



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 1

—

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



15537JB

45 - чит. зал періодики та дисерт. 25.00

ВИПУСК №1 2010

Вісник Київського університету, випуск №1, 2010

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Як'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Адаменко Ірина Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-012-8

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Заторський Р.А. Операції з формальними степеневими рядами з нульовим вільним членом	7
Семенчук А.В. Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку	11
Семко Н.Н., Яровая О.А. О некотором расширении класса метатамилтоновых групп	17

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Гречко В.І., Гречко А.Л. Застосування одного узагальнення методу Ньютона-Канторовича для розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь	25
Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Завгородній А.В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої жорстко защемленої тришарової циліндричної панелі	29
Крєневич А.П., Ямненко Р.Є. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь з нелінійною правою частиною	33
Острик В.І., Щокотова О.М. Гладкий контакт жорсткого диска з пружним клином	37

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Буй Д.Б., Поляков С.А. Композиційна семантика рекурсивних запитів в SQL-подібних мовах	45
Буй Д.Б., Богатирьова Ю.О. Сучасний стан теорії мультимножин	57
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах тепло-солепереносу та руху суспензії в області контактного розмиву	59
Доценко С.І. Задача Джонсона з випадковими часами виконання робіт	65
Зінько П.М., Чабан А.В. Математична модель лінійного вузла електричного навантаження	73
Іванніков Є.Ю. Послуга використання ресурсів для захищеної ОС на базі GNU/Linux	76
Каленський А. А. Цифрові підписи від імені групи	84
Касьянов А.А., Лебедев Є.О., Чечельницький О.А. Асимптотичні властивості багатоканальної мережі з двовимірним пуассонівським входним потоком вимог	90
Кузьмін А.В. Про один алгоритм моделювання розповсюдження поверхневих хвиль у двошаровій ідеальній рідині	94
Кулага А.А. Схеми цифрового підпису і шифрування на основі мультилінійних відображень	100
Лукашів Т.О. Про експоненціальну стійкість в середньому квадратичному розв'язків лінійних динамічних систем випадкової структури з параметричними збуреннями	106
Ляшенко В.П., Кобильська О.Б. Розрахунок температурного поля тепло- випромінюючого тонкостінного циліндра	114
Маринич О.В. Асимптотична поведінка часу поглинання спадних ланцюгів Маркова	118
Матвієнко В.Т., Гаращенко Д.Ф. Фокусування пучка заряджених частинок на основі методу структурно-параметричної оптимізації	122
Машенко С.О., Бровченко С.О. Рівновага за набором цілей гравців	126
Парфірова Т.С. Про зведення послідовно-паралельних композиційних програм до чисто послідовного виду	132
Петунін Ю.І., Ключин Д.А., Голубєва К.М. Комп'ютерна цитогенетична діагностика раку молочної залози та фіброаденоматозу на підставі площі ядер букального епітелію	138
Стешенко Г.М. Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами	144
Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Про матричні моделі для чисельного аналізу параметричної чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору	152

Шкуліпа О.В., Шейман Б.С., Рубльов Б.В. Застосування дискримінантного аналізу для визначення етіологічного чинника токсемії у хворого	158
Шушарін Ю.В. Система лінійних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками рішень	162

РАДІОФІЗИКА

Анісімов І.О. До визначення та інтерпретації швидкості біжучого фронту (на прикладі хвилі запалювання)	167
Василенко А.О., Слободянюк Д.В., Коваленко А.В. Фрактальне кодування аудіо сигналів	170
Льченко Л.Г., Льченко В.В., Лобанов В.В. Вплив близько розташованого металу на формування області просторового заряду в напівпровіднику	174
Недубалюк О.А., Ольшевський С.В., Черняк В.Я., Ломонос О.І., Соломенко Ок.В., Шихт І.Г. Розряд в плазмово-рідинній системі із зворотно вихровим потоком типу торнадо	180
Овечко В.С. Вейвлет –аналіз часової структури електромагнітних сигналів на базі їх розкладу в ряд елементарних хвильових пакетів	184
Сохацький В.П., Шулімов Ю.Г. Оцінка величини порогового струму, що локально перемагнічує феромагнітний шар	187
Фелінський С. Г., Коротков П.А., Фелінський Г. С. Критерій існування області від'ємної діелектричної проникності на частотах полярних коливань в кристалах	191

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д. Ефекти нелінійної оптики в просторово неоднорідному середовищі поблизу критичної точки	199
Василюк С.В., Яшук В.М., Качковський О.Д., Вінійчук О.О., Рябицький О.Б. Форма та локалізація зарядових хвиль в йонних поліметинових системах	203
Вовченко Л.Л., Овсієнко І.В., Мацуї Л.Ю., Склярів Ю.П. Міжстадійні переходи в інтеркальованих сполуках графіту акцепторного типу	209
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Термо – е.р.с. вуглецевих порошків	215
Пророк В.В. Фактори, що регулюють використання рослиною високо- та низькоселективного каналів надходження цезію та калію	219
Руденко О.П., Хорольський О.В., Гетало А.М., Саєнко О.В. Реологічні та оптичні властивості 2,2,3,3-тетрафторпропанолу-1	223
Терентьєва Ю.Г., Стукаленко В.В. Метод фазового контрасту	227

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.1

Р.А. Заторський, к.ф.-м.н., доцент

Операції з формальними степеневими рядами з нульовим вільним членом

Розглядаються формальні операції з формальними степеневими рядами з нульовим вільним членом.

Ключові слова: формальний степневий ряд, парадетермінант, паракерманент.

E-mails: romazz@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз-мат. наук, професор Кириченко В.В.

R.A. Zatorsky, PhD, Assistant Professor

Operations with formal power series with zero constant term

Formal Operations with formal power series with zero constant term are considered.

Key Words: formal power series, paradermi-nant, parapermanent.

1 Вступ

Суперпозиція та обернення формальних степеневих рядів, як правило, пов'язані із певними труднощами. Відомо ряд рекурсивних алгоритмів [1], які дозволяють розв'язати ці задачі. Дослідник, який виконує ці операції вручну може скористатися спеціальними довідковими таблицями [2], в яких наведено кілька перших коефіцієнтів оберненого ряду чи ряду, що є результатом суперпозиції двох формальних степеневих рядів. Застосування апарату парадетермінантів трикутних матриць [3] дозволяє знайти явні формули для обчислення таких коефіцієнтів. При цьому алгоритм знаходження значень коефіцієнтів залишається рекурсивним і його складність не зростає.

Дана стаття є продовженням дослідження операцій з формальними степеневими рядами, розпочатого в [4].

2 Основні результати

1. Піднесення до степеня. Нехай задано деякий формальний степневий ряд з нульовим вільним членом

$$a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, \quad (1)$$

де a_i , $i = 1, 2, \dots$ — деякі, взагалі кажучи, комплексні числа. Нижче ми будемо ігнорувати питання збіжності рядів. При цьому $a(z)$ у рівності (1) будемо вважати лише позначенням цього ряду.

При піднесенні ряду (1) до деякого дійсного степеня користуються широковідомим методом

Л. Ойлера, згідно з яким, після диференціювання обидвох частин рівності $a(z)^p = x(z) = \sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i$ дістають рівність $p(a(z))^{p-1} \frac{d}{dz} a(z) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i \right)$. Перемножимо обидві частини отриманої рівності на ряд $a(z)$:

$$p \left(\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i \right) = \left(\sum_{i=p-1}^{\infty} (i+1) c_{i+1} z^i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right)$$

та зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях z . При цьому отримаємо рекурентне співвідношення для відшукування коефіцієнтів шуканого формального степеневих ряду $x(z)$:

$$c_{p+i} = \frac{p-i+1}{i} \frac{a_2}{a_1} c_{p+i-1} + \frac{2p-i+2}{i} \frac{a_3}{a_1} c_{p+i-2} + \dots + \frac{(i-1)p-1}{i} \frac{a_i}{a_1} c_{p+1} + p \frac{a_{i+1}}{a_1} c_p, \quad (2)$$

тут $i = 1, 2, \dots$, $c_p = a_1^p$.

Теорема 2.1. Нехай $\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right)^p$, $p \in \mathbb{N}$, тоді $c_{p+i} = a_1^p \times$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{p a_2}{a_1} & \frac{p-1}{2} \frac{a_2}{a_1} & \frac{p-2}{3} \frac{a_2}{a_1} & \dots & \frac{p-i+1}{i} \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{p-1}{2} \frac{a_3}{a_1} & \frac{p-2}{2} \frac{a_3}{a_1} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{3p-1}{2p-1} \frac{a_4}{a_1} & \frac{2p-1}{p-2} \frac{a_4}{a_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{ip}{(i-1)p-1} \frac{a_{i+1}}{a_1} & \frac{(i-1)p-1}{(i-2)p-2} \frac{a_i}{a_1} & \frac{(i-2)p-2}{(i-3)p-3} \frac{a_{i-1}}{a_1} & \dots & \frac{p-i+1}{i} \frac{a_2}{a_1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= a_1^p \cdot \left[\frac{(t-j+1)p-j+1}{(t-j)p - (-1)^{\delta_{tj}} j} \frac{a_{t-j+2}}{a_1} \right]_{1 \leq j \leq t \leq i}$$

де $c_p = a_1^p$.

Доведення. Розкладемо паракерманент з правої частини рівності (3) за елементами останнього рядка, тоді отримаємо рекурентне співвідношення (2). $\square$

Справедлива також наступна

Теорема 2.2. $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)^p =$

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \right) z^n, \quad (4)$$

тут p – деяке натуральне число.

Доведення. Коефіцієнти при z^n , очевидно, мають вигляд $m \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$, тут m – деяке натуральне число. Причому виконуються рівності $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = p$. Знайдемо коефіцієнт α біля z^n , використовуючи твердження про те, що число всіх впорядкування мультимножини із первинною специфікацією $[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}]$ дорівнює

$$\frac{(k_1! + k_2! + \dots + k_n!)}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Отже,

$$\alpha = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}.$$

Твердження 1. Справедливі тотожності:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} = \\ & = a_1^p \cdot \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j} \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-p} \end{aligned} \quad (5)$$

Доведення. Цей наслідок одразу випливає із теорем 2.1 та 2.2. $\square$

При $a_i = 1$, $a_i = \frac{1}{i}$, $a_i = \frac{1}{i!}$, $i = 1, 2, \dots$ тотожність (5) прийме відповідно вигляд

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} =$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-p} \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! 1^{\lambda_1} \lambda_2! 2^{\lambda_2} \dots \lambda_n! n^{\lambda_n}} = \\ & = \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j} \cdot \frac{i-j+1}{i-j} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-p} \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1! (1!)^{\lambda_1} \lambda_2! (2!)^{\lambda_2} \dots \lambda_n! (n!)^{\lambda_n}} = \\ & = \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j} \cdot \frac{(i-j+1)!}{(i-j)!} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-p} \end{aligned}$$

Наслідок 1. Справедливі тотожності:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\infty} z^i \right)^p = \\ & \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} z^n, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} z^i \right)^p = \\ & \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)!}{\lambda_1! 1^{\lambda_1} \lambda_2! 2^{\lambda_2} \dots \lambda_n! n^{\lambda_n}} z^n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} z^i \right)^p = \\ & \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)!}{\lambda_1! 1!^{\lambda_1} \lambda_2! 2!^{\lambda_2} \dots \lambda_n! n!^{\lambda_n}} z^n, \end{aligned} \quad (8)$$

Доведення. Тотожності (6) – (8) випливають із тотожності (4) та теореми 2.2 відповідно при $a_i = 1$, $a_i = \frac{1}{i}$, $a_i = \frac{1}{i!}$, $i = 1, 2, \dots$. $\square$

2. Суперпозиція рядів. Нехай задано два формальні степеневі ряди $a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ і $b(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$. Під суперпозицією формальних степеневих рядів $a(z)$ і $b(z)$ розуміють формальний степеневий ряд

$$c(z) = a \circ b = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j \right)^i.$$

Для формальних степеневих рядів з нульовим вільним членом, можливі операції суперпозиції та обернення.

Теорема 2.3. (Теорема про суперпозицію рядів) Якщо формальний степеневий ряд $c(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$ є результатом суперпозиції формальних степеневих рядів $a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ і $b(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$, то справедливі рівності:

$$c_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ b_2 & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_i & b_{i-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix} =$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_i) \text{per} Z(b_1, b_2, \dots, b_i).$$

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає із твердження 2.2 та означення скалярного добутку вектора на паракерманент [3]. Справді

$$c(z) = a(b(z)) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p (b(z))^p =$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p \sum_{n=p}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=p}} \frac{p! \cdot b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \dots b_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \right) \cdot z^n =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^i a_p \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+i\lambda_i=i, \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i=p}} \frac{p! \cdot b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \dots b_i^{\lambda_i}}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_i!} \right) \cdot z^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ b_2 & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_i & b_{i-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix} \cdot z^i.$$

□

3. Обернення формальних рядів. Обернення формальних степеневих рядів можна здійснити при допомозі ряду Лагранжа

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (f'(x) \varphi^n(x)) \Big|_{x=0},$$

де $y = \frac{x}{\varphi(x)}$.

Справді, нехай задано ряд

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Знайдемо обернений до нього ряд

$$x = y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots$$

Позаяк

$$\frac{x}{y} = (1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{-1} = 1 + b_2 y + b_3 y^2 + \dots,$$

то

$$f(x) = \varphi(x) = (1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{-1}$$

і ряд Лагранжа прийме вигляд

$$(1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{-1} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (f'(x) \varphi^n(x)) \Big|_{x=0} =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\varphi'(x) \varphi^n(x)) \Big|_{x=0} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (\varphi^{n+1}(x)) \Big|_{x=0}.$$

Отже,

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\varphi^n(x)) \Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] (1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{-n}.$$

Але $[x^{n-1}] (1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots)^{-n} =$

$$(-1)^{n-1} \left\langle \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right\rangle_{1 \leq j \leq i \leq n-1} =$$

$$\left[(-1)^{i,j} \cdot \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-1},$$

де $a_1 = 1$.

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 2.4. Нехай задано два формальні степеневі ряди

$$a(x) = y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$b(y) = x = y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots,$$

тоді справедливі рівності

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\langle \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right\rangle_{1 \leq j \leq i \leq n-1} =$$

$$\frac{1}{n} \left[(-1)^{i,j} \cdot \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right]_{1 \leq j \leq i \leq n-1},$$

де $a_1 = 1$.

У [5], на стор. 150, Ріордан виводить формули для коефіцієнтів взаємно обернених рядів $y = x(1 - A_1x - A_2x^2 - \dots)$, $x = y(1 + B_1y + B_2y^2 + \dots)$. Вони мають вигляд

$$B_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{1}{n+1} \binom{n+k}{k} \frac{k! \cdot A_1^{k_1} \cdot \dots \cdot A_n^{k_n}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}, \quad (9)$$

$$A_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{(-1)^k}{n+1} \binom{n+k}{k} \frac{k! \cdot B_1^{k_1} \cdot \dots \cdot B_n^{k_n}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!},$$

де $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. При цьому він, використовуючи ряд Лагранжа та символічне числення Бліссара,¹ виводить спочатку формулу для коефіцієнтів взаємно обернених експоненціальних рядів

$$y = x \cdot \exp(ax), \quad a^n \equiv a_n,$$

$$x = y \cdot \exp(by), \quad b^n \equiv b_n.$$

Вона має вигляд

$$b_n = \frac{1}{n+1} B_n(fa_1, \dots, fa_n),$$

де

$$f^k \equiv f_k = (-1)^k (n+k)(n+k-1) \cdot \dots \cdot (n+1) a^{-n-k-1},$$

а B_n — многочлен Белла [6]. Отже,

$$(n+1)b_n = B_n(fa_1, \dots, fa_n) =$$

$$\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} (-1)^k \frac{n! \cdot (n+k)^k}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}.$$

А в термінах скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці вона отримає вигляд

$$(-1)^n (n+1)b_n = \left(\frac{(n+1)!}{1!}, \frac{(n+2)!}{2!}, \dots, \frac{(2n)!}{n!}\right) \text{ddet} Z\left(\frac{a_1}{1!}, \frac{a_2}{2!}, \dots, \frac{a_n}{n!}\right). \quad (10)$$

Враховуючи те, що коефіцієнти експоненційного та звичайного степеневих рядів пов'язані між собою співвідношеннями $a_i = i!A_i$, $b_i = i!B_i$, формула (10) запишеться у вигляді формули (9).

Тепер, з врахуванням теореми 2.3 та теореми 2.4, стає очевидною наступна

Теорема 2.5. Нехай $b(x)$ і $a(x)$ — ряди із теореми 2.4 і $\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \cdot x^i$, причому $a_1 = b_1 = \omega_1 = 1$, тоді із рівностей

$$\omega(b(x)) = a(x), \quad b(\omega(x)) = a(x)$$

випливають відповідно рівності

$$\omega_n = (1, a_2, \dots, a_n) \cdot \text{ppreg}(Z(1, c_2, \dots, c_n)),$$

$$\omega_n = (1, c_2, \dots, c_n) \cdot \text{ppreg}(Z(1, a_2, \dots, a_n)),$$

де

$$mc_m =$$

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)m + (j-1)}{(i-j)m + j} \cdot \frac{b_{i-j+2}}{b_{i-j+1}} \right]_{1 \leq j \leq i \leq m-1},$$

причому $m = 2, 3, \dots, n$.

Список використаних джерел

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, т.2: Получисленные алгоритмы. Пер. с англ. — М.:Мир, 1978.
2. Справочник по специальным функциям, Пер. с англ. М.:Наука, 1979.— 832 с.
3. Zatorsky R.A., *Theory of paraderminants and its applications* Algebra and Diskrete Mathematics №1, 2007, pp. 109-138.
4. Заторський Р.А. Операції з формальними степеневими рядами з ненульовим вільним членом, Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. — 2008. — Вип.1. с. 36-39.
5. Ріордан Д. Комбинаторные тождества — М.:Наука, 1982. — 256 с.
6. Заторський Р.А., Парадетермінанти і многочлени розбиттів.//УМЖ. — 2008., т. 60, №11. — с. 1457-1469.

Надійшла до редколегії 05.11.2009

¹Згідно з цим численням послідовність $a_0, a_1, \dots$ замінюється послідовністю $a^0, a^1, \dots$, причому верхні індекси в процесі всіх формальних операцій розглядаються як звичайні показники степеня. Після завершення всіх операцій вони знову вважаються індексами. В цих позначеннях вираз $\exp(ax)$, $a^n \equiv a_n$ є скороченим записом для суми

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

УДК 519.21

А.В. Семенчук, аспірант

**Алгоритм обчислення раціональних
вкорочень періодичного рекурентного
дроби 3-го порядку**

Розглядаються раціональні вкорочення періодичного рекурентного дроби 3-го порядку.

Ключові слова: періодичний рекурентний дріб 3-го порядку, раціональні вкорочення періодичного рекурентного дроби 3-го порядку, парперманент.

E-mails: gomazz@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз-мат. наук, професор Кириченко В.В.

1 Вступ

Узагальненням ланцюгових дробів присвячено чимало праць вітчизняних та зарубіжних авторів [1]. Важливим узагальненням ланцюгових дробів є неперервні дроби вищих порядків, які запропонував Е. Фюрстенау [2] і які при $k = 2$ співпадають із ланцюговими дробами. У [2] запропоновано алгоритм обчислення таких дробів. Однак, періодичні неперервні дроби k -го порядку зображують ірраціональності $(k + 1)$ -го, а не k -го порядку. Крім цього, зображення неперервних дробів вищого порядку виразами, які запропонував Е. Фюрстенау не зручне для практичних потреб та теоретичних досліджень. Тому в статті використовується нове зображення таких дробів та модифікований алгоритм, який запропонував Заторський Р.А. та назвав алгоритмом Фюрстенау. Вирази Фюрстенау замінено рекурентними дробами k -го порядку, раціональні вкорочення яких є відношенням двох парперманентів трикутних матриць.

В даній статті, використовуючи методику запропоновану в [3], побудовано ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів 3-го порядку. Актуальність запропонованого алгоритму виправдовується тим, що раціональні вкорочення таких дробів слугують раціональними наближеннями кубічних ірраціональностей.

A.V. Semenchuk, aspirant

**Algorithms of calculations of rational
estimations of recurrence periodical
fraction of 3-order**

Examining of rational estimations of recurrence periodical fraction of 3-order.

Key Words: recurrence periodical fraction of 3-order, rational estimations of recurrence periodical fraction of 3-order, parapermanent.

2 Допоміжні поняття і твердження

Розглянемо основні поняття теорії парадетермінантів трикутних матриць [4]. Нехай задано деяке числове поле K .

Означення 2.1. Трикутну таблицю чисел, які належать полю K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1)$$

називають трикутною матрицею, а число n — її порядком.

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) поставимо у відповідність $(i - j + 1)$ елементів a_{ik} , $k = j, \dots, i$, які називають похідними елементами матриці, породженими ключовим елементом a_{ij} .

Добуток всіх похідних елементів породжених елементом a_{ij} позначають через $\{a_{ij}\}$ і називають факторіальним добутком ключового елемента a_{ij} , тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}.$$

Означення 2.2. Набір ключових елементів матриці (1) називають нормальним набором цієї матриці, якщо вони породжують множину похідних елементів потужності n , кожен два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.

Якщо $\mathbb{P}(n)$ – множина всіх упорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки, то відомо що

$$|\mathbb{P}(n)| = 2^{n-1}$$

Між нормальними наборами ключових елементів матриці (1) і упорядкованими розбиттями натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{P}(n) \iff (aN_1, N_0 + 1, aN_2, N_1 + 1, \dots, aN_r, N_{r-1} + 1),$$

де $N_0 = 0$, $N_s = \sum_{i=1}^s n_i$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Означення 2.3. Параперманентом трикутної матриці (1) називають число

$$\text{pper}(A) = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right]_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s)j(s)}\},$$

де $a_{i(s)j(s)}$ – ключовий елемент, який відповідає s -тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

Означення 2.4. Кожному елементу a_{ij} заданої трикутної матриці (1) поставимо у відповідність трикутну матрицю з цим елементом у лівому нижньому куті, яку називають рогом заданої трикутної матриці і позначають через $R_{ij}(A)$.

Очевидно, що $\text{rig } R_{ij}(A) \in$ трикутною матрицею $(i - j + 1)$ -го порядку, причому йому належать тільки ті елементи a_{rs} трикутної матриці (1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leq s \leq r \leq i$.

Вважають, що

$$\text{pper}(R_{01}(A)) = \text{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Параперманенти, як і детермінанти можна розкласти за елементами першого стовпця чи останнього рядка відповідно за формулами:

$$\text{pper}(A) = \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\} \cdot \text{pper}(R_{n,r+1}),$$

$$\text{pper}(A) = \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} \cdot \text{pper}(R_{s-1,1}).$$

3 Означення рекурентних дробів

Наведемо коротенькі відомості про рекурентні дробі k -го порядку, запропоновані Заторським Р.А.

Нехай задано два параперманенти трикутних матриць

$$P_n =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{10} & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{a_{k,k-1}}{a_{k-1,k-1}} & \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \dots & a_{1,k-1} & \\ 0 & \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \dots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} \dots a_{1n} \end{array} \right]$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, $P_{-1} = 1$ та

$$Q_n =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & & & & & \\ \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{12} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \dots & a_{1,k-1} & & \\ \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \dots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} & \dots a_{1n} \end{array} \right]$$

де $n = 1, 2, \dots$, $Q_0 = 1$.

Зважаючи на те, що параперманент Q_n є параперманентом P_n без першого стовпця, відношення цих параперманентів $\frac{P_n}{Q_n}$ позначають через

$$\frac{P_n}{Q_n} =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{10} & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{a_{k,k-1}}{a_{k-1,k-1}} & \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \dots & a_{1,k-1} & \\ 0 & \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \dots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} \dots a_{1n} \end{array} \right]$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, і називають раціональними вкороченнями рекурентного дробу k -го порядку, а границю цього відношення, якщо вона існує, при $n \rightarrow \infty$ через

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{10} & & & \\ a_{21} & a_{11} & & \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & \\ a_{22} & a_{12} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,k-1} & a_{k-1,k-1} & a_{k-2,k-1} & \dots a_{1,k-1} \\ a_{k-1,k-1} & a_{k-2,k-1} & a_{k-3,k-1} & \dots a_{2,k} \\ 0 & a_{k,k} & a_{k-1,k} & \dots a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

і називають рекурентними дробами k -го порядку.

При $k = 3$ раціональні вкорочення рекурентного дробу 3-го порядку матимуть вигляд

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[\begin{array}{c|ccc} q_0 & & & \\ p_1 & q_1 & & \\ q_1 & p_2 & q_2 & \\ p_2 & q_2 & p_3 & q_3 \\ 0 & p_3 & q_4 & q_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \frac{p_n}{p_n} \frac{q_n}{q_n} q_n \end{array} \right]_{n+1}$$

і задовольняють рекурентні рівняння

$$\begin{aligned} P_n &= q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2} + r_n P_{n-3}, \quad n=2,3,4,\dots \\ Q_n &= q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2} + r_n Q_{n-3}, \quad n=2,3,4,\dots \end{aligned} \quad (2)$$

з початковими умовами

$$P_{-1}=1, P_0=q_0, P_1=q_0 q_1 + p_1, Q_{-1}=0, Q_0=1, Q_1=q_1.$$

Означення 3.1. Рекурентний дріб 3-го порядку

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccc} q_0 & & & \\ p_1 & q_1 & & \\ q_1 & p_2 & q_2 & \\ p_2 & q_2 & p_3 & q_3 \\ 0 & p_3 & q_4 & q_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \frac{p_n}{p_n} \frac{q_n}{q_n} q_n \end{array} \right]_{\infty} \quad (3)$$

елементи якого задовольняють умови

$$\begin{aligned} P_{r+k+m} &= P_m, \quad Q_{r+k+m} = Q_m, \quad r_{r+k+m} = r_m, \\ m &= 1, 2, \dots, k, \quad r=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

називають періодичним рекурентним дробом 3-го порядку з періодом k .

За певних умов, періодичні рекурентні дробу 3-го порядку збігаються до дійсних коренів кубічного рівняння. Таким чином, рекурсії (2) дають алгоритм обчислення раціональних наближень кубічних ірраціональностей.

4 Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку

Побудуємо новий алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів 3-го порядку.

Нехай k — період рекурентного дробу, а n — порядок парамперманента його раціонального вкорочення, причому $n = sk$, $s = 1, 2, 3, \dots$.
Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1. Раціональне вкорочення

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

періодичного рекурентного дробу третього порядку (3), з періодом $k \geq 2$, елементи якого задовольняють умови (4), дорівнює значенню виразу

$$q_0 + p_1 \cdot \frac{B_{sk-1}^{s-1}}{A_{sk}^{s-1}} + r_2 \cdot \frac{C_{sk-2}^{s-1}}{A_{sk}^{s-1}}, \quad (5)$$

в якому A_{sk}^{s-1} , B_{sk-1}^{s-1} і C_{sk-2}^{s-1} визначаються із рекурентних рівностей

$$\begin{aligned} A_{sk}^{s-1} &= r_2 \varphi_{k-1} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + \\ &+ (r_1 \varphi_{k-2} + p_1 \varphi_{k-1}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \varphi_k A_{k(s-1)}^{s-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_{sk-1}^{s-1} &= r_2 \psi_{k-2} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + \\ &+ (r_1 \psi_{k-3} + p_1 \psi_{k-2}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \psi_{k-1} A_{k(s-1)}^{s-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_{sk-2}^{s-1} &= r_2 \tau_{k-3} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + \\ &+ (r_1 \tau_{k-4} + p_1 \tau_{k-3}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \tau_{k-2} A_{k(s-1)}^{s-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\varphi_k = \left[\begin{array}{c|ccc} q_1 & & & \\ p_2 & q_2 & & \\ q_2 & p_3 & q_3 & \\ p_3 & q_3 & p_4 & q_4 \\ 0 & p_4 & q_4 & q_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{q_{k-2}}{p_{k-1}} \frac{q_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{p_{k-1}}{p_{k-1}} \frac{q_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{p_{k-1}}{p_{k-1}} \frac{q_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \end{array} \right]_k \quad (9)$$

$$\psi_{k-1} = \begin{bmatrix} q_2 & & & & & \\ p_3 & q_3 & & & & \\ r_4 & p_4 & q_4 & & & \\ p_4 & q_4 & p_5 & q_5 & & \\ 0 & r_5 & p_5 & q_5 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \end{bmatrix}_{k-1} \quad (10)$$

$$\tau_{k-2} = \begin{bmatrix} q_3 & & & & & \\ p_4 & q_4 & & & & \\ r_5 & p_5 & q_5 & & & \\ p_5 & q_5 & p_6 & q_6 & & \\ 0 & r_6 & p_6 & q_6 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \end{bmatrix}_{k-2} \quad (11)$$

причому, якщо $k = 2, 3, 4$, то вважаємо, що

$$\tau_{-2} = \tau_{-1} = \psi_{-1} = 0, \quad \varphi_0 = \psi_0 = \tau_0 = 1.$$

Доведення. При $n = sk$ чисельник і знаменник n -го раціонального вкорочення періодичного рекурентного дробу третього порядку (3), з періодом $k \geq 2$, елементи якого задовольняють умови (4), відповідно мають вигляд:

$$P_{sk} =$$

$$\begin{bmatrix} q_0 & & & & & \\ p_1 & q_1 & & & & \\ r_2 & p_2 & q_2 & & & \\ p_2 & q_2 & p_3 & q_3 & & \\ 0 & r_3 & p_3 & q_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \frac{r_1}{p_1} \frac{p_1}{q_1} q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \end{bmatrix}$$

$$Q_{sk} =$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & & & & & \\ p_2 & q_2 & & & & \\ r_3 & p_3 & q_3 & & & \\ p_3 & q_3 & p_4 & q_4 & & \\ 0 & r_4 & p_4 & q_4 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \frac{r_1}{p_1} \frac{p_1}{q_1} q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \frac{r_k}{p_k} \frac{p_k}{q_k} q_k \end{bmatrix}$$

Позначимо параперманент, який утворюється із параперманента (12) в результаті викреслювання першого стовпця, через A_{sk}^s , параперманент, що утворюється в результаті викреслювання перших двох стовпців, — через B_{sk-1}^{s-1} , а параперманент, що утворюється в результаті викреслювання перших трьох стовпців, — через C_{sk-2}^{s-1} (у трьох випадках верхній індекс вказує на кількість повних періодів що містять ці параперманенти).

Розкладемо параперманент (12) за елементами першого стовпця, отримаємо рівність:

$$P_{sk} = q_0 A_{sk}^s + p_1 B_{sk-1}^{s-1} + r_2 C_{sk-2}^{s-1}. \quad (13)$$

Розкладемо параперманент A_{sk}^s за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(k+1)$, тоді отримаємо рекурсію (6). Аналогічно поступимо із параперманентами B_{sk-1}^{s-1} , і C_{sk-2}^{s-1} , розкладаючи їх відповідно за елементами таблиць $T(k)$, і $T(k-1)$. При цьому отримаємо рекурсії (7), (8).

Позаяк $Q_{sk} = A_{sk}^s$, то, враховуючи (13), робимо висновок, що раціональне вкорочення $\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ періодичного рекурентного дробу дорівнює

$$(12) \quad \frac{P_{sk}}{Q_{sk}} = \frac{q_0 A_{sk}^s + p_1 B_{sk-1}^{s-1} + r_2 C_{sk-2}^{s-1}}{A_{sk}^s} = q_0 + p_1 \frac{B_{sk-1}^{s-1}}{A_{sk}^s} + r_2 \frac{C_{sk-2}^{s-1}}{A_{sk}^s}.$$

□

Приклад 1. Нехай задано періодичний рекурентний дріб третього порядку з періодом 5, в якому

$$q_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad r_3 = 1$$

$$q_2 = 1, \quad p_3 = 1, \quad r_4 = 1$$

$$q_3 = 2, p_4 = 2, r_5 = 2$$

$$q_4 = 1, p_5 = 1, r_1 = 1$$

$$q_5 = 2, p_1 = 2, r_2 = 2$$

Даний періодичний рекурентний дріб збігається до додатного кореня $x =$

$$= \frac{1}{399} (\sqrt[3]{43517447 + 399 \cdot 146\sqrt{493053}} + \sqrt[3]{43517447 - 399 \cdot 146\sqrt{493053}} + 170) \approx 1.870718192922229 \text{ кубічного рівняння}$$

$$133x^3 - 170x^2 - 79x - 128 = 0, \quad (14)$$

два інші корені якого комплексні.

Знайдемо раціональні вкорочення (15) відповідного рекурентного дробу спочатку за допомогою рекурсії (2), а потім за алгоритмом теореми 4.1.

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[\begin{array}{c|cccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{array} \right] \quad (15)$$

При допомозі рекурсії (2) маємо:

$$\delta_1 = \frac{2}{1} = 2, \quad \delta_{10} = \frac{3300}{1764} \approx 1.870748,$$

$$\delta_2 = \frac{6}{3} = 2, \quad \delta_{11} = \frac{6280}{3357} \approx 1.870717,$$

$$\delta_3 = \frac{11}{6} \approx 1.833, \quad \delta_{12} = \frac{17624}{9421} \approx 1.8707143,$$

$$\delta_4 = \frac{32}{17} \approx 1.882, \quad \delta_{13} = \frac{33484}{17899} \approx 1.8707190,$$

$$\delta_5 = \frac{60}{32} = 1.875, \quad \delta_{14} = \frac{97152}{51933} \approx 1.870718040,$$

$$\delta_6 = \frac{114}{61} \approx 1.868, \quad \delta_{15} = \frac{181744}{97152} \approx 1.870718050,$$

$$\delta_7 = \frac{320}{171} \approx 1.8713, \quad \delta_{16} = \frac{345864}{184883} \approx 1.870718238,$$

$$\delta_8 = \frac{608}{325} \approx 1.87076, \quad \delta_{17} = \frac{970624}{518351} \approx 1.870718183,$$

$$\delta_9 = \frac{1764}{943} \approx 1.870625, \quad \delta_{18} = \frac{1844096}{985769} \approx 1.8707181905,$$

$$\delta_{19} = \frac{5350544}{2860155} \approx 1.8707181953,$$

$$\delta_{20} = \frac{10009360}{5350544} \approx 1.87071819239,$$

$$\delta_{21} = \frac{19048096}{10182237} \approx 1.87071819286,$$

$$\delta_{22} = \frac{53456096}{28575173} \approx 1.87071819302,$$

$$\delta_{23} = \frac{101561648}{54290191} \approx 1.87071819290,$$

$$\delta_{24} = \frac{294675584}{157520029} \approx 1.8707181929226,$$

$$\delta_{25} = \frac{551254976}{294675584} \approx 1.8707181929263,$$

$$\delta_{26} = \frac{1049053856}{560775995} \approx 1.8707181929212,$$

$$\delta_{27} = \frac{2944038272}{1573747603} \approx 1.87071819292232,$$

$$\delta_{28} = \frac{5593400960}{2989975177} \approx 1.87071819292230,$$

$$\delta_{29} = \frac{16228947904}{8675249947} \approx 1.87071819292217,$$

$$\delta_{30} = \frac{30359788096}{16228947904} \approx 1.87071819292223.$$

Для обчислення 30-го раціонального вкорочення при допомозі рекурсії (2) потрібно виконати 178 операцій множення.

Проведемо аналогічні обчислення при допомозі алгоритму теореми 4.1.

Обчислимо $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ із рівностей (9), (10), (11):

$$\varphi_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \right] = 32, \quad \varphi_4 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] = 17,$$

$$\varphi_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \right] = 6, \quad \psi_4 = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \right] = 22,$$

$$\psi_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] = 12, \quad \psi_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ 2 & 1 & \end{array} \right] = 4,$$

$$\tau_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \right] = 6, \quad \tau_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \end{array} \right] = 3, \quad \tau_1 = 1.$$

Отже, рекурсії (6), (7), (8) матимуть відповідно вигляд:

$$A_{5s}^s = 17C_{5s-7}^{s-2} + 29B_{5s-6}^{s-2} + 32A_{5s-5}^{s-1},$$

$$B_{5s-1}^{s-1} = 12C_{5s-7}^{s-2} + 20B_{5s-6}^{s-2} + 22A_{5s-5}^{s-1},$$

$$C_{5s-2}^{s-1} = 3C_{5s-7}^{s-2} + 5B_{5s-6}^{s-2} + 6A_{5s-5}^{s-1}.$$

s -те наближення до значення заданого рекурентного дробу, за алгоритмом теореми 4.1 має вигляд

$$\gamma_s = 1 + \frac{B_{5s-1}^{s-1}}{A_{5s}^s} + \frac{C_{5s-2}^{s-1}}{A_{5s}^s}.$$

Оскільки,

$$C_3^0 = \tau_3 = 6, B_4^0 = \psi_4 = 22, A_5^1 = \varphi_5 = 32,$$

то

$$\gamma_1 = \frac{60}{32} = 1.875, \gamma_2 = \frac{3300}{1764} \approx 1.870748,$$

$$\gamma_3 = \frac{181744}{97152} \approx 1.87071805,$$

$$\gamma_4 = \frac{10009360}{5350544} \approx 1.87071819239,$$

$$\gamma_5 = \frac{551254976}{294675584} \approx 1.8707181929263,$$

$$\gamma_6 = \frac{30359788096}{16228947904} \approx 1.87071819292223.$$

Для знаходження 6-го наближення до кореня кубічного рівняння (14), яке співпадає із значенням 30-го раціонального вкорочення δ_{30} , необхідно виконати 88 операцій множення.

Таким чином, з даного прикладу видно, що s -те наближення γ_s , знайдене при допомозі алгоритму теореми 4.1 співпадає з $(5s)$ -им наближенням δ_{5s} , знайдене за алгоритмом (2). При цьому ми отримали значну економію в кількості операцій.

Порівняємо кількості операцій необхідних для відшукування значення n -го раціонального вкорочення за обома наведеними вище алгоритмами.

5 Порівняння кількості операцій

Легко бачити, що для обчислення n -го раціонального вкорочення періодичного рекурентного дробу 3-го порядку за допомогою рекурсії (2) потрібно виконати приблизно $6n$ операцій множення.

У роботі [5] запропоновано алгоритм, згідно з яким, для обчислення значення парадетермінанта n -го порядку необхідно виконати $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ операцій множення. Тому, для обчислення значень $\varphi_k, \varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}, \psi_{k-1}, \psi_{k-2}, \psi_{k-3}, \tau_{k-2}, \tau_{k-3}, \tau_{k-4}$, необхідно виконати приблизно $27k$ операцій множення. Для обчислення $A_{sk}^s, B_{sk-1}^{s-1}, C_{sk-2}^{s-1}$, необхідно виконати приблизно $\frac{9n}{k}$ операцій множення. Таким чином, для обчислення значення n -го раціонального вкорочення за алгоритмом теореми 4.1 необхідно виконати приблизно $\frac{9n+27k^2}{k}$ операцій множення.

Отже, при великих періодах рекурентних дробів запропонований алгоритм дає значну економію в кількості операцій множення.

Список використаних джерел

1. Боднар Д.І. Багатовимірні узагальнення неперервних дробів, Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Vol. 46, no.3. – С. 32-39.
2. Fursthenau E. *Über Kettenbrüche höherer Ordnung* // *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. – 1876. – S. 133-135.
3. Заторський Р.А. Неперервні дроби, К-многочлени і парадетермінанти, Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – no.4. – С. 12-21.
4. Zatorsky R.A. *Theory of paraderminants and its applications*, Algebra and Diskrete Mathematics – 2007. – no.1. – P. 109-138.
5. Ганюшкін О.Г., Заторський Р.А., Ліщинський І.І. До паравизначників і парадетермінантів, Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – no.1. – С. 35-41.

Надійшла до редколегії 10.10.2009

УДК 512.544

Николай Н. Семко
Оксана А. Яровая

О некотором расширении класса метатаг-
мильтоновых групп

Вивчаються деякі типи груп, у яких усі під-
групи або нормальні, або мають черніковський
коммутант.

Ключові слова: група, нормальна підгрупа,
черніковський коммутант.

E-mail: n_semko@mail.ru

Статью представил доктор ф.-м. наук, профессор Кириченко В.В.

Введение

Пусть G – группа, через $L_{\text{norm}}(G)$ обозначим семейство всех нормальных подгрупп G . Влияния семейства $L_{\text{norm}}(G)$ на структуру группы G изучается в многочисленных работах достаточно много времени. Чем обширнее семейство $L_{\text{norm}}(G)$, тем структура группы G ближе к абелевым группам. С работы С.Н. Черникова [1] начинается систематическое изучение бесконечных групп, у которых семейство всех подгрупп, не являющихся нормальными, удовлетворяет некоторому естественному условию конечности. Эта работа явилась источником очень обширной тематики, многие части которой уже были достаточно освещены в различных обзорах. Одной из задач, которые здесь возникали, являлась задача об изучении групп, все подгруппы которых либо нормальны, либо абелевы. Эти группы начали изучать Г.М. Ромалис и Н.Ф. Сесекин в работах [2 – 4]. Такие группы были названы ими метатагмильтоновыми. Полное описание метатагмильтоновых групп было получено в серии работ Н.Ф. Кузенного и Н.Н. Семко, которые отражены в работе [5]. Естественным продолжением таких исследований является рассмотрение ситуации, когда подгруппы семейства $L_{\text{non-norm}}(G)$ принадлежат к классу групп, который является естественным расширением класса абелевых групп. Так в работах [6, 7] рассматривались группы, в которых подгруппы семейства $L_{\text{non-norm}}(G)$ имеют конечный коммутант или являются FC-группами. В настоящей работе продолжаются исследования в данном направлении. Поскольку естественным обобщением конечных групп являются черниковские группы, то естественным расширением

Mykola M. Semko
Oksana A. Yarovaya

On some expansion of class of meta-
Hamiltonian groups

Locally soluble groups at which all subgroups are have Chernikov's derived subgroup are studied

Key Words: groups, normal subgroups, Chernikov's derived.

групп с конечным коммутантом являются группы с черниковским коммутантом. Изучение таких групп было начато в работах [8 – 10]. При изучении разрешимых групп первым естественным

этапом является их локальное изучение. Иначе говоря, изучение строения их подгрупп вида $\langle g, A \rangle$, где A – абелева подгруппа, а $g \in N_G(A)$. Основной целью данной работы и является изучение подгрупп такого вида в группах, всякая подгруппа которых либо нормальна, либо имеет черниковский коммутант.

Лемма 1. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что G имеет элемент g и включает в себя такие подгруппы A, B , что выполняются следующие условия:

- (1) $[A, B] = \langle 1 \rangle$,
- (2) A, B являются $\langle g \rangle$ -инвариантными,
- (3) $\langle A, B \rangle \cap \langle g \rangle = \langle 1 \rangle$;
- (4) $A \cap B = \langle 1 \rangle$;
- (5) $C_A(g) \neq A$.

Тогда подгруппа $\langle B, g \rangle$ имеет черниковский коммутант.

Доказательство. Поскольку $C_A(g) \neq A$, то подгруппа A содержит элемент a , для которого $[g, a] = d \neq 1$. Тогда $a^{-1}ga = gd \neq g$. Если предположить теперь, что $gd \in B\langle g \rangle$, то $gd = g^mb$ для некоторого целого числа m и некоторого элемента $b \in B$. Отсюда получаем равенство $g^{m-1} = db^{-1}$. Из условия (3) вытекает теперь равенство $db^{-1} = 1$, откуда, используя (4), получим $d = b = 1$. Полученное противоречие показывает, что $gd \in B\langle g \rangle$. В свою очередь, это означает, что подгруппа $B\langle g \rangle$ не может быть нормальной. Следовательно, она имеет черниковский коммутант.

□

Лемма 2. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Пусть, далее, A – абелева p -подгруппа для некоторого простого числа p и пусть g – такой элемент группы G что $g \in C_G(A)$. Если $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, где каждый прямой множитель A_λ будет $\langle g \rangle$ -инвариантной подгруппой, то A включает в себя такое конечное подмножество M , что $A_\lambda \leq C_A(g)$ для любого $\lambda \in \Lambda \setminus M$.

Доказательство. Если множество индексов Λ конечно, то все доказано. Поэтому будем предполагать, что оно бесконечно. Очевидно, найдется такое подмножество $\Delta \subseteq \Lambda$, что $\Lambda \setminus \Delta$ – конечно и $\langle g \rangle \cap A \leq \bigcup_{\lambda \in \Delta} A_\lambda$. Если допустить теперь, что $A_\lambda \leq C_A(g)$ для любого $\lambda \in \Delta$, то все доказано. Поэтому допустим, что существует такой индекс $\lambda \in \Delta$ что $C_A(g)$ не включает в себя A_λ . Пусть $B = \bigcup_{\mu \in \Delta \setminus \{\lambda\}} A_\mu$. Из леммы 1 получаем, что подгруппа $B \langle g \rangle$ имеет черниковский коммутант. В этом случае, нижний слой $\Omega_1([B \langle g \rangle, B \langle g \rangle])$ конечен, так что найдется такое конечное подмножество $\Sigma \subseteq \Delta$, что $\Omega_1([B \langle g \rangle, B \langle g \rangle]) \cap \bigcup_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu = \langle 1 \rangle$. Но тогда и $[B \langle g \rangle, B \langle g \rangle] \cap \bigcup_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu = \langle 1 \rangle$. Поскольку подгруппа $\bigcup_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu$ является $\langle g \rangle$ -инвариантной, это означает, что $\bigcup_{\mu \in \Delta \setminus \Sigma} A_\mu \leq C_A(\langle g \rangle)$. □

Теперь напомним некоторые необходимые понятия теории модулей. Пусть R – коммутативное кольцо, A – R -модуль. Положим

$$\text{Tor}_R(A) = \{a \in A \mid \text{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Если R – область целостности, то $\text{Tor}_R(A)$ будет подмодулем A . В этом случае подмодуль $\text{Tor}_R(A)$ называется R -периодической частью модуля A . Модуль A называется R -периодическим, если $A = \text{Tor}_R(A)$; будем говорить, что A не имеет R -кручения, если подмодуль $\text{Tor}_R(A)$ – нулевой.

Лемма 3. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Пусть A – элементарная абелева p -подгруппа для некоторого простого числа p и g – элемент бесконечного порядка группы G . Предположим, что $\langle g \rangle \cap C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Тогда $F_p \langle g \rangle$ – модуль A будет периодическим.

Доказательство. Обозначим кольцо $F_p \langle g \rangle$ через J . Предположим противное. Тогда A содержит элемент c , для которого его аннулятор $\text{Ann}_J(c)$ будет нулевым. В этом случае $C = cJ \cong J$,

Положим $x = g^2$, тогда $J = F_p \langle x \rangle \oplus (F_p \langle x \rangle)g$, а потому $C = C_1 \oplus C_1g$. Пусть $C_1 = cF_p \langle x \rangle$. Обе подгруппы $C_1, C_2 = C_1g$ будут $\langle x \rangle$ -инвариантными. Из леммы 1 получаем, что подгруппа $C_2 \langle x \rangle$ имеет черниковский коммутант. Поскольку C_2 – элементарная абелева, то это означает, что подгруппа $[C_2 \langle x \rangle, C_2 \langle x \rangle]$ будет конечной. В частности, $C_2 \langle x \rangle$ – FC-группа. Но тогда $x^m \in C_G(C_2)$ для некоторого натурального числа m . Однако это противоречит тому, что C_2 не имеет $F_p \langle x \rangle$ – кручения. Полученное противоречие и доказывает тот факт, что $F_p \langle g \rangle$ – модуль A будет периодическим. □

Пусть D – дедекиндова область. Положим

$$\text{Spec}(D) = \{P \mid P \text{ – максимальный идеал } D\}.$$

Если I – идеал D , то положим

$$A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко видеть, что A_I – D -подмодуль A . A_I называют I -компонентой A . Если A совпадает со своей I -компонентой, то будем говорить, что A – I -модуль над кольцом D . Далее, пусть

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Omega_{I,n}(A)$ – D -подмодуль и $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, так что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Положим $\text{Ass}_D(A) = \{P \in \text{Spec}(D) \mid A_P \neq \langle 0 \rangle\}$. Тогда $\text{Tor}_D(A) = \bigoplus_{P \in \text{Ass}_D(A)} A_P$, где $\pi = \text{Ass}_D(A)$ (см., например [11, предложение 6.25]).

Пусть G – абелева группа, H – ее подгруппа и A – ZG -модуль. Положим

$$\zeta_{ZH}(A) = \{a \in A \mid ax = a \text{ для каждого } x \in H\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\zeta_{ZH}(A)$ является ZG -подмодулем A . $\zeta_{ZH}(A)$ называется H -центром A . Отправляясь от H -центра, мы построим верхний H -центральный ряд A

$$\langle 0 \rangle \leq C_0 \leq C_1 \leq \dots \leq C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \dots \leq C_\gamma$$

по следующему правилу: $C_1 = \zeta_{ZH}(A)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \zeta_{ZH}(A/C_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, $\zeta_{ZH}(A/C_\gamma) = \langle 0 \rangle$.

Последний член C_γ этого ряда называется верхним H -гиперцентром A .

Лемма 4. Пусть группа G включает в себя

такую периодическую абелеву нормальную подгруппу A , что фактор-группа G/A – абелева. Если подгруппа $\langle g, A \rangle$ локально нильпотентна для любого элемента $g \in G$, то G – локально нильпотентна.

Доказательство. Пусть p – простое число и P – силовская p -подгруппа A . Обозначим через B нижний слой P , т.е. $B = \Omega_1(P)$. Если $g \in G \setminus A$, то мы можем рассмотреть B как $F_p \langle x \rangle$ -модуль, где $\langle x \rangle$ – бесконечная циклическая группа и действие x на A определено по правилу $ax = a^x$, $a \in A$. Тогда $J = F_p \langle x \rangle$ является областью главных идеалов. Если допустить, что B не является J -периодическим, то B содержит элемент a , для которого $\text{Ann}_J(a) = \langle 0 \rangle$ (стоит отметить, что это возможно только в случае, когда g имеет бесконечный порядок). Однако в этом случае $\langle a, g \rangle \cong \langle a \rangle \rtimes \langle g \rangle$, а последняя группа не является нильпотентной. Это противоречие показывает, что B – J -периодический модуль. Если $b \in B$, то $\langle b \rangle^{\langle g \rangle} = bJ \cong J/\text{Ann}_J(b) \neq \langle 0 \rangle$. Каждый ненулевой идеал кольца J имеет конечный индекс, так что $\langle b \rangle^{\langle g \rangle}$ будет конечной. Если M – минимальный J -подмодуль bJ , то $Q = \text{Ann}_J(M) \in \text{Spec}(J)$. Поскольку подгруппа $\langle g, M \rangle$ нильпотентна, $\langle 1 \rangle = [g, M] = M(x - 1)$. Отсюда вытекает, что $Q = (x - 1)J$. Последнее равенство справедливо для произвольного простого J -подмодуля, так что получаем равенство $\text{Ass}_J(B) = \{(x - 1)J\}$. Другими словами, B имеет возрастающий ряд $\langle g \rangle$ -инвариантных подгрупп

$$\langle 1 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \dots \leq C_n \leq C_{n+1} \leq \dots \quad C_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = B,$$

где $C_1 = C_B(g)$, $C_{n+1}/C_n = C_{B/C_n}(g)$, $n \in \mathbb{N}$. Из того факта, что G/A – абелева группа, получаем, что каждая подгруппа C_n является G -инвариантной, $n \in \mathbb{N}$.

Положим теперь $B_1 = B$, $B_n = \Omega_n(P)$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно отображение $\phi: b \rightarrow pb$, $b \in B_2$, является $\langle g \rangle$ -эндоморфизмом. Далее, $\text{Im } \phi \leq B_1$ и $\text{Ker } \phi = B_1$, так что B_2/B_1 изоморфна некоторой $\langle g \rangle$ -инвариантной подгруппе B_1 . Отсюда вытекает, что B_2/B_1 будет $\langle g \rangle$ -гиперцентральной. Используя теперь обычную индукцию, покажем, что B_{n+1}/B_n является $\langle g \rangle$ -гиперцентральной при любом $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что P будет также $\langle g \rangle$ -гиперцентральной. Более того, длина верхнего $\langle g \rangle$ -центрального ряда P не превосходит ω . В самом деле, для любого элемента $u \in P$, подгруппа $\langle u \rangle^{\langle g \rangle}$ будет конечной по лемме 2.1 работы [6]. Поскольку $\langle g \rangle$ – центр $\langle g \rangle$ -гипер-

центральной группы имеет ненулевое пересечение с каждой ненулевой $\langle g \rangle$ -инвариантной подгруппой, то некоторый член верхнего $\langle g \rangle$ -центрального ряда, имеющий натуральный номер, включает в себя $\langle u \rangle^{\langle g \rangle}$.

Поскольку все это справедливо для каждой силовской p -подгруппы A , то $Z \langle g \rangle$ – модуль A также будет $\langle g \rangle$ -гиперцентральной с $\langle g \rangle$ -центральной длиной, не превосходящей ω . Пусть

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_n \leq Z_{n+1} \leq \dots \quad Z_\infty = A -$$

верхний $\langle g \rangle$ -центральный ряд A .

Выберем в группе G другой произвольный элемент y . Используя приведенные выше аргументы, покажем, что $Z \langle y \rangle$ – модуль Z_1 будет $\langle y \rangle$ -гиперцентральной. Пусть

$$\langle 1 \rangle = Y_0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq Y_{n+1} \leq \dots \quad Y_\infty = Z_1 -$$

верхний $\langle y \rangle$ -центральный ряд Z_1 . Ввиду выбора Z_1 этот ряд также будет $\langle g, y \rangle$ -гиперцентральной.

Поскольку фактор-группа G/A – абелева, то отображение $\xi: z \rightarrow z(g - 1)$, $z \in Z_2$, является G -эндоморфизмом, причем $\text{Ker } \xi = Z_1$ and $\text{Im } \xi \leq Z_1$. Таким образом, Z_2/Z_1 изоморфна некоторой G -инвариантной подгруппе Z_1 , в частности, Z_2/Z_1 будет $\langle g, y \rangle$ -гиперцентральной. Используя теперь обычную индукцию, получим, что Z_{n+1}/Z_n – $\langle g, y \rangle$ -гиперцентральной при любом $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что A будет $\langle g, y \rangle$ -гиперцентральной. Другими словами, подгруппа $\langle A, g, y \rangle$ – гиперцентральной. Подобным образом мы можем доказать, что подгруппа $\langle A, g_1, \dots, g_m \rangle$ является гиперцентральной для любого конечного подмножества $\{g_1, \dots, g_m\}$ элементов группы G . $\square$

Пусть G – абелева группа, H – ее подгруппа и A – ZZG -модуль. Пусть, далее,

B, C – A – ZG -подмодули A , причем $B \leq C$. Фактор C/B называется H -центральным (соответственно H -эксцентральным), если $C_H(C/B) = H$ (соответственно $C_H(C/B) \neq H$).

ZG -подмодуль C называется H -гиперэксцентральным, если C имеет возрастающий ряд ZG -подмодулей

$$\langle 0 \rangle \leq C_0 \leq C_1 \leq \dots \leq C_n \leq C_{n+1} \leq \dots \quad C_\infty = C,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) C_{n+1}/C_n – простой ZG -модуль,

(2) $C_\alpha = 1/C_\alpha$ – H -эксцентральный фактор для каждого $\alpha < \gamma$.

Пусть D – дедекиндова область, C – простой D -модуль, тогда $C \cong D/P$ для некоторого $P \in \text{Spec}(D)$. Обозначим D – инъективную оболочку C через C_{p^∞} . Модуль C_{p^∞} называется *прюферовым P -модулем*. Как и в теории абелевых групп можно показать, что

$$C_{p^\infty} \cong \varinjlim \{ D/P^n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

По своему построению, C_{p^∞} – P -модуль, причем $\Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong D/P^k$ и $\Omega_{P,k+1}(C_{p^\infty})/\Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \cong (D/P^{k+1})/(D/P^k) \cong D/P$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, если E – собственный D -подмодуль C_{p^∞} , то найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что $E = \Omega_{P,k}(C_{p^\infty})$. В самом деле, если $b \in \Omega_{P,k}(C_{p^\infty}) \setminus \Omega_{P,k-1}(C_{p^\infty})$, то $C = bD$. Отметим также, что прюферов P -модуль C C_{p^∞} монолитичен и его монолит совпадает с $\Omega_{P,1}(C_{p^\infty})$.

Лемма 5. Пусть группа G включает в себя элементарную абелеву нормальную p -подгруппу A , p – простое число, и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Тогда максимальный $\langle g \rangle$ -гиперэксцентральный $F_p\langle g \rangle$ -подмодуль A конечен.

Доказательство. Предположим сначала, что g имеет бесконечный порядок и $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Обозначим кольцо $F_p\langle g \rangle$ через J . Ввиду леммы 3 J -модуль A будет периодическим. Пусть $P \in \text{Spec}(J)$, $P \neq (g-1)J$, и пусть B – P -компонента A и $C = \Omega_{P,1}(B)$. Тогда $C = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ – простой J -подмодуль, для которого $\text{Ann}_J(C_\lambda) = P$. В частности, $C_\lambda(\langle g \rangle)$ не включает в себя C_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Из леммы 2 следует конечность множества индексов Λ . Отсюда получаем разложение $B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, где либо E_λ – циклический J -подмодуль, либо E_λ – прюферов P -подмодуль (см., например, [12, предложение 7.11 и теорема 7.13]).

Предположим, что E_λ – прюферов P -подмодуль. Из леммы 2.7 работы [6] получаем, что подгруппа $\langle g \rangle$ содержит такой элемент x , а подгруппа A включает в себя такую $\langle x \rangle$ -инвариантную подгруппу U , что $U\langle x \rangle$ не является нормальной и $C_{\langle x \rangle}(U) = \langle 1 \rangle$. Тогда $U\langle x \rangle$ имеет черниковский коммутант, а поскольку U – элементарная абелева, то $[U\langle x \rangle, U\langle x \rangle]$ будет конечной. В частности, $U\langle x \rangle$ – FC-подгруппа, а потому найдется такое натуральное число m , что $x^m \in C_{\langle x \rangle}(U)$. Это противоречие показывает, что E_λ не может быть прюферовым P -подмодулем. Другими словами, E_λ – циклический подмодуль, в частности, E_λ – конечен при

любом $\lambda \in \Lambda$. Из конечности множества индексов Λ получаем теперь конечность B .

Далее, поскольку A – J -периодический, то $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$. Пусть $\pi = \text{Ass}_J(A)$, A_P – P -компонента A . Если $P \neq (g-1)J$, то $C = \Omega_{P,1}(A_P) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ – простой J -подмодуль, для которого $\text{Ann}_J(C_\lambda) = P$. В частности, $C_\lambda(g) \cap C_\lambda = \langle 0 \rangle$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Отсюда $C_\lambda(g) \cap A_P = \langle 0 \rangle$ для каждого $P \neq (g-1)J$. Положим $\Sigma = \pi \setminus \{(g-1)J\}$. Если Σ состоит из одного идеала P , то по доказанному выше A_P – конечна. Поэтому допустим, что $\Sigma \neq \{P\}$ и пусть $\Delta = \Sigma \setminus \{P\}$, $L = \bigoplus_{Q \in \Delta} A_Q$. Так как порядок элемента g бесконечен, то $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Из леммы 1 получаем, что подгруппа $\langle L, g \rangle$ имеет черниковский коммутант. Так как L – элементарная абелева p -подгруппа, то $[\langle L, g \rangle, \langle L, g \rangle]$ – конечен, в частности, $\langle L, g \rangle$ – FC-подгруппа. Отсюда вытекает конечность индекса $|L : C_L(g)|$. Вместе с равенством $C_L(g) = \langle 0 \rangle$ это влечет конечность подгруппы L . Отсюда получаем конечность $\bigoplus_{P \in \Sigma} A_P$. Теперь следует отметить, что $\bigoplus_{P \in \Sigma} A_P$ – это в точности максимальный $\langle g \rangle$ -гиперэксцентральный $F_p\langle g \rangle$ -подмодуль A .

Осталось рассмотреть случай, когда $|g|$ конечен или $|g|$ – бесконечен, но $g^k \in C_G(A)$ для некоторого натурального числа k . Положим $J = F_p\langle y \rangle$, где $\langle y \rangle$ – бесконечная циклическая группа, а действие y на A определяется по правилу $ay = a^k$, $a \in A$. Снова J является областью главных идеалов, но уже $\text{Ann}_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. В частности, A – J -периодический модуль, так что $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, где A_P – P -компонента A и множество $\pi = \text{Ass}_J(A)$ – конечно. Положим $B = A_P$. Тогда имеем $B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, где B_λ – циклический J -подмодуль для любого $\lambda \in \Lambda$ (см., например, [12, следствие 6.5]). Снова используя приведенные выше рассуждения, мы можем показать, что $\Omega_{P,1}(A_P)$ – конечен, т.е. множество индексов Λ – конечно. Это, в свою очередь, влечет конечность A_P . Поскольку множество $\Sigma = \pi \setminus \{(y-1)J\}$ также конечно, то $\bigoplus_{P \in \Sigma} A_P$ будет конечным. Но $\bigoplus_{P \in \Sigma} A_P$ – это в точности максимальный $\langle g \rangle$ -гиперэксцентральный $F_p\langle g \rangle$ -подмодуль A . $\square$

Следствие 1. Пусть группа G включает в себя нормальную абелеву p -подгруппу A , p – простое число, и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Тогда максимальный $\langle g \rangle$ -гиперэксцентральный $Z\langle g \rangle$ -подмодуль A является черниковской подгруппой.

Следствие 2. Пусть группа G включает в

себя нормальную абелеву периодическую подгруппу A , и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Тогда максимальный $\langle g \rangle$ -гиперэксцентральный $Z\langle g \rangle$ -подмодуль A является черниковской подгруппой.

Лемма 6. Пусть группа G включает в себя элементарную абелеву нормальную p -подгруппу A , p – простое число, и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Если C – верхний $F_p\langle g \rangle$ – гиперцентр A , то $[C, g]$ – конечен.

Доказательство. Предположим сначала, что g имеет бесконечный порядок и $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Будем рассматривать A как $F_p\langle g \rangle$ -модуль. Как и ранее, положим $J = FF_p\langle g \rangle$. Из выбора C вытекает, что C совпадает с Z -компонентой A , где $Z = (g - 1)J$. Тогда C включает в себя J -сервантный J -подмодуль $B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, где B_λ – циклический J -подмодуль для каждого $\lambda \in \Lambda$, для которого фактор-модуль C/B – J -делимый (см., например, [12, теорема 9.15]). Предположим, что $B \neq C_B(g)$. Тогда найдется такой индекс $\nu \in \Lambda$, что $C_B(g)$ не включает в себя B_ν . Положим $E = \bigoplus_{\lambda \neq \nu} B_\lambda$. Используя снова лемму 1, получим, что $\langle E, g \rangle$ имеет черниковский коммутант. Так как E – элементарная абелева подгруппа, то $[\langle E, g \rangle, \langle E, g \rangle]$ – конечен, в частности, $\langle E, g \rangle$ – FC-группа, а потому индекс $|E : C_E(g)|$ будет конечным. Но тогда и индекс $|B : C_B(g)|$ также конечен. Другими словами, $\text{App}_J(B) \neq \langle 0 \rangle$. В этом случае возникает следующее прямое разложение $C = B \oplus D$ (см., например, [12, теорема 8.11]). Из изоморфизма $D \cong C/B$ получаем, что D – J -делимый подмодуль. Но тогда D – прямая сумма проферовых подмодулей (см., например, [12, теорема 5.26]). Как и в доказательстве леммы 5 можно показать, что $D = \langle 0 \rangle$, т.е. $C = B$. В частности, индекс $|C : C_G(g)|$ будет конечным.

Осталось рассмотреть случай, когда $|g|$ конечен или $|g|$ – бесконечен, но $g^k \in C_G(A)$ для некоторого натурального числа k . Положим $J = F_p\langle y \rangle$, где $\langle y \rangle$ – бесконечная циклическая группа, а действие y на A определяется по правилу $ay = a^g$, $a \in A$. Снова J является областью главных идеалов, но уже $\text{App}_J(A) = I \neq \langle 0 \rangle$. В частности, $\text{App}_J(C) \neq \langle 0 \rangle$. Тогда имеем $C = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, где B_λ – циклический J -подмодуль для любого $\lambda \in \Lambda$ (см., например, [12, следствие 6.5]). Снова используя приводимые ранее рассуждения, можем показать, что индекс $|C : C_G(g)|$

будет конечным. $\square$

Следствие 1. Пусть группа G включает в себя периодическую нормальную абелеву подгруппу A и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Тогда $[A, g]$ – черниковская подгруппа.

Лемма 7. Пусть группа G включает в себя нормальную абелеву подгруппу A и пусть $g \in C_G(A)$. Предположим, что $[T, g] = \langle 1 \rangle$, где T – периодическая часть подгруппы A . Если всякая подгруппа G или нормальна, или имеет черниковский коммутант, то $[A, g]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. Если найдется такое натуральное число n , что $g^n \in C_G(A)$ (в частности, если элемент g имеет конечный порядок), то подгруппа $\langle A, g^n \rangle$ является центральным расширением подгруппы A с помощью циклической группы. Поэтому $\langle A, g^n \rangle$ – абелева и $\langle A, g \rangle$ – почти абелева. Из основного результата [8] получаем, что $\langle A, g \rangle$ имеет черниковский коммутант, в частности, $[g, A]$ – черниковская подгруппа.

Поэтому будем предполагать теперь, что $\langle g \rangle \cap C_G(A) = \langle 1 \rangle$, в частности, $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Если $A = T$, то утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что $A \neq T$. Фактор-группа $\langle A, g \rangle / T$ будет расширением абелевой подгруппы без кручения A/T с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому она не имеет кручения. Из теоремы 2 работы [9] получаем, что $\langle A, g \rangle / T$ – абелева. Отсюда получаем, что $a^g = ax$, где $x \in T$, для любого элемента $a \in A$. Так как x имеет конечный порядок, то $g^k \in C_G(a)$, где $k = |x|$. Другими словами, каждый элемент подгруппы A имеет в $H = \langle A, g \rangle$ только конечное множество сопряженных. Учитывая лемму 1 работы [13], получим, что $\langle a \rangle^H$ будет расширением конечной подгруппы с помощью бесконечной циклической. В частности, найдется такое натуральное число l , что подгруппа $\langle a^l \rangle$ нормальна в H . Пусть a_1 – элемент бесконечного порядка подгруппы A и пусть t_1 – натуральное число, для которого $B_1 = \langle a_1^{t_1} \rangle$ нормальна в H . Если A/B_1 имеет элемент бесконечного порядка a_2B_1 , то снова найдется натуральное число t_2 , для которого $B_2/B_1 = \langle a_2^{t_2}B_1 \rangle$ нормальна в H/B_1 . Используя эти рассуждения и трансфинитную индукцию, построим в подгруппе A такую H -инвариантную свободную абелеву подгруппу B , что A/B – периодическая. Из следствия 1 леммы 6 вытекает, что H/B имеет черниковский коммутант. Так как B не имеет кручения, то $B \cap$

$T = \langle 1 \rangle$, то из классической теоремы Рэмака отмечаем, что H/T – абелева, а H/B имеет черниковский коммутант. Отсюда вытекает, что $[L, L]$ – черниковская подгруппа. Но тогда черниковской будет и $[H, H]$, а с ней и $[A, g]$. $\square$

Теорема 1. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева подгруппа G и $g \in N_G(A) \setminus C_G(A)$. Тогда $[g, A]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. Обозначим через T периодическую часть подгруппы A . Из следствия 3 леммы 6 получаем, что подгруппа $B = [g, T]$ будет черниковской. В фактор-группе A/B уже имеем $T/B \leq C_{A/B}(gB)$. Лемма 7 показывает теперь, что $[gB, A/B]$ – черниковская подгруппа. Так как и B – черниковская, то отсюда получаем, что черниковской будет и подгруппа $[g, A]$. $\square$

Следствие. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант и пусть A – ее абелева подгруппа. Если B – такая подгруппа $N_G(A)$, что $B \geq A$ и B/A – конечно порожденная абелева группа, то B имеет черниковский коммутант.

Теорема 2. Пусть G – локально почти разрешимая группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что G включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу A , что G/A – конечно порождена. Тогда группа G имеет черниковский коммутант.

Доказательство. В самом деле, из теоремы 1 работы [9] получаем, что G/A имеет конечный коммутант. Отсюда получаем, что G/A включает в себя конечно порожденную абелеву подгруппу L/A конечного индекса. Можно считать, что L – нормальна в G . Из следствия теоремы 1 получаем, что $[L, L]$ – черниковская подгруппа. Теперь из основного результата работы [8] будет вытекать тогда, что G имеет черниковский коммутант. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н.Н. Семко за постановку задачи, постоянное внимание и помощь при ее решении.

Список использованной литературы

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967. – 19, № 6. – С. 111 – 131.

- лучаем вложение $H \cong H/B \times H/T = L$. Мы уже
2. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метегамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45 – 49.
 3. Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М. О метегамильтоновых группах II // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – 6, № 5. – С. 50 – 53.
 4. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метегамильтоновых группах III // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – 7, № 3. – С. 195 – 199.
 5. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метегамильтовані групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
 6. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes // Advanced in Group Theory 2002. Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoli, May – June 2002. – Roma: Aracne, 2003. – P. 93 – 110.
 7. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – December 2004. – 104A, № 2. – P. 177 – 189.
 8. Яровая О.А. О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2008. – Вип. №4. – С. 36 – 39.
 9. Semko N.N., Yarovaya O. A. On some generalization of metahamiltonian groups // J. "Algebra and Discrete mathematics". – 2009. – №2. – P. 16–24.
 10. Ярова О.А. Про групи, усі власні підгрупи яких близькі до абелевих // Доп. НАН України. – 2009. – №7. – С. 34 – 35.
 11. Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya. Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.
 12. Kurdachenko L.A., Semko N.N., Subbotin I.Ya. Insight into modules over Dedekind domains. – Kiev: Institute of Mathematics, 2008. – 119 pp.
 13. Курдаченко Л.А. FC-группы, периодическая часть которых вкладывается в произведение конечных групп // Мат. заметки. – 1977. – 21, № 1. – С. 9 – 10.

Надійшла до редколегії 10.10.2009

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 517.9

Валентина І. Гречко, канд. фіз-мат. наук,
доцент

Андрій Л. Гречко, канд. фіз-мат. наук,
асистент

**Застосування одного узагальнення методу
Ньютона-Канторовича для розв'язання
нелінійних інтегральних рівнянь.**

Для розв'язання нелінійного інтегрального
рівняння застосовується проективно-
ітеративний метод. Задача зводиться до
розв'язання інтегральних рівнянь з
виродженим ядром.

Ключові слова: проективно-ітеративний
метод, нелінійне інтегральне рівняння.

E-mail: and.grechko@gmail.com

Статтю представив член редколегії академік НАН України, д.ф.-м.н. професор М.О.
Перестюк

1. Вступ

Розглянемо рівняння

$$x = T(x) \quad (1)$$

з неперервним нелінійним оператором T ,
який переводить деяку множину D
банахового простору E в себе. Для
розв'язання рівняння (1) часто застосовують
ітеративний метод Ньютона-Канторовича [1],
а також його модифікації. В роботі [2]
розглядався проективно-ітеративний метод,
згідно з яким послідовні наближення x_{n+1} до
розв'язку рівняння (1) знаходяться із рівнянь

$$x_{n+1} = T(x_n) - PT'(x_n)x_n + PT'(x_n)x_{n+1} \quad (2)$$

де P - лінійний проекційний оператор
($P^2 = P$), який проектує простір E в
підпростір E_p ($PE \rightarrow E_p \subseteq E$). При $P = I$ (I
- тотожний оператор) алгоритм (2)
переходить в алгоритм методу роботи [2].
Дослідження ітеративних, проективно-

V.I. Grechko, Associate Professor

A.L. Grechko, Assistant Professor

**Application of some generalization of
Newton-Kantorovich's method for solving
nonlinear integral equations.**

We use a projective-iterative method for
solving a nonlinear integral equation. The
problem is reduced to a solution of integral
equations with singular kernel.

Keywords: projective-iterative method,
nonlinear integral equation.

ітеративних методів в застосуванні до різних
класів рівнянь відображено в роботах [3]-[7].

2. Постановка і розв'язок задачі

Нехай дано інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_0^1 K(s, t, x(s)) ds \quad (3)$$

де $K(s, t, u)$ - неперервна функція по s, t, u ,
яка має неперервну похідну $K'_u(s, t, u)$.
Застосуємо алгоритм (2) для розв'язання
нелінійного інтегрального рівняння (3). В
роботі [2] результати дослідження методу
(2) сформульовані за умови Л. Канторовича:
існування та обмеженості оберненого
оператора $\Gamma_x = (I - PT'(x))^{-1}$ в точці x_0 ,
яка є початковим наближенням до розв'язку.

Будемо вважати, що D - це куля:
 $S_0 = \{x : \|x - x_0\| \leq R\}$, x_0 - початкове

Теорема А. Нехай виконуються наступні умови:

1. Існує обернений оператор Γ_0 та

$$\|\Gamma_0\| = \|(I - PT'(x_0))^{-1}\| \leq B_0$$

2. Також виконується

$$\|\Gamma_0(I - T)x_0\| \leq \eta_0$$

3. Існує похідна $PT'(x)$ в кулі $S(x_0, R)$, причому

$$\begin{aligned} \|PT'(x) - PT'(y)\| &\leq M \|x - y\|, \\ \|QT(x) - QT(y)\| &\leq q \|x - y\|, \quad (Q = I - P), \end{aligned}$$

4. Справджуються нерівності

$$\begin{aligned} h_0 &= B_0 M \eta_0 \leq \frac{1}{2} (1 - p_0)^2, \\ 0 &\leq p_0 = B_0 q < 1 \end{aligned}$$

нехай

$$R \geq r_0 = \frac{1 - p_0 \sqrt{(1 - p_0)^2 - 2h_0}}{h_0} \eta_0$$

тоді рівняння (1) має розв'язок $x^* \in S(x_0, r_0)$

до якого збігаються послідовні наближення x_n , причому

$$\|x_n - x^*\| \leq r_n$$

де

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1 - p_n - \sqrt{(1 - p_n)^2 - 2h_n}}{h_n} \eta_n \\ \eta_n &= \eta_{n-1} \left(\frac{h_{n-1}}{2(1 - h_{n-1})} + p_n \right) \end{aligned}$$

$$h_n = \frac{\frac{1}{2} h_{n-1}^2 + h_{n-1} p_{n-1}}{(1 - h_{n-1})^2}$$

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{1 - h_{n-1}}$$

$$h_n = B_n M \eta_n, \quad B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \quad p_n = B_n q, \quad n \geq 1.$$

Доведення. Для доведення теореми слід довести, що послідовні наближення існують, причому

$$\|\Gamma_0\| = \|(I - PT'(x_n))^{-1}\| \leq B_n, \quad (4)$$

$$\|\Gamma_n(I - T)x_n\| \leq \eta_n, \quad h_n \leq \frac{(1 - p_n)^2}{2}, \quad (5)$$

$$S(x_n, r_n) \subset S(x_{n-1}, r_{n-1}), \quad n \geq 1 \quad (6)$$

Доводиться методом математичної індукції. Нехай нерівності (4)-(5) мають місце при $n = m_0$. Маємо

$$\begin{aligned} \|\delta_{m+1}\| &= \|x_{m+1} - x_m\| \leq \|\Gamma_m\| \cdot (\|PT(x_m) - \\ &- PT(x_{m-1}) - PT'(x_{m-1})\delta_m\| + \|QT(x_m) - \\ &- QT(x_{m-1})\|) \leq \eta_m \leq r_m \end{aligned}$$

Отже $x_{m+1} \in S(x_0, R)$. Із нерівності

$$\|\Gamma_m(PT'(x_{m+1}) - PT'(x_m))\| \leq h_m$$

Використовуючи теорему Банаха [1], впливає існування оберненого оператора Γ_{m+1} , де

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{m+1}\| &= \|(I - \Gamma_m(I - PT'(x_m) - (I - PT'(x_{m+1})))^{-1} \Gamma_m\| \leq \\ &\leq \frac{B_m}{1 - h_m} = B_{m+1} \end{aligned}$$

Таким чином нерівність (4) доведена.

Доведемо першу із нерівностей (5). Маємо

$$\begin{aligned} \|(I - T)x_{m+1}\| &= \|x_{m+1} - x_m - T(x_{m+1}) + T(x_m) + \\ &+ PT'(x_m)(x_{m+1} - x_m) - (x_{m+1} - x_m)\| \leq \frac{M}{2} \eta_m^2 + q \eta_m \end{aligned}$$

$$\|\Gamma_m(I - T)x_{m+1}\| \leq \eta_m \left(\frac{B_m M \eta_m}{2(1 - h_m)} + B_{m+1} q \right) = \eta_{m+1}$$

Перша із нерівностей (5) доведено. Доведемо другу із нерівностей (5). Маємо

$$\frac{(1-p_{m+1})^2}{2} \geq h_{m+1},$$

можна довести, що $r_{n+1} = r_n - \eta_n$, $n \geq 1$. Отже включення (6) виконується, оскільки із нерівності

$$\|x - x_{m+1}\| \leq r_{m+1}$$

випливає нерівність

$$\|x - x_m\| \leq r_{m+1} + \eta_m = r_m.$$

Залишилось довести збіжність послідовності $\{x_n\}$. Оскільки

$$\eta_n = \frac{h_n}{B_n M} < \frac{h_n}{B_0 M}$$

і для $n = 1, 2, \dots$

$$0 < p_n < \frac{p_0}{\prod_{i=0}^{n-1} (1-h_i)} < 1,$$

причому

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1-h_i) \geq p_0,$$

тоді ряд $\sum_{i=0}^{\infty} h_i$ збігається, звідки випливає

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0,$$

отже $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Із нерівності

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq r_n$$

випливає фундаментальність послідовності x_n і

те, що її границя $x^* \in S(x_0, r_0)$.

Теорему А доведено.

Для розв'язання рівняння (3) алгоритм тоді (2) буде мати вигляд

$$x_{n+1}(t) = \int_0^1 K(s, t, x_n(s)) ds - \int_0^1 \bar{K}_x(s, t, x_n(s)) x_n(s) ds + \int_0^1 \bar{K}_x(s, t, x_n(s)) x_{n+1}(s) ds \quad (7)$$

де $\bar{K}(s, t, x(t)) = \sum_{k=1}^m A_k(t) B_k(s, x(t))$ - вироджене ядро, яке апроксимує функцію $K(s, t, x(s))$. Функції $A_k(t)$, $k = 1, \dots, m$ попарно ортогональні і нормовані. Наприклад, за $\bar{K}$ можна взяти відрізок ряду Фур'є функції K по функціях повної ортонормальної системи $\{A_k(t)\}$. Позначимо

$$f_n(t) = \int_0^1 K(s, t, x_n(s)) ds - \int_0^1 \bar{K}_x(s, t, x_n(s)) x_n(s) ds$$

тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$x_{n+1}(t) = f_n(t) + \sum_{k=1}^m A_k(t) \int_0^1 B_k(s, x_n(s)) x_{n+1}(s) ds$$

Розв'язуючи, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\alpha_k^{(n+1)} - \sum_{j=1}^m d_{kj}^{(n)} \alpha_j^{(n+1)} = \int_0^1 B_k(s, x_n(s)) f_n(s) ds, \quad (8)$$

де

$$\alpha_k^{(n+1)} = \int_0^1 B_k(s, x_n(s)) x_{n+1}(s) ds,$$

$$d_{kj}^{(n)} = \int_0^1 B_k(s, x_n(s)) A_j(s) ds$$

Якщо визначник системи (8) відмінний від нуля, тобто

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 - d_{11}^{(n)} & \dots & d_{1m}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1}^{(n)} & \dots & 1 - d_{mm}^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\alpha_k^{(n+1)} = \frac{1}{D^{(n)}} \int_0^1 \sum_{j=1}^m D_{kj} B_j(s, x_n(s)) f_n(s) ds$$

отже

$$x_{n+1}(t) = f_n(t) + \int_0^1 \sum_{k,j=1}^m \frac{A_k(t) D_{kj}^{(n)} B_j(s, x_n(s))}{D^{(n)}} f_n(s) ds$$

де $D_{kj}^{(n)}$ -алгебраїчне доповнення елемента визначника $D^{(n)}$, яке знаходиться на перетині k -го рядка та j -го стовпчика. Позначимо

$$Q(s, t, x) = K(s, t, x) - \bar{K}(s, t, x)$$

$$L(s, t, x) = \sum_{k,j=1}^m \frac{A_k(t) D_{kj}^{(n)} B_j(s, x)}{D^{(n)}}$$

Нехай виконуються наступні умови

$$\|x_0(t) - \int_0^1 K(s, t, x_0(s)) ds\| \leq \eta_0, \quad t \in [0, 1] \quad (9)$$

$$\|\bar{K}_s(s, t, x) - \bar{K}_s(s, t, y)\| \leq m(s, t) \|x - y\|, \quad (10)$$

$$\|Q(s, t, x) - Q(s, t, y)\| \leq q(s, t) \|x - y\|, \quad (11)$$

$$\text{для } s, t \in [0, 1], \quad \|x - x_0\| < R, \quad \|y - y_0\| < R,$$

$$\|L(s, t, x_0(t))\| \leq l_0(s, t), \quad s, t \in [0, 1] \quad (12)$$

тоді, враховуючи

$$q = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 q(t, s) ds,$$

$$M = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 m(t, s) ds,$$

$$B_0 = 1 + \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 l_0(s, t) ds$$

можна застосувати теорему А.

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 1. Нехай для нелінійного нтегрального рівняння (3) виконуються умови (9)-(12) та умови 1,4 Теорему А, тоді рівняння (3) має розв'язок $x^* \in S(x_0, r_0)$ до якого збігаються послідовні наближення x_n .

3. Висновки

На відміну від алгоритму, який розглянутий в [1], для реалізації якого необхідно існування похідної $T'(x_0)$, у випадку алгоритму (2) вимагається лише існування похідної $PT'(x_0)$, а знаходження x_{n+1} зводиться до розв'язання лінійних рівнянь в підпросторі E_p , що є суттєвим.

Список використаних джерел

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 685 с.
2. Гречко В.І. Про оцінку похибки деякого узагальнення методу Ньютона-Канторовича // Докл. АН.УССР, Сер. А. – 1972. – № 8. – С.679-682.
3. Курпель Н.С., Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – К.: Наук. Думка, 1968. – 242с.
4. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. – 288 с.
5. Самойленко А.М., Ронто Н.Н., Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Наук. Думка, 1976. – 180с.
6. Brezinski C. Projective methods for systems of equations – Amsterdam: Elsevier, 1997. – P. 409.
7. Rall L. Computational solution of nonlinear operator equation. – New York: John Wiley, 1969. – P. 234.

Надійшла до редколегії 15.02. 2010

УДК 539.3

Карнаухов В.Г., д.ф.-м.н., професор
Козлов В.І., д.ф.-м.н.
Завгородній А.В., аспірант

Karnaukhov V. G., D.Sci. (Phys.-Math.),
Full Professor
Kozlov V.I., D.Sci. (Phys.-Math.)
Zavgorodniy A.V., PhD student

Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої жорстко защемленої тришарової циліндричної панелі

The forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick rigidly clamped three-layer cylindrical panel

Методом скінчених елементів розв'язано просторову задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової циліндричної панелі з жорстко защемленими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Досліджено вплив структурної неоднорідності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики панелі, на її власну частоту, максимальний прогин, максимальну температуру і на коефіцієнт демпфування панелі.

By a finite element method a three-dimensional problem on the forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick three-layer cylindrical panel with rigidly clamped ends is solved. The nonelastic material behavior is described by a conception of the complex characteristics. It is supposed that the mechanical and thermophysical material properties do not depend on a temperature. An influence of a structural inhomogeneity on the amplitude- and temperature-frequency characteristics, on the natural frequency, maximum deflection, maximum temperature and damping coefficient of the panel are investigated.

Ключові слова: резонансні коливання, циліндрична панель, коефіцієнт демпфування.

Key words: resonant vibrations, cylindrical panel, damping coefficient.

E-mail: Andrew-mdu@rambler.ru

Статтю представив член редколегії д. ф.-м. н. проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

В сучасній техніці широко застосовуються товсті циліндричні панелі, для розрахунку динамічного стану яких виникає потреба у використанні просторової постановки задач механіки деформівного твердого тіла [1]. Для циліндричних тіл з полімерних матеріалів і композитів на їх основі необхідно враховувати їх в'язкопружні властивості. При гармонічному навантаженні, особливо на резонансних частотах, в таких елементах конструкцій може мати місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву в результаті гістерезисних втрат в матеріалі. В [2] розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Для її розв'язування використано метод Фур'є в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Більш широкі можливості для розв'язування спряжених задач термомеханіки відкриває використання методу скінчених елементів (МСЕ). В даній роботі цей метод застосова-

но для дослідження коливань і дисипативного розігріву непружної товстої тришарової циліндричної панелі з середнім полімерним демпфуючим шаром і двома зовнішніми металічними шарами при її навантаженні гармонічним за часом поверхневим тиском $P_0 \cos \omega t$ з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання непружної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, розвинута в [3]. Вважається, що торці панелі жорстко защемлені, а характеристики матеріалу не залежать від температури. При цьому задача розпадається на декілька окремих задач: 1) задачу про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) задачу розрахунку дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією.

Відмітимо, що в літературі відсутні розв'язки задач про резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних шаруватих тіл в просторовій постановці.

© В.Г. Карнаухов, В.І. Козлов, А.В. Завгородній. 2010

2. Постановка зв'язаної задачі і її розв'язок методом скінчених елементів

Розглядається товста тришарова циліндрична панель, середній шар якої є ізотропним в'язкопружним з незалежними від температури комплексними характеристиками, а два зовнішніх шари є ізотропними металічними. Така структурна неоднорідність широко використовується в багатьох галузях техніки для пасивного демпфування вільних і вимушених коливань елементів конструкцій. Для дослідження вимушених коливань такої панелі в просторовій постановці використаємо рівняння, представлені, наприклад, в монографії [4]. Для загального випадку неоднорідних матеріалів в цих рівняннях потрібно дійсні параметри Ляме замінити на комплексні.

Для жорстко зашкелених торців зміщення на них дорівнюють нулю, а на поверхнях між шарами виконуються умови контакту – рівність зміщень і напружень.

Температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з рівняння енергії, наведеного в роботах [3, 4]. В цих же роботах представлено початкові і граничні умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює T_c . Дисипативна функція D в рівнянні енергії визначається стандартною формулою [3]: $D = \frac{\omega}{2} (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^*)$.

Для оцінки ефективності пасивного демпфування вимушених коливань використовується інтегральна характеристика, яка є відношенням дисипованої за цикл енергії D до накопиченої енергії U_T [3]. У випадку однорідних станів при дійсному коефіцієнті Пуассона і незалежному від координат модулі зсуву ця характеристика зводиться до звичайного тангенсу кута втрат матеріалу.

При використанні МСЕ задача механіки і теплопровідності зводиться відповідно до знаходження стаціонарних точок функціоналів $\mathcal{E}_m$ і $\mathcal{E}_t$, наведених в роботі [3].

Розв'язок варіаційної задачі механіки знаходиться МСЕ з використанням 24-вузлових шестигранних ізопараметричних елементів.

Як локальна система координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і проводиться інтегрування, використана нормалізована система координат. Для побудови базисних функцій, які апроксимують складові вектора зміщень і температуру в межах елемента, використано алгебраїчні та тригонометричні поліноми. При цьому припускається, що амплітудні значення компо-

нент вектора зміщень і значення температури апроксимуються виразами:

$$w = \sum_{i=1}^{24} L_i w_i; \quad u = \sum_{i=1}^{24} L_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^{24} L_i v_i; \quad T = \sum_{i=1}^{24} L_i T_i. \quad (1)$$

Тут w_i, u_i, v_i, T_i – вузлові значення зміщень і температури, L_i – апроксимуючі функції, які є комбінацією алгебраїчних N_j ($j=1,2,\dots,8$) і тригонометричних H_k ($k=1,2,3$) поліномів [5–7]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta-1); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1); \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1); \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1); \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi); \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\sin(\theta - \theta_2) - \sin(\theta - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)}; \\ H_2 &= \frac{\sin(\theta - \theta_3) - \sin(\theta - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)}; \\ H_3 &= \frac{\sin(\theta - \theta_1) - \sin(\theta - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_1) - \sin(\theta_3 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned}$$

При застосуванні МСЕ об'єм тіла розбивається на M скінчених елементів. Використовуючи методику, викладену в [6], для визначення вузлових значень компонент вектора зміщень одержимо $3n$ (n – число вузлових точок) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0; \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_j} = 0; \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_j} = 0, \quad (3)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Сумуючи вирази (3) по всіх скінчених елементах, одержимо для загальної глобальної нумерації вузлів систему рівнянь, в якій інтегрування по об'єму області замінено сумою інтегралів по об'ємах окремих скінчених елементів, а інтегрування по поверхні – сумою інтегралів по гранях елементів, на яких задано граничні умови в напруженнях. Для обчислення інтегралів, які входять в коефіцієнти системи (3), застосовуються квадратурні формули Гауса [8,9]. За знайденими вузловими значеннями зміщень обчислюються деформації, напруження і дисипативна функція в точках інтегрування Гауса, в яких вказані величини мають найвищу точність.

Варіаційна задача для функціоналу $\mathcal{E}$ розв'язується на тій же сітці скінчених елементів. При цьому похідна за часом $\partial T / \partial t$ не варіюється, а замінюється виразом $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$; в подальшому реалізується неявна схема розв'язування нестационарної задачі теплопровідності.

3. Аналіз числових результатів

Конкретні розрахунки проводились для товстої циліндричної панелі з зовнішнім радіусом $R=0,1\text{ м}$, товщиною $h=0,02\text{ м}$ і довжиною $l=0,1\text{ м}$. Вибірались такі механічні характеристики матеріалу: $\nu=0,32$, $G=G'+iG''$, $G'=0,968 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G''=0,871 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\rho=0,936 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Панель знаходиться в умовах теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого $T_0=20^\circ\text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі між навколишнім середовищем і панеллю прийнято постійним і рівним $\alpha_1 = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$. При розрахунках температури дисипативного розігріву теплофізичні характеристики вибрані такими: $\lambda = 0,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, $c\rho = 1,5 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}$.

На рис.1,2 представлено амплітудно-частотні і температурно-частотні характеристики (АЧХ і ТЧХ) циліндричної панелі з жорстко зашлемленими торцями в околі першого резонансу при $P_0 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

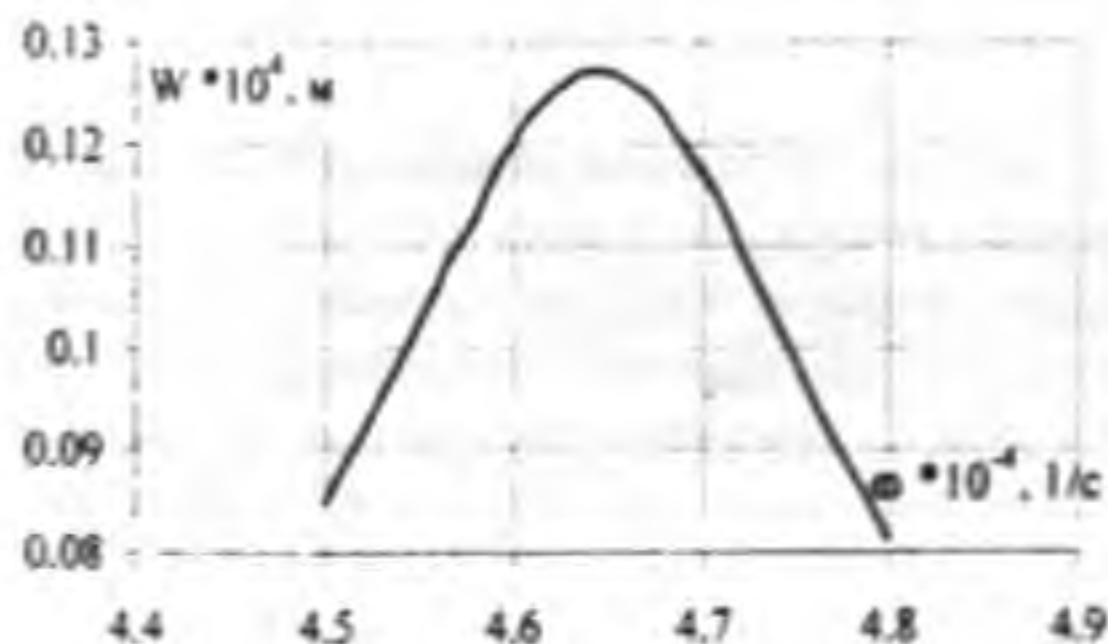


Рис. 1.
АЧХ циліндричної панелі

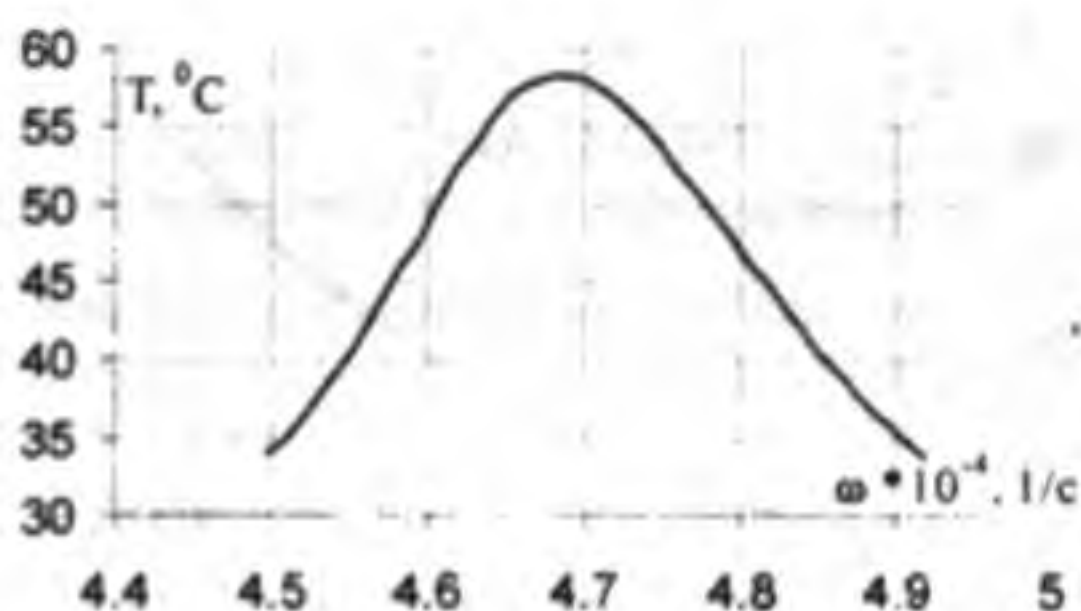


Рис.2
ТЧХ циліндричної панелі

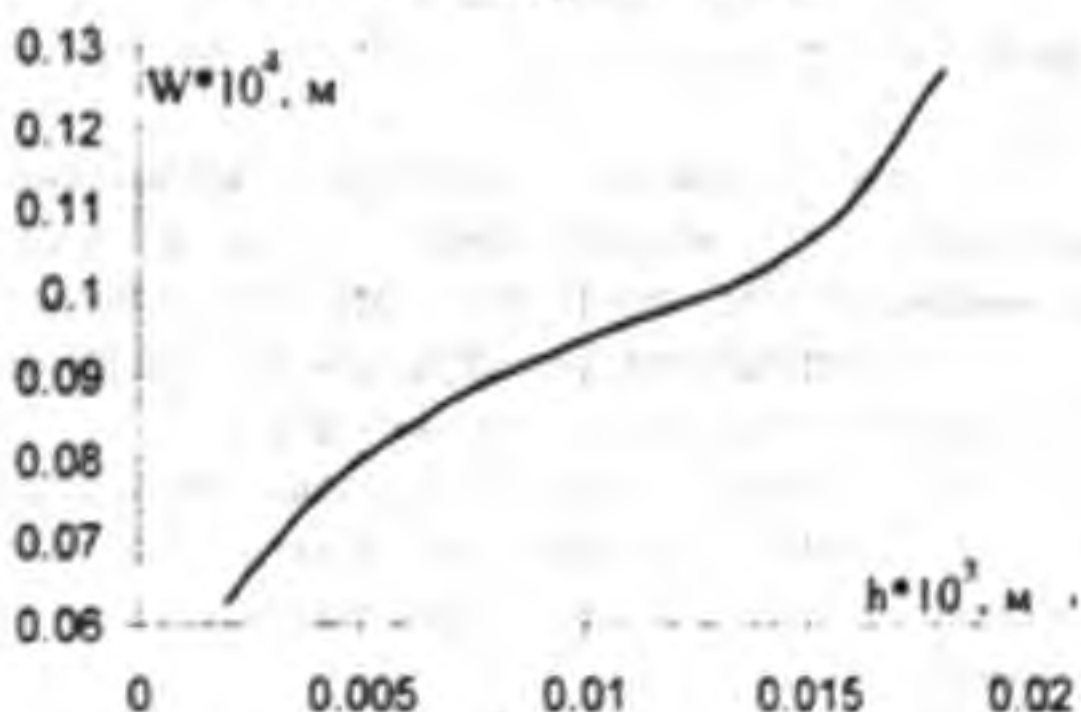


Рис. 3
Залежність максимальної амплітуди від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

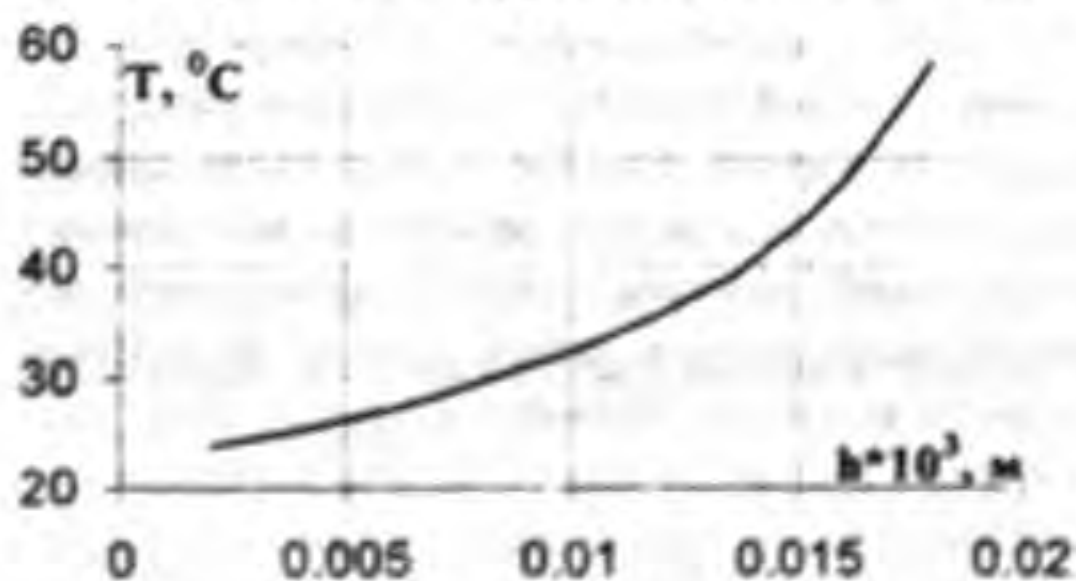


Рис. 4
Залежність максимальної температури від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

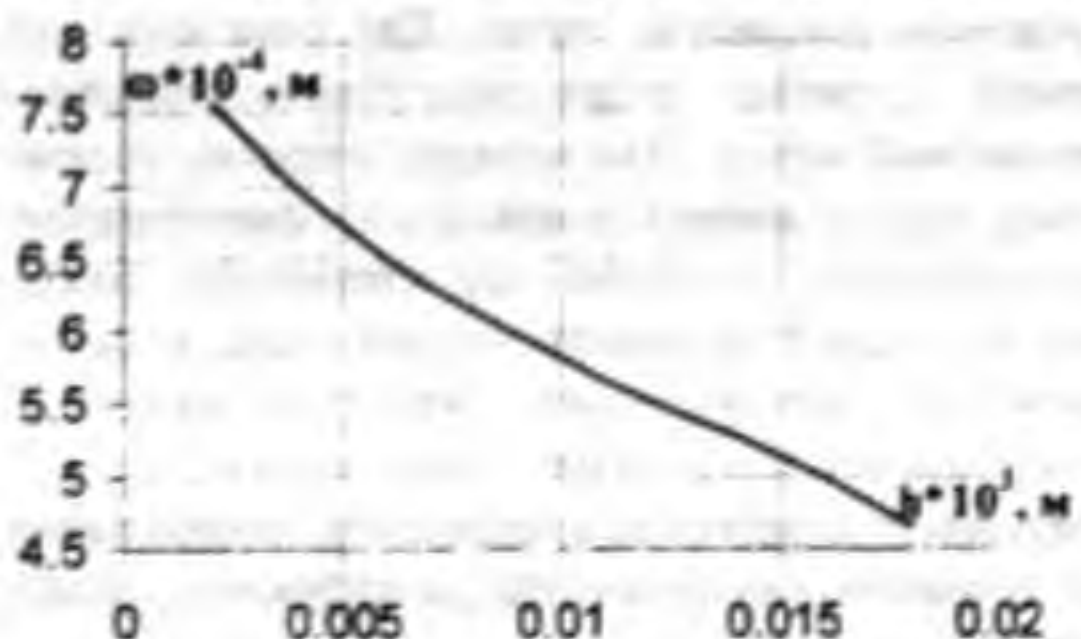


Рис. 5
Залежність власної частоти від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

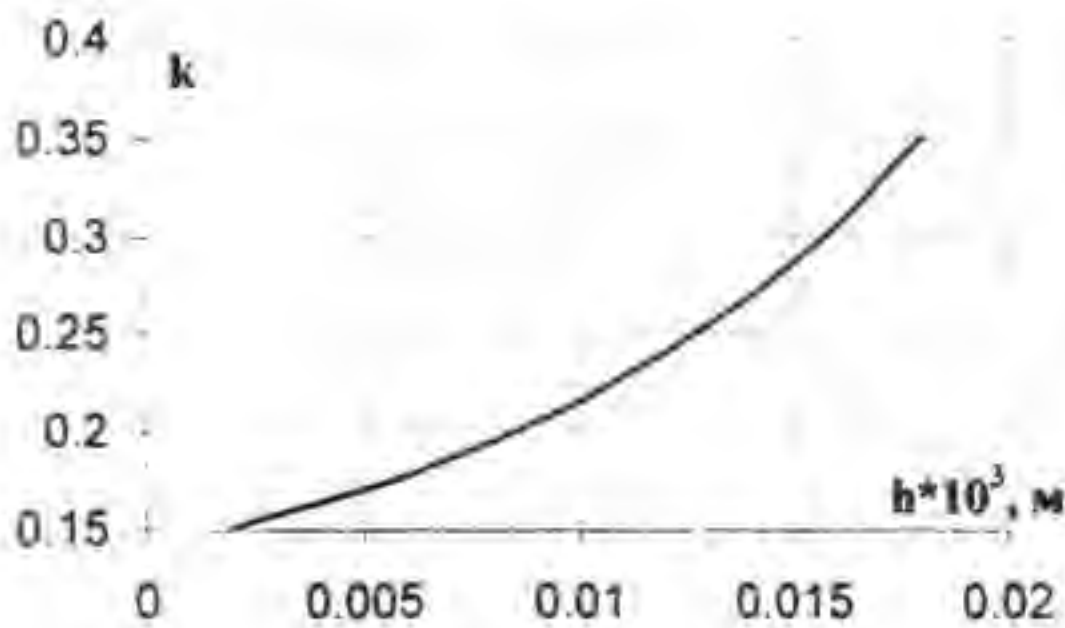


Рис. 6

Залежність коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

На рис. 3,4,5,6 показана відповідно залежність максимальної амплітуди, максимальної температури, першої власної частоти та коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі.

Як видно з представлених числових результатів, структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики циліндричної панелі.

4. Висновки

В статті для незалежних від температури механічних і теплофізичних властивостей матеріалу методом скінчених елементів розв'язана тривимірна зв'язана задача про резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової непружної циліндричної панелі при дії на неї гармонічного за часом рівномірного тиску. Для цього випадку задача зведена до розв'язування послідовності таких трьох задач: 1) динамічної задачі про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) розрахунку дисипативної функції; 3) розв'язування тривимірної нестационарної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування першої і третьої задач розроблено скінченно-елементний метод. Для випадку жорстко зашкелених торців панелі розраховано амплітудно-температурно-частотні характеристики коливань по першій основній згинній моді, а також залежності максимальної амплітуди коливань, максимальної температури дисипативного розігріву, власної частоти і коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього демпфуючого шару панелі.

Результати розрахунків показали, що структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики.

1. Hamid R. Hamidzaden, Reza N. Jazar. Vibrations of Thick Cylindrical Structures. – New York–Dordrecht – Heidelberg – London: Springer, 2010. – 201p.
2. Завгородній А.В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №4. – С. 102–105.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 320с.
5. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Неосесимметричное термонапряженное состояние слоистых тел вращения из ортотропных материалов при неизотермическом нагружении // Механика композитных материалов. – 2004. – 40, №6. – С.731–752.
6. Козлов В.И. Якименко С.Н. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1989. – 25, №5. – С.22–28.
7. Hensen J.S., Hepler G.K. A Mindlin shell element which satisfies rigid body requirements // AIAA J. – 1985. – 22, №2. – P. 288–295.
8. Козлов В.И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязко-упругого материала // Прикл. механика. – 1996. – 32, №6. – С.82–89.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Надійшла до редколегії 24.02.2010

УДК 517.9

А.П. Крєневич, к.ф.-м.н., асистент
Р.Є. Ямненко, к.ф.-м.н., доцент

**Асимптотична еквівалентність
нелінійних диференціальних систем, не
розв'язаних відносно похідної**

Для розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь вигляду $d(y - g(t, y)) = f(t, y)dt$ наведено достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язкам відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду $dx = f(t, x)dt$.

Ключові слова: асимптотична еквівалентність; нелінійна система; система, не розв'язана відносно похідної.

E-mails: krenevich@ukr.net, yamnenko@univ.kiev.ua.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найбільш важливих розділів даної теорії є стійкість, що часто використовується під час дослідження асимптотичної поведінки розв'язків. Питанням стійкості присвячено безліч робіт, серед яких згадаємо [1].

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Проте, для її дослідження використано дещо інший підхід, а саме: відшукування системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків вихідної системи. Таким чином, дослідження вихідної системи зводиться до дослідження значно простішої системи. Системи, асимптотична поведінка розв'язків яких є подібною, будемо називати асимптотично еквівалентними. Слід зауважити, що даний підхід, взагалі кажучи, не є новим. У [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь. У працях [2] – [4] дане питання досліджено для рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, з лінійною та слабко нелінійною пра-

A.P. Krenevych, PhD, Assistant Professor
R.E. Yamnenko, PhD, Associate Professor

**Asymptotic equivalence of nonlinear
differential systems not solved relative to
the derivative**

We have obtained the sufficient conditions of asymptotic equivalence of the solutions of nonlinear differential system $d(y - g(t, y)) = f(t, y)dt$ to the solutions of the corresponding system of ordinary differential equation $dx = f(t, x)dt$.

Key Words: asymptotic equivalence, nonlinear system, system not solved relative to the derivative.

вою частиною. У статті [5] досліджено питання асимптотичної еквівалентності для нелінійних стохастичних систем Іто.

У даній роботі узагальнено результати, висвітлені у працях [2] та [4], на випадок нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Тут отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності для вищезгаданого класу рівнянь. Проте, зауважимо, що для одержання результатів, наведених у роботі, використовувалася зовсім інша техніка, ніж при доведенні результатів [2] – [4]. Ця техніка використовувалася при отриманні результатів роботи [5]. Саме тому достатні умови асимптотичної еквівалентності, наведені у цій праці, досить подібні до умов, наведених у роботі [5].

2 Основні результати

Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = f(t, x)dt, \quad (1)$$

та система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(y - g(t, y)) = f(t, y)dt, \quad (2)$$

де $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$.

Тут f, g – неперервні за сукупністю змінних d -вимірні функції, такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K і для всіх $t \geq 0, x, y \in R^d$, виконуються нерівності

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_g |x - y|, \quad (3)$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f |x - y|, \quad (4)$$

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad (5)$$

причому $L_g < 1$.

Тоді, як відомо з [2], кожна з систем (1) та (2) має єдиний розв'язок при довільних початкових даних.

Означення 2.1. Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1), такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0,$$

то система (2) називається асимптотично еквівалентною системі (1).

Наступна теорема наводить досить прості достатні умови асимптотичної еквівалентності нелінійної системи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, системі звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 2.1. Нехай для довільного $t \geq 0$ розв'язки системи (1) допускають оцінку:

$$|x(t)| \leq K_x |x(0)|, \quad (6)$$

де K_x – додатна стала, незалежна від t і $x(0)$.

Нехай для систем (1) та (2) виконуються нерівності (3) – (5). Крім того, функція g допускає таку оцінку:

$$|g(t, x)| \leq K_g e^{-\alpha t} (1 + |x|), \quad (7)$$

де K_g і α – незалежні від t додатні сталі. Тоді, якщо $\alpha > L_f$, то система (2) асимптотично еквівалентна системі (1).

Доведення. За умов теореми розв'язок кожної з систем (1) та (2) при довільних початкових умовах існує і єдиний.

Для доведення теореми перепишемо системи диференціальних рівнянь (1) і (2), що задовольняють початкові умови $x(t_0)$ і $y(t_0)$ відповідно, у еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (8)$$

$$y(t) = y(t_0) - g(t_0, y(t_0)) + g(t, y(t)) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Нехай $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – два довільні розв'язки системи (1). Тоді з інтегрального представлення (8) та леми Гронуолла-Беллмана можна легко отримати нерівність

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| e^{L_f |t-s|}, \quad (10)$$

що виконується для довільних додатних t і s .

Зафіксуємо деякий розв'язок системи (2) $y(t)$.

