



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека

ім. М. Максимовича

КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



16425JB

філія (вул. Сеченова)

Ц 41.00

ВИПУСК №4 2010

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2010**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Адаменко Ірина Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестіок Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Акбаш К.С. Порядковий закон великих чисел для схеми максимуму	7
Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Метод усереднення для автономної коливної системи четвертого порядку під дією збурень	11
Волошина Т.В. Котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n	16
Дмитришин А.Р. Мініверсальні деформації та теорема Дарбу	20
Жучок А.В. Вільні тріоди	23
Жучок Ю.В., Кіртадзе Л.В. Ендоморфізми вільного добутку скінченних напівгру	27
Кайдан Н.В. Узагальнено матричний вигляд скінченних кілець	31
Рижов А.Ю. Гранична помилка II роду статистики критерію однорідності компонент суміші у випадку альтернатив, що зближуються	34
Турка Т.В. Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи	38

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Андрущенко В.О., Лібов Д.Ю., Нікітенко В.М. Визначення планарного коефіцієнта Пуассона диска із п'єзокераміки	45
Баняс М.В. Розрахунок залишкових напружень при торцевому нарощуванні циліндра з фізично нелінійного матеріалу	50
Волошко О.І., Лобода В.В. Дослідження зон передруйнування для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує ізотропні матеріали	54
Котельнікова А.С., Нікішов В.І. Дослідження процесу взаємодії відокремлених хвиль з береговими схилами	60
Лукаш К.В. Обмеженість в середньому розв'язків нелінійної двопараметричної системи Вольтерри	66
Лагода В.А. Існування інваріантного перерізу індефінітно монотонного нелінійного розширення динамічної системи на торі	71

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Анісімова Л.А., Глибовець М.М., Кириленко М. Агентні технології як засіб моделювання в обчислювальній економіці	77
Богатирьова Ю.О. Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах	88
Верченко А.П. Виділення об'єктів з цифрового зображення на основі еволюції активного полігона	97
Глибовець М.М., Сидоренко М.О. Марковська модель оцінки вартості проекту з ризиком	101
Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Підходи до бюджетного прогнозування	105
Джалладова І.А. Асимптотика системи різницьових та диференціальних рівнянь	113
Донченко В.С., Назарага І.М. Програмне забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України	118
Ибрагимов Н.С. Необходимое условие в задаче идентификации для линейного стационарного уравнения квазиоптики	124
Каленський А. А. Групові цифрові підписи. Методи досягнення константної довжини групового ключа	130
Карнаух Т.О. Нерозв'язні проблеми для алгоритмічних пристроїв зі скінченною пам'яттю	144
Кулага А.А. Схеми цифрового підпису на основі ідентифікаційних даних	148
Ліндер Я.М. Про оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних диференціальних включень з імпульсним впливом	154
Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою	158
Макушенко І.А., Усар І.Я. Гістерезисна стратегія для $M/M/m/\infty$ - системи з повторними викликами	163
Потієнко М.В. Структурна модель процесів короткотривалої пам'яті людини	169
Савкіна М.Ю. Довірча смуга для лінії сплайнової регресії	173
Скобелев В. Г. Аналіз автомата Реслера над скінченним кільцем	177

Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання параметрів білінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння" при неklasичних припущеннях	181
Терещенко Л.М. Розв'язність задачі статичної магнітопружності в середовищі Maple	185
Ткачук І.Ю. Формалізація підстановок Бі-методу	189
Харченко І.І., Геращенко А.П. Чисельно-аналітичні розв'язки деяких матричних диференціальних рівнянь	193
Шатирко А.В. Про один оптимізаційний підхід дослідження задач абсолютної стійкості	197
Шушарін Ю.В. Ланцюги Маркова для неперервних випадкових величин	205
Усар І.Я., Макушенко І.А., Протопоп Ю.О. Про швидкості збіжності стаціонарних розподілів систем з повторними викликами	209

РАДІОФІЗИКА

Бех І.І., Дудко А.О., Ільченко В.В., Лушкін О.Є., Нагула П.О., Тесленко С.М. Дослідження адсорбції продуктів випаровування металевопористих емітерів на оксиді скандію	215
Іванісік А.І., Ісаєнко О.Ю. Спектральні закономірності антистоксового вимушеного комбінаційного розсіювання в умовах самофокусування та фазової само модуляції	221
Мазур А.В., Нетребя А.В. Реконструкція томограм методами МРТ для визначених зв'язків розподілів спінової густини та релаксаційних характеристик	227
Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sb/Ge(113)	232
Находкін М.Г., Федорченко М.І. Адсорбція атомів Вї на поверхні Ge(111)-c(2x8)	236
Павлюк С.П., Ішук Л.В., Євдокимов Д.О. Мікроплазменний пробій у кремнієвих мікроструктурах	240
Сидорук С.М., Ольшевський С.В., Черняк В.Я. Реформування етанолу в імпульсній плазмово-рідинній системі	245
Спориш І.М., Гогоці Є.Г., Лукашук Л.В., Кисіль О.О. Характеризація фулеролу C ₆₀ для новітніх застосувань в біологічних системах: УФ-вид спектроскопією та МАЛДІ мас спектрометрією	249

СУЧАСНА ФІЗИКА

Абдікарімов Б.Ж., Альохін О.Д., Остапчук Ю.Л., Скіяров Ю.П. Вплив іонів на властивості розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування	259
Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г. Про визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії з рівняння стану рідин	263
Гречко Л.Г., Скоробогатий Т.В. Особливості індикатрис розсіювання випромінювання для матричної дисперсної системи, що складається з двошарових магнітних частинок	267
Гречко Л.Г., Шостак С.В., Шкода Н.Г. Поверхневі плазмони двох частинок з врахуванням мультипольної взаємодії між ними в електричному полі	275
Качалова Н.М., Войцехович В.С., Хоменко В.В. Генерація спектрального суперконтинууму в мікроструктурованих волокнах	279
Копань В.С., Хуторянська І.А., Копань Ю.В. Термоелектрорушійна сила вугільних адсорбентів	283
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Турков О.В., Саєнко Г.В. Дослідження закономірностей процесу старіння бінарних та багатокомпонентних аморфних сплавів	285
Стебленко Л.П., Коплак О.В., Курилюк А.М., Флюнт О.Є. Вплив слабого постійного магнітного поля на фотопровідність і її релаксацію в кристалах кремнію	291

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Акбаш К.С., аспірантка

Порядковий закон великих чисел для схеми максимуму

Розглядається порядковий закон великих чисел для схеми максимуму у банахових ґратках.

Ключові слова: порядкова збіжність, p -опуклість, банахова ґратка.

E-mail: k_m_s_kirovograd@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Асимптотична поведінка екстремальних значень випадкових величин для одновимірного випадку вивчалася у роботі [1]. Було встановлено, що при умові $E\xi^r < \infty$, $r > 0$ для послідовності однаково розподілених додатних випадкових величин ξ_n із значеннями в $\mathbb{R}^1$ виконується співвідношення

$$\frac{z_n}{n^{1/r}} \rightarrow 0 \text{ м.н.},$$

де $z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$, а м.н. – майже напевно.

В даній роботі розглядається схема максимуму для банахових ґраток.

Нехай (X_i) , $i \geq 1$, – послідовність незалежних копій випадкового елемента (в.е.) X зі значеннями в сепарабельній банаховій ґратці B із модулем $|\cdot|$, а $Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|$.

Для p -опуклих банахових ґраток відомий такий результат [2]: при $1 \leq p < \infty$ було встановлено еквівалентні умови

$$E\|X\|^p < \infty \text{ та}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{Z_n}{n^{1/p}} \right\| = 0 \text{ м.н.}$$

У банаховій ґратці поряд із збіжністю за нормою можна розглядати порядкову збіжність (o -збіжність).

Означення 1. Послідовність елементів (x_n) банахової ґратки B називається o -збіжною до елемента x , $x = o - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо існує така послідовність (v_n) , що $|x - x_n| < v_n$ і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \geq v_2 \geq \dots$ і $\inf_{n \geq 1} v_n = 0$ ([3],[4]).

Akbash K.S., PhD student

The order law of large numbers for the maximum scheme

The order law of large numbers for the maximum scheme in Banach lattices is considered.

Key Words: ordinal convergence, p -convex, Banach lattice.

У роботі [5] поряд із збіжністю за нормою типу Марцинкевича-Зигмунда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{n^{1/p}} = 0 \text{ м.н.}$$

досліджувалась порядкова збіжність для сум

$$o - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{1/p}} = 0 \text{ м.н.}$$

та

$$o - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n^{1/p}} = 0 \text{ м.н.}$$

для схеми максимуму.

Для в.е. X зі значеннями у банаховій ґратці природно розглянути такі узагальнення цих законів

$$o - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\varphi^{-1}(n)} = 0 \text{ м.н.} \quad (1)$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Z_n\|}{\varphi^{-1}(n)} = 0 \text{ м.н.} \quad (2)$$

при умові

$$E\varphi(\|X\|) < \infty \quad (3)$$

де $\varphi(x) = x^p L(x)$ – монотонно зростаюча неперервна функція, $L(x)$ – повільно змінюється при $x \rightarrow \infty$, а $\varphi^{-1}(x)$ – обернена до $\varphi(x)$.

Означення 2. Нехай $1 \leq p < \infty$. Банахова ґратка B називається p -опуклою, якщо існує така стала $D^{(p)} = D^{(p)}(B)$, що для будь-якого n і для будь-яких елементів $(x_i)_1^n \subset B$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leq D^{(p)} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Основний результат.

Теорема 1. Нехай B - сепарабельна σ - повна p' - опукла банахова гратка при $1 \leq p < p' < \infty$, X - випадковий елемент із значеннями в B . І нехай $\varphi(x) = x^p L(x)$ - монотонно зростаюча неперервна функція, $L(x)$ - повільно змінюється при $x \rightarrow \infty$. Тоді еквівалентні умови (1) - (3).

Зауваження 1. У роботі [5] наведений контрприклад, який показує, що у просторі l_p , $1 \leq p < 2$ (який має тип p) існує в.е., який задовольняє нерівність $E\|X\|^p < \infty$ і разом з тим для нього не виконується порядковий закон великих чисел Марцинкевича-Зигмунда $\alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{1/p}} = 0$ м.н.. Тому при $p' = p$ теорема 1 не вірна.

Лема 1. Нехай ξ - випадковий елемент ≥ 0 , $\varphi(x)$ - монотонно зростаюча неперервна функція. Тоді еквівалентні наступні умови

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq \varphi^{-1}(n)) < \infty$$

$$(ii) E\varphi(\xi) < \infty.$$

Доведення

В умовах леми маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq \varphi^{-1}(n)) < \infty \sim \sum_{n=1}^{\infty} P(\varphi(\xi) \geq n) < \infty \sim E\varphi(\xi) < \infty$$

(див. [9], с.278). $\square$

Лема 2. Нехай $U(x) = x^p L(x)$ - монотонно зростаюча неперервна функція, при $p > 1$. $L(x)$ - повільно змінюється при $x \rightarrow \infty$. Тоді

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U(k)} \sim \frac{n}{U(n)}.$$

Доведення.

Очевидно, що

$$\frac{1}{U(i+1)} \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{U(t)} dt \leq \frac{1}{U(i)}.$$

Тому

$$\sum_{i=[x+1]}^{\infty} \frac{1}{U(i+1)} \leq \int_x^{\infty} \frac{1}{U(t)} dt \leq \sum_{i=[x]}^{\infty} \frac{1}{U(i)}.$$

Далі використаємо теорему Карамата ([10], с.17, теор. 0.6) в якій для $p \leq -1$ виконується

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x U^*(x)}{\int_x^{\infty} U^*(t) dt} = -p - 1$$

$$\text{де } U^*(x) = \frac{1}{U(x)}.$$

Підставляючи замість інтегралу відповідний ряд, одержимо:

$$\sum_{i=x}^{\infty} \frac{1}{U(i)} \sim C \frac{x}{U(x)}.$$

Доведення теореми 1. Установимо імплікацію із (3) $\Rightarrow$ (1). Сепарабельна σ - повна банахова гратка порядково ізометрична деякому банаховому ідеальному простору (БІП). Нехай B - сепарабельний БІП, заданий на деякому вимірному просторі (T, Λ, μ) , $\mu(T) = 1$ (див. [3], [4]).

Для такого простору умови

$$\mu\{t \in T : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)\} = 1, \quad (4)$$

існує $y = (y(t), t \in T) \in B$ такий, що

$$\mu\{t \in T : |x_n(t)| \leq y(t)\} = 1, \quad (5)$$

достатні для α - збіжності послідовності (x_n) до x [6].

Нехай:

$$X_n = (X_n(t), t \in T), \quad Z_n = (Z_n(t), t \in T),$$

$$\text{де } Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|.$$

Позначимо:

$$\tau := \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{Z_n}{\varphi^{-1}(n)} \right\|.$$

Щоб установити умови (4) та (5) досить показати, що

$$\mu\left\{t \in T : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\varphi^{-1}(n)} = 0\right\} = 1 \text{ м.н.} \quad (6)$$

і

$$\tau < \infty \text{ м.н.} \quad (7)$$

Спочатку доведемо справедливості оцінки (7).

Нехай:

$$X'_n = \begin{cases} X_n, & \|X_n\| < \varphi^{-1}(n), \\ 0, & \|X_n\| \geq \varphi^{-1}(n) \end{cases}, \quad X''_n = \begin{cases} 0, & \|X_n\| < \varphi^{-1}(n), \\ X_n, & \|X_n\| \geq \varphi^{-1}(n). \end{cases}$$

Тоді

$$Z'_n = \max_{1 \leq i \leq n} |X'_i|, \quad Z''_n = \max_{1 \leq i \leq n} |X''_i|, \quad Z_n \leq Z'_n + Z''_n.$$

З умови (3) згідно леми 1 випливає обмеженість ряду

$$\sum_{n \geq 1} P(\|X_n\| \geq \varphi^{-1}(n)) < \infty.$$

Це означає, що майже напевно лише скінченне число випадкових елементів X''_n відмінне від нуля, тобто

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z''_n}{\varphi^{-1}(n)} = 0 \text{ м.н.}$$

Тому досить показати обмеженість виразу

$$\left\| \sup_{n \geq 1} \frac{Z'_n}{\varphi^{-1}(n)} \right\|.$$

Для оцінки цієї величини скористаємось p' -опуклістю банахової ґратки B .

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{Z'_n}{\varphi^{-1}(n)} \right\| &\leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X'_n|^{p'}}{|\varphi^{-1}(n)|^{p'}} \right)^{1/p'} \right\| \leq \\ &\leq C(B) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X'_n\|^{p'}}{|\varphi^{-1}(n)|^{p'}} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Таким чином маємо

$$E \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{Z'_n}{\varphi^{-1}(n)} \right\| \leq C(B) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{|\varphi^{-1}(n)|^{p'}} \right)^{1/p'} \quad (8)$$

$\varphi^{-1}(n) = n^{1/p} \tilde{L}(n)$ згідно леми 1.8 ([11], с.29), $\tilde{L}(n)$ - повільно змінна.

Позначимо $\xi := \|X\|$. Нехай $V(t) = P(|\xi| < t)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} \sum_{k=1}^n \int t^{p'} dV(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int t^{p'} dV(t) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)}. \end{aligned}$$

В силу леми 2 справедливі нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(k)} \int t^{p'} dV(t) \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} k P[\varphi^{-1}(k-1) \leq |\xi| < \varphi^{-1}(k)] =$$

$$= C_1 \sum_{k=0}^{\infty} P(|\xi| \geq \varphi^{-1}(k)).$$

Останній ряд збігається згідно леми 1. Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{|\varphi^{-1}(n)|^{p'}} < \infty.$$

А отже оцінка (7) вірна.

Залишається довести рівність (6). Для порядково обмеженої послідовності (x_n) елементів σ -повної банахової ґратки верхню границю можна визначити рівністю (див. [7], с. 504)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_m \left(\sup_{n \geq m} x_n \right).$$

В умовах теореми 1 простір B буде σ -повною банаховою ґраткою. А згідно з оцінкою

(7) $\frac{Z_n}{\varphi^{-1}(n)}$ буде порядково обмеженою послідовністю.

Тому в B існує випадковий елемент Q :

$$Q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\varphi^{-1}(n)}.$$

Тоді умова (6) випливає із рівності

$$\|Q\| = 0 \text{ м.н.} \quad (9)$$

Покажемо, що (9) виконується. При доведенні ми вже отримали збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)}.$$

Тому $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$:

$$\sum_{n > n_0} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} < \varepsilon^{p'}.$$

Покладемо $Z'_{n_1} = \max_{1 \leq i \leq n_1} X'_i$, $Z'_{n_2} = \max_{1 \leq i \leq n_2} X'_i$,

де

$$X'_{i1} = \begin{cases} X' & \text{при } i \leq n_0, \\ 0 & \text{при } i > n_0 \end{cases}, \quad X'_{i2} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq n_0, \\ X' & \text{при } i > n_0 \end{cases}$$

Тоді

$$Z'_n \leq Z'_{n1} + Z'_{n2}$$

$$Q \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z'_{n1}}{\varphi^{-1}(n)} + \sup_{n \geq 1} \frac{Z'_{n2}}{\varphi^{-1}(n)} \quad \text{м.н.}$$

Із означення послідовність X'_{i1} містить лише n_0 ненульових елементів. Тому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z'_{n1}}{\varphi^{-1}(n)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Звідси можна побачити, що оцінка (8) залишається вірною при заміні Z'_n на Z'_{n2} . Тоді аналогічно до розглянутих вище міркувань отримаємо

$$E \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{Z'_{n2}}{\varphi^{-1}(n)} \right\| \leq C(B) \left(\sum_{n \geq n_0} \frac{E \|X'_{n2}\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} \right)^{1/p'} =$$

$$= C(B) \left(\sum_{n \geq n_0} \frac{E \|X'_n\|^{p'}}{n^{p'/p} \tilde{L}^{p'}(n)} \right)^{1/p'}.$$

Відповідно $E \|Q\| < C(B) \cdot \varepsilon$, де $C(B)$ абсолютна константа, яка залежить тільки від B . Внаслідок довільності ε звідси випливає (9). Таким чином встановлена імплікація (3) $\Rightarrow$ (1).

Доведемо обернену імплікацію (1) $\Rightarrow$ (3). Якщо виконується порядковий закон великих чисел (1), то

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\|X_n\|}{\varphi^{-1}(n)} \leq \sup_{n \geq 1} \frac{\|Z_n\|}{\varphi^{-1}(n)} < \infty \quad \text{м.н.}$$

Отже існує таке число t_0 для якого

$$P \left(\sup_{n \geq 1} \frac{\|X_n\|}{\varphi^{-1}(n)} \geq t_0 \right) < 1.$$

Звідси за лемою 2.6 книги ([8]) при $t \geq t_0$

$$P \left(\sup_{n \geq 1} \frac{\|X_n\|}{\varphi^{-1}(n)} \geq t \right) \geq \sum_{n \geq 1} P(\|X_n\| \geq t \cdot \varphi^{-1}(n)) -$$

$$\sim \sum_{n \geq 1} P(\varphi \|X_n\| \geq t^\alpha \cdot n).$$

Еквівалентність останніх двох рядів випливає з того, що $\varphi(n)$ правильно змінна функція і

$$\frac{\varphi(t\varphi^{-1}(n))}{\varphi(\varphi^{-1}(n))} \rightarrow t^\alpha,$$

де $\varphi(\varphi^{-1}(n)) = n$ за властивістю S^α правильно змінних функцій ([11], с.27).

Із збіжності останнього ряду випливає умова (3) ([9], с.278). Отже встановлена імплікація (1) $\Rightarrow$ (3).

Еквівалентність умов (2) і (3) фактично міститься у доведенні еквівалентності умов (1) і (3).

Теорема доведена. $\square$

Висновки.

Отже, основний результат роботи установлює еквівалентність у законі великих чисел для схеми максимуму порядкової збіжності (1), збіжності за нормою (2) та умови (3).

Список використаних джерел

1. O. Barndorff-Nielsen On the limit behaviour of extreme order statistics. Ann. Math. Statistics – 1963. – Vol. 34. – №3. – p. 992-1002.
2. Мацак І.К. Закон великих чисел для схеми максимуму в банахових ґратках. Теорія ймовірностей та мат. статист. – 2009. – Вип. 80. – с. 100-105.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, v.2. – Berlin e.a.: Springer, 1979. – 243 p.
4. Кантарович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ: – М.: Наука, 1984. – с.752.
5. Акбаш К.С., Мацак І.К. Порядковий закон великих чисел типу Марцинкевича-Зигмунда. Укр. Мат. журнал – подано до друку.
6. Бухвалов А.В., Векслер А.И., Гейлер В.А. Нормированные решетки Итоги науки. Мат. анализ. – 1980. – Вып. 18. – с. 125-184.
7. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
8. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach spaces. – Berlin: Springer, 1991. – 480 p.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. – М.: Мир, 1984. – 752 с.
10. Resnic I. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. – New York: Springer-Verlag, 1987. – 314 p.
11. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. – 1985, 144 с.

Надійшла до редколегії 1.10.2010

УДК 519.21

О.Д. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко, к.ф.-м.н., доцент

Метод усереднення для автономної
коливної системи четвертого порядку
під дією випадкових збурень

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу "білого" та Пуассонівського шумів.

Ключові слова: метод усереднення, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння.

odb@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Метод усереднення, запропонований Н.М. Криловим, Н.Н. Боголюбовим та Ю.О. Митропольським ([1], [2]) є одним із основних методів при вивченні невиняткових коливних систем під дією малих нелінійних збурень. Застосування методу усереднення у випадку малих виняткових збурень типу "білого шуму" у коливній системі другого порядку розглядалось у роботі Ю.О. Митропольського, В.Г. Коломійця [3]. Автономні і неавтономні коливні системи другого порядку під дією малих збурень типу "білого шуму" та "Пуассонівського шуму" вивчалися у роботах О.В. Борисенко [4], [5]. Випадок коливних систем третього порядку розглядався у роботах ([6], [7], [8]).

У даній роботі досліджується поведінка при $\varepsilon \rightarrow 0$, автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \\ = \varepsilon^{k_1} f_1(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + \\ + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

з невинятковими початковими умовами $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, де $\varepsilon > 0$ – це малий параметр, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ – це

O.D. Borysenko, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko, Ph.D., Associate Professor

Averaging method for autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations

The asymptotic behaviour of autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear external perturbations of "white noise" and "Poisson noise" types is studied.

Key Words: Averaging method, autonomous oscillating system, stochastic differential equation.

виняткова функція, така що

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) ds = \\ = \varepsilon^{k_2} \int_0^t f_2(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) dw(s) + \\ + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R f_3(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \tilde{\nu}(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = 1, 2, 3$; $f_i, i = 1, 2, 3$ – це невиняткові функції; $w(t)$ – це стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\nu(dt, dy)$ – це міра Пуассона незалежна від $w(t)$; $\Pi(A)$ – це скінченна міра на борелевих множинах в R .

Допоміжні результати

Із [9], використавши очевидні зміни, ми одержимо такі результати

Лема 1. Нехай для кожного $x \in \mathbb{R}^d$ існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt = \bar{f}(x),$$

функція $\bar{f}(x)$ є обмеженою і неперервною, функція $f(t, x)$ є обмеженою і неперервною по x рівномірно відносно (t, x) у кожній

області $t \in [0, \infty)$, $|x| \leq K$, випадкові процеси $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, $\eta(t) \in \mathbb{R}$ є неперервними, тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s)\right) ds = \int_0^t \bar{f}(\xi(s)) ds$$

майже напевне для $\forall t \in [0, T]$.

З а у в а ж е н н я. Нехай функція $f(t, x, z)$ обмежена і рівномірно неперервна по x відносно $t \in [0, \infty)$ і $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leq K$, $x \in \mathbb{R}^d$. Нехай $\Pi(\cdot)$ – це скінченна міра на σ -алгебрі борелевих множин в $\mathbb{R}$ і нехай

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, z) dt = \bar{f}(x, z),$$

для кожного $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$, де функція $\bar{f}(x, z)$ обмежена, рівномірно неперервна по x відносно $z \in \mathbb{R}$ у кожній компактній множині $|x| \leq K$. Тоді для неперервних випадкових процесів $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$ і $\eta(t) \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s), z\right) \Pi(dz) ds = \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(\xi(s), z) \Pi(dz) ds. \end{aligned}$$

Основні результати

Ми вивчатимемо асимптотичну поведінку даної коливної системи при $\varepsilon \rightarrow 0$ у випадку коли існують стійкі гармонічні коливання у системі при умові $\varepsilon = 0$. При цій умові відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0.$$

У даній роботі ми розглянемо випадок: $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_1 b_2 > b_3$, $b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1})$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. Характеристичне рівняння має корені

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\eta_1, \quad \lambda_2 = -\eta_2, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \quad \text{де} \\ \eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(b_2 - \frac{b_3}{b_1} \right)} \right), \quad \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}. \end{aligned}$$

Рівняння (1) ми будемо розуміти як систе-

му стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t) dt, \quad i = \overline{1, 3} \\ dy_4(t) &= [-(b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_1} f_1(y(t))] dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} f_2(y(t)) dw(t) + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} f_3(y(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \\ y(t) &= \{y_i(t)\}_{i=\overline{1,4}}, \quad b = (b_4, b_3, b_2, b_1), \\ y_i(0) &= x_0^{(i)}, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (2)$$

При $\varepsilon = 0$ рівняння (1) має загальний розв'язок у вигляді

$$x(t) = C_1 e^{-\eta_1 t} + C_2 e^{-\eta_2 t} + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Розглянемо таке представлення процесу $y(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= N_1(t) + N_2(t) + \\ &+ A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t, \\ y_2(t) &= -\eta_1 N_1(t) - \eta_2 N_2(t) - \\ &- A_1(t) \omega \sin \omega t + A_2(t) \omega \cos \omega t, \\ y_3(t) &= \eta_1^2 N_1(t) + \eta_2^2 N_2(t) - \\ &- A_1(t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(t) \omega^2 \sin \omega t, \\ y_4(t) &= -\eta_1^3 N_1(t) - \eta_2^3 N_2(t) + \\ &+ A_1(t) \omega^3 \sin \omega t - A_2(t) \omega^3 \cos \omega t, \\ N_i(t) &= C_i(t) \exp\{-\eta_i t\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язавши цю систему відносно процесів $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$ і застосувавши формулу Іто до цих процесів, ми одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= -\eta_1 N_1(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta_2 N_2(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_1(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \omega t + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_2(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \omega t - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= \varepsilon^{k_1} \bar{f}_1(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} \bar{f}_2(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) dw(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_3(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \end{aligned}$$

де $\bar{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ одержано з $f_i(y(t))$, $i = 1, 2$ і $\bar{f}_3(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2, z)$ одержано з $f_3(y(t), z)$ підстановкою (3).

Теорема 1. Нехай $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_1, 2k_2, 2k_3)$. Припустимо, що функції f_i , $i = \overline{1, 3}$ обмежені і задовольняють умову Ліпшиця відносно змінних y_i , $i = \overline{1, 4}$. Якщо наведена нижче матриця $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ є додатно визначеною, тоді

1. При $k_1 = 2k_2 = 2k_3$ випадковий процес $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$

слабко збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до випадкового процесу $\tilde{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, де $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ – це розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

де

$$\bar{\alpha}(A_1, A_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) d\phi,$$

$$\bar{\sigma}(A_1, A_2) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \phi + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \phi \\ -\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \phi - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}_i(\phi, A_1, A_2) = \bar{f}_i(\phi, 0, 0, A_1, A_2), \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{f}_3(\phi, A_1, A_2, z) = \bar{f}_3(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z),$$

$$\bar{f}(\phi, A_1, A_2) = \bar{f}_2^2(\phi, A_1, A_2, t) +$$

$$+ \int_R \bar{f}_3^2(\phi, A_1, A_2, z) \Pi(dz),$$

$\Psi^T(\phi)$ – це вектор транспонований до вектора $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = 1, 2)$, $w_i(t), i = 1, 2$ – це незалежні одновимірні вінерові процеси.

2. Якщо $k < k_1$ тоді в системі (5) потрібно покласти $\bar{f}_1 \equiv 0$; якщо $k < 2k_2$, тоді в (5) потрібно покласти $\bar{f}_2 \equiv 0$; якщо $k < 2k_3$ тоді в (5) потрібно покласти $\bar{f}_3 \equiv 0$.

Доведення. Зробимо заміну $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ у системі (4) і одержимо для процесу $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dN_1^\varepsilon(t) = -\frac{\eta_1}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

$$dN_2^\varepsilon(t) = -\frac{\eta_2}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

$$dA_1^\varepsilon(t) = \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t),$$

$$dA_2^\varepsilon(t) = \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t),$$

$$dH_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k_1-k} \bar{f}_1\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dt +$$

$$+ \varepsilon^{k_2-k/2} \bar{f}_2\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dw_\varepsilon(t) +$$

$$+ \varepsilon^{k_3} \int_R \bar{f}_3\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \bar{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

де $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ – це компоненти вектора $\Psi(\phi)$, $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w(t/\varepsilon^k)$, $\bar{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, тут A борелева множина у $\mathbb{R}$. При кожному $\varepsilon > 0$ процес $w_\varepsilon(t)$ є вінерів процес, а $\bar{\nu}_\varepsilon(t, A)$ – центрована міра Пуассона незалежна від $w_\varepsilon(t)$.

Маємо $N_i^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta_i t/\varepsilon^k\} C_i(t/\varepsilon^k)$, $i = 1, 2$ і процеси $C_i^\varepsilon(t) = C_i(t/\varepsilon^k)$ задовольняють стохастичні диференціальні рівняння

$$dC_1^\varepsilon(t) = \frac{e^{\eta_1 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

$$dC_2^\varepsilon(t) = \frac{e^{\eta_2 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

де $|C_i^\varepsilon(0)| \leq K, i = 1, 2$. Тут і надалі ми будемо позначати через $K > 0$ різні константи, які не залежать від малого параметру ε . Із обмеженості функцій $f_i, i = 1, 3$ і умови $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ ми можемо одержати оцінку

$$E|N_i^\varepsilon(t)|^2 \leq K[e^{-\frac{2\eta_i t}{\varepsilon^k}} + \varepsilon^k(1 - e^{-\frac{2\eta_i t}{\varepsilon^k}}) \times$$

$$\times (t\varepsilon^{2(k_1-k)} + \varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})], \quad i = 1, 2.$$

Тому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E|N_i^\varepsilon(t)|^2 = 0, i = 1, 2$ і достатньо вивчати поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) \times$$

$$\times [\varepsilon^{k_1-k} \bar{f}_1(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dt +$$

$$+ \varepsilon^{k_2-k/2} \bar{f}_2(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) dw_\varepsilon(t) +$$

$$+ \varepsilon^{k_3} \int_R \bar{f}_3(\omega t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z) \bar{\nu}_\varepsilon(dt, dz)], \quad (6)$$

з початковими умовами $A_i^\varepsilon(0) = A_i(0), i = 1, 2$.

Позначимо $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Використавши умови на коефіцієнти системи (6) і властивості стохастичних інтегралів одержимо оцінки

$$E\|A_\varepsilon(t)\|^2 \leq K[1 + t^2 \varepsilon^{2(k_1-k)} + t(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})],$$

$$E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^2 \leq K[|t - s|^2 \varepsilon^{2(k_1-k)} +$$

$$+ |t - s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})].$$

Аналогічно для процесу $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, де

$$\zeta_i^\varepsilon(t) =$$

$$= \varepsilon^{k_3-\frac{1}{2}} \int_0^t \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \bar{f}_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)\right) dw_\varepsilon(s) +$$

$$+ \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \bar{f}_3\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right) \bar{\nu}_\varepsilon(ds, dz),$$

$i = 1, 2$ ми виводимо оцінки

$$E\|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 \leq Kt(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}),$$

$$E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^2 \leq K|t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}).$$

Таким чином для випадкового процесу $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ виконуються умови слабкої компактності [10]

$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} P\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

для всіх $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} P\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

я тому для довільної послідовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n = 1, 2, \dots$ існує підпослідовність $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0$, $m = 1, 2, \dots$, імовірнісний простір $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, випадкові процеси $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ визначені на цьому імовірнісному просторі, такі що $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, і скінченномірні розподіли $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ співпадають з скінченномірними розподілами процесів $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Оскільки ми цікавимося граничною поведінкою розподілів, то ми можемо розглядати процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ замість процесів $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. Із (6) одержимо стохастичне диференціальне рівняння

$$A_{\varepsilon_m}(t) = A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t),$$

$$A(0) = (A_1(0), A_2(0)), \quad (7)$$

де $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_1-k} \Psi_i \left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_i \left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2 \right),$$

$i = 1, 2$. Зауважимо, що процес $\zeta_\varepsilon(t)$ – це векторнозначний квадратично інтегровний мартингал з матричною характеристикою

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i^\varepsilon, \zeta_j^\varepsilon \rangle(t) &= \\ &= \int_0^t \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \gamma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi(dz) ds, \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$, де

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) &= \\ &= \varepsilon^{k_2-k/2} \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_2 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) &= \\ &= \varepsilon^{k_3} \Psi_i \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k} \right) \tilde{f}_3 \left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z \right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$.

Для процесів $A_\varepsilon(t)$ і $\zeta_\varepsilon(t)$ мають місце такі оцінки

$$\begin{aligned} E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^4 &\leq K[\varepsilon^{4(k_1-k)}|t-s|^4 + \\ &+ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 &\leq K[(\varepsilon^{4k_2-2k} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-2k})|t-s|^2 + \varepsilon^{4k_3-3k/2}|t-s|^{3/2} + \\ &+ \varepsilon^{4k_3-k}|t-s|], \end{aligned} \quad (9)$$

$$E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 \leq K, \quad E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 \leq K. \quad (10)$$

Оскільки $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, то використовуючи (10), одержимо із (8) і (9) оцінки

$$E\|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 \leq K(|t-s|^4 + |t-s|^2),$$

$$E\|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 \leq C|t-s|^2.$$

Тому процеси $\bar{A}(t)$ і $\bar{\zeta}(t)$ задовольняють умову неперервності Колмогорова [11].

Розглянемо випадок $k_1 = 2k_2 = 2k_3$. При цій умові маємо для $i, j = 1, 2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) ds = \bar{\alpha}_i(A_1, A_2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi(dz) \Big] ds = \\ &= \bar{\sigma}_{ij}^2(A_1, A_2), \end{aligned}$$

де $\bar{\alpha}(A_1, A_2) = (\bar{\alpha}_1(A_1, A_2), \bar{\alpha}_2(A_1, A_2))$, а $\bar{\sigma}_{ij}^2(A_1, A_2)$, $i, j = 1, 2$ – елементи матриці $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$. Оскільки процеси $\bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}(t)$ неперервні, то із леми та співвідношень (7), (11) випливає

$$\bar{A}(t) = A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t),$$

$$A(0) = (A_1(0), A_2(0)), \quad (12)$$

де $\bar{\zeta}(t)$ – це неперервний векторно-значний мартигал з матричною характеристикою

$$\langle \bar{\zeta}_i, \bar{\zeta}_j \rangle(t) = \int_0^t \bar{\sigma}_{ij}^2(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, \quad i, j = 1, 2.$$

Значить [12] існує вінерів процес $\bar{w}(t) = (w_i(t), i = 1, 2)$, такий що

$$\bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s). \quad (13)$$

Співвідношення (12), (13) означають, що процес $\bar{A}(t)$ задовольняє рівняння (5). При виконанні умов теореми рівняння (5) має єдиний розв'язок. Таким чином процес $\bar{A}(t)$ не залежить від вибору підпослідовності $\varepsilon_m \rightarrow 0$, і скінченномірні розподіли процесу $A_{\varepsilon_m}(t)$ збігаються до скінченномірних розподілів процесу $\bar{A}(t)$. Оскільки процеси $A_{\varepsilon_m}(t)$ і $\bar{A}(t)$ є процеси Маркова, то використовуючи умови слабкої збіжності процесів Маркова [11] ми завершуємо доведення твердження 1) теореми.

Розглянемо випадок $k < k_1$. Тоді коефіцієнти $\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ рівняння (7) збігаються до нуля, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Повторивши з очевидними змінами доведення першого твердження теореми ми одержимо доведення твердження 2).

У випадку $k < 2k_2$ в (11) ми маємо $\sigma : \varepsilon_i(t, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_2-k})$, $i, j = 1, 2$. Тому ми можемо завершити доведення теореми як і у попередньому випадку. Аналогічно доводиться твердження 2) у випадку $k < 2k_3$. $\square$

Список використаних джерел

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Изд. АН УССР, 1937. – 352 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 408 с.
3. Митропольский Ю.А., Коломиец В.Г. О воздействии случайных сил на нелинейные колебания системы / Ю.А. Митропольский, В.Г. Коломиец // Мат. физика и нелинейная механика. – 1986. – Вып.5. – С. 23-34.
4. Борисенко О.В. Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – т.44. – №1
5. Борисенко О.В. Поведение неавтономной колебательной системы под воздействием малых случайных возмущений в резонансном случае / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – т.44. – №12
6. Борисенко А.Д., Борисенко О.В. Асимптотическое поведение стохастической динамической системы / А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Теория оптимальных решений. – 1999. – С.38-44.
7. Борисенко А.Д., Борисенко О.В., Малышев И.Г. Предельное поведение динамической системы под воздействием малых случайных возмущений в нерезонансном случае / А.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, И.Г. Малышев // Теория оптимальных решений. – 2002. – Вып. 1. – С.70-78.
8. Borysenko O.D., Borysenko O.V. Limit behaviour of non-autonomous random oscillating system of third order under random periodic external disturbances in resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol. 14(30). – no. 3-4. – p. 17-26.
9. Borysenko O.D., Malyshev I.G. The limit behaviour of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter / O.D. Borysenko, I.G. Malyshev // Theory of Stochastic Processes. – 2001. – Vol. 7(23). – no. 1-2. – p. 30-36.
10. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход. – К.: Изд. Киевского университета, 1961. – 216 с.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1971. – 664 с.
12. Ватанабэ С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ватанабэ С., Икеда Н. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Надійшла до редколегії 30.09.2010

УДК 512.53

Тетяна В. Волошина, к. ф.-м. н., доцент

Котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n .

Описано котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n . Встановлено зв'язок котранзитивності піднапівгрупи із її S_n -нормальністю.

Ключові слова: котранзитивна піднапівгрупа, напівгрупа перетворень.

E-mail: vtv_lutsk@rambler.ru

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

Вступ. Поняття котранзитивної піднапівгрупи для напівгруп перетворень було введено Сулліваном у роботі [1] і використовувалося для опису ідеалів у інверсній симетричній напівгрупі $IS(X)$, повній напівгрупі перетворень $T(X)$ та напівгрупі усіх часткових перетворень $PT(X)$ множини X . Ми у цій роботі обмежимося розглядом повної напівгрупи T_n перетворень скінченної множини. Кожен її двосторонній ідеал буде котранзитивною піднапівгрупою. Метою роботи буде опис всіх її котранзитивних піднапівгруп.

Нехай $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Повну напівгрупу всіх відображень множини N в саму себе будемо позначати T_n . Для $\alpha \in T_n$ через $\text{ran } \alpha$ позначимо область значень відображення α . Рангом $\text{rank } \alpha$ перетворення α будемо називати потужність його області значень. Зауважимо, що елемент $\alpha \in T_n$ буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли обмеження α на множину $\text{ran } \alpha$ є тотожним перетворенням [2]. Для $x \in \text{ran } \alpha$ через $\alpha^{-1}(x)$ будемо позначати повний прообраз x при відображенні α . З кожним елементом α напівгрупи T_n пов'язане розбиття $\pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ множини N на класи еквівалентності $N = \bigcup_{x \in \text{ran } \alpha} \alpha^{-1}(x)$, тобто $y_1 \pi_\alpha y_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha(y_1) = \alpha(y_2)$.

Означення відношень Гріна L, R, D, I на множині елементів напівгрупи можна знайти у [2].

Лема 1 [2]. Для $\alpha, \beta \in T_n$ $\alpha L \beta$ тоді і

Tatiana V. Voloshyna, PhD, Associate Professor

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n .

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n are described. The relations of a cotransitivity of the subsemigroup with its S_n -normality are established.

Key words: cotransitive subsemigroups, transformation semigroup.

тільки тоді, коли $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$; $\alpha R \beta$ тоді і тільки тоді, коли $\pi_\alpha = \pi_\beta$; $\alpha D \beta$ тоді і тільки тоді, коли $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$. Для напівгрупи T_n $D = I$.

Клас еквівалентності відношення D , що містить елементи рангу k будемо позначати через D_k .

Лема 2 [2]. Кожен ідеал напівгрупи T_n – головний; має вигляд $I_k = \{\alpha \in T_n \mid \text{rank } \alpha \leq k\}$, $k = \overline{1, n}$. При цьому $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_{n-1} \subset I_n = T_n$.

Зауважимо, що $I_k = \bigcup_{i=1}^k D_i$.

1. Котранзитивні піднапівгрупи з T_n

Нехай $\text{ran } \alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq N$, $A_i = \alpha^{-1}(x_i)$. Відображення $\alpha \in T_n$ будемо скорочено записувати $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}$.

Піднапівгрупа $S \subseteq T_n$ називається котранзитивною, якщо для кожного перетворення $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ рангу k виконуються дві умови:

- (1) для кожного $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq N$

$$\mu = \begin{pmatrix} A_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S;$$
- (2) для кожного $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$
існує $\lambda \in S$, таке що, $y_i \in \lambda^{-1}(x_i)$,
 $i = \overline{1, k}$.

Як було вже зазначено, кожен ідеал

$I_k, k = \overline{1, n}$, є котранзитивною піднапівгрупою в T_n . Легко бачити, що підгрупа S_n також задовольняє умови котранзитивності.

Лема 3. Котранзитивна піднапівгрупа S з T_n разом із кожним своїм елементом α містить весь R -клас R_α , якому належить α .

▲ З умови (1) випливає, що $\pi_\alpha = \pi_\mu$. Тому, за лемою 1, $\mu \in R_\alpha$. Оскільки із $\mu \in R_\alpha$ випливає, що $\mu \in S$, то $R_\alpha \subseteq S$. ■

Лема 4. Якщо котранзитивна піднапівгрупа S з T_n містить елемент α рангу k , то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in S\}$ множини N , що розділяє довільні її k елементів.

▲ З умови (2) випливає, що для довільних k елементів $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$ існує таке відображення $\lambda \in S$, що y_i містяться у різних класах розбиття π_λ множини N , тобто π_λ розділяє ці елементи. ■

Лема 5. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in T_n$. Рівність $\text{rank} \alpha = \text{rank} \alpha^2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $|A_i \cap \text{ran} \alpha| = 1$ для всіх $i = \overline{1, k}$. Якщо s – кількість таких A_i , для яких $A_i \cap \text{ran} \alpha = \emptyset$, то $\text{rank} \alpha^2 = \text{rank} \alpha - s$.

▲ Якщо всі класи розбиття π_α містять рівно по одному елементу з $\text{ran} \alpha$, то кожен клас A_i можна ототожнити з цим елементом. Тоді відображення α задає бієкцію на $\text{ran} \alpha$. У цьому випадку відображення α^2 також буде бієкцією на $\text{ran} \alpha$. Тому $\text{ran} \alpha = \text{ran} \alpha^2$, а тому і ранги у α та α^2 однакові.

Нехай тепер існує такий клас розбиття π_α , у якому більше одного елемента з $\text{ran} \alpha$. Тоді знайдеться і такий клас розбиття A_i , у якому немає жодного елемента із $\text{ran} \alpha$. Розглянемо $x_i = \alpha(A_i) \in \text{ran} \alpha$. Доведемо, що $x_i \notin \text{ran} \alpha^2$. Нехай існує $z \in X$, такий, що $\alpha^2(z) = x_i$. Тоді $\alpha(z) \in A_i$. З іншого боку, $\alpha(z) \in \text{ran} \alpha$. Але $A_i \cap \text{ran} \alpha = \emptyset$. Прийшли до суперечності. Отже, $x_i \notin \text{ran} \alpha^2$. Із $\text{ran} \alpha^2 \subseteq \text{ran} \alpha$ тоді випливає, що $\text{rank} \alpha^2 < \text{rank} \alpha$.

Кожному A_i , для якого $A_i \cap \text{ran} \alpha = \emptyset$, відповідає такий $x_i = \alpha(A_i) \in \text{ran} \alpha$, що $x_i \notin \text{ran} \alpha^2$. Якщо ж у A_i міститься хоча б один

елемент із $\text{ran} \alpha$, наприклад $x_j \in A_i$, то для довільного $z \in A_j$ $\alpha^2(z) = \alpha(x_j) = x_i$. Отже, у цьому випадку $x_i \in \text{ran} \alpha^2$. Тому рівність $\text{rank} \alpha^2 = \text{rank} \alpha - s$ виконується. ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ будемо називати *однотипними*, якщо набори $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_k|)$ та $(|B_1|, |B_2|, \dots, |B_k|)$ розрізняються лише порядком елементів.

Лема 6. Нехай $\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in T_n$ – ідемпотент.

Тоді для кожного $g \in S_n$ елемент $g^{-1} \varepsilon g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix}$ також ідемпотент. Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні, а $b_i = g(a_i)$, $B_i = g(A_i)$, $i = \overline{1, k}$.

▲ Твердження леми випливає із того, що для кожного $g \in S_n$ відображення $\alpha \mapsto g^{-1} \alpha g$ є автоморфізмом напівгрупи T_n . ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i$ будемо називати *меншим* за розбиття $N = \bigcup_{i=1}^r B_i$, якщо кожен блок B_i другого розбиття є об'єднанням кількох блоків першого розбиття. Решітку всіх розбиттів множини N позначимо через $\text{Part} N$.

Теорема 1. Піднапівгрупа $S \subseteq T_n$ буде котранзитивною тоді і тільки тоді, коли вона належить до одного з таких типів:

1. $S = S_n$.
2. Нехай $(\rho(k)_j)_{j \in J}$ – така родина розбиттів множини N на k блоків, яка розділяє довільні її k елементів, а $Q_k = \{\rho \in \text{Part} N \mid \rho(k)_j \leq \rho \text{ для деякого } j \in J\}$.

Тоді $S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in \bigcup_{i=1}^k Q_k\}$.

3. Нехай $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – набір розбиттів множини N на k блоків, $(\rho_j)_{j \in J}$ – родина всіх розбиттів множини N , однотипних одному μ_j , а $Q = \{\rho \in \text{Part} N \mid \rho_j \leq \rho \text{ для деякого } j \in J\}$. Тоді $S = S_n \cup \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in Q\}$.

▲ Очевидно, що S_n – котранзитивна під-

напівгрупа з T_n . Якщо у котранзитивній піднапівгрупі S міститься хоча б один елемент α рангу n , то, за лемою 3, вона містить і весь R_α . Але усі елементи S_n складають єдиний R -клас, бо в них однакове тривіальне розбиття на одно-елементні класи. Отже, якщо S – котранзитивна піднапівгрупа з T_n , то вона або містить S_n повністю, або не містить жодного елемента рангу n .

Нехай тепер найбільший ранг елемента із котранзитивної піднапівгрупи S дорівнює $k < n$. Тоді, за лемою 4, то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in S\}$ множини N , що розділяє довільні її k елементів. Позначимо його $(\rho(k)_j)_{j \in J}$. Для елементів $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$ існує таке $\lambda \in S$, що кожен усі y_i містяться у різних класах розбиття π_λ . Разом з елементом $\lambda \in S$ у цій напівгрупі міститься весь R -клас R_λ , що відповідає цьому розбиттю. Отже, в S містяться всі R -класи, відповідні розбиттям із родини $(\rho(k)_j)_{j \in J}$. Всі ці R -класи містяться в одному D -класі D_k . Тому $D_k \cap S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in (\rho(k)_j)_{j \in J}\}$.

При множенні між собою їх елементів із $D_k \cap S$ можна отримати елемент рангу $k-1$. Доведемо це. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ – елемент рангу $k < n$. Виберемо у кожній підмножині A_i по одному представнику $a_i \in A_i$. Тоді $\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S$ – ідемпотент того самого рангу. Для всіх $i = \overline{1, k} \mid A_i \cap \text{rang } \varepsilon = 1$. Оскільки $k < n$, існує така A_j , що $|A_j| > 1$. Виберемо у A_j елемент z , відмінний від a_j . Для деякої $A_l \neq A_j$ замінимо a_l на z . Отримаємо $\mu = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_l & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_j & \dots & z & \dots & a_k \end{pmatrix}$. У підмножині A_l немає жодного елемента із $\text{rang } \mu$. У всіх інших A_i існує принаймні один елемент із $\text{rang } \mu$. Тому, за лемою 5, $\text{rank } \mu^2 = \text{rank } \mu - 1 = k - 1$. За умовою (1), $\mu \in S$, а тому і $\mu^2 \in S$. Отже, в S існує елемент рангу $k-1$. Для довільних двох A_m, A_l , відмінних від A_j розглянемо елемент

$$\mu_{ml} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_l & \dots & A_m & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_m & \dots & z & \dots & a_j & \dots & a_k \end{pmatrix}.$$

За умовою (1), $\mu_{ml} \in S$, а тому і $\mu_{ml}^2 \in S$. Оскільки $a_j, z \in A_j$, один із блоків розбиття $\mu_{ml}^2 \in S$ є об'єднанням вибраних блоків A_m, A_l розбиття $\mu_{ml} \in S$. Отже, разом із кожним елементом $\alpha \in D_k \cap S$ в S міститься підмножина $\{\beta \in T_n \cap D_{k-1} \mid \pi_\alpha \leq \pi_\beta\}$.

Далі аналогічно доводимо, що в S містяться елементи рангів $k-2, k-3, \dots, 2, 1$, а також, що в S містяться ті елементи $\alpha \in T_n$, розбиття π_α яких задовольняють умову $\rho(k)_j \leq \pi_\alpha$ для деякого $j \in J$. Провівши аналогічні міркування для елементів рангу $k-1, k-2, \dots, 2$, отримуємо, що

$$S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in \bigcup_{i=1}^k Q_k\}.$$

Нехай тепер $S_n \subset S$, і в котранзитивній піднапівгрупі S існують елементи меншого за n рангу. Нехай k – найбільший відмінний від n

ранг елемента із S , а $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ – елемент рангу k .

Для α розглянемо ідемпотент $\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S$, вибравши по одному представнику

$a_i \in A_i$. За лемою 6, для кожного $g \in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon_\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S$ також ідемпотент. Розбиття

$$N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \quad \text{– однотипні, а } b_i = g(a_i),$$

$B_i = g(A_i)$, $i = \overline{1, k}$. Застосувавши всі елементи $g \in S_n$, отримаємо ідемпотенти виду $g^{-1}\varepsilon_\alpha g \in S$ із всіма можливими розбиттями множини N , що однотипні з розбиттям елемента $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$. За

лемою 3, піднапівгрупа S містить усі R -класи, що відповідають розбиттям, однотипним із π_α . Далі доведення подібне до відповідного фрагменту попереднього випадку.

Зауважимо насамкінець, що для усіх трьох типів $S \subseteq T_n$ є об'єднанням R -класів, а тому задовольняють умову (1). Якщо $D_k \cap S \neq \emptyset$, то R -класам із D_k відповідають розбиття, що утворюють набір, яким можна розділити довільні

елементи $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$. Тому і умова (2) для S також виконується. Замкненість множення на S випливає із того, що для довільних $\alpha, \beta \in T_n$ $\pi_\alpha \leq \pi_{\alpha\beta}$. ■

Наслідок. Ідеал I_1 міститься у кожній відмінній від S_n котранзитивній піднапівгрупі з T_n .

Зауваження. Якщо із піднапівгруп третього типу вилучити підгрупу S_n , то отримаємо піднапівгрупу другого типу. Зворотнє твердження хибне.

Приклад 1. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа S містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2\} \cup \{3,4\}$ та $\{1,3\} \cup \{2,4\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. У ній 28 елементів.

Приклад 2. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа U містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2,3\} \cup \{4\}$, $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2\}$ та $\{2,3,4\} \cup \{1\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. В ній 52 елемента.

Наступне поняття було введено І. Леві [3]. Піднапівгрупа S із T_n називається S_n -нормальною, якщо для довільного $g \in S_n$ $g^{-1}Sg = S$.

Теорема 2. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_n буде S_n -нормальною тоді і тільки тоді, коли вона належить або до третього типу, або до третього типу із вилученою підгрупою S_n .

▲ Якщо котранзитивна піднапівгрупа S із $T_n \in S_n$ -нормальною і в ній є елемент $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ рангу k , то в S існує ідемпотент $\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S$, $a_i \in A_i$. За лемою 6, для кожного

$g \in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon_\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S$ також ідемпотент.

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні. За-

стосовуючи всі елементи $g \in S_n$, отримаємо, що в S містяться ідемпотенти із всіма можливими розбиттями множини N , що однотипні з розбит-

тям елемента $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}$.

Нехай тепер для котранзитивної піднапівгрупи S із того, що $S \cap D_k \neq \emptyset$, випливає, що вона разом із кожним своїм елементом $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in D_k$ містить усі елементи, розбиття

яких однотипне із π_α . Розглянемо довільний $g \in S_n$. Позначимо $B_i = g(A_i)$. Тоді $|B_i| = |A_i|$.

Отже, розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні.

Позначимо $b_i = g(x_i)$, $i = \overline{1, k}$. Доведемо рівність

$$g^{-1}\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix}. \text{ Справді,}$$

$$(g^{-1}\alpha g)(B_i) = g(\alpha(g^{-1}(B_i))) = g(\alpha(A_i)) = g(x_i) = b_i \text{ для } i = \overline{1, k}.$$

Оскільки у S містяться елементи із усіма можливими розбиттями такого ж типу, як

$N = \bigcup_{i=1}^k A_i$, то в S існує принаймні один елемент

із розбиттям $N = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Нехай це $\beta = \begin{pmatrix} B_i \\ c_i \end{pmatrix} \in S$. Із

котранзитивності S випливає, що і

$$g^{-1}\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S. \text{ Отже, } S \in S_n\text{-нормальною.} \blacksquare$$

Зауваження. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_4 (приклад 1) не містить елементів із розбиттям $\{1,4\} \cup \{2,3\}$, яке є однотипним із розбиттями $\{1,2\} \cup \{3,4\}$ та $\{1,3\} \cup \{2,4\}$. Вона не є S_n -нормальною, бо для $g = (2\ 4)$, елемент

$$g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \notin S.$$

Натомість котранзитивна піднапівгрупа U із T_4 (приклад 2) містить елементи із усіма можливими розбиттями типу $1 \leq 3$ і є S_n -нормальною.

Список використаних джерел

1. R.P. Sullivan, Ideals in transformation semigroups // Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae. – V.19, 3 (1978), 431-446.
2. А. Клиффорд, Г. Престон. Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ. В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 283 с.
3. I. Levi, Congruences on normal transformation semigroups // Math. Jap. 52 (2), 2000, 247-261.

Надійшла до редколегії 29.04.2010.

УДК 512.554

А. Р. Дмитришин

Мініверсальні деформації та теорема Дарбу

Використовуючи мініверсальні деформації кососиметричної матриці, узагальнено теорему Дарбу з симплектичної геометрії.

Ключові слова: мініверсальні деформації, теорема Дарбу

*E-mail: AndriiDmytryshyn@gmail.com

Статтю представив доктор фізико-математичних наук професор Кириченко В.В.

1 Introduction

In this paper we consider a smooth manifold $\mathcal{M}$ equipped with a skew-symmetric bilinear form $\mathcal{B}$. This means that each point $p \in \mathcal{M}$ is equipped by a skew-symmetric bilinear form $\mathcal{B}_p$ on the tangent space $\mathcal{T}_p$ at p in such a way that the forms vary smoothly as we move between points.

Let $p \in \mathcal{M}$ be any fixed point. We find a neighborhood U_p of p and bases of the tangent spaces $\mathcal{T}_q$ with $q \in U_p$ that smoothly depend on q , in which the matrices of $\mathcal{B}_q$ have a simple form. In the case of nonsingular forms, this result is known as Darboux's theorem from symplectic geometry; see [3, p.29].

We use the methods of the theory of miniversal deformations that was founded by V. I. Arnold [1].

I am very thankful to F. Cardin and V. V. Sergeichuk for the help with this paper.

2 Main result

The main result of the paper is the following theorem.

Theorem 1. Let $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_p | p \in \mathcal{M}\}$ be a skew-symmetric bilinear form on a smooth manifold $\mathcal{M}$. In each fixed point $p \in \mathcal{M}$, there exists a neighborhood U_p of p such that for each $q \in U_p$ the tangent space $\mathcal{T}_q$ has a basis that smoothly depends on q in which the matrix of $\mathcal{B}_q$ has the form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_l \oplus E(q), \quad (1)$$

A. R. Dmytryshyn

Miniversal deformations and Darboux's theorem

Using miniversal deformations of a skew-symmetric matrix, we generalize Darboux's theorem from symplectic geometry.

Key words: miniversal deformation, Darboux's theorem

where $2l$ is the rank of $\mathcal{B}_p$, $E(q)$ is a skew-symmetric matrix that smoothly depends on p , and $E(p) = 0$. In particular, if all forms $\mathcal{B}_q$ have the same rank, then all $E(q) = 0$ in (1).

Remark 1. This theorem can be reformulated in terms of symplectic geometry as follows (by analogy with the Darboux theorem and consequences in [3, p.29]):

Let $\mathcal{M}$ be a smooth manifold and $p \in \mathcal{M}$. Then there are local coordinates

$$(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, g_{2r+1}, \dots, g_m)$$

that smoothly depend on p and in which the form is given by

$$\sum_{i=1}^r p_i \wedge q_i + \sum_{i=2r+1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \varepsilon_{ij} g_i \wedge g_j,$$

where ε_{ij} are independent small parameters and $2r$ is the rank of the form at the point p .

3 Miniversal deformations

In this section, we give miniversal deformations of canonical forms of skew-symmetric matrices, but first we recall these canonical forms.

Lemma 1. Every skew-symmetric complex matrix is congruent to exactly one matrix of the form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_n \oplus 0 \quad (2)$$

Notice that for any n the nonsingular part of the matrix (2) is congruent to the matrix $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, which is more usual in the theory of symplectic spaces.

Unfortunately, usually there exists no smooth transformation to the canonical form (2) and thus there are skew-symmetric matrices that are "close" to each other but their canonical forms are "far" from each other. For example:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nevertheless it is always possible to find a smooth transformation to the form described below in Theorem 2.

3.1 What are miniversal deformations?

The notion of a miniversal deformation of a matrix with respect similarity was given by V. I. Arnold [1] (see also [2, § 30B]). This notion was extended to matrices with respect to congruence by V. Futorny and V. V. Sergeichuk [4].

A deformation of $m \times m$ matrix A is a holomorphic mapping $\mathcal{A}$ from a neighborhood $\Lambda \subset \mathbb{C}^k$ of $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ to the space of $m \times m$ matrices such that $\mathcal{A}(\vec{0}) = A$.

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be two deformations of A with the same parameter space $\mathbb{C}^k$. Then $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are considered as *equal* if they coincide on some neighborhood of $\vec{0}$ (this means that each deformation is a germ); $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are called *equivalent* if the identity matrix I_m possesses a deformation $\mathcal{I}$ such that

$$\mathcal{B}(\vec{\lambda}) = \mathcal{I}(\vec{\lambda})^T \mathcal{A}(\vec{\lambda}) \mathcal{I}(\vec{\lambda})$$

for all $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ in some neighborhood of $\vec{0}$.

Definition 1. A deformation $\mathcal{A}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ of a matrix A is called *versal* if every deformation $\mathcal{B}(\mu_1, \dots, \mu_l)$ of A is equivalent to a deformation of the form $\mathcal{A}(\varphi_1(\vec{\mu}), \dots, \varphi_k(\vec{\mu}))$, where all $\varphi_i(\vec{\mu})$ are convergent in a neighborhood of $\vec{0}$ power

series such that $\varphi_i(\vec{0}) = 0$. A versal deformation $\mathcal{A}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ of A is called *miniversal* if there is no versal deformation having less than k parameters.

By a $(0, *)$ matrix we mean a matrix $\mathcal{D}$ whose entries are 0 and *. We say that a matrix is *of the form $\mathcal{D}$* if it can be obtained from $\mathcal{D}$ by replacing the stars with complex numbers. Denote by $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ the space of all matrices of the form $\mathcal{D}$, and by $\mathcal{D}(\vec{\varepsilon})$ the parameter matrix obtained from $\mathcal{D}$ by replacing each (i, j) star with the parameter ε_{ij} . This means that

$$\mathcal{D}(\mathbb{C}) := \bigoplus_{(i,j) \in \mathcal{I}(\mathcal{D})} \mathbb{C} E_{ij},$$

$$\mathcal{D}(\vec{\varepsilon}) := \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(\mathcal{D})} \varepsilon_{ij} E_{ij},$$

where

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) \subseteq \{1, \dots, m\}^2$$

is the set of indices of the stars in the matrix of the $\mathcal{D}$, and E_{ij} is the elementary matrix whose (i, j) th entry is 1 and the others are 0.

We say that a miniversal deformation of A is *simplest* if it has the form $A + \mathcal{D}(\vec{\varepsilon})$, where $\mathcal{D}$ is a $(0, *)$ matrix. If $\mathcal{D}$ has no zero entries, then it defines the deformation

$$\mathcal{U}(\vec{\varepsilon}) := A + \sum_{i,j=1}^m \varepsilon_{ij} E_{ij}.$$

3.2 Explanation in terms of holomorphic functions

Let A be a given $m \times m$ skew-symmetric matrix. For all skew-symmetric matrices $A + E$ that are close to A , we give their normal form $\mathcal{A}(E)$ with respect to congruence transformations

$$(A + E) \mapsto S(E)^T (A + E) S(E),$$

in which $S(E)$ is holomorphic at 0 (i.e., its entries are power series in the entries of E that are convergent in a neighborhood of 0) and $S(0)$ is a nonsingular matrix.

Since $\mathcal{A}(0) = S(0)^T A S(0)$, we can take $\mathcal{A}(0)$ equalling the congruence canonical form A_{can} of A . Then

$$\mathcal{A}(E) = A_{\text{can}} + \mathcal{D}(E), \quad (3)$$

where $\mathcal{D}(E)$ is a matrix that is holomorphic at 0 and $\mathcal{D}(0) = 0$. In Theorem 2 we obtain $\mathcal{D}(E)$ with the minimal number of nonzero entries that can be attained by using transformations (3).

3.3 Miniversal deformation of a skew-symmetric matrix

Since each matrix is congruent to its canonical matrix, it suffices to construct miniversal deformations of all canonical matrices.

Theorem 2. *A simplest miniversal deformation of each canonical skew-symmetric $m \times m$ matrix A_{can} for congruence can be taken in the form $A_{\text{can}} + \mathcal{D}(\vec{\varepsilon})$, where A_{can} is of the form (2) and $\mathcal{D}$ is a $(0, *)$ matrix of the form $\mathcal{D} = 0_{2n} \oplus \mathcal{D}_0$, in which the size of*

$$\mathcal{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ * & 0 & * & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

coincides with the size of the summand 0 in the canonical form (2).

Proof. The matrix $\mathcal{D}$ can be constructed as follows. The vector space

$$V := \{C^T A_{\text{can}} + A_{\text{can}} C \mid C \in \mathbb{C}^{m \times m}\}$$

is the tangent space to the congruence class of A_{can} at the point A_{can} since

$$(I + \varepsilon C)^T A_{\text{can}} (I + \varepsilon C) =$$

$$A_{\text{can}} + \varepsilon(C^T A_{\text{can}} + A_{\text{can}} C) + \varepsilon^2 C^T A_{\text{can}} C$$

for all $m \times m$ matrices C and each $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Then $\mathcal{D}$ satisfies the following condition:

$$\mathbb{C}_c^{m \times m} = V \oplus \mathcal{D}(\mathbb{C})$$

in which $\mathbb{C}_c^{m \times m}$ is the space of all $m \times m$ skew-symmetric matrices, $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ is the vector space of all matrices obtained from $\mathcal{D}$ by replacing its stars by complex numbers. Thus, the number of stars in $\mathcal{D}$ is equal to the codimension of the congruence class of A_{can} .

Let us compute the space V in this case:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{11}^T & C_{21}^T & C_{31}^T \\ C_{12}^T & C_{22}^T & C_{32}^T \\ C_{13}^T & C_{23}^T & C_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} C_{21} - C_{21}^T & C_{11}^T + C_{22} & C_{23} \\ -C_{11} - C_{22}^T & C_{12}^T - C_{12} & -C_{13} \\ -C_{23}^T & C_{13}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (5) \end{aligned}$$

in which $C = [C_{ij}]_{i,j=1}^3$ is an arbitrary $m \times m$ matrix. Note that $m = 2n + k$, where k is the size of the zero block in A_{can} .

Thus, $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ consists of all skew-symmetric matrices that have non-zero entries only in the block corresponding to the zero block in (5). $\square$

Remark 2. *If a deformation is zero, then all matrices from some neighborhood of the point can be reduced to the same form by a continuous transformation (i.e., changing local coordinates continuously we can reach the same form for all forms that are close to each other). In particular, this proves the Darboux theorem from symplectic geometry.*

Proof of Theorem 1. Theorem 1 follows from Theorem 2. Indeed, for two smooth manifolds M and N we have

$$Df(q) : T_q M \rightarrow T_{f(q)} N$$

$$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma],$$

and therefore we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

where vertical maps are natural projections. Therefore, the map at the level of tangent spaces induces the map at the level of manifolds. $\square$

References

1. V.I. Arnold, On matrices depending on parameters, *Russian Math. Surveys* 26 (2) (1971) 29–43.
2. V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1988.
3. V.I. Arnold, A.B. Ginzburg, *Symplectic geometry*. Second edition, Izhevsk, 2000.
4. V. Futorny, V.V. Sergeichuk, Miniversal deformations of matrices of bilinear forms, Preprint RT-MAT 2007-04, Universidade de Sao Paulo, 2007, 34 p.

Надійшла до редколегії 10.09.2010

УДК 512.57

Анатолій В. Жучок, к. ф.-м. н., доцент

Вільні тріюїди

Побудовано тріюїд, ізоморфний вільному тріюїду рангу 1.

Ключові слова: тріюїд, вільний тріюїд.

E-mail: zhuchok_a@mail.ru

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

Вступ. Ж.-Л. Лодей і М.О. Ронко ввели поняття тріюїду та тріалгебри [1]. Тріюїдом є множина з трьома асоціативними операціями, узгодженими між собою (див. нижче). Тріалгебра є лінійним аналогом тріюїду. Якщо операції тріюїду співпадають, то він перетворюється в напівгрупу. Першим результатом про тріюїди є описання вільного тріюїду на заданій множині [1]. Якщо операції $\vdash$ та $\perp$ тріюїду співпадають, то він перетворюється в дімоноїд [2]. Дімоноїди були введені Ж.-Л. Лодеем для вивчення властивостей алгебр Лейбніца. Першим результатом про дімоноїди є описання вільного дімоноїду на заданій множині [2]. Структуру комутативних дімоноїдів було описано в [3]. У [4] автор побудував вільний комутативний дімоноїд та описав найменшу ідемпотентну конгруенцію на цьому дімоноїді. Поняття напівретракції дімоноїду було введено та застосовано для вивчення конгруенцій у [5].

У даній роботі побудовано тріюїд, ізоморфний вільному тріюїду рангу 1, описаному Ж.-Л. Лодеем і М.О. Ронко в [1].

Нагадаємо основні визначення, які використовуються в роботі.

Множина T з визначеними на ній трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$, які задовольняють аксіомам:

$$(T1) \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(T2) \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(T3) \quad (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$(T4) \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),$$

Anatolii V. Zhuchok, PhD, Associate Professor

Free trioids

We construct a trioid which is isomorphic to the free trioid of rank 1.

Key words: trioid, free trioid.

$$(T5) \quad (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z),$$

$$(T6) \quad (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),$$

$$(T7) \quad (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z),$$

$$(T8) \quad (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріюїдом.

Відображення f тріюїду T_1 у тріюїд T_2 називається гомоморфізмом, якщо

$$(x \dashv y)f \stackrel{!}{=} xf \dashv yf,$$

$$(x \vdash y)f = xf \vdash yf,$$

$$(x \perp y)f = xf \perp yf$$

для всіх $x, y \in T_1$. Якщо f є також бієкцією, то f – ізоморфізм.

Тріюїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо називати комутативним, якщо напівгрупи $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ і $(T, \perp)$ є комутативними. Через N будемо позначати множину додатних цілих чисел.

Наведемо приклад комутативного тріюїду.

Нехай $2N$ – множина парних додатних цілих чисел та $2N-1$ – множина непарних додатних цілих чисел. Зафіксуємо $t, t_1, t_2, t_3 \in 2N-1$ та визначимо на N операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$x \dashv y = \begin{cases} x + y + t_1, & x, y \in 2N, \\ t & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} x + y + t_2, & x, y \in 2N, \\ t & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} x + y + t_3, & x, y \in 2N, \\ t & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in N$.

Твердження 1. $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ є комутативним тріюдом.

Доведення. Нехай $x, y, z \in N$. Припустимо, що $x \dashv y = c$, $y \vdash z = d$. Зрозуміло, що $c, d \in 2N-1$. Маємо

$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv z &= c \dashv z = t = \\ &= x \dashv d = x \dashv (y \vdash z), \end{aligned}$$

звідки впливає справедливості аксіоми (T1) тріюду. Аналогічними міркуваннями доводяться асоціативність операцій $\dashv, \vdash, \perp$ та аксіоми (T2)-(T8) тріюду. Отже, $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріюід. Неважко побачити, що операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ є комутативними.

Твердження доведено.

Інші приклади тріюідів та приклади тріалгебр можна знайти в [1].

1. У цьому пункті ми розглянемо вільний тріюід, описаний Ж.-Л. Лодеем і М.О. Ронко у [1].

Нехай P^* – вільна напівгрупа на двохелементній множині $\{x, \bar{x}\}$, $P \subset P^*$ – піднапівгрупа, яка містить слова, в запис яких елемент $\bar{x}$ входить принаймні один раз. Неважко помітити, що P^* є сполукою напівгруп P та $P^* \setminus P$ [6].

Нехай далі w – довільне слово з P . Через $\tilde{w}$ позначимо слово, отримане з w заміною всіх літер $\bar{x}$ на x . Наприклад, якщо $w = x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}$, то $\tilde{w} = xxxxx$. Зрозуміло, що $\tilde{w} \in P^* \setminus P$.

На множині P визначимо операції $\dashv, \vdash$ і $\perp$ за правилами:

$$w \dashv u = w\tilde{u}, \quad w \vdash u = \tilde{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всіх $w, u \in P$. З твердження 1.9 роботи [1] випливає, що $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ – вільний тріюід рангу 1. У [1] показано, що вільна тріалгебра над векторним простором цілком визначається вільною тріалгеброю з одним породжуючим елементом, а опис останньої зводиться до опису вільного тріюїду рангу 1.

2. У цьому пункті ми побудуємо тріюід, ізоморфний вільному тріюїду рангу 1.

Нехай $A = \{0, 1\}$ та $A_i = A$ для всіх $i \in N$. На множині

$$F = \{(n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \in N \times \prod_{i \in N} A_i |$$

$$\sum_{i=1}^n t_i > 0, \sum_{i=n+1}^{\infty} t_i = 0\}$$

визначимо операції $\dashv', \vdash'$ і $\perp'$ за правилами:

$$\begin{aligned} (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) &= \\ &= (n + m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)), \\ (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) &= \\ &= (n + m; (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) &= \\ &= (n + m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)). \end{aligned}$$

для всіх $(n; (t_1, \dots, t_i, \dots)), (m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \in F$.

Лема 2. $(F, \dashv', \vdash', \perp')$ є тріюдом.

Доведення. Для всіх $(n; (t_1, \dots, t_i, \dots)),$

$$(m; (p_1, \dots, p_i, \dots)), (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) \in F$$

отримуємо

$$\begin{aligned} ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \dashv' \\ \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) &= \\ &= (n + m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \dashv' \\ \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) &= \\ &= (n + m + l; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)), \\ (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \dashv' \\ \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) &= (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' \\ \dashv' (m + l; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) &= \\ &= (n + m + l; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)), \\ (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \vdash' \\ \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) &= (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' \\ \dashv' (m + l; (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) &= \\ &= (n + m + l; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)), \\ (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \perp' \\ \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) &= (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' \\ \dashv' (m + l; (p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) &= \\ &= (n + m + l; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)), \\ ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \dashv' \\ \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n+m; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots) \dashv' \\
 &\quad \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \dashv' \\
 &\quad \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (m+l; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &\quad = (n+m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \dashv' \\
 &\quad \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) \dashv' \\
 &\quad \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \dashv' \\
 &\quad \dashv' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' \\
 &\quad \perp' (m+l; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n+m+l; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \dashv' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; (t_1, \dots, t_n, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' \\
 &\quad \perp' (m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; (t_1, \dots, t_n, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots))) = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (m+l; (p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) \vdash' \\
 &\quad \vdash' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+m \text{ раз}}, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad ((n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' (m; (p_1, \dots, p_i, \dots))) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) \perp' \\
 &\quad \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) = \\
 &= (n+m+l; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)), \\
 &\quad (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' ((m; (p_1, \dots, p_i, \dots)) \perp'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \perp' (l; (s_1, \dots, s_i, \dots)) &= (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)) \perp' \\ \perp' (m + l; (p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)) &= \\ = (n + m + l; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що аксіоми (T1)-(T8) тріюїду та асоціативність операцій $\neg'$, $\vdash'$ та $\perp'$ виконуються. Отже, $(F, \neg', \vdash', \perp')$ – тріюїд.

Лему доведено.

Теорема 3. Вільний тріюїд $(P, \neg, \vdash, \perp)$ рангу 1 є ізоморфним тріюїду $(F, \neg', \vdash', \perp')$.

Доведення. Нехай $a_1 \dots a_i \dots a_n, b_1 \dots b_j \dots b_m \in P$, $a_i, b_j \in \{x, \bar{x}\}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Визначимо відображення

$$\mu : (P, \neg, \vdash, \perp) \rightarrow (F, \neg', \vdash', \perp') :$$

$$a_1 \dots a_i \dots a_n \mapsto a_1 \dots a_i \dots a_n \mu,$$

поклавши

$$a_1 \dots a_i \dots a_n \mu = (n; (t_1, \dots, t_i, \dots)),$$

де

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i = \bar{x} \text{ та } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Неважко помітити, що μ є бієктивним відображенням. Покажемо, що μ – гомоморфізм.

Нехай

$$a_1 \dots a_i \dots a_n \mu = (n; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)),$$

$$b_1 \dots b_j \dots b_m \mu = (m; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)).$$

Тоді

$$(a_1 \dots a_i \dots a_n \neg b_1 \dots b_j \dots b_m) \mu =$$

$$= (a_1 \dots a_i \dots a_n \widetilde{b_1 \dots b_j \dots b_m}) \mu =$$

$$= (n + m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)),$$

$$(a_1 \dots a_i \dots a_n \vdash b_1 \dots b_j \dots b_m) \mu =$$

$$= (a_1 \dots a_i \dots a_n \widetilde{b_1 \dots b_j \dots b_m}) \mu =$$

$$= (n + m; (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)),$$

$$(a_1 \dots a_i \dots a_n \perp b_1 \dots b_j \dots b_m) \mu =$$

$$= (a_1 \dots a_i \dots a_n \widetilde{b_1 \dots b_j \dots b_m}) \mu =$$

$$= (n + m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)).$$

З іншого боку,

$$(n; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \neg'$$

$$\neg' (m; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) =$$

$$= (n + m; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)),$$

$$(n; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \vdash'$$

$$\vdash' (m; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) =$$

$$= (n + m; (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ раз}}, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)),$$

$$(n; (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0, \dots)) \perp'$$

$$\perp' (m; (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)) =$$

$$= (n + m; (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0, \dots)).$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що μ – гомоморфізм. Таким чином, μ – ізоморфізм.

Теорему доведено.

Висновки

У роботі побудовано тріюїд, ізоморфний вільному тріюїду рангу 1.

Список використаних джерел

1. J.-L. Loday and M.O.Ronco, Trialgebras and families of polytopes, *Contemp. Math.*, **346** (2004), 369-398.
2. J.-L. Loday, Dialgebras, In: *Dialgebras and related operads*, *Lecture Notes in Math.* **1763**, Springer, Berlin, 2001, 7-66.
3. A.V. Zhuchok, Commutative dimonoids, *Algebra and Discrete Mathematics*, N. **2** (2009), 116-127.
4. A.V. Zhuchok, Free commutative dimonoids, *Algebra and Discrete Mathematics*, V. **9** (2010) N. **1**, 109-119.
5. А.В. Жучок, Напівретракції дімоноїдів, *Труди ИПММ НАН України*. 2008. Вып. **17**. - с. 42-50.
6. A.H. Clifford, Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 449-504.

Надійшла до редколегії 09.09.2010

УДК 512.53

Юрій В. Жучок, к.ф.-м.н., доцент,
Леван В. Кіртадзе, к.ф.-м.н.

Ендоморфізми вільного добутку скінченних напівгруп

Описано ендоморфізми вільного добутку скінченних напівгруп та побудовано напівгрупу, яка є ізоморфною напівгрупі всіх ендоморфізмів вільного добутку скінченних напівгруп.

Ключові слова: ендоморфізм, вільний добуток, скінченна напівгрупа.

E-mail: zhuchok_y@mail.ru, levanik2@rambler.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В.В.

1. Вступ

Однією з важливих супутніх структур алгебраїчної системи є її напівгрупа ендоморфізмів. Доцільність вивчення цих структур пов'язана перед усім з тим, що існує ряд алгебраїчних систем, деякі властивості яких визначаються властивостями їх напівгруп ендоморфізмів. Так, наприклад, скінченні абелеві групи [1], неперіодичні подільні абелеві групи [2], узагальнені групи кватерніонів [3] визначаються своїми напівгрупами ендоморфізмів у класі всіх груп. У роботах [1], [4] доведено, що прямий добуток груп та деякі напівпрямі добутки груп можуть бути описані властивостями їх напівгруп ендоморфізмів.

З іншого боку, існує багато прикладів алгебр, які не визначаються своїми напівгрупами ендоморфізмів (див., наприклад, [5], [6]). Відзначимо також, що Л.М. Глускіним було знайдено метод отримання абстрактних характеристик напівгруп перетворень, за допомогою якого були описані напівгрупи ендоморфізмів лінійних просторів й модулів [7-9]. Пізніше вивчення ендоморфізмів напівгруп набуло розвитку у роботах й інших авторів. Так у [10], [11] В.М. Усенком було описано будову напівгрупи ендоморфізмів вільної групи. Проблема опису напівгруп ендоморфізмів регулярних напівгруп Ріса матричного типу була розв'язана в [12]. Усі ендоморфізми повної симетричної напівгрупи та симетричної

Yuriy V. Zhuchok, C. Sci. (Phys.-Math.), As.Pr.
Levan V. Kirtadze, C. Sci. (Phys.-Math.)

Endomorphisms of free product of finite semigroups

Endomorphisms of free product of finite semigroups are described and a semigroup which is isomorphic to the semigroup of all endomorphisms of free product of finite semigroups is constructed.

Key words: endomorphism, free product, finite semigroup.

інверсної напівгрупи на скінченній множині та їх кількість були описані у [13], [14], а ендоморфізми напівгруп бінарних відношень вивчалися у [15].

Для вільного добутку довільних напівгруп ідемпотентів напівгрупа ендоморфізмів була охарактеризована у [16]. Крім того, у [17] було анонсовано, що напівгрупи ендоморфізмів ортогональної суми напівгруп, певної сполуки напівгруп і вільного добутку π -регулярних напівгруп ізоморфно вкладаються у напівгрупу мономіальних по рядках матриць. Природною у цьому напрямі є задача опису точних зображень напівгруп ендоморфізмів вільних добутків заданих напівгруп.

Основною метою цієї роботи є побудова напівгрупи, яка є ізоморфною напівгрупі всіх ендоморфізмів вільного добутку скінченних напівгруп.

2. Основні поняття

2.1. Нехай задано сімейство напівгруп S_α , $\alpha \in Y$ таких, що $S_i \cap S_j = \emptyset$ при будь-яких $i, j \in Y$, $i \neq j$. Позначимо через $Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ множину всіх скінченних непорожніх послідовностей $a_1 a_2 \dots a_k$, які складаються з елементів множини $\bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, при цьому для будь-якого $1 \leq j \leq k-1$ з умови $a_j \in S_\alpha$ для деякого $\alpha \in Y$ випливає, що $a_{j+1} \notin S_\alpha$. На множині $Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ визначимо

операцію наступним чином:

$$a_1 a_2 \dots a_k * b_1 b_2 \dots b_l = \begin{cases} a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l, & a_k \in S_i, b_1 \in S_j, i \neq j, \\ a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k \cdot b_1) b_2 \dots b_l, & a_k, b_1 \in S_\alpha, \alpha \in Y. \end{cases}$$

Безпосередня перевірка показує, що операція $*$ асоціативна і, отже, $(Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y}, *)$ – напівгрупа. Отриману напівгрупу називають вільним добутком напівгруп S_α , $\alpha \in Y$.

Якщо $w = a_1 a_2 \dots a_k \in Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$, то число $l(w) = k$ називають довжиною елемента w .

2.2. Через $\mathfrak{Z}(X)$ будемо позначати симетричну напівгрупу на множині X .

Якщо $\varphi: A \rightarrow B$ – довільне відображення і $\emptyset \neq X \subseteq A$, то відображення $\varphi|_X: X \rightarrow B$, що визначається умовою:

$$a\varphi|_X = a\varphi$$

для всіх $a \in X$, називається обмеженням відображення φ на підмножину X .

Якщо $g \in \mathfrak{Z}(Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y})$, то для обмеження $g|_{S_\alpha}$ вживатимемо позначення g_α .

3. Ендоморфізми вільного добутку скінченних напівгруп

3.1. Нехай $F = Fr[S_1, S_2, \dots, S_n]$ – вільний добуток скінченних напівгруп $S_1, S_2, \dots, S_n$ та $End F$ – напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи F .

Позначимо через I_n множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Для всіх $i, j \in I_n$ через H_{ij} будемо позначати множини всіх гомоморфізмів з напівгрупи S_i у напівгрупу S_j .

Оскільки кожна скінченна напівгрупа містить принаймні один ідемпотент, то $H_{ij} \neq \emptyset$ при будь-яких $i, j \in I_n$.

Далі для кожного $i \in I_n$ покладемо

$$H_{i*} = \bigcup_{j=1}^n H_{ij}.$$

Ендоморфізми вільного добутку скінченних напівгруп описує

Лема. Перетворення $\varphi \in \mathfrak{Z}(F)$ є ендоморфізмом тоді й лише тоді, коли для будь-якого $w = a_1 a_2 \dots a_k \in F$, $a_i \in S_{j_i}$ маємо

$$w\varphi = a_1 \varphi_{j_1} a_2 \varphi_{j_2} \dots a_k \varphi_{j_k},$$

де $\varphi_{j_i} \in H_{j_i*}$, $1 \leq i \leq k$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathfrak{Z}(F)$ – ендоморфізм. Тоді, зрозуміло, гомоморфізмами є наступні обмеження φ :

$$\varphi_i: S_i \rightarrow F, i \in I_n.$$

Припустимо, що для деякого $i \in I_n$ існує $w \in S_i$ таке, що $l(w\varphi_i) \geq 2$. Тоді циклічна напівгрупа $\langle w\varphi_i \rangle$, породжена елементом $w\varphi_i$, буде нескінченною, оскільки із збільшенням показника k довжина елемента $(w\varphi_i)^k$ також буде збільшуватися. Очевидно, образ скінченної напівгрупи S_i при гомоморфізмі φ_i є скінченним. Але тоді отримуємо $\langle w\varphi_i \rangle \subseteq Im\varphi_i$, що неможливо. Отже, для всіх $i \in I_n$ та будь-якого $w \in S_i$ маємо $l(w\varphi_i) = 1$. При цьому зрозуміло, що для всіх $i \in I_n$ справджується включення $S_i\varphi_i \subseteq S_j$ для деякого $j \in I_n$. Таким чином, $\varphi_\lambda \in H_{\lambda*}$, $\lambda \in I_n$ та для всіх $w = a_1 a_2 \dots a_k \in F$, де $a_i \in S_{j_i}$, $1 \leq i \leq k$, виконується умова:

$$(a_1 a_2 \dots a_k)\varphi = a_1 \varphi_{j_1} a_2 \varphi_{j_2} \dots a_k \varphi_{j_k}.$$

Обернене твердження очевидне.

Лему доведено.

3.2. Нехай D_X – деяке розбиття множини X , $Map(A; B)$, де $A, B \in D_X$, – множина всіх відображень з множини A у B та

$$M(D_X) = \bigcup_{A, B \in D_X} Map(A; B).$$

Покладемо $M^0(D_X) = M(D_X) \cup \{0\}$, де $0 \notin M(D_X)$, та визначимо на цій множині таку операцію:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi \circ \psi, & \varphi \neq 0 \neq \psi, Im\varphi \subseteq Dom\psi, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $\varphi \circ \psi$ – звичайна композиція відображень.

Множина $M^0(D_X)$ є, зрозуміло, напівгрупою відносно щойно визначеної операції, при цьому з точністю до ізоморфізму вона міститься у напівгрупі B_X усіх бінарних відношень на X .

Побудуємо далі ізоморфну конструкцію для напівгрупи $End F$.

3.3. Для всіх $i \in I_n$ нехай

$$H = \bigcup_{i=1}^n H_{i*}, H^0 = H \cup \{0\}.$$

Якщо $D_S = \{S_i | i \in I_n\}$ – розбиття множини $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, то множина H^0 буде піднапівгрупою напівгрупи $M^0(D_S)$.

Нехай T – довільна напівгрупа, $Gl(T)$ – множина усіх її підмножин. Поклавши $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$ для всіх $A, B \subseteq T$, дістаємо напівгрупу на множині $Gl(T)$, яка називається глобальною наднапівгрупою напівгрупи T .

Множина всіх елементів, які беруться в точності по одному з кожного блоку розбиття $D_X = \{X_i | i \in I\}$ множини X , називається трансверсаллю цього розбиття.

Для розбиття $L_{H^0} = \{H_{i*} | i \in I_n\} \cup \{\{0\}\}$ напівгрупи H^0 множини всіх його трансверсалей позначимо через $T(L_{H^0})$.

Лема. Множина $T(L_{H^0})$ є піднапівгрупою глобальної наднапівгрупи $Gl(H^0)$.

Доведення. Нехай $A, B \in T(L_{H^0})$. Оскільки $\{Dom\xi | \xi \in B, \xi \neq 0\} = D_S$, то для будь-якого $\varphi \in A, \varphi \neq 0$ знайдеться єдиний елемент $\psi \in B, \psi \neq 0$ такий, що $Im\varphi \subseteq Dom\psi$. Звідси $\varphi\psi \neq 0$. При цьому у тих випадках, коли φ теж саме, а $f \in B$ таке, що $f \neq \psi$, будемо мати $\varphi f = 0$.

Таким чином, враховуючи, що $0 \in AB$ та

$$\{Dom\xi | \xi \in A, \xi \neq 0\} = D_S,$$

$$Dom\varphi = Dom\varphi\psi, \text{ коли } \varphi\psi \neq 0,$$

отримуємо $AB \in T(L_{H^0})$. Отже, $T(L_{H^0})$ – піднапівгрупа напівгрупи $Gl(H^0)$.

Лему доведено.

Відмітимо, що сукупність $\{H_{i*}^0 | i \in I_n\}$, де $H_{i*}^0 = H_{i*} \cup \{0\}$, є декомпозицією напівгрупи H^0 у ліву суму напівгруп (див., напр., [18]).

3.4. Нехай $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ та $D_S = \{S_i | i \in I_n\}$ – розбиття множини S . Через α позначимо еквівалентність на множині S , яка відповідає розбиттю D_S , а через $[x]\alpha$ – клас еквівалентності α , що містить елемент $x \in S$.

Основним результатом цієї роботи є

Теорема. Для будь-яких скінченних напівгруп $S_1, S_2, \dots, S_n$ має місце ізоморфізм

$$End Fr[S_1, S_2, \dots, S_n] \cong T(L_{H^0}).$$

Доведення. Визначимо відображення g з напівгрупи $End F$ у напівгрупу $T(L_{H^0})$ умовою:

$$(f)g = \{f|_{S_i} : i \in I_n\} \cup \{0\}$$

для всіх $f \in End F$.

Нехай $\varphi, \psi \in End F$ такі, що $\varphi \neq \psi$. Оскільки будь-який ендоморфізм вільного

добутку F скінченних напівгруп $S_1, S_2, \dots, S_n$ визначається гомоморфізмами

$$S_i \rightarrow F, i \in I_n$$

з відповідних множин $H_{i*}, i \in I_n$ (див. п. 3.1), то знайдуться $k \in I_n$ та $x \in S_k$ такі, що $(x)\varphi|_{S_k} \neq (x)\psi|_{S_k}$. Отже, $(\varphi)g \neq (\psi)g$.

Візьмемо тепер довільне $A \in T(L_{H^0})$ таке, що $A = \{0, \mu_i | i \in I_n\}$, де $Dom\mu_i = S_i$ для всіх $i \in I_n$, та визначимо на напівгрупі F таке перетворення:

$$\eta : w = a_1 a_2 \dots a_l \mapsto w\eta = a_1 \mu_{i_1} a_2 \mu_{i_2} \dots a_l \mu_{i_l},$$

де $a_j \in S_{i_j}, 1 \leq j \leq l$.

Беручи до уваги лему п. 3.1, $\eta \in End F$, при цьому $(\eta)g = A$. Таким чином, g – бієкція.

Нехай $0 \neq \rho \in (\varphi\psi)g$, де $\varphi, \psi \in End F$. Тоді ρ має вигляд $\rho : S_i \rightarrow S_j$ для деяких $i, j \in I_n$.

Визначимо далі два відображення $\lambda : S_i \rightarrow [x]\alpha$ та $\mu : [x]\alpha \rightarrow S_j$, де $x \in S_i\varphi$, поклавши $a\lambda = a\varphi$ для всіх $a \in S_i$ і відповідно $b\mu = b\psi$ для всіх $b \in [x]\alpha$.

Зрозуміло, що $\rho = \lambda\mu$, при цьому $\lambda = \varphi|_{S_i} \in (\varphi)g, \mu = \psi|_{[x]\alpha} \in (\psi)g$, де $x \in S_i\varphi$, і, отже, $(\varphi\psi)g \subseteq (\varphi)g(\psi)g$.

Навпаки, якщо $0 \neq \rho \in (\varphi)g(\psi)g$, то, враховуючи будову елементів із $T(L_{H^0})$, знайдуться єдині $\sigma \in (\varphi)g$ і $\delta \in (\psi)g$ такі, що $\rho = \sigma\delta$. Неважко помітити, що $\sigma = \varphi|_{Dom\rho}$ та $\delta = \psi|_{[x\varphi]\alpha}$, де $x \in Dom\rho$, звідки

$$\sigma\delta = \varphi|_{Dom\rho}\psi|_{[x\varphi]\alpha} = (\varphi\psi)|_{Dom\rho} \in (\varphi\psi)g.$$

Таким чином, $(\varphi)g(\psi)g \subseteq (\varphi\psi)g$.

Теорему доведено.

3.5. Нехай Θ – клас усіх напівгруп, ендоморфізми вільних добутоків над будь-яким сімейством напівгруп з якого задовольняють лемі п. 3.1. Наприклад, клас усіх скінченних напівгруп й клас усіх напівгруп ідемпотентів містяться у Θ .

Позначимо через $T'(L_{H^0})$ напівгрупу, визначену для сімейства довільних напівгруп $S_\alpha, \alpha \in Y$ аналогічно тому як визначена напівгрупа $T(L_{H^0})$ у п. 3.1-3.3 для скінченних напівгруп $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Наслідок. Для будь-якого сімейства напівгруп $S_\alpha, \alpha \in Y$ з класу Θ має місце ізоморфізм

$$End Fr[S_\alpha]_{\alpha \in Y} \cong T'(L_{H^0}).$$

3.6. Відмітимо, що існують сімейства напівгруп, ендоморфізми вільних добутоків над якими не задовольняють лемі п. 3.1.

Дійсно, наприклад, якщо $S_1 = \langle a \rangle$ – нескінченна циклічна напівгрупа, S_2, S_3 – довільні напівгрупи та $u \in S_2, v \in S_3$, то узявши монуоморфізм $\varphi_1 : S_1 \rightarrow Fr[S_1, S_2, S_3] : a^k \mapsto (uv)^k$ та тотожні автоморфізми $\varphi_2 : S_2 \rightarrow S_2$ та $\varphi_3 : S_3 \rightarrow S_3$, отримаємо ендоморфізм φ вільного добутку $Fr[S_1, S_2, S_3]$, який визначається гомоморфізмами $\varphi_i, 1 \leq i \leq 3$.

Але в образі гомоморфізма φ_1 кожний елемент має довжину, більшу за одиницю. Отже, у цьому випадку напівгрупа ендоморфізмів $End Fr[S_1, S_2, S_3]$ не ізоморфна $T(L_{H^0})$, визначеній на напівгрупах $S_i, 1 \leq i \leq 3$.

Висновки

У роботі побудовано напівгрупу, яка є ізоморфною напівгрупі всіх ендоморфізмів вільного добутку скінченних напівгруп.

Робота є частиною наукового дослідження, яке підтримується МОН України у рамках гранту Президента для молодих учених, №Ф 27/40-2010.

Список використаних джерел

1. Пуусемп П. Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп // Учёные записки Тартуского университета. – 1975. – Т. 366. – С. 76–104.
2. Пуусемп П. A characterization of divisible and torsion Abelian groups by their endomorphism semigroups // Algebras Groups Geom. – 1999. – Vol. 16. – P. 183–193.
3. Пуусемп П. Полугруппы эндоморфизмов обобщённых групп кватернионов // Учёные записки Тартуского университета. – 1976. – Т. 390. – С. 84–103.
4. Puusemp P. Characterization of a semidirect product of groups by its endomorphism semigroup // Proceedings of the International Conference, Braga, Portugal, June 18–23, 1999. – Singapore: World Scientific, 2000. – P. 161–170.
5. Corner A. L. Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. – 1963. – Vol. 13, no. 52. – P. 687–710.
6. Puusemp P. Characterization of a semidirect product of cyclic groups by its endomorphism semigroup // Algebras Groups Geom. – 2000. – Vol. 17. – P. 479–498.
7. Глушкин Л.М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств. – Изв. АН СССР, сер. матем. 23 (1959). – С. 841–870.
8. Глушкин Л.М. Идеалы полугрупп // Матем. сб. 55 (1961). – С. 421–448.
9. Глушкин Л.М. Об эндоморфизмах модулей // Алгебра и логика. – Киев, 1966. – С. 3–20.
10. Усенко В.М. Эндоморфизмы свободных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 14 (1999). – С. 166–172.
11. Усенко В.М. Полугруппы эндоморфизмов свободных групп // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф.Скорины 3 (16). – Вопросы алгебры, 2000. – С. 182–185.
12. Усенко В.М. Эндоморфизмы вполне 0-простых полугрупп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 13 (1998). – С. 92–119.
13. Schein B.M., Teclezghi B. Endomorphisms of finite symmetric inverse semigroups, J. Algebra. – 198 (1997). – P. 300–310.
14. Schein B.M., Teclezghi B. Endomorphisms of finite full transformation semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. – 126 (1998). – P. 2579–2587.
15. Mazorchuk V. Endomorphisms of $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{P}\mathfrak{B}_n$ and $\mathfrak{C}_n$. Comm. Algebra 30 (2002). – P. 3489–3513.
16. Жучок А.В. Полугруппы эндоморфизмов свободных произведений // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки: Донецьк, 2006. – Вип. 2. – С. 7–10.
17. Zhuchok A. V. Endomorphisms semigroups of orthogonal sum and band of semigroups // XII International scientific Kravchuk Conference: Kyiv, 2008. – V. I. – 616 p.
18. Жучок Ю.В. Про декомпозиції повної напівгрупи матриць // Вісник Київського ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки. – Т. 2. – 2009 – С. 17–20.

Надійшла до редколегії 26.10.2010

УДК 512.552

Наталья В. Кайдан, аспірантка

Узагальнено матричний вигляд скінченних кілець

В цій статті розглядаються напівдосконалі кільця та їх радикали Джекобсона, дається означення кускової області. Доводиться теорема, згідно якої, сагайдак скінченної кускової області - ациклічний.

Ключові слова: скінченне кільце, напівдосконале кільце, радикал, кускова область.

kaydannv@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

N. V. Kaydan, PhD student

Generalized matrix type of finite rings

Here we discuss properties of finite rings and their Jacobson radicals, the definition of a piecewise domain is given. A theorem which states that quiver of finite piecewise domain is acyclic, is proved.

Key Words: finite ring, semiperfect ring, radical, piecewise domain.

1. Напівдистрибутивні скінченні кільця.

Будь-яке скінченне кільце є напівдосконалим. Нехай $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ є розклад скінченного кільця A в пряму суму головних правих A -модулів і нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ є відповідним розкладом одиниці A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто, $f_i A = P_i^{n_i}$. Тоді ${}_A A = A f_1 \oplus \dots \oplus A f_s = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$ розклад скінченного кільця A в пряму суму головних лівих A -модулів, тобто, $A f_i = Q_i^{n_i}$ де Q_i нерозкладний проективний лівий A -модуль ($i = 1, \dots, s$). Зараз розглянемо двосторонній пірсівський розклад кільця A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

Розглянемо також двосторонній пірсівський розклад радикала Джекобсона R скінченного кільця A : $R = \oplus_{i,j} f_i R f_j$. Так як, R двосторонній ідеал, $f_i R f_j \subset R$ для всіх i, j . Ми маємо $R_{ii} = f_i R f_i = \text{rad}(f_i A f_i)$ для $i = 1, \dots, n$. Ми повинні показати що $f_i R f_j = f_i A f_j$ для $i \neq j$. Дійсно, помножуючи ліві елементи $f_j A$ з елементом $f_i a f_j$ ми отримуємо гомоморфізм φ_{ji} з модуля $f_j A$ в $f_i A$. Якщо $\text{Im}(\varphi_{ji}) = f_i A$, то φ_{ji} є епіморфізмом. З того, що $f_i A = P_i^{n_i}$, $f_j A = P_j^{n_j}$, $P_i^{n_i}$ проективні модулі, $P_i^{n_i}$ ізоморфний прямій сумі модуля $P_j^{n_j}$. Але це неможливо, оскільки нерозкладні модулі P_i і P_j не ізоморфні. Тому $\text{Im}(\varphi_{ji}) \subset f_i A$. Ми можемо записати гомоморфізм φ_{ji} у вигляді матриці $\varphi_{ji} = (\varphi_{ji}^{rs})$, де $\varphi_{ji}^{rs} : P_j \rightarrow P_i$ - гомоморфні відображення нерозкладних не ізоморфних проективних модулів P_j

і P_i для $r = 1, \dots, n_i$, $s = 1, \dots, n_j$. З того, що $\text{Im}(\varphi_{ji}^{rs}) \neq P_i$, ми маємо $\text{Im}(\varphi_{ji}^{rs}) \subseteq P_i R$. Тому $\text{Im}(\varphi_{ji}) \subseteq f_i A R = f_i R$, тобто $f_i A f_j \subseteq f_i R$. Тому $A_{ij} = f_i A f_j = f_i R f_j$ для $i \neq j$. Тому, ми отримуємо такий результат.

Твердження 1. Нехай $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ є розклад скінченного кільця A в пряму суму головних правих A -модулів і нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ є відповідним розкладом одиниці A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто, $f_i A = P_i^{n_i}$. Тоді радикал Джекобсона скінченного кільця A має двосторонній пірсівський розклад такого виду:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & R_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix},$$

де $R_{ii} = \text{rad}(f_i A f_i)$, $A_{ij} = f_i A f_j$ для $i, j = 1, \dots, n$.

Кільце $f_i A f_i$ ізоморфне до $\text{End}_A(P_i^{n_i}) \simeq M_{n_i}(\text{End}(P_i))$, де $\text{End}_A(P_i) = \mathcal{O}$ локальне кільце. $\text{rad} M_{n_i}(\mathcal{O}) = M_{n_i}(\text{rad} \mathcal{O}_i)$.

Ми маємо, що $U_i = P_i / P_i R$. Таким чином $\bar{A} = A / R = U_1^{n_1} \oplus \dots \oplus U_s^{n_s}$ ідемпотенти $f_1, \dots, f_s$ є центральним модулем радикала і всі прості праві A -модулі вичерпуються модулями $U_1, \dots, U_s$. Аналогічним чином, нехай $V_i = Q_i / R Q_i$, тоді всі прості ліві A -модулі вичерпуються модулями $V_1, \dots, V_s$.

2. Двосторонній пірсівський розклад скінченної кускової області.

Означення. Скінченне кільце A називається кусковою областю, якщо будь-який ненульовий гомоморфізм нерозкладних проективних A -модулів є мономорфізмом.

Теорема 1. Будь-яке напівдосконале кільце A єдиним чином розкладається в скінченний прямий добуток нерозкладних кілець, тобто якщо $A = B_1 \times \dots \times B_s = C_1 \times \dots \times C_t$ два такі розклади, тоді $s = t$ і існує підстановка σ чисел $\{1, \dots, s\}$ така, що $B_i = C_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, s$).

Теорема 2. Ідеал J кільця A є нільпотентним, тоді і тільки тоді, коли, для кожного локального ідемпотента $e \in A$ ідеал eJe кільця eAe є нільпотентним.

Твердження 2. Нехай I - первинний радикал кільця A , $e^2 = e \in A$, $e \neq 0$. Тоді eIe співпадає з первинним радикалом кільця A .

Твердження 3. Для будь-якого локального ідемпотента з кускової області A кільце eAe є цілісним кільцем. Доказ очевидний.

Твердження 4. Первинний радикал I кускової області - є нільпотентним.

Доведення. Через твердження 2 і 3 $eIe = 0$ для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$. Тоді за теоремою 2 ідеал I є нільпотентним. Через теореми 1, 2 та твердження 4 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай A - кускова область. Тоді є вірними наступні твердження:

- (а) A єдиним чином розкладається в скінченний прямий добуток первинних блоків;
- (б) кожен первинний блок є нерозкладним кільцем.

Теорема 3. Нехай A є скінченним кільцем і $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ є розкладом $1 \in A$ в пряму суму взаємно ортогональних ідемпотентів. Тоді виконуються такі тотожності:

- 1. Для будь-яких e_i і e_k кожний ненульовий гомоморфізм $\varphi \in \text{Hom}_A(e_i A, A)$ є мономорфізмом.
- 2. Для будь-якого e_i кожний ненульовий гомоморфізм $\varphi \in \text{Hom}_A(e_i A, A)$ є мономорфізмом.
- 3. Для всіх e_i, e_j, e_k ми маємо $ab \neq 0$ для будь-яких ненульових $a \in e_i A e_j$ і $b \in e_j A e_k$.

Теорема 4. Сагайдак $Q(A)$ кускової області A не містить орієнтовних циклів і з кожної вершини в іншу йде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний орієнтовний граф, який задовольняє вказаним умовам, то існує кускова напівдосконала область A , така, що $Q(A) = \Gamma$.

Доведення. Вочевидь, можна вважати ку-

скову область зведеним кільцем. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_2 & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_t \end{pmatrix}$$

такий двосторонній пірсовський розклад, що первинний радикал I кільця A має такий вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & I_2 & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & I_t \end{pmatrix}$$

і $A/I = \bar{A} = \bar{A}_1 \times \dots \times \bar{A}_t$ - відповідний розклад кільця $\bar{A}$ в прямий добуток нерозкладних кілець. Так як, для кожного локального ідемпотента $\bar{e} \in \bar{A}$ кільце $\bar{e}\bar{A}\bar{e} = eAe$ цілісне, і тому первинне, тоді в силу [3] кільце $\bar{A}$ - прямий добуток первинних кілець. Тому всі кільця $\bar{A}_i$ - первинні. Покажемо, що $I_1 = 0, \dots, I_t = 0$. Вочевидь, все зводиться до випадку, коли $A = A/I$ - первинне кільце.

Нехай $1 = e_1 + \dots + e_s$ розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $I = \bigoplus_{m,n=1}^s I_{mn} = e_m I e_n$. Якщо $I_{pq} \neq 0$, то $I_{pq} e_q A e_p = 0$, так як $I_{pq} e_q A e_p \subset e_p I e_p = 0$, звідки в силу того, що A -кускова область, $e_q A e_p = 0$, що суперечить первинності кільця $\bar{A}$. У цьому випадку кільце $(\bar{e}_p + \bar{e}_q)\bar{A}(\bar{e}_p + \bar{e}_q)$ не є первинним, чого не може бути. Тому $I_1 = 0, I_2 = 0, \dots, I_t = 0$ та кільця $A_1, \dots, A_t$ - первинні.

Повернемося до загального випадку. Нехай $1 = f_1 + \dots + f_l$ - такий розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів, що $f_i A f_j = A_{ij}$ при $i \neq j$ та $f_i A f_i = A_i$ ($i, j = 1, \dots, l$). Дорозкладаємо ідемпотенти f_i в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів: $f_1 = e_1 + \dots + e_{k_1}$; $f_2 = e_{k_1+1} + \dots + e_{k_1+k_2}$; $\dots$; $f_l = e_{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}} + \dots + e_{k_1+\dots+k_l}$. Припустимо, що $A_{ij} \neq 0$. Заради скорочення будемо вважати, що $f_i = g_1 + \dots + g_r$ та $f_j = h_1 + \dots + h_l$. Покажемо, що $g_p A h_q \neq 0$ при $p = 1, \dots, r$ та $q = 1, \dots, l$. Так як кільця A_i та A_j первинні, то існує набір ненульових елементів $b_{\alpha\beta} \in g_\alpha A_i g_\beta$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, r$) та набір ненульових елементів $c_{\gamma\delta} \in h_\gamma A_j h_\delta$ ($\gamma, \delta = 1, \dots, l$). Крім того, для деяких p_0 та q_0 елемент $d_0 = g_{p_0} a_0 h_{q_0}$ відмінний від нуля. Тоді елемент $b_{pp_0} d_0 c_{q_0 q} \in g_p A g_q$ відмінний від нуля.

Тепер доведемо, що в первинному сагайдаку $Q(A)$ кускової області A немає ортогональних циклів, перенумерувавши, у разі потреби, ідемпотенти $f_1, \dots, f_t$ можемо вважати, що існує цикл



причому, так як $I_k = 0$ при $k = 1, \dots, t$, довжина циклу більше 1. Але тоді $A_{12} \neq 0, \dots, A_{m_0-1m_0} \neq 0, A_{m_01} \neq 0$, звідки добуток $A_{12} \dots A_{m_0-1m_0} A_{m_01}$ відмінний від нуля, що суперечить тому, що $I_1 = 0$.

Обернене твердження отримується за допомогою розгляду алгебри шляхів скінченного орієнтованого графа Γ , який задовольняє умовам теореми. В силу [2] така алгебра буде скінченно вимірною та спадковою, тобто кусковою областю.

Лема 1. Якщо A спадкове справа кільце, тоді будь-який відмінний від нуля гомоморфізм $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ з нерозкладних проєктивних правих A -модулів є мономорфізмом. Інакше кажучи, кожне спадкове справа кільце A є кусковою областю.

Доведення. Так як $Im \varphi \neq 0$ і $P_1 \simeq Im \varphi \oplus Ker \varphi$, тоді із нерозкладності модуля P_1 випливає, що $Ker \varphi = 0$.

Скінчений орієнтований граф Γ , який задовольняє умовам теореми 4, називається ациклічним графом (сагайдаком). Нагадаємо, що точка сагайдака Γ називається джерелом (стоком), якщо в неї не входить (не виходить) стрілка.

Твердження 5. В ациклічному сагайдаку існують джерела і стоки.

Твердження 6. Нехай множина точок ациклічного сагайдака складається з t елементів. Тоді їх можна занумерувати натуральними числами $1, \dots, t$ таким чином, що якщо із точки i в точку j йде стрілка, то $i < j$.

Використовуючи твердження 6 до сагайдака $Q(A)$ кускової області A , отримуємо, що область A має такий двосторонній пірсівський розклад:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_t \end{pmatrix},$$

де $A_1, \dots, A_t$ - первинні кільця та первинний радикал I кільця A має вигляд

$$I = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & 0 & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому $\bar{A} = A/I \simeq A_1 \times \dots \times A_t$.

Таким чином отримуємо наслідок.

Наслідок 2. Кускова область A , як абелева група розкладається в пряму суму кільця A_0 , ізоморфного $\bar{A}$, і первинного радикала I , $A = A_0 \oplus I$.

Наводиться опис скінченновимірних напівдистрибутивних кускових областей.

Нехай існує послідовність мономорфізмів $\varphi_{1i_1}: P_1 \rightarrow P_{i_1}, \varphi_{i_1i_2}: P_{i_1} \rightarrow P_{i_2}, \dots, \varphi_{i_k1}: P_{i_k} \rightarrow P_1$. Тоді добуток мономорфізмів $\varphi_{11} = \varphi_{1i_1} \dots \varphi_{i_k1}$ є мономорфізмом модуля P_1 в себе. Очевидно, що $Im \varphi_{11} \subset P_1 R$. Якщо $P_1 R^m = 0$, то $\varphi_{11}^m = 0$. Це суперечить тому, що φ_{11} - мономорфізм.

Наслідок 3. Сагайдак артінової кускової області є циклічним.

Це твердження хибне для нетерових кускових областей, як показує приклад дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$ з єдиним максимальним ідеалом M .

Список використаних джерел

1. M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko, Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004, xii+380 pp.
2. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. - Киев: Вища шк. - 1980. - 192с.
3. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. - Киев: Ин-т математики, 1993. - С.457-480.
4. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. - М.: Мир, 1986. - 426с.

Надійшла до редколегії 25.09.2010

УДК 519.2

А.Ю. Рижов, к.ф.-м.н.

Гранична помилка II роду статистики критерію однорідності компонент суміші у випадку альтернатив, що зближуються

У роботі розглянута асимптотична помилка II роду статистики критерію однорідності компонент суміші зі змінними концентраціями за цензурованими даними, запропоновано у [4], у випадку "локальних альтернатив".

Ключові слова: цензуровані спостереження, суміші зі змінними концентраціями, критерій однорідності, локальні альтернативи.

ryzhov@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Проблема перевірки однорідності досліджуваних груп спостережень часто зустрічається в різних областях статистичного аналізу. Виникають подібні задачі і при обробці цензурованих спостережень. Більш детальну інформацію про методи перевірки однорідності груп цензурованих спостережень можна отримати у [1]. Проте вони не можуть бути застосованими у випадку, коли а priori невідомо до якої саме групи належить той чи інший пацієнт, а досліджувана вибірка спостерігається з суміші з відомими змінними концентраціями. Загальна теорія аналізу сумішей зі змінними концентраціями наведена у [2].

В [4] було побудовано критерій однорідності компонент суміші зі змінними концентраціями. В даній роботі розглянуто його граничну помилку II роду для випадку альтернатив, що зближуються. Показано, що у цьому випадку статистика критерію має асимптотичний нецентральный χ^2 -розподіл.

Модель суміші зі змінними концентраціями за цензурованими спостереженнями.

Розглянемо модель суміші зі змінними концентраціями за цензурованими даними, визна-

A.Yu. Ryzhov, Ph.D.

Asymptotic type II error of the test of homogeneity of components of mixture in case of local alternatives

In the paper a model of mixtures with varying concentrations is applied to censored observations. The test of homogeneity of components for this type of mixtures is proposed in [4]. We investigate asymptotic type II error of this test in case of local alternatives.

Key Words: censored observations, mixtures with varying concentrations, test of homogeneity, local alternatives.

чену наступним чином. Нехай $X_1, \dots, X_m$ позначають m популяцій (компонент) з функціями розподілу часу життя $H_1(t), \dots, H_m(t)$, $t \geq 0$, відповідно. Дослідник спостерігає вибірку з n об'єктів, розбитих на N груп за певною ознакою, причому кожний об'єкт належить лише до однієї з популяцій X_l , $l = 1, \dots, m$, але до якої саме в загальному випадку невідомо. Позначимо через $w_{i,l}^{(j)}$ ймовірність того, що i -й об'єкт з j -ї групи належить до l -ї популяції, $i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N n_j = n$. Величини $w_{i,l}^{(j)}$, $l = 1, \dots, m$ називаються *концентраціями компонент суміші*. Нехай T_{ji} – час життя i -го об'єкта з j -ї групи. Тоді для всіх $t \geq 0$ справедлива рівність

$$P\{T_{ji} < t\} = w_{i,1}^{(j)} H_1(t) + \dots + w_{i,m}^{(j)} H_m(t). \quad (1)$$

Якщо ж у вибірці присутні об'єкти з неповною тривалістю спостереження, то кожний об'єкт описується вже парою випадкових величин: окрім набору величин T_{ji} необхідно також внести до розгляду випадкову величину U_{ji} , яка позначатиме момент (можливого) цензурування i -го об'єкта з j -ї групи. Тоді спостережуваними величинами будуть впорядковані пари (X_{ji}, δ_{ji}) , де за означенням

$$X_{ji} = \min(T_{ji}, U_{ji}), \\ \delta_{ji} = I_{\{X_{ji} = T_{ji}\}},$$

і I_A позначає індикаторну функцію множини A . Представлення даних такого типу, коли розподіл тривалості життя об'єкта має вигляд (1), будемо визначати як модель суміші зі змінними концентраціями за цензурованими даними.

Розглянемо випадок, коли значення концентрацій $w_{i,l}^{(j)}$, $l = 1, \dots, m$, залежать тільки від номера групи, а не від номера об'єкта всередині групи, тобто $w_{i,l}^{(j)} = w_l^{(j)}$ для всіх $i = 1, \dots, n_j$. Набір величин $\{w_l^{(j)}, j = 1, \dots, N, l = 1, \dots, m\}$ будемо розглядати як матрицю

$$X = (w_l^{(j)})_{j=1, l=1}^{N, m}$$

і називати її *матрицею концентрацій* компонент суміші. Вимагатимемо виконання наступних умов.

Припущення 1. Виконуються умови:

- випадкові величини T_{ji} , U_{ji} є незалежними у сукупності;
- тривалості життя, як і моменти цензурування, є однаково розподіленими випадковими величинами в межах групи, тобто для кожного j функції розподілу $F_j(t) = \mathbf{P}\{T_{ji} < t\}$ та $G_j(t) = \mathbf{P}\{U_{ji} < t\}$ не залежать від індексу i ; функції $F_j(t)$ та $G_j(t)$ є абсолютно неперервними.

- існують сталі $h_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, що

$$\frac{n_j}{n} \rightarrow h_j, \quad n \rightarrow \infty.$$

- стовпчики матриці концентрацій компонент суміші X є лінійно незалежними.

□

Позначимо

$$\Pi_N = \left\{ t \geq 0 \mid \prod_{j=1}^N ((1 - F_j(t))(1 - G_j(t))) > 0 \right\}$$

і зафіксуємо скінчене $\tau \in \Pi_N$.

Адаптивні оцінки та критерій однорідності розподілів компонент суміші.

У роботі [5] за виконання умов а)-д) побудовано лінійні адаптивні оцінки

$$\hat{H}_l(t) = \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^{(l)}(t) \hat{F}_j(t), \quad l = 1, \dots, m,$$

де $\hat{F}_j(t)$ – оцінки Каплана-Меєра функцій $F_j(t) = 1 - S_j(t)$ і ([5], Теорема 3) для всіх $j = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, m$, та $t \in (0, \tau]$ має місце збіжність

$$\hat{a}_j^{(l)}(t) \xrightarrow{P} a_{j,*}^{(l)}(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Оцінки $\hat{H}_l(t)$ є рівномірно конзистентними на проміжку $t \in [0, \tau]$ та асимптотично нормальними в кожній точці цього проміжку оцінками функцій $H_l(t)$, $l = 1, \dots, m$.

Введемо наступні випадкові процеси:

$$\begin{aligned} \bar{N}_j(t) &:= \sum_{i=1}^{n_j} I_{\{X_{ji} \leq t, \delta_{ji}=1\}}, \\ \bar{Y}_j(t) &:= \sum_{i=1}^{n_j} I_{\{X_{ji} \geq t\}}. \end{aligned}$$

Тоді ([3], Теорема 6.3.1) для $t \in [0, \tau]$ і функцій

$$\bar{v}_j(t) = n_j \int_0^t \frac{d\bar{N}_j(s)}{(\bar{Y}_j(s) - \Delta \bar{N}_j(s)) \bar{Y}_j(s)} \quad (2)$$

має місце

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{v}_j(s) - v_j(s)| \xrightarrow{P} 0, \quad n_j \rightarrow \infty,$$

де

$$v_j(t) = \int_0^t \frac{dF_j(s)}{(S_j(s))^2 (1 - G_j(s))}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В [4] розглянуто задачу перевірки гіпотези

$$H_0 : \{H_p(t) = H_q(t) \text{ для всіх } t \geq 0\}$$

для деяких обраних $1 \leq p < q \leq m$. Побудовано критерій для перевірки гіпотези H_0 і знайдено асимптотичний розподіл його помилки I роду. Без обмеження загальності можна покласти $p = 1$, $q = 2$. Виберемо L точок $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_L < \infty$ з множини Π_N і розглянемо випадковий вектор

$$\xi_n = (\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{L,n})^T, \quad (3)$$

де для всіх $1 \leq i \leq L$

$$\xi_{i,n} = \sqrt{n}(\hat{H}_1(t_i) - \hat{H}_2(t_i)).$$

Позначимо вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_L)^T$ з елементами

$$\xi_i = \sum_{j=1}^N \left(a_{j,*}^{(1)}(t_i) - a_{j,*}^{(2)}(t_i) \right) \sqrt{\frac{1}{h_j}} S_j(t) W_j(v_j(t)), \quad (4)$$

де $W_j(\cdot)$ – незалежні вінерів процеси. Отримано [4] наступні результати.

Лема 1. Нехай виконується припущення 1 і послідовність векторів $\{\xi_n, n \geq 1\}$ визначена у (3). Якщо $H_1(t) = H_2(t) = H(t)$ для всіх $t \geq 0$, то має місце збіжність

$$\xi_n \Rightarrow \xi, n \rightarrow \infty,$$

де вектор ξ є центрованим гаусівським випадковим вектором з матрицею коваріацій $\Sigma = \text{cov}\xi$, елементи якої задаються виразом

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_i, \xi_k) &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{h_j} \left((a_{j,*}^{(1)}(t_i) - a_{j,*}^{(2)}(t_i)) S_j(t_i) \right) \times \\ &\times \left((a_{j,*}^{(1)}(t_k) - a_{j,*}^{(2)}(t_k)) S_j(t_k) \right) \min(v_j(t_i), v_j(t_k)), \\ &i, k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (5)$$

□

Теорема 1. Нехай справедливе припущення 1 і для кожного $j = 1, \dots, N$ функції $v_j(t)$ є строго монотонно зростаючими. Якщо гіпотеза H_0 справедлива, то послідовність величин

$$\hat{\phi}_n = \xi_n^T \hat{\Sigma}_n^{-1} \xi_n, n \geq 1, \quad (6)$$

має асимптотичний χ^2 -розподіл з L ступенями свободи, тобто для всіх $h \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\hat{\phi}_n > h\} = \mathbf{P}\{\chi_L^2 > h\}$$

□

Елементи матриці $\hat{\Sigma}_n$ задаються співвідношенням

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{ik} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{h_j} \left((\hat{a}_j^{(1)}(t_i) - \hat{a}_j^{(2)}(t_i)) \hat{S}_j(t_i) \right) \times \\ &\times \left((\hat{a}_j^{(1)}(t_k) - \hat{a}_j^{(2)}(t_k)) \hat{S}_j(t_k) \right) \min(\hat{v}_j(t_i), \hat{v}_j(t_k)), \\ &i, k = 1, \dots, L, \end{aligned}$$

$$\hat{S}_j(t) = 1 - \hat{F}_j(t), j = 1, \dots, N.$$

Гранична помилка II роду критерію однорідності у випадку "локальних альтернатив".

Розглянемо асимптотичну поведінку статистики $\hat{\phi}_n$ у випадку, коли $H_1(t) = H_2(t) + n^{-\frac{1}{2}}C(t)$ для деякої функції $C(t)$. Знайдемо асимптотичний розподіл компонент вектора ξ_n .

Лема 2. Нехай виконується припущення 1 і послідовність векторів $\{\xi_n, n \geq 1\}$ визначена у (3). Припустимо, що справджується рівність $H_1(t) = H_2(t) + n^{-\frac{1}{2}}C(t)$ для деякої функції $C(t)$ для всіх $t \geq 0$. Тоді має місце збіжність

$$\xi_n \Rightarrow \xi + \bar{C}, n \rightarrow \infty,$$

де вектор ξ є центрованим гаусівським випадковим вектором з нульовим вектором середніх значень та матрицею коваріацій, елементи якої задаються (5), $\bar{C} = (C(t_1), \dots, C(t_L))^T$.

Доведення. За умов леми та означенням елементів вектора ξ_n отримаємо

$$\begin{aligned} \xi_{i,n} &= \sqrt{n}(\hat{H}_1(t_i) - \hat{H}_2(t_i)) = \\ &= \sqrt{n}(\hat{H}_1(t_i) - H_1(t_i)) - \sqrt{n}(\hat{H}_2(t_i) - H_2(t_i)) + \\ &+ \sqrt{n}H_1(t_i) - \sqrt{n}H_2(t_i) = \sqrt{n}(\hat{H}_1(t_i) - H_1(t_i)) - \\ &- \sqrt{n}(\hat{H}_2(t_i) - H_2(t_i)) + C(t_i). \end{aligned}$$

Для адаптивних оцінок $\hat{H}_1(\cdot), \hat{H}_2(\cdot)$ на $[0, \tau]$ виконується [5] рівність

$$\sqrt{n}(\hat{H}_l(\cdot) - H_l(\cdot)) = \sqrt{n} \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^{(l)}(\cdot) (\hat{F}_j(\cdot) - F_j(\cdot))$$

для $l = 1, 2$, тому

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{H}_1(t_i) - H_1(t_i)) - \sqrt{n}(\hat{H}_2(t_i) - H_2(t_i)) &= \\ &= \sqrt{n} \sum_{j=1}^N (\hat{a}_j^{(1)}(t_i) - \hat{a}_j^{(2)}(t_i)) (\hat{F}_j(t_i) - F_j(t_i)). \end{aligned}$$

Зауважимо, що в нашому випадку функції $F_j(t)$, визначені у (1), будуть залежати від обсягу вибірки n : $F_j(t) = F_j^{(n)}(t)$. Проте рівномірна конзистентність та асимптотична нормальність оцінок Каплана-Меєра залишаються справедливими [3, т. 3.4.2 та т. 6.2.1]. Тому величина справа буде збігатися за розподілом до величини ξ_i , визначеної у (4). □

Позначимо через $\chi_L^2(\lambda)$ випадкову величину, яка має нецентральний χ^2 -розподіл з L ступенями свободи та параметром нецентральності λ .

Теорема 2. Нехай справедливе припущення 1 і для кожного $j = 1, \dots, N$ функції

$$v_j(t) = \int_0^t \frac{dF_j(s)}{(1 - F_j(s))^2(1 - G_j(s))}$$

є строго монотонно зростаючими. Якщо для всіх $t \geq 0$ має місце співвідношення $H_1(t) = H_2(t) + n^{-\frac{1}{2}}C(t)$ для деякої функції $C(t)$, то послідовність величин

$$\hat{\phi}_n = \xi_n^T \hat{\Sigma}_n^{-1} \xi_n, \quad n \geq 1,$$

має асимптотичний $\chi_L^2(\lambda)$ розподіл з L ступенями свободи та параметром нецентральності $\lambda = \bar{C}^T \Sigma^{-1} \bar{C}$, тобто для всіх $h \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\hat{\phi}_n > h\} = \mathbf{P}\{\chi_L^2(\lambda) > h\}.$$

Доведення. Помітимо, що коваріаційні матриці векторів ξ та $\xi + \bar{C}$ співпадають. Тому аналогічно доведенню леми 2 та теореми 1 у [4] можна показати, що

$$\xi_n^T \hat{\Sigma}_n^{-1} \xi_n \Rightarrow (\xi + \bar{C})^T \Sigma^{-1} (\xi + \bar{C}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Залишилося показати, що величина справа має $\chi_L^2(\lambda)$ розподіл. Оскільки ξ має багатомірний гаусівський розподіл з нульовим вектором середніх значень і невиродженою матрицею коваріацій Σ , тому

$$E \Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C}) = \Sigma^{-1/2} \bar{C}$$

і

$$\begin{aligned} \text{cov} \Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C}) &= \Sigma^{-1/2} \text{cov} (\xi + \bar{C}) \left(\Sigma^{-1/2} \right)^T = \\ &= \Sigma^{-1/2} (\text{cov} \xi) \Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} \Sigma \Sigma^{-1/2} = E. \end{aligned}$$

Отже випадковий вектор $\Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C})$ є багатомірним гаусівським з вектором середніх значень $\Sigma^{-1/2} \bar{C}$ та одиничною матрицею коваріацій. Звідси випливає, що його компоненти є незалежними випадковими величинами, а тому величина

$$\begin{aligned} \left(\Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C}) \right)^T \left(\Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C}) \right) &= \\ &= (\xi + \bar{C})^T \Sigma^{-1} (\xi + \bar{C}) \end{aligned}$$

має $\chi_L^2(\lambda)$ -розподіл з параметром нецентральності

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\Sigma^{-1/2} \bar{C} \right)^T \left(\Sigma^{-1/2} \bar{C} \right) = \\ &= \bar{C}^T \Sigma^{-1/2} \Sigma^{-1/2} \bar{C} = \bar{C}^T \Sigma^{-1} \bar{C}. \end{aligned}$$

□

З а у в а ж е н н я. Відмітимо, що існує ортогональне перетворення Φ та випадковий вектор

$\mu = \Phi \Sigma^{-1/2} (\xi + \bar{C})$ з компонентами $\mu_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, \dots, L$, що

$$(\xi + \bar{C})^T \Sigma^{-1} (\xi + \bar{C}) = (\mu_1 + \lambda)^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_L^2.$$

□

Позначимо через $Q_{\chi_L^2}^2(1 - \alpha)$ квантиль рівня $1 - \alpha$ розподілу χ^2 з L ступенями свободи і нехай $F_{\chi_L^2(\lambda)}(t)$ – функція розподілу випадкової величини $\chi_L^2(\lambda)$. З теореми 2 випливає, що асимптотична потужність критерію дорівнює

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\text{альт}} \left\{ \hat{\phi}_n > Q_{\chi_L^2}^2(1 - \alpha) \right\} &= \\ &= 1 - F_{\chi_L^2(\lambda)} \left(Q_{\chi_L^2}^2(1 - \alpha) \right). \end{aligned}$$

Висновки.

Досліджено граничну поведінку критерію однорідності розподілів компонент суміші зі змінними концентраціями за спостереженнями з цензуруванням у випадку "локальних альтернатив". Показано, що граничним розподілом є нецентральний χ^2 -розподіл.

Список використаних джерел

1. Lee E. T. Statistical methods for survival data analysis [3rd. ed.] / E. T. Lee, J. W. Wang. – New Jersey: Wiley, 2003. – 513 p.
2. Майборода Р.Є. Статистичний аналіз сумішей: Навч. посіб. / Р.Є. Майборода. – Київ: ВПЦ "Київський університет 2003. – 176 с.
3. Harrington D. P. Counting processes and survival analysis / D. P. Harrington, T. F. Fleming. – New York: Wiley, 1991 – 429 p.
4. Рижов А.Ю. Перевірка гіпотези про однорідність компонент суміші зі змінними концентраціями за цензурованими даними / А.Ю. Рижов // Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. – 2005. – Вип. 72. – С.129-139.
5. Рижов А.Ю. Оцінки розподілів компонент суміші по цензурованим даним / А.Ю. Рижов // Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. – 2003. – Вип. 69. – С.154-161.

Надійшла до редколегії 30.09.2010

2 Відношення Гріна

Нагадаємо (див. [4], стор. 72), що елементи a, b напівгрупи S породжують один і той же правий ідеал (тобто належать одному $\mathcal{R}$ -класу) тоді і тільки тоді, коли існують такі $x, y \in S^1$, що $a = bx$, $b = ay$ (аналогічно і для відношення $\mathcal{L}$).

Теорема 1. Елементи $G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \times_{F_1} G_2^{(1)}/H_2^{(1)}$ та $G_1^{(2)}/H_1^{(2)} \times_{F_2} G_2^{(2)}/H_2^{(2)}$ напівгрупи відношень $S(G)$ скінченної групи G належать одному $\mathcal{R}$ -класу (відповідно $\mathcal{L}$ -класу) тоді і тільки тоді, коли $G_1^{(1)} = G_1^{(2)}$ і $H_1^{(1)} = H_1^{(2)}$ (відповідно $G_2^{(1)} = G_2^{(2)}$ і $H_2^{(1)} = H_2^{(2)}$).

Доведення. Зауважимо, що в напівгрупі $S(G)$ із рівності

$$\begin{aligned} & (P_1^{(1)}/Q_1^{(1)} \times_{F_1} P_2^{(1)}/Q_2^{(1)}) \circ \\ & \circ (P_1^{(2)}/Q_1^{(2)} \times_{F_2} P_2^{(2)}/Q_2^{(2)}) = \\ & = (K_1/L_1 \times_F K_2/L_2) \end{aligned}$$

випливає, що $K_1 \leq P_1^{(1)}$, $K_2 \leq P_2^{(2)}$, $L_1 \leq Q_1^{(1)}$, $L_2 \leq Q_2^{(2)}$.

Необхідність. Нехай елементи $g_1 = (G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \times_{F_1} G_2^{(1)}/H_2^{(1)})$ і $g_2 = (G_1^{(2)}/H_1^{(2)} \times_{F_2} G_2^{(2)}/H_2^{(2)})$ належать одному $\mathcal{R}$ -класу. Оскільки $S(G)^1 = S(G)$, то існують такі $x, y \in S(G)$, що $g_2 = g_1x$, $g_1 = g_2y$. Але тоді $G_1^{(2)} \leq G_1^{(1)}$ і $G_1^{(1)} \leq G_1^{(2)}$, звідки $G_1^{(1)} = G_1^{(2)}$. Крім того $H_1^{(2)} \leq H_1^{(1)}$ і $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$. Отже, $H_1^{(1)} = H_1^{(2)}$.

Достатність. Нехай $G_1^{(1)} = G_1^{(2)} = G_1$, $H_1^{(1)} = H_1^{(2)} = H_1$. Оскільки $F_1 \simeq G_1^{(1)}/H_1^{(1)} = G_1^{(2)}/H_1^{(2)} \simeq F_2$, то можна вважати, що $F_1 = F_2 = F$. Покажемо, що елементи $g_1 = (G_1/H_1 \times_F G_2^{(1)}/H_2^{(1)})$, $g_2 = (G_1/H_1 \times_F G_2^{(2)}/H_2^{(2)})$ належать одному $\mathcal{R}$ -класу.

Справді, нехай елементу g_i відповідає ізоморфізм $\varphi_i : G_1/H_1 \rightarrow G_2^{(i)}/H_2^{(i)}$, $i = 1, 2$. Тоді для елементів x і y , що задаються п'ятірками $(H_2^{(1)}, G_2^{(1)}, H_2^{(2)}, G_2^{(2)}, \varphi_1^{-1}\varphi_2)$ та $(H_2^{(2)}, G_2^{(2)}, H_2^{(1)}, G_2^{(1)}, \varphi_2^{-1}\varphi_1)$, маємо $g_1x = g_2$ і $g_2x = g_1$, що й треба було довести.

Для відношення $\mathcal{L}$ доведення аналогічне. $\square$

Наслідок 1. Існує природна взаємно однозначна відповідність між $\mathcal{H}$ -класами напівгрупи $S(G)$ та такими четвірками (H_1, G_1, H_2, G_2)

підгруп групи G , для яких $G_1 \supseteq H_1$, $G_2 \supseteq H_2$ і $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$. $\mathcal{H}$ -клас, що відповідає такій четвірці, має потужність $|\text{Aut } G_1/H_1|$.

Доведення. Кожен $\mathcal{H}$ -клас однозначно задається парою ($\mathcal{R}$ -клас, $\mathcal{L}$ -клас), перетином яких він є.

Нехай елементи $a = G_1/H_1 \times_F G_2/H_2$ та $b = G'_1/H'_1 \times_F G'_2/H'_2$ належать одному $\mathcal{H}$ -класу. Тоді вони мають належати одному $\mathcal{R}$ -класу (отже, $G'_1 = G_1$ і $H'_1 = H_1$) та одному $\mathcal{L}$ -класу (отже, $G_2 = G'_2$, $H_2 = H'_2$). З іншого боку, за теоремою 1 всі елементи вигляду $G_1/H_1 \times_F G_2/H_2$ $\mathcal{R}$ -еквівалентні та $\mathcal{L}$ -еквівалентні, тому належать одному $\mathcal{H}$ -класу. Такі елементи однозначно визначаються ізоморфізмом $\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$, тому відповідний $\mathcal{H}$ -клас містить рівно $|\text{Aut } G_1/H_1|$ елементів.

Нарешті, якщо $(G_1/H_1 \times_F G_2/H_2) \in S(G)$, то $G_1 \supseteq H_1$, $G_2 \supseteq H_2$ і $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$. Навпаки, якщо четвірка підгруп (H_1, G_1, H_2, G_2) задовольняє ці умови, то в $S(G)$ є елемент вигляду $G_1/H_1 \times_F G_2/H_2$. $\square$

Наслідок 2. Елементи $a_1 = G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \times_{F_1} G_2^{(1)}/H_2^{(1)}$ та $a_2 = G_1^{(2)}/H_1^{(2)} \times_{F_2} G_2^{(2)}/H_2^{(2)}$ належать одному $\mathcal{D}$ -класу тоді і тільки тоді, коли $F_1 \simeq F_2$.

Доведення. Якщо a_1 та a_2 належать одному $\mathcal{D}$ -класу, то існує такий елемент $a_3 = G_1^{(3)}/H_1^{(3)} \times_{F_3} G_2^{(3)}/H_2^{(3)}$, що $a_1 \mathcal{R} a_3$ і $a_3 \mathcal{L} a_2$. З теореми 1 випливає, що $G_1^{(1)} = G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)} = G_2^{(2)}$, $H_2^{(3)} = H_2^{(2)}$, тобто a_3 має вигляд $a_3 = G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \times_{F_3} G_2^{(2)}/H_2^{(2)}$. Але тоді $F_1 \simeq G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \simeq F_3 \simeq G_2^{(2)}/H_2^{(2)} \simeq F_2$.

Навпаки, якщо $F_1 \simeq F_2 \simeq F$, то $S(G)$ містить елемент вигляду $a_3 = G_1^{(1)}/H_1^{(1)} \times_F G_2^{(2)}/H_2^{(2)}$ і, за теоремою 1, $a_1 \mathcal{R} a_3$, $a_3 \mathcal{L} a_2$. Отже, $a_1 \mathcal{D} a_2$. $\square$

Наслідок 3. Усі $\mathcal{D}$ -класи квадратні (тобто кількість $\mathcal{R}$ -класів і $\mathcal{L}$ -класів у даному $\mathcal{D}$ -класі однакова).

Доведення. Як кількість $\mathcal{R}$ -класів, так і кількість $\mathcal{L}$ -класів, що містяться в $\mathcal{D}$ -класі, який задається фактором F , дорівнює кількості таких пар підгруп $G' \supseteq H'$ групи G , для яких $G'/H' \simeq F$. $\square$

Наслідок 4. Кожен $\mathcal{D}$ -клас містить принаймні один ідемпотент. Зокрема, напівгрупа відповідностей $S(G)$ є регулярною.

Доведення. Нехай $\mathcal{D}$ -клас D задається фактором F . Тоді п'ятірка $(H_1, G_1, H_1, G_1, \varepsilon)$, де ε – тотожний автоморфізм факторгрупи $G_1/H_1 \simeq F$, визначає елемент із D , який є ідемпотентом. Оскільки ідемпотент є регулярним елементом, то кожен $\mathcal{D}$ -клас є регулярним, а тому й вся напівгрупа $S(G)$ є регулярною. $\square$

Теорема 2. Нехай D_F – $\mathcal{D}$ -клас, заданий фактором F . Добуток

$$(G_1/H_1 \times_F G_2/H_2) \cdot (G'_1/H'_1 \times_F G'_2/H'_2)$$

належить класу D_F тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$[G_2 \cap G'_1 : H_2 \cap H'_1] = |F|.$$

Доведення. Нехай

$$(G_1/H_1 \times_F G_2/H_2) \cdot (G'_1/H'_1 \times_F G'_2/H'_2) = (1) \\ = (G''_1/H''_1 \times_{F''} G''_2/H''_2).$$

Для того, щоб добуток попадав у клас D_F , має бути $F'' \simeq F$. Для цього, зокрема, необхідно, щоб $|F''| = |F|$. Якщо якийсь із класів суміжності g_2H_2 із G_2 не перетинається із G'_1 , то $|G''_1/H''_1| < |F|$.

Отже, кожен клас g_2H_2 із G_2 має перетинатися із G'_1 . Якщо тепер клас g_2H_2 перетинається з двома різними класами $g'_1H'_1$ і $g'_2H'_1$ із G'_1 , то знову $|G''_1/H''_1| < |F|$.

Отже, щоб добуток (1) потрапив у D_F , необхідно, щоб кожен клас суміжності g_2H_2 із G_2 мав непустий перетин рівно з одним класом суміжності $g'_1H'_1$ із G'_1 .

Нехай тепер $H = H_2 \cap H'_1$, $g \in g_2H_2 \cap g'_1H'_1$. Тоді існують такі $U \subseteq H_2$ та $V \subseteq H'_1$, що $g_2H_2 \cap g'_1H'_1 = gU = gV$. Звідси випливає, що $U = V \subseteq H_2 \cap H'_1$. З іншого боку, $gH \subseteq g_2H_2$ (бо $g \in g_2H_2$) і $gH \subseteq g'_1H'_1$ (бо $g \in g'_1H'_1$). Звідси випливає, що $U = V \supseteq H_2 \cap H'_1$. Отже, $U = V = H_2 \cap H'_1$.

Таким чином, кожен клас суміжності G_2 за H_2 і кожен клас суміжності G'_1 за H'_1 містить клас суміжності групи $G_2 \cap G'_1$ за $H_2 \cap H'_1$. Тому

$$G_2/H_2 \simeq G_2 \cap G'_1/H_2 \cap H'_1 \simeq G'_1/H'_1 \simeq F, \quad (2)$$

звідки

$$[G_2 \cap G'_1 : H_2 \cap H'_1] = |F|.$$

Таким чином, якщо добуток (1) потрапляє в D_F , то виконується умова (2).

З іншого боку, нехай виконується рівність $[G_2 \cap G'_1 : H_2 \cap H'_1] = |F|$. Кожен клас суміжності $G_2 \cap G'_1$ за $H_2 \cap H'_1$ міститься у відповідному класі суміжності G_2 за H_2 та у відповідному класі суміжності G'_1 за H'_1 . Із рівності $[G_2 : H_2] = |F| = [G_2 \cap G'_1 : H_2 \cap H'_1]$ випливає, що кожен клас суміжності G_2 за H_2 повинен містити деякий клас суміжності $G_2 \cap G'_1$ за $H_2 \cap H'_1$. Те ж саме стосується і класів суміжності G'_1 за H'_1 . А тому кожен клас суміжності G_2 за H_2 має непустий перетин рівно з одним класом суміжності G'_1 за H'_1 (і цим перетином буде певний клас суміжності $G_2 \cap G'_1$ за $H_2 \cap H'_1$). Тоді

$$(G_1/H_1 \times_F G_2/H_2) \cdot (G'_1/H'_1 \times_F G'_2/H'_2) = \\ = (G_1/H_1 \times_{F''} G'_2/H'_2)$$

Оскільки $F'' \simeq G_1/H_1 \simeq F$, то в цьому випадку добуток (1) належить D_F . $\square$

Наслідок 5. Нехай $M = \{H | H \leq G\}$. Тоді $\mathcal{D}$ -клас D_E є напівгрупою, ізоморфною квадратній зв'язці $M \times M$.

Твердження 1. Кожен $\mathcal{D}$ -клас буде піднапівгрупою тоді і тільки тоді, коли група G – циклічна.

Доведення. Через C_k будемо позначати циклічну групу порядку k .

Необхідність. Нехай G – не циклічна. Тоді існує такий дільник $d | |G|$, що в G є дві різні циклічні підгрупи G_1 і G_2 порядку d . Позначимо $k = |G_1 \cap G_2|$. Тоді елементи $a = G_1/E \times_{C_d} G_1/E$ і $b = G_2/E \times_{C_d} G_2/E$ належать класу D_{C_d} . Але їх добуток $a \cdot b = G_1 \cap G_2/E \times_{C_k} G_1 \cap G_2/E$ не належить D_{C_d} , бо $[G_1 \cap G_2 : E \cap E] = |G_1 \cap G_2| = k \neq d$. Тому клас D_{C_d} не є піднапівгрупою.

Достатність. Нехай G – циклічна і k – довільний дільник числа $|G|$. Покажемо, що D_{C_k} -клас, який визначається фактором C_k , є піднапівгрупою. Нехай $a = G_1/H_1 \times_{C_k} G_2/H_2$ і $b = G'_1/H'_1 \times_{C_k} G'_2/H'_2$ – довільні два елементи з D_{C_k} .

Позначимо $|H_2| = m$, $|H'_1| = n$. Тоді $|G_2| = km$, $|G'_1| = kn$. Нехай $d = (m, n)$, тоді $m = m_1 d$, $n = n_1 d$ і $(m_1, n_1) = 1$. Оскільки порядок групи G ділиться на $km_1 d$ і $kn_1 d$, то $|G|$ ділиться на $kdm_1 n_1$, а тому в G є елемент a порядку $kdm_1 n_1$. Тоді

$$G_2 = \langle a^{n_1} \rangle, \quad H_2 = \langle a^{kn_1} \rangle,$$

$$G'_1 = \langle a^{m_1} \rangle, \quad H'_1 = \langle a^{km_1} \rangle,$$

$$G_2 \cap G'_1 = \langle a^{n_1 m_1} \rangle, \quad |G_2 \cap G'_1| = kd,$$

$$H_1 \cap H'_1 = \langle a^{kn_1 m_1} \rangle, \quad |H_1 \cap H'_1| = d.$$

Оскільки

$$[G_2 \cap G'_1 : H_2 \cap H'_1] = \frac{|G_2 \cap G'_1|}{|H_2 \cap H'_1|} = \frac{kd}{d} = k = |C_k|,$$

то за теоремою 2 добуток ab також належить класу D_{C_k} . Таким чином, клас D_{C_k} замкнений відносно множення і є напівгрупою. $\square$

3 Випадок циклічної групи C_n

Якщо A і B – циклічні групи, причому $A \geq B$, то факторгрупа A/B є циклічною групою порядку $|A|/|B|$. Тому є природна бієкція між множиною факторів циклічної групи G і множиною дільників числа n . З наслідку 2 одразу отримуємо бієкцію між множиною дільників n і множиною $\mathcal{D}$ -класів напівгрупи $S(C_n)$. Зокрема, кількість $\mathcal{D}$ -класів дорівнює кількості $\tau(n)$ дільників числа n .

Твердження 2. Нехай $d|n$. Тоді в напівгрупі $S(C_n)$ $\mathcal{D}$ -клас D_d , який визначається фактором C_d , містить по $\tau(n/d)$ $\mathcal{R}$ і $\mathcal{L}$ -класів, $\tau^2(n/d)$ $\mathcal{H}$ -класів і $\tau^2(n/d) \cdot \varphi(d)$ елементів.

Доведення. Із теореми 1 випливає, що кількість $\mathcal{R}$ -класів у класі D_d дорівнює кількості таких пар циклічних груп $C_k > C_m$, що $C_k/C_m \cong C_d$, тобто кількості таких чисел m , що $md|n$. Очевидно, що таких чисел буде $\tau(n/d)$. Решта тверджень випливає з наслідків 3 та 1. $\square$

4 Випадок елементарної абелевої групи Z_p^n

Якщо A і B – підгрупи групи Z_p^n , причому $A \geq B$, то факторгрупа A/B є елементарною абелевою групою порядку $|A|/|B|$. Тому є природна бієкція між множиною факторів групи Z_p^n і множиною дільників числа $|Z_p^n| = p^n$. За наслідком 2 це дає нам бієкцію між дільниками числа p^n та $\mathcal{D}$ -класами напівгрупи $S(Z_p^n)$. Зокрема, кількість $\mathcal{D}$ -класів напівгрупи $S(Z_p^n)$ дорівнює $n + 1$.

Через $\binom{n}{m}_p$ позначимо число m -вимірних підпросторів n -вимірного простору над полем Z_p . Як відомо,

$$\binom{n}{m}_p = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{m-1} (p^k - p^i)},$$

Твердження 3. Нехай $k \leq n$ і D_k – $\mathcal{D}$ -клас напівгрупи $S(Z_p^n)$, який визначається фактором Z_{p^k} . Тоді D_k містить по

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}_p \binom{n-i}{k}_p$$

$\mathcal{R}$ і $\mathcal{L}$ -класів,

$$\left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}_p \binom{n-i}{k}_p \right)^2$$

$\mathcal{H}$ -класів і

$$\left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}_p \binom{n-i}{k}_p \right)^2 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (p^k - p^i)$$

елементів.

Доведення. Групу Z_p^n можна розглядати як векторний простір над полем Z_p . При цьому підгрупи стануть підпросторами. Тоді, за теоремою 1, кількість $\mathcal{R}$ -класів у $\mathcal{D}$ -класі D_k дорівнює числу таких пар (U, V) підпросторів простору Z_p^n , що $U \geq V$ і $\dim U - \dim V = k$. Тоді $0 \leq \dim V \leq n - k$. Підпростір V розмірності

і можна вибрати $\binom{n}{i}_p$ способами. Для фіксованого V розмірності i є природна бієкція між такими підпросторами U , що $V \leq U$ і $\dim = i + k$, та підпросторами $\tilde{U}$ розмірності k із факторпростору Z_p^n/V . Тому U можна вибрати $\binom{n-i}{k}_p$ способами. Таким чином, пару (U, V) можна вибрати

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}_p \binom{n-i}{k}_p$$

способами.

Твердження про кількість $\mathcal{H}$ -класів тепер випливає з наслідку 3. Нарешті, твердження про потужність класу D_k випливає з наслідку 1 і того, що

$$|\text{Aut } Z_p^k| = |GL_k(Z_p)| = \prod_{i=0}^{k-1} (p^k - p^i).$$

□

5 Випадок дієдральної групи D_n

Кожен фактор групи D_n має вигляд або D_d , або C_d , де $d|n$. Оскільки C_2 і D_1 ізоморфні, то кількість попарно неізоморфних факторів групи D_n (а тим самим і кількість $\mathcal{D}$ -класів напівгрупи $S(D_n)$) дорівнює $2\tau(n) - 1$. Через $\sigma(n)$ позначаємо суму натуральних дільників числа n .

Твердження 4. Нехай $d|n$. Тоді в напівгрупі $S(D_n)$

a) $\mathcal{D}$ -клас D_{D_d} , який визначається фактором D_d ($d > 2$), містить по $\sigma(n/d)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $\sigma^2(n/d)$ $\mathcal{H}$ -класів і $\sigma^2(n/d) \cdot \varphi(d) \cdot d$ елементів;

b) $\mathcal{D}$ -клас D_{C_d} , який визначається фактором C_d ($d > 2$), містить по $\tau(n/d)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $\tau^2(n/d)$ $\mathcal{H}$ -класів і $\tau^2(n/d) \cdot \varphi(d)$ елементів;

c) якщо $2|n$, то $\mathcal{D}$ -клас D_{D_2} , який визначається фактором D_2 , містить по $\sigma(n/2)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $\sigma^2(n/2)$ $\mathcal{H}$ -класів і $6 \cdot \sigma^2(n/2)$ елементів;

d) якщо $2 \nmid n$, то $\mathcal{D}$ -клас D_{C_2} , який визначається фактором C_2 , містить по $\tau(n/2)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $\tau^2(n/2)$ $\mathcal{H}$ -класів і $\tau^2(n/2)$ елементів;

e) якщо $2|n$, то $\mathcal{D}$ -клас D_{C_2} , який визначається фактором C_2 , містить по $\sigma(n) + 2\sigma(n/2) + \tau(n/2)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $(\sigma(n) + 2\sigma(n/2) + \tau(n/2))^2$ $\mathcal{H}$ -класів і $(\sigma(n) + 2\sigma(n/2) + \tau(n/2))^2$ елементів;

f) $\mathcal{D}$ -клас D_E , який визначається фактором $C_1 = E$, містить по $\sigma(n) + \tau(n)$ $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, $(\sigma(n) + \tau(n))^2$ $\mathcal{H}$ -класів і $(\sigma(n) + \tau(n))^2$ елементів.

Доведення. За теоремою 1 число $\mathcal{R}$ - і $\mathcal{L}$ -класів, що містяться в $\mathcal{D}$ -класі, який визначається фактором F , дорівнює числу K_F пар (G_1, H_1) підгруп, для яких $G_1 \supseteq H_1$ і $G_1/H_1 \simeq F$. Для факторів групи D_n ці числа пораховано в [5]. Твердження про кількість $\mathcal{H}$ -класів і потужності $\mathcal{D}$ -класів випливають з наслідків 3 та 1. □

Література

1. Курош А.Г. Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года). – М.: Наука, 1974.
2. Искандер А.А. Структура соответствий универсальной алгебры. Изв. АН СССР, серия матем. 29 (1965), 1357-1372.
3. Искандер А.А. Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий, Матем. сб. 70 (1960), 438-456.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Том 1. – М.: Мир, 1972.
5. Ганюшкін О.Г., Турка Т.В. Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи. Вісник Київського університету, випуск № 3. Серія: фіз.-мат. науки, 2009. С. 9-13.
6. Remak R. Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte. / J. Reine Angew. Math. Bd. 163 (1930). s.1-44.

Надійшла до редколегії 07.06.2010

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 534.8.081.7

Андрущенко В.О., Лібов Д.Ю., Нікітенко В.М.

Визначення планарного коефіцієнта Пуассона диска із п'єзокераміки

У даній роботі з резонансного і обертоного методів був визначений планарний коефіцієнт Пуассона диска п'єзокерамічного матеріалу ЦТС – 19. В резонансному методі порівнювалися теоретичні і експериментальні контурні моди з різними типами симетрії коливань. Обертоний метод полягав в порівнянні перших двох експериментальних і теоретичних радіальних резонансних частот. Обертоний метод потребував проведення одного експерименту. Отримані значення коефіцієнта Пуассона були порівняні з довідниковими і раніше визначеними на тонкому диску.

Ключові слова: п'єзокерамічний диск, радіальні коливання, коефіцієнт Пуассона.

V.A. Andrushenko, D.Yu. Libov, V.N. Nikitenko

Measurement of planar Poisson's ratio for piezoceramic disk

The planar Poisson's ratio has been determined from an overtone method and a resonant method. The specimen has a disk shape and the piezoceramic material CTS – 19. The contour modes with different types of symmetry vibrations have been compared in the resonant method. Two theoretical and experimental radial resonant frequencies have been compared in the overtone method. Thus only one experiment was carried out in the overtone method. Poisson's ratio has been obtained in this work was compared with handbook data and one was obtained in previous work on the thin disk.

Keywords: piezoceramic disk, radial vibrations, Poisson's ratio.

E-mail: dmytro.libov@gmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Проблема визначення планарного коефіцієнта Пуассона п'єзокерамічних матеріалів динамічними методами є важливою практичною задачею, що призвела до великої кількості публікацій [1,7,11,12]. Серед них [7,12] увійшли до американського стандарту IEEE Standards on piezoelectricity [9], до вітчизняного ГОСТу [2] та книг [5,14], в яких коефіцієнт Пуассона визначається на тонких дисках і на тонких прямокутних пластинах з переважно одновимірним рухом частинок. Для його визначення на тонкому диску згідно вітчизняному ГОСТу, відношення діаметра диска до товщини повинно бути більше 20. Проте доволі часто коефіцієнт Пуассона потрібно визначити на одному зразку матеріалу із значною товщиною. Для цього окрім методів, що будуть запропоновані у даній роботі, використовуються методи вимірювання пружних модулів з ультразвукових швидкостей. Однією з найперших робіт по використанню швидкостей хвиль зсуву і розширення для знаходження п'єзокерамічного коефіцієнта Пуассона в товстих дисках є класична публікація [15].

В роботі розглядається задача про визначення коефіцієнта Пуассона п'єзокерамічного матеріалу ЦТС-19, $\nu_{12}^E = -s_{12}^E / s_{11}^E$, де s_{12}^E, s_{11}^E – пружні податливості, в товстому диску з відношенням

діаметру до товщини 8.75. В основі розв'язку такої задачі лежить використання обертоного і резонансного методів [5, 7]. В обертоному методі експериментальні резонансні частоти п'єзокерамічного зразка із суцільними електродами порівнювалися з теоретичними резонансними частотами задачі про вісесиметричні коливання ізотропного циліндра [3]. Справедливість використання моделі ізотропного пружного циліндра до досліджуваного п'єзоелектричного диска впливає з роботи [4] та відносно слабких анізотропних властивостей п'єзоматеріалу ЦТС – 19 (пружна податливість у напрямку товщини s_{13}^E не сильно відрізняється від пружної податливості у радіальному напрямку s_{12}^E). В резонансному методі необхідно було провести два експерименти. В першому збуджувався перший радіальний резонанс, а в другому – невісесиметрично симетричний резонанс кругового порядку одиниця. Для опису першого радіального резонансу використано рівняння контурних коливань п'єзокерамічного диска з корекцією на товщину. Для опису другої експериментальної моди була використана теорія Оноє [13], яка не потребувала врахування товщини диска, оскільки для дисків із відношенням товщини до діаметра менше 0.5 перша невісесиметрична симетрична мода

кругового порядку один є функцією коефіцієнта Пуассона.

Отримані результати для п'єзокераміки типу ЦТС – 19 були порівняні з [5], а також із даними отриманими на тонкому диску [1].

2. Експериментальне дослідження

Для проведення досліджень використовувася диск промислового виготовлення із п'єзоматеріалу ЦТС – 19. На обидві плоскі поверхні якого були нанесені суцільні посріблені електроди (технологія високотемпературного вжигання), товщиною 10 ± 5 мікрон. Внаслідок цього зразок мав поляризацію по товщині. Діаметр дорівнював 70 мм, а висота – 8 мм, визначалися з точністю ± 0.01 мм. Густина розглядуваного п'єзоматеріалу $\rho = 6821 \text{ кг/м}^3$, розрахована по масі диска 210 ± 0.02 г. Відмітимо різницю (хоча допустиму по ГОСТу) між густинами досліджуваного матеріалу в даній роботі і довідниковою $\rho = 7330 \text{ кг/м}^3$ [5].

Зразок підтримувався на трьох пінопластових кубічних пластинках (по 5 мм кожна), встановлених так, щоб вони чинили мінімальний вплив на частоти коливань.

Внаслідок відносно високої добротності матеріалу ЦТС – 19, порядку 400 одиниць для діапазону частот 20-50 кГц на резонансах з амплітудою коливань порядку 0.1 мікрон відбувалося підвищення температури зразка на 5-7 °С. Це може бути причиною зміщення резонансних частот. Проте таке зміщення резонансів значно менше від похибок отриманих на вимірювальному приладі (максимальна похибка запису даних 0.2 %).

Частоти, що відповідали резонансам досліджуваного диска фіксувалися у діапазоні від 20 до 80 кГц. Резонансні частоти визначалися по максимальним значенням електричного струму на амплітудно-частотній характеристиці (АЧХ). З початку АЧХ вимірювалися для зразка із суцільними електродами і таким чином були знайдені перша та друга радіальні моди. Після знаходження радіальних резонансних частот було виконано розрізання суцільних електродів. Внаслідок розділення електродів на плоскій поверхні було отримано вузький зазор по діаметру, виконаний за технологією «скрайбування» інструментом для розділення напівпровідникових пластин. Далі були збуджені невісесиметрично симетричні коливання кругового порядку один з послідовним визначенням першої резонансної частоти.

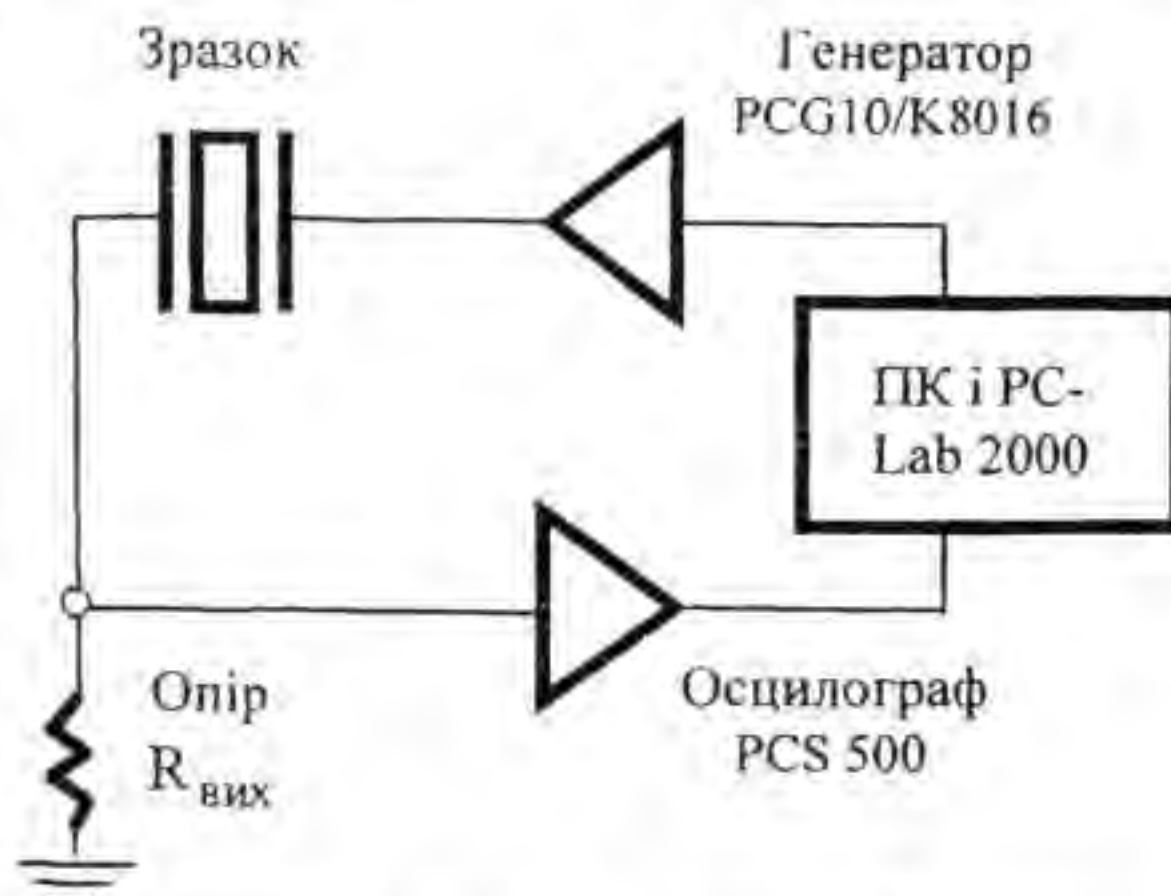


Рис. 1. Блок-схема експериментальної установки

Схема установки для збудження коливань в п'єзокерамічному циліндрі зображена на рис. 1. Генератор функцій PCG10/K8016 (Velleman instruments) працював в діапазоні частот від 0.01 кГц до 1 МГц, та типовою частотою розгортки від 1 кГц до 1 МГц. Амплітудні вимірювання: 100 мВ – 10 В при навантаженні 600 Ом проводилися з максимальною частотою дискретизації 32 МГц. Типове викривлення синусоїдальної хвилі $< 0.08 \%$. На Генераторі є можливість задавати початкові і кінцеві частоти, що було використано для виділення потрібного частотного діапазону. Результати дослідження зображувалися у вигляді графіка АЧХ за допомогою осцилографа PCS 500 (Velleman instruments). Вхідний імпеданс: 1 МОм/ 30 пФ. АЧХ ± 3 дБ в діапазоні частот 0 Гц – 50 МГц. Досліджувані циліндричні зразок було підключено між вихідним сигналом функціонуючого генератора PCG10/K8016, входом до осцилографа PCS 500 та вихідним опором $R_{\text{вих}} = 50$ Ом. Коли функціональний генератор PCG10/K8016 змінював частоту синусоїдального сигналу в потрібному діапазоні частот осцилограф PCS 500 вимірював вихідне напруження п'єзокерамічного циліндра в кожній його точці. Дані передавалися на персональний комп'ютер (ПК), де вони оброблювалися за допомогою програми PC-Lab 2000. При використанні цифрового осцилографа PCS 500 вимірюваний сигнал розбивається на короткі часові інтервали. В результаті такого розбиття деякі частоти можуть не потрапити у вибірку, особливо у випадку високочастотних сигналів, тому для кожної записаної резонансної частоти проводився окремий теоретичний аналіз.

