^2 \theta + (d_{zz} - d_{yy}) \omega_y \sin 2\theta \sin \varphi + (d_{xx} - \\ - d_{zz}) \omega_z \sin 2\theta \cos \varphi] + \frac{1}{8D_r^2} \Lambda^2 [d_{xx}^2 \cos^4 \varphi \sin^4 \theta + \\ + d_{yy}^2 \sin^4 \varphi \sin^4 \theta + d_{zz}^2 \cos^4 \theta + \frac{1}{2} d_{xx} d_{yy} \sin^2 2\varphi \times \\ \times \sin^4 \theta + \frac{1}{2} d_{yy} d_{zz} \sin^2 \varphi \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} d_{xx} d_{zz} \cos^2 \varphi \times \\ \times \sin^2 2\theta] - \frac{1}{60D_r^2} \Lambda^2 [d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + d_{zz}^2] + \dots \},$$

яка отримується з (3.6) з врахуванням (3.2) і (3.7).

Підставляння осереднених значень T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} у (3.3) дозволяє отримати вираз для ефективної в'язкості розведеного розчину модельних макромолекул Сайто у течії (3.1), (3.2)

$$\mu_a = \mu_{a0} + \frac{1}{5} \Lambda \left(\frac{1}{14} \Lambda \frac{\mu_1}{D_r} + \frac{2}{7} \mu_2 + \mu_3 \right) \frac{I_3}{I_2 D_r} + \\ + \frac{1}{315} \Lambda^2 \left(\frac{2}{5} \mu_2 + \mu_3 \right) \frac{I_2}{D_r^2}. \quad (3.11)$$

У (3.11) μ_{a0} – ефективна в'язкість розведеного розчину, що розглядається, за відсутності течії,

$$\mu_{a0} = \mu + \frac{1}{30} \Lambda \frac{\mu_1}{D_r} + \frac{1}{15} \mu_2 + \frac{2}{3} \mu_3; \quad (3.12)$$

I_2 і I_3 – другий і третій інваріанти тензора швидкостей деформації течії (3.1), (3.2).

4. Реологічна поведінка розведених розчинів модельних макромолекул Сайто у течії чистого зсуву

У даній роботі одержаний вираз (3.11) використовується для обчислення ефективної в'язкості μ_a^* розведеного розчину модельних макромолекул Сайто у течії чистого зсуву

$$v_x = q_2 x, \quad v_y = -q_2 y, \quad v_z = 0; \quad q_2 = \text{const}. \quad (4.1)$$

Врахування у (3.11) виразів (2.2), (3.12) і (4.1) дозволяє отримати вираз для μ_a^*

$$\mu_a^* = \mu_a^*(0) + \frac{n_0 \xi}{160} P \Lambda^2 \alpha_2 \left(\frac{49}{3} - \frac{11}{56} \Lambda \alpha_2 \right), \quad (4.2)$$

де $\mu_a^*(0)$ – ефективна в'язкість μ_a^* при $\alpha_2 = 0$,

$$\mu_a^*(0) = \mu_0 + \frac{n_0 \xi}{2} P \left(1 - \frac{1}{6} \Lambda \right); \quad \alpha_2 = q_2 / D_r.$$

Використання (3.4) у співвідношенні (4.2) дозволяє отримати придатний для розрахунків вираз для приведенного інкременту $[\mu_a^*]$ ефективної в'язкості μ_a^*

$$[\mu_a^*] = \frac{\mu_a^* - \mu_a^*(0)}{\mu_0 \phi} = \frac{p_0^2 g(p_0)}{320} \Lambda^2 \left\{ \frac{49}{3} \alpha_2 - \frac{11}{56} \Lambda \alpha_2^2 \right\},$$

де ϕ – об'ємна концентрація модельних макромолекул – еліпсоїдів обертання – у розчині; Λ – параметр, який визначається формулою (3.5). Обчислення показують, що приведений інкремент $[\mu_a^*]$ ефективної в'язкості μ_a^* зростає зі збільшенням α_2 , тобто зі збільшенням градієнта швидкості q_2 течії чистого зсуву (4.1) (Рис. 1).

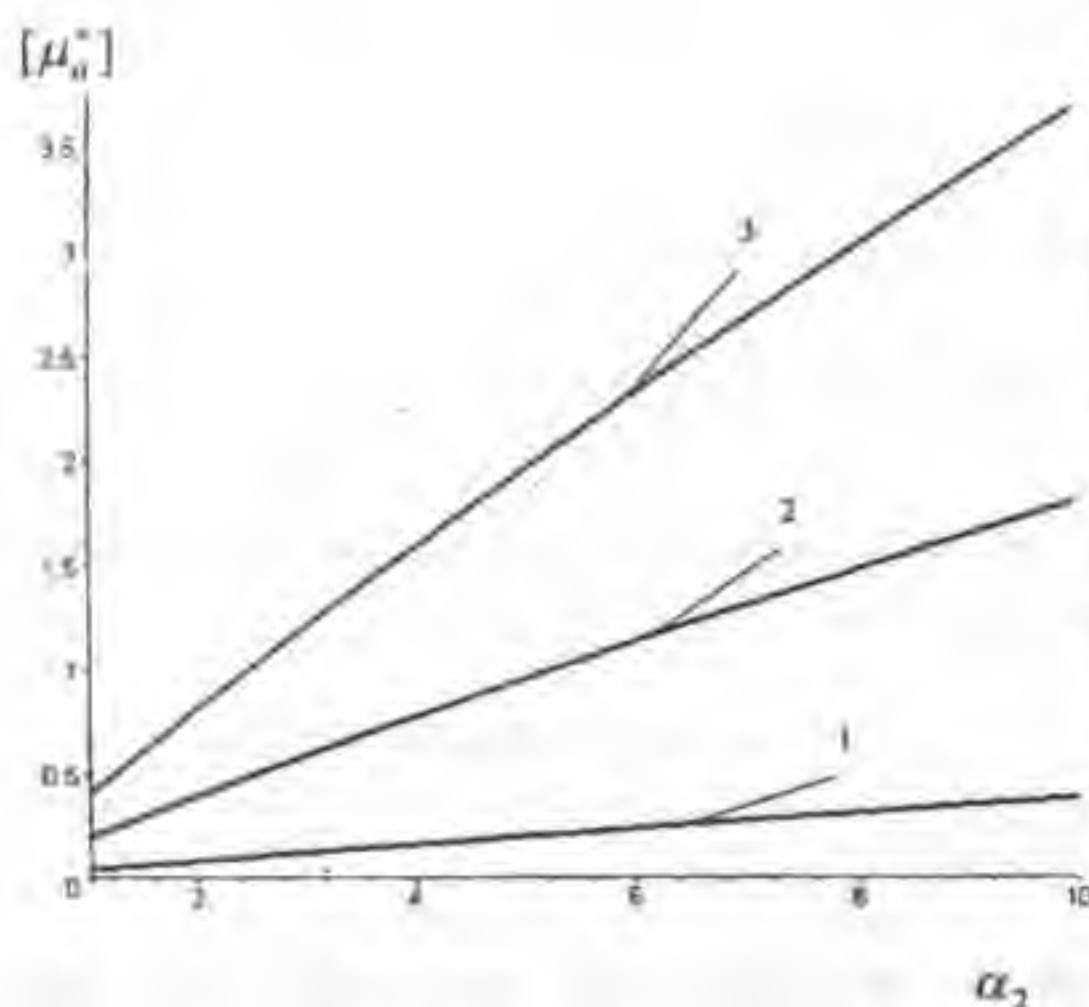


Рис. 1. Залежність $[\mu_a^*]$ розведеного розчину модельних макромолекул Сайто від $\alpha_2 = q_2 / D_r$; криві 1,2,3 відповідають значенням $p_0 = 2,4,6$

Така поведінка розведеного розчину модельних макромолекул Сайто якісно співпадає з поведінкою цих розчинів у течії одновісного розтягу [2]. Інкременти ефективних в'язкостей розчину у цих течіях збільшуються зі збільшенням градієнтів швидкостей і відрізняються між собою лише чисельно.

Разом з тим, порівняння результатів, одержаних у даній роботі, з результатами роботи

[1] показує якісну відмінність реологічної поведінки розведених розчинів модельних макромолекул Сайто у течії чистого зсуву та простій зсувній течії. Ефективна в'язкість цих розчинів та її інкремент зростають у течії чистого зсуву і спадають у простій зсувній течії зі збільшенням відповідних градієнтів швидкості у цих течіях. Додаткові дослідження показують, що така відмінність спричинюється різною динамікою макромолекул розчину у різних градієнтних течіях. Так у течії чистого зсуву макромолекули досягають з часом певної стаціонарної орієнтації, а у течії простого зсуву вони здійснюють періодичний обертальний рух.

Список використаних джерел

1. Таран Є. Ю. Структурно-феноменологічна реологія розведених розчинів недеформівних вільнопротічних ланцюгових макромолекул / Таран Є. Ю., Кондрат Р. Я. // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 97–102.
2. Таран Є. Ю. Вплив мікродинаміки недеформівних ланцюгових макромолекул у розведеному розчині на його макрореологію / Таран Є. Ю., Кондрат Р. Я. // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 1. – С. 51–56.
3. Saito N. The effect of the Brownian motion on the viscosity of solutions of macromolecules. II. Rigid chain molecules / Saito N. // J. Phys. Soc. Japan. – 1951. – Vol. 6, № 2. – P. 302–314.
4. Таран Е. Ю. Структурно-феноменологическая реология разбавленных суспензий: дис. ... доктора физ.-мат. наук : спец. 01.02.05 / Таран Евгений Юрьевич. – Харьков, 1994. – 346 с.
5. Покровский В. Н. Реология дисперсных систем и полимеров. Движение жестких эллипсоидов в потоке / Покровский В. Н. // Коллоидн. журн. – 1967. – 29, № 4. – С. 576–588.

Надійшла до редколегії 11.03.11

УДК 531.36:534.1:62-755

Філімоніхін Г.Б., д.т.н., професор
Пирогов В.В., асистент
Філімоніхіна І.І., к.ф.-м.н., старший викладач

Стійкість основних рухів ізольованої системи, складеної з обертового тіла і двох маятників

Першим методом Ляпунова досліджується стійкість основних рухів ізольованої механічної системи, складеної з обертового тіла, матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість, та двох однакових математичних маятників, насаджених на поздовжню вісь тіла. Наближено визначені корені характеристичного рівняння та досліджений характер перехідних процесів.

Ключові слова: основний рух, ізольована система, маятник.

E-mail: fgb@online.ua, pirogovvv@rambler.ru, fii@online.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

В роботі [4] одержані диференціальні рівняння руху ізольованої системи, складеної з обертового тіла, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість, та математичних маятників (куль, якщо їх вважати матеріальними точками), маси яких рухаються по колам з центром на поздовжній осі тіла. В роботі [5] досліджена стійкість основних рухів та характер перехідних процесів у випадку подібної ізольованої системи, складеної з осесиметричного тіла ($A=B \neq C$), матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість і двох однакових математичних маятників. При цьому був застосований підхід, описаний у роботі [6], який став класичним при розв'язанні подібних задач [3]. В даній роботі аналогічні дослідження проводяться для ізольованої системи із роботи [5], у випадку неосесиметричного тіла ($A \neq B \neq C$).

2. Рівняння руху системи

Використаємо рівняння руху ізольованої системи, отримані в [4]. Вважаємо, що тіло – неосесиметричне ($A \neq B \neq C$), і його статичну незрівноваженість створює нерухома відносно

Filimonikhin H.B., Dt. Sci. (Engineering), Professor
Pirogov V.V., Assistant Professor
Filimonikhina I.I., Cand. Sci. (Phys.-Math), Senior Lecturer

Stability of the main motion of the isolated system which consist of body and two pendulums

Is studied by the first method of Liapunov the stability of the main motions of the isolated mechanical system which consist of rotated body, of the immobile material point, which create statically unbalance, and two identical mathematical pendulums planted on the longitudinal axis of bearing body. The roots of characteristic equation are approximately determinate and is studied of character of transition of process.

Key words: main motion, isolated system, pendulum.

нього матеріальна точка. Два однакових математичних маятника знаходяться у площині незрівноваженості ($h_j = d = h$, $j=1,2$), і на них діють однакові сили опору ($H_j = H$, $j=1,2$). Тоді рівняння руху приймають такий безрозмірний вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{b}_j &= \varphi_j'' + \tilde{H}\varphi_j' + \eta'' \cos \varphi_j - \xi'' \sin \varphi_j + \\ &+ \tilde{\Omega}_z' (1 + \xi \cos \varphi_j + \eta \sin \varphi_j) - (\zeta + R_h) \times \\ &\times (\tilde{\Omega}_y' \sin \varphi_j + \tilde{\Omega}_x' \cos \varphi_j) + 2\tilde{\Omega}_z (\xi' \cos \varphi_j + \\ &+ \eta' \sin \varphi_j) - \tilde{\Omega}_x^2 (\eta + \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \\ &+ \tilde{\Omega}_y^2 (\xi + \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \tilde{\Omega}_z^2 (\eta \cos \varphi_j - \\ &- \xi \sin \varphi_j) - \tilde{\Omega}_x \tilde{\Omega}_y (\eta \sin \varphi_j - \xi \cos \varphi_j - \cos 2\varphi_j) - \\ &- \tilde{\Omega}_z (\zeta + R_h) (\tilde{\Omega}_x \sin \varphi_j - \tilde{\Omega}_y \cos \varphi_j) = 0, \quad j=1,2; \\ \ddot{b}_3 &= \tilde{J}_{xG} \tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{xGyG} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{xGzG} \tilde{\Omega}_z - \\ &- R_m R_j (\zeta + R_h) \sum_{j=1}^2 \varphi_j' \cos \varphi_j + \cos \alpha \sin \beta = 0, \\ \ddot{b}_4 &= -\tilde{J}_{zGyG} \tilde{\Omega}_x + \tilde{J}_{yG} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{yGzG} \tilde{\Omega}_z - \\ &- R_j R_m (\zeta + R_h) \sum_{j=1}^2 \varphi_j' \sin \varphi_j - \sin \alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_3 &= -\tilde{J}_{xGzG}\tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{yGzG}\tilde{\Omega}_y + \tilde{J}_{zG}\tilde{\Omega}_z - \cos\alpha\cos\beta + \\ &+ R_m R_J \sum_{j=1}^2 (\varphi'_j + \xi\varphi'_j \cos\varphi_j + \eta\varphi'_j \sin\varphi_j) = 0, \\ \tilde{b}_6 &= \xi + R_m (2\tilde{e}_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = 0, \\ \tilde{b}_7 &= \eta + R_m (2\tilde{e}_0 \sin\gamma_0 + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) = 0, \\ \tilde{b}_8 &= \zeta + 2R_m R_h \left(1 + \frac{\tilde{e}_0}{R_e}\right) = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

де введені безрозмірні:
- змінні і час

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad R_m = \frac{\omega}{\omega_0}, \\ \tau &= \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right);\end{aligned}\quad (2)$$

- параметри

$$\begin{aligned}\tilde{J}_x &= \frac{A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + 2mh^2}{C + \mu e_0^2 + 2ml^2}, \\ \tilde{J}_y &= \frac{B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + 2mh^2}{C + \mu e_0^2 + 2ml^2}, \\ \tilde{H} &= \frac{H}{ml^2 \omega_0}, \quad R_m = \frac{m}{M_\Sigma}, \quad R_J = \frac{M_\Sigma l^2}{C + \mu e_0^2 + 2ml^2}, \\ R_h &= \frac{h}{l}, \quad R_e = \frac{e_0}{l}, \quad \tilde{e}_0 = \frac{\mu e_0}{2ml};\end{aligned}\quad (3)$$

- проекції кутової швидкості та прискорення

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_x &= \alpha' \cos\beta - R_\omega \cos\alpha \sin\beta, \\ \tilde{\Omega}_y &= \beta' + R_\omega \sin\alpha, \\ \tilde{\Omega}_z &= \alpha' \sin\beta + R_\omega \cos\alpha \cos\beta, \\ \tilde{\Omega}'_x &= \alpha'' \cos\beta - \alpha' \beta' \sin\beta - R'_\omega \cos\alpha \sin\beta + \\ &+ \alpha' R_\omega \sin\alpha \sin\beta - \beta' R_\omega \cos\alpha \cos\beta, \\ \tilde{\Omega}'_y &= \beta'' + R'_\omega \sin\alpha + \alpha' R_\omega \cos\alpha, \\ \tilde{\Omega}'_z &= \alpha'' \sin\beta - \alpha' \beta' \cos\beta + R'_\omega \cos\alpha \cos\beta - \\ &- \alpha' R_\omega \sin\alpha \cos\beta - \beta' R_\omega \cos\alpha \sin\beta;\end{aligned}\quad (4)$$

- осьові та відцентрові моменти інерції

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{xG} &= \tilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^2 \sin^2 \varphi_j - R_J (\eta^2 + \zeta^2), \\ \tilde{J}_{yG} &= \tilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^2 \cos^2 \varphi_j - R_J (\xi^2 + \zeta^2), \\ \tilde{J}_{zG} &= 1 - R_J (\xi^2 + \eta^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{xGyG} &= \left[\frac{R_m}{2} \left(2R_e \tilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \sin 2\varphi_j \right) - \xi\eta \right] R_J, \\ \tilde{J}_{xGzG} &= \left[R_m R_h \left(2\tilde{e}_0 \cos\gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \cos\varphi_j \right) - \xi\zeta \right] R_J, \\ \tilde{J}_{yGzG} &= \left[R_m R_h \left(2\tilde{e}_0 \sin\gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \sin\varphi_j \right) - \eta\zeta \right] R_J.\end{aligned}\quad (5)$$

З останнього рівняння системи (1) випливає, що $\zeta = \text{const}$, тому ця координата і рівняння $\tilde{b}_8$ не впливатимуть на стійкість усталених рухів.

3. Основні рухи

На будь-якому усталеному русі безрозмірні координати $\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta$ та кутова швидкість R_ω – сталі. На основному (усталеному) русі маятники усунули незрівноваженість і система обертається навколо поздовжньої осі тіла, тоді

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= 0, \quad \tilde{\eta} = 0, \quad \tilde{\alpha} = 0, \quad \tilde{\beta} = 0, \\ \tilde{R}_\omega, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 &= \text{const}.\end{aligned}\quad (6)$$

Знайдемо відповідні положення маятників. З (6) з врахуванням та (1) одержуємо такі рівняння для визначення основних рухів

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 &= 0, \quad \tilde{b}_3 = -\tilde{J}_{xGzG} \tilde{R}_\omega = 0, \\ \tilde{b}_4 &= -\tilde{J}_{yGzG} \tilde{R}_\omega = 0, \quad \tilde{b}_5 = \tilde{R}_\omega - 1 = 0, \\ \tilde{b}_6 &= 2\tilde{e}_0 \cos\gamma_0 + \cos\tilde{\varphi}_1 + \cos\tilde{\varphi}_2 = 0, \\ \tilde{b}_7 &= 2\tilde{e}_0 \sin\gamma_0 + \sin\tilde{\varphi}_1 + \sin\tilde{\varphi}_2 = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

З цієї системи одержуємо, що на основних рухах $\tilde{R}_\omega = 1$. $\tilde{J}_{xGzG}, \tilde{J}_{yGzG} = 0$, коли дорівнюють нулю останні два рівняння, з яких отримуємо такі розв'язки.

1. Коли $\tilde{e}_0 = 0$ – незрівноваженість відсутня, то параметр γ_0 (напрямок вектора незрівноваженості) втрачає свій зміст. Але замість нього треба ввести деякий параметр θ , який визначатиме певний рух із однопараметричної сім'ї основних рухів, що утворюється (рис. 1, а):

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2} + \theta, \quad \theta \in [0, \pi). \quad (8)$$

Зазначимо, що $\theta \in [0, \pi)$, бо для решти значень $\theta \in [\pi, 2\pi)$ можна отримати ті ж самі усталені рухи, лише змінюючи місцями маятники.

2. Коли $0 < \tilde{e}_0 < 1$ – незрівноваженість ϵ і маятники можуть її усунути з певним запасом (рис. 1, б), розв'язок системи (7) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma_0, \quad \gamma_0 \in [0, 2\pi), \quad (9)$$

де

$$\varphi_0 = \pi - \arccos \tilde{e}_0, \quad \varphi_0 \in (\pi/2, \pi). \quad (10)$$

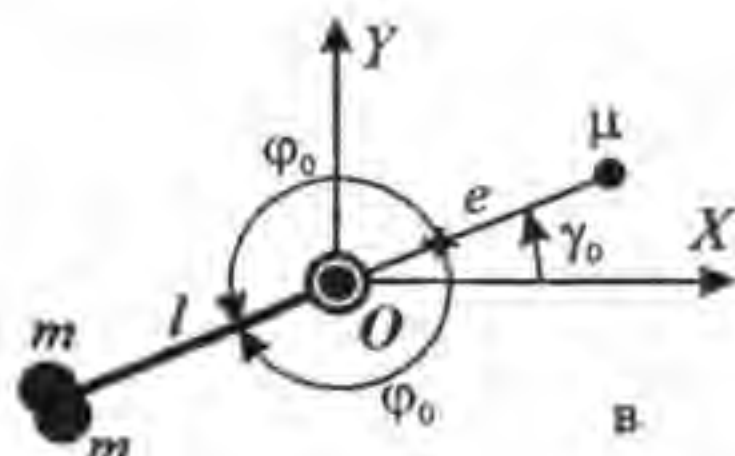
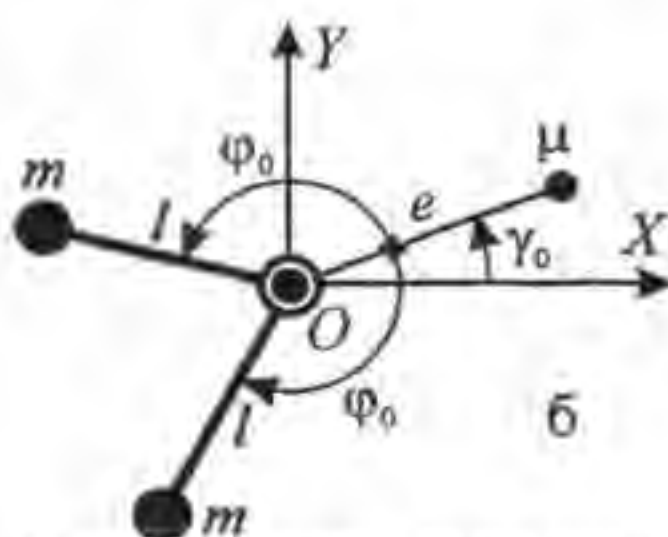
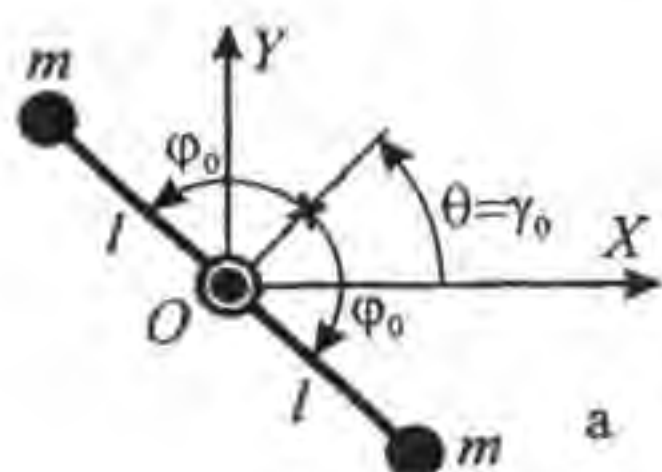


Рис. 1. Основні рухи системи

На основному русі безрозмірні осьові та відцентрові моменти інерції системи мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{xG}^{(0)} &= \tilde{J}_x + 2R_m R_J f - R_J \zeta^2, \\ \tilde{J}_{yG}^{(0)} &= \tilde{J}_y + 2R_m R_J (1-f) - R_J \zeta^2, \quad \tilde{J}_{zG}^{(0)} = 1, \\ \tilde{J}_{xGyG}^{(0)} &= R_m R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0), \quad (12) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} f &= (\cos^2 \varphi_0 - \cos 2\varphi_0 \cos^2 \gamma_0) = \\ &= \tilde{e}_0^2 \sin^2 \gamma_0 + (1 - \tilde{e}_0^2) \cos^2 \gamma_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Помноживши вирази (12) на $C + \mu e_0^2 + 2ml^2$, отримаємо осьові та відцентрові моменти інерції на основному русі у розмірному вигляді

$$\begin{aligned} \hat{J}_{xG} &= A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + \\ &+ 2m(h^2 + l^2 f) - M_\Sigma z^2, \\ \hat{J}_{yG} &= B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + \\ &+ 2m[h^2 + l^2 (1-f)] - M_\Sigma z^2, \\ \hat{J}_{zG} &= C_G = C + \mu e_0^2 + 2ml^2, \\ \hat{J}_{xGyG} &= \frac{1}{2} \sin 2\gamma_0 (\mu e_0^2 + 2ml^2 \cos 2\varphi_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Істотно, що параметр f залежить від незрівноваженості і в залежності від її величини і напрямку змінюється у межах $0 \leq f \leq 1$.

4. Лінеаризовані рівняння

Введемо у розглядання збурений рух:

3. Коли $\tilde{e}_0 = 1$ – незрівноваженість найбільша, яку можуть усунути маятники (рис. 1, в), розв'язок системи (7) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi + \gamma_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\pi + \gamma_0, \quad \gamma_0 \in [0, 2\pi). \quad (11)$$

Нижче досліджується стійкість основних рухів у випадках, коли $0 \leq \tilde{e}_0 \leq 1$.

$$\begin{aligned} \xi &= u, \quad \eta = v, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta, \quad R_m = 1 + p, \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_1, \quad \varphi_2 = -\varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_2, \end{aligned} \quad (15)$$

де $u, v, \alpha, \beta, p, \alpha_1, \alpha_2$ – відхилення від незбуреного руху ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p|, |\alpha_1|, |\alpha_2| \ll 1$). Тоді лінеаризовані рівняння (1) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \alpha_1'' + \tilde{H}\alpha_1' + p' - \zeta_h [(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \times \\ &\times (\cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) + \\ &+ (\beta'' + 2\alpha' - \beta)(\sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- (u'' - 2v' - u)(\sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) + \\ &+ (v'' + 2u' - v)(\cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_2 &= \alpha_2'' + \tilde{H}\alpha_2' + p' - \zeta_h [(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \times \\ &\times (\cos \varphi_0 \cos \gamma_0 + \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) + \\ &+ (\beta'' + 2\alpha' - \beta)(-\sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- (u'' - 2v' - u)(-\sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) + \\ &+ (v'' + 2u' - v)(\cos \varphi_0 \cos \gamma_0 + \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_3 &= \tilde{J}_A(\alpha' - \beta) - R_m \tilde{J}_{AB}(\beta' + \alpha) + \beta + \\ &+ R_J [u\zeta_5 + 2R_m R_h (\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- 2R_m R_J \zeta_h (\gamma_1' \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2' \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_4 &= -R_m \tilde{J}_{AB}(\alpha' - \beta) + \tilde{J}_B(\beta' + \alpha) - \alpha + \\ &+ R_J [v\zeta_5 - 2R_m R_h (\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- 2R_J R_m \zeta_h (\gamma_2' \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1' \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_5 &= p + 2R_m R_J \gamma_1' = 0, \\ \tilde{b}_6 &= u - 2R_m (\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_7 &= v + 2R_m (\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

де введені:

- нові змінні

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2; \quad (17)$$

- нові безрозмірні параметри

$$\tilde{J}_A = \tilde{J}_{xG}^{(0)}, \quad \tilde{J}_B = \tilde{J}_{yG}^{(0)},$$

$$\tilde{J}_{AB} = R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0), \quad \zeta_h = \zeta + R_h. \quad (18)$$

Дослідимо умовну асимптотичну стійкість по частині змінних $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ (за умови виконання законів збереження руху центра мас та моменту кількості руху розглядуваної системи). Використовуючи три останні рівняння із системи (16), виключимо з перших чотирьох рівнянь змінні u, v, p , отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3 &= \tilde{J}_A \alpha' - R_m \tilde{J}_{AB} \alpha - R_m \tilde{J}_{AB} \beta' + (1 - \tilde{J}_A) \beta - \\ &\quad - 2R_J R_m \zeta_h [(\gamma_1' \cos \gamma_0 - \gamma_1 \sin \gamma_0) \cos \varphi_0 - \\ &\quad - (\gamma_2' \sin \gamma_0 + \gamma_2 \cos \gamma_0) \sin \varphi_0] = 0, \\ \tilde{b}_4 &= -R_m \tilde{J}_{AB} \alpha' - (1 - \tilde{J}_B) \alpha + \tilde{J}_B \beta' + R_m \tilde{J}_{AB} \beta - \\ &\quad - 2R_J R_m \zeta_h [(\gamma_1' \sin \gamma_0 + \gamma_1 \cos \gamma_0) \cos \varphi_0 + \\ &\quad + (\gamma_2' \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \gamma_0) \sin \varphi_0] = 0, \\ L_1 &= (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2)/2 = -\zeta_h \cos \varphi_0 (\alpha'' \cos \gamma_0 + 2\alpha' \sin \gamma_0 - \\ &\quad - \alpha \cos \gamma_0 + \beta'' \sin \gamma_0 - 2\beta' \cos \gamma_0 - \beta \sin \gamma_0) + \\ &\quad + (1 - 2R_m R_J - 2R_m \cos^2 \varphi_0) \gamma_1'' + \tilde{H} \gamma_1' + \\ &\quad + 2R_m \cos^2 \varphi_0 \gamma_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_2' = 0, \\ L_2 &= (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)/2 = \zeta_h \sin \varphi_0 (\alpha'' \sin \gamma_0 - 2\alpha' \cos \gamma_0 - \\ &\quad - \alpha \sin \gamma_0 - \beta'' \cos \gamma_0 - 2\beta' \sin \gamma_0 + \beta \cos \gamma_0) - \\ &\quad - 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_1' + (1 - 2R_m \sin^2 \varphi_0) \gamma_2'' + \\ &\quad + \tilde{H} \gamma_2' + 2R_m \sin^2 \varphi_0 \gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

5. Характеристичне рівняння та необхідні умови стійкості основних рухів

Характеристичне рівняння системи (19) має вигляд поліному

$$\Delta(\lambda) = a_6 \lambda^6 + a_5 \lambda^5 + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^{(2)} R_m^2 + a_0^{(4)} R_m^4, \quad a_1 = a_1^{(1)} R_m + a_1^{(2)} R_m^2 + a_1^{(3)} R_m^3, \\ a_i &= a_i^{(0)} + a_i^{(1)} R_m + a_i^{(2)} R_m^2 + a_i^{(3)} R_m^3 + a_i^{(4)} R_m^4, \\ a_j &= a_j^{(0)} + a_j^{(1)} R_m + a_j^{(2)} R_m^2 + a_j^{(3)} R_m^3, \\ &\quad / i = 2, 4, 6; j = 3, 5 / , \end{aligned} \quad (21)$$

і коефіцієнти:

- при R_m^0

$$\begin{aligned} a_6^{(0)} &= \tilde{J}_A \tilde{J}_B, \quad a_5^{(0)} = 2\tilde{H} \tilde{J}_A \tilde{J}_B, \quad a_4^{(0)} = \tilde{H}^2 \tilde{J}_A \tilde{J}_B + \\ &\quad + (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B), \quad a_3^{(0)} = 2\tilde{H}(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B), \\ a_2^{(0)} &= \tilde{H}^2(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B); \end{aligned}$$

- при R_m

$$\begin{aligned} a_6^{(1)} &= -2(\tilde{J}_A \tilde{J}_B + R_J \{\tilde{J}_A \tilde{J}_B + \zeta_h^2 [\tilde{J}_A f + \tilde{J}_B (1 - f)]\}), \\ a_5^{(1)} &= \tilde{H} a_6^{(1)}, \quad a_4^{(1)} = -2(1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B + R_J [(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) - \\ &\quad - 3\zeta_h^2 - \zeta_h^2 (\tilde{J}_A + \tilde{J}_B)(2\tilde{e}_0^2 - 1) \cos 2\gamma_0]), \quad a_3^{(1)} = \tilde{H} a_4^{(1)}, \\ a_2^{(1)} &= 2(1 - f)(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2) + \\ &\quad + f(1 - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2), \quad a_1^{(1)} = \tilde{H} a_2^{(1)}; \end{aligned}$$

- при R_m^2

$$\begin{aligned} a_6^{(2)} &= 4\tilde{J}_A \tilde{J}_B \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) - \tilde{J}_{AB}^2 + R_J \{4\tilde{J}_A \tilde{J}_B (1 - \tilde{e}_0^2) + \\ &\quad + \zeta_h^2 [4(\tilde{J}_A + \tilde{J}_B) \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) - 2\tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} + \\ &\quad + R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [4\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + 4(\tilde{J}_A \cos^2 \gamma_0 + \tilde{J}_B \sin^2 \gamma_0)], \\ a_5^{(2)} &= -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)], \\ a_4^{(2)} &= -\tilde{J}_{AB}^2 (1 + \tilde{H}^2) + 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) + \\ &\quad + R_J \{4(1 - \tilde{e}_0^2)(1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B) + 4\zeta_h^2 [\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\quad \times (3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 2) - \tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} + \\ &\quad + 4R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [3\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + (\tilde{J}_A \cos 2\gamma_0 - \tilde{J}_B \cos 2\gamma_0 - 3)], \\ a_3^{(2)} &= -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + 2R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)], \\ a_2^{(2)} &= -\tilde{H}^2 \tilde{J}_{AB}^2 + 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (2 - 2\tilde{J}_A - 2\tilde{J}_B + 3\tilde{J}_A \tilde{J}_B) - \\ &\quad - R_J \{4(1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{e}_0^2) - 2\zeta_h^2 [2\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\quad \times (3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 4) - \tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} + \\ &\quad + 4R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [3\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + (1 - \tilde{J}_A \sin^2 \gamma_0 - \tilde{J}_B \cos^2 \gamma_0)], \\ a_1^{(2)} &= -2\tilde{H} R_J \tilde{J}_{AB} \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1), \\ a_0^{(2)} &= 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2) (1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2); \end{aligned}$$

- при R_m^3

$$\begin{aligned} a_6^{(3)} &= 2\tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + R_J \tilde{J}_{AB} - 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \\ a_5^{(3)} &= 2\tilde{J}_{AB}^2 (1 + R_J); \quad a_4^{(3)} = 2R_J \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} - \\ &\quad - 4R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \quad a_3^{(3)} = 2\tilde{H} R_J \tilde{J}_{AB}^2, \\ a_2^{(3)} &= -2\tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \quad a_1^{(3)} = -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB}^2; \end{aligned}$$

- при R_m^4

$$\begin{aligned} a_6^{(4)} &= -4\tilde{J}_{AB}^2 (\tilde{e}_0^2 + R_J) (1 - \tilde{e}_0^2), \quad a_4^{(4)} = -12\tilde{J}_{AB}^2 \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2), \\ a_2^{(4)} &= -4\tilde{J}_{AB}^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [3\tilde{e}_0^2 - R_J], \\ a_0^{(4)} &= -4\tilde{J}_{AB}^2 \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2). \end{aligned} \quad (22)$$

За теоремою Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням, основні рухи (умовно) асимптотично стійкі, коли [1]

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad /i = \overline{1,6}/. \quad (23)$$

Необхідні умови асимптотичної стійкості основних рухів мають вигляд

$$a_6 > 0, \quad a_5 > 0, \dots, a_1 > 0, \quad a_0 > 0. \quad (24)$$

З (20)-(22) видно, що випадки відсутності ($\tilde{e}_0 = 0$) та максимальної ($\tilde{e}_0 = 1$) незрівноваженості є критичними за Ляпуновим випадками одного нульового кореня і потребують окремого дослідження.

У загальному випадку отримання коренів поліному (20), аналіз його коефіцієнтів та умов критерію Рауса-Гурвіца аналітично здійснити неможливо. Тому проведемо дослідження у випадку, коли маса маятників набагато менша маси системи, тобто $R_m \ll 1$.

Головні складові коефіцієнтів a_i поліному (20) та умови (24) дають такі необхідні умови стійкості:

$$1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2 > 0, \quad 1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2 > 0, \quad (a) \\ 1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2 < 0, \quad 1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2 < 0. \quad (b) \quad (25)$$

Ці умови більш жорсткі ніж умови, що складене тіло повинно бути витягнутим ($1 < \tilde{J}_A, 1 < \tilde{J}_B$) чи сплюснутим ($1 > \tilde{J}_A, 1 > \tilde{J}_B$). Тому домовимося надалі використовувати терміни більш ніж сплюснуте тіло – умови (25, а), більш ніж витягнуте тіло – умови (25, б).

6. Наближене визначення коренів характеристичного рівняння у випадку, коли $0 < \tilde{e}_0 < 1$, достатні умови асимптотичної стійкості

Застосуємо метод розкладання коренів поліному за степенями малого параметра [2]. У випадку, коли $R_m \ll 1$ корені характеристичного рівняння (20) мають такі розкладання:

$$\lambda_{1,2} \approx -\tilde{H}, \quad \lambda_{3,4} \approx \pm ik - \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (a + bf)(\tilde{H} \mp ik)}{c \tilde{J}_A \tilde{J}_B (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)}, \\ \lambda_{5,6} \approx \frac{-R_m \left[a_i^{(1)} \pm \sqrt{(a_i^{(1)})^2 - 4a_i^{(0)} a_i^{(2)}} \right]}{2a_i^{(0)}}. \quad (26)$$

де

$$k = \sqrt{(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) \tilde{J}_A^{-1} \tilde{J}_B^{-1}}, \\ a = \tilde{J}_B (1 - \tilde{J}_A)(1 + \tilde{J}_A - \tilde{J}_B)^2, \quad b = (\tilde{J}_A - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B)^2, \\ c = [\tilde{H}^2 \tilde{J}_A \tilde{J}_B + (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)]. \quad (27)$$

Дійсні частини цих коренів будуть від'ємні тільки у випадку більш ніж сплюснутого тіла, тобто при виконанні умов (25, а).

Отже, з коренів (26) характеристичного рівняння (20), та з умов (25, а) видно, що:

- за одночасного виконання умов (25,а), основний рух умовно асимптотично стійкий, а перехідні процеси – коливально-затухаючі;
- величина безрозмірного коефіцієнту тертя $\tilde{H}$ впливає лише на швидкість затухання перехідних процесів, але не на стійкість.

Проаналізуємо більш докладно умови (25, а). При цьому будемо вважати, що маса розглядуваної ізольованої системи при зміні незрівноваженості не змінюється і тому, з врахуванням (3), $\mu = \text{const} \neq 0$ і $\tilde{e}_0 = 0$ тільки у випадку, коли $e_0 = 0$. Для того, щоб основні рухи були умовно асимптотично стійкі для будь-якого $0 < \tilde{e}_0 < 1$ достатньо, щоб ці умови виконувалися у найбільш жорстких - граничних випадках (рис. 2):

- 1) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{01} = \pi/2$), $\gamma_{01} = 0$ (рис. 2, а);
- 2) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{02} = \pi$), $\gamma_{02} = \pi/2$ (рис. 2, б);
- 3) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{03} = \pi/2$), $\gamma_{03} = \pi/2$ (рис. 2, в);
- 4) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{04} = \pi$), $\gamma_{04} = 0$ (рис. 2, г);

Відміна випадків полягає в тому, що у випадках 1, 2 маятники розташовуються на осі Y (рис. 2, а, б відповідно), а у випадках 3, 4 – на осі X (рис. 2, в, г відповідно).

У граничних випадках тензор інерції системи – головний центральний і має вигляд:

$$\hat{J}_{Gi} = \begin{pmatrix} A_{Gi} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Gi} & 0 \\ 0 & 0 & C_{Gi} \end{pmatrix}, \quad /i = \overline{1,4}/, \quad (28)$$

де $\hat{J}_{10} = A_{G1}$, $\hat{J}_{20} = B_{G1}$, $\hat{J}_{30} = C_{G1}$ – головні центральні моменти інерції системи (відносно осей X_G, Y_G, Z_G) на i -му граничному основному русі. Враховуючи (14), матимемо:

$$A_{G1} = A + \mu h^2 + 2m(h^2 + l^2) - M_z z^2, \\ A_{G2} = A_{G1} + \mu e_0^2, \quad A_{G3} = A_{G1} - 2ml^2, \quad /i = 3,4/; \\ B_{Gj} = B + h^2(\mu + 2m) - M_z z^2, \quad /j = 1,2/; \\ B_{G3} = B_{Gj} + 2ml^2, \quad B_{G4} = B_{G1} + \mu e_0^2. \quad (29)$$

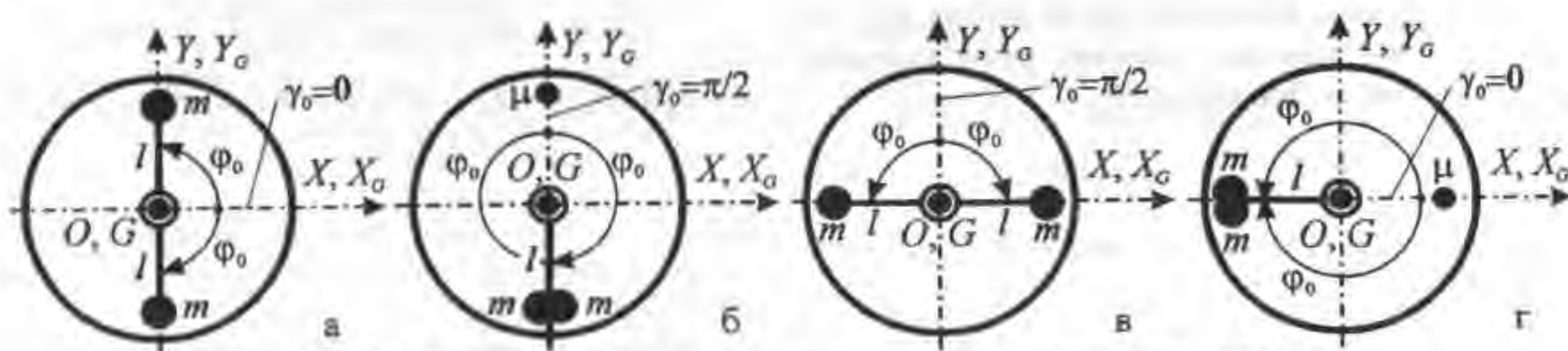


Рис. 2 Положення маятників на основних рухах в граничних випадках

Зазначимо, що безрозмірні параметри $\tilde{J}_A$, $\tilde{J}_B$, враховуючи (18) та граничні випадки, можна представити так:

$$\tilde{J}_{Ai} = A_{Gi}/C_G, \quad \tilde{J}_{Bi} = B_{Gi}/C_G, \quad i = \overline{1,4}. \quad (30)$$

Тоді дійсні частини коренів λ_{1-5} характеристичного рівняння (20) будуть від'ємні при одночасному виконанні умов

$$C_G - A_{Gi} - M_z h_z^2 > 0, \quad C_G - B_{Gi} - M_z h_z^2 > 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (31)$$

де $h_z = h + z$. Зазначимо, що умови (31), отримані в граничних випадках, еквівалентні умовам, які були отримані в роботі [7], але для даної задачі є можливість конкретизувати ці умови. У явному вигляді відносно параметрів системи, в найбільш небезпечних критичних випадках, коли

A_{Gi} та B_{Gi} досягають найбільших значень, умови (31), з врахуванням (14) та (29), матимуть вигляд:

$$C - A - h^2(\mu + 2m) - M_z h(h + 2z) > 0, \\ C - B - h^2(\mu + 2m) - M_z h(h + 2z) > 0. \quad (32)$$

Висновки. В результаті досліджень у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша маси системи отримано, що:

- 1) основні рухи системи умовно асимптотично стійкі тільки у випадку більш ніж сплюсненого тіла, коли $0 < e_0 < 1$;
- 2) перехідні процеси системи носять коливально-затухаючий характер;
- 3) випадки відсутності та максимальної незрівноваженості є критичними за Ляпуновим випадками одного нульового кореня і потребують подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. / А. Найфэ – М.: Мир, 1984. – 535 с.
3. Горошко О.О. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром / О.О. Горошко, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – №4, 2005. С. 67-76.
4. Філімоніхін Г. Б. Рівняння руху ізольованої системи, яка здійснює просторовий рух / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту.

Серія: фіз.-мат. науки. 2007. – №4. – С. 94-100.

5. Пирогов В. В. Стійкість основного руху статично незрівноваженого обертового тіла із двома маятниками (кулями) / В.В. Пирогов // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №3. – С. 89-94.
6. Мирер С.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа / С.А. Мирер, В.А. Сарычев // Космические исследования. – 1997. – 35. № 6. – С. 651-658.
7. Филимоныхина И. И. Условия уравновешивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе / И.И. Филимоныхина, Г.Б. Филимоныхин // Прикладная механика. – 2007. – 43, №11. – С.113-120.

Надійшла до редколегії 16.04.11

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

THE HISTORY OF THE UNITED STATES

By
JOHN F. JOHNSON
Author of
"The History of the United States"
and
"The History of the United States"
New York
1877

УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м. н., с.н.с.,
Глушко* І.М., аспірантка

Розширення реляційної (табличної) алгебри: огляд літератури

Стаття присвячена огляду існуючої літератури по розширеннях реляційної (табличної) алгебри. По кожному з 37 джерел наведені головні результати. Розглянуто додаткові операції, що розширюють можливості реляційної алгебри, проаналізовано питання використання null-значень та мультимножин в табличних базах даних.

Ключові слова: реляційні бази даних, розширена реляційна алгебра, мультимножини.

D.B. Buy DPhil, senior staff scientist,
I.M. Glushko*, postgraduate student

Expansions of relational (table) algebra: the literature review

Article is devoted the review of the existing literature about extended relation (table) algebra. On each of 37 sources the basic results are given. Additional operations which extend possibilities of relational algebra are considered. The questions of use of null-values and multisets in table databases are analyzed.

Key words: relation databases, extending relation algebra, multisets.

*E-mail: buy@unicyb.kiev.ua, glushkoim@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Додаткові операції реляційної (табличної) алгебри

Традиційно вважається, що класична реляційна (таблична) алгебра лежить в основі більшості систем баз даних і мов запитів, які реалізують реляційну модель. Реляційна алгебра була розроблена Е. Коддом (E. Codd) [1] (1972 р.) у вигляді сукупності операторів над таблицями. Е. Кодд [1] запропонував 8 операцій реляційної алгебри: традиційні операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця) та спеціальні операції над таблицями (проекція, декартове з'єднання, з'єднання (theta-, equi-), ділення, селекція). Він також довів реляційну повноту цієї алгебри, вказавши алгоритм перетворення довільного виразу реляційного числення (формальне визначення реляційного числення подане у цій же статті) на семантично еквівалентний алгебраїчний вираз [1].

Набір операцій реляційної алгебри, запропонований Е. Коддом, з часом був розширений відповідно до потреб мов запитів. Крім вказаних вище операцій до сигнатури реляційної (табличної) алгебри зараз також відносять операції перейменування та активного доповнення [2, 3].

У ході розвитку комерційних реляційних СУБД виникла потреба у використанні

агрегатних функцій, які дозволяють знаходити сумарні, середні, максимальні, мінімальні та інші значення елементів у певному стовпці даної таблиці. Так, Е. Круг (A. Klug) [4] (1982 р.) розширив реляційну алгебру та реляційне числення такими агрегатними функціями і показав еквівалентність отриманих при цьому двох формальних мов.

У статті [4] подано точні означення агрегатних функцій, які не використовують поняття «дублікати». Реляційна алгебра поповнена новою операцією, яка має назву агрегатне утворення (aggregate formation). Синтаксис реляційного числення порівняно з [1] модифіковано, а саме не дозволяються вирази, які будують відношення, що містять нескінченну кількість рядків. Показано, що набір запитів, які виразні в алгебрі, такий самий як і набір запитів, виразних в численні.

П. Грей [5] (1989 р.) демонструє можливості реляційної алгебри АСТРІД (ASTRID), яка є розширенням реляційної алгебри Кодда. АСТРІД містить деякі додаткові операції: розширення (extend) та групування (group_by), які призначені для отримання обчислюваних даних. Так, результатом застосування операції розширення є нова таблиця, що містить додаткові стовпці, значення в яких обчислюються, виходячи із значень в передуючих стовпцях. Ці додаткові

значення функціонально залежать від ключа вхідної таблиці, який стає ключем і результуючої таблиці. Синтаксис оператора розширення в алгебрі АСТРІД у термінах [5] має наступний вигляд:

$\langle \text{таблиця} \rangle := \langle \text{таблиця} \rangle \text{ extend_by } [\langle \text{список-присвоювань} \rangle]$

$\langle \text{список-присвоювань} \rangle ::= \langle \text{ім'я-атрибуту} \rangle^1 := \langle \text{вираз} \rangle \mid \langle \text{ім'я-атрибуту} \rangle := \langle \text{вираз} \rangle, \langle \text{список-присвоювань} \rangle$

Операція `group_by`, за словами автора, поводить себе як проекція в поєднанні з розширенням. П. Грей описує виконання даної операції таким чином: по-перше, значення в заданих стовпцях розбиваються на підмножини, в яких співпадають між собою значення атрибутів із списку проекції; по-друге, здійснюється проекція таблиці на ці атрибути, причому для кожного рядка у результуючій таблиці обчислюється похідне значення за допомогою деякої вбудованої функції, що застосовується до відповідної підмножини. Отримана таблиця, як і при застосуванні операції розширення, матиме додатковий стовець, який міститиме це обчислене значення. Синтаксис оператора групування в алгебрі АСТРІД наступний:

$\langle \text{таблиця} \rangle := \langle \text{таблиця} \rangle \text{ group_by } [\langle \text{список-ім'я-атр} \rangle \text{ creating } \langle \text{список-присвоювань} \rangle]$

$\langle \text{список-ім'я-атр} \rangle ::= \langle \text{ім'я-атрибута} \rangle \mid \langle \text{ім'я-атрибута} \rangle, \langle \text{список-ім'я-атр} \rangle$

$\langle \text{список-присвоювань} \rangle ::= \langle \text{ім'я-атрибута} \rangle := \langle \text{вираз} \rangle \mid \langle \text{ім'я-атрибута} \rangle := \langle \text{вираз} \rangle, \langle \text{список-присвоювань} \rangle$

Мова АСТРІД містить вбудовані функції `COUNT`, `SUM`, `MAX`, `MIN` та дві логічні функції `ANY` та `ALL`, які використовуються для формулювання запитів з кванторами. Вказано, що квантор загальності можна виразити, використовуючи вбудовану функцію `ALL` разом із групуванням або ж за допомогою операції різниці множин. Автор зазначає, що мова АСТРІД дає змогу сформулювати будь-який запит, виражений на SQL.

У книзі [6] (1989 р.) представлено 6 основних операцій реляційної алгебри, додаткові операції, які є похідними від основних, та операції, які дозволяють виразити окремі види запитів, їх автори називають – неалгебраїчними. Основні операції реляційної алгебри поділено на дві групи. До першої групи віднесено операції

об'єднання, різниці та декартова з'єднання, до другої – реляційно-орієнтовані операції (проекція, селекція та з'єднання (natural, theta-)). Похідні алгебраїчні операції включають перетин, ділення, зовнішнє з'єднання та півз'єднання (semijoin).

Зупинимось більш детально на операції півз'єднання $\ltimes$. Операція півз'єднання двох таблиць R_1 та R_2 визначає таблицю R_3 , яка має ті самі атрибути, що і таблиця R_1 та містить ті рядки таблиці R_1 , які входять у з'єднання таблиць R_1 та R_2 . Автори зазначають, що дану операцію також можна сформулювати за допомогою операцій проекції та з'єднання: $R_1 \ltimes R_2 = \pi_{X_1}(R_1 \bowtie R_2)$, де X_1 – множина атрибутів таблиці R_1 .

До неалгебраїчних операцій належать доповнення, операція `Split`, операція агрегування та транзитивне замикання. Опишемо операцію `Split`. Автори вказують на те, що ця операція насправді не належить до операцій реляційної алгебри, оскільки, застосовуючи її до однієї таблиці, в результаті отримаємо дві таблиці. Одна з отриманих таблиць міститиме рядки, які задовольняють вказану умову, а друга – ті рядки, які цю умову не задовольняють.

Операції агрегування розглядаються як множинно-орієнтовані операції, що спочатку розбивають таблицю на підмножини відповідно до значень атрибуту (або множини атрибутів), потім виконують функціональні обчислення для кожної підмножини і, нарешті, будують результуючу таблицю, формуючи один рядок для кожної підмножини. Автори розглядають функцію $AGG(R; X; B)$, де AGG один із функціональних символів (`AVG`, `MAX`, `MIN`, `COUNT`, `SUM`), R – таблиця, X – множина атрибутів таблиці R і B – атрибут таблиці R . Значенням даної функції є таблиця $S(X, AGG_B)$ схеми $X \cup \{B\}$, кожен рядок якої складається із значень, які належать одній з підмножин значень групи атрибутів X та результату застосування агрегатної функції до відповідних значень атрибуту B . Множина X може бути порожня, тоді результуюча таблиця – це таблиця з єдиним атрибутом B та єдиним рядком, який містить результат застосування агрегатної функції до значень атрибуту B .

Ще однією неалгебраїчною операцією, яку розглядають G. Gardarin та P. Valduriez, є транзитивне замикання (transitive closure). В

¹ Замість терміну «ім'я атрибуту», на нашу думку, краще використовувати термін «атрибут».

результаті застосування транзитивного замикання до таблиці R схеми $\{A_1, A_2\}$, де атрибути A_1, A_2 , мають рівні домени, отримаємо таблицю тієї самої схеми, що містить всі рядки таблиці R та всі рядки, послідовно виведені застосуванням властивості транзитивності (transitivity) до таблиці, а саме, якщо існують рядки $\{ \langle A_1, a \rangle, \langle A_2, b \rangle \}$ та $\{ \langle A_1, b \rangle, \langle A_2, c \rangle \}$, то маємо і рядок $\{ \langle A_1, a \rangle, \langle A_2, c \rangle \}$. Автори вказують на невиразність транзитивного замикання в реляційній алгебрі та зазначають, що дана операція широко використовується в контексті дедуктивних баз даних.

Операції транзитивного замикання також приділяє увагу Д. Мейер [2] (1987 р.). Автор показує, що не існує алгебраїчного виразу, який би описував транзитивне замикання таблиці, схема якої має два атрибути. Отже, визначення повноти реляційної алгебри можна оспорити, оскільки є принаймні одна операція над таблицями, що не виразна в реляційній алгебрі.

В кінці 1990-х років К. Дейт та Х. Дарвен запропонували новий «мінімальний» варіант алгебри – Алгебру А. Базисом даної алгебри² є операції реляційного заперечення (доповнення), реляційної кон'юнкції (або диз'юнкції) та проєкції (видалення атрибута). Реляційні аналоги логічних операцій визначаються в термінах відношень на основі звичайних теоретико-множинних операцій і дозволяють виражати операції перетину, декартова з'єднання, природного з'єднання, об'єднання відношень і т.д. Операції перейменування атрибутів, з'єднання загального вигляду, різниці відношень виражаються шляхом комбінування базових операцій.

Огляд Алгебри А Дейта та Дарвена здійснено С. Д. Кузнецовим у [7]. Автор математично строго описує базові операції даної алгебри: реляційне доповнення $\langle \text{NOT} \rangle$, видалення атрибута $\langle \text{REMOVE} \rangle$, перейменування атрибута $\langle \text{RENAME} \rangle$, реляційної кон'юнкції $\langle \text{AND} \rangle$, реляційної диз'юнкції $\langle \text{OR} \rangle$ та розглядає їх властивості. Для кожної операції приводяться таблиці з прикладами. Показано, що п'яти базових операцій Алгебри А достатньо, щоб виразити всі операції алгебри Кодда та продемонстровано, що число базових операцій можна скоротити до трьох: $\langle sh \rangle$ (або $\langle pi \rangle$),

$\langle \text{RENAME} \rangle$, $\langle \text{REMOVE} \rangle$, де $\langle sh \rangle$ – реляційний варіант штриха Шеффера, $\langle pi \rangle$ – реляційний варіант стрілки Пірса, а то й до двох, оскільки операція перейменування атрибута $\langle \text{RENAME} \rangle$ теж є надлишковою.

R. Elmasri та S. Navathe [8] (2000 р.) виділяють типи запитів, які не можна виразити в традиційній реляційній алгебрі, і пропонують додаткові реляційні операції, що дозволяють їх виразити та, як пишуть автори, збільшують виразну силу реляційної алгебри. До даних запитів належать запити, які задають математичні агрегатні функції на наборах значень бази даних і запити, які передбачають групування рядків таблиці за значеннями деяких з її атрибутів та застосування агрегатної функції незалежно до кожної групи. Для задання цих типів запитів автори визначають операцію агрегатної функції (AGGREGATE FUNCTION operation): $\langle \text{grouping attributes} \rangle \langle \text{function list} \rangle (R)$, де $\langle \text{grouping attributes} \rangle$ – список атрибутів таблиці R , за якими відбувається групування, $\langle \text{function list} \rangle$ – це список пар $\langle \text{function} \rangle \langle \text{attribute} \rangle$. Для кожної пари $\langle \text{function} \rangle$ – це одна з агрегатних функцій SUM, AVERAGE, MAXIMUM, MINIMUM, COUNT, а $\langle \text{attribute} \rangle$ – це атрибут таблиці R , до значень якого застосовується відповідна агрегатна функція.

Ще один тип операцій, який взагалі не можна визначити в традиційній реляційній алгебрі і про який коротко згадується в [8] – рекурсивне замикання. У цій книзі на прикладі показано як можна задати деякі види рекурсивних запитів. Операція, яка дозволяє обчислювати рекурсивні взаємозв'язки так довго, як продовжуватиметься рекурсія, має назву «транзитивне замикання».

Один із розділів книги [9] (2001 р.) присвячений різним операціям над таблицями, які реалізовані за допомогою реляційних операторів і розширень цих операторів, що є в мові SQL. Р. Райордан розглядає такі додаткові реляційні операції як агрегування (summarize) та розширення (extend). Операція агрегування повертає результати, що містять сумарні дані, згруповані за вказаним значенням атрибутів. Цю операцію автор реалізує за допомогою виразу GROUP BY SQL-оператора SELECT. Розглянуто агрегатні функції AVERAGE, COUNT, SUM, MAXIMUM и MINIMUM. Операція розширення дозволяє створювати віртуальні атрибути, значення яких обчислюються на основі констант, збережених в базі даних, проте які не зберігаються в базі даних як певні значення, що

² Щоб не суперечити традиційній алгебраїчній термінології, краще було б говорити про базис сигнатури, або просто про сигнатуру.

записуються в файл бази даних на фізичному рівні.

Крім того, у книзі описано три додаткові оператори, які підтримуються продуктами Microsoft: TRANSFORM, ROLLUP і CUBE. Кожен з цих операторів являє собою окремий спосіб агрегування і представлення даних. Оператор TRANSFORM підтримується механізмом баз даних Microsoft Jet та використовується для створення перехресних запитів (crosstab query). Оператор ROLLUP – це логічне розширення операції GROUP BY, яке дозволяє отримати сумарні значення для груп або підгруп. Концептуально оператор CUBE схожий на ROLLUP, але на відміну від нього обчислює не тільки сумарні значення для кожного стовпця, що перераховані в списку атрибутів оператора GROUP BY, а і сумарні значення для додаткових груп. Наприклад, якщо список атрибутів оператора GROUP BY містить атрибути A, B, C , тоді оператор CUBE поверне наступні значення:

- сумарне значення для всіх значень атрибута C ;
- сумарне значення для всіх значень атрибута C , згрупованих по A ;
- сумарне значення для всіх значень атрибута C , згрупованих по C в A ;
- сумарне значення для всіх значень атрибута C , згрупованих по B в A ;
- сумарне значення для всіх значень атрибута C , згрупованих по A в B ;
- сумарне значення для всіх значень атрибута C , згрупованих по C в B .

Оператори ROLLUP та CUBE підтримуються SQL Server. З даними операціями також можна познайомитися в [10].

До числа додаткових реляційних операцій Г. Гарсія-Моліна та ін. [11] (2004 р.) відносять операції сортування, розширеної проєкції, групування, агрегування та операції зовнішніх з'єднань. Дамо коротку характеристику даним операціям у термінах [11]. Оператори агрегування дозволяють обчислювати різні загальні показники, що стосуються вмісту того чи іншого стовпчика таблиці: суми (оператор SUM), мінімальні (оператор MIN), максимальні (оператор MAX) та середні значення (оператор AVERAGE), а також кількості рядків (оператор COUNT). Відзначено, що оператори агрегування не відносяться до компетенції реляційної алгебри як такої, але використовуються у контексті оператора групування.

Оператор групування $\gamma_L(R)$ поєднує в собі можливості групування та агрегування. Нижній індекс оператора γ задає список L елементів, кожен з яких є або одним з атрибутів таблиці R , до яких застосовується оператор γ (це, так звані, групуючі атрибути), або оператором агрегування, який застосовується до атрибутів таблиці. Алгоритм виконання оператора $\gamma_L(R)$ наступний:

1. Розбити множину рядків таблиці R на групи, кожна з яких включає всі рядки, що містять певні значення групуючих атрибутів із списку L . Якщо групуючі атрибути не задані, таблиця R розглядається як єдина група.

2. Для кожної групи створити по одному рядку, який містить:

- a. значення групуючих атрибутів, що відповідають групі;
- b. результати агрегування, обчислені за вказаними атрибутами всіх рядків групи, заданих у списку L .

Розглянемо оператор сортування. Оператор сортування $\tau_L(R)$, де R – деяка таблиця, а L – список атрибутів R , перетворює таблицю у список кортежів, які впорядковані у відповідності з деяким критерієм. Результатом обчислення виразу $\tau_L(R)$ є та сама таблиця R , але її рядки впорядковані за допомогою списку L . Наприклад, якщо L – список атрибутів $A_1, A_2, \dots, A_n$, то рядки спочатку впорядковуються за значеннями атрибуту A_1 . Потім рядки, які мають однакові значення для атрибуту A_1 , впорядковуються, враховуючи значення атрибуту A_2 . Якщо існують рядки, у яких співпадають значення для атрибутів A_1 і A_2 , то вони сортуються за значеннями атрибуту A_3 і т.д. Після того як рядки, у яких співпадають значення для атрибутів $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, впорядковані за вмістом A_n , значення інших атрибутів до уваги не беруться. Таким чином, результатом виконання оператора сортування є список рядків, а не множина.

До додаткових операцій реляційної алгебри в [11] також віднесено операцію розширеної проєкції. Список L оператора розширеної проєкції $\pi_L(R)$ може містити не тільки атрибути таблиці R , а й вирази вигляду $x \rightarrow y$, що передбачають перейменування атрибута x таблиці R на y , або вирази вигляду $E \rightarrow z$, де

E – вираз, що містить імена атрибутів таблиці R , константи і арифметичні та рядкові оператори, а z – нове ім'я атрибута, яке містить значення отримане в результаті обчислення виразу E . Результатом застосування операції розширеної проєкції є таблиця з атрибутами, які згадуються в списку L (враховуючи варіанти їх перейменування). Автор зазначає, що рядки-дублікати, отримані внаслідок виконання операції розширеної проєкції, не вилучаються.

Операції зовнішніх з'єднань детально розглянемо у наступному параграфі.

Дейт К.Дж. [12] (2005 р.) детально розглядає декілька додаткових реляційних операцій – півз'єднання (semijoin), піврізниця (semiminus), розширення (extend), агрегування (summarize), а також описує операції групування (group), розгрупування (ungroup) та транзитивне замикавання (tclose). Синтаксис виразів реляційної алгебри базується на використанні мови Tutorial D. Коротко опишемо згадані вище операції в термінах [12].

Операцію півз'єднання таблиць К.Дж. Дейт визначає як і в [6, 13].

Операція піврізниці між таблицями a і b (у вказаному порядку) a SEMIMINUS b визначена через операції різниці та півз'єднання: a MINUS (a SEMIJOIN b), де MINUS – операція різниці двох таблиць однієї схеми.

Операція EXTEND породжує таблицю ідентичну заданій, якщо не враховувати того, що вона містить додатковий атрибут, значення якого отримані внаслідок деяких скалярних обчислень. Призначення операції розширення EXTEND полягає у підтримці обчислювальних можливостей реляційної алгебри.

Оператор агрегування дозволяє виконувати обчислення в межах значень атрибута таблиці по всіх рядках. До типових різновидів операції агрегування належать COUNT, SUM, AVG, MAX, MIN, ALL, ANY, COUNTD, SUMD і AVGD. Суфікс "D" в операціях COUNTD, SUMD і AVGD означає, що перед виконанням даної узагальненої операції потрібно видалити всі надлишкові значення, тобто значення, які повторюються (від англ. distinct – різний).

Транзитивним замиканням таблиці a називається таблиця a^* тієї самої схеми, що є надмножиною таблиці a , тобто рядок $\{X, x \ Y, y\}$ з'являється у таблиці a^* , якщо він належить таблиці a або існує така послідовність значень $z1, z2, \dots, zn$ типу T , що всі кортежі

$\{X, x \ Y, z1\}, \{X, z1 \ Y, z2\}, \dots, \{X, zn \ Y, y\}$ з'являються в a .

Оператори GROUP (групування) і UNGROUP (розгрупування) потрібні для прямого і оберненого перстворення таблиць, що містять атрибути, значеннями яких є таблиці, в таблиці, які їх не містять.

Автор підкреслює, що не всі використовувані операції примітивні. Наприклад, операція агрегування може бути змодельована за допомогою операції розширення.

У [14] також описано деякі додаткові операції запропоновані К.Дж. Дейтом, а саме, агрегування та розширення.

Значення Null в реляційних (табличних) базах даних

Бажання оперувати невизначеною та неповною інформацією в базах даних призвело до включення невизначених значень (null values) в реляційну модель і мови запитів. Null-значення – це, власне, не значення, а деякий маркер, який вказує на те, що значення невідоме. Вперше розширення реляційної алгебри на таблиці, які можуть містити невизначені значення, було запропоноване Е. Коддом [15]. Він також ввів трізначну логіку для роботи з невизначеними значеннями. Дана логіка має три значення істинності: Істина (True), Хиба (False) та Невідомо (Unknown).

Основні підходи до розширення реляційної моделі баз даних для маніпулювання неповними або неточними даними розглянуті та проаналізовані в оглядовій роботі (1989 р.) [16]. У статті нараховується 48 джерел з даної теми. Огляд складається з двох частин, які відображають два напрями досліджень: дослідження баз даних з порожніми або невизначеними значеннями, коли повністю відсутня інформація про значення окремих атрибутів на деяких об'єктах, і вивчення баз даних з неповною, частковою або неточною інформацією про значення атрибутів на об'єктах, розробку способів представлення такої інформації в реляційних базах даних. У роботі проаналізовано підхід Е. Кодда щодо розширення реляційної алгебри, наведено переваги такого підходу та вказано ряд нерозв'язаних проблем, що приводять до некоректності розширеної алгебри. Подоланням даних проблем займалося багато авторів, їх підходи і розглянуто та описано в [16]. Встановлено, що для моделювання

неповної та неточної інформації використовують ймовірнісний підхід та апарат теорії нечітких множин.

Питання про використання null-значень в теорії реляційних баз даних остаточно не розв'язане. Основоположник реляційного підходу Е. Кодд вважав null-значення невід'ємною частиною реляційної моделі. Так, до 12 правил, які має задовольняти кожна СУБД, він включив правило, що стосується використання Null: Systematic Treatment of Null Values [17].

В той же час Дж.К. Дейт (C.J. Date) виступає проти використання null-значень, заявляючи, що «...неопределенные значения (NULL) и трехзначная логика являются ошибочными понятиями и им нет места в четких формальных системах, подобных реляционной модели» [12]. У книзі [12] автор робить спробу обґрунтувати свою думку про те, що поняття невизначених значень є помилковим та коротко описує альтернативний спосіб обробки відсутньої інформації з використанням спеціальних значень. Також розглянуто наслідки наявності невизначених значень в первинних і зовнішніх ключах та описано операції, які зустрічаються в контексті невизначених значень та тризначної логіки, а саме операції зовнішнього з'єднання (outer joins).

Зупинимось більш детально на операціях зовнішнього з'єднання. Вперше термін і концепцію зовнішнього з'єднання ввів у 1971 р. I. Heath. На думку Е. Кодда [18], операції зовнішнього з'єднання є невід'ємною частиною реляційної моделі. Розглядають три види операцій зовнішнього з'єднання: ліве зовнішнє з'єднання (left outer join), праве зовнішнє з'єднання (right outer join) та повне зовнішнє з'єднання (full outer join) [6, 8, 9, 11, 13, 18, 19]. Операції зовнішнього з'єднання призначені для врахування тих рядків таблиць-аргументів, які не потрапили в результат вихідного звичайного (внутрішнього) з'єднання. При цьому для розширення рядків до надсхеми використовуються значення Null.

Операція лівого (правого) зовнішнього з'єднання приведе до таблиці, у якій будуть присутні всі рядки з таблиці, що знаходиться зліва (справа) від оператора зовнішнього з'єднання, а для позначення відсутніх значень буде використовуватися значення Null. Результуюча таблиця операції повного зовнішнього з'єднання міститиме рядки з обох таблиць, а для позначення значень рядків, які не

ввійшли в результат внутрішнього з'єднання, використовуватиметься значення Null.

У книзі [18] автор описує три види операцій зовнішнього з'єднання: зовнішні екві-з'єднання (outer equi-join), зовнішні природні з'єднання (outer natural join) та зовнішні Т-з'єднання (outer T-joins). На прикладі показано, чим зовнішні природні з'єднання відрізняються від зовнішніх екві-з'єднань. Е. Кодд вказує на те, що операцію внутрішнього природного з'єднання (inner natural join) можна виразити через операції проєкції та внутрішнього екві-з'єднання (inner equi-join), в той час, як для операцій зовнішнього екві-з'єднання та зовнішнього природного з'єднання таке представлення не має місця. Пояснено зв'язок між внутрішнім (inner) та зовнішнім екві-з'єднаннями.

Свій погляд на невизначені значення та неповну інформацію в базах даних пропонує Д.Мейєр (D. Maier) [2]. У його книзі розглянуто та проаналізовано підходи Кодда, М. Лакруа (M.Lacroix) з А. Піротте (A. Pirotte) та К. Заніоло (C.Zaniolo) щодо узагальнення операції з'єднання. Автор на контрприкладі показує, що всі запропоновані операції неасоціативні.

Питання неасоціативності операцій зовнішнього з'єднання також порушено у роботі [20]. У даній статті охарактеризовано ті зовнішні з'єднання, які є асоціативними та ті, що такими не є. Використовуючи диз'юнктивну нормальну форму, автор показав, що деякі запити об'єднання даних (data merging queries) не можна оцінити засобами бінарних зовнішніх з'єднань та запропонував альтернативну процедуру оцінки цих запитів.

Операції зовнішнього з'єднання володіють декількома «неприємними властивостями» [21]. Наприклад,

1. Зовнішнє Θ -з'єднання не є селекцією від результату декартового добутку³.
2. Селекція не поширюється на результати операції зовнішнього Θ -з'єднання.
3. У тризначній логіці вираз $A \leq B$ – не те саме, що вираз $A < B$ OR $A = B$ (в контексті зовнішнього з'єднання).
4. У тризначній логіці операції Θ -порівняння не транзитивні.
5. Зовнішнє природне з'єднання не є проєкцією внутрішнього з'єднання за еквівалентністю.

³ Краще казати про декартове з'єднання.

Крім зовнішніх з'єднань деякі автори виділяють «зовнішні» версії інших операторів реляційної алгебри, зокрема об'єднання, перетину та різниці [8, 18]. Elmasri R. та Navathe S. [8] описують операцію зовнішнього об'єднання (outer union) таблиць. Операція використовується для об'єднання рядків двох таблиць, схеми яких різні. Дані таблиці повинні бути частково сумісні по об'єднанню, тобто деякі атрибути мають бути однакові для обох таблиць. Передбачається, що список однакових атрибутів містить ключ для обох таблиць. Рядки, які мають той самий ключ у вихідних таблицях, представлені у результуючій таблиці лише один раз і мають значення для кожного атрибуту. Атрибути, які є різними для даних таблиць, теж входять до схеми, а рядки, що не мають значення для цих атрибутів, поповнюються значенням Null.

У книзі, як приклад, розглянуто зовнішнє об'єднання двох таблиць: STUDENT(Name, SSN, Department, Advisor) і FACULTY(Name, SSN, Department, Rank). У результаті отримуємо таблицю схеми R(Name, SSN, Department, Advisor, Rank), в яку включені всі рядки обох таблиць. Рядки таблиці STUDENT матимуть значення Null для атрибуту Rank, а рядки таблиці FACULTY матимуть значення Null для атрибуту Advisor. Рядок, який в обох таблицях, має однакові значення для атрибутів Name, SSN, Department, матиме значення для всіх атрибутів, тобто для атрибутів Name, SSN, Department, Advisor, Rank.

Е. Кодд [18] (1990 р.), крім операції зовнішнього об'єднання, задає також операції зовнішнього перетину (outer set intersection) та зовнішньої різниці (outer set difference). Вводиться поняття, яке є більш загальним за поняття рівності рядків — поняття близького аналогу (close counterpart). Рядок таблиці S є близьким аналогом рядка таблиці T , якщо виконуються умови:

- таблиці S і T мають однакові первинні ключі;
- два рядки (один з S , а інший з T) мають рівні значення первинного ключа;
- попарна рівність невідсутніх значень зберігається для тих атрибутів таблиці S , що відповідають атрибутам таблиці T .

Перед тим як застосовувати зовнішні теоретико-множинні операції потрібно таблиці-аргументи зробити сумісними за об'єднанням. Для цього Е. Кодд задає операцію **extend**, яка

кардинально відрізняється від операції розширення, описаної вище. Після застосування даної операції до кожної з таблиць, їх схеми поповнюються відсутніми атрибутами, а значеннями даних атрибутів є значення Null.

Опишемо кожну зовнішню теоретико-множинну операцію в термінах [18].

Зовнішнє об'єднання $S \cup / T$ таблиць S з таблицею T здійснюється в три кроки:

1. формуємо множину $St = S \text{ per } T$,
2. формуємо множину $Ts = T \text{ per } S$,
3. формуємо $S \cup / T = St \cup Ts$, де **per**

позначає операцію **extend**.

Зовнішня різниця $S \setminus - / T$ між таблицями S та T здійснюється в чотири кроки:

1. формуємо множину $St = S \text{ per } T$,
2. формуємо множину $Ts = T \text{ per } S$,
3. формуємо semi-equi-join $U = St[sem =]Ts$,
4. формуємо $S \setminus - / T = St - U$, де **per**

позначає операцію **extend**, а операція $sem =$ — це операція півз'єднання semi-equi-join описана вище.

Зовнішній перетин $S \setminus \cap / T$ таблиць S і T передбачає п'ять кроків:

1. формуємо множину $St = S \text{ per } T$,
2. формуємо множину $Ts = T \text{ per } S$,
3. формуємо $U = St[sem =]Ts$,
4. формуємо $V = Ts[sem =]St$,
5. формуємо $S \setminus \cap / T = U \cap V$, де **per**

позначає операцію **extend**, оператор $sem =$ — операцію semi-equi-join, як і раніше.

Для виключення дублікатів рядків використовується поняття близького аналога.

Показано, що операції зовнішнього об'єднання та зовнішнього перетину комутативні на відміну від операції зовнішньої різниці. Встановлено зв'язок між зовнішніми теоретико-множинними операціями:

$$S \cup / T = (S \setminus - / T) \cup (S \setminus \cap / T) \cup (T \setminus - / S).$$

Мультимножини в базах даних

Багато мов, орієнтованих на роботу з базами даних, вимагають реляційну модель даних з мультимножинною семантикою (multi-set semantics), що передбачає розуміння таблиць (відношень) як мультимножин, тобто сукупностей з дублікатами.

Питанню розширення можливостей баз даних за рахунок використання мультимножин приділяли увагу L. Libkin, L. Wong [22, 23], G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella [24],

Г. Гарсія-Моліна (H. Garcia-Molina), Дж. Ульман (J.D. Ullman), Дж. Уйдом (J. Widom) [11, 25], К. Росс, J. Stoyanovich [26], а також вітчизняні науковці В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков [3, 27]. Огляд літератури по використанню мультимножин в базах даних станом на 2010 рік здійснили Д. Буй та Ю. Богатирьова у статті [28], яка нараховує 9 джерел з даної теми. Доповнимо даний огляд ще кількома працями.

Dayal U. та ін. [29] розширили реляційну модель до мультимножинної реляційної моделі (multiset relational model), вводячи поняття мультимножинного відношення (multiset relation). Під мультимножинним відношенням R схеми R розуміють скінченну множину пар $\langle t, i \rangle$, де t – кортеж схеми R , а i – кількість дублікатів кортежу t у відношенні R .

У статті [29] задано операції мультимножинної реляційної алгебри, а саме:

селекцію σ , з'єднання $\bowtie$, проекцію π , операцію

вилучення дублікатів δ та розглянуто два підходи до визначення аналогів теоретико-множинних операцій (об'єднання, перетину та різниці). У роботі наведено список властивостей мультимножинної реляційної алгебри, які підкреслюють відмінності між даною алгеброю та традиційною реляційною алгеброю. Розглянемо деякі з цих властивостей:

1. операція з'єднання $\bowtie$ не ідемпотентна;

2. операція вилучення дублікатів δ ідемпотентна;

3. операція вилучення дублікатів δ

дистрибутивна відносно операцій $\bowtie$, $\cup$, $\cap$;

4. операція вилучення дублікатів δ комутує із операцією селекції σ : $\delta(\sigma R) = \sigma(\delta R)$;

5. операція δ комутує з операцією проекції: $\delta\pi_x R = \delta\pi_x \delta R$.

У роботах [30, 31] запропоновано розширену реляційну алгебру з мультимножинною семантикою. Визначено поняття таблиці (як

мультимножини рядків), задано основні операції над таблицями: аналоги теоретико-множинних операцій (об'єднання та різниця), селекція, проекція, декартове з'єднання. Операції перетину та з'єднання розглядаються як похідні від основних операцій. Автори доводять, що їх можна виразити через операції різниці та селекції і декартового добутку відповідно. Крім даних операцій автори вводять три додаткові операції: розширену проекцію, видалення дублікатів, групування та агрегатні функції. Доведено асоціативність декартового добутку, з'єднання, перетину та об'єднання і те, що операції проекції та селекції дистрибутивні відносно об'єднання.

J. Grant та ін. [32] пропонують підхід до розв'язання проблеми, що стосується можливості спільно маніпулювати даними в різних базах даних. Введено модель мультибази даних (multidatabase model), представлено основні означення та приклад такої бази даних. Наведемо основні означення.

Мультибаза даних – це сукупність баз даних, імена яких можуть бути задані явно або неявно. Мультитаблиця (multirelation) – це мультимножина таблиць, динамічно визначених мультитабличним запитом (multirelational query). Таблиці з мультитаблиці зазвичай належать різним базам даних із мультибази даних. Ці таблиці можуть мати різну кількість рядків та різні імена атрибутів. Мультитабличний запит визначає мультитаблицю з мультитаблиць за допомогою мультитабличних операцій.

У статті також визначено мультитабличну алгебру, задано її операції: мультипроекцію, мультиселекцію, мультиоб'єднання, мултирізницю, мултиз'єднання та мултидекартовий добуток (MPROJECT, MSELECT, MUNION, MINTERSECT, MDIFFERENCE, MJOIN і MPRODUCT відповідно). Опишемо декілька операцій. Тут і надалі використовуються позначення із [32].

Операція мультипроекції мультитаблиці є мультитаблицею: $MPROJECT(\{R_1, \dots, R_n\}; A_1, \dots, A_m) = \{PROJECT(R_1; A_1, \dots, A_m), \dots, PROJECT(R_n; A_1, \dots, A_m)\}$, де $\{R_1, \dots, R_n\}$ – довільна мультитаблиця, $PROJECT(R_i; A_1, \dots, A_m)$ – звичайна проекція за атрибутами $A_1, \dots, A_m$ таблиці R_i , якщо всі A_j – атрибути таблиці R_i ; якщо ж деякий атрибут A_j не належить таблиці R_i , то проекція $PROJECT(R_i; A_1, \dots, A_m)$ не існує.

Автори відмічають, що результат може мати менше, ніж n таблиць.

Розглянемо операцію мультиз'єднання мультитаблиць: $MJOIN(\{R_{11}, \dots, R_{1n}\}, \{R_{21}, \dots, R_{2m}\} : C) = \{JOIN(R_{11}, R_{21} : C), \dots, JOIN(R_{11}, R_{2m} : C), JOIN(R_{12}, R_{21} : C), \dots, JOIN(R_{1n}, R_{2m} : C)\}$, де $JOIN(R_{1i}, R_{2j} : C)$ операція з'єднання таблиць, C – умова за якою відбувається з'єднання. Результат може мати аж до $n \times m$ таблиць.

Розділ 4 статті [32] присвячений мультитабличному численню, а саме

мультитабличному численню рядків. Дане числення зводиться до реляційного числення у випадку, коли мультитаблиця містить одну таблицю. Доведено, що мультитабличне числення не менш виразне за мультитабличну алгебру.

Пропонуємо таблицю, яка містить перелік джерел та список розглянутих у них додаткових операцій реляційної алгебри.

Таблиця 1

№ п/п	Джерело	Додаткові операції реляційної алгебри
1.	Klug A. Equivalence of Relational Algebra and Relational Calculus Query Languages Having Aggregate Functions / A. Klug // J.ACM 29. – July 1982. – № 3. – Р. 699-717.	Операція агрегування.
2.	Грей П. Логика, алгебра и базы данных: [пер. с англ.] / П. Грей. – Москва: Машиностроение, 1989. – 368 с.	Розширення (extend), групування.
3.	Gardarin G. Relational Databases and Knowledge Bases / G. Gardarin, P. Valduriez. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989. – 448 p.	Зовнішнє з'єднання (а саме, повне зовнішнє з'єднання), півз'єднання, операція агрегування, транзитивне замикання, split.
4.	Elmasri R. Fundamental of Database systems / R. Elmasri, S. Navathe. – Addison-Wesley Publishing Company, 2000. – 893 p.	Операції агрегування та групування, транзитивне замикання (transitive closure) і операції зовнішнього з'єднання (ліве, праве, повне) та зовнішнього об'єднання.
5.	Райордан Р. Основы реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Р. Райордан. – Москва: Издательско-торговый дом «Русская Редакция», 2001. – 384 с.	Зовнішнє з'єднання (ліве, праве, повне), агрегування (summarize), розширення (extend), оператори TRANSFORM, ROLLUP і CUBE.
6.	Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: «Вильямс», 2004. – 1088 с.	Сортування, розширена проєкція, групування, агрегування та операції зовнішніх з'єднань (ліве, праве, тета-), реляційні операції над мультимножинами (об'єднання, перетин, різниця, проєкція, вибір з мультимножини або селекція, декартове з'єднання, з'єднання, видалення дублікатів).
7.	Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных: [8-е изд.: пер. с англ.] / К. Дж. Дейт. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1328 с.	Півз'єднання (SEMIJOIN), піврізниця (SEMINUS), розширення (EXTEND), агрегування (SUMMARIZE) і транзитивне замикання (TCLOSE), групування (GROUP) і розгрупування (UNGROUP).
8.	Коннолли Т. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика: [3-изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1440 с.	Зовнішнє з'єднання (ліве, праве, повне), півз'єднання.

мові (natural quantifier language) COOL, а також, ймовірно, і на будь-якій іншій подібній природній квантифікованій мові. Дана алгебра містить всі традиційні операції реляційної алгебри та три нетрадиційні: group-select, subgroup-select та possibility join. Автор зазначає, що ця розширена реляційна база даних використовується в проєкті побудови інтерфейсу користувача комерційно доступної реляційної бази даних. Цей інтерфейс дозволить користувачам маніпулювати розширеною реляційною базою даних, або реляційною об'єктно-орієнтованою базою даних, використовуючи мову COOL.

Розширення реляційної алгебри Кодда операціями з рекурсивними об'єктами розглядається у статті В.В. Говорушко та В.Б. Новосельцева [36]. Автори вводять поняття рекурсивної таблиці та задають операції над таблицями. У роботі також доведено теорему про замкнутість розширеної табличної алгебри на основі операції об'єднання. Зазначається, що

розроблений апарат може використовуватися в якості теоретичної бази при побудові нових структур баз даних з використанням сучасних засобів проєктування.

Jesus M. Almendros-Jimenez [37] пропонує реляційну алгебру для декларативних мов. Вона ґрунтується на використанні операцій проєкції, селекції, перейменування, декартового з'єднання, об'єднання та з'єднання. Автор зазначає, що дану алгебру можна використовувати для визначення предикатів та функцій декларативної мови.

Висновки

У статті в систематизованому вигляді подано огляд існуючої літератури по розширенню реляційної (табличної) алгебри. Розглянуто додаткові операції, що розширюють можливості реляційної алгебри, проаналізовано питання використання null-значень та мультимножин в табличних базах даних. Запропоновано таблицю, яка містить перелік джерел та список розглянутих у них додаткових операцій реляційної алгебри.

Список використаних джерел

1. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / E.F. Codd // Data Base Systems – New York: Prentice-Hall. – 1972. – P. 65-93.
2. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
3. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
4. Klug A. Equivalence of Relational Algebra and Relational Calculus Query Languages Having Aggregate Functions / A. Klug // J. ACM 29. – July 1982. – № 3. – P. 699-717.
5. Грей П. Логика, алгебра и базы данных: [пер. с англ.] / П. Грей. – Москва: Машиностроение, 1989. – 368 с.
6. Gardarin G. Relational Databases and Knowledge Bases / G. Gardarin, P. Valduriez. – Addison-Wesley, 1989. – 448 p.
7. Кузнецов С.Д. Основы баз данных: [2-е изд.] / С.Д. Кузнецов. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 484 с.
8. Elmasri R. Fundamental of Database systems: [3rd Edition] / R. Elmasri, S. Navathe. – Addison-Wesley, 2000. – 893 p.
9. Райордан Р. Основы реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Р. Райордан. – Москва: Издательско-торговый дом «Русская Редакция», 2001. – 384 с.
10. Celko J. Analytics and OLAP in SQL / J. Celko. – Morgan Kaufmann, 2006. – 208 с.
11. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: «Вильямс», 2004. – 1088 с.
12. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных: [8-е изд.: пер. с англ.] / К. Дж. Дейт. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1328 с.
13. Коннолли Т. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика: [3-изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1440 с.
14. Хомоненко А. Д. Базы данных / А.Д. Хомоненко, В.М. Цыганков, М. Г. Мальцев. – Санкт-Петербург: КОРОНА принт, 2004. – 736 с.
15. Codd E.F. Extending the Database Relational Model to Capture more Meaning / E.F. Codd // ACM Transactions on Database Systems. – 1979. – Vol. 4, № 4. – P. 397-434.
16. Брона И.И. Реляционные базы данных с неполными и неточными значениями (аналитический обзор) / И.И. Брона, Т.А.

- Малюта, В.В. Пасичник. – Новосибирск, 1989. – 53 с.
17. Codd's rules [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://itsy.co.uk/ac/0405/Sem3/44271_DDI/Lec/3_CoddsRules.htm.
18. Codd E.F. The Relational Model for Database Management: Version 2. – Addison-Wesley, 1990. – 541 p.
19. Крѐнке Д. Теория и практика построения баз данных: [8-е изд.] / Д. Крѐнке. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 800 с.
20. Galindo-Legaria C.A. Outerjoins as Disjunctions / C.A. Galindo-Legaria // Series: CWI, Department of Computer Science. – CWI, 1994. – P. 1-17.
21. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных: [7-е изд.: пер. с англ.] / К. Дж Дейт. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 1072 с.
22. Libkin L. Query Language for Bags and Aggregates Function / L. Libkin, L. Wong // Journal of Computer and System Sciences. – 1997. – Vol. 55, No. 1. – P. 241-272.
23. Libkin L. Some Properties of Query Language for Bags / L. Libkin, L. Wong // Proceedings of 4th International Workshop on Database Programming Languages. – New York, 1993. – P. 97-114.
24. Lamperti G. On Multisets in Database Systems / G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Science. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147-215.
25. Ульман Дж. Введение в системы баз данных / Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: Лори, 2000. – 374 с.
26. Ross K. Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems / K.A. Ross, J. Stoyanovich // Very Large Database Endowment: international conference, August 31-September 03, 2004, Toronto, Canada: proceedings. – 2004. – Vol. 30. – P. 912-923.
27. Буй Д.Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д.Б. Буй, С.А. Поляков // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 183-194.
28. Буй Д.Б. Сучасний стан теорії мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 1. – С. 51-58.
29. Dayal U. An Extended Relational Algebra with Control Over Duplicate Elimination / U. Dayal, N. Goodman, R.H. Katz // Proceeding PODS '82 Proceedings of the 1st ACM SIGACT-SIGMOD symposium on Principles of database systems. – 1982. – P. 117-123.
30. Grefen Paul W.P.J. A Multi-Set Extended Relational Algebra. A Formal Approach to a Practical Issue / Paul W.P.J. Grefen, Rolf A. de By // 10th International Conference on Data Engineering, ICDE, February 14-18, 1994, Houston, TX, USA. – 1994. – P. 80-88.
31. Grefen Paul W.P.J. Extending a Multi-Set Relational Algebra to a Parallel Environment / Paul W.P.J. Grefen, J. Flokstra // Distributed and Parallel Databases. – 1996. – Vol. 4. – P. 81-99.
32. Grant J. Query Languages for Relational Multidatabases // J. Grant, W. Litwin, N. Roussopoulos, T. Sellis // VLDBJournal. – 1993. – Vol. 2. – P. 153-171.
33. Özsoyoğlu G. Extended Relational Algebra and Relational Calculus with Set-Valued Attributes and Aggregate Functions / G. Özsoyoğlu, Z.M. Özsoyoğlu, V. Matos // ACM Transactions on Database Systems. – 1987. – Vol. 12, No.4. – P. 566-592.
34. Suri Pushpa R. Database Algebra / Pushpa R. Suri, Sudesh Rani // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 595-602.
35. Bradley J. Extended Relational Algebra for Reduction of Natural Quantifier COOL expression / J. Bradley // Journal of Systems and Software. – 1996. – Issue 1, April, Vol. 33. – P. 87-100.
36. Говорушко В.В. Расширение алгебры Кодда операциями с рекурсивными объектами / В.В. Говорушко, В.Б. Новосельцев // Вестник Томского государственного университета. Сер.: «Математика. Кибернетика. Информатика». – 2004. – № 284. – С. 18-20.
37. Almendros-Jimenez Jesus M. An Extended Relational Algebra for Declarative Programming / Jesus M. Almendros-Jimenez // New Generation Computing. – 2006. – Vol. 24, Issue 2. – P. 129-184.

УДК 519.1

Гришанович Т.О., аспірант*

Про часову складність алгоритму розкладання числових графів за допомогою їх кістяків

У роботі описано алгоритм розкладання числового графа за допомогою його кістяків. Зокрема, розглянуто натуральні арифметичні графи з трьома твірними. Проведено оцінку часової складності даного алгоритму.

Ключові слова: числовий граф, алгоритм декомпозиції, складність алгоритму.

*E-mail: grtanja@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Відомо, що в наукових дослідженнях, таких, як розпізнавання образів, структурний та системний аналіз, розробка програмних комплексів, конструювання обчислювальної техніки та інших використовуються графи, що мають специфічну структуру: декілька осей симетрії або фрагменти, що періодично повторюються. Традиційні способи представлення графів вимагають, як правило, значної кількості пам'яті, а, отже, громіздких обчислень та великих витрат часу [1]. Тому у таких випадках досить ефективним є використання числових графів.

Числовим графом $G=(X, U, F, g)$ називають n -вершинний граф, що представлений $X=\{1, 2, \dots, n\}$ – множиною вершин, $U \subseteq N$ – множиною твірних, функцією суміжності $F(x_i, x_j)$ та функцією виключення $g(x)$. У ньому вершина $x_k \notin X$, якщо $g(x_k)=0$, а вершини x_i та $x_j \in X$ суміжні, якщо $F(x_i, x_j) \in U$.

Якщо $F(x_i, x_j)=x_i+x_j$, то такий числовий граф називають арифметичним, якщо $F(x_i, x_j)=|x_i-x_j|$, то граф називають модульним. Стосовно функції $g(x)$, то ніяких певних властивостей для неї не передбачено [2].

Граф називають натуральним арифметичним графом (НА-графом), якщо у нього $X = N_n$.

Поняття числового графа виникло з появою робіт Г.П. Донця та його послідовників, після чого починається планомірне та інтенсивне дослідження числових графів (куди, крім арифметичних, ще включені модульні) та їх властивостей. Отримані важливі висновки

T.O. Grishanovich, PhD Student*

About the algorithm of partition by means of the numeric graph's carcass time complexity

The algorithm of partitioning by means of the numeric graph's carcass is described in this research. Natural arithmetic graphs with three c are considered. The time complexity of decomposition algorithms of these graphs is evaluated

Key Words: numeric graph, graph partition algorithm complexity of algorithm.

характеристики цих графів – зв'язність, цикломатичне число, оптимальне представлення.

Незважаючи на очевидну перевагу використання числових графів, усі відомі алгоритми на графах побудовані з врахуванням традиційних способів їх представлення. Оскільки представлення числових графів відрізняється від відомих представлень, досить цікавим є питання побудови найбільш вживаних в теорії графів алгоритмів на основі представлень числових графів та оцінки їх складності [3].

У даній роботі досліджується часова складність алгоритму розкладання числових графів за допомогою їх кістяків [4]. Зокрема, розглядаються натуральні арифметичні графи із трьома твірними.

Двома важливими мірами складності алгоритмів є значення їх часової та ємнісної складності, що розглядаються як функції від розміру вхідних даних. Для того, щоб обчислити часову та ємнісну складність алгоритму, слід визначити час, який необхідний для виконання кожної команди, та об'єм пам'яті кожного регістру. Для обчислення складності алгоритму будемо використовувати логарифмічний ваговий критерій. Нехай $l(i)$ – логарифмічна функція на цілих числах, яка задається наступними рівностями:

$$l(i) = \begin{cases} \log|i| + 1, & \text{якщо } i \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } i = 0. \end{cases}$$

Логарифмічний критерій базується на припущенні, що ціна виконання команди (її вага) прямо пропорційна довжині її операндів [5].

Будемо розглядати натуральні арифметичні граfi з трьома твірними, у яких функція суміжності має вигляд $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$. Для такого класу арифметичних графів хроматичне число є наперед відомим:

Теорема 1. Хроматичне число NA-графів з трьома твірними рівне 2 або 3 [6].

Для обчислення кількості операцій алгоритм розкладання графів розбито на окремі фрагменти (складові частини алгоритму): задання графа, побудова кістяка (методом пошуку в ширину), перевірка вершин на суміжність, визначення відстані між двома вершинами, визначення кореневої вершини, нормалізація кореневого кістяка, побудова розфарбування графа.

Наведемо детальний опис та продемонструємо спосіб підрахунку операцій для кожної із складових частин алгоритму.

Задання графа. Нагадаємо, що розглядаються натуральні арифметичні граfi із трьома твірними. Для збереження графа використовується змінна n – кількість вершин ($n \geq 1$), множина твірних – масив U , кількість твірних – p , значення твірної – a .

`read(n);`

`for p:=1 to p do`

`read(IntegerSet[p]);`

Тоді задання арифметичного графа вимагає часу $t_1 = l(n) + p[l(M_7) + l(p) + l(a) - 1]$,

де $l(M_7)$ – час відшукування масиву твірних [7].

Побудова кістяка графа (алгоритм пошуку в глибину). Наведемо короткий опис даного алгоритму. Метою даного алгоритму є побудова кістяка графа. Для цього вибирають та відвідують початкову (довільну) вершину графа x_0 . Після цього вибирають ребро (x_0, x_1) інцидентне x_0 та відвідують вершину x_1 . Нехай x – остання відвідана вершина. Виберемо довільне ребро (x, y) , інцидентне x , яке ще не розглядалось. Якщо вершина y уже відвідувалась, то шукаємо нове ребро, яке інцидентне x . Якщо y – не відвідана вершина, то ідемо до неї та розпочинаємо пошук з цієї вершини. У тому випадку, коли переміщення вперед є неможливим, повертаємось до вершини x (до тієї вершини, по якій ми прийшли до y) та розпочинаємо пошук з неї. В результаті ми повернемося до вершини x_0 та виявимо неможливість продовжувати пошук. Після цього шукаємо нову вершину x_1 , яка не відвідувалась раніше, та продовжуємо з неї пошук. Пошук закінчено у тому випадку, коли усі вершини графа були відвідані.

У роботі [3] детально описано даний алгоритм. У цій же праці проведено обчислення часу виконання алгоритму і він становить:

$$t_2 = l(n)(18n + 9m - 9) + n[5l(M_3) + 3l(M_4) - 5] + m[l(M_4) + 2l(M_7) + l(p) - 7] + l(p) + 7;$$

де m – кількість ребер графа, $l(M_1)$, $l(M_2)$, $l(M_3)$, $l(M_4)$, $l(M_5)$, $l(M_6)$ – час відшукування початкової адреси масивів, що використовуються в алгоритмі; ці величини є сталими, їх значення обчислено у [8].

Перевірка вершин на суміжність – допоміжний алгоритм, що використовується при відшуванні мінімальної відстані між вершинами p_1 та p_2 .

`function Connected(p1, p2: integer): boolean;`

`begin`

`Result:=false;`

`if (p1 > p2) then`

`for k:=0 to Length(IntegerSet)-1 do`

`if p1+p2=IntegerSet[k] then`

`Connected:=true;`

`end;`

Дотримуючись, тих же припущень, що і для попереднього фрагменту алгоритму, часова оцінка для алгоритму перевірки вершин на суміжність у NA-графі:

$$t_3 = l(n)(2p + 1) + p(2l(p) + l(M_7) - 4) - l(p) + 2.$$

Визначення мінімальної відстані між вершинами. Для реалізації цієї частини алгоритму використано алгоритм обходу графа в ширину. У загальному випадку цей спосіб мало чим відрізняється від обходу в глибину. Але на відміну від нього при реалізації даного алгоритму використовується структура даних типу черга (FIFO – First In First Out) [9].

`function BuildWay(p1, p2: integer): boolean;`

`var`

`Q: array of integer; // допоміжний масив, що використовується для позначення вершин`

`Used: array of boolean; // масив використаних вершин`

`Levels: array of integer; // кількість рівнів дерева його глибина`

`Position, Length, Point: integer; // Position – номер вершини, що розглядається, Length – довжина «пройденої» відстані, Point – номер вершини, що розміщена наступною`

`i: integer; // лічильник`

`begin`

`for i:=1 to n do`

`Used[i]:=false;`

`Used[p1]:=true;`

`Levels[p1]:=0;`

```

Q[1]:=p1; //формування черги
Position:=1;
Length:=1;
while (Position<=Length) and not(Q[Position]=p2)
do
  for i:=1 to n do
    if not Used[i] and Connected(Q[Position], i)
  then
    Inc(Length);
    Q[Length]:=i;
    Levels[i]:=Levels[Q[Position]]+1;
    Used[i]:=true;
    Inc(Position);
    Distance:=0;
    if (Q[Position]=p2) then
      Result:=true;
      ShortestWay:=p2;
      while not(p2=p1) do
        Point:=p2;
        for i:=1 to n do
          if Used[i] and Connected(p2, i) and
            (Levels[i]<Levels[Point]) then
            Point:=i;
            ShortestWay:=ShortestWay+Point;
            Inc(Distance);
            p2:=Point;
        else
          Result:=false;
          ShortestWay:="";
    end

```

Описана функція повертає логічне значення: false – якщо немає ланцюга між вершинами, відстань між якими шукається; true – у протилежному випадку. Саме ж значення відстані зберігається у змінній Distance.

Теорема 2. Якщо граф зв'язний та скінченний, то алгоритми пошуку в глибину і в ширину обійдуть усі вершини по одному разу [8].

Тобто, час пошуку в ширину обмежений кількістю вершин у всіх ярусах, що знаходяться на відстані, меншій, ніж відстань від початкової вершини до поточної, та обмежений зверху кількістю вершин в ярусах, починаючи з ярусу поточної вершини та включаючи усі молодші яруси.

Час відшукування мінімальної відстані між двома заданими вершинами становить:

$$t_4 = l(n)/(4np - 4p + 23n - 22) + n(4l(M_4) + 4l(M_2) + 2l(M_1) + 2p(2l(p) + l(M_7) - 4) - 7) - 3l(M_4) - 3l(M_2) - l(M_1) - 2p(2l(p) + l(M_7) - 4) + 7.$$

Відшукування кореневої вершини. Згідно із означенням кореневою називають ту вершину, максимальна відстань від якої до усіх вершин

графа є мінімальною серед таких відстаней. Тому визначення кореневої вершини проводиться наступним чином: визначається відстань від поточної вершини до усіх інших вершин графа. Серед знайдених значень знаходиться максимальне. Кількість таких значень становитиме n – за кількістю вершин графа. Після цього серед знайдених величин шукається найменша та запам'ятовується її номер, що відповідає номеру кореневої вершини.

```

for i:=1 to n do
  min_dist:=0;
  source:=0;
  for j:=1 to n do
    max_dist:=0;
    if max_dist<Distance then
      max_dist:=Distance
  A_source[i]:=max_dist;
  if min_dist>A_source[i] then
    min_dist:=A_source[i];
  source:=i

```

Час виконання:

$$t_5 = l(n)(10n - 1) + n(t_4 - 6) - t_4 + 4.$$

Виправлення кістяка на нормальний. Перевіряється, чи є кістяк нормальним, тобто чи усі суміжні вершин дерева є порівнюваними у частковому порядку « $\leq$ », визначеному кореневою вершиною.