Нехай $\{x_n(t) | n \geq 0\}$ – послідовність розв'язків системи (1), таких, що

$$x_n(n) = y(n).$$

Для $t \in [n, n+1]$ оцінимо різницю

$$\begin{aligned} |y(t) - x_n(t)| &= \left| -g(n, y(n)) + g(t, y(t)) + \int_n^t f(\tau, y(\tau)) d\tau - \int_n^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right| = \\ &= \left| -g(n, x_n(n)) + g(t, y(t)) - g(t, x_n(t)) + g(t, x_n(t)) + \int_n^t (f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x_n(\tau))) d\tau \right| \leq \\ &\leq |g(n, x_n(n))| + |g(t, y(t)) - g(t, x_n(t))| + |g(t, x_n(t))| + \int_n^t |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x_n(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq K_g e^{-\alpha n} (1 + |x_n(n)|) + L_g |y(t) - x_n(t)| + K_g e^{-\alpha t} (1 + |x_n(t)|) + L_f \int_n^t |y(\tau) - x_n(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq L_g |y(t) - x_n(t)| + 2K_g e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|) + L_f \int_n^{n+1} |y(\tau) - x_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$(1 - L_g)|y(t) - x_n(t)| \leq \\ \leq 2K_g e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|) + \\ + L_f \int_n^{n+1} |y(\tau) - x_n(\tau)| d\tau,$$

поділивши яку на додатне число $1 - L_g$ отримаємо еквівалентну нерівність

$$|y(t) - x_n(t)| \leq \frac{2K_g}{1 - L_g} e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|) + \\ + \frac{L_f}{1 - L_g} \int_n^{n+1} |y(\tau) - x_n(\tau)| d\tau.$$

Скориставшись для попередньої нерівності лемою Гронвалла-Белмана, отримаємо нерівність

$$|y(t) - x_n(t)| \leq K_1 e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|), \quad (11)$$

де $K_1 = \frac{2K_g}{1 - L_g} e^{\frac{L_f}{1 - L_g}}$.

Підставивши в нерівність (11) $t = n + 1$, отримаємо

$$|y(n + 1) - x_n(n + 1)| = \\ = |x_{n+1}(n + 1) - x_n(n + 1)| \leq \\ \leq K_1 e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|). \quad (12)$$

Тоді, з урахуванням властивості (10), маємо

$$|x_{n+1}(0) - x_n(0)| \leq \\ \leq e^{L_f(n+1)} |x_{n+1}(n + 1) - x_n(n + 1)| \leq \\ \leq K_1 e^{L_f(n+1)} e^{-\alpha n} (1 + K_x |x_n(0)|) = \\ = K_2 e^{-(\alpha - L_f)n} (1 + K_x |x_n(0)|), \quad (13)$$

де $K_2 = K_1 e^{L_f}$.

Майже дослівно повторюючи викладки, наведені у роботі [5], для послідовності $\{x_n(0)\}$ можемо показати існування додатної сталої K_3 , що для всіх $n \geq 0$ виконується нерівність:

$$1 + K_x \|x_n(0)\| \leq K_3 (1 + K_x \|x_0(0)\|). \quad (14)$$

Отже, для $t \in [n, n + 1]$, з урахуванням оцінок (12) і (14) маємо

$$|y(t) - x_n(t)| \leq K_1 K_3 (1 + K_x \|x_0(0)\|) e^{-\alpha n}. \quad (15)$$

Нарешті доведемо твердження теореми. З нерівностей (13) і (14) отримаємо наступну оцінку

$$|x_{n+1}(0) - x_n(0)| \leq \\ \leq K_2 K_3 e^{-(\alpha - L_f)n} (1 + K_x \|x_0(0)\|).$$

З останньої нерівності випливає існування $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0)$.

Визначимо розв'язок $x_\infty(t)$ системи (1) з початкової умови $x_\infty(0) = x_\infty$.

Візьмемо довільне $t \geq 0$. Знайдемо таке n , що $n \leq t \leq n + 1$. Тоді

$$|y(t) - x_\infty(t)| \leq \\ \leq |y(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_\infty(t)|.$$

З нерівності (15) маємо, що вираз $|y(t) - x_n(t)|$ прямує до нуля, як тільки $n \rightarrow \infty$. Зауважимо, що в силу $n \leq t \leq n + 1$, $t \rightarrow \infty$ одночасно з n .

Для оцінки другого доданку доведемо, що для довільного $T \geq 0$

$$x_n(t) \rightarrow x_\infty(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Для цього доведемо збіжність ряду

$$S_\infty(t) := x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1}(t) - x_k(t)).$$

Тоді, очевидно, що часткова сума

$$S_n(t) := x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t))$$

дорівнює $x_n(t)$. Отже, для довільного фіксованого $T > 0$, враховуючи оцінки (10) та (15), маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} |S_n(t) - S_\infty(t)| = \\ = \sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (x_{k+1}(t) - x_k(t)) \right| \leq \\ \leq \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \\ \leq K_1 K_3 (1 + K_x \|x_0(0)\|) \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k} e^{L_f(k-n)} = \\ = K_1 K_3 (1 + K_x \|x_0(0)\|) e^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha - L_f)k}.$$

З останньої нерівності можемо зробити висновок, що $S_n(t) \rightarrow S_\infty(t)$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно на $t \in [0, T]$. Оскільки $S_\infty(0) = x_\infty(0)$, то $S_\infty(t) = x_\infty(t)$, що й доводить співвідношення (16).

Отже, $|x_n(t) - x_\infty(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А значить, виконується рівність

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x_\infty(t)| = 0,$$

яка і доводить теорему. $\square$

Наведемо приклад, який ілюструє застосування доведеної теореми.

Приклад 1. Проведемо дослідження асимптотичних властивостей диференціальних рівнянь

$$dx = \frac{e^{-t/2}}{2} x dt, \quad (17)$$

$$d\left(y - \frac{e^{-t/2}}{2}(1+y)\right) = \frac{e^{-t/2}}{2} y dt. \quad (18)$$

У термінах вищенаведеної теореми

$$f(t, x) = \frac{e^{-t/2}}{2} x,$$

$$g(t, y) = \frac{e^{-t/2}}{2}(1+y).$$

Легко показати, що для функцій f і g виконуються умови (3) – (5), причому

$$L_g = L_f = \frac{1}{2}, K = 1.$$

Отже, можна стверджувати, що при довільних початкових умовах кожне з рівнянь (17) і (18) має єдиний розв'язок на півосі $t \geq 0$.

Для того, щоб переконатися у виконанні умови (6) теореми для рівняння (17), розв'яжемо його. Розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкову умову $x(0)$, має вигляд

$$x(t) = x(0)e^{1-e^{-t/2}},$$

звідки

$$|x(t)| = |x(0)|e^{1-e^{-t/2}} \leq e|x(0)| = K_x|x(0)|.$$

Умова (7) теореми виконується очевидним чином зі сталими

$$K_g = \frac{1}{2}, \alpha = 1,$$

причому $\alpha > L_f$.

Отже, всі умови теореми для рівнянь (17) і (18) виконуються, а значить рівняння (18) асимптотично еквівалентне рівнянню (17).

3 Висновки

У роботі розглянуто клас нелінійних диференціальних систем, не розв'язаних відносно похідної. Для таких систем узагальнено результати, викладені у працях [2] – [4], зокрема отримано умови асимптотичної еквівалентності даного класу рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь. Дані результати стануть у нагоді при дослідженні стійкості та асимптотики нелінійних та слабо нелінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, а також при вивченні інших якісних властивостей розв'язків. У подальшому є перспектива узагальнення даних результатів на більш широкий клас просторів та рівнянь, наприклад, дослідження асимптотичної еквівалентності для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, у нескінченновимірних просторах.

Список використаних джерел

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. – 472 с.
2. Крєневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2009. – №1. – С. 55–59.
3. Крєневич А.П., Могильова В.В. Асимптотичне дослідження сингулярних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 454. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 59–63.
4. Крєневич А.П. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь з нелінійною правою частиною // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2009. – №2. – С. 61–64.
5. Крєневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто // Нелінійні коливання. Інститут математики НАН України. – 2006. – 9, №2. – С. 213–220.

Надійшла до редколегії 10.01.2010

УДК 519.9

Володимир І. Острик, д. ф.-м. н., доцент,
Ольга М. Щокотова, аспірант

Гладкий контакт жорсткого диска з пружним клином

Розглянуто контактну взаємодію жорсткого диска з пружним клином, одна з граней якого закріплена. Область контакту межує з вершиною клина. Методом Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено розподіли напружень в області контакту та на закріпленій грані клина, а також переміщення вільної межі клина.

Ключові слова: жорсткий диск, пружний клин, метод Вінера – Гопфа, напруження, переміщення.

E-mail: ostrik_v@rambler.ru, schekotova@list.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В.

1 Вступ

Задачі про контактну взаємодію штампів з пружним клином розглядалися в роботах [1-3, 7, 8, 11]. В [7, 8] контактні задачі для пружної чвертьплощини за допомогою інтегрального перетворення Фур'є зведені до систем інтегральних рівнянь. У [11] задача про вдавлення штампа поліноміального профілю в пружний клин, одна з граней якого шарнірно закріплена, зведена до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, розв'язок якого отримано методом наближеної факторизації. Асимптотичним методом контактні задачі для клина із різними крайовими умовами на одній із граней розв'язані в роботах [1-3].

У даній роботі розглянуто гладкий контакт жорсткого диска та пружного клина, одна з граней якого закріплена. Методом Вінера – Гопфа отримано точний розв'язок задачі.

2 Постановка задачі

Розглянемо взаємодію жорсткого диска радіуса R та пружного клина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$), нижня грань $\theta = 0$ якого закріплена, а верхня $\theta = \alpha$ – вільна (рис. 1, а). Під дією сили P , яку прикладено до центру диска, останній вдається у верхню грань клина, так що обід диска дотикається вершини клина (рис. 1, б). Розмір l області контакту $0 \leq r \leq l$ ($\theta = \alpha$) заздалегідь невідомий. Невідомими також є відстань h від вершини клина до лінії дії сили P та радіальна координата d точки найбільшого занурення обода диска у пружний клин. Сили тертя в області контакту не враховуємо.

V. I. Ostriuk, D. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof.,
O. M. Schokotova, PhD student

Smooth contact of hard disk with elastic wedge

The contact interaction of hard disk and elastic wedge is considered. One facet of the wedge is fixed. The hard disk comes from the top of wedge. Using the method of Wiener – Hopf received the analytic solution of the problem. The distribution of stresses in contact domain and fixed facet of the wedge, as well as the displacements on free boundary of the wedge were found.

Key Words: hard disk, elastic wedge, method of Wiener – Hopf, stresses, displacements.

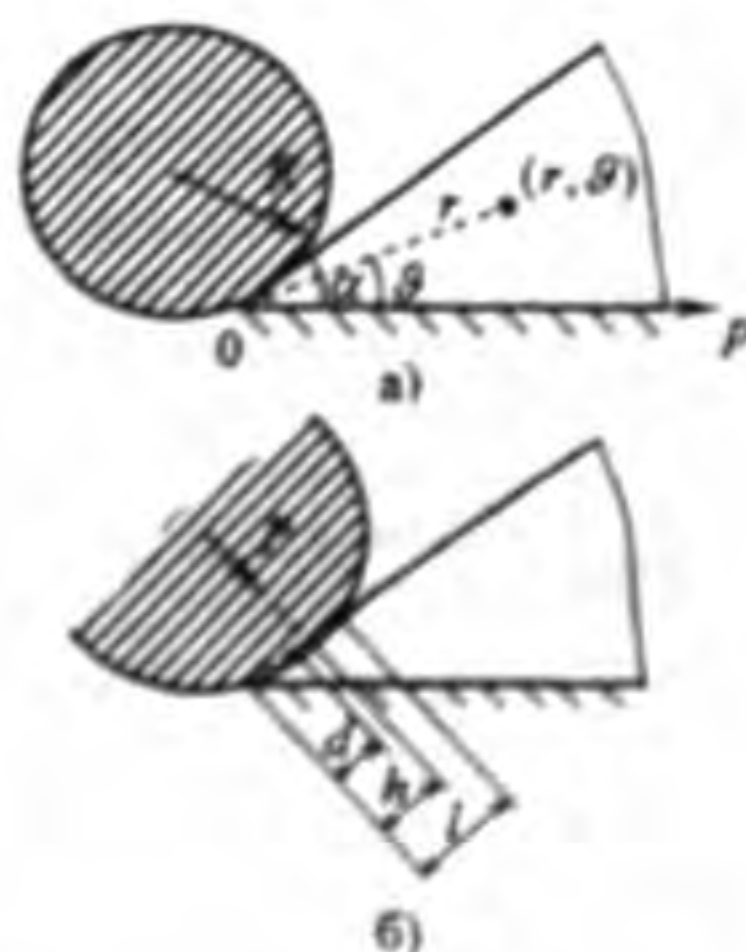


Рис. 1

Крайові умови задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{\theta}|_{\theta=\alpha} &= \frac{1}{2R} r(r-2d), \quad r_{,r}|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r \leq l), \\ \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} &= 0, \quad r_{,r}|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (l < r < \infty), \\ u_r|_{\theta=0} &= 0, \quad u_{\theta}|_{\theta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Для визначення невідомих параметрів задачі l , h і d слугують умови рівноваги диска

$$\int_0^l \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} dr = -P, \quad \int_0^l r \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} dr = -Ph, \quad (2)$$

а також умова обмеженості контактних напружень, яку буде розглянуто нижче.

3 Інтегральне рівняння

Введемо невідому функцію контактних напружень

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} \quad (0 < r < l), \quad (3)$$

де G – модуль зсуву. Її перетворення Мелліна, завдяки третій крайовій умові (1), має вигляд

$$a(s) = \int_0^l g(y) y^s dy. \quad (4)$$

Розв'язок основної змішаної задачі для клина, коли на грані $\theta = \alpha$ задано нормальні напруження за відсутності дотичних напружень, а на грані $\theta = 0$ – нульові переміщення, отримаємо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. На гранях клина маємо:

$$u_{\theta}|_{\theta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$u_r|_{\theta=\alpha} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^*(s) a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\theta}|_{\theta=0} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{M}(s) a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{M}^*(s) a(s) r^{-s-1} ds \quad (-1 < c < \delta_1),$$

$$M(s) = 2(m-1) \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)}, \quad M^*(s) = \frac{\lambda^*(s)}{s\Delta(s)},$$

$$\hat{M}(s) = 2(m-1) \frac{\hat{\lambda}(s)}{\Delta(s)}, \quad \hat{M}^*(s) = 2(m-1) \frac{\hat{\lambda}^*(s)}{\Delta(s)},$$

$$\lambda(s) = (3m-4) \sin 2s\alpha - ms \sin 2\alpha,$$

$$\lambda^*(s) = (3m-4)(m-2) \sin^2 s\alpha - ms(ms+2m-2) \sin^2 \alpha,$$

$$\hat{\lambda}(s) = 2(m-1) \cos \alpha \cos s\alpha - (ms-m+2) \sin \alpha \sin s\alpha,$$

$$\hat{\lambda}^*(s) = (m-2) \cos \alpha \sin s\alpha - (ms+2m-2) \sin \alpha \cos s\alpha,$$

$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2s\alpha - 1) - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2, \quad (5)$$

де δ_1 – найменший корінь рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$, m – число Пуассона.

Розв'язок (5) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставимо в цю умову вираз для окружних переміщень із (5) з урахуванням рівності (4). Після заміни змінних

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \quad (6)$$

та введення нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = g(le^{-\eta})e^{-\eta} \quad (7)$$

отримаємо інтегральне рівняння з різницею ядром на півосі

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad (8)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$K(z) = \frac{M(-iz)}{2(m-1)} = \frac{\lambda(iz)}{iz\Delta(iz)},$$

$$f(\xi) = -\frac{l}{4(m-1)R} e^{-\xi} \left(2 \frac{d}{l} - e^{-\xi} \right).$$

Полюси мероморфної функції $K(z)$ знаходяться поза смугою $-1 < \operatorname{Im} z < \delta_1$, і тому контур інтегрування для ядра $k(\xi - \eta)$ зміщено на дійсну вісь.

4 Розв'язання інтегрального рівняння

Розповсюдимо рівняння (8) на всю числову вісь, поклавши $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$:

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & \xi \geq 0 \\ \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & \xi < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(\xi), & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i\xi\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\xi\zeta} d\xi.$$

Увівши невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi z} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i\xi z} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (9)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^*$ і

$\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа [4]

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (10)$$

права частина $F^+(z)$ якого є аналітичною функцією у верхній півплощині та має вигляд

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\xi) e^{i\xi z} d\xi = \frac{Al}{iR} \left(2 \frac{d}{l} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+2i} \right),$$

$$A = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}(m-1)}. \quad (11)$$

Коефіцієнт $K(z)$ факторизуємо у вигляді

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad (12)$$

де $K^+(z)$ і $K^-(z)$ – функції, які аналітичні та не перетворюються в нуль у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Факторизацію здійснюємо у нескінченних добутках [5]

$$K^+(z) \equiv K(0)K^-(-z) = K(0) \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{is_n} \right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1},$$

де s_n і δ_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівнянь $\lambda(s)=0$ і $\Delta(s)=0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$.

Після факторизації функціональне рівняння запишемо у наступному вигляді:

$$K^+(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z)/K^-(z) = F^+(z)/K^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (13)$$

Праву частину рівняння (13) подамо у вигляді різниці функцій

$$F^+(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z), \quad (14)$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$. Одну з цих функцій $f^+(z)$ визначаємо через інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі, який знаходимо за теорією лишків. Маємо

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{F^+(\zeta) d\zeta}{K^-(\zeta)(\zeta - z)} =$$

$$= \frac{Al}{iR} \left[2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(z+i)} - \frac{1}{K^-(-2i)(z+2i)} \right]. \quad (15)$$

З урахуванням (14) функціональне рівняння (13) набуває вигляду

$$K^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \Phi^-(z)/K^-(z) - f^-(z), \quad (16)$$

в якому ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і представляють собою єдину цілу функцію, яку визначимо з умов на нескінченності. Враховуючи асимптотичні оцінки $K^+(z) = O(z^{-1/2})$, $\Phi^+(z) = o(1)$, $f^+(z) = O(z^{-1})$, $|z| \rightarrow \infty$, заключаємо, що обидві частини рівняння (16) тотожно дорівнюють нулеві. На цій підставі з (16) отримуємо розв'язок функціонального рівняння (10):

$$\Phi^+(z) = f^+(z)/K^+(z), \quad \Phi^-(z) = K^-(z)f^-(z). \quad (17)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (8) одержуємо оберненим перетворенням Фур'є першої рівності (9) у наступному вигляді:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt =$$

$$= \frac{Al}{\sqrt{2\pi}R} \int_{-\infty}^\infty \frac{t \Delta(it) K^-(t)}{\lambda(it)} \left[2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(t+i)} - \frac{1}{K^-(-2i)(t+2i)} \right] e^{-i\xi t} dt \quad (\xi \geq 0). \quad (18)$$

5 Напруження та переміщення на межі клина

Перетворюючи інтеграл із (18) за теорією лишків і використовуючи заміни (3), (7), отримуємо контактні напруження

$$\frac{\sigma_\theta}{2G} \Big|_{\theta=0} = -\frac{2(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2) \sin 2\alpha} \frac{d}{R} +$$

$$+ \frac{(3m-4)m \sin^2 2\alpha + 4m^2 \sin^2 \alpha - 4(m-1)^2}{(m-1)(2m \sin 2\alpha - (3m-4) \sin 4\alpha)} \frac{r}{R} +$$

$$+ \frac{l}{4(m-1)R} \sum_{k=1}^\infty \frac{s_k \Delta(s_k) K^-(-is_k)}{\lambda'(s_k)} \left(\frac{1}{K^-(-2i)(s_k-2)} - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(s_k-1)} \right) \left(\frac{r}{l} \right)^{s_k-1} \quad (0 < r < l). \quad (19)$$

Аналіз формули (19) показує, що існує критичний кут $\alpha_* = \arccos(1/\sqrt{m})$ (якщо $m=10/3$, то $\alpha_* = 56.8^\circ$), при якому контактні напруження обертаються в нуль у вершині клина, а при $\alpha > \alpha_*$ стають додатними. Тобто при переході через критичний кут розхилу клина ($\alpha > \alpha_*$) розв'язок задачі втрачає зміст. У цьому разі спостерігається відставання ободу диска від поверхні клина, і постановка задачі потребує перегляду.

Переміщення точок верхньої грані клина знайдемо з першого і другого співвідношень (5), використовуючи вираз для $a(s)$ з (4), заміни (6), (7) та перший вираз із (9). Маємо

$$u_{\theta}|_{\theta=\alpha} = \frac{l}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(is) M(s) e^{s\zeta} ds,$$

$$u_r|_{\theta=\alpha} = \frac{\sqrt{2}l}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(is) M^*(s) e^{s\zeta} ds. \quad (20)$$

Після перетворення інтегралів із (20) за теорією лишків отримуємо

$$u_{\theta}|_{\theta=\alpha} = \frac{l^2}{2R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k) c_k}{\delta_k \Delta'(\delta_k) K^*(i\delta_k)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-\delta_k},$$

$$u_r|_{\theta=\alpha} = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^*(\delta_k) c_k}{\delta_k \Delta'(\delta_k) K^*(i\delta_k)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-\delta_k} \quad (l < r < \infty),$$

$$u_r|_{\theta=\alpha} = \frac{d}{R} r \operatorname{tg} \alpha +$$

$$+ B \frac{(3m-4)(m-2) \sin^2 2\alpha - 4m \sin^2 \alpha}{2m \sin 2\alpha - (3m-4) \sin 4\alpha} \left(\frac{r}{l}\right)^2 -$$

$$- B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^*(-s_k) K^-(-is_k)}{\lambda'(s_k)} \left[2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(1-s_k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{K^-(-2i)(2-s_k)} \right] \left(\frac{r}{l}\right)^{s_k} \quad (0 < r < l),$$

$$c_k = 2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(\delta_k+1)} - \frac{1}{K^-(-2i)(\delta_k+2)},$$

$$B = \frac{l^2}{2(m-1)R}. \quad (21)$$

Аналогічно (20) з четвертої та п'ятої рівностей (5) з урахуванням розв'язку (17), (15) визначаємо напруження на закріпленій грані клина

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2G}|_{\theta=0} = \frac{l}{R} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}(-it) \chi(t)}{\Delta(it) K^*(t)} \left(\frac{r}{l}\right)^{t-1} dt,$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G}|_{\theta=0} = \frac{l}{R} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^*(-it) \chi(t)}{\Delta(it) K^*(t)} \left(\frac{r}{l}\right)^{t-1} dt,$$

$$\chi(t) = 2 \frac{d}{l} \frac{1}{K^-(-i)(t+i)} - \frac{1}{K^-(-2i)(t+2i)}. \quad (22)$$

На відміну від інтегралів із (20), які мають повільну збіжність і тому перетворені до швидко

збіжних нескінченних сум (21), інтеграли із (22) навпаки збігаються експоненціально і можуть бути ефективно обчислені за найпростішими квадратурними формулами.

Асимптотична оцінка розв'язку (17)

$$\Phi^*(z) = O(z^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty$$

на підставі леми Ватсона [9]

$$\int_0^{\infty} \xi^{\rho-1} \varphi_1(\xi) e^{i\zeta \xi} d\xi \sim \Gamma(\rho) \varphi_1(0) (-i\zeta)^{-\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (23)$$

призводить до необмеженості нормальних напружень на правому краї області контакту ($r \rightarrow l-0$). Але при контакті з круглим диском деформована верхня грань пружного клина залишається гладкою. Тому необхідно поставити умову обмеженості контактних напружень

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f^*(z) = 0. \quad (24)$$

Завдяки умові (24) маємо оцінки

$$\Phi^*(z) = o(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} = o(1), \quad r \rightarrow l-0,$$

остання з яких показує, що нормальні напруження обертаються в нуль на краї $r=l$ області контакту і стають неперервними на верхній грані клина при переході через точку $r=l$ із області контакту до вільної частини межі клина.

З умови (24) визначаємо координату точки найбільшого занурення диска

$$d = kl, \quad k = \frac{K^-(-i)}{2K^-(-2i)}. \quad (25)$$

З умов рівноваги диска (2) знаходимо розмір області контакту та плече прикладеної до штампа сили

$$l = k_1 \sqrt{\frac{PR}{2G}}, \quad h = k_2 l, \quad (26)$$

$$k_1^2 = -\frac{l}{R} \left(\int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right)^{-1} = \frac{l}{\sqrt{2\pi R} \Phi^*(0)} = 8(m-1) K^*(2i),$$

$$k_2 = -k_1^2 \frac{R}{l} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\xi} d\xi = -k_1^2 \frac{R}{l} \sqrt{2\pi} \Phi^*(i) = \frac{1}{3K^-(-i)}.$$

6 Результати обчислень

На рис. 2-6 подано результати обчислень напружень та переміщень на межі пружного клина у випадку числа Пуассона $m=10/3$. Суцільні

криві відповідають значенню кута розхилу клина $\alpha = \pi/4$, пунктирні – $\alpha = \pi/6$, штрихпунктирна та точкова лінія на рис. 2 – значенням $\alpha = 5\pi/12$ і $\alpha_* = 56.8^\circ$.

Розподіл безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = lP^{-1}\sigma_\theta|_{\theta=\alpha}$ наведено на рис. 2. Видно,

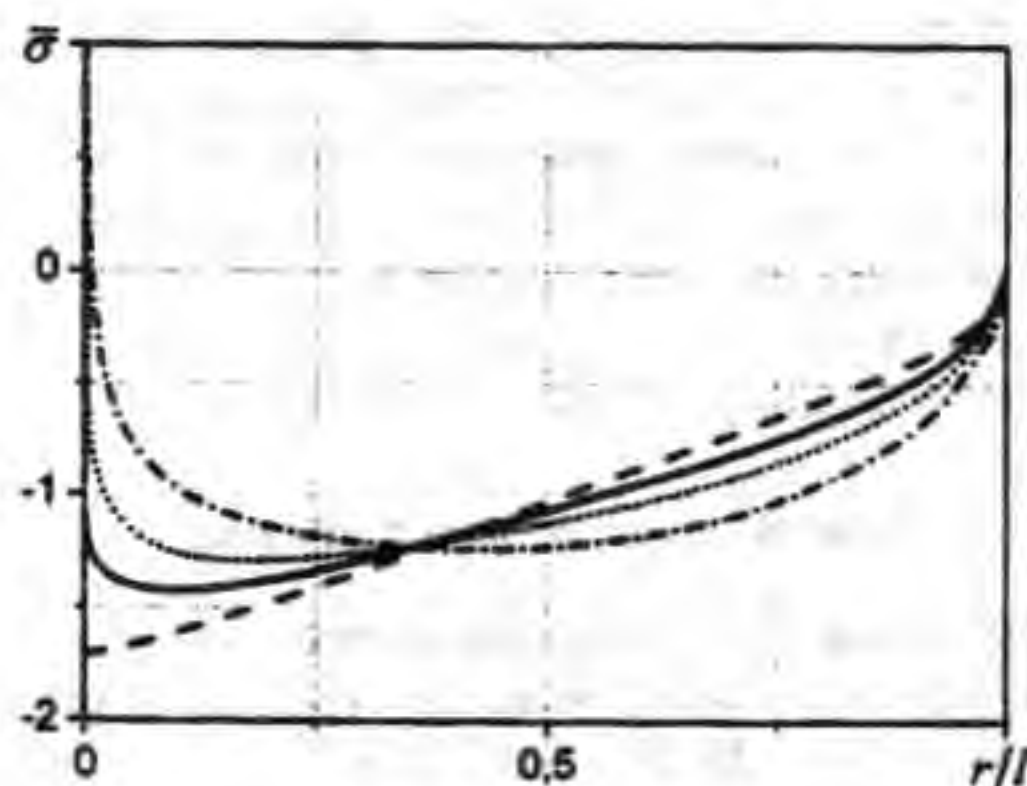


Рис. 2

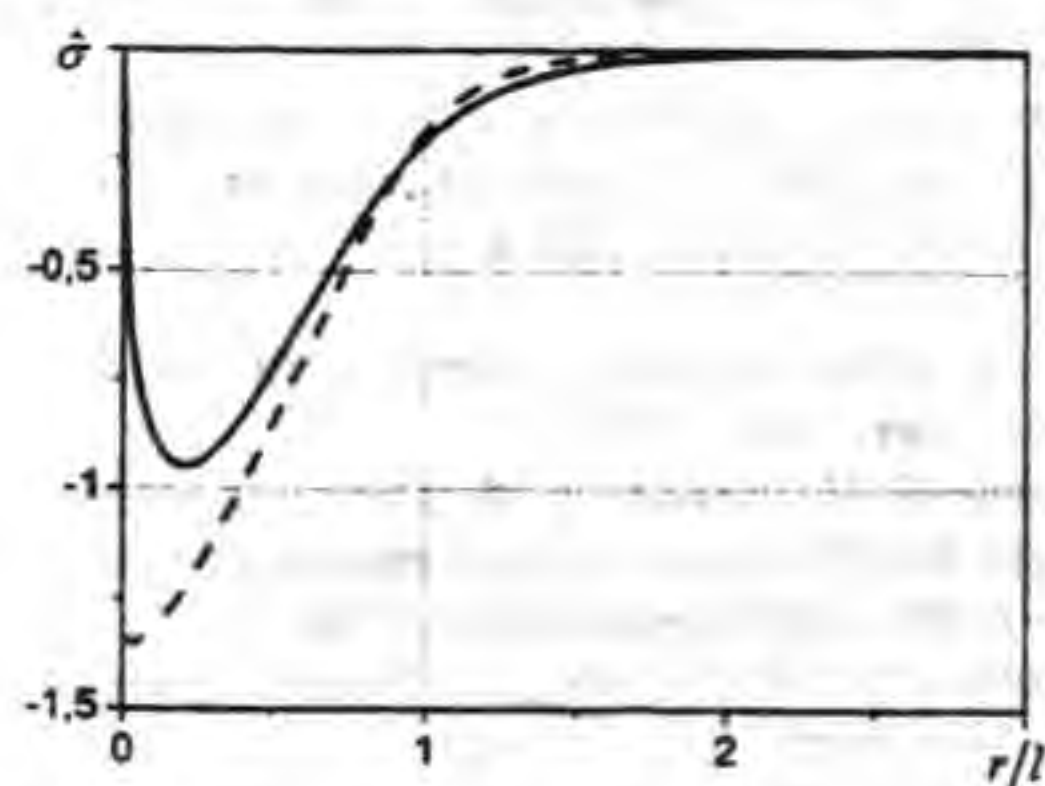


Рис. 3

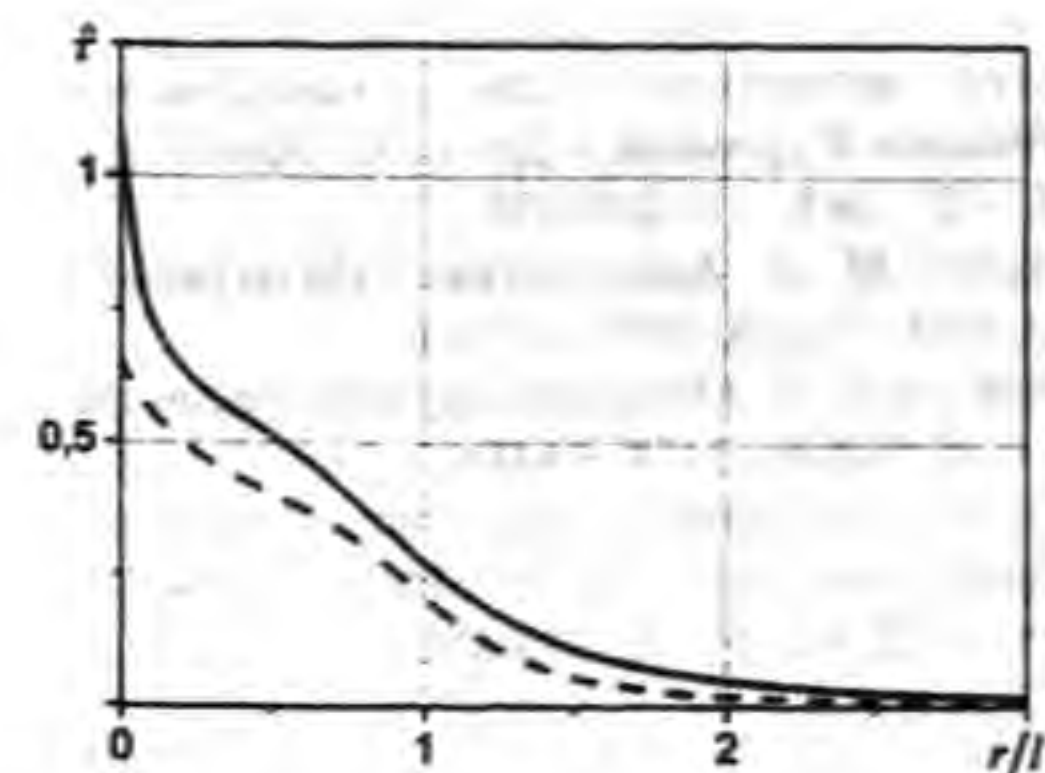


Рис. 4

що із зменшенням кута α контактний тиск значно підвищується поблизу вершини клина та дещо спадає на віддаленій від вершини частині області контакту. Згідно з формулою (19) контактні напруження при вершині клина змінюються з нескінченним градієнтом, так що $\sigma_\theta - \sigma_\theta|_{r=0} = O(r^{s_1-1})$, $r \rightarrow 0$ ($\theta = \alpha$). Значення кореня s_1 наведені у табл. 1. Так для кутів $\alpha \geq \pi/4$ тиск різ-

Таблиця 1

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\alpha_* = 56.8^\circ$	$5\pi/12$
s_1	1.899	1.421	1.240	1.083

ко змінюється в околі вершини клина, а для кута $\alpha = \pi/6$ перепад тиску стає майже непомітним і його розподіл наближається до лінійного. При $\alpha = \alpha_*$ контактні напруження у вершині клина ($r/l = 0$) обертаються в нуль, а при $\alpha > \alpha_*$ стають додатними у виключно малому околі вершини клина ($0 \leq r/l < \delta$). Так, наприклад, при $\alpha = 5\pi/12$ $\bar{\sigma}|_{r/l=0} = 4.874$, $\delta = 0.006$.

Розподіли безрозмірних нормальних $\hat{\sigma} = lP^{-1}\sigma_\theta|_{\theta=0}$ і дотичних $\hat{\tau} = lP^{-1}\tau_{r\theta}|_{\theta=0}$ напружень на жорстко закріпленій грані клина показано на рис. 3 і 4 відповідно. Рівень нормальних напружень за абсолютними значеннями дещо менший ніж рівень контактного тиску на верхній грані клина. Дотичні напруження різко зростають у вершині клина.

Значення напружень у вершині клина ($r/l = 0$, рис. 2-4) співпадають згідно з принципом мікроскопа [10] з відповідними значеннями аналогічної задачі для напівобмеженого штампа з прямолінійною основою ($0 \leq r < \infty$). Розв'язок останньої задачі, отриманий за методикою [6], має вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= -2G\varepsilon \left(\frac{m}{m-2} \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{\cos 2(\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha} \right), \\ \tau_{r\theta} &= 2G\varepsilon \frac{\sin 2(\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha}, \\ u_\theta &= -2\varepsilon \frac{\sin \theta \cos(2\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha} r, \\ u_r &= 2\varepsilon \frac{\sin \theta \sin(2\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha} r,\end{aligned}\quad (27)$$

де $\varepsilon = d/R$ – кут повороту штампа.

На рис. 5 і 6 представлено безрозмірні колові $\bar{u}_\theta = 2GP^{-1}u_\theta|_{\theta=\alpha}$ і радіальні $\bar{u}_r = 2GP^{-1}u_r|_{\theta=\alpha}$ пе-

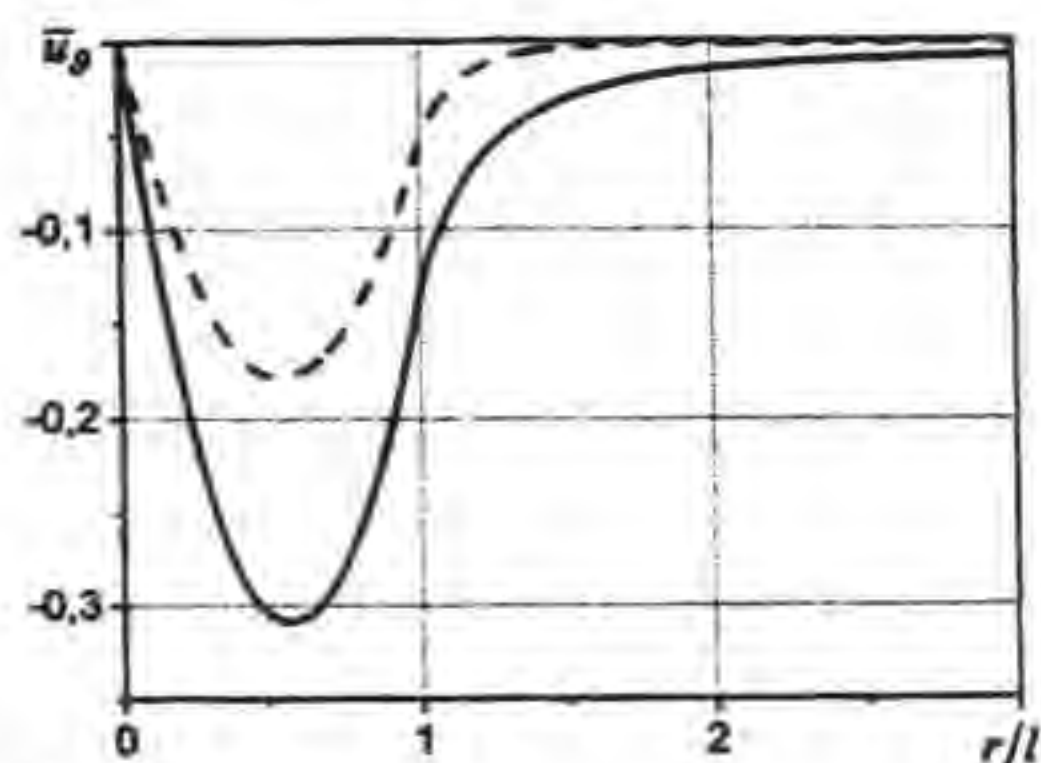


Рис. 5

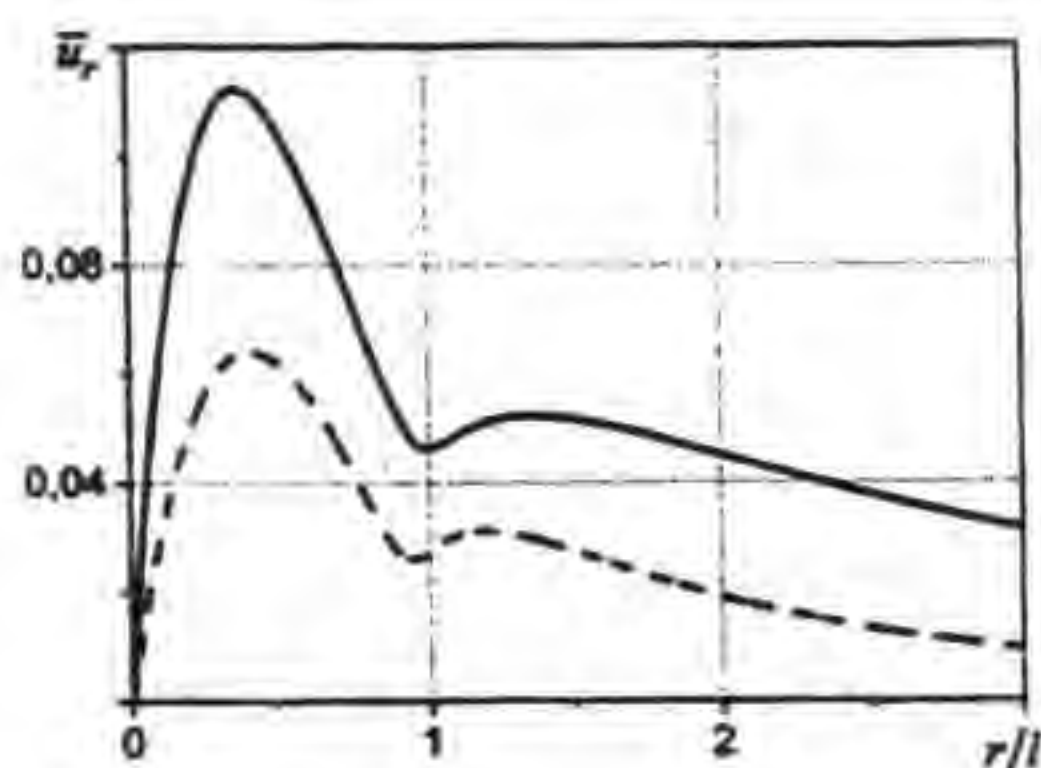


Рис. 6

реміщення точок верхньої грані пружного клина. Як видно із рис. 6, граничні точки пружного клина зміщуються у напрямку від вершини клина. При цьому повздовжня деформація $\epsilon_r = du_r/dr$ є деформацією розтягу ($\epsilon_r > 0$) на лівій половині області контакту і деформацією стиску ($\epsilon_r < 0$) на правій.

Значення коефіцієнтів $k = d/l$, $k_1 = l\sqrt{2G/(PR)}$ та $k_2 = h/l$ із (25), (26), які визначають координату точки найбільшого занурення диска, розмір області контакту та відстань від вершини клина до лінії дії сили, наведено у табл. 2.

Таблиця 2

α	k	k_1	k_2
$\pi/4$	0.570	1.377	0.402
$\pi/6$	0.545	1.097	0.370

7 Висновки

Методом Вінера – Гопфа отримано точний аналітичний розв'язок контактної задачі про вдавлювання жорсткого диска в пружний клин із закріпленою гранню у випадку, коли область кон-

такту межує з вершиною клина. Визначено положення лінії дії вдавлюючої сили, розмір області контакту та точку максимального занурення диска в пружний клин.

Окрім розподілу контактних напружень також знайдено та проаналізовано напруження та переміщення уздовж усієї межі пружного клина. З'ясовано, що характер розподілу контактних напружень суттєво залежить від кута розхилу клина. Виявлено високий рівень зсувних напружень у вершині клина на його закріпленій грані.

Знайдено критичний кут розхилу клина, при переході через який спостерігається відставання ободу диска від поверхні клина у виключно малому околі вершини клина.

Список використаних джерел

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – 20, № 1. – С. 3-14.
2. Александров В. М. К контактным задачам для упругого клина с одной защемленной гранью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1968. – 21, № 2. – С. 17-27.
3. Александров В. М., Копасенко В. В. Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикл. механика. – 1968. – 4, вып. 7. – С. 75-82.
4. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
7. Тоноян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четвертьплоскости // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 3. – С. 121-130.
8. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 5. – С. 249-258.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
11. Matczynski M. Elastic wedge, with discontinuous boundary conditions // Arch. Mech. Stosowanej. – 1963. – 15, No. 6. – С. 833-855.

Надійшла до редколегії 03.12.2009

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

RECEIVED

1887/1888

УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м.н., с.н.с., Поляков С.А. інж.*

Композиційна семантика рекурсивних запитів в SQL-подібних мовах

В статті розглянутий метод моделювання ієрархічних структур даних у вигляді списків суміжності. Наведені приклади таких списків та їх типи. Розглянуті методи побудови навігаційних запитів до ієрархічних структур даних, в тому числі за допомогою загальних табличних виразів CTE у їх рекурсивній формі. Наведені приклади таких запитів. Задана формальна семантика рекурсивних загальних табличних виразів.

Ключові слова: композиційна семантика, рекурсивні запити, SQL, загальні табличні вирази, CTE.

D.B. Buy, Dr. Sc, S.A. Polyakov engineer*

Compositional semantics of the recursive queries in languages similar to SQL

The paper describes a method for showing hierarchies in relation databases uses an adjacency list model. The paper introduces the adjacency lists sorts and their samples. The navigations queries are described as well as common table expression in their recursive format. Samples of the such queries are shown. The paper defines formal semantic of the recursive common table expression.

Key Words: compositional semantics, recursive queries, SQL, common table expression, CTE.

*E-mail: buy@unicyb.kiev.ua, polyakov@unicyb.kiev.ua

Статтю представив: д.ф.м.н., проф. Анісімов А.В. (голова редколегії журналу)

Загальні зауваження

Мова SQL надає потужні та елегантні засоби для маніпулювання табличними структурами даних, які по суті є мультимножинами рядків [1]. Операції SQL в більшості випадків виявляються набагато ефективнішими при виконанні запитів над таблицями ніж виконання тих же самих запитів засобами традиційних мов програмування. При цьому SQL-запити простіші в програмуванні. Це пояснюється високим рівнем операцій SQL, орієнтованих на роботу з мультимножинами на відміну від традиційних мов програмування, які потребують поелементної обробки мультимножин. Наприклад, в SQL існують аналоги стандартних теоретико-множинних операцій, таких як перетин, об'єднання та різниця множин.

Але платою за такий високий рівень операцій є більш обмежені функціональні можливості мови SQL в порівнянні з традиційними мовами програмування. Існують класи запитів до табличних структур даних, які не можуть бути реалізовані засобами тільки SQL. В той же час такі запити реалізуються традиційними мовами (програмування). Одним із прикладів є запити до ієрархічних структур даних [2-4]. На сьогодні розроблено декілька методів відображення ієрархічних структур у

таблиці. Головне питання полягає в наявності операцій високого рівня для маніпулювання ієрархічними даними, зокрема, для побудови так званих рекурсивних запитів. В перших версіях SQL ці можливості були відсутні. Тому маніпулювання такими даними програмувалось засобами процедурних розширень SQL і мало чим відрізнялось від програмування на класичних мовах програмування. Тільки в стандарті SQL:99 було введено розширення, яке допускає рекурсивні запити [3]. В подальшому це розширення мови було втілено в таких провідних СУБД як DB2 та MS SQL Server. В той же час компанія Oracle не підтримала стандарт і має своє розширення для написання рекурсивних запитів [5].

Приклад ієрархічної структури даних і рекурсивного запиту для її опрацювання

Ієрархічні структури можуть бути представлені в таблицях кількома методами. Найбільш поширеним є використання так званих списків суміжності, які і будуть розглянуті далі. Розглянемо таку класичну ієрархічну структуру як бюрократична організація, що будується за принципом керівник-підлеглий. Кожний підлеглий має тільки одного керівника і кожний керівник має багато підлеглих. Визначимо таблицю співробітників Employees.

Таблиця 1 – Таблиця співробітників Employees

EmployeeId	ManagerId	LastName	FirstName	Title	BirthDate	HireDate	City	Region	Address

Перші два атрибути цієї таблиці EmployeeId і ManagerId використовуються для завдання ієрархічних зв'язків на рядках. Атрибут EmployeeId містить унікальний ідентифікатор працівника і є первинним ключем таблиці. Атрибут ManagerId містить ідентифікатор керівника цього співробітника і є зовнішнім ключем, який посилається на атрибут EmployeeId в той же самій таблиці. Якщо у співробітника немає керівника, тобто він є керівником вищого рівня, то атрибут ManagerId має особливе значення NULL. Інші атрибути таблиці містять персональну інформацію про співробітника: його ім'я (FirstName) та прізвище (LastName), посаду (Title), дату народження (BirthDate), дату найму в організацію (HireDate), місто (City) та область (Region), де він працює, адресу (Address). Фактично атрибути EmployeeId і ManagerId утворюють зв'язок типу один до багатьох на рядках однієї таблиці.

Такі ієрархічні відношення ще називають відношеннями предок-нащадок. Наведений вище приклад списку суміжності демонструє найпростіший або базовий тип ієрархії, коли кожний нащадок має тільки одного предка. В загальному випадку у кожного нащадка може існувати декілька предків.

В теорії графів списку суміжності з кількістю нащадків не більше ніж n відповідає

орієнтований ациклічний граф з валентністю вершин не більше n . (Стандартно валентністю вершини називається кількість ребер, інцидентних вершині [6]). Для наведеного вище прикладу валентність вершин не перевищує одиницю.

Наступним прикладом є генеалогічне дерево, яке містить родинні зв'язки між людьми. У кожної людини є батько та матір. Таким чином, кожний нащадок має не більше двох предків. Для завдання ієрархічних зв'язків такого типу використовуються так звані дуальні списки суміжності. В теорії графів їм відповідають ациклічні орієнтовані графи з валентністю вершин не більш ніж два. Якщо валентність вершини дорівнює двом, то існує інформація про батько і матір людини; якщо валентність дорівнює одиниці, то інформація про одного з батьків відсутня; якщо ж, нарешті, валентність вершини дорівнює нулю, то відсутня інформація про обох батьків. З огляду на скінченність в будь-якому випадку в такому графі повинна бути хоча б одна вершина з нульовою валентністю.

Таблиця, яка задає генеалогічне дерево, наведена нижче. Перші три атрибути використовуються для встановлення дуальних зв'язків між рядками таблиці.

Таблиця 2 - Таблиця родинних зв'язків FamilyTree

PersonId	FatherId	MotherId	LastName	FirstName	BirthDate	City	Region	Address

Атрибут PersonId містить, як і раніше, унікальний ідентифікатор людини, тобто є первинним ключем. Атрибути FatherId та MotherId посилаються на батька та матір людини відповідно. Кожний з них є зовнішнім ключем та посилається на один і той самий атрибут PersonId. Інші атрибути таблиці містять, як і раніше, прізвище (LastName) та ім'я (FirstName) людини, дату народження (BirthDate), місто (City), область (Region) та адресу проживання (Address) відповідно.

Далі розглянемо так звані навігаційні запити, тобто запити, в умові фільтрації яких використовується зв'язок предок/нащадок. Наприклад, потрібно знайти всі вузли, які є нащадками заданого вузла. Найпростішими навігаційними запитами є такі, коли треба знайти всіх синів вказаного вузла. Наприклад, треба знайти всіх працівників, керівником яких є співробітник з ідентифікаційним кодом «010101».

```
SELECT Employees.EmployeeId, Employees.LastName, Employees.FirstName, Employees.Title,
       Manager.LastName, Manager.FirstName
FROM Employees INNER JOIN Employees Manager
      ON Employees.ManagerId = Manager.EmployeeID
WHERE Manager.EmployeeID = «010101»
```

Звернемо увагу, що таблиця Employees поєднується сама з собою. Для того, щоб уникнути колізії імен, другий екземпляр таблиці перейменовується за допомогою псевдоніма Manager.

В приведеному прикладі треба перейти на один рівень нижче від заданого вузла. Аналогічним чином будуються запити, коли треба перейти на будь-яку наперед задану кількість рівнів.

Але коли кількість рівнів, які треба обійти, невідома заздалегідь, то запит не може бути побудований стандартними засобами оператора SELECT. Наприклад, нехай потрібно знайти всіх нащадків якої-небудь людини. Природно, людина вважається дитиною деякої особи, якщо її FatherId чи MotherId дорівнює PersonId цієї особи. Для цього можна використати курсори SQL та стандартні ітеративні методи обходу генеалогічного дерева, наприклад, обхід в глибину. Але коли даних багато, використання курсорів не є ефективним.

Більш ефективним є метод, коли створюється допоміжна тимчасова таблиця. На першому кроці туди записується тільки один рядок з тією людиною, нащадки якої шукаються. Далі виконується ітеративна процедура поповнення таблиці. На i -му кроці ітерації в таблицю додаються всі нащадки, які знаходяться на i -му рівні глибини відносно свого спільного предка. Це робиться одним оператором SELECT. Процес закінчується, коли оператор SELECT повертає порожню таблицю.

Кількість операторів SELECT дорівнює кількості рівнів в ієрархічній структурі. Так, якщо є мільйон вузлів, розташованих на ста рівнях, то буде виконано лише сто операторів. Тобто множинно-орієнтований підхід діє набагато ефективніше попереднього процедурно-орієнтованого. Але він все ще вимагає створення процедур і виконання кількох операторів. Якщо процедура виконується не на сервері, а на комп'ютері клієнта, то кожний раз потрібно звернення до серверу, що зніжує продуктивність.

В стандарті SQL:99 був введений новий оператор – так званий загальний табличний вираз CTE (Common Table Expression), який у своїй рекурсивній формі дозволяє побудувати потрібний результат без звернення до процедурного коду.

Вирази CTE в своїй нерекурсивній формі подібні звичайним представленням (view) зі сферою дії, обмеженою одним запитом. На них можна дивитися як на підзапити, які відокремлені від основного запиту та мають своє

ім'я. Такий підзапит можна використовувати в декількох місцях основного запиту. Він починається з ключового слова WITH, за яким йде ім'я запиту та перелік параметрів. Після CTE починається головний запит, який має посилання на CTE (виклик CTE). Далі приведена загальна структура запиту з CTE.

```
/*CTE*/  
WITH CTEName (parameters)  
AS (Simple Subquery)  
/* головний запит */  
SELECT...  
FROM CTEName
```

Рекурсивна форма CTE має більш складний вигляд. Вона складається з двох операторів SELECT, які поєднані операцією UNION ALL (підкреслимо, що мова йде саме про операцію UNION ALL; нижче буде показано, що замінити операцію UNION ALL на UNION не можна, адже головна відмінність між цими операціями полягає в тому, що операція UNION ALL будує таблицю з дублікатами рядків, а операція UNION – без дублікатів).

Родинне дерево будується для людини, ідентифікатор якої PersonId дорівнює 10. Після фрази WITH вказується назва таблиці, яка будується за допомогою CTE, та список її атрибутів. Атрибут Level є обчислюваним і містить рівень, на якому розташовані нащадки відповідного рівня людини, для якої будується запит. Так, сама людина має рівень 1, її діти мають рівень 2 і т.д.

Перший оператор SELECT задає ініціальну таблицю. Для даного приклада вона буде складатися тільки з одного рядка, який відповідає вказаній людині. Другий оператор SELECT формує результуючу таблицю рекурсивним (в іншій термінології рекурентним або індуктивним) чином.

```
WITH Tree(LastName, FirstName, PersonID, Level)  
AS ( /* початковий стан таблиці */  
    SELECT LastName, FirstName, PersonID, 1  
    FROM FamilyTree  
    WHERE PersonID = 10  
    /* рекурсивний виклик */  
    UNION ALL  
    SELECT Node.LastName, Node.FirstName,  
    Node.PersonID, X.Level + 1  
    FROM FamilyTree Node  
    JOIN Tree X  
    ON Node.MotherID = X.PersonID OR  
    Node.FatherID = X.PersonID  
    )  
/* головний запит */  
SELECT PersonID, LastName, FirstName, Level  
FROM Tree
```

Семантика рекурсивних запитів

Перейдемо до опису семантики оператора СТЕ. Таблиці будемо позначати символами t можливо з індексами, функції на таблицях (тобто функції, область визначення та область значення яких є множина таблиць) будемо позначати символами f, g теж можливо з індексами.

Нехай задані унарна функція $g: T \rightarrow T$ та бінарна функція $f: T \times T \rightarrow T$. СТЕ-вираз уточнюється за допомогою бінарної композиції C , яка функціям g, f ставить у відповідність нову функцію $C(g, f)$; значення останньої функції на аргументі t знаходиться наступним чином.

Будуємо послідовність таблиць

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$, де

$$t_1 = g(t),$$

$$t_2 = f(t_1, t),$$

$$t_3 = f(t_2, t),$$

$$\dots$$

$$t_i = f(t_{i-1}, t),$$

$$\dots$$

Якщо на деякому кроці $n+1$, де $n=1,2,\dots$, отримується порожня таблиця, причому усі попередні таблиці послідовності є непорожніми, то процес обчислень закінчується з результатом

$$t_1 \cup_{ALL} t_2 \cup_{ALL} \dots \cup_{ALL} t_n.$$

В іншому випадку (тобто всі таблиці $t_i, i=1,2,\dots$ непорожні) значення $C(g, f)(t)$ покладається невизначенням.

Вище операція $\cup_{ALL}$ – операція об'єднання мультимножин з врахуванням дублікатів [1, підрозд. 3.4, с.153] (за іншою термінологією ця операція називається операцією додавання мультимножин [7-9]).

Нижченаведена діаграма ілюструє процедуру знаходження значень функції, яка будується композицією C .

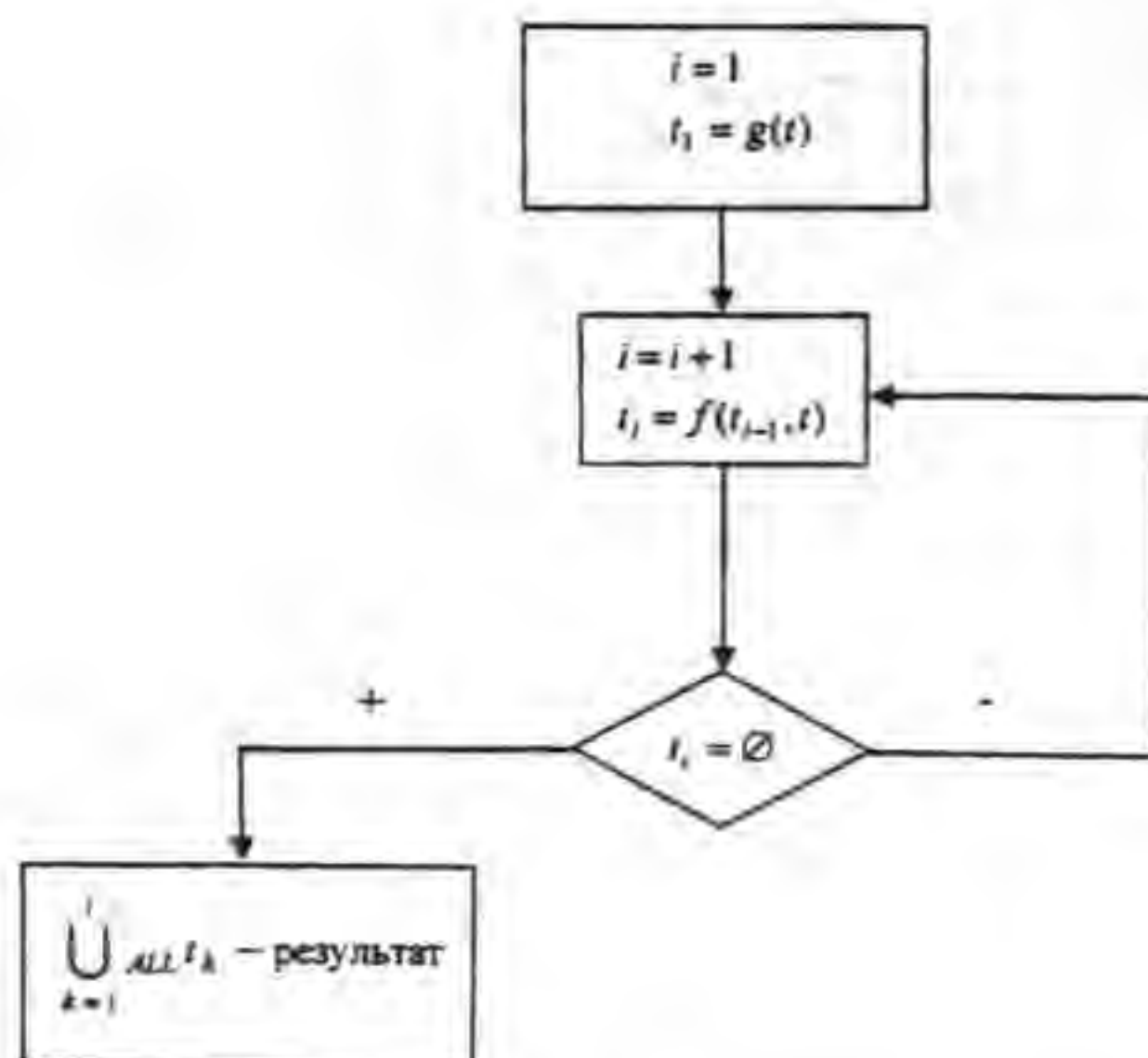


Рис. 1. Блок-схема процедури знаходження значень вигляду $C(g, f)(t)$

Вказана процедура знаходження значень функції $C(g, f)$ модифікується очевидним чином на випадок часткових функцій.

Підкреслимо ще раз, що операція об'єднання є об'єднанням мультимножин з врахуванням дублікатів. Характеристична властивість цього об'єднання полягає в тому, що коли обидві таблиці-аргументи не є порожніми, то результат відрізняється від аргументів (навіть якщо один аргумент "вкладається" в інший)

Точніше кажучи, мова йде про наступне бінарне відношення над мультимножинами

def $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow O(\alpha) \subseteq O(\beta) \wedge \forall x(x \in O(\alpha) \Rightarrow \alpha(x) \leq \beta(x))$. Тут $O(\alpha), O(\beta)$ – основи мультимножин α, β відповідно [1, підрозд. 3.4, с. 151]. Це бінарне відношення є частковим порядком, воно перетворює сім'ю мультимножин в ріштку (подробниці дивись в [8-10]).

Вкажемо другий спосіб обчислення значення $C(g, f)(t)$, який в деяких випадках є більш зручним. А саме, будуються дві послідовності таблиць $t_1, t_2, \dots$, та $t_1, t_2, \dots$:

$$t_1 = g(t), t_1 = g(t),$$

$$t_2 = f(t_1, t), t_2 = t_1 \cup_{ALL} t_2,$$

...

$$t_i = f(t_{i-1}, t), t_i = t_{i-1} \cup_{ALL} t_i,$$

...

Якщо на деякому кроці $n+1$, де $n=1,2,\dots$, виконується рівність $t_n = t_{n+1}$, то процес обчислень закінчується, і таблиця t_n покладається рівним результату. В

протилежному випадку (тобто для всіх $n=1,2,\dots$, виконується нерівність $t_n \neq t_{n+1}$) значення $C(g, f)(t)$ невизначено.

Змістовно кажучи, значення нової функції визначено тоді і тільки тоді, коли послідовність $t_i, i=1,2,\dots$ стабілізується.

Нижченаведена діаграма ілюструє описану процедуру знаходження значень функції, яка будується композицією C .

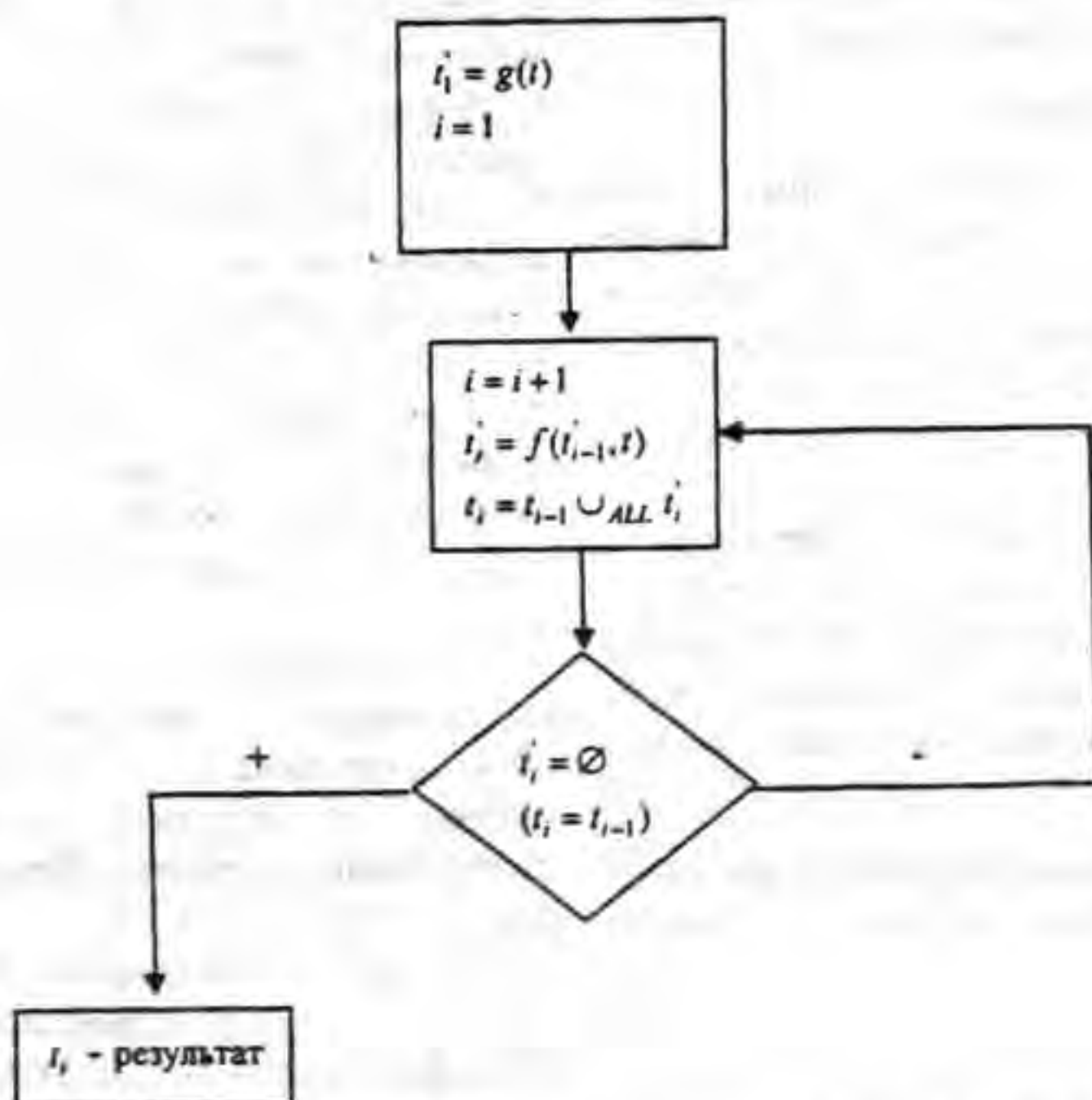


Рис. 2. Блок-схема процедури знаходження значень вигляду $C(g, f)(t)$

В наведеному вище прикладі побудови генеалогічного дерева функція g задається першим оператором SELECT.

```

SELECT LastName, FirstName, PersonID, 1
FROM FamilyTree
WHERE PersonID = 10
  
```

Функція f задається другим оператором SELECT.

```

SELECT Node.LastName, Node.FirstName,
Node.PersonID, X.Level + 1
FROM FamilyTree Node
JOIN Tree X
ON Node.MotherID = X.PersonID OR
Node.FatherID = X.PersonID
  
```

Узагальнимо оператор CTE на випадок багатьох таблиць. А саме, нехай задані n -арна функція $g: T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \rightarrow T$ та $n+1$ -арна функція $f: T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \times T_{n+1} \rightarrow T$. Тоді узагальнений CTE-вираз уточнюється за допомогою узагальненої бінарної композиції C , яка функціям g, f ставить у відповідність нову n -арну функцію $C(g, f): T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \rightarrow T$; значення якої на аргументах $t_1, t_2, \dots, t_n$ знаходиться наступним чином. Будуємо послідовність таблиць $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots$, де

$$t_1 = g(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n),$$

$$t_2 = f(t_1, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n),$$

$$t_3 = f(t_2, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n),$$

...

$$t_i = f(t_{i-1}, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n),$$

...

Якщо на деякому кроці $n+1$, де $n=1,2,\dots$, отримується порожня таблиця, причому усі попередні таблиці послідовності не є порожніми, то процес обчислень закінчується з результатом $t_1 \cup_{ALL} t_2 \cup_{ALL} \dots \cup_{ALL} t_n$.

В іншому випадку (тобто всі таблиці $t_i, i=1,2,\dots$ непорожні) значення $C(g, f)(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ покладається невизначеним.

Відмітимо, що функція f може відразу повертати порожню таблицю. Тоді будемо мати CTE- вирази у їх не рекурсивній формі.

Висновки

CTE-оператор в рекурсивній формі є більш зручним та ефективним засобом опрацювання ієрархічних структур даних в мові SQL ніж використання процедурного розширення мови. CTE-оператор працює на рівні мультимножинних аналогів теоретико-множинних операцій, що дозволяє писати запити в компактній та наочній формі. Разом з тим CTE-оператор є непридатним, коли результат запиту залежить від порядку обходу дерева або іншої ієрархічної структури. Зрозуміло, що в цьому випадку треба використовувати процедурно-орієнтовані методи написання запитів.

Подальша робота буде присвячена формальній композиційній семантиці рекурсивних запитів мови SQL – композиції C .

Список використаних джерел

1. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н.Редько, Ю.Й.Брона, Д.Б.Буй, С.А.Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
2. Viescas J.L. SQL Queries for Mere Mortals: a hands-on guide to data manipulation in SQL [2nd edition] / J.L. Viescas, M.J. Hernandez. – Massachusetts: "Addison-Wesley", 2007. – 631 p.
3. Neilesen P. SQL Server 2005 Bible / P. Neilesen. – Indiana: "Wiley Publishing Inc.", 2007. – 1293 p.
4. Celko J. Joe Celko's Trees and hierarchies in SQL for smarties / J. Celko. – San Francisco: "Morgan Kaufmann Publishers", 2004. – 238 p.
5. Beaulieu A. Mastering Oracle SQL [2nd edition] / A. Beaulieu, S. Mishra. – Sebastopol: "O'Reilly Media Inc.", 2004. – 492 p.
6. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – Москва: "Мир", 1977. – 207 с.
7. Петровський А.Б. Основные понятия теории мультимножеств / А.Б. Петровський. – Москва: "Едиториал УРСС", 2002. – 80 с.
8. Буй Д.Б. Решітка мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатырьова // Современные направления теоретических и прикладных исследований: международная конференция SWORD, 16-27 марта 2009 г., Одесса: Черноморье. – 2009. – Т.2. – С. 49-52.
9. Богатырьова Ю.А. Мультимножества: библиография, решетка мультимножеств / Ю.А. Богатырьова // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, December 8-10, 2009. – Kyiv. – 2009. – С. 13-20.
10. Буй Д.Б., Богатырева Ю.А. К вопросу о решетке мультимножеств / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырева // Десятый международный семинар "Дискретная математика и ее приложения", Москва, МГУ, 1-6 февраля 2010 г.

Надійшла до редколегії 12.01.2010

УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м.н, с.н.с.,
Богатирьова Ю.О., аспірантка

Сучасний стан теорії мультимножин

Стаття присвячена огляду існуючої літератури по теорії та застосуванню мультимножин (змістовно кажучи, сукупностей з повтореннями). По кожному з 26 джерел наведені головні результати. Основні статті розглянуто більш детально.

Ключові слова: мультимножина, реляційні бази даних, таблична алгебра.

*E-mail: buy@unicyb.kiev.ua, j_bogatyreva@ukr.net
Статтю представив д.ф.-м.н., проф., Анісімов А.В.

Зручною моделлю для подання та представлення об'єктів, особливістю яких є повторюваність та множинність даних, виступають мультимножини. Змістовно кажучи, мультимножини – це сукупності з повтореннями. Поняття мультимножини з'явилося відносно недавно, хоча в практичних задачах мультимножини використовувалися досить часто.

У 60-х роках Д. Кнотом було поставлено питання про відсутність адекватної термінології і позначень для такої глобальної концепції як мультимножина. Вперше термін "мультимножина" (multiset, bag) був запропонований Н.Г. де Брейном (N. G. de Bruijn) у приватній кореспонденції з Д. Кнотом. У 70-х роках цей термін набув широко розповсюдження і зараз є стандартним.

Тривалий час поняття мультимножини різними науковцями інтерпретувалося по-різному. Відома оглядова стаття В. Близарда (W. Blizard) [2] – це спроба систематизувати усю існуючу на той час (1989) інформацію.

У ній представлений розгорнутий огляд розвитку теорії мультимножин, який умовно поділений на дві частини "Математика і логіка" та "Обчислювальна математика". Автор в хронологічному порядку викладає основні ідеї та здобутки різних науковців, починаючи від розгляду поняття множини та потужності множини у Кантора і закінчуючи результатами, отриманими у цій сфері сучасними вченими (Кнут (D. Knuth), Ягер (R. Yager) та ін.).

D.B. Buy, DPhil, senior staff scientist,
J.A. Bogatyreva*, postgraduate student

The modern state of multiset' theory

Article is devoted the review of the existing literature about the theory and application of multisets (substantially speaking, sets with repetitions). On each of 26 sources the basic results are given. The main articles are considered in more details.

Key words: multiset, relation databases, relation algebra.

В частині робіт, розглянутих автором, мультимножини представлені як математичні об'єкти. Тоді як в інших роботах мультимножини досліджуються з точки зору певного специфічного застосування. Розглядаються не тільки мультимножини з скінченною та нескінченною кратністю елементів, а і мультимножини з від'ємною кратністю (так звані гібридні множини). В роботі розглядаються також нечіткі (fuzzy) та жорсткі (rough) мультимножини. Крім цього розглянуто застосування мультимножин в теорії категорій та комбінаториці, наведені філософські аспекти теорії мультимножин.

В більшості робіт означення мультимножини формулюється на платформі класичної теорії множин або через числення предикатів першого порядку.

Проте деякі роботи розвивають теорію видів (theory of sorts), яка радикально відрізняється від класичної математики своєю тривівноціною (tripartitous) природою (об'єкти можуть бути однакові, різні або двоїсті).

Існує більш сучасна (2007 року) оглядова робота [11], яка відштовхується від робіт В. Близарда. В статті нараховується більш ніж 80 джерел стосовно теорії мультимножин та її застосування.

В цій роботі розглядаються методи представлення мультимножин, визначаються операції об'єднання, перетину та суми мультимножин та наводяться деякі їх властивості.

Друга частина цієї роботи присвячена саме використанню мультимножин у різних сферах (здебільшого в комп'ютерних науках).

Одним із найбільш природних є застосування мультимножин в табличних базах даних, якому присвячено багато робіт.

Проте мультимножини використовуються не лише в математиці та комп'ютерних науках, а і в багатьох інших галузях.

Усю бібліографію, присвячену мультимножинам, можна умовно розділити на такі категорії: роботи щодо абстрактної теорії мультимножин, оглядові роботи, роботи щодо використання мультимножин. Крім цього виокремимо роботи по застосуванню теорії мультимножин саме в базах даних. Отже, маємо чотири розділи, представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Бібліографія по теорії та застосуванню мультимножин

№ п/п	Рік	Автор(и)	Головні результати	Посилання
АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ МУЛЬТИМНОЖИН				
1.	1991	J. Albert	Автор дає формальне визначення мультимножині та операціям над ними; наводить алгебраїчні властивості мультимножин.	[1]
2.	2000	Д. Кнут	Автор дає змістовне визначення поняття мультимножини; визначає операції об'єднання, перетину та суми мультимножин.	[17]
3.	2001	A. Syropoulos	Робота складається з декількох частин і підсумовує усе те, що пов'язано з теорією мультимножин станом 2001 рік. Спочатку автор дає означення мультимножини, визначає операції додавання, об'єднання та перетину мультимножин, вводить означення потужності та відношення включення мультимножин. Далі розглядаються гібридні множини, нечіткі та частково впорядковані мультимножини, а також наводиться категоріальна модель мультимножин.	[12]
4.	2002, 2003	А.Б. Петровський	У першій монографії автор вводить основні визначення теорії мультимножин: мультимножини, характеристичної функції, операцій над мультимножинами. Крім цього він розглядає властивості основних операцій над мультимножинами, методи графічного представлення мультимножин та дає короткий огляд застосування мультимножин у різних галузях. У другій монографії автор розглядає метричні простори множин та мультимножин, описує нові види метрик.	[21, 22]
ОГЛЯДОВІ СТАТТІ				
5.	1989	Wayne D. Blizard	Автор подає розгорнутий огляд теорії мультимножин станом 1989 рік. Робота складається з двох частин: теорія мультимножин та її застосування. В першій частині роботи, починаючи від Кантора та його визначення поняття множини, автор наводить різноманітні визначення поняття мульти-	[2]

			множини різних авторів. У другій частині роботи мультимножини розглядається насамперед як об'єкти певних практичних задач.	
6.	2007	D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna, J.N. Singh	В роботі розглядаються різноманітні представлення мультимножин (у мультиплікативній, лінійній формах, у вигляді послідовності, як сімейство множин, у вигляді числової послідовності). Визначаються операції над мультимножинами та розглядаються деякі їх властивості, а також подається короткий огляд застосувань мультимножини в математиці, комп'ютерних науках та інших областях.	[11]

МУЛЬТИМНОЖИНИ В ТАБЛИЧНИХ БАЗАХ ДАНИХ

7.	1993, 1997	L. Libkin, L. Wong	В першій роботі автори розглядають теоретичні питання, що стосуються реляційних баз даних, основою яких виступають мультимножини. Вони будують мову запитів для мультимножин BQL (Bag Query Language) та досліджуються зв'язок між отриманою мовою і так званою вкладеною реляційною алгеброю (nested relation algebra). Друга робота присвячена виразній силі мови запитів для мультимножин, а також використанню деяких конструкцій для мультимножин, множин та списків.	[6, 7]
8.	1999	Д.Б. Буй, С.А. Поляков	В роботі задана композиційна семантика таблиць з дублікатами рядків та таблиць "впорядкованих" конструкцією ORDER BY.	[15]
9.	2001	В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков.	Монографія присвячена табличним алгебра та SQL-подібним мовам. В ній дається формальне визначення мультимножини, характеристичної функції мультимножини, а також визначаються операції над мультимножинами: об'єднання, перетину, різниці, декартова з'єднання, фільтрації, повного образу, агрегатні функції.	[23]
10.	2001	G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella	Стаття присвячена розширенню можливостей баз даних за рахунок використання мультимножин. Автори зауважують, що сучасні комерційні реляційні бази даних дають змогу здійснювати мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо бази даних ґрунтуються на формальній множинно-орієнтованій моделі.	[5]
11.	2003	С.Д. Кузнецов	Розглядається існування такого структурного типу як мультимножина (BAG) в декларативній мові обмежень OCL. Цей тип є різновидом колекцій і має відповідні операції.	[18]
12.	2003	Стандарт SQL:2003	Починаючи зі стандарту SQL:2003 в мову SQL був введений конструктор типу MULTISSET. Значення мультимножин задаються шляхом використання спеціальної конструкції multiset value constructor. Крім цього для мультимножин введені операції об'єднання,	[20]

			перетину та різниці (multiset union, multiset intersect, multiset except), а також нові агрегатні функції (collect, fusion, intersect).	
13.	2004	K.A. Ross, J. Stoyanovich	Автори представляють симетричний зв'язок між k -арними сутностями бази даних як мультимножину потужності k , де k – натуральне число. В статті обґрунтовується необхідність підтримки базами даних мультимножин, обмежених по потужності (cardinality-bounded multisets), які природним чином виникають при вирішенні реальних задач. Також пропонуються методи реалізації. Описаний синтаксис розширення SQL, що дає змогу формулювати запити над такими симетричними зв'язками.	[10]
14.	2004	Г. Гарсія-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом	Дається визначення мультимножини в термінах табличних баз даних. Також над мультимножинами вводяться основні (об'єднання, перетин, різниця, проекція, вибір з мультимножини або селекція, декартовий добуток) та додаткові (агрегування, сортування, групування) операції.	[16]

ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ МУЛЬТИМНОЖИН

15.	1985	Х. Барендрегт	При розгляді сильно еквівалентних рекурсій в теорії λ -числення вводяться мультимножини, основами яких виступають скінченні множини натуральних чисел, для таких мультимножин вводяться ординали.	[13]
16.	1992	Д. Кнут	У своїй роботі автор визначає мультимову як мультимножину рядків і будує контекстно-вільну мультимову.	[4]
17.	1998	J.W. Lloyd	Автор пропонує новий спосіб підтримки мультимножин в декларативній мові програмування Escher. Він вводить стандартне визначення мультимножини, а потім визначає мультимножину відповідними засобами мови. Реалізує операції додавання, об'єднання, перетину та різниці над мультимножинами, а також допоміжні функції для роботи з ними.	[8, 9]
18.	2000, 2005	В.А. Башкин, И.А. Ломазова	Мультимножини застосовуються для визначення основних понять мереж Петрі.	[14, 24]
19.	2004	Г.В. Сухольский	Методи психології використовують мультимножини.	[26]
20.	2005	C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu	Стаття присвячена представленню та кодуванню інформації в термінах теорії мультимножин. Інформаційний ресурс розглядається як такий, що породжує мультимножинні повідомлення. Досліджується норма ентропії мультимножинного інформаційного ресурсу.	[3]
21.	2005	Г.Г. Малинецкий, С.А. Науменко	Мультимножини використовуються у такій новій області знань як обчислення на ДНК – розділі так званих молекулярних обчислень (нового міждисциплінарного напрямку	[19]

			досліджень на межі молекулярної біології і комп'ютерних наук)	
22.	2006	О.А. Славин	Мультимножини застосовуються в задачах розпізнавання символів. Різноманітні з погляду зображення типи символів можуть містити декілька графем, тобто типів зображення, що відповідають одному символу. Алфавіт навчання як множина класів є носієм мультимножини всіх допустимих графем. Кратність елементу цієї мультимножини є кількість графем, нерозрізняваних з погляду алфавіту навчання.	[25]

Більш детально прокоментуємо деякі більш важливі, на наш погляд, роботи.

Стаття [12] (№3 у таблиці) підсумовує фактологію теорії мультимножин та складається з шести розділів. Перший розділ – вступний, другий – присвячений визначенню мультимножин та операцій над ними, третій розділ описує гібридні множини, у четвертому – мультимножини розглядаються в теорії категорій, розділи п'ять та шість присвячені відповідно нечітким та частково впорядкованим мультимножинам.

Автор визначає мультимножину, допускаючи, що в заданій множині елементи можуть повторюватися скінченне число разів. Далі наводяться три методи формального визначення мультимножини: метод списку (мультимножина визначається шляхом вказування всіх її елементів), метод правила (the rule method, мультимножина визначається через певну властивість, притаманну її елементам) та метод характеристичної функції (мультимножина визначається через характеристичну функцію).

Автор розрізняє поняття мультимножини (мультимножини з нерозрізняваними елементами, що повторюються) та дійсної мультимножини (мультимножини з розрізняваними елементами, що повторюються) та наводить відповідні означення.

В другому розділі також подано визначення опорної множини та підмультимножини. Наведено означення потужності мультимножини, операцій над мультимножинами (додавання, різниці, об'єднання та перетину) та деякі властивості операцій. Крім цього вводиться досить специфічна операція, що не має аналога для множин – бінарна операція мультиперетину. Одним аргументом якої виступає мультимножина, іншим – множина.

Наступний розділ статті присвячений гібридним множинам. Сукупностям, кратність елементів яких може бути як додатною або

рівною 0, так і від'ємною. Автор наводить формальне означення гібридної множини, визначає операції об'єднання, перетину та суми над ними. Також наводить визначення підмножини гібридної множини.

У четвертому розділі розглядається категорна модель мультимножин. Дається визначення двох категорій всіх можливих мультимножин *MSet* та *Bags*.

П'ятий розділ статті описує нечіткі мультимножини. Автор дає формальне визначення, представлення нечіткої мультимножини у вигляді рангової послідовності. Крім цього визначаються операції об'єднання та перетину нечітких мультимножин, наводяться означення підмультимножини нечіткої мультимножини, рівності нечітких мультимножин та операції α -обмеження нечіткої мультимножини.

Останній розділ присвячений частково впорядкованим мультимножинам (*poset*). Наведено визначення частково впорядкованої мультимножини та розглянуто три основні операції над ними: спеціальний перетин (*concurrency*), спеціальне з'єднання (*concatenation*), так званий ортоперетин (*orthoconcurrency*).

В [3] (№ 20 у таблиці) розглянутий випадок представлення інформації в термінах мультимножин та кодування інформації за допомогою мультимножин. Спочатку в статті подається короткий огляд теорії інформації Шеннона. Далі дискретний інформаційний ресурс розглядається як такий, який продукує мультимножинні повідомлення (тобто повідомлення з мультимножиною символів). Також досліджується норма ентропії мультимножини інформаційного ресурсу. Потім розглядається кодування мультимножин, яке включає кодування рядка та кодування довжини, і відповідно для кожного кодування визначається пропускна здатність каналу.

У [4] (№16 у таблиці) Д. Кнут застосовує мультимножини в контекстно-вільних мультимовах. В статті дається означення мультимножини, наводиться визначення деяких операцій над мультимножинами (об'єднання, перетин, додавання, множення, тощо). Визначається мультимова як мультимножина слів (тоді як мова – це множина слів) та контекстно-вільна мультимова. Д. Кнут зазначає, що заміна множини слів на мультимножину слів більш природна з точки зору програмування.

В [8, 9] (№17 у таблиці) представлений новий спосіб підтримки мультимножин в декларативній мові програмування. Спочатку наводиться стандартне визначення мультимножини; потім мультимножина визначається відповідними засобами мови. Наводиться реалізація операцій над мультимножинами: додавання, різниці, об'єднання, перетину та допоміжних функцій: функція, що визначає чи є заданий елемент членом мультимножини; функція конвертування списку в мультимножину; функція визначення суми всіх елементів мультимножини (визначення потужності); функція, що визначає чи є задана мультимножина підмультимножиною мультимножини; функція, що визначає чи рівні дві мультимножини; функція видалення дублікатів; функція видалення елементів мультимножини; функція стандартизація (застосовується для представлення мультимножини в стандартному вигляді). Усі ідеї реалізовані у мові програмування Escher. Стаття доповнена прикладами.

Стаття [15] (№8 у таблиці) належить до розділу "Мультимножини в табличних базах даних", проте її також можна віднести і до розділу "Абстрактна теорія мультимножин", адже в першій частині роботи вводяться означення, що відповідають безпосередньо теорії мультимножин. Автори дають формальні визначення мультимножини та її характеристичної функції. Вводять поняття – 1-мультимножини – мультимножини, областю значення якої є одноелементна множина $\{1\}$. Визначають операції об'єднання, перетину та різниці над мультимножинами в термінах характеристичних функцій. Автори розрізняють операції $\cup_{AB}$, $\cap_{AB}$, $\setminus_{AB}$ та операції $\cup_I$, $\cap_I$, $\setminus_I$. Останні будують 1-мультимножини, основи яких отримуються відповідно теоретико-множинними об'єднанням, перетином та різницею основ відповідних мультимножин.

Також в роботі вводиться операція $\text{Dist}(a)$, що буде 1-мультимножиною, основа якої збігається з основою вихідної мультимножини.

Розглядається операція декартового з'єднання двох мультимножин та вводиться аналог повного образу для мультимножин.

У цій роботі розглядаються функції над таблицями (таблиці розуміються як мультимножини, основами яких є множини односхемних рядків): функції об'єднання, перетину, різниці (вводяться як обмеження однойменних операцій над мультимножинами), функція декартового з'єднання таблиць та функція видалення дублікатів.

Другий розділ статті присвячений розгляду таблиць як мультимножин рядків. Спочатку вводиться означення рядку (як кортежу та як іменної множини) та розглядаються основні функції на рядках: роз'єменування, іменування, з'єднання та доступу до елемента рядка за номером. Далі таблиця розглядається як скінченна мультимножина рядків однієї схеми, описується загальна процедура розповсюдження теоретико-множинних операцій над таблицями, які складаються з кортежів, до операцій над таблицями, які складаються з рядків. Встановлюється відповідність між рядками та кортежами та між таблицями рядків та таблицями кортежів.

Останній розділ присвячений уточненню таблиць, що полягає у розгляді таблиці як мультимножини з бінарним відношенням, яке індукується фразою ORDER BY. Тобто таблиці уточнюються як моделі, носії яких є таблиці в попередньому розумінні, а сигнатури містять єдиний предикатний символ.

Робота [5] (№10 у таблиці) присвячена питанню розширення можливостей баз даних (БД) за рахунок використання мультимножин. Автори відмічають, що сучасні комерційні реляційні системи БД дозволяють проводити мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо вони ґрунтуються на формальній множинно-орієнтованій моделі. В статті дається визначення операціям проєкції, селекції, добутку, з'єднання (natural и theta-), перейменування таблиць як мультимножин рядків, а також визначення аналогів теоретико-множинних операцій (об'єднання, перетину, різниці).

Наведемо визначення основних операцій.

Операція проєкції таблиці є мультимножиною рядків:

$$\pi_Y(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{t_Y \mid t \in m\}.$$

де m – мультимножина рядків схеми X (X – множина атрибутів), причому $Y \subseteq X$.

Тут і далі використовуються позначення із [5]: зокрема, $t_{(Y)}$ – обмеження кортежу t за множиною атрибутів Y , запис $t \in m$ слід розуміти як належність кортежу t основі мультимножини m ; $\text{Occ}(t, m)$ – кількість дублікатів (екземплярів) кортежу t в мультимножині m .

На відміну від операції проєкції множини рядків, дублікати рядків, які з'явилися після виконання операції, не вилучаються. Кількість дублікатів кожного кортежу визначається наступною формулою:

$$\text{Occ}(t, \pi_Y(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(t', Y) = t} \text{Occ}(t', m).$$

Визначимо операцію селекції мультимножин. Операція селекції на мультимножині рядків m просто застосовує предикат селекції до кожного кортежу та повертає як результат такі кортежі $t \in m$, на яких предикат приймає значення істини:

$$\delta_\rho(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in m \mid \rho(t)\}.$$

В залежності від значення предикату на кортежі t усі дублікати цього кортежу або входять до результуючої таблиці або ні:

$$\text{Occ}(t, \delta_\rho(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Occ}(t, m), & \text{якщо } \rho(t), \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Розглянемо ще операцію декартова з'єднання мультимножин.

Нехай є дві мультимножини m_1 і m_2 , визначених на схемах X і Y відповідно, причому $X \cap Y = \emptyset$. Добуток $m_1 \otimes m_2$ – це мультимножина рядків схеми $X \cup Y$, що складається із усіх кортежів, які утворилися в результаті конкатенації кортежів з m_1 і m_2 :

$$m_1 \otimes m_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t \text{ над } X \cup Y \mid \exists t_1 \exists t_2 \left(\begin{matrix} t_1 \in m_1, t_2 \in m_2, \\ t_{(X)} = t_1, t_{(Y)} = t_2 \end{matrix} \right) \right\}.$$

Змістовно кажучи, кожний кортеж m_1 з'єднується з кожним кортежем m_2 , незалежно від того – дублікат це чи ні; кількість дублікатів знаходиться так:

$$\text{Occ}(t_1 \cup t_2, m_1 \otimes m_2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Occ}(t_1, m_1) \cdot \text{Occ}(t_2, m_2).$$

Висновки

В статті у систематизованому вигляді поданий огляд існуючої літератури по теорії та застосуванню мультимножин. Усі розглянуті

роботи умовно розділені на чотири частини: абстрактна теорія мультимножин, оглядові роботи по мультимножинам, застосування мультимножин в табличних базах даних та інші застосування мультимножин. Бібліографія кожної частини представлена у таблиці в хронологічному порядку, по кожній роботі наводиться перелік головних результатів. Основні роботи розглянуті більш детально.

Список використаних джерел

1. *Albert J.* Algebraic properties of bag data types / J. Albert // Seventeenth International Conference on Very Large Data Bases. – Barcelona, Spain, 1991. – P. 211-219.
2. *Blizard W.* The Development of Multiset Theory / Wayne D. Blizard // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, No. 1. – P. 36-66.
3. *Bonchis C.* Information Theory over Multiset / C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu // Research Institute "re-Austria", Institute of Computer Science, 2005.
4. *Knuth D.* Context-Free Multilanguages / D.E. Knuth // Theoretical Studies in Computer Science. – Academic Press, 1992. – P. 1-13.
5. *Lamperti G.* On Multisets in Database Systems / G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Science. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147-215.
6. *Libkin L.* Query Language for Bags and Aggregates Function / L. Libkin, L. Wong // Journal of Computer and System Sciences. – 1997. – Vol. 55, No. 1. – P. 241-272.
7. *Libkin L.* Some Properties of Query Language for Bags / L. Libkin, L. Wong // Proceedings of 4th International Workshop on Database Programming Languages. – New York, 1993. – P. 97-114.
8. *Lloyd J.* Programming with Multisets / J.W. Lloyd // Department of Computer Science University of Bristol, 1998.
9. *Lloyd J.* Programming with Sets and Multisets / J.W. Lloyd // Department of Computer Science University of Bristol, 1998.
10. *Ross K.* Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems / K.A. Ross, J. Stoyanovich // Very Large

- Database Endowment: international conference, August 31-September 03, 2004, Toronto, Canada: proceedings. – 2004. – Vol. 30. – P. 912-923.
11. Singh D. An Overview of the Applications of Multisets / D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna, J.N. Singh // *Novi Sad Journal of Mathematics*. – 2007. – Vol. 37, No. 2. – P. 73-92.
12. Syropoulos A. Mathematics of Multisets / Apostolos Syropoulos // *Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View*, number 2235 in *Lecture Notes in Computing Science*. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 347-358.
13. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: [пер. с англ.] / Х. Барендрегт. – Москва: "Мир", 1985. – 606 с.
14. Башкин В.А. Подобие обобщенных ресурсов в сетях Петри [Электронный ресурс] / В.А. Башкин, И.А. Ломазова. – Режим доступа: <http://lvk.cs.msu.su/files/mco2005/bashkin.pdf>.
15. Буй Д.Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д.Б. Буй, С.А. Поляков // *Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки*. – 1999. – Вип. 2. – С. 183-194.
16. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс.: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: "Вильямс", 2004. – 1088 с.
17. Кнут Д. Искусство программирования: [2 том, 3-е изд.: пер. с англ.] / Д. Кнут. – Москва: "Вильямс", 2000. – 832 с.
18. Кузнецов С.Д. Концептуальное проектирование реляционных баз данных с использованием языка UML [Электронный ресурс] / С.Д. Кузнецов. – Режим доступа: <ftp://ftp.doi.ru/pub/users/cgntv/download/sbornic/sbornic9/Doc13.doc>.
19. Малинецкий Г.Г. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства [Электронный ресурс] / Г.Г. Малинецкий, С.А. Наumenko. – Режим доступа: http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep57/prep2005_57.html.
20. Наиболее интересные новшества в стандарте SQL:2003 [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.nestor.minsk.by/sr/2004/03/40331.html>.
21. Петровський А.Б. Основные понятия теории мультимножеств / А.Б. Петровський. – Москва: "Едиториал УРСС", 2002. – 80 с.
22. Петровський А.Б. Пространства множеств и мультимножеств / А.Б. Петровський. – Москва: "Едиториал УРСС", 2003. – 248 с.
23. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
24. Сети Петри [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.iacp.dvo.ru/lab_11/otch et/ ot2000/pn3.html#top.
25. Славин О.А. Использование мультимножеств в распознавании символов / О.А. Славин // *Труды института системного анализа российской академии наук*. – 2006. – Том. 23. – С. 198-205.
26. Сухольский Г.В. Математические методы в психологии / Г.В. Сухольский. – Харьков: ФОЛІО, 2004. – 282 с.

Надійшла до редколегії 16.01.10

УДК 519.876.5:624.131.542

Власюк* А.П., д.т.н., проф.,
Мартинюк* П.М., к.ф.-м.н., доц.

**Математичне моделювання процесів
фільтраційної консолідації ґрунтів в
умовах тепло-солепереносу та руху
суспензії в області контактного розмиву**

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням його (ґрунту) контактної розмиву за наявності переносу солей в неізотермічних умовах. В області розмиву враховано рух суспензії. Числовий розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд числових експериментів, які засвідчили залежність розмірів зони розмиву від урахування впливу вищевказаних факторів.

Ключові слова: контактний розмив, фільтраційна консолідація, суспензія, тепло-солеперенесення, метод радіальних базисних функцій.

A.P. Vlasjuk, Doctor of technical sciences,
P. M. Martinyuk*, Candidate of physics and
mathematics sciences

**The mathematical modeling of soil filtration
consolidation with taking into account soil
wash-out, suspension flow and heat and salt
transfer**

The mathematical model of soil filtration consolidation under flat weir with taking into account soil wash-out and salt transfer in no isothermal conditions has been formulated. The suspension flow in the zone of erosion has been taken into account too. The numerical solution of the correspondent two-dimensional boundary-value problem has been found by the radial basis function method with discontinuous radial basis function. The numerical experiments have been lead. There has been shown that proposed method can be effective one.

Key Words: filtration erosion; filtration consolidation; heat and mass transfer; suspension; radial basis function method.

*E-mail: Vlasjuk.rv@gmail.com, Martinjuk74@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. В роботі [1] побудовано математичну модель розмиву ґрунту фільтраційним потоком вздовж межі контакту двох різнородних ґрунтів. Дану математичну модель було використано при дослідженні взаємних процесів контактної розмиву та фільтраційної консолідації масиву ґрунту під плоским флютбетом [2, 3]. Показано, що при досягненні критичної швидкості фільтрації величина зони розмиву зростає катастрофічно швидко. Також, в результаті проведених чисельних експериментів, вказано на можливість збільшення розмірів зони розмиву при урахуванні процесів тепло-солепереносу.

Однак, у вищезгаданих роботах припускалось, що в зоні розмиву знаходиться або чиста вода, або сольовий розчин. Однак, насправді, в зоні розмиву відбувається рух суспензії – рідини, яка містить мілкі тверді частинки ґрунту. Урахування даного фактору і становить основну ціль представленої роботи.

З дослідження літературних джерел випливає, що математичні моделі фільтраційного руйнування ґрунтів почали розроблятися починаючи із 70-х років ХХ-го століття [4-6]. Однак, навіть найпростіші з таких моделей

описуються складними крайовими задачами для нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тому говорити про їх аналітичні розв'язки доводиться лише в найпростіших, модельних випадках, які з практичної точки зору не становлять значного інтересу.

Одна з основних проблем математичного прогнозування фільтраційного руйнування ґрунтів – зміна розмірів та положення області, в якій досліджується процес, з часом. Тому застосування чисельних методів для розв'язування таких крайових задач пов'язано зі значними труднощами практичної реалізації. Для сіткових чисельних методів (метод скінчених різниць, метод скінчених елементів) виникає необхідність переформатування геометричної сітки в процесі розв'язку задачі. Для безсіткових чисельних методів (безсітковий метод Гальоркіна, метод радіальних базисних функцій і ін.) [7, 8] – переформатування вузлової сітки. Під геометричною сіткою розуміють множину вузлів, між якими встановлено взаємозв'язки. Зрозуміло, що переформатовувати вузлову сітку простіше, аніж геометричну. Тому в роботах [1-3] для знаходження наближених розв'язків відповідних

крайових задач використано безсітковий метод радіальних базисних функцій [8]. Він досить простий в реалізації і показав прийнятну точність [9]. Тому в представленій роботі використано саме цей метод.

2. Постановка задачі та її математична модель. Нехай в області Ω_1 міститься ґрунт, який під впливом прикладеного зовнішнього навантаження у вигляді плоского флютбету знаходиться в процесі фільтраційної консолідації (рис.1). Область Ω_2 , яку займає суспензія, утворюється в результаті контактної розмиву ґрунту вздовж бетонної основи E_1E_2 флютбету в області Ω_1 .

Математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням перенесення солей в неізотермічному режимі та руху суспензії в області контактної розмиву можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (K_h(c, T) \nabla h -$$

$$- K_c(c, T) \nabla c - K_T(c, T) \nabla T), \quad (x, y) \in \Omega_1, t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u \nabla u_1 = v \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega_2, t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u \nabla u_2 = v \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega_2, t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (4)$$

$$n \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c(c, T) \nabla c + D_T(c, T) \nabla T) -$$

$$- u \nabla c - \gamma_m(c - C_m), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (5)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(c, T) \nabla T) -$$

$$- \rho c_p u \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla s) - (u - w) \nabla s, \quad (x, y) \in \Omega_2, t > 0, \quad (7)$$

$$(q_c, n)|_{ABFD \cup E_1E_2} = 0, \quad c|_{AE_1} = C_m, \quad c|_{E_2D} = C_1, \quad (8)$$

$$(q_T, n)|_{ABFD \cup E_1E_2} = 0, \quad T|_{AE_1} = T_1, \quad T|_{E_2D} = T_2, \quad (9)$$

$$(u, n)|_{ABFD \cup E_1G_1} = 0, \quad h|_{AE_1} = H_1, \quad h|_{G_2D} = H_2, \quad (10)$$

$$u_1|_{G_1E_2} = u_2|_{G_1E_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y}|_{E_2G_2} = 0, \quad u_1|_{E_2G_2} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}|_{G_1E_2} = 0, \quad h|_{E_2G_2} = H_2, \quad (11)$$

$$(q_s, n)|_{G_1E_2} = 0, \quad s|_{E_2G_2} = 0, \quad (q_s, n)|_{\Gamma} = -(1-n) \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (12)$$

$$[h]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad [u]_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (13)$$

$$[c]_{\Gamma} = 0, \quad [q_c]_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (14)$$

$$[T]_{\Gamma} = 0, \quad [q_T]_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (15)$$

$$s(x, y, t)((v, n) + (v, d)) = -(1-n) \rho_f \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (16)$$

$$u = ev - K_h(c, T) \nabla h + K_c(c, T) \nabla c + K_T(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (17)$$

$$q_c = uc - D_c(c, T) \nabla c - D_T(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (18)$$

$$q_T = \rho c_p u T - \lambda(c, T) \nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (19)$$

$$q_s = (u - w)s - D_s \nabla s, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (20)$$

$$v = F(x, y, t, u), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (21)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (22)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad s(x, y, 0) = s_0(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (23)$$

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (24)$$

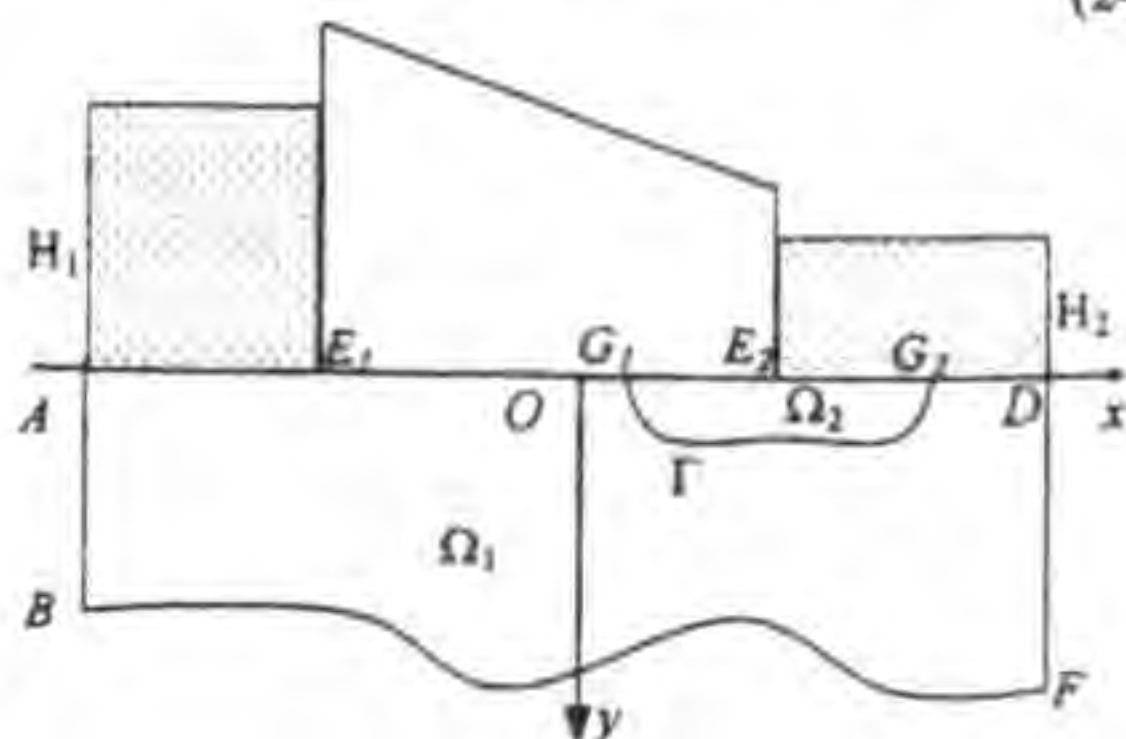


Рис.1. Фільтраційна консолідація та контактний розмив ґрунту

Рівняння (1) описує процес фільтраційної консолідації масиву ґрунту Ω_1 . Рівняння (2)-(4) є системою рівнянь Нав'є-Стокса і описують процес руху суспензії в зоні розмиву Ω_2 [10]. Рівняння (5), (6) описують сольовий та тепловий режим ґрунту і суспензії в зоні розмиву. При цьому в зоні розмиву пористість $n = 1$. Рівняння (7) описує зміну концентрації суспензії в зоні розмиву Ω_2 [11]. Припускається, що на межі контакту Γ областей Ω_1 та Ω_2 виконуються умови спряження ідеального контакту (13)-(15) [12]. Функція $v = F(x, y, t, u)$ пов'язує вектор швидкості фільтрації $u = (u_1, u_2)$ та вектор

швидкості руху твердих частинок ґрунту $v = (v_1; v_2)$ на рухомій межі Γ . Тут: $h(x, y, t)$ - напір; $c(x, y, t)$ - масова концентрація солей в поровій рідині; $T(x, y, t)$ - температура; $s(x, y, t)$ - об'ємна концентрація суспензії в області розмиву; e - коефіцієнт пористості ґрунту; ρ_T - густина твердих частинок ґрунту; γ - питома вага порової рідини; a - коефіцієнт стискуваності ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; ν - кінематична в'язкість суспензії; g - прискорення вільного падіння; c_T - об'ємна теплоємність; c_p - питома теплоємність порового розчину; K_h - тензор коефіцієнта фільтрації; K_c , K_T - тензори коефіцієнтів хімічного та термічного осмосів; D_c , D_T - тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії; D_s - тензор коефіцієнта дисперсії суспензії; λ - тензор коефіцієнта теплопровідності; n - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; d - вектор напрямних косинусів дотичної; $w = (0; w_2)$ - вектор швидкості осідання твердих частинок суспензії; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Вектор дотичної вважається додатно направленим, якщо його поворот до вектора зовнішньої нормалі здійснюється проти руху годинникової стрілки. Умова (16) задає кінематичну граничну умову на межі Γ можливого контактного розмиву [1].

Зауважимо, що третя з умов спряження (13) пов'язує між собою швидкості руху рідини на межі Γ . Тому замість вектора u з боку області Ω_1 потрібно брати вектор u/n .

Продиференціюємо рівняння (2) по x і додамо його до рівняння (3), попередньо продиференційованого по y . Враховуючи (4), отримуємо [10]

$$\Delta h(x, y, t) = -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0. \quad (4')$$

3. Чисельне розв'язання методом РБФ. Введемо позначення $X = (x, y)$. Покриємо замикання області $\overline{\Omega_1}$ вузловими точками $X_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N_1}$, а замикання області $\overline{\Omega_2}$ - вузловими точками $X_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N_2}$. Вимагаємо, що на межі розмиву Γ координати відповідних вузлів в обох областях співпадають. Нехай ω_1 - множина номерів вузлів, які належать

області Ω_1 , а ω_2 - множина номерів вузлів, які належать області Ω_2 . Замикання $\overline{\omega_1}$ буде містити рівно N_1 вузол і складатися із самої множини ω_1 та наступних множин: $\omega_1^{AE_1}$, $\omega_1^{G_2D}$, ω_1^q , ω_1^r - множини номерів вузлів, які належать межам AE_1 , G_2D , $E_1G_1 \cup ABFD$ та Γ відповідно. Аналогічно, замикання $\overline{\omega_2}$ буде містити рівно N_2 вузли і складатися із самої множини ω_2 та наступних множин: $\omega_2^{G_1E_2}$, $\omega_2^{E_2G_2}$, ω_2^r - множини номерів вузлів, які належать межам G_1E_2 , E_2G_2 та Γ відповідно.