В табл. 1 записані результати експерименту. Резонансами п'єзокерамічного диска з суцільними електродами є $f_{r,1}$ і $f_{r,2}$. Резонансна частота для диска з розрізними електродами позначена як $f_{l,1}$. Всі частоти табл. 1 в кГц. Кожній резонансній частоті відповідає своє значення електричної напруги U у В.

Експериментальні резонансні частоти та відповідні їм значення напруги Таблиця 1

	$f_{r,1}$	$f_{r,2}$	$f_{l,1}$
	30.22	76.72	22.63
U	0.3	0.1	0.2

3. Теоретичний аналіз

Теоретичне дослідження полягало в описанні отриманих експериментальних резонансних частот для застосування обертоного і резонансного методів.

Обертонний метод потребував розрахунку перших двох радіальних мод – $f_{r,1}$ і $f_{r,2}$ п'єзoeлектричного диска. Їх обчислення було виконано на основі розв'язку задачі про гармонічні вісесиметричні коливання скінченного ізотропного циліндра [3] заданого в області: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-H \leq z \leq H$ з гармонічними у часі граничними умовами в напруженнях (гармонічний множник $e^{i\omega t}$ опущено, $\omega = 2\pi f^{MS}$ – кругова частота):

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(a, z) = 0, \quad -H \leq z \leq H, \\ \sigma_z(r, \pm H) = g(r), \quad \sigma_{rz}(r, \pm H) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (1)$$

Напруження $\sigma_r(r, z)$ є парним по координаті z , що відповідає симетричним коливанням циліндра відносно площини $z = 0$. Функція $g(r)$ моделює експериментальне навантаження (тобто, різницю потенціалів на плоских поверхнях циліндра). Можливість виконання порівняння теоретичних резонансних частот $f_{r,1}^{MS}$ і $f_{r,2}^{MS}$ для ізотропного циліндра та експериментальних частот $f_{r,1}$ і $f_{r,2}$ для п'єзокераміки слідує з попередньої роботи [4], в якій було показано узгодженість перших чотирьох теоретичних і експериментальних резонансних частот, навіть, для «кубоподібних» циліндрів матеріалу ЦТС-19.

Резонансний метод потребував теоретичного опису резонансних частот з різним типом симетрії коливань $f_{r,1}$ і $f_{l,1}$. Частота $f_{r,1}$, як вже було зазначено є модою коливань, в якій рух

частинок переважно радіальний. Частота $f_{l,1}$ – перша мода коливань кругового порядку одиниця з переважно зсувним рухом частинок та вузловою лінією зображеними на рис. 2. На рис. 2 також зображено: форму коливань поверхні зразка на частоті $f_{l,1}$, поляризацію та поле вектора напруженості $\vec{E}$, що зумовлене розрізом електродів.

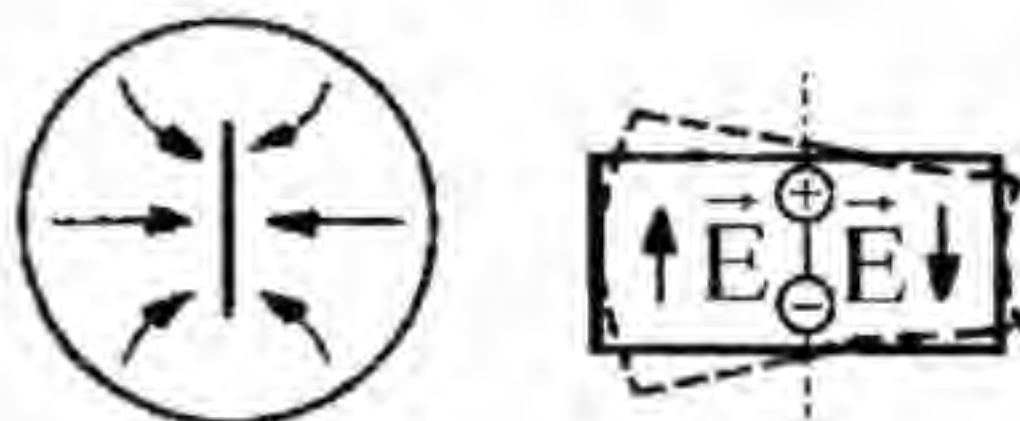


Рис. 2. Кінематика руху точок на частоті $f_{l,1}$, та розподіл поля напруженості $\vec{E}$

Радіальні моди $f_{r,n}^{Rad}$, ($n = 1, 2, \dots$), визначаються як послідовні корені трансцендентного рівняння

$$(1 - \nu_{12}^E) J_1(x) - x J_0(x) = 0, \quad (2)$$

відносно безрозмірного частотного параметру $x = 2\pi f^{Rad} a \sqrt{\rho / c_{11}^E}$, де a – радіус диска, c_{11}^E – пружний модуль. $J_0(x)$, $J_1(x)$ – звичайні функції Бесселя нульового і першого порядку відповідно. Корекція на товщину $2H$ для радіальних частот п'єзокерамічного диска $f_{r,n}^{Rad}$, ($n = 1, 2, \dots$), була виконана Баєрвальдом, визначається формулою

$$\begin{aligned} f_{r,n}^{Bayer} = f_{r,n}^{Rad} \left[1 + \frac{(f_{r,n}^{Rad})^2 + (1 - \nu_{12}^E)^2}{6(f_{r,n}^{Rad})^2 - (1 - (\nu_{12}^E)^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{f_{r,n}^{Rad} \nu_{13}^E H}{1 - \nu_{12}^E a} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) у припущенні $\nu_{12}^E = \nu_{13}^E$ (ізотропності диска) переходить у відому формулу Релея радіальних коливань дисків із поправкою на товщину.

Контурні коливання диска з частотами $f_{1,n}^{On}$, $(n = 1, 2, \dots)$ визначаються як корені рівняння

$$x \frac{J_0(x)}{J_1(x)} - 4 + \frac{x^2}{1 - \nu_{12}^E} + x\alpha \frac{J_0(x\alpha)}{J_1(x\alpha)} = 0, \tag{4}$$

відносно безрозмірної частоти $x = 2\pi f^{On} a \sqrt{\rho / c_{11}^E}$. В (4) позначено $\alpha = \sqrt{2 / (1 - \nu_{12}^E)}$. Як було вперше відмічено теоретично [13], а згодом підтверджено експериментально на ізотропних циліндрах [10], резонансна частота $f_{1,1}$ практично не змінюється при відношенні висоти до діаметра менше 0.5. Тому теоретична частота $f_{1,1}^{On}$ знайдена по одновимірний моделі з рівняння (4) не потребує корекції на товщину диска. Варто сказати, що подібною незалежністю від товщини володіють плато крайових резонансів, вперше експериментально спостережених на товстих дисках з BaTiO₃ [15]. Проте внаслідок значного впливу електричних і трансверсально-ізотропних властивостей матеріала, відносна похибка в значеннях крайових резонансів складає 8-10 % між експериментами на п'єзодисках [9, 15] і теоретичними моделями ізотропного циліндра. Відмітимо безрезультатні намагання виконати процедуру визначення ν_{12}^E (значення коефіцієнта Пуассона визначалося в діапазоні від 0.17 до 0.27) в роботі [9] для п'єзодисків PbTiO₃ із частот крайових резонансів.

3. Обговорення отриманих результатів

Відношення власних частот $f_{r,1}^{MS}$ і $f_{r,2}^{MS}$ та $f_{r,1}^{Baer}$ і $f_{1,1}^{On}$ наведені в табл. 2. Частоти $f_{r,1}^{MS}$, $f_{r,2}^{MS}$ – отримані з розв'язку вісесиметрично симетричної задачі про коливання ізотропного скінченного циліндра [3]; $f_{r,1}^{Baer}$ – перший корінь рівняння (2), що відповідає коливанням тонких трансверсально-ізотропних дисків з використанням товщинної корекції (3) запропонованої Баєрвальдом при $\nu_{13}^E = -s_{13}^E / s_{11}^E = 0.372$ [5]; $f_{1,1}^{On}$ – перший нуль рівняння (4) теорії Оноє, невісесиметричних симетричних коливань кругового порядку одиниця ізотропних дисків. Виконуючи лінійну інтерполяцію відношення частот в табл. 2, так щоб $f_{r,2}^{MS} / f_{r,1}^{MS}$ і $f_{r,1}^{Baer} / f_{1,1}^{On}$ дорівнювали відношенню експериментальних частот

$f_{r,2} / f_{r,1} = 2.539$ і $f_{r,1} / f_{1,1} = 1.335$, взятих із табл. 1. Отримуємо наступні значення коефіцієнта Пуассона, що наведені в табл. 3. де також представлені довідникові дані [5] ($\rho = 7330$ кг/м³) та ν_{12}^E визначений раніше на тонкому п'єзокерамічному диску [1] ($\rho = 7300$ кг/м³).

Залежність коефіцієнта Пуассона від відношення частот

Таблиця 2

ν_{12}^E	$f_{r,1}^{Baer} / f_{1,1}^{On}$	$f_{r,2}^{MS} / f_{r,1}^{MS}$
0.25	1.2241	2.6481
0.26	1.2330	2.6386
0.27	1.2420	2.6291
0.28	1.2513	2.6195
0.29	1.2607	2.6099
0.30	1.2704	2.6002
0.31	1.2803	2.5904
0.32	1.2904	2.5805
0.33	1.3008	2.5706
0.34	1.3114	2.5605
0.35	1.3223	2.5503
0.36	1.3335	2.5400
0.37	1.3449	2.5296
0.38	1.3567	2.5190
0.39	1.3687	2.5083
0.40	1.3810	2.4974
0.41	1.3937	2.4863
0.42	1.4067	2.4751
0.43	1.4201	2.4636
0.44	1.4339	2.4520
0.45	1.4480	2.4401

Якщо у формулі (3) припустити ізотропність диска, тобто $\nu_{12}^E = \nu_{13}^E$, то це не призведе до зміни коефіцієнта Пуассона при використанні резонансного методу в рамках точності запропонованої у табл. 3.

4. Висновки

Отримано коефіцієнт Пуассона для п'єзоелектричного диска матеріалу ЦТС – 19 з відношенням діаметра до висоти 8.75. Тоді як досліджуваний матеріал мав густину на 7% меншу за попередній досліджуваний [1], коефіцієнт Пуассона відрізняється лише на 0.3%.

Встановлено добру узгодженість резонансного і обертоного методів, що підтверджує високу точність знайдених результатів. Досліджено вплив анізотропії на низькочастотні резонанси та на знайдений коефіцієнт Пуассона. Перевагою обертоного методу у визначенні коефіцієнта Пуассона в п'єзоелектричному керамічному диску є проведення одного експерименту. Перевагою резонансного методу є використання простих аналітичних виразів.

Коефіцієнт Пуассона для ЦТС – 19 Таблиця 3

	ν_{12}^E	ρ кг/м ³
Обертонний метод (товстий диск)	0.361	6821
Резонансний метод (товстий диск)	0.361	6821
Резонансний метод (тонкий диск)	0.36	7300
Довідникові дані	0.36	7330

Список використаних джерел

1. Бондаренко А.А. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом / В. А. Андрущенко, А.А. Бондаренко, В.В. Мелешко, В.Н. Никитенко // Акуст. вестник. – 2006. – 9. № 4. – С. 3–11.

2. ГОСТ 12370-80. Материалы пьезоэлектрические. Методы испытаний. – Москва: Изд-во стандартов, 1980. – 30 с.

3. Лібов Д. Осесиметричні коливання циліндра / Д. Лібов // Вісн. Київськ. нац. ун. Серія Фізико-математичні науки. – 2009. – № 2. – С. 71–74.

4. Лібов Д.Ю. Резонансные колебания пьезокерамических цилиндров / В.А. Андрущенко, Д.Ю. Лібов, В.В. Мелешко, В.Н. Никитенко, О.Д. Смоктий, В.И. Сторожев // Пробл. вычисл. мех. и прочн. констр. – 2010. – № 14. – [прийнята до друку].

5. Пьезокерамические преобразователи: справочник. / Под ред. С.И. Пугачева. – Ленинград: Судостроение, 1984. – 256 с.

6. Физическая акустика. Методы и приборы ультразвуковых исследований. / Под ред. У. Мезона. – Москва: Мир, 1966. – 592 с.

7. Bechmann R. Elastic, piezoelectric, and dielectric constants of polarized barium titanate ceramics and some applications of the piezoelectric equations / R. Bechmann // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 347–350.

8. IEEE Standards on piezoelectricity. ANSI/IEEE Standard 176-1987. – New York: ANSI/IEEE. – 1987. – P. 74.

9. Ikegami S. Frequency spectra of extensional vibrations in Pb(ZrTi)O₃ / S. Ikegami, T.

Nagata, Y. Nakayima // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – 60. – P. 113–116.

10. McMahon G.W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders / G.W. McMahon // J. Acoust. Soc. Am. – 1963. – 36. – P. 85–92.

11. McMahon G.W. Measurement of Poisson's ratio in poled ferroelectric ceramic disks / G.W. McMahon // IEEE Transactions on Ultrasonics Engineering. – 1963. – UE-10. – P.102–103.

12. Meitzler A.H. Definition and measurement of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramics with large variations in Poisson's ratio / A.H. Meitzler, H.M. O'Brayan, H.F. Tiersten // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. – 1973. – SU-20. – P. 233–239.

13. Onoe M. Contour vibrations of isotropic circular plates / M. Onoe // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 1158–1162.

14. Rosen C.Z. Piezoelectricity. / C.Z. Rosen, B.V. Hiremath, R. Newnham. – New York: Springer, 1992 – 537 p.

15. Shaw E.A.G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks / E.A.G. Shaw // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 38–50.

Надійшла до редколегії 10. 12. 2010

УДК 539.376

Мирон В. Баняс*, аспірант

Розрахунок залишкових напружень при торцевому нарощуванні циліндра з фізично нелінійного матеріалу

В рамках моделі тіл, що ростуть, розглядається задача про торцеве нарощування циліндра з пружнопластичного матеріалу з врахуванням мікроструктурних перетворень. Вивчається вплив товщини шару, що нарощується, на залишкові напруження в циліндрі.

Ключові слова: модель нарощування тіл, залишкові напруження, метод скінчених елементів, мікроструктурні перетворення, фізична нелінійність матеріалу.

*E-mail: term@inmech.kiev.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

Вступ

Механіка тіл, що ростуть, [1] знаходить широке застосування в прикладних задачах техніки, технології, будівництва тощо. Зокрема теорія тіл, що ростуть, дозволяє моделювати процеси при зварюванні, наплавленні та споріднених технологіях.

В роботах [2,3] вивчено нарощування циліндричних тіл по бічній поверхні.

В даній статті розглядається осесиметрична задача про торцеве нарощування циліндра зі сталі шарами рідкого металу. При цьому враховується фізично нелінійна поведінка матеріалу, а також мікроструктурні перетворення при охолодженні. Вивчається вплив товщини шару, що нарощується, на розподіл залишкових напружень в циліндрі.

Постановка задачі

Схема нарощування показана на рис. 1. Вводиться циліндрична система координат $O r z \varphi$. Розглядається циліндр радіуса R і початкової довжини L_0 . Сутність термомеханічного процесу полягає в наступному. Спочатку торець циліндра нагрівається поверхневим джерелом на протязі 20 хв до температури 1700°C . Після цього джерело вимикається, і зі швидкістю $v = 6 \text{ мм/хв}$ наносяться шари матеріалу при $\theta = 1700^\circ \text{C}$. В

Miron V. Banyas*, PhD student

Calculation of residual stresses developed in physically nonlinear cylinder under end deposition

The problem of end deposition of physically nonlinear cylinder is considered within the framework of model of growing bodies with accounting of microstructural transformation. The influence of thickness of deposited layer on residual stresses is investigated.

Key Words: growing body, residual stresses, finite-element method, microstructural transformation, physically nonlinearity of material

процесі нарощування довжина циліндра збільшується на величину L_H . Розрахунки показують добре узгодження залишкового стану, отриманого при такому підході зі схемою миттєвого (швидкого) нанесення всього шару, що нарощується. Тому, нижче використовується дана спрощена схема.

Матеріал припускається ізотропним. Постановка осесиметричної задачі включає співвідношення Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

рівняння квазістатичної рівноваги

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

і рівняння теплопровідності

$$c_p \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Q, \quad (3)$$

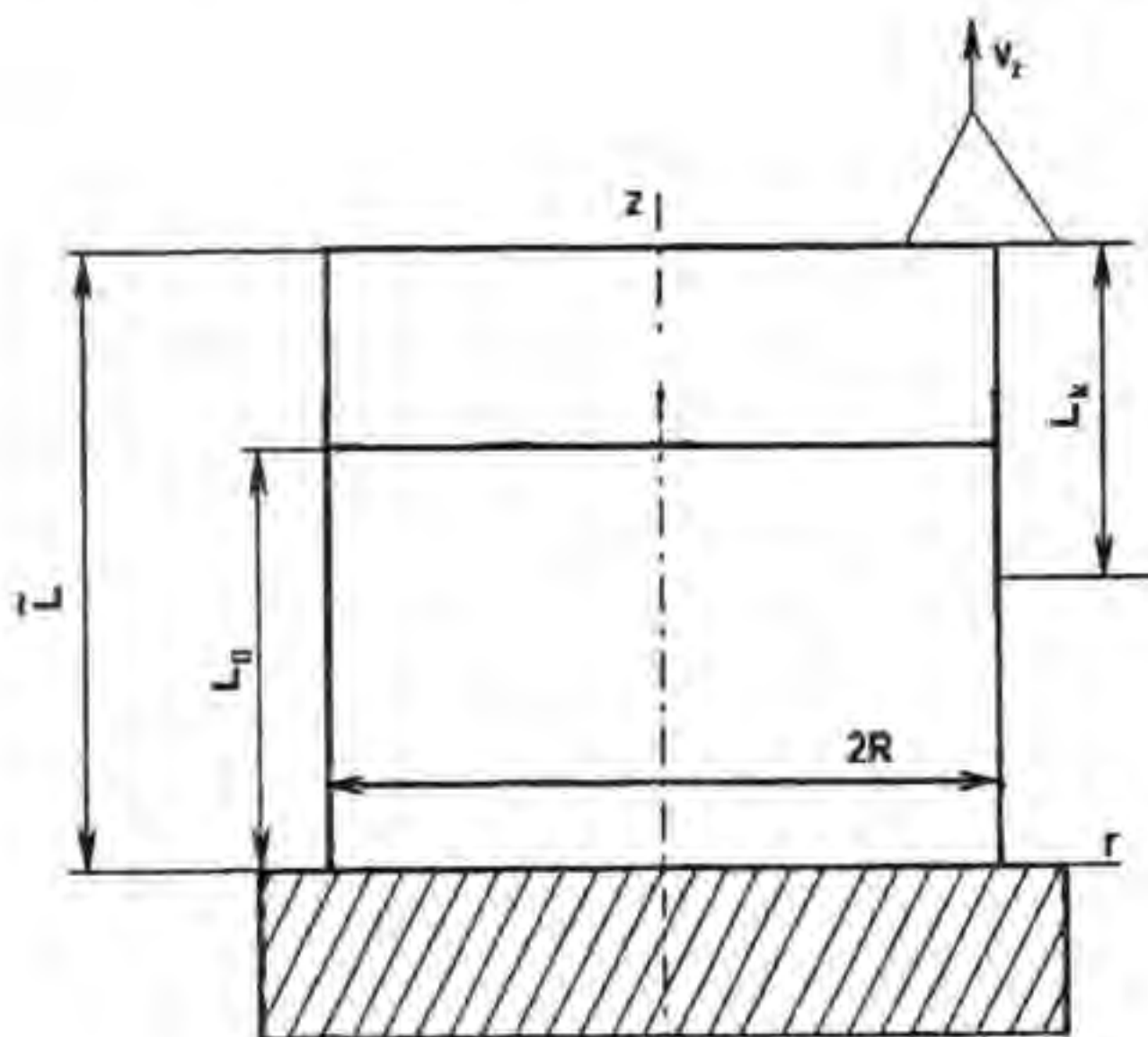


Рис. 1 Схема нарощування

де θ – температура; ε_{ij} , σ_{ij} – компоненти тензорів деформацій і напружень; Q – щільність об'ємного джерела тепла; c_v – об'ємна теплоємність; k – коефіцієнт теплопровідності.

Процесу нарощування відповідають наступні теплові й механічні граничні умови на торцях і бічній поверхні циліндра

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_k, \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad 0 < r < R, z = 0; \\ \theta &= \theta_{sf}, \\ \sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \sigma_{rz} &= 0, \quad 0 < r < R, z = \tilde{L}; \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \alpha_1 (\theta - \theta_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} &= 0, \quad r = R, 0 < z < \tilde{L} - L_k; \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \alpha_2 (\theta - \theta_c), \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} &= 0, \quad r = R, \tilde{L} - L_k < z < \tilde{L}, \end{aligned}$$

де $\tilde{L}$ – поточна довжина циліндра; θ_k – температура на опорному торці; θ_{sf} – температура матеріалу, що нарощується; θ_c – температура навколишнього середовища; σ і ε – стала Больцмана і коефіцієнт чорноти, $T = \theta + 273^\circ \text{C}$.

Фізично нелінійна поведінка матеріалу описується уніфікованою моделлю течії Боднера-Партома [4], яка включає:

– гіпотезу адитивності тензора повної деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \\ \varepsilon_{ij}^\theta &= \alpha (\theta - \theta_r) \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4)$$

– закон Гука для ізотропного матеріалу

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \\ \sigma_{kk} &= 3K_v(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

– закон течії Прандтля-Рейсса з умовою нестисливості для непружної деформації ε_{ij}^p

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= D_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}[(K - K_0)^2/3J_2]^n\right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \\ \varepsilon_{ij}^p(0) &= 0, \varepsilon_{kk}^p = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

– рівняння еволюції для параметра ізотропного зміщення K

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}^p, K(0) = 0, \quad (7)$$

де ε_{ij}^e , ε_{ij}^θ – компоненти тензорів пружної і теплової деформації; e_{ij} , s_{ij} – компоненти дівіаторів тензорів напружень і деформацій; G – модуль зсуву; K_v – об'ємний модуль; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення; θ_r – відрахункова температура; n , m_1 , K_0 , K_1 , D_0 – параметри моделі; $\dot{W}^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – потужність пластичної деформації; $J_2 = 1/2 s_{ij}s_{ij}$ – другий

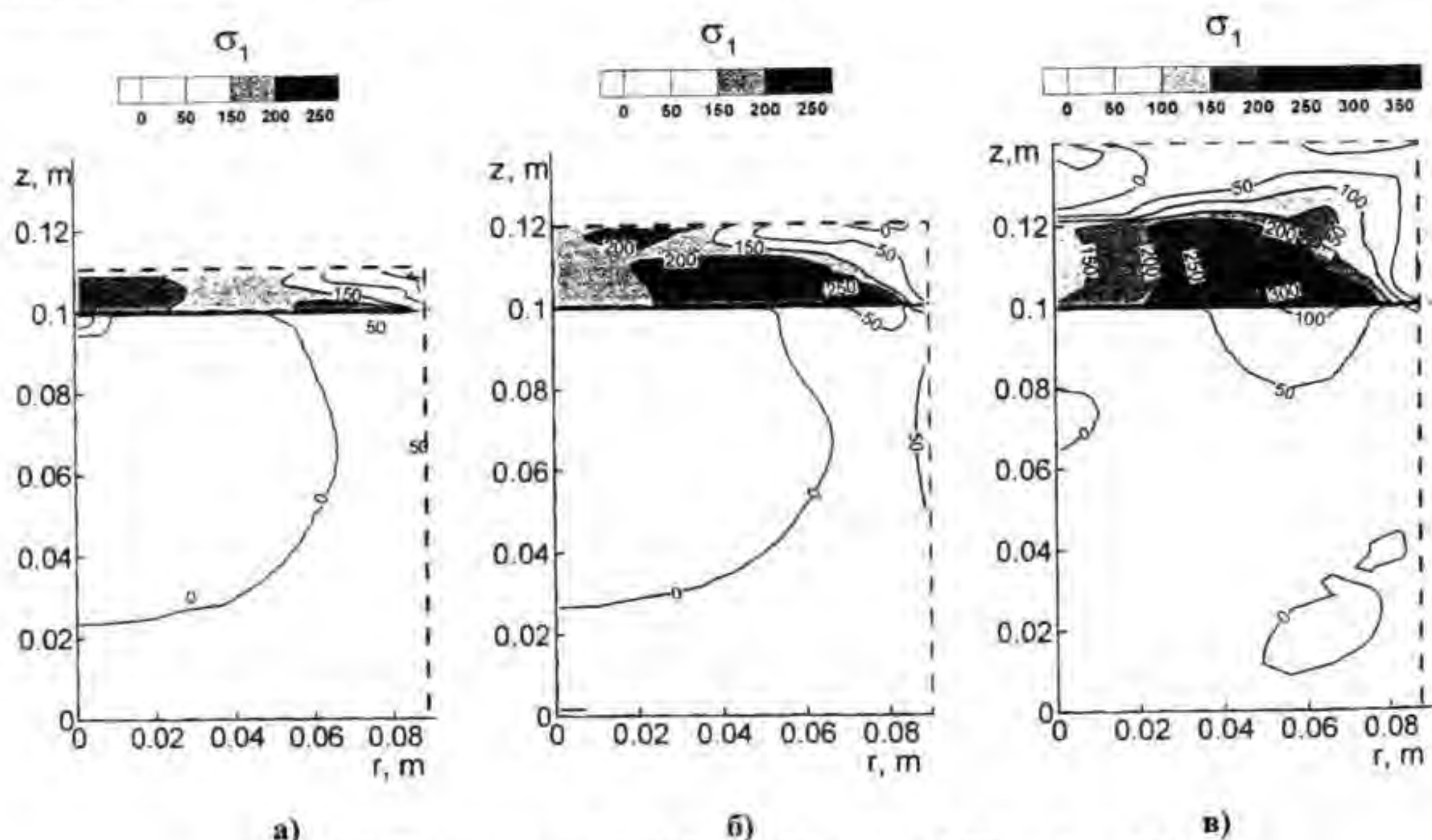


Рис. 2 Розподіл σ_1 при а) $L_H = 0,01\text{м}$; б) $L_H = 0,02\text{м}$; в) $L_H = 0,01\text{м}$.

інваріант діватора тензора напружень. Фізична інтерпретація параметрів моделі Боднера-Партома наведена в статті [5]. Експериментальні і теоретичні дослідження показали, що для більшості матеріалів параметри n , m_1 , K_0 , K_1 є функціями температури.

В даній статті використовується підхід до моделювання тіл, що ростуть, на основі методу скінчених елементів описаного в роботі [3]. Особливістю даного підходу є те, що побудована скінченоеlementна сітка покриває як самий циліндр, так і шар, що нарощується.

Вважається, що до моменту нарощування $t < t^*$ приєднаний шар є ненапруженим. Тоді в момент нарощування $t = t^*$ на поверхні нарощування повинні виконуватись наступні умови

$$\sigma_{rr}(t) = \sigma_{\theta\theta}(t) = \sigma_{zz}(t) = \sigma_{rz}(t) = 0, \quad t = t^*. \quad (8)$$

Розглянемо схему нарощування шару, який займає об'єм ΔV . Для $t < t^*$ вважається, що об'єм заповнений "пустим" пружним матеріалом з характеристиками $E = 0$, $\nu = 0$, $\alpha = 0$. В момент нарощування $t = t^*$ фіксуються ε_{ij}^* , θ^* – деформація й температура об'єму, який буде нарощуватися.

Для того, щоб задовольнити умові (8) необхідно модифікувати визначальне рівняння (5) для матеріалу, який накладається, наступним чином

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^*), \\ \sigma_{kk} &= 3K(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^*), \\ \varepsilon_{ij}^p &= \alpha(\theta - \theta^*)\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (9)$$

Мікроструктурні перетворення моделюються на основі термокінетичних діаграм [3], які описують розпад переохолодженого нестійкого аустеніту в режимі неперервного охолодження. Ці перетворення супроводжуються зміною об'єму матеріалу й враховуються за допомогою термоструктурних деформацій аналогічно як в роботі [6].

Задача розв'язувалася методом скінчених елементів. Використовувався чотирикутний ізопараметричний елемент. За часом задача інтегрувалася неявним методом Ейлера другого порядку з автоматичним вибором кроку. Система нелінійних трансцендентальних рівнянь, яка виникала на кожному часовому кроку, розв'язувалася методом простої ітерації з прискоренням збіжності за алгоритмом Стефенсона-Ейткіна.

Вплив товщини шару, що нарощується

Приймалося, що циліндр виготовлений зі сталі 40Х, а шар, що нарощується, з 50ХНМ. Параметри моделі для цих матеріалів визначались на основі експериментальних даних з роботи [7]. Розрахунки проводились для наступних значень параметрів задачі: $\theta_c = 20^\circ\text{C}$;

$\theta_k = 200^\circ \text{C}$; $\theta_{sf} = 1700^\circ \text{C}$; $\alpha_1 = 40 \text{ Bm/m}^2 \text{C}$;
 $\alpha_2 = 300 \text{ Bm/m}^2 \text{C}$; $R = 0,09 \text{ м}$; $L_0 = 0,02 \text{ м}$. З
метою дослідження впливу товщини шару L_H ,
що нарощується, розглядаються три випадки:
 $L_H = 0,01 \text{ м}$, $L_H = 0,02 \text{ м}$, $L_H = 0,04 \text{ м}$. На рис. 2
показано ізолінії максимального головного
напруження σ_1 при нарощуванні шарів з даними
товщинами.

Для максимального по об'єму шару, що
нарощується, отримані такі значення σ_1 :
 $\sigma_1(10 \text{ мм}) = 261 \text{ МПа}$, $\sigma_1(20 \text{ мм}) = 273 \text{ МПа}$,
 $\sigma_1(40 \text{ мм}) = 347 \text{ МПа}$.

Список використаних джерел

1. Арутюнян Н.Х. Теория ползучести
неоднородных тел / Н.Х. Арутюнян,
В.Б. Колмановский. – М.: Наука, 1983. –
336 с.
2. Сенченков И.К. Термомеханическая
модель растущих цилиндрических тел из
физически нелинейных материалов /
И.К. Сенченков // Прикл. механика. –
2005. – 41, № 9. – С. 118-126.
3. Senchenkov I.K. Examination of the
thermomechanical state of cylindrical
components deposited with layers of austenitic
and martensitic steels / I.K. Senchenkov,
O.P. Chervinko, E. Turyk, I.A. Ryabtsev //
Welding International. – 2008. – 22, №7. – P.
457-464.
4. Bodner S.R. Unified Plasticity – An
Engineering Approach (Final Report) /

Таким чином, із збільшенням товщини шару,
що нарощується, значення σ_1 збільшуються. При
цьому вони діють на поверхні контакту $z = L_0$.

Висновки

В даній статті розроблена методика
чисельного моделювання процесу нарощування
циліндру із пружнопластичного матеріалу на
торці з врахуванням мікроструктурних
перетворень. Встановлено, що зі збільшенням
товщини шару, що нарощується, збільшуються
розтягувальні напруження на границі з вихідним
циліндром, що збільшує загрозу його
відшарування.

S.R. Bodner. – Faculty of Mechanical
Engineering, Technion-Israel Institute of
Technology. Haifa, Israel, 2000. – 106 p.

5. Сенченков И.К. Определение параметров
модели Боднера-Партома термо-
вязкопластического деформирования
материалов / И.К. Сенченков, Г.А. Табиева
// Прикл. механика. – 1996. – 32, № 2. – С.
64-72.
6. Махненко В.И. Численное исследование
термомеханических процессов при
наплавке валов судовых механизмов и
устройств / В.И. Махненко, Е.А. Велико-
иваненко, Т.Г. Кравцов, В.В. Севрюков //
Автомат. сварка. – 2001. – № 1. – С. 3-10.
7. Расчеты на прочность, устойчивость и
колебания в условиях высоких температур
/ И.И. Гольденблат, Н.И. Безухов,
В.Л. Бажанов, Н.А. Николаенко, А.М.
Синюков – М.: Машиностроение, 1965. –
568 с.

Надійшла до редколегії 22.11.10

УДК 539.3

Волошко* О. І., аспірант,
Лобода В. В., д.ф.-м.н., проф.

Дослідження зон передруйнування для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує ізотропні матеріали

Розглядається тріщина в тонкому адгезійному прошарку, що з'єднує два різномірних ізотропних півпростори. Нехтуючи товщиною прошарку та моделюючи зони передруйнування продовженням тріщини, задача розв'язана аналітично. В результаті отримано алгебраїчні та трансцендентні рівняння для визначення довжин зон передруйнування та нормальних і зсувних напружень зчеплення в цих зонах. Також знайдено вирази для розкриття тріщини та J -інтегралу. Методом скінчених елементів розв'язана початкова задача, з врахуванням товщини прошарку, та обчислено значення J -інтегралу.

Ключові слова: розкриття тріщини, адгезійний прошарок, зона передруйнування, J -інтеграл.

O. I. Voloshko*, PhD student,
V. V. Loboda, professor

Investigation of pre-fracture zones for a crack in an adhesive layer, which connects isotropic materials

A crack in a thin adhesive layer between two different isotropic elastic half-spaces is considered. Neglecting the interlayer thickness and modelling pre-fracture zones by the crack continuations, the problem is solved analytically. As a result, algebraical and transcendental equations for determination of the pre-fracture zone lengths and normal and shear stresses at these zones are obtained. Also expressions of a crack opening displacement and J -integral are found. The initial problem, which takes into account of the interlayer thickness, is solved by the finite element method and values of the J -integral are calculated.

Keywords: crack opening displacement, adhesive layer, pre-fracture zone, J -integral.

*E-mail: voloshkooleg.13@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Мелешко В.В.

1. Вступ.

В теперішній час широке застосування в інженерній та будівельній практиці отримали композитні матеріали. Дуже часто вони поєднуються за допомогою тонкого адгезійного прошарку, несуча здатність якого менша за матеріали матриць. Неврахування даного факту, може спричинити виникнення тріщини або в самому прошарку, або на границі поділу матриці та прошарку, що веде до передчасного руйнування композита.

Раніше, можливий розвиток тріщини в однорідному ізотропному матеріалі досліджувався в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла [1, 2]. Розвиток моделі на випадок міжфазних тріщин в ізотропних та анізотропних біматеріалах проводився в роботах [3, 4, 5], де на їх продовженнях досліджувалися зони передруйнування або пластичні смуги. Граничний стан тріщини між двома ізотропними матеріалами визначався в рамках моделі зон зчеплення (cohesive zone) [6].

Аналітичне та чисельне дослідження тріщини в тонкому адгезійному прошарку проводилося в роботах [7]. При цьому, враховувалася товщина самого прошарку та пластичні деформації біля вершини тріщини. Для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує два однакових ізотропних матеріали, в роботі [8] побудовано аналітичний розв'язок, який враховує розподіл напружень на продовжені тріщини.

Електромеханічні зони передруйнування електропроникної тріщини в тонкому прошарку, що з'єднує два різномірних п'єзоелектричних матеріали, вивчалися в роботі [9].

В даній статті запропонований аналітичний спосіб визначення параметрів руйнування тріщини в тонкому адгезійному прошарку, що з'єднує два різномірних ізотропних матеріали. Також проводиться порівняльний аналіз аналітично отриманих даних з результатами чисельного експерименту.

2. Постановка задачі.

Розглянемо плоску задачу для тріщини (a, b) в тонкому адгезійному прошарку товщиною h , який з'єднує два різнорідних пружних ізотропних півпростори. Вважаємо, що на нескінченості діють рівномірно розподілені нормальні $\sigma_{yy} = \sigma^\infty$ та зсувні $\tau_{xy} = \tau^\infty$ напруження. Матеріали півпросторів визначаються модулями зсуву μ_i та параметрами κ_i , де $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ – для плоскої деформації, $\kappa_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$ – для плоского напруженого стану; а ν_i – коефіцієнт Пуассона (рис. 1). Зауважимо, що верхньому півпростору відповідає значення $i=1$, а нижньому – $i=2$. Матеріал прошарку приймаємо ідеально пружно-пластичним, що визначається границею текучості σ_T , модулем зсуву μ_h та параметром κ_h .

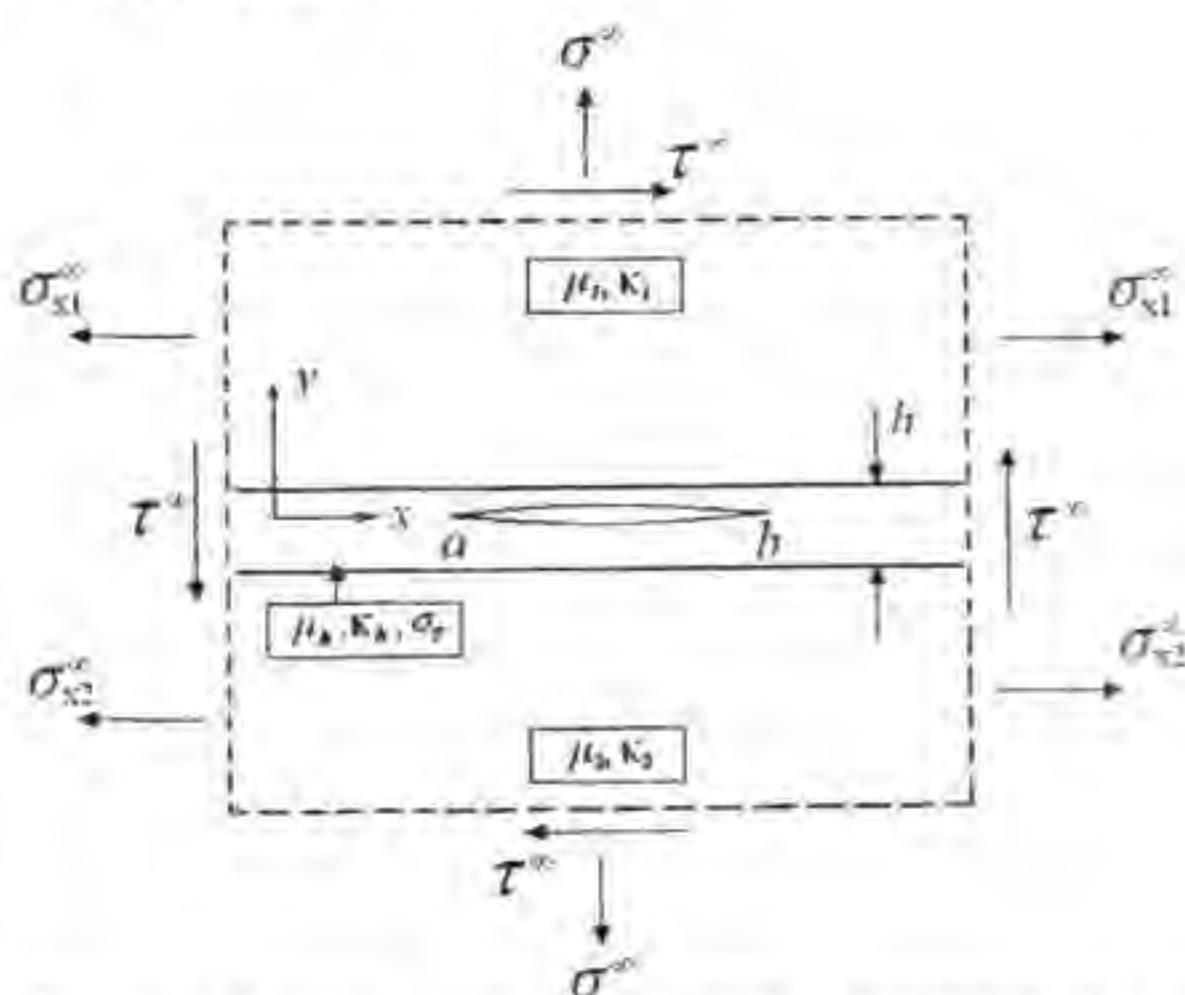


Рис. 1 Схема навантаження композиту з тріщиною в адгезійному прошарку

3. Моделювання адгезійного прошарку.

В зв'язку з тим, що матеріал клейового прошарку є досить м'яким порівняно з матеріалами матриць композиту, будемо вважати, що саме в прошарку на продовженні тріщини виникають зони ослаблення зв'язків між частинками середовища, які будемо називати зонами передруйнування (рис. 2 а)). Застосовуючи ідею моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла, ці зони моделюємо продовженням тріщини, на берегах яких діють постійні невідомі нормальні та дотичні напруження зчеплення (рис. 2 б)). Для лівої зони позначимо їх через σ', τ' , а для правої – σ'', τ'' . Для визначення напружень зчеплення використовуємо умову текучості матеріалу адгезійного прошарку, яку для лівої та правої зон

передруйнування, відповідно, запишемо таким чином:

$$f(\sigma', \tau', \sigma_{xy}') = 0, \quad (1)$$

$$f(\sigma'', \tau'', \sigma_{xy}'') = 0. \quad (2)$$

Зазвичай, товщина прошарку набагато менша за довжину тріщини, тому нею можемо знехтувати. Тоді граничні умови на інтерфейсі матеріалів приймають наступний вигляд:

$$\sigma_{yy}^{(i)}(x, 0) = q(x) = \begin{cases} \sigma', & a_1 \leq x \leq a \\ 0, & a < x < b \\ \sigma'', & b \leq x \leq b_1 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^{(i)}(x, 0) = r(x) = \begin{cases} \tau', & a_1 \leq x \leq a \\ 0, & a < x < b \\ \tau'', & b \leq x \leq b_1 \end{cases}, \quad (4)$$

$$[u] = 0, [v] = 0,$$

$$[\sigma_{yy}] = 0, [\tau_{xy}] = 0 \text{ для } x \notin (a_1, b_1), \quad (5)$$

де через квадратні дужки позначено стрибок відповідної функції через вісь x . На нескінченості граничні умови можемо записати наступним чином:

$$\sigma_{yy}|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \tau_{xy}|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \tau^\infty. \quad (6)$$

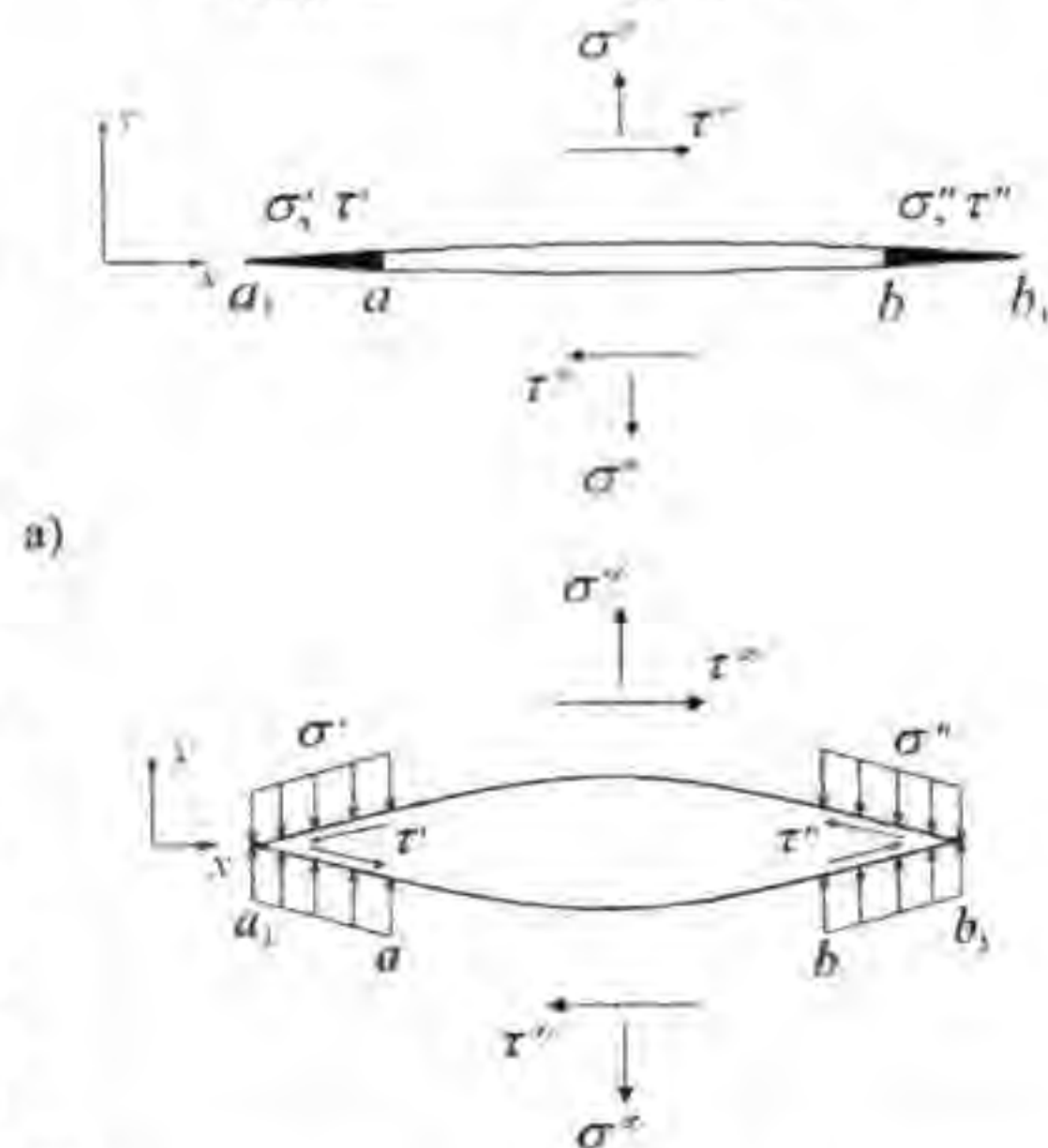


Рис. 2 Зони передруйнування на продовженні тріщини: а) виникнення; б) моделювання

Отже, одержали задачу лінійної механіки руйнування для міжфазної тріщини $x \in (a_1, b_1)$ в ізотропному біматеріалі, на берегах якої діють невідомі напруження $\sigma', \tau', \sigma'', \tau''$. При цьому, положення точок a_1 та b_1 також невідоме та потребує знаходження.

4. Аналітичний розв'язок задачі.

Розв'язок плоскої задачі для тріщини, що знаходиться на межі поділу пружних ізотропних півпросторів, зводиться до знаходження напружень та похідних стрибків переміщень на інтерфейсі з наступних співвідношень [10]:

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = g\{F^+(x) + \gamma F^-(x)\}, \quad (7)$$

$$[u'(x,0)] + i[v'(x,0)] = F^+(x) - F^-(x), \quad (8)$$

де $g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}$, $\gamma = \frac{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}$, а $F(z)$ –

кусково-аналітична функція у всій площині за винятком області тріщини.

Використовуючи співвідношення (7) та задовольняючи граничним умовам (3) та (4), приходимо до задачі лінійного спряження:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \frac{1}{2\pi i W(z)} \left\{ 2\pi \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2} - i\epsilon l_1 \right) (\sigma^\infty - i\tau^\infty) + \right. \\ \left. + (1+\gamma) \left[(\sigma' - i\tau') \int_{a_1}^x \frac{W^+(t)}{t-x} dt + (\sigma'' - i\tau'') \int_b^{b_1} \frac{W^+(t)}{t-x} dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

З умови обмеженості напружень в точках $x = a_1$ та $x = b_1$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\sigma', \tau', \sigma'', \tau''$:

$$W(x) \left\{ \sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) \right\} \Big|_{x \rightarrow a_1-0}^{x \rightarrow b_1+0} = 0, \quad (13)$$

Розв'язок системи (13) запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \sigma' - i\tau' = \frac{\pi i l_1}{1+\gamma} (\sigma^\infty - i\tau^\infty) \times \\ \times \frac{(1-2i\epsilon)N_{12} + (1+2i\epsilon)N_{22}}{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}, \\ \sigma'' - i\tau'' = -\frac{\pi i l_1}{1+\gamma} (\sigma^\infty - i\tau^\infty) \times \\ \times \frac{(1-2i\epsilon)N_{11} + (1+2i\epsilon)N_{21}}{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}. \end{cases} \quad (14)$$

$$F^+(x) + \gamma F^-(x) = \frac{1}{g} p(x), \quad x \in (a_1, b_1), \quad (9)$$

з граничною умовою на нескінченності

$$F(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\sigma^\infty - i\tau^\infty}{g(1+\gamma)}, \quad (10)$$

де $p(x) = q(x) - i r(x)$.

Згідно з [11], розв'язок задачі (9)–(10) можемо записати в виді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi g i (1+\gamma) W(z)} \left\{ 2\pi \left(z - \frac{a_1 + b_1}{2} - i\epsilon l_1 \right) \times \right. \\ \times (\sigma^\infty - i\tau^\infty) + (1+\gamma) \int_{a_1}^{b_1} \frac{p(t) W^+(t)}{t-z} dt \Big\}. \quad (11)$$

де $W(z) = (z - a_1)^{0.5-i\epsilon} (z - b_1)^{0.5+i\epsilon}$, $\epsilon = \ln \gamma / 2\pi$, $l_1 = b_1 - a_1$.

Тоді формула для визначення напружень на лінії поділу матеріалів має вигляд

де $N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}$ визначаються згідно [9].

Підставляючи (14) в умови текучості (1) та (2), отримаємо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих a_1 та b_1 , з розв'язку якої знаходимо довжини зон передруйнування $\Delta a = a - a_1$ та $\Delta b = b_1 - b$.

Тепер знайдемо стрибки переміщень в початкових вершинах тріщини. Інтегруючи співвідношення (8) з урахуванням (9), отримаємо

$$\begin{aligned} [u(x,0)] + i[v(x,0)] = \frac{1}{2\pi i g \gamma} \left\{ 2\pi (\sigma^\infty - i\tau^\infty) \times \right. \\ \times (x - a_1)^{0.5+i\epsilon} (x - b_1)^{0.5-i\epsilon} + (1+\gamma) [(\sigma' - i\tau') J_1(x) + \\ \left. + (\sigma'' - i\tau'') J_2(x)] \right\} + \frac{\gamma-1}{2\gamma g} P(x), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$P(x) = \begin{cases} (\sigma' - i\tau')(x - a_1), & a_1 \leq |x| \leq a \\ 0, & a < |x| < b \\ (\sigma'' - i\tau'')(x - b_1), & b \leq |x| \leq b_1 \end{cases} \quad (16)$$

$$J_1(x) = \int_{a_1}^x \frac{1}{W(\xi)} \int_{a_1}^{\xi} \frac{W^*(t)}{t - \xi} dt d\xi, \quad (17)$$

$$J_2(x) = \int_{a_1}^x \frac{1}{W(\xi)} \int_b^{\xi} \frac{W^*(t)}{t - \xi} dt d\xi, \quad (18)$$

В загальному випадку, інтеграли в (17) і (18) можуть бути подані через гіпергеометричні функції. Нехтуючи впливом осциляції в підінтегральних виразах (17) і (18), тобто вважаючи, що $\varepsilon = 0$ ($\gamma = 1$), інтеграли обчислюються точно у вигляді:

$$J_1(x) \approx J_{10}(x) = \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \left(\pi - \arccos \frac{2a - a_1 - b_1}{b_1 - a_1} \right) + \frac{x - a}{2} H(a_1, b_1, x, a) \quad (19)$$

$$J_2(x) \approx J_{20}(x) = \sqrt{(b_1 - x)(x - a_1)} \arccos \frac{2b - a_1 - b_1}{b_1 - a_1} - \frac{x - b}{2} H(a_1, b_1, x, b) \quad (20)$$

де $H(a_1, b_1, x, \xi)$ визначається згідно [12].

Під час дослідження розвитку тріщини найбільш важливим параметром є розкриття тріщини в її початкових вершинах, яке знаходяться наступним чином

$$\delta_x^a = [u(a, 0)], \quad \delta_y^a = [v(a, 0)], \quad (21)$$

$$\delta_x^b = [u(b, 0)], \quad \delta_y^b = [v(b, 0)]. \quad (22)$$

При дослідженні розвитку тріщини доцільно використовувати вектор розкриття тріщини, модуль якого визначається за формулами:

$$\delta_a = \sqrt{(\delta_x^a)^2 + (\delta_y^a)^2}, \quad \delta_b = \sqrt{(\delta_x^b)^2 + (\delta_y^b)^2}. \quad (23)$$

Для визначення J-інтегралу візьмемо контур інтегрування вздовж границі зони передруйнування [13]. В результаті отримаємо:

$$J^{(a)} = \sigma' \delta_y^a + \tau' \delta_x^a, \quad J^{(b)} = \sigma'' \delta_y^b + \tau'' \delta_x^b. \quad (24)$$

З іншої сторони, в зонах передруйнування напруження зчеплення σ', τ' та σ'', τ'' можемо подати через вектор напружень, довжина якого знаходиться за формулами:

$$T_{(a)} = \sqrt{\sigma'^2 + \tau'^2}, \quad T_{(b)} = \sqrt{\sigma''^2 + \tau''^2}. \quad (25)$$

Застосовуючи ідею визначення J-інтегралу для тріщини в однорідному матеріалі як добуток нормального напруження на розкриття тріщини, отримаємо скалярний добуток векторів напруження та розкриття тріщини у вигляді:

$$J_{(a)} = T_{(a)} \cdot \delta_a, \quad J_{(b)} = T_{(b)} \cdot \delta_b.$$

Використовуючи формули (23) та (25), одержимо

$$J_{(a)} = \sqrt{\sigma'^2 + \tau'^2} \cdot \sqrt{(\delta_x^a)^2 + (\delta_y^a)^2}, \quad (26)$$

$$J_{(b)} = \sqrt{\sigma''^2 + \tau''^2} \cdot \sqrt{(\delta_x^b)^2 + (\delta_y^b)^2}. \quad (27)$$

Чисельні результати показують, що значення J-інтегралу обчисленні за формулами (24) та (26), (27) добре узгодженні між собою, і розбіжність не перевищує 2%. Таким чином, величини J-інтеграла та вектора розкриття тріщини можуть розглядатися як основні параметри, за допомогою яких визначається можливість її розвитку.

5. Чисельний розв'язок.

Для апробації результатів аналітичного методу розв'яжемо задачу чисельно в рамках початкової постановки, яка враховує товщину прошарку. Для цього замінимо верхню та нижню півплощину на прямокутники скінчених розмірів $H_1 \times 2H_2$. Матеріал адгезійного прошарку приймаємо ідеально пружно-пластичним з границею текучості σ_T , що задовольняє умові текучості Мізеса.

Для аналізу використовуємо метод скінчених елементів (МСЕ). Кінцево елементна сітка біля правої вершини тріщини та розбиття адгезійного прошарку на скінчені елементи в її околі показана на рис. 3. Зазначимо, що використовуються чотирикутні восьмивузлові скінчені елементи, а відношення характерного розміру мінімального елемента до довжини тріщини дорівнює 1/3000.

В методі скінчених елементів J-інтеграл визначається за формулою [14].

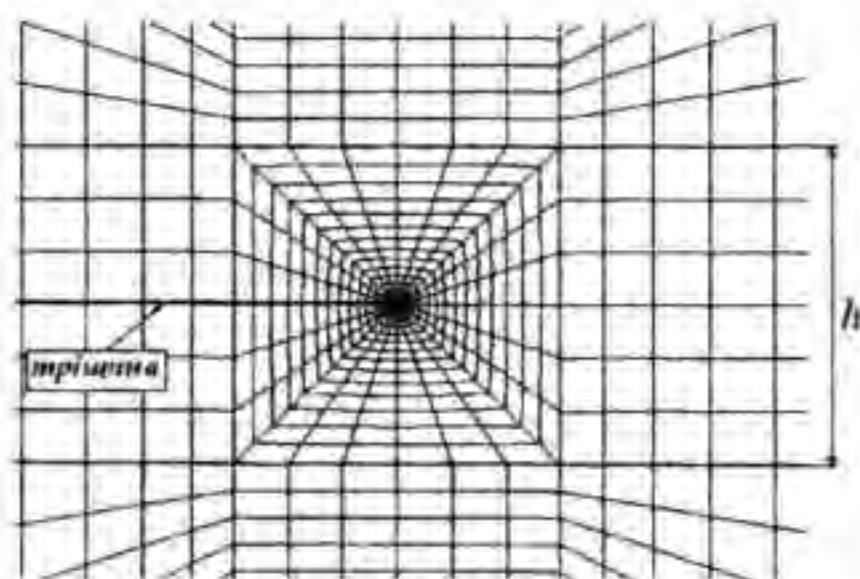


Рис. 3. Розбиття адгезійного прошарку біля правої вершини тріщини

6. Результати та їх аналіз.

Для чисельного аналізу вибираємо $a = -10$ мм, $b = 10$ мм, $h = 0.2$ мм, $H_1 = H_2 = 100$ мм. Розглядається композит сталі та алюмінію Al 7075-T7351, що з'єднуються тонким прошарком епоксидної смоли. Механічні властивості матеріалів матриць визначаються модулями Юнга і коефіцієнтами Пуассона відповідно для алюмінію – $E_1 = 71.7$ ГПа, $\nu_1 = 0.33$ та для сталі – $E_2 = 205$ ГПа, $\nu_2 = 0.3$. Матеріал прошарку, що відповідає властивостям епоксидної смоли, має наступні характеристики: $E_h = 3.1$ ГПа, $\nu_h = 0.39$ і границю текучості $\sigma_T = E_h / 300$. Розглядається випадок плоскої деформації, а тріщина вважається розташованою вздовж середньої лінії прошарку.

Оскільки, матеріал прошарку приймається ідеально пружно-пластичним, який задовольняє умові текучості Мізеса, тому в формулах (1) та (2) в якості функції f беремо умову текучості Мізеса, яка для плоского деформованого стану запишеться таким чином:

$$f(\sigma', \tau', \sigma_{xx}') \equiv (\sigma' - \sigma_{xx}')^2 + 4\tau'^2 - \frac{4}{3}\sigma_T^2. \quad (28)$$

$$f(\sigma'', \tau'', \sigma_{xx}'') \equiv (\sigma'' - \sigma_{xx}'')^2 + 4\tau''^2 - \frac{4}{3}\sigma_T^2. \quad (29)$$

Згідно [15], напруження σ_{xx} біля вершини тріщини дорівнює $2\sigma_T$. Тому, в рівняннях (28) та (29) приймаємо $\sigma_{xx}' = \sigma_{xx}'' = 2\sigma_T$. Нормальне напруження на нескінченості приймаємо рівним $\sigma^\infty / \sigma_T = 1$, а зсувне навантаження варіюємо і визначається величиною $\tau_* = \tau^\infty / \sigma^\infty$.

На рис. 4 представлені відносні значення напружень зчеплення в лівій та правій зонах переддруйнування в залежності від зсувного навантаження, а на рис. 5 – розкриття тріщини в її початкових вершинах. В таблиці 1 приведені

відносні значення довжин зон переддруйнування та безрозмірні значення J-інтегралу, які обчислені аналітичним методом та MCE, де $l_* = (b - a) / 2$. Можемо бачити, що розбіжність результатів аналітичного та чисельного розв'язку не перевищує 10%.

Аналіз отриманих результаті показує, що із збільшенням зсувного навантаження в лівій вершині зростають: довжина зони переддруйнування, дотичні напруження зчеплення τ' / σ_T та розкриття тріщини, а нормальне напруження зчеплення σ' / σ_T стрімко спадає. При цьому, в правій вершині тріщини довжина зони переддруйнування та нормальне напруження σ'' / σ_T в цій зоні майже не змінюються, а дотичне напруження τ'' / σ_T та розкриття тріщини збільшується з ростом величини τ_* .

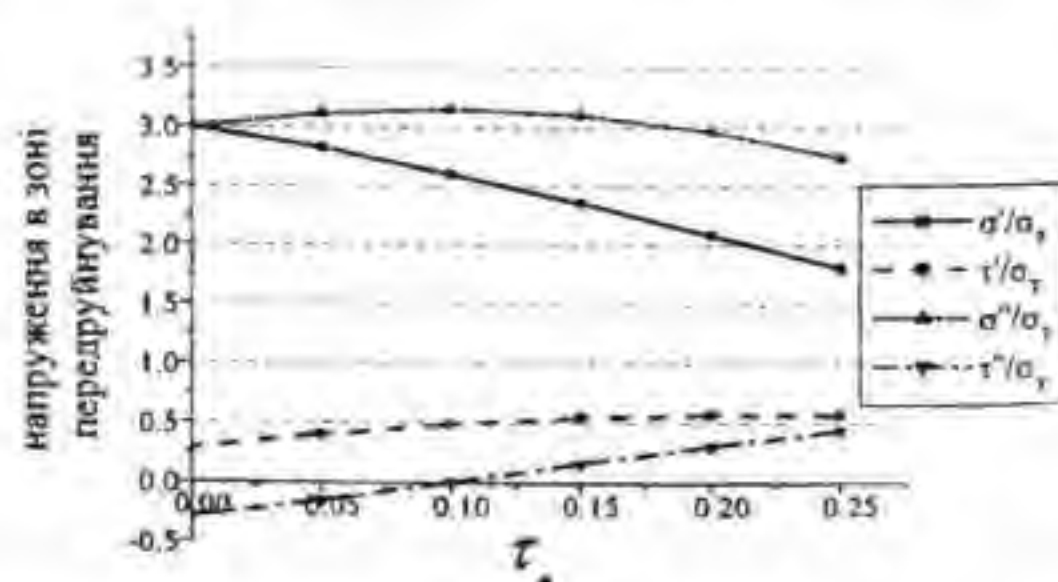


Рис. 4 Напруження зчеплення в зонах переддруйнування

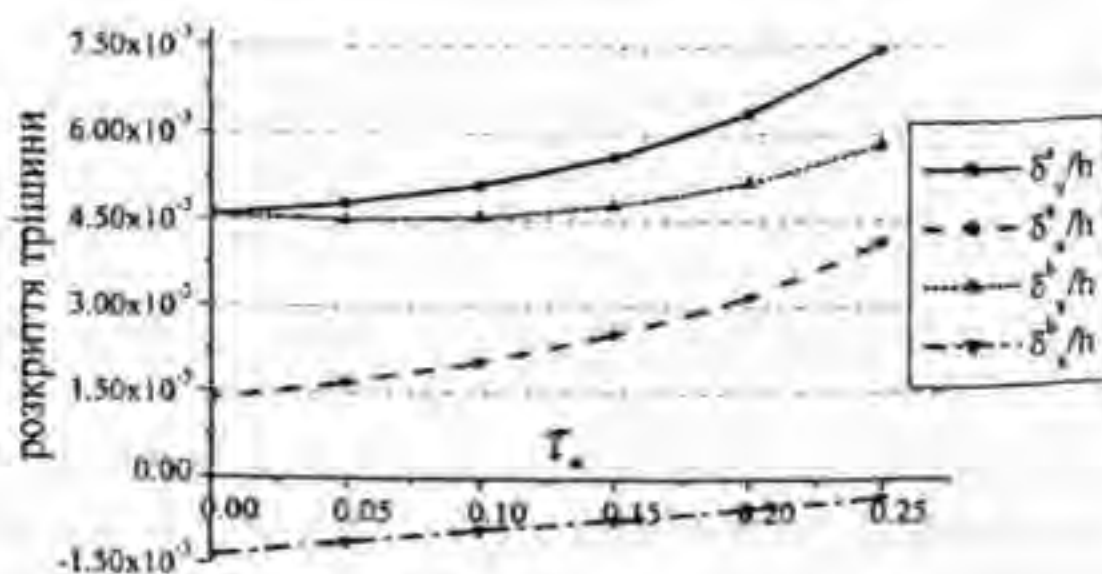


Рис. 5 Розкриття тріщини в залежності від зсувного навантаження

7. Висновки.

Розглянута задача для тріщини в тонкому адгезійному прошарку, що з'єднує два різнорідних пружних ізотропних матеріали. Нехтуючи товщиною прошарку, задача зведена до модельної задачі, яка розв'язана аналітично. Побудований розв'язок дозволив отримати алгебраїчні та трансцендентні рівняння для

визначення довжин зон передруйнування та напружень зчеплення в цих зонах. Також знайдені вирази для обчислення розкриття тріщини в її початкових вершинах та J-інтеграл. Для порівняння поставлена задача розв'язана також методом скінчених елементів з врахуванням товщини прошарку і обчислено

значення J-інтеграла. В результаті порівняльного аналізу встановлено, що J-інтеграл, обчислений за формулами аналітичного підходу, досить добре узгоджений з чисельними результатами методу скінчених елементів.

Таблиця 1

Відносні довжини зон передруйнування та значення J-інтегралу в залежності від зсувного навантаження

τ_*	$\frac{a-a_1}{h}$	$\frac{b_1-b}{h}$	$J \cdot E_2 / (\sigma_1^2 \cdot l_*)$		%
			Аналітично	MCE	
0	7.420	7.420	5.704	6.157	-7.36%
0.05	8.350	6.940	5.729	6.334	-9.55%
0.1	9.870	6.860	5.800	6.425	-9.73%
0.15	12.250	7.215	5.925	6.568	-9.80%
0.2	16.100	8.125	6.117	6.773	-9.69%
0.25	23.000	9.935	6.413	7.055	-9.11%

Список використаних джерел

1. *Леонов М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – 5, № 4. – С. 391–401.
2. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8, № 2. – P. 100–104.
3. *Бакиров В. Д.* Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для трещины на границе соединения материалов / В. Д. Бакиров, Р. В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика. – 2004. – 68, № 1. – С. 170–179.
4. *Каминский А. А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63–68.
5. *Шевельова А. Є.* Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами / А. Є. Шевельова // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2000. – № 2. – С. 33–40.
6. *Needleman A.* An analysis of tensile decohesion along an interface / A. Needleman // J. Mech. Phys. Solids. – 1990. – 38. – P. 289–324.
7. *Varias A. G.* Ductile failure of a constrained metal foil / A. G. Varias, Z. Suo, C. F. Shih // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – 39. – P. 963–986.
8. *Voloshko O.* Analytical and numerical study of cohesive zones for a crack in an adhesive layer between identical isotropic materials / O. Voloshko, Y. Lapusta, V. Loboda // Engng. Fracture Mech. – 2010. – 77. – P. 2577–2592.
9. *Loboda V.* Electro-mechanical pre-fracture zones for an electrically permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // Int J Solids Struct. – 2007. – 44. – P. 5538–5553.
10. *Herrmann K. P.* Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, I. V. Kharun // Theor. and Appl. Fract. Mech. – 2004. – 42. – P. 335–348.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 707 с.
12. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К., 1968. – 248 с.
13. *Партон В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М., 1976. – 503 с.
14. *Rice J. R.* A path independent integral and the approximated analyses of strain concentration by notches and cracks / J. R. Rice // J Appl Mech. – 1968. – 35. – P. 379–386.
15. *Tvergaard V.* On the toughness of ductile adhesive joints / V. Tvergaard, J. W. Hutchinson // J Mech Phys Solids. – 1996. – 44. – P. 789–800.

Надійшла до редколегії 10.12.2010

УДК 532.59

Котельнікова А.С., аспірантка
Нікішов В.І., чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**Дослідження процесу взаємодії
відокремлених хвиль з береговими
схилами**

В статті представлено результати експериментальних досліджень взаємодії поверхневих відокремлених хвиль з вертикальною стінкою та береговими схилами, які мають різні кути нахилу до горизонту. Описано процес взаємодії цих хвиль з береговими схилами. Отримано коефіцієнти відбиття відокремлених хвиль від вертикальної стінки та берегових схилів.

Ключові слова: відокремлена хвиля, накат, коефіцієнт відбиття.

*E-mail: vinihm@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

При дослідженні взаємодії поверхневих відокремлених хвиль з береговими схилами основну увагу приділяють визначенню висоти нахату хвиль залежно від їх амплітуди та кута нахилу стінки. В прибережній зоні значну роль відіграє також відбиття хвиль від схилів і споруд. Цей процес може мати суттєвий вплив на береговий режим у фронтальній частині конструкції. Неприятливі ефекти відбиття хвиль можуть призводити до аварійних ситуацій, пов'язаних з втратами у прибережному матеріалі та дестабілізації берегових конструкцій. Тому дані, отримані при проведенні чисельного або фізичного моделювань взаємодії відокремлених хвиль зі схилами, є дуже важливими.

Проблема відбиття відокремленої хвилі від берегових конструкцій і схилів привернула увагу дослідників при вивченні процесу взаємодії між двома відокремленими хвилями. Процес зіткнення двох однакових відокремлених хвиль еквівалентний, за умови відсутності в'язкості, процесу взаємодії відокремленої хвилі з вертикальною стінкою. Даному питанню присвячено роботи [1-4]. В [1] представлено експериментальне дослідження взаємодії двох відокремлених хвиль. Показано, що максимальний підйом рівня води при зіткненні хвиль може перевищувати подвоєну амплітуду

A.S. Kotelnikova, postgraduate student
V.I. Nikishov, Cor. Member of NASU, Doc. Sci.
(Phys.-Math.), Prof.

**Investigation of process of the interaction of
a solitary wave with slopes**

The results of the experimental investigations of the interaction of surface solitary waves with vertical wall and slopes are presented. Slopes of the different angles in respect to horizon have been considered. Process of the interaction this wave with slopes are described. Reflection coefficients of solitary waves from vertical wall and slopes have been obtained.

Key Words: solitary wave, run up, reflection coefficient.

початкової хвилі. Також виявлено фазовий зсув (сповільнення розповсюдження хвиль за час їх взаємодії), який не залежить від початкової амплітуди. Проведено порівняння з результатами теоретичних залежностей. В роботі [2] розглядається лобове зіткнення двох відокремлених хвиль, що розповсюджуються вздовж поверхні невязкої однорідної рідини. Вивчення процесу зіткнення базувалось на використанні методу малих збурень. Виявлено, що хвилі, які сформувались в результаті зіткнення, зберігають свої початкові параметри (з точністю до третього порядку розкладання), але має місце фазовий зсув. Крім того, за кожною відокремленою хвилею виникають вторинні хвилі. Також знайдено максимальний підйом рівня води при зіткненні хвиль. Чисельне моделювання зіткнення двох відокремлених хвиль представлено в роботі [3]. Основну увагу направлено на вивчення генерації вторинних хвиль. Описано процес формування хвильового пакету, який виникає в наслідок лобового зіткнення відокремлених хвиль. Результати розрахунків фазового зсуву та залежності параметрів взаємодіючих хвиль від часу знаходяться у відповідності з рішенням рівняння Кортевега-де Вриза. Взаємодію поверхневих відокремлених хвиль з вертикальною стінкою

теоретично досліджено в роботі [4]. Встановлено, що амплітуда хвилі після відбиття зменшується. Показано, що затухання амплітуди, яке спостерігається в експерименті, пояснюється появою дисперсійного «хвоста». В [5] досліджено взаємодію відокремлених хвиль, що розповсюджуються вздовж вільної поверхні рідини. Отримано залежність, яка описує зміну амплітуд відокремлених хвиль при їх зіткненні. В роботі представлено результати експериментальних даних щодо параметрів хвиль, чисельне моделювання процесу зіткнення, оцінку втрат енергії при «не пружній» взаємодії хвиль.

Взаємодія відокремленої хвилі з вертикальною стінкою також вивчалось в роботах [6-8]. Стаття [6] присвячена експериментальному дослідженню генерації, розповсюдження, затухання та відбиття відокремленої хвилі від плоскої вертикальної стінки. Автори відмітили, що відбиття відокремленої хвилі від вертикальної стінки, можна розглядати як зіткнення двох подібних хвиль однакової амплітуди, що розповсюджуються в протилежних напрямках. При взаємодії зі стінкою спостерігалось збільшення амплітуди відокремленої хвилі та зменшення швидкості хвилі. Згідно даних, амплітуда відокремленої хвилі біля вертикальної стінки менше, ніж амплітуда падаючої хвилі; зменшення амплітуди не перевищує 10%. Відбиття від вертикальної стінки відокремленої хвилі, що поширюється під кутом до стінки, вивчено чисельно за допомогою спектрального методу високого порядку в роботі [7]. Основну увагу приділено маховському відбиттю відокремлених хвиль. Чисельні результати показали, що при збільшенні амплітуди хвилі маховського відбиття не виникає. Взаємодія відокремленої хвилі, що поширюється вздовж вільної поверхні над горизонтальним дном, з вертикальною стінкою розглядалась в [8]. Приведено результати для стадії руху, коли хвиля знаходиться безпосередньо в контакті зі стінкою. Зроблено оцінку часу взаємодії хвилі зі стінкою. Показано, що час контакту дає змогу визначити параметри фазового зсуву, який виникає в процесі відбиття хвиль. В роботі представлено також результати, що стосуються інших властивостей взаємодії, враховуючи максимальний накат і миттєву силу дії на стінку.

В даній роботі представлено результати експериментальних досліджень взаємодії відокремлених хвиль з береговими схилами, які

мають різні кути нахилу до горизонту: $11^\circ, 17^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Результати експериментальних досліджень

Експерименти виконувались у хвильовому лотку довжиною 16м, шириною 0.3м і висотою 0.7м. Бокові стінки лотка були зроблені зі скла. Початкове локалізоване підняття рівня води відбувалось за рахунок падіння важкого тіла розмірами $0.23 \times 0.3 \times 0.75$ м на дно лотка. Подальша еволюція збурення призводила до формування однієї відокремленої хвилі. Дисперсійний «хвіст», що виникав при генерації хвилі, відсікався за допомогою спеціального обладнання. Ефективність такого відсікання падає з ростом глибини, проте інтенсивність дисперсійного «хвоста» залишається малою. В торці лотка було встановлено моделі берегових схилів, які мали різні кути нахилу до горизонту. Реєстрація деформації вільної поверхні здійснювалась за допомогою шести ємнісних датчиків, які розміщувались вздовж осі лотка. Сигнал від датчиків подавався на аналого-цифровий перетворювач, з'єднаний з ПК. Докладний опис експериментальної установки представлено в [9].

Експерименти по дослідженню взаємодії відокремленої хвилі з вертикальною стінкою та береговими схилами проводились для глибин води в лотку 11см і 17см.

Після генерації відокремлена хвиля з амплітудою a поширюється в хвильовому лотку в напрямку до схилу, потім рухається вгору по схилу, досягаючи свого максимально значення накату R . Дані досліджень величини накату залежно від параметрів відокремленої хвилі для різних глибин приведено в роботі [9]. В даній роботі основну увагу приділено процесу відбиття хвиль.

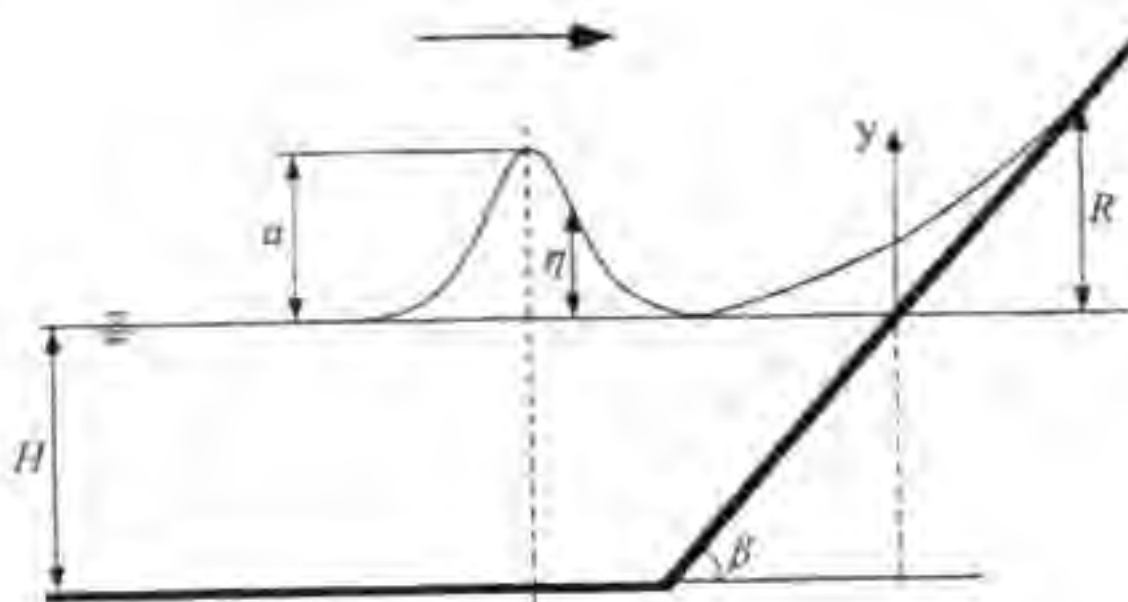


Рис. 1 Ескіз нахилу відокремленої хвилі

Відомо, що існує два режими взаємодії відокремлених хвиль з береговим схилом: без руйнування та з руйнуванням хвилі в процесі нахату. Згідно [10], при нахаті відокремлених хвиль на схил з кутом нахилу більше 10° , хвилі не руйнуються. Оскільки експерименти були проведені з крутими і середніми схилами, відокремлені хвилі при нахаті на схил не руйнуються. На рис.2(а) і рис.2(б) показано профілі вільної поверхні води, отримані в результаті обробки цифрових фотографій процесу нахату хвиль на схил, коли відокремлені хвилі з амплітудою $a = 0.26H$ при глибині води в лотку 11 см взаємодіють з вертикальною стінкою та береговим схилом з кутом нахилу 30° , відповідно. Початок координат ($x = 0$) розташовано на перетині незбуреної поверхні води та схилу.

З рисунків видно, що форма вільної поверхні в різні моменти часу є плавною кривою, тобто руйнування хвилі не відбувається. Аналіз результатів експериментальних досліджень [9] показав, що висота нахату відокремленої хвилі підвищується при збільшенні відносної висоти хвилі та при зменшенні кута нахилу берегового схилу.

При взаємодії відокремлених хвиль з береговими схилами після досягнення положення

максимального нахату починається процес відкату – язик нахату відступає вниз по схилу, і в цей момент починається генерація відбитої хвилі, яка поширюється від берегового схилу [11]. На рис.3(а) і рис.3(б) представлено результати обробки цифрових фотографій процесу відкату відокремленої хвилі при тій же глибині води в лотку, що і на рис.2, при взаємодії з вертикальною стінкою та береговим схилом з кутом нахилу 30° , відповідно.

Порівняння рисунків 2(а) і 3(а) показує, що форми кривих вільної поверхні в процесі нахату відокремленої хвилі на вертикальну стінку мало відрізняються від аналогічних форм при відкаті хвилі. Це приводить до того, що в процесі відкату профіль відокремленої хвилі має форму, близьку до форми падаючої хвилі. Різниця амплітуд падаючої та відбитої хвиль не перевищує 5%. При взаємодії відокремленої хвилі з береговим схилом, що має кут нахилу 30° по відношенню до горизонту при відкаті хвилі виникає значне локальне пониження вільної поверхні, яке обумовлює генерацію хвиль відносно малої довжини хвилі, що розповсюджуються від схилу слідом за відбитою відокремленою хвилею у вигляді хвильового пакету. В той же час відбувається генерація відокремленої хвилі.

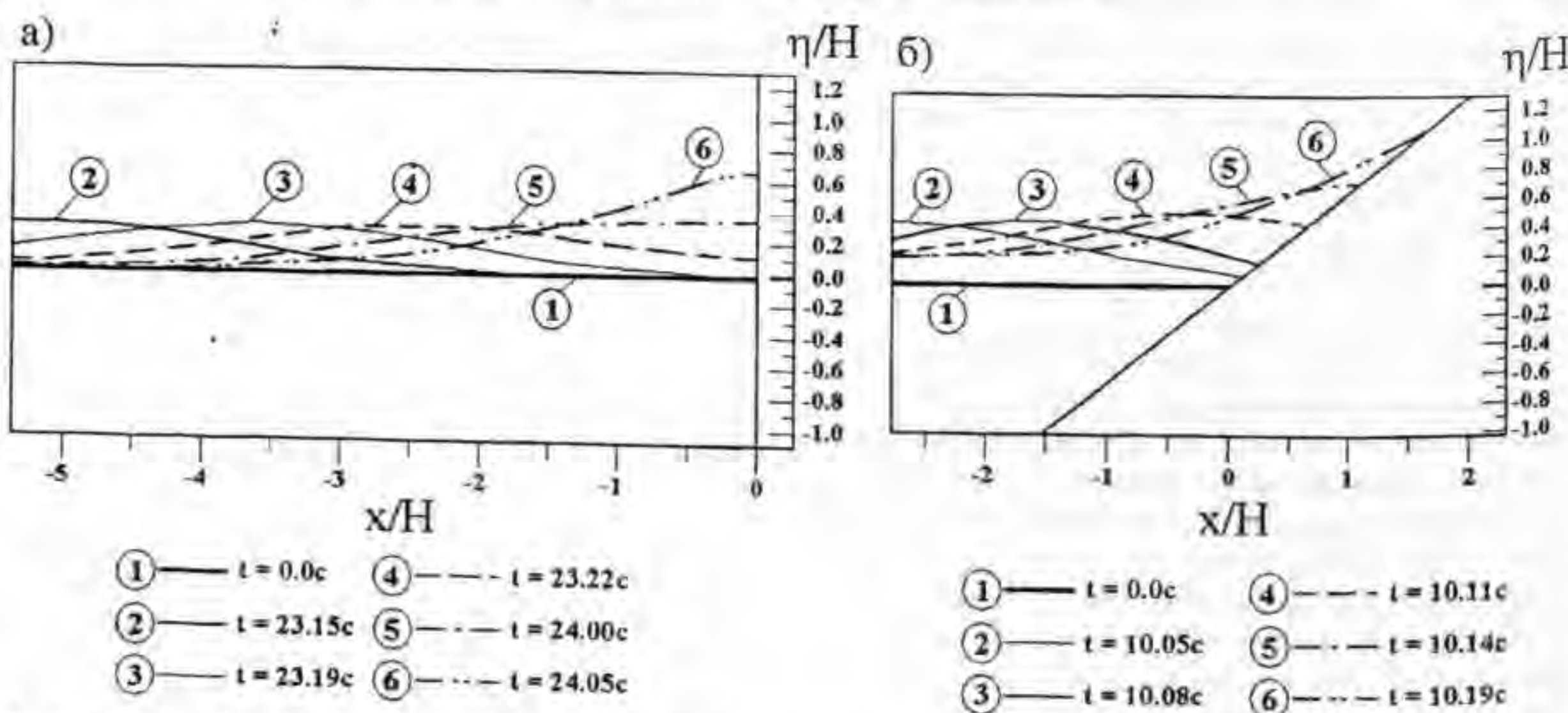


Рис.2 Накат відокремленої хвилі на береговий схил при $a/H = 0.26$: а) $\beta = 90^\circ$; б) $\beta = 30^\circ$

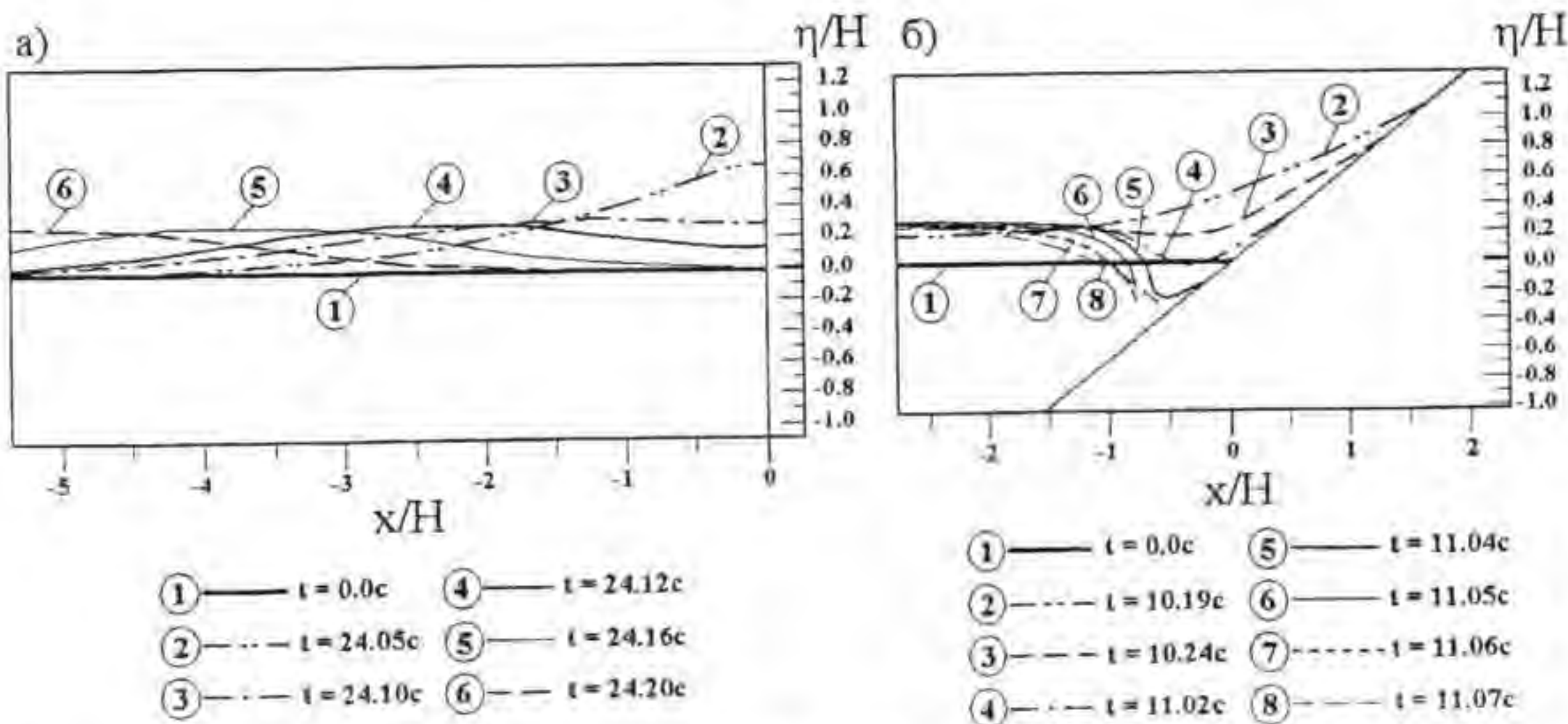


Рис. 3 Відкат відокремленої хвилі при $a/H = 0.26$: а) $\beta = 90^\circ$; б) $\beta = 30^\circ$

На рис.4 і рис.5 представлено записи даних, отриманих одним з датчиків (D3) протягом одного пробігу при глибині води в лотку 11 см при взаємодії відокремленої хвилі з вертикальною та нахиленою стінками, відповідно. Спочатку датчик записує збурення вільної поверхні, викликане проходженням хвилі (цифра 1, рис.4, рис.5). Потім датчик реєструє

хвилю, що відбилася від вертикальної стінки (цифра 2, рис.4); хвилю, що відбилася від берегового схилу з кутом нахилу 30° (цифра 2, рис.5). Далі хвиля поширюється вгору по потоку та відбивається вже від пластини, яка відсікає дисперсійний «хвіст», і розповсюджується вниз по потоку (цифра 3, рис.4, рис.5).

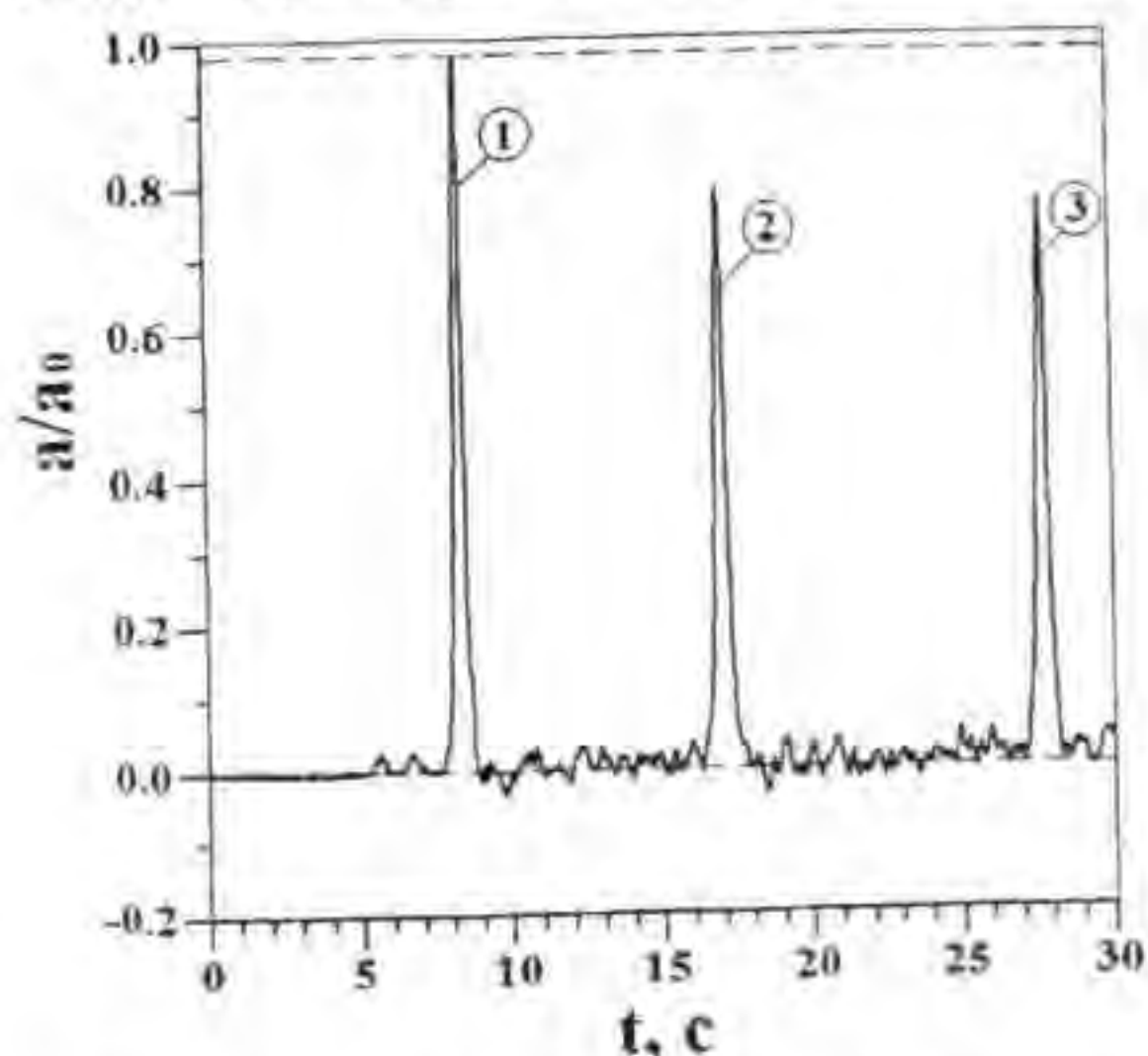


Рис.4 Збурення вільної поверхні при поширенні відокремленої хвилі в лотку з вертикальною стінкою при глибині води $H = 11 \text{ см}$: 1 – збурення вільної поверхні, викликане розповсюдженням хвилі; 2 – хвиля, що відбилася від вертикальної стінки; 3 – хвиля, що відбилася від пластини, яка відсікає дисперсійний «хвіст».

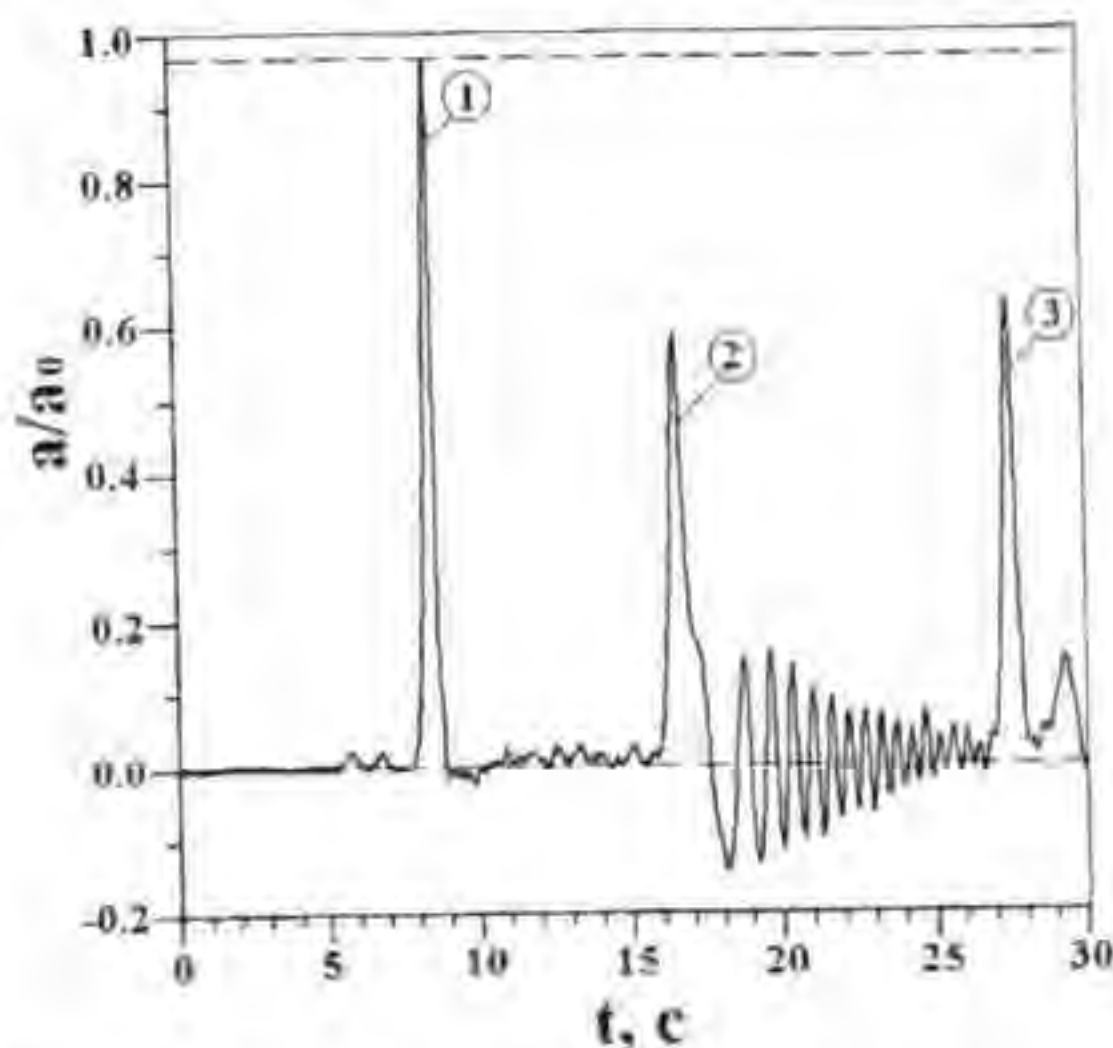


Рис.5 Збурення вільної поверхні при поширенні відокремленої хвилі в лотку з береговим схилом 30° при глибині води $H = 11 \text{ см}$: 1 – збурення вільної поверхні, викликане розповсюдженням хвилі; 2 – хвиля, що відбилася від схилу 30° ; 3 – хвиля, що відбилася від пластини, яка відсікає дисперсійний «хвіст».

З рис.4 видно, що відокремлена хвиля, що розповсюджується вздовж каналу, відбивається від вертикальної стінки без будь-яких змін, крім незначного зменшення амплітуди. При взаємодії відокремленої хвилі з береговим схилом, встановленим під кутом 30° (рис.5), спостерігається значне зменшення амплітуди відбитої хвилі, викривлення форми заднього фронту відбитої хвилі та утворення дисперсійного пакету хвиль. Оскільки швидкість відокремленої хвилі більше швидкості дисперсійного «хвоста», то при подальшому розповсюдженні хвиля буде скидати зайву енергію та відриватися від хвильового пакету.

Відбиття відокремлених хвиль

Хвильовий рух у фронтальній частині конструкції визначається коефіцієнтами відбиття по амплітуді $K_a = a_r/a_i$, та по енергії $K_E = E_r/E_i$. a_r і a_i - амплітуда відбитої та падаючої хвилі, відповідно; E_r - енергія відбитої хвилі, E_i - енергія падаючої хвилі. В свою чергу коефіцієнт відбиття для нахиленої площини залежить від кута нахилу, шорсткості поверхні та пористості. Також хвильове відбиття залежить від крутизни падаючої хвилі та її довжини.

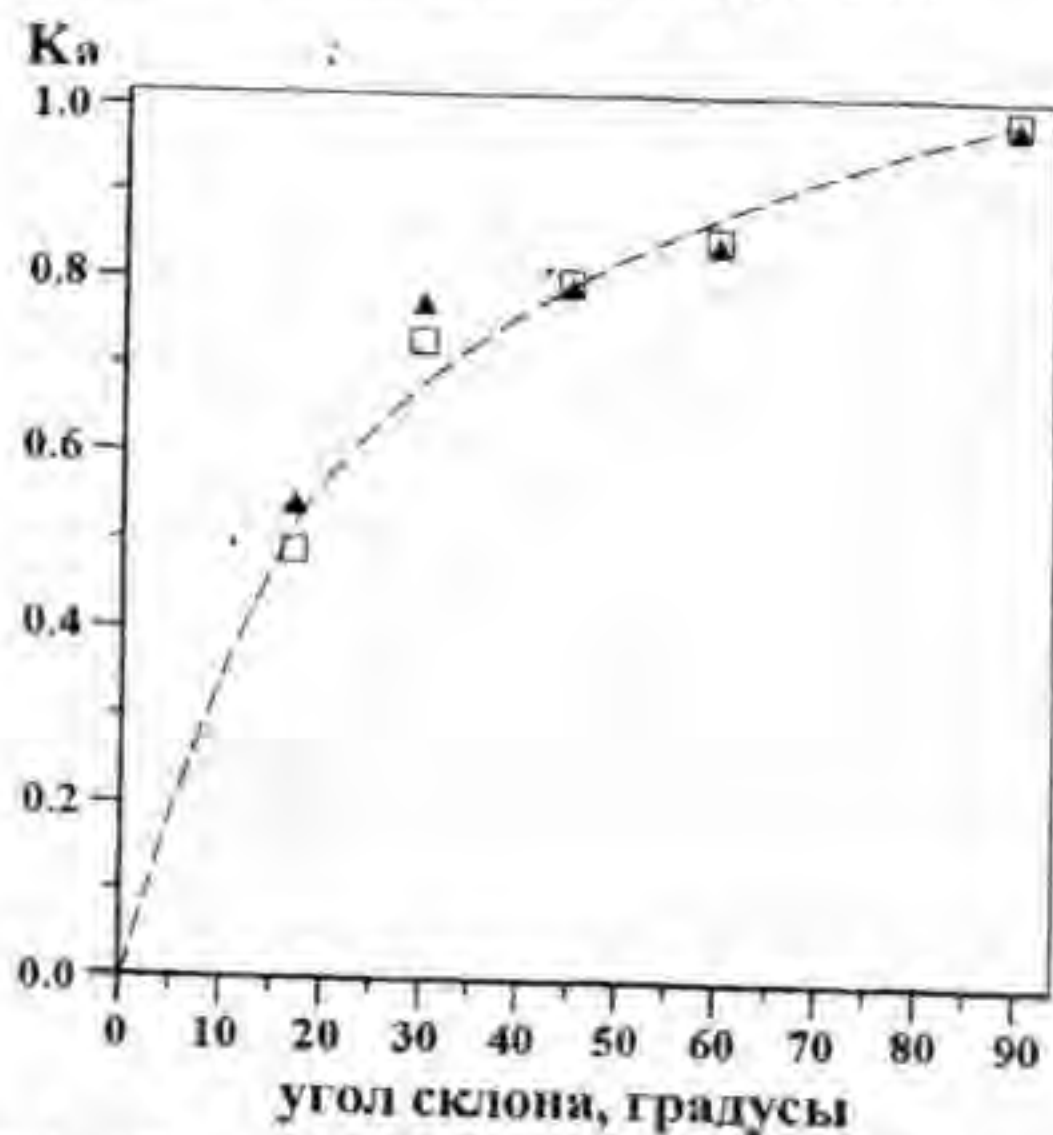


Рис.6 Значення коефіцієнта відбиття K_a по амплітуді відокремленої хвилі по відношенню до кута нахилу берегового схилу до горизонту: $\blacktriangle$ - для глибини води 11см, $\square$ - для глибини води 17см

На рис.6 представлено значення коефіцієнту відбиття по амплітуді, які отримано при обробці даних експериментальних досліджень для глибини 11см і 17см, в залежності від кута нахилу берегового схилу до горизонту. Відмітимо, що амплітуда хвиль складала $a = 0.3H$ для досліджень з глибиною води 11см і $a = 0.21H$ - з глибиною 17см.

Аналіз результатів показав, що зміна амплітуди відокремленої хвилі слабо впливає на величину коефіцієнту відбиття при фіксованих значеннях глибини H та кута нахилу берегового схилу.

Для визначення коефіцієнту відбиття по енергії необхідно проводити оцінку енергії відокремлених хвиль. Відомо, що для відокремлених хвиль відносно невеликої амплітуди величина кінетичної енергії близька до величини потенційної енергії і для оцінки загальної енергії хвилі можна використовувати наступну залежність [11]:

$$E = \rho \cdot g \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx$$

де ρ - густина рідини.

На рис.7 представлено розраховані значення коефіцієнта відбиття по енергії для глибин води в

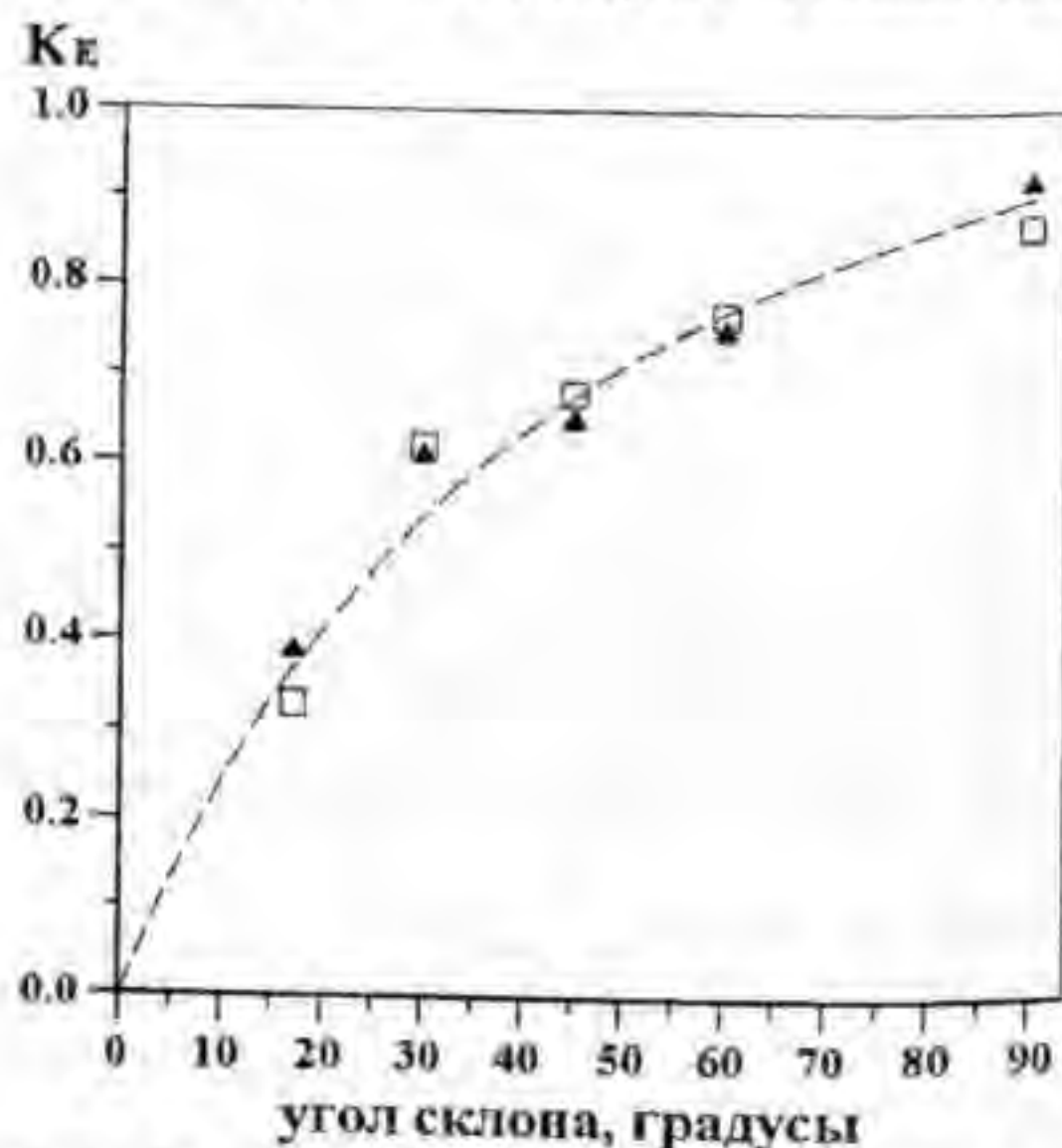


Рис.7 Значення коефіцієнта відбиття K_E по енергії відокремленої хвилі по відношенню до кута нахилу берегового схилу до горизонту: $\blacktriangle$ - для глибини води 11см, $\square$ - для глибини води 17см

лотку 11 см і 17 см при тих же параметрах хвиль, які описані вище.

З рис.6 і рис.7 видно швидке зростання коефіцієнта відбиття зі зміною кута нахилу берегового схилу від 0° до 30°, потім при подальшому збільшенні кута ріст помітно сповільнюється (режим насичення). При визначенні коефіцієнта відбиття по енергії (рис.7) характер поведінки кривої, побудованої за результатами обчислень, незначно змінюється. Це свідчить про те, що величина енергії залежить не тільки від амплітуди відокремленої хвилі, але й від її швидкості та довжини. Відмітимо також, що зі зменшенням кута нахилу берегового схилу інтенсивність відбитої хвилі падає.

Висновки

В роботі проведено експериментальне дослідження взаємодії поверхневої відокремленої хвилі з вертикальною стінкою та береговими

схилами. Отримано основні хвильові характеристики. Модифікований метод генерації відокремлених хвиль, що застосовується в дослідках, дозволяє генерувати солітони з малою інтенсивністю дисперсійного «хвоста». Використання даного методу дозволило знайти коефіцієнти відбиття відокремлених хвиль від схилів, визначення яких при наявності «хвостів» дає значну похибку. Виявлено, що після відбиття частина енергії відокремленої хвилі витрачається на формування дисперсійного хвильового пакету та на тертя рідини з дном та стінками лотка. В результаті амплітуда хвилі падає, що призводить до зменшення швидкості розповсюдження відбитої хвилі. Показано, що відбиття відокремленої хвилі падає зі зменшенням кута нахилу.

Список використаних джерел

1. *Maxworthy T.* Experiments on collisions between solitary waves / T. Maxworthy // J. Fluid Mech. – 1976. – 76. – P. 177-185.
2. *Su C.H.* On head-on collisions between two solitary waves / Su C.H., Rida M. Mirie // J. Fluid Mech. – 1980. – 98, part 3. – P. 509-525.
3. *Rida M. Mirie* Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study / Rida M. Mirie, Su C.H. // J. Fluid Mech. – 1982. – 115. – P. 475-492.
4. *Byatt-Smith J. G. B.* The reflection of a solitary wave by a vertical wall / J. G. B. Byatt-Smith // J. Fluid Mech. – 1988. – 197. – P. 503-521.
5. *Craig W.* Solitary water wave interactions / W. Craig, P. Guyenne, J. Hammack, D. Henderson, C. Sulem // Phys. Fluids. – 2006. – 18, 057106. – P. 1-25.
6. *Renouard D. P.* Experimental study of the generation, damping, and reflexion of a solitary wave / D. P. Renouard, F. J. Seabra Santos, A. M. Temperville // Dyn. Atm. Oceans. – 1985. – 9. – P. 341-358.
7. *Tanaka M.* Mach reflection of a large-amplitude solitary wave / M. Tanaka // J. Fluid Mech. – 1993. – 248. – P. 637-661.
8. *Cooker M. J.* Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall / M. J. Cooker, P. D. Weidman, D. S. Bale // J. Fluid Mech. – 1997. – 342. – P. 141-158.
9. *Городецький О. В.* Генерація, розповсюдження та накат відокремлених хвиль на берегові схили/ О. В. Городецький, А. С. Котельнікова, В. І. Нікішов, В. В. Олексюк та ін. // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – 12, №1. – С.40-47.
10. *Street R. L.* Observations and experiments on solitary wave deformation / R. L. Street, F. E. Camfield // Proc. 10th Conference Coastal Engineering. – 1966. – P. 284-301.
11. *Li Y.* Energy Balance Model for Breaking Solitary Wave Runup / Y. Li, F. Raichlen // Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. – 2003. – 47. – P. 47-59.

Надійшла до редколегії 12.11.10

УДК 517.98, 519.21

К.В. Лукаш, аспірант

Обмеженість в середньому розв'язків нелінійної двопараметричної системи Вольтерри

Отримано достатні умови обмеженості в середньому порядку p розв'язків стохастичної нелінійної двопараметричної системи Вольтерри. Доведено стійкість цих розв'язків відносно малих збурень коефіцієнтів.

Ключові слова: нелінійна система Вольтерри, обмеженість в середньому, стійкість розв'язків.

E-mail: lukash_katya@univ.kiev.ua

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. М.О.Перестюк

1 Вступ

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – повний імовірнісний простір, $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельний комплексний банахів простір. При фіксованому $p \in [1; \infty]$ символом $L_p(\Omega, X)$ позначимо банахів простір інтегровних за нормою зі степенем p (суттєво обмежених за нормою при $p = \infty$) X -значних випадкових елементів, визначених на Ω . Норму в $L_p(\Omega, X)$ позначатимемо $\|\cdot\|_{\Omega, p}$. Набір випадкових елементів $\{\xi_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset L_p(\Omega, X)$ назовемо обмеженим в середньому порядку p (суттєво обмеженим при $p = \infty$), якщо

$$\sup_{n \geq 0, m \geq 0} \|\xi_{n,m}\|_{\Omega, p} < \infty.$$

У даній статті для довільного фіксованого $p \in [1; \infty]$ вивчається питання про обмеженість в середньому порядку p послідовності $\xi := \{\xi_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset L_p(\Omega, \mathbb{R})$, визначеної співвідношеннями

$$\xi_{n,m} = - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{n-k, m-j} g(\xi_{k,j}) + \eta_{n,m}, \quad (1)$$

$$n \geq 0, m \geq 0.$$

Тут $\{a_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ – фіксована послідовність дійсних чисел, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція, $\eta := \{\eta_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset L_p(\Omega, \mathbb{R})$ – задана обмежена в середньому

K.V. Lukash, PhD student.

Boundedness in mean of solutions of a nonlinear two-parameter Volterra system

We find sufficient conditions for solutions of a stochastic nonlinear two-parameter Volterra system to be bounded in mean of p -th order. We prove the solutions stability for the small coefficients disturbances.

Key words: nonlinear Volterra system, boundedness in mean, solutions stability.

порядку p послідовність. В даній роботі також досліджується питання про стійкість розв'язку системи (1) відносно малих збурень коефіцієнтів.

2 Обмежені в середньому порядку p розв'язки системи (1)

Нехай функція g і послідовність $\{a_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ задовольняють умови

$$b_1) \exists L > 0 \forall t, s \in \mathbb{R} : |g(t) - g(s)| \leq L |t - s|;$$

$$b_2) \forall t, s \in \mathbb{R} : |t - s - (g(t) - g(s))| \leq |t - s|;$$

$$b_3) g(0) = 0;$$

$$b_4) a_{0,0} = 0;$$

$$b_5) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty;$$

$$b_6) \text{ функція } f(t, s) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} t^n s^m \text{ не}$$

має нулів на множині $K^2 := \{(t, s) \in \mathbb{C}^2 : |t| \leq 1, |s| \leq 1\}$ і $(f(t, s))^{-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} t^n s^m$, де $\{q_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ – така послідовність дійсних чисел, що $q_{0,0} = 0$ і $\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < 1$.

Відповідь на питання про обмеженість в середньому порядку p розв'язків системи (1) містить наступна теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови b_1 - b_6 , $p \in [1; \infty]$. Тоді для кожної обмеженої в середньому порядку p послідовності η послідовність ξ , задана співвідношеннями (1), також буде обмеженою в середньому порядку p , причому

$$\sup_{n \geq 0, m \geq 0} \|\eta_{n,m} - \xi_{n,m}\|_{\Omega, p} \leq \frac{\lambda L}{1-\lambda} \sup_{n \geq 0, m \geq 0} \|\eta_{n,m}\|_{\Omega, p}.$$

Правильність теореми перевіряється за допомогою зведення до детермінованого випадку і застосування теореми 1 із [1]. При цьому використовуються міркування, аналогічні наведеним при доведенні теореми 3 із [1].

Дійсно, $Y = L_p(\Omega, \mathbb{R})$ - комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\Omega, p}$, в якому система (1) еквівалентна детермінованій системі

$$\xi_{n,m} = - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \tilde{A}_{n-k, m-j} \tilde{g}(\xi_{k,j}) + \eta_{n,m}, \quad (2)$$

$$n \geq 0, m \geq 0.$$

Тут оператори $\tilde{g} : Y \rightarrow Y$ та $\tilde{A}_{n,m} : Y \rightarrow Y$, визначені за правилами

$$\forall \varphi \in Y \quad \forall \omega \in \Omega : \\ (\tilde{g}(\varphi))(\omega) := g(\varphi(\omega)), \\ (\tilde{A}_{n,m}(\varphi))(\omega) := a_{n,m} \cdot \varphi(\omega),$$

задовольняють умови теореми 3 із [1]. Таким чином, у банаховому просторі обмежених в середньому порядку p послідовностей

$$W := \left\{ \xi \in Y \mid \|\xi\|_W := \sup_{n \geq 0, m \geq 0} \|\xi_{n,m}\|_Y < \infty \right\}$$

система (2) еквівалентна системі

$$\xi + A G \xi = \eta, \quad (3)$$

в якій оператори $A : W \rightarrow W$ та $G : W \rightarrow W$, діють за правилами

$$A \nu := \left\{ (A \nu)_{n,m} \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\}, \quad (4)$$

$$G \nu := \left\{ (G \nu)_{n,m} \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\}, \quad (5)$$

де для довільних $n \geq 0, m \geq 0$

$$(A \nu)_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \tilde{A}_{n-k, m-j} \nu_{k,j},$$

$$(G \nu)_{n,m} = \tilde{g}(\nu_{n,m}).$$

3 Стійкість обмежених в середньому порядку p розв'язків системи (1)

Нехай послідовності $\{b_{n,m}(\tau) : n \geq 0, m \geq 0, \tau \geq 0\}$, $\{b_{n,m,k,j}(\tau) : n \geq 0, m \geq 0, 0 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq m, \tau \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ задовольняють умови

$$b_7) \quad \forall n \geq 0, m \geq 0, \tau \geq 0 : b_{n,m,0,0}(\tau) = 0;$$

$$b_8) \quad \delta_\tau := \sup_{n \geq 0, m \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |b_{n,m,k,j}(\tau)| + |b_{n,m}(\tau)| \right) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty;$$

$$b_9) \quad \forall n \geq 0, m \geq 0, \tau \geq 0 : |b_{n,m}(\tau)| < 1.$$

Для кожного $\tau \geq 0$ визначимо послідовність $\xi(\tau) := \{\xi_{n,m}(\tau) : n \geq 0, m \geq 0\}$ співвідношеннями

$$(1 + b_{n,m}(\tau)) \xi_{n,m}(\tau) = \eta_{n,m} - \quad (6)$$

$$- \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{n-k, m-j} + b_{n,m, n-k, m-j}(\tau)) g(\xi_{k,j}(\tau)),$$

$$n \geq 0, m \geq 0.$$

Основний результат містить наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови b_1 - b_9 , $p \in [1; \infty]$. Тоді справедливі такі твердження.

1) Для довільної обмеженої в середньому порядку p послідовності η і для кожного τ , починаючи з деякого, послідовність $\xi(\tau)$, задана співвідношеннями (6), також буде обмеженою в середньому порядку p .

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_* \geq 0 \forall \tau \geq \tau_* : \|\xi(\tau) - \xi\|_W < \varepsilon$, де ξ - обмежений в середньому порядку p розв'язок системи (1), що відповідає послідовності η .

Для доведення теореми 2 використовуються позначення, введені в попередньому пункті, та наведена нижче лема.

Для кожного $\tau \geq 0$ визначимо оператор $F(\tau) : W \rightarrow W$ за правилом

$$F(\tau)\nu := \left\{ (F(\tau)\nu)_{n,m} \mid n \geq 0, m \geq 0 \right\},$$

де $(F(\tau)\nu)_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m b_{n,m,n-k,m-j}(\tau) \nu_{k,j}$. Тоді справедливе наступне твердження.

Лема 1. Для кожного τ , починаючи з деякого, оператор $I + A + F(\tau)$ є неперервно оборотним, окрім того, існує така стала $\lambda_* \in (0; 1)$, що виконується нерівність $\|(I + A + F(\tau))^{-1} - I\| \leq \lambda_*$.

Доведення. З умов b_4 - b_6 випливає, що оператор $I + A$ є неперервно оборотним, а внаслідок b_8 і нерівності $\|F(\tau)\| \leq \delta_\tau$ для кожного τ , починаючи з деякого τ_1 , виконується оцінка $\|F(\tau)\| < 1/\|(I + A)^{-1}\|$. Таким чином, для довільного $\tau \geq \tau_1$ існує неперервний обернений оператор $(I + A + F(\tau))^{-1}$ і справджується нерівність

$$\|(I + A + F(\tau))^{-1}\| \leq \frac{\|(I + A)^{-1}\|}{1 - \delta_\tau \|(I + A)^{-1}\|} \quad (7)$$

(див. [2], с. 207).

Крім того $(I + A + F(\tau))^{-1} = \left(I + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l ((I + A)^{-1} F(\tau))^l \right) (I + A)^{-1}$, звідки випливає, що $\|(I + A + F(\tau))^{-1} - I\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \|(I + A)^{-1} F(\tau)\|^l \|(I + A)^{-1}\| + \|(I + A)^{-1} - I\|$. І оскільки $\|(I + A)^{-1} F(\tau)\| \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ та внаслідок умов b_4 - b_6 виконується нерівність $\|(I + A)^{-1} - I\| \leq \lambda$ (див. [1]), то існує така стала $\lambda_* \in (0; 1)$, що для кожного τ , починаючи з деякого τ_2 , такого, що $\tau_2 \geq \tau_1$, справедлива нерівність $\|(I + A + F(\tau))^{-1} - I\| \leq \lambda_*$.

Лему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Зафіксуємо $p \in [1; \infty]$.

Визначимо оператори $A(\tau), B(\tau) : W \rightarrow W$ співвідношеннями

$$A(\tau) := A + F(\tau),$$

$$B(\tau)\nu := \left\{ (B(\tau)\nu)_{n,m} = b_{n,m}(\tau) \nu_{n,m} \mid \begin{matrix} n \geq 0, \\ m \geq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Тоді система (6) еквівалентна системі

$$\xi(\tau) + B(\tau)\xi(\tau) + A(\tau)G\xi(\tau) = \eta. \quad (8)$$

При цьому з умов b_1 - b_3 випливає, що оператор G задовольняє умови

$$a_1) \exists L > 0 \forall x, y \in W :$$

$$\|Gx - Gy\|_W \leq L \|x - y\|_W;$$

$$a_2) \forall x, y \in W :$$

$$\|x - y - (Gx - Gy)\|_W \leq \|x - y\|_W;$$

$$a_3) G\bar{0} = \bar{0}, \text{ де } \bar{0} - \text{нульовий елемент в } W.$$

Лінійний обмежений оператор $A(\tau)$ внаслідок леми 1 задовольняє умову

$$a_4) \text{ для кожного } \tau, \text{ починаючи з деякого, оператор } I + A(\tau) - \text{неперервно оборотний, а також існує така стала } \lambda_* \in (0; 1), \text{ що виконується нерівність } \|(I + A(\tau))^{-1} - I\| \leq \lambda_*.$$

Також лінійний обмежений оператор $B(\tau)$ задовольняє умову

$$a_5) \forall \tau \geq 0 : \|B(\tau)\| \leq \delta_\tau.$$

Покажемо далі, що рівняння (8) має для довільної послідовності $\eta \in W$ та для кожного τ , починаючи з деякого, єдиний розв'язок $\xi(\tau) \in W$. Дійсно, рівняння (8) еквівалентне рівнянню

$$\xi(\tau) = S_\eta(\tau)\xi(\tau), \quad (9)$$

де $S_\eta(\tau)x := (I + B(\tau) + A(\tau))^{-1} A(\tau)(x - Gx) + (I + B(\tau) + A(\tau))^{-1} \eta$. Тут для довільного фіксованого $y \in W$ та для кожного τ , починаючи з деякого, оператор $S_y(\tau) : W \rightarrow W$ коректно визначений, бо внаслідок a_4, a_5 та b_8

$$\forall \tau \geq \tau_2 \exists (I + A(\tau))^{-1},$$

та

$$\exists \tau_3 \geq \tau_2 \forall \tau \geq \tau_3 : \|B(\tau)\| < 1/\|(I + A(\tau))^{-1}\|,$$

а звідси випливає, що для кожного такого τ , що $\tau \geq \tau_3$, існує неперервний обернений оператор $(I + A(\tau) + B(\tau))^{-1}$. Зауважимо, що також справджується нерівність

$$\begin{aligned} \|(I + A(\tau) + B(\tau))^{-1}\| &\leq \\ &\leq \frac{\|(I + A(\tau))^{-1}\|}{1 - \delta_\tau \|(I + A(\tau))^{-1}\|}, \end{aligned} \quad (10)$$

Доведемо, що для кожного τ , починаючи з деякого, відображення $S_y(\tau)$ – стискаюче. Справді, для кожного $\tau \geq \tau_3$ та для довільних $u, v \in W$

$$\|S_y(\tau)u - S_y(\tau)v\|_W =$$

$$= \|(I + B(\tau) + A(\tau))^{-1} A(\tau) (u - v - (Gu - Gv))\|_W$$

$$= \left\| \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l ((I + A(\tau))^{-1} B(\tau))^l \right) \times \right. \\ \left. \times (I + A(\tau))^{-1} A(\tau) (u - v - (Gu - Gv)) \right\|_W =$$

$$= \left\| \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l ((I + A(\tau))^{-1} B(\tau))^l \right) \times \right. \\ \left. \times (S'_y(\tau)u - S'_y(\tau)v) \right\|_W \leq$$

$$\leq \|S'_y(\tau)u - S'_y(\tau)v\|_W / (1 - \delta_\tau \|(I + A(\tau))^{-1}\|),$$

де відображення $S'_y(\tau) : W \rightarrow W$ діє за правилом $S'_y(\tau)x = (I + A(\tau))^{-1} A(\tau) (x - Gx) + (I + A(\tau))^{-1} y$ і внаслідок $a_1 - a_4$ є стискаючим для кожного $\tau \geq \tau_3$ (див. теорему 1 із [1]). Таким чином, для кожного $\tau \geq \tau_3$ та для довільних $u, v \in W$

$$\begin{aligned} \|S_y(\tau)u - S_y(\tau)v\|_W &\leq \\ &\leq \frac{\lambda_*}{1 - \delta_\tau \|(I + A(\tau))^{-1}\|} \|u - v\|, \end{aligned}$$

а внаслідок b_8 для кожного τ , починаючи з деякого $\tau_4 \geq \tau_3$, величина

$$\frac{\lambda_*}{1 - \delta_\tau \|(I + A(\tau))^{-1}\|}$$

є меншою за $\tilde{\lambda} < 1$. Отже, за принципом стискаючих відображень рівняння (9) для кожного $\tau \geq \tau_4$ має єдиний розв'язок у просторі W , тобто виконується твердження 1 теореми 2.

Перевіримо виконання твердження 2 теореми 2. Нехай $\varepsilon > 0$ – фіксоване. Далі розглядатимемо $\tau \geq \tau_4$. Зауважимо, що $\xi \in$

розв'язком еквівалентної системи (3) системи $\xi = S_\eta \xi$, де відображення $S_\eta : W \rightarrow W$, визначене за правилом

$$S_\eta x := (I + A)^{-1} A (x - Gx) + (I + A)^{-1} y,$$

є стискаючим [1]. Для доведення другого твердження теореми 2 оберемо елемент $\xi^0 = \bar{0}$ простору W і побудуємо послідовності

$$\{\xi^n = S_\eta(\xi^{n-1}) : n \geq 1\}$$

та

$$\{\xi^n(\tau) = S_\eta(\tau)(\xi^{n-1}(\tau)) : n \geq 1\},$$

де $\xi^0(\tau) = \xi^0$. Неважко переконатись, що для кожного $n \geq 1$

$$\xi^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(I + A)^{-1} A (I - G) \right]^k (I + A)^{-1} \eta,$$

$$\begin{aligned} \xi^n(\tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(I + A(\tau) + B(\tau))^{-1} A(\tau) (I - G) \right]^k \times \\ &\times (I + A(\tau) + B(\tau))^{-1} \eta. \end{aligned}$$

Покажемо, що для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$

$$\exists \tau^* \geq \tau_4 \forall \tau \geq \tau^* : \|\xi^n - \xi^n(\tau)\|_W < \varepsilon/3. \quad (11)$$

Дійсно, для $n = 1$ внаслідок умов $\|F(\tau)\| \leq \delta_\tau$, a_5 та (7) справедливий ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} \|\xi^1 - \xi^1(\tau)\|_W &= \\ &= \|(I + A)^{-1} \eta - (I + A(\tau) + B(\tau))^{-1} \eta\|_W \leq \\ &\leq \|\eta\|_W \left\| \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{l+q} ((I + A(\tau))^{-1} B(\tau))^l \times \right. \right. \\ &\times ((I + A)^{-1} F(\tau))^q (I + A)^{-1} - (I + A)^{-1} \Big\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{\substack{l=0, q=0, \\ (l,q) \neq (0,0)}}^{\infty} \frac{\|(I + A)^{-1}\|^{l+q+1} \delta_\tau^{l+q}}{(1 - \delta_\tau \|(I + A)^{-1}\|)^l} \right\| \|\eta\|_W = \\ &= O(\delta_\tau), \quad \tau \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далі для кожного $n \geq 2$ елементи ξ^n та $\xi^n(\tau)$ визначаються через попередні співвідношеннями

$$\xi^n = \xi^{n-1} + [(I + A)^{-1} A (I - G)]^{n-1} \xi^1,$$

$\xi^n(r) = \xi^{n-1}(r) +$
 $+ [(I + A(r) + B(r))^{-1} A(r)(I - G)]^{n-1} \xi^1(r),$
і справджується нерівність

$$\begin{aligned} \|\xi^n - \xi^n(r)\|_W &\leq \|\xi^1 - \xi^1(r)\|_W + \\ &+ \left\| [(I + A)^{-1} A(I - G)]^{n-1} \xi^{n-1} - \right. \\ &\quad \left. - [(I + A)^{-1} A(I - G)]^{n-1} \xi^{n-1}(r) \right\|_W + \\ &+ \left\| [(I + A)^{-1} A(I - G)]^{n-1} \xi^{n-1}(r) - \right. \\ &\quad \left. - [(I + A(r) + B(r))^{-1} A(r)(I - G)]^{n-1} \xi^{n-1}(r) \right\|_W, \end{aligned}$$

в якій внаслідок умов a_2 та b_4 - b_6 другий доданок не перевищує величини $(1 + \lambda)^{n-1} \times \times \|A\|^{n-1} \|\xi^1 - \xi^1(r)\|_W$. Неважко також переконатися, що третій доданок не перевищує $C \times \times \|(I + A)^{-1} A - (I + A(r) + B(r))^{-1} A(r)\|$, де C - деяка стала, а також

$$\begin{aligned} \|(I + A)^{-1} A - (I + A(r) + B(r))^{-1} A(r)\| &\leq \\ &\leq \|(I + A)^{-1} - (I + A(r) + B(r))^{-1}\| \|A\| + \\ &+ \|(I + A(r) + B(r))^{-1}\| \|F(r)\|. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. *Городній М.Ф.* Про обмеженість розв'язків нелінійної двопараметричної системи Вольтерри/ *Городній М.Ф., Лукаш К.В.* // *Нелінійні коливання.* - 2010. - 13, №4. - С.497-500.

Тому, з урахуванням (10), $\|\xi^n - \xi^n(r)\|_W = O(\delta_r)$, при $r \rightarrow \infty$, а отже, (11) виконується. Залишилося зауважити, що за принципом стискаючих відображень відомо, що послідовності $\{\xi^n : n \geq 1\}$ та $\{\xi^n(r) : n \geq 1\}$ збігаються до розв'язків ξ та $\xi(r)$ відповідних систем, при $n \rightarrow \infty$. Причому збіжність $\xi^n(r) \rightarrow \xi(r)$, $n \rightarrow \infty$ рівномірна по r , оскільки

$$\sup_{r \geq r_4} \|\xi^n(r) - \xi(r)\|_W \leq \tilde{\lambda}^n \sup_{r \geq r_4} \|\xi(r)\|_W.$$

Тому

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \geq 0 \forall n \geq n_0 \forall r \geq r_4 : \\ \|\xi^n - \xi\|_W < \varepsilon/3, \quad \|\xi^n(r) - \xi(r)\|_W < \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

2. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ./ *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* - Москва: Наука, 1984. - 752 с.
3. *Городній М.Ф.* Стаціонарні у широкому сенсі розв'язки різницевого рівняння у банаховому просторі/ *Городній М.Ф.* // *Теорія ймовірностей та математична статистика.* - 2006. - № 74. - С.27-33.

Надійшла до редколегії 29.11.2010

УДК 517.9

Лагода В. А., аспірант

**Існування інваріантного перерізу
індефінітно монотонного нелінійного
розширення динамічної системи на торі**

Встановлено достатні умови існування ліпшицевого інваріантного тороїдального многовиду (інваріантного перерізу) нелінійного розширення динамічної системи на m -вимірному торі у випадку, коли таке розширення має властивість монотонності відносно деякої гладкої сім'ї індефінітних квадратичних форм, параметризованої точками тора.

Ключові слова: інваріантний тор, динамічна система.

E-mail: lagoda_v@ukr.net

Статтю представив доктор ф.-м. н., професор, академік НАН України М. О. Перестюк

Вступ

В другій половині минулого століття активно розроблялася теорія збурень компактних інваріантних многовидів нелінійних динамічних систем, зокрема інваріантних торів. Основні досягнення цієї теорії та відповідна література висвітлені в роботах [1, 2, 3, 4]. Нелокальному аспекту теорії присвячена робота [5], в якій встановлено достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тора. Серед недавніх робіт, які стосуються існування асимптотично стійких інваріантних торів відзначимо [6, 7].

При дослідженні питань існування дихотомічних інваріантних торів, важливу роль відіграють знакозмінні функції Ляпунова [1, 8, 9]. Однак до останнього часу ці функції застосовувалися для встановлення умов існування інваріантних торів лінійних розширень та їх збурень, а у випадку нелінійного розширення використовувався оператор Гріна-Самойленка [10].

Мета даної роботи полягає у встановленні нових достатніх умов існування ліпшицевого інваріантного тороїдального многовиду (інваріантного перерізу) нелінійного розширення динамічної системи на торі за допомогою певної сім'ї індефінітних квадратичних форм, параме-

V. A. Lagoda, post-graduate student

**The existence of invariant section for an
indefinite monotone nonlinear extension
of dynamical system on torus**

We establish the existence of Lipschitzian invariant toroidal manifold for a nonlinear extension of dynamical system on m -dimensional torus in the case where such an extension has a monotonicity property with respect to a family of quadratic forms parametrized by points of the torus.

Key words: invariant manifold, dynamical system.

тризованої точками тора. Такий підхід використовує техніку V-W-пари, описану в [11].

Постановка задачі та основні припущення.

Нехай $T^m = \mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m$ позначає m -вимірний тор, а $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \bmod 2\pi$ — кутові координати на ньому. Розглянемо на прямому добутку $T^m \times \mathbb{R}^n$ систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = f(\varphi, y), \quad \varphi \in T^m, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $a \in \text{Lip}(T^m \rightarrow \mathbb{R}^m)$, $f \in C(T^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Систему такого вигляду називають нелінійним розширенням динамічної системи на торі, породженої векторним полем $a(\varphi)$. Інваріантний многовид системи (1), заданий у фазовому просторі рівнянням $y = u(\varphi)$, $\varphi \in T^m$, де $u \in C(T^m \rightarrow \mathbb{R}^n)$, називають її інваріантним перерізом (інваріантним тором).

Мета даної роботи полягає у відшукаванні достатніх умов існування ліпшицевого інваріантного перерізу системи (1) у випадку, коли функція f істотно нелінійна.

Припускаємо, що виконуються такі умови:

(A): існує сім'я операторів $\{S(\varphi)\}_{\varphi \in T^m}$ простору $\mathbb{R}^n$, для якої при кожному $\varphi \in T^m$ можна вказати проектори $P_+(\varphi)$ та $P_-(\varphi)$ на

інваріантні підпростори $L_+(\varphi)$ та $L_-(\varphi)$ оператора $S(\varphi)$ такі, що його звуження на $L_+(\varphi)$ та $L_-(\varphi)$ є відповідно додатно та від'ємно визначеними операторами.

(B): існують функції $\gamma(\cdot) \in C(\mathbb{T}^m \mapsto (0, \infty))$, $\Gamma(\cdot) \in C((0, \infty) \mapsto \mathbb{R})$, $\Delta(\cdot) \in C((0, \infty) \mapsto (0, \infty))$ такі, що для кожного $\varphi \in \mathbb{T}^m$ справджуються нерівності:

$$\langle S(\varphi)f(\varphi, y), y \rangle \geq \gamma(\varphi)\Gamma(\|y\|^2), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \\ |\langle f(\varphi, y), y \rangle| \leq \gamma(\varphi)\Delta(\|y\|^2), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Нехай $\lambda^+(\varphi), \lambda_-(\varphi)$ — найбільше та найменше власні значення оператора $S(\varphi)$, а $\mu_-(\varphi)$ — найменше власне значення оператора

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) := \sum_{k=1}^m \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_k} a_k(\varphi).$$

Оскільки $\mathbb{T}^m$ — компакт, то числа

$$\lambda^+ := \max_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \lambda^+(\varphi) < \infty, \\ \lambda_- := \min_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \lambda_-(\varphi) > -\infty, \\ \mu_- := \min_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \mu_-(\varphi) > -\infty$$

визначені коректно. Оскільки $a \in \text{Lip}(\mathbb{T}^m)$, то існує стала L_a , така, що:

$$\|a(\varphi_1) - a(\varphi_2)\| \leq L_a \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^m.$$

Нарешті, покладемо

$$\gamma := \min_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \gamma(\varphi) > 0, \quad \xi := \min_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \frac{\mu_-(\varphi)}{\gamma(\varphi)} > -\infty$$

і вимагатимемо виконання умов:

(C): існує число $v_0 > 0$ таке, що

$$2\Gamma(v_0) + \xi v_0 > 0, \\ \frac{\Gamma(v) - \Gamma(v_0)}{v - v_0} \geq -\frac{\xi}{2}, \quad \forall v > v_0, \\ F(\infty) = \infty,$$

де

$$F(v) = \int_{v_0}^v \frac{2\Gamma(u) + \xi u}{2\Delta(u)} du$$

(D): справджуються нерівності:

$$2\gamma + \mu_- > 2L_a \max\{\lambda_+, |\lambda_-|\}, \\ \langle S(\varphi)(f(\varphi, x) - f(\varphi, y)), x - y \rangle \geq \gamma(\varphi)\|x - y\|^2,$$

при $(\varphi, x, y) \in \mathbb{T}^m \times B_R(0) \times B_R(0)$, $R = (F^{-1}(v_0(\lambda_+ - \lambda_-)/2))^{1/2}$, де $B_R(0)$ — куля радіусом R з центром в початку координат.

(E): f має неперервну похідну за змінною y і для деякої додатної сталої L_f задовольняє оцінку:

$$\|f(\varphi_1, y) - f(\varphi_2, y)\| \leq L_f \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^m, y \in B_R(0).$$

Існування ліпшицевого інваріантного перерізу

Оскільки $a \in \text{Lip}(\mathbb{T}^m)$, то для кожного $\varphi \in \mathbb{T}^m$ система $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ має єдиний розв'язок $\varphi(t, \varphi_0)$, який задовольняє умову $\varphi(0, \varphi_0) = \varphi_0$. Підставимо цей розв'язок у друге рівняння (1) і позначимо

$$\tilde{f}(t, y; \varphi_0) := f(\varphi(t, \varphi_0), y).$$

Система

$$\dot{y} = \tilde{f}(t, y; \varphi_0) \quad (2)$$

при виконанні умов (A) – (D) для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{T}^m$ має єдиний розв'язок $y_*(t; \varphi_0)$ в кулі $B_R(0)$. Для обґрунтування цього факту використаємо результати отримані в [11] на основі підходу, що спирається на поняття V-W-пари. Справді, якщо за V-W-пару системи (2) обрати

$$W(t, y) = \langle S(\varphi(t))y, y \rangle, \quad V(t, y) = F(\|y\|^2),$$

де $\varphi(t)$ співпадає з $\varphi(t, \varphi_0)$, та покласти $V_+(t, y) = \|y\|^2$, то виконання умов (A) – (D) забезпечує виконання умов теореми 4 [11]. Отже, система (2) має єдиний обмежений розв'язок $y = y_*(t; \varphi_0)$, який задовольняє оцінку

$$\|y_*(t; \varphi_0)\| \leq R, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що рівняння $y = u(\varphi) := y_*(0; \varphi)$ визначає інваріантний переріз системи (1). Справді в силу автономності цієї системи для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{T}^m$ матимемо

$$u(\varphi(t, \varphi_0)) = y_*(0, \varphi(t, \varphi_0)) = y_*(t, \varphi_0).$$

Переходимо до дослідження властивостей цього інваріантного многовиду. Покажемо, що функція $u(\varphi)$ — ліпшицева. Позначимо $\eta(t) :=$

$u(\varphi(t, \varphi')) - u(\varphi(t, \varphi''))$, де $\varphi', \varphi'' \in \mathbb{T}^m$. Оскільки $\eta(t) = y_*(t; \varphi') - y_*(t; \varphi'')$, то

$$\dot{\eta} = f(\varphi(t, \varphi'), y_*(t; \varphi')) - f(\varphi(t, \varphi''), y_*(t; \varphi'')),$$

і тепер неважко переконатися в тому, що η задовольняє диференціальне рівняння:

$$\dot{\eta} = A(t)\eta + g(t), \quad (3)$$

де

$$A(t) = \int_0^1 \frac{\partial f(\varphi(t, \varphi'), sy_*(t; \varphi') + (1-s)y_*(t; \varphi''))}{\partial y} ds,$$

$$g(t) = f(\varphi(t, \varphi'), y_*(t; \varphi'')) - f(\varphi(t, \varphi''), y_*(t; \varphi''))$$

Відмітимо, що $\eta(t)$ є обмеженим розв'язком (3), оскільки $y_*(t, \varphi'), y_*(t, \varphi'')$ – обмежені розв'язки системи (2) відповідно при $\varphi_0 = \varphi'$ та $\varphi_0 = \varphi''$. Оскільки f має неперервну похідну за змінною y , то можна вказати таку додатну сталу K_f , що справджуватиметься нерівність:

$$| \langle f(\varphi(t, \varphi'), y_*(t; \varphi')) - f(\varphi(t, \varphi''), y_*(t; \varphi'')), \eta \rangle | \leq K_f \|\eta\|^2.$$

Тепер, щоб оцінити η , доберемо V-W-пару для системи (3).

Позначимо $\psi(t) := L_f \|\varphi(t, \varphi') - \varphi(t, \varphi'')\|$. Тоді виконуються нерівності:

$$\left| \frac{d}{dt} \left[\frac{\|\eta\|^2}{\psi^2(t)} \right] \right| \leq 2(K_f + L_a) \frac{\|\eta\|^2}{\psi^2(t)} + 2 \frac{\|\eta\|}{\psi(t)},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\langle S(\varphi(t, \varphi')) \eta, \eta \rangle}{\psi^2(t)} \right] &\geq \\ &\geq (2\gamma_1 - 2L_a \max\{\lambda_+, |\lambda_-|\} + \mu_-) \frac{\|\eta\|^2}{\psi^2(t)} - \\ &- 2 \max\{\lambda_+, |\lambda_-|\} \frac{\|\eta\|}{\psi(t)}. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} m &:= K_f + L_a, \quad c := \max\{\lambda_+, |\lambda_-|\} \\ d &:= \gamma - L_a \max\{\lambda_+, |\lambda_-|\} + \frac{1}{2}\mu_-, \end{aligned}$$

та визначимо

$$G(r) := \begin{cases} \frac{d}{m} r^2 + 2 \left(\frac{c}{m} + \frac{d}{m^2} \right) \left(\frac{1}{m} \ln(mr + 1) - r \right), & \text{якщо } r \geq \frac{c}{d}, \\ G\left(\frac{c}{d}\right), & \text{якщо } 0 \leq r < \frac{c}{d}. \end{cases}$$

Для системи (3) оберемо за V-W-пару функції

$$\begin{aligned} V(t, \eta) &= G\left(\frac{\|\eta\|}{\psi(t)}\right) - G(r_0), \\ W(t, \eta) &= \frac{\langle S(\varphi(t, \varphi')) \eta, \eta \rangle}{\psi^2(t)}, \end{aligned}$$

де r_0 – довільне число більше за d/c , та слідуючи міркуванням, викладеним у доведенні теореми 3 [11], отримаємо нерівність

$$V(t, \eta) \leq \frac{r_0}{2} [\lambda_+ - \lambda_-].$$

Спрямовуючи r_0 до d/c , матимемо

$$\|\eta\| \leq \tau_* \psi(t),$$

де τ_* – корінь рівняння

$$G(r) = G\left(\frac{c}{d}\right) + \frac{c^2}{2d^2} [\lambda_+ - \lambda_-]. \quad (4)$$

Отже, інваріантний тор системи (1) задовольняє оцінку:

$$\begin{aligned} \|u(\varphi(t, \varphi')) - u(\varphi(t, \varphi''))\| &\leq \\ &\leq L \|\varphi(t, \varphi') - \varphi(t, \varphi'')\|, \end{aligned}$$

де $L = \tau_* L_f$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Нехай функція a – ліпшицева зі сталою L_a , $f \in C(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ і виконуються умови (A) – (E). Тоді система (1) має інваріантний переріз $y = u(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, причому функція $u(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшица

$$\|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)\| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^m,$$

де $L = \tau_* L_f$, а τ_* – корінь рівняння (4).

Висновки

В даній роботі доведено теорему про існування ліпшицевого інваріантного перерізу істотно нелінійного розширення динамічної системи на торі. Техніка V – W пари, використана при обґрунтуванні даного результату, може в подальшому застосовуватися до більш складних систем.

Список використаних джерел

1. *Samoilenko A.M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 332 p.
2. *Samoilenko A.M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems// *Nonlinear Analysis*. – 1997. – 30, No. 5 – p. 3121-3133.
3. *Fenishel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds and flows// *Indiana Univ. Math.* – 1971. – 21, No. 3, – p. 193-226.
4. *Osipenko G., Ershov E.* Perturbation of invariant manifolds of ordinary differential equations. – Six Lectures on Dynamical Systems, edit. B.Aulbach and F.Colonius, World Scientific, Singapore, 1996. – p.213-265.
5. *Волков Д.Ю., Ильин Ю.А.* О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений// *Вестник СПбГУ, Сер.1.* – 1992. – вып.4, №22 – с.27-31.
6. *Перестюк М.О., Балоба С.І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь// *Нелінійні коливання*. – 2008. – 11, №4 – с. 520-529.
7. *Перестюк М.О., Фекета П.В.* Про існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь//*Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* – 2009. – Вип.18 – с. 106-112.
8. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 271 с.
9. *Кулик В.Л.* Знакопеременные функции Ляпунова и сохранение инвариантных торов при возмущениях//*Укр. мат. журн.* – 1987. – 39, №1 – с. 45-52.
10. *Перестюк М.О., Слюсарчук В.Ю.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних дифференціальних рівнянь//*Укр. мат. журн.* – 2008. – 60, №7 – с. 948-957.
11. *Lagoda V., Parasjuk I.* Existence of V-bounded solutions for nonautonomous nonlinear systems via the Wazewski topological principle// *arXiv:0911.4643 [math. CA]*. – 2009. – 33 p.

Надійшла до редколегії 23.09.2010

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

THE HISTORY OF THE
CITY OF BOSTON

Анісімова Л.А., к. ф.-м.н., доц.,
Глибовець М.М., д. ф.-м.н., проф.,
Кириленко М.

Агентні технології як засіб моделювання в обчислювальній економіці

У статті аналізуються базові підходи
застосування агентних технологій для
моделювання ринкових економічних процесів.
Перспективність підходу демонструється на
прикладі задачі бюджетування великих
холдингових компаній.

Ключові слова: моделювання, прийняття
рішень, агентні технології.

E-mail: glib@ukma.kiev.ua, lyda23@ukrpost.net
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

Математичні теорії опису ринкових економік
мають столітню історію [1,2]. Тільки в останні
роки спеціалісти почали задумуватись над
специфічними проблемами побудови
математичних моделей ринкових процесів, за
допомогою яких можна зручно і адекватно
описати процес накопичення та аналізу
динамічних даних в умовах неповної та
неоднорідної інформації [3]. Одним з таких
варіантів є застосування агентних технологій для
аналізу, прогнозування та прийняття рішень на
базі теорії ігор.

Комп'ютерне моделювання ринків розширює
експериментальний підхід простотою тестування
різноманітних теорій поведінки навчання та
ринкової логіки в контрольованому середовищі.
Засновані на агентах моделі дозволяють
ефективно обробляти неоднорідну інформацію за
евристичними пріоритетами.

Уточнимо постановку задачі. Фінансове
керування підприємством в основному
описується у форматі трьох базових звітів:
бюджет доходів і витрат (БДВ), бюджет руху
грошей (БРГ), бюджет балансового листка (ББЛ),
що визначають систему координат для оцінки
фінансових результатів діяльності підприємства
[3].

БДВ визначає економічну ефективність.
Даний бюджет формує основний фінансовий
результат, тобто прибутковість підприємства. На
значення статей БДВ і його підсумковий
результат безпосередньо впливають положення

L.A.Anisimova, Ph.D. in Physics and Mathematics,
Associate Professor,
M.M.Glybovets, Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Professor,
M.Kirilenko, Master of CS.

Agent technology as a modeling tool in a computational economics

*In the article base approaches of agent's
technologies application are analysed in the market
economic processes modeling, conclusions are given in
relation to the perspective of this direction of modeling
on the example of budgeting task of large holdings.*

Key Words: modeling, decision-making, agent
technology

внутрішньої облікової політики. Вона
складається з кількох домовленостей про
значимість тих чи інших господарських операцій
для оцінки реальної ефективності діяльності
компанії. Підприємство у внутрішній обліковій
політиці може саме вибрати підставу визначення
доходів і витрат. Критерієм вірності цих
припущень є управлінська корисність,
наприклад, здатність прогнозувати за
результатами побудови БДВ майбутні грошові
потоки.

БРГ безпосередньо планує і фіксує реальні
потоки коштів. Він визначає
«платоспроможність» підприємства як різницю
надходжень і витрат коштів за період аналізу.
Багато компаній починають побудову бюджетної
системи саме з нього.

ББЛ визначає економічний потенціал і
фінансовий стан підприємства. Він є
результуючим бюджетом і формується на основі
БДВ і БРГ.

Бюджетування, власне, і являє собою метод
проектування майбутніх значень фінансових
звітів, при якому кожна стаття звіту отримує
свого «хазяїна» з урахуванням змін
прибутковості, платоспроможності й
економічного потенціалу підприємства (балансу).
Тому підприємство мусить чітко позиціонуватися
у цих фінансових координатах, плануючи свої
майбутні дії та їхні наслідки, знаходячи
прийнятні співвідношення.

Проаналізуємо побудову мультиагентної системи, яка б дозволяла ефективно моделювати вищевказаний процес.

Агент — це сутність, що знаходиться в деякому середовищі, від якого отримує дані про події, що відбуваються в середовищі, інтерпретує їх і виконує команди, що впливають на середовище. Агент може містити програмні й апаратні компоненти [4].

Серед багатьох вимог, що висуваються до засобів створення агентів, найбільш важливими представляються такі [5].

1. *Забезпечення транспортабельності коду на різні платформи.* Ця вимога виникає завжди, коли необхідно забезпечити агента властивістю мобільності. Існує два різних підходи, що вирішують проблему мобільності. Перший — це передача агента в текстовій формі, як спеціального сценарію (script) з наступною інтерпретацією цього сценарію на новій машині. Другий — передача агента у формі машинно-незалежного байт-коду. Цей байт-код генерується транслятором на етапі створення агентської системи, посилається по мережі і виконується інтерпретатором байт-кодів на приймаючому комп'ютері.

2. *Приступність на багатьох платформах.* Інтелектуальні агенти повинні працювати в гетерогенному комп'ютерному середовищі.

3. *Підтримка мережної взаємодії.* Властивість агентів брати участь у переговорах і багато інших особливостей агентів мають потребу в доступі до віддалених ресурсів.

4. *Багатопотокова обробка (Multithreading).* Мова програмування агентів повинна включати підтримку паралельного виконання різних функцій агента (типу threads) і різних примітивів синхронізації (семафори, монітори, критичні секції і т.д.).

5. *Підтримка символічних обчислень.* Реалізація інтелектуальності потребує підтримки символічних обчислень а також мати вбудований механізм виводів, що включає різні стратегії пошуку рішення.

6. *Безпека,* зокрема, наявність системи захисту від несанкціонованого доступу і "поганих кодів".

Абстрактна Архітектура і Модель (Agent-Based Discrete Event Simulation, ABDES).

Стан керування системи ABDES [4] складається: з модельованого моменту часу, представлення стану зовнішнього світу (середовище, як сукупність об'єктів і зовнішні стани всіх агентів (наприклад, фізичний стан, їхнє географічне розташування, т.д.)); внутрішніх

станів агентів (тобто, сприйняття світу, переконання, історія, мета, та інш.); список майбутніх подій (можливо порожній).

Цикл моделювання складається з наступних кроків:

1. На початку кожного нового циклу моделювання, припустимо в момент часу t , відповідна частина системи визначає набір зовнішніх змінних поточного стану: всі події з списку майбутніх подій, чий час виникнення є поточним; екзогенні події (наприклад, стохастичні самотійно виведені події або події створені об'єктами, що не належать модельованій системі).

2. Симулятор середовища обчислює, на базі поточного стану та поточних подій новий стан зовнішнього середовища; множину динамічно згенерованих подій, що додаються до майбутнього списку подій в різні моменти часу (майбутні події, викликані поточними подіями); для кожного агента обчислюється його розуміння подій.

3. Симулятор кожного агента обчислює на базі поточного внутрішнього стану агента та його бачення світу новий внутрішній стан агента та множину подій, які відображають дії агента, (вони додаються до майбутнього списку подій з пометкою часу $t+1$).

4. Майбутній список подій змінюється шляхом видалення всіх оброблених подій і додавання обчислених реакцій агентів та наступних подій.

5. Симулятор середовища встановлює значення умовного часу в $t+1$, і починається нова ітерація циклу моделювання.

Моделювання закінчується, коли майбутній список подій порожній.

Ця абстрактна архітектура і модель виконання для ABDES системи може бути проілюстрована різними конкретними архітектурами і системами.

Зовнішня модель описує перспективи навколишнього середовища моделювання, тоді як внутрішні моделі описують перспективи створених агентів.

Переваги такого підходу до створення потрібної архітектури полягають в наступному: підтримується моделювання зі збереженням структури, пасивні об'єкти з конкретними властивостями моделюються як об'єкти з відповідними атрибутами; інтерактивні сутності (актори) моделюються як агенти, наділені всіма відповідними рисами; моделювання є функціонально розподіленим, де будь-які учасники процесу моделювання можуть бути

реалізовані в різних потоках, що робить можливим проводити необхідні обчислення паралельно; таке моделювання є інтерактивним, тобто будь-які агенти можуть бути заміщеними їхніми реальними прообразами; може бути промодельована і додаткова поведінка на додачу до базової реактивної.

Підходи до координації

Традиційно агенти обмінюються один з одним інформацією за допомогою переговорів. Протокол взаємодії агентів саме і визначає схему (розподілений алгоритм), за яким й ведуться такі переговори. Сьогодні запропоновано багато різноманітних схем переговорів [6]. Тож розглянемо найбільш характерні та зупинимось на деяких з них.

Теорія мовних актів (Speech Act Theory). Переговори будуються з використанням невеликого числа примітивів, наприклад, ASK, TELL, REJECT, REQUEST, COMMIT, NEGOTIATE. Процес переговорів починається тоді, коли агент посилає повідомлення з його точкою зору (позицією, attitude) щодо деякого питання. За допомогою обміну повідомленнями ASK, TELL, REJECT агенти можуть обговорювати деяку тему і приходити до загального рішення. Під час переговорів агенти обновляють свої бази знань і, тим самим, підвищують свої здібності відповідати на нові запити.

Протокол контрактних мереж (Contract Net Protocol) призначений для координації в системах розподіленого рішення задач. Контрактна мережа складається з інформаційних вузлів, з'єднаних комунікаційними каналами. Кожен вузол контрактної мережі здатний виконувати певні задачі. Якщо в процесі рішення один вузол (замовник) не в змозі вирішити деяку задачу, він шукає інший придатний вузол, який здатний її вирішити. При цьому він розсилає оголошення потенційним підрядчикам (contractors) про вакансію на виконання деякого договору. Якщо на це оголошення відповідають кілька вузлів, то замовник, користуючись деяким критерієм, вибирає найбільш придатного підрядчика. За допомогою торгів замовник і підрядчик укладають договір (contract). Варіації цього протоколу використовуються в так званих "електронних підприємствах" (electronic enterprises).

COOL (COOrdination Language) - мова багато в чому схожа з мовою KQML, призначена для керування спільними діями. Найважливішими конструкціями мови є плани переговорів, що визначають стани і правила переговорів

(conversation rules), та переговори, що визначають поточний стан плану, який виконується в конкретний момент. Агенти можуть активізувати кілька переговорів і керувати їх переключенням та припиненням, а також динамічно створювати дочірні переговори.

UNP (Unified Negotiation Protocol). Тут приводиться механізм вирішення конфліктів, який дозволяє підвищити сумарну корисність, що досягається агентами. Розглядаються конфліктні ситуації, для вирішення яких використовується механізм рандомізації. При цьому, у залежності від того, кого вибирає жереб, задовольняються цілі або обох агентів, або тільки одного. Для подібних ситуацій використовується термін "напівкооперативна угода". В умовах напівкооперативних угод агенти можуть підвищити сумарну корисність, домовившись про координування спільних дій.

Мультиагентна система. Теорія агентів розглядає агента і мультиагентну систему як "інтенціональну систему". Дуже важливий розділ цієї теорії - це представлення динамічних аспектів функціонування як окремого агента, так і співтовариства агентів, що виводить проблему за ті межі, які досліджуються традиційно в штучному інтелекті в рамках темпоральних і інших логік. Динамічні аспекти функціонування мультиагентної системи настільки специфічні і нові, що утворюють спеціальний розділ досліджень, який зараз називають теорією кооперативної (колективної) поведінки мультиагентних систем [7].

Зараз запропоновано багато різних моделей колективної поведінки агентів [5]. Розглянемо деякі з моделей кооперації, які найбільше відповідають цілям цієї роботи. Як правило, кожна з них зосереджує увагу на декількох аспектах поведінки і розглядає проблеми відповідно до обраної архітектури самого агента.

Для знань, що відповідають за колективну поведінку, в архітектурі агента звичайно виділяють спеціальний рівень - рівень кооперації (cooperation layer). Зараз існує декілька підходів до формалізації задач, розв'язуваних на рівні кооперації агентів. Виділимо серед них ті, котрі представляють найбільшу адекватність ідеї колективу інтелектуальних агентів.

Розподілений штучний інтелект. Тут займаються самими загальними аспектами колективного поводження агентів. Основу складають результати, отримані в теорії розподілених систем і теорії прийняття рішень.

Теорія ігор. Апарат теорії ігор часто використовується для дослідження колективів

інтелектуальних агентів. Багато ситуацій у мультиагентній системі знаходять відповідні аналоги в теорії ігор. Досліджуються кооперативні ігри, різні стратегії ведення торгів (переговорів), гри в розміщення що є аналогами ряду моделей колективної поведінки агентів.

Теорія колективної поведінки автоматів. Вона досліджує поведінку великих колективів автоматів із примітивними функціями. Поведінка автомата може розглядатися як недетермінована, що дозволяє будувати різні ймовірнісні моделі. Можливе навчання автомата за допомогою штрафів і заохочень. Автомат може бути наділений пам'яттю, де він у певній формі запам'ятовує попередні штрафи і заохочення, та може використовувати цю інформацію для поліпшення свого і колективної поведінки відповідно до деякої функції доходу.

Архітектура мультиагентних систем

Рациональний вибір архітектури окремого агента і мультиагентної системи в цілому істотно залежить від концептуальної моделі агента, мови специфікацій, математичної моделі кооперації агентів; класу задач застосування [4].

Архітектури агентів, засновані на знаннях.

З класичної точки зору архітектура на основі знань містить символну модель предметної області, представлену в явній формі, в якій прийняття рішень про дії, що повинні виконуватись агентом, здійснюється на основі міркувань логічного чи псевдо-логічного типів. За такої моделі виникає проблема обчислювальної ефективності. Багато властивостей агента не можуть адекватно бути описаними в термінах числення предикатів першого порядку. Були розроблені спеціальні варіанти розширень модальних логік і подібних модальним, які вирішують окремі задачі. Такі архітектури були названі Belief-Desire-Intention (BDI) – архітектурами. Але вони більше характеризують мову специфікації, що лежить в основі формалізації агента ніж особливості архітектури. Ідея архітектури агента на основі знань зараз вже вийшла за межі логічної парадигми представлення й обробки знань. Маються архітектури, що сповідають лінгвістичний підхід (на основі формальних граматик), а також такі, що намагаються використовувати нечіткі знання і правдоподібні міркування.

Модель кооперативного рішення проблем (CPS) [8]. Ця модель розглядає взаємодію агентів, побудованих відповідно до BDI-архітектури. У даній моделі ментальні поняття формалізуються за допомогою операторів часової

логіки. Використовуючи формалізм часової логіки, у цих роботах вводяться визначення для таких понять, як потенціал для кооперації, групові дії, досяжність мети агентом і т.д. Зупинимось на цих поняттях докладніше.

У процесі формування кооперативного рішення в рамках розглянутої CPS-моделі виділяють чотири етапи [9]:

1. *Розпізнавання.* Процес кооперативного рішення починається тоді, коли агент розпізнає доцільність кооперативної дії. Наприклад, агент має мету, досягти яку в ізоляції (за його переконанням) він не здатний, чи для її досягнення він віддає перевагу кооперації.

2. *Формування групи агентів.* На цій стадії агент, що установив можливість спільної дії, шукає партнерів. При вдалому завершенні цієї стадії утворюється група агентів, що мають спільні зобов'язання для колективних дій.

3. *Формування спільного плану.* Це та стадія, на якій агенти ведуть переговори з метою виробити спільний план, що приведе до бажаної мети.

4. *Спільні дії.* Тут агенти діють відповідно до виробленого плану, підтримуючи взаємодію відповідно до прийнятого на себе зобов'язання.

Архітектури на основі планування (реактивні архітектури). У цьому підході планування розглядається як "конструювання послідовності дій, яка приводила б у результаті до досягнення бажаної мети". Але підхід погано працює при розв'язанні задач, у яких є часові обмеження.

Однорівнева архітектура взаємодії агентів. Яскравим прикладом однорівневої (цілком децентралізованої) архітектури є архітектура системи, призначеної для розв'язання широкого кола задач, що мають справу з динамічним складанням розкладів виконання деякого виду діяльності в умовах обмежених ресурсів. Представниками задач подібного роду є задачі складання розкладу.

Особливість задач цього типу полягає в тому, що обробка певної інформації централізовано (з використанням бази даних) виключається, вона носить істотно розподілений характер і лише обмежено доступна кожному з учасників. Стратегія пошуку рішення в цьому випадку припускає використання локальних переговорів для пошуку глобально погодженого рішення. При цьому, хоча агенти залишаються рівноправними учасниками переговорів, кожному з них за спеціальним алгоритмом призначається особлива роль, причому ролі агентів можуть динамічно змінюватися.