Частковий порядок « $\leq$ » на множині вершин графа визначається за таким правилом: $x_i \leq x_j$ тоді і тільки тоді, коли найкоротший шлях від кореневої вершини до x_j проходить через вершину x_i . [9]

Якщо кістяк не є нормальним, то знайдуться дві вершини x_i та x_j , що не порівнювані у частковому порядку. У такому випадку визначаються відстані $d(x_i, x)$ та $d(x_j, x)$. Якщо $d(x_i, x) \geq d(x_j, x)$, то вибирається вершина x_k така, що (x_i, x_k) належить кістяку та $d(x_k, x) = d(x_j, x) - 1$. Видаляється ребро (x_i, x_k) та додається ребро (x_j, x_k) .

```

for i:=1 to n do
  for j:=i+1 to (n-1) do
    for p:=1 to 3 do
      if (i+j)=u[p] then
        if ((Tree[i]≠j) or (Tree[j]≠i)) then
          if BuildWay(source, i) ≥
            BuildWay(source, j) then
            for f:=1 to n do
              if (T[f]=j or T[j]=f) and
                BuildWay(source, f) = (BuildWay(source, j)-1)
              then T[j]:=i
            else

```

```

for f:=1 to n do
  if (T[f]=i or T[i]=f) and
BuildWay(source, f) = (BuildWay(source, i)-1)
  then T[i]:=j

```

Тут Tree – масив, що містить кістяк графа.
 $t_6 = l(n)(26n - 11) + n(l(M_7) + 4t_4 - 3l(p) - 10) -$
 $- l(p) - 2t_4 - l(M_1) - 8.$

Обчислення степенів вершин графа та
внесення їх до масиву Degrees.

```

for i:=1 to n do
  k:=0;
  for j:=1 to n do
    for p:=1 to 3 do
      if (i+j=u[p]) and (i<>j) then k:=k+1;
Degrees[i]:=k;
 $t_7 = l(n)(4n + 7p - 2) + p(3l(p) + l(M_7) - 3) +$   

 $+ n(l(a) - 3) - l(p) + 2.$ 

```

Побудова розфарбування графа. Якщо
отриманий кістяк є нормальним, то до графа
застосовується наступне розфарбування:
 $\chi(x_i) = d(x_i, x) \bmod r$, де $d(x_i, x)$ – відстань від
кореневої вершини до поточної, $r \leq |x_i|$.

```

for i:=1 to n do
  color[i]:=BuildWay(i, source) mod degree[i]
 $t_8 = l(n)(5n - 1) + n(t_4 + l(M_7) + l(a) - 3) + 1.$ 

```

Врахувавши кількість виконань кожного із
фрагментів, отримаємо наступне значення
часової складності алгоритму розкладання графа
за допомогою його кістяків:

$$T = l(n)(138n + 12np + 9m + 19p + 43) + n(2l(M_7) +$$

 $+ 5l(M_3) - 27l(M_2) - 30l(M_4) - 12l(M_1) -$
 $- 18p(2l(p) + l(M_7) - 4) - n(4l(M_2) + 4l(M_4) +$
 $+ 2l(M_1) + 2p(2l(p) + l(M_7) - 11)) + p(15l(p) +$
 $+ 8l(M_7) - 29) + m(l(M_4) + 2l(M_7) + l(p) - 7) +$
 $+ 9l(M_4) + 9l(M_2) + 2l(M_1) - l(p) - 21,$

де n – кількість вершин графа, m – кількість
ребер, p – кількість твірних.

У роботі знайдено оцінку часової складності
алгоритму розкладання графа за допомогою його
кістяків за умови представлення графа у вигляді
натурального арифметичного. Отриманий
результат демонструє значну перевагу
представлення у вигляді числових. Час
виконання описаного алгоритму залежить від
кількості вершин графа як для числових графів,
так і для традиційних способів їх представлення.
Але якщо для подання графів у вигляді матриці
інцидентності час виконання алгоритму становить

$t = 4n^4 + n^3 - 4n^2 + 2m + 6 + m \log m$, для матриць
суміжності — $t = 4n^4 - 2n^3 - 8n^2 + 1 + m \log m$,

для списків суміжності —
 $t = 2k^3 + 3n^2k^2 + k(9n^2 - n^3 - 5 + n(1 - 3n) +$
 $+ m \log m$, де n – кількість вершин графа, m –
кількість ребер, $k = 2n + 8m + 2m[\log_{10} n]$, то для
натурального арифметичного графа отримали
лінійне значення часової складності. Але
наявність таких множників числа n , як 138,
свідчить про те, що такий алгоритм доцільно
використовувати для графів із великою кількістю
вершин.

Список використаних джерел

1. Донец Г.А., Шулинок И.Э. Об общем представлении числовых графов / Теория оптимальных решений. – 2004. – № 3. – С. 11-18.
2. Шулинок І.Є. Розв'язання задач оптимального представлення числових графів та дослідження умов побудови на них ефективних алгоритмів: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. – К., 2004. – 175 с.
3. Донец Г.А., Неженцев Ю.И. Об оценке сложности алгоритмов в арифметических графах // Методы решения задач нелинейного и дискретного программирования. – 1991. – С. 79-87.
4. Гришанович Т.О. Алгоритм розкладання графів за допомогою їхніх кістяків // Теоретична електротехніка. Зб. наук. праць. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2009. – Вип. 60. – С. 12-20.
5. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.; пер. с англ. А. О. Слисенко. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
6. Донец Г.А., Шулинок И.Э. О хроматическом числе натуральных арифметических графов с тремя образующими // Теория оптимальных решений. – 2008. – № 7. – С. 50-60.
7. Неженцев Ю. И. Об оценке сложности алгоритмов поиска в арифметических графах // Математические методы и программное обеспечение в системах принятия решения и проектирования. – К: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. – 1990. – С. 14-24.
8. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – С.Пб. и др.: Питер, 2003. – 204 с.
9. Протасова К.Д. Розкладання графів: дис. кандидата фіз.-мат. наук : 01.05.01 / Протасова Ксенія Дмитрівна. – К., 2006. – 122 с.

Надійшла до редколегії 23.11.2011

УДК 517.929

Джалладова І.А., д.ф.-м.н.

Стійкість розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами та сталими запізненнями аргументів

В роботі досліджується стійкість розв'язків диференціального рівняння з випадковими періодичними коефіцієнтами та сталими запізненнями аргументу. Зокрема знайдено умови залежності стійкості розв'язків системи від запізнення і випадковості коливань.

Ключові слова: функціонально-диференціальне рівняння стохастичного типу, асимптотична стійкість у середньому.

Статтю представив проф., д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

E-mail: irada-05@mail.ru

1. Вступ

В багатьох роботах [2,8,9,10,12] критерії асимптотичної та експоненціальної стійкості в середньому (середньому квадратичному) для стохастичних рівнянь сформульовано в термінах лінійних алгебраїчних рівнянь Сильвестра, які побудовано по матрицях коефіцієнтів систем лінійних стохастичних рівнянь. Всі ці критерії мають суттєво теоретичний зміст і не розглядають фізичну інтерпретацію математичних співвідношень (в сенсі характеру впливу параметричного білого шуму на асимптотичну і експоненціальну стійкість у середньому).

В роботі [6] досліджено дестабілізуючий ефект параметричних стохастичних впливів типу білих шумів. Зокрема, розглянуто системи рівнянь з післядією, і наведено значна кількість означень стійкості в різному сенсі. Одним з можливих означень є абсолютна асимптотична стійкість, тобто стійкість при довільному сталому запізненні, або рівномірна по сталому запізненню асимптотична стійкість [7,11]. В роботі [6] ставиться наступне питання. Якщо детермінована автономна система асимптотично стійка при будь-якому

Dzhalladova I.A., Doctor of Science

Stability of solutions of a linear differential equations with random coefficients and constant delay

In this paper linear stochastic functional differential equation with constant delay is considered. In particular finding conditions for the asymptotic stability are depending from delay and random oscillations.

Key Words: functional differential equations with random coefficients and constant delay, Asymptotic stability in mean

запізненні, то який характер впливу стохастичних матричних добавок з білим шумом не порушить асимптотичну стійкість у середньому квадратичному розв'язків збуреної системи? Доведено, що вплив випадкових коливань на асимптотичну стійкість детермінованої системи однобічний – він впливає лише на зменшення запасу асимптотичної стійкості у середньому квадратичному, тобто є дестабілізуючим. В даній роботі вивчається питання про залежність впливів на стійкість розв'язків системи з випадковими коефіцієнтами явищ запізнення і випадковості коливань.

2. Постановка задачі

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, P, F = \{F_t, t \geq 0\})$ розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу

$$\frac{dx}{dt} = \mu \sum_i A_i(t, \xi(t)) x(t - \tau_i), \quad (1)$$

з початковою умовою $X(0) = \varphi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Тут μ – малий параметр, $\xi(t)$ – випадковий марковський процес з відомими функціями розподілу, який приймає стани θ_k з ймовірностями p_k ($k = \overline{1, n}$), що задовольняють

стаціонарну систему лінійних диференціальних рівнянь [1]

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t), \quad A = \text{const}, \quad A = \|a_{jk}\|.$$

Систему можна переписати у вигляді

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{s=1}^n a_{js} p_s(t) \quad (j=1, \dots, n),$$

$$a_{js} \geq 0 \quad (j \neq s), \quad a_{ss} < 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{js} = 0,$$

$$(j, s = 1, \dots, n).$$

що описує вектор ймовірностей однорідного марковського випадкового процесу, τ_k, ℓ_k – додатні числа.

Задача полягає в побудові рівнянь для математичного сподівання розв'язку $x(t) \equiv X(t, \omega)$ системи моментних рівнянь, які потім використовуються при дослідженні стійкості у середньому.

3. Основний результат

Теорема. Система моментних рівнянь для розв'язку $x(t) \equiv X(t, \omega)$ системи лінійних диференціальних рівнянь із запізнюванням аргументу (1) має вигляд

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(t, \mu) M(t), \quad (2)$$

де ряд в правій частині (2) збіжний і

$$L_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\langle \sum_k A(t, \xi(t - \tau_k)) \right\rangle dt, \\ L_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\langle \sum_k A(t, \xi(t - \tau_k)) S_{k-1}(t, \mu) - \sum_{j=1}^{k-1} S_j(t, \mu) L_{k-j} \right\rangle dt, \quad (3)$$

Матриці $S_k(t, \mu)$ послідовно знаходяться із системи

$$S_1(t, \mu) = \int_0^t \left[\sum_k A(t, \xi(t - \tau_k)) - L_1 \right] dt, \\ S_k(t, \mu) = \int_0^t \left\{ \sum_k A(t, \xi(t - \tau_k)) L_{k-1} - L_k - \sum_{j=1}^{k-1} S_j L_{k-j} \right\} d\tau. \quad (4)$$

Доведення. Розв'язок системи (1) шукатимемо у вигляді матричного ряду

$$x(t) = M(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(t, \xi(t)) M(t), \quad (5)$$

де вектор $M(t)$ задовольняє систему рівнянь (2). Як випливає з [3,4], для малих τ виконується розклад

$$M(t - \tau) = M(t) + M'(t)(-\tau) + \\ + M''(t) \frac{\tau^2}{2} + \dots + o(\tau^n) \quad (6)$$

Враховуючи вигляд системи рівнянь (2), обчислимо частинні моменти першого порядку $M^{(k)}(t)$.

Система рівнянь (1) після заміни (5) має вигляд

$$\sum_k \mu L_k(t, \mu) M(t) \left[E + \sum_k \mu^k S_k(t, \xi(t)) \right] + \\ + M(t) \left[\sum_k \mu^k \frac{dS_k(t, \xi(t))}{dt} \right] = \\ = \mu \sum_k A_k(t, \xi(t - \tau_k)) * \\ * M(t - \tau_k) \left[E + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(t - \tau_k, \xi(t - \tau_k)) \right] \quad (7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях μ , із цієї системи отримаємо систему для обчислення коефіцієнтів

$$L_1(t, \mu) + \frac{dS_1}{dt} = \sum_k A_k(t, \xi(t - \tau_k)) \\ L_k(t, \mu) + \frac{dS_k}{dt} = \\ = \sum_k A_k(t, \xi(t - \tau_k)) S_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} S_j L_{k-j}(t, \mu) \quad (8)$$

Вважаючи що виконуються умови

$$[S_k(t, \xi(t))] = 0, \quad (k=1, 2, \dots),$$

для коефіцієнтів L_k в системі рівнянь (2) дістанемо вираз (3).

Зауваження. Побудована система моментних рівнянь (2) застосовується для дослідження стійкості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (1).

Означення. Незбурений тривіальний розв'язок системи (1) називається асимптотично стійким у середньому, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і будь якого $t \geq 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, що для всіх розв'язків x

початковою умовою $\|\varphi\| < \delta, t \geq t_0 \geq 0$ для умовного математичного сподівання норми збуреного розв'язку виконується нерівність

$$M\{\|x(t, t_0, \varphi)\| : \|\varphi\| < \delta\} < \varepsilon$$

і існує границя, для якої виконується

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M\{\|x(t, t_0, \varphi)\| : \|\varphi\| < \delta\} = 0.$$

4. Частинний випадок. Лінійне скалярне диференціальне рівняння з випадковими періодичними коефіцієнтами і сталим запізнюванням аргументу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з випадковими періодичними коефіцієнтами і зі сталим запізненням аргументу

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mu \alpha(t, \xi(t)) y(t - \tau), \quad \tau > 0. \quad (9)$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий марковський процес який, приймає два стани θ_1, θ_2 з ймовірностями ρ_1, ρ_2 , що задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\nu \rho_1 + \nu \rho_2 \\ \dot{\rho}_2 = \nu \rho_1 - \nu \rho_2 \end{cases}$$

Нехай

$$\alpha(t, \xi(t)) = \begin{cases} \sin t, \xi(t) = \theta_1 \\ -\sin t, \xi(t) = \theta_2 \end{cases}$$

Розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді ряду

$$\begin{aligned} y(t) &= m(t) + \mu S_1(t, \xi(t)) m(t) + \\ &+ \mu^2 S_2(t, \xi(t)) m(t) + \dots, \\ m(t) &= \langle y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Із (2) отримуємо наступне моментне рівняння

$$\frac{d m(t)}{dt} = [\mu b_1 + \mu^2 b_2 + \mu^3 b_3 + \dots] m(t). \quad (10)$$

Враховуючи розклади (6), (8) матимемо

$$m(t - \tau) = m(t) + m'(t)(-\tau) + m''(t) \frac{\tau^2}{2} + \dots, \quad (11)$$

де перша похідна від математичного сподівання $m(t)$ обчислюється за формулою (2), а друга похідна визначається наступним чином

$$\begin{aligned} m''(t) &= \mu \alpha(t, \xi(t)) [\\ &m(t) + m(t)(\mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots) + m(t) \\ &(\mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots)^2 + m(t)(\mu b_1') + \mu^2 b_2' + \dots +] \end{aligned}$$

Після підстановки значень знайдених похідних від математичного сподівання в співвідношення (6) рівняння (10) прийматиме вигляд

$$\begin{aligned} &(\mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots) [1 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots] \\ &+ \left(\mu \frac{dS_1}{dt} + \mu^2 \frac{dS_2}{dt} + \dots + \right) = \\ &= \mu \alpha(t, \xi(t)) [1 - \tau(\mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots) + \\ &\dots + \frac{\tau^2}{2} (b_1 \mu + \mu^2 b_2 + \dots)^2 + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} (\mu b_1' + \mu^2 b_2' + \dots) \\ &[1 + \mu S_1(t - \tau, \xi(t - \tau)) + \mu^2 S_2(t - \tau, \xi(t - \tau)) \dots] \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях з точністю до членів другого порядку дістанемо систему для обчислення коефіцієнтів b_k ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} b_1 + \frac{dS_1}{dt} &= \alpha(t, \xi(t)) \\ b_2 + b_1 S_1 + \frac{dS_2}{dt} &= \alpha(t, \xi(t)) \\ [-\tau b_1(t) + \frac{\tau^2}{2} b_1' + S_1(t - \tau, \xi(t - \tau))] & \end{aligned} \quad (12)$$

Із системи диференціальних рівнянь (12), з урахуванням (5) матимемо

$$\begin{aligned} b_1 &= \langle \alpha(t, \xi(t)) \rangle, \\ b_2 &= \langle \alpha(t, \xi(t)) \int_{-\tau}^t \alpha(\varphi, \xi(\varphi)) d\varphi \rangle, \end{aligned}$$

де матриця S_1 має вигляд

$$S_1(t, \xi(t)) = \int_{-\tau}^t \alpha(\varphi, \xi(\varphi)) d\varphi + S_1(t_0).$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, \\ \langle \alpha(t, \xi(t)) \alpha(\varphi, \xi(\varphi)) \rangle &= \sin \varphi \sin t e^{-2\nu(t-\varphi)}, \end{aligned}$$

то для обчислення коефіцієнтів в розкладі $b_2(t)$ матимемо

$$b_2(t) = \frac{\sin t e^{-2\nu t}}{4\nu^2 + 1} [2\nu \sin(t - \tau) - \cos(t - \tau)]$$

або

$$b_2(t) = \frac{e^{-2\theta t}}{4\nu^2 + 1} \times$$

$$\times \left[2\nu \left(\frac{1}{2} (\cos \tau - \cos(2t - \tau)) - \frac{1}{2} (\sin \tau + \sin(2t - \tau)) \right) \right]$$

При малих запізнюваннях, з урахуванням обчислених значень після усереднення за часом, моментне рівняння (10) має вигляд

$$\frac{dm}{dt} = \mu^2 e^{-2\theta t} \frac{\nu \cos \tau - 1/2 \sin \tau}{4\nu^2 + 1} m + o(\mu^3) m \quad (13)$$

Із рівняння (13), застосовуючи теорему про стійкість розв'язків детермінованої системи [5], отримуємо наступну умову стійкості розв'язків рівняння (13)

$$\frac{1}{2} \sin \tau > \nu \cos \tau \quad (14)$$

Із умови (14) можна висунути наступну гіпотезу. Існує аналітична залежність стійкості системи від запізнювання за часом і від випадкових коливань і є математичною ілюстрацією «боротьби» двох явищ: запізнювання і випадковості коливань.

З аналізу умови стійкості у середньому розв'язків диференціальних рівнянь (10) виникає наступний результат,

Розв'язки рівняння (10) в першому стані при

$$\xi(t) = \theta_1$$

$$\alpha(t, \xi(t)) \equiv \sin t$$

і в другому стані при $\xi(t) = \theta_2$

$$\alpha(t, \xi(t)) \equiv -\sin t$$

при наявності малих запізнювань будуть асимптотично стійкими.

При випадкових переходах з першого стану в другий стан при наявності достатньо малого запізнювання $\tau > 0$ розв'язки диференціального рівняння (10) можуть стати нестійкими

Література

1. Валеев К. Г., Джалладова И. А. Оптимізація випадкових процесів. — Київ, КНЕУ, 2008. — 312 с.
2. Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами: — М.: РУДН, 1996. — 258 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958. — 736 с.

4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1968. — 624 с.

5. Демидович Г. Е. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 471 с.

6. Корневский Д. Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах / Д. Г. Корневский. — К.: Академперіодика, 2008. — 128 с.

7. Рябов Ю. А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени / Ю. А. Рябов // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М., 1965. — Т. 3. — С. 153—167.

8. Скороход А. В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.

9. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М.: Наука, 1969. — 365 с.

10. Хусаинов Д. Я. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатырко. — Изд-во КУ, 1997. — 236 с.

11. Эльсгольц Л. Е. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Е. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

12. Ясинський В. К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, С. В. Ясинський. — К.: ТВІМС, 2005. — 578 с.

13. Samoilenko A. M. Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, M. O. Peristyuk. — Singapore-New Jersey-London-Hong-Kong: World Scientific, 1995. — 462 p.

Надійшла до редколегії 14.02.11

УДК 519.688

Замковий* О.В., аспірант

Застосування типізації веб-простору та агентного підходу для покращення результатів пошуку в Інтернет

У даній статті продемонстровано, що пошук інформації в Інтернет засобами Google та Яндекс не завжди дає потрібний результат. Для покращення результатів пошуку запропоновано мультиагентну структуру для пошукової системи, яка дозволить перейти від SEO-орієнтованої (Search Engine Optimization) стратегії оптимізації пошукового процесу до стратегії аналізу якості контенту сайту. Це дозволить зменшити вплив розкрутки сайтів на пошуковий процес.

Ключові слова: типізація, агенти, мультиагентні системи, пошук, інтернет

*E-mail: alex@zamkovyi.name

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Однією з найпопулярніших пошукових систем в наш час в світі є пошукова система Google (62,4 %, згідно рейтингу ComScore [1]), у російськомовному сегменті Google займає 2-гу позицію (Яндекс - 46,3 %, Google - 34,4 % російськомовного сегменту [2]). Тому в роботі розглянуто тенденції у пошуку саме в цих двох пошукових системах, які найбільш широко відображають статистику пошуку для країн СНД, ці пошукові системи також є найбільш відкритими та надають широку статистику у пошукових запитах. Набирає обертів пошукова система Bing від Microsoft [3], але першість на теренах СНД ще й досі утримують Яндекс та Google.

Для пошуку розкручених сайтів, таких як соціальні мережі, зараз не такий важливий правопис і семантична коректність пошукового запиту. Так в найреєстрованіші запити з метою пошуку найпопулярнішого російського сайту <http://vkontakte.ru> потрапляють 6 зовсім різних синтаксично і семантично запитів (табл. 1).

Але всі вони видають потрібну адресу соціальної мережі як найбільш релевантну і тому все одно видають коректний результат.

Zamkovyi* O.V., Ph.D. student

Using World Wide Web typing and agent-based approach to improve the search results through the Internet

In this article author shows that Google and Yandex are not giving proper results in some cases. The author proposes multi-agent search system architecture, which are to give better search results and to remove spamdexing from the search process. The given multi-agent search system architecture are to move the search process optimization from the SEO-based search optimization strategy to the search system site content and quality analysis.

Key Words: typing, agents, multi-agent systems, search, internet

Таблиця 1

Результати пошукових запитів сайту vkontakte.ru згідно статистики seParser.py [4]

Пошуковий запит	Кільк. релев. сайтів Google	Кільк. релев. сайтів Яндекс
в контакте	>32767	11181293
вkontakte вход на сайт	3600	6276110
контакт	>32767	4847955
контакты	>32767	4847955
вkontakte	>32767	4291307
Vkontakte	>32767	641331

Однак, зовсім інша ситуація виникає при пошуку товару з метою купівлі. У такому запиті слово «купити» буде вказувати на бажання шукача купити конкретну річ. Натомість в Google часто можна отримати посилання на магазини товарів іншого типу або на розкручені електронні каталоги. В даній ситуації навіть порожня відповідь краща за колекцію посилань, в якій немає потрібної шукачу відповіді, так як отримавши порожній результат шукач або скоректує запит, або буде знати, що такий товар не продається, інакше шукачеві доведеться витрачати час на пошук потрібної інформації в отриманих посиланнях, причому потрібного

товару серед цих посилань може і не бути взагалі. Така ситуація виникає внаслідок штучної пошукової оптимізації та розкрутки сайтів, адже рейтинг буде вищий у розкручених сайтів, які включені в систему обміну текстовими посиланнями [5]. Завдяки таким системам штучно змінюється один із головних критеріїв визначення релевантності в системі Google - індекс цитування (ІЦ), тобто кількість посилань на даний сайт з інших сайтів. Чим більше ІЦ, тим вище буде знаходитись сайт у результатах пошуку.

Саме через це в найбільш релевантних посиланнях ми не знаходимо потрібної інформації. Можна зробити висновок, що SEO-орієнтована (Search Engine Optimization) оптимізація сайтів призвела до штучного втручання в алгоритми пошуку пошукових систем та появи явища розкрутки в пошуковому процесі. Розкрутка як явище не повинна штучно впливати на результати пошуку, так як у пошуку головне релевантність результату пошуковому запиту, а не колекція найбільш вдало розрекламованих та розкручених ресурсів, на яких не обов'язково взагалі присутня релевантна інформація. Отже, потрібно переходити від SEO-оцінки сайту до оцінки якості контенту та структури сайту пошуковою системою.

Для такого переходу пропонується критерій розбиття пошукової системи на типізовані частини за функціональним навантаженням. У мультиагентній пошуковій системі цими частинами є окремі агенти, які займаються пошуком інформації у своїй підмножині Мережі. Взаємодіючи агенти утворюють автоматизовану мультиагентну пошукову систему (АМАПС). На підставі власного досвіду автора, літератури по типізації веб-сайтів [6] та експерименту, в якому було проаналізовано типізацію, застосовану в 100 електронних каталогах та пошукових системах, виділимо наступні підмножини простору Інтернет:

- магазини і аукціони
- інформаційні сайти
- корпоративні сайти
- форуми
- файлові архіви
- соціальні мережі
- блоги
- портали
- розважальні сайти
- мультимедійні сайти
- новини
- вікі-системи
- сайти із вакансіями і фріланс-сайти

- сайти, що не належать до попередніх типів

Ці підмножини будуть утворювати розбиття множини всіх сайтів на типи.

Такий підхід дозволить тим самим застосовувати спеціалізовані алгоритми пошуку для кожного із типів сайтів, так, наприклад, агент для вікі-систем може шукати результати на запит, що перекладений мовою технології семантичної павутини SPARQL [7].

Система поділу сайтів за типом контенту успішно застосована в багатьох порталах для внутрішнього пошуку та пошукових системах, наприклад, в Google, Rambler (інтернет, новини, картинки, відео, товари, погода, словники, вікіпедія, вакансії, фінанси).

Типи сайтів. Типізуюча функція.

Означення 1. Об'єктом, що шукає інформацію (ОШІ) є людина, агент або мультиагентна система, яка формулює пошуковий запит та бажає отримати релевантний запиту результат. ОШІ також може бути систематичним поєднанням певної кількості ОШІ [8].

Означення 2. Позначимо через T множину типів $T = \{\text{«магазин»}, \text{«інформаційний сайт»}, \text{«корпоративний сайт»}, \text{«форум»}, \text{«файловий архів»}, \text{«соціальна мережа»}, \text{«блог»}, \text{«портал»}, \text{«розважальний сайт»}, \text{«мультимедійний сайт»}, \text{«вікі-система»}, \text{«вакансії»}, \text{«новини»}, \text{«інше»}\}.$

Позначимо множину всіх інтернет-сайтів, як Ω , а множину всіх сайтів індексованих всіма пошуковими системами $\Omega^1 \subset \Omega$, множину всіх сайтів індексованих пошуковою системою Google $\Omega^{G1} \subset \Omega^1 \subset \Omega$.

$$\Omega^1 = \bigcup_{k \in K} \Omega^k, \text{ де } K - \text{це множина всіх}$$

пошукових систем, $k \in N$.

Означення 3. Назвемо типізуючою функцією на множині сайтів M , функцію $T(p)$, яка для кожного аргументу $p \in M$ повертає тип сторінки $T(p) \in T$.

Означення 4. Множина сторінок M називається типізованою, якщо всі сторінки у ній відповідають одному із типів: магазини, інформаційні сайти, корпоративні сайти, форуми, файлові архіви, соціальні мережі, блоги, портали, розважальні сайти, мультимедійні сайти, вікі-системи, вакансії або новини.

Найбільшу область визначення типізуючої функції ми матимемо на множині сайтів.

індексованих пошуковою системою Google Ω^{GI} , так як вона є найповнішою (Google – 15400 млн. сторінок, Яндекс – 1291 млн. сторінок). Позначимо типізовані підмножини множини Ω^{GI} наступним чином:

- Магазины: $M^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«магазин»}\}, M^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Інформаційні сайти: $IS^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«інформаційний сайт»}\}, IS^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Корпоративні сайти: $C^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«корпоративний сайт»}\}, C^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Форуми: $\Phi^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«форум»}\}, \Phi^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Файлові архіви: $\Theta^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«файловий архів»}\}, \Theta^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Соціальні мережі: $A^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«соціальна мережа»}\}, A^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Блоги: $B^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«блог»}\}, B^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Портали: $P^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«портал»}\}, P^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Розважальні сайти: $\Psi^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«розважальний сайт»}\}, \Psi^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Мультимедійні сайти: $MM^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«мультимедійний сайт»}\}, MM^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Вікі-системи: $\Sigma^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«вікі-система»}\}, \Sigma^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Вакансії: $\Xi^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«вакансії»}\}, \Xi^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Новини: $N^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«новини»}\}, N^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
 - Інше: $f^{GI} = \{p | p \in \Omega, T(p) \in \{\text{«інше»}\}, f^{GI} \subset \Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$
- $$\Omega^{GI} = IS^{GI} \cup C^{GI} \cup \Sigma^{GI} \cup MM^{GI} \cup \Psi^{GI} \cup P^{GI} \cup B^{GI} \cup A^{GI} \cup \Theta^{GI} \cup \Phi^{GI} \cup M^{GI} \cup \Xi^{GI} \cup N^{GI} \cup f^{GI}$$

Аналіз пошукового запиту, виділення кореневого слова

Означення 5. Пошуковим запитом називається послідовність слів у деякому фіксованому алфавіті A .

Означення 6. Кореневим словом у пошуковому запиті називається слово, яке несе в собі функціональне навантаження і дозволяє визначити функціональне навантаження запиту.

Наприклад, у запиті «праска купити» кореневим словом є «купити» - воно вказує на те, що результат на такий вхідний запит потрібно шукати у інтернет-магазинах, інтернет-каталогах, барахолках чи аукціонах, інакше кажучи серед сайтів типу «магазин» $\in T$.

Кореневі слова визначаються емпіричним шляхом: згідно принципів людської мови та типових пошукових запитів.

База знань агентів та її наповнення

Наповнення бази знань мультиагентної пошукової системи відбувається шляхом індексування сайтів, отриманих при роботі з пошуковою системою Google за допомогою Google AJAX Search API. За наповнення відповідає агент пам'яті, який асинхронно типізує та індексує сторінки, отримані від Google. Це дає змогу оновлювати базу знань не перериваючи роботу системи в цілому.

На даному етапі розвитку системи множина всіх типізованих та не типізованих сайтів в мультиагентній пошуковій системі визначається сторінками, індексованими в Google, тому $\Omega^{GI} \subset \Omega' \subset \Omega$.

Опишемо основні правила, які визначають поведінку функції типізації, на основі якої і заповнюється та оновлюється база знань мультиагентної системи:

1) Для типу «магазин», до якого відносяться інтернет-каталоги, інтернет-магазини, барахолки та аукціони характерне ієрархічне представлення у вигляді товарів із картинкою та описом, що відносяться до певного бренду (список брендів скінчений, та може бути заповнений переліченням та доповнюватись в процесі роботи системи). Особливістю каталогів є прив'язка товарів до зовнішніх посилань, для барахолки характерні наступні слова: «б/у», «б/в», «хорошее состояние», «в хорошем состоянии» і т.п. Особливістю аукціону є можливість робити ставки на сайті.

2) Для інформаційних сайтів характерні слова «огляд», «опис», «інформація». Такі сайти

схожі на сайти новин, але статті там об'ємніші і публікуються рідше.

3) Для корпоративних сайтів характерні цитування назви фірми та слова "контакти", "телефони", "вакансії", "про компанію".

4) Для типу «форум» характерний набір розділів для обговорення. Найбільш характерна ієрархія веб-форуму: Розділи → Темі → Повідомлення+Коментарі. Крім того, є два найпопулярніші проекти форуми, які можна визначити по характерній тільки їм структурі: InnoVision PowerBoard та phpBB. Всі повідомлення супроводжуються датою та ім'ям автора.

5) Типу «блог» відповідають веб-сайти, основний зміст яких — запису, що додаються регулярно, які містять текст, зображення чи мультимедіа об'єкти. Для блогів характерні недовгі записи із важливим хронологічним порядком, відсортовані у порядку «останній запис вгорі».

6) Типу «вікі-системи» відповідають веб-сайти, що створені на системах управління контентом для вікі-систем, тобто MindTouch, dokuWiki та Wikipedia.org.

7) Типу «вакансії» відповідають сайти, що складаються із об'яв для роботи та містять резюме.

8) Типу «файлові архіви» відповідають сайти, що містять безпосередні посилання на файли типів «mp3», «wav», «mid», «rar», «zip», «7z», «gz», «tar.gz», «bz2», «avi», «mp4», «mkv», «wmv», «pdf», «djvu», «doc», «txt», «fb2», «torrent», «exe».

9) Тип «соціальні мережі». Зараз основними соціальними мережами є V Kontakte.ru, Odnoklassniki.ru, Facebook.com, Mail.ru.

10) Типу «розважальні сайти» відповідають сайти, що містять флеш-ігри, он-лайн ігри.

11) Типу «мультимедійні сайти» відповідають сайти, що містять картинки, потокове аудіо і відео.

12) Типу «новини» відповідають сайти, що складаються із записів, хронологічно розташованих, з великою інтенсивністю записів та з великим показником перехресних посилань на інших сайтах.

13) Типу «портали» відповідають сайти, що складаються із композиції типів «новини», «розважальні сайти», «мультимедійні сайти», «блог», «форум», тобто мають ознаки декількох типів.

14) Сайтам, які не відносяться до попередніх типів автоматично присвоюється тип "інші".

Типи агентів та функціонал

Запропонована мультиагентна пошукова система складається з агента-брокера, агента-пам'яті та пошукових агентів, які в залежності від кореневого слова шукають результат на запит в своїй множині індексів, отриманих за допомогою агента пам'яті із бази знань. Кожен такий пошуковий агент працює із своєю типізованою множиною. Алгоритми пошуку для агентів також відрізняються в залежності від їх типів.

- Агент-брокер. Здійснює аналіз запиту та розподіл завдань між агентами системи.
- Агент пам'яті. Аналізує та типізує веб-сторінки. Оновлює та наповнює базу знань мультиагентної системи.
- Агент магазинів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань магазинам.
- Агент корпоративних сайтів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань корпоративним сайтам.
- Агент інформаційних сайтів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань інформаційним сайтам.
- Агент форумів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань форумам.
- Агент файлових архівів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань файловим архівам.
- Агент соціальних мереж. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань соціальним мережам.
- Агент блогів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань блогам.
- Агент порталів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань порталам.
- Агент розважальних сайтів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань розважальним сайтам.
- Агент мультимедіа сайтів. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань сайтам із мультимедійним контентом.

- Агент вікі-систем. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань вікі-системам.
- Агент вакансій. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань сайтам із вакансіями та фріланс-сайтам.
- Агент новин. Здійснює пошук за переданим агентом брокером запитом по отриманим із бази знань сайтам, що містять оперативні новини.
- Агент по-замовчуванню. Здійснює пошук по сайтам, тип яких визначений як «інше», отриманим із бази знань.

Взаємодія агентів та розподіл завдань

Основним агентом, що працює з усіма іншими, а також і з ОШІ через певний інтерфейс є агент-брокер.

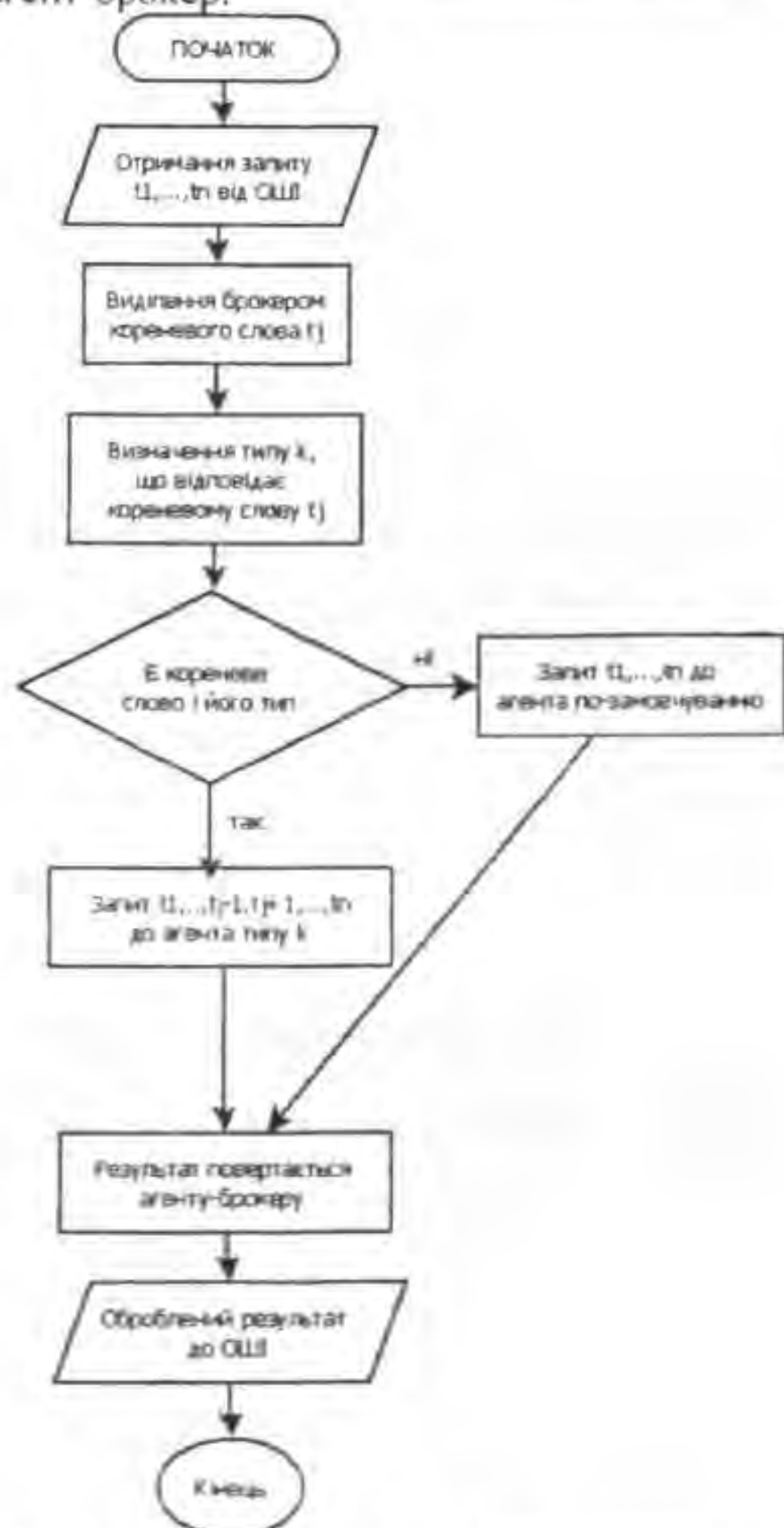


Рис.1. Блок-схема роботи мультиагентної пошукової системи.

Загальний алгоритм роботи агента брокера (рис.1): у вхідному запиті $t_1, t_2, \dots, t_n$, де n – це кількість слів у пошуковому запиті, t_i – i -те слово в пошуковому запиті. Агент-брокер шукає кореневе слово t_j і далі в залежності від кореневого слова брокер передає запит без ключового слова $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n$ відповідному кореневому слову агентів A_k або передає початковий запит $t_1, t_2, \dots, t_n$ агентів по-замовчуванню у разі, якщо кореневе слово не знайдене, або не існує правила для знайденого кореневого слова.

Позначимо $R_k, k \in T$ – множина кореневих слів, які вказують на те, що подальший пошук має виконувати агент, що відповідає типу множині сайтів M , причому $\forall p \in M$
 $T(p) = k$.

Робота системи

Розглянемо тестовий пошуковий запит «nike lebron 7 мяч купить». Реальне посилання на 7-му серію баскетбольного м'яча LeBron – це http://store.nike.com/?country=US&lang_locale=en_US&l=shop.pdp.ctr-inline/cid-1/pid-257515.

Google вважає найбільш релевантним сайт <http://nikelebron.net/>, на якому не можна нічого купити. Натомість, в побудованій на основі описаних принципів мультиагентній системі, отримавши запит агент-брокер визначає кореневе слово «купить» і надсилає запит «nike lebron 7 мяч» агенту магазинів. Агент магазинів, аналізуючи запит «nike lebron 7 мяч» визначає бренд «nike» та здійснює пошук товару саме такого бренду із властивостями «lebron 7» та «мяч» серед отриманих від агента-пам'яті сайтів типу «магазини» і знаходить потрібне посилання.

В той же час при застосуванні даної системи виявлено такі проблеми:

- Складно аналізувати структуру сайту, якщо сайт цілком написаний на Flash.
- Можливі ситуації, коли кореневим словом є словосполучення, а не одне слово.
- Наповнення бази знань мультиагентної системи потребує багато часу.
- Виділені типізовані підмножини є розбиттям, а не поділом.

Висновки:

- Для подолання недоліків пошуку запропоновано прототип моделі мультиагентної пошукової системи, що

виконує пошук по типізованим сторінкам мережі Інтернет.

Для запропонованої моделі описано:

- схему роботи агента-брокера, його реакції в залежності від запитів, які можуть надходити від ОШ.
- середовище роботи агента-брокера: база знань, що містить інформацію про типи сайтів.
- базові принципи визначення типів сайтів в залежності від їхньої структури та змісту.
- На підставі аналізу основних пошукових запитів, літератури по типізації і власного досвіду запропонована типізація для мультиагентної пошукової системи.
- Отримана в результаті специфікація системи пошуку є певним розширенням для пошукової системи Google. У разі коли база знань мультиагентної пошукової системи не наповнена – працює агент по-замовчуванню, який реалізує стандартний пошук Google без застосування типізації.

Список використаних джерел

1. *ComScore*. Baidu Ranked Third Largest Worldwide Search Property by comScore in December 2007. [Електронний ресурс] / ComScore – Режим доступу до журн.: http://www.comscore.com/Press_Events/Press_Releases/2008/01/Baidu_Ranked_Third_Largest_World_Wide_Search_Engine
2. *NetMarketShare*. Search engine market share. [Електронний ресурс] / NetMarketShare – Режим доступу до журн.: <http://marketshare.hitslink.com/search-engine-market-share.aspx?qprid=4>
3. *Search Engine Land*. Bing Search Volume Up 29% In 2010, Google Up 13%, comScore Says. [Електронний ресурс] / Search Engine Land – Режим доступу до журн.: <http://searchengineland.com/bing-search-volume-up-29-in-2010-google-up-13-comscore-says-64075>
4. *СеПарсер.ру*. Анализ поискового запроса «вконтакте вход на сайт». [Електронний ресурс] / СеПарсер.ру – Режим доступу до журн.: <http://separser.ru/zapros/42550-vkontakte-vhod-na-sait.html>
5. *Корошавин Игорь*. FREE PROMOTER - БЕСПЛАТНАЯ РАСКРУТКА САЙТА. [Електронний ресурс] / И. Корошавин – Режим доступу до журн.: <http://www.wmshopping.com/ebooks/freepromoter.html>
6. *Jacobson Trudi, ed.* Critical Thinking and the Web: Teaching Users to Evaluate Internet Resources / T.E. Jacobson. – Pittsburgh: Library Instruction Publications, 2000.
7. *The World Wide Web Consortium*. SPARQL Query Language for RDF. [Електронний ресурс] / The World Wide Web Consortium – Режим доступу до журн.: <http://www.w3.org/TR/rdf-sparql-query/>
8. *Замковий О.В., Шевченко О.В.* Використання агентної технології пошуку інформації для систем прийняття рішень / О.В. Замковий, О.В. Шевченко // III-я Міжнародна школа-семінар, теорія прийняття рішень – Ужгород, 2006 – ст.54-55.

Надійшла до редколегії 17.03.2011

УДК 681.3:004.056

Каленський* А. А., аспірант

Групові цифрові підписи. Методи безпечного видалення члена з групи

Розглядається один з важливих криптографічних засобів захисту інформації в групах – цифровий підпис. Проводиться огляд схем побудови групових цифрових підписів з можливістю безпечного видалення члена з групи.

Ключові слова: цифровий підпис, цифровий підпис в групі, підписи доведення знання, методи безпечного видалення члена з групи.

A. Kalenskyi

Digital group signatures. Methods of safe removal member from group

One of important cryptographic facilities of information protection in group – digital signature is considered. An overview of the development scheme of construction digital signature with the ability to safely remove a member from group is made.

Keywords: digital signature, digital signature in a group, signatures based on a proof of knowledge, methods of safe removal member from group.

*E-mail: akalenskyi@gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д. ф.-м. н. Анісімов А.В.

Цифровий підпис – це деякий комп'ютерно згенерований цифровий додаток до повідомлення, який зв'язаний з повідомленням деяким заданим відношенням. Кожен має можливість перевірити зв'язок повідомлення і його цифрового підпису, але тільки власник цифрового підпису може обчислити новий цифровий підпис при зміні повідомлення [1].

Вперше про можливість існування цифрового підпису і опис загальної схеми його використання було наведено в статті Діффі та Хеллмана [12]. Відразу після цієї роботи в 1978 р. Р.Л. Рівест, А.Шамір і Л. Адлеман запропонували RSA – схему шифрування та метод цифрового підпису заснований на цій схемі [13].

Цифровий підпис може використовуватися для підпису електронних повідомлень. Одержувач підписаного повідомлення матиме доказ, що це повідомлення прийшло від відправника та може переконати третю сторону в тому, що автор підпису надіслав це повідомлення. Ця властивість сильніша, ніж просто ідентифікація автора повідомлення, де одержувач може тільки перевірити, що повідомлення прийшло від відправника.

Цифровий підпис залежить від повідомлення і від автора підпису. Інакше одержувач повідомлення міг би змінити повідомлення перед показом пари підпис-повідомлення третій стороні. Або він міг «підписатися» під будь-яким

повідомленням цим же підписом, оскільки неможливо виявити електронні операції типу «виріж» і «встав» [12].

Сучасний стан розвитку інформаційних технологій, широке розповсюдження інформаційних ресурсів призводить до виникнення нових задач пов'язаних з об'єднанням користувачів у групи для взаємного використання відповідних ресурсів. Проблематика створення таких груп детально описана в статтях [2,3]. Існування цих груп не обмежуються лише можливістю взаємодії в середині групи. Група досить часто взаємодіє з зовнішнім середовищем як єдине ціле. Виникає необхідність в цифрових підписах від імені групи. Групові підписи надають змогу членам групи підписувати повідомлення анонімно від імені групи.

Групові підписи можуть бути використані компанією для аутентифікації прайс-листів, прес-релізів чи цифрових контактів від імені групи. Користувачу (споживачу) необхідно знати тільки відкритий ключ групи для перевірки підпису. Компанія при цьому приховує свою внутрішню структуру. В разі необхідності існує можливість визначити, хто саме створив цей підпис.

Наприклад, використання цієї схеми при проведенні тендеру виглядає наступним чином. Всі компанії, що приймають участь у тендері утворюють групу і кожна компанія підписує свої

пропозиції анонімно використовуючи груповий підпис. Пізніше, коли найкращий варіант з пропозиції обрано, автора цього підпису ідентифікують залишаючи при цьому авторів інших пропозицій анонімними [11].

Означення схеми групового підпису

В схемі групового підпису приймають участь три сторони: члени групи, менеджер групи і не члени групи.

Схема групового підпису складається з наступних процедур:

Установка(ініціалізація): алгоритм для генерації відкритого групового ключа та секретного групового ключа.

Приєднання: протокол між менеджером групи та майбутнім членом групи, в результаті якого останній стає членом групи. При цьому новий член групи отримує свій приватний груповий ключ, за допомогою якого він може робити підписи від імені групи. А менеджер групи, в свою чергу, отримує певну інформацію про нового члена групи, яку він додає до свого приватного групового ключа.

Підпис: протокол між членом групи та користувачем, в результаті якого член групи, використовуючи свій приватний груповий ключ, створює підпис на повідомленні, яке надане користувачем.

Перевірка: алгоритм перевірки правильності групового підпису за відкритим груповим ключем та підписаним повідомленням.

Відкриття: алгоритм, за допомогою якого груповий менеджер за отриманим підписаним повідомленням та секретним груповим ключем визначає автора підпису.

Виключення з групи: алгоритм, за допомогою якого груповий менеджер, використовуючи інформацію отриману на етапі приєднання члена до групи, може виключити члена з групи. Тобто унеможливорює подальше створення цим користувачем підписів від імені групи.

Властивості групового підпису

Груповий підпис має наступні властивості:

1. Тільки члени групи мають можливість підписувати повідомлення.

2. Існує можливість перевірки вірності цього підпису, але неможливо встановити, хто саме з членів групи створив його.

3. У разі необхідності підпис може бути «відкритий»; тобто існує менеджер групи, який може визначити, хто саме з членів групи створив цей підпис.

Вимоги безпеки

Груповий підпис повинен відповідати наступним вимогам безпеки:

1. **Непідробність (зовнішня).** Тільки авторизовані члени групи можуть створювати групові підписи.

2. **Анонімність.** Неможливість ідентифікування автора підпису (у разі необхідності, менеджер групи або коаліція з членів групи можуть ідентифікувати автора підпису).

3. **Незв'язність.** Неможливість з'ясувати, які підписи створені одним і тим же членом групи.

4. **Непідробність (внутрішня).** Ні коаліція з членів групи, ні менеджер групи не можуть підписуватися від імені іншого члена групи (проте ця властивість не заважає менеджеру групи створити «неіснуючого» члена групи і підписуватися від його імені).

5. **Відстежуваність.** Менеджер групи має можливість відкрити підпис і тим самим визначити автора підпису.

6. **Опір коаліції.** Коаліція членів групи, таємно змовившись і об'єднавши свої знання, не може згенерувати підпис від імені групи, який не можна було б відслідкувати.

Ефективність схеми групового підпису

Ефективність схеми групового підпису залежить від таких параметрів:

1. Розмір відкритого групового ключа.

2. Розмір групового підпису.

3. Ефективність процедур підпису та перевірки підпису.

4. Ефективність процедур встановлення, відкриття, приєднання та видалення члена з групи.

Розвиток схем створення групових цифрових підписів пройшов досить довгий шлях вдосконалення. Першим і одним з найважливіших досягнень стало створення схеми, в якій довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать від розміру групи [10]. Подібні схеми пройшли перевірку на надійність [5]. І однією з найбільш практичних та безпечних вважається схема ACJT, яка буде представлена далі.

Проте існує проблема, яка досі не має однозначного ефективного вирішення. Вона полягає у видаленні члена групи із групи і пов'язана з загальновідомою проблемою анулювання ключів в звичайній схемі цифрового підпису з відкритими ключами. А в випадку схем групового підпису ця проблема стає набагато складнішою.

Найбільш простим і на перший погляд ефективним способом для видалення членів групи є Списки Анульованих Сертифікатів (Certificate Revocation Lists (CRLs)). Менеджер

групи періодично випускає новий CRL, в якому кожний елемент означає члена групи, членський сертифікат якого було анульовано. Існує досить багато можливостей для генерування і розповсюдження таких CRL. Нажаль, підхід за допомогою CRL не може ефективно використовуватися в групових підписах з наступних причин:

1. Оскільки групові підписи анонімні і незв'язні, як може менеджер групи ідентифікувати видалених членів групи?

2. Якщо менеджер групи відкриє певні (в нашому випадку секретні) дані, що відповідають видаленим членам групи, чи залишаться анонімними і незв'язними всі попередні підписи цього члена групи?

Останній пункт – найбільш важливий при видаленні членів з групи.

Якщо член групи вийшов з групи добровільно, чи був виключений через якісь адміністративні причини (як кар'єрний зріст) тоді немає необхідності жертвувати безпекою попередніх підписів.

Проте, в деяких випадках, це необхідно.

Наприклад, працівники деякої фірми є членами групи. Одного із працівників викрито у шахрайстві. В цьому випадку при видаленні його з групи необхідно відкрити його секретні дані, щоб прослідкувати всі підписи зроблені саме цим членом від імені групи.

Іншим очевидним рішенням видалення члена групи є регенерація відкритого групового ключа. Після регенерації груповий менеджер може просто провести процедуру приєднання членів до групи тільки з тими членами групи, які повинні залишитися в ній. Це прийнятний варіант для маленьких груп. Проте, для великих груп цей варіант не є працездатним (через часті зміни складу групи і велику кількість членів групи буде витрачатися багато часу на перевипуск нових членських сертифікатів). Хоча випуск нового сертифікату може проходити без участі члена групи – тільки менеджером групи, проте деякі схеми потребують взаємодії між членом групи та менеджером, особливо на початку.

Розглянемо та порівняємо наступні схеми створення групового цифрового підпису. Перша з них буде розширенням схеми ACJT за допомогою так званого "динамічного акумулятора" запропонована Каменішем та Лисянською (Camenisch, Lysyanskaya) та схему створення групового цифрового підпису запроповану Каменішем та Гросом (Camenish, Groth). Ці схеми спираються на сильне

припущення RSA, та їх безпечність може бути доведена у випадковій моделі з оракулом. Зауважимо, що існують схеми [6,9], які є більш ефективними, ніж ті, які розглядаються в статті, проте безпечність цих схем залежить від інших, нових альтернативних теоретико-числових припущень.

Розглянемо схему ACJT.

Схема запропонована Атенісом, Каменішем, Джосом та Тсудіком ACJT (Giuseppe Ateniese, Jan Camenisch, Marc Joye, and Gene Tsudik)

Введемо деякі означення.

Означення 1. (Сильна RSA проблема) Нехай $n = pq$ є модулем RSA, і нехай G – циклічна підгрупа Z_n^* порядку $\#G, \lceil \log_2(\#G) \rceil = l_G$. За даними n та $z \in G$ необхідно знайти $u \in G$ та $e \in Z(e > 1)$, що задовольняють $z = u^e \pmod{n}$.

Припущення 1. (Сильне RSA припущення). Існує імовірнісний алгоритм K , який за поліноміальний час по вхідному параметру безпеки l_G видасть пару (n, z) таку, що для всіх імовірнісних алгоритмів P , що працюють за поліноміальний час, ймовірність, що алгоритм P може вирішити сильну RSA проблему, є незначною.

Означення 2. (Проблема прийняття рішення Діффі-Хелмана)

Нехай $G = \langle g \rangle$ циклічна групи згенерована за допомогою g порядку $u = \#G, \lceil \log_2(u) \rceil = l_G$. За даними g, g^x, g^y та $g^z \in G$ необхідно вирішити, чи рівні між собою g^x та g^z .

Припущення 2. (Припущення прийняття рішення Діффі-Хелмана) Не існує імовірнісного алгоритму, що працює за поліноміальний час та розрізняє з певною ймовірністю розподіли D та R , $D = (g, g^x, g^y, g^z)$ з $x, y, z \in_R Z_n$ і $R = (g, g^x, g^y, g^{xy})$ з $x, y \in_R Z_n$.

Проблема прийняття рішення Діффі-Хелмана легша, ніж обчислювальна проблема Діффі-Хелмана, яка включає пошук g^{xy} за заданими g^x та g^y . Тому обчислювальне припущення Діффі-Хелмана є набагато сильнішим. Проте обидва припущення є сильнішими, ніж припущення, що обчислення дискретного логарифму складне.

Якщо n безпечний RSA модуль (тобто $n = pq$ і $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$ і p, q, p', q' всі є простими), то для більшої надійності операції обмежуються до операцій в підгрупі квадратичних лишків по модулю n , тобто до циклічної підгрупи $QR(n)$ згенерованої елементом порядку $p'q'$. Все це робиться через те, що порядок $p'q'$ в $QR(n)$ не має малих множників.

Легко знайти генератор g для $QR(n)$. Достатньо вибрати елемент $a \in Z_n^*$, що задовольняє $\gcd(a \pm 1, n) = 1$ і далі взяти $g = a^{2^k} \pmod n$. Тоді ми отримаємо $QR(n) = \langle g \rangle$.

Пропозиція 1. Нехай $n = pq$, де $p \neq q$ і $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$ і p, q, p', q' всі є простими. Тоді порядок елементів в Z_n^* є одним з множини $\{1, 2, p', q', 2p', 2q', p'q', 2p'q'\}$. Більш того, порядок $a \in Z_n^*$ рівний $p'q'$ чи $2p'q'$ тоді і тільки тоді, коли $\gcd(a \pm 1, n) = 1$ [4].

Всі наступні підписи знання будемо будувати над циклічною групою $G = \langle g \rangle$, порядок якої невідомий, проте відома довжина бінарного представлення цього порядку. Тобто l_G таке, що $2^{l_G-1} \leq \#G < 2^{l_G}$. Хеш-функція має вигляд $H: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^k$. Вводиться параметр безпеки $\epsilon > 1$.

Означення 3. (Підпис знання дискретного логарифму)

Пара $(c; s) \in \{0, 1\}^k \times \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$; де c задовольняє рівність $c = H(m || y || g || g^y)$ є підписом знання дискретного логарифму елементу $y \in G$ до основи g на повідомленні m .

Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y)$, може легко знайти цей підпис знання наступним чином.

Обираємо випадковим чином $r \in \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)}$ та обчислюємо c та s як: $c := H(m || y || g || g^r)$ та $s := r - cx \pmod n$.

Означення 4. (Підпис знання рівності двох дискретних логарифмів) Нехай $y_1, y_2, g, h \in G$. Пара $(c; s) \in \{0, 1\}^k \times \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$, що задовольняє рівність

$$c = H(m || y_1 || y_2 || g || h || g^{y_1} || h^{y_2})$$

є підписом знання дискретного логарифму $y_1 = g^x$ до основи g та дискретного логарифму $y_2 = h^x$ основи h на повідомленні m . Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y_1) = \log_h(y_2)$, може легко знайти цей підпис знання обираючи випадковим чином $r \in \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)}$ та обчисливши c та s як: $c := H(m || y_1 || y_2 || g || h || g^r || h^r)$ та $s := r - cx$ (в множині Z).

Означення 5. (Підпис знання того, що дискретний логарифм лежить в деякому інтервалі). Нехай $y_1, y_2, g, h \in G$. Пара $(c; s) \in \{0, 1\}^k \times \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$; де c задовольняє рівність $c = H(m || y_1 || g || g^{r-cx} y_2)$ є підписом знання того, що дискретний логарифм $y = g^x$ до основи g на повідомленні m лежить в інтервалі

$$(X - 2^{\epsilon(l_G+k)}, X + 2^{\epsilon(l_G+k)}).$$

Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y) \in (X - 2^l, X + 2^l)$, може легко знайти цей підпис обравши випадковим чином $r \in \pm \{0, 1\}^{\epsilon(l_G+k)}$ та обчисливши c та s як: $c := H(m || y || g || g^r)$ та $s := r - c(x - X)$ (в множині Z).

Надалі будемо використовувати наступні позначення.

Нехай $\epsilon > 1$, k, l_p – параметри безпеки і $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2$ означають довжини, що задовольняють наступні нерівності:

$$\lambda_1 > \epsilon(\lambda_2 + k) + 2; \lambda_2 > 4l_p;$$

$$\gamma_1 > \epsilon(\gamma_2 + k) + 2; \gamma_2 > \lambda_1 + 2.$$

Визначимо межі інтервалів:

$$\Lambda = (2^{\lambda_1} - 2^{\lambda_2}, 2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2}) \text{ та}$$

$$\Gamma = (2^{\gamma_1} - 2^{\gamma_2}, 2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2})$$

(Параметр ϵ контролює статистичне нульове розголошення, а параметр l_p розмір модулів, які використовуються).

Ініціалізація системи

Менеджер групи обирає випадкові прості p' та q' довжини l_p такі, щоб $p = 2p' + 1$ та $q = 2q' + 1$ теж були простими. Обчислює модуль $n = pq$.

Обирає $a, a_0, g, h \in {}_R QR(n)$ (з $QR(n)$ – циклічної підгрупи порядку $p'q'$).

Обирає випадковий секретний елемент $x \in {}_R Z_{p'q'}$ і обчислює $y = g^x \pmod n$.

Тоді відкритий груповий ключ має вигляд: $Y = (n, a, a_0, y, g, h)$.

Відповідний приватний ключ менеджера групи $S = (p', q', x)$.

Приєднання до групи, генерація ключів і сертифікатів для членів групи

Вважатимемо, що канал обміну даними між груповим менеджером і користувачем безпечний.

1. Користувач P_i (Аліса) генерує секретну експоненту $\bar{x}_i \in {}_R (0, 2^{\lambda_2})$, випадкове ціле $\bar{r} \in {}_R (0, n^2)$ та надсилає $C_i = g^{\bar{x}_i} h^{\bar{r}} \pmod n$ до менеджера групи та надає йому доведення знання представлення C_i відносно основ g та h .

2. Менеджер групи перевіряє $C_i \in {}_R QR(n)$. Якщо це справджується, обирає α_i та $\beta_i \in {}_R (0, 2^{\lambda_2})$ і надсилає (α_i, β_i) до P_i .

3. Користувач P_i обчислює

$$x_i = 2^{\lambda_1} + (\alpha_i \tilde{x}_i + \beta_i \bmod 2^{\lambda_2})$$

і надсилає менеджеру групи $C_2 = a^{s_i} \bmod n$. Також користувач доводить менеджеру групи:

а) дискретний логарифм C_2 до основи a лежить в Λ .

б) знання що u, v, w такі, що

1) u лежить в $(-2^{\lambda_2}, 2^{\lambda_2})$,

2) u рівний дискретному логарифму

$C_2/a^{2^{\lambda_1}}$ до основи a ,

3) $C_2^{a_i} g^{b_i}$ рівний $g^u (g^{2^{\lambda_2}})^v h^w$ (дивись означення 5).

Підпункти 1-3 доводять що приватний ключ члена $x_i = \log_a C_2$ правильно обчислений з C_1, α_i та β_i .

4. Менеджер групи перевіряє, що $C_2 \in QR(n)$. Якщо це так – перевіряє всі доведення користувача. Обирає $e_i \in_R \Gamma$ та обчислює $A_i = (C_2 a_0)^{1/e_i} \bmod n$ і надсилає P_i новий членський сертифікат (A_i, e_i) (відмітимо, що в такому разі $A_i = (a^{s_i} a_0)^{1/e_i} \bmod n$).

5. Користувач P_i перевіряє, що $a^{s_i} a_0 \equiv A_i^{e_i} \pmod{n}$.

Таким чином член групи отримує членський сертифікат (A_i, e_i) , за допомогою якого він може надалі підписувати повідомлення від імені групи.

Підпис повідомлення

1. Член групи генерує випадкове число $w \in_R \{0, 1\}^{2l_1}$ та обчислює:

$$T_1 = A_i y^w \bmod n, T_2 = g^w \bmod n, T_3 = g^{e_i} h^w \bmod n.$$

2. Випадковим чином обирає

$$r_1 \in_R \pm \{0, 1\}^{e(\gamma_1 + k)}, r_2 \in_R \pm \{0, 1\}^{e(\lambda_2 + k)}, \\ r_3 \in_R \pm \{0, 1\}^{e(\gamma_1 + 2(l_1 + k + 1))}, r_4 \in_R \pm \{0, 1\}^{e(2l_1 + k)}$$

та обчислює:

$$a) d_1 = T_1^{r_1} / (a^{r_2} y^{r_3}) \bmod n, d_2 = T_2^{r_2} / g^{r_3} \bmod n, \\ d_3 = g^{r_4} \bmod n \text{ і } d_4 = g^{r_1} h^{r_4} \bmod n;$$

$$b) c = H(m || g || h || y || a_0 || a || T_1 || T_2 || T_3 || d_1 || d_2 || d_3 || d_4);$$

$$c) s_1 = r_1 - c(e_i - 2^{\lambda_1}), s_2 = r_2 - c(x_i - 2^{\lambda_1}), s_3 = r_3 - c e_i w \text{ та } s_4 = r_4 - c w.$$

Підпис має вигляд: $(c, s_1, s_2, s_3, s_4, T_1, T_2, T_3)$.

Груповий підпис можна вважати підписом знання (1) значення $x_i \in \Lambda$ таке, що значення $a^{s_i} a_0$ зашифроване за допомогою шифрування Ель-Гамала в (T_1, T_2) під y . А (2) e_i корінь зашифрованого значення, де e_i перша частина представлення T_3 до основ g та h і що e_i лежить в Γ .

Перевірка підпису:

1. Обчислення

$$c' = H(m || g || h || y || a_0 || a || T_1 || T_2 || T_3 ||$$

$$|| a_0^c T_1^{s_1 - c 2^{\lambda_1}} / (a^{s_2 - c 2^{\lambda_1}} y^{s_3}) \bmod n ||$$

$$|| T_2^{s_2 - c 2^{\lambda_1}} / g^{s_3} \bmod n || T_3^c g^{s_4} \bmod n ||$$

$$|| T_3^c g^{s_1 - c 2^{\lambda_1}} h^{s_4} \bmod n ||;$$

2. Підпис приймається тоді і тільки тоді, коли $c = c'$ і

$$s_1 \in \pm \{0, 1\}^{e(\gamma_1 + k) + 1}, s_2 \in \pm \{0, 1\}^{e(\lambda_2 + k) + 1}, \\ s_3 \in \pm \{0, 1\}^{e(\gamma_1 + 2(l_1 + k + 1)) + 1} \text{ та } s_4 \in \pm \{0, 1\}^{e(2l_1 + k) + 1}.$$

Відкриття підпису:

1. Перевірка підпису.

2. Відновлення A_i (а значить і ідентифікація P_i) $A_i = T_1 / T_2^{s_1} \bmod n$.

3. Перевірка, що

$$\log_a y = \log_{T_2} (T_1 / A_i \bmod n).$$

Доведення властивостей безпеки див. [4].

Динамічний акумулятор

Розглянемо поняття "динамічного акумулятора" запропоноване Каменішем та Лисянською (Camenisch, Lysyanskaya).

Означення 6. Безпечним акумулятором для сімейства входних даних $\{X_k\}$ є сімейство сімейств функцій $\Psi = \{F_k\}$ з наступними властивостями.

Ефективна генерація: Існує ефективний імовірнісний алгоритм Φ , який на входних даних 1^k видає випадковий елемент $f \in F_k$. Окрім f , Φ також видає деяку додаткову інформацію про f , яку позначатимемо aux_f .

Ефективне обчислення: $f \in F_k$ є поліноміальною функцією, яка на входних $(u, x) \in U_f \times X_k$ видає результат $v \in U_f$, де U_f – входний домен для функції f , а X_k – входний домен для елементів, які необхідно акумулювати.

Квазі-комутативність: Для всіх k , для всіх $f \in F_k$, для всіх $u \in U_f$ для всіх $x_1, x_2 \in X_k$, $f(f(u, x_1), x_2) = f(f(u, x_2), x_1)$.

Якщо $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset X_k$, то $f(f(\dots(f(u, x_1), \dots), x_m))$ позначатимемо як $f(u, X)$.

Свідчення: Нехай $v \in U_f$ та $x \in X_k$. Значення $w \in U_f$ називається свідченням для x в v під f якщо $v = f(w, x)$.

Безпечність: Нехай $U'_f \times X'_k$ є домени, для яких визначена процедура обчислення функції $f \in F_k$ (отже $U_f \subseteq U'_f, X_k \subseteq X'_k$). Тоді для всіх імовірнісних алгоритмів, що використовують зловмисники, що працюють за поліноміальний час A_k

$$\Pr[f \leftarrow \Phi(I^k); u \leftarrow U_f; (x, w, X) \leftarrow A_k(f, U_f, u): \\ X \subset X'_k; w \in U'_f; x \in X'_k; x \notin X; \\ f(w, x) = f(u, X)] = \text{neg}(k).$$

Тобто ймовірність того, що для $X \subset X'_k; w \in U'_f; x \in X'_k; x \notin X$ справджується рівність $f(w, x) = f(u, X)$ є незначною. Де f отримано в результаті роботи $\Phi(I^k)$, $u \in U_f$, та (x, w, X) отримано в результаті роботи алгоритму $A_k(f, U_f, u)$.

Динамічності акумулятору надає наступна властивість:

Ефективне видалення: Існують ефективні алгоритми D, W які при $v = f(u, X), x, x' \in X$, і $f(w, x) = v$ мають наступний вигляд:

$$1) \quad D(\text{aux}_f, v, x') = v' \text{ такий, що} \\ v' = f(u, X \setminus \{x'\});$$

$$2) \quad W(f, v, v', x, x') = w' \text{ такий, що} \\ f(w', x) = v'.$$

Також для створення необхідної схеми групового підпису з використанням динамічного акумулятору потрібна наступна властивість:

Доведення знання з нульовим розголошенням: Існує ефективна система доведення знання, в якій загальними вхідними параметрами є c , акумуляуюча функція f та $v \in U_f$ (де $c = \text{Commit}(x, r)$, де r - обрано випадковим чином); і вхідними параметрами для сторони, що намагається довести своє знання x, w, r таких, що $c = \text{Commit}(x, r)$ і $v = f(w, x)$ є $r, x \in X_k, u \in U_f$.

Під ефективністю розуміється поліноміальний час роботи такого алгоритму.

Побудова динамічного акумулятора.

- F_k - сім'я функцій, які відповідають піднесенню до степеня по модулю, отриманого

добутком безпечних простих чисел довжини k . Вибір $f \in F_k$ зводиться до вибору випадкового модуля $n = pq$ довжини k , де $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$ і p, p', q, q' є простими числами.

Позначатимемо f , яка відповідає модулю n і домену $X_{A,B}$ як $f_{n,A,B}$, або як f_n , або як f , в тих випадках, де це можливо.

- $X_{A,B}$ - це множина:

$$\{e \in \text{простим} : e \neq p', q' \wedge A \leq e \leq B\},$$

де A та B можуть бути обрані з довільною поліноміальною залежністю від параметру безпеки k , коли $2 < A$ та $B < A^2$.

$X'_{A,B}$ є (будь-якою підмножиною) з множини цілих чисел з $[2, A^2 - 1]$ таких, що $X_{A,B} \subseteq X'_{A,B}$.

- Для $f = f_n$, додаткова інформація aux_f - це розклад на множники числа n .

- Для $f = f_n$, $U_f = \{u \in \mathbb{Q}R_n : u \neq 1\}$ і $U'_f = \mathbb{Z}_n^*$.

- Для $f = f_n$, $f(u, x) = u^x \bmod n$. Відмітимо, що $f(f(u, x_1), x_2) = f(u, \{x_1, x_2\}) = u^{x_1 x_2} \bmod n$.

- Оновлення значення акумулятору. Додавання значення $\tilde{x}$ до значення акумулятору v може бути обчислене як $v' = f(v, \tilde{x}) = v^{\tilde{x}} \bmod n$. Видалення значення $\tilde{x}$ з акумулятору проводиться наступним чином:

$$D((p, q), v, \tilde{x}) = v^{\tilde{x}^{-1} \bmod (p-1)(q-1)} \bmod n.$$

- Оновлення свідчення: Оновлення свідчення u після додавання $\tilde{x}$ може бути зроблене наступним чином:

$$u' = f(u, \tilde{x}) = u^{\tilde{x}} \bmod n.$$

У випадку видалення $\tilde{x} \neq x \in X_k$ з акумулятору, свідчення u може бути оновлене наступним чином. За розширеним алгоритмом Евкліда, можна обчислити цілі a, b такі, що

$$ax + b\tilde{x} = 1 \text{ і тоді } u' = W(u, x, \tilde{x}, v, v') = u^b v'^a.$$

Перевіримо, що $f(u', x) = u'^x \bmod n = v'$.

$$(u^b v'^a)^x = ((u^b v'^a)^{\tilde{x}})^{1/\tilde{x}} = \\ = ((u^x)^{b\tilde{x}} (v'^{\tilde{x}})^{ax})^{1/\tilde{x}} = (v^{b\tilde{x}} v'^{ax})^{1/\tilde{x}} = v^{1/\tilde{x}} = v'.$$

Необхідно відмітити, що додавання чи видалення декількох значень за один раз може бути проведено наступним чином.

Нехай π_a - добуток чисел, які необхідно додати і π_d - добуток чисел, які необхідно вилучити з акумулятору v . Тоді нове значення акумулятору буде

$$v' = v^{\pi_a \pi_d^{-1} \bmod (p-1)(q-1)} \bmod n.$$

Якщо свідцтво u не було вилучене з акумулятору, тобто x не є дільником π_d , тоді $u' u^{a\pi_a} v'^b \bmod n$ є свідцтвом того, що x знаходиться в v' , де a та b задовольняють рівність $ax + b\pi_d = 1$ та обчислені з використанням розширеного алгоритму Евкліда.

Ефективне доведення того, що значення було акумуляване.

Покажемо, що факт того, що значення акумуляване в побудованому таким чином акумуляторі, може бути ефективно доведений у відповідності до схеми прив'язки Педерсена (Pedersen commitment scheme). Припустимо, що параметрами схеми є група G_q та два генератори g_0 та h_0 . Для «прив'язки» до значення x необхідно обрати випадковим чином $r \in Z_q$ тоді отримуємо значення $Commit(x, r) = g_0^x h_0^r$. Це є інформаційно-теоретична схема приховування прив'язки до значення з використанням проблеми дискретного логарифму.

Для $X_{A,B}$ і для вибору q , повинна виконувалась нерівність $B2^{k'+k''+2} < A^2 - 1 < q/2$, де k' та k'' є параметрами безпеки. Тобто k' бітова довжина для протоколу РК (наведений нижче) та k'' визначає статистичну властивість нульового розголошення цього ж протоколу. Нехай $X'_{A,B}$ є найбільшою з можливих множин, тобто $[2, A^2 - 1]$.

Також необхідно, щоб два елементи g та h з QR_n були такими, щоб $\log_g h$ було невідомо стороні, що буде доводити факт того, що значення акумуляване, де n відкритий ключ акумулятора.

Для доведення того факту, що надана прив'язка c_e і наданий акумулятор v мають в собі одне і теж саме значення e виконується наступний протокол.

Загальні вхідні параметри протоколу є $c_e, g_0, h_0, n, g, h, v$ та e . Додаткові вхідні параметри для сторони, що буде доводити – значення u таке, що $u^e = v \bmod n$ і значення r таке, що $c_e = g_0^e h_0^r$.

Сторона, що доводить створює прив'язку C_u до u і доводить, що ця прив'язка відповідає e -тому кореню з v . Це відбувається наступним чином:

1. Сторона, що доводить, обирає $r_1, r_2, r_3 \in_R Z_{[n/4]}$, обчислює $C_e = g^e h^{r_1}$, $C_u = u h^{r_2}$, $C_r = g^{r_3} h^{r_1}$ і відправляє c_e, C_e, C_u, C_r перевіряючому.

2. Далі відбувається наступний протокол між стороною, що доводить та стороною, що перевіряє доведення:

$$PK\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \varphi, \psi, \eta, \sigma, \xi):$$

$$c_e = g_0^e h_0^r \wedge g_0 = \left(\frac{c_e}{g_0}\right)^r h_0^r \wedge g_0 = (g_0 c_e)^{\sigma} h_0^{\xi}$$

$$\wedge C_r = h^{\zeta} g^{\epsilon} \wedge C_e = h^{\alpha} g^{\eta} \wedge v = C_u^{\alpha} \left(\frac{1}{h}\right)^{\beta}$$

$$\wedge 1 = C_r^{\alpha} \left(\frac{1}{h}\right)^{\delta} \left(\frac{1}{g}\right)^{\rho} \wedge \alpha \in [-B2^{k'+k''+2}, B2^{k'+k''+2}])$$

Розширення АСJT за допомогою динамічного акумулятора.

Розширення протоколу АСJT, що має виконати груповий менеджер, для підтримки можливості видалення члена з групи за допомогою техніки динамічного акумулятору:

Ініціалізація: Додатково до процесу ініціалізації АСJT груповий менеджер створює відкритий модуль n для акумулятору, обираючи випадковим чином $u, g, h \in QR_n$ та публікує (n, u, g, h) . Він встановлює відкритий архів E_{add} для зберігання значень, які відповідають доданим до групи користувачам та E_{delete} для зберігання значень, які відповідають видаленим з групи користувачам. Встановлює $X'_{A,B} = \Gamma$ та $X_{A,B}$ в інтервал, з якого груповий менеджер обирає e в АСJT схемі (в такому випадку виконується наступне співвідношення

$$X_{A,B} \subseteq X'_{A,B} \subseteq [2, A^2 - 1]).$$

Присвоєння: Створюється членський сертифікат як і в АСJT схемі. Додається поточне значення u до членського сертифікату

(позначатимемо як u_i). Нехай e_i є простим числом, що використовується в цьому сертифікаті. Тоді u оновлюється в відкритому ключі $u = f_u(u, e_i)$. Та e_i додається в E_{add} .

Видалення члена з групи. Отримуємо e_i , що є простим числом, що відповідає членському сертифікату. Оновлюємо u в відкритому ключі $u = D(\varphi(n), u, e_i)$. Зберігаємо e_i в E_{delete} .

Необхідно відзначити, що архіви E_{add} та E_{delete} не є частинами групового ключа – перевіряючий не зобов'язаний читати їх в процесі перевірки. Також відмітимо, що немає необхідності в обмеженні доступу на читання цих архівів тільки до членів групи.

Користувач U_i повинний розширити ACJT протокол наступним чином:

Приєднання: Зберегти значення u_i разом з членським сертифікатом. Перевірити, що $f_u(u_i, e_i) = u_i^{e_i} = u$.

Оновлення членства в групі: Запис в архів називається новим, якщо він був доданий після того як U_i провів оновлення.

1. Нехай y означає старе значення u .

2. Для всіх нових $e_j \in E_{add}$,

$$u_i = f(u_i, \prod e_j) = u_i^{\prod e_j} \text{ та } y = y^{\prod e_j}$$

3. Для всіх нових $e_j \in E_{delete}$

$$u_i = W(u_i, e_j, \prod e_j, y, u).$$

Як результат отримаємо $u = f(u_i, e_i)$.

Доведення членства: Доведення членства проводиться доведенням того факту, що прив'язане значення є частиною акумульованого значення v (зберігається в поточному відкритому ключі). Член групи додатково до обчислення значень T_1, T_2, T_3 , що відповідають за доведення знання членського сертифікату, обчислює значення $C_e = g^e h^r$, $C_u = u h^{r_2}$, та $C_r = g^{r_1} h^{r_1}$, де $r_1, r_2, r_3 \in_R \mathbb{Z}_{[n/4]}$ обрані випадковим чином, що відповідають за доведення того факту, що значення прив'язки було збережено в акумуляторі. Після цього перевіряючий та член групи виконують відповідні протоколи.

Доведення властивостей безпеки отриманої схеми див. [8].

Розглянемо схему групового підпису запропоновану Каменішем та Гросом (Camenish,

Groth) [7] яка дозволяє виключати члена групи з групи і є ефективнішою за попередню схему. В основі її лежать підписи знання та схема підпису Каменіша – Лісянської.

Схема підпису Каменіша -Лісянської (Camenish, Lysyanskaya)

Генерація ключів. На входних 1^k , обирається RSA модуль $n=pq$, де p, q – два безпечних простих числа, тобто $p=2p'+1, q=2q'+1$. Обирається випадковим чином $g_1, \dots, g_L, h, a \in \mathbb{QR}_n$.

На виході отримуємо відкритий ключ $(n, g_1, \dots, g_L, h, a)$ і секретний ключ p . Нехай l_n – довжина n .

Простір повідомлень. Нехай l_m параметр. Тоді простір повідомлень має вигляд:

$$\{(m_1, \dots, m_L) : m_i \in \pm\{0,1\}^{l_m}\}.$$

Алгоритм підпису. На входних $m_1, \dots, m_L$, обираємо випадкове просте число e довжини $l_e > l_m + 2$ і випадкове просте число r довжини $l_r = l_n + l_m + l_s$, де l_s параметр безпеки. Знаходимо таке значення y , що задовольняє

$$y^e = a g_1^{m_1} \dots g_L^{m_L} h^r \pmod{n}.$$

Підпис $(m_1, \dots, m_L)$ – це кортеж (e, y, r) .

Алгоритм верифікації. Для перевірки того, що (e, y, r) є підписом над $(m_1, \dots, m_L)$, необхідно перевірити, що $y^e = a g_1^{m_1} \dots g_L^{m_L} h^r \pmod{n}$ та $2^{l_e} > e > 2^{l_e-1}$.

Позначимо цю схему підпису як CL. Вона буде використовуватися при генерації сертифікатів членів групи.

Схема Каменіша-Гросса представлена в трьох варіантах. В першому варіанті секретні ключі членів групи генеруються менеджером групи. В другому – вводиться можливість динамічного приєднання до групи та виключення члена з групи (виключений з групи член надалі не може підписувати повідомлення від імені групи). Третій варіант має можливість повного виключення члена з групи (можна відслідкувати всі попередні підписи виключеного члена).

Першою наведемо схему групового підпису, в якій генерація приватних ключів членів групи проводиться менеджером групи.

Основна схема групового підпису запропонована Каменішем та Гросом (Camenish, Groth).

Ініціалізація та приєднання ($KeyGen(k)$).
Обираємо RSA модуль довжини l_n -біт $n = pq$, де
 p, q – два безпечних простих числа, тобто
 $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$. Обираються випадковим
чином $a, g, h \in QR_n$.

Обираються випадковим чином Q, P
довжини l_Q -біт та l_P -біт відповідно так, щоб
 $Q|P-1$.

Нехай $F \in$ елементом порядку Q в Z_p^* .
Обираємо випадковим чином $X_G, X_H \in Z_Q$ і
обчислюємо $G = F^{X_G} \bmod P$, $H = F^{X_H} \bmod P$.

Обираються випадковим чином $x_1, \dots, x_k \in Z_Q$
і $r_1, \dots, r_k \in Z_n$.

Обираються різні випадкові числа довжини
 l_e -біт $e_1, \dots, e_k$ такі, що
 $E_i = 2^{l_E} + e_i, \dots, E_k = 2^{l_E} + e_k$ є простими числами.
Обчислюємо $y_1, \dots, y_k$ такі, що
 $y_i^{l_i} = ag^{x_i} h^{r_i} \bmod n, \dots, y_k^{l_k} = ag^{x_k} h^{r_k} \bmod n$.

Відкритий ключ: $vk = (n, a, g, h, Q, P, F, G, H)$.

Приватний ключ менеджера групи:

$$gmsk = (vk, X_G, Y_1 = G^{x_1} \bmod P, \dots, Y_k = G^{x_k} \bmod P).$$

Приватний ключ члена групи
 $sk_i = (vk, x_i, y_i, e_i, r_i)$.

Процедура створення підпису ($Sign(sk_i, m)$).
Обирається випадковим чином $r \in \{0, 1\}^{l_n-2}$ та
 $R \in Z_Q$. Обчислюється $u = h^r y_i \bmod n$,

$$U_1 = F^R \bmod P, \quad U_2 = G^{R+x_1} = G^R Y_1 \bmod P \quad \text{і} \\ U_3 = H^{R+e_1} \bmod P.$$

Без знання розкладу на множники n ,
 $h^r \bmod n$ для $r \in_R \{0, 1\}^{l_n-2}$ не відрізняється від
випадкового елементу з QR_n . Тому u не
розголошує ніякої інформації про y_i .

Обчислюється підпис знання:

$$SPK\{(\xi, \rho, \varepsilon, \tau): a = u^{2^{l_E+\xi}} g^{-\xi} h^{\rho} \bmod n \wedge \\ \wedge U_1 = F^{\rho} \bmod P \wedge U_2 = G^{\rho+\xi} \bmod P \wedge \\ \wedge U_3 = H^{\rho+\varepsilon} \bmod P \wedge \varepsilon \in \{-2^{l_E+l_e+l_s}, +2^{l_E+l_e+l_s}\} \wedge \\ \wedge \xi \in \{-2^{l_Q+l_e+l_s}, +2^{l_Q+l_e+l_s}\} \} (m),$$

тобто обирається $r_s \in \{0, 1\}^{l_Q+l_e+l_s}$,
 $r_r \in \{0, 1\}^{l_n-2+l_e+l_s}$, $r_e \in \{0, 1\}^{l_e+l_e+l_s}$ і $R_R \in Z_Q$ та
обчислюється:

$$v = u^{r_e} g^{-r_s} h^{r_r} \bmod n, \quad V_1 = F^{R_R} \bmod P, \\ V_2 = G^{R_R+r_s} \bmod P, \quad V_3 = H^{R_R+r_e} \bmod P.$$

Обчислюється:

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, m), \\ z_x = r_s + cx_1, \quad z_r = r_r + c(-r_s - rE_1), \quad z_e = r_e + ce_1, \\ Z_R = R_R + cR \bmod Q.$$

Тоді підпис це:

$$\delta = (c, u, U_1, U_2, U_3, z_x, z_r, z_e, Z_R).$$

Процедура перевірки підпису ($Verify(vk, m, \delta)$)

Перевіряється, що $z_e \in \{0, 1\}^{l_e+l_e+l_s}$ та
 $z_x \in \{0, 1\}^{l_Q+l_e+l_s}$. Обчислюється:

$$v = a^{z_e} g^{-z_x} h^{z_r} u^{c2^{l_E+l_s}} \bmod n, \quad V_1 = U_1^{-c} F^{Z_R} \bmod P, \\ V_2 = U_2^{-c} G^{Z_R+z_x} \bmod P, \quad V_3 = U_3^{-c} H^{Z_R+z_e} \bmod P$$

і перевіряється, що

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, m).$$

Процедура відкриття підпису
($Open(gmsk, m, \delta)$)

Перевірити чи вірний підпис.

Використовуючи X_G , розкодувати
 $(U_1^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P, U_2^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P)$ для отримання
 $G^{\frac{P-1}{Q} x_1} \bmod P$ та повернути i .

Параметри схеми наступні: довжина l_n така,
що обравши ціле число a та взявши r довжини
 $|a| + l_e$ бітів то $a + r$ та r статистично не
розрізняються. l_e – бітова довжина результату
хеш-функції, а число l_e – достатньо велике, щоб
можна було присвоїти різним членам групи різні
числа так, щоб E_i були простими числами.
Мають виконуватися співвідношення:

$$l_e + l_e + l_s + l < l_Q \quad \text{та} \quad l_Q + l_e + l_s + l < l_E < l_n / 2.$$

При обраних параметрах $l_n = 2049$,
 $l_P = 1600$, $l_E = 404$, $l_Q = 282$, $l_e = 160$,
 $l_s = l_x = 60$. Такий вибір означає, що розклад
числа довжини l_n -біт на множники
еквівалентний обчисленню дискретного
логарифму в підгрупі з розміром модуля
довжини 2^{l_Q} та простим числом довжини l_P -біт.

Розширення схеми, що забезпечує динамічність складу групи, а саме приєднання і виключення членів з групи реалізується наступним чином. Член групи сам генерує $Y_i = G^{x_i} \bmod P$, отже тільки він знає дискретний логарифм x_i . Разом груповий менеджер і член групи генерують $ag^{r_i} h^{r_i'} \bmod n$, де r_i є достатньо великим, щоб статистично приховати x_i . Член групи передає це груповому менеджеру, який генерує відповідні (y_i, e_i) і передає члену групи. В цьому випадку використовується схема підпису CL, яка не дає можливості підробити такий підпис.

Для відкликання члена з групи використовується корінь з деякого елемента w . Підпис має в собі один з аргументів знання – пару (w_i, E_i) , такі, що $w = w_i^{E_i} \bmod n$. Якщо ми хочемо відкликати члена з групи ми оновлюємо відкритий ключ $w \leftarrow w_i$.

При цьому член групи може і далі намагатися підписувати повідомлення від імені групи використовуючи старий параметр верифікації, проте цю проблему можна легко вирішити використовуючи мітки часу під час підпису повідомлень.

При зміні відкритого ключа необхідна взаємодія з усіма членами групи, які залишилися в групі. Менеджер групи відкриває e_i , який відповідає відізаному члену групи. Члени групи, які залишилися мають використати його для отримання кореня з нового w використовуючи прості обчислення. Тому, зміни в відкритому ключі – константної довжини. Розглянемо цю схему.

Схема групового підпису Каменіша та Гросса з можливістю динамічного приєднання і виключення членів в групі

Установка(ініціалізація) (KeyGen())

Виконати KeyGen(0) базової схеми. Вибрати також випадковим чином $w \in QR_n$ і включити його в vk . Довести, що $g \in \langle h \rangle$ використовуючи $RK\{(\alpha): g = h^\alpha\}$ за допомогою бінарних обмінів. Тоді $gmsk = (vk, p, q, X_Q)$, де $n = pq$.

Приєднання до групи (Join): Член групи обирає випадковим чином $x_i \leftarrow Z_Q$ і обчислює $Y_i = G^{x_i} \bmod P$. Він також формує прив'язку до $x_i, g^{x_i} h^{r_i'} \bmod n$ з $r_i' \in Z_n$ і доводить знання відповідних x_i, r_i' груповому менеджеру. Надсилає $Y_i, g^{x_i} h^{r_i'} \bmod n$ до групового менеджера.

Менеджер групи обирає $e_i \in \{0,1\}^L$ такий, що $E_i = 2^{LE} + e_i$ є простим числом. Він обчислює $w_i = w^{E_i^{-1}} \bmod n$. Обирає випадковим чином $r_i'' \in Z_n$ і $y_i = (ag^{x_i} h^{r_i'+r_i''})^{E_i^{-1}} \bmod n$. Він надсилає w_i, y_i, E_i, r_i'' новому члену групи.

Секретний ключ члена групи є

$$sk_i = (vk, w_i, x_i, r_i = r_i' + r_i'', y_i, e_i).$$

Процедура створення підпису (Sign(vk, sk_i, m))

Обирається випадковим чином $r \in \{0,1\}^{ln-2}$ та $R \in Z_Q$. Обчислюється $u = h^r y_i w_i \bmod n$, $U_1 = F^R \bmod P$, $U_2 = G^{R+x_i} = G^R Y_i \bmod P$ і $U_3 = H^{R+e_i} \bmod P$.

Обчислюється підпис знання:

$$SPK\{(\xi, \rho, \varepsilon, \tau): aw = u^{2^{LE} + \varepsilon} g^{-\xi} h^\rho \bmod n \wedge$$

$$\wedge U_1 = F^\tau \bmod P \wedge U_2 = G^{r+\xi} \bmod P \wedge$$

$$\wedge U_3 = H^{r+\varepsilon} \bmod P \wedge \varepsilon \in \{-2^{LE+LE+1}, +2^{LE+LE+1}\} \wedge$$

$$\wedge \xi \in \{-2^{LE+LE+1}, +2^{LE+LE+1}\} \} (m),$$

тобто обирається $r_s \in \{0,1\}^{lQ+LE+1}$, $r_r \in \{0,1\}^{ln-2+LE+1}$, $r_e \in \{0,1\}^{LE+LE+1}$ і $R_R \in Z_Q$ та обчислюється

$$v = u^{r_e} g^{-r_r} h^{r_s} \bmod n, \quad V_1 = F^{R_R} \bmod P,$$

$$V_2 = G^{R_R+r_r} \bmod P, \quad V_3 = H^{R_R+r_e} \bmod P.$$

Обчислюється

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, m) \quad \text{та}$$

$$z_x = r_x + cx, \quad z_r = r_r + c(-r_i - r_i E_i), \quad z_e = r_e + ce_i \quad \text{і}$$

$$Z_R = R_R + cR \bmod Q.$$

Підпис:

$$\delta = (c, u, U_1, U_2, U_3, z_x, z_r, z_e, Z_R).$$

Процедура перевірки підпису (Verify(vk, m, \delta))

Перевіряється, що $z_e \in \{0,1\}^{LE+LE+1}$ та $z_x \in \{0,1\}^{lQ+LE+1}$. Обчислюється

$$v = (aw)^{-c} g^{-z_r} h^{z_x} u^{2^{LE} + z_e} \bmod n,$$

$$V_1 = U_1^{-c} F^{Z_R} \bmod P, \quad V_2 = U_2^{-c} G^{Z_R+z_r} \bmod P,$$

$$V_3 = U_3^{-c} H^{Z_R+z_e} \bmod P \quad \text{і перевіряється, що}$$

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, m).$$

Процедура відкриття підпису (Open(gmsk, m, \delta))

Перевірити, чи вірний підпис.
Використовуючи X_G , розкодувати
 $(U_1^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P, U_2^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P)$ для отримання
 $G^{\frac{P-1}{Q} x_i} \bmod P$ та повернути i .

Процедура виключення члена з групи
(Revoke(gmsk, i))

Опублікувати E_i . Замінити в vk елемент w на
 w_i . Будь-який інший член групи може оновити
свій секретний ключ наступним чином. Обрати
 α, β таким чином, щоб $\alpha E_i + \beta E_j = 1$. Тоді
новий $w_j = w_i^{\beta E_i} w_j^{\alpha E_j} \bmod n$.

Таким чином виключений член групи не
зможє більше створювати повідомлення від імені
групи. Проте, що робити, якщо виключений член
групи виявився зловмисником і потрібно
відмовитися від усіх його підписів?

Головна ідея схеми повного виключення
члена з групи полягає у використанні таємного
значення $s_i \in Z_Q$. Менеджер групи створює
 $F^R \bmod P$ та $F^{R x_i} \bmod P$ і включає їх в груповий
підпис. Згідно з припущенням Діффі-Хелмана
вони будуть виглядати як два випадкових числа.
Але якщо менеджер групи відкриє s_i , то будь-хто
зможе перевірити належність підписів цьому
члену групи. Необхідно примусити члена групи
використовувати s_i . Для цього обираємо
випадковий елемент $f \in QR_n$ і надаємо члену
групи підпис у формі (y_i, E_i, r_i) , де
 $y_i = (af^{s_i} g^{x_i} h^{r_i + r_i'})^{E_i^{-1}} \bmod n$. Член групи
створюватиме $U_4 = U_1^{s_i} \bmod P$ та $V_4 = U_1^{r_i} \bmod P$
при створенні підпису та доводитиме вірність із
аргументом s_i , який він знає.

Схема групового підпису Каменіша та
Гроса з можливістю повного виключення
члена з групи

Установка(ініціалізація) (KeyGen())

Виконати процедуру KeyGen(0) базової
схеми, та додати ще два елементи обрані
випадковим чином $f, w \in QR_n$ і включити їх в vk .

Прислання до групи (Join): Аналогічно до
попередньої схеми, тільки тепер член групи
обирає випадковий елемент $s_i \in Z_Q$ та знаходить
 $y_i = (af^{s_i} g^{x_i} h^{r_i + r_i'})^{E_i^{-1}} \bmod n$. Груповий менеджер
запам'ятовує s_i .

Процедура створення підпису (Sign(vk, sk, m))

Обирається випадковим чином $r \in \{0, 1\}^{l_n/2}$
та $R \in Z_Q$. Обчислюються $u = h^r y_i w_i \bmod n$,

$$U_1 = F^R \bmod P, \quad U_2 = G^{R x_i} = G^R Y_i \bmod P, \\ U_3 = H^{R x_i} \bmod P \text{ та } U_4 = U_1^{s_i} \bmod P.$$

Обчислюється підпис знання:

$$SPK\{(\psi, \xi, \rho, \varepsilon, \tau): aw = u^{2^{l_E + \varepsilon}} f^{-\psi} g^{-\xi} h^{\rho} \bmod n \wedge \\ \wedge U_1 = F^{\tau} \bmod P \wedge U_2 = G^{\tau + \xi} \bmod P \wedge \\ \wedge U_3 = H^{\tau + \varepsilon} \bmod P \wedge U_4 = U_1^{\psi} \bmod P \wedge \\ \wedge \varepsilon \in \{-2^{l_E + l_C + l_S}, +2^{l_E + l_C + l_S}\} \wedge \\ \wedge \psi, \xi \in \{-2^{l_Q + l_C + l_S}, +2^{l_Q + l_C + l_S}\}\}(m),$$

тобто обирається $r_s \in \{0, 1\}^{l_Q + l_C + l_S}$,
 $r_x \in \{0, 1\}^{l_Q + l_C + l_S}$, $r_r \in \{0, 1\}^{l_n/2 + l_C + l_S}$, $r_e \in \{0, 1\}^{l_E + l_C + l_S}$
і $R_R \in Z_Q$

$$\text{Обчислюється } v = u^{r_e} f^{-r_s} g^{-r_x} h^{r_r} \bmod n,$$

$$V_1 = F^{R_R} \bmod P, \quad V_2 = G^{R_R + r_x} \bmod P, \\ V_3 = H^{R_R + r_e} \bmod P, \quad V_4 = U_1^{r_s} \bmod P.$$

Обчислюється

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, U_4, V_1, V_2, V_3, V_4, m) \text{ та} \\ z_s = r_s + cs_i, \quad z_x = r_x + cx_i, \quad z_r = r_r + c(-r_i - rE_i), \\ z_e = r_e + ce_i \text{ і } Z_R = R_R + cR \bmod Q.$$

Підпис:

$$\delta = (c, u, U_1, U_2, U_3, U_4, z_s, z_x, z_r, z_e, Z_R).$$

Процедура перевірки підпису (Verify(vk, m, δ))

Перевіряється, що $z_e \in \{0, 1\}^{l_E + l_C + l_S}$ та
 $z_s, z_x \in \{0, 1\}^{l_Q + l_C + l_S}$. Обчислюється

$$v = (aw)^{-c} f^{-z_s} g^{-z_x} h^{z_r} u^{c2^{l_E + z_e}} \bmod n, \\ V_1 = U_1^{-c} F^{Z_R} \bmod P, \quad V_2 = U_2^{-c} G^{Z_R + z_x} \bmod P, \\ V_3 = U_3^{-c} H^{Z_R + z_e} \bmod P, \quad V_4 = U_4^{-c} U_1^{z_s} \bmod P \text{ і} \\ \text{перевіряється, що}$$

$$c = \text{hash}(vk, u, v, U_1, U_2, U_3, U_4, V_1, V_2, V_3, V_4, m).$$

Процедура відкриття підпису
(Open(gmsk, m, δ))

Перевірити, чи вірний підпис.
Використовуючи X_G , розкодувати
 $(U_1^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P, U_2^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P)$ для отримання
 $G^{\frac{P-1}{Q} x_i} \bmod P$ та повернути i .

Процедура виключення члена з групи
(Revoke(gmsk, i))

Опублікувати E_i . Замінити в vk елемент w на
 w_i . Будь-який інший член групи може оновити

свій секретний ключ наступним чином. Обрати α, β таким чином, щоб $\alpha E_1 + \beta E_2 = 1$. Тоді новий $w_j = w_i^{\beta E_1} w_j^{\alpha E_2} \bmod n$.

Процедура повного виключення члена з групи (FullRevoke(gmsk,i))

Знайти s_i і опублікувати його в списку відкликаних сертифікатів. Виконати Revoke(gmsk,i) . Оскільки s_i – відкрите, будь-хто може перевірити старі підписи на предмет $U_4^{\frac{P-1}{Q}} = U_1^{\frac{P-1}{Q}} \bmod P$ і тим самим перевірити чи був підпис отриманий повністю відкликаним членом групи.

Ефективність схеми групового підпису Каменіша - Гросса

У [7] наводиться порівняння ефективності схеми групового підпису Каменіша-Гросса та схеми ACJT і розширення схеми Каменіша і Лисянської [8]. Розглянемо це порівняння детальніше.

В схемі Каменіша-Гросса для обчислення групового підпису необхідно обчислити шість піднесень до степеня по модулю P з експонентами з Z_Q , одне піднесення до степеня по модулю n з довжиною експоненти $l_n/2$ і одне багатоосновне піднесення до степеня з довжиною експоненти $l_n/2 + l_c + l_s$ і довжиною двох останніх експонент $l_Q + l_c + l_s$. В якісній реалізації, обчислення багатоосновного піднесення до степеня займає на 10 відсотків більше часу, ніж звичайне піднесення до степеня з експонентою довжини $l_n/2 + l_c + l_s$.

Перевірка підпису вимагає обчислення трьох двоосновних піднесень до степеня по модулю P і одного багатоосновного піднесення до степеня по модулю n . Оскільки одна з двоосновних експонент по модулю P досить маленька (l_c – біт), обчислення цих трьох піднесень до степеня займає стільки ж часу скільки і обчислення трьох звичайних піднесень до степеня по модулю P . Знову ж обчислення багатоосновного піднесення до степеня займає на 10 % більше часу, ніж звичайне піднесення до степеня.

Розглянемо ACJT. Для того, щоб ця система була настільки ж надійною, як і вищенаведена, її модуль має бути довжиною 3200 біт. Причина полягає в тому, що груповий менеджер отримує $a^x a_0 \bmod n$, де x_i – секретний ключ члена групи. Оскільки груповий менеджер знає розклад n на множники – він може спробувати обчислити x_i .

Обчислення підпису в схемі ACJT – це чотири піднесення до степеня по модулю n з експонентою порядку n^2 і три піднесення до степеня з експонентою порядку n^3 . Враховуючи, що піднесення до степеня проводяться з модулем однієї і тієї ж довжини в обох схемах, то схема Каменіша-Гросса працює в 20 разів ефективніше.

Розширення Каменіша і Лисянської вимагають чотирьох багатоосновних піднесень до степеня з основою і експонентами довжини 2048 біт, то запропонована схема в 26 раз ефективніше.

Отже, як ми бачимо, Каменішу та Гросу, завдяки використанню в основі своєї схеми групового підпису схеми підпису Каменіша – Лисянської вдалося значно покращити ефективність та додати можливість виключення члена з групи.