Наближений розв'язок задачі (1)-(24), в якій рівняння (4) замінено на (4'), методом РБФ шукаємо у вигляді

$$T(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} a_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_k}, \quad k = 1, 2;$$

$$c(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} b_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_k}, \quad k = 1, 2;$$

$$h(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_k} c_{j+(k-1)N_1}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_k}, \quad k = 1, 2;$$

$$u_1(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} p_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

$$u_2(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} q_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

$$s(X, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} s_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

де $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $j = \overline{1, N_1 + N_2}$; $p_j(t)$, $q_j(t)$, $s_j(t)$, $j = \overline{1, N_2}$, - деякі невідомі коефіцієнти; $\varphi(r_j, \varepsilon)$ - деякі розривні РБФ,

$$r_j = |X - X_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}.$$

Тоді з рівнянь (1)-(3), (4'), (5)-(7), умов (8)-(15), (22)-(24) отримаємо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $A(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2}$, $B(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2}$, $C(t) = \{c_i(t)\}_{i=1}^{N_1+N_2}$, $P(t) = \{p_i(t)\}_{i=1}^{N_2}$, $Q(t) = \{q_i(t)\}_{i=1}^{N_2}$, $S(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^{N_2}$:

$$M^{(6)} \cdot \frac{dA}{dt} + L^{(6)} \cdot A(t) = F^{(6)}, \quad (25)$$

$$M^{(5)} \cdot \frac{dB}{dt} + L^{(5)} \cdot B(t) = G^{(5)} \cdot A(t) + F^{(5)}, \quad (26)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)} \cdot \mathbf{C}(t) = \mathbf{G}^{(4)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}^{(4)} \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{F}^{(4)}, \quad (27)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{G}^{(3)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{F}^{(3)}, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{Q}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (29)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{S}(t) = \mathbf{F}^{(1)}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^{(6)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} &= \tilde{\mathbf{F}}^{(6)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(5)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(5)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} &= \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{P}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{Q}^{(0)} &= \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{де } \mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^{N_1+N_2},$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \{c_i(0)\}_{i=1}^{N_1}, \quad \mathbf{P}^{(0)} = \{p_i(0)\}_{i=1}^{N_2}, \quad \mathbf{Q}^{(0)} = \{q_i(0)\}_{i=1}^{N_2},$$

$$\mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^{N_2}; \quad \mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_1+N_2},$$

$$\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_1+N_2}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad k=4,5,6;$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_1+N_2}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_1+N_2}, \quad k=5,6;$$

$$\mathbf{G}^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_2, N_1+N_2}, \quad \mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_2},$$

$$\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_2}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_2}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_2},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_2}, \quad k=1,2,3; \quad \mathbf{G}^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{N_1+N_2},$$

$$k=4,5; \quad \mathbf{G}^{(4)} = \{g_{ij}^{(4)}\}_{i,j=1}^{N_1+N_2}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(4)}\}_{i,j=1}^{N_1},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(4)} = \{\tilde{f}_i^{(4)}\}_{i=1}^{N_1}; \quad m_{ij}^{(6)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$m_{ij}^{(5)} = n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_1 \cup \omega_2, \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2};$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_1, \quad j \in \overline{\omega_1}; \quad \tilde{m}_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$i \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}, \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}, \quad k=5,6;$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \overline{\omega_1}, \quad j \in \overline{\omega_1}; \quad \tilde{f}_i^{(3)} = h_0(X_i),$$

$$i \in \overline{\omega_1}; \quad \tilde{f}_i^{(5)} = c_0(X_i), \quad \tilde{f}_i^{(6)} = T_0(X_i), \quad i \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2};$$

$$m_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_2; \quad \tilde{m}_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \overline{\omega_2},$$

$$j \in \overline{\omega_2}, \quad k=1,2,3; \quad \tilde{f}_i^{(3)} = (u_1)_0(X_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = (u_2)_0(X_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = s_0(X_i), \quad i \in \overline{\omega_2};$$

$$r_{ij} = |X_j - X_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

$$\text{Спеціального визначення потребують елементи матриць } \mathbf{L}^{(k)}, \quad k=\overline{1,6}; \quad \mathbf{G}^{(k)}, \quad k=\overline{2,5};$$

$$\mathbf{G}^{(4)} \text{ та вектор-стовпців } \mathbf{F}^{(k)}, \quad k=\overline{1,6}. \text{ Так, } l_{ij}^{(6)} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + \rho c_p u \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) \text{ при}$$

$$i \in \omega_1 \cup \omega_2, \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}. \quad \text{Якщо}$$

$$i \in \omega_1^{AE1} \cup \omega_1^{G_2D} \cup \omega_2^{E_2G_2}, \quad \text{то } l_{ij}^{(6)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}. \quad \text{У випадку } i \in \omega_1^q \cup \omega_2^{G_1E_2} \text{ маємо}$$

$$l_{ij}^{(6)} = (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}. \quad \text{Для}$$

$$\text{елементів вектор-стовпця } \mathbf{F}^{(6)} \text{ маємо наступні значення:}$$

$$f_i^{(6)} = T_1, \quad i \in \omega_1^{AE1}; \quad f_i^{(6)} = T_2, \quad i \in \omega_1^{G_2D} \cup \omega_2^{E_2G_2}.$$

$$\text{При } i \in \omega_1 \cup \omega_2, \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}$$

$$l_{ij}^{(5)} = -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) + u \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) + \gamma_m \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$g_{ij}^{(5)} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)). \quad \text{Якщо}$$

$$i \in \omega_1^{AE1} \cup \omega_1^{G_2D} \cup \omega_2^{E_2G_2}, \quad \text{то } l_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}. \quad \text{У випадку } i \in \omega_1^q \text{ маємо}$$

$$l_{ij}^{(5)} = (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}), \quad j \in \overline{\omega_1 \cup \omega_2}. \quad \text{Для}$$

$$\text{елементів вектор-стовпця } \mathbf{F}^{(5)} \text{ маємо наступні значення:}$$

$$f_i^{(5)} = C_m, \quad i \in \omega_1^{AE1}; \quad f_i^{(5)} = C_1, \quad i \in \omega_1^{G_2D} \cup \omega_2^{E_2G_2};$$

$$f_i^{(5)} = \gamma_m C_m, \quad i \in \omega_1 \cup \omega_2.$$

$$\text{При } i \in \omega_1, \quad j \in \overline{\omega_1} \quad \text{маємо}$$

$$l_{ij}^{(4)} = \beta \nabla \cdot (\mathbf{K}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), \quad g_{ij}^{(4)} = \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)),$$

$$g_{ij}^{(4)} = \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)), \quad \text{де } \beta = -\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma\alpha}.$$

$$\text{При } i \in \omega_2, \quad j \in \overline{\omega_2} \quad l_{i+N_1, j+N_1}^{(4)} = \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon). \quad \text{Якщо}$$

$$i \in \omega_1^{AE1} \cup \omega_1^{G_2D}, \quad \text{то } l_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_1}. \quad \text{У}$$

$$\text{випадку } i \in \omega_1^q \text{ маємо } l_{ij}^{(4)} = (-\mathbf{K}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n}),$$

$$j \in \overline{\omega_1}. \quad \text{Якщо } i \in \omega_2^{E_2G_2} \text{ то } l_{i+N_1, j+N_1}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$j \in \overline{\omega_2}. \quad \text{У випадку } i \in \omega_2^{G_1E_2} \text{ маємо}$$

$$l_{i+N_1, j+N_1}^{(4)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega_2}. \quad \text{Для елементів}$$

$$\text{вектор-стовпця } \mathbf{F}^{(4)} \text{ маємо наступні значення:}$$

$$f_i^{(4)} = H_1, \quad i \in \omega_1^{AE1}; \quad f_i^{(4)} = H_2, \quad i \in \omega_1^{G_2D};$$

$$f_{i+N_1}^{(4)} = H_2, \quad i \in \omega_2^{E_2G_2};$$

$$f_{i+N_1}^{(4)} = -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{X_i}, \quad i \in \omega_2.$$

$$\text{При } i \in \omega_2, \quad j \in \overline{\omega_2} \quad \text{маємо}$$

$$l_{ij}^{(k)} = -\nu \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) + u \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad k=2,3;$$

$$g_{ij}^{(3)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial x}, \quad g_{ij}^{(2)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}. \quad \text{Якщо}$$

$i \in \omega_2^{G_1 E_2}$, то $l_{ij}^{(k)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$, $j \in \bar{\omega}_2$, $k = 2, 3$; при

$i \in \omega_2^{E_2 G_2}$ $l_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$, $l_{ij}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}$, $j \in \bar{\omega}_2$.

При $i \in \omega_2$, $j \in \bar{\omega}_2$ маємо
 $l_y^{(1)} = \nabla \cdot (\mathbf{D}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$. Якщо
 $i \in \omega_2^{E_2 G_2}$, то $l_y^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)$, $j \in \bar{\omega}_2$. Якщо
 $i \in \omega_2^{G_1 E_2} \cup \omega_2^f$, то $l_y^{(1)} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{n}) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) -$
 $-(\mathbf{D}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \mathbf{n})$, $j \in \bar{\omega}_2$. При $i \in \omega_2^f$ маємо
 $f_i^{(1)} = -(1-n) \frac{d\Gamma(X_i, t)}{dt}$.

Якщо $s \in \omega_1^f$, $k \in \omega_2^f$ є номерами двох вузлів на межі Γ , координати яких співпадають, то

$$l_{kj}^{(2)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon), l_{kj}^{(3)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon), j \in \bar{\omega}_2;$$

$$f_k^{(3)} = u_1(X_s, t), f_k^{(2)} = u_2(X_s, t);$$

$$l_{k+N_1, j}^{(4)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j}^{(4)} = -\frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_1;$$

$$l_{k+N_1, j+N_1}^{(4)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j+N_1}^{(4)} = \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_2;$$

$$l_{k+N_1, j}^{(5)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j}^{(5)} = -\mathbf{D}_c \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_1;$$

$$l_{k+N_1, j+N_1}^{(5)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j+N_1}^{(5)} = \mathbf{D}_c \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_2.$$

$$l_{k+N_1, j}^{(6)} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j}^{(6)} = -\lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_1;$$

$$l_{k+N_1, j+N_1}^{(6)} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), l_{s, j+N_1}^{(6)} = \lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial n}, j \in \bar{\omega}_2.$$

Значення $u_1(X_s, t)$, $u_2(X_s, t)$ визначаються згідно (17).

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор-стовпця задачі Коші (25)-(31) згідно вищевказаних формул не визначений, то він приймається рівним нулю.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (25)-(31) можна використати чисто неявну різницеву схему або схему Кранка-Ніколсона [12].

Кінематична гранична умова (16) використовувалась для апроксимації положення межі розмиву $\Gamma(x, y, t)$. Якщо на часовому шарі під номером (S) крайова задача (1)-(24) розв'язана, то положення $\Gamma^{(S+1)}$ межі $\Gamma(x, y, t)$ на часовому шарі $(S+1)$ визначається з умови

$$\frac{\Gamma^{(S+1)}(x, y) - \Gamma^{(S)}(x, y)}{\tau} = (\mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{d})|, S = 0, M-1.$$

При $t = 0$ межа $\Gamma(x, y, t)$ складається з одного вузла, який розміщений в точці E_2 .

4. Результати числових експериментів. Вияснення впливу руху суспензії на контактний розмив ґрунту у випадку його фільтраційної консолідації під плоским флютбетом в умовах впливу тепло-солепереносу проведено на тестовому прикладі. В зв'язку з цим розглянуто задачу, де межа BF (див. рис.1) є прямою і паралельною до осі ox . При цьому координати точок області Ω_1 наступні: $A(-10; 0)$, $B(-10; 10)$, $E_1(-5; 0)$, $E_2(5; 0)$, $D(10; 0)$, $F(10; 10)$. Розмірність визначається у метрах.

Для конкретизації співвідношення (21), між швидкістю фільтрації та швидкістю руху твердих частинок приймалась лінійна залежність

$$v = \frac{\alpha^*}{n} u, \text{ де } \alpha^* = \begin{cases} (1-s/(1-n)), u \geq u_{cr}; \\ 0, u < u_{cr}. \end{cases} \text{ Тобто,}$$

інтенсивність розмиву покладалась залежною від концентрації суспензії в околі межі розмиву. Тут u_{cr} - критичне (або розмиваюче) значення швидкості фільтрації.

Ґрунт вважався ізотропним за своїми характеристиками і коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі $T = 20^\circ \text{C}$ покладалась рівним $0,0005 \text{ м/с}$. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей взята з роботи [3].

Значення інших числових характеристик та початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}_1$, визначались як і в роботі [3].

Чисельні експерименти проводились при початковій кількості вузлів 861. Для дискретизації в часі використовувалась чисто неявна різницєва схема з кроком $\tau = 10 \text{ с}$. В ході обчислень в околі межі Γ проводилось згущення вузлової сітки.

Для проведення чисельних експериментів та побудови розривних РБФ використовувалась мультіквадратична РБФ $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$, де $\varepsilon > 0$ - так званий параметр форми. В області ґрунту покладалось $\varepsilon = 1.3$, а в області розмиву $\varepsilon = 10^7$.

Критична швидкість фільтрації покладалась рівною $u_{cr} = 0,01 \text{ м/с}$. На рис. 2 зображено форму

області розмиву через 2 хвилини від початку процесу розмиву. Координати точок межі розмиву у випадку без урахування руху суспензії наступні: $G_1(3,03; 0)$, $G_2(6,01; 0)$, $S(5,25; 0,80)$. Тобто, ширина області розмиву по верхній межі складає $l = 2,98$ м, а глибина $d = 0,80$ м. У випадку урахування наявності суспензії в області розмиву при $D_{s1} = D_{s2} = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ маємо $G_1(3,24; 0)$, $G_2(5,78; 0)$, $S(4,87; 0,80)$ і $l = 2,54$ м, $d = 0,80$ м. Це вказує на те, що величина зони розмиву значно залежить від вказаного фактору.

Якщо в якості співвідношення (21) прийняти залежність $v = \alpha^* / 2n \cdot u(th(|u|/u_{kr} - 5) + th4)$, де

$$\alpha^* = \begin{cases} (1 - s/(1 - n)), u \geq u_{kr}; \\ 0, u < u_{kr}; \end{cases} \text{ то при } u_{kr} = 0,01 \text{ м/с}$$

маємо $G_1(3,92; 0)$, $G_2(5,67; 0)$, $S(5,02; 0,50)$, $l = 1,75$ м, $d = 0,50$ м.

Отже, при математичному моделюванні вказаних процесів важливим є урахування інтенсивності розмиву та наявності суспензії в області контактного розмиву.

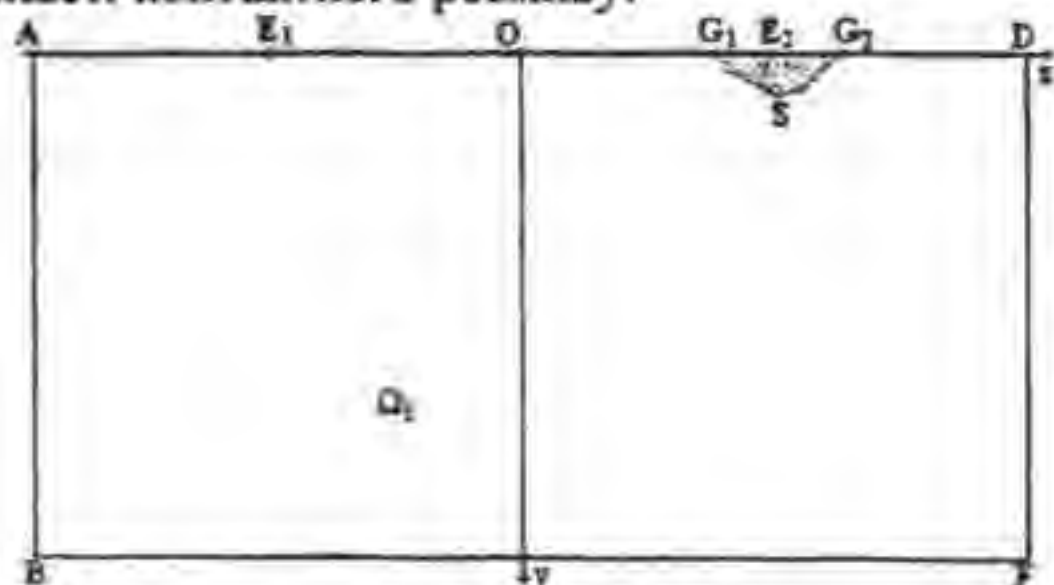


Рис. 2. Зона розмиву

5. Висновки. Отже, в даній роботі поставлена і чисельно розв'язана задача про контактний розмив ґрунту з урахуванням руху суспензії та процесів його фільтраційної консолідації в умовах тепло-солепереносу. Як свідчать результати числових експериментів, величина зони розмиву значно залежить від інтенсивності розмиву.

Варто відмітити, що проблема контактного розмиву та фільтраційної консолідації гостро стоїть і для ґрунтових гребель та їх основ. Розв'язання даної задачі є предметом наших теперішніх досліджень і становитиме тему наших наступних публікацій.

Список використаних джерел

1. Власюк А.П. Математичне моделювання контактної розмиву неоднорідного масиву ґрунту фільтраційним потоком / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту.

Серія фіз.-матем. науки. – 2008. – Вип.1. – С.86-91.

2. Власюк А.П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактної розмиву / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2008. – Вип.2. – С. 77-82.
3. Власюк А.П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах тепло-масопереносу з урахуванням контактної розмиву / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2009. – Вип.1. – С. 92-97.
4. Олейник А.Я. Теоретические исследования фильтрационных процессов в пористых средах с изменяющимися водно-физическими свойствами / А.Я. Олейник, В.Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2007. – Т.9, №2/3. – С. 122-138.
5. Поляков В.Л. О механической суффозии ґрунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности / В.Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Т.8, №4. – С. 43-52.
6. Sellmeijer J.B. On the mechanism of piping under impervious structures (Thesis) / J.B. Sellmeijer // LGM-Mededelingen. – 1988. – №96. – 112 p.
7. Liu G.R. Meshfree methods: moving beyond finite element method / G.R. Liu – London: CRC Press, 2003. – 850 p.
8. Kansa E. J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E. J. Kansa // Comput. Math. Appl. – 1990. – 19. – Pp. 147-161.
9. Мартинюк П.М. Порівняльний аналіз наближених розв'язків крайових задач сітковими та безсітковими чисельними методами в одновимірному випадку / П.М. Мартинюк, Н.М. Бондар // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2009. – Вип. 1(45). – С.272-283.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч – М.: Мир, 1980. – 616 с.
11. Van Rijn L.C. Three-dimensional modeling of sand and mud transport in current and waves / L.C. Van Rijn, K. Meijer // Int. Symp. "The transport of suspended sediments and its mathematical modeling", Florence, Italy. – 1991. – Pp. 683-708.
12. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.

Надійшла до редколегії 20.10.2009

УДК 519.21

С.І.Доценко, к.ф.-м.н., доц.

Задача Джонсона з випадковими часами виконання робіт

В роботі розглядається система конвейєрного типу з двох машин в припущенні, що часи виконання робіт є випадковими величинами з заданою функцією розподілу. Для деяких частинних випадків знайдено оптимальний алгоритм впорядкування робіт та формули для обчислення часу проходження.

Ключові слова: система конвейєрного типу, час проходження робіт, розклад.

E-mail: sergei204@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ. В [1], [2] була розглянута система конвейєрного типу з двома машинами. Нехай кожну з n робіт треба спочатку виконати на першій, а потім на другій машині, при цьому часи виконання кожної з робіт вважаються заданими та дорівнюють A_i, B_i відповідно. Треба знайти розклад виконання робіт, при якому інтервал часу між початком виконання першої роботи на першій машині та закінченням виконання останньої роботи на другій машині був би найменшим (ця величина надалі позначається через T). Процес пошуку оптимального розкладу складається з таких етапів.

1) Припускається, що на обох машинах заборонено переривання виконання робіт. Якщо ж переривання навіть і дозволено, то доводиться, що воно не є доцільним (тобто, показується, що для кожного розкладу з перериванням існує інший без переривання, для якого значення T буде не більшим).

2) Розглядаючи розклади без переривання, доводиться, що оптимальний розклад знаходиться серед таких, що порядки виконання робіт на обох машинах співпадають. Такі розклади задаються перестановкою $(i_1, \dots, i_n)$ та називаються перестановочними.

3) Для даного перестановочного розкладу доводиться формула Джонсона

Sergei I. Dotsenko

Johnson problem in flowshop with random processing time jobs

The subject of research is makespan evaluation in two-machine flow shops without blocking. At the assumption, that jobs processing time is random with given distribution function, the scheduling algorithm and formulas for makespan are obtained.

Key Words: Flow shop, makespan, schedule.

$$T = \max_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{i=1}^k A_i + \sum_{i=k}^n B_i \right). \quad (1)$$

Значення T можна обчислити по матриці часів виконання робіт

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix}$$

як максимальне значення з сум по всім можливим "траєкторіям", що ведуть з лівого верхнього в правий нижній кут.

4) Доводиться, що якщо для двох сусідніх робіт $k, k+1$ справедлива нерівність

$$\min(A_{k+1}, B_k) \leq \min(A_k, B_{k+1}), \quad (2)$$

то заміна місцями робіт k та $k+1$ не збільшує значення T .

5) Послідовно виконуючи перестановки сусідніх робіт, які задовольняють властивості (2), приходимо до розкладу, для якого T набуває мінімуму і який може бути побудований за алгоритмом Джонсона:

Серед всіх значень A_i, B_i знаходимо мінімальне значення та номер відповідної роботи i . Якщо виявилось, що це A_i , то відповідна робота ставиться першою в розклад, якщо це B_i – то останньою і викреслюється зі списку робіт. Ці дії послідовно повторюються для всіх робіт, що лишилися у списку, доки вихідний список робіт не лишиться порожнім.

Можна також побудувати оптимальний розклад за іншим алгоритмом:

Всі роботи розбити на три групи, для яких $A_i < B_i$, $A_i = B_i$ та $A_i > B_i$ відповідно. В першій групі роботи впорядкувати за зростанням A_i , в третій – за спаданням B_i , а порядок робіт в другій групі не має значення. Після впорядкування об'єднати першу, другу та третю групи. Якщо виявиться, що друга група робіт є порожньою, то розклад, побудований за даним алгоритмом та алгоритмом Джонсона, співпадають, якщо ні – то розклади можуть відрізнятися, але в будь-якому разі значення T співпадає.

Даний алгоритм можна переформулювати у такому вигляді. Нехай M – достатньо велике число, таке, що $M \geq \max_{i=1,n} (A_i, B_i) + 1$. Тоді

треба впорядкувати роботи в неспадному порядку C_i , де

$$C_i = (M - \min(A_i, B_i)) \operatorname{sgn}(A_i - B_i).$$

Випадкові часи виконання робіт

Нехай тепер A_i, B_i є незалежними випадковими величинами. Тут в загальному випадку не вдається знайти оптимальний розклад. Одним з можливих евристичних алгоритмів пошуку є побудова початкового “задовільного” розкладу та його подальше покращення шляхом перестановки сусідніх робіт. Початковий розклад можна побудувати наприклад, замінюючи A_i та B_i їхніми математичними сподіваннями та впорядкувати їх за алгоритмом Джонсона.

В [3] наводяться такі достатні умови доцільності перестановки сусідніх робіт. Попередньо нагадаємо означення стохастичної нерівності для випадкових величин:

$$\left(\xi \leq \eta \right) \Leftrightarrow \left((\forall x) (\bar{F}_\xi(x) \leq \bar{F}_\eta(x)) \right). \quad (3)$$

Теорема 1. Якщо для деякої пари сусідніх робіт виконуються нерівності

$$A_k \stackrel{st}{\geq} A_{k+1}, B_k \stackrel{st}{\leq} B_{k+1}$$

то перестановка k -ї та $(k+1)$ -ї робіт не збільшує значення $M(T)$.

Теорема 2. Якщо для деякої пари сусідніх робіт виконується нерівність

$$\left[\min(A_{k+1}, B_k) \mid A_k + A_{k+1} = a, B_k + B_{k+1} = b \right] \leq \left[\min(A_k, B_{k+1}) \mid A_k + A_{k+1} = a, B_k + B_{k+1} = b \right]$$

то перестановка k -ї та $(k+1)$ -ї робіт стохастично не збільшує значення T .

Перевірка умов теореми 2 в загальному випадку є складною та громіздкою про-

цедурою. Однак, якщо A_i, B_i є показниково розподіленими випадковими величинами, то наслідок т.2 виявляється простим та красивим результатом і знаходження оптимального розкладу виявляється навіть простішим, ніж алгоритм Джонсона.

Теорема 3. Якщо для деякої пари сусідніх робіт $A_k, B_k, A_{k+1}, B_{k+1}$ є показниково розподіленими випадковими величинами, та $\mu(A_k) - \mu(B_k) \leq \mu(A_{k+1}) - \mu(B_{k+1})$, то перестановка k -ї та $(k+1)$ -ї робіт стохастично не збільшує значення T . Якщо всі A_i, B_i є показниково розподіленими, то впорядкування робіт в спадному порядку значень $\mu(A_i) - \mu(B_i)$ стохастично мінімізує значення T .

Кількісний аналіз ефективності алгоритму Джонсона.

Теореми 1-3 дозволяють “покращувати” розклад, зменшуючи значення $M(T)$. Однак вони не можуть дати будь-яких кількісних оцінок, щодо такого зменшення. Метою подальших обчислень є отримання таких оцінок, принаймні для простих частинних випадків.

Випадок 1. Нехай є дві машини і часи виконання двох робіт на них (тобто A_1, B_1, A_2, B_2) є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з заданою функцією розподілу $F(x)$. Нехай m – математичне сподівання часу виконання однієї роботи на одній машині:

$$m = \int_0^\infty x dF(x) = M(A_1) = M(A_2) = M(B_1) = M(B_2)$$

тоді математичне сподівання часу проходження робіт дорівнює

$$\begin{aligned} M(T) &= M(A_1 + B_2 + \max(A_2, B_1)) = \\ &= 2m + \int_0^\infty x dF^2(x). \end{aligned}$$

Нехай величини A_1, B_1, A_2, B_2 набули своїх реалізацій a_1, b_1, a_2, b_2 . Розглянемо два випадки, які відрізняються ступенем інформованості перед складанням розкладу.

1. Нехай відома реалізація характеристик лише однієї з двох робіт (a, b) (назвемо цю роботу першою, а роботу з невідомими параметрами x_a, x_b – другою). Тоді значення T для двох можливих розкладів дорівнюють $T_{12} = a + \max(x_a, b) + x_b$, $T_{21} = b + \max(x_b, a) + x_a$. Нехай $T_{21}' = b + \max(x_a, a) + x_b$. Оскільки x_a, x_b

н.о.р.в.в, то $T_{21} = T_{21}^*$. Розглянемо функції дійсного аргумента x , які залежать від параметрів a, b :

$$\varphi_{ab}(x) = a + \max(x, b), \varphi_{ba}(x) = b + \max(x, a).$$

Тоді якщо $a < b$, то $\varphi_{ab}(x) < \varphi_{ba}(x)$, якщо $a > b$, то $\varphi_{ab}(x) > \varphi_{ba}(x)$ при всіх значеннях x .

Звідси, якщо $a < b$, то $T_{12} \leq T_{21}^*$, отже $T_{12} \leq T_{21}$.

Якщо $a > b$, то $T_{12} \geq T_{21}^*$, отже $T_{12} \geq T_{21}$.

Отже, правило складання розкладу виявилось дуже простим: якщо $a < b$, то цю роботу ставимо першою, якщо $a > b$, то другою, якщо $a = b$, то байдуже, якою. При цьому T мінімізується стохастично, і правило не залежить від виду розподілу $F(x)$. Знайдемо математичне сподівання T за умови дотримання встановленого правила.

$$D_1 = \{a \geq 0, b \geq 0, a \leq b\}, D_2 = \{a \geq 0, b \geq 0, a \geq b\},$$

$$M(T_{12} | a, b) = a + m + bF(b) + \int_b^\infty xf(x)dx,$$

$$\int_b^\infty xf(x)dx = b\bar{F}(b) + \int_b^\infty \bar{F}(x)dx, \text{ звідси}$$

$$M(T_{12} | a, b) = a + b + m + \int_b^\infty x\bar{F}(x)dx,$$

$$M(T_{21} | a, b) = a + b + m + \int_a^\infty x\bar{F}(x)dx,$$

$$\begin{aligned} M(T) &= \iint_{D_1} M(T_{12} | a, b) f(a) f(b) db da + \\ &+ \iint_{D_2} M(T_{21} | a, b) f(a) f(b) db da = \\ &= 2 \iint_{D_1} M(T_{12} | a, b) f(a) f(b) db da = \\ &= 2 \int_{b=0}^\infty \int_{a=0}^b M(T_{12} | a, b) d\bar{F}(b) d\bar{F}(a). \end{aligned}$$

Останній інтеграл розіб'ємо на доданки.

Інтегруючи частинами та беручи до уваги,

$$\text{що } \int_0^\infty \bar{F}(x)dx = m, \lim_{x \rightarrow \infty} (x\bar{F}(x)) = 0, \text{ маємо:}$$

$$I_1 = 2 \int_{b=0}^\infty d\bar{F}(b) \int_{a=0}^b a d\bar{F}(a) = \int_{b=0}^\infty \bar{F}^2(b) db,$$

$$I_2 = 2 \int_{b=0}^\infty d\bar{F}(b) \int_{a=0}^b b d\bar{F}(a) = 2m - \int_{b=0}^\infty \bar{F}^2(b) db,$$

$$I_3 = 2 \int_{b=0}^\infty d\bar{F}(b) \int_{a=0}^b m d\bar{F}(a) = m,$$

$$\begin{aligned} I_4 &= 2 \int_{b=0}^\infty d\bar{F}(b) \int_{a=0}^b d\bar{F}(a) \int_{x=b}^\infty \bar{F}(x)dx = \\ &= m + \int_0^\infty \bar{F}^3(b)db - 2 \int_0^\infty \bar{F}^2(b)db \end{aligned}$$

$$M(T) = \sum_{k=1}^4 I_k = 4m - 2 \int_0^\infty \bar{F}^2(x)dx + \int_0^\infty \bar{F}^3(x)dx$$

Нехай тепер величини A_1, B_1, A_2, B_2 набули своїх реалізацій a_1, b_1, a_2, b_2 і всі реалізації є доступними для спостереження до прийняття рішення про впорядкування робіт. Тоді згідно алгоритму Джонсона роботи будуть впорядковано так, щоб мінімальне зі значень a_1, b_1, a_2, b_2 опинилось в матриці часів виконання робіт в лівому верхньому або правому нижньому куті. Оскільки для задачі Джонсона в загальному випадку заміна для кожного i $A_i \leftrightarrow B_i$ та одночасна зміна порядку виконання робіт на протилежний не змінює значення T , то не порушуючи загальності міркувань, можна припустити, що $\min(a_1, b_1, a_2, b_2)$ опиняється в лівому верхньому куті, а решта випадкових величин, які являють собою другу, третю та четверту порядкові статистики, "займають вільні місця" одним з 6 можливих способів. Позначимо k -ту порядкову статистику з n н.о.р.в.в. через $st(n, k)$, тоді з ймовірністю $1/6$ може скластись одна з 6 можливих ситуацій:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,2) \\ st(4,3) & st(4,4) \end{pmatrix} & 2) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,3) \\ st(4,2) & st(4,4) \end{pmatrix} \\ 3) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,4) \\ st(4,2) & st(4,3) \end{pmatrix} & 4) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,2) \\ st(4,4) & st(4,3) \end{pmatrix} \\ 5) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,3) \\ st(4,4) & st(4,2) \end{pmatrix} & 6) & \begin{pmatrix} st(4,1) & st(4,4) \\ st(4,3) & st(4,2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Нехай M_i – це умовне математичне сподівання часу проходження робіт, яке відповідає кожній ситуації, тоді

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = M(st(4,1) + M(st(4,3)) + M(st(4,4))), \\ M_3 &= M_4 = M(st(4,1) + M(st(4,4)) + M(st(4,3))), \\ M_5 &= M_6 = M(st(4,1) + M(st(4,4)) + M(st(4,2))). \end{aligned}$$

Тоді, згідно формули повної ймовірності, математичне сподівання часу проходження робіт дорівнює

$$M(T) = \frac{\sum_{i=1}^6 M_i}{6} = \frac{M_1 + M_3 + M_5}{3} = M(st(4,1)) + \frac{1}{3}M(st(4,2)) + \frac{2}{3}M(st(4,3)) + M(st(4,4)). \quad (4)$$

Беручи до уваги, що $\sum_{i=1}^4 M(st(4,i)) = 4m$,

маємо

$$M(T) = 4m - \frac{2}{3}M(st(4,2)) - \frac{1}{3}M(st(4,3)). \quad (5)$$

Нагадаємо, що якщо випадкова величина має функцію розподілу $F(x)$ та щільність $f(x)$, то k -та порядкова статистика з n має щільність

$$\varphi_{n,k}(x) = n C_{n-1}^{k-1} (F(x))^{k-1} (\bar{F}(x))^{n-k} f(x).$$

В [4] відзначено, що для рівномірного та показникового розподілів вирази для математичного сподівання порядкових статистик мають простий вигляд.

Для рівномірного розподілу на $[0;a]$

$$M(st(n,k)) = \frac{2k-1}{2n}a,$$

Для показникового з параметром μ –

$$M(st(n,k)) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right).$$

Покладаючи $a=2$ для рівномірного та $\mu=1$ для показникового розподілу так, щоб математичне сподівання виконання однієї роботи на одній машині дорівнювало 1 та підставляючи в наведені формули $n=2, k=1$ та $n=4, k=2,3$, маємо шукані значення $M(T)$. Значення $M(T)$ в залежності від i -кількості робіт, параметри яких відомі ($i=0,1,2$) наведемо в таблиці.

$M(T) \setminus i$	0	1	2
Рівномірн.	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{12}$
Показник.	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{4}$

Розглянемо сімейство гама-розподілів так, щоб математичне сподівання дорівнювало 1 незалежно від параметру $p, p>0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$M(\xi) = 1, \quad D(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \text{при } p=1 \text{ це звичайний}$$

показниковий розподіл, якщо p – ціле число, то це можна трактувати як середнє значення p незалежних показниково розподілених випадкових величин з параметром 1. Якщо p мале, то це розподіл з “важким хвостом”, при великому p це розподіл, близький до виродженого. В таблиці наведено результати розрахунків у Mathcad. Обидва середніх значення монотонно спадають по p , в обох випадках $M(T) \rightarrow 4$ при $p \rightarrow 0$ та $M(T) \rightarrow 3$ при $p \rightarrow \infty$.

$p \setminus i$	0	1	2
0.01	3.992	3.974	3.973
0.1	3.884	3.790	3.773
0.2	3.798	3.662	3.623
0.5	3.637	3.466	3.394
1	3.500	3.333	3.250
2	3.375	3.231	3.152
5	3.246	3.141	3.079
10	3.176	3.097	3.049
20	3.125	3.067	3.031
100	3.056	3.029	3.012

Випадок 2. Нехай є дві машини і часи виконання двох робіт на них (тобто A_1, B_1, A_2, B_2) є незалежними показниково розподіленими випадковими величинами з параметрами $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ відповідно. Вважається, що розклад складається після спостереження реалізацій випадкових величин. Використовуючи властивість відсутності післядії для показникового розподілу, сумісну реалізацію A_1, B_1, A_2, B_2 можна розіграти таким чином:

1) Розіграти показниково розподілену випадкову величину η з параметром $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ (нехай реалізація η дорівнює c).

2) З ймовірністю $p_i = \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^4 \mu_i}, i = \overline{1,4}$

покласти, що $A_1=c$ або $B_1=c$ або $A_2=c$ або $B_2=c$ відповідно.

3) До решти трьох величин додати до c “залишковий час життя”, що є показниково розподіленими випадковими величинами з таким самим параметром, що й вихідні величини. Таким чином, з ймовірністю $p_i, i=\overline{1,4}$ може скластись одна з чотирьох ситуацій:

$$1) \begin{pmatrix} c & c+a_2 \\ c+b_1 & c+b_2 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} c+a_1 & c+a_2 \\ c & c+b_2 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} c+a_1 & c \\ c+b_1 & c+b_2 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} c+a_1 & c+a_2 \\ c+b_1 & c \end{pmatrix}$$

Згідно алгоритму Джонсона, у 1-й та 4-й ситуації порядок проходження робіт залишається без змін, а у 2-й та 3-й – змінюється:

$$2) \begin{pmatrix} c+a_2 & c+a_1 \\ c+b_2 & c \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} c & c+a_1 \\ c+b_2 & c+b_1 \end{pmatrix}$$

Тоді умовні математичні сподівання T , які відповідають кожній ситуації, дорівнюють:

$$M_1 = 3M(\eta) + M(\max(B_1, A_2)) + M(B_2) =$$

$$= \frac{3}{\sum_{i=1}^4 \mu_i} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} - \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_4}$$

$$M_2 = \frac{3}{\sum_{i=1}^4 \mu_i} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_4} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_4}$$

$$M_3 = \frac{3}{\sum_{i=1}^4 \mu_i} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_4} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_4}$$

$$M_4 = \frac{3}{\sum_{i=1}^4 \mu_i} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} - \frac{1}{\mu_2 + \mu_3}$$

Згідно формули повної ймовірності

$$M(T) = \sum_{i=1}^4 p_i M_i = \left(\sum_{i=1}^4 \mu_i \right)^{-1} \left(3 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^4 \frac{\mu_i}{\mu_j} - \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} - \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_4} \right) \quad (6)$$

Випадок 3. Нехай є дві машини і часи виконання трьох робіт на них (тобто $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$) є незалежними показниково розподіленими випадковими величинами з заданими (може бути й різними) параметрами. Вважається, що розклад складається до спостереження реалізацій випадкових величин. Обчислимо математичне сподівання часу проходження. Основною проблемою обчислення є те, що на відміну від випадку двох робіт, члени, що стоять під знаком максимуму в формулі Джонсона, є залежними випадковими величинами навіть після винесення за знак максимуму "спільної частини" $A_1 + B_3$.

Проведемо допоміжні обчислення. Нехай x_i – незалежні, однаково розподілені

випадкові величини з параметром $\mu_i, i=1;4$. Знайдемо $M(\max(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4))$. Для цього весь простір подій розіб'ємо на підмножини, що не перетинаються, відкинувши при цьому множину подій, що має ймовірність 0. Нехай $E_1=(x_1 < x_3, x_4 < x_2)$, $E_2=(x_1 > x_3, x_4 < x_2)$, $E_3=(x_1 < x_3, x_4 > x_2)$, $E_4=(x_1 > x_3, x_4 > x_2)$, тоді

$$P(E_1) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} \frac{\mu_4}{\mu_2 + \mu_4}; \quad P(E_2) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \frac{\mu_4}{\mu_2 + \mu_4}$$

$$P(E_3) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_4}; \quad P(E_4) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_4}$$

Введемо позначення:

$\max(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4) = \max(\cdot)$, $y_k(\mu)$ – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ . Враховуючи властивості мінімуму та максимуму показниково розподілених випадкових величин, маємо:

$$(x_i | x_i < x_j) \sim y_1(\mu_i + \mu_j),$$

$$(x_j | x_i < x_j) \sim y_1(\mu_i + \mu_j) + y_2(\mu_j)$$

де слід взяти до уваги, що $y_1(\mu_i + \mu_j)$ в двох наведених формулах – це одна й та ж сама випадкова величина. Тоді

$$M(x_i | x_i < x_j) = \frac{1}{\mu_i + \mu_j},$$

$$M(x_j | x_i < x_j) = \frac{1}{\mu_i + \mu_j} + \frac{1}{\mu_j}$$

$$M(\max(\cdot) | E_1) = M(x_2 + x_3 | E_1) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_4} + \frac{1}{\mu_2}$$

$$M(\max(\cdot) | E_2) = M(x_1 + x_2 | E_2) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_4} + \frac{1}{\mu_2}$$

$$M(\max(\cdot) | E_3) = M(x_1 + x_2 | E_3) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_4} + \frac{1}{\mu_4}$$

$$M(\max(\cdot) | E_4) = M(\max(x_1 + x_2, x_3 + x_4 | E_4)) =$$

$$\{x_3 \sim y_1(\mu_1 + \mu_3), x_1 \sim y_1(\mu_1 + \mu_3) + y_2(\mu_1),$$

$$x_2 \sim y_3(\mu_2 + \mu_4), x_4 \sim y_3(\mu_2 + \mu_4) + y_4(\mu_4)\}$$

$$= M(y_1(\mu_1 + \mu_3)) + M(y_3(\mu_2 + \mu_4)) +$$

$$+ M(\max(y_2(\mu_1), y_4(\mu_4))) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_4} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_4} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_4}$$

Позначимо

$$f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = M(\max(\cdot)) = \sum_{i=1}^4 M(\max(\cdot) | E_i) P(E_i).$$

Нехай на двох машинах виконуються три роботи, тривалості яких мають показниковий розподіл з параметрами $\alpha_i, \beta_i, i=1,2,3$.

Тоді математичне сподівання проходження робіт при даному розкладі дорівнює

$$\begin{aligned} M(T) &= M(\max(A_1 + B_1 + B_2 + B_3, \\ &A_1 + A_2 + B_2 + B_3, A_1 + A_2 + A_3 + B_3)) = \\ &= M(A_1) + M(B_3) + M(\max(B_1 + B_2, B_2 + A_2, \\ &A_2 + A_3)) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} + f(\beta_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned}$$

Якщо всі $\alpha_i = \beta_i = \mu, i=1,2,3$, то

$$f\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right) = \frac{23}{8} \frac{1}{\mu}, \text{ а } M(T) = \frac{39}{8} \text{ для}$$

всіх можливих розкладів.

Розглянемо чисельний приклад.

i	1	2	3
α_i	1/3	1	1/6
β_i	1/5	1	1/2

Очевидно, оскільки $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} > 1 - 1 > \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$, то

розклад (1,2,3) є найкращим, а (3,2,1) – найгіршим. Результати обчислень $M(T)$ наведено в наступній таблиці:

P	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)
M(T)	14.36	14.47	14.41
P	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
M(T)	15.87	15.92	15.98

Випадок 4. Нехай є дві машини і часи виконання трьох робіт на них (тобто $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$) є незалежними показниково розподіленими випадковими величинами з параметром 1. Вважається, що розклад складається після спостереження реалізацій випадкових величин. Обчислимо математичне сподівання часу проходження для оптимального розкладу.

Нехай X_1, X_2, X_3, Y_i – незалежні показниково розподілені випадкові величини з параметрами 6, 5, 4 та 1 відповідно, реалізації цих величин позначатимемо маленькими літерами.

Розіграємо елементи матриці C часів виконання робіт наступним чином. Випадковим чином вибирається два елементи матриці, їм приписуються значення x_1 та $x_1 + x_2$.

При цьому може виникнути три ситуації (ймовірності яких позначимо $P_i, i=1,3$):

1) вибрані елементи опинилися в одному рядку ($P_1=2/5$). Тоді решті елементів приписуються значення $x_1 + x_2 + y_i, i=1,4$.

2) вибрані елементи опинилися в різних рядках та стовпцях ($P_2=2/5$). Тоді решта елементів розігрується аналогічно п.1.

3) вибрані елементи опинилися в одному стовпці ($P_3=1/5$). Тоді знову випадковим чином вибираємо елемент серед решти чотирьох і приписуємо йому значення $x_1 + x_2 + x_3$, а решті трьом елементам приписується $x_1 + x_2 + x_3 + y_i, i=1,3$.

Ситуацію 3 розібемо на дві підситуації – елементи зі значеннями x_1 та $x_1 + x_2 + x_3$ опинилися в одному чи в різних рядках – це рівноймовірні ситуації, назвемо їх 3a) та 3b) відповідно, $P_{3a}=P_{3b}=1/10$.

Тоді з одного боку, сукупність заданих таким чином елементів матриці C стохастично еквівалентна сукупності незалежних показниково розподілених випадкових величин з параметром 1. З іншого боку, оскільки незалежно від реалізацій виконується нерівність $x_1 < x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3$, то в кожній з перелічених ситуацій роботи можна впорядкувати за алгоритмом Джонсона і скласти таким чином оптимальний розклад. Оскільки заміна місцями рядків C не змінює значення T для оптимального розкладу, то не порушуючи загальності міркувань можна вважати, що елемент зі значенням x_1 належить першому рядку.

Беручи до уваги, що

$$M(X_1) = \frac{1}{6}, M(X_2) = \frac{1}{5}, M(X_3) = \frac{1}{4},$$

$$M(\max(Y_i, Y_j)) = \frac{3}{2}, M(\max(Y_i, Y_j + Y_k)) = \frac{9}{4}$$

і згідно розглянутого вище випадку 3

$$M(\max(Y_1 + Y_2, Y_2 + Y_3, Y_3 + Y_4)) = f(1,1,1) = \frac{23}{8}$$

обчислимо умовні математичні сподівання тривалості проходження робіт для оптимального розкладу в кожній з ситуацій.

1) Після впорядкування маємо:

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 & x_1 + x_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + y_1 & x_1 + x_2 + y_2 & x_1 + x_2 + y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 4x_1 + 3x_2 + y_4 + \max(y_1 + y_2, y_3, y_4) = \\ &= 4x_1 + 3x_2 + y_4 + \max(y_1 + y_2, y_3), M(T_1) = \frac{271}{60}. \end{aligned}$$

2) Після впорядкування маємо:

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 + y_3 & x_1 + x_2 + y_4 \\ x_1 + x_2 + y_1 & x_1 + x_2 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = 4x_1 + 3x_2 + \max(y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_3 + y_4),$$

$$M(T_2) = \frac{497}{120}.$$

3а) Після впорядкування маємо:

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & \sum_{i=1}^3 x_i & \sum_{i=1}^3 x_i + y_2 \\ x_1 + x_2 & \sum_{i=1}^3 x_i + y_1 & \sum_{i=1}^3 x_i + y_3 \end{pmatrix}$$

$$T_{3a} = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_1 + \max(y_1, x_3 + y_1, x_3 + y_2) =$$

$$= 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + y_1 + \max(y_1, y_2), \quad M(T_{3a}) = \frac{271}{60}.$$

3б) Після впорядкування маємо:

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & \sum_{i=1}^3 x_i + y_1 & \sum_{i=1}^3 x_i + y_2 \\ x_1 + x_2 & \sum_{i=1}^3 x_i + y_3 & \sum_{i=1}^3 x_i \end{pmatrix}$$

$$T_{3b} = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \max(y_3, x_3 + y_1 + y_3, x_3 + y_1 + y_2) =$$

$$= 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + y_1 + \max(y_2, y_3), \quad M(T_{3b}) = \frac{271}{60}.$$

За формулою повної ймовірності шукана величина дорівнює

$$M(T) = \sum_i P_i M(T_i) = \frac{131}{30} \approx 4.367.$$

Випадок 5. Нехай є дві машини і часи виконання трьох робіт на них (тобто $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$) є незалежними показниково розподіленими випадковими величинами з параметром 1 (будемо позначати їхні реалізації z_i), але на відміну від попереднього випадку відома реалізація лише однієї характеристики однієї роботи, наприклад a (позначимо цю роботу α). Знайдемо алгоритм складання розкладу на підставі доступної інформації та обчислимо математичне сподівання часу проходження для знайденого оптимального розкладу.

Нехай α виконується першою.

$$C_1 = \begin{pmatrix} a & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_5 \end{pmatrix}.$$

$$M_1(T) = M(\max(z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_3 + z_4)) +$$

$$a + 1 = f(1, 1, 1, 1) + a + 1 = \frac{23}{8} + a + 1 = a + \frac{31}{8}.$$

Нехай α виконується другою.

$$C_2 = \begin{pmatrix} z_4 & a & z_3 \\ z_2 & z_1 & z_5 \end{pmatrix}.$$

$$M_2(T) = 2 + M(\max(z_1 + z_2, z_2 + a, z_3 + a)).$$

Для обчислення математичного сподівання максимуму треба розбити область $\{z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0\}$ на підобласті, в кожній з яких відповідна компонента, що стоїть під знаком максимуму, дійсно є максимальною і проінтегрувати в цій підобласті значення цієї компоненти по щільності. Оскільки величини z_i мають щільність, то ймовірність того, що деякі дві компоненти співпадуть, дорівнює нулю. Наприклад:

$$D_1 = \begin{cases} z_1 + z_2 \geq z_2 + a \\ z_1 + z_2 \geq z_3 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 \geq a \\ z_3 \leq z_1 + z_2 - a \end{cases}.$$

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{z_1+z_2-a} (z_1 + z_2) e^{-(z_1+z_2+z_3)} dz_3 dz_2 dz_1.$$

Аналогічно виписуються області D_2, D_3 і відповідні їм кратні інтеграли I_2, I_3 , тоді

$$M_2(T) = I_1 + I_2 + I_3 = a + \frac{7}{2} + \frac{3}{4} e^{-a}.$$

Нехай α -робота виконується третьою.

$$C_3 = \begin{pmatrix} z_4 & z_3 & a \\ z_1 & z_2 & z_5 \end{pmatrix}.$$

$$M_3(T) = 2 + M(\max(z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_3 + a)).$$

Обчислення $M_3(T)$ аналогічно $M_2(T)$.

$$M_3(T) = a + 3 + \frac{3}{2} e^{-a} + \frac{1}{2} a e^{-a}.$$

$M_1 \leq M_2$ при $a \leq \ln(2)$, $M_2 \leq M_3$ при $a \leq a^*$, де $a^* \approx 1.924$ – корінь рівняння $(3+2a)e^{-a} - 2 = 0$.

Таким чином, номер α -роботи в шуканому розкладі в залежності від параметру a задається таблицею

a	≤ 0.693	$0.693 \leq a \leq 1.924$	≥ 1.924
N	1	2	3

Математичне сподівання T при оптимальному розкладі дорівнює

$$M = \left(\int_0^{\ln(2)} M_1 + \int_{\ln(2)}^{a^*} M_2 + \int_{a^*}^\infty M_3 \right) e^{-a} da \approx 4.729.$$

Якщо спочатку відома реалізація не 1-ї, а 2-ї частини роботи, то значення M залишається таке саме, а номер α -роботи в залежності від параметру b задається таблицею

b	≤ 0.693	$0.693 \leq b \leq 1.924$	≥ 1.924
N	3	2	1

Випадок 6. Нехай тепер відома реалізація обох частин (a,b) однієї з трьох робіт, всі інші припущення попереднього випадку залишаються в силі.

Нехай α виконується першою.

$$C_1 = \begin{pmatrix} a & z_2 & z_3 \\ b & z_1 & z_4 \end{pmatrix}.$$

$$T_1 = a + x_4 + \max(x_1 + b, x_1 + x_2, x_2 + x_3).$$

Покажемо одразу, що при $a < b$ недоцільно ставити α третьою. Дійсно, нехай

$$C_3 = \begin{pmatrix} z_4 & z_1 & a \\ z_3 & z_2 & b \end{pmatrix}.$$

$$T_3 = b + x_4 + \max(x_1 + a, x_1 + x_2, x_2 + x_3).$$

Тоді $T_1 \leq T_3$, отже $M(T_1) \leq M(T_3)$.

Обчислимо $M(T_1)$ аналогічно попередньому випадку.

$$M(T_1) = a + b + 2 + \frac{1}{2}be^{-b} + \frac{3}{2}e^{-b}.$$

Нехай α виконується другою.

$$C_2 = \begin{pmatrix} z_3 & a & z_1 \\ z_2 & b & z_4 \end{pmatrix}.$$

$$T_2 = z_3 + z_4 + \max(a + b, z_1 + a, z_2 + b).$$

$$M(T_2) = a + b + 2 + e^{-a} + e^{-b} - \frac{1}{2}e^{-a-b}.$$

$$M(T_1) \leq M(T_2) \text{ при } a \leq \ln\left(\frac{2e^b - 1}{b + 1}\right).$$

Якщо $a > b$, то $T_3 \leq T_1$, отже $M(T_3) \leq M(T_1)$ і

$$M(T_3) \leq M(T_2) \text{ при } b \leq \ln\left(\frac{2e^a - 1}{a + 1}\right).$$

Отже, номер α -роботи в оптимальному розкладі в залежності від співвідношення між a та b задається таблицею

a, b	N
$a \leq \ln\left(\frac{2e^b - 1}{b + 1}\right)$	1
$a \geq \ln\left(\frac{2e^b - 1}{b + 1}\right), b \geq \ln\left(\frac{2e^a - 1}{a + 1}\right)$	2
$b \leq \ln\left(\frac{2e^a - 1}{a + 1}\right)$	3

Беручи до уваги симетричність задачі, для знаходження $M(T)$ можна проінтегрувати по області $a \leq b$, а знайдений інтеграл подвоїти.

$$M(T) = 2 \int_{b=0}^{\infty} \left(\int_0^{\ln(\cdot)} M(T_1) + \int_{\ln(\cdot)}^b M(T_2) \right) e^{-(a+b)} da db$$

$$M(T) \approx 4.636.$$

Розглянемо "спрощене" правило складання розкладу, а саме, ставити α першою при $a < b$ та третьою при $a > b$. Тоді

$$M(T) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^b M_1(T) e^{-a-b} da db = \frac{137}{36} \approx 4.639.$$

Тобто, $M(T)$ зростає несуттєво.

Порівняємо отримані значення $M(T)$ в залежності від k - кількості відомих робіт (у 5-му випадку вважаємо $k=1/2$).

k	0	1/2	1 _{ср}	1	3
M(T)	4.875	4.729	4.639	4.636	4.367

Список використаних джерел

1. S.M.Johnson. Optimal two- and three- stage production schedules with setup times included. Naval Res. Logist. Quart. 1(1954).
2. О.К. Закусило. Задача Джонсона. У світі математики, вип. 5, 1975.
3. J. Kambourowski. Stochastically minimizing the makespan in two-machine flow shops without blocking. European Journal of Operations Research, 112 (1999).
4. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2. Москва, "Мир", 1984.

Надійшла до редколегії 24.11.09

УДК 51.001.57

Зінко П.М., к. ф.-м. н., доц.
Чабан А.В., к.т.н., доц.

Математична модель лінійного вузла електричного навантаження

Запропоновано математичну модель лінійного вузла навантаження. Рівняння електромагнітного стану системи подані в нормальній формі Коші. Для знаходження наближеного розв'язку в просторі R^3 пропонується метод четвертого порядку точності, який оснований на розв'язуючих операторах і формулі Тейлора.

Ключові слова: рівняння електромагнітного стану, вузол навантаження.

E-mail: petro.zinko@gmail.com

Статтю представив проф. Ф.Г. Гаращенко

Математичне моделювання електромагнітних і електромеханічних процесів займає чільне місце на етапах проектування та реалізації практичної більшості електротехнічних систем. Одним з основних елементів згаданих систем є електричний вузол навантаження, який складається з силового трансформатора, до якого ввімкнене навантаження. Досить часто в задачах електроенергетики достатньо елементи вузла розглядати в лінійному варіанті (лінійна залежність між потокозчепленнями й намагнічувальними струмами) [2]. Такий підхід істотно не знизить ступені адекватності математичної моделі вузла, натомість дасть змогу аналізувати перехідні процеси на підставі аналітичних методів. У роботі ми пропонуємо математичну модель вузла електричного навантаження елементами якого є активне, індуктивне та активно-індуктивне навантаження. Задля стабілізації напруги електричного вузла використаємо паралельно ввімкнену компенсаційну конденсаторну батарею. Саме наявність батареї у вузлі призводить до істотної щільності диференціальних рівнянь системи, що і виправдовує застосування числово-аналітичних методів їх інтегрування.

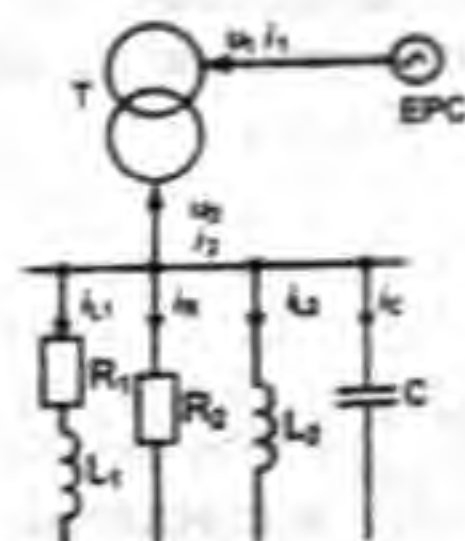


Рис. 1. Схема вузла електричного навантаження

P.Zinko, PhD
A.Chaban, PhD

Mathematical model of a linear node electrical capacity

A mathematical model of a linear node capacity are proposed. The equations of the electromagnetic state of the system presented in the normal Cauchy form. To find an approximate solution in the R^3 space has been proposed a method of fourth order accuracy, which is based on solving the operators and the Taylor's formula.

Keywords: equations of the electromagnetic state, capacity node.

Математична модель вузла. Математичну модель вузла навантаження будуватимемо на підставі рівнянь Лагранжа другого роду для електричних і магнітних кіл [1]. Усі параметри й функціональні залежності стосовно первинної обмотки приведені за числом витків до вторинної з коефіцієнтом трансформації k_T :

$$\frac{di_1}{dt} = A_{11}(u_1 - R_{T1}i_1) + A_{12}(u_2 - R_{T2}i_2) \quad (1)$$

$$\frac{di_2}{dt} = A_{21}(u_1 - R_{T1}i_1) + A_{22}(u_2 - R_{T2}i_2) \quad (2)$$

$$A_{11} = \alpha_1(E - \alpha_1 G); \quad A_{12} = A_{21} = -\alpha_1 \alpha_2 G \quad (3)$$

$$A_{22} = \alpha_2(E - \alpha_2 G); \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \text{diag}(\alpha_{\alpha 1}); \quad \alpha_2 = \text{diag}(\alpha_{\alpha 2}) \quad (5)$$

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha_{\alpha 1} + \alpha_{\alpha 2} + \rho_A)^{-1} & 0 \\ 0 & (\alpha_{\alpha 1} + \alpha_{\alpha 2} + \rho_B)^{-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$i_{m1} + i_{m2} + i_{mC} = 0; \quad \psi_{m1} + \psi_{m2} + \psi_{mC} = 0 \quad (7)$$

$$I_m = (i_{m1}; i_{m2})^T = (i_{1A} + i_{2A}; i_{1B} + i_{2B})^T \quad (8)$$

$$\tau_j = \left(\frac{\psi_{mj}}{i_{mj}} \right); \quad \rho_j = \left(\frac{\partial \psi_{mj}}{\partial i_{mj}} \right)^{-1}, \quad j = A, B \quad (9)$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = L_1^{-1}(u_2 - R_1 i_{L1}); \quad \frac{di_{L2}}{dt} = L_2^{-1} u_2 \quad (10)$$

$$i_{R2} = R_2^{-1} u_2; \quad \frac{du_C}{dt} = C^{-1} i_C, \quad (11)$$

де $u_1 = (u_{1A}; u_{1B})^T$ – вектор-стовпець напруг первинної обмотки трансформатора;

$i_1 = (i_{1A}; i_{1B})^T = (x_1; x_2)^T$ – вектор-стовпець

струмів первинної обмотки трансформатора;

$i_2 \equiv (i_{2A}; i_{2B})^T = (x_3; x_4)^T$ – вектор-стовпець

струмів вторинної обмотки трансформатора;

$u_2 \equiv (u_{2A}; u_{2B})^T = (x_5; x_6)^T$ – вектор-стовпець

напруг вторинної обмотки трансформатора;

$i_{L1} \equiv (i_{L1A}; i_{L1B})^T = (x_7; x_8)^T$ – вектор-стовпець

струмів першої вітки вузла навантаження;

$i_{R2} \equiv (i_{R2A}; i_{R2B})^T$ – вектор-стовпець струмів

другої вітки вузла навантаження;

$i_{L3} \equiv (i_{L3A}; i_{L3B})^T = (x_9; x_{10})^T$ – вектор-стовпець

струмів третьої вітки вузла навантаження;

$i_C \equiv (i_{CA}; i_{CB})^T$ – вектор-стовпець струмів

компенсаційної батареї;

$R_1 \equiv \text{diag}(r_{1A}; r_{1B})$, $R_2 \equiv \text{diag}(r_{2A}; r_{2B})$ –

діагональні матриці опорів віток навантаження вузла;

$L_1 \equiv \text{diag}(l_{1A}; l_{1B})$, $L_3 \equiv \text{diag}(l_{3A}; l_{3B})$ –

діагональні матриці індуктивностей віток навантаження вузла;

$C \equiv \text{diag}(C_A; C_B)$ – ємність компенсаційної батареї;

$\alpha_{\sigma 1}, \alpha_{\sigma 2}$ – обернені індуктивності розсіювання первинної й вторинної обмоток відповідно;

$R_{T1} \equiv \text{diag}(r_{T1}; r_{T1})$, $R_{T2} \equiv \text{diag}(r_{T2}; r_{T2})$ – опори первинної й вторинної обмоток відповідно;

τ – обернена індуктивність намагнічення трансформатора;

ρ – обернена диференціальна індуктивність намагнічення трансформатора;

i_m, ψ_m – струм і потокозчеплення намагнічення фаз трансформатора відповідно.

Розв'язуючи сумісно рівняння (1), (2), (10), (11) за умов (3)–(9), а також враховуючи показані вище позначення, отримуємо систему лінійних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_{\sigma 1} \left(1 - \frac{\alpha_{\sigma 1}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_A} \right) (u_A - r_{T1} x_1) - \frac{\alpha_{\sigma 1} \alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_A} (x_3 - r_{T2} x_3) \quad (12)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_{\sigma 1} \left(1 - \frac{\alpha_{\sigma 1}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_B} \right) (u_B - r_{T1} x_2) -$$

$$- \frac{\alpha_{\sigma 1} \alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_B} (x_6 - r_{T2} x_4) \quad (13)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = - \frac{\alpha_{\sigma 1} \alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_A} (u_{1A} - r_{T1} x_1) + \alpha_{\sigma 2} \left(1 - \frac{\alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_A} \right) (x_5 - r_{T2} x_3) \quad (14)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = - \frac{\alpha_{\sigma 1} \alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_B} (u_{1B} - r_{T1} x_2) + \alpha_{\sigma 2} \left(1 - \frac{\alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho_B} \right) (x_6 - r_{T2} x_4) \quad (15)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = - \frac{1}{C_A} \left(x_3 + \frac{x_5}{r_{2A}} + x_7 + x_9 \right) \quad (16)$$

$$\frac{dx_6}{dt} = - \frac{1}{C_B} \left(x_4 + \frac{x_6}{r_{2B}} + x_8 + x_{10} \right) \quad (17)$$

$$\frac{dx_7}{dt} = \frac{1}{l_{1A}} (x_5 - r_{1A} x_7) \quad (18)$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \frac{1}{l_{1B}} (x_6 - r_{1B} x_8) \quad (19)$$

$$\frac{dx_9}{dt} = \frac{x_5}{l_{3A}} \quad (20)$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = \frac{x_6}{l_{3B}} \quad (21)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 10}. \quad (22)$$

Запишемо систему рівнянь (12) – (22) у загальному вигляді

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 10}.$$

Легко бачити, що пари функцій:

$$f_1(x_1, x_3, x_5, t) \text{ і } f_2(x_2, x_4, x_6, t),$$

$$f_3(x_1, x_3, x_5, t) \text{ і } f_4(x_2, x_4, x_6, t),$$

$$f_5(x_3, x_5, x_7, x_9, t) \text{ і } f_6(x_4, x_6, x_8, x_{10}, t),$$

$$f_7(x_3, x_7, t) \text{ і } f_8(x_4, x_8, t),$$

$$f_9(x_5, t) \text{ і } f_{10}(x_6, t)$$

є структурно подібними. Система рівнянь (12)–(21) розпадається на дві підсистеми:

підсистему рівнянь I, яка утворена формулами (12), (14), (16), (18), (20) і

підсистему рівнянь II, яка утворена формулами (13), (15), (17), (19), (21). Тепер,

ввівши заміни $y_i = x_{2i-1}$, $i = \overline{1, 5}$ в підсистемі I

та $z_i = x_{2i}$, $i = \overline{1, 5}$ в підсистемі II, приходимо

до двох векторних диференціальних рівнянь з відповідними початковими умовами

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), t), \quad y(t_0) = y^0, \quad (23)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \Phi(z(t), t), \quad z(t_0) = z^0, \quad (24)$$

де

$$F(y(t), t) = (F_1(y(t), t), F_2(y(t), t), F_3(y(t), t),$$

$$F_4(y(t), t), F_5(y(t), t))^T = (f_1(y(t), t), f_3(y(t), t),$$

$$f_5(y(t), t), f_7(y(t), t), f_9(y(t), t))^T,$$

$$\Phi(z(t), t) = (f_2(z(t), t), f_4(z(t), t), f_6(z(t), t),$$

$$f_8(z(t), t), f_{10}(z(t), t))^T.$$

Внаслідок структурної подібності вектор-функцій F і Φ надалі будемо будувати числово-аналітичний метод розв'язування тільки підсистеми (23), який також можна використати і для розв'язування підсистеми (24).

Для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (23) в просторі R^5 можна використати метод четвертого порядку точності [3], який оснований на розв'язуючих операторах і формулі Тейлора:

$$y(t+h) = p(t+h) + \int_t^{t+h} [E - (\eta - t - h)F'_y(p(t+h), t+h)] \times (25) \\ \times [F(p(\eta), \eta) - dp(\eta)/d\eta] d\eta,$$

де $h > 0$ – крок інтегрування, E – одинична матриця розмірності (5×5) , $F'_y(\cdot, \cdot)$ – матриця частинних похідних вектор функції F по вектору y (матриця Якобі), $p(\eta)$ – прогнозна функція вигляду

$$p(\eta) = y(t) + (\eta - t)y'(t) + \frac{1}{2!}(\eta - t)^2 y''(t), \quad \eta \in [t, t+h].$$

Матриця Якобі для підсистеми (23) має такий вигляд

$$F'_y(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} \alpha_{s1}(\alpha_{s1}q - 1)r_{T1} & \alpha_{s1}\alpha_{s2}q r_{T2} & \alpha_{s1}\alpha_{s2}q & 0 & 0 \\ \alpha_{s1}\alpha_{s2}q r_{T1} & \alpha_{s2}(\alpha_{s2}q - 1)r_{T2} & \alpha_{s2}(1 - \alpha_{s2}q) & 0 & 0 \\ 0 & -1/c_A & -1/(r_{2A}c_A) & -1/c_A & -1/c_A \\ 0 & 0 & 1/l_{1A} & -r_{1A}/l_{1A} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_{2A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

де $q = 1/(\alpha_{s1} + \alpha_{s2} + \rho_A)$.

Позбуваючись в (25) операції знаходження інтегралу, приходимо до наступної формули [3] наближеного обчислення розв'язку задачі Коші (23)

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{12} \{ 6F(x(t), t) +$$

$$+ 6F(p(t+h), t+h) - h \left[\frac{\partial F(p(t+h), t+h)}{\partial t} - \right. \\ \left. + 6F(p(t+h), t+h) - h \left[\frac{\partial F(p(t+h), t+h)}{\partial t} - \right. \right. (27) \\ \left. \left. - F(p(t+h), t+h + 2hy''/x(t)) \right] \right] \},$$

де $y'(t) = F(y(t), t)$,

$$y''(t) = F'_y(y(t), t)F(y(t), t) + \frac{\partial F(y(t), t)}{\partial t}.$$

У випадку, коли всі коефіцієнти в системі (12)–(21) є константами, то підсистема (23) записується у вигляді

$$\dot{y}(t) = Dy(t) + d,$$

$D = F'_y(\cdot, \cdot)$ і відповідно обчислюється за формулою (26), а формула (27) набуде простого вигляду

$$y(t+h) = y(t) + h \left[E + \frac{h}{2!} D + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3!} D^2 + \frac{h^3}{4!} D^3 \right] [Dy(t) + d].$$

Висновок. Застосування аналітичних методів інтегрування диференціальних рівнянь електромагнітного стану вузла електричного навантаження дає змогу повноцінно аналізувати перехідні процеси в системі за різних значень компенсаційної батареї. А також оптимально вибрати ємність батареї для забезпечення прийнятних умов компенсації реактивної потужності.

Список використаних джерел

1. Чабан А.В. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. – Львів, В-во Т.Сороки – 2007. – 312 с.
2. Л.О. Чуа, Пен-Мин Лян. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 638 с.
3. Зінько П.М. Методи наближеного розв'язування задач Коші, які використовують розв'язуючі оператори і формулу Тейлора // Обчислювальна і прикладна математика. – 1997. – вип.1. – с. 54–59.

Надійшла до редколегії 12.12.09

УДК 004.056.53

Іванніков* Є.Ю., аспірант

Y.Y. Ivannikov, post-graduate student

Послуга використання ресурсів для захищеної ОС на базі GNU/Linux.

Resource control security service for a trusted OS based on GNU/Linux.

Послуга використання ресурсів покликана гарантувати доступність комп'ютерної системи (КС). Реалізація послуги у вітчизняних захищених ОС не контролює такі ресурси, як процесорний час та пам'ять, що може призводити до погіршення характеристик обслуговування та до відмови КС. Показано, що на основі механізмів контролю ресурсів, уведених у нових версіях ядра базової ОС, може бути побудований пріоритетний розподіл ресурсів з неможливістю захоплення. Запропоновано додатковий програмний засіб для керування розпорядком роботи користувачів із КС.

Security service for resource control is meant to ensure availability of a computer system. It is shown that implementation of the service in domestic trusted OSes does not allow to control of the key computer resources such as CPU time and memory. This can result in performance degradation and faults. New mechanisms for resource control introduced in newer versions of the base GNU/Linux OS kernel are studied. It is shown that they can be used to implement an effective prioritized resource sharing with no-seizing guarantee. Additional software facility to enforce session time restrictions is proposed.

Ключові слова: захищена ОС, послуга безпеки, послуга контролю ресурсів, ОС GNU/Linux.

Key words: trusted computer system, security service, resource control, GNU/Linux.

*E-mail: ivannikoff@meta.ua.

Статтю представив чл. кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Захищені операційні системи (ЗОС) призначені для забезпечення конфіденційності, цілісності, доступності оброблюваної інформації, а також спостережності комп'ютерної системи (КС) в цілому. До таких операційних систем висувається ряд особливих вимог, дотримання яких дозволяє гарантувати виконання ними функцій із захисту інформації. Ці вимоги розглядаються як набір функціональних послуг (послуги безпеки) [1].

У більшості випадків доступність інформації у КС визначається працездатністю самої КС, отже погіршення характеристик обслуговування та відмову КС слід вважати основними загрозами доступності [4]. Одним із напрямків підтримки працездатності КС є реалізація послуги з контролю за використанням ресурсів. Послуга покликана реалізувати політику контролю ресурсів, що дозволяє встановлювати обмеження на обсяг ресурсів КС, які виділяються кожному окремому користувачу або групам користувачів. Втілення політики контролю ресурсів забезпечує можливість безперервного використання КС всіма користувачами, запобігаючи захопленню ресурсів окремим користувачем.

В [1] вводиться ранжування послуги на підставі повноти захисту і вибіркової

керування доступністю КС. Всього розрізняють три рівні надання послуги, від найнижчого рівня, який дозволяє встановлювати квоти на використання ресурсів КС, до найвищого рівня, який надає можливість визначати пріоритетність в розподілі ресурсів.

Відповідні рівні послуги використання ресурсів присутні у практично всіх стандартних функціональних профілях захищеності, визначених у нормативному документі [2], що засвідчує важливість її реалізації для забезпечення доступності системи, призначеної для захисту інформації.

Стаття є частиною науково-дослідної роботи із розробки захищеної ОС, що велась на факультеті кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка. Функціональний профіль розроблюваної ЗОС включає послугу використання ресурсів. У ході підготовки роботи було проведено аналіз особливостей впровадження цієї послуги у вітчизняних комплексах засобів захисту (КЗЗ). Реалізація послуги в них спирається на стандартні вбудовані механізми відповідних базових ОС.

Нижче буде показано невисоку ефективність стандартних засобів для контролю найважливіших ресурсів КС, до яких відносимо ресурс процесора, оперативну та віртуальну

пам'ять. Неадекватність цих засобів умовам експлуатації може призводити до погіршення характеристик обслуговування або до відмови КС.

У статті ставиться задача впровадження послуги використання ресурсів, позбавленої виявлених недоліків. Визначаються нові механізми сучасних версій ядра базової ОС, аналіз яких засвідчує можливість реалізації найвищого рівня послуги («ДР-3. Пріоритетність використання ресурсів»).

1. Використання ресурсів як послуга безпеки

Доступність, згідно [3], це властивість ресурсу системи, яка полягає в тому, що користувач (процес), який володіє відповідними повноваженнями, може використовувати ресурс відповідно до правил, встановлених політикою безпеки, не очікуючи довше заданого проміжку часу, тобто коли він знаходиться у вигляді, необхідному користувачеві, в місці, необхідному користувачеві, і в потрібний час, коли він йому необхідний.

Механізм квот є найпростішою формою контролю за використанням ресурсів КС.

Всі захищені об'єкти КС (наприклад, дисковий простір, тривалість сеансу і т. ін.) повинні ідентифікуватись і контролюватись диспетчером доступу шляхом накладення обмежень на максимальний обсяг даного ресурсу, що може бути виділений користувачу. На даному рівні послуги не гарантується, що користувач не зможе повністю захопити решту певного ресурсу, обмежуючи тим самим доступ до нього інших користувачів. Застосування механізму квот відповідає першому рівню послуги «ДР-1».

Рівень послуги «ДР-2» являє собою реалізацію досконалішої форми квот. Квоти використовуються таким чином, щоб гарантувати, що жоден користувач не зможе захопити решту певного ресурсу, дозволяючи виділяти менші обсяги ресурсів, ніж максимальна квота користувача, гарантуючи таким чином іншому користувачеві доступ до розділюваного ресурсу.

Рівень послуги «ДР-3» дозволяє управляти пріоритетністю розподілу ресурсів. Користувачі групуються адміністратором так, щоб визначити пріоритетні групи. У разі високого завантаження КС може знаходитись у стані, коли тільки користувачі, які мають високий пріоритет, можуть мати доступ до системи за рахунок інших користувачів.

2. Послуга використання ресурсів у вітчизняних КЗЗ

До вітчизняних КЗЗ, функціональний профіль яких включає послугу використання ресурсів, і який підтверджений відповідним експертним висновком, належать такі розробки:

1. КЗЗ Гриф-ХР для ОС Windows XP реалізує послугу «ДР-1» [5].

2. КЗЗ Гриф-Мережа для ОС MS Windows 2000 Server/MS Windows 2003 Server/MS Windows 2000 Professional/MS Windows XP Professional реалізує послугу «ДР-1» [6].

3. КЗЗ на базі ОС myLinux (ЗОС myLinux ОКО) реалізує послугу «ДР-1» [7].

4. КЗЗ BBOS на базі ОС OpenBSD реалізує послугу «ДР-2» [8].

Відмітимо особливості реалізації послуги безпеки у названих КЗЗ. Комплекси Гриф-ХР та Гриф-Мережа використовують штатний механізм ОС Windows для контролю ресурсів. Цей механізм дозволяє встановлювати дискові квоти та керувати пріоритетністю виконання процесів, уводячи 6 рівнів пріоритетів: низький, нижче нормального, нормальний, вище нормального, високий та реального часу.

В інструкції адміністратора КЗЗ задокументовано використання додатку для керування дисковими квотами. В той же час, версія ядра базової ОС Linux 2.6.12 містить засоби для керування пріоритетністю виконання процесів та обмеження максимальної кількості процесів, що виконуються від імені одного користувача. Це дозволяє говорити про наявність можливості керування використанням процесорного часу, хоча і досить обмеженої.

Реалізація послуги «ДР-2» комплексом засобів захисту BBOS дозволяє задавати дискові квоти, встановлювати максимальну кількість процесів, ініційованих користувачем та задавати обмеження на швидкість доступу до мережі.

Відмітимо, що розглядувані КЗЗ не поширюють сферу дії послуги використання ресурсів на оперативну та віртуальну пам'ять.

Комплекси myLinux ОКО і BBOS використовують стандартні механізми Unix-подібних операційних систем для контролю ресурсів. Оскільки розроблювана ЗОС базується на ОС Linux, варто розглянути їх докладніше.

Стандартні засоби контролю використання процесорного часу дозволяють керувати пріоритетністю процесів та обмежувати загальну тривалість процесорного часу, що може бути відведений на виконання одного процесу.

Пріоритетність процесу визначається параметром його «гарності» (niceness). Поняття

«гарності» використовується планувальником задач ядра при розподілі інтервалів процесорного часу для кожного процесу. Значення «гарності» лежить у проміжку від -20 (найвищий пріоритет) до 19 (найнижчий пріоритет). За замовчуванням, «гарність» користувацьких процесів має значення 0. При клонуванні процесу значення успадковується від батьківського процесу.

Нехай маємо два користувацькі процеси, що працюють одночасно на однопроцесорній Linux-системі. Частка процесорного часу кожного з процесів буде пропорційна $\frac{20-n}{20}$, де n –

гарність процесу. Отже, процес зі значенням гарності +15 отримуватиме одну чверть процесорного часу, який відводиться для процесу з нормальним пріоритетом: $\frac{20-15}{20} = \frac{1}{4}$.

Для зміни гарності використовуються системні утиліти `nice` і `renice`. Утиліта `nice` дозволяє запустити вказану програму зі зміненим значенням гарності. Утиліта `renice` дозволяє змінити гарність вже запущеного процесу. При цьому, звичайний (непривілейований) користувач має право тільки збільшити «гарність» для процесу, власником якого він є сам. Вивільнений час розподіляється серед всіх запущених процесів. Тим самим, опосередковано, інші процеси цього власника отримують більше процесорного часу. Повне керування значенням «гарності» дозволяється лише адміністратору КС.

Модуль `ram_limits` бібліотеки `PAM` дозволяє для кожного користувача або групи користувачів задати максимальну тривалість процесорного часу, який відводиться на виконання процесів. Це обмеження успадковується всіма процесами, що їх ініціював даний користувач. При його перевищенні, виконання відповідного процесу завершується. Хоча обмеження встановлюється для користувачів або груп користувачів, однак облік процесорного часу ведеться окремо для кожного з ініційованих відповідним суб'єктом процесів, що не дозволяє обмежити тривалість часу, який відводиться в цілому для всіх процесів користувача або групи користувачів.

Також, модуль дозволяє обмежити максимальну кількість процесів, що одночасно виконуються від імені одного користувача та обмежити кількість активних користувачів системи.

На цьому стандартні засоби контролю процесорного часу в Unix-подібних системах вичерпуються. Їхня неадекватність для

впровадження ефективної політики розподілу ресурсу процесора стає наочною при аналізі роботи класичного планувальника задач.

В ядрах ОС Linux до версії 2.6.26 та у ядрі ОС OpenBSD використовується планувальник, який здійснює справедливий розподіл процесорного часу для всіх запущених процесів. Під справедливістю розуміється виділення рівних інтервалів процесорного часу для процесів з рівними пріоритетами. Однак, цей підхід спричиняє несправедливий розподіл процесорного часу між користувачами.

Справді, нехай від імені користувача А виконується один процес, від імені користувача В виконуються дев'ять процесів. Припустимо, що всі процеси мають один і той самий пріоритет. Справедливий розподіл процесорного часу на рівні процесів призведе до того, що всі процеси отримають по 10% процесорного часу. В результаті, користувачу А буде відведено 10% часу, користувачу В – 90% часу. Ясно, що справедливий розподіл часу на рівні процесів призводить до несправедливого розподілу часу на рівні користувачів.

Іншими словами, лише визначення дуже жорсткого обмеження на кількість процесів, що виконуються від імені одного користувача разом із обмеженням кількості активних користувачів можуть гарантувати, що запущені процеси не захоплять лівову частку процесорного часу, погіршуючи реакцію КС та потенційно порушуючи принцип доступності користувачів до захищених об'єктів.

Вважаємо, що використання такого принципу розподілу ресурсу процесора у захищеній ОС є неприйнятним.

Як було зазначено, жодний із КЗЗ не поширює послугу використання ресурсів на оперативну або віртуальну пам'ять. При цьому, пам'ять КС є чи не найважливішим з усіх ресурсів. На відміну від процесорного часу, подільність якого дозволяє виконуватись всім запущеним процесам у випадку високого завантаження (очевидно, із погіршенням характеристик обслуговування), нестача вільної пам'яті призводить до явного порушення доступності КС.

Для повноти розгляду потрібно зауважити, що в ядрах ОС Linux та ОС OpenBSD наявний засіб, який дозволяє встановлювати обмеження на об'єм зайнятої віртуальної пам'яті. Це обмеження визначається для користувачів або груп користувачів за допомогою модуля `ram_limits`, однак, в дійсності, воно встановлюється для кожного процесу,

запущеного від імені даного користувача. (Тут ми стикаємося із ситуацією, аналогічною до встановлення обмежень на час виконання процесів.) Таким чином, обмежити використання віртуальної пам'яті конкретним користувачем можна лише обмеживши максимальну кількість процесів, які цей користувач може ініціювати та задавши явно невисоке обмеження на розмір віртуальної пам'яті, яку може використати кожен із ініційованих користувачем процесів.

Ясно, що занижене обмеження на об'єм віртуальної пам'яті може унеможливити роботу деяких додатків, а завищене – призвести до вичерпання вільної пам'яті.

Зробимо зі сказаного такі висновки:

1. Всі перелічені КЗЗ містять засоби для контролю за використанням дискового простору.

2. КЗЗ на базі ОС Windows XP дозволяють визначати один із 6 рівнів пріоритетів, КЗЗ на базі ОС типу Unix дозволяють більш точно контролювати пріоритетність процесів.

3. КЗЗ на базі ОС Windows XP не дають жодних гарантій щодо неможливості захоплення користувачем (процесом) ресурсу процесора.

4. КЗЗ на базі ядер ОС GNU/Linux та OpenBSD дозволяють визначити максимальне число активних користувачів та кількість процесів, що можуть одночасно працювати від імені кожного з них. За умови встановлення дуже жорстких обмежень на ці параметри можна говорити про неможливість захоплення ресурсів процесора одним користувачем.

5. Розглядувані КЗЗ не містять ефективних засобів для контролю використання оперативної та віртуальної пам'яті конкретним користувачем або групою користувачів.

6. Стандартним засобам контролю ресурсів процесора і оперативної пам'яті бракує можливості вести облік використання відповідних ресурсів групою процесів. Саме така можливість дозволила б контролювати ресурси, виділені окремому користувачу;

7. Жодний із КЗЗ не регламентує контроль за розкладом та часом роботи користувачів з КС.

3. Реалізація послуги «ДР-3»

У попередньому підрозділі була показана невисока ефективність стандартних засобів контролю ресурсів КС. Маючи на меті впровадити в розроблюваній ЗОС значно потужніші засоби, конкретизуємо вимоги, які висуваються в [1] до реалізації послуги «ДР-3».

1. Політика використання ресурсів, що реалізується комплексом засобів захисту (КЗЗ), повинна відноситися до всіх об'єктів КС.

2. Політика використання ресурсів повинна визначати обмеження, які можна накладати, на кількість даних об'єктів (обсяг ресурсів), що виділяються окремому користувачу і довільним групам користувачів.

3. Запити на зміну встановлених обмежень повинні оброблятися КЗЗ тільки в тому випадку, якщо вони надходять від адміністраторів або від вповноважених користувачів.

4. Повинна існувати можливість встановлювати обмеження таким чином, щоб КЗЗ мав можливість запобігти діям, які можуть призвести до неможливості доступу інших користувачів до функцій КЗЗ або захищених об'єктів. КЗЗ повинен контролювати такі дії, здійснювані з боку окремого користувача і довільних груп користувачів.

Політика контролю за використанням ресурсів розроблюваної захищеної ОС поширюється на такі ресурси: процесорний час, оперативну та віртуальну пам'ять, дисковий простір, розклад та час роботи.

Реалізація високого рівня послуги стає можливою завдяки використанню в якості базової останньої версії ядра ОС GNU/Linux (версії 2.6.31). Ця версія ядра містить підтримку так званих груп контролю (control groups) – засобу, який надає механізм для організації множини процесів та всіх їхніх майбутніх нащадків у довільні ієрархічні групи. Із кожною такою групою можна пов'язати одну чи кілька підсистем, які дозволяють відслідковувати або контролювати поведінку всіх процесів у даній групі. Найтипівішим застосуванням груп контролю є облік ресурсів, які використовуються всіма процесами групи у сукупності. До складу ядра базової ОС входять, зокрема, підсистеми для обліку процесорного часу і оперативної та віртуальної пам'яті.

Пов'язавши підсистему обліку віртуальної пам'яті із групою контролю, отримаємо можливість відстежувати об'єм пам'яті, який сумарно використовують всі процеси, що є членами цієї групи. Більше того, окрім обліку, підсистеми дозволяють ввести обмеження на використання групою відповідного ресурсу.

Вочевидь, засіб для об'єднання процесів у довільні групи для обліку і обмеження використаних цими групами ресурсів відкриває принципово нові можливості для впровадження послуг безпеки з контролем ресурсів КС.

Опишемо процедури створення та налаштування груп контролю. Адміністратор КС монтує спеціальну віртуальну файлову систему cgroup. При монтуванні в якості додаткових

опцій вказуються підсистеми, які будуть під'єднані до груп контролю. Наприклад, виклик `mount -t cgroup -o cpu,memory CGROUP /dev/cgroup` створить так звану кореневу групу контролю, яка містить всі процеси, що виконуються в даний момент. До групи контролю було під'єднано підсистеми `cpu` та `memory`. Якщо додаткові опції не було вказано, то під'єднуються всі підсистеми, відомі ядру ОС.

Після монтування директорія наповнюється віртуальними файлами, які експортують дані підсистем або надають інтерфейс для зміни певних параметрів, які регулюють роботу підсистеми щодо даної групи. Читання даних здійснюється командою `cat`, запис – викликом програми `/bin/echo` з новим значенням параметра та перенаправленням її виводу у файл, що контролює відповідний параметр.

Для того, щоб створити підгрупу в кореневій групі, адміністратор створює підкаталог у каталозі `/dev/cgroup`. Одним із віртуальних файлів, який з'явиться у новоствореному підкаталозі, буде файл `tasks`. В цьому файлі зберігається перелік усіх ідентифікаторів процесів, які містяться в даній підгрупі. На момент створення підгрупи файл `tasks` порожній.

В якості прикладу розглянемо послідовність команд, що створюють підгрупу `GR0` кореневої групи і переміщують у неї процес командної оболонки `bash`:

```
[root] mkdir /dev/cgroup/GR0
[root] echo $$
> 2386
```

```
[root] /bin/echo 2386 > /dev/cgroup/GR0/tasks
```

Після цього, процес `bash` та всі його нащадки будуть знаходитись у підгрупі `GR0`.

Підсистема `cpu` створює файли, які надають інтерфейс для визначення пріоритетності групи контролю при розподілі процесорного часу; підсистема `memory` експортує дані про поточне використання оперативної та віртуальної пам'яті всіма процесами у даній групі та надає інтерфейс для встановлення обмеження на сукупний обсяг пам'яті КС, який можуть займати процеси в групі. Докладніше про підсистеми `cpu` і `memory` йтиметься нижче, у підрозділах, присвячених реалізації послуги для відповідного ресурсу.

4. Процесорний час

Як зазначалося, класичний планувальник задач використовує принцип рівномірного розподілу процесорного часу серед всіх запущених процесів, що може призводити до погіршення характеристик обслуговування користувачів.

Починаючи з версії 2.6.26, у склад ядра входить інший планувальник задач (Completely Fair Scheduler – CFS [9]), який здатний використовувати один з двох принципів розподілу процесорного часу між процесами. Вибір між принципами визначається при конфігуруванні опції компіляції ядра.

Перший принцип полягає у справедливому розподілі процесорного часу між всіма користувачами. Кожний користувач, який здійснив вхід в систему, отримує частку процесорного часу, обернено пропорційну кількості всіх активних користувачів. Ця частка розподіляється з урахуванням пріоритетів всім процесам, що працюють від імені цього користувача. Так, якщо від імені користувача А виконується один процес, а від імені користувача В – дев'ять процесів, обом користувачам буде відведено по 50% часу процесора. Один процес користувача А отримає весь час, відведений для цього користувача, тобто половину від загального процесорного часу. Кожний із дев'яти процесів користувача В одержить по $\frac{50}{9} \approx 5,5\%$

часу процесора. Таким чином, велика кількість процесів, що працюють від імені користувача В не викликає погіршення характеристик обслуговування інших користувачів.

Другий принцип застосовує групи контролю. Його суть полягає у справедливому розподілі часу спочатку між групами процесів, а потім – між всіма процесами у групі.

В розроблюваній ЗОС використовується принцип розподілу часу згідно груп контролю, що дозволяє адміністратору групувати процеси довільним чином, виходячи із особливостей експлуатації конкретної АС. В результаті може бути реалізована ефективна політика розподілу процесорного часу. Зауважимо, що другий принцип можна звести до першого, об'єднуючи всі процеси, що працюють від імені одного користувача, в одну групу контролю.

Елементами групи контролю можуть бути процеси та інші підгрупи. Домовимося називати групу непорожньою, якщо в ній виконуються хоча б один процес або вона містить непорожню підгрупу.

Розподіл ресурсу процесора між різними непорожніми групами здійснюється на підставі пріоритету групи. Значення пріоритету групи задається у файлі `cpu.shares` у підкаталозі, який представляє відповідну групу. Це значення є безрозмірною величиною. При цьому, всі процеси, що є безпосередніми нащадками даної групи, успадковують її значення `cpu.shares`.

Розподіл здійснюється з урахуванням ієрархії груп: коренева група отримує 100% процесорного часу, далі визначаються частки процесорного часу всіх безпосередніх нащадків кореневої групи (процесів та непорожніх підгруп). Отримані частки розподіляються серед нащадків непорожніх підгруп кореневої групи.

Розглянемо деяку непорожню підгрупу G , яка в результаті розподілу отримала p_G відсотків процесорного часу. Значення cpu.shares цієї підгрупи позначимо через s_G . Далі, нехай безпосередніми нащадками підгрупи G є m процесів та n підгруп $G_1, G_2, \dots, G_n$. Для кожної з підгруп G_i встановлено значення cpu.shares , яке позначимо s_i (нагадаємо, що всі процеси, які є безпосередніми нащадками G , успадковують значення cpu.shares s_G). Тоді відсоток процесорного часу p , яку отримає безпосередній нащадок підгрупи G зі значенням $\text{cpu.shares} = s$ (процес або підгрупа), можна обчислити за формулою:

$$p = \frac{s \cdot p_G}{m \cdot s_G + \sum_{i=1}^n s_i \cdot [G_i - \text{непорожня група}]}$$

Із формули видно, що відсоток процесорного часу, який отримує процес або підгрупа, не залежить від кількості процесів, які виконуються в інших підгрупах. Це доводить, що підгрупи виступають як засіб агрегування процесів при розподілі процесорного часу.

В якості прикладу застосування розглянемо КС, суб'єктами якої є користувачі, яких можна розділити на два пріоритетні класи використання ресурсів: користувачі з низьким пріоритетом (група 0) та користувачі з високим пріоритетом (група 1). Окрім того, КС повинна забезпечувати безперебійну роботу ряду критичних системних процесів, не викликаючи при цьому високого завантаження системи. Адміністратор КС, використовуючи відповідні засоби, здатен визначити таку політику пріоритетного розподілу ресурсу процесора:

1. Всі процеси, ініційовані користувачами групи 0 знаходяться в одній групі контролю GR0; значення cpu.shares групи дорівнює 1024.

2. Для кожного користувача групи 1 створюється окрема підгрупа, в якій знаходяться всі ініційовані ним процеси. Значення cpu.shares кожної із таких користувацьких груп визначається рівним 896.

3. Всі критичні системні процеси знаходяться в одній групі контролю GRS, значення cpu.shares встановлюється рівним 512.

Припустимо, що в системі працюють одночасно два користувачі групи 1. Тоді розподіл процесорного часу між групами контролю буде таким: група GR0, що містить всі процеси всіх низькопріоритетних користувачів, сумарно використовуватиме 30% часу, кожному із користувачів групи 1 буде відведено по 27% часу, а 15% буде відведено для критичних системних процесів. При цьому, за рахунок агрегування процесів користувачів групи 0 у єдину групу контролю, фактична їхня кількість не змінює частку ресурсу процесора, яку отримають високопріоритетні користувачі та системні процеси.

Проведений аналіз засвідчує, що використання нового планувальника задач дозволяє запобігти ситуації, коли окремих користувач здатний заволодіти основною частиною процесорного часу. Це, разом із можливістю визначати пріоритети груп дозволяє говорити про принципово вищий рівень реалізації послуг безпеки з контролю ресурсу процесора.

5. Оперативна та віртуальна пам'ять

Групи контролю дозволяють вирішити проблему контролю використання пам'яті КС. Дійсно, якщо помістити всі процеси даного користувача в одну групу контролю, то підсистема тегоу буде здатна визначити і, за необхідності, обмежити загальний об'єм пам'яті, яку використовують процеси даного користувача.

Підсистема тегоу може працювати в одному із двох режимів, вибір між якими здійснюється на етапі компіляції ядра. В першому режимі, підсистема контролює використання оперативної пам'яті, в другому – як оперативної, так і віртуальної. Розроблювана ЗОС застосовує другий режим обліку пам'яті.

Зупинимось на процедурі налаштування підсистеми тегоу. Підсистема створює ряд віртуальних файлів у каталозі, що представляє відповідну групу контролю. Імена цих файлів починаються із префікса «тегоу».

У файлі `limit_in_bytes` задається обмеження на максимальний об'єм оперативної пам'яті, який може використовувати група контролю. Файл `usage_in_bytes` відображає інформацію про поточний об'єм зайнятої групою оперативної пам'яті. Файл `max_usage_in_bytes` відображає інформацію про максимальний об'єм пам'яті,

який був виділений групі контролю. `memsw.limit_in_bytes` дозволяє задати обмеження на максимальний сумарний об'єм оперативної та віртуальної пам'яті, що може бути виділений для групи контролю. `memsw.max_usage_in_bytes` та `memsw.usage_in_bytes` надають інформацію про, відповідно, максимальний і поточний об'єм зайнятої оперативної та віртуальної пам'яті.

Встановлення потрібного значення здійснюється перенаправленням виводу програми `/bin/echo` у відповідний файл. Аргументом для програми `/bin/echo` є обсяг пам'яті, що задається числом у байтах. Також існує зручна можливість задавати обсяг пам'яті у кілобайтах (мегабайтах, гігабайтах), додаючи до числа суфікс «К» («М», «Г»).

6. Дисковий простір

Контроль за використанням дискового простору здійснюється за допомогою стандартних засобів ОС типу Unix, які довели свою ефективність у застосуванні у захищених середовищах.

Квоти на дисковий простір визначаються для користувачів і груп користувачів, дозволяючи незалежно контролювати використання дискових ресурсів користувачами і групами користувачів. Як відомо, з кожним об'єктом файлової системи в середовищі ОС типу Unix пов'язуються два атрибути. Перший визначає ідентифікатор користувача – власника файлового об'єкта. Другий визначає ідентифікатор групи власника. Контроль за дотриманням користувацьких квот здійснюється на підставі значення першого атрибута, за дотриманням групових квот – на підставі значення другого атрибута.

Відмітимо, що реалізація дискових квот в середовищі Linux дозволяє контролювати не лише використання дискового простору. Дискові квоти розповсюджуються на такі ресурси, як: 1) кількість блоків, яку можуть займати файли та 2) кількість індексних дескрипторів (визначаючи тим самим максимальну кількість файлових об'єктів користувача або групи). Для кожного типу квот можна задати два види обмежень – м'яке та жорстке. Відмінність між двома видами обмежень полягає в тому, що значення м'якої квоти може бути перевищене протягом певного часу (за замовчуванням, цей час становить один тиждень). Після закінчення заданого періоду м'яке обмеження вступає в повну силу, не дозволяючи користувачу або групі одержати більшу кількість відповідного ресурсу. Жорстке обмеження діє відразу, задаючи абсолютний поріг на обсяг вказаного ресурсу.

Управління квотами здійснюється адміністратором КС. Наявні такі інструментальні засоби, як `quota` – для виведення значень індивідуальних користувацьких та групових квот, а також поточних значень зайнятих ресурсів, що контролюються; `edquota` – для редагування значень користувацьких та групових квот за допомогою віконного редактора; `grpquota` – для виведення значень квот та зайнятих ресурсів для всіх користувачів або для всіх груп; `quotacheck` – для створення квот на новому носії та для перевірки існуючих квот; `quotaon` – для вмикання та вимикання контролю за дотриманням дискових квот.

7. Розклад та час роботи

У впровадженні послуги контролю розкладу та часу роботи будемо виходити із таких вимог: квота на розклад та час роботи визначається для користувачів та для груп користувачів. Квота на час роботи задається так, щоб для кожного дня тижня, місяця або конкретної дати можна було визначити інтервали часу, протягом яких суб'єкт може входити в систему або виконувати дії. Крім інтервалів часу, повинна бути можливість визначити граничну сукупну тривалість активності суб'єкта протягом доби.

На перший погляд, виконання цих вимог не має становити труднощів. Одним зі стандартних модулів бібліотеки PAM є модуль `ram_time`, який дозволяє задавати конкретний час, протягом якого суб'єкт має право ініціювати сеанс роботи з КС. Також існує можливість обмежити загальну тривалість роботи користувача протягом доби.

Однак, виявляється, що модуль `ram_time` має суттєве обмеження, яке унеможлиблює його застосування для впровадження послуги. Мова йде про те, що модуль `ram_time` викликається бібліотекою PAM перед початком сеансу. Приймавши позитивне рішення про дозвіл користувачу розпочати сеанс роботи із КС, модуль `ram_time` повертає управління і перестає контролювати цей сеанс. Цілком можливою є ситуація, коли користувач перевищуватиме або дозволені інтервали роботи, або граничну сукупну тривалість роботи із КС.

Очевидно, що контроль обмежень потрібно здійснювати не лише при вході користувача у систему, але й протягом всього сеансу. Існує сторонній програмний засіб, який цілком задовольняє сформульованим вимогам.

Пакет ПЗ `timeoutd` містить демон, який періодично перевіряє всі ініційовані сеанси, слідкуючи за дотриманням графіка роботи користувачів із КС. Налаштування пакету

здійснюється адміністратором КС, шляхом редагування файлу `/etc/timeouts`.

У файлі для конкретних користувачів та для груп користувачів вказуються такі параметри: перелік часових інтервалів, протягом яких даний суб'єкт може розпочати роботу із КС; перелік терміналів, з яких даний суб'єкт може ініціювати сеанс; максимальний час неактивності суб'єкта (після вичерпання цього часу, демон `timoutd` достроково завершить сеанс даного суб'єкта); гранична тривалість сеансу (у хвилинах) та граничний сукупний час роботи суб'єкта протягом доби (враховуючи тривалість роботи за всіма терміналами). Вичерпання вказаного часу призводить до примусового завершення сеансів.

Висновки

Дисковий простір являється єдиним ресурсом, засоби контролю за використанням якого у вітчизняних КЗЗ слід визнати адекватними. Стандартні механізми контролю інших ресурсів є вкрай обмеженими. Процесорний час та пам'ять, які є найціннішими ресурсами КС, знаходяться поза межами політики контролю використання ресурсів.

Реалізація послуги безпеки з використання ресурсів у вітчизняних КЗЗ має такі недоліки:

1. Використання планувальника задач, який здійснює несправедливий розподіл процесорного часу серед користувачів. Ця проблема може призводити до захоплення одним користувачем ресурсу процесора, суттєво погіршуючи характеристики якості обслуговування інших користувачів або системних процесів.

2. Відсутність засобів контролю обсягів пам'яті, яка виділяється процесам, групам процесів, користувачам або групам користувачів. В своєму крайньому вияві це може призводити до реалізації загрози доступності КС в цілому.

3. Відсутність у складі КЗЗ ефективних засобів для контролю за дотриманням розпорядку роботи користувачів із КС.

У статті досліджено найсучасніші механізми обліку та контролю ресурсів, які дозволяють суттєво вдосконалити якість послуги безпеки, що впроваджується. Показано, що їхнє використання розв'язує перелічені проблеми, притаманні вітчизняним КЗЗ.

Показана можливість контролю використання процесорного часу довільними групами процесів на основі агрегування та пріоритетного розподілу з гарантією неможливості захоплення. Контроль за використанням пам'яті може поширюватись на довільні групи процесів, користувачів або групи

користувачів, що дозволяє визначити ефективну політику безпеки. Жодна визначена група процесів не буде здатна перевищити встановлені обмеження на обсяг оперативної та віртуальної пам'яті. Досліджені механізми цілком відповідають вимогам, які регламентуються нормативним документом [1] щодо реалізації послуги безпеки з використання ресурсів найвищого рівня «ДР-3. Пріоритетність використання ресурсів».

Література

1. НД ТЗІ 2.5-004-99. Критерії оцінки захищеності інформації в комп'ютерних системах від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 59 с.
2. НД ТЗІ 2.5-005-99. Класифікація автоматизованих систем і стандартні функціональні профілі захищеності оброблюваної інформації від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 22 с.
3. НД ТЗІ 1.1-003-99. Термінологія в галузі захисту інформації в комп'ютерних системах від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 30 с.
4. Антоноук А.А., Жора В.В., Мостовой В.Н. «Угрозы информации и услуги безопасности» // Проблемы программирования. – 2003. – №4. – С. 65–71.
5. Державна експертиза з технічного захисту інформації КЗЗ від НСД «Гриф-ХР» (в. 1.01), виробництва ТОВ «Інститут комп'ютерних технологій». ДСТСЗІ СБ України, 2006 р. <http://www.ict.com.ua/im/certif/grif-xp.jpg>
6. Державна експертиза з технічного захисту інформації КЗЗ від НСД «Гриф-Мережа» (в. 2.01), виробництва ТОВ «Інститут комп'ютерних технологій». ДСТСЗІ СБ України, 2006 р. <http://www.ict.com.ua/im/certif/grif-m2.jpg>
7. Державна експертиза з технічного захисту інформації комплексу засобів захисту від несанкціонованого доступу на базі сервісів ОС `myLinux` (версії 3.1). ДСТСЗІ СБ України, 2006 р. <http://www.mylinux.com.ua/expertise.pdf>
8. Державна експертиза з технічного захисту інформації комплексу засобів захисту від несанкціонованого доступу на базі операційної системи `OpenBSD`, шифр «BBOS». Експертний висновок. ДержНДІ Спецзв'язку, 2008 р. http://www.atmnis.com/files/user_files/BBOS.pdf
9. Kumar A. Multiprocessing with the Completely Fair Scheduler. Introducing the CFS for Linux // IBM developerWorks, 08 Jan 2008. – 13 p.

Надійшла до редколегії 19.01.2010

УДК 681.3:004.056

Каленський* А. А., аспірант

Цифрові підписи від імені групи

Розглядається один з важливих криптографічних засобів захисту інформації в групах – цифровий підпис. Проводиться порівняння двох основних видів цифрового підпису від імені груп – групового цифрового підпису та кільцевого цифрового підпису. Розглядаються існуючі та нові сфери застосування. Пропонуються варіанти вдосконалення існуючих підписів.

Ключові слова: цифровий підпис, цифровий підпис в групі, види цифрових підписів від імені групи, застосування цифрових підписів від імені групи.

*E-mail: akalenskyi@gmail.com

Статтю представив член-кор. НАН України, д. ф.-м. н. Анісімов А.В.

Збільшення кількості комп'ютерної техніки, впровадження інформаційних технологій в усі сфери життєдіяльності людини призводить до виникнення задач пов'язаних з об'єднанням користувачів у групи для взаємного використання обчислювальних ресурсів. Останнім часом в науковій літературі приділяється велика увага проблемі побудови захищених групових середовищ. Запропоновано чимало алгоритмів створення/зміни складу групи, генерації спільного групового ключа [2,3]. Існування цих груп не обмежується лише можливістю взаємодії в середині групи. Досить часто група взаємодіє з зовнішнім середовищем. Тому виникають задачі пов'язані зі створенням (адаптацією) криптографічних алгоритмів, в яких група користувачів виступала б як єдине ціле.

В представленій роботі розглядається один із важливих інструментів захисту інформації – цифровий підпис та можливості його використання в групових середовищах.

Термінологія.

Цифровий підпис – це деяка комп'ютерно згенерована цифрова добавка до повідомлення, яка зв'язана з повідомленням деяким заданим відношенням. Кожен має можливість перевірити зв'язок повідомлення і його цифрового підпису, але тільки власник цифрового підпису може обчислити новий цифровий підпис при зміні повідомлення [1]. Цифровий підпис надає можливість:

A. Kalenskyi

Digital signatures on behalf of a group

One of important cryptographic facilities of information protection in group – digital signature is considered. A comparison of two basic types of digital signature on behalf of group – digital group signature and digital ring signature is made. Existent and new applications are examined. Some improvements of existent signatures are offered.

Keywords: digital signature, digital signature in a group, types of digital signatures on behalf of a group, application of digital signatures on behalf of a group.

- Документального підтвердження авторства документу.

- Контролю цілісності підписаного документу.

- Захисту від змін в документі.

- Неможливість відмови від авторства документа.

Вперше про можливість існування цифрового підпису і опис загальної схеми його використання було наведено в статті Діффі та Хеллмана [9]. Відразу після цієї роботи в 1978 р. Р.Л. Рівест, А.Шамір і Л. Адлеман запропонували RSA – схему шифрування та метод цифрового підпису заснований на цій схемі [13].

Під **групою** будемо розуміти набір користувачів об'єднаних для вирішення певних спільних задач.

На сьогоднішній день існує два типи підписів, що можуть використовуватися від імені групи: Групові підписи та кільцеві підписи.

Груповий цифровий підпис – цифровий підпис, створений членом попередньо організованої групи, на основі власного членського сертифікату. Груповий підпис надає можливість члену групи підписувати повідомлення анонімно від імені групи. Процес перевірки підпису засвідчує, що цей підпис дійсно був зроблений членом групи. В разі необхідності менеджер групи, може використати процедуру відкриття групового підпису та визначити автора підпису.

Поняття групових цифрових підписів та ідею існування кільцевих цифрових підписів першими ввели Шаум і Ван-Хейст [7]. Вони запропонували чотири схеми, три з яких забезпечували обчислювальну анонімність, четверта – інформаційно-теоретичну анонімність. В перших двох з них перед створенням групи необхідно визначити кількість членів в групі (груповий цифровий підпис). В двох останніх розмір групи визначився процедурою створення групи (якщо хтось хотів підписатися анонімно він обирає групу людей і доводив, що він належить до цієї групи – кільцеві цифрові підписи). Деякі схеми вимагали взаємодії групового менеджера з автором підпису для відкриття підпису. В усіх запропонованих схемах довжина відкритого групового ключа лінійно залежала від кількості членів у групі.

Далі Чен та Педерсен [8] запропонували дві схеми групового підпису з можливістю додавання нових членів групи після створення групи. В основі схем ідентифікації лежав так званий механізм подвійного підпису. Член групи створював два таємних ключі, що відповідали двом відкритим груповим ключам. Далі він підписував повідомлення за допомогою обох таємних ключів. Обидва підписи можна було перевірити за допомогою відповідних відкритих ключів. Кожен з членів групи надавав один з двох таємних ключів менеджеру групи, для можливості визначення автора підпису. Тому в цій схемі довжина таємного групового ключа лінійно залежить від кількості членів в групі.

Наступним вдосконаленням схеми групового підпису по праву вважається схема представлена Каменішем та Стадлером в [6]. Вона заклала основу всього подальшого розвитку схем групового підпису. Це перша схема групового підпису в яких довжина відкритого групового ключа і довжина групового підпису не залежать

від розміру групи, і при додаванні нового члена до групи немає необхідності змінювати відкритий груповий ключ.

А вже сучасні схеми групового підпису [4,5] надають можливість ефективного виключення члена з групи.

В схемі групового підпису приймають участь три сторони: члени групи, менеджер групи і не члени групи. Вона складається з наступних процедур:

Установка(ініціалізація): алгоритм для генерації відкритого групового ключа та секретного групового ключа.

Присєднання: протокол між менеджером групи та користувачем, в результаті якого користувач стає членом групи. При цьому новий член групи отримує свій членський сертифікат, за допомогою якого він може створювати підписи від імені групи, а менеджер групи отримує певну інформацію про нового члена групи, яку він додає до приватного групового ключа.

Підпис: протокол між членом групи та користувачем, в результаті якого член групи, використовуючи свій членський сертифікат, створює підпис на повідомленні, яке надане користувачем.

Перевірка: алгоритм перевірки правильності групового підпису за відкритим груповим ключем та підписаним повідомленням.

Відкриття: алгоритм, за допомогою якого груповий менеджер за отриманим підписаним повідомленням та секретним груповим ключем визначає автора підпису.

Виключення з групи: алгоритм, за допомогою якого груповий менеджер, використовуючи інформацію отриману на етапі присєднання члена до групи, може виключити члена з групи. Тобто унеможливорює подальше створення цим користувачем підписів від імені групи.

На відміну від групового підпису, для створення кільцевого підпису не потрібна процедура перевірки підпису засвідчує, що підпис створено одним із списку можливих

Таблиця 1

Порівняльна таблиця властивостей групового та кільцевого підписів.

Властивості	Груповий підпис	Кільцевий підпис
<i>Непідробність</i>	Ніхто окрім членів групи не може створити груповий підпис (тільки користувач, що має членський сертифікат може створити груповий підпис).	Тільки користувач, який знає закритий ключ, що відповідає одному з відкритих ключів, які використовуються під час створення кільцевого підпису може створити кільцевий підпис.
<i>Анонімність</i>	Ніхто окрім менеджера групи, не може ідентифікувати автора підпису. Тобто анонімність залежить від надійності менеджера групи.	Анонімність не залежить від зовнішніх факторів
<i>Незв'язність</i>	Неможливість з'ясувати, які підписи створені одним і тим же членом групи.	В загальному випадку підписи незв'язні. Існують модифікації кільцевого підпису які в залежності від виду використання вимагають певний тип зв'язності двох підписів.
<i>Відстежуваність</i>	Менеджер групи має можливість відкрити підпис і тим самим визначити автора підпису.	В загальному випадку дізнатися хто автор підпису неможливо. В деяких видах кільцевого підпису існує можливість доведення авторства кільцевого підпису, проте це залежить тільки від волі автора.
<i>Опір коаліції</i>	Ні коаліція з членів групи, ні менеджер групи не можуть підписуватися від імені іншого члена групи.	Ніхто з можливих авторів підпису, окрім автора підпису не може ніяким чином вплинути на процес створення підпису. Автору підпису не потрібно мати згоду можливих авторів підпису на використання їхніх відкритих ключів в кільцевому підписі.

попередньо створена групова інфраструктура (а отже не потрібні ні менеджери групи, ні процедури додавання/вилучення членів з групи та ін.).

Кільцевий цифровий підпис – цифровий підпис, створений одним автором із списку можливих авторів підпису.

Сама назва цих підписів означає рівноправність можливих авторів підпису в авторстві цього підпису [11].

В процедурі створення кільцевого підпису приймає участь тільки автор підпису.

Припустимо, що в певному відкритому домені знаходяться відкриті ключі користувачів звичайних схем підпису, що використовуються для перевірки звичайних цифрових підписів зроблених користувачами. Автор кільцевого підпису створює список можливих авторів підпису певним чином обираючи відкриті ключі з відкритого домену, додає свій відкритий ключ до цього списку. Далі, використовуючи свій закритий ключ, він створює кільцевий підпис.

авторів підпису, який знає приватний ключ, що відповідає одному з відкритих ключів використаних при створенні підпису. При цьому не розголошується інформація, яка б вказувала на те, хто саме зробив цей підпис.

Існують модифікації кільцевого підпису, які значно розширюють сферу його застосування. Вони будуть детально описані нижче.

В таблиці 1 наведено порівняння групового та кільцевого підписів. З таблиці видно, що кільцевий підпис має перевагу в анонімності, яка спирається тільки на структуру кільцевого підпису. Анонімність групового підпису залежить від надійності менеджера групи.

Розглянемо від чого залежить ефективність того чи іншого підпису.

Ефективність схеми групового підпису

Ефективність схеми групового підпису залежить від наступних параметрів:

1. Розмір відкритого групового ключа.
2. Розмір групового підпису.

3. Ефективність процедур підпису та перевірки підпису.

4. Ефективність процедур встановлення, відкриття, приєднання та виключення.

5. Ефективність оновлення інформації про приєднання члена до групи та виключення члена з групи.

В сучасних схемах групового підпису розмір відкритого групового ключа, розмір групового підпису не залежить від кількості групових членів [4,5].

Ефективність схеми кільцевого підпису

Ефективність схеми групового підпису залежить від наступних параметрів:

Розмір групового підпису.

Розмір групового підпису.

Ефективність процедур підпису та перевірки підпису.

Сучасні схеми кільцевого підпису лінійно залежать від кількості членів в списку можливих авторів підпису, оскільки відкриті ключі входять до його структури [10,11,12].

Враховуючи наведені дані, маємо наступні сфери застосування групового та кільцевого цифрового підпису.

Застосування цифрових підписів від імені групи.

<i>Груповий</i>	<i>цифровий</i>	<i>підпис.</i>
Використовується	завжди,	коли група користувачів об'єднується на тривалий час.

Використання в середині компанії. Групові підписи можуть бути використані компанією для автентифікації прайс-листів, прес-релізів чи цифрових контрактів від імені компанії. Одержувачу підпису необхідно знати тільки відкритий груповий ключ для перевірки підпису. Компанія при цьому може приховати свою внутрішню структуру, але в разі необхідності існує можливість визначити, хто саме створив цей підпис.

Типовий сценарій виглядає наступним чином. Працівник компанії А ставить груповий підпис на прайсі компанії і надсилає (наприклад через інтернет) іншій компанії В. Таким чином засвідчуватиметься, що цей прайс створено в компанії А і, що під час передачі, його не було змінено.

В цьому випадку працівник компанії міг би використати власний цифровий підпис. Тоді цей підпис буде підтверджувати цілісність, а від компанії можна отримати інформацію, що автор підпису працює в ній. При зміні місця роботи працівник може і надалі підписуватися власним підписом, компрометуючи попередню фірму-роботодавця.

Організація тендеру. Припустимо, що користувач А хоче провести чесно та прозоро тендер на постачання певного виду послуг. Він створює групу (стає менеджером групи). Всі фірми-учасниці тендеру вступають до неї. Далі кожен учасник підписує свої пропозиції груповими підписами. Після обрання певної пропозиції, А за допомогою процедури відкриття підпису, визначає хто саме є автором підпису пропозиції, яка перемогла в тендері. Існує один недолік цієї схеми використання. У випадку, коли тендер проводять на державному підприємстві, чи коли одна компанія проводить тендер для іншої компанії, існує ризик того, що менеджер групи одразу може визначити де чий підпис і вплинути на процес вибору. В цих випадках краще за все використовувати кільцевий підпис.