Багаторівнева архітектура для автономного агента. Ця архітектура була розроблена для спеціальної задачі – керуванням рухливим роботом. Тут агент має справу з непередбаченими подіями зовнішнього світу як у просторі, так і в часі, а також повинен враховувати й присутність інших агентів. Але зовнішній світ неможливо моделювати в деталях. З цієї причини архітектура агента і є, як правило, гібридною. Агент повинен мати архітектуру, що дозволить йому справлятися з невизначеністю і неповнотою інформації, реагувати на непередбачені події, користуючись відносно простими правилами.

Дана архітектура схематично зображена на рисунку 1 [4]. Вона забезпечує адекватну

поведінку відповідно до контексту (стану зовнішнього середовища) і містить три рівні, кожен з яких відповідає різним типам здібностей агента:

- рівень реакції на події (*R*) підтримує здатність агента швидко реагувати на події, навіть, якщо вони раніше не планувалися;
- рівень планування (*P*) генерує, виконує і динамічно реконструює часткові плани;
- рівень передбачення або моделювання (*M*) моделює поведінку сутностей зовнішнього середовища і самого агента, що може використовуватися як для пояснення поведінки, що спостерігається, так і передбачення можливої поведінки в майбутньому.

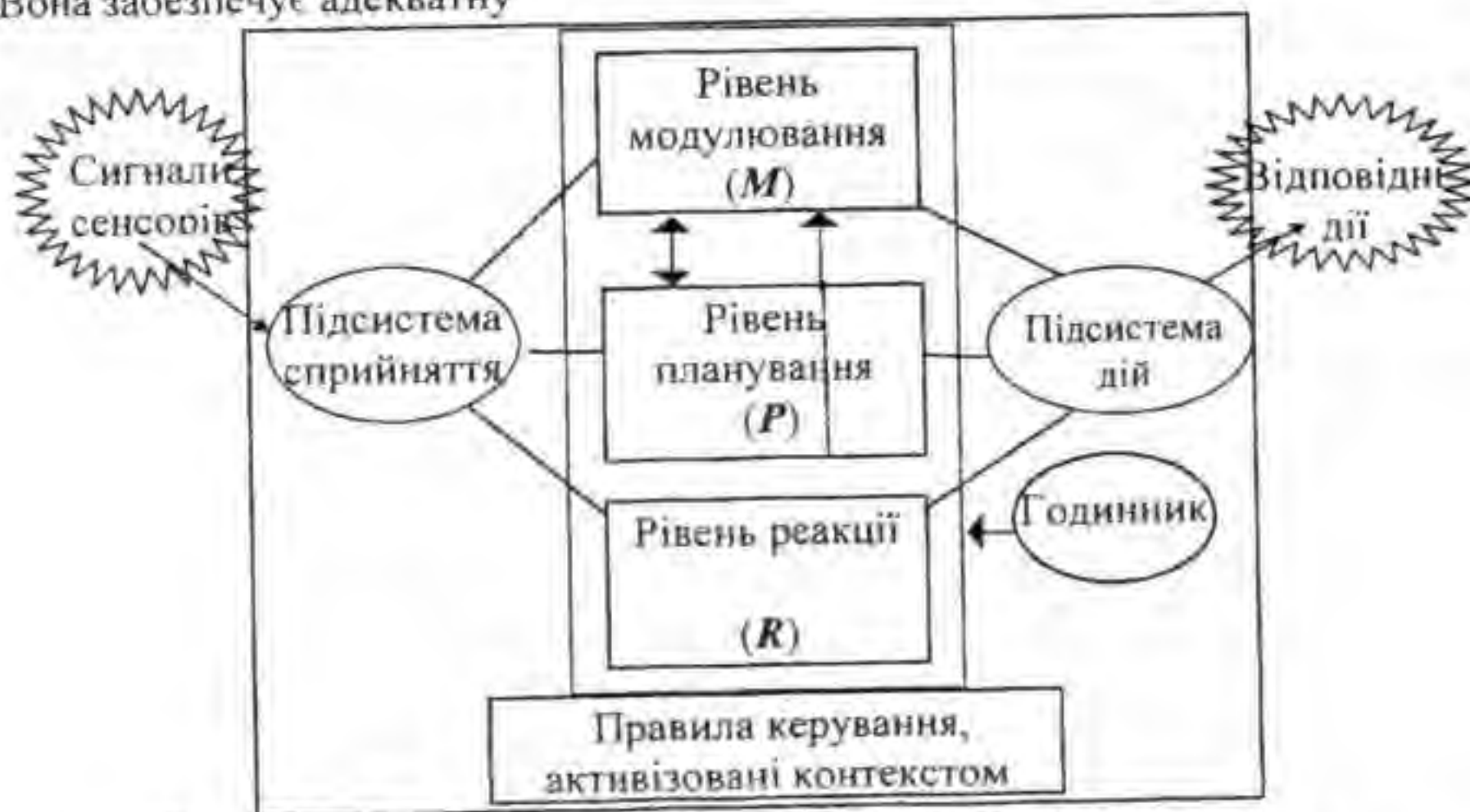


Рис. 1. Багаторівнева архітектура для автономного агента

Кожен з рівнів має модель розуміння світу агентом на відповідному рівні абстракції і містить можливості, що відповідають рівню. Він прямо зв'язаний з компонентом сприйняття і дії й здатний незалежно від інших рівнів виробляти свою думку. Підсистема керування на основі правил, що активується контекстом, вирішує задачу забезпечення придатного поведінки агента у випадку конфлікту варіантів поведінки, розроблених різними рівнями за рахунок комбінування технології обміну повідомленнями і контекстної активації правил керування. Синхронізація входів і виходів рівнів також забезпечується цією підсистемою.

Конфлікти в мультиагентних системах. Неминучим наслідком децентралізованості мультиагентних систем є виникнення конфліктів у мультиагентному середовищі [10]. Наприклад, агент може сформулювати мету, що буде конфліктувати з цілями інших агентів які працюють в групі. Під конфліктом, звичайно, розуміють ситуацію, у якій виникає протиріччя

вигляду $p \wedge q \Rightarrow false$, де p і q – переконання агентів.

Основними типами конфліктів у мультиагентних системах є:

1. Конфлікти в системі переконань агентів, що можуть виникати при отриманні агентом помилкової інформації від іншого інформаційного агента, що суперечить переконанням агента.

2. Конфлікти, обумовлені сприйняттям агентом неповної моделі навколишнього світу та моделей інших агентів. Останні конфлікти пов'язують з поняттям рефлексії агента.

3. Конфлікти, пов'язані з конкуренцією за спільні ресурси, або пов'язані з наявністю суперечливості цілей агентів групи.

Під розв'язанням конфлікту будемо розуміти зняття логічного протиріччя виду $p \wedge q \Rightarrow false$ за рахунок відкидання однієї з альтернатив відповідно до деякого критерію, чи зміни p і q разом.

Існує багато різних механізмів вирішення конфліктів. Серед них виділяють такі основні підходи як: вирішення конфліктів на основі правил поведінки агентів (наприклад, наявність різних рівнів компетентності агентів, при якому агент будує переконання на основі інформації, отриманої з більш компетентного джерела), недетермінований варіант усунення конфліктів (наприклад, на основі рандомізації чи жереба).

Економічна логіка. Наявність ББЛ забезпечує можливість побудови індикаторів (фінансових коефіцієнтів), за якими можна контролювати діяльність підприємства. Будемо вважати, що основна мета бізнесу полягає в тому, щоб дістати задовільний прибуток на вкладений у компанію капітал, підтримуючи при цьому її стійкий стан [11]. Перша група коефіцієнтів відбиває ефективність використання капіталу, вкладеного в різні види ресурсів. Показники цієї групи характеризують рентабельність діяльності, а також оборотність активів за період і, насамперед, ефективність використання оборотних коштів (керування запасами, кредитної політики і т.п.). Друга група коефіцієнтів відбиває величини фінансових ризиків, зв'язаних із вкладенням капіталу в підприємство. Коефіцієнти ліквідності визначають поточну платоспроможність підприємства. Коефіцієнти фінансової стійкості визначають довгострокову платоспроможність, рівень залежності підприємства від позикового капіталу (ступінь використання власних і позикових засобів для фінансування активів).

Підприємству для регулярного аналізу своєї діяльності досить вибрати не більше десятка цільових коефіцієнтів – показників, що повинні визначати стан бізнесу. Вибір показників виробляється на основі суджень про їхню показовість для аналізу діяльності конкретного підприємства. Розрахунок усіх можливих коефіцієнтів в остаточному підсумку може виявитися абсолютно марним і навіть заважати зосередитися на дійсно корисній інформації. Кожен показник повинний «знайти» свого користувача, що може приймати на підставі його значення конкретні управлінські рішення. Для того, щоб підтримувати фінансову модель бюджетування, необхідно визначити бюджетний регламент, що буде визначати організаційну схему процесу фінансового планування і контролю на підприємстві. Тому необхідно визначити формати опису бюджетної системи і бюджетного регламенту.

Бюджетна система компанії – сукупність процесів/функцій, компонентів бюджетування і

бюджетних регламентів, що визначають послідовність, правила, терміни і відповідальних за розрахунки бюджетів, формування звітів, аналіз виконання бюджетів і прийняття рішень.

Серед методів планування виділяють розрахунково-аналітичний, метод планування, нормативний, оптимізації планових рішень, економіко-математичного моделювання. При використанні моделей планування пріоритетне значення має визначення періоду дослідження. Він повинний вибиратися з урахуванням однорідності вихідних даних. Обґрунтованість обраних моделей перевіряється шляхом розрахунку середньоквадратичного відхилення отриманих даних від фактичних і визначення коефіцієнта варіації.

Значну роль в економіко-математичному моделюванні займає теорія ігор. В останній час вона найбільш застосовна для аналізу стратегічних проблем, розробок організаційних структур і систем стимулювання. Вважається, що теорія ігор поряд з теоріями транзакційних витрат і “патрон – агент” буде сприйматися як найбільш економічно обґрунтований елемент теорії організації [1].

Але, на жаль, відомі і обмеження на застосування аналітичного інструментарію теорії ігор. Наприклад, у випадку коли в підприємстві склалися різні представлення про гру, у якій вони беруть участь, або коли вони недостатньо інформовані про можливості один одного, потрібна додаткове поповнення інформації. Теорію ігор важко застосовувати за наявності багатьох станів рівноваги. Ця проблема може виникнути навіть у ході простих ігор з одночасним вибором стратегічних рішень. Якщо ситуація прийняття стратегічних рішень дуже складна, то гравці часто не можуть вибрати кращі для себе варіанти. В багатьох випадках тут використовується поняття рівноваги домінантної стратегії або рівноваги Неша [2]. Вже в грі з тільки двома гравцями присутні нетривіальні моменти вибору оптимальної стратегії поведінки. Задачі ж з багатьма гравцями ускладнюються, на превеликий жаль, нелінійно. І єдиний вихід в разі потреби моделювання вищенаведених аспектів вибору оптимальної стратегії полягає в створенні інтелектуальних агентів, формалізації та спрощенні знань предметної області, знаходженні емпіричних зв'язків та багатьох експериментальних прогонах створеної моделі.

Алгоритми навчання моделей

Моделі навчання – математичні підходи до розробки стратегії ціноутворення, за яких агенти розробляють власні стратегії методом спроб та

помилки в динамічному інтерактивному середовищі. Ці моделі відрізняються від моделей передачі досвіду, в яких розроблені стратегії передаються агенту певним зовнішнім інструктором.

Модель прийняття рішень Маркова (МІР) є найзагальнішою моделлю самотійного навчання. МІР для певного середовища складається з: дискретного набору станів S ; дискретного набору дій, до яких може вдатися агент A ; набору реально оцінюваних прибутків R (навчаючі сигнали); вихідна ймовірність розподілу S' ; розподіл ймовірності транзицій $p(s'|s, a)$ ймовірність зміни стану з s до s' у разі, якщо агент вдається до дії a ; ймовірність розподілу прибутку $p(r|s, a)$ тобто ймовірність отримання прибутку r в стані s , у разі, якщо агент вдається до дії a .

МІР Маркова для певного середовища розвивається дискретними часовими періодами. Стан середовища на першому періоді описується початковим розподілом ймовірності. Після цього агент спостерігає поточний стан середовища і обирає певну дію. Дія і поточний стан середовища обумовлюють розподіл ймовірностей станів середовища у наступному часовому періоді (розподіл ймовірності транзицій). Окрім цього вони обумовлюють розподіл ймовірності прибутку такого агента (ймовірність розподілу прибутку). Наступний стан і прибуток обумовлюються цим розподілом, після чого процес повторюється.

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha [r_t + 1 + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t)]. \quad (1)$$

Динаміка системи є повністю визначеною за винятком міри впливу дії агента (стратегії). Мета, яку переслідує агент, – підібрати стратегію, яка максимізує сумарний прибуток у довготривалому періоді. Послідовність отриманих прибутків після проходження часового періоду t позначається як $r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, \dots$; прибуток у момент часу t , R_t зображується функцією цих прибутків, наприклад,

$$R_t = r_t + r_{t+1} + 1 + \dots + r_{t+T}$$

Для дослідницьких цілей важливо також враховувати і стохастичні стратегії. Отже стратегія зображується, як $\pi(s, a)$, – ймовірність обрання дії a , коли світ перебуває у стані s .

Такий опис стратегії агента перетворює МІР у послідовність Маркова. Тоді метою агента стає максимізація $E_\pi[R]$, де π означає очікування на момент, коли послідовність Маркова піддається впливу стратегії E_π . Це очікування може бути

зміненим у стані, який би сам сприяв максимізації:

$$V^*(s) = E_\pi[R_t | s_t = s],$$

$$Q^*(s, a) = E_\pi[R_t | s_t = s, a_t = a],$$

Ці значення називають цільовими функціями. Перша – це очікуваний прибуток від дотримання стратегії π зі стану s . Друга – це очікуваний прибуток від обрання дії a у стані s і подальшого дотримання стратегії.

Існує два основних методи оцінки цих цільових функцій [1].

Перший – відбір Монте-Карло. Агент здійснює стратегію π для одного або більше епізодів і використовує отримані результати (історія зміни станів, дії і нагороди), прибутки для того, щоб оцінити цільову функцію стратегії π . Другий – метод оновлень тимчасових відмінностей (ТВ) відомий як SARSA (Саттон (1996)). Алгоритми ТВ дозволяють максимізувати $E_\pi[R_t]$, використовуючи ймовірність транзицій між двома станами (з яких, власне, агент і здійснює відбір) і знаходження $V_\pi(s)$ очікуваних прибутків зі стану s (з якого агент також може здійснювати відбір). Ці алгоритми використовують удосконалення стратегії, як і в динамічному програмуванні, для оцінки цільової функції.

α – це рівень навчання, який визначає наскільки швидко акумулюється інформація.

Як тільки цільову функцію для стратегії оцінено, стає можливим перехід до етапу удосконалення стратегії. На цьому етапі нова стратегія π_{k+1} отримується від попередніх стратегій π_k через методи інтенсифікації:

$$\pi_{k+1}(s) = \arg \max_a Q^{\pi_k}(s, a) \quad (2)$$

Завдяки марковському підходу до середовища нова стратегія гарантовано буде не гіршою від попередньої. Зокрема, вона гарантовано буде не гіршою у кожному окремо взятому стані:

$$Q^{\pi_{k+1}}(s, \pi_{k+1}(s)) \geq Q^{\pi_k}(s, \pi_k(a)).$$

Окрім цього послідовність стратегій сформує оптимальну стратегію за умови достатнього вивчення (тобто певна стратегія виявляє певну дію, здійснену у певному окремо взятому стані часто у вигляді відрізків довільно довгої послідовності). Для того, щоб це забезпечити, достатньо не просто чітко дотримуватися інтенсифікуючої стратегії рівняння (2), а натомість обрати випадкову дію ϵ для цього часу і надалі дотримуватися інтенсифікуючих дій для стратегії рівняння (2). Ця ϵ – інтенсифікуюча стратегія набуде вигляду:

$$\pi_k + I(s, a) = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{if } a = \arg \max_a Q^{\pi_k}(s, a) \\ \frac{\varepsilon}{|A| - 1} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

Альтернативою алгоритму вдосконалення інтенсифікуючої стратегії є використання алгоритму критичних дій. У останньому цільова функція будується із використанням оновлень ТВ, як і в описаному раніше методі. Однак замість миттєвого переходу до інтенсифікуючої стратегії цей алгоритм дещо наближає стратегію до інтенсифікуючої стратегії поступово. Зазвичай стратегія описується розподілом Больцмана:

$$\pi_i(s, a) = Pr[a_i = a | s_i = s] = \frac{\exp(W(s, a))}{\sum_{a' \in A} \exp(W(s, a'))} \quad (4)$$

де $W(s, a)$ – це параметр стратегії π , в рамках якої було виконано дію a у стані s . Ці параметри можуть бути уточненими з метою розробки зручної стохастичної стратегії.

Проаналізуємо описані підходи. Кожен має свої переваги. Метод SARSA є більш доречним при отриманні миттєвих прибутків. Метод критичних дій має свою особливість, яка полягає у можливості розробки чітких стохастичних стратегій. Однак при застосуванні для більш практичних задач предметна область не постає середовищем, яке б максимально відповідало умовам моделі МПР Маркова. Зокрема, модель МПР Маркова передбачає, що агент адекватно спостерігає і аналізує стан середовища. Однак, це не підходить для, наприклад, цілей маркет – мейкінгу. В той час, як агент охоплює певну множину аспектів (або статистичних даних) світу, інша частина інформації (наприклад, знання або переконання інших трейдерів) залишається невідомою йому. Якщо така невідома інформація може визначити імовірності транзицій станів, така модель набуває вигляду моделі частково спостережуваного прийняття рішень Маркова (ЧСПРМ). Для моделі ЧСПРМ ідеальною стратегією можна вважати стохастичну (або частково залежну від усіх попередніх спостережень, завідома невеликих за обсягом). Який метод є більш застосовним визначає конкретна поставлена задача.

Моделювання ринків

Одним з базових понять тут є поняття рівноваги раціонального сподівання [1]. Дослідження щодо інформаційної ефективності

ринку відносно еталону раціонального сподівання можна поділити на дві категорії: розповсюдження інформації між повністю проінформованими агентами та зовсім не проінформованими і збирання інформації більшістю частково проінформованих агентів. З'ясувалось, що обидва процеси здатні успішно працювати – ринок досягає стану рівноваги раціонального сподівання в різноманітних модельованих ситуаціях. Мета моделювання полягає в тому, щоб узгодити різні пріоритети або переконання всіх учасників гри, та виробити для кожного узгоджену стратегію. Розглянемо три незалежні компоненти переконання:

- Інформація про об'єкт гри – це те, що учасник знає про сутність, яку треба розподілити. Всім учасникам постачається однакова інформація, але агенти можуть отримувати інформацію й з власного досвіду.

- Персональні пріоритети учасника – це те, що агенти намагаються зібрати.

- Оцінка агентом пріоритетів інших – за умови знання пріоритетів інших агентів агент здатен виробити адекватну стратегію поведінки в певній ситуації.

Ціллю моделювання є передбачення остаточної ціни на ресурс. Агент може робити оцінку ресурсу ще перед початком процесу торгів. Він бере до уваги свої власні пріоритети щодо ресурсу, і, можливо, що більш важливо – він передчуває пріоритети всієї групи. Базуючись на цьому, агент має можливість або придбати (якщо він вважає, що поточна ціна є заниженою) або продати (поточна ціна на його думку є завищеною) ресурс. Під час торгів агент може або зберігати свої переконання, або (відштовхуючись від свого бачення ситуації) змінити їх. Механізм навчання застосовується у другому випадку.

Частина агентів може мати зовсім інший підхід ігноруючи всю базову інформацію про ресурс і беручи до уваги тільки ринкову інформацію. Ці агенти грають спекулятивні ролі, намагаючись виграти на нестабільності ціни. Їх присутність може надати додаткові властивості ринку. В процесі спекуляцій такі агенти додають нестабільності цінам на ринку.

Агентна система бюджетування

Предмет моделювання

Як об'єкт моделювання будемо розглядати велику холдингову компанію (ВХК). Тобто, ми розглядаємо сукупність окремих юридичних осіб, над якими створена додаткова структура, що акумулює в собі функції загальної координації їх

роботи. Корисність такого об'єднання полягає в оптимізації найрізноманітніших бізнес-процесів.

Ціль моделювання полягає в знаходженні оптимальної стратегії розподілу глобальних фінансів холдингу між його функціональними частинами, які, звісно, не є конкурентами між собою (сфери діяльності підрозділів не перетинаються, що виходить зі здорового глузду). Схему ВХК можна в загальному випадку представити наступним чином: є головний управлінський підрозділ, є декілька підпорядкованих підрозділів і є Центр фінансової відповідальності з підпорядкованими підрозділами.

Модель підрозділу

Щоб змодельовати діяльність на рівні головного управління, треба спочатку зробити це на рівні підрозділів. Тож розглянемо зараз процес моделювання станів одного підрозділу.

Модель підрозділу можна представити у вигляді схеми зображеної на Рис.2.

Аналітичний блок відповідає за формування логіки дії репрезентативного агента. В аналітичному блоці проводяться необхідні математичні обчислення, аналізується поточна та прогнозується майбутня ситуація на полі гри. В ньому реалізуються моделі навчання та виробляється оптимальна стратегія поведінки репрезентативного агента. Репрезентативний агент є "зовнішньою" частиною підрозділу. Він відповідає за всі аспекти комунікації підсистеми



Рис. 2. Модель підрозділу з різноманітними контрагентами. З його допомогою відбувається збирання інформації про зовнішній світ, та передача необхідної інформації до середовища. База знань зберігає всю внутрішню інформацію. В ній знаходяться всі внутрішні параметри стану як підрозділу, так і зовнішнього світу та зберігається необхідна для навчання системи статистика.

Поле гри. Тепер детальніше розберемо, з чого ж складається і як працює поле гри. Розглянемо функції елементів схеми. Параметри поля гри задають глобальні властивості середовища (за введення яких відповідає зовнішній модуль), в якому знаходяться репрезентативні агенти (поточні параметри інфляції, ставки НБУ, зміни курсу валют, об'єм ринку даної групи товарів чи послуг, тощо). На схемі (Див. рис. 3) "репрезентативний агент конкурента 1" з якоїсь причини не звертається до бази даних поля гри, але за бажання, ніщо йому не заважає робити це.

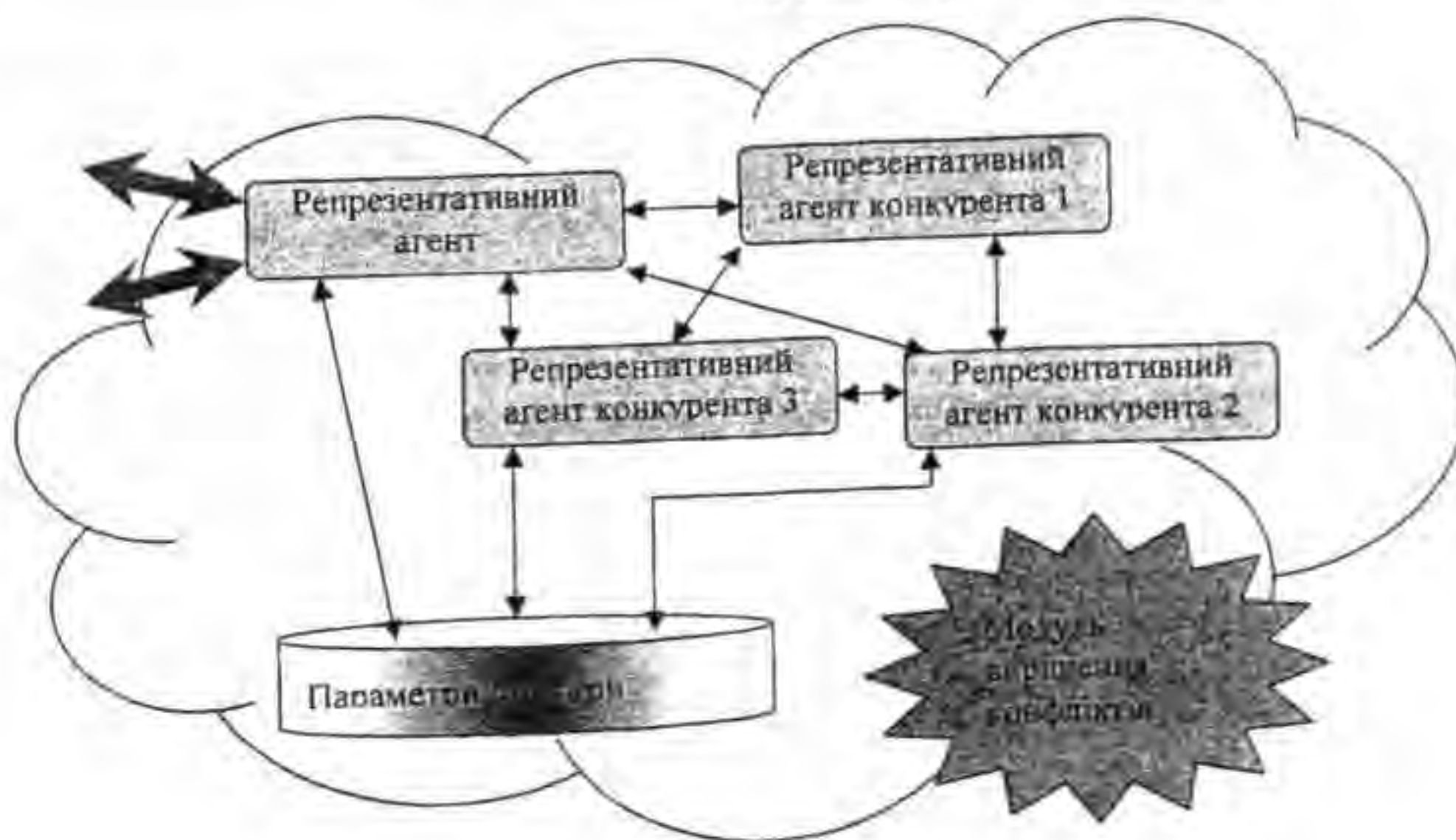


Рис. 3. Поле гри

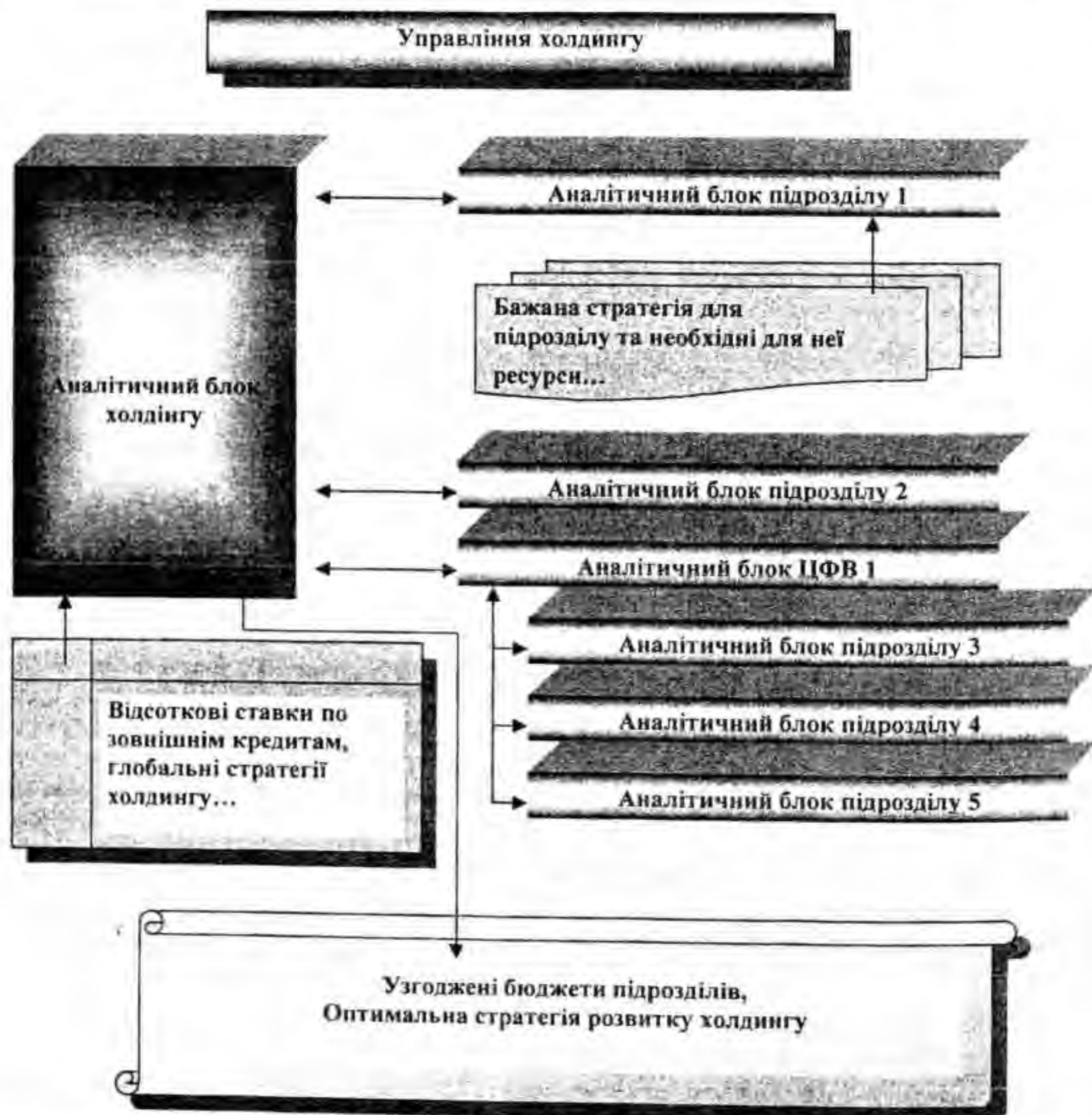


Рис. 4. Схема управління холдингу

Репрезентативні агенти конкурентів представляють інших гравців аналогічно "нашому" репрезентативному агенту (звісно, для кожного репрезентативного агента конкурента існують відповідні аналітичні модулі та локальні бази знань). Всі репрезентативні агенти є рівноправними. Модуль вирішення конфліктів відслідковує ситуацію в середовищі на предмет виникнення ситуацій, в яких агенти не в змозі розібратися самі.

Управління холдингу. Рівнем вище за моделі підрозділів та їх середовищ стоїть, агрегуюча вже отримані результати, модель роботи управління холдингу. Схема потоків інформації цього управління зображена на рис. 4. Центр фінансової відповідальності є проміжною ланкою між підрозділами холдингу та головним

управлінням і вводиться в модель тільки для відображення реально існуючих структур.

На даному етапі виробляється рішення про оптимальний розподіл фінансів між підрозділами холдингу, приймаються рішення щодо можливого вступу в холдинг нових організацій чи, навпаки, про згортання певних проектів як неперспективних. З'ясовується доцільність чи недоцільність додаткового залучання зовнішніх коштів та плануються заходи, спрямовані на підтримку платоспроможності у будь-який період шляхом достатнього резервування коштів. При моделюванні діяльності як підрозділів так і всього холдингу розробляються три основні варіанти стратегій з ймовірностями існування у відсотках, що дозволяє оцінювати ступінь ризику: оптимістичний, песимістичний зважений. В головному аналітичному блоці під час

моделювання варіантів розподілу фінансів беруться до уваги такі основні критерії: рентабельність підрозділу, швидкість обертання активів, коефіцієнт та критерії швидкості завоювання ринку, ступінь зміни властивостей ресурсів.

Висновки

Створення ефективно працюючих реальних програмних комплексів агентного типу вимагає досить великих зусиль в області методів організації кооперативного рішення задач агентами мультиагентних систем, методів організації переговорів при розв'язанні конфліктів і створення відповідних протоколів. У цій області недостатньо використовуються теоретичні досягнення з області розподілених систем і рівнобіжних обчислень.

Моделювання за допомогою інтелектуальних агентів з високою мірою адекватності здатне відобразити реальну економічну логіку та процеси. Емпірично можна побачити, що агентне моделювання здатне успішно описати різноманітні цілі та вподобання активних об'єктів та виробити адекватну стратегію на майбутні стани. Хоча й існує частина економічних задач, які мають успішну реалізацію на базі агентів, та велика кількість економічних процесів є настільки складною, що майже неможливо описати взаємодію між учасниками не вдаючись до інтелектуального моделювання знову ж таки на базі агентних технологій. Роботи зараз над цим ведуться, з'ясовуються та описуються нові правила взаємодії, виявляються нові фактори впливу, і агентне моделювання поступово буде завойовувати визнання. Порівняно з традиційними методами моделювання – шляхом математичних рівнянь, дискретного моделювання подій, циклічним автоматам та теорією ігор – симуляція за допомогою агентів (Agent-Based Simulation, ABS) є менш абстрактною і дозволяє наблизити процес симуляції ближче до реального стану речей завдяки можливості моделювання за допомогою агентів специфічну поведінку індивідів, на відміну від методів макроімітаційного моделювання, які зазвичай базуються на математичних моделях, що працюють з усередненими параметрами поведінки індивідів або її спільнот.

Список використаних джерел

1. Грін В.Г. Економетричний аналіз / В.Г.Грін. – Київ, Видавництво «Основи», 2005 – [197с.
2. Михалевич М.В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии /

М.В.Михалевич, И.В.Сергуенко. – Киев, Научная думка, 2005, 670с.

3. Brock, W.A., Hommes, C.H., 1998. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. / W.A. Brock, C.H. Hommes. // Journal of Economic Dynamics and Control 22 (8-9), 1235-1274.
4. Delgado, M., GomezSkarmeta, A.F., MarinBlazquez, J.G., and Barbera, H.M. (1999), "A Multi-Agent Architecture for Fuzzy Modelling", / Delgado, M., GomezSkarmeta, A.F., MarinBlazquez, J.G., and Barbera, H.M. // International Journal of Intelligent Systems, Vol. 14, No. 3, pp. 305-329.
5. Глибовец Н.Н. Использование агентных технологий в системах дистанционного образования, /Н.Н. Глибовец. – «Управляющие системы и машины» – 2002. – №6. – С.69-76.
6. Finin T, Peng Y and Labrou Y. (1999) Agent Communication Languages: The current Landscape./ Finin T, Peng Y and Labrou Y. // IEEE Intelligent Systems, March/April 1999, pages 45-52.
7. Garcia, A., Gollapally, D., Tarau, P. and Simari, G. (2000), "Deliberative Stock Market Agents using Jinni and Defeasible Logic Programming"/ Garcia, A., Gollapally, D., Tarau, P. and Simari, G.// Proc. Of the 14 th European Conference on Artificial Intelligence, Workshop on Engineering Societies in the Agents' World (ESAW'00), August, Berlin.
8. Sycara, K., Decker, K. and Zeng, D. (1998), "Intelligent Agents in Portfolio Management", in Jennings, N.R. and Wooldridge, M. (Eds.)/ Sycara, K., Decker, K. and Zeng, D.// Agent Technology: Foundations, Applications, and Markets, Springer, pp.267-282.
10. Анисимов А.В., Зубенко А.В. Динамические коалиции – новая парадигма в области распределенных компьютерно-коммуникационных систем. Ч.2. Обзор и сравнительная характеристика практических методов построения динамических коалиционных сред. / А.В.Анисимов, А.В.Зубенко // Журн. «Проблемы программирования». – 2005. – №1. – С. 51-68.
11. Jaakkola, T., Singh, S. P. & Jordan, M. I. (1995), Reinforcement learning algorithm for partially observable markov decision problems, in G. Tesauro, D. S. Touretzky & T. K. Leen, eds, / Jaakkola, T., Singh, S. P. & Jordan, M. I. // "Advances in Neural Information Processing Systems", MIT Press, Cambridge, MA, pp.345-352.

Надійшла до редколегії 01.12.2010

УДК 004.655

Богатирьова* Ю.О., аспірантка

Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах

Стаття присвячена обчислюваності на множинах та мультимножинах, що вводиться як нумераційна обчислюваність. Апаратом для задання класу обчислюваних функцій виступають примітивні програмні алгебри. Побудовано системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА.

Ключові слова: множина, мультимножина, обчислюваність, примітивні програмні алгебри.

*E-mail: jbogatyreva@gmail.com

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, ст.н.сп., Буй Д.Б.

Вперше примітивні програмні алгебри (ППА) були введені В.Н. Редьком у роботах [10, 11]. Примітивні програмні алгебри є адекватним апаратом для розв'язування проблем повноти в різних класах функцій. Головна особливість сигнатурних операцій ППА полягає в їх загальнозначності та абстрактності [2].

Наведемо основні визначення теорії ППА.

Носієм такої алгебри виступає множина багатомісних функцій та предикатів, а сигнатура складається із операцій параметричної суперпозиції функції у функцію (предикат) $S^{(m+1)}$, $m=1,2,\dots$, тернарного розгалуження функцій (предикатів) по предикату $\phi^{(n)}$ та параметричного циклування функцій по предикату $\star^{(n+1)}$, $n=1,2,\dots$

Операція суперпозиції визначається як $S^{(m+1)}(\varphi, f_1, \dots, f_m) = \phi^{(n)}$, де $\phi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ у припущенні, що для арностей виконується рівності $\nu\varphi = m$, $\nu f_1 = \dots = \nu f_m = \nu\phi = n$.

Операція розгалуження (двох функцій по предикату або двох предикатів по предикату) $\phi^{(n)}$ визначається наступним чином: $\phi^{(n)}(p^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}) = \phi^{(n)}$, де $\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}$ одночасно функції або предикати, а $\phi^{(n)}$ задається кусковою схемою:

J.A. Bogatyreva*, postgraduate student

The computability on finite sets and multisets

The article is devoted to computability on sets and multisets which is entered as numerical computability. The primitive program algebras are the method for definition the class of computable functions. Systems of generative of set and multiset PPA are constructed.

Key words: set, multiset, computability, primitive program algebras.

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \varphi_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), & \text{якщо } p(x_1, \dots, x_n) \approx T, \\ \varphi_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n), & \text{якщо } p(x_1, \dots, x_n) \approx F, \\ \text{невизначено, інакше,} \end{cases}$$

у припущенні, що $\nu p = \nu\varphi_1 = \nu\varphi_2 = \nu\phi = n$.

Таким чином, розгалуження функцій по предикату є функція, а розгалуження предикатів по предикату є предикат.

Параметрична операція циклування функцій по предикату має наступне визначення: $\star^{(n+1)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)}) = g^{(n)}$, де $\nu p = \nu f_1 = \dots = \nu f_n = \nu g = n$. Для задання значення $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ задамо послідовності $\{x_i^j\}_{i=1,2,\dots,n}^{j=0,1,\dots}$ індукцією по $j=0,1,\dots$. Базис: $x_i^0 = x_i$, $i=1,\dots,n$; індуктивний крок: $x_i^{j+1} \approx f_i^{(n)}(x_1^j, \dots, x_n^j)$, $j=0,1,\dots$, $i=1,\dots,n$. Значення функції $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ визначається як x_1^k , де $j=0,1,\dots$ таке мінімальне значення, для якого $p^{(n)}(x_1^j, \dots, x_n^j) \approx F$ (за умови визначення всіх попередніх значень x_i^j , $p^{(n)}(x_1^j, \dots, x_n^j)$, $i=1,\dots,n$, $l < j$). Тобто, використовуючи запис оператора мінімізації теорії рекурсії, маємо узагальнену рівність $g^{(n)}(x_1^j, \dots, x_n^j) \approx x_1^k$, де $k \approx \mu_j (p^{(n)}(x_1^j, \dots, x_n^j) \approx F)$.

В роботі [5] побудована повна система (система породжуючих) арифметичної ППА σ_μ , яка складається з предикату $x < y$, функції слідування $z(x)$, функції додавання $x + y$,

функції множення $x \cdot y$, селекторів I_m^n , $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, n$ та константної функції $0(x)$, фіксуємої 0 :

$$\sigma_N^{def} = \{x < y, s(x), x + y, x \cdot y, I_m^n, 0(x)\}_{m=1,2,\dots,n}^{n=1,2,\dots}$$

При проведенні побудов в ППА зручно користуватися операціями заперечення $\neg p$, кон'юнкції $p \wedge q$ та диз'юнкції $p \vee q$ предикатів. Ці операції отримуються суперпозиціями відповідно в булеве заперечення $\neg$, кон'юнкцію $\wedge$ та диз'юнкцію $\vee$. Дамо формальні означення.

Заперечення: $\neg p = S^{(2)}(\neg, p)$. Таким чином, $dom \neg p = dom p$, $\neg p(x_1, \dots, x_n) = \neg(p(x_1, \dots, x_n))$, $\nu p = n$.

Кон'юнкція: $p \wedge q = S^{(3)}(\wedge, p, q)$. Отже, $dom p \wedge q = dom p \cap dom q$, $(p \wedge q)(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n) \wedge q(x_1, \dots, x_n)$, $\nu p = \nu q = n$. З цих означень випливає наступна кускова схема:

$$(p \wedge q)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = T \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = T \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = F, \\ F, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = F \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = F \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = F, \\ \text{невизначено, якщо } (x_1, \dots, x_n) \notin dom p \\ \text{або } (x_1, \dots, x_n) \notin dom q. \end{cases}$$

Диз'юнкція: $p \vee q = S^{(3)}(\vee, p, q)$. Таким чином, $dom p \vee q = dom p \cup dom q$, $(p \vee q)(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n) \vee q(x_1, \dots, x_n)$, $\nu p = \nu q = n$. З цих означень випливає наступна кускова схема:

$$(p \vee q)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = T \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = T, \\ T, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = T \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = F, \\ T, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = F \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1, \dots, x_n) = F \ \& \ q(x_1, \dots, x_n) = F, \\ \text{невизначено, якщо } (x_1, \dots, x_n) \notin dom p \\ \text{або } (x_1, \dots, x_n) \notin dom q. \end{cases}$$

Покажемо, як ці операції над предикатами моделюються в ППА. Нижче, $p_T(x)$, $p_F(x)$ – унарні константні предикати, що фіксують булеві значення F , T відповідно. Для предикату $p_T(x)$ має місце наступне зображення в довільній ППА: $p_T(x) = S^{(1)}(=, I_1^1, I_1^1)$ або в термальній формі $p_T(x) = x = x$. Що стосується предикату $p_F(x)$, то в арифметичній ППА для нього має місце таке

зображення: $p_F(x) = S^{(3)}(=, \bar{0}, \bar{1})$ або (використовуючи термальну форму запису) $p_F(x) = 0(x) = 1(x)$.

Для заперечення предикату має місце рівність:

$$\neg p(x_1, \dots, x_n) = \diamond^{(3)}(p(x_1, \dots, x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)).$$

Для операції кон'юнкції предикатів має місце рівність:

$$(p \wedge q)(x_1, \dots, x_n) = \diamond^{(3)}(p(x_1, \dots, x_n), \diamond^{(3)}(q(x_1, \dots, x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)), \diamond^{(3)}(q(x_1, \dots, x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)))$$

Для операції диз'юнкції предикатів має місце рівність:

$$(p \vee q)(x_1, \dots, x_n) = \diamond^{(3)}(p(x_1, \dots, x_n), \diamond^{(3)}(q(x_1, \dots, x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)), \diamond^{(3)}(q(x_1, \dots, x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)))$$

На основі системи породжуючих σ_N побудуємо іншу систему породжуючих арифметичної примітивної програмної алгебри $\sigma'_N = \{x = y, x + y, I_m^n, 0(x), 1(x)\}_{m=1,2,\dots,n}^{n=1,2,\dots}$, яка з технічних причин є більш зручною при моделюванні обчислювальних арифметичних функцій та предикатів в множинній та мультимножинній ППА.

Повнота системи σ'_N буде впливати з того, що всі елементи повної системи σ_N можна побудувати з елементів системи σ'_N . Ці факти встановлюють наступні три леми.

Лема 1. Функція слідування $s(x)$ та предикати $p_T(x)$, $p_F(x)$ будуються з елементів системи σ'_N суперпозиціями. $\square$

Доведення. В термальній формі запису маємо: $s(x) = x + 1(x)$. Щодо операторної форми запису, то очевидно, що $s = S^{(3)}(+, I_1^1, S^{(2)}(\bar{1}, I_1^1))$, де $\bar{1}$ – унарна константна функція, що фіксує 1 (термальна форма запису цієї функції $1(x)$).

Що стосується предикатів, то їх побудова була проведена вище. $\square$

Відомо [8], що при побудовах функцій суперпозиціями можна використовувати операторні та термальні форми запису; при цьому від операторної форми запису можна переходити до термальної та навпаки. Оскільки в ППА використовуються також розгалуження та циклування, то надалі домовимося про термальну форму запису для останніх двох операцій.

Нехай n -арні предикат p та функції (предикати) φ_1 , φ_2 мають термальні форми запису $\theta(x_1, \dots, x_n)$, $\theta_1(x_1, \dots, x_n)$, $\theta_2(x_1, \dots, x_n)$

відповідно. Тоді, функція (предикат) $\diamond(p, \varphi_1, \varphi_2)$ має термальне зображення вигляду $\diamond(\theta(x_1, \dots, x_n), \theta_1(x_1, \dots, x_n), \theta_2(x_1, \dots, x_n))$.

Нехай n -арні предикат p та функції $f_1, \dots, f_n$ мають термальні форми запису $\theta(x_1, \dots, x_n)$, $\theta_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \theta_n(x_1, \dots, x_n)$ відповідно. Тоді, функція $\ast(p, f_1, \dots, f_n)$ має термальне зображення вигляду $(\theta(x_1, \dots, x_n)) \ast_{x_1, \dots, x_n} (\theta_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \theta_n(x_1, \dots, x_n))$.

Лема 2. Функція множення $x \cdot y$ будується з елементів системи σ'_N в арифметичній ППА. $\square$

Доведення.

Нехай $f(x, y, z, t) \stackrel{\text{def}}{=} (y \neq z) \ast (t + x, z + 1)$. Тоді, неважко перевірити, що для множення виконується рівність: $x \cdot y = f(x, y, 0, 0)$. $\square$

Лема 3. Предикат нерівності $x < y$ будується з елементів системи σ'_N в арифметичній ППА. $\square$

Доведення.

Нехай $f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} ((x \neq y) \wedge (x \neq y + z)) \ast (x + 1)$ та $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y, x)$. Неважко перевірити, що для останньої функції має місце наступна кускова схема:

$$g(n, m) = \begin{cases} m, & \text{якщо } n < m, \\ n + m, & \text{якщо } m < n; \end{cases}$$

де $n, m \in N$. Використовуючи цю властивість функції g , можна перевірити наступне представлення предикату $x < y$:

$$\begin{aligned} x < y &= \diamond(x = y, p_F(x), \\ &\quad \diamond(x = 0, p_T(x)), \\ &\quad \diamond(g(x, y) = y, p_T(x), p_F(x))). \end{aligned} \quad \square$$

Лема 4. Система σ'_N є системою породжуючих арифметичної примітивної програмної алгебри та I_m^n -базисом. $\square$

Тобто, без втрати властивості повноти з системи σ'_N не можна вилучити жодного елемента окрім, можливо, селекторів.

Доведення.

■ З лем 1-3 випливає, що всі елементи повної системи σ_N будуються в арифметичній ППА з елементів системи σ'_N , таким чином остання система повна. ■

■ Покажемо для кожного елемента системи σ'_N , крім, можливо, селекторів, що його не можна вилучити без втрати повноти системи.

1) Предикат $x = y$. Його не можна вилучити, адже він є єдиним предикатом в системі σ'_N . Треба використати таку властивість розгалуження (суперпозиції): якщо розгалуження (суперпозиція) будує предикат, то всі три аргументи повинні бути предикатами (перший аргумент, в який здійснюється підстановка, повинен бути предикатом).

При розгляді решти функцій з системи σ'_N будемо спиратися на замкненість класу функцій, що зберігають множину, та класу всіх предикатів відносно сигнатурних операцій ППА [6]. Нагадаймо, що за означенням, n -арна функція f зберігає множину L , якщо для повного образу виконується $f[L \times \dots \times L] \subseteq L$.

2) Константна функція $0(x)$. Вилучати не можна, так як це єдина функція, що не зберігає множину $\{x \mid x \geq 1\}$.

3) Константна функція $1(x)$. Вилучати не можна, так як це єдина функція, що не зберігає множину $\{0\}$.

4) Функція додавання $x + y$. Вилучати не можна, так як це єдина функція, що не зберігає множину $\{0, 1\}$. ■

Множинна примітивна програмна алгебра

Носієм множинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над скінченними множинами натуральних чисел. Сигнатура складається з тих же операцій, що і в арифметичній ППА.

До системи породжуючих (множинної ППА) Σ входить предикат рівності $X = Y$, функція об'єднання множин $X \cup Y$, функція додавання скінченних множин $X \oplus Y$, функція віднімання скінченних множин $X \div Y$, селекторні функції I_m^n та константні функції $\{1\}(X)$ та $\emptyset(X)$, що фіксують відповідно сінглтон $\{1\}$ та порожню множину на довільному аргументі:

$$\Sigma = \{X = Y, X \cup Y, X \oplus Y, X \div Y, \{1\}(X), \emptyset(X), I_m^n\}_{m, n \in \mathbb{N}, m \geq 1, n \geq 0}.$$

Дамо означення функцій $X \oplus Y$ і $X \div Y$.

Операція додавання:

$$X \oplus Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x + y)\}.$$

Також можна визначити цю операцію через повний образ відносно стандартного додавання наступним чином: $X \oplus Y = +[X \times Y]$, тобто, в позначеннях роботи [1], $\oplus = [+]$.

Операція віднімання:

$$X \div Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x - y)\},$$

де операція зрізаної різниці визначається стандартно (див., наприклад, [7, 8]). Аналогічно операції додавання скінчених множин, мають місце рівності: $X \div Y = \div[X \times Y]$, $\div = [\div]$.

Введемо означення представляючої функції та представляючого предикату. Це потрібно для моделювання арифметичних функцій (предикатів) множинними функціями (предикатами). Основна ідея полягає в представленні натурального числа n сінглтоном $\{n\}$. Множинні функції та предикати будемо позначати великими літерами.

Нехай $f^{(n)}$ – арифметична функція. Тоді функція $F^{(n)}$ представляє функцію $f^{(n)}$ (або $F^{(n)}$ – представляюча функція для функції $f^{(n)}$), якщо виконується $\forall x_1, \dots, x_n (\{f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\} = F^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}))$.

Аналогічно, нехай $p^{(n)}$ – арифметичний предикат. Тоді предикат $P^{(n)}$ представляє предикат $p^{(n)}$ (або $P^{(n)}$ – представляючий предикат для предикату $p^{(n)}$), якщо $\forall x_1, \dots, x_n (\{p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\} = P^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}))$.

Лема 5 (про множинні представляючі елементи системи σ'_N). Представляючі для елементів системи σ'_N :

- 1) предикат $X = Y$ представляє предикат $x = y$;
- 2) функція $X \oplus Y$ представляє функцію $x + y$;
- 3) множинний селектор I''_m представляє арифметичний селектор I''_m ;
- 4) $\{1\}(X)$ є представляючою функції $1(x)$. $\square$

Доведення. Твердження щодо представляючих рівностей, селекторів та константних функцій – очевидні. Те, що додавання скінчених множин представляє арифметичне додавання впливає з рівності $\{n\} \oplus \{m\} = \{n + m\}$, яка, в свою чергу, впливає з означень представляючої функції та функції додавання множин. $\square$

Розглянемо представляючі функції (предикатів), які будуються операціями суперпозиції, розгалуження та циклювання.

Лема 6 (про представляючу суперпозиції). Якщо множинні функції $F^{(m)}, F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f^{(m)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)}$, то суперпозиція

$S^{(m+1)}(F^{(m)}, F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)})$ представляє суперпозицію $S^{(m+1)}(f^{(m)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})$. $\square$

Таким чином, лема стверджує, що представляюча суперпозиції функцій є суперпозицією представляючих.

Доведення. Розглянемо довільні натуральні числа $x_1, \dots, x_n$. Тоді, за означенням представляючої функції, виконується ланцюжок узагальнених рівностей:

$$\begin{aligned} S^{(m+1)}(F^{(m)}, F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)})(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) &= \\ = F^{(m)}(F_1^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}), \dots, F_m^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})) &= \\ = F^{(m)}(\{f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}, \dots, \{f_m^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}) &= \\ = \{f^{(m)}(f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^{(n)}(x_1, \dots, x_n))\} &= \\ = \{S^{(m+1)}(f^{(m)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})(x_1, \dots, x_n)\}. &\square \end{aligned}$$

Випадок суперпозиції функції в предикат розглядається аналогічно.

Лема 7 (про представляючу розгалуження). Якщо множинні функції $F_1^{(n)}, F_2^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$, а множинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то тоді розгалуження $\phi^{(3)}(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ представляє розгалуження $\phi^{(3)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)})$. $\square$

Таким чином, лема стверджує, що представляюча розгалуження функцій по предикату є розгалуженням представляючих функцій по предикату, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Покажемо, що функція $\Psi^{(n)} = \phi^{(3)}(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ представляє функцію $\psi(x) = \phi^{(3)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)})$, тобто, що $\Psi^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) = \{\psi(x_1, \dots, x_n)\}$ для $\forall x_1, \dots, x_n$.

Розглянемо довільні натуральні $x_1, \dots, x_n$. Можливі тільки три випадки.

- 1) ■ Нехай значення арифметичного предикату $p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ невизначено. Тоді невизначене буде і значення представляючого множинного предикату $P^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$. Так як значення $p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ невизначене, то і значення функції $\psi(x_1, \dots, x_n)$ також невизначене. Аналогічно невизначеним буде і значення функції $\Psi(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$.
- 2) ■ Нехай значення арифметичного предикату $p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ визначене і дорівнює T , тоді і значення $P^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ визначене і також

дорівнює T . В цьому випадку треба розглянути свої два випадки:

- нехай значення функції $f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ визначене, тоді визначене значення функції $\psi(x_1, \dots, x_n)$ яке рівне $f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$; з означення представляючої впливає, що визначене значення $F_1^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$, яке рівне $\{f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}$;
- нехай значення функції $f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ невизначене, тоді невизначене і значення функції $\psi(x_1, \dots, x_n)$; з означення представляючої впливає, що невизначеним буде і значення $F_1^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$, отже $\Psi^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ також невизначене.*

3) ■ Останній випадок, коли значення предикату $p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ визначене і рівне F зводиться до попереднього випадку, так як має місце загальнозначна властивість розгалуження:

$$\diamond^{(3)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}) = \diamond^{(3)}(\neg p^{(n)}, f_2^{(n)}, f_1^{(n)}).$$

Таким чином, в усіх трьох можливих випадках виконується узагальнена рівність $\Psi^{(n)}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) \approx \{\psi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}$.

Випадок розгалуження предикатів по предикату розглядається повністю аналогічно. □

Лема 8 (про представляючу циклування).

Якщо множинні функції $F_1^{(n)}, \dots, F_n^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)}$, а множинний предикат $p^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то тоді циклування $\ast^{(n+1)}(p^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ представляє циклування $\ast^{(n+1)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)})$. □

Таким чином, лема стверджує, що представляюча циклування функцій по предикату є циклуванням представляючих функцій по предикату, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Нехай $g \stackrel{\text{def}}{=} \ast(p, f_1, \dots, f_n)$ та $G \stackrel{\text{def}}{=} \ast(P, F_1, \dots, F_n)$. Нам треба показати, що множинна функція G представляє арифметичну функцію g . Для цього розглянемо довільні натуральні $x_1, \dots, x_n$ і доведемо узагальнену рівність:

$$G(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) \approx \{g(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Згідно з означення циклування розглянемо послідовність $\{X_i^j\}_{j=0,1,\dots}^i$, де $X_i^0 = x_i$,

$X_i^{j+1} = f_i(X_1^j, \dots, X_n^j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots$. Ця послідовність потрібна для визначення значення $g(x_1, \dots, x_n)$. Аналогічно, для визначення значення $G(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ розглянемо послідовність $\{X_i^j\}_{j=0,1,\dots}^i$, де $X_i^0 = \{x_i\}$, $X_i^{j+1} = F_i(X_1^j, \dots, X_n^j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots$.

Індукцією по $j = 0, 1, \dots$ встановимо узагальнену рівність $X_i^j \approx \{x_i^j\}$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Базис індукції очевидний.

Проведемо індуктивний крок:

$$\begin{aligned} X_i^{j+1} &\approx F_i(X_1^j, \dots, X_n^j) \approx F_i(\{x_1^j\}, \dots, \{x_n^j\}) \approx \\ &\approx \{f_i(x_1^j, \dots, x_n^j)\} \approx \{x_i^{j+1}\}. \end{aligned}$$

Звідси впливає наступна узагальнена рівність для всіх $j = 0, 1, \dots$: $P(X_1^j, \dots, X_n^j) \approx p(x_1^j, \dots, x_n^j)$.

Дійсно, враховуючи, що множинний предикат P представляє арифметичний предикат p , маємо ланцюжок узагальнених рівностей:

$$P(X_1^j, \dots, X_n^j) \approx P(\{x_1^j\}, \dots, \{x_n^j\}) \approx p(x_1^j, \dots, x_n^j).$$

Залишається використати означення циклування. □

З останніх чотирьох лем безпосередньо впливає наступний наслідок.

Наслідок 1. В множинній ППА з елементів системи Σ можна побудувати множинну представляючу довільної частково рекурсивної арифметичної функції. □

Далі побудуємо нумерацію ξ скінченних множин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ' непорожніх множин натуральних чисел.

Нехай $M = \{n_1, \dots, n_m\}$, де $m \geq 1$, $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ – непорожня скінченна множина натуральних чисел; покладемо, що $\xi'(M) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{n_2+1} \cdot \dots \cdot p_{m-1}^{n_{m-1}+1}$.

Тут і надалі, p_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ – i -те просте число згідно [8] ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \dots$).

Шукана нумерація ξ задається кусковою схемою:

$$\xi(M) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } M = \emptyset, \\ \xi'(M), & \text{інакше,} \end{cases}$$

де M – скінченна множина натуральних чисел. Сім'ю всіх скінченних множин натуральних чисел позначимо 2_{fin}^N .

Очевидно, що побудована нумерація ξ є ефективною в тому розумінні, що по довільному натуральному числу можна ефективно з'ясувати,

чи є воно кодом скінченної множини і ефективно відновити цю множину. Лема 9 уточнює це твердження.

Лема 9. Нумерація ξ ін'єктивна, а її область значень $range \xi$ рекурсивна. $\square$

Доведення.

■ Спочатку доведемо від супротивного, що функція $\xi: 2_{fm}^N \rightarrow N$ – ін'єктивна. Дійсно, нехай ξ – не ін'єктивна, тоді існують дві різні множини $M_1, M_2 \in 2_{fm}^N$, такі що $\xi(M_1) = \xi(M_2)$.

Розглянемо два випадки. Перший випадок, коли хоча б одна з множин M_1 або M_2 порожня.

Нехай, наприклад, $M_1 = \emptyset$. Тоді $\xi(M_1) = \xi(\emptyset) = 1$. Так як, за припущенням, $\xi(M_1) = \xi(M_2)$, то відповідно і $\xi(M_2) = 1$. Нумерація ξ будувалася так, що значення 1 вона приймає тільки на порожній множині. Звідси випливає, що $M_2 = \emptyset$. Прийшли до протиріччя. Аналогічно розглядається випадок, коли $M_2 = \emptyset$.

Розглянемо другий випадок, коли обидві множини не порожні: $M_1 \neq \emptyset$ і $M_2 \neq \emptyset$. Покладемо:

$$M_1 = \{n_1^1, \dots, n_{m_1}^1\}, \quad n_1^1 < \dots < n_{m_1}^1, \quad m_1 \geq 1;$$

$$M_2 = \{n_1^2, \dots, n_{m_2}^2\}, \quad n_1^2 < \dots < n_{m_2}^2, \quad m_2 \geq 1.$$

Оскільки, $\xi(M_1) = \xi(M_2)$, тоді $2^{n_1^1+1} \cdot \dots \cdot p_{m_1-1}^{n_{m_1-1}^1+1} = 2^{n_1^2+1} \cdot \dots \cdot p_{m_2-1}^{n_{m_2-1}^2+1}$. З цього випливає, що $m_1 = m_2 = m$ та для всіх $i = 1, \dots, m$ виконуються рівності $n_i^1 + 1 = n_i^2 + 1$, тобто $n_i^1 = n_i^2$. Таким чином, множини M_1, M_2 рівні. Прийшли до протиріччя.*

■ Тепер доведемо, що $range \xi$ – рекурсивна множина. Область значень функції ξ задається наступним чином:

$$range \xi = \{1\} \cup \{2^{n_1} \cdot \dots \cdot p_{m-1}^{n_{m-1}} \mid 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_m, m \geq 1\}.$$

Отже, можна запропонувати наступну розв'язуючу процедуру приналежності елементу множині $range \xi$.

Нехай x – довільне натуральне число. Якщо $x = 1$, то $x \in range \xi$. Якщо $x = 0$, то $x \notin range \xi$.

Якщо $x \notin \{0, 1\}$, то розкладаємо x за степенями простих чисел: $x = p_{i_1}^{n_1} \cdot p_{i_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot p_{i_m}^{n_m}$, де $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $n_1, n_2, \dots, n_m \geq 1$. Очевидно, що в цьому випадку, $x \in range \xi$ тоді і тільки тоді,

коли $i_1 = 0, i_2 = i_1 + 1, \dots, i_m = i_{m-1} + 1$. Таким чином, спираючись на тезу Чорча [7], можна стверджувати, що множина $range \xi$ рекурсивна. $\square$

Наявність ефективної нумерації сім'ї скінченних множин натуральних чисел дає змогу ввести обчислюваність на сім'ї скінченних множин натуральних чисел 2_{fm}^N згідно з нумераційним підходом до обчислюваності [9]. Дамо формальне означення.

Множинну n -арну функцію F назовемо частково рекурсивною, якщо існує n -арна частково рекурсивна арифметична функція f , така що виконується узагальнена рівність: $\xi(F(M_1, \dots, M_n)) = f(\xi(M_1), \dots, \xi(M_n))$ для всіх $M_1, \dots, M_n \in 2_{fm}^N$.

Лема 10. Існує рекурсивна арифметична функція f_ξ , така, що $f_\xi: N \rightarrow range \xi$, причому f_ξ – бієкція. $\square$

Доведення. Змістовно теорема доводиться за тезою Чорча (див., наприклад, [7]). Дамо неформальний алгоритм обчислення значень функції f_ξ . Цей алгоритм задається рекурсією: $f_\xi(0)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної рекурсивної множини $range \xi$; $f_\xi(x+1)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної множини $range \xi$, такому, що не належить множині $\{f_\xi(0), \dots, f_\xi(x)\}$. Наведемо більш формальне доведення.

Нехай χ_ξ – характеристична функція множини $range \xi$. Оскільки, згідно з лемою 9, ця множина – рекурсивна, то функція χ_ξ – рекурсивна. Функція f_ξ задається рекурсією:

$$\text{Базис. } f_\xi(0) = \mu_n(\chi_\xi(n) = 1), \text{ тобто } f_\xi(0) = 1.$$

Індуктивний крок:

$$f_\xi(x+1) = \mu_n(\chi_\xi(n) = 1 \wedge n \notin \{f_\xi(0), \dots, f_\xi(x)\}).$$

Зрозуміло, що за побудовою маємо нерівності $f_\xi(0) < f_\xi(1) < \dots < f_\xi(n) < \dots$. Звідси і випливає, що рекурсивна функція f_ξ – бієкція вигляду $f_\xi: N \rightarrow range \xi$. $\square$

Тепер розглянемо множинну функцію, яка моделює нумерацію ξ , та множинну функцію, яка моделює функцію ξ^{-1} : $F_\xi(M) = \{\xi(M)\}$ для

всіх $M \in 2_{fin}^N$; $F_{\xi^{-1}}(\{n\}) = \xi^{-1}(n)$ для всіх $n \in \text{range } \xi$.

Змістовно кажучи, функція F_ξ є кодуною функцією, а $F_{\xi^{-1}}$ є розкодуною. Значення цих функцій розкриває наступна лема про представлення, доведення якої впливає з відповідних означень.

Лема 11. Нехай F – n -арна частково рекурсивна множинна функція, а G – n -арна множинна функція, що представляє арифметичну частково рекурсивну функцію з означення часткової рекурсивності F . Тоді для довільних $M_1, \dots, M_n \in 2_{fin}^N$ виконується узагальнена рівність $F(M_1, \dots, M_n) = F_{\xi^{-1}}(G(F_\xi(M_1), \dots, F_\xi(M_n)))$. $\square$

Введемо наступне позначення: $[F \cup P]$ – замикання множини функцій та предикатів $F \cup P$ в множинній ППА.

Лема 12 (побудова кодуноюї функції по розкодуноюї). Функцію F_ξ можна побудувати з елементів системи Σ та функції $F_{\xi^{-1}}$ в множинній ППА: $F_\xi \in [\Sigma \cup \{F_{\xi^{-1}}\}]$. $\square$

Доведення. Нехай $F(f_\xi)$ – множинна функція, що представляє арифметичну рекурсивну функцію f_ξ . З наслідку 1 випливає, що $F(f_\xi) \in [\Sigma]$. Розглянемо наступну функцію:

$$H(X, Y) = (F_{\xi^{-1}}(F(f_\xi)(Y)) = X) * (Y = G_s(Y)),$$

де $G_s(Y) = Y \oplus \{1\}(Y)$ – множинна представляюча арифметичної функції слідування $s(x) = x + 1$.

Можна перевірити, що $F_\xi(X) = F(f_\xi)(H(X, \{0\}))$.

Основна ідея побудови кодуноюї функції по розкодуноюї полягає в наступному. Нехай M – деяка скінченна множина. Перебираємо елементи множини $\text{range } \xi$ (коди) в порядку $f_\xi(0), f_\xi(1), \dots$. До поточного елемента (коду) вигляду $f_\xi(i)$ застосовуємо функцію ξ^{-1} та порівнюємо значення $\xi^{-1}(f_\xi(i))$ з M ; якщо виконується рівність $\xi^{-1}(f_\xi(i)) = M$, то $\xi(M) = f_\xi(i)$. Проведені побудови в множинній ППА і реалізують що ідею, коли натуральні числа представляються сінглтонами, а арифметичні функції та предикати – їх представляючими. $\square$

Лема 13. Функцію $F_{\xi^{-1}}$ можна побудувати з елементів системи Σ в множинній ППА: $F_{\xi^{-1}} \in [\Sigma]$. $\square$

Доведення. Розглянемо наступні функції:

$$\tilde{F}_{\xi^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{\xi^{-1}}(X) \div \{1\}(X),$$

$$\tilde{\tilde{F}}_{\xi^{-1}}(X, Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} (X \neq \{1\}(X))$$

$$* (Y \cup F_{\text{exp}}(Z, X), F_{\text{div}}(X, F_{\text{deg}}(F_p(Z), F_{\text{exp}}(Z, X))) \wedge G_s(Z))$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{F}}}_{\xi^{-1}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\tilde{F}}_{\xi^{-1}}(X, \{\emptyset\}(X), \{0\}(X)).$$

Вище $F_{\text{exp}}(X, Y)$, $F_{\text{div}}(X, Y)$, $F_{\text{deg}}(X, Y)$, $G_s(Z) \in [\Sigma]$ – множинні представляючі відповідно теоретико-числових функцій $\text{exp}(x, y)$, $\text{div}(x, y)$, $\text{deg}(x, y)$, $s(z)$ [8].

Має місце наступна рівність: $F_{\xi^{-1}}(X) = \emptyset(X = \{1\}(X), \emptyset(X), \tilde{\tilde{F}}_{\xi^{-1}}(X))$. $\square$

Теорема 1. Система Σ є системою породжуючих множинної ППА. $\square$

Доведення випливає з наслідку 1 та лем 11-13. $\square$

Мультимножинна примітивна програмна алгебра

Носієм мультимножинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над скінченними мультимножинами натуральних чисел. Сигнатура складається з тих же операцій, що в арифметичній та множинній ППА.

Система породжуючих мультимножинної ППА Σ_m складається з предикату рівності мультимножин $\alpha = \beta$, функцій об'єднання $\alpha \cup_{\text{all}} \beta$, додавання $\alpha \oplus \beta$ та віднімання $\alpha \div \beta$ мультимножин, константних функцій $\{1'\}(\alpha)$ та $\emptyset_m(\alpha)$, що фіксують відповідно мультимножину вигляду $\{1'\}$ та порожню мультимножину $\emptyset_m$, специфічної функції над мультимножиною $\varphi(\alpha)$ та селекторних функцій I_m^n :

$$\Sigma_m \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha = \beta, \alpha \cup_{\text{all}} \beta, \alpha \oplus \beta, \alpha \div \beta, \{1'\}(\alpha), \emptyset_m(\alpha), \varphi(\alpha), I_m^n\}_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}.$$

Дамо означення функціям об'єднання $\cup_{\text{all}}$, додавання $\oplus$, віднімання $\div$ мультимножин та функції φ .

Перш ніж вводити означення функцій додавання $\oplus$ та віднімання $\div$ мультимножин, спочатку нагадаємо означення повного образу для мультимножин відповідно до [12].

Повним образом мультимножини α з основою U відносно функції $f: D \rightarrow D$ назвемо мультимножину, яка позначається $f[\alpha]$. Її основою є повний образ множини U відносно функції f , а значення характеристичної функції на аргументі d задається рівністю $\sum_{d' \in f^{-1}(d)} \chi_\alpha(d')$, де

$f^{-1}(d)$ позначає повний прообраз елемента d відносно функції f . Покладемо, також, що сума порожньої множини доданків рівна 0.

Тоді операція додавання мультимножин визначається через повний образ відносно стандартного додавання наступним чином: $\alpha \oplus \beta = +[\alpha \otimes \beta]$.

Аналогічно визначається операція віднімання мультимножин через повний образ відносно бінарної операції зрізаної різниці: $\alpha \ominus \beta = -[\alpha \otimes \beta]$.

Вище $\otimes$ – бінарна операція з'єднання мультимножин [12].

Функція $\varphi(\alpha)$ визначається як $\{n_1^1\}, \{k_1^1\} \mapsto \{n_1^1\}$. При $k_1 = 0$, $\varphi(\alpha) = \emptyset$.

Функція об'єднання $\bigcup_{\alpha \in M} \alpha$ мультимножин визначається стандартно [3].

Аналогічно до множинних представляючих, вводиться означення мультимножинних представляючих функцій та предикатів. Це потрібно для можливості моделювання арифметичних функцій (предикатів) мультимножинними функціями (предикатами). Основна ідея полягає в представленні натурального числа n мультимножинним сінглтоном $\{n^1\}$.

Лема 14 (про мультимножинні представляючі елементи системи σ'_N).

Представляючі для елементів системи σ'_N :

- 1) предикат $\alpha = \beta$ представляє предикат $x = y$;
- 2) функція $\alpha \oplus \beta$ представляє функцію $x + y$;
- 3) мультимножинний селектор I_m^n представляє арифметичний селектор I_m^n ;
- 4) константна функція $\{1^1\}(\alpha)$ є представляючою функції $1(x)$. $\square$

Розглянемо представляючі функцій (предикатів), які будуються операціями суперпозиції, розгалуження та циклування.

Лема 15 (про представляючу суперпозиції). Якщо мультимножинні функції $F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)}$ представляють відповідно

арифметичні функції $f^{(m)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)}$, то суперпозиція $S^{(m+1)}(F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, \dots, F_m^{(n)})$ представляє суперпозицію $S^{(m+1)}(f^{(m)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})$. $\square$

Доведення. Проводиться аналогічно лемі 6 про множинну представляючу суперпозиції. $\square$

Лема 16 (про представляючу розгалуження). Якщо мультимножинні функції $F_1^{(n)}, F_2^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$, а мультимножинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то тоді розгалуження $\delta^{(3)}(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ представляє розгалуження $\delta^{(3)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)})$. $\square$

Доведення. Проводиться аналогічно лемі 7 про множинну представляючу розгалуження. $\square$

Лема 17 (про представляючу циклування). Якщо мультимножинні функції $F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)}$, а мультимножинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то тоді циклування $\ast^{(n+1)}(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ представляє циклування $\ast^{(n+1)}(p^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})$. $\square$

Доведення. Проводиться аналогічно лемі 8 про множинну представляючу циклування. $\square$

Наслідок 2. В мультимножинній ППА з елементів системи Σ_M можна побудувати мультимножинну представляючу довільної частково рекурсивної арифметичної функції. $\square$

Побудуємо нумерацію ξ_M скінченних мультимножин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ'_M скінченних непорожніх мультимножин натуральних чисел.

Нехай $\alpha = \{n_1^{k_1}, \dots, n_m^{k_m}\}$, де $m \geq 1$, $k_1, \dots, k_m \geq 1$, $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ – непорожня скінченна мультимножина натуральних чисел; покладемо, що:

$$\xi'_M(\alpha) = 2^{n_1^{k_1}} \cdot 3^{n_2^{k_2}} \cdot 5^{n_3^{k_3}} \cdot 7^{n_4^{k_4}} \cdot \dots \cdot p_{2m-2}^{n_{2m-2}^{k_{2m-2}}} \cdot p_{2m-1}^{n_{2m-1}^{k_{2m-1}}} = \prod_{i=1}^m p_{2i-2}^{n_{2i-2}^{k_{2i-2}}} \cdot p_{2i-1}^{n_{2i-1}^{k_{2i-1}}}$$

Шукана нумерація ξ_M задається кусковою схемою:

$$\xi_M(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha = \emptyset, \\ \xi'_M(\alpha), & \text{інакше,} \end{cases}$$

де α – скінченна мультимножина натуральних чисел. Сім'ю всіх скінченних мультимножин натуральних чисел позначимо M .

Побудована нумерація ξ_m є ефективною. Наступна лема уточнює це твердження.

Лема 18. Нумерація ξ_m ін'єктивна, а її область значень $\text{range } \xi_m$ рекурсивна. $\square$

Доведення. Проводиться аналогічно лемі 9. $\square$

Маючи у розпорядженні ефективну нумерацію сім'ї скінченних мультимножин натуральних чисел, поняття частково рекурсивної функції переноситься на випадок мультимножин стандартно.

Аналогічно, як і для випадку множин, доводиться наступна теорема, що вирішує проблему повноти для мультимножинної ППА.

Теорема 2. Система Σ_m є системою породжуючих мультимножинної ППА. $\square$

Що стосується застосування отриманих результатів, то частково рекурсивні мультимножинні функції є моделлю так званих обчислень на ДНК [4]. Крім того, уточненнями таблиць з дублікатами рядків в табличних базах даних виступають мультимножини рядків; таким чином, частково рекурсивні мультимножинні функції є моделями алгоритмічних маніпуляцій над таблицями [3].

Висновки

Стаття присвячена обчислюваності на множинах та мультимножинах. Обчислюваність вводиться як нумераційна обчислюваність за А.І. Мальцевим. Апаратом для задання класу обчислюваних функцій виступають примітивні програмні алгебри, введені В.Н. Редьком.

Спочатку наводяться основні визначення теорії ППА та будується нова (більш зручна в технічному плані) система породжуючих арифметичної ППА, яка базується на вже побудованій у роботі [5] повній системі породжуючих арифметичної ППА.

На основі побудованої системи породжуючих арифметичної ППА будуються системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА. Носієм множинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над скінченними множинами натуральних чисел. А носієм мультимножинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над мультимножинами, основами яких виступають скінченні множини натуральних чисел.

Отримані системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА природні та споріднені між собою. Зокрема, вони містять предикат рівності, а їх бінарні операції виникають із стандартних арифметичних операцій додавання та зрізаної різниці шляхом їх розповсюдження за допомогою повного образу.

Список використаних джерел

1. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
2. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.01.09 – математическая кибернетика / Буй Дмитрий Борисович. – Киев, 1984. – 150.
3. Буй Д.Б., Богатырьова Ю.О. Сучасний стан теорії мультимножин. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – №1. – С. 51-58.
4. Буй Д.Б., Богатырёва Ю.А. Формальная модель ДНК-вычислений // Матеріали Першого З'їзду "Медицина та біологічна інформатика і кібернетика", 23-26 червня 2010, Київ, Україна. – 2010. – С. 221.
5. Буй Д.Б., Редько В.Н. Примитивные программные алгебры. I // Кибернетика. – 1984. – №4. – С. 1-7.
6. Буй Д.Б., Редько И.В. Примитивные программные алгебры вычислимых функций // Кибернетика. – 1987. – №3. – С. 68-74.
7. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 256 с., ил.
8. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1986. – 367 с.
9. Мальцев А.И. Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, №3. – С. 3-60.
10. Редько В.Н. Императивные программные логики (основные результаты и открытие проблемы) – В. кн.: Тезисы докладов II Всесоюзной конференции по автоматизации производства ППП и трансляторов. Таллин: изд. Таллинского политех. ин-та, 1983, с. 109-111.
11. Редько В.Н. Универсальные программные логики и их применение. – В. кн.: Труды Всесоюзного симпозиума по теоретическому и системному программированию. Кишинев.: Штиница, 1983, с. 310-326.
12. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.

Надійшла до редколегії 25.11.10

УДК 004.932.72 : 517.972

Верченко А.П., к. ф.-м. н.

Виділення об'єктів з цифрового зображення на основі еволюції активного полігона

Розглядається задача виділення об'єктів на цифровому зображенні за допомогою активних полігонів. Модель активного полігону отримано на основі варіаційного підходу як спрощення моделі активного контуру. В якості критерію оптимальності використовується функціонал типу Мамфорда-Шаха, для такого випадку запропоновано ітераційну процедуру та варіант чисельної реалізації.

Ключові слова. варіаційний підхід, модель активного контуру.

*E-mail: An.Verchenko@gmail.com

Статтю представив доктор техн. наук Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Останнім часом модель активного контуру (або snakes) [1] широко використовується в задачах виділення структурованих та неструктурованих об'єктів з цифрових зображень. Вперше активні контури були введені в [2]. Основна ідея заключається в еволюції контуру на цифровому зображенні з врахуванням накладених на нього обмежень. Стартуючи з кривої, що обмежує об'єкт, який необхідно виділити, контур рухається в напрямку внутрішньої нормалі і зупиняється на границі об'єкту. При цьому розв'язується задача мінімізації функціоналу енергії, що складається з доданків, які враховують інформацію про границі (edges) на зображенні в точках контуру, а також контролюють спроможність контуру вигинатись (bend) і розтягуватись (stretch) [2].

Нехай задано цифрове зображення $u(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тоді в [3] пропонується мінімізувати функціонал вигляду:

$$E_{snake} = \int_0^1 (E_{int}(v(s)) + E_{image}(v(s)) + E_{con}(v(s))) ds, \quad (1)$$

де $v(s) = (x(s), y(s))^T$ – крива (активний контур) на цифровому зображенні, визначена на відрізок $s \in [0, 1]$; внутрішня енергія E_{int} контролює

A.P. Verchenko, Ph.D.

Object extraction from digital images based on the evolution of the active polygon

Given is a problem of object extraction from digital image using active polygons. Active polygon model derived from variational approach as simplified case of the active contour model. We use a Mumford-Shah functional as optimality criterion. Iterative procedure and numerical implementation are developed.

Keywords: variational approach, active contour.

внутрішню поведінку контуру; енергія зображення E_{image} притягує контур до заданих низькорівневих характеристик (наприклад до граничних точок); E_{con} дозволяє контролювати еволюцію контуру за рахунок високорівневої інформації. Задача активного контуру – розвиватися в часі мінімізуючи функціонал (1). Таким чином, ми варіюємо вибір множини точок $v(s)$ таким чином, щоб досягти $\delta E_{snake} = 0$.

Розвиток методів на основі моделі активного контура можна подивитись, наприклад, в [1, 3]. Як важливий частинний випадок – в даній роботі пропонується розглядати випадок активних полігонів [4–8], коли замість неперервного контуру $v(s)$ вводиться його апроксимація полігоном з вершинами $V = (v^1, \dots, v^N)$. Серед переваг такого підходу – більш простіший вигляд моделі та менша чутливість її до шумів (у випадку текстурованих зображень) [4]. Крім того, спрощується рівняння для еволюції активного полігону: замість системи рівнянь в частинних похідних, як для моделі активного контуру, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь.

В даній роботі за основу взято модель активного контуру з [2], яка потім спрощується на випадок активного полігону. Далі за рахунок введення довільної варіації розглядається збурення допустимого процесу і виписуються

умови, при яких мінімізується функціонал якості [9]. Отримані результати узгоджуються з [4–6], проте мають і ряд особливостей.

Модель активного полігону

Аналогічно [2, 8] покладемо в (1) $E_{con} = 0$;

$$E_{int}(v(s)) = \alpha(s) \left\| \frac{dv(s)}{ds} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{d^2v(s)}{ds^2} \right\|^2;$$

$$E_{image}(s, v(s)) = -\lambda(s) \cdot E_{edge}(v(s)) \equiv \\ \equiv -\lambda(s) \|\nabla u(v(s))\|^2.$$

Тут величини $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\lambda(s)$, $s \in [0, 1]$ задають вагові множники для кожної точки з контуру.

Зауважимо, що мінімізуючи (1), ми намагаємось розташувати точки контуру в точках максимуму функції границь $E_{edge}(v(s))$, зберігаючи при цьому гладкість контуру за рахунок інших доданків.

Розглянемо далі замість неперервного активного контуру $v(s)$ – замкнений полігон з вершинами $V = (v^1, \dots, v^N)$, де $v^{N+1} \equiv v^1$, $v^0 \equiv v^N$. Тоді точки $v^k(s)$ активного контуру між вершинами v^k та v^{k+1} ($k = 1, \dots, N$) задовольняють співвідношенню $v^k(s) = (1-s) \cdot v^k + s \cdot v^{k+1}$, $s \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, N$.

Тоді для випадку активного полігона перший доданок у внутрішній енергії E_{int} можна

розписати як $\alpha(s) \left\| \frac{dv^k(s)}{ds} \right\|^2 = \alpha(s) \|v^{k+1} - v^k\|^2$, $k = 1, \dots, N$ і проінтерпретувати як довжину

контуру (тут точки $v^k(s)$ лежать на відрізку, що з'єднує вершини v^k та v^{k+1}). Очевидно, що другий доданок в E_{int} у випадку полігонів перетворюється в нуль.

Тоді функціонал (1) для випадку активного полігону матиме вигляд:

$$E_{AP}(V) = \sum_{k=1}^N \int_0^1 [\alpha^k(s) \cdot \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \\ - \lambda^k(s) E_{edge}(v^k(s))] ds,$$

де функції $\alpha^k(s)$, $\lambda^k(s)$ ($k = 1, \dots, N$; $s \in [0, 1]$) визначають зважені коефіцієнти для кожної точки з контуру полігону.

Як правило, достатньо покласти $\alpha^k(s) = \alpha > 0$, $\lambda^k(s) = \lambda > 0$ для всіх сторін

полігону. Тоді вигляд функціоналу можна спростити:

$$E_{AP}(V) = \sum_{k=1}^N [\alpha \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \\ - \lambda \int_0^1 E_{edge}(v^k(s)) ds]. \quad (2)$$

Для обчислення варіації функціоналу (2) розглянемо допустимий розв'язок $\hat{v} = \{\hat{v}^k = (\hat{x}^k, \hat{y}^k), k = 1, \dots, N\}$. Введемо

збурення $\varepsilon \cdot \delta v$ [10], на якому досягається мінімум функціоналу енергії, тобто $\frac{dE_{AP}(\hat{v} + \varepsilon \delta v)}{d\varepsilon} = 0$, де $\delta v = \{\delta v^k, k = 1, \dots, N\}$,

$\delta v^k = (\delta v_x^k, \delta v_y^k)$. Тоді варіацію точки контуру $v^k(s)$ можна записати у вигляді:

$$\delta v^k(s) = (1-s) \delta v^k + s \cdot \delta v^{k+1}, \\ k = 1, \dots, N; s \in [0, 1].$$

Розглянемо збурення функціоналу (2):

$$E_{AP}(\hat{V} + \varepsilon \delta v) = \\ = \sum_{k=1}^N [\alpha \|\hat{v}^{k+1} - \hat{v}^k + \varepsilon(\delta v^{k+1} - \delta v^k)\|^2 - \\ - \lambda \int_0^1 E_{edge}(\hat{v}^k(s) + \varepsilon \delta v^k(s)) ds]. \quad (3)$$

Розкладаючи підінтегральний вираз в (3) в ряд Тейлора, отримуємо, що

$$E_{edge}(\hat{v}^k(s) + \varepsilon \delta v^k(s)) = \\ = E_{edge}(\hat{v}^k(s)) + \varepsilon \delta v_x^k(s) \frac{\partial E_{edge}(\hat{v}^k(s))}{\partial x} + \\ + \varepsilon \delta v_y^k(s) \frac{\partial E_{edge}(\hat{v}^k(s))}{\partial y} + o(\varepsilon^2).$$

Тоді, розкриваючи норми в (3) та нехтуючи членами розкладу вище першого порядку, одержуємо:

$$E_{AP}(\hat{V} + \varepsilon \delta v) = \sum_{k=1}^N \left[-\lambda \int_0^1 (E_{edge}(\hat{v}^k(s)) + \right. \\ \left. + \varepsilon \nabla E_{edge}^T(\hat{v}^k(s)) \cdot \delta v^k(s)) ds + \right. \\ \left. + \alpha (\|\hat{v}^{k+1} - \hat{v}^k\|^2 + 2\varepsilon (\hat{v}^{k+1} - \hat{v}^k)^T (\delta v^{k+1} - \delta v^k)) \right] = \\ = E_{AP}(\hat{V}) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^N [\alpha (\hat{v}^{k+1} - \hat{v}^k)^T (\delta v^{k+1} - \delta v^k) - \\ - \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 \nabla E_{edge}(\hat{v}^k(s))^T \cdot \delta v^k(s) ds] =$$

$$= E_{AP}(\hat{V}) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^N A_k. \quad (4)$$

Розпишемо в (4) окремо вираз $\sum_{k=1}^N A_k$, згрупувавши разом доданки, що містять δv^k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N A_k = & \sum_{k=1}^N \left[\alpha \left((v^k - v^{k-1})^T - (v^{k+1} - v^k)^T \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 \left[(1-s) \cdot \nabla E_{edge} (v^k(s))^T + \right. \\ & \left. + s \cdot \nabla E_{edge} (v^{k-1}(s))^T \right] ds \cdot \delta v^k + \\ & + \alpha (v^{N+1} - v^N)^T \cdot \delta v^{N+1} - \alpha (v^1 - v^0)^T \cdot \delta v^1 - \\ & - \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 s \cdot \nabla E_{edge} (v^N(s))^T \cdot \delta v^{N+1} ds + \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 s \cdot \nabla E_{edge} (v^0(s))^T \cdot \delta v^1 ds. \right] \end{aligned}$$

Щоб збурений функціонал (4) приймав мінімальне значення, потрібно позбутись доданків, що містять δv^k , $k=1, \dots, N$. Враховуючи, що варіації δv^k можуть бути довільними і що $\hat{v}^{N+1} \equiv \hat{v}^1$, $\hat{v}^0 \equiv \hat{v}^N$, $\delta \hat{v}^{N+1} \equiv \delta \hat{v}^1$, остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \alpha (2v^k - v^{k-1} - v^{k+1}) - \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 [s \cdot \nabla E_{edge} (v^{k-1}(s)) + \\ + (1-s) \nabla E_{edge} (v^k(s))] ds = 0, \quad k=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Ввівши неперервний аргумент t і функції $v^k(t)$ такі, що $v^k(t_0) = v^k$, $k=1, \dots, N$, приходимо до неперервного аналогу градієнтного методу [9, 11], який мінімізує з часом значення функціоналу (2):

$$\begin{aligned} \frac{dv^k(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \lambda \int_0^1 [s \cdot \nabla E_{edge} (v^{k-1}(t, s)) + \\ & + (1-s) \nabla E_{edge} (v^k(t, s))] ds + \\ & + \alpha (v^{k-1}(t) - 2v^k(t) + v^{k+1}(t)), \\ & k=1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $E_{edge}(v(t)) = \|\nabla u(v(t))\|^2$, $v^k(t, s) = (1-s) \cdot v^k(t) + s \cdot v^{k+1}(t)$, $s \in [0, 1]$, $k=1, \dots, N$.

Чисельна реалізація моделі

Нехай h – просторовий крок (як правило, для растрових зображень його покладають рівним розміру пікселя, тобто $h=1$), Δt – крок по часу.

Нехай (x_i, y_j) – дискретні точки на прямокутній області Ω ($i=1, \dots, W$, $j=1, \dots, H$; W, H – відповідно ширина та висота зображення) і $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $v_n^k \approx v^k(n \Delta t)$, $n \geq 0$. Покладемо $n=0$, $\Delta t=0.1$ і будемо стартувати з заданого початкового наближення контуру $v_0^k = v^k$, $k=1, \dots, N$. Застосуємо наступні різницьві апроксимації [9, 12]:

$$(u_{ij})_x = (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) / (2h);$$

$$(u_{ij})_y = (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) / (2h);$$

$$(u_{ij})_{xx} = (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / h^2;$$

$$(u_{ij})_{yy} = (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) / h^2;$$

$$(u_{ij})_{xy} = \frac{2u_{ij} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h^2}.$$

Розпишемо окремо градієнт $\nabla E_{edge}(x_i, y_j)$, $i=1, \dots, W$, $j=1, \dots, H$ у виразі (6). Маємо:

$$\nabla E_{edge}(x_i, y_j) = \left(\frac{\partial (\|\nabla u(x, y)\|^2)}{\partial x}, \frac{\partial (\|\nabla u(x, y)\|^2)}{\partial y} \right)_{(x,y)=(x_i,y_j)} =$$

$$= 2 \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right)_{(x,y)=(x_i,y_j)}$$

Тоді, використовуючи введені вище апроксимації та метод прямокутників для чисельного інтегрування, на основі (6) можна виписати ітераційну процедуру:

$$v_{n+1}^k = v_n^k + \Delta t \cdot \left(\frac{1}{2} \lambda h_p \sum_{i=0}^P [i h_p \cdot \nabla E_{edge} (v_n^{k-1}(i h_p)) + \right. \quad (7)$$

$$\left. + (1-i h_p) \nabla E_{edge} (v_n^k(i h_p)) \right] + \alpha (v_n^{k-1} - 2v_n^k + v_n^{k+1})),$$

$$k=1, \dots, N, \quad n \geq 0,$$

де $h_p = 1/P$ (P – кількість точок для апроксимації інтегралу в (6)); $v_n^k(q) = (1-q) \cdot v_n^k + q \cdot v_n^{k+1}$, $k=1, \dots, N$; враховано також, що $s = i h_p$ ($i=0, \dots, P$, тоді $s \in [0, 1]$).

Об'яслювальний експеримент

На основі запропонованої чисельної схеми було створено програмний модуль (з використанням мови програмування C++ та мультиплатформенної бібліотеки Qt).

На штучних тестових зображеннях одержано збіжність активного полігону до бажаного результату. На Рис.1 зображено стартовий полігон (з 60 вершинами, рівномірно розташованими на сторонах прямокутника) та результат застосування схеми (7) після 20 ітерацій.

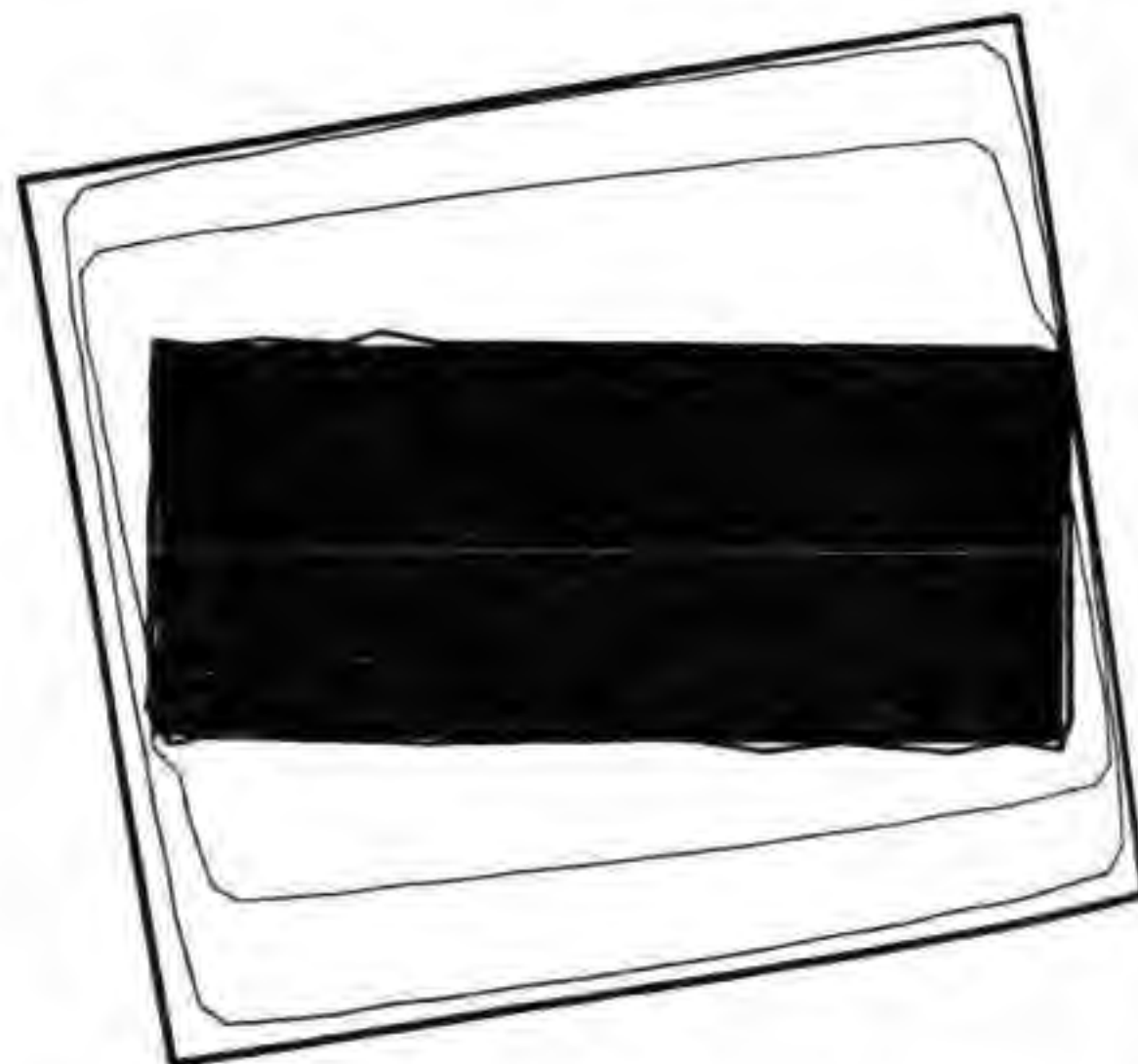


Рис. 1 Приклад роботи ітераційної процедури для штучного зображення (жирним виділено стартовий контур та, відповідно, активний полігон після 5, 9 та 20 ітерацій).

Список використаних джерел

1. Cao F. Geometric Curve Evolution and Image Processing: Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1805. – Springer, 2003. – 187p.
2. Kass M., Witkin A., Terzopoulos D. Snakes: Active contour models // International Journal of Computer Vision. – 1987. – №1. – P.321-323.
3. Blake A., Isard M. Active Contours: The Application of Techniques from Graphics, Vision, Control Theory and Statistics to Visual Tracking of Shapes in Motion. – Springer, 1998. – 352p.
4. Unal G., Yezzi A., Krim H. Information-Theoretic Active Polygons for Unsupervised Texture Segmentation // International Journal of Computer Vision. – 2005. – 62(3). – P.199-220.
5. Unal G., Krim H., Yezzi A. Active Polygon for Object Tracking // 3D Data Processing Visualization and Transmission, First International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission (3DPVT'02), 2002. – P. 696.
6. Lempelius F., Pauli J. Active contour based object detection // Proc. International Conference on Pattern Recognition and Information Processing, Minsk, Belarus, Seiten, 1997. – P.171-175.
7. Bruckstein A.M., Sapiro G., Shaked D. Evolutions of Planar Polygons // Int. J. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. – 1995. – Vol.9, P.991-1014.
8. Chan T.F., Vese L.A. Active Contours Without Edges // IEEE Transactions on Image Processing. – 2001. – 10. – P.266-277.
9. Latecki L., Lak R. Polygon Evolution by Vertex Deletion // In Proceedings of the Second International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision (SCALE-SPACE '99). – Springer-Verlag, London, UK. – P.398-409.
10. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наук. думка, 1985. – 304с.
11. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. К задаче адаптивной аппроксимации сигналов с минимальной среднеквадратической невязкой заданной глубины // Компьютерная математика. – 2006. – №3. – С. 159-169.
12. Верченко А. Алгоритм бінаризації зображень з урахуванням напівтонів // Праці 9 Всеукраїнської міжнародної конференції «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів» (УкрОБРАЗ'2008), Київ, Листопад 3-7, 2008. – С.185-188.

Надійшла до редколегії 1.11.2010.

УДК 517.7

Глибовець М.М., д. ф.-м. н., проф.,
Сидоренко М.О., асп.

Марковська модель оцінки вартості проекту з ризиком

У роботі було приведено модель, що дозволяє оптимізувати вартість проекту за наявності ризиків. Вона залежить від числа робіт, кількості і типу ресурсів, що необхідні для виконання певної роботи, в тому числі й затраченого часу при умові відсутності ризиків, а також мінімізованої функції затримки проекту. Остання обраховується в днях і знаходиться за допомогою марковських процесів прийняття рішень. У моделі зроблене припущення, що ризики не корелюють між собою.

Ключові слова: ризик, проект, марковські процеси.

M.M. Glibovets, doctor,
M.O. Sydorenko postgraduate student

Markov model of estimation of risky project cost

In the work the were given a model, which optimizes the value of the project in case of the availability of risk. It depends on the number of works, the number and type of resources required to perform certain work, the time required to perform work in case of the absence of risk and from minimized project delay function. The last one is calculated in days and is found with the help of Markov Decision Processes. There were made an assumption that risks aren't correlated with each other.

Key words: risk, project, Markov Process.

*E-mail: tinuriel@gmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., чл. кор. НАНУ, Анісімов А.В.

Вступ

Наразі процес аналізу і управління проектними ризиками став невід'ємною частиною управління проектами. У цій праці розглядається розв'язок задачі керування ризиками, а також вибору оптимальної комбінації запобіжних дій стосовно кожного ризику за допомогою процесів прийняття рішень Маркова.

Розглянемо основні терміни й означення, що стосуються предмету управління проектами [1].

Проект – це тимчасова дія, призначена для створення унікальних продуктів, послуг, результатів. Проекти є засобом організації операцій, які не можуть бути проведені в межах звичайної діяльності підприємства чи установи.

Управління проектами – це додаток до знань, навичок, інструментів і методів призначених для успішного досягнення цілей та завершення завдань проекту. Управління проекту виконується за допомогою застосування й інтеграції процесів ініціації, планування, виконання, моніторингу, управління й завершення.

Управління ризиками проекту включає в себе процеси, що відносяться до їх планування, ідентифікації й аналізу, реагування на ризики. Більшість з цих процесів підлягають відновленню в ході проекту. Метою управління ризиками проекту є підвищення ймовірності виникнення і впливу сприятливих подій, або зниження ймовірності виникнення і впливу несприятливих для проекту дій.

Ризик проекту – це невизначена подія чи умова, яка в випадку виникнення, має позитивний чи негативний вплив в меншій мірі на одну з цілей проекту, наприклад, терміни, вартість, склад, якість (в залежності від конкретного завдання: коли ціль проекту є його завершення відповідно до визначеного розкладу або результат проекту має не перебільшувати за вартістю обумовлений бюджет). Ризик може бути викликаний однією чи декількома причинами і в випадку виникнення може впливати на кілька факторів.

Існують кількісні методи аналізу ризиків при управлінні проектами [2,3]. Серед них найбільш

відомі і поширені у використанні є: аналіз чутливості (sensitivity analysis) параметрів проекту від зміни значень різних змінних, метод критичного шляху CPM (Critical Path Method) і метод оцінки й перегляду планів PERT (Program Evaluation and Review Technique), метод дерева рішень (decision tree analysis), діаграма впливу (influence diagrams). Деякі вчені пропонують проводити ряд аналітичних процедур на основі побудованої ієрархічної структури моделі АНР (analytical hierarchy process). В праці [4] також згадується про доцільність використання штучних нейронних мереж для моделювання проектних ризиків в якості альтернативи традиційним статистичним моделям.

Метою даної роботи є побудова математичної моделі для оптимізації оцінки вартості проекту при умові існування ризиків за використання процесів прийняття рішень Маркова [5,6,7].

Нагадаємо, що ланцюг Маркова - це послідовність випадкових подій зі скінченим числом результатів, для якої характерна властивість, що при фіксованому теперішньому стані, майбутнє не залежить від попереднього.

Модель прийняття рішень Маркова для певного середовища розвивається дискретними часовими періодами. Стан світу описується розподілом ймовірності. Особа, що приймає рішення, спостерігає поточну ситуацію середовища і обирає певну дію.

Мета, яку переслідує особа, що приймає рішення, - підібрати стратегію, яка максимізує сумарний прибуток у довготривалому періоді.

Оскільки за критерієм стану дане середовище є середовищем за Марковим, тобто, ймовірність наступного стану, зумовленого поточним станом, дією, яку обирає особа, що приймає рішення, і не залежать від попередніх. Оптимальна стратегія для особи, що приймає рішення, є детермінованою функцією тільки від поточного стану.

Припустимо, що ми знаємо значення функції ймовірності переходу зі стану в стан (s,s') і функції виграшів J . Знайдемо стратегію, яка максимізує очікуваний дисконтований прибуток.

Для заданої стратегії π і для початкового стану s , ми можемо відтворити процес і підрахувати очікуваний майбутній прибуток, за допомогою функції

$$V^{\pi}(s) = E\{R_0 + \gamma R_1 + \gamma^2 R_2 + \dots | s_0 = s; \pi\} = \\ = E\{\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R_t | s_0 = s; \pi\},$$

де R_t - миттєвий прибуток на t -тому кроці;

$$V^{\pi}(s) = \max_{\pi'} V^{\pi'}(s).$$

Ми говоримо, що стратегія π^* оптимальна, якщо вона максимізує функцію виграшу для кожного початкового стану, тобто: π^* - optimal $\Leftrightarrow \forall s: V^{\pi^*}(s) = V^*(s)$.

- це сума очікуваних прибутків, що за означенням задовольняє просту рекурсивну властивість:

$$V^*(s) = R_s(s, s') + \gamma \sum_{s'} P_a(s, s')$$

Оптимум шукається серед детермінованих стратегій.

Сутність моделі

В моделі марковські процеси прийняття рішень використовуються для підрахунку кількісного впливу ризиків на тривалість проекту.

Проект - це набір робіт, які виконуються в певному порядку. Для виконання кожної роботи необхідною є певна кількість ресурсів й часу, затраченого на її завершення.

Оцінка вартості планових операцій включає в себе приблизну оцінку вартості ресурсів, необхідних для виконання планової операції [1]. Обраховуючи приблизну оцінку вартості, необхідно приймати в розрахунок можливі причини відхилень, включаючи ризики.

Вартість майбутнього проекту оцінюється для всіх ресурсів, задіяних в проекті. До ресурсів відносять робочу силу, матеріали, обладнання, послуги й приміщення. Вартісна оцінка проекту - це кількісна оцінка можливої вартості ресурсів, необхідних для виконання даного проекту.

Тут ми приводимо спрощену модель оцінки вартості проекту. Тому, вартість проекту залежить лише від часу витраченого на його виконання, вартості необхідних ресурсів та постійних витрат (оренда приміщення, купівля обладнання й інше).

В запропонованій моделі для типів робіт, які виконуються у рамках проекту, передбачені ризики, що впливають на термін виконання кожної роботи окремо.

Ризики можуть суттєво вплинути на тривалість проекту та на його вартість. Для кожного ризику можна визначити декілька станів. Ці стани ризиків представлені в вигляді ланцюга Маркова (рис.1), де вузлом є стан ризику, переходом вліво

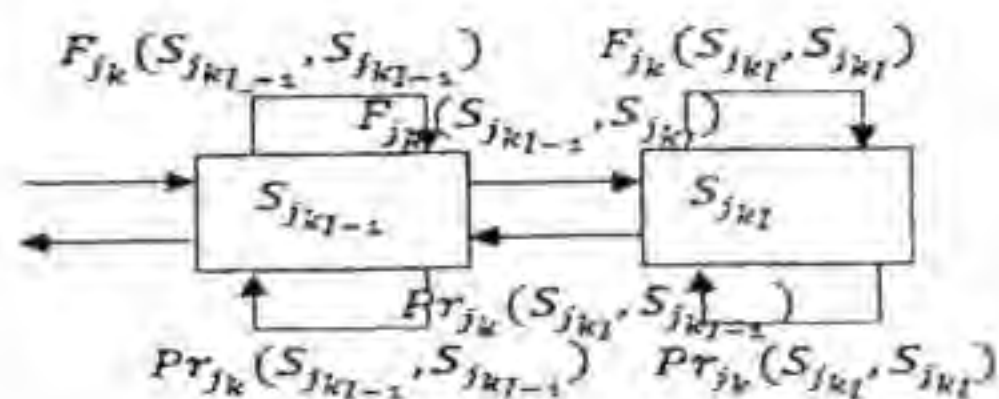
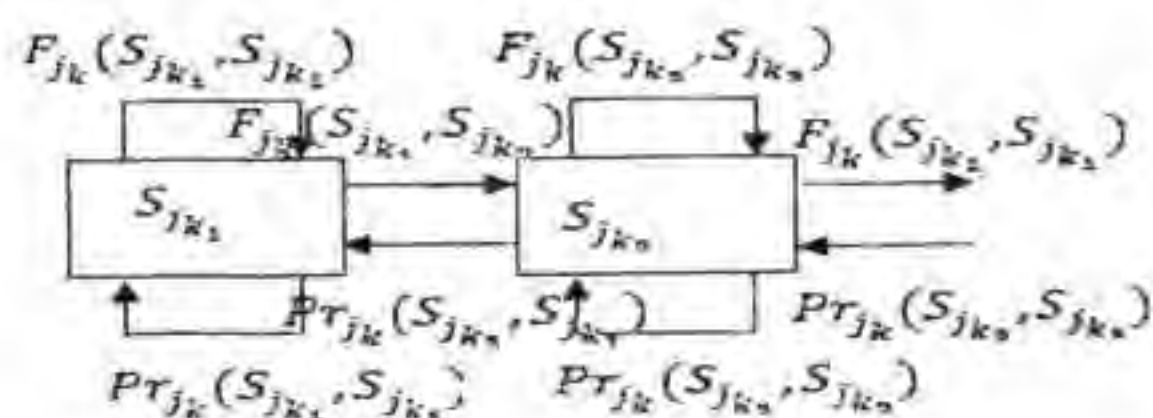


Рис.1. Перехід ризиків із стану в стан

характеризується зменшення впливу ризику, переходом вправо - збільшення.

Ми маємо можливість застосовувати запобіжні заходи до ризиків. Ці запобіжні заходи визначаються за допомогою переходу вліво з одного стану ризику в інший в ланцюгу Маркова. Запобіжні дії також потребують витрат часу. Якщо проти ризику не застосовувати ніяких дій, то це не потребує жодних витрат.

Розбиття тривалості роботи на часові проміжки, під час яких здійснюється зміна станів ризику, може бути довільним.

В моделі зроблено припущення, що ризики не корелюють між собою, тому загальний вплив на роботу декількох ризиків, дорівнює сумі впливів цих ризиків.

Уточнимо приведену модель.

Нехай маємо:

$\{J\}$ - впорядкована скінчена множина робіт, $j = 1, \dots, J$;

J - загальна кількість робіт необхідних для виконання проекту;

$\{L_j\}$ - скінчена множина типів ресурсів, необхідних для виконання роботи j ;

$\{K_j\}$ - скінчена множина типів ризиків, що характерні для роботи j ;

C - постійні витрати (наприклад оренда приміщення, амортизація устаткування, податки, тощо);

C_{lj} - ціна одиниці ресурсу типу l_j ;

W_{lj} - кількість ресурсу типу l_j , що необхідна для виконання роботи j ;

E - очікувана ціна проекту;

α_j - час необхідний на виконання роботи j за умови відсутності ризиків;

$\{S_{jk1}\}$ - скінчена множина станів ризику типу k для роботи j , $k \in \{K_j\}$, $j \in \{J\}$, $i = 1 \dots I$;

I_{kj} - загальна кількість станів ризиків типу k для роботи, $j, k \in \{K_j\}$, $j \in \{J\}$;

$F_{S_{jk1}}(i, i+1)$ - функція збільшення впливу ризику, що знаходився в стані S_{jk1} обраховується в днях;

$Pr_{S_{jk1}}(i, i-1)$ - функція попереджувальної дії спрямованої на зменшення впливу ризику, що знаходився в стані S_{jk1} і обраховується в днях;

$\{A_{S_{jk1}}\} = \{F_{S_{jk1}}(i, i) \cup Pr_{S_{jk1}}(i, i); F_{S_{jk1}}(i-1, i) \cup Pr_{S_{jk1}}(i, i); F_{S_{jk1}}(i, i) \cup Pr_{S_{jk1}}(i, i-1);$

$F_{S_{jk1}}(i-1, i) \cup Pr_{S_{jk1}}(i, i-1)\}$ - скінчена множина дій, що можна виконати в стані ризику S_{jk1} , $S_{jk1} \in \{S_{jk1}\}$;

$P_a(s, s') = P(s_{t+1} = s' | s_t, \alpha_t = a)$ - ймовірність того, що дія a в стані s , в якому знаходилась система в момент часу t , призведе до стану s' в момент $t+1$, де $a \in \{A_{S_{jk1}}\}$, $s, s' \in \{S_{jk1}\}$, де $t = 1 \dots T$;

T_j - останній момент часу, коли відбувається перехід до стану s' зі стану s для роботи j , де $j \in \{J\}$;

$R_a(s, s')$ - очікуваний миттєвий програш отриманий від переходу до стану s' зі стану s з ймовірністю переходу $P_a(s, s')$, який обраховується в днях, де $a \in \{A_{S_{jk1}}\}$, $s, s' \in \{S_{jk1}\}$;

$\pi(S_{jk1})$ - оптимальна стратегія;

$V(S_{jk1})$ - затримка тривалості роботи j через вплив ризику k , що обраховується в днях, де $j \in \{J\}$, $k \in \{K_j\}$;

γ - дисконтуючий множник, що задовольняє умові $0 < \gamma \leq 1$;

Модель:

$$E = \sum_{j=1}^J \sum_{i_j}^{I_j} W_{ij} C_{ij} \left(d_j + \sum_k^{K_j} V_{jk}(s) \right) + C$$

- функція вартості проекту, що залежить від числа робіт, кількості і типу ресурсів, що необхідні для виконання певної роботи, часу необхідного для виконання роботи при умові відсутності ризиків, а також мінімізованої функції затримки проекту через вплив ризиків, який обраховується в часі.

$$V^*(s_{ik}) = \min_{a \in A(s_{ik})} \{ R_a(s, s') + \gamma \sum_{s'} P_a(s, s') V^*(s') \}$$

де $V^*(s_{ik})$ - мінімізована функція затримки роботи j через ризик типу k , що обраховується в днях і знаходиться за допомогою марковських процесів прийняття рішень.

$$R_a(s, s') = \begin{cases} F_{s_{ik}}(i, i) + Pr_{s_{ik}}(i, i) \\ F_{s_{ik}}(i-1, i) + Pr_{s_{ik}}(i, i) \\ F_{s_{ik}}(i, i) + Pr_{s_{ik}}(i, i-1) \\ F_{s_{ik}}(i-1, i) + Pr_{s_{ik}}(i, i-1) \\ F_{s_{ik}}(i, i) = 0; \\ Pr_{s_{ik}}(i, i) = 0. \end{cases}$$

Висновки

В роботі було приведено модель, що дозволяє оптимізувати вартість проекту за наявності ризиків. Ризики впливають на тривалість проекту. Модель має вигляд:

$$E = \sum_{j=1}^J \sum_{i_j}^{I_j} W_{ij} C_{ij} \left(d_j + \sum_k^{K_j} V_{jk}(s) \right) + C,$$

де $V_{jk}(s)$ - це мінімізована функція затримки роботи j через ризик типу k , яка обраховується в днях і знаходиться за допомогою марковських процесів прийняття рішень.

Недоліком даної моделі є зроблене припущення, що ризики не корелюють між собою. Адже в реальному середовищі можливі випадки, коли існування одного ризику, призводить до іншого, або посилює вплив іншого на весь проект, або окрему його частину. Також постає і проблема збору статистичних даних для підрахунку ймовірностей переходів з одних станів ризику в

інший. Цю проблему можна частково вирішити збираючи дані з портфелів подібних проектів проекту.

В даній моделі також робиться припущення, що стани ризику змінюються, або залишаються незмінними лише один раз протягом певного періоду часу. Проте така ситуація малоймовірна. Тому для подальшого дослідження пропонується використовувати частково спостережувані процеси прийняття рішень Маркова.

Список використаної літератури

- 1) Руководство к своду знаний по управлению проектами (Руководство PMBOK) Project Management Institute, Inc.- Newtown Square, Pennsylvania, 2004-401 p.
- 2) Бабицький Д.Ю. Огляд кількісних методів аналізу ризиків при управлінні проектами: [Електронний ресурс] / Д.Ю. Бабицький - Режим доступу: http://www.zulanas.lt/images/adm_source/docs/2/Babitsky_paperRUS.pdf
- 3) Верзук, Е. Управління проектами. Прискорений курс по програмі MBA[пер з англ.] / Е.Верзук.- М.: Вільямс, 2007.- 480с.
- 4) Xiaoying Liu. An Artificial Neural Network Approach to Assess Project Cost and Time Risks at The Front End of Projects/ Liu Xiaoying// thesis ...master of science.- Calgary, Alberta, 1998.- 167p
- 5) Босв Г.П. Теорія ймовірності / Г.П. Босв.-М.: Державне видавництво техніко-теоретичної літератури, 1950.- 368 с.
- 6) Hardie N. Prediction and control of project duration: a recursive model/ N. Hardie // International Journal of Project Management.- 2001.- №7.- p.401-409.
- 7) Puterman L. M. Markov Decision Processes Discrete Stochastic Dynamic Programming/ Martin L.Puterman.- N.J.: John Wiley & Sons, Inc., 1994.- 649 p.

Надійшла до редколегії 25.10.10

УДК 519.8

Горбачук В.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Гаркуша Н.І., к.е.н.

Підходи до бюджетного прогнозування

Для актуальної проблеми бюджетного прогнозування запропоновані підходи, які дозволяють будувати множини первинних показників, а також функції, алгоритми, мережі, визначені на цій множині. Показано, що такі підходи реалізуються сучасними інформаційними технологіями.

Ключові слова: багаторівнева модель, бюджет, прогнозування.

*E-mail: GorbachukWasyI@netscape.net, NGarkusha@gmail.com

Статтю представив проф., док. ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Бюджетне прогнозування є складнішою задачею, ніж прогнозування валового внутрішнього продукту (ВВП), і тому вимагає врахування більшої множини показників [1–4]. МВФ давав прогнози ВВП України та сусідніх держав на 2008 р. зі значною похибкою [5].

Основними джерелами наповнення бюджету в Україні є податок на прибуток підприємств (ППП), податок на додану вартість (ПДВ), податок на доходи фізичних осіб (ПДФО), акцизний податок (АП).

ППП є загальнодержавним і регулюється Розділом III Податкового кодексу (ПК) України. Аналізуючи підходи до прогнозування ППП, які пропонуються у Мінфіні [6], визначимо основні залежності та відповідні показники:

- 1 Показник ППП у прогнозний період t
- 2 Надходження ППП у (звітний період) $t-1$
- 3 Реальна ставка ППП у (прогнозний період) t

У даній залежності значення показника-функції 1, виділеного курсивом, розраховується, виходячи зі значень показників-аргументів 2 і 3, причому показник-аргумент 2 є показником-функцією багаторівневої моделі і визначається первинною інформацією декларацій з ППП і формується Державною податковою адміністрацією (ДПА). Як правило, джерелом звітних значень є Держкомстат, а прогнозних – Мінекономіки. Джерелами ряду показників для видів економічної діяльності (ВЕД) є ДПА, Державна митна служба (ДМС), Національний

V. M. Gorbachuk, Ph.D. (Physics and Mathematics),
N.I. Garkusha, Ph.D. (Economics)

The approaches to budget forecasting

The approaches to build a set of primal indicators are suggested for the topical problem of budget forecasting, as well as the approaches to construct functions, algorithms, networks, defined on that set. It is shown such approaches are realized by modern information technologies.

Key words: multilevel model, budget, forecasting.

банк України (НБУ), Мінфін, Держказначейство. Аналогічно сформуємо інші залежності:

- 2 Надходження ППП
- 4 Загальна сума ППП за (всіма 31 секцією та підсекцією) ВЕД
- 5 Загальна сума ППП за (всіма 27) регіонами
- 6 Переплати ППП за ВЕД
- 7 Переплати ППП за регіонами
- 8 Вплив внутрішніх факторів
- 9 Вплив зовнішніх факторів
- 3 Реальна ставка ППП у t
- 10 Реальна ставка ППП у $t-1$
- 11 Коефіцієнт корекції реальної ставки ППП у t
- 10 Реальна ставка ППП
- 2 ППП
- 12 Загальна сума нарахувань ППП по підприємствах за ВЕД
- 13 Загальна сума нарахувань ППП по підприємствах за регіонами
- 12 Загальна сума нарахувань ППП по підприємствах (за ВЕД)
- 14 Сума умовно нарахованого ППП
- 15 Зменшення суми умовно нарахованого ППП
- 13 Загальна сума нарахувань ППП по підприємствах (за регіонами)
- 16 Сума умовно нарахованого ППП
- 17 Зменшення суми умовно нарахованого ППП
- 14 Сума умовно нарахованого ППП за ВЕД
- 18 Прибуток підприємств, що підлягає оподаткуванню, за ВЕД
- 19 Законодавчо встановлена ставка ППП
- 16 Сума умовно нарахованого ППП за регіонами

- 20 Прибуток підприємств, що підлягає оподаткуванню, за регіонами
 - 21 Законодавчо встановлена ставка ППП
 - 18 Прибуток підприємств, що підлягає оподаткуванню, (за ВЕД)
 - 22 Об'єкт оподаткування ППП
 - 23 Балансові збитки, не компенсовані прибутками до 01.01.2003
 - 24 Прибуток, звільнений від оподаткування
 - 20 Прибуток підприємств, що підлягає оподаткуванню, (за регіонами)
 - 25 Об'єкт оподаткування ППП
 - 26 Балансові збитки, не компенсовані прибутками
 - 27 Прибуток, звільнений від оподаткування
 - 22 Об'єкт оподаткування ППП (за ВЕД)
 - 28 Скориговані валові доходи
 - 29 Скориговані валові витрати
 - 30 Амортизаційні відрахування
 - 25 Об'єкт оподаткування ППП (за регіонами)
 - 31 Скориговані валові доходи
 - 32 Скориговані валові витрати
 - 33 Амортизаційні відрахування
 - 28 Скориговані валові доходи (за ВЕД) у t
 - 34 Скориговані валові доходи у t-1
 - 35 Індекс цін виробників у t
 - 36 Індекс обсягу продукції у t
 - 31 Скориговані валові доходи (за регіонами) у t
 - 37 Скориговані валові доходи у t-1
 - 38 Індекс цін виробників у t
 - 39 Індекс обсягу продукції у t
 - 29 Скориговані валові витрати (за ВЕД) у t
 - 40 Скориговані валові витрати у t-1
 - 35 Індекс цін виробників у t
 - 36 Індекс обсягу продукції у t
 - 32 Скориговані валові витрати (за регіонами) у t
 - 41 Скориговані валові витрати у t-1
 - 38 Індекс цін виробників у t
 - 39 Індекс обсягу продукції у t
 - 30 Амортизаційні відрахування (за ВЕД) у t
 - 42 Амортизаційні відрахування у t-1
 - 43 Скориговані валові доходи у t-1
 - 33 Амортизаційні відрахування (за регіонами) у t
 - 44 Амортизаційні відрахування у t-1
 - 45 Скориговані валові доходи у t-1
 - 24 Прибуток, звільнений від оподаткування, (за ВЕД) у t
 - 46 Прибуток, звільнений від оподаткування, у t-1
 - 35 Індекс цін виробників у t
 - 36 Індекс обсягу продукції у t
 - 27 Прибуток, звільнений від оподаткування, (за регіонами) у t
 - 47 Прибуток, звільнений від оподаткування, у t-1
 - 38 Індекс цін виробників у t
 - 39 Індекс обсягу продукції у t
 - 4 Загальна сума ППП за секцією J ВЕД (фінансова діяльність) у t
 - 48 Загальна сума ППП за секцією J ВЕД у t-1
 - 36 Індекс обсягу продукції за секцією J ВЕД у t
 - 8 Вплив внутрішніх факторів
 - 49 Вплив законодавчих змін на ППП
 - 50 Реструктуризовані суми ППП
 - 51 Донраховані суми ППП за актами контрольно-перевірочної роботи
 - 52 Погашення податкового боргу з ППП без урахування платників, щодо яких порушено провадження про банкрутство або прийнято рішення суду про призупинення стягнення
 - 53 Нарахування штрафних санкцій за несвоєчасну сплату ППП
 - 54 Сума пені за несвоєчасну сплату податку
 - 9 Вплив зовнішніх факторів
 - 55 Ціни на критичний імпорт
 - 56 Міжнародні рейтинги України
 - 28 Скориговані валові доходи (за секціями A, G ВЕД) у t
 - 34 Скориговані валові доходи у t-1
 - 35 Індекс цін виробників у t
 - 36 Індекс обсягу продукції у t
 - 57 Індекс споживчих цін у t
- Оскільки 31 секція ВЕД і 27 регіонів України враховуються у 17 показниках, то сумарна кількість первинних показників ППП для секцій ВЕД і регіонів сягає 10^3 . Така оцінка свідчить про актуальність сучасних інформаційних технологій (ІТ) у прогнозуванні бюджетних надходжень.
- ПДВ є загальнодержавним і регулюється Розділом V ПК. На основі аналізу підходів до прогнозування надходжень ПДВ, які затверджені Мінфіном, Мінекономіки, ДПА, ДМС і погоджені з Держкомстатом, аналогічно сформуємо залежності відповідних показників, виходячи з нормативних 43 рівнянь і 8 додатків [7]:
- 58 Надходження ПДВ
 - 59 База оподаткування ПДВ
 - 60 Співвідношення між показниками 58 і 59
 - 60 Співвідношення між показниками 58 і 59
 - 61 Номінальна ставка ПДВ
 - 62 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ
 - 61 Номінальна ставка ПДВ

63 Законодавчо визначена ставка ПДВ
64 База оподаткування ПДВ, яка включає суму нарахованого ПДВ
62 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у t
65 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у $t-1$
66 Коефіцієнт зміни пільг у t
66 Коефіцієнт зміни пільг у t
65 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у $t-1$
59 База оподаткування ПДВ у t
67 База оподаткування ПДВ у $t-1$
61 Номінальна ставка ПДВ у t
68 Оцінка обсягів пільг у t
69 Оцінка обсягів пільг у $t-1$
70 Усереднене значення ПДВ (із вироблених в Україні товарів(робіт, послуг) у t
71 Надходження ПДВ на основі динаміки та змін кон'юнктури внутрішнього попиту
72 Надходження ПДВ на основі динаміки та змін кон'юнктури валової доданої вартості (ВДВ) за ВЕД
71 Надходження ПДВ із вироблених в Україні товарів (робіт, послуг) на основі динаміки та змін кон'юнктури внутрішнього попиту у t
73 Кінцеві споживчі витрати домашніх господарств (за регіонами)
74 Роздрібний товарооборот
75 Обсяг реалізованих послуг населенню
76 Валове нагромадження основного капіталу
77 Сальдо надходжень ПДВ у t
70 Усереднене значення ПДВ із вироблених в Україні товарів (робіт, послуг)
78 Надходження ПДВ із ввезених на територію України товарів на основі динаміки імпорту товарів
79 Бюджетне відшкодування ПДВ грошовими коштами на основі динаміки експорту та послуг та динаміки промислового виробництва
80 Розрахункова база оподаткування споживчого попиту населення
81 Продаж товарів (роздрібний товарооборот) виробництва України через торгову мережу, мережі ресторанного господарства
82 Обсяг реалізованих нефінансових послуг населенню
83 Розрахункова база оподаткування споживчого попиту населення у прогностичний період
80 Розрахункова база оподаткування споживчого попиту населення у $t-1$

81 Продаж товарів (роздрібний товарооборот) виробництва України через торгову мережу, мережі ресторанного господарства у $t-1$
84 Продаж товарів (роздрібний товарооборот) виробництва України через торгову мережу, мережі ресторанного господарства у t
85 ВДВ секції G ВЕД у $t-1$
86 ВДВ секції G ВЕД у t
87 Валове нагромадження основного капіталу (ВНОК) як база оподаткування
88 Валове НОК в цінах споживачів
89 Імпортні товари та послуги в складі валового НОК в цінах споживачів
90 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення
91 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення в частині витрат на машини та обладнання
92 Частка імпорту в частині витрат на машини та обладнання інвестицій виробничого призначення
89 Імпортні товари та послуги в складі валового НОК в цінах споживачів
93 Імпортні товари та послуги в складі НОК в основних цінах
94 Розрахункова ставка для оподаткування імпорту машин та устаткування в складі НОК
93 Імпортні товари та послуги в складі НОК в основних цінах у t
93 Імпортні товари та послуги в складі НОК в основних цінах у $t-1$
94 Імпорт товарів за групами $i = 84, 85, 86, 87, 88, 89$ УКТ ЗЕД у t
95 Імпорт товарів за групами $i = 84, 85, 86, 87, 88, 89$ УКТ ЗЕД у $t-1$
94 Розрахункова ставка для оподаткування імпорту машин та устаткування в складі НОК
96 Податки на продукти за винятком субсидій в складі машин та устаткування ВНОК
97 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в основних цінах
98 Розрахункова ставка для оподаткування імпорту машин і устаткування в складі НОК у t
94 Розрахункова ставка для оподаткування імпорту машин і устаткування в складі НОК у $t-1$
99 Реальна ставка оподаткування ВНОК у $t-1$
100 Реальна ставка оподаткування ВНОК у t
90 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення
101 Інвестиції в основний капітал секцій A, B, C, D, E, F, G, I, H ВЕД
92 Частка імпорту в частині витрат на машини та обладнання інвестицій виробничого призначення
97 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в основних цінах

- 102 Імпорт машин та устаткування в частині ВНОК в основних цінах
- 103 Частка імпорту в частині витрат на машини та обладнання інвестицій виробничого призначення у t
- 92 Частка імпорту в частині витрат на машини та обладнання інвестицій виробничого призначення у $t-1$
- 88 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у $t-1$
- 89 Імпорт машин та устаткування в частині ВНОК в цінах споживачів у $t-1$
- 104 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у t
- 105 Імпорт машин та устаткування в частині ВНОК в цінах споживачів у t
- 104 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у t
- 105 Інвестиції в основний капітал в частині витрат на машини, устаткування і обладнання у t
- 106 Інвестиції в основний капітал в частині витрат на машини, устаткування та обладнання у $t-1$
- 107 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у $t-1$
- 91 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення в частині витрат на машини та обладнання у t
- 90 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення у t
- 108 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення у $t-1$
- 109 Інвестиції в основний капітал виробничого призначення в частині витрат на машини та обладнання у $t-1$
- 104 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у t
- 107 ВНОК в частині витрат на машини та устаткування в цінах споживачів у $t-1$
- 88 ВНОК в цінах споживачів у $t-1$
- 110 ВНОК в цінах споживачів у t
- 111 Податок з вироблених в Україні товарів (робіт, послуг), що міститься у ВНОК
- 87 ВНОК як база оподаткування
- 112 Реальна ставка оподаткування ВНОК
- 112 Реальна ставка оподаткування ВНОК
- 113 ПДВ у складі інвестицій в основний капітал
- 114 Інвестиції в основний капітал.
- 115 Обсяг ПДВ, що міститься в частині споживчого попиту населення
- 113 ПДВ у складі інвестицій в основний капітал
- 71 Надходження ПДВ із вироблених в Україні товарів (робіт, послуг) на основі динаміки та змін кон'юнктури внутрішнього попиту
- 72 Надходження ПДВ із вироблених в Україні товарів (робіт, послуг) на основі динаміки та змін кон'юнктури ВДВ (за ВЕД)
- 85 ВДВ
- 116 Номінальна ставка ПДВ
- 117 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ
- 118 Надходження ПДВ із ввезених на територію України товарів
- 119 База ПДВ із ввезених на територію України товарів
- 61 Номінальна ставка ПДВ
- 119 База ПДВ із ввезених на територію України товарів
- 118 Надходження ПДВ із ввезених на територію України товарів
- 61 Номінальна ставка ПДВ
- 120 База ПДВ
- 121 Імпорт товарів, сплату податку з якого не відстрочено шляхом видачі податкового векселя
- 122 Частка імпорту товарів, що підлягає оподаткуванню
- 121 Імпорт товарів, сплату податку з якого не відстрочено шляхом видачі податкового векселя
- 123 Загальний обсяг імпорту товарів
- 124 Обмінний курс гривні до долара США, середній за період
- 125 Обсяг виданих податкових векселів
- 122 Частка імпорту товарів, що підлягає оподаткуванню
- 118 База ПДВ із ввезених на територію України товарів
- 121 Імпорт товарів, сплату податку з якого не відстрочено шляхом видачі податкового векселя
- 126 Частка імпорту товарів, що підлягає оподаткуванню у t
- 122 Частка імпорту товарів, що підлягає оподаткуванню у $t-1$
- 66 Коефіцієнт зміни пільг у t
- 127 Обсяги бюджетного відшкодування грошовими коштами
- 128 Бюджетне відшкодування ПДВ за експортними операціями
- 129 Бюджетне відшкодування ПДВ за внутрішніми операціями
- 130 Зміна суми бюджетного відшкодування в залежності від обсягів обігу податкових векселів
- 128 Бюджетне відшкодування ПДВ за експортними операціями грошовими коштами
- 131 Розрахункова база визначення обсягів бюджетного відшкодування
- 132 Розрахунковий коефіцієнт відшкодування ПДВ
- 131 Розрахункова база відшкодування податку грошовими коштами за експортними операціями
- 133 Експорт товарів та послуг

- 134 Частка проміжного споживання у випуску експортоорієнтованих видів діяльності
- 124 Обмінний курс гривні до долара США, середній за період
- 134 Частка проміжного споживання у випуску експортоорієнтованих видів діяльності
- 135 Проміжне споживання експортоорієнтованих видів діяльності в цінах споживачів
- 136 Валовий випуск експортоорієнтованих видів діяльності в цінах споживачів
- 132 Розрахунковий коефіцієнт відшкодування ПДВ за експортними операціями у $t-1$
- 137 Суми, заявлені до відшкодування ПДВ за експортними операціями.
- 131 Розрахункова база відшкодування ПДВ грошовими коштами за експортними операціями у t
- 138 Розрахунковий коефіцієнт відшкодування ПДВ за експортними операціями
- 139 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ
- 61 Номінальна ставка ПДВ
- 139 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у t
- 140 Ваговий коефіцієнт для коефіцієнта корекції номінальної ставки.
- 141 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у $t-1$
- 128 Бюджетне відшкодування ПДВ за експортними операціями грошовими коштами
- 133 Експорт товарів і послуг
- 124 Обмінний курс гривні до долара США, середній за період
- 135 Проміжне споживання експортоорієнтованих видів діяльності в цінах споживачів
- 136 Валовий випуск експортоорієнтованих видів діяльності в цінах споживачів
- 61 Номінальна ставка ПДВ
- 140 Ваговий коефіцієнт для коефіцієнта корекції номінальної ставки.
- 141 Коефіцієнт корекції номінальної ставки ПДВ у попередні періоди
- 129 Бюджетне відшкодування ПДВ за внутрішніми операціями у t
- 142 Сума, заявлена до відшкодування грошовими коштами за внутрішніми операціями, у $t-1$
- 143 Індекс обсягів промислового виробництва у t
- 144 Індекс цін виробників промислової продукції у t
- 130 Зміна суми бюджетного відшкодування в залежності від обсягів обігу податкових векселів у t
- 127 Обсяги бюджетного відшкодування грошовими коштами у t
- 128 Бюджетне відшкодування ПДВ за експортними операціями грошовими коштами у t
- 129 Бюджетне відшкодування ПДВ за внутрішніми операціями у t
- 145 Сума бюджетного відшкодування в залежності від обсягів обігу податкових векселів у $t-1$
- 146 Сума бюджетного відшкодування в залежності від обсягів обігу податкових векселів у t
- ПДФО є загальнодержавним і регулюється Розділом IV ПК. На основі аналізу підходів до прогнозування надходжень ПДФО, які пропонуються у Мінфіні [8], також сформуємо залежності та відповідні показники:
- 147 Надходження ПДФО
- 148 Надходження ПДФО від доходів найманих працівників
- 149 ПДФО від військовослужбовців
- 150 Надходження ПДФО від додаткового та інших видів доходів
- 151 Надходження ПДФО від суб'єктів підприємницької діяльності (СПД) і незалежної професійної діяльності, фіксованого податку від підприємницької діяльності
- 148 Надходження ПДФО з доходів найманих працівників
- 152 Розрахункова база ПДФО
- 153 Реальна ставка ПДФО
- 152 Розрахункова база ПДФО
- 154 Витрати на оплату праці
- 155 Сума коштів, спрямованих на грошове забезпечення, грошові винагороди та інші виплати військовослужбовцям, особам рядового і начальницького складу органів внутрішніх справ у зв'язку з виконанням обов'язків несення служби
- 156 Сума збору до Пенсійного фонду України та внесків до фондів загальнообов'язкового державного соціального страхування
- 157 Сума податкових соціальних пільг, які дають право на зменшення суми загального місячного оподатковуваного доходу
- 156 Сума збору до Пенсійного фонду України та внесків до фондів загальнообов'язкового державного соціального страхування
- 158 Середній відсоток відрахувань до фондів загальнообов'язкового державного соціального страхування
- 159 Середній відсоток відрахувань до Пенсійного фонду України
- 159 Середній відсоток відрахувань до Пенсійного фонду України
- 160 Сума утриманих внесків
- 161 Сума доходу, з якого утримуються пенсійні внески

- 157 Сума податкових соціальних пільг, які дають право на зменшення суми загального місячного оподатковуваного доходу
- 162 Сума стандартних пільг для будь-якого платника податку
- 163 Сума пільг у розмірі 150 %
- 164 Сума пільг у розмірі 200 %
- 162 Сума стандартних пільг для будь-якого платника податку
- 165 Кількість пільговиків, які отримують стандартний розмір пільги, встановлений для будь-якого платника податку
- 166 Середня мінімальна заробітна плата
- 163 Сума пільг у розмірі 150 %
- 167 Кількість пільговиків, які отримують 150 % встановленої суми пільги
- 166 Середня мінімальна заробітна плата
- 164 Сума пільг у розмірі 200 %
- 168 Кількість пільговиків, які отримують 200 % встановленої суми пільги
- 166 Середня мінімальна заробітна плата
- 153 Реальна ставка ПДФО у t
- 148 Надходження ПДФО з доходів найманих працівників у $t-1$
- 152 Розрахункова база ПДФО у $t-1$
- 169 Номінальна ставка ПДФО у $t-1$
- 170 Розрахункова база ПДФО у t
- АП є загальнодержавним і регулюється Розділом VI ПК. Запропоновані модельні регулювання АП в СНД. Аналізуючи підходи ДПА до прогнозування АП, сформуємо залежності відповідних показників [9]:
- 171 Надходження АП до зведеного бюджету
- 172 АП до загального фонду
- 173 АП до спеціального фонду
- 172 АП до загального фонду
- 174 АП по спирту
- 175 АП по лікero-горілчаних виробів
- 176 АП по виноробній продукції
- 177 АП по пиву
- 178 АП по тютюнових виробів
- 174 АП по спирт
- 179 Обсяг оподатковуваної АП реалізації спирту
- 180 Ставка АП по спирту
- 179 Обсяг оподатковуваної АП реалізації спирту
- 181 Виробництво спирту
- 182 Експорт спирту
- 175 АП по лікero-горілчаних виробів
- 183 АП по лікero-горілчаних виробів із вмістом спирту етилового до 8,5 % об'єму (групи 1)
- 184 АП по лікero-горілчаних виробів із вмістом спирту етилового від 8,5 до 25 % об'єму (групи 2)
- 185 АП по лікero-горілчаних виробів із вмістом спирту етилового від 25 до 37 % об'єму (групи 3)
- 186 АП по лікero-горілчаних виробів із вмістом спирту етилового від 37 % і більше об'єму (групи 4)
- 183–186 АП по лікero-горілчаних виробів відповідної міцності групи $i = 1, 2, 3, 4$ у t
- 187 Обсяг оподатковуваної АП реалізації лікero-горілчаних виробів відповідної міцності
- 188 Середня міцність лікero-горілчаних виробів по групі напоїв з відповідним вмістом спирту етилового у $t-1$
- 189 Ставка АП по лікero-горілчаних виробів
- 187 Обсяг реалізації лікero-горілчаних виробів групи $i = 1, 2, 3, 4$, оподатковуваної АП у t
- 190 Виробництво лікero-горілчаних виробів відповідної міцності, оподатковуваної АП
- 191 Експорт лікero-горілчаних виробів відповідної міцності
- 188 Середня міцність по групі напоїв з відповідним вмістом спирту етилового у t
- 192 Показник 188 за $t-1$
- 193 Середня міцність по групі напоїв з відповідним вмістом спирту групи $i = 1, 2, 3, 4$ у $t-1$
- 194 АП по лікero-горілчаних виробів відповідної міцності
- 195 Обсяг оподатковуваної АП реалізації лікero-горілчаних виробів відповідної міцності у $t-1$
- 196 Ставка АП по лікero-горілчаних виробів
- 176 Обсяг АП по виноробній продукції
- 197 АП з вина виноградного натурального (виду 1)
- 198 АП з вина натурального з доданням спирту та міцного (кріпленого) (виду 2)
- 199 АП з вина ігристого (виду 3)
- 200 АП з вина газованого (виду 4)
- 201 АП з вермуту та інших вин виноградних (виду 5)
- 202 АП з вина збродженого плодового та ягідних напоїв (сидр, перрі та інші) з доданням спирту (виду 6)
- 203 АП з вина збродженого плодового та ягідні напої (сидр, перрі та інші) без додання спирту (виду 7)
- 204 АП з виноматерів, що реалізуються посередницьким організаціям та населенню (виду 8)
- 205 АП з коньяку та бренді (виду 9)
- 197–205 АП з відповідного виду вина у t
- 206 Обсяг оподатковуваної АП реалізації відповідного виду виноробної продукції
- 207 Середня міцність відповідного виду виноробної продукції у $t-1$
- 208 Ставка АП з відповідного виду виноробної продукції

Оскільки кількість домогосподарств у світовій економіці має порядок 10^9 , то їх поведінку можна моделювати сучасними ІТ [10–20], зокрема за допомогою системи PowerSim [4].

Список використаних джерел

1. Горбачук В. М. Макроекономічні методи. – К.: Альтерпрес, 1999. – 263 с.
2. Буряк П. Ю., Лондар С. Л. Вплив зміни податкової ставки на доходи бюджету // Фінанси України. – 2002. – № 1. – С. 41–44.
3. Любіч О. О. Теоретичні основи прийняття фінансових рішень на макrorівні. – К.: НДФІ, 2004. – 348 с.
4. Вишневецький В. П., Лепя Р. М., Соколовський Д. Б. Моделювання поведінки агентів як підхід до визначення величини макроекономічних показників в умовах браку інформації // Нове в економічній кібернетиці. – 2007. – Вип. 4. – С. 13–20.
5. Горбачук В. М., Шевчук В. О. Питання прогнозування та застосування відсоткової ставки як інструмента грошово-кредитної політики України у 2008 році // Проблеми раціонального використання соціально-економічного та природно-ресурсного потенціалу регіону: фінансова політика та інвестиції. – 2009. – Вип. XV. – № 2. – С. 75–86.
6. Зварич О. В. Прогнозування надходжень податку на прибуток підприємств // Наукові праці НДФІ. – 2010. – № 1. – С. 24–33.
7. Наказ "Про затвердження Методики прогнозування надходжень податку на додану вартість" Мінфіну, Мінекономіки, ДПА, ДМС № 545/315/502/637 від 31.08.2004, погоджений з Держкомстатом.
8. Зварич О. В. Методологічні основи прогнозування надходжень податку з доходів фізичних осіб // Наукові праці НДФІ. – 2009. – № 3. – С. 12–19.
9. Кайзерман В. О., Ярошенко Ф. О., Буханевич О. М., Марченко Ю. В., Косарчук В. П., Кравченко В. П. Акцизний збір: законодав. та нормат. акти, комент., роз'яснення фахівців, оглядовий лист. – К.: Юрінком Інтер, 2009. – 351 с.
10. Горбачук В., Гаркуша Н. Вычисление совместимых значений инфляции и бюджетного дефицита: пример на данных Украины 2005 г. // Економіст. – 2005. – № 9. – С. 31–33.
11. Горбачук В. М. Модель взаємозв'язку бюджетно-податкової та грошово-кредитної політики у системі регулювання міжбюджетних відносин і методи її аналізу // Фінансовий вісник. – 2006. – № 1. – С. 4–9.
12. Горбачук В. М. Взаємодія рівнів управління бюджетної системи держави // Наукові записки НаУКМА. Економічні науки. – 2006. – Т. 56. – С. 8–11.
13. Горбачук В. М. Моделювання взаємодії Міністерства фінансів і Національного банку у розробці та втіленні стратегії соціально-економічного розвитку України / Стратегія соціально-економічного розвитку України та пріоритети грошово-кредитної політики. – К.: НБУ, 2007. – С. 147–153.
14. Горбачук В. М., Байрак В. Г., Гупал М. А., Русанов І. А. Прогноз, оцінка та аналіз, передбачені Бюджетними кодексами України і Російської Федерації / Тенденції розвитку національних фінансових систем за умов глобалізації. – К.: Український державний університет фінансів та міжнародної торгівлі Мінфіну України, 2007. – С. 68–71.
15. Горбачук В. М. Порівняльний аналіз динаміки структури загальних бюджетних надходжень України та сусідніх держав у 2002–2006 роках // Финансовые риски. – 2008. – № 2 (51). – С. 35–42.
16. Горбачук В. М., Ущатівська Н. М. Динаміка основних бюджетних доходів у регіонах України за 2003–2007 рр. / Стан і проблеми оподаткування в умовах ринкової економіки. Т. 1. – Донецьк: ДНУЕТ, 2008. – С. 117–120.
17. Горбачук В. М., Гаркуша Н. І. Ієрархічна задача використання бюджету / Проблеми обчислювальної математики. – К.: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2009. – С. 30.
18. Горбачук В. М., Гаркуша Н. І. Багаторівневі моделі та методи обчислюваної загальної рівноваги // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – № 3. – С. 121–126.
19. Gorbachuk V. The approach to enhance gross domestic product under fixed budget / Особливості функціонування національних фінансових систем в умовах поглиблення глобалізаційних процесів. Ч. 1. – Київ – Краків: НУДПС України – Академія фінансів м. Варшава, 2010. – С. 153–156.
20. Горбачук В. М., Русанов І. А. Калибровка модели вычисляемого общего равновесия // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 10–17.

Надійшла до редколегії 30.11.10

Джалладова І. А., д.ф.-м.н., проф.

Асимптотика системи різницьових та диференціальних рівнянь

Побудована асимптотика розв'язків системи різницьових та диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу.

Ключові слова: асимптотика, випадковий розподіл, немарковський процес, Марковський процес.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

*E-mail: irada-05@mail.ru

1. Вступ

Звичайно в теорії випадкових процесів розглядають схеми, при яких зміни стану системи можливі в певні моменти часу, а також неперервні відносно часу схеми. З математичної точки зору такі схеми мають важливу перевагу, тому що дозволяють вводити в розгляд диференціальні рівняння відносно часу і приводять до аналітичних виразів, які мають вигляд асимптотичних формул [1,2]. Вплив постійно діючих випадкових збурень на динамічну систему, ускладнює можливості кількісного аналізу моделей й імітації на сучасних комп'ютерах. Найбільш складним у цьому є дослідження асимптотики, бо наявність випадкових параметрів вимагає дуже частого звернення до датчика випадкових чисел [7,8].

2. Постановка проблеми.

Розглядається система різницьових рівнянь

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \Pi_k P(n-k), \quad (1)$$

де $P(n) = (P_1(n), P_2(n), \dots, P_n(n))^T$, $n = 0, 1, 2, \dots$ вектор, що задовольняє умови

$$P_k(n) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m P_k(n) = 1, \quad (2)$$

Множину векторів $P(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ позначаємо через S_m . Матриці Π_k ($k = 0, 1, \dots, N$) є стохастичними і задовольняють умову: при $P \in S_m$ вектор

I. A. Dzhalladova, D.Sc, prof.

Asymptotic for system of difference and differential equations

Constructing of asymptotic for the solutions of the system of difference and differential equations with delay.

Key Words: Asymptotic, random division, non-Markov process, Markov process.

$\Pi_k P \in S_m$, ($k = 0, 1, \dots, N$). Числа α_k задовольняють умови:

$$\alpha_k \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k = 1. \quad (3)$$

При виконанні цих умов система рівнянь (1) описує деякий немарківський випадковий розподіл, оскільки з умови $P(n-k) \in S_m$, ($k = 0, 1, \dots, N$) випливає, що вектор $P(n+1) \in S_m$ [3].

Відомо [3], що випадковий розподіл, який визначається системою різницьових рівнянь (1) буде ергодичним, якщо при будь-яких початкових значеннях $P(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ існує границя

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n), \quad P_\infty \in S_m. \quad (4)$$

Або, хоча б одна з матриць $\alpha_k \Pi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ має хоча б один рядок з додатних елементів.

Ставиться питання про асимптотику розв'язків (випадкового розподілу), описаного системою рівнянь (1).

3. Допоміжні теореми.

Для доведення основного результату розглянемо декілька допоміжних теорем, які одночасно мають самостійне значення.

Розглянемо лінійне різницеве рівняння m -го порядку з неперервними коефіцієнтами

$$L(t, S)y(t) = (S^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t)S^k)y(t) = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad (5)$$

де S – оператор перетворення що задовольняє умові

$$Sy(t) = y(t+h), \quad h > 0.$$

Нехай маємо ще одне різницеве рівняння

$$L_2(t, S)y(t) = (S^q + \sum_{k=0}^{q-1} c_k(t)S^k)y(t) = 0, c_0 \neq 0, \quad (6)$$

(6)

Шукаємо оператор

$$L(t, S) = L_1(t, S) \cdot L_2(t, S), \quad (7)$$

де

$$L_1(t, S) = (S^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k(t)S^k)y(t) = 0, b_0 \neq 0,$$

$$p + q = m, p \geq 1, q \geq 1.$$

Має місце наступний результат.

Теорема 1. Оператор (7) існує тоді і тільки тоді, коли будь-який розв'язок різницевих рівнянь (6) одночасно є розв'язком різницевих рівнянь (5).

Доведення. Нехай $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ лінійно незалежні розв'язки рівняння (5), а $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t), \dots, y_m(t)$ лінійно незалежні розв'язки рівняння (4). Для спрощення будемо записувати $y_{sk}(t)$ замість $y_{sk}(t + sh - h)$, $k = 1, 2, \dots, m$; $s = 1, 2, 3, \dots$

Введемо наступні визначники

$$W_k(t) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1k}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1}(t) & y_{k2}(t) & \dots & y_{kk}(t) \end{vmatrix}, (k = 1, \dots, m)$$

$$\Delta_k(t) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1k}(t) & y(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2k}(t) & Sy(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1}(t) & y_{k2}(t) & \dots & y_{kk}(t) & S^{k-1}y(t) \\ y_{k+1,1}(t) & y_{k+1,2}(t) & \dots & y_{k+1,k}(t) & S^k y(t) \end{vmatrix}.$$

Якщо $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ - лінійно незалежні розв'язки різничевого рівняння k -го порядку і $W_k(t) \neq 0$, тоді різницеве рівняння

$$\Delta_k = 0$$

має частинний розв'язок $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$.

Спочатку доводиться, що залежність

$$\Delta_{k+1}(t) = \frac{W_{k+1}(t)}{W_k(t+h)} \Delta_k(t+h) - \frac{W_{k+1}(t+h)}{W_k(t)} \Delta_k(t)$$

може бути записана у вигляді

$$\Delta_{k+1}(t) = \frac{W_{k+1}(t)}{W_k(t+h)} (S - \alpha_{k+1}(t)) \Delta_k(t), \quad (10)$$

де

$$\alpha_k(t) \equiv \frac{W_k(t+h)}{W_k(t)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Вводячи матрицю

$$H(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1k}(t) & y_{k+1,1}(t) & y(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2k}(t) & y_{k+1,2}(t) & Sy(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1}(t) & y_{k2}(t) & \dots & y_{kk}(t) & y_{k+1,k}(t) & S^{k-1}y(t) \\ y_{k+1,1}(t) & y_{k+1,2}(t) & \dots & y_{k+1,k}(t) & y_{k+1,k+1}(t) & S^k y(t) \\ y_{k+2,1}(t) & y_{k+2,2}(t) & \dots & y_{k+2,k}(t) & y_{k+2,k+1}(t) & S^{k+1}y(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

матимемо що $\det H(t) = \Delta_{k+1}(t)$ і всі визначники в залежності (10) будуть мінорами матриці $H(t)$.

Нехай $F(t)$ з елементами $f_{js}(t)$, $j, s = \overline{1, n}$ є матрицею, що обернена до матриці $H(t)$.

Для цих елементів виконується

$$f_{js}(t) = \frac{(-1)^{j+s} H \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix}}{\det H(t)}, (j, s = 1, 2, k+2).$$

Рівність (10) можна записати наступним чином

$$\frac{H \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+1 & k+2 \end{pmatrix}}{\det H(t)} = (-1)^k (f_{k+2,k+2}(t) f_{k+1,1}(t) - f_{k+2,1}(t) f_{k+1,k+2}(t))$$

Як доведено в [6] останню формулу можна записати наступним чином

$$\frac{H \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+1 & k+2 \end{pmatrix}}{\det H(t)} = (-1)^k F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & k+1 \end{pmatrix}$$

Введемо позначення для лінійного різничевого оператора

$$S_k(t, s) = \frac{W_k(t)}{W_{k-1}(t+h)} (S - \frac{W_{k+1}(t+h)}{W_k(t)}),$$

де

$$W_0(t) \equiv 1.$$

Звідси отримаємо

$$\Delta_k(t) = S_k(t, S) S_{k-1}(t, S) \dots S_1(t, S) y(t).$$

Різницеве рівняння $\Delta_k(t) = 0$ має лінійно незалежні розв'язки $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$.

І рівняння (5) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{W_m(t)} S_m(t, S) S_{q+1}(t, S) \dots S_1(t, S) y(t) = 0.$$

Крім того, його можна подати у вигляді (7), де

$$L(t, S) = \frac{1}{W_m(t)} S_m(t, S) S_{q+1}(t, S) \dots S_1(t, S) W_q(t)$$

$$L_2(t, S) = \frac{1}{W_q(t)} S_q(t, S) \dots S_1(t, S).$$

Теорему доведено.

Наведемо два важливі наслідки із теореми 1.

Наслідок 1. Для того, щоб многочлен

$$L(s) = S^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k S^k, m \geq 2$$

ділився на многочлен

$$L_2(s) = S^q + \sum_{k=0}^{q-1} c_k S^k, 1 \leq q \leq m-1$$

необхідно та достатньо щоб всі розв'язки різницевого рівняння

$$L_2(s)y(t) = y(t+qh) + \sum_{k=0}^{q-1} c_k y(t+kh) = 0$$

були розв'язками різницевого рівняння

$$L(s)y(t) = y(t+mh) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y(t+kh) = 0.$$

Наслідок 2. Для того, щоб лінійний різницевий оператор

$$L(t, s) = ES^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t) S^k, m \geq 2$$

був поданий у вигляді

$$L(t, S) = L_1(t, S) L_2(t, S), \text{ де}$$

$$L_1(t, S) = ES^p + \sum_{k=0}^{p-1} B_k(t) S^k$$

$$L_2(t, S) = S^q + \sum_{k=0}^{q-1} c_k(t) S^k, p+q=m, p \geq 1, q \geq 1.$$

необхідно та достатньо, щоб будь-який розв'язок системи різницевих рівнянь

$$L_2(S)Y(t) = Y(t+qh) + \sum_{k=0}^{q-1} c_k(t) Y(t+kh) = 0$$

був розв'язком системи різницевих рівнянь

$$L(t, S)Y(t) = Y(t+mh) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k Y(t+kh) = 0.$$

4. Основний результат.

Нехай задано систему різницевих рівнянь

$$R(n+1) = QR(n), R(n) \in S_m,$$

$$(n=0, 1, 2, \dots), \det Q \neq 0, Q \in S_m. (13)$$

Теорема 2. Для того, щоб система рівнянь (1), визначала асимптотично при $n \rightarrow +\infty$ марковський розподіл, тобто щоб будь-який розв'язок $P(n)$ збігався асимптотично при $n \rightarrow +\infty$ до одного з розв'язків $R(n)$ системи рівнянь виду (13), необхідно і достатньо, щоб справджувався розклад на матричні множники

$$ES - \sum_{k=0}^N \alpha_k \Pi_k S^{-k} = \left(E - \sum_{k=1}^N B_k S^{-k} \right) (ES - Q), (14)$$

де S - оператор зсуву: $SP(n) \equiv P(n+1)$,

$S^{-1}P(n) \equiv P(n-1)$, і щоб корені λ_i

мультиплікативного рівняння:

$$\det \left(E - \sum_{k=1}^N B_k \lambda^{-k} \right) = 0 (15)$$

були по модулю менші за одиницю.

Доведення. Розклад (14) випливає із наслідка 2, якщо покласти

$$A_k(t) = \alpha_k \Pi_k, c_k = Q.$$

Випадковий розподіл, що визначається системою різницевих рівнянь (1) є ергодичним якщо виконується умова (4), що вимагає виконання того, щоб корені λ_i мультиплікативного рівняння (15) були по модулю менші за одиницю.

За виконання умов (14), (15) будь-який розв'язок системи різницевих рівнянь (1) $P(n)$ при $n \rightarrow +\infty$ прямує до одного з розв'язків системи рівнянь (13). В цьому випадку розподіл, що визначається системою рівнянь (1), асимптотично при $n \rightarrow +\infty$ є марковським ланцюгом, що визначається системою рівнянь (13). Будь-який розв'язок $R(n)$ системи різницевих рівнянь (13) є розв'язком системи різницевих рівнянь (1).

Зауваження. Умову (15) можна замінити рівністю

$$Q^N = \sum_{k=0}^N \alpha_k \Pi_k Q^{N-k}, (16)$$

тобто матриця Q є коренем матричного рівняння (16).

Означення. Випадковий розподіл, що описується системою рівнянь (1), будемо називати суворо асимптотичним марковським, якщо всі власні числа матриці Q по модулю більші коренів рівняння (16).

Приклад. Розглянемо випадковий розподіл, що визначається системою різницевих рівнянь

$$P(n+1) = \alpha_0 \Pi_0 P(n) + \alpha_1 \Pi_1 P(n-1) \quad (17)$$

$$\alpha_0 = 0,8, \alpha_1 = 0,2, \Pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,375 \\ 0,5 & 0,625 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо марковський розподіл

$$R(n+1) = QR(n), \quad Q = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

який асимптотично подає розподіл (17), бо виконується рівність

$$Q^2 = \alpha_0 \Pi_0 Q + \alpha_1 \Pi_1.$$

З розкладу виду (17)

$$Es - \alpha_0 \Pi_0 - \alpha_1 \Pi_1 S^{-1} = (E - BS^{-1})(S - Q)$$

знаходимо матрицю

$$B = \alpha_0 \Pi_0 - Q = \begin{pmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Власні числа $\lambda_1(B) = \lambda_2(B) = -0,2$ матриці B по модулю менше власних чисел $\lambda_1(Q) = 1, \lambda_2(Q) = 0,3$ матриці Q . Тому розподіл, що описується системою різницьових рівнянь (17), є суворо асимптотично марковським розподілом (18).

4. Загальний випадок.

Нехай випадковий розподіл описується нестационарною системою різницьових рівнянь

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) \Pi_k(n) P(n-k),$$

$$\Pi_k(n) \in L_s, \quad P(n) \in S_m. \quad (19)$$

Для системи рівнянь (19) сформулюємо аналог теореми 2.

Теорема 3. Випадковий розподіл (19) асимптотично подається марковським процесом

$$R(n+1) = Q(n)R(n), \quad Q(n) \in S_m,$$

$$R(n) \in S_m \quad (20)$$

лише у випадках, коли справджується розклад

$$ES - \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) \Pi_k(n) S^{-k} = \left(E - \sum_{k=1}^N B_k(n) S^{-k} \right) \times$$

$$\times (ES - Q(n)), \quad (21)$$

де S - оператор зсуву. Виконання рівності (21) необхідно і достатньо для того, щоб будь-який розв'язок системи рівнянь (20) був також розв'язком системи різницьових рівнянь (19).

5. Випадок стохастичних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу.

Для отримання аналогічних результатів для стохастичних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу застосуємо відомі результати [4], які отримані для детермінованих систем.

Розглядається система рівнянь виду

$$Y'(t) = f(t, Y_t), \quad Y_t = Y(t + \theta), \quad -h \leq \theta \leq h, \quad (22)$$

де

$$|f(t, 0)| \leq M,$$

$$|f(t, Y_t) - f(t, Z_t)| \leq L \max_{-h \leq \theta \leq h} |Y_t - Z_t|.$$

При деяких припущеннях на f і h в [4] доводиться теорема про те, що існує система без відхилення аргументу

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad (23)$$

всі розв'язки якої задовольняють систему (22). Крім того, будь-який її розв'язок при $t \rightarrow \infty$ прямує до певного розв'язку системи без відхилення аргументу:

Теорема 4. Нехай

$$h_0 = \min \left\{ \frac{1}{\Lambda e}, \frac{\ln 2}{L}, \frac{\Lambda}{L(L + \Lambda)} \right\},$$

де

$$L = \Lambda e^{Lh}.$$

Тоді при $0 \leq h < h_0$ для будь-якого розв'язку $Y(t)$ системи диференціальних рівнянь (22) з відхиленням аргументу існує розв'язок $X_\infty(t)$ системи диференціальних рівнянь без відхилення аргументу (23), який є розв'язком системи (22), для якого виконується

$$|Y(t) - X_\infty(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Нехай випадковий розподіл описується системою звичайних диференціальних рівнянь [3]

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_0 P(t) + \sum_{k=0}^N \alpha_k (\Pi_k P(t - \tau_k) - P(t)), \quad (24)$$

де

$$P(t) \in S_m, \quad \Pi_k \in S_m, \quad \alpha_k > 0, \quad \tau_k > 0.$$

Тоді система диференціальних рівнянь

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_0 P(t) \quad (25)$$

визначає неперервний n -вимірний марківський процес, тобто

$$A_0 = \|a_{ks}\|_1,$$

$$a_{ks} \geq 0 \quad (k \neq s), \quad a_{kk} \leq 0 \quad (k, s = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{k=1}^m a_{kk} = 0.$$

Теорема 5. Для того, щоб випадковий розподіл, що визначається системою лінійних диференціальних рівнянь (24) був суворо асимптотично марківським достатньо, щоб при деякому $L > 0$ виконувалась нерівність

$$L \leq \|A_0\| + \sum_{k=0}^N \alpha_k (\|\Pi_k\| e^{L\tau_k} + 1).$$

Доведення. Нехай будь-який розв'язок системи рівнянь (24) при $t \rightarrow +\infty$ прямує до одного з розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t), \quad (25)$$

яка описує скінченновимірний марківський процес. Матриця Q задовольняє матричне рівняння

$$Q = A_0 + \sum_{k=0}^N \alpha_k (\Pi_k e^{-Q\tau_k} - E),$$

$$Q_0 = E, \quad Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n. \quad (26)$$

де

$$Q_n = A_0 + \sum_{k=0}^N \alpha_k (\Pi_k e^{-Q_n \tau_k} - E),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

З наведеного і з теореми 4 випливає, що система рівнянь (25) існує і розв'язок системи рівнянь (25) при $t \rightarrow +\infty$ притягує усі розв'язки системи рівнянь, якщо виконується при деякому $L > 0$ нерівність

$$L \leq \|A_0\| + \sum_{k=0}^N \alpha_k (\|\Pi_k\| e^{L\tau_k} + 1).$$

Якщо позначимо:

$$a = \|A_0\| + \sum_{k=0}^N \alpha_k, \quad b = \sum_{k=0}^N \alpha_k \|\Pi_k\|,$$

$$\tau = \max_k \{\tau_k\},$$

то отримаємо мажорантну нерівність

$$L \leq a + b e^{L\tau},$$

яка може бути розв'язана при $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$, де

$\tau_{\max}$ знаходиться із рівняння

$$\tau_{\max} = \frac{1}{eb} \exp\{-a\tau_{\max}\}.$$

Зауваження. Відмітимо також, що випадкові розподіли можуть визначатися нелінійними диференціальними і різницевиими рівняннями.