Методи виключення членів з групи

Розглянуті схеми групового підпису являють собою практичні варіанти вирішення проблеми видалення членів з групи. Оскільки необхідно зберігати анонімність членів групи, то для надання такої можливості вводиться додаткова складова – певна прив'язка членів групи до деякого значення (назвемо це значення прив'язкою відречення), яке в разі необхідності може бути розкритим, тим самим виключаючи можливість продовжувати робити підписи від імені групи.

Розширення Каменіша-Лисянської пропонує використовувати динамічний акумулятор – певне значення, що зберігатиме у собі прив'язки відречення тих членів групи, що ще залишаються в групі.

Доведення членства проводиться доведенням того факту, що прив'язане значення є частиною акумульованого значення v (що зберігається в поточному відкритому ключі). Для того, щоб підтримувати відкритий ключ в актуальному стані, використовуються два відкритих архіви E_{add} (для зберігання значень, які відповідають доданим до групи користувачам) та E_{delete} (для зберігання значень, які відповідають видаленим з групи користувачам). Запропонована реалізація динамічного акумулятора досить проста – значення, яке необхідно акумулювати є певним степенем, до якого треба піднести динамічний акумулятор для збереження цього значення в ньому.

Проте, існує необхідність оновлення відкритого ключа кожного разу як користувач додається до групи чи видаляється з неї. Та

кожен член групи має час-від часу переглядати відкритий ключ (до того моменту, як буде доводити свою приналежність до групи). Якщо відкритий ключ був змінений, члени групи мають виконати певні додаткові обчислення. Ці обчислення, а також данні, які необхідні для оновлення лінійно залежать від кількості членів, що були додані/видалені з групи. І додатковим навантаженням на сторону, що перевірятиме підпис є те, що вона повинна мати доступ до відкритого ключа групи.

В схемі Каменіша-Гроса для відкликання члена з групи використовується корінь з деякого елементу w . Ідея, як бачимо, подібна до реалізації динамічного акумулятору, з різницею в тому, що динамічний акумулятор був окремим додатковим елементом до схеми. І для доведення того факту, що певне значення було акумуляоване в ньому використовувалася додаткова схема прив'язки Петерсена. В схемі Каменіша-Гроса w напряду додається до схеми цифрового підпису CL Каменіша-Лисянської, яка лежить в основі схеми групового підпису.

На відміну від схеми з динамічним акумулятором не потрібно змінювати відкритий ключ при приєднанні нового члена до групи, оскільки в цій схемі підпису прив'язкою відречення виступає пара (w_i, E_i) , такі, що $w = w_i^{E_i} \bmod n$. Вони обчислюються менеджером групи при приєднанні нового члена групи з поточного значення w . Тоді, при виключенні члена з групи ми оновлюємо відкритий ключ $w \leftarrow w_i$. Після чого член групи, якого виключили з групи таким чином, не може довести знання кореня з w , а отже і не може більше підписувати повідомлення використовуючи новий w .

Як і з динамічним акумулятором - при зміні відкритого ключа необхідна взаємодія з усіма членами групи, які залишилися в групі. Менеджер групи відкриває e_i , який відповідає відізаному члену групи. Члени групи, які залишилися в групі, мають використати його для отримання кореня з нового w використовуючи прості обчислення. Тому зміни в відкритому ключі константної довжини і старі члени групи можуть оновити свої секретні ключі отримавши тільки константну величину (в данному випадку e_i) відкритої інформації.

Зауважимо, що при цьому член групи може і далі намагатися підписувати повідомлення від імені групи використовуючи старий параметр верифікації. Одним із запропонованих вирішень

такої проблеми є мітки часу під час підпису повідомлень.

В схемі Каменіша-Гроса запропонована можливість повного виключення члена з групи (у випадку, коли член групи виявився зловмисником, необхідно мати можливість відмовитися від усіх його підписів). Головна ідея схеми повного виключення члена з групи полягає у використанні таємного значення $s_i \in \mathbb{Z}_Q$. Менеджер групи створює $F^R \bmod P$ та $F^{R_s} \bmod P$ і включає їх в груповий підпис. Згідно з припущенням Діффі-Хелмана вони будуть виглядати як два випадкових числа. Але якщо менеджер групи відкриє s_i , то будь-хто зможе перевірити належність підписів цьому члену групи. Для того, щоб примусити члена групи використовувати s_i - змінюється вигляд підпису CL. Вводиться ще один параметр основи - випадковий елемент $f \in \mathbb{QR}_n$ і члену групи надається підпис у формі (y_i, E_i, r_i) , де $y_i = (af^{r_i} g^{s_i} h^{r_i + r_i})^{E_i} \bmod n$. Член групи створюватиме $U_i = U_i^{r_i} \bmod P$ та $V_i = U_i^{s_i} \bmod P$ при створенні підпису та доводитиме вірність із аргументом s_i , який він знає.

Висновки

Стаття присвячена проблемі ефективного видалення члена групи із групи. Ця проблема пов'язана з загальновідомою проблемою анулювання ключів в звичайній схемі цифрового підпису з відкритими ключами. А в випадку схем групового підпису ця проблема стає набагато складнішою.

Найбільш простим і на перший погляд ефективним способом для видалення членів групи є Списки Анульованих Сертифікатів (Certificate Revocation Lists (CRLs)). Менеджер групи періодично випускає новий CRL, в якому кожний елемент означає члена групи, членський сертифікат якого було анульовано. Існує досить багато можливостей для генерування і розповсюдження таких CRL. Нажаль, підхід за допомогою CRL не може ефективно використовуватися в групових підписах з наступних причин:

1. Оскільки групові підписи анонімні і незв'язні, як може менеджер групи ідентифікувати видалених членів групи?

2. Якщо менеджер групи відкриє певні (в нашому випадку секретні) данні, що відповідають видаленим членам групи, чи залишаться анонімними і незв'язними всі попередні підписи цього члена групи?

Останній пункт – найбільш важливий при видаленні членів з групи.

Якщо член групи пішов з групи добровільно, чи був виключений через якісь адміністративні причини (як кар'єрний зріст), тоді немає необхідності жертвувати безпекою попередніх підписів.

Наприклад, працівники деякої фірми є членами групи. Одного із працівників викрито у шахрайстві. В цьому випадку при видаленні його з групи необхідно відкрити його секретні дані, щоб прослідкувати всі підписи зроблені саме цим членом від імені групи.

Іншим очевидним рішенням видалення члена групи є регенерація відкритого групового ключа. Після регенерації груповий менеджер може просто провести процедуру присвоєння членів до групи тільки з тими членами групи, які повинні залишитися в групі. Це прийнятний варіант для маленьких груп. Проте для великих груп цей варіант не є працездатним (через часті зміни складу групи і велику кількість членів групи буде витрачатися багато часу на перевипуск нових членських сертифікатів). Хоча випуск нового сертифікату може проходити без участі члена групи – тільки менеджером групи, проте деякі схеми потребують взаємодії між членом групи та менеджером, особливо на початку.

В даній статті було проведено огляд схем побудови групових цифрових підписів з можливістю виключення члена з групи. Розглянуті схеми групового підпису являють собою практичні варіанти вирішення проблеми видалення членів з групи. Оскільки необхідно зберігати анонімність членів групи, то для надання такої можливості вводиться додаткова складова – певна прив'язка членів групи до деякого значення (так звана прив'язка відречення), яка в разі необхідності може бути відкрита, тим самим не даючи можливості продовжувати робити підписи від імені групи. Показано, що у разі необхідності виключення члена з групи не можливо обійтися без оновлення відкритого групового ключа, проте є можливість мінімізувати зміни в відкритому груповому ключі та приватних ключах групових членів.

Список використаних джерел

1. Анісімов А.В. Алгоритмічна теорія великих чисел. Модулярна арифметика великих чисел. –

Київ: Видавн.дім "Академперіодика", 2001. – 154 с.

2. Анісімов А.В. Коалиционные схемы с ключами общего доступа // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 1. – С. 3 – 18.

3. Анісімов А. Динамічні коаліційні об'єднання – нова парадигма в технології захисту інформації // Безпека інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах. VI Міжнародна науково-практична конференція. – Київ, 2003. – С.34.

4. Ateniese G., Camenisch J., Joye M., and Tsudik G. A practical and provably secure coalition-resistant group signature scheme. In: *Crypto'2000*, LNCS 1880, pp. 255-270. Springer-Verlag, 2000.

5. Ateniese G. and Tsudik G. Some open issues and new directions in group signature schemes. In: *Financial Cryptography (FC'99)*, LNCS 1648, pp. 196-211. Springer-Verlag, 1999.

6. Boneh D., Boyen X., and Shacham H. Short group signatures using strong diffie-hellman. In *CRYPTO 2004*, LNCS. Springer Verlag, 2004.

7. Camenisch J. and Groth J. Group signatures: Better efficiency and new theoretical aspects. In *Security in Communication Networks (SCN2004)* (2004), vol. 3352 of *Lecture Notes in Computer Science* Springer, pp. 120–133.]

8. Camenisch J. and Lysyanskaya A. Dynamic accumulators and application to efficient revocation of anonymous credentials. In *Advances in Cryptology – CRYPTO 2002*, vol. 2442 of LNCS, pp. 61-77, Springer-Verlag, 2002.

9. Camenisch J. and Lysyanskaya A. Signature schemes and anonymous credentials from bilinear maps. In *CRYPTO 2004*, LNCS. Springer Verlag, 2004.

10. Camenisch J. and Stadler M. Efficient group signatures schemes for large groups. In B. Kaliski, editor, *CRYPTO'97*, volume 1294 of LNCS, pages 410-424. Springer-Verlag, 1997.

11. Chen L. and Pedersen T. P. New group signature schemes. In A. DeSantis, editor, *EURO-CRYPT'94*, volume 950 of LNCS, pages 171-181. Springer-Verlag, 1995.

12. Diffie W. and Hellman M. E. New directions in cryptography // *IEEE Trans. Information Theory*. – 1976. – IT-22 (6). – P.644 – 654.

13. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // *Communications of the ACM*. – 1978. – № 21. – P. 120 – 126.

Надійшла до редколегії 31.03.2011

УДК: 004.658.2

Компан С.В.*

**Формалізація поняття об'єкта, класу,
успадкування класів, життєвий цикл
об'єкта в об'єктно-орієнтованих базах
даних**

В статті розглядається одна з основних властивостей об'єктно-орієнтованих баз даних – успадкування схем. Проведена формалізація поняття об'єкту, класу, похідних класів, методів та життєвого циклу об'єкта.

Ключові слова: об'єктно-орієнтована база даних, схема, життєвий цикл об'єкта, успадкування класів, множинне успадкування класів, СУБД

*E-mail: robin_2005@mail.ru

Статтю представив: д.ф.м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Надійність автоматизованих систем багато в чому визначається надійністю баз даних, які лежать в основі їх функціонування. Однією із сучасних тенденцій розвитку промислових баз даних є використання систем управління базами даних (СУБД), в яких інформація зберігається у вигляді об'єктів (складних структур) і для обробки інформації застосовується об'єктно-орієнтований підхід.

Аналіз літератури дозволяє зробити висновок, що для представлення об'єктів складної структури перевірені часом реляційні СУБД стають неефективними. Для подолання такої проблеми шляхом зміни основної парадигми з реляційної (табличної) на об'єктно-реляційну потрібно або трудомістке "ручне" відображення об'єктів у таблиці, або проміжний прошарок програмного забезпечення (middleware) з неминучими втратами в продуктивності і ускладненням семантики. Деякі чисто об'єктно-орієнтовані СУБД пропонують вирішення такої проблеми шляхом забезпечення безпосереднього зберігання об'єктів у БД, проте вони не набули широкого визнання, оскільки не відповідають вимогам до рівня продуктивності і надійності, що висуваються критичними промисловими додатками. Таким чином, одним із можливих перспективних шляхів подолання

Kompan S.V.*

**The concepts of object, class,
inheritance classes, object life cycle in
object-oriented databases: formalization**

The inheritance of schemes as one of the main characteristics of object-oriented Data Bases is analyzed in the paper. The formalization of object, class, derived classes, methods and life cycle of the object is also conducted by the author.

Keywords: object-oriented database, schema, life cycle object, inheritance of classes, multiple inheritance classes, DBMS.

такої проблеми є використання постреляційної парадигми, що поєднує переваги реляційної та об'єктної парадигм. Постреляційна парадигма реалізована в декількох комерційних СУБД, типовим представником яких є СУБД Cache, розроблена фірмою InterSystems. Ця СУБД має єдину архітектуру даних, що забезпечує об'єктний і SQL-доступ до даних, зберігання яких ефективно здійснюється орієнтованим на транзакції багатовимірним ядром СУБД [1].

Зробимо одне очевидне зауваження загального порядку. Неможливо ставити серйозно питання про надійність функціонування складної системи без побудови її моделі, описаної за допомогою математичної формальної семантики. Тому метою статті є математичний опис ряду ключових понять постреляційної парадигми: об'єкта, як основного елемента зберігання інформації в СУБД, життєвого циклу об'єкта, класу, успадкування атрибутів і методів класу.

Існують різні реалізації сучасної мови табличних баз даних (БД) SQL. Розробники БД, зазвичай, враховують одну із реалізацій, яка є актуальною на даний момент. Тому постала необхідність побудувати формальну модель табличних (реляційних) структур, яка дасть можливість підтримувати різні стандарти. На

даному етапі не існує адекватних формальних моделей об'єктно-орієнтованих БД, ідеологія роботи яких будується на об'єктно-орієнтованому підході до програмування. Розроблено багато об'єктно-орієнтованих БД (ООБД), в яких не має єдиного підходу до розробки та супроводження саме таких БД. За аналогією з мовою SQL кожен розробник встановлює свої підходи до розробки ООБД. Спільним для різних ООБД є використання об'єктно-орієнтованих мов програмування, основними властивостями яких є інкапсуляція, поліморфізм, успадкування. Отже, описавши математично поняття схеми, об'єкту, стану і поведінки об'єкта, можна створити загальний підхід до побудови ООБД та її роботи в цілому. Для табличних (реляційних) баз даних така формалізація була виконана за допомогою теорії табличних алгебр [2], які суттєво узагальнюють добре відомі реляційні алгебри Кодда. Метою цієї статті є математичний опис основних елементів ООБД.

Існують різні форми представлення інформації. Один із підходів полягає в тому, що будь-яку сутність реального світу можна описати у вигляді об'єкту, який містить в собі набір властивостей (атрибутів), що ідентифікують цю сутність. Кожний об'єкт характеризується [3]:

- станом, який визначається переліком всіх властивостей об'єкта та поточними значеннями кожної з цих властивостей;
- поведінкою, яка описує реакції об'єкта на дії ззовні.

В ООБД використовується поняття класу, в якому описуються властивості об'єкта та методи, які впливають на поведінку об'єкта. Опис такого класу, насправді, формально містить в собі схему

$$O = \{ \langle A_1, d_1 \rangle, \langle A_2, d_2 \rangle, \dots, \langle A_n, d_n \rangle \} = f, \quad (1)$$

де $f: R \rightarrow D$, та $\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in D$. Вираз (1) описує рядок таблиці, яка містить значення відповідних атрибутів об'єкта:

A_1	A_2	$\dots$	A_n
d_1	d_2	$\dots$	d_n

(2)

У загальному випадку об'єктів, які мають однакову схему R , може існувати декілька, а тому таблиця (2) набуде вигляду:

БД. Схема – це семантична одиниця, яка описує властивості об'єктів. Ініціалізований об'єкт – це екземпляр схеми. Схема є шаблон, на основі якого створюються об'єкти [4, с. 30].

В ООБД інформація подається у вигляді об'єктів. Формалізуємо це поняття. Для цього зафіксуємо наступні три множини: A , елементи якої назвемо атрибутами, D – універсальний домен (множина всіх можливих значень атрибутів) та $M = \{g_1, g_2, \dots\}$ – множина функцій (методів). Множини A та D грають ролі множин імен та денотатів відповідно [2, с. 31]. За аналогією зі схемою таблиці схемою R об'єкта будемо називати скінченну множину атрибутів: $R \subseteq A$, $R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, де $A_1, \dots, A_n$ – атрибути схеми [1, с. 31]. В подальшому нам прийдеться розширювати поняття схеми БД до класу, включивши в нього методи. Об'єкти будемо позначати через $O, O_1, O_2, \dots$.

Зауважимо, що розрізняють різні види атрибутів: прості (simple) та складові (composite) атрибути (attributes), однозначні (single-valued) та багатозначні (multivalued) атрибути, базові (stored) та похідні (derived) атрибути, ключі (keys). Простий атрибут – атрибут, який складається з одного компонента з незалежним існуванням. Складовий атрибут – атрибут, який складається з декількох компонентів, кожен з яких характеризується незалежним існуванням [5]. Будемо розглядати прості атрибути.

При створенні об'єкта ми повинні надати значення його атрибутам (ініціалізувати). У загальному вигляді надання значення об'єкту можна представити таким записом:

O_1	A_1	A_2	$\dots$	A_n
	d_1^1	d_2^1		d_n^1
O_m	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	d_1^m	d_2^m	$\dots$	d_n^m

(3)

Таблицю (3) можна записати у вигляді:

$$\{f_1, \dots, f_m \mid f_i: R \rightarrow D, i = \overline{1, m}\}, \quad (4)$$

де f_i – функція, аргументами якої виступають атрибути схеми R , а значеннями є елементи універсального домену D . Дана функція визначає стан об'єкту в певний момент часу.

Вираз (4) можна записати в такому вигляді:

$$\{ \langle A_1, d_1 \rangle, \dots, \langle A_m, d_m \rangle \mid i = \overline{1, m} \}.$$

В об'єктно-орієнтованих мовах програмування клас може визначати тип даних, який має схему та методи (сигнатури)¹. У ньому описуються методи (члени-функції), які дають можливість отримати доступ до відповідних членів-даних класу з зовні класу або змінити за деяким правилом ці члени даних. При успадкуванні класів ми можемо перевизначати методи у випадку, коли успадкований метод у похідному класі повинен працювати по-іншому. Такий підхід реалізований і в ООБД. Виникає потреба розширення поняття схеми R . У ООБД схема є складовою більш широкого поняття, яке прийнято називати класом. Клас інкапсулює в собі схему R та методи. Тому класом в ООБД будемо називати пару $K = \langle R, G \rangle$, де R – схема, а G – множина методів класу. Серед методів є два особливих (спеціальних) методи – конструктори та деструктори. Конструктор служить для ініціалізації об'єкта, а деструктор для деініціалізації. Конструктор це функція, яка надає початкові значення деяким атрибутам об'єкта, тобто можуть ініціалізуватися не всі атрибути. Також в класі можуть міститися методи читання (Accessors) – так звані get-методи, які повертають значення атрибута об'єкта. Саме через такі методи зовнішні об'єкти отримують доступ до інкапсульованих даних. В класі можуть міститися методи зміни (Mutators) або set-методи, які встановлюють нове значення атрибута. Через такі методи можна змінювати інкапсульовані дані [4, с. 32]. Крім того, ініціалізований об'єкт починає свій життєвий цикл.

При ініціалізації об'єкта значення деяких його атрибутів можуть бути невизначеними. У деякий момент часу об'єкт може мати стан, при якому атрибути об'єкта не будуть мати значення (не будуть ініціалізовані), тому можна вважати, що в цей момент атрибути будуть мати спеціальне так зване невизначене значення Λ . Додамо до універсального домену D невизначене значення Λ . Вираз (4) набуде вигляду: $\{ f_1, \dots, f_m \mid f_i : R \rightarrow \overline{D}, i = \overline{1, m} \}$, (5) де $\overline{D} = D \cup \{ \Lambda \}$.

У випадку, коли всі атрибути ініціалізованого об'єкта O схеми R невизначені, виконуються рівності: $f(A_i) = \Lambda, i = \overline{1, n}$. Конструктор можна формально представити функцією $g : D^k \rightarrow OM$, де OM – множина ініціалізованих об'єктів. Точніше, цю функцію можна записати рівністю $g(d_1, \dots, d_k) = O$, де $d_1, \dots, d_k$ – це значення атрибутів, які будуть ініціалізовуватися. Враховуючи (1) і (5), отримуємо:

$$g_{\langle A_1, \dots, A_k \rangle}(d_1, \dots, d_k) = \{ \langle A_1, d_1 \rangle, \dots, \langle A_k, d_k \rangle \}.$$

Таким чином, функції вигляду g будують функції обмеження вигляду f . Тобто $f(A_i) = d_i, i = \overline{1, k}$, та для будь-якого атрибута $A \in R \setminus \{ A_1, \dots, A_k \}$, маємо $f(A) = \Lambda$.

Розглянемо таку властивість об'єктно-орієнтованого програмування (ООП), як успадкування² (inheritance), яке може використовуватися при створенні об'єктів БД. Ідея успадкування полягає в тому, що спочатку створюється батьківська схема в межах батьківського класу, яка визначає спільні властивості сукупності похідних класів. У похідному класі батьківська схема успадковується в межах похідного класу і вона розширюється за рахунок додавання нових атрибутів, які необхідні для опису станів об'єктів похідного класу. Схеми похідного класу будемо називати похідними. Схема R' , яка успадковується з батьківської R , розширює батьківську схему, тобто $R \subset R'$. В об'єктно-орієнтованих мовах програмування може реалізовуватися так зване кратне³ (multiple inheritance) успадкування, коли один похідний клас може успадковувати декілька батьківських (реалізовано в мовах програмування C++, Python), та просте успадкування, коли один похідний клас успадковує тільки один батьківський клас. Успадкування дає нам механізм зміни структури схеми в ООБД аналогічно до того, як відбувається зміна схеми таблиці в реляційній БД за допомогою певних SQL-запитів.

Розглянемо випадок, коли похідна схема R' наслідує тільки одну батьківську схему R та

² В літературі використовують синонім "наслідування".

³ В літературі використовують синонім "множинне успадкування".

¹ В літературі вживають синоніми: члени-даних та члени-функції.

похідний клас не має методів, імена яких співпадають з іменами методів батьківського класу.

Нехай маємо схему $R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Позначимо через O_1^R об'єкт класу $K_1 = \langle R, G_R \rangle$. Вважатимемо клас K_1 батьківським, а похідним від нього клас $K_2 = \langle \bar{R}, G_{\bar{R}} \rangle$. В класі K_2 схема $\bar{R} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ складається з атрибутів, притаманних тільки похідному класу. Зазвичай $R \cap \bar{R} = \emptyset$, але це не обов'язково. Ми вимагаємо також $G_R \cap G_{\bar{R}} = \emptyset$. Об'єкт похідного класу K_2 буде об'єктом вигляду $O^{R \cup \bar{R}}$, тобто цей об'єкт буде містити атрибути схем R та $\bar{R}$. Функції f_i для ініціалізації об'єкта $O^{R \cup \bar{R}}$ мають вид

$\{f_1, \dots, f_s \mid f_i : R \cup \bar{R} \rightarrow D, i = \overline{1, s}\}$. Графічно цей факт наведений на наступному рис. 1. можна показати наступним чином:

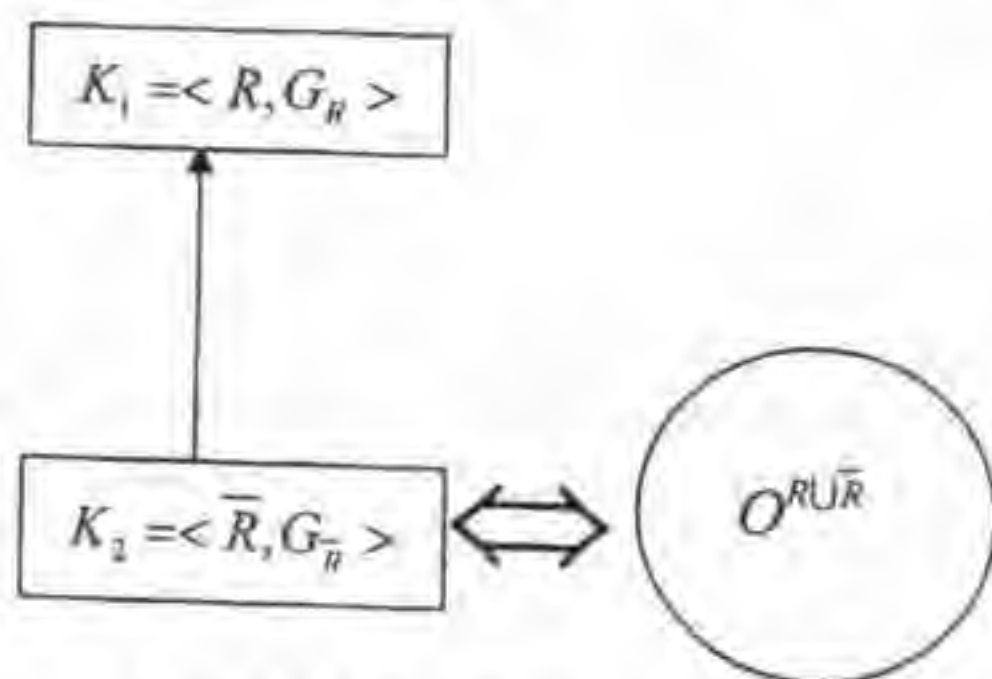


Рис. 1. Об'єкт похідного класу

З рис. 1 видно, що в результаті обмеження об'єкта $O^{R \cup \bar{R}}$ по схемі R отримується об'єкт O_1^R . Формально це можна записати так: $O^{R \cup \bar{R}} \mid R = O_1^R$, де $\mid$ – операція обмеження [4, 6]. Атрибути об'єкта при його ініціалізації та подальшій роботі набувають певних значень з множини $\bar{D}$. Позначимо через f_Θ – стан об'єкта в похідному класі (де Θ – об'єкт похідного класу). Так як f_Θ – це функція, яка описує стан об'єкта, то для її області означеності виконується $\text{dom} f_\Theta = R \cup \bar{R}$.

Як відмічалось, будь-який клас $K = \langle R, G \rangle$ складається із схеми R та методів G . Для уточнення успадкування будемо вважати, що елементами G є імена методів. Методи призначені для опрацювання значень атрибутів об'єкта, який має схему R . Введемо функцію інтерпретації $\alpha : G \rightarrow F$, яка іменам методів співставляє їхню семантику. Семантика методу – скінченomisна операція над станами об'єктів. F є множина операцій (скінченomisних) над станами об'єктів.

Нехай $K_1 = \langle R_1, G_1 \rangle$ батьківський клас, а $K_2 = \langle R_2, G_2 \rangle$ його похідний клас. Позначимо через $\alpha : G_1 \rightarrow F$ – функцію для батьківського класу, а $\beta : G_2 \rightarrow F$ – функцію для похідного класу. Але похідний клас успадковує атрибути та методи батьківського класу. Тоді вид простого успадкування, яке ми розглядаємо, буде описуватися функцією $\gamma : G_1 \cup G_2 \rightarrow F$.

Приклад успадкування атрибутів (мова Java v.6):

```
class Base {
    int a, b, c;
}
class ExtendBase extends Base {
    long d, e;
}
```

Об'єкти класу Base мають три атрибути a, b, c, а об'єкти класу ExtendBase мають п'ять атрибутів a, b, c, d, e.

Приклад успадкування методів (мова Java v.6):

```
class Base {
    int f() { }
    void fl(int t) { }
}
```

```
class ExtendBase extends Base {
    long f2() { }
}
```

У цьому випадку клас Base має два метода $f()$, $fl(\dots)$, а клас ExtendBase має три методи $f()$, $fl(\dots)$, $f2()$.

Розглянемо випадок, коли похідний клас наслідує тільки один батьківський клас та похідний клас має методи, імена яких співпадають з іменами методів батьківського класу.

У цьому випадку в похідному класі методи, які належать йому, перекривають (перевизначають (overriding)) методи з такими самими іменами батьківського класу. Для

формалізації такого успадкування введемо операцію накладання ∇ . Враховуючи

означення функцій α та β , запишемо означення операції накладання ∇ :

$$\alpha \nabla \beta = \beta \cup \alpha|_{G_1 \setminus G_2} = \beta \cup \alpha|(dom \alpha \setminus dom \beta), \quad (6)$$

Де, як і раніше $|$ операція обмеження, а $dom \alpha$ та $dom \beta$ області означеності відповідно функцій α та β .

Графічно операцію накладання ∇ можна інтерпретувати так:

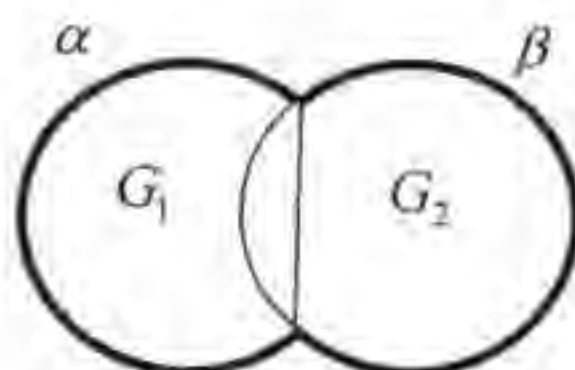


Рис. 2. Графічна інтерпретація операції накладання $\alpha \nabla \beta$

Властивості операції накладання ∇ :

- 1) $\alpha \nabla \alpha = \alpha \cup \alpha|(dom \alpha \setminus dom \alpha) = \alpha \cup \alpha|\emptyset = \alpha \cup f_\emptyset = \alpha$, де $f_\emptyset$ – всюди невизначена функція (ідемпотентність);
- 2) $\alpha \nabla \beta \neq \beta \nabla \alpha$ взагалі кажучи;
- 3) $dom(\alpha \nabla \beta) = dom \alpha \cup dom \beta$.

В наступній лемі $\approx$ – відношення сумісності: $\alpha \approx \beta \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \alpha|_X = \beta|_X$, де $X = dom \alpha \cap dom \beta$.

Лема 1. (критерій комутативності операції накладання). Для довільних функцій α, β виконується еквівалентність:

$$\alpha \nabla \beta = \beta \nabla \alpha \Leftrightarrow \alpha \approx \beta.$$

Доведення.

Використовуючи дистрибутивність обмеження відносно об'єднань [6], розпишемо $\alpha \nabla \beta$ та $\beta \nabla \alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha \nabla \beta &= \beta \cup \alpha|(dom \alpha \setminus dom \beta) = \\ &= \beta|(dom \beta \setminus dom \alpha) \cup \beta|(dom \alpha \cap dom \beta) \cup \\ &\cup \alpha|(dom \alpha \setminus dom \beta). \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \beta \nabla \alpha &= \alpha \cup \beta|(dom \beta \setminus dom \alpha) = \\ &= \alpha|(dom \alpha \setminus dom \beta) \cup \alpha|(dom \alpha \cap dom \beta) \cup \\ &\cup \beta|(dom \beta \setminus dom \alpha). \end{aligned} \quad (**)$$

Необхідність випливає з представлень (*), (**) та загальнозначної теоретико-множинної імплікації: $A \cup B = A' \cup B \Rightarrow A = A'$, за умови $A \cap B = A' \cap B = \emptyset$.

Достатність випливає з представлень (*), (**) та означення відношення сумісності. $\square$

З рис. 2 видно, що при простому успадкуванні методи похідного класу перекривають методи батьківського класу (у

випадку існування однакових імен методів в батьківському і похідному класах). Однак, при необхідності, для роботи з похідним об'єктом можна викликати "перекритий" метод батьківського класу. В мові програмування Java [7] такий метод може бути викликаний за допомогою службового слова `super`, наприклад `super(Method())`, де `Method()` – це метод батьківського класу, який "перекривається" методом похідного класу.

Приклад перевизначення методів (overriding (мова Java v.6)):

```
class Base {
    int f() { ... }
    void g(int t) { ... }
}
```

```
class ExtendBase extends Base {
    int f() { ... }
}
```

Схема `Base` має два метода `f()`, `g(...)`, а схема `ExtendBase` має теж два метода `f()`, `g(...)`. Для об'єктів класу `ExtendBase` буде визиватися не метод `f()` зі схеми `Base`, а метод `f()` зі схеми `ExtendBase`.

Розглянемо успадкування, при якому один похідний клас успадковує атрибути і методи від декількох батьківських класів. Нагадаємо, що таке успадкування прийнято називати множинним (кратним, multiple inheritance). Але такий тип успадкування має проблеми у своїй реалізації. Розглянемо так звану проблему ромба⁴.

При такому підході до успадкування (рис. 3) може трапитись неоднозначність після того, як в

⁴ Очевидно, така назва отримана завдяки схемі множинного успадкування, яка зображується у вигляді ромба.

класах В і С під час успадкування відбувається перевизначення методу. Виникає питання, метод з якого класа В або С буде успадковуватися у класі D? Саме через таку проблему багато мов програмування відмовилися від множинного успадкування.

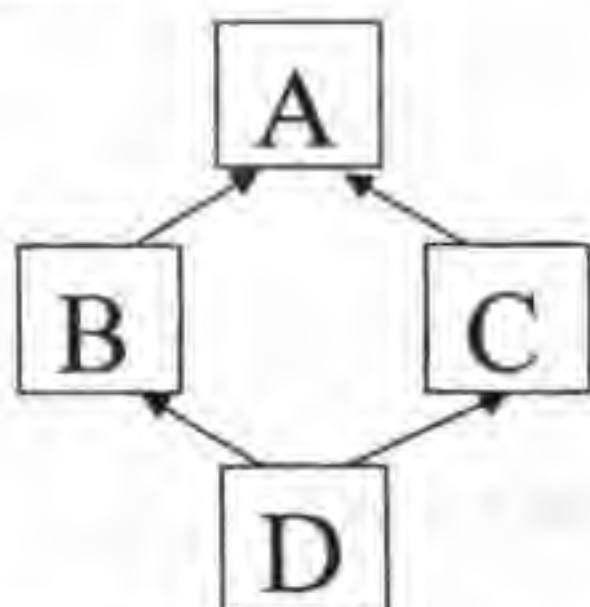


Рис. 3. Діаграма успадкування класів у вигляді ромбу

Відповідно, в БД при створенні класів за допомогою таких мов програмування схеми мають одного батька. Якщо все ж таки використовується множинне успадкування, то повинно існувати правило успадкування, при якому ситуація, яка описується правилом ромба, унеможлиблюється. Існує просте правило, при якому можна використовувати множинне успадкування, уникаючи проблему ромба. Саме таке правило використовується у постреляційній СУБД Cache.

Правило: при успадкуванні в першу чергу успадковуються ключові слова, властивості, методи та параметри методів першого батьківського (системного)⁵ класа в списку. Потім для кожного наступного по списку батьківського класа успадковуються властивості, методи і параметри класа, при цьому, якщо знаходяться раніш визначені елементи з таким же ім'ям, вони перекриваються новими елементами. Ключові слова успадковуються виключно з першого батьківського класу, відповідно не перевизначаються [1, с. 63].

Наприклад, у СУБД Cache якщо клас X успадковує атрибути та методи від класів А, В та С (їх будемо називати суперкласами або батьківськими класами), то його визначення буде мати вигляд:

```

Class X Extends (A, B, C)
{ }
  
```

По замовченню у СУБД Cache порядок успадкування для класа X є зліва-направо (left-to-right), який означає те, що у випадку, коли в

класах А, В та С міститься однакові імена атрибутів або методів, перевага надається на користь крайнього зліва класа (в нашому випадку А замінює В і С, В замінює С). Клас X також успадковує атрибути та методи від класа В, які в класі А не були визначені, а також атрибути та методи від класа С, які не були визначені в А і В. Якщо клас В має такі ж імена атрибутів або методів, як в успадкованому класі А, то при успадкуванні класом X методів та атрибутів перевага надається класу А. Таким же чином, якщо в класі С міститься атрибути або методи з іменами, як в класах А і В, тоді пріоритет при успадкуванні буде у класа А, потім у класа В і після цього у класа С.

У випадку успадкування з права-наліво (right-to-left), коли декілька суперкласів мають однакові імена атрибутів та методів пріоритет має суперклас, який стоїть у переліку суперкласів правіше. Наприклад, нехай клас X успадковує з пріоритетом з права-на-ліво атрибути та методи від класів А, В і С. Тоді імена атрибутів або методів класа В мають пріоритет при успадкуванні над іменами атрибутів і методів класа А. Таким же чином успадкування відбувається для класа С по відношенню до імен атрибутів і методів, які містяться в класах А і В [8].

За допомогою вбудованої в постреляційну СУБД Cache мови програмування Cache ObjectScript опишемо клас, який успадковує батьківські класи А, В і С

```

Class X Extends (A, B, C) [Inheritance = left]
  { }
  
```

```

Class X Extends (A, B, C) [Inheritance = right]
  { }
  
```

Можна більш формально описати множинне успадкування за допомогою операції накладання ∇ . З рис. 2 видно, що операція накладання ∇ дає можливість використовувати left-to-right та right-to-left успадкування. Формально ці види успадкування можна записати за допомогою операції накладання ∇ :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_3 \nabla \alpha_2 \nabla \alpha_1 \text{ та } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \nabla \alpha_2 \nabla \alpha_3.$$

В останніх виразах ми не розставляли дужки, бо наступна лема говорить про асоціативність накладання.

Лема 2 (асоціативність операції накладання). Для довільних функцій α, β, γ виконується рівність:

$$(\alpha \nabla \beta) \nabla \gamma = \alpha \nabla (\beta \nabla \gamma)$$

Доведення. Розпишемо ліву, потім праву частину рівності, що доводиться. Після цього порівняємо результат. На основі означення

⁵ Оскільки змінити семантику системних класів ми не можемо, тому в подальшому ми їх не розглядаємо.

операції накладання (6) отримуємо наступні рівності:

$$\begin{aligned} (\alpha \nabla \beta) \nabla \gamma &= (\beta \cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta)) \nabla \gamma = \gamma \cup \\ &\cup (\beta \cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta)) | (dom \alpha \cup dom \beta) \setminus \\ &\setminus dom \gamma = \gamma \cup (\beta \cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta)) | \\ &| ((dom \alpha \setminus dom \gamma) \cup (dom \beta \setminus dom \gamma)) = \\ &= \gamma \cup \beta | (dom \alpha \setminus dom \gamma) \cup \beta | (dom \beta \setminus dom \gamma) \cup \\ &\cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta) | (dom \alpha \setminus dom \gamma) \cup \\ &\cup (\alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta)) | (dom \beta \setminus dom \gamma) = \gamma \cup \\ &\cup \beta | (dom \alpha \setminus dom \gamma) \cup \beta | (dom \beta \setminus dom \gamma) \cup \\ &\cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta) \cap (dom \alpha \setminus dom \gamma) \cup \\ &\cup \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta) \cap (dom \beta \setminus dom \gamma) = \\ &= \gamma \cup \beta | dom \alpha \setminus dom \gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma \cup \\ &\cup \alpha | dom \alpha \setminus (dom \beta \cup dom \gamma) \cup \emptyset = \\ &= \gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma \cup \alpha | dom \alpha \setminus (dom \beta \cup \\ &\cup dom \gamma) \cup \beta | dom \alpha \setminus dom \gamma = \\ &= \gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma \cup \alpha | dom \alpha \setminus (dom \beta \cup \\ &\cup dom \gamma) \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma = \\ &= \gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma \cup \alpha | dom \alpha \setminus \\ &\setminus (dom \beta \cup dom \gamma). \end{aligned} \quad (8)$$

Прокоментуємо переходи. Перехід від першого виразу до другого та від другого до третього здійснили згідно означення операції накладання; при переході від третього до четвертого виразу скористалися загальнозначною властивістю:

$(A \cup B) \setminus C = A \setminus C \cup B \setminus C$; при переході від четвертого до п'ятого виразу – дистрибутивністю обмеження:

$$(\alpha \cup \beta) | (A \cup B) = \alpha | A \cup \alpha | B \cup \beta | A \cup \beta | B [6]$$

при переході від п'ятого до шостого – властивістю обмеження:

$$(\alpha | A) | B = \alpha | (A \cap B) [6];$$

при переході від шостого до сьомого – властивостями:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C) \text{ та } \alpha | (dom \alpha \setminus dom \beta) \cap (dom \beta \setminus dom \gamma) = \alpha | \emptyset =$$

$= f_\emptyset = \emptyset [6];$ при переході від восьмого до дев'ятого – властивостями обмеження:

$$\alpha | B = \alpha | dom \alpha \cap B, A \subseteq B \Rightarrow \alpha | A \subseteq \alpha | B \text{ та}$$

$$\beta | dom \alpha \setminus dom \gamma = \beta | dom \beta \cap (dom \alpha \setminus dom \gamma) \subseteq \beta | dom \beta \setminus dom \gamma.$$

Нарешті, в останньому переході скористалися ідемпотентністю обмеження:

$$A \cup A = A.$$

Перейдемо до правої частини рівності, що доводиться:

$$\alpha \nabla (\beta \nabla \gamma) = \alpha \nabla (\gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma) =$$

$$= \gamma \cup \beta | dom \beta \setminus dom \gamma \cup \alpha | (dom \alpha \setminus (dom \beta \cup dom \gamma)). \quad (9)$$

Отже, з (8), (9) і випливає шукана рівність. $\square$

Кожен об'єкт має життєвий цикл – це послідовність станів об'єкта, які змінюють один одного від виникнення об'єкта (початок спостереження) до видалення (закінчення спостереження) або перехід об'єкта в стан, в якому він не буде змінюватися. Під формалізацією життєвого циклу будемо розуміти побудову множини станів та визначення логіки переходів з одного стану в інший. Протягом життя об'єкт змінює свій стан за допомогою такої характеристики, як поведінка, що визначається методами (функціями) $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$, заданими в класі K . Позначимо множину всіх станів об'єкта схеми R через $\Psi(R) = \{f | f: R \rightarrow \bar{D}\} = \bar{D}^R$, де f – функція, яка описує стан об'єкту (в різні часові проміжки його життя). Метод (функція) класа є алгебраїчна операція:

$$F^n: \underbrace{\Psi(R) \times \dots \times \Psi(R)}_{n \text{ разів}} \rightarrow \Psi(R). \text{ При дії методу на}$$

поточні стани $f_1, \dots, f_m$ об'єкту ми отримуємо новий стан цього об'єкту: $F(f_1, \dots, f_m) \in \Psi(R)$ (в припущенні, що новий стан об'єкту залежить від m певних станів).

Стан об'єкта при дії методу не завжди може бути змінений: наприклад, у випадку виклику методу (SQL-запит), який робить вибірку всіх об'єктів, значення атрибутів яких задовольняють певній умові. В результаті інтерпретації відбувається тільки зчитування значення атрибутів об'єктів.

Висновки:

1. Математично описані поняття схеми, об'єкту, успадкування.
2. На відміну від реляційних БД, де таблиця визначається схемою R , в ООБД кожен об'єкт визначається класом $K = \langle R, G \rangle$, на основі якого він був побудований. В такому випадку отриманий об'єкт називається екземпляром класу K .
3. За допомогою операції накладання ∇ формально описано просте та множинне успадкування. Наведені властивості операції накладання ∇ .
4. Об'єкт БД можна представити у вигляді рядка таблиці, в якому знаходяться значення відповідних атрибутів об'єкта, а екземпляри класу – у вигляді множини рядків однієї таблиці.

5. При успадкуванні отримується об'єкт, який містить в собі значення атрибутів об'єднаних схем.
6. Формально описано поняття життєвого циклу об'єкта.

Отримані результати представляють лише перший крок при побудові формальної семантики постреляційної парадигми; разом з тим, ці результати дозволяють зробити висновок про адекватність проведеної формалізації.

Таким чином, можна переходити до наступних кроків у формалізації: задавати семантику операторів маніпулювання даними та операторів запитів (мова йде про версію постреляційного SQL).

Наявність відповідної формалізації дозволить поставити на новому рівні низку практичних проблем: навчання, оптимізація виконання запитів, побудова складних запитів та крос-процесорів.

Список використаних джерел

1. Вольфанг Кирстен. Постреляционная СУБД Cache. Объектно-ориентированная разработка приложений / Вольфанг Кирстен, Михаэль Ирингер – М.: Бином, 2008. – 401 с.
2. Редько В.Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков – К.: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 196 с.

3. Буч Гради. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++ / Гради Буч. – Бином: Невский Диалект, 1998. – 560 с. [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: <http://www.helloworld.ru/texts/comp/other/oop/ch03.htm>.

4. Харрингтон Джен. Разработка баз данных: пер. с англ. / Дж. Харрингтон. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 269 с.

5. Онлайн база данных, сервис структур данных, динамическая объектно-реляционная проекция (Dynamic ORM) [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: <http://habrahabr.ru/blogs/webdev/59365/>

6. Буй Д.Б., Кахута Н. Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Дмитро Б. Буй, Надія Д. Кахута // Вісник Київського університету ім. Т.Г.Шевченка. – 2005. – вип. 2. – С. 9

7. [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу:

<http://www.java.com/en/download/help/index.xml>

8. [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу:

http://docs.intersystems.com/cache20102/csp/docbook/DocBook.UI.Page.cls?KEY=GOBJ_model.

Надійшла до редколегії 07.04.2011

УДК 519.9

Анатолій В. Кузьмін, к. ф.-м. н., доц.

Моделювання розповсюдження поверхневих хвиль при обтіканні зануреного тіла

Розглядаються питання моделювання процесу виникнення стаціонарних хвиль на поверхні ідеальної нестисливої рідини, які виникають в результаті збурення плоскопаралельного потоку внесенням у потік тілом. Рідина вважається нестисливою ідеальною, а течія потенціальною. Задача розглядається в лінійній постановці.

Запропонований чисельний метод знаходження наближеного розв'язку. Гранична задача з рухомою вільною поверхнею з використанням теорії потенціалів зводиться до системи інтегро-диференціальних рівнянь вздовж контуру вільної поверхні та поверхні тіла. Знаходження наближеного розв'язку здійснюється шляхом розв'язання СЛАР.

Ключові слова: вільна поверхня, поверхневі хвилі, потенціал подвійного шару, сингулярне інтегральне рівняння.

Статтю представив д. т. н. проф. Гаращенко Ф.Г.

*E-mail: kuzmin_a_b@ukr.net

Постановка фізичної задачі

Розглянемо ідеальну нестисливу рідину, що займає область:

$\Omega = \{x, y, z - \infty < x < \infty, -\infty < y < 0, -\infty < z < \infty\}$,
має незбурену вільну поверхню $y = 0$, рухається зі швидкістю $W_0 = const$ в напрямку вісі x .

Нехай в потік незбуреної рідини внесена замкнена циліндрична поверхня, що задана рівнянням:

$$L_1 = \left\{ \begin{aligned} x &= x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq T, \\ x(0) &= x(T), y(0) = y(T), -\infty < z < \infty \end{aligned} \right\}.$$

Нехай Ω_1 - внутрішня по відношенню до замкнутого контуру L_1 область.

Будемо позначати L_2 контур, що обмежує вільну поверхню рідини.

Будемо вважати, що потік рідини в результаті збурення викликаного тілом, залишається потенціальним. Необхідно визначити поле вектора швидкості $\mathbf{W}(x, y)$ та форму вільної поверхні $\eta(x)$.

Anatoliy V Kuzmin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Modulation of Surface Wave Spread in the Flow of Immersed Body

The article focuses on the issue of modulating the process of formation of stationary waves on the surface of ideal incompressible fluid which appear as a result of perturbation of the plane-parallel stream by the body inserted into the stream. The fluid is considered to be incompressible and ideal, and the current is considered to be potential. The problem is considered in the linear statement.

The article gives a numerical method of finding an approximate solution. A boundary problem with a movable free surface with the use of the theory of potentials turns out to be the system of integro-differential equations along a contour of a free surface and the surface of a body. The approximate solution can be found with the help of Linear Algebra Equation System.

Key words: free surface, surface waves, the potential of a double layer, singular integral equation.

The article is submitted by Doctor of Technical Sciences F.H. Haraashchenko.

*E-mail: kuzmin_a_b@ukr.net

Математична постановка задачі

Стаціонарне поле вектора швидкості $\mathbf{W}(x, y)$ будемо шукати у вигляді:
 $\mathbf{W}(x, y) = W_0 \mathbf{i}_x + \nabla \Phi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ - потенціал вектора швидкості збуреного потоку.

Для потенціалу $\Phi(x, y)$ має місце гранична задача для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in \Omega / \Omega_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_1} = -W_0 n_x; \quad (2)$$

$$\left(W_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{d\eta}{dx} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{L_2} = 0, \quad (3)$$

$$P \Big|_{L_2} = P_0. \quad (4)$$

Враховуючи інтеграл Коші - Лагранжа, умову (4) можна записати у вигляді:

$$-\frac{1}{g} \left(W_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \Big|_{L_2} = \eta(x) \quad (4').$$

Додатково будемо вимагати виконання умов на нескінченості:

$$\Phi(x, y) \xrightarrow{x, y \rightarrow \infty} 0, \quad (5)$$

$$\eta(-\infty) = 0. \quad (6)$$

Аналітичні розв'язки такої задачі при обтіканні кругового циліндра можна знайти в [1].

Лінійаризована постановка задачі

Будемо припускати, що амплітуда поверхневих хвиль є малою, а швидкість потоку рідини мало відрізняється від вектору набігаючого потоку, тобто $|\eta| \ll 1$, $\frac{|\nabla \Phi|}{|W_0|} \ll 1$. (7)

Тоді користуючись [1], граничні умови (3), (4') будемо зносити на незбурену поверхню рідини, та зберігати лише члени першого порядку малості.

В результаті лінеаризації будемо мати:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = W_0 \frac{d\eta}{dx} \Big|_{y=0}, \quad (3')$$

$$\eta(x) = -\frac{W_0}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=0}. \quad (4'')$$

Приведення задачі до безрозмірного вигляду

Для проведення безрозмірювання граничної задачі (1), (2), (3'), (4''), (5), (6), оберемо масштабні величини: l - характерний розмір тіла, d - глибина занурення тіла, W_0 - характерна швидкість потоку. Будемо представляти компоненти вектора швидкості збуреного потоку у вигляді: $u = W_0 \bar{u}$, $v = W_0 \bar{v}$, координати точки - у вигляді $x = l \bar{x}$, $y = l \bar{y}$, збурену поверхню - у вигляді $\eta = l \bar{\eta}$. Безрозмірні величини позначені рисками зверху.

Результатом приведення до безрозмірного вигляду отримаємо граничну задачу:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in \Omega / \Omega_1, \quad (1')$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_i} = -n_x, \quad (2')$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d\eta}{dx} \Big|_{y=0}, \quad (3'')$$

$$\eta(x) = -Fr^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad (4''')$$

де $k = d/l$, $Fr = \frac{W_0}{\sqrt{gl}}$ - число Фруда. Верхня

риска над безрозмірними величинами надалі відкинута.

Напрямок одиничного вектора нормалі визначається тільки формою зануреного тіла.

Зведення граничної задачі до системи інтегро-диференціальних рівнянь

Встановимо напрямок обходу контуру L_1 за годинниковою стрілкою, а контур L_2 будемо обходити в напрямку протилежному напрямку вісі x так що область зайнята рідиною знаходиться ліворуч від спостерігача. При цьому напрямки нормалі $\mathbf{n}_i$, $i = 1, 2$ направлені всередину області Ω / Ω_1 .

Потенціал вектора швидкості $\Phi(M_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного шару [2,3]:

$$\Phi(M_0) = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{\partial}{2\pi \partial n_M} \frac{1}{|r_{M, M_0}|} g_i(M) dl_M, \quad (7)$$

$$M_0 \in \Omega / \Omega_1$$

$$r_{M, M_0} = i(x_0 - x) + j(y_0 - y).$$

За рахунок вибору розв'язку у вигляді (7) автоматично забезпечимо виконання рівняння (1), та умови (5). Для виконання умов (2), (3), (4''), скористаємось властивостями потенціалу подвійного шару [2,4]. Зокрема врахуємо, що $\frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_i(M_0)}$ - неперервна функція при підході до

точок границі L_i , $i = 1, 2$. При цьому

$$\frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_i(M_0)} \Big|_{M_0 \in L_i} = \frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_i(M_0)} \Big|_{M_0 \in L_i}, \quad (8)$$

Тобто граничне значення нормальної похідної з боку нормалі «+» дорівнюють граничному значенню з боку протилежному напрямку нормалі «-» та дорівнюють прямому значенню нормальної похідної, обчисленої у точках контуру

$$\frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_i(M_0)} \Big|_{M_0 \in L_i} = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} g_i \frac{\partial(r_{M, M_0}, \mathbf{n}_i(M))}{2\pi r_{M, M_0}^2} dl_M. \quad (9)$$

Для градієнту потенціалу подвійного шару в точках контуру має місце розрив, першого роду, а граничні значення обчислюються за формулою [2]:

$$\nabla_{\pm} \Phi(M_0) = \overline{\nabla \Phi(M_0)} \pm \frac{1}{2} \tau_k(M_0) g'_{k,\tau}(M_0), \quad (10)$$

$$M_0 \in L_k$$

де $\tau_k(M_0)$ - одиничний вектор дотичної до контуру L_k в точці M_0 , $g'_{k,\tau}(M_0)$ - похідна від щільності g_k по дотичному напрямку. Знаки «+» та «-» відповідають граничним значенням при підході до точок контуру з боку нормалі, або протилежного боку відповідно. При цьому пряме

$$\frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_j(M_0)} = \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} g'_{k,\tau} \frac{n_j^x(M_0)(y_0 - y) - n_j^y(M_0)(x_0 - x)}{2\pi r_{M_0, M_k}^2} dl_M$$

$\mathbf{n}_j(M_0) = (n_j^x, n_j^y)$ - вектор одиничної нормалі до контуру L_j . Позначимо $g'_{k,\tau}(M_k) = \gamma_k(M_k)$. Будемо вважати що контур L_1 заданий в параметричному вигляді:
 $x_1 = x_1(\varphi), y_1 = y_1(\varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi$
 $x_1(\varphi) = x_1(\varphi + 2\pi), y_1(\varphi) = y_1(\varphi + 2\pi)$

Вектор нормалі має вигляд:

$$\mathbf{n}_1(M_0) = \frac{-y_1'(M_0), x_1'(M_0)}{\sqrt{-y_1'^2(M_0) + x_1'^2(M_0)}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi) \frac{(y_1(\varphi_0) - y_1(\varphi))n_1^x(\varphi_0) + (x_1(\varphi_0) - x_1(\varphi))n_1^y(\varphi_0)}{(y_1(\varphi_0) - y_1(\varphi))^2 + (x_1(\varphi_0) - x_1(\varphi))^2} dl_\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(x_2) \frac{y_1(\varphi_0)n_1^x(\varphi_0) + (x_1(\varphi_0) - x_2)n_1^y(\varphi_0)}{(y_1(\varphi_0))^2 + (x_1(\varphi_0) - x_2)^2} dx_2 = n_1^x(\varphi_0), \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad dl_\varphi = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi) \frac{(x_0 - x_1(\varphi))dl_\varphi}{(x_0 - x_1(\varphi))^2 + y_1^2(\varphi)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(x_2) \frac{dx_2}{x_0 - x_2} = \frac{d\eta}{dx_0}, x_0 \in (-\infty, \infty) \quad (13)$$

Інтегральне рівняння для співвідношення Коші - Лагранжа (4'') можна записати

враховуючи властивості градієнту потенціалу подвійного шару на вільній поверхні:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi) \frac{y_1(\varphi)dl_\varphi}{y_1^2(\varphi) + (x_0 - x_1(\varphi))^2} - \frac{1}{2} \gamma_2(x_0) = -\frac{1}{Fr^2} \eta(x_0), x_0 \in (-\infty, \infty) \quad (14)$$

Зауважимо [4], що система інтегро-диференціальних рівнянь (12) - (14) з граничною умовою (6) має нескінченний розв'язок. Для виділення єдиного розв'язку систему інтегро-диференціальних рівнянь її необхідно доповнити умовами:

$$\int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi) d\varphi = 0, \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(x) dx = 0. \quad (16)$$

значення градієнту потенціалу подвійного шару має вигляд:

$$\overline{\nabla \Phi(M_0)} = \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left[\frac{i(y_0 - y) - j(x_0 - x)}{2\pi r_{M, M_0}^2} \right] g'_{k,\tau}(M_k) dl_M \quad (11)$$

Враховуючи (11), нормальну похідну потенціалу подвійного шару запишемо у вигляді шару:

(9')

На контурі L_2 встановлено напрям обходу $x_2 \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{n}_2(M_0) = (-1, 0)$. Граничні умови непротікання на контурі тіла L_1 та L_2 будуть мати вигляд інтегральних рівнянь відносно невідомих щільностей $\gamma_i, i=1,2$ та профілю вільної поверхні η :

Чисельний алгоритм знаходження наближеного розв'язку.

Для дискретизації системи інтегро-
диференціальних рівнянь (12) - (16), контури
 $L_i, i = 1, 2$ покриємо сітками:

$$E_{\tau}^{(1)} = \left\{ \varphi_i = (i-1)\tau, \tau = \frac{2\pi}{n_1}, i = \overline{1, n_1+1}, \varphi_1 = \varphi_{n_1+1} \right\}$$

$$E_{\tau}^{(1,0)} = \left\{ \varphi_{0,j} = \varphi_i + 0.5\tau, i = \overline{1, n_1+1}, \varphi_{0,1} = \varphi_{0,n_1+1} \right\}$$

$$E_h^{(2)} = \left\{ x_j = jhe^{a|j|}, j = \overline{-n_2, n_2} \right\}$$

$$E_h^{(2,0)} = \left\{ \begin{aligned} x_{0,j} &= 0.5(x_j + x_{j+1}), \\ j &= \overline{-n_2, n_2-1}, x_{0,-n_2-1} = -\infty, x_{0,n_2+1} = \infty \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{E}_h^{(2)} = \left\{ \bar{x}_j = jhe^{a|j|}, j = \overline{n_2, -n_2} \right\}$$

Введемо позначення: для підінтегральних
функцій, що фігурують в інтегро-
диференціальних співвідношеннях (12) - (16):

$$\omega^{(1,1)}(\varphi, \varphi_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(y_1(\varphi_0) - y_1(\varphi))n_1^x(\varphi_0) + (x_1(\varphi_0) - x_1(\varphi))n_1^y(\varphi_0)}{(y_1(\varphi_0) - y_1(\varphi))^2 + (x_1(\varphi_0) - x_1(\varphi))^2}, \quad (17)$$

$$\omega^{(1,2)}(x, \varphi_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{y_1(\varphi_0)n_1^x(\varphi_0) + (x_1(\varphi_0) - x)n_1^y(\varphi_0)}{(y_1(\varphi_0))^2 + (x_1(\varphi_0) - x)^2}, \quad (18)$$

$$\omega^{(1,3)}(\varphi_0) = n_1^y(\varphi_0), \quad (19) \quad \omega^{(2,1)}(\varphi, x_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_0 - x_1(\varphi))}{(x_0 - x_1(\varphi))^2 + y_1^2(\varphi)}, \quad (20)$$

$$\omega^{(2,1)}(\varphi, x_0) = \frac{-(x_0 - x_1(\varphi))}{2\pi(x_0 - x_1(\varphi))^2 + y_1^2(\varphi)}, \quad (21) \quad \omega^{(2,2)}(x, x_0) = \frac{-1}{2\pi(x_0 - x)}, \quad (22)$$

$$\omega^{(3,1)}(\varphi, x_0) = \frac{-y_1(\varphi)}{2\pi(x_0 - x_1(\varphi))^2 + y_1^2(\varphi)}. \quad (23)$$

Запишемо апроксимацію інтегральних

співвідношень (12) - (13) з умовами (15), (16).

$$\Gamma_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(1,1)}(\varphi_i, \varphi_{0,j}) \Gamma_i^{(1)} + \sum_{i=-n_2}^{-n_2} \omega^{(1,2)}(\bar{x}_i, \varphi_{0,j}) \Gamma_i^{(2)} = \omega^{(1,3)}(\varphi_{0,j}), \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \Gamma_i^{(1)} = 0, \quad (24'), \quad \sum_{i=-n_2}^{n_2} \Gamma_i^{(2)} = 0, \quad \eta_{-n_2} = 0. \quad (25')$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(1,2)}(\varphi_i, x_{0,j}) \Gamma_i^{(1)} + \sum_{i=-n_2}^{-n_2} \omega^{(2,2)}(\bar{x}_i, x_{0,j}) \Gamma_i^{(2)} = \frac{\eta(x_{j+1}) - \eta(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = \overline{-n_2, n_2-1}, \quad (25)$$

Для інтегрального співвідношення (14) запишемо наближену рівність:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(3,1)}(\varphi_i, \bar{x}_j) \Gamma_i^{(1)} - \frac{\gamma^{(2)}(\bar{x}_j)}{2} = -\frac{\eta(\bar{x}_j)}{Fr^2}, \quad j = \overline{-n_2, n_2} \quad (26)$$

В співвідношеннях (24) - (25) прийняті
позначення: $\eta_j \approx \eta(x_j)$,

$$\Gamma_j^{(2)} = \int_{x_{j+1}}^{x_j} \gamma^{(2)}(x) dx. \quad (27')$$

$$\Gamma_i^{(1)} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \gamma^{(1)}(\varphi) d\varphi, \quad (27)$$

Враховуючи (27'), співвідношення (26)
замінімо на таке:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(3,1)}(\varphi_i, \bar{x}_j) \Gamma_i^{(1)} - \frac{\Gamma_j^{(2)}}{2(x_j - x_{j+1})} = -\frac{\eta_{-j}}{Fr^2}, \quad j = \overline{-n_2 + 1, n_2 - 1} \quad (26')$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(3,1)}(\varphi_i, \bar{x}_{-n_2}) \Gamma_i^{(1)} = -\frac{\eta_{n_2}}{Fr^2}, \quad \sum_{i=1}^{n_1} \omega^{(3,1)}(\varphi_i, \bar{x}_{n_2}) \Gamma_i^{(1)} = -\frac{\eta_{-n_2}}{Fr^2}$$

Співвідношення (24), (24'), (25), (25'), (26') - система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка містить $(n_1 + 1) + 4n_2 + 1$ рівнянь відносно невідомих величин:

$$\Gamma_i^{(1)}, i = \overline{0, n_1}, \Gamma_i^{(2)}, i = \overline{n_2, -n_2},$$

$$\eta_i, i = \overline{-n_1 + 1, n_2}$$

тобто $(n_1 + 1) + 4n_2 + 1$ невідомих величин.

Реалізація різницевої схеми

Для реалізації системи лінійних алгебраїчних рівнянь (24), (24'), (25), (25'), (26'), враховуючи велику розмірність цієї системи, пропонується застосувати ітераційний процес, який дозволяє розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності $(n_1 + 1) \times (n_1 + 1)$ та $(4n_2 + 1) \times (4n_2 + 1)$ окремо з застосуванням між ними внутрішнього ітераційного процесу.

Запишемо співвідношення (24), (24') в матричному вигляді:

$$A_{11} \Gamma^{(1)} + A_{12} \Gamma^{(2)} = F_1. \quad (27)$$

Аналогічним чином запишемо співвідношення (25), (25'):

$$A_{21} \Gamma^{(1)} + A_{22} \Gamma^{(2)} = A_{23} \eta, \quad (28)$$

$$\text{та (26')} \quad A_{31} \Gamma^{(1)} + A_{32} \Gamma^{(2)} = A_{33} \eta, \quad (29)$$

Вигляд та розмірність кожної матриці та вектора системи (27) – (29) повністю визначається співвідношеннями (24), (24'), (25), (25'), (26').

Ітераційний процес обчислення розв'язку системи рівнянь (27) – (29) запишемо у вигляді:

$$A_{11} \Gamma_{(k+1)}^{(1)} = F_1 - A_{12} \Gamma_{(k)}^{(2)}$$

$$A_{22} \Gamma_{(k+1)}^{(2)} - A_{23} \eta_{(k+1)} = A_{21} \Gamma_{(k+1)}^{(1)}$$

$$A_{32} \Gamma_{(k+1)}^{(2)} - A_{33} \eta_{(k+1)} = -A_{31} \Gamma_{(k+1)}^{(1)} \quad k = \overline{0, 5} \quad (30)$$

За початкове наближення обираємо, $\Gamma_{(0)}^{(2)} = \bar{0}$, що відповідає незбуреному профілю вільної поверхні.

Висновки та результати чисельного експерименту

Чисельний експеримент проводився для тіла еліптичної форми, яке задавалося параметричним

$$x = \cos(-\varphi + \varphi_0),$$

$$\text{рівнянням} \quad y = -k + e \sin(-\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Параметр e задає форму еліпсу, φ_0 - кут між віссю еліпса та вектором швидкості незбуреного потоку рідини, k - задає співвідношення між глибиною занурення та лінійними розмірами тіла.

Розрахунки проводилися для діапазонів параметрів: $1.5 \leq k \leq 5$, $1.5 \leq Fr \leq 5$.

Чисельний експеримент демонструє адекватне відтворення процесу утворення хвиль на поверхні рідини.

Зокрема спостерігається обернено пропорційна залежність амплітуди хвиль від числа k і прямо пропорційна залежність довжини хвилі від числа Fr . Зокрема довжина хвилі $L \approx 2\pi (Fr)^2$.

Ітераційний процес (30) дозволяє застосувати економічну схему знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки знаходження розв'язку вимагає лише однократного обертання матриці системи, для збіжності ітераційного процесу за схемою (30) достатньо лише 2-5 ітерацій.

Реалізація чисельного алгоритму здійснюється з використанням системи символьних обчислень MAPLE 13, що дозволяє здійснювати обчислення з довільною точністю заокруглення за рахунок вибору системного параметру $Digits$, використовувати сертифіковані чисельні процедури знаходження розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь, контролювати числа обумовленості матриць.

Результати чисельних експериментів наведені на рисунках 1 – 5.

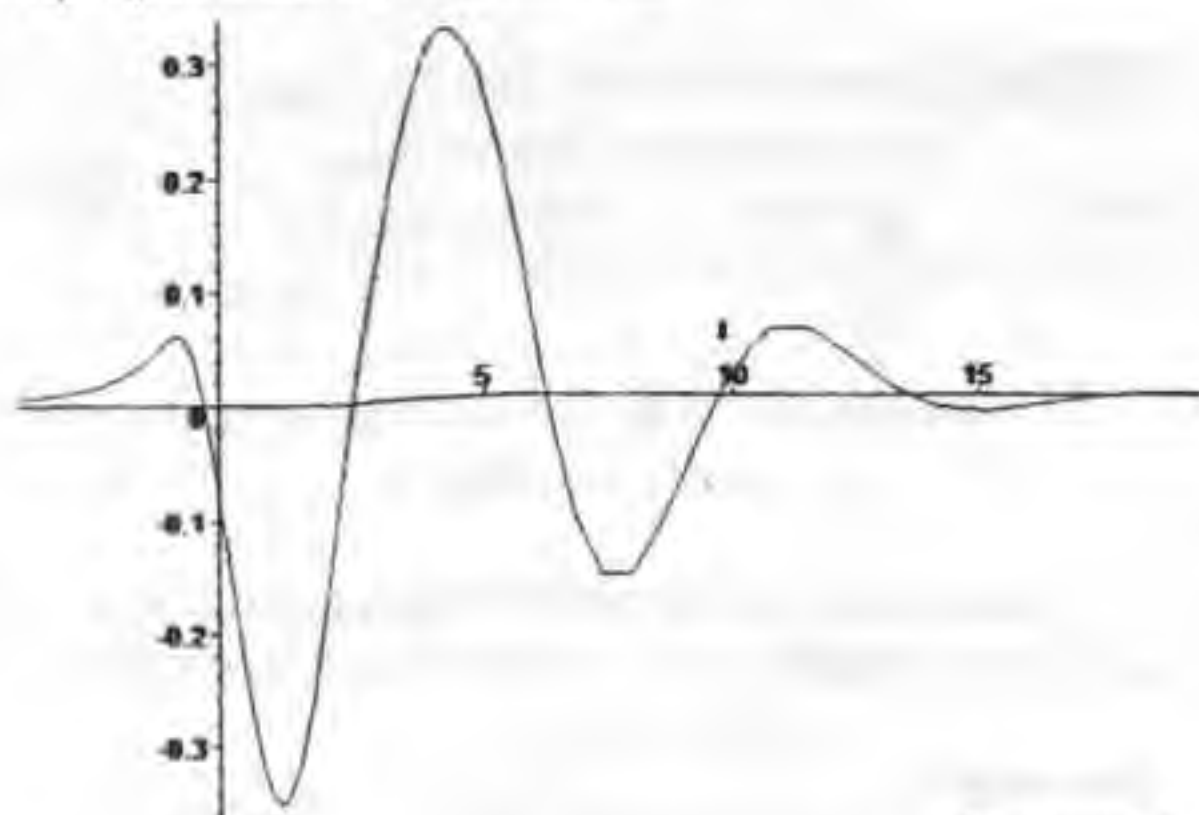


Рисунок 1

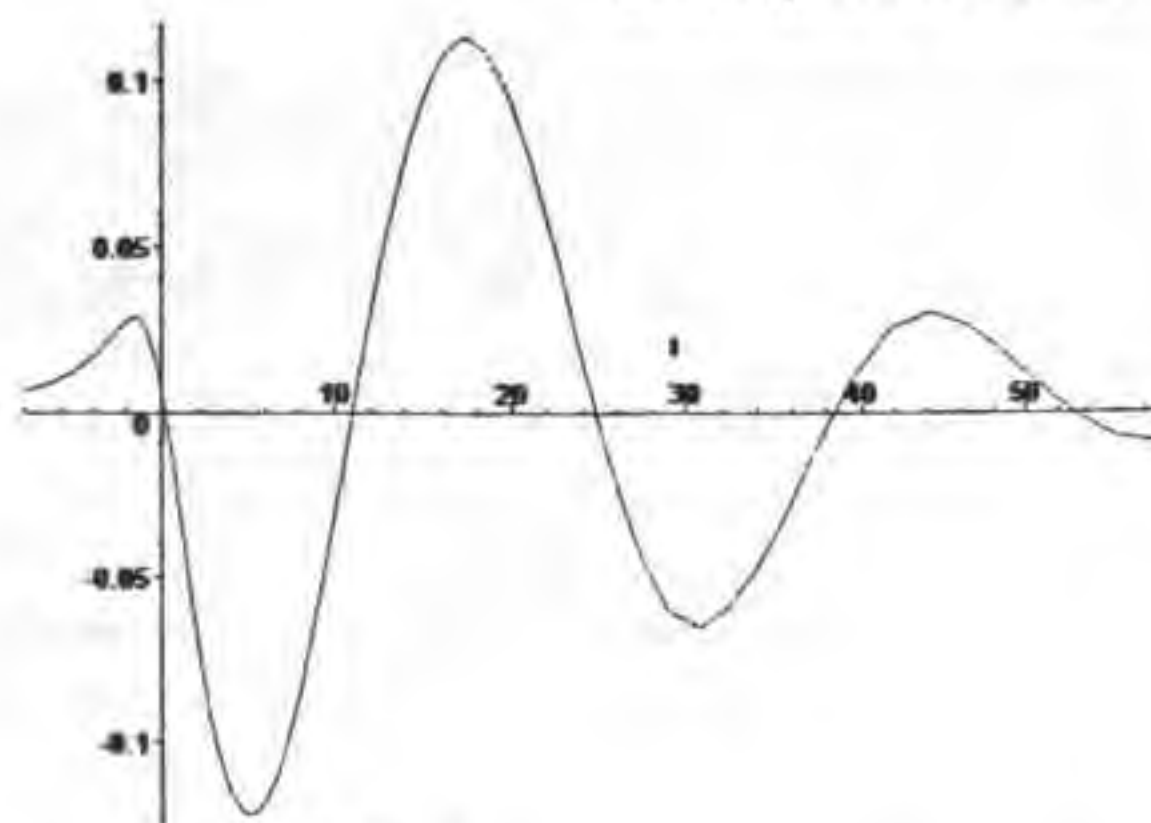


Рисунок 5

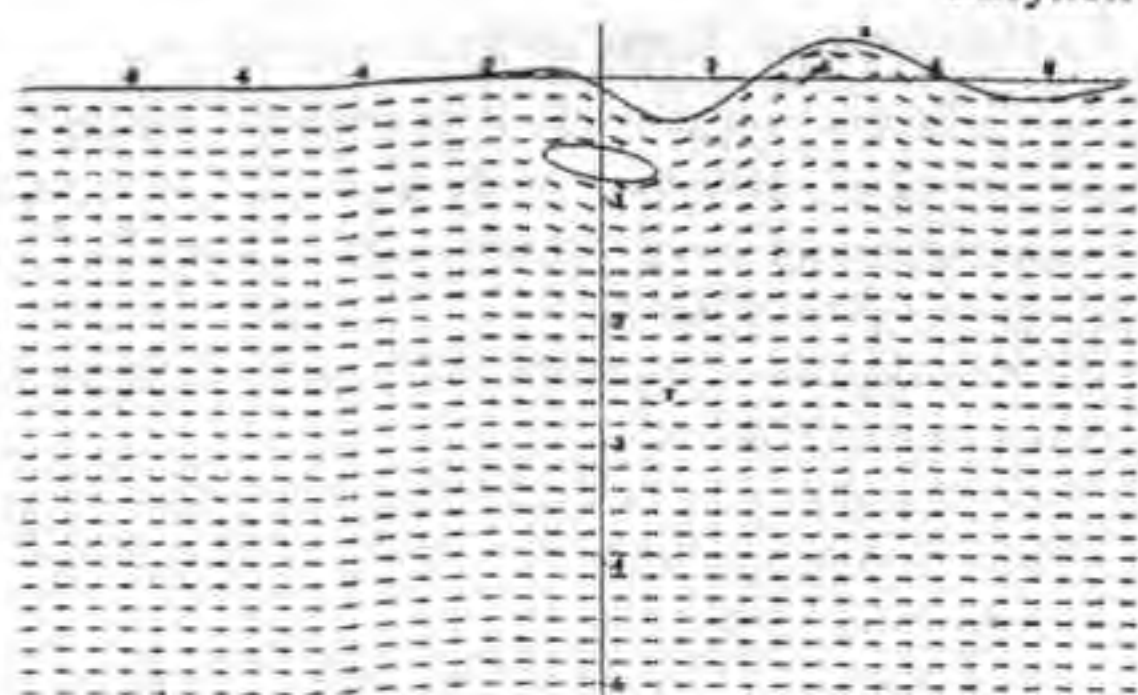


Рисунок 2

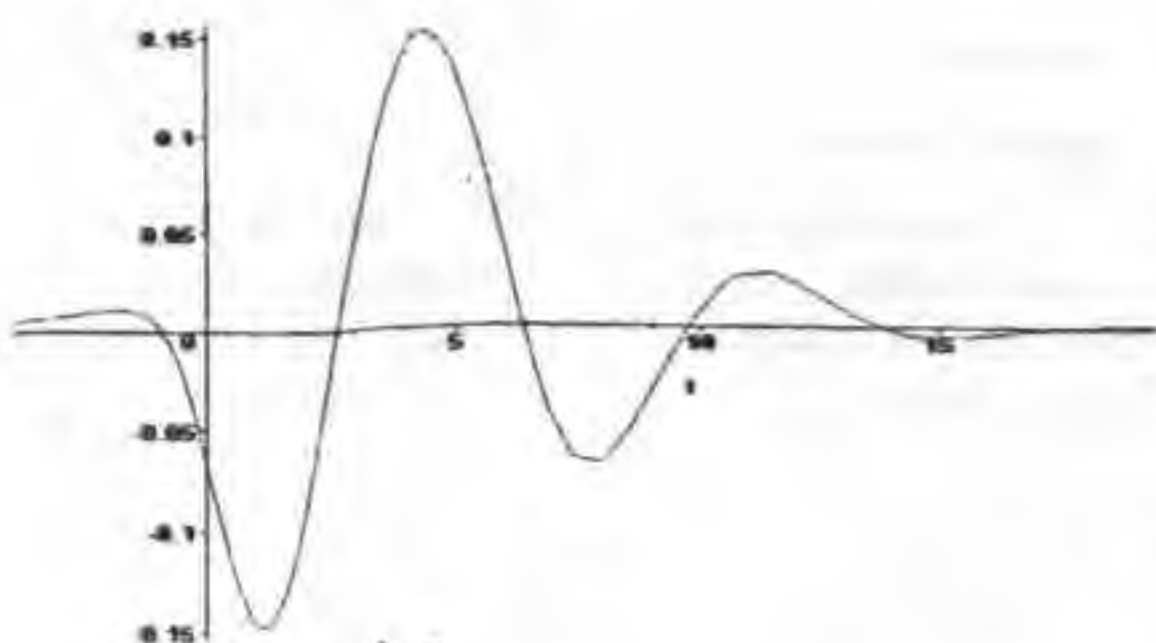


Рисунок 3

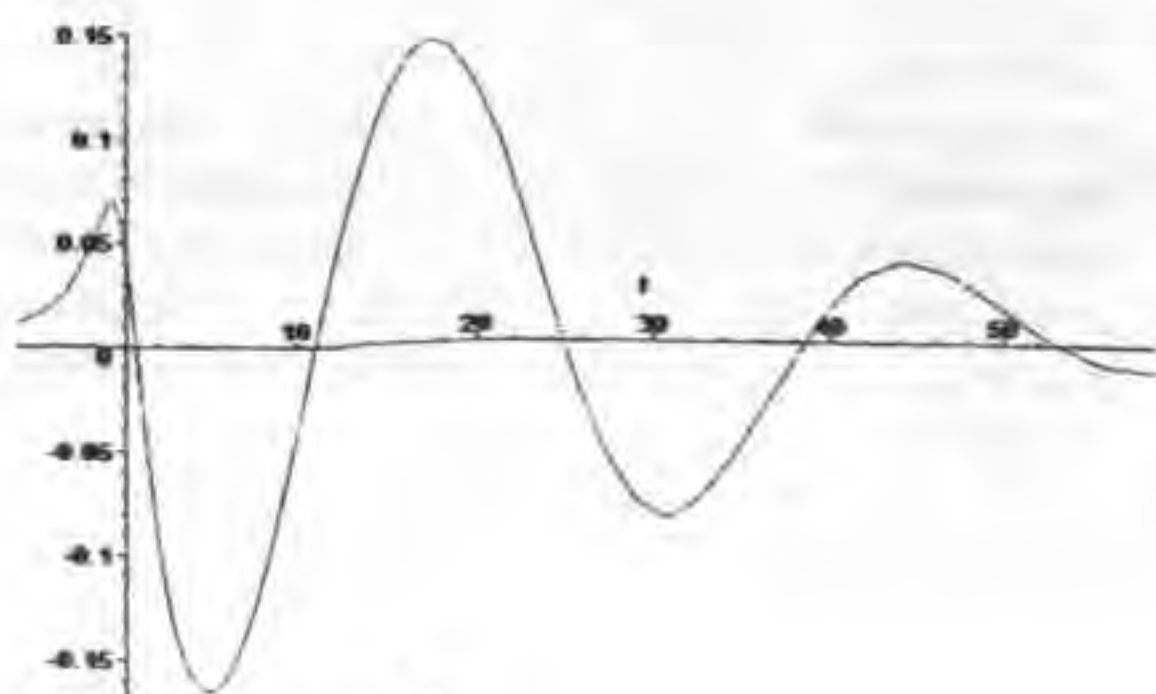


Рисунок 4

На рисунках 1 та 2 наведені профілі вільної поверхні та вектори швидкості, які відповідають значенням параметрів: $k=0.7$, $Fr=1$, $e=0.15$, $\varphi_0 = \pi/6$.

На рисунках 3 – 5 наведені профілі вільної поверхні:

рисунок 3 відповідає значенням параметрів $e=0.15$, $\varphi_0 = \pi/6$, $k=1.5$, $Fr=1$;

рисунок 4 – значенням $e=0.15$, $\varphi_0 = \pi/6$, $k=1.5$, $Fr=2.0$;

рисунок 5 – значенням $e=0.15$, $\varphi_0 = \pi/6$, $k=2.5$, $Fr=2.0$;

Список використаних джерел

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – Москва, Наука, 1977. – 816 с.
2. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. – Киев, Наукова думка, 2002. – 344 с.
3. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – Москва, ГИТТЛ, 1953. – 415 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва, ТОО Янус, 1995. – 520 с.

Надійшла до редколегії 25.03.11

УДК 517.929.4

Кухаренко О.В., аспірант

Умови існування розв'язку першої крайової задачі системи рівнянь із запізнюванням

У даній роботі досліджується перша крайова задача для системи лінійних стаціонарних рівнянь в частинних похідних другого порядку з сталим запізнюванням. Наведено умови збіжності ряду, у вигляді якого записано розв'язок.

Ключові слова: система рівнянь в частинних похідних, перша крайова задача, запізнювання аргументу, збіжність рядів Фур'є.

E-mail: akukharenko@ukr.net

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Запропонована робота є продовженням роботи [1], у якій розглянуті системи лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталим запізнюванням

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_{11}u(x,t) + b_{12}v(x,t) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_{21}u(x,t) + b_{22}v(x,t) \end{cases} \quad (0.1)$$

що визначені при $0 \leq x \leq l$, $t \geq -\tau$, з початковими умовами

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad v(x,t) = \psi(x,t), \quad (0.2)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0$$

та крайовими

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad v(0,t) = \theta_1(t), \\ v(l,t) &= \theta_2(t), \quad t \geq -\tau. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Крім того, виконані «умови узгодженості»

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \varphi(0,t), \quad \mu_2(t) = \varphi(l,t), \quad \theta_1(t) = \psi(0,t), \\ \theta_2(t) &= \psi(l,t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

У роботі [1] отримано формальний розв'язок першої крайової задачі для випадку, коли власні числа матриць дійсні та різні. Розв'язок представлений у вигляді рядів по власних функціях задачі Штурма-Ліувіля. У даній роботі наведені умови збіжності цих рядів. Вони

O.V. Kukharenko, PhD

Existence conditions of solution of the first boundary value problem for system of delay equations

The first boundary value problem for a system of linear stationary delay partial differential equations of the second order has been considered, as in the previous article. Now the obtained solution is studied on convergence and differentiability.

Key Words: partial differential system, first boundary value problem, time delay argument, Fourier series convergence.

накладають значні обмеження на початкові та крайові умови.

Розв'язок першої крайової задачі

У роботі [1] показано, що розв'язок крайової задачі вихідної системи (0.1), що задовольняє умовам (0.2), (0.3) має вигляд

$$\begin{aligned} u(x,t) &= s_{11}\xi(x,t) + s_{12}\eta(x,t), \\ v(x,t) &= s_{21}\xi(x,t) + s_{22}\eta(x,t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де функції $\xi(x,t)$, $\eta(x,t)$ визначені як:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\alpha_1 \tau}, t \right\} e^{\alpha_1 (t+\tau)} \times \right. \\ &\quad \times \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\alpha_1 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \\ &\quad \times e^{\alpha_1 (t-s)} [\Phi_n'(s) - \zeta_1 \Phi_n(s)] ds + \\ &\quad \left. + \int_0^t \exp \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\alpha_1 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \right. \\ &\quad \times e^{\alpha_1 (t-s)} f_n(s) ds \left. \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \bar{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)], \\ \Phi_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds + \frac{2}{\pi n} [(-1)^n \bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)], \\ f_n(t) &= \frac{2}{\pi n} \left[\zeta_1 [(-1)^{n+1} \bar{\mu}_2(t) + \bar{\mu}_1(t)] - \right. \\ &\quad \left. - [(-1)^{n+1} \dot{\bar{\mu}}_2(t) + \dot{\bar{\mu}}_1(t)] \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp_r \left\{ -\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_2 \tau}, t \right\} e^{\zeta_2(t+\tau)} \times \right. \\ & \times \Psi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_r \left\{ -\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_2 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \\ & \times e^{\zeta_2(t-s)} [\Psi'_n(s) - \zeta_2 \Psi_n(s)] ds + \\ & + \int_0^t \exp_r \left\{ -\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_2 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \\ & \times e^{\zeta_2(t-s)} g_n(s) ds \Big\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \bar{\theta}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\theta}_2(t) - \bar{\theta}_1(t)], \\ \Psi_n(t) = & \frac{2}{l} \int_0^t \bar{\psi}(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds + \frac{2}{\pi n} [(-1)^n \bar{\theta}_2(t) - \bar{\theta}_1(t)], \\ g_n(t) = & \frac{2}{\pi n} \left[\zeta_1 [(-1)^{n+1} \bar{\theta}_2(t) + \bar{\theta}_1(t)] - \right. \\ & \left. - [(-1)^{n+1} \bar{\theta}_2(t) + \bar{\theta}_1(t)] \right], \quad n=1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1.3)$$

сталі $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$ є коефіцієнтами неособливої матриці S , що одночасно зводить матриці коефіцієнтів вихідної системи до жорданової форми; а функції $\bar{\varphi}(x, t)$, $\bar{\mu}_1(x, t)$, $\bar{\mu}_2(x, t)$, $\bar{\psi}(x, t)$, $\bar{\theta}_1(x, t)$, $\bar{\theta}_2(x, t)$ знаходяться за співвідношень:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(t) \\ \bar{\theta}_1(t) \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \theta_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mu}_2(t) \\ \bar{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_2(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(t) \\ \bar{\psi}(t) \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

S^{-1} – матриця, обернена до матриці S ; функція $\exp_r \{b, t\}$ називається запізнюючим експоненціалом і має вигляд [2]:

$$\exp_r \{b, t\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < t < -\tau, \\ 1, & \text{якщо } -\tau \leq t < 0, \\ 1 + b \frac{t}{1!}, & \text{якщо } 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ 1 + b \frac{t}{1!} + b^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + \\ + b^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, & \text{якщо } (k-1)\tau \leq t < k\tau. \end{cases}$$

Умови існування розв'язків

Розв'язок першої крайової задачі для системи рівнянь (0.1) представлено у вигляді

суми формальних рядів (1.2), (1.3). Наклавши умови збіжності цих рядів, сформулюємо наступне твердження про розв'язок першої крайової задачі системи рівнянь (0.1). Розглянемо спочатку умови збіжності для ряду (1.2).

Теорема. Нехай функції $\Phi_n(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ і $f_n(t)$, $t \geq 0$ на проміжку $0 \leq t \leq T$, $(k-1)\tau \leq T < k\tau$ задовольняють умовам «швидкої збіжності» за крайовими та початковими умовами:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2(k-1)} \max_{0 \leq t \leq T} |f_n(t)| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} \max_{-\tau \leq t \leq 0} |\Phi_n(t)| &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тоді на проміжку $0 \leq t \leq T$ функція (1.2) збігається абсолютно й рівномірно.

Причому $\xi(x, t)$ має неперервні частинні похідні першого порядку по змінній t і другого порядку по x .

Доведення. Запишемо функцію $\xi(x, t)$ у вигляді суми трьох рядів

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & S_1(x, t) + S_2(x, t) + S_3(x, t) + \\ & + \bar{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)], \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ S_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ S_3(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ A_n(t) &= \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t \right\} e^{\zeta_1(t+\tau)} \Phi_n(-\tau), \\ B_n(t) &= \int_{-\tau}^0 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \\ & \times e^{\zeta_1(t-s)} [\Phi'_n(s) - \zeta_1 \Phi_n(s)] ds, \\ C_n(t) &= \int_0^t \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - \tau - s \right\} \times \\ & \times e^{\zeta_1(t-s)} f_n(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

1. Розглянемо коефіцієнти $A_n(t)$, $n=1, 2, \dots$ першого ряду $S_1(x, t)$. Як слідує з визначення запізнюючого експоненціала [2], для довільного

моменту часу $T: (k-1)\tau \leq T < k\tau$ виконується наступна рівність

$$\begin{aligned} A_n(T) &= \exp_r \left[-\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, T \right] e^{\zeta_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) = \\ &= e^{\zeta_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) \left[1 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau} \frac{T}{1!} + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\zeta_1 \tau} \frac{[T-\tau]^2}{2!} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^k \lambda_1^k \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} e^{-k\zeta_1 \tau} \frac{[T-(k-1)\tau]^k}{k!} \right]. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} S_1(x, T) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(T) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, T \right\} \times \\ &\quad \times e^{\zeta_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= e^{\zeta_1 (T+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ &\quad - \lambda_1 e^{\zeta_1 T} \frac{T}{1!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \lambda_1^2 e^{\zeta_1 (T-\tau)} \frac{[T-\tau]^2}{2!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \dots + \lambda_1^k e^{\zeta_1 (T-(k-1)\tau)} \frac{[T-(k-1)\tau]^k}{(k-1)!} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

І, якщо коефіцієнти $\Phi_n(-\tau)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(-\tau)| = 0,$$

то ряд $S_1(x, T)$ збігається абсолютно й рівномірно.

2. Розглянемо оцінку коефіцієнтів $B_n(t)$, $n=1, 2, 3, \dots$ другого ряду $S_2(x, t)$. Обчислимо другий інтеграл по частинам

$$B_n(t) = -\zeta_1 \int_{-\tau}^0 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - \tau - s \right\} \times$$

$$\times e^{\zeta_1 (t-s)} \Phi_n(s) ds +$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{-\tau}^0 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - \tau - s \right\} e^{\zeta_1 (t-s)} \Phi_n(s) ds = \\ &= \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - \tau \right\} e^{\zeta_1 t} \Phi_n(0) - \\ &\quad - \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t \right\} e^{\zeta_1 (t+\tau)} \Phi_n(-\tau) - \\ &\quad - \int_{-\tau}^0 \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, t - 2\tau - s \right\} \times \\ &\quad \times e^{\zeta_1 (t-s-\tau)} \Phi_n(s) ds = \\ &= B_{n1}(t) - B_{n2}(t) - B_{n3}(t). \end{aligned}$$

Для моменту часу $T: (k-1)\tau \leq T < k\tau$ буде мати місце наступне

$$\begin{aligned} B_{n1}(T) &= \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, T - \tau \right\} e^{\zeta_1 T} \Phi_n(0) = \\ &= e^{\zeta_1 T} \Phi_n(0) \times \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau} \frac{T-\tau}{1!} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\zeta_1 \tau} \frac{[T-2\tau]^2}{2!} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \lambda_1^k \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} e^{-k\zeta_1 \tau} \frac{[T-k\tau]^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} S_{21}(x, T) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{n1}(T) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= e^{\zeta_1 T} \sum_{n=1}^{\infty} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\zeta_1 \tau}, T - \tau \right\} \times \\ &\quad \times \Phi_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = e^{\zeta_1 T} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ &\quad - \lambda_1 e^{\zeta_1 (T-\tau)} \frac{T-\tau}{1!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \Phi_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \lambda_1^2 e^{\zeta_1 (T-2\tau)} \frac{[T-2\tau]^2}{2!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \Phi_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \dots + (-1)^k \lambda_1^k e^{\zeta_1 (T-k\tau)} \frac{[T-k\tau]^k}{k!} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} \Phi_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

І, якщо коефіцієнти $\Phi_n(0)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(0)| = 0,$$

то ряд $S_{21}(x, T)$ збігається абсолютно й рівномірно.

Для коефіцієнтів $B_{n2}(T)$ у момент часу $T: (k-1)\tau \leq T < k\tau$ буде мати місце наступна рівність

$$\begin{aligned} B_{n2}(T) &= \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, T \right\} e^{\gamma_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) = \\ &= e^{\gamma_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) \times \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau} \frac{T}{1!} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\gamma_1 \tau} \frac{[T-\tau]^2}{2!} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \lambda_1^k \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} e^{-k\gamma_1 \tau} \frac{[T-(k-1)\tau]^k}{k!} \right]. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} S_{22}(x, T) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{n2}(T) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, T \right\} \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 (T+\tau)} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= e^{\gamma_1 (T+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x - \\ &\quad - \lambda_1 e^{\gamma_1 T} \frac{T}{1!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \lambda_1^2 e^{\gamma_1 (T-\tau)} \frac{[T-\tau]^2}{2!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &\quad + \dots + (-1)^k \lambda_1^k e^{\gamma_1 (T-(k-1)\tau)} \frac{[T-(k-1)\tau]^k}{(k-1)!} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} \Phi_n(-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

І, якщо коефіцієнти $\Phi_n(-\tau)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} |\Phi_n(-\tau)| = 0,$$

то ряд $S_{22}(x, T)$ збігається абсолютно й рівномірно.

Нарешті, для коефіцієнтів $B_{n3}(T)$ у момент

часу $T: (k-1)\tau \leq T < k\tau$, зробивши заміну $T-2\tau-s=\omega$, одержуємо наступну рівність

$$\begin{aligned} B_{n3}(T) &= \\ &= - \int_{-\tau}^0 \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, T-2\tau-s \right\} \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 (T-s-\tau)} \Phi_n(s) ds = \\ &= -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \int_{T-2\tau}^{T-\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, \omega \right\} \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 (\omega+\tau)} \Phi_n(T-2\tau-\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Розіб'ємо інтеграл на два і запишемо:

$$\begin{aligned} B_{n3}(T) &= -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \int_{T-2\tau}^{(k-2)\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, \omega \right\} \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 (\omega+\tau)} \Phi_n(T-2\tau-\omega) d\omega - \\ &\quad - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \int_{(k-2)\tau}^{T-\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau}, \omega \right\} \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 (\omega+\tau)} \Phi_n(T-2\tau-\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Тому, в силу теореми про середнє, знайдуться величини $\omega_1: T-2\tau \leq \omega_1 \leq (k-2)\tau$, $\omega_2: (k-2)\tau \leq \omega_2 \leq T-\tau$, при який буде виконуватися:

$$\begin{aligned} B_{n3}(T) &= -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{\gamma_1 (\omega_1+\tau)} \Phi_n(T-2\tau-\omega_1) \times \\ &\quad \times (k\tau-T) \left\{ 1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau} \frac{\omega_1}{1!} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_1-\tau]^2}{2!} + \dots + (-1)^{k-2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-2)} e^{-(k-2)\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_1-(k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \right\} - \\ &\quad - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{\gamma_1 (\omega_2+\tau)} \Phi_n(T-2\tau-\omega_2) \times \\ &\quad \times (T-(k-1)\tau) \left\{ 1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau} \frac{\omega_2}{1!} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_2-\tau]^2}{2!} + \dots + (-1)^{k-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-1)} e^{-(k-1)\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_2-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 S_{23}(x, T) = & \sum_{n=1}^{\infty} B_{n3}(T) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \times \\
 & \times \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{\gamma_1(\omega_1 + \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_1) \times \right. \\
 & \times (k\tau - T) \left\{ 1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau} \frac{\omega_1}{1!} + \right. \\
 & + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_1 - \tau]^2}{2!} + \dots + (-1)^{k-2} \times \\
 & \times \lambda_1^{k-2} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-2)} e^{-(k-2)\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_1 - (k-3)\tau]^{k-1}}{(k-2)!} \left. \right\} - \\
 & - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{\gamma_1(\omega_2 + \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) \times \\
 & \times (T - (k-1)\tau) \left\{ 1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 \tau} \frac{\omega_2}{1!} + \right. \\
 & + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 e^{-2\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_2 - \tau]^2}{2!} + \dots + (-1)^{k-1} \times \\
 & \times \lambda_1^{k-1} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-1)} e^{-(k-1)\gamma_1 \tau} \frac{[\omega_2 - (k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \left. \right\} = \\
 = & -\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\gamma_1(\omega_1 + \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_1) (k\tau - T) + \right. \\
 & + e^{\gamma_1(\omega_2 + \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) (T - (k-1)\tau) \times \\
 & \times \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x + \lambda_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\gamma_1 \omega_1} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_1) \times \right. \\
 & + e^{\gamma_1 \omega_2} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) (T - (k-1)\tau) \times \\
 & \times \frac{\omega_2}{1!} \left. \right\} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \sin \frac{\pi n}{l} x - \lambda_1^3 \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\gamma_1(\omega_1 - \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_1) (k\tau - T) \frac{(\omega_1 - \tau)^2}{2!} + \right. \\
 & + e^{\gamma_1(\omega_2 - \tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) (T - (k-1)\tau) \times \\
 & \times \frac{(\omega_2 - \tau)^2}{2!} \left. \right\} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^6 \sin \frac{\pi n}{l} x + \dots + \\
 & + (-1)^{k-1} \lambda_1^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\gamma_1(\omega_1 - (k-3)\tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_1) \times \right. \\
 & \times (k\tau - T) \frac{(\omega_1 - (k-3)\tau)^{k-2}}{(k-2)!} + \\
 & + e^{\gamma_1(\omega_2 - (k-3)\tau)} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) (T - (k-1)\tau) \times \\
 & \times \frac{(\omega_2 - (k-3)\tau)^{k-2}}{(k-2)!} \left. \right\} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k-2} \sin \frac{\pi n}{l} x + (-1)^k \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (T - (k-1)\tau) \frac{(\omega_2 - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\gamma_1(\omega_2 - (k-2)\tau)} \times \\
 & \times \lambda_1^k \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(T - 2\tau - \omega_2) \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2k} \sin \frac{\pi n}{l} x.
 \end{aligned}$$

І, якщо коефіцієнти $\Phi_n(t)$, $0 \leq t \leq T$ такі, що виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k} \max_{-\tau \leq t \leq 0} |\Phi_n(t)| = 0,$$

то ряд $S_{23}(x, T)$ збігається абсолютно й рівномірно.

3. Розглянемо коефіцієнти $C_n(t)$, $n=1, 2, \dots$ ряду $S_3(x, t)$. Для фіксованого моменту часу T : $(k-1)\tau \leq T < k\tau$ зробимо заміну $T - \tau - s = \omega$ й запишемо у вигляді суми

$$\begin{aligned}
 C_n(T) = & \int_0^T \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, T - \tau - s \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(T-s)} f_n(s) ds = \\
 = & \int_{-\tau}^{T-\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, \omega \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(\omega + \tau)} f_n(T - \tau - \omega) d\omega = \\
 = & \int_{-\tau}^0 \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, \omega \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(\omega + \tau)} f_n(T - \tau - \omega) d\omega + \\
 & + \int_0^{\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, \omega \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(\omega + \tau)} f_n(T - \tau - \omega) d\omega + \\
 & + \int_{\tau}^{2\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, \omega \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(\omega + \tau)} f_n(T - \tau - \omega) d\omega + \\
 & + \dots + \int_{(k-2)\tau}^{T-\tau} \exp_r \left\{ -\lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\gamma_1 t}, \omega \right\} \times \\
 & \times e^{\gamma_1(\omega + \tau)} f_n(T - \tau - \omega) d\omega.
 \end{aligned}$$

Використовуючи теорему про середнє, знайдемо моменти часу $-\tau \leq \omega_1 \leq 0$, $0 \leq \omega_2 \leq \tau$, ..., $(k-2)\tau \leq \omega_k \leq T - \tau$ при яких буде виконуватися

$$C_n(T) = \pi e^{\gamma_1(\omega_1 + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_1) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \tau \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\tau_1 \tau} \frac{\omega_2}{1!} \right] e^{\tau_1(\omega_2 + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_2) + \\
 & + \tau \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\tau_1 \tau} \frac{\omega_3}{1!} + \lambda_1^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \times \right. \\
 & \quad \times e^{-2\tau_1 \tau} \frac{[\omega_3 - \tau]^2}{2!} \left. \right] e^{\tau_1(\omega_3 + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_3) + \\
 & \quad + \dots + \tau \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\tau_1 \tau} \frac{\omega_{k-1}}{1!} + \dots + (-1)^{k-2} \times \right. \\
 & \quad \times \lambda_1^{k-2} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-2)} e^{-\tau_1(k-2)\tau} \frac{[\omega_{k-1} - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} \left. \right] \times \\
 & \quad \times e^{\tau_1(\omega_{k-1} + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_{k-1}) + \\
 & + [T - (k-1)\tau] \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\tau_1 \tau} \frac{\omega_k}{1!} + \dots + \right. \\
 & + (-1)^{k-1} \lambda_1^{k-1} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-1)} e^{-\tau_1(k-1)\tau} \times \\
 & \quad \times \frac{[\omega_k - (k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \left. \right] e^{\tau_1(\omega_k + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_k).
 \end{aligned}$$

Звідси одержимо, що

$$\begin{aligned}
 S_3(x, T) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(T) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tau \sum_{i=1}^{k-1} e^{\tau_1(\omega_i + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_i) + \right. \\
 &+ (T - (k-1)\tau) e^{\tau_1(\omega_k + \tau)} f_n(T - \tau - \omega_k) \left. \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x - \\
 &- \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tau \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\omega_i}{1!} e^{\tau_1 \omega_i} f_n(T - \tau - \omega_i) + \right. \\
 &\quad + (T - (k-1)\tau) \frac{\omega_k}{1!} e^{\tau_1 \omega_k} f_n(T - \tau - \omega_k) \left. \right\} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
 &+ \lambda_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tau \sum_{i=3}^{k-1} \frac{[\omega_i - \tau]^2}{2!} e^{\tau_1(\omega_i - \tau)} f_n(T - \tau - \omega_i) + \right.
 \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Кухаренко О.В., Діблік Й., Хусаїнов Д.Я. Зображення розв'язку першої крайової задачі системи рівнянь із сталим запізненням // Вісник

$$\begin{aligned}
 & + (T - (k-1)\tau) \frac{[\omega_k - \tau]^2}{2!} e^{\tau_1(\omega_k - \tau)} f_n(T - \tau - \omega_k) \left. \right\} \times \\
 & \quad \times \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \sin \frac{\pi n}{l} x + \dots + (-1)^{k-2} \lambda_1^{k-2} \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tau \frac{[\omega_{k-1} - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} e^{\tau_1(\omega_{k-1} - (k-3)\tau)} \times \right. \\
 & \quad \times f_n(T - \tau - \omega_{k-1}) + \\
 & + [T - (k-1)\tau] \frac{[\omega_k - (k-3)\tau]^{k-2}}{(k-2)!} e^{\tau_1(\omega_k - (k-3)\tau)} \times \\
 & \quad \times f_n(T - \tau - \omega_k) \left. \right\} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-2)} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
 & + (-1)^{k-1} \lambda_1^{k-1} [T - (k-1)\tau] \frac{[\omega_k - (k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \times \\
 & \quad \times e^{\tau_1(\omega_k - (k-2)\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{2(k-1)} f_n(T - \tau - \omega_k) \sin \frac{\pi n}{l} x.
 \end{aligned}$$

І, якщо коефіцієнти Фур'є $f_n(t)$ такі, що виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2(k-1)} \max_{0 \leq t \leq T} |f_n(t)| = 0,$$

то ряд $S_3(x, t)$ збігається абсолютно й рівномірно.