<i>Кільцевий</i>	<i>цифровий</i>	<i>підпис.</i>
Використовується в тих випадках коли потрібна анонімність.		

Розголошення інформації від загальновідомого кола осіб. Наприклад, член певної загальновідомої організації хоче розповісти певну інформацію про одного з членів чи про стан справ в організації. Він хоче зробити так, щоб одержувачі цієї інформації могли пересвідчитися, що отримали її від одного із членів організації, але ніколи не змогли б визначити, хто саме це зробив. Рішення цієї задачі – створення кільцевого підпису з включенням всіх членів організації як «можливих авторів» підпису.

В статті [11] наводиться приклад про члена кабінету міністрів якогось казкового королівства, який хоче розповісти цікаву інформацію про прем'єр-міністра чи про стан справ в країні.

Слід зазначити, що в такому випадку груповий підпис створити не можливо, оскільки менеджер групи може в будь-який час відкрити підпис і визначити автора підпису.

Захист від розголошення інформації третій стороні (Неможливість доведення авторства інформації третій стороні [11]). Дві фірми А та В обговорюють в електронних листах план взаємодії. Причому, необхідно, щоб у випадку отримання цієї інформації третьою стороною С, остання не змогла б визначити, хто саме запропонував той чи інший пункт плану. А також, щоб сторона А (сторона В) не змогла б довести С, що певний пункт плану створила сторона В (сторона А). Ідеальним варіантом є створення кільцевого підпису на плані взаємодії з включенням А та В як «можливих авторів» підпису.

Організація тендеру. Аналогічно до випадку з груповим підписом, необхідно провести чесно та прозоро тендер на постачання певного виду послуг. Всі фірми-учасниці підписують свої пропозиції кільцевим підписом включаючи всіх учасників тендеру як «можливих авторів» підпису. Таким чином, нікому не відомо, хто який підпис створив. Перевагою над груповим підписом є те, що в такому разі не існує менеджера групи і зберігається повна анонімність. Визначається пропозиція-переможець. Автор підпису доводить своє авторство.

В даному випадку класичний кільцевий підпис неможливо використати, оскільки в ньому не існує механізму доведення авторства підпису окрім розкриття секретного ключа.

Модифікації кільцевого підпису.

Для використання кільцевого підпису під час тендеру необхідно додати до цього поняття нові дві властивості для кільцевих підписів:

1. Можливість відречення від кільцевого підпису (автор через розголошення певних даних надає можливість потенційним авторам підпису довести свою непричетність до створення цього підпису).

Ця властивість є необхідною в тих випадках, коли для участі в тендері необхідно вносити грошову заставу. Учасник тендеру, що програв, може довести те, що він не є автором підпису і забрати грошову заставу.

2. Можливість доведення авторства підпису (не розкриваючи секретних параметрів схеми, автор може довести своє авторство).

Ці дві властивості вперше запропоновані в [6].

3. Неможливість непомітно двічі підписатися під одним і тим же повідомленням.

В загальному випадку неможливо визначити по двом кільцевим підписам чи були вони створені одним і тим самим автором. Проте, в деяких випадках, це було б дуже корисним.

Наприклад, необхідно провести Інтернет-голосування з приводу варіантів вибору вирішення якоїсь суспільно важливої проблеми. При цьому необхідно, щоб:

а) Це було анонімно.

б) Проголосувати міг тільки авторизований користувач.

в) Не було можливості у користувача проголосувати декілька разів за один і той же самий варіант (чи різні варіанти).

В статті [12] розглядається випадок з анонімним інтернет-голосуванням на BBS.

Для цього дуже добре підходять кільцеві підписи з можливістю відслідковування підписів зроблених користувачем відносно одного й того ж варіанту вибору для голосування. Анонімність забезпечується структурою кільцевого цифрового підпису. Авторизованість означає, що тільки ті користувачі, котрі знають приватні ключі, що відповідають відкритим ключам, які допущені до голосування, можуть створити такі підписи. «Накрутка» голосів нівелюється новою властивістю.

Голосування в суді присяжних. Завдяки своїй властивості анонімності, кільцеві підписи можуть бути використані під час винесення вироку судом присяжних. При цьому, 3-тя властивість буде відігравати ключову роль під час підрахунку голосів.

Зовнішнє оцінювання знань. Можливості кільцевого підпису з властивістю доведення авторства підпису можна використовувати під час електронного зовнішнього оцінювання знань підписуючи свою роботу таким кільцевим підписом.

Експертний висновок. Існує чимало судових експертиз з багатьох галузей. Було б цілком розумно використовувати групові підписи (в разі необхідності підтримки групової структури і властивості відкриття підпису) чи кільцевого підпису для цілковитої анонімності для захисту від тиску з боку третьої сторони.

Вибори. В разі використання повноцінної електронної системи голосування анонімність голосування може бути забезпечена кільцевим підписом. А підписи на електронних протоколах, що відправляються в центральну виборчу комісію – груповими підписами.

Важливо відмітити, що в статті не розглядаються питання легальності підписів від імені групи (чи мав автор право в певний момент часу створювати підписи), оскільки в сучасних схемах групових підписів це питання вирішено їхньою інфраструктурою. Що ж до кільцевих підписів – то питання вирішується загальними методами, які використовуються в звичайних цифрових підписах (часові мітки та ін.).

Наступним кроком в розвитку цифрових підписів від імені групи є модифікація схеми підписів від імені групи для відображення ієрархічних зв'язків в середині групи. Важливою модифікацією також є система отримання дозволів для підписів над певними видами документів в залежності від розташування члена групи в груповій ієрархії.

Цікавим є варіант змішаної архітектури підписів від імені групи. Наприклад, підпис від

імені групи виступає кільцевим підписом для користувачів, які не є членами групи, і проявляє властивості групового підпису в середині групи.

Висновки. У роботі розглядається один з важливих криптографічних засобів захисту інформації в групах – цифровий підпис. Проводиться порівняння двох основних видів цифрового підпису від імені груп – групового цифрового підпису та кільцевого цифрового підпису. Розглядаються існуючі сфери застосування: використання групового підпису в середині компанії, в організації тендерів та використання кільцевого підпису для розголошення інформації від загальновідомого кола осіб, захист від розголошення інформації третій стороні, організація тендеру, інтернет-голосування. Запропоновано наступні варіанти використання: голосування в суді присяжних, зовнішнє оцінювання знань, експертний висновок, вибори. Пропонуються варіанти вдосконалення існуючих підписів з можливістю відображення ієрархії в середині груп, додавання можливості регулювання дозволів на підпис тих чи інших документів, змішана архітектура підпису.

Завданням на майбутнє залишається реалізація відповідних схем підписів від імені групи, які б включали запропоновані зміни.

Список використаних джерел

1. *Анісімов А.В.* Алгоритмічна теорія великих чисел. Модулярна арифметика великих чисел. – Київ: Видавн.дім “Академперіодика”, 2001. – 154 с.
2. *Анісімов А.В.* Коалиционные схемы с ключами общего доступа // Кибернетика и системный анализ. – 2001. - № 1. - С. 3 – 18.
3. *Анісімов А.* Динамічні коаліційні об’єднання – нова парадигма в технології захисту інформації // Безпека інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах. VI Міжнародна науково-практична конференція. - Київ, 2003. – С.34.
4. *Camenisch J. and Groth J.* Group signatures: Better efficiency and new theoretical aspects. In Security in Communication Networks (SCN2004) (2004), vol. 3352 of Lecture Notes in Computer Science Springer, pp. 120–133.]
5. *Camenisch J. and Lysyanskaya A.* Signature schemes and anonymous credentials from bilinear maps. In CRYPTO 2004, LNCS. Springer Verlag, 2004.
6. *Camenisch J. and Stadler M.* Efficient group signatures schemes for large groups. In B.Kaliski,

editor, CRYPTO'97, volume 1294 of LNCS, pages 410–424. Springer-Verlag, 1997.

7. *Chaum D. and van Heyst E.* Group signatures. In D. W. Davis, editor, EUROCRYPT'91, volume 547 of LNCS, pages 257–265. Springer-Verlag, 1991.

8. *Chen L. and Pedersen T. P.* New group signature schemes. In A. DeSantis, editor, EUROCRYPT'94, volume 950 of LNCS, pages 171–181. Springer-Verlag, 1995.

9. *Diffie W. and Hellman M. E.* New directions in cryptography // IEEE Trans. Information Theory. – 1976. – IT-22 (6). – P.644 – 654.

10. *Klonowski M., Krzywiecki L., Kutylowski M. and Lauks A.* Step-Out Ring Signatures. E. Ochmanski and J. Tyszkiewicz (Eds.): MFCS 2008, Volume 5162/2008 of LNCS, pages 431–442, Springer Verlag, 2008.

11. *Rivest R., Shamir A., and Tauman Y.* “How to leak a secret: Theory and applications of ring signatures,” Theoretical Computer Science — Essays in Memory of Shimon Even, vol.3895 of Lect. Notes Comput. Sci., pp.164–186, Springer-Verlag, 2006.

12. *Fujisaki E. and Suzuki K.* “Traceable Ring Signature,” Proc. Int’l Conf. Public Key Cryptography—(PKC '07), O. Tatsuaki and W. Xiaoyun, eds., vol.4450, pp.181–200, 2007

13. *Rivest R. L., Shamir A., Adleman L.* A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // Communications of the ACM. – 1978. – № 21. – P. 120 – 126.

Надійшла до редколегії 22.01.10

УДК 519.21

Касьянов А.А., асп.,
Лебедев Є.О., д.ф.-м.н., проф.,
Чечельницький О.А., к.ф.-м.н., доц.

**Асимптотичні властивості
багатоканальної мережі з двовимірним
пуассонівським вхідним потоком вимог**

Досліджено асимптотичну поведінку мережі з двовимірним вхідним пуассонівським потоком вимог. Отриманий ергодичний розподіл процесу обслуговування.

Ключові слова: мережа систем обслуговування, двовимірний пуассонівський вхідний потік, ергодичний розподіл.

E-mail: a.kasyanov@taslife.com.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

1. Опис моделі.

В різних сферах нашого життя звичними стали об'єкти мережевої структури. Всесвітня мережа Інтернет, телефонні мережі, мережі банкоматів, єдині комп'ютерні мережі цілих галузей економіки є широко відомими прикладами мереж. Мережева структура завжди складається з певної множини функціонуючих елементів, які прийнято називати вузлами мережі. Вузли взаємодіють між собою. За допомогою вузлів мережа виконує обробку вимог (завдань), які надходять до неї з зовні. Завдання може бути передбачене для одного вузла. Але часто трапляються ситуації, коли завдання, яке надходить, є завданням не лише для одного вузла, а відразу для декількох, або навіть для всіх вузлів мережі. Велике значення, у зв'язку з цим, має аналіз властивостей математичних моделей мереж з потоками, в яких присутні неординарні компоненти, тобто потоками, з яких вимоги можуть надходити одночасно на всі вузли мережі.

У даній статті ми розглянемо модель мережі Джексона, елементи (вузли) якої функціонують як системи масового обслуговування типу $M/M/\infty$. Будемо передбачати, що вхідний потік є двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку

Kasyanov A.A.
Lebedev E.A..
Chechelnitsky A.A.

The asymptotical properties of the multi-channel network with the bivariate Poisson input flow.

The asymptotical behavior of the multichannel network with the bivariate Poisson input flow of customers is considered. An ergodic distribution was obtained for the service process.

Key Words: queueing network, bivariate Poisson input flow, ergodic distribution.

$\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай $\mu_i > 0, i = 1, 2$ параметри показникових розподілів часу обслуговування відповідно в першій та другій системі. Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі $M/M/\infty$ в момент часу t , а через $X_2(t)$ - число вимог у другій системі в момент часу t . Після обслуговування в першому вузлі вимога з ймовірністю p_{12} надходить на обслуговування до другої системи, або з ймовірністю p_{13} залишає нашу мережу. Аналогічно, після обслуговування в другому вузлі вимога з ймовірністю p_{21} переходить на обслуговування до першого вузла, або з ймовірністю p_{23} залишає мережу.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Знайдемо стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай мережа $(M/M/\infty)^2$ є відкритою. Тоді процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ в мережі $(M/M/\infty)^2$ з двовимірним пуассонівським потоком вимог

$\nu(t)$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\varphi(z_1, z_2) = Mz_1^{x_1} z_2^{x_2} = \\ = \exp \{ -(a_1 + c_1)(1 - z_1) - (a_2 + c_2)(1 - z_2) - \\ - c_3(1 - z_1 z_2) - c_4(1 - z_1^2) - c_5(1 - z_2^2) \}.$$

Константи a_1 і a_2 мають вигляд: $a_1 = \theta_1 / \mu_1$, $a_2 = \theta_2 / \mu_2$, вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ є розв'язком рівняння $\theta = \lambda + \theta P$, де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ і P є

$$\text{матрицею переходів по вузлах } P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

В свою чергу константи c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 мають наступний визначаються як:

$$c_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1} - b \frac{\mu_1 + \mu_2 p_{21}}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\eta_2}{\mu_2} - b \frac{\mu_2 + \mu_1 p_{12}}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_3 = \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_4 = \frac{\mu_2 p_{21} b}{2 \mu_1 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_5 = \frac{\mu_1 p_{12} b}{2 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

де вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I - P) = b$, $b = (b, b)$.

Доведення. Процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ є двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом та зліченною множиною станів. Ергодичний розподіл для цього процесу співпадає з єдиним розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь для стаціонарних ймовірностей. Але знаходження цього розв'язку є задачею досить непростою з причини зліченного числа алгебраїчних рівнянь та двовимірності нашого процесу. В даній статті ми скористаємося іншим підходом, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t), X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на входному пуассонівському потоці, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо, що в

початковий момент часу вимог у вузлах мережі не було.

Нехай $\xi(t)$, $t \geq 0$ - ланцюг Маркова з інфінітезімальною матрицею $Q = \|q_{ij}\|_{i,j=1}^3$, елементи якої мають наступний вигляд:

$$q_{ij} = \begin{cases} -\mu_i, & i = j = 1, 2 \\ \mu_i p_{ij}, & i \neq j, i = 1, 2; j = 1, 2, 3. \\ 0, & i = 3, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Вочевидь, що для ланцюга Маркова $\xi(t)$ множина станів $\{1, 2\}$ є неістотною, а стан $\{3\}$ є поглинаючим.

Через $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\}$ будемо позначати ймовірності переходів ланцюга $\xi(t)$. Легко помітити, що ланцюг Маркова $\xi(t)$ описує процес обслуговування вимоги у вузлах відкритої мережі Джексона $(M/M/\infty)^2$, при цьому потрапляння ланцюга Маркова $\xi(t)$ в стан $\{3\}$ інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

Введемо до розгляду два сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами. Двовимірною випадковою величиною $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1, 0)$ з ймовірністю $p_{11}(t)$, значення $(0, 1)$ з ймовірністю $p_{12}(t)$ та значення $(0, 0)$ з ймовірністю $p_{13}(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(1, 0)$ з ймовірністю $p_{21}(t)$, значення $(0, 1)$ з ймовірністю $p_{22}(t)$ та значення $(0, 0)$ з ймовірністю $p_{23}(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення у вигляді сум індикаторних випадкових величин на пуассонівському потоці вимог, які надходять зовні до нашої моделі:

$$(X_1(t), X_2(t)) = \sum_{k=1}^{n(t)} \chi_k^1(t - t_k^1) + \\ + \sum_{k=1}^{n(t)} \chi_k^2(t - t_k^2) + \sum_{k=1}^{n(t)} \{ \chi_k^1(t - t_k^3) + \chi_k^2(t - t_k^3) \}, \text{ де} \\ y_1(t), y_2(t) \text{ та } y_3(t) - \text{пуассонівські процеси з} \\ \text{параметрами } \lambda_1, \lambda_2 \text{ і } b \text{ відповідно,} \\ t_k^i, k = 1, 2, \dots, i = 1, 3 \text{ є моментами приходу вимог} \\ \text{відповідно з потоку } y_i(t), i = 1, 3. \text{ Введемо до}$$

розгляду двовимірну генератрису величини $(X_1(t), X_2(t))$: $\varphi(z_1, z_2, t) = M z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}$.

Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M \left\{ M \left\{ z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)} / t_1, \dots, t_{\nu(t)} \right\} \right\} = \\ = M \prod_{k=1}^{y_1(t)} A_1(z_1, z_2, t - t_k^1) M \prod_{k=1}^{y_2(t)} A_2(z_1, z_2, t - t_k^2) \times \\ \times M \prod_{k=1}^{y_3(t)} A_3(z_1, z_2, t - t_k^3) A_2(z_1, z_2, t - t_k^3),$$

де $A_i(z_1, z_2, t) = p_{i3}(t) + z_1 p_{i1}(t) + z_2 p_{i2}(t)$, $i = 1, 2$.

Для знаходження генератрис з останнього виразу знову скористаємося умовними математичними сподіваннями, але стосовно величини $y_i(t)$, $i = 1, 3$. Тоді можемо записати:

$$\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi_1(z_1, z_2, t) \varphi_2(z_1, z_2, t) \varphi_3(z_1, z_2, t).$$

$$\varphi_1(z_1, z_2, t) = M \left\{ M \left\{ \prod_{k=1}^{y_1(t)} A_1(z_1, z_2, t - t_k^1) / y_1(t) \right\} \right\}$$

$$\varphi_2(z_1, z_2, t) = M \left\{ M \left\{ \prod_{k=1}^{y_2(t)} A_2(z_1, z_2, t - t_k^2) / y_2(t) \right\} \right\}$$

$$\varphi_3(z_1, z_2, t) = M \left\{ M \left\{ \prod_{k=1}^{y_3(t)} A_1(z_1, z_2, t - t_k^3) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times A_2(z_1, z_2, t - t_k^3) / y_3(t) \right\} \right\}$$

При фіксації числа стрибків пуассонівських процесів $y_i(t)$, $i = 1, 3$ на довільному інтервалі часу $[0, t]$, моменти стрибків ведуть себе як незалежні випадкові величини, які мають рівномірний на $[0, t]$ розподіл. Скористаємось цим для підрахунку умовного математичного сподівання в останніх виразах. Тоді ми отримаємо:

$$\varphi_1(z_1, z_2, t) = M \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t A_1(z_1, z_2, u) du \right\}^{y_1(t)},$$

$$\varphi_2(z_1, z_2, t) = M \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t A_2(z_1, z_2, u) du \right\}^{y_2(t)},$$

$$\varphi_3(z_1, z_2, t) = M \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t A_1(z_1, z_2, u) A_2(z_1, z_2, u) du \right\}^{y_3(t)}$$

В останніх виразах коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0, 1]$ розподілу.

Після відповідних перетворень з генератрисами $A_1(z_1, z_2, u)$ та $A_2(z_1, z_2, u)$ функція $\varphi(z_1, z_2, t)$ матиме наступний вигляд:

$$\varphi(z_1, z_2, t) = \exp \left\{ - (a_1(t) + c_1(t))(1 - z_1) - \right. \\ \left. - (a_2(t) + c_2(t))(1 - z_2) - \right. \\ \left. - c_3(t)(1 - z_1 z_2) - c_4(t)(1 - z_1^2) - c_5(t)(1 - z_2^2) \right\}, \text{ де}$$

$$a_1(t) = \left(\lambda_1 \int_0^t p_{11}(u) du + \lambda_2 \int_0^t p_{21}(u) du \right);$$

$$a_2(t) = \left(\lambda_1 \int_0^t p_{12}(u) du + \lambda_2 \int_0^t p_{22}(u) du \right);$$

$$c_1(t) = b \int_0^t (p_{13}(u) p_{21}(u) + p_{11}(u) p_{23}(u)) du;$$

$$c_2(t) = b \int_0^t (p_{13}(u) p_{22}(u) + p_{12}(u) p_{23}(u)) du;$$

$$c_3(t) = b \int_0^t (p_{11}(u) p_{22}(u) + p_{12}(u) p_{21}(u)) du;$$

$$c_4(t) = b \int_0^t p_{11}(u) p_{21}(u) du;$$

$$c_5(t) = b \int_0^t p_{12}(u) p_{22}(u) du.$$

Для знаходження границі при $t \rightarrow +\infty$ функції $\varphi(z_1, z_2, t)$ треба відповідні границі останніх інтегралів. Враховуючи структуру інфінітізімальної матриці Q , пряма система диференціальних рівнянь Колмогорова для матриці перехідних ймовірностей $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{i,j=1}^2$ буде мати вигляд:

$$\begin{cases} p'_{11}(t) = -\mu_1 p_{11}(t) + \mu_2 p_{21} p_{12}(t) \\ p'_{12}(t) = \mu_1 p_{12} p_{11}(t) - \mu_2 p_{12}(t) \\ p'_{21}(t) = \mu_2 p_{21} p_{22}(t) - \mu_1 p_{21}(t) \\ p'_{22}(t) = -\mu_2 p_{22}(t) + \mu_1 p_{12} p_{21}(t) \end{cases}$$

Взяв інтеграл від 0 до $+\infty$, отримаємо відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -1 = -\mu_1 \dot{P}_{11} + \mu_2 P_{21} \dot{P}_{12} \\ 0 = \mu_1 P_{12} \dot{P}_{11} - \mu_2 \dot{P}_{12} \\ 0 = \mu_2 P_{21} \dot{P}_{22} - \mu_1 \dot{P}_{21} \\ -1 = -\mu_2 \dot{P}_{22} + \mu_1 P_{12} \dot{P}_{21} \end{cases}$$

де $\dot{P}_{ij} = \int_0^{+\infty} p_{ij}(t) dt$. Позначимо через P^* матрицю

з елементами $\dot{P}_{ij}$: $P^* = \|\dot{P}_{ij}\|_{i,j=1}^2$. З останньої

системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо: $P^* = (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu)$, де $I = \|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^2$ -

одинична матриця, $\Delta(\mu) = \|\delta_{ij} \mu_i\|_{i,j=1}^2$ - діагональна

матриця, δ_{ij} - символ Кронекера. Тоді

$$a = (a_1, a_2) = \lambda P^* = \lambda (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Знаходження констант c_i , $i=1,5$ є більш складним, але для них також можна виписати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Враховуючи, що $p_{13}(t) = 1 - p_{11}(t) - p_{12}(t)$, важливо знайти константи c_3 , c_4 , c_5 . Позначимо через x_i , $i=1,4$ відповідні інтеграли:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^{+\infty} p_{11}(u) p_{22}(u) du, & x_2 &= \int_0^{+\infty} p_{12}(u) p_{21}(u) du \\ x_3 &= \int_0^{+\infty} p_{11}(u) p_{21}(u) du, & x_4 &= \int_0^{+\infty} p_{12}(u) p_{22}(u) du. \end{aligned}$$

Для знаходження даних інтегралів використаємо знову пряму систему диференціальних рівнянь Колмогорова. Продемонструємо це на прикладі першого інтегралу. Для цього запишемо наступну рівність:

$$(p_{11}(u) p_{22}(u))' = p_{11}'(u) p_{22}(u) + p_{11}(u) p_{22}'(u).$$

Взявши вирази для похідних функцій перехідних ймовірностей з системи рівнянь Колмогорова, та проінтегрувавши ліву та праву частини останньої рівності від 0 до $+\infty$, отримаємо перше рівняння для знаходження x_i , $i=1,4$.

$$-1 = -(\mu_1 + \mu_2) x_1 + \mu_1 p_{12} x_3 + \mu_2 p_{21} x_4.$$

Аналогічним чином можна отримати решту рівнянь для всіх x_i , $i=1,4$. Отже, шукана система лінійних алгебраїчних рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{cases} -(\mu_1 + \mu_2) x_1 + \mu_1 p_{12} x_3 + \mu_2 p_{21} x_4 = -1 \\ -(\mu_1 + \mu_2) x_2 + \mu_1 p_{12} x_3 + \mu_2 p_{21} x_4 = 0 \\ \mu_2 p_{21} x_1 + \mu_2 p_{21} x_2 - 2\mu_1 x_3 = 0 \\ \mu_1 p_{12} x_1 + \mu_1 p_{12} x_2 - 2\mu_2 x_4 = 0 \end{cases}$$

Як неважко помітити, константа $c_3 = x_1 + x_2$. Це дає можливість спростити нашу систему, записавши її відразу з участю константи c_3 :

$$\begin{cases} -(\mu_1 + \mu_2) c_3 + 2\mu_1 p_{12} x_3 + 2\mu_2 p_{21} x_4 = -1 \\ \mu_2 p_{21} c_3 - 2\mu_1 x_3 = 0 \\ \mu_1 p_{12} c_3 - 2\mu_2 x_4 = 0 \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо явні вирази для всіх наших змінних: $c_3 = ((\mu_1 + \mu_2)(1 - p_{12} p_{21}))^{-1}$,

$$x_3 = c_3 \mu_2 p_{21} (2\mu_1)^{-1}, \quad x_4 = c_3 \mu_1 p_{12} (2\mu_2)^{-1}.$$

Зрештою константи розподілу c_4, c_5 матимуть вигляд:

$$c_4 = \frac{\mu_2 p_{21} b}{2\mu_1 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_5 = \frac{\mu_1 p_{12} b}{2\mu_2 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})}$$

В свою чергу для констант c_1, c_2 розподілу можемо записати наступний вираз:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b, b) P^* - \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b, b) (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu) - \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$$

Нехай вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I - P) = b$, де $b = (b, b)$. Тоді значення констант c_1, c_2 будуть дорівнювати:

$$c_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1} - b \frac{\mu_1 + \mu_2 p_{21}}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\eta_2}{\mu_2} - b \frac{\mu_2 + \mu_1 p_{12}}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2) (1 - p_{12} p_{21})}$$

Теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Griffiths R.S., Milne R.K. A class of bivariate Poisson process, *Journal of Multivariate Analysis*, Issue 8, №3, 1978, p.380-396.
2. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания, Лыбидь, (1992).

Надійшла до редакції 03.02.2010

УДК 519.9

Анатолій В. Кузьмін, к. ф.-м. н., доц.

Про один алгоритм моделювання розповсюдження поверхневих хвиль у двошаровій ідеальній рідині

Розглядаються питання моделювання процесу виникнення і розповсюдження поверхневих хвиль на поверхні двошарової рідини. Запропонований чисельний метод знаходження наближеного розв'язку. Нестационарна гранична задача з вільною поверхнею та поверхнею розділу двох шарів рідини з використанням теорії потенціалів зводиться до системи інтегро-диференціальних рівнянь вздовж контуру вільної поверхні та поверхні, що розділяє шари рідини з різними щільностями. Знаходження наближеного розв'язку здійснюється шляхом розв'язання СЛАР на послідовності часових кроків.

Статтю представив д. ф.-м. н. проф. Хусаїнов Д.Я

*E-mail: kuzmina@ukr.net

Ключові слова: вільна поверхня, поверхневі хвилі, потенціал подвійного шару, сингулярне інтегральне рівняння.

Постановка математичної задачі

У двохвимірній постановці розглядається задача про утворення і розповсюдження хвиль на вільній поверхні ідеальної нестисливої рідини та поверхні розділу шарів з різною щільністю. Задачі такого класу виникають при транспортуванні нафтопродуктів у різноманітних ємкостях, коли на поверхні нафти з'являється додатковий шар більш легкої фракції, наприклад газового конденсату. Точний розв'язок такої задачі може існувати лише в лінійному наближенні [1], [2].

Фізична задача вивчається з використанням метода математичного моделювання, для якої формулюється математична модель та чисельний алгоритм знаходження наближеного розв'язку.

Розглянемо області на площині $\Omega_i(t)$, які заповнені ідеальною нестисливою рідиною з щільностями $\rho_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, $\rho_1 > \rho_2$, де $\Omega_1(t) = \{x, y, -\infty < x < \infty, 0 < y < h_1(x, t)\}$, а $\Omega_2(t) = \{x, y, -\infty < x < \infty, h_1(x, t) < y < h_2(x, t)\}$. $h_1(x, t)$ - функція, що описує лінію розмежування двох шарів рідини, $h_2(x, t)$ - функція, що описує лінію вільної поверхні, в подальшому будемо

Anatoliy V Kuzmin, cand. phys.-math., docent

Algorithm of modulating the spread of surface waves in double layer ideal fluid

The article focuses on the issue of modulating the process of formation and spread of surface waves on the surface of double layer fluid. It also shows a numerical method of finding an approximate solution. A non-stationary boundary problem with a free surface and the separation surface between two layers of fluid with the use of the theory of potentials comes to the system of integro-differential equations along a contour of a free surface and the surface that separates fluid layers with different densities. The approximate solution can be found with the help of Linear Algebra Equation System on the sequence of time steps.

Key words: free surface, surface waves, the potential of a double layer, singular integral equation.

позначати ці границі L_i , $i = 1, 2$ відповідно. Припускаючи потенціальний характер руху рідини, запишемо постановку задачі відносно потенціалу вектору швидкості $\Phi_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$ для областей Ω_i , $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad r \in \Omega_1(t), t > 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0, \quad r \in \Omega_2(t), t > 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{y=0} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi_2|^2 + q h_2 \Big|_{r \in L_2} = 0; \quad (4)$$

$$\rho_2 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi_2|^2 + q h_2 \right] \Big|_{r \in L_1} = \rho_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi_1|^2 + q h_1 \right] \Big|_{r \in L_1}; \quad (5)$$

$$\frac{dr}{dt} = \nabla \Phi_1 \Big|_{r \in L_1}; \quad \frac{dr}{dt} = \nabla \Phi_2 \Big|_{r \in L_2}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{y=h_1(x,t)} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{y=h_2(x,t)} ; \quad (7)$$

$$\Phi_i|_{t=0} = \Phi_i^0(\mathbf{r}), \mathbf{r}_i|_{t=0} = \mathbf{r}_i^0 ; \quad (8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_i = 0. \quad (9)$$

$\mathbf{r}(t)$ - радіус-вектор точки області в момент часу t , $\Phi_i(\mathbf{r}, t)$ - потенціал вектора швидкості рідини.

З фізичної точки зору співвідношення (1), (2) є рівняннями нерозривності, співвідношення (3) - умова непротікання на нижній границі (дні). Співвідношення (4) - умови Коші - Лагранжа для нестисливої рідини на вільній поверхні, умови (5), (7) - умови неперервності тиску та

нормальної складової вектора швидкості на поверхні розділу двох шарів рідини. (6) - представляє собою закон руху вільної поверхні і поверхні розмежування шарів та одночасно виражає умову непротікання рідини через цю поверхню. Співвідношення (8) є початковими умовами для значення потенціалу і положення границь L_i , (9) - умова затухання потенціалу на нескінченності.

Задача (1)-(9) є нестационарною нелінійною початково-граничною задачею з невідомими границями і не має аналітичного розв'язку. Для нестисливої однорідної рідини задача виникнення поверхневих хвиль розглядалася в роботах [6,7].

Зведення граничної задачі до системи інтегро-диференціальних рівнянь

В подальших формулах поверхні L_i будемо задавати в параметричному вигляді

$x' = x'(s, t)$, $y' = y'(s, t)$, $-\infty < s < \infty$, s - довжина дуги, яка відраховується від деякої фіксованої точки в додатному та від'ємному напрямках.

Введемо наступні позначення:

$M'_0 = (x'_0, y'_0)$; $M' = (x', y')$ - фіксована та довільна (біжуча) точки області $\Omega_i(t)$ або границь області L_i .

Оскільки границі області є рухомими, а інтерес представляє форма границі та вектор

$$\Theta(M_0, t) = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} g_i(M, t) dS_M, M_0 \in \Omega(t), \quad (10)$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{|M - M_0|} + \ln \frac{1}{|M - \bar{M}_0|} \right], \bar{M}_0 = (x_0, -y_0) \quad (11)$$

$g_i(M, t)$, $i=1,2$ - щільності потенціалу, які підлягають знаходженню. Вибір ядра потенціалу у формі (11) дозволяє задовольнити граничній умові (3). Враховуючи властивості потенціалу подвійного шару (10), функція $\Theta(M_0, t)$ задовольняє рівнянню Лапласа, співвідношенню (7) та (9) Тобто, для знаходження щільностей $g_i(M, t)$ та положення поверхонь L_i $i=1,2$ у довільний момент часу необхідно задовольнити співвідношенням (4)-(6).

Використовуючи властивості потенціалу подвійного шару [4], запишемо граничні

значення його градієнту $\nabla_{\pm} \Theta(M_0, t)$ та самого потенціалу $\Theta_{\pm}(M_0, t)$ по різні сторони поверхні L_1 та L_2 . Напрямок нормалі на поверхні L_2 обирається зовнішнім, а на поверхні L_1 зовнішнім по відношенню до області $\Omega_1(t)$. Тут і в подальшому знак $+$ означає граничне значення при підході з сторони напрямку нормалі (з зовні), а знак $-$ з сторони протилежної напрямку нормалі (з середини).

$$\nabla_z \Theta(M_0, t) = \pm \frac{1}{2} \mathbf{T}(M_0, t) g_{1,\tau}(M_0, t) + \overline{\nabla \Theta(M_0, t)}, \quad M_0 \in L_i, \quad (12)$$

$$\Theta_{\pm}(M_0, t) = \pm \frac{1}{2} g_i(M_0, t) + \overline{\Theta(M_0, t)} \quad M_0 \in L_i, \quad (13)$$

В (12) $g_{1,\tau}(M_0, t)$ - похідна від щільності g_i по дотичному напрямку (фактично по довжині дуги) в точках поверхні. $L_i, i = 1, 2$. $\overline{\nabla \Theta(M_0, t)}$ - пряме значення градієнта потенціалу, а $\overline{\Theta(M_0, t)}$ -

пряме значення потенціалу на поверхні $L_i, i = 1, 2$. Пряме значення градієнту потенціалу можна обчислити за формулою:

$$\overline{\nabla \Theta(M_0, t)} = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} g_i(M, t) d_M \left(i \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial y} - j \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial x} \right). \quad (14)$$

У співвідношенні (13) другий доданок є прямим значенням потенціалу подвійного шару і має цілком визначене неперервне значення [4] у кожній точці поверхонь L_i .

Використовуючи модифікований потенціал подвійного шару $\Theta(M, t)$ запишемо співвідношення (4):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\partial g_2(M_0^2, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{\partial G(M', M_0^2)}{\partial n_M} \frac{\partial g_i(M', t)}{\partial t} dS_{M'} + qy_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \mathbf{T}(M_0^2, t) g_{2,\tau}(M_0^2, t) + \overline{\nabla \Theta(M_0^2, t)} \right|^2 = 0 \quad M_0^2 \in L_2 \end{aligned} \quad (4')$$

Останнє представляє собою нелінійне інтегро-диференціальне рівняння з гіперсингулярним ядром.

Враховуючи (12), (13), запишемо співвідношення (5) на поверхні L_1 .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial g_1(M_0, t)}{\partial t} + (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial \overline{\Theta(M_0, t)}}{\partial t} + (\rho_2 - \rho_1) qy_0(t) + \\ & + \frac{1}{2} \left[(\rho_2 - \rho_1) (g_{1,\tau}(M_0, t))^2 + (\rho_2 - \rho_1) |\overline{\nabla \Theta(M_0, t)}|^2 + \frac{1}{4} (\rho_2 + \rho_1) g_{1,\tau}(M_0, t) \frac{\partial \overline{\Theta(M_0, t)}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad M_0 \in L_1 \quad (5')$$

Співвідношення (5') є нелінійне інтегро-диференціальне рівняння відносно щільностей g_i та частинних похідних цих щільностей по часу та дотичному напрямку вздовж контуру. Закон руху поверхонь L_i (6) записується у вигляді:

класі функцій, які задовольняють умові $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g_i(s) = 0$, що відповідає фізичному змісту задачі [3]. Неперервність нормальної похідної модифікованого потенціалу подвійного шару (10) впливає з його властивостей [3], тому умова (7) виконується автоматично. Таким чином, гранична задача (1) – (9) еквівалентна системі двох інтегро-диференціальних рівнянь (4'), (5') та двох звичайних диференціальних рівнянь (6).

$$\frac{d\mathbf{r}(M'_i, t)}{dt} = \overline{\nabla \Theta(M'_i, t)} \quad M'_i \in L_i, \quad (6)$$

Розв'язки відповідних інтегральних рівнянь відносно щільностей потенціалу розглядаються в

Побудова чисельного методу Введення сітки

Границі $L_i = \{x = x(s, t), y = y(s, t), -\infty < s < \infty\}$ в будь-який момент часу t представимо сукупністю точок $M'_k = (x'_k = x'(s'_k, t), y'_k = y'(s'_k, t))$ та

Апроксимація градієнта потенціалу

Зауважимо, що для запису інтегральних співвідношень (4') та (5') використовується пряме значення градієнту потенціалу та самого

$$\begin{aligned} & M'_{i+0.5} = (x'_{i+0.5} = x'(s'_{i+0.5}, t), y'_{i+0.5} = y'(s'_{i+0.5}, t)), \text{ де} \\ & s'_{2k+1} = s'_{2k} \pm \Delta s'_{2k+0.5}, \quad s'_{2l+0.5} = s'_l \pm 0.5 \Delta s'_{2l+0.5}, \\ & 0 \leq k \leq N_i - 1, \quad 0 \leq l \leq N_i - 1, \quad s'_0 = 0. \end{aligned}$$

потенціалу. Для апроксимації прямого значення градієнту потенціалу (14) застосуємо квадратурну формулу:

$$\overline{\nabla\Theta(P_{k+0.5}, t_j)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} g_i(M_{n+0.5}^i, t_j) \int_{L_{M_n^i, M_{n+1}^i}} d_M \left(i \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial y} - j \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial x} \right) \quad (15)$$

В співвідношенні (15) $L_{M_n^i, M_{n+1}^i}$ - відрізки прямих, що з'єднують відповідні точки.

Інтеграли в (17) можна обчислити точно [3,5] і записати їх у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{Точка } P_{k+0.5} = M_{k+0.5}^i, \text{ якщо } M_{k+0.5}^i \in L_i. \\ \bar{\omega}_n^i(P_{k+0.5}) = \int_{L_{M_n^i, M_{n+1}^i}} d_M \left(i \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial y} - j \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial x} \right) = \\ = \left(i \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial y} - j \frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial x} \right) \Big|_{M_n^i}^{M_{n+1}^i}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи вигляд ядра потенціалу $G(M, M_0)$, запишемо частинні похідні функції $G(M, M_0)$:

$$\frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(x - \xi_{k+0.5})}{(x - \xi_{k+0.5})^2 + (y - \eta_{k+0.5})^2} + \frac{(x - \xi_{k+0.5})}{(x - \xi_{k+0.5})^2 + (y + \eta_{k+0.5})^2} \right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial G(M, P_{k+0.5})}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y - \eta_{k+0.5})}{(x - \xi_{k+0.5})^2 + (y - \eta_{k+0.5})^2} + \frac{(y + \eta_{k+0.5})}{(x - \xi_{k+0.5})^2 + (y + \eta_{k+0.5})^2} \right] \quad (17')$$

Введемо позначення: $\bar{\omega}_{n,k}^{i,j} = \bar{\omega}_n^i(M_{k+0.5}^j)$, $i, j = 1, 2$ $g_1(M_{n+0.5}^1, t_j) = g_{1,n+0.5}$, $g_2(M_{n+0.5}^2, t_j) = g_{2,n+0.5}$

Таким чином, використовуючи прийняті позначення, пряме значення градієнту модифікованого потенціалу подвійного шару можна записати у вигляді:

$$\overline{\nabla\Theta(M_k^i, t_j)} = \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} \bar{\omega}_{k,n}^{1,i} g_{1,n+0.5} + \sum_{n=-N_2}^{N_2-1} \bar{\omega}_{k,n}^{2,i} g_{2,n+0.5}, \quad k = \overline{-N_i, N_i-1}. \quad (18)$$

Обчислення положення точок границь

Нехай $t_{j+1} = t_j + \Delta t_j$, позначимо

в момент часу t_{j+1} . Тоді співвідношення (6) апроксимуємо співвідношеннями:

$\hat{M}_n^i = (\hat{x}_n^i, \hat{y}_n^i)$ - положення точок $M_n^i = (x_n^i, y_n^i)$

$$\frac{\Gamma(\hat{M}_k^i) - \Gamma(M_k^i)}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla\Theta(M_{k+0.5}^i, t_j)} + \overline{\nabla\Theta(M_{k-0.5}^i, t_j)}}{2}, \quad k = \overline{-N_i+1, N_i-1} \quad (19)$$

$$\frac{\Gamma(\hat{M}_{-N_i}^i) - \Gamma(M_{-N_i}^i)}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla\Theta(M_{-N_i+0.5}^i, t_j)}}{2}, \quad \frac{\Gamma(\hat{M}_{N_i}^i) - \Gamma(M_{N_i}^i)}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla\Theta(M_{N_i-0.5}^i, t_j)}}{2} \quad (19')$$

Точки $M_0^i = (x_0^i, y_0^i)$, $i = 1, 2$ прийемо за точки відліку довжини дуги $s = 0$.

Тоді значення параметру довжини дуги, що відповідають новому положенню границі L_i можна обчислити за формулою:

$$\hat{s}_{\pm k \pm 1}^i = \hat{s}_{\pm k}^i \pm \sqrt{(\hat{x}_{\pm k \pm 1}^i - \hat{x}_{\pm k}^i)^2 + (\hat{y}_{\pm k \pm 1}^i - \hat{y}_{\pm k}^i)^2}, \quad k = \overline{0, N_i-1}, \quad \hat{s}_0^i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Якщо $\Delta \hat{s}_k^i = \hat{s}_{k+1}^i - \hat{s}_k^i > \omega^i$, $k = \overline{-N_i, N_i-1}$, то з використанням, наприклад, сплайн апроксимації здійснюється вибір нової сітки на границі L_i .

Врахуємо, що на кожній лінійній частині контуру L_i , $i = 1, 2$, яка з'єднує сусідні точки сітки, одиничний вектор нормалі може бути

ω^i - максимально можливий крок сітки.

записаний у вигляді: $\vec{n}_k = (y_{s,k}, -x_{s,k})$, де

$$y_{s,k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta s_k}, \quad x_{s,k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta s_k}.$$

Апроксимація нелінійного співвідношення на вільній границі (4')

Врахуємо, що одиничний вектор дотичної на вільній границі має вигляд:

$$g_{i,n+0.5} = \begin{cases} \frac{2g_{i,-N_1+0.5}}{\Delta s_{-N_1+1}}, & n = -N_1 + 0.5 \\ \left(\frac{g_{i,n+1.5} - g_{i,n+0.5}}{(\Delta s'_{n+2} + \Delta s'_{n+1})} + \frac{g_{i,n+0.5} - g_{i,n-0.5}}{(\Delta s_{n+1} + \Delta s_n)} \right), & -N_1 + 0.5 < n < N_1 - 0.5 \\ \frac{2g_{i,N_1-0.5}}{\Delta s_{N_1}}, & n = N_1 - 0.5, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

Для наближеного обчислення прямого значення модифікованого потенціалу подвійного

шару на вільній границі L_2 в точках сітки $M_{k+0.5}^2$ застосуємо квадратурну формулу:

$$\Theta(M_{k+0.5}^r, i) = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} g_{i,n+0.5} \int_{L_{M_n^r, M_{k+0.5}^r}} \frac{\partial}{\partial n_M} G(M, M_{k+0.5}^r) dl_M = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} A_{k,n}^{i,r} g_{i,n+0.5}, \quad r = 1, 2 \quad (22)$$

Інтеграли у (22) представляють собою використанням квадратурних формул інтеграли від дробово-раціональних функцій і Враховуючи (17), (17') запишемо можуть бути обчислені з заданою точністю з

$$\frac{\partial G(M, M_{k+0.5})}{\partial n} = \frac{\partial G(M, M_{k+0.5})}{\partial x} y'_s(s_{k+0.5}) - \frac{\partial G(M, M_{k+0.5})}{\partial y} x'_s(s_{k+0.5}),$$

оскільки інтегрування відбувається по відрітку прямої, то $y'_s(s_{k+0.5}) = y_{s,k}$, $x'_s(s_{k+0.5}) = x_{s,k}$, а $x(s) = x_n + x_{s,n}(s - s_n)$, $y(s) = y_n + y_{s,n}(s - s_n)$. Таким чином легко отримати:

$$A_{k,n}^{i,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{s'_n}^{s'_{n+1}} \left[\frac{(x_{k+0.5}^2 - x_n^2) y'_{s,n} - (y_{k+0.5}^2 - y_n^2) x'_{s,n}}{\left((x'_n - x_{k+0.5}^2) + x'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2 + \left((y'_n - y_{k+0.5}^2) + y'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2} ds \right] + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{s'_n}^{s'_{n+1}} \left[\frac{(x_{k+0.5}^2 - x_n^2) y'_{s,n} + (y_{k+0.5}^2 - y_n^2) x'_{s,n}}{\left((x'_n - x_{k+0.5}^2) + x'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2 + \left((y'_n - y_{k+0.5}^2) + y'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2} ds \right]. \quad (23)$$

При $k = n$, $i = 2$ інтеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{s'_n}^{s'_{n+1}} \left[\frac{(x_{k+0.5}^2 - x_n^2) y'_{s,n} - (y_{k+0.5}^2 - y_n^2) x'_{s,n}}{\left((x'_n - x_{k+0.5}^2) + x'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2 + \left((y'_n - y_{k+0.5}^2) + y'_{s,n}(s - s'_n) \right)^2} ds \right]$ має

особливість у знаменнику $(s - s_{n+0.5})^2$, але при цьому чисельник підінтегральної функції

$$(x_{n+0.5}^2 - x_n^2) y_{s,n}^2 - (y_{n+0.5}^2 - y_n^2) x_{s,n}^2 = 0.$$

Враховуючи способи обчислення прямого значення градієнту потенціалу подвійного шару, значення потенціалу подвійного шару та прямого запишемо різницеве співвідношення для (4'):

$$-\frac{1}{2} \frac{\hat{g}_{2,k+0.5} - g_{2,k+0.5}}{\Delta t_j} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} A_{k,n}^{i,2} \frac{\hat{g}_{i,n+0.5} - g_{i,n+0.5}}{\Delta t_j} + qy_{k+0.5}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \tau_k g_{2,\tau,k+0.5} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} \omega_{k,n}^{i,2} g_{i,n+0.5} \right|^2 = 0, \quad k = -N_2, N_2 - 1 \quad (24)$$

Апроксимація нелінійного співвідношення на наступну апроксимацію нелінійного співвідношення на поверхні, що розділяє шари рідини.

Враховуючи (5), вирази для прямих значень потенціалу та його градієнту, отримаємо

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\hat{g}_{1,k+0.5} - g_{1,k+0.5}}{\Delta t_j} + 2(\rho_2 - \rho_1) \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} A_{k,n}^{i,1} \frac{\hat{g}_{i,n+0.5} - g_{i,n+0.5}}{\Delta t_j} + qy_{k+0.5}^1 \right] + (\rho_2 - \rho_1) (g_{1,\tau,k+0.5})^2 +$$

$$+ (\rho_2 - \rho_1) \left| \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} \omega_{k,n}^{i,1} g_{i,n+0.5} \right| + \frac{1}{4} (\rho_2 + \rho_1) g_{1,\tau,k+0.5} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} \left(\omega_{k,n}^{i,1} \tau_k \right) g_{i,n+0.5} = 0, \quad k = -N_1, N_1 - 1 \quad (25)$$

Алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі

- На момент часу t_j , відомими є положення точок контурів $L_i : (x_n^i, y_n^i, s_n^i)$, $n = \overline{-N_i, N_i}$, та значення щільностей потенціалу $g_{i,k+0.5}$, $k = \overline{-N_i, N_i - 1}$.
- Значення $\hat{g}_{i,k+0.5}$, $k = \overline{-N_i, N_i - 1}$, $i = 1, 2$, обчислюються з СЛАР (24), (25).
- Нове положення точок контуру $\hat{L}_i : (\hat{x}_n^i, \hat{y}_n^i, \hat{s}_n^i)$, $n = \overline{-N_i, N_i}$, знаходимо з використання формул (19).
- Обчислення прямих значень потенціалу подвійного шару та значення його градієнту здійснюється за формулами (22) та (18) відповідно.
- Перелічені кроки дозволяють знайти усі невідомі величини на момент часу t_{j+1} .

Список використаних джерел

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – Москва, Наука, 1977. – 816 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – Москва, Наука, 1973. – 416 с.
3. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. – Киев, Наукова думка, 2002. – 344 с.
4. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – Москва, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 415 с.

Висновки

Результати чисельних експериментів, проведених з використанням запропонованого чисельного алгоритму засвідчують його ефективність, з точки зору кількості обчислень та адекватного відображення процесу виникнення і розповсюдження поверхневих хвиль.

Крок інтегрування по просторовій та часовій змінним обирався виходячи з умов точності інтегрування. Неявний характер алгоритму (знаходження щільностей з СЛАР) відсутніх обмежень стійкості на крок по часовій змінній не накладає.

Обчислення інтегралів (26), (27) та розв'язування СЛАР здійснювалось з заданою точністю з використанням системи комп'ютерної математики MAPLE 10

5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва, ТОО Янус, 1995. – 520 с.
6. Кузьмін А.В. Моделювання хвильового руху на поверхні ідеальної рідини у випадку імпульсної зміни поверхні дна. Київ. Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 18-20 травня 2006, с. 166.
7. Кузьмін А.В. Чисельне моделювання розповсюдження поверхневих хвиль на поверхні ідеальної рідини// Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2007. – №3. – С. 150 – 156.

Надійшла до редколегії 25.10.09

УДК 004.056.53

Кулага* А.А., аспірант

Схеми цифрового підпису і шифрування на основі мультилінійних відображень

В роботі представлено дві n -бічні схеми цифрового підпису та шифрування, які є узагальненням схем на основі ідентифікаційних даних Мелон-Лі та Ліберта і Квісквотера, що побудовані з використанням білінійних спарювань.

Ключові слова: білінійні відображення, мультилінійні форми, еліптичні криві, підпис, шифрування.

*E-mail: anat.kiev@mail.ru.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В 90-х роках ХХ сторіччя отримали розповсюдження асиметричні криптосистеми, які будуються на арифметиці групи точок еліптичних кривих над скінченними полями. Алгоритми цих криптосистем є еліптичними аналогами теоретико-числових алгоритмів Ель-Гамала, при цьому замість мультиплікативної групи скінченного поля Галуа $GF(p)$ використовується підгрупа точок еліптичної кривої простого порядку [7]. Криптографічна стійкість цих алгоритмів визначається алгоритмічною складністю вирішення задачі дискретного логарифмування в циклічній підгрупі точок еліптичної кривої над скінченним полем Галуа $GF(2^n)$. Вона залежить від порядку n базової точки та на теперішній час оцінюється величиною $c = O(\sqrt{n})$ [1]. Таку складність мають метод Шенкса, ρ – метод та λ – метод Полларда.

У 2000 році Антуан Жу [9] запропонував першу білінійну криптосистему, тобто криптосистему, яка оснований на білінійному спарюванні в групі точок еліптичної кривої. Раніше білінійні спарювання, а саме спарювання за Вейлем та спарювання за Тейтом, використовувались в криптографії для MOV та FR атак. Так у 1993 році А.Менезес, Т.Окамото та С.Венстон [12] з використанням спарювання

Kulaga A.A., post-graduate student

Signcryption Schemes Based on Multilinear Maps

This paper provides two n -way signcryption schemes, which are generalization of Malone-Lee and Libert and Quisquater's identity-based signcryption schemes from bilinear pairing.

Key words: bilinear maps, multilinear forms, elliptic curve, signature, encryption.

Вейля звели задачу дискретного логарифмування в групі точок еліптичних кривих над скінченним полем $GF(2^n)$ до задачі дискретного логарифмування в мультиплікативній групі, де існують субекспоненціальні алгоритми. Ця атака на криптосистему носить назву MOV-атаки. Для запобігання таких атак, еліптичні криві повинні задовольняти деяким умовам, які викладено в існуючих стандартах з побудови таких криптосистем. Отже, Жу показав, що спарювання за Вейлем може бути використане позитивно. Він побудував протокол для створення трьохбічного однораундного узгодження таємного ключа Диффі-Хелмана (Diffie-Hellman). Після цього Боне і Франклін представили свою схему шифрування на основі ідентифікаційних даних [4]. Боне, Лінн і Шахам у 2001 році запропонували схему короткого підпису BLS [5], яка використовує спарювання, та яка має довжину підпису найкоротшу серед схем підпису класичної криптографії.

Необхідно зауважити, що протоколи, які використовують білінійні спарювання, можна грубо поділити на два типи:

– протоколи, які не можуть бути побудовані, використовуючи інші способи (наприклад, криптосистеми на основі ідентифікаційних даних – identity based cryptosystems, спільний підпис –

aggregate signature та ін.);

– протоколи, які можна побудувати, не використовуючи спарювання, але для яких спарювання надають кращу функціональність (наприклад, трьох-бічне узгодження ключа [9], порогові схеми та ін.).

Отже, білінійні спарювання дозволяють спростувати деякі криптосистеми, а також дозволяють розв'язувати деякі специфічні задачі в криптографії, такі як, наприклад, створення криптосистеми з відкритими ключами на основі ідентифікаційних даних за Шаміром [14], який у 1984 році висунув цю ідею з метою спрощення сертифікаційної системи, але побудова такої схеми шифрування залишалася відкритою проблемою до 2001 року, коли Боне і Франклін [4] представили свою схему. Для розв'язання цієї задачі вони використали властивості білінійних спарювань на еліптичних кривих.

У криптосистемах на основі ідентифікаційних даних користувачам немає необхідності обмінюватися своїми сертифікатами відкритих ключів. Відкритий ключ легко обчислюється з ідентифікаційних даних користувача, а ці дані є загальновідомими. Таємний ключ та системні параметри генеруються довіреним органом, який називається Центром генерації ключів (*Private Key Generator* - PKG). Але така схема має й деякі недоліки: PKG знає таємні ключі, що є небажано для користувачів; для отримання таємного ключа користувачу необхідно аутентифікувати себе PKG; необхідно мати захищений канал для передачі таємного ключа користувачу. Ці недоліки значною мірою можуть бути ослаблені введенням протоколів розділення секрету та побудовою ієрархічної системи центрів генерації ключів. Отже, можна зробити висновок, що замість підтримки інфраструктури відкритих ключів (*public key infrastructure* - PKI), необхідно підтримувати PKG, що є значно простіше, адже ж використання сертифікатів породжує такі труднощі, як проблема анулювання сертифікатів до скінчення терміну їх дії, передача великого обсягу інформації, юридичні труднощі, великі грошові витрати.

На сьогодні важливою задачею в галузі асиметричної криптографії є створення криптосистем, які займають проміжну позицію між традиційними асиметричними криптосистемами та криптосистемами на основі ідентифікаційних даних, які поєднують їх

переваги. Цікавим є підхід до розв'язання цієї проблеми запропоновано в моделі системи "шифрування на основі сертифікатів" [20], де сертифікат крім функції підтвердження правоможності користувача системи одночасно використовується в якості ключа дешифрування. При цьому атака з підміною відкритих ключів втрачає значення. Для генерації сертифікатів центр сертифікації в цієї моделі використовує криптосистеми на основі ідентифікаційних даних. Користувачам системи не має потреби перевіряти, чи являється відкритий ключ адресата діючим чи він анульований, тому усувається найбільш трудомістка функція інфраструктури відкритих ключів.

Основою моделі безсертифікаційної криптографії з відкритим ключем [21], також є криптосистеми на основі ідентифікаційних даних. В них користувач традиційними методами генерирує пару відкритий-закритий ключ, а Центр генерації ключів генерирує додатковий секретний ключ на основі ідентифікаційних даних. В цієї моделі підміна відкритих ключів не дає можливості атакуючому діяти від імені іншого.

Білінійні спарювання. Загальні питання. Основні визначення.

Нехай G_1 – адитивна група простого порядку q , а G_2 – мультиплікативна група цього ж простого порядку. Біліїним спарюванням, або парним відображенням, називається легко обчислювальне невідоме біліїне відображення $e: G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, тобто відображення з наступними властивостями:

1. Біліїність:

Для $\forall P, Q, R \in G_1$, $e(P+Q, R) = e(P, R)e(Q, R)$ та $e(P, Q+R) = e(P, Q)e(P, R)$. З чого випливає, що: для $\forall P, Q \in G_1$, та $\forall a, b \in \mathbb{Z}_q^*$, $e(aP, bQ) = e(P, Q)^{ab}$.

2. Невиродженість:

$\exists P \in G_1$, $e(P, P) \neq 1$. Тобто, якщо P є твірним елементом G_1 , то $e(P, P)$ буде твірним елементом G_2 , так як G_1 та G_2 – групи простого порядку.

3. Обчислювальність:

Існує ефективний поліноміальний алгоритм обчислення $e(P, Q)$, для будь-яких $P, Q \in G_1$.

Прикладами відображень, які задовольняють цим вимогам, є модифіковане спарювання Вейля [4] та спарювання Тейта, які обчислюються за допомогою алгоритму Мілера [15,16]. На сьогодні ведуться активні дослідження з метою отримання більш ефективних алгоритмів обчислення спарювань.

Стійкість криптосистем на спарюваннях базується на складності розв'язку білінійної задачі Диффі-Хелмана (*Bilinear Diffie-Hellman problem* – BDHP): по заданим $P, aP, bP, cP \in G_1$, де $a, b, c \in \mathbb{Z}_q^*$, обчислити $e(P, Q)^{abc}$. Зі складності розв'язку BDHP випливає складність розв'язування звичайної задачі Диффі-Хелмана (*Diffie-Hellman problem* – DHP) та задачі дискретного логарифмування (*Discrete Logarithm Problem* – DLP) у групах G_1 та G_2 . Це можна показати наступним чином [2]:

1. Якщо DLP легко розв'язується в групі G_1 , то із заданих P, aP, bP, cP легко знайти a, b, c , після чого обчислити abc , $e(P, P)$ та $e(P, P)^{abc}$. Якщо DLP легко розв'язується в групі G_2 , то з обчислених $e(P, P)$ та $e(P, P)^a$ можна легко знайти a , так як $e(P, P)^a = e(aP, P)$ та за аналогією b та c , а потім обчислити $e(P, P)^{abc}$.

2. Якщо DHP легко розв'язується в групі G_1 , то із заданих P, aP, bP, cP легко знайти abP , а потім обчислити $e(abP, cP) = e(P, P)^{abc}$. Якщо DHP легко розв'язується в групі G_2 , то з обчислених $e(cP, P)$, $e(cP, aP) = e(cP, P)^a$, $e(cP, bP) = e(cP, P)^b$ можна легко знайти $e(cP, P)^{ab} = e(P, P)^{abc}$.

Розпізнавальний варіант задачі Диффі-Хелмана (*Decision Diffie-Hellman problem* DDHP) для групи G_1 формулюється наступним чином: по заданим P, aP, bP, cP визначити, чи вірно, що $abP = cP$. Як показано в [10] вона легко розв'язується, тому що для P, aP, bP, cP має місце тотожність $abP = cP \Leftrightarrow ab = c \pmod q \Leftrightarrow e(cP, P) = e(aP, bP)$, так як обидві групи G_1 та G_2 – циклічні рівного порядку q . У зв'язку із цим, на основі цієї задачі не можна будувати криптосистеми.

В роботі [3] Боне і Сільверберг запропонували узагальнення білінійного спарювання та ввели поняття мультилінійної форми – відображення виду $\mu: G_1 \times G_1 \times \dots \times G_1 \rightarrow G_2$, з властивістю мультилінійності, тобто $\mu(a_1 P_1, a_2 P_2, \dots, a_n P_n) = \mu(P_1, P_2, \dots, P_n)^{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Використання цих відображень дозволить спростити більшість сучасних n -бічних криптопротоколів, які можуть бути побудовані шляхом узагальнення існуючих білінійних криптосистем. Але проблема побудови таких мультилінійних відображень досі залишається відкритою. У цієї роботи представлено два n -бічних криптопротоколи *Signcryption*, які є узагальненням протоколів Мелон-Лі та Ліберта і Квісквотера.

Схеми *Signcryption*

Схеми *Signcryption* [6] це такі схеми, які забезпечують конфіденційну та аутентифіковану доставку повідомлень між сторонами інформаційного обміну але більш ефективним способом, ніж пряма композиція схеми шифрування зі схемою підпису. Вона поєднує функціональні можливості підпису та шифрування. Ідея цих схем полягає у виконанні шифрування та підпису в одному логічному кроці з метою забезпечення конфіденційності, цілісності, аутентичності, неможливості зречення від авторства, але більш ефективним способом, у порівнянні з підходом, коли повідомлення спочатку підписується, а потім шифрується. Поняття такої схеми було запропоновано Зенгом [18] у 1997 році. Недоліком такого підходу є збільшення розміру вихідного шифртексту та збільшення обчислювального часу відправника та одержувача. Деякі більш ефективні схеми було запропоновано з 1997 року [17, 19], але до 2000 року ні одної, яка б була на основі ідентифікаційних даних.

Мелон-Лі запропонував перший метод *Signcryption* на основі ідентифікаційних даних [13], яка є комбінацією спорошеної версії криптосистеми Боне і Франкліна, з варіантом підпису Хесе, але більш ефективною є схема Ліберта та Квісквотера [11], для якої існує модифікація з коротшим вихідним шифртекстом.

Подібно класичним системам з відкритими ключами, які базуються на ідентифікаційних даних, системи *Signcryption* складаються із чотирьох алгоритмів:

- *Setup*: задається секретний параметр, PKG генерує відкриті параметри системи;

- *Keygen*: по заданому ідентифікатору ID , PKG обчислює відповідний йому закритий ключ

d_{ID} та передає його по захищеному каналу користувачу;

- *Signcrypt*: для відправки повідомлення користувачу В, користувач А обчислює шифртекст $\sigma = \text{Signcrypt}(m, d_{ID_A}, ID_B)$;

- *Unsigncrypt*: коли користувач В отримає σ , він обчислює $\text{Unsigncrypt}(\sigma, d_{ID_B}, ID_A)$ та отримує m або символ $\perp$, якщо шифртекст σ не є вірним.

Отже, функції *Signcrypt* та *Unsigncrypt* такі, що виконується рівність $m = \text{Unsigncrypt}(\text{Signcrypt}(m, d_{ID_A}, ID_B), d_{ID_B}, ID_A)$.

Мультилінійна схема шифрування та підпису (*Signcrypt*) на базі ідентифікаційних даних Мелон-Лі

Припустимо, що існує n абонентів з ідентифікаторами $ID_1, ID_2, \dots, ID_n$, яким потрібно відправити зашифроване та підписане повідомлення m . Схема складається з алгоритмів ініціалізації (*Setup*), обчислення таємного ключа (*Extract*), шифрування та підписування (*Signcrypt*), розшифрування та перевірки підпису (*Unsigncrypt*).

- *Setup*: PKG вибирає простий порядок q груп G_1 та G_2 . Вибирає $2n$ мультилінійну форму $\mu: \underbrace{G_1 \times G_1 \times \dots \times G_1}_{2n} \rightarrow G_2$ та довільний твірний елемент групи $P \in G_1$. Генерує випадкові майстер-ключі абонентів $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{Z}_q^*$, та обчислює їх відкриті ключі $P_{pub_1} = s_1 P, P_{pub_2} = s_2 P, \dots, P_{pub_n} = s_n P$. PKG також вибирає наступні геш-функції: $H_1: \{0,1\}^* \rightarrow G_1$, $H_2: \{0,1\}^* \rightarrow F_q^*$ та $H_3: G_2 \rightarrow \{0,1\}^*$.

- *Extract*: Для значень $ID_1, ID_2, \dots, ID_n \in \{0,1\}^*$ PKG обчислює відкриті ключі абонентів $Q_{ID_1} = H_1(ID_1) \in G_1, \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n) \in G_1$ та їх таємні ключі $d_{ID_1} = s_1 Q_{ID_1}, \dots, d_{ID_n} = s_n Q_{ID_n}$.

- *Signcrypt*: Для повідомлення $m \in \{0,1\}^*$ i -й абонент обчислює $Q_{ID_i} = H_1(ID_i), \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n)$, вибирає

випадкове $x \in \mathbb{Z}_q^*$ та обчислює $U = xP$. Обчислює $r = H_2(U \circ m)$, $W = xP_{pub_i}$, $V = rd_{ID_i} + W$,

$$y = \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}, P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{i-1}}, W, P_{pub_{i+1}}, \dots, P_{pub_n}),$$

$$k = H_3(y), \quad c = k \oplus m, \quad \text{та відправляє трійку } \sigma = (c, U, V).$$

- *Unsigncrypt*: j -й абонент обчислює $Q_{ID_1} = H_1(ID_1), \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n)$, $y = \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, d_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n}, P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, U, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n})$, $k = H_3(y)$, $m = k \oplus c$, $r = H_2(U \circ m)$. Приймає повідомлення m тоді й тільки тоді, коли задовольняється рівність

$$e(V, P) = e(Q_{ID_i}, P_{pub_i})^r e(U, P_{pub_i}).$$

Коректність схеми підтверджується наступними виразами:

$$\begin{aligned} y &= \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, d_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n}, \\ &P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, U, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n}) = \\ &= \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, Q_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n}, \\ &P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, U, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n})^{s_j} = \\ &= \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}, \\ &P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, s_j xP, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n}) = \\ &= \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}, \\ &P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, P_{pub_j}, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n})^{s_j} = \\ &= \mu(Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}, \\ &P_{pub_1}, \dots, P_{pub_{j-1}}, \underbrace{xP_{pub_j}}_W, P_{pub_{j+1}}, \dots, P_{pub_n}); \end{aligned}$$

$$e(V, P) = e(rd_{ID_i} + W, P) =$$

$$\begin{aligned} &e(d_{ID_i}, P)^r e(xP_{pub_i}, P) = e(Q_{ID_i}, P)^{rs_j} e(xP, P)^{s_j} = \\ &= (Q_{ID_i}, s_j P)^r e(xP, s_j P) = \\ &e(Q_{ID_i}, P_{pub_i})^r e(U, P_{pub_i}). \end{aligned}$$

Мультилінійна схема шифрування та підпису на базі ідентифікаційних даних Ліберта й Квісквотера

Аналогічно попередньому протоколу, припустимо, що існує n абонентів з ідентифікаторами $ID_1, ID_2, \dots, ID_n$, яким потрібно відправити зашифроване та підписане повідомлення m . Схема також складається з алгоритмів ініціалізації (*Setup*), обчислення таємного ключа (*Extract*), шифрування та підписування (*Signcrypt*), розшифрування та перевірки підпису (*Unsigncrypt*). В цієї схемі використовуються деякі функції симетричного шифрування та розшифрування, які позначаються E та D відповідно. В попередньому протоколі в якості симетричного шифрування використовувалась функція побітового додавання за модулем два, але це обмеження не є суттєвим.

- *Setup*. PKG вибирає простий порядок q груп G_1 та G_2 . Вибирає $n+1$ мультилінійну форму $\mu: \underbrace{G_1 \times G_1 \times \dots \times G_1}_{n+1} \rightarrow G_2$ та довільний твірний

елемент групи $P \in G_1$. Генерує випадковий майстер-ключ абонентів $s \in \mathbb{Z}_q^*$, та обчислює відкритий ключ $P_{pub} = sP$. PKG також вибирає наступні геш-функції:
 $H_1: \{0,1\}^* \rightarrow G_1$, $H_2: G_2 \rightarrow \{0,1\}^l$ та
 $H_3: \{0,1\}^* \times G_2 \rightarrow F_q$.

- *Extract*. Для значень $ID_1, ID_2, \dots, ID_n \in \{0,1\}^*$ PKG обчислює відкриті ключі абонентів $Q_{ID_1} = H_1(ID_1) \in G_1, \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n) \in G_1$ та їх таємні ключі $d_{ID_1} = sQ_{ID_1}, \dots, d_{ID_n} = sQ_{ID_n}$.

- *Signcrypt*. Для повідомлення $m \in \{0,1\}^*$ i -й абонент обчислює $Q_{ID_1} = H_1(ID_1), \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n)$, вибирає випадкове $x \in \mathbb{Z}_q^*$ та обчислює $k_1 = e(P, P_{pub})^x$,
 $k_2 = H_2(\mu(P_{pub}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n})^x)$, $c = E_{k_2}(m)$,
 $r = H_3(c, k_1)$, $S = xP_{pub} - rd_{ID_1} \in G_1$ та відправляє трійку $\sigma = (c, r, S)$.

- *Unsigncrypt*. j -й абонент обчислює $Q_{ID_1} = H_1(ID_1), \dots, Q_{ID_n} = H_1(ID_n)$,
 $k_1 = e(P, S)e(P_{pub}, Q_{ID_j})^r$,
 $k_2 = H_2(\mu(S, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) \times$
 $\times \mu(Q_{ID_1}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, d_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n})^r)$,

$m = D_{k_2}(c)$. Повідомлення m приймає тоді й тільки тоді, коли задовольняється рівність $r = H_3(c, k_1)$.

Коректність схеми підтверджується наступними виразами:

$$\begin{aligned} & \mu(S, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) \times \\ & \times \mu(Q_{ID_1}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, d_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n})^r = \\ & = \mu(S, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) \times \\ & \times \mu(Q_{ID_1}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_{j-1}}, Q_{ID_j}, Q_{ID_{j+1}}, \dots, Q_{ID_n})^r = \\ & = \mu(S, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) \mu(srQ_{ID_j}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) = \\ & = \mu(S + srQ_{ID_j}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) = \\ & = \mu(S + rd_{ID_j}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) = \\ & \mu(xP_{pub}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n}) = \mu(P_{pub}, Q_{ID_1}, \dots, Q_{ID_n})^x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= e(P, S)e(P_{pub}, Q_{ID_j})^r = e(P, S)e(P, rsQ_{ID_j}) = \\ &= e(P, S + rsQ_{ID_j}) = e(P, S + rd_{ID_j}) = \\ &= e(P, xP_{pub}) = e(P, P_{pub})^x. \end{aligned}$$

Дані схеми являються стійкими до атак на основі обраних повідомлень у моделях з випадковим оракулом IND-ISC-CCA (indistinguishability of identity-based signcryptions under chosen ciphertext attack) та EF-ISC-ACMA (existentially unforgeability of identity-based signcryptions under adaptive chosen message attack) [11] при припущенні складності розв'язання мультилінійної задачі Диффі-Хелмана MDH [3], тобто обчислення $\mu(P, P, \dots, P)^{a_1 a_2 \dots a_n} \in G_2$ по заданим значенням $P, a_1 P, a_2 P, \dots, a_n P \in G_1, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_q^*$ та розпізнавального варіанту DMDH.

Існування обчислювального алгоритму таких мультилінійних відображень дозволить значно зменшити складність існуючих криптопротоколів, скорочуючи обсяг інформації, яка передається, а також зменшити обчислювальну складність алгоритмів, але проблема побудови таких відображень і досі залишається дуже складною.

Список використаних джерел

1. Бессалов А.В., Телиженко А.Б. Криптосистемы на эллиптических кривых. Киев, «Політехніка», 2004.

2. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. и Часовских А.А., *Элементарное введение в эллиптическую криптографию. Протоколы криптографии на эллиптических кривых* Ч.2 М.:КомКнига, 2006. – 280с.
3. D. Boneh and A. Silverberg, *Applications of Multilinear forms to Cryptography*, Report 2002/080, <http://eprint.iacr.org/2002/>.
4. D. Boneh, M. Franklin. *Identity Based Encryption from the Weil Pairing*. SIAM J. of Computing, Vol. 32, No. 3, pp. 586-615, 2003, Extended Abstract in Crypto 2001.
5. D. Boneh, B. Lynn, and H. Shacham, *Short signatures from the Weil pairing*, Proc. Asiacrypt 2001, Lecture Notes in Computer Science 2248 (2001), Springer, 514–532.
6. R. Dutta, R. Barua and P. Sarkar, *Pairing-Based Cryptographic Protocols : A Survey*. Cryptology Research Group
7. ElGamal T. *Public Key Cryptosystems and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms*. // IEEE Trans. on Information Theory. – 1985. – Vol. 22.
8. Ho-Kyu Lee, Hyang-Sook Lee, Young-Ran Lee, *Multi-Party Authenticated Key Agreement Protocols From Multilinear Forms*. Department of Mathematics, Ewha Womans University, Seoul, Korea
9. A. Joux. *A One Round Protocol for Tripartite Diffie-Hellman*. Proceedings of ANTS 4, LNCS 1838, pp. 385-394, 2000.
10. Joux A., Nguyen K. *Separating Decision Diffie – Hellman from Diffie – Hellman in cryptographic groups*. – <http://eprint.iacr.org/2001/003>.
11. B. Libert, J. J. Quisquater. *New Identity Based Signcryption Schemes from Pairings*. Cryptology ePrint Archive, Report 2003/023, <http://eprint.iacr.org/2003/023>
12. Menezes A., Okamoto T., Vanstone S. *Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field* // IEEE Trans. of Information Theory, Vol. 39, 1993. – Pp. 1639 – 1646.
13. Malone-Lee. *Identity-Based Signcryption*. Cryptology ePrint Archive, Report 2002/098, <http://www.iacr.org/2002/098>.
14. A. Shamir. *Identity-based Cryptosystems and Signature Schemes* in Proc. Crypto '84, LNCS Vol. 196, Springer, pp. 47-53, 1985.
15. Blake I., Murty K., Xu G. *Refinements of Miller's Algorithm for Computing Weil/Tate Pairings*. – <http://eprint.iacr.org/2004/065>.
16. Barreto P. *The Pairing-Based Crypto Lounge*. – <http://paginas.terra.com.br/informatica/paulobarreto/pblounge.html>.
17. B.H. Yum, P.J. Lee, *New Signcryption Schemes Based on KCDSA*, Proc. of ICISC'01, LNCS 2288, Springer, pp. 305-317, 2001.
18. Y. Zheng, *Digital Signcryption or How to Achieve Cost (Signature & Encryption) << Cost (Signature)+ Cost (Encryption)*, Advances in Cryptology - Crypto'97, LNCS 1294, Springer, pp.165-179, 1997.
19. Y. Zheng, H. Imai, *Efficient Signcryption Schemes On Elliptic Curves*, Proc. of IFIP/SEC'98, Chapman & Hall, 1998.
20. C. Gentry. *Certificate-based encryption and the certificate revocation problem*, Advances in Cryptology EUROCRYPT 2003, volume 2656 of LNCS, pages 272-293. Springer-Verlag, 2003.
21. S. Al-Riyami and K. Paterson. *Certificateless Public Key Cryptography*, Cryptology ePrint Archive, Report 2003/017, <http://eprint.iacr.org/>.

Надійшла до редакції 19.01.2010

УДК 519.217; 519.718

Лукашів Т.О.

Про експоненціальну стійкість в середньому квадратичному розв'язків лінійних динамічних систем випадкової структури з параметричними збуреннями

Одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних динамічних систем випадкової структури з параметричними збуреннями

Ключові слова: експоненціальна стійкість в середньому квадратичному, динамічна система випадкової структури, параметричні збурення.

*E-mail: lukashiv@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Дослідження на експоненціальну стійкість в середньому квадратичному, за ймовірністю та з ймовірністю одиниця розв'язків диференціальних рівнянь з марковськими параметрами проводилися за допомогою другого методу Ляпунова. Причому це були, в основному, достатні умови стійкості в тому чи іншому розумінні.

У даній роботі розглянуто диференціальне рівняння першого порядку з марковськими параметрами, які є розв'язками автономного дифузійного стохастичного диференціального рівняння. Для цього класу рівнянь за допомогою теорії збурених лінійних операторів, розробленої Т. Като [1], Ю.Л. Далецьким і М.Г. Крейном [2], одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості розв'язків в середньому квадратичному.

Розглянуто лінійну динамічну систему випадкової структури спеціального вигляду, до якої марковський процес входить лінійно. Для такого класу диференціальних рівнянь також одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості розв'язків в середньому квадратичному.

Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з потоком σ -алгебр $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ задано дифузійний однорідний процес Маркова $\{\xi(t), t \geq 0\}$ за допомогою стохастичного дифузійного диференціального рівняння Іто (СДР)

T.O. Lukashiv

On exponential stability in the mean square of the solutions of linear dynamical systems of random structure with parameter switchings

The necessary and sufficient conditions of the exponential stability in the mean square are obtained for the solutions of linear dynamical systems of random structure with parameter switchings

Key Words: exponential stability in the mean square, dynamical system of random structure, parameter switchings.

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t), \quad (1)$$

де $\xi(t) \in Y \subset \mathbb{R}^n$, $w(t)$ – стандартний броунівський процес із значеннями в $\mathbb{R}^n$ [3]; $b: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$; $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$.

Будемо надалі вважати, що відображення $b(y)$ і $\sigma(y)$ неперервні по y , задовольняють умову Ліпшиця по y і умову рівномірної обмеженості по t , які гарантують існування та єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку задачі Коші $\xi(s) = y$ для всіх $s \geq 0$ і $y \in Y$ [3], [4], [5]. Цей розв'язок будемо позначати $\xi(t, s, y)$.

Марковський процес $\{\xi(t), t \geq 0\}$ визначено перехідною ймовірністю [6]

$$P_t\{\xi(t) \in A\} \equiv P\{\xi(t, 0, y) \in A\} \equiv P(t, y, A), \quad (2)$$

$$t \geq 0, y \in Y, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Згідно з прийнятою термінологією [3], [6], визначено інфінітезимальний оператор для СДР (1):

$$\begin{aligned} (L^y v)(y) &\equiv \\ &\equiv (b(y), \nabla) v(y) + \frac{1}{2} (\sigma^2(y) \nabla, \nabla) v(y), \end{aligned} \quad (3)$$

де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток, ∇ – градієнт в $\mathbb{R}^n$, відображення $v: Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ двічі неперервно диференційовне.

Розглянемо диференціальне рівняння з марковськими параметрами (ДРМП)
 $\{\xi(t), t \geq 0\} \subset Y \subset R^m$

$$dx = f(x, \xi(t))dt, \quad (4)$$

де відображення $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ неперервне за сукупністю змінних, має неперервні рівномірно обмежені похідні за змінною $x \in R^n$ і рівномірно обмежене за змінною $y \in Y$ при $x = 0$.

Тоді f задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C|x_1 - x_2| \quad (5)$$

та умову «лінійного росту»

$$|f(x_1, y)| \leq C(1 + |x_1|), \quad (6)$$

для $\forall y \in Y, \{x_1, x_2\} \subset R^n$ і деякого $C > 0$.

ДРМП (4) з марковськими параметрами $\xi(t)$, які є розв'язками (1), назовемо лінійною динамічною системою випадкової структури [7].

В цьому випадку задачі Коші для ДРМП (4) з початковою умовою $x(s) = x, \forall s \geq 0$, при довільній реалізації марковського процесу $\xi(t, s, y) = y$ має єдиний розв'язок $x \in R^n$.

Тоді пара $\{x(t), \xi(t), t \geq 0\}$ являє собою однорідний марковський процес на фазовому просторі $R^n \times Y$ з перехідною ймовірністю [3], [4], [8]

$$\begin{aligned} P(t, x, \xi, A, B) &= \\ &= P\{\omega : x(t, B, x, y) \in A, \xi(t, 0, y) \in B\} = \\ &= P_{x, y}\{x(t) \in A; \xi(t) \in B\} \end{aligned}$$

для $\forall t \geq 0, x \in R^n, y \in Y \subset R^m, A \in B_{R^n}, B \in B_{R^m}$ і слабким інфінітезимальним оператором

$$\begin{aligned} (Lv)(x, y) &= (f(x, y), \nabla_x)v(x, y) + \\ &+ (L^*v)(x, y) = (f(x, y), \nabla_x)v(x, y) + \\ &+ (b(y), \nabla_y)v(x, y) + \frac{1}{2}(\sigma^2(y)\nabla_y, \nabla_y)v(x, y), \quad (7) \end{aligned}$$

який визначено на двічі неперервно диференційовних по y і неперервно диференційованих за сукупністю змінних функціях $v(x, y)$, де ∇_x і ∇_y визначають

градієнти відповідно за змінними $x \in R^n$ і $y \in R^m$. Тут B_{R^n}, B_{R^m} – мінімальні σ -алгебри напіввідкритих справа n - та m -паралелепіпедів.

Вимога рівномірної обмеженості похідних $D_x f(x, y), D_x g(x, y)$ для $y \in Y$ можна замінити вимогою локальної обмеженості цих похідних по $x \in R^n$ рівномірно по $y \in Y$, тобто

$$\sup_{\substack{|x| < r \\ y \in Y}} \|D_x f(x, y)\| \leq c, \quad \sup_{\substack{|x| < r \\ y \in Y}} \|D_x g(x, y)\| \leq c, \quad (8)$$

$\forall r > 0$, а також рівномірної по $y \in Y$ обмеженості при $x = 0$, тобто

$$|f(0, y)| \leq c, \quad \forall y \in Y. \quad (9)$$

Ці умови гарантують [3], [4] існування та єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку задачі Коші для ДРМП (4) лише до моменту виходу τ з кулі $S(x) = \{z \in R^n : |z - x| < r\}$ при довільних початкових значеннях $x \in R^n, y \in Y$ і $\forall r > 0$. Нехай $\tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tau_r$. Зауважимо, що при виконанні умов (5), (6) до моменту τ можна користуватися формулою Динкіна Є.Б. [6], [9].

Позначаючи $\tau(t) = \min(t, \tau)$, формулу Динкіна Є.Б. можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} E_{x, y} v(x(\tau(t)), y(\tau(t))) &= \\ &= v(x, y) + E_{x, y} \int_0^{\tau(t)} (Lv)(x(s), y(s)) ds, \quad (10) \end{aligned}$$

якщо $v \in D(L)$, де $D(L)$ – область визначення інфінітезимального оператора $L(\cdot)$ [6].

Вважаємо, що для тривіального розв'язку $x = 0$ задачі Коші для ДРМП (4) виконується умова $P_{x, y}(\tau = +\infty) = 1$ для $\forall x \in R^n, \forall y \in Y$, а також виконується рівність

$$f(0, y) = 0 \quad \text{для всіх } y \in Y. \quad (11)$$

Необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному лінійних динамічних систем випадкової структури

На ймовірнісному базисі (Ω, F, P, F) розглянемо лінійну динамічну систему випадкової структури (ЛДСВС)

$$dx = A(\xi(t))xdt, \quad (12)$$

$$(q(y)x, x) \geq C_q |x|^2, \quad (20)$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x \in R^n; \xi(t_0) = y \in Y \subset R^m, \quad (13)$$

де марковський процес $\xi(t)$ визначається СДП

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t) \quad (14)$$

Означення 1. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ЛДСВС (12), (13) назовемо експоненціально стійким в *l.i.m.*, якщо $\forall x \in R^n, y \in Y$ і $t \geq 0$ має місце нерівність

$$E_{x,y} |x(t)|^2 \leq M \cdot e^{-\gamma t} |x|^2,$$

для деяких $M > 0$ і $\gamma > 0$.

Позначимо через $X(t, s)$ фундаментальну матрицю ЛДСВС (12), (13) [10], яка задовольняє умову $X(s, s) = I$.

Тоді нерівність із означення 1 еквівалентна нерівності [10]

$$E_y \|X(t, s)\|^2 \leq M \cdot e^{-\gamma(t-s)} \quad (15)$$

для $\forall [s, t] \subset [0, \infty)$.

Припустимо, що $A(y)$ неперервна по $y \in Y \subset R^m$ і нехай

$$\sup_{y \in Y} \|A(y)\| = a < \infty. \quad (16)$$

Означення 2. Визначимо простір V симетричних неперервних обмежених матричних функцій q з нормою

$$\|q\| = \sup_{y \in Y} |(q(y)x, x)|, \quad (17)$$

де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в R^n .

Виділимо в просторі V конус [2] за означенням

$$K = \{q \in V / (q(y)x, x) \geq 0; \forall y \in Y, \forall x \in R^n\}. \quad (18)$$

При цьому конус K буде тілесним, а множина

$$\dot{K} = \{q \in V / C_q \equiv \inf_{\substack{y \in Y, \\ |x|=1}} (q(y)x, x) > 0\} \quad (19)$$

складається з внутрішніх точок K , причому $q \in \dot{K}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться така стала $C_q > 0$, що

для $\forall y \in Y$ і $\forall x \in R^n$.

Припустимо, що для дифузійного марковського процесу $\xi(t)$ визначено інфінітезимальний оператор (3), де зсув $b(y)$ і дифузія $\sigma(y)$ неперервні та обмежені по y і мають неперервні обмежені похідні.

Зауваження 1. Якщо $q \in V$ має дві неперервні обмежені похідні, тоді $L^*q \in V$ і можна визначити оператор, пов'язаний з оператором $A(y)$ рівняння (12) [9]

$$(Aq)(y) \equiv A^T(y)q(y) + q(y)A(y) + (L^*q)(y), \quad (21)$$

де « T » – знак транспонування.

Визначимо також оператори

$$(T(t)q)(y) \equiv E_y \{X^T(t+s, s)q(t+s)X(t+s, s)\}, \quad (22)$$

де $X(t, s)$ – фундаментальний розв'язок задачі (12), (13), $\forall t \geq 0, y \in Y$, а число $s \geq 0$ в силу однорідності процесу може бути вибрано довільним [10].

Верхній індекс при $E\{\cdot\}$ або при $P\{\cdot\}$ тут і надалі означає умову, що $\xi(s) = y$.

Теорема 1 [10]. Множина операторів $(T(t)q)(y)$ за означенням (22) визначає сильну неперервну напівгрупу на V , яка залишає інваріантним конус K , а оператор $(Aq)(y)$ за означенням (21) є генератором цієї напівгрупи [1], [11].

Надалі будемо користуватися наступною термінологією з монографії Като Т. (див. [1]).

Означення 3. Замкнений оператор G з щільною областю визначення віднесемо

I) до класу $Y(M, \beta)$, якщо $\forall \lambda > \beta$ і $\forall k \in N$ вірна нерівність

$$\|(G + \lambda I)^{-k}\| \leq M(\lambda - \beta)^k;$$

II) до класу $H(\nu, 0)$, якщо його резольвентна множина містить сектор $|\arg \lambda| > \frac{\pi}{2} + \nu$ при деякому $\nu > 0$ і $\forall \varepsilon > 0$,

$$\|(G + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M\varepsilon}{|\nu|} \text{ при } |\arg \lambda| \geq \frac{\pi}{2} + \nu - \varepsilon;$$

III) до класу $H(\nu, \beta)$, якщо $G + \beta I \in H(\nu, 0)$.

Означення 4. Якщо оператор $G \in Y(M, \beta)$ і є генератором напівгрупи $T(t)$ з класу C_0 , то оператор $T(t)$ будемо визначати рівністю

$$T(t) = e^{tG}. \quad (23)$$

Рівність (23) має місце, бо напівгрупу $T(t)$ можна представити у формі інтеграла Данфорда-Тейлора [1]

$$T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{it\lambda} (I\lambda - G)^{-1} d\lambda, \quad (24)$$

де контур Γ відповідно вибрано з вищезгаданого сектора $|\arg \lambda| > \frac{\pi}{2} + \nu$.

Теорема 2. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ЛДСВС (12)-(14) експоненціально стійкий в *l.i.m.* тоді і тільки тоді, коли існують такі $q \in \dot{K}$ і $r \in \dot{K}$, що

$$Aq = -r. \quad (25)$$

Доведення. Достатність. Нехай q і r задовольняють (25). Доведемо експоненціальну стійкість в *l.i.m.* розв'язку ДРМП (12), що визначаються дифузійним стохастичним рівнянням (14).

Вибираємо квадратичну функцію Ляпунова

$$v(x, y) = (q(y)x, x). \quad (26)$$

Обчислимо математичне сподівання $E\{\cdot\}$ на розв'язках (12), (13) з урахуванням того, що марковський процес $\xi(t)$ є розв'язком (14) з інфінітезимальним оператором $L^y v$ та оцінимо його зверху:

$$\begin{aligned} E_{x,y} v(x(t), \xi(t)) &= \\ &= v(x, y) + \int_0^t E_{x,y} (L^y v)(x(s), \xi(s)) ds = \\ &= v(x, y) - \int_0^t E_{x,y} r(x(s), \xi(s)) ds \leq \\ &\leq v(x, y) - C_r \int_0^t E_{x,y} |x(s)|^2 ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq v(x, y) - \frac{C_r}{\|q\|} \int_0^t E_{x,y} v(x(s), \xi(s)) ds, \quad (27)$$

де $C_r = \inf_{\substack{y \in Y, \\ |x|=1}} (r(y)x, x) > 0$.

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} E_{x,y} |x(s)|^2 &\leq \frac{1}{C_q} E_{x,y} v(x(s), \xi(s)) \leq \\ &\leq \frac{1}{C_q} v(x, y) \exp\left\{-\frac{C_r}{\|q\|} s\right\} \leq \\ &\leq \frac{\|q\|}{C_q} e^{-\frac{C_r}{\|q\|} s} |x|^2, \end{aligned}$$

де C_q визначено в означенні $\dot{K}$ (19), звідки випливає експоненціальна стійкість в *l.i.m.*

Необхідність. Нехай розв'язок $(x(t), \xi(t))$ (12)-(14) експоненціально стійкий, тобто

$$E_{x,y} |x(t)|^2 \leq M e^{-\gamma t} |x|^2, \quad (28)$$

при деяких $M > 0, \gamma > 0$ і $\forall y \in Y, \forall t \geq 0$ і $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Тоді можна записати $\forall T \geq 0$ нерівність

$$\begin{aligned} c_1 |x|^2 &\leq v(x, y) = \int_0^T E_{x,y} |x|^2 dt \leq \\ &\leq \frac{M}{\gamma} (1 - e^{-\gamma T}) = c_2 |x|^2, \end{aligned} \quad (29)$$

для деякого $c_1 > 0$.

Далі за означенням інфінітезимального оператора

$$(L^y v)(x, y) = (f(x, y) \nabla_x) v(x, y) + (L^y v)(x, y)$$

можна одержати нерівність

$$\begin{aligned} (L^y v)(x, y) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [E_{x,y} v(x(\Delta), \xi(\Delta)) - v(x, y)] = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^T E_{x(\Delta), \xi(\Delta)} |x(t)|^2 dt - \int_0^T E_{x,y} |x(t)|^2 dt \right] = \\ &= E_{x,y} |x(T)|^2 - |x|^2 \leq (M e^{-\gamma T} - 1) |x|^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Виберемо $\tilde{T} \equiv (\ln M + \ln 2)/\gamma$ і тоді з (28) і (29) випливає існування такої матриці $q \in \dot{K}$, яку можна подати у вигляді

$$q(y) = \int_0^{\tilde{T}} E_y \{X^T(t, 0)X(t, 0)\} dt. \quad (31)$$

Для $q(y)$, визначеної (31), виконується умова обмеженості супремума оператора $A(\circ)$ (16) з матрицею $r \in \dot{K}$, яку можна визначити наступним чином

$$r(y) \equiv E_y \{X^T(\tilde{T}, 0)X(\tilde{T}, 0)\} - I,$$

де I – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Необхідність доведена, а, отже, і теорема 2. ■

Означення 5. Потенціалом R напівгрупи $T(t)$ назвемо оператор, який визначається з рівняння

$$(Rq)(y) \equiv \int_0^{\infty} (T(t)q)(y) dt, \quad (32)$$

і будемо писати $q \in D(R)$, якщо інтеграл у (32) збігається.

Означення 6. Резольвентою R_γ назвемо оператор, який визначається з рівняння

$$(R_\gamma q)(y) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (T(t)q)(y) dt, \quad (33)$$

де інтеграл є збіжним рівномірно по $y \in Y$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. Тривіальний розв'язок ЛДСВС (12)-(14) експоненціально стійкий в *l.i.m.* тоді і тільки тоді, коли

$$D(R) \supset K. \quad (34)$$

Доведення. Необхідність. Нехай виконується умова експоненціальної стійкості в *l.i.m.* (28), тоді інтеграл у (32) є збіжним $\forall q \in V \supset K$, бо

$$\|T(t)q\| \equiv \sup_{\substack{y \in Y, \\ \|x\|=1}} E_{x,y} |x(t)|^2$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $D(R) \supset K$. Встановимо, що напівплощина $\{\nu \in C | \operatorname{Re} \nu \geq 0\}$ належить резольвентній множині оператора A . Дійсно,

для $\forall q \in K, \forall t \geq 0, \lambda \in R_+, \forall x \in R^n$ та $y \in Y$ можна записати

$$e^{-\lambda t} (T(t)q(t)x, x) \geq (T(t)q(y)x, x). \quad (35)$$

Зауважимо, що довільний елемент $q \in V$ можна записати у вигляді $q = q_1 - q_2$, де $\{q_1, -q_2\} \subset K$, бо конус K є відтворюючим [2].

Тоді нерівність (35) має місце $\forall x \in V$. Визначимо $r \in V$ рівнянням

$$(r(y)x, x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (T(t)q(y)x, x) dt, \quad (36)$$

$\lambda \in R_+$.

Легко встановити [1], [10], що $r(y)$ задовольняє рівняння $A r - \lambda r = -q$, тобто $D(A) \supset R$. А згідно з [2] матимемо $D(A) \supset \{\lambda \in C | \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$.

Оскільки оператор A є сумою оператора L^ξ класу $H(\nu, 0)$ [2] і обмеженого оператора A_0 , який визначено формулою

$$(A_0 q)(y) = A^T(y)q(y) + q(y)A(y),$$

то тип напівгрупи $T(t)$ є від'ємним. Тобто для розв'язку $x(t)$ виконується (28). Достатність доведено. Теорема 3 доведена. ■

Теорема 4. Тривіальний розв'язок (1), (2) експоненціально стійкий в *l.i.m.* тоді і тільки тоді, коли існує таке $q \in \dot{K}$, що

$$A q = -I, \quad (37)$$

де I – одинична $n \times n$ -матриця.

Доведення випливає з теореми 3 та з означення напівгрупи $T(t)$.

Необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в *l.i.m.* лінійних динамічних систем випадкової структури спеціального вигляду

Розглянемо лінійну динамічну систему випадкової структури вигляду

$$dx(t) = [A + \gamma \xi(t)B] x(t) dt, \quad (38)$$

де γ – дійсне число, $x(t) \equiv x(t, \omega) \in R^n$; A, B – матриці з дійсними елементами розмірності

$n \times n$; $\xi(t) \in \mathbb{R}^1$ – дифузійний марковський процес, що визначається скалярним СДР

$$d\xi(t) = -2\xi(t)dt + \sqrt{2}dw(t). \quad (39)$$

Зауважимо, що лінійне СДР (39) має єдиний стаціонарний розв'язок $\tilde{\xi}(t)$ зі щільністю e^{-y^2} [8]. Процесу $\xi(t)$ відповідає інфінітезимальний оператор [8]

$$L^y = -2y \frac{d}{dy} + \frac{d^2}{dy^2}, \quad (40)$$

з яким надалі будемо оперувати у просторі L_2 функцій із скалярним добутком

$$(h, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} h(y)g(y)dy. \quad (41)$$

Зауваження 2. Оператор L^y в цьому просторі має компактну резольвенту і простий спектр $\sigma(L^y) = \{-2(n-1), n \in \mathbb{N}\}$.

Це можна перевірити, якщо використати базис в L_2 з нормованих поліномів Ерміта [11]

$$f_{n-1}(y) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^{n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}} e^{y^2} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} e^{-y^2},$$

$n \in \mathbb{N}.$

Далі слід продовжити оператор L^y на простір симетрично-матричнозначних функцій V_2 із скалярним добутком

$$\langle g, p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Sp(q(y)p(y)e^{-y^2})dy. \quad (42)$$

Визначимо наступні оператори

$$(A_0 q(y)) = A^T q(y) + q(y)A; \quad (43)$$

$$(B_0 q(y)) = B^T q(y) + q(y)B; \quad (44)$$

$$(\Phi q)(y) = yq(y). \quad (45)$$

Нехай $\tilde{L}_2 \subset L_2$ є множиною, для яких

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_y g(\xi(t)) = g(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Оператор L^y визначає на $\tilde{L}_2$ напівгрупу

$$(S(t)g)(y) = E_y g(\xi(t))$$

класу C_0 , бо у формулі

$$\|S(t)g - g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y g(\xi(t)) - g(y)|^2 e^{-y^2} dy,$$

підінтегральний вираз обмежено функцією, а саме:

$$|E_y g(\xi(t)) - g(y)|^2 \leq 2(E_y |g(\xi(t))|^2 + |g(y)|^2).$$

Зауважимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_y |g(\xi(t))|^2 e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^2 e^{-y^2} dy.$$

Продовжимо цю напівгрупу $S(t)$ на $\tilde{V}_2$ матричних функцій, які задовольняють умову

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_y q(\xi(t)) = q(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо оператор

$$L = A_0 + \gamma \Phi B_0 + L^y, \quad \text{де } \gamma \geq 0. \quad (46)$$

При $\gamma = 0$ оператор L можна розглядати як тензорний добуток операторів з простору $\tilde{L}_2 \otimes \tilde{M}_n(\mathbb{R})$, де $\tilde{M}_n(\mathbb{R})$ – простір симетричних $n \times n$ матриць.

Оператор L заданий на елементах вигляду $q(y) = g(y)q_0$ (де $g \in \tilde{L}_2, q_0 \in \tilde{M}_n(\mathbb{R})$) формулою

$$\begin{aligned} (Lq)(y) &= (A_0 + L^y)\Phi(y) = \\ &= A_0 q_0 q(y) + q_0 (L^y q)(y), \end{aligned}$$

причому оператор ΦB_0 , як тензорний добуток, задано формулою [2], [12]

$$(\Phi B_0)q(y) = yg(y) \cdot B_0 q_0.$$

Зауважимо, що оператори A_0 і B_0 обмежені.

А областю визначення оператора L^y є двічі неперервно диференційовні функції або матричні функції сумовні з квадратом, які мають дві сумовні з квадратом похідні з вагою e^{-y^2} .

За матрицею Коші $X(t, s)$ рівняння (38), де $\xi(t)$ визначено (39), введемо оператор $T(t)$ наступним чином

$$(T(t)q)(y) =$$

$$\equiv E_{s,y} \{X^T(t+s,s)q(\xi(t+s))X(t+s,s)\} \quad (47)$$

де $q \in V$, $E\{\cdot\}$ існує [8], бо $\xi(t)$ є гауссовим процесом із сталою дисперсією і експоненціально спадною кореляційною функцією.

Теорема 5. Оператор L (див. (46)) при достатньо малому за модулем γ виступає як генератор на V_2 напівгрупи класу C_0 , яка визначена формулою (47), причому спектр $\sigma(L) = P_\sigma(L)$, а кожне власне значення цього спектру має скінченну кратність, де P – проектор спектра σ .

Доведення. Оператор A_0 (43) має дискретний спектр [1], який визначено рівністю

$$\sigma(A_0 + L^\gamma) = \{\lambda + \mu/\lambda \in \sigma(A_0), \mu \in \sigma(L^\gamma)\}. \quad (48)$$

Доведемо обмеженість оператора ΦB , тобто знайдуться сталі c_1 і c_2 такі, що виконується нерівність

$$\|\Phi B q\| \leq c_1 \|q\| + c_2 \|L^\gamma q\|.$$

Зауважимо, що в силу обмеженості оператора B достатньо встановити нерівність [1], [2], [12]

$$\|\Phi q\| \leq c_1 \|q\| + c_2 \|L^\gamma q\|, \quad (49)$$

для $q \in D(L^\gamma) \subset L_2$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \|\Phi q\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2 \|q(y)\|^2 e^{-y^2} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma q'(y) q(y) e^{-y^2} dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (q(y))^2 e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2} \|\Phi q\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (q'(y))^2 e^{-y^2} dy + \|q\|^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\|\Phi q\|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (q'(y))^2 e^{-y^2} dy + \|q\|^2 =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} q'(y) y q(y) e^{-y^2} dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} q''(y) q(y) e^{-y^2} dy + \|q\|^2 =$$

$$= \|q\|^2 + \langle -L^\gamma q, q \rangle \leq \frac{1}{2} \|L^\gamma q\|^2 + \frac{3}{2} \|q\|^2$$

і нерівність (49) доведена, якщо вибрати відповідно $c_1 = \frac{3}{2}$; $c_2 = \frac{1}{2}$.

Звідси [1], враховуючи, що при достатньо малих за модулем γ оператор $L^\gamma \in H(\nu, \beta)$, оператор L (46) також належить цьому класу $H(\nu^*, \beta^*)$ при деяких ν^*, β^* . Зауважимо, що спектр $\sigma(L^\gamma + A_0 + \gamma \Phi B)$ складається лише з власних значень при малих за модулем γ , бо цією властивістю володіє спектр $\sigma(L^\gamma + A_0)$. При цьому точки спектра $\sigma(L) \equiv \sigma(L^\gamma + A_0 + \gamma \Phi B)$ розташовані у малому околі $\{n-1+\lambda, \lambda + \gamma(A_0)\}$, $n \in \mathbb{N}$, а тотальні спектральні проектори, що відповідають цим околам, є голоморфними функціями від γ . Теорема 5 доведена. ■

Теорема 6. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ЛДСВС (38) з марковським параметром $\xi(t)$, що визначений рівнянням (39), експоненціально стійкий в *l.i.m.* при достатньо малих за модулем γ тоді і тільки тоді, коли

$$\sigma(L) \equiv \sigma(L^\gamma + A_0 + \gamma \Phi B) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (50)$$

Доведення. Достатність. Нехай виконується (50). Тоді в силу представлення проектора [11] у вигляді

$$P_\sigma(T(t)) = e^{t P_\sigma(L^\gamma)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (51)$$

множина дійсних чисел $\lambda \geq 1$ належить резольвентній множині всіх операторів $T(t)$. Кожну матричну функцію $q \in V_2$ можна представити як границю матричних функцій з V , а будь-який елемент $q \in V$ можна представити як різницю $q_1, q_2 \in K \subset V$, тобто $q = q_1 - q_2$. Тому конус додатно визначених матричних функцій з $K \subset V_2$ є майже відтворювальним [11]. А із замкненості спектра оператора впливає, що

існує таке $\rho \in (0, \infty)$, що $\sigma(T(t)) \cap \{\lambda \geq e^{-\rho}\} = \emptyset$ для довільного $t \geq 0$.

З властивості додатних операторів з описаною вище структурою і властивістю залишати інваріантним майже відтворювальний конус в просторі Банаха [10] випливає, що

$$\sigma(T(t)) \cap \{\lambda \geq e^{-\rho}\} = \emptyset,$$

тобто тип напівгрупи $T(t)$ від'ємний. А тому існують $M > 0$ і $\rho > 0$ такі, що $\|T(t)\| \leq Me^{-\rho t}$, $\forall t \geq 0$.

Отже,

$$\begin{aligned} E_{x,y}|x(t)|^2 &= E_y(X^T(t,0)X(t,0)x,x) = \\ &= ((T(t)I)(y)x,x) \leq Me^{-\rho t}|x|^2, \end{aligned} \quad (52)$$

що доводить експоненціальну стійкість в *l.i.m.* розв'язку ЛДСВС (38).

Необхідність. Нехай виконується (52). Тоді $\forall q \in V$ і $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ існує резольвента

$$(R_\lambda q)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ((T(t)q)(y)x,x)e^{-\lambda t} dt. \quad (53)$$

За означенням оператора L (див. (46)) резольвента R_λ буде компактною при виборі малих за модулем λ , бо цією властивістю володіє оператор L .

Але множина V є щільною у V_2 за нормою цього простору, а тоді щільно визначений оператор – резольвента R_λ – повинен бути визначеним на всьому V_2 . А це означає, що $\sigma(L) \subset \{\operatorname{Re} \lambda < -\rho\}$ при деякому $\rho > 0$. Теорема 6 доведена. ■

Висновок

Для лінійного диференціального рівняння та лінійного диференціального рівняння спеціального вигляду одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості тривіального розв'язку в середньому квадратичному в термінах власних значень відповідних операторних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 742 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
3. Королюк В.С., Царков Е.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Вид-во «Золоті литаври», 2009. – 798 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.
5. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1987. – 328 с.

6. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
7. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.
8. Хасьяновский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
9. Королюк В.С. Устойчивость автономных динамических систем с быстрыми марковскими переключениями // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 16-19.
10. Царков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
11. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. – М.: ИЛ, 1962. – Т.1. – 895 с.

Надійшла до редколегії 22.01.10

УДК 517.929.7

Ляшенко В.П., к.ф.-м.н., доц.,
Кобильська О.Б., аспірант

Розрахунок температурного поля тепло- випромінюючого тонкостінного циліндра.

Розглядається задача визначення температур-
ного поля у тонкостінному циліндрі, поверхня
якого розігрівається циклічно діючим зовнішнім
точковим джерелом тепла.

Ключові слова: рівняння теплопровідності,
метод скінчених різниць, параболічна
апроксимація

*E-mail: leca91@ya.ru, kvn@polytech.poltava.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Дослідження температурних полів
циліндричних областей із зовнішніми джерелами
тепла та складними умовами теплообміну на
поверхні є достатньо складною задачею.
Моделювання температурного розподілу на
поверхні валкових калібрів, під час термічної
обробки дроту можна віднести до типу задач
визначення температурного поля у
порожнистому тонкостінному циліндрі, що
обертається навколо своєї осі з кутовою
швидкістю ω .

Мета роботи

Метою роботи є побудова алгоритму та
розв'язок задачі, що описує температурний
розподіл у валкових калібрах під час пластичної
деформації або термічної обробки дроту коли
тепловий потік інтенсивністю q ортогональний
осі обертання.

Матеріали та результати дослідження

Математичне моделювання температурного
розподілу приводить до розв'язання наступної
початково-крайової задачі для рівняння
теплопровідності [1].

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0, R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0 \quad (1)$$

$$u(r, \varphi, 0) = u_0, R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_1} = F(\varphi, t, u), \omega t < \varphi < \omega t + 2\pi, t > 0 \quad (3)$$

$$u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t) \quad (4)$$

Lyashenko V., k.pf.-m.n., associate professor
Kobilska E., postgraduate student

Temperature field calculation heat- radiating thin-wall cylinder

The task of determination of the temperature field is
examined in the revolved hollow thin-walled
cylinder, that is warmed up the point outsourcing of
heat.

Key Words: heat equation, method of final
differences, parabolic approximation

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} -$$

диференціальний оператор у полярній системі
координат (r, φ, z) ; $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; c – теплоємність;

λ – коефіцієнт теплопровідності; ρ – щільність
матеріалу валка.

$$F(\varphi, t, u) = \begin{cases} q, \omega t < \varphi < \omega t + \alpha \\ k(u_c^4 - u^4), \omega t + \alpha < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases} \quad (5)$$

u_c – температура навколишнього середовища,

$k = \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda}$, де $\sigma = 5,6 \times 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \text{ К}^4)$ – постійна

Стефана-Больцмана; ε – ступінь чорноти; R, R_1 –
радіуси зовнішньої і внутрішньої поверхонь
циліндра. З фізичних міркувань перерозподілом
температури уздовж осі OZ можна знехтувати,

поклавши $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Із заданою похибкою можна

припустити, що температура валка змінюється
від мінімального значення $\bar{u}_R(\varphi, t) = u(R, \varphi, t)$ до
максимального – $\bar{u}_{R_1}(\varphi, t) = u(R_1, \varphi, t)$. У цьому
випадку, для розв'язання задачі, доцільно
застосувати параболічну апроксимацію
температури за змінною r [2]

$$u(r, \varphi, t) \approx \bar{u}(r, \varphi, t) = \bar{u}_{R_1}(\varphi, t) + \\ + [\bar{u}(\varphi, t) - \bar{u}_{R_1}(\varphi, t)] \left(\frac{r - R_1}{R - R_1} \right)^2 \quad (6)$$

Вибираємо показник параболи $\gamma > 1$, що не суперечить фізичному змісту задачі. Диференціюючи (6) за змінною r маємо

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\gamma}{R - R_1} [\tilde{u}(\varphi, t) - \tilde{u}_{R_1}(\varphi, t)] \left(\frac{r - R_1}{R - R_1} \right)^{\gamma-1} \quad (7)$$

Крайова умова для $r = R_1$ виконується при будь-якому співвідношенні між $\tilde{u}_{R_1}(\varphi, t) = u(R_1, \varphi, t)$ та $\tilde{u}(\varphi, t)$, при $r = R$, коли

$$\tilde{u}_{R_1}(\varphi, t) = \tilde{u}(\varphi, t) - \frac{R - R_1}{\gamma} \times \begin{cases} q, \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ k(u_c^4 - u^4), \varphi_0 + \omega t < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases} \quad (8)$$

Підставивши $\tilde{u}_{R_1}(\varphi, t)$ із (8) у (6) маємо

$$u(r, \varphi, t) \equiv \tilde{u}(r, \varphi, t) = \tilde{u}(\varphi, t) - \frac{R - R_1}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{r - R_1}{R - R_1} \right)^\gamma \right] \times \begin{cases} q, \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ k(u_c^4 - u^4), \varphi_0 + \omega t < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases} \quad (9)$$

Підставляючи (9) у задачу (1)-(4) приходимо до рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\alpha^2} \tilde{u} \neq 0, R_1 < r < R, \quad (10)$$

$$0 < \varphi < 2\pi, t > 0$$

Зажадаємо щоб це відхилення в середньому було рівне нулю на інтервалі $R_1 < r < R$ з вагою r . Застосовуючи оператор усереднення по r до рівняння (10) маємо

$$\frac{2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \tilde{u}(r, \varphi, t) r dr = \frac{2}{R^2 - R_1^2} \left\{ r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \Big|_{R_1}^R + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{R_1}^R \frac{\tilde{u}(r, \varphi, t)}{r} dr - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_1}^R \tilde{u}(r, \varphi, t) r dr \right\} = 0$$

Після перетворень з врахуванням (7)-(9) та обчисленням інтегралів у лівій частині друга з отриманих рівностей (11) перетворюється в

одномірне нелінійне параболічне диференціальне рівняння відносно $\tilde{u}(\varphi, t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f_\mu(\tilde{u}) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} f_\nu(\tilde{u}) + f(\tilde{u}) = 0 \quad (12)$$

$$\omega t < \varphi < \omega t + 2\pi, t > 0$$

У кожній з рухливих підобластей зміни кутової координати φ з (12) маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\ln \frac{R}{R_1} \tilde{u} - \frac{R - R_1}{\gamma} q \mu(\gamma, R_1, R) \right] - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{R^2 - R_1^2}{2} \tilde{u} - \frac{R - R_1}{\gamma} q \nu(\gamma, R_1, R) \right] + Rq = 0 \quad (13)$$

$$\ln \frac{R}{R_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{R^2 - R_1^2}{2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + Rq = 0$$

$$\omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t, t > 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\ln \frac{R}{R_1} \tilde{u} + \frac{R - R_1}{\gamma} k \mu(\gamma, R_1, R) \tilde{u}^4 \right] - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{R^2 - R_1^2}{2} \tilde{u} + \frac{R - R_1}{\gamma} k \nu(\gamma, R_1, R) \tilde{u}^4 \right] + Rk = 0, \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t, t > 0 \quad (14)$$

До рівняння (14) приєднуємо нелінійну початкову умову і умову періодичності, що впливають з відповідних умов задачі (1)-(4) після апроксимації (6) та застосування оператора усереднення

$$\tilde{u}(\varphi_0) - \frac{2(R - R_1)}{(R^2 - R_1^2)} \mu(\gamma, R_1, R) \begin{cases} q, 0 < \varphi < \varphi_0 \\ k(u_c^4 - \tilde{u}^4(\varphi_0)), \varphi_0 < \varphi < 2\pi \end{cases} = u_0 \quad (15)$$

$\tilde{u}(\varphi + 2\pi, t) - \tilde{u}(\varphi, t) = 0$. Крім того повинні виконуватись дві умови на спряження в точці $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Першу з них одержимо після інтегрування (12) по φ в межах від $\omega t + \varphi_0 - \varepsilon$ до $\omega t + \varphi_0 + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\omega t + \varphi_0 - \varepsilon}^{\omega t + \varphi_0 + \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f_\mu(\tilde{u}) d\varphi = o(\varepsilon)$$

$$\text{або } - \frac{f_\mu(\tilde{u})}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 - \varepsilon} - \frac{f_\mu(\tilde{u})}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 + \varepsilon} = o(\varepsilon) \quad (16)$$

Зваживши на те що

$$\frac{\partial f_\mu(\tilde{u})}{\partial \varphi} = \ln \frac{R}{R_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} - \frac{R-R_1}{\gamma} \mu(\gamma, R_1, R) \times \\ \times \left((k(u_c^4 - \tilde{u}^4) - q) \delta(\varphi - \varphi_0 - \omega t) \right) + \\ + \left\{ \begin{array}{l} 0, \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t \\ -4k\tilde{u}^3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}, \varphi_0 + \omega t < \varphi < \omega t + 2\pi \end{array} \right\},$$

тоді умова спряження (16) прийме вигляд

$$\ln \frac{R}{R_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 + 0} + 4k \frac{R-R_1}{\gamma} \mu(\gamma, R_1, R) \times \\ \times \left(\tilde{u}^3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\omega t + \varphi_0 + 0} - \ln \frac{R}{R_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 - 0} = 0, t > 0 \quad (17).$$

Щоб одержати другу умову спряження у точці $\varphi = \omega t + \varphi_0$ проінтегруємо рівняння (12) по змінній φ від $\omega t + \varphi_0$ до φ

$$\frac{\partial f_\mu(\tilde{u})}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0}^\varphi - \frac{1}{a^2} \int_{\omega t + \varphi_0}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\mu(\tilde{u}) d\varphi + \int_{\omega t + \varphi_0}^\varphi f(\tilde{u}) d\varphi = 0 \quad (18)$$

Інтегруючи отриману рівність (18) по φ від $\omega t + \varphi_0 - \varepsilon$ до $\omega t + \varphi_0 + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, одержимо

$$f_\mu(\tilde{u}) \Big|_{\omega t + \varphi_0 - 0}^{\omega t + \varphi_0 + 0} = d(\varepsilon) \quad (19)$$

$$\left[\ln \frac{R}{R_1} \tilde{u} - \frac{R-R_1}{\gamma} k \mu(\gamma, R_1, R) (u_c^4 - \tilde{u}^4) \right] \Big|_{\omega t + \varphi_0 + 0} - \\ - \left(\frac{R}{R_1} \tilde{u} - q \frac{R-R_1}{\gamma} \mu(\gamma, R_1, R) \right) \Big|_{\omega t + \varphi_0 - 0} = 0, t > 0 \quad (20)$$

Після перетворень отримана одномірна нелінійна початково-крайова задача на спряження (14)-(15) з умовами (17), (19) відносно $\tilde{u}(\varphi, t)$.