Список використаних джерел

1. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах теории вероятностей. // Успехи мат. наук. - 1938. — Вып. 5. — С. 5-41.
2. Зубов В. И. Интерполяция и аппроксимация вероятностных распределений // ДАН СССР. — 1991. — т. 316, № 6. — С. 1298-1301.
3. Джалладова І.А. Оптимізація стохастичних систем : монографія / І.А. Джалладова. — К. : КНЕУ, 2005. — 221 с.
4. Валеев К. Г., Кулеско Н. А. О конечнопараметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. матем. Журнал, 1968, т. 20, № 6, с. 739-749.
5. K. Janglajev, K. Valeev. The Factorization of the Deference Operator // Computers & Mathematics 42 (2001) 729-733.
6. F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea Publ., New York, (1974).
7. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений / А.В. Скороход. — Київ : Наук. думка, 1987. — 328 с.
8. Проблеми стабілізації імпульсних систем випадкової структури зі скінченною післядією / Королюк В.С., Ясинський В.К., Мусурівський В.І., Дорошенко І.В. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2010. — 240 с.

Надійшла до редколегії 02.06.10.

Донченко¹ В. С., д. ф.-м. н., проф.
Назарага² І. М., інж.

Програмне забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України

У статті наведено основні рівняння, які складають комплексну модель економічних процесів в Україні та описано програмне забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників.

Ключові слова: прогнозування, макроекономічні показники.

¹E-mail: voldon@unicyb.kiev.ua

²E-mail: inna_na@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Акіменко В. В.

Створення аналітико-прогнозних систем, зокрема систем підтримки прийняття рішень (СППР), які адекватні макроекономічній ситуації, що склалася в Україні, є надзвичайно актуальним завданням, оскільки такі системи максимально пристосовані до розв'язування задач щоденної управлінської діяльності.

Хоча на сьогодні немає загальноприйнятого визначення СППР, оскільки їх конструкція суттєво залежить від типу задач, для розв'язання яких вони розробляються, доступних даних, інформації та користувачів, але за класичного погляду, всі види цих комп'ютерних систем характеризуються чіткою структурою [1 - 2]. Основу класичної структури СППР, що виокремлює цей тип інформаційних систем від інших, утворюють такі функціональні складові:

1. підсистема керування даними, яка призначена для підтримки процесів створення, ведення та використання даних;
2. підсистема керування моделями, призначена для забезпечення доступу до моделей та їх використання;
3. підсистема інтерфейсу користувача, яка забезпечує зв'язок основних функціональних блоків системи.

У статті, в рамках згаданого підходу до побудови СППР, описано основні функціональні складові програмного забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України. Зокрема, детально розглянуто підсистему керування моделями.

V. S. Donchenko, Ph. D., Prof.
I. M. Nazaraga, eng.

Software for prediction basic macroeconomic indicators of Ukrainian economics

Basic equations, which describe the complex model of economic processes in Ukraine are considered in the paper. Software for prediction basic macroeconomic indicators are described.

Key Words: prediction, macroeconomic indicators.

СППР для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України складається із таких підсистем (рис. 1):

- 1) підсистеми керування даними;
- 2) підсистеми керування моделями;
- 3) підсистеми інтерфейсу користувача;
- 4) підсистеми користувачів.

Зауважимо, що остання підсистема призначена для користування базами даних і моделей з метою прийняття обґрунтованих управлінських рішень.



Рис. 1. Структура СППР для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України

1. Підсистема керування даними

Основне призначення підсистеми керування даними - створення, ведення та сумісне використання баз даних багатьма користувачами. У розробленій СППР введені вхідні статистичні дані зберігаються у базі даних, а керування даними здійснюється з використанням засобів системи керування базами даних Microsoft SQL

Server, що забезпечує цілісність створеної бази даних, підтримує її в актуальному стані, дає змогу маніпулювати даними і обробляти звернення до даних, які надходять від кінцевих користувачів.

Логічну модель бази даних для розробленого програмного забезпечення представлено на рис. 2:



Рис. 2. Логічна модель бази даних

2. Підсистема керування моделями

Як зазначалося вище, основне призначення підсистеми керування моделями - забезпечення користувачам доступу до моделей та їх використання. Керування моделями здійснюється засобами інтегрованого середовища розробки програмного забезпечення, зокрема засобами користувацького інтерфейсу. Важливою передумовою вибору інструментального засобу розробки програмного забезпечення є можливість доступу та використання широкого діапазону математичних функцій, можливість моделювання системи змінних у часі, а також візуалізація проміжних і кінцевих результатів.

У статті розглянуто варіант комплексної моделі економічних процесів в Україні, у якому закладено принцип ендогенного визначення рівня інфляції та темпу технічного прогресу за справедливості припущення про баланс між сукупним попитом та сукупною пропозицією.

Зовнішні дані для ідентифікації параметрів комплексної моделі (часові ряди даних попередніх періодів):

- $T_{N,t}$ - чисельність населення;
- Z_t - імпорт товарів та послуг (у дол. США);
- Q_t^D - номінальний ВВП;
- e_t - обмінний курс валют (грн./ дол. США);
- Y_t^k - наявний дохід домогосподарств;
- C_t - споживання домогосподарств;
- I_t^{OK} - інвестиції в основний капітал;
- N_{PJ} - непрямі податки;
- G_t - витрати держави на товари і послуги;
- E_t - експорт товарів і послуг (у дол. США);

M_t^S - пропозиція грошей (грошовий агрегат $M2$);

$I_{Z,t}$ - прямі іноземні інвестиції;

K_t - вартість виробничого капіталу;

Y_t - національний дохід;

P_t - дефлятор ВВП;

V_t - випуск продукції;

N_t - загальна чисельність зайнятих;

$N_{n,t}$ - загальна чисельність найманих працівників (враховуючи малі підприємства);

W_t - середньорічна номінальна заробітна плата найманих працівників;

A_t - амортизація (споживання основного капіталу);

O_t - дохід з майна на душу населення;

i_t - відсоткова ставка;

D_t - депозити в національній валюті;

$M1_t$ - грошовий агрегат $M1$.

Екзогенні змінні комплексної моделі (дані на поточний момент розрахунків):

$T_{N,0}$ - чисельність населення на початковий момент розрахунків;

I_t - валові інвестиції;

$I_t^{OK}, N_{PJ}, N_t, N_{n,t}, W_t, A_t, O_t, D_t$ (описані раніше).

Параметри моделі:

β_t - коефіцієнт еластичності при витратах праці;

χ - постійний темп технічного прогресу;

ϑ_t - коефіцієнт завантаження виробничого капіталу;

σ_t - коефіцієнт структури витрат, що визначає частку ВВП у випуску продукції;

ξ_t - статистичний коефіцієнт зайнятості; частка найманих працівників у загальній чисельності зайнятих в економіці;

λ_t - темп демографічного росту;

α - частка збільшення доходу в майбутньому, що додається до поточного доходу при обчисленні перманентного доходу;

$C_{r,t}$ - гранична схильність до споживання;

$Z_{0,t}$ - незалежний від доходу попит на імпорт;

$Z_{\chi,t}$ - гранична схильність до споживання імпортованих товарів;

$T_{PJ,t}$ - податкове навантаження, керований параметр;

M_0^S, μ^A - параметри для обчислення пропозиції грошей;

G_0, g - параметри для обчислення витрат держави на товари і послуги;

I_{20}, iz - параметри для знаходження прямих іноземних інвестицій;

E_0, ε - параметри для знаходження експорту товарів і послуг;

k - коефіцієнт витрачання грошей;

d - відношення оплати праці до доходу з майна;

$k_{h,t}$ - коефіцієнт трансакційних витрат.

Керована змінна:

e_t - обмінний курс валют (грн./ дол. США).

Система рівнянь, які складають комплексну модель:

1. Випуск продукції: $V_t = e^{\pi} L_t^{\beta_1} (g_t K_t)^{1-\beta_1}$.

2. Витрати праці на виробництво товарів і послуг: $L_t = \xi_t N_t W_t$.

3. Вартість виробничого капіталу:

$$K_t = (K_{t-1} - A_{t-1} + I_{t-1}^{OK} + I_{2,t-1}) P_{t-1}.$$

4. Попит на працю:

$$N_t^D = \frac{g_t K_t}{\xi_t W_t^{\beta_1} \sqrt{e^{\pi} \beta_1 P_t}} = \frac{g_t K_t}{\xi_t W_t} (e^{\pi} \beta_1 P_t)^{\frac{1}{1-\beta_1}}.$$

5. Ціна попиту на працю:

$$W_t^D = \frac{g_t K_t}{\xi_t N_t^{\beta_1} \sqrt{e^{\pi} \beta_1 P_t}}.$$

6. Реальний ВВП:

$$Q_t^s(P_t) = \sigma_t e^{\pi} [\xi_t N_t^D(P_t) W_t^D]^{\beta_1} (g_t K_t)^{1-\beta_1}.$$

7. Потенційний ВВП:

$$Q_t^p(P_t) = \sigma_t e^{\pi} [\xi_t N_{0,t} W_t^D]^{\beta_1} (0,9 K_t)^{1-\beta_1}.$$

8. Пропозиція праці: $N_t^S = \frac{1}{2} T_{N,t} \left(1 - \frac{O_t}{W_t}\right)$.

9. Ціна пропозиції праці: $W_t^S = \frac{O_t T_{N,t}}{T_{N,t} - 2N_t^S}$.

10. Чисельність населення: $T_{N,t} = T_{N,0} e^{4t}$.

11. Наявний дохід домогосподарств:

$$Y_t^V = Y_t - T_t.$$

12. Споживання домогосподарств:

$$C_t = C_{Y,t} \alpha Y_t^V + C_{Y,t} (1 - \alpha) Y_{t-1}^V + C_{0,t},$$

13. Ефект майна: $C_{0,t} = O_t T_{N,t}$.

14. Обсяг попиту на імпортові товари та послуги: $Z_t = e_t^{-1} (Z_{0,t} + Z_{Y,t} Q_t^D)$.

15. Максимальна чисельність зайнятих у сфері виробництва:

$$N_{0,t} = \frac{1}{2} T_{N,t} \xi_t \left(1 - \frac{O_t}{W_{0,t}}\right) = \frac{d-1}{2d} \xi_t T_{N,t},$$

16. Національний дохід:

$$Y_t = Q_t^D - A_t - N_{P,t}.$$

17. Податки: $T_t = T_{Y,t} Y_t$.

18. Пропозиція грошей: $M_t^S = M_0^S e^{\mu^S t}$.

19. Витрати держави на товари і послуги:

$$G_t = G_0 e^{g t}.$$

20. Прямі іноземні інвестиції: $I_{2,t} = I_{20} e^{iz t}$.

21. Експорт товарів та послуг: $E_t = E_0 e^{\varepsilon t}$.

22. Заробітна плата повної зайнятості:

$$W_{0,t} = \frac{\xi_t O_t T_{N,t} + 2 \cdot g_t K_t (\beta_t P_t e^{\pi})^{1/(1-\beta_t)}}{\xi_t T_{N,t}}.$$

23. Ефективна зайнятість:

$$N_{0,t} = \frac{T_{N,t} \cdot g_t K_t (\beta_t P_t e^{\pi})^{1/(1-\beta_t)}}{\xi_t O_t T_{N,t} + 2 \cdot g_t K_t (\beta_t P_t e^{\pi})^{1/(1-\beta_t)}}.$$

24. Безробіття: $F_t = \max\{N_t^S - N_t^D, 0\}$.

25. Природне безробіття:

$$F_{n,t} = \max\{N_t^S - N_{0,t}, 0\}.$$

26. Реальний попит на гроші:

$$M_t^D = \frac{Y_t^V k \sqrt{2 P_t k_{h,t}}}{\sqrt{i_t P_t + 2k(P_t - 1)}} + D_t / P_t.$$

27. Рівняння лінії LM - залежність сукупного попиту Q_t^D від номінальної відсоткової ставки i_t :

$$Q_t^D = A_t + N_{P,t} + \frac{M_t^S - D_t}{kP_t(1 - T_{Y,t})\sqrt{\frac{2P_t k_{h,t}}{i_t P_t + 2k(P_t - 1)}}}$$

28. Рівняння лінії IS - залежність Q_t^D від номінальної ставки відсотка i_t при заданому рівні цін P_t :

$$Q_t^D = [-C_{Y,t}\alpha(A_t + N_{P,t})(1 - T_{Y,t}) + O_t T_{N,0} e^{4t} + I_t + G_t + E_t e_t + C_{Y,t}(1 - \alpha)(Q_{t-1}^D - A_{t-1} - N_{P,t-1})(1 - T_{Y,t-1}) - Z_{0,t}] / [1 + Z_{Y,t} - C_{Y,t}\alpha(1 - T_{Y,t})]$$

29. Сукупна пропозиція:

$$Q_t^S(P_t) = \sigma_t e^{\gamma} [\xi_t N_t^D(P_t) W_t^D]^{\beta_1} (g_t K_t)^{1-\beta_1}$$

30. Рівняння зв'язку сукупного попиту та сукупної пропозиції за заданого рівня цін:

$$Q_t^D(P_t) / P_t = Q_t^S(P_t).$$

Побудову комплексної моделі для прогнозування основних економічних показників обґрунтовано, зокрема, у працях [3 - 9].

3. Інтерфейс користувача

Інтерфейс користувача призначений для забезпечення зв'язку між основними функціональними блоками СППР.

Розроблений програмний комплекс складається з двох форм: головної форми «Прогнозування економічних показників» (рис. 3) та допоміжної форми «Ідентифікація параметрів».

На вкладках головної форми «Виробники», «Домогосподарства», «Держава», «Закордон», «Ринок праці», «Ринок товарів і послуг», «Ринок грошей», «Ринок валют» вводяться керовані змінні та параметри, виводяться розраховані за моделлю показники, на вкладці «Дефлятор» відображається ендогенно обчислене значення дефлятора ВВП, а на вкладці «Точність» виводяться результати обчислень за сценаріями та обчислюються показники точності прогнозу.

Рис. 3. Форма «Прогнозування економічних показників»

На вкладках форми «Ідентифікація параметрів» (рис. 4) вводяться керовані параметри та виводяться результати ідентифікації параметрів, зокрема діаграми графічного представлення застосування алгоритмів ідентифікації.

Форма «Ідентифікація параметрів» з'єднується з базою даних макроекономічних показників за допомогою BDE – технології, яка являє собою сукупність динамічних бібліотек і драйверів, що забезпечують доступ до даних.

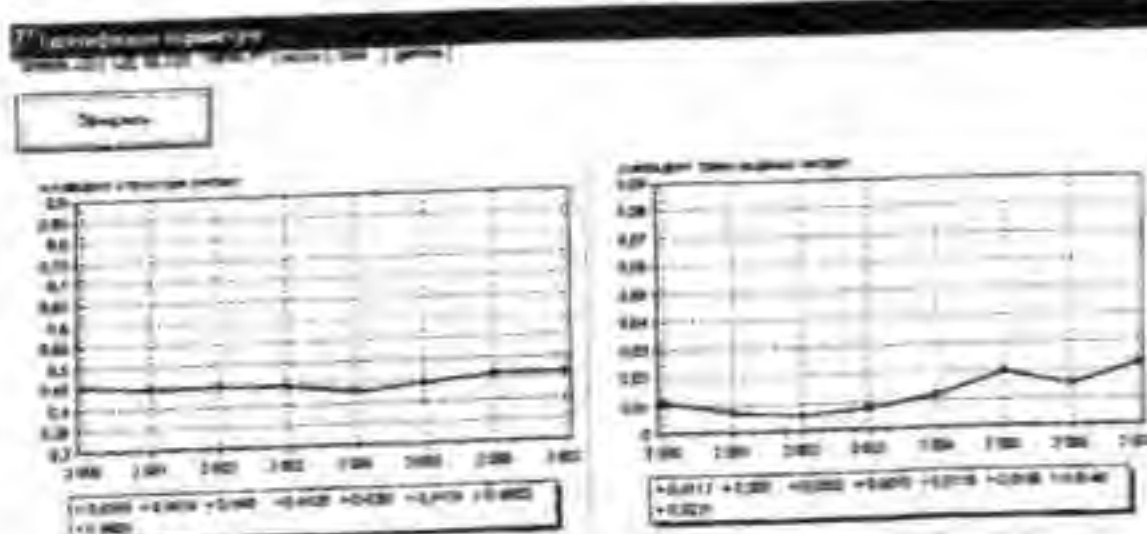


Рис. 4. Форма «Ідентифікація параметрів»

4. Користувачі

Як зауважено раніше, підсистема користувачів призначена для користування базами даних і моделей з метою прийняття обґрунтованих управлінських рішень. Розроблене програмне забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України орієнтоване на використання у організаціях, які займаються макроекономічним моделюванням та прогнозуванням. Також користувачами створеної СППР можуть виступати державні відомства, які у своїй діяльності застосовують прогнози розвитку України і областей.

5. Вибір інструментальних засобів та програмна реалізація

Для реалізації СППР вибрано інтегроване середовище розробки програмного забезпечення Borland Delphi (Rapid Application Development) для роботи під Microsoft Windows та систему керування базами даних Microsoft SQL Server, що підтримує технологію OLAP (On-Line Analytical Processing) і характеризується високою швидкістю і надійністю, простотою організації і підтримки.

Основні етапи роботи розробленої СППР:

Показник	2008 рік, стат. дані	MAPE	Показник Тейла	Сценарій 1	Сценарій 2	Сценарій 3
Номинальний ВВП	94905600000	0,0390100014376786	0,0198930135706365	911072334077	900325236751	879760778951
Витрата тов. і посл.	2072172000000	0,0457155841441734	0,0233927022752388	1977440617704	1954114537034	1909480326769
Чис. насел. населення	46372700	0,00312336784358038	0,00156412659314235	46227861	46227861	46227861
Споживання домогосп.	582482000000	0,0965550804488375	0,0460541587241138	638723596370	623081479109	593150452102
Населення домогосп.	634453000000	0,0638334234073504	0,0402303862034574	687684720318	670343662301	637161730013
Реальний ВВП	737213063763,608	0,0227450122041906	0,011244626518399	753580883896	752638920370	750032489710
Імпорт тов. і посл. дол.	9200000000	0,145215305967291	0,0782922710298432	78640191851	77716603184	75849325975
Експорт тов. і посл. дол.	7970000000	0,0255835232782719	0,0126301991422534	80713423282	80713423282	80713423282
Пропозиція грошей (M2)	51252700000	0,0671124648769723	0,0324667699592081	546923950286	546923950286	546923950286
Безробітні (за методом)	1425100	0,861026594624939	0,755967251352462	198051	459334	359237
Девальтор. % до поперед.	1,286	0,0606531881804044	0,0312750601443465	1,208	1,196	1,173
Налик докл.	851442000000	0,149820360087945	0,080976115430103	723878652966	713131555640	692567097840

Рис. 5. Приклад модельних розрахунків

6. Перевірка точності розрахунків

У блоці «Прогнозування економічних показників», крім обчислення прогнозних значень макроекономічних показників, обчислюються такі показники точності прогнозу (див. рис 5):

1) середня відносна похибка чи середній абсолютний відсоток похибки (*mean absolute percentage error*):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|;$$

2) коефіцієнт невідповідності Тейла (*Theil's inequality coefficient*):

- 1) введення вхідних даних в базу даних макроекономічних показників;
- 2) збереження вхідних даних в базі даних;
- 3) передача табличних даних з бази даних у розроблений програмний додаток;
- 4) введення керованих змінних і параметрів у блоці ідентифікації параметрів;
- 5) ідентифікація параметрів моделі;
- 6) передача ідентифікованих параметрів з блоку ідентифікації у блок розрахунків;
- 7) введення керованих змінних і параметрів у блоці розрахунків згідно із вибраним сценарієм;
- 8) обчислення прогнозних значень макроекономічних показників;
- 9) обчислення показників точності прогнозу.

Вхідними змінними для розрахунків стали дані Держкомстату України, Національного банку України, Міністерства фінансів України, Міністерства економіки України, звітні дані інших державних органів [10 - 13].

У розробленому програмному комплексі передбачається проведення розрахунків за певними сценаріями, які задаються користувачем (рис. 5).

$$U = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} / \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2} \right),$$

де y_i — фактичне значення показника на i -й момент часу,

$\hat{y}_i$ — прогнозне значення показника на i -й момент часу, $i = \overline{1, n}$.

Вважається, що значення *MAPE*, яке менше 10 %, дає високу точність прогнозу, а значить, і якості моделі; від 10 до 20 % - добру точність; від 20 до 50 % - задовільну точність; більше за 50 % - незадовільну точність [14 - 15].

Значення коефіцієнта невідповідності Тейла [16] належать відрізьку [0,1], причому на

кінцях відрізка він має наступну змістовну інтерпретацію: якщо $U = 0$, то всі прогнози абсолютно точні, якщо $U = 1$, то якість прогнозу незадовільна.

ВИСНОВКИ

У статті описано систему підтримки прийняття рішень для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України. Розроблена СППР вперше використовує запропонований варіант комплексної моделі економічних процесів в Україні та має такі особливості:

- 1) базується на моделях і алгоритмах, адаптованих до умов макроекономіки України;
- 2) дає можливість здійснення прогнозу на короткострокову перспективу;
- 3) розв'язує прямі і обернені задачі макроекономічного прогнозування;
- 4) аналізує вхідні дані та отримані прогнозні дані на предмет узгодженості з відповідною моделлю;
- 5) побудована за принципом інтерактивного розв'язування задач: користувач має змогу підтримувати діалог з системою в безперервному режимі;
- 6) має зручний інтерфейс для введення даних та аналізу результатів;
- 7) є зручною в роботі для осіб, які не мають достатнього досвіду у спілкуванні з ЕОМ, не потребує глибоких знань з обчислювальної техніки;
- 8) може бути адаптована для обчислення значень регіональних показників.

Порівняння результатів розрахунків із наявними статистичними даними свідчить про ефективність розробленої СППР для обчислення основних макроекономічних показників економіки України та демонструє її конкурентоспроможність.

Список використаних джерел

1. Сараев А.Д. Системный анализ и современные информационные технологии / А.Д. Сараев, О.А. Щербина // Труды Крымской Академии наук. - Симферополь: СОНАТ, 2006. - с. 47 - 59.
2. Ситник В. Ф. Системи підтримки прийняття рішень: Навч. посіб. / В. Ф. Ситник // К.: КНЕУ, 2004. - 614 с.
3. Харазішвілі Ю.М. Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України /

Ю.М. Харазішвілі // К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. - 324 с.

4. Назарага І.М. Моделі паритету купівельної спроможності та паритету відсоткових ставок в умовах економіки України / І.М. Назарага // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2008. - Випуск 4. - с. 145 - 148.

5. Назарага І.М. Монетарні моделі визначення обмінного курсу в умовах економіки України / І.М. Назарага // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2009. - Випуск 1. - с. 121 - 126.

6. Назарага І.М. Модель ринку праці макроекономіки України / І.М. Назарага // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2009. - Випуск 4. - с. 119 - 124.

7. Назарага І.М. Поведінкова модель та модель портфеля активів визначення обмінного курсу в умовах економіки / І.М. Назарага // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки: зб. наук. праць. - 2010. - Випуск 3. - с. 160 - 168.

8. Назарага І.М. Математичне моделювання попиту України на імпорتنі товари та послуги / І.М. Назарага // тези міжнародної конференції PDMU. - Східниця, 27-30 квітня 2009. - с. 135 - 136.

9. Назарага І.М. Рівноважний підхід у математичному моделюванні економіки України / І.М. Назарага // тези міжнародної конференції PDMU. - Львів, 17-21 травня 2010. - с. 118 - 119.

10. Статистичний щорічник України за 2007 рік / [ред. О. Г. Осауленко]. - К.: "Консультант", 2008. - 572 с.

11. Статистичний збірник "Регіони України". Ч. 1 / [ред. О. Г. Осауленко]. - К.: "Консультант", 2008. - 572 с.

12. Державний комітет статистики України. - Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>

13. Національний банк України. - Режим доступу: <http://www.nbuv.gov.ua>

14. Лук'яненко І. Системне моделювання показників бюджетної системи України. Принципи та інструменти. / І. Лук'яненко // К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2004. - 542 с.

15. Дуброва Т. А. Статистические методы прогнозирования: Учеб. пособие для вузов. / Т. А. Дуброва // М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2003. - 206 с.

16. Theil H. Applied econometric forecasting. / H. Theil // Amsterdam: North Holland Pub. Co. 1966.

Надійшла до редколегії 4.12.10

УДК 517.97

Ибрагимов Н. С., к. ф.-м. н., доц.

**Необходимое условие в задаче
идентификации для линейного
стационарного уравнения квазиоптики**

В данной работе рассматривается задача идентификации по финальному наблюдению для линейного стационарного уравнения квазиоптики. Для решения рассматриваемой задачи идентификации доказано необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: Уравнение квазиоптики, задача идентификации, необходимое условие.

E-mail: ns.ibragimov@gmail.com

Статью представил д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Известно, что линейное стационарное уравнение квазиоптики возникает при изучении распространения световых волн в неоднородной среде, когда процесс распространения не зависит от времени [1]. При прохождении световых волн через неоднородную среду коэффициенты уравнения, характеризующие показатели преломления и поглощения среды, могут оказаться неизвестными функциями [1, стр.233]. Поэтому изучение подобных процессов делает актуальными исследования обратных задач об определении коэффициентов линейного стационарного уравнения квазиоптики.

Данная работа посвящена изучению необходимого условия для решения вариационной формулировки обратной задачи для линейного стационарного уравнения квазиоптики об определении коэффициентов уравнения, когда коэффициенты уравнения ищутся в классе квадратично суммируемых функций. Следует отметить, что вариационные формулировки обратных задач об определении только начального фазового профиля распространения световых волн с известными показателями или только показателя преломления среды с известным начальным фазовым профилем ранее подробно изучены, например, в работах [1–11] и др.

1. Постановка задачи.

Пусть D – ограниченная область 3-х мерного евклидова пространства R^3 , Γ – граница области D , которая предполагается

N.S.Ibrahimov, Ph.D.

**A necessary condition for the problem of
identification for linear stationary quasi
optics equation.**

In this paper we consider the identification problem by the final observed for linear stationary equation of quasi optics. To solve the problem of identification proved a necessary condition in the form of a variational inequality.

Key words: Equation of quasi optics, identification problem, necessary condition.

достаточно гладкой, например, из C^2 , $x = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольная точка области D , $0 \leq z \leq L$, $L > 0$ – заданное число, $\Omega_z = D \times (0, z)$, $\Omega = \Omega_L$, $S = \Gamma \times (0, L)$. Пусть $L_p(D)$ – лебегово пространство измеримых функций в области D , суммируемых со степенью $p \geq 1$; $C^k([0, L], B)$ – банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \geq 0$ -раз непрерывно дифференцируемых на $[0, L]$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ – соболевы пространства функций с обобщенными производными порядка $k \geq 0$ по переменной x и $m \geq 0$ по переменной z , соответственно, которые суммируемы со степенью $p \geq 1$; $W_2^1(D)$ – подпространство пространства $W_2^1(D)$, всюду плотным множеством в котором является множество всех гладких функций, равных нулю вблизи границы Γ области D ;

$$W_2^2(D) = W_2^2(D) \cap W_2^1(D);$$

символ $\forall$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду, если не оговорено противное, постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через $c_j, j = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим задачу идентификации о минимизации функционала:

$$J_{\alpha}(v) = \|\psi(\cdot, L) - y\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (1)$$

на множестве

$$V \equiv \{v = (v_0, v_1); v_m \in W_2^{0,1}(\Omega), \|v_m\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \leq b_m,$$

$$m = 0, 1, v_1(x, z) \geq \tilde{b}_1, \forall (x, z) \in \Omega\}$$

при условиях:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \Delta \psi - a(x) \psi + v_0(x, z) \psi + \\ + i v_1(x, z) \psi = f(x, z), \quad (x, z) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in D, \quad \psi|_S = 0, \quad (3)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор

Лапласа, $\psi = \psi(x, z)$ – волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля волны, распространяющейся вдоль оси z , $a_0 > 0$, $\alpha \geq 0$, $b_m > 0$, $m = 0, 1$, $\tilde{b}_1 > 0$ – заданные числа; $a(x)$ – заданная вещественнозначная измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условию:

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \forall x \in D, \mu_0 = \text{const} > 0; \quad (4)$$

$\varphi(x)$, $f(x, z)$, $y(x)$ – заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^0(D), f \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (5)$$

$$y \in L_2(D), \quad (6)$$

$\omega \in H$ – заданный элемент, $\omega = (\omega_0, \omega_1)$,

$H \equiv W_2^{0,1}(\Omega) \times W_2^{0,1}(\Omega)$; $W_2^{0,1}(\Omega)$ – банахово

пространство функций $w = w(x, z)$ из пространства $L_{\infty}(0, L; L_2(D))$, имеющих

обобщенную производную $\frac{\partial w(x, z)}{\partial z}$ из

пространства $L_{\infty}(0, L; L_2(D))$ с конечной нормой:

$$\|w\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \text{vrai max}_{0 \leq z \leq L} \|w(\cdot, z)\|_{L_2(D)} +$$

$$+ \text{vrai max}_{0 \leq z \leq L} \left\| \frac{\partial w(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(D)}.$$

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x, z) \equiv \psi(x, z; v)$ из условий (2), (3) при каждом $v \in V$ будем называть прямой задачей. Под решением этой задачи будем понимать функцию $\psi(x, z)$ из пространства

$$B_0 \equiv C^0\left([0, L]; W_2^2(D)\right) \cap C^1([0, L]; L_2(D)),$$

удовлетворяющую уравнению (2) для любого $z \in [0, L]$ и почти всех $x \in D$, а условиям (3) для почти всех $x \in D$ и $(x, z) \in S$, соответственно.

Прямую задачу для линейного стационарного уравнения квазиоптики вида (2) можно рассматривать как прямую задачу для линейного нестационарного уравнения Шредингера с комплекснозначным квантовомеханическим потенциалом. Известно, что прямая задача, то есть начально-краевая задача для линейного нестационарного уравнения Шредингера с вещественнозначным квантовомеханическим потенциалом, зависящим от переменной x , подробно изучена в работах [9, 10], когда потенциал является функцией из класса $L_p(D)$ при $2 \leq p < n$, где $n \geq 3$

обозначает размерность пространства R^n , которому принадлежит множество D . В настоящей работе потенциал является комплекснозначным и зависит от обеих переменных (x, z) при $n = 3$, кроме того, множество V принадлежит пространству $B \equiv W_2^{0,1}(\Omega) \times W_2^{0,1}(\Omega)$. Поэтому результаты, полученные в работе [9, 10] относительно разрешимости начально-краевой задачи для линейного уравнения Шредингера, не достаточны для исследования задачи идентификации (1)–(3) для определения комплекснозначных потенциалов и возникает необходимость изучения разрешимости прямой задачи (2), (3) при $v \in V$.

Используя метод Галёркина и методику доказательства работ [6, 9–11], можно доказать справедливость утверждения:

Теорема 1. Пусть функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x, z)$ удовлетворяют условиям (3)–(5). Тогда при каждом $v \in V$ прямая задача (2), (3) имеет

единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(\cdot, z)\|_{W_2^0(D)}^0 + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(D)} \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^0(D)}^0 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right), \quad \forall z \in [0, L]. \quad (7)$$

Из этой теоремы следует, что функционал (1) имеет смысл в рассматриваемом классе решений прямой задачи (2), (3) для любого $v \in V$. Кроме того, используя эту теорему и методику доказательства работ [6, 9–11], можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x, z)$, $y(x)$ удовлетворяют условиям (4)–(6). Тогда задача идентификации (1)–(3) имеет хотя бы одно решение при $\alpha \geq 0$ и для любого $\omega \in H$.

2. Необходимое условие для решения задачи идентификации.

Рассмотрим вопрос о необходимом условии для решения задачи идентификации (1)–(3). Следует отметить, что подобная задача идентификации для линейного нестационарного уравнения Шредингера ранее изучена в работах [9, 10], когда ищется коэффициент $v_0(x, z) \equiv v_0(x)$ и $v_1(x, z) \equiv 0$. При этом найдено необходимое условие в виде вариационного неравенства. Установим аналогичный результат в данном случае.

Пусть $\Phi = \Phi(x, z)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_0 \Delta \Phi - a(x) \Phi + v_0(x, z) \Phi - i v_1(x, z) \Phi = 0, \quad (x, z) \in \Omega, \quad (8)$$

$$\Phi(x, L) = -2i(\psi(x, L) - y(x)), \quad x \in D, \quad \Phi|_S = 0, \quad (9)$$

где $\psi = \psi(x, z) \equiv \psi(x, z; v)$ – решение прямой задачи (2), (3) при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи понимается функция $\Phi = \Phi(x, z)$ из пространства B_0 , удовлетворяющая уравнению (8) для почти всех $x \in D$ и $\forall z \in [0, L]$, а также условиям (9) для почти всех $x \in D$ и $\forall z \in (0, L)$, соответственно.

Предположим, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет условию:

$$y \in W_2^0(D) \quad (10)$$

Из условия (10) и условия $\psi \in B_0$ следует, что

$$\psi(\cdot, L) - y \in W_2^0(D). \quad (11)$$

Используя условие (11) и методику доказательства теоремы 1 можно доказать следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие (10). Тогда сопряженная задача (8), (9) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{W_2^0(D)}^0 + \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(D)} \leq c_1 \left(\|\varphi\|_{W_2^0(D)}^0 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^0(D)}^0 \right), \quad \forall z \in [0, L] \quad (12)$$

Найдем формулу для первой вариации функционала (1).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\omega \in H$ – заданный элемент. Тогда для любой функции $w = w(x)$ из B и для любого $v \in V$ существует первая вариация функционала $J_\alpha(v)$ и справедлива следующая формула для первой вариации:

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha(v, w) = & \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi(x, z) \overline{\Phi}(x, z)) w_0(x, z) dx dz - \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, z) \overline{\Phi}(x, z)) w_1(x, z) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} (v_0(x, z) - w_0(x, z)) w_0(x, z) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} (v_1(x, z) - w_1(x, z)) w_1(x, z) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial w_0(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_0(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial w_1(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_1(x, z)}{\partial z} dx dz, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(x, z) \equiv \psi(x, z; v)$ – решение прямой задачи (2), (3), а $\Phi = \Phi(x, z) \equiv \Phi(x, z; v)$ –

решение сопряженной задачи (8), (9) при $v \in V$,
 $w = (w_0, w_1) = (w_0(x, z), w_1(x, z))$.

Доказательство. Вычислим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$. С помощью формулы (1) имеем:

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \delta v) - J_\alpha(v) = \\ &= 2 \int_D \operatorname{Re}((\psi(x, L) - y(x))\delta\bar{\psi}(x, L))dx + \\ &+ 2\alpha \int_\Omega (v_0(x, z) - w_0(x, z))\delta v_0(x, z)dx dz + \\ &+ 2\alpha \int_\Omega (v_1(x, z) - w_1(x, z))\delta v_1(x, z)dx dz + \\ &+ 2\alpha \int_\Omega \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial w_0(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_0(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &+ 2\alpha \int_\Omega \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial w_1(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_1(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &+ \|\delta\psi(x, L)\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|\delta v\|_H^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\delta v \in B$ – приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$, а функция $\delta\psi = \delta\psi(x, z) = \psi_\delta(x, z) - \psi(x, z) \equiv \psi(x, z; v + \delta v) - \psi(x, z; v)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \delta\psi}{\partial z} + a_0 \Delta \delta\psi - a(x) \delta\psi + \\ + (v_0(x, z) + \delta v_0(x, z))\delta\psi + i(v_1(x, z) + \delta v_1(x, z))\delta\psi = \\ = -\delta v_0(x, z)\psi - i\delta v_1(x, z)\psi, \quad (x, z) \in \Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta\psi(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad \delta\psi|_S = 0. \quad (16)$$

Теперь оценим решение этой начально-краевой задачи. С этой целью, обе части уравнения (15) умножим на функцию $\delta\bar{\psi}(x, z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_z . Тогда из полученного равенства вычитая его комплексное сопряжение и используя начальное условие из (16), имеем:

$$\begin{aligned} \|\delta\psi(\cdot, z)\|_{L_2(D)}^2 + 2 \int_{\Omega_z} (v_1(x, \tau) + \delta v_1(x, \tau)) |\delta\psi|^2 dx d\tau = \\ = -2 \int_{\Omega_z} \operatorname{Im}(\delta v_0(x, \tau)\psi\delta\bar{\psi}) dx d\tau - \end{aligned}$$

$$- 2 \int_{\Omega_z} \operatorname{Re}(\delta v_1(x, \tau)\psi\delta\bar{\psi}) dx d\tau$$

для $\forall z \in [0, L]$.

Отсюда в силу условий $v + \delta v \in V$ и неравенства Коши с ε при $\varepsilon = \frac{\tilde{b}_1}{2}$ получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} \|\delta\psi(\cdot, z)\|_{L_2(D)}^2 + \tilde{b}_1 \int_{\Omega_z} |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq \\ \leq \frac{2}{b_1} \max_{(x, z) \in \bar{\Omega}} |\psi(x, z)|^2 \left(\|\delta v_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \\ \forall z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу теоремы вложения при $n = 3$ пространство $C^0\left([0, L], W_2^2(D)\right)$ вложено в пространство $C(\bar{\Omega})$. Поэтому можем написать следующее неравенство:

$$\max_{(x, z) \in \bar{\Omega}} |\psi(x, z)|^2 \leq c_2 \|\psi\|_{C^0\left([0, L], W_2^2(D)\right)}^2, \quad (18)$$

где $c_2 > 0$ – некоторая постоянная. Учитывая неравенство (18) и оценку (7), неравенство (17) можно записать как:

$$\begin{aligned} \|\delta\psi(\cdot, z)\|_{L_2(D)}^2 + \tilde{b}_1 \int_{\Omega_z} |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq \\ \leq c_3 \left(\|\delta v_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad \forall z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя сопряженную задачу (8), (9) и начально-краевую задачу (15), (16), нетрудно установить справедливость равенства:

$$\begin{aligned} 2 \int_D \operatorname{Re}((\psi(x, L) - y(x))\delta\bar{\psi}(x, L))dx = \\ = \int_\Omega \operatorname{Re}(\psi(x, z)\bar{\Phi}(x, z))\delta v_0(x, z)dx dz - \\ - \int_\Omega \operatorname{Im}(\psi(x, z)\bar{\Phi}(x, z))\delta v_1(x, z)dx dz + \\ + \int_\Omega \operatorname{Re}(\delta\psi(x, z)\bar{\Phi}(x, z))\delta v_0(x, z)dx dz - \\ - \int_\Omega \operatorname{Im}(\delta\psi(x, z)\bar{\Phi}(x, z))\delta v_1(x, z)dx dz. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом равенства (20) из (14) получим следующую формулу для приращения функционала $J_\alpha(v)$ на элементе $v \in V$:

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \delta v) - J_\alpha(v) = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\delta \psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_0(x, z) dx dz - \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} (v_0(x, z) - \omega_0(x, z)) \delta v_0(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} (v_1(x, z) - \omega_1(x, z)) \delta v_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_0(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_0(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_1(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_1(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + R(\delta v), \end{aligned} \quad (21)$$

где $R(\delta v)$ определяется из следующей формулы:

$$\begin{aligned} R(\delta v) &= \|\delta \psi(x, L)\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|\delta v\|_H^2 + \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\delta \psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_0(x, z) dx dz - \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\delta \psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_1(x, z) dx dz. \end{aligned} \quad (22)$$

В силу теорем вложения при $n = 3$ нетрудно написать следующее неравенство:

$$\|\Phi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_4 \|\Phi\|_{B_0}. \quad (23)$$

С помощью неравенства (23) и оценок (7), (12), (19) для остаточного слагаемого $R(\delta v)$ получим справедливость оценки:

$$|R(\delta v)| \leq c_5 \|\delta v\|_B^2. \quad (24)$$

Это означает, что

$$R(\delta v) = o(\|\delta v\|_B). \quad (25)$$

С учетом этого соотношения из формулы (21) получим следующую формулу для приращения функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$:

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\delta \psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_0(x, z) dx dz - \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) \delta v_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} (v_0(x, z) - \omega_0(x, z)) \delta v_0(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} (v_1(x, z) - \omega_1(x, z)) \delta v_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_0(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_0(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_1(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v_1(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + o(\|\delta v\|_B). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь вместо $\delta v \in B$ возьмем $\theta w \in B$ такое, что $v + \theta w \in V$, где $\theta \in (0, 1)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} J_\alpha(v + \theta w) - J_\alpha(v) &= \\ &= \theta \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\delta \psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) w_0(x, z) dx dz - \\ &\quad - \theta \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, z) \overline{\Phi(x, z)}) w_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \theta \int_{\Omega} (v_0(x, z) - \omega_0(x, z)) w_0(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \theta \int_{\Omega} (v_1(x, z) - \omega_1(x, z)) w_1(x, z) dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \theta \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_0(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_0(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + 2\alpha \theta \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_1(x, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_1(x, z)}{\partial z} dx dz + \\ &\quad + o(\theta) \end{aligned}$$

для любой функции $w = w(x, z)$ из B и $\theta \in (0, 1)$. Отсюда, вычисляя первую вариацию функционала $J_\alpha(v)$, получим справедливость утверждения теоремы. Теорема 4 доказана.

Теперь найдем необходимое условие для решения задачи идентификации (1)–(3) в виде вариационного неравенства.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $v^* = v^*(x, z)$ из множества V является любым решением задачи идентификации (1)–(3). Тогда для $\forall v \in V$ необходимо выполнение неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi^*(x, z) \Phi^*(x, z)) (v_0(x, z) - v_0^*(x, z)) dx dz - \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi^*(x, z) \Phi^*(x, z)) (v_1(x, z) - v_1^*(x, z)) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} (v_0^*(x, z) - \omega_0(x, z)) (v_0(x, z) - v_0^*(x, z)) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} (v_1^*(x, z) - \omega_1(x, z)) (v_1(x, z) - v_1^*(x, z)) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0^*(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_0(x, z)}{\partial z} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_0(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial v_0^*(x, z)}{\partial z} \right) dx dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1^*(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_1(x, z)}{\partial z} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_1(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial v_1^*(x, z)}{\partial z} \right) dx dz \geq 0, \quad (27) \end{aligned}$$

где $\psi^*(x, z) \equiv \psi(x, z; v^*)$ и $\Phi^*(x, z) \equiv \Phi(x, z; v^*)$ – решения прямой и сопряженной задач, соответственно, при $v^* \in V$.

Доказательство. Пусть $v^* = v^*(x, z)$ является любым решением задачи идентификации (1)–(3) из множества V , а $v = v(x, z)$ любым элементом этого множества. Из структуры множества V ясно, что оно является выпуклым. Поэтому для $v^* \in V$ и $v \in V$ имеем:

$$v^* + \theta(v - v^*) \in V, \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Следовательно, для того, чтобы $v^* \in V$ была точкой минимума функционала $J_{\alpha}(v)$ необходимо выполнение неравенства (см. [12], стр.408):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} J_{\alpha}(v^* + \theta(v - v^*)) \Big|_{\theta=0} &= \delta J_{\alpha}(v^*, v - v^*) \geq 0, \\ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формулы (13) получим утверждение теоремы. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. В случае, когда коэффициенты $v_m(x, z)$, $m = 0, 1$ не зависят от переменной z , то

есть $v_m(x, z) \equiv v_m(x)$, $m = 0, 1$, можно доказать дифференцируемость по Фреше функционала (1) и найти формулу для его градиента.

Список использованных источников

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. - М.: Наука, 1985. - 336 с.
2. Ягубов Г.Я. Задача оптимального управления для уравнения типа Шредингера // В сб.: «Численные методы и матем. обеспечение ЭВМ». - Баку: изд-во АГУ, 1984. - С. 116-125.
3. Шамеева Т.Ю. Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде // Вестн. Московск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. - 1985, №1. - С. 12-19.
4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР. - 1988, т.303, № 5. - С. 1044-1048.
5. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан. - 1989, № 12. - С. 27-38.
6. Ягубов Г.Я. Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера // Докторск. дисс. - Баку, 1993. - 318 с.; Автореф. докторск. дисс. - Киев, 1994. - 29 с.
7. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера // Изв. АН. Азерб. - Сер. физ.-техн.-матем. наук. - 1994, т. XV, № 5-6. - С. 56-61.
8. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. - 1997, т. 33, № 12. - С. 1691-1698.
9. Искендеров А.Д. Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера // В сб.: «Проблемы матем. моделирования и опт. управления». - Баку, 2001. - С. 6-36.
10. Iskenderov A.D. Identification problem for time dependent Schrodinger type equation // Proceedings of the Lankaran State University. - Lankaran, 2005. - Pp. 31-53.
11. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном и нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоран. гос-го ун-та. - Серия естествен. наук. - Ленкоран, 2007. - С. 3-56.
12. Мину М. Математическое программирование. - М.: Наука, 1990. - 488 с.

Надійшла до редколегії 26.10.10

УДК 681.3:004.056

Каленський А. А., аспірант

Групові цифрові підписи. Методи досягнення константної довжини групового ключа

Розглядається один з важливих криптографічних засобів захисту інформації в групах – цифровий підпис. Проводиться огляд розвитку схем побудови групових цифрових підписів з константною довжиною групового ключа.

Акцентовується увага на проблемах пов'язаних з побудовою надійних групових підписів. Наводяться основні властивості та вимоги щодо безпеки подібних схем.

Ключові слова: цифровий підпис, цифровий підпис в групі, підписи доведення знання.

*E-mail: akalenskyi@gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д. ф.-м. н. Анісімов А.В.

Вперше про можливість існування цифрового підпису і опис загальної схеми його використання було наведено в статті Діффі та Хеллмана [16]. Відразу після цієї роботи в 1978 р. Р.Л. Рівест, А.Шамір і Л. Адлеман запропонували RSA – схему шифрування та метод цифрового підпису заснований на цій схемі [22].

Цифровий підпис – це деяка комп'ютерно згенерована цифрова добавка до повідомлення, яка зв'язана з повідомленням деяким заданим відношенням. Кожен має можливість перевірити зв'язок повідомлення і його цифрового підпису, але тільки власник цифрового підпису може обчислити новий цифровий підпис при зміні повідомлення [1].

Цифровий підпис може використовуватися для підпису електронних повідомлень. Сдержувач підписаного повідомлення матиме доказ, що це повідомлення прийшло від відправника та може переконати третю сторону в тому, що автор підпису надіслав це повідомлення. Ця властивість сильніша, ніж просто ідентифікація автора повідомлення, де одержувач може тільки перевірити, що повідомлення прийшло від відправника.

Цифровий підпис залежить від повідомлення і від автора підпису. Інакше одержувач повідомлення міг би змінити повідомлення перед показом пари підпис-повідомлення третій стороні. Або він міг «підписатися» під будь-яким

A. Kalenskyi, postgraduate student

Digital group signatures. Methods of achievement constant length of the group key

One of important cryptographic facilities of information protection in group – digital signature is considered. An overview of the development scheme of construction digital signature with constant length of the group key is made.

Attention is accented on problems related to the construction of reliable group signatures. Basic properties and safety requirements are pointed.

Keywords: digital signature, digital signature in a group, signatures based on a proof of knowledge.

повідомленням цим же підписом, оскільки неможливо виявити електронні операції типу «вириж» і «встав» [16].

Сучасний стан розвитку інформаційних технологій, широке розповсюдження інформаційних ресурсів призводить до виникнення нових задач пов'язаних з об'єднанням користувачів у групи для взаємного використання відповідних ресурсів. Проблематика створення таких груп детально описана в статтях [2,3]. Існування цих груп не обмежуються лише можливістю взаємодії в середині групи. Група досить часто взаємодіє з зовнішнім середовищем як єдине ціле. Виникає необхідність в цифрових підписах від імені групи. Групові підписи надають змогу членам групи підписувати повідомлення анонімно від імені групи.

Групові підписи можуть бути використані компанією для аутентифікації прайс-листів, прес-релізів чи цифрових контактів від імені групи. Користувачу (споживачу) необхідно знати тільки відкритий ключ групи для перевірки підпису. Компанія при цьому приховує свою внутрішню структуру. В разі необхідності існує можливість визначити, хто саме створив цей підпис.

Наприклад, використання цієї схеми при проведенні тендеру виглядає наступним чином. Всі компанії, що приймають участь у тендері утворюють групу і кожна компанія підписує свої

пропозиції анонімно використовуючи груповий підпис. Пізніше, коли найкращий варіант з пропозиції обрано, автора цього підпису ідентифікують залишаючи при цьому авторів інших пропозицій анонімними [14].

Поняття групових підписів першими ввели Шаум і Ван-Хейст [13]. Вони запропонували чотири схеми, три з яких забезпечували обчислювальну анонімність, четверта – інформаційно-теоретичну анонімність. В перших двох з них перед створенням групи необхідно визначити кількість членів в групі. В двох останніх розмір групи визначився процедурою створення групи (якщо хтось хотів підписатися анонімно він обирав групу людей і доводив, що він належить до цієї групи). Деякі схеми вимагали взаємодії групового менеджера з автором підпису для відкриття підпису. В усіх запропонованих схемах довжина відкритого групового ключа лінійно залежала від кількості членів у групі.

Далі Чен та Педерсен [14] запропонували дві схеми групового підпису з можливістю додавання нових членів групи після створення групи. В основі схем ідентифікації лежав так званий механізм подвійного підпису. Член групи створював два таємних ключі, що відповідали двом відкритим груповим ключам. Далі він підписував повідомлення за допомогою обох таємних ключів. Обидва підписи можна було перевірити за допомогою відповідних відкритих ключів. Кожен з членів групи надавав один з двох таємних ключів менеджеру групи, для можливості визначення автора підпису. Тому в цій схемі довжина таємного групового ключа лінійно залежить від кількості членів в групі.

Згодом Петерсен в статті [21] описав процес перетворення схеми звичайного цифрового підпису в схему групового підпису. При цьому результуюча схема мала фіксовану довжину відкритого групового ключа. Це досягалось завдяки генеруванню пари відкритого і приватного групового ключа, що розповсюджувалися таємно серед всіх членів групи. Менеджер групи додатково генерував власні таємний і відкритий ключ (x_z, y_z) . Також кожному члену групи присвоювався ідентифікатор ID_U , який використовувався під час генерації підпису на повідомленні. При цьому, для захисту від створення підпису одним членом групи від імені іншого члена групи, Петерсен пропонував створювати ідентифікатор користувача ID_U за допомогою односторонньої функції f , тобто $ID_U = f(u)$, де u , секретний ключ

користувача з відповідним йому відкритим ключем ID_U . Член групи зашифровував цей ідентифікатор відкритим ключем групового менеджера $c = E(y_z, ID_U)$ і додавав до групового підпису. Менеджер групи, при необхідності, міг розкодувати цю частину підпису і отримати ідентифікатор члена групи, тим самим визначивши автора підпису. В основі його схеми, лежить «доказ з непрямым розголошенням» (indirect disclosure proof), що складається з набору певних «підписів знання» (див. означення нижче, надалі вони будуть широко використовуватися в схемах групового підпису). Цей доказ з непрямым розголошенням член групи будує для доведення того факту, що в c закодовано саме його ідентифікатор ID_U з використанням таємного ключа менеджера групи x_z без розголошення інформації про ID_U .

Наступним вдосконаленням схеми групового підпису по праву вважається схема представлена Каменішем та Стадлером в [11]. Вона заклала основу всього подальшого розвитку схем групового підпису. Розглянемо її детальніше, але перед тим введемо кілька означень.

Означення схеми групового підпису

В схемі групового підпису приймають участь три сторони: члени групи, менеджер групи і не члени групи.

Схема групового підпису складається з наступних процедур:

Установка (ініціалізація): алгоритм для генерації відкритого групового ключа та секретного групового ключа.

Присвоєння: протокол між менеджером групи та користувачем, в результаті якого користувач стає членом групи. При цьому новий член групи отримує свій приватний груповий ключ, за допомогою якого він може робити підписи від імені групи. А менеджер групи отримує певну інформацію про нового члена групи, яку він додає до свого приватного ключа групового ключа.

Підпис: протокол між членом групи та користувачем, в результаті якого член групи, використовуючи свій приватний груповий ключ, створює підпис на повідомленні, яке надане користувачем.

Перевірка: алгоритм перевірки правильності групового підпису за відкритим груповим ключем та підписаним повідомленням.

Відкриття: алгоритм, за допомогою якого груповий менеджер за отриманим підписаним

повідомленням та секретним груповим ключем визначає автора підпису.

Виключення з групи: алгоритм за допомогою якого груповий менеджер використовуючи інформацію отриману на етапі приєднання члена до групи може виключити члена з групи. Тобто унеможливорює подальше створення цим користувачем підписів від імені групи.

Властивості групового підпису

Груповий підпис має наступні властивості:

1. Тільки члени групи мають можливість підписувати повідомлення.
2. Існує можливість перевірки вірності цього підпису, але неможливо встановити, хто саме з членів групи створив його.
3. У разі необхідності підпис може бути «відкритий»; тобто існує менеджер групи, який може визначити, хто саме з членів групи створив цей підпис.

Вимоги безпеки

Груповий підпис повинен відповідати наступним вимогам безпеки:

1. **Непідробність (зовнішня).** Тільки авторизовані члени групи можуть створювати групові підписи.
2. **Анонімність.** Нemoжливiсть ідентифікування автора підпису (у разі необхідності, менеджер групи або коаліція з членів групи можуть ідентифікувати автора підпису).
3. **Незв'язність.** Нemoжливiсть з'ясувати, які підписи створені одним і тим же членом групи.
4. **Непідробність (внутрішня).** Ні коаліція з членів групи, ні менеджер групи не можуть підписуватися від імені іншого члена групи (проте ця властивість не заважає менеджеру групи створити «неіснуючого» члена групи і підписуватися від його імені).
5. **Відстежуваність.** Менеджер групи має можливість відкрити підпис і тим самим визначити автора підпису.
6. **Опір коаліції.** Коаліція членів групи таємно змовившись і об'єднавши свої знання не може згенерувати підпис від імені групи, який не можна було б відслідкувати.

Ефективність схеми групового підпису

Ефективність схеми групового підпису залежить від таких параметрів:

1. Розмір відкритого групового ключа.
2. Розмір групового підпису.
3. Ефективність процедур підпису та перевірки підпису.
4. Ефективність процедур встановлення, відкриття та приєднання.

Теоретичні відомості

Введемо деякі позначення:

Символ $||$ означає конкатенацію бінарного представлення цілих чисел або елементів групи; a'' означає порожній рядок.

Якщо A множина, то $a \in_R A$ означає, що a вибирається випадковим чином з A з рівномірним імовірнісним розподілом.

Для цілого числа q , Z_q означає кільце цілих чисел по модулю q ; Z_q^* означає мультиплікативну групу по модулю q . Стійка до колізій хеш-функція позначається як

$$H: \{0;1\}^* \rightarrow \{0;1\}^k \quad (k \approx 160).$$

Нехай $G = \langle g \rangle$ є циклічною групою порядку n , і нехай a є елементом Z_q^* .

Означення 1. (Дискретний логарифм) Дискретний логарифм $y \in G$ основи g – найменше додатне ціле число x що задовольняє рівність $g^x = y$.

Означення 2. (Подвійний дискретний логарифм) Подвійний дискретний логарифм $y \in G$ до основи g і a – найменше додатне ціле число x , що задовольняє рівність $g^{(a^x)} = y$, якщо таке x існує.

В схемі параметри n , g , G , та a потрібно обирати так, щоб обчислення дискретного логарифму в G до основи g і в Z_n^* до основи a було неможливо (обчислювально неможливо).

Означення 3. (Корінь дискретного логарифму) e -й корінь дискретного логарифму $y \in G$ до основи g – ціле число x , що задовольняє рівність $g^{(x^e)} = y$, якщо таке x існує.

При цьому, якщо розклад на множники n невідомий, наприклад якщо n – модуль RSA (див. [22]), то обчислення e -го кореня в Z_n^* вважається неможливим.

Цифровий підпис доведення знання

В створенні групових підписів велику роль відіграють так звані бездіалогові системи доведення знання. Саме завдяки ним вдалося отримати схеми групового підпису, в яких довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать від розміру групи.

В загальному випадку системи доведення знання дозволяють одній стороні переконати іншу сторону в знанні певних даних так, щоб не відкрити при цьому секретну інформацію. Бездіалогова система доведення знання дає можливість не інтерактивного доведення знання.

Існує декілька систем доведення знання, однією з найвідоміших є доведення з мінімальним розголошенням [8] і доведення з нульовим розголошенням [17].

Всі схеми групового підпису які наведені в цій статті використовують систему доведення знання запропоновану Каменішем (Jan Camenisch) в [11], яка в свою чергу побудована на статистичній (з чесною перевіряючою стороною) схемі доведення знання з нульовим розголошенням з використанням евристики Фіата-Шаміра (Fiat-Shamir) [18]. Вони запропонували в схемі інтерактивного доведення знання з нульовим розголошенням з чесною перевіряючою стороною замінити інтерактивні запити перевіряючої сторони на хеш-функцію. Таким чином отримали систему доступну для відкритої перевірки знання, так звані підписи доведення знання (SPK – від Signatures based on a Proof of Knowledge). Ці підписи знання можуть бути доведені у випадковій моделі з оракулом [7, 17]. Одним з прикладів такої схеми є схема підпису Шнора (Schnorr) [23].

Необхідно додати, що завдяки стійкості відносно атаки на основі адаптивно підібраних повідомлень ([19]), підпис доведення знання є одним з ефективних способів демонстрації тверджень прихованих за допомогою односторонніх функцій. Також підпис доведення знання є досить зручним методом і в тих випадках коли необхідно показати, що секретні дані мають певну структуру і при цьому саме доведення не має бути секретним (сторона, що доводить згодом не буде відмовлятися від доведення).

Розглянемо деякі підписи знання.

Надалі будемо позначати літерами грецького алфавіту значення, знання яких необхідно довести, а всі інші значення (які є відомими) – літерами латинського алфавіту.

Означення 4. (Підпис знання дискретного логарифму) Пара $(c; s) \in \{0;1\}^k \times Z_n^*$; де c задовольняє рівність $c = H(m||y||g||g^y)$ є підписом знання дискретного логарифму елементу $y \in G$ до основи g на повідомленні m .

Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y)$, може легко знайти цей підпис знання наступним чином. Обираємо випадковим чином $r \in Z_n^*$ та обчислюємо c та s як:

$$c := H(m||y||g||g^r) \text{ та } s := r - cx \pmod{n}.$$

Позначатимемо такий підпис як:

$$SKLOG[\alpha : y = g^\alpha].$$

Більш складні вирази будуються аналогічно. Наприклад знання представлення y до основи g і h , тобто, пара (α, β) , яка задовольняє $y = g^\alpha h^\beta$ має наступний вигляд.

Означення 5. (Підпис знання представлення) Розглянемо інший елемент $h \in G$, чий дискретний логарифм до основи g невідомий. За даним елементом $y \in G$ підпис знання представлення y до основ g та h на повідомленні m є кортежем $(c; s_1; s_2) \in \{0;1\}^k \times Z_n^*$, що задовольняє наступну рівність:

$$c = H(m||y||g||h||g^\alpha h^\beta y^c)$$

Той, хто знає представлення (x_1, x_2) y до основ g та h може легко обчислити $(c; s_1; s_2)$ наступним чином: обирає випадковим чином два числа $r_i \in Z_n^*$, $i=1,2$ і обчислює

$$c = H(m||y||g||h||g^{r_1} h^{r_2}).$$

Тоді значення s_i можуть бути обчислені як $s_i = r_i - x_i c$, $i=1,2$, $c = c_1 + c_2$.

Такий підпис будемо позначати як:

$$SKREP[(\alpha, \beta) : y = g^\alpha h^\beta].$$

Означення 6. (Узагальнений підпис знання представлень) Підпис знання представлень $y_1, \dots, y_w$ відповідно до основ $g_1, \dots, g_w$ на повідомлення m означає

$$SKREP[(\alpha_1, \dots, \alpha_u) : (y_1 = \prod_{j=1}^l g_{b_{1j}}^{\alpha_{1j}}) \wedge \dots \wedge \\ \wedge (y_w = \prod_{j=1}^{l_w} g_{b_{wj}}^{\alpha_{wj}})](m),$$

де індекси $e_{ij} \in \{1, \dots, u\}$ відповідають елементам $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ і індекси $b_{ij} \in \{1, \dots, v\}$ відповідають базовим елементам $g_1, \dots, g_v$.

Підпис складається з кортежу $(c; s_1, \dots, s_w) \in \{0, 1\}^k \times Z_n^w$, що задовольняє рівняння

$$c = H(m || y_1 || \dots || y_w || g_1 || \dots || g_v || \{ \{ e_{ij}, b_{ij} \}_{j=1}^{l_i} \}_{i=1}^w || \\ || y_1^c \prod_{j=1}^{l_1} g_{b_{1j}}^{\alpha_{1j}} || \dots || y_w^c = \prod_{j=1}^{l_w} g_{b_{wj}}^{\alpha_{wj}}),$$

$SKREP$ обчислюється таким же чином як простий підпис знання дискретного логарифму, якщо відомо, що кортеж $(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$ довжини u задовольняє дані рівняння. Вибравши $r_i \in {}_R Z_n$ для $i = 1, \dots, u$, обчислюють c , як:

$$c = H(m || y_1 || \dots || y_w || g_1 || \dots || g_v || \{ \{ e_{ij}, b_{ij} \}_{j=1}^{l_i} \}_{i=1}^w || \\ || y_1^c \prod_{j=1}^{l_1} g_{b_{1j}}^{\alpha_{1j}} || \dots || y_w^c = \prod_{j=1}^{l_w} g_{b_{wj}}^{\alpha_{wj}}),$$

а потім визначають $s_i := r_i \cdot c \alpha_i \pmod n$ для $i = 1, \dots, u$.

Означення 7. (Підпис знання подвійного дискретного логарифму) Нехай $1 \leq k$ є параметром безпеки. Кортеж $(c; s_1, \dots, s_l) \in \{0, 1\}^k \times Z$ довжини $l+1$, що задовольняє рівність

$$c = H(m || y || g || a || t_1 || \dots || t_l), \\ \text{де } t_i = \begin{cases} g^{(a^{s_i})}, & c[i] = 0 \\ y^{(a^{s_i})}, & \text{інакше} \end{cases}$$

є підписом знання подвійного дискретного логарифму y до основи g і a , і позначається

$$SKLOGLOG[\alpha : y = g^{(a^\alpha)}](m).$$

Він може бути обчисленим, тільки якщо подвійний дискретний логарифм x групового елемента y до основ g і a відомий. Припустимо що існує верхня межа λ на довжину числа x , тобто $0 \leq x < 2^\lambda$ (наприклад $\lambda = |n|$).

Нехай $\varepsilon > 1$ є константою. Обчислюємо значення $t_i^* = g^{(a^{r_i})}$ для $i = 1, \dots, l$ з випадково вибраним $r_i \in \{0, \dots, 2^{\varepsilon \lambda}\}$. Тоді

$$c = H(m || y || g || a || t_1^* || \dots || t_l^*),$$

де

$$s_i = \begin{cases} r_i, & \text{якщо } c[i] = 0 \\ r_i - x, & \text{інакше} \end{cases}, \text{ для } i = 1, \dots, l.$$

Отже, результуючий кортеж $(c, s_1, \dots, s_l)$ задовольняє рівність перевірки.

Означення 8. (Підпис знання кореня дискретного логарифму)

Кортеж $(c, s_1, \dots, s_l) \in \{0, 1\}^k \times Z_n^*$, який задовольняє рівність

$$c = H(m || y || g || e || t_1 || \dots || t_l),$$

$$\text{де } t_i = \begin{cases} g^{(s_i^e)}, & c[i] = 0 \\ y^{(s_i^e)}, & \text{інакше} \end{cases}$$

є підписом знання e -го кореня дискретного логарифму з основою g , і позначається як

$$SKROOTLOG[\alpha : y = g^{(a^\alpha)}](m).$$

Відзначимо, що значення $s_1, \dots, s_l$ належать до Z_n^* і тому мають бути ненульовими.

Якщо відомий e -й корінь x дискретного логарифму y з основою g тоді такий підпис може бути отриманий наступним чином.

Обчислюються значення $t_i^* = g^{(r_i^e)}$, для $i = 1, \dots, l$ з випадково обраним $r_i \in Z_n^*$. Далі,

$$c = H(m || y || g || e || t_1^* || \dots || t_l^*)$$

та

$$s_i = \begin{cases} r_i, & \text{якщо } c[i] = 0 \\ r_i / x \pmod n, & \text{інакше} \end{cases}, \text{ для } i = 1, \dots, l.$$

Таким чином результуючий кортеж $(c, s_1, \dots, s_l)$ задовольняє рівність для перевірки.

Схема запропонована Каменішем та Стадлером (Jan Camenisch, Markus Stadler)

Ініціалізація системи

Менеджер групи генерує наступні значення:

- відкритий RSA ключ $(n; e)$
- циклічну групу $G = \langle g \rangle$ порядку n , в якій неможливо обчислити дискретні логарифми (наприклад G може бути підгрупою Z_p^* для простого p , при цьому $n|(p-1)$),

- елемент $a \in Z_n^*$ (довжина a повинна мати порядок довжини найбільшого з двох множників модуля n), і

- верхня межа λ довжини секретних ключів та константа $\varepsilon > 1$ (ці параметри потрібні для підписів SKLOGLOG)

Тоді відкритий груповий ключ має вигляд: $Y = (n; e; G; g; a; \lambda; \varepsilon)$.

Присднання до групи, генерація ключів і сертифікатів для членів групи

Аліса хоче приєднатися до групи. Вона обирає свій секретний ключ $x \in_R \{0, \dots, 2^\lambda - 1\}$, обчислює значення $y := a^x \pmod n$ та її членський ключ $z = g^y$.

Аліса прив'язує себе до цього ключа y , наприклад підписуючи його. Вона надсилає y і z до менеджера групи і доводить йому, що вона знає дискретний логарифм y до основи a (це може бути зроблено за допомогою методів, подібних до підписів знання дискретного логарифму, з різницею в тому, що розмір групи невідомий). Менеджер групи перевіряє доведення знання і повертає їй членський сертифікат

$$v \equiv (y + 1)^{1/e} \pmod n$$

Кортеж $(x; y; v)$ неможливо побудувати без допомоги менеджера групи. З однієї сторони, якщо y правильно сформовано, тоді неможливо обчислити e -й корінь $y + 1$, оскільки розклад на множники n невідомий.

З іншого боку, якщо $y + 1$ обчислюється як ω^e , для деяких значень ω тоді неможливо обчислити дискретний логарифм $\omega^e - 1$ до основи a . До того ж, навіть якщо декілька членів групи зберуть свої значення разом, вони не в змозі побудувати новий такий кортеж. Далі, в процесі аналізу схеми, ми побачимо, що це не зовсім так.

Підпис повідомлення

Для підпису повідомлення m , Аліса обчислює наступні значення:

$$-\tilde{g} := g^r \text{ для } r \in_R Z_n^*$$

$$-\tilde{z} := z^y$$

$$-V1 := \text{SKLOGLOG}[\alpha : \tilde{z} = \tilde{g}^{\alpha^e}](m)$$

$$-V2 := \text{SKROOTLOG}[\beta : \tilde{z}\tilde{g} = \tilde{g}^{\beta^e}](m)$$

Результуючий підпис повідомлення m складається з кортежу $(\tilde{g}, \tilde{z}, V1, V2)$ і може бути перевіреним за допомогою перевірки коректності підписів знання $V1$ і $V2$. Пояснимо, чому цей підпис дійсно доводить, що Аліса належить до групи. З одного боку, через $V1$ значення $\tilde{z}\tilde{g}$ має бути в формі $\tilde{z}\tilde{g} = \tilde{g}^{\alpha^e + 1}$ для цілого α яке знає Аліса. З іншого боку, $V2$ доводить, що Аліса знає e -й корінь від $(\alpha^e + 1)$, що означає, що Аліса знає секретний ключ і членський сертифікат її членського ключа.

Відкриття підпису

Зв'язати два підписи $(\tilde{g}; \tilde{z}; V1; V2)$ і $(\tilde{g}'; \tilde{z}'; V1'; V2')$, тобто, визначити чи ці підписи зробив один і той же член групи можливо тільки вирішивши чи

$$\log_{\tilde{g}} \tilde{z} = \log_{\tilde{g}'} \tilde{z}'$$

В загальному випадку що проблему вирішити неможливо і тому підписи членів групи є анонімними і незв'язними. Проте, менеджер групи має перевагу: він знає декілька можливих значень $\log_{\tilde{g}} \tilde{z}$, а саме дискретних логарифмів (до основи g) членських ключів членів групи і тому може вирішити що проблему.

Отримавши тільки підпис $(\tilde{g}; \tilde{z}; V1; V2)$ для повідомлення m , менеджер групи може знайти члена групи, що зробив цей підпис, перевіряючи чи $\tilde{g}^{y_P} = \tilde{z}$ для всіх членів групи P (де y_P означає дискретний логарифм члена P з ключем z_P до основи g).

Доказ цього факту складатиметься з ключа z_P члена, що підписав документ, його прив'язки до цього ключа, і не інтерактивного доведення рівності

$$\log_g z = \log_{\tilde{g}} \tilde{z}.$$

Аналіз безпеки і ефективності наведеної схеми

Згідно з [11] за наступних значень параметрів системи: $k = 160$, $l = 64$, $\lambda = 170$, $\varepsilon = 4/3$, $|n| = 600$, і $e = 3$ підпис складає менш ніж 7 КБайт і операції для підпису і підтвердження підпису повідомлень вимагають обчислення приблизно 140 000 множень з 600 розрядним модулем (це відповідає близько 155 піднесенням до степеня з повною 600 розрядною експонентою).

Безпека наведеної практичної реалізації основної схеми групового підпису ґрунтується на складності проблеми дискретного логарифму та на безпеці схем підпису Шнора (Schnorr [23]) і RSA [22] і спирається на додаткове припущення на основі цих схем, що обчислення сертифікату дійсного ключа члена групи неможливе, якщо розклад на множники модуля n невідомий. Відповідно до анонімності групових членів, розв'язок проблеми зв'язку двох підписів є настільки ж складним, наскільки складним є перевірка рівності двох логарифмів.

Проте, як показано в [6], ця схема в чистому вигляді не є стійкою проти атаки коаліції членів групи. Розглянемо цей сценарій атаки детальніше.

Атака коаліції групових членів на схему Каменіша-Стадлера

Супротив коаліції в схемі Каменіша-Стадлера базується на наступному теоретико-числовому припущенні:

Нехай e та n параметри RSA, і $a \in \mathbb{Z}_n^*$ елемент великого мультиплікативного порядку, такий що обчислення дискретного логарифму до основи a є неможливим.

Тоді важко обчислити пару цілих (x, v) таких, що рівність:

$$v^e = 1 + a^x \pmod{n}$$

справджується за умови, що розклад n на множники не відомий. Більш того, складно знайти таку пару навіть якщо відома ще одна пара (x', v') , яка задовольняє цю рівність.

Тобто, маючи один чи декілька групових сертифікатів вигляду $(1 + a^x)^d$, де $ed = 1 \pmod{\varphi(n)}$, важко згенерувати новий сертифікат без допомоги менеджера групи.

Проте, уявімо наступну ситуацію. Нехай $(1 + a^x)^d$ є дійсним груповим сертифікатом. Він може бути переписаний як:

$$(1 + ax)d = axd(1 + a - x)d.$$

Нехай, в нашому випадку $x = ke$ для деякого k , тоді

$$axd(1 + a - x)d = ak(1 + a - x)d.$$

Очевидно, що помноживши це значення на обернене до $a^k \pmod{n}$, отримаємо новий сертифікат $(1 + a^{-x})^d$. Ця атака дозволяє простому члену групи створити правильний підпис, який неможливо відслідкувати.

Можна досить легко запобігти цій атаці вимагаючи від члена групи довести, що x взаємнопростий з e (наприклад, що $\gcd(x, e) = 1$) без розголошення значення x . Проте, як далі буде показано, є можливість створити правильний підпис, навіть якщо x звичайне число, включаючи варіант, коли $\gcd(x, e) = 1$.

Процедура генерації сертифікату для такого підпису має наступний вигляд:

1. Перший член групи реєструє і отримує сертифікат

$$A = (1 + ax)d = axd(1 + a - x)d$$

2. Другий член групи реєструє a^x і отримує сертифікат $B = (1 + a^x)^d$.

3. Вони обчислюють обернений до B по модулю n (за алгоритмом Ейлера) і множать результат на A , отримують:

$$a^{xd} = AB^{-1} = a^{xd}(1 + a^x)^d(1 + a^{-x})^d \pmod{n}.$$

Маючи це значення, зловмисники можуть застосувати різні стратегії для створення нового сертифікату. Одним з варіантів є отримання a^{xd} піднесенням a^{xd} до степеня s і знаходженням оберненого значення $a^{-csd} \pmod{n}$.

4. Далі третій член групи реєструє a^x і отримує $(1 + a^x)^d$ в якості свого сертифікату. Помноживши $(1 + a^x)^d$ на a^{-csd} , вони отримають новий сертифікат $(1 + a^{-cx})^d$, який не можливо буде відслідкувати.

Найпростіший варіант запобігти цьому виду атаки – змінити форму сертифікату $(1 + a^x)^d$ на $(t + a^x)^d$, де t – певна випадкова величина (різна в різних сертифікатах). При цьому всю схему необхідно модифікувати для роботи з таким типом сертифікатів (але при цьому матимемо додаткове експоненціювання).

Окрім вразливості до атаки коаліції членів групи, ця схема також є неефективною для великих груп. В [11] наведено покращену практичну реалізацію за рахунок використання більш ефективного підпису знання кореня логарифму (E -SKROOTLOG) замість SKLOGLOG.

При цьому приватний ключ члена групи обчислюється використовуючи $y = x^e \bmod n$ замість $y = h^x \bmod n$. Для запобігання обчислення менеджером групи значення x , член групи надсилає менеджеру групи $z := g^x$ замість y та зашліфлене значення y і доводить йому, що зашліфлене значення є дискретним логарифмом z основи g і є дійсним членським ключем.

Проблеми пов'язані з використанням групових підписів.

Схеми запропоновані в [11] завдяки тому, що довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать від розміру групи зробили перший крок назустріч практичній реалізації групового підпису. І хоча ще не існує повноцінного програмного продукту, проте вже є певний список галузей де б він був затребуваний [6].

Серед них найбільшими є:

- Будь-які організації, які являють собою групи, потребують підписи від імені організації: уряд, війська і комерційні організації.
- Електронні повідомлення в групах анонімної підтримки
- Електронна готівка (банки: формування груп, що відповідають за видачу готівки)
- Випуск державних цінних паперів чи інші форми фінансової звітності
- Різноманітні додатки для проведення голосування
- Документи які необхідно підписати сертифікованими професіоналами – адвокатами, нотаріусами чи аудиторами (але анонімно).
- Участь компаній в тендерах

Проте існує проблема в усіх вищенаведених схемах – проблема видалення члена групи із групи. Вона пов'язана з загальновідомою проблемою анулювання ключів в звичайній схемі цифрового підпису з відкритими ключами. Проте, як буде показано нижче, в випадку схем групового підпису ця проблема стає набагато складнішою.

Найбільш інтуїтивним і на перший погляд ефективним способом для видалення членів групи є Списки Анульованих Сертифікатів (Certificate Revocation Lists (CRLs)). Менеджер групи періодично випускає новий CRL в якому кожний елемент означає члена групи якого було анульовано. Існує досить багато можливостей для генерування і розповсюдження таких CRL. Нажаль, підхід за допомогою CRL не може

ефективно використовуватися в групових підписах по наступним причинам:

По перше: оскільки групові підписи анонімні і незв'язні, як може менеджер групи ідентифікувати видалених членів групи?

По друге: якщо менеджер групи відкриє певні (в нашому випадку секретні) данні, що відповідають видаленим членам групи, чи залишаться анонімними і незв'язними всі попередні підписи цього члена групи?

Останній пункт – найбільш важливий в видаленні членів групи.

Якщо член групи пішов з групи добровільно чи був виключений через якісь адміністративні причини (як кар'єрний зріст) тоді немає необхідності жертвувати безпекою попередніх підписів.

Проте, в деяких випадках це необхідно. Наприклад, якщо був виявлений нечесний член групи в фірмі, де працюють страхові агенти. В такому випадку було б необхідно в процесі видалення його з групи, попередити всіх клієнтів, що мали справу з нечесним страховим агентом.

І найбільш складний сценарій – компрометація секретного членського ключа. Тоді перед груповим менеджером виникає реальна проблема: при розголошенні секретних параметрів групового члена – з'явиться можливість відслідкувати всі його попередні підписи.

Іншим очевидним рішенням видалення члена групи є регенерація відкритого групового ключа. Після регенерації груповий менеджер може просто провести процедуру приєднання членів до групи тільки з тими членами групи, які повинні залишитися в групі. Це прийнятний варіант для маленьких груп. Проте для великих груп цей варіант не є працездатним (через часті зміни складу групи і велику кількість членів групи буде витрачатися багато часу на перевипуск нових членських сертифікатів). Хоча випуск нового сертифікату може проходити без участі члена групи – тільки менеджером групи, проте деякі схеми потребують взаємодії між членом групи та менеджером, особливо на початку.

Модифікація схеми Каменіша-Стадлера

Існують спроби модифікувати схему Каменіша-Стадлера з метою надання можливості ефективного видалення членів групи. Однією з таких є схема запропонована Брессоном-Стерном [9]. Розглянемо її.

Видалення члена з групи не повинно дати йому можливість підписуватися від імені групи в майбутньому. З іншого боку, необхідно залишити його минулі підписи незв'язними та забезпечити можливість їхнього відкриття, тощо. Тому для того щоб зберегти анонімність, перевірка легітимності автора підпису не повинна призводити до відкриття підпису. А точніше: перевірка легітимності автора підпису (чи не був видалений цей член з групи) має бути доступною всім і проводитися без участі менеджера групи. Перевірка не повинна розкривати ніякої інформації про автора підпису, окрім відповіді на питання: чи є цей член видаленим з групи чи ні.

В випадку видалення члена з групи, менеджер групи публікує список відкритих членських ключів "z" і підтверджує, що вони є видаленими, наприклад, підписуючи цей список. Будь-який член групи може продовжувати підписувати повідомлення, якщо він може довести з нульовим розголошенням, що його членський ключ, що використовується під час підпису не є в списку видалених.

Очевидно що цей процес не розкриє секретної інформації і тому не поставить під загрозу попередні підписи. Проте, при цьому довжина підпису буде зростати лінійно зі зростанням кількості видалених членів з групи.

Покажемо як довести, що закодовані дані за допомогою кодування Ель-Гамала не рівні певним, наперед заданим значенням. Точніше кажучи, ми можемо довести, що дискретний логарифм над даним a відомий і що a не рівне певному наперед заданому значенню. Розглянемо криптосистему Ель-Гамала. Маємо групу $H = \langle h \rangle$ порядку p , де p – велике просте число. І нехай $y = h^x \pmod{p}$ є відкритим ключем для закритого ключа x .

Повідомлення m кодується за допомогою $(A, B) = (h^r, y^r m)$, де r – випадкове число. Нехай $\bar{m}$ буде заданим повідомленням. Покажемо як відправник повідомлення може відкрито довести, що закодоване повідомлення m відрізняється від $\bar{m}$ у випадку, якщо m має вигляд $m = g^u \pmod{p}$.

Автор відкриває випадкову степінь числа $(m/\bar{m})$ як доказ і доводить, що цей доказ правильно сконструйовано. Якщо цей доказ не

рівний 1, то m відрізняється від $\bar{m}$. Більш формально: нехай r та r' – випадкові числа,

$(A, B) = (h^r, y^r m)$ – закодований текст,

$$t = (m/\bar{m})^{r'},$$

$$V = \text{SKREP}[\alpha, \beta, \gamma, \delta : A = h^\alpha \wedge B = y^\alpha g^\beta \wedge$$

$$\wedge A^\gamma = h^{-\delta} \wedge t = (B/\bar{m})^\gamma y^\delta](“”).$$

Що доводить цей підпис знання представлення? Перші дві рівності доводять, що одне і теж значення α використане при побудові A та B , і тому (A, B) є зашифрованим значенням $m = g^\beta$ у відповідності до відкритого ключа $y = h^x$. Це гарантує правильність створення зашифрованого значення і те, що дискретний логарифм незашифрованого тексту відомий. Зосередимося на першій і третій рівності в доведенні:

$A = h^\alpha$ і $A^\gamma = h^{-\delta}$, з цих двох рівностей отримуємо:

$$\delta = -\alpha\gamma \pmod{n}.$$

Підставивши це значення в останнє рівняння, отримуємо:

$$t = \left(\frac{B}{\bar{m}}\right)^{\gamma} y^{-\alpha\gamma} = \frac{(By^{-\alpha})^{\gamma}}{\bar{m}^{\gamma}} = \left(\frac{m}{\bar{m}}\right)^{\gamma}$$

Тоді, той факт, що $t \neq 1$ доводить, що $m \neq \bar{m}$.

Використаємо цей механізм для виключення одного члена з групи.

Нагадаємо, як працює механізм відкриття підпису. Автор підпису (Аліса) зашифровує свій ідентифікатор (z) використовуючи схему Ель-Гамала з відповідними відкритими ключами групового менеджера (h, R) . Таким чином, менеджер групи може дізнатися, хто є автором підпису, розшифрувавши зашифрований текст. Підпис знання V_3 використовується для відкритої перевірки того, що це шифрування відбулося правильно. Зашифрований текст $(d, \tilde{z})$, де $d = R^r$, $\tilde{z} = zh^r$; V_3 запевняє перевіряючого, що одна і та сама випадкова величина була використана під час створення d та $\tilde{z}$.

Використовуючи той факт, що незашифрований текст є ідентифікатором Аліси і тому може бути записаний у вигляді g^{y_A} , можна використати вище наведену техніку і дещо модифікувати V_3 для того, щоб довести перевіряючому, що груповий підпис був

зроблений з використанням ідентифікатору z , який відрізняється від ідентифікатора z_1 , що був відкликаний груповим менеджером (член групи з ідентифікатором z_1 був видалений з групи). Також до цього додається значення t (необхідно передавати декілька значень, якщо було видалено декілька членів, тобто по одному на кожного видаленого члена з групи); інші данні в підпису залишаються незмінними.

$$\tilde{z} := h^r g^y \text{ для } r \in {}_R Z_n^*, d := R', t = (z/z_1)^{r'}$$

для деякого випадкового значення r' ,

$$V_1 := E\text{-SKROOTREP}[(\alpha, \beta) : \tilde{z} = h^\alpha g^{\beta^{\epsilon_1}}](m),$$

$$V_2 := E\text{-SKROOTREP}[(\gamma, \delta) : \tilde{z}^{\gamma_1} g^{\delta_2} = h^\gamma g^{\delta^{\epsilon_2}}](m)$$

$$V_3 := SKREP[(\epsilon, \zeta, \eta, \lambda) : d = R^\epsilon \wedge \tilde{z} = h^\epsilon g^\zeta \wedge \\ \wedge d^\eta = R^{-\lambda} \wedge t = (\tilde{z}/z_1)^\eta h^\lambda](m).$$

Якщо всі три V_1 , V_2 , V_3 доведення вірні, то як і в класичній схемі шифрування z правильно сформоване, тобто $(d, \tilde{z})$ є шифруванням Ель-Гамала над z . Окрім того з V_3 перевіряючий може отримати наступну інформацію:

$$\lambda = -\eta \epsilon (\text{mod } n)$$

І підставивши це значення в останню рівність з V_3 отримаємо:

$$t = \left(\frac{\tilde{z}}{z_1} \right)^\eta h^{-\eta \epsilon} = \frac{(\tilde{z} h^{-\epsilon})^\eta}{z_1^\eta} = \left(\frac{z}{z_1} \right)^\eta$$

Перевіряючий впевнений в існуванні такого значення η при якому ця рівність справджується. А оскільки $t \neq 1$ то і $z \neq z_1$. Тому Аліса не є виключеною з групи.

Тепер розглянемо сценарій коли видалено цілий список членів групи. Позначимо цей список L , що складається з ідентифікаторів видалених членів з групи: $z_1, \dots, z_l$ (довжини l). Якщо Аліса хоче підписати повідомлення m , то для доведення того, що її ідентифікатор не лежить в списку видалених вона разом з $\tilde{z}$ та d має надіслати наступні l значень:

$$t_1 = (z/z_1)^{r'}, \dots, t_l = (z/z_l)^{r'}$$

де r' - випадкова величина. Доведення V_1 та V_2 залишаються без змін, а V_3 має наступний вигляд:

$$V_3 := SKREP[(\epsilon, \zeta, \eta, \lambda) : d = R^\epsilon \wedge \tilde{z} = h^\epsilon g^\zeta \wedge \\ \wedge d^\eta = R^{-\lambda} \wedge t_1 = (\tilde{z}/z_1)^\eta h^\lambda \wedge \dots \wedge \\ t_l = (\tilde{z}/z_l)^\eta h^\lambda](m)$$

Важливо відмітити той факт, що кількість рівностей в V_3 не змінює його довжини. V_3 складається з кортежу $(c, s1, s2, s3, s4)$ (див. означення $SKREP$ вище). Єдині данні які збільшуються зі збільшенням списку видалених членів це t_i , де $i=1, \dots, l$.

Також важливо відзначити, що розмір V_3 залишається константним через те, що під час обчислення t_i використовувалося одне і те саме випадкове значення r' . Доведення того, що при цьому схема залишається безпечною див в [9]. Одним з найбільших недоліків цього методу є те що з кожним виключенням з групи членом складність обчислення V_3 збільшується на два піднесення до степеня на кожного виключеного з групи члена.

Отже, ми розглянули схему групового підпису запропоновану Каменішем та Стадлером в [11]. Це перша схема групового підпису, в якій довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать від розміру групи, і при додаванні ного члена до групи немає необхідності змінювати відкритий груповий ключ.

Проте обидві схеми наведені в [11] мають недоліки, які можуть суттєво вплинути на безпеку схеми в цілому. В першій необхідно змінювати процедуру створення членського сертифікату для можливості захисту від об'єднання групових членів.

Також використання неефективних алгоритмів унеможливає її використання для великих груп. В другій схемі з [11] необхідно правильно обирати параметри при створенні процедури видачі членського сертифікату, при цьому не має ніяких правил, що регламентують правильність вибору цих параметрів. Проте це були перші схеми які зробили перший крок у бік практичного використання групового підпису.

Врахувавши недоліки цих схем Каменіш разом з Мічелсом в [12] створили подібну схему групового підпису на основі так званої "сильної проблеми RSA". Основною відмінністю схеми від попередніх була властивість опору коаліції групових членів.

В статті [20] було запропоновано схему видалення членів з групи для схеми Каменіша-Мічелса. Проте цю схему видалення згодом було зламано.

Оскільки виключений з групи таким чином член групи міг довести своє членство в групі, бо виключений член групи може оновити свою інформацію про членство в групі в той же самий спосіб як і не виключені члени групи, після того як менеджер групи змінить груповий ключ [10]. В нашій статті ми не будемо розглядати схему Каменіша-Мічелса, а розглянемо її покращений варіант описаний в [4]. Покращення відбулося за рахунок зміни алгоритму приєднання нових членів на більш ефективний.

Схема запропонована Атенісом, Каменішем, Джоєм та Тсудіком ACJT (Giuseppe Ateniese, Jan Camenisch, Marc Joye, and Gene Tsudik)

Введемо деякі означення.

Означення 11. (Сильна RSA проблема) Нехай $n = pq$ є модулем RSA, і нехай G – циклічна підгрупа Z_n^* порядку $\#G, \lceil \log_2(\#G) \rceil = l_G$. За даними n та $z \in G$ необхідно знайти $u \in G$ та $e \in Z(e > 1)$, що задовольняють $z \equiv u^e \pmod{n}$.

Припущення 1. (Сильне RSA припущення). Існує імовірнісний алгоритм K який за поліноміальний час по входньому параметру безпеки l_G видасть пару (n, z) таку, що для всіх імовірнісних алгоритмів P , що працюють за поліноміальний час, ймовірність, що алгоритм P може вирішити сильну RSA проблему, є незначною.

Означення 12. (Проблема прийняття рішення Діффі-Хелмана) Нехай $G = \langle g \rangle$ циклічна групи згенерована за допомогою g , порядку $u = \#G, \lceil \log_2(u) \rceil = l_G$. За даними g, g^x, g^y та $g^z \in G$ необхідно вирішити чи рівні між собою g^{xy} та g^z .

Припущення 2. (Припущення прийняття рішення Діффі-Хелмана) Не існує ймовірнісного алгоритму, що працює за поліноміальний час, що розрізняє з певною ймовірністю розподіли D та R , $D = (g, g^x, g^y, g^z)$ з $x, y, z \in_R Z_u$ і $R = (g, g^x, g^y, g^{xy})$ з $x, y \in_R Z_u$.

Проблема прийняття рішення Діффі-Хелмана легша ніж обчислювальна проблема Діффі-Хелмана, яка включає пошук g^{uv} за заданими g^u та g^v . Тому обчислювальне припущення Діффі-Хелмана є набагато сильнішим. Проте обидва припущення є сильнішими за припущення, що обчислення дискретного логарифму складне.

Якщо n безпечний RSA модуль (тобто $n = pq$ і $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$ і p, q, p', q' всі є простими), є гарна звичка обмежувати операції до підгрупи квадратичних лишків по модулю n , тобто до

циклічної підгрупи $QR(n)$ згенерованої елементом порядку $p'q'$. Все це робиться через те, що порядок $p'q'$ в $QR(n)$ не має малих множників.

Легко знайти генератор g для $QR(n)$. Достатньо вибрати елемент $a \in Z_n^*$, що задовольняє $\gcd(a \pm 1, n) = 1$ і далі взяти $g = a^{2'} \pmod{n}$. Тоді ми отримаємо $QR(n) = \langle g \rangle$.

Пропозиція 1. Нехай $n = pq$ де $p \neq q$ і $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$ і p, q, p', q' всі є простими. Тоді порядок елементів в Z_n^* є дном з множини $\{1, 2, p', q', 2p', 2q', p'q', 2p'q'\}$. Більш того, порядок $a \in Z_n^*$ рівний $p'q'$ тоді і тільки тоді коли $\gcd(a \pm 1, n) = 1$ [4].

Всі наступні підписи знання будемо будувати над циклічною групою $G = \langle g \rangle$ порядку якої невідомий, проте відома довжина бінарного представлення цього порядку. Тобто l_G таке, що $2^{l_G-1} \leq \#G < 2^{l_G}$. Хеш-функція не змінюється $H: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^k$. Також водиться параметр безпеки $\epsilon > 1$.

Тому в означенні 4 (Підпис знання дискретного логарифму) необхідно уточнити, що пара $(c; s) \in \{0,1\}^k \times \pm \{0,1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$ і $r \in \pm \{0,1\}^{\epsilon(l_G+k)}$.

Означення 13. (Підпис знання рівності двох дискретних логарифмів) Нехай $y_1, y_2, g, h \in G$. Пара $(c; s) \in \{0,1\}^k \times \pm \{0,1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$, що задовольняє рівність $c = H(m || y_1 || y_2 || g || h || g^r || y_1^c || h^s || y_2^s)$ є підписом знання дискретного логарифму $y_1 = g^r$ до основи g та дискретного логарифму $y_2 = h^s$ основи h на повідомленні m .

Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y_1) = \log_h(y_2)$, може легко знайти цей підпис знання обираючи випадковим чином $r \in \pm \{0,1\}^{\epsilon(l_G+k)}$ та обчисливши c та s як: $c := H(m || y_1 || y_2 || g || h || g^r || h^r)$ та $s := r - cx$ (в Z).

Означення 14. (Підпис знання того, що дискретний логарифм лежить в деякому інтервалі). Нехай $y_1, y_2, g, h \in G$. Пара $(c; s) \in \{0,1\}^k \times \pm \{0,1\}^{\epsilon(l_G+k)+1}$; де c задовольняє рівність $c = H(m || y_1 || g || g^{s-cx} || y_2^s)$ є підписом знання того, що дискретний логарифм $y = g^x$ до основи g на повідомленні m лежить в інтервалі $(X - 2^{\epsilon(l_G+k)}, X + 2^{\epsilon(l_G+k)})$.

Сторона, що знає секретний ключ $x = \log_g(y) \in (X - 2^l, X + 2^l)$, може легко знайти цей підпис обравши випадковим чином

$r \in \pm\{0,1\}^{k(\lambda_1+k)}$ та обчисливши c та s як:
 $c := H(m||y||g||g')$ та $s := r - c(x-X)$ (в Z).

Надалі будемо використовувати наступні позначення.

Нехай $\epsilon > 1$, k , l_p – параметри безпеки і λ_1 , λ_2 , γ_1 , γ_2 означають довжини, що задовольняють наступні нерівності:

$$\lambda_1 > \epsilon(\lambda_2 + k) + 2; \lambda_2 > 4l_p;$$

$$\gamma_1 > \epsilon(\gamma_2 + k) + 2; \gamma_2 > \lambda_1 + 2.$$

Визначимо межі інтегралів:

$$A = (2^{\lambda_1} - 2^{\lambda_2}, 2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2}) \text{ та}$$

$$\Gamma = (2^{\gamma_1} - 2^{\gamma_2}, 2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2})$$

(Параметр ϵ контролює статистичне нульове розголошення а параметр l_p розмір модулів, які використовуються).

Ініціалізація системи

Менеджер групи обирає випадкові прості p' та q' довжини l_p такі, щоб $p=2p'+1$ та $q=2q'+1$, щоб теж були простими. Обчислює модуль $n=pq$.

Обирає $a, a_0, g, h \in {}_R QR(n)$ ($QR(n)$ – циклічної підгрупи порядку $p'q'$).

Обирає випадковий секретний елемент $x \in {}_R Z_{p'q'}^*$ і обчислює $y=g^x \bmod n$

Тоді відкритий груповий ключ має вигляд:
 $Y=(n, a, a_0, y, g, h)$

Відповідний приватний ключ менеджера групи $S=(p', q', x)$.

Приєднання до групи, генерація ключів і сертифікатів для членів групи

Вважатимемо, що канал обміну даними між груповим менеджером і користувачем безпечний.

1. Користувач P_i (Аліса) генерує секретну експоненту $\tilde{x}_i \in {}_R(0, 2^{\lambda_2})$, випадкове ціле $\tilde{r} \in {}_R(0, n^2)$ та надсилає $C_1 = g^{\tilde{x}_i} h^{\tilde{r}} \bmod n$ до менеджера групи та надає йому доведення знання представлення C_1 відносно основ g та h .

2. Менеджер групи перевіряє $C_1 \in {}_R QR(n)$. Якщо це справджується, обирає α_i та $\beta_i \in {}_R(0, 2^{\lambda_2})$ і надсилає (α_i, β_i) до P_i .

3. Користувач P_i обчислює $x_i = 2^{\lambda_1} + (\alpha_i \tilde{x}_i + \beta_i \bmod 2^{\lambda_2})$ і надсилає менеджеру групи $C_2 = a^{x_i} \bmod n$. Також користувач доводить менеджеру групи:

а) дискретний логарифм C_2 до основи a лежить в A .

б) знання що u, v, w такі, що

1) u лежить в $(-2^{\lambda_2}, 2^{\lambda_2})$,

2) u рівний дискретному логарифму

$C_2/a^{2^{\lambda_1}}$ до основи a ,

3) $C_1 g^{\beta_i}$ рівний $g^u (g^{2^{\lambda_2}})^v h^w$ (дивись означення 14).

(1)-3) доводять що приватний ключ члена $x_i = \log_a C_2$ правильно обчислений з C_1, α_i та β_i .)

4. Менеджер групи перевіряє, що $C_2 \in QR(n)$. Якщо це так – перевіряє всі доведення користувача. Обирає $e_i \in {}_R \Gamma$ та обчислює $A_i = (C_2 a_0)^{1/e_i} \bmod n$. Та надсилає P_i новий членський сертифікат (A_i, e_i) (відмітимо, що в такому разі $A_i = (a^{x_i} a_0)^{1/e_i} \bmod n$)

5. Користувач P_i перевіряє, що $a^{x_i} a_0 \equiv A_i^{e_i} \bmod n$.

Таким чином член групи отримує членський сертифікат (A_i, e_i) за допомогою якого може надалі підписувати повідомлення від імені групи.

Підпис повідомлення

1. Член групи генерує випадкове число $w \in {}_R \{0,1\}^{2l_p}$ та обчислює:

$$T_1 = A_i y^w \bmod n, T_2 = g^w \bmod n, T_3 = g^{e_i} h^w \bmod n.$$

2. Випадковим чином обирає

$$r_1 \in {}_R \pm\{0,1\}^{k(\gamma_1+k)}, r_2 \in {}_R \pm\{0,1\}^{k(\lambda_2+k)}, \\ r_3 \in {}_R \pm\{0,1\}^{k(\gamma_1+2)_{p'+k+1}}, r_4 \in {}_R \pm\{0,1\}^{k(2)_{q'+k}}$$

та обчислює:

$$\text{а) } d_1 = T_1^{r_1} / (a^{r_2} y^{r_3}) \bmod n, d_2 = T_2^{r_2} / g^{r_3} \bmod n, \\ d_3 = g^{r_4} \bmod n \text{ і } d_4 = g^{r_1} h^{r_4} \bmod n$$

$$\text{б) } c = H(m||g||h||y||a_0||a||T_1||T_2||T_3||d_1||d_2||d_3||d_4)$$

$$\text{с) } s_1 = r_1 - c(e_i 2^{\lambda_1}), s_2 = r_2 - c(x_i 2^{\lambda_1}), s_3 = r_3 - c e_i w \text{ та } s_4 = r_4 - c w.$$

Підпис має вигляд: $(c, s_1, s_2, s_3, s_4, T_1, T_2, T_3)$.

Груповий підпис можна вважати підписом знання (1) значення $x_i \in A$ таке, що значення $a^{x_i} a_0$ зашифроване за допомогою шифрування Ель-Гамала в (T_1, T_2) під y . А (2) e_i корінь зашифрованого значення, де e_i перша частина представлення T_3 до основ g та h і що e_i лежить в Γ .

Перевірка підпису:

1. Обчислення

$$c' = H(m || g || h || y || a_0 || a || T_1 || T_2 || T_3 ||$$

$$|| a_0^c T_1^{s_1 - c_2^{r_1}} / (a^{s_2 - c_2^{r_1}} y^{s_3}) \bmod n ||$$

$$|| T_2^{s_1 - c_2^{r_1}} / g^{s_3} \bmod n || T_2^c g^{s_4} \bmod n ||$$

$$|| T_3^c g^{s_1 - c_2^{r_1}} h^{s_4} \bmod n ||;$$

2. Підпис приймається тоді і тільки тоді, коли $c = c'$ і

$$s_1 \in \pm \{0, 1\}^{e(\gamma_1 + k) + 1}, s_2 \in \pm \{0, 1\}^{e(\lambda_1 + k) + 1},$$

$$s_3 \in \pm \{0, 1\}^{e(\lambda_1 + 2l_p + k + 1) + 1} \text{ та } s_4 \in \pm \{0, 1\}^{e(2l_p + k) + 1}.$$

Відкриття підпису:

1. Перевірка підпису.
 2. Відновлення A_i (а значить і ідентифікація P_i) $A_i = T_1 / T_2^{s_2} \bmod n$.
 3. Перевірка, що $\log_g y = \log_{T_1} (T_1 / A_i \bmod n)$.
- Доведення властивостей безпеки див. [4].

Модифікації схеми АСJT

В [15] наведено схему ефективного видалення членів групи створеної за допомогою схеми АСJT. Проте використання його призводить до виходу за межі $QR(n)$, що є небажаним. Одним із можливих рішень може бути динамічний акумулятор описаний в [10]. Використання подібного акумулятора не змінює складність операцій в середині схеми. Проте при цьому член групи повинен проводити певні обчислення які залежать лінійно від зміни складу групи. Недоліком є те що перевіряючий повинен часто перевіряти відкритий груповий ключ, а груповий менеджер змінювати відкрити груповий ключ при кожному додаванні чи видаленні члена групи.

Хоча схема АСJT достатньо ефективна, проте не надає можливість виключення члена з групи. Розширення запропоноване в [5] дозволяє виключати членів групи з групи, проте ця схема не є ефективною.

Висновки

Статтю присвячено одному з важливих криптографічних засобів захисту інформації в групах – цифровому підпису.

Груповий підпис має наступні властивості:

1. Тільки члени групи мають можливість підписувати повідомлення.

2. Існує можливість перевірки вірності цього підпису, але неможливо встановити, хто саме з членів групи створив його.

3. У разі необхідності підпис може бути «відкритий». Тобто, існує менеджер групи, який може визначити, хто з членів групи створив цей підпис.

Сфера використання подібних підписів досить широка: різноманітні прес-релізи приватних чи державних корпорацій, електронні повідомлення в групах анонімної підтримки користувачів, випуск державних цінних паперів, додатки для проведення голосування, проведення тендерів, групові підписи сертифікованих професіоналів та інше.

В даній статті детально описано схему групового підпису запропоновану Каменішем та Стадлером, оскільки, це перша схема групового підпису, в якій довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать від розміру групи, а також при додаванні нового члена до групи немає необхідності змінювати відкритий груповий ключ. Саме ця схема зробила груповий підпис більш привабливим для практичного використання і пожвавила інтерес наукової спільноти до відповідної тематики.

Акцентовано увагу на проблемах пов'язаних з побудовою надійних групових підписів. На прикладі схеми Каменіша-Стадлера вказано найбільш вразливі місця і можливість атаки на схему групових підписів. Використання в цій схемі процедури створення членського сертифікату при приєднанні нових членів до групи разом з могутньою технікою підписів знання дало можливість досягнути константної довжини відкритого групового ключа і константної довжини групового підпису. Проте, використання ненадійних форм членських сертифікатів може призвести до зниження рівня безпеки системи в цілому, а в деяких випадках і до можливості прямої атаки на схему (такої, як атака коаліції з групових членів, що описана в статті).

Проведено огляд схеми групового підпису АСJT, яка була побудована на основі так званої «сильної проблеми RSA», спираючись на яку, можна забезпечити надійність створення безпечних сертифікатів групових членів.

Список використаних джерел

1. Анісімов А.В. Алгоритмічна теорія великих чисел. Модулярна арифметика великих чисел. – Київ: Видавн.дім «Академперіодика», 2001. – 154 с.

2. Анисимов А.В. Коалиционные схемы с ключами общего доступа // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 1. – С. 3 – 18.
3. Анисимов А. Динамічні коаліційні об'єднання – нова парадигма в технології захисту інформації // Безпека інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах. VI Міжнародна науково-практична конференція. - Київ, 2003. – С.34.
4. Ateniese G., Camenisch J., Joye M., and Tsudik G. A practical and provably secure coalition-resistant group signature scheme. In: *Crypto'2000*, LNCS 1880, pp. 255-270. Springer-Verlag, 2000.
5. Ateniese G. Song D. X., and Tsudik G. Quasi-efficient revocation in group signatures. In *Financial Cryptography '02*, pp. 183-197, 2002.
6. Ateniese G. and Tsudik G.. Some open issues and new directions in group signature schemes. In: *Financial Cryptography (FC'99)*, LNCS 1648, pp. 196-211. Springer-Verlag, 1999.
7. Bellare M. and Rogaway P. Random oracles are practical: A paradigm for designing efficient protocols. In *First ACM Conference on Computer and Communication Security*, pages 62-73. Association for Computing Machinery, 1993.
8. Brassard G., Chaum D., and Crepeau C. Minimum disclosure proofs of knowledge. *Journal of Computer and System Sciences*, 37(2):156-189, Oct. 1988.
9. Bresson E. and Stern J. Group signatures with efficient revocation, In *Proceedings of PKC2001*, vol. 1992 of LNCS, pp. 190-206, Springer-Verlag, 2001.
10. Camenisch J. and Lysyanskaya A., Dynamic accumulators and application to efficient revocation of anonymous credentials, In *Advances in Cryptology – CRYPTO 2002*, vol. 2442 of LNCS, pp. 61-77, Springer-Verlag, 2002.
11. Camenisch J. and Stadler M. Efficient group signatures schemes for large groups. In B. Kaliski, editor, *CRYPTO'97*, volume 1294 of LNCS, pages 410-424. Springer-Verlag, 1997.
12. Camenisch J., Michels M.: A group signature scheme based on an RSA-variant. Technical Report RS-98-27, BRICS, University of Aarhus, November 1998.
13. Chaum D. and van Heyst E. Group signatures. In D. W. Davis, editor, *EUROCRYPT'91*, volume 547 of LNCS, pages 257-265. Springer-Verlag, 1991.
14. Chen L. and Pedersen T. P. New group signature schemes. In A. DeSantis, editor, *EUROCRYPT'94*, volume 950 of LNCS, pages 171-181. Springer-Verlag, 1995.
15. Chen Z., Wang J., Wang Y., Huang J. and Huang D. An Efficient Revocation Algorithm in Group Signatures. Volume 2971 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 339-351. Springer Verlag, 2004.
16. Diffie W. and Hellman M. E. New directions in cryptography // *IEEE Trans. Information Theory*. – 1976. – IT-22 (6). – P.644 – 654.
17. Feige U., Fiat A., and Shamir A. Zero-knowledge proofs of identity. *Journal of Cryptology*, 1:77-94, 1988.
18. Fiat A. and Shamir A. How to prove yourself: Practical solution to identification and signature problems. In A. M. Odlyzko, editor, *Advances in Cryptology – CRYPTO'86*, volume 263 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 186-194. Springer Verlag, 1987.
19. Goldwasser S., Micali S., and Rivest R. A digital signature scheme secure against adaptive chosen-message attacks. *SIAM Journal of Computing*, 17(2):281-308, April 1988.
20. Kim H., Lim J. and Lee D. Efficient and secure member deletion in group signature schemes. In D. Won, editor, *ICISC 2000*, vol 2015 of LNCS, pp. 150-161, Springer-Verlag, 2001.
21. Petersen H. How to convert any digital signature scheme into a group signature scheme. In *Proceedings of Security Protocols Workshop'97*, pages 177-190, 1997.
22. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // *Communications of the ACM*. – 1978. – № 21. – P. 120 – 126.
23. Schnorr C.P. Efficient signature generation by smart cards. *Journal of Cryptology*, 4(3):161-174, 1991.

Надійшла до редколегії 15.11.2010 р.

УДК 510.5+519.7

Карнаух Т.О., к.ф.-м.н.

Нерозв'язні проблеми для алгоритмічних пристроїв зі скінченною пам'яттю

Розглядаються нерозв'язні проблеми для скінченних R -перетворювачів. Доведено, що клас функцій, заданих скінченними R -перетворювачами, не є ефективно замкненим відносно віднімання та додавання.

Ключові слова: R -перетворювач, скінченна пам'ять, ефективна замкненість.

*E-mail: tkarnaukh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

У роботі [1] введено поняття R -перетворювача, як пристрою, що перероблює нескінченні двійкові зображення дійсних чисел, та спосіб задання ним дійсних функцій. Також у [1] доведено розв'язність проблеми еквівалентності словарних та дійсних функцій, заданих скінченними R -перетворювачами. Пізніше деякі алгоритмічні проблеми стосовно композицій R -перетворювачів за скінченною пам'яттю розглядалися в роботі [2]. Області визначення функцій (та пов'язані з ними алгоритмічні проблеми), заданих скінченними та магазинними R -перетворювачами, розглядалися в роботах [3] та [4]. Дана робота продовжує започатковані в [1-4] дослідження.

Означення та позначення

$$\Sigma_p = \{0, 1, \dots, p\}, \Sigma_{-p} = \{0, \bar{1}, \dots, \bar{p}\},$$

$$\Sigma = \Sigma_p \cup \Sigma_{-p} \cup \{\nabla\},$$

$$D_p = (\{0\} \cup \{1\} \Sigma_p^*) \nabla \Sigma_p^* \cup (\{0\} \cup \{\bar{1}\} \Sigma_{-p}^*) \nabla \Sigma_{-p}^*,$$

$$D = D_1, D' = D_2, K_0 = D \cap \Sigma^*(1^* \cup \bar{1}^*),$$

Скористаємось поняттями R -перетворювача, $f_A, \|\cdot\|$, прийнятими в роботі [1]. Детальне означення магазинного R -перетворювача наведено в [4]. Нагадаємо, що R -перетворювач A задає дійсну функцію $\tilde{f}_A: \tilde{f}_A(x) = \|f_A(w)\|$, де $x = \|w\|$, $w \in D \setminus K_0$, а $\|u\|$ – дійсне число, що відповідає двійковому запису u .

Згідно [5] під машиною Тьюрінга розуміємо сімку $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \lambda, F)$, складові якої інтерпретуються звичайним чином та функція переходів δ має тип $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$.

Проблема відповідності Поста та її нескінченний аналог

Проблема відповідності Поста (Post's correspondence problem, PCP):

для двох скінченних списків $A = w_1, \dots, w_k$ та

T.O. Karnaukh, PhD.

Undecidable problems for finite-state machines

Undecidable problems for finite R -transducers are discussed. We prove that finite R -transducer computable functions class is not effectively closed under subtraction and summation.

Key Words: R -transducer, finite memory, effective closure.

$B = x_1, \dots, x_k$ слів в алфавіті T з'ясувати, чи існує скінченна непорожня послідовність $i_1, i_2, \dots, i_m$ така, що $w_{i_1} \dots w_{i_m} = x_1 \dots x_k$. Якщо послідовність існує, то вона називається розв'язком РСР.

Пару (A, B) назвемо екземпляром проблеми. Кількість слів k кожного зі списків назвемо розмірністю екземпляра проблеми. Два екземпляри РСР назвемо еквівалентними, якщо вони одночасно мають розв'язок або одночасно не мають розв'язку.

Модифікована проблема відповідності Поста (MPCP):

для двох скінченних списків $A = w_1, \dots, w_k$ та $B = x_1, \dots, x_k$ слів в алфавіті T з'ясувати, чи існує скінченна послідовність $i_1, i_2, \dots, i_m$ така, що $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$.

Пару слів назвемо частковим розв'язком РСР (MPCP) (A, B) якщо $xz = y$ і обидва слова x та y є конкатенаціями відповідних слів із списків A та B . Відомо [5], що MPCP та РСР є нерозв'язними проблемами.

Нескінченна проблема відповідності Поста (∞ PCP):

для двох скінченних списків $A = w_1, \dots, w_k$ та $B = x_1, \dots, x_k$ слів в алфавіті T з'ясувати, чи існує нескінченна послідовність $i_1, i_2, \dots$ така, що $w_{i_1} w_{i_2} \dots = x_{i_1} x_{i_2} \dots$.

Якщо послідовність існує, то, аналогічно класичному скінченному випадку, назвемо її розв'язком ∞ PCP.

Нескінченна модифікована проблема відповідності Поста (∞ MPCP):

для двох скінченних списків $A = w_1, \dots, w_k$ та $B = x_1, \dots, x_k$ слів в алфавіті T з'ясувати, чи існує нескінченна послідовність $i_1, i_2, \dots$ така, що

$$w_1 w_2 \dots = x_1 x_2 \dots$$

Теорема 1. ∞ MPSP — не є рекурсивно перелічною.

Доведення. За кожною машиною Тьюрінга можна побудувати еквівалентну їй машину, яка на кожному кроці рухається по стрічці або вліво, або вправо (тобто не залишається на місці) та всі заключні стани якої є тупиковими. Використавши доведення теореми 8.8 з [5, с. 196-198], побудуємо MPSP, розв'язок якої є правильним обчисленням машини Тьюрінга на вхідному слові w , сформувавши її списки A та B .

A	B	
#	# $q_0 w$ #	
X	X	$\forall X \in \Gamma$
#	#	
$\forall q \in Q, p \in Q, X, Y, Z \in \Gamma$		
qX	Yp	якщо $q, X \rightarrow p, Y, R$
ZqX	pZY	якщо $q, X \rightarrow p, Y, L$
$q\#$	$Yp\#$	якщо $q, \lambda \rightarrow p, Y, R$
$Zq\#$	$pZY\#$	якщо $q, \lambda \rightarrow p, Y, L$
$\forall q \in F, X, Y \in \Gamma$		
XqY	q	
Xq	q	
qY	q	
$q\#\#$	#	$\forall q \in F$

Індукцією по k в [5, с. 197-198] доведено: якщо з конфігурації $q_0 w$ машина може зробити k кроків, тобто $q_0 w \vdash \alpha_1 q_1 \beta_1 \vdash \dots \vdash \alpha_{k-1} q_{k-1} \beta_{k-1} \vdash \alpha_k q_k \beta_k$, то тоді $(x, y) = (\#q_0 w \# \alpha_1 q_1 \beta_1 \# \dots \# \alpha_{k-1} q_{k-1} \beta_{k-1} \#, \#q_0 w \# \alpha_1 q_1 \beta_1 \# \dots \# \alpha_{k-1} q_{k-1} \beta_{k-1} \# \alpha_k q_k \beta_k \#)$ є частковим розв'язком.

Розглядаючи побудовану пару списків слів (A, B) як ∞ MPSP, маємо, що отримана ∞ MPSP має розв'язок тоді й тільки тоді, коли машина Тьюрінга при роботі над вхідним словом не зупиняється. А остання проблема, як доповнення до рекурсивно перелічної (але не рекурсивної) проблеми зупинки машини Тьюрінга при роботі над вхідним словом, не є навіть рекурсивно перелічною. Звідси маємо твердження теореми.

Теорема 2. ∞ RSP — є рекурсивно перелічною $\Leftrightarrow \infty$ MPSP — є рекурсивно перелічною.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Модифікуємо доведення леми 8.5 з [5, с. 195-196] на випадок ∞ RSP.

Нехай проблема ∞ RSP є рекурсивно перелічною. Розглянемо довільний екземпляр ∞ MPSP $P = (w_1, \dots, w_k; x_1, \dots, x_k)$. Нехай $\phi, \psi \in T$. На T^* задамо гомоморфізми f_1 і f_2 :

$$f_1(x) = x\phi, f_2(x) = \phi x \text{ для } x \in T.$$

Нехай

$$y_i = f_1(w_i), y_0 = \phi y_1;$$

$$z_i = f_2(x_i), z_0 = z_1.$$

Отриманий екземпляр ∞ RSP $(y_0, y_1, \dots, y_k; z_0, z_1, \dots, z_k)$ еквівалентна вхідному екземпляру ∞ MPSP, а тому проблема ∞ MPSP також є рекурсивно перелічною.

$(\Leftarrow)$ Якщо ∞ MPSP — рекурсивно перелічна, то існує частковий алгоритм, що або визначає розв'язність вхідного екземпляру ∞ MPSP, або (для нерозв'язних екземплярів) не зупиняється. Побудуємо частковий алгоритм розв'язання ∞ RSP. Переберемо всі можливі початки списків A та B та паралельно запусимо на них частковий алгоритм розв'язання ∞ MPSP. Якщо якась з паралельних гілок зупиняється з відповіддю «Так», то весь алгоритм зупиняється з відповіддю «Так»; інакше алгоритм не зупиняється.

У підсумку маємо таке твердження.

Теорема 3. ∞ RSP — не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

Лема 1. Для кожного екземпляру ∞ RSP $P_1 = (w_1, \dots, w_k; x_1, \dots, x_k)$ існує еквівалентний екземпляр ∞ RSP $P_2 = (v_1, \dots, v_k; y_1, \dots, y_k)$ в алфавіті $\{0, 1\}$.

Доведення. Нехай списки проблеми P_1 подано в n -символьному алфавіті $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Розглянемо гомоморфізм $\gamma: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$, заданий на символах алфавіту правилом $\gamma(a_i) = 01^i$, $i \in \overline{1, n}$. Нехай $v_i = \gamma(w_i)$, $y_i = \gamma(x_i)$, $i \in \overline{1, k}$. Тоді проблема $P_2 = (v_1, \dots, v_k; y_1, \dots, y_k)$ еквівалентна проблемі P_1 (якщо одна з проблем має розв'язок, то цей розв'язок є й розв'язком іншої).

Наслідок 1. ∞ RSP в алфавіті $\{0, 1\}$ не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

Лема 2. ∞ RSP $P_1 = (w_1, \dots, w_k; x_1, \dots, x_k)$ еквівалентна ∞ RSP $P_2 = (w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+l}; x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$, де $w_{k+i} = w_k$, $x_{k+i} = x_k$ для всіх $i \in \overline{1, l}$.

Доведення випливає з побудови P_2 .

З наведеної леми випливає така.

Лема 3. Для кожного екземпляру ∞ RSP розмірності k існує еквівалентний екземпляр ∞ RSP розмірності 2^m , де $2^{m-1} < k \leq 2^m$.

Нерозв'язні проблеми для скінченних R -перетворювачів

Теорема 4. Для словарних функцій $f_1, f_2: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$, заданих строгими скінченними R -перетворювачами, проблема $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$ не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

Доведення. Покажемо, що до зазначеної проблеми зводиться проблема ∞ PCP в алфавіті $\{0, 1\}$. Розглянемо ∞ PCP $P = (w_0, \dots, w_{k-1}; x_0, \dots, x_{k-1})$ в алфавіті $\{0, 1\}$. Згідно з лемою 3 можна вважати, що k є степенем двійки, тобто $k = 2^m$ для деякого додатного натурального m . Побудуємо скінченні перетворювачі $A_i = (\{q\}, H_i, q), i \in \{1, 2\}$:

$$H_1 = \{q, a_1 a_2 \dots a_m \rightarrow q, w_n \mid a_1 a_2 \dots a_m \in \{0, 1\}^m, n = \|a_1 a_2 \dots a_m\|\},$$

$$H_2 = \{q, a_1 a_2 \dots a_m \rightarrow q, x_n \mid a_1 a_2 \dots a_m \in \{0, 1\}^m, n = \|a_1 a_2 \dots a_m\|\}.$$

Зміст роботи зазначених перетворювачів полягає в тому, що вони зчитують зі входу m двійкових символів $a_1 a_2 \dots a_m$ — двійкове зображення числа n , — та друкують на вихід n -те слово відповідного списку ∞ PCP. Нехай A_i задає словарне відображення $f_i: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^m, i \in \{1, 2\}$. Тоді ω -слово $x = b_1 b_2 \dots, b_i \in \{0, 1\}$, для якого $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$, задає розв'язок $\|b_1\|_2, \|b_2\|_2, \dots$ ∞ PCP P . Та, навпаки, якщо ∞ PCP P має розв'язок $i_1, i_2, \dots$, то для ω -слова $x = b_1 b_2 \dots$, де $b_i \in \{0, 1\}^m, \|b_i\| = i_i$, виконано $f_1(x) = f_2(x)$. Звідси за наслідком 1 маємо твердження теореми.

Наслідок 2. Для словарних функцій $f_1, f_2: D \rightarrow D^m$, заданих строгими скінченними R -перетворювачами, проблема $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$ не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

На доведення наслідку до перетворювачів з попереднього доведення достатньо додати новий початковий стан q_0 та команду $q_0, \varepsilon \rightarrow q, 0V$.

Теорема 5. Для дійсних функцій f_1, f_2 , заданих строгими скінченними R -перетворювачами, проблема $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$ не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

Доведення. Нехай дійсні функції f_1, f_2 задано скінченними R -перетворювачами, а s_1, s_2 — відповідні їм словарні функції, задані тим самим перетворювачами; тобто $f_i(\|w\|) = \|s_i(w)\|$ для $w \in D \setminus K_0$. Тоді проблема $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$ еквівалентна $\exists x \in D \setminus K_0 (s_1(x) = s_2(x))$.

Припустимо, що ця проблема є рекурсивно перелічною. Проблема $\exists x \in K_0 (s_1(x) = s_2(x))$ є рекурсивно перелічною, оскільки K_0 складається з періодичних послідовностей вигляду $w1^\omega$ та $w\bar{1}^\omega$, для яких значення $s_i(\cdot)$ може бути знайдено у вигляді $u_0(u_1)^\omega$ [6]. Тоді рекурсивно перелічною є проблема $\exists x \in D \setminus K_0 (s_1(x) = s_2(x)) \vee \exists x \in K_0 (s_1(x) = s_2(x))$, яка еквівалентна не рекурсивно перелічній проблемі $\exists x \in D (s_1(x) = s_2(x))$. Отримане протиріччя завершує доведення.

Наслідок 3. Для дійсних функцій f_1, f_2 ,

заданих скінченними R -перетворювачами, проблема $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$ не є рекурсивно перелічною та не є розв'язною.

Лема 4. Для дійсної функції f , заданої скінченим R -перетворювачем, проблема $\exists x (f(x) = 0)$ є розв'язною.

Доведення. Нехай функцію f задано скінченим R -перетворювачем A . Викинемо з системи команд усі команди, де на вихід друкуються символи, відмінні від 0 та ∇ . Нехай отриманий R -перетворювач B задає дійсну функцію g . Тоді проблема $\exists x (f(x) = 0)$ еквівалентна проблемі $\text{Dom}_g \neq \emptyset$, яка згідно [3] є розв'язною.

З теореми 5, наслідку 3 та леми 4 маємо наступні дві теореми.

Теорема 6. Клас дійсних функцій, заданих скінченними R -перетворювачами, не є ефективно замкненим (у розумінні існування алгоритму) відносно віднімання та додавання.

Доведення. Припустимо, що існує алгоритм, який за скінченними R -перетворювачами, що задають дійсні функції f_1 та f_2 , будує скінченний R -перетворювач, що задає функцію $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Тоді розв'язна проблема $\exists x (f(x) = 0)$ еквівалентна проблемі $\exists x (f_1(x) = f_2(x))$, що не є рекурсивно перелічною. Отже, припущення хибне.

З іншого боку, за скінченим R -перетворювачем для функції f_2 можна побудувати скінченний R -перетворювач для функції $-f_2$ (у системі команд у вихідних словах слід змінити знаки символів на протилежні). Тоді, якщо можна побудувати перетворювач, що задає суму дійсних функцій, заданих скінченними R -перетворювачами, то можна побудувати скінченний R -перетворювач й для $f(x) = f_1(x) + (-f_2(x)) = f_1(x) - f_2(x)$. Отже, відносно додавання ефективно замкненості також нема.

Теорема 7. Не існує алгоритмів, які за строгими скінченними R -перетворювачами, що задають дійсні функції, будують скінченні R -перетворювачі (можливо нестрогі), що задають їх різницю та суму.

Водночас слід зазначити, що клас дійсних функцій, заданих алгоритмічними R -перетворювачами, ефективно замкнений відносно додавання, віднімання, множення та ділення.

Якщо для дійсних функцій без обмежень на область значень, твердження двох попередніх теорем можна отримати з того, що скінченної пам'яті недостатньо, щоб запам'ятовувати цілу частину результату обчислення функції, то для доведення наступних наслідків ця техніка неза-

стосовна.

Наслідок 4. Клас дійсних функцій з обмеженою областю значень, заданих скінченними R -перетворювачами, не є ефективно замкненим відносно віднімання та додавання.

Наслідок 5. Не існує алгоритмів, які за строгими скінченними R -перетворювачами, що задають дійсні функції з обмеженою областю значень, будують скінченні R -перетворювачі (можливо нестрогі), що задають їх різницю та суму.

Теорема 8. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, проблема $\exists x (f(x) = 0)$ є рекурсивно перелічною.

Доведення. Спочатку побудуємо магазинний R -перетворювач, що задає словарну функцію з тією самою областю визначення, що й словарна функція, задана вхідним R -перетворювачем.

Спочатку скінченний автомат, що працює паралельно з перетворювачем, заблокуємо друк ω -слів на вхідних ω -словах не з множини D . Перевірку належності вихідного ω -слова множині D' можна реалізувати, якщо паралельно з магазинним перетворювачем запустити скінченний автомат, що розпізнає префікси ω -слів, що не належать D' . Тоді, як тільки з'ясується, що вихід не належить множині D' , друк символів на вихід можна припинити. Крім того, достатньо надрукувати $0\bar{V}$ як тільки вхідний перетворювач видасть на вихід $\bar{V}$, а далі, якщо вхідний перетворювач друкує щось на вихід, то друкувати 0 . Крім того, роботу можна налаштувати так, що символ 0 пишеться на вихід тільки тоді, коли після друку попереднього вихідного символу було прочитано хоча б один символ входу, відмінний від 0 . (Це необхідно для того, щоб перетворювач не міг ви-

дати нескінченний вихід, прочитавши лише скінченний префікс входу, та викинути з розгляду зображення з множини K_0 .) Тоді результат словарної переробки вхідного ω -слова отриманим перетворювачем буде нескінченним (та дорівнювати $0\bar{V}0^m$), якщо вхідний перетворювач на цьому ж вході видавав ω -слово з множини D' .

За допомогою техніки доведення теореми 1 з [4], можна стверджувати, що для отриманого перетворювача проблема $\exists x (f(x) = 0)$ еквівалентна проблемі $\exists x \in Q (f(x) = 0)$. З роботи [6] випливає, що результат роботи магазинного R -перетворювача над раціональним числом p/q є раціональним числом, яке може бути знайдено за p, q та системою команд. Отже, для магазинних R -перетворювачів проблема $\exists x (f(x) = 0)$ є рекурсивно перелічною.

Зауваження. Насправді, використовуючи набагато складнішу техніку доведення можна довести, що дана проблема є розв'язною. Але для подальшого викладення достатньо більш слабкого твердження.

З теореми 8 маємо таку сукупність наслідків.

Наслідок 6. Не існує алгоритмів, які за (строгими) скінченними R -перетворювачами, що задають дійсні функції (з обмеженою областю значень), будують магазинні R -перетворювачі (можливо нестрогі), що задають їх різницю та суму.

Слід зазначити, що виходячи з доведень, наведені твердження залишаються справедливими й для відображень.

Крім розглянутих питань, цікавим є питання розв'язності ін'єктивності функції, заданої скінченим R -перетворювачем, яке планується проаналізувати у подальших дослідженнях.

Список використаних джерел

1. Лисовик Л.П. Алгоритмические вопросы для реальных функций / Л.П. Лисовик // Кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 12-17.
2. Лисовик Л.П. Проблемы разрешимости для метареальных функций / Л.П. Лисовик, П.В. Дробышев // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – №1. – С. 13-22.
3. Іванов Є.В. Алгоритмічні властивості області визначення функцій, заданих скінченними R -перетворювачами / Є.В. Іванов, Т.О. Карнаух // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 145-147.
4. Карнаух Т.О. Властивості ірраціональних точок області визначення функцій, заданих магазинними R -перетворювачами / Т.О. Карнаух // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 4. – С. 127-130.
5. Hopcroft J.E. Introduction to automata theory, languages and computation // J.E. Hopcroft, J.D. Ullman – Addison-Wesley Publishing Company, 1979. – 418 p.
6. Лисовик Л.П., Шкаравская О.Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями / Л.П. Лисовик, О.Ю. Шкаравская // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 2. – С. 82-93.

Надійшла до редколегії 09.12.10

УДК 004.056.53

Кулага* А.А., аспірант

Схеми цифрового підпису на основі ідентифікаційних даних

У роботі представлено схему цифрового підпису на основі ідентифікаційних даних, а також її порогова схема, які є білінійними аналогами алгоритмів формування та перевірки цифрового підпису, що визначено в ДСТУ 4245-2002.

Ключові слова: білінійні відображення, схеми підпису Ель-Гамала, еліптичні криві, порогові схеми.

*E-mail: anat.kiev@mail.ru.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Криптографічні протоколи, які побудовані на властивостях білінійних відображень (спарювань), розглядаються як перспективне напрямлення криптографії, так як білінійні спарювання дозволяють спростувати деякі криптосистеми, а також дозволяють розв'язувати деякі специфічні задачі в криптографії, такі як створення криптосистем з відкритими ключами на основі ідентифікаційних даних (identity based cryptosystems), запропоновані Шаміром у 1984 році [6]. Ця ідея була висунута ним з метою спрощення сертифікаційної системи. Та побудова такої схеми шифрування залишалася відкритою проблемою до 2001 року, коли Боне і Франклін представили свою схему шифрування [9], а жодна схема, що була запропонована раніше, не відповідала всім вимогам безпеки та ефективності. Для побудови своєї схеми шифрування вони використали властивості білінійного спарювання за Вейлем на еліптичних кривих. Вона є першою повнофункціональною, ефективною та безпечною схемою шифрування на основі ідентифікаційних даних.

Після роботи Боне і Франкліна з'явилися інші схеми шифрування на основі ідентифікаційних даних, серед яких отримали відомість схеми Гентрі-Сільверберга [8], Боне-Бойсна [10] та ін., та схеми підпису Занг-Кіма [13], Хессе [14].

У криптосистемах на основі ідентифікаційних даних користувачам немає необхідності обмінюватися своїми сертифікатами відкритих ключів. Відкриті ключі легко обчислюються за ідентифікаційними даними користувача (e-mail користувача, його ім'я або номер його

Kulaga A.A., post-graduate student

ID-Based Digital Signature Schemes

The aim of this paper is to provide ID-based digital signature scheme as well as its threshold scheme, which are bilinear analogues of generation and verification algorithms of digital signature defined by the Ukrainian State Standard 4245-2002.

Key words: bilinear maps, ElGamal signature schemes, elliptic curve, threshold schemes.

мобільного телефону тощо), а ці дані є загальновідомими. Таємні ключі та системні параметри генеруються довіреним органом, який називається Центром генерації ключів (*Private Key Generator - PKG*).

Такі схеми складаються з чотирьох етапів:

- *Setup*: PKG задає секретний параметр (майстер-ключ) та генерує загальні параметри системи;

- *Extract*: по заданому ідентифікатору ID, PKG обчислює відповідний йому закритий ключ та передає його по захищеному каналу користувачу;

- *Encrypt*: шифрування повідомлень з використанням відкритого ключа ID;

- *Decrypt*: розшифрування повідомлень з використанням відповідного закритого ключа.

Отже, в таких системах замість того, щоб підтримувати інфраструктуру відкритих ключів (*public key infrastructure - PKI*), необхідно підтримувати PKG, що є значно простішим, адже використання сертифікатів пов'язане з юридичними труднощами, великими грошовими витратами, проблемою анулювання сертифікатів, передачею великого обсягу інформації тощо. Необхідно помітити, що одним з недоліків класичних криптосистем на основі ідентифікаційних даних є можливість зі сторони PKG контролю над секретними ключами користувачів. Одним із засобів уникнути цього є використання порогових схем. У науковій літературі описана велика кількість порогових схем на базі різних алгоритмів. Так, наприклад, в роботах [3-5] запропоновано порогові схеми цифрового підпису (ЦП) на базі російських

стандартів ГОСТ Р 34.10-94 та ГОСТ Р 34.10-2001.

У цій статті описується побудова схеми цифрового підпису на основі ідентифікаційних даних на базі алгоритму, який визначено в ДСТУ 4245-2002 [17] з використанням білінійних відображень, а також подається її порогова схема.

Розв'язок задач побудови схем асиметричного шифрування та ЦП за допомогою однобічної функції було вперше запропоновано Ель-Гамалем в [12], де для побудови однобічної функції з лазівкою запропонована ідея використання двох ключів. Криптосистеми на еліптичних кривих, які з'явилися пізніше, успадковують основні протоколи Ель-Гамале-подібних схем, оскільки їх алгебраїчні структури побудовані на скінченних групах елементів. Особливість еліптичної криптографії полягає в тому, що всі криптоалгоритми з алгеброю поля адаптуються до адитивної групи точок кривої з операцією скалярного множення точки kP замість експоненціювання в мультиплікативній групі $g^k \bmod p$. При цьому параметри шифрування можуть виявлятися як точкою кривої, так і елементом поля, який визначає, наприклад, одну з координат точки. Отже, більшість алгоритмів ЦП, які побудовані на арифметиці групи точок еліптичної кривої, базуються на схемі Ель-Гамала [12]. В 90-х роках був прийнятий національний стандарт ЦП США, який рекомендував алгоритм ЦП DSA як модифікацію схеми Ель-Гамала. З 1999 року з'явилися національні та міжнародні стандарти криптографії на еліптичних кривих. Існуючі стандарти та їх проекти [15-18] рекомендують різні алгоритми з різною стійкістю та обчислювальною складністю, що розширює можливості вибору при розробці криптосистеми. Розглянемо більш розповсюджені алгоритми, але почнемо з узагальненого підпису схеми Ель-Гамала [12,2] в адитивній групі.

Ель-Гамала – подібні схеми підпису

Системними параметрами являються рівняння еліптичної кривої E , визначення поля F , та точка P кривої відомого великого порядку N – твірний елемент підгрупи $G \subseteq E(F)$ групи точок еліптичної кривої. Відкритим ключем перевірки являється точка $Q = dP$, таємним ключем підпису є d . Підпис повідомлення m , який формує користувач A , – це пара (R, s) , де $R = kP$ – випадкова точка, елемент групи G , визначається

випадковим $k, 0 < k < N-1$, що виконується рівністю:

$$h(R)Q + sR = h(m)P. \quad (1)$$

Через $h(m)$ позначається геш-значення від повідомлення m , та через $h(R)$ – геш-значення від конкатенації координат точки $R = (x, y)$.

Розв'язати рівняння (1) відносно s , можна тільки знаючи таємне значення d .

$$sR = h(m)P - h(R)Q = h(m)P - h(R)dP;$$

$$sP = k^{-1}(h(m) - h(R)d)P, \text{ з чого випливає}$$

$$s = k^{-1}(h(m) - h(R)d) \quad (2).$$

Отже, для того, щоб підписати повідомлення m користувач A виконує такі дії:

1. Вибирає $k, 0 < k < N-1$ та обчислює $R = kP$.

2. Обчислює за (2) значення s .

Користувач B , отримавши підпис, перевіряє верифікаційне співвідношення (1).

Для того, щоб підробити підпис під повідомленням m' , необхідно обчислити випадкове $R = kP$ для того, щоб потім обчислити $s = k^{-1}(h(m') - h(R)d)$. Для цього потрібно, знаючи $Q = dP$, обчислити таємне значення d , тобто розв'язати задачу дискретного логарифмування в групі точок еліптичної кривої G над скінченим полем, яка є ще складнішою ніж в мультиплікативній групі скінченного поля.

Якщо якимось іншим способом можна підробити підпис під повідомленням m' (тобто обчислити пару (R, s) так, щоб виконувалось співвідношення (1)), то цим способом можна розв'язувати задачі дискретного логарифмування в цій групі: можна обчислювати таємний ключ підпису $d = (h(m') - sk)h(R)^{-1}$. Таким чином, проблема підробки підпису настільки ж складна, як і задача дискретного логарифмування в групі точок еліптичної кривої G .

Число k необхідно негайно знищувати після формування підпису, так як по ньому та значенню підпису (R, s) обчислюється таємний ключ $d = (h(m') - sk)h(R)^{-1}$.

Це також можливо при повторному використуванні числа k . Дійсно, нехай з

використанням одного і того ж значення k сформовано два підписи (R, s_1) та (R, s_2) під повідомленнями m_1 та m_2 відповідно. При цьому

$$s_1 = k^{-1}(h(m_1) - h(R)d) \text{ та}$$

$$s_2 = k^{-1}(h(m_2) - h(R)d).$$

Тоді $s_1 - s_2 = k^{-1}(h(m_1) - h(m_2))$. При $s_1 \neq s_2$ маємо $k = (h(m_1) - h(m_2))(s_1 - s_2)^{-1}$, а при відомому k можна обчислити d .

В алгоритмі підпису використовується не саме повідомлення, а геш-значення від нього, так як можливо підібрати повідомлення по відомому значенню підпису. Наприклад, можна вибрати випадкові числа i та j , та прийняти

$$R = iP + jQ = (i + dj)P;$$

$$s = -h(R)j^{-1} \bmod N;$$

Тоді пара (R, s) буде підписом повідомлення $m = si \bmod N = -h(R)j^{-1}i \bmod N$, так як

$$\begin{aligned} (mP - h(R)dP)s^{-1} &= \\ &= (-h(R)j^{-1}iP - h(R)dP)(-h(R)j^{-1})^{-1} = \\ &= -h(R)j^{-1}i(-h(R))^{-1}jP - h(R)d(-h(R))^{-1}jP = \\ &= iP + djP = R. \end{aligned}$$

З чого випливає $(mP - h(R)dP) = sR$ та підтвердження підпису $h(R)Q + sR = h(m)P$.

Також необхідно підписувати геш-значення від повідомлення для запобігання атаки на основі гомоморфізмів.

З рівняння (1) $R \in G$ можна виразити наступним чином:

$$\begin{aligned} R &= s^{-1}(h(m)P - h(R)Q) = \\ &= s^{-1}(h(m)P + h(R)(-d)P), \end{aligned} \quad (3)$$

та розв'язуючи рівняння (3) відносно s маємо

$$sR = skP = h(m)P + h(R)(-d)P, \quad \text{з чого випливає}$$

$$s = k^{-1}(h(m) + h(R)(-d)). \quad (4)$$

Підпис повідомлення m позначається як пара $(h(R), s)$, при цьому користувач А, який формує цей підпис, обчислює випадкову точку $R \in G$, та

параметр s за формулою (4), використовуючи таємний ключ підпису $-d$. Для перевірки цього підпису необхідно використати (3), але не як предикат перевірки, а формулу для обчислення точки R по відомим значенням $h(R), s, h(m)$ та $-dP$, що являє собою відкритий ключ підпису. Геш-значення обчисленої точки R та $h(R)$, яке обчислив користувач А, повинні збігатись. На цьому будується предикат перевірки.

В (3) та (4) замість $h(R)$ можна використовувати деяке інше значення, яке позначимо літерою r . Нехай r буде дорівнювати деякому цілому числу $\bar{x}$, яке обчислюється з елемента поля F координати $x \in F$ точки R . Для формування підпису (r, s) використовується формула $s = k^{-1}(h(m) + r(-d))$, а для перевірки також обчислюється точка $R \in G$ за формулою $R = s^{-1}(h(m)P + r(-d)P)$, та порівнюється ціле число $\bar{x}$, яке обчислюється з координати $x \in F$ обчисленої точки R з параметром підпису r . Така схема використовується в ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm).

Далі наводяться приклади найбільш відомих Ель-Гамала – подібних схем підпису, які відрізняються від наведених вище основним рівнянням підпису, формуванням параметру r та формуванням відповідного предикату перевірки.

ECSS (Elliptic Curve Signature Scheme)

Замість рівняння (1) використовується наступне: $R - sP = rQ$, де $r = \bar{x} + h(m)$, з якого можна знайти s : $s = k - rd$, а при перевірці, за цим рівнянням, обчислюється R .

ГОСТ 34.10-2001 (Російський стандарт) [18]

Замість рівняння (1) використовується наступне рівняння: $R = h(m)^{-1}sP + h(m)^{-1}rQ$, де $r = \bar{x}$, з якого можна знайти s : $s = kh(m) + rd$. При перевірці підпису (r, s) за основним рівнянням обчислюється R , після чого r .

ДСТУ 4245-2002 (Український стандарт, який рекомендує алгоритм підпису на еліптичних кривих, що є подібним до ECSS) [17]

Замість рівняння (1) використовується рівняння: $R - sP = rQ$, де $r = \bar{x}h(m)$, $Q = -dP$. При цьому $s = k + rd$. При перевірці підпису (r, s) обчислюється R , після чого r .

EC-GDSA (Elliptic Curve based German Digital Signature Algorithm)

В якості основного рівняння підпису використовується рівняння:
 $R - r^{-1}sQ = r^{-1}h(m)P$, де $r = \bar{x}$, $Q = dP$, за яким обчислюється R при перевірці, а $s = (kr - h(m))d$.

EC-KCDSA (Korean Certificate-based Digital Signature Algorithm using Elliptic Curves)

Основне рівняння підпису –
 $R - sQ = (r \oplus h(C_A \circ m))P$, де $r = h(R)$,
 $Q = d^{-1}P$, C_A - сертифікат відкритого ключа користувача А. За цим рівнянням при перевірці обчислюється R , а $s = (k - (r \oplus h(C_A \circ m)))d$.

Порівняльні характеристики цих алгоритмів та можливі атаки на них більш детально наводяться в [1].

Схема підпису на основі ідентифікаційних даних

Для Ель-Гамала-подібних схем ЦП можлива побудова їх аналогів з використанням математичного апарата білінійних відображень з метою побудови схем ЦП з відкритими ключами на основі ідентифікаційних даних.

Нехай G_1 – адитивна група простого порядку q , а G_2 – мультиплікативна група цього ж простого порядку. Біліїним спарюванням або парним відображенням, називається легко обчислювальне невідоджене біліїне відображення $e: G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, тобто відображення з наступними властивостями:

1. Біліїність:

Для $\forall P, Q, R \in G_1$, та
 $e(P + Q, R) = e(P, R)e(Q, R)$
 $e(P, Q + R) = e(P, Q)e(P, R)$. З чого витікає, що для $\forall P, Q \in G_1$ та $\forall a, b \in \mathbb{Z}_q^*$:
 $e(aP, bQ) = e(P, Q)^{ab}$.

2. Невиродженість:

$\exists P \in G_1$, $e(P, P) \neq 1$. Тобто, якщо P є твірним елементом G_1 , то $e(P, P)$ буде твірним елементом G_2 , так як G_1 та G_2 – групи простого порядку.

3. Обчислювальність:

Існує ефективний поліноміальний алгоритм обчислення $e(P, Q) \in G_2$ для будь-яких $\forall P, Q \in G_1$.

Нехай ID – ідентифікатор користувача схеми, який формує підпис повідомлення m , Q_{ID} – його відкритий ключ, s – таємний майстер-ключ PKG , $P_{pub} = sP$ – відкритий майстер-ключ PKG . Відкритий ключ користувача Q_{ID} обчислюється з його ідентифікатору за допомогою геш-функції $h_1: \{0,1\}^* \rightarrow G_1$.

Підпис під повідомлення m , який формує користувач з загально відомим ідентифікатором ID , це пара (r, S) , де $r = h(m)R$, $R = e(P, P)^k$ – випадковий елемент групи G_2 , визначається випадковим $k \in \mathbb{Z}_q^*$, що виконується рівність:

$$e(P, P)^k = e(S, P)e(Q_{ID}, P_{pub})^r, \quad (5)$$

Розв'язати це рівняння відносно невідомої точки еліптичної кривої S , можна тільки знаючи таємне значення s . Отже маємо:

$e(kP, P) = e(S, P)e(srQ_{ID}, P)$, позначимо через $D_{ID} = sQ_{ID}$, тоді

$e(kP, P) = e(S + rD_{ID}, P)$; з чого випливає $kP = S + rD_{ID}$ та

$$S = kP - rD_{ID}. \quad (6)$$

Для формування підпису користувачем А з ідентифікатором ID_A необхідно щоб PKG згенерував таємний майстер-ключ s , обчислив P_{pub} та таємний ключ користувача А – D_{ID_A} . Користувач А отримує $D_{ID_A} \in G_1$ від PKG по захищеному каналу та генерує випадкове $k \in \mathbb{Z}_q^*$, потім обчислює r та за (6) S .

Для перевірки цього підпису (r, S) під повідомленням m , користувач за (5) обчислює R , після чого обчислює $h(m)R$ та порівнює його з параметром підпису r . Ці значення повинні співпадати.

Стійкість цієї схеми базується на слабкій задачі Диффі-Хелмана в адитивній групі ($W-DH$ –

Weak Diffie-Hellman problem), яка формулюється наступним чином:

для заданого набору $\langle P, Q, sP \rangle$, де $P, Q \in G$, та $s \in \mathbb{Z}_q^*$ отримати sQ .

Вона зводиться до обчислювальної задачі Диффі-Хелмана в адитивній групі (*CDH problem – Computational Diffie-Hellman problem*), тому є не складнішою ніж вона. Що стосується розв'язування задачі CDH, то невідомо, чи можливо її розв'язати минаючи задачу дискретного логарифму для еліптичних кривих.

Отже, припускаємо, що криптоаналітику відомі P, Q_{ID} та $P_{pub} = sP$. Для того, щоб підробити підпис, криптоаналітику потрібно вміти знаходити $D_{ID} = sQ_{ID}$.

Порогова схема підпису

Відомо, що безпека асиметричних криптосистем базується на конфіденційності таємних ключів. Ці ключі повинні бути недоступними для зломисників, тобто безпека криптосистеми базується на нездатності отримання ними доступу до цих ключів. Проте в реальних системах такі противники як корумповані адміністратори, хакери, «троянські коні» та інші віруси можуть (в тому числі і внаслідок невірної конфігурації або збоїв системи) врешті-решт отримати доступ до цих ключів, тим більше у випадку програмної реалізації таких систем. У роботах [7, 22] пропонуються способи захисту від атак подібного роду на основі схем розділення секрету, коли таємний ключ розділяється між декількома серверами. Проте відновлення ключа в одному місці являє собою привабливу мішень для атаки. Для вирішення цієї проблеми були запропоновані порогові схеми [21].

У таких системах кожен сервер містить частку (долю) таємного ключа і для виконання потрібної функції, наприклад, формування підпису, достатньо велика кількість серверів (порогове число) повинна діяти спільно, при цьому кожен з них отримує частинний результат. Ці частини об'єднуються за допомогою відкритої, тобто несекретної, функції, для отримання потрібного результату. У цьому випадку окремі долі ключа зберігаються тільки у їх власників і ніколи не розкриваються іншим сторонам, при цьому явного відновлення розділеного ключа не виконується.

Таким чином, для компрометації системи зломиснику потрібно проникнути на таку кількість серверів, що є не меншою ніж порогове число. Зокрема, такий підхід виключає існування єдиного місця, в якому система може бути скомпрометована.

На основі схеми підпису, яка описується рівняннями (5) та (6) можна побудувати порогову схему, де таємний ключ для формування підпису D_{ID} не належить певному користувачу, а розподіляється серед певної множини користувачів розміру n за допомогою порогової схеми Шаміра (t, n) [7]. Отже, відновити D_{ID} може будь-яка множина з цих користувачів Ω , розмір якої не менше t . Частки (долі, проєкції) D_{ID} позначимо $D_{ID_1}, D_{ID_2}, \dots, D_{ID_n}$. Тоді

$$D_{ID} = \sum_{i \in \Omega} L_i D_{ID_i}, \quad \text{де} \quad L_i = \prod_{j \in \Omega \setminus \{i\}} \frac{-x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{а}$$

$x_i, i = \overline{1, n}$ належить i -ому користувачу.

PKG формує таємний майстер-ключ s , який є у вигляді часток $s_1, s_2, \dots, s_n$, що $s = \sum_{i \in \Omega} L_i s_i$.

Відкриті майстер-ключі $P_{pub_i} = s_i P$, а також $P_{pub} = sP$; обчислює $D_{ID_i} = s_i Q_{ID}$, при цьому $D_{ID} = \sum_{i \in \Omega} L_i D_{ID_i} = \sum_{i \in \Omega} L_i s_i Q_{ID} = (\sum_{i \in \Omega} L_i s_i) Q_{ID} = s Q_{ID}$.

Потім по захищеному каналу PKG передає i -ому користувачу D_{ID_i} , або PKG передає i -ому користувачу частку майстер-ключа s_i за допомогою схеми Фельдмана або Петерсена [19, 20], а закритий ключ D_{ID_i} i -ий користувач обчислює сам.

Для формування частки підпису (R_i, S_i) , кожний i -ий користувач генерує $k_i \in \mathbb{Z}_q^*$, обчислює $R_i = e(P, P)^{k_i}$, передає його всім іншим користувачам, та за (6) обчислює $S_i = k_i P - r D_{ID_i}$, при цьому R обчислюється за формулою

$$R = \prod_{i \in \Omega} R_i^{L_i} = \prod_{i \in \Omega} (e(P, P)^{k_i})^{L_i} = e(P, P)^{\sum_{i \in \Omega} L_i k_i} = e(P, P)^k \quad (7)$$

Перевірка кожної частки підпису відбувається за предикатом (5), тобто

$e(P, P)^{k_i} = e(S_i, P)e(Q_{ID}, P_{pub_i})^r$, використовуючи (7).

Реконструкція підпису також відбувається за допомогою інтерполяції за Лагранжем:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i \in \Omega} L_i S_i = \sum_{i \in \Omega} L_i (k_i P - r D_{ID_i}) = \\ &= \sum_{i \in \Omega} L_i k_i P - \sum_{i \in \Omega} r D_{ID_i} = \\ &= (\sum_{i \in \Omega} L_i k_i) P - r \sum_{i \in \Omega} D_{ID_i} = kP - r D_{ID}. \end{aligned}$$

Параметр R обчислюється як наведено вище.

Таким чином, реконструйований підпис (R, S) буде таким же, як якщо б він був сформований одним користувачем з випадковим $k = \sum_{i \in \Omega} L_i k_i \in Z_q^*$ та таємним ключем D_{ID} .

Порогова схема може використовуватись для підвищення стійкості схем на основі ідентифікаційних даних до компрометації ключів.

Література

1. Бессалов А.В., Телиженко А.Б. Криптосистемы на эллиптических кривых. Киев, «Політехніка», 2004.
2. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. и Часовских А.А., Элементарное введение в эллиптическую криптографию. Протоколы криптографии на эллиптических кривых Ч.2 М.:КомКнига, 2006. – 280с.
3. Запечников С.В. Пороговые схемы цифровой подписи на основе стандарта ГОСТ 34.10-94 //Безопасность информационных технологий, 2001, №4.-С.45-51.
4. Запечников С.В. Обеспечение криптографической стойкости при компроментации части ключей //Безопасность информационных технологий, 2008, №4.-С.93-102.
5. Серов Р.Е. Пороговая схема шифрования/подписи на основе ГОСТ 34.10-2001 //Безопасность информационных технологий, 2004, №3.-С.87-90.
6. A. Shamir. Identity-based Cryptosystems and Signature Schemes in Proc. Crypto '84, LNCS Vol. 196, Springer, pp. 47-53, 1985
7. Shamir, Adi (1979), "How to share a secret", *Communications of the ACM* 22 (11): 612-613
8. C. Gentry and A. Silverberg, Hierarchical ID-Based Cryptography. In Y. Zheng, editor, Proceedings of Asiacrypt 2002, LNCS, Springer-Verlag, 2002.
9. D. Boneh, M. Franklin. Identity Based Encryption from the Weil Pairing. SIAM J. of Computing, Vol. 32, No. 3, pp. 586-615, 2003, Extended Abstract in Crypto 2001.
10. D. Boneh, X. Boyen. Efficient Selective-ID Secure Identity Based Encryption Without Random Oracles. In Proceedings of Eurocrypt 2004.
11. R. Dutta, R. Barua and P. Sarkar, Pairing-Based Cryptographic Protocols : A Survey. Cryptology Research Group
12. ElGamal T. Public Key Cryptosystems and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms. // IEEE Trans. on Information Theory. – 1985. – Vol. 22.
13. F. Zhang, K. Kim. ID-Based Blind Signature and Ring Signature from Pairings. Advances in Cryptology - Asiacrypt 2002, LNCS Vol. 2510, Springer-Verlag, 2002.
14. F. Hess. Efficient Identity Based Signature Schemes Based on Pairings. SAC 2002, LNCS 2595, pp. 310-324, Springer-Verlag, 2002.
15. ANSI X9.62-1999. Public Key Cryptography for the Financial Services Industry: The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA). –1999.
16. FIPS 186-2-2000. Digital Signature Standard. National Institute of Standard and Technology. – 2000.
17. ДСТУ 4145-2002. Інформаційні технології. Криптографічний захист інформації Цифровий підпис, що ґрунтується на еліптичних кривих. Формування та перевіряння.-К.:Держстандарт України, 2003.-94 с.
18. ГОСТ 34.10-2001. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Процедуры формирования и проверки электронной цифровой подписи.- М.:Госстандарт России, 2001.-20 с.
19. Feldman P.A. Practical scheme for non-interactive verifiable secret sharing. Proc. 28th Annual Symp. On Founds. of Comp. Sci., Pp. 427-437. IEEE, 1987.
20. Pedersen T.P. Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing. Adv. In Crypt. –CRYPTO'91. –LNCS, V.576, Pp.129-140. – Springer-Verlag, 1992.
21. J. Seberry Crypto Topics And Applications II, University of Wollongong 1999 <http://ro.uow.edu.au/infopapers/348>
22. Blakley, G. R. (1979). "Safeguarding cryptographic keys". Proceedings of the National Computer Conference 48:313-317.

Надійшла до редколегії 07.09.2010

УДК 519.718.2

Ліндер* Я.М., асп.

Про оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних диференціальних включень з імпульсним впливом

У роботі отримано оптимальні оцінки
множин початкових умов та фазових обмежень
в задачі практичної стійкості диференціальних
включень з імпульсним впливом.

Ключові слова: оптимальна оцінка,
диференціальне включення, системи з
імпульсним впливом.

*E-mail: dremora@bigmir.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. У ряді прикладних задач виникає
необхідність у визначенні параметрів динамічної
системи, при яких розв'язок буде належати
фазовим обмеженням на деякому часовому
інтервалі [1,3,6]. Поведінку системи керування
можна описати за допомогою диференціальних
включень. У такому випадку приходимо до
задачі практичної стійкості диференціальних
включень за наявності короткострокових впливів.
Властивості розв'язків таких співвідношень
висвітлювались, зокрема, в [5,4]. Втім, задачі
практичної стійкості у цьому випадку
досліджувалися мало. Задачі аналізу практичної
стійкості диференціальних включень
досліджувалися, наприклад, у [1,7].

У статті отримано оптимальні оцінки
параметрів множини початкових умов та фазових
обмежень в задачі практичної стійкості лінійних
диференціальних включень.

Розглянемо на інтервалі $[t_0, T]$ лінійне
диференціальне включення з імпульсним
впливом

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)x + U_i(t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad (1)$$

$$x(\tau_i) = B_i x(\tau_i^-) + h_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\} \quad (2)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат,
 $\tau_i, i \in \{0, 1, \dots, N\}$ – точки перемикавання, причому
 $\tau_0 = t_0, \tau_N = T, (x, t) \in D, D$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$,
 $A_i(t), B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, h_i \in \mathbb{R}^n, t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. Крім того,
 $A_i(t)$ – неперервні на (τ_{i-1}, τ_i) , B_i –
невироджені матриці, $U_i(t)$ – опуклозначне,

Linder* Y.M., postgrad. student.

On optimal estimation of practical stability of linear differential inclusions with impulse impact.

In this paper optimal estimations of initial
condition and phase restriction parameters in
problem of practical stability of differential
inclusions with impulse impact are obtained.

Key Words: optimal estimation, differential
inclusion, systems with impulse impact.

компактозначне і неперервне за Хаусдорфом
відображення. Позначимо

$$Q_i(t) = \int_{\tau_i}^t \Theta_i(t, s) U_i(s) ds,$$

де $\Theta_i(t, s)$ – фундаментальна матриця системи
 $\frac{dx}{dt} = A_i(t)x$, нормована в точці s , інтеграл
розглядаємо у сенсі Аумана [2]. Задамо
неперервне багатозначне відображення
 $\Phi: t \mapsto \Phi(t)$, яке описує фазові обмеження.
Множина $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ компактна при $t \in [t_0, T]$ і
графік $\Gamma(\Phi) \subset D, t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Легко
бачити, що функція $x(t) \equiv 0$ не є розв'язком
диференціального включення (1),(2), якщо хоча
б один з векторів $h_i, i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ є
ненульовим. Розв'язок диференціального
включення з імпульсним впливом (1),(2) матиме
вигляд $X(t, x_0, t_0) = \{H(t)x_0\} + M(t), t \in [t_0, T]$, де

$$H(t) = \Theta_i(t, \tau_i) \left(\prod_{j=i-1}^1 W_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right),$$

$$M(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \sum_{k=2}^i \left(\prod_{j=i-1}^k W_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right) \times \\ \times (B_{k-1} Q_{k-2}(\tau_{k-1}) + h_{k-1}) + Q_{i-1}(t),$$

а незбурений розв'язок $x^0(t) = M(t)$. Оператор
добутку у виразах $H(t), M(t)$ визначається так:

$$\prod_{i=a}^b W_i = \begin{cases} B_a B_{a-1} \dots B_b, & a \geq b, \\ 1, & a < b. \end{cases} \quad (3)$$

Крім того, нехай $x^0(t) \in \Phi(t) \forall t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, де $H_i(t) = H(t), M_i(t) = M(t) \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$,
 $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, тобто $0 \in G_*$.

Побудова оптимальних оцінок множини початкових умов. Нехай задано деякий клас $W = \{X(p) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n) : p \geq p_0\}$, де $0 \in \text{int } X(p)$, $p \geq p_0$. У загальному випадку задача оцінки максимальної за включенням множини практичної стійкості G_* незбуреного розв'язку диференціального включення (1),(2) у класі W полягає у знаходженні таких значень параметра $p \geq p_0$, для яких наявна $\{X(p), \Phi(t), t_0, T\}$ - стійкість нульового розв'язку включення (1),(2). Нехай відображення $X: p \mapsto X(p)$ строго монотонне, тобто $X(p) \subset \text{int } X(q)$ при $p < q$. Крім того, нехай $X(p_0) \subset \text{int } G_*$ і знайдеться таке $q_0 > p_0$ таке, що $X(q_0) \setminus G_* \neq \emptyset$. Тоді існує єдине значення параметра

$$p_* = \max \{p \geq p_0 : X(p) \subset G_*\},$$

яке називається оптимальною оцінкою множини початкових умов практичної стійкості диференціального включення (1),(2) у структурній формі W [1]. Для того, щоб p_* було оптимальною оцінкою, необхідно і достатньо, щоб [1]

$$X(p_*) \subset G_*, \quad \partial X(p_*) \cap \partial G_* \neq \emptyset. \quad (4)$$

Припустимо, що для класу $X(p)$ справджується умова поділу, тобто

$$c(X(p), \psi) = pg(\psi) + h(\psi),$$

де $g(\psi), h(\psi)$ - неперервні функції, $p \geq 0$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. Опорна функція множини G_* має вигляд

$$c(G_*, \psi) = \overline{co} \inf_{t \in [t_0, T]} c\left(\Phi(t), (H^T(t))^{-1} \psi\right) - c\left(M(t), (H^T(t))^{-1} \psi\right), \quad (5)$$

$t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. Оператор добутку у виразах для $H(t), M(t)$ визначається згідно (3).

У даній формулі $H(t), M(t)$ є розривними у точках перемикавання, у яких вони неперервні справа. Формулу (5) можна переписати таким способом:

$$c(G_*, \psi) = \overline{co} \min_{i \in \{0, \dots, N-1\}} \min_{t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \left[c\left(\Phi(t), (H_i^T(t))^{-1} \psi\right) - c\left(M_i(t), (H_i^T(t))^{-1} \psi\right) \right], \quad (6)$$

де $H_i(t) = H(t), M_i(t) = M(t) \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, а

$$\begin{aligned} H_i(\tau_{i+1}) &= \lim_{t \rightarrow \tau_{i+1}-0} H(t), \\ M_i(\tau_{i+1}) &= \lim_{t \rightarrow \tau_{i+1}-0} M(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Позначимо $L_i(t) = (H_i^T(t))^{-1}$. З умови (4) випливають такі твердження:

$$\begin{aligned} \psi^T x_0 &\leq c(X(p), \psi) \leq c(G_*, \psi) \leq \\ &c(\Phi(t), L_i(t)\psi) - c(M_i(t), L_i(t)\psi) \end{aligned}$$

$\forall \psi \in S, \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ та існують $\lambda \in S, \tau \in [t_0, T]$ такі, що

$$\begin{aligned} \lambda^T x_0 &= c(X(p), \lambda) = c(\Phi(\tau), L_i(\tau)\lambda) - \\ &- c(M_i(\tau), L_i(\tau)\lambda). \end{aligned}$$

Враховуючи умову поділу, маємо

$$\begin{aligned} pg(\psi) &\leq c(\Phi(t), L_i(t)\psi) - \\ &- c(M_i(t), L_i(t)\psi) - h(\psi) \end{aligned} \quad (8)$$

для будь-яких $\psi \in S, i \in \{0, \dots, N-1\}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Формула (8) перетворюється на рівність при $\psi = \lambda, t = \tau$.