Таким чином показано, що для абсолютної й рівномірної збіжності рядів $S_1(x, t)$, $S_2(x, t)$, $S_3(x, t)$ потрібно «швидке зменшення» коефіцієнтів Фур'є.

Збіжність рядів, що представляють похідні, слідує з диференційованості запізнюючогося експоненціала [2].

Доведення збіжності рядів, що представляють собою функцію $\eta(x, t)$ проводиться аналогічно. А оскільки розв'язки $u(x, t)$, $v(x, t)$ являють собою лінійні комбінації $\xi(x, t)$, $\eta(x, t)$, то справедливе твердження.

Наслідок. Розв'язок (1.1) збігається абсолютно й рівномірно, і його представлення є дійсним розв'язком крайової задачі (0.1), (0.2), (0.3).

Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 2011. – С. 1-4.

2. Хусаїнов Д.Я., Шуклин Г.В. Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием // Прикладная механика, Т.41, в.2, 2005. – С.118-130.

Надійшла до редколегії 11.03.2011

УДК 519.8

Машенко С.О., к. ф.-м. н. доц.,
Бовсунівський О.М., аспірант

Прийняття рішень за нечіткою множиною відношень переваги

Розглядається задача раціонального вибору альтернатив, у якій ціль особи, що приймає рішення, задана нечіткою множиною нечітких відношень переваги. Уводиться поняття перетину нечіткої множини нечітких відношень та досліджуються його властивості.

Ключові слова: відношення переваги, нечітка множина типу 2, прийняття рішень, раціональний вибір.

*E-mail: msomail@yandex.ru, bovs@email.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Стрімкий розвиток різних галузей інформаційних технологій, економіки, соціальної сфери, важливою рисою яких є їх цілісність, висока складність і наявність невизначених чинників, вимагає створення адекватних розробок у відповідних областях системного аналізу, управління і дослідження операцій. Однією з найважливіших проблем, що виникають в цьому напрямі залишається проблема прийняття багатокритеріальних рішень в умовах нечіткої інформації.

У цій роботі розглядається задача раціонального вибору альтернативи у ситуації, в якій ціль особи, що приймає рішення (ОПР) задана нечіткою множиною нечітких відношень переваги. Такі моделі узагальнюють задачі прийняття рішень, в яких ціль ОПР характеризуються чіткою множиною як чітких, так і нечітких відношень переваги і, зокрема функцій або нечітких відображень, що оптимізуються на множині альтернатив (чіткій або нечіткій). З одного боку, таке узагальнення дозволяє аналізувати ситуації у випадку якщо неможливо побудувати функції корисності ОПР, а з іншого – допомагає глибше та більш точно зрозуміти процес прийняття рішень, шляхи пошуку та вибору раціональних альтернатив в умовах нечіткої інформації.

Нехай ОПР може порівняти будь-яку пару альтернатив x, y з множини X евклідового простору E за нечіткими відношеннями переваги: $R_i \subseteq X \times X$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. Ці відношення переваги можна розуміти як певні критерії, за якими ОПР порівнюються

S.O.Mashchenko, C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.,
O.M.Bovsunivskiy*, Postgrad. Stud.

Decision making on the fuzzy set of preference relations

The problem of rational choice of alternatives, in which the purpose of person which makes decision is set by the fuzzy set of fuzzy relations of preference, is considered. Notion of intersection of fuzzy set of fuzzy relations is proposed and his properties are explored.

Keywords: a relation of preference, a fuzzy set of type 2, decision making, rational choice.

альтернативи з точки зору досягнення її цілі. Нечітке відношення переваги R_i будемо розглядати в досить широкому розумінні як рефлексивне нечітке бінарне відношення, що задається функцією належності $r_i: X \times X \rightarrow [0, 1]$, $i \in N$.

Якщо ОПР чітко уявляє собі, що її ціль полягає у виборі альтернативи, яка буде "найкращою" саме за множиною N відношень переваги (критеріїв) R_i , $i \in N$, то ми одержимо вже відому задачу [1] раціонального вибору альтернатив за нечітким відношенням переваги $R = \bigcap_{i \in N} R_i$.

За підходом С. Орловського [1] загальним розв'язком цієї задачі вважається нечітка множина недовідомих альтернатив $ND \subseteq X$, яка задається функцією належності $\mu_{ND}(x) = 1 - \max_{y \in X} (r(y, x) - r(x, y))$, де $r: X \times X \rightarrow [0, 1]$ – функція належності нечіткого відношення R , причому $r(x, y) = \min_{i \in N} r_i(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Якщо ОПР цікавить якась конкретна альтернатива, то раціональним вибором вважається, так звана, максимізуюча альтернатива, яка задовольняє умові $x^* = \arg \max_{x \in X} \mu_{ND}(x)$.

Іноді ОПР не може чітко вказати, які нечіткі відношення переваги R_i , $i \in N$, характеризують її ціль, але може задати деяку нечітку підмножину $\tilde{N} \subseteq N$ цих відношень. Відмітимо, що множину N доцільно буде називати далі

універсальною множиною індексів критеріїв.

Наприклад, якщо покупець вибирає товар, який, у принципі, можна оцінити за: ціною, калорійністю, якістю, свіжістю, престижністю, - то необов'язково всі ці критерії зі ступенем належності, який дорівнює одиниці, будуть характеризувати його ціль. Тому цей покупець може задати деяку нечітку підмножину множини критеріїв, яка буде адекватно характеризувати його ціль.

Позначимо $\eta: N \rightarrow [0,1]$ функцію належності нечіткої множини $\tilde{N}$ відношень переваги R_i , які характеризують ціль ОПР. Тоді загалом її ціль може бути заданою перетином $\tilde{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких відношень R_i , $i \in N$. Визначимо це поняття відповідно до підходу, який був запропонований у [2].

Нехай $r_j: X \times X \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткого відношення R_j , $j \in N$. Спочатку розглянемо множину $R = \bigcap_{i \in N} R_i$, яка є перетином чіткої множини N нечітких відношень переваги R_i , $i \in N$. За класичною теорією [3] вона є нечіткою множиною, яка задається функцією належності $r(x, y) = \min_{j \in N} r_j(x, y)$, $x, y \in X$. Неважко побачити, що значення функції належності $r(x, y)$ при кожній фіксованій парі значень альтернатив $x, y \in X$ фактично визначається як значення цільової функції тривіальної задачі "чіткого" математичного програмування $r = \min_{j \in N} r_j$ (у цьому записі для наочності сприйняття не вказані фіксовані значення $x, y \in X$).

Розглянемо тепер перетин $\tilde{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких відношень R_i , $i \in N$. Узагальнення класичної операції перетину чіткої множини N нечітких відношень переваги природно приводить до того, що множина $\tilde{R}$ задається функцією належності

$$\tilde{r}(x, y) = \min_{j \in N} r_j(x, y), \quad x, y \in X. \quad (1)$$

Цілком зрозуміло, що значення цієї функції належності $\tilde{r}$ для кожної фіксованої пари значень альтернатив $x, y \in X$ буде визначатися як значення цільової функції задачі нечіткого математичного програмування:

$$\tilde{r} = \min_{j \in N} r_j \quad (2)$$

(у цьому записі, як і у попередньому випадку, також не вказані фіксовані значення $x, y \in X$).

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо добре вивчені. За С. Орловським [1], розв'язком задачі (2) вважається нечітка множина $\tilde{N}^\cap$, носієм якої є множина оптимальних за Парето розв'язків (позначимо її через $N^\cap$) двокритеріальної задачі:

$$r_i \rightarrow \min, \quad \eta(i) \rightarrow \max, \quad i \in N. \quad (3)$$

Функцією належності $\eta^\cap$ нечіткої множини $\tilde{N}^\cap$ є звуження функції належності $\eta(i)$, $i \in N$, з універсальної множини індексів критеріїв N на множину $N^\cap$. Іншими словами ця функція належності має такий вигляд:

$$\eta^\cap(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^\cap, \\ 0, & i \notin N^\cap. \end{cases}$$

Відповідно до розв'язку задачі (2), яким є нечітка множина $\tilde{N}^\cap$, за [1] визначається нечітка множина $\mathfrak{N}$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі. Вона задається функцією належності $\rho: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\rho(z) = \max_{r_j=z} \eta^\cap(j)$, $z \in [0,1]$. Варто відмітити, що функція належності $\rho(z)$, $z \in [0,1]$, нечіткої множини $\mathfrak{N}$ оптимальних значень цільової функції задачі (2) визначена на відрізку $[0,1]$. Це пояснюється тим, що цей відрізок є максимально можливою множиною значень функції належності $\tilde{r}(x, y) = \min_{j \in N} r_j(x, y)$ нечіткого відношення $\tilde{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ при будь-яких фіксованих альтернативах $x, y \in X$.

Таким чином, для кожної фіксованої пари альтернатив $x, y \in X$ значення функції належності (1) нечіткого відношення $\tilde{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ утворює також нечітку множину. Звідси випливає, що нечітке відношення $\tilde{R}$ є, так званім [3], нечітким відношенням типу 2.

Зроблені нами дослідження дозволяють тепер формалізувати поняття перетину $\tilde{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких відношень R_i , $i \in N$.

Для довільної пари альтернатив $x, y \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується критеріями задачі (3) на універсальній множині індексів N .

Будемо говорити, що індекс $i \in N$ домінує індекс $j \in N$ для пари альтернатив $x, y \in X$ і позначати це $i \succ^{(x,y)} j$, якщо мають місце такі нерівності: $r_i(x, y) \leq r_j(x, y)$, $\eta(i) \geq \eta(j)$, і хоча б одна з них є строгою.

Це поняття дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двокритеріальної задачі (3), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі (2). Для довільних $x, y \in X$ позначимо цей носій

$$N^\cap(x, y) = \left\{ i \in N \mid j \not\succ^{(x,y)} i, \forall j \in N \right\}. \tag{4}$$

Для довільних $x, y \in X$, $i \in N$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (2):

$$\eta^\cap(x, y, i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^\cap(x, y), \\ 0, & i \notin N^\cap(x, y), \end{cases} \tag{5}$$

Тоді, перетином нечіткої множини $\hat{N}$ нечітких відношень R_i , $i \in N$, будемо називати $\bar{R} = \bigcap_{i \in N} R_i$ - нечітке відношення типу 2, яке задається трійками $(x, y, \bar{r}(x, y, z))$, де x, y - елементи множини альтернатив X , а $\bar{r}(x, y, z)$ - його функція належності, $\bar{r}: X \times X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, яка визначена таким чином:

$$\bar{r}(x, y, z) = \max_{i \in N} \{ \eta^\cap(x, y, i) \mid r_i(x, y) = z \}, \tag{6}$$

якщо $\exists i \in N$, $r_i(x, y) = z$, $z \in [0, 1]$;

$$\bar{r}(x, y, z) = 0, \tag{7}$$

якщо $r_i(x, y) \neq z, \forall i \in N$, $z \in [0, 1]$.

Обчислення функція належності $\bar{r}(x, y, z)$ за формулами (4)-(7) можна спростити, якщо використати наступну теорему.

Теорема 1. Нехай R_i , $i \in N$, - деякі нечіткі відношення переваги визначені на множині альтернатив X , які задаються функціями належності $r_i(x, y)$, $x, y \in X$, $i \in N$; $\tilde{N}$ - нечітка підмножина N з функцією належності $\eta(i)$, $i \in N$. Тоді функція належності нечіткого

відношення $R = \bigcap_{i \in N} R_i$ типу 2 задається такою формулою:

$$r(x, y, z) = \begin{cases} \max_{i \in N^\cap(x, y, z)} \eta(i), & N^\cap(x, y, z) \neq \emptyset, \\ 0, & N^\cap(x, y, z) = \emptyset, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} N^\cap(x, y, z) &= \{ i \in N \mid r_i(x, y) = z, \\ z &= \min_{i \in N} \{ r_i(x, y) \mid \eta(i) \geq \eta(j) \}, \\ \eta(i) &= \max_{j \in N} \{ \eta(j) \mid r_j(x, y) \leq z \} \}, \end{aligned} \tag{9}$$

$\forall x, y \in X$, $z \in [0, 1]$.

Доведення. Для доведення теореми необхідно показати, що $r(x, y, z) = \bar{r}(x, y, z)$ для $\forall x, y \in X$, $z \in [0, 1]$.

Припустимо, що для деяких $x, y \in X$, $z \in [0, 1]$ $N^\cap(x, y, z) = \emptyset$. Тоді за (8) $r(x, y, z) = 0$, а за (9) для $\forall i \in N$ повинна виконуватись хоча б одна з наступних умов:

$$\begin{aligned} r_i(x, y) &\neq z, & (2) \\ \exists j \in N : r_j(x, y) > r_i(x, y), & \eta(j) \geq \eta(i), & (10) \\ \exists j \in N : \eta(i) < \eta(j), & r_j(x, y) \leq r_i(x, y). & (11) \end{aligned} \tag{12}$$

Якщо виконується умова (10), то за (7) одержимо $\bar{r}(x, y, z) = 0$. Якщо виконується умова (11) або (12), то $j \succ^{(x,y)} i$. Тоді за (4) $i \notin N^\cap(x, y)$. Звідси за (5) $\eta^\cap(x, y, i) = 0$. Тому за (6) одержимо також $\bar{r}(x, y, z) = 0$. Таким чином, $r(x, y, z) = \bar{r}(x, y, z) = 0$.

Припустимо, що для деяких $x, y \in X$, $z \in [0, 1]$ $N^\cap(x, y, z) \neq \emptyset$. Звідси за (8) одержимо $r(x, y, z) = \max_{i \in N^\cap(x, y, z)} \eta(i)$. Позначимо

$i^* = \arg \max_{i \in N^\cap(x, y, z)} \eta(i)$. Тоді з (9) випливає, що:

$$r_{i^*}(x, y) = z, \quad j \not\succ^{(x,y)} i^*, \quad \forall j \in N. \tag{13}$$

Тому за (4) $i^* \in N^\cap(x, y) \neq \emptyset$, $\eta^\cap(x, y, i^*) = \eta(i^*)$. Звідси $\bar{r}(x, y, z) \geq \eta(i^*)$.

Покажемо, що $\bar{r}(x, y, z) = \eta(i^*)$. Припустимо супротивне, що $\bar{r}(x, y, z) > \eta(i^*)$. Позначимо $j^* = \arg \max_{i \in N} \{ \eta^\cap(x, y, i) \mid r_i(x, y) = z \}$. Тоді

$\eta(j^*) > \eta(i^*)$, $r_{j^*}(x, y) = z$ і за (5) $j^* \in N^{\cap}(x, y)$.
Оскільки за (13) $r_{i^*}(x, y) = z$, то $r_{j^*}(x, y) =$
 $= r_{i^*}(x, y)$. Тому $j^* \neq i^*$. Звідси $j^* \notin N^{\cap}(x, y)$.
Одержали суперечність. Таким чином,
 $\bar{r}(x, y, z) = \eta(i^*) = r(x, y, z)$. Теорему доведено.

Для ілюстрації перетину нечіткої множини
нечітких відношень розглянемо такий приклад.

Приклад 1. Нехай, множина альтернатив X
складається з двох альтернатив: a та b . На цій
множині задані два нечітких відношення
переваги R_1, R_2 з функціями належності
відповідно $r_1(x, y)$ та $r_2(x, y)$, значення яких
вказані у табл.1. Нехай також задана нечітка
підмножина $\bar{N}$ множини індексів цих відношень
 $N = \{1, 2\}$ функцією належності $\eta(i)$, $i \in N$, із
значеннями: $\eta(1) = 0.5$, $\eta(2) = 0.8$. Знайдемо
перетин $\bar{R} = \bigcap_{i \in \bar{N}} R_i$ нечіткої множини $\bar{N}$
нечітких відношень R_1, R_2 .

В табл.1 також вказані множини $N^{\cap}(x, y)$,
 $x, y \in X$ та функція належності $\eta^{\cap}(x, y, i)$,
 $x, y \in X$, $i \in N$. Значення функції належності
 $\bar{r}(x, y, z)$ нечіткого відношення $\bar{R}$ типу 2 вказані
в табл. 2.

Слід зазначити, що в табл. 2 записані лише ті
значення змінної $z \in [0, 1]$, які відповідають
апріорі не нульовим значенням функції
належності $\bar{r}(x, y, z)$.

Перейдемо до побудови розв'язку задачі

раціонального вибору альтернатив за нечітким
відношенням типу 2 переваги $\bar{R} = \bigcap_{i \in \bar{N}} R_i$.

Якщо узагальнити підхід С. Орловського [1]
на випадок завдання цілі задачі прийняття
рішень нечітким відношенням типу 2, то
загальним розв'язком задачі раціонального
вибору альтернатив слід вважати нечітку
множину $ND = \{x \in X \mid y \bar{S} x, \forall y \in X\}$ типу 2
недомінованих альтернатив за відношенням
 $S = \bar{R} \setminus \bar{R}^{-1}$, яке є асиметричною частиною
нечіткого відношення $\bar{R}$.

Позначимо $\bar{r}: X \times X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ - функцію
належності $\bar{R}$. Тоді функція належності S ,
відповідно до [3], буде мати вигляд:

$$s(x, y, z) = \max \left\{ \max_{w \in [1-z, 1]} \min \{ \bar{r}(x, y, w), \bar{r}(y, x, 1-z) \}, \right. \\ \left. \max_{w \in [1-z, 1]} \min \{ \bar{r}(x, y, 1-z), \bar{r}(y, x, w) \} \right\}, x, y \in X, \\ z \in [0, 1].$$

Таким чином, функція належності нечіткої
множини ND типу 2 за [3] прийме вигляд:

$$\mu_{ND}(x, z) = \max \left\{ \max_{u, v \in X} \min_{w \in [1-z, 1]} \{ s(u, x, w), \right. \\ \left. s(v, x, 1-z) \} \right\}, x \in X, z \in [0, 1], \quad (14)$$

Для прикладу 1 функції належності нечіткого
відношення типу 2 s та нечіткої множини типу
2 μ_{ND} наведені відповідно у табл. 3 та табл. 4.

Оскільки ОПР може цікавити конкретна
альтернатива, то виникає задача її раціонального

Таблиця 1

Функції та множини

(x, y)	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
$r_1(x, y)$	1	0.5	0.3	1
$r_2(x, y)$	1	0.3	1	1
$N^{\cap}(x, y)$	{2}	{2}	{1, 2}	{2}
$\eta^{\cap}(x, y, 1)$	0	0	0.5	0
$\eta^{\cap}(x, y, 2)$	0.8	0.8	0.8	0.8

Таблиця 2

Функція належності $\bar{r}(x, y, z)$

z	(x, y)			
	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
0	0.8	0	0	0.5
0.3	0	0.8	0.5	0
0.5	0	0	0	0
1	0.8	0	0.8	0.8

вибору з нечіткої множини ND типу 2.
Цілком зрозуміло, що для ОПР важливо вибрати альтернативу, яка з одного боку буде максимізувати нечітке значення $z \in [0,1]$ ступеню її недовіри, а, з іншого боку, максимізувати значення μ_{ND} , що характеризує ступінь належності z нечіткій множині її значень.
Таким чином, можна сформулювати наступну двокритеріальну задачу:

$$z \rightarrow \max, \mu_{ND}(x, z) \rightarrow \max, x \in X, z \in [0,1].$$

Позначимо $x^* \in X, z^* \in [0,1]$ – розв’язок цієї задачі, тоді значення z^* характеризує ступінь недовіри альтернативи x^* , а значення $\mu_{ND}(x^*, z^*)$ – ступінь належності z^* нечіткій множині з функцією належності $\mu_{ND}(x^*, z)$, $z \in [0,1]$. Для того, щоб відрізнити ці поняття величину $\mu_{ND}(x^*, z^*)$ далі будемо називати достовірністю ступеня недовіри z^* альтернативи x^* .

В залежності від способу порівняння альтернатив [4] за критеріями двокритеріальної задачі (14) розглянемо два означення.

Альтернативу $x^* \in X$, яка є недовіреною зі ступенем z^* з достовірністю $\mu_{ND}(x^*, z^*)$ будемо називати нечіткою слабо-ефективною альтернативою (їх множину позначимо $S(X)$), якщо $\forall x \in X \forall z \in [0,1]$, для яких:

$$\mu_{ND}(x, z) > \mu_{ND}(x^*, z^*), z > z^*.$$

Альтернативу $x^* \in X$, яка є недовіреною зі ступенем z^* з достовірністю $\mu_{ND}(x^*, z^*)$ будемо називати нечіткою ефективною альтернативою (їх множину позначимо $P(X)$), якщо $\forall x \in X \forall z \in [0,1]$, для яких

$$\text{або } \mu_{ND}(x, z) \geq \mu_{ND}(x^*, z^*), z > z^*,$$

$$\text{або } \mu_{ND}(x, z) > \mu_{ND}(x^*, z^*), z \geq z^*.$$

Цілком зрозуміло, що $S(X) \supseteq P(X)$.

Для прикладу 1 за табл. 4 неважко перевірити, що альтернатива b є єдиною нечіткою ефективною альтернативою із ступенем недовіри 0.8 з достовірністю 1.

У загальному випадку, ті альтернативи, що мають максимальну ступінь недовіри, можуть мати низьку достовірність цього ступеня і навпаки.

З відомої теореми В. Подиновського [4] як наслідок випливає критерій ефективності альтернативи.

Наслідок. Альтернатива $x^* \in X$, яка є недовіреною зі ступенем z^* з достовірністю $\mu_{ND}(x^*, z^*)$, є ефективною тоді й лише тоді, коли вона є оптимальним розв’язком пари таких оптимізаційних задач:

$$\begin{aligned} \mu_{ND}(x, z) &\rightarrow \max, \\ z &\in [z^*, 1], x \in X; \end{aligned} \tag{15}$$

Таблиця 3

Функція належності $s(x, y, z)$				
z	(x, y)			
	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
0	0.8	0	0.8	0.8
0.3	0	0.5	0.5	0
0.5	0	0	0	0
0.7	0	0	0.8	0
1	0.8	0	0.8	0.5

Таблиця 4

Функція належності $\mu_{ND}(x, z)$		
z	x	
	a	b
0	0.8	0.5
0.3	0.8	0
0.5	0	0
0.7	0.5	0.5
1	0	0.8

$$z \rightarrow \max$$

$$\mu_{ND}(x, z) \geq \mu_{ND}(x^*, z^*), \quad (16)$$

$$z \in [0, 1], \quad x \in X.$$

Побудова усієї множини нечітких ефективних альтернатив є досить складною задачею, але оскільки часто ОПР цікавить вибір конкретної альтернативи, то у цьому немає необхідності.

Одним з можливих варіантів раціонального вибору альтернатив можна вважати використання однієї з задач (15), (16).

Спочатку розглянемо задачу пошуку нечіткої альтернативи x^* , яка максимізує достовірність μ_{ND} ступеня недовіри z , не меншого за задану величину $\bar{z} \in [0, 1]$, тобто:

$$\mu_{ND}(x, z) \rightarrow \max, \quad (17)$$

$$z \in [\bar{z}, 1], \quad x \in X;$$

Справедливе таке твердження.

Твердження 1. Нехай пара (x^*, z^*) є розв'язком задачі (17) для деякого значення $\bar{z} \in [0, 1]$. Тоді x^* є слабо-ефективною альтернативою, яка є недовіреною зі ступенем z^* з достовірністю $\mu_{ND}(x^*, z^*)$.

Доведення. Позначимо μ^* максимальне значення цільової функції задачі (17). Припустимо супротивне, що $x^* \notin S(X)$. Тоді за означенням $\exists \hat{x} \in X \exists \hat{z} \in [0, 1]$, для яких виконуються нерівності: $\mu_{ND}(\hat{x}, \hat{z}) > \mu_{ND}(x^*, z^*)$, $\hat{z} > z^*$. Оскільки за умовою задачі (17) $\bar{z} \leq z^* \leq 1$, то $\bar{z} \leq z^* < \hat{z} \leq 1$. Тому пара $(\hat{x}, \hat{z})$ задовольняє умовам задачі (17), а $\mu_{ND}(\hat{x}, \hat{z}) > \mu^*$. Одержали суперечність. Твердження доведене.

Тепер розглянемо задачу пошуку нечіткої альтернативи x^* з максимальним ступенем недовіри z , що має достовірність μ_{ND} , не меншу за задану величину $\bar{\mu} \in [0, 1]$, тобто:

$$z \rightarrow \max$$

$$\mu_{ND}(x, z) \geq \bar{\mu}, \quad (18)$$

$$z \in [0, 1], \quad x \in X.$$

Справедливе таке твердження.

Твердження 2. Нехай пара (x^*, z^*) є розв'язком задачі (18) для деякого значення $\bar{\mu} \in [0, 1]$. Тоді x^* є слабо-ефективною альтернативою, яка є недовіреною зі ступенем

z^* з достовірністю $\mu_{ND}(x^*, z^*)$.

Доведення. Відмітимо, що z^* є максимальним значенням цільової функції задачі (18). Припустимо супротивне, що $x^* \notin S(X)$. Тоді за означенням $\exists \hat{x} \in X \exists \hat{z} \in [0, 1]$, для яких виконуються нерівності: $\mu_{ND}(\hat{x}, \hat{z}) > \mu_{ND}(x^*, z^*)$, $\hat{z} > z^*$. Оскільки за умовою задачі (18) $\mu_{ND}(x^*, z^*) \geq \bar{\mu}$, то $\mu_{ND}(\hat{x}, \hat{z}) > \mu_{ND}(x^*, z^*) \geq \bar{\mu}$. Тому пара $(\hat{x}, \hat{z})$ задовольняє умовам задачі (18), а $\hat{z} > z^*$. Одержали суперечність. Твердження доведене.

У закінченні слід відмітити, що розглянутий у цій роботі підхід до "раціонального" вибору альтернатив за множиною нечітких відношень переваги є іншим поглядом на цю проблему, ніж метод, який був розвинений у роботах С. Орловського, зокрема в [1], з використанням вагових коефіцієнтів, які характеризують перевагу ОПР на множині критеріальних відношень переваги.

Слід також відмітити, що нова операція перетину нечіткої множини нечітких відношень, яка формалізована в цій роботі, представляє самостійний інтерес і може бути використаною в різних нових постановках задач прийняття рішень.

Також варто зазначити, що поняття нечітких ефективних альтернатив буде коректним і несе певний інтерес і для задачі прийняття рішень з ціллю, яка буде задаватися нечіткою множиною чітких відношень переваги.

Список використаних джерел

1. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981. - 208 с.
2. Мащенко С. О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия // Кибернетика и вычислительная техника. - 2010. - Вып. 159. - с. 19 - 29.
3. Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. - В кн. : Математика сегодня. - М. : Знание, 1974, с. 5 - 49.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М. : Наука, 1982. - 255 с.

Надійшла до редколегії 28.03.11

УДК 519.168

Порхун О.В., к.ф.-м.н., асист.

Інтерпретація результатів атрибуції художніх творів системою *Attributer*

В статті описано розроблену автоматичну систему атрибуції текстів *Attributer* та розглядається її застосування при атрибуції художніх творів російських письменників. Пропонуються нові підходи для інтерпретації отриманих результатів системою *Attributer*.

Ключові слова: нейронна мережа прямого розповсюдження, алгоритм пошуку оптимальної вибірки, радіус класу, щільність класу.

E-mail: elena_porkhun@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Побудова автоматичної системи атрибуції текстів *Attributer*

Для розробки автоматичної системи атрибуції текстів *Attributer* була використана нейронна мережа прямого розповсюдження з навчанням методом зворотнього розповсюдження помилки (backpropagation learning).

У системі *Attributer* архітектура нейронної мережі формується користувачем. Для побудови нейронної мережі необхідно вказати кількість шарів нейронів, кількість блоків у шарі та кількість нейронів у кожному блоці. Архітектура нейронної мережі прямого розповсюдження передбачає наявність зв'язків між кожними сусідніми шарами мережі, при чому кожний нейрон блоку з'єднаний з усіма нейронами блоків сусідніх шарів.

Поділ внутрішніх шарів на блоки реалізовано з метою можливості застосування для нейронів одного шару різних активаційних функцій. Це дозволить виявляти розподіл параметрів вхідного вектору. За допомогою вибраних функцій мережа реагує на певні закономірності у розподілі значень ознак подібних текстів, тим самим, дозволяючи визначити клас (автора), до якого належить даний текст.

Для кожного тексту, який необхідно класифікувати, на вхід мережі подається сформований вектор ознак. Кількість нейронів вхідного шару мережі дорівнює розмірності

E.V. Porkhun, PhD.

Interpreting results of art texts attribution by the automatic system *Attributer*

In this paper the developed automatic system of texts attribution *Attributer* is described. Using the system *Attributer* for attribution of art texts of Russian authors is considered. The approaches for interpreting results of the system *Attributer* is offered.

Key Words: feedforward neural network, algorithm for search of optimum selection, radius of class, density of class.

даного вектора. Вихідному шару нейронів відповідає одиничний вектор з єдиною одиничною компонентою, яка вказує номер класу (автора), до якого належить текст, що класифікується. Вихідні вектори для кожного прикладу навчальної вибірки задаються у вхідному файлі. Кількість нейронів вихідного шару дорівнює розмірності даних векторів, тобто числу класів, які для даної навчальної вибірки визначив дослідник.

У системі *Attributer* реалізовано механізм скорочення об'єму текстів до певного числа слів. Користувачу пропонуються наступні варіанти:

- використовувати вихідні об'єми текстів;
- об'єм текстів задається по замовчуванню (2000 слів);
- завдання об'єму текстів (в кількості слів).

При завданні обмеження на об'єм тексти скорочуються до вказаної кількості слів, але зі збереженням цілісності останнього речення. При досягненні лічильником вказаного числа слів перевіряється, чи є останнє слово останнім у реченні. Якщо ні, то у скорочений текст заноситься решта всіх слів до кінця речення. Це робиться з метою збереження змісту речення, тим самим забезпечуючи повне визначення його характеристик.

Тестування системи *Attributer*

Для тестування можливостей розробленої системи її було застосовано для вирішення задачі атрибуції літературних творів. В якості ознак текстів вибірки були вибрані дані результуючих частотних словників текстів, частки появи службових слів та група наступних синтаксичних ознак:

- частка появи внутрішніх розділових знаків (двокрапка, кома, тире, крапка з комою, дужки, лапки);
- частка появи зовнішніх розділових знаків (крапка, знак оклику, знак питання, багатокрапка, комбінація знаків оклику та знаків питання);
- середня довжину речення (середня кількість слів у реченні);
- частка слів певної довжини (довжини слів з однієї літери, з 2-х і т.д. до 10);
- частка речень певної довжини (з одного слова, з 2-х слів і т.д. до 30).

Результуючий частотний словник тексту будується в результаті перетину корпусного частотного словника та частотного словника даного тексту.

Для вирішення задачі атрибуції заданої вибірки текстів була сформована архітектура нейронної мережі, зображена на рис.1. Дана нейронна мережа складається з 3 шарів – вхідного, внутрішнього та вихідного. Внутрішній шар розділений на 3 блоки нейронів. Кількість нейронів однакова для кожного блоку; у даній мережевій архітектурі число нейронів у блоці дорівнює 35. Для кожного блоку нейронів в якості функції виходу були використані відповідно такі функції: $\exp(-x^2)$, $1-(\exp(-x^2))$ та $\tanh(x)$. Для вихідного шару нейронів використана сигмоїдна функція: $1/(1+\exp(-x))$.

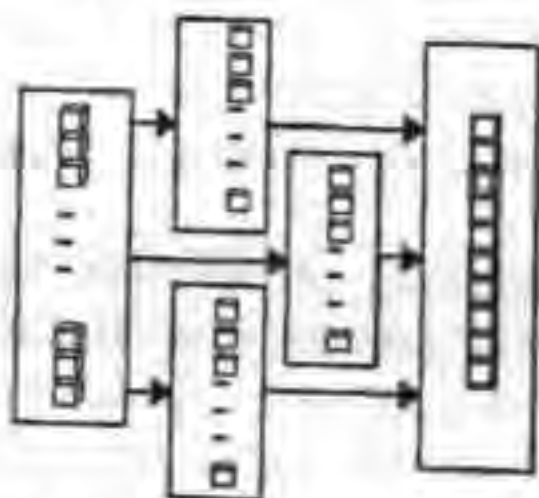


Рис. 1. Архітектура нейронної мережі

Налаштування мережі з даною архітектурою реалізовано з використанням методу зворотнього розповсюдження помилки (backpropagation learning) та алгоритмів *A1* та *A2* [1].

Різномірні групи параметрів, за якими із застосуванням алгоритмів *A1* та *A2* будується вхідний вектор ознак для тексту, що класифікується, складають ознаки, описані в [2]:

- частоти слів з результуючих частотних словників текстів вибірки + частоти виділених службових слів;
- ознаки 3-8, що визначені в [2, с. 11].

Точці 0 з відрізка $[0, 1]$, на якому відбувається пошук точки η , відповідає вектор, сформований із ознак першої групи, точці 1 – вектор з ознаками другої групи.

Навчання та тестування системи проводилось на текстах з обмеженням об'єму до 2000 слів. Навчальна вибірка, що використовувалась, включала 100 художніх творів наступних авторів (по 10 творів кожного автора): О.Пушкіна, В.Набокова, М.Горького, М.Булгакова, І.Тургенєва, Л.Толстого, А.Чехова, М.Шолохова, Ф.Достоевського, М.Гоголя.

В якості тестового прикладу, що використовувався налаштованою мережею на кожному етапі алгоритму пошуку оптимальної вибірки, був вибраний уривок з твору В.Набокова "Встреча"; вектор ознак, сформований для цього тексту, використовувався мережею як навчальний приклад з навчальної вибірки. Об'єм уривку (кількість слів) складає половину об'єму всього тексту, який використовувався при навчанні системи. З рис. 2 видно, що при точці з відрізка $[0, 1]$, що дорівнює 0.65625 , досягається кращий за критерієм оцінки навчання нейронної мережі результат.

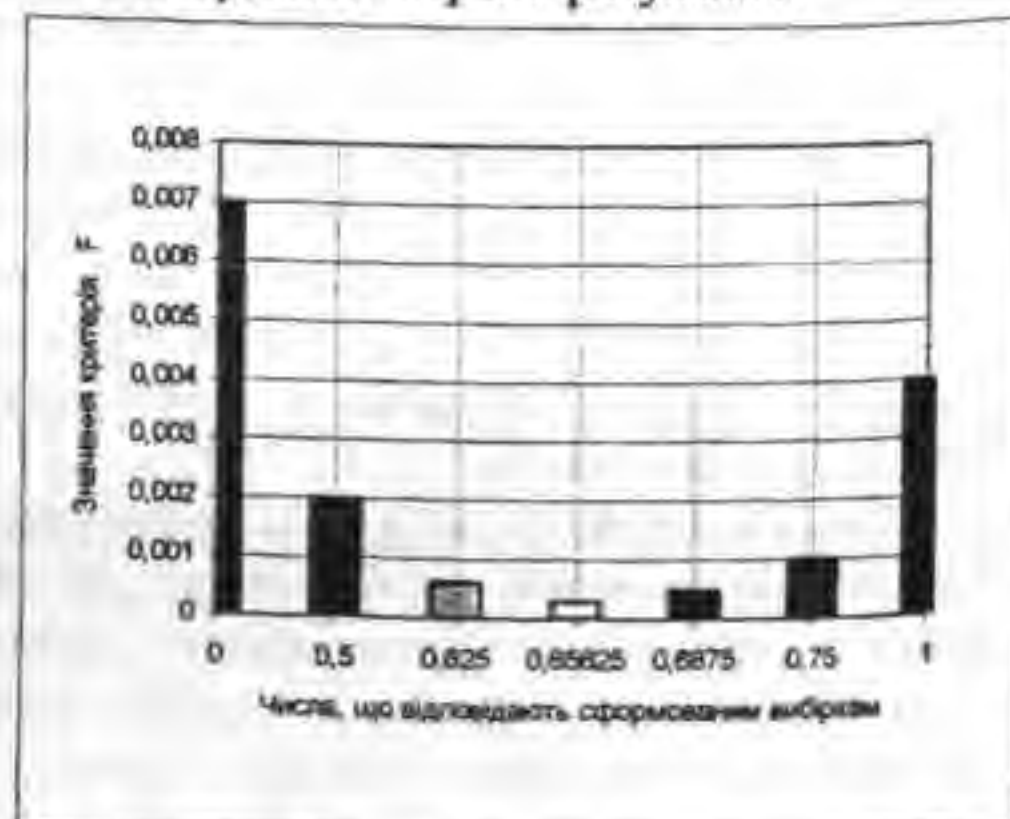


Рис. 2. Пошук оптимальної вибірки

З наведених результатів випливає, що для класифікації даної навчальної вибірки (таблиця 1) більш визначальною є група синтаксичних ознак, оскільки інтервал пошуку оптимальної вибірки на початковому етапі задається проміжком

$[0.5, 1]$ (результат класифікації для вектора, сформованого із ознак першої групи, який на відріжку відповідає точці 0, виявляється найгірший за критерієм оцінки навчання).

В якості тестових прикладів для системи було використано 100 художніх творів, які не використовувались при навчанні системи, написаних авторами з навчальної вибірки (по 10 творів кожного автора).

Інтерпретація результатів системи *Attributer*

Для інтерпретації результатів одержаних автоматичною системою *Attributer* пропонується наступний підхід.

Нехай H_i – подія, яка полягає в тому, що тексти i -го автора вірно розпізнані системою *Attributer*, тобто віднесені до класу, що відповідає автору i , де $i = \overline{1, n}$, n – кількість авторів у тестовій вибірці, або кількість класів; H/H_j – подія, яка полягає в тому, що тексти i -го автора віднесені

до автора j , де $j = \overline{1, n}$ (при $i=j$ дана подія співпадає з подією H_i).

Позначимо $P(H_i)$ – правдоподібність події H_i , яку будемо визначати як відношення кількості вірно прокласифікованих системою текстів i -го автора до кількості всіх текстів автора i ; відповідно $P(H/H_j)$ – правдоподібність події H/H_j – відношення кількості розпізнаних системою текстів i -го автора як текстів автора j до кількості всіх текстів автора i .

Тоді результати класифікації тестової вибірки можна представити у вигляді таблиці, рядки та стовпчики якої відповідають класам розбиття, тобто авторам з тестової вибірки, а комірка i -го рядка та j -го стовпчика – містить правдоподібність події $P(H_i/H_j)$; діагональні елементи таблиці представляють правдоподібності того, що всі тексти одного автора розпізнані вірно (Таблиця 1).

Таблиця 1

$H_i, j = \overline{1, n}$ $H_i, i = \overline{1, n}$	H_1	H_2	$\dots H_j \dots$	H_n
H_1	$P(H_1)$	$P(H_1/H_2)$	$\dots P(H_1/H_j) \dots$	$P(H_1/H_n)$
H_2	$P(H_2/H_1)$	$P(H_2)$	$\dots P(H_2/H_j) \dots$	$P(H_2/H_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
H_i	$P(H/H_1)$	$P(H/H_2)$	$P(H/H_j)$	$P(H/H_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
H_n	$P(H_n/H_1)$	$P(H_n/H_2)$	$\dots P(H_n/H_j) \dots$	$P(H_n)$

Отримані результати класифікації системою *Attributer* наведені у таблиці 2. Тут індекси подій відповідають номерам авторів у тестовій вибірці (що співпадають з їх номерами у

навчальній вибірці). За даними таблиці 2 вірно розпізнані системою *Attributer* тексти складають 71%.

Таблиця 2

$H_i, j = \overline{1, 10}$ $H_i, i = \overline{1, 10}$	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
H_1	6/10	1/10	0	0	1/10	2/10	0	0	0	0
H_2	0	9/10	1/10	0	0	0	0	0	0	0
H_3	0	0	5/10	2/10	1/10	1/10	0	1/10	0	0
H_4	0	1/10	2/10	6/10	1/10	0	0	0	0	0
H_5	0	0	1/10	1/10	8/10	0	0	0	0	0
H_6	1/10	0	0	0	1/10	7/10	0	0	0	1/10
H_7	0	0	0	0	1/10	0	9/10	0	0	0
H_8	0	0	1/10	0	0	1/10	0	7/10	1/10	0
H_9	0	1/10	2/10	1/10	0	0	0	1/10	5/10	0
H_{10}	0	1/10	0	0	0	0	0	0	0	9/10

Ще однією інтерпретацією одержаних результатів є наступна. Розглянемо отримані

класи текстів C_i , $i = \overline{1, n}$ як сукупність точок x_{il} , $l = \overline{1, m}$, які задовольняють умовам:

1) належать даному класу в дійсності (тобто відомо, що текст є твором даного автора);

2) є вихідними результатами налаштованої нейронної мережі, такими що:

$$x_l = \text{Arg min}_i \bigcup_{C_i} \text{Dist}(V(C_i), V(P_l)), \quad l = \overline{1, m}. \quad (1)$$

де $V(C_i)$ – вектор, який відповідає класу (автору) C_i ; $V(P_l)$ – вектор, одержаний на виході налаштованої нейронної мережі для тестового прикладу P_l ; $\text{Dist}(V(C_i), V(P_l))$ – відстань між векторами $V(C_i)$ та $V(P_l)$, визначена у звичайному змісті; $\bigcup_{C_i} \text{Dist}(V(C_i), V(P_l))$ – множина відстаней

$V(P_l)$ до всіх класів C_i , $i = \overline{1, n}$.

Пропонується розглянути структуру отриманих класів текстів, використовуючи показник щільності та радіуса класу. Покладемо щільність класу як дисперсію відстані від центра класу до окремих точок класу. Чим менша

дисперсія цієї відстані, тим ближче до центру класу знаходяться тестові приклади, тим більша щільність класу. І навпаки, чим більша дисперсія відстані, тим більш розріджений даний клас, відповідно у ньому є точки, які знаходяться близько до центра класу, та точки, достатньо віддалені від нього. Отже щільність класу будемо визначати за формулою дисперсії:

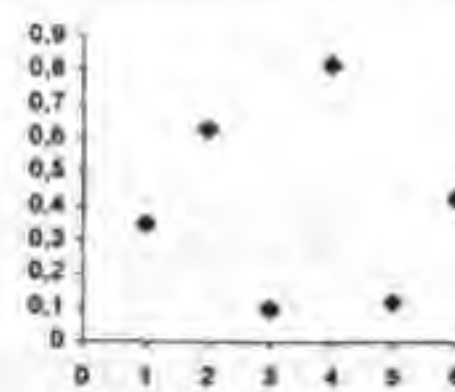
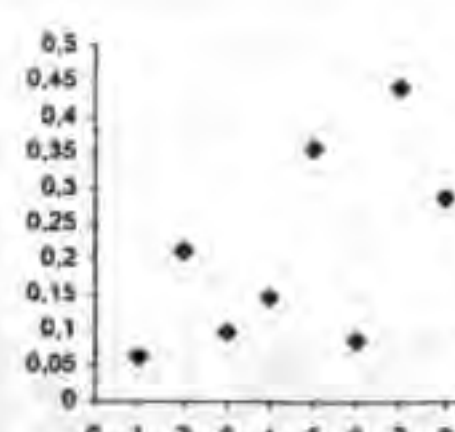
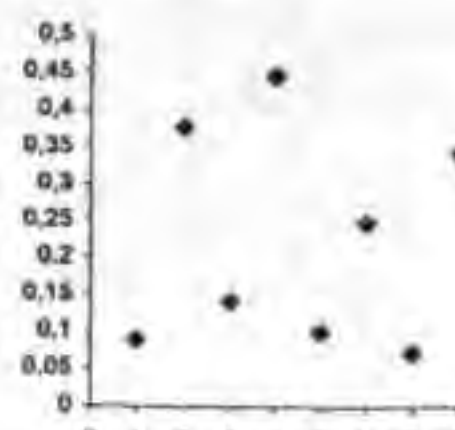
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2)$$

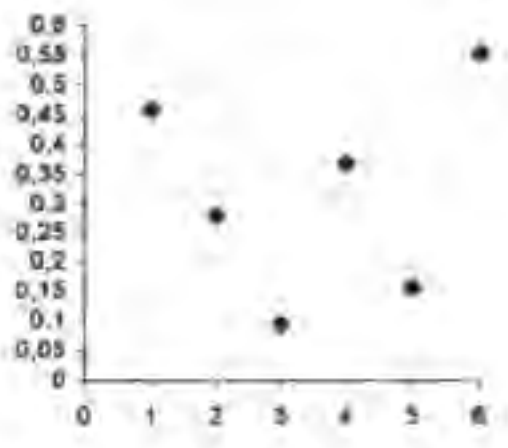
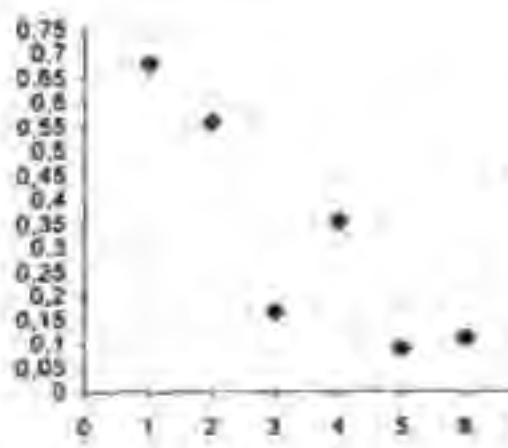
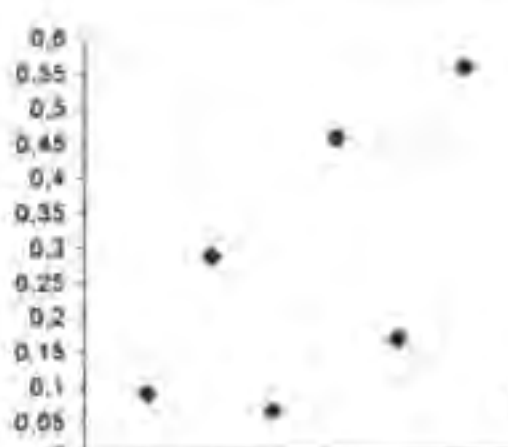
де n – кількість точок у класі, $\bar{x}$ – середнє арифметичне всіх точок класу.

Радіус класу визначається як максимальна відстань точки класу від його центру.

Результати атрибуції для творів 6 авторів за значеннями щільності, радіусу та графічною інтерпретацією одержаних класів наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Клас, що відповідає автору творів	Радіус, R	Щільність, σ^2	Графічна інтерпретація (по вісі ординат – значення x_l , по вісі абсцис – номери творів)
О. Пушкін: 1) "Арап Петра великого" 2) "История села Горюшина" 3) "Староста Трифон" 4) "Рославлев" 5) "Кинджали" 6) "Египетские ночи"	0,39027	0,06699	
В. Набоков: 1) "Как-то раз в Алеппо..." 2) "Удар крыла" 3) "Случайность" 4) "Волшебник" 5) "Занятой человек" 6) "Совершенство" 7) "Гроза" 8) "Весна в Фиальте" 9) "Королек"	0,23101	0,01699	
А. Чехов: 1) "В усадьбе" 2) "Учитель словесности" 3) "Бабье царство" 4) "Княгиня" 5) "Пари" 6) "Рассказ старшего садовника" 7) "Попрыгунья" 8) "Именины" 9) "Барыня"	0,19920	0,01713	

М. Булгаков: 1) "Театральный роман" 2) "Луч жизни" 3) "Летучий голландец" 4) "Четыре портрета" 5) "Богема" 6) "Ханский огонь"	0,27611	0,02744	
М. Шолохов: 1) "Жеребенок" 2) "Кривая стежка" 3) "Один язык" 4) "Калоши" 5) "Илюха" 6) "Семейный человек" 7) "Лазоревая степь"	0,32218	0,04574	
Л. Толстой: 1) "Семейное счастье" 2) "Хозяин и работник" 3) "Отец Сергей" 4) "Ягоды" 5) "Метель" 6) "Холстомер" 7) "Отрочество"	0,26888	0,03565	

Висновок

В статті показано ефективність розробленого алгоритму пошуку оптимальної вибірки для вирішення задачі атрибуції текстів [1]. Отримані результати атрибуції художніх творів російських письменників системою *Attributer*, що використовує даний алгоритм, є найкращими для вибраного набору ознак текстів за умовами алгоритму, а саме, складають 71% правильно прокласифікованих текстів для даного простору ознак. В свою чергу це дає підстави для подальшого дослідження стилю текстів на основі виділення інформативних ознак (авторського інваріанту) та застосування алгоритму пошуку оптимальної вибірки.

Графічна інтерпретація з використанням радіусу та щільності класу творів автора дозволяє аналізувати стиль автора протягом розвитку його творчості. Наведені результати аналізу однорідності стилю творів для 6 авторів, які свідчать про наявність певного розподілу ознак стилю автора в межах його творчого розвитку.

Список використаних джерел

1. Порхун О.В. Алгоритм пошуку оптимальної вибірки для вирішення задач класифікації багатовимірних об'єктів, його обчислювальна складність // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 141-144.
2. Анисимов А.В., Порхун Е.В., Тарануха В.Ю. Алгоритм формирования параметрического вектора для решения задач классификации нейронной сетью прямого распространения // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №2. – С. 3-14.
3. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation – New York: MacMillan College Publishing Co., 1994. – 696 p.
4. Fausett L. Fundamentals of Neural Network. Architectures, algorithms and applications // New Jersey: Prentice Hall, 1994. – P. 289-316.

Надійшла до редакції 14.03.2011

УДК 004.652.8

Сільвейструк Л.М., к.ф.-м.н., м.н.с

Узагальнена кардинальність участі в моделі „сутність-зв'язок”

Проаналізовано сучасний стан обмежень кардинальності моделі „сутність-зв'язок”. Розглядаються і формалізуються обмеження кардинальності: кардинальність „дивитися через”, кардинальність участі, узагальнена кардинальність участі.

Ключові слова: модель „сутність-зв'язок”, обмеження кардинальності, кардинальність „дивитися через”, кардинальність участі, узагальнена кардинальність участі.

E-mail: slm-klm@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Розглядаючи типи зв'язків в моделі „сутність-зв'язок”, особлива увага приділяється обмеженням кардинальності (*cardinality constraints*).

Поняття обмеження кардинальності складається з наступних трьох так званих базових типів обмеження кардинальності [0]:

– *max* обмеження кардинальності (*max cardinality constraint*);

– *min* обмеження кардинальності (*min cardinality constraint*);

– *top* обмеження кардинальності (*top cardinality constraint*).

min (*max*) обмеження кардинальності відображає найменшу (відповідно найбільшу) можливу кількість зв'язків типу зв'язку, що відповідають певним умовам вибору сутностей даного типу зв'язку. Саме ці умови вибору визначають різні підходи до поняття обмеження кардинальності.

Розрізняють дві концепції означення *min* та *max* обмежень кардинальності:

– концепція обмеженої кардинальності (*restricted cardinality concept*);

– концепція необмеженої кардинальності (*unrestricted cardinality concept*).

Для обмеженої кардинальності значення *min* обмеження кардинальності можуть бути „нуль” або „один” (відповідно „zero”, „one”), а значення *max* обмеження кардинальності – „один” або „багато” (відповідно „one”, „many”).

Для необмеженої кардинальності значення *min* обмеження кардинальності – будь-яке натуральне число, а значення *max* обмеження

Silveystruk L.N., PhD., scientific associate

Generalized participation cardinality in entity-relationship model

The modern state of cardinality constraints of entity-relationship model is analysed. The cardinality constraints of entity-relationship model – look across cardinality, participation cardinality, generalized participation cardinality – are considered and formalized.

Key words: entity-relationship model, cardinality constraints, look across cardinality, participation cardinality, generalized participation cardinality.

кардинальності – будь-яке натуральне число або „багато”.

Характеристичні ознаки значень *min* та *max* обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності розглядаються далі для конкретних видів обмежень кардинальності.

Мор обмеження кардинальності показує повинен чи не повинен входити в тип зв'язку мінімум один зв'язок, який відповідає певним умовам вибору сутностей даного типу зв'язку.

Значення мор обмеження кардинальності можуть бути: „обов'язкове” („mandatory”) або „необов'язкове” („optional”) [0, с. 5] чи за іншою термінологією „повне” („total”) або „часткове” („partial”) [2, част. II, гл. 5, с. 198]. Означення (та, звісно, значення) мор обмеження кардинальності не залежать від обмеженої чи необмеженої кардинальності.

Таким чином, далі розглядаються наступні п'ять базових типів обмежень кардинальності:

1) *min* обмеження кардинальності (обмежена кардинальність);

2) *max* обмеження кардинальності (обмежена кардинальність);

3) *min* обмеження кардинальності (необмежена кардинальність);

4) *max* обмеження кардинальності (необмежена кардинальність);

5) *top* обмеження кардинальності.

В залежності від умов вибору сутностей типу зв'язку та відповідних зв'язків даного типу зв'язку існують різні види (базових) обмежень кардинальності (див., наприклад, роботи Ферга

(Ferg) [0], Тхелхеїма (Thalheim) [3], Лензеріні (Lenzerini) і Сентуссі (Santucci) [4]).

Один з підходів до визначення видів обмежень кардинальності бере початок з основоположної роботи Чена (Chen) [5]. На жаль, не має загальноприйнятої назви для даного підходу, в літературі зустрічаються наступні:

- підхід „дивитися через” (*look across approach*) [0];

- нотація Чена (*Chen notation*) [6].

Відповідно до цих назв існує і різниця у термінології обмежень кардинальності:

- кардинальність „дивитися через” (*look across cardinality*) [0, 8];

- ченівське обмеження (*Chen-style constraint*) [6].

Далі використовується термін „кардинальність „дивитися через”.

Інший підхід до визначення видів обмежень бере початок від французької технології моделювання даних Меріса (Merise) [7].

Як і попередній підхід, даний також не має загальноприйнятої назви, зустрічаються наступні:

- підхід „дивитися тут” (*look here approach*) [6];

- нотація Меріса (*Merise notation*) [0].

Відповідно до назв даного підходу існує і різниця у термінології:

- кардинальність „дивитися тут” (*look here cardinality*) [6];

- кардинальність участі (*participation cardinality*) [0].

Далі буде використовуватися термін „кардинальність участі” (бо термін „дивитися тут” є надто близьким до терміну „дивитися через”).

Підкреслимо, що для бінарних типів зв'язків різниця між цими двома підходами полягає лише у формі запису, по суті ці два підходи співпадають (див., наприклад, [6], формальне доведення цього факту було наведено у роботі [9]). Тому Ферг у роботі [0] запропонував розглядати для бінарних типів зв'язків єдиний вид обмежень кардинальності – просту кардинальність (*common cardinality*)¹.

Різниця між даними підходами до означення обмежень кардинальності стає очевидною, коли розглядаються багатосторонні типи зв'язків арності $n \geq 3$, і перший, хто звернув на це увагу, був, мабуть, Ферг. Зазначимо, що Ферг [0] та Тхелхеїм [3], ввели новий підхід для визначення кардинальності. Вони розглядають узагальнену кардинальність (*generalized cardinality*) та її частинний випадок узагальнену кардинальність участі (*generalized participation cardinality*).

Необхідно зазначити, що в доступній російсько- та україномовній літературі, на жаль, ці підходи до визначення обмежень кардинальності чітко не розрізняються. Тобто, як правило, автори розглядають обмеження кардинальності тільки для бінарних типів зв'язків або розглядають лише один з підходів для багатосторонніх типів зв'язків (див., наприклад, [2]).

Розглянемо означення різних видів обмеження кардинальності та проведемо їх уточнення.

Кардинальність „дивитися через” – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать решті типів сутностей даного типу зв'язку.

Кардинальність участі – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності, що належить типу-параметру.

Узагальнена кардинальність участі – параметричне поняття (параметром виступає сукупність типів сутностей), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать типам-параметрам.

Узагальнена кардинальність – параметричне поняття (параметрами виступають дві сукупності типів сутностей, які або співпадають, або одна є розширенням іншої), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать типам сутностей вужчої сукупності.

Обмеження кардинальності типів зв'язків мають однакову природу і далі уточнюються на мові теорії відношень (зокрема, застосовані поняття функціональності відношення, найменшої та найбільшої потужностей повних образів одноелементних множин, побудованих певним чином на основі n -арного відношення, проєкції відношення). В роботах [9, 10, 11, 12] були розглянуті та уточнені наступні поняття: *min* та *max* обмеження кардинальності (обмежена кардинальність), *por* обмеження кардинальності і *min* та *max* обмеження кардинальності –

¹ Термін *common cardinality* можна перекладати як загальна кардинальність, спільна кардинальність, елементарна кардинальність, проста кардинальність. Зважаючи на те, що у доступних російських та україномовних джерелах даний термін не зустрічається, був обраний найбільш адекватний варіант перекладу – проста кардинальність.

(необмежена кардинальність). В роботі [9] було показано низку логічних зв'язків між різними видами обмежень кардинальності та різними підходами.

Всі невизначені тут поняття можна знайти у роботах [9, 10, 11, 12].

Якщо типи сутностей $E_1, E_2, \dots, E_n$ інтерпретуються як множини $E_1, E_2, \dots, E_n$, а тип зв'язку R , заданий на типах сутностей $E_1, E_2, \dots, E_n$, як n -арне відношення R , причому $R \subseteq E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, то базові типи обмежень кардинальності формалізуються за допомогою функціональності відношення (max обмеження кардинальності, концепція обмеженої кардинальності), найменшої та найбільшої

потужності повних образів одноелементних множин, побудованих певним чином на основі n -арного відношення (min та max обмеження кардинальності, концепція необмеженої кардинальності), проєкції відношення (min обмеження кардинальності, концепція обмеженої кардинальності та топ обмеження кардинальності).

Далі дані уточнення розглянуто детальніше.

Функціональність n -арного відношення R зведено до функціональності деякого бінарного відношення. А саме, n -арне відношення R представляється у вигляді бінарного відношення виду ${}^1R_i \subseteq (E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n) \times E_i$ (для кардинальності „дивитись через”), де

$${}^1R_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle, e_i \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \},$$

і розглядається функціональність першого роду за i -тою компонентою; або бінарного відношення

$${}^2R_i \subseteq E_i \times (E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n) \quad (\text{для кардинальності участі}), \quad \text{де}$$

$${}^2R_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle e_i, \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \}.$$

і розглядається функціональність другого роду за i -тою компонентою.

При узагальненій кардинальності участі по-перше фіксуємо m типів сутностей ($m \leq n$), де $i_1, i_2, \dots, i_m$ їх індекси, $i_1, i_2, \dots, i_m \in \overline{1, n}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, по-друге, індекси нефіксованих типів сутностей позначаємо через $j_1, \dots, j_{n-m}$, де

$$\{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}, \quad j_1 < \dots < j_{n-m}.$$

Очевидно, що $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}, \{j_1, \dots, j_{n-m}\}$ утворюють розбиття множини $\{1, \dots, n\}$.

Далі розглядаємо бінарне відношення виду

$${}^3R_{i_1, i_2, \dots, i_m} \subseteq (E_{i_1} \times \dots \times E_{i_m}) \times (E_{j_1} \times \dots \times E_{j_{n-m}}), \quad \text{де}$$

$${}^3R_{i_1, i_2, \dots, i_m} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle, \langle e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-m}} \rangle \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_i, \dots, e_n \rangle \in R \};$$

$$\text{вище кожне } e_i = \begin{cases} e_{i_p}, & \text{де } i_p \text{ таке, що } i_p = i; \\ e_{j_p}, & \text{де } j_p \text{ таке, що } j_p = i, \end{cases}$$

і розглядаємо функціональність за $i_1, i_2, \dots, i_m$ -тими компонентами.

Очевидно, що n -арне відношення R на множинах функціональне за i -тою компонентою (першого або другого роду) або функціональне за $i_1, i_2, \dots, i_m$ -тими компонентами, тоді і тільки тоді, коли відповідне бінарне відношення функціональне.

Повний образ одноелементної множини $\{\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle\}$ відносно відношення 1R_i

$${}^1R_i[\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle] = \{e_i \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R\},$$

$${}^1\text{Im}_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ {}^1R_i[\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle] \mid e_1 \in E_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \in E_{i-1} \wedge e_{i+1} \in E_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n \in E_n \}.$$

В подальших конструкціях припускається, що множини $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_n$ не більш ніж

позначено через ${}^1R_i[\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle]$, а множину потужностей повних образів всіх комбінацій елементів множин $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n$ через ${}^1\text{Im}_i(R)$; згідно з відповідними означеннями повного образу та відношення 1R_i , і множини потужностей повних образів отримуються рівності

злічені, а всі повні образи одноелементних множин (кортежів) скінченні; з огляду на фінітність всіх об'єктів такі обмеження є

природними. Очевидно, що коли відношення R непорожнє, то і введена множина ${}^1\text{Im}_i(R)$ непорожня також. Зрозуміло, що ${}^1\text{Im}_i(R)$ – непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-

якому випадку ця множина має найменший елемент, якій позначено як ${}^1\min_i(R)$. Найбільшого ж елементу множина ${}^1\text{Im}_i(R)$ може і не мати, тому введено наступне означення, в якому ∞ – деякий елемент, що не належить множині натуральних чисел:

$${}^1\max_i(R) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } {}^1\text{Im}_i(R), \text{ якщо } {}^1\text{Im}_i(R) \text{ скінченна множина;} \\ \infty, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Безпосередньо з означень випливають рівності ${}^1\min_i(R) = \prod {}^1\text{Im}_i(R)$, ${}^1\max_i(R) = \coprod {}^1\text{Im}_i(R)$, де символи $\prod, \coprod$ використовуються для позначення інфімумів та супремумів відповідно в повній решітці $\langle N', \leq \rangle$, яка отримується поповненням множини натуральних чисел N з стандартним

порядком $\leq$ найбільшим елементом ∞ , де $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \cup \{\infty\}$.

Аналогічно вводяться поняття повного образу ${}^2R_i[e_i]$ одноелементної множини $\{e_i\}$ відношення 2R , та множини потужностей повних образів всіх елементів множини E_i – ${}^2\text{Im}_i(R)$:

$${}^2R_i[e_i] = \{ \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \},$$

$${}^2\text{Im}_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ {}^2R_i[e_i] \mid e_i \in E_i \}.$$

Найменша та найбільша потужність повних образів одноелементних множин означаються так: ${}^2\min_i(R) = \prod {}^2\text{Im}_i(R)$,

$${}^2\max_i(R) = \coprod {}^2\text{Im}_i(R).$$

Поняття повного образу ${}^3R_{i_1, i_2, \dots, i_m}[e_{i_1}, \dots, e_{i_m}]$ одноелементної множини $\{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle\}$ відносно

$${}^3R_{i_1, i_2, \dots, i_m}[e_{i_1}, \dots, e_{i_m}] = \{ \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_n \rangle \in R \},$$

$${}^3\text{Im}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ {}^3R_{i_1, i_2, \dots, i_m}[e_{i_1}, \dots, e_{i_m}] \mid e_{i_1} \in E_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \in E_{i_m} \}.$$

Найменша та найбільша потужність повних образів одноелементних множин означаються так: ${}^3\min_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R) = \prod {}^3\text{Im}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R)$,

$${}^3\max_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R) = \coprod {}^3\text{Im}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R).$$

$${}^1\pi_i''(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \mid \exists e_i (\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R) \},$$

$${}^2\pi_i''(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ e_i \mid \exists e_1, \dots, \exists e_{i-1}, \exists e_{i+1}, \dots, \exists e_n (\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R) \}.$$

Проекція відношення за $i_1, i_2, \dots, i_m$ -тими компонентами визначається так

$${}^3\pi_{i_1, i_2, \dots, i_m}''(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle \mid \exists e_{i_{m+1}} \wedge \exists e_{i_m} (\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_{i_{m+1}}, \dots, e_{i_m} \rangle \in R) \}.$$

Очевидно, що кардинальність „дивитися через” та кардинальність участі є частинними випадками узагальненої кардинальності участі, коли фіксованим або незафіксованим залишається один тип сутності. В термінах

Проекції відношень першого та другого роду за i -тою компонентою (${}^1\pi_i''(R)$ та ${}^2\pi_i''(R)$) визначаються наступним чином

відповідних бінарних відношень маємо: ${}^1R_i = {}^1R_{i, \dots, i, i, \dots, i}$, ${}^2R_i = {}^2R_i$.

Вищенаведені уточнення вказують на єдину природу походження всіх підходів до визначення обмежень кардинальності. Зазначимо, що

уточнення обмежень кардинальності при підході узагальненої кардинальності проходить в два етапи, з огляду на те, що в даному випадку можна розглядати обмеження кардинальності не всіх учасників типу зв'язку. Тому при уточненні спочатку необхідно побудувати нове відношення за допомогою проекції по компонентах, а далі проводити уточнення як при підході узагальненої кардинальності участі.

Ціль подальшої роботи встановити логічні зв'язки між обмеженнями кардинальності при різних підходах.

Список використаних джерел

1. Ferg S. Cardinality concepts in entity-relationship modeling / S. Ferg // Entity-Relationship Approach: international conference, October 23-25, 1991, San Mateo, California: proceeding. – 1991. – P. 1-30.
2. Коннолли Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: [теория и практика, 2-е изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. – Москва: „Вильямс“, 2003. – 1440 с.
3. Thalheim B. Fundamentals of cardinality constraints / B. Thalheim // Entity-Relationship Approach: international conference, October 23-25, 1992, Karlsruhe, Germany: proceeding. – 1992. – P. 7-23.
4. Lenzerini M. Cardinality constraints in the entity-relationship model / M. Lenzerini, G. Santucci // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California: proceeding. – 1983. – P. 529-549.
5. Chen P.P. The entity-relationship model – towards a unified view of data / P.P. Chen // ACM Transactions on Database Systems. – March 1976. –

Vol. 1, No. 1. – P. 9-36. – Переклад на російську мову можна знайти за адресою: <http://www.osp.ru/dbms/1995/03/271.htm>.

6. Hartmann S. Reasoning about participation constraints and Chen's constraints / S. Hartmann // Conferences in Research and Practice in Information Technology. – 2003. – Vol. 17. – P. 8-16.

7. Rochfeld A. Merise: An information system design and development methodology / A. Rochfeld, H. Tardieu // Information Manag. – 1983. – Vol. 6. – P. 143-159.

8. Song I.-Y. A comprehensive analysis of entity-relationship diagrams / I.-Y. Song, M. Evans, E. Parc // Journal of Computer and Software Engineering. – 1995. – Vol. 3. – P. 427-459.

9. Сільвейструк Л.М. Логічні зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів „дивитися через” та участі / Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 4. – С. 173-178.

10. Буй Д.Б. Модель „сутність-зв'язок”: формалізація сутностей та зв'язків / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 143-152.

11. Buy D. Formalization of structural constraints of relationships in model „entity-relationship” / D. Buy, L. Silveystruk // International journal „Information theories & applications”. – Sofia. – 2007. – Vol. 14, N. 4. – P. 343-349.

12. Буй Д.Б. Уточнення обмежень min та max простої кардинальності в моделі „сутність-зв'язок” / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Математичні машини і системи. – 2009. – Вип. 4. – С. 67-81.

Надійшла до редколегії 14.02.2011

УДК 512.552+519.713

Скобелєв В. В., к.ф.-м.н.

Про деякі властивості кубічних кривих ліній над кільцями

Досліджено клас кубічних кривих ліній над довільним асоціативно-комутативним кільцем з одиницею, для якого визначено поняття «характеристика кільця». Встановлено ряд характеристик структури множини точок ліній, які визначено у термінах факторизації полінома. Охарактеризовано структуру множини особливих точок досліджуваних кривих. Встановлено умови, при яких поліном має кратні корені.

Ключові слова: асоціативно-комутативне кільце, кубічні криві лінії, особливі точки, кратні корені.

E-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

На сучасному етапі розвитку криптографії постерігається систематичний перехід від комбінаторних до комбінаторно-алгебраїчних моделей [1,2].

Досягнення асиметричної криптографії базуються на теоретико-числових алгоритмах [3], а також на використанні еліптичних кривих [4] над скінченними полями. Множини точок цих кривих мають структуру абелевої групи, що дає змогу зводити задачі ідентифікації параметрів до розв'язку складної задачі обчислення дискретного логарифму.

Крім того, при побудові майже усіх кандидатів у сучасні потокові шифри використано фрагменти обчислень у кільцях лишків.

Ці обставини вказують на актуальність систематичного дослідження кривих ліній над скінченними кільцями з позиції алгебри, а також з позиції їх можливих застосувань для розв'язку задач криптографії.

Складність цієї проблеми полягає в тому, що найбільш значні результати алгебраїчної геометрії отримано у випадку алгебраїчно замкненого поля [5,6].

У даній роботі досліджено властивості класу кубічних кривих ліній над асоціативно-комутативним кільцем $K = (K, +, \cdot)$ з одиницею для якого визначено поняття «характеристика

V. V. Skobelev, Cand. Phys.-Math. Sci..

On some characteristics of cubic curves over rings

It is analyzed class of cubic curves over some associative-commutative ring with the unit, such that the notion "characteristic of the ring" is determined. Some characteristics of the structure of the set of curve's points determined via polynomial's factorization are established. The structure of the set of irregular points of investigated curves is characterized. Conditions, under which there exist multiple roots of a polynomial, are established.

Key Words: associative-commutative rings, cubic curves, irregular points, multiple roots.

кільця» [7] при умові, що досліджуємі криві лінії Γ визначено рівнянням

$$ay^2 = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad (1)$$

де $a, b_3 \in K \setminus \{0\}$, та $b_2, b_1, b_0 \in K$.

Якщо півгрупа $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ є гаусовою півгрупою, то дослідження кривої лінії (1) може бути здійснено за рахунок переходу до поля дробів $\bar{K}$, та застосування звичайних методів алгебраїчної геометрії. Усі складності виникають у випадку, коли півгрупа $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ не є гаусовою півгрупою. Особливо ці складності виявляють себе, коли у кільці K присутні дільники нуля.

1. Загальні характеристики

Відносно поліному

$$f(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

можливі три наступні ситуації.

Ситуація 1. Поліном $f(x)$ неможливо факторизувати над кільцем K .

Ситуація 2. Якщо $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, де $f_i(x) \in K[x]$ ($i=1,2$) – поліном степеня $m_i \geq 1$, то $m_1 + m_2 > 3$.

Ситуація 3. Існують поліноми $f_i(x) \in K[x]$ ($i=1,2$) степеня $m_i \geq 1$ такі, що $m_1 + m_2 = 3$ та $f(x) = f_1(x)f_2(x)$.

У ситуації 2 еквівалентна $f(x)$ є поліномом найменшого степеня, який визначає криву лінію Γ . Тому згідно з традицією алгебраїчної

геометрії [5], у цих ситуаціях дослідження кривої лінії Γ здійснюється на основі її визначення рівнянням (1).

Розглянемо ситуацію 3.

Ми маємо, або

$$f(x) = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(\beta_1 x + \beta_0),$$

де $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0 \in K$, та $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$, або

$$f(x) = (\gamma_1 x + \delta_1)(\gamma_2 x + \delta_2)(\gamma_3 x + \delta_3),$$

де $\gamma_i, \delta_i \in K$ ($i = 1, 2, 3$), та $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \neq 0$.

Тому рівняння (1) має або вигляд

$$ay^2 = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(\beta_1 x + \beta_0), \quad (2)$$

або вигляд

$$ay^2 = (\gamma_1 x + \delta_1)(\gamma_2 x + \delta_2)(\gamma_3 x + \delta_3). \quad (3)$$

Нехай

$$S_a = \{ay^2 \mid y \in K\},$$

$$S_a^{(2)} = \{(\mu_1, \mu_2) \in K^2 \mid \mu_1 \mu_2 \in S_a\},$$

$$S_a^{(3)} = \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in K^3 \mid \nu_1 \nu_2 \nu_3 \in S_a\}.$$

Якщо кубічна крива лінія Γ визначена рівнянням (2), то множина її точок є об'єднання множин розв'язків двохпараметричної сім'ї F_{μ_1, μ_2} $((\mu_1, \mu_2) \in S_a^{(2)})$ систем нелінійних рівнянь

$$F_{\mu_1, \mu_2} : \begin{cases} ay^2 = \mu_1 \mu_2 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = \mu_1 \\ \beta_1 x + \beta_0 = \mu_2 \end{cases}$$

Якщо кубічна крива лінія Γ визначена рівнянням (3), то множина її точок є об'єднання множин розв'язків трьохпараметричної сім'ї G_{ν_1, ν_2, ν_3} $((\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S_a^{(3)})$ систем нелінійних рівнянь

$$G_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} : \begin{cases} ay^2 = \nu_1 \nu_2 \nu_3 \\ \gamma_1 x + \delta_1 = \nu_1 \\ \gamma_2 x + \delta_2 = \nu_2 \\ \gamma_3 x + \delta_3 = \nu_3 \end{cases}$$

Таким чином, у випадку, коли K – скінченне кільце, побудова у явному вигляді множини точок кубічної кривої лінії Γ еквівалентна:

1) у ситуаціях 1 та 2 пошуку множини розв'язків нелінійного рівняння (1) від двох змінних;

2) у ситуації 3 – пошуку множини розв'язків двохпараметричної сім'ї F_{μ_1, μ_2} $((\mu_1, \mu_2) \in S_a^{(2)})$, або трьохпараметричної сім'ї G_{ν_1, ν_2, ν_3} $((\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S_a^{(3)})$ систем нелінійних рівнянь.

У ситуації 3 побудова у явному вигляді множини точок кубічної кривої лінії Γ потребує розв'язку складної задачі, а саме: побудову у явному вигляді усіх факторизацій усіх елементів множини S_a на два, або на три співмножника. Зазначимо, що найкращий із відомих алгоритмів факторизації числа на два співмножника має субекспоненційну складність.

2. Особливі точки

Особливими точками кривої лінії $f(x, y) = 0$ є точки, які є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

де D_x та D_y є оператори диференціювання по змінним x та y .

У нашому випадку ми маємо наступну систему рівнянь для кубічної кривої лінії Γ

$$\begin{cases} 3b_3 x^2 + 2b_2 x + b_1 = 0 \\ 2ay = 0 \\ ay^2 = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{cases} \quad (4)$$

Якщо характеристика кільця K дорівнює 2, то система рівнянь (4) має наступний вигляд

$$\begin{cases} b_3 x^2 + b_1 = 0 \\ y \in K \\ ay^2 = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{cases}$$

Тому має місце наступне твердження (через K^{mv} позначено множину усіх елементів множини K , які допускають обернення).

Твердження 1. Якщо характеристика кільця K дорівнює 2, то:

1) кубічна крива лінія Γ є гладкою лінією, якщо рівняння $b_3 x^2 + b_1 = 0$ не має розв'язків;

2) якщо $b_3 \in K^{mv}$, то множиною особливих точок кубічної кривої лінії Γ є множина розв'язків системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = b_3^{-1} b_1 \\ ay^2 = b_0 + b_1 b_2 b_3^{-1} \end{cases}$$

3) якщо $b_3 \in K \setminus K^{mv}$, то множиною особливих точок кубічної кривої лінії Γ є множина розв'язків системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} b_3 x^2 = b_1 \\ ay^2 = b_2 x^2 + b_0 \end{cases}$$

Якщо характеристика кільця K дорівнює 3, то система рівнянь (4) має наступний вигляд

$$\begin{cases} b_2 x = b_1 \\ ay = 0 \\ ay^2 = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 x = b_1 \\ ay = 0 \\ b_3 x^3 - b_1 x + b_0 = 0 \end{cases}$$

Тому має місце наступне твердження.

Твердження 2. Якщо характеристика кільця K дорівнює 3, то:

1) кубічна крива лінія Γ є гладкою лінією, якщо рівняння $b_2 x = b_1$ не має розв'язків;

2) якщо $b_2 \in K^{inv}$, а також

$$b_1^3 b_2^{-1} b_3 - b_1^2 b_2^{-1} + b_0 = 0,$$

то множиною особливих точок кубічної кривої лінії Γ є множина $\{(b_1 b_2^{-1}, y) \mid ay = 0\}$.

3. Кратні корені кубічного полінома

Поліном

$$f(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

має кратний корень $\alpha \in K$, якщо має місце або факторизація

$$b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = (x - \alpha)^2 (b_3 x + \beta), \quad (5)$$

або факторизація

$$b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_3 (x - \alpha)^3. \quad (6)$$

Встановимо умови, при котрих поліном $f(x)$ має кратний корень.

Якщо характеристика кільця K дорівнює 2, то:

1) факторизація (5) має місце у тому та лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} \beta = b_2 \\ b_3 \alpha^2 = b_1 \\ \alpha^2 \beta = b_0 \end{cases}$$

2) факторизація (6) має місце у тому та лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} b_3 \alpha = b_2 \\ b_3 \alpha^2 = b_1 \\ b_3 \alpha^2 = b_0 \end{cases}$$

Тому має місце наступне твердження.

Твердження 3. Якщо характеристика кільця K дорівнює 2, то:

1) факторизація (5) існує у тому та лише у тому випадку, коли існує розв'язок α системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} b_3 \alpha^2 = b_1 \\ b_2 \alpha^2 = b_0 \end{cases}$$

2) факторизація (6) існує у тому та лише у тому випадку, коли існує розв'язок α системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} b_3 \alpha = b_2 \\ b_2 \alpha = b_1 \\ b_1 \alpha = b_0 \end{cases}$$

Якщо характеристика кільця K дорівнює 3, то:

1) факторизація (5) має місце у тому та лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} \alpha b_3 + \beta = b_2 \\ \alpha^2 b_3 + \alpha \beta = b_1 \\ \alpha^2 \beta = b_0 \end{cases}$$

2) факторизація (6) має місце у тому та лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = 0 \\ \alpha^3 b_3 = b_0 \end{cases}$$

Тому має місце наступне твердження.

Твердження 4. Якщо характеристика кільця K дорівнює 3, то:

1) факторизація (5) існує у тому та лише у тому випадку, коли існує розв'язок (α, β) системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha b_3 + \beta = b_2 \\ \alpha b_2 = b_1 \\ \alpha^2 \beta = b_0 \end{cases}$$

2) факторизація (6) існує у тому та лише у тому випадку, коли $b_2 = b_1 = 0$ і, крім того, існує розв'язок α нелінійного рівняння

$$b_3 \alpha^3 = b_0.$$

Розглянемо випадок, коли характеристика кільця K відрізняється від 2 та 3.

Відомо, що для кільця (на відміну від поля) рівність нулю результанту

$$\text{Res}(h, g, x) = \det(\text{Syl}(h, g, x))$$

поліномів $h(x), g(x) \in K[x]$ є лише необхідною умовою існування їх спільного кореня. Тому рівності $\text{Res}(f, Df, x) = 0$ та $\text{Res}(Df, D^2 f, x) = 0$ (D — оператор диференцювання) може бути використано лише для встановлення необхідних умов існування факторизації (5), або факторизації (6).

Теорема 1. Якщо характеристика кільця K відрізняється від 2 та 3, то:

1) якщо існує факторизація (5), то має місце рівність

$$b_3(4b_0b_2^3 + 27b_0^2b_3^2 - 18b_0b_1b_2b_3 + 4b_1^3b_3 - b_1^2b_2^2) = 0; \quad (7)$$

2) якщо існує факторизація (6), то мають місце рівності

$$\begin{cases} b_3(4b_0b_2^3 + 27b_0^2b_3^2 - 18b_0b_1b_2b_3 + 4b_1^3b_3 - b_1^2b_2^2) = 0 \\ 12b_3(3b_1b_3 - b_2^2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Доведення. Обчислимо першу та другу похідні поліному $f(x)$:

$$Df(x) = 3b_3x^2 + 2b_2x + b_1,$$

$$D^2f(x) = 6b_3x + 2b_2.$$

Обчислимо результат поліномів $f(x)$ та $Df(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, Df, x) &= \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 3b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 2b_2 & 3b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ b_0 & b_1 & 0 & b_1 & 2b_2 \\ 0 & b_0 & 0 & 0 & b_1 \end{vmatrix} = \\ &= b_3(4b_0b_2^3 + 27b_0^2b_3^2 - 18b_0b_1b_2b_3 + 4b_1^3b_3 - b_1^2b_2^2). \end{aligned} \quad (9)$$

З (9) випливає, що рівність $\text{Res}(f, Df, x) = 0$

є рівністю (7).

Обчислимо результат поліномів $Df(x)$ та $D^2f(x)$:

$$\text{Res}(Df, D^2f, x) = \begin{vmatrix} 3b_3 & 6b_3 & 0 \\ 2b_2 & 2b_2 & 6b_3 \\ b_1 & 0 & 2b_2 \end{vmatrix} =$$

Список використаних джерел

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С. и др. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
2. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
3. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.
4. Коблиц Н. Введение в эллиптические и модулярные формы. – М.: Мир, 1988. – 320 с.

$$= 12b_3(3b_1b_3 - b_2^2). \quad (10)$$

З (9) та (10) випливає, що система рівностей

$$\begin{cases} \text{Res}(f, Df, x) = 0 \\ \text{Res}(Df, D^2f, x) = 0 \end{cases}$$

є системою рівностей (8).

Теорему доведено.

Висновки.

У роботі досліджено властивості кубічних кривих ліній над асоціативно-комутативним кільцем K з одиницею, для якого визначено поняття «характеристика кільця».

Подальше дослідження може бути пов'язане з аналізом складності алгоритмів побудови у явному вигляді множини точок для спеціальних класів кубічних кривих ліній над скінченним кільцем K .

Інший напрямок пов'язаний з дослідженням класу еліптичних кривих над скінченним кільцем K . При наявності у кільці K дільників нуля множина точок довільної еліптичної кривої може не мати структуру абелевої групи. Причина полягає у тому, що у множині K^3 присутні елементи $(\xi, \eta, \xi) \in (K \setminus K^{inv})^3$. Ці елементи не можуть бути віднесено ні до множини точок афіної площини, ні до множини нескінченно віддалених точок. Тому важливою та цікавою задачею є виділення та дослідження над скінченним кільцем K , що має дільники нуля, класу еліптичних кривих, які містять в собі підмножину точок, яка має структуру абелевої групи.

5. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.1. – М.: Наука, 1988. – 352 с.
6. Кокс Д., Литтл Дл., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. – М.: Мир, 200. – 687 с.
7. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

Надійшла до редколегії 27.01.2011

УДК 512.552+519.713

Скобелев В. Г., д.т.н., професор

Про один клас автоматно-алгебраїчних моделей дискретних перетворювачів інформації

Досліджено автоматно-алгебраїчні моделі дискретних перетворювачів інформації, які представлені скінченною сім'єю бієкцій скінченного асоціативно-комутативного кільця з одиницею у себе. Для керування цією сім'єю бієкцій використано алгоритм, що генерує псевдовипадкові послідовності індексів елементів сім'ї. Досліджено випадки, коли сім'ю бієкцій отримано у результаті найрізноманітніших викреслювань елементів фіксованої суперпозиції переставлень, а також коли загальний елемент сім'ї представлено системою рівнянь над кільцем.

Ключові слова: скінченні автомати, скінченні кільця, бієктивні дискретні перетворювачі інформації.

E-mail: skbv@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Аш. А. В.

Вступ

На сучасному етапі розвитку інформаційних технологій однією з найбільш актуальних проблем є захист інформації. Для її вирішення використовують шифрування інформації.

Незважаючи на різноманітність існуючих шифрів [1,2], при їх побудові часто використовують конструкції, які вкладаються у рамки наступної математичної моделі $M = (F, A_a)$ дискретного перетворювача інформації.

Нехай S – скінченна множина, $F = \{f_i\}_{i \in N_k}$ – скінченна сім'я бієкцій множини S у себе, а A_a – алгоритм, який генерує псевдовипадкову послідовність елементів множини N_k , де a – вектор параметрів, які використовуються для ініціалізації алгоритму A . Перетворення будь якої послідовності $s_1, \dots, s_l$ елементів множини S дискретним перетворювачем M полягає у заміні її послідовністю $f_{i_1}(s_1), \dots, f_{i_l}(s_l)$, де $i_1, \dots, i_l$ – послідовність, яка згенерована алгоритмом A при ініціалізації a .

Нескладно показати, що у рамки саме цієї математичної моделі вкладаються парадигми

V. G. Skobelev, Dr. Sci. (Techn.), Prof.

On some class of automata-algebraic models of transducers

Automata-algebraic models for transducers presented via some finite family of bijections of some finite associative-commutative ring with the unit into itself are analyzed. The control of the family of bijections is carried out via some algorithm intended to generate pseudorandom sequences of indices of elements of the family. There are investigated cases when either the family of bijections is generated in the result of various erasing elements into fixed superposition of permutations, or when general element of the family is presented via some system of equations over the ring.

Key Words: finite automata, finite rings, bijective transducers.

блоків керуємих підстановок та переставлень [3], які призначено для аналізу ефективності блокових шифрів.

При побудові майже усіх кандидатів у сучасних потокових шифрах використано фрагменти обчислень у кільцях лишків. Тому природно вважати, що множина S має структуру скінченного асоціативно-комутативного кільця $K = (K, +, \cdot)$ з одиницею.

Оскільки призначенням моделі M є швидке перетворення інформації, то відносно сім'ї бієкцій $F = \{f_i\}_{i \in N_k}$ природно зробити наступні припущення:

- 1) сім'я бієкцій F представлена у неявному вигляді;
- 2) побудова кожної бієкції $f_i \in F$ у явному вигляді є легкою задачею;
- 3) кожна бієкція $f_i \in F$ є легко обчислювальним відображенням.

У даній роботі запропоновану алгебраїчно-автоматну модель M досліджено у випадку, коли сім'ю бієкцій F отримано у результаті найрізноманітніших викреслювань елементів фіксованої суперпозиції переставлень, а також у

випадку, коли загальний елемент сім'ї F представлено системою рівнянь над кільцем K .

1. Модель, що базується на викресленнях в фіксованій суперпозиції переставлень

Розглянемо випадок, коли автоматно-алгебраїчна модель $M = (F, A_s)$ дискретного перетворювача інформації має наступний вигляд.

Нехай $S = E^n$ ($E = \{0, 1\}$), а $h_i : S \rightarrow S$ ($i = 1, \dots, m$) є такі фіксовані переставлення елементів множини S , що для кожного $v \in S$ вага по Хемінгу елементів v та $h_i(v)$ одна і та ж сама. У відповідності з [4] визначимо сім'ю переставлень F елементів множини S формулою

$F = H(h_1, \dots, h_m) = \{h_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ h_m^{\alpha_m} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \in E\}$, де $\circ$ – операція суперпозиції, а $h^1 = h$ та $h^0 = e$, e – тотожне переставлення елементів множини S , тобто $e(v) = v$ ($v \in S$).

Зазначимо, що сім'я переставлень F містить в собі 2^m елементів.

В якості алгоритму A може бути вибрано будь який алгоритм, що генерує псевдовипадкову послідовність елементів множини Z_{2^m} . При цьому кожний елемент $i \in Z_{2^m}$ представлено у вигляді $i = \sum_{j=1}^m \alpha_j 2^{j-1}$, де $\alpha_j \in E$ ($j = 1, \dots, m$).

Нехай $1 < m < \lfloor 0.5n \rfloor$, $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ є таке розбиття множини N_n , що $|B_i| \geq 2$ ($i = 1, \dots, m$), а $S(B_i)$ ($i = 1, \dots, m$) є множина усіх таких переставлень множини S , які у елементі $v \in S$ циклічно переставляють компоненти номера яких належать множині B_i , а інші компоненти залишають на місці.

Охарактеризуємо клас сімей переставлень

$$F_\pi = \{H(h_1, \dots, h_m) \mid h_i \in S(B_i) \text{ } (i = 1, \dots, m)\}.$$

Множини B_i ($i = 1, \dots, m$) попарно не перетинаються. Тому усі елементи кожної сім'ї переставлень $H(h_1, \dots, h_m) \in F_\pi$ є попарно різними переставленнями елементів множини S .

А оскільки

$$|S(B_i)| = (|B_i| - 1)! \text{ } (i = 1, \dots, m),$$

то

$$|F_\pi| = \prod_{i=1}^m (|B_i| - 1)!.$$

З рівності $h_1^0 \circ \dots \circ h_m^0 = e$ випливає, що тотожне переставлення елементів множини S

належить до складу кожної сім'ї переставлень $H(h_1, \dots, h_m) \in F_\pi$.

Виключимо тотожне переставлення елементів множини S наступним чином.

Перейдемо від сім'ї $H(h_1, \dots, h_m) \in F_\pi$ до сім'ї переставлень

$$\tilde{H}(h_1, \dots, h_m) = \{h_1\} \cup$$

$$\cup \{h_1^{\alpha_2} \circ \dots \circ h_m^{\alpha_m} \mid \alpha_2, \dots, \alpha_m \in E, \sum_{j=2}^m \alpha_j \geq 1\},$$

а керування перетворенням чергового елемента $v \in S$ будемо здійснювати у відповідності з наступним правилом: якщо $\sum_{j=2}^m \alpha_j = 0$, то

застосуємо переставлення h_1 , а якщо $\sum_{j=2}^m \alpha_j \geq 1$,

то застосуємо переставлення $h_1^{\alpha_2} \circ \dots \circ h_m^{\alpha_m}$.

Зазначимо, що сім'я переставлень $\tilde{H}(h_1, \dots, h_m)$ містить в собі 2^{m-1} попарно різних переставлень елементів множини S .

Елемент $v \in S$ визначимо як нерухому точку сім'ї переставлень $\tilde{H}(h_1, \dots, h_m)$, якщо або $h_1(v) = v$, або існують такі $\alpha_2, \dots, \alpha_m \in E$ ($\sum_{j=2}^m \alpha_j \geq 1$), що $h_1^{\alpha_2} \circ \dots \circ h_m^{\alpha_m}(v) = v$. Позначимо через $S_{fix}(\tilde{H}(h_1, \dots, h_m))$ множину усіх нерухомих точок сім'ї переставлень $\tilde{H}(h_1, \dots, h_m)$.

Теорема 1. Якщо $n = \sum_{i=1}^m p_i$, де p_i ($i = 1, \dots, m$) є прості числа, а $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ є таке розбиття множини N_n , що $|B_i| = p_i$ ($i = 1, \dots, m$), то

$$|S_{fix}(\tilde{H}(h_1, \dots, h_m))| = 2^n (1 - \prod_{i=1}^m (1 - 2^{1-p_i})).$$

Доведення. Оскільки p_i ($i = 1, \dots, m$) є простим числом, то елемент $v \in S$ не є нерухомою точкою переставлення h_i у тому та лише у тому випадку, коли серед компонент елемента v , номера яких належать множині B_i є як 0, так і 1.

Цикли, які визначено переставленнями $h_1, \dots, h_m$ попарно не перетинаються. Тому елемент $v \in S$ не є нерухомою точкою ні для переставлення h_1 , ні для кожного із переставлень

$h_1^{\alpha_2} \circ \dots \circ h_m^{\alpha_m}$ ($\alpha_2, \dots, \alpha_m \in E, \sum_{j=2}^m \alpha_j \geq 1$) у тому та

спостерігати як вихід алгоритму A , так і образ входу v .

З (1) випливає, що:

1) якщо експериментатору відомо вектори параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ та $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то ідентифікація вектора параметрів $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ може бути зведена до розв'язку $2m$ задач пошуку дискретного логарифму;

2) якщо експериментатору відомо вектори параметрів $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ та $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то ідентифікація вектора параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ може бути зведена до розв'язку $2m$ задач пошуку дискретного логарифму;

3) якщо експериментатору відомо вектори параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ та $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$, то ідентифікація вектора параметрів $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ може бути зведена до розв'язку над кільцем K системи $2m$ лінійних рівнянь з $2m$ невідомими.

При можливому використанні дискретного перетворювача інформації M у якості потокового шифру вектори параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ та $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ є секретним ключом. З отриманих вище характеристик складності розв'язку задачі параметричної ідентифікації сім'ї бієкцій F випливає, що основні зусилля мають бути зосереджені на збереганні у таємниці саме векторів параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ та $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$.

Доцільно також зазначити, що встановлені вище характеристики визначають лише нижню границю складності розв'язку задачі параметричної ідентифікації сім'ї бієкцій F . В усіх інших випадках розв'язок цієї задачі має значно вищу складність.

Список використаних джерел

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С. и др. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
2. Шнайер Б. Прикладная криптология. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке СИ. – М.: Триумф, 2003. – 816 с.

Висновки.

У роботі досліджено запропоновану алгебраїчно-автоматну модель $M = (F, A_s)$ дискретного перетворювача інформації у випадку, коли сім'ю бієкцій F отримано у результаті найрізноманітніших викреслювань елементів фіксованої суперпозиції переставлень, а також, коли загальний елемент сім'ї F представлено системою рівнянь над кільцем K .

Подальший розвиток цих досліджень може бути пов'язаний з наступними напрямками.

У першому випадку доцільним є:

1) порівняльна характеристика властивостей сімей переставлень $\tilde{H}(h_1, \dots, h_m)$ у термінах решітки розбиттів множини N_n ;

2) узагальнення отриманих результатів за рахунок переходу від розбиття до покриття множини N_n .

У другому випадку доцільним є:

1) детальний аналіз складності розв'язку задачі параметричної ідентифікації сім'ї бієкцій $F = \{f_n\}_{n \in N_{|K|}}$ загальний член якої визначено системою рівнянь (1) в термінах тих властивостей векторів параметрів $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ та $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, які можуть бути сформульовано виключно в термінах властивостей кільця K .

2) пошук і порівняльний аналіз сімей бієкцій, загальний елемент яких визначено іншими системами рівнянь.

3. Молдовян А.А., Молдовян Н.А., Гуц Н.Д. и др. Криптография. Скоростные шифры. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 496 с.
4. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. Донецк: ИПММ НАН Украины, 2009. – 479 с.

Надійшла до редколегії 27.01.2011

УДК 004.91

Тарануха В.Ю., асистент

Використання генетичних алгоритмів для забезпечення якості автоматично згенерованих рефератів

В статті розглядається необхідність забезпечення зв'язності тексту як одної з характеристик якості тексту для задачі автоматичного реферування.

Показано, що застосування генетичних алгоритмів є дієвим засобом покращення якості тексту.

Ключові слова: автоматичне реферування, генетичні алгоритми, зв'язність тексту.

*E-mail: taranukha@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Необхідність розробки систем автоматичного реферування зумовлена збільшенням кількості та обсягу електронних документів, які потребують обробки. Оскільки більшість з таких документів представлена у вигляді неструктурованих текстів складених природною мовою та більшість програмного забезпечення орієнтована на роботу зі структурованими даними.

Постановка задачі

Рефератом в звичайному розумінні є текст вказаного об'єму, що менше за текст оригіналу і містить найбільш важливі для користувача думки оригіналу. Складність розв'язання задачі автоматичного реферування при такому визначенні того, що таке реферат, співмірна зі складністю задачі побудови штучного інтелекту. Тому задачу автоматичного реферування спрощують, виділяючи два головні напрямки: екстрактивне реферування, та абстрактивне реферування [1].

Абстрактивне реферування попри наочні переваги [2] має ряд недоліків. Використання засобів асоціативного контекстно-семантичного аналізу [3] дозволяє побудувати граф залежностей між поняттями переставленими в тексті оригіналу, проте простий синтез за семантичною мережею тексту [2] надійно працює лише для текстів з простою структурою викладення. Якщо в тексті відображаються зміни описуваних об'єктів з плином часу або складна взаємодія, то простий синтез за семантичною мережею створює реферати, що легко читаються, проте містять значну кількість змістовних

V.Y. Taranukha,

Using genetic algorithms to ensure the quality of automatically generated summaries

The article describes the method to ensure text coherence as one of the characteristics of quality for the task of automatic text summarization.

It is shown that the use of genetic algorithms is an effective way to improve the quality of text.

Key Words: automatic summarization, genetic algorithms, text coherence

прогалін. Основною причиною цього є те, що в мережі немає засобів опису зміни станів та ситуацій з плином часу. Крім того, такий підхід не досить добре враховує потреби користувача.

Системи автоматичного реферування з урахуванням запиту користувача [1], дозволяють будувати кращі реферати. Приклад реалізації такої системи описано в [4], проте, ця система базується на екстрактивному реферуванні.

Екстрактивне реферування має ту перевагу, що часова інформація не вилучається з тексту. Проте екстрактивні реферати погано читаються.

Тому було розроблено засоби, що дозволяють генерувати екстрактивні реферати, що добре читаються.

Попередній аналіз

Першою задачею є задача визначення тематичного наповнення тексту, що в свою чергу зводиться до задачі індексації.

Індексація спирається на перелік ключових слів та понять, які цими словами позначаються. Після проведення індексації результати індексації надаються користувачеві для того, щоб він міг вказати необхідні йому дані. Після чого враховуючи відсоток стиску та відомості про відносну важливість різних тем представлених у тексті можна проводити вибір даних з тексту.

Після вибору даних необхідно забезпечити відповідну якість тексту результату. Для цього необхідно забезпечити зв'язність. Основна причина порушення зв'язності полягає в тому, що речення змістовно наступне за вибраним реченням є в тексті оригіналу, проте відсутнє у

рефераті. Реферат хороший, коли вибрані речення зв'язані у цілісний текст.

Виділення зв'язних елементів тексту

Текст відрізняється від набору граматично правильних речень певною зв'язністю між реченнями, що до нього входять. Така зв'язність має різну природу:

- структурна зв'язність;
- логічна зв'язність;
- змістовна близькість.

Структурна зв'язність між елементами утворюється найчастіше шляхом застосування спеціальних слів, або граматичних форм, щоб пов'язати елементи тексту, задається такими засобами:

- посилання або спів посилання;
- еліптичні конструкції;
- повтор структурних елементів тексту, а саме фраз і слів;
- застосування сполучників.

Через високий рівень словозміни в українській мові призводить до того, що необхідно вживати засоби морфолексичного аналізу. При цьому немає гарантії, що автор не почне вводити свої терміни, або що всі терміни тексту містяться в словнику. Для розв'язання задачі зведення до канонічних форм використовуються словники та засоби евристичного морфолексичного аналізу, описані в [5].

Логічна зв'язність тексту забезпечується на рівні інтерпретації, хоча і має певні граматичні ознаки. Наприклад, слова «якщо», «то», «інакше», створюють в тексті логічні зв'язки, що очевидно відрізняються від зв'язків структурної зв'язності.

При створенні екстрактивного реферату доводиться більше спиратися на структурну зв'язність. Для цього є декілька причин. По-перше, логічна зв'язність спирається на зв'язки типу «пояснення», «причина», «наслідок», тощо. Головне, що зовсім не всі ці зв'язки і не в усіх випадках мають чіткі маркери у вигляді відповідної лексики або граматичних структур. По-друге, логічна зв'язність утворюється шляхом інтерпретації і тому є суб'єктивною. Таким чином вона повинна розглядатися для кожного читача окремо, і не є інваріантною. По-третє, логічна зв'язність утворюється шляхом інтерпретації і тому вимагає повноцінного розуміння тексту. Накаль, ця вимога виходить за межі сучасних можливостей.

Розроблена система в основному спирається на аналіз структурної зв'язності, тим більше, що це часто дозволяє також зафіксувати логічну

зв'язність, оскільки логічна зв'язність часто супроводжується структурною зв'язністю. Змістовна близькість є спеціальним типом зв'язності і буде розглянута далі.

Типи структурної зв'язності

Посилання та суміщені посилання будуються на основі займенників. Наприклад, у фрагменті «Ольга їде додому, там її чекають діти» займенник «її» встановлює посилання на об'єкт «Ольга». У фрагменті «Петро та Павло сидять у кабінеті, їх викликав директор» займенник «їх» встановлює суміщене посилання одразу на групу об'єктів. Крім того, можливі випадки, коли такі конструкції будуються транзитивно, наприклад, «Ольга ... її ... з нею».

Еліптичні конструкції. Будуються методом вилучення з речення елементів, що повинні бути в його структурі. Звичайно це характерно як для усного мовлення, так і для текстів. Наприклад, у конструкції «Великий човен пливе по течії, маленький - проти» прикметник «маленький» також вказує на якийсь човен.

Повтор структурних елементів тексту, а саме фраз і слів. Будуються шляхом повтору одного і того самого елементу тексту (слова або фрази), що позначає певний об'єкт.

Застосування сполучників. Це можуть бути як і звичайні об'єднувальні сполучники «і, й», протиставні «але», так і інші: «якщо, що». Саме цей тип структурної зв'язності найближчий до логічної зв'язності.

Змістовна близькість

Змістовна близькість є одним з найбільш важливих елементів зв'язності тексту. Розглянемо такий фрагмент тексту: «Розвиток обчислювальної техніки відбувався одночасно з розвитком технологій. На зміну електронним лампам прийшли напівпровідники. На їх основі були створені інтегральні схеми. Щодалі то більше і більше логічних елементів стали розміщувати на одному кристалі».

У даному тексті виділено два типи змістовної близькості:

- елементи пов'язані за значеннями;
- елементи пов'язані за структурою тексту.

Виділені в тексті жирним шрифтом словосполучення позначають поняття пов'язані за значенням. Зв'язок першого типу будується на основі знань, про те, що два елементи (поняття) пов'язані між собою.