Замінімо нелінійну умову в (5) лінеаризованою

$$k(u_c^4 - \tilde{u}^4) \cong 4ku_c^3(u - \tilde{u}).$$

Це приводить до лінеаризації другого рівняння (13) початкової умови (15) і умов спряження (19).

У результаті одержуємо лінійну початково-крайову задачу на спряження:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -w, \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t, t > 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\tilde{a}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - b\tilde{u} = bu_c, \varphi_0 + \omega t < \varphi < \omega t + 2\pi$$

$$\tilde{u}(\varphi, 0) = \begin{cases} d, 0 < \varphi < \varphi_0 \\ e, \varphi_0 < \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (22)$$

$$\tilde{u}(\varphi + 2\pi, t) = \tilde{u}(\varphi, t), t > 0 \quad (23)$$

$$\tilde{u} \Big|_{\omega t + \varphi_0 - 0} - g \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 + 0} = h$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 + 0} = g \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\omega t + \varphi_0 - 0}, t > 0 \quad (24)$$

$$\tilde{a} = \frac{2(\ln R - \ln R_1)}{R^2 - R_1^2} a^2, w = \frac{Rq}{\ln R - \ln R_1},$$

$$\tilde{a} = 2 \frac{\ln R - \ln R_1 + \mu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c)}{R^2 - R_1^2 + 2\nu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c)},$$

$$b = \frac{4Rku_c^3}{\ln R - \ln R_1 + \mu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c)},$$

$$d = u_c + \frac{(R^2 - R_1^2)(u_0 - u_c)}{R^2 - R_1^2 + 2\nu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c)},$$

$$h = q \frac{(R - R_1)\mu(\gamma, R_1, R)}{\gamma(\ln R - \ln R_1)}, e = u_0 + \frac{2q}{R + R_1} \nu(\gamma, R_1, R),$$

$$\mu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c) = 4 \frac{R - R_1}{\gamma} ku_c^3 \mu(\gamma, R_1, R),$$

$$\nu_1(\gamma, R_1, R, k, u_c) = 4 \frac{R - R_1}{\gamma} ku_c^3 \nu(\gamma, R_1, R).$$

Для її розв'язання застосуємо неявну кінцево-різницьку схему [1] в сепарабельному просторі $U \subset C_2[0, 2\pi]$. Введемо лінійний нормований простір H сіткових функцій із скалярним добутком $(v, \omega) = \sum_{i=1}^M v_i \omega_i h$ та нормою

$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$, які для $i = 1, 2, \dots, M+1$ задовольняють умові періодичності $u_{0,j+1} = u_{M,j+1} \cdot u_{M+1,j+1} = u_{1,j+1}$. Заміною змінних $\tilde{\varphi} = \varphi - \omega t$ перетворимо відрізок $\omega t \leq \varphi \leq \omega t + 2\pi$ у відрізок $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 2\pi$.

В області $D = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0\}$ введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ \bar{\varphi}_i = i\bar{h}, i = 0, \dots, N, \dots, M, \bar{h} = \frac{2\pi}{M} \right\},$$

$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots\}$ і запишемо неявну схему. Отримаємо систему рівнянь

$$A_i u_{i-1,j+1} - C_i u_{i,j+1} + B_i u_{i+1,j+1} = -F_i, \quad (25)$$

$$u_{i,0} = \begin{cases} d, 0 < i < N \\ e, N < i < M \end{cases}, \quad (26)$$

$$u_{0,j+1} = u_{M,j+1}, \quad \text{де} \quad (27)$$

$$A_i = \begin{cases} \frac{\bar{a}^2}{\bar{h}^2}, 0 < i < N \\ \frac{\bar{a}^2}{\bar{h}^2}, N < i < M \end{cases}, \quad C_i = 1 + 2A_i, \quad B_i = A_i,$$

$$F_i = \begin{cases} w\bar{a}^2\tau + u_{i,j}, 0 < i < N \\ -bu_c\bar{a}^2\tau + u_{i,j}(1 - b\bar{a}^2\tau), N < i < M \end{cases}$$

Результати чисельного експерименту

Проведені числові розрахунки температурних розподілів для різних значень показника параболі. Поклавши $\gamma = 2$, $\gamma = 3$ в (6) отримаємо розв'язки задачі(1)-(4). Як свідчать результати обчислень температура поверхні змінюючись прямує до температури термодинамічної рівноваги, яка у кожному випадку залежить від значення теплового потоку q .

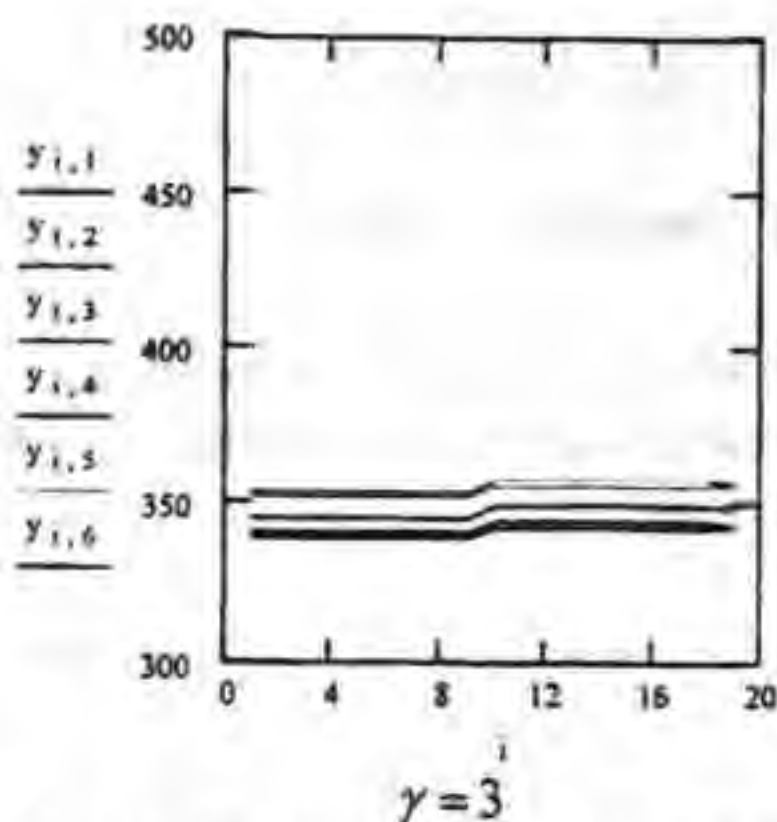
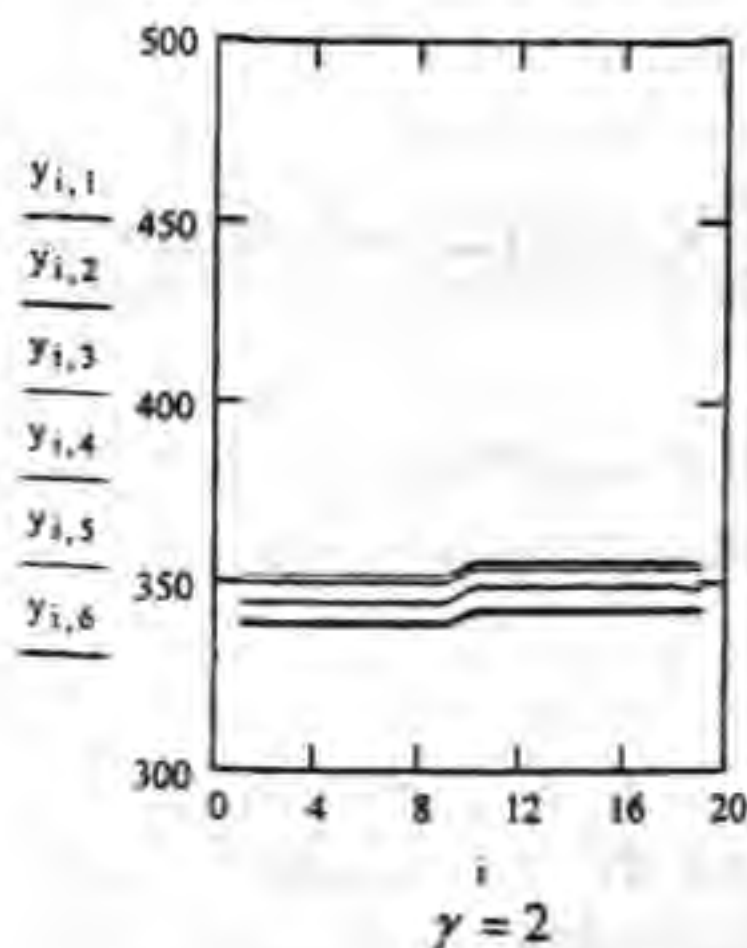


Рис.1 Графіки температурних розподілів в залежності від кута для 1-5 обертів валка. Розрахунки зроблені для сталі при

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, c = 0,46 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, R_1 = 0,2 \text{ м}, q = 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$R = 0,25 \text{ м}, u_c = 300^\circ \text{ К}, u_0 = 330^\circ \text{ К}, \lambda = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Висновки

Зроблені розрахунки температурного поля для різних умов теплообміну поверхні сталюого валка з навколишнім середовищем. На рис. 1 зображено розподіл температури на поверхні для п'яти обертів валка при $\gamma = 2$ та $\gamma = 3$ відповідно. Вздовж горизонтальної вісі показано зміну кута φ , а вздовж вертикальної – зміну температури. Координата $i = 11$ відповідає точці сконцентрованого джерела тепла. Розрахунки показують, що температура в точці біля сконцентрованого джерела тепла змінюється. Вона зростає із кожним обертотом валка. Це в свою чергу приводить до зростання температурного поля валка в цілому. Проте так триває на протязі 10-12 обертів після чого температура перестає зростати та асимптотично наближається до температури теплової рівноваги. Результати чисельних розрахунків можуть бути використані для підбору матеріалу валків та його конструктивних особливостей.

Список використаних джерел

1. Тихонов А. П., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972-736 с.
2. Сидоренко С. И. Березовский А. А., Волошко С. М. Нелинейные задачи массопереноса. – Киев "Наукова думка", 2002 -448с

Надійшла до редколегії -30.09.09.

УДК 519.214.6

О. В. Маринич, аспірант

**Асимптотична поведінка часу
поглинання спадних ланцюгів
Маркова.**

*Отримано достатні умови слабкої
збіжності нормованого часу поглинання
спадних ланцюгів Маркова до
експоненційних субординаторів.*

*Ключові слова: час поглинання, метод
моментів, експоненційні субординатори.*

E-mail: marinich@voliacable.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Розглянемо спадний ланцюг Маркова
 $\{Y_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0\}$ з простором станів
 $\mathbb{N}$ та ймовірностями переходів
 $P\{Y_n = j | Y_{n-1} = i\} = \pi_{ij}, 1 \leq j < i, i \geq 2$
 $P\{Y_n = j | Y_{n-1} = i\} = 0, i \geq j, i \geq 2,$
 $P\{Y_n = 1 | Y_{n-1} = 1\} = 1.$

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо
випадкову величину

$X_n := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : Y_k = 1 \text{ за умови } Y_0 = n\},$
що задає час поглинання ланцюга Маркова
 $\{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, тобто час досягнення
єдиного поглинаючого стану 1 за умови,
що ланцюг стартує у стані n .

Багато випадкових об'єктів мають
розподіли, які збігаються з часом
поглинання для окремих спадних ланцюгів
Маркова. Яскравими прикладами є число
зіткнень у коалесцентах з множинними
зіткненнями [3,4,6,7], число відтинів,
необхідних для відокремлення кореня у
випадкових рекурсивних деревах [2], число
ненульових стрибків у випадкових
блуканнях з бар'єром [7] та ін.

Час поглинання спадних ланцюгів
Маркова, як такий, досліджувався у
декількох роботах [1,5], але універсальних
підходів розроблено не було. У деяких
випадках, коли відомі у явному вигляді

O.V. Marynych, PhD. student

**Asymptotic behavior of absorption time
of decreasing Markov chains**

*Sufficient conditions for the weak
convergence of normalized absorption time in
decreasing Markov chains to the exponential
subordinator are given.*

*Key Words: absorption time, method of the
moments, exponential subordinators.*

Ймовірності π_{ij} , можна застосовувати
аналітичний метод сингулярного аналізу
твірних функцій (див. [2]). Інший підхід,
який носить назву методу стискування [8] є
більш ймовірнісним, але вимагає виконання
великої кількості умов. Метод, що
застосовується у роботах [1,7] базується на
порівнянні досліджуваної послідовності з
підходящим процесом відновлення.
Нещодавно з'явилась робота [5], в якій
автори доводять результат більш загальний
ніж наведений в даній статті, але за
виконання іншої умови. Зокрема в теоремі 2
в [5] наводиться така достатня умова. Якщо
існують

А) послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, що
правильно змінюється,

Б) ненульова невід'ємна скінченна
міра μ на $[0,1]$,

такі що має місце збіжність

$$a_n(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \pi_{n,k} \delta_{k/n}(dx) \rightarrow_d \mu(dx), n \rightarrow \infty,$$

то

$$X_n / a_n \rightarrow_d \int_0^\infty \exp(-\gamma \xi_t) dt, n \rightarrow \infty.$$

У роботі [7] припускалось, що

$$P\{\pi_{n,n-k} = k\} = \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_{n-1}}, \quad (2)$$
$$k = 1, \dots, n-1, n \geq 2,$$

де $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ - деякий розподіл
ймовірностей з $p_1 > 0$. У цьому випадку,
було отримано опис можливих граничних

законів для послідовності $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Зокрема в згаданій роботі доведено, що у
випадку $\sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim n^{-\alpha} L(n)$, де $\alpha \in (0, 1)$, а
функція L повільно змінюється на
нескінченності, має місце збіжність

$$L(n)X_n/n^\alpha \rightarrow_d \int_0^\infty \exp(-U_t) dt, n \rightarrow \infty,$$

де $\{U_t, t \geq 0\}$ - субординатор з нульовим
зсувом, нульовою інтенсивністю
поглинання та відомою мірою Леві.

З умови (2) випливає, що

$$\pi_{n,n-k} \rightarrow_d \xi, n \rightarrow \infty, \quad (2')$$

де випадкова величина (в.в.) ξ має
розподіл $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$. Авторами [7] було
зазначено, що хоча виконання умови (2')
дає змогу досліджувати час поглинання
за допомогою порівняння його з моментом
проходження рівня n випадковим
блуканням з кроком ξ , проте виявилось,
що слабка асимптотична поведінка цих
двох величин може бути принципово
різною.

Метою цієї роботи є дослідження,
умов за яких послідовність X_n/n слабо
збігається.

Використовуючи формулу повної
ймовірності, неважко показати, що
маргінальні розподіли послідовності
 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ задовольняють рекурсію
 $X_1 = 0$ та

$$X_n =_d 1 + X_{n-1}, n \geq 1. \quad (3)$$

В цій рівності $I_n \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ -
випадковий індекс з розподілом

$$P\{I_n = k\} = \pi_{n,n-k}, n \geq 2, k < n.$$

Наведемо основний результат даної
роботи.

Теорема 1. Припустимо, що для всіх
 $x > 0$ існує границя

$$\varphi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - E(1 - I_n/n)^x). \quad (4)$$

Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$X_n/n \rightarrow_d \int_0^\infty \exp(-\sigma_t) dt, \quad (5)$$

де $\{\sigma_t, t \geq 0\}$ - субординатор з
експонентою Лапласа $\varphi(x)$.

З формули Леві-Хінчина випливає,
що експонента Лапласа $\varphi(x)$ може бути
подана у вигляді:

$$\varphi(x) = k + ax + \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t}) \Pi(dt), x \geq 0, \quad (6)$$

де $k \geq 0$ - інтенсивність поглинання, $a \geq 0$
- зсув, а $\Pi(\cdot)$ - міра Леві субординатора
 $\{\sigma_t, t \geq 0\}$.

Зауваження 2. Нехай для всіх
фіксованих $n, k \in \mathbb{N}$, $I_n^{(k)}$ - незалежна копія
 I_n, η - в.в. з невідродженним (можливо
невласним) розподілом. Тоді умова (4)
еквівалентна кожній з наступних

$$\sum_{k=1}^n -\ln(1 - I_n^{(k)}/n) \rightarrow_d \eta, n \rightarrow \infty \quad (7a)$$

$$\prod_{k=1}^n (1 - I_n^{(k)}/n) \rightarrow_d e^{-\eta}, n \rightarrow \infty. \quad (7b)$$

При цьому $\sigma_1 =_d \eta$, а в представленні (6)
 $k = -\ln P\{\eta < \infty\}$.

Доведення теореми 1.

Для $n \in \mathbb{N}$ та $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо
 $m_n^{(k)} := EX_n^k, M_n^{(k)} := E(X_n/n)^k$.

Наведені нижче леми потрібні для
доведення теореми 1.

Лема 3. Для довільних $k \in \mathbb{N}$ та
 $n \geq 2$

$$m_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j (-1)^{k-j-1} m_n^{(j)} + \sum_{i=1}^{n-1} P\{I_n = i\} m_{n-i}^{(k)}.$$

Доведення. Для довільних $k \in \mathbb{N}$ та
 $n \geq 2$ маємо

$$\begin{aligned} m_n^{(k)} &= E(1 + X_{n-1})^k = \sum_{i=0}^k C_k^i EX_{n-1}^i = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i E(X_{n-1})^i \\ &\quad + EX_{n-1}^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \sum_{j=0}^i C_i^j m_n^{(j)} (-1)^{i-j} + \sum_{i=1}^{n-1} P\{I_n = i\} m_{n-i}^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} m_n^{(j)} \sum_{i=j}^{k-1} C_k^i C_i^j (-1)^{i-j} + \sum_{i=1}^{n-1} P\{I_n = i\} m_{n-i}^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j (-1)^{k-j-1} m_n^{(j)} + \sum_{i=1}^{n-1} P\{I_n = i\} m_{n-i}^{(k)}. \end{aligned}$$

стання рівність випливає з ланцюжка

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j C_i^j (-1)^{i-j} &= \frac{k!}{j!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{i-j}}{(k-i)!(i-j)!} = C_k^i \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-i}^j (-1)^j \\ &= C_k^i (\sum_{j=0}^{k-i} C_{k-i}^j (-1)^j - (-1)^{k-i}) = C_k^i (-1)^{k-i-1}. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 4. Нехай $b_n = o(n^{k-1})$, $p_n \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} \leq 1 \text{ та } a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} a_{n-j}, n \geq 2,$$

тоді $a_n = o(n^k)$.

Доведення. За індукцією легко показати, що $|a_n| \leq \sum_{i=1}^n |b_i|$. Оскільки $b_n = o(n^{k-1})$, то

$$\frac{|a_n|}{n^k} \leq \frac{|b_1| + \dots + |b_n|}{n^k} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{|b_j|}{j^{k-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Лема доведена.

Лема 5. Умова (4) еквівалентна (7а), та $\varphi(x) = -\ln \Phi(x)$, де $\Phi(x)$ - перетворення Лапласа-Стілт'єса (ПЛС) в.в. η .

Доведення. Введемо позначення $\psi_n(x) := Ee^{-x(-\ln(1-I_n/n))}$. Доведення впливає з ланцюжка еквівалентностей:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \psi_n(x)) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n \ln \psi_n(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^n(x).$$

Лема доведена.

Доведення теореми 1. Нехай виконується умова (4), доведемо що виконується (5).

З леми 3 випливає, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{M_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє рівність

$$M_n^{(k)} = \frac{k M_n^{(k-1)}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} P\{I_n = i\} (1 - i/n)^k M_{n-i}^{(k)}, n \geq 2,$$

з початковою умовою $M_1^{(k)} = 0$. Покладемо

$$l^{(0)} := 1, l^{(k)} := \frac{k}{\phi(k)} l^{(k-1)} = \frac{k!}{\phi(1) \dots \phi(k)},$$

$$a_n^{(k)} := n^k (l^{(k)} - M_n^{(k)}).$$

Індукцією по k доведемо що $M_n^{(k)} \rightarrow l^{(k)}$ при $n \rightarrow \infty$. База індукції ($k = 0$) перевірки не потребує. Використовуючи припущення індукції, маємо

$$a_n^{(k)} = c_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{n-1} P\{I_n = j\} a_{n-j}^{(k)}, n \geq 2,$$

де

$$c_n^{(k)} := n^k (l^{(k)} (1 - E(1 - I_n/n)^k) - \frac{k l^{(k-1)}}{n}) + o(n^{k-1}).$$

З визначення $l^{(k)}$ випливає, що $c_n^{(k)} = o(n^{k-1})$. Згідно з лемою 5 $a_n^{(k)} = o(n^k)$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{(k)} = l^{(k)}$. Послідовність

$\{l^{(k)}, k \in \mathbb{N}_0\}$ є моментами експоненційного субординатора $\{\sigma_i : i \geq 0\}$ з експонентою Лапласа $\varphi(x)$ (див. [3]). Оскільки $\varphi(x) \geq x$, то $l^{(k)} \leq 1$, отже розподіл визначається своїми моментами однозначно, звідки слідує (5). Теорема буде повністю доведена, якщо ми покажемо, що функція $\varphi(x)$, визначена в (4), дійсно є експонентою Лапласа. Це випливає з наведеного нижче доведення зауваження 2.

Доведення зауваження 2.

Еквівалентність умов (4) та (7а) випливає з леми 5. Імплікація (7а) $\rightarrow$ (7б) випливає з неперервності та обмеженості функції $u(t) = e^{-t}$ та того, що $u(\infty) = 0$ (ця умова потрібна, оскільки збіжність може бути невластною (див. теорема 1 на стор. 288 в [9])).

Зафіксуємо $x > 0$, тоді

$$E\left(\prod_{k=1}^n (1 - I_n^{(k)} / n)\right)^x =$$

$$\left(E(1 - I_n / n)^x\right)^n = \left(Ee^{-x(-\ln(1-I_n/n))}\right)^n.$$

Ліва частина цієї рівності збігається до $Ee^{-x\eta}$, що дає імплікацію (7б) $\rightarrow$ (7а).

Рівність розподілів $\sigma_1 =_d \eta$, випливає з представлення для експоненти Лапласа $\phi(x) = -\ln Ee^{-x\sigma_1}$, що одночасно доводить, що функція визначена в (4), є експонентою Лапласа. З представлення (6) випливає, що $k = \phi(0)$, тому $k = -\log P\{\eta < \infty\}$.

Розглянемо приклад, у якому X_n/n слабо збігається до випадкової величини $\beta_{a,b}$, що має розподіл $beta(a, b)$.

Приклад. Нехай c, d невід'ємні числа, $\alpha > -1$, та $d/(1+\alpha) \leq c$. Покладемо

$$P\{I_n = 1\} = 1 - \frac{c}{n},$$

$$P\{I_n = k\} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha \frac{d}{n^2}, k = 2, 3, \dots, n-2,$$

$$P\{I_n = n-1\} = \frac{c}{n} - \frac{d}{n^2} \sum_{k=2}^{n-2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha.$$

Тоді виконується (4) з

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + c - \frac{d}{x + \alpha + 1} = \\ &= \left(c - \frac{d}{\alpha + 1}\right) + x + \frac{d}{\alpha + 1} - \frac{d}{x + \alpha + 1} = \\ &= \left(c - \frac{d}{\alpha + 1}\right) + x + d \int_0^1 (1 - e^{-\alpha t}) e^{-(\alpha+1)t} dt, \end{aligned}$$

тому $\varphi(x)$ - експонента Лапласа субординатора з інтенсивністю поглинання $c - d/(1 + \alpha)$, зсувом 1 та мірою Леві $t \rightarrow de^{-(\alpha+1)t}$.

Якщо покласти $c := d/(1 + \alpha)$, то $X_n/n \rightarrow_d \beta_{\alpha+2,c}$, $n \rightarrow \infty$, якщо покласти $d := 0$, то $X_n/n \rightarrow_d \beta_{1,c}$, $n \rightarrow \infty$. Таким чином слабкими границями X_n/n можуть служити $\text{beta}(a,b)$ -розподіли з $a \geq 1$, і вони є розподілами деяких експоненційних субординаторів.

Зазначимо, що $\text{beta}(a,b)$ -розподіли з $a < 1$ не є розподілами експоненційних субординаторів. Дійсно, припустивши супротивне, ми б мали, що експонента Лапласа відповідного субординатора має вигляд $x(x + a + b - 1)(x + a - 1)^{-1}$, що неможливо оскільки така функція не є монотонною для всіх $x > 0$ при $a < 1$.

Автор висловлює щирі подяки своєму науковому керівнику Іксанову О.М. за численні коментарі, які посприяли покращенню стилю викладення.

Список використаних джерел

[1] van Cutsem, B. and Ycart, B. (1994). Renewal-type behaviour of absorption times in Markov chains. *Adv. Appl. Prob.* 26, 988 - 1005.

[2] Drmota, M., Iksanov, A., Moehle, M. and Roesler, U. (2009). A limiting distribution for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree. *Random Struct. Algorithms* 34, 319 - 336.

[3] Gnedin, A., Iksanov, A. and Mohle, M. (2008). On asymptotics of exchangeable coalescents with multiple collisions. *J. Appl. Probab.* 45, 1186 - 1195.

[4] Gnedin, A. and Yakubovich, Y. (2007). On the number of collisions in Λ -coalescents. *Electron. J. Probab.* 12, 1547 - 1567.

[5] Haas, B. and Miermont, G. (2009). Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains, preprint Препринт доступний на www.arxiv.org.

[6] Iksanov, A., Marynych, A. and Möhle, M. (2009). On the number of collisions in $\text{beta}(2,b)$ -coalescents. *Bernoulli* 15, 829 - 845.

[7] Iksanov, A. and Möhle, M. (2008). On the number of jumps of random walks with a barrier. *Adv. Appl. Probab.* 40, 206 - 228.

[8] Neininger, R. and Ruschendorf, L. (2004). On the contraction method with degenerate limit equation. *Ann. Probab.* 32, 2838 - 2856.

[9] Феллер В. (1984). Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2, М.: Мир, 751 стр.

Надійшла до редколегії 28.01.2010

УДК 519.6

Матвієнко В.Т., к.ф.-м.н., доц.,
Гарашенко Д.Ф.

Фокусування пучка заряджених частинок на основі методу структурно-параметричної оптимізації

В статті розглядається задача оптимізації для систем зі змінною структурою. Сформульована задача оптимального фокусування пучка заряджених частинок. Розроблений ефективний алгоритм знаходження фокуруючого поля на основі методу структурно-параметричної оптимізації. Наведені результати чисельного експерименту.

Ключові слова: оптимізація, змінна структура, фокусування пучка заряджених частинок.

E-mail: matv@imicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ.

Системи прискорення та фокусування широко використовуються в наукових дослідженнях та різних галузях народного господарства. Їх проектування добре розроблено на основі фізичних принципів. На даний момент актуальними є задачі проектування прискорюючо-фокуруючих систем з оптимальними характеристиками, які б дозволяли при одному і тому ж рівні витрат отримати пучки з більшою енергією, з більшою густиною тощо [1-7]. Параметричне представлення полів [7-13] дає можливість визначити оптимальні режими для практично реалізуючих структур.

Задачі оптимального керування пучками розглядалися багатьма вченими. Зокрема таким задачам присвячено праці [1,2, 4-9, 14,15,16]. Основою для розв'язування таких задач служать класичні методи, які містяться в монографіях [3, 8-10].

Постановка задачі.

Аналіз різних характеристик прискорюючо-фокуруючих систем показує, що їх потенціальні можливості для отримання оптимальних вихідних характеристик використовуються не повністю. Для отримання таких характеристик, наприклад, в прискорювачах з дрейфовими трубками (мал.1) важливо визначити положення

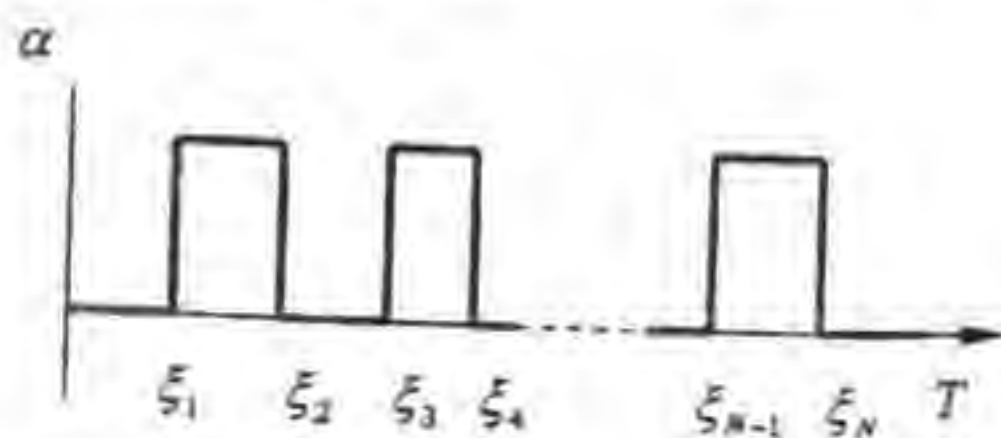
Volodymyr T. Marvienko, Dr.Sci.Tech., prof.,
Dmytriy F. Garashchenko.

Focusing of bunch of the charged particles on the basis of method of structurally-parameter optimization

In the article the task of optimization for the systems with a variable structure is consider. Formulated task of the optimum focusing of bunch of the charged particles. Effective algorithm of finding focusing field on the basis of method of structurally-parameter optimization is developed. Resulted results of numeral experiment.

Key Words: optimization, variable structure, focusing of bunch of the charged particles.

трубок (їх довжину, форму), при яких досягається максимальна інтенсивність пучка з заданими розкидами його кінцевого стану.



Мал.1. Структура функції $\alpha(\xi)$, $\xi \in [0, T]$.

Задача оптимізації пучка іонів в лінійному прискорювачі являє собою дуже складну проблему. Тому дану задачу при її розв'язуванні можна розбити на декілька підзадач: розробка методів розрахунку оптимальних прискорюючих структур; радіальне фокусування за радіальними координатами; врахування власного електростатичного поля пучка; розробка швидкодіючих чисельних алгоритмів розрахунку зовнішніх електромагнітних полів і т.д.

Для повздовжнього руху, при заданому початковому розкиді по енергії та фазі, одна з основних задач полягає у визначенні структури системи прискорення таким чином, щоб на виході енергетичний та фазовий розкиди пучка були мінімальні.

Рівняння руху частинки будемо розглядати без врахування кулонівської взаємодії

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{d^2x}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right) x - \alpha(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right] \cos \varphi, \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right) y - \alpha(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right] \cos \varphi.\end{aligned}\quad (1)$$

Будемо вважати, що відомі точки переключення ξ_i (мал.1) і амплітуда напруженості поля $\alpha(\xi_i)$ кусково-сталі.

Розглянемо задачу вибору фокусуючого поля $g(\xi)$ такого, що для початкових умов $\gamma_0, \varphi_0, x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ задовольнявся наступний критерій якості

$$\min_{g(\xi)} (x^2(T) + y^2(T)). \quad (2)$$

Вважаємо, що функція $g(\xi)$ належить класу кусково-сталих функцій. Тоді нормалізовані рівняння руху частинки в зазорі мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad \frac{dx_1}{d\xi} = x_2, \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[g(\xi)x_1 - \alpha(\xi) \frac{dx_1}{d\xi} \right] \cos \varphi, \\ \frac{dy_1}{d\xi} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{d\xi} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[-g(\xi)y_1 - \alpha(\xi) \frac{dy_1}{d\xi} \right] \cos \varphi,\end{aligned}$$

а рівняння руху частинки в трубці

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{dx_1}{d\xi} &= x_2, \quad \frac{dx_2}{d\xi} = 0, \quad \frac{dy_1}{d\xi} = y_2, \quad \frac{dy_2}{d\xi} = 0.\end{aligned}$$

При цьому скачки в точках переключення системи прискорення частинки мають вигляд

$$\begin{aligned}x_2(\xi_i + 0) &= x_2(\xi_i) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \cos \varphi(\xi_i) x_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(\xi_i + 0) &= y_2(\xi_i) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \cos \varphi(\xi_i) y_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)].\end{aligned}$$

З метою оптимізації критерія якості поставленої задачі запишемо функцію Гамільтона

$$\begin{aligned}H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) &= \\ &= \psi_1(\xi) \alpha(\xi) \cos(\varphi) + \psi_2(\xi) \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \psi_3(\xi) x_2 + \\ &+ \psi_4(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right) x_1 - \alpha(\xi) x_2 \right] \cos \varphi + \\ &+ \psi_5(\xi) y_2 + \psi_6(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \times \\ &\times \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right) y_1 - \alpha(\xi) y_2 \right] \cos \varphi.\end{aligned}$$

Запишемо систему для спряжених змінних $\psi(\xi) = (\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi), \psi_5(\xi), \psi_6(\xi))^T$ в зазорі [2]

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\xi} &= -\text{grad}_\psi H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi), \\ z &= (\gamma, \varphi, x_1, x_2, y_1, y_2)^T, \\ \frac{d\psi_1}{d\xi} &= \frac{2\pi}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} \psi_2(\xi) + \\ &+ \psi_2(\xi) \frac{\gamma^2 + 1}{(\gamma^2 - 1)^2} [g(\xi)x_1 - \alpha(\xi)x_2] \cos \varphi + \\ &+ \psi_6(\xi) \frac{\gamma^2 + 1}{(\gamma^2 - 1)^2} [-g(\xi)y_1 - \alpha(\xi)y_2] \cos \varphi, \\ \frac{d\psi_2}{d\xi} &= \psi_1(\xi) \alpha(\xi) \sin \varphi + \\ &+ \psi_4(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} [g(\xi)x_1 - \alpha(\xi)x_2] \sin \varphi + \\ &+ \psi_6(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} [-g(\xi)y_1 - \alpha(\xi)y_2] \sin \varphi, \\ \frac{d\psi_3}{d\xi} &= -\psi_4(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} g(\xi) \cos \varphi, \\ \frac{d\psi_4}{d\xi} &= -\psi_3(\xi) + \psi_4(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \alpha(\xi) \cos \varphi, \\ \frac{d\psi_5}{d\xi} &= \psi_6(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} g(\xi) \cos \varphi,\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_6}{d\xi} = -\psi_5(\xi) + \psi_6(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \alpha(\xi) \cos \varphi,$$

з початковою умовою

$$\psi(T) = -(0, 0, 2x_1(T), 0, 2y_1(T), 0)^T.$$

Система для спряжених змінних в трубці має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\xi} &= \frac{2\pi}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} \psi_2(\xi), \quad \frac{d\psi_2}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\psi_3}{d\xi} = 0, \\ \frac{d\psi_4}{d\xi} &= \psi_3(\xi), \quad \frac{d\psi_5}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\psi_6}{d\xi} = \psi_5(\xi), \end{aligned}$$

з початковою умовою

$$\psi(T) = -(0, 0, 2x_1(T), 0, 2y_1(T), 0)^T.$$

Скачки в точках переключення для спряженої системи змінних мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi_i + 0) &= \psi_1(\xi_i) - \frac{1}{2} \psi_4(\xi_i) \frac{\gamma^2(\xi_i) + 1}{(\gamma^2(\xi_i) - 1)^2} \times \\ &\times \cos \varphi(\xi_i) x_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)] - \\ &- \frac{1}{2} \psi_6(\xi_i) \frac{\gamma^2(\xi_i) + 1}{(\gamma^2(\xi_i) - 1)^{3/2}} \times \\ &\times \cos \varphi(\xi_i) y_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)], \\ \psi_2(\xi_i + 0) &= \psi_2(\xi_i) - \frac{1}{2} \psi_4(\xi_i) \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \times \\ &\times \sin \varphi(\xi_i) x_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)] - \\ &- \frac{1}{2} \psi_6(\xi_i) \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \times \\ &\times \sin \varphi(\xi_i) y_1(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)], \\ \psi_3(\xi_i + 0) &= \psi_3(\xi_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \psi_4(\xi_i) \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \cos \varphi(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)], \\ \psi_5(\xi_i + 0) &= \psi_5(\xi_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \psi_6(\xi_i) \frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1} \cos \varphi(\xi_i) [\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)]. \end{aligned}$$

Для мінімізації критерію (2) скористаємося градієнтною процедурою [17]. Градієнт від критерію якості по параметрам g , поставленої задачі запишеться у наступному вигляді

$$\text{grad}_g I = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \text{grad}_g H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) d\xi,$$

$$\text{де } \text{grad}_g H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) =$$

$$= \psi_4(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} x_1 \cos \varphi - \psi_6(\xi) \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} y_1 \cos \varphi.$$

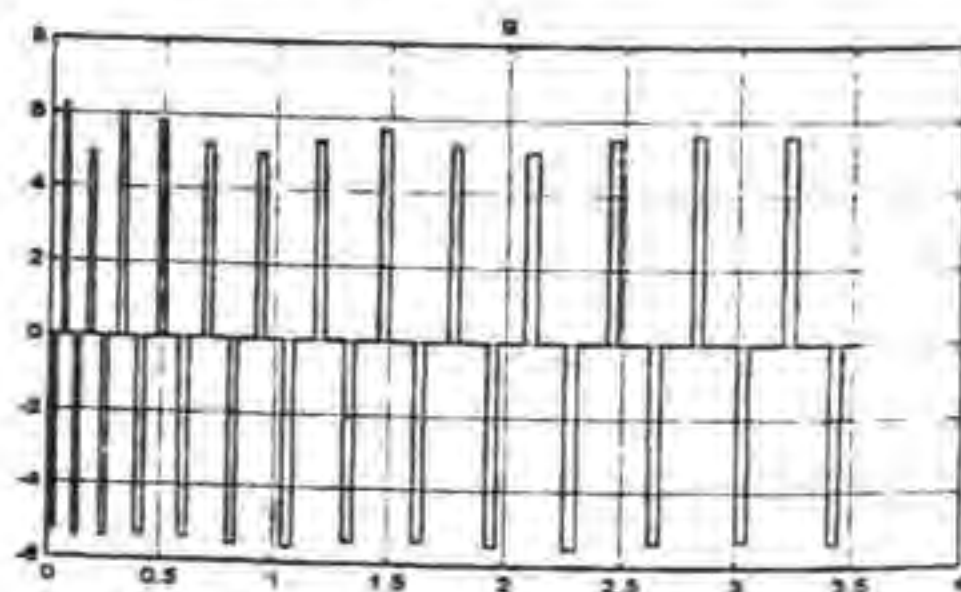
Чисельне моделювання поведінки руху пучка заряджених частинок.

Моделювання руху заряджених частинок (1) проводилося з початковою енергією елементарних частинок $\gamma_0 = 1.0007076$, довжина каналу в безрозмірних одиницях $T = 3.54$ (7.08 м). Обмеження на функцію керування наступні: $0 \leq \alpha(\xi) \leq c = 0.03$. Інтервал початкових фаз $[a, b] = [2.0, 3.1]$. Задача розв'язувалася при початкових умов

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1.0007076, \varphi_0 = 1.4, x_0 = 0.005, \\ y_0 &= -0.005, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0. \end{aligned}$$

Початкові значення критерію (2) мало значення $2.7689 \cdot 10^{-4}$, після оптимізації - $2.532 \cdot 10^{-8}$.

Результати обчислювального експерименту представлено графічно на мал.2.



Мал.2. Оптимальне фокусуюче поле $g(\xi)$.

Висновки.

Алгоритми керування з використанням градієнтних методів в класі кусково-неперервних функцій для багатьох прикладних задач використати важко в силу поганої збіжності ітераційних процедур. Тому застосовують методику параметризації керування і таким чином переходять до скінченновимірних оптимізаційних задач. Розв'язати останні в силу неявної залежності розв'язків від параметрів також непросто, особливо у випадку великої кількості оптимізаційних параметрів. Тому для конкретних задач, вивчаючи їх природу, на першому етапі намагаються ввести щонайменше таких параметрів, можливо і формальних, які б наближено визначали більшу кількість реальних

параметрів і з достатньою адекватністю описували функціонування об'єкту. У подальшому знаходять оптимальний режим в просторі меншої кількості параметрів, який дає можливість визначити наближення для більшої кількості. Більша кількість оптимальних параметрів може стати основою для визначення початкового наближення функції керування, наприклад, в класі кусково-неперервних функцій і т.д. Такий підхід є конструктивним і пов'язаний з ускладненням математичної моделі як за керуванням, так і за її структурою. З іншої сторони такий підхід дає можливість визначити оптимальні режими, які технічно можна реалізувати.

На основі вказаної методики в даній роботі розроблений та протестований алгоритм оптимального вибору фокусуєчого поля для лінійних прискорювачів.

Список використаних джерел.

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Видавництво - поліграфічний центр "Київський університет", 2002. – 197с.
2. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно – параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. –304с.
3. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. – 328с.
4. Гаращенко Ф.Г. Применение методов практической устойчивости к моделированию и управлению пучками заряженных частиц //Автоматика. –1982. –№ 5. –С.42-48.
5. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач практической устойчивости численными методами и оптимизация динамики пучков //Прикладная математика и механика. –1987. – Т.51. №5. –С.717-723.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. –М.: Наука, 1976. –392с.
7. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. –Т.19. –№2. –С.292-303.
8. Гаращенко Ф.Г. Недифференцируемые задачи структурно-параметрической оптимизации и проектирование ускоряющих и фокусирующих систем //Автоматика. –1986. – №1. –С.50-53.
9. Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В. Структурная оптимизация динамических систем на основе обобщенного принципа Беллмана // Проблемы управления и информатики. –1997. –№6. –С.6-13.
10. Гаращенко Ф.Г. Задачи структурной параметрической оптимизации разрывных динамических систем // Автоматика. –1985. –№2. –С.28-30.
11. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1976. –335с.
12. Ладиков-Роев Ю.П., Самойленко Ю.И. Структурная оптимизация регулирующих сред // Проблемы управления и информатики. –1996. – №1-2. –С.101-108.
13. Яковлев О.С. Метод структурного синтеза нелинейных регуляторов //Проблемы управления и информатики. –1996. –№1-2. –С.211-223.
14. Катчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. –М.: Атомиздат, 1966. –310с.
15. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. –Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1980. –228с.
16. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков. –Л., 1990. –310с.
17. Srisena M.K. A gradient method for computing optimal bang-bang controls. // Int. J. of Contr., –1974, –Vol .19, №2, –Р. 257-264.

Надійшла до редколегії 08.01.2010

УДК 519.8

Машченко С.О., к. ф.-м. н. доц.,
Бровченко С.О., аспірант

Рівновага за набором цілей гравців

Проведений короткий огляд напрямів розвитку концепції рівноважності за Нешем у некооперативних іграх. Розглядається та досліджується рівновага за набором цілей гравців, у якій фігурує поняття цілі гравця, яка може не зводитися до максимізації лише його функції виграшу.

Ключові слова: рівновага за Нешем, рівновага за Бергем, коаліційна рівновага, індивідуально-оптимальна рівновага.

*E-mail: msomail@yandex.ru, serguz@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Найбільш привабливою концепцією оптимальності в умовах повної інформованості гравців є оптимальність за Нешем. Концепція рівноважності за Нешем базується на ідеї некооперативної поведінки, коли гравці незалежно вибирають свої стратегії та кожен враховує лише свою функцію виграшу. Розглянемо гру G у нормальній формі $(X, u; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ - функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, приймає дійсні значення і максимізується.

Ситуація x^* гри називається рівновагою Неша [1], якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому одному гравцю (усі інші свої стратегії не змінюють), оскільки значення його функції виграшу не покращиться, тобто

$$u_i(x^*) \geq u_i(x, x_{-i}^*), \forall x_i \in X_i, i \in N.$$

Практичне застосування рівноваг Неша для розв'язання та дослідження конфліктів в економічних, соціальних, політичних, екологічних та багатьох інших системах з одного боку показало їх високу адекватність реальним умовам багатьох конфліктів, з іншого боку дозволило виділити ряд таких класів систем, для яких концепцію рівноваги за Нешем можна успішно узагальнити (розширити).

У першу чергу, концепція рівноваги за Нешем

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.,
Brovchenko S.O., Ph.D. student

Equilibrium by the set of player's purposes

A brief review of the development directions for the Nash equilibrium in non-cooperative games is conducted. A new concept of equilibrium by the set of player's purposes is considered and explored. Such equilibrium deals with the notion of player's purpose which may consist not only in maximization of his payoff function.

Keywords: Nash equilibrium, Berge equilibrium, coalition equilibrium, individually optimal equilibrium.

була узагальненою на ігри з множиною функцій виграшу (вектор-функціями виграшів) гравця [2-5] (багатокритеріальні, векторні ігри). Початком дослідження цих ігор можна вважати роботи Блеквела [2] про антагоністичні ігри та Шеплі [3], де була запропонованою концепція рівноваги багатокритеріальної гри. Отримані в цих роботах результати майже без змін використовуються та досліджуються сьогодні [4-5]. По аналогії із скалярною, багатокритеріальна гра є, по суті, задачею прийняття рішень при кількох критеріях в умовах конфлікту. Зрозуміло, що методи розв'язання таких задач є комбінацією методів класичної теорії ігор та багатокритеріальної оптимізації. Тому, окрім принципу оптимальності за Нешем використовується також принцип оптимальності за Парето [6].

Розглянемо багатокритеріальну гру MG у нормальній формі $(X, U; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$; $U_i(x) = (u_j(x))_{j \in J(i)}$ - вектор функція його виграшу, $J(i)$ - множина індексів його критеріїв. Функції $u_j(x)$, $j \in J(i)$, є визначеними на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$ та називаються критеріями гравця $i \in N$.

Ситуація x^* гри називається абсолютною векторною рівновагою гри MG (позначимо їх множину через AVE), якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому одному гравцю, оскільки значення його критеріїв є найкращими, тобто

$$u_j(x^*) \geq u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*), j \in J(i), \forall x_i \in X_i, i \in N. \quad (1)$$

Вказана вище умова є дуже сильною, тому інтерес представляють означення, які засновані на аксіомах (сильній та слабкій) Парето [6].

Ситуація x^* гри називається сильною векторною рівновагою [5] гри MG (позначимо її множини через SVE), якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому одному гравцю, оскільки значення його критеріїв не покращиться, тобто $\forall i \in N, \forall x_i \in X_i$:

$$\begin{cases} u_j(x^*) \leq u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*), j \in J(i), \\ \exists i \in J(i) : u_i(x^*) < u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*). \end{cases} \quad (2)$$

Ситуація x^* гри називається слабкою векторною рівновагою [5] гри MG (позначимо її множини через WVE), якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому одному гравцю, оскільки значення його критеріїв сильно не покращиться:

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i : u_i(x^*) < u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*), j \in J(i). \quad (3)$$

Як показано у [5] $AVE \subseteq SVE \subseteq WVE$.

Застосування концепції рівноважності за Нешем для розв'язання реальних соціально-економічних, політичних конфліктів виявило ряд випадків, у яких її використання приводило до парадоксальних результатів. Вперше на це звернув увагу Берж К. і у [7] запропонував нове поняття рівноваги, згідно якого одна коаліція гравців може максимізувати функції виграшу гравців іншої коаліції.

Нехай $R \subset N$ є підмножиною індексів функцій виграшу гравців, а $S \subset N$ є коаліцією гравців. Ситуація $x^* \in X$ називається рівновагою гри G для множини індексів R відносно коаліції S , якщо:

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_S, x_{N \setminus S}^*), \forall x_S \in X_S, \forall i \in R.$$

Це означення не було розвинене автором далі і лише через багато років до нього звернулися автори робіт [8,9]. Певний інтерес представляє альтруїстичний варіант рівноваги за Бержем, який був розглянутий Жуковським В. [8].

Ситуація x^* називається рівновагою за Бержем гри G (позначимо її множини через BE) у формі $(X_i, u_i, i \in N)$, якщо

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*), \forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}, \forall i \in N, \quad (4)$$

тобто в рівновазі за Бержем доповнювальна коаліція $N \setminus \{i\}$ кожного гравця $i \in N$ максимізує

його виграш (один - за усіх, усі - за одного).

На перший погляд, таку поведінку важко назвати раціональною, але приклади з реального життя доводять протилежне (альтруїстичні погляди мають місце, наприклад, у родинних відносинах, у християнських общинах і т.п.). Ці ідеї пізніше були розвинені у роботі [9].

Ця рівновага може використовуватися також як альтернативне рішення конфлікту, коли немає рівноваги за Нешем або, коли їх багато. В рівновазі за Бержем кожний гравець одержує свій максимальний виграш, якщо ситуація сприятлива для нього зобов'язанням або готовністю інших гравців вибирати стратегії, вигідні йому.

В [10] Абало К. і Кострева М. дають більш загальне визначення рівноваги за Бержем.

Нехай $R = \{R(k)\}_{k \in K}$ є розбиттям N на множини, що не перетинаються, тобто $\bigcup_{k \in K} R(k) = N$; $R(m) \cap R(l) = \emptyset$; $m, l \in K$; $m \neq l$.

Нехай також $S = \{S(k)\}_{k \in K}$ - довільний набір попарно різних підмножин N , які покривають усю множини гравців, тобто $\bigcup_{k \in K} S(k) = N$;

$S(m) \neq S(l)$; $m, l \in K$; $m \neq l$. Ситуація $x^* \in X$ називається узагальненою рівновагою за Бержем у грі G для розбиття R відносно набору підмножин S , якщо для $\forall x_{S(k)} \in X_{S(k)} \forall i \in R(k) \forall k \in K$ виконується наступні нерівності:

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_{S(k)}, x_{N \setminus S(k)}^*).$$

Звернемо увагу, що у цьому означенні є два набори підмножин. Набір $R = \{R(k)\}_{k \in K}$ є розбиттям множини функцій виграшу гравців на множини, що не перетинаються, а набір $S = \{S(k)\}_{k \in K}$ є сукупністю коаліцій гравців, які спільно обирають свої коаліційні стратегії. Ці коаліції можуть перетинатися, але повинні бути попарно різними. Таким чином, коаліції гравців, які можуть перетинатися між собою, переслідують коаліційні цілі, які не перетинаються, і можуть складатися з функцій виграшу гравців, які навіть не належать до них.

Означення узагальненої рівноваги за Бержем дає поняття рівноваги в дуже широкому розумінні. Зокрема, для $R(i) = \{i\}$, $S(i) = \{i\}$, $i \in N$, одержимо означення рівноваги за Нешем; для $R(i) = \{i\}$, $S(i) = N \setminus \{i\}$, $i \in N$, одержимо означення альтруїстичної рівноваги за Бержем у сенсі В. Жуковського; для $R(k) = S(k)$, $k \in K$, за

умовами: $\bigcup_{k \in K} S(k) = N$; $S(k) \cap S(l) = \emptyset$; $k, l \in K$;

$k \neq l$, - одержимо означення коаліційної рівноваги. У певному сенсі цей принцип оптимальності можна вважати спробою параметризації рівноваг за допомогою сукупностей підмножин $R(k)$, $S(k)$, $k \in K$.

В [10] Абало К. і Кострева М. формулюють також теорему існування узагальненої рівноваги за Бержем. Слід зазначити, що ці теореми засновані на більш ранній, яка належить Раджіфу М. [9] і формалізує умови існування рівноваги за Бержем у сенсі Жуковського В. [8].

Після глибокого дослідження, авторами роботи [11] були зроблені висновки, що припущення теорем Абало К. і Кострева М., не є достатніми для існування рівноваги за Бержем, як у сенсі Жуковського В., так і в узагальненому вигляді. Такі ж самі зауваження були зроблені і для теорем Раджіфа М. Причиною проблем, пов'язаних з рівновагою за Бержем, як у сенсі Жуковського В., так і Абало К. і Кострева М., є залежність множин коаліційних стратегій гравців. У статті [11] була наведена виправлена версія однієї з теорем Абало К. і Кострева М., яка виявилася не конструктивною і показала, що задача існування рівноваги за Бержем набагато більш важкою, ніж проблема існування рівноваги за Нешем. Більше того, рівновага за Бержем у іграх більше ніж трьох осіб існує у виключних випадках. Тому спроба використання "каркаса" некооперативної гри для взаємозалежних стратегій гравців є невдалою.

Спробуємо подивитися на рівноваги за Бержем з іншого боку. Розглянемо гру BG у нормальній формі $(X_{S(k)}, U_{R(k)}; k \in K)$, учасниками (агентами) якої є коаліції гравців $k \in K$. Цілі цих коаліцій можуть складатися з функцій виграшу гравців, які можуть і не бути членами цих коаліцій. Якщо коаліції гравців не перетинаються, то рівновага за Бержем у сенсі Жуковського В. втрачає свій сенс, а узагальнена рівновага за Бержем є її абсолютною векторною рівновагою. Оригінальною ідеєю, яка закладена в основу цієї рівноваги, є можливість моделювання конфліктних ситуацій, у яких в області інтересів одних гравців можуть виявитися функції виграшу інших гравців.

Розглянуті вище напрями розвитку концепції рівноваги за Нешем показують:

- найбільш загальним класом некооперативних ігор є багатокритеріальні ігри;
- найбільш загальним принципом оптимальності некооперативної багатокритеріальної гри є

слабка векторна рівноважність (множина слабких векторних рівноваг включає у себе сильні векторні рівноваги, які, у свою чергу, включають у себе абсолютні векторні рівноваги);
- коаліційні ігри та ігри за Бержем (з незалежними множинами коаліційних стратегій) зводяться до багатокритеріальних ігор;

- кожен гравець може мати ціль, яка складається з довільної кількості критеріїв, серед яких можуть бути функції виграшу інших гравців.

У цій роботі буде запропоновано новий принцип оптимальності у некооперативних іграх, у якому фігурує поняття цілі гравця, яка може не зводитися до максимізації лише його критеріїв.

Розглянемо багатокритеріальну гру MG у нормальній формі $(X, U; i \in N)$. Нагадаємо, що $U_i(x) = (u_j(x))_{j \in J(i)}$ є вектором критеріїв гравця $i \in N$, які для нього є об'єктивними оцінками ситуацій $x \in X$ гри MG . Позначимо через $J = \bigcup_{i \in N} J(i)$ множину індексів критеріїв, за якими усі гравці оцінюють ситуації гри MG .

Нехай $\{A(i)\}_{i \in N}$ - набір з n довільних підмножин множини індексів критеріїв J гри MG . Вектор $U_{A(i)}(x) = (u_j(x))_{j \in A(i)}$ будемо називати ціллю гравця $i \in N$, а $\{U_{A(i)}\}_{i \in N}$ будемо називати набором цілей гравців гри MG . Відмітимо, що ціль гравця $i \in N$ може співпадати з вектором його критеріїв, тоді $A(i) = J(i)$, і можна сказати, що вона є об'єктивною. Ціль гравця $i \in N$ може також не співпадати з вектором його критеріїв, тоді $A(i) \neq J(i)$, і навіть не включати множину індексів його критеріїв ($A(i) \cap J(i) = \emptyset$), тоді можна сказати, що така ціль у тій, чи іншій мірі не є об'єктивною. Зокрема, якщо ціль гравця включає критерії інших гравців наряду із своїми, то її можна назвати коаліційною. Якщо ціль не включає власні критерії гравця, то її можна назвати альтруїстичною. Причинами виникнення необ'єктивних цілей можуть бути, наприклад, партнерські відносини між гравцями, певний світогляд гравця, наявність деякої метацилі, яку неможливо, або дуже складно формалізувати, але можна досягти, якщо враховувати інтереси інших гравців.

Уведемо означення рівноваги гри MG за набором цілей гравців у залежності від обраного способу порівняння ситуацій гри, який визначає тип цілі, відповідно абсолютний, утилітарний або егалітарний.

Ситуацію x^* будемо називати абсолютною

рівновагою гри MG за набором абсолютних цілей $\{U_{A(i)}\}_{i \in N}$ (позначимо їх множину через AAE), якщо від неї не вигідно відхилятися будь-якому одному гравцю, оскільки вектор критеріїв, які складають його ціль є найкращим, тобто

$$U_{A(i)}(x^*) \geq U_{A(i)}(x_i, x_{N \setminus i}^*), \forall x_i \in X_i, i \in N. \quad (5)$$

Вказана вище умова є дуже сильною, тому інтерес представляють означення, які засновані на аксіомах (сильній та слабкій) Парето [6].

Ситуація x^* будемо називати сильною рівновагою гри MG за набором утилітарних цілей $\{U_{A(i)}\}_{i \in N}$ (позначимо їх множину через SAE), якщо від неї не вигідно відхилятися будь-якому одному гравцю, оскільки вектор критеріїв, які складають його ціль не покращиться, тобто

$$\forall i \in N, \exists x_i \in X_i : U_{A(i)}(x_i, x_{N \setminus i}^*) > U_{A(i)}(x^*). \quad (6)$$

Ситуація x^* гри будемо називати слабкою рівновагою гри MG за набором егалітарних цілей $\{U_{A(i)}\}_{i \in N}$ (позначимо їх множину через WAE), якщо від неї не вигідно відхилятися будь-якому одному гравцю, оскільки вектор критеріїв, які складають його ціль сильно не покращиться:

$$\forall i \in N, \exists x_i \in X_i : U_{A(i)}(x_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_{A(i)}(x^*). \quad (7)$$

Цілком зрозуміло, що поняття рівноваги гри MG за набором цілей гравців є надто широким і загальним. Тому нас будуть цікавити його конкретні випадки.

Розглянемо рівноваги з власними цілями гравців. Нехай у кожного гравця $i \in N$ є своя власна ціль. У цьому випадку ціль кожного гравця $i \in N$ співпадає з вектором його критеріїв, тобто $A(i) = J(i)$, і вона є об'єктивною. Тоді якщо попарно порівняти означення (1) та (5), (2) та (6), (3) та (7), то неважко побачити, що буде справедливим наступне твердження.

Твердження 1. Нехай $A(i) = J(i)$, $i \in N$, тоді $AAE = AVE$, $SAE = SVE$, $WAE = WVE$.

Іншими словами, коли цілі гравців є власними, то поняття рівноваги за набором цілей співпадає з поняттям векторної рівноваги.

Зокрема, якщо $|A(i)| = |J(i)| = 1, \forall i \in N$, то інтереси кожного гравця $i \in N$ характеризуються одним своїм власним критерієм (функцією виграшу) $u_i(x)$. Тоді множини гравців та критеріїв співпадають

($N = J$), а кожному гравцю відповідає свій критерій $U_{A(i)}(x) = u_i(x)$, $i \in N$. У цьому випадку багатокритеріальна гра MG виродиться у класичну скалярну гру G . Неважко перевірити, що $AAE = SAE = WAE = NE$, тобто усі типи рівноваг за набором цілей $\{u_i\}_{i \in N}$ будуть рівновагами Неша.

Саме цей випадок цільового взаємозв'язку гравців є найбільш дослідженим. Починаючи з монографії фон Неймана та Моргенштерна [12] некооперативна теорія ігор на протязі майже століття розвивалась і пропонувала нові рішення та концепції. Ігри з векторними функціями виграшу гравців описані у багатьох роботах сучасних вчених, наприклад [4,5].

Розглянемо багатоцільові рівноваги. Нехай кожен гравець має довільну ціль. Цей клас ігор має настільки загальні властивості та настільки загальні умови існування рівноваг за набором цілей, наскільки він є загальним. Тому особливий інтерес представляють конкретні випадки цільового взаємозв'язку гравців.

Розглянемо рівноваги із спільною ціллю гравців. Нехай у всіх гравців є спільна множина критеріїв, які кожен з них хоче максимізувати – спільна ціль. Тобто існує підмножина $J_0 \subset J$ така, що $\bigcap_{i \in N} A(i) = J_0$. Такого типу ігри,

наприклад, можуть виникати в умовах нечіткої інформації. Зокрема, розглянемо скалярну гру з нечіткими множинами стратегій гравців.

Нехай $(f_i, u_i; i \in N)$ – гра з нечіткими множинами стратегій гравців, де $f_i : X_i \rightarrow [0,1]$ є функцією належності до нечіткої множини стратегій, яка визначена на універсальній множині стратегій X_i гравця $i \in N$, а $u_i : X_i \rightarrow R^1$ є функцією його виграшу. Тоді, за підходом Орловського [13], нечітка рівновага цієї гри є векторною рівновагою двох-критеріальної гри $(X_i, (f_i, u_i); i \in N)$, де $f(x) = \min_{i \in N} f_i(x_i)$ є спільною для усіх гравців функцією належності до нечіткої множини ситуацій гри. Таким чином, нечітка рівновага є рівновагою із спільною ціллю гравців.

Слід відмітити, що дослідження рівноваг із спільною ціллю гравців було обмеженим лише класом ігор в умовах нечіткої інформації.

Цікаву властивість рівноваг із спільною ціллю гравців ілюструє наступна теорема. Позначимо

$$SO(J_0) = \{x \in X \mid \nexists y \in X : U_{J_0}(y) \gg U_{J_0}(x^*)\}$$

- множину слабо оптимальних за Парето (оптимальних за Слейтером) [6] ситуацій гри MG відповідно до вектору критеріїв $U_{J_0}(x) = (u_j(x))_{j \in J_0}$, $J_0 \subset J$.

Теорема 1. Нехай усі гравці мають спільну ціль, тобто $\exists J_0 \subset J$, що $\bigcap_{i \in N} A(i) = J_0$. Тоді $WAE \supseteq SO(J_0)$.

Доведення. Нехай $x^* \in SO(J_0) \subseteq SO$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin WAE$. Тоді за (7) $\exists i \in N \exists y_i \in X_i$, для яких має місце відношення $U_{A(i)}(y_i, x_{N \setminus i}^*) \succ U_{A(i)}(x^*)$. Оскільки $J_0 \subset A(i)$, то звідси випливає, що $U_{J_0}(y_i, x_{N \setminus i}^*) \succ U_{J_0}(x^*)$. Позначимо через $y = (y_i, x_{N \setminus i}^*)$. Тоді $U_{J_0}(y) \succ U_{J_0}(x^*)$. Звідси випливає, що $x^* \notin SO(J_0)$. Одержали суперечність. Теорему доведено.

Важливим наслідком цієї теореми є той факт, що достатньою умовою існування рівноваг із спільною ціллю гравців є умова існування слабо оптимальних за Парето ситуацій гри за вектором спільних критеріїв.

Розглянемо рівноваги за набором альтруїстичних цілей гравців. Нехай $N = J$. Тоді багатокритеріальна гра MG вироджується у скалярну некооперативну гру G . Нехай також кожен гравець $i \in N$ зацікавлений у максимізації функцій виграшу інших гравців, окрім себе. Тоді $A(i) = N \setminus \{i\}$, $i \in N$. Виявляється, що у цьому випадку рівноваги за набором альтруїстичних цілей гравців є зв'язаними з рівновагами за Бержем наступним чином.

Теорема 2. Нехай $N = J$ та усі гравці мають альтруїстичні цілі, тобто $A(i) = N \setminus \{i\}$, $\forall i \in N$. Тоді $WAE \supseteq BE$.

Доведення. Якщо $BE = \emptyset$, то, очевидно, $WAE \supseteq BE$. Нехай $x^* \in BE$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin WAE$. Тоді за (7) $\exists j \in N$, $\exists y_j \in X_j$: $U_{A(j)}(y_j, x_{N \setminus j}^*) \succ U_{A(j)}(x^*)$. Звідси випливає, що $u_j(y_j, x_{N \setminus j}^*) > u_j(x^*)$, $\forall i \in N = J$. Зокрема,

$\exists i \in N, i \neq j$, що $u_i(y_j, x_{N \setminus j}^*) > u_i(x^*)$. Позначимо через $y_{N \setminus j} = (y_j, x_{N \setminus \{j\}}^*)$, тоді звідси одержимо $u_i(x_i^*, y_{N \setminus j}) > u_i(x_i^*, x_{N \setminus j}^*) = u_i(x^*)$, що суперечить (4). Теорему доведено.

Ця рівновага схожа на альтруїстичний варіант рівноваги за Бержем у сенсі Жуковського В. і є

досі не дослідженим випадком багатоцільової гри. Слід відмітити, що рівноваги за набором альтруїстичних цілей гравців є більш реалістичною, ніж аналог рівноваги за Бержем, оскільки у цій рівновазі кожен гравець незалежно від інших вибирає свої стратегії, але враховує, при цьому, функції виграшу інших гравців. У випадку рівноваги за Бержем функцію виграшу гравця $i \in N$ максимізує його доповнювальна коаліція сумісно вибираючи стратегії. Навіть для трьох гравців важко уявити сценарій такої гри.

Розглянемо рівноваги за набором цілей, що попарно перетинаються. Нехай у кожній парі гравців є спільна ціль. Тобто для будь-яких гравців $i, l \in N$ їх цілі $A(i) \cap A(l) \neq \emptyset$. У випадку гри трьох осіб, така гра нагадує "любовний трикутник" – цікавий і досі не досліджений випадок рівноваги за набором цілей.

Розглянемо рівноваги з ієрархією цілей гравців. Нехай a є відображенням, яке ставить у відповідність кожному гравцю $i \in N$ з ціллю $A(i)$ множину гравців $a(i) \subset N$, цілі яких $A(j)$, $j \in a(i)$, є його підцілями, тобто $A(i) = \bigcup_{j \in a(i)} A(j)$.

Окрім того, існує єдиний гравець $i_0 \in N$, що $a^{-1}(i_0) = \emptyset$, а цілі усіх інших гравців є його підцілями, тобто $A(i_0) = J$. Гравець $i \in N$, для якого $A(i) = J(i)$ (ціль характеризується вектором власних критеріїв) та $a(i) = \emptyset$ (не існує гравців цілі яких є підцілями гравця i) називається гравцем з власною ціллю. Множину гравців з елементарною ціллю будемо позначати через $T(N)$. Для будь-якого гравця $i \in N$ з не елементарною ціллю множина $a(i)$ складається з гравців, цілі яких є його підцілями.

Рівновагою з ієрархією цілей гравців будемо називати рівновагу за набором цілей, для яких відображення $a(i) \neq \emptyset$ для $\forall i \in N \setminus T(N)$. Цей тип рівноваг є також не дослідженим.

Розглянемо одноцільові рівноваги. Нехай кожен гравець $i \in N$ зацікавлений у максимізації усіх критеріїв. Тоді $A(i) = J, \forall i \in N$.

Ситуація x^* гри називається сильною індивідуально-оптимальною рівновагою [14,15] гри MG (позначимо їх множину через $SIOE$), якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому гравцю, оскільки значення критеріїв усіх гравців не покращиться, тобто

$$\forall i \in N, \exists x_i \in X_i: U_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \succ U_j(x^*).$$

Ситуація x^* гри називається слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою [14,15] гри MG (позначимо їх множини через $WIOE$), якщо від неї не вигідно відхилитись будь-якому гравцю, оскільки значення критеріїв усіх гравців сильно не покращиться, тобто

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i : U_i(x_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_i(x^*).$$

Неважко перевірити, що будь-яка сильна (слабка) індивідуально-оптимальна рівновага є рівновагою за набором утилітарних (егалітарних) цілей $A(i) = J, \forall i \in N$, і навпаки.

Виявляється, що індивідуально-оптимальні рівноваги узагальнюють усі інші варіанти рівноваги за набором цілей гравців у наступному сенсі.

Позначимо через $A: N \rightarrow 2^J$ відображення, яке співставляє кожному гравцю $i \in N$ множини індексів $A(i) \subseteq J$ критеріїв, які складають його ціль $U_{A(i)}$.

Також позначимо через $SAE(A)$ ($WAE(A)$) – множини рівноваг за набором $\{U_{A(i)}\}_{i \in N}$ утилітарних (егалітарних) цілей гравців.

Теорема 3. Множина сильних (слабких) індивідуально-оптимальних рівноваг включає у себе множини рівноваг за будь-яким набором утилітарних (егалітарних) цілей гравців. Тобто, $SIOE \supseteq SAE(A)$ ($WIOE \supseteq WAE(A)$) для будь-якого непорожнього відображення $A: N \rightarrow 2^J$.

Доведення. Нехай будь-якого непорожнього відображення A ситуація $x^* \in SAE(A)$ ($x^* \in WAE(A)$). Припустимо супротивне, що $x^* \in SIOE$ ($x^* \in WIOE$). Тоді за (7) $\exists i \in N \exists y_i \in X_i$, для яких має місце відношення $U_i(y_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_i(x^*)$ ($U_i(y_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_i(x^*)$). Оскільки множина $A(i) \subseteq J$, то звідси випливає наступне відношення $U_{A(i)}(y_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_{A(i)}(x^*)$ ($U_{A(i)}(y_i, x_{N \setminus i}^*) \gg U_{A(i)}(x^*)$). За (7) звідси випливає, що $x^* \in SAE(A)$ ($x^* \in WAE(A)$). Одержали суперечність. Теорему доведено.

Розглянуте у цій роботі поняття рівноваги за набором цілей гравців розширює коло конфліктних ситуацій, які можуть бути успішно розв'язаними. Особливий інтерес у подальшому дослідженні можуть представляти конкретні випадки цільової взаємодії гравців, які дозволять встановити різні по складності умови існування рівноваг і взаємозв'язок одних типів рівноваг з

іншими.

Список використаних джерел

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
2. Blackwell D. An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs// Pacific Journal of Mathematics. -1956. - 6. - P. 1-8.
3. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoff// Naval Research Logistics Quarterly. -1959, - 6. -P. 57-61.
4. Wang S. Existence of a Pareto Equilibrium// J. Optim. Theory Appl.-1993,-79. P. 373-384.
5. Мащенко С.О. Рівновага за Нешем у багатокритеріальній грі// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2001. -3. -С. 123-129.
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. –М.: Наука, 1982. – 255 с.
7. Бергс Г. Общая теория игр нескольких лиц. –М.: Физматгиз, 1961. – 126 с.
8. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – К.: Наукова думка, -1994. -320 с.
9. Radjef M.S. Sur l'existence d'un equilibre de Berge pour un jeu differentiel a n-personnes// Cah. Math. Univ.d'Oran. -1988. -1. C. 89-93.
10. Abalo K.Y., Kostreva M.M. Berge Equilibria: Some Recent Results from Fixed-Point Theorems// Applied Mathematics and Computation. -2005. -169. P. 624-638.
11. Nessah R, Larbani M, Tazdait T. A note on Berge Equilibrium// Applied Mathematics Letters. -2007. -20. P. 926-932.
12. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, - 1970. -708 с.
13. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. –М.: Наука, -1981. -206 с.
14. Мащенко С.О. Індивідуально-оптимальні рівноваги в некооперативних опуклих іграх// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2008.-2.-С.105-110.
15. Мащенко С.О. Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2008. -3. -С. 142-147.

Надійшла до редколегії 25.01.10.

УДК 004.415.2

Т.С. Парфірова, аспірант*

Про зведення послідовно-паралельних композиційних програм до чисто послідовного виду

Показано, що в композиційному програмуванні семантичні структури програм, що містять як послідовне так і паралельне виконання операторів з подальшим злиттям, можна перетворити в еквівалентні за поведінкою чисто послідовні програми. Чисто послідовна програма може бути побудована з даних операторів за допомогою формальної процедури, для якої потрібно лише знання вхідних і вихідних інтерфейсів, але не їх семантики.

Ключові слова: композиція, послідовно-паралельна програма, чисто послідовна програма.

*E-mail: eremita.i@gmail.com

Статтю представив с.н.с., д.ф.-м.н. Буй Д.Б.

Вступ

Створення складних програмних систем включає в себе побудову потоків даних між підсистемами. Ця робота присвячена моделюванню важливого часткового випадку – послідовних потоків. Таке звуження цілком обумовлене прагматикою: структури типу циклу і розгалуження, як правило, характеризують побудову програми на мікрорівні, вони інкапсульовані всередині невеликих програмних одиниць, а потік даних між такими одиницями можна вважати лінійним.

Моделювання послідовних структур програм на основі суперпозиції (добутку) унарних функцій не повністю адекватно відображає суть явища, оскільки підсистема в послідовній системі може отримувати на вхід не тільки всі, а й деяку частину даних від безпосередньо передуючої підсистеми (Рис. 1).

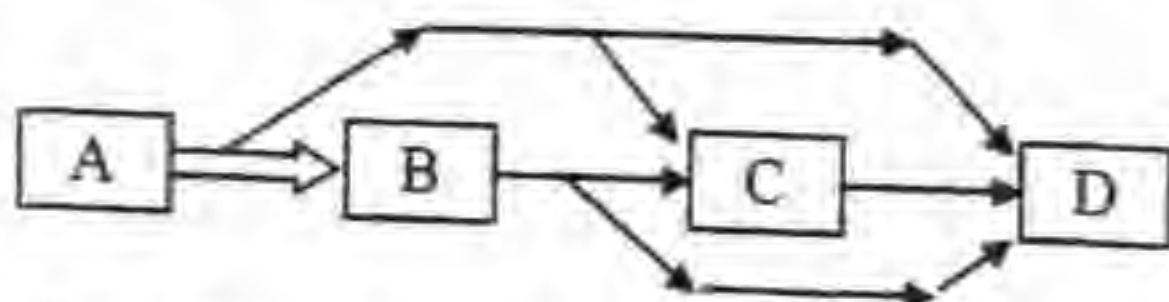


Рис. 1 Послідовний потік даних

T. S. Parfirova, Ph.D student *

On reduction of sequential-parallel compositional programs to entirely sequential form

It is shown that semantic structures of programs that contain both sequential and parallel combinations of statements with further merging, in compositional programming, could be transformed to behaviorally equivalent entirely sequential programs. This entirely sequential program could be built by a formal procedure that only needs to know input and output interfaces of statements but not their semantics.

Key Words: composition, sequential-parallel program, entirely sequential program

Окрім цього, потік даних з виходу деякої підсистеми може передаватись частинами не лише безпосередньому наступнику, але й різним наступним підсистемам, як заданим апіорі, так і таким, що визначаються динамічно, що також важко моделювати в термінах множення унарних функцій над абстрактними даними.

Базові означення

Відповідно до композиційного підходу (КП) [1-3] і розробленої на його основі сутнісної платформи [4-6] дані моделюються іменними множинами (ІМ), а підсистеми – іменними функціями (ІФ), означення яких подано нижче. Позначимо через V і D множину всіх імен і денотатів відповідно. V -іменною множиною називають функціональне¹ бінарне відношення $\alpha \in D^V$, $V \subseteq V$. Оскільки композиційне програмування має справу з моделюванням реальних даних, то всюди далі розглядаємо лише фінітні об'єкти, в тому числі V -іменні множини при скінченних V . Через $\mathcal{N}$ позначимо множину всіх таких ІМ.

¹ Одним із відгалужень КП є композиційно-номінативний підхід (М.С. Нікітченко), в якому знімається вимога функціональності відношення іменування [7-10].

Над іменними множинами визначені наступні основні операції:

іменування: $v \Leftarrow (d) = \{(v, d)\}$;

розіменування:

$$v \Rightarrow (\alpha) = \begin{cases} d \text{ при } (v, d) \in \alpha, \\ \text{не визначено, інакше.} \end{cases}$$

Нехай α і β – ІМ, тоді накладання ІМ визначається так:

$$\alpha \nabla \beta = \beta \cup \{(u, d) \mid (u, d) \in \alpha, u \notin pr_1(\beta)\}.$$

За означенням ІФ – унарна часткова функція вигляду $\mathcal{N} \rightrightarrows \mathcal{N}$. ІФ f називається V -арною, якщо $\text{dom } f \subseteq D^V$, і (V, W) -арною, якщо до того ж $\text{rang } f \subseteq D^W$.

Не кожна іменна функція має визначену арність. Функція, яка має деяку арність, називається *поліарною*. Всюди далі розглядаються лише поліарні іменні функції.

Композиції розглядаємо як операції алгебри іменних функцій.

Композиції множення і накладання функцій визначаються наступним чином:

$$(f \circ g)(\alpha) = g(f(\alpha)),$$

$$(f \nabla g)(\alpha) = f(\alpha) \nabla g(\alpha).$$

З означення слідує, що арності ІФ f та g повинні бути узгоджені, для того, щоб результатом композиції не була всюди невизначена іменна функція $f_{\emptyset}$. Нехай f – (V_1, W_1) -арна ІФ, а g – (V_2, W_2) -арна. Рівність $W_1 = V_2$ є необхідною (але не достатньою з огляду на частковість функцій) умовою для $f \circ g \neq f_{\emptyset}$. Подібним чином, рівність $V_1 = V_2 = V$ є необхідною, але не достатньою, умовою для $f \nabla g \neq f_{\emptyset}$ – тоді $f \nabla g$ буде $(V, W_1 \cup W_2)$ -арною іменною функцією.

Допоміжні композиції іменного обмеження, видалення та перейменування, означені в наступному розділі, покликані узгоджувати арності іменних функцій.

Наведені вище поняття мають стандартні означення в композиційному програмуванні, тут наведені в допоміжних цілях.

Композиції для узгодження арностей

У цьому розділі вводяться необхідні для подальшого викладу власні означення, які не є стандартними для КП. Відомі з попередніх робіт

по композиційному програмуванню композиції іменного обмеження і видалення не підходять в контексті даної роботи: нам потрібні такі композиції, відносно яких замкнений клас поліарних іменних функцій. Відомі композиції обмеження і видалення по входу (але не по виходу) цій вимозі не відповідають. Справді, якщо до аргументу U -арної ІФ f застосувати обмеження по множині імен V , то отримана в результаті функція $\uparrow_U^V f$ буде визначена не лише на U -ІМ, але й на U' -ІМ при $U' \supseteq U$. Аналогічно, ІФ $\downarrow_U^V f$, отримана з U -арної ІФ f іменним видаленням по входу, при $V \cap U = \emptyset$, визначена на W -іменних множинах, якщо $U \subseteq W \subseteq U \cup V$. Таким чином, обидві композиції позбавляють функцію-результат властивості поліарності.

Обмеженням назвемо $(V, U \cap V)$ -арну ІФ $\uparrow_U^V$ (де $U, V \subseteq V$), таку, що

$$\uparrow_U^V(\alpha) = \{(u, d) \mid (u, d) \in \alpha \wedge u \in U\}, \text{ при } \alpha \in D^V,$$

або в термінах класичного обмеження:

$$\uparrow_U^V(\alpha) = \alpha \upharpoonright U.$$

Видаленням назвемо $(V, V \setminus U)$ -арну ІФ $\downarrow_U^V$ (де $U, V \subseteq V$), таку, що

$$\downarrow_U^V(\alpha) = \{(u, d) \mid (u, d) \in \alpha \wedge u \in U\}, \text{ при } \alpha \in D^V,$$

або в термінах класичного обмеження:

$$\downarrow_U^V(\alpha) = \alpha \upharpoonright V \setminus U.$$

Часткові випадки $\downarrow_{\emptyset}^V(\alpha)$ та $\uparrow_V^V(\alpha)$ являють собою тотожні функції в класі V -ІМ.

Кожна з цих двох функцій індукує по дві композиції, які перетворюють арність ІФ: одна застосовує функцію видалення або обмеження до аргументу, а інша – до значення ІФ.

Композиціями іменного видалення та обмеження по входу $\downarrow_U^V, \uparrow_U^V$ та виходу $\downarrow_U^V, \uparrow_U^V$ означимо² наступним чином:

² „e” – від entrance (вхід); „o” – від output (вихід)

$$\downarrow_U^V(f) = \downarrow_U^V \circ f.$$

$$\uparrow_U^V(f) = \uparrow_U^V \circ f.$$

$$\downarrow_U^V(f) = f \circ \downarrow_U^V,$$

$$\uparrow_U^V(f) = f \circ \uparrow_U^V.$$

Дані композиції зберігають поліарність ІФ. Для них характерні наступні властивості. Нехай ІФ $f - (U', V')$ -арна, тоді:

1) $\downarrow_U^V(f) - (V, V')$ -арна ІФ, якщо $V \setminus U = U'$, інакше всюди невизначена ІФ;

2) $\uparrow_U^V(f) - (V, V')$ -арна ІФ, якщо $V \cap U = U'$, інакше всюди невизначена ІФ;

3) $\downarrow_U^V(f) - (U', V \setminus U)$ -арна ІФ, якщо $V' = V$, інакше всюди невизначена ІФ;

4) $\uparrow_U^V(f) - (U', V' \cap U)$ -арна ІФ, якщо $V' = V$, інакше всюди невизначена ІФ.

Для будь-якої V -іменної множини α і будь-якої множини імен U виконується

$$\downarrow_U^V(\alpha) = \uparrow_{(V \setminus U)}^V(\alpha),$$

$$\uparrow_U^V(\alpha) = \downarrow_{V \cap U}^V(\alpha),$$

що перевіряється безпосередньо.

Отже, композицію (як по входу, так і по виходу) і функцію іменного обмеження з фіксованою арністю можна виразити через композицію і функцію видалення і навпаки. Наприклад,

$$\uparrow_U^V(f) = \uparrow_U^V \circ f = \downarrow_{V \setminus U}^V \circ f = \downarrow_{V \setminus U}^V(f),$$

для довільної ІФ f , тобто $\uparrow_U^V = \downarrow_{V \setminus U}^V$.

Визначимо функцію перейменування та на її основі відповідну композицію.

Перейменуванням назвемо (V, U) -арну ІФ

$\Downarrow^{\xi}$, де $U, V \subseteq V$; $\xi: U \rightarrow V$, таку, що

$$\Downarrow^{\xi}(\alpha) = \{(u, \xi(u) \Rightarrow (\alpha)) \mid u \in U\}, \text{ при } \alpha \in D^V.$$

Позначимо $id_V = \{(v, v) \mid v \in V\}$.

Змістовно, ця операція замінює імена $v \in V$ з ІМ α на нові імена з прообразів $\xi^{-1}(v) \subseteq U$. Відмітимо, що ін'єктивність відображення ξ не вимагається, тобто одне ім'я з α може після перейменування „породити” декілька різних імен, тим самим функція може використовуватись для створення „резервних копій” денотата під новим іменем.

Застосовуючи перейменування до аргументу чи значення ІФ, отримаємо дві композиції.

Композиціями перейменування по входу $\Downarrow^{\xi}$

та виходу $\Uparrow^{\xi}$ означимо наступним чином:

$$\Downarrow^{\xi}(f) = \Downarrow^{\xi} \circ f,$$

$$\Uparrow^{\xi}(f) = f \circ \Uparrow^{\xi}$$

Очевидна така властивість. Нехай ІФ $f - (U', V')$ -арна, $U, V \subseteq V$; $\xi: U \rightarrow V$, тоді

1) $\Downarrow^{\xi}(f) - (V, V')$ -арна ІФ, якщо $U = U'$, інакше всюди невизначена ІФ;

2) $\Uparrow^{\xi}(f) - (U', U)$ -арна ІФ, якщо $V' = V$, інакше всюди невизначена ІФ.

Тим самим, клас поліарних іменних функцій замкнутий відносно композицій перейменування по входу і виходу.

Композиції іменного обмеження, видалення і перейменування по входу і виходу на відносно високому рівні абстракції є адекватною експлікацією засобів узгодження вхідних і вихідних інтерфейсів програм.

Послідовно-паралельні та ланцюгові ІФ

Послідовно-паралельною іменною функцією в базисі Φ (де $\Phi -$ деяке сімейство ІФ) називається така ІФ f , що

$$f \in \left\{ \Phi \cup \{id_{\Phi}\} \mid V \subseteq V \right\}, \text{ де}$$

$$\Xi = \left\{ \circ, \nabla, \uparrow_U^V, \downarrow_U^V, \uparrow_U^\xi, \downarrow_U^\xi \mid \xi \in V^U; U, V \subseteq V \right\}.$$

З наведених вище означень слідує наступна властивість.

Клас всіх послідовно-паралельних іменних функцій в базисі Φ співпадає з класом іменних функцій, які можуть бути побудовані з базисних ІФ $f \in \Phi$ та $\uparrow_U^V$ (при довільних множинах імен V) і $\downarrow_U^\xi$ (при довільних ξ) за допомогою скінченного числа застосувань композицій множення та накладання:

$$\begin{aligned} & \left[\Phi \cup \{id_{D^V} \mid V \subseteq V\} \right]_{\Xi} = \\ & = \left[\Phi \cup \{id_{D^V}, \uparrow_U^V, \downarrow_U^\xi \mid \xi \in V^U; U, V \subseteq V\} \right]_{\{\circ, \nabla\}} \end{aligned}$$

$$\text{де } \Xi = \left\{ \circ, \nabla, \uparrow_U^V, \downarrow_U^V, \uparrow_U^\xi, \downarrow_U^\xi \mid \xi \in V^U; U, V \subseteq V \right\}.$$

Ланкою з ядром f назвемо іменну функцію вигляду:

$$h = \downarrow_U^\xi \nabla \left(\uparrow_{p_2(\zeta)}^{p_2(\xi)} \circ \downarrow_U^\zeta \circ f \right),$$

де ξ, ζ – деякі відображення – параметри перейменувань, $\xi: U \rightarrow V$, $\zeta: U' \rightarrow V'$, $U, V, U', V' \subseteq V$. Ланку також будемо позначати через $\mathcal{L}_\zeta^\xi(f)$.

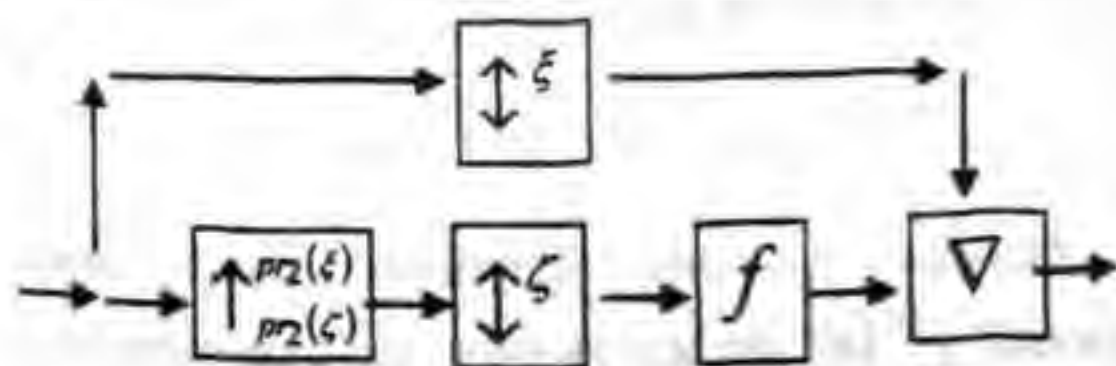


Рис. 2 Ланка

Змістовне тлумачення таким чином означеної ІФ h полягає в наступному. Розглянемо процес застосування h до аргументу α з області її означення. З однієї сторони, до α

застосовується ІФ $\downarrow_U^\xi$, яка перейменовує всі компоненти цієї іменної множини, тим самим створюючи її резервну копію. З іншої сторони, до вхідної іменної множини α після виділення в ній

визначеної частини і перейменування застосовується ядро f . Результати обох вказаних застосувань накладаються. Таким чином, значення $\beta = h(\alpha)$ містить в собі як резервну копію аргументу, так і результат застосування функції-ядра до його частини.

Ця обставина використовується для того, щоб паралельну роботу операторів чи співпрограм змодельовати за допомогою послідовного виконання моделюючих їх ланок. Справді, адекватною моделлю паралельного виконання співпрограм є композиція $f_1 \nabla f_2$ (Рис. 3).

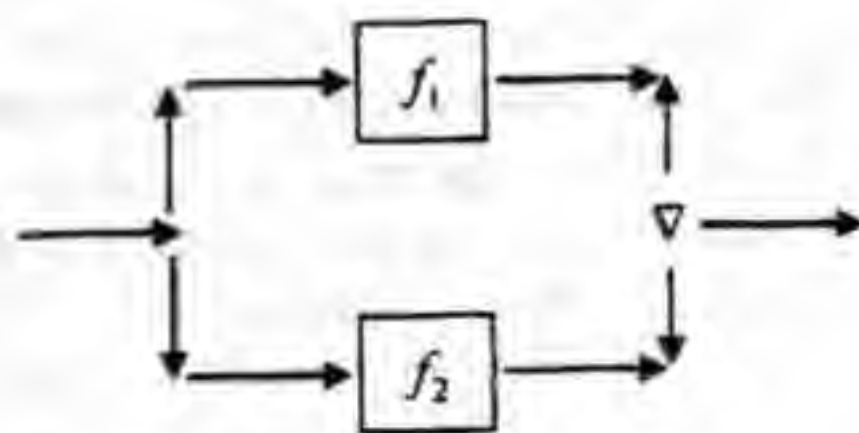


Рис. 3 Паралельна програма

Застосування даної ІФ до аргументу α полягає в тому, що як f_1 , так і f_2 застосовуються до одного і того ж аргументу α , після чого результат застосування f_2 накладається на результат застосування f_1 . Проте того ж результату (з точністю до фіксованої множини „зайвих” імен) можна досягнути, якщо спочатку застосувати до α ланку з ядром f_1 , яка створює резервну копію всієї ІМ α , а потім до отриманої ІМ α' застосувати ланку з ядром f_2 , яка виділяє з α' резервну копію α (за допомогою перейменування та обмеження), застосовує до неї f_2 і накладає результат цього застосування на α' (Рис. 4).

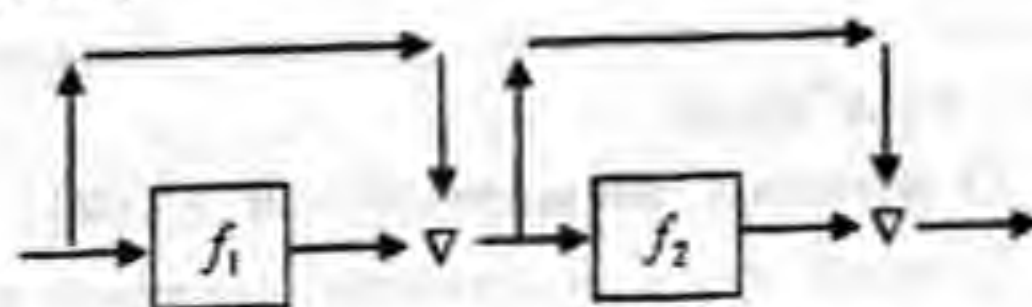


Рис. 4 Перетворення паралельної програми в послідовну

Тим самим, множення скінченного числа ланок дозволяє моделювати послідовно-паралельні структури програм довільної складності. У частині роботи, що залишилася, міститься строге формулювання цієї тези.

Ланцюговою функцією у базисі Φ називається функція вигляду: $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n$, де h_i – ланка в базисі Φ , $(i = \overline{1, n})$.

Очевидно, що якщо g та h – ланцюгові функції, то $g \circ h$ – також ланцюгова функція.

Також цілком очевидно, що якщо кожна ланка h_i ланцюгової функції h має відповідну арність (U_i, V_i) , то за умови $V_i = U_{i+1}$ для всіх $i = \overline{1, n}$ $\text{IF } h \in (U_1, V_n)$ -арною, інакше – всюди невизначеною.

Вище було неформально відзначено, що накладання з перейменуванням („обхідний шлях“) в кожній ланці дозволяє передавати деякі дані без змін, минувши ядра f_i . Формалізація цього твердження базується на визначеній нижче композиції розширення ланцюгової функції.

Нехай дана ланцюгова функція $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n$, причому ланка h_i ланцюгової функції h має арність (U_i, V_i) і вигляд $\mathcal{L}_{\zeta_i}^{\hat{f}_i}(f_i)$ ($i = \overline{1, n}$). Якщо $W \subseteq V$ – така множина

імен, що $W \cap \bigcup_{i=1}^n (U_i \cup V_i) = \emptyset$ то цьому випадку будемо говорити, що імена з W не входять в h .

Розширенням назвемо композицію, яка ланцюговій $\text{IF } h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n$, де $h_i = \mathcal{L}_{\zeta_i}^{\hat{f}_i}(f_i)$ ($i = \overline{1, n}$), ставить у відповідність нову ланцюгову функцію $h' = \chi^W(h)$, що будується таким чином:

$$h' = h'_1 \circ h'_2 \circ \dots \circ h'_n,$$

$$h'_i = \mathcal{L}_{\zeta_i \cup \text{Id}_W}^{\hat{f}_i}(f_i).$$

Якщо ланцюгова функція $h \in (U, V)$ -арною, а множина W складається з імен, які не входять в h , і $h' = \chi^W(h)$, то

1) функція h' має арність $(U \cup W, V \cup W)$;

2) нехай α і β – відповідно U -іменна та W -іменна множина³, тоді

$$h'(\alpha \cup \beta) = h(\alpha) \cup \beta;$$

³ Оскільки $U \cap W = V \cap W = \emptyset$ відповідно до означення розширення, множини $\alpha \cup \beta$ і $h(\alpha) \cup \beta$ задовольняють принципу однозначності іменування і, тим сам, є $U \cup W$ - та $V \cup W$ -іменними множинами відповідно.

$$3) h' = \left(\uparrow_W^{U \cup W} \right) \left(\uparrow_U^{U \cup W} \circ h \right).$$

Говорячи змістовно, розширення застосовує $\text{IF } h$ до даних з іменами з U і, крім того, передає на вихід без змін всі додаткові дані, поійменовані іменами з W . Це дозволяє довільним чином розширювати арності ланцюгових функцій, що необхідно для множення, не змінюючи їх поведінку істотним чином.

Має місце дистрибутивність розширення відносно множення. Нехай дані ланцюгові функції g та h та довільна множина імен W , які не входять ні в g , ні в h . Тоді

$$\chi^W(g \circ h) = \chi^W(g) \circ \chi^W(h).$$

Нехай h – U -арна ланцюгова функція. $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n$, де $h_i = \mathcal{L}_{\zeta_i}^{\hat{f}_i}(f_i)$ для $i = \overline{1, n}$. $\hat{U}$ – деяка множина імен, які не входять в h , і φ – взаємно однозначне відображення вигляду $\hat{U} \rightarrow U$.

Композицією резервування назвемо таку композицію, яка ставить ланцюговій функції h у відповідність нову ланцюгову функцію $h' = C^{\varphi}(h)$, яка будується наступним чином:

$$h' = \mathcal{L}_{\zeta_1 \cup \varphi}^{\hat{f}_1}(f_1) \circ \chi^{\hat{U}}(h_2 \circ \dots \circ h_n).$$

Отримана функція $h' \in (U, V \cup \hat{U})$ -арною.

Лема. Якщо h – U -арна ланцюгова функція, множина $\hat{U}$ і відображення φ задовольняють умовам із означення резервування, то для будь-якої U -іменної множини α має місце

$$(C^{\varphi}(h))(\alpha) = h(\alpha) \cup \{ \varphi^{-1}(u, d) \mid (u, d) \in \alpha \}.$$

Іншими словами, результат застосування функції $C^{\varphi}(h)$ до аргументу α складається з результату застосування h до α і копії α з точністю до заміни всіх імен u на допоміжні імена $\varphi^{-1}(u)$.

Введені поняття дозволяють надати строге формулювання змістовному твердженню, що паралельну програму, з класу, що розглядаються, можна перетворити в послідовну.

Теорема 1. Нехай g та h – відповідно (U, V') -арна і (U, V'') -арна ланцюгові функції. Тоді існує $W \subseteq V$ і ланцюгова функція f з

арністю (U, W) , така, що $f \circ \uparrow_{V \cup V'}^W = g \nabla h$.

Легко бачити, що цій умові задовольняє функція

$$f = C^p(g) \circ \mathcal{L}_\emptyset^{p^{-1} \cup \psi}(id_{\emptyset}) \circ \chi^{\hat{V}'}(h) \circ \mathcal{L}_{id_{V'}}^{p^{-1} \cup \psi}(id_{\emptyset})$$

де $\hat{U} \subseteq V$ (імена з $\hat{V}' \subseteq V$ не входять в g),
 $\hat{V}' \cap U = \emptyset$; $\psi: \hat{V}' \rightarrow V'$ – взаємно однозначне, при
 $\chi = V \cup W \cup \hat{V}'$.

З властивості дистрибутивності розширення
відносно множення слідує основний результат.

Список використаних джерел

1. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – № 5. – С. 3-24.
2. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – № 3. – С. 3-13.
3. Редько В.Н. Композиционная структура программологии // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 47-66.
4. Редько В.Н. Экзистенциальные основания композиционной парадигмы // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №2. – С. 3-12.

Теорема 2. Якою б не була (U, V) -арна
послідовно-паралельна функція f в базисі Φ ,
існує така ланцюгова функція $\hat{f}$ з арністю
 $(U, \hat{V})$, $V \subseteq \hat{V}$, в тому ж базисі, що $f = \hat{f} \circ \uparrow_{V, \hat{V}}$.

Представляється правдоподібною гіпотеза,
що до вказаного чисто послідовного вигляду
зводиться і більш широкий, ніж послідовно-
паралельні, клас ІФ, проте це питання потребує
додаткового дослідження.

5. Редько В.Н., Редько И.В., Гришко Н.В. Программологические основания сущностной платформы // Проблемы програмування. – 2008. – №2-3 (Спец. выпуск). – С. 75-83.
6. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16-31.
7. Никитченко Н.С. Композиционные логики номинативных данных // Проблемы программирования. – 2003. – №3. – С. 29-40.

Надійшла до редколегії 23.02.10

УДК 519.21

Петунін Ю.І., д.ф.-м.н., проф.,
Клюшин Д.А., д.ф.-м.н., доц.,
Голубева К.М., асп.

Комп'ютерна цитогенетична діагностика раку молочної залози та фіброаденоматозу на підставі площі ядер букального епітелію

В роботі запропонований комп'ютерний метод диференціальної діагностики раку молочної залози від фіброаденоматозу. Критерій ґрунтується на усередненні p -статистик. Дослідження проводились за площею ядер букального епітелію.

Перевагою запропонованого критерію є його високий ступінь точності, а також те, що цей метод є дуже простим, оскільки діагностика проводиться за площею ядер букального епітелію.

Ключові слова: усереднена p -статистика, метод диференційної діагностики, рак молочної залози.

*E-mail: katrin_g@bigmir.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Як добре відомо, процес діагностики ракової пухлини у молочній залозі складається з трьох етапів ([1], с. 198).

На першому етапі на підставі зіскоба зі слизової оболонки ротової порожнини маємо множину даних, таким чином досліджується 50-70 клітин.

На другому етапі, використовуючи реакцію Фельгена, отримуємо деякі цитогенетичні та морфометричні показники, але у цій роботі використовується лише площа інтерфазних ядер букального епітелію $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n = 50, 70$). Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називатимемо вектором показників пацієнта P .

На третьому етапі застосовуємо спеціальні алгоритми статистичної та геометричної теорії розпізнавання образів для визначення змін у соматичних немалігнізованих клітинах при захворюванні раком молочної залози (РМЗ) та фіброаденоматозом (ФАМ).

Ці тести та алгоритми розглянемо більш докладно надалі. Опишемо три стадії вказаних тестів, які було описано вище та головним чином міру близькості, на яких ґрунтується самі критерії диференційної діагностики раку молочної залози.

Yu. I. Petunin, prof., DSc, D. A. Klyushin, assistant prof., DSc, K. M. Golubeva*, P.G.

Computer citogenetic diagnostics of breast cancer and fibrocystic mastopathy with the area of buccal epithelium

In this paper a computer method of differential diagnostics of breast cancer from fibrocystic mastopathy is suggested. The criterion is based on averaging of p -statistics. Investigations are conducted with the area of buccal epithelium.

The advantage of the proposed criterion is its high degree of accuracy, also this method is very simple, because diagnostics is conducted with the area of buccal epithelium.

Key Words: averaged p -statistics, method of differential diagnostics, breast cancer.

На першій стадії формуємо дві групи пацієнтів G_1^* та G_2^* ; перша група G_1 включає пацієток, хворих на РМЗ, а друга G_2 – на ФАМ (діагнози в кожній групі повинні бути встановлені точно).

На другій стадії за допомогою так званих усереднених p -статистик обчислюємо міру близькості $\rho(P, G_i^*)$, ($i = 1, 2$) між обстеженим (діагностованим) пацієнтом P та групою G_1^* та G_2^* .

На третій стадії, використовуючи ці міри близькості $\rho(P, G_1^*)$, $\rho(P, G_2^*)$ та деякі інші методи та критерії статистичного аналізу, ставимо діагноз пацієнту P .

Перш за все розглянемо поняття p -статистики. Позначимо через G та G' – дві генеральні сукупності. H – гіпотеза про рівність неперервних функцій розподілу $F_G(u)$ та $F_{G'}(u)$ цих генеральних сукупностей відповідно. Нехай вибірки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in G'$, $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, $x'_{(1)} \leq \dots \leq x'_{(m)}$ – їх порядкові статистики. Припустимо, що $F_G(u) = F_{G'}(u)$. Позначимо за $A_j^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$ випадкову подію,

яка полягає у тому, що x'_k потрапляє в інтервал $(x_{(i)}, x_{(j)})$ ($i < j$), тобто

$$A_y^{(k)} = \{x'_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})\}.$$

Як відоме, коли $F_G(u) = F_{G'}(u)$ (тобто $G = G'$), ймовірність цієї події обчислюється за формулою

$$P(A_y^{(k)}) = P(x'_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = p_{ij} = \frac{j-i}{n+1}.$$

Покладемо

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(1)} &= \frac{h_y^{(n)}m + g^2/2 - g\sqrt{h_y^{(n)}(1-h_y^{(n)})m + g^2/4}}{m + g^2}, \\ p_{ij}^{(2)} &= \frac{h_y^{(n)}m + g^2/2 + g\sqrt{h_y^{(n)}(1-h_y^{(n)})m + g^2/4}}{m + g^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $h_y^{(n)}$ – частота появи події $A_y^{(n)}$ в m випробуваннях, величина $g = 3$.

Позначимо за N кількість усіх довірчих інтервалів $I_y^{(n,m)} = (p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)})$:

$$N = \frac{n(n-1)}{2},$$

а за L – кількість тих інтервалів $I_y^{(n,m)}$, що містять імовірності $p_y^{(n)}$. Покладемо

$$h^{(n,m)} = \rho(F^*, F^{**}) = \rho(x, x') = \frac{L}{N}.$$

Розглянемо випадкову подію

$$B = \{p_y^{(n)} \in I_y^{(n,m)}\},$$

оскільки $h^{(n,m)}$ – частота вказаної випадкової події, яка має імовірність $P(B) = 1 - \beta$, то, вважаємо, що $h_y^{(n,m)} = h_y^{(n)}$, $m = N$ та $g = 3$ у формулах (1), таким чином отримаємо довірчий інтервал

$$I_y^{(n,m)} = (p^{(1)}, p^{(2)})$$

для імовірності $P(B)$. Статистика $h^{(n)}$ називається p -статистикою; вона є мірою близькості $\rho(x, x')$ між визначеними вибірками x та x' . Далі розглянемо поняття усередненої p -статистики.

Розглянемо деяку вибірку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з генеральної сукупності G , що одержана шляхом простого випадкового вибору, та аналогічні вибірки $y_1 = (y_1^{(1)}, \dots, y_{n_1}^{(1)})$, ..., $y_K = (y_1^{(K)}, \dots, y_{n_K}^{(K)})$, що одержані з генеральних сукупностей $G'_1, \dots, G'_K$ відповідно, які також утворюють деяку групу G^* :

$$G^* = \{G'_1, \dots, G'_K\}.$$

Для кожного значення $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ обчислимо p -статистики $\rho(x, y_i)$ та на основі отриманих статистик обчислимо

$$\bar{\rho}(x, G^*) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \rho(x, y_i), \quad (2)$$

отриманий показник $\bar{\rho}(x, G^*)$ називатимемо усередненою p -статистикою між вибіркою x та групою генеральних сукупностей $G^* = \{G'_1, \dots, G'_K\}$.

Надалі у ролі вибірки x буде використовуватись вибірка, що складається з площ $x_1, \dots, x_n$ інтерфазних ядер букального епітелію діагностованого пацієнта P , який може бути хворим на РМЗ або ФАМ, а група G^* є так званою навчаючою вибіркою, яка складається з аналогічних показників пацієнтів $P_1^{(1)}, \dots, P_K^{(1)}$, які хворі на РМЗ або пацієнтів $P_1^{(2)}, \dots, P_m^{(2)}$, хворих на ФАМ.

Отже, навчаюча вибірка з показниками ракових пацієнтів:

$$G_1^* = \{G_1^{(1)}, \dots, G_K^{(1)}\},$$

а навчаюча вибірка з показниками пацієнтів, хворих на фібroadеноматоз:

$$G_2^* = \{G_1^{(2)}, \dots, G_m^{(2)}\}.$$

Запропонований критерій диференціальної діагностики РМЗ від ФАМу складається з двох частин. У першій частині запропонованого критерію розглядаються пацієнти, які хворі на РМЗ (38 пацієнтів) та вивчаються їх усереднені p -статистики до групи G_1^* пацієнтів, хворих на РМЗ та групи G_2^* пацієнтів, хворих на ФАМ (44 пацієнта).

Опишемо цей процес більш докладно: спочатку розглядається перший пацієнт $P_1^{(1)} \in G_1^*$,

який вилучається з групи G_1^* та обчислюється усереднена p -статистика між $P_1^{(1)}$ та групою

$$\tilde{G}_1^{(1)} = G_1^* \setminus P_1^{(1)} = \{P_2^{(1)}, \dots, P_K^{(1)}\} : \bar{p}(P_1^{(1)}, \tilde{G}_1^{(1)}).$$

Надалі з групи G_1^* вилучається пацієнт $P_2^{(1)}$, таким чином отримуємо $\tilde{G}_2^{(1)}$:

$$\tilde{G}_2^{(1)} = G_1^* \setminus P_2^{(1)}.$$

Після цього обчислюється усереднена p -статистика $\bar{p}(P_2^{(1)}, \tilde{G}_2^{(1)})$, далі знов вилучається пацієнт і обчислюється усереднена p -статистика і т. д. Це досить поширений метод має назву «one-out». Результати описаних обчислень наведені у таблиці 1.

Далі таким самим чином проводяться обчислення усереднених p -статистик для пацієнтів $P_i^{(1)}$, ($i = 1, \dots, K$) та групою G_2^* : $\bar{p}(P_i^{(1)}, G_2^*)$; результати цих обчислень подані також у таблиці 1.

Усереднені p -статистики між
РМЗ-пацієнтами та пацієнтами
з групи РМЗ та ФАМ

Таблиця 1

№	Усереднені p -статистики між РМЗ-пацієнтами та	
	пацієнтами з групи РМЗ	пацієнтами з групи ФАМ
101	0,85	0,47
130	0,86	0,48
132	0,79	0,45
135	0,88	0,49
139	0,7	0,43
154	0,78	0,46
155	0,8	0,46
156	0,84	0,48
157	0,87	0,48
159	0,7	0,42
160	0,67	0,42
161	0,83	0,48
165	0,86	0,48
170	0,89	0,47
180	0,79	0,45
183	0,83	0,48
185	0,84	0,47
191	0,86	0,48
194	0,89	0,49
196	0,8	0,46

Таблиця 1, продовження

№	Усереднені p -статистики між РМЗ-пацієнтами та	
	пацієнтами з групи РМЗ	пацієнтами з групи ФАМ
197	0,71	0,44
198	0,78	0,45
200	0,77	0,45
201	0,79	0,47
204	0,87	0,48
208	0,77	0,46
209	0,87	0,49
210	0,86	0,48
212	0,65	0,43
34	0,79	0,45
36	0,82	0,46
37	0,69	0,43
39	0,75	0,45
41	0,86	0,48
43	0,8	0,45
46	0,79	0,46
54	0,77	0,45
87	0,74	0,44

Аналіз обчислень, поданих у таблиці 1, показує, що усі значення усереднених p -статистик між пацієнтами РМЗ та групою пацієнтів РМЗ розташовані в межах між $x_{(1)} = 0,649$ та $x_{(n)} = 0,887$, а між пацієнтами РМЗ та групою пацієнтів ФАМ – у межах між $x_{(1)} = 0,415$, $x_{(n)} = 0,493$.