Теорема 1. Нехай для класу $X(p)$ виконується умова поділу. Тоді

$$\begin{aligned} p_* &= \min_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} \frac{1}{g(\psi)} \left[c(\Phi(t), L_i(t)\psi) - \right. \\ &\left. - c(M_i(t), L_i(t)\psi) - h(\psi) \right], \end{aligned}$$

при цьому чисельник виразу невід'ємний.

Побудова оптимальних оцінок фазових обмежень. Позначимо $G_*(s)$ максимальну за включенням множину практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення (1),(2) за фазових обмежень $\Phi(t, s), t \in [t_0, T], s \in [a, b]$. Якщо $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ - фіксований компакт, $\text{int } G_*(a) / G_0 \neq \emptyset$, $G_0 \subseteq \text{int } G_*(b), a < b$, то з [1] випливає, що існує єдина точка $p = \min \{u \in [a, b] : G_0 \subseteq G_*(u)\}$, причому $\partial G_0 \cap \partial G_*(p) \neq \emptyset$. Значення p у такому випадку називається оптимальною оцінкою практичної стійкості для фазових обмежень у класі W .

Відповідно до властивостей опорних функцій оптимальну оцінку можна виразити таким способом

$$p = \min \{u \in [a, b] : c(G_0, \psi) \leq c(G_*(u), \psi), \psi \in S\}.$$

Таким способом, виконуються співвідношення

$$c(G_0, \psi) \leq c(G_*(u), \psi), \psi \in S \quad (9)$$

та існують $\xi \in S$, $x_0 \in \partial G_0$ такі, що

$$\xi^T x_0 = c(G_0, \xi) = c(G_*(u), \xi). \quad (10)$$

Підставляючи вираз (6) у (9), (10), отримаємо наступну теорему

Теорема 2. Для того, щоб параметр p був оптимальною оцінкою фазових обмежень практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення (1), (2), необхідно і достатньо, щоб

$$\min_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} [c(\Phi(t, p), L_i(t)\psi) - c(M_i(t), L_i(t)\psi) - c(G_0, \psi)] = 0$$

за умови, що

$$\min_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} [c(\Phi(t, p), L_i(t)\psi) - c(M_i(t), L_i(t)\psi)] > 0.$$

Припустимо, що для всіх $\psi \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$ виконується умова поділу

$$c(\Phi(t, p), \psi) = pg(t, \psi) + h(t, \psi), \quad (11)$$

де $g(t, \psi) = c(\Phi(t, 1), \psi) - c(\Phi(t, 0), \psi) > 0$,

$$h(t, \psi) = c(\Phi(t, 0), \psi) \geq 0.$$

Тоді, використавши попередню теорему, одержимо

$$c(M_i(t), L_i(t)\psi) + c(G_0, \psi) - h(t, L_i(t)\psi) \leq g(t, L_i(t)\psi), \quad (12)$$

причому існують такі значення $\lambda \in S$, $\tau \in [t_0, T]$, при яких (12) перетворюється на рівність. Отже, справедливе таке твердження

Теорема 3. Нехай виконується умова поділу (11). Тоді оптимальна оцінка фазових обмежень практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення (1), (2) обчислюється за формулою

$$p = \max_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} \frac{1}{g(t, L_i(t)\psi)} [c(G_0, \psi) + c(M_i(t), L_i(t)\psi) - h(t, L_i(t)\psi)],$$

при цьому

$$\max_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} c(M_i(t), L_i(t)\psi) + c(G_0, \psi) - h(t, L_i(t)\psi) > 0.$$

Побудова оптимальних оцінок правої частини. Припустимо, що відображення $\Phi(t)$ опуклозначне і неперервне, $G_0 \subseteq \Phi(t_0)$ – опуклий компакт. Для того, щоб оцінка p_* була оптимальною у деякому класі Σ , означеному у [1], необхідно і достатньо, щоб

$$c(X(t, x_0, t_0, p), \psi) \leq c(\Phi(t), \psi) \quad (13)$$

при всіх $t \in [t_0, T]$, $x_0 \in G_0$, $\psi \in S$ та існували $\tau \in [t_0, T]$, $y_0 \in G_0$, $\xi \in S$ такі, що

$$c(X(\tau, y_0, t_0, p), \xi) \leq c(\Phi(\tau), \xi). \quad (14)$$

Розглянемо клас, у якому містяться сукупності багатозначних функцій такого вигляду:

$$\Sigma = \{F_i(x, t), i \in \{0, 1, \dots, N-1\} : F_i(x, t) = \{A_i(t)x + U_i(t, p)\}, p \geq 0\},$$

де відображення $U_i : (t, p) \mapsto U_i(t, p)$ компактозначне, опуклозначне, неперервне за $p \geq 0$ і напівнеперервне зверху за $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. Припустимо, що виконуються такі умови:

1. Незбурений розв'язок включення

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)x + U_i(t, 0), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i],$$

$$x(\tau_i) = B_i x(\tau_i^-) + h_i,$$

$i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким;

2. Точка $0 \in U_i(t, p)$;

3. Для $p < q$ можна вказати $r > 0$ таке, що для кожного $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ $(U_i(t, p))^r \subset U_i(t, q)$.

4. Знайдеться $h > 0$ таке, що для довільного $p \geq 0$ існує $q > p$, за якого для кожного $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ $(U_i(t, p))^h \subset U_i(t, q)$.

Тоді виконуються умови 2.1–2.5 визначення класу Σ [1]. Із співвідношень (13), (14) випливає, що оцінка p_* оптимальна в класі Σ тоді і лише тоді, коли для всіх $x_0 \in G_0$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\psi^T H_i(t) x_0 + c(M_i(t), \psi) \leq c(\Phi(t), \psi), \quad (15)$$

та існують $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $y_0 \in G_0$, $\xi \in S$ такі, при яких (15) перетворюється у рівність.

Припустимо, що справджується умова поділу

$$c(U_i(t, p), \psi) = pg_i(t, \psi) + h_i(t, \psi), \quad (16)$$

де $g_i(t, \psi)$, $h_i(t, \psi) = c(U_i(t, 0), \psi)$ – неперервні
скалярні функції, $g_i(t, \psi) > 0$, $h_i(t, \psi) \geq 0$,
 $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\psi \in S$. Введемо позначення

$$\Psi_{ik}(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \left(\prod_{j=i-1}^k B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right) B_{k-1},$$

$$\phi_{ik}(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \left(\prod_{j=i-1}^k B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right) h_{k-1}.$$

Тоді, користуючись (16), маємо

$$c(M_i(t), \psi) = p \left(\int_{\tau_{i-1}}^t g(s, \Theta_k^T(t, s) \psi) + \right.$$

$$+ \sum_{k=2}^{i-1} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} g(s, \Theta_{k-2}^T(\tau_{k-1}, s) \Psi_{ik}^T(t) \psi) \Bigg) +$$

$$+ \sum_{k=2}^i \psi^T \phi_{ik}(t) + \int_{\tau_{i-1}}^t h(s, \Theta_k^T(t, s) \psi) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{i-1} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} h(s, \Theta_{k-2}^T(\tau_{k-1}, s) \Psi_{ik}^T(t) \psi)$$

для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, а у точці $t = \tau_{i+1}$
визначається згідно (7). Позначимо

Список використаних джерел

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 88 с.
3. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Київ: Наук. думка, 1985. – 304 с.
4. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Критерії практичної стійкості для динамічних систем з імпульсним впливом // Вісник. Кібернетика. – 2002. – вип. 3. – С. 35-37.

$$W_i(t) = \sum_{k=2}^i \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} g(s, \Theta_{k-2}^T(\tau_{k-1}, s) \Psi_{ik}^T(t) \psi) +$$

$$+ \int_{\tau_{i-1}}^t g(s, \Theta_k^T(t, s) \psi),$$

$$V_i(t) = \sum_{k=2}^i \psi^T \phi_{ik}(t) + \int_{\tau_{i-1}}^t h(s, \Theta_k^T(t, s) \psi) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{i-1} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} h(s, \Theta_{k-2}^T(\tau_{k-1}, s) \Psi_{ik}^T(t) \psi).$$

Оптимальна оцінка для правої частини має
вигляд

$$p_* = \min_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} \frac{c(\Phi(t), \psi) - c(G_0, H_i^T(t) \psi) - V_i(t)}{W_i(t)},$$

при цьому

$$\min_{\substack{i \in \{0, \dots, N-1\} \\ \psi \in S, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]}} (c(\Phi(t), \psi) - c(G_0, H_i^T(t) \psi) - V_i(t)) > 0.$$

Ця умова означає, що незбурений розв'язок
диференціального включення є стійким.

5. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. – К.: Институт математики НАН України, 2007. – 428 с.
6. Кириченко Н. Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – Київ: Вища шк., 1978. – 184 с.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2003. – С. 265-288.

Надійшла до редколегії 31.08.10

УДК 517.929.

Ляшенко В.П., к. ф.-м. н., доцент,
Кобильська О.Б., аспірант

Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою

Розглядається початково-крайова задача для нестационарного рівняння теплопровідності з нелокальною умовою, яка пов'язує шуканий розв'язок у внутрішніх точках області з умовами на її границі. Досліджується питання існування єдиного розв'язку крайової задачі з нелокальною умовою.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, нелокальна задача, теорема існування

Lyashenko V., k.pf.-m.n., associate professor
Kobilska E., postgraduate student

Research of nonlocal task with an integral condition

The boundary-value problem for the nonstationary equation of heat conductivity with nonlocal condition which connects the unknown solution in internal points of area with conditions on border is considered. The question of existence of the unique solution of a boundary value problem with nonlocal condition is investigated.

Key Words: heat equation, nonlocal task, the theorem of existence of the solution

*E-mail: leca91@ua.ru, kvm@polytech.poltava.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусайнов Д.Я.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Останнім часом широкого розповсюдження набули дослідження нелокальних крайових задач [3-6]. Розглядається початково-крайова задача для рівняння теплопровідності з інтегральною умовою, що описує температурне поле рухомого ізотропного осесиметричного середовища з періодично діючими внутрішніми джерелами тепла. Вона виникає під час створення систем керування [4-5]. Застосування відомих методів [1] знаходження та доведення існування єдиного розв'язку при наявності такої умови викликає значні труднощі, оскільки невідомі значення шуканої функції на одній із границь області.

У роботі досліджується питання існування єдиного розв'язку крайової задачі із нелокальною умовою.

2. Матеріали і результати дослідження

Математична модель температурного поля ізотропного осесиметричного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками представлена у вигляді недовизначеної крайової задачі із залученням нелокальної інтегральної умови для

нестационарного рівняння теплопровідності в області $Q_0 = \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - w \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = W(z, t, T), \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad T(r, z, t) = T_l, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha(T - T_s) f_1' - \varepsilon \sigma (T^4 - T_s^4) f_1', \quad (4)$$

де λ, α – коефіцієнти теплопровідності та конвективної тепловіддачі з поверхні, ε, σ – ступінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана, r_0 – радіус, $W(z, t, T)$ – функція джерел тепла, яка має вигляд:

$$W(z, t, T) = f_1^1(z) f_2^1(T), \quad (5)$$

$$W(z, t, T) = f_1^2(t) f_2^2(T), \quad (6)$$

$$\text{де} \quad f_2^2(T, t) = \frac{I(t)^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}.$$

ρ_0, β – питомий опір і температурний коефіцієнт опору, f_1^i – функції (7). У випадку математичної моделі з постійно діючими джерелами тепла у зоні нагрівання функції $f_1^1(z), f_1^2(t)$ приймаються рівними одиниці [8], а у випадку періодично діючих джерел тепла, що залежать від часу та координати точки, функції $f_1^1(z), f_1^2(t)$ мають вигляд [4]:

$$f_1^1(z) = \begin{cases} m \frac{z}{l_0} - nm, nl_0 \leq z < \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 \leq z \leq (n+1)l_0, z < 0 \end{cases}$$

$$f_1^2(t) = \begin{cases} m \frac{t}{t_0} - nm, nt_0 \leq t < \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 \leq t \leq (n+1)t_0, t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Тут параметри m, n визначають характер періодично діючих джерел тепла.

Розглянемо задачу (1)-(4). Для термічно тонкого середовища, застосувавши інтегральне перетворення:

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr,$$

та врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу в області $Q_{2r} = \{(z, t) | 0 < z < l, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u, t), \quad (8)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (9)$$

$$u(0, t) = T_l, u(l, t) = T_l, \quad (10)$$

$$\text{де } F_1(u, t) = -\left(\frac{I(t)^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(T_c^4 - u^4) + \left(\frac{I(t)^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0}\right)u\right).$$

Зважаючи на те, що у функції $F_1(u, t)$ доданок $\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(T_c^4 - u^4)$ вносить незначний вклад у

функцію $F_1(u, t)$ можна замінити його лінеаризованим значенням, тобто

$$F_1(u, t) = -\left(\frac{I(t)^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(\dot{Q}_n^2 + T_l^2)(T_c + T_l) \times \right. \\ \left. \times (T_c - u) + \left(\frac{I(t)^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0}\right)u\right). \quad [1].$$

Як було зазначено раніше, подібна задача виникає під час проектування систем керування температурним полем. В таких випадках доцільно у математичну модель замість однієї із крайових умов ввести нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії зони нагрівання:

$$\int_0^{l_0} \int_0^{t_0} (T(r, z, t) - T_0) dr dz + \frac{r_0 \alpha l}{\nu c \rho_n} \int_0^{l_0} [T(r, z, t) - T_c] dz = \\ = \frac{I(t)^2 \rho_0 l}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n} \int_0^{t_0} \int_0^{l_0} [1 + \beta T(r, z, t)] dr dz. \quad (11)$$

Це дозволить більш точно описати температурний розподіл.

Для подальшого дослідження перейдемо до безрозмірних координат та параметрів:

$$x = \frac{z}{l}, \tau = \frac{t\nu}{l}, \theta = \frac{u - T_l}{T_l - T_c}, P_\theta = \frac{c \rho_n l^2}{\lambda \tau_0}, \mu = \frac{2\alpha l^2}{\lambda r_0}, \\ P_\theta(\tau) = \frac{I(\tau)^2 \rho_0 l^2}{\lambda (T_l - T_c) \pi^2 r_0^4}, \mu_1 = \frac{2\alpha l^2}{r_0 \lambda (T_l - T_c)}.$$

Уведемо до задачі (8)-(10) замість другої із умов (10) інтегральну умову (11) у безрозмірному вигляді попередньо усереднивши її по радіусу [4]. Тоді задача (8)-(11) з нелокальною умовою у області $Q_\tau = \{(x, \tau) | 0 < x < 1, 0 < \tau < 1\}$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - P_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = P_\theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + F(x, \tau, \theta), \quad (12)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_1, \quad (13)$$

$$\theta(0, \tau) = 0, \int_0^1 \theta(x, \tau) dx = S_1(\tau), \quad (14)$$

$$F(x, \tau, \theta) = P_0(\tau) + \mu_1 T_c - k\theta(x, \tau) - k + \\ \beta P_0(\tau)(T_l - T_c)\theta(x, \tau) + \beta P_0(\tau)T_l - \mu_1 T_l - \\ - \mu_1(T_l - T_c)\theta(x, \tau),$$

$$S_1(\tau) = \frac{T_0 l \pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n + r_0 l^2 \alpha T_c \pi^2 r_0^4 + I(\tau)^2 \rho_0 l^2}{\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n + r_0 l \alpha T_c \pi^2 r_0^4 - I^2 \rho_0 l \beta}.$$

Увівши заміну $\theta(x, \tau) = v(x, \tau)e^{x\tau + \mu\tau}$, задачу (12)–(14) з нелокальною інтегральною умовою у області $Q_\tau = \{(x, \tau) | 0 < x < 1, 0 < \tau < 1\}$ запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, \tau), \quad (15)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (16)$$

$$v(0, \tau) = 0, \quad \int_0^1 v(x, \tau) dx = S_1(\tau), \quad (17)$$

$$f(x, \tau) = (P_0 + \mu_1 T_c - k + \beta P_0 T_l - \mu_1 T_l) e^{-\lambda x - \mu \tau},$$

$$S_1(\tau) = \frac{T_0 l \pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n + r_0 l^2 \alpha T_c \pi^2 r_0^4 + I(\tau)^2 \rho_0 l^2}{(\pi^2 r_0^4 \nu c \rho_n + r_0 l \alpha T_c \pi^2 r_0^4 - I^2 \rho_0 l \beta) l (T_l - T_c)} - \\ - \frac{l T_l}{(T_l - T_c)}.$$

Розглянемо питання існування єдиного розв'язку задачі (15)–(17).

Для отримання основного результату, а саме доведення існування розв'язку нелокальної задачі користуємось відомим фактом існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Вольтера I-го роду при виконанні умов обмеженості ядра і вільного члену рівняння. [3].

Теорема 1. Якщо $\varphi(x) \in C[0; 1]$, $S_1(\tau) \in C(\bar{Q}_\tau)$, то існує єдиний розв'язок задачі (15)–(17).

Для доведення розглянемо додаткову задачу в області $Q_\tau = \{(x, \tau) | 0 < x < 1, 0 < \tau < 1\}$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, \tau), \quad (18)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (19)$$

$$v(0, \tau) = 0, \quad v(1, \tau) = \mu(\tau). \quad (20)$$

Розглянемо задачу (18)–(20) у яку замість нелокальної умови на правому кінці області уведемо крайову умову 1-го роду, причому функція $f(x, \tau)$ визначена вище, а $\mu(\tau)$ невідома функція.

Розв'язок цієї задачі за допомогою метода поділу змінних Фур'є [1] має вигляд:

$$v(x, \tau) = x\mu(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-(\pi n)^2 \tau} + \\ + \int_0^\tau (-1)^n \frac{2}{\pi n} \mu'(k) e^{(\pi n)^2 (k-\tau)} dk) \times \\ \times \sin \pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^t f_n(\tau) e^{(\pi n)^2 (k-\tau)} dk, \quad (21)$$

$$\text{де } A_n = 2 \int_0^1 \varphi(1) \sin(\pi n x) dx + (-1)^n \frac{2\varphi(1)}{\pi n}.$$

Підставивши у (21) умову (17) знайдемо невідому функцію $\mu(k)$.

$$\mu(\tau) \left[\int_0^1 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n x) dx \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2\pi n \left(\int_0^t \mu(k) e^{(\pi n)^2 (k-\tau)} dk \right) \times \\ \times \sin(\pi n x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2 C_n e^{-(\pi n)^2 \tau} \sin(\pi n x) dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^t f_n(k) e^{(\pi n)^2 (k-\tau)} \sin(\pi n x) dk dx - S_1(\tau) = 0, \quad (22)$$

$$\text{де } C_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi n x) dx,$$

$$f_n(k) = \int_0^1 f(x, k) \sin(\pi n x) dx.$$

Уведемо позначення:

$$K(\tau, k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2\pi n (e^{(\pi n)^2 (k-\tau)}),$$

$$S(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left((-1)^n - 1 \right) C_n e^{-(\pi n)^2 \tau} -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(k) e^{(\pi n)^2 (k-\tau)} dk + S_1(\tau)$$

Враховуючи, що $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\pi n x) = -\frac{\pi}{2} x$,

$$\text{маємо } \left[\int_0^1 x dx + \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n x) dx \right] = 0.$$

Після перетворень вираз (22) набуває вигляду:

$$\int_0^{\tau} \mu(k) K(\tau, k) dk = S(\tau). \quad (23)$$

Ядро $K(\tau, k)$ та вільний член $S(\tau)$ представляють собою суму рівномірно збіжних рядів. Ядро рівняння та вільний член є обмеженими функціями, для яких виконуються умови:

$$\|K(\tau, k)\|_{C(1)} \leq k_1; \|S(\tau)\|_{C(1)} \leq k_2; \|K(\tau, \tau)\|_{C(1)} \neq 0.$$

Маємо оцінку $|\mu(k)| \leq \frac{k_1}{k_3} e^{\frac{k_2}{k_3}}$ [3], згідно якої для інтегрального оператора Вольтера існує обмежений обернений оператор

$$\|A^{-1}\|_{C(1) \rightarrow C} \leq \frac{1}{k_3} e^{\frac{k_2}{k_3}}, \text{ а отже, рівняння (23) має}$$

єдиний розв'язок. Тим самим співвідношення (23) визначає єдиний розв'язок нелокальної задачі (15)-(17).

У випадку, коли на одній із границь області $Q_{\tau} = \{(x, \tau) | 0 < x < 1, 0 < \tau < 1\}$ має місце однорідна крайова умова II роду, будемо мати задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(\tau, x), \quad (24)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (25)$$

$$v_x(0, \tau) = 0, \quad \int_0^1 v(x, \tau) dx = S_1(\tau). \quad (26)$$

Теорема 2. Нехай $f(x, \tau) \in L_2(Q_{\tau})$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$.

Якщо виконується умова узгодження

$$S_1(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \text{ і задача:}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(\tau, x), \quad (27)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (28)$$

$$v(0, \tau) = 0, \quad v_x(1, \tau) = F(\tau), \quad (29)$$

має єдиний розв'язок, то задача (24)-(26) також має єдиний розв'язок.

Доведення. Зінтегруємо рівняння (24) по x від 0 до 1, враховуючи умову (26), отримаємо

$$v_x(1, \tau) = F(\tau), \text{ де } F(\tau) = S_1'(\tau) - \int_0^1 f(x, \tau) dx. \text{ Від}$$

задачі (24)-(26) переходимо до задачі (27)-(29) розв'язок якої існує і єдиний, отже розв'язок задачі з інтегральною умовою (24)-(26) також існує і єдиний.

У випадку, коли на частині границі області $Q_{\tau} = \{(x, \tau) | 0 < x < 1, 0 < \tau < 1\}$ відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, а на іншій частині задана інтегральна умова, після проведення квазілінеаризації і зведення до безрозмірного виду будемо мати задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(\tau, x) \quad (30)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) \quad (31)$$

$$v_x(0, \tau) = \bar{\sigma} v(0, \tau) + \sigma, \quad \int_0^1 v(x, \tau) dx = S_1(\tau), \quad (32)$$

Теорема 3. Нехай $f(x, \tau) \in L_2(Q_{\tau})$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$.

Якщо виконується умова

$$\text{узгодження } S_1(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \text{ та існує розв'язок}$$

задачі

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(\tau, x), \quad (33)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (34)$$

$$v_x(0, \tau) = \bar{\sigma} v(0, \tau) + \sigma, \quad v_x(1, \tau) = \bar{\sigma} v(0, \tau) + \sigma_1(\tau), \quad (35)$$

то існує, і при тому єдиний, розв'язок задачі (30)-(32).

Доведення. Зінтегруємо рівняння (30) по x від 0 до 1

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \tau} dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \int_0^1 f(x, \tau) dx, \quad (36)$$

враховуючи умову (32), отримаємо

$$v_x(1, \tau) = \bar{\sigma} v(0, \tau) + \sigma_1(\tau),$$

де $\sigma_1(\tau) = S'_1(\tau) + \sigma - \int_0^1 f(x, \tau) dx$. Від задачі (30)-

(32) переходимо до задачі (33)-(35). Доведемо існування єдиного розв'язку задачі (33)-(35). Нехай існують 2 розв'язки v_1, v_2 задачі (33)-(35). Позначимо їх різницю $V = v_1 - v_2$.

Тоді для функції $V = v_1 - v_2$ будемо мати задачу:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, \tau), \quad (37)$$

$$V(x, 0) = \varphi(x), \quad (38)$$

$$V_x(0, t) = \sigma V(0, \tau), \quad V_x(1, t) = \sigma V(0, \tau). \quad (39)$$

Помноживши (37) на $V dx$ та проінтегрувавши

В межах від 0 до 1 отримаємо:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 V^2 dx = \int_0^1 V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx, \quad \int_0^1 V \frac{\partial V}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 V^2 dx,$$

$$\int_0^1 V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = V \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 V^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx = V \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_0^1.$$

Інтегруючи за змінною t маємо:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 V^2 dx + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx dt = \int_0^1 V \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_0^1 dt.$$

Очевидно, що права частина дорівнює 0. А це можливо, якщо $V = v_1 - v_2 = 0$. Отже розв'язок задачі (33)-(35) єдиний. А значить існує єдиний розв'язок задачі (30)-(32).

3. Висновки

Розглянуті крайові задачі для рівняння теплопровідності із залученням нелокальної інтегральної умови. Сформульовані та доведені теореми про існування єдиного розв'язку нелокальних задач для рівняння параболічного типу у випадку задання на частині границі інтегральної умови, а на іншій частині крайових умов I-го, II-го або III-го роду.

Список використаних джерел

1. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Сидоренко С. И. Нелинейные задачи массопереноса / С. И. Сидоренко, А.А. Березовский, С.М. Волошко. – Киев: "Наукова думка", 2002. – 448с.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. К: Наук. думка, 1986. – 542 с.
4. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И.Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – №2. – С. 294–304.
5. Ляшенко В. П. Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла / В.П. Ляшенко, О.Б.Кобильська // Вісник Харківського національного університету, Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – № 890. – вип. 13. – С. 115-120
6. Исследование влияния импульсного действия тока на температурное распределение в движущейся проволоке / В.П. Ляшенко, О.Б.Кобильська // Сборник научных трудов международного форума-конкурса молодых ученых "Проблемы недропользования". – Санкт-Петербург, 2010. – С. 211-215.
7. Пулькина, Л.С. Неклассические уравнения математической физики / Л.С. Пулькина // Изд-во института математики СО РАН. – 2005. – С. 231–239.
8. Кожанов, А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера / А.И.Кожанов // Дифференц. уравнения. – 2004. – №6. – С. 763–774.
9. Ляшенко В. П. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б.Кобильська // Вісник Запорізького національного університету, Серія «Фізико-математичні науки». – 2008. – № 1. – С. 130-135.

Надійшла до редколегії 16.10.10

УДК 519.21

Макушенко І.А., к.ф.-м.н.,
Усар І.Я., інженер

Гістерезисна стратегія для $M/M/m/\infty$ - системи з повторними викликами

В роботі розглядається система обслуговування з повторними викликами типу $M/M/m/\infty$, в якій інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості джерел повторних викликів. Розглядається гістерезисна стратегія керування такою системою. Знайдено умови існування та явні формули для ергодичного розподілу процесу обслуговування. Вивчається задача оптимального вибору порогів перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, гістерезисна стратегія, стаціонарний режим, оптимізація.

Makushenko I.A., C.Sci(Phys-Math.),
Usar I.Ya., engineer

Hysteresis strategy for $M/M/m/\infty$ retrial queueing system

The paper deals with $M/M/m/\infty$ -type retrial queueing system in which the intensivity of input flow depends on the number of sources of repeated calls. Hysteresis strategy for such system is considered. The existence conditions and explicit formulas for steady state distribution of service process are obtained. The optimal switching problem for intensivity of input flow is considered as well.

Key Words: queue, repeated calls, hysteresis strategy, stationary regime, optimization.

*E-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н. проф. Акіменко В.В.

Результати для систем з повторними викликами складають один з розділів теорії масового обслуговування. Основні з цих результатів систематизовано в монографії [1]. Математичні моделі систем з повторними викликами використовуються в проектуванні комп'ютерних мереж, в системах мобільного зв'язку та телефонії, при моделюванні процесу посадки повітряних суден та ін. [1]-[4].

В системах з повторними викликами вимога, яка надійшла в систему і застала всі обслуговуючі прилади зайнятими через деякий випадковий час знову повторює спробу потрапити на обслуговування. Такі вимоги стають джерелами повторних викликів, що генерують вторинний потік вимог.

В роботі розглядається система обслуговування типу $M_Q/M/m/\infty$ з повторними викликами, яка складається з m обслуговуючих приладів, які працюють незалежно. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ . На вхід обслуговуючого пристрою надходить пуассонівський потік вимог. Інтенсивність λ_j вхідного потоку залежить від числа j - джерел повторних викликів. Кожний повторний виклик

через показниковий час з параметром ν повторює спробу потрапити на обслуговування. Отже, можемо вважати, що по відношенню до обслуговуючого пристрою всі вимоги діляться на дві групи: первинні та вторинні.

Процес керування роботою нашої системи визначається на основі гістерезисної стратегії, яку можна описати наступним чином. Нехай $h_1 \leq h_2$ будуть два натуральні числа (пороги). Якщо кількість повторних викликів $j \leq h_1 - 1$, то система буде працювати в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює λ_1 . Якщо $j \geq h_2$, то в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку λ_2 . А якщо $h_1 \leq j < h_2$, то система зберігає той режим, в якому вона працювала в попередній момент часу. Клас порогових стратегій є підмножиною класу гістерезисних стратегій, який можна отримати при $h_1 = h_2$. Такі системи розглядалися в роботі [5].

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати тривимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{1, 2\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t , $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог, $Q_3(t)$ – режим роботи системи в момент часу t . Якщо $Q_3(t) = 1$, то система працює в першому режимі, якщо $Q_3(t) = 2$, то система працює у другому режимі. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}$ процесу $Q(t)$ визначаються наступним чином:

- 1) якщо $(i = 0, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, h_2-1, r = 1) \vee$
 $\vee (i = 0, \dots, m-1, j = h_1+1, \dots, r = 2)$, то

$$q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_r, & \text{при } (i', j', r') = (i+1, j, r), \\ i\mu, & \text{при } (i', j', r') = (i-1, j, r), \\ j\nu, & \text{при } (i', j', r') = (i+1, j-1, r), \\ -(\lambda_r + i\mu + j\nu), & \text{при } (i', j', r') = (i, j, r), \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

- 2) якщо $(i = m, j = 0, 1, \dots, h_2-2, r = 1) \vee$
 $\vee (i = m, j = h_1+2, \dots, r = 2)$, то

$$q_{(m,j,r)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_r, & \text{при } (i', j', r') = (m, j+1, r), \\ m\mu, & \text{при } (i', j', r') = (m-1, j, r), \\ -(\lambda_r + m\mu), & \text{при } (i', j', r') = (m, j, r), \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

- 3) якщо $i = m, j = h_2-1, r = 1$, то

$$q_{(m,h_2-1,1)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{при } (i', j', r') = (m, h_2, 2), \\ m\mu, & \text{при } (i', j', r') = (m-1, h_2-1, 1), \\ -(\lambda_1 + m\mu), & \text{при } (i', j', r') = (m, h_2-1, 1), \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

- 4) якщо $i = 0, \dots, m-1, j = h_1, r = 2$, то

$$q_{(i,h_1,2)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_2, & \text{при } (i', j', r') = (i+1, h_1, 2), \\ i\mu, & \text{при } (i', j', r') = (i-1, h_1, 2), \\ h_1\nu, & \text{при } (i', j', r') = (i+1, h_1-1, 1), \\ -(\lambda_r + i\mu + j\nu), & \text{при } (i', j', r') = (i, j, r), \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$, $t \geq 0$.

Лема 1. Нехай $\lambda_2 = \limsup_j \lambda_j < \infty$. Тоді при

$\frac{\lambda_2}{m\mu} < 1$ існує ергодичний розподіл для процесу $Q(t)$ і він збігається з єдиним стаціонарним.

Доведення.

Доведення цієї леми базується на застосуванні теореми Твіді ([1], стор. 97), якщо в якості тест-функції Ляпунова взяти функції системи:

$$\varphi(i, j, r) = ai + j + r, \quad (i, j, r) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Якщо ми покажемо, що параметр "a" можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається за формулою

$$y_{gr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (\varphi(i', j', r') - \varphi(i, j, r)),$$

буде рівномірно менше нуля відносно (i, j, r) , за винятком скінченної кількості точок (i, j, r) , то з цього буде випливати наша лема.

Якщо врахувати співвідношення для інтенсивностей переходів, які записані вище, то нам достатньо обмежитись випадками 1) та 2), оскільки в решті випадків число точок (i, j, r) є скінченним.

Розглянемо випадок 1). Маємо

$$y_{gr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (a(i' - i) + j' - j + r' - r) =$$

$$= a(\lambda_r - i\mu) + j\nu(a - 1),$$

$$i = 0, \dots, m-1, j = h_1 + 1, \dots, r = 2.$$

Аналогічно у випадку 2) маємо

$$y_{gr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (a(i' - i) + j' - j + r' - r) =$$

$$= \lambda_j - am\mu,$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1, j = h_1 + 2, \dots, r = 2.$$

Оскільки за умовою леми $1 - \frac{\lambda_2}{m\mu} < 1$, то для

будь-якого $a \in \left(\frac{\lambda_2}{m\mu}, 1\right)$ можна знайти таке $\varepsilon > 0$,

що $y_{gr} < -\varepsilon$ для всіх точок (i, j, r) за винятком скінченної їх кількості. Таким чином при

$a \in \left(\frac{\lambda_2}{m\mu}, 1\right)$ виконуються умови теореми Твіді.

Лему доведено.

Спочатку знайдемо ергодичний розподіл для системи, в якій довжина черги повторних викликів обмежена числом $N < \infty$ (при умові, що всі N місць зайнято, виклик губиться і не отримує обслуговування в системі). Потім в умовах леми 1 перейдемо до границі $N \rightarrow \infty$ і

отримаємо цей розподіл без обмежень на довжину черги.

Для $M_Q/M/m/N$ ергодичний розподіл завжди існує і будемо позначати його

$$\pi_{ij}^{(r)}(N) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j, Q_3(t) = r)$$

Перехідні ймовірності нашої системи співпадають з наведеними вище, крім випадку $i = m, j = N, r = 2$

$$q_{(m,N,2)}^{(i',j',r')}(N) = \begin{cases} m\mu, & \text{при } (i',j',r') = (m-1,N,2), \\ -m\mu, & \text{при } (i',j',r') = (m,N,2), \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

Процес $Q(t, N)$ набуває значення в скінченній множині станів $S(N) = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, N\} \times \{1, 2\}$, і є ергодичним. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(r)}(N)$, $(i, j, r) \in S(N)$.

Введемо наступні позначення:

$$e_i(m) = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \dots, \delta_{im-1})^T, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$e(m) = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad \pi_j^{(r)}(N) = (\pi_{0j}^{(r)}(N), \dots, \pi_{m-1,j}^{(r)}(N))^T.$$

$$\text{Нехай } A_{ij} = \|a_{ik}^{(j)}(r)\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

тридіагональна матриця вигляду

$$a_{ik}^{(j)}(r) = \begin{cases} \lambda_r + i\mu + j\nu, & k = i, i = 0, 1, \dots, m-1, \\ -\lambda_r, & k = i-1, i = 0, 1, \dots, m-1, \\ -(i+1)\mu, & k = i+1, i = 1, 2, \dots, m-2, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \|b_{ik}^{(j)}(r)\|_{i,k=0}^{m-1} \text{ має вигляд}$$

$$b_{ik}^{(j)}(r) = \begin{cases} (j+1)\nu, & k = i-1, i \neq m-1 \\ \frac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda_r}, & k \neq m-2, i = m-1 \\ \frac{(j+1)\nu(\lambda_r + m\mu)}{\lambda_r}, & k = m-2, i = m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$C_{ij} = \|c_{ik}^{(j)}(r)\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad c_{ik}^{(j)}(r) = \begin{cases} \frac{h_1 \nu m\mu}{\lambda_r}, & i = m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$D = \|d_{ik}\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad d_{ik} = \begin{cases} 1, & k = 0, i = 0, \\ a_{i-1,k}^{(N)}(2), & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\Delta_{1j}^{(1)} = \left(\prod_{l=j}^{h_1-1} A_{1l}^{-1} B_{1l} \right) \left(\left(\prod_{l=h_1}^{h_2-2} A_{1l}^{-1} B_{1l} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=h_1}^{h_2-2} \left(\prod_{l=h_1}^{k-1} A_{1l}^{-1} B_{1l} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right) + E \times \\ \times \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{l=h_1}^{k-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{l=h_1}^{N-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(1)} = \left[\left(\prod_{l=j}^{h_2-2} A_{1l}^{-1} B_{1l} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=j}^{h_2-2} \left(\prod_{l=j}^{k-1} A_{1l}^{-1} B_{1l} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right] \times \\ \times \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{l=h_1}^{k-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{l=h_1}^{N-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = h_1, \dots, h_2 - 1,$$

$$\Delta_{1j}^{(2)} = \left[E - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1} \left(\prod_{l=j}^{k-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right] \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{l=h_1}^{k-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{l=j}^{N-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = h_1, \dots, h_2 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(2)} = \left(\prod_{l=j}^{N-1} A_{2l}^{-1} B_{2l} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = h_2, \dots, N-1,$$

$$\Delta_j^{(1)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(1)}, 0 \leq j \leq h_1 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(1)}, h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \end{cases} \quad \Delta_j^{(2)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(2)}, h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(2)}, h_2 \leq j \leq N - 1, \end{cases}$$

$$\gamma_1(j) = \begin{cases} 1, j > h_1 - 2, \\ 0, j \leq h_1 - 2, \end{cases} \quad \gamma_2(j) = \begin{cases} 1, j < h_2, \\ 0, j \geq h_2. \end{cases}$$

Перевіримо умови існування обернених матриць, які використовуються при визначенні векторів $\Delta_j^{(1)}, \Delta_j^{(2)}$.

Лема 2. Матриці $A_{\eta}, r = 1, 2, j = 0, 1, \dots, N$ та D не вироджені.

Теорема. В умовах леми 1 справедливі наступні формули для стаціонарних ймовірностей

$$\pi_j^{(1)}(N) = \Delta_j^{(1)} \pi_{0N}^{(2)}(N), \quad j = 0, \dots, h_2 - 1, \quad \text{де}$$

$$\pi_{0N}^{(2)}(N) = \left\{ \sum_{j=0}^{h_2-1} \frac{\lambda_1 \Delta_j^{(1)} + \nu((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)} + \gamma_1(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)})}{\lambda_1} e(m)^T + \sum_{j=h_1}^{N-1} \frac{\lambda_2 \Delta_j^{(2)} + \nu((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)} - \gamma_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)})}{\lambda_1} e(m)^T + \right. \\ \left. + \frac{m\mu e(m)^T + (\lambda_2 + N\nu + (m-1)\mu)e_{m-1}(m)^T - \lambda_2 e_{m-2}(m)^T}{\lambda_1} D^{-1} e_0(m)^T \right\}^{-1}.$$

Доведення.

Для зручності позначимо $\pi_j^{(r)}(N) = \bar{\pi}_j^{(r)}$.

Запишемо рівняння для стаціонарних ймовірностей системи, використовуючи теорему про рівність потоків ймовірностей через замкнений контур ([3] стор.49).

Для кожного $j = 0, 1, \dots, h_2 - 1$ розіб'ємо $S(N)$ на дві підмножини $S_j^{(1)}(N) = \{(\alpha, \beta, 1) \in S(N) : \beta \leq j\}$ та $\bar{S}_j^{(1)}(N) = S(N) \setminus S_j^{(1)}(N)$. Маємо рівняння:

$$\lambda_1 \bar{\pi}_{mj}^{(1)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(1)}, \quad j = 0, \dots, h_1 - 2, \quad (1)$$

$$\lambda_1 \bar{\pi}_{mj}^{(2)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(1)} + h_1 \nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ih_1}^{(2)}, \quad (2)$$

$$j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 1.$$

Для $j = h_1, \dots, N - 1$ розіб'ємо $S(N)$ на дві підмножини $S_j^{(2)}(N) = \{(\alpha, \beta, 2) \in S(N) : \beta \leq j\}$ та $\bar{S}_j^{(2)}(N) = S(N) \setminus S_j^{(2)}(N)$. Маємо рівняння:

$$\lambda_2 \bar{\pi}_{mj}^{(2)} + h_1 \nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ih_1}^{(2)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(2)}, \quad (3)$$

$$j = h_1, \dots, h_2 - 1,$$

$$\lambda_2 \bar{\pi}_{mj}^{(2)} + h_1 \nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ih_1}^{(2)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(2)} + \lambda_1 \bar{\pi}_{mh_2}^{(1)}, \quad (4)$$

$$\pi_j^{(2)}(N) = \Delta_j^{(2)} \pi_{0N}^{(2)}(N), \quad j = h_1, \dots, N - 1,$$

$$\pi_N^{(2)}(N) = D^{-1} e_0(m) \pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$\pi_{mj}^{(1)}(N) = \frac{\nu}{\lambda_1} ((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)} + \gamma_1(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}) e(m)^T \pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$j = 0, \dots, h_2 - 1,$$

$$\pi_{mj}^{(2)}(N) = \frac{\nu}{\lambda_2} ((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)} - \gamma_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}) e(m)^T \pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$j = h_1, \dots, N - 1,$$

$$\pi_{mN}^{(2)}(N) = \frac{(\lambda_2 + N\nu + (m-1)\mu)e_{m-1}(m) - \lambda_2 e_{m-2}(m)}{m\mu} \times D^{-1} e_0(m) \pi_{0N}^{(2)}(N),$$

де

$$j = h_2, \dots, N - 1,$$

Тепер для $i = 0, 1, \dots, m - 1, j = 0, 1, \dots, h_2 - 1$ побудуємо розбиття фазового простору $S_j^{(1)}(N) = \{(i, j, 1) \in S(N)\}$ та $\bar{S}_j^{(1)}(N) = S(N) \setminus S_j^{(1)}(N)$. Знову використовуючи рівність потоків ймовірностей через замкнений контур, маємо

$$(\lambda_1 + i\mu + j\nu) \bar{\pi}_{ij}^{(1)} = \lambda_1 \bar{\pi}_{i-1j}^{(1)} + (i+1)\mu \bar{\pi}_{i+1j}^{(1)} + (j+1)\nu \bar{\pi}_{i-1j+1}^{(1)}, \quad j = 0, \dots, h_2 - 1, j \neq h_1 - 1, \quad (5)$$

$$(\lambda_1 + i\mu + (h_1 - 1)\nu) \bar{\pi}_{ih_1-1}^{(1)} = \lambda_1 \bar{\pi}_{i-1h_1-1}^{(1)} + (i+1)\mu \bar{\pi}_{i+1h_1-1}^{(1)} + h_1 \nu (\bar{\pi}_{i-1h_1}^{(1)} + \bar{\pi}_{i-1h_1}^{(2)}), \quad (6)$$

Для $i = 0, 1, \dots, m - 1, j = h_1, \dots, N$ побудуємо дві підмножини $S_j^{(2)}(N) = \{(i, j, 2) \in S(N)\}$ та $\bar{S}_j^{(2)}(N) = S(N) \setminus S_j^{(2)}(N)$. Отримаємо

$$(\lambda_2 + i\mu + j\nu) \bar{\pi}_{ij}^{(2)} = \lambda_2 \bar{\pi}_{i-1j}^{(2)} + (i+1)\mu \bar{\pi}_{i+1j}^{(2)} + (j+1)\nu \bar{\pi}_{i-1j+1}^{(2)}, \quad i = 0, \dots, m - 1, j = h_1, \dots, N. \quad (7)$$

Запишемо умову нормування

$$\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^m (\bar{\pi}_{ij}^{(1)} + \bar{\pi}_{ij}^{(2)}) = 1.$$

Отримаємо $\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}$ з рівняння (2) при $j = h_2 - 1$.

$$\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)} = \frac{h_1 \nu}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ih_1}^{(2)} = \frac{h_1 \nu}{\lambda_1} e(m)^T \bar{\pi}_{h_1}^{(2)}.$$

Підставивши отриманий вираз в рівняння (4), маємо

$$\bar{\pi}_{mj}^{(2)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_2} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(2)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_2} e(m)^T \bar{\pi}_{j+1}^{(2)},$$

$$j = h_2, \dots, N-1.$$

Підставимо останній вираз для $\bar{\pi}_{mj}^{(2)}$ в систему рівнянь (7) і запишемо її в векторно-матричному вигляді

$$A_{2j} \bar{\pi}_j^{(2)} = B_{2j} \bar{\pi}_{j+1}^{(2)}, \quad j = h_2, \dots, N-1,$$

звідки

$$\bar{\pi}_j^{(2)} = \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) \bar{\pi}_N^{(2)}, \quad j = h_2, \dots, N-1.$$

Перепишемо (3) в наступній формі

$$\bar{\pi}_{mj}^{(2)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_2} e(m)^T \bar{\pi}_{j+1}^{(2)} - \frac{h_1 \nu}{\lambda_2} e(m)^T \bar{\pi}_{h_1}^{(2)},$$

$$j = h_1, \dots, h_2 - 1.$$

Тоді система (7) буде мати вигляд

$$A_{2j} \bar{\pi}_j^{(2)} = B_{2j} \bar{\pi}_{j+1}^{(2)} - C_{2j} \bar{\pi}_{h_1}^{(2)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 1,$$

звідки

$$\bar{\pi}_j^{(2)} = \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) \bar{\pi}_N^{(2)} - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right] \bar{\pi}_{h_1}^{(2)},$$

$$j = h_1, \dots, h_2 - 1.$$

З останнього рівняння при $j = h_1$ знаходимо

$$\bar{\pi}_{h_1}^{(2)} = \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) \bar{\pi}_N^{(2)}.$$

Запишемо рівняння (7) при $j = N$ у вигляді

$$D \bar{\pi}_N^{(2)} = e_0(m) \bar{\pi}_{0N}^{(2)},$$

звідки

$$\bar{\pi}_N^{(2)} = D^{-1} e_0(m) \bar{\pi}_{0N}^{(2)}.$$

Таким чином, врахувавши позначення перед теоремою остаточно для $\bar{\pi}_j^{(2)}$

$$\bar{\pi}_j^{(2)} = \Delta_j^{(2)} \bar{\pi}_{0N}^{(2)}, \quad j = h_1, \dots, N-1.$$

Отримаємо з (2)

$$\bar{\pi}_{mj}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_1} e(m)^T \bar{\pi}_{j+1}^{(1)} + \frac{h_1 \nu}{\lambda_1} e(m)^T \bar{\pi}_{h_1}^{(1)},$$

$$j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 1$$

і знайдемо з (5) при $j = h_1, \dots, h_2 - 1$

$$\bar{\pi}_j^{(1)} = \left[\left(\prod_{i=j}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=j}^{h_2-2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right] \bar{\pi}_{h_1}^{(2)}.$$

Врахувавши вираз для $\bar{\pi}_{h_1}^{(2)}$ та $\bar{\pi}_N^{(2)}$ отримаємо значення $\bar{\pi}_j^{(1)}$, $j = h_1, \dots, h_2 - 1$.

Значення вектора $\bar{\pi}_{h_1-1}^{(1)}$ знайдемо з рівняння (6). З рівняння (1) виразимо ймовірність $\bar{\pi}_{mj}^{(1)}$

$$\bar{\pi}_{mj}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\pi}_{ij+1}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2.$$

Підставивши отриманий вираз в рівняння (5) отримаємо співвідношення для вектора $\bar{\pi}_j^{(1)}$ при $j = 0, 1, \dots, h_1 - 2$

$$\bar{\pi}_j^{(1)} = \left(\prod_{i=j}^{h_1-2} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) \bar{\pi}_{h_1-1}^{(1)}.$$

Підставимо вираз для $\bar{\pi}_{h_1-1}^{(1)}$ і остаточно отримаємо $\bar{\pi}_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \dots, h_2 - 1$.

Запишемо рівняння (7) при $i = m-1$, $j = N$

$$(\lambda_2 + (m-1)\mu + N\nu) \bar{\pi}_{m-1N}^{(2)} = \lambda_2 \bar{\pi}_{m-2N}^{(2)} + m\mu \bar{\pi}_{mN}^{(2)},$$

звідки знайдемо $\bar{\pi}_{mN}^{(2)}$.

Умова нормування для стаціонарних ймовірностей $\bar{\pi}_j^{(r)}$ дозволяє знайти $\bar{\pi}_{0N}^{(2)}$, що і дає нам остаточно результат.

Теорему доведено.

Розглянемо застосування доведеної теореми для розв'язку наступної оптимізаційної задачі.

Нехай

$S_1(t, h_1, h_2)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t ;

$S_2(t, h_1, h_2)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_3(t, h_1, h_2)$ - число перемикачів інтенсивності вхідного потоку.

Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, h_1, h_2)$, то будемо позначати їх через $S_i(h_1, h_2)$, $i = 1, 2, 3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$W(h_1, h_2) = C_1 S_1(h_1, h_2) - C_2 S_2(h_1, h_2) - C_3 S_3(h_1, h_2) \rightarrow \max, \quad (8)$$

де C_1 - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику;

C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні;

C_3 - штраф за перемикач інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (19) є такі пороги h_1 і h_2 , які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [6], [7].

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми) граничні функціонали $S_i(h_1, h_2)$, $i = 1, 2, 3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності π_{ijr} , $(i, j, r) \in S$,

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{h_1-1} \sum_{i=1}^m i \mu \pi_{ij}^{(1)} + \sum_{j=h_1}^{\infty} \sum_{i=1}^m i \mu \pi_{ij}^{(2)},$$

$$S_2(H) = \sum_{j=0}^{h_1-1} \lambda_1 \pi_{mj}^{(1)} + \sum_{j=h_1}^{\infty} \lambda_2 \pi_{mj}^{(2)},$$

$$S_3(H) = \lambda_1 \pi_{mh_2-1}^{(1)} + h_1 \nu \sum_{r=0}^{m-1} \pi_{ih_1}^{(2)}.$$

Разом з результатом теореми вони дають алгоритм розв'язку задачі (8).

Отже, в даній роботі вводиться клас процесів міграції, за допомогою якого описується процес обслуговування у системах з повторними викликами. Спосіб надходження і обслуговування вимог обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Керування полягає у зміні інтенсивності вхідного потоку на основі гістерезисної стратегії. Отримані результати дають зручні формули в векторно-матричному вигляді, які можуть бути ефективно використані для розв'язку оптимізаційних задач.

Список використаних джерел

1. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. - London Chapman & Hall, 1997. - 331 p.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. - М.: РУДН, 1995. - 529 с.
3. Уоллэнд Дж. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Мир, 1993. - 336 с.
4. Anisimov V.V., Artalejo J.R. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // Queuing Systems. - 2001. - Vol.39. - P. 157-182.
5. Є.О. Лебедев, І.Я. Усар Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком // Доповіді національної академії наук України. - 2009. - №5. - С. 52-59.
6. В.И. Клименок Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами // Автоматика и вычислительная техника. - 1990. - № 1. - С. 25-30.
7. А.Н. Дудин, В.И. Клименок Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Автоматика и вычислительная техника. - 1991. - № 2. - С. 25-31.

Надійшла до редколегії 26.11.10

УДК 004.82:004.891

Потієнко М.В., асп.

Структурна модель процесів короткотривалої пам'яті людини.

Представлено модифікацію відомої концептуальної моделі роботи короткотривалої пам'яті людини для використання в якості баз знань експертних систем або універсального елементу пам'яті. Така модель представляє собою ієрархічну систему нейронних мереж – кортикальних колонок. Запропоновано характеризувати кожен колону за допомогою трьох змінних. На основі цих змінних побудовано внутрішні та зовнішні зв'язки колонки.

Ключові слова: нейронні мережі, пам'ять, кортикальна колонка.

*E-mail: dmelk@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Розвиток технологій надає можливість моделювати все складніші процеси, що відбуваються у світі. До таких процесів відносяться і ті, які проходять у тілі людини. Так на одне з перших місць виходить задача моделювання роботи людського мозку, а особливо – пам'яті: процесів навчання, запам'ятовування, розпізнавання, тощо. Побудова математичної та комп'ютерної моделі пам'яті дає змогу зрозуміти як проходять такі процеси, як людина мислить, наблизитись до розуміння людського інтелекту.

Дослідження в області людської пам'яті проходять в різних напрямках науки. Тому для розв'язку таких задач доцільно використовувати міждисциплінарний підхід. Він полягає у синтезі результатів досліджень пам'яті та процесів, що в ній відбуваються, різних наук, не тільки природничих, а і гуманітарних.

Для розуміння глобальної структури пам'яті треба скористатися результатами психологічних та фізіологічних досліджень. Так результати досліджень психологів показують, що пам'ять ділиться на три компоненти: короткотривалу та довготривалу, що складається з епізодичної та семантичної [1,2].

Як відомо з фізіології, за процеси пам'яті у мозку відповідають наступні елементи: кора головного мозку, гіпокамп, таламус [1]. Кожен з

M.V. Potienko, postgraduate student

Structural model of processes in human short-term memory.

A modification of well-known conceptual model of processes in human short-term memory is discussed. This model is a hierarchical system of cortical columns (special neural networks). It's proposed to describe each column by three variables and construct internal and external column communications on the base of these variables. As a result, discussed model can be used in expert systems knowledge base or as a universal memory element

Key Words: neural networks, memory, cortical column.

цих елементів можна прив'язати до компонентів пам'яті з точки зору психологів. Так більшою мірою кора головного мозку представляє собою короткотривалу пам'ять, хоча її зв'язки несуть у собі також і частину семантичної пам'яті. Гіпокамп є епізодичною пам'яттю, у той час як таламус – семантичною.

Усі ці три елементи поєднані між собою. Кора оброблює інформацію та передає її до таламусу і гіпокампу, а також отримує дані від цих елементів. Крім цього гіпокамп і таламус поєднані між собою: інформація передається з епізодичної пам'яті в семантичну, та навпаки.

Головним елементом, що приймає роль у процесах пам'яті, є кора головного мозку. Вона використовується у всіх процесах: навчанні, запам'ятовуванні, розпізнаванні інформації.

Кора головного мозку представляє собою ієрархічну систему нейронних мереж – кортикальних колонок, які також є ієрархічними нейронними мережами [1,3]. Завдяки такій структурі людина може будувати представлення про складні об'єкти. Кожен об'єкт у пам'яті зберігається у вигляді послідовності характеристик. Але характеристики також можуть бути об'єктами. Таким чином представлення про об'єкт в пам'яті – це послідовність послідовностей [4,5]. Ієрархічна структура дозволяє зберігати такі структури.

Для дослідження такої системи буде доцільним вертикально впорядкувати та пронумерувати рівні ієрархії кожної колонки. Для цього нумерацію рівнів в окремій колонці слід робити зверху вниз. Так, найвищий перший рівень ієрархії буде найближчим до тих колонок, що знаходяться на вищому рівні ієрархії, у той час як найнижчий шостий – до тих, що знаходяться на нижчому рівні [4].

Відповідно до такого впорядкування та нумерації синапси в колонці можна розділити на три класи в залежності від напрямку передачі сигналу: прямі – від нижчих рівнів ієрархії до вищих, – обернені, – навпаки, – та однорівневі, що зв'язують нейрони одного рівня [3-7].

Представлена вище модель є концептуальною та потребує модифікацій для застосування в якості бази знань експертної системи або універсального елементу пам'яті. Для цього структуру кортикальної колонки поставимо у залежність від трьох змінних (N , K , M). Отже, загальну структурну модель ієрархічної системи з l кортикальних колонок можна буде побудувати, задавши значення для $3l+1$ змінної: $N_i, K_i, M_i (i = \overline{1, l})$ і L (кількість ієрархічних рівнів в системі).

Для побудови залежностей у структурі кожної колонки від цих змінних, спочатку треба їх визначити:

N – кількість характеристик, які колонка може отримувати на вхід,

K – кількість об'єктів, які колонка може запам'ятати,

M характеризує зв'язки даної колонки з колонками нижчого рівня ієрархії, а також з нейронами з довготривалої пам'яті. У загальному випадку це буде кількість колонок нижчого рівня ієрархії, з якими зв'язана дана колонка. Але для колонок найнижчого рівня ієрархії: $M = 1$.

На основі таких визначень змінних та властивостей кожного рівня ієрархії в колонці [6] визначимо кількість нейронів на кожному рівні. Перший рівень ієрархії буде складатися з K нейронів, другий – KN нейронів, третій – $2KN$ нейронів або KN пар нейронів (корзинчатий та звичайний нейрони), четвертий – N нейронів, п'ятий та шостий рівні ієрархії складатимуться з MKN нейронів.

Тепер розглянемо залежність синапсів в колонці від цих змінних. Спочатку візьмемо прямі та міжрівневі синапси. Як відомо синапси колонки, по яким приходить сигнал від колонок нижчого рівня ієрархії або довготривалої пам'яті ведуть до нейронів четвертого рівня [3].

При цьому для кожного нейрону четвертого рівня існують прямі синапси, що ведуть до груп із K і $2K$ нейронів другого та третього рівнів відповідно. При цьому кожен нейрон другого рівня та кожен звичайний нейрон з пари нейронів третього рівня з цієї групи має прямий синапс, який веде до окремого нейрона першого рівня. Тобто кожен нейрон (звичайний нейрон з пари) $i (i = \overline{1, K})$ з групи $j (j = \overline{1, N})$ другого (третього) ієрархічного рівня колонки має синапс, що веде до нейрона i першого рівня, та має вхідний синапс від нейрона j четвертого рівня.

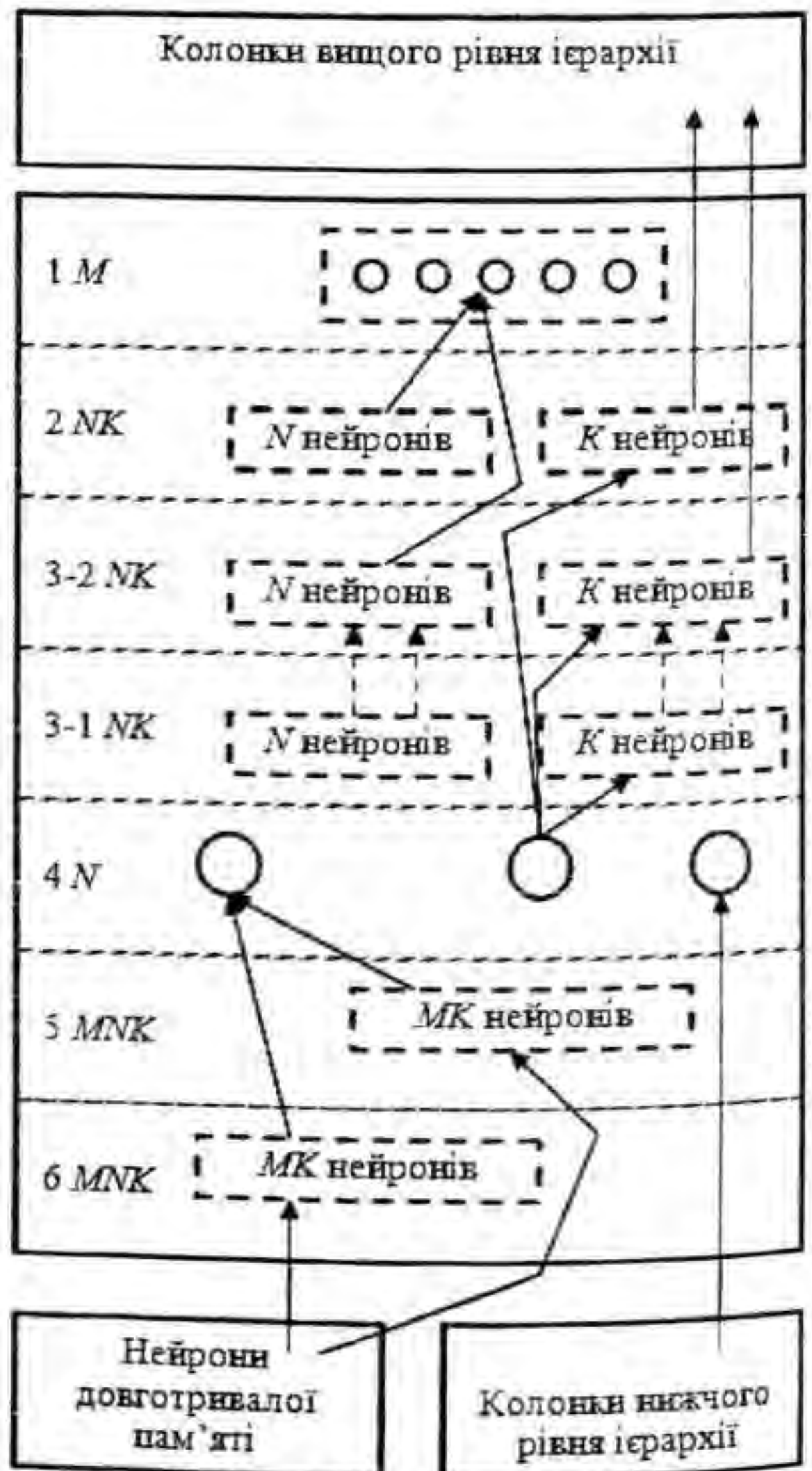


Рис. 1 Прямі та міжієрархічні синапси кортикальної колонки.

Також всі нейрони другого рівня ієрархії з описаних вище груп мають однорівневі синапси, що пов'язують їх між собою. На

третьому рівня ієрархії однорівневі синапси мають лише звичайні нейрони з пари, які ведуть до обох нейронів інших пар з цієї групи.

Кожна колонка пов'язана з M пар нейронів семантичної пам'яті та K пар нейронів епізодичної пам'яті. Синапси від кожного звичайного нейрона пари семантичної пам'яті ведуть до групи з NK нейронів п'ятого та шостого рівнів ієрархії. А синапси від кожного звичайного нейрона епізодичної пам'яті ведуть до групи з MN нейронів на цих рівнях. Нейрони кожної з представлених вище груп пов'язані між собою міжрівневими синапсами.

Розглянемо прямі синапси від нейронів п'ятого та шостого рівнів ієрархії до інших нейронів колонки. Кожна група з MK нейронів має прямі синапси що ведуть до нейрона четвертого рівня. Тобто кожен нейрон i ($i = \overline{1, N}$) четвертого рівня ієрархії має входні синапси від груп з MK нейронів п'ятого та шостого рівнів (Рис. 1).

Розглянемо обернені та нерозглянуті міжрівневі синапси. Синапси, по яким приходить інформація від колонок вищого рівня ієрархії ведуть до нейронів першого рівня [3].

Кожен нейрон першого рівня має обернені синапси що ведуть до груп з N і $2N$ нейронів другого та третього рівнів ієрархії відповідно. Нейрони та звичайні нейрони з пари кожної групи пов'язані між собою. Також обернені синапси від нейронів першого рівня ієрархії ведуть до груп з MN нейронів п'ятого та шостого рівнів.

Розглянемо обернені синапси нейронів другого рівня ієрархії та звичайних нейронів пари третього рівня ієрархії. Обернені синапси від кожного нейрона другого рівня ієрархії ведуть до групи з M нейронів п'ятого. Аналогічно обернені синапси від звичайних нейронів пари з третього рівня ведуть до групи з M нейронів шостого. Таким чином кожен нейрон (звичайний нейрон пари) i ($i = \overline{1, NK}$) другого (третього) рівня ієрархії зв'язаний оберненими синапсами з групою з M нейронів п'ятого (шостого) рівня ієрархії колонки (Рис 2).

Для визначення синапсів, які ведуть від даної колонки до колонок нижчого рівня ієрархії або семантичної пам'яті, нейрони п'ятого та шостого рівнів слід розбити на групи з NK нейронів. Кожна з цих M груп зв'язана з однією колонкою нижчого рівня ієрархії, а нейрони шостого рівня ще й з нейроном семантичної

пам'яті. Крім того нейрони цих груп також зв'язані між собою.

Також треба виділити групи з MN нейронів шостого рівня, які пов'язані між собою, а також з нейронами епізодичної пам'яті.

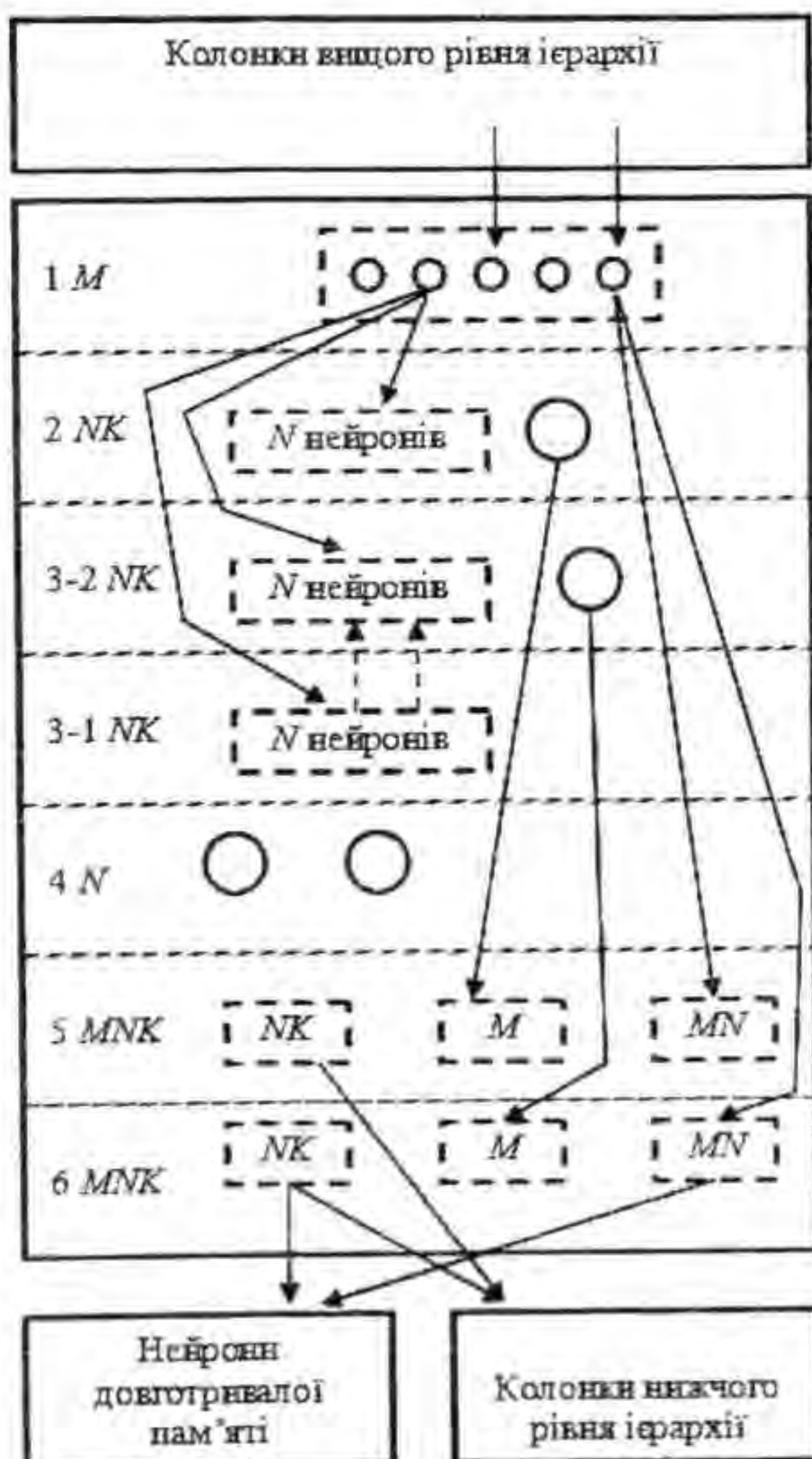


Рис. 2 Обернені та міжієрархічні синапси кортикальної колонки.

Структура синапсів оберненої передачі є більш складною. Аналогічно до того, як розглядалась структура прямих синапсів, треба спочатку розглянути синапси, по яким у колонку приходить сигнал від колонок вищого рівня ієрархії. Такі синапси ведуть до нейронів першого рівня. Ці нейрони пов'язані з нейронами усіх рівнів ієрархії, крім четвертого.

Нейрони другого та третього рівнів ієрархії зв'язані з нейронами шостого рівня. Для нейронів третього рівня діє такий самий принцип

при оберненій передачі даних, як і при прямій. Тобто або буде активовано корзинчатий нейрон, і не буде активовано його парний нейрон, або навпаки. Треба відмітити, що коли активується нейрон другого рівня, відповідно до цього активується і корзинчатий нейрон третього рівня.

Таким чином за допомогою трьох змінних N , K , M можна задати будь-яку колонку нейронів короткотривалої пам'яті, яка несе в собі функції розпізнавальної системи та частково довготривалої пам'яті, та зв'язки між колонкою і семантичною та епізодичною пам'яттю (Рис 3).

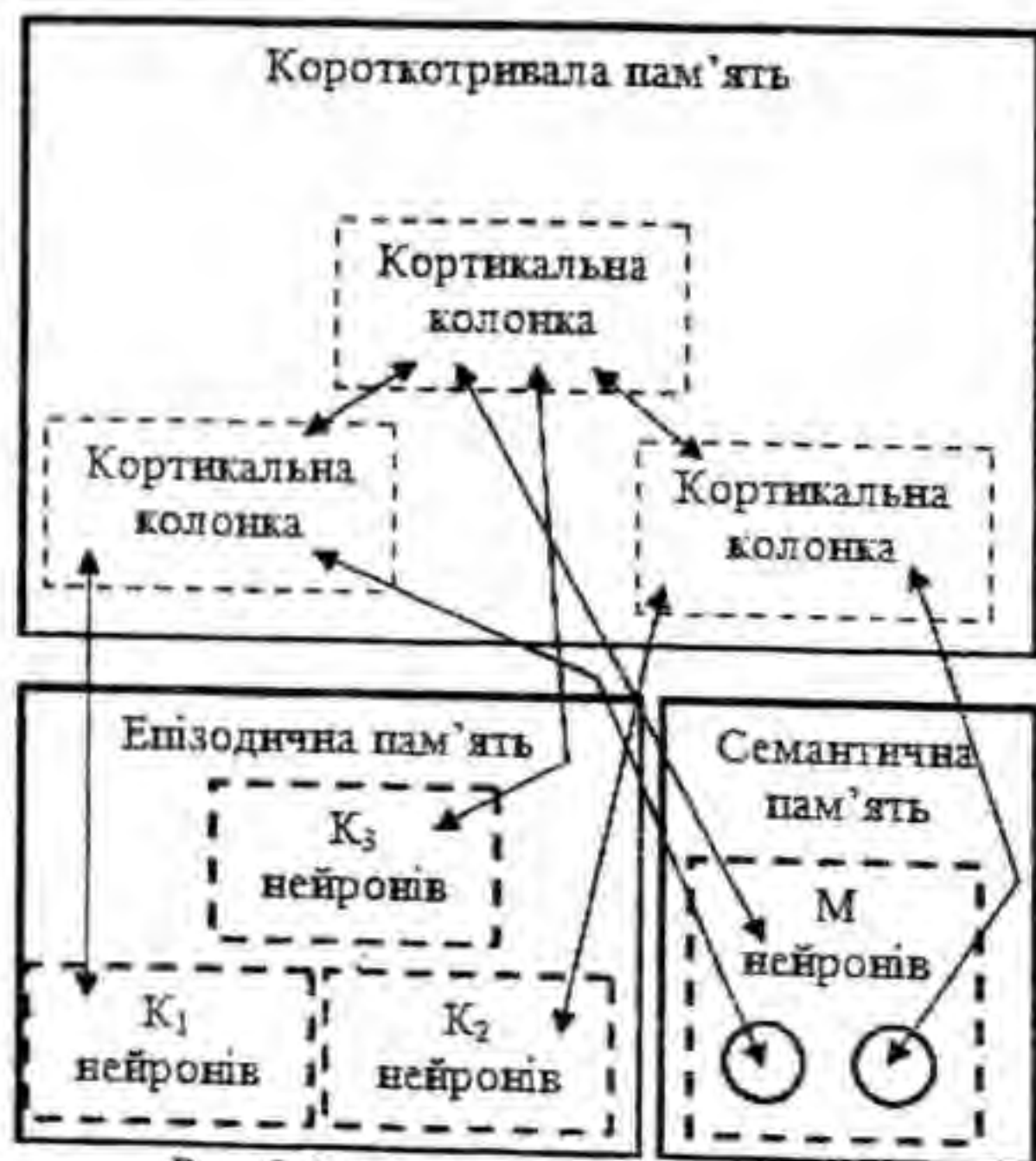


Рис. 3 Синапси, що ведуть від колонок короткотривалої пам'яті до довготривалої пам'яті.

Отже, у роботі побудовано модифікацію концептуальної моделі роботи людської пам'яті, яка дозволяє описати короткотривалу пам'ять за допомогою змінних $N_i, K_i, M_i (i = \overline{1, l})$ і L (кількість ієрархічних рівнів в системі), що задають l кортикальних колонок нейронів короткотривалої пам'яті. В аналогічний спосіб, використовуючи такий самий набір вільних змінних, можна задати зв'язки між нейронами епізодичної та семантичної пам'яті.

Додавши до представленої модифікації концептуальної моделі математичну модель роботи звичайного нейрона, корзинчатого нейрону і синапсу [8], отримаємо математичну модель функціонування короткотривалої пам'яті людини. У якості математичної моделі роботи

звичайного нейрона використовується модифікація відомої моделі [9], з урахуванням іонного струму, що проходить через нейрон [10].

Для отриманої математичної моделі ієрархії кортикальних колонок вже можна поставити та розв'язати задачі навчання та розпізнавання об'єктів. А тому вона може використовуватися в якості структурного елементу бази знань в експертній системі, або, як елемент пам'яті в інших складних системах.

У подальших дослідженнях планується розглянути побудову комп'ютерної моделі короткотривалої пам'яті людини, що використовує розроблену модель кортикальної колонки. Крім того цікавим є питання структурної оптимізації такої моделі в залежності від класу розв'язуваних задач.

Список використаних джерел

1. Покровский В.М., Коротько Г.Ф. Физиология человека. – М.: Медицина, 2007. – 816 с.
2. Corkin S. Lasting consequences of bilateral medial temporal lobectomy: Clinical course and experimental findings in h. m. // Seminars in Neurology. – 1984. – 4. – P.249-259
3. Хоккинс Дж., Блейкли С. Об интеллекте. – М.: Вильямс, 2004. – 240 с.
4. Эдельман Дж, Маунткастл В. Разумный мозг. – М.: Мир, 1981. – 135 с.
5. Роуз С. Устройство памяти. От молекул к созанию. – М.: Мир, 1995. – 384 с.
6. Потієнко М.В. Міждисциплінарний підхід до моделювання пам'яті як базової функції людського мозку // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – 2 – с. 156-159.
7. Хьюббел Д. Глаз, мозг, зрение. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
8. Sejnowski T.J. Strong covariance with nonlinearly interacting neurons: Journal of Mathematical Biology. – 1977. – 4. – P.303-321
9. Познин Н.В. Моделирование нейронных структур. – М.: Наука, 1970. – 264 с.
10. Ходжскин А. Нервный импульс. – М.: Мир, 1965. – 125 с.

Надійшла до редколегії 20.09.10

УДК 517.5

Савкіна М.Ю., к. ф.-м. н.

Довірча смуга для лінії сплайнової регресії

Побудовано двосторонній $100(1 - \alpha)$ -процентний довірчий інтервал для значення регресії та відклику у випадку, коли функція регресії - лінійний сплайн на відрізку $[0, 1]$ з одним вузлом. Розташування вузла відоме.

Ключові слова: модель сплайнової регресії, нормалізований B-сплайн, довірчий інтервал, рівень значущості

E-mail: marta@imath.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Розглянемо модель лінійної регресії

$$y_i = f(x_i) + \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

де $\xi_0, \dots, \xi_n$ - незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з $E\xi_i = 0$ та $D\xi_i = \sigma^2$, а функція регресії має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{якщо } 0 \leq x \leq x^*, \\ cx + d, & \text{якщо } x^* \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Функцію $f(x)$ також можна подати у вигляді лінійної комбінації нормалізованих B-сплайнів [1]

$$f(x) = b_0 B_0(x) + b_1 B_1(x) + b_2 B_2(x),$$

де

$$B_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{x^*}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq x^*, \\ 0, & \text{якщо } x^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$B_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^*}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq x^*, \\ -\frac{x}{1-x^*} + \frac{1}{1-x^*}, & \text{якщо } x^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x \leq x^*, \\ \frac{x}{1-x^*} - \frac{x^*}{1-x^*}, & \text{якщо } x^* \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В цих позначеннях x^* - точка переходу моделі: $x^* \in [x_0, x_n]$; b_0, b_1, b_2 - невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

M.Yu.Savkina, cand. ph.-math. science

Confidence bands for line of spline regression

Two-sided $100(1 - \alpha)$ -percent confidence interval for value of regression and response is constructed, where function of regression is linear spline on segment $[0, 1]$ with one knot point. The location of knot point is known.

Key Words: spline regression model, normalized B-spline, confidence interval, significance level

Для оцінювання параметрів b_0, b_1, b_2 скористаємося методом найменших квадратів, який полягає в мінімізації суми $\sum_{i=0}^n \xi_i^2$, відносно b_0, b_1, b_2 .

Нехай $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $x^* \in [x_k, x_{k+1}]$. Позначимо

$$Y = (y_0, \dots, y_n)^T;$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{1}{nx^*} & \frac{1}{nx^*} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - \frac{k}{nx^*} & \frac{k}{nx^*} & 0 \\ 0 & \frac{n-k-1}{n(1-x^*)} & \frac{k+1-nx^*}{n(1-x^*)} \\ 0 & \frac{n-k-2}{n(1-x^*)} & \frac{k+2-nx^*}{n(1-x^*)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка МНК $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ параметрів b_0, b_1, b_2 матиме вигляд

$$(\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2)^T = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Далі,

$$X^T X = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{pmatrix},$$

де

$$a_1 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6 * (nx^*)^2};$$

$$a_2 = \frac{k+1}{6(nx^*)^2};$$

$$* (6(nx^*)^2 - 6k * (nx^*) + k(2k+1)) + \\ + \frac{(n-k)}{6 * (n(1-x^*))^2} (n-k-1)(2n-2k-1);$$

$$a_3 = \frac{n-k}{6(n(1-x^*))^2} ((n-k-1)(2n-2k-1) - \\ - 6(n-k-1)n(1-x^*) + 6(n(1-x^*))^2);$$

$$a_4 = \frac{k(k+1)(3nx^* - 2k - 1)}{6 * (nx^*)^2};$$

$$a_5 = \frac{1}{6(n(1-x^*))^2} (n(n^2-1) + \\ + k(k+1)(2k+1-3n) - 3nx^*(n-k-1)(n-k));$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{(-1)} & a_4^{(-1)} & a_6^{(-1)} \\ a_4^{(-1)} & a_2^{(-1)} & a_5^{(-1)} \\ a_6^{(-1)} & a_5^{(-1)} & a_3^{(-1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де

$$a_1^{(-1)} = (a_2 a_3 - a_5^2) / d,$$

$$d = a_1 a_2 a_3 - a_1 a_5^2 - a_3 a_4^2,$$

$$a_2^{(-1)} = a_1 a_3 / d,$$

$$a_3^{(-1)} = (a_2 a_1 - a_4^2) / d,$$

$$a_4^{(-1)} = -a_4 a_3 / d,$$

$$a_5^{(-1)} = -a_1 a_5 / d,$$

$$a_6^{(-1)} = a_4 a_5 / d.$$

Зауважимо, що

$$a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (2)$$

Задача побудови довірчої смуги у випадку, коли функція регресії має вигляд

$$g(x) = ax + b, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

вперше було розв'язано в роботі [2]; побудована там смуга називається смугою Уоркінга-Хотелінга. Іншу довірчу смугу, яка має пря-

молінійні межі, запропоновано в роботі [3].

Перейдемо тепер до побудови двосторонніх $100(1-\alpha)$ -процентних довірчих границь для функції $f(x)$ при фіксованому значенні $\hat{x}$.

Теорема 1. Нехай

$$\hat{f}(\hat{x}) = \hat{b}_0 B_0(\hat{x}) + \hat{b}_1 B_1(\hat{x}) + \hat{b}_2 B_2(\hat{x}),$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=0}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2},$$

$$w_1(\hat{x}) = a_1^{(-1)} + 2 \frac{\hat{x}}{x^*} (a_4^{(-1)} - a_1^{(-1)}) + \\ + \left(\frac{\hat{x}}{x^*} \right)^2 (a_1^{(-1)} + a_2^{(-1)} - 2a_4^{(-1)}),$$

$$w_2(\hat{x}) = a_3^{(-1)} + 2 \frac{1-\hat{x}}{1-x^*} (a_5^{(-1)} - a_3^{(-1)}) + \\ + \left(\frac{1-\hat{x}}{1-x^*} \right)^2 (a_2^{(-1)} + a_3^{(-1)} - 2a_5^{(-1)}).$$

Тоді

$$P(f(\hat{x}) \in (\hat{f}(\hat{x}) - \gamma(\hat{x}), \hat{f}(\hat{x}) + \gamma(\hat{x}))) = 1 - \alpha, \quad (3)$$

де

$$\gamma(\hat{x}) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{w(\hat{x})},$$

$t_{n-2}^{(1/2)\alpha}$ – критичне значення коефіцієнта Стюдента з рівнем значущості α та числом ступенів свободи $n-2$,

$$w(\hat{x}) = \begin{cases} w_1(\hat{x}), & \text{якщо } 0 \leq \hat{x} \leq x^*, \\ w_2(\hat{x}), & \text{якщо } x^* \leq \hat{x} \leq 1, \end{cases}$$

Доведення. Згідно з [4] маємо для $f(\hat{x})$ довірчий інтервал

$$(\hat{f}(\hat{x}) - t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{\bar{v}}, \hat{f}(\hat{x}) + t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{\bar{v}})$$

з рівнем значущості α , де

$$\bar{v} = \hat{X}^T (X^T X)^{-1} \hat{X},$$

$$\hat{X}^T = (1 - \frac{\hat{x}}{x^*}, \frac{\hat{x}}{x^*}, 0), \quad \text{якщо } 0 \leq \hat{x} \leq x^*,$$

$$\hat{X}^T = (0, \frac{1-\hat{x}}{1-x^*}, \frac{\hat{x}-x^*}{1-x^*}), \quad \text{якщо } x^* \leq \hat{x} \leq 1.$$

Враховуючи (1), отримаємо $\bar{v} = w(\hat{x})$, звідки випливає (3).

Теорему 1 доведено.

Перейдемо тепер до побудови довірчих
границь для відклику

$$Y(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \xi(\tilde{x}).$$

Теорема 2. Нехай $\xi(\tilde{x})$ – нормально роз-
поділена випадкова величина з $E\xi(\tilde{x}) = 0$
та $D\xi(\tilde{x}) = \sigma^2$, яка не залежить від $\Xi^T =$
 $= (\xi_0, \dots, \xi_n)$.

Тоді

$$p(Y(\tilde{x}) \in (\hat{f}(\tilde{x}) - \gamma_1(\tilde{x}), \hat{f}(\tilde{x}) + \gamma_1(\tilde{x}))) = 1 - \alpha, \quad (4)$$

де

$$\gamma_1(\tilde{x}) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{w(\tilde{x}) + 1}.$$

Доведення. В умовах теореми згідно з [4]
маємо для $Y(\tilde{x})$ довірчий інтервал

$$(\hat{f}(\tilde{x}) - t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{\bar{v} + 1}, \hat{f}(\tilde{x}) + t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{\bar{v} + 1})$$

з рівнем значущості α . Оскільки $\bar{v} = w(\tilde{x})$,
маємо (4).

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Ширина довірчого інтервалу
для $f(x)$ дорівнює $2\gamma(x)$; функція $\gamma(x)$ має
дві точки мінімуму $x^{(1)} \in [0, x^*]$ та $x^{(2)} \in$
 $[x^*, 1]$; на проміжках $[0, x^{(1)}]$ та $[x^*, x^{(2)}]$ фун-
кція $2\gamma(x)$ спадає, на проміжках $[x^{(1)}, x^*]$ та
 $[x^{(2)}, 1]$ – зростає.

Доведення. Очевидно, точки екстремуму
та проміжки монотонності функції $\gamma(x)$ на
 $[0, x^*]$ та на $[x^*, 1]$ співпадають з точками ек-
стремуму та проміжками монотонності функцій
 $w_1(x)$ та $w_2(x)$ відповідно.

Таким чином, маємо

$$w'_1(x) = \frac{2}{x^*} (a_4^{(-1)} - a_1^{(-1)}) + \\ + \frac{2x}{(x^*)^2} (a_1^{(-1)} + a_2^{(-1)} - 2a_4^{(-1)}),$$

звідкіля знаходимо, що $w'_1(x) = 0$ в точці

$$x^{(1)} = \frac{x^* (a_1^{(-1)} - a_4^{(-1)})}{(a_1^{(-1)} - a_4^{(-1)}) + (a_2^{(-1)} - a_4^{(-1)})}, \quad (5)$$

Доведемо, що

$$0 \leq x^{(1)} < x^*. \quad (6)$$

Маємо

$$a_1^{(-1)} - a_4^{(-1)} = \frac{a_3(a_2 + a_4) - a_5^2}{d}, \quad (7)$$

$$a_2^{(-1)} - a_4^{(-1)} = \frac{a_3(a_1 + a_4)}{d}. \quad (8)$$

Оскільки матриця $X^T X$ додатньо визначе-
на,

$$d > 0. \quad (9)$$

Далі, враховуючи (2), (9)

$$a_3(a_2 + a_4) - a_5^2 = \frac{d + a_3 a_4^2}{a_1} + a_3 a_4 > 0, \quad (10)$$

$$a_3(a_1 + a_4) > 0, \quad (11)$$

з (7), (8), (9), (10) та (11) випливає

$$a_1^{(-1)} - a_4^{(-1)} > 0, \quad (12)$$

$$a_2^{(-1)} - a_4^{(-1)} > 0; \quad (13)$$

з (5), (12) та (13) випливає (6).

Оскільки $a_1^{(-1)} + a_2^{(-1)} - 2a_4^{(-1)}$, на проміж-
ку $[0, x^{(1)}]$ функція $w_1(x)$ спадає, на проміжку
 $[x^{(1)}, x^*]$ – зростає.

Далі,

$$w'_2(x) = -\frac{2}{1 - x^*} (a_5^{(-1)} - a_3^{(-1)}) + \\ + \frac{2(1 - x)}{(1 - x^*)^2} (a_2^{(-1)} + a_3^{(-1)} - 2a_5^{(-1)}),$$

звідкіля знаходимо, що $w'_2(x) = 0$ в точці

$$x^{(2)} = \frac{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + x^* (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})}{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})}, \quad (14)$$

Доведемо, що

$$x^* \leq x^{(2)} < 1. \quad (15)$$

Маємо

$$a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)} = \frac{a_1(a_3 + a_5)}{d}, \quad (16)$$

$$a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)} = \frac{a_1(a_2 + a_5) - a_4^2}{d}. \quad (17)$$

Враховуючи (2), (9), отримаємо

$$a_1(a_3 + a_5) > 0, \quad (18)$$

$$a_1(a_2 + a_5) - a_4^2 = \frac{d + a_1 a_5^2}{a_3} + a_1 a_5 > 0. \quad (19)$$

З (16), (17), (9), (18) та (19) випливає

$$a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)} > 0, \quad (20)$$

$$a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)} > 0. \quad (21)$$

Далі, оскільки $x^* < 1$,

$$x^{(2)} < \frac{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + 1 * (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})}{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})} = 1. \quad (22)$$

З іншого боку,

$$x^{(2)} = \frac{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)})(1 - x^*)}{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})} + \frac{x^*((a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)}))}{(a_2^{(-1)} - a_5^{(-1)}) + (a_3^{(-1)} - a_5^{(-1)})} > x^*, \quad (23)$$

з (14), (22) та (23) випливає (15).

Оскільки $a_2^{(-1)} + a_3^{(-1)} - 2a_5^{(-1)}$, на проміжку $[x^*, x^{(2)}]$ функція $w_1(x)$ спадає, на проміжку $[x^{(2)}, 1]$ — зростає.

Теорему 3 доведено.

Н а с л і д о к. Маємо

$$\gamma(0) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{a_1^{(-1)}},$$

$$\gamma(x^{(1)}) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S *$$

$$\sqrt{a_1^{(-1)} - \frac{(a_1^{(-1)} - a_4^{(-1)})^2}{a_1^{(-1)} + a_2^{(-1)} - 2a_4^{(-1)}}},$$

$$\gamma(x^*) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{a_2^{(-1)}},$$

$$\gamma(x^{(2)}) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S *$$

$$* \sqrt{a_3^{(-1)} - \frac{(a_5^{(-1)} - a_3^{(-1)})^2}{a_2^{(-1)} + a_3^{(-1)} - 2a_5^{(-1)}}},$$

$$\gamma(1) = t_{n-2}^{(1/2)\alpha} S \sqrt{a_3^{(-1)}}.$$

Теорема 4. Ширина довірчого інтервалу для $Y(x)$ дорівнює $2\tilde{\gamma}(x)$; функція $\tilde{\gamma}(x)$ має

дві точки мінімуму $x^{(1)} \in [0, x^*]$ та $x^{(2)} \in [x^*, 1]$; на проміжках $[0, x^{(1)}]$ та $[x^*, x^{(2)}]$ функція $2\gamma(x)$ спадає, на проміжках $[x^{(1)}, x^*]$ та $[x^{(2)}, 1]$ — зростає.

Приклад. Нехай $n = 5$, $k = 1$, $x^* = 0.3$,

$$Y = (0.11, 0.19, 0.34, 0.42, 0.54, 0.63)^T.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 6/7 & 1/7 \\ 0 & 4/7 & 3/7 \\ 0 & 2/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1.111 & 0.222 & 0 \\ 0.222 & 1.587 & 0.571 \\ 0 & 0.571 & 1.714 \end{pmatrix},$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.148 & 0.049 \\ -0.148 & 0.739 & -0.246 \\ 0.049 & -0.246 & 0.665 \end{pmatrix},$$

$$(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)^T = (0.102, 0.268, 0.636)^T.$$

Отримаємо,

$$S = 0.0192;$$

$$x^{(1)} = 0.165, \quad x^{(2)} = 0.664,$$

$$\gamma(0) = t_3^{(1/2)\alpha} * 0.0185;$$

$$\gamma(x^{(1)}) = t_3^{(1/2)\alpha} * 0.0112;$$

$$\gamma(x^*) = t_3^{(1/2)\alpha} * 0.0165;$$

$$\gamma(x^{(2)}) = t_3^{(1/2)\alpha} * 0.0092;$$

$$\gamma(1) = t_3^{(1/2)\alpha} * 0.0156.$$

Список використаних джерел

1. Зав'ялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошник В.Л. Методы сплайн-функций. — Москва: Наука, 1980. — 352 С.
2. Working H., Hotelling H. Application of the theory of error to the interpretation of trends // JASA, Suppl.(Proc.) — 1929. — 24. — P.73-85.
3. Graybill F.A., Bowden D.C. Linear segment confidence bands for simple linear models. // JASA. — 1966. — v.6. — P.403-408.
4. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — Москва: Мир, 1980. — 456 С.

Надійшла до редколегії 28.11.10

УДК 512.552+519.713

Скобелев В. Г., д.т.н., професор

Аналіз автомата Реслера над скінченним кільцем

Досліджено автомат Реслера над скінченним асоціативно-комутативним кільцем з одиницею. Охарактеризовано класи еквівалентних станів досліджуваного автомата. Розв'язано задачу параметричної ідентифікації автомата Реслера. Отримано співвідношення, які характеризують варіацію поведінки автомата Реслера в умовах варіації його початкового стану.

Ключові слова: скінченні автомати, скінченні кільця, ідентифікація.

E-mail: skbv@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив чл.-кор. НАН України, Анісімов А.В.

Вступ

Однією з актуальних проблем сучасних інформаційних технологій є захист інформації. Для вирішення цієї проблеми призначено шифрування інформації. При побудові майже всіх кандидатів у сучасні потікові шифри використано фрагменти обчислень у кільцях лишків.

Ця обставина вказує на актуальність систематичного дослідження автоматів над скінченними кільцями.

Автономні автомати над скінченними кільцями систематично досліджено в [1], а лінійні та нелінійні неавтономні автомати загального типу в [2].

За останні роки з'явилося багато спроб використання хаотичних динамічних систем [2] для вирішення тих чи інших задач перетворення інформації.

Безпосереднє застосування таких систем виявило цілий комплекс проблем, які пов'язані з стійкістю поведінки та точністю обчислень.

Для нівелювання останньої проблеми достатньо перейти до обчислень у скінченній алгебраїчній системі.

У якості такої алгебраїчної системи природно вибрати скінченне кільце, де наявність дільників нуля призводить до пошуку у процесі розв'язування рівнянь.

Таким чином, побудова аналогів над скінченним кільцем для модельних хаотичних

V. G. Skobelev, Dr. Sci. (Techn.), Prof.

Analysis of Resler's automaton over finite ring

It is analyzed Resler's automaton over a finite associative-commutative ring with the unit. Classes of equivalent states of the investigated automaton are characterized. Problem of parametric identification of Resler's automaton are solved. Formula characterizing variation of behavior of Resler's automaton under condition of variation of its initial state are established.

Key Words: finite automata, finite rings, identification.

систем є потужним джерелом автоматів над скінченним кільцем.

Один з таких автоматів, а саме автомат Реслера, досліджений у даній роботі.

1. Автомат Реслера

Хаотична динамічна система Реслера має наступний вигляд [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + a \cdot y \\ \dot{z} = b + (x - r) \cdot z \end{cases}$$

Після внесення інформаційної змінної до 1-го рівняння та переходу до дій у скінченному асоціативно-комутативному кільці $K = (K, +, \cdot)$ ми отримуємо автомат

$$M_R : \begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = q_i^{(1)} - hq_i^{(2)} - hq_i^{(3)} - hdx_{i+1} \\ q_{i+1}^{(2)} = hq_i^{(1)} + (ah + 1)q_i^{(2)} \\ q_{i+1}^{(3)} = hb + (1 - hr) \circ q_i^{(3)} + hq_i^{(1)}q_i^{(3)} \\ y_{i+1} = q_{i+1}^{(1)} \end{cases} \quad (1)$$

де $i \in \mathbb{Z}$, та $a, b, d, h, r \in K$, при цьому d та h є елементи, що допускають обернення.

Автомат M_R допускає обернення. Обернений до нього автомат має наступний вигляд

$$M_R^{-1} : \begin{cases} q_{i+1}^{(1)} = x_{i+1} \\ q_{i+1}^{(2)} = hq_i^{(1)} + (ah + 1)q_i^{(2)} \\ q_{i+1}^{(3)} = hb + (1 - hr) \circ q_i^{(3)} + hq_i^{(1)}q_i^{(3)} \\ y_{i+1} = (hd)^{-1} (q_i^{(1)} - hq_i^{(2)} - hq_i^{(3)} - x_{i+1}^{(1)}) \end{cases}$$

Тому рівняння (17) має наступний вигляд

$$(ah+1)(h(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) + (ah+1)(\tilde{q}_0^{(2)} - q_0^{(2)})) = 0. \quad (19)$$

З рівнянь (16) та (13) ми отримуємо

$$h(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) + (ah+1)(\tilde{q}_0^{(2)} - q_0^{(2)}) = 0. \quad (20)$$

З рівнянь (20) випливає, що рівняння (19) має місце.

Таким чином, стани $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ та $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$ еквівалентні у тому та лише у тому випадку, коли мають місце рівняння (8), (16) та (19), тобто, коли

$$\begin{cases} (\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) - h(\tilde{q}_0^{(2)} - q_0^{(2)}) - \\ h(\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(3)}) = 0 \\ h(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) + (ah+1)(\tilde{q}_0^{(2)} - q_0^{(2)}) = 0 \\ (1-hr)(\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(3)}) + \\ h(\tilde{q}_0^{(1)}\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(1)}q_0^{(3)}) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Нехай

$$\tilde{q}_0^{(2)} = q_0^{(2)} + \Delta, \quad (22)$$

тобто

$$\tilde{q}_0^{(2)} - q_0^{(2)} = \Delta. \quad (23)$$

Підставивши (23) у 1-е та 2-е рівняння системи рівнянь (21), ми отримуємо

$$(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) - h\Delta - h(\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(3)}) = 0 \quad (24)$$

та

$$h(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) + (ah+1)\Delta = 0. \quad (25)$$

Оскільки елемент $h \in K$ допускає обернення, з рівнянь (25) та (24) випливає, що

$$\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)} = -(a+h^{-1})\Delta \quad (26)$$

та

$$\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(3)} = h^{-1}(\tilde{q}_0^{(1)} - q_0^{(1)}) - \Delta. \quad (27)$$

Підставивши (26) у (27), ми отримуємо

$$\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(3)} = -(ah^{-1} + h^{-2} + 1)\Delta. \quad (28)$$

З рівнянь (26) та (28) ми отримуємо

$$\tilde{q}_0^{(1)} = q_0^{(1)} - (a+h^{-1})\Delta \quad (29)$$

та

$$\tilde{q}_0^{(3)} = q_0^{(3)} - (ah^{-1} + h^{-2} + 1)\Delta. \quad (30)$$

За допомогою рівнянь (29) та (30) ми отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0^{(1)}\tilde{q}_0^{(3)} - q_0^{(1)}q_0^{(3)} &= (a+h^{-1})(ah^{-1} + h^{-2} + 1)\Delta^2 - \\ &- (q_0^{(3)}(a+h^{-1}) + q_0^{(1)}(ah^{-1} + h^{-2} + 1))\Delta. \end{aligned} \quad (31)$$

Підставивши (27) та (31) у 3-є рівняння системи рівнянь (21), ми встановлюємо, що Δ є розв'язком рівняння (4).

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо у двох різних станах $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ та $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$ автомата M_R співпадають другі компоненти, то стани q_0 и $\tilde{q}_0$ не еквівалентні.

Доведення. Нехай у двох різних станах $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ та $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$ автомата M_R співпадають другі компоненти

Припустимо протилежне, тобто, що стани q_0 та $\tilde{q}_0$ є еквівалентними станами автомата M_R .

З рівності $\tilde{q}_0^{(2)} = q_0^{(2)}$ випливає, що $\Delta = 0$.

Оскільки $\Delta = 0$ є розв'язком рівняння (4), то з рівняння (3) випливає, що $\tilde{q}_0^{(i)} = q_0^{(i)}$ ($i=1,2,3$), тобто, що $\tilde{q}_0 = q_0$.

Отримано суперечність. Отже припущення є помилковим. Тому стани q_0 та $\tilde{q}_0$ не еквівалентні.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Будь які два різні еквівалентні стани $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ та $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$ автомата M_R є близнюками.

Доведення. Будь які два різні стани $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ та $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$ автомата M_R є близнюками у тому та лише у тому випадку, коли

$$\tilde{q}_i^{(i)} - q_i^{(i)} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (32)$$

для всіх $x_i \in K$.

З перших трьох рівнянь системи (1) випливає, що рівняння (32) еквівалентні системі (21).

Наслідок доведено.

3. Параметрична ідентифікація автомата Реслера

Припустимо, що експериментатор може повністю керувати вхідним каналом автомата M_R , а також встановлювати автомат M_R у будь-який початковий стан будь-яку кількість разів. Такі припущення відповідають одній з найбільш сильних атак на відповідний потоковий шифр.

Подамо на автомат (M_R, q_0) , де $q_0 = (0,1,0)^T$, вхідний символ $x_1 = 0$. Отримаємо, що $h = -y_1$.

Подамо на автомат $(M_R, 0)$ вхідний символ $x_1 = 1$. Отримаємо, що $d = -h^{-1}y_1$.

Подамо на автомат $(M_R, 0)$ вхідну послідовність $x_1x_2 = 00$. Отримаємо, що $b = -h^{-2}y_2$.

Подамо на автомат (M_R, q_0) , де $q_0 = (0, 0, 1)^T$, вхідну послідовність $x_1 x_2 = 00$. Отримаємо, що $r = h^{-2} y_2 + 2h^{-1} - b$.

Подамо на автомат (M_R, q_0) , де $q_0 = (0, 1, 0)^T$, вхідну послідовність $x_1 x_2 = 00$. Отримаємо, що $a = -2h^{-1} - b - h^{-2} y_2$.

Таким чином, достатньо легко здійснюється пошук розв'язку задачі параметричної ідентифікації автомата M_R в умовах, коли експериментатор може повністю керувати вхідним каналом автомата M_R , а також встановлювати автомат M_R у будь-який початковий стан будь-яку кількість разів.

4. Варіація поведінки автомата Реслера

Нехай для автомата M_R здійснюється зміна початкового стану $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)})^T$ на початковий стан $\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_0^{(1)}, \tilde{q}_0^{(2)}, \tilde{q}_0^{(3)})^T$.

Підставивши $\tilde{q}_0$ в систему рівнянь (1) ми отримуємо

$$\begin{cases} \tilde{q}_{i+1}^{(1)} = \tilde{q}_i^{(1)} - h\tilde{q}_i^{(2)} - h\tilde{q}_i^{(3)} - hdx_{i+1} \\ \tilde{q}_{i+1}^{(2)} = h\tilde{q}_i^{(1)} + (ah+1)\tilde{q}_i^{(2)} \\ \tilde{q}_{i+1}^{(3)} = hb + (1-hr)\tilde{q}_i^{(3)} - h\tilde{q}_i^{(1)}\tilde{q}_i^{(3)} \\ \tilde{y}_{i+1} = \tilde{q}_{i+1}^{(1)} \end{cases} \quad (33)$$

Різниця систем рівнянь (33) та (1) має наступний вигляд

$$\begin{cases} \Delta q_{i+1}^{(1)} = \Delta q_i^{(1)} - h\Delta q_i^{(2)} - h\Delta q_i^{(3)} \\ \Delta q_{i+1}^{(2)} = h\Delta q_i^{(1)} + (ah+1)\Delta q_i^{(2)} \\ \Delta q_{i+1}^{(3)} = (1-hr)\Delta q_i^{(3)} + h(q_i^{(1)}\Delta q_i^{(3)} + \\ + \Delta q_i^{(1)}q_i^{(3)} + \Delta q_i^{(1)}\Delta q_i^{(3)}) \\ \Delta y_{i+1} = \Delta q_{i+1}^{(1)} \end{cases} \quad (34)$$

Таким чином, варіація поведінки автомата M_R при зміні його початкового стану q_0 на початковий $\tilde{q}_0$ характеризується системою рівнянь (34).

Висновки

У роботі досліджено автомат Реслера M_R над скінченним асоціативним кільцем з одиницею, який є аналогом відповідної модельної хаотичної динамічної системи.

Дослідження класів еквівалентних станів автомата M_R вказує на те, що ці класи мають достатньо складну структуру. Тому будь які спроби мінімізації автомата Реслера M_R призведуть до значного ускладнення моделі. На цю обставину також вказує складність співвідношень, які характеризує варіація поведінки автомата M_R , при зміні його початкового стану.

Подальше дослідження автомата Реслера може бути пов'язано з розв'язком задачі ідентифікації його початкового стану.

Інший напрямок пов'язаний з дослідженням складності розв'язку задачі параметричної ідентифікації автомата Реслера за допомогою простого експерименту, тобто в умовах, коли експериментатор не має змоги встановлювати автомат M_R у потрібний йому стан.

Також цікавим є дослідження залежності складності розв'язку задач аналізу автомату Реслера від значень його параметрів.

Список використаних джерел

1. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Печеев А.А. Свойства линейных и полилинейных рекуррент над кольцами Галуа (I) // Труды по дискретной математике. Т.2 / Под общей редакцией В.Я. Козлова. – М.: ТВП, 1998. – С. 191-222.
2. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. Донецк: ИПММ НАН Украины, 2003. – 479 с.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.

Надійшла до редколегії 19.10.2010

УДК 681.5

Слабоспицький О.С.*, к.ф.-м.н., доц.

**Рекурентне оцінювання параметрів
білінійних дискретних динамічних систем
методом найменших квадратів з
мінімальним відхиленням від точок
"тяжіння" при неklasичних
припущеннях**

Для білінійної дискретної динамічної системи при неklasичних припущеннях розглядається задача оцінювання стаціонарних параметрів у випадку, коли в довільний момент для матриць параметрів об'єкту відомі їх точки "тяжіння". Для оцінок матриць параметрів методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від їх точок "тяжіння" та відповідної залишкової суми квадратів отримані рекурентні алгоритми для вищезгаданих систем. Запропоновані дві форми цих рекурентних процедур оцінювання.

Ключові слова: оцінювання стаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, білінійна дискретна динамічна система, метод найменших квадратів, рекурентний алгоритм, залишкова сума квадратів, точки "тяжіння".

*E-mail: sl@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Метод найменших квадратів [1] займає чільне місце серед усіх основних підходів в теорії оцінювання стаціонарних параметрів математичних моделей [2], які знайшли своє практичне застосування при розв'язанні широкого кола задач.

Використання оператора псевдообернення по Муру-Пенрозу дозволило поширити метод найменших квадратів на випадок, коли можуть порушуватися класичні припущення, що гарантують єдиність цієї оцінки [3]. У цій же роботі для регресійної моделі описано побудову рекурентних алгоритмів для оцінки параметрів методом найменших квадратів з найменшою евклідовою нормою та відповідної залишкової суми квадратів.

У роботі [4] була розглянута задача оцінювання стаціонарних параметрів регресійної моделі методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від заданих точок "тяжіння" при порушенні класичних припущень,

A.S. Slabospitsky*, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Recurrent parameter estimation of bilinear discrete dynamic systems by the least squares method with the minimum deviation from 'attraction' points under non-classical assumptions

The estimation problem of stationary parameters is considered for bilinear discrete dynamic system under non-classical assumptions in case when for parameter matrices of object their 'attraction' points are known at any moment. Recurrent algorithms are obtained for estimates of parameter matrices by the least squares method with the least deviation norm from their 'attraction' points and corresponding residual sum of squares for above-mentioned systems. Two forms of these recurrent estimation procedures are suggested.

Key Words: stationary parameter estimation, pseudoinverse operator, bilinear discrete dynamic system, least squares method, recurrent algorithm, residual sum of squares, 'attraction' points.

що гарантують єдиність оцінки. Були отримані явна та дві рекурентні форми представлення для перерахунку цієї оцінки, а також рекурент для відповідної залишкової суми квадратів. В публікації [5] результати роботи [4] було перенесено на клас лінійних стаціонарних дискретних динамічних систем.

У даній роботі останні результати поширено на клас білінійних стаціонарних дискретних динамічних систем. Отримані явна та дві рекурентні форми представлення для оцінок матриць параметрів методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від їх точок "тяжіння" для вищезгаданих систем при порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки. Для перерахунку відповідної залишкової суми квадратів отримана рекурентна процедура.

Розглянемо задачу оцінювання матриць невідомих параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ для білінійної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k) B_i x(k) + Bu(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де $x(k)$ - n -вимірний вектор фазового стану, $u^T(k) = (u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k))$ - вектор керувань, $\xi(k)$ - вектор похибок моделі, $\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел.

Введемо позначення $Q(A, B_1, B_2, \dots, B_m, B, N) = \sum_{k=1}^N \|\xi(k)\|^2$, де $\|\cdot\|$ - евклідова норма.

Якщо можливе порушення класичних припущень, оцінка параметрів об'єкту (1) методом найменших квадратів не завжди буде єдиною [3]. А множина усіх цих оцінок матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ для системи (1) на момент N , як не важко встановити, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \text{Arg}_{(A, B_1, B_2, \dots, B_m, B)} \min Q(A, B_1, B_2, \dots, B_m, B, N) = & \left\{ \left(\hat{A}_{C_0}(N) | \hat{B}_{1C_1}(N) | \hat{B}_{2C_2}(N) | \dots | \hat{B}_{mC_m}(N) | \hat{B}_{C_{m+1}}(N) \right); \right. \\ & \left(\hat{A}_{C_0}(N) | \hat{B}_{1C_1}(N) | \hat{B}_{2C_2}(N) | \dots | \hat{B}_{mC_m}(N) | \hat{B}_{C_{m+1}}(N) \right) = (Z_N^+ X_{2,N+1})^T + \\ & \left. + (C_0 | C_1 | C_2 | \dots | C_m | C_{m+1}) [E_{n+nm+m} - Z_N^+ Z_N], (C_0 | C_1 | C_2 | \dots | C_m | C_{m+1}) \in M_{n,n+nm+m}(\mathbb{R}) \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

де $(^+)$ - оператор псевдообернення по Муру-Пенроузу, E_n - одинична матриця порядку n , $Z_N^T = (z(1), z(2), \dots, z(N))$, $z^T(k) = (x^T(k), u^T(k) \otimes x^T(k), u^T(k))$, $\otimes$ - операція тензорного добутку, $X_{2,N+1}^T = (x(2), x(3), \dots, x(N+1))$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$ - множина матриць розміру $m \times n$ з дійсними елементами, $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $C_{m+1} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

На множині оцінок (2) матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ в якості єдиної оцінки будемо обирати оцінку з найменшою нормою відхилення від заданої матриці. Вигляд цієї оцінки задає таке твердження.

Теорема 1. Нехай задана $V = (V_0 | V_1 | V_2 | \dots | V_m | V_{m+1}) \in M_{n,n+nm+m}(\mathbb{R})$, причому $V_0, V_1, V_2, \dots, V_m \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $V_{m+1} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Тоді на множині (2), усіх оцінок матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ у момент N методом найменших квадратів для білінійної динамічної системи (1), існує єдина оцінка $(\hat{A}_{V_0}(N) | \hat{B}_{1V_1}(N) | \hat{B}_{2V_2}(N) | \dots | \hat{B}_{mV_m}(N) | \hat{B}_{V_{m+1}}(N))$ з найменшою нормою відхилення від матриці V , яка визначається співвідношенням:

$$(\hat{A}_{V_0}(N) | \hat{B}_{1V_1}(N) | \hat{B}_{2V_2}(N) | \dots | \hat{B}_{mV_m}(N) | \hat{B}_{V_{m+1}}(N)) = (Z_N^+ X_{2,N+1})^T + V [E_{n+nm+m} - Z_N^+ Z_N].$$

Припустимо, що для матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ білінійної динамічної системи (1) в кожен момент N додатково відомі їх точки "тяжіння" $A_N, B_{1,N}, B_{2,N}, \dots, B_{m,N}, B_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$.

Тоді логічно, у цій ситуації в якості єдиної оцінки $(\hat{A}(N) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N))$ методу найменших квадратів матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ об'єкту (1) в момент N , з урахуванням знання точок "тяжіння", серед усіх оцінок з множини (2) використовувати саме оцінку $(\hat{A}_{A_N}(N) | \hat{B}_{1B_{1,N}}(N) | \hat{B}_{2B_{2,N}}(N) | \dots | \hat{B}_{mB_{m,N}}(N) | \hat{B}_{B_N}(N))$ з найменшою нормою відхилення від матриці $(A_N | B_{1,N} | B_{2,N} | \dots | B_{m,N} | B_N)$, яка у відповідності до останньої теореми має таку явну форму представлення:

$$\begin{aligned} & (\hat{A}(N) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N)) = \\ & = (Z_N^+ X_{2,N+1})^T + (A_N | B_{1,N} | B_{2,N} | \dots | B_{m,N} | B_N) [E_{n+nm+m} - Z_N^+ Z_N], \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3)$$

При проведенні послідовного оцінювання виникає необхідність в рекурентному перерахунку оцінки (3). Це дозволяє зробити таке твердження.

Теорема 2. Рекурентний алгоритм для оцінки (3) матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ білінійної динамічної системи (1) методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення в кожен момент N від заданих точок "тяжіння" $A_N, B_{1,N}, B_{2,N}, \dots, B_{m,N}, B_N$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) має такий вигляд: якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\hat{A}(N+1) | \hat{B}_1(N+1) | \hat{B}_2(N+1) | \dots | \hat{B}_m(N+1) | \hat{B}(N+1) \right) = \left(\hat{A}(N) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N) \right) + \\ & + \frac{1}{\delta(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) - \sum_{i=1}^m u_i(N+1)\hat{B}_i(N)x(N+1) - \hat{B}(N)u(N+1)]z^T(N+1)P(N) + \\ & + (A_{N+1} - A_N | B_{1,N+1} - B_{1,N} | B_{2,N+1} - B_{2,N} | \dots | B_{m,N+1} - B_{m,N} | B_{N+1} - B_N) \times \\ & \times \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N) \right], \\ & R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N) + P(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N)] + \\ & + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N), \\ & P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N), \end{aligned} \right. \quad (4)$$

у протилежному випадку

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\hat{A}(N+1) | \hat{B}_1(N+1) | \hat{B}_2(N+1) | \dots | \hat{B}_m(N+1) | \hat{B}(N+1) \right) = \left(\hat{A}(N) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N) \right) + \\ & + \frac{1}{\gamma(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) - \sum_{i=1}^m u_i(N+1)\hat{B}_i(N)x(N+1) - \hat{B}(N)u(N+1)]z^T(N+1)R(N) + \\ & + (A_{N+1} - A_N | B_{1,N+1} - B_{1,N} | B_{2,N+1} - B_{2,N} | \dots | B_{m,N+1} - B_{m,N} | B_{N+1} - B_N)P(N), \\ & R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N), \\ & P(N+1) = P(N), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

з початковими умовами

$$\hat{A}(0) = A_0, \hat{B}_1(0) = B_{1,0}, \hat{B}_2(0) = B_{2,0}, \dots, \hat{B}_m(0) = B_{m,0}, \hat{B}(0) = B_0, R(0) = O_{n+nm+m}, P(0) = E_{n+nm+m},$$

де $\gamma(N) = 1 + z^T(N+1)R(N)z(N+1)$, $\delta(N) = z^T(N+1)P(N)z(N+1)$, O_n - нульова квадратна матриця порядку n .

Доведення. Задача знаходження оцінки (3) матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ білінійної динамічної системи (1) еквівалентна задачі знаходження оцінки матриці $(A, B_1, B_2, \dots, B_m, B)$ в такому об'єкті:

$$x(k+1) = (A, B_1, B_2, \dots, B_m, B)z(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для отримання шуканого рекуренту достатньо записати рекурентний алгоритм для оцінки матриці $(A, B_1, B_2, \dots, B_m, B)$ в останній системі. Але для цього об'єкту відповідну рекурентну процедуру можна виписати, скориставшись результатами роботи [5]. Доведення завершено.

Спираючись на результати публікації [5] можна запропонувати другу форму представлення алгоритму (4, 5).

Теорема 3. Для оцінки (3) матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ білінійної динамічної системи (1), методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення в кожен момент N від заданих точок "тяжіння" $A_N, B_{1,N}, B_{2,N}, \dots, B_{m,N}, B_N$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) рекурентна процедура має вигляд:

$$\begin{aligned} & (\hat{A}(N+1) | \hat{B}_1(N+1) | \hat{B}_2(N+1) | \dots | \hat{B}_m(N+1) | \hat{B}(N+1)) = (\hat{A}(N) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N)) + \\ & + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) - \sum_{i=1}^m u_i(N+1)\hat{B}_i(N)x(N+1) - \hat{B}(N)u(N+1)]z^T(N+1)R(N+1) + \\ & + (A_{N+1} - A_N | B_{1,N+1} - B_{1,N} | B_{2,N+1} - B_{2,N} | \dots | B_{m,N+1} - B_{m,N} | B_{N+1} - B_N)P(N+1), \end{aligned}$$

причому, якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} \left[R(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N) + P(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N) \right] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N), \end{cases}$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases}$$

з початковими умовами

$$\hat{A}(0) = A_0, \hat{B}_1(0) = B_{1,0}, \hat{B}_2(0) = B_{2,0}, \dots, \hat{B}_m(0) = B_{m,0}, \hat{B}(0) = B_0, R(0) = O_{n+nm+m}, P(0) = E_{n+nm+m},$$

де $\gamma(N) = 1 + z^T(N+1)R(N)z(N+1)$, $\delta(N) = z^T(N+1)P(N)z(N+1)$.

Якщо взяти до уваги відповідну теорему з роботи [5], то можна впевнитися в справедливості такого результату.

Теорема 4. Рекурентний алгоритм для залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), \hat{B}_1(N), \hat{B}_2(N), \dots, \hat{B}_m(N), \hat{B}(N), N)$ для оцінки (3) матриць параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ білінійної динамічної системи (1) методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення в кожен момент N від заданих точок "тяжіння" $A_N, B_{1,N}, B_{2,N}, \dots, B_{m,N}, B_N$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) приймає вид:

$$q(N+1) = \begin{cases} q(N), & \text{якщо } \delta(N) > 0, \\ q(N) + \frac{1}{\gamma(N)} \left\| x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) - \sum_{i=1}^m u_i(N+1)\hat{B}_i(N)x(N+1) - \hat{B}(N)u(N+1) \right\|^2, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

з початковою умовою $q(0) = 0$.

Список використаних джерел

1. Hsia T.C. System identification. Least-squares methods.-Toronto: Lexington Books, 1977.- 165 p.
2. Ljung L. System Identification: Theory for the User. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. - 544 p.
3. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. - New York: Academic Press, 1972. - 180 p.
4. Слабостицький О.С. Використання додаткової інформації в рекурентному

- оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2008. - №4. - с. 179-182.
5. Слабостицький О.С. Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння" при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2009. - №4. - с. 135-138.

Надійшла до редколегії 19.10.2010

УДК 004.832

Л.М. Терещенко, к.ф.-м.н., с.н.с

Розв'язання задачі статичної магнітопружності в середовищі Maple

Розглянуто розв'язання задачі про напружено-деформований стан магніто-м'якого ферромагнетика з еліптичною порожниною при дії однорідного магнітного поля в середовищі Maple

Ключові слова: магнітопружність, магніто-м'які ферромагнетики, Maple.

Статтю представив професор, д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.
E-mail: lida_tereshchenko@mail.ru

В даній роботі розглядається розв'язання задачі про взаємодію однорідного магнітного поля з магніто-м'яким ферромагнетиком, який містить еліптичну порожнину x_i в середовищі Maple. В статті визначаються основні характеристики напружено-деформованого стану та індукованого магнітного поля. Основні рівняння магнітопружності лінеаризуються за допомогою припущення, що компоненти магнітного поля (напруженість - $\vec{H}$, індукцію - $\vec{B}$ та намагніченість - $\vec{M}$) в деформівному тілі можна розбити на дві складові: жорсткий недеформований стан $(\vec{H}_0, \vec{B}_0, \vec{M}_0)$ та збурений стан $(\vec{h}, \vec{b}, \vec{m})$, обумовлений деформацією тіла [1-5].

Система рівнянь статичної магнітопружності для тіла та порожнини записується у вигляді

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\gamma} \text{grad div } \vec{u} + \frac{2\chi}{(1+\chi)G} (\vec{B}^0 \cdot \text{grad}) \vec{h} = 0$$

$$\text{rot } \vec{h} = 0; \quad \text{div } \vec{h} = 0; \quad \text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0;$$

$$\text{div } \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (1)$$

Для описання граничних умов та розв'язання задачі вводиться еліптична система координат

$$x_1 = a \operatorname{sh} \eta \cos \theta; \quad x_2 = a \operatorname{ch} \eta \sin \theta. \quad (2)$$

L. M. Tereshchenko, C. Sci (Phys-Math.)

A decision of tasks of static magnetoelasticity is in an environment Maple

This article considered the stress-strain state unlimited magneto-soft ferromagnetic, which contains elliptic hole and is under the action of homogeneous external magnetic fields solve in an environment Maple

Key Words: magnetoelasticity, magneto-soft ferromagnetic, Maple.

Так як для збуреного стану також мають місце рівняння магнітостатики, то можна припустити, що для нормальної складової вектора $\vec{b}$ в тілі і порожнині має місце гранична умова $(\eta = \eta_0)$ $B_{n2} S - B_{n1} S = 0$ (S - площа границі розділу), то в граничній умові $\varepsilon_{ijk} \{n_j [h_k] - n_m u_{m,j} [H_{0k}]\} = 0$ можна знехтувати деформативністю середовища [3].

Граничні умови на поверхні порожнини в еліптичній системі координат $(\eta = \eta_0)$ після всіх спрощень відповідно до [3] мають вигляд

$$F_{n1} = F_{n1}^{(e)}; \quad F_{n2} = F_{n2}^{(e)};$$

$$(1 + \chi_1) h_\eta - (1 + \chi_0) h_\eta^{(e)} = 0 \quad (3)$$

$$h_\theta - h_\theta^{(e)} = - \frac{[H_{01}]}{a \cos \theta \operatorname{ch} \eta_0} \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right)$$

Розв'язок системи рівнянь (1) можна представити через гармонійні функції [3]. На поверхні порожнини покладемо $\eta = \eta_0$.

$$B_{02}^{(e)} = 0$$

$$\vec{h} = \text{grad } \vec{\Phi}; \quad \nabla^2 \vec{\Phi} = 0;$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + 4(1 - \gamma_1) \vec{Z} - \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{Z} + Z_0);$$

$$\bar{u}_0 = \frac{2\chi_1(1-2\gamma_1)}{(1+\chi_1)G_1} \bar{B}_0 \hat{O}. \quad (4)$$

$$\bar{h}^{(*)} = \text{grad} \bar{\Phi}^{(*)}; \quad \nabla^2 \hat{O}^{(*)} = 0, \quad (5)$$

де $\hat{O}_0^{(*)}, \hat{O}_0$ - потенціал всередині і поза порожниною, χ_1 - магнітна сприйнятливість тіла.

Для розв'язання задачі необхідно визначити магнітне поле всередині порожнини. Для цього розв'яжемо задачу магнітостатики згідно [3]. Виберемо магнітні потенціали поза і всередині порожнини у вигляді:

$$\Phi_0 = \frac{B_{01}}{\mu_1} a \text{sh} \eta \cos \theta + C_{15} a e^{-\eta} \cos \theta$$

$$\hat{O}_0^{(*)} = \frac{B_{01}^{(*)}}{\mu_0} a \text{sh} \eta \cos \theta \quad (6)$$

Підставимо в граничні умови значення потенціалів (6)

$$\mu_1 \frac{\partial \hat{O}_0}{\partial \eta} = \mu_0 \frac{\partial \hat{O}_0^{(*)}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \hat{O}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{O}_0^{(*)}}{\partial \theta} \quad (7)$$

Та знайдемо невідомі сталі

$$B_{01}^{(*)} = \frac{B_{01} \mu_0 (\text{ch} \eta_0 + \text{sh} \eta_0)}{\mu_0 \text{ch} \eta_0 + \mu_1 \text{sh} \eta_0};$$

$$C_{15} = \frac{B_{01} (\mu_1 - \mu_0) \text{sh} \eta_0 \text{ch} \eta_0}{\mu_1 e^{-\eta_0} (\mu_0 \text{ch} \eta_0 + \mu_1 \text{sh} \eta_0)} \quad (8)$$

У випадку коли відношення осей еліпса $\varepsilon = \frac{\text{sh} \eta_0}{\text{ch} \eta_0}$ достатньо мале, то збуреним магнітним полем у середовищі біля включення можна знехтувати. Надалі, при дослідженні задачі магнітопружності, вважатимемо, що магнітостатичне поле поза порожниною однорідне і збігається з заданим на нескінченності B_{01} , а всередині порожнини справедлива формула (8) для $B_{01}^{(*)}$, $\lim_{\eta_0 \rightarrow 0} C_{15} = 0$.

Досліджуємо випадок, коли однорідне магнітне поле $\vec{B}_0 (B_{01}, B_{02})$ спрямоване уздовж

осі x_1 . Визначення магнітопружних полів при $B_{01} \neq 0, B_{02} = 0$.

Гармонічні функції $Z_0, \hat{Z}, \hat{O}$ покладаються згідно [1, 2] рівними:

$$\hat{O} = C_6 a \cos \theta e^{-\eta}; \quad Z_2 = 0;$$

$$Z_1 = 2C e^{-\eta} \cos \theta; \quad Z_0 = A\eta + B e^{-2\eta} \cos 2\theta;$$

$$A = -2B - 2C a \text{sh}^2 \eta_0 \quad (9)$$

де C_6, A, C, B - невідомі сталі.

Підставляючи функції (9) в формули (4), знайдемо переміщення та напруженості в тілі

$$u_1 = 2 \cos \theta e^{-\eta} \left((3 - 4\chi_1) C + \frac{2B}{a} + C \text{sh} \eta_0 e^{\eta_0} \right) - \frac{2\chi_1 B_{01} (1 - 2\gamma_1) C_6 a \cos \theta e^{-\eta_0}}{(1 + \chi_1) G_1} + 2 \frac{C (\text{sh}^2 \eta_0 - \text{sh}^2 \eta) \text{ch} \eta \cos \theta}{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta};$$

$$u_2 = \frac{2 \sin \theta e^{-\eta}}{a} (2B + C a \text{sh} \eta e^{\eta}) + 2 \frac{C (\text{sh}^2 \eta_0 - \text{sh}^2 \eta) \text{sh} \eta \sin \theta}{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}; \quad (10)$$

$$h_\eta = - \frac{C_6 \cos \theta e^{-\eta}}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}};$$

$$h_\theta = - \frac{C_6 e^{-\eta}}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \sin \theta;$$

$$F_{\eta 1} = - \frac{\cos \theta}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ - \frac{(1 + 4\chi_1) B_{01}^2 \text{ch} \eta}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \frac{4G_1 e^{-\eta}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C (1 - 2\gamma_1 + \text{ch} \eta e^{\eta}) \right) \right\}. \quad (11)$$

$$F_{n2} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ \frac{B_{01}^2 \operatorname{sh} \eta}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \frac{4G_1 e^{-\eta}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C(1 - 2\gamma_1 + \operatorname{sh} \eta e^{\eta}) \right) \right\}$$

Розв'язки системи рівнянь (5), що описують магнітопружний стан порожнини, запишемо так:

$$\hat{O}^{(e)} = C_1 a \operatorname{sh} \eta \cos \theta.$$

$$u_1^{(e)} = 0; \quad u_2^{(e)} = 0;$$

$$F_{n1}^{(e)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ \frac{(1 + 4\chi_2) B_{01}^{(e)2} \operatorname{ch} \eta}{2\mu_2 (1 + \chi_2)} + \frac{B_{01}^{(e)} C_1 \operatorname{ch} \eta (1 + 4\chi_2 \gamma_2)}{(1 + \chi_2)} \right\};$$

$$F_{n2}^{(e)} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ -\frac{B_{01}^{(e)2} \operatorname{sh} \eta}{2\mu_2 (1 + \chi_2)} - \frac{B_{01}^{(e)} C_1 \operatorname{sh} \eta (1 + 4\chi_2 \gamma_2)}{(1 + \chi_2)} \right\};$$

$$h_{\eta}^{(e)} = \frac{C_1 \cos \theta \operatorname{ch} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}};$$

$$h_{\theta}^{(e)} = -\frac{C_1 \sin \theta \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}}. \quad (12)$$

Підставляючи формули (6) – (12) в граничні умови (3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях, одержуємо таку систему алгебраїчних рівнянь

$$C_1 \operatorname{ch} \eta_0 \mu_0 + \mu_1 C_6 e^{-\eta_0} = 0;$$

$$C_6 - C_1 \operatorname{sh} \eta_0 e^{\eta_0} = \frac{(H_{01} - H_{01}^{(e)})}{a \operatorname{ch} \eta_0} \left(4 \frac{B e^{-\eta_0}}{a} - \frac{2\chi_1 B_{01} (1 - 2\gamma_1)}{(1 + \chi_1) G_1} \operatorname{ch} \eta_0 C_6 a + 2C(4\gamma_1 - 3) \operatorname{ch} \eta_0 + \operatorname{sh} \eta_0 \right); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(1 + 4\chi_1) B_{01}^2 \operatorname{ch} \eta_0}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta_0} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \\ & + \frac{4G_1 e^{-\eta_0}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C(1 - 2\gamma_1 + \operatorname{ch} \eta_0 e^{\eta_0}) \right) = \\ & \frac{B_{01}^{(e)2} \operatorname{ch} \eta}{2\mu_0} + B_{01}^{(e)} C_1 \operatorname{ch} \eta; \\ & \frac{B_{01}^2 \operatorname{sh} \eta_0}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta_0} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \\ & + \frac{4G_1 e^{-\eta_0}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C(1 - 2\gamma_1 + \operatorname{sh} \eta_0 e^{\eta_0}) \right) = \\ & -\frac{B_{01}^{(e)2} \operatorname{sh} \eta}{2\mu_0} - B_{01}^{(e)} C_1 \operatorname{sh} \eta \end{aligned}$$

Знайшовши із системи (13) невідомі сталі та підставивши їх в (4)–(5) отримаємо загальний розв'язок задачі.

Дослідження напруженого стану біля еліптичної порожнини будемо проводити в середовищі Maple. Для цього виберемо магніто – м'який феромагнітний матеріал з наступними механічними та магнітними характеристиками:

алфер — $\gamma_1 = 0,3$; $G_1 = 6,3 \cdot 10^4$ МПа;
 $1 + \chi_1 = 30$.

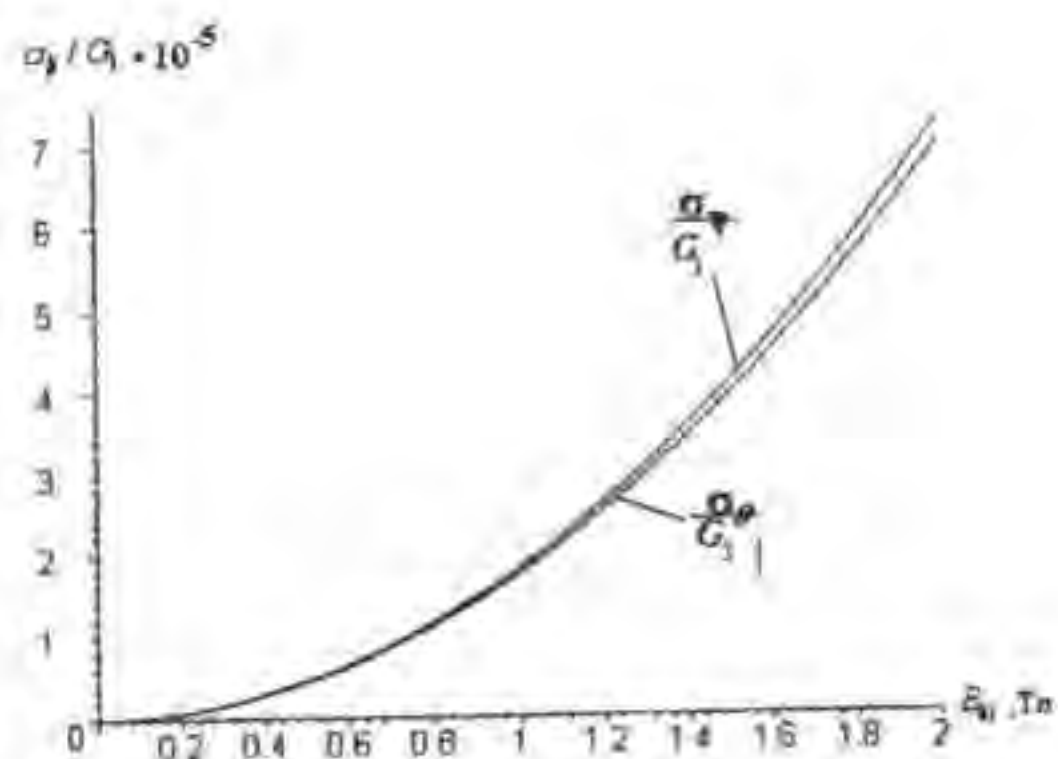


Рис.1

На рис.1 зображена залежність нормальних напружень в тілі з еліптичною порожниною від зміни індукції магнітного поля. Як видно з рис.1 із збільшенням індукції магнітного поля нормальні напруження збільшуються так як намагніченість збільшується за рахунок

зміщення границь доменів та процесу обертання спонтанної намагніченості. Дослідження приводяться при $\theta = \pi/2$, так як при такому куті концентрація нормальних напружень для даного матеріалу найбільша. Зміщення границь доменів зв'язано з ростом об'єму доменів, в яких напрямок намагніченості орієнтовано найбільш вигідно енергетично по відношенню до поля (кут між намагніченістю та напруженістю магнітного поля найменший). Процес обертання спонтанної намагніченості обумовлений поворотом векторів намагніченості від осі легкого намагнічення до напрямку прикладеного магнітного поля, що обумовлює зростання нормальних напружень.

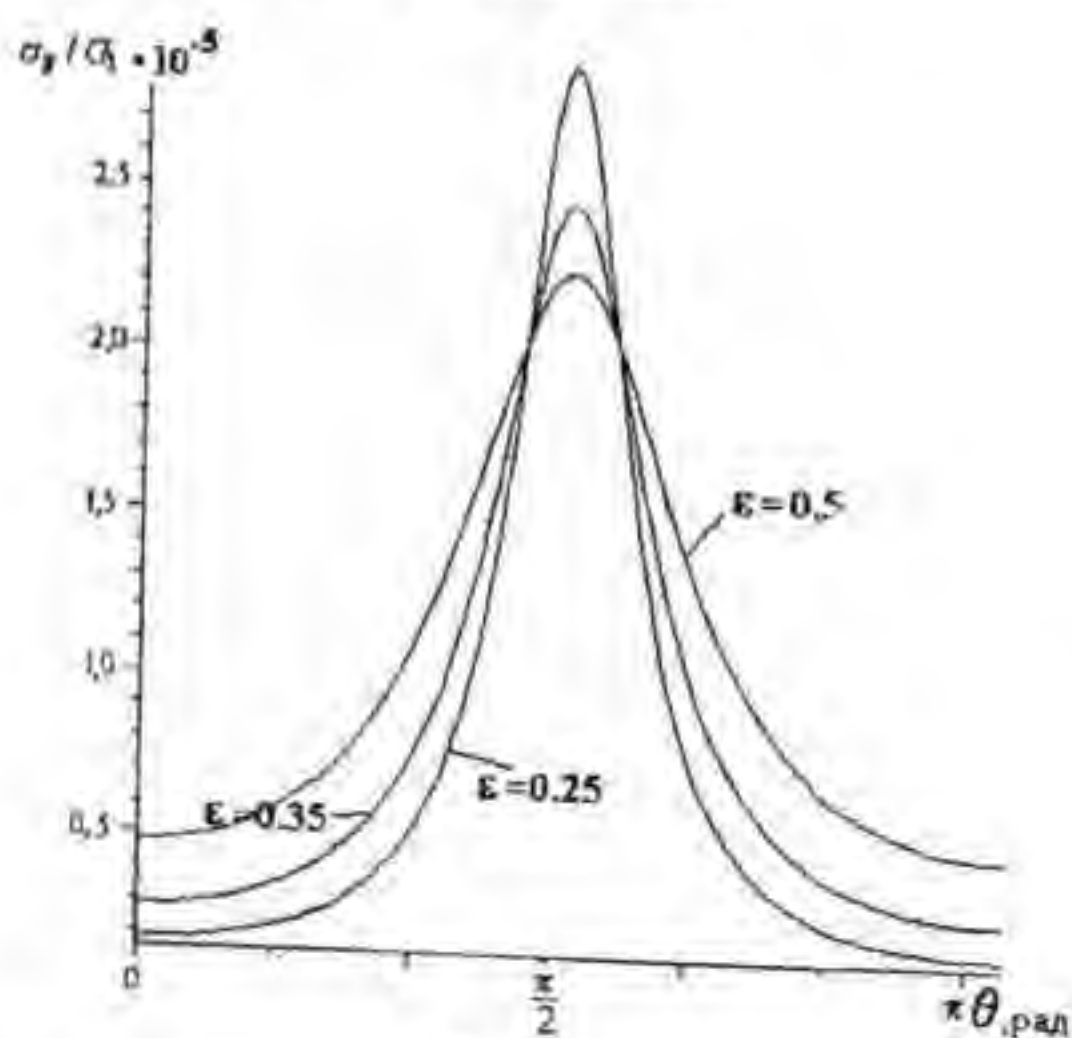


Рис.2

На Рис.2 показані залежності значень напружень σ_y , в тілі на поверхні порожнини ($\eta = \eta_0$) від зміни кута θ і відношення осей еліпса $\epsilon = \frac{\text{sh } \eta_0}{\text{ch } \eta_0}$. Індукція зовнішнього

магнітного поля покладається рівною $B_{01} = 1 \text{ Тл}$. Як видно з графіків максимальне значення напруження σ_y досягається при значенні кута $\theta = \pi/2$. З чисельних даних випливає, що чим менше значення ϵ , тим більше концентрація напружень.

У результаті проведеної роботи можна зробити наступні висновки:

- напружено-деформований стан тіла з еліптичною порожниною залежить від механічних і магнітних властивостей тіла;

- максимальна концентрація нормального напруження досягається при $\theta = \pi/2$;
- із збільшенням індукції магнітного поля концентрація напружень збільшується;
- чим менше відношення осей еліпса, тим більше концентрація напружень

Список літератури

1. Huang Ke -Fu, Wang Min -Zhong Complete solution of the linear magnetoelasticity and the magnetic fields in a magnetized elastic half-space // ASME. J. Appl. Mech. 1995.- 62. P. 930-934.
2. Pao Y.-H., Yeh C.-S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Engin. Sci.- 1973.- 11. P. 415-435.
3. Подильчук Ю.Н., Терещенко Л.Н. Магнитоупругое поле в ферромагнитной среде с эллиптическим включением // Прикл. механика. - 2002, - Т. 38, № 5, -С. 84-92.
4. Райхер Ю.Л., Столбов О.В, Степанов Г.В. Деформация круговой мембраны из ферроэласта в однородном магнитном поле. Журнал технической физики, 2008, том 78, вып.9, с.69-76.
5. Петренко А.В. Периодическая задача электромагнитоупругости для тела с эллиптическими полостями или трещинами. Вісник Донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки, 2008, вип. 2, с.556-561.

Надійшла до редколегії 26.10.2010

УДК 004.4

Ткачук І.Ю., асистент

Формалізація підстановок Бі-методу

В роботі запропонована формалізація одного з ключових інструментів побудови специфікацій в рамках формального методу Бі, так званих узагальнених підстановок (generalized substitutions). Формалізація проводиться на основі принципів композиційно-номінативного підходу, запропонованого Нікітченко М.С.

Ключові слова: Бі-метод, узагальнена підстановка.

*E-mail: tkachuk@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Вступ

Одним з актуальних питань, пов'язаних з розробкою програмного забезпечення, є питання відповідності розробленого програмного продукту до встановлених на початку розробки вимог. Для гарантування такої відповідності в комп'ютерній індустрії поширено використання формальних методів розробки програм. Одним з таких формальних методів розробки є формальний метод Бі ("B-method") за авторством Жана Раймонда Абріаля (див. [1]). В цьому методі автор використовує так звані підстановки (substitutions) для задання семантики програми. В даній роботі проводиться формалізація згаданих підстановок у композиційно-номінативному вигляді (див. [2, 3])

Опис формального методу Бі

Формальний метод Бі – це метод розробки програмного забезпечення, в рамках якого відбувається поетапне переведення вимог замовника у програмний код, що за побудовою задовільняє висунуті вимоги. На кожному етапі такого переведення відбувається уточнення вже отриманого псевдокоду одним з наступних способів:

- 1) видалення невиконуваних елементів псевдокоду;
- 2) введення структур керування замість узагальнених підстановок;
- 3) заміна форми подання даних з математичного вигляду на програмний.

По завершенню кожного з етапів відбувається перевірка дотримання висунутих

I.Y.Tkachuk, assistant professor

B-method substitutions formalization

Formalization of one important instrument of specification construction with B-Method is proposed, namely formalization of generalized substitutions is performed on the basis of composition-nominative approach, originated by M. S. Nikitchenko

Key Words: B-method, generalized substitution.

на початку розробки вимог у побудованому псевдокоді. Після виконання останнього етапу переведення отриманий псевдокод може бути автоматично відтрансльований у код на структурній мові програмування, як наприклад C++, Java.

З метою висвітлення цих етапів переведення у відповідності до композиційно-номінативного підходу потрібно запропонувати адекватне подання узагальнених підстановок, що і зроблено нижче.

Формалізація підстановок Бі-методу

Загальні положення, позначення:

1) кожна змінна програми задається своїм станом $v \mapsto d$, де v – ім'я змінної, а d – її значення;

2) V – множина імен змінних програми;

3) W – множина значень змінних програми;

4) d – стан програми,

$d = [v_i \mapsto w_i \mid i \in I, v_i \in V, w_i \in W]$;

5) S – множина усіх можливих станів програми.

Задання підстановок у вигляді відповідних суперпозицій:

1) проста (елементарна) підстановка (simple/elementary substitution) позначається в [1, с. 34] як $[x := E]F$, де x – ім'я змінної, E – вираз, F – формула; результатом виконання такої підстановки є формула, що отримується внаслідок заміни усіх вільних входжень x в F на E .

Досить природно цю підстановку можна семантично задати такою рівністю

$ES^{[x]}(p, g)(d) = p(d \nabla [x \mapsto g(d)])$, де ES – формалізація простої підстановки, $d \in S$, x – параметр підстановки, $x \in V$, p – функція над змінними програми, що має булевий результат (формалізація ролі формули F з оригінального визначення за умови, що F – це предикат), $p: S \rightarrow Bool$; g – функція над змінними програми (формалізація виразу E), $g: S \rightarrow W$, таким чином в результаті виконання підстановки ES над змінними стану d буде змінено значення змінної x ;

2) підстанова порожньої дії (skip substitution) позначається в [1, с. 247] як $[skip]R$, де R – післяумова. Має місце така формула: $[skip]R \Leftrightarrow R$, тобто результат застосування підстановки порожньої дії до предикату R є еквівалентним самій післяумові R . Таким чином підстанова порожньої дії по суті є тотожним відображенням в класі предикатів над станом програми. Формалізацією наведеної підстановки може виступати наступна композиція: $Skip(p)(d) = p(d)$, де $Skip$ – формалізація підстановки порожньої дії, $d \in S$, p – предикат, що є формалізацією післяумови R , $p: S \rightarrow Bool$;

3) багаторазова проста підстанова (multiple simple substitution) позначається в [1, с. 243] як $[x, y \Leftarrow E, F]P$, де x і y – дві різні змінні, E і F – два вирази, а P – формула (предикат або вираз). У випадку, коли P – предикат, багаторазову просту підстановку можна формалізувати наступною рівністю: $MSS^{[v_1, \dots, v_l]}(p, f_1, \dots, f_l)(d) = p(d \nabla [v_1 \mapsto f_1(d), \dots, v_l \mapsto f_l(d)])$, де MSS – формалізація багаторазової простої підстановки, $d \in S$, l – кількість змінних, для яких встановлюється їхнє значення, $l \in N$, $v_i \in V$, $f_i: S \rightarrow W$, $i = \overline{1..l}$, при цьому вважається, що коли $i \neq j$, то $v_i \neq v_j$; p – предикат вигляду $p: S \rightarrow Bool$. Частковим випадком багаторазової простої підстановки є проста підстанова $ES^{[x]}(p, g)(d) = MSS^{[x]}(p, g)(d)$;

4) підстанова з передумовою (preconditioned substitution) позначається в [1, с.

235] як $P|S$, де P – предикат, S – підстанова. Така підстанова задає умову P , виконання якої необхідне для коректного виконання підстановки S . Формалізувати цю підстановку можна так

$$PS(f, p)(d) = \begin{cases} f(d), \text{ якщо } p(d) = true, \\ undef, \text{ якщо } p(d) = false, \end{cases} \quad \text{де}$$

PS – формалізація підстановки з передумовою, $d \in S$, f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки S з визначення), p – предикат вигляду $p: S \rightarrow Bool$, $undef$ – особливе значення виконання підстановки, що означає помилку в програмі;

5) застережена підстанова (guarded substitution) позначається в [1, с. 246] як $P \Rightarrow S$, де P – предикат, а S – деяка підстанова. Дія підстановки визначається еквівалентністю $[P \Rightarrow S]R \Leftrightarrow (P \Rightarrow [S]R)$, де R – формула, над якою виконується підстанова S . Так визначену підстановку можна задати наступною рівністю

$$GS(f, p)(d) = \begin{cases} f(d), \text{ якщо } p(d) = true, \\ d, \text{ якщо } p(d) = false, \end{cases} \quad \text{де } GS$$

– формалізація застереженої підстановки, $d \in S$, f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки S з визначення), p – предикат вигляду $p: S \rightarrow Bool$ (формалізація предикату P з визначення);

6) скорочена умовна підстанова (short conditional substitution) визначається в [1, с. 247] як умовна підстанова з порожньою дією у разі хибності заданого в цій підстановці предиката. Цю підстановку можна задати такою рівністю

$$SCS(f, p)(d) = \begin{cases} f(d), \text{ якщо } p(d) = true, \\ d, \text{ якщо } p(d) = false, \end{cases} \quad \text{де}$$

SCS – формалізація скороченої умовної підстановки, $d \in State$, p – предикат вигляду $p: S \rightarrow Bool$, f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$. Ця композиція функціонально співпадає з застереженою підстановкою, тобто $SCS(f, d)(d) = GS(f, p)(d)$;

7) умовна підстанова (conditional substitution) визначається в [1, с. 244] як вибір між двома підстановками в залежності від деякого припущення, оцінку істинності якого можна формалізувати у вигляді відповідного предиката. Таким чином умовна підстанова формалізується наступною рівністю

$$CS(f, g, p)(d) = \begin{cases} f(d), & \text{якщо } p(d) = \text{true}, \\ g(d), & \text{якщо } p(d) = \text{false}, \end{cases} \quad \text{де}$$

CS – формалізація умовної підстановки, $d \in S$, f і g – функції вигляду $f: S \rightarrow S$, $g: S \rightarrow S$ (формалізація відповідних підстановок з визначення), p – предикат вигляду $p: S \rightarrow \text{Bool}$. По суті умовна підстановка співпадає з композицією розгалуження $\delta(p, f, g)$, запропонованою в працях Редько В.Н.;

8) підстановка обмеженого вибору (bounded choice substitution) позначається в [1, с. 244] як $[S][T]R$, де S і T – підстановки, вибір між якими рівноцінний з огляду на досягнення в результаті виконання підстановки післяумови R . Має місце наступна формула: $[S][T]R \Leftrightarrow [S]R \wedge [T]R$. Формалізувати цю підстановку можна наступною рівністю $BCS(p, f, g)(d) = p(f(d)) \wedge p(g(d))$, де BCS – формалізація підстановки обмеженого вибору, $d \in S$, p – предикат вигляду $p: S \rightarrow \text{Bool}$ (формалізація післяумови R), f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки S з визначення), g – функція вигляду $g: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки T з визначення), $\wedge$ – кон'юнкція;

9) підстановка необмеженого вибору (unbounded choice substitution) позначається в [1, с. 252] як $[@z \cdot S]R$, де S – підстановка зі змінною z , R – післяумова виконання підстановки необмеженого вибору. Має місце наступна формула:

$$[@z \cdot S]R \Leftrightarrow \forall z. [S]R \quad (1)$$

Так задану підстановку можна формалізувати наступною рівністю $UCS^{[z]}(p, f, E)(d) = \bigwedge_{e \in E} p(f(d \nabla [z \mapsto e]))$, де UCS – підстановка необмеженого вибору, $d \in S$, E – множина значень, яких може набути змінна z в результаті виконання підстановки UCS , $E \subseteq W$, $\wedge$ – кон'юнкція, z – ім'я змінної, по якій відбувається підстановка, f – функція вигляду $f: S \rightarrow \text{Bool}$ (формалізація підстановки S з формули (1)), p – предикат вигляду $p: S \rightarrow \text{Bool}$ (формалізація післяумови R);

10) підстановка довільного елемента з множини (choice in a set): позначається в [1, с.

253] як $[x: E]R$, де x – ім'я змінної, E – множина можливих для проведення підстановки значень змінної x . Так задану підстановку можна формалізувати наступною рівністю: $CIS^{[x]}(p, E)(d) = \bigwedge_{e \in E} p(d \nabla [x \mapsto e])$, де CIS – формалізація підстановки довільного елемента з множини, $d \in S$, x – ім'я змінної, по якій відбувається підстановка, E – множина можливих значень змінної x , $E \subseteq W$, p – предикат вигляду $p: S \rightarrow \text{Bool}$ (формалізація післяумови R з визначення);

11) підстановка значення, що задовільняє предикат (choice by predicate), позначається в [1, с. 292] як $x: P$, де x – ім'я змінної, по якій відбувається підстановка, P – предикат, який задовільняють можливі для проведення підстановки значення x . Так задану підстановку можна формалізувати наступною рівністю: $CBP^{[x]}(r, p)(d) = \bigwedge_{e \in E} r(d \nabla [x \mapsto e])$, де CBP – формалізація підстановки значення, що задовільняє предикат, $d \in S$, E – множина можливих для проведенні підстановки значень змінної x , $E = \{e \mid e \in W \wedge p(e) = \text{true}\}$, p – предикат, по якому відбувається підстановка (формалізація предикату P з визначення), $p: S \rightarrow \text{Bool}$; r – предикат, в який має відбуватися підстановка, $r: S \rightarrow \text{Bool}$, $\wedge$ – кон'юнкція;

12) послідовна підстановка (sequencing substitution) позначається в [1, с. 374] як «;» і має місце наступна формула: $[S; T]R \Leftrightarrow [S][T]R$, де S і T – підстановки, R – післяумова. Так задану підстановку можна формалізувати наступною рівністю $SS(p, f, g)(d) = p(f(d \nabla g(d)))$, де $d \in S$, SS – формалізація послідовної підстановки, p – предикат вигляду $p: S \rightarrow \text{Bool}$ (формалізація предикату R з визначення), f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки S з визначення), g – функція вигляду $g: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки T з визначення);

13) підстановка циклу *WHILE* (while substitution) визначається в [1, с. 378] як *WHILE P DO S END* =

$= (P \Rightarrow S)^* ; (\neg P \Rightarrow \text{skip})$, яка складається зокрема з підстановки циклу T^* . Підстановка

циклу $T^\wedge$ визначається в [1, с. 378] як $T^\wedge = (T; T^\wedge)[\text{skip}]$. Базуючись на цих визначеннях, формалізацію підстановки циклу *WHILE* можна задати такою рівністю: $WS(f, p)(d) = f^n(d)$, де WS – формалізація підстановки циклу *WHILE*, f – функція вигляду $f: S \rightarrow S$ (формалізація підстановки S з визначення), p – предикат вигляду $p: S \rightarrow Bool$ (формалізація предикату P з визначення), $d \in S$, $n = \mu_m(p(f^n(d)) = F)$, де μ_m – операція мінімізації алгебри частково-рекурсивних функцій А. Чорча. Так формалізована підстановка циклу *WHILE* співпадає по суті з композицією

цикловання $\odot$, запропонованою в працях Редько В.Н.

Висновки

Запропонована в статті формалізація підстановок Бі-методу дозволяє більш виразно представити один з ключових інструментів задання специфікацій в рамках Бі-методу, що робить можливим проведення подальших його уточнень на єдиній композиційно-номінативній платформі.

Подальша робота

Формалізувати підстановки для інших видів формул, до яких вони можуть застосовуватися: числа, скінченні послідовності, скінченні дерева.

Список використаних джерел

1. Abrial J.-R. The B-book: assigning programs to meanings / J.-R. Abrial. – New York: Cambridge University Press, 1996. – 779 p.
2. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко. //

Проблемы программирования: 1999 – №1. – С. 16–31.

3. Редько В.Н. Композиционная структура программологии / В.Н. Редько. // Кибернетика и системный анализ: 1998 – № 4. – С. 47–66.

Надійшла до редколегії 19.10.10

УДК 517.91: 621.384.644

Харченко* І.І., к.т.н., доц.,
Геращенко А.П., студентка

Чисельно-аналітичні розв'язки деяких матричних диференціальних рівнянь

Для матричних диференціальних рівнянь розглянута задача Коші. Показано, що для знаходження чисельно-аналітичних розв'язків лінійних матричних диференціальних рівнянь доцільно користуватися введеною формулою типу Коші. Розглянуто випадок, коли квадратичні матричні диференціальні рівняння спеціальною заміною зводяться до лінійних.

Ключові слова: матричні диференціальні рівняння, чисельний аналіз, задача Коші

*E-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

Статтю представив проф., д.т.н. Геращенко Ф.Г.

Задача вивчення реальних об'єктів (процесів) полягає у виявленні їх властивостей, розумінні прогнозування поведінки та оптимального керування ними. Дослідження таких задач суттєво спрощується, якщо замість самих об'єктів або процесів розглядати їх спеціальні математичні моделі. У задачах прикладного характеру досить часто виникає необхідність урахування елементів невизначеності характеристик об'єкта, який досліджується. Одним з підходів до розв'язування таких задач полягає в тому, що при відсутності точної інформації про початковий стан системи слід розглядати певну множину, з якої можуть вибиратися початкові значення. Тоді динаміка такої системи може бути описана множиною її початкових станів.

У задачах оптимізації зазначених систем функціонал якості може бути заданий як функція максимуму за початковими даними.

Урахування невизначеності можна здійснювати за допомогою матричного диференціального рівняння Ляпунова з відповідними початковими умовами [1].

Необхідно зауважити, що отримані результати можуть бути використані при формулюванні ефективних критеріїв для аналізу задач практичної стійкості [2]. Раніше такий підхід використовувався в задачах керування пучками траєкторій у різноманітних приладах надвисоких частот, таких як лінійні резонансні прискорювачі іонів, електростатичні прискорювачі, системи

I. I. Kharchenko*, Ph.D. (Technics),
A. P. Gerashchenko, student

Numerically analytical solutions of some matrix differential equations

It is considered Cauchy's problem for matrix differential equations. It is shown that for finding numerically analytical solutions of linear matrix differential equations it is expediently to use the shown out Cauchy's type formula. Quadratic matrix differential equations by special replacement are taken to linear.

Key Words: matrix differential equations, numerical analysis, Cauchy's problem.

відбору потужності, багаторезонаторні клістриони тощо. Актуальність таких досліджень викликана тим, що сьогодні прискорювачі заряджених частинок знаходять широке застосування, як при виконанні фундаментальних досліджень, так і для розв'язування прикладних задач, у тому числі в різноманітних технологічних процесах, медицині, митній справі та ін. Подальші дослідження виявили можливість застосування чисельно-аналітичного методу розв'язування матричних диференціальних рівнянь при моделюванні, аналізі й оцінці ситуацій в економіці та екології. Створене програмне забезпечення може бути корисним для дослідження динаміки пучків траєкторій у задачах широкого змісту.

Розглянемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C(t) \quad (1)$$

з початковими умовами

$$X(t_0) = D = (d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}) \quad (2)$$

Співвідношеннями (1), (2) задається задача Коші для матричного диференціального рівняння.

Тут $X(t) = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ – матриця, яка визначає фазовий стан нашого об'єкта, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця розмірності $n \times n$ з неперервними елементами.

$C(t) = (c^{(1)}(t), c^{(2)}(t), \dots, c^{(n)}(t))$ – відома матриця, $x^{(i)}, d^{(i)}, c^{(i)}(t)$ – n -вимірні вектори для будь-яких $i = 1, 2, \dots, n$.

Матричну задачу Коші (1), (2) можна представити в такій формі

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = A(t)x^{(i)} + c^{(i)}(t),$$

$$x^{(i)}(t_0) = d^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Розв'язок кожної з задач Коші (3) можна записати у вигляді

$$x^{(i)}(t) = Y(t, t_0)d^{(i)} + \int_{t_0}^t Y(t, \tau)c^{(i)}(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

де $Y(t, \tau)$ – нормована за моментом τ фундаментальна матриця, яка задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0, t_0) = E. \quad (5)$$

Використовуючи (4), розв'язок задачі Коші (1), (2) можна записати в матричній формі

Теорема 1. Розв'язок матричної задачі Коші (1), (2) можна записати в такому вигляді

$$X(t) = Y(t, t_0)D + \int_{t_0}^t Y(t, \tau)C(\tau)d\tau. \quad (6)$$

У багатьох прикладних задачах [2-4] для їх розв'язування використовується матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XA^T(t) \quad (7)$$

з початковими умовами

$$X(t_0) = X^{(0)}. \quad (8)$$

Теорема 2. Розв'язок матричного диференціального рівняння (7) з початковими умовами (8) можна записати таким чином

$$X(t) = Y(t)X^{(0)}Y^T(t), \quad (9)$$

де $Y(t)$ – відповідний розв'язок матричної задачі Коші

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = E. \quad (10)$$

Доведення. Продиференціюємо (9) та використаємо (10)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dY(t)}{dt} X^{(0)} Y^T(t) + Y(t) X^{(0)} \frac{dY^T(t)}{dt} = \\ &= A(t)Y(t)X^{(0)}Y^T(t) + Y(t)X^{(0)}Y^T(t)A^T(t) = \\ &= A(t)X + XA^T(t). \end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що співвідношення (9) задовольняє матричне диференціальне рівняння (7)

Оскільки $Y(t_0) = E$, то для виразу (9) початкові умови (8) теж виконуються. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо матриця $A(t)$ є матрицею з постійними коефіцієнтами, то формули (6) та (9) можна записати через матричну експоненту $e^{A(t-\tau)}$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}D + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}C(\tau)d\tau \quad (11)$$

та

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X^{(0)}e^{A^T(t-t_0)} \quad (12)$$

відповідно.

Розглянемо неоднорідне матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XA^T(t) + G(t). \quad (13)$$

Оскільки воно є своєрідною формою системи скалярних диференціальних рівнянь, то справедливим є таке твердження.

Теорема 3. Якщо $Y(t)$ задовольняє (10), то розв'язок задачі Коші (13), (8) можна представити в такому вигляді

$$X(t) = Y(t) \left[X^{(0)} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)G(\tau)Y^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right] Y^T(t). \quad (14)$$

Доведення. Дійсно, умова (8) виконується – це очевидний факт. Безпосередньою підстановкою покажемо, що (14) задовольняє матричне диференціальне рівняння (13)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dY(t)}{dt} \left[X^{(0)} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)G(\tau)Y^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right] \times \\ &\times Y^T(t) + Y(t) \left[X^{(0)} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)G(\tau)Y^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{dY^T(t)}{dt} + Y(t) \cdot Y^{-1}(t)G(t)Y^{T^{-1}}(t)Y^T(t) =$$

$$= A(t)Y^T(t) \left[X^{(0)} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)G(\tau)Y^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right] \times$$

$$\times Y^T(t) + \left[X^{(0)} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)G(\tau)Y^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right] \times$$

$$\times Y^T(t) + G(t) = A(t)X + XA^T(t) + G(t).$$

Теорему доведено.

У багатьох задачах керування, оцінки якості функціонування об'єктів та оптимізації приходимо до необхідності дослідження такого матричного диференціального рівняння

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XA^T(t) + XG(t)X \quad (15)$$

з початковими умовами (8).

Покажемо, що заміною

$$Z = X^{-1} \quad (16)$$

матричне диференціальне рівняння (14) зводиться до рівняння типу (13). При цьому в прикладних задачах, як правило, матриця є симетричною, додатно визначеною, а, отже, вона має обернену.

Дійсно, враховуючи співвідношення

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1} \frac{dX}{dt} X^{-1} \quad (17)$$

матричне диференціальне рівняння (15) запишемо в такому вигляді

$$\frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1}A(t) - A^T(t)X^{-1} - G(t).$$

Отже

$$\frac{dZ}{dt} = -ZA(t) - A^T(t)Z - G(t). \quad (18)$$

Виходячи з вигляду матричного диференціального рівняння (18) та використовуючи теорему 3, можна сформулювати та довести таке твердження, за допомогою якого знаходяться розв'язки задачі Коші (15), (8).

Терема 4. Якщо матриця $R(t)$ є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{dR}{dt} = -A^T(t)R, \quad R(t_0) = E, \quad (19)$$

то розв'язок задачі Коші (15), (8) можна подати в такому вигляді

$$Z(t) = X^{-1}(t) = R(t) \left[X^{(0)^{-1}} - \int_{t_0}^t R^{-1}(\tau)G(\tau)R^{T^{-1}}(\tau)d\tau \right] R^T(t). \quad (20)$$

Дійсно, покладаючи у співвідношенні (20) $t = t_0$, бачимо, що початкові умови $Z(t_0) = X^{(0)^{-1}}$ виконуються.

Перевірити, що вираз (20) є розв'язком матричного диференціального рівняння (18), можна за аналогією з доведенням теореми 3 безпосередньою підстановкою.

Запропонований у роботі чисельно-аналітичний метод розв'язування задачі Коші для

матричних диференціальних рівнянь може бути застосований для математичних моделей в алгоритмах, які придатні для розрахунку оптимальних параметрів у прискорюючих структурах.

Прикладний аспект використання викладеної методики зумовлений тим, що лінійні прискорювачі отримали сьогодні широке застосування. Такі прилади часто використовують в якості інжектора для прискорювачів на високі енергії. Практично в усіх таких сучасних приладах у початковій частині використовується секція з просторово-однорідним квадрупольним фокусуванням. Ця структура здатна ефективно групувати та прискорювати низькоенергетичний пучок іонів.

При проектуванні лінійних прискорювачів найважливішу роль відіграють питання комп'ютерного моделювання та оптимізації динаміки пучків заряджених частинок в електромагнітних полях. Суттєвою особливістю оптимізації динаміки пучків іонів у прискорювачах є наявність великої кількості параметрів оптимізації. Урахування початкових умов при розрахунку динаміки пучка вимагає великих затрат часу. Тому актуальною є задача розробки таких чисельно-аналітичних методів, використання яких дозволило б підвищити швидкість обчислень. Для зменшення часу розрахунку поперечної динаміки пучка заряджених частинок використовуються лінійні рівняння для обвідної пучка. Для наближеного урахування внутрішнього кулонівського поля пучка також слід вибрати найбільш економічні математичні моделі. Так для визначення поздовжньої компоненти кулонівського поля застосовуються різноманітні модифікації методу «крупних» частинок, в тому числі різні дискові моделі.