Виділені курсивом слова позначають поняття пов'язані з іншими поняттями за рахунок коллокацій. Цей тип зв'язку задається автором

тексту і є відображенням того, що саме хотів повідомити автор цим текстом.

Визначення важливості елементів тексту

Визначення важливості спирається на вказані користувачем ваги представлених у тексті тематик та граф асоціативно зв'язаних понять у тексті, подібно до того, як це реалізовано у [2].

Кожне речення в тексті отримує оцінку відповідно до моделі лінійних вагових коефіцієнтів, подібно до того, як це показано в [1].

$$S_i = \sum_k V_k * Kr_k,$$

де V_k – важливість критерію,

Kr_k – значення критерію.

В свою чергу,

$$Kr_k = \sum_j W_j * P_j,$$

де W_j – індикаторна функція j -го слова (через відповідне йому поняття), P_j – важливість відповідно до двох оцінок: наявності в графі після відкидання зайвих вершин та ваги тематики визначеної користувачем.

В початкову версію реферату потрапляють речення, для яких S_i більше за порогове значення.

Оптимізація результатів реферування

Граф зв'язності тексту представляє собою щось схоже на ланцюжок, де речення найчастіше пов'язано зі своїми сусідами і не пов'язане з віддаленими реченнями.

Основна ідея покращення полягає в тому, що залежно від контексту, в якому знаходиться речення у рефераті, його оцінка може бути збільшена або зменшена. Задача полягає в максимізації оцінки тексту відповідно до вибраного набору речень.

Те яким чином визначається, які речення передують вказаному реченню та слідує за ним, залежить значною мірою від того, які алгоритми використовуються. Якщо це перше або останнє речення (тобто перед ним або після нього немає речень), то для цього речення не проводиться оцінювання.

Якщо речення, що розглядається, змістовно не зв'язане з реченням, що передує йому або йде за ним у рефераті, то його оцінка може бути зменшена. Якщо речення, що розглядається, змістовно зв'язане, то оцінка збільшується. Після експериментів з різними значеннями було вирішено збільшувати оцінку речення за

допомогою максимальної оцінки слова у тексті – $\max_j (W_j * P_j)$, штрафувати також за допомогою максимальної оцінки слова у тексті документа.

Певні складнощі виникають при обчисленні зв'язності двох речень. Оскільки основним зв'язком між реченнями є змістовний, то не можна спиратися на лексичну збіжність компонент речення. Змістова близькість визначається подібно до [3]. Відповідно до даних наявних у WordNet, ключовими зв'язковими елементами є синоніми, гіперніми, гіпоніми, мероніми, голоніми.

Таким чином задача зводиться до максимізації оцінки

$$F(T_i) = \sum_i S_i * W(C_{T_i}),$$

де $W(C_{T_i})$ – вагові коефіцієнти, що визначаються через C_{T_i} – структуру тексту представлену як граф зв'язків між реченнями.

Функція оцінки реферату визначена таким чином не є опуклою і простір над яким вона обчислюється є дискретним. Розмір простору оцінюється як C_n^k , де n – кількість речень в тексті, а k – кількість речень в рефераті. При розмірі газетної статті в 150 речень та розмірі реферату в 50 речень необхідно перебрати приблизно $2 * 10^{40}$ варіантів.

З цього випливає необхідність використання засобів, що дозволяють отримати результати досить близькі до результатів оптимізації повним перебором, але є при цьому досить ефективними в сенсі обчислювальної складності.

Генетичний алгоритм

Хромосомою будемо називати список номерів речень, що входять до реферату. Хромосома може мутувати змінюючи значення елементу списку. Дві хромосоми можуть поелементно або поблочно обмінюватися даними (виконувати *кросинговер*), при цьому утворюється дві нові хромосоми – нащадки не тотожні батькам.

Крок генетичного алгоритму

1) Генерується хромосома за рефератом

2) Створюється список A .

3) Хромосома заноситься у список.

4) Цикл від 1 до M .

5) На хромосому накладаються випадкові точкові мутації.

6) Мутанти заносяться у список A .

7) Створюється список B .

5) Цикл по i від 1 до M .

6) Цикл по j від 1 до M .

- 7) Хромосоми $A[i]$, $A[j]$ утворюють нащадків $B[x]$, $B[x+1]$ за випадковою точкою кросинговеру.
- 8) $B[x]$, $B[x+1]$ заносяться в список B .
- 9) Хромосоми в списку B сортуються за оцінкою
- 10) Відбираються M кращих.
- 11) Список B заміщує A

Всі кроки даного алгоритму є коректними:

- результат кросинговеру $A[i]*A[j]$ не збігається з результатом кросинговеру $A[j]*A[i]$;
- кросинговер $A[i]$, $A[j]$ відповідає за стратегію елітаризму, що забезпечує непогіршення результатів на кожному кроці генетичного алгоритму;

- структура тексту реферату сприяє тому, що зміна рівня зв'язності шляхом обміну блоками якнайближче відповідає діям людини, що редагує текст з метою отримати реферат тексту.

Для отримання реферату з хорошою оцінкою, необхідно виконати певну кількість кроків генетичного алгоритму. Швидкодія алгоритму: в практичних експериментах за 100 кроків вдавалося досягти задовільного результату для великих текстів.

Приклад, реферат без оптимізації.

«Клетка отграничена от других клеток или от внешней среды специальной мембраной и имеет ядро или его эквивалент, в котором сосредоточена основная часть химической информации, контролирующей наследственность. Вегетативное тело (таллом) грибов образовано микроскопическими нитями –

гифами, нередко сегментированными; каждая такая нить может считаться эквивалентом клетки, хотя и нетипичной формы. Некоторые не участвующие в метаболизме структуры тела, в частности раковины, жемчужины или минеральная основа костей, образованы не клетками, а продуктами их секреции».

Приклад, реферат з оптимізацією.
«КЛЕТКА, элементарная единица живого. Клетка отграничена от других клеток или от внешней среды специальной мембраной и имеет ядро или его эквивалент, в котором сосредоточена основная часть химической информации, контролирующей наследственность. Некоторые свободноживущие клетки, например такие простейшие, как фораминиферы, могут достигать нескольких сантиметров; они всегда имеют много ядер. Клетки тонких растительных волокон достигают в длину одного метра, а отростки нервных клеток достигают у крупных животных нескольких метров».

Висновки

Показано, що екстрактивне реферування без використання засобів забезпечення зв'язності тексту створює реферати, що погано читаються. Запропоновано спосіб забезпечення якості тексту автоматично згенерованих екстрактивних рефератів на основі генетичного алгоритму. Показано, що отримані реферати мають хорошу якість.

Список використаних джерел

1. Inderjeet Mani Natural language processing. Automatic summarization. // Natural language processing/ Inderjeet Mani, The MITRE Corporation and Georgetown University. – Amsterdam, Philadelphia, USA. – John Benjamin Publishing Company. – 2001. – Vol. 3. – 2001. – 286 p.
2. А.В. Анисимов, А.А. Марченко Ассоциативное реферирование естественно-языковых текстов // Искусственный интеллект. – Донецк. – 2006. – №3. – С. 488-492.
3. А.В. Анисимов, О.О. Марченко, А.О. Никоненко Алгоритмічна модель асоціативно-семантичного контекстного аналізу текстів природною мовою // Пробл. програмув. – 2008. – N 2-3. – С. 379-384.
4. Павел Браславский, Иван Колычев Автоматическое реферирование веб-документов с учетом запроса / П. Браславский, И. Колычев // Интернет-математика 2005. Автоматическая обработка веб-данных. - М., 2005. - С. 485-501.
5. А. В. Анисимов, А. Н. Романик, В. Ю. Тарануха Эвристические алгоритмы для определения канонических форм и грамматических характеристик слов // Кибернетика и системный анализ. – Т40 – 2004. – №2. – С. 3-15.

Надійшла до редколегії 15.03.2011

УДК 004.519.712: 004.92

Терещенко В.М., к.ф.-м.н., доц.,
Скляр П.В., студент

Оптимізація структур даних в методах локалізації точки

У роботі запропоновано підхід попереднього аналізу конфігурацій планарного розбиття для вибору оптимальних режимів роботи алгоритмів локалізації точки, а саме: часу пошуку та оцінки пам'яті у найгіршому випадку.

Ключові слова: структури даних, локалізація точки, планарне розбиття, геометричний пошук.

*E-mail: v_ter@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми. Ще до недавня проблема статичної локалізації точки в планарному розбитті з часом запиту $O(\log(N))$ і $O(N)$ пам'яті, була відкритою [1, 2]. В той же час, методи, які дають ефективні алгоритми в середньому випадку, відомі давно. Це класичний метод смуг [3], метод ланцюгів [4], метод деталізації триангуляції [5]. Проте кожен з алгоритмів вказаних методів має широкі набори спеціальних тестів, що погіршують їх середню оцінку за одним із параметрів. Так для методу смуг характерним є випадок графа у вигляді зубчатого многокутника, де загальна кількість ребер у смугах пропорційна квадрату кількості ребер розбиття. Метод ланцюгів чутливий до кількості нерегулярних вершин у вхідному розбитті (процедура регуляризації). У роботі запропоновано попередню обробку вхідних даних для більш компактного використання пам'яті без втрати швидкодії.

Ідея. Якщо розглянути рис. 1 під кутом 90° – він перестав бути критичним, рис. 2. Таким саме чином можна підібрати кут при якому у алгоритмі методом ланцюгів не доведеться додавати нових ребер (для вказаного розбиття) див рис 3.

Tereshchenko V.M., C. Sci (Phys-Math.), Ass.Prof.,
Sklar P. V., student

Optimisation data structures in algorithms of a point-localisation

In the paper we presented an approach of preliminary analysis configurations of planar subdivision for a choice of optimum operating modes of a point-location algorithms, namely: time of search and memory, in the worst case.

Key Words: data structures, point-location, planar subdivision, geometrical search.

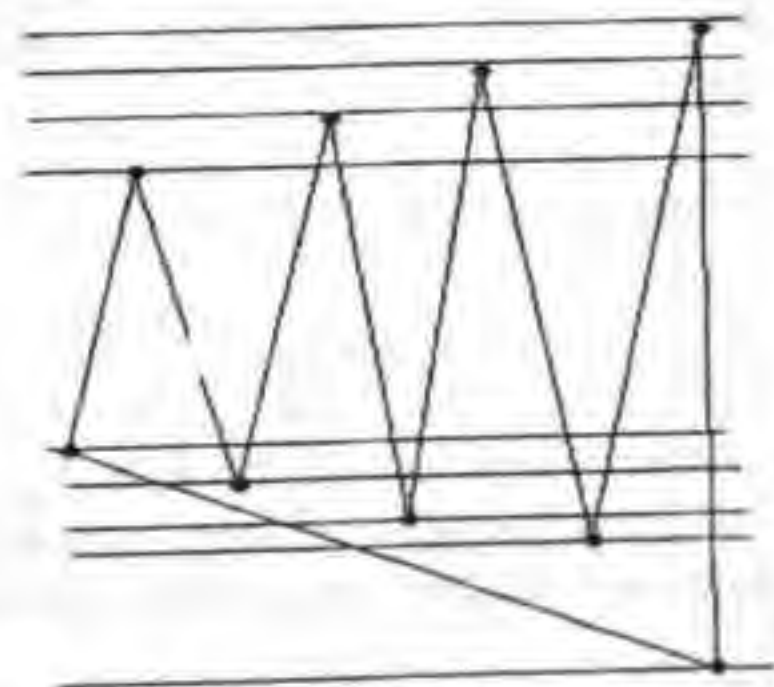


Рис.1. Неоптимальне розбиття..

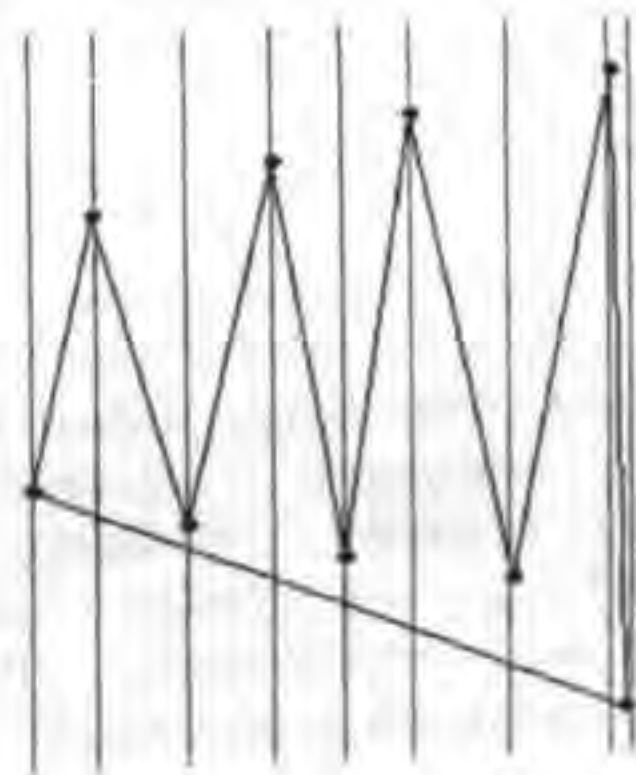


Рис.2. Оптимальне розбиття.

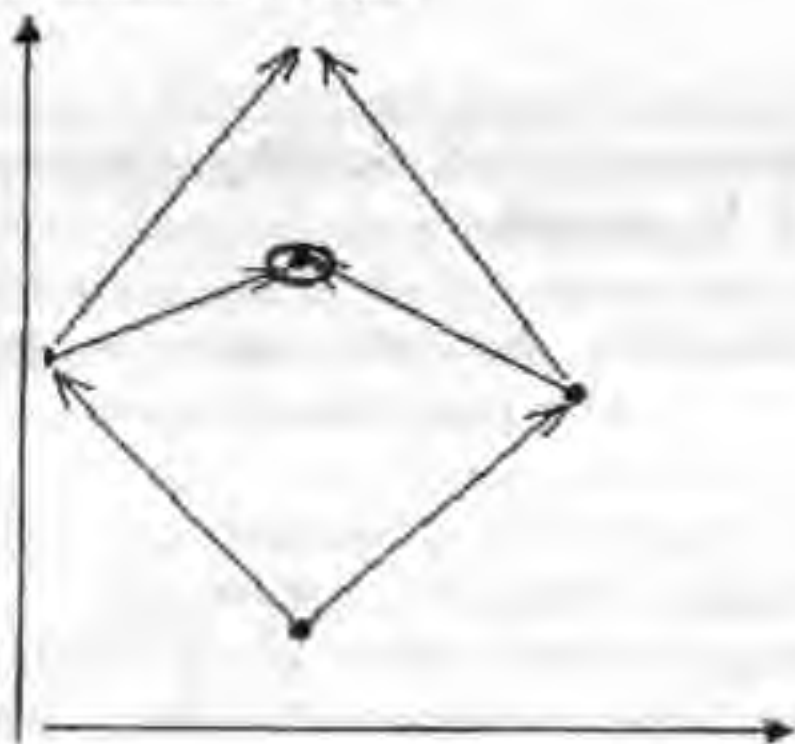


Рис. 3. Розташування у методі ланцюгів.

Отже, враховуючи зазначені зауваження, приходимо до висновку, що перед тим як застосовувати метод смуг, варто розглянути напрям замітання графа, що дає максимальну ефективність реалізації алгоритму пошуку. Теж саме стосується методу ланцюгів: необхідно зайняти таку пряму відносно, якої граф буде регулярним, щоб уникнути алгоритму регуляризації.

Алгоритм оптимізації структури даних

Означення. Планарним підрозбиттям називається набір $\langle V, E, F \rangle$, де V – набір вершин – точок на площині, $E = \{(x, y)\}$, де $x \in V, y \in V$ – набір ребер, що сполучають певні вершини, та F – многокутники на які дані ребра розбивають площину.

Означення. Під задачею статичної локалізації точки на планарному підрозбитті розуміють пошук многокутника розбиття який містить задану точку:

$$\text{PointLocation}(\langle V, E, F \rangle, p) = \{f | f \in F, p \in f\}$$

Задачас цікава лише для випадку масових запитів. Тому для пришвидшення обробки масових запитів алгоритми статичної обробки можуть вимагати певної попередньої обробки – формування статичних структур даних, доповнення вхідного розбиття, тощо. Запропоновані у цій роботі покращення стосуються саме передобробки. Розглянемо спочатку удосконалення методу смуг.

Метод смуг.

Як зазначалося у вступі, маючи хороші середні показники за часом та пам'яттю, метод смуг має суттєвий недолік – легко підібрати такі вхідні дані, що пам'ять необхідна для збереження

списків, що відповідають смугам зростає з $O(N)$ до $O(N^2)$ – адже під час роботи алгоритму необхідно зберігати усі смуги, а у наведеному прикладі кожен відрізок розбиття належить кожній смузі (див. рис.1). Щоб позбавитись від вказаного недоліку Сарнак та Тарьян [6] запропонували зберігати лише зміни при переході з однієї смуги до сусідньої. Даний підхід передбачає підтримку складної структури даних – дерево підтримки пошуку. Такий підхід дозволяє зменшити пам'ять, що використовується до $O(N)$, навіть у найгіршому випадку без зміни інших оцінок. Основним недоліком цього підходу у порівнянні з тим, що пропонується нами в роботі, є складність запропонованої ними структури даних.

Запропонований алгоритм

Щоб обійти вказаний недолік і залишити алгоритм простим, пропонується наступний підхід. Перебиратимемо кути ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) під якими будемо розглядати вхідну задачу. При цьому вводимо певну оціночну функцію $\text{benchmark}(\alpha, \langle V, E, F \rangle)$, яка дає числову оцінку пам'яті, вимагаючи збереження списків для смуг у $\langle V, E, F \rangle$ при даному куті α . При цьому постають наступні питання:

- які саме кути перебирати так, щоб передобробка не займала занадто багато часу;
- як обрати функцію benchmark так, щоб вона була швидкою в обчисленні.

Існує два способи для перебору кутів:

1. Щоб не пропустити найоптимальнішого розташування, необхідно перебрати кути на всьому інтервалі ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) з певним досить малим кроком (скажімо 0.1). Переваги – очевидні: кут точно буде найоптимальнішим для конкретних вхідних даних. Проте, цей алгоритм вимагає більшого часу на передобробку, а тому його слід застосовувати лише коли запитів на локалізацію дуже багато.
2. Другий підхід ґрунтується на тому щоб перебрати лише певні вибрані кути. Наприклад, такі, під якими принаймні одне ребро вхідного розбиття стає паралельним осі ординат і не міститиметься у жодному списку. Такий підхід варто використовувати, коли час на передобробку є критичним. Також він, добре працює для спеціальних розбиттів, наприклад таких, що складаються з

прямокутників (тоді для кожного ребра буде принаймні, ще одне паралельне до нього).

Вибір функції *benchmark* видається єдиним, задовольняючим швидкості обчислень:

$\text{benchmark}(\langle V, E, F \rangle, \alpha) =$

$$\sum_{e \in E} \text{кількість смуг в які потрапляє } e$$

Обчислення *benchmark* складається з таких етапів:

1. Поворот розбиття $\langle V, E, F \rangle$ на кут α , $O(N)$.
2. Формування смуг (сортування по абсцисі), $O(N \log N)$.
3. Сумування за формулою, $O(N)$.

Отже загальна складність $O(N \log N)$ – для кожного кута. При переборі всіх кутів складність складатиме $O(N \log N * 360 / \alpha)$. Загальна складність другого підходу буде порядку $O(N \log N * |V|)$, де $|V|$ – кількість ребер у розбитті. Тепер розглянемо метод ланцюгів. Введемо означення регулярності точки та графа.

Означення. Вершина планарного графа називається *регулярною*, якщо її множини вхідних та вихідних ребер не порожні. Якщо хоча б одна із множин вхідних чи вихідних ребер вершини графа порожня, то така вершина називається *не регулярною*. Граф усі вершини, якого, окрім першої та останньої, регулярні називається *регулярним* відносно деякої прямої.

Якщо граф нерегулярний, то у методі ланцюгів застосовується алгоритм регуляризації. Саме до таких вершин застосовується алгоритм регуляризації на кроці 3. Регуляризація полягає в доданні до розбиття нових ребер. Препарата та Лі [4] довели, що будь-яке розбиття можна перетворити на монотонне (регулярне) розбиття з не більш ніж $2|E|$ ребрами за час $O(|E| \log |E|)$. Запропонований ними алгоритм регуляризації базується на методі замітаючої прямої. За характерних вхідних даних, що містять забагато нерегулярних вершин, алгоритм створює багато нових ребер і може суттєво погіршити час виконання алгоритму. В роботі ми пропонуємо інший підхід.

Запропонований алгоритм

Згідно запропонованого підходу, необхідно підібрати такий кут, щоб кількість нерегулярних

вершин була мінімальною. Обчислити кількість нерегулярних вершин можна досить швидко – простим проходом по масиву ребер. Отже очевидно, що у даному випадку функція *benchmark*, мінімум якої ми шукатимемо, матиме вигляд:

$\text{benchmark}(\langle V, E, F \rangle, \alpha) =$

$$\sum_{v \in V} \begin{cases} 1 & \text{якщо } v - \text{нерегулярна, то } 1, \text{ інакше } 0 \end{cases}$$

Процедура підбору аналогічна запропонованій при модифікації методу смуг. Перебираємо кути з певного набору та шукаємо мінімум функції *benchmark*. Складність даної попередньої обробки складатиме $O(|E| * 360 / \alpha)$

Практична частина

Особливості програмної реалізації. Програму, що реалізує описаний алгоритм написано на мові Java з використанням стандартної графічної бібліотеки Swing.

Опис основних функцій програмної реалізації. Програма реалізує запропонований алгоритм оптимізації за допомогою оціночної функції. Вхідні дані програми можуть задаватися, як вручну, так і генеруватися програмою, чи зчитуватися з файлу. Робота програми складається з декількох етапів: завданням вхідного розбиття (рис. 4), запуску алгоритму підбору оптимального кута (прогрес кута відображається на екрані, рис. 5), завданням запитної точки, запуску пошукового алгоритму, рис. 6.

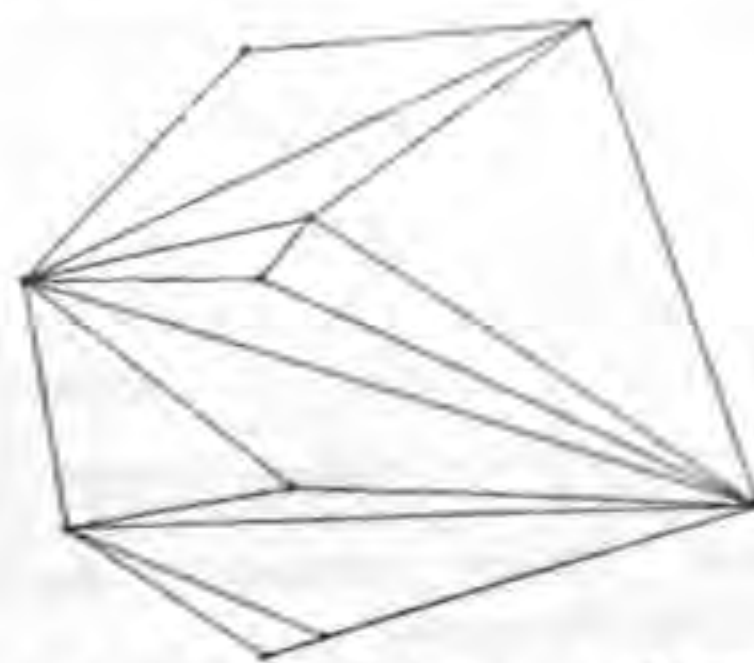


Рис. 4. Завдання вхідного розбиття.

Також у програмі передбачено можливість аналізу роботи алгоритму для довільного кута. Це робиться за допомогою слайдера, що задає кут. При цьому на екран окрім алгоритму виводиться оцінка використаної пам'яті.

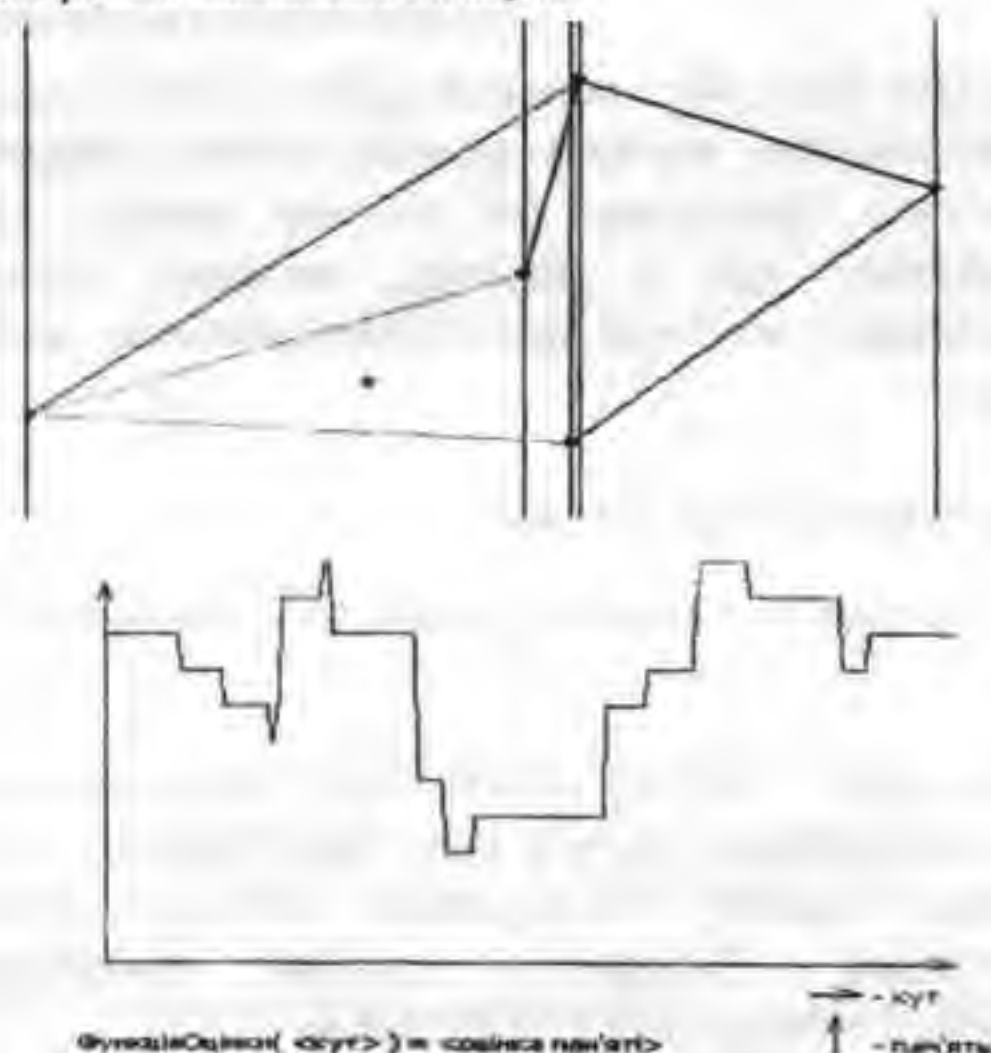


Рис.5. Метод смуг: алгоритм вибору оптимального кута; завдання запитної точки та результат роботи пошукового алгоритму.

Окрім того, користувач має можливість обирати метод для пошуку. Після проведення попередньої обробки на екрані з'явиться графік функції *benchmark*, яка виводить залежність об'єму пам'яті, як функції від кута α . На рис. 6. показано аналіз роботи алгоритму на основі методу ланцюгів.

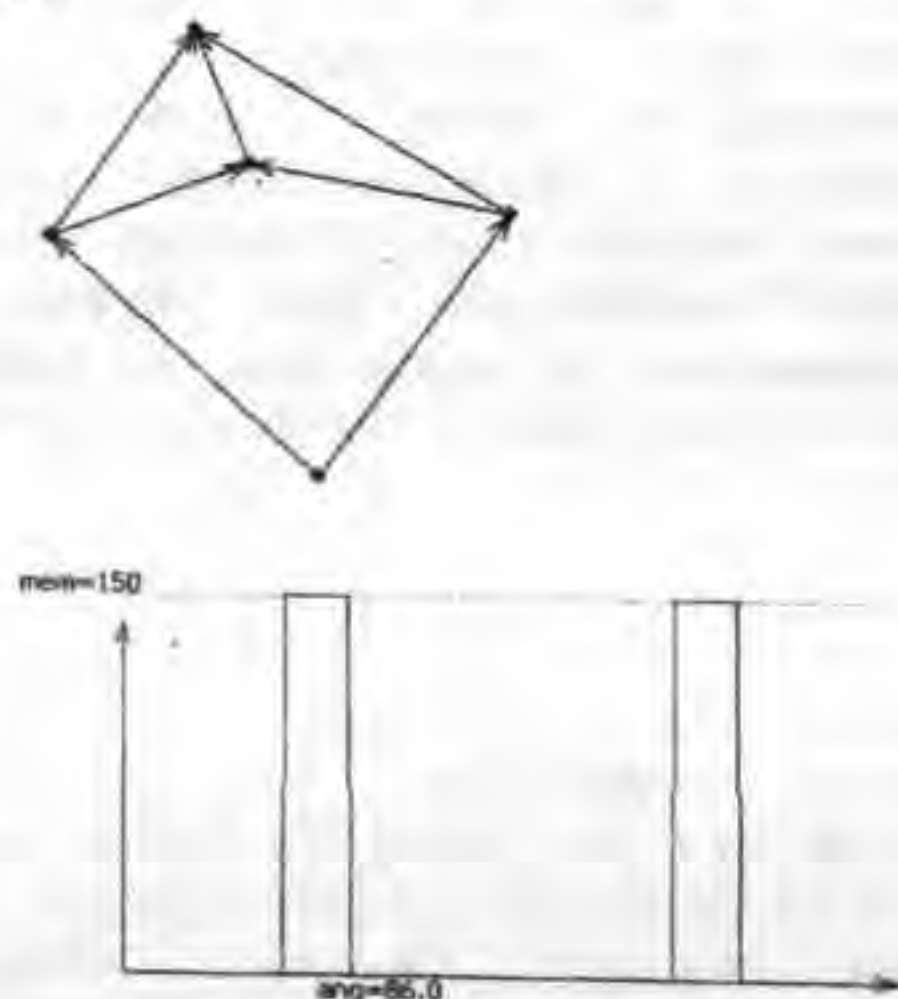


Рис.6. Метод ланцюгів: алгоритм вибору оптимального кута.

Висновки

В роботі запропоновано підхід, який дозволяє пришвидшити роботу алгоритмів локалізації точки для методу смуг, методу ланцюгів та

методу деталізації триангуляції, за рахунок оптимізації початкового розбиття. При цьому для методу смуг, методу ланцюгів і методу деталізації триангуляції оптимізуються, відповідно: пам'ять, час пошуку та пам'ять і час обробки запиту.

Цей підхід можна вдосконалити за рахунок аналізу кутів та заданням функції *benchmark*. Зокрема можна дослідити відображення розбиттів на множину кутів, так щоб кожен кут з певною ймовірністю був найбільш відхилений від кутів ребер розбиття. Результати практичного дослідження запропонованого підходу показали, що незважаючи на евристичність результатів, він дозволяє оптимізувати роботу початкових алгоритмів. Також дослідження показало, що крива функції *benchmark*, як правило має періодично-синусоїдальну структуру. Тобто досягши перший раз локального мінімуму функція в наступному локальному мінімумі не сильно відрізняється від значення в першому. Тому на практиці доцільнішими будуть наступні кроки: перебір кутів до першого локального мінімуму для скорочення перебору; обчислення функції *benchmark* для першого набору значень, що дають змогу передбачити амплітуду та період синусоїдальної функції, щоб обчислити кут мінімуму заздалегіть.

Список літератури

1. Goodman J.E., O'Rourke J. Handbook of discrete and computational geometry. Chapman&Hall/CRC, 2ed., 2004, 1453 p.
2. R. Seidely, U. Adamyz. On the Exact Worst Case Query Complexity of Planar Point Location, 2005.
3. Ф. Препарата, М.Шеймос. Вычислительная геометрия: Введение. Мир, 1989, 471 с.
4. D.T. Lee, F.P. Preparata "Location of a point in a planar subdivision and its applications", SIAM Journal on Computing, vol.69(3), pp 594-606, 1977.
5. D. G. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM J. Comput.*, 12(1), pp 28-35, 1983.
6. Sarnak and Tarjan «Planar Point Location Using Persistent Search Trees», Vol. 29 (7), 1986.

Надійшла до редколегії 20.03.11

УДК 519.21

Шарапов М.М.^{*}, к.ф.-м. н., доц., Наврузов Ф.,
студ., Дорошенко С., студ., Жулідова К., студ.

Оцінювання ймовірностей подій в умовах невизначеності

В статті запропоновано метод оцінювання ймовірностей подій через ймовірності інших подій, у випадку, коли зв'язки між подіями можуть бути не повністю відомими. Наведено приклади застосування зазначеного методу при розв'язуванні конкретних практичних задач.

Ключові слова: оцінювання ймовірностей, невизначеність умов, задача лінійного програмування.

^{*}E-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Suppose we have a set of events $A_1, \dots, A_n$ at a common probability space (Ω, F, P) with known probabilities $P(A_i) = p_i$ ($i = \overline{1, n}$) but without any information upon relationship amongst them. Let $A = f(A_1, \dots, A_n)$ be a function built in terms (superposition) of well known simple operations like product (intersection), sum (combination), difference, negation (complement), etc. The problem is to estimate chances of the event A .

Sometimes it is possible to find the answer without complicated calculus, e.g. $A = A_1 \cap A_2$ then, obviously,

$$\max\{0; p_1 + p_2 - 1\} \leq P(A) \leq \min\{p_1; p_2\}$$

due to sum theorem. Now we're going to deal with more difficult cases and some general solution idea.

We'll forget about initial space of elementary events Ω and will deal mainly with $\tilde{\Omega}$ (the idea is similar to sample probability space) with following elementary events

$$\tilde{\omega}_a = B_1 \cap \dots \cap B_n,$$

where $a = (i_1, \dots, i_n)$, $i_k \in \{0; 1\}$,

$$B_k = \begin{cases} A_k & \text{if } i_k = 1 \\ \bar{A}_k & \text{if } i_k = 0 \end{cases}. \text{ So, } |\tilde{\Omega}| = 2^n.$$

Obviously, $\tilde{\omega}_a \cap \tilde{\omega}_b = \emptyset$ ($a \neq b$) and it is easy to demonstrate that each event of $A_1, \dots, A_n$ can be represented as a subset of $\tilde{\Omega}$. Really, $A_k = \bigcup_{i_k=1} \tilde{\omega}_a$.

M.M.Sharapov^{*}, PhD,
students: F. Navruzov, S. Doroshenko,
K. Zhulidova.

Probabilities obtaining under uncertainties

Here we introduce a new method to estimate the probability of event in terms of other events while the relations of those events could be unknown or the information on them could be incomplete. Two examples of practical use are described in details.

Key words: estimating of probabilities, uncertainties, linear-programming problem.

Since $|\tilde{\Omega}| = 2^n$, the mentioned function $f(A_1, \dots, A_n)$ can possess at most 2^n different values and $A = f(A_1, \dots, A_n)$ can be represented as a sum $A = \bigcup_{a \in C} \tilde{\omega}_a$, where

$$C = \{a = (i_1, \dots, i_n) : A(\tilde{\omega}_a) \text{ occurs}\}.$$

The easiest way do define set C in every case is to deal with $A = f(A_1, \dots, A_n)$ as with, say, any other logical function (e.g. disjunctive normal form, conjunctive normal form, etc) and to build its truth table. Suppose we've done it and have got the explicit form of set C . Then

$$P(A) = \sum_{a \in C} P(\tilde{\omega}_a) \quad (1)$$

and our purpose is to find extremums (i.e. maximum and minimum) of linear function (1) under the following limitations:

$$\sum_{a \in C_k} P(\tilde{\omega}_a) = p_k, \quad (2)$$

where $C_k = \{a = (i_1, \dots, i_n) : \tilde{\omega}_a \subseteq A_k\}$ ($k = \overline{1, n}$ and dealing with C_k is as with C),

$$\sum_{\tilde{\omega}_a \in \tilde{\Omega}} P(\tilde{\omega}_a) \leq 1, \quad (3)$$

and

$$P(\tilde{\omega}_a) \geq 0 \quad \forall \tilde{\omega}_a \in \tilde{\Omega}. \quad (4)$$

So we reduced our initial problem to classical linear-programming problem.

Unfortunately we cannot give the common solution of formulated initial problem for it is represented in very general words though the mentioned linear-programming problem is well known and to solve it for any initial conditions is rather an easy task. So, in fact we've got a simple and clear algorithm for solving initial problem.

Algorithm

Step one. Formalization of set $\tilde{\Omega}$.

Step two. Obtaining the explicit form of set $C = \{a \in \tilde{\Omega} : A \text{ occurs}\}$.

Step three. Finding P_1 as the minimum of linear function (1) under conditions (2)-(4).

Step four. Finding P_2 as the maximum of linear function (1) under conditions (2)-(4).

As the final result we have the minimal possible segment $[P_1; P_2]$ with $P_1 \leq P(A) \leq P_2$. The minimality of the segment is guaranteed by the theoretical aspects of linear programming.

The next questions to deal with are possible independence and incompatibility of events $A_1, \dots, A_n$ as additional conditions to our problem. If, for example, we know that $A_i \cap A_j = \emptyset$ (for some fixed $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) then (2)-(4) should be supplemented with $P(\tilde{\omega}_{ij}) = 0$

$$\forall \tilde{\omega}_{ij} \in A_i \cap A_j \text{ (i.e. } \forall a \in C_i \cap C_j) \quad (5.1)$$

and our reduced problem is still the linear-programming one, i.e. any additional conditions of incompatibility do not change the solution scheme.

One of the advantages of our algorithm is that our solution gives us a concrete example of sets $A_1, \dots, A_n$ (and their parts) where the desired extremum is reached.

Example Given: $A = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$, $P(A_1) = 0.4$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.6$. Let's find the minimal possible segment $[P_1; P_2]$ with $P_1 \leq P(A) \leq P_2$ according to our algorithm.

Step one. $n = 3$, $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\omega}_{000}, \tilde{\omega}_{001}, \dots, \tilde{\omega}_{111}\}$,

$$A_1 = \{\tilde{\omega}_{100}, \tilde{\omega}_{101}, \tilde{\omega}_{110}, \tilde{\omega}_{111}\}, A_2 = \{\tilde{\omega}_{010}, \tilde{\omega}_{011}, \tilde{\omega}_{110}, \tilde{\omega}_{111}\},$$

$$A_3 = \{\tilde{\omega}_{001}, \tilde{\omega}_{011}, \tilde{\omega}_{101}, \tilde{\omega}_{111}\}.$$

Step two. It is easy show that $A = A_1 \cup A_2 A_3$, i.e.

$$A = \tilde{\Omega} \setminus \{\tilde{\omega}_{000}, \tilde{\omega}_{001}, \tilde{\omega}_{010}\} = \{\tilde{\omega}_{011}, \tilde{\omega}_{100}, \tilde{\omega}_{101}, \tilde{\omega}_{110}, \tilde{\omega}_{111}\}.$$

Step three. Let's designate $x_0 = P(\tilde{\omega}_{000})$, $x_1 = P(\tilde{\omega}_{001})$, $x_2 = P(\tilde{\omega}_{010})$, $x_3 = P(\tilde{\omega}_{011})$, $x_4 = P(\tilde{\omega}_{100})$, $x_5 = P(\tilde{\omega}_{101})$, $x_6 = P(\tilde{\omega}_{110})$, $x_7 = P(\tilde{\omega}_{111})$. Then we have to solve the following linear-programming problem (minimum of linear function (1) under conditions (2)-(4)):

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \min \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0.4 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0.5 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0.6 \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Due to four equalities in this problem the number of variables can be decreased down to four but it shouldn't be done for the following solving using, say, simplex method will need to do reverse steps and return to the same equalities. The solution of this linear-programming problem is

$$v = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0.3, 0.2, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0.4), P_1 = 0.4.$$

Step four. We have to solve the following linear-programming problem (maximum of linear function (1) under conditions (2)-(4)):

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \max \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0.4 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0.5 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0.6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

The solution of this linear-programming problem is

$$w = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0.1, 0, 0, 0.5, 0.3, 0.1, 0, 0),$$

$$P_2 = 0.9.$$

So, $[P_1; P_2] = [0.4; 0.9]$, i.e. $0.4 \leq P(A) \leq 0.9$ and these limitations can't be improved under initial conditions of this task though the argument-vectors v , w are not the only ones that provide us with desired extremums. For example, $v' = (0.05, 0.3, 0.25, 0, 0, 0.15, 0.1, 0.15)$ and $w' = (0, 0.1, 0, 0.5, 0.4, 0, 0, 0)$ do the same. No wonder, that often happens in linear-programming problems.

As an example, let us consider an application of described method to an insurance industry domain.

According to Ukraine's laws, cars' owners are required to have civil liability insurance. Insurance companies offer wide range of insurance policy which can vary from minimal law-enforced set to complex offers which include insurance of assets unrelated to the vehicle itself.

Importance of this field becomes obvious upon looking at recent statistics: in the first quarter of 2010 premiums for auto insurance (KACKO, «Автогражданка») were 1135.7 million hryvnas which constitute 25% of all insurance premiums, and insurance coverages for auto insurance were

659.5 million hryvnas — 52% of all insurance coverages.

The method described above allows to estimate probability of insured event, which, in turn, allows to decide on practicability of extending given policy, or to determine more accurate cost of the policy. At first, we will measure numbers of deaths and injuries in car accidents for following categories of road traffic's participants: pedestrians, cyclists, motorcyclists and passengers, car drivers and passengers. We will use values for Great Britain for a period of 11 years.

Year	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Child pedestrians:											
Killed	180	165	160	132	131	138	103	107	107	107	79
Killed or seriously injured	4,901	4,231	4,610	4,400	4,132	3,954	3,737	3,457	3,226	3,144	2,828
All severities	20,124	18,250	19,263	18,590	18,510	18,407	17,971	16,876	16,184	15,819	14,231
Adult pedestrians:											
Killed	1,163	1,072	953	897	858	835	803	760	750	719	696
Killed or seriously injured	9,125	8,260	8,114	7,716	7,300	6,925	6,592	6,221	6,112	5,920	5,803
All severities	30,354	28,750	28,129	27,178	26,827	26,223	25,827	24,806	24,481	24,758	24,553
Child pedal cyclists:											
Killed	48	37	42	48	54	33	32	36	27	25	22
Killed or seriously injured	1,195	1,146	1,234	1,249	1,231	1,016	915	950	758	674	594
All severities	7,725	7,386	8,075	8,133	8,217	7,899	6,930	7,920	6,260	5,451	4,809
Adult pedal cyclists:											
Killed	156	148	129	164	148	150	126	135	98	113	108
Killed or seriously injured	2,752	2,598	2,710	2,673	2,517	2,542	2,345	2,172	1,954	2,004	1,856
All severities	16,488	16,115	16,097	16,140	15,778	16,181	15,326	14,834	13,630	13,663	12,298
Motorcyclists and passengers:											
Killed	469	427	444	445	440	509	498	547	605	569	609
Killed or seriously injured	7,338	6,882	6,666	6,615	6,208	6,446	6,442	6,908	7,374	6,595	7,500
All severities	26,891	25,094	24,354	23,524	23,133	24,492	24,610	26,192	28,212	24,164	28,353
Car drivers and passengers:											
Killed	1,978	1,760	1,764	1,749	1,806	1,795	1,696	1,687	1,665	1,749	1,747
Killed or seriously injured	25,124	22,833	23,892	23,461	24,048	23,191	21,676	20,368	19,719	19,424	18,728
All severities	185,662	187,479	195,154	194,027	205,336	211,448	210,474	205,735	206,799	202,802	197,425

Year	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
All road users:											
Killed	4,229	3,814	3,650	3,621	3,598	3,599	3,421	3,423	3,409	3,450	3,431
Killed or seriously injured	53,485	48,834	50,190	49,154	48,097	46,583	44,255	42,545	41,564	40,560	39,407
All severities	310,753	306,135	315,359	310,687	320,578	327,803	325,212	320,310	320,283	313,309	302,605

By dividing the number of certain events by the number of all events and averaging the values for each year, we will obtain the following frequencies:

Pedestrians:		Car drivers and passengers:	
Killed	0.0228	Killed	0.0411
Killed or seriously injured	0.2527	Killed or seriously injured	0.5103
seriously injured	0.2299	seriously injured	0.4692
Motorcyclists and passengers:		Pedal cyclists:	
Killed	0.0119	Killed	0.0039
Killed or seriously injured	0.1594	Killed or seriously injured	0.0776
seriously injured	0.1475	seriously injured	0.0737
Killed in any car accident	0.0798		

Let us assume that the frequencies computed above are the same in Ukraine.

Overall number of deaths and injuries in 2009 in Ukraine, based on the data from the State Motor Vehicle Inspectorate department (<http://www.sai.gov.ua/news.shtml?id=138>): died: 4799 (persons); injured: 42419 (persons); road accidents (persons injured): 34194.

Let us compute the following events' probabilities:

1. Road accident (people injured): $7.6 \cdot 10^{-3}$
2. Road accident (pedestrian(s) died): $1.73 \cdot 10^{-4}$
3. Road accident (pedestrian(s) were injured): $1.75 \cdot 10^{-3}$
4. Road accident (cyclist(s) died): $2.96 \cdot 10^{-5}$
5. Road accident (cyclist(s) injured): $5.6 \cdot 10^{-4}$
6. Road accident in which motorcyclist/passengers died: $9.04 \cdot 10^{-5}$
7. Road accident (motorcyclist/passengers were injured): $1.12 \cdot 10^{-3}$
8. Road accident in which car driver/passengers died: $3.12 \cdot 10^{-4}$
9. Road accident in which car driver/passengers were injured: $3.57 \cdot 10^{-3}$
10. Car was stolen, assuming that 4129 cars were stolen in 2009: $1.7 \cdot 10^{-4}$

Let us estimate the following probabilities:

1. Road accident which results in an injury of pedestrian or cyclist or motorcyclist/passenger, or,

car was stolen: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B)$, where event A_1 is a road accident in which pedestrians were injured, A_2 - cyclist(s) were injured, A_3 - motorcyclist(s) were injured, B - car was stolen.

$$P(A_1) = 1.75 \cdot 10^{-3}; \quad P(A_2) = 5.6 \cdot 10^{-4}; \\ P(A_3) = 1.12 \cdot 10^{-3}; \quad P(B) = 1.7 \cdot 10^{-4}.$$

Programmatic realization of the described algorithm gives us the following probability range: $0.00175 \leq P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B) \leq 0.00368$.

2. Road accident which results in an injury of car driver/passengers or car was stolen: $P(A \cup B)$, where event A is a road accident in which car driver/passengers were injured. $P(A) = 3.57 \cdot 10^{-3}$

Programmatic realization of the described algorithm gives us the following probability range: $0.00357 \leq P(A \cup B) \leq 0.00374$.

3. Road accident which results in an injury of car driver/passengers or pedestrian or cyclist or motorcyclist/passenger: programmatic realization of the described algorithm gives us the following probability range:

$$0.00357 \leq P(A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq 0.007075.$$

4. Road accident which results in death of car driver/passengers or pedestrian or cyclist or motorcyclist/passenger: $P(D \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3)$,

where $P(D) = 3.12 \cdot 10^{-4}$; $P(D_1) = 1.73 \cdot 10^{-4}$;
 $P(D_2) = 2.96 \cdot 10^{-5}$; $P(D_3) = 9.04 \cdot 10^{-5}$.

Programmatic realization of the described algorithm gives us the following probability range:
 $0.000312 \leq P(D \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3) \leq 0.000515$.

By analyzing obtained results, we can see that probability for a driver/car passenger to be injured in an accident is higher than for any other participant of the road traffic, which suggests that premiums for drivers/passenger should be higher than for any other group.

Adding the insurance from car's stealing results in probability increase by only 0.0002. Based on this, insurance company can offer its clients new policy with this insurance for a slightly increased price.

Let's consider another example of the method's application in the aircraft construction. Operation of airplanes is uninterruptedly connected with the occurrence probability of unfavorable situations, which may cause to disastrous effect. This problem is particularly urgent for the regular passenger planes.

Statistical analysis of small and medium aircraft provides an opportunity to make a classification of the major unforeseen breakdowns and accidents (statistical probability per one flight hour) – events A_i .

A_1 : Pilot error – the highest rated reason. It's difficult to calculate this probability; estimation is based on such statistic: over 75% of accidents are caused by pilot. Accordingly, we can take $P(A_1) = 3 \sum_{i=2}^N P(A_i)$, where $N = 12$ – number of major risk factors. There is a correlation between A_1 and events $A_2 - A_{12}$.

A_2 : Refusal to radio station in flight. $P(A_2) = 10^{-8}$. Correlation with $A_1, A_3, A_8, A_9, A_{12}$.

A_3 : Brake failure on landing (once per flight). $P(A_3) = 10^{-7}$. Correlation with A_1, A_8 .

A_4 : Failure of the anti-icing system. $P(A_4) = 10^{-8}$. Correlation with A_1, A_3, A_{10} .

A_5 : Fuselage (or hull) undocking. $P(A_5) = 10^{-7}$. Correlation with $A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{11}$.

A_6 : Engine failure. $P(A_6) = 10^{-7}$. Correlation with A_1, A_{10}, A_{11} .

A_7 : Failure of both engines. $P(A_7) = 10^{-13}$. Correlation with A_1, A_{10}, A_{11} .

A_8 : Damaged airport runway (twice per flight). $P(A_8) = 2 \cdot 10^{-6}$. Correlation with A_1 .

A_9 : Control system failure (elevators, ailerons, rudders etc.). $P(A_9) = 10^{-7}$. Correlation with A_1, A_{10} .

A_{10} : Breakdown or faulty data on measuring devices. $P(A_{10}) = 10^{-6}$. Correlation with A_1 .

A_{11} : Refusal/ignition of the fuel system. $P(A_{11}) = 10^{-7}$. Correlation with A_1, A_{10} .

A_{12} : Increased turbulence (wind squalls) bumps, birds. $P(A_{12}) = 10^{-6}$. Correlation with A_1, A_2, A_{10} .

So long as the airplane during the operation is in flight for 7-8 thousands hours (let's take an average value – 7500 hours), we can calculate the probabilities B_i , $i = \overline{1, 12}$ of unforeseen situations' occurrence during the operational phase:

$$P(B_i) = 3 \sum_{i=2}^N P(A_i) = 1.017000023 \cdot 10^{-1},$$

$$P(B_2) = 7.5 \cdot 10^{-5}, \quad P(B_3) = 7.5 \cdot 10^{-4},$$

$$P(B_4) = 7.5 \cdot 10^{-3}, \quad P(B_5) = 7.5 \cdot 10^{-4},$$

$$P(B_6) = 7.5 \cdot 10^{-4}, \quad P(B_7) = 7.5 \cdot 10^{-10},$$

$$P(B_8) = 1.5 \cdot 10^{-2}, \quad P(B_9) = 7.5 \cdot 10^{-4},$$

$$P(B_{10}) = 7.5 \cdot 10^{-3}, \quad P(B_{11}) = 7.5 \cdot 10^{-4},$$

$$P(B_{12}) = 7.5 \cdot 10^{-3}.$$

Using the statistics of aircraft accidents allows us to divide the above events' indices into groups (by 2-3), then the simultaneous occurrence of events in any group most likely leads to an accident:

$$I_1 = \{1, 2, 3\}, \quad I_2 = \{1, 2, 8\}, \quad I_3 = \{1, 2, 10\},$$

$$I_4 = \{1, 2, 12\}, \quad I_5 = \{1, 3, 8\}, \quad I_6 = \{1, 4, 9\},$$

$$I_7 = \{1, 4, 12\}, \quad I_8 = \{1, 4, 5\}, \quad I_9 = \{1, 5, 6\},$$

$$I_{10} = \{1, 5, 11\}, \quad I_{11} = \{1, 5, 12\}, \quad I_{12} = \{7\},$$

$$I_{13} = \{1, 8, 10\}, \quad I_{14} = \{1, 2, 9\}, \quad I_{15} = \{1, 8, 9\},$$

$$I_{16} = \{1, 9, 10\}, \quad I_{17} = \{1, 9, 12\}, \quad I_{18} = \{1, 3, 10\},$$

$$I_{19} = \{1, 4, 10\}, \quad I_{20} = \{1, 10, 12\}, \quad I_{21} = \{1, 6, 11\}.$$

Why is such a partition correct? Let's consider a few substantiations:

Pilot error – the most significant factor, so if you have this one in each group (perhaps, except the 7-th), the probability of accidents increases dramatically. For 2-nd group: refusal to radio station in flight leads to the fact that pilot doesn't receive advance information about damaged airport

runway and he can not make a decision about changing the landing airfield, so that with high probability it leads to an accident. For 5-th group: brake failure on landing and the presence of a damaged runway with the pilot's inattention with high probability may cause the landing crash, since aircraft's controllability is sharply reduced and mileage on the runway significantly increases. For 6-th group: anti-icing system failure leads to the formation of ice on the wings, as a consequence – to a breach of the wing profile and thus reduce its upward force, unbalanced flow of incoming air blowing etc. In conjunction with the refusal of aircraft control, will be difficult to lead the aircraft in the warmer air layers (at a lower height), and to prevent airplane from getting into a spin. With high probability, it will end fatally. For 11-th group: Fuselage undocking leads to the formation of additional resistance during the flight, as a consequence – to the destruction of wing's (or tail's) construction, while flying through a zone of high turbulence rapidly exacerbate the destruction process of aircraft parts by filing excessive vibration to the damaged area – as a result, another crash. Similar substantiations can be offered for each of the remaining groups. Then, events C_j , $j = \overline{1, 21}$ "factors from j -th group simultaneously occur" will assume the shape of: $C_j = \bigcap_{i \in I_j} B_i$, and desired event

C : $C = \bigcup_{j=1}^{21} C_j$. Elementary events space

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \tilde{w}_{\frac{0}{12}}, \dots, \tilde{w}_{\frac{1}{12}} \right\}, n = 12, |\tilde{\Omega}| = 2^{12} = 4096.$$

Let's designate $x_0 = \tilde{w}_{\frac{0}{12}}, \dots, x_{4095} = \tilde{w}_{\frac{1}{12}}$.

Let's form the linear programming problem with objective function $P(C) = P\left(\bigcup_{j=1}^{21} C_j\right)$ in the new notations. Since the problem's dimension is large, we'll compile and solve it using the software, developed by us.

Solving the maximize linear programming problem, in the issue we'll get:

$$P_{\max} = 1.06501 \cdot 10^{-2}.$$

By analogy, solving the minimize linear programming problem, we'll get:

$$P_{\min} = 7.5 \cdot 10^{-8}.$$

As a result, we'll obtain probabilistic segment:

$$P_{\min}^1 = 7.5 \cdot 10^{-8}; P_{\max}^2 = 1.06501 \cdot 10^{-2};$$

$$[P_{\min}^1, P_{\max}^1] = [7.5 \cdot 10^{-8}, 1.06501 \cdot 10^{-2}].$$

This is the probability of airplane crash during the operation.

Consider the event D – probability of airplane crash during the flight (let's assume that the average flight's duration is 2.5 hours). If we replace events B_i for $\tilde{A}_i$, where probabilities $P(\tilde{A}_i) = 2.5 \cdot P(A_i)$, in the formulation of previous problem, then events D_j "factors from j -th group simultaneously occur" will assume the shape of: $D_j = \bigcap_{i \in I_j} \tilde{A}_i$, and desired

event D : $D = \bigcup_{j=1}^{21} D_j$. Solving similarly composed linear programming problem, we'll obtain probabilistic segment

$$[P_{\min}^2, P_{\max}^2] = [2.5 \cdot 10^{-13}, 3.55 \cdot 10^{-6}],$$

$$P_{\text{average}}^2 = \frac{P_{\min}^2 + P_{\max}^2}{2} = 1.775 \cdot 10^{-6}.$$

Statistics from the site <http://www.planecrashinfo.com/> gives us probability $P_{\text{average}}^2 = 4 \cdot 10^{-7}$. Differences in these two values are caused by accountable factors and incompleteness of the data used when calculating 1-st and 2-nd average probability. Furthermore, in the 2-nd case weren't taken into account crashes of: 1) airplanes with less than 10 people on board; 2) private airplanes; 3) crushes without victims.

In terms of expedience, such findings, as an example, may arouse insurance companies' interest. While compiling the mathematical model, the average aircraft's data (regular passenger planes' statistic for the past 10 years) was used. Information was provided by a reliable source who wished to remain anonymous.

At the end of these notes we'll underline that one can easily cite as examples a lot of applied problems in economics, politics, medicine etc, that could be solved by means of the described algorithm to say nothing about training problems.

References

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Либроком, 2009. – 656с.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с: ил.

РАДІОФІЗИКА

ANNOUNCEMENT

THE
ANNOUNCEMENT
OF THE
RESULTS OF THE
EXAMINATIONS
Held at the
University of
Cambridge
in the
Year 1900

THE
ANNOUNCEMENT
OF THE
RESULTS OF THE
EXAMINATIONS
Held at the
University of
Cambridge
in the
Year 1900

THE
ANNOUNCEMENT
OF THE
RESULTS OF THE
EXAMINATIONS
Held at the
University of
Cambridge
in the
Year 1900

УДК 535.375

Дмитрієв М.В., студ., Іванісік А.І., к.ф.-м.н., доц.,
Коротков П.А., д.ф.-м.н., проф.

Вплив параметричних процесів на індикатрису вимушеного комбінаційного розсіювання світла

Отримані нові результати стосовно
індикатриси вимушеного комбінаційного
розсіювання світла. Теоретично показано, що
асиметрія може бути пояснена і описана
впливом параметричних процесів,
відповідальних за утворення антистоксової і
стоксової компоненти. З'ясована залежність
коефіцієнта асиметрії розсіювання від рівня
перевищення порогу вимушеного комбінаційного
розсіювання світла.

Ключові слова: вимушене комбінаційне
розсіювання світла, параметричні процеси,
індикатриса.

*E-mail: maxdm@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В. А.

Вступ

Питання про природу асиметрії індикатриси
вимушеного комбінаційного розсіювання світла
(ВКР) постало майже відразу після відкриття
ефекту ВКР, оскільки виявилось, що
інтенсивність побіжного розсіювання, як правило,
перевищує інтенсивність зустрічного [3]. Проте
загальновизнаного, вичерпного пояснення
природи асиметрії на сьогодні не існує.

Зазначимо, що із класичної теорії Плачека [1]
слідє рівність перетинів спонтанного
комбінаційного розсіювання (СКР) світла у
напрямку збуджуючого променя та протилежно
йому. Експериментально виявлена помітна
асиметрія навіть для спонтанного розсіювання [4].

Різними авторами пропонувалося багато
фізичних механізмів для пояснення асиметрії
індикатриси ВКР. Наведемо деякі з них.

1. Затухання хвилі когерентних
молекулярних коливань (хвилі збудження
середовища), яка породжується внаслідок
побіжного розсіювання, менше, ніж такої ж хвилі
для зустрічного розсіювання, оскільки її хвильовий
вектор у першому випадку значно більший.
Різниця у затуханнях веде до переважного
розсіювання вперед [5].

2. У разі побіжного розсіювання поле передає

M.V.Dmitriev, stud., A.I.Ivanisik, Ph.D., As.Prof.,
P. A. Korotkov, Dr.Sci., Prof.

Effect of the parametric processes on the asymmetry of stimulated Raman light scattering indicatrix

New results concerning stimulated Raman light
scattering indicatrix were obtained. It was
theoretically demonstrated that the asymmetry can
be explained and described with the influence of
parametric processes, which are responsible for
Stokes and anti-Stokes components creation.
Dependency of scattering asymmetry coefficient on
the level of excess above the threshold of stimulated
Raman light scattering was determined.

Key Words: stimulated Raman light scattering,
parametric processes, indicatrix.

молекулам менший імпульс, ніж у випадку
зустрічного розсіювання. Різні за величиною ефекти
віддачі спричиняють переважне розсіювання вперед
[6].

3. У випадку побіжного розсіювання цуг
стоксової хвилі взаємодіє з однією і тією ж
частиною цугу збуджуючої хвилі. Комбінаційне
підсилення у напрямі вперед квазістатично
зв'язане зі зміною інтенсивності збуджуючої
хвилі, а тому обернено пропорційне ширині Γ_s
лінії комбінаційного розсіювання. Комбінаційне
підсилення у напрямі назад буде меншим,
оскільки процес взаємодії усереднюється за
змінками амплітуди та фази збуджуючого поля, і
пропорційне $(\Gamma_s + \Gamma_t)^{-1}$, де Γ_t – спектральна
ширина збуджуючого випромінювання [2, 7].

4. Довжина взаємодії імпульсів збуджуючого
та розсіяного випромінювання для побіжного
розсіювання обмежена довжиною L ВКР-активного
середовища, а для зустрічного – меншою із двох:
довжиною L , імпульсу та L середовища. Якщо
 $L > L_s$, то буде переважати розсіювання вперед [2].

5. Частота розсіяного світла суттєво
відрізняється від частоти збуджуючого, тому
помітна частина енергії залишається у
середовищі. В залежності від співвідношення між
часом життя збудженого коливального стану

молекул і тривалістю імпульсу потрібно враховувати або накопичення молекул у збудженому стані, або нагрівання середовища. В обох випадках змінюється діелектрична проникність середовища і протягом збуджуючого імпульсу виникає фазова модуляція взаємодіючих хвиль, яка погіршує умови насамперед для зустрічного розсіювання [11].

6. Більшість ефективних ВКР-активних середовищ є керрівськими рідинами. Розташування областей самофокусування збуджуючого випромінювання залежить від його потужності. Розсіювання відбувається переважно в області самофокусування [8], а решта середовища постає у ролі підсилювача. Якщо розташування області самофокусування не збігається з центром середовища, то і розсіювання матиме відповідну асиметрію. Це ж стосується і експериментальних досліджень у сфокусованих пучках збуджуючого випромінювання [2].

7. Підсилення імпульсів зустрічного ВКР відбувається в полі невиснаженого збуджуючого випромінювання, що може вести до переважного розсіювання назад [9].

8. Внаслідок взаємодії збуджуючого випромінювання і розсіяної побіжної стоксової хвилі за параметричним механізмом породжуються антистоксова компонента. Навіть тільки внаслідок відтоку енергії вже буде стримуватися темп наростання побіжної стоксової хвилі. За умови ж ідеального фазового узгодження між стоксовою і антистоксовою хвилями взагалі жодна з них не може експоненціально підсилюватися і настає параметричне пригнічення побіжного розсіювання. Що ж до зустрічного розсіювання, то умови синхронізму для параметричних процесів у цьому випадку не виконуються. У результаті має спостерігатися переважно розсіювання назад [2, 10].

Навіть такий короткий перелік фізичних механізмів, що можуть спричиняти асиметрію індикатрис ВКР, вказує на складність проблеми, а те, що жоден з перелічених механізмів не є універсальним, – на необхідність додаткових експериментальних та теоретичних досліджень. Не випадково, що в такій ситуації автори [9] роблять висновок про відсутність у літературі інформації щодо прямих і детальних досліджень асиметрії індикатрис ВКР.

Метою нашої роботи є аналіз впливу параметричних процесів на індикатрису ВКР, оскільки висновок про пригнічення побіжного розсіювання внаслідок параметричних процесів [2, 10] суперечить експериментальним даним.

Теоретична модель

Розглядається випадок, коли за віссю Z , яка збігається з напрямком поширення лазерної хвилі, генерується стоксова і антистоксова компонента, для якої реалізуються умови фазового синхронізму, а в протилежному напрямі – лише стоксова компонента. Не враховується фазова саомодуляція, хвильова нестационарність, часова зміна потужності, дифракційні ефекти, розбіжність пучків.

Числовими методами розв'язувалася система чотирьох зв'язаних рівнянь для амплітуд напруженості електричного поля E_L лазерної хвилі та полів $E_{S\uparrow}$, $E_{S\downarrow}$, E_A побіжної стоксової, зустрічної стоксової і антистоксової компонент, відповідно:

$$\begin{cases} \frac{dE_L}{dz} = -g_L E_L (E_{S\uparrow})^2 - g_L E_L (E_{S\downarrow})^2 - 2g_L E_L E_{S\uparrow} E_A - \\ \quad + g_L E_L (E_A)^2; \\ \frac{dE_{S\uparrow}}{dz} = g_S E_{S\uparrow} (E_L)^2 + g_S E_A (E_L)^2; \\ \frac{dE_{S\downarrow}}{dz} = -g_S E_{S\downarrow} (E_L)^2 + g_S E_{S\uparrow} (E_L)^2; \\ \frac{dE_A}{dz} = -g_A E_A (E_L)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Перше рівняння системи (1) для градієнту поля лазерної хвилі містить три члени, які у порядку їх запису враховують зменшення амплітуди поля внаслідок: а) комбінаційного процесу утворення побіжної стоксової компоненти, б) комбінаційного процесу утворення зустрічної стоксової компоненти, в) параметричного процесу одночасного утворення побіжної стоксової і антистоксової компоненти. Четвертий член пов'язаний зі збільшенням амплітуди поля лазерної хвилі внаслідок оберненого комбінаційного процесу за участю антистоксової компоненти. Інші три рівняння у сукупності містять п'ять членів і враховують вплив уже вказаних процесів на зміни амплітуд полів побіжної стоксової, антистоксової та зустрічної стоксової компонент.

За віддаленості частот хвиль від електронних резонансів можна вважати, що показники заломлення n на частоті ω_L лазерного випромінювання, стоксовій частоті ω_S і антистоксовій ω_A однакові. Крім цього, знехтуємо нерезонансними кубічними

сприйнятливостями. Тоді в (1) для коефіцієнтів g виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} g_L &= g'_L = g''_L; \\ g_S &= g'_S = g''_S; \\ g'_A &= g''_A; \\ g_L / \omega_L &= g_S / \omega_S = g_A / \omega_A \end{aligned} \quad (2)$$

і в системі СІ, приміром,

$$g_S = \frac{\omega_S}{2nc} \left| \text{Im} \left[\chi^{(3)}(\omega_S; \omega_L, -\omega_L, \omega_S) \right] \right|, \quad (3)$$

де $\chi^{(3)}$ – кубічна сприйнятливість середовища, c – швидкість світла у вакуумі.

Отже, для здійснення розрахунків достатньо задати відоме значення g_S , та врахувати комбінаційний зсув частоти Ω . Для конкретності розрахунків були вибрані значення, характерні для бензолу: $\Omega / (2\pi c) = 992 \text{ см}^{-1}$, $g_S = 2,8 \cdot 10^{-14} \text{ м/В}^2$ [2]. Довжина хвилі лазерного випромінювання $\lambda_L = 694,3 \text{ нм}$ (рубіновий лазер).

Граничні умови накладалися на вхідній межі середовища для лазерного поля $E_L(z=0) = 30 \text{ МВ/м}$, побіжної стоксової компоненти – $E_{S\uparrow}(z=0) = 1 \text{ МВ/м}$ і антистоксової компоненти – $E_{S\downarrow}(z=0) = 1 \text{ МВ/м}$, а для зустрічної стоксової компоненти на вихідній межі – $E_{S\downarrow}(z=L) = 1 \text{ МВ/м}$. Довжина середовища L вибиралася 10 см або 30 см. Після розрахунків амплітуда напруженості полів переводилася в інтенсивність відповідних компонент ($I_L, I_{S\uparrow}, I_{S\downarrow}, I_A$) за формулою

$$I = 0,5 \epsilon_0 c n E^2, \quad (4)$$

де ϵ_0 – електрична стала.

Результати розрахунків

Для вибраної моделі у випадку генерації побіжної та зустрічної стоксових компонент за відсутності параметричного процесу $2\hbar\omega_L = \hbar\omega_{S\uparrow} + \hbar\omega_{S\downarrow}$ має спостерігатися симетрична індикатриса (рис. 1): $I_{S\uparrow}(z=L) = I_{S\downarrow}(z=0)$. Проте слід звернути увагу на те, що всередині середовища відношення інтенсивностей $I_{S\uparrow}(z)/I_{S\downarrow}(z)$ залежить від

координати і змінюється в широких межах, набуваючи значень як більших, так і менших одиниці. Найшвидші спади інтенсивності лазерного випромінювання відбуваються на вході та поблизу виходу з середовища.

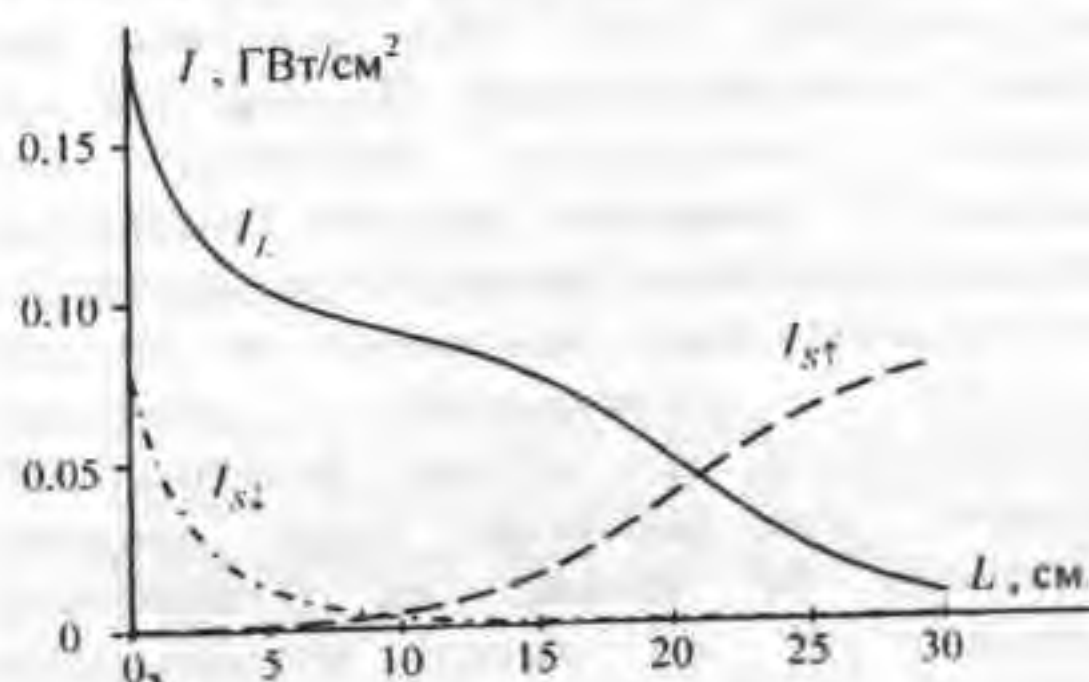


Рис. 1 Розподіл інтенсивності випромінювання в середовищі довжиною $L=30 \text{ см}$ у випадку відсутності параметричних процесів

За наявності параметричного процесу ситуація кардинально змінюється (рис. 2). За тієї ж інтенсивності лазерного випромінювання і довжини середовища, що і на рис. 1, побіжна стоксова компонента виходить на насичення з досягненням значно більшої інтенсивності $I_{S\uparrow}(z=L)$. Напротивагу зустрічна стоксова компонента має інтенсивність $I_{S\downarrow}(z=0)$ меншу, ніж у попередньому випадку. На виході із середовища також спостерігається антистоксова компонента.

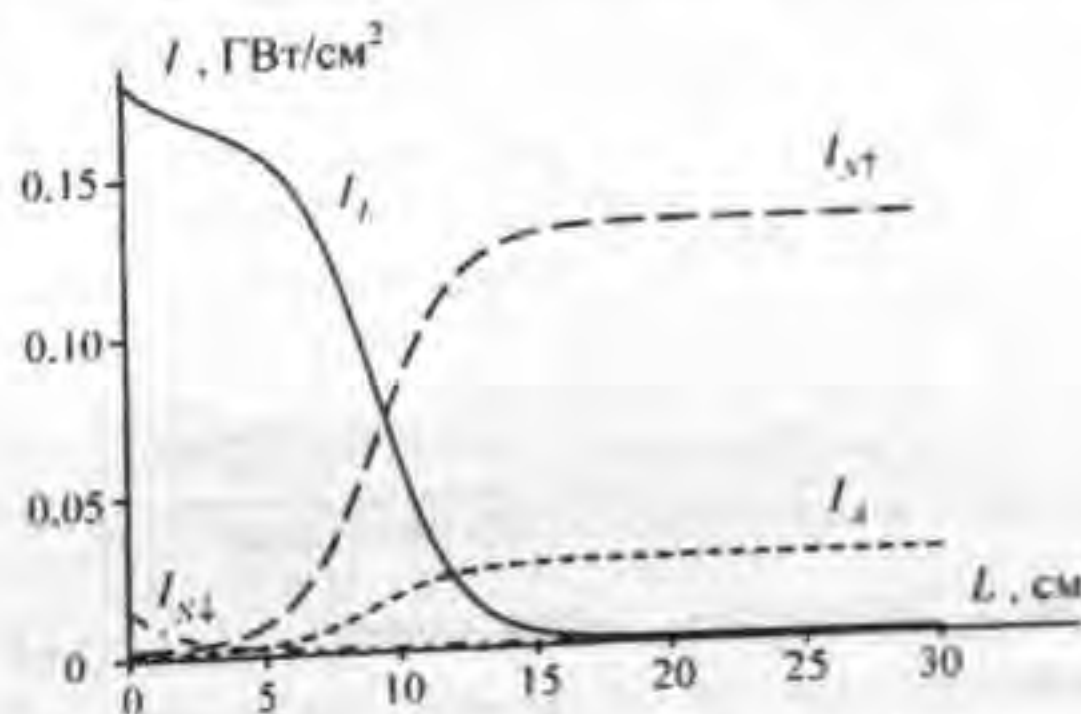


Рис. 2 Розподіл інтенсивності випромінювання в середовищі довжиною $L=30 \text{ см}$ з урахуванням параметричного процесу

На рис. 3 показана розрахована залежність інтенсивності $I_{S\uparrow}(z=L)$ побіжної стоксової компоненти та інтенсивності $I_{S\downarrow}(z=0)$ зустрічної стоксової компоненти на відповідних

вихідних межах середовища для цих компонент від інтенсивності лазерного випромінювання. Результати наведені для довжини середовища $L=10$ см та $L=30$ см. В усіх випадках інтенсивності компонент зростають з підвищенням інтенсивності лазерного випромінювання, проте темп зростання для побіжної компоненти значно більший, ніж для зустрічної компоненти. Насичення для інтенсивності компонент відсутнє. Зменшення довжини середовища призводить до зменшення інтенсивності обох компонент в області незначних інтенсивностей лазерного випромінювання. Для великих інтенсивностей лазерного випромінювання зміна довжини середовища не впливає на інтенсивність компонент. У цій області інтенсивностей лазерного випромінювання спостерігається практично лінійне наростання інтенсивності обох компонент.

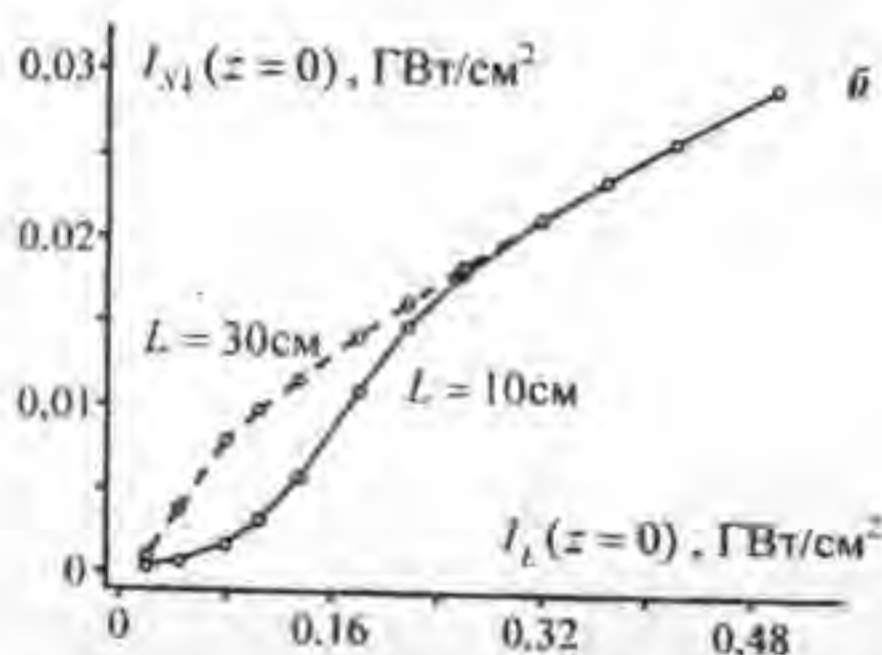
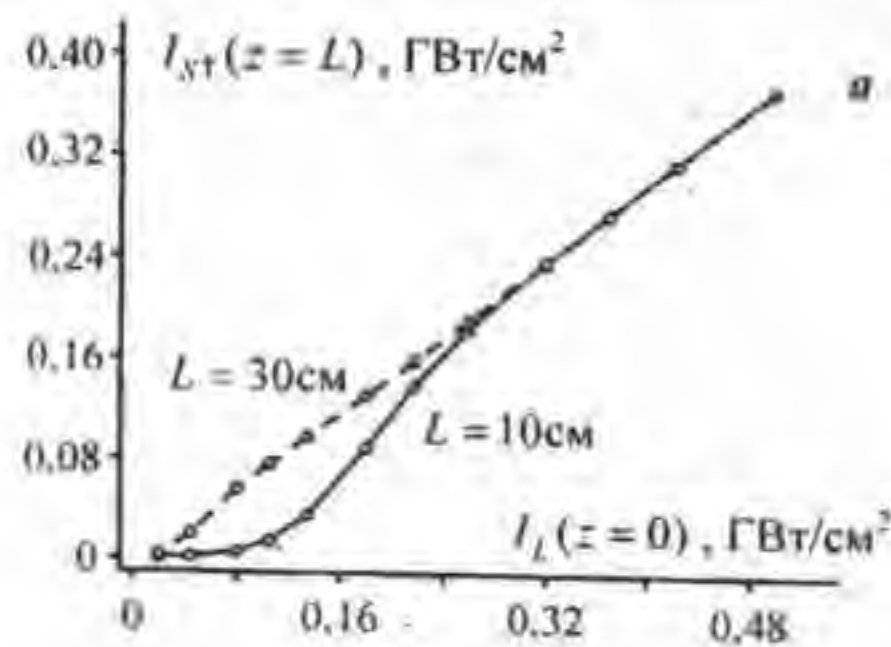


Рис. 3 Залежність інтенсивності $I_{st}(z=L)$ побіжної (а) та $I_{st}(z=0)$ зустрічної (б) стоксової компоненти на відповідних межах від інтенсивності лазерного випромінювання для довжин L середовища 10 см та 30 см

З використанням наведених даних для залежності $I_{st}(z=L)$ та $I_{st}(z=0)$ від $I_L(z=0)$ розраховувалась ефективність генерації

$I_{st}(z=L)/I_L(z=0)$ побіжної та ефективність $I_{st}(z=0)/I_L(z=0)$ зустрічної стоксової компоненти для різних інтенсивностей лазерного випромінювання в середовищах довжиною 10 см і 30 см (рис. 4).

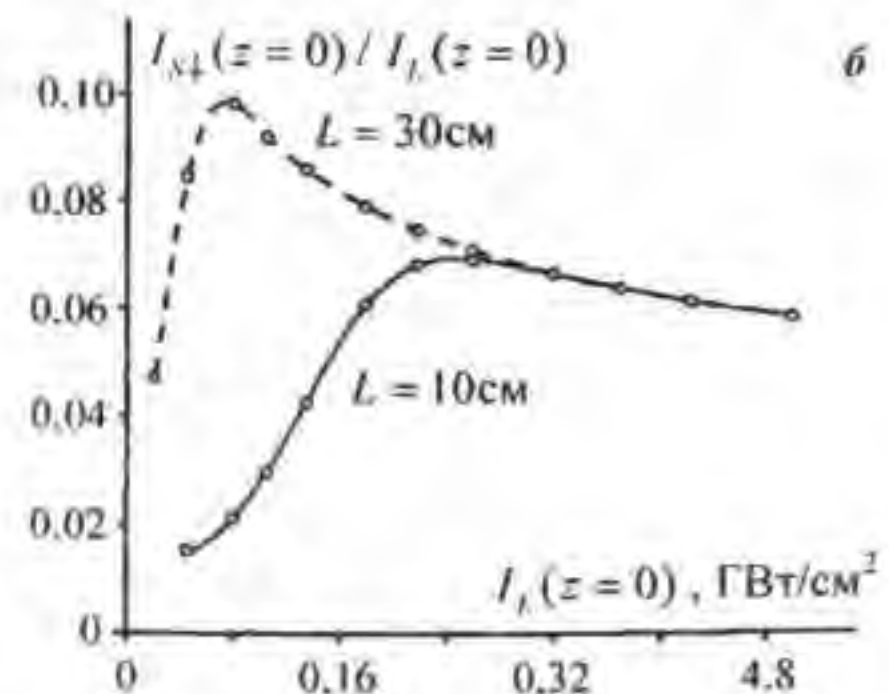
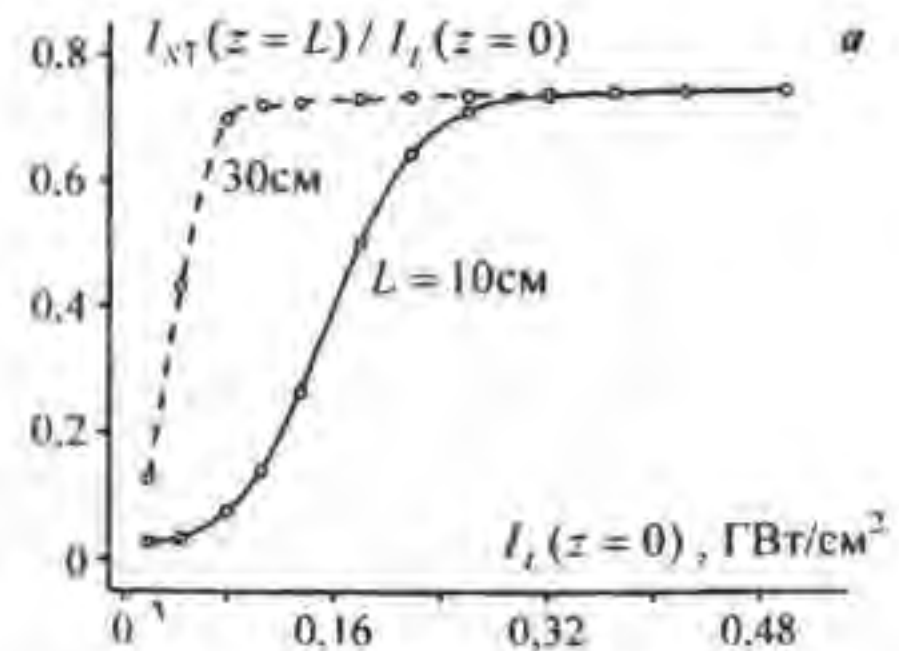


Рис. 4 Залежність ефективності генерації $I_{st}(z=L)/I_L(z=0)$ побіжної (а) та $I_{st}(z=0)/I_L(z=0)$ зустрічної (б) стоксової компоненти від інтенсивності лазерного випромінювання для довжин L середовища 10 см та 30 см

Ефективність генерації побіжної стоксової компоненти в області великих інтенсивностей лазерного випромінювання виходить на насичення, досягаючи значення 0,746 для обох довжин середовища. З урахуванням різниці довжин хвиль ($\lambda_L = 694,3$ нм, $\lambda_S = 745,7$ нм) відповідна квантова ефективність становить 0,80. Інша частина 0,20 фотонів лазерного випромінювання приблизно порівну витрачається на антистоксову і зустрічну стоксову компоненти (рис. 2).

Ефективність генерації зустрічної стоксової компоненти веде себе немонотонно при зростанні інтенсивності лазерного випромінювання. Для середовища довжиною 30 см ефективність у максимумі складає 0,098

(квантова 0,105), а для середовища довжиною 10 см досягається ефективність лише 0,069 (квантова 0,074). Розташування максимуму за інтенсивністю лазерного випромінювання залежить від довжини середовища з тенденцією до збільшення інтенсивності $I_L(z=0)$ зі зменшенням довжини середовища.

На рис. 5 в логарифмічному масштабі наведена залежність коефіцієнта асиметрії $k_{\uparrow\downarrow} = I_{s\downarrow}(z=L) / I_{s\uparrow}(z=0)$ індикатриси генерації стоксових компонент в залежності від вхідної інтенсивності лазерного випромінювання. Для параметрів, які використовувалися у роботі, в наведеному діапазоні інтенсивностей лазерного випромінювання $k_{\uparrow\downarrow}$ змінюється від 1 до 12,8. Для великих інтенсивностей лазерного випромінювання коефіцієнт асиметрії перестає залежати від довжини середовища, але має тенденцію до подальшого зростання.

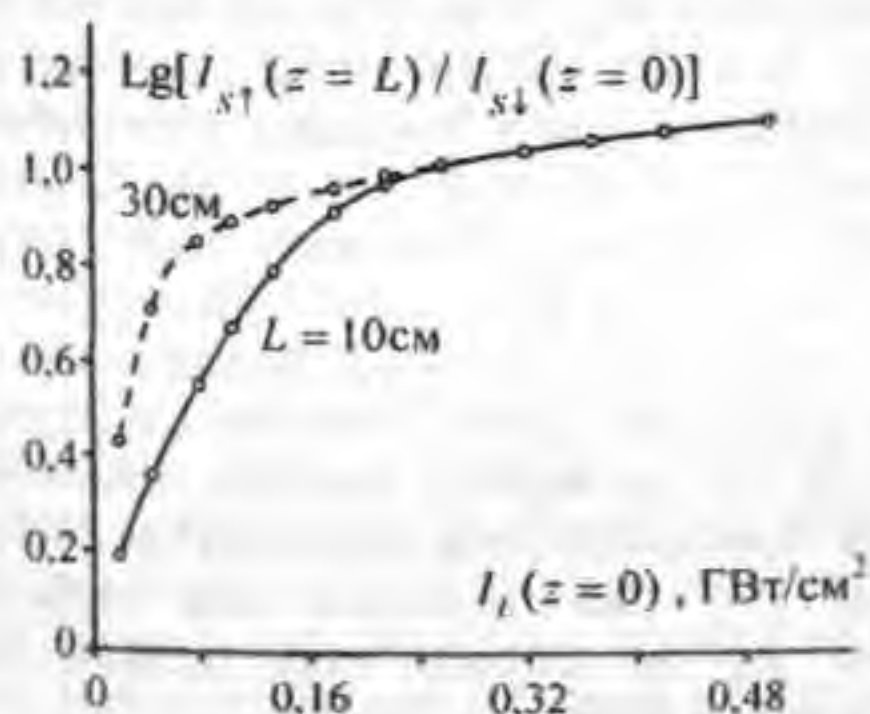


Рис. 5 Асиметрія індикатриси в залежності від вхідної інтенсивності $I_L(z=0)$ лазерного випромінювання для довжин L середовища 10 см та 30 см

Висновки

Отримані результати вказують на те, що асиметрія індикатриси ВКР виникає під впливом параметричного процесу розсіяння лазерного випромінювання в антистоксову і стоксову компоненти.

Вказаний параметричний процес забезпечує додаткове надходження фотонів у побіжну стоксову компоненту. Цей надлишок (у порівнянні із зустрічною стоксовою компонентою) фотонів при подальшому поширенні хвиль вздовж середовища зростає за комбінаційним механізмом вимушеного розсіяння. Таким чином, в конкуренції процесів генерації побіжної і зустрічної стоксових компонент суттєву перевагу

набуває процес побіжного ВКР. Коефіцієнт асиметрії розсіяння може досягати величини, що перевищує 10 за великих інтенсивностей лазерного випромінювання.

Список використаних джерел

1. Плачек Г. Рэлееское рассеяние света и раман-эффект: Пер. с нем. / Г.Плачек. – К.: ОНТИУ, 1935. – 173с.
2. Shen I.R. The Principles of Nonlinear Optics / I.R.Shen. – New York: Wiley, 1984. – 560 p.
3. Stoicheff B.P. Characteristics of stimulated Raman radiation generated by coherent light / B.P.Stoicheff // Phys. Lett. – 1963. – 7, №3. – P.186 - 188.
4. Кондilenко И.И. К вопросу об асимметрии индикатрисы комбинационного рассеяния / И.И.Кондilenко, П.А.Коротков // Оптика и спектроскопия. – 1968. – 24. – С. 466 - 468.
5. Bloembergen N. Coupling between vibrations and light waves in Raman media / N.Bloembergen, Y.R.Shen // Phys. Rev. Lett. – 1964. – 12. – P.504 - 507.
6. Maker P. D. Study of optical effects due to an induced polarization third order in electric field strength / P.D.Maker, R.W.Terhune // Phys. Rev. – 1965. – 137. – P.801 - 818.
7. Walmsley I.A. Observation of Macroscopic Quantum Fluctuations in Stimulated Raman Scattering / I.A.Walmsley, M.G.Raymer // Phys. Rev. Lett. – 1983. – 50, №13. – P.962 - 965.
8. Иванисик А.И. Пространственно-угловая структура антистоксового излучения при вынужденном комбинационном рассеянии света в керровской жидкости / А.И.Иванисик, В.И.Малый, Г.В.Понежа // Оптика и спектроскопия. – 1996. – 80, №2. – С. 212 - 217.
9. Качинский А.В. Конкуренция ВКР вперед-назад и компрессия пикосекундных импульсов / А.В.Качинский, Г.Г.Котаев, И.В.Пилипович // Квант. электр. – 1992. – 19, №6. – С. 550 - 553.
10. Дьяков Ю.Е. О взаимодействии и конкуренции прямого и обратного рассеяний при ВКР / Ю.Е.Дьяков, С.Ю.Никитин // Квант. электр. – 1982. – 9, №6. – С. 1258 - 1261.
11. Кузьмин В.В. Нарушение фазового синхронизма при вынужденном рассеянии света / В.В.Кузьмин // Труды ФИАН. – 1991. – 207. – С. 3 - 39.

Надійшла до редколегії 28.02.11

УДК 531

Зуб С.С., к. т. н., докторант.

Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл

Розглянута стійкість орбітального руху двох довгих циліндричних магнітів, які взаємодіють виключно магнітними силами. Для аналітичного дослідження використана модель магнітної взаємодії симетричних дзиг [5], яка розроблена раніше в межах квазістационарного наближення для електромагнітного поля на основі загального виразу енергії взаємодії магнітних тіл [9]. Особливу роль в питаннях стійкості орбітальних рухів грають так звані відносні рівноваги [1], тобто такі траєкторії динаміки системи, які одночасно є однопараметричними підгрупами групи інваріантності системи. Їх стійкість, в сучасних роботах, як правило, досліджується двома близькими методами «Energy-Momentum method» та «Energy-Casimir method». Для даної системи найбільше підходить критерій стійкості, що сформульований в теоремі роботи [6], що вдало узагальнює обидва вищезгадані методи та охоплює гамільтонів формалізм на основі пуассонових структур [5]. З цієї теореми виводимо необхідні та достатні умови стійкості кругової орбіти.

Ключові слова: відносні рівноваги, стійкість орбітального руху, гамільтонів формалізм, пуассонові структури, магнітна взаємодія.

*E-mail: stah@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Introduction

The paper describes the new results on the research into the orbital motion stability of magnetically interacting bodies. It continues the cycle of papers devoted to the investigation of contact-free confinement of bodies by means of magnetic forces.

There are two different historical aspects of our problem, physical and mathematical.

The physical aspect is attributed to V.V. Kozorez who was the first to come out in 1974 with a supposition about the possibility of stable dynamic states in the so-called "compact" magnetic configurations.

S. S. Zub, Ph.D.

Research into orbital motion stability in system of two magnetically interacting bodies

The stability of the orbital motion of two long cylindrical magnets interacting exclusively with magnetic forces is described. To carry out analytical studies a model of magnetically interacting symmetric tops [5] is used. The model was previously developed within the quasi-stationary approach for an electromagnetic field based on the general expression of the energy of interacting magnetic bodies [9]. A special role in the investigation of the stability of orbital motions is played by the so-called relative equilibria [1], i.e. the trajectories of the system dynamics which are at the same time one-parameter subgroups of the system invariance group. Nowadays their stability is normally investigated using two similar approaches -- energy-momentum and energy-Casimir methods. The most suitable criterion for the system stability investigation was formulated in the theorem of [6]; this stability criterion successfully generalizes both the methods mentioned above and covers the Hamiltonian formalism based on Poisson structures [5]. The necessary and sufficient conditions for the circular orbit stability are derived from this theorem.

Key Words: relative equilibria, stability of the orbital motion, Hamiltonian formalism, Poisson structures, magnetic interaction.

At that time an opinion about the global instability of electric and magnetic systems within the classical electrodynamics was widespread among physicists [7]. These ideas in statics were associated with Earnshaw's theorem; in dynamics they are associated with the so-called "1/r³ problem".

The supposition of V.V. Kozorez seemed to be paradoxical and received no support in the scientific community; therefore he actually carried out his research on his own.

In his papers, among which monograph [2] is worthy of mentioning about, he gave a whole number of models and predicted the orbital motion stability for them.

Applying the physical idea about the nature of stability in such systems and analyzing the behaviour of the potential energy of the considered systems he gave a number of stability criteria for these systems.

However, the method he used for investigating the stability cannot be called rigorous. Now it is quite clear that the proposed orbit stability conditions are not sufficient.

Comparatively not long ago V.V. Kozorez and his co-authors made numerical modelling of the system of two long cylindrical magnets using a PC-cluster from the Institute of Cybernetics; they managed to discover a number of stable orbits [8]. However, they didn't produce any analytical proof of stability in this paper.

At the moment the hypothesis about the possibility of stable orbital motions in "compact" magnetic systems was made the suitable methods of analytical stability investigation were only at the initial stage of their development and were unknown to physicists for a long period of time.

This second, mathematical, aspect is associated with such names as B. Konstant, J.-M. Souriau, V.I. Arnold, A.A. Kirillov, and especially with J.E. Marsden. Marsden's lectures given in the Royal Mathematical Society and published in a separate book [1] are completely devoted to the stability problem. For several decades his scientific school has been developing the theory of stability of Hamiltonian systems with symmetry and applying it in the research into fluid flow, stability of plasma, elastic bodies, in the general theory of relativity and the quantum field theory.

However, among the numerous results of these books and papers of his colleagues we could not discover any result which would be completely suitable for our system. This is due to the fact that the basic results on stability of Hamiltonian systems concern symplectic manifolds. The paper of J.-P. Ortega and T.S. Ratiu [6] is an exception; their theorem concerns an analytically more complicated case of Poisson structures. It is the theorem that we use in our paper.

1. Hamiltonian formalism based on Poisson structures

The Hamiltonian formalism based on Poisson structures (PS) [5] gives an algebraic coordinate-free representation of dynamics which is especially important when a system consists of rigid bodies.

In our case the Poisson manifold is the direct product of Euclidean spaces

$$P = R_x^3 \times R_p^3 \times R_\mu^3 \times R_m^3 \times R_v^3 \times R_n^3. \quad (1.1)$$

Thus, the generatrices of our dynamic system will be x_i as relative coordinates of two bodies; p_i as pulse components of relative (orbital) motion; m_i , n_i as components of angular momentums of the 1st and 2nd body, respectively; μ_i , v_i as components of unit vectors of symmetry axes for the 1st and 2nd body, respectively.

The nonzero Poisson brackets between the generatrices on P are as follows,

$$\begin{cases} \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}; \\ \{m_i, \mu_j\} = \varepsilon_{ijk} \mu_k; \\ \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k; \\ \{n_i, v_j\} = \varepsilon_{ijk} v_k; \\ \{n_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk} n_k, \end{cases} \quad (1.2)$$

and the remaining influential Poisson brackets are equal to zero.

It can be easily checked that the Casimir functions of this Poisson structure will be

$$\begin{cases} \bar{\mu}^2 = 1, & \bar{v}^2 = 1; \\ (\bar{\mu}, \bar{m}) = M_3 = \text{const}_1, & (\bar{v}, \bar{n}) = N_3 = \text{const}_2. \end{cases}$$

The Hamiltonian of the system can be written in the following form

$$h = T + U(r, \bar{c}, \bar{c}^*, \bar{c}^*), \quad (1.3)$$

where

$$\begin{cases} r = |\bar{x}|; & \bar{e} = \bar{x}/r; \\ \bar{c} = (\bar{e}, \bar{\mu}); & \bar{c}^* = (\bar{e}, \bar{v}); & \bar{c}^* = (\bar{\mu}, \bar{v}). \end{cases}$$

This form of the potential energy U describes a wide enough class of paired interactions of magnetic bodies such as rotationally symmetric permanent magnets, superconducting rings and solenoids, dipoles, and mixed systems [9].

2. Problem on stable orbital motion of two cylindrical magnets

We will use the constructive proof method to prove the existence of stable orbital systems interacting with magnetic forces. It means that we will demonstrate the possibility of stability on the example of a specific physical system of this type.

We will take two identical long cylinders as magnetic bodies. As it was shown earlier in our paper [5], the interaction of such bodies can be described by the Coulomb potential energy of four fictitious magnetic charges [3] concentrated on the extensions of the cylinders. Thus, the potential energy of the system takes the following form

$$U = \frac{\mu_0 \kappa^+ \kappa^-}{4\pi} \sum_{i,j=\pm 1} \frac{\varepsilon_i^+ \varepsilon_j^-}{R_{ij}}, \quad (2.1)$$

where

$$R_{ij}(\vec{r}, \vec{c}^+, \vec{c}^-) = \sqrt{r^2 + l^2 + l^2 + 2(\varepsilon_i^+ \vec{l} \cdot \vec{c}^- - \varepsilon_j^- \vec{l} \cdot \vec{c}^+) - 2\varepsilon_i^+ \varepsilon_j^- \vec{l} \cdot \vec{l}},$$

l^+, l^- are semilengths of the cylinders; r is the distance between the centers of the cylinders; κ^+, κ^- are quantities of fictitious charges.

The potential energy in point (2.1) is a special case of the potential energy in (1.3).

Let us consider the problem in the center-of-mass system of the bodies [5].

The kinetic energy of the system will be formed by the kinetic energies of translational (orbital) motion of the bodies and their self-rotation kinetic energies:

$$T(\vec{p}^2, \vec{m}^2, \vec{n}^2) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{\alpha}{2} \vec{m}^2 + \frac{\beta}{2} \vec{n}^2,$$

where $\vec{r}, \vec{p}$ are orbital coordinates and pulses; $\vec{m}, \vec{n}$ are angular momentums of the 1st and 2nd body, respectively; $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$; $\alpha = \beta = \frac{1}{I_\perp}$ (if the principal moments of inertia of the body are equal to each other, $I_1 = I_2 = I_\perp$, the rigid body is termed a symmetric top).

R e m a r k. If the consideration is limited to symmetric tops it is possible to use the uniform Cartesian frame, the components of physical vector quantities being suitable generatrices for the Poisson structure. In this case the Poisson brackets of dynamic vector variables can be considered, and the equations of motion can be written in a vector form [5].

The corresponding Hamiltonian equations of motion are as follows,

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p}/m; \\ \dot{\vec{p}} = -\partial_{\vec{r}} U \vec{e} - (\partial_{\vec{r}} U P_\perp^e(\vec{\mu}) + \partial_{\vec{r}} U P_\perp^e(\vec{v}))/r; \\ \dot{\vec{\mu}} = \alpha(\vec{m} \times \vec{\mu}); \\ \dot{\vec{m}} = \partial_{\vec{r}} U(\vec{e} \times \vec{\mu}) - \partial_{\vec{r}} U(\vec{\mu} \times \vec{v}); \\ \dot{\vec{v}} = \beta(\vec{n} \times \vec{v}); \\ \dot{\vec{n}} = \partial_{\vec{r}} U(\vec{e} \times \vec{v}) + \partial_{\vec{r}} U(\vec{\mu} \times \vec{v}) \end{cases}$$

where operator $P_\perp^e$ is the projection operator on the plane perpendicular to the vector $\vec{e}$, i.e. $P_\perp^e(\vec{\mu}) = \vec{\mu} - c\vec{e}$.

It can be directly checked that the total momentum of $\vec{j} = \vec{l} + \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$, for the Hamiltonian function (1.3) is an integral of motion: $\dot{\vec{j}} = \{\vec{j}, h\} = 0$.

3. Relative equilibria

During the last decades large progress in the investigation of the system dynamics was reached thanks to the application of group-theoretic methods. This also concerns the research into the stability of some types of motions. In particular, a special role in the investigation of the stability of orbital motions is played by the so-called relative equilibria [1], i.e. the trajectories of the system dynamics which are simultaneously one-parameter subgroups of the system invariance group. Nowadays their stability is normally investigated using two similar approaches – energy-momentum and energy-Casimir methods.

We will show that there are relative equilibria in the system in point.

Let z be a fixed axis. Let us consider a subgroup of rotations around this axis. Each one-parameter subgroup of this group will be characterized by its angular velocity of rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. The rate with which any physical quantity $\vec{v}$ in our problem changes along the orbit of the given subgroup will be set by the formula $\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Therefore, the following relations should be fulfilled for the relative equilibrium

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{r}); \\ \dot{\vec{p}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{p}); \\ \dot{\vec{\mu}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{\mu}); \\ \dot{\vec{m}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{m}); \\ \dot{\vec{v}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{v}); \\ \dot{\vec{n}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{n}). \end{cases} \quad (3.1)$$

The fixed point on the orbit z_e can be chosen as

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0 \vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_2; \\ \vec{\mu} = \vec{e}_3; \\ \vec{m} = m \vec{e}_3; \\ \vec{v} = -\vec{e}_3; \\ \vec{n} = n \vec{e}_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

where $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ is a fixed basis.