Звідси випливає, що маємо безпомилкову діагностику для пацієнтів РМЗ: якщо позначити за H гіпотезу про захворювання пацієнта на РМЗ, а за $\bar{H}$ – альтернативну гіпотезу про захворювання на ФАМ обстеженого пацієнта, то імовірність похибки першого роду у цього критерію дорівнює нулю: $P(\bar{H}/H) = 0$.

Таким чином, жодний пацієнт, хворий на РМЗ, не буде неправильно продіагностований та йому буде завжди ставиться правильний діагноз: захворювання на РМЗ.

Для діагностики пацієнтів, хворих на ФАМ, використовуємо усереднені p -статистики між пацієнтом, хворим на ФАМ та групою пацієнтів навчаючої вибірки G_1^* хворих на РМЗ, та G_2^* , хворих на ФАМ (у цьому випадку знов застосовуємо метод «one-out»). У таблиці 2 наведені результати всіх обчислень.

Усереднені p -статистики між
ФАМ-пацієнтами та пацієнтами
з групи РМЗ та ФАМ

Таблиця 2

№	Усереднені p -статистики між ФАМ-пацієнтами та	
	пацієнтами з групи РМЗ	пацієнтами з групи ФАМ
158	0,81	0,46
162	0,82	0,47
17	0,83	0,48
1	0,84	0,47
203	0,82	0,47
33	0,76	0,45
401	0,32	0,34
402	0,33	0,34
403	0,32	0,34
406	0,32	0,34
407	0,33	0,34
418	0,33	0,34
419	0,32	0,33
422	0,33	0,34
423	0,33	0,34
424	0,33	0,34
434	0,32	0,34
435	0,33	0,34
440	0,32	0,34
443	0,33	0,34
459	0,33	0,34
460	0,33	0,34
464	0,33	0,34
472	0,33	0,34
473	0,33	0,34
478	0,32	0,34
47	0,82	0,47
486	0,32	0,34
490	0,33	0,34
491	0,32	0,34
494	0,32	0,33
496	0,32	0,34
498	0,32	0,33
499	0,32	0,34
500	0,32	0,34
501	0,33	0,34
506	0,33	0,35
507	0,33	0,34
509	0,33	0,34
510	0,33	0,35
57	0,8	0,47

Таблиця 2, продовження

№	Усереднені p -статистики між ФАМ-пацієнтами та	
	пацієнтами з групи РМЗ	пацієнтами з групи ФАМ
5п	0,69	0,43
61	0,87	0,49
63	0,84	0,48

Аналіз даних, які одержані у першому стовбчику таблиці 2 (усереднена p -статистика між ФАМ-пацієнтом та групою РМЗ-пацієнтів G_1^*), та використовуючи довірчий інтервал $I = (0,649; 0,887)$, побудований за допомогою порядкових статистик $x_{(1)} = 0,649$ та $x_{(n)} = 0,887$ для РМЗ-пацієнтів показує, що для 44 ФАМ-пацієнтів 11 пацієнтів з номерами 58, 162, 17, 1, 203, 33, 47, 57, 5п, 61, 63 будуть помилково продіагностовані як РМЗ-пацієнти, оскільки показники цих пацієнтів належать довірчому інтервалу $I = (0,649; 0,887)$.

Решта усіх інших пацієнтів (33 людини) будуть продіагностовані правильно, як ФАМ-пацієнти.

Таким чином, похибка помилково продіагностованих пацієнтів складає 25%. Абсолютно такі самі результати маємо, якщо виконувати діагностику, використовуючи другий довірчий інтервал $I = (0,415; 0,493)$ та другий стовбчик таблиці 2, в якому вказується значення усереднених p -статистик $\bar{p}(P_i^{(2)}, \bar{G}_i^{(2)})$, причому помилково продіагностовані будуть ті самі пацієнти, що і раніше.

Для того щоб зменшити похибку неправильно продіагностованих пацієнтів, застосуємо другу частину критерію диференціальної діагностики РМЗ від ФАМ. Отже, для збільшення точності скористаємось контрольними даними практично здорових пацієнтів (контрольна група G_3^* , що складається з 33 пацієнтів).

З цією метою обчислюються усереднені p -статистики α_2 між ФАМ-пацієнтами та групою G_2^* пацієнтів, а також усереднена p -статистика β_2 між ФАМ-пацієнтами та контрольною групою G_3^* практично здорових пацієнтів.

Після цього знаходиться відношення знайдених усереднених p -статистик α_2 та β_2 , яке позначимо як γ_2 :

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

Результати описаних обчислень наведені у таблиці 3.

Відношення усереднених
 p -статистик $\gamma_2 = \alpha_2 / \beta_2$
для ФАМ-пацієнтів

Таблиця 3

№	Відношення усереднених p -статистик γ_2
158	0,755
162	1,18
17	1,074
1	1,015
203	1,263
33	0,706
401	1,17
402	1,173
403	1,171
406	1,203
407	1,173
418	1,171
419	1,169
422	1,179
423	1,175
424	1,16
434	1,16
435	1,176
440	1,178
443	1,203
459	1,149
460	1,179
464	1,158
472	1,175
473	1,171
478	1,17
47	0,882
486	1,206
490	1,169
491	1,181
494	1,167
496	1,209
498	1,158
499	1,181
500	1,172
501	1,204
506	1,175

Таблиця 3, продовження

№	Відношення усереднених p -статистик γ_2
507	1,162
509	1,167
510	1,166
57	1,366
5n	0,567
61	1,066
63	1,2

Таким самим чином обчислюється відношення γ_1 усереднених p -статистик α_1 між РМЗ-пацієнтами та групою β_1^* РМЗ-пацієнтів та усередненою p -статистикою β_1 між РМЗ-пацієнтами та контрольною групою практично здорових жінок β_1^* :

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

У таблиці 4 подані отримані результати відношень γ_1 .

Відношення усереднених
 p -статистик $\gamma_1 = \alpha_1 / \beta_1$ для
РМЗ-пацієнтів

Таблиця 4

№	Відношення усереднених p -статистик γ_1
101	1,719
130	1,469
132	1,473
135	1,833
139	0,945
154	1,644
155	1,473
156	1,628
157	1,651
159	0,96
160	0,794
161	1,721
165	2,182
170	1,686
180	1,2
183	2,26
185	1,565
191	1,677

Таблиця 4, продовження

№	Відношення усереднених p -статистик γ_1
194	2,002
196	2,291
197	2,167
198	1,115
200	2,251
201	1,906
204	1,97
208	2,104
209	1,927
210	2,09
212	2,204
34	1,273
36	2,089
37	2,098
39	1,99
41	1,097
43	2,025
46	1,1
54	1,1
87	0,963

Аналіз даних таблиці 4 показує, що відношення γ_1 розташовані в межах мінімальної $x_{(1)} = 0,794$ та максимальної 2,291 порядковими статистиками. Отже, довірчий інтервал $I = (0,794; 2,291)$ охоплює основну розподілену масу генеральної сукупності для γ_1 . З іншої сторони, дані таблиці 3 показують, що це відношення усереднених p -статистик γ_2 для ФАМ-пацієнтів з номерами 158, 33 та 5п не належать довірчому інтервалу I для РМЗ-пацієнтів, тому вони не можуть діагностуватися як РМЗ-пацієнти, а це є ФАМ-пацієнти.

Таким чином, з 11 помилково продіагнованих пацієнтів у нас залишається лише 8, таким чином, після другої частини діагностики похибка другого роду становить 18,18%. Позначаючи за $H_0 = H$ основну (нульову) гіпотезу про наявність у пацієнта РМЗ захворювань, а за $H_1 = \bar{H}$ альтернативну гіпотезу про наявність ФАМ-захворювання у обстеженого пацієнта, приходимо до висновку, що $P(\bar{H} / H) = 0$, $P(H / \bar{H}) = 0,1818$.

Сформулюємо основні висновки, які можна зробити на підставі аналізу одержаних результатів:

1) Якщо внаслідок застосування критерію діагностуємо наявність ФАМ-захворювання у пацієнта, то імовірність цієї події близька до одиниці та імовірність події, що у цього пацієнта може бути рак молочної залози практично дорівнює нулю. Цей висновок є дуже несподіваним, оскільки діагностика ФАМ за даними статистики перевищує 30%.

2) Якщо при застосуванні критерію отримали діагноз РМЗ, то це ще не означає, що у цього пацієнта дійсно є захворювання на РМЗ, імовірність цієї події дорівнює 81,8%, тобто є досить високою, але при цьому усі РМЗ-пацієнти діагностуються як РМЗ-пацієнти, та імовірність їх пропустити дорівнює нулю.

Для остаточного переконання наявності РМЗ у такого пацієнта, необхідно використовувати інші критерії, наприклад, що викладені в монографіях [1] та [2].

Список використаних джерел

1. Ключин Д.А., Петунин Ю.И. Доказательная медицина. Применение статистических методов. – М.: ООО И. Д. Вильямс, 2008. – 320 с.
2. Andrushkiw R.I., Boroday N.V., Klyushin D.A., Petunin Yu.I. Computer-Aided Cytogenetical Method of Cancer Diagnosis. – New-York: Nova-Science Publisher, 2007. – 303 p.
3. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, Т.1. – 1964. – 484 с.
5. Ключин Д.А., Петунин Ю.И. Непараметрический критерий эквивалентности генеральных совокупностей, основанный на мере близости между выборками // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 147–163.
6. Andrushkiw R., Golubeva E., Klyushin D., Pokoyoviy M., Romanov A. Computer-Aided Cytogenetic Method of Breast Cancer Diagnosis, Part II – Test Criteria // BIOCAMP'06, – 2006. – V6. – P. 210-216.

Надійшла до редколегії 28.12.2009р.

УДК 519.9

Стешенко Г.М. інженер

Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами

У роботі отримані апіорні нерівності для параболічних систем із сингулярними правими частинами, що описують точкові джерела фізичних полів. Отримані оцінки дозволяють довести існування єдиного розв'язку задачі про дифузивно-конвективний перенос суміші ізотопів у пористому середовищі із урахуванням явища філіації.

Ключові слова: апіорні нерівності, філіація, параболічні системи.

E-mail: grttt@mail.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Постановка задачі і основні функціональні простори та позначення.

Розглянута в роботі постановка задачі виникла в результаті дослідження переносу радіоактивних речовин в ґрунті під впливом підземних течій. Зазвичай резервуари із радіоактивними відходами довгі роки зберігаються в слабо проникних ґрунтах. За цей час під впливом зовнішніх чинників ці резервуари повільно руйнуються, і речовини, що в них зберігаються, розносяться водою в навколишньому пористому середовищі. Для контролю для цим процесом навколо потенційних джерел витіку розташовують спостережні свердловини, що дозволяють визначати концентрацію забруднення. Оскільки всі процеси, що відбуваються в таких об'єктах, є дуже повільними і тривають довгі роки, одним із важливих чинників моделі стає філіація ізотопів, тобто перетворення одних ізотопів на інші одночасно із радіоактивним розпадом. Наприклад, радіоактивний трітій-3 розпадається і частково перетворюється на стабільний гелій-3 за 4500 діб, а стронцій-90, що є одним із основних чинників забруднення внаслідок Чорнобильської катастрофи, за 28 років розпадається на ітрій-90, що в свою чергу уже за три дні розпадається на стабільний цирконій-90. Отже, є необхідність моделювати підземний перенос радіоактивних речовин у пористому середовищі із урахуванням філіації (трансмутації) ізотопів, використовуючи

G.Steshenko

A priori inequalities for parabolic systems with singular right-hand parts

In the paper, a priori inequalities for parabolic systems with singular right-hand parts describing point sources of physical fields are proved. These estimations allow proving existence of unique solution of problem of diffusion-convection transport of mixture of isotopes in porous medium.

Key Words: a priori inequality, filiation, parabolic systems.

для цього не одне рівняння конвективної дифузії, а систему таких рівнянь.

Задача математичного моделювання конвективної дифузії суміші ізотопів поки що вивчена досить мало. Серед основних робіт на цю тему слід зазначити статі Шоке [1, 2], Шоке і Циммермана [3], а також Дугласа і Спаньоло [4]. У цих роботах досліджено існування слабкого розв'язку нелінійної початково-крайової задачі, що описує стискувану течію і перенос радіоактивних речовин у пористому або тріщинувато-пористому середовищі із урахуванням філіації ізотопів, і запропоновані чисельні методи їх розв'язання. Слід зауважити, що в цих роботах мова йдеться лише про моделювання, а але не про ідентифікацію параметрів джерел забруднення. Для того щоб розв'язати задачу про ідентифікацію координат і потужності точкових джерел забруднення можна застосувати теорію, детально розроблену в роботах С.І.Ляшка та його наукової школи [5–7]. З цієї метою ми розглянемо лінійний варіант моделі Шоке із точковими джерелами.

Нехай $\Omega \in R^n$ - обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$. Розглянемо в циліндричній області $Q = \{(0 < t < T) \times \Omega\}$ початково-крайову задачу:

$$LU = F$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & -a(x) & 0 \\ 0 & L_2 & -b(x) \\ 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$U = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ \omega(x, t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \\ k(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega & u(x, 0) &= 0 \\ v(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega, & v(x, 0) &= 0 \\ \omega(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega & \omega(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} v_i - \sum_{j=1}^n (b_{ij}(x) v_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x) v_{x_i} + b(x)(v - \omega) &= g(x) \\ \omega_i - \sum_{j=1}^n (c_{ij}(x) \omega_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n c_i(x) \omega_{x_i} + c(x)\omega &= k(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i(x))_{x_i} &\leq a(x), & a(x) &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n (b_i(x))_{x_i} &\leq b(x), & b(x) &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n (c_i(x))_{x_i} &\leq c(x), & c(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина функцій з $C^m(\overline{Q})$, що задовольняють умовам (1.2).

Для дослідження наших просторів введемо наступні норми:

$$\begin{aligned} \|U\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_0^T \int \sum_{i,j,k,m=1}^3 (u_{x_{ij}})^2 d\Omega dt \\ \|U\|_H^2(Q) &= \int_0^T \int \sum_{i,j,k,m=1}^3 \left((u_{x_{ij}})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + \sum_{i,j=1}^n (u_{x_{ij}})^2 \right) d\Omega dt \end{aligned} \quad (1.4)$$

Припустимо, що коефіцієнти диференціального виразу (3) задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega}) & a(x) &\in C^1(\overline{\Omega}) \\ b_{i,j} &= b_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), & b(x) &\in C^1(\overline{\Omega}) \\ c_{i,j} &= c_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega}) & c(x) &\in C^1(\overline{\Omega}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

А також виконуються такі нерівності:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j &\geq k_a \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j &\geq k_b \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \\ \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \xi_i \xi_j &\geq k_c \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ \sum_{i=1}^n a_i(x) &\leq a(x) \\ \sum_{i=1}^n b_i(x) &\leq b(x) \\ \sum_{i=1}^n c_i(x) &\leq c(x) \end{aligned}$$

Формально спряжений оператор записується в такому вигляді:

$$\begin{aligned} YL^* &= F^* \\ (v, \eta, \theta) &\times \begin{pmatrix} L_1^* & 0 & 0 \\ -a(x) & L_2^* & 0 \\ 0 & -b(x) & L_3^* \end{pmatrix} = \\ (f^*, g^*, k^*) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} L_1^* &= -v_i - \sum_{j=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n a_{x_i} v_{x_i} + a(x)v \\ L_2^* &= -\eta_i - \sum_{j=1}^n (b_{ij} \eta_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_{x_i} \eta_{x_i} + b(x)\eta \\ L_3^* &= -\theta_i - \sum_{j=1}^n (c_{ij} \theta_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n c_{x_i} \theta_{x_i} + c(x)\theta \end{aligned}$$

Областю визначення $D(L^*)$ оператора L^* є множина функцій $C^m(\overline{Q})$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega & v(x, T) &= 0 \\ \eta(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega & \eta(x, T) &= 0 \\ \theta(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega & \theta(x, T) &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Простір H_* - поповнення простору $D(L^*)$ по аналогічній нормі з H .

По парам $H, L_2(Q)$ та $H_+, L_2(Q)$ побудуємо негативні простори $(H)^*$ та $(H_+)^*$ поповнюючи $L_2(Q)$ за нормами:

$$\|f\|_{(H)^*} = \sup_{\substack{U \in H \\ U \neq 0}} \frac{|(F, U)_{L_2(Q)}|}{\|U\|_H}$$

$$\|f\|_{(H_+)^*} = \sup_{\substack{V \in H_+ \\ V \neq 0}} \frac{|(F, V)_{L_2(Q)}|}{\|V\|_{H_+}}$$

Має місце ланцюжок щільних вкладень просторів:

$$H \subset L_2(Q) \subset (H)^*$$

$$H_+ \subset L_2(Q) \subset (H_+)^*$$

c_i - константи, $c_i \geq 0$ і не залежить від U та V

2. Дослідження коректності побудови спряженого оператора L^*

Формально спряжений оператор записується в такому вигляді:

$$L^* = \begin{pmatrix} L_1^* & 0 & 0 \\ -a(x) & L_2^* & 0 \\ 0 & -b(x) & L_3^* \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$L_1^* = -v_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n a_{xi} v_{x_i} + a(x)v$$

$$L_2^* = -\eta_t - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} \eta_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_{xi} \eta_{x_i} + b(x)\eta$$

$$L_3^* = -\theta_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij} \theta_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n c_{xi} \theta_{x_i} + c(x)\theta$$

Областю визначення $D(L^*)$ оператора L^* є множина функцій $C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega \\ \eta(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega \\ \theta(x, t) &= 0, x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} v(x, T) &= 0 \\ \eta(x, T) &= 0 \\ \theta(x, T) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Відповідна спряжена початково крайова задача буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} F^* &= (f^*(x), g^*(x), k^*(x)) \\ V &= (v(x, t), \eta(x, t), \theta(x, t)) \\ VL^* &= F^* \end{aligned}$$

Доведемо, що це дійсно так. Дійсно переконаємося, що:

$$(LU, V)_{L_2(Q)} = (L^*V, U)_{L_2(Q)} \quad (2.4)$$

Розглянемо для U і V , які задовольняють крайовим умовам:

$$\begin{aligned} (LU, V)_{L_2(Q)} &= (u_t, v)_{L_2} + (Au, v)_{L_2} + (-a(x)u, v)_{L_2} \\ &+ (v_t, \eta)_{L_2} + (Av, \eta)_{L_2} + (-b(x)v, \eta)_{L_2} + \\ &+ (\omega_t, \theta)_{L_2} + (A\omega, \theta)_{L_2} \end{aligned}$$

Будемо працювати з кожним скалярним добутком окремо:

$$\begin{aligned} (u_t, v)_{L_2} &= \int_0^T \int_{\partial\Omega} u_t v dt d\Omega = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (uv)_t dt d\Omega - \\ &- \int_0^T \int_{\partial\Omega} uv dt d\Omega = -(u, v_t)_{L_2} \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} (v_t, \eta)_{L_2} &= -(v, \eta_t)_{L_2} \\ (\omega_t, \theta)_{L_2} &= -(\omega, \theta_t)_{L_2} \end{aligned}$$

Розглянемо наступний скалярні добутки:

$$\begin{aligned} (-a(x)u, v)_{L_2} &= (v, -a(x)u)_{L_2} \\ (-b(x)v, \eta)_{L_2} &= (\eta, -b(x)v)_{L_2} \\ (Au, v)_{L_2} &= \left(-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_{xi} u_{x_i} + a(x)u, v \right)_{L_2} = \\ &= \left(-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i}, v \right)_{L_2} + \left(\sum_{i=1}^n a_{xi} u_{x_i}, v \right)_{L_2} + (a(x)u, v)_{L_2} \end{aligned}$$

Розглянемо окремо кожен з 3 скалярних добутоків:

$$\begin{aligned}(a(x)u, v)_{L_2} &= (u, a(x)v)_{L_2} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i}, v \right)_{L_2} &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\partial\Omega} a_i u_{x_i} v d\Omega dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\partial\Omega} a(x) dx u v \right) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} u a_{x_i} v_{x_i} d\Omega dt \right) = \\ &= - \left(u, \sum_{i=1}^n a_{x_i} v_{x_i} \right)_{L_2} \\ &\quad \left(- \sum_{ij=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j}, v \right) = \\ &= - \sum_{ij=1}^n \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} (u_{x_i} a_{ij} v)_{x_j} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} u_{x_i} a_{ij} v_{x_j} d\Omega dt \right) = \\ &= - \sum_{ij=1}^n \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} (u a_{ij} v_{x_j})_{x_i} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} u (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} d\Omega dt \right) \\ &= \left(u, \sum_{ij=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2}\end{aligned}$$

Звідки маємо:

$$\begin{aligned}(Au, v)_{L_2} &= (u, a(x)v)_{L_2} - \left(u, \sum_{i,j=1}^n a_{x_i} v_{x_i} \right)_{L_2} + \\ &\quad + \left(u, \sum_{ij=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2} \\ (Au, \eta)_{L_2} &= (v, b(x)\eta)_{L_2} - \left(v, \sum_{i,j=1}^n b_{x_i} \eta_{x_i} \right)_{L_2} + \\ &\quad + \left(v, \sum_{ij=1}^n (b_{ij} \eta_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\omega, \theta)_{L_2} &= (\omega, c(x)\theta)_{L_2} - \left(\omega, \sum_{i,j=1}^n c_{x_i} \theta_{x_i} \right)_{L_2} + \\ &\quad + \left(\omega, \sum_{ij=1}^n (c_{ij} \theta_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2}\end{aligned}$$

Підставимо отримані результати і отримаємо:

$$\begin{aligned}\langle LU, V \rangle_{L_2(Q)} &= -(\nu, \eta)_{L_2} - (\omega, \theta)_{L_2} + \\ &\quad + (\nu, -a(x)v)_{L_2} + (\omega, -b(x)\eta)_{L_2} - (u, v)_{L_2} + \\ &\quad + (u, a(x)v)_{L_2} - \left(u, \sum_{i=1}^n a_{x_i} v_{x_i} \right)_{L_2} + \\ &\quad + \left(u, \sum_{ij=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2} + (\nu, b(x)\eta)_{L_2} - \\ &\quad - \left(\nu, \sum_{i=1}^n b_{x_i} \eta_{x_i} \right)_{L_2} + \left(\nu, \sum_{ij=1}^n (b_{ij} \eta_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2} + \\ &\quad + (\omega, c(x)\theta)_{L_2} - \left(\omega, \sum_{i=1}^n c_{x_i} \theta_{x_i} \right)_{L_2} + \left(\omega, \sum_{ij=1}^n (c_{ij} \theta_{x_j})_{x_i} \right)_{L_2}\end{aligned}$$

Що і підтверджує правильність побудови спряженого оператора.

3 Априорні оцінки.

Дослідимо властивості оператора (1.1) та формально спряженого до нього (2.1):

Лема 1.

Для довільної функції $U(t, x) \in D(L)$ має місце оцінка:

$$\|LU\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|U\|_H. \quad (3.1)$$

Доведення.

Для довільного $U(t, x) \in D(L)$ розглянемо:

$$\begin{aligned}\|LU\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_Q (L_1 u)^2 dQ + \int_Q (L_2 v)^2 dQ \\ &\quad + \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ + \int_Q (a(x)v)^2 dQ + \\ &\quad + \int_Q (b(x)\eta)^2 dQ\end{aligned} \quad (3.2)$$

Розглянемо кожен з 3 перших інтегралів окремо:

$$\begin{aligned}\int_Q (L_1 u)^2 dQ &= \int_Q (u_t + Au)^2 dQ = \\ &= \int_Q (u_t^2 + 2u_t Au + (Au)^2) dQ\end{aligned} \quad (3.3)$$

Позначимо:

$$I_1 = \int_Q u^2 dQ,$$

$$I_2 = \int_Q (2u, Au + (Au)^2) dQ.$$

Оцінимо інтеграл I_2 в за допомогою нерівності: $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, при довільному фіксованому $\varepsilon > 0$, тоді:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_Q \varepsilon u^2 + \frac{1}{\varepsilon} (Au)^2 + (Au)^2 dQ \leq \\ &\leq \int_Q \varepsilon u^2 dQ + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right)^2 dQ + \\ &+ \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 + (au)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(-2 \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right) \right) dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q -2au \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right) dQ + \\ &+ \int_Q 2au \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} dQ \end{aligned} \quad (3.4)$$

Знову скористаємося нерівністю: $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ для третього і четвертого і п'ятого інтегралів наведених вище:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(-2 \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right) \right) dQ = \\ &= (-1 - \varepsilon) \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right)^2 dQ + \\ &+ \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 dQ \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q -2au \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right) dQ = \\ &= (-1 - \varepsilon) \int_Q (au)^2 dQ + \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &+ \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right)^2 dQ \\ &\int_Q 2au \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} dQ = \\ &= (1 + \varepsilon) \int_Q (au)^2 dQ + \end{aligned} \quad (3.7)$$

Підставивши (3.5), (3.6) і (3.7) у (3.4) отримаємо:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_Q \varepsilon u^2 dQ + \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \varepsilon \right) \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \right)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q (au)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 dQ \leq \\ &\leq \int_Q \varepsilon u^2 dQ + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q (au)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 dQ \end{aligned}$$

Підставивши отриманий результат в (3.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_Q (L_1 u)^2 dQ &\leq \int_Q (\varepsilon + 1) u^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q (au)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 dQ \end{aligned}$$

Аналогічно для другого і третього інтегралів з виразу (3.2) будуть справедливі наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \int_Q (L_2 v)^2 dQ &\leq \int_Q (\varepsilon + 1) v_i^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q (b v)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n b_i(x) v_{x_i}\right)^2 dQ \\ \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ &\leq \int_Q (\varepsilon + 1) \omega_i^2 dQ + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q (c \omega)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q (c \omega)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n c_i(x) \omega_{x_i}\right)^2 dQ \end{aligned}$$

Підставимо отримані результати в (3.2):

$$\begin{aligned} \|LU\|_{L_2(Q)}^2 &\leq \int_Q (\varepsilon + 1) u_i^2 dQ + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q (a(x) u)^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}\right)^2 dQ + \int_Q (\varepsilon + 1) v_i^2 dQ + \\ &+ \int_Q \left(b^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) + a^2(x)\right) v^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n b_i(x) v_{x_i}\right)^2 dQ + \int_Q (\varepsilon + 1) \omega_i^2 dQ + \\ &+ \int_Q \left(c(x)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) + b^2(x)\right) \omega^2 dQ + \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \int_Q \left(\sum_{i=1}^n c_i(x) \omega_{x_i}\right)^2 dQ \leq C \end{aligned}$$

Отже: $\|LU\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|U\|_H$.

Зауваження 1.

Отримана нерівність дозволяє розширити по неперервності оператор L на весь простір H , при цьому нерівність леми виконується для довільної функції $U(t, x) \in H$. Під L розуміємо вже розширений оператор.

Лема 2.

Для довільної функції $V(t, x) \in D(L^*)$ має місце оцінка:

$$\|VL^*\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|V\|_{H^*}.$$

Доведення.

Доведення леми 2 проводиться аналогічно доведенню леми 1.

Зауваження 2.

Отримана нерівність дозволяє розширити по неперервності оператор L^* на весь простір H^* , при цьому нерівність леми виконується для довільної функції $V(t, x) \in H^*$. Під L^* розуміємо вже розширений оператор.

Лема 3.

Для довільної функції $U(t, x) \in H$ має місце оцінка

$$C_1 \|U\|_H \leq \|LU\|_{L_2(Q)}$$

Доведення.

Для довільного $U(t, x) \in D(L)$ розглянемо:

$$\begin{aligned} \|LU\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_Q (L_1 u)^2 dQ + \int_Q (L_2 v)^2 dQ + \\ &+ \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ + \int_Q (a(x) u)^2 dQ + \int_Q (a(x) v)^2 dQ \end{aligned}$$

Розглянемо перший доданок:

$$\begin{aligned} \int_Q (Lu)^2 dQ &= \int_Q (u_i + Au)^2 dQ = \\ &= \int_Q (u_i^2 + 2u_i Au + (Au)^2) dQ = \\ &= \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right) d\Omega + \\ &+ \int_Q \left(u_i^2 + (Au)^2 + 2u_i \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) \right) dQ \end{aligned}$$

Перенесемо останній доданок вліво:

$$\begin{aligned} \int_Q (Lu)^2 dQ - \int_Q \left(2 \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + 2au \right) dQ &= \\ &= \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right) d\Omega + \int_Q (u_i^2 + (Au)^2) dQ \end{aligned}$$

Скористуємось наступною нерівністю:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \text{ при } \varepsilon > 0, \text{ тоді:}$$

$$\begin{aligned} \int_Q (Lu)^2 dQ - \int_Q \left(2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_i u_{j,x} + 2au_x u \right) dQ \leq \\ \leq \int_Q (Lu)^2 dQ + \int_Q \left(\varepsilon u_i^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (u)^2 \right) dQ \end{aligned}$$

Мають місце наступні нерівності [2]:

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_i u_{j,x} \right)_{i,j} d\Omega \geq \alpha \int_Q \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2 |_{i,j} d\Omega \\ \|Au\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq C_1 \|u\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 - C_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ C_1 > 0, C_2 > 0 \end{aligned}$$

Використовуючи отримані нерівності маємо:

$$\begin{aligned} C_1 \int_Q u^2 dQ + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 dQ + \int_Q u_i^2 dQ \leq \\ \leq C_2 \int_Q u^2 dQ + \int_Q (Lu)^2 dQ + \\ + \int_Q \left(\varepsilon u_i^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (u)^2 \right) dQ \end{aligned}$$

Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{2C_1}$, та використовуючи

нерівність Фрідрікса ($\|u\|_{L_2(Q)} \leq C \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}$)
отримаємо:

$$\begin{aligned} C_1 (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|u\|_{W_2^{0,2}(Q)}^2) + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(Q)}^2 \leq \\ \leq C_2 \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(Q)}^2 \\ + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 \leq C_3 \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 \\ C_1, C_2, C_3 > 0, \\ C_1 \|u\|_H^2 \leq C_3 \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 \end{aligned}$$

За допомогою граничного переходу
отримаємо нерівність, що виконується для
довільної функції $u(t, x) \in H$. Припустимо, що
нерівність:

$$C_1 \|u\|_H \leq \|Lu\|_{L_2(Q)}$$

не виконується, тобто:

$$\forall n \exists u_n \in H: \|Lu_n\|_{L_2(Q)} < \frac{1}{n} \|u_n\|_H.$$

Вважаємо, що $\|u\|_H = 1$. Оператор вкладення
 $H \subset W_2^{0,1}(Q)$ - компактний. З послідовності
 $u_n \in H$ можна виділити підпослідовність
 $u_{n_k} : u_{n_k} \rightarrow \varphi \in W_2^{0,1}(Q)$ сильно в $W_2^{0,1}(Q)$.
Разом з тим:

$$\|Lu_{n_k}\|_{L_2(Q)} < \frac{1}{n_k} \|u_{n_k}\|_H = \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

Отже:

$$\begin{aligned} C \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_H^2 \leq C_3 \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{W_2^{0,1}}^2 + \\ + \|Lu_{n_k} - Lu_{n_l}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$. Отже u_{n_k}
фундаментальна в H та збіжна до $\varphi \in H$. Тоді:

$$\varphi \in H \text{ та } u_{n_k} \rightarrow \varphi \text{ в } H \text{ і } \|\varphi\|_H = 1.$$

Але:

$$\begin{aligned} L\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} Lu_{n_k} = 0 \text{ та } 0 \neq \varphi \in H, \\ \text{Ker } L \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Тобто оператор L не є ін'єктивним, що
суперечить постановці задачі, а отже маємо:

$$\begin{aligned} C_1 \int_Q \left((u_t)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j})^2 \right) dQ \leq \\ \leq \int_Q (Lu)^2 dQ \end{aligned}$$

Аналогічно для другого і третього доданка
маємо:

$$C_2 \int_Q \left((v_t)^2 + \sum_{i=1}^n (v_{x_i})^2 + \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 \right) dQ \leq \int_Q (L_2 v)^2 dQ$$

$$C_3 \int_Q \left((\omega_t)^2 + \sum_{i=1}^n (\omega_{x_i})^2 + \sum_{i,j=1}^n (\omega_{x_i x_j})^2 \right) dQ \leq \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ$$

Просумуємо отримані нерівності:

$$(C_1 + C_2 + C_3) \|U\|_H \leq \int_Q (L_1 u)^2 dQ + \int_Q (L_2 v)^2 dQ + \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ$$

Звідки випливає шуканий результат:

$$(C_1 + C_2 + C_3) \|U\|_H = \int_Q (L_1 u)^2 dQ + \int_Q (L_2 v)^2 dQ + \int_Q (L_3 \omega)^2 dQ + \int_Q (a(x)v)^2 dQ + \int_Q (a(x)\omega)^2 dQ$$

Що і доводить лему 3

Лема 4.

Для довільної функції $V(t, x) \in D(L^*)$ має місце оцінка:

$$C_1 \|V\|_{H_*} \leq \|VL^*\|_{L_2(Q)}.$$

Доведення.

Доведення леми 2 проводиться аналогічно доведенню леми 1.

Висновок

В роботі отримані апіорні нерівності для параболічних систем із сингулярними правими частинами, що описують точкові джерела радіоактивного забруднення, і закладені основи для доведення існування єдиного розв'язку задачі конвекції-дифузії суміші ізотопів в пористому середовищі із урахуванням філіації.

Список використаних джерел

1. Choquet, C. Radionuclide transport model with wells // Asymptotic Analysis. — 2004. — 37. — P. 57-78.
2. Choquet, C. Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity // Journal of Mathematics and Fluid Mechanics. — 6. — P. 365-388.
3. Choquet, C., Zimmermann, S. Study of a finite volume-finite element scheme for a nuclear transport model. Online. Available HTTP: <http://arxiv.org/abs/0704.1286> (accessed August 30, 2009).
4. Douglas, J. Jr., Spagnuolo A. The transport of nuclear contamination in fractured porous media // Journal of Korean Mathematical Society. — 38. — P. 723-761.
5. Ляшко С.И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. — К.: Наукова думка, 1998. — 240 с.
6. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. — К. Наукова думка, 1998. — 472 с.
7. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Семенов В.В., Шевченко К.В. Лагранжово-ейлеровий підхід до розв'язання оберненої задачі конвективної дифузії // Доповіді НАН України. — 2007. — № 10. — С. 38-43.
8. Ключин Д.А., Кушан А.А., Ляшко С.И., Номировский Д.А., Петунин Ю.И. Обобщенное решение некоторых операторных уравнений в банаховых пространствах // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - №1(81). - 1997.-С.93-99.

Надійшла до редколегії 19.01.2010

УДК 621.391 : 519.24

Швець О.Ф., к.фіз.-мат.н.,
Сопронюк О.Л., аспірантка

Про матричні моделі для чисельного аналізу параметричної чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору

Запропоновано алгоритми для обчислення функцій чутливості динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору залежних від вектору параметрів, а також ефективний спосіб чисельної реалізації такої процедури за допомогою виведеної формули Коші для матричного диференціального рівняння.

Ключові слова: матричні диференціальні рівняння, чисельний аналіз, динамічна система, аналіз чутливості, змінний фазовий простір.

E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Роботу представив проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

В даній роботі приведені алгоритми для чисельного аналізу чутливості параметричних систем [1–7] зі змінною вимірністю фазового простору [8–10] з позицій матричних диференціальних рівнянь. Такі задачі виникають у зв'язку з необхідністю забезпечення нормального функціонування об'єкта на реальних режимах, що пов'язано з урахуванням факторів різної природи, параметрів зовнішнього середовища та умов експлуатації. Деякі з них несуть основну інформацію про властивості системи, враховуються в її моделі завдяки вектору фазового стану. Але завжди реально існує безліч додаткових факторів, що не контролюються, але можуть значно впливати на роботу об'єкта. З іншого боку, у реальних умовах експлуатації завжди виникає розкид значень параметрів від їх розрахункових, що зумовлює зміну вектора фазових координат та критерію якості системи. Якщо розкид змінних стану за величиною буде досить значним, то це може призвести взагалі до непрацездатності об'єкту. Таким чином, працездатність реальної системи визначається характером залежності її властивостей від змінювання параметрів, тобто – чутливістю системи. Природно вимагати, щоб система була малочутливою до зміни параметрів. Тому питання чутливості доцільно розглядати ще на етапі проектування, хоча це буде й

O.F. Shvets, Ph.D. in Physics and Mathematics.,
O.L. Sopronuk, postgraduate student

Models for sensitivity analysis of discontinuous dynamical systems with variable-dimension phase space

It is proposed algorithms for computing sensitivity functions of dynamical systems of ordinary differential equations with variable-dimension phase space which dependent of vector of parameters and an effective way for numerical implement of this procedure by the instrumentality of derive a Cauchy's formula for matrix differential equation.

Key words: dynamical system, sensitivity analysis, variable phase space.

ускладнювати розв'язання вихідної задачі. Основна увага в роботі зосереджується на чисельному моделюванні рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору. Акцентується увага на тому, що для векторного параметра необхідно розв'язувати матричне диференціальне зі змінною вимірністю відносно компонент матриці чутливості. В роботі приведені рівняння чутливості для загальних систем зі змінною вимірністю фазового простору в матричній формі. Запропоновано ефективний спосіб чисельної реалізації такої процедури з допомогою виведеної формули Коші для матричного диференціального рівняння.

Рівняння руху параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору

Нехай рівняння руху об'єкта описується системою диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha) \quad t_{i-1} < t < t_i, i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $x^{(i)T} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$, $f^{(i)}(x^{(i)}, t)$ – n_i -вимірні вектор-функції, які задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку, α – m -вимірний вектор параметрів, N – визначає число систем диференціальних рівнянь зі змінною

вимірністю фазового простору, які моделюють даний процес.

Моменти t_i , які визначають зміну одного диференціального рівняння іншим називають моментами перемикавання. Припускаємо, що вектор фазового стану в момент t_i змінює свою структуру згідно з співвідношеннями

$$x^{(i+1)}(t_i + 0) = x^{(i+1)+} = \Phi^{(i+1)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \quad (2)$$

де $x^{(i+1)+} = x^{(i+1)}(t_i + 0)$, $x^{(i)-} = x^{(i)}(t_i - 0)$,

$\Phi^{(i)}$ – вектор-функції розмірності n_i , диференційовані за всіма аргументами. Співвідношення (2) називається умовами зміни вимірності фазового простору. Моменти перемикавання в загальному випадку знаходяться з умов

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i, \alpha) = 0, \quad (3)$$

які будемо називати умовами перемикавання. Тут $\psi_i(\cdot)$ – скалярні функції, неперервно-диференційовані за своїми аргументами. Вибираючи індекси i , можна знайти розривний розв'язок для (1)–(3) з початковими умовами, які теж залежать від α

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)+}(t_0) = x^{(1)+}(t_0, \alpha) = x^{(1,0)}(\alpha). \quad (4)$$

В (4) $t_0(\alpha)$ та $x^{(1,0)}(\alpha)$ являються диференційованими функціями векторного параметра α . Також припустимо, що система додаткових співвідношень (2)–(4) така, що для будь-яких α з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на інтервалі $t_0 \leq t < t_1(\alpha)$. При цьому моменти перемикавання також залежать від α , тобто $t_i = t_i(\alpha)$. В результаті можна побудувати множину розв'язків зі змінною вимірністю

$$x^{(i)} = x^{(i)}(t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В реальних ситуаціях зміна одного рівняння іншим описується більш складними співвідношеннями, які можна отримати з попереднього аналізу задачі.

Матричні рівняння чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору

Матрицею функцій чутливості параметричного сімейства (5) будемо називати похідну $U^{(i)}(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(i)}(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ розмірності $n_i \times m$,

в якій оператор $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ означає звичайну похідну в

точках диференційованості $x^{(i)}(t, \alpha)$ і не визначену в точках зміни розмірності вектора фазових координат.

Нехай (5) – параметричне сімейство розв'язків. Тоді знайдеться $t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$ таке, що для будь-яких $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_0(\alpha) \leq t < t_1(\alpha). \quad (6)$$

Якщо $t_0(\alpha)$, $x^{(1,0)}(\alpha)$ – неперервно-диференційовані за компонентами вектора α , а $f^{(i)}(x, t, \alpha)$ – неперервна за всіма аргументами і неперервно-диференційована за x , α , тоді початковими умовами (4) і системою (1) визначено на цьому інтервалі параметричне сімейство розв'язків, для яких існує матриця функцій чутливості першого порядку в

класичному розумінні $U^{(i)}(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(i)}(t, \alpha)}{\partial \alpha}$, яка

задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dU^{(i)}}{dt} = A^{(i)}(t)U^{(i)} + B^{(i)}(t) \quad (7)$$

з початковими умовами

$$U^{(i)}(t_0) = U^{(i,0)} = \frac{dx^{(i,0)}(\alpha)}{d\alpha} - \dot{x}^{(i,0)} \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}. \quad (8)$$

Тут

$$A^{(i)}(t) = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \bigg|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)},$$

$$B^{(i)}(t) = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)}.$$

По аналогії для i -ої підсистеми

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha)$$

матриця функцій чутливості існує в класичному розумінні і визначається системою рівнянь

$$\frac{dU^{(i)}}{dt} = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \bigg|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} \cdot U^{(i)} + \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} \quad (9)$$

Для обчислення матриці функцій чутливості необхідно отримати для (9) початкові умови, які даються наступною теоремою.

Теорема 1. Нехай функції $\Phi^{(i)}$, ψ_i – неперервно-диференційовані за всіма

аргументами, а $f^{(i)}$ неперервні за всіма аргументами та неперервно-диференційовані за $x^{(i)}$, α . Нехай для деякого α_0 ($\alpha_1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$) виконується співвідношення

$$\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial t} \neq 0 \quad (10)$$

(тут індекс “-” означає, що всі величини обчислюються при $t = t_i - 0$). Тоді матриця функцій чутливості існує і задовольняє рівняння (9) при початкових умовах (8). При цьому переходи від одного рівняння (9) до іншого відбуваються згідно умов

$$U^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \left[\frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right] \frac{dt_i}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha} \quad (11)$$

де

$$U^{(i+1)+} = \left. \frac{\partial x^{(i+1)}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{t=t_i+0} \quad (12)$$

$$\frac{dt_i}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial t}} \quad (13)$$

Доведення. На інтервалі $t_0 < t < t_1$ матриця $U^{(1)}(t, \alpha)$ існує і являється розв'язком задачі Коші (7), (8).

На (t_1, t_2) розв'язок задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha), \quad t > t_1(\alpha) \quad (14)$$

з умовами скачка

$$x^{(2)}(t_1 + 0) = x^{(2)+} = \Phi^{(2)}(x^{(1)-}, t_1, \alpha). \quad (15)$$

При $t \in (t_1, t_2)$ існує матриця функцій чутливості

$$U^{(2)}(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(2)}(t, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad \text{яка задовольняє}$$

матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dU^{(2)}}{dt} = \frac{\partial f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha)}{\partial x^{(2)}} \bigg|_{x^{(2)}=x^{(2)}(t, \alpha)} \cdot U^{(2)+} + \frac{\partial f^{(2)}(x^{(2)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{x^{(2)}=x^{(2)}(t, \alpha)} \quad (16)$$

з початковими умовами

$$U^{(2)}(t_1 + 0) = U^{(2)+} = \frac{dx^{(2)+}}{d\alpha} = f^{(2)}(x^{(2)+}, t_1, \alpha) \cdot \frac{dt_1}{d\alpha} \quad (17)$$

Зі співвідношення (15) отримаємо

$$\frac{dx^{(2)+}}{d\alpha} = \frac{\partial \Phi^{(2)-}}{\partial x^{(1)}} \frac{dx^{(1)-}}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(2)-}}{\partial t} \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(2)-}}{\partial \alpha} \quad (18)$$

Оскільки $x^{(1)-} = x(t_1(\alpha) - 0, \alpha)$ (тут $x(\cdot)$ – загальний розв'язок), то

$$\frac{dx^{(1)-}}{d\alpha} = f^{(1)}(x^{(1)-}, t_1, \alpha) \cdot \frac{dt_1}{d\alpha} + U^{(1)-}(t_1, \alpha). \quad (19)$$

Для визначення $\frac{dt_1}{d\alpha}$ знайдемо похідну за α

від виразу $\psi_i(x^{(1)-}, t_1, \alpha) = 0$

$$\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(1)}} \left(f^{(1)-} \frac{dt_1}{d\alpha} + U^{(1)-} \right) + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial t} \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial \alpha} = 0. \quad (20)$$

Враховуючи (10) при $i = 1$ з (20) отримаємо

$$\frac{dt_1}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_1^{-T}}{\partial x^{(1)}} U^{(1)-} + \frac{\partial \psi_1^{-}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1^{-T}}{\partial x^{(1)}} f^{(1)-} + \frac{\partial \psi_1^{-}}{\partial \alpha}} \quad (21)$$

Підставляючи (21), (19), (18) в (17) обчислимо початкові умови для матриці функцій чутливості системи (16)

$$U^{(2)+} = \frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial x^{(1)}} U^{(1)-} + \left[\frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial x^{(1)}} f^{(1)-} - f^{(2)+} \right] \frac{dt_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(1)-}}{\partial \alpha} \quad (22)$$

що еквівалентно (11) при $i = 1$.

По аналогії проводиться доведення для будь-якого i , що й доводить сформульовану теорему.

Зупинимось на властивостях отриманих співвідношень.

1). Підставимо (13) в (11) і запишемо скачки для функцій чутливості в такій конструктивній формі

$$U^{(i+1)+} = P^{(i)} U^{(i)-} + Q^{(i)}, \quad (23)$$

де матриці $P^{(i)}$ та $Q^{(i)}$ розмірностей $n_{i+1} \times n_i$ та $n_{i+1} \times m$ обчислюються за формулами

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right) \left(\frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial x^{(i)}} \right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial \alpha} \right]} \left(\frac{\partial \psi_i^{-}}{\partial x^{(i)}} \right)^T \quad (24)$$

$$Q^{(i)} = - \frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right) \left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha} \right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha} \right]} + \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}. \quad (25)$$

2). Зрозуміло, що співвідношення залишаються такими ж, якщо система рівнянь (1) має один і той же порядок для будь-яких i . При цьому $\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}}$ будуть квадратними матрицями.

3). Перерахунок скачків в точках перемикавання (11) або (23) являється лінійним відносно функцій чутливості.

4). Якщо t_i фіксовано, то $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$. Тоді з (11)

$$U^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}, \quad (26)$$

тобто

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial x^{(i)}}, \quad Q^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i+1)-}}{\partial \alpha}.$$

Це говорить про те, що формули для обчислення функцій чутливості отримані досить загальні. З них можна отримати різні частинні випадки.

Випадок неперервних розв'язків

Приведені формули спрощуються, якщо розглянути

$$n_1 = n_2 = \dots = n_N = n, \quad x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(N)} = x,$$

$$U(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha},$$

а розв'язок системи (1) є неперервний. В цьому випадку умови скачка (2) мають вигляд $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Тоді

$$\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x} = E, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)+}}{\partial \alpha} = 0. \quad (27)$$

З формули (11) отримаємо

$$U(t_i + 0) - U(t_i - 0) = -\Delta f^{(i)} \frac{dt_i}{d\alpha}, \quad (28)$$

де $\Delta f^{(i)} = f^{(i+1)}(x(t_i), t_i, \alpha) - f^{(i)}(x(t_i), t_i, \alpha)$ – величина розриву правої частини в точці t_i . Звідси

$$P^{(i)} = \frac{1}{\psi_i} \Delta f^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T + E, \quad Q^{(i)} = \frac{1}{\psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \quad (29)$$

У неперервному випадку разом з (17) можна використовувати інші співвідношення, які

важливі для прикладних задач. Наприклад, при $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$ маємо

$$\frac{dx^{(i)-}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t_i, \alpha), \quad \frac{dx^{(i)+}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t_i, \alpha) \quad (30)$$

та умови перемикавання

$$\psi_i(x(t_i + 0, \alpha), t_i, \alpha) = \psi_i(x(t_i - 0, \alpha), t_i, \alpha) = 0. \quad (31)$$

Тоді, враховуючи

$$\frac{d\psi_i}{dt_i} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{dx^{(i)+}}{dt} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{dx^{(i)-}}{dt} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i},$$

отримаємо два вирази

$$\frac{dt_i}{d\alpha} = \frac{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} U^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} U^{(i)+} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} f^{(i)+} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}}. \quad (32)$$

При використанні другого співвідношення з (32) отримаємо

$$U^{(i)-} = R^{(i)} U^{(i)+} + S^{(i)}, \quad (33)$$

де

$$R^{(i)} = E - \frac{1}{\psi_i^+} \Delta f^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T, \quad S^{(i)} = \frac{1}{\psi_i^+} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \quad (34)$$

Відмітимо деякі особливості обчислення матриць функцій чутливості на основі отриманих формул:

1). Матриці функцій чутливості в момент перемикавання t_i залишаються неперервними в двох випадках, коли $\Delta f^{(i)} = 0$, тобто права частина системи (1) є неперервною при $t = t_i$, та при $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$, тобто моменти перемикавання не залежать від α ;

2). Розглянемо загальні властивості матриць $P^{(i)}$, $R^{(i)}$. Відмітимо, якщо a , b – вектор-стовпці, то

$$\det(E + ab^T) = 1 + b^T a. \quad (35)$$

Якщо, крім цього, $1 + b^T a \neq 0$, то

$$(E + ab^T)^{-1} = E - \frac{ab^T}{1 + b^T a}. \quad (36)$$

Формули (35), (36) перевіряються безпосередніми обчисленнями.

Тоді

$$\det P^{(i)} = I + \frac{1}{\dot{\psi}_i^-} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T \mathcal{A}^{(i)} =$$

$$= I + \frac{1}{\dot{\psi}_i^-} (\dot{\psi}_i^+ - \dot{\psi}_i^-) = \frac{\dot{\psi}_i^+}{\dot{\psi}_i^-}, \quad (37)$$

$$\det R^{(i)} = \frac{\dot{\psi}_i^-}{\dot{\psi}_i^+}. \quad (38)$$

Звідси випливає, якщо $\dot{\psi}_i^- = 0$, то матриця $R^{(i)}$ – вироджена і з умови (33) не можна безпосередньо виразити $U^{(i)*}$. Крім цього, з (33), (34) та (36) при умовах $\dot{\psi}_i^+ \neq 0$, $\dot{\psi}_i^- \neq 0$ випливає

$$P^{(i)} = (R^{(i)})^{-1}; \quad (39)$$

3). Для неперервного випадку $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Отже

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_i(\alpha), \alpha)}{d\alpha} &= U^{(i)*} + f^{(i)*} \frac{dt_i}{d\alpha} = \\ &= U^{(i)*} + f^{(i)*} \frac{dt_i}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (40)$$

Формула Коші для чисельного розв'язування матричних диференціальних рівнянь чутливості зі змінною вимірністю

Розглянемо матричне диференціальне рівняння (7) з початковими умовами (8). Співвідношеннями (7), (8) задається задача Коші для матричного диференціального рівняння.

Нехай $U^{(i)}(t) = (u^{(i,1)}, u^{(i,2)}, \dots, u^{(i,m)})$ – матриця розмірності $n_i \times m$, яка визначає розв'язок системи (7),

$$A^{(i)}(t) = \{a^{(i,j)}(t)\}_{j=1}^{n_i} = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)}$$

– квадратна матриця розмірності $n_i \times n_i$ з неперервними елементами,

$$\begin{aligned} B^{(i)}(t) &= (b^{(i,1)}, b^{(i,2)}, \dots, b^{(i,m)}) = \\ &= \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{(i)}(t_0) &= (d^{(i,1)}, d^{(i,2)}, \dots, d^{(i,m)}) = \\ &= U^{(i,0)} = \frac{dx^{(i,0)}(\alpha)}{d\alpha} - \dot{x}^{(i,0)} \frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha} \end{aligned}$$

– відомі матриці.

Матричну задачу Коші (7), (8) можна представити в такій формі

$$\frac{du^{(i,j)}}{dt} = A^{(i)}(t)u^{(i,j)} + b^{(i,j)}(t), \quad (41)$$

$$u^{(i,j)}(t_0) = d^{(i,j)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Розв'язок кожної з задач Коші (41) можна записати у вигляді

$$u^{(i,j)}(t) = Y^{(i)}(t, t_0) d^{(i,j)} + \int_{t_0}^t Y^{(i)}(t, \tau) b^{(i,j)}(\tau) d\tau, \quad (42)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

де $Y^{(i)}(t, \tau)$ – нормована за моментом τ фундаментальна матриця, яка задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dY^{(i)}}{dt} = A^{(i)}(t)Y^{(i)}, \quad Y^{(i)}(t_0, t_0) = E. \quad (43)$$

Використовуючи (42), розв'язок задачі Коші (7), (8) можна записати в матричній формі

Теорема 2. Розв'язок матричної задачі Коші на (t_0, t_1) (7), (8) можна записати в такому загальному вигляді

$$U^{(i)}(t) = Y^{(i)}(t, t_0) U^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^t Y^{(i)}(t, \tau) B^{(i)}(\tau) d\tau. \quad (44)$$

По аналогії ми можемо записати розв'язок матричної задачі Коші (9), (8), (11) у вигляді формули типу Коші для будь-якого i . Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. Розв'язок матричної задачі Коші (9), (8), (11) можна записати в такому загальному вигляді

$$U^{(i)}(t) = Y^{(i)}(t, t_{i-1}) U^{(i)}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t Y^{(i)}(t, \tau) B^{(i)}(\tau) d\tau \quad (45)$$

з такими початковими умовами в точках перемикання

$$\begin{aligned} U^{(i)*} &= \frac{\partial \Phi^{(i)*}}{\partial x^{(i-1)}} U^{(i)*} + \\ &+ \left[\frac{\partial \Phi^{(i)*}}{\partial x^{(i-1)}} f^{(i-1)*} - f^{(i)*} \right] \frac{dt_{i-1}}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)*}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (46)$$

де $t_{i-1} < t < t_i$, $i = \overline{1, N-1}$.

Тут $Y^{(i)}(t, \tau)$ – нормована за моментом τ фундаментальна матриця, яка задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dY^{(i)}}{dt} = A^{(i)}(t)Y^{(i)}, \quad Y^{(i)}(t_{i-1}, t_{i-1}) = E. \quad (47)$$

$$A^{(i)}(t) = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)},$$

$$B^{(i)}(t) = \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} -$$

відомі матриці розмірностей $n_i \times n_i$ та $n_i \times m$ відповідно з неперервними елементами.

Висновки

В роботі приведені алгоритми для обчислення функцій чутливості динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору, залежних від векторного параметра. Запропоновано ефективний спосіб чисельної реалізації такої процедури з допомогою виведеної формули Коші для матричного диференціального рівняння. Для чисельного знаходження функцій чутливості виписані матричні моделі, які також являються системами звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Побудовані алгоритми є досить загальними і можуть бути використані для розв'язування задач аналізу стійкості та чутливості, оптимізації, обчислення допусків на параметри широкого класу динамічних систем.

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А. Анализ та оцінка параметричних систем. – К.: ІСДО, 1995. – 140 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №1-2. – С.145–161.
4. Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А. Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости // Изв. АН СРСР. – Техническая кибернетика. – 1989. – Вып.6. – С.17–25.
5. Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А. Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №4. – С. 43–55.
6. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2006. – 115 с.
7. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 484с.
8. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. – Чернівці: Рута, 1995. – 155с.
9. Сопронюк Є.Ф. Практична стійкість лінійних систем зі змінною вимірністю фазового простору // Науковий Вісник Чернівецького Університету. – Математика. – Випуск № 269. – Чернівці: – 2005. – С. 119–122.
10. Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору// Вісник Київського університету.– Сер. фізико-математичні науки. – 2009. – №1. – С.158–162.

Надійшла до редколегії 18.02.2010

УДК 531.37

Шкуліпа* О.В., аспірант
Шейман Б.С., д.мед.н., ст.н.с., завідувач
відділення токсикології НДСЛ "ОХМАТДИТ"
Рубльов Б.В., д.ф.-м. н., проф.

Застосування дискримінантного аналізу для визначення етіологічного чинника токсемії у хворого.

Метою роботи є знаходження функцій прогнозування для визначення етіологічного чинника токсемії у хворого, на основі оцінки дискримінант та використання дискримінантного аналізу. Проведена оцінка щодо можливості її застосування для розпізнавання етіопатогенетичних чинників ендотоксемії та існуючі недоліки.

Ключові слова: етіологія, токсемія, математична модель, дискримінантний аналіз.

* E-mail: b_v@mail.univ.kiev.ua, elena.shkulipa@gmail.com, toxicon@ukr.net

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д. Я.

Відомо, що перебіг різних захворювань супроводжується накопиченням у кров'яному руслі (токсемія) речовин (токсинів) екзогенного або ендогенного походження, які викликають пошкодження різних органів та систем людини. В статті розглядається побудова математичної моделі для визначення етіологічного чинника токсемії у пацієнтів з різними захворюваннями. Використано метод дискримінантного аналізу для знаходження дискримінантних функцій з метою систематизації різних чинників захворювання.

Постановка задачі: для заданих параметрів токсемії у хворого $x = (x_1, \dots, x_n)$ визначити етіологічний фактор, який є безпосередньою причиною виникнення токсемії (хвороби) у пацієнта.

Використані позначення: k - кількість класів етіологічних чинників; p - число дискримінантних змінних; n_k - кількість спостережень в k -тій етіології; n - загальна кількість спостережень; x_{im} - величина змінної i для m -го спостереження в k -тій етіології; $\bar{x}_k$ - середня величина змінної i в k -тій етіології.

Опис моделі. Система складається з незалежних підбібліотек, які враховують

O.V. Shkulipa, a PhD student
B. S. Sheyman, D.Sci.(Medicine), chief of
toxicology department "OHMATDUT"
B.V. Rublyov, D.Sci.(Phys.-Math.), professor

Using Discriminant Analysis to Determine Etiological Factor in Patients Toxemia.

In article approaches to construction of mathematical model for recognition etiopathogenetics factors endotoxemia at patients with various diseases are shown. The basic methods of the mathematical statistics which have been used in model. The estimation of an opportunity of its use for recognition etiopathogenetics factors endotoxemia and existing lacks is lead.

Key Words: etiology, toxemia, mathematical model, discriminant analysis

індивідуальні (характерні для кожного етіологічного чинника) особливості проявів токсемії (рис. 1).

- 1) Етіологічний чинник ("Етіологія")
- 2) Пошкоджуючий потенціал токсинів цільної плазми і реакції антитоксичних адаптаційних систем цільної плазми крові (компенсація - "Плазма комп.", декомпенсація - "Плазма декомп.")
- 3) Пошкоджуючий потенціал глобулін-асоційованих токсинів і реакції антитоксичних адаптаційних систем глобулінових білків цільної плазми (компенсація - "Глобуліни комп.", декомпенсація - "Глобуліни декомп.")
- 4) Пошкоджуючий потенціал альбумін-асоційованих токсинів і реакції антитоксичних адаптаційних систем альбумінових білків цільної плазми (компенсація - "Альбуміни комп.", декомпенсація - "Альбуміни декомп.")
- 5) Токсиннесуча фракція плазми крові, де відбувається переважне накопичення токсинів у кров'яному руслі ("Альбумінова", "Глобулінова", "Вільноциркулююча")
- 6) Пошкоджуючі потенціали токсинів з різними токсикометричними характеристиками, що синтезуються етіологічним чинником (розміри часток "Ендотокс. (С) 10-200 нм", "Ендотокс. (С) >200 нм", "Ендотокс. (С) <10 нм")

- 7) Пошкоджуючі потенціали токсинів з різними токсикометричними характеристиками, що безпосередньо реалізують ушкодження біологічної мішені в організмі (розміри часток " Ендотокс. (P)10-200 нм", " Ендотокс. (P) >200 нм", " Ендотокс. (P)<10 нм").



Рис.1 Структура системи.

Ідея полягає в тому, що на кожному рівні попарно порівнюються однотипні параметри токсемії різного етіологічного походження, та знаходяться дискримінантні функції, за допомогою яких розділяються етіологічні чинники. Для визначення невідомого етіологічного фактору токсемії g , значення $x = (x_1, \dots, x_n)$ підставляється у визначенні дискримінантні функції. Хворий з невідомим етіологічним чинником відноситься до тієї етіології значення дискримінантної функції в якій виявляється більшим. Отриманому етіологічному чиннику ендотоксемії присвоюється 1 бал. Після проходження всіх бібліотек, за найбільшою кількістю балів (сума балів усіх параметрів токсемії у хворого що були визначенні у бібліотеках) буде визначено етіологічний чинник токсемії (захворювання) у хворого.

Алгоритм розпізнавання етіологічного чинника токсемії за допомогою дискримінантного аналізу

На першому етапі аналізу проводиться кореляційний аналіз, для визначення тих параметрів токсемії з $R^2, n=29$, які привносять найбільший вклад в розділення тих чи інших етіологічних факторів. В наступному ми

проводили перевірку нормальності розподілу даних за допомогою критерію Колмогорова [1]. Після отримання результатів нормальності розподілу даних, нами було використано метод дискримінантного аналізу.

Основною метою дискримінантного аналізу є знаходження такої лінійної комбінації змінних (дискримінантних змінних), яка б оптимально розділила етіологічні чинники токсемії що розглядаються.

Лінійна функція: $d_{km} = \beta_0 + \beta_1 x_{1km} + \dots + \beta_p x_{pkm}$

де $m = 1, \dots, n; k = 1, \dots, g$, називається канонічною дискримінантною функцією з невідомими коефіцієнтами β_i . Де x_{ikm} - значення дискримінантної змінної для X_i , m -го об'єкта в групі k . З геометричної точки зору дискримінантні функції визначають гіперповерхню в p -вимірному просторі. В випадку $p=2$ гіперповерхня фактично являє собою пряму.

Коефіцієнти β_i першої канонічної дискримінантної функції вибираються таким чином, щоб центроїди різних груп якомога більше відрізнялись один від одного. Коефіцієнти другої функції вибираються аналогічно, але з додатковою умовою, щоб значення другої функції були некорельовані із значенням першої. Аналогічним чином визначаються й інші функції. Зазначене вище обумовлює, що будь-яка канонічна дискримінантна функція d_k має нульову міжгрупову кореляцію з $d_1, \dots, d_{k-1}$. Якщо кількість етіологічних чинників (класів) дорівнює g , то число канонічних дискримінантних функцій буде $g-1$. Проте використання канонічної дискримінантної функції, через складності у проведенні обчислень, не завжди є зручним. Саме тому ми в подальшому використали прості класифікуючі функції. Функції, що визначаються наступним співвідношенням:

$$d_k = b_{k0} + b_{k1}x_{1i} + \dots + b_{kp}x_{pi} + \ln q_k; \quad (1)$$

де $k = 1, \dots, g$; $b_k = (b_{k1}, \dots, b_{kp})$ і b_{k0} коефіцієнти

k -тої класифікуючої функції i -го об'єкта;

$b_k = \bar{x}_k \sum$ де $\sum$ - коваріаційна матриця,

$\bar{x}_k = (\bar{x}_{k1}, \dots, \bar{x}_{kp}), k = 1, \dots, g$,

$$b_{k0} = -\frac{1}{2} \bar{x}_k \sum^{-1} \bar{x}_k; k = 1, \dots, g$$

називаються простими класифікуючими функціями тому, що вони припускають рівність

коваріаційних матриць і не потребують інших властивостей.

Коефіцієнти b_k в даному випадку інтерпретуються як параметри, що характеризують нахил гіперплощини з координатними осями, а b_{k0} називається порогом і відповідає відстані від гіперплощини до початку координат.

При використанні простих класифікуючих функцій $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ буде відноситися до етіологічного класу, в якого значення d виявиться більшим.

Важливим етапом дискримінантного аналізу є виявлення змінних, які входять в дискримінантну функцію. В нашому дослідженні використовували метод покрокового дискримінантного аналізу, в якому змінні вводяться послідовно, виходячи із їхньої здатності розділяти дискримінантні етіологічні класи. Тобто при покроковому аналізі з «включенням» змінних, на кожному кроці переглядаються всі змінні і встановлюються одна з них, яка вносить найбільший вклад в розділення етіологічних класів. Ця змінна включається в модель і переходить на наступний крок.

Реалізація математичної моделі у процесі розпізнавання етіологічного чинника токсемії.

Реалізації починається з проведення кореляційного аналізу та перевірки на нормальність, залишається $x_{ik} = (x_{i1k}, \dots, x_{ipk})$ де i_k - нормально розподілені та корельовані фактори. Після цього проводиться попарне порівняння двох етіологічних класів токсемії: g_i та g_j , $i = 1, \dots, 9$; $j = 1, \dots, 9$.

Приклад знаходження дискримінантних функцій з рівнем значущості $p = 0.05$ та визначення приналежності етіологічного чинника токсемії до класу «Аномалії нирок» або «Аномалії печінки»:

Перший крок - визначення дискримінантних функцій (табл. 1).

Таблиця 1. Дискримінантні функції.

Дискримінантні змінні	Аномалії печінки	Аномалії нирок
АРОЛ-Г	0.9031	0.6573
АРОЛ-П	0.5204	0.0668
АРОЛ-С (10-200)	0.0840	0.2881
АРОЛ-А	0.0390	-0.1426
КрІ-І	0.1521	0.0369
ЦАЛ-Г	0.3984	0.5714

АРОЛ-А (<10)	0.1748	0.2885
НСТ-Г інд	0.8516	1.8490
ЦАЛ-А (10-200)	0.1215	0.2555
Константа	-71.5163	-61.9172

Примітка (тут та надалі):

- 1) Автоімунна активність глобулінів – АРОЛ-Г
- 2) Автоімунна активність плазми – АРОЛ-П
- 3) Автоімунна активність вільноциркулюючих токсинів (10-200 нм) – АРОЛ-С (10-200)
- 4) Автоімунна активність альбумінів АРОЛ-А
- 5) Рівні кріолабільних глобулінів – КрІ-І
- 6) Цитолітична активність глобулінів ЦАЛ-Г
- 7) Автоімунна активність альбумін-асоційованих токсинів (<10 нм) – АРОЛ-А (<10)
- 8) Рівні індукованого НСТ-тесту гранулоцитів – НСТ-Г інд.
- 9) Цитолітична активність альбумін-асоційованих токсинів (10-200 нм) – ЦАЛ-А (10-200).

Після визначення дискримінантних функцій, проводимо побудову дискримінантних розподільчих функцій наступним чином:

$$d_{ik} = b_{k0} + b_{k1}x_{i1} + \dots + b_{kp}x_{ip}; \text{ де } k = 1, 2.$$

Другий крок - знайдені дискримінантні функції використовуємо для визначення приналежності токсемії у хворого (що досліджується) до одного з етіологічних класів.

Використаємо для прикладу класифікації хворого з етіологічним чинником токсемії «Аномалії нирок» (табл. 2).

Таблиця 2. Показники хворого.

НСТ-Г інд	АРОЛ-П	АРОЛ-Г	АРОЛ-А	АРОЛ-А	АРОЛ-А (<10)	ЦАЛ-Г	ЦАЛ-А (10-200)	КрІ-І
7	47	49	37	56	20	55.4	30.4	50

Відповідно порахуємо значення дискримінантних функцій:

$$d_1 = b_{10} + b_{11}x_{11} + \dots + b_{1p}x_{1p} = 36.769246$$

$$d_2 = b_{20} + b_{21}x_{21} + \dots + b_{2p}x_{2p} = 44.26615$$

Здійснення першого та другого кроку

досліджень дозволяє встановити етіологічний чинник токсемії у хворого - «Аномалії нирок». Третій крок - для перевірки встановлених дискримінантних функцій ми використали

класифікаційну матрицю. Тобто застосували дискримінантні функції до тих даних, за якими вони були побудовані (табл. 3).

Таблиця 3. Класифікаційна матриця

Етіологічний чинник токсемії	Percent Correct	Аномалії печінки	Аномалії нирок
		$p=,53125$	$p=,46875$
«Аномалії печінки»	100.0000	34	0
«Аномалії нирок»	93.3333	2	28
Total	96.8750	36	28

Четвертий крок - проводиться попарне порівняння параметрів токсемії при різних етіологічних чинниках, залежно від їх особистих властивостей, тобто поділ на підбібліотеки (рис.2):



Рис. 2. Структура системи для хворого.

Таким чином, на підставі отриманих результатів аналізу в кожному конкретному випадку, хворого буде віднесено до однієї з двох етіологічних чинників виникнення токсемії.

Крок п'ятий – резюме. Етіологічна причина токсемії, яка набирає максимальну кількість балів в сумі по всіх етапах (підбібліотекам) дослідження, вважається провідною; слідує за нею - фоною. За отриманими результатами дослідження призначається відповідна етіотропна терапія.

Висновки. Отримані нами результати дослідження дозволяють стверджувати, що використання дискримінантних функцій у математичних моделях дозволяє здійснювати процес розпізнавання етіологічних чинників

токсемії у хворих. Проте, недоліком такої моделі розпізнавання етіологічних чинників токсемії є те, що на кожному кроці ми визначаємо в хворого той чи інший чинник, тобто якщо в хворого етіологічний чинник g_1 , а проводиться порівняння g_1 та g_2 , то хворий буде віднесений до однієї з двох груп.

В подальшому ми плануємо провести дослідження розділення етіологічних чинників з, так званою, методикою неприйняття рішень, та розглянути можливість побудови моделі без поділу на підбібліотеки із-за складності обчислень та громіздкості системи.

Список використаних джерел

1. Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров. Статистический анализ данных на компьютере. М.: Инфра-М, 1998 — 528 с.
2. Amiya Nayak, Ivan Stojmenovic Handbook of applied algorithm. Solving scientific, engineering and practical problem. -- Willey interscience, 2008 – 541 p.
3. Barbara G. Tabachnick, Linda S. Fidell. Using multivariate statistics, Fourth ed., 2006 – 1008 p.
4. Проданчук М.Г., Шейман Б.С., Осадча О.І., Волошина Н.О. Спосіб діагностики етіологічного чинника токсемії. Патент України на винахід № 76227 G01N 33/48, A61B10/00; 17.07.2006. Бюл. № 7. 2006 р., с.1-16.
5. Проданчук М.Г., Шейман Б.С., Осадча О.І., Волошина Н.О. Спосіб вибору методу детоксикаційної терапії. Патент України на винахід № 74280 G01N33/48, A61B10/00; 15.11.2005. Бюл. № 11, 2005 р., с.1-24.

Надійшла до редколегії 24.12.09

УДК 517.9

Ю.В.Шушарін*, к.ф.-м.н., доцент

Система лінійних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками рішень

Досліджується моментна стійкість випадкових розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, розв'язок якої має лінійні стрибки, які відбуваються у випадкові моменти, що визначаються стрибками кінцевозначного марковського процесу. Величини стрибків визначаються станами марковського процесу до і після стрибка.

Ключові слова: моментна стійкість, система лінійних диференціальних рівнянь, лінійні стрибки, марковський процес.

*E-mail: Shusharin@meta.ua.

Статтю представив: д.ф.м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Постановка задачі

Розглядається скінченнозначний марковський процес $\xi(t)$, що може знаходитись у q різних станах $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ з ймовірностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\} \quad (k=1,2,\dots,q) \quad (1)$$

які задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} p_s(t) \quad (2)$$

Тут постійні коефіцієнти α_{ks} ($k=1,2,\dots,q$) задовольняє відомим співвідношенням [1].

$$\alpha_{kk} < 0, \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} = 0, \alpha_{ks} \geq 0 \quad (k \neq s), (k,s=1,2,\dots,q)$$

Марковський процес $\xi(t)$ стрибком змінює своє значення у випадкові моменти часу t_j ($j=0,1,2,\dots$).

Одночасно з марковським процесом $\xi(t)$ розглядається система лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \quad t \neq t_j, \quad (j=0,1,2,\dots), \quad (3)$$

яка в момент t_j стрибком змінює своє значення по закону

$$X(t_j + 0) = C_{kj} X(t_j - 0), \quad (4)$$

якщо випадковий процес переходить із стану θ_s в стан θ_k ($k \neq s$).

Yu.V.Shusharin*, PhD, Associate Professor

System of the linear differential equations with casual linear jumps of solutions

Stage firmness of casual solutions of system of the linear differential equations with constant coefficients is researched. Its solution has linear jumps during the casual moments which are defined by jumps finite Markov process. Values of jumps are defined by states Markov process before jump.

Keywords: stage firmness, system of the linear differential equations, linear jumps, Markov process

Тут C_{kj} – постійні матриці. Розв'язок системи (3) буде випадковим. В роботі досліджується стійкість розв'язків в середньому і в середньому квадратичному. При цьому виведені рівняння, що визначають необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості.

Різницєва апроксимація диференціальних рівнянь

Перейдемо від диференціальних рівнянь (2) і (3) до різницєвих, вважаючи $t_n = nh$ ($n=0,1,2,\dots$), $h>0$.

Система рівнянь (2) апроксимується системою різницєвих рівнянь

$$p_k(t_{n+1}) = p_k(t_n) + h \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} p_s(t_n) \quad (k=1,2,\dots,q) \quad (5)$$

Припускаємо, що виконані умови $1+h\alpha_{kk} \geq 0$ ($k=1,2,\dots,q$).

При цьому система рівнянь (5) описує марковський скінченнозначний ланцюг, що перебуває у станах $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ з ймовірностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\} \quad (k=1,2,\dots,q).$$

Система диференціальних рівнянь (3) апроксимується системою різницєвих рівнянь

$$X_{n+1} = X_n + hA(\xi_{n+1}, \xi_n)X_n, \quad (6)$$

де введені позначення

$$A(\theta_k, \theta_s) = A, \quad (s=1,2,\dots,q);$$

$$A(\theta_k, \theta_s) = h^{-1}(C_{ks} - E), (k \neq s) \quad (7).$$

$$f_k(t_n, X) \geq 0,$$

Моментні рівняння для системи різницевої рівнянь (6)

$$\sum_{k=1}^q \int_{E_m} f_k(t_n, X) dX = 1, \quad dX = dx_1, dx_2, \dots, dx_m$$

Система різницевої рівнянь (6) розглядається в роботі [2]. Нехай $f(t_n, X, \xi)$ - щільність розподілу дискретно-неперервного випадкового процесу (X_n, ξ_n) , яку можна представити у вигляді

$$f(t_n, X, \xi) = \sum_{k=1}^q f_k(t_n, X) \delta(\xi - \theta_k), \quad (8)$$

де $\delta(\xi)$ - дельта-функція Дірака. Частинні щільності розподілу $f_k(t_n, X)$ задовольняють умовам:

де E_m - m -вимірний простір змінних $X = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$.

Щільність розподілу випадкового вектору X_n визначається функцією:

$$f(t_n, X) \equiv \sum_{k=1}^q f_k(t_n, X)$$

Частинні щільності $f_k(t_n, X)$ задовольняють системі функціональних рівнянь [2]

$$\begin{aligned} f_k(t_{n+1}, X) = & (1 + h\alpha_{kk}) f_k(t_n, (E + hA(\theta_k, \theta_s))^{-1} X) |\det(E + hA(\theta_k, \theta_s))^{-1}| + \\ & + \sum_{s=1, s \neq k}^q h\alpha_{ks} f_s(t_n, (E + hA(\theta_k, \theta_s))^{-1} X) |\det(E + hA(\theta_k, \theta_s))^{-1}| \quad (k = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (10)$$

Розкладемо члени рівняння (10) за всім аргументам. При цьому приходимо до ступенем параметру h , передбачаючи системи диференціальних рівнянь з частинними диференціювання $f_k(t, X)$ ($k = 1, 2, \dots, q$) по похідними

$$\frac{\partial f_k(t, X)}{\partial t} = - \frac{Df_k(t, X)}{DX} A_k X - f_k(t, X) S_p A_k + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} f_s(t, C_{ks}^{-1} X) |\det C_{ks}^{-1}| \quad (k = 1, 2, \dots, q) \quad (11)$$

Позначаємо математичне очікування вектору X і матриці XX^* символами

$$\begin{aligned} M(t) = \langle \bar{O} \rangle &= \int_{E_m} X f(t, X) dX = \sum_{k=1}^q \int_{E_m} X f_k(t, X) dX; \\ D(t) = \langle \bar{O} \bar{O}^* \rangle &= \int_{E_m} X X^* f(t, X) dX = \sum_{k=1}^q \int_{E_m} X X^* f_k(t, X) dX \end{aligned} \quad (12)$$

Вектори $M(t)$ і матриця $D(t)$ визначаються рівняннями:

$$\begin{aligned} M(t) = \sum_{k=1}^q M_k(t), \quad M_k(t) &= \int_{E_m} X f_k(t, X) dX, \\ (k = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t) = \sum_{k=1}^q D_k(t), \quad D_k(t) &= \int_{E_m} X X^* f_k(t, X) dX, \\ (k = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

Вектори $M_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, q$) задовольняють системі векторних диференціальних рівнянь

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = A_k M_k + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} C_{ks} M_s \quad (k = 1, 2, \dots, q) \quad (13)$$

яка виходить із системи (11) множенням на вектор X та інтегруванням по всьому простору E_m .

Матриці $D_k(t)$, ($k = 1, 2, \dots, q$) задовольняють системі матричних диференціальних рівнянь

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k A_k^* + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks} C_{ks} D_s C_{ks}^*, \quad (14)$$

яка виходить із системи рівнянь (11) множенням матриці XX^* і інтегруванням по всьому простору E_m .

Надалі припускаємо, що частинні щільності розподілу $f_k(0, X)$, ($k = 1, 2, \dots, q$) мають скінченні моменти першого і другого порядку. Із систем рівнянь (13), (14) отримаємо наступну теорему.

Теорема. Для того, щоб нульові рішення системи лінійних диференціальних рівнянь (3) з випадковими стрибками розв'язку вигляду (4), обумовленими марковським скінченнозначним процесом $\xi(t)$ (1), були асимптотично стійкими, у середньому необхідно і досить, щоб нульовий розв'язок системи (13) був асимптотичним.

Список використаних джерел

1. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – Москва: издательство РУДН, 1996. – 258 с.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – Москва: Сев. Радио, 1997. – 488 с.
3. Коваленко Н.Н., Наконечный А.Н. Приближённый расчёт и оптимизация надёжности. – Киев: Наукова думка, 1989. – 184 с.
4. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. К вопросу обоснования методы усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журнал. – 1977. – т.29. – №6. – С. 750 – 762.
5. Мышкин А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени //

Математический сб. – 1967. – Т. 74, Вып. 2. – С 202-208.

6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – Киев: Выща школа, 1987. – 288 с.
7. Хусаинов Д.Я., Ивохин Е.В. Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова // Кибернетика. – 1985. – № 2. – С. 7-10.
8. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловйов А.Д. Математичні методи в теорії надійності. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
9. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбін А.Ф. Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
10. Колмогоров А.Н. Про аналітичні методи в теорії ймовірностей. // Успіхи математичних наук. – 1938. – Вип.5. – С.5-41.
11. Вівчарів Л.А. Прикладні задачі теорії масового обслуговування. – М.: Машинобудування, 1969. – 324 с.
12. Шушарін Ю., Лавренюк В. Дослідження розв'язків різницевого рівняння з коефіцієнтами, що залежать від ланцюга Маркова // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: Кибернетика. – 2006. – Вип. 7. – С.62-66.

Надійшла до редколегії 12.11.2009

РАДІОФІЗИКА

УДК 536.24

Анісімов І.О., д. ф.-м. н., проф.

До визначення та інтерпретації швидкості біжучого фронту (на прикладі хвилі запалювання)

На основі нелінійного кінетичного рівняння з дифузєю, що описує бістабільне середовище, отримано ряд формул для швидкості стаціонарної хвилі (біжучого фронту) в такому середовищі, що є узагальненням відомої в літературі формули. Одна з формул цього ряду дозволяє дати просту інтерпретацію умовам виникнення хвилі запалювання та гасіння. Реалізація того чи іншого типу хвилі визначається еквівалентним тепловиділенням на її фронті.

Ключові слова: бістабільне середовище, біжучий фронт, хвиля запалювання, хвиля гасіння.

*E-mail: ioa@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.

1. Вступ

Нелінійні кінетичні рівняння з дифузєю широко використовуються в синергетиці для опису хвильових процесів у збудливих та бістабільних середовищах. До цього класу належить, зокрема, рівняння, що описує процеси запалювання та горіння. В найпростішій одновимірній моделі воно має вигляд (див., наприклад, [1, 3-4]):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де $T(x,t)$ – температура, D – коефіцієнт температуропроводності, $f(T)$ – так звана кінетична функція, що може бути подана у вигляді

$$f(T) = \frac{q(T)}{C} - \gamma(T - T_0), \quad (2)$$

де γ – коефіцієнт теплообміну, T_0 – температура навколишнього середовища, $q(T)$ – кількість теплоти на одиницю довжини системи, що виділяється за одиницю часу при температурі T , C – погонна теплоємність системи. Функція $q(T)$ може бути апроксимована розмитою сходячкою вигляду

$$q(T) = q_0 \Theta(T - T_c), \quad (3)$$

де $\Theta(z)$ – функція Хевісайда, T_c – температура запалювання. Перший доданок у формулі (2)

Anisimov I.O., Dr.Sci. (Phys.&Math.), Prof.

To the study and interpretation of traveling front velocity (for the wave of ignition)

Series of formulae for velocity of the stationary wave (traveling front) were obtained based on the non-linear kinetic equation with diffusion for bistable media. These formulae are the generalization of the formula known from the literature. One formula from this series leads to the simple interpretation of the conditions of appearance of ignition and extinction waves. Type of the wave in the media is determined by the equivalent heat liberation in the wave front.

Key Words: bistable medium, traveling front, ignition wave, extinction wave.

описує тепловиділення в результаті горіння, другий – втрати тепла в результаті теплообміну з навколишнім середовищем. Типовий графік кінетичної функції подано на рис.1. Корені T_0 і T_1 відповідають стійким стаціонарним станам необмеженої системи – відсутності горіння та горінню, коли тепло, що виділяється, повністю передається в навколишнє середовище.

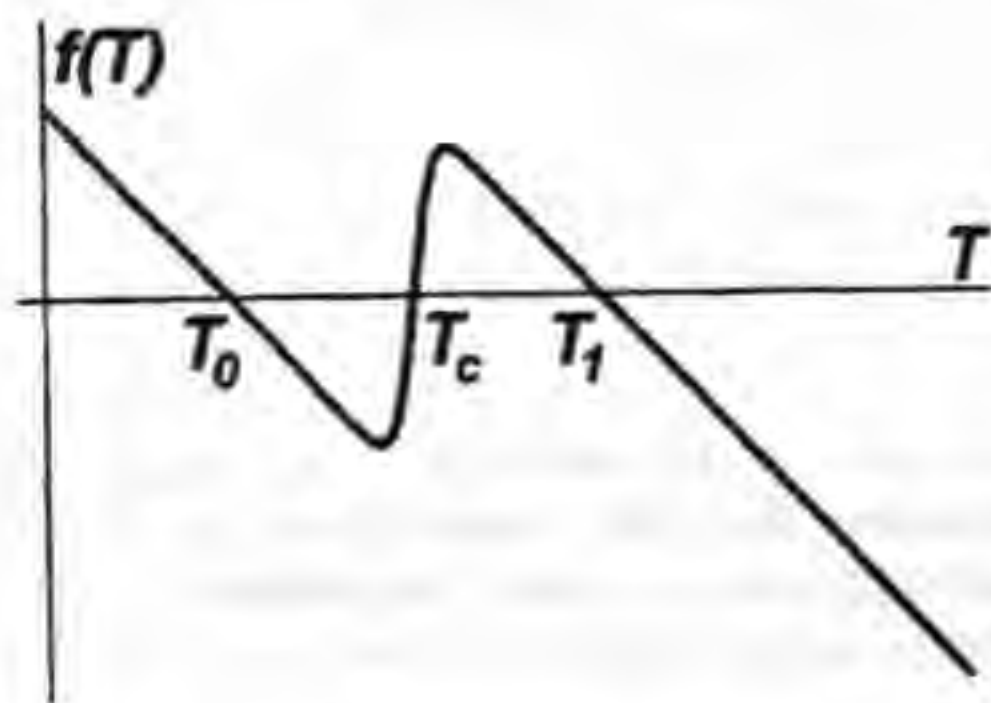


Рис.1. Типовий вигляд кінетичної функції для бістабільного середовища.

Аналіз поширення автохвиль у середовищі проводиться на основі автотемпературної підстановки типу $T = T(\xi)$, де $\xi = x - Vt$, яка перетворює рівняння (1) на рівняння в повних

похідних:

$$D \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V \frac{dT}{d\xi} + f(T) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) формально можна розглядати як рівняння осцилятора, що рухається під дією нелінійної сили $f(T)$ з коефіцієнтом в'язкого тертя V , точки стаціонарної рівноваги відповідають локальним максимумам потенціалу

$$\Phi(T) = \int f(T) dT. \quad (5)$$

Тоді перехід з точки T_0 в точку T_1 можливий, якщо різниця потенціалів між цими станами

$$\Delta\Phi = \Phi(T_1) - \Phi(T_0) \quad (6)$$

дорівнює роботі сили тертя на відповідному шляху:

$$\int_{T_0}^{T_1} V \frac{dT}{d\xi} d\xi = \int_{T_0}^{T_1} f(T) dT. \quad (7)$$

Звідси можна отримати відому формулу для швидкості хвилі перемикавання (біжучого фронту):

$$V = \frac{\Delta\Phi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^2 d\xi}. \quad (8)$$

Якщо виконана умова $\Delta\Phi > 0$, область горіння розширюється, тобто в середовищі поширюється хвиля запалювання. В протилежному випадку побіжить хвиля гасіння. Частинним випадком (8) є відома формула для швидкості хвилі запалювання, отримана Я.Б.Зельдовичем та Д.А.Франк-Каменецьким [2, 3].

Описаний вище підхід до аналізу рівняння (4) носить досить формальний характер і не є цілком вдалим. Незрозуміло, наприклад, чому станам стійкої рівноваги відповідають не мінімуми, а максимуми потенціалу і, відповідно, сідлові точки на «фазовому портреті». Незрозумілий і фізичний зміст «різниці потенціалів», яка визначає характер хвилі перекидання в середовищі.

Метою цієї роботи є аналіз автохвиль перемикавання в бістабільному середовищі без застосування аналогії з нелінійним осцилятором та інтерпретація умов виникнення хвиль запалювання та гасіння в термінах самої задачі.

2. Формальне отримання формули для швидкості стаціонарної хвилі

Перш ніж безпосередньо перейти до аналізу рівняння (4), звернемо увагу на те, що в рівнянні (1) теплопровідність, по суті, врахована двічі: один раз – у явному вигляді (останній, дифузійний доданок у правій частині цього рівняння), і ще раз – у неявному вигляді, у

кінетичній функції (доданок $-\gamma(T-T_0)$ у рівнянні (2), що описує теплообмін з навколишнім середовищем). Для однорідних станів системи дифузійний доданок зникає, а теплообмінний доданок у кінетичній функції зберігається. Це означає, що рівняння (1) фактично описує горіння в деякому шарі скінченної товщини $|y| < d$, який в однорідному випадку виявляється нескінченим. Дифузійний доданок описує теплообмін у напрямку x уздовж цього шару, а теплообмінний доданок – у напрямку y , перпендикулярному до шару.

Тепер повернемося до рівняння (4). Нехай в області $\xi \rightarrow -\infty$ реалізується стійкий стан $T=T_1$, а в області $\xi \rightarrow +\infty$ – стан $T=T_0$. Тоді в перехідній області температура поступово спадатиме. Відзначимо ще, що при $\xi \rightarrow \pm\infty$ реалізуються стаціонарні однорідні стани, тому в цих областях кожен з доданків у рівнянні (4) окремо дорівнює нулю. Зокрема, в області горіння все тепло, що виділяється, витрачається на теплообмін із навколишнім середовищем. Навпаки, в перехідній області, де значення u відмінне від T_0 та T_1 , так і від T_c (крім однієї єдиної точки), кінетична функція відмінна від нуля. Там, де вона додатна, тобто ближче до області горіння, тепло виділяється; там, де вона від'ємна, тобто ближче до області, де горіння немає, – навпаки, відбирається в навколишнє середовище (в напрямку y).

Помноживши рівняння (4) на $(dT/d\xi)^n$, отримаємо:

$$D \frac{d^2 T}{d\xi^2} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n + V \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} + f[T(\xi)] \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n = 0,$$

або

$$\frac{D}{n+1} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} + V \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} + f(T) \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n = 0. \quad (9)$$

Тепер проінтегруємо рівняння (9) по ξ в нескінченних межах:

$$\frac{D}{2} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + V \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(T(\xi)) \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n d\xi = 0, \quad (10)$$

З урахуванням накладених вище граничних умов перший доданок у цьому рівнянні дорівнює нулю, оскільки при $\xi \rightarrow \pm\infty$ стан системи є однорідним. Тому рівняння (10) набуває вигляду

$$V \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(T(\xi)) \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n d\xi = 0. \quad (11)$$

і з нього можна знайти швидкість стаціонарної

хвилі:

$$V = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(T(\xi)) \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Зазначимо, що відома в літературі формула (8) є частинним випадком (12) при $n=1$.

Хоча формула (12) не дозволяє безпосередньо розрахувати швидкість біжучого фронту, вона, тим не менше, дозволяє зробити деякі якісні висновки.

Перш за все, в обидва інтеграли (як у чисельнику, так і в знаменнику) дає внесок лише область фронту хвилі перемикавання (лише в цій області величини $f(T)$ та $dT/d\xi$ відмінні від нуля). Таким чином, швидкість хвилі перемикавання (як за величиною, так і за напрямком) повністю визначається процесами на її фронті. Можна також відзначити, що функція $dT/d\xi$ має бути такою, щоб інтеграл у знаменнику (12) перетворювався в нуль одночасно для всіх можливих значень n .

Найпростішого вигляду формула (12) набуває при $n=0$:

$$V = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[T(\xi)] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT}{d\xi} d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[T(\xi)] d\xi}{T_1 - T_0}. \quad (13)$$

У цьому випадку вона допускає наочну інтерпретацію.

3. Інтерпретація умов поширення хвиль запалювання та гасіння

Для бістабільних середовищ завжди виконана умова $T_1 > T_0$, та, тому знак швидкості визначається знаком чисельника формули (13). Нагадаємо, що в моделі горіння в розподіленій системі кінетична функція $f(T)$ визначає кількість теплоти на одиницю довжини системи, яка виділяється (або зникає) в результаті горіння та теплообміну з навколишнім середовищем (у напрямку y). Тоді інтеграл у чисельнику (13) – це повна кількість теплоти, що виділяється (зникає внаслідок теплообміну в напрямку y) на фронті ударної хвилі. Якщо ця величина дорівнює нулеві, то потік тепла в напрямку x за межами фронту відсутній, швидкість хвилі також перетворюється в нуль, і утворюється стаціонарна дисипативна структура. Якщо на фронті переважає тепловиділення, виникає потік тепла в бік низькотемпературної області, і отримуємо хвилю запалювання (область горіння

зростає). В протилежному випадку виникає потік тепла від високотемпературної області, в результаті отримуємо хвилю гасіння (область горіння зменшується).

В результаті поширення хвилі перемикавання (супроводжуваної потоком тепла) температура середовища змінюється на величину $\Delta T = T_1 - T_0$, яку можна ототожнити з густиною тепла в потоці (з точністю до погонної теплоємності). Тоді добуток $V\Delta T$ визначає густину теплового потоку, що супроводжує хвилю перемикавання.

4. Висновки

1. Отримано ряд еквівалентних формул для швидкості автохвилі в бістабільному середовищі, який включає відому раніше формулу як частинний випадок. Розрахунок виконано без використання формальної аналогії з нелінійним дисипативним осцилятором.

2. Показано, що умови виникнення хвиль запалювання та гасіння в середовищі, де можливе горіння, визначаються процесом виділення (втрати) тепла на фронті відповідної хвилі.

3. Запропонована інтерпретація умов виникнення хвиль перекидання того чи іншого типу легко переноситься на інші типи бістабільних середовищ – треба лише говорити не про кількість теплоти, а про фізичну величину, кількість якої визначається змінною, що входить до відповідного нелінійного кінетичного рівняння з дифузійною.

Список використаних джерел

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М. – Ижевск. НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2007. – 620 с.
2. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука, 1987. – 502 с.
3. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. Теория теплового распространения пламени. // Журнал физической химии. – 1938. – 12, №1. – С.100-105.
4. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. // Бюллетень МГУ. Серия А. Математика и механика. – 1937. – 1, 6. – С.1-16.

Надійшла до редколегії 26.02.10

УДК 621.391

Василенко* А.О. студент, Слободянюк Д.В.
студент, Коваленко А.В. асистент.

Фрактальне кодування аудіосигналів

Досліджено можливість застосування фрактальних методів кодування до звукових сигналів. Описано базовий алгоритм, що використовувався при дослідженнях та певні модифікації, що покращують його характеристики.

Ключові слова: фрактальне стиснення, аудіосигнали, система кусково-визначених ітерованих функцій.

*E-mail: gakushya@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

Існує два принципово різні підходи до стиснення сигналів. Перший ґрунтується на використанні кореляційних властивостей сигналу та застосуванні математичного апарату ортогональних розвинень. Інший підхід (аналітичний або синтетичний) ґрунтується на моделях генерації сигналу [1]. Використання закономірностей, наявних у сигналі, дає змогу зберігати деяку сукупність параметрів, що визначають модель генерації і дають можливість відтворити сигнал. Фрактальне стиснення відноситься саме до другого типу. Сигнал вважається аттрактором деякого перетворення, задача кодування полягає у відшукуванні параметрів останнього. Перевагами фрактальних методів є відтворення сигналу з довільною частотою дискретизації та великі коефіцієнти стиснення у випадку, коли сигнал має властивості самоподібності. Історично фрактальні методи були запропоновані для кодування зображень. Від основоположних робіт [5,6] і по даний час було розглянуто ряд варіацій фрактального алгоритму кодування, досліджено його можливості для знешумлення зображень [7]. Разом з тим, фрактальне кодування одновимірних сигналів залишалось поза увагою дослідників.

Важливим представником одновимірних сигналів є звукові сигнали, що мають впорядковану, відмінну від шуму структуру (голос, музика тощо). Відомо, що при кодуванні саме таких сигналів особливу ефективність

A.O. Vasylenko* student, D.V. Slobodianiuk
student, A.V. Kovalenko assistant.

Fractal audio coding

This article reveals facilities of fractal coding methods applied to the audio signals. Described the principle scheme of fractal coding that was used in the investigation and some technical aspects that may be used in order to improve fractal coding characteristics were investigated.

Key Words: fractal compression, audiosignals, partitioned iterated function system.

демонструють синтетичні методи [1]. Це дозволяє сподіватись, що фрактальні методи можуть ефективно кодувати такі сигнали. Дослідження можливості застосування фрактального алгоритму стиснення, що базується на системах кусково-визначених ітерованих функцій, є метою даної роботи.

Теоретичні засади фрактального кодування

Фрактальне кодування сигналів базується на припущенні, що сигнал, який кодується, є нерухомою точкою деякого стискаючого відображення $\mathcal{H}$ у повному метричному просторі [2,3]. За теоремою Банаха [4], стискаюче відображення $\mathcal{H}$ завжди має єдину нерухому точку $\bar{u}$, причому вона є притягуючою, тобто: $\mathcal{H}\bar{u} = \bar{u}$ і $|\bar{u} - \mathcal{H}u| < |\bar{u} - u|$, де u довільний сигнал. Задача кодування полягає у тому, щоб сигналу, заданому своїми відліковими значеннями, співставити стискаюче відображення $\mathcal{H}$, нерухому точку якого є добрим наближенням вхідного сигналу. При декодуванні відображення $\mathcal{H}$ ітераційно застосовується до довільного початкового сигналу u_0 . Результатом процедури декодування $u_{n+1} = \mathcal{H}u_n$ є нерухома точка стискаючого відображення, тобто закодований сигнал.

При побудові $\mathcal{H}$, як правило, спираються на теорему колажа [2,3,6], яка стверджує, що якщо сигнал, який кодується, u буде досить близьким до $\mathcal{H}u$, то він також буде близьким до

аттрактора цього перетворення $\bar{u}$. Таким чином задача фрактального кодування зводиться до пошуку відображення, яке б перетворювало сигнал сам у себе якомога точніше.

Для побудови алгоритму слід конкретизувати вигляд перетворення $\mathcal{H}$. Історично першою застосовувалась система ітерованих функцій (IFS) [5,6], пізніше було запропоновано систему кускововизначених ітерованих функцій (PIFS) [2,3,8], яка й набула широкого застосування. Нехай $u(t_i)$ сигнал,

більші за рангові, тобто вони містять удвічі більше відлікових значень сигналу. Як доменні, так і рангові області ідентифікуються порядковим номером. Домноживши порядковий номер на розмір доменної чи рангової області, можна знайти початковий відлік відповідного домену чи рангу. PIFS перетворює сигнал, заданий на доменних областях u_{D_j} , у сигнал, заданий на рангових областях u_{R_j} . Для кожної можливої пари домен-ранг R_j та D_j знаходиться

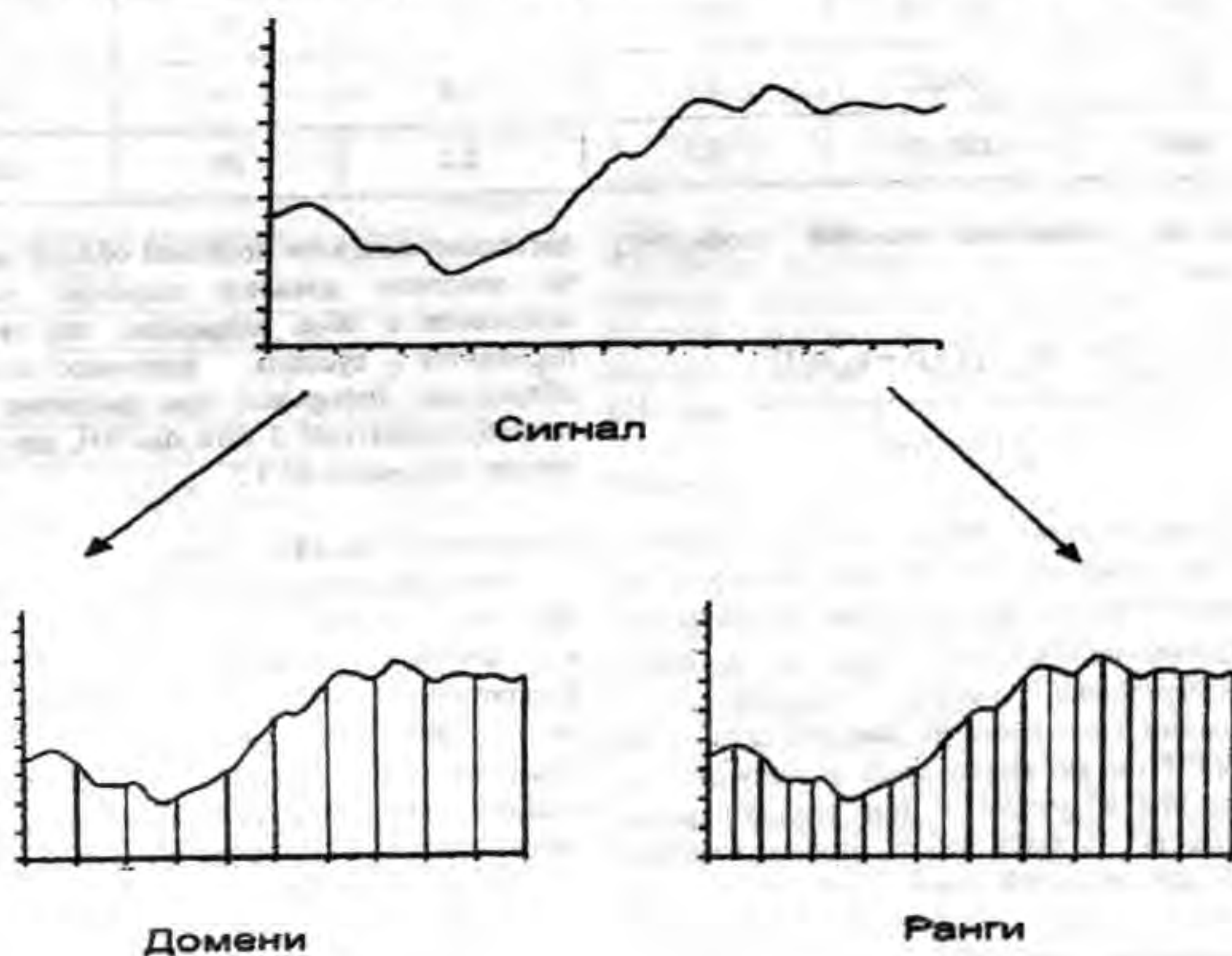


Рис. 1 Розбиття сигналу на домени та ранги.

заданий відліковими значеннями. З метою побудови PIFS область визначення $D(u)$ сигналу $u(t_i)$ слід розбити на два типи областей: домени D_j і ранги R_j (рис.1). Для рангових областей справджуються співвідношення: $R_x \cap R_j = \emptyset$ та $\bigcup R_j = D(u)$. Для доменних областей виконання цих умов не обов'язкове.

В даній статті розглядається алгоритм з неадаптивним розбиттям на домени й ранги, тобто всі доменні та всі рангові області рівнопотужні між собою. Доменні області вдвічі

відображення $\phi_j: u_{D_j} \rightarrow u_{R_j}$. Як правило, у якості ϕ_j обирається лінійне відображення вигляду $\phi_j(u) = \alpha_j \cdot u + \beta_j$. Оскільки доменна область удвічі більша за рангову, перед відображенням u_{D_j} в u_{R_j} по відношенню до u_{D_j} має бути застосована операція децимації, яка полягає у відкиданні кожного другого відліку у домені. Параметри α_j та β_j знаходяться за допомогою методу найменших квадратів. Для кожного рангу з усіх можливих доменів обирається один, що

Таблиця 1

Похибка та час кодування сигналу алгоритмом з та без розбиття на блоки.

Сигнал №	Довжина сигналу	Похибка, %		Час кодування, с	
		З фреймами	Без фреймів	З фреймами	Без фреймів
№1	350152	2.4	1.7	20	739
№2	350152	14.4	8.8	19	692
№3	350152	4.4	1.9	20	751
№4	350152	20.7	8.7	20	757
№5	350152	5.7	2.8	19	703
№6	350152	6.2	2.4	19	688

забезпечує мінімальне значення коефіцієнту нев'язки:

$$Y_{i,j} = \frac{\sum_k (\alpha_i \cdot u_{D_j}(t_k) + \beta_i - u_{R_i}(t_k))^2}{\sum_k (u_{D_j}(t_k))^2} \quad (1)$$

Для відтворення сигналу необхідно зберегти для кожної рангової області індекс домену та два коефіцієнти α_i та β_i . Стиснення визначається співвідношенням кількості бітів, які необхідні для збереження сигналу, заданого його відліковими значеннями на ранговій області, до кількості бітів, які зберігаються на одну рангову область при кодуванні. В усіх реалізаціях, що розглядаються в даній роботі, розміри доменної та рангової областей рівні 32 та 16 відлікам відповідно. На збереження коефіцієнта α_i відводиться один байт і один знаковий біт, коефіцієнт β_i кодується двома байтами, а номер домену зберігається як один байт. Все це забезпечує стиснення у 7.8 разів.

При фрактальному кодуванні сигналів значної тривалості виявляється слабкість алгоритму, яка полягає у нелінійному зростанні часу кодування із збільшенням довжини сигналу. Для прискорення алгоритму і зменшення його складності сигнал розбивається на блоки, які називаються фреймами, кожен фрейм кодується окремо. Довжина фрейму становить 8192 відліки, або 186 мс.

Для зменшення похибки відновлення використовується схема розбиття з перекриванням доменних областей $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$. В реалізованому алгоритмі

дозволено зміщення доменної області на чверть та половину довжини відносно основного положення в обох напрямках, що забезпечує перекриття сусідніх доменних областей. Збереження інформації про зміщення домену потребує додаткові 3 біти пам'яті, що зменшує ступінь стиснення до 7.3.

Експериментальна частина

У дослідженні використовувались фрагменти музичних творів, збережені двобайтними відліковими значеннями, взятими з частотою дискретизації 44.1 кГц. Алгоритми, що використовувалися у дослідженні, оптимізовані з урахуванням параметрів досліджуваних аудіосигналів. Якість відтворення сигналу оцінювалася за Евклідовою нормою у відсотках, де 100% відповідають енергії сигналу, що кодується.

Розбиття на фрейми досить поширене у практиці кодування сигналів. Проте, зменшення розміру фрейму також зменшує кількість можливих доменів і, як наслідок, може призводити до гіршого наближення сигналу на деяких рангових областях. У таблиці 1 наведені результати дослідження стиснення аудіосигналів за допомогою алгоритму без та з розбиттям на фрейми. Видно, що розбиття на блоки значно зменшує час обробки, проте, як і передбачалося, у цього підходу є недолік – збільшення похибки відтворення. Тим не менш, такий підхід робить принципово можливим застосування фрактального алгоритму для кодування в реальному часі. Тому надалі досліджувався алгоритм з розбиттям на блоки.

Наступний крок дослідження – визначення точності $\Delta\alpha$, з якою слід зберігати α_i за умови

Таблиця 2

Залежність похибки кодування від кроку квантування α .

$\Delta\alpha$ Сигнал №	Похибка відновлення, %			
	1	0.1	0.01	0.001
№1	4.1	2.0	2.3	6.6
№2	15.9	9.9	9.7	23.8
№3	9.6	3.8	3.3	18.0
№4	23.6	16.8	16.8	41.6
№5	8.8	5.0	4.6	15.8
№6	9.6	5.6	5.2	17.2

реалізації рівномірного квантування. Оскільки кількість бітів, що виділяється для збереження

Таблиця 3

Похибка кодування алгоритмами з та без розбиття на блоки.

Сигнал №	Похибка, %	
	Без перекриття	З перекриттям
№1	2.3	1.8
№2	16.8	13.1
№3	9.7	7.9
№4	4.6	3.4
№5	8.4	7.2
№6	5.2	3.4

α , фіксована - 9 біт, то помилка квантування може зменшуватися лише за рахунок зменшення діапазону значень, яких набуває α . Залежність діапазону значень від точності визначається

наступним чином $[-256 \cdot \Delta\alpha, 256 \cdot \Delta\alpha]$. Як видно з таблиці 2, оптимальним є збереження коефіцієнту α , з точністю до двох знаків після коми. У таблиці 3 представлені результати кодування алгоритмом з і без перекриття доменів. Використання перекриття доменів дозволяє зменшити похибку на 20%, хоча й за рахунок деякого зменшення коефіцієнту стиснення.

Висновки

В даній роботі досліджено фрактальний алгоритм кодування звукових сигналів з поділом на блоки. Такий підхід дозволяє застосовувати алгоритм фрактального кодування у реальному часі, тому дослідження в цьому напрямку є перспективними. Визначено оптимальний діапазон значень для коефіцієнту α та точність, з якою слід його зберігати. Показано, що використання алгоритму з перекриттям доменів дозволяє зменшити похибку приблизно на 20%.

Список використаних джерел

1. Прокус Дж. Цифровая связь. - Москва: Радио и связь, - 2000. - 800 с.
2. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. - Москва: Триумф, - 2003. - 320 с.
3. Fisher Y. Fractal Image compression: Theory and Application. - New-York: Springer Verlag, - 1995. - 341 p.
4. Вулых Б.З. Введение в функциональный анализ. - Москва: Наука, - 1967. - 416 с.
5. Barnsley M. F., Demko S. Iterated function systems and the global construction of fractals // Proc. R. Soc. -1985. - A399. - P.243-275.
6. Barnsley M. F., Ervin V., Hardin D., Lancaster J. Solution of an inverse problem for fractals and other sets Proc. Nat. Acad. Sci. - 1985. - 83. - P. 1975-1977.
7. Ghazel M., Freeman G.H., Vrscaj E.R. Fractal image denoising // IEEE Transactions on image processing - 2003. - 12 - P.1560-1578.
8. Wohlberg B., de Jager G. A review of the fractal image coding literature // IEEE Transaction on Image Processing. - 1999. - 8. - P.1716-1729.

Надійшла до редколегії 25.02.10

УДК 539.2.01

¹Ільченко Л.Г., к.ф.-м.н., с.н.с., ²Ільченко* В.В.,
д.ф.-м.н., проф., ¹Лобанов В.В., д.х.н., п.н.с.

¹Інститут хімії поверхні НАН України ім.
О.О.Чуйка, вул.Генерала Наумова 17, Київ, 03164

²Київський університет ім.Тараса Шевченка,
Радіофізичний ф-т, вул.Володимирська 64, Київ,
02033

**Вплив близько розташованого металу на
формування області просторового заряду в
напівпровіднику.**

В даній роботі в рамках нелокальної
електростатики на прикладі n -Si-вакуум-Au
системи проаналізовано вплив зарядженої
поверхні металу на розподіл потенціалу в області
просторового заряду (ОПЗ) напівпровідника.
Показано, що присутність на малих роздільних
відстанях $L < L_{OPZ}$ (L_{OPZ} – товщина ОПЗ)
зарядженої поверхні металу може зумовити
зміну напрямку вигину зони і виникнення
потенціального бар'єру, параметри якого
визначаються величиною від'ємного заряду на
поверхні металу та товщиною L вакуумного
проміжку між напівпровідником та металом.

Ключові слова: потенціальний бар'єр,
потенціал сил зображення, нелокальна
електростатика

E-mail: vai@tpd.univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Однією з найбільш традиційно актуальних
задач у фізиці напівпровідників та вакуумній
електроніці є задача про визначення форми
потенціального бар'єру, який виникає між
близько розділеними вакуумним проміжком
напівпровідником та металом, і його зміни при
переході системи напівпровідник-вакуум-метал
(НВМ) в контакт (спільний рівень Фермі) та в
прикладеній прямій і зворотній зовнішній
напрузі U [1-4].

При зменшенні вакуумного інтервалу L між
напівпровідником та металом утворюється
потенціальний бар'єр, який зумовлений різницею
в об'ємних властивостях кожного з трьох
середовищ ($j = 1, 2, 3$) і визначається розподілом
потенціалу сил зображення $V_j^0(x)$ [5,6].

L.G.Il'chenko¹, Dr.Ph., V.V.Il'chenko², Dr.Sci.,
Professor, V.V.Lobanov¹, Dr.,Sci.