Ось чому важливе значення має застосування чисельно-аналітичних методів для розрахунку поперечної динаміки пучка з використанням рівнянь радіального руху в аксіально симетричній моделі [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{d^2r}{d\xi^2} &= -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} r + \alpha \frac{dr}{d\xi} \right) \cos \varphi, \\ \xi &\in [0, T], \end{aligned} \quad (21)$$

де $\xi = \frac{z}{\lambda}$, $\alpha(\xi) = ze|\lambda E_z(\xi)|m_0c^2$ – амплітуда напруженості прискорюючого поля, T – безрозмірна довжина лінійного прискорювача, λ – довжині хвилі. Початкові умови для системи (21) вибрані з множини M_0 , тобто $\gamma(0), \varphi(0), r(0), \dot{r}(0) \in M_0$.

Розглянемо задачу оптимізації області захвату частинок у процес прискорення за радіальними складовими [3]. Згідно до співвідношень (21) рівняння руху можна записати у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\xi} &= f(\bar{x}, \xi, \alpha(\xi)), \\ \frac{d\bar{y}}{d\xi} &= A(\bar{x}, \xi, \alpha(\xi))\bar{y}, \quad \xi \in [0, T]. \end{aligned} \quad (22)$$

Тут $\bar{x}$ – вектор повздовжніх координат розмірності 2, $\bar{y}$ – вектор радіальних складових розмірності 2, $\alpha(\xi)$ – відповідна функція керування. На фазові координати, які відповідають радіальним складовим пучка частинок, накладемо обмеження такого вигляду

$$\bar{y} \in G_\xi = \left\{ y : |l_k^T(\xi)y| \leq 1, l_k(\xi) \in R^2, \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, N \right\}, \\ \xi \in [0, T].$$

Для повздовжньої координати $\bar{x}$ початкові умови вибираються із замкнутої обмеженої множини M_0 , а для вектора $\bar{y}$ визначається множина $G_0 = \{y : y^T B y \leq c^2\}$ захвату частинок у процес прискорення, де B – симетрична додатно визначена матриця розмірності 2×2 . Як показано в [2] задача про стійкість на скінченному інтервалі часу співпадає з основною задачею прискорювальної техніки – визначення захвату частинок у процес прискорювання при заданих параметрах прискорювача.

Для оцінки області захвату використовувалося матричне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\xi, \alpha(\xi), \bar{x}(0))}{d\xi} &= -A^T(\bar{x}(\xi, \bar{x}(0)), \xi, \alpha(\xi)) \times \\ &\times Q(\xi, \alpha(\xi), \bar{x}(0)) - Q(\xi, \alpha(\xi), \bar{x}(0)) \times \\ &\times A(\bar{x}(\xi, \bar{x}(0)), \xi, \alpha(\xi)), \\ Q(0, \alpha(\xi), \bar{x}(0)) &= B, \quad \xi \in [0, T], \end{aligned}$$

де матриця Q розмірності 2×2 . Тоді відповідну модель для обвідної пучка доцільно записати у вигляді

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi) \cos \varphi(\xi),$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma(\xi)}{\sqrt{\gamma^2(\xi) - 1}},$$

$$\frac{d\bar{q}_{11}(\xi)}{d\xi^2} = 2\bar{q}_{12}(\xi),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_{12}(\xi)}{d\xi} &= \frac{\gamma(\xi)}{\gamma^2(\xi) - 1} \cos \varphi(\xi) \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha(\xi)}{d\xi} \bar{q}_{11}(\xi) - \right. \\ &\left. - \alpha(\xi) \bar{q}_{12}(\xi) \right] + \bar{q}_{22}(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_{22}(\xi)}{d\xi} &= \frac{\gamma(\xi)}{\gamma^2(\xi) - 1} \cos \varphi(\xi) \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha(\xi)}{d\xi} \bar{q}_{12}(\xi) - \right. \\ &\left. - 2\alpha(\xi) \bar{q}_{22}(\xi) \right], \\ \xi &\in [0, T]. \end{aligned}$$

З цих систем диференціальних рівнянь видно, що навіть при фіксованих повздовжніх координатах $\gamma(0), \varphi(0)$ даних для розрахунку динаміки пучка частинок потрібно інтегрувати систему з п'яти диференціальних рівнянь, а тому використання запропонованої у роботі методики є доцільним. Саме такий підхід при розрахунках обвідних пучка траєкторій дозволив суттєво скоротити (на два-три порядки) витрати часу.

Зазначимо, що подібні задачі виникають також при моделюванні та оцінці ситуацій в умовах невизначеності при дослідженні динамічних задач в економіці [5].

Список використаних джерел

1. Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Г., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 352 с.
2. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: «Наук. думка», 1985. – 304 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Волошин О.Ф., Кириченко М.Ф. та інші. Розвиток методів

і технологій моделювання та оптимізації складних систем. – К.: «Сталь», 2009. – 668 с.

4. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінка та оптимізація. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 383 с.
5. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: «Вища школа», 1999. – 236 с.

Надійшла до редколегії 29.11.2010

УДК 517.929.4

Шатирко А.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

Про один оптимізаційний підхід дослідження задач абсолютної стійкості

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу побудови оптимальної функції Ляпунова виду Лур'є-Постнікова, яка дає можливість встановити умови абсолютної стійкості дискретних нелінійних систем регулювання.

Ключові слова: оптимальна функція Ляпунова, абсолютна стійкість, дискретні нелінійні системи регулювання.

E-mail: a_shatyrko@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Резюме

При дослідженні динаміки систем різноманітного виду достатньо часто використовується другий метод Ляпунова, причому в різних його модифікаціях. Основні формулювання тверджень кажуть про наступне, якщо існує функція з необхідними властивостями, то нульовий розв'язок системи стійкий (асимптотично стійкий). Доведено, що основні теореми Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість носять необхідний і достатній характер. Або, якщо нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий, то відповідна функція існує. Але центральною і нерозв'язною проблемою залишається фактично побудова необхідної функції. У своєму сенсі «найкраща» функція Ляпунова являє собою інтеграл системи (К.П.Персидський). Тому, в якомусь сенсі, знаходження найкращої функції Ляпунова подібно до задачі знаходження інтеграла системи. Задача спрощується, якщо функція відшукується в наперед параметрично заданому класі функцій, наприклад в класі квадратичних функцій. В цьому випадку задачу знаходження «найкращої» функції Ляпунова можна звести до задачі випуклого програмування.

Як було відмічено багатьма авторами, вдало побудована функція Ляпунова дозволяє не тільки надати умови стійкості конкретної системи, але й отримати деякі якісні характеристики динаміки функціонування

A.V.Shatyrko, PhD in Math.

On one optimization approach of absolute stability problem investigation

Construction problem of optimal Lyapunov function of Lurie-Postnikov type is considered. This function gives us possibility to state absolute stability conditions of discrete nonlinear regulator systems.

Key Words: optimal Lyapunov function, absolute stability, discrete nonlinear regulator systems.

системи (величину пере регулювання, час перехідного процесу різні інтегральні характеристики). Причому отримана оцінка буде суттєво залежати від обраної функції Ляпунова. Так виникло поняття «оптимальної функції Ляпунова» [1–11]. Задачі дослідження стійкості в цілому нульового положення рівноваги нелінійних систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі отримали назву задач абсолютної стійкості [12–14]. При дослідженні абсолютної стійкості систем регулювання історично розвиток отримали два підходи. Один з них, отримав назву «частотний метод» [14–16]. Другим є метод функцій Ляпунова з специфічною функцією виду квадратичної складової та інтеграла від нелінійної характеристики [12, 13]. Початково розглядалися системи, що описані звичайними диференціальними рівняннями. Останнім часом отримало розвиток дослідження задач абсолютної стійкості систем, що описані, різницевиими системами, диференціальними системами з запізнюванням аргументу та різницевиими системами з запізнюванням аргументу [16–19].

1. Побудова функції Ляпунова для скалярних рівнянь

Розглянемо скалярне рівняння

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bf(\sigma(k)), \quad \sigma(k) = cx(k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Нелінійна частина якого є неперервною функцією $f(\sigma)$, що задовольняє умовам «сектора»

$$[M\sigma - f(\sigma)]f(\sigma) > 0. \quad (1.2)$$

Крім того на нелінійну функцію $f(\sigma)$ накладено додаткові обмеження. А саме, вважається, що існують сталі L_1, L_2 , такі, що для довільного Δ виконується нерівність

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi) d\xi \leq L_1 f(\sigma) \Delta\sigma + \frac{1}{2} L_2 (\Delta\sigma)^2. \quad (1.3)$$

Система регулювання (1.1) називається абсолютно стійкою, якщо її нульовий розв'язок асимптотично стійкий в цілому для довільної функції $f(\sigma)$, що задовольняє нерівності (1.2).

Для дослідження абсолютної стійкості будемо використовувати метод функцій Ляпунова. Функцію Ляпунова вибираємо у вигляді суми квадратичної частини та інтеграла від нелінійності

$$V(x) = x^2 + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = cx, \quad (1.4)$$

де $\beta > 0$ деякий параметр. Можна показати, що для абсолютної стійкості системи регулювання (1.1) достатньо, щоб існували сталі β і ν , при яких матриця $C(\beta, \nu) = C_1 + \beta C_2 + \nu C_3$, де

$$C_1 = \begin{bmatrix} (1-a^2) & -ab \\ -ab & -b^2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c & \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -L_1(a-1)^2 c^2 & -(L_1 + L_2 bc)(a-1)c \\ -(L_1 + L_2 bc)(a-1)c & -bc(2L_1 + L_2 bc) \end{bmatrix}$$

була додатно визначеною [19]. Таким чином задача дослідження абсолютної стійкості системи регулювання (1.1) з використанням функції Ляпунова (1.3) зводиться до знаходження параметрів $\beta \geq 0, \nu \geq 0$, при яких матриця $C(\beta, \nu)$ є «як можна більш додатно визначеною». А оскільки матриця симетрична, то це зводиться до знаходження величин $\beta \geq 0, \nu \geq 0$, при яких мінімальне власне число матриці $C(\beta, \nu)$ є максимальним. Перепишемо матрицю $C(\beta, \nu)$ у вигляді

$$C(\beta, \nu) = \begin{bmatrix} c_{11}^1 + \beta c_{11}^2 & c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3 \\ c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3 & c_{22}^1 + \beta c_{22}^2 + \nu c_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} c_{11}^1 + \beta c_{11}^2 - \lambda & c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3 \\ c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3 & c_{22}^1 + \beta c_{22}^2 + \nu c_{22}^3 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - [(c_{11}^1 + c_{22}^1) + \beta(c_{11}^2 + c_{22}^2) + \nu c_{22}^3] \lambda +$$

$$+ (c_{11}^1 + \beta c_{11}^2)(c_{22}^1 + \beta c_{22}^2 + \nu c_{22}^3) -$$

$$- (c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3)^2 = 0.$$

Позначимо

$$\sigma(\beta, \nu) = [(c_{11}^1 + c_{22}^1) + \beta(c_{11}^2 + c_{22}^2) + \nu c_{22}^3],$$

$$\Delta(\beta, \nu) = (c_{11}^1 + \beta c_{11}^2)(c_{22}^1 + \beta c_{22}^2 + \nu c_{22}^3) -$$

$$- (c_{12}^1 + \beta c_{12}^2 + \nu c_{12}^3)^2.$$

Тоді характеристичне рівняння переписеться

$$\lambda^2 - \sigma(\beta, \nu)\lambda + \Delta(\beta, \nu) = 0.$$

Умови додатної визначеності матриці $C(\beta, \nu)$ мають вид

$$c_{11}^1 + \beta c_{11}^2 > 0, \quad \Delta(\beta, \nu) > 0.$$

Мінімальне власне число матриці $C(\beta, \nu)$ дорівнює

$$\lambda_{\min}[C(\beta, \nu)] = \frac{1}{2} [\sigma(\beta, \nu) - \sqrt{\sigma^2(\beta, \nu) - 4\Delta(\beta, \nu)}]$$

Для знаходження необхідних умов оптимальності необхідно розв'язати систему

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_{\min}[C(\beta, \nu)] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \sigma(\beta, \nu) -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2(\beta, \nu) - 4\Delta(\beta, \nu)}} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sigma(\beta, \nu) - 4 \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta(\beta, \nu) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \lambda_{\min}[C(\beta, \nu)] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} \sigma(\beta, \nu) -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2(\beta, \nu) - 4\Delta(\beta, \nu)}} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \sigma(\beta, \nu) - 4 \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta(\beta, \nu) \right] = 0$$

Отриману систему нелінійних рівнянь традиційними алгебраїчними методами розв'язати й отримати умови екстремуму в аналітичному вигляді не вдається. Застосовуються чисельні методи. Розглядається градієнтний метод найшвидшого спуску. Основна ідея методу полягає в тому, щоб ітераційна процедура рухалася в напрямку найшвидшого спуску, який задається антиградієнтом

$$-\nabla \lambda_{\min}[C(\beta, \nu)] =$$

$$= \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_{\min}[C(\beta, \nu)], -\frac{\partial}{\partial \nu} \lambda_{\min}[C(\beta, \nu)] \right\}$$

Тобто розглядається

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \beta_i - \rho_i \frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_{\min}[C(\beta_i, \nu_i)] \\ \nu_{i+1} = \nu_i - \rho_i \frac{\partial}{\partial \nu} \lambda_{\min}[C(\beta_i, \nu_i)] \end{cases}$$

Крок градієнтного спуску обирається з умови

$$\rho_i = \arg \min \left\{ \lambda_{\min} \left[\beta_i - \rho_i \frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_{\min}[C(\beta_i, \nu_i)], \right. \right.$$

$$\left. \left. \nu_i - \rho_i \frac{\partial}{\partial \nu} \lambda_{\min}[C(\beta_i, \nu_i)] \right] \right\}$$

Доведено, що при $\rho_i \rightarrow 0$ ітераційна процедура збігається.

2. Побудова оптимальної функції Ляпунова для систем рівнянь

Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь загального виду

$$x(k+1) = Ax(k) + bf(\sigma(k)), \quad \sigma(k) = c^T x(k),$$

$$x(k) \in R^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

нелінійна частина $f(\sigma)$ якої є неперервною функцією, що задовольняє умовам «сектора» (1.2) і додатковому обмеженню (1.3). При дослідженні абсолютної стійкості будемо використовувати вже функцію

$$V(x) = x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi,$$

$$\beta > 0, \sigma(x) = c^T x, \quad (2.2)$$

де H – симетрична, додатно визначена матриця.

Позначимо

$$C_4(H) = \begin{bmatrix} H - A^T H A & -A^T H b \\ -b^T H A & -b^T H b \end{bmatrix},$$

$$C_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_5^{11} & c_5^{12} \\ c_5^{21} & c_5^{22} \end{bmatrix}, C_6 = \begin{bmatrix} \Theta & -\frac{1}{2} c \\ -\frac{1}{2} c^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

$$c_5^{11} = -L_1 (A - I)^T c c^T (A - I),$$

$$c_5^{12} = -[L_1 + L_2 (b^T c)] (A - I)^T c,$$

$$c_5^{21} = -[L_1 + L_2 (b^T c)] c^T (A - I),$$

$$c_5^{22} = -(b^T c) [2L_1 + L_2 (b^T c)],$$

Θ – нуль матриця.

Аналогічно попередньому, можна довести, що якщо знайдеться додатно визначена матриця H і сталі β і ν , при яких матриця $C(H, \beta, \nu) = C_4(H) + \beta C_5 + \nu C_6$ буде додатно визначеною, то система (2.1) буде абсолютно стійкою [19]. Нажаль, аналітично отримати значення мінімального власного числа матриці $C(H, \beta, \nu)$, як і в попередньому випадку, не вдається.

Розглянемо задачу отримання гарантованої умови стійкості в обраному класі функцій (2.2), тобто знаходження додатно напіввизначеної матриці H^0 і величин $\beta^0 \geq 0$, $\nu^0 \geq 0$, при яких матриця $C(H^0, \beta^0, \nu^0)$ «максимально додатно визначена». Відповідно функцію Ляпунова будемо називати оптимальною в класі функцій виду (2.2). При отриманні результатів будуть використовуватися класичні методи динамічного програмування [20-22]. Будемо розглядати оптимізаційну задачу на множині трійок

$$\Xi = \{(H, \beta, \nu) : H \geq 0, \beta \geq 0, \nu \geq 0\},$$

де під $H \geq 0$ будемо розуміти додатну напіввизначеність матриць H . Оберемо в якості норми

$$|(H, \beta, \nu)| = \sqrt{|H|^2 + \beta^2 + \nu^2},$$

$$|H| = \left\{ \lambda_{\max}^2(HH^T) \right\}^{1/2}.$$

Тут і надалі будемо позначати через $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – екстремальні власні числа відповідних симетричних, додатно визначених матриць.

Як відомо, симетрична матриця $C(H, \beta, \nu)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}[C(H, \beta, \nu)] > 0$. І задачу знаходження гарантованої умови абсолютної стійкості системи (2.1) в класі функцій (2.2) можна розглядати як оптимізаційну задачу

$$\varphi_0(H, \beta, \nu) \rightarrow \min_{(H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}} \quad (2.3)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) &\geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad h \geq 0, \\ \lambda_{\max}^2(H) + \beta^2 + \nu^2 - 1 &\leq 0, \\ \varphi_0(H, \beta, \nu) &= -\lambda_{\min}[C(H, \beta, \nu)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нескладно бачити, що таким чином визначений простір $\mathfrak{Z}$ є опуклим конусом. І, якщо оптимізаційна задача (2.3), (2.4) буде мати розв'язком трійку (H^0, β^0, ν^0) і для неї буде виконуватися

$$\varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) < 0,$$

тоді система регулювання (2.1) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) > 0,$$

тоді задача дослідження абсолютної стійкості в класі функцій виду (2.2) за рахунок вибору параметрів H, β, ν розв'язку не має.

Позначимо через $\mathfrak{Z}_1$ підмножину $\mathfrak{Z}$, що складається з трійок (H, β, ν) , що лежать всередині одиничної сфери, тобто, що задовольняють умові (2.4).

Лема 2.1. Задача оптимізації (2.3), (2.4) має розв'язок.

Доведення. Множина додатно напіввизначених матриць є опуклим конусом. Тому $\mathfrak{Z}$ є множиною трійок, що складаються з додатно напіввизначеної матриці та двох невід'ємних чисел. І, таким чином, являє опуклий конус з центром, що складається з трійки нульової матриці та двох нульових чисел. А множина $\mathfrak{Z}_1$ є перетином одиничного шару й замкнутого конусу. Й, отже, є компактною множиною. Функція $\varphi_0(H, \beta, \nu)$, як власне число симетричної матриці, є неперервною функцією й, отже, за теоремою Вейерштраса досягає свого мінімального значення.

Розв'язок задач оптимізації значно спрощується, якщо функції й області їх

визначення є опуклими. В цьому випадку вдається сформулювати необхідні і достатні умови оптимальності. Причому, якщо функції неперервно диференційовні, то умови формулюються в термінах похідних, інакше в термінах узагальнених похідних.

Лема 2.2. Функція $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ на множині $\mathfrak{Z}_1$ є опуклою.

Доведення. Оскільки матриця $C(H, \beta, \nu)$ за змінними (H, β, ν) є лінійним оператором, а мінімальне власне число додатно визначеної матриці є ввігнутою функцією, то для двох довільних трійок $(H^1, \beta^1, \nu^1), (H^2, \beta^2, \nu^2)$ і будь якого $0 \leq \xi \leq 1$ буде виконуватися

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\xi H^1 + (1 - \xi)H^2, \xi \beta^1 + \\ &+ (1 - \xi)\beta^2, \xi \nu^1 + (1 - \xi)\nu^2) = \\ &= -\lambda_{\min}[\xi C(H^1, \beta^1, \nu^1) + (1 - \xi)C(H^2, \beta^2, \nu^2)] \leq \\ &\leq -\xi \lambda_{\min}[C(H^1, \beta^1, \nu^1)] - \\ &- (1 - \xi) \lambda_{\min}[C(H^2, \beta^2, \nu^2)] = \\ &= \xi \varphi_0(H^1, \beta^1, \nu^1) + (1 - \xi) \varphi_0(H^2, \beta^2, \nu^2) \end{aligned}$$

Що й необхідно було довести.

Таким чином задача (2.3), (2.4) є задачею опуклої оптимізації. Екстремальні власні числа симетричних додатно визначених матриць є кусково неперервно диференційованими функціями. Тому умови існування розв'язку формулюються в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.1. Скалярним добутком двох трійок (H^1, β^1, ν^1) і (H^2, β^2, ν^2) назовемо величину

$$\begin{aligned} &\langle (H^1, \beta^1, \nu^1), (H^2, \beta^2, \nu^2) \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^1 h_{ij}^2 + \beta^1 \beta^2 + \nu^1 \nu^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Означення 2.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ в внутрішній точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in \mathfrak{Z}_1$ назовемо трійку (E_0, F_0, K_0) , для якої, при будь яких $(H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1$ буде виконуватися

$$\begin{aligned} &\varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) \geq \\ &\geq \langle (E_0, F_0, K_0), (H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Екстремальні власні числа симетричних додатно напіввизначених матриць є кусково

неперервно диференційованими функціями. Тому в точці (H^0, β^0, ν^0) може існувати не один вектор, а ціла множина, яка задовольняє умові (2.6).

Означення 2.3. Градієнтною множиною $R_\varphi\{E, F, K\}$ функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ в внутрішній точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in \mathfrak{I}_1$ будемо називати множину векторів виду (E_0, F_0, K_0) , що задовольняють нерівність (2.6).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\varphi_0(H, \beta, \nu) = -\lambda_{\min}[C(H, \beta, \nu)]$$

Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\varphi_0(H, \beta, \nu) = -\lambda_{\min}[C(H, \beta, \nu)]$$

в внутрішній точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in \mathfrak{I}_1$ є трійка (E_0, F_0, K_0) , що має наступний вигляд

$$\begin{aligned} E_0 &= \{e_{ij}^0\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad e_{ij}^0 = z_0^T \Delta_{ij} z_0, \quad F_0 = z_0^T C_3 z_0, \\ K_0 &= z_0^T C_6 z_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тут z_0 – одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C(H^0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу), Δ_{ij} – матриця, у якій на (i, j) – му місці стоїть одиниця, а інші елементи нульові.

Доведення. Мінімальне власне число симетричної додатної напіввизначеної матриці дорівнює мінімальному значенню квадратичної форми цієї матриці на одиничній сфері. Тому отримаємо наступне

$$\begin{aligned} \varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) &= -\lambda_{\min}[C(H, \beta, \nu)] + \\ &+ \lambda_{\min}[C(H^0, \beta^0, \nu^0)] = \\ &= -\min_{|z|=1} z^T C(H, \beta, \nu) z + \min_{|z|=1} z^T C(H^0, \beta^0, \nu^0) z. \end{aligned}$$

Нехай квадратична форма $z^T C(H, \beta, \nu) z$ приймає мінімальне значення на векторі $z = z_1$, а квадратична форма $z^T C(H^0, \beta^0, \nu^0) z$ на векторі z_0 . Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) &= -z_1^T C(H, \beta, \nu) z_1 + \\ &+ z_0^T C(H^0, \beta^0, \nu^0) z_0 = \\ &= z_0^T [C(H^0, \beta^0, \nu^0) - C(H, \beta, \nu)] z_0 + \\ &+ z_0^T C(H, \beta, \nu) z_0 - z_1^T C(H, \beta, \nu) z_1. \end{aligned}$$

Оскільки квадратична форма $z^T C(H, \beta, \nu) z$ приймає мінімальне значення на векторі z_1 , то

$$z_0^T C(H, \beta, \nu) z_0 - z_1^T C(H, \beta, \nu) z_1 \geq 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) &\geq \\ &\geq z_0^T [C(H^0, \beta^0, \nu^0) - C(H, \beta, \nu)] z_0. \end{aligned}$$

Довільну матрицю $H = \{h_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ можна представити у вигляді

$$H = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \Delta_{ij},$$

де Δ_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ матриця, у якій на (i, j) – місці стоїть одиниця, а інші елементи нульові. Тоді отримаємо

$$C(H^0, \beta^0, \nu^0) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^0 \Delta_{ij} + \beta^0 C_3 + \nu^0 C_6,$$

$$C(H, \beta, \nu) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \Delta_{ij} + \beta C_3 + \nu C_6,$$

$$\begin{aligned} C(H, \beta, \nu) - C(H^0, \beta^0, \nu^0) &= \\ &= \sum_{i,j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} + (\beta - \beta^0) C_3 + (\nu - \nu^0) C_6. \end{aligned}$$

Тому, використовуючи позначення (2.7), отримаємо наступне співвідношення

$$\begin{aligned} \varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) &\geq \\ &\geq \sum_{i,j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) e_{ij}^0 + (\beta^0 - \beta) F_0 + (\nu^0 - \nu) K_0 \end{aligned}$$

З означення 2.1 скалярного добутку векторів витікає

$$\begin{aligned} \varphi_0(G_1, G_2, H) - \varphi_0(G_1^0, G_2^0, H^0) &\geq \\ &\geq \langle (E_0, F_0, K_0), (H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0) \rangle, \end{aligned}$$

що й необхідно було довести.

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнту, й опуклості множини

$\mathfrak{Z}_1$, умови оптимальності задачі (2.3), (2.4) можна сформулювати наступним чином [20].

Теорема 2.2. Щоб функція $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in \mathfrak{Z}_1$ необхідно й достатньо, щоб для довільної точки $(H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1$ виконувалася умова

$$\langle (E_0, F_0, K_0), (H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0) \rangle \geq 0 \quad (2.8)$$

Причому точка (H^0, β^0, ν^0) задовольняла граничній умові

$$\sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^0)^2 + (\beta^0)^2 + (\nu^0)^2 = 1.$$

Необхідність. Як витікає з тверджень наведених вище лем, функція $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ є опуклою, $\mathfrak{Z}_1$ – опуклий конус додатного октанта $H > 0, \beta > 0, \nu > 0$, що лежить всередині одиничної сфери. Нехай $(g_1^0, g_2^0, h^0) \in \mathfrak{Z}_1$ точка, в якій функція $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ приймає мінімальне значення і

$$\min_{(H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1} \{\varphi_0(H, \beta, \nu)\} = \varphi_0^*.$$

Розглянемо множину $\aleph$ четвірок

$$\aleph = \{(H, \beta, \nu, \gamma) : (H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1, -\infty < \gamma < +\infty\}.$$

Побудуємо в ній дві підмножини

$$\aleph_1 = \{(H, \beta, \nu, \gamma) :$$

$$(H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1, \gamma \geq \varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0^*\},$$

$$\aleph_2 = \{(H, \beta, \nu, \gamma) : (H, \beta, \nu) \in \mathfrak{Z}_1, \gamma < 0\}.$$

З побудови витікає, що вони не мають спільних точок. Крім того, в силу опуклості функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$, підмножини $\aleph_1$ і $\aleph_2$ є опуклими. Тому існує гіперплощина

$$\langle (E, f, k), (H, \beta, \nu) \rangle + \varsigma \gamma = 0$$

з нормальми (E, f, k) і ς , яка розділяє множини $\aleph_1$ і $\aleph_2$. І для довільних точок

$$(H, \beta, \nu, \gamma) \in \aleph_1 \text{ і } (H^*, \beta^*, \nu^*, \gamma^*) \in \aleph_2$$

і екстремальної точки $(H^0, \beta^0, \nu^0, 0)$ буде виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} & \langle (E, f, k), (H, \beta, \nu) \rangle + \varsigma \gamma \geq \\ & \geq \langle (E, f, k), (H^0, \beta^0, \nu^0) \rangle \geq \\ & \geq \langle (E, f, k), (H^*, \beta^*, \nu^*) \rangle + \varsigma \gamma^*. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Визначимо знак скаляра ς . Для цього розглянемо праву нерівність при $(H^*, \beta^*, \nu^*, \gamma^*) = (H^0, \beta^0, \nu^0, -1)$. Отримаємо $\langle (E, f, k), (H^0, \beta^0, \nu^0) \rangle \geq \langle (E, f, k), (H^0, \beta^0, \nu^0) \rangle - \varsigma$. Таким чином $\varsigma \geq 0$. Покажемо, що $\varsigma > 0$. Нехай, від зворотного, $\varsigma = 0$. Тоді, поклавши в лівій частині нерівності (2.9)

$$\begin{aligned} (H, \beta, \nu) &= (g_1^0, g_2^0, h^0) + \varepsilon(e, f, k), \quad \varepsilon < 0 \\ \text{і } \gamma &> \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0^* \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \langle (e, f, k), (g_1^0, g_2^0, h^0) + \varepsilon(e, f, k) \rangle \geq \\ & \geq \langle (e, f, k), (g_1^0, g_2^0, h^0) \rangle, \end{aligned}$$

або

$$\varepsilon |(e, f, k)|^2 \geq 0.$$

Але оскільки $\varepsilon < 0$, то це можливо тільки при $|(e, f, k)| = 0$. Таким чином припущення невірне і $\varsigma > 0$. Розділимо нерівності (2.9) на $\varsigma > 0$.

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{\varsigma} (e, f, k), (g_1, g_2, f) \right\rangle + \gamma \geq \\ & \geq \left\langle \frac{1}{\varsigma} (e, f, k), (g_1^0, g_2^0, h^0) \right\rangle \geq \\ & \geq \left\langle \frac{1}{\varsigma} (e, f, k), (g_1^*, g_2^*, h^*) \right\rangle + \gamma^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Звідси витікає, що при довільному γ , яке задовольняє

$$\gamma \geq \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0^*,$$

Ліва частина нерівності (2.10) повинна задовольняти співвідношенню

$$\gamma \geq \left\langle -\frac{1}{\varsigma} (e, f, k), (g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0) \right\rangle.$$

Покладемо

$$\gamma = \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0(g_1^0, g_2^0, h^0),$$

Й отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0(g_1^0, g_2^0, h^0) &\geq \\ &\geq \left\langle -\frac{1}{\zeta}(e, f, k), (g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0) \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким чином трійка $\left(-\frac{1}{\zeta}e, -\frac{1}{\zeta}f, -\frac{1}{\zeta}k\right)$, як
витікає з означення, є узагальненим
градієнтом. З теореми 2.1 отримуємо, що

$$\left(-\frac{1}{\zeta}e, -\frac{1}{\zeta}f, -\frac{1}{\zeta}k\right) = (E_0, F_0, K_0)$$

з елементами, що визначені в (2.7). Поклавши
в правій частині нерівності (2.9) $\gamma^* = 0$,
отримаємо

$$\begin{aligned} \langle (E_0, F_0, K_0), (H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0) \rangle &= \\ = \left\langle -\frac{1}{\zeta}(e, f, k), (H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0) \right\rangle. \end{aligned}$$

Що й доводить необхідність теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови
теореми і в точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in \mathfrak{Z}_1$ існує
узагальнений градієнт функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$, при
якому виконується нерівність

$$\langle (E_0, F_0, K_0), (H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0) \rangle \geq 0.$$

Але тоді, як витікає з визначення
узагальненого градієнта, виконується

$$\varphi_0(H, \beta, \nu) - \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0) \geq 0,$$

тобто

$$\varphi_0(H, \beta, \nu) \geq \varphi_0(H^0, \beta^0, \nu^0),$$

і точка (H^0, β^0, ν^0) є точкою мінімуму для
функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$.

Належність точки (H^0, β^0, ν^0) границі сфери
витікає з однорідності функції $\varphi_0(H, \beta, \nu)$ за
змінною (H, β, ν) й вигляду області $\mathfrak{Z}_1$.

Теорему доведено.

На основі отриманих результатів можна
сформулювати наступне твердження.

Теорема 2.3. Щоб система (2.1) була
абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця
 $C(H^0, \beta^0, \nu^0)$ була додатно визначеною.

Причому, якщо $C(H^0, \beta^0, \nu^0)$ не є додатно
визначеною, тоді за допомогою функції
Ляпунова виду (2.2) отримати твердження про
асимптотичну стійкість неможливо, тобто
функція

$$V_0(x) = x^T(t)H^0x(t) + \beta^0 \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma$$

є оптимальною в даному класі функцій.

Список використаних джерел

1. Хусаинов Д.Я. Об оптимизации оценивания времени переходного процесса в линейных системах с использованием функции Ляпунова.- В сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления, в.69, К.: Изд.-во Института кибернетики АН УССР, 1986.- С.33-37.
2. Жуйкова А.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки области изменения параметров в системах непрямого регулирования // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.6, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987.- С.93-97.
3. Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки времени переходного процесса в задачах регулирования.- В сб.: Вычислительная и прикладная математика, в.61, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987.- С.106-112.
4. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Оптимизация оценок начальных возмущений в линейных стохастических системах.- Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.7, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1988.- С.40-45.
5. Шатырко А.В. Оптимизационный подход построения функций Ляпунова вида Лурье-Постникова. - Междунар. мат. конф. «Ляпуновские чтения». Тез. докл., Харьков, 1992. - С.180-182.
6. Хусаинов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом// Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 1992. - С.27-33.
7. Бычков А.С., Лобок А.П., Нечаева И.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок устойчивости систем стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ, №4, 1992. - С.38-43.
8. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод исследования

- устойчивости линейных систем с запаздыванием // Кибернетика и системный анализ, N4, 1996. - С.88-93.
9. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод построения функционалов Ляпунова-Красовского в стационарных системах с запаздыванием. - В сб. Вычислительная и прикладная математика, в.80, 1996. - С.142-151.
10. Хусаинов Д.Я., Стадник О.И., Давыдов В.Ф. Оптимизация оценок характеристик динамических систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики, N1 (84), 1999, - С.128-136.
11. Ивохин Е.В., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок характеристик динамических систем. - Український математичний конгрес-2001. Динамічні системи. Секція 2. Тези доповідей, Київ, 2001. - С.8.
12. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. - М.-Л. Гостехиздат, 1951. - 251с.
13. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. - М., Изд.-во АН СССР, 1963. - 261с.
14. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. - С.5-36.
15. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. - М., Наука, 1982. - 256с.
16. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. - М., Наука, 1978. - 400с.
17. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. - Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. - 208с.
18. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. - Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. - 236с.
19. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Абсолютная устойчивость разностных систем с запаздыванием // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Вип.2, Київ, 2009. - С.95-107.
20. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М., Наука, 1988. - 552с.

21. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. - М., Наука, 1975. - 320с.
22. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. - Киев, Выща школа, 1975. - 372с.

Надійшла до редколегії 30.11.2010

УДК 517.9

Шушарін Ю.В.*

Ланцюги Маркова для неперервних випадкових величин

У роботі дано узагальнення ланцюга Маркова для неперервних випадкових величин, що можна застосувати для аналізу фінансових потоків при інвестиціях. Виведено функціональні та моментні різницеві рівняння, що визначають лінійні перетворення безперервних випадкових величин.

Ключові слова: ланцюги Маркова, моментні рівняння, система матричних рівнянь, стохастичні оператори.

*E-mail: Shusharin@meta.ua

Статтю представив д.ф.м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Поняття ланцюга Маркова зазвичай застосовують для дискретних випадкових величин. У роботі дано узагальнення ланцюга Маркова для неперервних випадкових величин, що можна застосувати для аналізу фінансових потоків при інвестиціях. Виведено функціональні та моментні різницеві рівняння, що визначають лінійні перетворення безперервних випадкових величин.

1. Стохастичні оператори.

Система випадкових величин $(X_1, \dots, X_m)$ повністю визначається щільністю розподілу – функцією $f(X) = f(x_1, \dots, x_m)$, такою, що виконані умови:

$$f(X) \geq 0, \int_{E_m} f(X) dX = 1 \quad (1)$$

де $X = (x_1, \dots, x_m)^*$, $dX = dx_1 \dots dx_m$, E_m – m-мірний фазовий простір.

Якщо система m інших випадкових величин $Y_1, \dots, Y_m$ функціонально залежить від системи випадкових величин $X_1, \dots, X_m$, то щільність розподілу $g(Y_1, \dots, Y_m)$ є лінійним оператором від щільності $f(x_1, \dots, x_m)$, тобто

$$g(Y) = Lf(X). \quad (2)$$

Лінійний оператор L, який будь-яку щільність розподілу $f(X)$ перетворює в деяку щільність

Shusharin Y.V.

Markov chains for continuous random variables

The work presents a generalization of a Markov chain for continuous random variables that can be applied to the analysis of financial flows of investment. Displaying moment and functional difference equations that determine the linear transformation of continuous random variables.

Key Words: Markov chain, moment equation, the system of matrix equations, stochastic operators.

розподілу $g(Y)$ будемо називати стохастичним оператором [1].

Стохастичний оператор L будь-яку функцію $f(X) = f(x_1, \dots, x_m)$ таку, що

$$f(X) \geq 0, \int_{E_m} f(X) dX = 1$$

перетворює в функцію $g(Y) = g(y_1, \dots, y_m)$ таку, що

$$g(Y) \geq 0, \int_{E_m} g(Y) dY = 1.$$

Стохастичний оператор узагальнює поняття стохастичної матриці для безперервних векторних випадкових величин.

Прикладом стохастичного оператора є оператор лінійного перетворення $g(Y) = f(A^{-1}Y) \cdot |\det A^{-1}|$, яке відповідає лінійному перетворенню випадкових величин $Y = AX$, $\det A \neq 0$.

Множина стохастичних операторів позначимо символом S. Якщо $L_1 \in S$, $L_2 \in S$, то $L_1 L_2 \in S$ і $\alpha L_1 + \beta L_2 \in S$ при $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Якщо стохастичний оператор відповідає лінійному перетворенню $Y = AX + B$, то позначимо оператор символом $L(Y = AX + B)$. Якщо можливо декілька лінійних перетворень $Y = A_k X + B_k$ ($k = 1, \dots, N$) з ймовірностями P_k , то в результаті отримаємо стохастичний оператор

$$L = \sum_{k=1}^N p_k L(Y = A_k X + B_k). \quad (3)$$

У границі при $N \rightarrow \infty$ можемо використовувати стохастичний оператор

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta) L(Y = A(\zeta)X + B(\zeta)) d\zeta, \quad (4)$$

де $p(\zeta)$ - щільність розподілу випадкової величини.

На нашу думку стохастичний оператор L (3) може бути використаний для опису фінансових потоків, які можуть реалізовуватися з різною ймовірністю P_k .

2. Ланцюг Маркова для неперервних випадкових величин.

Розглянемо послідовність систем випадкових величин $(X_{1,S}, \dots, X_{m,S})$ ($S = 0, 1, 2, \dots$), які мають щільність розподілу $f(s, X)$ ($S = 0, 1, 2, \dots$).

Нехай L - деякий стохастичний оператор. Перетворення щільностей розподілу

$$F(s+1, X) = Lf(s, X), \quad (S = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

визначає ланцюг Маркова для системи безперервних випадкових величин.

Як приклад візьмемо стохастичний оператор L (3). Тоді перетворення (5) набуде вигляду

$$f(s+1, X) = \sum_{k=1}^N p_k f(s, A_k^{-1}(X - B_k)). \quad (6)$$

Складемо моментні рівняння. Вводимо вектори перших моментів.

$$M(s) = \int_{E_m} X f(s, X) dX \quad (S = 0, 1, 2, \dots)$$

і матриці других моментів

$$D(s) = \int_{E_m} X X^* f(s, X) dX \quad (S = 0, 1, 2, \dots).$$

Для перших моментів отримаємо систему рівнянь

$$M(s+1) = \sum_{k=1}^N p_k A_k M(s) + \sum_{k=1}^N p_k B_k \quad (S = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Для матриць других моментів маємо систему матричних рівнянь

$$D(s+1) = \sum_{k=1}^N p_k (A_k D(s) A_k^* + A_k M(s) B_k^* + B_k M^*(s) A_k^* + B_k B_k^*), \quad (S = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

3. Ланцюг Маркова для системи безперервних і дискретної випадкових величин.

Розглядається система m безперервних випадкових величин $(X_1, \dots, X_m)$ і одна дискретна випадкова величина ζ , яка може приймати значення $\theta_1, \dots, \theta_q$ з ймовірностями $p_k = P\{\zeta = \theta_k\}$ ($k = 1, \dots, q$).

Введемо позначення

$$f_k(X) = f(X|\zeta = \theta_k) P(\zeta = \theta_k), \quad (k = 1, \dots, q). \quad (9)$$

За теоремою про повну ймовірність отримаємо щільність розподілу $f(X)$ системи випадкових величин $(X_1, \dots, X_m, \zeta)$.

$$f(X) = \sum_{k=1}^q f_k(X). \quad (10)$$

Оскільки функції $f_k(X)$ ($k = 1, \dots, q$) є частинами щільності розподілу $f(X)$, то називаємо їх частковими щільностями розподілу. При цьому

$$P(\zeta = \theta_k) = \int_{E_m} f_k(X) dX \quad (k = 1, \dots, q).$$

Вводимо ланцюг Маркова перетворення системи випадкових величин. Нехай

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \dots \\ f_q(X) \end{pmatrix}$$

вектор часткових щільностей ймовірності.

Розглянемо послідовність векторів $F(s, X)$, яка визначається операторних рівнянням

$$F(s+1, X) = L F(s, X). \quad (11)$$

Нехай матричний стохастичний оператор L виражається через стохастичні оператори L_k за формулою

$$L = \begin{pmatrix} \pi_{11}L_{11} & \pi_{12}L_{12} & \dots & \pi_{1q}L_{1q} \\ \pi_{21}L_{21} & \pi_{22}L_{22} & \dots & \pi_{2q}L_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{q1}L_{q1} & \pi_{q2}L_{q2} & \dots & \pi_{qq}L_{qq} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Отримаємо систему рівнянь для приватних щільностей розподілу

$$f_k(s+1, X) = \sum_{j=1}^q \pi_{kj} L_{kj} f_j(s, X), (k=1, \dots, q) \quad (13)$$

Тут π_{kj} - елементи деякої стохастичної матриці Π

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1q} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{q1} & \pi_{q2} & \dots & \pi_{qq} \end{pmatrix}.$$

Вони задовольняють відомим умовам [2].

$$\pi_{kj} \geq 0, \sum_{k=1}^q \pi_{kj} = 1 \quad (k, j = 1, \dots, q).$$

З умов

$$f_j(s, X) \geq 0, (j=1, \dots, q), \sum_{j=1}^q \int_{E_m} f_j(s, X) dX = 1$$

випливає виконання аналогічних умов

$$f_k(s+1, X) \geq 0, (k=1, \dots, q),$$

$$\sum_{k=1}^q \int_{E_m} f_k(s+1, X) dX = 1.$$

У системі рівнянь (13) L_{kj} - довільні стохастичні оператори.

4. Система лінійних різницьових рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

Розглядається система лінійних різницьових рівнянь.

$$X_{S+1} = A(\zeta_{S+1}, \zeta_S) X_S \quad (S=0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

коефіцієнти якої залежать від двох сусідніх значень ланцюга Маркова ζ_S , що приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_q$ з ймовірностями

$$p_k(S) = P\{\zeta_S = \theta_k\} \quad (k=1, \dots, q).$$

Припускаємо, що ймовірності задовольняють системі різницьових рівнянь

$$p_k(S+1) = \sum_{j=1}^q \pi_{kj} p_j(S). \quad (15)$$

Числа π_{kS} є елементами стохастичної матриці Π . Позначимо через $f_k(s, X)$ ($k=1, \dots, q$) приватні щільності розподілу при $\zeta_S = \theta_k$.

Із системи рівнянь (14) випливає, що стохастичні оператори L_{kS} ($k, S=1, \dots, q$) в системі рівнянь (13) приймуть вигляд

$$L_{kS} f(X) \equiv f(A_{kS}^{-1} X) \cdot |\det A_{kS}^{-1}|, \\ A_{kS} \equiv A(\theta_k, \theta_S) \quad (k, S=1, \dots, q). \quad (16)$$

Система рівнянь (13) визначається функціональними рівняннями для приватних щільностей ймовірності

$$f_k(s+1, X) = \sum_{j=1}^q \pi_{kj} f_j(A_{kj}^{-1} X) \cdot |\det A_{kj}^{-1}|, \\ (k=1, \dots, q) \quad (17)$$

Ця система рівнянь складна для дослідження і тому перейдемо до моментним рівнянь. Для приватних моментів першого порядку

$$M_k(s) = \int_{E_m} X f_k(s, X) dX, \sum_{k=1}^q M_k(s) = M(s)$$

і для часткових моментів другого порядку

$$D_k(s) = \int_{E_m} X X^* f_k(s, X) dX, \sum_{k=1}^q D_k(s) = D(s).$$

Помножимо систему рівнянь (16) на вектор X і проінтегруємо по всьому простору E_m по X . Отримаємо систему рівнянь для моментів першого порядку

$$M_k(s+1) = \sum_{j=1}^q \pi_{kj} A_{kj} M_j(s) \quad (k=1, \dots, q) \quad (18)$$

Аналогічно, помножимо систему рівнянь (16) на матрицю XX^* і проінтегруємо по всьому простору по X . Отримаємо систему матричних рівнянь

$$D_k(s+1) = \sum_{j=1}^q \pi_{kj} A_{kj} D_j(s) A_{kj}^* \quad (k=1, \dots, q) \quad (19)$$

З отриманих результатів випливає справедливість теореми.

Теорема. Нехай в системі різницевих рівнянь (14) коефіцієнти залежать від двох послідовних значень ξ_s, ξ_{s+1} ланцюга Маркова. Тоді стійкість нульового розв'язку системи (14) в

Список використаних джерел

1. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – Москва: издательство РУДН, 1996. – 258 с.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – Москва: Сев. Радио, 1997. – 488 с.
3. Коваленко Н.Н., Наконечный А.Н. Приближённый расчёт и оптимизация надёжности. – Киев: Наукова думка, 1989. – 184 с.
4. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. К вопросу обоснования методы усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журнал. – 1977. – т.29. – №6. – С. 750–762.
5. Мышкин А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математический сб. – 1967. – Т. 74, Вып. 2. – С. 202-208.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – Киев: Выща школа, 1987. – 288 с.

середньому рівносільна стійкості нульового розв'язку системи моментних рівнянь (18), а стійкість нульового розв'язку системи (14) в середньому квадратичному рівносільна стійкості нульового розв'язку системи матричних різницевих рівнянь (18).

Відзначимо, що системи різницевих рівнянь (18), (19) можна розглядати методами, запропонованими в роботі [1]

7. Хусаинов Д.Я., Ивохин Е.В. Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова // Кібернетика. – 1985. – № 2. – С. 7-10.
8. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловйов А.Д. Математичні методи в теорії надійності. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
9. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбін А.Ф. Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
10. Колмогоров А.Н. Про аналітичні методи в теорії ймовірностей. // Успіхи математичних наук. – 1938. – Вип.5. – С.5-41.
11. Вівчарів Л.А. Прикладні задачі теорії масового обслуговування. – М.: Машинобудування, 1969. – 324 с.
12. Шушарін Ю., Лавренюк В. Дослідження розв'язків різницевих рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від ланцюга Маркова // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Кібернетика. – 2006. – Вип. 7. – С. 62–66.

Надійшла до редколегії 29.01.10

УДК 519.21

Усар І.Я., інженер,
Макушенко І.А., к.ф.-м.н.,
Протопоп Ю.О., студент

Про швидкості збіжності стаціонарних розподілів систем з повторними викликами

В роботі розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $M/M/1/N$ та $M/M/1/\infty$, в яких інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості джерел повторних викликів. Розглядається гістерезисна стратегія керування такими системами. Знайдено оцінки швидкості збіжності стаціонарного розподілу системи $M/M/1/N$ до відповідного розподілу системи $M/M/1/\infty$.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, гістерезисна стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

*E-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Акіменко В.В.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи детально розглянуті в монографії [1]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці [1]–[4].

В системах з повторними викликами вимоги, які надійшли в зайняту систему, через випадковий проміжок часу повторюють спробу потрапити на обслуговування. Такі вимоги стають джерелами повторних викликів, що генерують вторинний потік вимог.

В роботі ми оцінюємо швидкість збіжності стаціонарних розподілів $\pi_j^{(r)}(N)$ системи $M_Q/M/1/N$ до відповідних розподілів $\pi_j^{(r)}$ системи $M_Q/M/1/\infty$ з повторними викликами. Ці розподіли та умови їх існування розглядалися в роботі [5]. В даних системах час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ . Вхідний потік містить дві складові – первинну і вторинну. Інтенсивність потоку первинних викликів залежить від числа j – джерел повторних викликів. Кожний повторний виклик через показниковий час з параметром ν повторює спробу потрапити на обслуговування.

I.Ya. Usar, engineer,
I.A. Makushenko, C.Sci(Phys-Math.),
Yu.O. Protopop, student

On the convergence rate of stationary distributions of systems with repeated calls

The paper deals with $M/M/1/N$ and $M/M/1/\infty$ -type retrial queueing systems in which the intensivity of input flow depends on the number of sources of repeated calls. Hysteresis strategy for such system is considered. The convergence rate estimation of stationary distribution of $M/M/1/N$ -type system to the corresponding distribution $M/M/1/\infty$ -type system are obtained.

Key Words: queue, repeated calls, hysteresis strategy, stationary regime, convergence rate.

Процес керування роботою систем визначається на основі гістерезисних стратегій: нехай $h_1 \leq h_2$ – два натуральні числа (пороги). Якщо кількість повторних викликів $j \leq h_1 - 1$, то системи будуть працювати в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку дорівнює $\lambda_1(j)$. Якщо $j \geq h_2$, то в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку $\lambda_2(j)$. А якщо $h_1 \leq j < h_2$, то системи зберігають той режим, в якому вони працювали в попередній момент часу. Клас порогових стратегій є підмножиною класу гістерезисних стратегій, який можна отримати при $h_1 = h_2$. Такі системи розглядалися в роботі [6].

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати тривимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, N\} \times \{1, 2\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t , $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог,

$Q_3(t)$ - режим роботи системи в момент часу t .
Якщо $Q_3(t)=1$, то система працює в першому режимі, якщо $Q_3(t)=2$, то система працює у другому режимі.

При цьому для $M_Q/M/1/N$ стаціонарний розподіл завжди існує

$$\pi_y^{(r)}(N) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q_1(t)=i, Q_2(t)=j, Q_3(t)=r),$$

При виконанні умови $\lambda_2/\mu < 1$, де $\lambda_2 = \limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_2(j) < \infty$ і $N \rightarrow \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_y^{(r)}(N)$ наближають ймовірності $\pi_y^{(r)}$ для системи $M_Q/M/1/\infty$. Результати роботи [7] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку.

Відмітимо (див. [1]), що завжди є справедливою нерівність

$$\pi_y^{(r)} \leq \pi_y^{(r)}(N).$$

Будемо постійно вважати, що $\mu = 1$. Оскільки

$$A(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \beta_1(h_1) + h_1\nu & -(h_1+1)\nu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_1(h_1) & \beta_1(h_1+1) + (h_1+1)\nu & -(h_1+2)\nu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1(h_1+1) & \beta_1(h_1+2) + (h_1+2)\nu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1(h_1+2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -(h_2-1)\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_1(h_2-2) & \beta_1(h_2-1) + (h_2-1)\nu \end{pmatrix}$$

$A(j)$ - j -тий елемент першого стовпчика матриці $A^{-1}(h_1, h_2)$, $j=1, 2, \dots, h_2-h_1$.

Позначимо також $Q(h_1) = B_1(h_1)(1 - h_1\nu A(1))$,

$$\begin{aligned} R(h_1, h_2) &= 1 + \left(\sum_{j=1}^{h_1-1} (j\nu + \lambda_1(j) + 1)B_1(j) + \lambda_1(0) \right) + \\ &+ \nu h_1 B_1(h_1) \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (j\nu + \lambda_1(j) + 1)A(j+1-h_1) + \\ &+ Q(h_1) \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (B_2(j) + D(j, j))(j\nu + \lambda_1(j) + 1); \quad (2) \\ G(h_1, h_2) &= Q(h_1) 2h_1\nu q_0^{-N_0} \times \\ &\times \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \prod_{k=l}^{N_0-1} \frac{\lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu} \times \end{aligned}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu} < 1,$$

$$\frac{j\nu + \lambda_2(j) + 1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \nu,$$

то можемо вибрати $q_0 < 1$ та N_0 такі, що

$$\frac{\lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu} \leq q_0, \quad \frac{k\nu + \lambda_2(k) + 1}{k} \leq 2\nu \quad (1)$$

для всіх $k \geq N_0$.

Введемо наступні позначення:

$$\beta_i(j) = \lambda_i(j)(j\nu + \lambda_i(j)), \quad i=1, 2,$$

$$B_1(j) = \frac{1}{j! \nu^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_1(k)(k\nu + \lambda_1(k)), \quad j=1, \dots, h_2,$$

$$B_2(j) = \frac{h_1!}{j! \nu^{j-h_1}} \prod_{k=h_1}^{j-1} \lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k)), \quad j=h_1+1, \dots, N,$$

$$D(m, j) = \frac{h_1}{j!} \sum_{l=h_1+1}^m \frac{(l-1)!}{\nu^{l-1}} \prod_{k=l}^{j-1} \lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k)),$$

$$\times (R(h_1, h_2) + Q(h_1)) \times$$

$$\times \sum_{j=h_2}^{N_0} (B_2(j) + D(h_2-1, j))(j\nu + \lambda_2(j) + 1) \Big)^{-2}. \quad (3)$$

Теорема. Нехай $q_0 < 1$ та N_0 вибрані як в (1). Тоді для кожного фіксованого j та всіх $N \geq N_0$ мають місце наступні оцінки швидкості збіжності

$$0 \leq \pi_{0j}^{(1)}(N) - \pi_{0j}^{(1)} \leq \frac{G(h_1, h_2)B_1(j)}{1 - q_0} q_0^{N+1},$$

$$0 \leq \pi_{1j}^{(1)}(N) - \pi_{1j}^{(1)} \leq \frac{G(h_1, h_2)(j\nu + \lambda_1(j))B_1(j)}{1 - q_0} q_0^{N+1},$$

$$0 \leq j \leq h_1 - 1,$$

$$0 \leq \pi_{0j}^{(1)}(N) - \pi_{0j}^{(1)} \leq \frac{G(h_1, h_2) \nu h_1 B_1(h_1) A(j+1-h_1)}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$0 \leq \pi_{1j}^{(1)}(N) - \pi_{1j}^{(1)} \leq$$

$$\leq \frac{G(h_1, h_2) \nu h_1 B_1(h_1) (j\nu + \lambda_1(j)) A(j+1-h_1)}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1,$$

$$0 \leq \pi_{0j}^{(2)}(N) - \pi_{0j}^{(2)} \leq \frac{G(h_1, h_2) Q(h_1) (B_2(j) + D(j, j))}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$0 \leq \pi_{1j}^{(2)}(N) - \pi_{1j}^{(2)} \leq$$

$$\leq \frac{G(h_1, h_2) Q(h_1) (j\nu + \lambda_1(j)) (B_2(j) + D(j, j))}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1,$$

$$0 \leq \pi_{1j}^{(2)}(N) - \pi_{1j}^{(2)} \leq$$

$$\leq \frac{G(h_1, h_2) Q(h_1) (B_2(j) + D(h_2 - 1, j))}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$0 \leq \pi_{1j}^{(2)}(N) - \pi_{1j}^{(2)} \leq$$

$$\leq \frac{G(h_1, h_2) Q(h_1) (j\nu + \lambda_1(j)) (B_2(j) + D(h_2 - 1, j))}{1-q_0} q_0^{N+1},$$

$$h_2 \leq j.$$

Доведення:

В роботі [5] були знайдені формули для стаціонарного розподілу $\pi_j^{(r)}(N)$ системи $M_Q / M / 1 / N$:

$$\pi_{0j}^{(1)}(N) = B_1(j) \pi_{00}^{(1)}(N),$$

$$\pi_{1j}^{(1)} = (j\nu + \lambda_1(j)) B_1(j) \pi_{00}^{(1)}(N),$$

$$0 \leq j \leq h_1 - 1, \quad (4)$$

$$\pi_{0j}^{(1)}(N) = h_1 \nu B_1(h_1) A(j+1-h_1) \pi_{00}^{(1)}(N),$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \quad (5)$$

$$\pi_{1j}^{(1)}(N) = h_1 \nu B_1(h_1) (j\nu + \lambda_1(j)) A(j+1-h_1) \pi_{00}^{(1)}(N),$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \quad (6)$$

$$\pi_{0j}^{(2)}(N) = Q(h_1) (B_2(j) + D(j, j)) \pi_{00}^{(2)},$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \quad (7)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}(N) = (j\nu + \lambda_2(j)) Q(h_1) (B_2(j) + D(j, j)) \pi_{00}^{(2)}(N),$$

$$h_1 \leq j \leq h_2 - 1, \quad (8)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}(N) = Q(h_1) (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) \pi_{00}^{(2)}(N),$$

$$h_2 \leq j \leq N, \quad (9)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}(N) = (j\nu + \lambda_2(j)) Q(h_1) (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) \pi_{00}^{(2)}(N),$$

$$h_2 \leq j \leq N, \quad (10)$$

де

$$\pi_{00}^{(1)}(N) = \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{h_1-1} (j\nu + \lambda_1(j) + 1) B_1(j) + \lambda_1(0) \right) + h_1 \nu B_1(h_1) \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (j\nu + \lambda_1(j) + \mu) A(j+1-h_1) + \right.$$

$$\left. + Q(h_1) \left[\sum_{j=h_1}^{h_2-1} (B_2(j) + D(j, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) + \sum_{j=h_2}^N (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \right] \right)^{-1}, \quad (11)$$

а тоді, очевидно, для системи $M_Q / M / 1 / \infty$

$$\pi_{00}^{(1)} = \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{h_1-1} (j\nu + \lambda_1(j) + 1) B_1(j) + \lambda_1(0) \right) + h_1 \nu B_1(h_1) \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (j\nu + \lambda_1(j) + \mu) A(j+1-h_1) + \right.$$

$$\left. + Q(h_1) \left[\sum_{j=h_1}^{h_2-1} (B_2(j) + D(j, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) + \sum_{j=h_2}^{\infty} (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \right] \right)^{-1}. \quad (12)$$

З цих формул випливає, що для того, щоб оцінити швидкість збіжності при $N \rightarrow \infty$,

достатньо дослідити швидкість збіжності $\pi_{00}^{(1)}(N)$

до $\pi_{00}^{(1)}$.

Враховуючи (2) можемо переписати формули (11), (12) так

$$\pi_{00}^{(1)}(N) = (R(h_1, h_2) +$$

$$+ Q(h_1) \sum_{j=h_2}^N (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \Big)^{-1},$$

$$\pi_{00}^{(1)}(N) = (R(h_1, h_2) +$$

$$+ Q(h_1) \sum_{j=h_2}^{\infty} (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \Big)^{-1},$$

а, отже

$$0 \leq \pi_{00}^{(1)}(N) - \pi_{00}^{(1)} =$$

$$= Q(h_1) \sum_{j=N+1}^{\infty} (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \times$$

$$\times \{ (R(h_1, h_2) + Q(h_1) \times$$

$$\times \sum_{j=h_2}^N (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \times$$

$$\times (R(h_1, h_2) + Q(h_1) \times$$

$$\times \sum_{j=h_2}^{\infty} (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \Big)^{-1} \Big\} \leq$$

$$\leq Q(h_1) \sum_{j=N+1}^{\infty} (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \times$$

$$\times (R(h_1, h_2) + Q(h_1) \times$$

$$\times \sum_{j=h_2}^N (B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) \Big)^{-2}. \quad (13)$$

Враховуючи позначення для $D(m, j)$ та $B_2(j)$ маємо

$$B_2(j) + D(h_2 - 1, j) = \frac{h_1!}{j! \nu^{j-h_1}} \prod_{k=h_1}^{j-1} \lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k)) +$$

$$+ h_1 \sum_{l=h_1+1}^{h_2-1} \frac{1}{\nu^{j-l} l(l+1) \dots j} \prod_{k=l}^{j-1} \lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k)) =$$

$$= h_1 \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \frac{\prod_{k=l}^{j-1} \lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{\nu^{j-l} l(l+1) \dots j} =$$

$$= \frac{h_1}{j} \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \prod_{k=l}^{j-1} \frac{\lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu},$$

тоді

$$(B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) =$$

$$= \frac{h_1 (j\nu + \lambda_2(j) + 1)}{j} \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \prod_{k=l}^{j-1} \frac{\lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu}. \quad (14)$$

Якщо (1) має місце, то з (14) маємо

$$(B_2(j) + D(h_2 - 1, j)) (j\nu + \lambda_2(j) + 1) =$$

$$= \frac{h_1 (j\nu + \lambda_2(j) + 1)}{j} \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \prod_{k=l}^{N_0-1} \frac{\lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu} \times$$

$$\times \prod_{k=N_0}^{j-1} \frac{\lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu} \leq$$

$$\leq 2h_1 \nu q_0^{j-N_0} \sum_{l=h_1}^{h_2-1} \prod_{k=l}^{N_0-1} \frac{\lambda_2(k) (k\nu + \lambda_2(k))}{k\nu}$$

Тепер з (13) та (14) знаходимо

$$0 \leq \pi_{00}^{(1)}(N) - \pi_{00}^{(1)} \leq \frac{G(h_1, h_2) B_1(j)}{1 - q_0} q_0^{N+1}$$

для всіх $N \geq N_0$. Ця нерівність, а також формули (4)-(10) доводять нашу теорему.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
3. *Уоллрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Мир, 1993. – 336 с.
4. *Anisimov V.V., Artalejo J.R.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // *Queueing Systems*. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
5. *Усар І.Я., Протопоп Ю.О.* Система з повторними викликами керована гістерезисною стратегією // *ВКУ*. – 2009. – № 3. – С. 200-205.
6. *Лебедєв Є.О., Усар І.Я.* Про системи з повторними викликами та керованим входним потоком // *Доповіді національної академії наук України*. – 2009. – №5. – С. 52-59.
7. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами. – М.: Наука, 1983. – 232 с.

Надійшла до редколегії 16.12.10

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.039.6

Бех І.І. к.ф.-м.н., доц., Дудко А.О., студ.,
Ільченко В.В., д.ф.-м.н., проф., Лушкін* О. Є.,
к.ф.-м.н., доц., Нагула П.О., інж., Тесленко С.М.,
студ.

Дослідження адсорбції продуктів випаровування металевопористих емітерів на оксиді скандію

Робота присвячена експериментальному
вивченню адсорбції продуктів випаровування
металевопористих емітерів на підкладку із
оксиду скандію.

В роботі показано, що при одночасному
напорошенні на оксид скандію продуктів
випаровування з МПЕ, якими є Ва, ВаО та Са,
адсорбція має складний характер. Аналіз
отриманих результатів дозволив
запропонувати фізичну модель утворення
кристалічної структури при адсорбції активної
речовини МПЕ на оксид скандію.

Ключові слова: електронна емісія,
адсорбція, металевопористий емітер, скандій,
барій, кальцій.

I. I. Bekh, PhD, A. O. Dudko, student,
V. V. Il'chenko, Doct. Sci., Prof., O. E. Lushkin*,
PhD, P. O. Nagula, engineer, S. M. Teslenko,
student.

Investigation of the adsorption of the evaporation products from the dispensed emitters on the scandium oxide

The adsorption of the evaporation products
from the surface of dispensed emitters on the
scandium oxide was studied experimentally.

It is shown that at simultaneous sputtering on
the scandium oxide of the evaporation products
from the surface of the dispensed emitters such as
barium, barium oxide and calcium, the adsorption
has a complicated nature.

The analysis of the obtained results allow to
offer the physical model of formation of crystalline
structure on the scandium oxide during adsorption
of active matter of the dispensed emitters.

Key Words: electron emission, adsorption,
dispenser emitter, scandium, barium, calcium.

*E-mail: san@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Дослідження термоелектронних емітерів і на
сьогоднішній день є актуальними, адже ці
джерела електронів є головним елементом
електровакуумних приладів надвисокочастотного
діапазону, які широко застосовуються в
далекодіючій радіолокації, радіонавігації, у
передавачах космічного зв'язку тощо. Вони
знаходять своє застосування й в електронно-
променевих трубках високої роздільної здатності,
й у портативних дисплеях, а також у
плазмотронах [1]. Найкращі показники таких
приладів досягаються саме при використанні
металевопористих емітерів (МПЕ), до складу
активної речовини яких введений оксид скандію.
Проте механізм впливу цієї домішки на емісійні
властивості МПЕ вивчений ще не достатньо. Не
зважаючи на велику кількість проведених
досліджень цих емітерів [2-4], залишається ціла
низка нез'ясованих питань. Одним з них є
залежність емісійної здатності емітерів від
структури та складу їхньої емітуючої поверхні.

Відтак, дослідження скандат-барієвих МПЕ є
актуальними.

Скандат-барієві МПЕ - складна багатофазна
та багатокомпонентна система, стан якої суттєво
залежить від температури і змінюється у часі в
процесі прогріву у вакуумі. Тому, щоб глибоко
зрозуміти фізико-хімічні та емісійні процеси, які
відбуваються на їхній поверхні під час роботи,
необхідно проводити моделювання цієї поверхні.
Таким моделюванням може бути напорошення
плівок активної речовини МПЕ на різні
підкладки.

Метою даної роботи є вивчення процесу
адсорбції продуктів випаровування МПЕ на
поверхні оксиду скандію.

Методика експерименту та зразки, що досліджувалися

Дослідження проводилися в
надвисоковакуумній металевій камері при тиску
залишкових газів не вище $1 \cdot 10^{-9}$ торр.

Для дослідження складу поверхні зразків використовувався оже-спектрометр з аналізатором типу "циліндричне дзеркало". Запис оже-спектрів здійснювався за допомогою системи автоматизації з використанням ЕОМ та блоку спряження, виготовленого на базі мікроконтролера ATmega8 [5].

В якості джерела Ва, ВаО та Са використовувався активний МПЕ з W губкою, емісійно-активна речовина якого мала фазовий склад $2,4\text{-BaO} \times 0,6\text{-CaO} \times 1,0\text{-Al}_2\text{O}_3$.

Як було показано в [6] такі МПЕ через декілька годин прогріву у вакуумі (час прогріву залежить від температури) забезпечують незмінні у часі потоки Ва та ВаО. А цей факт є дуже важливим для запропонованого експерименту. Підкладка для напорошення являла собою таблетку з спресованої суміші вольфрамового порошку з субмікронними зернами та порошку Sc_2O_3 . Високотемпературне очищення поверхні підкладки від забруднень (до $T=1500\text{ K}$) проводилося шляхом електронного бомбардування. Температура підкладки в діапазоні $T=300 \div 600\text{ K}$ підтримувалася за допомогою резистивного підігрівача, що був вмонтований в тримач таблетки.

Результати та їхнє обговорення

Підготовка підкладки з оксиду скандію

На рис. 1 представлений оже-спектр, який характеризує склад поверхні підкладки з оксиду скандію до прогріву. З нього видно, що підкладка

суттєво забруднена вуглецем (оже-пик при енергії 272 eV), калієм (оже-пик при енергії 250 eV) та азотом (оже-пик при енергії 390 eV). На поверхні підкладки присутня також помітна кількість кисню (оже-пик при енергії 512 eV). Пик при енергії 82 eV ідентифікувати не вдалось. Швидше за все, це оже-перехід в сполуці, яка містить кисень.

Після прогріву підкладки до $T \approx 1400\text{ K}$ на протязі декількох хвилин шляхом електронного бомбардування в оже-спектрі її поверхні спостерігаються виключно оже-пики, що належать оксиду скандію, як це видно на рис. 2. Однак, слід зауважити, що склад оксиду скандію після такої термовакuumної обробки став нестехіометричним, бо відношення амплітуди оже-піку кисню O_{512} до амплітуди оже-піку Sc_{340} не перевищує 0,83, в той час як стехіометричному складу Sc_2O_3 відповідає значення 1 [3]. Тобто поверхня зразка мала надлишковий не окислений скандій. Цей факт не є недоліком експерименту, а навпаки, дозволяє більш достовірно змодельювати процеси на поверхні емітера, тому що в реальних МПЕ при робочих температурах завжди спостерігається певна доля не окисленого скандію.

Адсорбція активної речовини МПЕ на підкладку з оксиду скандію

Як зазначалось вище, в якості джерела Ва- та Са-компоненти використовувався МПЕ, фазовий склад емісійно-активної речовини якого $2,4\text{-BaO} \times 0,6\text{-CaO} \times 1,0\text{-Al}_2\text{O}_3$. Тобто барієвої

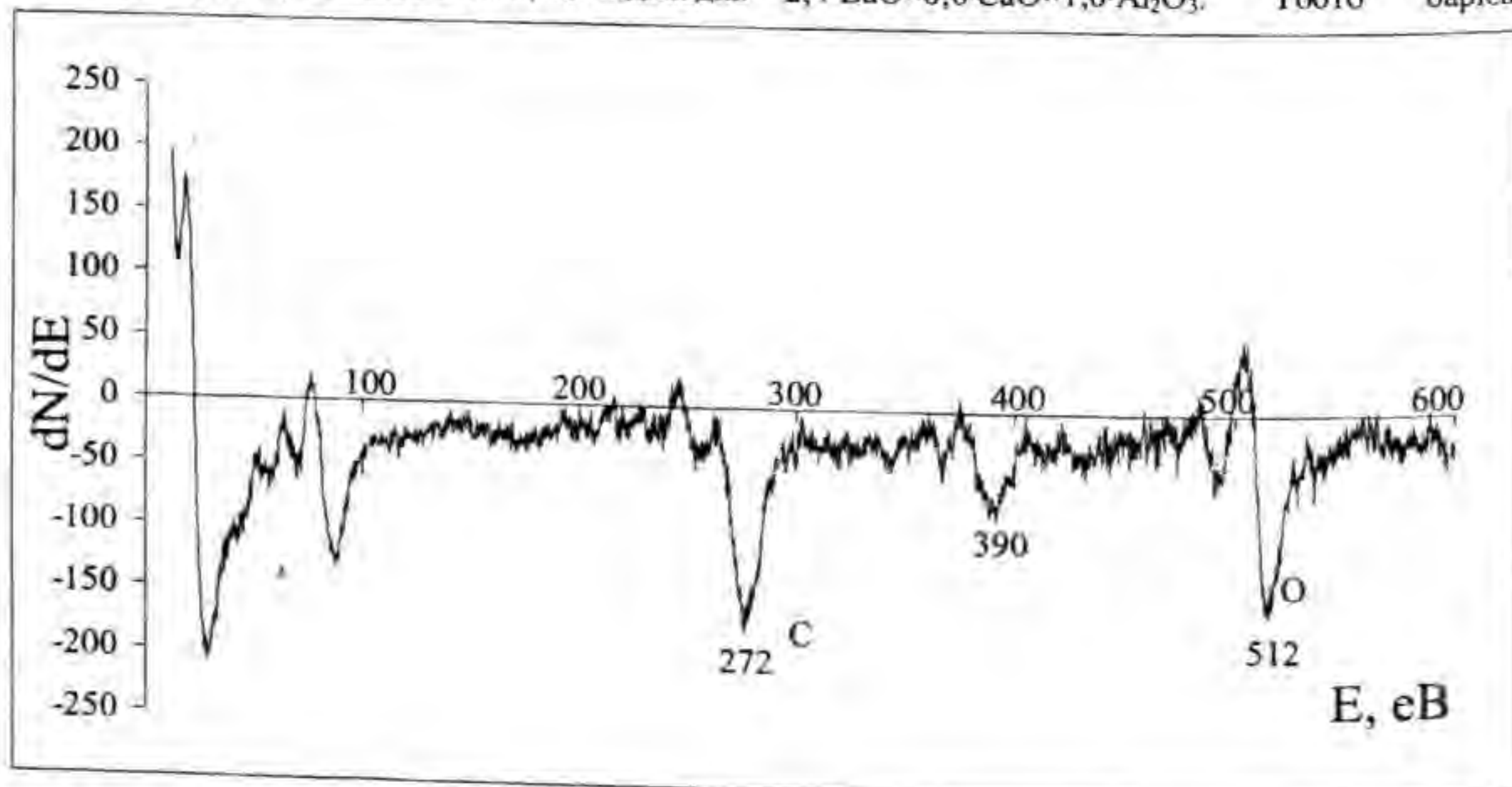


Рис. 1. Оже-спектр, що характеризує склад поверхні підкладки з оксиду скандію до прогріву.

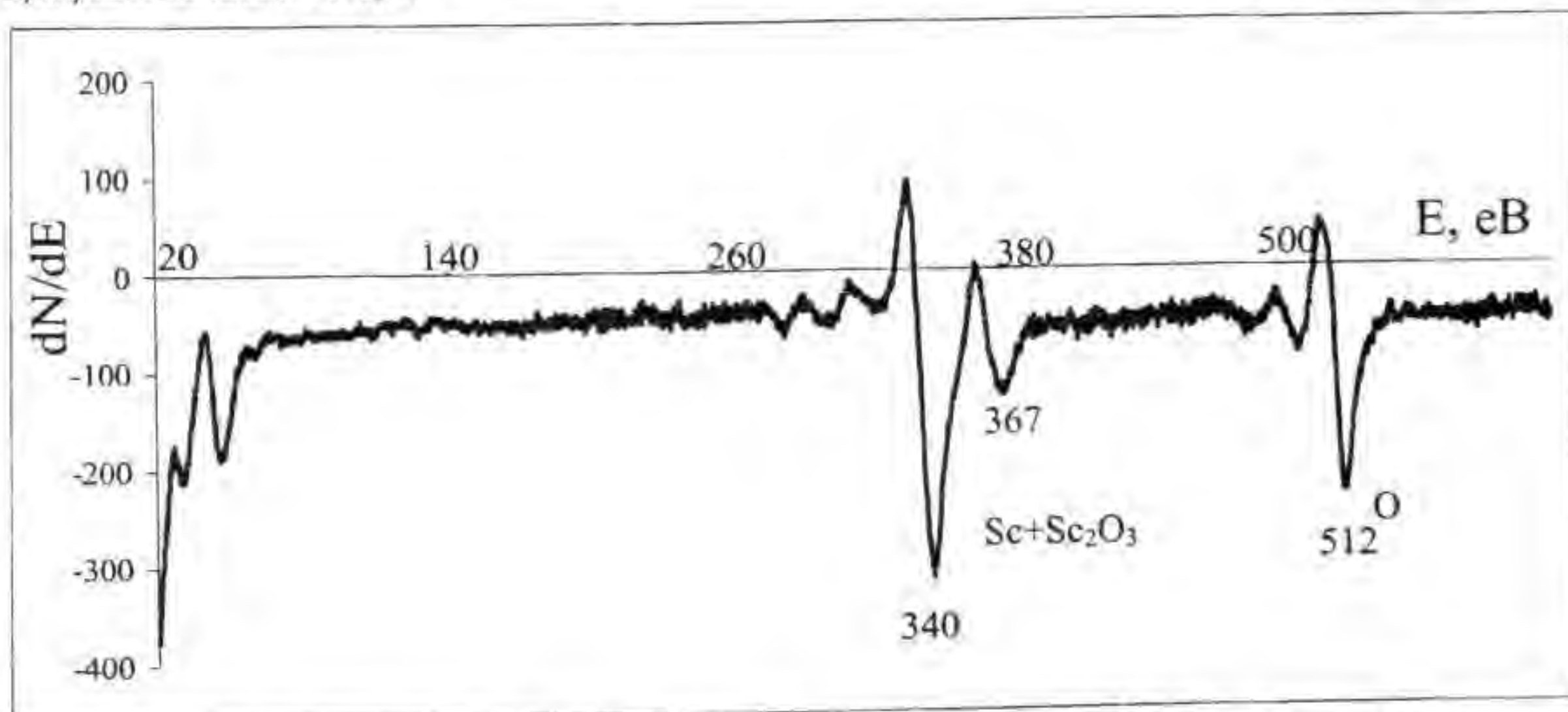


Рис. 2. Оже-спектр, що характеризує склад поверхні підкладки з оксиду скандію після її очищення електронним бомбардуванням.

компоненти в ньому в 4 рази більше, ніж кальцієвої. Цей факт, а також літературні дані [7], дають підстави стверджувати, що потік Ва-компоненти з такого емітера більший за потік кальцію. Відповідно до цього, на початку процесу напорошення Ва-компоненти на поверхні оксиду скандію завжди спостерігалося більше, ніж Са-компоненти. Крім того відомо, що оже-спектрометричні коефіцієнти елементної чутливості для Са та Ва мають значення 0,42 та 0,2 відповідно [8]. Ці дані ще вагомніше підтверджують факт суттєво більшого потоку барієвої компоненти з МПЕ в порівнянні з потоком кальцію, а рис. 3 цей факт відображає.

З рисунку видно, що одночасна адсорбція оксиду барію, барію та кальцію на підігрітий до 500 K Sc_2O_3 має дуже складний характер. Тут необхідно зауважити, що підігрів підкладки не вимикався і під час запису оже-спектрів.

Аналіз кривих, наведених на рис. 3 та співставлення отриманих даних з відповідними літературними даними [4] свідчить про таке. Вже в перші хвилини напорошення Ва, ВаО та Са на поверхню оксиду скандію починаються активні міграційно-дифузійні процеси цих головних компонентів робочої поверхні МПЕ. Причому, характер адсорбції Ва-компоненти явно інший, ніж у кальцію. Лінійне наростання амплітуди оже-піку Ba_{57} під час напорошення з подальшим більш плавним наростанням амплітуди цього оже-піку вказує на адсорбцію згідно механізму Странського-Крастанова: утворення моношарової плівки з подальшим наростанням об'ємних структур.

Більш плавне, без зламів наростання

амплітуди оже-піка Ca_{293} з перших хвилин його адсорбції дозволяє вважати, що кальцій на оксиді скандію адсорбується згідно механізму Вольмера-Вебера, тобто у вигляді кристалітів.

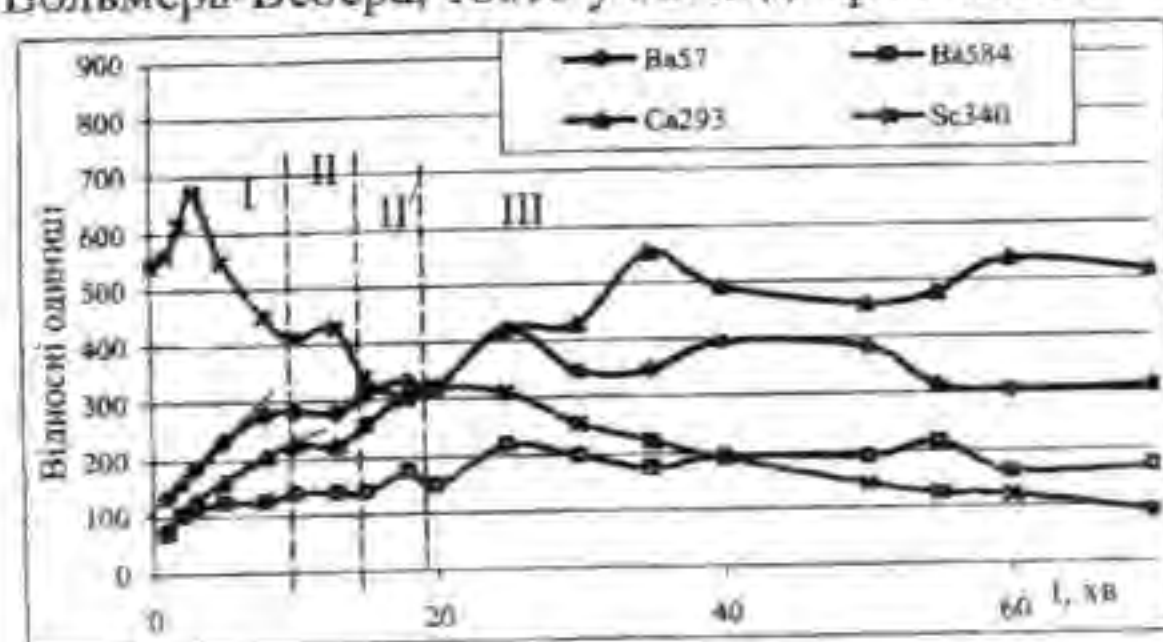


Рис. 3. Зміна амплітуд оже-піків активної речовини МПЕ та скандію під час напорошення на поверхню Sc_2O_3 .

Зрозуміло, що надходження адсорбату на поверхню адсорбенту призводить до екранування атомів останнього. Тобто, напорошення Ва, ВаО та Са на поверхню Sc_2O_3 повинно було б відразу зменшувати амплітуди оже-піків оксиду скандію, наприклад оже-піку Sc_{340} . Однак на рис. 3 явно спостерігається спочатку стрімке наростання амплітуди цього оже-піку з подальшим її суттєвим падінням.

Такий же результат був отриманий і автором [4], коли проводилось напорошення тільки атомів Ва на оксид скандію. Тому логічно наполягати і в цьому випадку на процесі розрихлення поверхневого шару Sc_2O_3 саме атомами Ва, яке і призводить до зростання амплітуди оже-піку Sc_{340} .

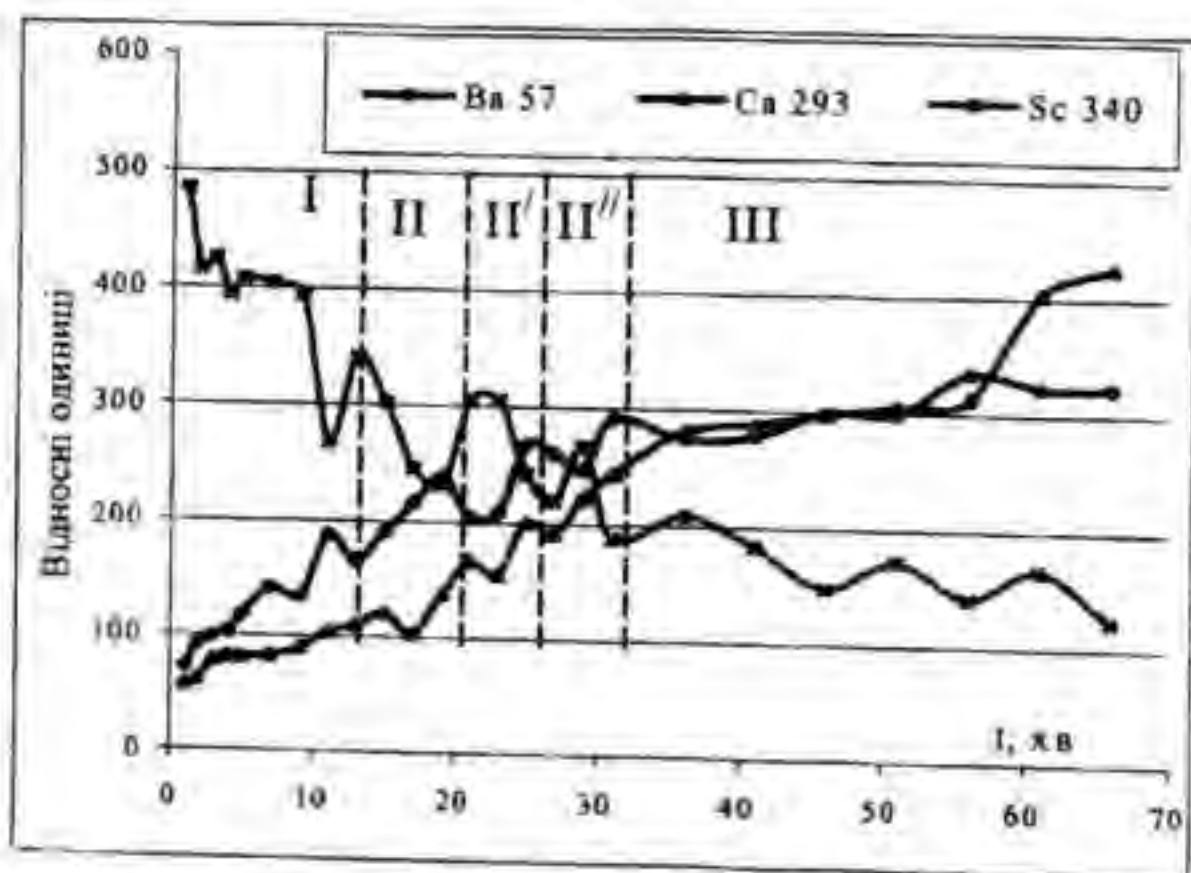


Рис. 4. Зміна амплітуд оже-пиків активної речовини МПЕ та скандію під час напорошення на поверхню Sc_2O_3 при більш частому запису оже-спектрів.

Подібні сплески та спади амплітуди оже-піку Sc_{340} , які завжди були у протифазі зі сплесками та падінням амплітуд оже-пиків Ba та Ca спостерігались неодноразово. І найбільш яскраво, коли частота запису оже-спектрів за один й той же час напорошення зростала. Такий режим досліджень давав більше часу для міграції активної речовини МПЕ по поверхні зразка без її додаткового напорошення. Тобто кожне наступне напорошення вже відбувалось на більш сформовану поверхню.

В нашому випадку це стягування плівки, скоріш за все, Ba-компоненти, в кристаліти. Підтвердженням цього є абсолютно протифазні коливання амплітуд оже-пиків Ba_{57} та Sc_{340} при фактично монотонному наростанні амплітуди оже-піка Ca_{293} (див. рис. 4).

При аналізі рис. 3 та рис. 4 також треба

звернути увагу на факт зрівняння з часом амплітуди оже-піку Ca_{293} з амплітудою оже-піку Ba_{57} , які 20 хв. при першому експерименті і 35 хв. при другому суттєво відрізнялись. При цьому необхідно наголосити на тому, що потоки і Ba-компоненти, і кальцію у часі стабільні.

Подальше напорошення адсорбату призводить в решті-решт до переважання на поверхні кальцію: амплітуда оже-піку Ca_{293} стає найбільшою (див. рис. 3-4).

Перед тим, як розглянути процес десорбції активної речовини МПЕ, яка була напорошена на оксид скандію, варто звернути увагу на той факт, що продукти випаровування МПЕ містять тільки не окислений кальцій, Ba та BaO.

При проведенні ж експериментальних досліджень на поверхні оксиду скандію спостерігається в основному CaO і тіж самі Ba та BaO, як це видно з оже-спектрів, наведених на рис. 5 - 6. Однак це не дивно, бо відомо [6], що кальцій навіть при кімнатній температурі ($T=300$ K) активно відновлює барій, перетворюючись на CaO. Тобто природа неокисленого барію на поверхні оксиду скандію подвійна: це барій, який був напорошений з МПЕ, і барій, відновлений з BaO безпосередньо на поверхні підкладки.

Десорбція активної речовини МПЕ з поверхні підкладки з оксиду скандію.

Процес десорбції проводився при температурі $T=800$ K протягом години. Запис оже-спектрів в першому експерименті проводився з кроком 5 хв., а в другому – 2 хв.

В обох випадках зростання амплітуди оже-

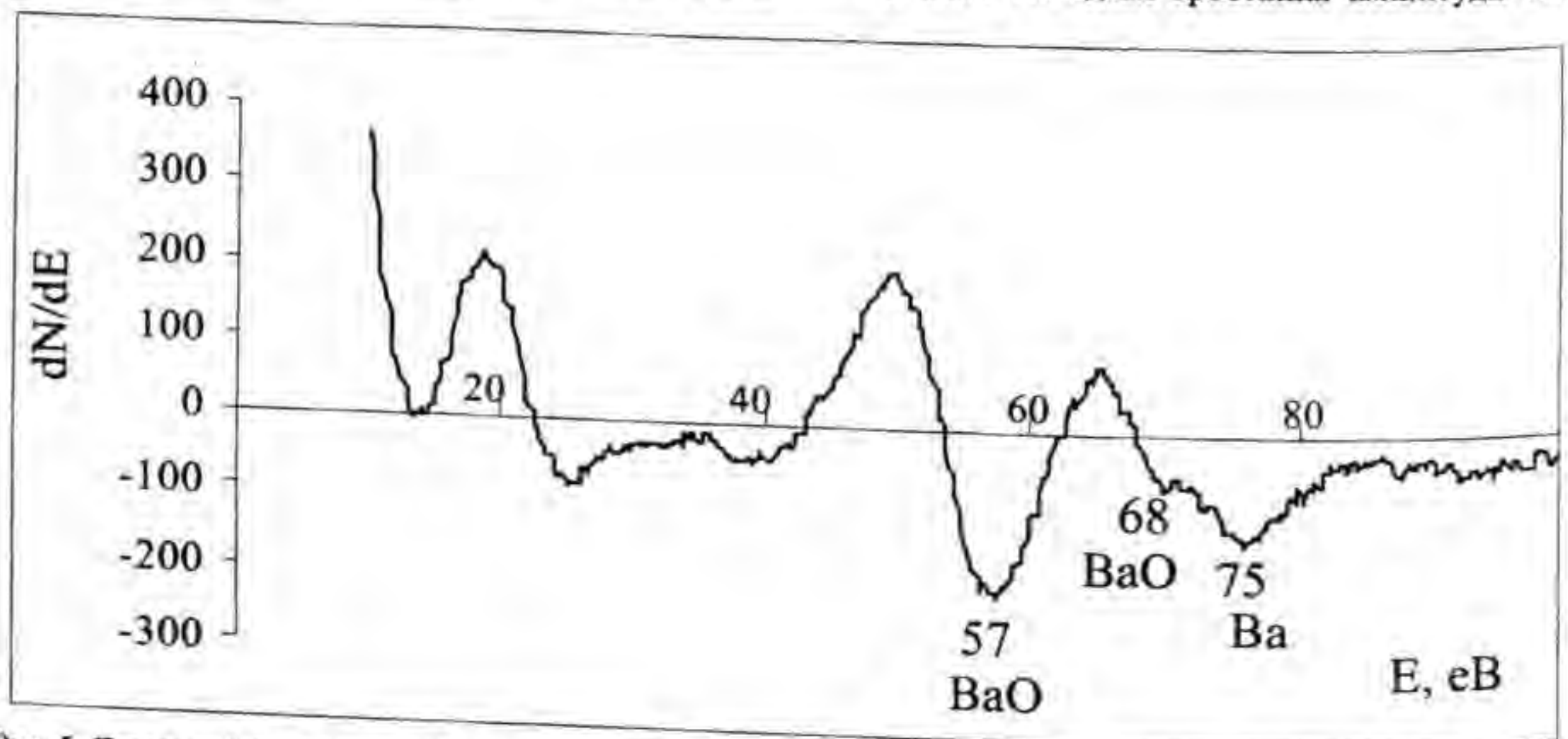


Рис. 5. Детальний Оже-спектр Ba- компоненти, яка спостерігається на поверхні оксиду скандію.

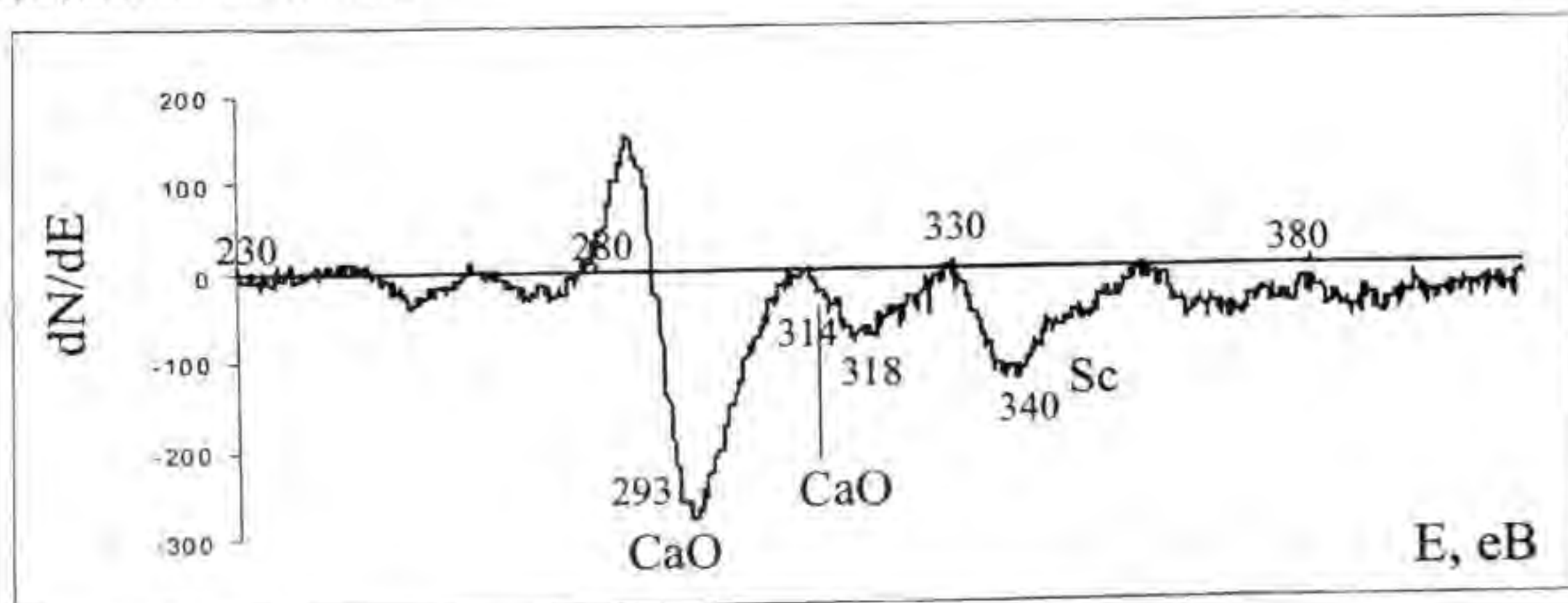


Рис. 6. Детальний Оже-спектр Ca- компоненти, яка спостерігається на оксиді скандію.

піку Sc_{340} супроводжується зменшенням амплітуд оже-піків Ca_{293} та Ba_{57} (див. рис. 7, рис. 8). Як показали розрахунки, у кривих різні кути нахилу: $tg\alpha_{Ca} = -4,13$, $tg\alpha_{Ba} = -0,73$, $tg\alpha_{Sc} = 7,65$.

Враховуючи те, що значення $tg\alpha$ корелюють зі швидкістю випаровування компонент з поверхні зразка [6], можна стверджувати, що швидкість випаровування кальцію в порівнянні з швидкістю випаровування Ba-компоненти більша. Тобто, стрімке наростання амплітуди оже-піку Sc_{340} пов'язане, скоріш за все, з десорбцією кальцію безпосередньо з поверхні Sc_2O_3 . Криві, наведені на рис. 9, підтверджують це припущення, бо $tg\alpha_{Sc/Ba} \approx 0,04$, а $tg\alpha_{Ca/Ba} \approx -0,04$.

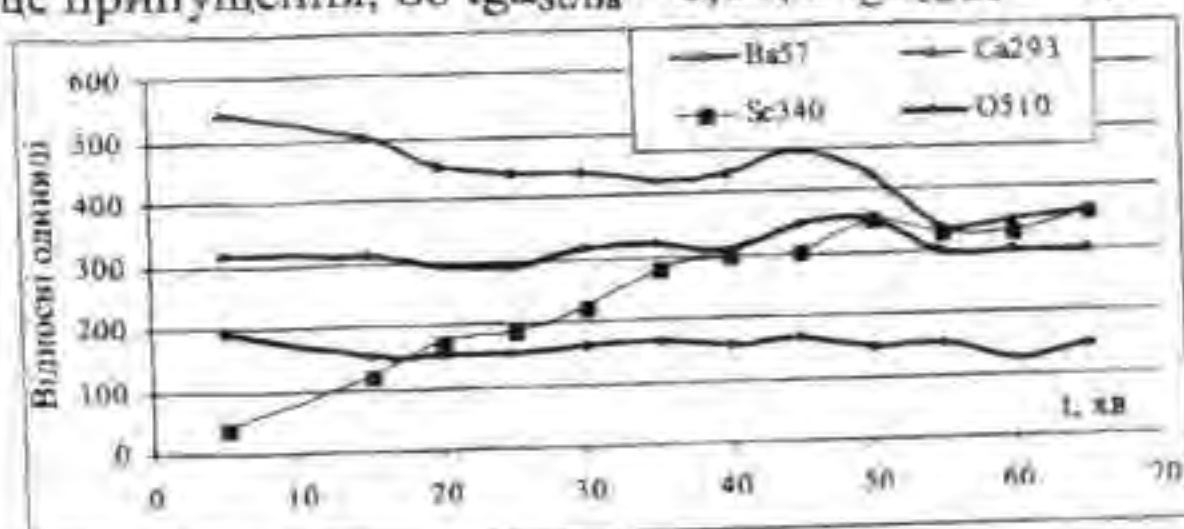


Рис. 7. Зміна амплітуд оже-піків активної речовини МПЕ та скандію під час прогріву при $T=800K$ (експеримент I).

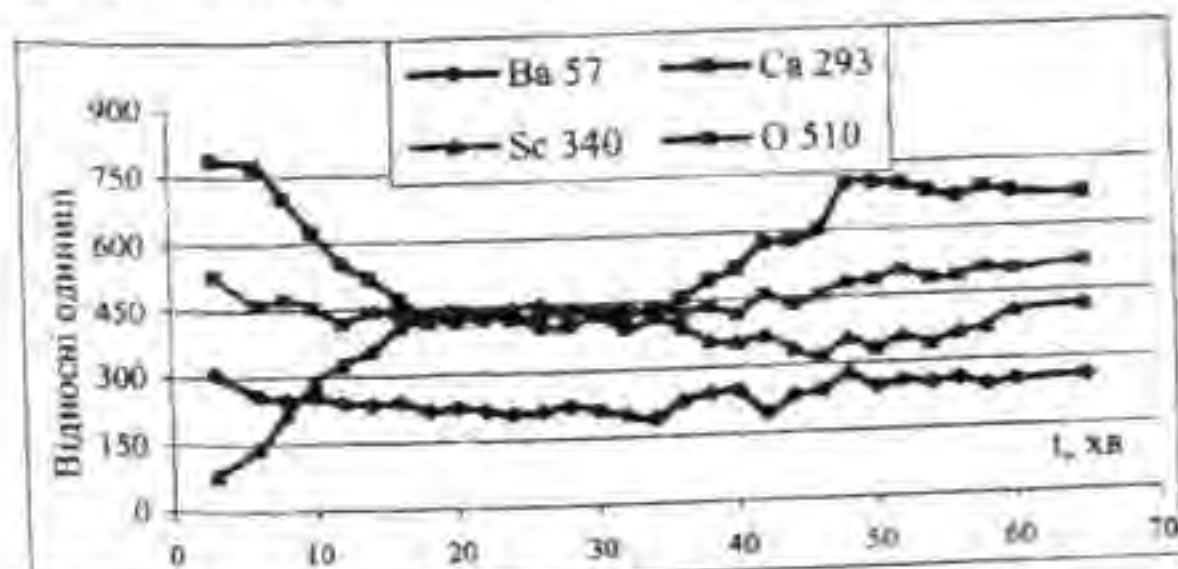


Рис. 8. Зміна амплітуд оже-піків активної речовини МПЕ та скандію під час прогріву при $T=800K$ (експеримент II).

І на рис. 7, і на рис. 8 спостерігаються також дуже незначні коливання амплітуди оже-піку Ba_{57} протягом усього часу прогріву. Практично так саме поводить себе і оже-пік кисню O_{512} . Тобто, при $T=800 K$ Ba-компонента майже не випаровується з отриманого складного сендвіча. Або випаровується з товстого шару оксиду барію, тобто практично без зміни площі, яку займає цей оксид, і тому без помітних змін в амплітуді оже-піку Ba_{57} .

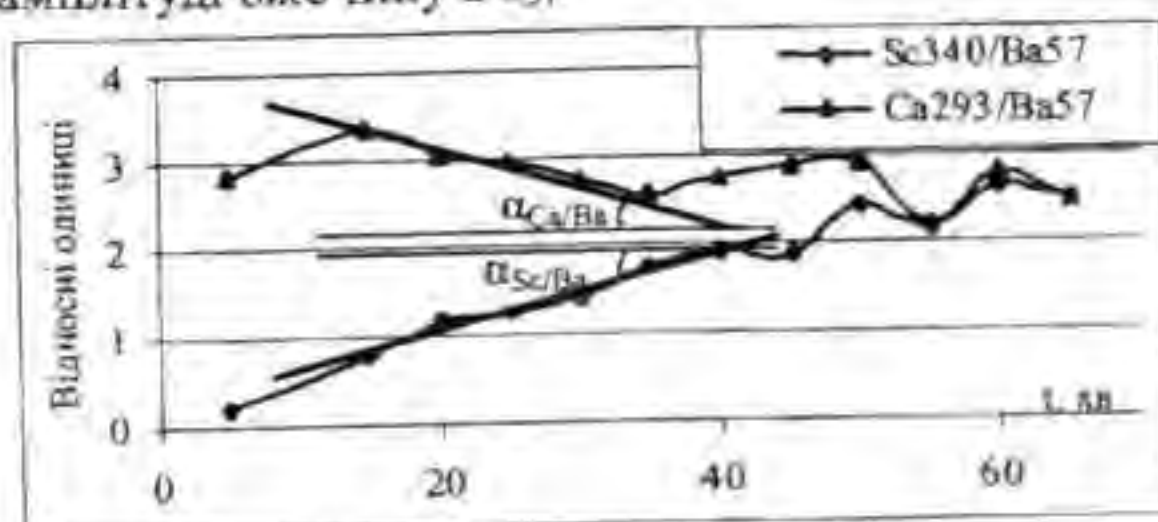


Рис. 9. Зміна відношення амплітуд оже-піків речовини під час прогріву при $T=800 K$ (експеримент I).

Те, що амплітуда оже-піку Ca_{293} під час прогріву зменшується у 1,5-2 рази, а амплітуда оже-піку O_{512} в цілому не змінюється, ще раз підтверджує тезу про випаровування оксиду кальцію виключно у вигляді не окисленого металу [4]. Скоріш за все, кисень, який був зв'язаний з кальцієм, залишається адсорбованим на підкладці.

Крім цього, мало помітні зміни амплітуди оже-піку Ba_{57} при стрімкому падінні амплітуди оже-піку Ca_{293} і помітному наростанні амплітуди оже-піку Sc_{340} з самого початку прогріву сендвіча (рис. 7, рис. 8), а у другому експерименті суттєве зростання амплітуди оже-піку Ca_{293} після 35 хв. прогріву (рис. 8) при відсутності зміни амплітуди оже-піку Ba_{57} і падіння в цей час амплітуди оже-піку Sc_{340} , дозволяють припустити, що кальцій

при напорошенні відразу адсорбувався на окремих ділянках оксиду скандію. Барієва ж компонента адсорбувалась на інших, енергетично вигідних для неї, ділянках.

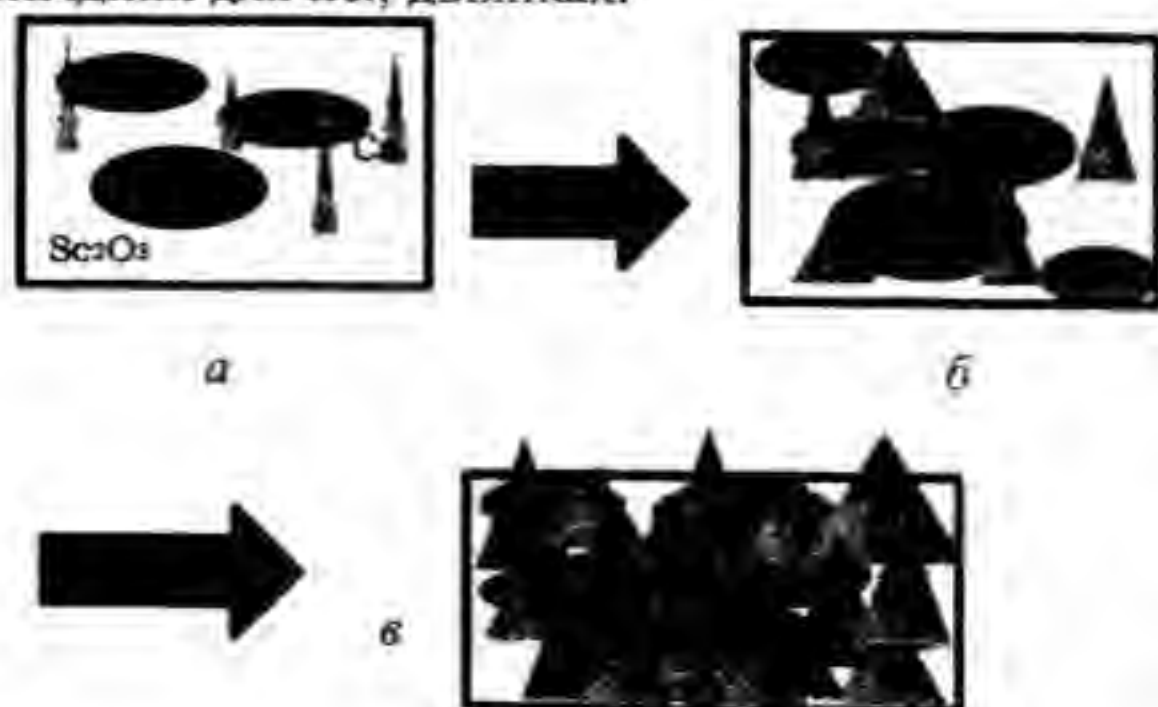


Рис. 10. Модель утворення кристалічної структури на поверхні оксиду скандію: а) початок адсорбції; б) розростання та злиття моношарових покриттів Ва-компоненти, збільшення розмірів кристалітів кальцію; в) утворення товстого шару Ва-компоненти та подальше укрупнення кристалітів кальцію на окремих ділянках оксиду скандію.

Аналіз усієї сукупності отриманих результатів та їхнє порівняння з відповідними літературними даними, дозволяє запропонувати таку модель утворення кристалічної структури при адсорбції активної речовини МПЕ на оксид скандію, яка схематично зображена на рис. 10:

- в перші хвилини напорошення адсорбату відбувається розрихлення поверхні оксиду скандію атомами барію.
- Ва-компонента адсорбується згідно механізму Странского-Крастанова, тобто на початку утворення одного-двох моношарів, на яких потім ростуть тривимірні острівці.
- Са адсорбується згідно механізму Вольмера-Вебера, тобто виключно у вигляді острівців. З часом острівці збільшують свої розміри.

Крім того, аналіз отриманих результатів вказує на те, що і Са, і Ва-компонента адсорбуються переважно на різних ділянках оксиду скандію. Причому енергія зв'язку Са-компоненти в утвореній структурі явно нижча за енергію зв'язку Ва-компоненти.

Висновки

При одночасному напорошенні на оксид скандію продуктів випаровування з МПЕ, якими

є Ва, ВаО та Са, адсорбція має складний характер.

В перші хвилини напорошення адсорбату відбувається розрихлення поверхні оксиду скандію атомами барію; Ва-компонента адсорбується згідно механізму Странского-Крастанова, тобто на початку утворення одного-двох моношарів, на яких потім ростуть тривимірні острівці; Са адсорбується згідно механізму Вольмера-Вебера, тобто виключно у вигляді острівців. З часом острівці збільшують свої розміри.

І кальцій, і Ва-компонента при напорошенні переважно адсорбуються на різних ділянках оксиду скандію. Причому енергія зв'язку Са-компоненти в утвореній структурі явно нижче енергії зв'язку Ва-компоненти.

Список використаних джерел

1. Планковский С.И., Островский Е.К., Цегельник Е.В. Импрегнированный катод на основе скандата бария. // Авиационно-космическая техника и технология. – 2008. – № 2 (49). – С. 78 – 84.
2. Haiqing Yuan, Xin Gu, Kexin Pan, Yiman Wang, Wei Liu, Ke Zhang, Jinshu Wang, Meiling Zhou, Ji Li. Characteristics of scandate-impregnated cathodes with sub-mikron scandia-doped matrices. // Appl. Surf. Sci. – 2005. – 251. – P. 106 – 217.
3. Shih A., Yater J., Hor C. Ba and BaO on W and Sc_2O_3 coated W. // Appl. Surf. Sci. – 2005. – 242. – P. 35 – 54.
4. І.І. Бех. Фізико-хімічні та емісійні властивості гетерогенних систем на основі скандію. // Канд. дис. – Київ. – 2007.
5. O.E. Lushkin, V.V. Shcherban, S.M. Teslenko. Development of automated measuring unit for Auger spectrometer 09IOS-3 // Вісн. Київськ. ун-ту, сер. Радіофізика і електроніка. – 2010. – № 13. – С. 57 – 59.
6. А.Е. Лушкін. Роль кристаллитов окислов щелочноземельных металлов в механизме эмиссии металлопористых катодов. // Канд. дис. – Киев. – 1996.
7. Никонов Б.П. Оксидный катод. // –М.: "Энергия". – 1979.
8. Mroczkowski S., Lichtman D. Calculated Auger sensitivity factors compared to experimental Handbook values. // Surface Science. – 1983. – 131. – P. 159 – 166.

Надійшла до редколегії 20.10.10

УДК 535.375

Іванісік А. І., канд. фіз-мат. наук, доцент,
Ісаєнко О. Ю., магістр наук, аспірант

Спектральні закономірності анти-стоксового вимушеного комбінаційного розсіяння в умовах самофокусування та фазової саомодуляції

З'ясовуються спектральні закономірності осьового антистоксового ВКР в умовах самофокусування – насамперед, вплив швидкості руху фокальної точки самофокусованого збуджуючого пучка світла на спектральний склад та енергію антистоксового випромінювання. Показано, що енергія осьового антистоксового випромінювання суттєво залежить від швидкості фокальної області. У випадку, коли зміна показника заломлення у фокальній області дає абсолютний приріст модуля хвильового вектора, який забезпечує виконання умови фазового синхронізму для довільної швидкості, існує локальний максимум енергії, що припадає на швидкість фокальної області, яка залежить від її довжини. Потужність випромінювання максимальна за умови рівності швидкості фокальної області груповій швидкості антистоксового випромінювання.

Ключові слова: спектр, вимушене комбінаційне розсіяння, фазова саомодуляція, самофокусування.

E-mail: aivan@uninet.kiev.ua; o_isaenko@bigmir.net
Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В. А.

Вступ

В [1] проведений аналіз і розрахунки, які показали, що фазова саомодуляція імпульсів лазерного випромінювання в умовах самофокусування суттєво впливає на частотно-кутову структуру випромінювання параметричної антистоксової компоненти (АК) вимушеного комбінаційного розсіяння (ВКР) у рідинах. За певних експериментальних умов при збудженні ВКР наносекундними імпульсами можливе утворення вкладених частотно-кутових дуг зі значним зміщенням частоти ($\sim 100 \text{ см}^{-1}$) осьового випромінювання відносно комбінаційного резонансу. Частотно-кутова

А. І. Іванісік, Ph. D., As. Prof.,
О. Ю. Ісаєнко, M. Sc., post-graduate student

The Spectral Regularities of the Anti-Stokes Stimulated Raman Scattering under Conditions of Self-focusing and Self-phase modulation

This study describes the spectral patterns of the axial anti-Stokes stimulated raman scattering radiation under conditions of self-focusing and self-phase modulation – namely, the impact of the focal point velocity of the self-focusing exciting beam on the spectral structure and energy of anti-Stokes radiation. It is shown that energy of axial anti-Stokes radiation strongly depends on velocity of focal area. When the change of refractive index in focal area provides absolute increase in modulus of the wave vector at which the condition of phase synchronism is obtained at an arbitrary velocity, there appears a local maximum of energy at the velocity of focal area that depends on its length. The power of radiation gains its maximum at the point, where focal point velocity of the self-focusing is equal to group velocity of the anti-Stokes radiation.

Key Words: spectrum, stimulated Raman scattering, self-phase modulation, self-focusing

густина енергії випромінювання АК визначається трьома основними факторами: поперечна та поздовжня неузгодженість хвильових векторів нелінійної поляризації середовища і випромінювання; зсув частоти поляризації, умова амплітудно-фазового синхронізму [2] – умова синхронного руху фокальної області й точки синфазності поляризації з генерованою хвилею.

Основою на результатах, отриманих у [1], в даній роботі з'ясовуються спектральні закономірності осьового антистоксового ВКР – насамперед, вплив швидкості руху фокальної точки самофокусованого збуджуючого пучка світла на спектральний склад та енергію

антистоксового випромінювання. Тестовим об'єктом виступав толуол при збудженні рубіновим лазером.

Теоретичні основи

Джерелом випромінювання параметричної АК ВКР є хвиля нелінійної поляризації $P^{NL}(t, \mathbf{r})$ середовища, наведена лазерним променем та стоксовою компонентою. Інтенсивність АК залежить як від просторово-часового розподілу амплітуди P_0^{NL} , так і фази цієї хвилі, оскільки необхідним є фазове узгодження з полем антистоксового випромінювання. У наближенні заданої поляризації частотно-кутова густина енергії $W_{\omega\theta}$ АК у віддаленій зоні для невеликих кутів розсіяння θ визначається формулою [2]:

$$W_{\omega\theta} = \frac{\omega^4 n_\omega}{8\pi^2 c^3} \left| \int_V dV \int_{-\infty}^{\infty} P^{NL}(t, \mathbf{r}) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] dt \right|^2, \quad (1)$$

де $\mathbf{k}$ – хвильовий вектора випромінювання з модулем $k = n_\omega \omega / c$ на частоті ω , $n_\omega = n(\omega)$ – показник заломлення на частоті ω , c – швидкість світла у вакуумі, t – час, $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, який сполучає початок системи координат з довільною точкою об'єму V , де існує нелінійна поляризація середовища.

Спектрально-кутову густина енергії $W_{\omega\theta}$ АК можна аналітично розрахувати у випадку рівномірного руху фокальної точки зі швидкістю v_{FT} на деякому відрізку траси довжиною L по осі z та гауссового розподілу амплітуди поляризації з напівшириною b по z і напівшириною a_f по x та y на рівні e^{-1} з максимумом $P_{0,\max}^{NL}$ у центрі фокальної області з координатами $\{x=0, y=0, z=v_{FT}t\}$. У цьому випадку для осьового випромінювання (кут $\theta=0$) маємо [1]:

$$W_{\omega 0} = \frac{\pi n_\omega \omega^4 a_f^4 b^2 L^2}{8 v_{FT}^2 c^3} P_{0,\max}^{NL^2} F_1 F_2, \quad (2)$$

де

$$F_1 = \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta\omega - \Gamma v_{FT})^2 \frac{b^2}{v_{FT}^2} \right],$$

$$F_2 = \text{sinc}^2 \left[\frac{L}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{v_{FT}} - \Delta k_\parallel \right) \right],$$

$\Delta\omega = (\omega - \omega_a)$ – зміщення частоти, $\Delta k_\parallel = k - k_{ap}$ –

повздовжня неузгодженість хвильового вектора k випромінювання АК з довільною частотою ω і вектора k_{ap} поляризації на комбінаційній антистоксовій частоті ω_a , v_{FT} – швидкість зміни фокальної відстані. Співвідношення між швидкостями v_{FT} та v_{FB} містить групову швидкість v_{gl} збуджуючого лазерного випромінювання на частоті ω_L :

$$\frac{1}{v_{FT}} = \frac{1}{v_{FB}} + \frac{1}{v_{gl}}. \quad (3)$$

Величина Γ в (2) є абсолютним приростом модуля хвильового вектора $k_L = 2\pi / \lambda_L$ збуджуючого випромінювання у центрі фокальної області і визначається виразом:

$$\Gamma \approx \frac{1}{16} k_L \tilde{P} \left(\frac{1,22 \lambda_L}{a_f} \right), \quad (4)$$

де $\tilde{P} = P / P_{cr}$ відносне перевищення потужності P збуджуючого випромінювання критичної потужності P_{cr} самофокусування.

Для розрахунків за формулою (2) необхідно знати показник заломлення, оскільки $k = n_\omega \omega / c$, $k_{ap} = [2n_{\omega_L} \omega_L - n_{\omega_s} \omega_s] / c$, $v_{gl} = d\omega / dk$, де $\omega_s = (\omega_L - \Omega)$, $\Omega / (2\pi c) = 1004 \text{ см}^{-1}$ – частота молекулярних коливань у толуолі, $\omega_L / (2\pi c) = 14403 \text{ см}^{-1}$ – частота рубінового лазера. Використовувалася дисперсійна формула Зельмеєра:

$$n_\omega = A + B / (1 - Cv^2), \quad (5)$$

де A, B, C – числові коефіцієнти, $v = \omega / (2\pi c)$ – частота в обернених сантиметрах. Для толуолу значення коефіцієнтів є такими [3]: $A = 1,23633$; $B = 0,23895$; $C = 2,89027 \cdot 10^{-10} \text{ см}^2$.

Результати розрахунків

Виконанню умови амплітудно-фазового синхронізму в (2) відповідає рівність нулю аргументу функції F_2 . Тож можна очікувати значної густини енергії лише, коли

$$\Delta\omega / v_{FT} - \Delta k_\parallel = 0, \quad (6)$$

за якої функція sinc набуває значення 1, та в безпосередньому околі цієї точки. На рис.1 пока-

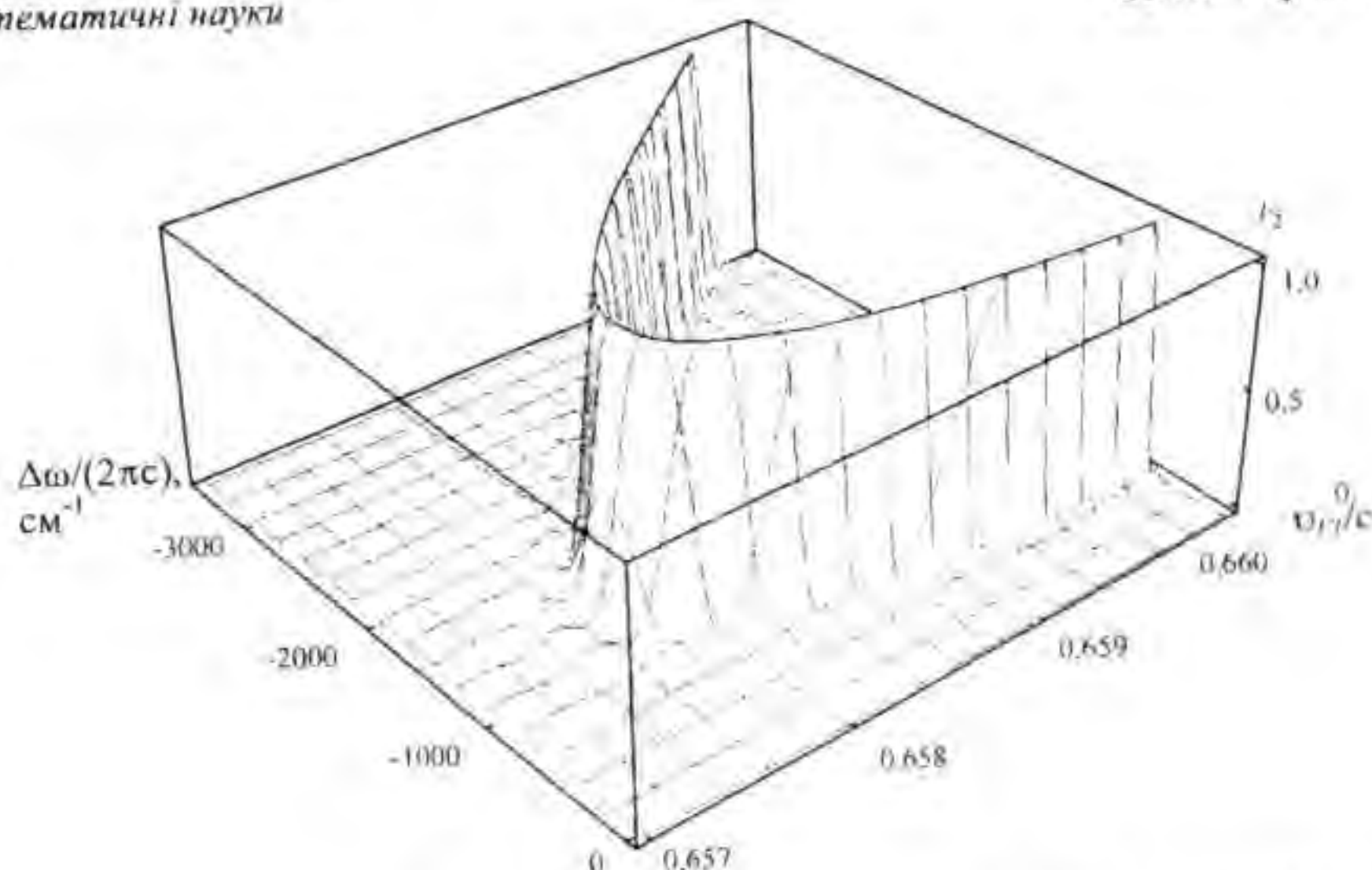


Рис.1 Залежність F_2 від зміщення частоти та швидкості v_{fT} фокальної точки

зана залежність функції F_2 від $\Delta\omega$ та швидкості в інтервалі $v_{fT} = (0,657 \div 0,660)c$. Умова (6) у випадку заданої швидкості руху фокальної точки виконується лише для певних частотних зміщень $\Delta\omega$, які позначимо $\Delta\omega_s$. Саме для цих зміщень забезпечуються умови досягнення максимальної густини енергії.

Існує проміжок швидкостей $(0,64858 \div 0,65790)c$, на якому рівняння (6) не має дійсних розв'язків, а отже, пригнічується випромінювання АК. Це ілюструється залежністю зміщення частоти $\Delta\omega_s$ синхронізму від швидкості руху фокальної точки на рис.2. У випадку $v_{fT}/c = 0,64858$ зміщення $\Delta\omega_s/(2\pi c) = 1298 \text{ cm}^{-1}$, а для $v_{fT}/c = 0,65790$ маємо $\Delta\omega_s/(2\pi c) = -1416 \text{ cm}^{-1}$.

Для деяких значень швидкості існують два

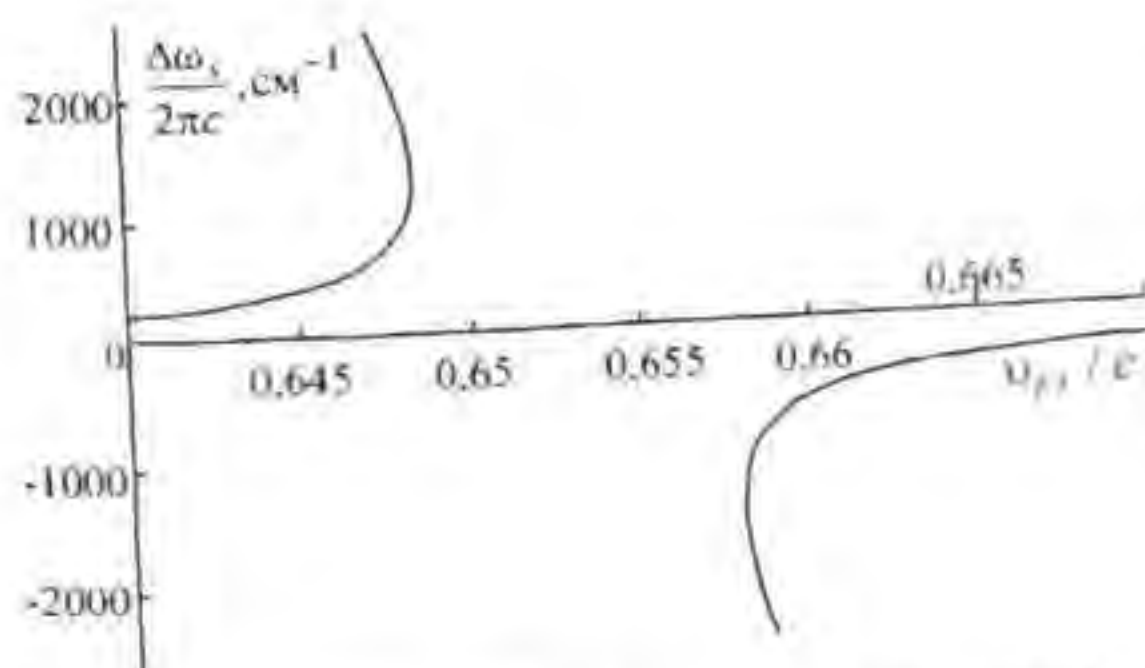


Рис.2 Залежність частоти зміщення синхронізму $\Delta\omega_s$ від швидкості руху фокальної точки v_{fT}

розв'язки зміщення частоти $\Delta\omega_s$. На рис. 2 цим швидкостям відповідають „петлі“ графіків вказаних залежностей, що є помітним для великих значень частотного зміщення синхронізму – більше 1000 cm^{-1} . При $v_{fT} \rightarrow \pm\infty$ зміщення асимптотично прямує до $\pm 4,8 \text{ cm}^{-1}$. Для $v_{fT} = 0$ завжди маємо нульове $\Delta\omega_s$.

Зсув частоти поляризації внаслідок фазової само модуляції

$$\Delta\omega_z = \Gamma\omega_{FB}, \quad (7)$$

який в (2) входить у показник степені експоненти (функція F_1), загалом не збігається з $\Delta\omega_s$, а тому може не реалізуватися одночасно умова $F_1(\Delta\omega) = F_2(\Delta\omega) = 1$, що забезпечує максимальне значення $W_{\omega\theta}$. Порівняння зміщення частоти $\Delta\omega_s$ синхронізму та зсуву частоти $\Delta\omega_z$ поляризації наведено на рис.3. Значення Γ становило $37,8 \text{ cm}^{-1}$, що відповідає $\bar{P} = 1,1$, $a_f = 8,9 \text{ мкм}$. За такого Γ в області, вказаній на графіку, перетинання кривих для $\Delta\omega_z$ і $\Delta\omega_s$ реалізується в точці $\{v_{fT}/c = 0,670, \Delta\omega/(2\pi c) = -198,5 \text{ cm}^{-1}\}$. Крім цього перетинання завжди реалізується в точці $\{0,0\}$. Формально, внаслідок неоднозначності функції $\Delta\omega_s$ (рис.2) у даному випадку існує ще одна точка $\{v_{fT}/c = 0,658, \Delta\omega/(2\pi c) = -1831,5 \text{ cm}^{-1}\}$, проте такі частоти в спектрі АК експериментально не спостерігаються, оскільки

фазова самомодуляція збуджуючого випромінювання не може забезпечити відповідних частотних зсувів. Незначні зміни Γ суттєво впливають на розташування точок, в яких $\Delta\omega_z = \Delta\omega_s$.

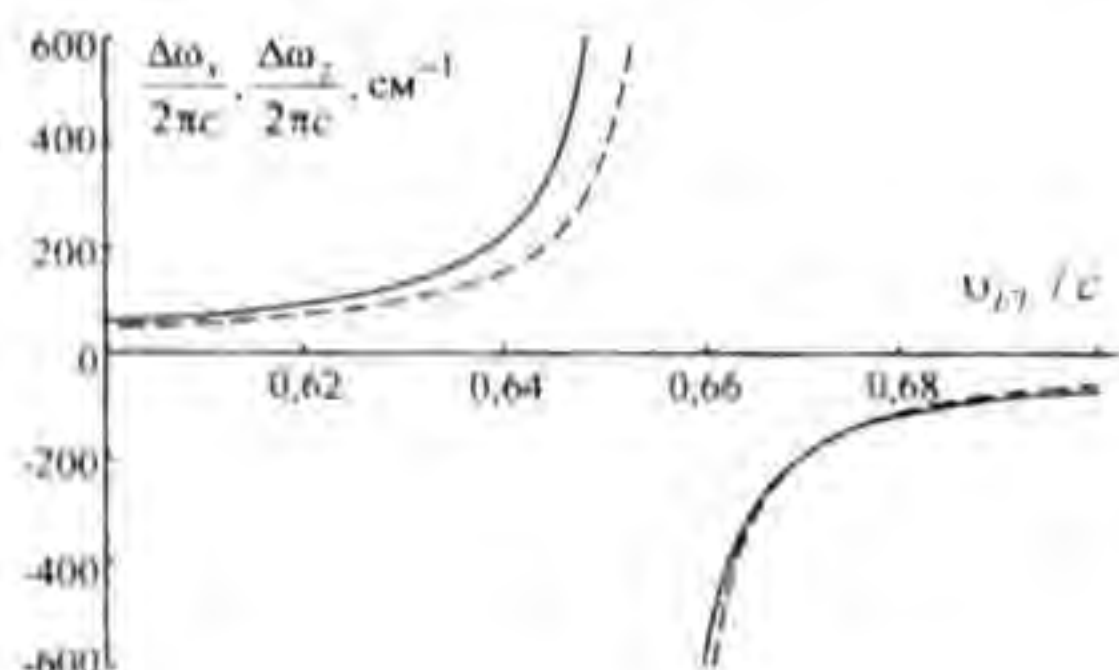


Рис.3 Залежність зміщення $\Delta\omega_s$ частоти синхронізму (—) та зсуву $\Delta\omega_z$ частоти поляризації (---) від швидкості v_{FT} руху фокальної точки

Спектральний склад та інтегральна за частотою енергія антистоксового випромінювання визначаються не лише значеннями $\Delta\omega_z$, $\Delta\omega_s$, для яких $F_1=1$ і $F_2=1$, відповідно, а й спектральною шириною F_1 та F_2 .

Рівняння $F_1(\Delta\omega) = e^{-1}$ для напівширини спектра поляризації на рівні e^{-1} має розв'язок $\Delta\omega = \Delta\omega_z \pm \sqrt{2}v_{FT}/b$. Тож, напівширина спектра поляризації $\delta\omega_z = \sqrt{2}|v_{FT}/b|$. Для функції F_2 аналітичного розв'язку рівняння $F_2(\Delta\omega) = e^{-1}$ не існує, проте наближено відповідна напівширина

$$\delta\omega_s = |\Delta\omega_s| \frac{5,56}{2\sqrt{\ln 2} L \Delta k_{ap}}, \quad (8)$$

де у наближенні лінійної дисперсії

$$k = k_a + \Delta\omega \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_a} = k_a + \frac{\Delta\omega}{v_{gr}},$$

$$\Delta\omega_s = \frac{\Delta k_{ap}}{v_{FT}^{-1} - v_{gr}^{-1}}. \quad (9)$$

У виразах (8), (9) величина $\Delta k_{ap} = k_a - k_{ap}$ є неузгодженістю хвильових векторів вільної хвилі (k_a) і поляризації (k_{ap}) на комбінаційній

антистоксовій частоті ω_a без урахування фазової самомодуляції, v_{gr} — групова швидкість випромінювання на частоті ω_a . Для толуолу $\Delta k_{ap} = 46,5 \text{ см}^{-1}$. На рис. 4 наведено порівняння для точно розрахованої $\delta\omega_s$ і з використанням (8), (9) у випадку $L = 1 \text{ см}$. Для вказаної довжини відповідно до (8) $\delta\omega_s = 0,072|\Delta\omega_s|$, а похибка не перевищує 3%, коли $|\Delta\omega_s|/(2\pi c) \leq 200 \text{ см}^{-1}$ (див. рис.4). Основна складова похибки пов'язана з наближенням лінійної дисперсії (9). Якщо використовувати точне значення $k = n_{\omega}\omega/c$ для обрахунку $\Delta\omega_s$, то похибка складає 0,5%.

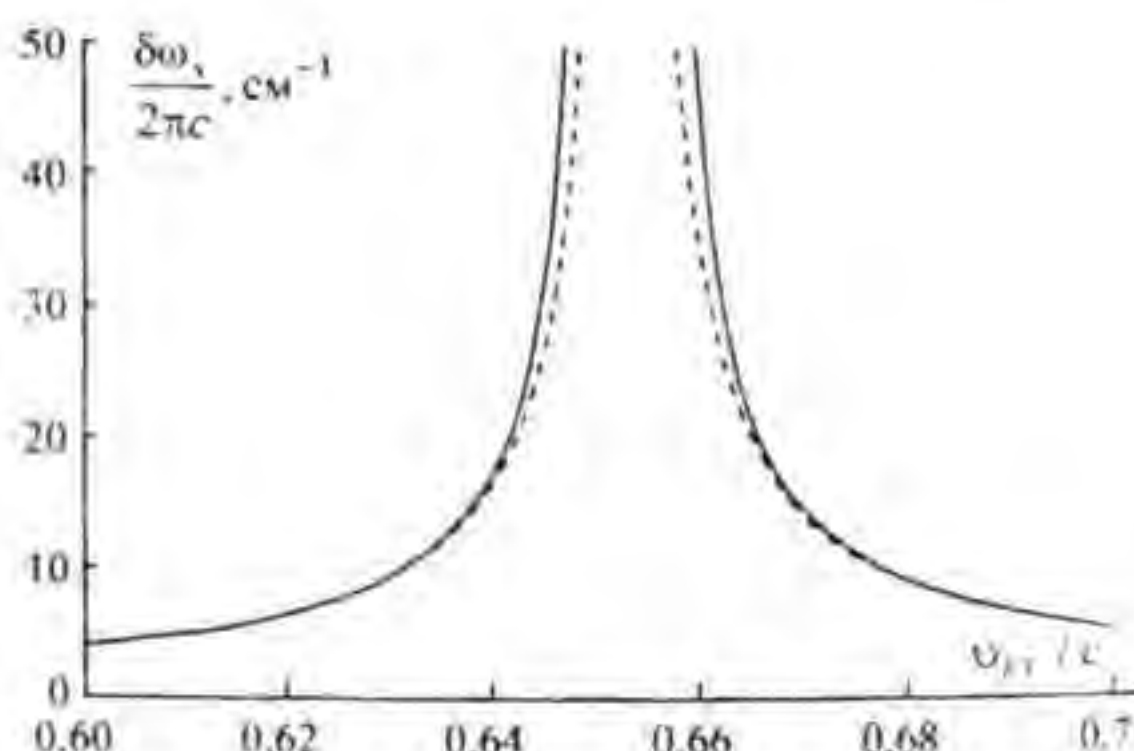


Рис.4 Ширина синхронізму $\delta\omega_s$: — точний чисельний розрахунок, --- аналітичне наближення за формулами (8), (9)

Для заключного аналітичного аналізу спектра та енергії випромінювання АК функцію F_2 можна наближено подати у вигляді гауссової функції

$$F_2 = \exp \left[- \left(\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_s}{\delta\omega_s} \right)^2 \right], \quad (10)$$

з напівшириною $\delta\omega_s$ та максимумом у точці $\Delta\omega = \Delta\omega_s$. Похибка такого наближення в межах $\Delta\omega = \Delta\omega_s \pm \delta\omega_s$ становить 0,013, а загалом не перевищує 0,047. У результаті добутку $F_1 F_2$ в (2) набуває вигляду гауссової функції:

$$F_1 F_2 = k \exp \left[- \left(\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_{\max}}{\delta\omega_{\max}} \right)^2 \right] \quad (11)$$

з напівшириною

$$\delta\omega_{\max} = \frac{\delta\omega_s \delta\omega_z}{\sqrt{\delta\omega_z^2 + \delta\omega_s^2}},$$

максимумом у точці

$$\Delta\omega = \Delta\omega_{\max} = \frac{\delta\omega_z^2 \Delta\omega_s + \delta\omega_s^2 \Delta\omega_z}{\delta\omega_z^2 + \delta\omega_s^2}$$

та амплітудним значенням

$$k = \exp \left[- \left(\frac{\Delta\omega_s}{\delta\omega_s} \right)^2 - \left(\frac{\Delta\omega_z}{\delta\omega_z} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega_{\max}}{\delta\omega_{\max}} \right)^2 \right].$$

Енергія випромінювання у наближенні $\omega \gg \delta\omega_{\max}$ знаходиться шляхом інтегрування наступного виразу:

$$W \sim \int_{-\infty}^{\infty} k \exp \left(\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_{\max}}{\delta\omega_{\max}} \right)^2 d\omega = \sqrt{\pi} k \delta\omega_{\max}. \quad (12)$$

Тож окрім множників в (2) перед $F_1 F_2$ (таких як v_{f1}^{-2} та ω^4) енергія визначається напівшириною $\delta\omega_{\max}$ спектра антистоксового випромінювання і коефіцієнтом k .

У випадку оптимального значення абсолютного приросту модуля хвильового вектора збуджуючого випромінювання у центрі фокальної області, який у лінійному наближенні дисперсії у околі частоти антистоксового випромінювання становить [1]

$$\Gamma = \frac{\Delta k_{ap}}{1 + v_{f1} (v_{gl}^{-1} - v_{ga}^{-1})}, \quad (13)$$

забезпечується виконання умови $\Delta\omega_z = \Delta\omega_s$, а отже і максимальне значення коефіцієнта $k=1$. Величина ж $\delta\omega_{\max}$ сягає максимального значення при певній швидкості фокальної точки. Ця швидкість знаходиться з рівняння $\partial\delta\omega_{\max} / \partial v_{f1} = 0$, яке має аналітичний розв'язок

$$v_{f1} = \left(1 + \frac{5,575b^2}{L^2} \right) v_{ga}. \quad (14)$$

Наприклад, за параметрів $b=0,1$ см та $L=1$ см максимальна ширина спектра $\delta\omega_{\max}$ відповідає швидкості $v_{f1} = 0,68973c$ (рис.5). Максимальна ж енергія з урахуванням коригуючого множника v_{f1}^{-2} та нехтуванням змінюю ω^4 в (2) має локальний екстремум для дещо меншої

швидкості $v_{f1} = 0,61155c$. Зі зменшенням v_{f1} до нуля енергія монотонно прямує до нескінченності, оскільки час існування фокальної області нескінченно зростає. Величина $F_1 F_2 / v_{f1}$, яка пропорційна середній потужності випромінювання (але не піковій) незалежно від b та L має глобальний максимум на швидкості $v_{f1} = v_{ga}$.

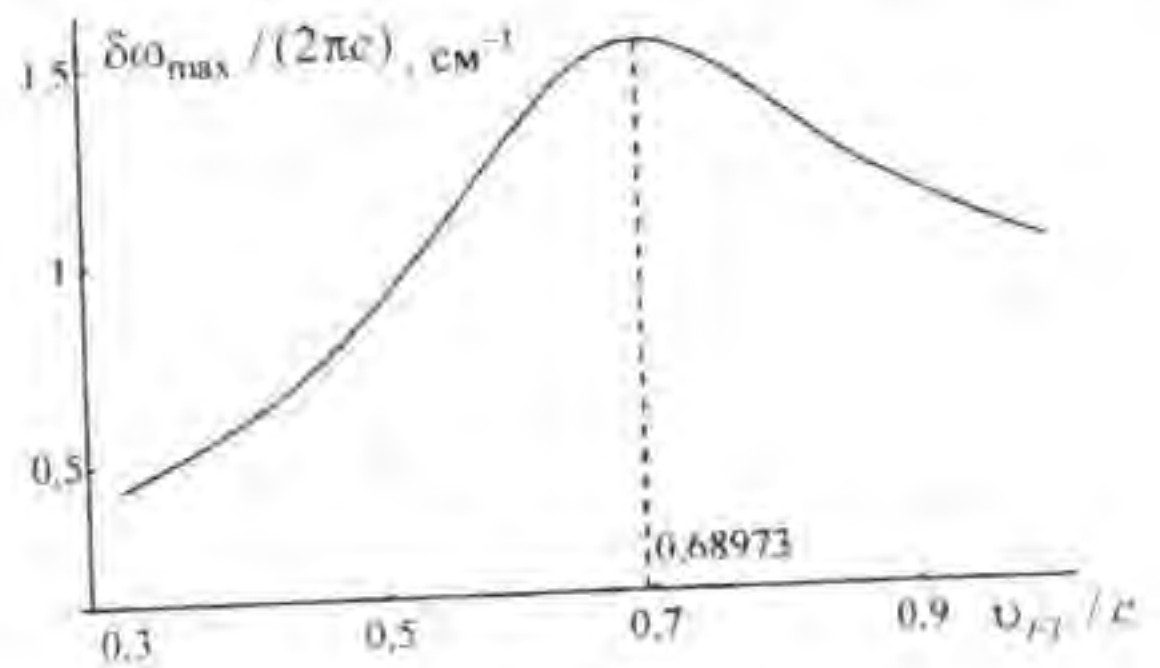


Рис.5 Залежність ширини спектра $\delta\omega_{\max}$ від швидкості v_{f1} фокальної області

У випадку довільного фіксованого Γ , яке визначається виразом (4), максимум енергії випромінювання у області $v_{f1} > v_{ga}$, в якій реалізуються від'ємні $\Delta\omega_{\max}$, припадає на швидкість фокальної області, яка зі зростанням Γ теж зростає. Відповідну залежність для випадку $b=0,1$ см та $L=1$ см показано на рис.6. Нескінченно великим v_{f1} відповідає асимптотичне значення $\Gamma = \Delta k_{ap} v_{ga} / v_{gl} = 46,256 \text{ см}^{-1}$. Якщо Γ прямує до нуля, то максимум енергії випромінювання припадає на швидкість фокальної точки $v_{f1} = v_{gl}$.

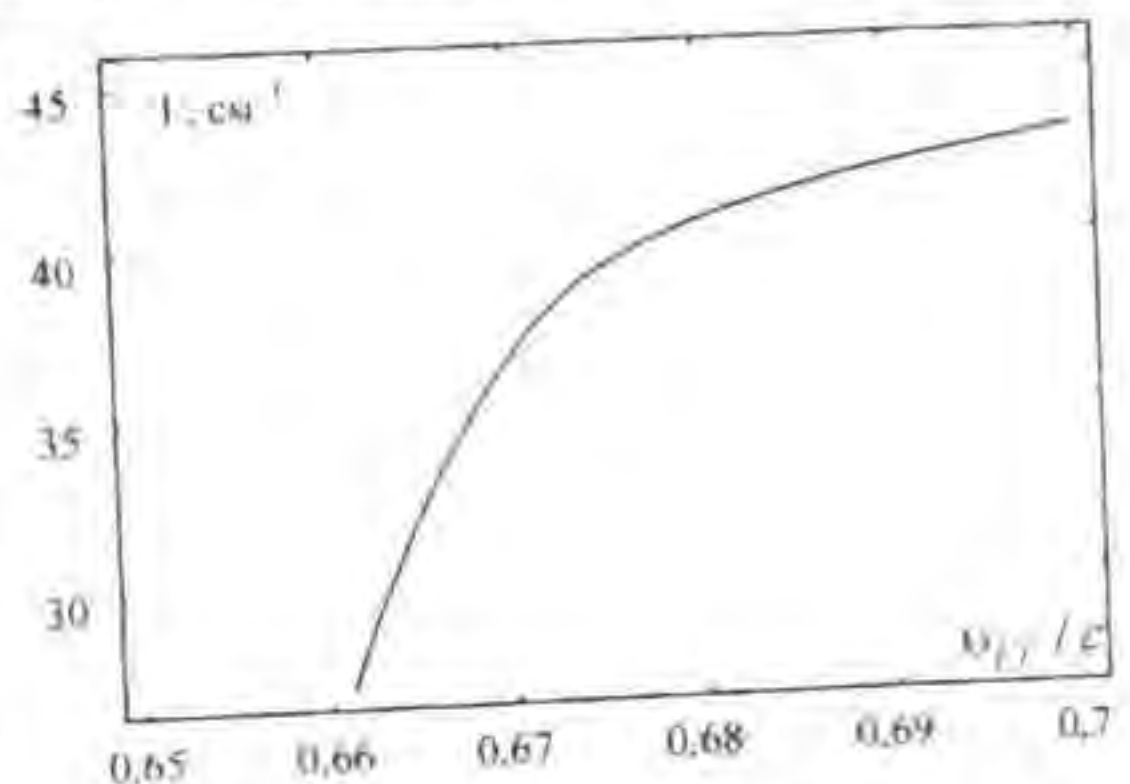


Рис.6 Зв'язок між Γ та швидкістю v_{f1} , на яку припадає максимум енергії випромінювання

Залежність енергії випромінювання від швидкості фокальної області для деяких фіксованих значень Γ показано на рис.7.

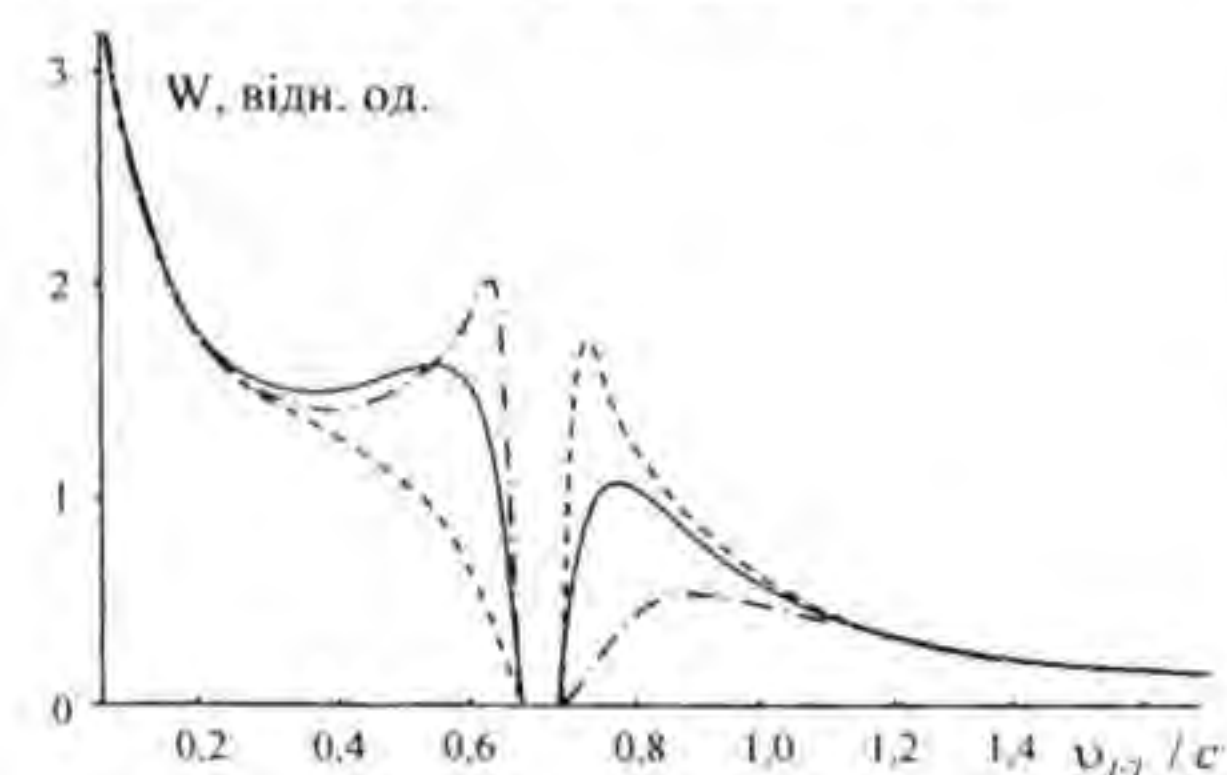


Рис.7 Залежність енергії випромінювання від швидкості руху фокальної точки: --- $\Gamma=43,5$; — $\Gamma=46,5$; - · - · - $\Gamma=49,5$

Висновки

Енергія осьового антистоксового випромінювання суттєво залежить від швидкості фокальної області. У випадку, коли зміна показника заломлення у фокальній області дає абсолютний приріст Γ модуля хвильового вектора, який забезпечує виконання умови фазового синхронізму (еквівалентна умові рівності зміщення $\Delta\omega_s$ частоти синхронізму і зсуву $\Delta\omega_z$ частоти поляризації) для довільної швидкості, існує локальний максимум енергії, що припадає на швидкість фокальної області, яка залежить від співвідношення довжини b фокальної області до довжиною L відрізка траси, яку область пробігає. Потужність випромінювання максимальна за умови рівності швидкості v_{fz} фокальної області і групової

швидкості світла v_{gr} на частоті антистоксового випромінювання. Оскільки для ширини синхронізму і ширини спектра поляризації виконується співвідношення $\delta\omega_s > \delta\omega_z$ то центральна частота лінії антистоксового випромінювання приблизно збігається з частотою поляризації ($\Delta\omega_{\max} \approx \Delta\omega_z$).

У випадку фіксованого значення абсолютного приросту Γ модуля хвильового вектора локальний максимум енергії випромінювання з'являється в околі тієї швидкості фокальної області, для якої зміщення $\Delta\omega_s$ частоти синхронізму і зсуву $\Delta\omega_z$ частоти поляризації збігаються ($\Delta\omega_z = \Delta\omega_s$).

Список використаних джерел

1. Іванісік А. І., Конопатський А. В. Вплив фазової саомодуляції імпульсів накачування на спектр антистоксового вимушеного комбінаційного розсіяння світла // Вісник Київського університету. Сер: фіз.-мат. науки. – 2006. – В.3. – С.331-340
2. Иванисик А. И., Понежа Г. В. Спектр антистоксового вынужденного комбинационного рассеяния из движущихся фокальных областей самофокусировки // Оптика и спектроскопия. – 2001. – 90, №4. – С. 699 – 703.
3. Измерения показателя преломления органических жидкостей в видимой области спектра / А. И. Иванисик, В. И. Малый, Г. В. Понежа; Киев. ун-т им. Т. Г. Шевченко. – Киев, 1985. – 7 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИТИ 26.03.85, №618-Ук85.

Надійшла до редколегії 15.11.2010 р.

УДК 616.073.75

Мазур А.В., асп., Нетреба А.В., к.ф.-м.н., доц.

Реконструкція томограм методами МРТ для визначених зв'язків розподілів спінової густини та релаксаційних характеристик

Основою для відновлення просторових спінових характеристик методами ЯМР – томографії є аналіз випромінювання електромагнітних хвиль протонами. Воно спричинене отриманням ними енергії від радіохвиль сигналу збудження [1]. Умовою одержання цієї енергії є поміщення об'єкта в потужне електромагнітне поле та збудження радіочастотними імпульсами ядерних магнітних моментів на частоті їхньої прецесії навколо напрямку силових ліній магнітного поля. У магнітно - резонансній томографії (МРТ) залишається актуальною задача інтерпретації даних. Задача вирішується неоднозначно, даній тематиці присвячено багато методик та опублікованих робіт. Одним з варіантів вирішення є проведення аналізу томограм, побудованих за протонною густиною та часу T_2 спин - спінової релаксації, які залежать певним чином один від одного. У роботі поставлено експеримент з моделювання роботи томографа за умов його налаштування на отримання томограм, зважених по протонній густині та часу T_2 . З метою дослідження можливостей поглибленої інтерпретації даних проведено аналіз реконструкції томограм за умов різного характеру залежності густини та релаксаційних характеристик.

Ключові слова: томографія, спінова густина, час релаксації, реконструкція.

*E-mail: DarkAngelRpd@i.ua

Статтю представив

д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Методи реконструкції томограм, зважених за протонною густиною ρ та часу T_2 спин – спінової релаксації

Запропонована методика проведення модельного експерименту запису даних МРТ обстежень при якому один з об'єктів є модельним, тобто розрахованим на основі

A.V. Mazur, post-graduate student,
A.V. Natreba, Ph.D.

Tomogram MRI reconstruction methods for certain relations of the spin density and relaxation characteristics distributions

The reconstruction of the spatial spine characteristics in NMR - tomography is based on the analysis of the radiation of electromagnetic waves by hydrogen nuclear. It is caused by receiving energy from the signal excitation waves [1]. The condition for obtaining this energy is an object placement into a powerful electromagnetic field with radio frequency excitation pulses of nuclear magnetic moments on the frequency of their precession around the direction of power lines magnetic field. Problem of data interpretation is actual in magnetic - resonance imaging (MRI). The problem is solved ambiguously, the subject is devoted to methods and many published works. One option is to analyze tomogram dependent on proton density and T_2 relaxation time, which depend in some way apart. The article describes the simulation tomography experiment for obtaining the proton density and T_2 weighted tomograms. In order to the possibility of more detailed data interpretation reconstruction is realized for different character depending of the spine density and the relaxation characteristics.

Key Words: tomography, spin density, relaxation time, reconstruction.

іншого[3,4]. При виконанні практичної частини для реконструкції було використано методи Фур'є-візуалізації для МРТ. При цьому проводилася реконструкція даних, зважених по протонній густині ρ та по T_2 .

Інтенсивність отриманого сигналу залежить від параметрів тканини, зокрема протонної густини, часів T_1 і T_2 релаксації, та від параметрів TR і TE імпульсної послідовності, що

використовується [2]. Тому в практичній МРТ були введені терміни зважені по T_1 , T_2 і протонній гутині зображення.

Термін T_1 -зважене зображення використовується для опису контрасту між тканинами, викликаному відмінностями значень T_1 [5]. Якщо параметри імпульсної послідовності вибрані так, що $TR < T_1$ (500 мс) і $TE < T_2$ (30 мс), то поперечна намагніченість:

$$M_{xy} = M_{xy0} \exp(-TR/T_1) \tag{1}$$

Таким чином, томограма стає незалежною від T_2 . Через широкий діапазон значень T_1 , T_2 і густини протонів тканин тіла, зважені зображення по T_1 для певних біологічних тканин можуть бути інформативно різними.

Біологічні тканини з коротким T_1 дають яскравий сигнал для T_1 імпульсної послідовності. У зв'язку з великою повздовжньою і поперечною намагніченістю жирові тканини мають більш сильний сигнал і зображення буде більш яскравим на T_1 імпульсній послідовності.

Термін зважене зображення за T_2 використовується для опису контрасту між тканинами, викликаного розбіжностями значень T_2 [7]. Якщо параметри імпульсної послідовності вибрані так, що $TR > T_1$ (2000 мс) і $TE < T_2$ (100 мс) і $(1-\exp(-TR/T_1))=1$, то поперечна намагніченість

$$M_{xy} = M_{xy0} \exp(-TE/T_2) \tag{2}$$

залежить лише від часу T_2 релаксації тканин. Контраст T_2 зображення підсилює TR , порівняний з часом T_1 тканини, при цьому зменшується внесок T_1 до контрасту.

Наприклад, жирова тканина має більш короткий час T_2 релаксації, ніж вода і сигнал загасає швидше води. Оскільки поперечна намагніченість жирової тканини мала, вона дає слабкий внесок до T_2 -зображення. Зваженість за T_2 сильніша при більш довгому TE . Вода має більше значення T_2 і тому дає більш сильний T_2 сигнал, відповідає більш яскравим областям на T_2 -зображеннях. Характеристики контрасту зображення в залежності від обраних значень TR і TE :

- короткі TR (менше 1000 мс) і TE (менше 25 мс) дають T_1 контраст;
- довгі TR (понад 1500 мс) і TE (більше 60 мс) дають T_2 контраст;

- середні значення TR (1000-1500 мс) і TE (25-60 мс) дають зображення протонної густини.

Табл.1

Значення часу T_1 і T_2 релаксації біологічних тканин у магнітному полі 1,5 Тл

Тканина	Час T_1 , мс	Час T_2 , мс
Спино-мозкова рідина	800-2000	110-2000
Біла речовина	760-1080	61-100
Сіра речовина	1090-2150	61-109
М'язова	950-1820	20-67
Жирова	200-750	53-94

У найбільш загальному випадку необхідна побудова трьох основних видів томографічних зображень: T_2 – зображення, зображення протонної густини ρ та T_1 – зображення, оскільки при цьому збільшуються діагностичні можливості щодо виявлення паталогій.

Табл. 2

Відображення тканин та утворень на різних видах МР томограм

Тканина або утворення	T_2 зображення	ρ зображення	T_1 зображення
Кісткова	Яскраве	Темне	Темне
Гострий і хронічний крововилив	Темне	Темне	Сіре
Жирова	Темне	Темне	Яскраве

Аналіз реконструкцій, зважених за спіновою густиною та релаксаційними характеристиками.
Відновлення томограм, зважених за спіновою густиною ρ

Для виділення визначеного шару в площині (xy) прикладається градієнт поля вздовж осі z . Після дії першого збуджуючого імпульсу включається градієнт поля G_x вздовж осі x на час t_x , а потім градієнт поля G_y на час t_y вздовж осі y . Потім сигнал ЯМР зазнає оцифровки і записується для n еквідистантних значень t_y . Таким чином отримують n експериментальних точок. Експеримент повторюється для n еквідистантних значень t_x . У ході вимірювання отримується матриця n^2 експериментальних точок. Двовимірна томограма будується після

застосування методу Фур'є – перетворення. Сигнал за вищевикладених умов можна подати у такому вигляді:

$$S(t_1, t_2) = \sum_{x, y} \exp(i(\gamma G_1 t_1 x + \gamma G_2 t_2 y)) \rho(x, y) \quad (3)$$

За допомогою двовимірного зворотного перетворення Фур'є можна отримати розподіл густини протонів $\rho(x, y)$:

$$\rho(x, y) = C \sum_{t_1, t_2} \exp(-i(\gamma G_1 t_1 x + \gamma G_2 t_2 y)) S(t_1, t_2) \quad (4)$$

Відновлення томограм, зважених за T_2

Для виконання реконструкції зображення за допомогою двовимірного перетворення Фур'є після селективного збудження в поперечній площині в момент часу t_x подається постійний градієнт у напрямку осі x і виконується частотне кодування сигналу, що зчитується. Амплітуда градієнту G_x , що прикладається в момент часу t_y , буде змінюватися від циклу до циклу в послідовності імпульсів. Таким чином двовірний Фур'є-образ буде подаватися у наступному вигляді:

$$S(t_1, t_2) = \sum_{x, y} \rho(x, y) \exp(i(\gamma G_1 t_1 x + \gamma G_2 t_2 y)) \times \exp(-\frac{TE}{T_2(x, y)}) \quad (5)$$

Використавши обернене перетворення Фур'є можна отримати зважений розподіл густини протонів у вигляді:

$$\hat{\rho}(x, y) = C \sum_{t_1, t_2} S(t_1, t_2) \exp(-i(\gamma G_1 t_1 x + \gamma G_2 t_2 y)) \quad (6)$$

Моделювання досліджуваного об'єкту

При постановці модельного експерименту запису сигналу вільної індукції було задано функцію, яка характеризує нелінійну залежність часу T_2 від спінової густини ρ . Дана функція була представлена у вигляді полінома:

$$T_2(x, y) = A + B\rho(x, y) + C\rho^2(x, y) \quad (7)$$

Штучний розподіл T_2 розраховувався при задаванні різних коефіцієнтів нелінійної залежності (7), які враховували вплив кожного

доданка та відповідала різному характеру подібності двох просторових розподілів, які є вхідними даними. Значення коефіцієнтів A , B та C наведено в таблиці 3

Табл.3

Значення коефіцієнтів A , B та C нелінійної моделі

№п/п	A	B	C
1	0	1	0,1
2	0	1	0,2
3	0	1	0,5
4	0	1	1

Задаючи значення набору коефіцієнтів для різного рівня нелінійного зв'язку, було досліджено, як буде впливати подібність вхідних розподілів на подібність реконструйованих зважених по ρ і по T_2 томограм. Результати реконструкції додатково порівнювалися з T_2 [6], враховуючи залежність (7).

Програмна реалізація запису сигналу та реконструкція даних

При проведенні дослідження була реалізована програма, яка моделювала роботу томографа. Програмне забезпечення виконувало всі етапи дослідження - моделювання роботи імпульсних послідовностей та запису даних, реконструкцію даних. Результатом реконструкції є дві томограми, одна з них зважена по протонній густині ρ , інша по часу спин - спінової релаксації T_2 , тобто реконструкція ρ по T_2 . Програма була реалізована за допомогою Visual Studio, використовувалися стандартні класи броби графічних та числових даних.

Для роботи з зображеннями розмірами 256x256 пікселів використовувався статичний метод Bitmap.

Для задавання прямого і зворотного Фур'є перетворення використовувалася бібліотека Math, за допомогою якої можна автоматизовано оброблювати функції.

Аналіз реконструйованих томограм

Моделювання роботи томографа з подальшою реконструкцією було проведена на прикладі обробки зображення хребта при

параметрах, що дають контрастне та рівномірне зображення. Розміри зображень, що оброблялися, склали 256x256 пікселів:



Рис. 1. Вхідне зображення для реконструкції

подібності можливостей інтерпретації томографічних даних розподілів спінової густини та часу T_2 , які є вхідних даними МРТ дослідження.



Рис. 3. Реконструкція ρ зваженого за T_2
при $A=0; B=1; C=0,2$



Рис. 2. Реконструкція зважена за ρ .

При декількох значеннях коефіцієнтів A , B та C було промодельовано певну кількість вихідних даних.