Thus, the bodies gyrate in the plane xy ; the axes of the magnets are parallel to the axis z and are opposite in direction; and all moments, i.e. the orbital moment $\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$, intrinsic moments $\vec{m}$ and $\vec{n}$, and the total momentum $\vec{j}$, are parallel to the axis z .

So (3.1) will then have the following form

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{r}); \\ \dot{\vec{p}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{p}); \\ \dot{\vec{\mu}} = 0; \\ \dot{\vec{m}} = 0; \\ \dot{\vec{v}} = 0; \\ \dot{\vec{n}} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

This is in an agreement with the equations of motion at the given starting conditions since $c' = 0$, $c'' = 0$, $c''' = -1$, and the evaluations show that in this case $\partial_{c'} U = 0$ and $\partial_{c''} U = 0$.

It means that the conditions of (3.3) are reduced to the equality of centripetal and centrifugal forces.

R e m a r k. It should be noted that according to the conditions of the theorem of section 4 it is required

to prove a weaker statement, namely, the fulfilment of the conditions of (3.3) in one point.

4. Theorem of stability of relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry

We will consider theorem 4.8 of paper [6] used to prove the orbital motion stability in our problem in more detail. We will quote its original statement:

"Theorem 4.8. (Generalized energy-momentum method).

Let $(M, \{\cdot, \cdot\}, G, J: M \rightarrow g^*, h: M \rightarrow \mathbb{R})$ be a Poisson system with a symmetry given by the Lie group G acting properly on M . Assume that the Hamiltonian $h \in C^\infty(M)$ is G -invariant and that J is equivariant. Let $m \in M$ be a relative equilibrium such that $J(m) = \mu \in g^*$, G_μ is compact, $H := G_m$, and $\xi \in \text{Lie}(N_{G_\mu}(H))$ is its orthogonal velocity, relative to a given Ad_H -invariant splitting. If there is a set of G_μ -invariant coserved quantities

$C_1, C_2, \dots, C_n \in C^\infty(M): M \rightarrow \mathbb{R}$, for which

$$d(h - J^\xi + C^1 + C^2 + \dots + C^n)(m) = 0 \quad (4.1)$$

and

$$d^2(h - J^\xi + C^1 + C^2 + \dots + C^n)(m)|_{W, W} \quad (4.2)$$

is definite for some (and hence for any) subspace W such that

$$\ker dC^1(m) \cap \dots \cap \ker dC^n(m) \cap \ker T_m J = W \oplus T_m(G_\mu \cdot m), \quad (4.3)$$

then m is a G_μ -stable relative equilibrium. If $\dim W = 0$, then m is always a G_μ -stable relative equilibrium".

R e m a r k. The G -stability appearing in this theorem is given by the following definition:

"Definition 4.6. Let $(M, \{\cdot, \cdot\}, h, G, J: M \rightarrow g^*)$ be a Hamiltonian system with symmetry and let G' be a subgroup of G . A relative equilibrium $m \in M$ is called G' -stable, or stable modulo G' , if for any G' -invariant open neighborhood V of the orbit $G' \cdot m$, there is an open neighbourhood $U \subseteq V$ of

m such that if F_t is the flow of the Hamiltonian vector field X_h and $u \in U$, then $F_t(u) \in V$ for all $t \geq 0$.

It is evident that there are five objects appearing in this theorem, i.e. $M, \{, \}, G, \mathbb{J}, h$, where the two first objects $M, \{, \}$ actually define the Poisson manifold (phase space), G is the Lie group acting on this manifold, $\mathbb{J}$ is the momentum map [4], h is the Hamiltonian of the system.

The given theorem includes conditions of topological, algebraic and analytical character.

The topological condition the "Lie group G acting properly on M " is of a technical nature and is always fulfilled for compact groups. The condition " G_μ is compact" is essential.

The algebraic conditions are requirements of invariance relative to an action of the group G : the Poisson structure, Hamiltonian function, momentum map (equivariance).

Another algebraic condition defines the "orthogonal velocity, relative to a given Ad_H -invariant splitting". This notion is complicated enough and is the subject of the previous research of these authors. But everything is simplified in our case, and this quantity is an angular velocity parallel to a selected value of the momentum.

To formulate the analytical conditions, a set of integrals of motion $C_1, C_2, \dots, C_n$ is introduced, and some efficiency function of the Hamiltonian and integrals of motion including moment components (in our case there is one component) is formed. Concerning $C_1, C_2, \dots, C_n$ there is another algebraic condition we did not mention before. This condition is that these values should be invariant with respect to the subgroup G_μ . Equations (4.1-4.2) are similar to the relations for seeking a conditional extremum using the method of undetermined Lagrangian multipliers.

However it is necessary to mention that, first of all, this similarity is not full, and, secondly, the theorem only requires checking conditions (4.1-4.2) in a certain point of orbit.

Equation (4.1) is analogous to the necessary condition for extremum, i.e. all partial derivatives of the efficiency function should be vanished in the point under test.

Equation (4.2) is more complicated and resembles the sufficient condition for extremum. We should establish positive definiteness of the efficiency function relative to only some variation subspace W

rather than to all possible variations of variables. Variations from W are characterised by the following properties:

- they should conserve all integrals of motion involved in the efficiency function;

- they should be transversal to the orbit direction. This is the main idea of requirement (4.3).

Hamiltonian systems require the improvement of the notion of stability as for example the notion of asymptotic stability is not applicable to them. Indeed, let us suppose there is a stable orbit, as well as another orbit which is so close to the stable orbit that the stability is not broken, then for a rather long time interval the initially close points on these orbits can diverge quite considerably; they can for example be found on the opposite sides of the orbits. This behaviour is the case for Hamiltonian systems which could be well observed during the numerical modelling of our system [5].

This well-known fact requires a suitable definition of the orbital stability which is given in paper [6] (see Definition 4.6 above). This definition contains the same system with symmetry as in the theorem. The stability is formulated with respect to some subgroup G' . For this purpose a tubular neighbourhood of the stable orbit is introduced such that it entirely consists of the orbits of subgroup G' .

Then the trajectory of the system beginning in some neighbourhood of a stable orbit point should not go beyond the given tubular neighbourhood.

5. Fulfilment of theorem conditions in the given problem

First of all, it should be demonstrated that the group action is a Poisson action.

The conceptual definition of a group action on the Poisson manifold and the associated formulas are given in book [4]. Below, the notations introduced in this book are used.

$$\Phi: G \times P \rightarrow P, \quad \Phi_g(p) = g \cdot p.$$

Actions Φ of the Lie group G on the Poisson manifold have the following form

$$\Phi_g^*(F_1, F_2) = \{ \Phi_g^* F_1, \Phi_g^* F_2 \}.$$

The action of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the Lie group G on the manifold P is then defined in terms of vector fields $\xi_p(z)$ according to the formula:

$$\xi_P(z) = \frac{d}{dt} [\exp(t\xi)z]_{t=0}, \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

The application of modern group-theoretic methods in the investigation of our system is specific because these methods are far-reaching generalizations of the angular momentum theory whereas it is the angular momentum that is the momentum map in our case.

Thus, in our case it is necessary to bring the complications and niceties required for the transition from a prime model to more and more general and complicated models down to the initial prime model of the rotation group actions and the associated angular momentum theory.

Thus, it appears that our model is trivial neither mathematically nor physically.

The group of transformations we are interested in is $SO(3)$, i.e. a group of self-rotations of the Euclidean space, or a group of orthogonal 3×3 matrices with $\det = 1$. This group is connected.

The elements of the Lie algebra $\mathfrak{so}(3)$ can then be considered either as antisymmetric matrices $\hat{\omega} \in \mathfrak{so}(3)$ or as vectors $\vec{\omega} \in R^3$, i.e. $\hat{\omega}_{ik} = \varepsilon_{ijk} \omega^j = -\varepsilon_{ikj} \omega^j \rightarrow \omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{irs} \hat{\omega}_{rs}$ whence $\hat{\omega}[\vec{v}] = \vec{\omega} \times \vec{v}$ where $\vec{v} \in R^3$.

The elements $\hat{j} \in \mathfrak{so}(3)^*$ of the space dual to $\mathfrak{so}(3)$ can also be represented through three-dimensional vectors using the ordinary Euclidean scalar product as canonical pairing $\langle \hat{j}, \hat{\omega} \rangle = \vec{J} \cdot \vec{\omega}$.

The coadjoint action of the group $G = SO(3)$ in $\mathfrak{so}(3)^*$ will be reduced to the rotation in the Euclidean space

$$Ad_{A^{-1}}^* = A \leftrightarrow Ad_A^* = A^{-1}, \quad A \in SO(3). \quad (5.1)$$

In our case the Poisson manifold is a direct product of the Euclidean spaces (1.1), and the Poisson brackets on P look like (1.2).

The group action on P is reduced to a standard action of $SO(3)$ on the Euclidean space, i.e. if $A \in SO(3)$, and $\vec{v}$ is a vector which is one of the 6 factors of (1.1), then

$$\Phi(A, (\dots, \vec{v}, \dots)) = (\dots, A[\vec{v}], \dots). \quad (5.2)$$

Physically it represents the rotation of the system as a whole; all physical quantities of a vector character are rotating synchronously.

We will show, that the relations in (1.2) are invariant relative to this action of $SO(3)$ on P . For example, ($\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2$ are constants),

$$\{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k \longrightarrow \{\Omega_1^i m_i, \Omega_2^j m_j\} = \Omega_1^i \Omega_2^j \varepsilon_{ijk} m_k$$

$$\{\langle \vec{\Omega}_1, \vec{m} \rangle, \langle \vec{\Omega}_2, \vec{m} \rangle\} = \langle \vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2, \vec{m} \rangle.$$

Similarly, the first relation in (1.2) can be written as

$$\{\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle, \langle \vec{\beta}, \vec{p} \rangle\} = \langle \vec{\xi}, \vec{\beta} \rangle.$$

It means that relations given below are equivalent to the corresponding base relations (1.2) however they are invariant with regard to rotations:

$$\begin{cases} \{\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle, \langle \vec{\beta}, \vec{p} \rangle\} = \langle \vec{\xi}, \vec{\beta} \rangle, \\ \{\langle \vec{\Omega}_1, \vec{m} \rangle, \langle \vec{\eta}, \vec{\mu} \rangle\} = \langle \vec{\Omega}_1 \times \vec{\eta}, \vec{\mu} \rangle, \\ \{\langle \vec{\Omega}_1, \vec{m} \rangle, \langle \vec{\Omega}_2, \vec{m} \rangle\} = \langle \vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2, \vec{m} \rangle, \\ \{\langle \vec{\Omega}_1, \vec{n} \rangle, \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle\} = \langle \vec{\Omega}_1 \times \vec{\eta}, \vec{v} \rangle, \\ \{\langle \vec{\Omega}_1, \vec{n} \rangle, \langle \vec{\Omega}_2, \vec{n} \rangle\} = \langle \vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2, \vec{n} \rangle, \end{cases} \quad (5.3)$$

where $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\beta}$ are some constant, i.e. independent of the generatrices, vectors.

It follows that having transformed the base relations of (1.2) into (5.3) regardless of the coordinate system selected we actually proved that the action of the group $SO(3)$ is a Poisson action on P .

Now the field ω_p in our case will be written as

$$\omega_p(\dots, \vec{v}, \dots) = (\dots, \vec{\omega} \times \vec{v}, \dots).$$

Let us show that the total angular momentum $\vec{J}$ in our problem is the momentum map. It means that it is necessary to specify the Hamiltonian for each field ω_p , i.e. $\omega_p = \{z, H_\omega\}$ where $z \in P$.

Direct checking will demonstrate that the total momentum of the system $\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} + \vec{m} + \vec{n}$ generates all such Hamiltonians $H_\omega = \langle \vec{\omega}, \vec{J} \rangle$, i.e. the dynamic variable $\vec{J}$ is the total momentum of the system as well as the momentum map if $\mathfrak{so}(3)^*$ is equated with the Euclidean space R^3 .

The global equivariance generally means the following

$$J \circ \Phi_g = Ad_g^* \circ J. \quad (5.4)$$

Comparing the formulas in (5.1,5.2,5.4) we determine that in this special case the momentum map is also globally equivariant which is a rule for compact connected groups [4].

Therefore the following conditions are fulfilled in case of the dynamic system under consideration:

1. The action of the group $SO(3)$ and its Lie algebra $\mathfrak{so}(3)$ on P is a Poisson action, i.e. it conserves the Poisson structure (Poisson brackets) on P .
2. The momentum map is (globally) equivariant.
3. The Hamiltonian of the problem and Casimir functions are invariant with regard to action (6.2) of the group $SO(3)$.
4. The subgroup G_μ in terms of the theorem in section 4 is a one-parameter group of rotations around some fixed axis; this group is compact.
5. The subgroup $H = G_m$ in terms of the theorem in section 4 (G_z in our notation) is a trivial group composed of one element, i.e. group identity.
6. The subgroup $N_{G_\mu}(H)$ appearing in the theorem of section 4 is nothing else than G_μ . Accordingly, the algebra $Lie(N_{G_\mu}(H))$ is one-dimensional and consists of rotation angular velocities around the same fixed axis.
7. The integrals of motion used, namely the Casimir functions and component of the momentum along the selected axis, G_μ are invariant.

All conditions of the theorem of section 4 relating to the actions of groups and Lie algebras on a Poisson manifold are fulfilled for our dynamic system.

6. Selection of orbit point and integrals of motion

The theorem of section 4 allows reducing the investigation of the relative equilibrium stability to the checking, in a fixed point z_e of the orbit, of relations very similar in form to those occurring when checking the constrained minimum (maximum) by the method of undetermined Lagrangian multipliers. The necessary and sufficient conditions for the circular orbit stability are derived from this theorem.

According to this approach the efficiency function is written as

$$\tilde{H} = H - \omega j_3 + \lambda^1 C_1 + \lambda^2 C_2 + \lambda^3 C_3 + \lambda^4 C_4,$$

where $\omega, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$ are Lagrangian multipliers, C_i are Casimir functions, and $\tilde{j}$ is the momentum map corresponding to the Poisson action of the rotation group $G = SO(3)$ of the system as a whole. Accordingly, the equation for determining these constants is

$$d\tilde{H}|_{z_e} = 0, \quad (6.1)$$

and the sufficient condition for the minimum is a positive definite quadratic form

$$d^2\tilde{H}|_{z_e}(\delta z, \delta z'), \quad (6.2)$$

In the first place the vectors δz (and $\delta z'$) being the generatrix variations must conserve the relations, i.e.

$$\partial_{\delta z} \tilde{j} = 0, \quad \partial_{\delta z} C_i = 0, \quad i = 1..4,$$

and, secondly, the subspace of variations δz must be transversal with regard to the direction of motion along the orbit in the given point z_e .

The Casimir functions in our case are written as

$$\partial_{\delta z} \tilde{j} = 0, \quad \partial_{\delta z} C_i = 0, \quad i = 1..4,$$

We select the point z_e in a way shown in (3.2).

$j_0 = j(z_e) = x_0 \times p_0 + \bar{m} + \bar{n}$ will then be directed along the axis $\bar{e}_3$. The stationary subgroup of this value of the momentum will be G_{j_0} , i.e. the rotation subgroup around the axis $\bar{e}_3$. This group is compact as supposed in the theorem of section 4. Other premises of the theorem having a technical character are also fulfilled in our case (see section 5, items 1-7).

10 variations of the following form can be considered independent

$$\delta x^1, \delta x^2; \delta \mu^1, \delta \mu^2, \delta m_1, \delta m_2; \delta v^1, \delta v^2, \delta n_1, \delta n_2.$$

To meet the requirements mentioned above, the remaining variations are expressed in terms of the independent variations in the following way

$$\begin{cases} \delta\mu^3=0, \delta m_3=0, \delta v^3=0, \delta n_3=0, \\ \delta x^3=(\delta m_1+\delta n_1)/p_0; \\ \delta p_1=\frac{p_0}{r_0}\delta x_2; \\ \delta p_2=-\frac{p_0}{r_0}\delta x_1; \\ \delta p_3=(\delta m_2+\delta n_2)/r_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

From (6.1) for Lagrangian multipliers ω, λ_i we obtain

$$\begin{cases} p_0/M = \omega r_0; \\ p_0\omega = \partial_c U; \\ \lambda_2 = (\omega - \alpha m)/\mu; \\ \lambda_4 = (\omega - \beta n)/v; \\ \lambda_1 = -(\nu \partial_c U + m \lambda_2)/\mu; \\ \lambda_3 = -(\mu \partial_c U + n \lambda_4)/v. \end{cases}$$

If we substitute the expression for dependent variations (6.3) into the quadratic form (Hessian) from condition (6.2) we obtain a quadratic form from only 10 independent variations. Its positive definite will be the orbital stability as it is follows from the theorem in section 4. It appears that in the case of the following order of independent variations

$$\delta x^1, \delta x^2; \delta \mu^1, \delta v^1, \delta m_1, \delta n_1; \delta \mu^2, \delta v^2, \delta m_2, \delta n_2$$

the matrix of this quadratic form takes a block-diagonal form, one 2x2 block and two 4x4 blocks.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{34} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{35} & B_{45} & B_{55} & B_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{36} & B_{46} & B_{56} & B_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{77} & B_{78} & B_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{78} & B_{88} & 0 & B_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{79} & 0 & B_{99} & B_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{8,10} & B_{9,10} & B_{10,10} \end{pmatrix}$$

Thus, each of these blocks should define the positive-definite form from the corresponding variations. The positive definite conditions are analytically deduced in the Maple system using Sylvester's criterion. Ten independent conditions for the system parameters were obtained which make it possible to define the regions of the orbital stability

in the parameter space of the system. Most inequalities derived are quite complicated analytical expressions, and their complete analysis can only be conducted numerically. However, it is easy to show the system parameters for which these conditions will be automatically fulfilled. For example, the diameter and length of cylindrical magnets: $d=0.0025$ [m], $h=0.02$ [m]. The reduced mass of two rigid bodies $m=0.0003828816$ [kg]. The values of the system parameters: $\alpha=3.872 \cdot 10^7$ [kg⁻¹·m⁻²]; $\mu=0.155$ [A·m²]. Intrinsic angular momentum of rigid bodies $|\vec{m}|=|\vec{n}|=5 \cdot 10^{-3}$ [m²·kg·sec⁻¹]. The rigid body orientation at the initial instant of time is characterized by conditions (4.2). The radius of the stable orbit is then $R_{orb}=0.01$ [m], the impulse of force is $P_{orb}=0.00065$ [N·sec], and the revolution period is $T_{orb}=0.03706$ [sec]. The stability conditions for the orbit were fulfilled as well as derived in the Maple system (see Fig.1).

Summary

The paper is devoted to the analytical investigation of the possible existence of orbital motions in the mathematical model [5] which we proposed earlier and which describes the magnetic interaction of rigid bodies.

It has been shown that thanks to the application of group-theoretical methods the Hamiltonian formalism developed in [5] on the basis of Poisson structures is a suitable mathematical instrument for the analytical investigation of the orbital motion stability.

The possibility of stable orbital motion has been proved for a specific system.

Ten conditions for the system parameters have been analytically obtained; they make it possible to define the areas of the orbital stability in the parameter space of the system.

Following the logic of the constructive proof it is possible to assert that magnetic systems can form stable orbits. This destroys the widespread opinion [7] about the global instability of magnetic systems.

Acknowledgments

I thank Professor Vasyli' Vasylyovych Kozorez, whose papers initiated my interest to the problem. Discussions with him were extremely important for me to understand the physical aspect of the problem.

```

Maple 12 - [DumbStab10.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Window Help
[Icons]
[Icons]
"Ok! (Cond7 = ", 0.19^25^4905394224102^10^13, "),"
"Ok! (Cond8 = ", 0.11339003645893980699^10^15, "),"
"Ok! (Cond9 = ", 0.352216121905^98^6641^10^16, "),"
"Ok! (Cond10 = ", 0.6484055259991^600809^10^8, "),"
"_____
"| All Ok! Орбита устойчива!!! |"
"_____
"Параметры системы в этом случае равны:"
"l1 = ", 0.0100000000000000000000, " l2 = ", 0.0100000000000000000000
"L0 = ", 0.303^35865905296391^0^10^7, " M = ", 0.00038288160465625605093
"alpha = ", 0.38^22818348939904682^10^8, " beta = ", 0.38^22818348939904682^10^8
"r0 = ", 0.01, " p0 = ", 0.00064910356642626862480
"m0 = ", 0.00005, " n0 = ", 0.00005
"omega0 = ", 169.53114449283132204
"L2 = ", -1^66.609^29541639121, " L4 = ", 1^66.609^29541639121
"L1 = ", 0.08964^109165258206801, " L3 = ", 0.08964^109165258206801
"_____
"Отношение вращательной энергии тел к поступательной"
" Тип Торо = ", 1^5.94360004595418288
Time: 10.4s Bytes: 15.9M Available: 408M

```

Fig.1 Maple output of stability conditions

References

1. Marsden J.E. Lectures on Mechanics / Marsden Jerrold E. // – London : Cambridge University Press, 1992. – 254 p.
2. Kozoriz V.V. Dynamic System of Free Magnetically Interaction Bodies / V.V. Kozoriz // – Kyiv : Sc. Thought Press, 1981. – 140 p.
3. Smythe, W.R. Static and Dynamic Electricity / W.R. Smythe // – Moscow : Foreign Literature Publisher, 1954. – 604 p.
4. Marsden, J.E. Introduction to Mechanics and Symmetry / Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu ; // – London : Cambridge University Press, 1998. – 549 p.
5. Zub S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies [Електронний ресурс] / S. Zub // PoS(ACAT08)116. – 2009.
6. Ortega J-P. Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry / J-P. Ortega, T.S. Ratiu // J. Geom. Phys., – 1999. – Vol. 32. – P. 160 – 188.
7. Ginzburg V.L. Mezonons Theory and Nuclear Force / V.L. Ginzburg // Phys. – Uspekhi. – 1947. – Vol.31. – P. 174.
8. Grygor'yeva L.V. About Dynamical Problem of Two Free Cylindrical Magnets and its Maple-modelling / L.V. Grygor'yeva, V.V. Kozoriz, A.V. Kozoriz, S.I. Lyashko // Press of the National Ac. of Sc. Ukraine. – 2007. – Vol. 11. – P. 41 – 47.
9. Zub S.S. Contact-free Static Stable Equilibrium in the Ground and Space Systems [Електронний ресурс] / S. S. Zub // International scientific conference «Int. Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drivers (MAGLEV'2002)», September 3–5 2002: proceedings / Lausanne, Switzerland. — 2002. — PP02105.

Надійшла до редколегії 17.03.2011

УДК 681.3;504.75;004.75

Кононов М. В., к.ф.-м.н., доцент,
Судаков О. О., к.ф.-м.н., доцент, Храмов В. В.,
аспірант, Скорописов В. С., аспірант

Особливості моделювання лісових пожеж на кластерах в Grid

Проаналізовано методологічні аспекти застосування сучасних комп'ютерних технологій для обрахунку складних екологічних моделей на прикладі відомих підходів до моделювання лісових пожеж. Експериментально доведено, що застосування GRID-систем є дійсно перспективним підходом до оптимізації обчислень в галузі прогнозування та керування лісовими пожежами.

Представлено приклади розробки математичних моделей розвитку пожеж за різних початкових умов. Запропоновано шляхи подальшого розвитку польової моделі пожеж з використанням відомих комплексів програмного забезпечення, а саме: FDS, Farsite, smokview, biheve.

Ключові слова: Grid, кластер, лісова пожежа, польова модель.

*E-mail: vlad_dip@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Лісові пожежі – одна з найголовніших загроз світового масштабу. Сьогодні на Землі щороку виникає близько 200 тисяч лісових пожеж, вони призводять до величезних збитків і навіть людських жертв. За останні роки тисячі гектарів лісу було знищено внаслідок стихійного вогню. Втрата лісових ділянок порушує баланс світових екосистем і сприяє глобальному потеплінню. Причинами пожежі стають як природні, так і антропогенні чинники; нерідко також мають місце й акти самозаймання. Однак 90% лісових пожеж трапляються з вини людини. Статистика свідчить, що за останні 17 років (з 1993 року по 2009 рік включно) в лісах Криму з вини людини сталося 2120 лісових пожеж площею 2170 га, у тому числі верхових – 258 га. Слід зазначити, що кількість лісових пожеж змінюється з року в рік і залежить переважно від погодних умов, а також від інтенсивності відвідування лісів туристами. Діаграму кількості лісових пожеж [21] наведено на рис. 1.

© М.В. Кононов, О.О. Судаков,
В.В. Храмов, В.С. Скорописов, 2011

Kononov M. V., Ph. D., Sudakov O. O., Ph. D.,
Khramov V. V., post. grad. stud., Skoropisov V. S.,
post. grad. stud.

Characteristics of forest fires modelling on clusters in Grid

Methodological aspects of modern computer technologies application to simulation of complicated ecological models are considered. Several approaches to simulations of forest fires are described. Actual mathematical models of fires dynamics under different initial conditions were taken into account. Ways of the fire field models further development by means of known software systems, namely FDS, Farsite, smokview and biheve have been suggested.

Examples of fires simulations by these models under different initial conditions are provided. Ways of further developmen of fire field models implemented in the software mentioned above are provided.

Keywords: Grid, cluster, forest fire, field model.

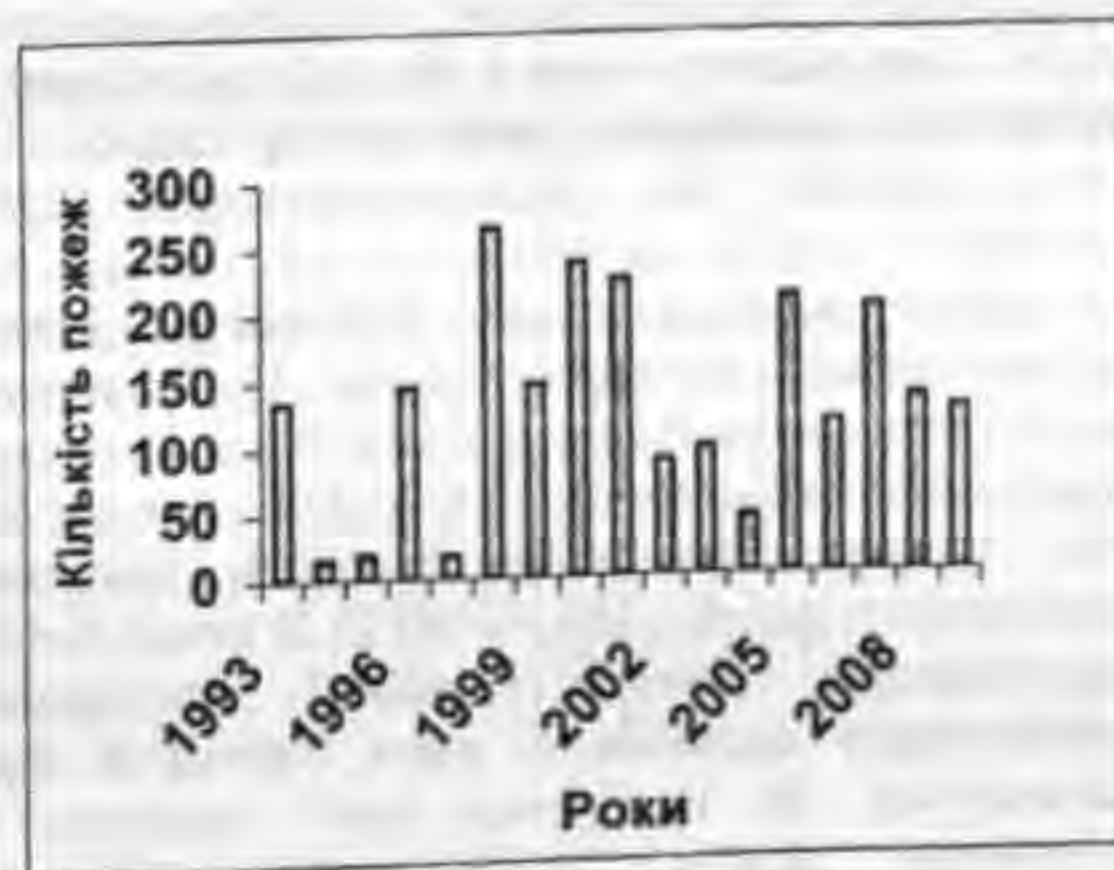


Рис. 1 Кількість пожеж з 1993 року по 2009 рік

Найбільші, які охопили величезну територію, пожежі виникали в Ялтинському гірничо-лісовому природному заповіднику. Прикладом може бути пожежа 1993 року, коли площа, охоплена пожежею, склала 460 га; а в 1998 році

виникла пожежа на площі 107 га. Гасіння лісових пожеж в гірській місцевості пов'язане з величезними матеріальними та людськими ресурсами, до того ж це є нелегким завданням з огляду на ускладнену прохідність місцевості.

З наведених фактів можна зробити висновок, що одним з найголовніших екологічних завдань постає прогнозування лісових пожеж та розробка програми відповідних запобіжних засобів.

Сучасні методи моделювання пожежі дозволяють спрогнозувати хід її поширення, наслідки, тривалість і ситуативну поведінку. Реалізація таких методів передбачає обробку великої кількості даних, що вимагає значних ресурсів і є неможливим без використання сучасних багатопроцесорних систем та розподілених обчислень. Метою роботи є розробка та застосування нових методів обчислень на кластерах і в Grid для обробки складних екологічних моделей лісових пожеж, які є перспективними для вирішення як наукових так і практичних задач.

Перший кримський Grid-ресурс для екологічного моделювання

Однією з обчислювальних систем, спеціально розроблених для вказаних задач є перший Кримський експериментальний Grid-ресурс, який було створено в Таврійському гуманітарно-екологічному інституті в місті Сімферополі [21]. Він також застосовується для інших задач моделювання в області гуманітарно-екологічних досліджень (моніторингу залежності стану людини від геліометеофакторів [22], очищення водних ресурсів, спостереження за погодними умовами тощо). Grid-ресурс являє собою багатопроцесорний кластер. Для кластера обрано мультикомп'ютерну архітектуру Beowulf. Програмне забезпечення: Scientific Linux-5.4, PBS torque, середовище openMPI, системи моніторингу: ganglia, MRTG+RRD. В якості Grid-комунікатора використовується програмне забезпечення проміжного рівня Nordugrid, що знаходиться на головному вузлі кластера і забезпечує зв'язок з Grid-інфраструктурою Українського Академічного сегменту (<http://uag.bitp.kiev.ua> [19]). За допомогою інфраструктури здійснюється завантаження завдань, обмін інформацією, моніторинг. Завдяки цій Grid-інфраструктурі з'явилася можливість скоротити й оптимізувати розрахунки при моделюванні.

Методи прогнозування лісових пожеж

На сьогоднішній день відомий ряд робіт по моделюванню горіння рослинних матеріалів під час пожежі. Перші з них, які стосуються сфери лісових пожеж датуються 1920-1950 роками (роботи Мітчелла, Каррі, Фонса, Амосова, Девіса, Байрама, Вонського, Мелехова, Анцишкіна [1,2]). Кожна з цих робіт присвячена дослідженню окремих питань, таких як теплофізичні властивості рослинних горючих матеріалів, способи передачі тепла при пожежі тощо. Ці роботи поклали початок теорії лісових пожеж, проте вони не можуть бути використані на практиці через суто теоретичну спрямованість.

У 1960-1970 роки були спроби вже більш детального вивчення механізмів процесу горіння, а також побудовані відповідні моделі (Ліндермут, Байрам, Ван-вагнер, Тепліцин, Томас, Андерсен [20], Ротермель [14], Амосов). Проте й вони не достатньо повно описували процес поширення лісової пожежі.

Лише в останні десятиліття з'явилися роботи, які більш широко враховують весь комплекс фізико-хімічних процесів, що протікають в зоні пожежі (роботи Конєва [3], Гришина [15], Біанжіні [4]), а внаслідок розвитку комп'ютерної техніки такі моделі отримали можливість практичного застосування.

Розрахунок в рамках подібних моделей вимагає багато часу та потребує використання складних багатопроцесорних систем. Обчислювальні кластери і Grid-середовище дозволяють оперувати величезним набором параметрів опису зони пожежі в реальному часі. Складність моделювання лісових пожеж полягає в тому, що деякі параметри, а саме: температура, відносна вологість повітря і швидкість вітру – можуть змінитися з розвитком займання.

Характеристики моделей прогнозування лісових пожеж

Всі математичні моделі лісових пожеж, які лежать в основі систем оцінки лісової пожежної небезпеки, згідно Вебера [16], можуть бути розділені на три групи: емпіричні (або статистичні), напівемпіричні (або лабораторні) і фізичні (або аналітичні) (Рис. 2).

У реальних завданнях прості емпіричні моделі трансформуються в складніші – фізичні моделі.

Експериментальний комплекс з емпіричною моделлю обмежений сферою застосовності, для якої модель створена. Повні фізичні моделі позбавлені обмежень, але вони рідше використовуються, оскільки такий

детальний підхід вимагає введення точних даних. Обчислення в рамках фізичних моделей зазвичай повільні та, значною мірою, надлишкові. Тому напівемпіричні моделі, як проміжні, частіше обираються для практичного застосування.

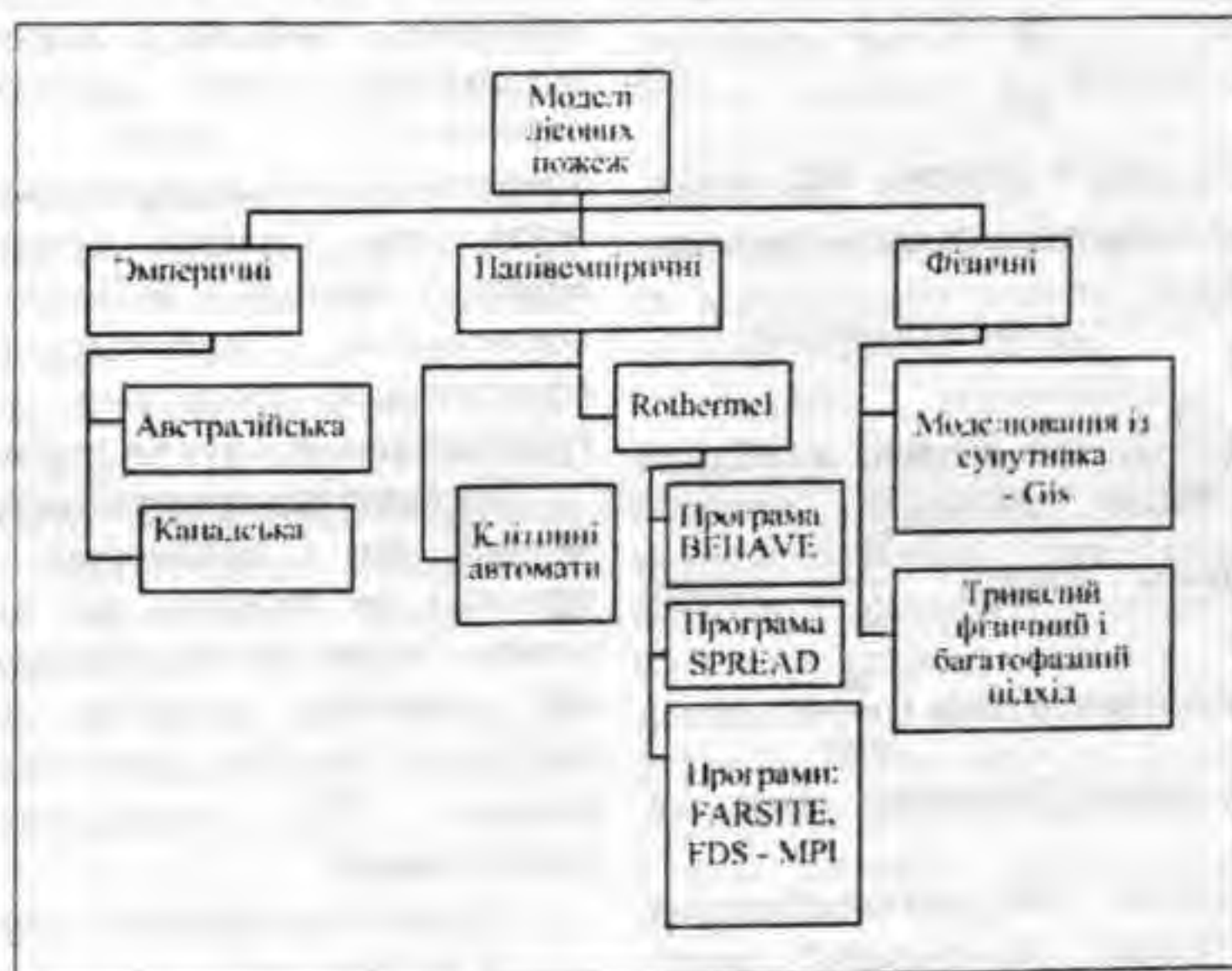


Рис. 2 Класифікація моделей лісових пожеж

Емпіричні моделі бувають статистичні і стохастичні та можуть включати дані статистики пожеж минулих років, усереднюючи параметри прогнозування лісових пожеж, отриманих з експериментальних лабораторій. Дві емпіричні моделі широко використовувалися в Австралії і Канаді. В Австралії – модель Мак Артура [17], що відтворювала територіальні і лісові пожежі. Вона не робила жодної спроби використовувати фізичні механізми при поширенні вогню і була виключно статистичною, описуючи параметри за результатами спостережень. Модель перевірялася в посушливих регіонах південного сходу Австралії. Лісова канадська служба 25 років проводила дослідження реальних сценаріїв поширення пожеж і сформувала Канадську систему прогнозування поведінки лісових пожеж, яка доступна зараз у вигляді підручника і в електронному вигляді. Ця система містить 89 формул, отриманих дослідним шляхом і зведених до таблиць, і є однією з альтернативних моделей прогнозування пожеж.

Напівемпіричні моделі ґрунтуються на глобальній енергетичній рівновазі [1] (модель Франденсена 1971) і на припущенні, що енергія,

яка отримується ще незгорілим паливом, пропорційна тій енергії, що вивільняється під час горіння палива. Деякі елементи моделі мають бути підібрані з результатів лабораторних експериментів з вогнем. Простота цього підходу дозволяє розробляти оперативні методи.

Найбільш важлива напівемпірична модель була створена Ротермелем [1], її покладено в основу багатьох систем прогнозу в США та в інших країнах. Модель було розроблено для передбачення швидкості вогню у фронті пожежі, залежно від ЛЗМ (легкозаймистих матеріалів), погодних умов та особливостей рельєфу. Модель базується на наступних рівняннях:

$$ROS = \frac{I_R \xi (1 + \phi_w + \phi_s)}{\rho_b \epsilon Q_{ig}}, \quad (1)$$

де ROS - норма вогню ($\frac{M}{XB}$).

Вхідні параметри: I_R – інтенсивність реакції ($\frac{kJ}{XB \cdot M^2}$); ξ – відстань поширення пожежі; ϕ_w – коефіцієнт вітру; ϕ_s – фактор нахилу; ρ_b – суха

масова густина ($\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$); ε – ефективний індекс нагрівання (безрозмірний); $Q_{\text{г}}$ – тепло попереднього займання ($\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$).

$$I_b = hw \frac{R}{60}, \quad (2)$$

де I_b – інтенсивність смуги пожежі, яка описує величину енергії, що випромінюється за одиницю фронту пожежі ($\frac{\text{кВт}}{\text{м}}$); h – кількість палива;

w – вага палива ($\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$), що згоріло в області пожежі, на одиницю площі, $\frac{R}{60}$ – норма поширення вогню за одиницю часу ($\frac{\text{м}}{\text{сек}}$).

Вхідні дані для моделі Ротермель ділять на три типи:

1) властивості часток ЛЗМ (легкозаймистих матеріалів) – тепловміст, мінеральний вміст, щільність часток;

2) структура масиву часток ЛЗМ (запас ЛЗМ, середній розмір часток, середня висота шару);

3) параметри довкілля (швидкість вітру, вологість, наявність ЛЗМ, нахил поверхні).

Модель Ротермеля є основою для багатьох систем прогнозування пожеж і встановлення передумов їх виникнення.

Національна система оцінки лісової пожежної небезпеки NFDRS (1972) і комп'ютерна система прогнозу пожеж BEHAVE (1984) [5] обидві засновані на моделі Ротермеля і використовують наступне рівняння:

$$I_b = \frac{I_R * 12.6R}{60 \delta}, \quad (3)$$

де δ – характеристика району пожежі відносно території розповсюдження палива.

Спільно з моделлю Ротермеля часто використовується модель Байрама. Вона дає інтенсивність фронту пожежі (кВт/м) на основі питомої теплоти згоряння ЛЗМ (Дж/г), запасу ЛЗМ (г/м^2) і швидкості поширення вогню (м/с). Моделі Ротермеля і Байрама були використані в широкому діапазоні екосистем і лісових горючих матеріалів: Північній Америці, Південній Африці, Південній Франції і Австралії. Передбачення за моделлю Ротермеля в простих екосистемах ланів та саван були достовірними в

широкому діапазоні параметрів. В той же час значні похибки виникали в складніших за структурою екосистемах.

Фізичні моделі лісової пожежі засновані на законах збереження маси, руху і енергії для всіх елементів системи (грунт, лісові горючі матеріали, повітря) і значно відрізняються за детальністю опису. Основними процесами є перенесення тепла (теплопровідністю, конвекцією та випромінюванням) і турбулентний потік газу. Складні хімічні реакції піролізу дерева і горіння з великим числом проміжних компонентів замінюються, як правило, ефективними процесами утворення твердих і газоподібних продуктів горіння.

На практиці використовуються як двовимірні моделі, так і тривимірні. Двовимірний опис процесів на площині, що відповідає "лінійній" пожежі, може використовуватися для порівняння або розробки моделей, але має обмежену практичну цінність. Двовимірна "горизонтальна" модель [18] базується на наступних припущеннях:

- 1) горючі матеріали зосереджені на поверхні;
- 2) висота шару повітря мала в порівнянні з лінійними масштабами.

Ця модель, очевидно, не описує власне верхову пожежу, але може застосовуватися під час оцінювання її наслідків.

Для верхової пожежі потрібна повна тривимірна модель, пов'язана (в разі сильної пожежі) з регіональною моделлю атмосферної динаміки [13]. Складність створення адекватної моделі цього процесу визначається рядом чинників: необхідністю розробити модель тривимірного розподілу лісових горючих матеріалів, що включає ряд параметрів, описує міру нерівномірності розподілу, який має хаотичний характер як самого горіння, так і атмосферних течій; а також – широким масштабом завдання.

Очевидно, що модель має бути системою ієрархічних субмоделей для різних масштабів. Найпростіший зв'язок між моделями – використання параметризації, що дозволяє зменшити масштаби (апроксимація за допомогою нейронних мереж, багатопараметрична регресія тощо). Перспективним видається адаптивне використання моделей, тобто процеси догорання вогнища пожежі можуть описуватись простішими ніж фронт вогню засобами. Хаотичний характер динаміки пожежі вимагає розгляду безлічі варіантів розрахунку для оцінки

вірогідності прогнозу. Нарешті, для математичної моделі реальної лісової пожежі як способу підтримки ухвалення рішень необхідне коригування результатів розрахунків на основі поточних даних дистанційного зондування [20], тому важливим елементом запропонованої системи повинна стати процедура асиміляції експериментальних даних у розрахункову модель.

Верифікація моделі включає два етапи: перевірку точності чисельного вирішення рівнянь і оцінку відповідності моделі реальності. Останнє у разі лісових пожеж викликає серйозні труднощі. Лабораторні експерименти щодо горіння лісових матеріалів, [6, 7] безумовно, необхідні і дозволяють, наприклад, визначити необхідні параметри моделі горіння однорідного шару палива за відсутності вітру на горизонтальній поверхні [8].

Використання моделі необхідне, по-перше, для дослідження ефективності заходів запобігання і гасіння лісових пожеж, по-друге, для ухвалення оперативних рішень. В останньому випадку, очевидно, необхідне моделювання в реальному часі з використанням багатопроцесорних обчислювальних комплексів і Grid-кластерних систем.

Модель і параметри лісових пожеж для обчислень на кластері і в Grid

Для моделювання лісової пожежі було запропоновано використовувати програмне забезпечення FDS [9] і додаткові прикладні програми, такі як Farsite [10], Smokview [11] і Biheve, оскільки на сьогоднішній день не існує єдиного відкритого програмного комплексу для розрахунку лісових пожеж в тривимірному просторі, який враховував би рельєф місцевості та навколишній клімат разом з класифікацією об'єктів лісового масиву.

Модель коригувалася, використовуючи специфіку лісів Криму за допомогою додаткових програм, згаданих вище. Програма FDS використовується для перевірки пожежної безпеки і дозволяє у повній мірі реалізувати чисельну польову модель. Польова модель – математична модель розрахунку перенесення тепла та маси під час пожежі, в основі якої лежить система рівнянь з частинними похідними, у якій чисельно вирішуються рівняння Нав'є-Стокса для температурнозалежних низькошвидкісних потоків, особлива увага приділяється поширенню диму і теплопередачі при пожежі.

Таблиця 1

Теплофізичні характеристики рослинності

		Рослинність						
Параметр	Одиниця виміру	Дуб	Сосна	Клен	Бук	Куш	Трава	Камінь / земля
Щільність	кг/м ³	800	850	670	680	600	550	2800
Питома теплоємність	КДж/ (кг*К)	2.4	2.72	2.5	2.6	2.4	2.2	1.04
Провідність	W/(м*К)	0.42	0.4	0.35	0.4	0.25	0.21	0.18
Коефіцієнт випромінювання	$\epsilon = 1$	0.91	0.9	0.9	0.9	0.9	0.98	0.85
Коефіцієнт поглинання	1/м	0.86	0.8	0.8	0.8	0.7	0.67	0.5
Теплота згорання	КДж /кг	9	9	8	8	7	6	-

Так само були враховані модельні кліматичні параметри лісового середовища:

Модель є системою рівнянь, що включає рівняння збереження маси, моменту імпульсу та енергії. Вона вирішується на тривимірній регулярній сітці. Теплове випромінювання розраховується методом кінцевих об'ємів на тій самій сітці.

Основні рівняння запропонованої моделі:

Закон збереження маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = \dot{m}_b \quad (4)$$

де ρ - густина, u - швидкість, $\dot{m}_b$ - коефіцієнт збільшення маси речовини типу b за одиницю часу.

Закон збереження моменту імпульсу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla(\rho u^2) + \nabla p = \rho g + f_b + \nabla \tau_{ij} \quad (5)$$

де f_b - зовнішні сили притягання (за винятком сили тяжіння) τ_{ij} - тензор в'язких напруг

Закон збереження енергії:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h_s) + \nabla(\rho h_s u) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{q}'' - \dot{q}_b'' - \nabla(\dot{q}'') + \varepsilon \quad (6)$$

де h_s - ентальпія суміші газів, $\dot{q}''$ - швидкість тепловиділення на одиницю об'єму, $\dot{q}_b''$ - енергія, яка передається краплині, що випаровується, $\dot{q}''$ - вектор теплового потоку, ε - швидкість дисипації тепла.

Як вихідні дані використовувалася таблиця теплофізичних характеристик рослинності.

Таблиця 2

Параметри лісового середовища

Параметр	Одиниця виміру	Значення
Вітер	м/сек..	15
Атмосферний тиск	мм рт.ст	760
Температура повітря	°C	35
Відносна вологість	%	18

Земельний ґрунт розглядався як негорюча нейтральна площа, яка не брала участі в процесі горіння. За допомогою різних моделей моделювалось горіння ділянки протягом 5 – 30

хвилин. Процес розрахунку при цьому займав набагато більше часу – від 1.5 години до 36 годин. В результаті моделювання стало можливим візуально оглянути периметр горіння лісової ділянки, оцінити температуру в контрольних точках, а також (при моделюванні 30 хвилин) обрахувати повний цикл: від моменту спалаху до загасання й диму.

З побудованої моделі лісової пожежі можна зробити важливий висновок: швидкість розповсюдження лісової пожежі можна істотно зменшити, задавши більшу відстань між рослинними об'єктами. А цього можна досягти, проводячи санітарне вирубування дерев і кущів та дотримуючись геометричного порядку при висадці лісонасаджень (див. рис. 3).

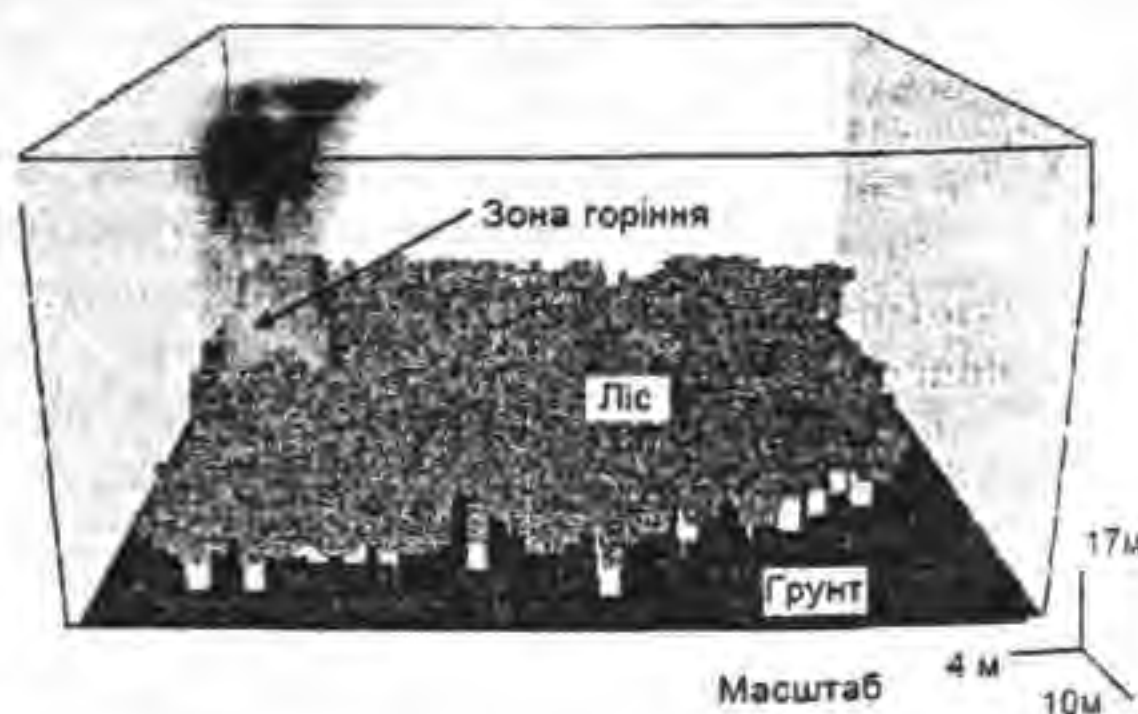


Рис. 3 Кадр з анімації тривимірної модельної лісової пожежі

Розмірність файлу моделі подана в таб. 3.

Результати моделювання можна побачити в таблиці 4.

Таблиця 3.

Розмірність файлу моделі.

Назва моделі	Кількість об'єктів	Кількість пікселів	Кількість Сіток	Розмір вихідного файлу
Forest-Fire1	250	1 мільйон	1	250кб
Forest-fire2	500	2 мільйона	1	600кб
Forest-fire3	800	3 мільйона	2	950Мб
Forest-fire4	1200	4 мільйона	3	1.5 Мб

Таблиця 4

Результати моделювання.

Назва моделі	RAM(1 CPU)	Розмір вихідних файлів	Тривалість обчислень в Single режимі (1 CPU)	Тривалість обчислень в Grid у MPI режимі (10 CPU)	Тривалість обчислень в Grid у OPENMP режимі (4 CPU)
Forest_fire1	500 Мб	250 Мб.	8 годин	1,5 години	3 години
Forest_fire2+wind1	700 Мб	450 Мб.	16 годин	2,5 години	4 години
Forest_fire3+wind2	900 Мб	600 Мб.	24 годин	4,5 годин	7 годин
Forest_fire4+wind3	1 Гб	1.4 Гб.	36 годин	5 годин	9 годин

На рис. 4 наведена залежність тривалості обчислень моделей від використаних методів паралельних обчислень на кластерах в Grid.

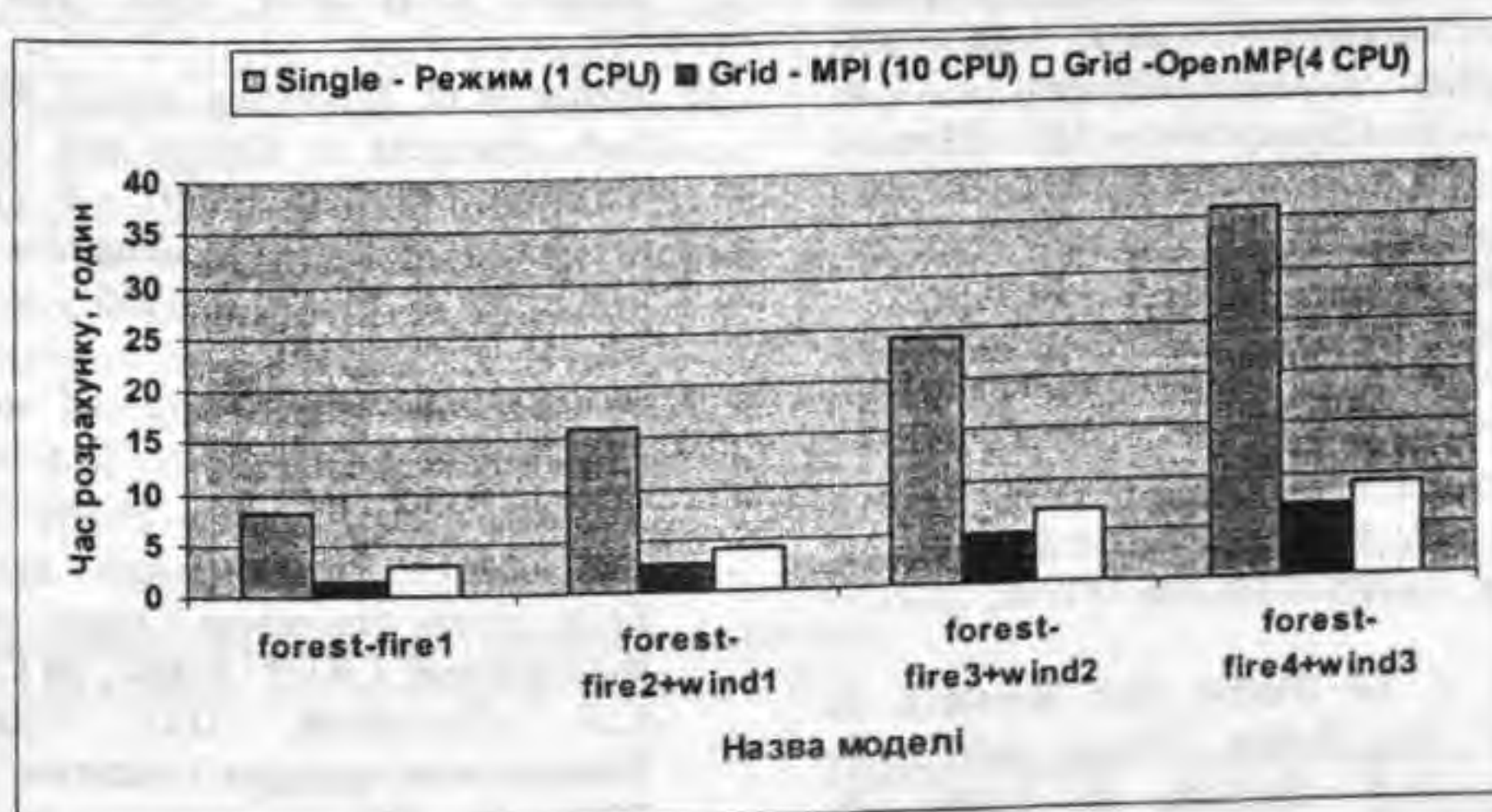


Рис. 4 Залежність тривалості обчислень моделей від використаних методів обчислення

Як видно з графіка (рис.4), більш продуктивним для розрахунків у Grid виявилось використання MPI-середовища на 10 процесорах, на відміну від багатопотокового OPENMP-режиму, оскільки кількість ядер процесора на деяких вузлах Grid-ресурсів може бути обмежено, а процесорні ресурси для MPI можуть запитуватися через менеджер ресурсів Grid-кластера і набиратися з вільних вузлів. Цей метод значно скорочує час розрахунку, а використання Grid-ресурсів дозволяє проводити обчислення незалежно на різних Grid-вузлах, використовуючи каскад, який дозволяє перегруповувати параметри моделі і формувати нові, враховуючи досвід і недоліки попередніх моделювань, не чекаючи завершення всього розрахункового циклу.

Висновки

Запропонований в роботі модельний підхід до опису лісових пожеж в Криму, заснований на критеріях станів пожеж в небезпечних зонах відносно чинників їх спалаху за багатолітніми спостереженнями за лісовими пожежами судячи з усього є ефективним для практичного застосування з використанням Grid-обчислень. Виявлена відмінність антропогенного і природного чинників в статистичних показниках активності пожеж.

Створена тривимірна модель лісової ділянки з осередком загоряння на основі відомих рівнянь кінетичного розвитку пожеж, таких як: математична польова модель пожежі, рівняння Нав'є-Стокса, закон збереження маси й імпульсу

з використанням 3D-моделювання в програмному забезпеченні FDS і 2D-моделювання в програмах FarSite (модель Ротермеля), Behave реалізована у вигляді ресурсу, який може використаний практично через веб-інтерфейс.

В результаті експерименту було доведено актуальність подальшого використання обчислень в Grid для прогнозування і управління лісовими пожежами.

Список використаних джерел

1. Доррер Г.А. Математичні моделі динаміки лісових пожеж / Г.А. Доррер. – М.: Лісн. пром-сть, 1979. – 161 с.
2. Амосов Г.А. Деякі закономірності розвитку лісових низових пожеж: [в кн.: Виникнення лісових пожеж] / Г.А. Амосов. – М.: Наука, 1964. – 152–183 с.
3. Конев Е.В. Фізичні основи горіння рослинних матеріалів / Е.В. Конев. – Новосибірськ.: Наука, 1977. – 102с.
4. Bianchini G. S2F2M - Statistical System for Forest Fire Management / G. Bianchini, 2005. – P. 427–434.
5. BehavePlus fire modeling system. Version 2.0, User's Guide. USDA Forest Service, Gen. Tech. Rep. RMRS-GTR-106 WWW, 2003. – P. 139.
6. Marcelli T. In: Forest Fire Research & Wildland Fire Safety, Viegas (ed.) / T. Marcelli., P.A. Santoni, E. Leoni, A. Simeoni. – Rotterdam.: Millpress, 2002. – P. 1–12.
7. Dupuy J.L., Combust and flame, / J.L. Dupuy, J. Marechal, D. Morvan, 2003. – P. 65–76.
8. Balbi J.H. Int. Wildlan Fire / J.H. Balbi, P.A. Santoni, J.L. Dupuy, 1999. – P. 275–284.
9. McGrattan K.B. Fire Dynamics Simulator [Version 5], Technical Reference Guide. NIST Special Publication 1018-5 National Institute of standards and Technology / K.B. McGrattan, S. Hostikka, J.E. Floyd, H.R. Baum, and R.G. Rehm. – Gaithersburg, Maryland, 2007. – P. 234.
10. FARSITE: Fire Area Simulator – model development and evaluation. USDA Forest Service Res. Pap. RMRS-RP-4, 2004. – P. 47.
11. Forney. G.P. User's Guide for Smokeview Version 5 - A Tool for Visualizing Fire Dynamics Simulation Data / G.P. Forney.: National Institute of Standards. – P. 234.
12. The Globus Resource Specification Language RSL v1.0." [Online]. Available.: [http://www.fp.globus.org/gram/rsl spec1.html](http://www.fp.globus.org/gram/rsl%20spec1.html)
13. Linn R. Int. Wildland Fire, v. 11 / R. Linn, J. Reisner, J.J. Colman, J. Winterkamp, 2002. – P. 233–246.
14. Rothermel R.C. A Mathematical model for Predicting Fire Spread in Wildland Fuels Research Paper INT-115 / R.C. Rothermel. – Ogden, UT: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, 1972. – P. 215.
15. Грішин А.М. Математичне моделювання процесу поширення верхових лісових пожеж. / А.М. Грішин, А.Д. Грузін, В.Г. Зверев.: ДАН СРСР, 1983. – 269 №4. 822–826 с.
16. Weber. R.O. Modelling spread through fuel beds. Progress in Energy and Combustion Science / R.O. Weber, 1991. – P. 17–67.
17. McCarter R.J. Pyrodynamics / R.J. McCarter, A. Broido. – 1965. - v. №1. – P. 65–85.
18. Asensio M.I. Modelling of convective phenomena in forest fire / M.I. Asensio, L. Ferragut, J. Simon, 2002. – P. 299–313.
19. Бойко Ю.В. Український академічний Грід: досвід створення і перші результати експлуатації / Ю.В. Бойко, М.Г. Зінов'єв, С.Я. Свістунов, О.О. Судаков // Математичні машини і системи. – № 1. – 2008. – 67 – 84с.
20. Anderson H.E. Tenth symposium (international) on combustion / H.E. Anderson, R.S Rothermal // The Combustion Institute, Pittsburgh. – 1965. – P. 1009–1019.
21. Khramov V.V. The first Crimean experimental computing grid-resource for research and simulation in the humanities / V.V Khramov, O.O. Sudakov // Ninth international young scientists conference on applied physics, june,17-20, Kyiv. – 2009. – P. 105.
22. Sudakov O.O. Use of distributed computing in the monitoring of dependence of human state from the heliometeofactors / O.O. Sudakov, M.V. Kononov, V.V. Khramov, P.Ye. Grigoryev // Xth international young scientists conference on applied physics, june,17-20, Kyiv. – 2010. – P. 223.

Надійшла до редколегії 25.02.2011

УДК 537.86.029.65/.79, 621.37.029.6

Костенко В. І.,
Нечипорук О. Ю., к. ф.-м. н., доц.,
Сорочак А. М., асп.,
Чамор Т. Г., к. ф.-м. н.,
Чевнюк Л. В., к. ф.-м. н.

Властивості спектрів ФМР поглинання в епітаксіальних плівках барієвого гексафериту при зміні товщини підкладки

В роботі досліджені високочастотні та магнітні характеристики епітаксіальних плівок барієвого гексафериту ($\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$), вирощених на підкладці з гексагалату стронцію (ГГС) методом рідкофазної епітаксії. Показано, що наявність діелектричної підкладки суттєво впливає на спектральні та магнітні параметри таких структур. Експериментальні дослідження проводились при зміні товщини підкладкового матеріалу.

Ключові слова: феромагнітний резонанс, барієвий гексаферит, епітаксіальна плівка, магнітострикція, стронцієвий гексагалат.

Kostenko V. I.,
Nechyporuk O. Yu., Ph.D., As. Prof.,
Sorochak A. M., Ph.D. stud.,
Chamor T. G., Ph.D.,
Chevnyuk L. V., Ph.D.

FMR absorbtion spectra properties in epitaxial film of barium hexaferrite with change of thickness substrate

In the paper the high-frequency and magnetic characteristics of barium hexaferrite ($\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$) epitaxial films, grown on strontium hexagallate (SHG) substrates by liquid-phase epitaxy is investigated. Shown that the dielectric substrate may have a significantly impact on the spectral and magnetic characteristics of such structures. The experimental studies are carried out with the change of substrate thickness.

Key Words: ferromagnetic resonance, barium hexaferrite, epitaxial film, magnetostriction, strontium hexagallate.

*E-mail: sorandrew@gmail.com, ctamila@univ.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І. О.

Вступ

Поліпшення та вдосконалення високочастотних властивостей гексаферитових плівок, вирощених методом епітаксії, стає можливим завдяки дослідженням природи збуджень спектрів ФМР у таких структурах. Це дає змогу ефективно вирішувати важливі задачі сучасної радіофізики. Адже використання плівкових гексаферитових матеріалів при конструюванні апаратури НВЧ міліметрового діапазону, є суттєвим кроком в практичній оптимізації пристроїв інтегрально-планарного виконання [1].

На сьогодні плівки одновісного барієвого гексафериту, вирощені на підкладках з кристалу сапфіру [2-5], ГГС [6,7] або оксиду магнію [8], наближаються за своїми високочастотними параметрами до типових для зразків виготовлених з об'ємного монокристалічного матеріалу [9, 10].

Одним із основних визначальних факторів у виборі якісного немагнітного матеріалу для підкладки, є його хороші механічні

характеристики, тобто низька імовірність руйнування в процесі обробки поверхні підкладки та незначні внесені діелектричні втрати. Технологія імпульсного лазерного осадження (ІЛО), для виготовлення плівок гексаферитів, зараз особливо активно освоюється з використанням кристалу Al_2O_3 [2-4], що дозволяє задовольнити в повній мірі вищезгадані вимоги. Експериментально продемонстровано можливість зміни кристалографічних, високочастотних та магнітних властивостей плівок $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$ вирощених на підкладці Al_2O_3 , варіюючи товщину феритового шару у діапазоні $t_f \approx 0,01-0,5$ мкм [2], а також температуру осадження плівки T_∞ (600-920 °C) [5].

Привабливим, для епітаксіальних методів вирощування гексаферитових плівок, є використання підкладок з діелектричних кристалів чистих та заміщених гексагалатів. У такому випадку, несумісність параметрів ґратки плівки та підкладки незначна, що забезпечує суттєву ефективність процесу епітаксіального

росту [6,7]. В роботі [6], наведені дані про вплив пружних напруг на поля кристалографічної анізотропії H_a та резонансні частоти в системі ферит-діелектрик.

Явище взаємодії магнітної та діелектричної підсистем, через механізм магнітострикції, активно застосовується для створення композитних структур на основі п'єзоелектриків, що дозволяють керувати, за допомогою електричного поля, спектральними характеристиками гексаферитових структур [11,12].

У роботі [13], була зроблена спроба розвинути електромагнітну теорію взаємодії структури плівка-підкладка зі збуджуючим полем. З'ясувалося, що використання отриманих результатів на практиці можливе лише при умові, що феритова плівка має дуже малі розміри у порівнянні з типовими [9, 10]. Тобто такі плівки, з точки зору практичних застосувань, не представляють особливого наукового інтересу.

Пропонована робота є продовженням експериментальних досліджень по вивченню поглинання електромагнітних хвиль в електродинамічній системі плівка-підкладка.

Експериментальні результати та їх аналіз

В проведених експериментах, використовувалися плівки, вирощені методом рідкофазної епітаксії на підкладках ГТС, товщиною $t_{пл} \approx 500-800$ мкм, при різних технологічних режимах вирощування. Дослідження проведені з використанням панорамного вимірювача КСХН при скануванні магнітним полем H_0 , що дало можливість суттєво зменшити вплив резонансного поглинання в діелектрику на параметри ФМР. Зовнішнє постійне магнітне поле H_0 прикладалося паралельно вісі легкого намагнічування (ВЛН). Товщина підкладок зменшувалася шляхом шліфування і полірування алмазними порошками.

Виміряно коефіцієнт біжучої хвилі КБХ, на частоті 48.55 ГГц, для трьох зразків: № 1 - $t_{пл} = 12$ мкм, $a \times b = 2.1 \times 0.7$ мм², $H_a = 15.98$ кЕ; № 2 - $t_{пл} = 12$ мкм, $a \times b = 2.5 \times 0.8$ мм², $H_a = 16.2$ кЕ; № 3 - $t_{пл} = 8$ мкм, $a \times b = 1.45 \times 0.75$ мм², $H_a = 16.62$ кЕ. Із них два останні були вирощені на підкладці, а перший зразок – приклеєний до відколотої підкладки, на якій ця плівка вирощувалася.

Уявна частина магнітної сприйнятливості χ'' пов'язана з КБХ співвідношенням [10]:

$$\chi'' = \frac{\lambda_g S_{\omega}}{8\pi^2 t_f S_f} \times KEX \quad (1)$$

де λ_g – довжина хвилі у хвилеводі, S_{ω} – площа перерізу хвилеводу, S_f – площа фериту.

Перераховані згідно (1) лінії поглинальних спектрів ФМР зразка № 1 приведені на рис.1. Як бачимо, при зміні товщини підкладки змінюються резонансні поля $H_{рез}$, інтенсивності поглинання χ'' та ширини поглинальних ліній $2\Delta H$.

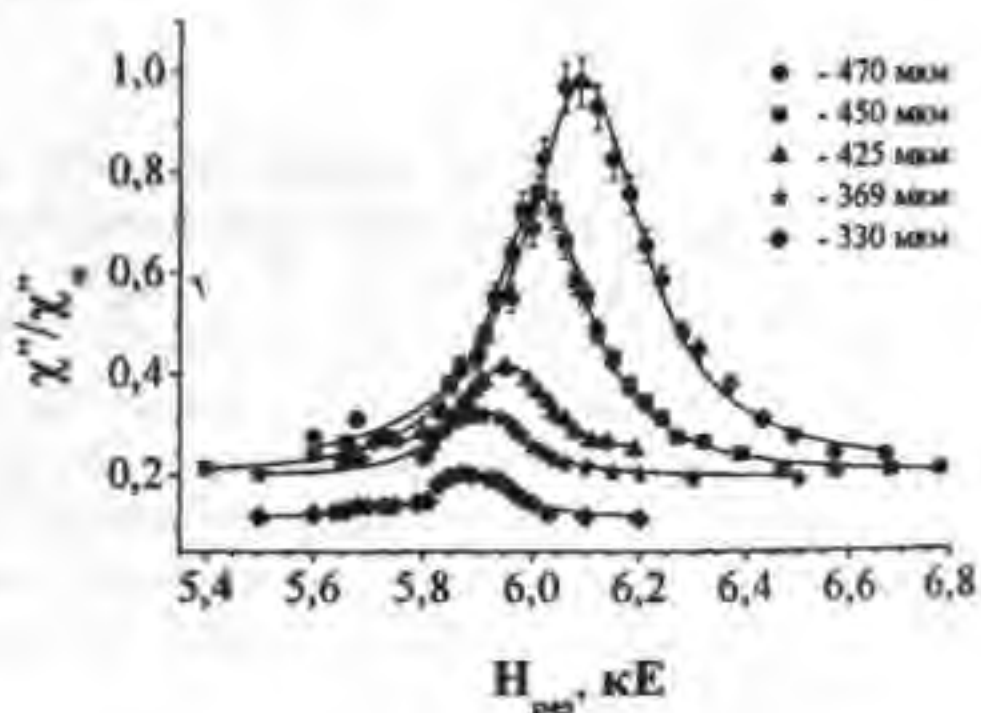


Рис.1. Залежність нормованої магнітної сприйнятливості χ''/χ''_{max} у максимумі лінії поглинання ФМР при різних товщинах підкладки, для зразка № 1. Точки – експеримент, суцільна лінія – апроксимаційна крива.

На рис. 2 представлені зведені для різних $t_{пл}$ залежності зміни χ''_{max} трьох зразків. Порівнюючи характер поведінки залежності інтенсивностей поглинання для приклеєної (пружні напруги майже відсутні) та вирощеної епітаксialних плівок можемо зробити висновок, що вплив пружних напруг на інтенсивність є помітним. Для зразків № 1, № 3, з ростом товщини підкладки збільшується інтенсивність поглинання і при $t_{пл} > 350-400$ мкм, її вплив на величину інтенсивності різко збільшується. Це пов'язано із виникненням в структурі епітаксialна плівка-підкладка зв'язаних ферит-діелектричних коливань та їх гібридизації [14].

На рис.3. побудовані залежності резонансного поля $H_{рез}$ від $t_{пл}$, отримані на частоті 48.55 ГГц, для трьох вищезгаданих зразків. Як бачимо з рис. 3, попереднє відколювання підкладки для зразка № 1 веде до більш дисперсійного характеру

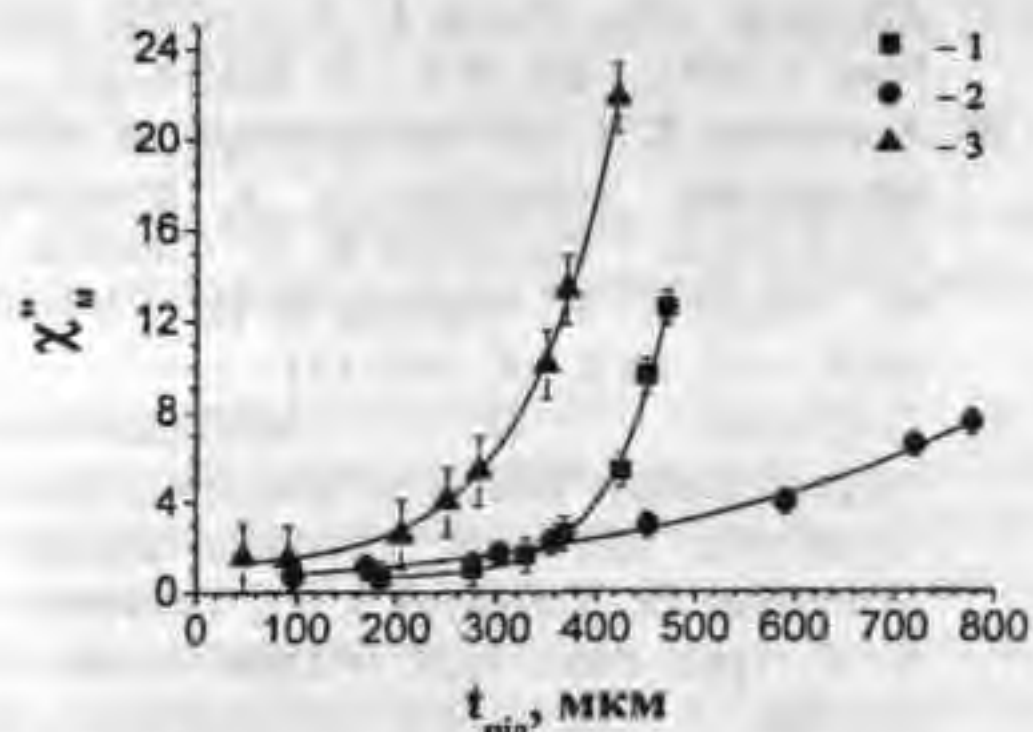


Рис.2. Залежність магнітної сприйнятливості χ'' , в максимумі лінії поглинання ФМР від $t_{\text{під}}$ для трьох досліджуваних зразків: ■ – 1 - зразок № 1; ● – 2 - зразок № 2; ▲ – 3 - зразок № 3. Точки – експеримент, суцільна лінія – апроксимаційна крива.

експериментальної залежності $H_{\text{рез}}$, на відміну від ситуації з плівкою № 2. Це дозволяє константувати, що у випадку зчеплених кристалічних ґраток плівки та підкладки, в результаті вирощування, має місце більш "еластична" пружна взаємодія між ними, що дає більш закономірний вклад у величину ефективного поля кристалографічної анізотропії плівки H_a .

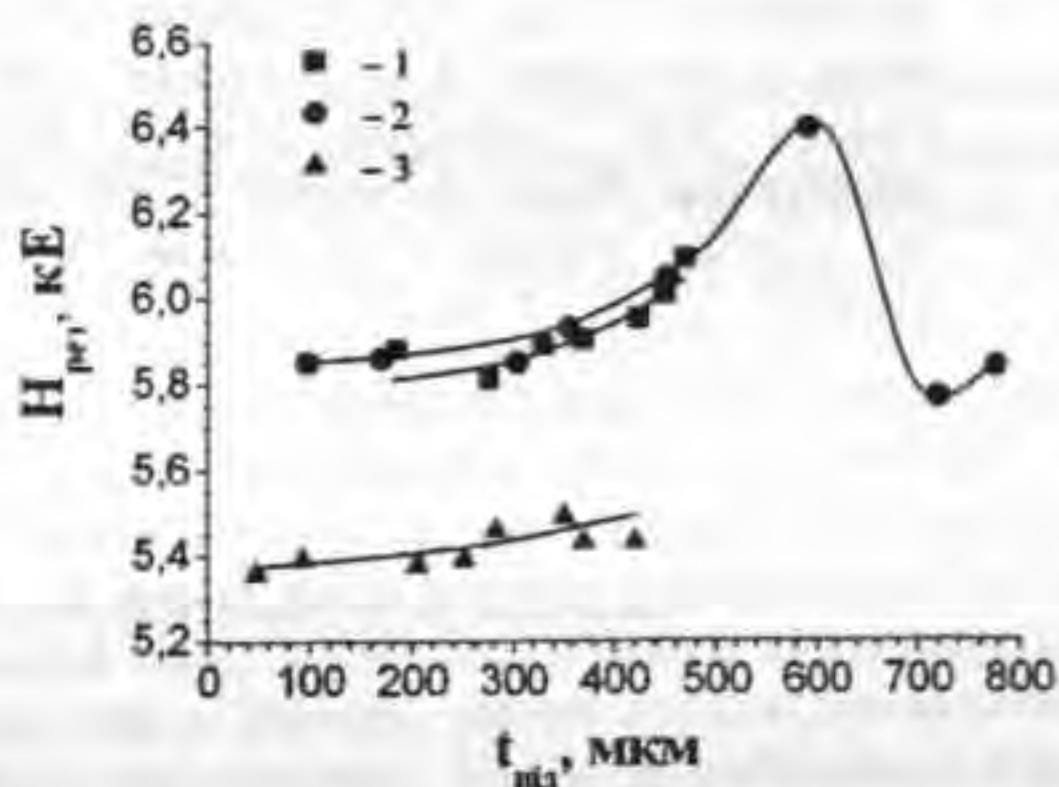


Рис.3. Залежність зміни $H_{\text{рез}}$ від товщини підкладки, для трьох епітаксialних плівок. 1,2,3 – аналогічно рис. 2.

При товщинах підкладки $t_{\text{під}} < 500$ мкм, поведінка $H_{\text{рез}}$ має повільно спадаючий характер для усіх досліджуваних зразків. Тоді як, для залежності $H_{\text{рез}}$, у випадку плівки з $t_{\text{під}} > 500$ мкм, має місце аномальний характер поведінки $H_{\text{рез}}$,

що пов'язано з сильною гібридизацією феритової та діелектричної мод для даних товщин $t_{\text{під}}$ [14]. Цікаво відмітити також й те, що для зразка № 3, з меншою товщиною фериту $t_f = 8$ мкм, спостерігається значне зміщення значень $H_{\text{рез}}$ по відношенню до значень $H_{\text{рез}}$ для зразків з $t_f = 12$ мкм. Це зумовлено тим, що зі зменшенням товщини фериту плівки відбувається зменшення величини намагніченості насичення $4\pi M$ [2], зміна H_a за рахунок пружних напруг [15] і відповідно $H_{\text{рез}}$, згідно (2).

$$H_{\text{рез}} = \frac{\omega}{\gamma} - H_a + 4\pi M \quad (2)$$

Надалі, ми плануємо проведення більш детальних експериментальних та розрахункових досліджень параметрів феромагнітного відгуку у таких структурах.

Висновки.

- Електродинамічна система ферит-діелектрик в НВЧ полі являє собою самоузгоджений гібридний резонатор, в якому можливе збудження електромагнітно-спінових коливань.
- Встановлено, що в епітаксialних плівках барієвого гексафериту величина H_a менша, ніж у об'ємних монокристалічних зразках. Це пов'язано з існуванням у плівці, індукованої пружними напругами, одновісної анізотропії, величину якої можна змінювати шляхом варіювання товщини підкладки.
- Оскільки діелектрична підкладка слугує концентратором НВЧ поля у структурі гексаферитова плівка-підкладка, експериментально показано, що вона здатна значно підсилити зв'язок з феритовою плівкою.

Список використаних джерел

1. Camley R. E. High-frequency signal processing using magnetic layered structures / Camley R. E., Celinski Z., et al. // J. Magn. Mater. – 2009. – 321. – P. 2048-2054.
2. Shinde S. R. Effect of lattice mismatch strains on the structural and magnetic properties of barium ferrite films / Shinde S. R., Ramesh

- R., et al. // J. Appl. Phys. – 1998. – 72, № 26. – P. 3443-3445.
3. Shinde S. R. Realization of epitaxial barium ferrite films of high crystalline quality with small resonance losses / Shinde S. R., Lofland S. E., et al. // J. Appl. Phys. – 1999. – 85, № 10. – P. 7459-7466.
4. Shinde S. R. Improvement in spin-wave resonance characteristics of epitaxial barium-ferrite thin films by using an aluminum-doped strontium-ferrite buffer layer / Shinde S. R., Lofland S. E., et al. // Appl. Phys. Lett. – 1999. – 74, № 4. – P. 594-596.
5. Lisfi A. Evidence of stress anisotropy and role of oxygen pressure in growth of pulsed-laser-deposited hexaferrite films / Lisfi A., Lodder J. C., Keim E. G., Williams C. M. // Appl. Phys. Lett. – 2003. – 82, № 1. – P. 76-78.
6. Dotsch H. Growth and properties of epitaxial barium hexaferrite films / Dotsch H., Mateika D., Roschman P., Tolksdorf W. // Mat. Res. Bull. 1983. – 18. – P. 1209-1216.
7. Зависляк И. В. Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках одноосных бариевых гексаферритов / Зависляк И. В., Костенко В. И., Чамор Т. Г., Чернюк Л. В. // ЖТФ – 2005. – 75, Вып. 4. – С. 128-130.
8. Wang S. G. Microwave and magnetic properties of double-sided hexaferrite films on (111) magnesium oxide substrates / Wang S. G., Yoon S. D., Vittoria C. // J. Appl. Phys. – 2002. – 92, № 11. – P. 6728-6732.
9. Karim R. Frequency dependence of the FMR linewidth in single crystal barium ferrite platelets / Karim R., McKintsy K. D., Truedson J. R., Patton C. E. // IEEE Trans. Mag. – 1992. – 28, № 5. – P. 3225-3227.
10. Костенко В. І. НВЧ-резонатори на основі одновісних гексаферитів з доменною структурою / Костенко В. І., Сорочак А. М., Чамор Т. Г., Чернюк Л. В. // УФЖ – 2008. – 53, № 2. – С. 147-151.
11. Srinivasan G. Millimeter-wave magnetoelectric effects in bilayers of barium hexaferrite and lead zirconate titanate / Srinivasan G., Zavislyak I. V., Tatarenko A. S. // Appl. Phys. Lett. – 2006. – 89. – P. 152508.
12. Das J. Electric-field control of ferromagnetic resonance in monolithic $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$ - $\text{Ba}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{TiO}_3$ heterostructures / Das J., Song Y.-Y., Wu M. // J. Appl. Phys. – 2010. – 108. – P. 043911.
13. Шагаев В. В. О влиянии подложки на ширину линии ферромагнитного резонанса в пленках бариевого феррита / Шагаев В. В. // ЖТФ – 2008. – 78, Вып. 3. – С. 68-71.
14. Костенко В. И. Гибридные электромагнитно-спиновые колебания в слоистых структурах с одноосными гексаферритами / Костенко В. И., Сорочак А. М., Чамор Т. Г., Чернюк Л. В. // ЖТФ – 2011. – 81, Вып. 5. – С. 40-43.
15. Kostenko V.I. FMR thickness frequency-field dependences in single-axis hexaferrite barium plates / Kostenko V.I., Sorochak A.M., Chamor T.G., Chevnyuk L.V. // Sixth International Young Scientists' Conference on Applied Physics, 14-16 June, Kyiv, Ukraine. - 2006. - P. 80-81.

Надійшла до редколегії 03.04.11

УДК 535.345.67

Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., *Онищук В.М.,
аспірант

Синтез багат шарових структур з високою часовою і просторовою дисперсією

Створення багат шарових структур з високою часовою і просторовою дисперсією відкриває шлях до компактних пристроїв багатоканальної частотної селекції, а також управління пучками світла та пристроїв керування дисперсією. Синтезовано структуру, в якій чергуються 203 шари з оксидів кремнію та ніобію. Структура дозволяє отримувати затримку групової швидкості до 3200 фемтосекунд в спектральному діапазоні 1520-1560 нм. Показано, що виникнення високої дисперсії та високого просторового зміщення в залежності від довжини хвилі зумовлено залежними від довжини хвилі ефектами проникнення вглиб та накопичення енергії в резонаторах.

Ключові слова: багат шарова тонкоплівкова структура, просторова дисперсія, просторове зміщення

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua; vetonyx@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Відомо, що тонкоплівкові структури, зокрема одновимірні фотонні кристали та структури з півхвильовим шаром можуть бути застосовані для отримання значної просторової дисперсії [1-6]. Однак значна просторова дисперсія в таких структурах існує у вузьких діапазонах довжин хвиль на межах спектральних інтервалів з високим коефіцієнтом відбиття, які, наприклад, в фотонних кристалах збігаються з межами фотонної забороненої зони. Крім того, в даних діапазонах довжин хвиль існують значні втрати інтенсивності відбитого променя. Більш привабливими структурами з точки зору практичного застосування є структури з декількома резонаторами та чирповані дзеркала [6-9]. Зокрема, для частотної селекції важливо мати структури з високою просторовою дисперсією, яка лінійно залежить від довжини хвилі [10]. Бажано також досягти якомога більшого просторового розщеплення світла по довжинам хвиль в більш широкому спектральному діапазоні. В роботах [6-8, 12] було показано, що одночасний прояв залежних від довжини хвилі

Yu.O. Pervak, Dr. Sci., V.M. Onishchuk, post grad. stud.

The synthesis of multilayer structures with high time and spatial dispersion

Creation of multilayer structures with high time and spatial dispersion opens a way to the compact devices of multichannel frequency selection, and also management of light beams, and built on management dispersion. A structure in which 203 layers alternate from the oxides of silicon and niobium is synthesized. A structure allows to get the group delay of to 3200 femtosecond in the spectral range of 1520-1560 nm. It is shown that origin of high dispersion and high spatial displacement pre-defined deepen the dependency upon a wave-length effects of penetration and accumulation of energy in resonators.

Key words: multilayer thin-film structure, spatial dispersion, spatial shift

ефектів резонансного накопичення енергії і проникнення вглиб дозволяє отримувати надвисоку часову і просторову дисперсію. Структура з найбільшою дисперсією складалася з 202 шарів загальною товщиною 46 мкм. Окрім того, було встановлено, що емпіричні формули [11] для оцінювання максимально досяжних значень дисперсії дають суттєво занижені результати і висуното припущення, що лише недосконалість обчислювальних алгоритмів не дала можливості синтезу структури з більш високою дисперсією. Тому метою даної роботи було отримання структури з надвисокою дисперсією без збільшення фізичної товщини багат шарової структури. Для цього процедуру пошуку оптимальної структури виконували шляхом мінімізації функції якості за методом голчатої оптимізації [13-15], який широко і ефективно використовуються для вирішення різноманітних проблем синтезу тонко плівкових структур, включаючи дисперсійні дзеркала.

© Ю.О.Первак, В.М. Онищук, 2011

Усі розрахунки було проведено за допомогою матричного методу [2]. Метод дозволяє при заданих параметрах багатошарової структури (q – число шарів, n_r – показник заломлення, k_r – коефіцієнт екстинкції, d_r – товщина r -го шару, n_m і k_m – оптичні сталі підкладки, n_0 і k_0 – оптичні сталі зовнішнього середовища, θ_0 – кут падіння) розрахувати спектр відбивання $R(\lambda)$, зміну фази при відбиванні $\varphi(\lambda)$, групову затримку GD та дисперсію групової затримки GDD :

$$R = \left(\frac{\eta_0 B - C}{\eta_0 B + C} \right) \left(\frac{\eta_0 B - C}{\eta_0 B + C} \right)^*, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Im}[\eta_0 (CB^* - BC^*)] / (\eta_0^2 BB^* - CC^*) \quad (2)$$

$$GD = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (3)$$

$$GDD = -\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = -\frac{\lambda^2}{(2\pi c)^2} \cdot \left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{d\varphi}{d\lambda} \right). \quad (4)$$

Просторове зміщення $s(\lambda)$, обумовлено дисперсією структури, прямо-пропорційне величині групової затримки та груповій швидкості вздовж шарів v_{gr} :

$$s = GD \cdot v_{gr}. \quad (5)$$

Групову швидкість можна визначити згідно наближення ВКБ [16,17].

$$\frac{1}{v_{gr}} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\text{appr}} \Big|_{K=\text{const}} = \frac{n_{eff}^2}{c \sin \theta}, \quad (6)$$

де

$$\frac{1}{n_{eff}^2} = \frac{\sum_i \{ n_i^2 d_i / [n_i^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}}{\sum_i \{ d_i / [n_i^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}}. \quad (7)$$

При цьому характеристична матриця ансамблю має вигляд

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left(\prod_{r=1}^q \begin{bmatrix} \cos \delta_r & (i \sin \delta_r) / \eta_r \\ i \eta_r \sin \delta_r & \cos \delta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де $\delta_r = (2\pi N_r d_r \cos \theta_r) / \lambda$, $\eta_{r,m} = \chi_{\text{вкс}} N_{r,m} \cos \theta_{r,m}$ для ТЕ хвиль, $\eta_{r,m} = \chi_{\text{вкс}} N_{r,m} / \cos \theta_{r,m}$ для ТМ хвиль, $\chi_{\text{вкс}} = 2,6544 \cdot 10^{-3}$ сименс, λ – довжина хвилі, $N_r = n_r - ik_r$ – комплексний показник заломлення r -го шару, η_0 – провідність зовнішньо-

го середовища, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла. Значення кутів θ_r визначається законом Снеліуса

$$N_0 \sin \theta_0 = N_r \sin \theta_r = N_m \sin \theta_m. \quad (9)$$

Також за допомогою матричного методу можна отримати співвідношення, які дають змогу визначити залежність амплітуди електричного поля від позиції в структурі. Таке співвідношення для межі поділу i -тої та $i+1$ шару має вигляд:

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \left(\prod_{r=1}^i \begin{bmatrix} \cos \delta_r & (i \sin \delta_r) / \eta_r \\ i \eta_r \sin \delta_r & \cos \delta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де E_0, H_0 – величини електричного та магнітного полів на межі поділу структури та зовнішнього середовища, E_i, H_i – величини електричного та магнітного полів на межі поділу i -тої та $i+1$ шару. Визначення поля E_i зводиться до розв'язування матричного рівняння. Для визначення величини електричного поля всередині i -тої плівки можна ввести уявну межу поділу, та записати для неї таке ж матричне співвідношення.

При моделюванні спектральних характеристик багатошарових структур врахована дисперсія вибраних плівкових матеріалів: оксидів кремнію (SiO_2) і ніобію (Nb_2O_5). Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показники заломлення SiO_2 визначали за формулою $n_L = 1,46 + (3,35 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (1,41 \cdot 10^{-5} / \lambda^4)$, а Nb_2O_5 за формулою $n_H = 2,22 + (2,18 \cdot 10^{-2} / \lambda^2) + (4 \cdot 10^{-3} / \lambda^4)$, де λ – довжина хвилі в мкм. Врахована також дисперсія показника заломлення підкладки за формулою $n_S = 1,50 + (5,33 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (4,92 \cdot 10^{-4} / \lambda^4)$. Поглинання в шарах при розрахунку характеристик не враховувалось.

На рис.1а і 1в показано пошарову зміну оптичних товщин для синтезованої структури, яка складається з 203 шарів, утворених плівками Nb_2O_5 і SiO_2 , що чергуються. Загальна фізична товщина структури дорівнює 45,961 мкм. Нумерація шарів починається від підкладки. Останній 203 шар межує з повітрям, перший з підкладкою з оптичного скла. Перший шар утворений плівкою оксиду ніобію. Як і в структурах, отриманих в роботах [7-8] оптичні товщини більшості шарів близькі $\lambda_0/4$ на довжині хвилі $\lambda_0 = 1550$ нм. При цьому фізичні товщини шарів Nb_2O_5 порядку 181,2 нм, а шарів SiO_2 – 297,8 нм. Мінімальна товщина шару в структурі – 10,857 нм (114 шар). На рис.1б і 1д показано відносну чутливість шарів до зміни їх оптичної товщини випадковим чином на ± 1 нм. Відносна чутливість найбільш чутливого шару дорівнює 100%.

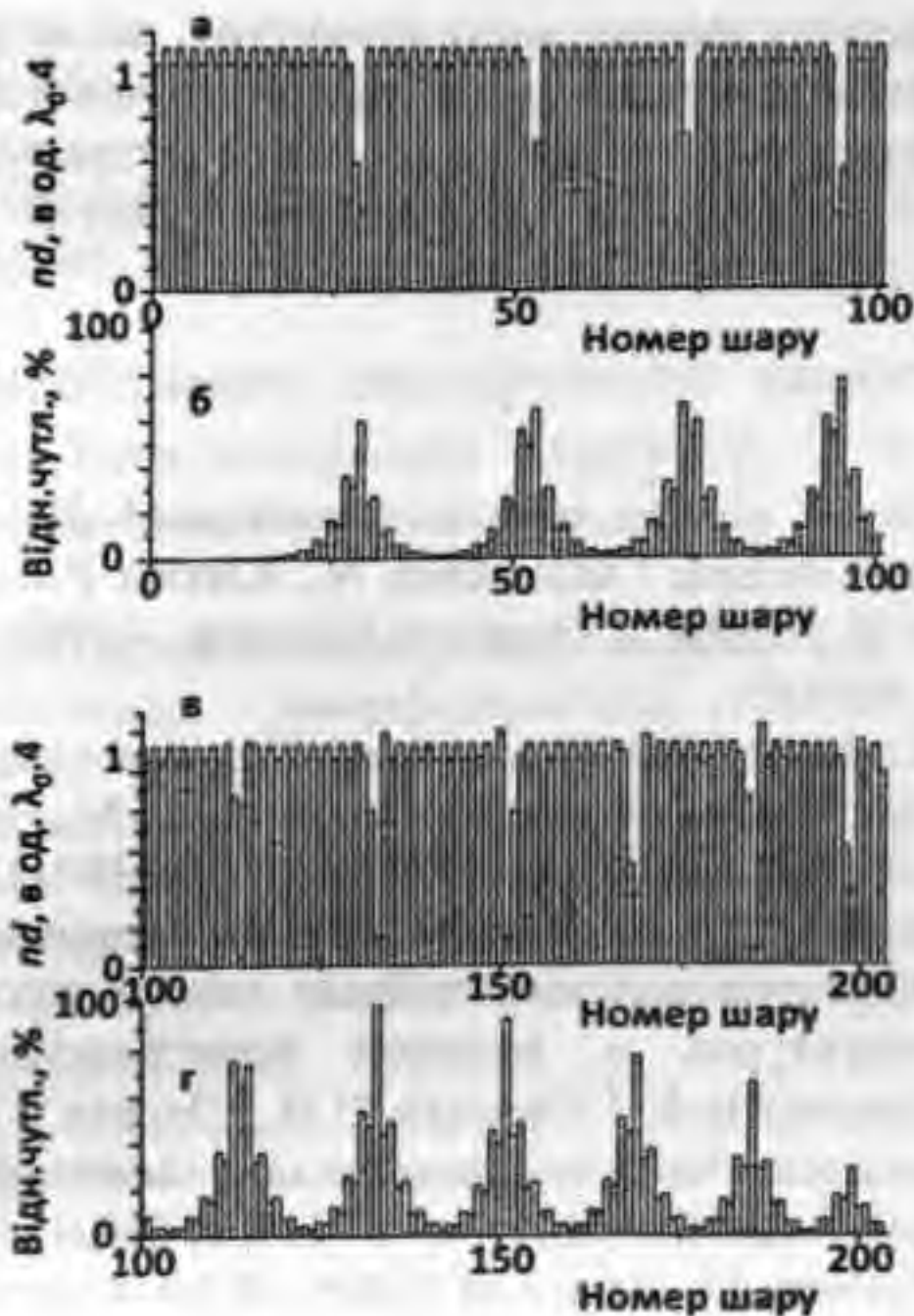


Рис.1. Залежність оптичної товщини (а, в) і відносної чутливості від номеру шару.

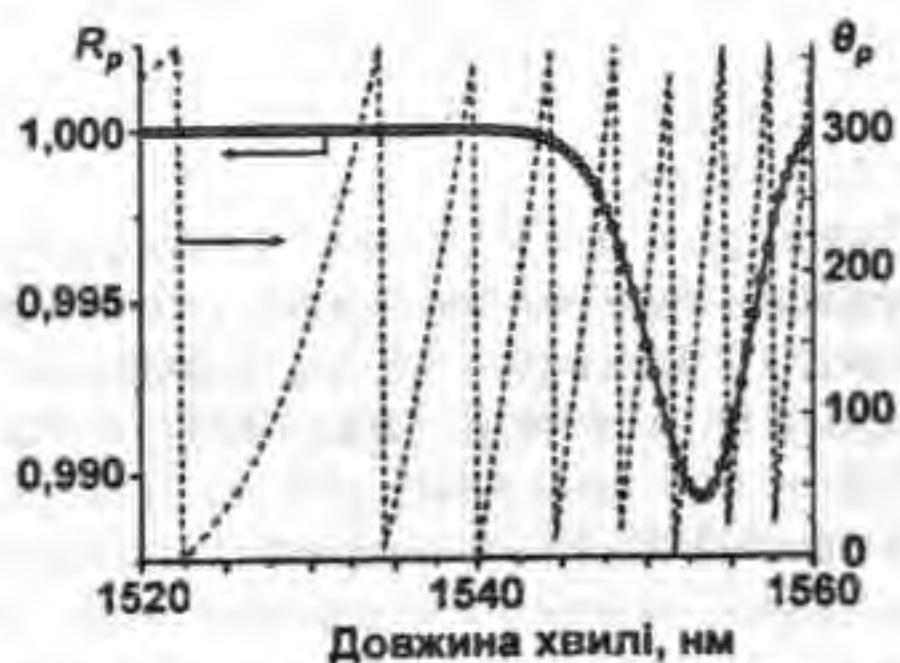


Рис.2. Залежність коефіцієнта відбиття R_p та зміни фази при відбиванні θ_p від довжини хвилі для р-поляризованого світла (тут і далі кут падіння 40°).

Дана структура характеризується високим коефіцієнтом відбиття в спектральному діапазоні 1500-1560 нм (рис. 2). Розрахунки проводились при куті падіння $\theta=40^\circ$ для хвилі ТМ-поляризації (р-поляризації). Структура дозволяє отримати групову затримку більше 3000 фс та дисперсію групової затримки з середнім значенням біля -10^5 фс² (рис.3).

Використовуючи формули (6) і (7) отримуємо для групової швидкості v_{gr} вздовж шарів значення ~ 15 мкм/фс. Це дає можливість оцінити просторовий зсув z світлового потоку вздовж межі поділу багат шарової структури з повітрям.

Висока просторова дисперсія досліджуваної структури і лінійність спектральної залежності групової затримки забезпечують високу негативну дисперсію групової затримки (рис.3).

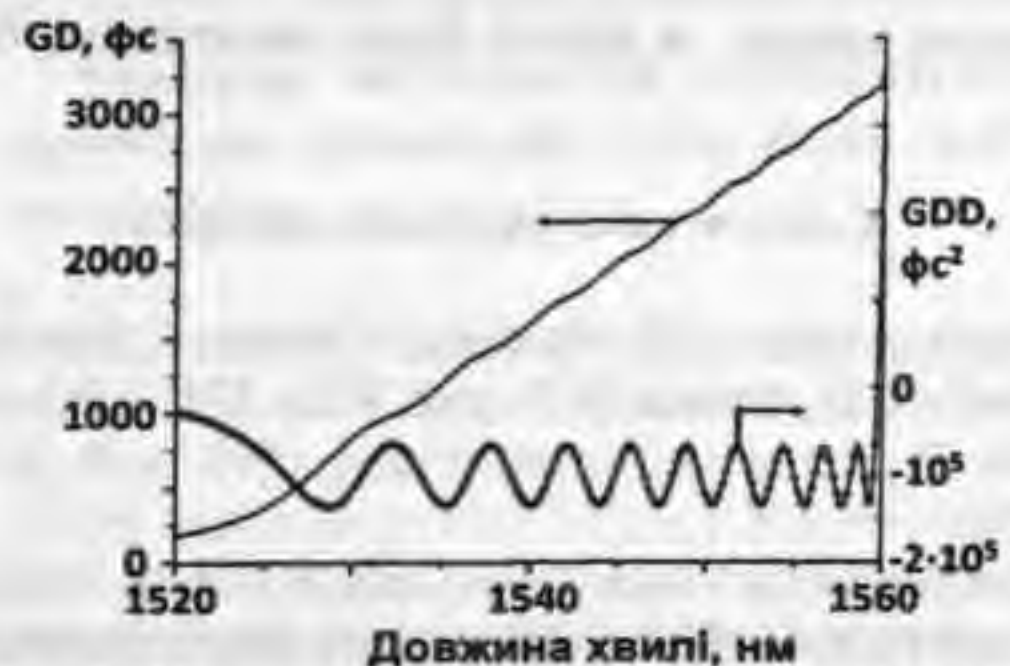


Рис.3. Спектральні залежності групової затримки і дисперсії групової затримки.

Висока часова і просторова дисперсія синтезованої структури отримується за рахунок спектрально залежного проникнення поля в структуру, а також за рахунок накопичення енергії в структурі, що містить резонатори [9, 10]. Підтвердженням цього є просторовий розподіл електричного поля в структурі, показаний на рис.4.