¹Chuiko Institute of Surface Chemistry NAS of
Ukraine, General Naumov Str. 17, Kiev. 03164

²Radiophysical Dept., Kiev University,
Volodimirska st. 64, Kiev. 01033, Ukraine

**The influence of the close spacing metal on
the space charge region formation in a
semiconductor.**

In this work in the framework of non-local
electrostatics on an example is the n -Si-vacuum-Au
system the influence of the charged surface of metal
on the potential distribution in the space charge
region (SCR) is analysed. It is shown that the
presence on the small separate distances $L < L_{OPZ}$
(L_{OPZ} is the thickness of SCR) of the charged
surface of the metal can stipulate the change of the
direction of a bending of a zone and originating of a
potential barrier, the parameters of which are
determined by the value of a negative charge on a
metal surface and by the thickness L of vacuum
interval between a semiconductor and metal.

Key words: potential barrier, the image potential,
non-local electrostatics

Неперервність $V_j^0(x)$ на межах поділу
зумовлена коректним врахуванням ефектів
просторової дисперсії у функціях діелектричної
проникності напівпровідника та металу [5-9].

Форма утвореного потенціального бар'єру
змінюється за наявності некомпенсованого
заряду на поверхнях напівпровідника та металу
завдяки зарядовій компоненті $\Delta V_j^\sigma(x)$ повного
потенціалу $V_j(x)$, коли густина заряду на
поверхні напівпровідника $\sigma_1 \neq 0$ та металу
 $\sigma_2 \neq 0$, що приводить до перерозподілу
потенціалу $V_j(x)$ в НВМ системі та до
утворення в напівпровіднику області
просторового заряду (ОПЗ) [1-4].

За відсутності контакту напівпровідник-
метал та зовнішньої напруги ($U = 0$) в межах
нелокальної електростатики [5-9] в роботі [10]
було теоретично розраховано зарядовий

потенціал $\Delta V_j^\sigma(x)$ для НВМ системи для квазінейтральної поверхні металу, коли $\sigma_2 = 0$.

В даній роботі на прикладі n -Si- вакуум - Au системи проаналізовано вплив зарядженої поверхні металу, коли $\sigma_2 \neq 0$, на розподіл повного потенціалу в ОПЗ невиродженого напівпровідника n -типу в залежності від товщини L вакуумної щілини між ними.

Показано, що густина заряду σ_1 на поверхні напівпровідника, яка визначає вигин нижнього краю зони провідності E_c (і відповідно верхнього краю валентної зони E_v), зумовлює приповерхневий розподіл потенціалу в напівпровіднику (ОПЗ), характерний для вільної поверхні [3,8,9], тільки на відстанях $L > L_{OPZ}$ (L_{OPZ} - товщина ОПЗ), тобто при $L \rightarrow \infty$. Коли відстань L між напівпровідником та металом зменшується $L < L_{OPZ}$, відбувається

перерозподіл зарядового потенціалу $\Delta V_j^\sigma(x)$ у всій НВМ системі завдяки екрануванню вільними електронами металу та наявності некомпенсованого заряду з густиною σ_2 на його поверхні. При подальшому зменшенні роздільної відстані L вклад металу посилюється завдяки утворенню у вакуумній щілині потенціального бар'єру за рахунок сил зображення $V_j^0(x)$ [5,6].

Показано, що для малих роздільних відстаней L [6,10] вплив зарядового стану поверхні металу може привести не тільки до зміни розподілу приповерхневого потенціалу $\Delta V_1^\sigma(x)$ в напівпровіднику (ОПЗ), але і до зміни напрямку вигину зон. Підкреслимо, що у розглянутому в даній роботі випадку зміна напрямку вигину зон в напівпровіднику не пов'язана з контактною різницею потенціалів $\Delta\Phi$ [1-4], а тільки з впливом близько розміщеної та відповідно зарядженої поверхні металу.

Теорія

Розглядаючи несиметричну тришарову структуру, що складається з напівобмеженого напівпровідника з діелектричною функцією $\epsilon_1(\vec{k})$ в області $x \leq 0$ та з густиною заряду σ_1 на його поверхні і з напівобмеженого металу з діелектричною функцією $\epsilon_3(\vec{k})$ в області $x \geq L$ та густиною заряду σ_2 на поверхні, які розділені вакуумним проміжком $0 \leq x \leq L$

($\epsilon_2(\vec{k})=1$) [5-7], та враховуючи результати робіт [10,11], повний потенціал $V_j(x)$ в розглядуваній системі без врахування мікроскопічної (атомної) структури поверхонь визначається таким рівнянням

$$V_j(x) = V_j^0(x) + \Delta V_j^\sigma(x); \quad (1)$$

де $V_j^0(x)$ - поляризаційна компонента повного потенціалу, яка пов'язана з відмінностями об'ємних властивостей трьох середовищ (потенціал сил зображення) [5-7], а $\Delta V_j^\sigma(x)$ - зарядовий потенціал, який пов'язаний з наявністю однорідної густини заряду на поверхнях напівпровідника σ_1 ($x=0$) та металу σ_2 ($x=L$) [10,11].

Слідуючи роботам [5,6,10], задамо діелектричну функцію $\epsilon_1(\vec{k})$ легованого напівпровідника у вигляді

$$\epsilon_1(\vec{k}) = 1 + \frac{\epsilon_1 - 1}{1 + \left(\frac{\vec{k}^2}{\lambda_1^2} \right) (\epsilon_1 - 1)} + \frac{\kappa_1^2}{\vec{k}^2},$$

$$\vec{k}^2 = k_{\perp}^2 + q^2, \quad (2)$$

де ϵ_1 - діелектрична стала кристалічної ґратки (при $\vec{k} \rightarrow 0$), λ_1^{-1} - ефективний радіус екранування зв'язаними (валентними) електронами іонних остовів кристалічної ґратки, який за порядком величини дорівнює розміру атома (іона) і який розраховується з урахуванням зонної структури напівпровідника [6,10], $\kappa_1^2 = 4\pi e^2 n_1 / \epsilon k_B T$ в наближенні Дебая-Хюккеля (НДХ) у випадку невиродженого електронного газу, k_B - стала Больцмана; n_1 - концентрація невиродженого газу вільних електронів (дірок) (в роботі розглянуто випадок напівпровідників n -типу).

Діелектричну функцію металу $\epsilon_3(\vec{k})$ задамо в загальновідомому довгохвильовому наближенні Томаса-Фермі (НТФ) [5-7]:

$$\epsilon_3(\vec{k}) = 1 + \frac{\kappa_3^2}{\vec{k}^2}, \quad \vec{k} = \{k_{\perp}, q\}, \quad (3)$$

де $\kappa_3^2 = 6\pi^2 n_3 / E_F^3$, n_3 - концентрація, $E_F^3 = \hbar^2 (3\pi^2 n_3)^{2/3} / 2m_3$ - енергія Фермі, m_3 - ефективна маса вільних електронів в металі.

Використовуючи метод функцій Гріна нелокального рівняння Пуассона, розвинутий у роботах [5-7], та враховуючи граничні умови:

неперервність потенціалу $V_f(x)$ на межах поділу та скінчений стрибок нормальної компоненти вектора електростатичної індукції на поверхнях напівпровідника $\pm 4\pi\sigma_1$ ($x=0$) та металу $\pm 4\pi\sigma_2$ ($x=L$), обумовлений зарядовим станом їх поверхонь, для визначення зарядової складової $\Delta V_f^\sigma(x)$ повного потенціалу (1) в НВМ системі одержуємо такі рівняння

$$\Delta V_1^\sigma(x) = \frac{\pm 4\pi e \cdot a_1(0;|x|)}{1 + \kappa_3 \cdot [L + a_1(0;0)]} \cdot [\sigma_1 \cdot (1 + \kappa_3 L) + \sigma_2], \quad (x \leq 0). \quad (4)$$

$$\Delta V_2^\sigma(x) = \frac{\pm 4\pi e}{1 + \kappa_3 \cdot [L + a_1(0;0)]} \cdot \{\sigma_1 \cdot a_1(0;0) \cdot [1 + \kappa_3(L-x)] + \sigma_2 \cdot [a_1(0;0) + x]\}, \quad (0 \leq x \leq L), \quad (5)$$

$$\Delta V_3^\sigma(x) = \frac{\pm 4\pi e \cdot e^{-\kappa_3 \cdot (x-L)}}{1 + \kappa_3 \cdot [L + a_1(0;0)]} \cdot \{\sigma_1 \cdot a_1(0;0) + \sigma_2 \cdot [a_1(0;0) + L]\}, \quad (x \geq L). \quad (6)$$

Тут

$$a_1(0;|x|) = \frac{1}{\beta_+^2 - \beta_-^2} \cdot \left[\frac{e^{-|x|\beta_+}}{\beta_+} \left(\beta_+^2 - \frac{\kappa_1^2 \cdot \Lambda_1^2}{\epsilon_1} \right) - \frac{e^{-|x|\beta_-}}{\beta_-} \left(\beta_-^2 - \frac{\kappa_1^2 \cdot \Lambda_1^2}{\epsilon_1} \right) \right], \quad (7)$$

де

$$\beta_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[\kappa_1^2 (1 + \Lambda_1^2) \right] \pm \frac{\kappa_1^2}{2} \sqrt{(1 + \Lambda_1^2)^2 - \frac{4\Lambda_1^2}{\epsilon_1}},$$

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - 1}}. \quad (8)$$

Результати

Визначимо розподіл потенціалу $\Delta V_f^\sigma(x)$ в n -Si- вакуум - Au системі, об'ємні параметри якої добре відомі [6,10,]. Для невідродженого напівпровідника n -типу (n -Si): діелектрична константа $\epsilon_1 = 11.9$, температура $T = 293^\circ K$, концентрація $n_1 = 3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, ефективна маса електронів $m_\perp = 0.98$ (поперечна) і $m_\parallel = 0.19$ (повздожня), $\lambda_1 = 5.908 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1}$, положення

дна зони провідності в об'ємі напівпровідника $\chi_1 = -E_c = 4.05 \text{ eV}$. Для металу (Au): $\varphi_3 = 5.1 \text{ eV}$, $n_3 = 5.9 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ і $m_3 = 0.87325 m_0$, де m_0 - маса вільного електрона.

Розподіл потенціалу $\Delta V_f^\sigma(x)$ в n -Si- вакуум - Au системі, розрахований згідно рівнянь (4)-(8), при зміні відстані L між поверхнями кремнію та золота, приведений на рис.1.

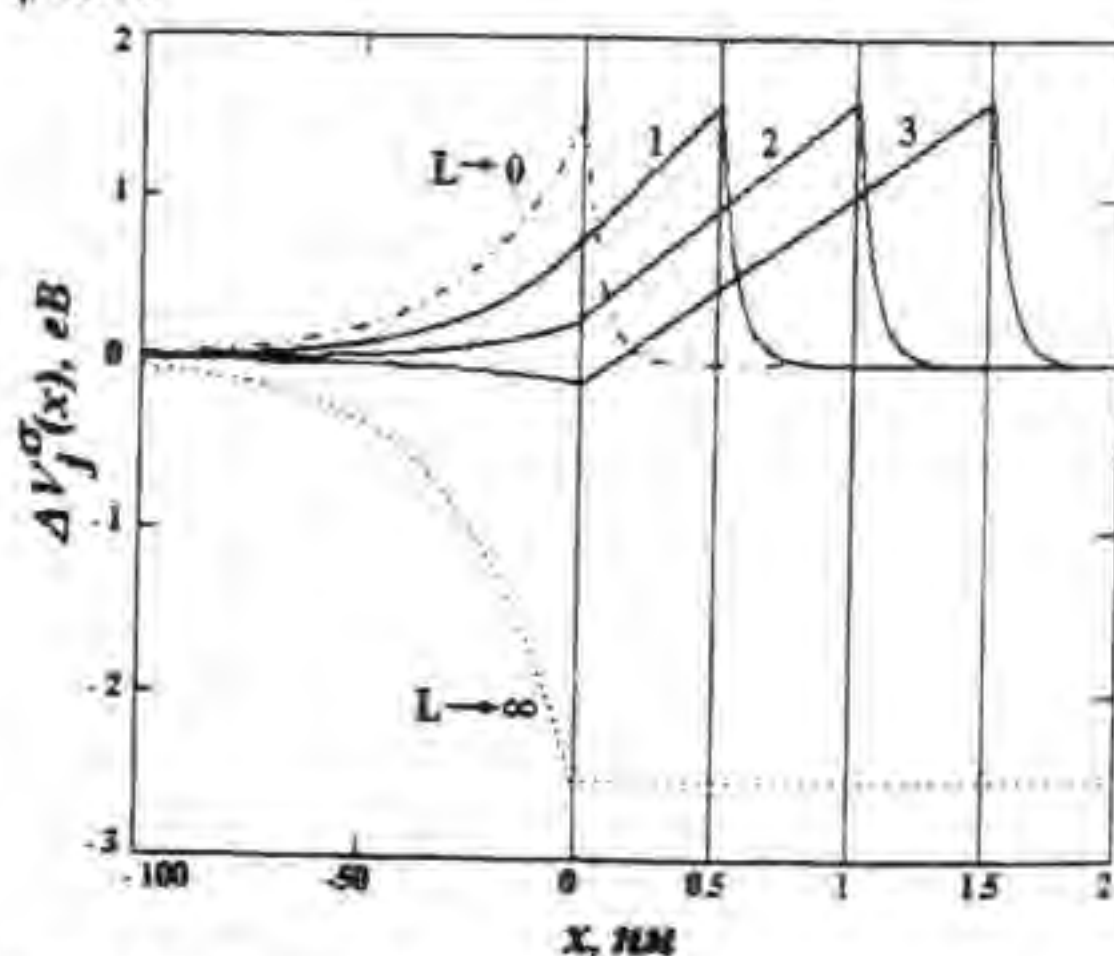


Рис. 1. Розподіл $\Delta V_f^\sigma(x)$ в n -Si- вакуум - Au системі при $L \rightarrow 0$ (штрих-пунктирна крива), $L = 0.5 \text{ nm}$ (суцільна крива 1), $L = 1 \text{ nm}$ (суцільна крива 2) та $L = 1.5 \text{ nm}$ (суцільна крива 3), коли густина заряду на вільній поверхні n -Si складає $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ (пунктирна крива), а густина заряду на поверхні металу складає $\sigma_2 = -1.5 \cdot 10^{14} \text{ e/cm}^2$.

Як видно з рис.1, зі зменшенням роздільної відстані L між напівпровідником та металом, коли $L < L_{опз}$, внесок екранування поверхневого заряду напівпровідника σ_1 вільними електронами та поверхневим зарядом σ_2 металу суттєво збільшується. Причому для від'ємної густини заряду σ_2 на поверхні металу область збагачення вільними носіями в приповерхневій області напівпровідника, характерній для вільної поверхні напівпровідника з густиною заряду σ_1 , коли $L \rightarrow \infty$ (пунктирна крива на Рис.1), при зменшенні роздільної відстані L може стати областю збіднення (суцільні криві 1, 2 та штрих-пунктирна крива при $L \rightarrow 0$).

Зміна густини заряду σ_2 на поверхні металу при фіксованому малому вакуумному проміжку L також приводить до зміни потенціалу в ОПЗ напівпровідника. На рис.2 показано розподіл $\Delta V_j^\sigma(|x|)$ в n -Si- вакуум - Au системі з наведеними вище об'ємними параметрами, коли поверхня золота знаходиться на відстані $L = 1\text{ нм}$ від поверхні n -Si з однорідною густиною заряду σ_1 , а густина заряду σ_2 на поверхні металу змінюється.

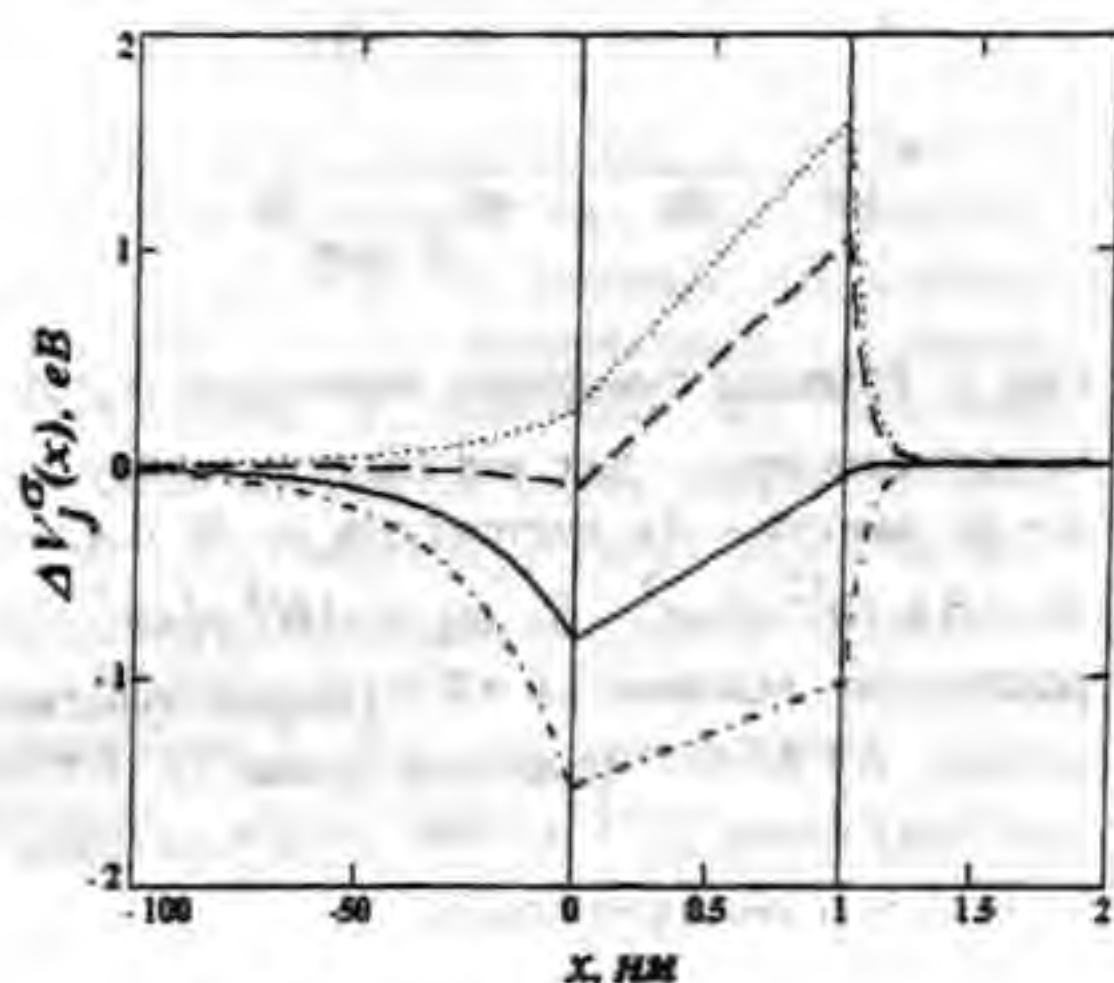


Рис. 2. Розподіл $\Delta V_j^\sigma(x)$ в n -Si- вакуум - Au системі при роздільній відстані $L = 1\text{ нм}$ з густиною заряду на вільній поверхні n -Si $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ та з густиною заряду на поверхні Au: $\sigma_2 = -1.5 \cdot 10^{14} \text{ e/cm}^2$ (пунктирна крива), $\sigma_2 = -10^{14} \text{ e/cm}^2$ (штрихова крива), $\sigma_2 = 0$ (суцільна крива) та $\sigma_2 = 10^{14} \text{ e/cm}^2$ (штрих-пунктирна крива).

З рис.2 видно, що при фіксованій відстані L між однорідно зарядженими поверхнями напівпровідника та металу зміна поверхневого заряду металу σ_2 з додатного (штрих-пунктирна крива) або квазінейтрального (суцільна крива) на від'ємний (штрихова та пунктирна криві) для від'ємного заряду e (електрона) зумовлює виникнення потенціального бар'єру на поверхні напівпровідника - області збіднення. Відзначимо окремо, що в даному розгляді виникнення бар'єру в приповерхневій області напівпровідника не пов'язане з контактною різницею потенціалів $\Delta\Phi$ [1-4].

На рис.3 показано графік зміни зарядового потенціалу $\Delta V_1^\sigma(|x|)$ на поверхні напівпровідника $\Delta V_1^\sigma(0) = \Delta V_2^\sigma(0)$ при зміні вакуумної відстані L в n -Si- вакуум - Au системі з наведеними вище об'ємними параметрами та з однорідною густиною заряду σ_1 на поверхні напів-провідника для різних значень густини заряду σ_2 на металевій поверхні.

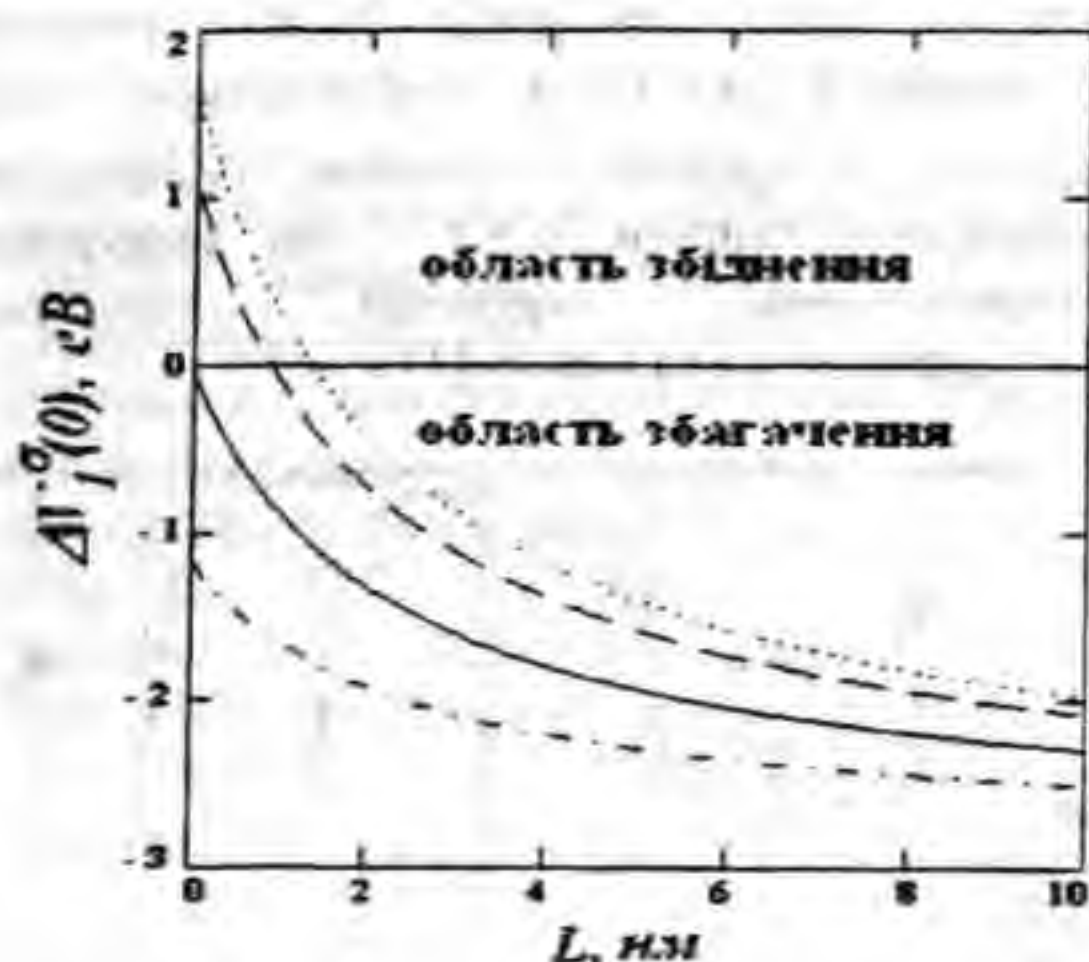


Рис. 3. Залежність $\Delta V_1^\sigma(0)$ від товщини L вакуумного проміжку в n -Si- вакуум - Au системі з первинною густиною заряду на вільній поверхні n -Si $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ та з густиною заряду на поверхні Au: $\sigma_2 = -1.5 \cdot 10^{14} \text{ e/cm}^2$ (пунктирна крива), $\sigma_2 = -10^{14} \text{ e/cm}^2$ (штрихова крива), $\sigma_2 = 0$ (суцільна крива) та $\sigma_2 = 10^{14} \text{ e/cm}^2$ (штрих-пунктирна крива).

З рис.2 та рис.3 видно, що зміна напрямку вигину зони для НВМ системи (в даному випадку для n -Si- вакуум - Au системи з наведеними вище об'ємними параметрами та з однорідною густиною заряду $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ на поверхні напів-провідника) можлива лише для малих роздільних відстаней L та при наявності від'ємної густини заряду σ_2 на металевій поверхні. З наведених вище рисунків видно також, що присутність на відстані $L < L_{OPZ}$ поверхні металу (навіть квазінейтральної, коли

$\sigma_2 = 0$ - суцільні криві на Рис.2-3) приводить до часткової компенсації поверхневого заряду напівпровідника σ_1 , причому при зменшенні роздільної відстані L екранування σ_1 вільними електронами металу суттєво посилюється, так що ефективна густина заряду на поверхні напівпровідника зменшується порівняно з величиною σ_1 , характерною для вільної поверхні ($L > L_{OPZ}$).

На рис.4 показано розрахований згідно рівнянь (4)-(8) та робіт [6,10] сумарний потенціал $V_j(x)$ (1) в $n-Si$ - вакуум - Au системі за відсутності контакту, прикладеної зовнішньої напруги $U=0$ і без врахування мікроскопічної структури поверхонь напівпровідника та металу [11].

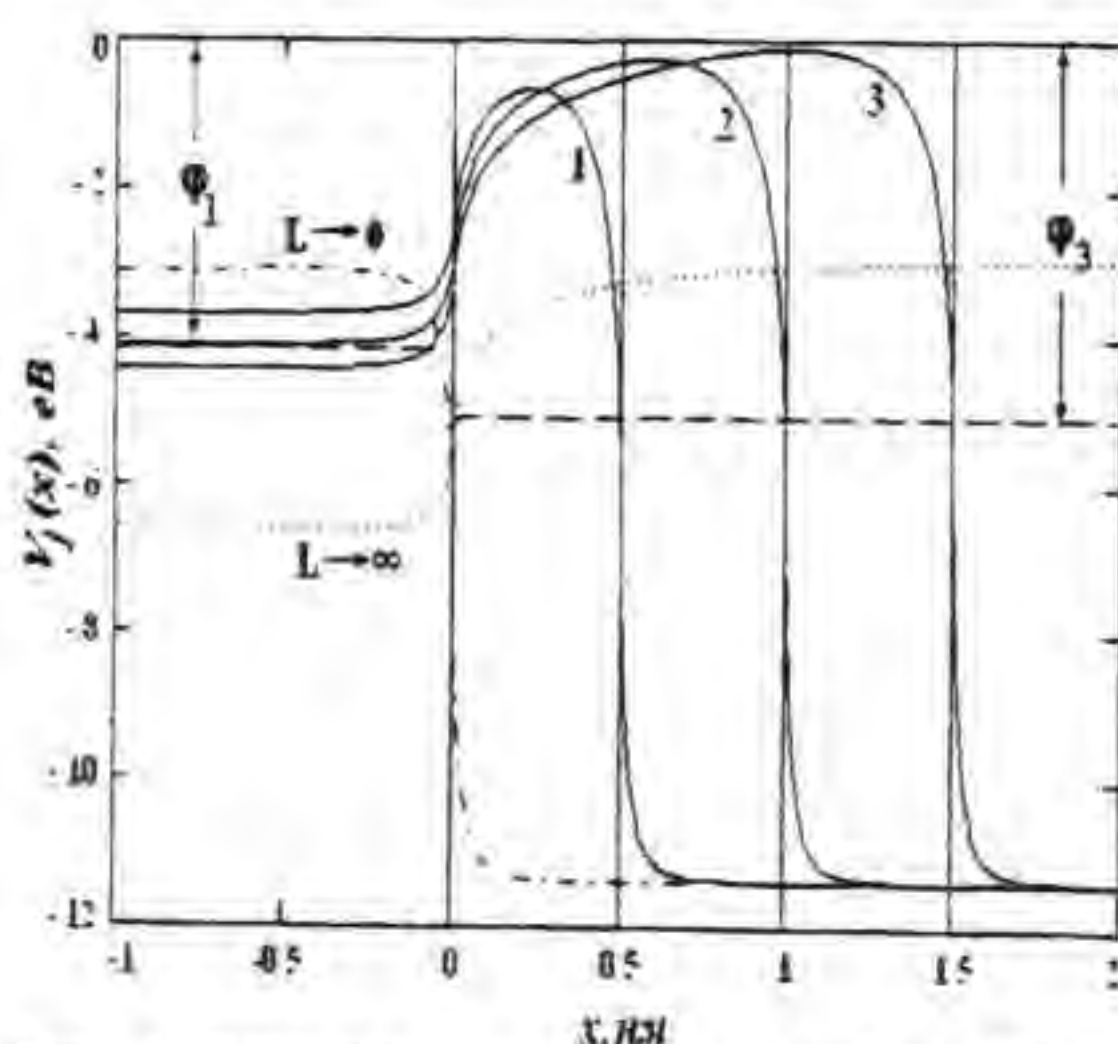


Рис. 4. Розподіл сумарного потенціалу $V_j(x)$ для від'ємного заряду e в $n-Si$ - вакуум - Au системі для $n-Si$ і Au при $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ і $\sigma_2 = -10^{14} \text{ e/cm}^2$ для роздільної відстані $L=0$ (штрих-пунктирна крива), $L=0.5 \text{ нм}$ (суцільна крива 1), $L=1 \text{ нм}$ (суцільна крива 2), $L=1.5 \text{ нм}$ (суцільна крива 3) та $L \rightarrow \infty$ (пунктирна крива).

На рис.5 суцільними кривими показано формування ОПЗ в напівпровіднику для різних товщин L щілини між поверхнями $n-Si$ та Au . Розподіл повного потенціалу $V_1(x)$ в напівпровіднику для вільної поверхні, коли $L \rightarrow \infty$, показано пунктирною кривою та у випадку щільної структури, коли $L \rightarrow 0$, показано штрих-пунктирною кривою.

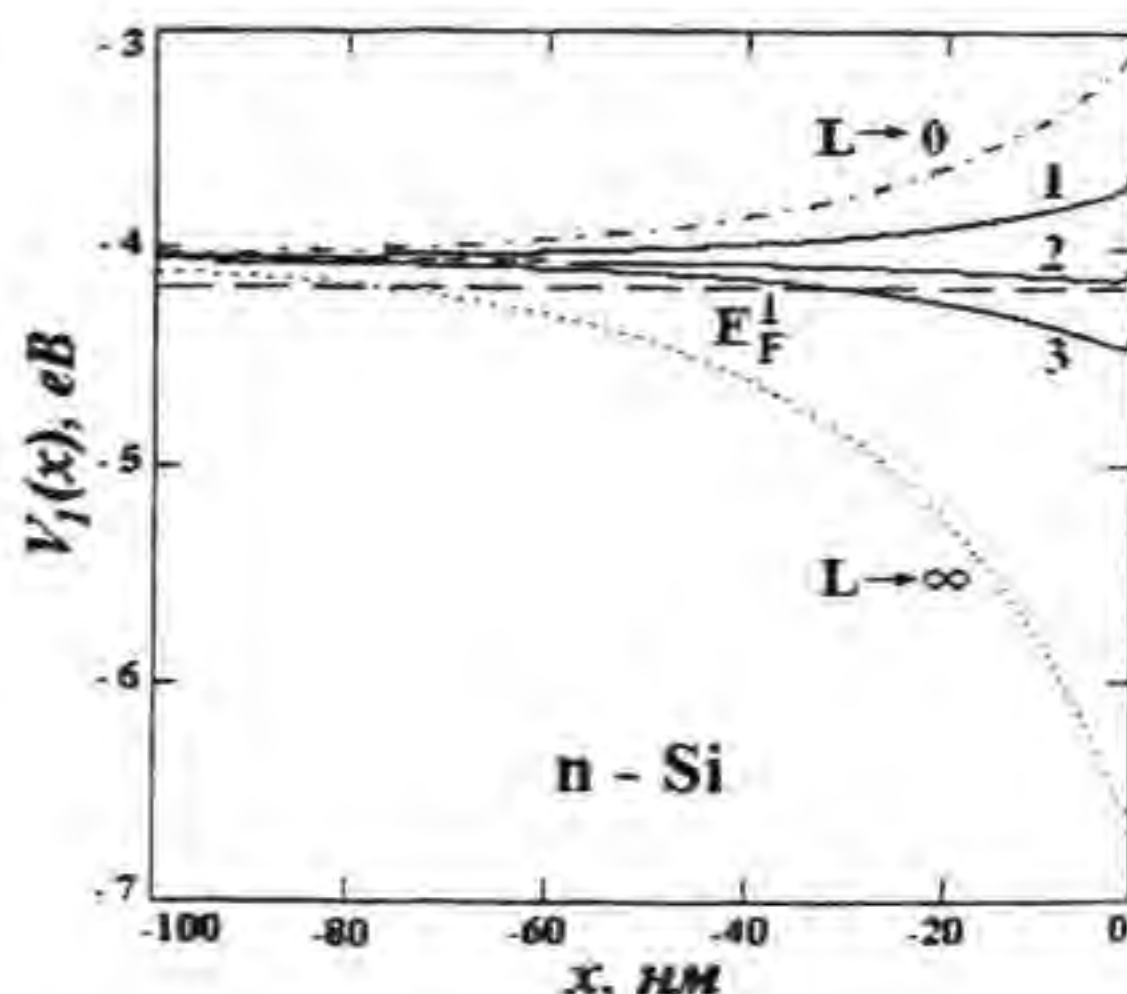


Рис. 5. Розподіл сумарного потенціалу $V_1(x)$ в напівпровіднику для від'ємного заряду e в $n-Si$ - вакуум - Au системі для $n-Si$ і Au при $\sigma_1 = 6.8 \cdot 10^{12} \text{ e/cm}^2$ і $\sigma_2 = -10^{14} \text{ e/cm}^2$ для роздільної відстані $L=0$ (штрих-пунктирна крива), $L=0.5 \text{ нм}$ (суцільна крива 1), $L=1 \text{ нм}$ (суцільна крива 2), $L=1.5 \text{ нм}$ (суцільна крива 3) та $L \rightarrow \infty$ (пунктирна крива).

Як бачимо, коректне врахування ефектів просторової дисперсії в діелектричних функціях напівпровідника (2) та металу (3) в рамках нелокальної електростатики приводить до неперервності потенціалу сил зображення $V_j^0(x)$ (Рис.1) [6,10] і зарядового потенціалу $\Delta V_j^\sigma(x)$ (Рис.2-3) в несиметричній НВМ системі, що обумовлює неперервність сумарного потенціалу $V_j(x)$ (3) на межах поділу (рис.4).

При збільшенні роздільної відстані L між напівпровідником і металом, коли $L > L_{OPZ}$ впливом металу можна знехтувати, розглядаючи поверхню напівпровідника як вільну з густиною заряду σ_1 [8-10].

Висновки

В даній роботі за відсутності контакту напівпровідник-метал та зовнішньої напруги $U=0$ для несиметричної за об'ємними та поверхневими характеристиками НВМ системи в рамках нелокальної електростатики [5] теоретично розраховано зарядовий потенціал $\Delta V_j^\sigma(x)$, пов'язаний з наявністю на поверхнях напівпровідника та металу заряду з густиною

відповідно σ_1 та σ_2 . Неперервність потенціалу сил зображення $V_f^0(x)$ і, відповідно, сумарного потенціалу $V_f(x)$ (3) та єдиний (вакуумний) рівень відліку енергії в НВМ системі забезпечуються коректним врахуванням ефектів просторової дисперсії у функціях діелектричної проникності напівпровідника $\varepsilon_1(\vec{k})$ (2) та металу $\varepsilon_3(\vec{k})$ (3).

Присутність на відстані $L < L_{OII3}$ метала з густиною поверхневого заряду σ_2 ($x = L$) приводить до зміни розподілу потенціалу в ОПЗ, аналогічної введенню ефективного поверхневого заряду напівпровідника σ_1 . При зменшенні роздільної відстані L суттєво посилюється екранування поверхневого заряду напівпровідника з густиною σ_1 вільними електронами металу та вплив заряду на його поверхні з густиною σ_2 . Такий взаємозв'язок між близько розділеними вакуумним проміжком L напівпровідником і металом зумовлений відмінностями в об'ємних властивостях трьох середовищ, зарядовим станом поверхонь напівпровідника та металу та їх мікроскопічною (атомною) структурою [11,12].

В даній роботі в рамках нелокальної електростатики на прикладі n -Si - вакуум - Au системи проаналізовано вплив зарядженої поверхні металу з густиною σ_2 на розподіл потенціалу в ОПЗ. Якщо для додатньо зарядженої поверхні металу вигин зони збільшується в порівнянні з вільною поверхнею напівпровідника з первинною густиною σ_1 , а у випадку квазінейтральної поверхні, коли $\sigma_2 = 0$, можливе лише зменшення вигину зони, то від'ємно заряджена поверхня металу зумовлює на малих роздільних відстанях L зміну вигину зони та виникнення потенціального бар'єра, параметри якого не пов'язані з контактною різницею потенціалів $\Delta\Phi$ [1-4], а визначаються величиною від'ємного заряду на поверхні метала та роздільною відстанню L .

Список використаних джерел

1. Rhoderick E.H., Williams R.H. Metal-Semiconductor contacts.- Oxford: Oxford Science Publishers, 1988. - 251 p.
2. Пека Г.П., Стрпиха В.І. Поверхневі та контактні явища в напівпровідниках.- Київ: Либідь, 1992.- с.237.
3. Monch W. Semiconductor Surfaces and Interfaces.- Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. - p.442.
4. Находкін М.Г., Шека Д.І. Фізичні основи мікро та наноелектроніки.- Київ: Київський університет, 2005.- 432 с.
5. Il'chenko L.G., Pashitskii E.A. and Romanov Yu.A. Charge interaction in layered systems with spatial dispersion // Surf. Sci.- 1982.- 121. - P. 375-395.
6. Ільченко Л.Г., Ільченко В.В., Лобанов В.В. Потенціал сил зображення між близько розділеними вакуумним проміжком напівпровідником і металом (розмірно-квантованою плівкою металу) // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Радіофізика та електроніка.- 2008. - N11. - С.29-34.
7. Il'chenko L.G. and Goraychuk T.V. Role of the image forces potential in the formation of the potential barrier between closely spaced metals. // Surf. Sci. - 2001. - 478. - P.169-179.
8. Il'chenko L.G. Electrostatic interaction of charges on a semiconductor surface.// Surface Sci. - 1991.- 243. - P. 334-336.
9. Il'chenko L.G., Ogenko V.M. Image forces near the surface of semiconductor with a space charge region.// Surface Sci. Lett.- 1992.- 262- P. L147- L150.
10. Ільченко Л.Г., Ільченко В.В., Лобанов В.В. Розподіл електростатичного потенціалу в системі напівпровідник-вакуум-метал у відсутності зовнішньої напруги. // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. - 2009. - № 3. - С. 237-242.
11. Ільченко Л.Г., Лобанов В.В. Теоретический расчёт структурного потенциала в сверхтонкой вакуумной щели между двумя твёрдыми телами. - Физико-химия наноматериалов и супрамолекулярных структур.- Киев: Наукова думка. 2007.- т.2. С.52-81.
12. Ільченко Л.Г., Ільченко В.В., Лобанов В.В. Роль атомної структури поверхонь у формуванні потенціалу у вакуумному проміжку між близько розділеними металом та напівпровідником.// Хімія, фізика і технологія поверхності. - 2008.- N14.- С.43-51.

Надійшла до редколегії 20.01.10

УДК 537.528

Недибалюк* О.А., аспірант, Ольшевський С.В., канд. ф.-м. наук, Черняк В.Я, д. ф.-м. наук, Ломонос О.І., студент, Соломенко Ок.В., студент, Шихт І.Г., студент.

Розряд в плазмово-рідинній системі із зворотно вихровим потоком типу торнадо

Досліджено розряд з рідким електродом. Виміряні вольт-амперні характеристики розряду в діапазоні струмів від 200 до 320 мА та потоків повітря від 0 до 110 см³/с. Досліджено залежність витрат джерела рідини від потужності розряду в діапазоні від 500 до 900 Вт для різних полярностей – «твердий» та «рідкий» катод. Емісійні спектри плазми реєструвалися в діапазоні від 200 до 1000 нм. Обраховані температури заселення (електронних T_e^* , обертальних T_r^* та коливальних T_v^*) рівнів.

Ключові слова: розряд, плазмово-рідинна система, зворотно вихровий потік типу торнадо (ЗВПТ), рідкий електрод.

*E-mail: oanedybaliuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.

Вступ

Для створення плазми атмосферного тиску використовуються різні типи розрядів: дуговий, ковзаюча дуга, розряд в газовому каналі і т.п., але вони не досить стабільно горять. В роботі [5] автори пропонують використовувати зворотно-вихровий потік типу торнадо (ЗВПТ) для стабілізації розряду атмосферного тиску. ЗВПТ формує область де утримується плазма. Але в той же час він робить виніс плазми з області горіння розряду. Торнадо використовують для стабілізації горіння ковзаючої дуги, при реформінгу пального [6]. В роботі [1] зворотно вихровий потік використовувався для покращення згорання пального при комбінації двох розрядів – мікрохвильового та докритичного стримерного.

В представленій роботі запропоновано використовувати ЗВПТ для стабілізації розряду в плазмово-рідинній системі із рідким електродом.

Експериментальна установка

Схема експериментальної установки зображена на рис. 1. В основі лежить циліндрична камера (1) діаметром 90 мм і висотою 50 мм, яка виготовлена із кварцу. Зверху

Nedybaliuk* O.A., postgraduate student, Olzewski S.V., Ph. D., Chernyak V.Ya., Dr. Sc., Lomonos O.I., student, Solomenko Ok.V., student, Shykht I.G., student.

Discharge in plasma-liquid system with Reverse Vortex Flow of Tornado Type

Discharge with liquid electrode was investigated. Discharge volt-ampere characteristic at the current range from 200 to 300 mA and air flow at the range of 0-110 cm³/s, were measured. Liquid flow rate at the range of discharge power from 500 to 900 W, for different polarity – "solid" or "liquid" cathode, were investigated. Plasma emission spectra at the range of 200-1100 nm were registered. Excitation temperatures (electronic T_e^* , vibrational T_v^* and rotational T_r^*) were measured.

Key Words: discharge, plasma-liquid system, Reverse Vortex Flow of Tornado Type (RVFT), liquid electrode.

(2) і знизу (3) камери знаходяться металеві фланці, які герметично кріпляться до неї. Камера заповнена рідиною (4), рівень якої підтримується за допомогою шприцевого насосу. Потік рідини подається через отвір (5). Нижній фланець виготовлений із нержавіючої сталі. Металевий електрод (із водяним охолодженням) циліндричної Т-подібної форми (6) крізь центральний отвір у нижньому фланці занурений в рідину. Він виготовлений із нержавіючої сталі. Роль другого електроду відіграє верхній фланець (2). Він виготовлений із дюралюмінію в центрі якого знаходиться мідна втулка (13) діаметром 2 см. В ній по центру знаходиться сопло (7) діаметром 2 мм. Всі з'єднання в системі герметичні. Утворення ЗВПТ забезпечує верхній фланець. Газ подається крізь отвір (8). Всередину камери потік вводиться по дотичній до циліндричної камери. Обертаючись, газ опускається на поверхню рідини і рухається до центральної осі системи (9), де виходить назовні крізь сопло у верхньому фланці (7). При підході до сопла швидкість потоку досягає максимального значення. За рахунок цього в центрі газового прошарку утворюється область нижчого тиску у порівнянні із периферією. Тому

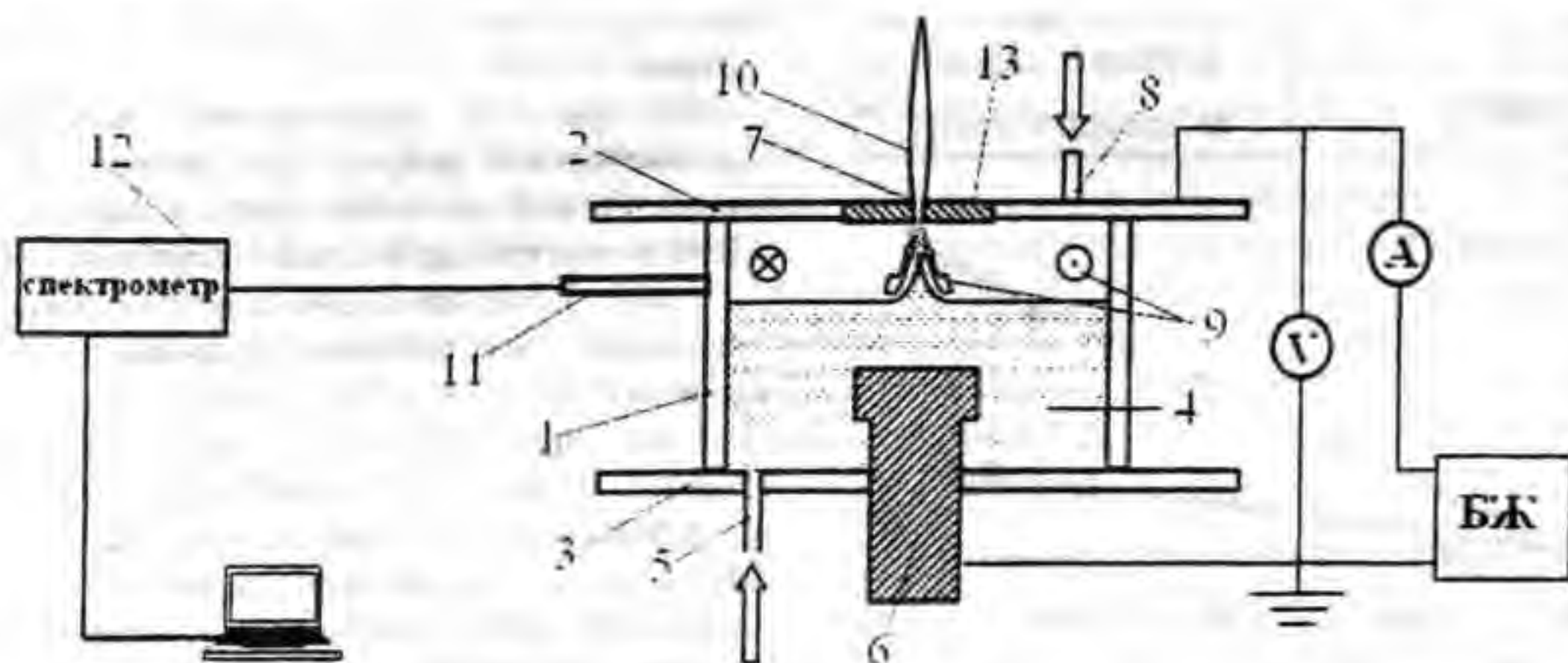


Рис. 1 Схема експериментальної установки

поблизу осі (на межі рідина-повітря) рідина витягується над поверхнею у вигляді конуса із гострим кінчиком (рис. 1). Статичний тиск ззовні системи 1 атмосфера, а всередині без розряду – 1 атм., при горінні розряду – 1,2 атм. Компресор утворює потік газу який регулюється за допомогою ротаметра.

Напруга подається між верхнім фланцем та зануреним у рідину електродом, за допомогою джерела живлення, яке забезпечує напругу до 10 кВ. Розглядається два режими роботи: „рідкий” катод (РК), коли на занурений у рідину електрод подається „-”, а на верхній фланець подається „+” і заземлюється; „твердий” катод (ТК) – з протилежною полярністю. Умови пробою регулюються за допомогою трьох параметрів: рівнем рідини, величиною потоку газу, величиною поданої напруги між електродами. При горінні розряду ззовні камери утворюється факел (10).

Струм на розрядному проміжку реєструвався за допомогою міліамперметра, повна шкала якого

1000 мА, крок – 20 мА. Напруга реєструвалася за допомогою вольтметра, повна шкала якого 10 кВ, крок – 200 В.

При спостереженні за процесом запалювання та горіння розряду використовувалась високошвидкісна фотокамера Nikon L100.

Для діагностики плазми використовувався метод емісійної спектроскопії. Емісійні спектри плазми вимірювались за допомогою системи яка складається із світловода (11) та спектрального приладу на базі CCD-лінійки (12), дані якого обробляються на комп'ютері. Прилад працює в діапазоні від 200 до 1200 нм, з роздільною здатністю 0,6 нм.

Результати та їх обговорення

Процес запалювання розряду відбувається наступним чином: камера заповнюється рідиною до фіксованого рівня; далі виставляється певна величина потоку газу і утворюється стаціонарний конус із рідини; починається поступове збільшення напруги в між електродному

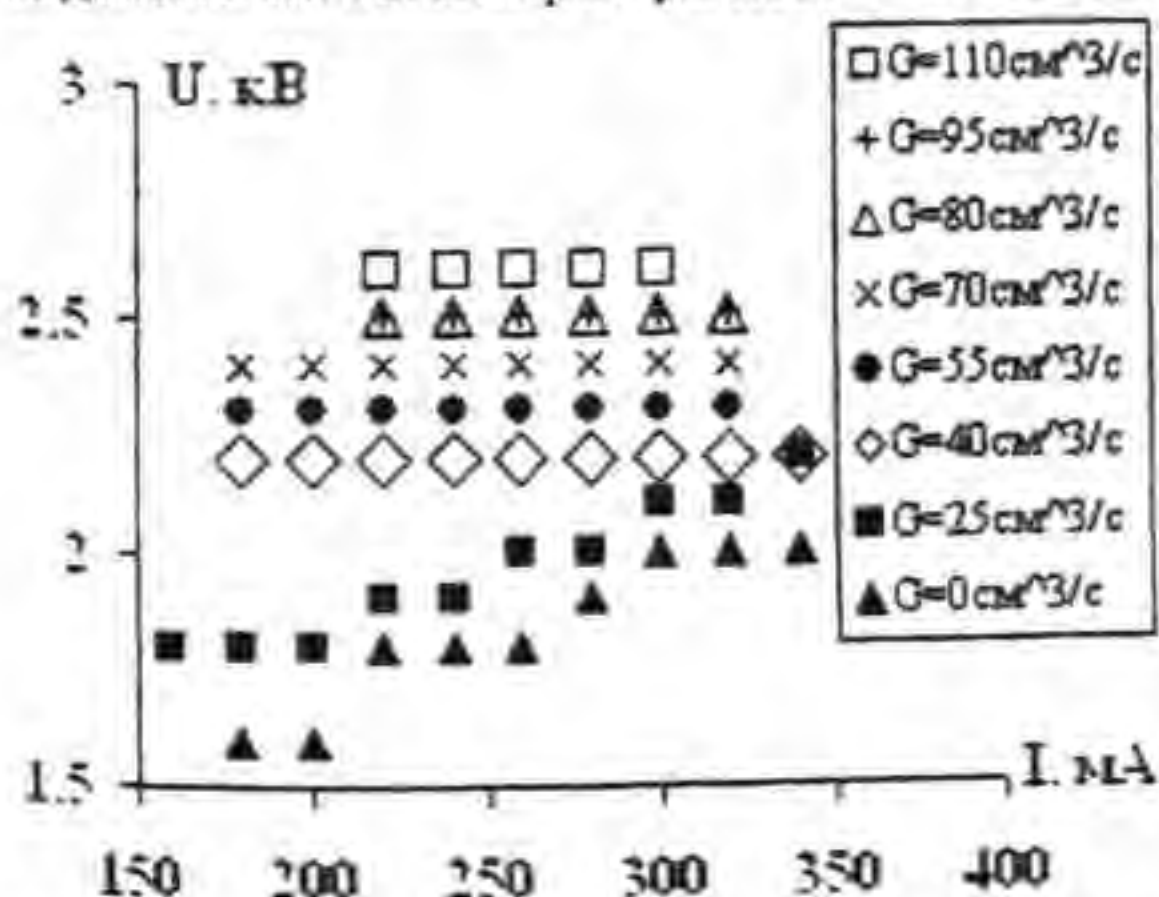


Рис. 2 Вольт-амперні характеристики розряду при різних потоках повітря. Режим роботи: «твердий» катод. Рідина: дистильована вода

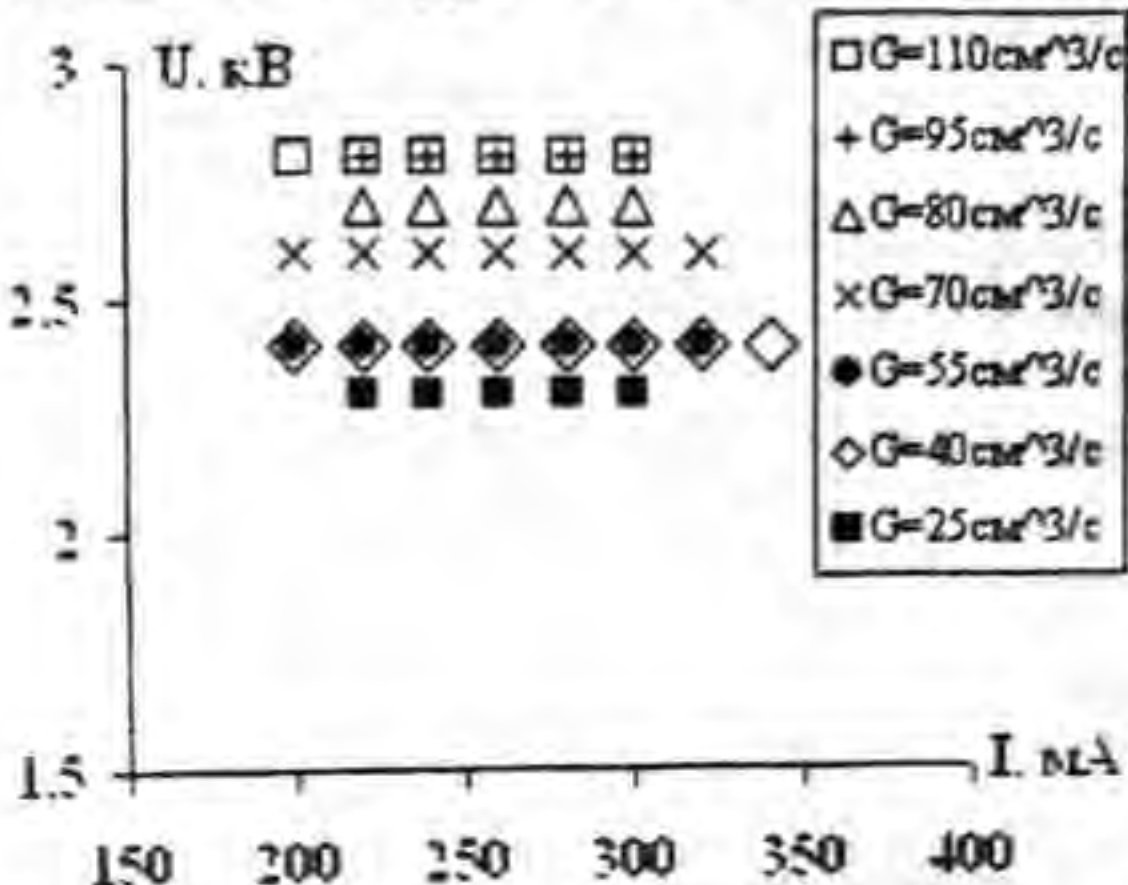


Рис. 3 Вольт-амперні характеристики розряду при різних потоках повітря. Режим роботи: «рідкий» катод. Рідина: дистильована вода

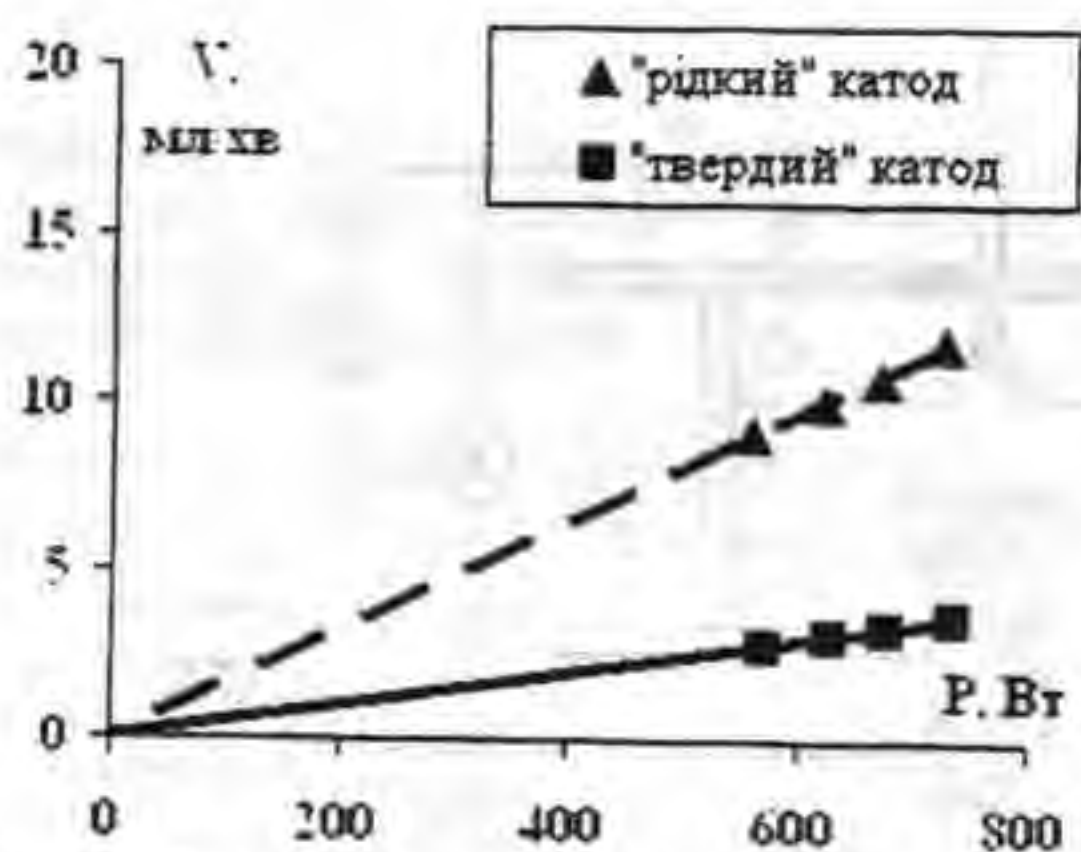


Рис. 4 Витрати джерела води в залежності від величини потужності розряду для двох режимів роботи – РК та ТК.

проміжку. Коли величина напруги досягає пробійної U_n , то в перший момент виникає стример. За доли секунди починає горіти розряд, напруга при цьому падає, а струм відповідно зростає. Через одну-дві секунди він стабілізується. За цей час відбувається зростання статичного тиску всередині камери від 1 до 1,2 атмосфери. Якщо підтримувати рівень рідини фіксованим, то розряд горить стабільно протягом довгого проміжку часу.

На рис. 2 представлені вольт-амперні характеристики розряду при режимі ТК. Камера заповнена дистильованою водою. Торнадо утворюється потоком повітря. Потік змінюється в діапазоні від 25 до 110 cm^3/s . Струм змінюється в діапазоні від 200 до 320 мА. Початковий рівень дистильованої води однаковий у всіх випадках. Пробійна напруга при даному режимі – 5,5 кВ. В діапазоні потоків повітря від 110 до 40 cm^3/s характеристики є прямими лініями. Вони вказують на те, що даний розряд відноситься до тліючого типу. Але при $G \leq 40 \text{ cm}^3/\text{s}$ вольт-амперні характеристики мають нелінійний характер. Це

означає, що відбувається перехід до іншого типу розряду.

На рис. 3 представлені вольт-амперні характеристики розряду для режиму «рідкий» катод. Камера заповнена дистильованою водою. Потоки повітря варіюються в діапазоні від 25 до 110 cm^3/s . Початковий рівень дистильованої води однаковий у всіх випадках. Пробійна напруга при «рідкому» катоді – 4,5 кВ. Діапазон струмів 200 – 320 мА. При $G \leq 25 \text{ cm}^3/\text{s}$ розряд зривається на стінки і починає нестабільно горіти. Ця нестабільність пов'язана із тим, що в камері інтенсивно утворюється аерозоль [2]. При зменшенні потоку газу аерозоль починає осідати на стінках, утворюючи закоротку пробійного проміжку. В роботі [2] представлені розрахунки розмірів краплин, що утворюються при потоках повітря над поверхнею рідини. За оцінками для даної системи отримали, що діаметри краплин приблизно 1-10 мкм.

Були виміряні витрати дистильованої води в залежності від потужності, що вкладається в розряд, при режимах «рідкий» та «твердий» катод (рис. 4). Ці залежності мають лінійний зростаючий характер при збільшенні потужності. При режимі РК витрати джерела води втричі більші ніж при ТК. Якщо краплину води помістити в електричне поле [3], то при деякому його критичному значенні $E_{кр} \geq 850 \text{ В/см}$ вона починає рухатись проти електричного поля. Його лінії паралельні напрямку сили тяжіння. В представленій системі електричне поле більше за 1500 В/см. Це означає, що при режимі «рідкий» катод електричне поле сприяє виносу утвореного аерозолю назовні. А при режимі «твердий» катод поле намагається повернути в рідину утворені краплини. Тому при РК витрати більші ніж при ТК.

Типові емісійні спектри для двох областей розряду представлені на рис. 5. Вхід світловода, для першої області, знаходився біля поверхні

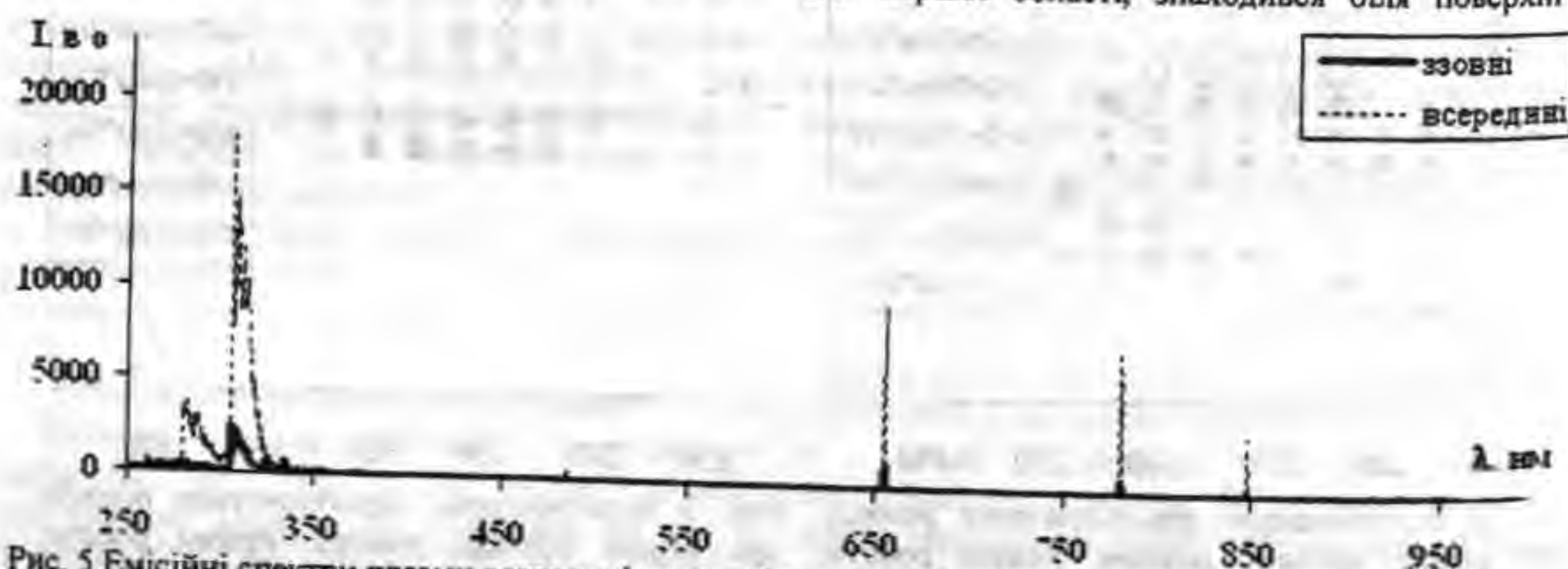


Рис. 5 Емісійні спектри плазми всередині та ззовні системи. Струм розряду 280 мА, напруга 2,6 кВ, потік повітря 110 cm^3/s . Робоча рідина: дистильована вода

кварцового циліндра, в точці яка знаходиться посередині між поверхнею рідини і верхнім фланцем (рис. 1). Він був розташований перпендикулярно до осі системи і орієнтований на неї. Друга область розряду знаходиться ззовні системи, одразу при виході плазми із сопла.

На емісійному спектрі присутні мультиплети таких елементів, як гідроксил OH, O, N₂, H₂. Цікаво, що на емісійних спектрах відсутні лінії міді (матеріалу металевого електроду). Це означає, що ерозія електроду є незначною. Температура заселення (електронних T_e^* , обертальних T_r^* та коливальних T_v^* рівнів) обраховувались за допомогою методики [4].

Всередині системи інтенсивність емісійних спектрів у сім разів більша ніж ззовні. До того ж

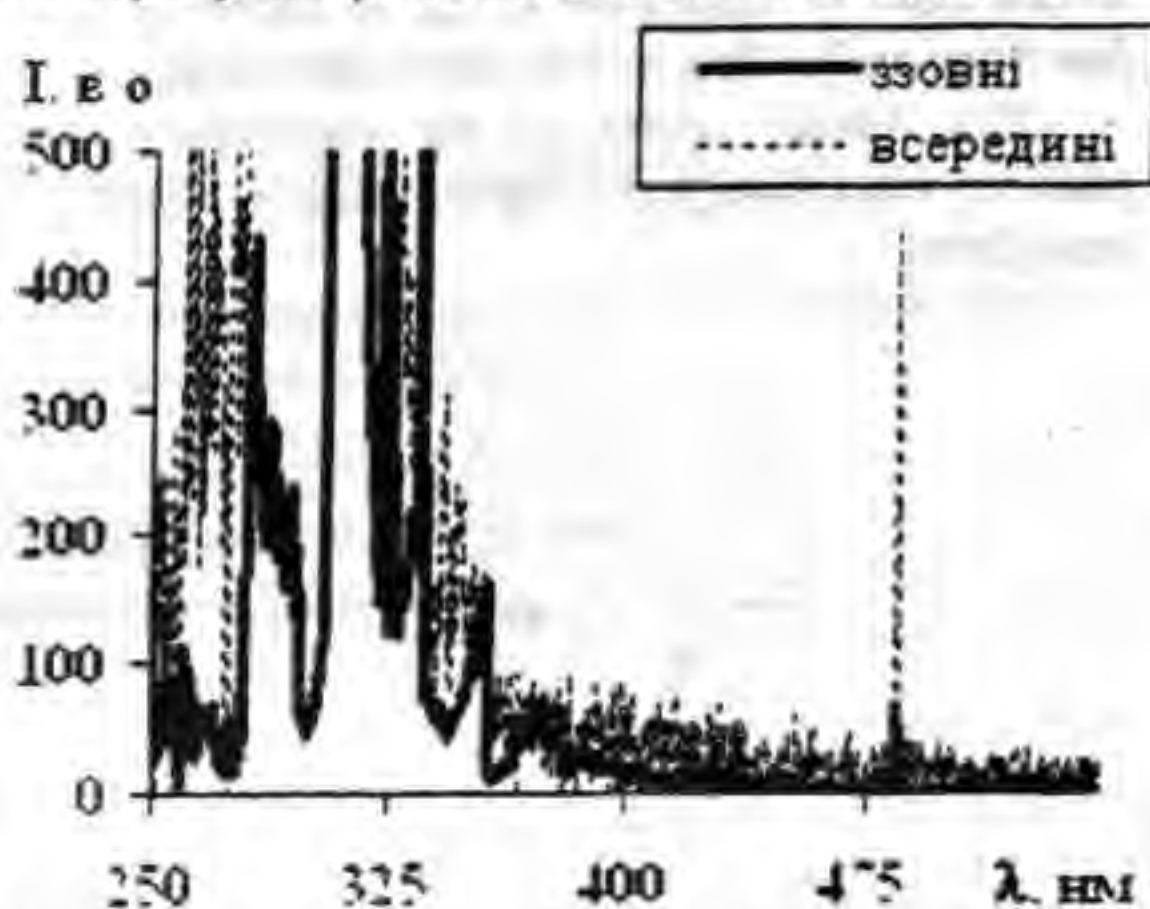


Рис. 6 Емісійні спектри плазми всередині та ззовні системи. Струм розряду 280 мА, напруга 2,6 кВ, потік повітря 110 см³/с. Робоча рідина: дистильована вода.

смуга азоту N₂(C-B) присутня лише в плазмі, яка виходить із сопла. Всередині її немає, хоча молекули азоту присутні в обох випадках (рис. 6). Тобто збудження молекул азоту N₂(C-B) відбувається при закалці плазми.

Температура заселення електронних рівнів визначена по лініям кисню O всередині системи складає $T_e^*=5000\text{K}$, а ззовні – $T_e^*=4500\text{K}$. Температура заселення обертальних та коливальних рівнів гідроксилу OH всередині системи – $T_r^*=6000\text{K}$, $T_v^*=4500\text{K}$, а ззовні – $T_r^*=4700\text{K}$, $T_v^*=3500\text{K}$. Отже при виході із сопла плазма холодніша ніж всередині. Також вдалося виміряти температури заселення обертальних та коливальних рівнів молекули N₂ для області, що знаходиться при виході з сопла – $T_r^*=3100\text{K}$, $T_v^*=5400\text{K}$. Температура заселення обертальних рівнів гідроксилу OH перевищує температуру заселення коливальних рівнів. Дане явище потребує подальшого дослідження і пояснення.

Різниця в температурах є досить суттєвою. Це означає, що плазма яка утворюється в плазмово-рідинній системі із розрядом в зворотно вихровому потоці типу торнадо є неізотермічною.

Висновки

1. Даний розряду відноситься до тліючого типу.
2. Плазма даного розряду є неізотермічною.
3. Збудження молекул N₂(C-B) відбувається при закалці плазми в атмосферному повітрі ззовні системи.
4. Ерозія твердих електродів при даному розряді є незначною.

Список використаних джерел

1. Aleksandrov K.V., Bychkov V.L., Matveev I.B. Investigations of Subcritical Streamer Microwave Discharge in Reverse-Vortex Combustion Chamber // IEEE Tran. On Plasma Sc. – 2009. – 37. – P. 2293-2297.
2. Асланов С.К., Колпаков А.В. Влияние электрического поля на процесс диспергирования жидкой поверхности // Физика аэродисперсных систем. – 2002. – 39. – С. 7-13.
3. Чесноков М.Н., Казаков И.Н., Грызунов Т.В., Андрианов И.С. Испарение капель водных растворов натрий-хлор в электрическом поле // Физика аэродисперсных систем. – 2002. – 39. С. 170-176.
4. Prysiashnevych I., Lomonos L., Chernyak V. Techniques of determining vibrational and rotational excitation temperatures by OH (A-X) AND N₂ (C-B) bands for plasma diagnostics // Proc. IV Int. Conf. El. and App. Ph., Kyiv: – 2009. – P. 111-112.
5. Kalra C.S., Kossitsyn M., Gutsol A. Electrical discharges in the Reverse Vortex Flow – Thornado Discharges // El. Proc. Of 16th Int. Symp. on Plasma Chem., Taormina. – 2003. <http://plasma.mem.drexel.edu>
6. Kalra C.S., Matveev I., Gutsol A. Transient Gliding Arc for Fuel Ignition and Combustion Control // Combustion. – 2004. <http://plasma.mem.drexel.edu>

Надійшла до редколегії 16.03.10

УДК 519.6 621.375+535

Овечко В.С., д.ф.-м. н., професор

Вейвлет-аналіз часової структури електромагнітних сигналів на базі їх розкладу в ряд елементарних хвильових пакетів

В роботі запропоновано методику аналізу структури електромагнітних сигналів на базі їх розкладу на елементарні хвильові пакети. Визначення областей ортогональності ЕХП-складових сигналів виконане на базі розкладу ЕС на ЕХП-функції, так і ортогональні до них похідні.

Ключові слова: ряд елементарних хвильових пакетів, аналіз електромагнітних сигналів, вейвлет-перетворення.

E-mail: ovs@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.

Представлення електромагнітних сигналів (ЕС) на базі їх розкладу в ортонормований ряд елементарних хвильових пакетів (ЕХП), запропоноване в роботах автора [1,2], може бути застосоване, як це буде показано далі, для аналізу складних електромагнітних сигналів.

Оскільки ЕХП-ряд є ортонормованим, то визначення ЕХП-спектру ЕС у випадку, коли область визначення ЕХП-функцій співпадає з тривалістю ЕС, не складає будь-яких проблем. Значно складніша ситуація, коли області ортогональності ЕХП-функцій, з яких складений ЕС, не співпадають. Саме такий випадок буде розглянутий далі.

1. Вейвлет-аналіз та ЕХП-представлення

Розглянемо ЕС $p(x)$ на інтервалі $x[0,1]$. ЕС може бути поданий у вигляді ряду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^b A_{ni} f_{ni} \left(\frac{x-x_{ni}}{\Delta x_{ni}} \right), \quad (1)$$

де f_i - ортонормовані ЕХП-функції (моди),

x_i - затримка „ i ”-ї моди,

Δx_i - тривалість „ i ”-ї моди.

Нехай ЕС складений з мод n -го порядку, амплітуди яких $A_n = A_0 = 1$, що не перетинаються. Для знаходження параметрів $x_{ni}, \Delta x_{ni}$ мод, з яких складений ЕС домножимо

Ovchko V.S., Doct. Sci., professor

Wavelet-analysis of the time structure of the electromagnetic signal through their expansion in terms of elementary wave packets

It has been proposed method of the analyzing structure of the electromagnetic signals (ES) through their expansion in terms of elementary wave packets. The intervals of the orthogonalities of the EWP –functions analysis has been carried out on the base of expansion of ES in terms of EWP-functions and orthogonal to them derivatives.

Key words: series of the elementary wave packets, electromagnetic signal analysis, wavelets-transform

(1) на $S^\alpha f_n \left(\frac{x-t}{S} \right)$ і проінтегруємо в межах $x[0,1]$, тоді

$$K(t,s) = \int_0^1 f(x) S^\alpha f_n \left(\frac{x-t}{S} \right) dx = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} f_n \left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i} \right) f_n \left(\frac{x-t}{S} \right) S^\alpha f_n dx \quad (2)$$

Коефіцієнт S^α введений для оптимізації знаходження $K(t,S)$. Можна висунути вимогу незалежності корелятора $K(t,S)$ в першому наближенні від S, t .

Отже

$$\frac{\partial K(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial K(t,S)}{\partial S} = 0 \quad (3)$$

Звідки

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} f_n \left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i} \right) \cdot \left[-S^{-1} f'_n \left(\frac{x-t}{S} \right) + \alpha S^{\alpha-1} f_n \left(\frac{x-t}{S} \right) - \frac{x-t}{S^2} f'_n \left(\frac{x-t}{S} \right) \right] dx \quad (4)$$

де $f'_n \left(\frac{x-t}{S} \right)$ - похідна по аргументу.

З виразу (4) одержимо

$$\alpha = \frac{(S + S^{-1}) \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} f_n \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) f_n' \left(\frac{x - t}{S} \right) dx}{\int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} f_n \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) f_n \left(\frac{x - t}{S} \right) dx} \quad (5)$$

Вираз (5) може бути розрахований методом інтегрування за частинами з урахуванням умов нормування, $f_n(0) = f_n(1) = 0$ і граничному переході

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow S} (\Delta x_i / S) \rightarrow 1, \quad \lim_{x_i \rightarrow t} ((x_i - t) / S) \rightarrow 0.$$

Як не важко засвідчити, з (5) одержимо

$$\alpha = -1/2 \quad (6)$$

Тоді (2) можемо записати у вигляді

$$K(t, S) = \int_0^1 f(x) S^{-1/2} f_n \left(\frac{x - t}{S} \right) dx \quad (7)$$

Можемо порівняти вираз (7) з неперервним вейвлет-перетворенням [3]

$$\gamma(S, \tau) = \int f(t) \psi_{S, \tau}(t) dt, \quad (8)$$

де базова вейвлет функція

$$\psi_{S, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{S}} \psi \left(\frac{t - \tau}{S} \right), \quad (9)$$

S - масштаб, τ - переміщення.

Для окремої f_n -ї функції можна вважати, що елементарні хвильові пакети - це фізична реалізація базових вейвлет функцій. Таким чином, будь-яка ЕХП-функція $f_n(x)$ може бути використана для формування базових вейвлет функцій.

Обернене до (8) перетворення

$$f(x) = \iint K(t, S) f_n \left(\frac{x - t}{S} \right) dt dS \quad (10)$$

відновлює первинний розподіл $f_n(x)$. Далі ми на конкретних прикладах продемонструємо дієвість цих перетворень. Хоча насправді задача полягає не в знаходженні $\gamma(S, \tau)$, а в знаходженні параметрів ЕХП-функцій $(x_i, \Delta x_i)$.

2. Структурний аналіз складного електромагнітного сигналу (ЕС)

Можна виділити два випадки: 1) ЕС складається з відокремлених в часі ЕХП-сигналів; 2) ЕС складається з ЕХП-сигналів, що перетинаються. Розглянемо їх послідовно.

Перший випадок є більш простим для кореляційного аналізу. Нехай

$$f(x) = \sum_i C_i f_n \left(\pi \frac{x - t_i}{S_i} \right) S_i^{-1/2} \quad (11)$$

Домножимо (11) на $f_n \left(\pi \frac{x - t}{S} \right) S^{-1/2}$ і

проінтегруємо в межах ЕС. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) S^{-1/2} f_n \left(\pi \frac{x - t}{S} \right) dx = \\ = \sum_i C_i \int_{t_i}^{t_i + S_i} \left(\pi \frac{x - t_i}{S_i} \right) S_i^{-1/2} f_n \left(\pi \frac{x - t}{S} \right) S^{-1/2} dx \end{aligned} \quad (12)$$

Завдяки тому, що ЕХП-сигнал, з яких складається ЕС, не перетинаються, сума в (12) розділяється на складові. Отже

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_i + S_i} f(x) f_n \left(\pi \frac{x - t}{S} \right) dx = C_i S_i^{-1/2} K_i(t, S) = \\ = C_i S_i^{-1/2} \int_{t_i}^{t_i + S_i} f_n \left(\pi \frac{x - t_i}{S_i} \right) f_n \left(\pi \frac{x - t}{S} \right) dx \end{aligned} \quad (13)$$

де $K_i(t, S)$ - корелятор для i -ого ЕХП-сигналу.

Спочатку з розподілів $K_i(t, S)$ визначаються параметри t_i, S_i . Потім з виразу (13) знаходять амплітуду C_i . Приклад таких розрахунків для ЕС наведений на рис.1, рис.2.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(0,2)^{1/2}} \\ \sum_{i=1}^3 \left(\cos \left[\frac{\pi(x - (i-1)0,4)}{0,2} \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[3 \frac{\pi(x - (i-1)0,4)}{0,2} \right] \right) \end{aligned} \quad (14)$$

З рис.2, впливають значення параметрів $t_i : 0; 0,2; 0,4$ і $S_i = 0,2$

Другий випадок стосується аналізу ЕС, приклад якого наведений на рис. 3. Аналіз можна виконати послідовно починаючи з $t_1 = 0$.

Будується залежність

$$\begin{aligned} \Delta E(x, S) = f(x) - (S)^{-1/2} \cdot \\ (\cos[\pi x / S] - \cos[3\pi x / S]) \end{aligned} \quad (15)$$

Результат розрахунку для ЕС (рис.3.) подано на рис.4.

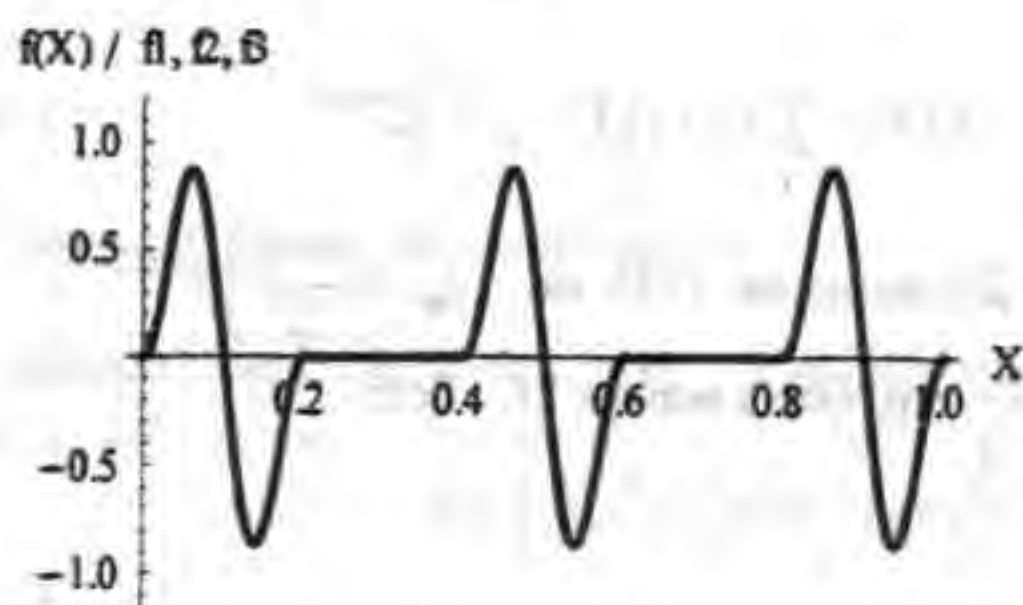


Рис. 1. Модель електромагнітного сигналу, що визначається параметрами $(t_i, S_i): (0, 0.2), (0.4, 0.2), (0.8, 0.2)$

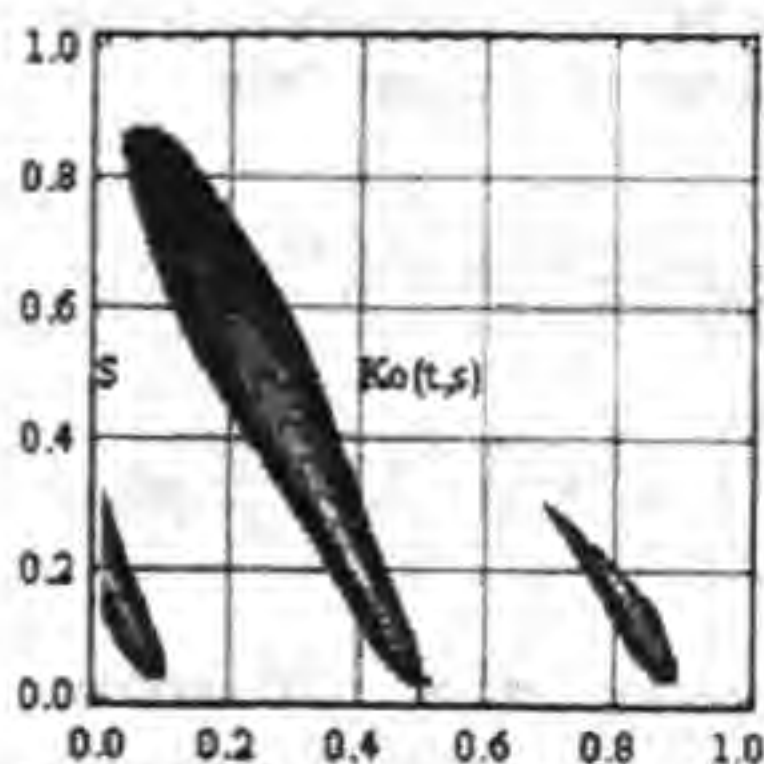


Рис. 2. Кореляційна функція ЕС, зображеного на рис. 1. $K_0(t, S) = \sum_{i=1}^3 K_i(t, S)$

на рис. 1. $K_0(t, S) = \sum_{i=1}^3 K_i(t, S)$

Очевидно, що $S_1 = 0.4$, $t_2 = 0.1$. Цей процес можна продовжити і визначити далі S_2, t_3 і т.інш. Амплітуда C_1 може бути знайдена із умови $\partial \Delta F(x, S) / \partial x = 0$. Звідки $x \rightarrow 0$, $S \rightarrow S_1$

$$C_1 = \lim_{\substack{S \rightarrow S_1 \\ x \rightarrow 0}} \frac{f'_x(x) S^{3/2}}{f'_{\pi x}(\pi x / S) \pi} \quad (16)$$

Якщо перші два ЕХП-сигнали, з яких складається ЕС, вироджені по параметру $t: t_1 = t_2 = 0$, то алгоритм, поданий вище, треба застосовувати до іншого фронту ЕС.

Висновки

Розклад електромагнітних сигналів за елементарними хвильовими пакетами є корисними не тільки як метод їх представлення, але і для аналізу їх складу. Оптимізація алгоритму дослідження структури ЕС приводить до використання елементарних хвильових пакетів в якості складових базових вейвлет-функцій. Відмінність полягає в тому, що ЕХП-

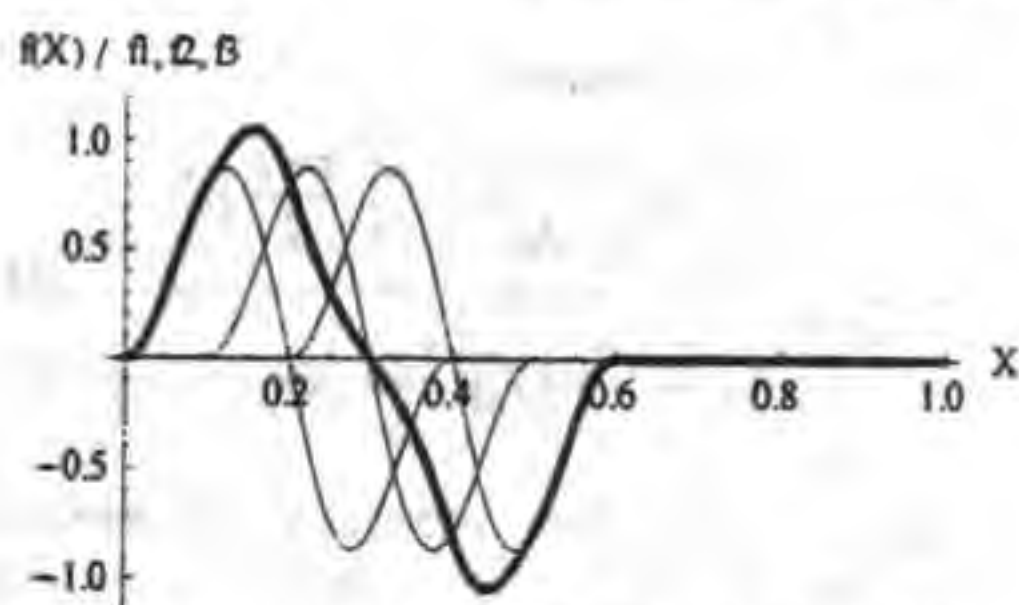


Рис. 3. Модель електромагнітного сигналу, що визначається параметрами $(t_i, S_i): (0, 0.2), (0.4, 0.2), (0.8, 0.2)$

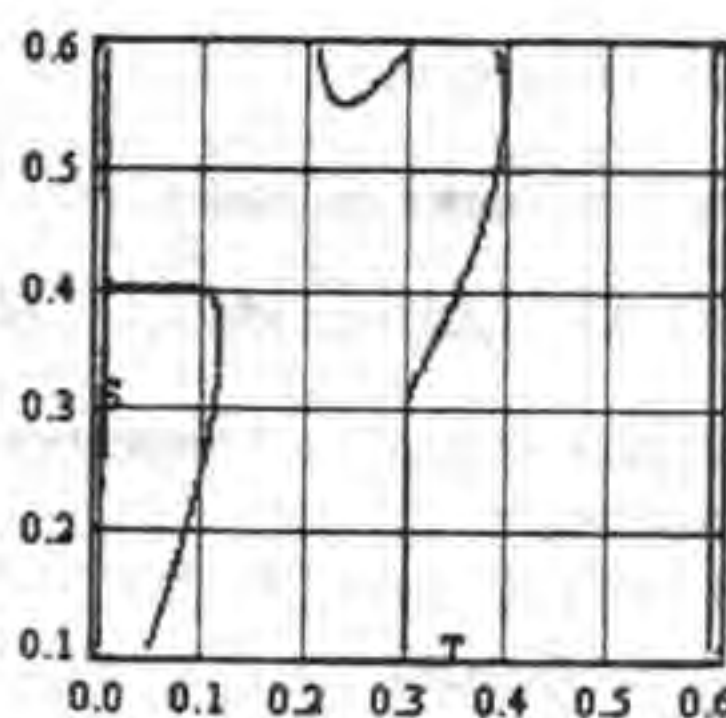


Рис. 4. Залежність $S(x)$ за умови

$\Delta E(S(x), x) \rightarrow 0: t_1 = 0; S_1 = 0.4; t_2 = 0$

функції є фізичними одже задовільняють ряду вимог на реальні електромагнітні сигнали [1]. По-друге, на відміну від вейвлет-аналізу, де одержують формальний спектр за змінними масштаб-зсув, ЕХП-аналіз передбачає знаходження параметрів ЕХП-функцій, з яких складається реальний електромагнітний сигнал.

Подальше поширення запропонованої методики може стосуватись врахування стохастичної (шумової) складової електромагнітного сигналу, квантової природи порогових сигналів і т.інш.

Список використаних джерел

1. Овечко В.С. „Ортонормований базис для радіосигналів”. Вісник Київського університету. Серія Фізико-математичних наук, №1, 2009, С.196-202.

2. Ovechko V. Orthogonal normalized base for the optical and radio signals. V International conference “Electronics and Applied Physics”, October 21-24, 2009, Kyiv, Ukraine, С.23-24.

3. Чуи К. Введение в вейвлеты. Пер. с англ., - М.: Мир, 2001.- С.412

Надійшла до редколегії 15.02.10

УДК 537.6

Сохацький В. П., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Шулімов Ю. Г., інженер

Оцінка величини порогового струму, що локально перемагнічує ферромагнітний шар

*Можливість перемагнічування
ферромагнітного шару струмом
поляризованих електронів оцінена методом
енергетичного балансу і експериментально
підтверджена методами магнітооптики.*

Ключові слова: намагнічування, спіновий
клапан, магнітооптика.

E-mail: vso@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

Вплив поляризованого електричного струму на намагніченість ферромагнітного шару є актуальною проблемою спінтроники у зв'язку з перспективою створення магнітних енергонезалежних запам'ятовуючих пристроїв, елементів квантових комп'ютерів, тощо. Необхідність досліджень цієї проблеми обумовлюється відсутністю на даний час загальної точки зору на механізм впливу спінової поляризації електронів на намагніченість та відносно високими експериментальними значеннями густин струмів перемагнічування, що ускладнює практичне використання ефекту. Основними напрямки, по яких намагаються розв'язати згадані проблеми, є: 1) розробка матеріалів із максимальною поляризацією струму і високою ефективністю взаємодії поляризованих спінів із магнітною підсистемою кристалічної ґратки; 2) створення спеціальних умов для такої взаємодії, при яких можливо зменшити густину поляризованого струму. В даній роботі розглядається один із методів другого напрямку, в якому досліджується зсув доменної стінки за допомогою магнітооптичного гістеріографа на ефекті Керра і на основі розрахунку енергетичного балансу оцінюються можливості зменшення густини струму перемагнічування.

Для досліджень використовувались термічно осаджені на непровідну або напівпровідникову підкладку тонкоплівкові структури спінового клапану, що складаються з двох ферромагнітних шарів (в даній роботі досліджувались головним

Sohatsky V. P., PhD,
Shulimov Y. G., engineer

Evaluation of current threshold for local remagnetization of ferromagnetic layer

The possibilities of ferromagnetic layer remagnetization by polarization electrons current were evaluated by means of energy balance method and experimentally confirmed by magneto-optical methods.

Key words: magnetization, spin-valve, magneto-optics.

чином шару Fe з товщинами від одиниць до кількох десятків нанометрів), розділених немагнітним провідним прошарком (в експериментах в якості роздільного шару переважно використовувалась мідь Cu з товщинами шару не більше ферромагнітного).

Оцінка можливості зменшення порогового струму

Струм через плівку і зокрема через границю по-різному намагнічених областей створювався за допомогою двох контактних голкових електродів, розміщених дотично кінцями до плівкового шару товщиною h і питомим опором $r_{Fe} = 10^{-7}$ Ом·м (рис.1).

Опір плівкового шару розраховувався із напруженості поля одного зі стержнів на відстані s за теоремою Гауса: $E = \pm \sigma / 2\pi\epsilon_0 s$ і різниці потенціалів між стержнями:

$$U = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{b-s} \right) ds \approx \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}, \quad \text{звідки}$$

повний струм оцінювався як:

$$I = 2\pi ahj = 2\pi ahE/r = \frac{h\sigma}{r\epsilon_0}; \quad \text{виключаючи звідси}$$

лінійну густину зарядів на провідниках σ , отримаємо зв'язок струму та напруги $I(U)$, а також міжелектродний опір шару плівки R :

$$I = \frac{\pi h U}{r \ln(b/a)}; \quad R = \frac{r \cdot \ln(b/a)}{\pi \cdot h}.$$

Для величин $h=10$ нм, $a=10$ мкм, $b_1=1$ см струм не перевищує $I_1 \leq 0,05$ А; варіація розмірів електродів та товщини шару в умовах експерименту призводить до відповідної варіації значення опору R в діапазоні $4 \div 40$ Ом, що підтверджується електричними вимірюваннями.

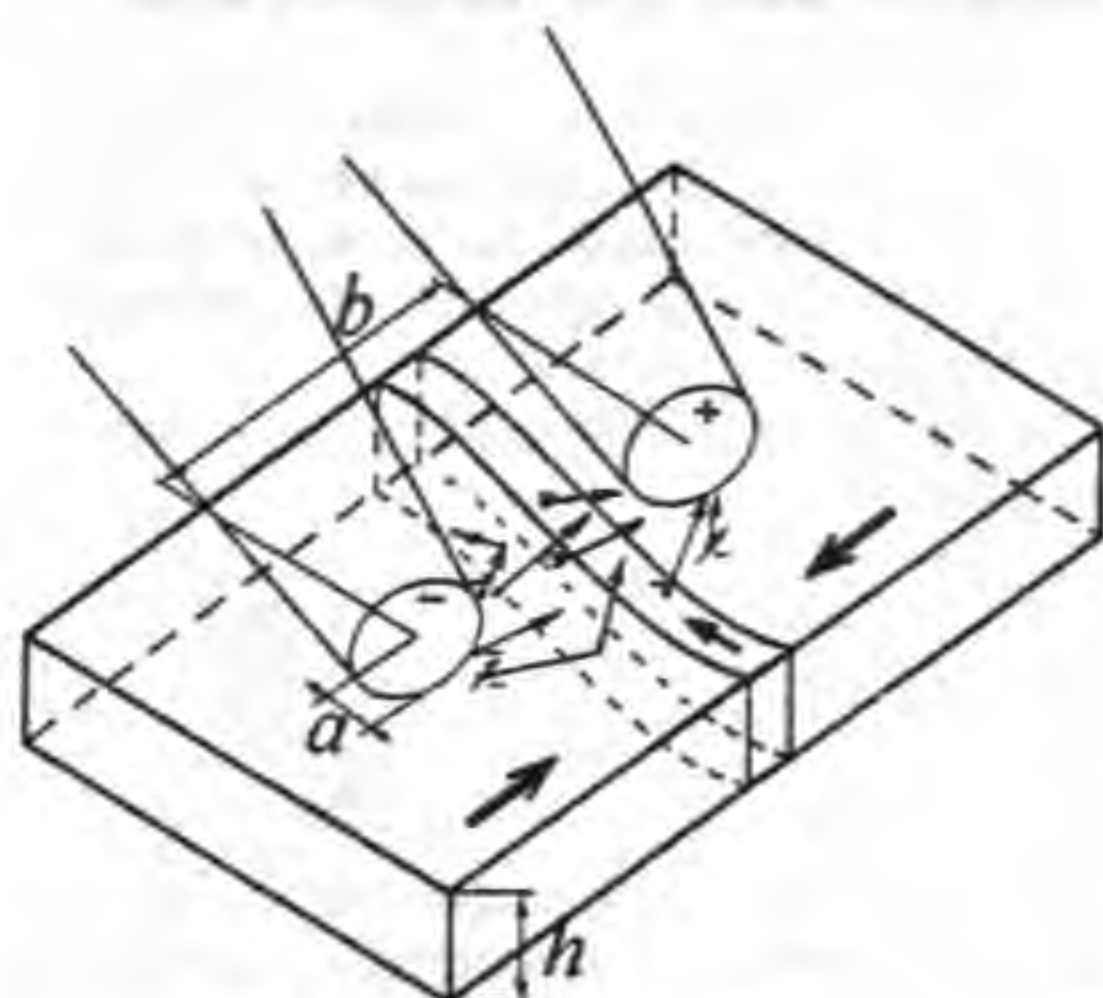


Рис.1. Схема розташування електродів радіусом a на відстані b між осями та доменної границі в опромінюваній ділянці феромагнітної плівки.

Протікання струму в плівці призводить до виділення потужності $P_i = U \cdot I_i$; ($P_i \leq 0,05$ Вт) і відповідного підвищення температури плівки на величину

$$\Delta T = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{C_{Fe} \cdot \rho_{Fe} \cdot S \cdot h + \chi \cdot S \cdot \Delta t}, \text{ де}$$

враховано конвекційне розсіяння частини теплової потужності $W_{\text{конв}} = \chi \cdot S \cdot \Delta T$ при протіканні постійного струму. При характерних значеннях коефіцієнта розсіяння тепла поверхнею $\chi \sim 5$ Вт/м²·град ($C_{Fe} = 450$ Дж/кг·град; $\rho_{Fe} = 7880$ кг/м³), стаціонарне підвищення температури плівки площею $S=1$ см² та товщиною $h=10$ нм може перевищувати $\Delta T \geq 100^\circ\text{C}$ (оцінка для часу протікання струму $\Delta t \geq 0,1$ с, а при короткочасному (без врахування розсіяння тепла) нагріванні плівки короткими імпульсами струму (тривалістю $\tau < 0,01$ с), величина підвищення температури:

$$\Delta T_{\text{max}} = \frac{UI\tau}{Cm} = \frac{\pi U^2 \tau}{rC\rho S \ln(b/a)} \approx 2 \cdot 10^4 U^2 \tau$$

Розраховане таким чином значення ΔT_{max} могло б перевищувати 1000°C при напругах $U \sim 1$ В та тривалості імпульсів $\tau \sim 0,1$ с (при тому

що температура Кюрі для заліза $T_c(\text{Fe}) = 769^\circ\text{C}$) якщо не враховувати втрати на випромінювання; в той же час $\Delta T_{\text{max}} \leq 2^\circ\text{C}$ при $U \sim 0,1$ В та $\tau \sim 0,01$ с. В останньому випадку тепло може розсіюватись практично лише за рахунок інфрачервоного випромінювання (з центральною довжиною випромінюваної хвилі $\lambda > 30$ мкм), потужність якого $W_{\text{тепл}} \sim \sigma T^4 < 0,5$ мВт при температурах $\Delta T \leq 100^\circ\text{C}$, що є співрозмірним із електричною потужністю, що виділяється струмом в плівці. Зміна температури матеріалу, обумовлена проходженням струму, призводить до зміни його намагніченості насичення, що помітно відображається на величині магнітооптичного сигналу при змінах температур більше кількох десятків градусів. При зміні робочої температури плівки в межах до $\pm 5^\circ\text{C}$ температурною залежністю намагніченості можна знехтувати.

Таким чином для зменшення температурного впливу струму до нехтовно малої величини необхідно зменшувати відстань b між контактними електродами та скорочувати тривалість імпульсів струму до $\tau \leq 10$ мс. В цьому випадку густина струму $j = I/S = I/2\pi sh$ поблизу електродів ($s \geq a$, $s \sim a$) може досягати величин $10^6 \div 10^7$ А/см² без помітного нагріву, що є достатнім для реверсивного перемагнічування за допомогою струму поляризованих електронів, як це було показано теоретично [1] і підтверджено експериментально [2].

Струм також може впливати на намагніченість плівки і оточуючі об'єкти своїм магнітним полем (амперівська дія струму). Оцінюючи цю дію при максимальній напруженості поля в експерименті $H_{\text{max}} = 300$ Ерст, можна отримати силу, що діє на плівку: $F \approx I \cdot \Delta l \cdot \mu_0 \cdot H_0$; $I = 40$ мА, $F \approx 10$ мкН. При коефіцієнті пружності утримувача плівки $k = 10^4$ Н/м ця сила може викликати зміщення $\Delta x \leq 10$ нм. Максимальна відносна зміна магнітооптичного сигналу внаслідок такого зміщення (при використанні достатньо жорсткої конструкції кріплення плівки) не перевищить нехтовно малої величини 0,001%.

Втім магнітне поле струму діє також і на доменну стінку; результат цієї дії залежить від напрямку руху зарядів і їх об'ємного розподілу. Струм, що протікає в площині плівки перпендикулярно до площини нееліпсової доменної стінки створює поле, орієнтоване переважно перпендикулярно до площини плівки; тоді його вплив на намагніченість буде незначним, оскільки орієнтація вектора намагніченості не в площині плівки при

нанометрових товщинах є енергетично не вигідною.

В той же час при протіканні струму крізь намагнічений шар електрони поляризуються у відповідності із напрямком його намагніченості і при попаданні в інше намагнічений шар привносять в нього таким чином деяке магнітне поле. Поляризаційний вплив струму в такій геометрії змінюватиме знак (змінюється напрямок зміщення доменної стінки) при зміні напрямку струму на протилежний. У зв'язку з цим важливою проблемою шаруватих феромагнітних структур типу спінового клапану є створення в них максимально можливої поляризації струму $D = \frac{N_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{N_{\uparrow} + N_{\downarrow}}$, де $N_{\uparrow\downarrow}$ -

кількість електронів зі спінами орієнтованими вздовж і проти поля, і збереження її на відстані товщини розділяючого прошарку. Товщина доменної стінки співрозмірна з довжиною релаксації спінів в металі ($\lambda \sim 10-20$ нм), але при переносі спінів через доменну стінку їх розсіяння в ній призводить до створення додаткового магнітного поля в самій стінці на відміну від розсіяння в немагнітному прошарку спінового клапану, де поляризація втрачається даремно.

Користуючись підходом запропонованим в роботі [3], можна припустити зменшення густини порогового струму j для зміщення доменної стінки принаймні на 2-3 порядки (до $j \sim 10^4$ А/см²) порівняно з вищенаведеними, зокрема, підмагнічуванням зовнішнім полем, яке приводить доменну структуру до стану, близького до нестабільності. Теоретично в цьому випадку можливе зменшення струму перемикання до мінімальних значень. Застосовуючи рівняння для оцінки впливу зовнішнього поля H на поріг перемикання намагніченості поляризованим струмом [3]:

$$|j_0| = \frac{eH_0\lambda_2}{\mu_B\alpha\tau Q_1} \left[\frac{L}{\lambda} + \frac{r_2\lambda_2(1-D_3^2)}{r_3\lambda_3(1-D_2^2)} \right] \cdot \left[1 + \frac{HM_Z}{H_0} \right],$$

де індекс 2 відноситься до феромагнітного м'якого шару; індекс 3 – до поверхневого контактного немагнітного шару, можна отримати, що при $H \cdot M_Z \rightarrow -H_0$, де M_Z - початкова стаціонарна безрозмірна намагніченість $M = (0; 0; \pm 1)$, пороговий струм

j_0 взагалі прямує до 0, оскільки $\left(1 + \frac{HM_Z}{H_0}\right) \rightarrow 0$.

Таким чином, при рівності зовнішнього поля і поля анізотропії створюються умови для формування нестійкості доменної границі. Ця

нестійкість, а відповідно, і крутизна петлі, буде найбільшою при перпендикулярності рівноважних намагніченостей шарів [5]. Там же наводилась методика підбору характеристик шарів та напрямку підмагнічування спінового

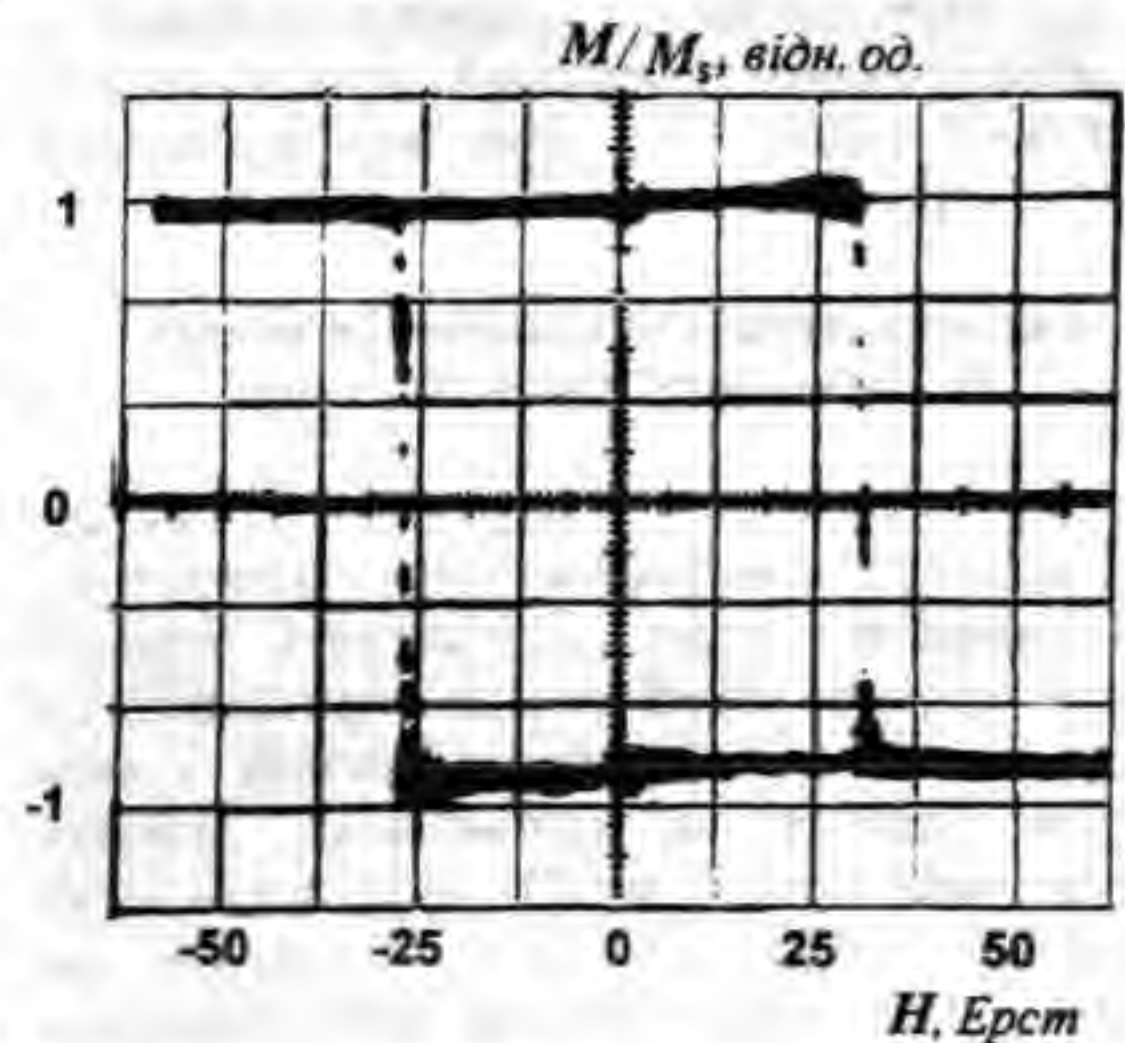


Рис.2. Осцилограма магнітооптичної петлі гістерезису прямокутної форми з розривами внаслідок стрибків Баркгаузена.

клапану для того, щоб підібрати магнітом'який шар з прямокутною формою петлі гістерезису.

Перемагнічування систем обмінно-зв'язаних феромагнітних шарів звичайно розглядається в моделі так званого макроспіну, коли весь шар представляється однорідно намагніченою системою. Переключення намагніченості магніто-м'якого шару струмом при цьому відбувається при паралельній орієнтації намагніченостей шарів, оскільки антипаралельна конфігурація є стійкою при будь-яких струмах [3]. Втім, як було показано зокрема в роботі [4], шари можуть розбиватися на домени, формування яких може відбуватись в одних випадках при розмагніченому стані шару плівки, а в інших при підмагнічуванні зовнішнім полем (в досліджуваних плівках $H_{\text{зонт}} \sim 10-20$ Ерст). В такому випадку при протіканні струму в площині плівки відбувається перенос спіну між доменами через доменну стінку, що порівняно з експериментами попередників [2] створює більш ефективні умови для перемагнічування другого шару як через виникнення нестійкості доменної стінки при дії поля підмагнічування, так і через відсутність втрат на розсіяння спінів у немагнітному прошарку. Таким чином створюється ефективна модельна система для

дослідження перемагнічування при густинах струму $j \leq 10^4 \text{ A/cm}^2$. Сумарний магнітний момент, що привносять поляризовані електрони (важаючи $D \sim 70\%$) можна оцінити як $M = \frac{DI\mu_B}{evhc}$,

де μ_B – магнетон Бора, e – заряд електрона, s – характеристичний поперечний розмір області протікання струму, v – швидкість дрейфового руху електронів під дією електричного поля.

Експериментальне визначення порогу нестабільності доменної стінки

Під дією імпульсів електричного струму, що створювались електродами (при додатковому підмагнічуванні полем $H_0 = 30 \text{ Ерст}$), доменні стінки рухались стрибками, що призводило до різкої зміни магнітооптичного сигналу і мало вигляд розривів на вертикальних ділянках гістерезисної кривої (рис.2). Зміна зовнішнього магнітного поля ΔH між стрибками не перевищувала кількох десятих долей Ерстеда, а весь діапазон, необхідний для повного перемагнічування склав $\Delta H_0 \leq 2 \text{ Ерст}$.