Подібність реконструйованих зображень оцінювалася візуально, відповідно до методики [8]. З отриманих результатів було показано, що зі збільшенням величини нелінійної залежності розподілу T_2 від розподілу ρ спостерігається збільшення відмінності у реконструкції ρ , зваженого по T_2 від інших типів відновлених томограм. Оцінка реконструкції розкрила залежність від функціональної



Рис. 4. Розподіл T_2 з урахуванням залежності (7)

Висновки

Запропоновано метод проведення модельного експерименту запису даних МРТ обстежень за умов, що один об'єктів є модельним, розрахованим на основі іншого. З цією метою адаптовано метод зворотного Фур'є перетворення для реконструкції МРТ зображень. Проведена реконструкція для різних значень параметрів нелінійної залежності, що відповідають різному ступеню нелінійного

зв'язку. Визначено умови, які характеризують нелінійність між штучним та модельним об'єктом, при яких інтерпретація реконструкції стає малооб'єктивною. Створено та налагоджено програму для моделювання реконструкції МРТ зображень у середовищі C#.

Список використаних джерел

1. Бамбер Дж., Тристам М., Лич М., Джонс К., Узбб С., Хилл К., Бентли Р. Физика визуализации изображения в медицине: [в двух томах: пер. с англ.] / Под ред. С.Узбба. – Москва :Мир, 1991. Т.2. 1991.– 408 с.
2. Хауссер К.Х., Кальбитцер Х.Р. ЯМР в медицине и биологии: структура молекул, томография, спектроскопия in vivo: [пер. с нем.] / Под ред. Рябченко С. М., Рожковой З.З – Киев: Наукова думка, 1993.–259с.
3. Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях.–Москва: Мир, 1990.– 711с.
4. Джозеф П. Хорнак. Основы МРТ: [пер. с англ.] / Гипп И.М
Режим доступу:
<http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/inside-r.htm>
5. Shigeru Kiryua, Yusuke Inouea, Kohki Yoshikawab, Morio Shimadac, Makoto Watanabea, Kuni Ohtomod Diet and gastrointestinal signal on T1-weighted magnetic resonance imaging of mice. /Shigeru Kiryua, Yusuke Inouea, Kohki Yoshikawab, Morio Shimadac, Makoto Watanabea, Kuni Ohtomod // Magnetic Resonance Imaging.–2010.–Volume 28.–P. 273-280.
6. ShaoKuan Zheng, Yang Xia. On the measurement of multi-component T2 relaxation in cartilage by MR spectroscopy and imaging. /ShaoKuan Zheng, Yang Xia// Magnetic Resonance Imaging.–2010.–Volume 28.–P. 537-545.
7. Eric T. Han , Daniel Pelletier , Sarah J. Nelson. Measurement of in vivo multi-component T2 relaxation times for brain tissue using multi-slice T2 prep at 1.5 and 3 T. / Eric T. Han , Daniel Pelletier , Sarah J. Nelson // Magnetic Resonance Imaging.–2006.–Volume 24.–P. 33-43.
8. Takayuki Obata, Koji Uemura, Hiroi Nonaka, Mitsuru Tamura, Shuji Tanada, Hiroo Ikehira. Optimizing T2-weighted magnetic resonance sequences for surface coil microimaging of the eye with regard to lid, eyeball and head moving artifacts. /Takayuki Obata, Koji Uemura, Hiroi Nonaka, Mitsuru Tamura, Shuji Tanada, Hiroo Ikehira// Magnetic Resonance Imaging.–2006.–Volume 24.–P. 97-101.

Надійшла до редколегії 12.11.10.

УДК 621.385.833

Находкін М.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
академік НАН, Федорченко М.І., канд. фіз.-
мат. наук, с.н.с.

Формування інтерфейсу Sb/Ge(113)

За допомогою методів дифракції повільних електронів, фото- та оже-електронної спектроскопії досліджено зміну електронних властивостей (роботи виходу, загину зон поблизу поверхні, густини електронних станів поблизу рівня Фермі) поверхні Ge(113)-(3x1) при адсорбції на ній атомів Sb. Показано, що на початкових стадіях адсорбції атомів Sb на поверхні Ge(113)-(3x1) при кімнатній температурі ($\Theta_{\text{Sb}} \leq 0.8 \text{ ML}$) та при відпалі поверхні Ge(113) з $\Theta_{\text{Sb}} \geq 1 \text{ ML}$ (450C) поведінка роботи виходу може бути пояснена зміною загину зон поблизу поверхні, що обумовлено ефектами пов'язаними з вбудовуванням атомів Sb в ґратку атомів Ge.

Ключові слова: Sb, Ge(113), адсорбція,
робота виходу, загин зон, поверхневі стани,
вбудовування.

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Дослідження адсорбції атомів Sb та Bi на монокристалічних поверхнях Ge і Si проводиться для розуміння процесів, що лежать в основі використання поверхнево активних речовин (сурфактантів) для одержання бездефектних напівпровідник-напівпровідник (Ge/Si) та метал-напівпровідник Me/Ge(Si) гетероструктур з квантовими властивостями [1, 2]. Стабільність поверхонь (113) Si та Ge, їх анізотропність та відсутність на них різнонаправлених доменів [3, 4] дозволяє розглядати ці поверхні як можливі кандидати для створення новітніх напівпровідникових пристроїв.

Метою цієї роботи було експериментальне вивчення взаємозв'язку між структурою та електронними властивостями інтерфейсів Sb/Ge(113) (структура верха валентної зони, робота виходу, загин зон поблизу поверхні) в залежності від товщини адсорбованої плівки Sb

Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of
Ukraine, Fedorchenko M.I., Ph.D.

Formation of the Sb/Ge(113) interface

The electronic properties (work function, surface band bending, density of electronic states near Fermi level) of the Ge(113)-(3x1) surface were investigated using electron spectroscopy methods during adsorption of Sb atoms on it. It is shown, that on the beginning stages of Sb atoms adsorption onto Ge(113)-(3x1) surface under room temperature ($\Theta_{\text{Sb}} \leq 0.8 \text{ ML}$) and during annealing of Ge(113) surface with several monolayers of Sb on it (450C), the behavior of work function can be explained by the change of band bending near the surface because of the build-in effect of Sb atoms into the Ge lattice.

Keywords: Sb, Ge(113), adsorption, work
function, band bending, surface states, intermixing.

і температури відпалу інтерфейсу.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакумній камері з базовим тиском $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ тор з використанням методик Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 6.0 – 10.8 еВ. Більш обширно деталі проведення експерименту приведені в наших попередніх роботах [5–7].

Результати експериментів та їх інтерпретація

Очищена від домішок та впорядкована атомарно чиста поверхня Ge(113) завжди мала чітку картину рефлексів ДПЕ $-(3 \times 1)$. На фотоелектронних спектрах отриманих нами для

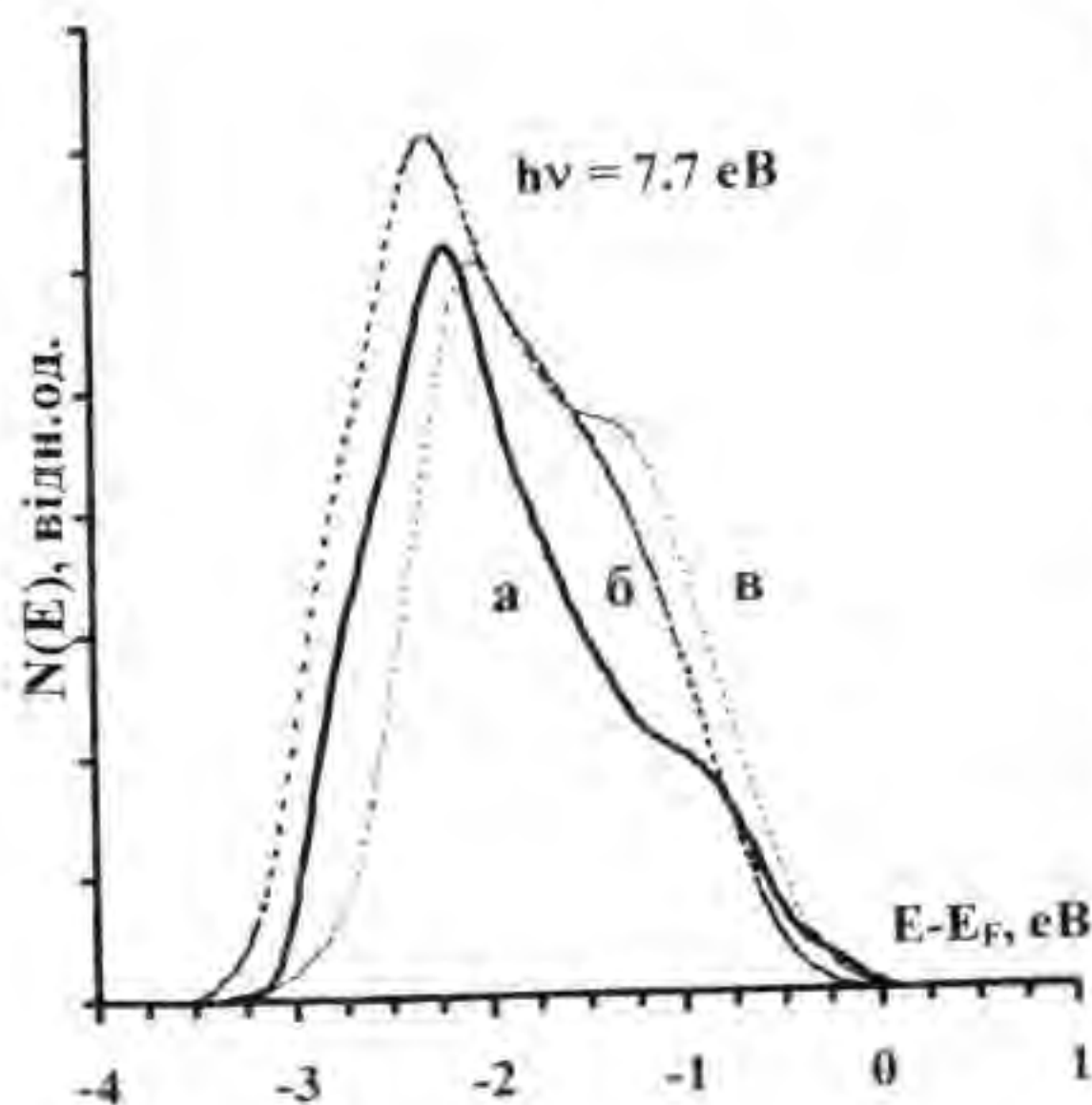


Рис.1 – Фотоелектронні спектри атомарно чистої поверхні Ge(113)-(3x1) (а), з наступним напленням 2 МШ атомів Sb (б) та відпаленням системи до 450С (в).

поверхні Ge(113)-(3x1) при $h\nu = 7,7$ eV впритул до самого рівня Фермі зареєстрована особливість густини станів (крива а рис.1), якої немає в спектрах ФЕС раніш досліджених нами поверхонь Ge(111)-c(2x8) [6] та Ge(100)-2x1 [7].

При адсорбції 2 МШ атомів Sb при кімнатній температурі особливість густини електронних станів біля рівня Фермі зникає (крива б рис.1), що є свідченням того, що ці електронні стани є поверхневими [8]. Цей експериментальний результат є підтвердженням розрахунку електронної структури поверхні Ge(113)-(3x1) [9], що вказує на металічний характер поверхневих станів на цій поверхні. З ФЕС (крива а рис.1) за методикою детально описаною в [5] було визначено роботу виходу (ϕ) поверхні Ge(113)-(3x1) ($\phi = 4,5 \pm 0,02$ eV).

З ростом Θ_{Sb} дробові рефлекси картин ДПЕ втрачали інтенсивність і контрастність. При $\Theta_{Sb} \approx 1,0$ МШ на картині ДПЕ спостерігались ослаблені рефлекси структури 1x1, а при $\Theta_{Sb} > 5$ МШ будь яких рефлексів взагалі не спостерігалось. Це могло свідчити про те, що адсорбція атомів Sb на Ge(113)-(3x1) при кімнатній температурі супроводжується поступовою аморфізацією приповерхневого шару, як це спостерігалось нами і для систем Sb/Ge(111)-c(2x8) та Sb/Ge(100) [6,7].

Для поверхні з 2МШ напелених атомів Sb низькоенергетичний край кривої ФЕС зміщується на $\approx 0,2$ eV в бік більших енергій зв'язку (крива б рис.1), що свідчить про зменшення ϕ до $\approx 4,3$ eV. При прогріві цієї адсорбційної системи до ≈ 450 С низькоенергетичний край кривої ФЕС зміщується в бік рівня Фермі вже на $\approx 0,5$ eV, що свідчить про збільшення ϕ до $\approx 4,8$ eV. При цьому на картинках ДПЕ реєструється надструктура 2x2. Порівнюючи ФЕС атомарно чистої поверхні та відпаленої поверхні з попередньо напеленими атомами Sb (криві а і в на рис.1) можна бачити, що відповідні краї цих спектрів можуть бути суміщені один з другим паралельним зміщенням цих кривих по осі енергії зв'язку. Це означає, що причиною різниці ϕ поверхонь, яким відповідають зазначені криві, є зміна загибуну зон.

Більш детально залежність зміни ϕ поверхні Ge(113)-(3x1) від ступеня покриття її атомами Sb показана на рис.2. При напеленні атомів Sb при кімнатній температурі (крива а рис.2) ϕ поверхні спочатку підвищується ($\Theta_{Sb} = 0 \div 0,7$ МШ), а потім зменшується до значення $\approx 4,3$ eV (при $\Theta_{Sb} \geq 2$ МШ).

Якщо після кожного напелення при кімнатній температурі (крок $\approx 0,2 \div 0,3$ МШ) адсорбційна система прогрівалась до ≈ 450 С, то ϕ поступово підвищувалась до насичення $\approx 4,8$ eV (крива б рис.2). Потрібно відмітити, що при таких умовах формування інтерфейсу Θ_{Sb} не перевищувало значення 0,8–1 МШ. При напеленні атомів Sb на аморфізовану іонами Ar поверхню.

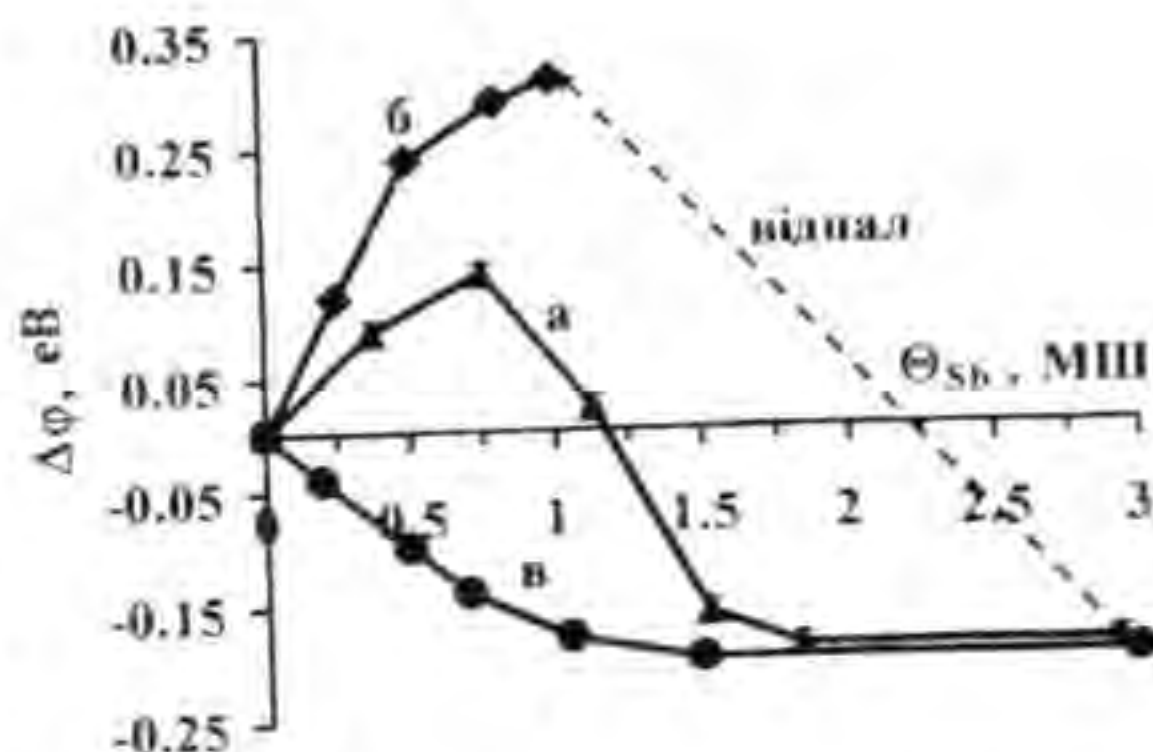


Рис.2 Залежність зміни роботи виходу $\Delta\phi$ системи Sb/Ge(113) від Θ_{Sb} та прогріву: а– $\Delta\phi$ при кімнатній температурі, б– $\Delta\phi$ після прогріву до 450°C після кожного напелення, в– напелення на аморфізовану іонами Ar поверхню.

поверхню Ge(113) ϕ монотонно зменшувалась з ростом Θ_{Sb} до значення ≈ 4.3 еВ при $\Theta_{Sb} \geq 1.5$ МШ (крива в рис.2). Поведінка ϕ при адсорбції Sb на поверхню Ge(113) є дуже схожою на ту, яку ми спостерігали і для інших граней Ge (Ge(111) [6] та Ge(100) [7]). Збільшення ϕ пояснювалось нами зміною величини загину зон поблизу поверхні. Ми вважали, що атоми Sb вбудовуються в поверхню Ge і спричиняють генерацію приповерхневих електронних станів, які і зумовлюють зміну загину зон. Але при адсорбції атомів Sb на поверхнях Ge, аморфізованих іонами Ar, або певною кількістю атомів Sb, попередньо напилених при кімнатній температурі, робота виходу зменшується у відповідності зі значеннями електронегативностей атомів Sb та Ge [10].

На рис.3 представлені залежності зміни ϕ поверхонь Ge(113) з напорошеними при кімнатній температурі атомами Sb в залежності від температури прогріву системи для декількох значень Θ_{Sb} .

При адсорбції 0.25 МШ атомів Sb ϕ поверхні Ge(113) збільшувалась приблизно на 0.09 еВ (крива а, рис 3). На картинах ДПЕ було помітно зменшення чіткості та контрастності рефлексів надструктури 3x1. Після прогріву такого інтерфейсу в діапазоні температур від 20 до 150С ϕ зростала ще на ≈ 0.03 еВ і при подальшому прогріві до 600С залишалась незмінною. (Зразок відпалювався на протязі 5 хвилин при заданій

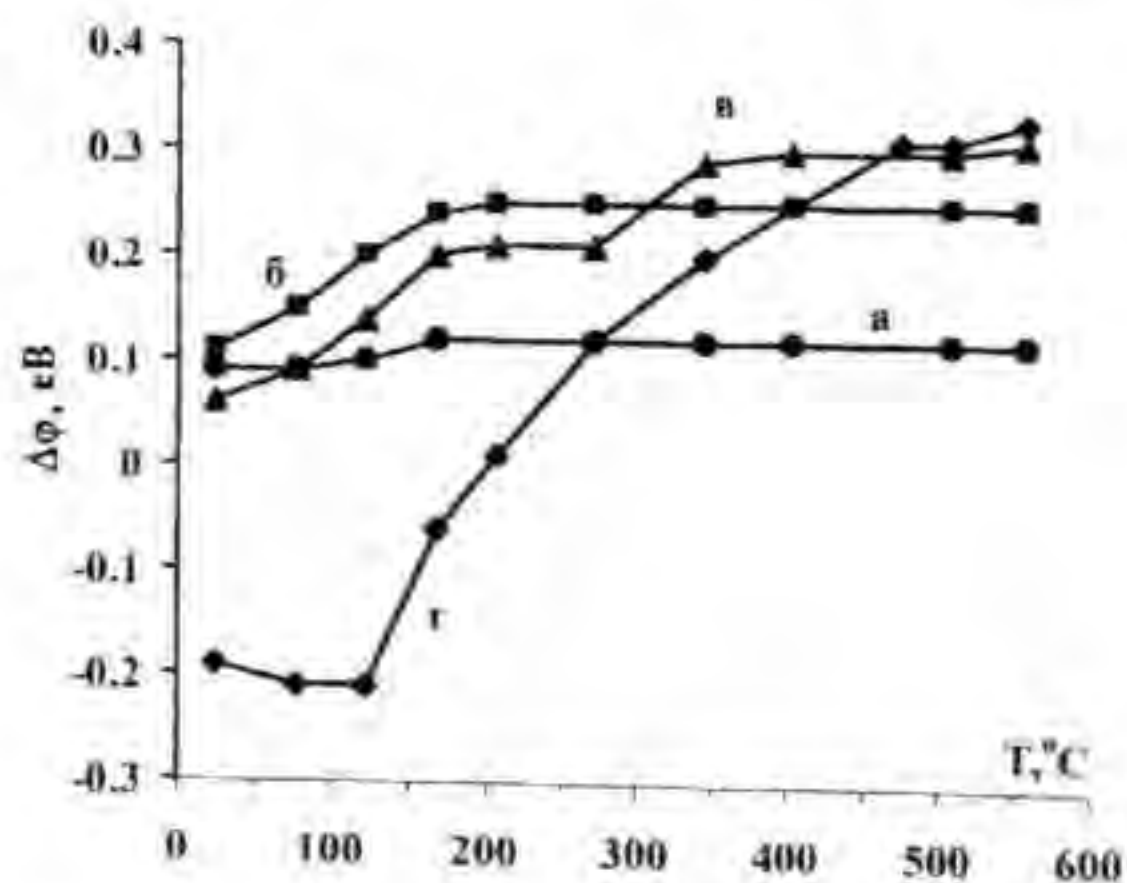


Рис.3 Зміни роботи виходу поверхонь Ge(113) з напиленими при кімнатній температурі атомами Sb від температури прогріву системи для $\Theta_{Sb} = 0.25$ МШ (а), 0.5 МШ (б), 1.0 МШ (в) та 3 МШ (г).

температурі, а всі виміри і спостереження проводились після його охолодження до кімнатної температури). Незмінною залишалась і інтенсивність MNN Оже лінії Sb. Картина рефлексів ДПЕ відображала суперпозицію надструктур 3x1 та 1x2.

Після адсорбції 0.5 МШ атомів Sb ϕ поверхні Ge(113) збільшувалась приблизно на 0.11 еВ (крива б, рис 3). На картинах ДПЕ фіксувалось зменшення чіткості та контрастності рефлексів надструктури 3x1 та поява слабких рефлексів 1x1. Після прогріву такого інтерфейсу в діапазоні температур від 20 до ≈ 180 С ϕ зростала ще на ≈ 0.14 еВ і при подальшому прогріві до 600С залишалась незмінною. Незмінною залишалась і інтенсивність MNN Оже лінії Sb. Картина рефлексів ДПЕ після відпалів в діапазоні 200–600С відображала чітку картину надструктури 1x2.

Адсорбція ≈ 1 МШ атомів Sb на атомарно чисту поверхню Ge(113)–3x1 приводила до збільшення ϕ на ≈ 0.07 еВ (крива в, рис 3). На картинах ДПЕ фіксувалось поява розмитих рефлексів структури 1x1. Прогрів такого інтерфейсу до ≈ 180 С приводив до збільшення ϕ ще на ≈ 0.13 еВ. Картина рефлексів ДПЕ після відпалу до ≈ 180 С відображала надструктуру 1x2. Після подальшого відпалу цієї системи до ≈ 350 С ϕ знову зростала на ≈ 0.07 еВ. Таке значення ϕ залишалось постійним в діапазоні температур 350–600С. Після відпалу системи в цьому ж діапазоні температур за допомогою ДПЕ реєструвалась картина рефлексів надструктури 2x2. Інтенсивність MNN Оже лінії Sb у всьому діапазоні температур відпалу залишалась практично незмінною.

Адсорбція ≈ 3 МШ атомів Sb на атомарно чисту поверхню Ge(113)–3x1 приводила вже до зменшення ϕ на ≈ 0.2 еВ (крива г, рис 3). На картинах ДПЕ реєструвались розмиті рефлекси структури 1x1. Прогрів такого інтерфейсу приводив до поступового збільшення ϕ , до зменшення інтенсивності MNN Оже лінії Sb. В діапазоні температур відпалу 350–600С на поверхні залишався ≈ 1 МШ атомів Sb. В нижній половині цього температурного діапазону спостерігались картини рефлексів ДПЕ 1x2, а в верхній 2x2. Найбільше значення ϕ відповідало надструктурі 2x2.

Аналізуючи результати проведених нами експериментів можна зробити висновок, що вони підтверджують раніш запропоновану нами гіпотезу про вплив вбудовування атомів Sb в

кристалічну матрицю атомів Ge на характер зміни ϕ поверхонь Ge [6,7]. Приймаючи до уваги результати представлені на рис.3 можна стверджувати, що зі збільшенням Θ_{Sb} в діапазоні $0 \div 1$ МШ все більше атомів Sb вбудовується в матрицю атомів Ge і, відповідно, генерується все більше приповерхневих електронних станів від концентрації яких і залежить величина зміни загину зон. Найбільший загин зон і відповідно найбільше значення ϕ відповідає вбудовуванню атомів Sb, яке формує надструктуру 2×2 . Структуру 1×2 може забезпечити менша кількість вбудованих атомів Sb (≈ 0.5 МШ). Якщо створюються умови за яких до вбудованих атомів Sb додаються додаткові невбудовані в кристалічну ґратку атоми Sb, то робота виходу зменшується за рахунок перерозподілу заряду між цими додатковими атомами Sb та поверхневими атомами Ge внаслідок відмінності їх електронегативностей.

Підтвердженням цього є порівняння кривих зміни ϕ б і в на рисунку 3 відповідно для $\Theta_{\text{Sb}} = 0.5$ МШ та 1.0 МШ. Видно, що для $\Theta_{\text{Sb}} = 0.5$ МШ в діапазоні температур відпалу $150 \div 250^\circ\text{C}$ значення ϕ більше ніж для $\Theta_{\text{Sb}} = 1$ МШ в цьому ж діапазоні температур, хоча для обох випадків реєструється одна і та ж надструктура 1×2 . Для поверхні з $\Theta_{\text{Sb}} = 1$ МШ частина атомів Sb не є вбудованою у ґратку Ge. Вони і зменшують роботу виходу. Після подальшого підвищення температури ці надлишкові для структури 1×2 атоми Sb знаходять собі місця для вмурування з більшою енергією зв'язку і збільшують таким чином концентрацію приповерхневих електронних станів, які управляють розподілом просторового заряду поблизу поверхні і, відповідно, величиною загину зон.

Висновки

Визначено значення роботи виходу атомарно чистої поверхні Ge(113)- 3×1 ($\approx 4.5\text{eV}$).

Встановлено, що структура електронних станів Ge(113)- 3×1 поблизу рівня Фермі підтверджує металічний характер поверхневих станів, обумовлених механічними напруженостями в приповерхневій області.

Зміна роботи виходу відпаленої адсорбційної системи Sb/Ge(113) в основному визначається вигином зон поблизу поверхні, залежить від ступеня упорядкування приповерхневої області і кількості атомів Sb вбудованих в ґратку атомів Ge. Знайдена відповідність між значенням роботи

виходу і надструктурою поверхні Ge(113):Sb. Найбільшу роботу виходу має поверхня Ge(113)- 2×2 з $\Theta_{\text{Sb}} \approx 1$ МШ.

Список використаних джерел

1. Мельник П.В. Електронні властивості інтерфейсу Bi/Si(111) / Мельник П.В., Находкін М.Г., Федорченко М.І., Оберемок О.С., Солнцев Б.В. // Укр.фіз.журн. – 1999. – 44, №9. – С.1142-1146.
2. Chan L.H. Effect of surface intermixing on the morphology of Sb-terminated Ge(100) surfaces Chan L.H., Altman E.I. // Phys.Rev.B. – 2001. – 63. – P. 195309
3. Hirnet A Novel Sb Induced Reconstruction of the (113) Surface of Ge/ Hirnet A., Schroeder K. // Phys.Rev.Lett. – 2002. – 88, N22. – P. 226102
4. Mizuno Y. Structure of the Si(113) surface studied by surface X-ray diffraction/ Mizuno Y., Akimoto K. // Appl.Surf.Sci. – 2004. – 237. – P.40-44
5. Находкін М.Г. Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступені покриття її вісмутом / Находкін М.Г., Федорченко М.І. // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. Наук 2004. – вип. 4. – С.373-378.
6. Находкін М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) / Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – вип. 4. – С.323-332.
7. Fedorchenko M Formation of the Sb/Ge(100) interface / Fedorchenko M., Lepiavko B., Nakhodkin M. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – вип. 4. – С.3-3.
8. Eastman D.E. Photoemission densities of Intrinsic Surface States for Si, Ge and GaAs / Eastman D.E. Grobman W.D. // Phys.Rev.Lett. – 1972. – 28, N21. – P.1378-1381.
9. Stekolnikov A.A. Adatoms, dimers and interstitials on group-IV(113) surfaces: First-principles studies of energetical, structural, and electronic properties/ Stekolnikov A.A., J.Furthmuller // Phys.Rev.B. – 2003. – 67. – P.195332 - 10.
10. Олдред А. Взаимосвязь электроотрицательности и строения элементов / Олдред А., Рохов Е.В. // Ж.Неорганической Химии. – 1958. – 5, №6. – С.264-272.

Надійшла до редколегії 01.11.2010р.

УДК 621.385.833

Находкін М.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
академік НАН, Федорченко М.І., канд. фіз.-
мат. наук, с.н.с.

Адсорбція атомів Ві на поверхні Ge(111)- c(2x8)

За допомогою методів електронної спектроскопії досліджено особливості зміни структури та електронних властивостей (робота виходу, густина електронних станів поблизу рівня Фермі) поверхні Ge(111)-c(2x8) при адсорбції на ній атомів Ві. Показано, що адсорбція атомів Ві приводить до зменшення роботи виходу поверхні Ge(111) (максимально на 0.8 eV) та до утворення двох стабільних адсорбційних станів при $\Theta_{10} \approx 2/3$ та 1.0 МШ з однаковою надструктурою $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$.

Ключові слова: Ві, Ge(111), адсорбція, робота виходу, поверхневі електронні стани

Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of
Ukraine, Fedorchenko M.I., Ph.D.

Adsorption of the Bi atoms on the Ge(111)- c(2x8) surface.

The electronic properties (work function, density of electronic states near the Fermi level) of the Ge(111)-c(2x8) surface at adsorption of Bi atoms on it were investigated by using of electron spectroscopy methods. It is shown, that adsorption of Bi atoms lead to reducing the work function of Ge(111) surface (at most on 0.8 eV) and to formation of two stable adsorption states at $\Theta_{10} \approx 2/3$ and 1.0 ML with the same $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ superstructure.

Keywords: Bi, Ge(111), adsorption, work function, surface electronic states.

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Моношарові плівки атомів Ві ефективно використовуються в якості сурфактантів для вирощування бездефектних напівпровідник-напівпровідник (Ge/Si) та метал-напівпровідник Me/Ge(Si) монокристалічних гетероструктур з квантовими властивостями [1, 2].

Але останнім часом кристалічні поверхні Ві та інших металів з великими атомними номерами, моношарові покриття таких металів на поверхнях напівпровідників привернули до себе значну увагу у зв'язку з отриманням на них ефекту спінового розщеплення Рашби [3,4]. Це дуже важливо в зв'язку з перспективами створення твердотільних приладів спінтроники – пристроїв, що використовують як електричний заряд так і спин [5].

Метою цієї роботи було експериментальне дослідження адсорбції атомів Ві на поверхні Ge(111)-c(2x8) та встановлення взаємозв'язку між структурою і електронними властивостями інтерфейсів Ві/Ge(111) (робота виходу, структура верха валентної зони) в залежності від товщини

адсорбованої плівки Ві і температури відпалу інтерфейсу.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакумній камері з базовим тиском $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ тор з використанням методик Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 6.0 – 10.8 eV. Більш детально проведення експерименту приведені в наших попередніх роботах [6-8].

Результати експериментів та їх інтерпретація

Очищена від домішок та впорядкована за допомогою декількох циклів бомбардування іонами Ar ($E_p = 600$ eV) та відпалу (600C протягом 5 хвилин) атомарно чиста поверхня Ge(111) мала чітку картину рефлексів ДПЕ –c(2x8).

Адсорбція атомів Ві на поверхні Ge(111)-

c(2x8) відбувалась при кімнатній температурі. Після кожного напилення атомів Ві описувались і фотографувались картини ДПЕ, вимірювались спектри ФЕС і ОЕС.

З ростом $\Theta_{\text{Ві}}$ дробові рефлекси картин ДПЕ щезали. При $\Theta_{\text{Ві}} \approx 1.0$ МШ на картині ДПЕ спостерігались лише рефлекси структури 1x1, а при $\Theta_{\text{Ві}} > 10$ МШ ці рефлекси взагалі щезали. З кривих ФЕС, виміряних при $h\nu = 7.7$ еВ, за методикою описаною в [6] визначалась робота виходу (ϕ) для кожного значення $\Theta_{\text{Ві}}$. На рис.1 представлена залежність роботи виходу поверхні Ge(111)-c(2x8) від величини $\Theta_{\text{Ві}}$. З рисунка видно, що робота виходу атомарно чистої поверхні Ge(111)-c(2x8) становить ≈ 4.6 еВ. Зі збільшенням $\Theta_{\text{Ві}}$ робота виходу монотонно зменшується і досягає при $\Theta_{\text{Ві}} \approx 1.0$ МШ значення $\phi \approx 3.7$ еВ, далі проходить через мінімум і стабілізується при $\Theta_{\text{Ві}} \approx 7$ МШ при значенні ≈ 3.9 еВ. З аналізу фотоелектронних спектрів можна зробити висновок про те, що на всіх етапах формування інтерфейсу робота виходу змінюється в основному за рахунок зміни ефективної електронної спорідненості.

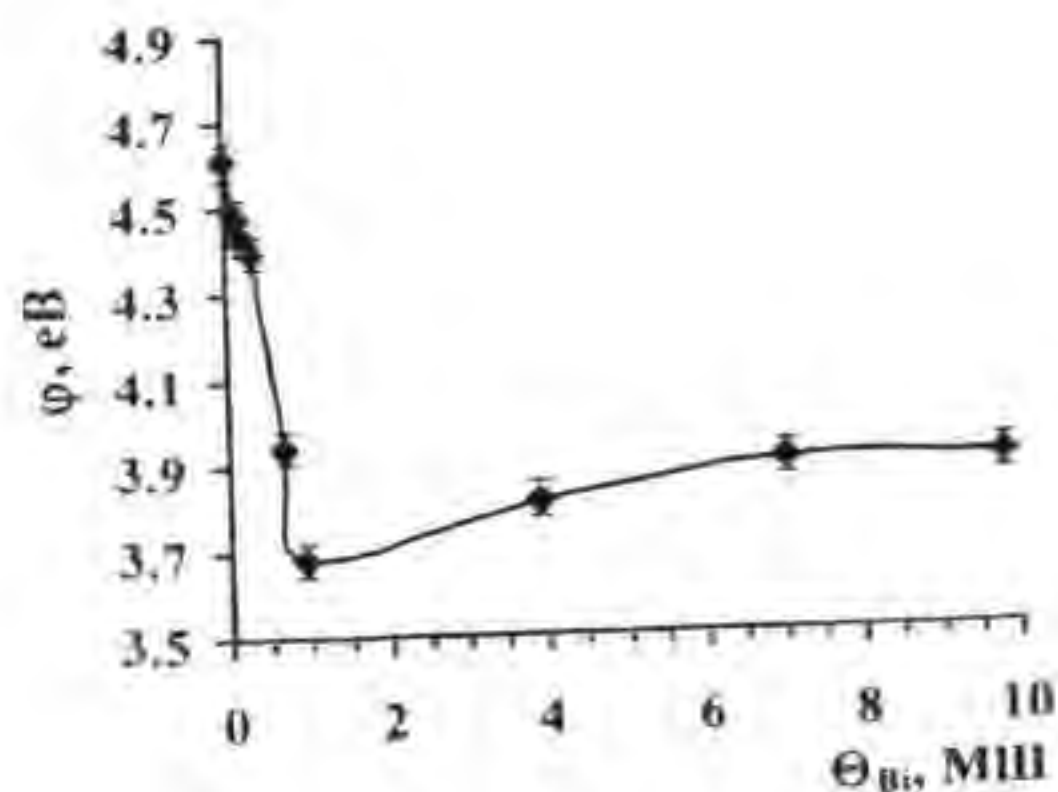


Рис.1 Залежність роботи виходу поверхні Ge(111)-c(2x8) від величини $\Theta_{\text{Ві}}$.

Проходження роботи виходу через мінімум є характерним для всіх досліджених нами раніш систем Bi/Si(100) [6], Bi/Si(111) [9] і в подальшому заслуговує на більш акцентоване дослідження.

Для утворення упорядкованих структур адсорбційна система Bi/Ge(111) з $\Theta_{\text{Ві}} \approx 10.0$ МШ відпалювалась в діапазоні температур від кімнатної до 600°C. Після кожного відпалу система охолоджувалась до кімнатної

температури і реєструвались картини ДПЕ, спектри ФЕС та ОЕС. На рис.2 представлені

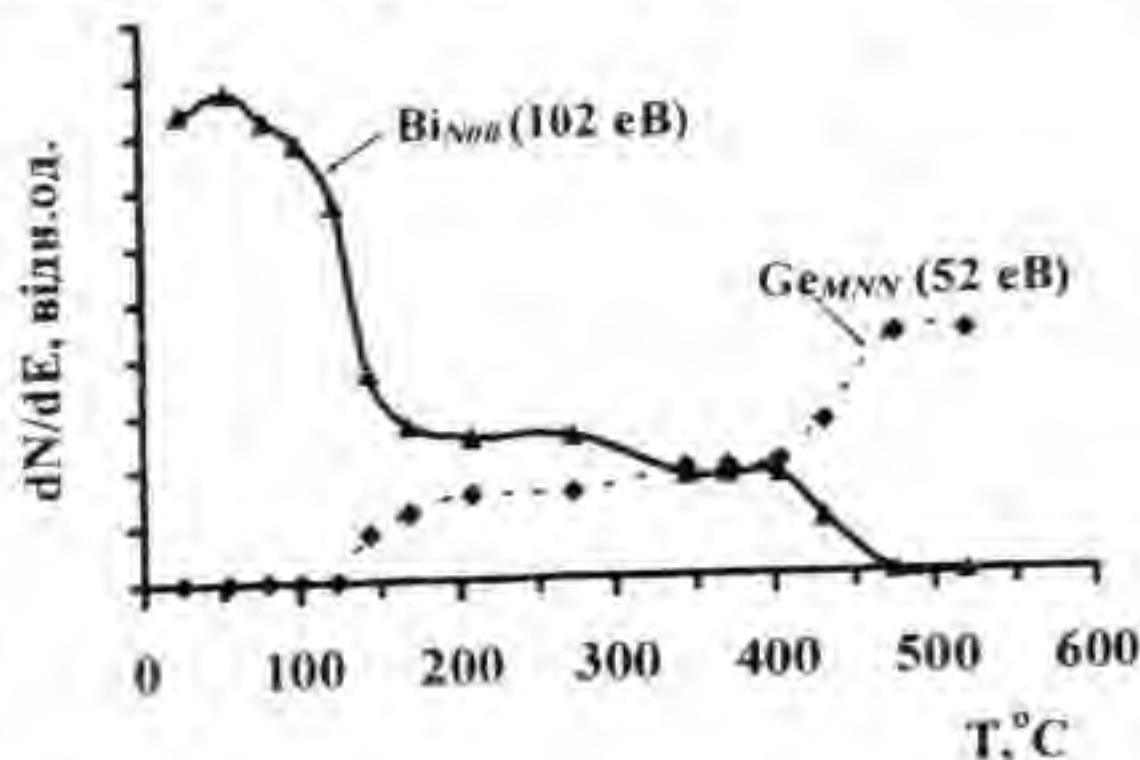


Рис.2. Інтенсивності Оже ліній Ві та Ge адсорбційної системи Bi/Ge(111) з $\Theta_{\text{Ві}} \approx 10.0$ МШ в залежності від температури відпалу.

залежності інтенсивностей Оже ліній Bi(NOО) та Ge(MNN) від температури відпалу. З рисунка видно, що з підвищенням температури відпалу Оже лінійка Ві поступово зменшує свою інтенсивність, а Оже лінійка Ge навпаки зростає. Це відбувається головним чином внаслідок десорбції слабо зв'язаних між собою атомів Ві. В діапазоні температур 180÷280°C інтенсивності обох ліній стабілізуються. За нашими оцінками їх інтенсивність відповідає моношаровому покриттю Ві. В цьому ж температурному діапазоні спостерігається чітка картина рефлексів ДПЕ $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$. При подальшому підвищенні температури відпалу інтенсивність вимірюваних Оже ліній знову змінюється і стабілізується тепер уже

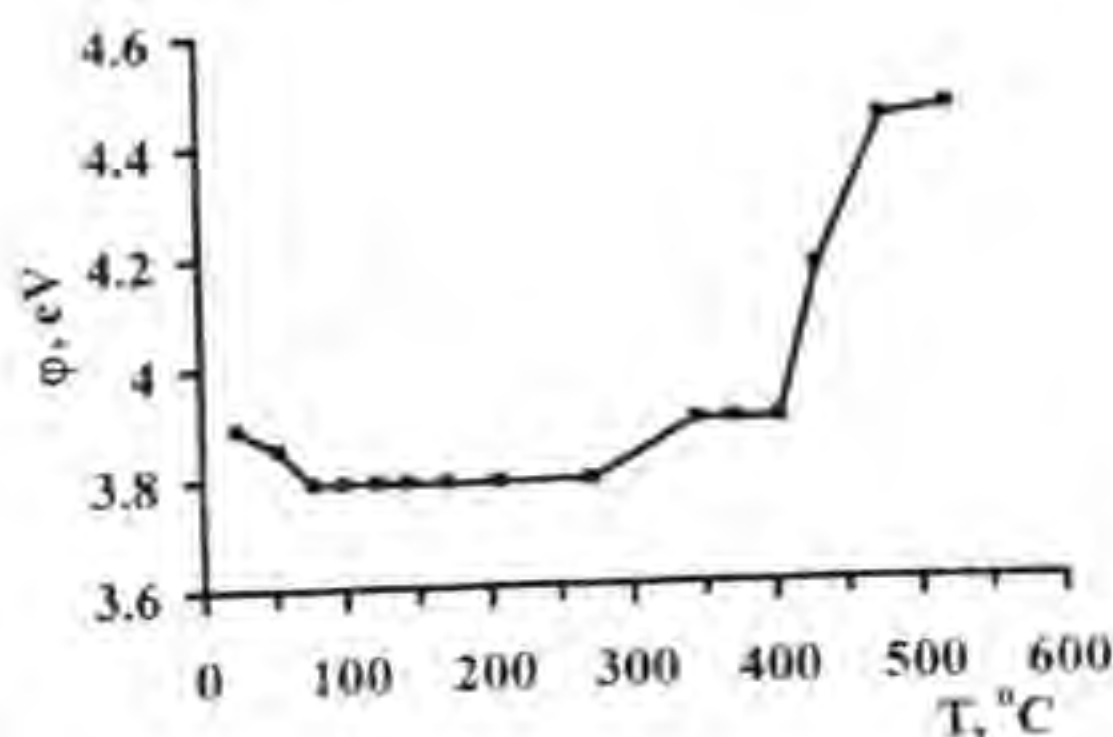


Рис.3. Залежність роботи виходу поверхні Ge(111) з $\Theta_{\text{Ві}} \approx 10.0$ МШ від температури відпалу

в діапазоні температур $350\div410^\circ\text{C}$. За нашими оцінками Θ_{Bi} після відпалу в цьому діапазоні температур становить $\approx 2/3 \text{ МШ}$. Картина рефлексів ДПЕ залишається такою, що відповідає поверхневій надструктурі $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$. Подальше збільшення температури відпалу до 500°C приводить до повної десорбції атомів Ві і формуванню картин ДПЕ, що відповідають атомарно чистій поверхні з надструктурою $c(2\times8)$.

На рис. 3 наведені залежності роботи виходу поверхні $\text{Ge}(111)$ з $\Theta_{\text{Bi}} \approx 10.0 \text{ МШ}$ від температури відпалу. Ця залежність визначалась зі спектрів ФЕС вимірюваних одночасно зі спектрами ОЕС, результати обробки яких представлені на рис.2. З рис.3 видно, що характер зміни роботи виходу подібний до характеру зміни інтенсивностей Оже ліній Ві та Ge (рис.2). В діапазоні температур відпалу $180\div280^\circ\text{C}$ величина роботи виходу поверхні залишається незмінною і рівною $\approx 3.78 \text{ eV}$. В діапазоні температур $350\div410^\circ\text{C}$ величина роботи виходу майже незмінна і залишається рівною $\approx 3.92 \text{ eV}$.

Порівняння результатів представлених на рисунках 2 і 3 наводить нас на думку про існування на поверхнях $\text{Ge}(111)$ з адсорбованим Ві двох стабільних поверхневих фаз з однією і тією ж надструктурою $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, але з різними значеннями Θ_{Bi} (1.0 та $2/3 \text{ МШ}$) і, відповідно, з різним розташуванням адсорбованих атомів Ві.

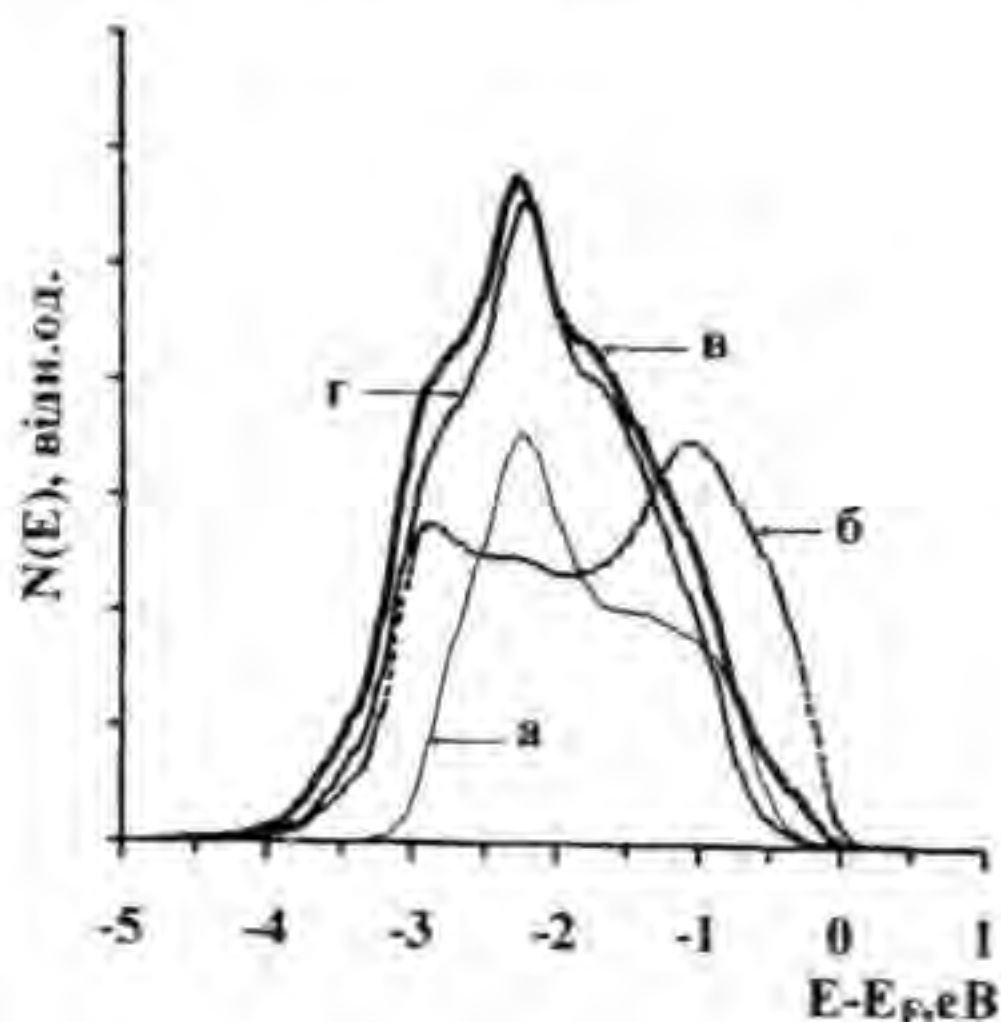


Рис.4. Фотоелектронні спектри атомарно чистої поверхні $\text{Ge}(111)-c(2\times8)$ (а), з наступним напиленням 10 МШ атомів Ві (б), відпалом системи в діапазоні температур $180\div280^\circ\text{C}$ (в), відпалом в діапазоні температур $350\div410^\circ\text{C}$ (г)

Додаткову інформацію про відмінність поверхневих фаз, що утворились при $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0$ та $2/3 \text{ МШ}$, можна було отримати з відповідних фотоелектронних спектрів, порівнюючи енергетичний розподіл густини електронних станів поблизу рівня Фермі (рис.4).

З рис.4 видно, що на фотоелектронному спектрі атомарно чистої поверхні $\text{Ge}(111)-c(2\times8)$ (крива а) найбільш високоенергетичні електронні стани віддалені від рівня Фермі приблизно на 0.2 eV . Тобто, ця поверхня має напівпровідниковий характер. При напиленні 10 МШ атомів Ві фотоелектронний спектр змінює свою форму і розширюється (крива б). Розширення фотоелектронного спектру в бік більших енергій зв'язку вказує на зменшення ϕ . Поява електронних станів впритул до рівня Фермі вказує на утворення плівки з металічними властивостями. Після відпалу плівки в діапазоні $180\div280^\circ\text{C}$, коли на поверхні Ge залишається моношарове покриття Ві з надструктурою $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, в фотоелектронному спектрі залишаються електронні стани розташовані впритул до рівня Фермі. Це означає, що в даному випадку має місце утворення поверхневої фази з металічними поверхневими станами. Відпал такої системи в діапазоні температур $350\div410^\circ\text{C}$, коли Θ_{Bi} зменшується до $\approx 0.66 \text{ МШ}$, але надструктура залишається $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, приводить до різкого зменшення густини електронних станів біля рівня Фермі (крива г, рис.4).

Аналіз отриманих експериментальних результатів дозволяє стверджувати, що для адсорбційної системи $\text{Bi}/\text{Ge}(111)$ існує два стабільних стани з $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0$ та $2/3 \text{ МШ}$ та надструктурою $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$. Один з цих станів з $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0 \text{ МШ}$ характеризується наявністю поверхневих електронних станів впритул до рівня Фермі. Існування такого стабільного стану відоме з раніш виконаних експериментальних [10,11] та розрахункових [12] робіт. При $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0 \text{ МШ}$ та надструктурі $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ атоми Ві розташовуються в конфігурації, яка відома під назвою "milkstool" (тример) [10-12]. В той же час розрахунки показують, що надструктура $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ утворена атомами Ві розташованими в конфігурації "honeycomb" (бджолині соти) є нестабільною [10-12] і до того ж стабільне в певному діапазоні температур покриття з $\Theta_{\text{Bi}} = 2/3 \text{ МШ}$ до цих пір не спостерігалась в проведених раніше експериментах. Але в наших експериментах існування стабільного в діапазоні температур $350\div410^\circ\text{C}$ покриття з $\Theta_{\text{Bi}} = 2/3 \text{ МШ}$ та

надструктурою $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ знайшло експериментальне підтвердження. Можливо, що поява нової стабільної фази $\Theta_{\text{Bi}} = 2/3$ МШ обумовлена методикою формування інтерфейсу і залежить від початкового значення Θ_{Bi} та режиму відпалу інтерфейсу.

Висновки

Встановлено, що при адсорбції атомів Bi на поверхню Ge(111)-c(2x8) робота виходу системи зменшується при $\Theta_{\text{Bi}} \approx 1.0$ МШ до значення 3.7 еВ, а при $\Theta_{\text{Bi}} \approx 7.0$ МШ до значення близького до роботи виходу поверхні масивного Bi (3.9 еВ).

Встановлено існування двох стабільних фазових станів адсорбційної системи Bi/Ge(111) з $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0$ та $2/3$ МШ та надструктурою $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$. Стабільний стан при $\Theta_{\text{Bi}} = 1.0$ МШ характеризується тримерною конфігурацією розташування адсорбованих атомів Bi і металічним характером поверхневих електронних станів, розташованих впритул до рівня Фермі. Другий стабільний фазовий стан поверхні з надструктурою $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ при $\Theta_{\text{Bi}} = 2/3$ МШ вперше експериментально зареєстрований нами і відповідає конфігурації "honeycomb-бджолині соти" в розташуванні атомів Bi на поверхні Ge(111).

Список використаних джерел

1. Bulavenko S.Yu. Coadsorption of hydrogen and bismuth on the Si(111)-7x7 surface Bulavenko S.Yu., Fedorchenko M.I., Melnik P.V., Nakhodkin M.G. // Surface science, - 2000. - **454-456**. - P.213-217.
1. Chan L.H. Effect of surface intermixing on the morphology of Sb-terminated Ge(100) surfaces Chan L.H., Altman E.I. // Phys.Rev.B.-2001. - **63**. - P. 195309
2. Рашба Э.И. Свойства полупроводников с петлей экстремумов. Циклотронный и комбинированный резонанс в магнитном поле перпендикулярном плоскости петли / Рашба Э.И. //ФТТ - 1960. - **2**. - С. 1224-1232

3. Yaji K. Rashba spin splitting of a metallic surface-state band on a semiconductor surface /Yaji K., Ohtsubo Y., Hatta S. // Nature Communications-2010.-**1**.-С.17
4. Огнев А.В. Спинтроника: физические принципы, устройства, перспективы / Огнев А.В., Самардак А.С. // Весник ДВО РАН.- 2006, №4- С.70-80
5. Находкін М.Г. Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступені покриття її вісмутом/ Находкін М.Г., Федорченко М.І. //Вісник Київського університету, серія фіз. мат. Наук 2004.-вип. 4.-С.373-378.
6. Находкін М.Г. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) /М.Г. Находкін, М.І. Федорченко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2006.-вип. 4. -С.323-332.
7. Fedorchenko M Formation of the Sb/Ge(100) interface Fedorchenko M., Lepiavko V., Nakhodkin M. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2009.-вип. 4. -С.3-3.
8. Мельник П.В. Електронні властивості інтерфейсу Bi/Si(111) / Мельник П.В., Находкін М.Г., Федорченко М.І., Оберемок О.С., Солнцев Б.В.// Укр.фіз.журн.- 1999. -**44**, №9.- С.1142-1146.
9. Wan K.J. Observation and low-energy-electron diffraction structure analysis of the Ge(111)-($\sqrt{3} \times \sqrt{3}$)R30-Bi system / Wan K.J., Ford W.K., Lapeyr G.J, Hermanson J.S.// Phys.Rev.B.- 1991. -**44**, N12.- P. 6500-6503
10. Ohtsubo Y. Structure determination of Bi/Ge(111)- ($\sqrt{3} \times \sqrt{3}$) R30° by dynamical low-energy electron diffraction analysis and scanning tunneling microscopy / Ohtsubo Y., Hatta S. // J.Phys.Condens.Matter. - 2009, -**21**, P.405001-6
11. Cheng C. Structure and stability of Bi layers on Si(111) and Ge(111) surfaces/Cheng C., Kunc K. // Phys.Rev.B.- 1997. -**56**, N16.- P. 10283- 10288

Надійшла до редколегії 09.11.2010р.

УДК 621.315.59

Павлюк С.П., к.ф.-м.н., Ішук Л.В., к.ф.-м.н.
Євдокимов Д.О., студ.

Мікроплазменний пробій у кремнієвих мікроструктурах

Досліджено виникнення мікроплазми в p - n переходах структур, виготовлених за технологією «Кремній на ізоляторі» (КНІ). Показано, що при струмах 10^5 А/см² у КНІ структурах виникають мікроплазми, на ВАХ з'являється S -подібна ділянка і виникають шумові коливання спаду напруги. Одночасно з цим спостерігається поява в зоні p - n переходу мерехтливої точки, що світиться. Подальше збільшення струму призводить до виникнення в зоні мікроплазми шнура струму.

Ключові слова: кремній, p - n перехід, лавинний пробій, мікроплазма

*E-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Мікроплазменний пробій p - n переходів є одним із важливих чинників ненадійної роботи напівпровідникових приладів, і через це його дослідження представляє практичний інтерес. Існує обширна бібліографія, що описує сучасні уявлення як про причини виникнення, так і вплив мікроплазм на надійність роботи приладів.

Аналіз цієї літератури показує, що властивості мікроплазм досліджені детально переважно в силових високовольтних p - n переходах. Свого часу з цим був пов'язаний інтерес до даних питань з боку промислових підприємств, що виробляють прилади такого класу. За замовленням одного з таких підприємств в лабораторії, де виконувалась дана робота, проводились дослідження мікроплазменного пробою на великих партіях серійних силових кремнієвих високовольтних діодів КД105, КД208, КД209.

Складність дослідження мікроплазм полягала в тому, що візуально спостерігати можна було тільки поверхневі мікроплазми й мікроплазми в мілких p - n переходах (із глибиною залягання менше 2 мкм) з напівпрозорими металевими контактами внаслідок поглинання світла в матеріалі діода й контактах [4].

У такий спосіб не можна контролювати

Pavlyuk S.P., Ph.D. Ishchuk L.V., Ph.D.
Yevdokimov D.O. stud.

Microplasma breakdown in silicon microstructure

The appearing of microplasma in p - n junctions of structures are made on SOI technology is studied. It is shown that under currents about 10^5 A/cm² in SOI structures arise microplasmas, the S -shaped region appears on the I - V curve and noise fluctuations of voltage drop. At the same time in the p - n area an appearance of shimmering point which glows is observed. Further increasing of current causes to the appearing of current pinch in the microplasma's area.

Keywords: silicon, p - n junction, avalanche breakdown, microplasma.

мікроплазми в корпусованих діодах, хоча якраз це найчастіше потрібно на практиці. Цих недоліків позбавлені методики діагностики, які ґрунтуються на виявленні неоднородностей зворотної гілки вольт-амперної характеристики (ВАХ) p - n переходу [1].

Але слід зазначити, що спостереження мікроплазм вимагало прикладання до зразків напруги порядку 1000 В, що ускладнювало експериментальні дослідження.

Але іноді виникає потреба саме у візуальному спостереженні мікроплазм, або в одночасному їх спостереженні з фіксацією ВАХ p - n переходу.

Розвиток мікроелектроніки в кінці ХХ – на початку ХХІ сторіччя дав нові об'єкти для досліджень. Структури, виготовлені за технологією КНІ (Кремній на ізоляторі) і КЗДІ (Кремній із діелектричною ізоляцією), при своїх малих розмірах дозволяють проводити аналогічні дослідження при спадах напруги на них порядку 10 В, які забезпечують напруженості електричного поля й густини струмів, співрозмірні з тими, що мали місце в силових діодах, що значно спрощує експериментальні дослідження. Використані для досліджень структури були не корпусовані, а область p - n переходу в них була відкрита для спостереження.

Експериментальні результати

При протіканні струму через $n^+ - p - n^+$ КНІ структуру при певній напрузі виникають хаотичні коливання спаду напруги, які показані на рис.3

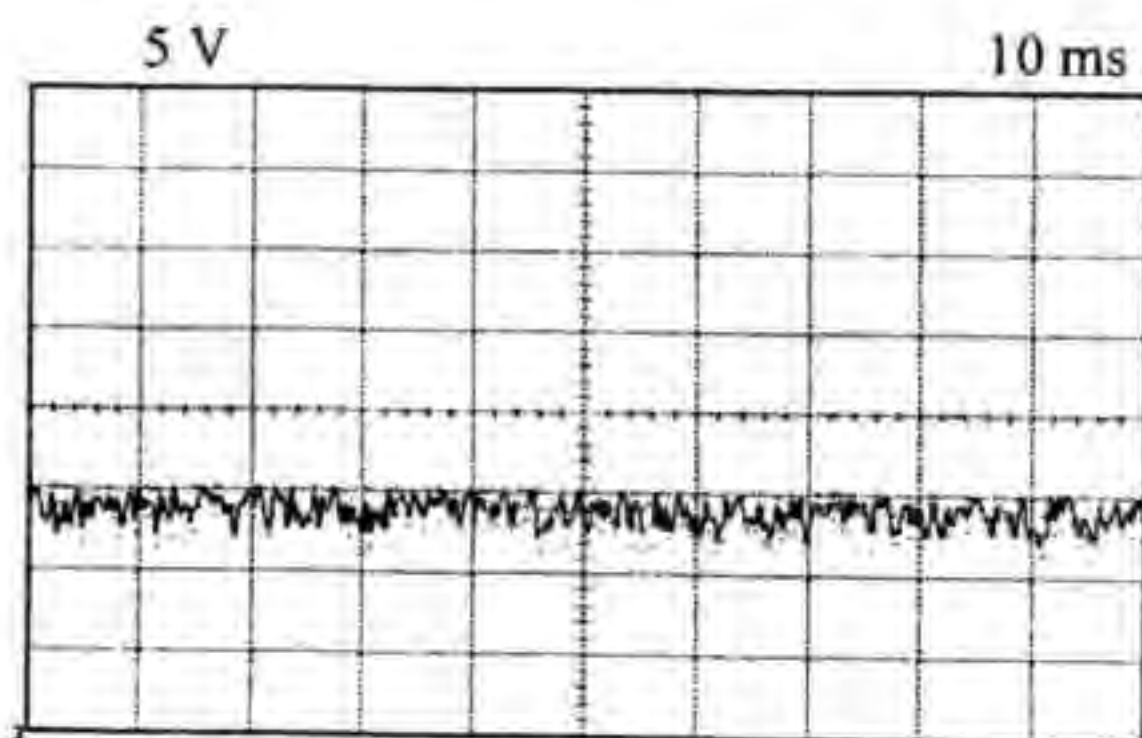


Рис.3 Коливання спаду напруги на $n^+ - p - n^+$ КНІ структурі довжиною 10 мкм.

Ці коливання нестабільні. Вони можуть зникнути, а потім з'явитися знову (рис.4).

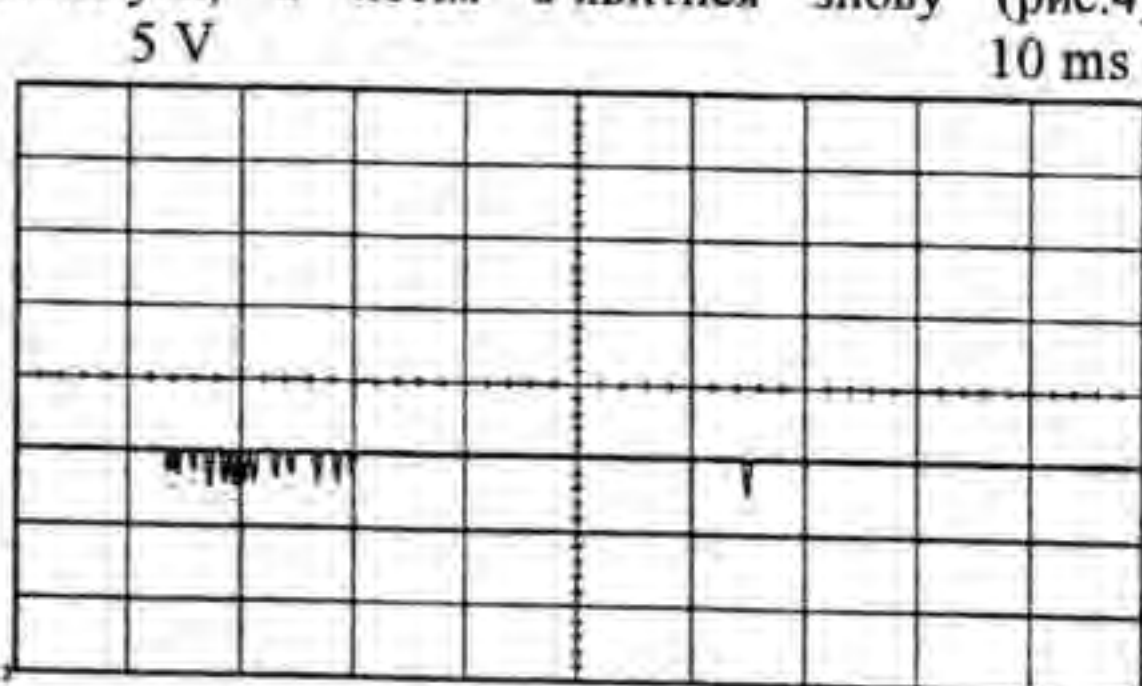


Рис.4 Зникнення і повторне утворення коливань спаду напруги на $n^+ - p - n^+$ КНІ структурі довжиною 10 мкм.

При цьому у мікроскоп в області зворотно зміщеного $p - n$ переходу спостерігається поява мерехтливої точки, яка світиться білим кольором (рис.5).



Рис.5. Світіння мікроплазми.

За візуальною оцінкою діаметр цієї області 1 мкм. На ВАХ спостерігається початок S-подібної ділянки (рис.6). При збільшенні протікаючого струму ця точка може зникнути, з'явитися знову і при певному струмі перетворитися на точку, яка світиться стабільно. При цьому ВАХ має стабільну S-подібну ділянку. Такий режим досліджувався докладно у роботі [7].

На рис.6 ВАХ структури має ділянку нестабільності, де лінії проведені для максимального (ліворуч) і мінімального (праворуч) спаду напруги при коливаннях.

При подальшому збільшенні струму форма коливань змінюється. Вони становляться регулярними, мають релаксаційну або квазісинусоїдальну форму (рис.7).

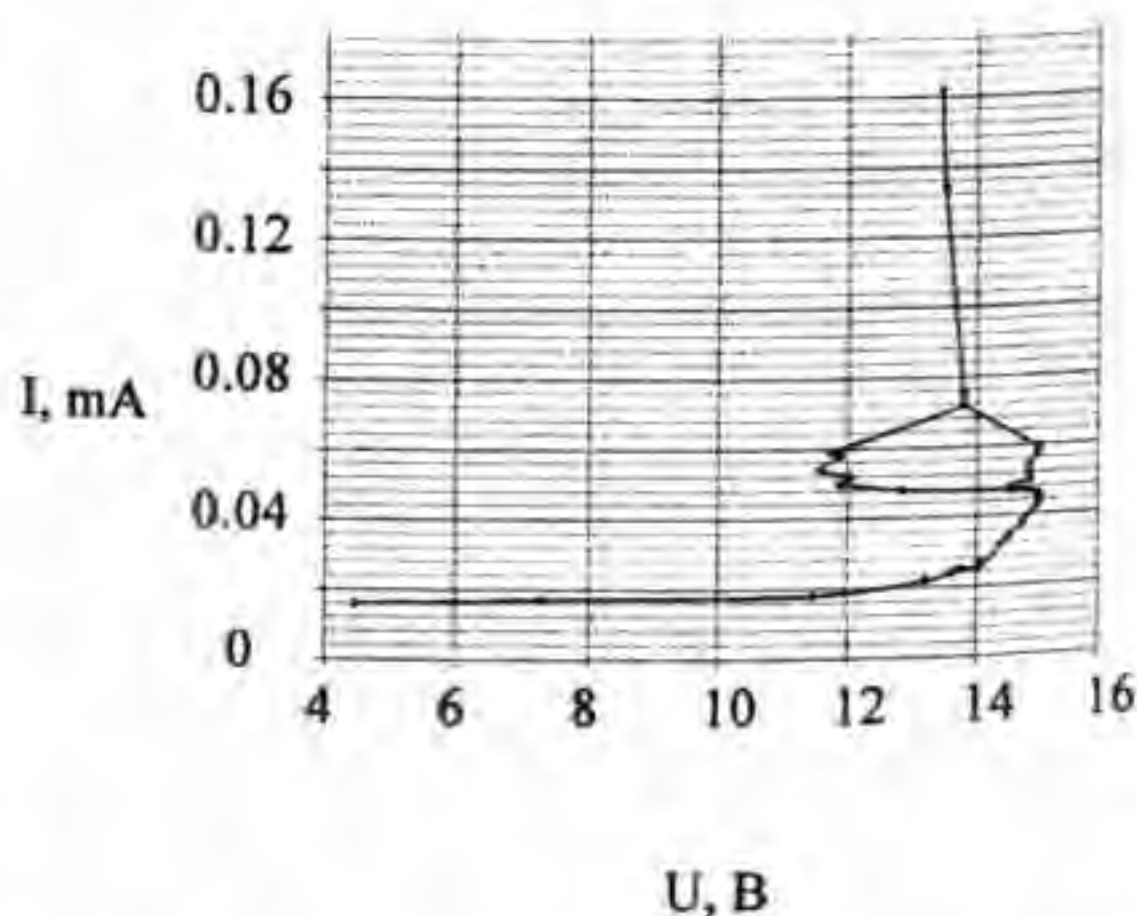


Рис.6 ВАХ $n^+ - p - n^+$ КНІ структурі довжиною 10 мкм.

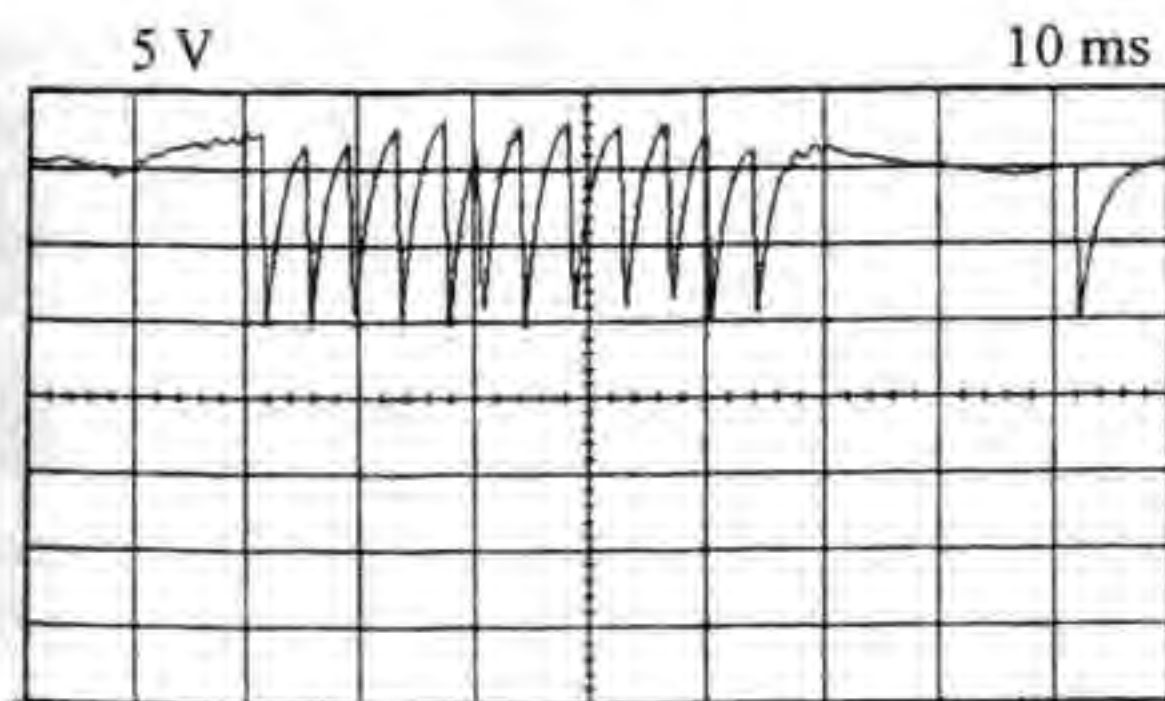


Рис.7 Релаксаційний характер коливань спаду напруги.

Подальше збільшення струму призводить до зменшення амплітуди коливань а потім до їх зникнення. На ВАХ з'являється ділянка майже постійного спаду напруги (рис.6).

На відміну від $n^+ - p - n^+$ структур, в структурах $p^+ - n - p^+$ при зміні струму коливання спаду напруги не спостерігались. ВАХ таких структур має вигляд, наведений на рис.8.

Світіння, яке спостерігалось із $p^+ - n - p^+$ структури (рис.9) принципово відрізнялось від того, що було зафіксоване для $n^+ - p - n^+$ структури (рис.5). Воно мало вигляд жовтогарячої плями, розташованої посередині зразка.

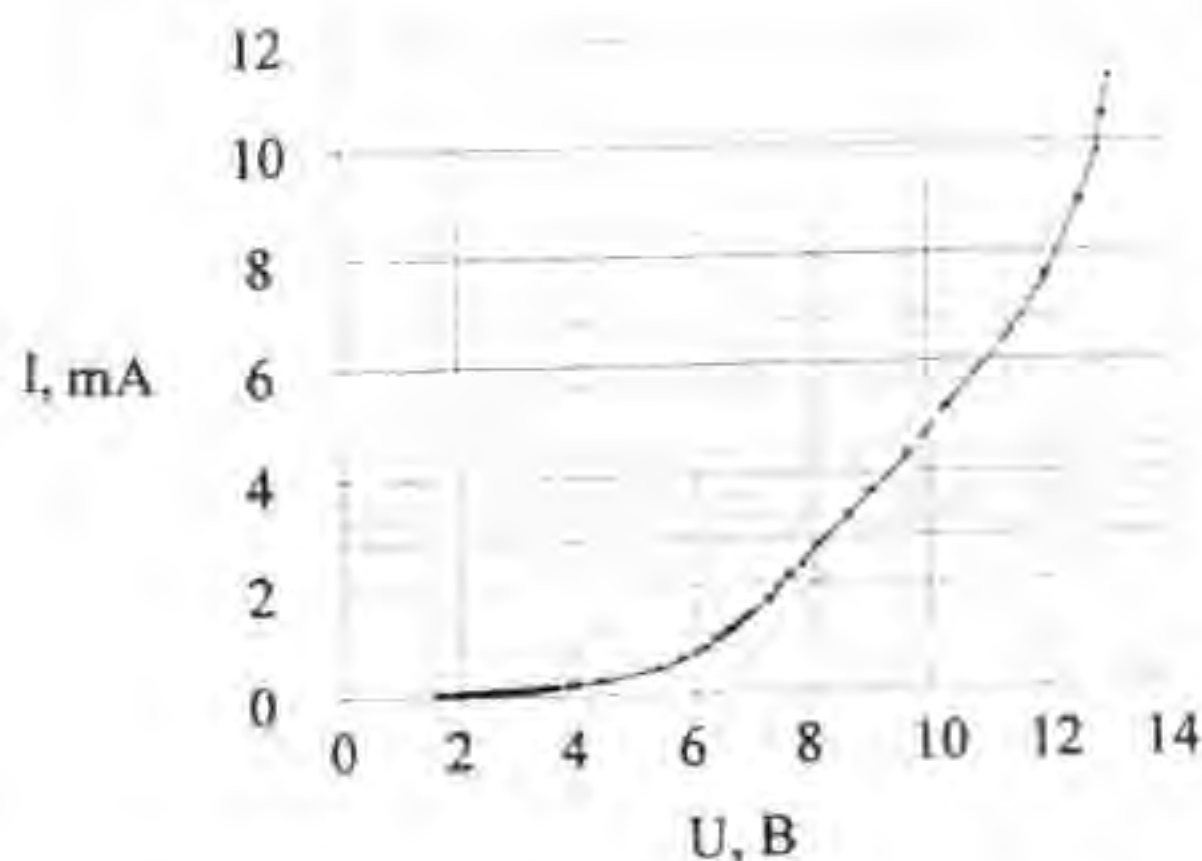


Рис.8 ВАХ $p^+ - n - p^+$ структури довжиною 10 мкм.



Рис.9 Світіння $p^+ - n - p^+$ структури

Обговорення результатів

Отримані результати можна пояснити наступним чином.

При збільшенні протікаючого струму на КНІ структурі збільшується спад напруги. Коли він досягає величини, достатньої для виникнення мікроплазм (напруженість поля $\sim 10^4$ В/см) на $p - n$ переході виникає спочатку нестабільна мікроплазма. Вона призводить до шунтування високопольової області обернено-зміщеного $p - n$ переходу та початку появи S-подібної ділянки на ВАХ з областю коливань (рис.6). Ці коливання мають шумовий характер, тобто змінну амплітуду і частоту.

При збільшенні струму мікроплазма перетворюється на стабільний шнур струму, про що свідчить наявність S-подібної ділянки, який у перехідній області періодично зникає і при великих струмах переходить у своє стаціонарне положення. Докладно закономірності виникнення та існування шнура струму досліджені у роботі [2]. Треба відмітити, що коливання, пов'язані з мікроплазмою на відміну від шнуровування струму мають змінну амплітуду та нестабільну частоту. Коливання, пов'язані зі шнуром струму, мають стабільну амплітуду та частоту. Це добре видно на ВАХ зразка.

Потрібно відмітити, що мікроплазми стабільно виникали у $n^+ - p - n^+$ КНІ структурах з довжинами базової області у межах 2, 3, 10 мкм. У структурах $p^+ - n - p^+$ виникнення мікроплазм не спостерігалось. Це пояснюється технологічними особливостями при виготовленні дослідних зразків. На цих структурах не можна

було досягнути електричного поля, при якому виникала мікроплазма. Зразки були низькоомними, і навіть струм величиною до 100 мА (густина струму до 10^6 А/см²) не призводив до бажаного результату (рис.8).

Спроби пояснити світіння таких структур виникненням автосолітонів [7,8] у електронно-дірковій плазмі кремнію виявились невдалими, і це питання повинно стати предметом окремого дослідження. Можливо, у цих структурах відбувається джоулев розігрів кристалічної ґратки протікаючим струмом [3].

Висновки

Досліджено протікання струмів великої густини (до 10^3 А/см²) у n^+-p-n^+ та p^+-n-p^+ КНІ структурах.

В n^+-p-n^+ структурах спостерігалась нестабільна ділянка ВАХ, на якій відбувались коливання спаду напруги. Одночасно виникало біле світіння поблизу зворотно зміщеного $p-n$ переходу. Цей результат був пояснений включенням мікроплазм. S -подібна ділянка ВАХ при подальшому збільшенні струму виникала внаслідок утворення шнура струму.

В p^+-n-p^+ структурах мікроплазми і пов'язані з ними коливання напруги були відсутні. Можливим поясненням світіння, що спостерігалось у ньому є джоулев розігрів зразка протікаючим струмом.

Список використаних джерел

1. Конакова Р.В. Прогнозирование надежности полупроводниковых лавинных

диодов [Текст]: учеб. пособие / Р.В.Конакова, П.А. Кордош, Ю.А.Тхорик; – К.: Наук. думка, 1986. – 183 с.

2. Владимиров В.В. Плазма полупроводников [Текст] А.Ф.Волков, Е.З.Мейлихов.– М.:Атомиздат, 1979. – 254 с.
3. Смит Р. Полупроводники [Текст]: пер. с англ. – М.:ИЛ, 1962. – 468 с.
4. McKay K.G. Avalanche breakdown fluctuation in silicon [Текст] // Phys.Rev.– 1954. – V.94, N4. – P.877-874.
5. Newman R. Visible light from silicon p-n junction [Текст] /R.Newman, W.Dash, R.Hall // Phys.Rev.– 1955. –Т. 98, N5. – P.1536-1537.
6. Добровольский В.Н. Излучение электронно-дырочной плазмы, содержащей термический градиентно-дрейфовый домен [Текст]/ В.Н.Добровольский, С.П.Павлюк, Е.Пальцев, А.В.Романов// ФТП.-1985.- Т.19, в. 8.- С. 1513-1515.
7. Dobrovolsky V.N. Self-organization in SOI-FET [Текст]/V.N.Dobrovolsky, L.V.Ishchuk, S.P.Pavljuk, et al. // Microelectronic Engineering. – 2004. – Т.72, N1-4, – P.383-387.
8. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны/ Б.С.Кернер, В.В.Осипов. [Текст] // УФН. – 1989. – Т.157, в.2. – С.201-266.
9. М.Н.Винославский, Автосолитоны в электронно-дырочной плазме р-германия/ П.А.Белевский, А.В.Кравченко [Текст] // ЖЭТФ. – 2006. – Т.129, в.3. – С.477-492.

Надійшла до редколегії

УДК 537.528

Сидорук* С.М., аспірант, Ольшевський С.В., к.
ф.-м. наук, Черняк В.Я., д. ф.-м. наук.

Реформування етанолу в імпульсній плазмово-рідинній системі

Досліджено реформування етилового спирту в динамічній імпульсній плазмово-рідинній системі. Досліджено залежності швидкості генерації результуючого синтез-газу від швидкості вхідного потоку плазموутворюючого газу та від частоти генерації імпульсної плазми. За допомогою методу газової хроматографії проведено компонентний аналіз результуючого газу і синтез-газу. Обрахована величина енергетичної ефективності для режиму роботи установки з найоптимальнішими показниками швидкості вхідного газу та частоти генерації плазми.

Ключові слова: імпульсний розряд, плазмово-рідинна система, синтез-газ, енергоефективність.

*E-mail: mstquevshoke@ukr.net

Статтю представив Левитський С.М.

Вступ

Як відомо в наш час, додавання молекулярного водню в паливну суміш призводить до прискорення процесів запалення та горіння важких біопалив і палив нафтового походження [1]. Молекулярний водень можна вважати паливом майбутнього через такі якості як: можливість відновлення, екологічна чистота і безпека для навколишнього середовища [2]. Серед різноманітних технологій отримання водню з важких палив (їх реформування) використовують в тому числі і плазмові методи зі застосування як нерівноважної так і рівноважної плазм [3]. Рівноважна плазма характеризується високим рівнем теплової енергії при, що призводить до низької ефективності генерації активних радикалів. Нерівноважна плазма має низький рівень іонізації, але завдяки відриву по енергіям електронної компоненти, сприяє утворенню активних радикалів внаслідок дисоціації електронним ударом [4,5]. В дослідженнях плазмово-рідинних систем постійного струму на базі DGCLW розряду показано, що такий розряд лежить в області переходу між аномальним жевріючим і дуговим

Sidoruk* S.M., postgraduate student,
Olzewski S.V., Ph. D., Chernyak V.Ya prof.

Ethanol reforming in pulsed plasma-liquid system

The ethanol reforming in the dynamic pulse plasma-liquid system was investigated. The dependence of the outgoing synthesis gas generation speed on the entry speed of the plasma-forming gas flow and from the pulse plasma generation frequency was investigated. The component analysis of the outgoing gas and synthesis gas with help of the gas chromatography method was obtained. The energy effectiveness value at the setup work regime with the most optimum indices of the entry speed gas and plasma generation frequency was calculated.

Key Words: pulsed discharge, plasma-liquid system, syngas, energy efficiency.

розрядами, а зі зростанням струму переходить в область дугового [6].

Використання імпульсної генерації плазми в плазмово-рідинній системі дозволило б працювати з високими струмами в області жевріючого розряду, що є нерівноважним, внаслідок короткого імпульсу тривалістю менш ніж 50 мікросекунд.

Таким чином стаття присвячена дослідженню імпульсної плазмово-рідинної системи на базі плазмового розряду в газовому каналі з рідкою стінкою (DGCLW).

Експериментальна установка

Схема експериментальної установки зображена на рис. 1. Корпус установки являє собою циліндр з неіржавіючої сталі з обох боків герметично закритий металевими фланцями. В корпус з вертикальною осью симетрії вводяться електроди розбірної конструкції, що складаються з сталеної шпильки (1) оточеної тефлоновим ізолятором (2), через яку подається напруга на мідний наконечник (4). Верхній наконечник має циліндричну форму для імітації площини, а нижній має конусоподібну форму.

Нижній електрод поміщено у пластикову трубку, через яку подається плазмо-утворюючий газ (повітря). Газ утворює канал в між-електродному проміжку (3), в якому запалюється плазма з певною періодичністю (5).

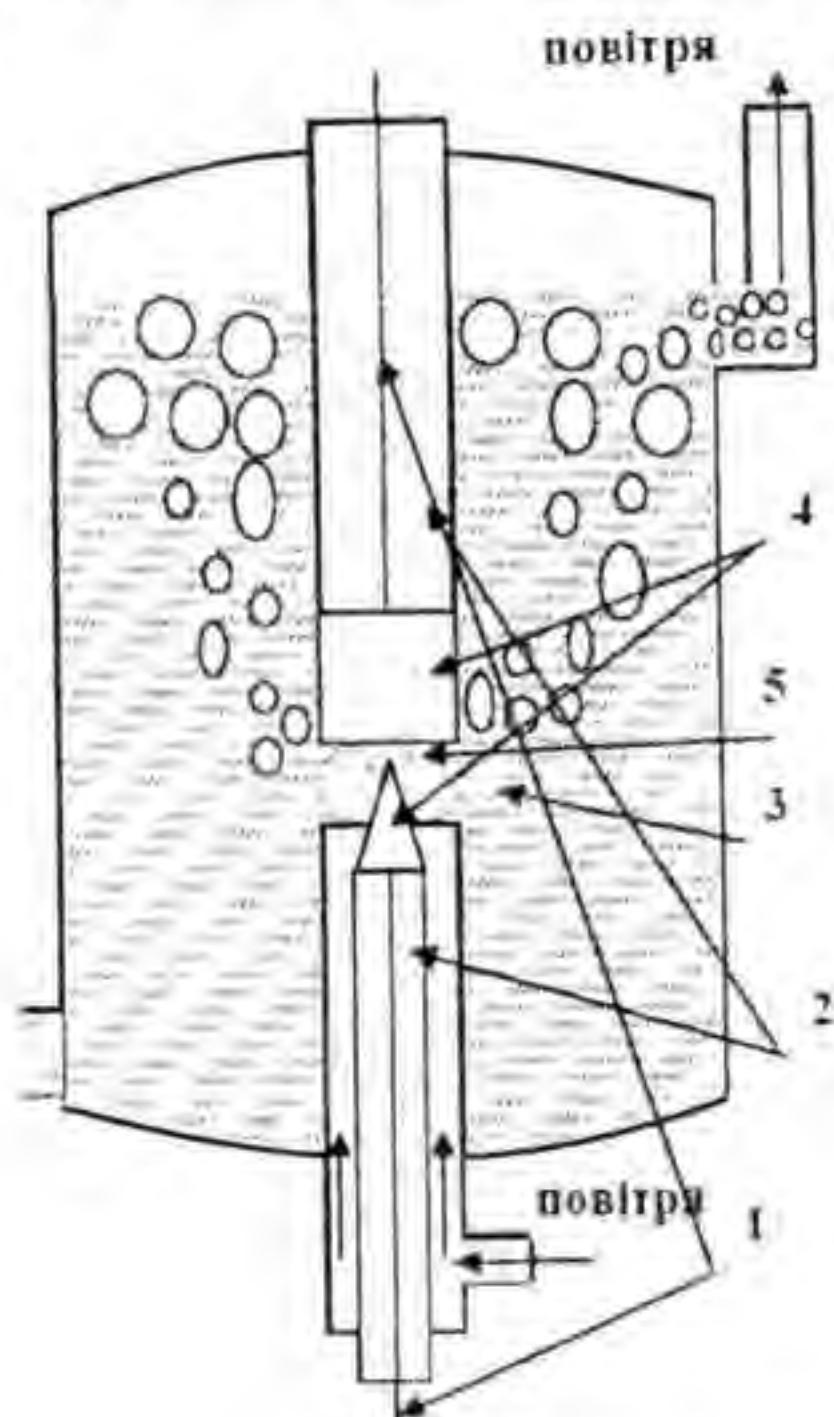


Рис. 1 Схема експериментальної установки

Вихідний газ відбирався в калібрований об'єм для оцінки швидкості генерації та аналізувався за допомогою методів мас-спектрометрії монополярним мас-спектрометром MX 7301 та газової хроматографії хроматографом 6890 N виробництва Agilent. Частота імпульсів варіювалась в межах 250 — 420 Гц, газовий потік змінювався від 5,5 — 83 cm^3 за секунду. Енергія в імпульсі оцінювалась згідно показів цифрового осцилографа MTX 1052 виробництва Metrix. В якості моделі пального використовувався 96% етиловий спирт.

Результати та їх обговорення

Реакції, які протікають в плазмохімічному реакторі, залежать від багатьох факторів, в тому числі від співвідношення вихідних реагентів, таких як компоненти плазмо-утворюючого газу, робоча рідина. Тому було досліджено вплив швидкості вхідного газу на швидкість генерації синтез-газу при сталій частоті генерації плазми 420 Гц. Результат представлений на рисунку 2.

З рисунку помітно, що така залежність має ділянку максимуму з найвищою швидкістю генерації, для подальших досліджень використовувалась швидкість



Рис. 2 Швидкість генерації синтез-газу від швидкості потоку вхідного газу

потоку вхідного повітря, що відповідає максимуму швидкості генерації синтез-газу. Немонотонна залежність пояснюється зміною стехіометричного складу вихідних реагентів, що приймають участь в процесі реформування. Для області максимуму (28 cm^3/c) молярне співвідношення складає величину 2,3 моля етанолу до 1 моля кисню в повітрі, (стехіометричний склад — 2 моля етанолу до одного моля кисню), а потім стехіометрія поступово порушується.

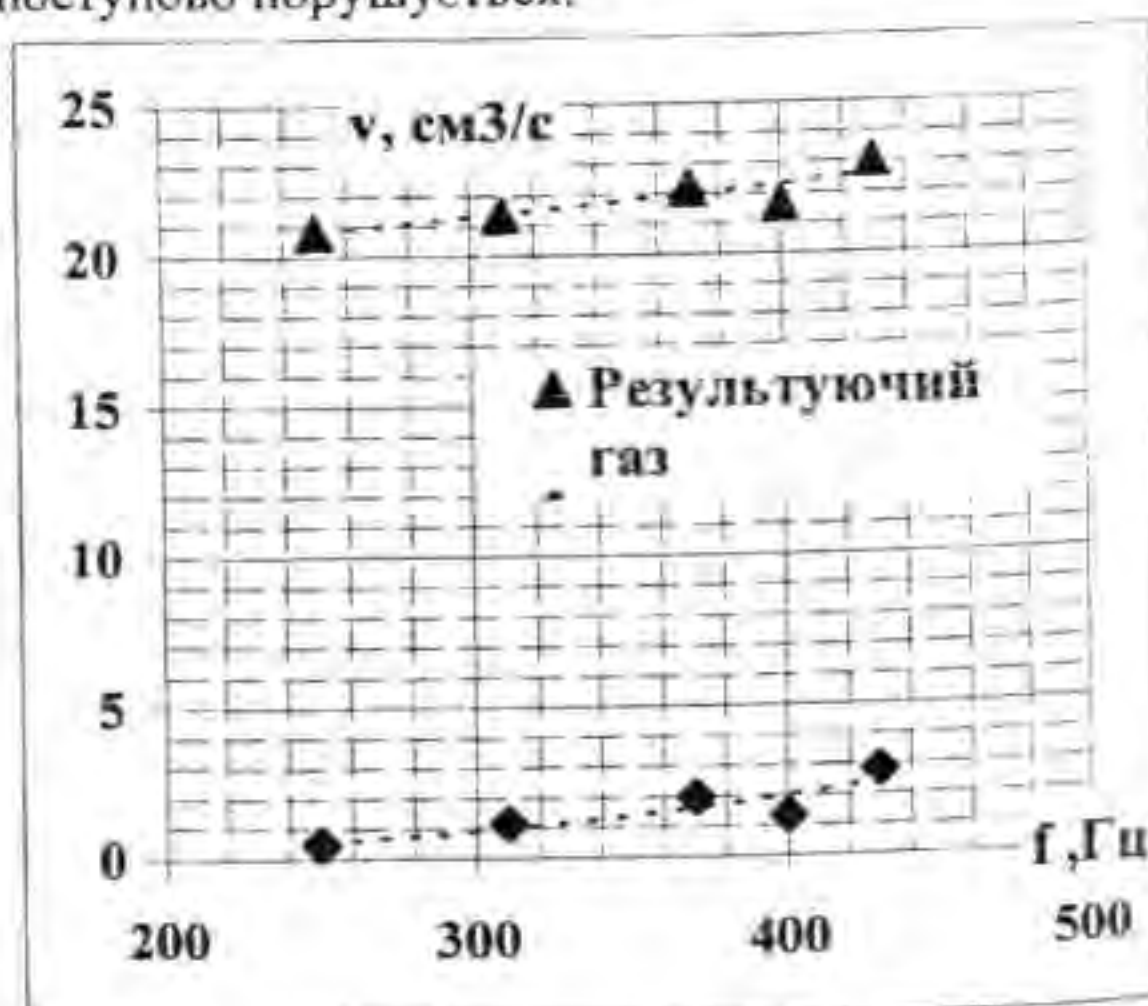


Рис. 3 Швидкості генерації газу та синтез-газу в залежності від частоти імпульсів плазмового розряду

Зрозуміло, що на хімічні процеси під час реформування пального впливатиме і частота

Таблиця 1

генерації імпульсної плазми. Результат представлений на наступному рисунку 3.

Швидкість вхідного газу залишалась сталою і складала 20 см³ за секунду. Частоту генерації в експериментальній установці можна було змінювати варіюючи зарядну напругу на схемі живлення та змінюючи ємність конденсатора з 0.02 до 0.015 мкФ, що розряджався після досягнення пробійного значення напруги для між-електродного проміжку. З рисунку очевидно, що зі зростанням частоти генерації імпульсної плазми пришвидшується і виробництво синтез-газу. Тому надалі використовувалась лише максимально доступна частота генерації імпульсної плазми. Результати також отримані методом порівняння швидкості заповнення каліброваного об'єму з працюючим імпульсним плазмовим розрядом та за його відсутності.

Хоча збільшення частоти генерації імпульсної плазми і пришвидшує вихід синтез-газу, проте немає впевненості за рахунок якої саме складової це відбувається. Тому було проведено аналіз результуючого газу методом газової хроматографії та мас спектрометрії в залежності від частоти генерації плазми, при незмінному потоці вхідного повітря 28 см³/с.

Типовий приклад нормованого мас-спектра представлений на рисунку 4:

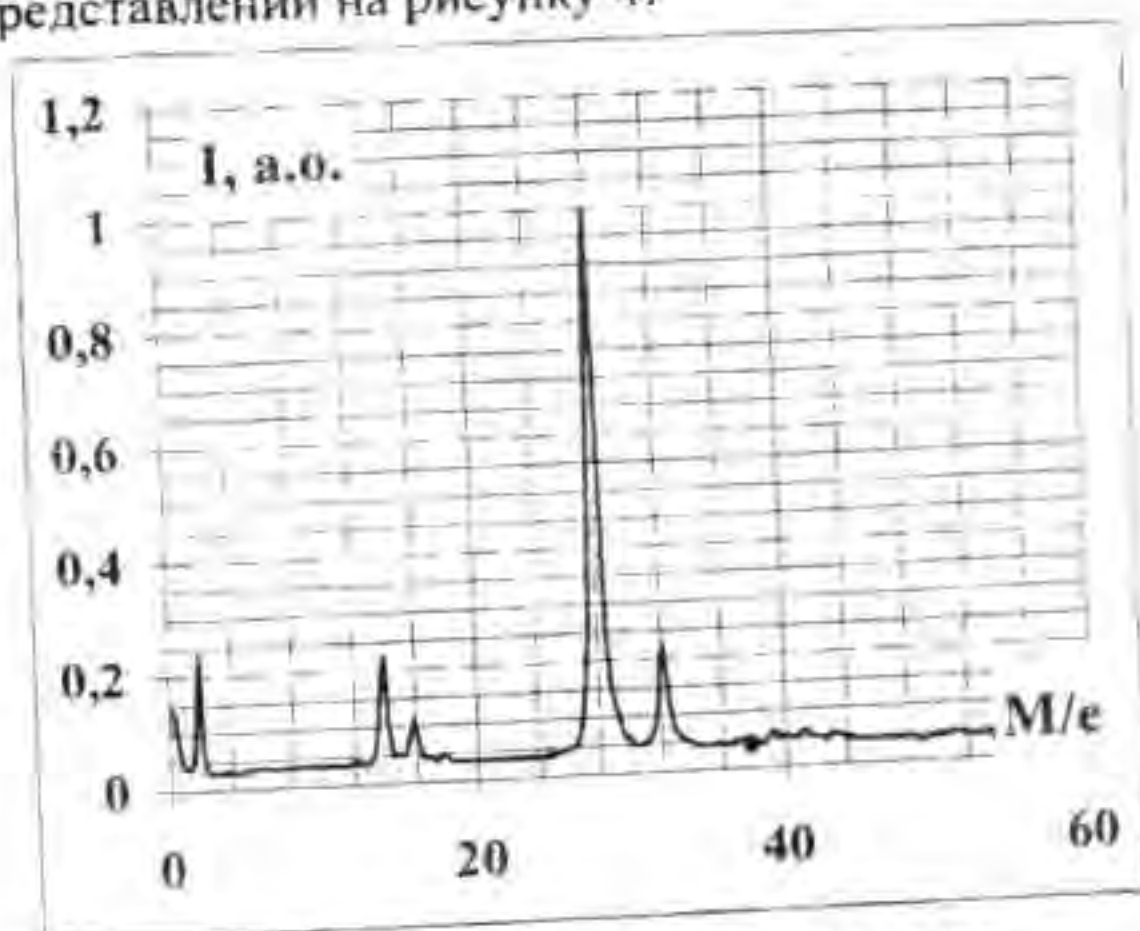


Рис. 4 Типовий приклад нормованого мас-спектру

Типовий компонентний склад результуючого газу, отриманий газово-хроматографічним аналізом представлений в таблиці 1. Помітно, що великий відсоток результуючого газу займає молекулярний азот, а сумарний відсоток синтез-газу складає всього 13.76%, лівову частину якого займає молекулярний водень і одноокис вуглецю, в той час як інші легкі горючі компоненти разом складають всього 2.13%.

Типовий компонентний склад результуючого газу

Речовина	Відсотковий вміст, %
H ₂	7,81
CO	3,82
CH ₄	0,8
C ₂ H ₄	0,63
C ₂ H ₆	0,05
C ₂ H ₂	0,65
C ₃ H ₈	0
C ₄ H ₁₀	0
nC ₄ H ₁₀	0
C ₃ H ₆	0
H ₂ O	1,58
O ₂	18,3
N ₂	66,08
CO ₂	0,09
C ₂ H ₅ OH	0,19
синтез-газ (всього)	13,76

Отримавши компонентний склад результуючого газу, можна обрахувати параметри енергетичної ефективності α за наступною формулою 1:

$$\alpha = \frac{\sum Y_i \cdot LHV(Y_i)}{IPE} \quad (1)$$

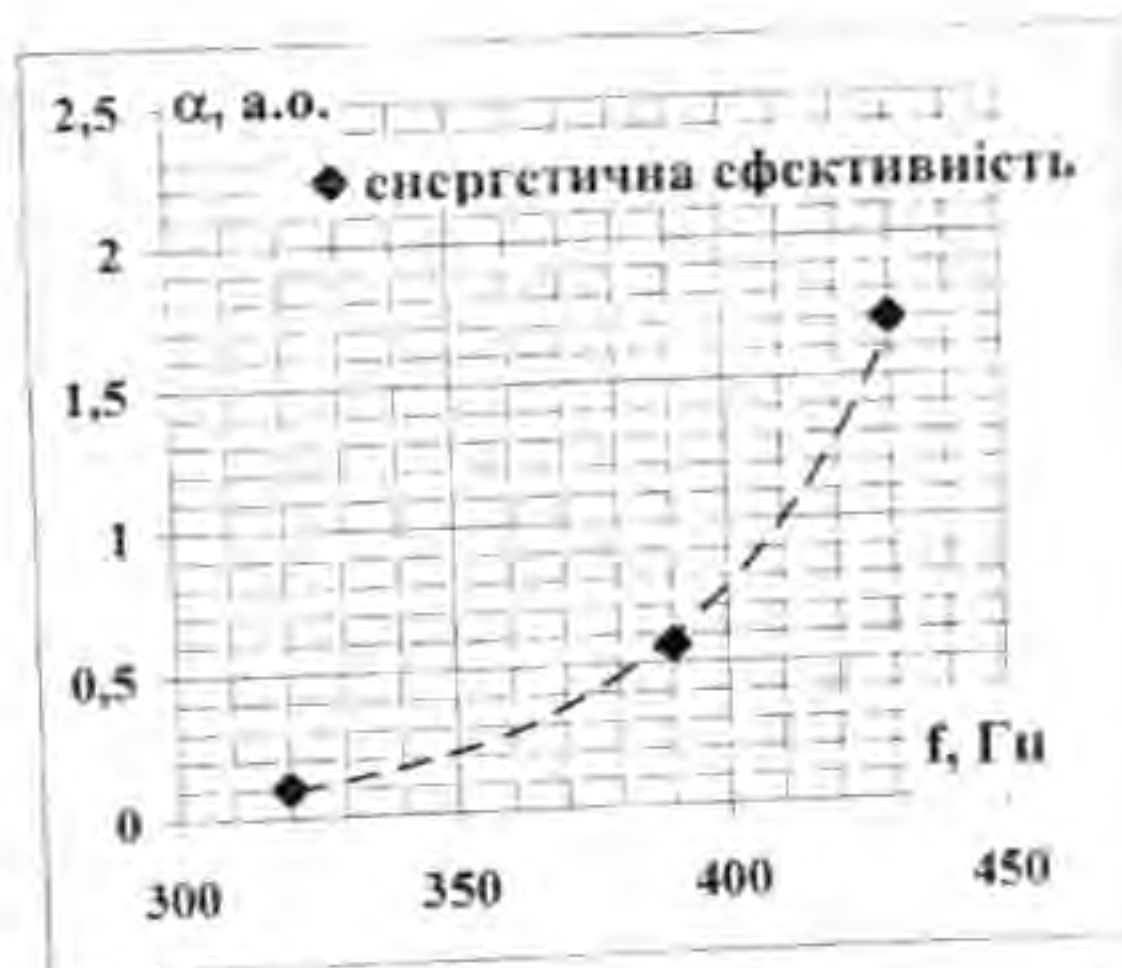


Рис. 5 Енергетична ефективність в залежності від частоти генерації плазми

В наведеній формулі Y_i — це відсотковий вміст компоненти у результуючому газі, $LHV(Y_i)$ — теплота спалення 1 м³ компоненти, а IPE — електрична енергія, що витрачається на

генерацію плазми. Результат подібного аналізу, представлений на рисунку 5.

Для вимірювання на частотах 320 і 380 Гц використовувався конденсатор номіналом 0.02 мкФ, для вимірювання на частоті 420 Гц використовувався конденсатор номіналом 0.015 мкФ. З рисунку помітно, що енергоефективність зростає зі збільшенням частоти генерації плазми, а отже і від енерговкладу в систему. Це може бути пов'язано з додатковою активацією ланцюгових реакцій реформування в плазмово-рідинному реакторі за участю молекулярного водню. Ця особливість відома [7] і використовується в техніці швидкого-гідропіролітичного-гідродеоокиснення додаванням молекулярного водню в високотемпературний піролітичний реактор для реформування біовідходів [8].

Для оптимального режиму величина енергетичної ефективності має значення рівне 1.7.

Подібні дослідження проводились і для плазмово-рідинних систем постійного струму на базі DGCLW розряду з металевими осьовими мідними електродами [9].

Найвищий показник енергетичної ефективності для плазмово-рідинної системи

постійного струму з двома металевими електродами становить величину рівну 1.8 [7], в той час як для імпульсної системи подібного типу найвище значення цього показника складало величину 1.7. При цьому потужність, що витрачається на підтримку плазми в системі постійного струму становить 200 Вт, що знаходиться в межах відповідного значення такої величини в імпульсній системі.

Висновки

1. Виявлена немонотонна залежність швидкості генерації синтез-газу від швидкості потоку вхідного плазмо-утворюючого газу.

2. Виявлена зміна енергоефективності при зміні величини енергії, що витрачається на генерацію плазми. Це пов'язано з перебігом ланцюгових реакцій реформування за участю молекулярного водню.

3. Величина енергоефективності в плазмово-рідинних системах на базі імпульсного DGCLW і DGCLW постійного струму не відрізняється

Список використаних джерел

1. Warnatz J., Maas U., Dibble R.W. Combustion. Physical and Chemical Fundamentals, Modeling and Simulations, Experiments, Pollutant Formation / J. Warnatz, U. Maas, R.W. Dibble. — Berlin: Springer, 2001.
2. 18th World Hydrogen Energy Conf., 17 — 19 May 2010, Essen, Germany. <http://www.whec2010.com>.
3. Petitpas G., Rollier J.-D., Darmon A., Gonzales-Aguilar J., Metkemeijer R., Fulcheri L. A comparative study of non-thermal plasma assisted reforming technologies / G. Petitpas, J.-D. Rollier, A. Darmon, J. Gonzales-Aguilar, R. Metkemeijer, L. Fulcheri // Int. J. Hydrogen Energy. — 2007. — 32. — P. 2848 — 2867.
4. Fridman A. Plasma Chemistry / A. Fridman. — N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2008.
5. Fridman A., Kennedy L. Plasma Physics & Engineering / A. Fridman., L. Kennedy. — N.Y.: Taylor & Francis, 2004.
6. Chernyak V.Ya., Olszewski S.V., Yakhymenko V.V., Solomenko E.V., Prysiaznevych I.V.,

Naumov V.V., et al. Plasma-assisted reforming of ethanol in dynamic plasma-liquid system: experiments and modeling / V.Ya. Chernyak., Olszewski S.V., V.V. Yakhymenko, E.V. Solomenko, I.V. Prysiaznevych., V.V. Naumov // IEEE Transactions on Plasma Science. — 2008. — 36, № 6 — P. 2933-2939.

7. Singh N.R., Agrawal, Riberio F.H., Delgass W.N., Nichols M.S. New biofuels processing method for mobile facilities / N.R. Singh., Agrawal, F.H. Riberio, W.N. Delgass, M.S. Nichols // Environmental Science & Technology — 2010.

8. Singh S.P., Park C.S., Norbeck J.M. Computational modeling of combined steam pyrolysis and hydrogasification of ethanol / S.P. Singh, C.S. Park, J.M. Norbeck, url: <http://www.eri.ucr.edu/ISAFXCD>.

9. Yakhymenko V.V., Olszewskii S., Chernyak V.Ya., Verovchuk M.O., et al. Conversion of ethanol in dynamic plasma-liquid system / V.V. Yakhymenko, S. Olszewskii, V.Ya. Chernyak, M.O. Verovchuk // Problems of atomic science and technology. — 2009. — 1 — P. 128-130.

Надійшла до редколегії 26.10.10

УДК 519.9

Спориш І.М., асистент., Гогоці Є.Г., студент,
Лукашук Л.В., студент, Кисіль О.О., к.б.н.

Характеризація фулеролу C_{60} для новітніх застосувань в біологічних системах: УФ-вид спектроскопією та МАЛДІ мас спектрометрією

Наночастинки медичного фулерола $C_{60}(OH)_{24-26}$ та їх водний розчин в порівнянні до C_{60} окисленого C_{60} водних розчинів і фотохімічно модифікованих C_{60} нанокристалів в водній суспензії характеризували, використавши УФ-вид спектроскопію (200-800 нм) і мас спектрометрію із застосуванням матриці та лазерної десорбції/іонізації молекул (650-2500 м/з). В даному контексті $(OH)_m$ $(O)_m$ на каркасі фулерена і фулерола кластери з водневими зв'язками між двома молекулами визначили, використавши аналіз електронних переходів поблизу 265, 340 нм в діапазоні 400-700 нм, та молекулярних мас в 800-2250 м/з діапазоні. Фулерола водні розчини характеризовано як розчини з молекулами фулерена, які мають (OH) і додаткові атоми на каркасі, та з кластерами цих молекул. Результати є важливими для оптимізації кількості (OH) і додаткових атомів на каркасі фулерена для контролю фотозбуджених електронних переходів в молекулі фулерола - фотозонді для біологічних систем.

Ключові слова: C_{60} фулерол, кластер з фулеролів, фотозбуджені електронні переходи в молекулах фулерола, молекулярні маси фулерола

Sporysh I.M., assistant, Gogotsi H.G., student,
Lukashuk L.V., student, Kysil O.O., Ph. D.

The C_{60} fullerol characterization for advanced applications in biological systems: the UV-vis spectroscopic and MALDI mass spectrometric study

The medical $C_{60}(OH)_{24-26}$ fullerol nanoparticles and their aqueous solution in a comparison to the C_{60} oxidized C_{60} aqueous solutions and the photochemically derivatized C_{60} nanocrystals in aqueous suspension were tested by the UV-vis absorbance spectroscopy in (200-800) nm range and the matrix - assisted laser desorption/ionization (MALDI) mass spectrometry in molecular masses (650-2500 m/z) range. In this respect, $(OH)_m$ $(O)_m$ at the fullerene core and the fullerol clusters with hydrogen bonds between two molecules were detected using analysis of electron transitions near 265, 340 nm, in the 400-700 nm range, and molecular masses in the 800-2250 m/z range. Fullerol aqueous solutions as contained of fullerene molecules with (OH) and added atoms at the core and linked by hydrogen bond in cluster were characterized. These results are important for the optimization of (OH) and (O) , contain at the fullerene core with the aim to control of fullerol photoexcited electron transitions in photoactive probe for biological systems.

Key words: the C_{60} fullerol, fullerol cluster, photoexcited electron transitions in the fullerol molecules, fullerol molecular mass

*E-mail: nanobiotech@bigmir.net

Статтю представив Професор, д.ф.-м.н. Данилов В.В.

1. Introduction

One of the major problems that still hamper medical applications of the C_{60} fullerene is extreme hydrophobicity and insoluble in water which precludes the biocompatibility [1-11]. Therefore, for future performance in biomedical application, fullerenes have to be functionalized with hydrophilic substitutes. Many substitutes have been bound to the C_{60} to produce water solubility, such as: 1) negatively charged carboxylic acids, 2) positively

charged quaternary ammonium, 3) neutral poly (ethylene glycol) etc [1, 3, 4, 6 - 8, 11].

Within this category of water-soluble fullerenes, the hydroxylated C_{60} - fullerol $C_{60}(OH)_n$ holds a special place and has already been studied in very various fields of biomedicine [3, 5, 12 - 14]. However, chemical methods of fullerol formation in different solutions follows to chemical adducts, for example, Na atoms as in [14], then the fullerol powder $C_{60}(OH)_{14}(ONa)_{11} \cdot H_2O$ was formed as well $C_{60}(O)_m$

Also, the use of $C_{60}(OH)_n$, $n > 36$ in bioapplications should proceed with caution, since this could lead to unstable open-cage structures and unstable water solution of multiple fullerol. The aim of the investigation is verification of electronic transitions and mass for fabricated nanocrystals, highly hydroxylated C_{60} fullerol molecules in compare to with C_{60} nanocrystals which have been derivatized by $(OH)_n$, $(O)_m$ in aqueous suspension under the UV irradiation. The model of surface derivatization of the C_{60} nanocrystals by (OH) , (O) at aqueous with a participation of photoexcited electrons in the C_{60} as n-semiconductor in photochemical process of (OH) , (O) attached to the C_{60} core is assumed by us. The model of derivatized fullerene nanocrystal dissolution in aqua under ultraviolet irradiation is similar to the known model for the fullerol dissolution in water at different temperatures. We take in account that free electron of the C_{60} n-semiconductor, but photoelectron have higher energy then thermal electron under 25-35°C for aqueous or biological solutions.

The studying of the fullerol nanoparticles and their aqueous solutions in to compare with photochemically derivatized fullerene nanocrystals in aqueous suspension, as and with the C_{60} and oxidized C_{60} molecules in aqueous solutions by UV-vis absorbance spectroscopy (electron transitions 220, 265, 340 nm and corresponded to the LUMO-HUMO gap at 415 – 670 nm) and the matrix-assisted laser desorption/ionization (MALDI) mass spectrometry at 800 – 2250 m/z range (the mass for molecules with different number of (OH) at the core and in clusters) were performed. The numbers of the $(OH)_n$ ($n = 5 - 26$) and $(O)_m$ at the fullerol molecules core and in their clusters in comparison with pristine multiple C_{60} fullerol nanocrystals was detected.

2. Experimental

Materials

The pristine C_{60} fullerene nanocrystals powder (>99% pure, from the MER Corporation, Tucson, AZ, USA) for a preparation of satiated aqueous solutions of the fullerene, oxidized fullerene and a formation of derivatized fullerene under UV irradiation in aqueous suspension was used. The pristine $C_{60}(OH)_{24-26}$ fullerol nanoparticles powder (product of Nano-CTM, MA, USA) for the fullerol satiated aqueous solution preparation was took. For the preparation of these solutions and suspension ultra pure aqueous (18.2 MΩ cm-1, Milli-Q purification systems, Millipore) was used [3].

Samples preparation

The preparation of satiated aqueous solutions of the fullerene and oxidized fullerene is written in [3]. The fullerol satiated aqueous solution by dissolving of the 1 mg $C_{60}(OH)_{24-26}$ powder in 0,5 ml aqueous was prepared and diluted by aqueous for 1ml solution obtaining.

The C_{60} fullerene nanocrystals aqueous suspension, which contained 35 mg of nanocrystals in 0.5 ml, was mixed and under ultraviolet irradiation by halogen lamp during 40 min was placed. This time is experimentally defined as threshold time for the fullerene aqueous solution formation in mixture with the fullerene nanocrystals suspension, which was registered by the absorbance spectroscopy.

The UV-vis spectroscopic measurements

The absorbance spectra in the (200-800)nm range for the C_{60} , oxidized C_{60} , the fullerol aqueous solutions were recorded using UV-vis spectrometer Jacobs32 (Department of Chemistry, TU Ilmenau, Germany).

MALDI mass spectrometric measurements.

Microflex LT (the laser- target) system, as MALDI-TOF(the time – of – flight detector) mass spectrometer in Department of Chemistry, TU Ilmenau, Germany was used. Microflex LT characteristics: the laser – pulsed N2-Laser 337 nm, mode – linear; matrix – trans-2-[3-(4-tert-Butylphenyl)-2-methyl-2-propenylidene] malononitrile (DCTB, $C_{17}H_{18}N_2$, 250, 34 molecular weight) from Fluka. Mass spectra from 650 till 3000m/z molecular masses were recorded for three samples - probes: the pristine C_{60} fullerol nanoparticles; diluted satiated pristine C_{60} fullerol aqueous solution; the photochemically derivatized C_{60} fullerene nanocrystals in aqueous suspension under the UV irradiation halogen lamp. The preparation of probes, using the polymer matrix/target and only target, was done.

3. Results and discussion

3.1. The photoexcited electron transitions in the fullerol molecules.

The recognition of peculiarities in the UV-vis spectra for the fullerol solutions (Fig.1) is aimed to determine characteristic electron transitions in the fullerol molecules with different number of $(OH)_n$.

(O)_m and in fullerol clusters, which self- formed in the solution [3,5]. For this purpose we compare these spectra with typical UV-vis spectra for the fullerene

(Fig.2,a) and oxidized fullerene (Fig. 2,b) aqueous solutions.

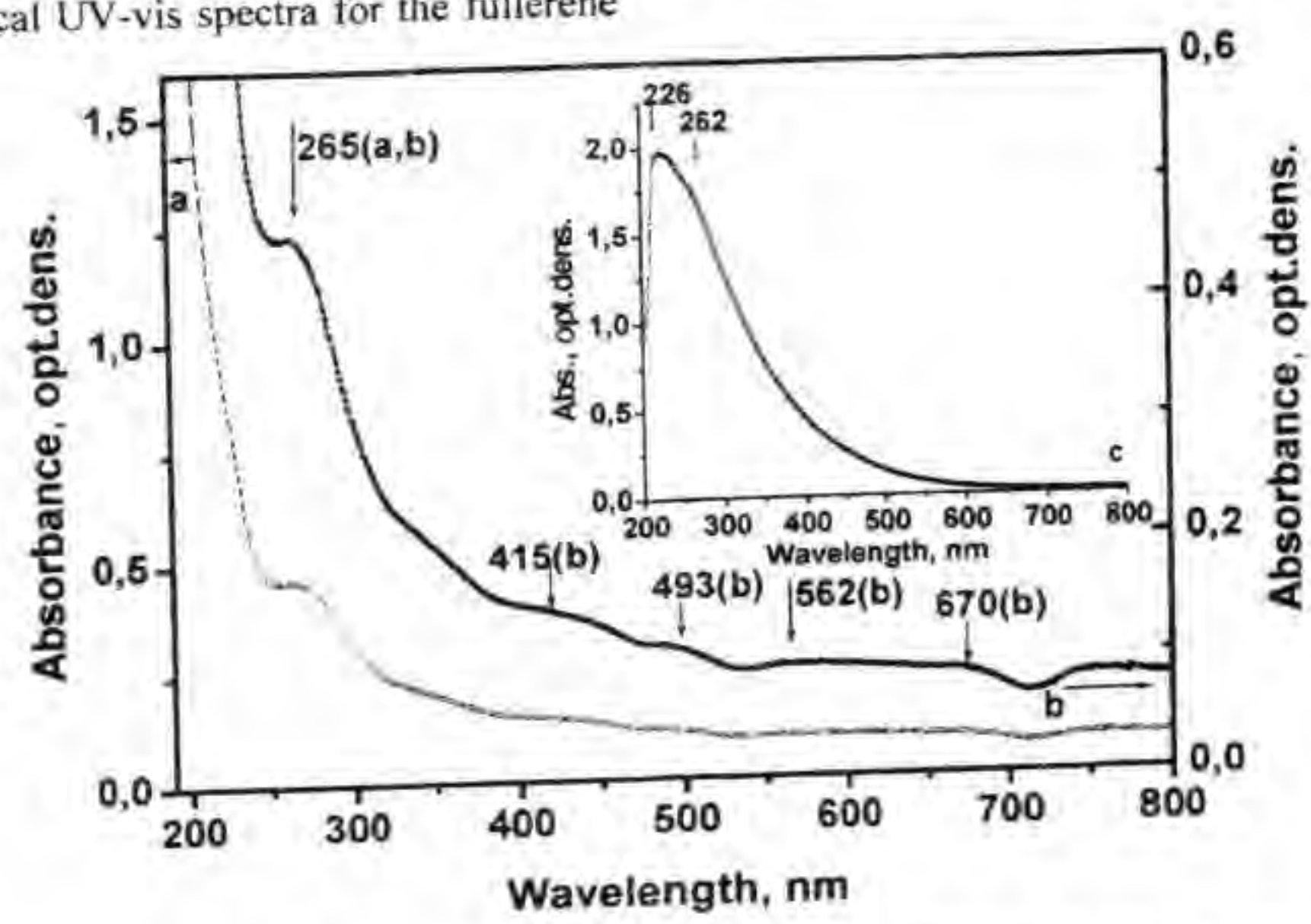


Fig.1 Recognition of maxima absorbance positions and absorbance subbands in the spectra for: **a,b** – diluted saturated aqueous solution of the $C_{60}(OH)_{24-26}$ with $8.6 \mu M$, pH 7.51 for the aqueous pH 5.62 (one spectrum is presented for the both (0.0 – 1.5) and (0.0 – 0.6) opt.dens. absorbance ranges as the curves a and b, respectively, with the aim to reveal subbands in the 400-700 nm range); **c** – saturated aqueous solution of the $C_{60}(OH)_{24-26}$ ($42.7 \mu M$, pH 6.93).

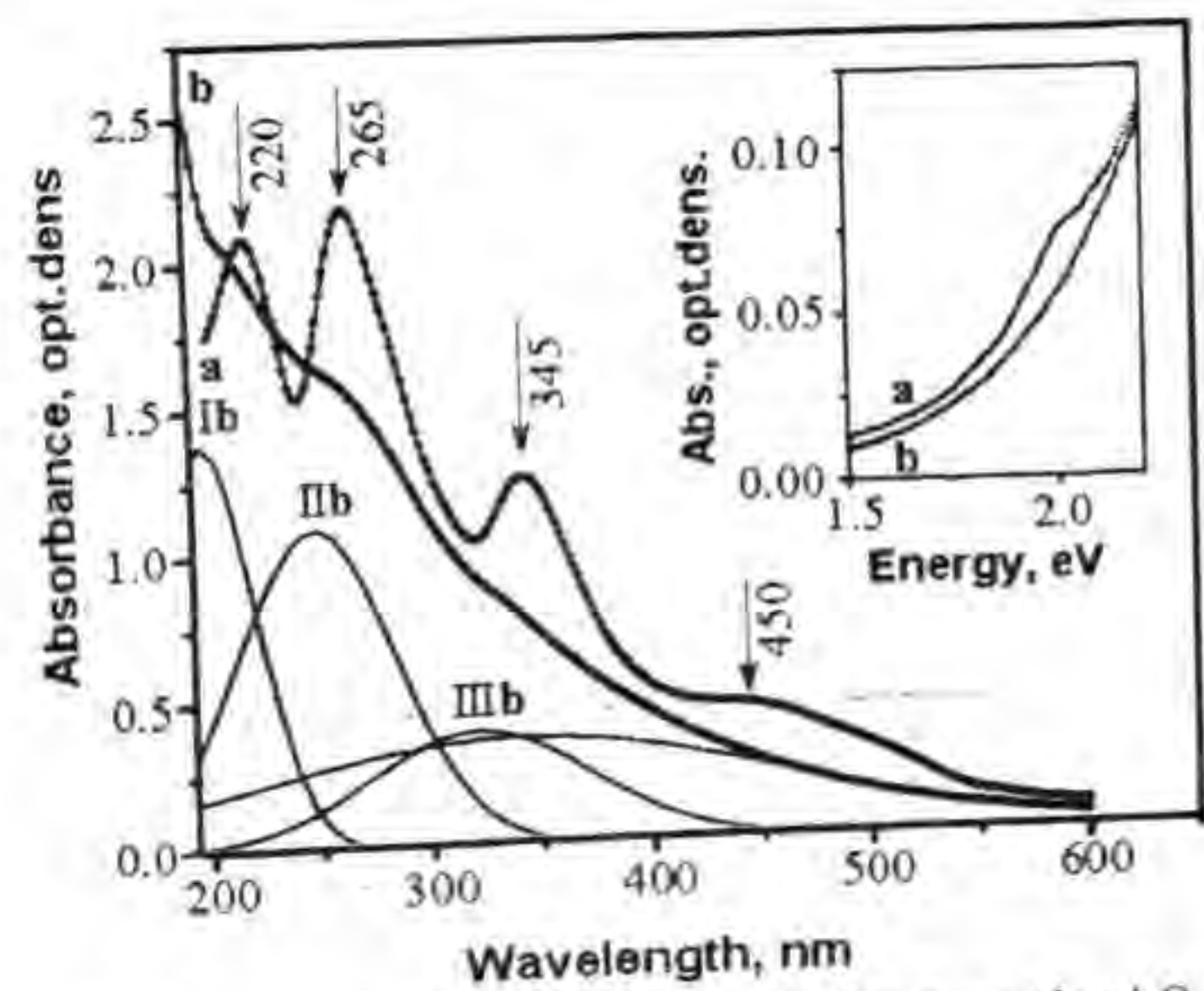


Fig. 2: The comparison of absorbance subbands in the spectra for: **a** – saturated C_{60} aqueous solution with fullerene molecular clusters [2, 3] and **b** – oxidized C_{60} aqueous solution [3]. Deconvolution of the spectrum (b) shows positions of four subbands, residuals are evident. The positions of Ib, IIb, IIIb subbands maxima are centered at 197, 249, 322 nm, respectively. The insert presents these absorption spectra in the energy scale (1.5-2.25 eV). Positions of the absorption edges in spectra (a) and (b) were revealed at 1.7, 1.8 eV, respectively

The analysis of absorbance spectra for satiated and diluted satiated aqueous solutions of the $C_{60}(OH)_{24-26}$ has revealed of the positions of weak maxima at 226, 262 nm and 265, 340, 415, 493, 562, 670 nm (Fig.1, spectra c and a, correspondently) in comparison with the ones for the fullerene aqueous solution – 220, 265, 345, 450 nm and for the oxidized fullerene aqueous solution – 197, 249, 322, around 400 nm (Fig.2, spectra a and b, correspondently).

It is recognized that for high hydrated fullerene in satiated and diluted satiated aqueous solutions with different pH (6.93 and 7.51, respectively) the position of basic absorbance maximum (basic electronic transition) removes from 262 to 265 nm. Last value is corresponds to 265 nm position of basic absorbance maximum in the C_{60} clusters in aqueous spectrum (Fig.2, a). Then we can assume that this absorbance maximum removes due to a molecular architecture of the fullerol clusters changing in the solutions with different pH. For these clusters is recognized in a subband absorbance weak maximum near 415 nm (Fig.1, b) in compare to 450 nm for the C_{60} clusters.

Another the absorbance subbands in 450–720 nm range (Fig.1, b) respect to the LUMO-HUMO gap electron transitions for fullerol molecules and its clusters in aqueous solutions as and for the fullerene molecules and its clusters as it Fig.2 (insert) illustrated [2, 3, 6, 9]. But for diluted satiated

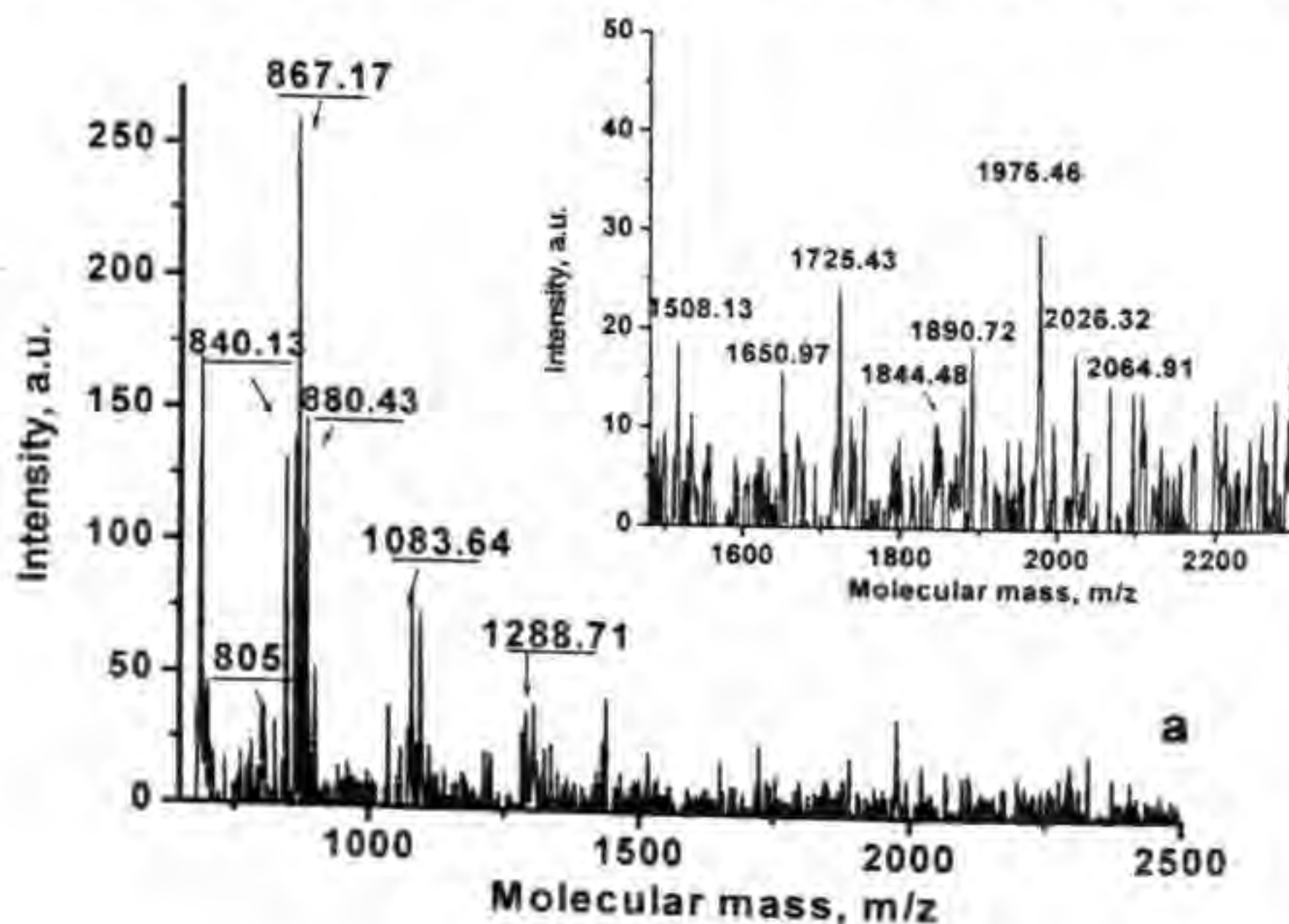
solution of the fullerol the 562–670 nm absorbance subbands, which are absent in the C_{60} and oxidized C_{60} spectra (Fig.2, a and b, respectively) can characterize electron transitions between levels of the LUMO band and levels which respect to defects due to (OH), (O) at the C_{60} core [3].

We can point also that the lowest allowed electron transition $h_u \rightarrow t_{1g}$ to excited state T_{1u} at 408 nm, which was revealed in spectra of the C_{60} aqueous solution [2], is not observed in the fullerol spectra (Fig.1, b). This electron transition is allowed for the C_{60} quasi-crystal only [2,3]. For the fullerol is electronic transition at 415 nm as weak maximum in subband (Fig.1b) and this subband can be associated with electron transitions to excited states of clusters.

So, revealed photoexcited electron transitions at 226, 262, 265, 340 and 415, 493 nm (the absorbance more 0.1 optical density) can be use in the fullerol photoprobe, for example, for a recognition of biomolecular environment due to fullerol clusters reorganization [15].

3.2. The masses of the fullerol molecules.

The pointed values for molecular masses at mass spectra in 650–2500 m/z range (Fig.3 a,b,c) are compared beside with calculated for the C_{60} molecule a cluster from two with the aim to detect (n) and (m) numbers in $(OH)_n (O)_m$ at fullerene core which characterized of the fullerol molecule [3,5].



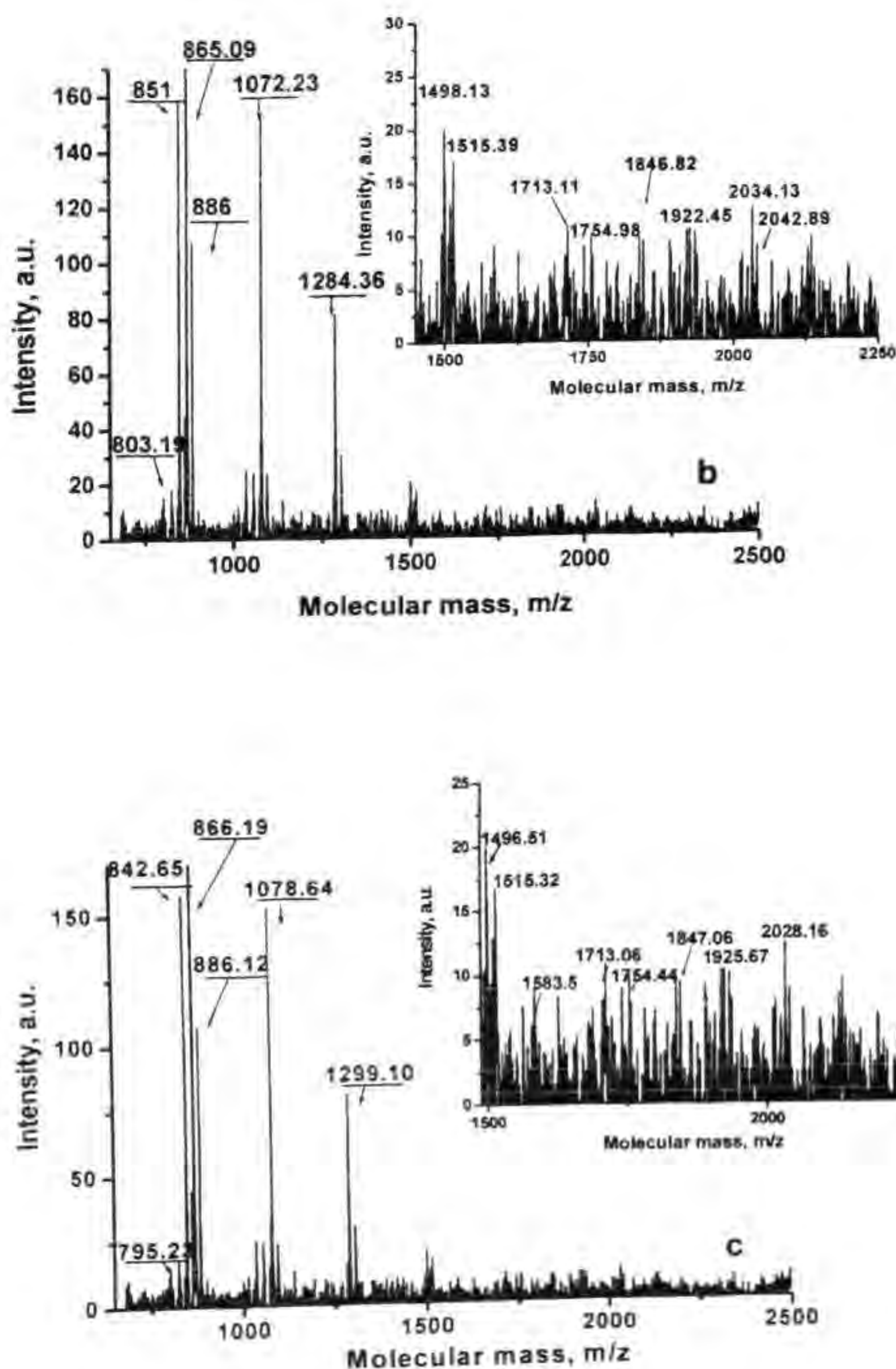


Fig.3 Mass-spectra for: a – the pristine fullerol nanocrystals; b – the pristine fullerol nanocrystals dissolved in aqueous – diluted satiated solution (pH 6.98); c – the fullerene nanocrystals after the UV irradiation of their aqueous suspension (pH 6.5). Spectra are in the both ranges; the 650 – 2500 m/z (basic spectra), and the 1490 – 2250 m/z (inserted spectra).

Table 1
Calculated values for the C_{60} molecular mass with different numbers of $(OH)_n$ and $(O)_m$ at the core for the detection of (n) and (m) numbers for pointed experimental m/z masses values in Fig.3.

	11*OH	12*OH	13*OH	14*OH	15*OH	16*OH	17*OH	18*OH	19*OH	20*OH
C_{60}	907,72885	924,7362	941,74355	958,7509	975,75825	992,7656	1009,77295	1026,7803	1043,78765	1060,795
*O	923,72825	940,7356	957,74295	974,7503	991,75765	1008,765	1025,77235	1042,7797	1059,78705	1076,7944
*2O	939,72765	956,735	973,74235	990,7497	1007,75705	1024,7644	1041,77175	1058,7791	1075,78645	1092,7938
*3O	955,72705	972,7344	989,74175	1006,7491	1023,75645	1040,7638	1057,77115	1074,7785	1091,78585	1108,7932
*4O	971,72645	988,7338	1005,74115	1022,7485	1039,75585	1056,7632	1073,77055	1090,7779	1107,78525	1124,7926
*5O	987,72585	1004,7332	1021,74055	1038,7479	1055,75525	1072,7626	1089,76995	1106,7773	1123,78465	1140,792
*6O	1003,72525	1020,7326	1037,73995	1054,7473	1071,75465	1088,762	1105,76935	1122,7767	1139,78405	1156,7914
*7O	1019,72465	1036,732	1053,73935	1070,7467	1087,75405	1104,7614	1121,76875	1138,7761	1155,78345	1172,7908
*8O	1035,72405	1052,7314	1069,73875	1086,7461	1103,75345	1120,7608	1137,76815	1154,7755	1171,78285	1188,7902
*9O	1051,72345	1068,7308	1085,73815	1102,7455	1119,75285	1136,7602	1153,76755	1170,7749	1187,78225	1204,7896
*10O	1067,72285	1084,7302	1101,73755	1118,7449	1135,75225	1152,7596	1169,76695	1186,7743	1203,78165	1220,789
*11O	1083,72225	1100,7296	1117,73695	1134,7443	1151,75165	1168,759	1185,76635	1202,7737	1219,78105	1236,7884
*12O	1099,72165	1116,729	1133,73635	1150,7437	1167,75105	1184,7584	1201,76575	1218,7731	1235,78045	1252,7878
*13O	1115,72105	1132,7284	1149,73575	1166,7431	1183,75045	1200,7578	1217,76515	1234,7725	1251,77985	1268,7872
*14O	1131,72045	1148,7278	1165,73515	1182,7425	1199,74985	1216,7572	1233,76455	1250,7719	1267,77925	1284,7866
*15O	1147,71985	1164,7272	1181,73455	1198,7419	1215,74925	1232,7566	1249,76395	1266,7713	1283,77865	1300,786
*16O	1163,71925	1180,7266	1197,73395	1214,7413	1231,74865	1248,756	1265,76335	1282,7707	1299,77805	1316,7854
*17O	1179,71865	1196,726	1213,73335	1230,7407	1247,74805	1264,7554	1281,76275	1298,7701	1315,77745	1332,7848
*18O	1195,71805	1212,7254	1229,73275	1246,7401	1263,74745	1280,7548	1297,76215	1314,7695	1331,77685	1348,7842
*19O	1211,71745	1228,7248	1245,73215	1262,7395	1279,74685	1296,7542	1313,76155	1330,7689	1347,77625	1364,7836
*20O	1227,71685	1244,7242	1261,73155	1278,7389	1295,74625	1312,7536	1329,76095	1346,7683	1363,77565	1380,783
*21O	1243,71625	1260,7236	1277,73095	1294,7383	1311,74565	1328,753	1345,76035	1362,7677	1379,77505	1396,7824
*22O	1259,71565	1276,723	1293,73035	1310,7377	1327,74505	1344,7524	1361,75975	1378,7671	1395,77445	1412,7818

The selected peaks in these spectra with pointed by m/z numbers were used for the comparison with calculated m/z masses for the C_{60} molecule and $(C_{60})_2$ aggregate having different numbers of $(OH)_n$, $(O)_m$, using the method of the calculation for putted numbers of (n) and (m) which are predicted for the fullerol molecule [3,5]. The presented Table 1 demonstrates results of computer calculations for $(n=11-20)$, and $(m=1-22)$ as a part of our calculations for $(n=1-30)$ and $(m=1-22)$. Selecting calculated values of m/z for putted (n) and (m) which equal to pointed in Fig.3 experimental m/z values the formula for the fullerol having as $(OH)_n$ and $(O)_m$ at the core we can determinate.

Comparing calculated m/z masses for putted (n) and (m) values using predicted numbers of $(OH)_n$, $(O)_m$, for C_{60} fullerol and $(C_{60})_2$ clusters molecules in different three samples [3] we have estimated of (n) and (m) values which characterize mass spectrum of the pristine fullerol nanoparticles, the pristine fullerol aqueous solution and the pristine C_{60} nanocrystals suspension after the UV irradiation:

1 – maxima numbers for (OH) in the pristine fullerol nanoparticles are $n=26$ in $C_{60}(OH)_{26}(O)_{10}$ and $C_{60}(OH)_{11}(O)_{11}$, and maxima intensities are for $C_{60}(OH)_3(O)_6$ and $C_{60}(OH)_7$, $C_{60}(O)_{10}$ molecules;

2 – maxima numbers for (OH) in the pristine fullerol aqueous solution $C_{60}(OH)_n$, $n=20$ in $C_{60}(OH)_{20}(O)_{14}$;

3 – maxima number is $n=18$ in $C_{60}(OH)_{18}(O)_{17}$ in the mass spiectrum of an aqueous suspension of the pristine C_{60} nanocrystals after UV irradiation

We pointed that:

1- $C_{60}(OH)_{15}(O)_6$, $C_{60}(OH)_5(O)_5$ and $C_{60}(OH)_{20}(O)_{14}$ molecules and $(C_{60})_2(OH)_{24}(O)_{12}$ clusters are only in the pristine fullerol nanoparticles solution;

2- $C_{60}(OH)_n$ ($n=6$) molecules and $(C_{60})_2(OH)_{17}(O)_{10}$ clusters which was recognized in mass spectra of the pristine C_{60} aqueous suspension after UV irradiation, confirm a formation of the fullerol.

The general result of this experiment, as important for biomedical fullerol applications, is detected in mass spectra for three samples molecular masses, which correspond to fullerol with added $(O)_m$, and clusters as the analysis of UV – vis spectra demonstrated and it predicted by us [3] and assumed for experiment result explanation[5,15].

4. Conclusion

The determination of photoexcited electron transitions in the fullerol molecules with the revelation of their peculiarities, which respect to

(OH) , (O) at the fullerene core, and their numbers are studied using experimental techniques including UV-vis spectroscopy and matrix-assisted laser desorption/ionization (MALDI) mass-spectrometry. It is found that general electron transitions are around 265 nm similar to the transition in the fullerene and at 415, 493 nm which respect to HOMO-LUMO band gaps as we assume for the fullerol with and without $(O)_m$ at the core [3]. The fullerol molecules contain oxygenated carbons $C_{60}(O)_m$, but less on the hydroxyl number. Previously, to gain the larger solubility required by practical applications, it was suggested to increase the number of the hydroxyl groups [3, 5, 6, 12, 13]. This idea needs to be restudied, because in highly hydroxylated fullerol molecules, the coinstantaneous formation of a large amount of impure groups, for example, $(ONa)_{17}$, is observed [14]. And our result reveal a way of controlling formation of (OH) groups small number to gain fullerol molecules of high stability using the UV lamp irradiation of the fullerene nanocrystals in aqueous suspension with the fullerol formation and dissolving of nanocrystals.

Acknowledgements

The authors, Iryna Sporysh and Liliana Lukashuk gratefully acknowledge Prof. Uwe Ritter for obtaining financial support from TU Ilmenau, Germany for Fellowship position at Chemical Laboratory of this University and DAAD the Leonard-Euler Program Graduate Student's stipendium, respectively. The authors are also grateful to Mrs. Katrin Risch (Chemical Laboratory of TU Ilmenau) for the support of experiments. Special authors thanks to Prof. E. Buzaneva for useful discussions of results.

References.

1. Chaplin M. Aqueous fullerene solutions // In website of London South Bank University; <http://www.sbu.ac.uk/water/buckmin.html/>.
2. Prilutski Y., Durov S., Bulavin L., Pogorelov V., Astashkin Y., Yashchuk V., Ogul'chanski T., Buzaneva E., Andrievsky G. Study of Structure of Colloidal Particles of Fullerenes in Water Solution // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 1998. – 324. – P.65-70.
3. Scharff P., Siegmund C., Risch K., Lysko I., Lysko O., Zhrebetsky D., Ivanisik A., Gorchinskiy A., Buzaneva E. Characterization of water-soluble fullerene C_{60} oxygen and hydroxyl group derivatives for photosensitizers, Fullerenes, Nanotubes and

Carbon Nanostructures.13, supplementary 1, - P.497-509, 2005

4. *Andrievsky G.V., Klochkov V.K., Bordyuh A.B., Dovbeshko G.I.* Comparative analysis of two aqueous-colloidal solutions of C_{60} fullerene with help of FTIR reflectance and UV-vis spectroscopy // *Chemical Physics Letters* – 2002. – **364**. – P. 8–17.

5. *Vileno B., Marcous P.R., Lekka M., Sienkiewicz A., Feher T., Forro L.* Spectroscopic and photophysical properties of a highly derivatized C_{60} fullerol // *Adv. Func.Mater* – 2006. – **16**. – P.120-128.

6. *Buzaneva E., Gorchinskiy A., Scharff P., Risch K., Nassiopoulou A., Tsamis C., Prilutskyy Yu., Ivanyuta O., Zhugayevych A., Kolomiyets D., Veligura A., Lysko I., Vysokolyan O., Lysko O., Zharebetsky D., Khomenko A., Sporysh I.* DNA/metal nanoparticles, DNA/nanocarbon and macrocyclic metal complex/fullerene molecular building blocks for nanosystems: electronics and sensing. In *Proceeding of: E.Buzaneva, P. Scharff (Ed.) "Frontiers of Multifunctional Integrated Nanosystems"*, NATO Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, vol.152, P.251-276, 2004.

7. *Xin Ma and Bouchard D.* Formation of Aqueous Suspensions of Fullerenes // *Environ. Sci. Technol.* – 2009. – **43**. – P.330–336.

8. *Dhawan A., Taurozzi J.S., Pandey A.K., Shan W., Miller S.M., Hashsham S.A., Tarabara V.V.* Stable Colloidal dispersion of C_{60} fullerenes in water: evidence for genotoxicity // *Environ. Sci. Technol.* – 2006. – **40**. – P.7394-7401.

9. *Kysil O., Sporysh I., Buzaneva E., Erb T., Gobsch G., Ritter U., Scharff P.* The C_{60} fullerene molecules integration by ds-, ss-DNA molecules in fluids: optical spectroscopy characterization of the biointerface organization // *Mat. Sc. and Eng.* – 2010. – B169/1-3. – P.85-89.

10. *Sporysh I., Shynkaruk E., Lysko O., Shynkaruk A., Dubok V., Buzaneva E., Ritter U., Scharff P.*

Biomimetic hydroxyapatite nanocrystals in composites with C_{60} and Au-DNA nanoparticles: IR-spectral study // *Mat. Sc. and Eng.* – 2010. – B169/1-3. – P.128-134.

11. *Sayes C.M., Marchione A.A., Reed K.L., and Warheit D.B.* Comparative Pulmonary Toxicity Assessments of C_{60} Water Suspensions in Rats: Few Differences in Fullerene Toxicity in Vivo in Contrast to in Vitro Profiles // *Nano Lett.* – 2007. – **7**, No. 8. – P.2399-2406.

12. *Isakovic A., Markovic Z., Todorovic-Markovic B., Nikolic N., Vranjes-Djuric S., Mirkovic M., Dramicanin M., Harhaji L., Raicevic N., Nikolic Z., and Trajkovic V.* Distinct Cytotoxic Mechanisms of Pristine versus Hydroxylated Fullerene // *Toxicological sciences.* – 2006. – **91(1)**. – p. 173–183.

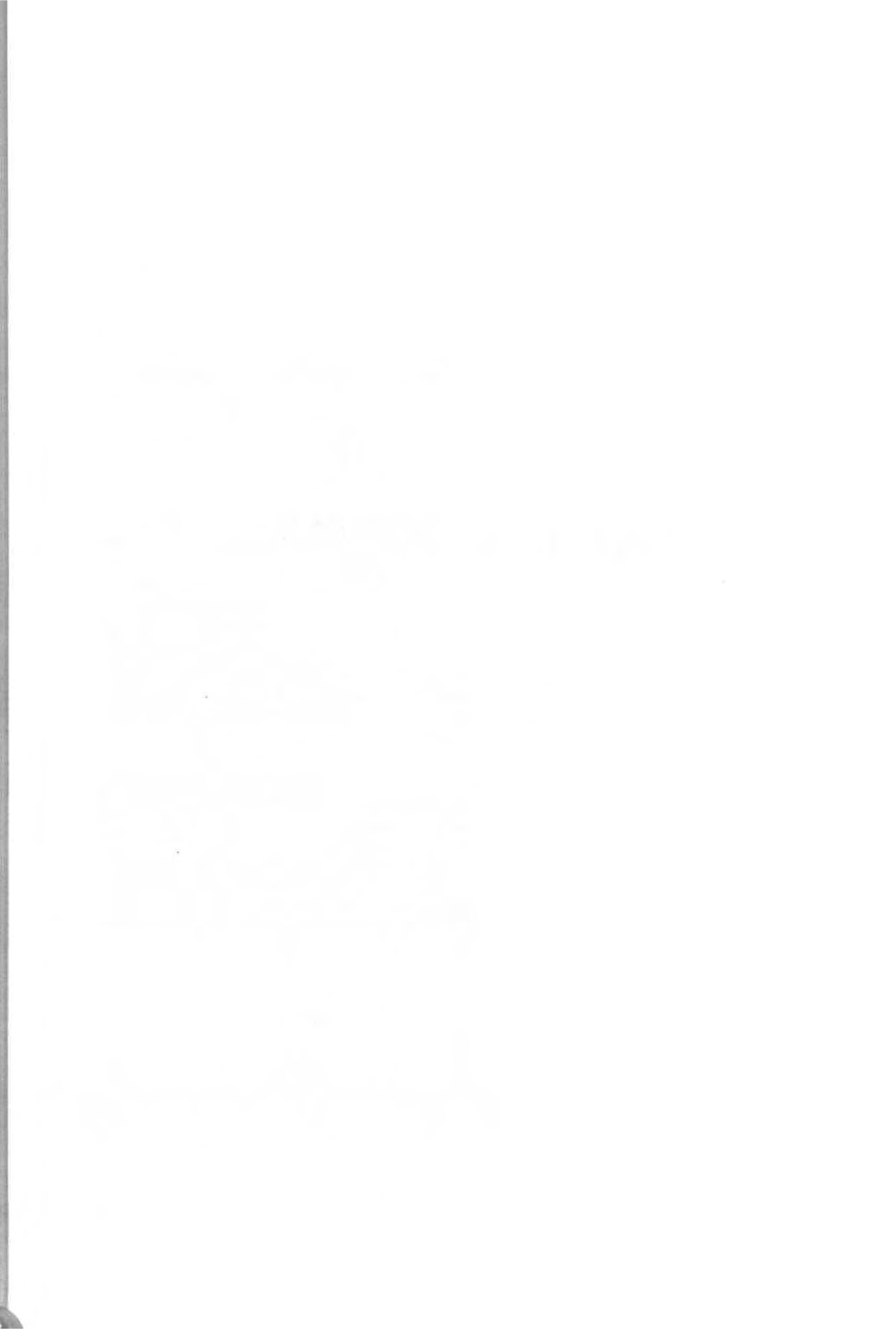
13. *Injac R., Radic N., Govedarica B., Djordjevic A., Strukelj B.* Bioapplication and activity of fullerol $C_{60}(OH)_{24}$ // *African Journal of Biotechnology.* – 2008. – **7(25)**. – P. 4940-4050.

14. *Alves G.C., Ladeira L.O., Righi A., Krambrock K., Calado H.D., R.P. de Freitas Gil, Veloso M., Pinheiro B.* Synthesis of $C_{60}(OH)_{18-20}$ in Aqueous Alkaline Solution Under O_2 -Atmosphere // *J. Braz. Chem. Soc.* – 2006. – **17**, No. 6. – P. 1186-1190.

15. *Brant J. A., Labille J., Ogilvie Robichaud C., Wiesner M.* Fullerol cluster formation in aqueous solutions: Implications for environmental release // *Journal of Colloid and Interface Science.* – 2007. – **314**. – P. 281–288.

Надійшла до редколегії 15.11.10

СУЧАСНА ФІЗИКА



УДК 532.536

Абдікарімов Б.Ж., к.ф.м.н.,
Альошін О.Д., д.ф.м.н., проф.,
Остапчук Ю.Л., к.ф.м.н.,
Скляр Ю.П., к.ф.м.н.

Вплив іонів на властивості розчину ізо- масляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування

В роботі проведено дослідження впливу іонів KCl на рівняння стану розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування. Експериментальні дані були проаналізовані на основі моделі системи поблизу критичної точки як газу флуктуацій параметру порядку з властивостями реального газу Ван дер Ваальса. Аналіз показав, що внесення іонів збільшує радіус кореляції системи та сили взаємодії між флуктуаціями параметра порядку. Це приводить до зміни амплітуд рівняння стану і зменшення коефіцієнту об'ємного розширення розчину в однофазній області температур.

Ключові слова: рівняння стану, іони, критич-
на точка

*E-mail: alekhin@univ.kiev.ua, os@ukr.net

На цей час актуальним залишається завдання вивчення різних властивостей індивідуальних речовин і подвійних розчинів у критичному стані під дією полів заряджених іонів [1, 2].

Раніше в роботах [3, 4] було досліджено вплив іонів KCl на рівняння кривої співіснування подвійних розчинів ЗМП-D₂O і метанол-гексан поблизу критичної температури розшарування. Впродовж цих досліджень у даній роботі вивчається вплив іонів KCl на різні властивості подвійного розчину ізомасляна кислота – вода. У двофазній області температур ($T < T_c$) було вивчено вплив іонів на параметри рівняння кривої співіснування рідина-рідина даного розчину. У закритичній області температур ($T > T_c$) було вивчено впливи іонів на коефіцієнт об'ємного розширення даного розчину.

Експериментальні дані кривої співіснування розчину ізомасляна кислота – вода [5] представлено на рис. 1.

Аналіз цих даних було проведено на основі моделі системи в околі критичної точки (КТ) як газу флуктуацій параметра порядку, що підпо-

Abdikarimov B.Zh., PhD,
Alekhin O.D., Dr. Sci., Prof.,
Ostapchuk Yu.L., PhD,
Sklyarov Yu.P., PhD

Influence of ions on the properties of isobutyric acid – water solution near the critical consolute temperature

The influence of KCl ions on the equation of state of isobutyric acid – water solution near the critical consolute temperature has been studied in the work. The experimental data have been analyzed on the basis of the model of system near the critical point as gas of order parameter fluctuations with the properties of the real Van der Waals gas. Analysis showed that the ions increase the correlation length of the system and interaction forces between the fluctuations of the order parameter. This leads to the change of the amplitudes of equation of state and the decrease of the volumetric expansion coefficient of the solution in one-phase temperature range.

Keywords: equation of state, ions, critical point

рядковується рівнянню Ван-Дер-Ваальса [6, 7]. Ця модель враховує власний об'єм флуктуацій параметра порядку й сили взаємодії між ними на відстані $r \geq R_c$.

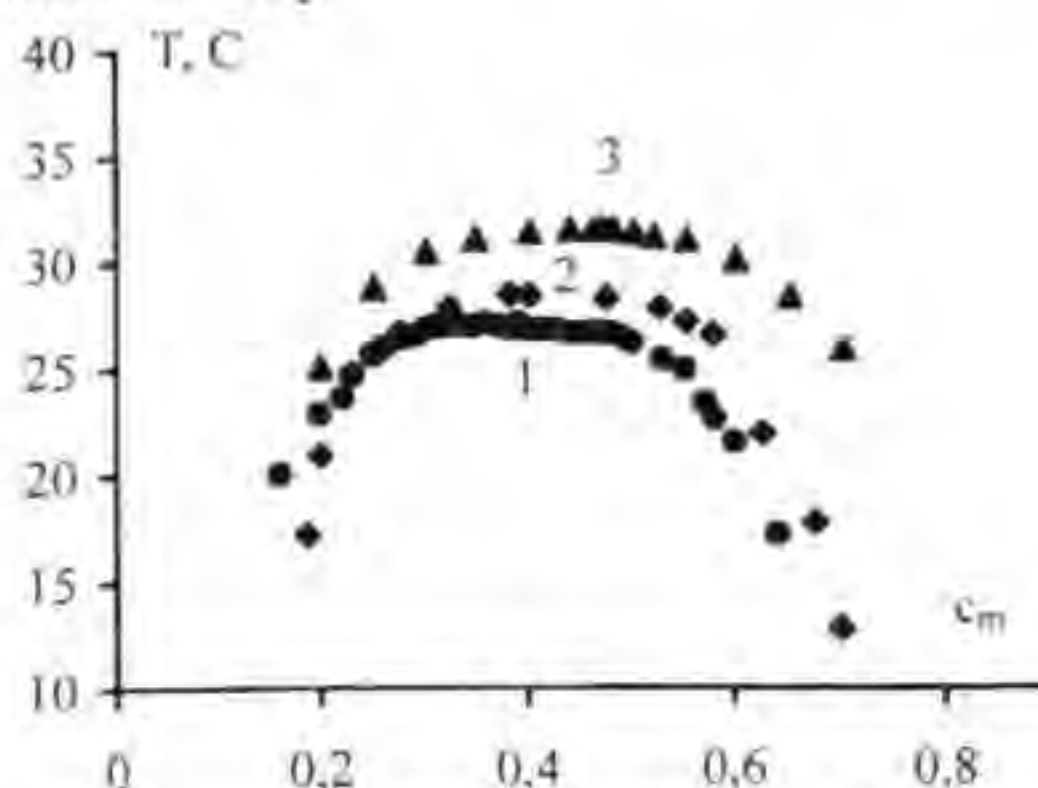


Рис. 1. Температурна залежність масової кон-
центрації c_m ізомасляної кислоти у розчині
ізомасляна кислота – вода поблизу критичної
температури розшарування: (1) – без дода-
вання іонів; (2) – концентрація іонів KCl $x =$
0,005 моль/кг; (3) – $x = 0,03$ моль/кг

У цій моделі, виходячи з [8], рівняння флуктуаційної частини термодинамічного потенціалу [9] можна представити у вигляді

$$F_{\phi} = \frac{F_0}{\omega} \left(1 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \Delta \rho_0 \right) \left(1 - \frac{n-1}{n} x \right) - A C_0^3 R_c^{-4} \quad (1)$$

Тут $\Delta \rho \approx -\Delta V = (V_{\kappa} - V) / V_{\kappa}$; $\omega = (1 - V_{\phi} / V_{\kappa})$; $\rho_{\phi} = \rho_{\kappa} / (1 - \omega)$ – густина речовини всередині флуктуації параметра порядку; "A" – постійна, яка характеризує сили взаємодії між кластерами флуктуацій на відстанях $r \geq R_c$; $F_0 = N_{\phi} k_B T = C_0 R_c^{-3}$ – флуктуаційна частина термодинамічного потенціалу ФТФП [9]; $\Delta \rho_0 = dF_0 / d\mu$; $C_0 \approx 10^{-22} \text{ см}^3$; параметр $x = N_{\phi n} / N_{\phi} = x_0 t^{\Delta_n} = x_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{\Delta_n}$ визначає, за аналогією з [10, 11], ступінь асоціації флуктуацій у системі; N_{ϕ} – загальне число флуктуацій в одному молі речовини, які займають об'єм $V_{\phi} = \frac{4}{3} \pi R_c^3 N_{\phi}$; $N_{\phi n}$ – число флуктуацій, які утворюють комплекси з n флуктуацій (при $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$); $1/\omega \approx 1/\omega_0 (1 + \text{const} \cdot \Delta S_{\mu}) = 1/\omega_0 (1 + \text{const}' \cdot t^{1-\alpha-\beta})$, $\omega_0 = 1 - b/V_{\kappa}$, $b \sim V_{\phi}$ – ефективний власний об'єм молекул одного моля речовини усередині флуктуації параметра порядку. Згідно [9] вздовж напрямку межі поділу фаз радіус кореляції

$$R_c^{-1} = t^v \Phi_1(Z_1^*) = t^v \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\Delta \mu | t |^{-\beta \delta})^n$$

Тоді на основі (1) знаходимо рівняння для параметра порядку $\Delta c_i^* = \frac{c_i - c_{ic}}{c_{ic}}$:

$$\Delta c_i^* = \frac{dF}{d\mu} = \pm B_0 |t|^{\beta} \pm B_1 |t|^{\beta+\Delta_1} + B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\alpha} + \dots \quad (2)$$

Тут c_{ic} , μ_c , T_c – відповідно критичні значення концентрації, хімічного потенціалу та температури розчину; c_i – відповідно мольна $c_m(t)$, об'ємна $c_v(t)$, і масова $c_m(t)$ концентрації; β , Δ , α , v – критичні показники [9].

Доданок $B_0 |t|^{\beta}$ відповідає нульовому скейлінгу. Перший асиметричний доданок $B_2 |t|^{2\beta}$ враховує власний об'єм флуктуацій у системі [7, 8]. Другий асиметричний доданок рівняння КС речовини

$B_3 |t|^{1-\alpha}$ враховує зміну ентропії системи при відході системи від критичної точки. Асиметричний негативний доданок ($-B_4 |t|^{\beta+\alpha} < 0$) враховує сили притягання між флуктуаціями на відстанях $r > R_c$.

Використовуючи взаємозв'язок між різними концентраціями речовини [12]

$$\left(\frac{1}{c_{v_i}} - 1 \right) \frac{1}{\rho_i} = \left(\frac{1}{c_{m_i}} - 1 \right) \frac{1}{\rho_2};$$

$$\left(\frac{1}{c_{v_i}} - 1 \right) \frac{\mu_i}{\rho_i} = \left(\frac{1}{c_{m_i}} - 1 \right) \frac{\mu_2}{\rho_2};$$

$$\left(\frac{1}{c_{m_i}} - 1 \right) \cdot \mu_i = \left(\frac{1}{c_{\mu_i}} - 1 \right) \cdot \mu_2$$

були розраховані й побудовані також температурні залежності для об'ємної $c_v(T)$ і мольної $c_m(T)$ концентрацій. Ці залежності показано на рис. 2.