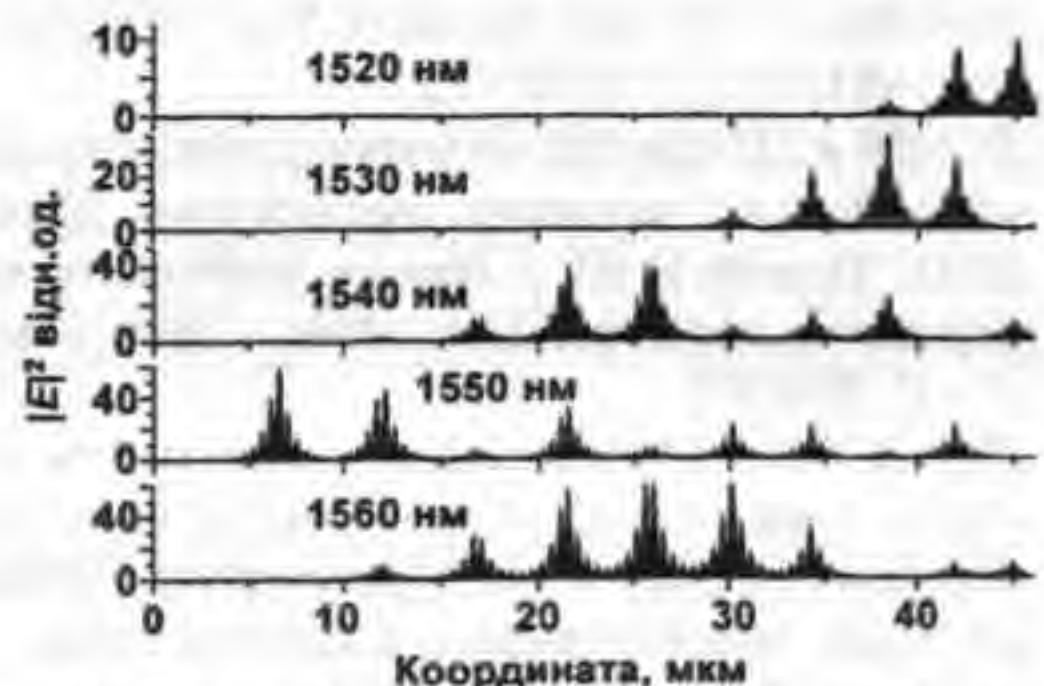


Рис.4. Залежності амплітуди електричного поля від позиції в структурі при різних довжинах хвиль.

На наявність 10 умовних резонаторів вказує не лише просторовий розподіл електричного поля, а і відносна чутливість шарів до похибок в їх товщині. З рис.1 і рис.4 добре видно, що електричне поле в структурі концентрується в місцях знаходження найтонших шарів. Оскільки оптична товщина резонатору повинна бути не менше половини довжини хвилі, то стає очевидним, що резонатор утворюється щонайменше трьома сусідніми шарами, центральний з яких має найменшу товщину. На жаль, усі 10 груп шарів, які

можна розглядати як резонатори, є асиметричними. Це не дозволяє застосувати теорію еквівалентних шарів для оцінювання властивостей резонаторів за допомогою еквівалентних показників заломлення і еквівалентної фазової товщини.

Таким чином, в роботі було синтезовано ба-

гатошарову діелектричну структуру, що дозволяє отримувати негативну дисперсію групової затримки порядку ($\sim 10^5$ фс²) і лінійну спектральну залежність затримки групової швидкості (> 3000 фс) в діапазоні 1520 – 1560 нм.

Список використаних джерел

1. Joannopoulos J.D. Photonic Crystals / Joannopoulos J.D., Meade R.D. and Winn J.N. – Princeton: Princeton University Press, 1995. – P. 133-150.
2. MacLeod H.A. Thin-Film Optical Filters / MacLeod H.A. - Philadelphia: Inst. Phys. Publish., Pa., 2001. – P. 645.
3. Sakoda K. Optical Properties of Photonic Crystals / Sakoda K. – Berlin: Springer, Heidelberg, 2001. – P. 75-103.
4. Busch K. Photonic crystals / Busch K., Lolkes S., Wehspohn R.B., Foll N. (ed.). - New York: Wiley, 2004. – P. 241-247.
5. Zengerle R. Light propagation in singly and doubly periodic planar waveguides / Zengerle R // J. Mod. Opt. – 1987. – 34, P. 1589-1617.
6. Pervak Yu.O. Features of the super prism effect in multilayer dielectric coatings / Pervak Yu.O., Onishchuk V.M. and Pervak V.Yu. // SPQEO. – 2008. – 11, № 4. – P. 345-351.
7. Первак Ю.О. Синтез багатошарових дзеркал з максимально високою дисперсією / Первак Ю.О., Первак В.Ю. // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. наук. – 2008. – вип. 4. – С. 226-229.
8. Первак Ю.А. Многослойные наноструктуры с высокой временной и пространственной дисперсией / Первак Ю.А., Первак В.Ю. // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2008. – 6, № 3. – С. 1001-1008.
9. Pervak V. Recent development and new ideas in the field of dispersive multilayer optics / Pervak V. // Appl. Opt. – 2011. – 50, - Issue 9, - P.C55-C61.
10. Matuschek N. Analytical design of double-chirped mirrors with custom-tailored dispersion characteristic / Matuschek N., Kärtner F.X., Keller U. // IEEE J. Quantum Electron. – 1999. – 35, P. 129-137.
11. Gerken M. Multilayer thin-film structures with high spatial dispersion / Gerken M., Miller D.A.B. // Appl. Opt. – 2003. – 42, P.1330-1345.
12. Онищук В.Н. Возникновение резонансных эффектов в многослойных тонкопленочных структурах с высокой пространственной дисперсией / Онищук В.Н., Первак Ю.А // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2010. – 8, № 3. – С. 1001-1010.
13. Furman Sh. Basics of Optics of Multilayer Systems / Furman Sh., Tikhonravov A. V. - Edition Frontieres, Gif-sur-Yvette. – 1992. – 104p.
14. Tikhonravov A. V. Application of the needle optimization technique to the design of optical coatings / Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K., DeBell G. W. // Appl. Opt. – 1996. – 35, P.5493-5508.
15. Tikhonravov A. V. Optical coating design approaches based on the needle optimization technique / Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K., DeBell G. W. // Appl. Opt. – 2007. – 46, P.704-710.
16. Matuschek N. Exact coupled-mode theories for multilayer interference coatings with arbitrary strong index modulations / Matuschek N., Kärtner F.X., Keller U. // IEEE J. Quantum Electron. – 1997. – 33, P. 295-302.
17. Sumetsky M. Theory of Group Delay ripple generated by chirped fiber gratings / Sumetsky M., Eggleton B.J., de Sterke C.M. // Opt. Express. – 2002. – 10, P.332-340.

Надійшла до редколегії 04.02.2011

УДК 535.345.67

*Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., Федоров В.В.,
аспірант

Особливості спектральних характери- стик багат шарових структур з трьома півхвильовими резонаторами

Досліджено спектральні властивості чвер-
тьхвильових інтерференційних фільтрів з
трьома півхвильовими прошарками. Фільтри
складаються з шарів оксиду кремнію (SiO_2) та
оксиду титану (TiO_2). Визначено параметри ба-
гат шарових структур з контрастними смуга-
ми прозорості, які розщеплюються на три
окремі підсмуги.

Ключові слова: багат шарова тонкоплівкова
структура, смуговий інтерференційний фільтр

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

При вирішенні багатьох проблем створення
оптичних телекомунікаційних систем виникає
задача частотної селекції. Для її розв'язання вико-
ристовують різноманітні фільтри, пошук струк-
тури яких є типовою оберненою спектральною
задачею [1-5]. При цьому особливо складною ви-
являється задача пошуку структур з високою ко-
нтрастністю селекції. Найчастіше контрастні
смугові фільтри створюють на базі чверть хви-
льових стоп з певною кількістю півхвильових
прошарків. Вони отримали назву багатопівхви-
льових фільтрів [6-11].

Всі можливі структури багатопівхвильових
фільтрів можна описати виразом [6-11]

$$S w (q)^m v, \quad (1)$$

де S позначає підкладку, на якій розташовано ба-
гат шарову структуру, яка умовно може бути
представлена як система з трьох груп шарів w , q і
 v . При цьому група q повторюється m разів. Усе
різноманіття півхвильових структур вкладається
в наступні чотири підгрупи.

Перша:

$$w = (AB)^{l+1}, q = (BA)^{k+1} B, v = (BA)^{l+1}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} s = m+1 & \text{при } l \geq 0, \\ s = m-1 & \text{при } l = -1. \end{cases}$$

© Ю.О.Первак, В.В.Федоров, 2011

Yu.O. Pervak, Dr. Sci., V.V. Fedorov, post grad.
stud.

Features of spectral characteristics of multilayer structures with three half-wave resonators

Spectral properties of quarter-wave interfe-
rence filters with three half-wave layers were inves-
tigated. Filters consist of layers of silicon oxide
(SiO_2) and titan oxide (TiO_2). It was found param-
eters of multilayer structures with the contrasting
transparency bands, which fission on three separate
sub-bands.

Key words: multilayer thin-film structure, band
pass interference filter

Друга:

$$w = (BA)^l B, q = (BA)^{k+1} B, v = (BA)^l B, \quad (3)$$

$$s = m+1$$

Третя:

$$w = (AB)^{l+1}, q = (BA)^{k+1} (AB)^{k+1}, v = (BA)^{l+1}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} s = 2m+1 & \text{при } l \geq 0, \\ s = 2m-1 & \text{при } l = -1, \end{cases}$$

Четверта:

$$w = (BA)^l B, q = (BA)^{k+1} (AB)^{k+1}, v = (BA)^l B, \quad (5)$$

$$s = 2m+1$$

де A і B – чвертьхвильові шари відносно довжини
хвилі λ_0 з показниками заломлення n_A і n_B ; l і k –
цілі числа, причому $k \geq 0$ і $l \geq -1$ для (2), (4), $l \geq 0$
для (3), (5); s – число півхвильових шарів в сис-
темі, S – підкладка з показником заломлення n_m .

Для того, щоб в аналітичному вигляді було
можливо описати основні властивості таких сис-
тем було введено декілька нових понять. Перше –
функція середнього геометричного від обвідних
сімейства кривих коефіцієнта пропускання –
 $T_{\text{geom}}(\delta)$. Друге – середня прозорість смуги
 $D = (T_{\text{geom}})_{\delta=\pi/2}$. Тут δ позначає фазову товщину.

На довжині хвилі λ_0 фазова товщина шару $\delta = \pi/2$. Метою моделювання було виведення наближених аналітичних виразів, що зв'язують введені поняття і півширину фільтру з параметрами шарів та структурою фільтру.

Аналіз отриманих виразів показав, що при фіксованому значенні n_H/n_L більшим значенням відносної півширини $\Delta\lambda_h/\lambda_0$ відповідають менші значення k , і навпаки. Для потрібних півхвильових систем вибір значень k обмежений діапазоном $2 \div 8$ і тому для $\Delta\lambda_h/\lambda_0$ теж отримується обмежений діапазон. Цей діапазон для потрібних півхвильових систем дорівнює $\Delta\lambda_h/\lambda_0 \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \div 0,2$. В свою чергу обмежений вибір $m=1, m=2$ для потрібних півхвильових систем при низьких значеннях n_H/n_L , які відповідають великим значенням $\Delta\lambda_h/\lambda_0$ при фіксованому k , визначають величини загального числа шарів в системі N , недостатньо високі для отримання низького рівня фону і високої контрастності. Таким чином, обмежений набір значень параметрів s, m, l, k або вводять відповідні обмеження на діапазон значень ширини смуги, при задаванні яких можуть бути отримані достатньо контрастні фільтри на класах потрібних півхвильових систем, або роблять взагалі неможливими конструкції потрібних півхвильових систем.

Однак такий підхід до пошуку параметрів структури з бажаними спектральними характеристиками не дозволяє визначити структури, смуга прозорості яких розщеплюється на повністю розділені підсмуги, кількість яких не перевищує число півхвильових шарів в структурі. Щоб визначити ці структури було проведено моделювання спектральних властивостей структур (1)-(5).

Усі розрахунки було проведено для нормального падіння випромінювання за допомогою матричного методу [2]. Метод дозволяє при заданих параметрах багатошарової структури (N – число шарів, n_r – показник заломлення, k_r – коефіцієнт екстинкції, d_r – товщина r -го шару, n_m і k_m – оптичні сталі підкладки, n_0 і k_0 – оптичні сталі зовнішнього середовища, θ_0 – кут падіння) легко розрахувати спектр пропускання $T(\lambda)$:

$$T = \frac{4\eta_0 \operatorname{Re}(\eta_m)}{(\eta_0 B + C)(\eta_0 B + C)^*} \quad (6)$$

де B і C матричні елементи характеристичної матриці структури

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left(\prod_{r=1}^q \begin{bmatrix} \cos \delta_r & (i \sin \delta_r)/\eta_r \\ i\eta_r \sin \delta_r & \cos \delta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де $\delta_r = (2\pi N_r d_r \cos \theta_r)/\lambda$,

$\eta_{r,m} = \chi_{vac} N_{r,m} \cos \theta_{r,m}$ для ТЕ хвиль,

$\eta_{r,m} = \chi_{vac} N_{r,m} / \cos \theta_{r,m}$ для ТМ хвиль,

$\chi_{vac} = 2,6544 \cdot 10^{-3}$ сменс, λ – довжина хвилі,

$N_r = n_r - ik_r$ – комплексний показник заломлення r -го шару, η_0 – провідність зовнішнього середовища, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла. Значення кутів θ_r визначається законом Снеліуса

$$N_0 \sin \theta_0 = N_r \sin \theta_r = N_m \sin \theta_m. \quad (8)$$

При моделюванні спектральних характеристик була врахована дисперсія вибраних плівкових матеріалів: оксидів кремнію (SiO_2) і титану (TiO_2). Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показники заломлення SiO_2 визначали за формулою $n(\text{SiO}_2) = 1,46 + (3,35 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (1,41 \cdot 10^{-5}/\lambda^4)$, а TiO_2 за формулою $n(\text{TiO}_2) = 2,23 + (2,34 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (7,69 \cdot 10^{-3}/\lambda^4)$, де λ – довжина хвилі в мкм. Врахована також дисперсія показника заломлення підкладки за формулою $n_s = 1,50 + (5,33 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (4,92 \cdot 10^{-4}/\lambda^4)$. Поглинання в шарах при розрахунку характеристик не враховувалось.

Потрібно відзначити, що структури (2) і (3) відрізняються від структур (4) і (5) тим, що в них усі півхвильові прошарки складаються з одного і того ж матеріалу. В структурах (4) і (5) півхвильові прошарки утворюються різними матеріалами. Ця відмінність певним чином проявляється в спектральних властивостях цих структур.

На рис.1 показано спектральне пропускання структур типу (4) для випадку, коли параметр $l = -1$. В цьому випадку три пів хвильових шари в структурі будуть спостерігатися, якщо параметр $m = 2$. В залежності від того, шаром з якого матеріалу починається структура, можливі два типи структур: $S(\text{LH})^{l+1}[(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}]^2(\text{HL})^{l+1}$ і $S(\text{HL})^{l+1}[(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}]^2(\text{LH})^{l+1}$. Тут S підкладка, а H і L чверть хвильові шари із матеріалів з високим (TiO_2) і низьким (SiO_2) показниками заломлення, відповідно. Значення параметру k показані на рисунку. Спектри 1 – 6 відповідають структурам $S[(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}]^2$, а спектри 7 – 9 структурам $S[(\text{LH})^{k+1}(\text{HL})^{k+1}]^2$.

В структурах $S[(\text{HL})^{k+1}(\text{LH})^{k+1}]^2$ пів хвильовий шар в центрі структури створюються двома сусі-

дніми шарами H, а два крайні пів хвильові шари – двома шарами L.

В структурах $S[(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}]^2$ все навпаки. При однакових значеннях параметру k розщеплення смуг прозорості з центральною смугою на довжині хвилі $\lambda_0 = 550$ нм більш повним є для структур $S[(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}]^2$. Максимальне пропускання центральної смуги прозорості в усіх спектрах однакове і дорівнює 95,76% на $\lambda_0 = 550$ нм. Положення короткохвильової (λ_1) і довгохвильової (λ_2) компонент а також величини розщеплення $\Delta\lambda_1$ і $\Delta\lambda_2$ наведено в таблиці 1.

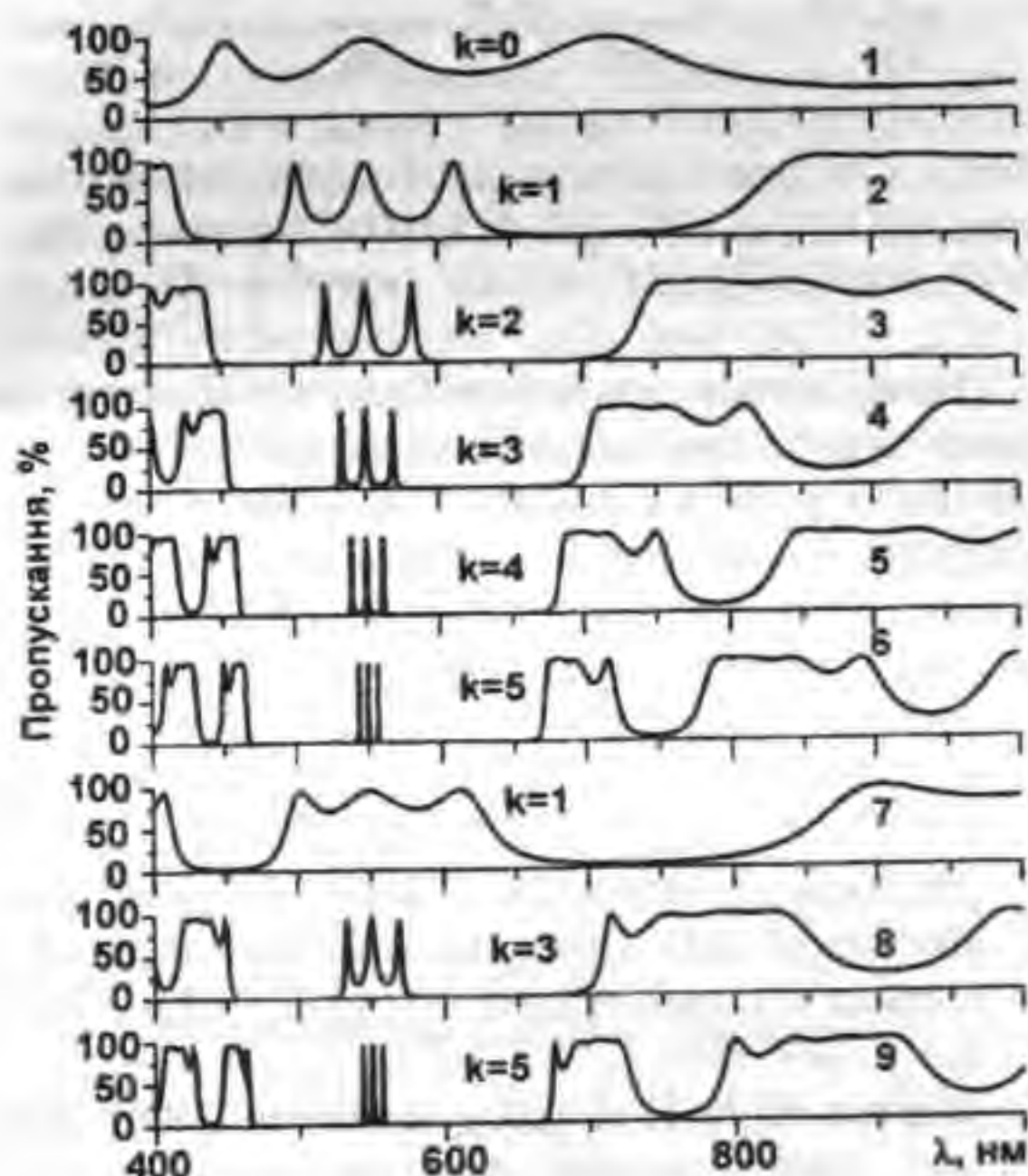


Рис.1. Спектральні залежності пропускання структур $S[(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}]^2$ (1 – 6) і $S[(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}]^2$ (7 – 9).

Таблиця 1. Положення смуг прозорості.

Структура	λ_1 , нм	λ_2 , нм	$\Delta\lambda_1$, нм	$\Delta\lambda_2$, нм
$S[(HL)(LH)]^2$	454	718	96	168
$S[(HL)^2(LH)^2]^2$	502	611	48	61
$S[(HL)^3(LH)^3]^2$	522	582	28	32
$S[(HL)^4(LH)^4]^2$	533,1	568,5	16,9	18,5
$S[(HL)^5(LH)^5]^2$	539,5	561,2	10,5	11,2
$S[(HL)^6(LH)^6]^2$	543,4	556,9	6,6	6,9
$S[(LH)^2(HL)^2]^2$	502	611	48	61
$S[(LH)^4(HL)^4]^2$	533,1	568,5	16,9	18,5
$S[(LH)^6(HL)^6]^2$	543,4	556,9	6,6	6,9

Для структур (4) у випадку $l > -1$ три пів хвильові шари будуть існувати при $m = 1$. При $l = 0$

загальна формула структури має вигляд $SLH(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}HL$ або $SHL(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}LH$. Один пів хвильовий шар розташований в центрі структури, а два інші через один чверть хвильовий шар межують з обмежуючими середовищами. Ці два пів хвильові резонатори майже не впливають на вигляд спектру пропускання, який має вигляд, що характерний для простого фільтра Фабрі-Перо (рис. 2, криві 2-3). Додавання по боках структури додаткових двох чверть хвильових шарів приводить до неглибокого розщеплення смуги на три компоненти (рис.2, криві 4-6), але при збільшенні параметру k воно зникає. Більш чітке розщеплення можна отримати при збільшенні параметру l (рис. 2, криві 7 і 8).

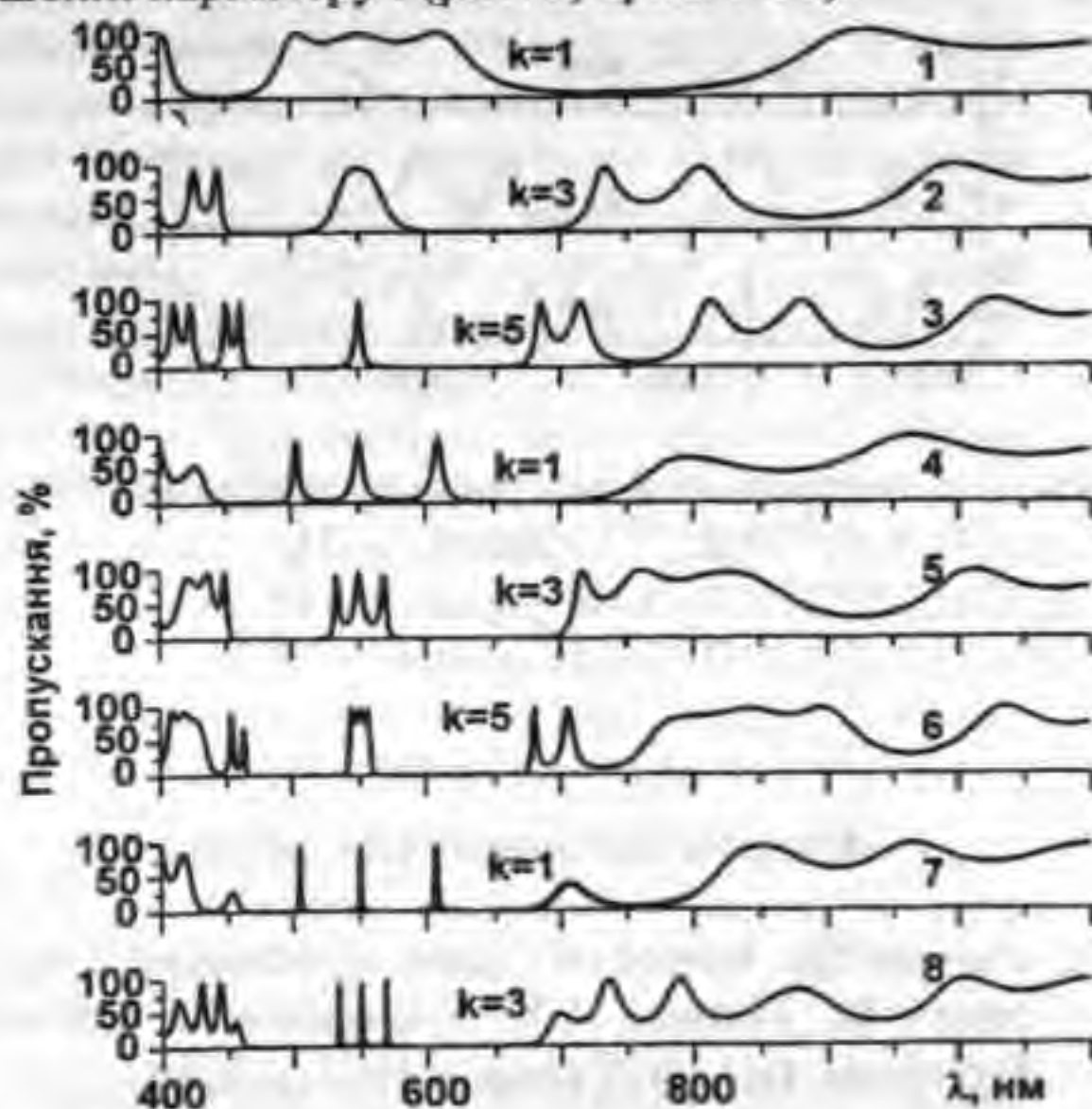


Рис.2. Спектральні залежності пропускання структур $SHL(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}LH$ (криві 1 – 3), $S(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}$ (криві 4 – 8): $l = 2$ (криві 4 – 6); $l = 4$ (криві 7, 8).

Структури (5) містять три пів хвильові шари, якщо $m = 1$. Можливі два типи структур:

$$S(HL)^l H (HL)^{k+1} (LH)^{k+1} H (HL)^l \text{ і } S(LH)^l L (LH)^{k+1} (HL)^{k+1} L (LH)^l.$$

При $l = 0$ і $l = 1$ ці структури можна вважати простим фільтром Фабрі-Перо, оскільки пів хвильові шари на початку і на кінці структури практично не впливають на характеристики смуги прозорості на довжині хвилі $\lambda_0 = 550$ нм (рис. 3). Лише при значеннях $k \leq 3$ спектр пропускання має вигляд, не притаманний фільтру Фабрі-Перо. Збільшення кількості чвертьхвильових шарів ліворуч і праворуч крайніх півхвильових шарів приводить до розщеплення центральної смуги

прозорості на довжині хвилі $\lambda_0 = 550$ нм (рис.4), однак воно дуже швидко стає маловиразним при збільшенні параметру k .

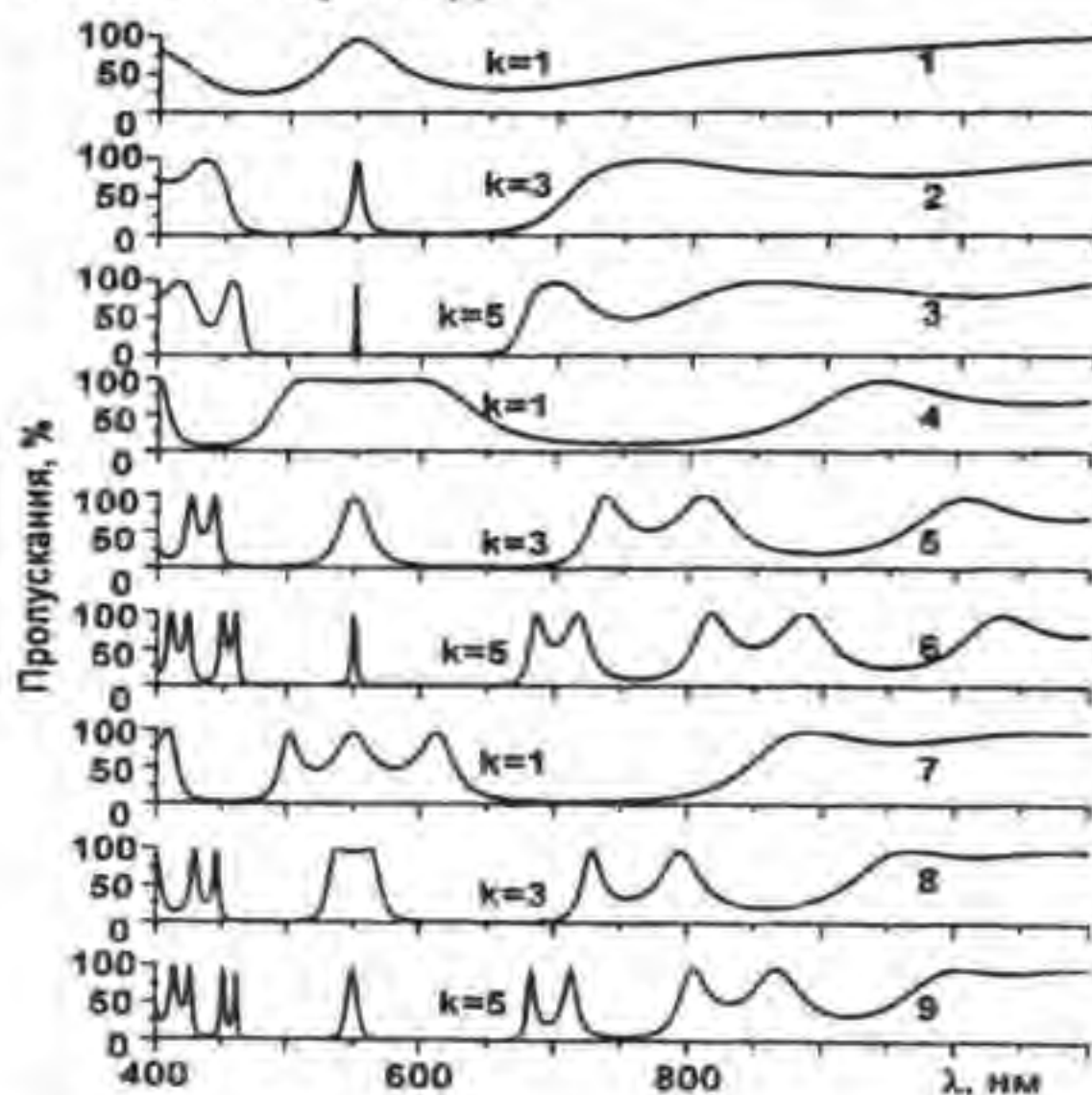


Рис.3. Спектральні залежності пропускання структур $SL(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}L$ (криві 1 – 3), $SLHL(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}LHL$ (криві 4 – 6) та $SHLH(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}HLH$ (криві 7 – 9).

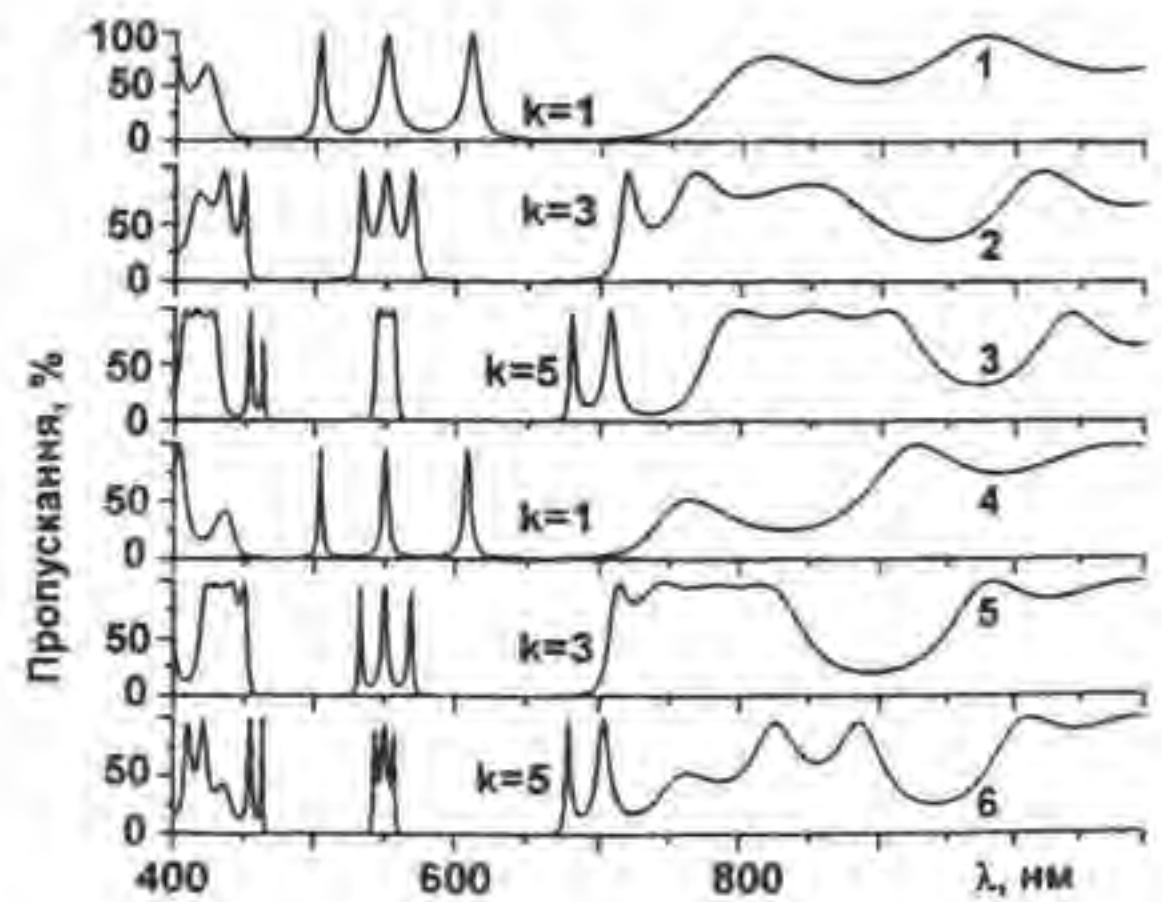


Рис.4. Спектральні залежності пропускання структур $S(LH)^3L(LH)^{k+1}(HL)^{k+1}L(HL)^3$ (криві 1 – 3), $S(HL)^3H(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}H(LH)^3$ (криві 4 – 6).

Таким чином, в роботі було досліджено два типи чверть хвильових багатошарових діелектричних структур з трьома пів хвильовими прошарками і показано, що найбільш чітко розщеплення резонансної смуги прозорості на три окремі смуги отримується в структурах $S[(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}]^2$.

Список використаних джерел

1. Furman Sh. Basics of Optics of Multilayer Systems / Sh. Furman, A.V. Tikhonravov // Edition Frontieres, Gif-sur-Yvette. – 1992. – 104p.
2. MacLeod H.A. Thin-Film Optical Filters / H.A. MacLeod // Philadelphia: Inst. Phys. Publish., Pa., 2001. – P. 645.
3. Первак Ю.О. Оптика багатошарових покриттів / Ю.О. Первак // ВПЦ «Київський університет». – 2005. – 250 с.
4. Шпак А.П. Фотонні кристали. Фізика та застосування / А.П. Шпак, В.Ю. Первак, Ю.А. Куницький, Ю.О. Первак // К.: Академперіодика. – 2006. – 120 с.
5. Первак В.Ю. Фізика фотонних кристалів / В.Ю. Первак, А.П. Шпак, Ю.О. Первак, Л.Ю. Куницька // К.: Академперіодика. – 2007. – 304 с.
6. Несмелов Е.А. К теории отрезающих интерференционных фильтров / Е.А. Несмелов, Г.П. Конюхов // Оптика и спектроскопия. – 1971. – 31. – Вып. 1. – С. 133-137.
7. Марков Ю.Н. К теории полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // Оптика и спектроскопия. – 1977. – 43. – Вып. 5. – С. 984-989.
8. Марков Ю.Н. К вопросу оптимизации полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, А.С. Гайнутдинов // ЖТЭС. – 1980. – 33. – №3. – С. 536-540.
9. Марков Ю.Н. Синтез контрастных полосовых интерференционных фильтров. Сложнопериодические системы / Ю.Н. Марков // Оптика и спектроскопия. – 1983. – 54. – Вып. 1. – С. 173-178.
10. Марков Ю.Н. Аналитическое исследование и синтез полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков // Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук. — Ленинград. — 1983. – 19 с.
11. Несмелов Е.А. Анализ и синтез блокирующих и узкополосных интерференционных фильтров / Е.А. Несмелов // Автореферат на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. — Казань. — 2000. — 39 с.

Надійшла до редколегії 12.04.11

УДК 537.528

Соломенко Ок.В., студ., Присяжневич І.В.,
інженер, Черняк В.Я., д. ф.-м. наук, проф.,
Зражевський В.А., к. ф.-м. наук, інженер.

Властивості електричного мікророзряду в повітрі

Проведені дослідження вольт-амперних характеристик мікророзряду з між електродною відстанню $d = 0,1$ см в повітрі та параметрів його плазми за допомогою оптичної емісійної спектроскопії. Показано, що мікророзряд в повітрі при $pd \leq 4$ торр·см має позитивний диференційний опір, який зростає при зменшенні pd . Залежність диференційного опору від pd має три характерні області: сталий диференційний опір при $pd < 2,25$ торр·см, лінійно спадаючий при $2,25$ торр·см $< pd < 4,5$ торр·см і слабо спадаючий при $pd > 4,5$ торр·см. Температура заселення збуджених обертованих рівнів молекули азоту досліджуваного мікророзряду при тиску менше 1 торр становить $\sim 500 \pm 200$ К.

Ключові слова: мікророзряд, оптична емісійна спектроскопія, повітря, диференційний опір розряду.

*E-mail: chernyak_v@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Останнє двадцятиріччя спостерігається неперервне зростання інтересу до мікророзрядів, для яких характерним є малі геометричні розміри. Сьогодні реалізовано вже дуже багато конфігурацій малорозмірних електричних розрядів як з відкритими металевими електродами, так і прикритими діелектриком електродами, які віднесено до мікророзрядів [1]. Усталеним для мікророзрядів є виконання двох умов: $pd \leq 10$ торр·см при геометричних розмірах розряду менших за 1 мм [2], де p – тиск газу і d – міжелектродна відстань. Для розрядів великої геометрії ($d > 1$ см) $pd \leq 10$ торр·см вказує саме на жевріючий розряд, в якому дифузія пригнічує розвиток іонізаційної нестійкості, що забезпечує низьку температуру газу і, відповідно, високий рівень нерівноважності плазми тліючого розряду (значне перевищення температури електронів – T_e над температурою газу – T).

Ok. V. Solomenko, stud., I. V. Prisyazhnevych, eng., V. Ya. Chernyak, Doct. Sci., Prof., V. A. Zrazhevskij, Ph.D.

Electrical properties of mikrodischarge in air

The investigations of current-voltage characteristics of mikrodischarge in the air with electrode distance $d = 0,1$ cm and the parameters of this plasma with using optical emission spectroscopy were conducted. It was shown, that mikrodischarge in air when $pd \leq 4$ torr·cm has a positive differential resistance, which is increases with decreasing pd . Dependence of the differential resistance on pd has three specific areas: sustainable differential resistance at $pd < 2,25$ torr·cm, decreasing linearly at $2,25$ torr·cm $< pd < 4,5$ cm·torr and slightly decreasing at $pd > 4,5$ torr·cm. Temperature of rotational levels population of nitrogen molecule is $\sim 500 \pm 200$ K at pressure below 1 torr.

Key Words: mikrodischarge, optical emission spectroscopy, air, differential discharge resistance.

Саме з метою генерації нерівноважної плазми атмосферного тиску при низькій температурі газу створювались перші мікророзряди (мікророзряд з порожнистим катодом) [3]. Саме високий рівень нерівноважності мікророзрядної плазми визначає широкий спектр її застосувань сьогодні.

Ще однією характерною ознакою мікророзрядів є позитивність диференціального опору, що має вирішальне значення в технології, оскільки дає можливість живлення великої кількості мікророзрядів від одного джерела без баластних опорів [2].

Повного розуміння фізичних процесів, притаманних саме мікророзрядній плазмі, на сьогоднішній день не існує. Не з'ясовано навіть наскільки глибока аналогія існує між мікророзрядами і такими давно відомими видами жевріючого розряду, як жевріючий розряд і капілярний розряд, в яких визначальними є тільки малий розмір вздовж однієї координати [4]. Слід зауважити, що для сучасних

мікророзрядів характерна співрозмірність поздовжнього і поперечних розмірів [1, 3].

В даній роботі проведено вивчення вольт-амперних характеристик і емісійних спектрів плазми саме малорозмірного розряду ($d \leq 1$ мм) в повітрі при низькому тиску.

Експериментальна частина

Дослідження мікророзряду в повітрі при низькому тиску проводилося за допомогою установки зображеної на рисунку 1. Утруднений жевріючий розряд горів в отворі діаметром 1 мм між двома мідними пластинками (1) товщиною по 0,1 мм – (1), які відокремлювалися пластиною силану – (2) товщиною 1 мм. Розряд горів при тиску $P = 0,1 - 135$ торр. Дослідження параметрів плазми проводилися при струмах розряду $i = 10$ мА. Живлення розряду відбувалось від джерела УИП-1.

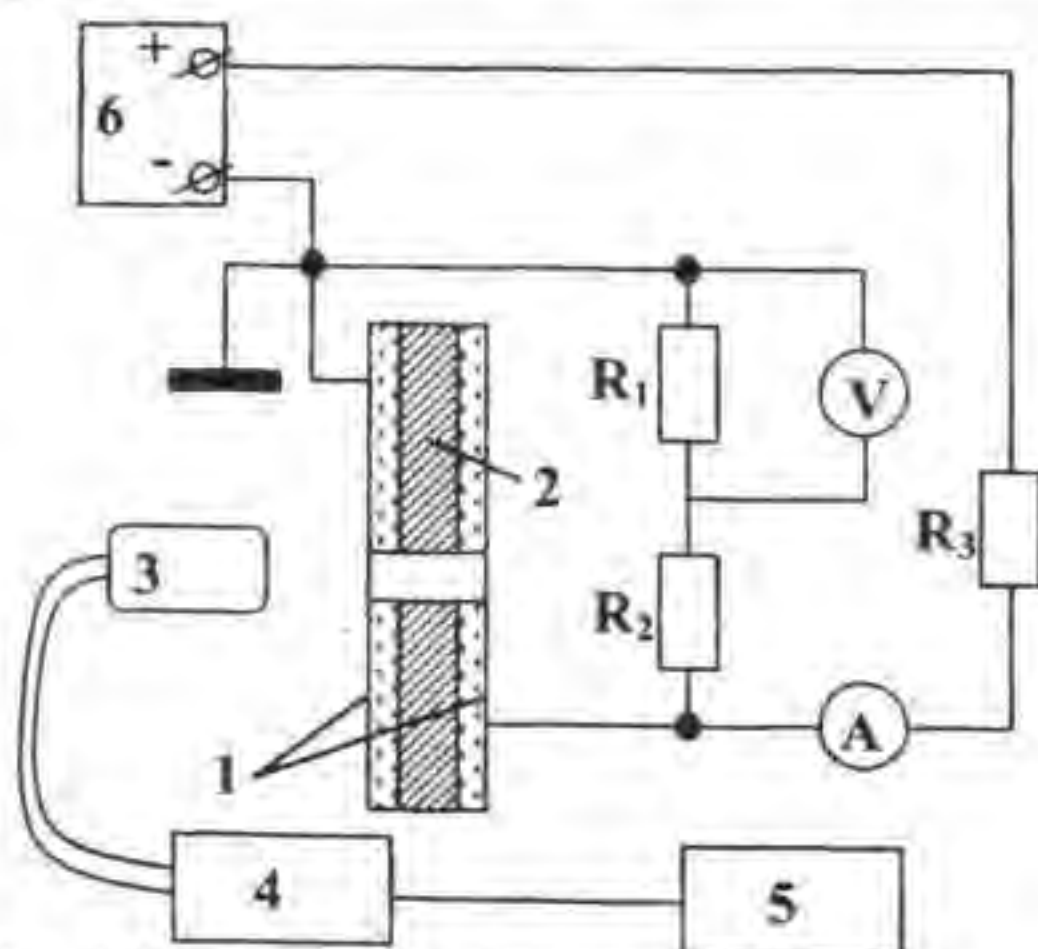


Рис. 1 Схема експериментальної установки

Параметри плазми досліджувалися за допомогою оптичної емісійної спектроскопії. Емісійні спектри розрядної плазми ресструвалися за допомогою автоматизованого спектрометра "Plasma-spec" – (4, 5-комп'ютер) на базі CCD лінійки в діапазоні довжин хвиль 200 – 1100 нм з роздільною здатністю 0,6 нм. Випромінювання з середини міжелектродного проміжку заводилося на вхідну щілину спектрометра за допомогою кварцевого світловоду – (3). Заресстровані спектральні дані оброблялись з використанням коду SpecAir [6].

Методики визначення параметрів плазми за оптичними емісійними спектрами

Параметри плазми, генерованої мікророзрядом, визначалися методами оптичної

емісійної спектроскопії.

За інтенсивністю спектральних ліній і смуг можна зробити висновок про концентрацію та температуру заселеності збуджених електронних рівнів T_e^* атомів і молекул, а за самою формою та інтенсивністю молекулярних смуг можна визначити температуру заселеності коливальних T_v^* та обертальних T_r^* рівнів молекул.

Методика визначення температури заселення обертальних рівнів за відносною інтенсивністю молекулярних смуг з нерозділеною колиально-обертальною структурою базується на порівнянні спектральних смуг синтезованих на комп'ютері з використанням коду SpecAir [5] з експериментальними.

Результати та обговорення

Типові виміряні вольт-амперні характеристики мікророзряду наведені на рисунку 2. Як видно з рисунку, всі ВАХ в діапазоні струму 2 – 10 мА досить добре апроксимуються лінійними залежностями. Тобто розряд в цьому діапазоні має постійний диференціальний опір. Відповідна залежність диференціального опору від pd наведена на рисунку 3.

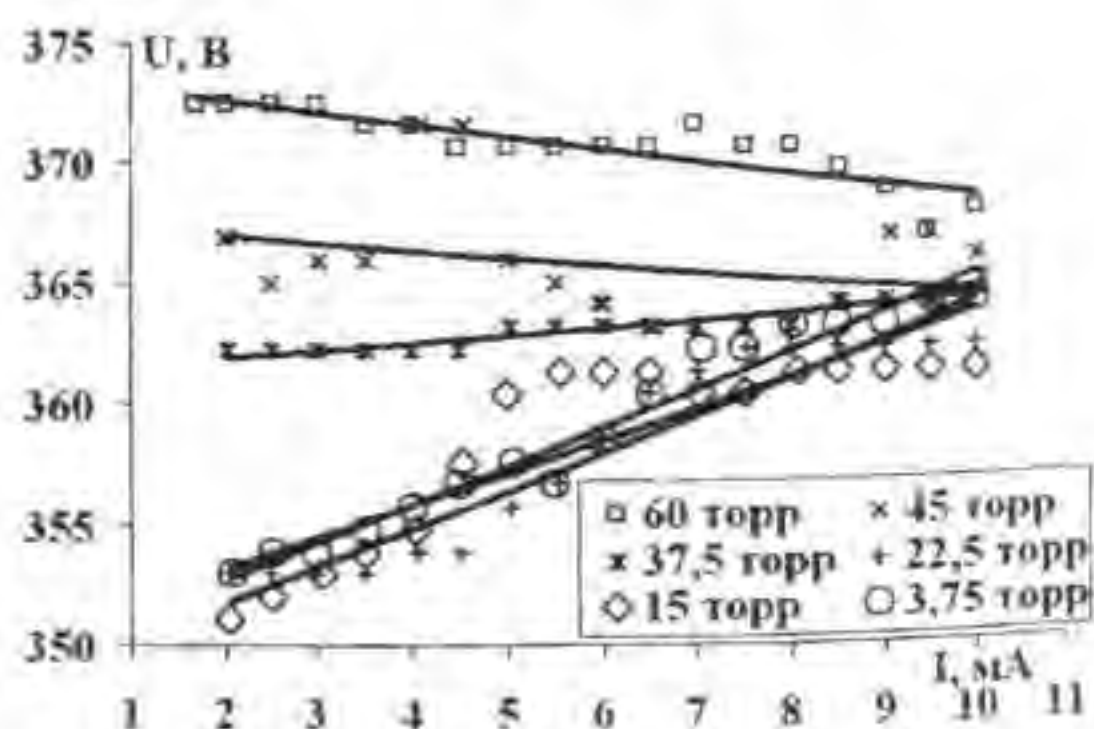


Рис. 2 Вольт-амперні характеристики мікророзряду в повітрі

Емісійний спектр випромінювання плазми досліджуваної системи наведено на рис. 4.

Зі спектру видно, що головною спектральною компонентою досліджуваного спектру є молекулярні смуги другої позитивної системи азоту ($C^3P_u - B^3P_u$). Спектр в досліджуваному діапазоні довжин хвиль є однокомпонентним.

Температура заселення обертальних T_r^* рівнів, була визначена шляхом порівняння реального емісійного спектру з симульованими спектрами другої позитивної системи азоту ($C^3P_u - B^3P_u$) за допомогою програми SPEC AIR [6].

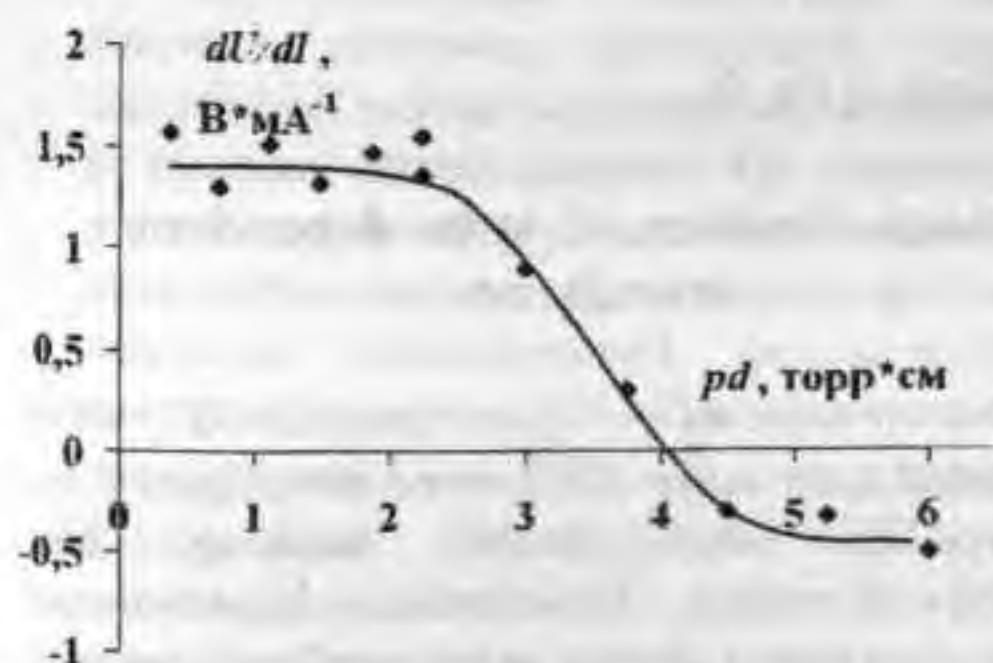


Рис. 3 Залежність диференційного опору від pd

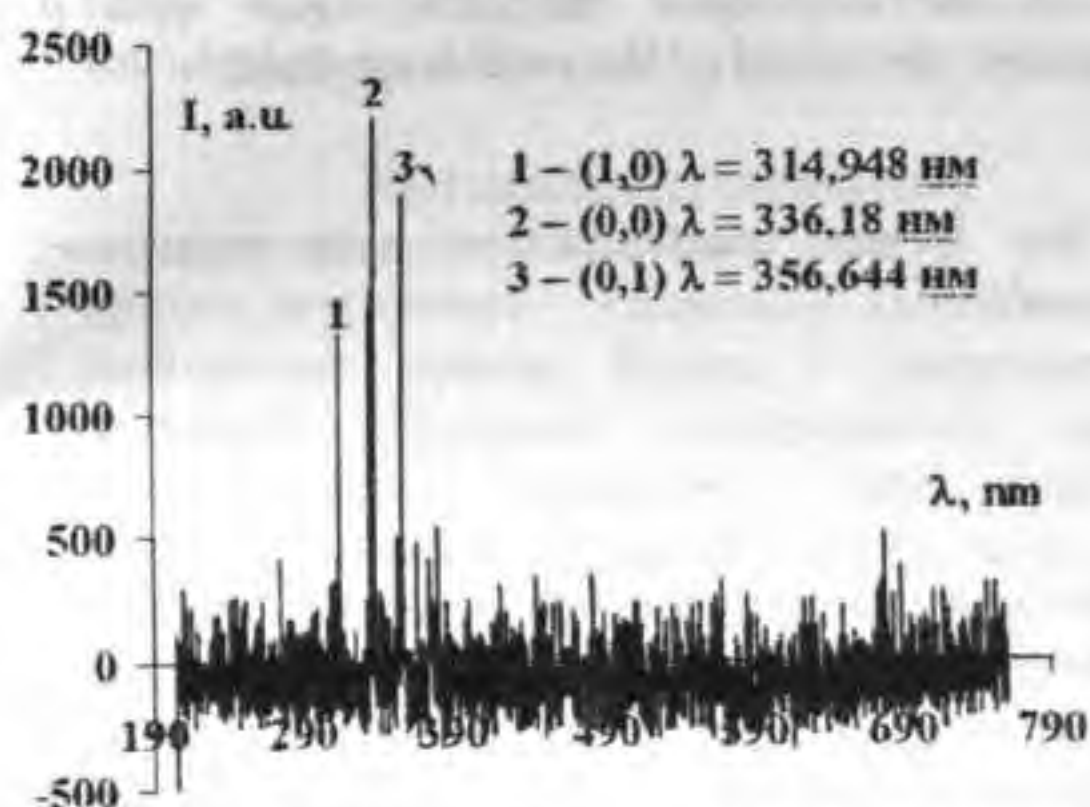


Рис. 4. Експериментальний емісійний спектр плазми мікророзряду в повітрі

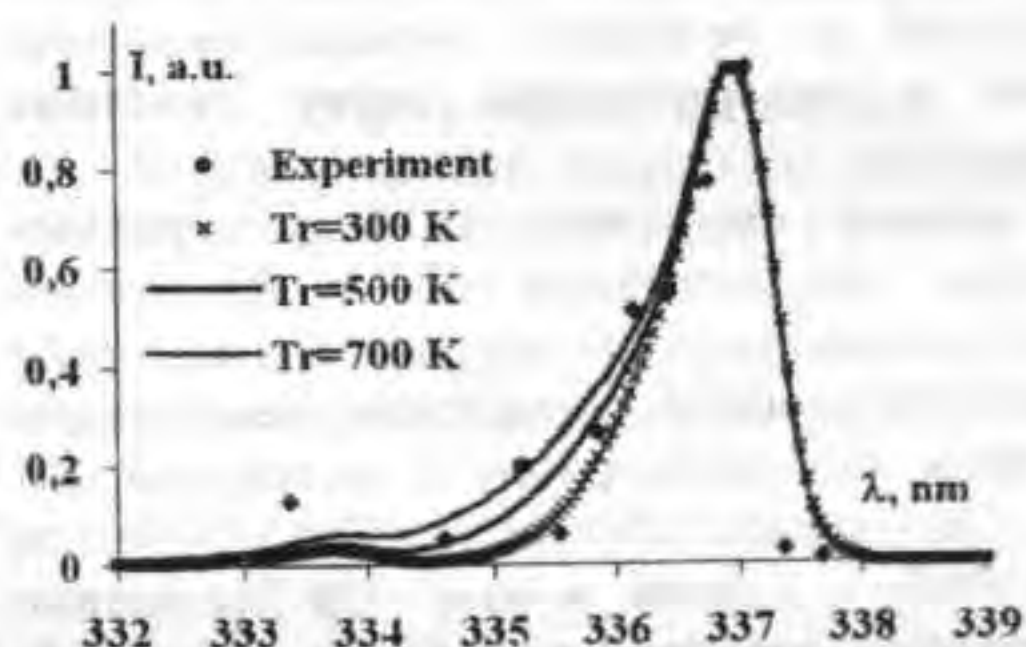


Рис. 5 Співставлення експериментальних значень інтенсивності молекулярної смуги (0,0) 2^+ системи N_2 з розрахованими програмою SPECAR при різних T_r

Для цього було проведено моделювання емісійних спектрів N_2 (C-B).

Результати співставлення експериментальної та модельованої смуг (0-0) 2^+ системи N_2 нормованих на інтенсивність голови смуги ($\lambda = 336,8$ nm) показані на рисунку 5.

З моделювання видно, що температура заселення обертових рівнів молекули азоту досліджуваного мікророзряду досить мала і становить $\sim 500 \pm 200$ K.

Висновки

В результаті проведених досліджень показано, що:

1. Електричний мікророзряд в повітрі при $pd \leq 4$ торр*см має позитивний диференційний опір, який зростає при зменшенні pd .
2. Емісійні спектри плазми мікророзряду при низькому тиску містять молекулярні смуги другої позитивної системи азоту.
3. Температура заселення обертових рівнів молекули азоту у плазмі дослідженого мікророзряду становить $T_r(N_2) \sim 500 \pm 200$ K при малому тиску.

Список використаних джерел

1. Энгель А. Ионизованные газы / А. Энгель. – Москва: ФМЛ, 1959. – 332 с.
2. Becker K.H. Non-Equilibrium Air Plasmas at Atmospheric Pressure. / K.H. Becker, U. Kogelschatz, K.H. Schoenbach, R.J. Barker. – Bristol and Philadelphia: IOP Publishing Ltd. 2005. – 680 p.
3. Schoenbach K.H. Microhollow cathode discharges. / K.H. Schoenbach, R. Verhappen, T. Tessnow, F.E. Peterkin, W.W. Byszewski // Appl. Phys. Lett. **68**, 1996. – P.13-15.
4. Laux C.O. Optical diagnostics of atmospheric pressure air plasma [Online] / C.O. Laux, T.G. Spence, C.H. Kruger and R.N. Zare // Plasma Sources Sci. Technol., **12**. 2003. – №2. – P. 125-138. – Available: <http://www.specair-radiation.net>
5. Becker K. Microplasmas: Scientific Challenges, Technological Applications and Limitations / K. Becker // 16th SAPP, January 20-25, 2007, Podbanske, Slovakia: book of abstr. – 2007. – P. 57-60.

Надійшла до редколегії 07.12.10

УДК 537.6

Сохацький В. П., к.ф.-м.н., доц.

Перемагничування спін-залежного транзистора

Магнітооптичними та електричними методами досліджувались характеристики спінового транзистора із вбудованим спіновим клапаном. Проаналізовані можливості покращення енергетичних характеристик такого функціонального пристрою шляхом оптимізації режиму перемагничування спінового клапана та використання в ньому додаткового магнітного шару із зменшеним пороговим полем переключення.

Ключові слова: намагнічування, спіновий транзистор, спіновий клапан.

E-mail: vso@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

Спіновий транзистор (СТ) - функціональний пристрій для обробки та енергонезалежного зберігання інформації на основі спін-залежних ефектів - може стати основою спінтроники, якщо знайде застосування як швидкодіючий ключовий елемент логічних схем та енергонезалежної пам'яті. Для його ефективної роботи необхідно задовольнити цілому ряду часом суперечливих вимог: мати великий магнітоопір, швидкодію, високий коефіцієнт підсилення, низькі енерговитрати, технологічну, нескладну структуру, тощо. Розробка конструкцій СТ триває практично з моменту винаходу явища гігантського магнітоопору в 90-ті роки ХХ ст., але і досі основною складністю залишається створення високої спінової поляризації та збереження її на відстані, достатній для керування струмом поляризованих електронів та його детектування. Розроблені на сьогодні експериментальні моделі СТ працюють переважно в дискретному (вентильному) режимі без підсилення. В деяких варіантах конструкцій було отримано кількаразове збільшення напруги [1,2], але запропоновані конструкції мали або низький коефіцієнт підсилення, або низький магнітоопір, що обмежує можливості підсилення потужності [3]. Спроби створити ефективно функціонуючий СТ не припиняються, тому продовжуються фундаментальні дослідження поведінки спінів при переносі заряду в різних

V. P. Sohatsky, Ph.D.

Remagnetization of spin-dependent transistor

Characteristics of the spin transistor (ST) with incorporated spin-valve (SV) were investigated by magneto-optical and electric methods. The possibilities of energy characteristics improvement of such a functional device were analyzed towards optimization of the SV remagnetization mode and use of the additional magnetic layer with a decreased threshold of the switching field.

Key Words: magnetization, spin transistor, spin-valve.

типах середовищ, інтерфейсів та конфігурацій провідного каналу та розробляються нові конструкції, які б дали змогу реалізувати очікувані характеристики СТ. Обнадійливим досягненням останнього часу стало отримання надвисокої довжини спінового пробігу в Si, що сягала 350 мкм або створення складних конструкцій з непрямим перемагничуванням, зокрема з використанням зсуву доменних границь та ін.

В наших експериментах досліджувались структури, що моделюють СТ із вбудованим спіновим клапаном (СК) - шаруватим сендвічем з феромагнітних шарів, розділених немагнітним (провідним або діелектричним) прошарком. Всі шари СК складу Fe/Cu/Fe, Fe/Cu/NiFe та Fe/MgO/NiFe разом із Cu-контактами напілювались термічно на монокристалічну Si підкладку, в якій формувались області різної провідності. Товщини шарів варіювались від одиниць до кількох десятків нанометрів та оцінювались по величині оптичного поглинання. Магнітна анізотропія в площині шарів формувалась в технологічному процесі при похилому осадженні матеріалу, залежно від положення підкладки відносно джерел. Такі моделі СТ призначені лише для дослідження фізичних процесів, оскільки утворені в них СК мали значення магнітоопору недостатні для ефективного підсилення сигналу.

Характеристики магнітних шарів СК, зокрема, товщина, анізотропія, намагніченість насичення, могли змінюватись в широких межах в процесі виготовлення. Ці характеристики в значній мірі обумовлюють швидкодію та енергоспоживання, а отже ефективність СТ, тому вивчення можливостей оптимізації процесу переманічування СК важливо для мінімізації енергетичних витрат. Для дослідження змін електричних характеристик СТ в процесі переманічування СК пропускався струм в напрямку площини шарів; через малу товщину шарів заряди переходять з одного магнітного шару в інший, що обумовлює виникнення магнітоопору.

Методика експерименту

Дослідження переманічування та запис кривих магнітного гістерезису здійснювався за допомогою ефекта Керра в меридіональній геометрії. Діапазон вимірюваних величин еквівалентного повороту кута площини поляризації світла складав $0,5 \pm 30$ кутових хвилин при максимальній чутливості установки біля 2-х кутових секунд. При нанесенні шарів СК на прозорі (скляні) підкладки реєструвались також криві переманічування нижнього – ближнього до підкладки (магнітожорсткого) шару, а також криві переманічування всієї структури напросвіт по ефекту Фарадея.

Результати експерименту

Із форми кривих гістерезису, отриманих при різних напрямках поля підмагнічування (рис.1) визначаються напрямки осей анізотропії відповідного шару. Методика їх визначення розглядалась в попередніх роботах [4].



Рис.1. Криві переманічування магнітожорсткого шару СК:

- а) вздовж осі легкого намагнічування (ОЛН);
- б) перпендикулярно до ОЛН.

Для досліджень зміни характеру переманічування при зміні товщини окремі структури створювались клиноподібними.



Рис.2. Криві переманічування магніто-м'якого шару СК в точках різної товщини.

Приклад зміни форми петель гістерезису, отриманих за допомогою ефекта Керра зображено на рис.2. Відповідну зміну інтенсивності світла, що характеризує загальну товщину структури наведено на рис.3. Причини зміни характеру локального переманічування неможливо пояснити тільки зміною намагніченості насичення внаслідок зміни товщин шарів. Зважаючи на товщини в наведеному випадку, можна зробити припущення про домінуючу роль магнітостатичної взаємодії між шарами.

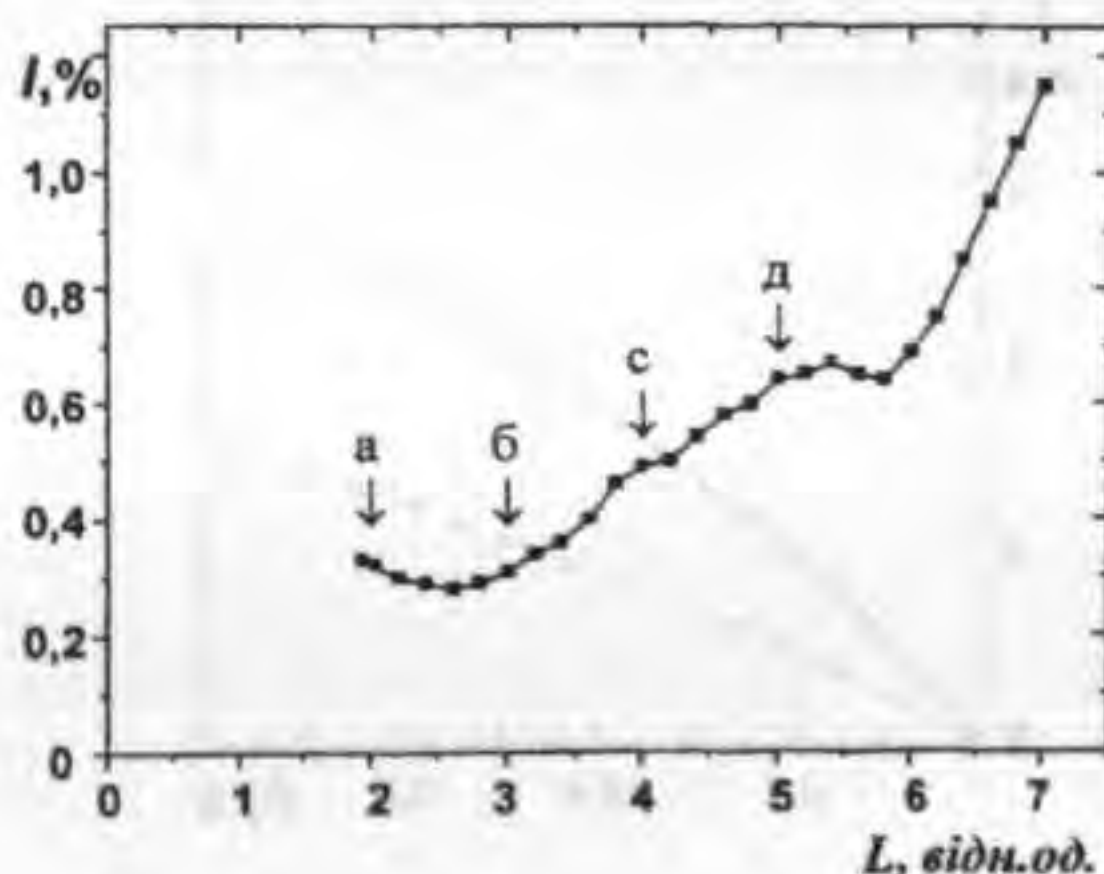


Рис.3. Пропускання світла довжиною хвилі $\lambda=628$ нм.

Обговорення результатів

Для оцінки взаємного впливу шарів та загальної ефективності транзистора за методикою [2,5] можна визначити обмінне поле:

$$H_{00} = \frac{7 \cdot M \cdot r^2}{\lambda \cdot h_2} \cdot e^{-\frac{8,9 \cdot h_0}{\lambda}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{8,9 \cdot h_1}{\lambda}}\right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{8,9 \cdot h_2}{\lambda}}\right],$$

де r та λ - висота та довжина хвилі шорсткості поверхні синусоїдальної форми; h_0 , h_1 , h_2 - товщини відповідно немагнітного, нижнього (та верхнього (магнітом'якого) шарів, M - намагніченість нижнього шару. Для характерних значень $r=1$ нм, $\lambda=10$ нм величина поля H_{00} для феромагнітних шарів з $h_{1,2} \sim 20 \div 30$ нм та $h_0 \sim 10$ нм не перевищує 0,01 Ерст, що підтверджує, що в приведеному випадку форма кривих гістерезису практично повністю обумовлена магнітостатичною взаємодією між феромагнітними шарами СК.

Потужність, що витрачається на перемагнічування СК за допомогою провідника зі струмом, розташованого впритул до верхнього шару: $P_w = I_w^2 R_w = (2wH_c)^2 \cdot R_w$, де I_w та R_w - струм в колі намагнічування та опір навантаження. Магнітне поле, необхідне для переключення (коерцитивна сила) $H_c = I_w / (2w)$, де w - товщина провідника. H_c залишається приблизно незмінним при достатньо великих поперечних розмірах СК (принаймні $L > 5$ мкм). При малих розмірах ($L \ll 5$ мкм) H_c зростає обернено пропорційно величині L внаслідок збільшення поля розмагнічування в площині малого елемента СК. Тому $P_{вх} = \text{const}$ при $L \ll 5$ мкм та $P_{вх} \sim L^2$ для $L > 5$ мкм.

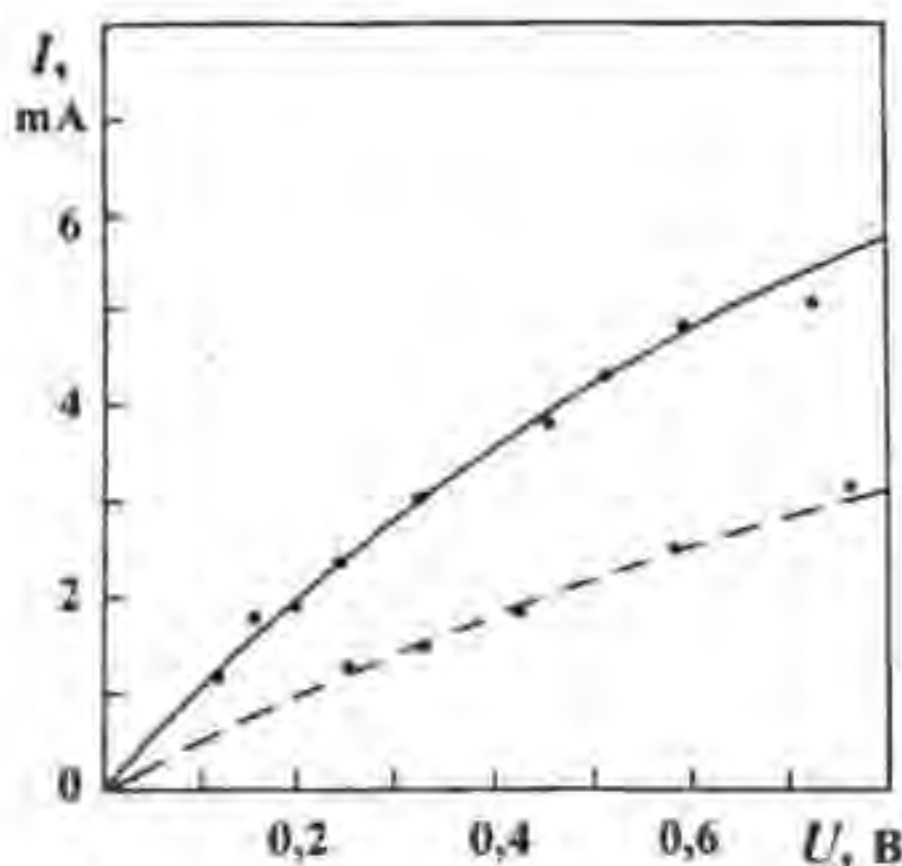


Рис. 4. Вихідні струми залежно від вхідної напруги та магнітного поля: суцільна лінія - $H=0$; пунктирна - $H \neq 0$.

Вихідну потужність визначимо як

$$\Delta P = \frac{k \cdot V^2 \cdot (R_{\uparrow\downarrow} - R_{\uparrow\uparrow})}{(R_{\uparrow\downarrow} + R_{\uparrow\uparrow})}, \text{ де } V - \text{прикладена}$$

напруга, $R_{\uparrow\downarrow}$ та $R_{\uparrow\uparrow}$ - опори при різних напрямках намагніченості. Коефіцієнт $k > 1$ з'являється через перерозподіл потужності між електричною та магнітною частинами (між R_w та СК). Вихідна потужність $P_{вх}$ пропорційна L^2 , оскільки СК більшої площі потребує більшого струму. Тому для вихідної потужності $G \sim L$ при $L \gg 5$ мкм, та $G \sim L^2$ при $L \ll 5$ мкм.

Для збільшення енергетичної ефективності необхідно зменшувати опір на одиницю площі поверхні. Але оцінки енергетичної ефективності за такою методикою дають значення на порядок вище тих, що отримують в експериментах.

Висновки

Збільшення енергетичної ефективності СТ може бути досягнуто оптимальним вибором відносних напрямків осей анізотропії ОЛН₁ та ОЛН₂ та поля підмагнічування. Виграш може бути досягнуто використанням в схемі СТ другого СК з низьким значенням H_c , який регулює переключення першого СК з більшим магнітоопором, що регулює вихідний струм СТ.

Список використаних джерел

1. Lodder J. C. The spin-valve transistor: technologies and progress / Lodder J. C., Monsma D. J., Vlutters R., and Shimatsu T. // JMMM. - 1999. - 198-199. - P.119-124.
2. Shuto Y. A New Spin-Functional Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor Based on Magnetic Tunnel Junction Technology: Pseudo-Spin-MOSFET / Y. Shuto // Appl. Phys. Expr. - 2010. - 3. - P.013003.
3. Konishi K. Current-Field Driven "Spin Transistor" / K. Konishi // Appl. Phys. Expr. - 2009. - 2. - P.063004.
4. Сохацький В. Магнітна взаємодія в шаруватих феромагнітних тонкоплівкових структурах. / В. Сохацький, Ю. Шулімов // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. - 2008. - №2 - С.181-185.
5. Kim C. Relation between exchange coupling and enhanced coercivity in the free layer of patterned magnetic tunnel junction. / Kim CheolGi and Kim Chonh-Oh // Journ. Appl. Phys. - 2004. - 96. - №12. - P.7399-7402.

Надійшла до редколегії 13.04.11.

ВСТУП

Вступ до курсу фізики

Сучасна фізика є фундаментом для розуміння природи. Вона охоплює широкий спектр явищ, від мікрокосму до макрокосму. Цей курс має на меті надати студентам загальне уявлення про основні принципи та закони фізики, а також розвинути їхні навички аналізу та розв'язання задач.

Курс охоплює такі теми, як механіка, електродинаміка, теплота, акустика, оптична фізика, атомна фізика, ядерна фізика та фізика елементарних частинок. Студенти будуть ознайомлені з історією розвитку фізики та її впливом на суспільство. Курс також включає практичні заняття, які допоможуть студентам закріпити теоретичні знання та розвинути свої навички експериментування.

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

СУЧАСНА ФІЗИКА

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

Вступ до курсу фізики

УДК 577.32

Войтешенко І.С.

**Структурно-динамічні властивості
низькомолекулярних сполук, що
моделюють кістяк 2'-
дезоксирибополінуклеотидів, у яких
фосфор заміщено на арсен**

Методами неемпіричної квантової хімії
вперше досліджено біологічно важливі фізичні
властивості арсеновмісних низькомолекулярних
сполук, що моделюють кістяк 2'-
дезоксирибополінуклеотидів. Оцінено коливальні
дисперсії усіх номенклатурних торсійних кутів,
їхні релаксовані коефіцієнти жорсткості, а
також коефіцієнт жорсткості для кута
спірального обертання та енергії, необхідні для
зміни його до нативних значень. Проведено їхнє
порівняння з аналогічними характеристиками
фосфоровмісних модельних сполук біологічно
важливої В- форми ДНК.

Ключові слова: модельна біцукрово-
фосфатна та біцукрово-арсенієва сполука,
геометричні характеристики конформерів,
конформаційна нежорсткість, дисперсії
номенклатурних торсійних кутів, квантово-
хімічні дослідження.

*E-mail: isvoiteshenko@gmail.com

Біологічні молекули, як відомо, складаються із
шести хімічних елементів - вуглецю, водню,
азоту, кисню, сірки та фосфору. У 2010 році в
озері Моно, штат Каліфорнія, США вперше на
Землі дослідники виявили бактерію, названу
GFAJ-1, здатну жити та розмножуватися,
використовуючи арсен [1], що є зазвичай
токсичним для більшості інших організмів та
сильним мутагеном для ДНК людини. В усіх
біополімерах, зокрема нуклеїнових кислотах та
білках цього штаму бактерій, фосфор заміщено
на арсен. Арсен (As) є хімічним аналогом
фосфору (P) – він знаходиться під ним у
періодичній таблиці та має аналогічний атомний
радіус, а також практично ідентичні до P
показники електронегативності [2].

Метою даної роботи є дослідження впливу
заміни фосфору його хімічним аналогом арсеном
та її вплив на конформаційні властивості 2'-
дезоксирибополінуклеотидів, що в свою чергу
цікаво з точки зору еволюційних та геохімічних
уявлень. Предметом дослідження обрано

I. S. Voiteshenko

**Structural and dynamic properties of low-
molecular model compounds of the 2'-
deoxyribopolynucleotides frame with arsenic
at the place of phosphorus**

First it is investigated biologically important
physical properties of low-molecular compounds
with arsenic, which model 2'-
deoxyribopolynucleotides frame by methods of non
empirical quantum chemistry. It was estimated the
oscillating dispersions of all nomenclatural torsion
angles and their relaxed stiffness coefficients, also
stiffness coefficients for angles of spiral rotation
and energies required to change it to native values.
These values were compared with similar
characteristics of model compounds of biologically
important DNA B-form with phosphorus.

Key words: modeling bisugar-phosphatic and
bisugar-arsenic compounds, geometric
characteristic of conformers, conformational
slackness, dispersion of nomenclatural torsion
angles, quantum-chemical investigation.

класичні торсійні кути [3], що описують
макромолекулу ДНК, та кут спірального
обертання у цукрово-фосфатних та цукрово-
арсенієвих модельних кістяках.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єкти дослідження отримані вичерпним
конформаційним аналізом біцукрово-фосфатних
залишків, нейтралізованих протоном. При цьому
з повної конформаційної множини виокремлено
одинадцять біологічно найважливіших В-
подібних конформерів [4] (один із них наведено
на рис. 1) та аналогічні шість конформерів,
нейтралізовані іоном натрію [5]. У кожній із цих
структур атом фосфору замінено на арсен (рис. 1)
та додатково проведено оптимізацію геометрії
без будь-яких структурних обмежень на рівні
теорії MP2/6-311++G(2df,pd) // DFT B3LYP/6-
31G(d,p). На цьому ж рівні також розраховано
коливальні спектри у гармонічному наближенні -
ці дані за умови відсутності у їхніх коливальних

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

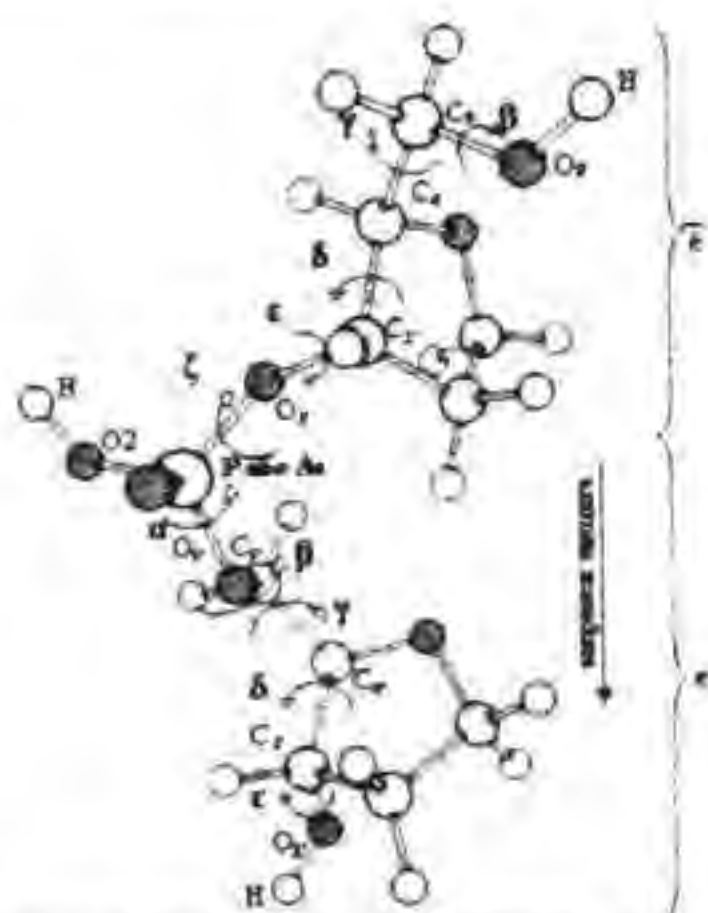


Рис. 1 Просторова будова низькомолекулярної сполуки, що моделює електронейральний цукрово-фосфатний та цукрово-арсенієвий кістяк 2- дезоксирибополінуклеотидів: позначення конформаційних змінних і атомів кістяка загальноприйняте [3].

спектрах уявних частот використовували для ідентифікації стійкості отриманих структур, для обчислення їхньої відносної енергії Гіббса за стандартних умов та опису конформаційної нежорсткості [6]. Методика оцінки коефіцієнтів жорсткості розроблена і детально описана у роботі [7]. За її допомогою нами визначено величини релаксованих коефіцієнтів жорсткості K для кута спірального обертання θ і торсійних кутів α , β , γ , δ , ϵ та ζ [3] в усіх модельних біцукрово-арсенієвих залишках. Також представлено значення енергій ΔE_θ , необхідних для зміни кутів спірального обертання до нативних величин, які спостерігаються у правозакрученій двоспіральній ДНК. Визначено дисперсії σ [8], обумовлені тепловими коливаннями ядер для торсійних кутів, а також проведено порівняння вищезгаданих характеристик зі спостережуваними аналогічними величинами у біцукрово-фосфатних залишках [9], що є твірними кістяка біологічно важливих конформерів ДНК.

Квантово-механічні розрахунки проведено з використанням програмного пакету «GAUSSIAN03» для платформи Win32 [10]. Набір параметрів спіралі макромолекули визначено з використанням так званих «внутрішніх» параметрів, а саме – довжин зв'язків, валентних та двогранних кутів [11].

Результати та їхній аналіз

Порівняння значень основних конформаційних характеристик, отриманих для цукрово-фосфатної [4] та цукрово-арсенієвої моделі (рис. 2), вказує на майже ідентичні значення кутів γ_n , α_n , ζ_{n-1} та δ_{n-1} у всіх конформерах для обох випадків, що також показано у незалежній роботі Чпонера та ін. на схожих модельних залишках проте з певними конформаційними обмеженнями [12]. Так, діапазон абсолютних відхилень для згаданих кутів становлять $(0,1 \div 1,8)^\circ$, на відміну від ϵ_{n-1} та β_n , де відхилення складають $(7,5 \div 15,2)^\circ$ та $(4,0 \div 5,1)^\circ$ відповідно. При цьому значення кута ϵ_{n-1} для цукрово-арсенієвої моделі ближче до нативних значень у полінуклеотидах [13], а кут β_n – навпаки відхиляється від їхніх природних значень. Як результат, реалізуються невеликі відмінності і для кутів спірального обертання θ у цукрово-арсенієвій моделі $(66,6 \div 69,2)^\circ$ та цукрово-фосфатній $(69,2 \div 74,3)^\circ$. Діапазони відносних енергій Гіббса за нормальних умов для обох модельних сімейств складають $(0 \div 4,41)$ ккал/моль та $(0 \div 3,66)$ ккал/моль відповідно.

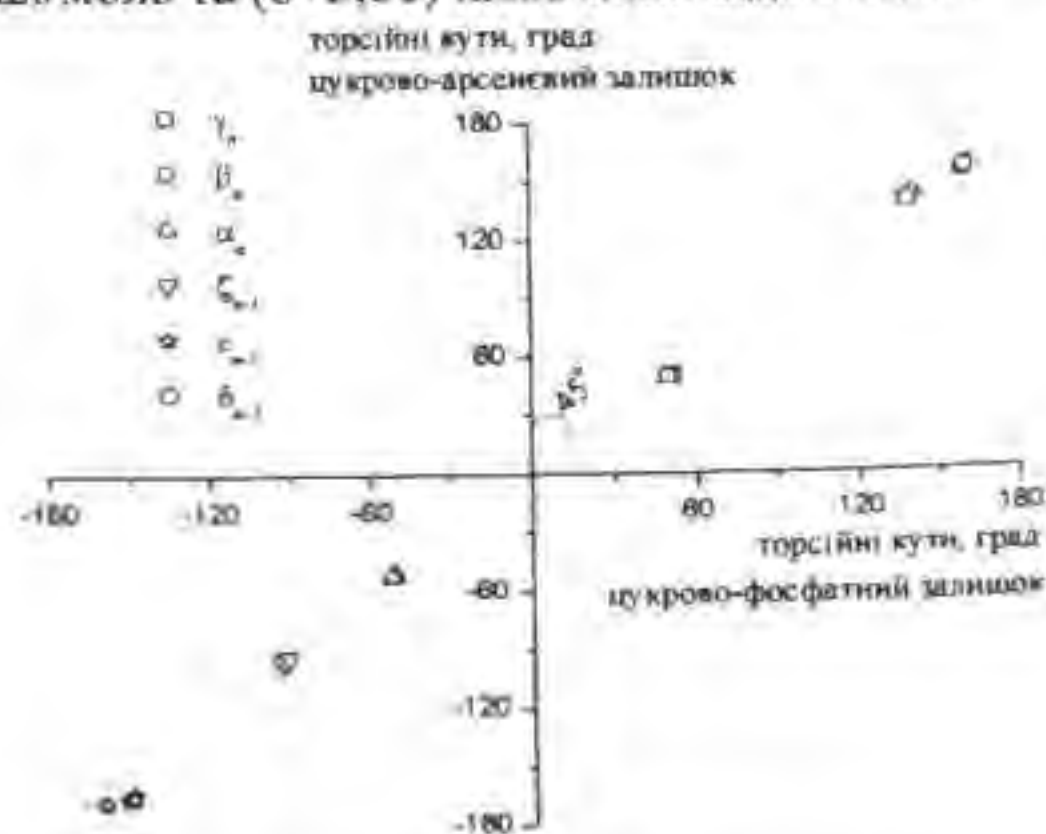


Рис. 2 Порівняльна залежність значень номенклатурних торсійних кутів, отриманих для цукрово-фосфатної [4] та цукрово-арсенієвої моделі

Для цукрово-арсенієвих модельних конформерів, нейтралізованих іоном натрію, що були отримані з шести В- подібних фосфатовмісних конформерів, наявні уявні частоти, що з фізичної точки зору свідчить про їхню нестійкість (структури відповідають сідловим точкам), а з біологічної – про можливі труднощі їхньої реалізації *in vitro*.

Як видно з табл. 1, у нейтралізованих протонам модельних цукрово-фосфатних конформерах спостерігається більша структурна м'якість у порівнянні з аналогічною цукрово-арсенієвою моделлю. Усі одинадцять

Таблиця 1

Основні структурно-динамічні та пружні характеристики протонуваних біцукрових модельних залишків кістяка 2'-дезоксирибополінуклеотидів. Позначення: K - релаксовані коефіцієнти крутильної жорсткості для кута спірального обертання θ та торсійних кутів $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_{n-1}, \epsilon_{n-1}$ та ζ_{n-1} відповідно (ккал/(моль·рад²)); ΔE_θ - значення енергії необхідне для зміни кута θ до його нативного значення (ккал/моль); ΔG - відносна вільна енергія Гіббса модельного конформера за нормальних умов (ккал/моль); σ - дисперсія відповідного торсійного кута (град), за температури $T = 298,15$ К.

B- подібні протонувані цукрово-фосфатні модельні конформери											
ΔG	0	0,58	0,93	1,36	1,66	1,88	2,00	2,04	2,78	3,02	3,66
θ	73,5	72,4	73,2	73,1	73,1	73,1	73,1	69,7	69,2	74,3	74,3
K	5,9	6,9	5,7	6,4	6,4	3,6	5,6	7,6	8,4	5,4	5,5
ΔE_θ	1,26	1,40	1,20	1,34	1,33	0,75	1,18	1,31	1,40	1,20	1,22
K_γ	24,6	22,8	25,7	21,0	25,1	22,9	20,6	27,3	29,9	23,1	23,0
K_β	11,2	11,5	12,2	10,2	11,7	10,1	9,9	10,6	11,2	11,5	10,8
K_α	12,4	9,8	12,6	10,7	13,3	9,5	10,0	11,8	11,3	10,9	12,5
K_ζ	15,4	14,9	15,3	15,3	15,7	14,4	15,0	14,4	16,3	14,9	14,5
K_ϵ	9,1	7,6	10,3	5,7	9,4	5,4	5,7	13,0	12,2	5,7	6,6
K_δ	7,7	15,6	7,9	15,2	7,9	8,6	13,9	10,9	11,3	12,9	12,0
σ_γ	9,0	9,3	8,8	9,7	8,9	9,3	9,8	8,5	8,2	9,3	9,3
σ_β	13,3	13,1	12,8	13,9	13,0	14,0	14,2	13,7	13,4	13,1	13,5
σ_α	12,8	14,4	11,6	13,6	12,4	14,5	14,1	13,0	13,4	13,4	12,8
σ_ζ	11,3	11,5	11,4	11,4	11,2	11,7	11,5	11,7	11,0	11,5	11,7
σ_ϵ	14,8	16,1	13,9	18,6	14,5	19,1	18,6	12,3	12,7	18,6	17,4
σ_δ	16,0	11,5	15,9	11,4	15,8	15,2	11,9	13,5	13,2	12,2	12,8
B- подібні протонувані цукрово-арсенієві модельні конформери											
ΔG	0	0,90	1,00	1,68	1,72	2,49	2,97	3,00	3,59	3,78	4,41
θ	69,2	66,8	69,0	68,5	66,9	66,6	68,4	68,1	67,9	68,2	67,9
K	5,5	9,3	5,1	4,5	10,4	10,0	12,0	13,2	12,6	13,4	11,8
ΔE_θ	0,92	1,34	0,86	0,72	1,50	1,43	1,91	2,06	1,96	2,12	1,83
K_γ	24,6	24,6	26,0	28,5	23,6	22,6	25,1	21,1	26,4	21,3	18,9
K_β	11,5	11,7	13,4	12,9	12,0	12,7	14,5	11,4	13,2	12,4	12,9
K_α	17,0	13,8	15,3	15,9	13,6	12,9	15,8	13,8	16,6	13,2	14,0
K_ζ	17,0	18,7	14,3	13,8	18,3	18,2	20,8	20,3	18,8	21,6	21,2
K_ϵ	6,5	15,7	6,8	5,9	7,4	8,7	16,4	16,1	15,9	17,1	15,0
K_δ	7,7	15,6	7,7	7,1	16,2	15,2	15,2	17,6	16,3	17,2	16,6
σ_γ	9,0	9,0	8,8	8,4	9,2	9,4	8,9	9,7	8,7	9,7	10,2
σ_β	13,1	13,2	12,1	12,4	12,8	12,5	11,7	13,2	12,2	12,6	12,5
σ_α	11,0	10,5	11,4	11,2	12,0	12,4	11,2	12,0	10,9	12,3	11,9
σ_ζ	10,8	10,3	11,9	12,0	10,4	10,4	9,8	9,9	10,3	9,6	9,7
σ_ϵ	17,5	8,0	17,0	18,3	16,3	15,1	11,0	11,1	11,2	10,8	11,5
σ_δ	16,1	11,4	16,0	16,7	11,1	11,4	11,4	10,6	11,0	10,7	10,9

протонуваних цукрово-фосфатних модельних сполук, що продукують відповідні спіральні структури біологічно важливих B- подібних форм ДНК, мають значення коефіцієнтів жорсткості кута спірального обертання, що лежать у діапазоні $3,6 \div 8,4$ ккал/(моль·рад²). При цьому величини енергій, які необхідно затратити для реалізації у них нативних значень кута спірального обертання, складають $0,75-1,40$ ккал/моль. Їхні цукрово-арсенієві аналоги, у свою чергу, мають відповідні значення коефіцієнтів жорсткості $4,5 \div 13,4$ ккал/(моль·рад²). Енергії, необхідні для реалізації їхнього нативного стану лежать у діапазоні $0,72 \div 2,12$ ккал/моль, при цьому переважна їхня кількість має значення коефіцієнтів жорсткості більші за $9,3$ ккал/(моль·рад²). Виключенням є три цукрово-арсенієві модельні конформери, у яких кут $\gamma_{n-1} \in \text{ан}$ області, що на 120° відрізняється від

нативного його значення [13] та відповідає, на нашу думку, за нетипові величини коефіцієнтів жорсткості для кута спірального обертання у діапазоні $4,5 \div 5,5$ ккал/(моль·рад²).

Аналогічне збільшення коефіцієнтів жорсткості у цукрово-арсенієвих конформерах (табл. 1) спостерігається для торсійних кутів α_n , β_m , ϵ_{n-1} та ζ_{n-1} , у формуванні яких безпосередньо бере участь атом арсену. Відповідно, для них спостерігаються менші значення коливальних дисперсій ($8 \div 18,3$)°, у порівнянні з цукрово-фосфатним кістяком ($11 \div 19,1$)°.

Все вище сказане дозволяє зробити висновок про те, що заміна атома фосфору у модельних конформерах на арсен тягне за собою збільшення структурної жорсткості кістяка В- подібних форм 2'-дезоксирибополінуклеотидів. З біологічної точки зору такі зміни можуть слугувати додатковим енергетичним бар'єром, наприклад при білково-нуклеїнових взаємодіях, значно звужуючи їхню кількість за умови майже однакових основних конформаційних параметрів кістяка.

Висновки

Вперше визначено релаксовані коефіцієнти жорсткості кута спірального обертання та торсійних кутів цукрово-арсенієвого кістяка 2'-дезоксирибополінуклеотидів. Представлено енергії, необхідні для зміни кутів спірального обертання до нативних їхніх значень. Розраховано коливальні дисперсії усіх номенклатурних торсійних кутів. Проведено порівняльну характеристику їхніх величин з аналогічними фосфоровмісними сполуками.

Вперше виявлено, що заміна атома фосфору у досліджуваних модельних сполуках на арсен спричиняє збільшення структурної жорсткості протонованого кістяка В- подібних форм 2'-дезоксирибополінуклеотидів. Також продемонстровано неможливість реалізації натрієвого цукрово-арсенієвого В- подібного кістяка у рамках обраної моделі.

Список використаних джерел

1. F. Wolfe-Simon, J.S. Blum, T.R. Kulp, G.W. Gordon, S.E. et. al. A Bacterium that can Grow by Using Arsenic Instead of Phosphorus // Science doi: 10.1126/science.1197258 [PMID: 21127214]. – 2010.
2. David. R. Lide, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 90th Edition (Internet Version, Press/Taylor and Francis, Boca Raton), 2010.

3. Зенгер В. Принципы структурной организации нуклеиновых кислот. М.: Мир, 1987. – 584с.

4. Войтешенко І.С., Жураківський Р.О., Булавін Л.А., Говорун Д.М. Повний конформаційний аналіз низькомолекулярної електронейтральної моделі цукрово-фосфатного ланцюга ДНК // Доповіді НАН України. – 2011 - №6 – (друкується).

5. Войтешенко І.С., Жураківський Р.О., Булавін Л.А., Говорун Д.М. Конформаційний аналіз низькомолекулярної моделі цукрово-фосфатного ланцюга натрієвої ДНК // Доповіді НАН України. – 2011 – №7 – (друкується).

6. Булавін Л.А., Ніколаєнко Т.Ю., Говорун Д.М. Структурна нежорсткість молекули ортофосфорної кислоти: неемпіричне квантово-механічне дослідження // Доповіді НАН України. – 2009. – №10. – С. 80 – 87.

7. Ніколаєнко Т.Ю., Войтешенко І.С., Булавін Л.А., Говорун Д.М. Визначення коефіцієнтів жорсткості для колективних ступенів вільності біологічних молекул // Вісник Київського університету серія фіз. мат. науки – 2010. – 2 – С. 279-283.

8. Булавін Л.А., Ніколаєнко Т.Ю., Говорун Д.М. Структурна мінливість біологічних молекул, спричинена їхніми нормальними коливаннями // Доповіді НАН України. – 2010. – №7. – С. 61 – 69.

9. Войтешенко І.С., Ніколаєнко Т.Ю., Булавін Л.А., Говорун Д.М. Пружні властивості низькомолекулярних сполук, що моделюють цукрово-фосфатний кістяк 2'-дезоксирибополінуклеотидів // Вісник Київського університету серія фіз. мат. науки – 2011. – (друкується).

10. Gaussian 03, Revision C.02, Frisch, M. J.; Trucks, G. W.; Schlegel, H. B.; Scuseria, G. E.; Robb, M. A.; et. al. Gaussian, Inc., Wallingford CT, 2004.

11. Sugeta H., Miyazawa T. General method for calculating helical parameters of polymer chains from bond lengths, bond angles, and internal-rotation angles // Biopolymers. – 1967. – 5. – P. 673 - 679.

12. Mladek A., Sponer J., Sumpter B.G., Fuentes-Cabrera M., et. al. On the Geometry and Electronic Structure of the As-DNA Backbone // J. Phys. Chem. Lett. – 2011. – 2 – P. 389–392.

13. Schneide B., Neidle St., Berman H.M. Conformations of the Sugar-Phosphate Backbone in Helical DNA Crystal Structures // Biopolymers. – 1997. – 42. – P. 113–124.

Надійшла до редколегії 25.03.2011

УДК 534.6; 539.3

Коваленко М.В., студ.
Вербінська Г.М., к. ф.м. н., доц.
Британ А.В., асп.
Карбовський В. Л., к.ф.м.н.

Вплив газу та ультрафіолетового опромінення на швидкість випаровування крапель води

В даній роботі представлено результати дослідження швидкості випаровування крапель води в діапазоні тисків 20-740 мм рт. ст. при температурі фоновому газу 20°C для двох режимів випаровування: темного (крапля не опромінювалась) та під дією ультрафіолетового опромінення (390 нм). Встановлено зростання швидкості випаровування під впливом опромінення до 21% при малих тисках (<100 мм) при незначній зміні температури (1-2°C).

Ключові слова: випаровування, вода, опромінення, ультрафіолет

*E-mail: a_britan@ukr.net

Метою даної роботи є дослідження впливу ультрафіолетового опромінення на швидкість випаровування крапель води в широкому діапазоні тисків від 20 до 740 мм рт. ст. в атмосфері азоту.

Крапля рідини, поміщена в газове середовище, може або випаровуватись, або конденсуватись, тобто рости (в тому випадку, коли газовим середовищем є пересичена пара) [1]. В загальному випадку опис процесів випаровування є складною теоретичною задачею, однак врахування конкретних параметрів дозволяє спростити цю задачу. Важливим параметром, що визначає режим випаровування крапель є критерій Кнудсена (див. нижче).

Процес випаровування краплі.

Розглядаючи процес випаровування, ми користуємось наближенням, при якому крапля вважається сферичною. В залежності від співвідношень радіуса краплі r та довжини вільного пробігу молекул λ режим випаровування можна поділити на: кінетичний

$Kn = \frac{\lambda}{r} \gg 1$; дифузійний $Kn \ll 1$, перехідний

M. Kovalenko, stud.
G. Verbinska, PhD
A. Britan, PhD stud.
V. Karbovskiy PhD

The influence of gas and ultraviolet irradiation on the velocity of the water's droplets evaporation

In the given work the investigation results were observed of the velocity of evaporation water's drops in a diapason of pressure 20 - 740 mm Hg in temperature of background gas 20°C for two regimens of evaporation: dark regimen (the drop wasn't by influence of irradiation) and by influence of ultraviolet irradiation (390 nm). It has been established, that the velocity of evaporation with irradiation grows by 21% for low values of pressure (<100 mm Hg) within small change of temperature (1-2°C).

Keywords: evaporation, water, irradiation, ultraviolet.

$Kn \approx 1$, де Kn - число Кнудсена. Поблизу поверхні краплі в Δ -шарі молекули пари рухаються без перешкод, як в вакуумі, тобто виконується кінетичний режим випаровування (модель Герца-Кнудсена), для якого результуюча швидкість випаровування визначається як:

$$-\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 (C_0 - C_\infty) u \alpha \quad (1)$$

де m - маса краплі, $u = \frac{v}{4} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}}$ - четверта частина середньої швидкості молекул пари, C_0 - концентрація пари поблизу поверхні краплі в г/см³, C_∞ - концентрація на нескінченності, α - коефіцієнт конденсації рідини.

Для опису випаровування в дифузійному режимі використовується формула Максвелла:

$$I_0 = -\frac{dm}{dt} = 4\pi r D (C_0 - C_\infty) \quad (2)$$

де D - коефіцієнт дифузії пари, r - радіус краплі. Тут швидкість випаровування визначається швидкістю дифузії пари в оточуючому середовищі.

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

Згідно моделі розробленої Н. А. Фуксом [1], [2] концентрація молекул безпосередньо поблизу поверхні краплі рівна C_0 ; на відстані Δ , що дорівнює довжині вільного пробігу молекул, концентрація відрізняється від попередньої і дорівнює C_1 . На відстані, більшій за Δ , молекули, що покинули поверхню краплі, починають взаємодіяти з іншими молекулами.