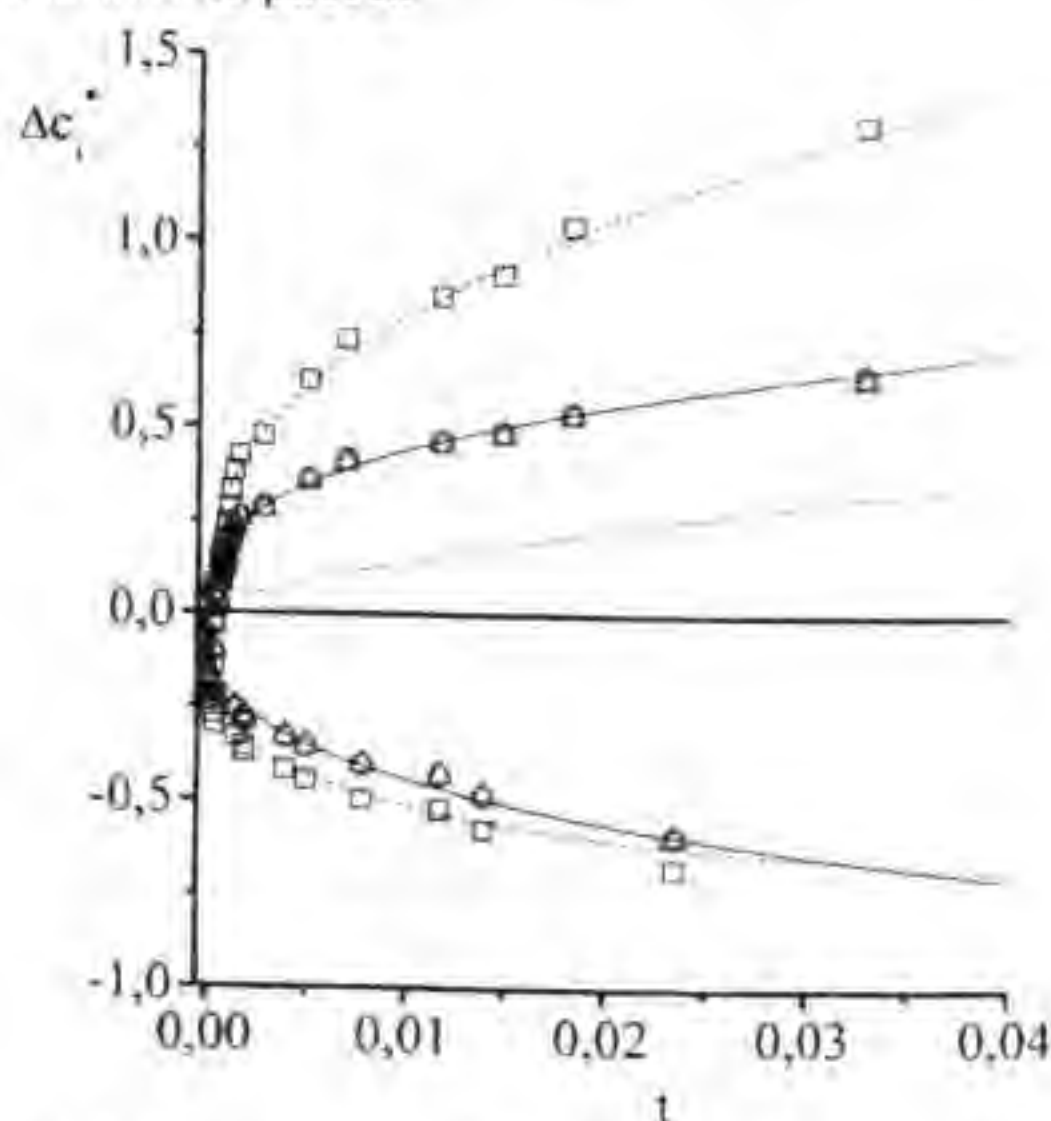


Рис. 2. Температурна залежність приведених об'ємної Δ , масової $\circ$, мольної $\square$ концентрацій розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування

На основі експериментальних даних (рис. 1) було досліджено також вплив іонів на рівняння співіснування (2) для різних концентрацій (мольної, об'ємної, масової). Для цього були розраховані температурні залежності приведених об'ємної, масової, мольної концентрацій досліджуваного розчину поблизу критичної температури розшарування з добавкою солі KCl (рис. 3 (а, б)).

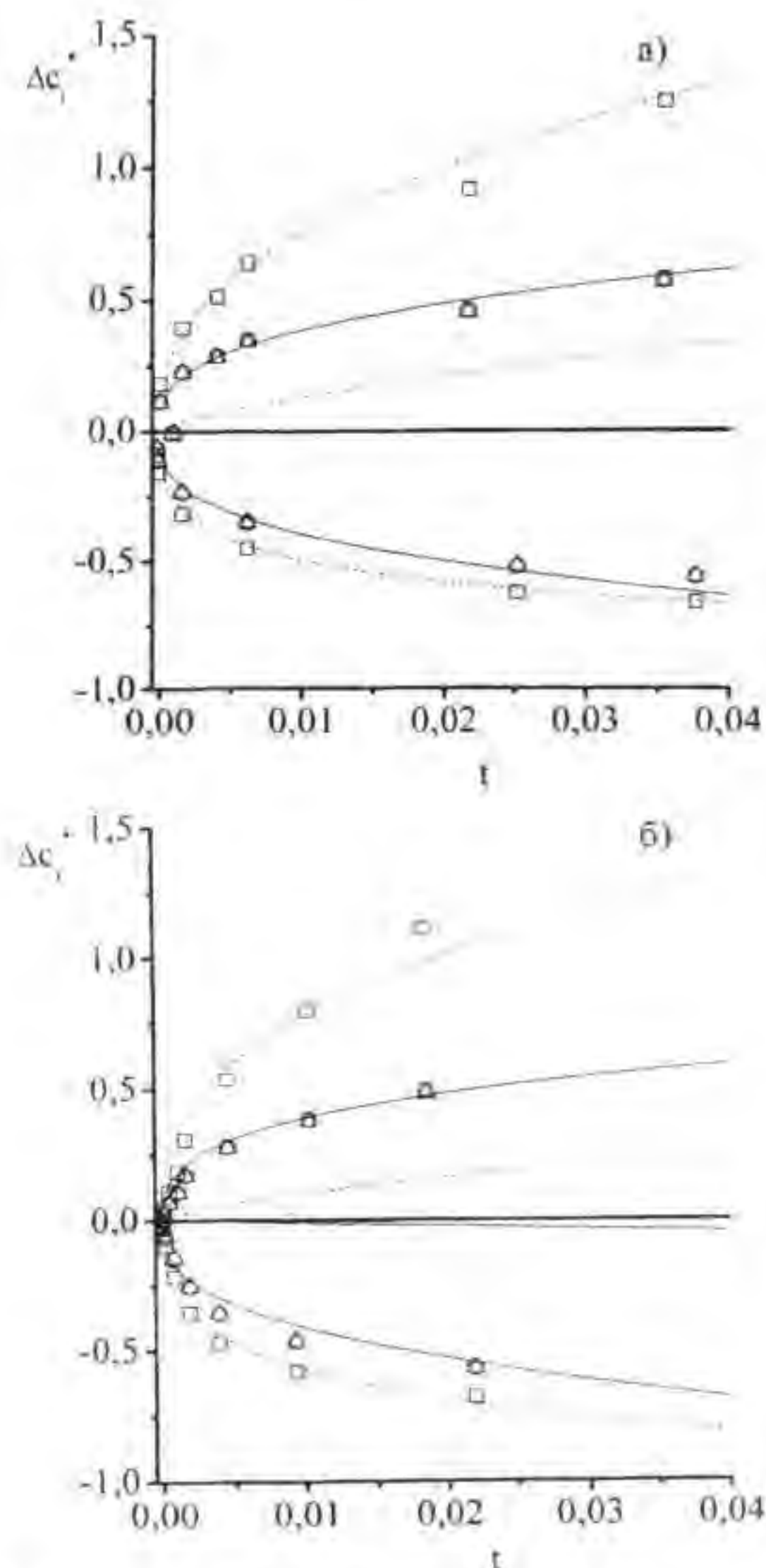


Рис. 3. Температурна залежність приведених об'ємної Δc_v , масової Δc_m , мольної Δc_μ концентрацій розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування з різною добавкою іонів KCl: (а) - $x = 0,005$ моль/кг, (б) - $x = 0,03$ моль/кг

За допомогою рівняння (2) проаналізуємо отримані дані $\Delta c_i(t)$ (рис. 2, 3а, 3б). Для цього спочатку використаємо симетричну частину цього рівняння

$$\frac{c_{i1} - c_{i2}}{2c_{ik}} = \pm B_0 |t|^\beta \pm B_1 |t|^{\beta+\nu} \quad (3)$$

На основі (3) і експериментальних даних

(рис. 2, 3а, 3б) були розраховані амплітуди B_0 . У випадку масової і об'ємної концентрацій коефіцієнт $B_0 \approx 2,0$, а для мольної концентрації коефіцієнт $B_0 \approx 3,1$ (рис. 2, 3а, 3б).

Проведемо тепер аналіз поведінки діаметра кривої співіснування (рис. 2, 3а, 3б) за допомогою асиметричної частини рівняння стану (2)

$$\frac{c_{i1} + c_{i2}}{2c_{ik}} = B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\nu} + \dots \quad (4)$$

Найбільш симетричні залежності для розчину ізомасляна кислота – вода (рис. 2) та цього ж розчину з добавкою солі KCl (рис. 3а, 3б) мають масова та об'ємна концентрації. Тому саме вони повинні бути обрані як параметри порядку цих систем. Рівняння стану для мольної концентрації $\Delta c_\mu(t)$ є несиметричним. Це також підтверджується теоретичними розрахунками [12] щодо вибору параметрів порядку.

Майже симетрична температурна залежність масової та об'ємної концентрацій розчину ізомасляна кислота – вода без додавання іонів (рис. 2) у всьому досліджуваному діапазоні температур може бути пояснена тим, що внесок асиметричних членів $B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha}$ компенсується членом $-B_4 |t|^{\beta+\nu}$ протилежного знаку ($B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\nu} + \dots \Rightarrow 0$).

При додаванні солі KCl у розчин ізомасляна кислота – вода зі збільшенням концентрації іонів від 0 до 0,03 моль/кг від'ємний коефіцієнт $-B_4 |t|^{\beta+\nu}$ зростає по модулю від 0 до 0,9, що і приводить до зміни асиметричної частини рівняння стану (2) ($B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\nu} + \dots$) цього розчину. Таким чином, асиметрія рівняння співіснування (для досліджуваних концентрацій: масової, об'ємної, мольної) змінюється внаслідок зростання сил взаємодії між флуктуаціями параметра порядку.

При подальшому збільшенні концентрації іонів солі KCl у розчині ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування може призвести до того, що масова та об'ємна концентрації стануть більш асиметричними, ніж мольна концентрація. Тобто відбудеться перехід до іншого критичного параметру порядку: мольна концентрація стане параметром порядку.

Проаналізуємо тепер дію іонів на температурну поведінку показника заломлення розчину ізомасляна кислота-вода в закритичній області температур ($T > T_c$) вздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори –

ізоконцентрати. З рис. 4 видно, що дія іонів приводить до зменшення нахилу кривої температурної залежності густини $\rho(T)$ даного розчину [13]. Такий самий висновок було раніше отримано і для інших розчинів [4].

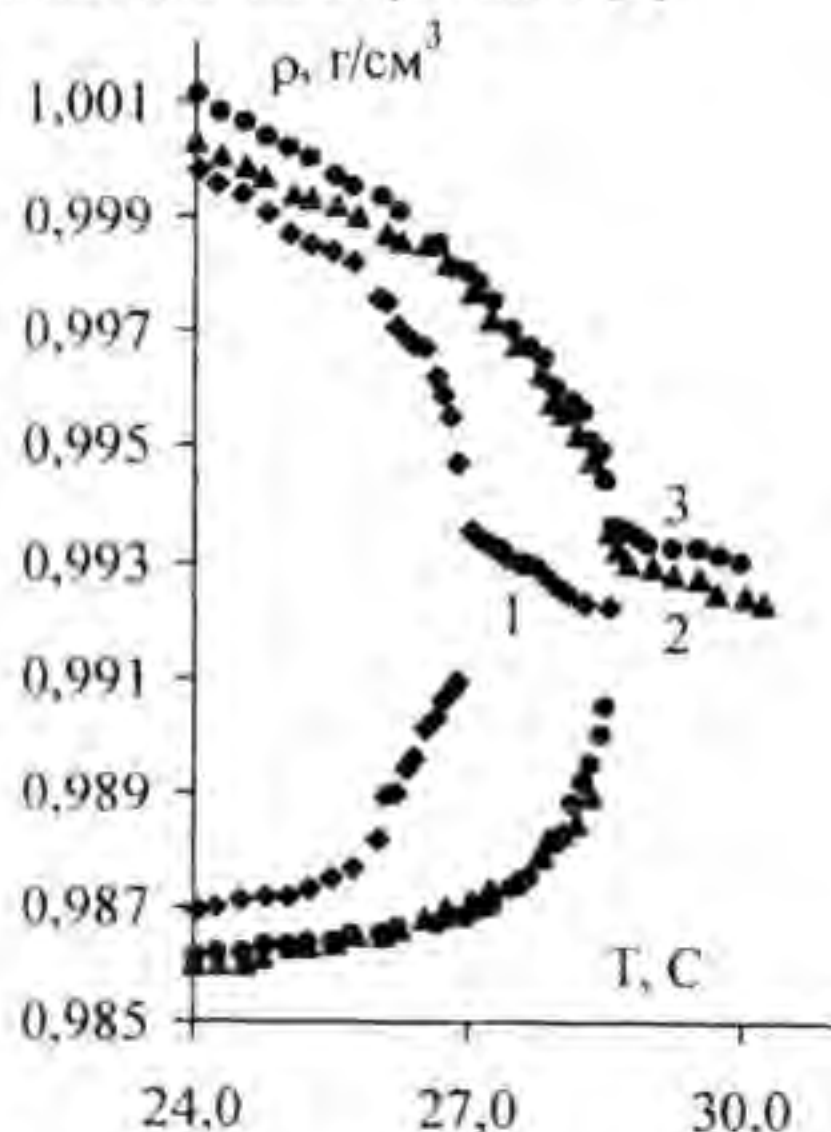


Рис. 4. Температурні залежності густини $\rho(T)$ розчину ізомасляна кислота-вода (1) в однофазній області температур (2 - з добавкою іонів KCl $x = 5 \cdot 10^{-3}$ моль/кг, 3 - $x = 10^{-2}$ моль/кг)

Цей результат пояснюється тим, що внесення іонів у систему, збільшуючи сили взаємодії між флуктуаціями параметра порядку, природно приводить і до зменшення коефіцієнта об'ємного розширення такої системи.

На основі проведених досліджень можна зробити висновки, що додавання іонів у подвійний розчин ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування:

- 1) збільшує радіус кореляції системи й сили взаємодії між флуктуаціями параметра порядку;
- 2) приводить до зміни амплітуд рівняння стану;
- 3) впливає на асиметрію рівняння стану;
- 4) приводить до зменшення коефіцієнта об'ємного розширення розчину в однофазній області температур.

Список використаних джерел

1. Dittmar H., Butka A., Vale V.R., Schröer W. Liquid-liquid phase transition in the ionic solutions of tetra-n-butylammonium chloride in o-xylene and ethylbenzene: Phase diagrams and corresponding state analysis // Journal of

Molecular Liquids. – 2009. – Vol.145(3), P.116-128.

2. Алехин А.Д., Абдикаримов Б.Ж., Булавин Л.А., Остапчук Ю.Л., Рудников Е.Г. Влияние ионов на различные свойства двойных растворов вблизи критической температуры расслоения // Мониторинг. Наука и технологи. – 2010. – №2(3), С.75-78.
3. Булавин Л.А., Олейнікова А.В., Пініч В.А. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. наук. 2001, №1, С.411.
4. Абдікаримов Б.Ж., Альохін О.Д., Булавин Л.А., Остапчук Ю.Л., Рудников Е.Г. Вплив іонів на рівняння стану розчину метанол-гексан поблизу критичної температури розшарування // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №4. – С 181-184.
5. Toumi A., Bouanz M., Gharbi A. Coexistence curves of the binary mixture isobutyric acid-water with added ions (K^+ ; Cl^-) // Chemical Physics Letters. – 2002. – №362. – P. 567-573.
6. Alekhin A.D., Abdikarimov B.Zh., Ostapchuk Yu.L., Rudnikov E.G. Van der Waals Model and Equation of state of nitrobenzene-alkanes solutions near the critical consolute temperature // Russian Journal of Physical Chemistry A. – 2010. – Vol. 84, No. 8. – P. 1352-1358.
7. Ван-дер-Ваальс И.Д., Констанн Ф. Курс термостатики. Т.2. – Москва: ОНТИ. 1936. – 439с.
8. Алехин А.Д. // Известия вузов. Фізика. – 1983. – №3. – 103.
9. Паташинский А.З., Покровский В.А. Флуктуационная теория фазовых переходов. – Москва: Наука, 1982. – 382 с.
10. Китнис А.Я., Явелов Б.Е. Иоганнес Дидерик Ван-дер-Ваальс. – АН СССР. Ленинград, Наука. 1985.
11. Альохін А.Д. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки. – 2003. – №2, С. 322.
12. Alekhin O.D., Krupsky M.P., Ostapchuk Yu.L., Rudnikov E.G. Liquid-liquid coexistence curve under gravity // Journal of Molecular Liquids. – 2003. – Vol. 105/2-3. – P. 191-196.
13. Toumi A., Bouanz M. Critical behavior of the binary-fluid isobutyric acid-water with added ions (K^+ , Cl^-) // Eur. Phys. J. E. – 2000. – 2, P.211-216.

Надійшла до редколегії 2.10.2010

УДК 532

Адаменко І.І., д.ф.-м.н., проф.,
Григор'єв А.М., к.ф.-м.н.,
Кузовков Ю.Г., к.ф.-м.н., с.н.с.

Про визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії з рівняння стану рідин.

На прикладі відомого статистично обґрунтованого рівняння стану, виведеного для системи частинок, які взаємодіють за допомогою оберненого степеневого потенціалу (модель м'яких сфер), проаналізовані фактори, що впливають на точність визначення параметрів потенціалу. Для цього методом Монте-Карло проведено моделювання двовимірної системи м'яких дисків. Досліджено ізотермічний модуль пружності при значеннях степені потенціалу сил відштовхування 4 та 12. Встановлено, що збіг експериментальних і розрахункових P - p - T даних ще не гарантує високу точність визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії. Це обумовлено як неадекватністю функціонального виду рівняння стану, так і неточністю передачі залежності параметрів потенціалу від параметрів рівняння стану.

Ключові слова: параметри потенціалу міжмолекулярної взаємодії, рівняння стану рідин.

*E-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

Параметри потенціалу міжмолекулярної взаємодії знаходять, використовуючи різні експериментально отримані макрохарактеристики, зокрема дані по густині рідин ρ в широкому інтервалі температур T і тисків P . Звичайна схема визначення цих параметрів з P - p - T даних така. Припускаючи, що потенціал має певну функціональну форму, після ряду наближень виводять рівняння стану, параметри якого виражають через параметри потенціалу міжмолекулярної взаємодії. Потім апроксимують P - p - T дані у відповідності з заданим виглядом рівняння стану. Знаючи зв'язок між параметрами рівняння стану і параметрами потенціалу, знаходять останні.

Серед небагатьох статистично обґрунтованих рівнянь стану, придатних для опису теплофізичних властивостей рідин, доцільно розглянути рівняння стану [1]. Воно нагадує по

I.I.Adamenko, professor
A.N.Grigoriev,
Yu.I.Kuzovkov

On determining of parameters of intermolecular potential from equation of state of liquids.

Factors which affect the accuracy of potential parameters determination have been analyzed by the example of a known statistically based equation of state obtained for the system of particles interacting through inverse power potential (soft spheres). For that Monte-Carlo simulation of two-dimensional system of soft disks has been carried out. Isothermal elasticity module for systems with different exponents of repulsive force potential $m=4$ and $m=12$ has been studied. It has been proved that coincidence of experimental P - p - T data and those of obtained from the equation of state does not guarantee a high accuracy of determination of intermolecular potential parameters. It is conditioned by inadequacy of functional form of the equation of state and approximate dependence of potential parameters from parameters of the equation of state.

Key Words: parameters of intermolecular potential, equation of state of liquids.

формі емпіричне рівняння Марнегхена [2], яке непогано себе зарекомендувало для щільних рідин. Рівняння виведено для системи частинок, які взаємодіють за допомогою оберненого степеневого потенціалу (модель м'яких сфер):

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^m} \quad (1)$$

де r – відстань між центрами частинок, m – степінь потенціалу сил відштовхування. Рівняння [1] застосовується при малих стисливостях рідин, тобто в області високих тисків. За його допомогою авторами роботи [3] був проаналізований великий масив експериментального матеріалу, отриманого для атомарних систем. Зроблено висновок, що сили відштовхування в реальних рідинах змінюються набагато швидше з відстанню, ніж це вважалося

раніше. Зокрема, степінь відштовхувальної частини потенціалу взаємодії аргону оцінюється як $m=24\div 28$, що у декілька разів більше ніж у випадку відомого потенціалу Леннарда-Джонса.

Виникає питання: як реально оцінити точність визначення параметрів потенціалу між-молекулярної взаємодії, враховуючи, що виведене рівняння стану рідини є наближенням (хоч і статистично обґрунтованим)? Вивченню цієї проблеми присвячена наша робота.

Були досліджені теплофізичні властивості двовимірної модельної системи частинок, які взаємодіють за допомогою оберненого степеневого потенціалу (1) (модель м'яких дисків) з показниками $m=4$ та 12. Методом Монте-Карло розраховувалися внутрішня енергія, тиск, ізотермічний та адіабатичний модулі пружності, коефіцієнт теплового розширення, ізобарна та ізохорна теплоємності в широкому інтервалі температур і густин. Аналіз усіх отриманих результатів буде представлений в окремій публікації. У цій роботі зосередимося на аналізі P - ρ - T даних і баричних залежностей ізотермічного модуля пружності K_T .

Моделювання виконувалося в канонічному ансамблі за допомогою алгоритму Метрополіса [4, 5] для приведених температур $T = 1.0, 1.5$ і 2.0 в інтервалі приведених густин від 0.1 до значень, які відповідають твердій фазі. Максимальна величина пробного зміщення підбиралася так, щоб кількість прийнятих конфігурацій складала наближено 30% .

Розрахунок тиску виконувався за теоремою віріала [4]:

$$P = \frac{NT + \langle W \rangle}{S},$$

де N – кількість частинок в основній комірці, S – площа комірки, W – віріал сил. Ізотермічний модуль пружності розраховувався за формулою для квадрата флуктуації віріалу:

$$\langle \delta W^2 \rangle = T(NT + \langle W \rangle - SK_T + \langle X \rangle),$$

де X – гіпервіріал сил:

$$X = \frac{1}{4} \sum_{i < j} r_{ij} \frac{d}{dr_{ij}} \left(\frac{d\varphi}{dr_{ij}} \right),$$

Похибка визначення тиску визначалася за формулою

$$\sigma(\langle P \rangle) = \sqrt{\frac{2\tau_P}{\tau}} \sigma(P),$$

де τ – кількість кроків Монте-Карло або кількість конфігурацій, за якими виконується усереднення; τ_P – час кореляції автокореляційної функції тиску, який визначається як

$$\tau_P = \frac{2 \int_0^\infty \langle \delta P(t) \delta P(0) \rangle dt}{\delta P^2}$$

$$\sigma(P) = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$$

– середньоквадратична флуктуація тиску. Для оцінки похибки модуля пружності необхідно визначити похибку віріалу, гіпервіріалу і квадрату флуктуацій віріалу. Перші дві величини розраховувалися аналогічно тиску. Похибка $\langle \delta W^2 \rangle$ визначалася за формулою

$$\sigma(\langle \delta W^2 \rangle) = \sqrt{\frac{2\tau_W}{\tau}} \sigma(\delta W^2)$$

де

$$\tau_W = \frac{2 \int_0^\infty \langle \delta W(t) \delta W(0) \rangle^2 dt}{\langle \delta W^2 \rangle^2}.$$

Відносна похибка визначення P і K_T не перевищувала відповідно 0.05% і 0.5% .

Кількість кроків Монте-Карло, необхідних для накопичення необхідної статистики, складала 40000 , що було достатнім для розрахунку досліджених властивостей із заданою точністю. Кількість кроків, необхідних для того, щоб система досягла рівноважного стану, дорівнювала 20000 . Після цього миттєві значення енергії і тиску флуктували навколо середнього значення, яке не змінювалося з часом, при цьому розподіл цих величин добре описувався гаусівською кривою.

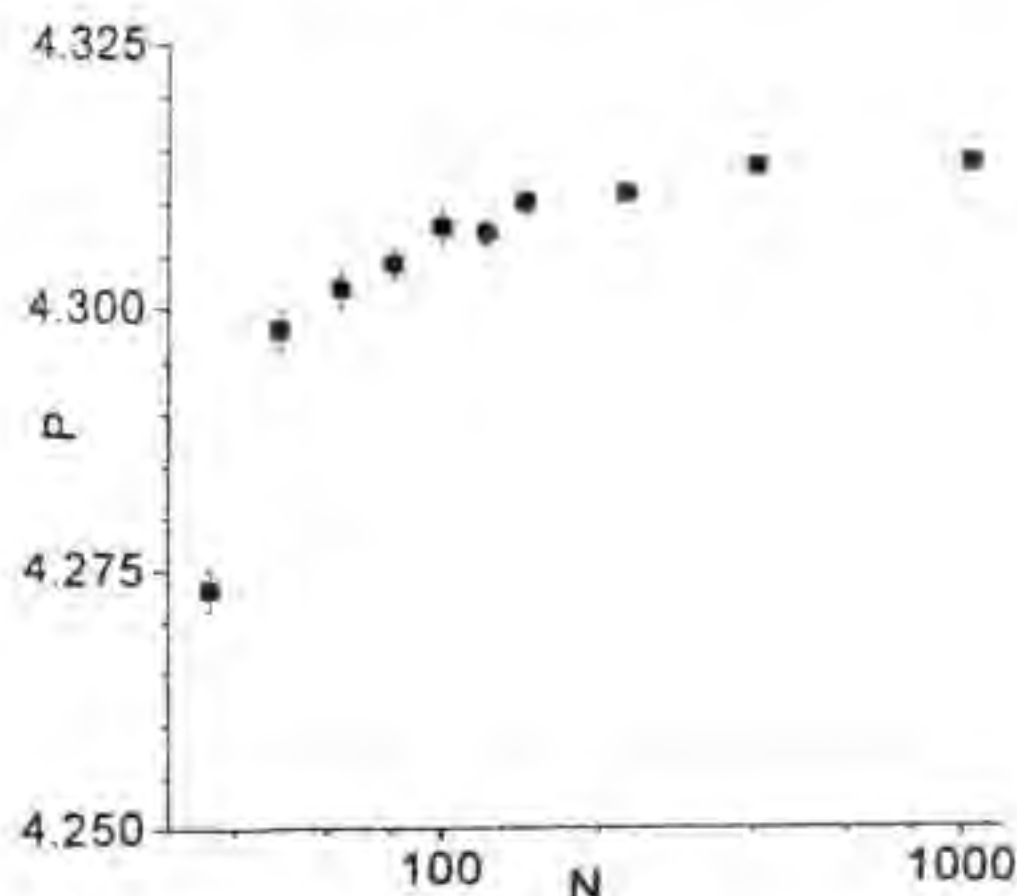


Рис. 1. Залежність тиску від кількості частинок в основній комірі ($T=1.0$, $n=0.75$, $m=4$).

Для того, щоб визначити оптимальні значення кількості частинок в основній комірі, досліджувалися залежності P і K_T від N . На Рис. 1 і 2 представлені ці залежності для системи з показниками потенціалу сил відштовхування $m=4$. Як видно, при $N=256$ значення тиску та ізотермічного модуля пружності збігаються зі значеннями цих величин, отриманими при екстраполяції $N \rightarrow \infty$.

Таким чином, для моделювання системи м'яких дисків досить було узяти 256 частинок в основній комірі.

При дослідженні модельних систем в інтервалі параметрів стану, яким відповідає мала стисливість (цей інтервал нас цікавив у першу чергу, оскільки власне для нього слід застосовувати рівняння стану [1]), є небезпека того, що система може перейти у твердий стан - кристалічний або аморфний. Для того щоб бути впевненим, що досліджується саме рідина, розраховувався середній квадрат зміщення частинки. Якщо система знаходилась у рідкому стані, то за час моделювання частинка проходила відстань набагато більшу ніж довжина ребра комірки. Також ми розраховували автокореляційну функцію тиску, яка у рідкому стані характеризується часом кореляції порядку декількох кроків Монте-Карло. При наближенні до фазового переходу рідина - тверде тіло внаслідок значного розвитку флуктуацій час кореляції значно зростає, що дозволяло помітити цей перехід.

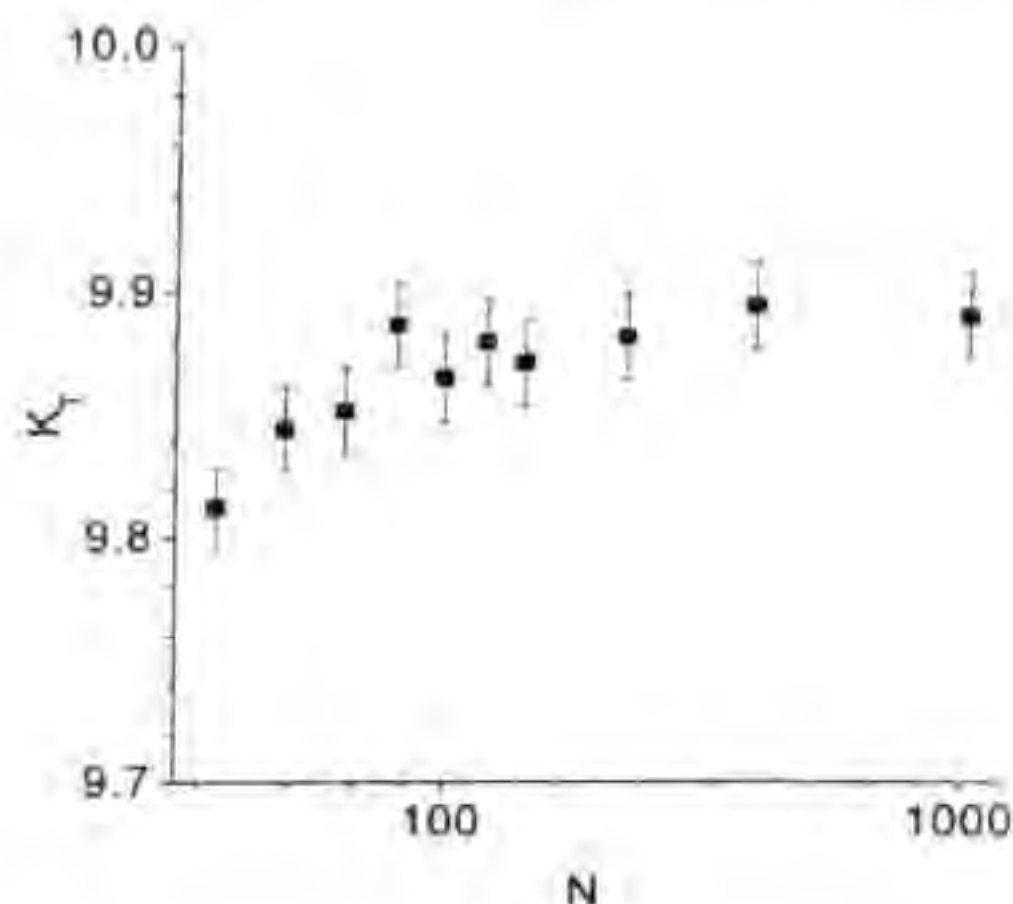


Рис. 2. Залежність ізотермічного модуля пружності від кількості частинок в основній комірі ($T=1.0$, $n=0.75$, $m=4$).

Наступним етапом роботи був аналіз отриманих даних з використанням рівняння стану [1], яке у приведених величинах має вигляд

$$P = nT + P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{m}{3}}, \quad (2)$$

де V - об'єм, P - тиск, обумовлений силами відштовхування. Величини з індексом 0 відносяться до деякого початкового або стандартного термодинамічного стану.

При аналізі рівняння стану реальних рідин слід враховувати не тільки його здатність описувати набір P - ρ - T даних, але й дані по K_T і C_p , тобто залежності других похідних термодинамічного потенціалу. Такий аналіз помітно звужує коло можливих „претендентів” на адекватний опис теплофізичних властивостей рідин.

Рівняння (2) можна записати у диференціальній формі

$$K_T = K_{T0} + \left(1 - \frac{m}{3} \right) T(n - n_0) + \frac{m}{3} (P - P_0) \quad (3)$$

Для двовимірних систем ділення m на 3 слід замінити діленням на 2. Враховуючи те, що при великих густинах другий доданок набагато менший за третій, ізотермічний модуль пружності в цих умовах є практично лінійною функцією тиску. Записане таким чином рівняння стану має лише один підгоночний параметр, який

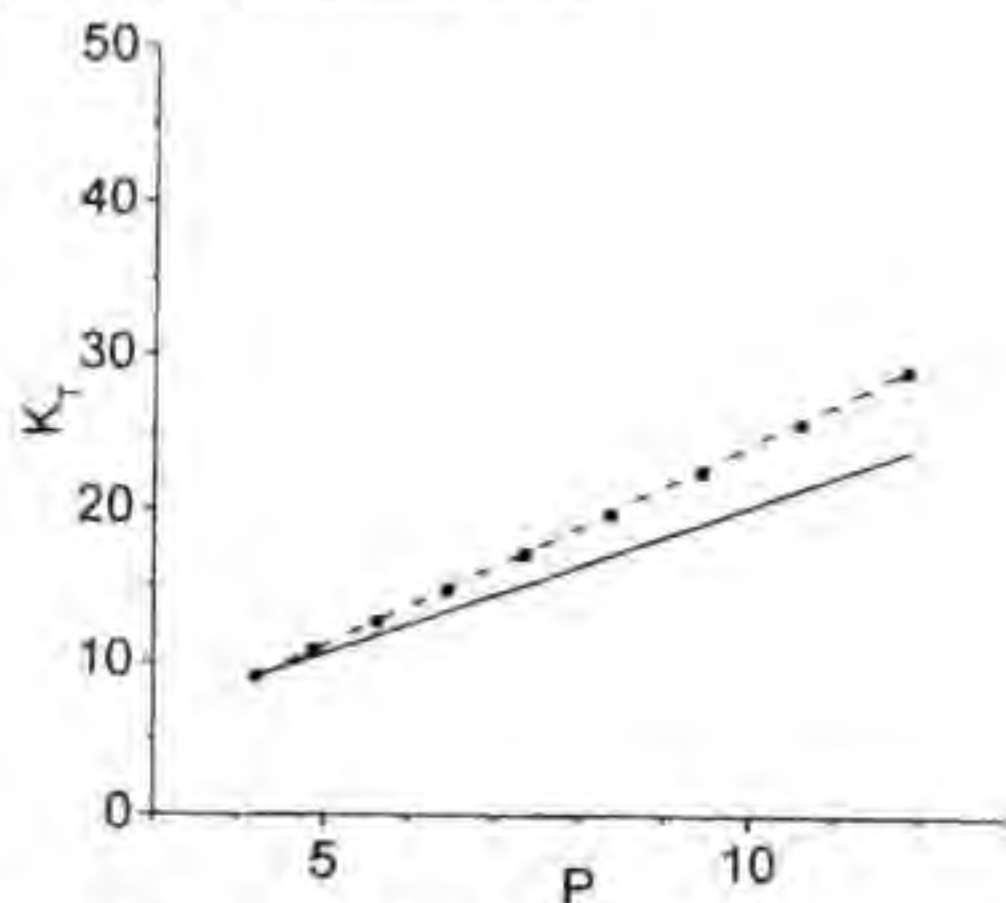


Рис. 3. Барична залежність модуля пружності ($T=1.0$, $m=4$), (квадрат – чисельний експеримент, суцільна лінія – апроксимація відповідно до (3) з $m=4$, пунктир – апроксимація відповідно до (3) з $m=5.6$).

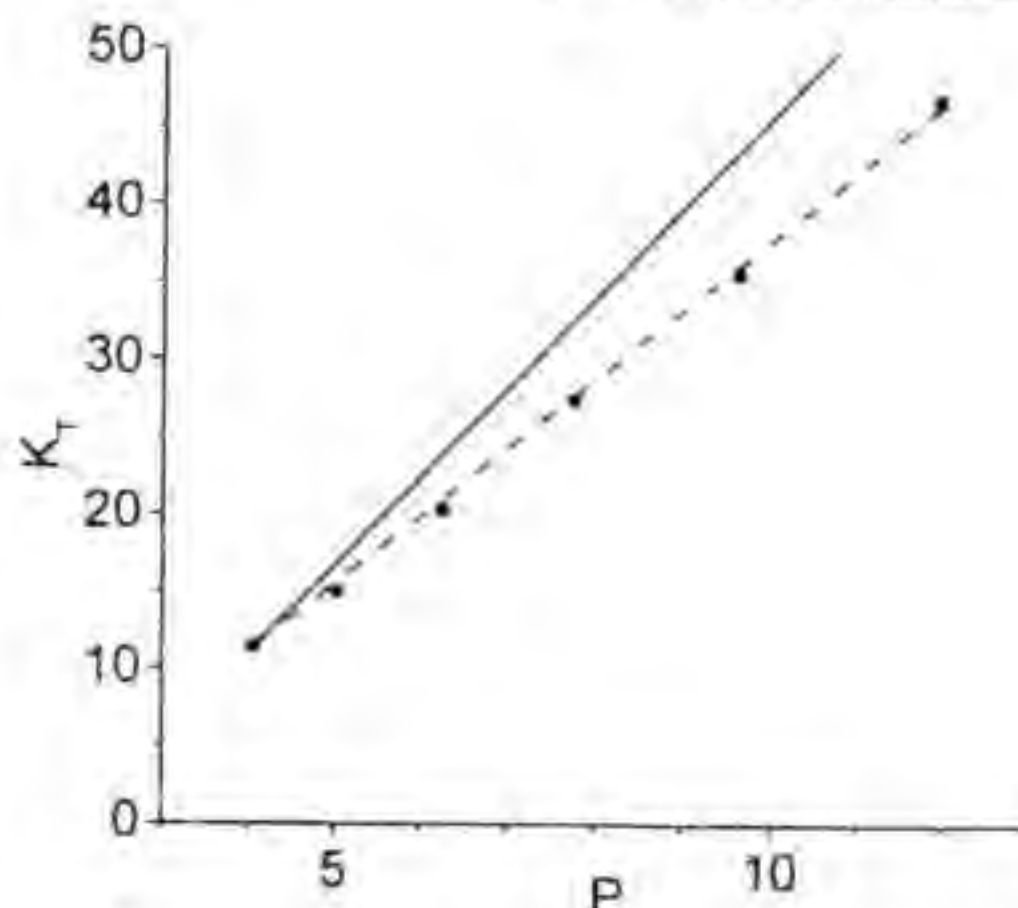


Рис. 4. Барична залежність модуля пружності ($T=1.0$, $m=12$), (квадрат – чисельний експеримент, суцільна лінія – апроксимація відповідно до (3) з $m=4$, пунктир – апроксимація відповідно до (3) з $m=9.2$).

має сенс степені потенціалу сил відштовхування. Апроксимуючи залежність K від P , ми отримали показник m і порівняли його зі значенням, закладеним у потенціальну модель.

Як видно з Рис. 3, якщо справжній показник сил відштовхування дорівнює 4, барична залежність модуля пружності описується рівнянням (3), проте для кількісного збігу у це рівняння необхідно підставити значення не $m=4$, а $m=5.6$. Тобто показник сил відштовхування, знайдений за допомогою рівняння стану (3), помітно відрізняється від справжнього показника сил відштовхування. Аналогічний результат отримаємо для моделі м'яких сфер з $m=12$ (Рис.4). У цьому випадку з рівняння стану (3) випливає, що показник сил відштовхування повинен дорівнювати 9.2.

Таким чином, збіг експериментальних і розрахункових P - ρ - T даних ще не гарантує високу точність визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії при їх знаходженні за допомогою рівняння стану рідин. Це обумовлено двома причинами. По-перше, неадекватністю функціонального виду рівняння стану, отриманого з теорії. При порівнянні з експериментом вказана неадекватність маскується наявністю в теоретичному рівнянні підгонюваних параметрів, кількість яких, як мінімум, два. По-друге, неточністю передачі залежності цих підгонюваних параметрів від параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії. Оскільки точно проаналізувати вплив кожного з факторів на кінцевий результат неможливо, необхідно, на нашу думку,

проводити додатковий модельний експеримент (метод Монте-Карло або метод молекулярної динаміки) для отримання реальних фізичних значень параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії з рівняння стану рідин.

Список використаних джерел

1. Атамась А.А., Бардик В.Ю., Сисоєв В.М. Корекція параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії сил відштовхування // УФЖ. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1184-1187.
2. Адаменко І.І., Булавін Л.А. Фізика рідин та рідинних систем. – К.: АСМІ, 2006. – 660 с.
3. V.Yu.Bardic, L.A.Bulavin, V.M.Sysoev, N.P.Malomuzh, K.S.Shakun, in Soft matter under exogenic impacts, edited by S.J. Rzoska and V.A. Mazur. (Nato Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry 242, Springer Netherlands. 2007), pp. 339-350.
4. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer simulation of liquids. – Oxford, Clarendon Press, 1986. – 385 p.
5. Frenkel D., Smith B. Understanding computer simulations. – New-York, Academic Press, 2002. – 385 p.

Надійшла до редколегії 29.09.10

УДК 535.3

Гречко Л.Г., д.ф.-м.н., проф.
Скоробогатий Т.В., к.ф.-м.н., пров. інж.

**Особливості індикатриси розсіювання
випромінювання для матричної
дисперсної системи, що складається з
двошарових магнітних частинок**

В релєвському наближенні отримані аналітичні вирази для параметрів асиметрії індикатриси розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на сферичній радіально-неоднорідній частинці з магнітною проникністю відмінною від одиниці. В якості частинних випадків розглянуті однорідні та двошарові сферичні частинки.

Ключові слова: індикатриса, магнітні частинки, розсіювання.

*E-mail: bumberossa@gmail.com

В роботах [1-3] під час дослідження розсіювання електромагнітного випромінювання частинками, що складаються з феромагнітних матеріалів, або дисперсними частинками, магнітна проникність яких є відмінною від одиниці (далі називатимемо такі частинки магнітними) було відмічено ряд незвичайних явищ в кутовому розподілі інтенсивності розсіяного випромінювання.

Нами проведені розрахунки залежностей факторів ефективності розсіювання, поглинання та послаблення $k_p, k_n, k_{\text{осл}}$ від розміру частинок з різноманітних феромагнітних матеріалів, що досить широко використовуються, при заданих значеннях довжини хвилі випромінювання λ та параметрів речовини n, κ, μ_1 і μ_2 . Для порівняння аналогічні розрахунки проводились для тих самих матеріалів без

L.G. Grechko, Dr. Sc., prof.,
T.V. Skorobogaty, Ph. D.

**Features indicatrix of radiation scattering
for the matrix disperse system consisting of a
two-layer magnetic particles**

In Rayleigh approximation, analytical expressions for the parameters of asymmetry of the scattering of a plane electromagnetic wave by a radially inhomogeneous spherical particle with magnetic permeability different from one. As a special case considered homogeneous and two-layer spherical particles.

Key Words: indicatrix, magnetic particles, scattering.

врахування магнітних властивостей, тобто при тих самих λ, n, κ , проте $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$. Для частинок з магнієвого фериту при $\lambda = 6,6$ см, $n = 2,92; \kappa = 0,0226; \mu_1 = 2,84$ і $\mu_2 = 0,341$ [8] відносно слабо поглинаючі частинки взаємодіють з електромагнітним випромінюванням подібно тим, що поглинають сильніше. Частинки з речовини із заданими n і κ , але при $\mu_1 = 1$ і $\mu_2 = 0$ ведуть себе як такі, що поглинають слабо. Визначальну роль в цьому випадку відіграє розсіювання. Перший максимум залежності $k_{\text{осл}}(\rho)$, який для магнітних частинок спостерігається при $\rho \approx 0,76$, тепер зміщується до $\rho \approx 1,16$ (внаслідок зменшення ефективного показника заломлення для речовини, з якої складаються частинки). Для малих немагнітних частинок має місце степенева залежність $k_p(\rho)$, де $\rho = 2\pi/\lambda$ -

параметр дифракції в широкому діапазоні розмірів частинок (до $\rho \approx 0,6$). Для магнітних частинок цей діапазон є значно меншим. Наявність магнітних властивостей може суттєво змінювати закономірності розсіювання, поглинання та послаблення випромінювання частинками, призводячи до виникнення незвичайних ефектів. Останнім часом отримано велику кількість феромагнітних матеріалів з досить широким діапазоном зміни магнітних властивостей, через що питання їх впливу в конкретних ситуаціях розсіювання заслуговує уважного та детального вивчення.

Розглянемо, ситуацію, коли діелектричне

ядро ($\varepsilon'_1 = 2, \varepsilon''_1 = 0, \mu'_1 = 1, \mu''_1 = 0$) вкрито феритовою оболонкою. В якості типових феритів сантиметрового діапазону використаємо ферит марки «27» та магнієвий [7,8], причому для спрощення вважатимемо, що діелектричні і магнітні втрати в оболонці відсутні. Результати розрахунків коефіцієнта x_1 наведені в таблиці 1, з якої стає очевидним той факт, що змінюючи товщину феритової оболонки, можна значно видозмінити індикатрису і, відповідно, параметри, що характеризують проходження випромінювання крізь дисперсний шар, що складається з малих магнітних частинок.

Таблиця 1

Значення коефіцієнта x_1 в залежності від відношення q радіуса ядра до радіуса оболонки двохарової діелектричної частинки з феритовим покриттям

q	Марка фериту	
	«27»: $\varepsilon'_2 = 7,3; \mu'_2 = 0,8; \lambda = 3$ см	Магнієвий: $\varepsilon'_2 = 8,5; \mu'_2 = 2,84; \lambda = 6,6$ см
0,1	-0,31	1,24
0,2	-0,31	1,24
0,3	-0,3	1,23
0,4	-0,3	1,22
0,5	-0,29	1,2
0,6	-0,27	1,16
0,7	-0,25	1,1
0,8	-0,2	0,99
0,9	-0,14	0,76
0,95	-0,09	0,53

Питоме послаблення малих частинок, що володіють магнітними властивостями значно вище, ніж у тих самих частинок, але без магнітних властивостей. Для магнієвого

фериту при $\lambda = 6,6$ см і $\rho < 0,07$ питоме послаблення є в 13 разів більшим, ніж у відповідної немагнітної речовини. Для

фериту типу 27 при $\lambda = 3 \text{ см}$ і $\rho < 0,035$ різниця є ще більшою – в 275 разів.

При виконанні певних співвідношень між величинами комплексної діелектричної $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ та магнітної $\mu = \mu' - i\mu''$ проникностей речовини також можна спостерігати перетворення на нуль інтенсивності розсіяного випромінювання в напрямках вперед і назад. Проте такі характерні особливості індикатриси спостерігаються лише у випадку достатньо тонких шарів диспергованої речовини. З

іншого боку, для опису взаємодії випромінювання з шарами із більшою оптичною товщиною, що часто зустрічаються на практиці, необхідно враховувати ряд інтегральних характеристик індикатриси, що вказують на ступінь її витягнутості. Частіше за все у цьому випадку використовують коефіцієнт асиметрії η , який визначається як відношення потоків випромінювання, розсіяних в передню B_1 та задню B_2 напівсфери:

$$\eta = B_1/B_2 = \int_0^{\pi/2} I \sin \theta d\theta / \int_{\pi/2}^{\pi} I \sin \theta d\theta \quad (1)$$

і коефіцієнт x_1 біля першого члена в розкладі індикатриси за поліномами Лежандра, що є

$$x_1 = 3 \langle \cos \theta \rangle = \int_0^{\pi} I \cos \theta \sin \theta d\theta / \int_0^{\pi} I \sin \theta d\theta \quad (2)$$

тут I – інтенсивність розсіяної хвилі (падаючу хвилю вважаємо неполяризованою), θ – кут розсіювання, який відраховується від напрямку розсіювання вперед. Далі вважатимемо частинки сферичними і радіально-неоднорідними (частинними

випадками таких частинок є однорідні та багатошарові сферичні частинки). Для сферичної частинки інтенсивність можна замінити безрозмірними кутовими функціями M_i і i_1 та i_2 [3], переписавши (1), (2) в наступному вигляді:

$$\eta = \int_0^1 (i_1 + i_2) dz / \int_{-1}^0 (i_1 + i_2) dz \quad (3)$$

$$x_1 = 3 \int_{-1}^1 (i_1 + i_2) z dz / \rho^2 Q_{\text{роз}} \quad (4)$$

де $z = \cos \theta$, ρ – параметр дифракції частинок, $Q_{\text{роз}}$ – фактор ефективності розсіювання.

За умови відсутності постійного зовнішнього магнітного поля магнітні властивості частинок у більшій степені виявляються в межах так званого феромагнітного резонансу, довжини хвиль λ якого, зазвичай, потрапляють в

сантиметровий діапазон [4]. Розміри ж реальних одшодоменних частинок (наприклад, феритових), що використовуються в різноманітних технічних додатках [5], порядку декількох мікрометрів і навіть менше. Саме тому відносний розмір частинок ρ замалий і, відповідно, розсіювання

випромінювання може бути досить точно описано дипольним наближенням Релея. Як відомо, релесівська індикатриса для немагнітних частинок симетрична відносно кута розсіяння $\theta = 90^\circ$, і тому $\eta = 1, x_1 = 0$. Магнітні частинки дають нам несиметричну індикатрису в релесівській області. Мета даної роботи полягає в дослідженні параметрів асиметрії η і x_1 для малих магнітних сферичних частинок.

Із строгої теорії розсіяння на сферичній радіально-неоднорідній частинці отримуємо наступні вирази для елементів S_1, S_2 амплітудній матриці розсіяння [3]:

$$\begin{pmatrix} S_1(\theta) \\ S_2(\theta) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \begin{pmatrix} \pi_n(\theta) \\ \tau_n(\theta) \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} \tau_n(\theta) \\ \pi_n(\theta) \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

де a_n, b_n - електричні і магнітні внесок амплітудні коефіцієнти; $\pi_n(\theta)$ і $\tau_n(\theta)$ - кутові функції. В межах малої частинки основу в S_1, S_2 становлять дипольні члени цих сум

a_1, b_1 , причому у випадку магнітних частинок

$$\begin{pmatrix} S_1(\theta) \\ S_2(\theta) \end{pmatrix} \equiv \frac{3}{2} \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (6)$$

В розкладі a_1 і b_1 по степеням ρ позначення обмежимося, як це звичайно роблять, $E_1 + iE_2 \equiv 3a_1/2i\rho^3, M_1 + iM_2 \equiv 3b_1/2i\rho^3$, основним членом порядку ρ^3 та введемо

$$\begin{pmatrix} E \\ M \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{(E_1 + M_1)^2 + (E_2 + M_2)^2} \pm \sqrt{(E_1 - M_1)^2 + (E_2 - M_2)^2} \right) \quad (7)$$

Тоді для компонент інтенсивності розсіяного випромінювання матимемо:

$$\begin{pmatrix} i_1(\theta) \\ i_2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |S_1|^2 \\ |S_2|^2 \end{pmatrix} = \rho^6 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta \end{pmatrix} (E_1 + iE_2) + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 1 \end{pmatrix} (M_1 + iM_2) \right]^2 \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (3), (4), після інтегрування отримаємо

$$\eta = 1 + \frac{6}{1 + 2(E - M)^2 / EM} \quad (9)$$

$$x_1 = 3EM / (E^2 + M^2) \quad (10)$$

При виведенні (10) враховано, що для малих магнітних частинок співвідношення між параметрами асиметрії $Q_{\text{роз}} = 8\rho^4 (E^2 + M^2)/3$. Рівняння (9), (10) η і x_1 наступним чином:

$$\eta = (2 + x_1) / (2 - x_1) \quad (11)$$

Аналіз виразів (9), (10) на екстремум ситуації інтенсивність розсіяння назад рівна показує, що максимальні значення η і x_1 : нулеві. Мінімальні значення параметрів η і $\eta_{\text{min}} = 1/7, x_{1\text{min}} = -1,5$ досягаються за умови x_1 : $\eta_{\text{min}} = 1/7, x_{1\text{min}} = -1,5$ реалізуються при $E = M$. З виразу (8) випливає, що в цій

$E = -M$, що відповідає у (8) нульовій інтенсивності розсіювання вперед.

Інтерес також представляє умова симетрії індикатриси. З виразу (10) випливає, що $x_1 = 0$ при $M = 0$ або $E = 0$, тобто при $E_1 M_1 = -E_2 M_2$ або при $E_1^2 + M_1^2 + E_2^2 + M_2^2 = 0$. Друга з цих умов може не братись до уваги, оскільки вона виконується лише за відсутності частинки.

Таким чином, на відміну від релеєвської індикатриси для немагнітної частинки індикатриса розсіювання для малої магнітної

частинки може мати значний ступінь асиметрії ($1/7 \leq \eta \leq 7$), причому реалізується як звичайна ($\eta > 1$), так і зворотна асиметрія ($\eta < 1$). Відмітимо, що досі ми не конкретизували внутрішню структуру частинки, а обмежувались лише припущенням про її сферичну симетрію.

Частинні випадки почнемо розглядати з найпростішого варіанту: однорідної сфери, для якої, як відомо [3],

$$E_1 + iE_2 = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2), \quad M_1 + iM_2 = (\mu - 1)/(\mu + 2) \quad (12)$$

Підставляючи вираз (12) в (8), після врахування (11), отримаємо явний вираз для громіздких елементарних перетворень та параметра x_1 :

$$x_1 = 3 / \left\{ 2 + 9 \frac{(\varepsilon' - \mu')^2 + (\varepsilon'' - \mu'')^2}{[(\varepsilon' - 1)(\varepsilon' + 2) + \varepsilon''^2][(\mu' - 1)(\mu' + 2) + \mu''^2] + 9\varepsilon''\mu''} \right\} \quad (13)$$

Умова максимуму η і x_1 у випадку рівнянь: однорідної сфери рівнозначна системі

$$\begin{cases} \varepsilon' + \varepsilon''/(\varepsilon' + 2) = \mu' + \mu''/(\mu' + 2) \\ \mu''/(\mu' + 2) = \varepsilon''/(\varepsilon' + 2) \end{cases} \quad (14)$$

Неважко показати, що тривіальний розв'язок цієї системи $\varepsilon' = \mu'$, $\varepsilon'' = \mu''$ буде єдиним фізичним розв'язком. Як показано в роботі [1], рівність діелектричної та магнітної проникностей речовини призводить до зникнення зворотного розсіювання ($\theta = 180^\circ$) для однорідних сферичних частинок будь-якого розміру. В роботі [6] строго доведена теорема про прямування до нуля зворотного розсіювання для більш загального випадку, коли збуджуюча плоска хвиля падає вздовж вісісиметрії неоднорідного тіла обертання, діелектрична і магнітна проникності якого задовольняють умову $\varepsilon(\vec{r}) = \mu(\vec{r})$. Відмітимо,

що на відміну від умови обертання на нуль $I(180^\circ)$ аналогічна умова досягнення максимального значення асиметрії справедлива лише в межах малих частинок.

Хоча граничне значення $x_{1\max} = 1,5$ досягається лише при $\varepsilon = \mu$, з виразу (13) слідує, що значення x_1 , що прямує до граничного, можна отримати при $\varepsilon' \approx \mu'$, $|\varepsilon'| \gg \varepsilon''$, $\mu' \gg \mu''$. Наприклад, якщо $\varepsilon'' = 0,5$; $\mu'' = 4$, то при $\varepsilon' = \mu' = 5,4$ коефіцієнт $x_1 = 1,45$; при $\varepsilon' = \mu' = 8,7$ маємо $x_1 = 1,49$, а при $\varepsilon' = \mu' = 10,6$ отримуємо $x_1 = 1,495$. При $x_1 \rightarrow 1,5$ знаходимо аналогічні при $\varepsilon'' \approx \mu''$, $\varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$, $\mu'' \gg |\mu'|$.

Для однорідної сферичної частинки рівнянь:
умова мінімуму x_1 і η тотожна системі

$$\begin{cases} (\varepsilon' + 2)/[(\varepsilon' + 2)^2 + \varepsilon'^2] + (\mu' + 2)/[(\mu' + 2)^2 + \mu'^2] = 2/3, \\ \varepsilon'/[(\varepsilon' + 2)^2 + \varepsilon'^2] = -\mu'/[(\mu' + 2)^2 + \mu'^2] \end{cases} \quad (15)$$

Очевидним є те, що дана система має інтенсивності розсіяння вперед в межах фізичний розв'язок лише за умови малих частинок.

відсутності втрат ($\varepsilon'' = \mu'' = 0$) і в цьому виродженому випадку набуває вигляду $\mu' = (4 - \varepsilon')/(1 + 2\varepsilon')$, що розглянуто в роботі

[1] в якості умови обертання на нуль

$$[(\varepsilon' + 2)(\varepsilon' - 1) + \varepsilon'^2][(\mu' + 2)(\mu' - 1) + \mu'^2] = -9\varepsilon'\mu' \quad (16)$$

Це співвідношення тотожно виконується магнітних ($\mu' = 1; \mu'' = 0$) властивостей, а для за відсутності електричних ($\varepsilon' = 1, \varepsilon'' = 0$) або частинок без втрат переходить в рівність:

$$(\varepsilon' - 1)(\varepsilon' + 2)(\mu' - 1)(\mu' + 2) = 0 \quad (17)$$

Оскільки за умови втрат ε' і μ' виродженому випадку простір параметрів набувають позитивних значень, симетрична ε' і μ' (рисунок, а) розбиваються на чотири області, в двох з яких спостерігається нормальне асиметрія:

1) $0 < \varepsilon' < 1, 0 < \mu' < 1$; 2) $1 < \varepsilon' < \infty, 1 < \mu' < \infty$,

а двох – зворотна:

3) $0 < \varepsilon' < 1, 1 < \mu' < \infty$; 4) $1 < \varepsilon' < \infty, 0 < \mu' < 1$

Якщо ε'' і μ'' відмінні від нуля, то варто було б розглядати і від'ємні значення ε', μ' . На рисунку б-д наведено ізолінії постійних значень x_1 в просторі параметрів ε', μ' для різних значень ε'' і μ'' . Розглядаються $|\varepsilon'|, |\mu'| \leq 6$, що не перекривають всього діапазону можливих значень ε', μ' в області феромагнітного резонансу; проте, як це видно з рисунку, екстраполяція на більші значення ε' і μ' є цілком очевидною.

Під час симетричних втрат $\varepsilon'' = \mu''$ ізолінії будуть симетричними відносно прямої $\varepsilon' = \mu'$, на якій спостерігаються максимальні значення $x_{1\max} = 1,5$, а також відносно прямої

З рівняння (13) також слідує, що однорідна сферична частинка дає симетричну індикатрису при:

$\varepsilon' + \mu' = -1$ (рисунок, б). Зворотна асиметрія індикатриси реалізується при невеликих значеннях $|\mu'|$ і досить високих $|\varepsilon'|$, або навпаки, при невеликих значеннях $|\varepsilon'|$ і високих $|\mu'|$. Із збільшенням $\varepsilon'' = \mu''$ області зворотної асиметрії звужуються та зсуваються в бік великих значень $|\varepsilon'|$ або $|\mu'|$.

Інакший характер у ізоліній при несиметричних $\varepsilon'' \neq \mu''$ втратах. Рисунок, в-д ілюструє зміну картини ізоліній під час зростання μ'' і фіксованому ε'' . Відмітимо, якщо на рисунку поміняти позначення осей ($\varepsilon' \rightarrow \mu', \mu' \rightarrow \varepsilon'$), то згідно 13 вони будуть відповідати випадку, коли вихідні значення

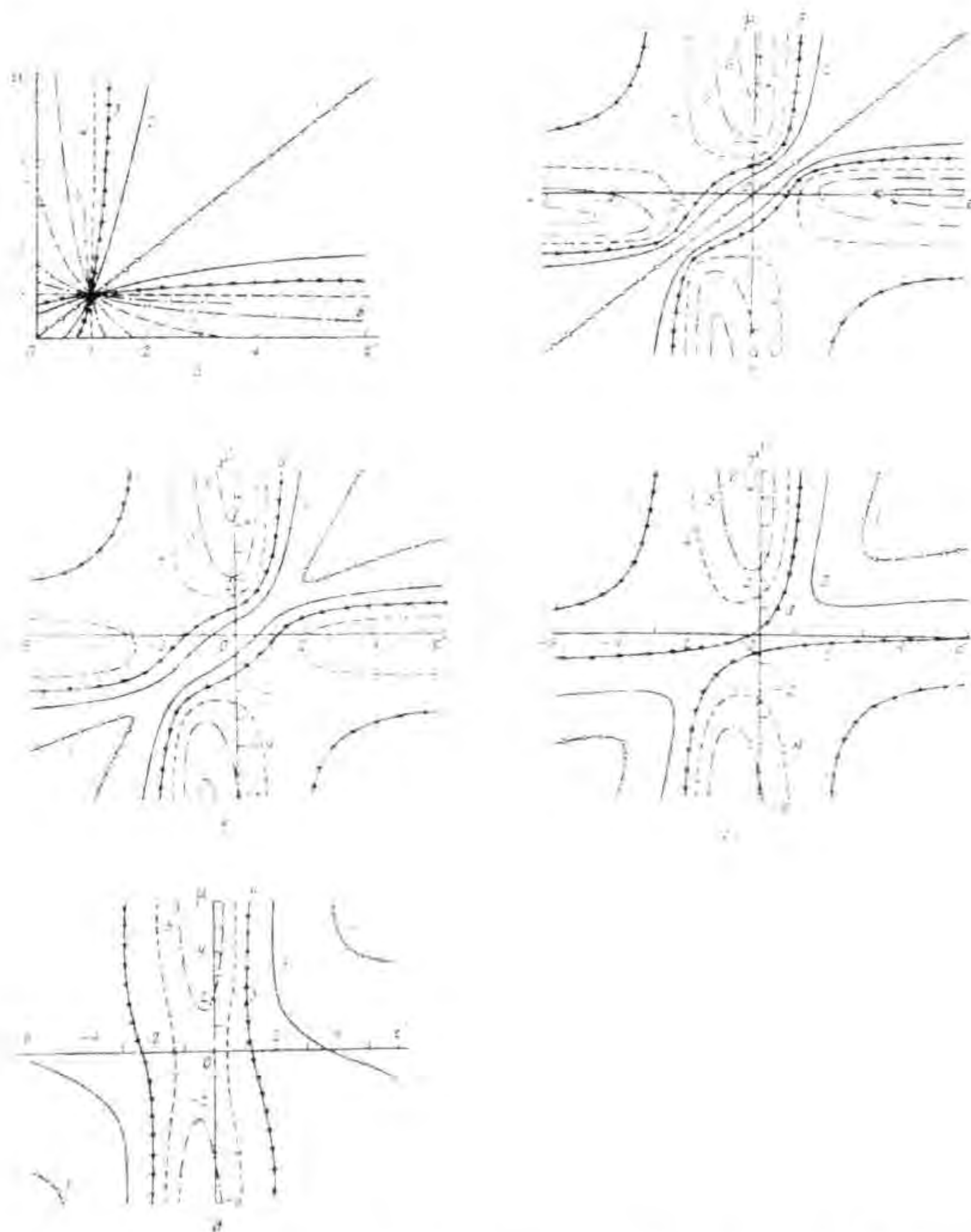


Рис.1 Ізолінії постійних значень параметра асиметрії індикатриси розсіяння в просторі параметрів ϵ^*, μ^* для однорідної сферичної частинки при $\epsilon^* = \mu^* = 0$ (а), $\epsilon^* = \mu^* = 0,5$ (б), $\epsilon^* = 0,5$ (в-д), $\mu^* = 1$ (в), $\mu^* = 2$ (г), $\mu^* = 4$ (д); а, б: криві 1 для $x_1 = 1,5$; в-д: криві 1 для $x_1 = 1,4$; а-д: криві 2-7 для $x_1 = 1; 0,5; 0; -0,5; -1; -1,5$.

З рисунка, в-д видно, що із збільшенням різниці між ε'' і μ'' порушується симетрія картини відносно згаданих вище прямих. Області високих значень x_1 «виштовхуються» з центра рисунка на його периферію, а області зворотної симетрії індикатрис, що розташовані вздовж вісі ε' , різко зміщуються в бік більших $|\varepsilon'|$. На противагу цьому області зворотної асиметрії, розташовані вздовж вісі μ' , із збільшенням

μ'' спочатку практично не змінюються (рисунок, в, з), а при подальшому зростанні μ'' зливаються в єдину область, паралельну вісі μ' , розташованій між значеннями $\varepsilon' = -2$ і $\varepsilon' = 1$. При значенні ε'' , що суттєво перевищує μ'' , зворотна асиметрія індикатрис реалізується аналогічно при $-2 \leq \mu' \leq 1$ і довільному значенні ε' .

Тепер коротко розглянемо випадок двошарової частинки. В релєвському наближенні

$$E_1 + iE_2 = \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)(\varepsilon_2 - 1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2\varepsilon_2 + 1)q^3}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + 2) + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - 1)q^3} \quad (18)$$

$$M_1 + iM_2 = \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 - 1) + (\mu_1 - \mu_2)(2\mu_2 + 1)q^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2) + 2(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - 1)q^3} \quad (19)$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 - i\varepsilon''_1$, $\mu_1 = \mu'_1 - i\mu''_1$ - діелектрична і магнітна проникності ядра, а $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - i\varepsilon''_2$, $\mu_2 = \mu'_2 - i\mu''_2$ - аналогічні величини для оболонки, q - відношення радіуса ядра до радіуса оболонки.

9, проте в конкретних додатках воно суттєво скорочується.

Ми не будемо тут виписувати явні вирази для характеристик асиметрії враховуючи їх громіздкий вигляд, відмітимо лише, що послідовність виразів (18), (19) $\rightarrow$ (7) $\rightarrow$ (9), (10) дає простий алгоритм розрахунку цих характеристик. Аналіз поведінки величин x_1 і η в даному випадку значно ускладнений наявністю великої кількості незалежних параметрів. В більш загальному випадку їх -

Отримані результати дозволяють зробити висновок, якщо значення μ_1 і μ_2 є досить високими, то навіть відносно слабо поглинаючі частинки взаємодіють з електромагнітним випромінюванням подібно тим, що поглинають сильніше. В області значень після першої максимальної залежності $k_{\text{осц}}(\rho)$, де $\rho = 2\pi/\lambda$ (ρ - параметр дифракції, r - радіус частинок), осцилюючий характер цієї залежності суттєво згладжується.

Список використаних джерел:

- 1 Kerker M., Wang D.S., Giles C.L. // J. Opt. Soc. America. 1983. V. 73. № 6. P. 765.
- 2 Ключник А.В., Лозовик Ю.Е., Нерсисян О.Н. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. № 15. С. 948.
- 3 Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
- 4 Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982.
- 5 Haneda K. // Canad. J. Phys. 1987. V. 65. № 10. P. 1233.
- 6 Wagner P.J., Lynch P.J. // Phys. Rev. 1963. V. 131. № 1. P. 21.
- 7 Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов. Л.: Энергия, 1963.
- 8 Хек К. Магнитные материалы и их техническое применение. М.: Энергия, 1973.

Надійшла до редколегії 01.12.10

УДК 535.3

Гrechko Л.Г., д.ф.м.н., проф.,
Шостак С.В., к.ф.м.н.,
Шкода Н.Г., к.ф.м.н.

Поверхневі плазмони двох частинок з врахуванням мультипольної взаємодії між ними в електричному полі

Було обчислено спектр поверхневих
плазмонів двох металевих частинок в
електричному полі E .

Вивчено електродинамічний відгук системи
малих частинок на зовнішнє електричне поле E .
Проведено розрахунок результуючого
електричного поля для системи сферичних
малих частинок різних радіусів R_i з різними
діелектричними проникностями $\epsilon_i(\omega)$.
Отримані аналітичні вирази для поляризованості
системи, що складається з двох малих
сферичних частинок з урахуванням
мультипольної взаємодії між ними. Для випадку
двох різних сферичних частинок у зовнішньому
електричному полі розраховані частоти
поверхневих мод. Всі розрахунки проведено у
електростатичному наближенні.

Ключові слова: поверхневий плазмон,
електродинамічний відгук, мультипольна
взаємодія.

L.G. Grechko, Dr. Sci., Prof.,
S.V. Shostak, Ph.D.,
N.G. Shkoda, Ph.D.

Surface plasmons of two particles with multipole interaction between them in external electric field

The spectrum of surface plasmons of two
metallic particles considered in external electric
field E has been calculated.

The electrodynamical response of a small
particles system on an external electric field was
investigated. The resulting electric field was
calculated for a system of small spherical particles
of different radii R_i and permittivity $\epsilon_i(\omega)$.
Analytical expressions for the polarizability of a
system of two small particles were received taking
into account multipole substrate-particle
interactions as well as interactions between the
particles themselves. In case of two different
spherical particles, frequencies of surface plasmon
modes were obtained. All the calculations are
performing in the electrostatic approximation.

Key Words: surface plasmon, electrodynamical
response, multipole interaction.

*E-mail: n_shkoda@ukr.net

1. Introduction

In small particles there is a whole class of
electromagnetic waves, which are called surface
modes [1]. These modes result in interesting and
unexpected features in the spectra of absorption of
electromagnetic wave by the matrix dispersed
systems. Such absorption, as a rule, is absent in the
spectra of continuous media of material with matrix
dispersed systems inclusions. Number, position and
absorption line width of such spectra, is determined
by form of the particle and frequency dependence of
dielectric permittivity of matrix dispersed systems
inclusions. In spite of dominant influence of

superficial modes on absorption and dispersion, and
simplicity with which their properties follow from an
elementary theory, researchers, especially those who
is engaged in the applied domain, did not almost
notice them [2].

In the relationship of interaction of light with
particles the sizes of which are small enough in order
to be described with the electrostatic approach
($R \ll \lambda$), there are constantly different
misunderstandings. One of them is that such particles
take in and disperse light inefficiently. However,
small particles have very large values of coefficients
of dispersion and absorption, which are often greater
than one, so that small particles per unit of mass are

among the most effective absorbing materials. Other widespread error is the assertion, that when a particle is small compared to its wavelength, then the electromagnetic wave does not feel the details of its structure. In reality, one of the most interesting features of small particles is that they can show such properties of absorption that are almost fully determined by their form and structure and have little to do with the properties of particle's material. Unfortunately, when encountering strong dependence of absorption in small particles on their form, usually one comes to the conclusion that the concept of dielectric permittivity becomes invalid, and links it to importance of quantum effects. We underline, however, that in most cases such dependence can be almost satisfactorily explained, staying within the classic electromagnetic theory (and even classic electrostatics!) and optical constants of by voluminous matter.

2. Results and discussion

A study on the processes of interaction of electromagnetic radiation with the band of small particles is presented with enormous interest, both from the point of view of non-destructive control of surface and due to creation of composite materials with the in advance set electrodynamics' properties [1, 3-7].

In general, a few factors have an influence on descriptions of spectra of absorption, such as: height, width and position of peaks of SP. These factors are examined in the classic theory, comfortably to unite in groups which answer the types of interaction in the system of small particles. We will transfer these interactions in order of their diminishing intensity and, accordingly, their influence on light-spectra of absorption [6, 7] of such systems.

First, we look at interaction of small particles with the external electromagnetic field. It is conditioned only descriptions of small particles — their form, measuring, structure (by the presence of shells, additional layers etc.) and properties of material which they are made from.

Second, we look at interaction between particles in the system of small particles. This interaction is a conditioned character of the spatial distributing of small particles (dense distributing; for small particles of non-spherical form matters also character of their spatial orientation: whether it is

well-organized or chaotic), and also distributing character of them on sizes (mono- or polydisperse distributing).

The purpose of work is to study the character of electrodynamics' response in the system of spherical small particles, being in the external electric field; to define polarizability of small particles, frequencies of superficial fashions, and also to analyze the frequency spectrum of superficial excitations of dipole interaction of particles between them.

The spectrum of superficial fashions of two metallic particles considered in the external electric field E was calculated. A study on the external (time-dependent) electric field of two particles at the distance d one from other with a wave-length λ_0 considerably anymore for the size of particles and d was found [8, 9].

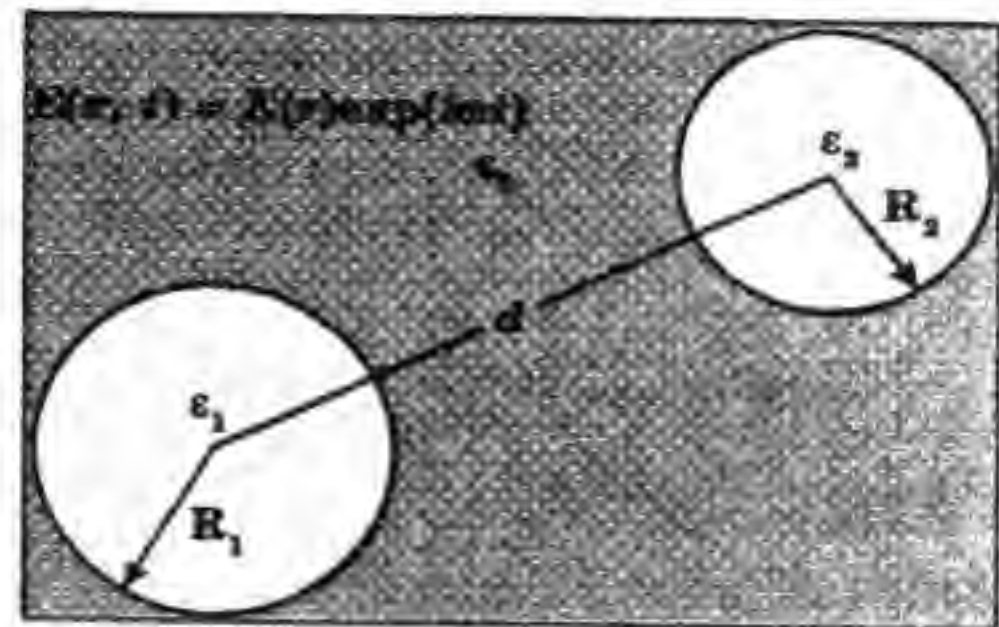


Fig. 1. Two small spherical particles on solid surface in the external electric field of $\vec{E}(r, t)$.

The tensor of polarization of i -particle can be presented if we take only dipole interactions between particles:

$$\alpha_{im}^m = 4\pi a_{i1} \frac{1 + (-1)^m \eta_m a_{i-1} \delta_m^m}{1 - \eta_m^2 \frac{a_{i1} a_{21}}{d^6}} \delta_m^m. \quad (1)$$

where

$$a_{i1} = R_i^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_0}{\epsilon_i + 2\epsilon_0}, \quad \bar{i} = \begin{cases} 1, & i = 2 \\ 2, & i = 1 \end{cases}$$

$$\eta_m \equiv \begin{cases} 1, & m = \pm 1 \\ 2, & m = 0 \end{cases}, \quad \delta_m^m = \begin{cases} 1, & m = m_1 \\ 0, & m \neq m_1 \end{cases}$$

— Kronekers' symbol, where $i = 1, 2$, and $\bar{i} = 1$, if $i = 2$; $\bar{i} = 2$, if $i = 1$, ϵ_0 — dielectric permittivity of media, and:

$$a_i = \frac{\epsilon_i - \epsilon_0}{\epsilon_i + 2\epsilon_0} R_i^3; \quad \eta_m = \begin{cases} 1; (m = \perp) \\ 2; (m = \parallel) \end{cases} \quad (2)$$

Notations « $\perp$ » and « $\parallel$ » mean: « $\perp$ » — external field E_0 is directed perpendicular to the line which connects the centers of particles; « $\parallel$ » — parallel to this line.

A condition for finding frequencies of surface plasmons (equality the zero of denominator in (1)) should be in this case:

$$\eta_m^2 \frac{R_1^3 R_2^3}{d^6} \left(\frac{\epsilon_{1\infty} - \epsilon_0}{\epsilon_{1\infty} + 2\epsilon_0} \right) \left(\frac{\epsilon_{2\infty} - \epsilon_0}{\epsilon_{2\infty} + 2\epsilon_0} \right) \left(\frac{\omega^2 - \omega_{e1}^2}{\omega^2 - \omega_{f1}^2} \right) \left(\frac{\omega^2 - \omega_{e2}^2}{\omega^2 - \omega_{f2}^2} \right) = 1 \quad (3)$$

The inductivities of metallic spheres were chosen in Drude formula [2]:

$$\epsilon_1(\omega) = \epsilon_{1\infty} - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega(\omega + i\gamma_1)},$$

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon_{2\infty} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega(\omega + i\gamma_2)},$$

and at a receipt (3) γ_1, γ_2 directed to the zero. In addition, in (3) denotations are entered:

$$\omega_{fi}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\epsilon_{i\infty} + 2\epsilon_0}; \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

$$\omega_{ei}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\epsilon_{i\infty} - \epsilon_0},$$

With these remarks from equalization (3) frequencies of small particles were expected:

$$2(\omega_m^*)^2 = \bar{\omega}_{f1}^2 + \bar{\omega}_{f2}^2 \pm \left[(\bar{\omega}_{f1}^2 - \bar{\omega}_{f2}^2)^2 + 4\bar{\omega}_{f1}^2 \bar{\omega}_{f2}^2 \frac{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)A_m^2}{(1 - \alpha_1 A_m^2)(1 - \alpha_2 A_m^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

where

$$A_m^2 = \eta_m^2 \frac{R_1^3 R_2^3}{d^6},$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1 \alpha_2; \quad \alpha_i = \frac{\epsilon_{i\infty} - \epsilon_0}{\epsilon_{i\infty} + 2\epsilon_0}; \quad (6)$$

$$\bar{\omega}_{fi}^2 = \omega_{fi}^2 \frac{1 - \alpha_2 A_m^2}{1 - \alpha_{12} A_m^2}; \quad i = 1, 2.$$

$$\bar{\omega}_{f2}^2 = \omega_{f2}^2 \frac{1 - \alpha_1 A_m^2}{1 - \alpha_{12} A_m^2},$$

The equation (5) is a basic formula for the calculation of frequencies of SP in the system of two metallic nanoparticles which are at a distance d one from another in the external electric field. An expression (5) assumes the existence of four values of resonance frequencies of SP.

We will consider the special case, when particles consist of the same material $\epsilon_1(\omega) = \epsilon_2(\omega)$, but have different sizes $R_1 \neq R_2$. Then, from equalization (5) find frequencies of surface plasmon in the system of two particles [4]:

$$(\omega_m^*)^2 = \frac{(1 \pm A_m)\omega_f^2}{1 \pm \alpha_0 A_m}, \quad \omega_f = \frac{\omega_p}{\epsilon_{\infty} + 2\epsilon_0},$$

$$\epsilon_1(\omega) = \epsilon_2(\omega) \equiv \epsilon(\omega),$$

were

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad A = R_2/R_1 \quad (R_2 \leq R_1),$$

$$\alpha_0 = \frac{\epsilon_{\infty} - \epsilon_0}{\epsilon_{\infty} + 2\epsilon_0}, \quad A_m = \eta_m \Delta^{\frac{1}{2}} (R_1/d)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta_m = \begin{cases} 2, & m = (0, \parallel) \\ 1, & m = (\pm 1, \perp). \end{cases} \quad (7)$$

Notation $\perp$ and $\parallel$ mean: $\perp$ - the external field of E_0 is directed as perpendicular to the line which connects the centers of particles; $\parallel$ - parallel to this line.

$$(\Delta\omega)^2 \equiv (\omega_+^2)^2 - (\omega_-^2)^2 = 3\omega_p^2 \left[\frac{(R_1 R_2)^{1/2}}{d} \right]^3. \quad (8)$$

At $R_1 = R_2$ maximal value $\Delta\omega$ arrived at $d = 2R_1$. If $\varepsilon_\infty = \varepsilon_0 = 1$, then

$$\Delta\omega = (1/8)^{1/2} \omega_p \sim 0,35 \omega_p. \quad (9)$$

Note, $\Delta\omega$ makes the one-third part of plasma frequency ω_p of material of small particles and is an evaluation. In real systems it is necessary to take into account the electronic fadings (γ_1, γ_2) and experimental frequency dependences $\varepsilon_1(\omega)$ and $\varepsilon_2(\omega)$. It requires a lot of numeral calculations and it will be conducted in future.

3. Conclusion

On the basis of our study and the results developed by us, the general theory of interaction of nanoparticles can assert with various surfaces (including biological), that multipole interaction arises up only in presence the external electric field of E_0 and it causes the change in electrodynamical properties of both small particles and to the surface – redistribution of charges, change in position of peaks and change in intensity of absorption of electromagnetic radiation of the system of nanoparticles, being on-the-spot.

Character of change of processes of absorption and dispersion, depends both nanoparticles and surface on the electrodynamics' parameters of surface and nanoparticles (effective inductivities, physical and chemical state of surface et cetera). It enables us to get information about the physical and chemical parameters of surface on the basis of analysis of light-spectra of absorption of the small particles and molecules adsorbed on them.

References:

1. Boren C.F., Huffman P.R. Absorption and scattering of light by small particles. – New York: Wiley-Interscience, 1983. – 541 p.
2. Venger E.F., Goncharenko A.V., Dmytruk M.L. Optics of small particles and dispersed media. – Kyiv: Naykova dumka. – 1999 – 348 p.
3. Okamoto T., Yamaguchi I. Optical absorption study of the surface plasmons resonance in gold nanoparticles immobilized in to a gold substrate by self-assembly technique // J. Phys.Chem. B. – 2003. – V.107, № 38. – P. 10321–10324.
4. U. Kreibig and M. Vollmer. Optical Properties of Metal Clusters. – Berlin: Springer, 1995. – 532 p.
5. Gozhenko V.V., Grechko L.G., Whites K.W. Electrodynamics of spatial clusters of spheres: substrate effects // Phys. Rev. B. – 2003. – V. 68, N 13. – P. 125422–125438.
6. V.V. Gozhenko, L.G. Grechko, N.G. Shkoda, and K.W. Whites. Substrate influence on infrared absorption by clusters of small spheres // Proc. 6-th Int. Conf. – Vol. 5065. – Kyiv, 2002. / In: Proc. SPIE. – 2003. – P. 122–126.
7. M.T. Haarmans and D. Bedeaux. The polarizability and the optical properties of small metal spheres on a substrate //Thin Solid Film. – 1993. – V. 224. – P. 117–131.
8. L.G. Grechko, A.Yu. Blank, V.V. Motrich, A.O. Pinchuk, L.V. Garanina. Dielectric function of matrix disperse systems with metallic inclusions. Account of multipole interaction between inclusions // Radiophy. and Radioastron. – 1997. – V.1, № 2. – P. 19–27.
9. A.Ya. Blank, L.Y. Garanina, L.G. Grechko. Optical surface modes in a system of fine metallic particles // Low Temperature Physics. – 1999. – V. 25, № 10. – P. 1067–1072.

Надійшла до редколегії 25.11.2010

УДК 535

Н.М. Качалова, к.ф.м.н., с.н.с.,
В.С. Войцехович, к.ф.м.н., н.с.,
В.В. Хоменко, асп., інж.

Генерація спектрального суперконтинууму в мікро-структурованих волокнах

Створено джерело спектрального суперконтинууму на базі фемтосекундного Ti:Sapphire лазера Mira Optima 900-F та мікροструктурованого фотонно-кристалічного волокна Thorlabs NL-2,4-800. Отримано генерацію суперконтинууму в спектральній області 580-1000 нм на довжині хвилі накачки 820 нм та волокні довжиною 30 см. Проведення подальших експериментів з дослідження характеристик фемтосекундного суперконтинууму відкриває доступ до дослідницьких проектів в області метрології, лазерної спектроскопії та нанотехнологій.

Ключові слова: суперконтинуум, мікροструктуроване волокно, генерація, фемтосекундний лазер

N.M. Kachalova, PhD, Sen. Sci. Res.,
V.S. V.Voitsekhovich, PhD, Sci. Res.,
V.V. Khomenko, PhD stud., engineer

Supercontinuum generation in photonic crystal fibers

A source of wide spectral supercontinuum is created using as pump source femtosecond Ti:Sapphire laser Mira Optima 900-F and microstructure photonic-crystal fibers Thorlabs NL-2,4-800 as non-linear source. Achieved supercontinuum covered spectral region of 580-1000 nm with pumping wavelength 820 nm and a fiber length of 30 cm. Further experiments concern supercontinuum characteristic control open access to research projects in the field of metrology, laser spectroscopy, and nanotechnology.

Key words: supercontinuum, photonic crystal fiber, generation, femtosecond laser

E-mail: kachalova.nataliya@gmail.com, val555@mail.ru, khomenko.vadim@gmail.com

1 Вступ

З моменту створення лазерів вдосконалення на шляху скорочення тривалості імпульсу випромінювання було пройдено від мікросекундного до фемтосекундного діапазону ($1\text{fs} = 10^{-15}\text{c}$). Можливість генерації ультракоротких імпульсів призвела до відкриття нового та надзвичайно фундаментального явища – спектрального надширення фемтосекундних імпульсів в оптичних волокнах. На сьогоднішній день це явище відомо як генерація суперконтинууму (СК). Процес формування СК у волокні пов'язаний з дією цілого ряду нелінійних ефектів, серед яких: вимушене комбінаційне розсіювання [3], чотирьох хвильове змішування [4], фазова самомодуляція [5], розпад солітонів [6] та інші. Вперше генерацію СК в оптичних волокнах було досягнуто науково-дослідною групою під керівництвом Ranka в 1999 році [1]. Генерація СК стала легкодоступною завдяки розвитку мікροструктурованих волокон.

2 Мікро-структуровані волокна

Зазвичай, оптичні волокна складаються з оболонки та серцевини (див. Рис.1а.). Показник заломлення серцевини на декілька відсотків вищий за показник заломлення оболонки. Така структура зумовлює одномодове поширення світла всередині серцевини внаслідок повного внутрішнього відбивання (див. Рис.1б.)

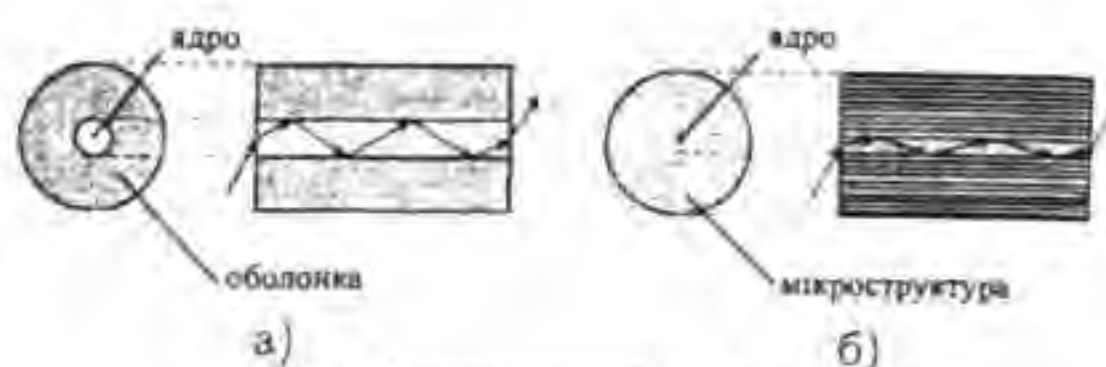


Рис. 1. Схематичне зображення розповсюдження світла за рахунок повного внутрішнього відбивання у волокнах: а) звичайних, б) мікροструктурованих.

Сучасні мікроструктуровані (МС) волокна являють собою одномодовий хвилевод, в оболонці якого міститься періодично структуровані повітряні трубки навколо серцевини з діаметрами, меншими діаметра серцевини. Трубки можуть являти собою періодичну двовимірну структуру. Завдячуючи періодичному розташуванню повітряних трубок (показник заломлення $n = 1$) в склі ($n = 1,5$) спектр пропускання такої структури для певних напрямків розповсюдження світла характеризується існуванням певних областей довжин хвиль, на яких випромінювання не може проникати у оболонку, тобто фотонних заборонених зон. Введене світло поширюється всередині серцевини за рахунок повного внутрішнього відбивання на межі серцевини та оболонки, а щілини зменшують показник заломлення оболонки. Це дало підставу називати подібні структури фотонно-кристалічними хвилеводами.

Одне з головних переваг МС фотонно-кристалічних волокон пов'язано з можливістю реалізації одномодового (за поперечними TEM_{00} модами) розповсюдження випромінювання в дуже широкому спектральному інтервалі. В даній роботі було використано МС волокно фірми Thorlabs (марка: NL-2.4-800) (див. Рис.2.).



Рис. 2. Фотографії мікроструктурованого волокна типу фотонного кристалу марки Thorlabs NL-2.4-800, отримані за допомогою поляризаційного мікроскопу Olympus BX-51 (X50): а) надане виробником (поперечний переріз); б) та в) після нетривалої експлуатації (в різних проекціях). На вставках а), б) - вигляд ближнього поля випромінювання на виході МС волокна.

Волокно має ядро діаметром 2.4 мкм, оточене періодичними повітряними щілинами. Зовнішній діаметр МС волокна становить 12,5 см. Волокно має нульову дисперсію на довжині хвилі 800 нм.

3 Експеримент

Отримання лазерного фемтосекундного випромінювання забезпечувалось лазерним Ti:Sapphire фемтосекундним комплексом (Mira Optima 900-F) НАН України при Інституті фізики НАН України. Базові функціональні параметри комплексу:

- мінімальна тривалість імпульсу $\tau = 70$ фс;
- середня потужність випромінювання $P_{av} = 1,06$ Вт;
- частота повторення імпульсу $F_r = 76$ МГц.

Енергію імпульсу E_p та пікову потужність P_p лазера з синхронізацією мод розраховують за формулами:

$$E_p = P_{av} / F_r$$

та

$$P_p = P_{av} / (F_r * \tau).$$

Отже, для Ti:Sapphire лазера з частотою генерації імпульсів 76 МГц, довжиною імпульсу 70 фс та середньою потужністю в 1 Вт розрахована пікова потужність становить 200 кВт. Енергія, яка припадає на один імпульс, становить 14 нДж. На Рис. 3 зображено блок-схему експериментальної установки з генерації суперконтинууму.

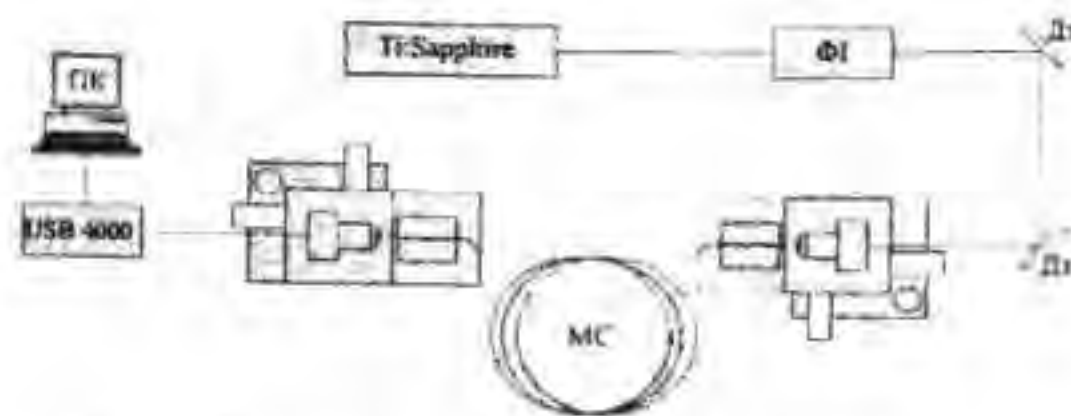


Рис. 3. Блок-схема експериментальної установки з генерації суперконтинууму: Ti:Sapphire - фемтосекундний Ti:Sapphire лазер Mira Optima 900-F, ОІ - Фарадеївський оптичний ізолятор, Дз - дзеркала, МС - мікро-структуроване волокно, USB 4000 - спектрометр Ocean Optics USB 4000, ПК - персональний комп'ютер.

На Рис. 3 представлений загальний вигляд джерела фемтосекундного суперконтинууму на основі МС волокна. Ефективність нелінійних перетворень, які спричиняє лазерне випромінювання у волокні, дуже чутлива до будь-яких коливань потужності накачки, тому необхідна стабільна монтажна платформа (див. Рис.4). Малий розмір ядра потребує прецизійного юстування. Врахування всіх факторів нестабільності дозволить досягти ефективності перекачки випромінювання до 40-50%.



Рис. 4. Загальний вигляд джерела суперконтинууму на основі МС волокна.

Фемтосекундний промінь заводять в МС волокно за допомогою мікроскопічного об'єктиву 20х об'єктива з числовою апертурою в 0,4. З кінців волокна знято полімерну оболонку. Нелінійні волокна вкриті стандартним акриловим покриттям, яке може бути видалено звичайними засобами зрізаннями оболонки, які використовуються для телекомунікаційних волокон. При роботі з оголеними нелінійними волокнами без додержання умов "чистої кімнати" пил і інші речовини можуть зменшувати якість волокна з часом, оскільки торці волокна забруднюються. Перед початком нової серії експериментів необхідно проводити сколювання торців волокна високоточними діамантовими різцями.

При введенні випромінювання фемтосекундного лазера у МС волокно, слід враховувати, що відбиття 4% випромінювання від вхідного торця волокна може призвести до спотворення послідовності імпульсів лазера накачки і, таким чином, зірвати режим синхронізації мод. Зворотне відбиття може бути мінімізоване за рахунок: сколу вхідного торця волокна під ку-

том 7° та повороту торця під кутом $3,7^\circ$, щоб задовольнити умову повного внутрішнього відбивання, або за рахунок використання ізолятора Фарадея (див. Рис. 5).

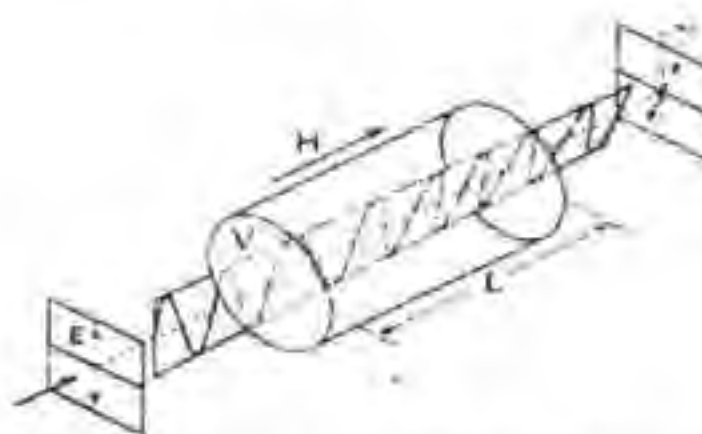


Рис. 5. Принцип дії оптичного ізолятора на ефекті Фарадея.

Технічні характеристики оптичного ізолятора IO-5-TIS2-HP:

- частотний діапазон 780-1000 нм;
- номінальна потужність 500 Вт/см²;
- апертура 4,7 мм;
- коефіцієнт пропускання > 91%;
- послаблення зворотного променя > 39dB.

Потужність на виході волокна вимірювали за допомогою вимірювача потужності Field Master GS. Відсоток ефективності введення променя в наших умовах становив близько 30%. Спектр на виході з МС волокна фіксувався спектрометром Ocean Optics USB 4000 з робочим діапазоном від 300 нм до 1100 нм та роздільною здатністю 0,1 нм.

4 Генерація суперконтинууму

Взаємодія ультракоротких імпульсів з нелінійним середовищем мікро-структурованих волокон призводить до спектрального розширення вхідного імпульсу. Характер розширення залежить від параметрів вхідного імпульсу та параметрів МС волокна. Типовий спектр отриманого СК при накачці імпульсами потужністю 1,06 Вт на довжині хвилі 820 нм зображено на Рис. 6.

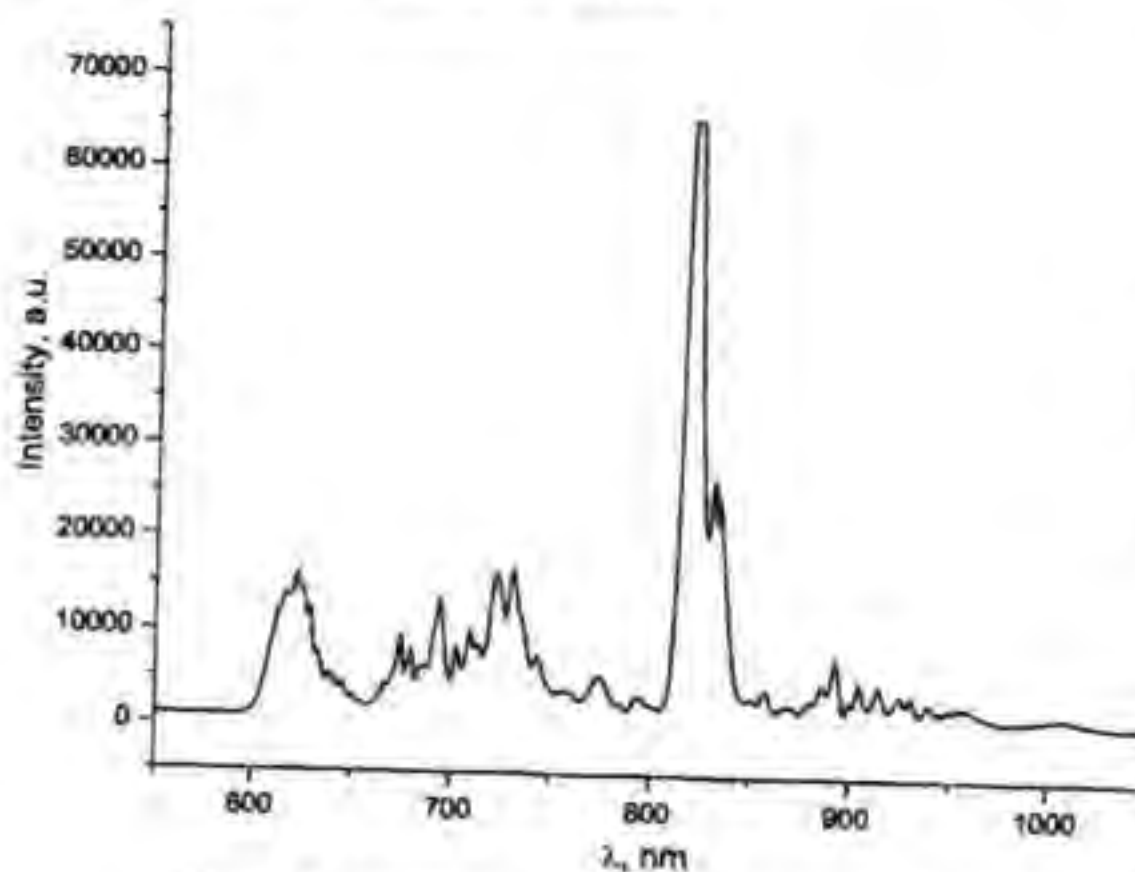


Рис. 6. Спектр випромінювання суперконтинууму, який генерується імпульсами фемтосекундного Ti:S лазера на довжині хвилі 820 нм, потужністю 1,06 Вт в мікроструктурованому фотонно-кристалічному волокні довжиною 30 см.

5 Висновки

Експериментально продемонстрована можливість генерації СК, що простирається від ультрафіолетового до ближнього інфрачервоного діапазону (580-1000 нм) - більш, ніж за октаву, при накачці мікроструктурованого волокна неперервною послідовністю фемтосекундних імпульсів Ti:Sapphire. Проведені дослідження дозволяють зробити висновок, що у створеному джерелі СК реалізована лише мала частина можливостей, щодо отримання СК зі стабільними та керованими характеристиками. Удосконалення генератора СК дозволить створити універсальне джерело широкосмугового когерентного оптичного випромінювання, яке стане в нагоді при вирішенні широкого кола задач у фізиці, біології, хімії, медицині та інших областях.

Дану роботу виконано за фінансової підтримки цільової комплексної програми фунда-

ментальних досліджень НАН України "Фундаментальні проблеми наноструктурних систем, наноматеріалів, нанотехнологій" на 2010-2014 рр.

Список використаних джерел

1. J.K. Ranka, R.S. Windeler, A.J. Stentz, "Visible continuum generation in airsilica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm", *Opt. Lett.*, Vol.25, No. 1, 25-27, 2000.
2. P.St. J. Russel, "Photonic Crystal Fibers", *Science*, Vol.299, pp.358-362, 2003.
3. S. Coen, A. Chau, R. Leanhardt, J. Harvey, J. Knight, W. Wadsworth and P. Russell, "Supercontinuum generation by stimulated Raman scattering and parametric four-wave mixing in photonic crystal fibers", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol 19, pp. 753-764, 2002.
4. W.J. Wadsworth, N. Joly, J.C. Knight, T.A. Birks, F. Biancalana, and P. St. J. Russell, "Supercontinuum and four wave mixing with Q-switched pulses in endlessly single-mode photonic crystal fibers", *Optics Express*, Vol. 12(2), pp. 299-300, January 2004.
5. Z. Zhu and T.G. Brown, "Effect of frequency chirping on supercontinuum generation in photonic crystal fibers", *Optics Express*, Vol. 12(4), pp. 689-694, February 2004.
6. K. Sakamaks, M. Nakao, M. Naganuma, and M. Izutsu, "Soliton induced supercontinuum generation in photonic crystal fiber", *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 10(5), pp. 876-884, September 2004.

Надійшла до редколегії 22.12.10

УДК 537.32

Копань В.С., д.ф.-м. н., проф.,
Хуторянська І.А., студ.,
Копань Ю.В., пров. інж.

Термоелектрорушійна сила вугільних адсорбентів

Виміряна різниця E_a між
термоелектрорушійною силою (ТЕРС) сухого
порошку вугільного адсорбенту (активоване
вугілля «Sorbex», терморозширений графіт) і
ТЕРС після адсорбції алкоголю. Для «Sorbex»
 $E_a = 0,1$ мкВ/К, для графіту $E_a = 3,5$ мкВ/К. ТЕРС
 E_a виникає завдяки адсорбції алкоголю і
тунелюванню електронів від гарячої частинки
порошку до холодної частинки крізь зазор між
ними.

Ключові слова: термоелектрорушійна сила,
адсорбція алкоголю, вуглецевий порошок

* E-mail: @pulsary.com.ua

Вступ. При використанні адсорбентів в
промисловості важливим є визначення
придатності адсорбенту для роботи, визначення
часу його заміни на нову порцію в адсорберах.
Для цього найчастіше використовують методи
зважування, вимірювання електроопору тощо [1,
2]. Вони мають недоліки. **Мета роботи** –
дослідження приросту внаслідок фізичної
адсорбції термо-е.р.с. медичного активованого
вугілля типу «Sorbex» та терморозширеного
графіту (ТРГ). Ці сорбенти широко
використовуються в медичній практиці і
промисловості. Вплив адсорбції на термо-е.р.с.
цих матеріалів та фізична природа явища мало
вивчені. Схема термопари наведена на рис. 1.

Методика досліджень.

Порошок адсорбенту 3 засипали у
пластмасову трубку («термоусадка») 2 з отвором
4 для закапування адсорбата, наприклад,
етилового спирту. Температура гарячого спаю
термопари $T_{гор} = 62 \pm 0,5^\circ\text{C}$, холодних кінців
 $T_{хол} = 20 \pm 0,1^\circ\text{C}$. Точки, до яких під'єднані мідні
провідники від потенціометру V, мають різницю
температур, що не перевершує $0,0001^\circ\text{C}$. Тому
паразитні термо-е.р.с. мідь-сорбент, що
виникають в цих точках, не перевершують
чутливості потенціометру V: 10^{-5} В [4, 5].
Відомо, що коефіцієнт корисної дії системи
найбільший тоді, коли вихідний опір джерела
електрики (термопара) близький по величині до
вхідного опору споживача (потенціометр). Опір
порошкової термопари (рис. 1) становив 5-10 Ом.

V.S. Kopan', Dr of Sci, Prof,
I. A. Hutoryanska, stud.,
U.V. Kopan', eng.

The thermoelectric power of carbon adsorbents

The difference E_a between the thermoelectric
power (TEP) of dry powder of carbon adsorbent
(active charcoal «Sorbex», thermoexfoliated
graphite) and the TEP after of alcohol adsorption
was measured. For the «Sorbex» $E_a = 0.1$ $\mu\text{V/K}$, for
graphite $E_a = 3.5$ $\mu\text{V/K}$.

The TEP E_a arise owing to adsorption of
alcohol and tunneling of electrons from a hot
particle of the powder to a cold across chinks
between particles.

Key Words: Thermoelectric power, adsorption
of alcohol, carbonword powder.

Тому використовувався потенціометр з
близьким вхідним опором (20 Ом).

Експериментальні результати

На рис. 2 та рис. 3 наведені деякі результати
досліджень. Світлими точками вказано на
початок чергового циклу адсорбції, коли в
порошок додається 1% об. етанолу. $E_a = E_t - E_0$, де
 E_0 – початкове значення термо-е.р.с., а E_t – в час
t при адсорбції-десорбції.

Можна зробити наступні висновки:

1. Величина приросту термо-е.р.с. E_a
внаслідок фізичної адсорбції етилового спирту
порошком ТРГ у 20-30 разів перевершує E_a
активованого вугілля. Оскільки обидва
адсорбенти виготовлені з вуглецю, то фізичний
механізм генерації E_0 в них однаковий. Різниця в
значеннях E_a вказує на значно більшу
адсорбційну активність ТРГ у порівнянні з
активованим вугіллям. 2. Висоти піків (рис. 3) E_a
зменшуються зі зростанням порядкового номеру
піка. 3. $E_a < 0$ для порошку активованого вугілля і
 $E_a > 0$ для ТРГ. Відомо [3], що термо-е.р.с.
спечених вуглецевих порошоків виникає
внаслідок розсіювання електронів (або дірок) на
дефектах кристалічної будови, границях зерен,
домішкових атомах, внаслідок непружного
розсіювання на приповерхневих атомах (розмірний
ефект термо-е.р.с.), а також по стрибковому
механізму.

В насипних порошках, на нашу думку,
велике значення має тунелювання зарядів з одної
частинки в сусідню другу через зазор між ними –

потенціальний бар'єр. Якщо це так, то змінюючи його ширину ω стисканням порошку при малих тисках (коли не деформуються частинки порошку) можна змінювати термо-е.р.с.

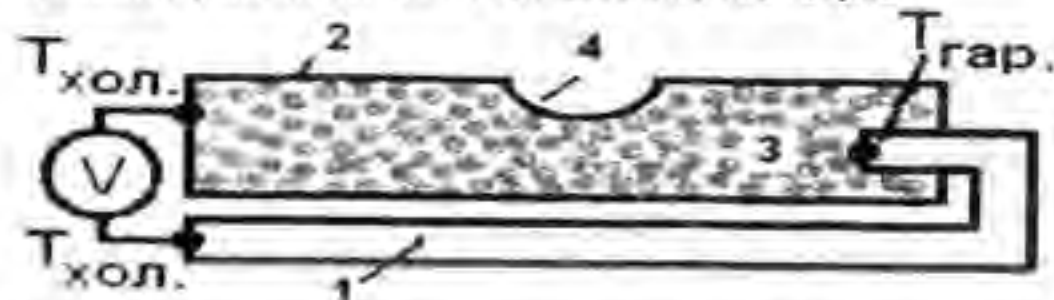


Рис. 1. Схема термопари, робоча вітка якої виготовлена з насипного порошку 3.

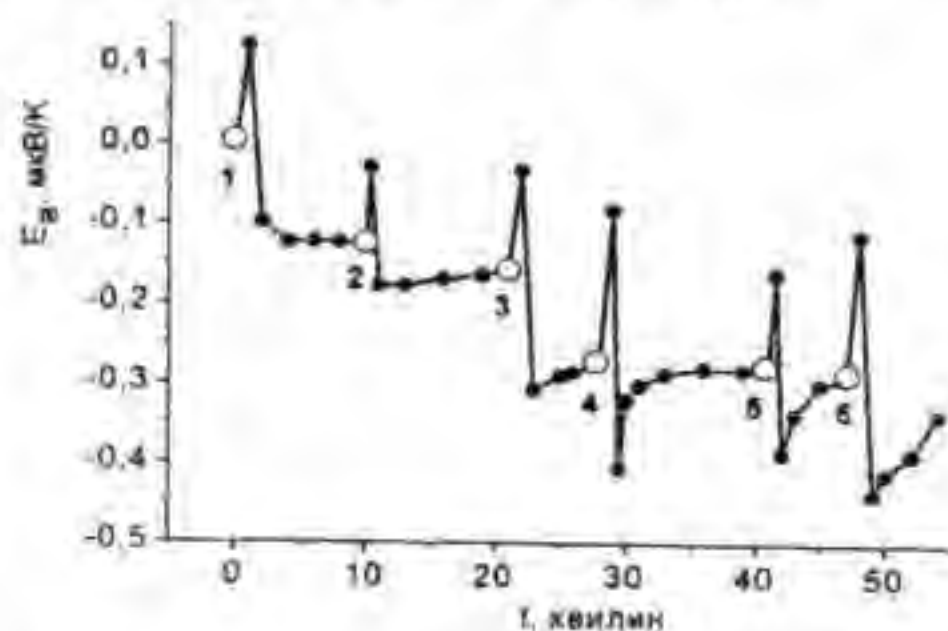


Рис. 2. Залежність від часу t приросту (внаслідок адсорбції етилового спирту) термо-е.р.с. E_a порошку активованого вугілля «Sorbex».

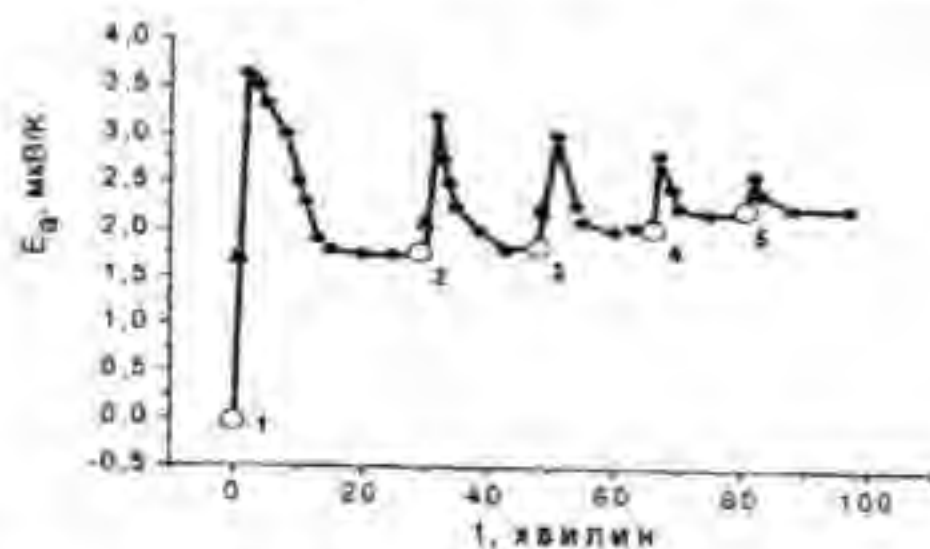


Рис. 3. Залежність від часу t приросту (внаслідок адсорбції етилового спирту) термо-е.р.с. E_a порошку ТРГ.

Ми стискали трубку 2 з порошком (рис.1) впоперек градієнта температур. В роботі [6] доведено, що термоелектричний струм I_3 , який протунелював через бар'єр висотою U_2 , і струм I_1 , який «налітає» на бар'єр, описуються рівняннями:

$$\frac{I_3}{I_1} = 16 \frac{E_k}{U_2} \exp(-2\gamma\omega), \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} (2mU_2)^{1/2}, \quad (2)$$

де m - маса носія заряду (електрону, дірки), E_k - кінетична енергія носія. При стисканні порошку зменшується ω , зростає I_3/I_1 , тобто зростає термо-

е.р.с. E_e . При розвантаженні порошку зростає ω , зменшується E_e , що й спостерігаємо на рис.4.



Рис. 4. Залежність термо-е.р.с. E_e від деформації стискання ϵ насипного порошку «Sorbex».

Адсорбція етанолу порошком ТРГ (рис.3) веде до зростання E_a , що говорить про зменшення висоти потенціального бар'єру U_2 і, можливо, його ширини ω (формули (1), (2)).

Висновки

1. При адсорбції етанолу порошком медичного вугільного адсорбенту «Sorbex» і порошком термічно розширеного графіту зростає термоелектрорушійна сила порошку на величину E_a , а при десорбції - зменшується.

2. Зміна E_a обумовлена зміною ширини і висоти потенціального бар'єру (зазори між частинками порошку), через який тунелюють носії заряду (електрони, дірки).

Список використаних джерел

1. Адсорбция из растворов на поверхностях твердых тел. Под. ред. Парфитта Г.Д. М.: Мир. 1986. 280 с.
2. А.А.Лухвич. Влияние дефектов на электрические свойства металлов.- Минск: Наука и техника, 1976. - 102 с.
3. Маурай Л.Ю. Структура та електрофізичні властивості вуглеграфітових матеріалів і інтеркальованих сполук на їх основі. Автореферат докторської дисертації. Київ. 2005.- 40 с.
4. Борисенко В.Д., Копань В.С., Бессонов В.Б. Термоэлектрическое устройство для контроля неоднородности материалов. АС СССР №750357. Бюллетень изобретений.- 1980.-№27.
5. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Вплив магнітного поля і механічних напруг на термо-е.р.с. нікелю // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. - 2005. - №1. - С. 332-338.
6. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Термоелектричний адсорбційний ефект в порошку активованого вугілля // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. - 2010. - №2. - С.

Надійшла до редколегії 12.11.2010.

УДК 539.213

В.І. Лисов, д.ф.м.н., проф.,
Т.Л. Цареградська*, к.ф.м.н., доц.,
О.В. Турков, інж.,
Г.В. Саєнко, інж.

Дослідження закономірностей процесу старіння бінарних та багатокомпонентних аморфних сплавів

Показано, що тривала витримка аморфних бінарних сплавів при нормальних зовнішніх умовах призводить до зниження їх термічної стабільності, про що свідчить зменшення температури початку інтенсивної кристалізації на $(20-35)^{\circ}\text{C}$. Встановлено, що багатокомпонентні аморфні сплави стають більш стабільними після довготривалої витримки при кімнатній температурі, що пояснюється тим, що наявність в сплавах високотемпературних легуючих домішок уповільнює процес дифузії та відбувається гомогенізація структури сплаву.

Ключові слова: аморфні сплави, старіння сплавів, термодинамічна стабільність, кристалізація

* tsar_grd@ukr.net

Вступ

Важливим напрямком вивчення аморфних сплавів є дослідження змін структури та фізичних властивостей, що відбуваються в процесі старіння аморфних сплавів. Під старінням сплаву розуміють зміну з часом його фізичних властивостей після тривалої витримки при кімнатній температурі. Для аморфних сплавів процес старіння є схожим на процес відпаду, оскільки в обох випадках система прямує до мінімуму енергії через зміну структури. Чисельні експериментальні дані [1-3] свідчать про те, що після тривалої ізотермічної витримки при кімнатній температурі в аморфних сплавах відбуваються структурні перетворення, пов'язані з кристалізацією. Метою даної роботи було дослідження впливу легування на закономірності процесу старіння аморфних

V.I. Lysov, Dr.Sc., Prof.,
T.L. Tsaregradskaya, PhD.,
O.V. Turkov, eng.,
G.V. Saenko, eng.

The investigation of senescence process of binary and multicomponental amorphous alloys

The investigations showed that a long-term exposure of binary amorphous alloys at normal external conditions leads to decreasing of their thermal stability: the temperature of the beginning of intensive crystallization decreases by $(20-35)^{\circ}\text{C}$. The multicomponental amorphous alloys become more stable after a long-term exposure at room temperature, which can be explained by the fact that the presence of high-temperature dope admixtures decelerates diffusion process and homogenization of alloy structure occurs.

Key Words: amorphous alloys, senescence of alloys, thermodynamics stability, crystallization

сплавів аморфних сплавів методом високочутливої дилатометрії.

Дослідження впливу ізотермічної витримки на термічну стабільність аморфних сплавів

Дослідження процесу кристалізації проводилася за допомогою дилатометричної методики [4]. Для зразків аморфних бінарних сплавів системи Fe-B були проведені експерименти по ізотермічній витримці при кімнатній температурі на протязі 7 років.

На рис.1 представлено результати експериментальних досліджень відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ (а) та результати розрахунків об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ (б), що утворюється при неперервному нагріванні аморфного сплаву $\text{Fe}_{85}\text{B}_{15}$ для початкового (тобто щойно отриманого) та витриманого на протязі 7 років зразків.

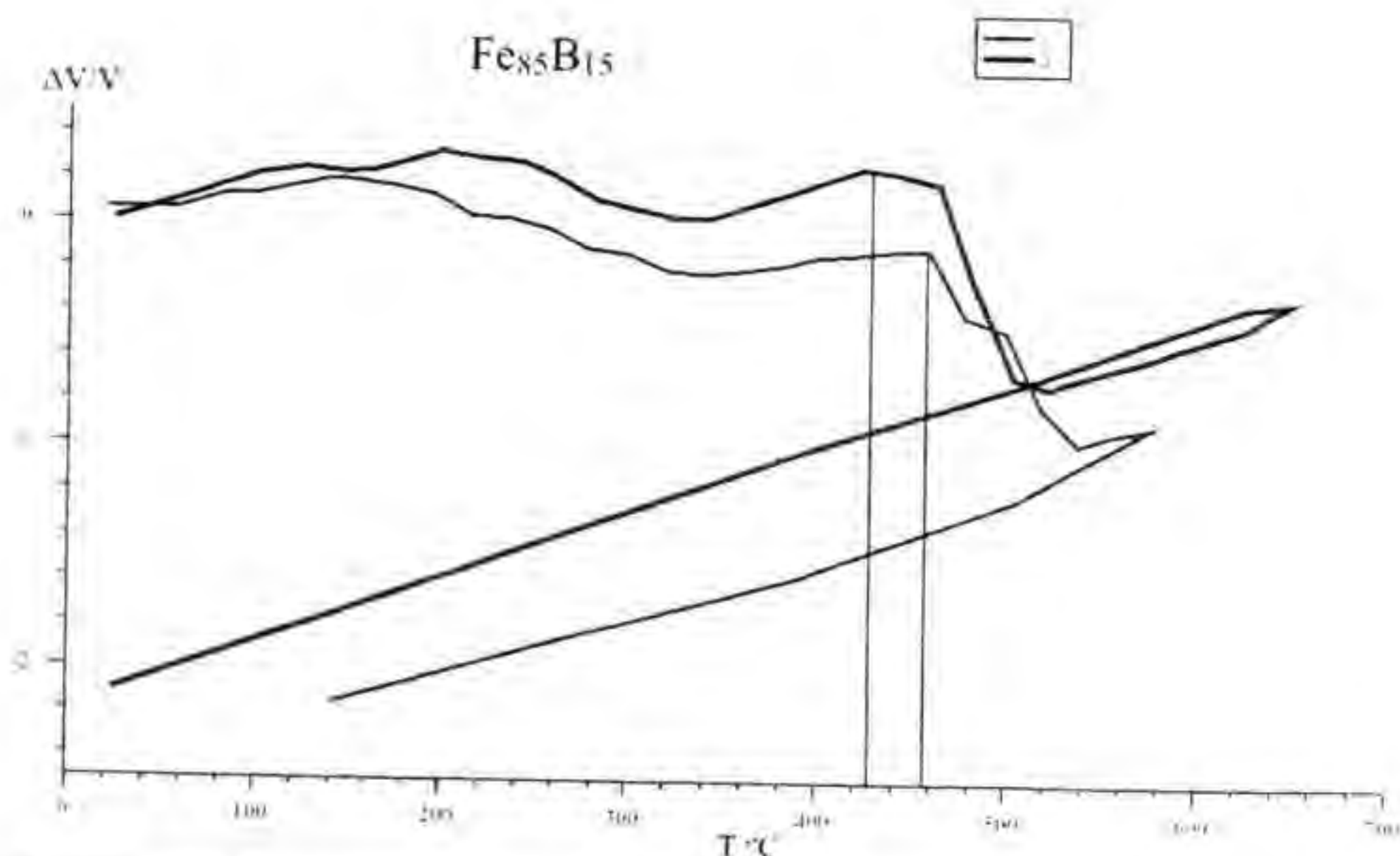


Рис.1.а. Температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{85}\text{B}_{15}$ при неперервному нагріванні: крива 1 для щойно отриманого аморфного сплаву; крива 2 – для зразка після тривалої (7 років) витримки при кімнатній температурі

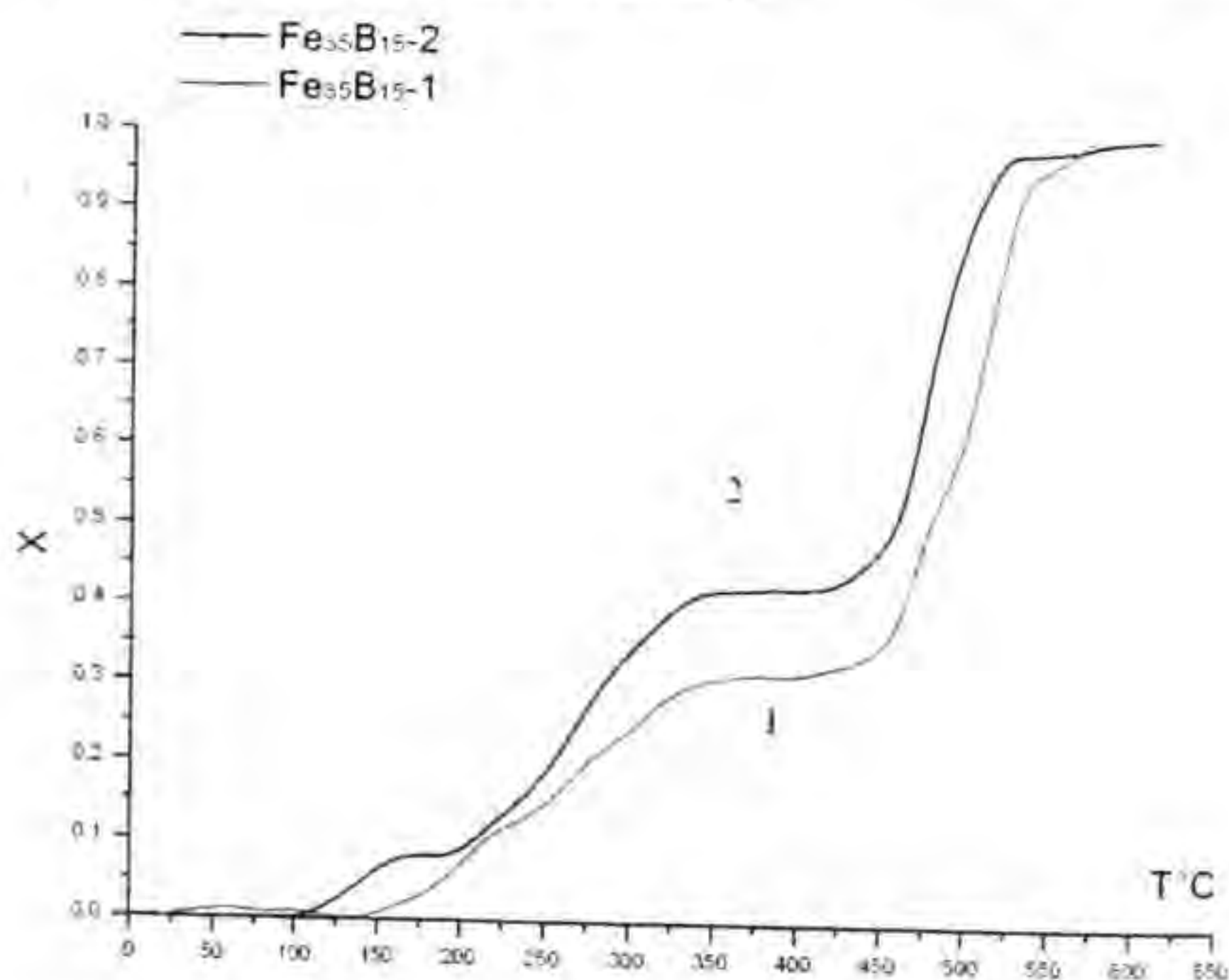


Рис.1.б. Температурна залежність об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ в сплав $\text{Fe}_{85}\text{B}_{15}$, що утворюється при неперервному нагріванні: крива 1 для щойно отриманого аморфного сплаву; крива 2 – для зразку після тривалої (7 років) витримки при кімнатній температурі.

Порівняння температури початку інтенсивної кристалізації початкового та витриманого зразків показало, що вона знижується з 460°C до 425°C , тобто на 35°C . Аналогічні дані отримано для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$. Порівняння температури початку інтенсивної кристалізації початкового та витриманого зразків показало, що вона знижується з 420°C до 400°C , тобто на 20°C .

Проведені дослідження показали, що тривала витримка бінарних аморфних сплавів при нормальних зовнішніх умовах призводить до зниження їх термічної стабільності, що є наслідком значної перебудови структури аморфних сплавів, яка полягає в розшаруванні аморфної матриці та збільшенні середніх розмірів "вморожених" центрів кристалізації.

Для серії зразків багатокомпонентних аморфних сплавів, які отримувались додаванням до базового бінарного аморфного сплаву системи Fe-B модифікуючих домішок – Si, Nb, Mo, Mn, Ni, Co були проведені

дослідження по зміні їх властивостей в процесі старіння.

На рис.2 представлено результати вимірювань відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ дилатометричним методом (а) та об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ (б) при неперервному нагріванні багатокомпонентного аморфного сплаву $\text{Fe}_{74}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Nb}_2\text{Co}_2\text{Ni}_4\text{Mo}_2$.

Порівняння температури початку інтенсивної кристалізації T_k початкового та витриманого зразків показало, що вона збільшується з 560°C до 610°C , тобто на 50°C .

В таблиці I наведено дані по температурам початку інтенсивної кристалізації T_k для початкових (щойно отриманих) та витриманих на протязі 7 років при кімнатній температурі багатокомпонентних аморфних сплавів.

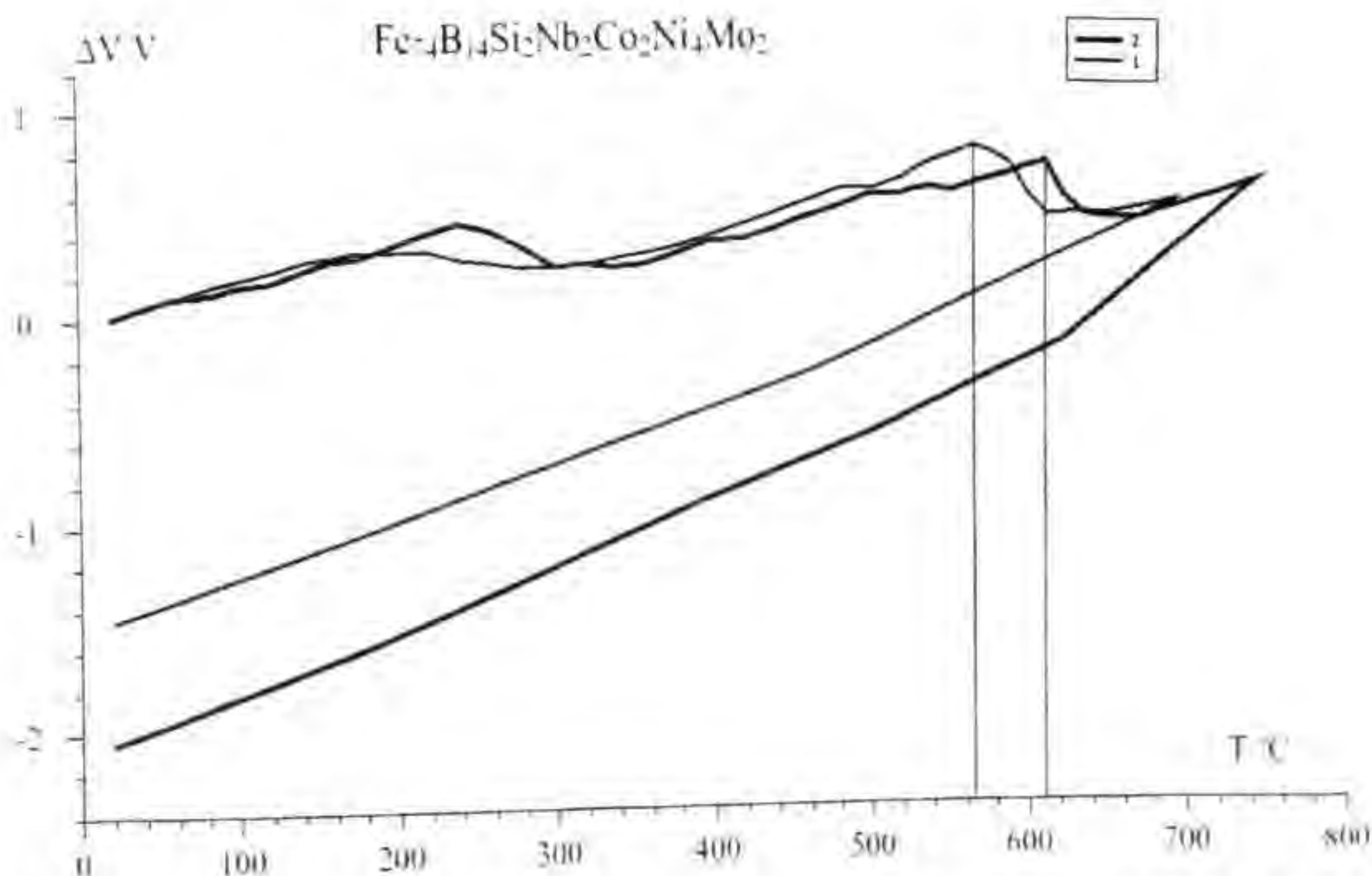


Рис.2.а. Температурна залежність відносної зміни об'єму аморфного сплаву $\text{Fe}_{74}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Nb}_2\text{Co}_2\text{Ni}_4\text{Mo}_2$ при неперервному нагріванні і охолодженні. порівняння

температури кристалізації зразка до та після тривалої (7 років) витримки при кімнатній температурі.

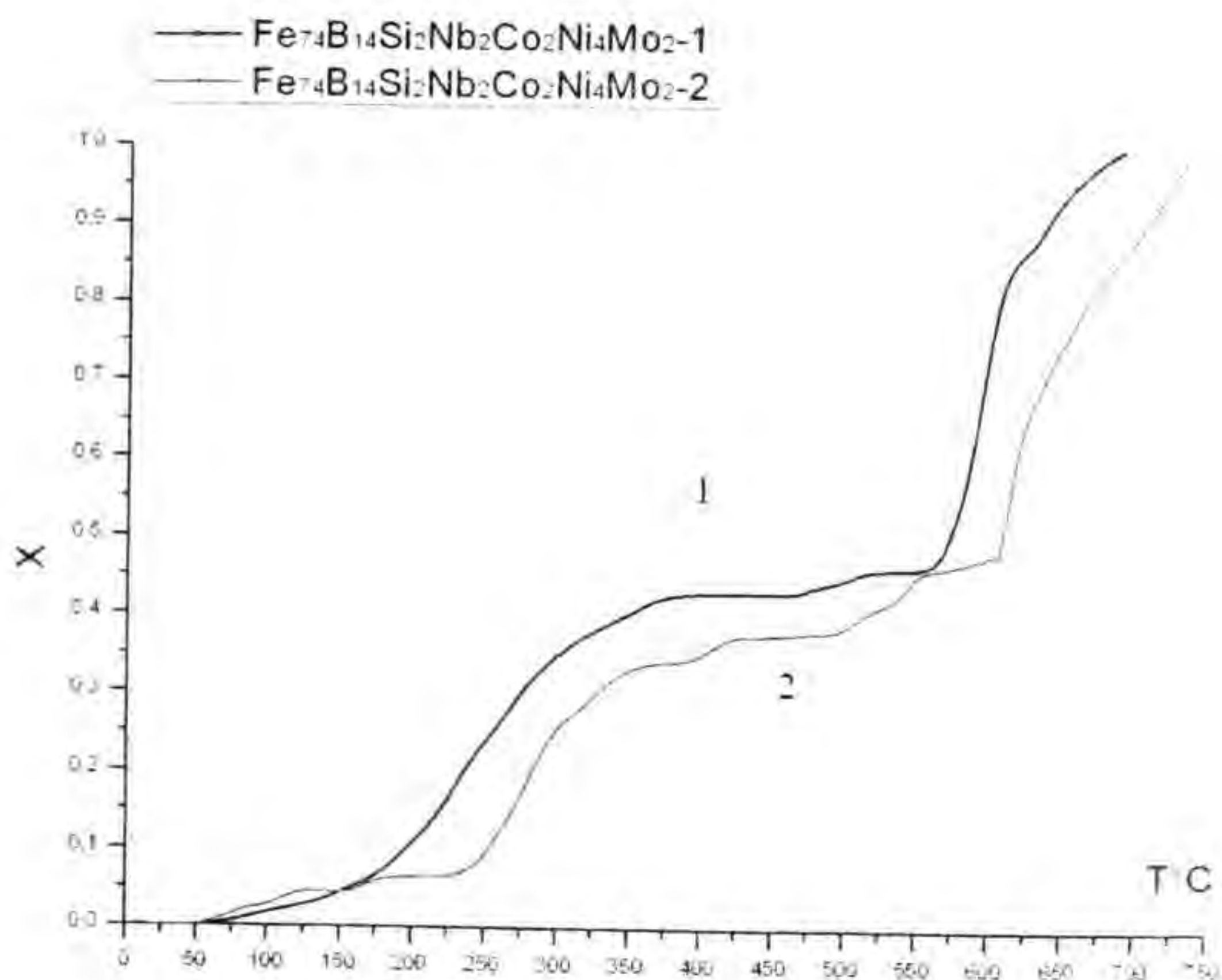


Рис.2.б. Температурна залежність об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ в сплаві $\text{Fe}_{74}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Nb}_2\text{Co}_2\text{Ni}_4\text{Mo}_2$, що утворюється при неперервному нагріванні: крива 1 для

щойно отриманого сплаву; крива 2 – для зразка після тривалої (7 років) витримки при кімнатній температурі

Таблиця 1

Температури початку інтенсивної кристалізації для початкових
та витриманих багатокомпонентних аморфних сплавів

Склад аморфного сплаву	$T_k, ^\circ\text{C}$ (до витримки)	$T_k^c, ^\circ\text{C}$ (після витримки на протязі 7 років)	$\Delta T = T_k^c - T_k , ^\circ\text{C}$
Бінарні аморфні сплави			
$\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$	420	400	20
$\text{Fe}_{85}\text{B}_{15}$	460	425	35
Багатокомпонентні аморфні сплави			
$\text{Fe}_{74}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Ni}_2\text{Co}_2\text{Ni}_{04}\text{Mo}_2$	560	610	50
$\text{Fe}_{76}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Mo}_2\text{Mn}_2\text{Nb}_1$	575	615	40
$\text{Fe}_{77}\text{B}_{12}\text{Si}_5\text{Ni}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2$	550	600	50
$\text{Fe}_{77,5}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Mo}_3\text{Mn}_2\text{Nb}_{0,5}\text{I}_1$	540	580	40
$\text{Fe}_{78}\text{B}_{14}\text{Si}_2\text{Nb}_{0,5}\text{Mo}_{4,5}\text{Ni}_1$	560	610	50

Виявилось, що для багатокomпонентних аморфних сплавів температура початку інтенсивної кристалізації T_k збільшується на $(40-50)^\circ\text{C}$ після тривалої ізотермічної витримки. На основі цих даних можна зробити висновок про те, що багатокomпонентні аморфні сплави стають більш стабільними після довготривалої витримки при кімнатній температурі. Даний факт можна пояснити тим, що наявність високотемпературних легуючих домішок уповільнює процес дифузії, відбувається гомогенізація структури сплаву.

Отже, результати експериментальних досліджень підтверджують висновки теорії термодинамічної стабільності аморфних сплавів [5-6], яка показує можливість зсуву фазової рівноваги в системі аморфна матриця–„вморожені” центри кристалізації за рахунок спрямованої зміни зовнішніх впливів та визначають способи розширення температурного інтервалу існування аморфного стану сплавів.

Висновки

1. Показано, що тривала витримка бінарних аморфних сплавів при нормальних зовнішніх умовах призводить до зниження їх термічної стабільності, про що свідчить зниження температури початку інтенсивної кристалізації на $(20-35)^\circ\text{C}$ для витриманих протягом 7 років сплавів.
2. Встановлено, що багатокomпонентні аморфні сплави виявляються більш термодинамічно стійкими у порівнянні з бінарними, про що свідчить той факт, що для них температура початку інтенсивної кристалізації збільшується на $(40-50)^\circ\text{C}$ після тривалої ізотермічної витримки.
3. Показано, що легування бінарних сплавів домішками малої концентрації

(Si, Nb, Mo, Mn, Ni, Co) призводить до стабілізації структури, що уповільнює процес старіння аморфних сплавів

Список використаних джерел

1. Ракушняк С.Л., Гончукова Н.О. Старение и деформация металлических стекол. – Физика и химия стекла. 2007, том 33, №2, с.182-189
2. Kharkov E.I., Lysov V.I., Tsaregralskaya T.L., Turkov O.V. The Regulatives of Crystallization of some Amorphous Alloys.– Metalurgija, 2000, 39, 1.– p. 29–32.
3. А.П. Шпак, В.І. Лисов, Ю.А. Куніцький, Т.Л. Цареградська. „Кристалізація і аморфізація металевих систем” – К.: Академперіодика 2002, 208с.
4. Новиков В.Н., Харьков Е.И. Изменение объема при переходе аморфной пленки $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{14}\text{B}_6$ (2826) в кристаллическое состояние. // Физика металлов и металловедение, - 1982, - 54, - вып. 6, с. 1210-1211.
5. Kharkov E.I., Lysov V.I., Tsaregralskaya T.L., Rudenko A.G., Turkov O.V. The thermal and plastic processing of some amorphous alloys.– Metalurgija, 1999, 38, 4.– P. 237–240.
6. Харьков Е.И., Лысов В.И. Термодинамическая теория высокотемпературной устойчивости аморфных сплавов // Расплавы, 1987, 1, вып.1, с.30.

Надійшла до редколегії 17.09.09

УДК 519.9

Стебленко Л.П., д.ф.м.н., с.н.с., Коплак О.В.,
асп., Курилюк А.М., інж., Флюнт О.Є., н.с.

Вплив слабого постійного магнітного поля на фотопровідність і її релаксацію в кристалах кремнію

У роботі досліджено вплив слабого ($B \leq 0,2 \text{ Тл}$) постійного магнітного поля на величину стаціонарної фотопровідності кристалів кремнію. Вивчено характер релаксації зміненого в результаті магнітної дії фотоструму й темнового струму. Виявлені магніточутливі ефекти знаходять своє пояснення в рамках модельних уявлень, що розвиваються у спін-залежній електронній теорії.

Ключові слова: кремній, магнітне поле, фотопровідність, нанокластери структурних дефектів.

L.P. Steblenko, Dr. Sci, Sen. Sci. Res.,
O.V. Koplak, PhD stud., A.M. Kuryliuk, Eng.,
O.E. Fljunt, Sci. Res.

The influence of a weak constant magnetic field on photoconductivity and its relaxation in silicon crystals

The influence a weak ($B \leq 0,2 \text{ Tl}$) constant magnetic field on value of stationary photoconductivity of silicon crystals is investigated. Character of the photocurrent and of the dark current relaxation changed as a result of magnetic action is studied. Revealed magnitosensitive effects find the explanation in the network of the modeling representations developed in spin-dependent of the electronic theory.

Key Words: silicon, magnetic field, photoconductivity, nanoclusters of structural defects.

*E-mail: kurylyuk_a@univ.kiev.ua

Останнім часом увагу дослідників привернула можливість контролювати фізичні властивості слабомагнітних матеріалів, зокрема, властивості діамагнітного кремнію, використовуючи дію слабких ($B \leq 1 \text{ Тл}$) магнітних полів (МП). У літературі накопичений досить великий обсяг інформації про вплив магнітних полів різного походження на структуру й структурнозалежні властивості слабомагнітних твердих тіл [1-15].

Слід зазначити, що питома вага досліджень магнітозалежних явищ у кристалах кремнію в порівнянні з іншими слабомагнітними матеріалами невелика. У той же час перспективність використання кремнію в приладах електроніки й оптоелектроніки стимулює наукові пошуки, спрямовані на всебічні дослідження різноманітних фізичних характеристик, зокрема характеристик, пов'язаних з явищем фотопровідності (ФП). З огляду на можливість зміни реальної структури кремнію при дії слабого магнітного поля представлялося доцільним розглянути зміну характеристик ФП під впливом модифікованої магнітним полем домішкової структури. З

урахуванням зазначеної доцільності була сформульована мета роботи, що полягала в дослідженні впливу слабого постійного МП на стаціонарну ФП і її релаксацію в кристалах кремнію.

У роботі досліджувалися кристали кремнію n-типу, вирощені методом безтигельної зонної плавки, які були леговані фосфором до питомого опору $\rho = 3000 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Магнітна обробка (МО) полягала у витримці зразків Si у слабкому (з магнітною індукцією $B = 0,2 \text{ Тл}$) постійному магнітному полі протягом 12 діб. Ресстрація спектрів ФП проводилася як відразу після завершення МО, так і через певні проміжки часу після закінчення магнітного впливу. Спектри фотопровідності вимірювалися за стандартною методикою з використанням призмового монохроматора на довжинах хвиль від 2,1 до 0,4 мкм. Протягом усього часу експерименту після завершення обробки магнітним полем, а саме, протягом 75 діб зразок залишався нерухомим у вимірювальній камері. За аналогічною методикою вимірювалися спектри ФП на вихідних (контрольних) зразках Si.

На рис.1 показані отримані в роботі спектри ФП досліджуваних зразків Si. Як видно з рис.1, магнітна обробка в слабкому постійному МП приводить до певних змін у спектрах ФП, які проявляються в наступному. У зразках Si, які пройшли МО, темновий струм зменшується, а фотострум, навпаки, збільшується в порівнянні з вихідними (контрольними) зразками. При цьому максимум спектрів ФП після МО зсувається в сторону менших довжин хвиль.

Відомо, що форма й положення максимуму спектра фотопровідності, в основному, визначається частотною залежністю коефіцієнта поглинання $\alpha(\omega)$ і часом життя носіїв заряду в матеріалі τ . Нами була проведена оцінка часу життя носіїв заряду, що визначає зсув максимуму в спектрі. Зазначена оцінка проводилася на основі виразу для опису спектральної залежності ФП:

$$I \propto \frac{1}{\alpha} \frac{G_0 \tau}{1 - \alpha^2 L^2} (1 - \exp(-\alpha d)) - \frac{(\alpha D_a + s)L}{s + \frac{D_a}{L}} \frac{G_0 \tau}{1 - \alpha^2 L^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{d}{L}\right)\right)$$

$$G_0 = \frac{\beta \alpha I_0 (1 - R)}{h \nu} \quad \text{— темп}$$

У наведеному виразі $L = \sqrt{D_a \tau}$ — генеративна довжина зразка, D_a — коефіцієнт амбіполярної дифузії, τ — час життя нерівноважних носіїв заряду, α — коефіцієнт поглинання, s — темп поверхневої рекомбінації, d — товщина зразка. Виконані нами розрахунки вказують на те, що зареєстрований у зразках Si після МО короткохвильовий зсув максимуму ФП відповідає зміні часу життя τ майже на 2 порядки. Проведені в даній роботі оцінки деякою мірою корелюють із нашими попередніми дослідженнями, пов'язаними з вивченням кінетики фотопровідності в кремнії [14]. Зокрема, в [14] було встановлено, що дія слабого ($B=0,2$ Тл) магнітного поля спричиняє зменшення короткотривалої компоненти релаксації фотопровідності з 17 мкс до 16 мкс і викликає появу довготривалої компоненти, величина якої становить ~ 200 мкс. Таким чином, зсув максимуму, який спостерігався в спектрі ФП може бути пов'язаний зі зміною часу життя носіїв. Не виключено також, що певний внесок здійснює і фактор, пов'язаний зі зміною поглинаючих характеристик Si після магнітної обробки. Як видно з рис.1, через певний час, який пройшов після завершення МО, має місце деяка

релаксація початкового ефекту зміни спектра ФП. У процесі релаксації темновий струм у зразках Si, що піддались МО, зменшується ще більше, ніж у початковий момент, тобто при першому вимірі ФП, що вимірювався відразу після вилучення зразків з магнітного поля. При релаксації спостерігається також і поступове зменшення величини фотоструму.

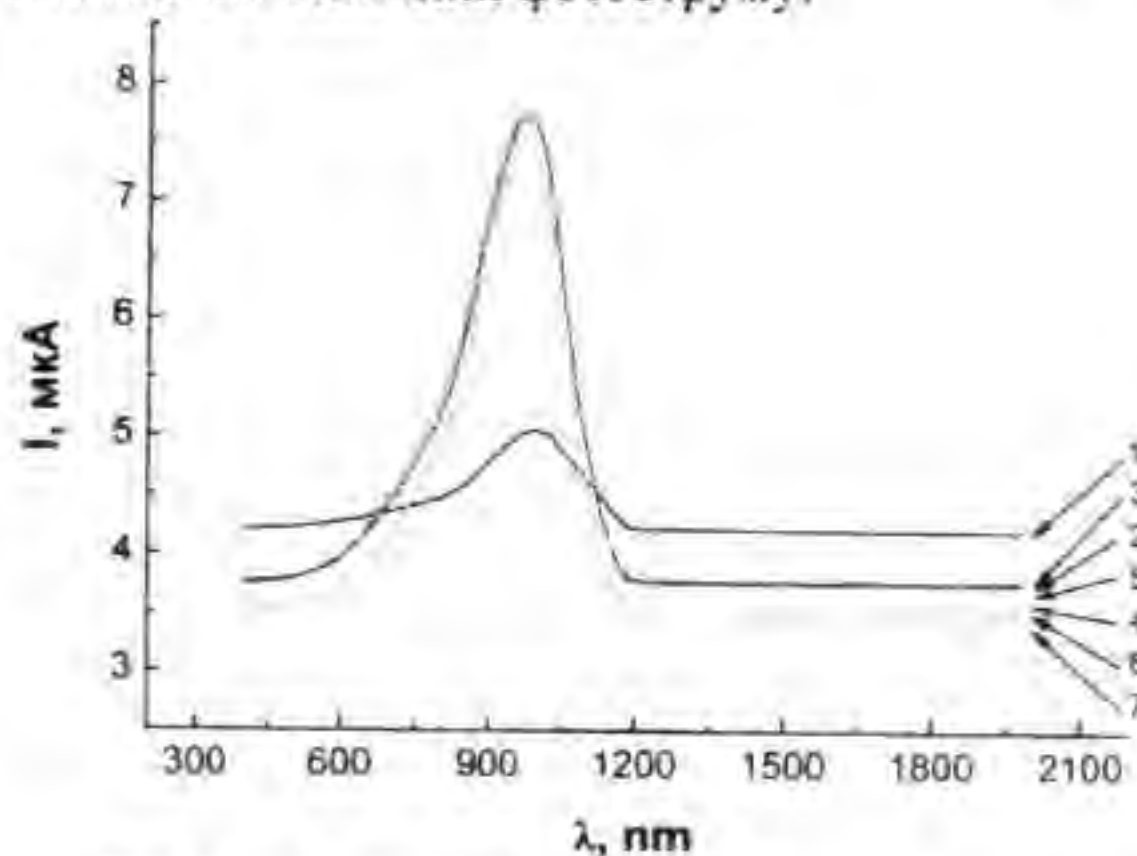
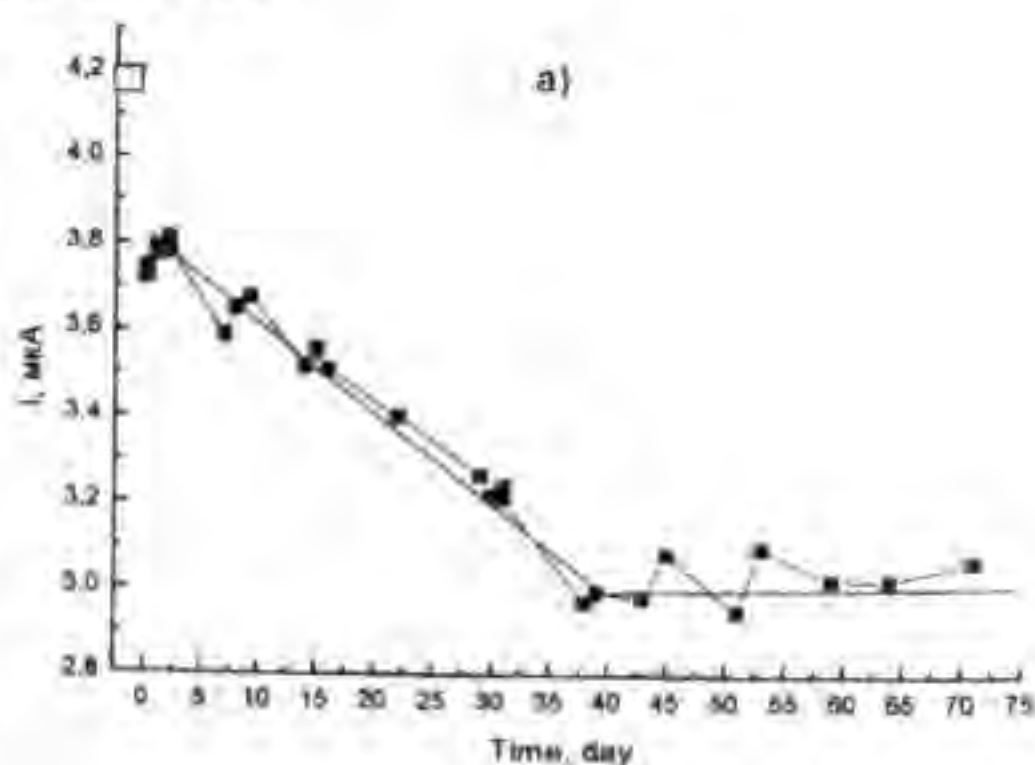


Рис.1. Спектри фотопровідності зразків кремнію: 1 - спектр вихідного (контрольного) зразка кремнію; 2 - спектр зразка кремнію, який пройшов МО, який був знятий відразу після завершення МО; 3-7 - спектри зразків кремнію, які пройшли МО, які були зняті через певний час після завершення МО: 3 - через добу після завершення МО; 4 - через 7 діб; 5 - через 9 діб; 6 - через 14 діб; 7- через 22 доби.

Релаксаційні залежності темного струму та фотоструму, отримані на зразках кремнію, що пройшли магнітну обробку, представлені на рис.2 (а, б).



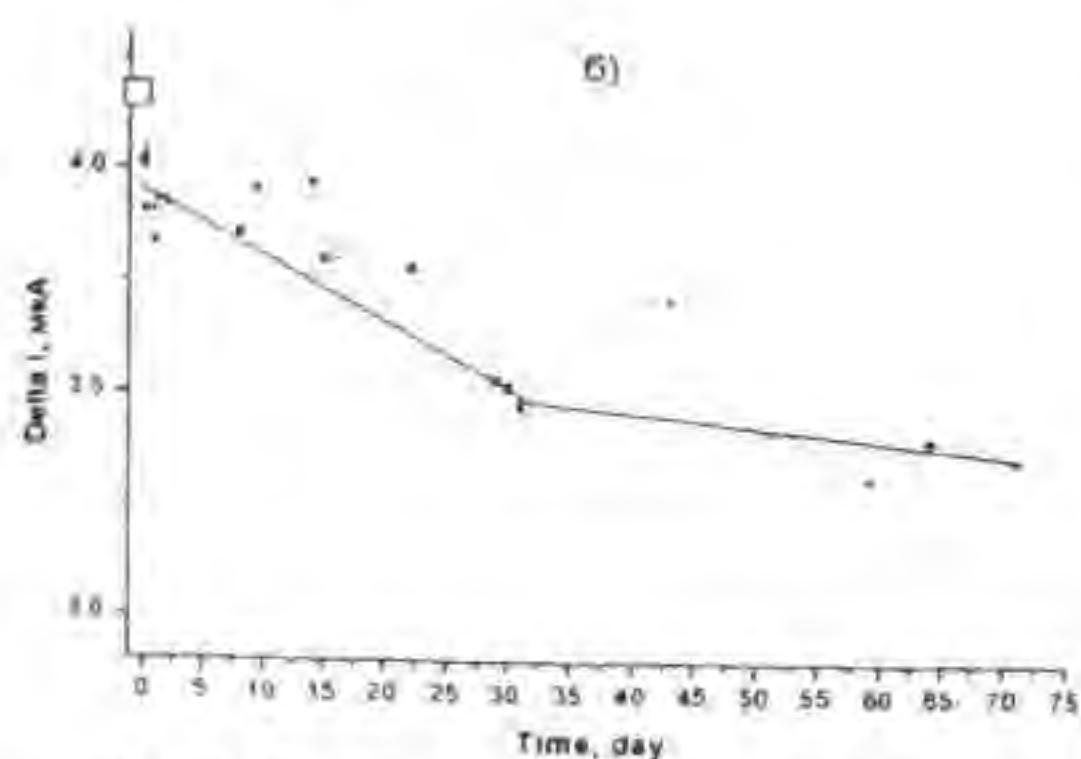


Рис.2. Залежність темного струму (а) і фотоструму (б) від часу, що пройшов з моменту завершення МО.

Стимульований магнітним полем ефект зменшення темного струму, що спостерігався в даній роботі, добре корелює з ефектом збільшення електроопору в результаті магнітного впливу, встановленим нами в [13]. Ці два магніточутливі ефекти можуть бути пов'язані з дією механізмів, суть яких полягає в наступному.

Згідно існуючим у літературі модельним уявленням [2,3,8-10] вплив МП на слабомагнітні матеріали приводить до спін-залежних процесів розпаду хімічних зв'язків у структурних нанокластерах та до інтенсифікації міждефектних твердотільних реакцій. Базуючись на цих уявленнях можна висловити наступне припущення. Зменшення темного струму в результаті МО може бути пов'язане з пасивацією у ході міждефектних реакцій електрично активних зв'язків у кремнії воднем. При цьому водень, що пасивує донорні та акцепторні зв'язки, утворюється в результаті магнітостимульованого спін-залежного процесу розпаду існуючих у кремнії силосанових комплексів (Si-OH) і гідроксильних груп (OH). Нейтралізація електрично активних зв'язків, що відбувається в кремнії в результаті протікання зазначених міждефектних реакцій, обумовлює, встановлений нами в [13], ефект збільшення в магнітному полі поверхневого електроопору та ефект зменшення темного струму після МО, який спостерігається у даній роботі. Як відомо, однією з основних причин зміни ФП є зміна концентрації пасток для неосновних носіїв. Не виключено, що нейтралізація при магнітній дії електрично активних зв'язків приводить до зменшення концентрації пасток для неосновних носіїв і, відповідно, приводить до росту ФП.

Можна також припустити, що дія МП приводить до розриву не тільки хімічних зв'язків і розпаду структурних нанокластерів, але й здатна «розвалити» екситони, властиві структурі «кремній-окисел кремнію» (Si-SiO₂). Слід зазначити, що окисел кремнію завжди присутній на поверхні кремнію у вигляді природної окисної плівки.

Грунтуючись на викладених в [15] модельних уявленнях, можна припустити, що стимульований магнітною дією спін-залежний процес дисоціації екситонів приводить до появи значної додаткової кількості вільних носіїв заряду (електронів і дірок). Останнє, власне, і спричиняє зростання фотоструму після МО.

Як ми вже відзначали, у порівнянні з початковими ефектами зміни темного струму і фотоструму, які спостерігалися відразу після завершення МО, згодом мало місце гасіння виявлених ефектів.

Релаксація темного струму, що спостерігається експериментально, на наш погляд, спричинена дією наступних факторів. Як відомо з літературних джерел [5], МО викликає посилення процесів адсорбції на поверхні кристалів Si. Останнє пов'язується підвищенням хімічної активності поверхні в магнітному полі. Одержані в нашій роботі результати узгоджуються з зазначеними літературними даними. Так, нами було виявлено, що за рахунок адсорбції на магнітоактивованій поверхні протікають альтернативні до процесів розпаду структурних нанокластерів окислювально-відновні процеси. Наслідком перебігу цих процесів є не лише відновлення диссоційованого в процесі МО «початкового» окисного покриття, але й формування «нового» окисного шару. Товщина окисного шару, що формується на магнітоактивованій поверхні Si, як показали проведені нами еліпсометричні дослідження, подвоюється в порівнянні з товщиною окисного шару, що був присутній на поверхні Si до початку магнітної обробки. Додаткова пасивація електрично активних зв'язків продуктами адсорбції і формування за рахунок адсорбції на магнітоактивованій поверхні більшого по величині шару діелектрика (окисного покриття) і приводить до того, що при збільшенні проміжку часу, що пройшов після завершення МО, відбувається зниження темного струму.

Поступова релаксація фотоструму з часом, що минув після МО, може бути пояснена

наступним. Цілком імовірно, що певна частина дірок і електронів, які утворились в результаті «розвалу» екситонів, і поява яких привела до початкового різкого зростання фотоструму можуть з часом рекомбінувати як між собою, так і на домішкових заряджених центрах. Останнє приведе до зменшення концентрації носіїв і до поступового зменшення фотоструму.

Не виключено також, що певний вплив на поступове гасіння ФП здійснює зміна зарядового стану пасток для неосновних носіїв, яка відбувається при багаторазово повторюваних вимірах спектрів ФП.

Висновки

Встановлені в роботі зміни темнового струму і фотоструму в кристалах Si, що пройшли МО, можуть бути обумовлені стимульованими магнітним полем спін-залежними процесами розпаду хімічних зв'язків у структурних нанокластерах, а також процесами дисоціації екситонів й утворенням пари незв'язаних носіїв струму. Зазначені процеси приводять до зміни зарядового стану пасток, концентрації і часу життя носіїв, і, в остаточному підсумку, викликають появу особливостей у спектрах ФП кристалів кремнію, що піддавалися впливу слабого постійного магнітного поля.

Список використаних джерел

1. Альшиц В. И., Даринская Е. В., Перекалина Т. М., Урусовская А. А. // ФТТ. – 1987. – Т.29, № 2. – С.467-471.
2. Молоцкий М. И. // ФТТ. – 1991. – Т.33, №10. – С.3112.
3. Левин М. Н., Зон Б. А. // ЖЭТФ. – 1997. – Т.111, №4. – С.1373-1397.
4. Левин М. Н., Семенов В. Н., Наумов А. В. // ПЖТФ. – 2001. – Т.27, №7. – С. 35-40.
5. Левин М. Н., Татаринцев А. В., Косцов О. А., Косцов А. М. // ЖТФ. – 2003. – Т.73, №10. – С.85-87.

6. Левин М. Н., Постников В. В., Палагин М. Ю. // ФТТ. – 2003. – Т.45, №3. – С.513-517.
7. Левин М. Н., Семенова Г. В., Сушкова Т. П. и др. // ФТТ. – 2003. – Т.45, №4. – С.609-612.
8. Головин Ю. И. // ФТТ. – 2004. – Т. 46, №5. – С.769-803.
9. Моргунов Р. Б. // УФН. – 2004. – Т. 174, №2. – С. 131-153.
10. Бучаченко А.Л. // ЖЭТФ. – 2007. – Т.132, №3. – С.673 - 679.
11. Макара В.А., Васильев М.А., Стебленко Л.П., Коплак О.В., Курилюк А.Н., Кобзарь Ю.Л., Наumenко С.Н. // ФТП. – 2008. – Т.42, № 9. – С.1061-1064.
12. Макара В.А., Васильев М.А., Стебленко Л.П., Коплак О.В., Курилюк А.Н., Кобзарь Ю.Л., Наumenко С.Н. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2009. – Т.10, № 1. – С.193-199.
13. Макара В.А., Стебленко Л.П., Горбань В.Ф., Коротаєв І.В., Руденко Е.М., Коплак О.В., Курилюк А.Н., Кобзарь Ю.Л., Наumenко С.Н. // Наноструктурное материаловедение. – 2009. – № 1. – С.45-51.
14. Макара В.А., Стебленко Л.П., Подолян А.О., Курилюк А.М., Кобзарь Ю.Л., Наumenко С.М. // Доповіді академії наук України. – 2008. – №10. – С.91-95.
15. Осип'ян Ю.А., Головин Ю.И., Лопатин Д.В., Моргунов Р.Б., Николаев Р.К., Шмурак С.З. // ФТТ. – 1999. – Т.41, №11. – С.2097-2099.

Надійшла до редколегії 01.09.09

Підп. до друку 12.12.2010.
Формат 70x100¹/₁₆. Папір офс.
Ум. друк. арк. 23,86. Наклад 350.
Зам. 351.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