Застосовуючи до рівнянь (1) та (2) поняття Δ -шару та концентрації C_1 , маємо:

$$-\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 (C_0 - C_\infty) u \alpha, \quad r \leq \rho \leq r + \Delta \quad (3)$$

$$-\frac{dm}{dt} = 4\pi D(r + \Delta)(C_1 - C_\infty) u \alpha, \quad r + \Delta \leq \rho \leq \infty \quad (4)$$

Зшиваючи рівняння (3) та (4), та враховуючи поправки, маємо:

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi D r (C_0 - C_\infty)}{\frac{D}{ru\alpha} + \frac{r}{r + \Delta}} = \frac{I_0}{\left(\frac{D}{ru\alpha} + 1\right)} \quad (5)$$

де $\left(\frac{D}{ru\alpha} + 1\right)^{-1}$ - поправка Фукса (див. нижче).

При зменшенні тиску парогазової суміші, що відповідає переходу від дифузійного режиму випаровування до перехідного, виникає потреба внести до формули Максвела деякі поправки, що враховують вплив наступних факторів: зниження температури краплини, що випаровується; поверхневий натяг рідкої фази; зниження пружності пари поблизу поверхні; вплив коефіцієнта конденсації. При одержанні формули Максвела було зроблено низку спрощень: сферичність поля концентрацій, відсутність конвекції та інші.

Поправки до формули Максвела.

В формулу Максвела для швидкості випаровування (2) потрібно ввести поправку, обумовлену Стефанівським потоком: поблизу поверхні краплі, що випаровується, повинен існувати гідродинамічний потік фонового газу, направлений від поверхні. Існування цього потоку можна пояснити тим, що в середовищі повинен зберігатися сталим повний тиск, тобто при існуванні градієнта парціального тиску пари повинен бути рівний і протилежно направлений градієнт парціального тиску фонового газу. Ця поправка, виражена в вигляді (3), має зміст лише

при суттєвому значенні величини P_0/P , вона є вагомим при низьких тисках.

$$I_m = I_0 \left(1 + \frac{P_0 + P_\infty}{2P}\right) \quad (6)$$

де P - повний тиск середовища.

Відхилення від рівняння Максвела при низьких тисках обумовлене існуванням макроскопічного стрибку концентрації, який зростає при інтенсивному випаровуванні крапель. Фукс отримав вираз для поправки до формули Максвела на стрибок концентрації (поправка Фукса) [1]. З урахуванням поправки рівняння (2) прийме вигляд:

$$I_m = \frac{I_0}{\frac{D}{ru\alpha} + 1} \quad (7)$$

де I_0 - швидкість випаровування за формулою Максвела.

Потрібно також взяти до уваги залежність коефіцієнта дифузії від температури для великих значень $(T_\infty - T_0)$. Тобто при підстановці коефіцієнта дифузії в формулу Максвела потрібно брати $D = \sqrt{D_0 D_\infty}$;

В даному експерименті проводяться виміри не маси краплі, а її площі, тому формули для зміни маси з часом краще перевести у формули для зміни площі. З урахуванням поправок отримаємо:

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi\sqrt{D_0 D_\infty} C_0}{\gamma \left(\frac{D}{ru\alpha} + 1\right)} \left(1 + \frac{P_0}{2P}\right) \quad (8)$$

Отримана формула Максвела з поправками Фукса та Стефана таким чином є функцією тиску, що дозволяє описувати випаровування в широкому діапазоні тисків. Іншим не менш важливим фактором, який може впливати на поведінку рідин в природі є різні типи зовнішніх полів, впливові яких присвячено багато теоретичних та експериментальних робіт. Зокрема в роботі [3] проведений теоретичний аналіз впливу радіаційного опромінення на конденсовану систему. Випаровування крапель в полі інфрачервоного лазера розглядалось у роботі [4].

Процес випаровування в паро-газовому середовищі.

Дані дослідження проводяться за допомогою експериментальної установки, схему якої наведено на рис. 1.

Процес вимірів складається з наступних

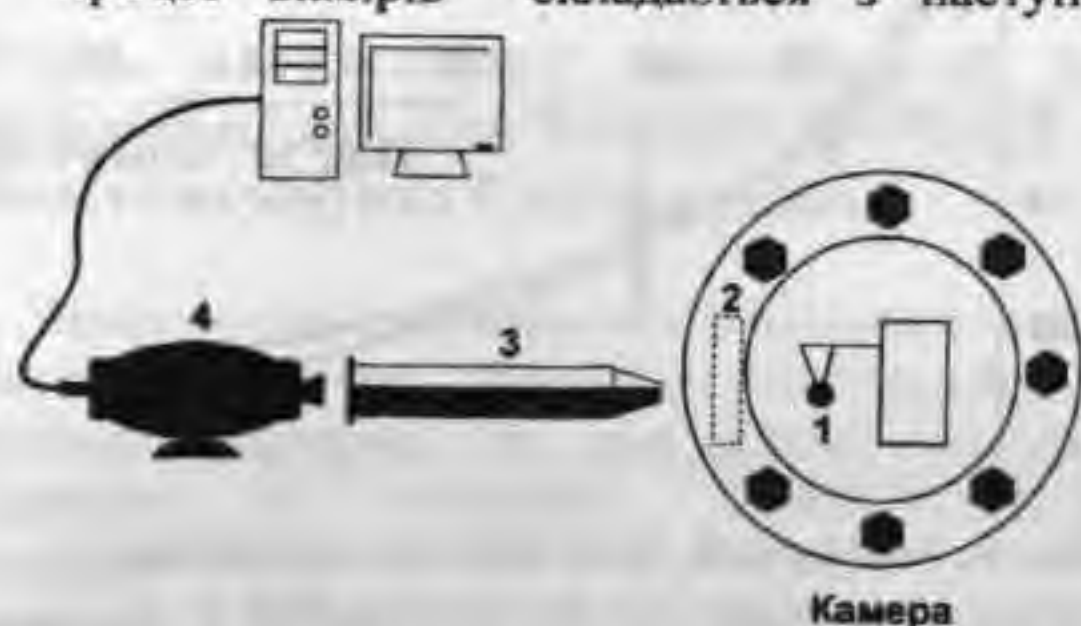


Рис. 1. Схема експериментальної установки для вимірювання швидкості випаровування крапель рідин

етапів. Запускається термостат. Через віконечко (2) камери (рис.2) на температурному датчику краплі розміщується капля (1) досліджуваної рідини. Закривається камера і відкачується повітря (або наповнюється потрібним газом). Тиск, необхідний для вимірів, контролюється ртутним барометром. Далі вводиться в роботу програма Temperature, яка контролює температури краплі та повітря в камері. При необхідності вмикається освітлювач і вибирається режим освітлювання краплі. Запускається програма Video Monitor, яка є штатною програмою web-камери (4) зі

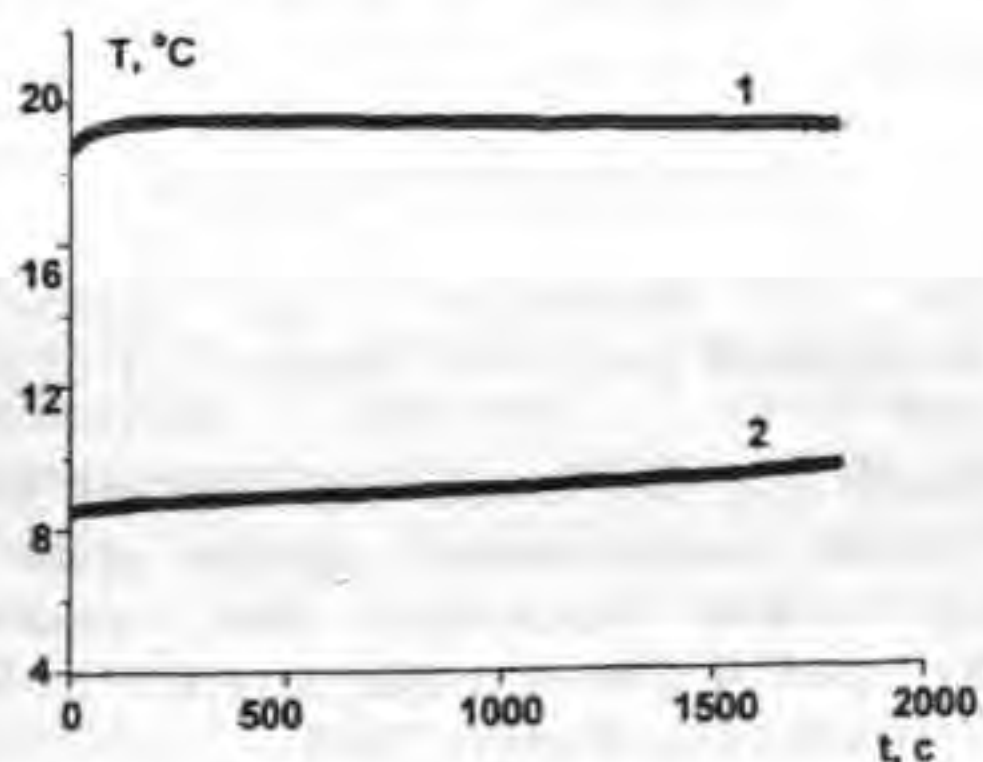


Рис. 2. Залежність температури в камері (1) і температури краплі (2) від часу (тиск 500 мм рт.ст.)

спеціально підібраним об'єктивом (3) і дозволяє знімати і записувати на комп'ютер зображення

краплі через встановлений інтервал часу. Отримані фотографії обробляються в програмі MatLab: зображення краплі апроксимуються сферою, автоматично розраховується площа краплі, дані зберігаються. За отриманими даними проводиться аналіз швидкості випаровування краплі.

Залежності від часу температури краплі і оточуючого середовища та площі краплі наведено на рис. 2 і 3 відповідно.

Дані експерименти були проведені в діапазоні тисків 20-740 мм рт. ст., після чого було

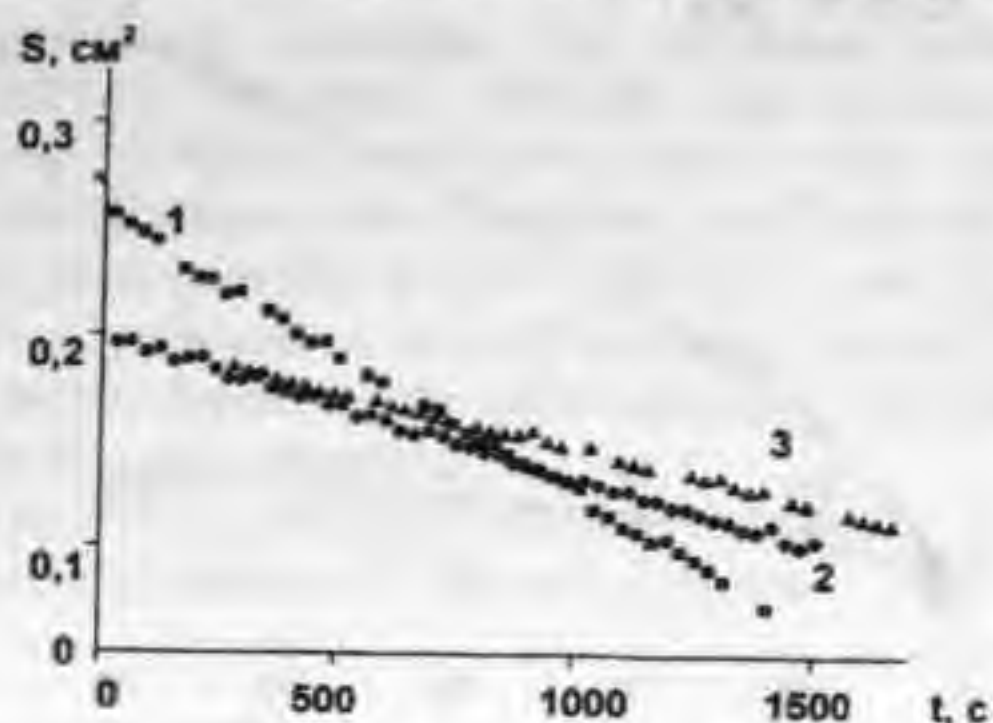


Рис. 3. Залежність зміни площі краплі від часу при різних тисках (експеримент без опромінення). Крива 1 – при 50 мм рт. ст., 2 – при 300 мм рт. ст., 3 – 500 мм рт. ст.

побудовано залежності зміни площі з часом від оберненого тиску в темновому режимі (рис. 4) та режимі з опроміненням використовуючи експериментальні дані, формулу Максвелла, та формулу Максвелла з поправками

Аналіз отриманих результатів.

На рис. 5, 6 представлені відповідно залежності зміни площі краплі та її температури від оберненого тиску, що були отримані при освітленні та в темновому режимі. Різниця температур крапель води в обох режимах для певного значення тиску не перевищує 1°-2°C. В той самий час швидкість випаровування крапель води при опроміненні зростає на 21% при найменших значеннях тиску. Як показують дослідні дані, спостерігається значне відхилення від формули Максвелла при низьких тисках. Узгодження теоретичної кривої dS/dt з отриманою експериментально згідно формули (8) проводилась шляхом підгонки одного параметра – коефіцієнта конденсації α . Одержані значення коефіцієнта конденсації в режимі без

освітлення і при ультрафіолетовому опроміненні складають, відповідно, $\alpha = 0,0017$ та $\alpha = 0,002$.

Порівняння одержаних експериментальних результатів з одержаними раніше при опроміненні крапель води галогеновою лампою потужністю 3 Вт з широким спектром довжин хвиль показує зростання швидкості випаровування при зменшенні довжини хвилі (до 390 нм) з 12% до 21% порівняно з темновим режимом випаровування.

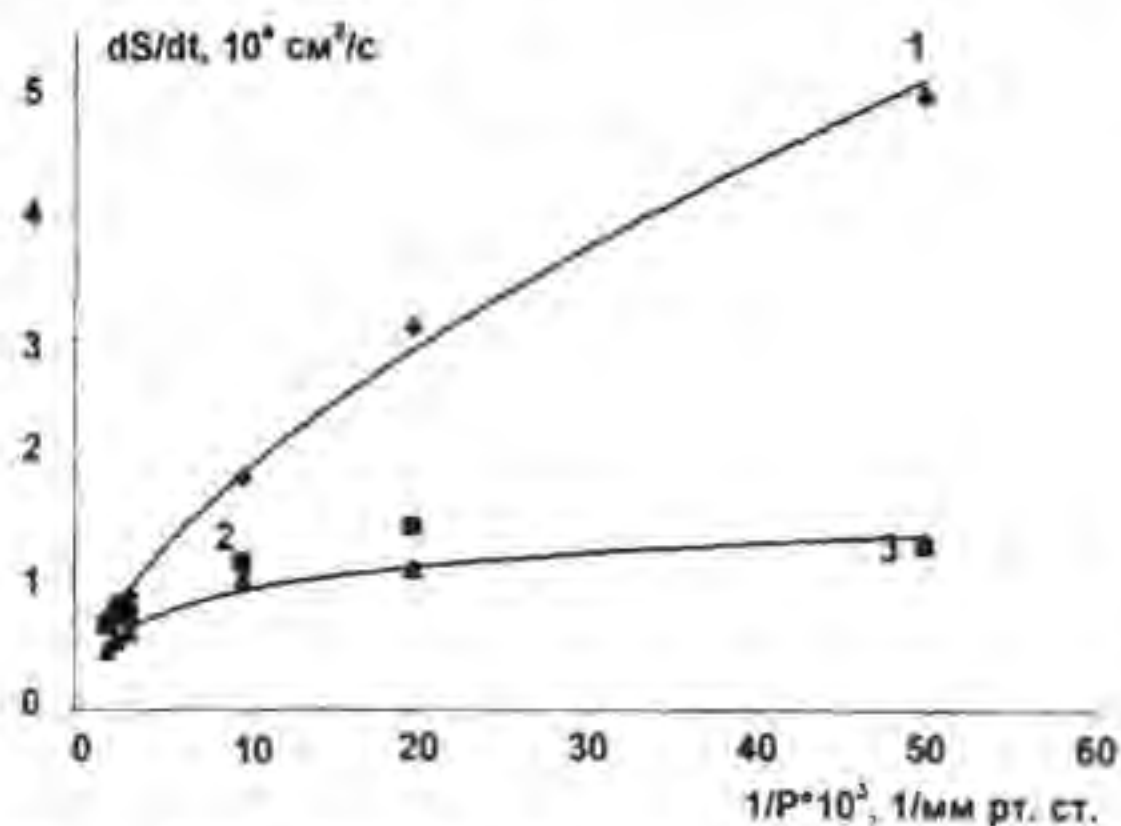


Рис. 4. Залежність швидкості випаровування від оберненого тиску: 1- розрахована за формулою Максвелла, 2 – за формулою Максвелла з поправками та 3 – одержана експериментально (темновий режим)

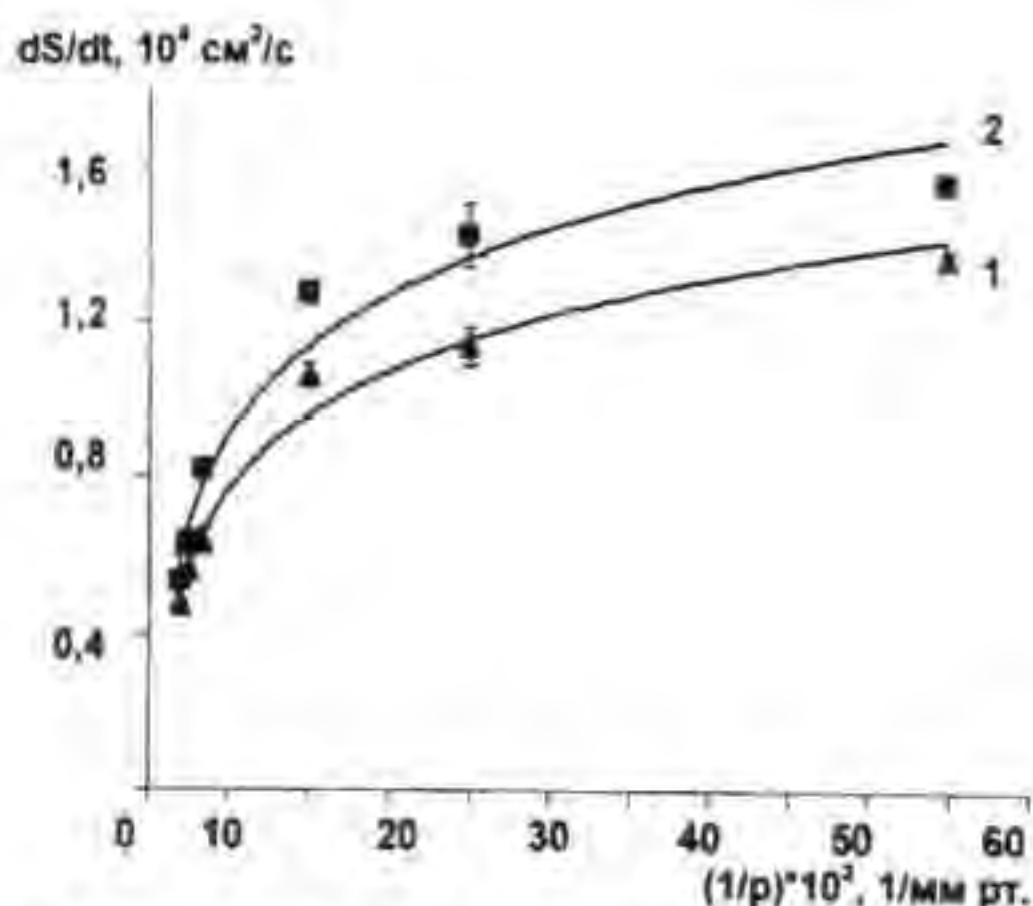


Рис. 5. Залежність швидкості випаровування крапель води в атмосфері сухого азоту при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ від оберненого тиску при ультрафіолетовому опроміненні - 1 та в темновому режимі - 2

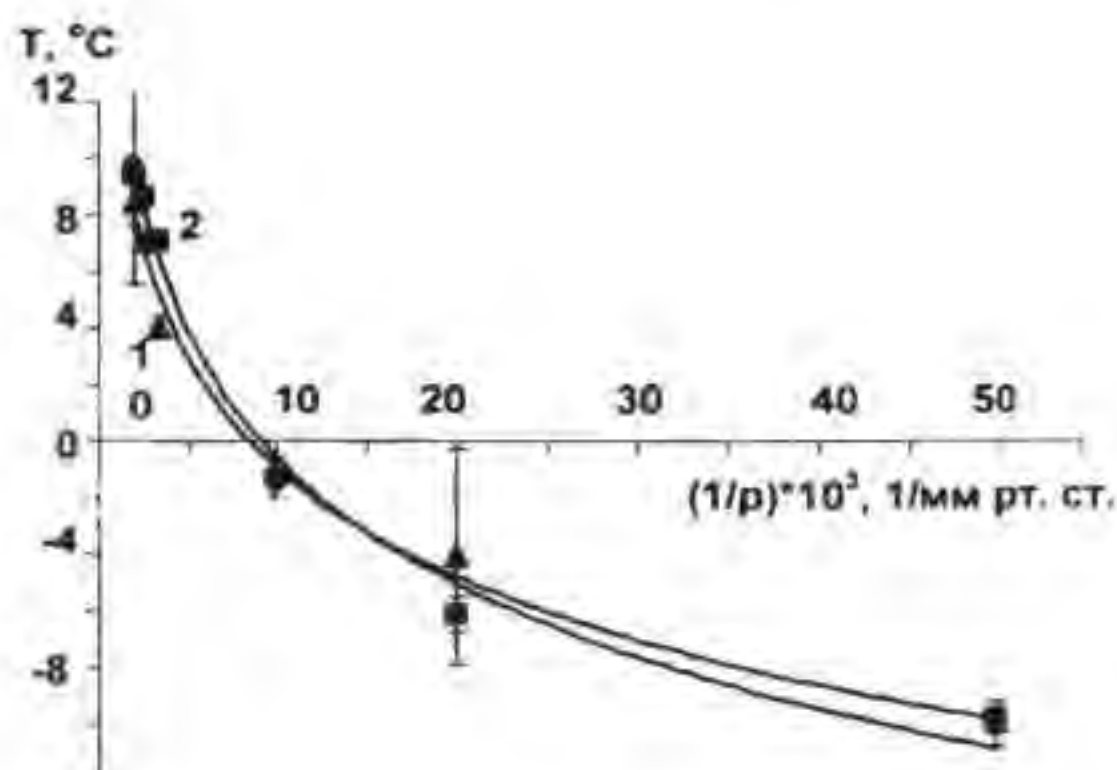


Рис. 6. Залежність температури краплі від оберненого тиску для експериментів з опроміненням (крива 1) і без нього (2)

Висновки

Експериментально встановлено збільшення швидкості випаровування підвішених крапель води під впливом малопотужного 3 Вт ультрафіолетового опромінення в атмосфері сухого азоту в діапазоні тисків оточуючого середовища (20–740) мм рт. ст. Найбільше зростання швидкості випаровування (21%) спостерігалось при найменшому значенні тиску. Завдяки створенню умов для високоточного вимірювання температури краплини під час її випаровування встановлено, що температура краплі при опроміненні та у його відсутності практично не змінюється. Різниця температур для певного значення тиску на перевищує $1-2^\circ\text{C}$. Нагрівання не може бути причиною зростання швидкості випаровування при освітленні краплини.

Список використаних джерел

1. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
2. Булавін Л.А., Вербінська Г.М., Нужний В.М. Кінетика випаровування крапель рідин в паро-газовому середовищі. Навч. посібник для студентів фізичного факультету. – К.: ВЦ «Київський університет», 2003.
3. Вплив радіаційного опромінення на фізичні властивості рідин / Булавін Л.А., Куліш М.П., Сисоев В.М. та ін.; – К.: АСМІ., – 2008.
4. Тригуб В. И. Нижний Новгород, Россия. // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76, вып. 4.

Надійшла до редколегії 11.04.2011

УДК 532.74

Погорелов* В.Є., проф., д.ф.-м.н.,
Дорошенко І.Ю., к.ф.-м.н., н.с.,
Борзда Т.В., студ.,
Шаблінскас В., проф.

**Вплив молекулярної кластеризації на
коливальні спектри молекул метанолу в
області валентних C-O коливань**

Зареєстровані спектри інфрачервоного поглинання молекул метанолу, ізольованих в аргонівій матриці. За допомогою програми Gaussian 03 виконано квантово-хімічні розрахунки просторової будови та коливальних спектрів різних кластерів метанолу. Досліджено механізми формування смуги поглинання, що відповідає валентним коливанням C-O зв'язку. Запропоновано експериментальний метод, який дозволяє вимірювати внутрішній діаметр вуглецевих нанотрубок.

Ключові слова: метанол, кластери, квантово-хімічне моделювання, інфрачервона Фур'є-спектроскопія.

*E-mail: pvyu@ukr.net

Рідини з міжмолекулярними водневими зв'язками мають величезне значення в хімії і біохімії, починаючи від унікальних властивостей води і закінчуючи їх роллю у формуванні структури біомолекул. Метиловий спирт (CH_3OH) - це найпростіша органічна сполука, здатна до утворення водневого зв'язку. Таким чином, кластер метанолу може слугувати простою, але водночас реалістичною моделлю для дослідження структури воднево-зв'язаних агрегатів та їх динаміки в спиртах та інших фізіологічно важливих сполуках в конденсованому стані. Отже, немає нічого дивного в тому, що протягом останніх років воднево-зв'язані кластери метанолу викликали надзвичайно увагу науковців. Процес формування водневого зв'язку в метанолі інтенсивно досліджувався, зокрема, методами коливальної спектроскопії [1 - 6], як у конденсованій фазі [2, 3], так і в газоподібному і надкритичному станах [1, 4 - 6].

Дана робота присвячена дослідженню спектральних проявів формування водневого зв'язку між молекулами метилового спирту.

V. Ye. Pogorelov*, Dr. Sci., Prof.
I. Yu. Doroshenko, PhD, Sci. Res.,
T.V. Borzda, stud.,
V. Sablinskas, Prof.

**The influence of molecular clusterization on
vibration spectrum of methanol in the region
of stretch C-O vibrations**

FTIR spectra of methanol molecules trapped in an argon matrix were registered. Using the program set Gaussian 03 quantum-chemical calculations of space structure and vibrational spectra of different methanol clusters were made. The mechanisms of the formation of the absorption band corresponding to the C-O stretch vibrations were investigated. A new experimental method for the measurements of the inner diameter of carbon nanotubes was suggested.

Key Words: methanol, clusters, quantum-chemical simulation, FTIR-spectroscopy.

Для цього було обрано метод матричної ізоляції, ідея якого полягає в тому, щоб відділити молекули речовини, що досліджується, одну від одної інертним розчинником. Очікується, що подібні експерименти допоможуть відслідкувати процес поступового формування молекулярних кластерів різного розміру з окремих молекул метилового спирту і таким чином змодельовати структурні перетворення, які відбуваються при фазовому переході від газу до рідкого стану в спиртах.

Методика експерименту

Рідкий метанол (ступінь чистоти > 99.9) додатково витримувався протягом 48 годин на молекулярних сітках (рівень 3A) з метою очистки від присутніх у ньому молекул води. Перед приготування сумішей для матричної ізоляції підготовлений метиловий спирт було дегазовано методом багаторазового повторення циклу замороження, відкачки та розморожування зразка на стандартній вакуумній установці.

Зразки для матричної ізоляції готувалися шляхом змішування метилового спирту з

аргоном на вакуумній установці. Співвідношення між кількістю молекул спирту і аргону вимірювалось з використанням стандартного манометричного обладнання. Це співвідношення становило 1:1000. Отримана суміш газів напильовалась на охолоджене до 10 K віконце (CsI) у гелієвому кріостаті замкненого циклу (Laybold-Hareus RW2). Потік газу в кріостаті контролювався за допомогою голкового клапану. Швидкість напильовання становила приблизно 2 молі суміші за годину. Така швидкість дозволяє отримати частково кристалізовану аргонову матрицю, необхідну для запланованого експерименту.

Фур'є спектри інфрачервоного поглинання реєструвалися за допомогою вакуумного FTIR-спектрометра IFS 113 виробництва Bruker. Спектри отримані в діапазоні частот від 4000 cm^{-1} до 600 cm^{-1} з роздільною здатністю 1 cm^{-1} . З метою збільшення відношення сигнал – шум кожний спектр знімався як усереднення 128 сканів. Спектри реєструвались при різних температурах від 10 K до 50 K з кроком 5 K.

Спектр інфрачервоного поглинання багаточислових вуглецевих нанотрубок серії 651A реєструвався за допомогою Фур'є-спектрометра Vertex-70 фірми Bruker для реєстрації Фур'є-спектрів з роздільною здатністю 4 cm^{-1} в частотному діапазоні $500 - 5000\text{ cm}^{-1}$.

Комп'ютерне моделювання

Для інтерпретації отриманих експериментальних спектрів були виконані квантово-хімічні розрахунки оптимальної просторової структури і коливальних спектрів різних кластерів метанолу. Моделювання виконувалось за допомогою програмного пакету Gaussian 03 в наближенні B3LYP з використанням базису 6-31 G (d-p). Розрахунки оптимальної геометрії молекули метанолу проводились з використанням симетрії C_s . Згідно з результатами розрахунків, кластери, що складаються з трьох і більше молекул метанолу, мають циклічну форму. Це корелює з літературними даними, які вказують на енергетичну перевагу циклічних структур в порівнянні з лінійними кластерами. Параметри оптимізованої просторової структури використовувались для розрахунку спектрів інфрачервоного поглинання окремої молекули метанолу (мономера), а також воднево-зв'язаних

кластерів, що складаються з двох, трьох, чотирьох і п'яти молекул метилового спирту.

Результати та їх обговорення

Традиційно при дослідженні спектральних проявів формування водневого зв'язку в спиртах головна увага приділяється області валентних коливань гідроксильної групи ($3000 - 3800\text{ cm}^{-1}$), оскільки саме ця група бере безпосередню участь у формуванні водневого зв'язку. Як відомо ще з 1930-х років, зменшення частоти валентного коливання O-H є індикатором присутності і сили водневого зв'язку. Але процес кластеризації впливає і на інші спектральні області, наприклад, на область валентних C-O коливань ($1000-1100\text{ cm}^{-1}$), де з виникненням водневого зв'язку спостерігається розщеплення і невелике зміщення коливальних смуг.

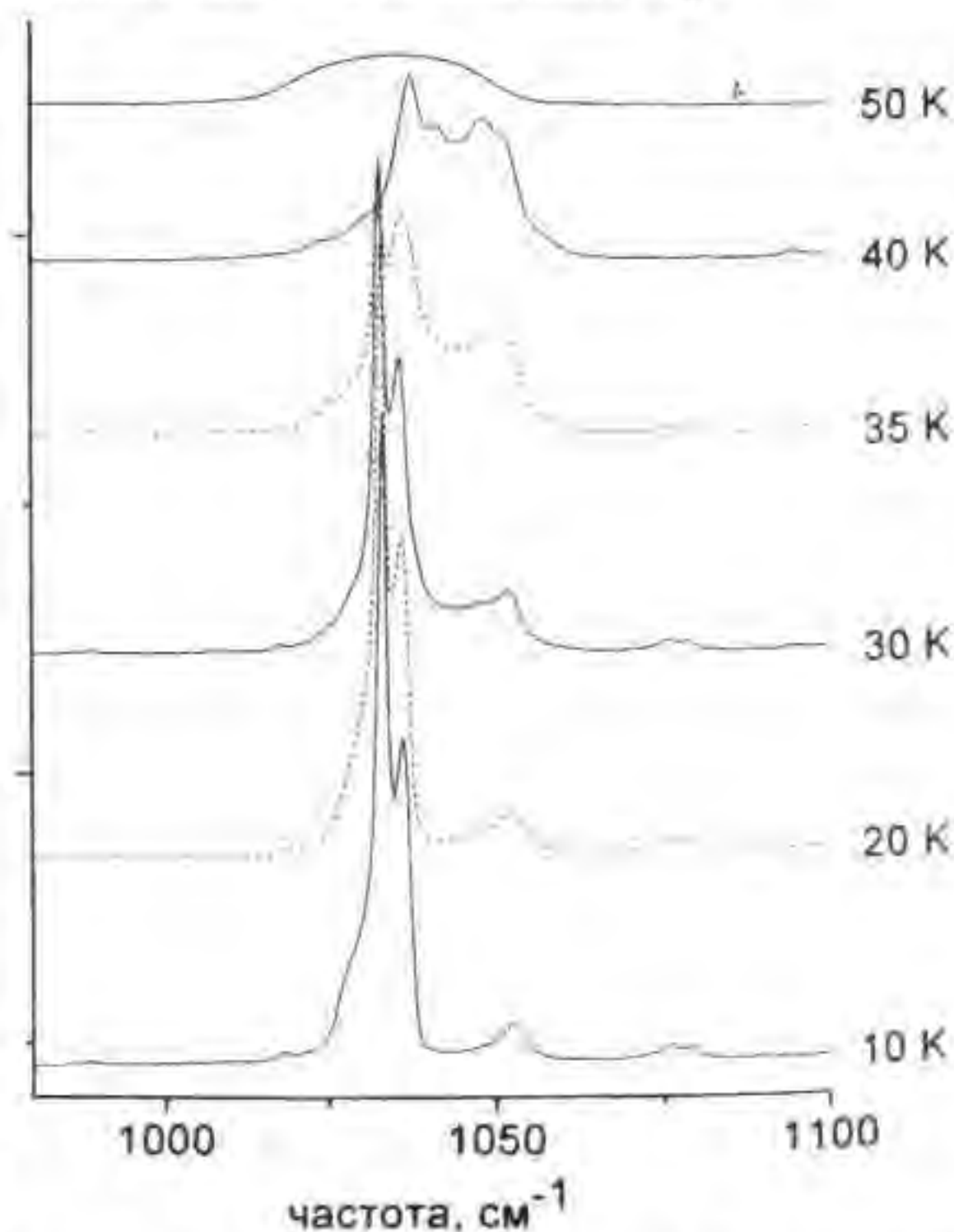


Рис. 1 Зареєстровані спектри інфрачервоного поглинання метанолу, ізолюваного в аргонній матриці, в області валентних C-O коливань

На рис. 1 представлені зареєстровані спектри інфрачервоного поглинання в області валентного C-O коливання. Видно, що в даній області відбуваються суттєві зміни з підвищенням температури матриці. При найнижчій температурі 10 K у цьому частотному інтервалі

реєструються дві достатньо інтенсивні вузькі (~ 2 cm^{-1}) смуги з частотами 1033 cm^{-1} і 1036 cm^{-1} . Крім того, є також дві менш інтенсивні смуги з частотами 1028 cm^{-1} і 1052 cm^{-1} , але вони дещо ширші (5 cm^{-1} і 4 cm^{-1} , відповідно). З ростом температури інтенсивність най-інтенсивнішої смуги (1033 cm^{-1}) зменшується, і при 40 K ця смуга повністю зникає. Починаючи з $30\text{-}35 \text{ K}$ поступово з'являються нові смуги з частотами 1041 cm^{-1} і 1048 cm^{-1} . Смуга поглинання з частотою 1036 cm^{-1} при підвищенні температури до 40 K зміщується на декілька обернених сантиметрів в область високих частот. При 50 K помітна дуже широка дифузна смуга, подібна до смуги валентного C-O коливання в спектрі інфрачервоного поглинання рідкого метанолу.

З літератури відомо [2], що смуга валентного C-O коливання ($\nu_{\text{C-O}}$) в спектрах інфрачервоного поглинання рідкого метанолу складається з декількох компонентів, причому високочастотні компоненти цієї смуги відносяться до коливань воднево-зв'язаних агрегатів. В декількох роботах, присвячених вивченню воднево-зв'язаних кластерів метанолу, показано, що формування водневого зв'язку призводить до зсуву частоти коливань $\nu_{\text{C-O}}$ у високочастотну область відносно смуги мономера з частотою 1033 cm^{-1} . У випадку димера спостерігається розщеплення смуги, причому компонента, що відповідає коливанням молекули акцептора протона, зсувається в низькочастотну область, а компонента, що відповідає коливанням донора протона – у високочастотну. Такий результат можна пояснити тим фактом, що відстань між атомами C і O при утворенні водневого зв'язку для молекули акцептора протона збільшується, а для донора протона – зменшується. Для кластерів розміру $n \geq 3$ смуга розщеплюється відповідно на n компонентів, які поступово зміщуються у високочастотну область.

Аналогічні результати дає і квантово-хімічне моделювання. На рис. 2 приведені розраховані спектри інфрачервоного поглинання різних кластерів метанолу в діапазоні частот $950\text{-}1300 \text{ cm}^{-1}$. Згідно виконаних розрахунків, частота коливань $\nu_{\text{C-O}}$ мономера становить 1048 cm^{-1} , в димері ця смуга розщеплюється на дві: смуга з частотою 1040 cm^{-1} відповідає коливанням гідроксильної групи тієї молекули,

яка є акцептором протона при формуванні водневого зв'язку, а смуга 1072 cm^{-1} , відповідно, належить молекулі – донору протона. Для тримера було отримані три смуги, для тетраметра – чотири, і т.д., причому відповідні смуги поступово зміщуються у високочастотний бік.

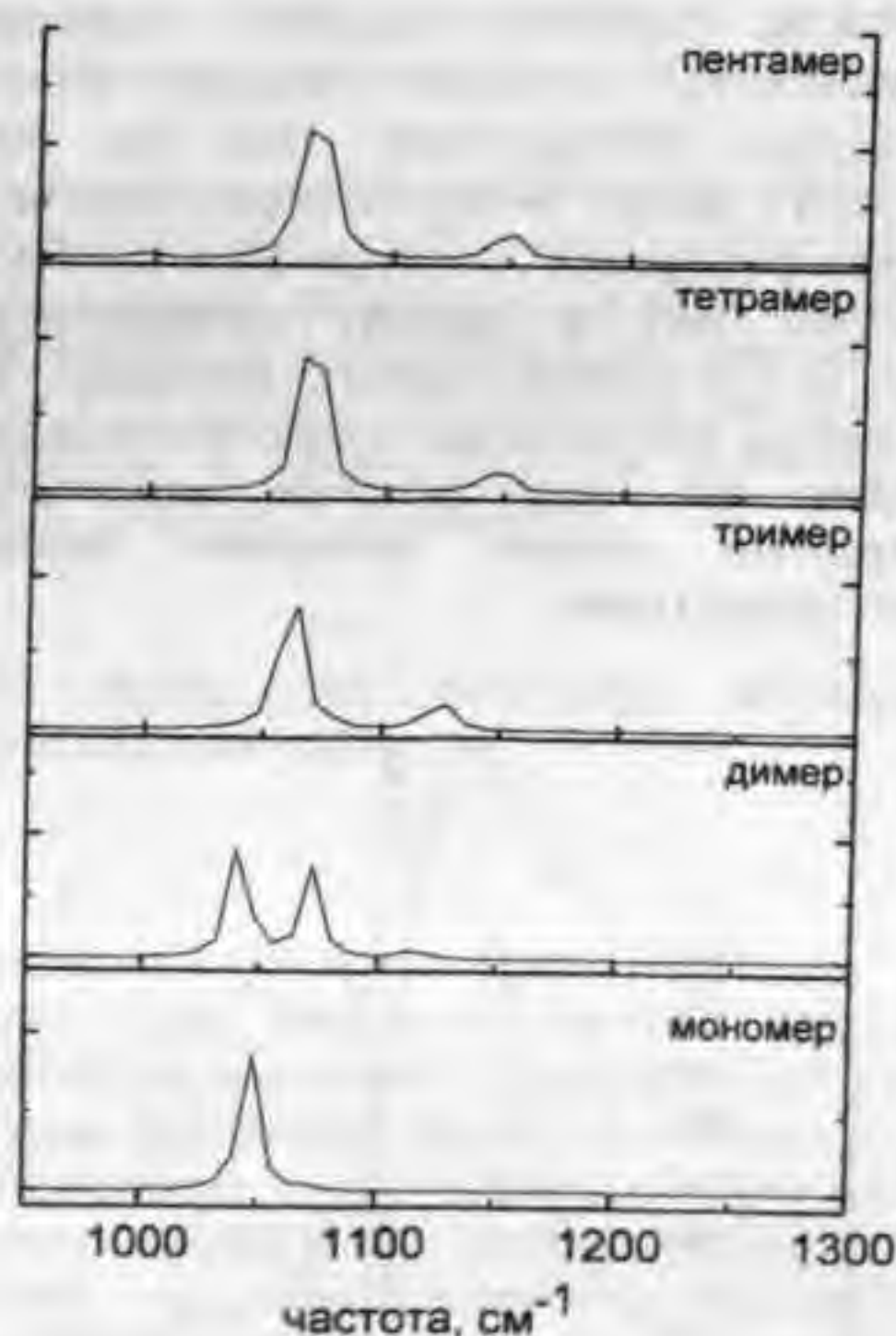


Рис. 2 Розраховані спектри інфрачервоного поглинання мономера і різних за розміром кластерів метанолу в області валентних C-O коливань

Виходячи з викладеного вище, а також враховуючи синхронність спектральних трансформацій із змінами, що відбуваються в області валентних O-H коливань, можна зробити детальне віднесення зареєстрованих смуг інфрачервоного поглинання. Не викликає ніяких сумнівів, що смуга з частотою 1033 cm^{-1} обумовлена коливаннями C-O зв'язку в мономері, смуги з частотами 1028 cm^{-1} і 1052 cm^{-1} потрібно пов'язувати з димером. Смуга 1036 cm^{-1} відноситься до коливань циклічного тримера, а дещо зміщені в бік високих частот смуги, які з'являються при температурах вище 35 K , потрібно відносити до кластерів, що

складаються з чотирьох і більше молекул метанолу.

Отже, як показує аналіз трансформацій зареєстрованих спектрів в області валентних С-О коливань, при температурі 10 К в зразку в найбільшій кількості присутні мономери, в дещо меншій – димери і тримери молекул метанолу. При підвищенні температури і поступовому руйнуванні матриці кількість мономерів знижується, а кластерів більшого розміру, відповідно, збільшується. Вже при 40 К мономери і димери зникають, перетворюючись в кластери розміром ≥ 4 , а при 50 К ми бачимо практично таку ж широку неструктуровану смугу, як і в спектрі рідкого метанолу. Як і очікувалось, такі висновки повністю співпадають з тими, що були зроблені при аналізі спектральної області валентних коливань гідроксильної групи.

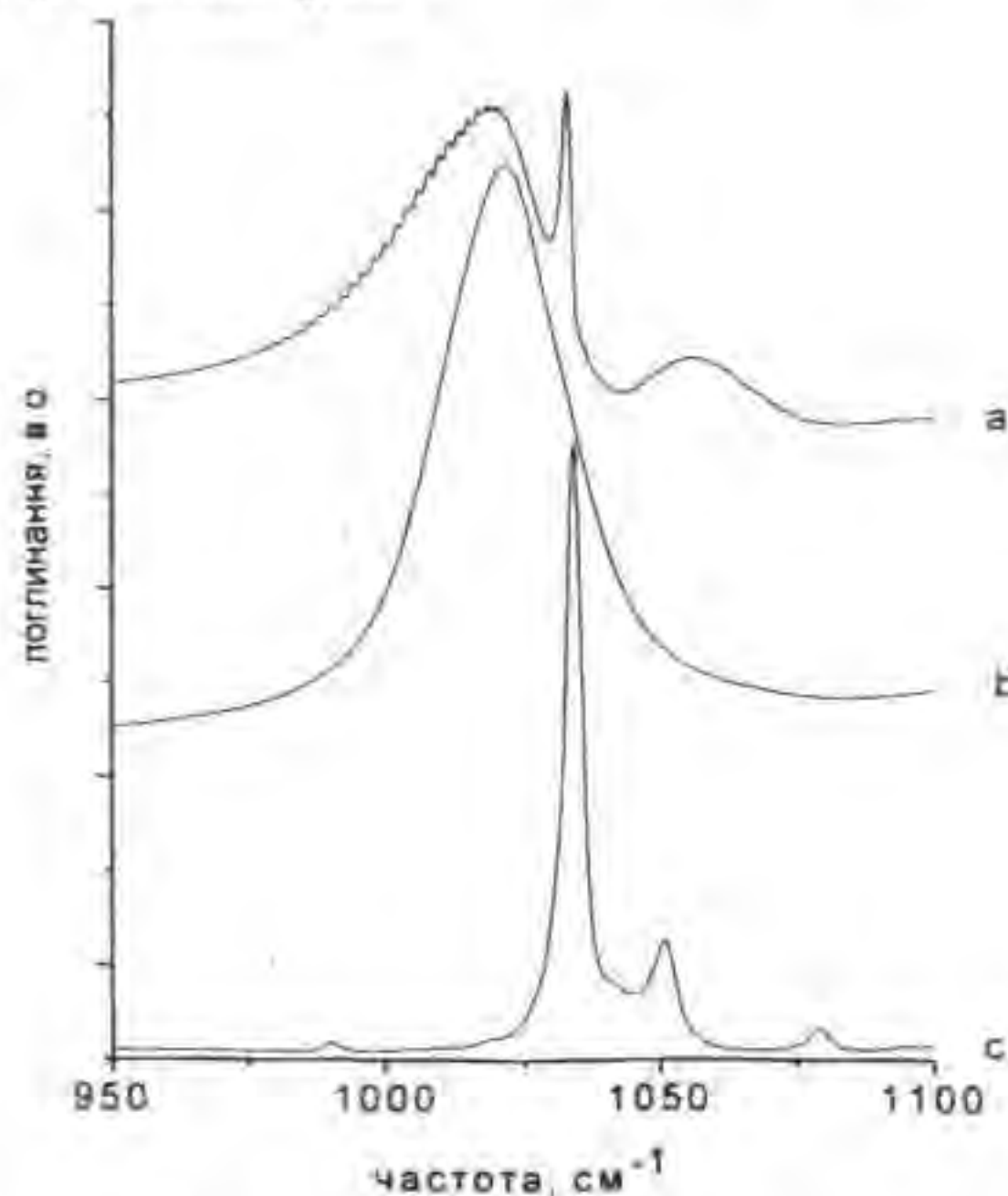


Рис. 3 Зареєстровані спектри ІЧ поглинання метанолу, змішаного з багатостіворними нанотрубками (а), чистого метанолу в рідкому стані (б) і метанолу, ізольованого в аргонній матриці при температурі 10 К (с) в частотній області валентних коливань С-О зв'язку

Метод вимірювання внутрішнього діаметра вуглецевих нанотрубок

На рис. 3 (крива а) представлено експериментально зареєстрований ІЧ спектр суміші

рідкого метанолу з багатостіворними вуглецевими нанотрубками в спектральному діапазоні 950 – 1100 cm^{-1} . Для порівняння наведено також спектри чистого рідкого метанолу (крива б) і мономера метанолу, ізольованого в аргонній матриці (крива с) в цій області.

Як видно з рис. 3, в спектрі суміші метанолу з нанотрубками, крім широкої смуги, характерної для рідкого спирту, є також смуга поглинання мономера з частотою 1033 cm^{-1} . Це може означати, що мономер метилового спирту знаходиться всередині нанотрубки, розміри внутрішнього діаметру якої дозволяють розміщення там лише однієї молекули метилового спирту. Так чином, ми пропонуємо розглядати проведений експеримент як засіб для вимірювання внутрішнього діаметру вуглецевих нанотрубок.

Список використаних джерел

1. Tikhvatullin F.H., Pogorelov V.E., Jumabaev A., Hushvaktov H., Absanov A., Shaymanov A. Aggregation of molecules in liquid methyl alcohol and its solutions: Raman spectra and ab initio calculations // J. Mol. Struct. – 2008. – 881. – P. 52-56.
2. Pogorelov V., Bulavin L., Doroshenko I., Fesjun, Veretennikov O. The structure of liquid alcohols and the temperature dependence of vibrational bandwidth // J. Mol. Struct. – 2004. – 708. – P. 61-65.
3. Bulgarevich D., Horikawa Y., Sako T. ATR FR-IR studies of supercritical methanol // J. Supercrit. Fluids. – 2008. – 46. – P. 206-210.
4. Wu X., Chen Y., Yamaguchi T. Hydrogen bonding in methanol studied by infrared spectroscopy // J. Mol. Spectrosc. – 2007. – 246. – P. 187-191.
5. Lees R.M., Mollabashi M., Xu L.-H., Lock M., Winnewisser B.P. Variations in the torsion-vibration energy structure of CH_3OH from fundamental, overtone, and combinational bands of ν_7 , ν_8 and ν_{11} CH_3 rocking and CO stretching modes // Phys. Rev. A. – 2002. – 65. – P. 042511-1-7.
6. Bertie J.E., Zhang S.L. Infrared intensities of liquids XXI: Integrated absorption intensities of CH_3OH , CH_3OD , CD_3OH and CD_3OD and dipole moment derivatives of methanol // J. Mol. Struct. – 1997. – 413-414. – P. 333-363.

Надійшла до редколегії 12.02.2011

УДК 538.9

Храпатий С.В., канд. ф.-м. наук

Фотоелектричні властивості структур $\text{Ag/n-GaAs/n}^+-\text{GaAs/In}$

Виміряно темнові вольт-амперні характеристики структур $\text{Ag/n-GaAs/n}^+-\text{GaAs/In}$ з n-GaAs епітаксialьним шаром легованим різними типами домішок. Отримані результати пояснено в моделі двох потенціальних бар'єрів. Спектри фотоЕРС структур з епітаксialьними шарами GaAs, легованими киснем, телуrom та оловом досліджені при 80 та 290 К. Показано, що внутрішнє електричне поле n⁺-n переходу збільшує фотовідгуку структури за рахунок зменшення впливу поверхневої рекомбінації.

Ключові слова: гетероструктури, поглинання, спектроскопія, сонячні елементи

*E-mail: khrapatiysv@ukr.net

Вступ

В наш час виникає потреба в дешевій енергії, тому розробка і вдосконалення сонячних елементів стає все більш актуальним питанням. Одна з основних проблем, яка постає перед розробниками, полягає в тому, щоб збільшити їх коефіцієнт корисної дії. Сонячні елементи мають перспективи щодо збільшення коефіцієнту корисної дії завдяки оптимізації структур та поліпшення рекомбінаційних характеристик. Максимальна величина коефіцієнту корисної дії сонячних елементів на основі одного матеріалу складає 31 % [1]. Одним з найбільш придатних матеріалів для фотоперетворювачів є GaAs ширина забороненої зони якого складає 1.45 eV [2]. Кілька шляхів було запропоновано для того, щоб збільшити ефективність сонячних елементів – зменшення оптичних втрат, зменшення впливу поверхневої рекомбінації, розширення області спектральної фоточутливості в інфрачервону область спектра, застосування гетероструктур. Суттєвого зростання ККД досягнуто в каскадних сонячних елементах, які виготовляють на основі багат шарових гетероструктур з двома і більше р-п-переходами в матеріалах із забороненими зонами різної ширини [3-10].

Khrapatiy, PhD

Photoelectric properties of $\text{Ag/n-GaAs/n}^+-\text{GaAs/In}$ structures

The dark-current voltage characteristics were measured for $\text{Ag/n-GaAs/n}^+-\text{GaAs/In}$ structures with n-GaAs epitaxy layer with a different type of impurity. Obtained results explained by model of two opposite potential barriers. The photo-emf spectra of structures with n-GaAs epitaxy layer doped by oxygen, tellurium or Sn were studied at 293 K and 80 K. It was shown the inner electric field of n⁺-n junction can increase the value of photoresponse in epitaxy layer and decrease the influence of surface recombination.

Key Words: heterostructures, absorption, spectroscopy, solar cells.

Проте, для створення ефективних сонячних елементів треба досконало вивчити характер протікання нерівноважних процесів в бар'єрних структурах. Інформативним методом їх вивчення є дослідження спектральних розподілів фоточутливості при різних режимах ввімкнення в поєднанні з вимірюванням електричних характеристик структур.

Мета даної роботи – вивчити фотоелектричні властивості n⁺-n структур на основі GaAs з епітаксialьними шарами, легованими різними домішками з n-типом провідності. В даній роботі були виміряні вольт-амперні характеристика (ВАХ), спектральні розподіли фото-ЕРС при різних температурах.

Матеріали і методи

За допомогою поршневої касети осадження активних епітаксialьних шарів GaAs на GaAs підкладках проводили з обмеженого об'єму розчину-розплаву примусовим охолодженням (неізотермічна рідинна епітаксія). Для забезпечення зростання якісних епітаксialьних шарів був використаний метод рідинної епітаксії GaAs за розвинутою технологією. Відмінність використаної технології полягає в тому, що основний розчин-розплав, з якого вирощується епітаксialьний шар, подається у вигляді дискретних порцій. Для проведення процесу

система (розплав $Ga + GaAs + X$) охолоджується на вибрану $\Delta T = T_0 - T_1$ після чого із загального розплаву P_0 відділяється порція P_1 і подається на підкладку. Далі в ході охолодження системи досягається таке ж $\Delta T = T_1 - T_2$, потім відділяється наступна порція P_2 з розчину-розплаву і подається поверх P_1 і т.д.

Інтервали ΔT і об'єм кожної порції вибирають так, щоб до набору наступного градієнта ΔT процес зростання шару був завершений. Такий прийом дозволяє забезпечити стаціонарний фронт кристалізації, і як би зростання кожного мікрошару здійснюватиметься із змінною швидкістю, тобто з убиваючою. В результаті концентрація дефектів кожного подальшого шару зменшуватиметься і підвищуватиметься досконалість структури одержуваних шарів.

Вибрані ΔT в інтервалі $3-5^\circ C$ при початковій температурі кристалізації $815-830^\circ C$ дозволили отримати епітаксіальні шари $GaAs$ з 4-8 мікрошарів при товщині 2-3 мкм на підкладці з $GaAs$ електронного типу товщиною 400 мкм. Концентрація носіїв в підкладці складає 10^{18} см^{-3} , а в епітаксіальній плівці 10^{15} см^{-3} . Епітаксіальні плівки легувались домішками кисню (структура А), телуру (структура Б) та олова (структура С.) Для фотоелектричних вимірювань були сформовані електричні контакти до $GaAs$ підкладки (плівка Sn) та епітаксіального шару $GaAs$ (плівка Ag) Схема фоточутливої структури $Ag/n-GaAs/n^+-GaAs/In$ наведена на рис. 1.

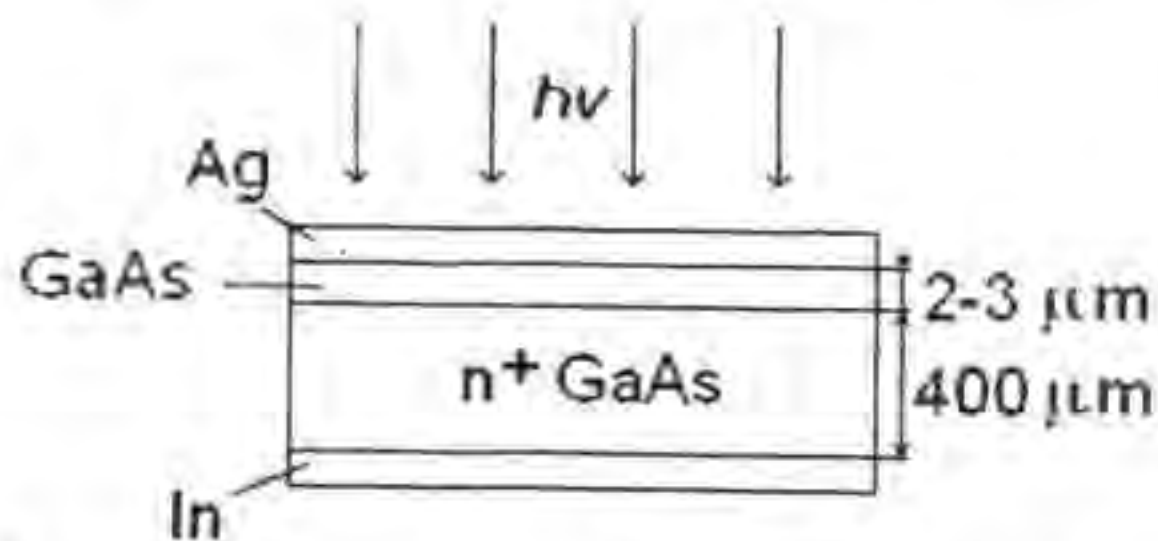


Рис. 1. Схема фоточутливої структури $Ag/n-GaAs/n^+-GaAs/In$.

Дослідження спектральних залежностей поперечної фото-ЕРС проводились на інфрачервоному спектрометрі при збудженні квантами світла з енергією $h\nu$ в діапазоні від 1.2 eV до 2.4 eV при падінні збуджувального випромінювання нормально до поверхні епітаксіальних шарів. Коефіцієнт пропускання металевої плівки Ag складав 50 %. Для вимірювання сигналу фото-ЕРС при

температурах 80 та 290 К використовувався підсилювач напруги та стандартна техніка синхронного детектування на частоті 80 Гц. Отримані спектральні розподіли були приведені до сталої кількості квантів за допомогою піроектричного приймача, спектральна чутливість якого не залежала від довжини хвилі.

Результати та обговорення

Форма отриманої кривої ВАХ (рис.2) свідчить про наявність принаймні двох потенціальних бар'єрів в досліджуваних структурах.

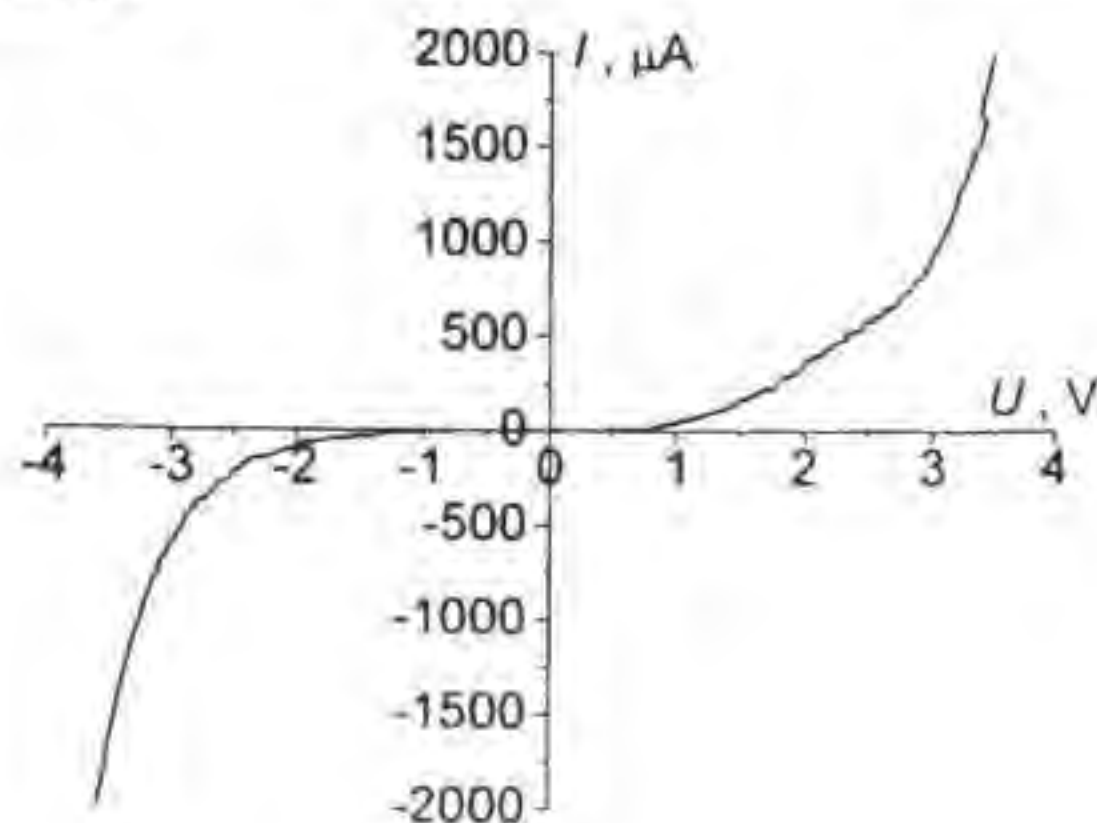


Рис. 2. Вольт-амперна характеристика структури $Ag/n-GaAs/n^+-GaAs/In$ за відсутності освітлення.

Одним з бар'єрів очевидно є перехід $n-GaAs/n^+-GaAs$, а другим є бар'єр Шотткі $Ag/n-GaAs$. Враховуючи рівень легування підкладки $GaAs$ можна стверджувати, що потенціальним бар'єру контакту In/n^+-GaAs можна знехтувати у порівнянні з іншими бар'єрами. В результаті, можна запропонувати енергетичну діаграму структури, яка наведена на рис.3.

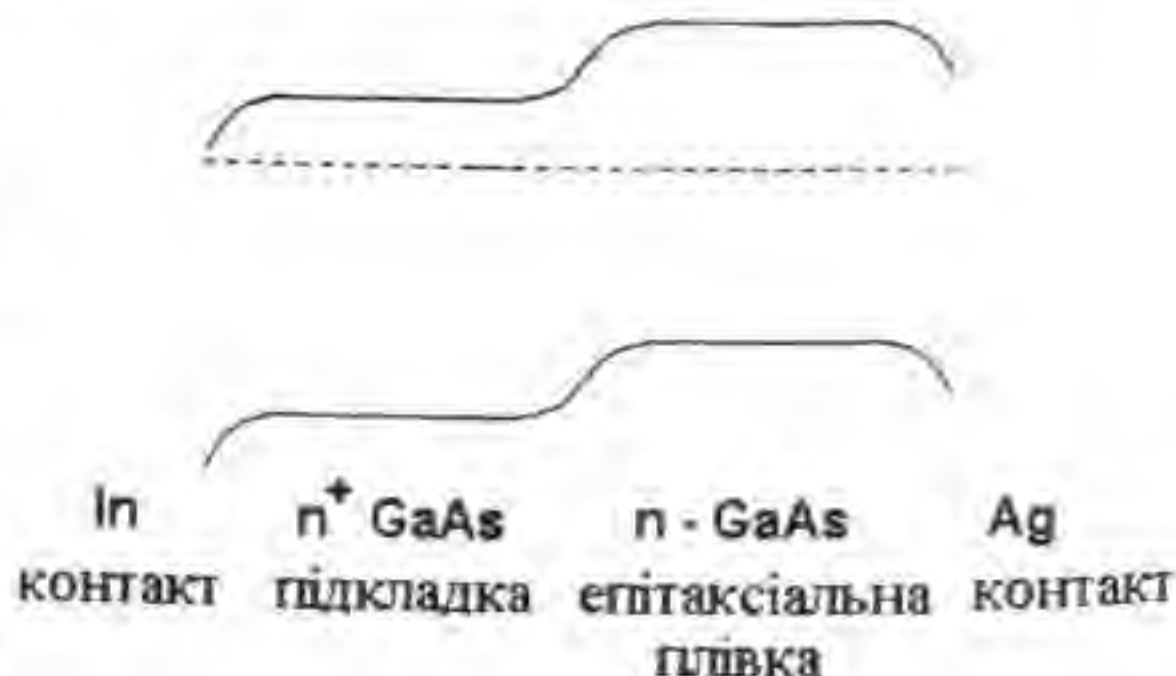


Рис. 3. Енергетична діаграма структури Ag/p-GaAs/n⁺-GaAs/In.

Відомо, що наявність потенціальних бар'єрів є необхідною умовою генерації фото-ЕРС. На рис. 4 наведено нормовані спектри фото-ЕРС зразків А (крива 1), В (крива 2) та С (крива 3). Виявилось, що форма спектральних розподілів фото-ЕРС в досліджуваних структурах істотно відрізнялась. Причиною цього насамперед є різні величини внутрішніх потенціальних бар'єрів (градієнти електростатичного потенціалу), які визначають форму спектрального розподілу фото-ЕРС структур. Так, в зразках А, В внутрішні електричні поля потенціальних бар'єрів мають однаковий напрямок, що сприяє дрейфу нерівноважних носіїв заряду в напрямку від освітленої поверхні, а в зразку С, навпаки, електричні поля бар'єрів мають протилежний напрямок. Тому в першому випадку ми маємо наростання в короткохвильову область спектра, а в другому навпаки – спадання при збільшенні енергії квантів збуджувального випромінювання.

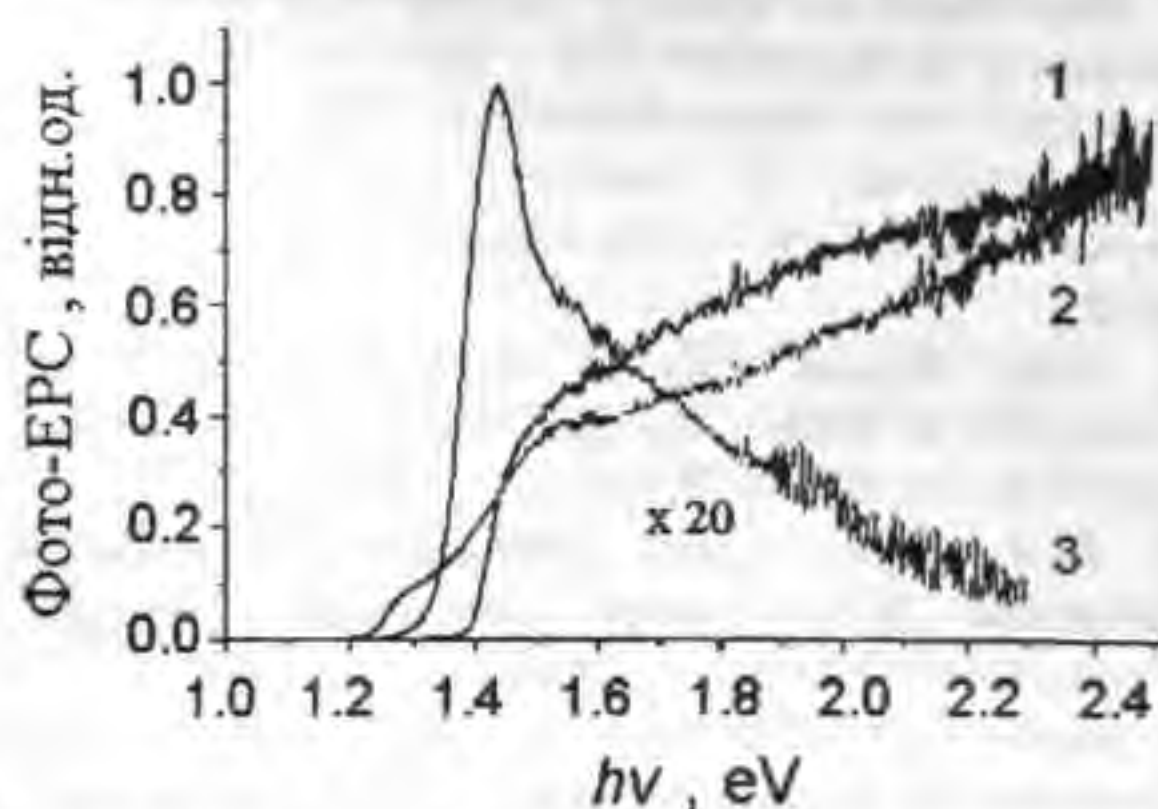


Рис. 4. Нормовані спектри фото-ЕРС зразків А (крива 1), В (крива 2) та С (крива 3).

Гранична енергія квантів, при якій спостерігалась генерація фото-ЕРС в області прозорості монокристалічного GaAs, зумовлена оптичними переходами за участі домішкових станів. При подальшому збільшенні $h\nu$ до 1.45 eV внесок у сигнал фото-ЕРС обумовлений нерівноважними електрон-дірковими парами, фотозбудженими внаслідок зон-зонних переходів в GaAs. Наростання в довгохвильовій області спектра, де поглинання слабке ($\alpha d \sim 1$) зумовлене збільшенням коефіцієнту поглинання прямозонного матеріалу. При подальшому збільшенні енергії квантів у фотодіодах на основі р-п-переходу мало б спостерігатись насичення або спадання за рахунок поверхневої

рекомбінації (сигнал фоточутливості не залежить від $h\nu$). Причиною цього є те, із збільшенням $h\nu$ зростає коефіцієнт поглинання $\alpha(h\nu)$ і все більша частина випромінювання поглинається в тонкому приповерхневому шарі, товщину якого наближено можна оцінити як $1/\alpha$. Як правило, поверхня напівпровідника характеризується збільшеним (у порівнянні з об'ємом) темпом рекомбінації нерівноважних носіїв заряду, що обумовлює різкий спад фоточутливості в короткохвильовій області спектра, що зменшує коефіцієнт корисної дії сонячних елементів. Зменшення темпу поверхневої рекомбінації може бути реалізовано створенням внутрішніх електричних полів поблизу фоточутливої області р-п переходів та гетеропереходів [3]. Напрямок поля повинен бути таким, що сприяє дрейфу нерівноважних носіїв заряду в напрямку від поверхні та просторовому розділенню фотозбуджених електрон-діркових пар.

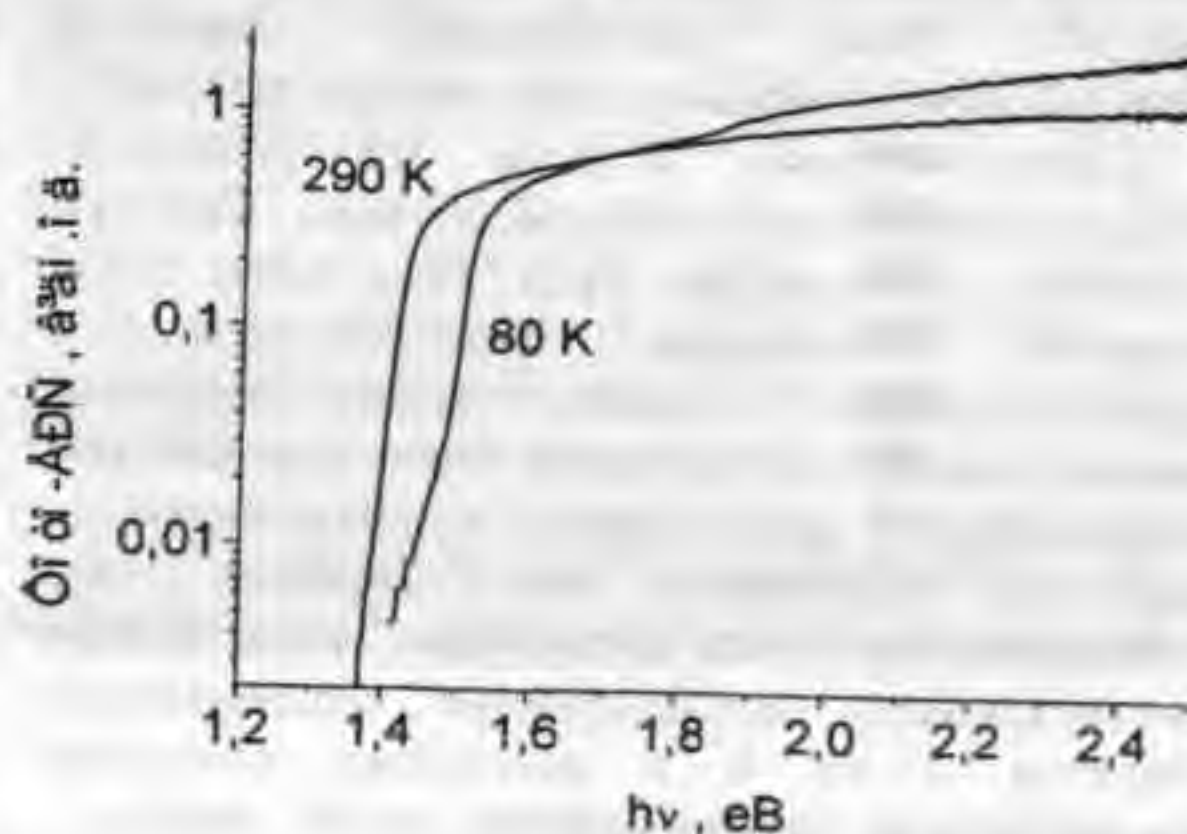


Рис. 5. Спектральні залежності фото-ЕРС при $T = 290$ K та $T = 80$ K зразка 2.

На спектрах фото-ЕРС для зразків А та В має місце наростання в короткохвильовій області ($h\nu > 1.6$ eV). Це можна пояснити існуванням градієнту електростатичного потенціалу в приповерхневому шарі, за рахунок якого темп рекомбінації в цьому шарі менший у порівнянні з іншими областями структури. Для порівняння розглянемо спектр фото-ЕРС зразка С, який відрізняється тим, що містить нелеговану підкладку GaAs – це власний напівпровідник з низкою концентрацією рівноважних носіїв заряду $n \sim 5 \cdot 10^{13}$. Іншими словами, на відміну від зразків А та В, структура С має і-п-перехід з меншою величиною потенціального бар'єру (градієнту

електростатичного потенціалу). Як наслідок, величина сигналу фото-ЕРС даної структури була суттєво менша, а спад в короткохвильовій області найбільший внаслідок суттєвого впливу приповерхневої рекомбінації. Причиною того є відсутність дрейфу носіїв в напрямку від поверхні, що реалізувалось в структурах А та Б з більшими внутрішніми полями.

Отже, для підвищення ККД сонячних елементів потрібно: по-перше, узгодити форму спектральної чутливості з формою спектра сонячного випромінювання, а по-друге, наблизити квантову ефективність фотоприймача якомога ближче до 100%. Це можна зробити, зменшивши коефіцієнт відбиття, а також звівши швидкість поверхневої рекомбінації до нуля. Останнього можна досягти утворенням потенціальних полів у приповерхневому шарі.

Важливою характеристикою фотоприймачів є залежність їх фоточутливості від температури. Було досліджено форму спектрів фото-ЕРС при $T = 290$ К та $T = 80$ К (рис.2). При охолодженні структур спостерігалось зміщення края спектра фото-ЕРС в короткохвильову область. Це зумовлено збільшенням ширини забороненої зони GaAs при зниженні температури. Крім того, мало місце відносне збільшення фоточутливості в короткохвильовій області. Такий результат можна пояснити зменшенням темпу рекомбінації нерівноважних носіїв заряду в епітаксialьному шарі при охолодженні, що є типовим і для поверхнево-бар'єрних фотодіодів. Таким чином, фоточутливість досліджуваних фоточутливих структур А та Б в основному зумовлена рекомбінацією нерівноважних носіїв заряду в епітаксialьному шарі *n-GaAs*.

Висновки

Досліджено форму вольт-амперних характеристик структур *Ag/n-GaAs/n⁺-GaAs/In* в темноті та при освітленні. Виявлено істотну нелінійність отриманих характеристик. Проведено дослідження форми спектральних залежностей квантової ефективності структур з різними епітаксialьними шарами. Виявилось, що в зразках з більшою величиною квантової ефективності спостерігається наростання в короткохвильовій області. Порівняно спектральні

залежностей фото-ЕРС зразків при температурах 80 та 290 К. Встановлено, що в спектральному інтервалі від 1.2 до 2.5 еВ відбувається збільшення фоточутливості при охолодженні.

Створення n^+-n -переходу в приповерхневому шарі збільшує величину квантової ефективності структур. Таке збільшення зумовлено зменшенням впливу поверхневої рекомбінації.

Фоточутливість досліджуваних зразків в основному зумовлена рекомбінацією нерівноважних носіїв заряду в епітаксialьному шарі *n-GaAs*.

Список використаних джерел

1. W. Shockley, H.J. Queisser, *J.Appl.Phys.* **32** (1961) 510.
2. Шокли В., Теория электронных полупроводников, ИЛ, М. 1953.
3. В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
4. Фаренбрух А., Бьюб Р. Солнечные элементы: Теория и эксперимент/ Пер. с англ. под ред. М.М. Колтуна. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 280с.
5. А. Милнс, Д. Фойхт Гетеропереходы и переходы металл-полупроводник. М.: Мир, 1975. – 432с.
6. Peter Würfel. Physics of Solar Cells From Principles to New Concepts WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, KGaA, Weinheim, 2005.
7. M.A. Green Third Generation Photovoltaics Advanced Solar Energy Conversion, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
8. Bimberg D., Grudmann M., and Ledentsov N.N. Quantum Dot Heterostructures. – Chichester: Willey, 1999 – 303 p.
9. Q. Shao, A. A. Balandin, A. I. Fedoseyev, M. Turowski. Intermediate-band solar cells based on quantum dot supracrystals // *Appl. Phys. Lett.* 2007. – 91 – P. 163503(3).
10. M.Y. Levy, C. Honsberg. Solar cell with an intermediate band of finite width // *Phys.Rev.B.* 2008. – 78 – 165122 (6).

Надійшла до редколегії 12.04.11

УДК 541.49:539.2

Штомпель В.І., д.х.н.,
Саса Б.С., асп.

Формування наноструктур в об'ємі поліелектролітних комплексів на основі Na солі карбоксиметилцелюлози та полі-4-винілпіридинхлориду

Проведена ідентифікація і досліджена структура та теплофізичні властивості стехіометричних поліелектролітних комплексів на основі сильних аніонного і катіонного поліелектролітів. За допомогою методу дифракції рентгенівських променів встановлено існування шаристих наноструктур в об'ємі поліелектролітних комплексів, сформованих протилежно зарядженими макромолекулами поліелектролітів, із бреггівською відстанню між шарами макромолекул рівною 2,0 нм і ефективним розміром кристалів близько 4 нм. Показано, що поліелектролітні комплекси, отримані на основі аморфних аніонного і катіонного поліелектролітів із різним мольним співвідношенням, мають квазікристалічну структуру. Встановлено, що концентраційна залежність температурних переходів розкладання електростатично зв'язаних макромолекул і плавлення їх кристалітів в поліелектролітних комплексах має екстремальний характер.

Ключові слова: наноструктура,
поліелектроліт, рентгенівська дифракція

*E-mail: vishtomp@bigmir.net, sasa_b@ukr.net

Вступ

В останні роки одним із основних напрямів фізики полімерів є вивчення структури і властивостей поліелектролітних комплексів (ПЕК), отриманих на основі слабких (нестехіометричні ПЕК) або сильних (стехіометричні ПЕК) аніонного і катіонного поліелектролітів (ПЕ) [1]. Така зацікавленість цими полімерними системами обумовлена тим, що вони мають широке застосування при вирішенні важливих практичних задач у промисловості, екології, медицині та нанотехнології [1,2]. Однак незважаючи на чисельний масив публікацій, присвячених в основному дослідженню надмолекулярної структури розчинів нестехіометричних ПЕК,

V. I. Shtompel, Dr. Sci.,
Sasa B.S., PhD stud.

Formation of nanostructures in the volume of polyelectrolyte complexes based on sodium salt of carboxymethyl cellulose and poly-4-vinylpyridine chloride

Study of the structure and identification of stoichiometric polyelectrolyte complexes on the basis of strong anionic and cationic polyelectrolytes have been carried out. The existence in the volume of polyelectrolyte complexes of the layered nanostructures formed by oppositely charged polyelectrolyte macromolecules has been determined by X-rays diffraction. The Bragg's distance between macromolecules layers amount to 2,0 nm, and the effective size of the crystals is approximately 4 nm. A quasi-crystalline structure of polyelectrolyte complexes based on the amorphous anionic and cationic polyelectrolytes with different molar ratio has been shown. It has been determined that concentration dependence of the devitrifying temperature transition of the electrostatically bonded macromolecules and the melting temperature transition of their crystallites in polyelectrolyte complexes display the extreme character.

Key Words: nanostructure, polyelectrolyte, x-ray diffraction

питання про структуру на молекулярному рівні стехіометричних ПЕК залишається відкритим.

В зв'язку з цим, ставилось за мету дослідити структурну організацію стехіометричних ПЕК у конденсованому стані, отриманих на основі сильних аніонного і катіонного поліелектролітів.

Експериментальна частина

Для формування стехіометричних ПЕК були використані такі сильні ПЕ:

- аніонний поліелектроліт – Na-сіль карбоксиметилцелюлози (Na-KMC), ступінь заміщення протонів $-CH_2OH$ груп – 85%;
- катіонний поліелектроліт – гідрохлорид полі-4-винілпіридину (П4ВП-Cl), отримували протонуванням піридинових циклів

полі-4-винілпіридину ($MM=60000$) соляною кислотою.

Формування ПЕК виконували шляхом змішування 5%-их водних розчинів Na-КМЦ і П4ВП-СІ, взятих у заданому мольному співвідношенні (МС), при $T=95-97$ °C (температура розчинення у воді Na-КМЦ). Незалежно від МС аніонного і катіонного ПЕ, при змішуванні їх водних розчинів практично миттєво відбувалось утворення згустків, як прояв протікання процесів молекулярного «пізнавання» і самозбирання протилежно заряджених макромолекул ПЕ [3]. При витримуванні протягом двох годин при $T=60$ °C ці згустки утворювали осад, який являв собою ПЕК. Осад відмивали водою до величини $pH=6,5-6,8$ та проводили його висушування при $T=22\pm 2$ °C до постійної маси. Висушені зразки ПЕК досліджували у вигляді порошку. Мольне співвідношення Na-КМЦ і П4ВП-СІ у складі ПЕК становило 17:1, 12:1, 7:1, 3:1, 1:1, 1:4, 1:8,5 і 1:12 відповідно.

Ідентифікацію ПЕК виконували методом ІЧ-Фур'є спектроскопії із використанням ІЧ-Фур'є спектрометра Tensor 37 фірми Bruker.

Теплофізичні дослідження зразків ПЕК проводили методом диференційної сканування калориметрії (ДСК) за допомогою калориметра аналогічної конструкції з описаною в роботі [4]. Швидкість нагрівання калориметричного блоку становила $2\pm 0,1$ град./хв.

Дослідження структури (на молекулярному рівні) ПЕК виконували методом ширококутового розсіювання рентгенівських променів за допомогою дифрактометра ДРОН-4-07. Рентгенооптична схема дифрактометра виконана за методом Дебая-Шеррера (на проходження первинного пучка випромінювання через досліджуваній зразок).

Мікрогетерогенну (на нанорозмірному рівні) структуру ПЕК досліджували методом малокутового розсіювання рентгенівських променів за допомогою малокутової камери КРМ-1. Колімацію первинного пучка випромінювання виконували за методом Краткі. Геометричні параметри камери задовольняли умови «нескінченної висоти колімаційної щілини». Профілі інтенсивності нормували на величину розсіювального об'єму та фактор послаблення первинного пучка досліджуваного зразка полімера.

Усі рентгенівські дослідження проводили в CuK_{α} -випромінюванні, монохроматизованому Ni-фільтром, при $T=22\pm 2$ °C.

Результати досліджень та їх обговорення

Аналіз ІЧ-Фур'є спектрів аніонного і катіонного ПЕ та отриманих на їх основі ПЕК (рис. 1) показав, що на спектрі ПЕК, у складі якого мольна частка П4ВП-СІ становить лише 0,05 (крива 2) з'явилась смуга при $\nu=1737$ cm^{-1} , яка характерна для всіх ПЕК на основі Na-КМЦ, незалежно від типу катіонного ПЕ (гідрохлориди

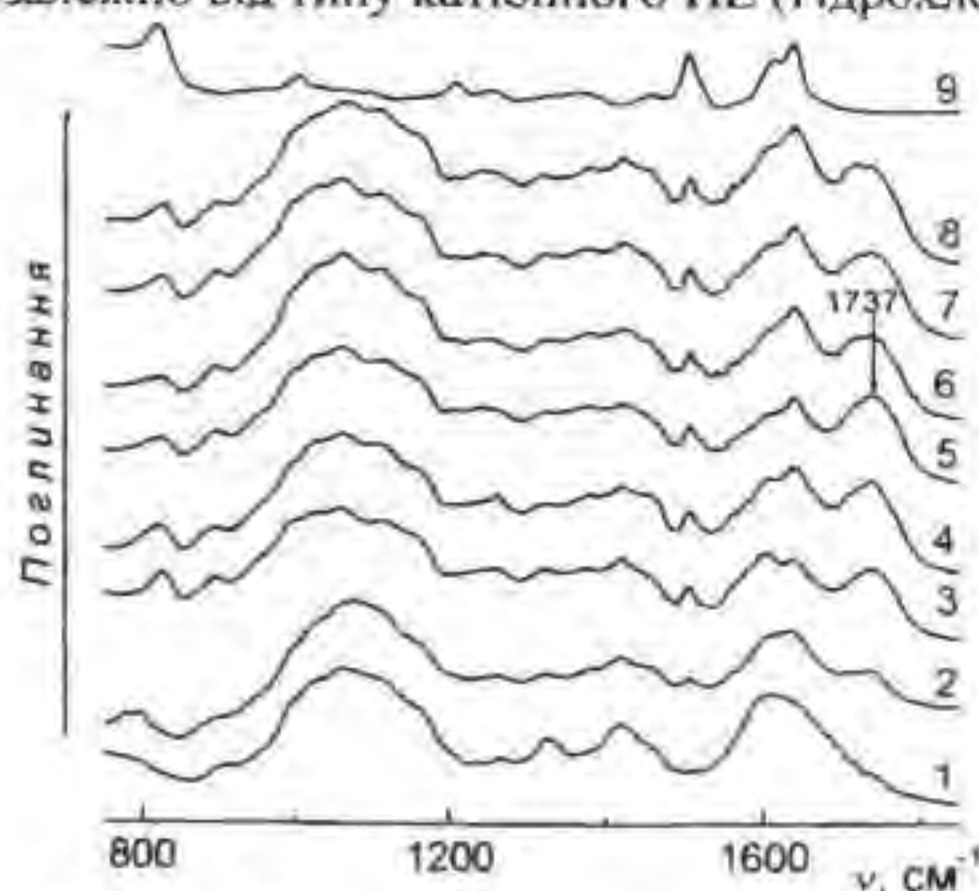


Рис. 1. ІЧ-Фур'є спектри аніонного (1) і катіонного ПЕ (9), а також ПЕК, у складі яких мольна частка П4ВП-СІ становила 0,05 (2), 0,12 (3), 0,25 (4), 0,5 (5), 0,8 (6), 0,89 (7) і 0,92 (8).

поліетиленіміну, хітозану та інші) [5,6] і інтерпретується як результат іонного обміну між аніонним і катіонним ПЕ при формуванні ПЕК із виділенням низькомолекулярної солі [6]. При поступовому зростанні мольної частки катіонного ПЕ в ПЕК інтенсивність смуги при $\nu=1737$ cm^{-1} змінюється екстремально, проходячи через максимум при еквімолярному співвідношенні протилежно заряджених ПЕ, як прояв еквііонного балансу.

В зв'язку з цим, дослідили залежність структури ПЕК від вмісту в їх складі аніонного і катіонного ПЕ. Із наведених на рис. 2 ширококутових рентгенівських дифрактограм чистих Na-КМЦ і П4ВП-СІ та ПЕК видно, що структура вихідних ПЕ і отриманих на їх основі ПЕК суттєво відрізняється. Так, у вихідному стані аніонний ПЕ характеризується ближнім порядком при трансляції в 3D-просторі як глюкозидних циклів основних макроланцюгів, так і їх метилкарбоксилатних бокових відгалужень, тобто має аморфну структуру. Про це свідчить прояв на дифрактограмі Na-КМЦ (крива 1) двох асиметричних дифракційних максимумів зі значною кутовою напівшириною (аморфних гало), кутове положення ($2\theta_{max}$) яких

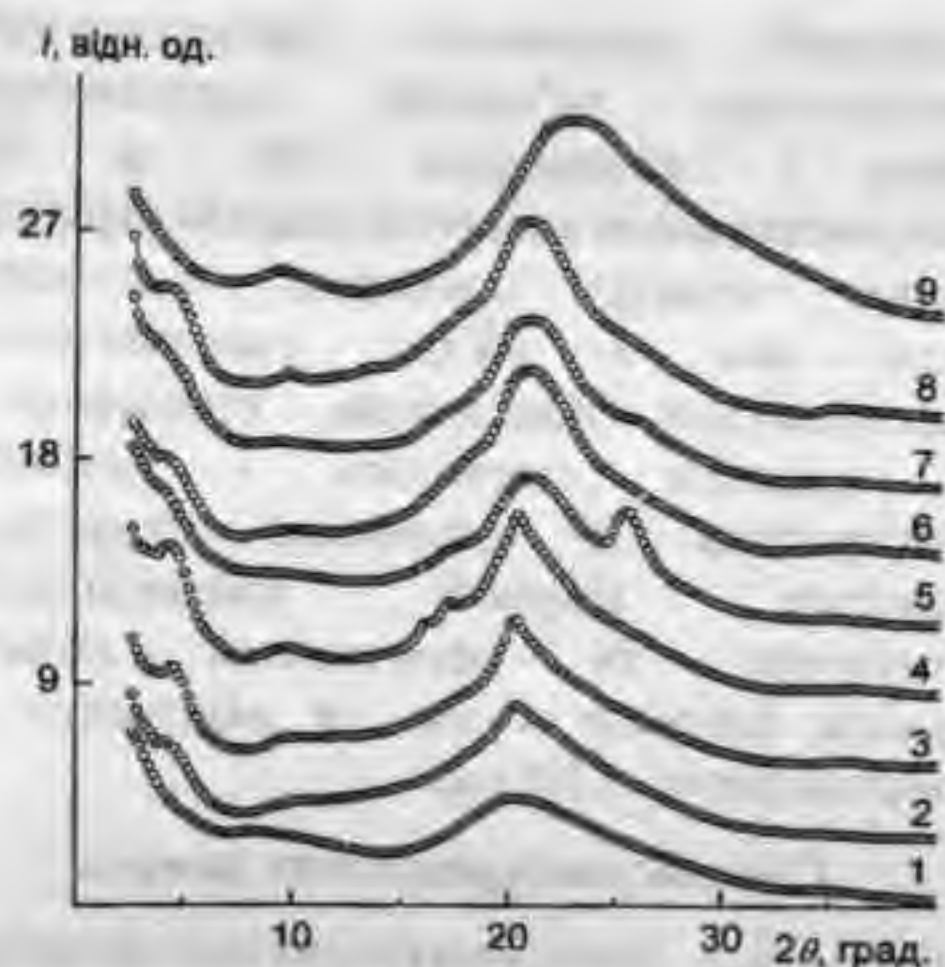


Рис. 2. Ширококутові рентгенівські дифрактограми чистих аніонного (1) і катіонного (9) ПЕ та ПЕК, у складі яких мольна частка П4ВП-СІ становить: 0,05 (2), 0,08 (3), 0,25 (4), 0,50 (5), 0,80 (6), 0,89 (7) і 0,92 (8).

становить $20,0^\circ$ і $8,7^\circ$ відповідно. Виходячи із кількості атомів (електронів) у глюкозидному циклі і їх боковому відгалуженні ($-\text{CH}_2\text{OCH}_2\text{COO}^-\text{Na}^+$), більш інтенсивне аморфне ($2\theta_{\text{max}} \approx 20,0^\circ$) характеризує ближній порядок при розміщенні у просторі (об'ємі зразка Na-КМЦ) фрагментів основних макроланцюгів, а менш інтенсивне ($2\theta_{\text{max}} \approx 8,7^\circ$) – ближній порядок при трансляції у просторі фрагментів їх бокових відгалужень. У свою чергу, катіонний ПЕ також має ближнє упорядкування при трансляції у просторі як основних макромолекулярних ланцюгів, так і їх бокових відгалужень – протонуваних піридинових циклів. На це вказує прояв двох дифракційних максимумів дифузного типу різної інтенсивності і кутової напівширини на дифрактограмі П4ВП-СІ. Проведений аналіз атомного складу макромолекул цього ПЕ показав, що малоінтенсивний максимум при $2\theta_{\text{max}} \approx 9,4^\circ$ характеризує ближнє упорядкування основних макроланцюгів, а при $2\theta_{\text{max}} \approx 22,7^\circ$ – їх бокових відгалужень (протонуваних піридинових циклів).

При проведенні аналізу ширококутових рентгенівських дифрактограм зразків ПЕК (рис. 2) встановили, що, незалежно від МС аніонного і катіонного ПЕ в складі цих полімерних систем, має місце прояв малокутового (при $2\theta_{\text{max}} \approx 4,4^\circ$) дифракційного максимуму дискретного типу значної інтенсивності, що вказує на існування в об'ємі ПЕК шаристих наноструктур, утворених

електростатично зв'язаними макромолекулами протилежно зарядженими макромолекулами ПЕ. Виходячи із кутового положення ($2\theta_{\text{max}}$) цих дифракційних максимумів, відстань (d) між базальними площинами (шарами) з індексами Міллера (001), згідно із рівнянням Брегга:

$$d = n\lambda(2\sin\theta_{\text{max}})^{-1},$$

де λ – довжина хвилі характеристичного рентгенівського випромінювання, а n – порядковий номер дифракційного максимуму (для полімерів приймається $n=1$ внаслідок релаксацийного характеру процесів структуроутворення в цих системах), становить 2,0 нм. Оцінку ефективного розміру кристалітів, проводили за методом Шеррера [7]:

$$L = K\lambda(\beta\cos\theta_{\text{max}})^{-1},$$

де $K=0,9$ при невідомій формі кристалітів, β – кутова напівширина i -го дифракційного максимуму. Розрахунки показали, що $L \approx 4,0$ нм, тобто кристаліти утворені трьома шарами протилежно заряджених макромолекул.

Крім цього, аналіз рентгенівських дифрактограм зразків ПЕК виявив, що навіть при незначній мольній частці (0,05) катіонного ПЕ в ПЕК структура цих полімерних систем є квазікристалічною, яка суттєво відрізняється від аморфної структури чистих Na-КМЦ і П4ВП-СІ. На це вказує прояв (на фоні уявного аморфного гало при $2\theta_{\text{max}} \approx 20-21^\circ$) дискретного дифракційного максимуму при $2\theta_{\text{max}} = 20,4^\circ$, у випадку зростання мольної частки катіонного ПЕ від 0,05 до 0,25 в складі ПЕК, та дифракційних максимумів при $2\theta_{\text{max}} \approx 17^\circ$ і $25,5^\circ$ при більш високій концентрації цього ПЕ. Зокрема, оцінка ефективного розміру кристалітів (по максимуму при $2\theta_{\text{max}} = 25,5^\circ$ на дифрактограмі ПЕК, в об'ємі якого реалізується еквііонний баланс (крива 5)) показала, що $L \approx 4,6$ нм. Це вказує, що формування квазікристалічної структури в об'ємі всього ряду досліджуваних ПЕК, отриманих на основі аморфних ПЕ, є наслідком утворення шаристих наноструктур в результаті кооперативних електростатичних взаємодій між протилежно зарядженими макромолекулами поліелектролітів.

Слід відмітити, що при проведенні аналізу профілів інтенсивності малокутового розсіювання рентгенівських променів чистих аніонного і катіонного ПЕ та ПЕК, представлених як у вигляді графіків залежності I від q , так і $s^3\tilde{I}(s)$ від s^3 (графіків Руланда [8]), де $s = \lambda^{-1}(2\sin\theta)$ – величина хвильового вектора в просторі зворотної ґратки, $\tilde{I}$ – інтенсивність розсіювання при щільній колімації, виявлено,

що лише в об'ємі ПЕК, для якого характерний еквііонний баланс (див. вище), контраст електронної густини $\Delta\rho \neq 0$ ($\Delta\rho = \rho - \langle\rho\rangle$, де ρ і $\langle\rho\rangle$ – локальне і середнє значення електронної густини в двофазовій системі [9]), що дає змогу визначити розмір його мікрообластей гетерогенності. Для оцінки ефективного розміру існуючих в об'ємі цього ПЕК мікрообластей гетерогенності визначали за методом авторів роботи [8] такий структурний параметр, як діапазон гетерогенності (l_p). Встановлено, що величина $l_p \approx 40$ нм, тобто є значно більшою, ніж розмір шаристих квазікристалічних наноструктур (див. вище), оскільки структурний параметр l_p пов'язаний як із середнім діаметром квазікристалічних наноструктур, так і аморфних мікрообластей.

З рентгеноструктурними даними корелюють результати теплофізичних досліджень ПЕК. При співставленні кривих ДСК чистих ПЕ і всіх ПЕК (рис. 3), виявлено, що як для чистих

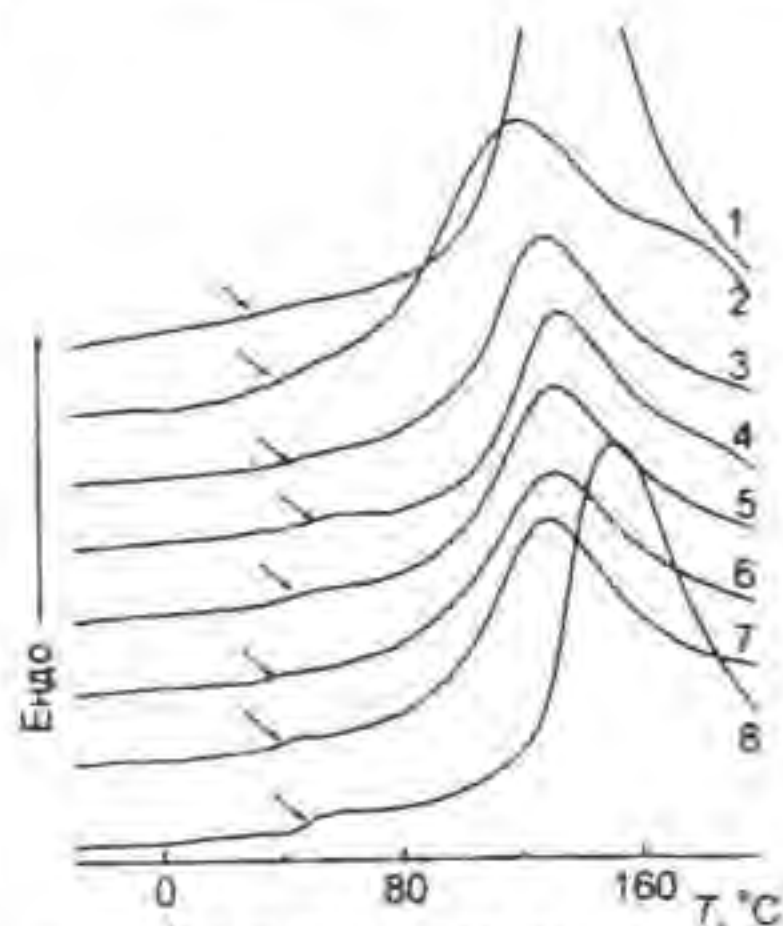


Рис. 4. Криві ДСК Na-КМЦ (1) і П4ВП-С1 (8) та ПЕК, в яких мольна частка катіонного ПЕ становить 0,08 (2), 0,25 (3), 0,50 (4), 0,80 (5), 0,89 (6) і 0,92 (7).

характерний інтенсивний ендотермічний пік. Як відомо, цей пік характеризує випаровування електростатично зв'язаної води і для аморфних ПЕК його температура прояву є постійною і однаковою з аналогічним піком на термограмі Na-КМЦ [5]. Разом з тим, для досліджуваних ПЕК має місце екстремальна концентраційна залежність положення цього піку із проходженням через максимум ($T=133$ °C), коли в ПЕК реалізується еквііонний баланс (крива 4). Аналогічну (екстремальну) концентраційну залежність має також прояв процесу

сегментальної рухливості (розкладування) електростатично зв'язаних макромолекул аніонного і катіонного ПЕ в ПЕК (середньоінтервальні значення вказані стрілкою).

Таким чином, проведені дослідження показали, що в об'ємі стехіометричних поліелектролітних комплексів, отриманих на основі сильних аніонного і катіонного поліелектролітів із аморфною структурою, утворюються шаристі квазікристалічні наноструктури із ефективним розміром кристалітів близько 4 нм та відстанню між наночастинами рівною 2,0 нм.

Список використаних джерел

1. Кабанов В.А. Полиэлектролитные комплексы в растворе и в конденсированной фазе // Успехи химии. – 2005. – 74, №1. – С.5-23.
2. Schuetz P., Caruso F. Multilayer thin films based on polyelectrolyte-complex nanoparticles // Colloid Surf. Part A. – 2002. – 207, N1-3. – P.33-40.
3. Изумрудов В.А. Явление самосборки и молекулярного «узнавания» в растворах (био)полиэлектролитных комплексов // Успехи химии. – 2008. – 77, №4. – С.401-415.
4. Годовский Ю.К. Теплофизические методы исследования полимеров. – М.: Химия, 1976. – 216 с.
5. Штомпель В.И., Саса Б.С., Рябов С.В., Керча Ю.Ю., Титов Г.В. Полиэлектролитные комплексы на основе Na-карбоксиметилцеллюлозы и полиэтиленминхлориду: идентификация та структура // Полім. Журн. – 2010. – Т.32, №3. – С.204-209.
6. Rosca C., Popa M.I., Lisa G., Chitamu G.C. Interaction of chitosan with natural or synthetic anionic polyelectrolytes. I. The chitosan-carboxymethylcellulose complex // Carbohydr. Polym. – 2005. – Vol.62, N1. – P.35-41.
7. Гинье А. Рентгенография кристаллов. Теория и практика: Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1961. – 604 с.
8. Perret R., Ruland W. Eine verbesserte Auswertungsmethode für die Röntgenkleinwinkelstreuung von Hochpolymeren // Kolloid Z. – Z. Polymere. – 1971. – B.247, N1-2. – S.835-843.
9. Штомпель В.И., Керча Ю.Ю. Структура линейных полиуретанов. – Киев: Наук. думка, 2008. – 248 с.

Надійшла до редколегії 02.2011

Підп. до друку 21.04.2011.
Формат 70x100¹/₁₆. Папір офс.
Ум. друк. арк. 18,42. Наклад 350.
Зам. 86.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