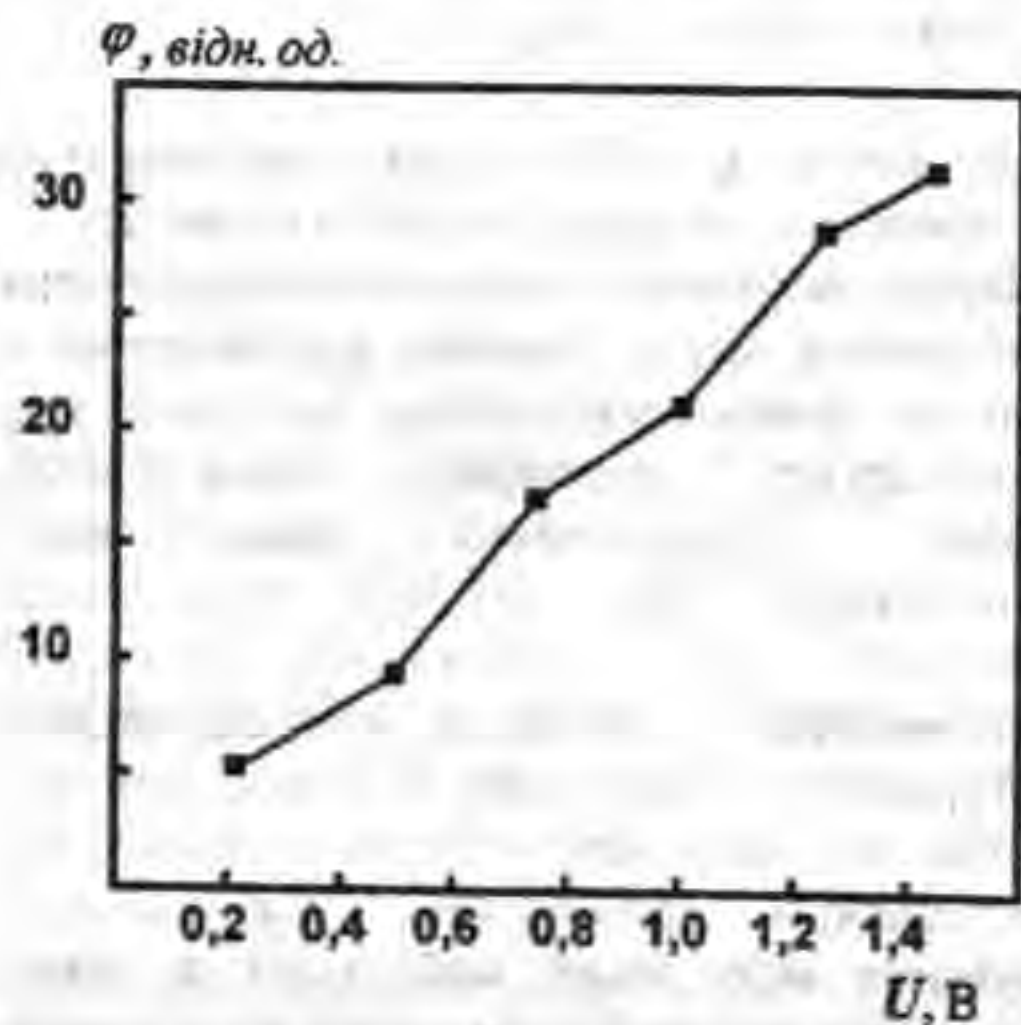


Рис.3. Залежність зміни магнітооптичного сигналу, пропорційного зміщенню доменної стінки, від амплітуди імпульсів напруги.

Амплітуда та кількість стрибків намагніченості при зсуві доменних стінок пропорційна амплітуді прикладених імпульсів (рис.3). При зміні напрямку струму напрямок руху стінки змінюється на протилежний несиметрично, зокрема через наявність згаданого вище парного теплового ефекта.

Висновки

Таким чином, можливість зменшення принаймі на 2 порядки порогового значення густини поляризованого струму, що перемагнічує ферромагнітний шар, підтверджується експериментально; при цьому немає необхідності локалізації струму в нанорозмірній області, як робилось в попередніх роботах [2]. Ефективність описаної методики обумовлена дестабілізацією положення доменної стінки полем підмагнічування і відсутністю розсіювання поляризованих носіїв в немагнітному прошарку. Розрахунки показують можливість подальшого зменшення струму перемагнічування, але на практиці для цього необхідно зменшити вплив наявних неоднорідностей в досліджених зразках.

Для практичного застосування комірки з доменною стінкою в якості елемента пам'яті, що перемагнічується струмом, необхідно зменшити її високу чутливість до магнітного поля. Це частково можна зробити вибором магнітного матеріалу з більшою коерцитивністю, а також оптимізацією поля підмагнічування.

Список використаних джерел

1. Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1996. – 159, № 1-2. – P.L1-L7.
2. Katine J.A., Albert F.J. et.al. Current-Driven Magnetization Reversal and Spin-Wave Excitations in Co/Cu/Co Pillars // Phys. Rev. Lett. – 2000. – 84. – P.3149 – 3152.
3. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Панас А.И., Эпштейн Э.М. Спинтроника: обменное переключение ферромагнитных металлических переходов при малой плотности тока // УФН. – 2009. – 179, № 4. – С.359-368.
4. Сохацький В.П., Макаров Д.Г. Неоднорідне перемагнічування спінових клапанів. Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005. – № 3 – С.445-450.
5. Сохацький В.П., Шулимов Ю.Г. Магнітооптичні дослідження слоистих структур ферромагнетик-немагнітний метал. – Сб. трудов НМММ-20, Москва, 2006, С.246-248.

Надійшла до редакції 26.02.2010

УДК 519.9

Фелінський С. Г. *, студент,
Коротков П. А., д. ф.-м. н., професор,
Фелінський Г. С., к. ф.-м. н.

Критерій існування області від'ємної діелектричної проникності на частотах полярних коливань в кристалах

В роботі наведені результати досліджень фізичних умов, за яких існують області від'ємних значень діелектричної проникності (ДП) в реальному кристалічному середовищі з загасанням полярних коливань. Показано, що саме ефекти демпфування полярних коливань в кристалі мають вирішальний вплив як на мінімальне досяжне значення ДП, так і на звуження (до повного зникнення) спектральної області існування від'ємної ДП відносно T-L розщеплення частот фононів. В межах одноосциляторної моделі кристалу отриманий простий кількісний критерій існування смуги частот з від'ємною ДП у двох представленнях – на основі співвідношення сталої загасання до: 1) матеріальних параметрів кристалу та 2) фононного T-L розщеплення частот. Апробація методики на 7 коливаннях у трьох кристалічних модифікацій нїтриду бору, вказує на застосовність запропонованого критерію до дисперсійного аналізу кристалів з досить складним спектром полярних фононів.

Ключові слова: діелектрична проникність, метаматеріали, комбінаційне розсіяння.

*E-mail: stalisman@ukr.net

Статтю представив д. ф.-м. н. Данилов В. В.

1. Вступ

Дослідження фізики фононів [1] та їх впливу на розповсюдження електромагнітного випромінювання в кристалах є предметом широких досліджень протягом багатьох десятиріч. Особливості розповсюдження електромагнітних хвиль в умовах високої дисперсії матеріалів, зокрема в області частот, де показник заломлення хвилі може набувати від'ємних значень, сьогодні привертають підвищену увагу дослідників як з фундаментальної точки зору [2,3], так і для розвитку таких новітніх технологій, як нанооптика та синтез метаматеріалів [4]. Незважаючи на тривалу історію спектроскопічних досліджень оптичних монокристалів [1], в тому числі дисперсійного аналізу діелектричної проникності (ДП) на полярних коливаннях кристалічної ґратки, що прово-

S. G. Felinskyi *, student
P. A. Korotkov, Doct. Sci., Professor,
G. S. Felinskyi *, Ph. D.

Criterion of the negative dielectric function appearance areas on the frequencies of polar vibrations in crystals

Research result of the physical conditions lead to existence of negative dielectric permeability (DP) band in the real crystal media with attenuation of polar vibrations are resulted in this paper. It is shown, what exactly damping effects of polar vibrations in a crystal have the main influence both on minimally achievable value DP, and on narrowing (up to full disappearance) the spectral area of existence negative DP relatively with the T-L splitting of phonons frequencies. In limits of single oscillator models of a crystal the simple quantitative criterion of existence of the frequency band with negative DP in two performances – is based on the relation of a dump constant to: 1) the material parameters of a crystal and 2) phonon T-L splitting of frequencies. Approbation of a technique on 7 vibrations in three crystal modification of bore nitride, specifies applicability of the offered criterion for the dispersive analysis of crystal with complex enough spectrum of polar phonons.

Keywords: Metamaterials, Raman scattering, dielectric permittivity.

дились методами інфрачервоної (ІЧ) спектроскопії та за допомогою комбінаційного розсіяння (КР) світла, все ж питанням кількісного визначення реальної смуги частот та фактичного розподілу ДП в області від'ємних значень не приділялося належної уваги.

Дійсно в наближенні відсутності загасання відомим наслідком співвідношень Куросави [5] є утворення області від'ємних значень ДП, яка лежить між частотами поперечного ω_T та поздовжнього ω_L фононів (T-L розщеплення), причому в межах цієї області завжди $\varepsilon(\omega) \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow \omega_T$, для будь-якої пари частот $\omega_L > \omega_T$. В реальному кристалі, коли загасання фонона $\Gamma > 0$, існування смуги частот з від'ємною ДП та її мінімальне значення починає залежати від співвідношення загасання Γ до таких параметрів кри-

тала, як сила осцилятора коливання S , діелектрична проникність при високих частотах ε^∞ або до зазначених вище власних частот фонона ω_T та ω_L .

В роботі досліджений вплив ефектів демпфування полярних коливань як на мінімально досяжне значення діелектричної проникності (ДП), так і на звуження спектральної області від'ємних величин дійсної частини ДП відносно T-L розщеплення частот фононів, а також фізичних умов існування області від'ємних значень ДП в реальному кристалічному середовищі із загасанням полярних коливань.

2. Основи теорії та постановка задачі

Взаємодія світла з полярними коливаннями кристалічної ґратки описується в рамках напівкласичного підходу [4], в якому для кристалів, які мають N_k коливальних мод, дисперсійна залежність $\varepsilon(\omega)$ визначається загальним виразом:

$$\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k^\infty + \sum_{i=1}^{N_k} \frac{S_{ik} \omega_{ik}^2}{\omega_{ik}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_i}, \quad (1)$$

де ω_{ik} та S_{ik} – відповідно частоти поперечних фононів та сила осцилятора i -ого коливання ґратки, що виявляється з поляризацією вздовж k -ої осі та має сталу загасання Γ_i ; ε_k^∞ – головне значення діелектричного тензора на оптичних частотах.

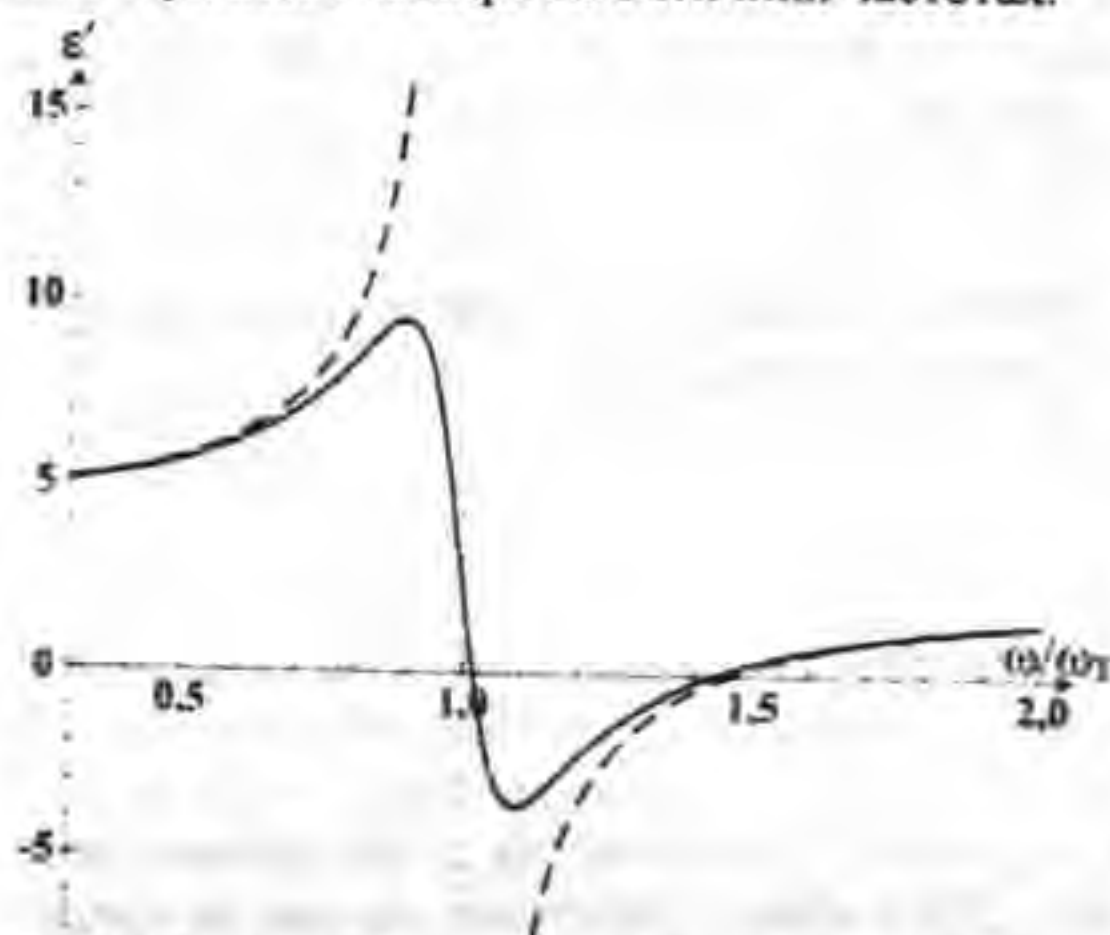


Рис.1 Дисперсійна залежність дійсної частини діелектричної проникності в області резонансу на полярному коливанні при відсутності загасання (пунктир) та за нормованої сталої загасання $\Gamma/\omega_T = 0,2$ (суцільна лінія)

Компоненти тензора діелектричної проникності (1) можна виразити у загальному вигляді через частоти подовжніх ω_{ik}^L та поперечних ω_{ik}^T коливань у вигляді співвідношення Куросави [3]:

$$\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k^\infty \prod_{i=1}^{N_k} \frac{(\omega_{ik}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{ik}^T)^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

яке, власне кажучи, є справедливим у наближенні відсутності загасання фононів $\Gamma_i=0$. Саме у цьому наближенні

$$S_i = \varepsilon^\infty \left[\left(\frac{\omega_{ik}^L}{\omega_{ik}^T} \right)^2 - 1 \right] \prod_{j=1}^N \frac{(\omega_{jk}^L)^2 - (\omega_{jk}^T)^2}{(\omega_{jk}^T)^2 - (\omega_{jk}^L)^2}, \quad (3)$$

де для спрощення запису опущено індекс k для позначення поляризації.

На рис. 1 суцільною лінією зображено графік залежності дійсної частини діелектричної проникності для кристала з одним полярним коливанням зі значеннями параметрів $\varepsilon^\infty = 2,3$; $S = 2,6$, які відповідають модельному кристалу KBr; а нормована стала загасання $\Gamma/\omega_T = 0,2$. Пунктиром зображено графік функції (2) при відсутності загасання ($\Gamma=0$). Саме загасання оптичного фонону усуває розрив, як це видно на рис. 1 і фактично визначає аномальну дисперсію хвиль у кристалі та область від'ємної діелектричної проникності.

В межах осциляторної моделі для одного коливання дисперсійну залежність $\varepsilon(\omega)$ (1) та комплексний показник заломлення $\tilde{n} = n - i\kappa$ записують як:

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon(\omega) = \varepsilon^\infty + \frac{S \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}. \quad (4)$$

Виміряне значення коефіцієнта відбиття R за нормального падіння зв'язане з показником заломлення n та коефіцієнтом екстинції κ :

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \quad (5)$$

Параметри дисперсійної формули S , ω_T та Γ вимірюються безпосередньо із спектрів КР або знаходяться числовими методами з умови найкращої апроксимації кривої відбиття. В наближенні, коли нехтують поглинанням, частоти подовжніх фононів знаходять з умови нульового внеску смуги до низькочастотної діелектричної проникності.

3. Критерій існування смуги частот з від'ємною ДП

В найпростішому випадку в кристалах, що мають одне коливання, дисперсійну залежність $\varepsilon(\omega)$, яка описана виразом (1), можна записати у вигляді:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^\infty + \frac{S \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}, \quad (6)$$

де S – сила осцилятора коливання, ε'' – діелектрична проникність при високих частотах, ω_T – власна частота поперечного фундаментального коливання, Γ – стала згасання. В нашому випадку сила осцилятора визначається як $S = \varepsilon_0 - \varepsilon''$, причому $\varepsilon_0 = \varepsilon(\omega)$ – значення діелектричної проникності у низькочастотній області, коли $\omega \rightarrow 0$.

Нехай $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$, тоді дійсна частина діелектричної проникності (6) матиме наступний вигляд:

$$\operatorname{Re}[\varepsilon(\omega)] = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon'' + \frac{S\omega_T^2(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \quad (7)$$

На частотах, де функція (7) досягає своїх екстремумів, повинна задовольнятися умова:

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} = 0, \quad (8)$$

яка шляхом прямої підстановки (7) у (8) приводить до рівняння:

$$(\omega_T^2 - \omega^2)^2 = \omega_T^2\Gamma^2. \quad (9)$$

Частотне положення мінімуму $\varepsilon'(\omega)$ визначається одним із коренів рівняння (9), а саме тим, що належить до інтервалу частот $\omega > \omega_T$, причому точка ω буде точкою мінімуму ($\omega_{\min}$) за умови:

$$\omega_{\min} = \sqrt{\omega_T^2 + \omega_T\Gamma}, \quad (10)$$

Підставивши $\omega_{\min}$ у співвідношення (7), ми отримаємо мінімальне значення діелектричної функції $\varepsilon'(\omega)$. Зазначимо, що згідно (10) частотне положення мінімуму, а також мінімальне значення $\varepsilon'(\omega)$ (7) помітним чином залежить від параметра загасання Γ (рис.2). Дійсно, як видно на рис.2, зі зростанням Γ значення $\varepsilon'(\omega_{\min})$ також зростає з одночасним звуженням смуги частот із від'ємною ДП. За певного „критичного” загасання – $\varepsilon'(\omega_{\min}) = 0$ (крива 2 на рис.2) і смуга частот з від'ємною ДП повністю зникає. Отже для існування області від'ємної діелектричної проникності, де $\varepsilon'(\omega) < 0$ необхідно щоб:

$$\varepsilon'(\omega_{\min}) = \varepsilon'' - \frac{S\omega_T^2}{2\omega_T\Gamma - \Gamma^2} < 0. \quad (11)$$

звідки безпосередньо витікає наступна нерівність:

$$\Gamma^2 + 2\omega_T\Gamma - \frac{S}{\varepsilon''}\omega_T^2 < 0. \quad (12)$$

Розв'язавши нерівність (12) для значень $\Gamma > 0$, отримаємо умову, що накладає обмеження на сталу загасання:

$$\Gamma < \omega_T \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon''}} - 1 \right). \quad (13)$$

яка в межах одноосциляторної моделі кристалу дає досить простий кількісний критерій існування смуги частот з від'ємною ДП на основі співвідношення сталої загасання фонона з частотою ω_T до таких матеріальних параметрів кристалу як ε_0 та ε'' .

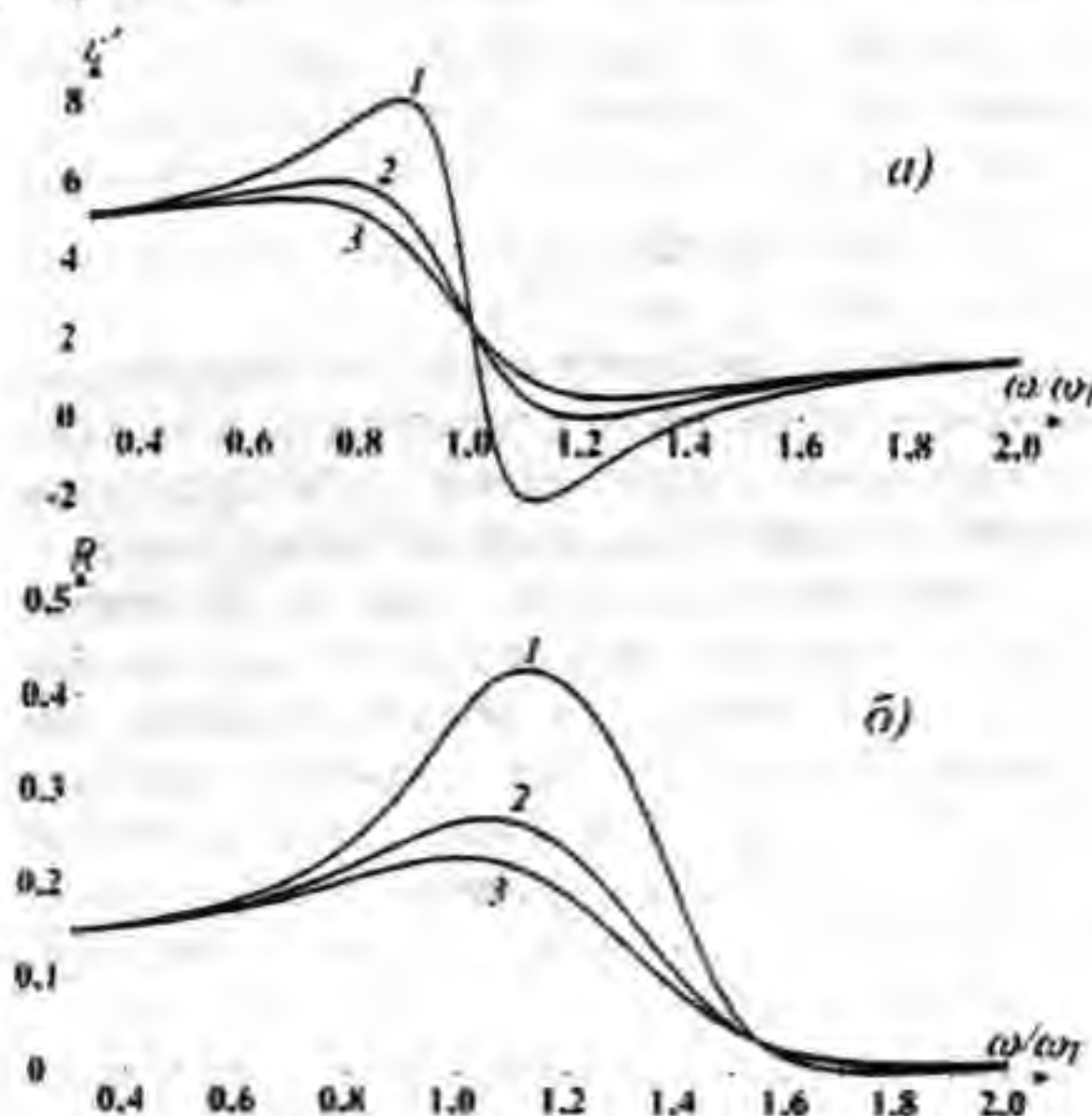


Рис. 2. Дисперсійна залежність $\varepsilon'(\omega)$ (а) та спектри ІЧ відбиття (б) при загасанні фононів близьких до критичного значення визначеного (16). При $\Gamma = \Gamma_{cr}$ (крива 2) область від'ємної ДП зникає і може існувати тільки для $\Gamma < \Gamma_{cr}$ (крива 1)

Критерій (13) можна представити у дещо іншому вигляді, якщо застосувати співвідношення Ліддейна-Сакса-Теллера [6]:

$$\frac{\omega_l}{\omega_T} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon''}}. \quad (14)$$

Тоді умова існування області від'ємної ДП набуває наступного виду:

$$\Gamma < (\omega_l - \omega_T) \text{ або } \frac{\Gamma}{\omega_l - \omega_T} < 1. \quad (15)$$

Безпосереднім наслідком (15) є те, що область від'ємної діелектричної проникності існує доки значення сталої згасання фонона не перевищує $T-L$ розщеплення для цього фонона.

Отже, згідно з (13) та (15) доцільно визначити критичне згасання Γ_{cr} яке відповідає верхній границі фононного демпфування і обмежує область існування від'ємної ДП у кристалі:

$$\frac{\Gamma_{cr}}{\omega_T} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2}} - 1 = \frac{\omega_L}{\omega_T} - 1. \quad (16)$$

Дисперсійна залежність $\varepsilon'(\omega)$ за критичного загасання відповідає кривій 2 на рис. 2, коли мінімум дійсної частини діелектричної проникності дорівнює нулю. При розрахунках кривих на рис. 2 матеріальні параметри також відповідали кристалу КВг, за виключенням Γ .

При $\Gamma < \Gamma_{cr}$ навколо мінімуму ДП утворюється певна смуга частот із від'ємними значеннями ДП в межах T-L розщеплення частот для цього коливання. І навпаки при $\Gamma > \Gamma_{cr}$ (крива 3) функція $\varepsilon'(\omega)$ залишається додатною, в тому числі і в смузі залишкових променів (T-L).

Зауважимо, що спектр коефіцієнта відбиття не виявляє жодних якісних змін, які б дозволяли наперед прогнозувати наявність або відсутність області від'ємної ДП за даними ІЧ вимірювань.

Проведений нами аналіз показує, що значна кількість кристалів, які мають одне яскраво виражене коливання в ІЧ області, зокрема такі класичні об'єкти як лужно-галогідні кристали (NaCl, КВг, NaF, LiF та багато інших) в області аномальної дисперсії досягають досить значних за абсолютною величиною значень від'ємної ДП. Для таких кристалів різниця $\omega_L - \omega_T$ може досягати кількох сотень см^{-1} , тоді як за кімнатних

та низьких температур стала загасання Γ типово не перевищує кількох десятків см^{-1} . Тому відношення $\Gamma/(\omega_L - \omega_T) < 0,1$ і згідно з (15) забезпечує існування значних за абсолютною величиною значень від'ємної ДП, які спостерігаються на практиці, причому область частот з $\varepsilon'(\omega) < 0$ майже співпадає з інтервалом $\omega_T < \omega < \omega_L$.

Однак існує значна кількість важливих кристалічних об'єктів з суттєво іншими параметрами фононного спектру. Серед них кристал нітриду бору викликає певний інтерес для апробації наших результатів в зв'язку наявністю трьох модифікацій цього кристалу – кубічної, ромбічної та гексагональної.

4. Області від'ємної діелектричної проникності кристала нітриду бору

Кристали нітриду бору BN були вирощені відносно недавно, а їх фононні спектри досить повно досліджені в [7].

Ми проаналізували вплив на дисперсію $\varepsilon'(\omega)$ від семи характерних коливань для всіх сингоній (кубічної, ромбічної та гексагональної) структури BN, які спостерігалися при різних орієнтаціях хвильового вектора $\mathbf{k}$ і вектора електричного поля $\mathbf{E}$ електромагнітної хвилі відносно осі C.

Таблиця 1
Параметри дисперсійного аналізу діелектричної проникності для кубічної, ромбічної та гексагональної модифікацій кристалів нітриду бору

№ коливання	Структура	Орієнтація	ε^∞	S	$\omega_T (\text{см}^{-1})$	$\omega_L (\text{см}^{-1})$	$\Gamma (\text{см}^{-1})$
	2	3	4	5	6	7	8
1	Кубічна		4,6	2,40	1057	1306	5,39
2	Ромбічна	$\bar{k} \parallel \bar{C}$	5,2	2,00	1374	1617	6,87
3	Гексагональна	$\bar{E} \perp \bar{C}$	3,2	0,34	795	829	7,47
4				0,51	1498	1616	80,89
5	Гексагональна	$\bar{k} \parallel \bar{C}$	3,8	0,22	779	794	49,08
6				1,10	1373	1487	31,58
7				0,13	1508	1615	102,54

Вісь C визначає напрямок переважної орієнтації кристалографічних осей кристалів, що співпадає з нормаллю до поверхні осаду-росту кристала. Значення сталої згасання, T і L частот, що наведені у таблиці 1, відповідають даним роботи [7], а сили осциляторів S (колонка 5) ми визначали за допомогою (3).

Зазначимо різну кількість коливань у спектрі в залежності від сингонії кристалу. В кубічній та ромбічній модифікації проявляється по одному

коливанню, а гексагональна (для відповідних орієнтацій векторів $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ відносно C) – має три ($\bar{k} \parallel \bar{C}$) та два ($\bar{E} \perp \bar{C}$) коливання відповідно.

Для всіх фононних коливань, представлених у таблиці 1, ми обчислили дисперсійні залежності дійсної частини діелектричної проникності ε' від частоти і для відповідних сингоній структури BN їх наведено на рис. 3, 4, 5. Зважаючи на звуження смуги від'ємної ДП під дією загасання фононів, для кількісного аналізу цього впливу

крім фундаментальних частот поздовжніх і поперечних коливань ми вводимо дві додаткові характеристичні частоти.



Рис. 3. Дисперсійні залежності $\varepsilon'(\omega)$ для модифікації BN, що належать до кубічної (1) та ромбічної (2) сингоній (орієнтація $k \parallel C$).

Нехай, ω_0^- - це частота при якій ДП починає приймати від'ємні значення, а ω_0^+ - частота при якій ДП виходить з від'ємної області. При відсутності чи достатньо малому загасанні ($\Gamma = 0$) $\omega_0^- = \omega_T$, а $\omega_0^+ = \omega_L$. В таблиці 2 наведені значення частот ω_0^- і ω_0^+ для відповідних сингоній нітриду бора коли присутнє загасання ($\Gamma \geq 0$), а також мінімальні значення ДП. Обидві таблиці мають єдину нумерацію коливань, які також відмічені відповідними числовими позначеннями на кривих дисперсійних залежностей.

Таблиця 2
Відносне (до T-L розщеплення частот) загасання, $\varepsilon'_{\min}$ та частотні смуги від'ємної ДП у BN

№	$\omega_L - \omega_T$ (cm^{-1})	$\frac{\Gamma}{\omega_L - \omega_T}$	ω_0^- (cm^{-1})	ω_0^+ (cm^{-1})	$\varepsilon'_{\min}$	$\omega_0^+ - \omega_0^-$ (cm^{-1})
1	249	0,02	1057,02	1305,73	-232	248,71
2	243	0,03	1374,04	1616,73	-194	242,69
3	34	0,22	795,41	828,59	-14	33,18
4	118	0,69	1513,38	1599,57	-1,4	86,19
5	15	3,27	Область від'ємної ДП відсутня			
6	114	0,28	1374,46	1604,57	-19	230,11
7	107	0,96			-1,5	

У модифікаціях кристалу нітриду бору, які належать до кубічної та ромбічної сингоній (орієнтація $k \parallel C$) потужне фундаментальне коливання проявляється зі зсувом за ω_T , який перевищує 300 cm^{-1} в залежності від модифікації (рис.3), але

з майже рівними T-L розщеплення частот $\sim 250 \text{ cm}^{-1}$. Загасання цих фундаментальних коливань в абсолютному виразі $< 10 \text{ cm}^{-1}$ і тому відносно T-L розщеплення, як указано в таблиці 2, воно складає 0,02 та 0,03 відповідно для фононів кубічної та ромбічної модифікацій. У повній відповідності до критеріїв (13) та (15) звуженням області від'ємної ДП можна нехтувати, оскільки вона всього на $\sim 0,3 \text{ cm}^{-1}$ менша за T-L розщеплення частот. Одночасно $\varepsilon'_{\min} \sim -200$ в обох випадках, що майже у 40 разів перевищує значення низькочастотної діелектричної сталої цих кристалічних сполук.

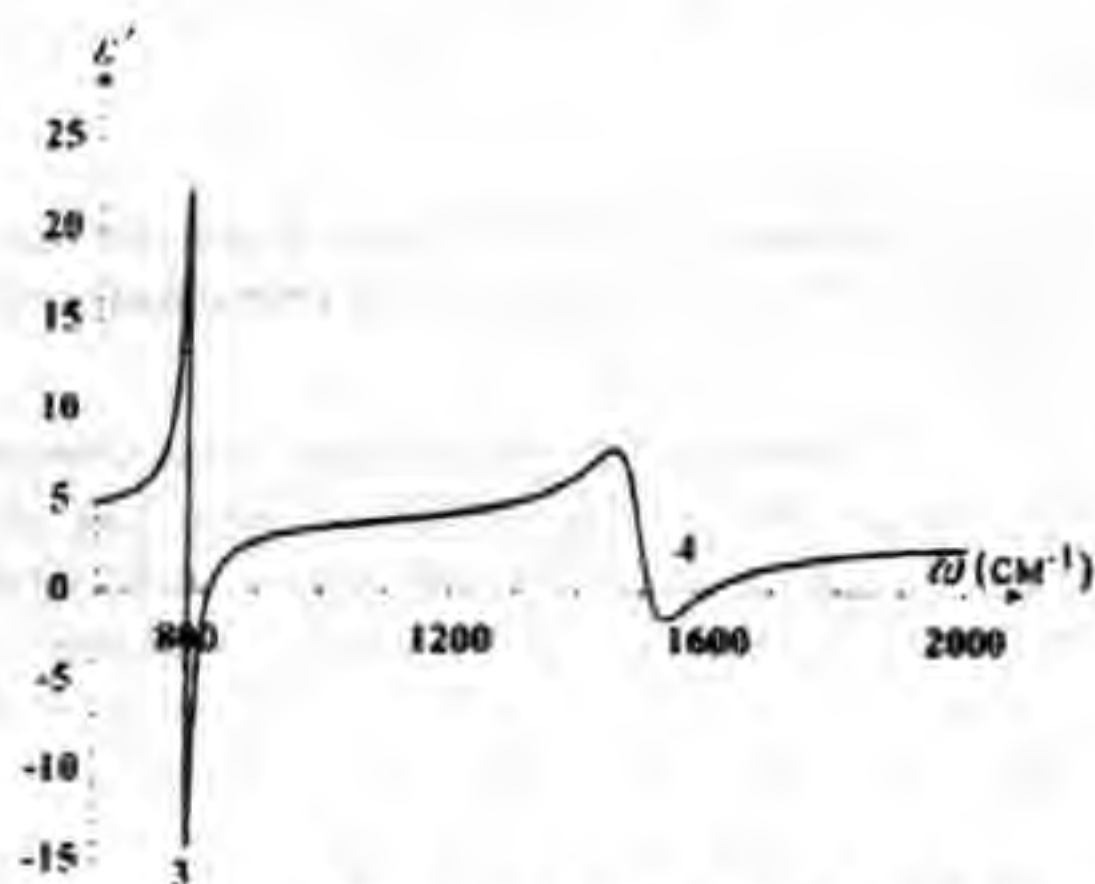


Рис. 4. Дисперсійна залежність $\varepsilon'(\omega)$ для модифікації BN, що належить до гексагональної сингонії, орієнтація $E \perp C$.

У гексагональній модифікації BN присутність кількох коливань фононного спектру фактично унеможливує пряме застосування критерію (13), однак наявність експериментально визначених даних з ω_T та ω_L було для нас підставою для формального застосування критерію (15). Дійсно для коливання з $\omega_T = 795 \text{ cm}^{-1}$ в орієнтації $E \perp C$ (рис.4, коливання 3) більш значне звуження області від'ємної ДП $\sim 1 \text{ cm}^{-1}$ пов'язане зі значно вищим (у 10 разів), ніж у попередньому випадку відносним загасанням, яке дорівнює 0,22. Одночасно мінімальне значення $\varepsilon'_{\min}$ для цього коливання також на порядок зменшується за абсолютною величиною у порівнянні з попередніми випадками кубічної та ромбічної модифікацій. Ще більш яскраво ефекти фононного загасання проявляються для коливання з $\omega_T = 1498 \text{ cm}^{-1}$ (рис.4, коливання 4), для якого суттєво вищий фактор відносного загасання $\Gamma/(\omega_L - \omega_T) = 0,69$ не тільки зменшує абсолютну величину $\varepsilon'_{\min}$ до $-1,4$, але й звужує область від'ємної ДП більш, ніж на

30 см^{-1} , як і можна було б передбачити за допомогою критерію (15).

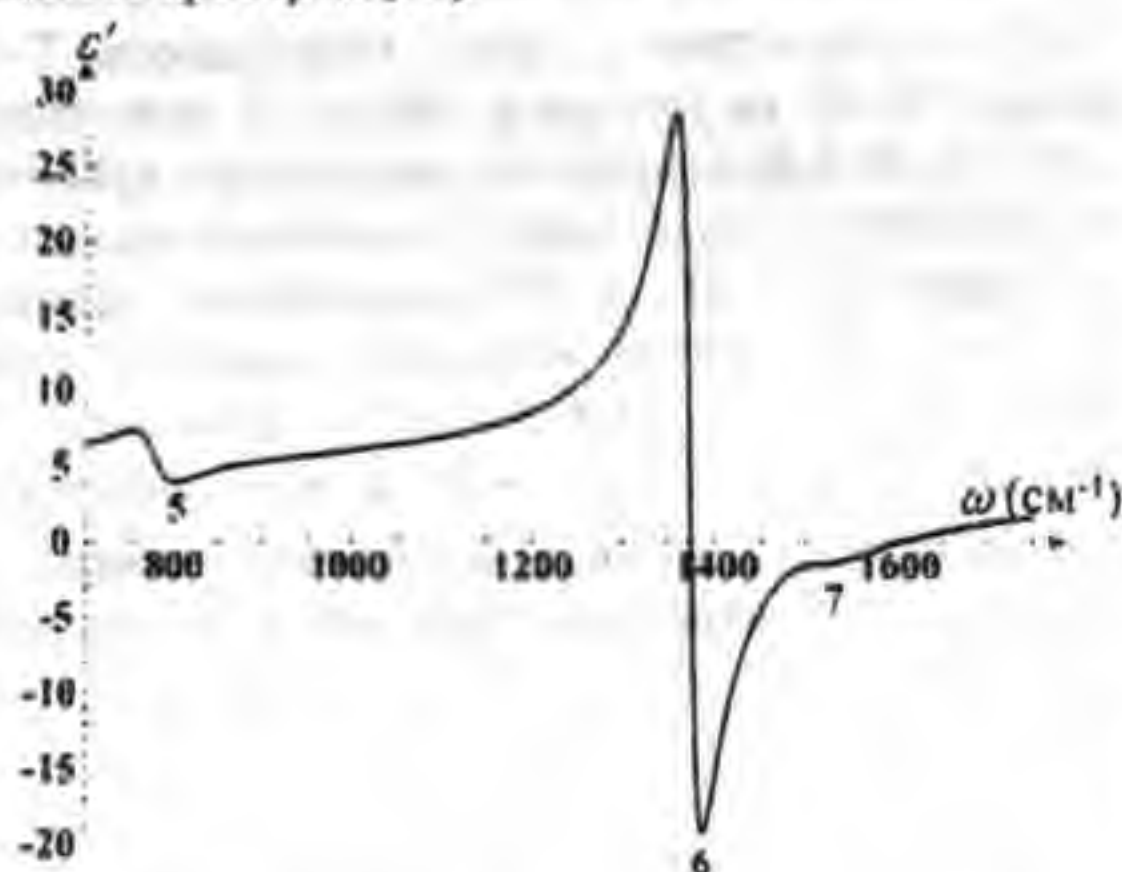


Рис. 5. Дисперсійна залежність $\epsilon'(\omega)$ для модифікації BN, що належить до гексагональної сингонії, орієнтація $k \parallel C$.

Аналіз трьох фононного спектру гексагональної модифікації BN з орієнтацією $k \parallel C$ дає дисперсійну залежність $\epsilon'(\omega)$, яку показано на рис.5. Для передемпфованого коливання 5 відносно загасання $\Gamma/(\omega_L - \omega_T) = 3.3$, тобто втричі перевищує критичне. Саме тому, у повній відповідності до критерію (15), дисперсія залишає ϵ' цілком додатним без утворення будь-якої області від'ємної ДП.

Для коливань 6 та 7 (рис.5) з відносними загасаннями 0,28 та 0,96 нами передбачені від'ємні значення $\epsilon'_{\min}$ і вони дійсно існують та складають відповідно -19 та -1,5. Однак при утворенні смуги частот від'ємної ДП спостерігаються певні особливості, що пов'язані зі значним перекриттям ліній фононного поглинання на частотах $\omega_T = 1373 \text{ см}^{-1}$ та $\omega_L = 1508 \text{ см}^{-1}$. Результатом такого перекриття є об'єднання двох смуг у загальну область з $\omega_0 = 1374,5 \text{ см}^{-1}$, яка на $1,5 \text{ см}^{-1}$ зміщена від ω_T для першого фонона та з $\omega_0 = 1604,6 \text{ см}^{-1}$, що більш, ніж на 10 см^{-1} менша за відповідну частоту ω_L для другого фонона.

Таким чином, введений нами критерій дозволяє передбачати існування області від'ємної ДП, а у вигляді (15) його можна застосовувати для аналізу досить складних спектрів фононного поглинання.

Висновки

У даній роботі досліджені фізичні умови існування області від'ємних значень діелек-

тричної проникності (ДП) в реальному кристалічному середовищі з загасанням полярних коливань. В межах одноосциляторної моделі кристалу отриманий кількісний критерій існування смуги частот з від'ємною ДП у двох представленнях – на основі співвідношення сталої загасання до: 1) матеріальних параметрів кристалу та 2) фононного T-L розщеплення частот. Апробація методики на трьох кристалічних модифікаціях нітриду бору, вказує на застосовність запропонованого критерію до дисперсійного аналізу кристалів з досить складним спектром полярних фононів та може бути корисним при дослідженнях нецентросиметричних кристалів, коли значення ω_T , ω_L та Γ доступні для прямих вимірювань у спектрах КР.

Список використаних джерел

1. Рейсленд Д. Физика фононов. – Москва. Мир. – 1975. – 365 с.
2. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. – 1967. – 92, №3. – С. 517-523.
3. Веселаго В.Г. Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // УФН. – 2009. – 179, №6. – С. 689-694.
4. Коротков П.А., Фелінський Г.С. Дослідження області від'ємної діелектричної проникності середовищ без центру інверсії // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – № 2. – С. 162-171.
5. Kurosawa T. Polarization waves in solids // J. Phys. Soc. Jap. – 1961 – 16, №9 – P. 1288-1308.
6. Lyddane R., Sachs R.G., Teller E. On the polar vibrations of alkali halides // Phys. Rev. – 1941. – 59 – P. 673-676.
7. Ордин С.В., Шарупин Б.Н., Федоров М.И. Нормальные решеточные колебания и кристаллическая структура анизотропных модификаций нитрида бора // Физика и техника полупроводников. – 1998. – 32, №9 – с. 1033-1042.

Надійшла до редколегії 21.02.10

СУЧАСНА ФІЗИКА

Книжка єдина, що містить усі дані, необхідні для розуміння сучасної фізики.

Всі дані, необхідні для розуміння сучасної фізики, містяться в одній книжці.

1000

AMERICAN AIR

1000

1000

1000

1000

УДК 532.536

Альошин О.Д., доктор фіз.-мат. наук, професор

**Ефекти нелінійної оптики в просторово
неоднорідному середовищі поблизу
критичної точки**

В роботі представлені результати експериментальних досліджень, що свідчать про ефекти самофокусування слабких світлових променів в просторово неоднорідному середовищі поблизу критичної температури в полі гравітації Землі. Показано, що при проходженні цих променів через неоднорідне середовище поблизу критичної температури відбувається підсилення їх інтенсивності. В роботі зроблено висновок, що це підсилення відбувається за рахунок вимушеного розсіяння світла збудженими великомасштабними флуктуаціями параметра порядку.

Ключові слова: критична точка, неоднорідне нелінійне середовище, ефект самофокусування

* E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

Нелінійна оптика – розділ оптики, який вивчає процес взаємодії потужних лазерних світлових потоків із речовиною. Ця взаємодія приводить до суттєвої зміни як оптичних, так інших фізичних характеристик конденсованого середовища. При цьому необхідно, щоб напруженість світлового поля імпульсних лазерів становила величину $E_p \sim 10^7 \div 10^8$ В/см, сумірну з величиною напруженості внутрішнього атомного поля $E_a = e/d = 10^8 \div 10^9$ В/см ($E_p \approx E_a$). В таких світлових полях виникають нові оптичні ефекти і суттєво змінюються характеристики вже відомих фізичних явищ.

Яскравим прикладом таких ефектів є явище самофокусування світла [1-3], яке концентрує енергію світлової хвилі в нелінійному середовищі, показник заломлення якого n збільшується із збільшенням енергії світлового поля. Під дією світлового променя нелінійне середовище стає оптично неоднорідним і в ньому виникає викривлення траєкторії розповсюдження світлового променя (нелінійна рефракція). Якщо n збільшується із зростанням напруженості E електричного поля світлової хвилі, то промені концентруються в

УДК 532.536

Alekhin O.D., Dr. of Sci., Prof.

**Effects of non-linear optics in spatially
inhomogeneous medium near the critical point**

The results of experimental investigations which presented in paper indicate about self-focusing of weak light beams in spatially inhomogeneous medium near the critical temperature under Earth gravity. It have been obtained the increasing of the beams when passing through inhomogeneous medium near the critical temperature. The conclusion have been made that this increasing is occurred at the expense of stimulated light scattering by excited long-scale fluctuations of order parameter.

Key words: critical point, inhomogeneous medium, self-focusing effect

області більшої інтенсивності. Тобто нелінійне середовище стає об'ємною збираючою лінзою, фокус якої знаходиться на відстані $f_1 = d(n_0/\Delta n)^{1/2}$ від точки входження пучка в нелінійне середовище. Тут d – радіус світлового променя; Δn – зміна показника заломлення у світловому пучку. При наближенні до фокуса промені все більше викривлюються. Це приводить до того, що концентрація поля в нелінійному середовищі стає значно більшою, ніж при звичайному фокусуванні оптичних лінз. У зв'язку з цим світлове самофокусування може привести до світлового пробою та сприяти розвитку процесів вимушеного розсіяння світла та інших нелінійних процесів.

Для більш потужних світлових променів за першим фокусом при світловому самофокусуванні може з'явитись ряд нових фокусів: $f_2, f_3, f_4, \dots$. Тобто виникає багатофокусна структура. Число фокусів зростає із збільшенням потужності променя і вони наближаються до точки входження променя у нелінійне середовище. Схематично цей процес утворення фокусів в нелінійному середовищі показаний на рис. 1.

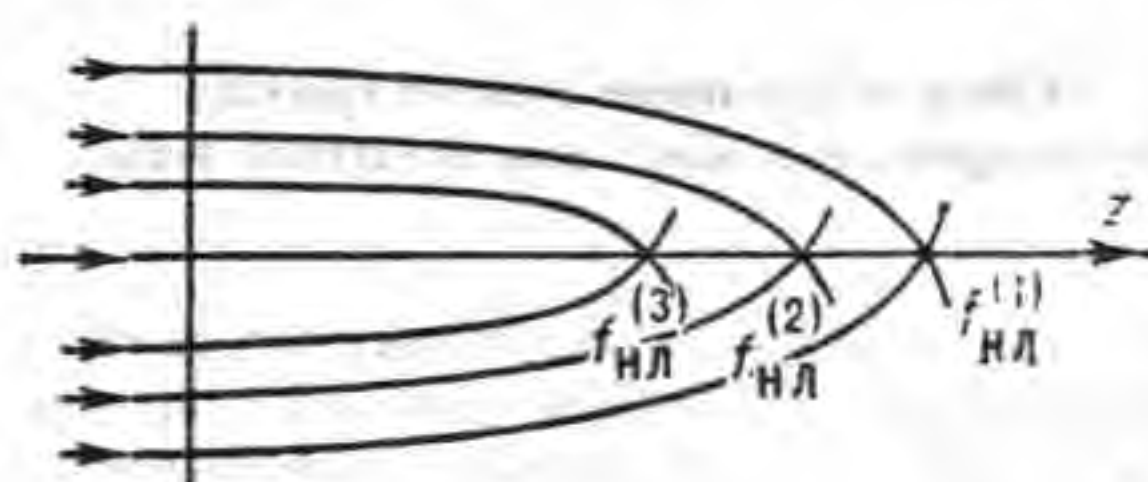


Рис. 1. Траекторія потужних світлових променів при самофокусуванні у нелінійному середовищі

Отже, завдяки явищу гравітаційного ефекту у рідинах поблизу критичної точки також можна очікувати ефектів фокусування і самофокусування навіть слабких світлових потоків. Це явище вперше було досліджено у роботах [8-10]. В цих роботах аналізувалась траекторія світлових променів від оптичного джерела – ртутної лампи ДР-250 ($\lambda=546$ нм) на різних висотах неоднорідної системи, що змінюють напрямки свого розповсюдження на кути $\text{tg } \theta(z) = w \, dn/dz(z)$. За цими даними, отриманими рефрактометричним методом нахилених щілин [11], відхилення світлових променів на різних висотах з неоднорідної системи при різних температурах t показані на рис. 2.



Рис. 2. Проходження світлових променів на різних висотах z неоднорідної системи поблизу критичної температури T_c при різних значеннях приведеної температури t .

Крім того, у світлових пучках великої потужності експоненційно зростають просторові флуктуації, в результаті чого пучок ще до фокусу розбивається на окремі нитки.

Викладений вище процес самофокусування спостерігається у конденсованих середовищах, зокрема у рідинах, подалі від точок фазового переходу другого роду та критичних температур випаровування та розшарування.

Ситуація суттєво змінюється, якщо рідинна система знаходиться у критичному стані [4] із значним зростанням флуктуацій параметра порядку, радіуса кореляції ($R_c \rightarrow \infty$), стисливості речовини ($\beta_T \rightarrow \infty$). За цих умов в полі гравітації Землі система стає просторово неоднорідною вздовж висоти. Виникає явище гравітаційного ефекту [5].

Експериментальні дослідження цього явища гравітаційного ефекту [5-7] на кафедрі молекулярної фізики КНУ ім. Тараса Шевченка показали, що величина градієнта показника заломлення в таких системах при наближенні до критичної температури $T \rightarrow T_c$ ($t = (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$) необмежено зростає ($dn/dz = A t^{-1} \rightarrow \infty$). Проведені дослідження показали, що при температурах $t = 10^{-4} - 10^{-5}$ градієнт показника заломлення досягає величин $dn/dz \geq 1 \div 10 \text{ см}^{-1}$. Це значення сумірне, а можливо і перевищує величину $(dn/dz)_{\text{эф}}$ в нелінійній рідинній систем подалі від критичної точки під дією потужного лазерного випромінювання з напругою поля $E = 10^7 - 10^8 \text{ в/см}$

Крім того, в роботах [8] також було показано, що і площа перерізу тонких світлових променів ($d=0,05 \text{ см}$) при проходженні такого неоднорідного середовища змінюється (рис. 3.).

Дійсно, як видно, в області висот $z > 0$ ($n < n_c$) відбувається розфокусування світлового пучка; в області $z < 0$ ($n > n_c$) відбувається його фокусування (n_c – показник заломлення речовини на рівні $z=0$ з критичною густиною ρ_c). Це явище спостерігається як при критичній температурі випаровування однокомпонентних рідин (н-пентан, діетиловий ефір, фреон-113 [6]), а також

при критичній температурі розшарування подвійних розчинів (метанол-гексан [12]).



Рис. 3. Фотографії світлових променів, які пройшли на різних висотах z неоднорідного н-пентану при різних температурах t . Позначкою "0" вказано сфокусований промінь, який пройшов крізь неоднорідне середовище на рівні критичної ізохори.

Впродовж цих робіт в [9] досліджена висотна залежність інтенсивності $I_0(z)$ сфокусованих тонких світлових променів при проходженні їх крізь неоднорідну систему поблизу критичної температури (Рис. 4.).

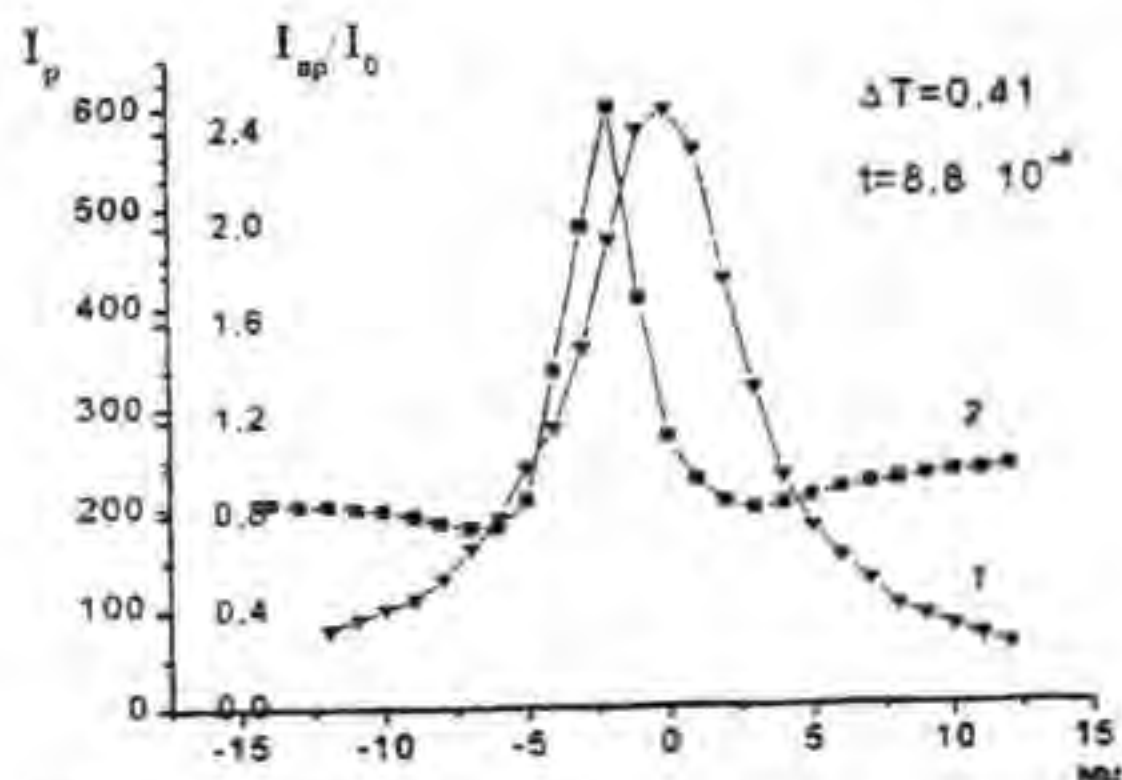


Рис. 4. Висотні залежності інтенсивності розсіяного світла I_p – 1 та інтенсивності I_{pr} – 2 світлового пучка, що пройшов крізь неоднорідне середовище

При цьому виявлено, що інтенсивність сфокусованого світлового променя, що пройшов крізь неоднорідне середовище на висотах $z \leq 0,1$ см ($n > n_c$), при температурах $t \leq 10^{-4}$ не зменшилась, а навпаки, зросла майже на порядок.

Цей результат свідчить про те, що взаємодія світлового променя поблизу критичної температури ($t = 10^{-4} \div 10^{-5}$) з великомасштабними критичними флуктуаціями параметра порядку просторово неоднорідних систем сприяє розвитку процесів вимушеного розсіювання світла цими збудженими флуктуаціями параметра порядку. Одержані результати узгоджуються з аналогічними висновками, представленими в роботах [13,14]. В цих роботах показано, що при розповсюдженні хвиль в нелінійних флуктуаційних динамічних системах з дисперсією поблизу критичної точки чи точок біфуркації хвилі мають можливість збільшувати свою енергію за рахунок потенційної енергії критичних флуктуацій. Тобто разом із процесом розсіювання енергії електромагнітного випромінювання на критичних флуктуаціях [4] може також відбуватись процес її збільшення [13,14].

Вище також було відмічено, що при збільшенні потужності лазерного випромінювання при його самофокусуванні за першим фокусом може з'явитись ще низка фокусів. Аналогічне явище спостерігається і для світлових променів малої потужності при наближенні до критичної температури рідин ($t \rightarrow 0$), коли необмежено збільшується градієнт показника заломлення неоднорідної речовини ($dn/dz \sim t^{-\gamma} \rightarrow \infty$) (Рис. 5.).



Рис. 5. Багатофокусна структура при самофокусуванні слабких світлових променів в просторово неоднорідному середовищі поблизу критичної температури випаровування 1, 2 (фреон-113) та розшарування 3, 4, 5 (розчин метанол-гексан).

Дійсно, як видно з рис. 5, при проходженні світлових променів через неоднорідну речовину поблизу критичних температур випаровування чи розшарування ($t \leq 10^{-4}$) окрім першого головного фокуса f_1 на висоті $z=0$ спостерігається ще низка засвічених областей, які вказують на місця інших додаткових фокусів f_n . На основі цих даних можна зробити висновки, що при $t \rightarrow 0$ при збільшенні градієнта dn/dz збільшується число фокусів ($N_f \sim t^{-2}$), але зменшується відстань між цими фокусами ($\Delta f_n \sim t^2$).

Окрім того, вище вказувалось, що в рідинних системах подалі від критичної температури світлові пучки великої потужності розбиваються на окремі нитки. Саме таке явище спостерігається і із слабким пучком світла від ртутної лампи ДР-250, який проходить крізь неоднорідне середовище поблизу критичної температури ($t = 10^{-4} \div 10^{-5}$) (рис. 2, 5).

Таким чином, з представлених вище експериментальних даних [8-10] (рис. 2-5.) слідує, що при проходженні крізь неоднорідне середовище поблизу критичної точки ($dn/dz \sim t^{-1}$) світлових променів слабкої потужності відбувається їх самофокусування в цих середовищах. Внаслідок взаємодії слабких світлових потоків із збудженими великомасштабним флуктуаціями параметра порядку збільшується інтенсивність світлового потоку на виході із просторово неоднорідної системи. На основі одержаних даних можна зробити висновки, що підсилення світлового пучка відбувається за рахунок вимушеного розсіяння світла цими збудженими флуктуаціями параметра порядку. Даний висновок узгоджується з результатами теоретичних розрахунків, представлених в роботах [13,14].

Автор висловлює подяку Є.Г. Руднікову за обговорення представлених в роботі експериментальних даних.

Список використаних джерел

1. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. УФН. 1967. Т. 93, Вып. 1, С. 19.
2. Луговой В.Н., Прохоров А.М. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде. УФН. 1973., Т. 111, Вып. 2, С. 203.
3. Кочмарик З.Ф. Введение в физику лазеров. Москва. 1981. 250 с.
4. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. Москва. 1982.
5. Голик А.З., Шиманский Ю.И. и др. Исследование гравитационного эффекта вблизи критической точки индивидуальных веществ и растворов // В сб.: Уравнение состояния газов и жидкостей / К 100—летию уравнения Ван-дер-Ваальса / — М.: Наука, 1975. — С. 189 — 217.
6. Булавин Л.А. Властивості рідин у критичній області. Київ: "Київський університет". — 2002. — 208 с.
7. Альохін О.Д., Дорош А.К., Рудніков Є.Г. Критичний стан речовини в полі гравітації Землі. Київ. Політехніка. 2008. 404 с.
8. Алехин О.Д. Самофокусування слабких світлових променів неоднорідним середовищем поблизу критичної точки // Вісник Київського університету. Серія Фіз.-мат. Науки. 2004 № 3. С. 430-433.
9. Алехин О.Д. Підсилення електромагнітного випромінювання полем критичних флуктуацій // Вісник Київського університету. Серія Фіз.-мат. Науки. 2003 № 1. С. 319-321.
10. Алехин А.Д. Взаимодействие электромагнитного излучения с полем крупномасштабных флуктуаций вблизи критической точки. Сборник трудов конференции "Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах" Махачкала. Дагестан. 2002. С. 35.
11. Алехин А.Д. Влияние оптической неізотропности на измерения показателя экстинкции вещества вблизи критической точки // Оптика и спектр. 1984. — Т. 57. — № 4. — С. 652-657.
12. Алехин А.Д., Абдикаримов Б.Ж., Булавин Л.А. Оптические и термодинамические свойства неоднородного двойного раствора вблизи критической температуры расслоения // УФЖ — 1991. — Т.36. № 4. — С. 547-550.
13. J.D. Gibbon, M.J. Mc.Guinness, Proc. Roy. Soc. London A. 377, Issue 1769 (1981)
14. Синергетика. Под ред. Б.Б. Кадомцева. Москва. Мир. Сб. Статей. Дж. Гиббон. 164. (1984).

Надійшла до редколегії 09.03.2010

УДК 541.61; 535.373.2

С.В.Васильюк, асп.,
В.М.Яшук, д. ф.-м. н., проф.,
О.Д.Качковський, д. х. н., проф.,
О.О.Вінійчук, асп.,
О.Б.Рябицький, асп.

Форма та локалізація зарядових хвиль в йонних поліметинових системах

Проведено квантово-хімічне дослідження розподілу заряду та молекулярної геометрії в йонах лінійних спряжених молекул, які широко використовуються в якості базових елементів наноелектроніки. Показано, що в колективній π -електронній системі інжектований заряд (електрон чи дірка) автолокалізується і формує зарядову хвилю та хвилю довжин зв'язків солітонного типу. Введення донорних груп генерує додаткові хвилі на кінцях ланцюга спряження, а в довгих поліметин-катионі приводить до зміщення зарядових хвиль з порушенням симетрії. В коротких молекулах домінуючим стає вплив кінцевих груп. Такий характер розподілу зарядів в хромофорі катіонних поліметинових барвників підтверджується експериментально, за допомогою спектрів ЯМР.

Ключові слова: лінійні спряжені системи, поліметинові барвники, квантово-хімічні розрахунки, зарядові хвилі, хвилі довжин зв'язків, солітон, спектри ЯМР

До числа найважливіших і специфічних властивостей лінійних спряжених систем 1, а також

1

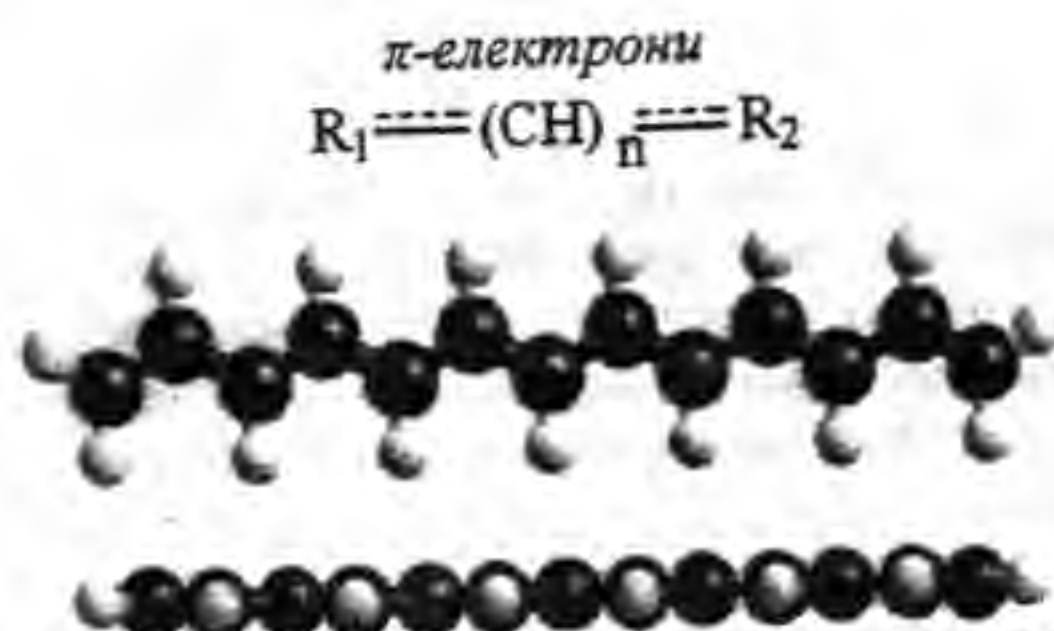


Рис. 1. Полієновий ланцюжок: вигляд на площині та зверху поліметин-йон при $n = 5$, $z = +1$, $R = \text{CH}_2$.

S.V. Vasylyuk, PhD stud.,
V. M. Yashuk, Dr.Sci., (Phys.-Math.), Prof.,
O. D. Kachkovsky, Dr.Sci., (Chem.), Prof.,
O.O. Viniychuk, PhD stud.,
O. B. Ryabitskii, PhD stud.

Shape and location of charge waves in ionic polymethine systems

A quantum-chemical investigation of the charge distribution and molecular geometry in ions of linear conjugated molecules which widely used as nanoelectronics base elements has been carried out. It was shown that a charge (electron or hole) injected in the collective π -electronic system is auto-localized and forms both charge and bond length solitonic-like waves. Introducing the donor groups generates additional waves at the conjugated chain ends, what causes moving of the solitonic-like charge waves and symmetry breaking in the long polymethine - cations. In the short molecules the contribution of the terminal groups becomes predominant. Such character of the charge distribution in cation polymethine dye chromophore is confirmed experimentally by the NMR spectra.

Keywords: linear conjugated systems, polymethine dyes, quantum-chemical calculations, charge waves, bond length waves, soliton, NMR spectra

полімерів на їх основі, належить здатність проявляти квазіметалічну провідність. Це відкриття, удостоєне Нобелівської премії з хімії в 2000 році, спричинило перегляд багатьох теоретичних концепцій, що базувалися на класичних уявленнях про поведінку π -електронів в іонах спряжених молекул, передовсім в аніонних і катіонних поліметинових барвниках, в катіон/аніон-радикалах полієнів, і відтак стимулювало розробку якісно нової теоретичної моделі електронної будови подібних систем, яка б враховувала особливості розподілу заряду та молекулярної геометрії [1-4].

Крім використання спряжених систем як базових елементів наноелектроніки [1], вони знаходять численні застосування в лінійній та нелінійній оптиці: йонні поліметинові барвники (1- де $n = 2n+1$, $z = \pm 1$, та R - різноманітні гетероциклічні залишки) здатні інтенсивно поглинати та випромінювати кванти світла у видимій та ближній ІЧ області спектра [5, 6]. Такі унікальні спектральні властивості, як встановлено, зумовлені спе-

цифічним розподілом заряду в основному та збудженому станах, а також вирівнюванням довжин вуглець-вуглецевих зв'язків [1,7,8].

Атом вуглецю у спряженій системі знаходиться в sp^3 -гібридизованому стані і, відповідно, утворює три σ -зв'язки, внаслідок чого молекули 1 є плоскими, як це видно з рис. 1, де наведений як приклад поліметин-йон при $n = 5$, $z = +1$, $R = CH_2$. Останній $2p_z$ -електрон разом з такими ж електронами інших атомів вуглецю утворюють спільну колективну π -електронну систему. Перехід від нейтральної спряженої молекули до йонів, тобто інжекція електрона чи дірки в високополяризовану колективну систему π -електронів супроводжується появою так званого солітонного рівня (домішкового рівня) в енергетичній щільності та значного зсуву як дна зони провідності, так і верху валентної зони [2,3].

Інжектований заряд (електрон чи дірка) не делокалізується рівномірно вздовж всієї системи спряження, а навпаки, автолокалізується [4], тобто формує зарядову хвилю скінченних розмірів солітонного типу. Квантово-хімічні розрахунки показують, що довжина солітоно-подібної хвилі складає 15-17 вуглець-вуглецевих зв'язків [2,3].

У випадку молекулярних йонів 1 з порівняно довгим поліметиновим ланцюгом, коли довжина π -системи перевищує розміри зарядової хвилі, солітон стає мобільним і може локалізуватися на якому завгодно фрагменті ланцюга без зміни загальної енергії молекули. Таке переміщення зарядової хвилі, наприклад в катіонах поліметинових барвників може призводити до порушення симетрії електронної будови, що експериментально проявляється в різкій зміні спектральної смуги в спектрах ІЧ барвників [9,10].

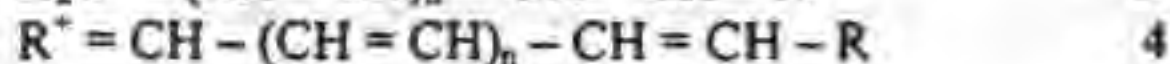
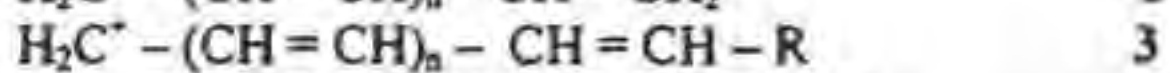
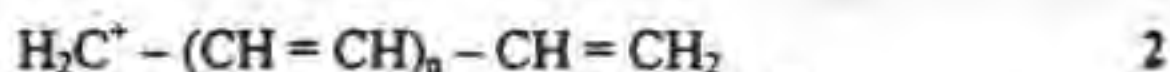
Одночасно із зарядовою хвилею, інжекція заряду формує геометрію π -електронної молекулярної системи таким чином, що генерується хвиля довжин зв'язків - топологічний солітон або кінк. Очевидно, що в рівноважному стані локалізація центрів зарядової та топологічної хвилі співпадають [9,10].

Розрахунки показали, що в незаміщених поліметинових системах форма та локалізація обох типів солітоноподібних хвиль не залежить від довжини молекули. Введення кінцевих груп, R, може приводити до переміщення солітонів. Подібні квантовохімічні дослідження достатньо довгих молекул були виконані нами [3-11] в рамках напівемпіричних наближень.

Метою даної роботи є вивчення поведінки зарядових хвиль неемпіричними методами, оцінка впливу на форму солітонних хвиль характеру кінцевих груп, а також підтвердження картини

розподілу заряду експериментальними методами, зокрема, за допомогою вимірювання спектрів ЯМР ^{13}C .

Розрахунки виконувались для моно- та дізаміщених катіонних поліметинів, а також відповідних незаміщених йонів 2-4:



У якості модельних груп використовувались залишки OH (OCH_3) та NH_2 ($N(CH_3)_2$): перші моделюють кінцеві групи низької основності, другі – високоосновні групи, відповідно до орбітальної електронегативності неподілених пар, відповідно, атомів кисню чи атомів азоту.

Раніше [11] на прикладі молекул 2 було показано, що заряди на атомах вуглецю і довжини вуглець-вуглецевих зв'язків, розраховані за допомогою базисів HF/6-31G** та HF/3-21G** практично співпадають. Відтак, при виконанні даної роботи, для розрахунків порівняно довгих молекул, ми обмежилися меншим базисом. Для розрахунків було використано пакет програм HYPERCHEM.

Здійснено квантово-механічний розрахунковий експеримент для йонів 2-4:

1. Оптимізовано молекулярну геометрію. Процедура оптимізації припинялась при досягненні градієнта енергії 0,1 ккал/моль.
2. Розраховані величини заряду на атомах ланцюга. Результати представлено на рис.2 та таблиці.

Розрахунки йонів 2-4 показують значне чергування електронної густини на атомах вуглецю в поліметиновому ланцюзі, причому фаза чергування в катіонах, як було встановлено в попередніх роботах [3,11], протилежна у порівнянні з чергуванням електронної густини в аніонах. Амплітуда чергування поступово зменшується від центра ланцюга до його країв, так що заряди утворюють хвилю або хвильовий пакет, що описується гіперболічною функцією [12].

Для аналізу залежності зарядів і локалізації солітонних хвиль від молекулярної топології згідно [3,11,12] використовувалися не самі величини заряду чи електронної густини q_μ , а різниця їх значення на сусідніх атомах Δq_μ (1), які обчислюються за формулою:

$$\Delta q_\mu = (-1)^\mu (q_\mu - q_{\mu-1}). \quad (1)$$

Аналогічно, замість довжин зв'язків зручнішою для аналізу є амплітуда їх чергування:

$$\Delta l_\nu = (-1)^\nu (l_\nu - l_{\nu-1}), \quad (2)$$

де l_ν - це довжина ν -ого зв'язку.

Часто використовуються скалярні параметри: Δq_μ та Δl_ν .

На рис. 2 представлено графік $\Delta q_\mu = f(\mu)$ для йонів 2-4 з порівняно довгим поліметиновим ланцюгом ($n = 15$), з протяжністю, що значно перевищує розміри солітонних хвиль (17 атомів). Легко бачити що зарядова хвиля Δq_μ автолокалізується посередині спряженої системи, відриваючись від її країв. Щоправда, як можна бачити з рис. 2а, розрахунки не дають нульового значення амплітуди чергування, а певне постійне значення ($\approx 0,17$), що пов'язано з нееквівалентністю поляризації зв'язків C—H в парних і непарних положеннях ланцюга з протилежними за знаком зарядами.

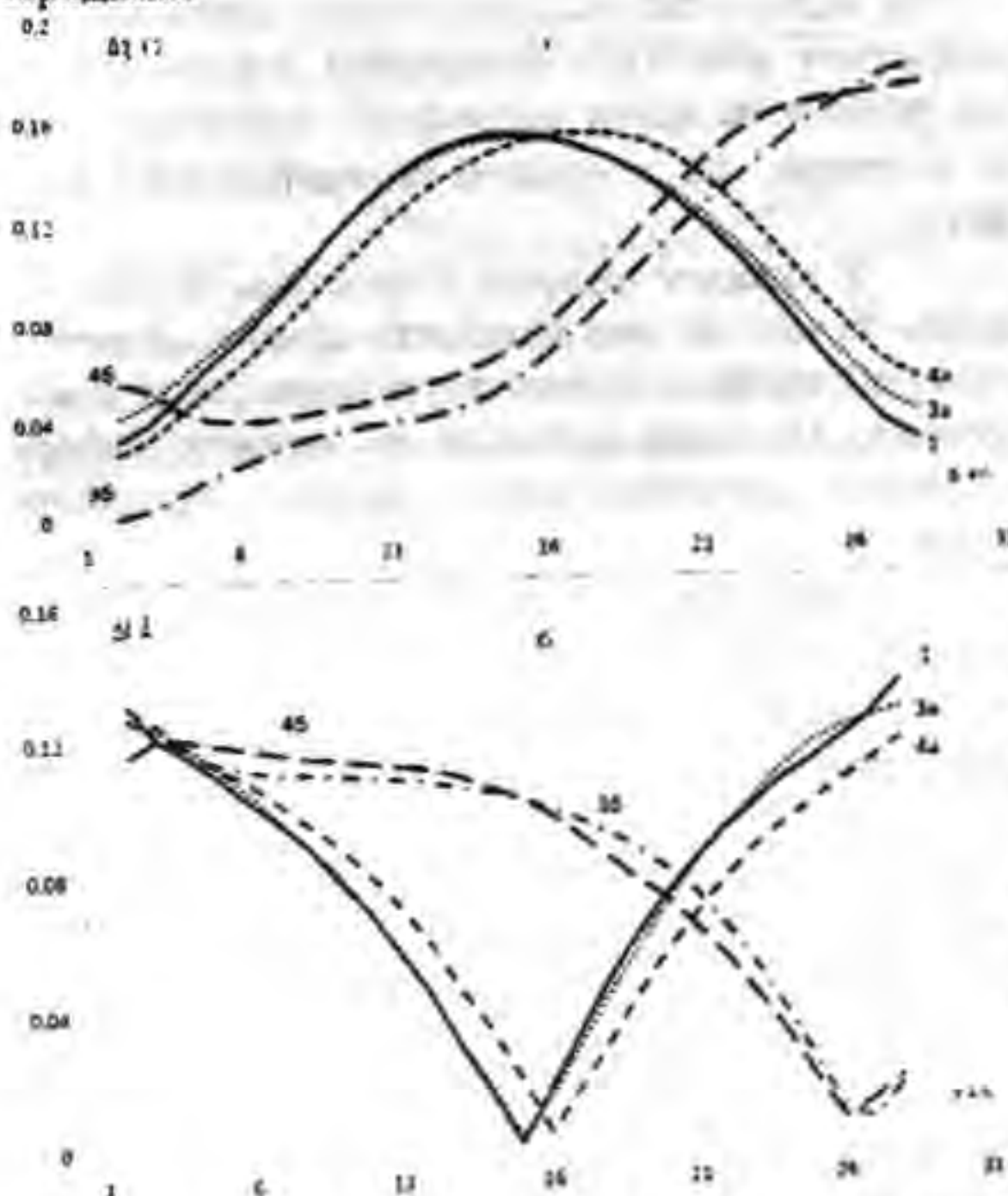


Рис.2. Альтернування зарядів (а) та довжин зв'язків (б) в полієнових системах:

- 2 - $H_2C^+ - (CH=CH)_{15} - CH=CH_2$;
- 3а - $H_2C^+ - (CH=CH)_{15} - CH=CH - OH$;
- 3б - $H_2C^+ - (CH=CH)_{15} - CH=CH - NH_2$;
- 4а - $HO^+ = CH - (CH=CH)_{15} - CH=CH - OH$;
- 4б - $H_2N^+ = CH - (CH=CH)_{15} - CH=CH - NH_2$

На рис. 2б приводиться графік чергування довжин C—C - зв'язків, отриманих при оптимізації молекулярної геометрії (з точністю до 0,001 Å). Як видно, графік $\Delta l_\nu = f(\nu)$ описує типову стоячу хвилю, чи кінк. На краях поліметинового ланцюга значення амплітуди чергування досягає постійного значення, яке близьке до величини аль-

тернування в незаміщених нейтральних полієнах [11].

Згідно з означенням солітона як поодинокій хвилі, його розміри не повинні залежати від протяжності π -системи, що було підтверджено раніше; у випадку спряжених систем з довжиною ланцюга, коротшою, ніж солітонна хвиля, на молекулу проектується тільки частина зарядової чи топологічної хвилі [11]. Тепер розглянемо вплив природи кінцевої групи в монозаміщеному поліметин-йоні 2. Як модельні кінцеві залишки було використано групи, головним елементом яких є атом з неподіленою електронною парою (НЕП), яка спряжена з основною π -електронною системою.

Раніше було показано, що рівень НЕП атома кисню розташований нижче верху валентної зони поліметин-катиона 2, в той час рівень НЕП азоту попадає в заборонену зону; отже впливи цих двох замісників, $R = -OCH_3$ і $R = -N(CH_3)_2$ на локалізацію зарядових та топологічних хвиль суттєво відрізняються.

Графіки функцій $\Delta q_\mu = f(\mu)$ та $\Delta l_\nu = f(\nu)$, розрахованих для йонів 3 і 4 з тим же числом вініленових груп ($n = 15$), що й в незаміщених системах 2, представлено на рис. 2 спряжених систем. Як видно, введення однієї групи $-OCH_3$ з низькими донорними властивостями (низьке розташування відповідного рівня замісника) призводить до зміщення вершини зарядової хвилі (рис.2а), а також мінімуму хвилі довжин зв'язків (рис.2б) на 12 атомів в бік замісника, причому максимальне значення амплітуди чергування зарядів зберігається, як і зберігається вирівнювання двох сусідніх довжин зв'язків, які знаходяться під гребенем зарядового солітона. Внаслідок зміщення, а також обмежених розмірів солітона, те крило солітонної хвилі, що розташоване ближче до замісника, стає обрізаним.

Вплив аміногрупи, $R = -N(CH_3)_2$, як можна бачити з рис. 1, принципово відрізняється: центри і зарядової хвилі, і хвилі альтернування довжин зв'язків не просто зміщуються на певну віддасть від центра молекули, а практично повністю локалізуються на гетероатомі.

Як показали розрахунки моноамінозаміщених молекулярних йонів 3 ($R = -N(CH_3)_2$), подібне граничне зміщення солітонів на край спряженої системи відбувається незалежно від числа вініленових груп n в поліметиновому ланцюзі. Тобто, графіки на рис. 2а і 2б відображують тільки половину кожної солітонної хвилі.

Більш наочно різницю впливу на локалізацію та форму солітонних хвиль між низько- та

високодонорними замісниками дають розрахунки для дизаміщених поліметинів 4.

Як видно з рис. 2, одночасний вплив двох оксигруп в поліметині 4 ($R = -OCH_3$) залишає незмінною локалізацію зарядової та топологічної хвиль в центрі молекули, а також не змінює величин максимальної амплітуди чергування електронної густини (рис.2а), так і граничного вирівнювання довжин зв'язків ($\Delta l_v \neq 0$) посередині молекули, порівняно з незаміщеним поліметинкатіоном 2.

Розрахунки показують, що значніший вплив на заряди та довжини зв'язків проявляється на кінцях ланцюга, надто в молекулах з невеликим числом вініленових груп.

Для ілюстрації в таблиці приведено дані розрахунків для спряжених систем 2-4 при $n = 6$.

Таблиця. Заряди на атомах та довжини зв'язків в поліметинах 2-4 ($n = 6$)

№ атома/ зв'язку	2	3		4	
		R = OH	R = NH ₂	R = OH	R = NH ₂
Заряди на атомах, q _u (e.o.)					
1	-0,350	-0,385	-0,390	0,226	0,273
2	-0,181	-0,261	-0,260	-0,254	-0,36
3	-0,098	-0,208	-0,214	-0,025	-0,145
4	-0,251	-0,226	-0,226	-0,227	-0,288
5	-0,067	-0,21	-0,219	-0,020	-0,127
6	-0,269	-0,218	-0,22	-0,224	-0,297
7	-0,055	-0,202	-0,217	-0,018	-0,120
8	-0,269	-0,214	-0,217	-0,224	-0,297
9	-0,067	-0,176	-0,204	-0,020	-0,127
10	-0,251	-0,226	-0,225	-0,227	-0,288
11	-0,098	-0,151	-0,163	-0,025	-0,145
12	-0,181	-0,338	-0,319	-0,254	-0,36
13	-0,350	0,307	0,298	0,226	0,273
Довжини зв'язків, l, Å					
1	1,3299	1,3644	1,3662	1,3576	1,3348
2	1,4525	1,4207	1,414	1,4153	1,435
3	1,3516	1,3865	1,3868	1,3648	1,3552
4	1,4257	1,4065	1,3993	1,4055	1,4196
5	1,3729	1,3918	1,3904	1,377	1,3762
6	1,3987	1,4022	1,3977	1,3917	1,3975
7	1,3987	1,3886	1,3887	1,3917	1,3975
8	1,3729	1,3987	1,3997	1,377	1,3762
9	1,4257	1,3853	1,3812	1,4055	1,4196
10	1,3516	1,3891	1,4028	1,3648	1,3552
11	1,4525	1,3967	1,3717	1,4153	1,435
12	1,3299	1,3617	1,3994	1,3576	1,3348

Як видно, вже при введенні однієї кінцевої групи (барвники 3) електронна густина на протилежному кінці хромофора значно зростає, хоча значної різниці між окси- ($R = -OH$) та амінозаміщеним ($R = -NH_2$) поліметиновим барвником розрахунки не дають. На кінці хромофору, ближчого до кінцевої групи R, зміна зарядів на атомах суттєвіша, так що навіть змінюється знак заряду на позитивний на атомі вуглецю, який зв'язаний з кінцевим гетероатомом – киснем чи азотом.

Відповідно, позитивний заряд несуть обидва вуглецеві атоми на обох кінцях поліметинового ланцюга у випадку дизаміщених барвників 4. На відміну від зарядів, довжини вуглець-вуглецевих зв'язків на кінцях хромофора менш чутливі до введення замісників.

Як видно з таблиці, розрахунки дають значне зменшення амплітуди чергування довжин сусідніх зв'язків на краях хромофора, наближаючи її до величини Δl_v всередині поліметинового ланцюга.

У випадку молекул з коротким поліметиновим ланцюгом (які знаходять практичне застосування) вплив кінцевих груп може стати домінуючим. Це може привести до значного деформування солітоноподібної форми зарядових хвиль.

Припускаючи, що кінцеві групи впливають на розподіл електронної густини в основному хромофорі, передусім, за рахунок σ -індуктивного, і π -мезомерного ефектів, тоді його можна кількісно оцінити зміною кулонівського інтегралу кінцевого атома в рамках теорії збурень молекулярних орбіталей [13].

При цьому відповідно змінюється електронна густина на довільному μ -тому атомі поліметинового ланцюга:

$q_\mu = q_\mu^0 + \pi_{1,\mu} h$, де h – поправка на кулонівський інтеграл, а $\pi_{1,\mu}$ – атом-атомна поляризованість.

Для лінійних спряжених систем 1, коли R є гетероатомом, параметр $\pi_{1,\mu}$ можна записати аналітично [13]:

$$\pi_{1,\mu} \approx (-1)^\mu / [\pi(2\mu - 1)] \quad (3)$$

В результаті, збурення на кінцях ланцюга, викликане введенням кінцевих груп R₁ та R₂, генерує власну хвилю альтернуючих (завдяки фактору $(-1)^\mu$) часткових позитивних та негативних зарядів на обох кінцях колективної π -електронної системи, поблизу гетероатомів.

Однак амплітуда цієї хвилі швидко згасає завдяки фактору: $1/[\pi(2\mu - 1)]$.

Таким чином, отримана крива графіка $\Delta q_\mu \neq f(\mu)$ для поліметинового ланцюга (рис.3) коротких молекул 1 повинна інтерпретуватися як

суперпозиція трьох хвиль: солітонної зарядів в ланцюгу, генерованої самою зарядженою π -електронною системою, а також двома хвилями, які виникають під впливом кінцевих груп.

Як приклад, на рис. 3 приведена подібна суперпозиція трьох зарядових хвиль в стрептоціаніні 5 при $n = 6$.

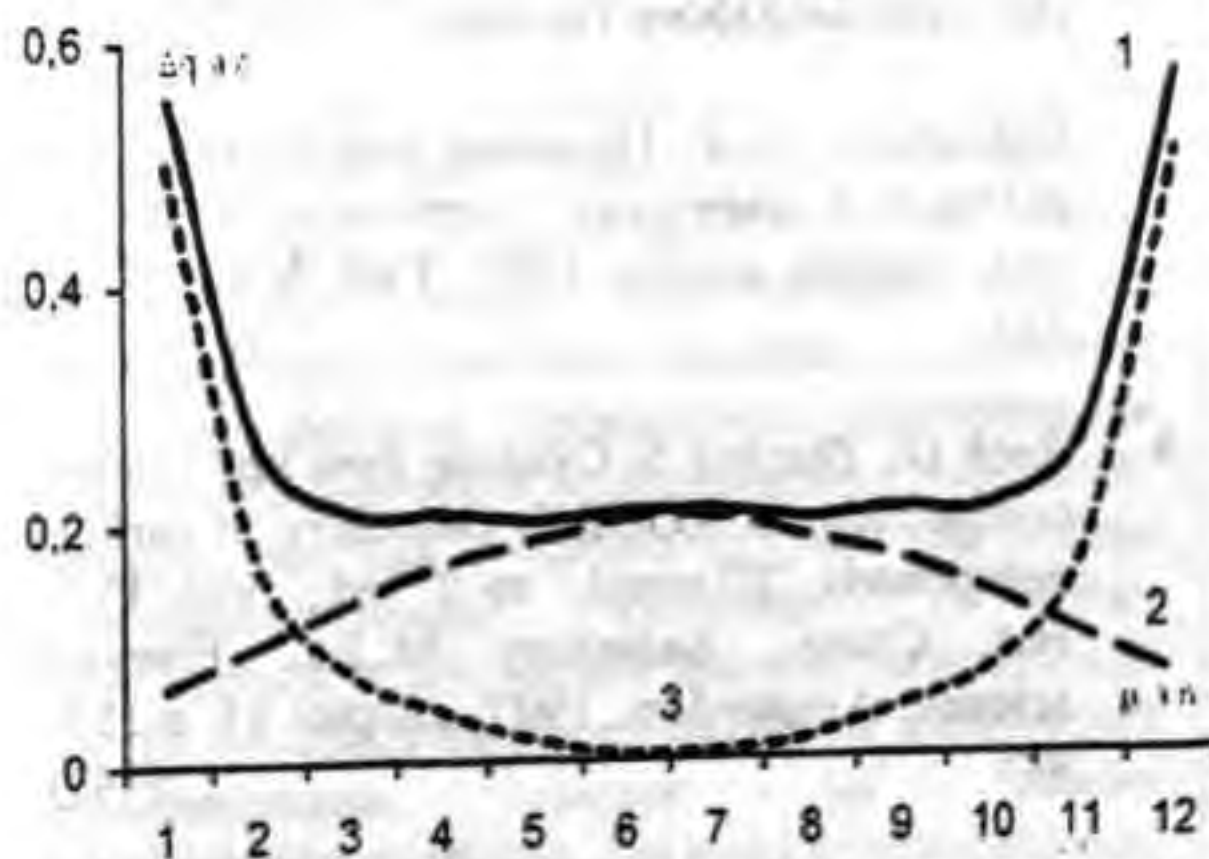


Рис. 3. Схема суперпозиції (1) зарядової хвилі (Δq_μ), що генерується полієновим ланцюжком (2) та кінцевими групами (3) в симетричному ціаніні 1 ($C_1 = C_2$, $n = 6$).

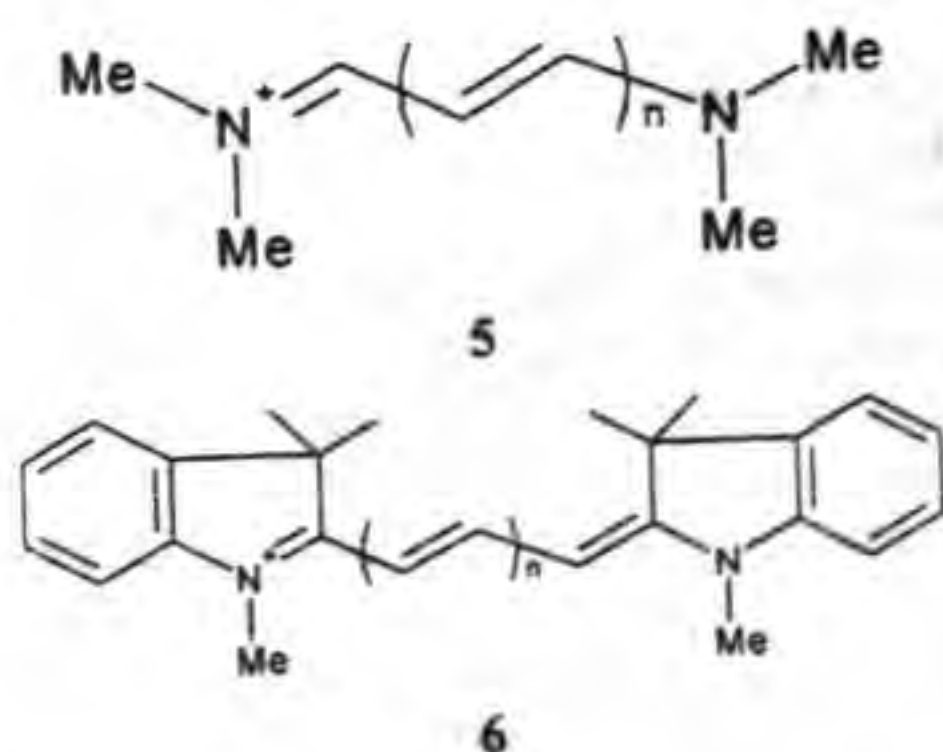


Рис.4 Структурні форми барвників 5 (стрептоціаніну) та 6 (індоціаніну)

Як видно, внаслідок накладення хвиль різного походження, загальна зарядова хвиля немає мінімуму.

У випадку барвників 5 або 6 з коротшим ланцюгом (рис. 4) розрахунки дають навіть змен-

шення амплітуди чергування зарядів, як наглядно видно з рис. 5.а. та 5.б.

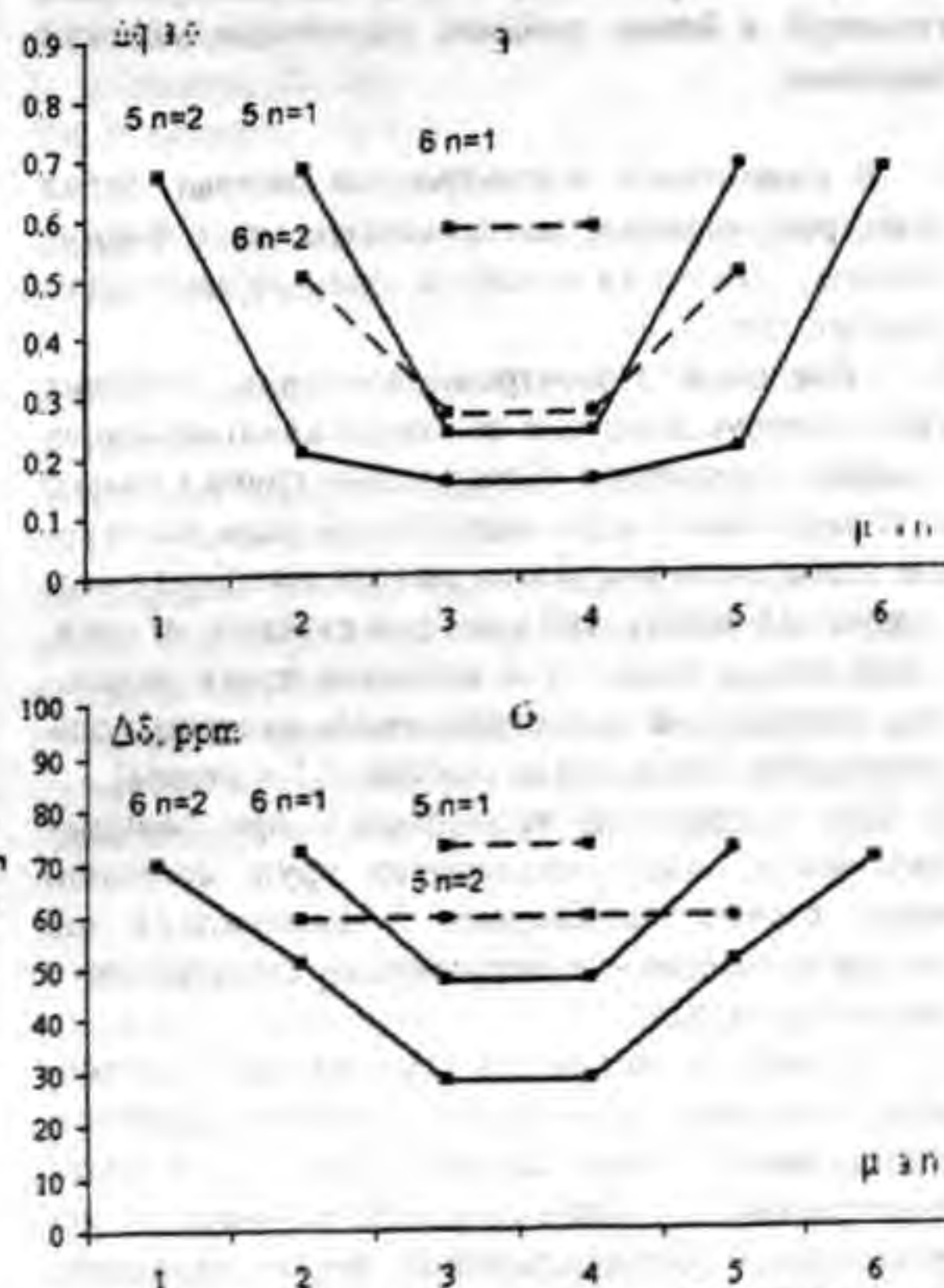


Рис. 5. Альтернування зарядів(а) та ^{13}C ЯМР експериментальний зсув (б) атомів вуглецю в спряженому ланцюжку ціанінів 5 та 6.

Така залежність зарядового розподілу підтверджується експериментально, наприклад, спектрами ЯМР ^{13}C .

Як відомо, між хімічними зсувами, δ_μ та електронною густиною існує залежність:

$$\delta_\mu = a q_\mu + b [13].$$

Тоді, аналогічно формулі (1), можна записати формулу для амплітуди чергування хімічних зсувів.

$$\Delta\delta_\mu = (-1)^\mu (\delta_\mu - \delta_{\mu-1}) \quad (4)$$

Як видно з рис. 5.б, амплітуда чергування величини хімічного зсуву $\Delta\delta_\mu$ всередині поліметинового ланцюга ціанінових барвників 5 та 6 менша, ніж на краях ланцюга. Це однозначно свідчить, що краях ланцюга вплив кінцевих груп R виявляється домінуючим.

Висновки

На основі проведеного квантово-хімічного дослідження розподілу заряду та молекулярної геометрії в йонах лінійних спряжених молекул показано:

1. В колективній π -електронній системі, заряд (електрон чи дірка) автолокалізується і формує зарядову хвилю та хвилю довжин зв'язків солітонного типу.
2. Введення π -електроннодонорних кінцевих груп генерує додаткові солітонні хвилі на кінцях ланцюга спряження: гідроксильна група з низько розташованим рівнем неподіленої пари електронів атома кисню тільки змінює амплітуду чергування як заряду, так і довжин сусідніх зв'язків, в той час як аміногрупа викликає появу локальних екстремумів солітонних хвиль на краях поліметинового ланцюга (на відстані 2-3-х атомів).
3. При подовженні хромофора - при певному критичному числі вініленових груп, солітонні хвилі стають мобільними і зміщуються від центра молекули - з порушенням симетричного розподілу зарядів.
4. У випадку молекул з коротким поліметиновим ланцюгом (які знаходять широке практичне застосування) вплив кінцевих груп може стати домінуючим. Це може привести до значного деформування солітоноподібної форми зарядових хвиль. В довгих поліметин-катіонах це призводить до зміщення солітонних хвиль з порушенням симетрії їхньої форми.
5. Розподіл заряду, отриманий за допомогою квантово-хімічного моделювання, підтверджується експериментально методами ядерно-магніторезонансної спектроскопії.

Список використаних джерел

1. Bredas, J.L., Belionne, D., Cornil, J., Calhert, J.Ph., Shuai, Z., Silbey, R., Electronic structure of π -conjugated oligomers and polymers: a quantum-chemical approach to transport properties. *Synthetic Metals*, 2002, 125, 107-116
2. Bredas J.L., Street G.B. Polaron, bipolaron and solitons in conducting polymers. *Acc.Chem.Res.* 1985, 18, 309-315.
3. Качковський О.Д., Солитонный характер электронного строения ионов линейных сопряженных систем. *Теорет. эксперим. химия*, 2005, 41, 139-164.
4. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, Наукова думка. 1984, 288 стр.
5. Mishra A. Cyanine during the 1990s: A review. *Chem. Rev.*, 2000, 100, p.1973-2011.
6. F.Meyers, S.R.Marder, J.W.Perry, Introducing to the Nonlinear Optical Properties of Organic Materials. In *Chemistry of Advanced Materials. An Overview*. Chapt. 6. Ed. L. V. Interrante, J.Hampden-Smith. 1998. Wiley-VCH. Inc. New York-Chichester-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto P.207-268.
7. Качковский А.Д., Природа электронных переходов в линейных сопряженных системах. *Успехи химии*. 1997. Т.66. N 8. С.715-734.
8. Bach G., Daehne S. Cyanine dyes and related compounds, in *ROOD'S chemistry of carbon compounds*, 2nd suppl. to 2nd ed., Vol. IV^B. Het. Comp., Sainsbury M.,Ed., Elsevier science, Amsterdam, 1997, chapter 15, p.383-481 (443)
9. Lepkovich R.S., Przhonska O.V., Hales J.M., Hagan D.J., Van Stryland E.W., Bondar M.V., Slominski Yu.L., Kachkovski A.D., Nature of electron transitions in thiacyanines with a long polymethine chain. *Chem. Phys.* 2004. 305, 259-270.
10. Kachkovski A.D., Tolmachev A.I., Slominski Yu.L., Kudanova M.A., Derevyanko N.A., Zhukova O.O., Electronic Properties of Polymethine Systems. Soliton symmetry breaking and spectral features of dyes with a long chain. *Dyes and Pigments*. 2005. 64. 207-216
11. Kachkovski A. D., Przhonska O.V., Ryabitzki A.B., Symmetry breaking in cationic and anionic polymethine dyes. *J. Molec. Struct. (THEOCHEM)* 2007, 802, 75-83.
12. Reimers J.R., Hush N.S., Hole, Electron and energy transfer through bridged systems. VIII. Soliton molecular switching in symmetry-broken Brooker (polymethinecyanine) cations. *Chem. Phys.* 1993, 176, 407-420
13. Дьюар М. Теория молекулярных орбиталей в органической химии, "Мир", 1972, 590 стр.

Надійшла до редколегії 08.02.10

УДК 539

Л. Л. Вовченко, к.ф.м.н.
І. В. Овсієнко, к.ф.м.н.
Л. Ю. Мацуї, д.ф.м.н.
Ю. П. Склярів, к.ф.м.н.

Міжстадійні переходи в інтеркальованих сполуках графіту акцепторного типу

В роботі наведено результати експериментальних досліджень часової стабільності свіжовиготовлених зразків інтеркальованих сполук акцепторного типу на основі дрібнокристалічного графіту на предмет стадійних фазових перетворень. Дослідження проводилися методом рентгенівської дифракції. Виявлено, що при старінні зразків на основі дрібнокристалічного графіту в них відбуваються міжстадійні фазові переходи від нижчих до більш високих стадій на відміну від інтеркальованих сполук на основі впорядкованих графітів, для яких є характерним при старінні процес деінтеркаляції.

Ключові слова: інтеркальовані сполуки графіту, часова стабільність, стадія сполуки

*E-mail: ovsienko@univ.kiev.ua

Як відомо, інтеркальовані сполуки графіту (ІСГ) є природними двовимірними електронними системами, в яких носії струму переміщуються переважно у напрямку, паралельному площинам графіту. Система носіїв заряду в інтеркальованих сполуках низьких стадій являє собою вироджений двовимірний електронний газ, двовимірність якого пов'язана з особливостями будови електронної структури інтеркальованих сполук графіту. ІСГ є ідеальним модельним матеріалом для дослідження фізичних властивостей двовимірних структур, зокрема для вивчення особливостей фазових перетворень у двовимірних системах.

Метою даної роботи було дослідження структури ІСГ на основі дрібнокристалічного графіту з хлоридом йоду та бромом в області температур фазових переходів.

Інтеркалювання високоорієнтованих піролітичних графітів (ВОПГ) бромом (Br_2) та хлоридом йоду (ICl) приводить до утворення стабільних інтеркальованих сполук різних стадій ($S=1, 2, 3$) в залежності від умов інтеркалювання. Стехіометрична формула для сполуки з Br_2 - C_7Br , а для сполуки з ICl - C_7ICl [1, 2].

L. L. Vovchenko, Ph D
L. L. Vovchenko, Ph D
I. V. Ovsienko, Ph D,
L. Y. Matzui, Dr. Sci.
Yu. P. Sklyarov, Ph D

Stage transitions in acceptor graphite intercalated compounds

Paper presents the results of time stability investigations of acceptor graphite intercalated compounds based on small crystalline graphite in order to revelation of stage phase transitions. The investigation method was X-Ray diffraction. It is shown that stage phase transitions from low stage to higher stages occur in graphite intercalated compounds based on small crystalline graphite at aging unlike graphite intercalated compounds based on high oriented crystalline graphite.

Key Words: graphite intercalation compounds, time stability, stage of compound.

Характерною особливістю цих сполук є те, що в них можуть відбуватися фазові перетворення в шарах інтеркалянту. Так для ІСГ з ICl в шарі інтеркалянту при температурах 307 та 314K відбуваються зворотні фазові переходи: при 314K – перехід інтеркалянту з “квазікристалічного” до “квазірідкого” стану, при 307K – фазовий перехід, пов'язаний із зміною у чергуванні шарів інтеркалянту. Більш складними в цьому відношенні є сполуки ВОПГ з бромом. В залежності від методу отримання утворюються ІСГ з різною структурою шару інтеркалянту, в якому, в залежності від температури, можуть відбуватися різноманітні структурні перетворення. Так в ІСГ, отриманому рідкофазним методом (ІСГ типу А) в шарі інтеркалянту при зниженні температури спостерігаються два фазових переходи, а для ІСГ, отриманого газофазним методом (ІСГ типу В), спостерігаються чотири фазових переходи, пов'язані із структурною перебудовою в шарі інтеркалянту. В таблиці 1 наведено характеристики фазових переходів, які можуть спостерігатися в ІСГ з бромом [3].

Таблиця 1

Структурно - фазові перетворення в інтеркальованих сполуках на основі ВОПГ з бромом

Тип переходу при нагріванні	Температура переходу (K)				Тип С (десорбція типу А)
	S=2		S=3	S=4	
	Тип В	Тип А			
$\alpha - L$				373	
$\beta - \alpha$	332	333	337	342	350
$\gamma - \beta$	319				
$\delta - \gamma$	297				
$\epsilon - \delta$	277				
$\eta - \beta$		240			226

L - Рідка фаза, β, ϵ - співрозмірні тверді фази, α, γ, δ - неспіврозмірні тверді фази, α та α' - подібні структури, η - інша тверда фаза.

Інтеркалювання дрібнокристалічного графіту (міжшарова відстань $d_{002} = 0.340$ нм, розміри кристаліту $L_a = 30$ нм) галогенами та галогенидами за однотемпературною методикою [5] призводить до утворення сполук першої або другої стадії [2, 4]. В даних сполуках при кімнатній температурі можуть відбуватися міжстадійні фазові перетворення, а саме: перехід від низької (велика концентрація інтеркалянту) до більш високої стадії (менша концентрація інтеркалянту). Особливості цих фазових перетворень можна вивчати при дослідженні структури та кінетичних характеристик даних ІСГ. Не менш цікавими є фазові перетворення, що відбуваються в шарах інтеркалянту, а саме, перехід шару інтеркалянту із неупорядкованого "квазірідкого" у впорядкований "квазікристалічний" стан при зниженні температури, структурні переходи в шарі інтеркалянту "співрозмірність - неспіврозмірність", перетворення в шарі інтеркалянту, пов'язані з переорієнтуванням іонів інтеркалянту.

В роботі досліджувалася часова стабільність свіжовиготовлених ІСГ на предмет стадійних фазових перетворень за допомогою методу рентгенівської дифракції.

Як відомо, графіт може утворювати інтеркальовані сполуки різних стадій (S). Номер стадії вказує на кількість шарів графіту між двома шарами інтеркалянту. Сполука певної стадії характеризується своїм періодом ідентичності I_s . Період ідентичності - це відстань між двома найближчими шарами інтеркалянту в напрямку вісі C . Період ідентичності пов'язаний із номером стадії ІСГ виразом [3]:

$$\begin{aligned} I_s &= d_s + (S-1) \cdot d_{002} \\ d_s &= d_{002} + d_i \end{aligned} \quad (1)$$

де d_s - відстань між двома шарами графіту, що містять шар інтеркалянту, d_i - товщина шару інтеркалянту. Період ідентичності можна визначити з 001-дифрактограми за формулою Вульфа-Брегга:

$$2I_s \sin \theta = l\lambda \quad (2)$$

де l - порядок відбиття для шарів інтеркалянту, λ - довжина хвилі рентгенівського випромінювання.

Таким чином, за зміною періоду ідентичності в ІСГ можна визначити, які саме міжстадійні переходи відбуваються в зразку.

Для дослідження стабільності ІСГ були отримані рентгенівські дифрактограми (Совипромінювання, $\lambda = 0.17903$ нм) для свіжовиготовлених зразків ІСГ та для цих же зразків, витриманих при нормальних умовах, через певні проміжки часу.

На рис. 1. наведено дифрактограму для свіжовиготовленого зразка ІСГ на основі дрібнокристалічного графіту з бромом.

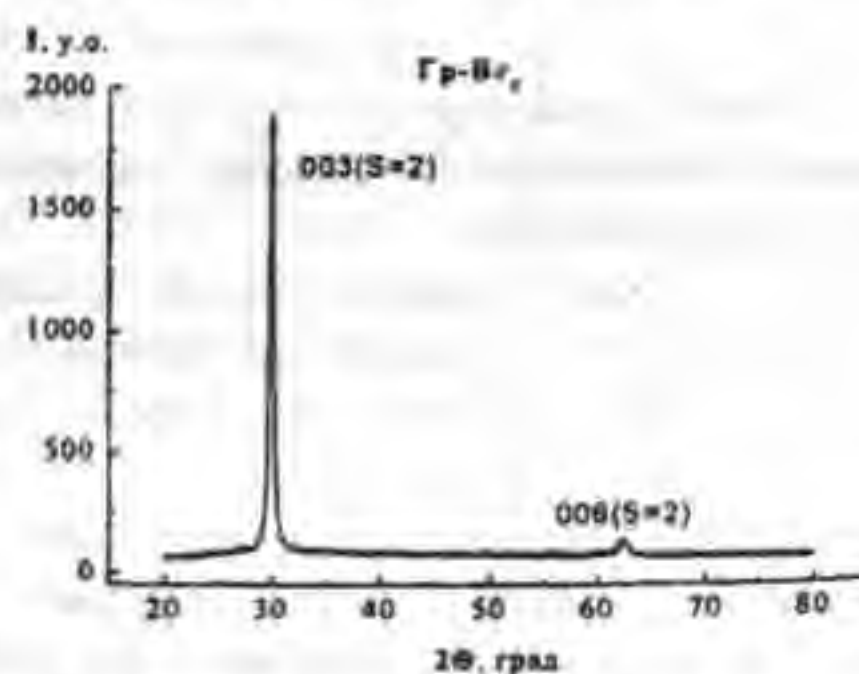


Рис. 1. Дифрактограма свіжовиготовленого зразка ІСГ з бромом.

З дифрактограми для свіжовиготовленого зразка ІСГ було визначено за формулою (2) період ідентичності шарів інтеркалянту, який дорівнював 1.038 нм, що відповідає сполуці другої стадії.

Як було відзначено вище, ІСГ з галогенами та галогенидами на основі дрібнокристалічного графіту є нестабільними навіть при кімнатній температурі і в них спостерігаються міжстадійні фазові перетворення: $S \rightarrow S+1 \rightarrow S+2$ і т.д.

Визначимо, яким чином повинно зміщуватися положення найбільш інтенсивної лінії інтеркалянту, яка визначається за правилом: $00l_{\max} = S+1$, при між стадійних переходах. В таблиці 2 наведено розраховані за формулами (1) та (2) значення кутів 2θ , при яких повинні спостерігатися $00l$ -відбиття для ІСГ різних стадій з бромом для Co- випромінювання.

Таблиця 2

Розраховані значення кутів 2θ , при яких повинні спостерігатися $00l$ -відбиття для ІСГ різних стадій з бромом

$00l$	$S=1$, $I_s=0.70$ нм	$S=2$, $I_s=1.038$ нм	$S=3$, $I_s=1.378$ нм	$S=4$, $I_s=1.718$ нм	графіт, $d_{002}=0.340$ нм
	2θ , град.	2θ , град.	2θ , град.	2θ , град.	2θ , град.
001	14.70	9.9	7.45	5.98	
002	29.65	19.87	14.94	11.97	30.54
003	45.14	30.00	22.49	17.99	
004	61.56	40.38	30.14	24.07	63.58
005	79.53	51.11	37.93	30.22	
006	100.27	62.35	45.90	36.45	
007	127.12	74.30	54.12	42.80	
008		87.29	62.65	49.295	

Як впливає з таблиці 2, при збільшенні номеру стадії відбувається зсув лінії максимальної інтенсивності, що відповідає шарам інтеркалянта, від значення $2\theta = 29.65^\circ$ для $S=1$ до значення $2\theta = 30.22^\circ$ для $S=4$.

На рис. 2 подано фрагменти дифрактограм, отриманих для свіжовиготовленого зразка ІСГ з бромом та для цього ж зразка після витримки його протягом 48 годин при $T=293\text{K}$, а в таблиці 3 наведені положення основних дифракційних максимумів, їх відносні інтенсивності та ширина ліній для вказаних зразків.

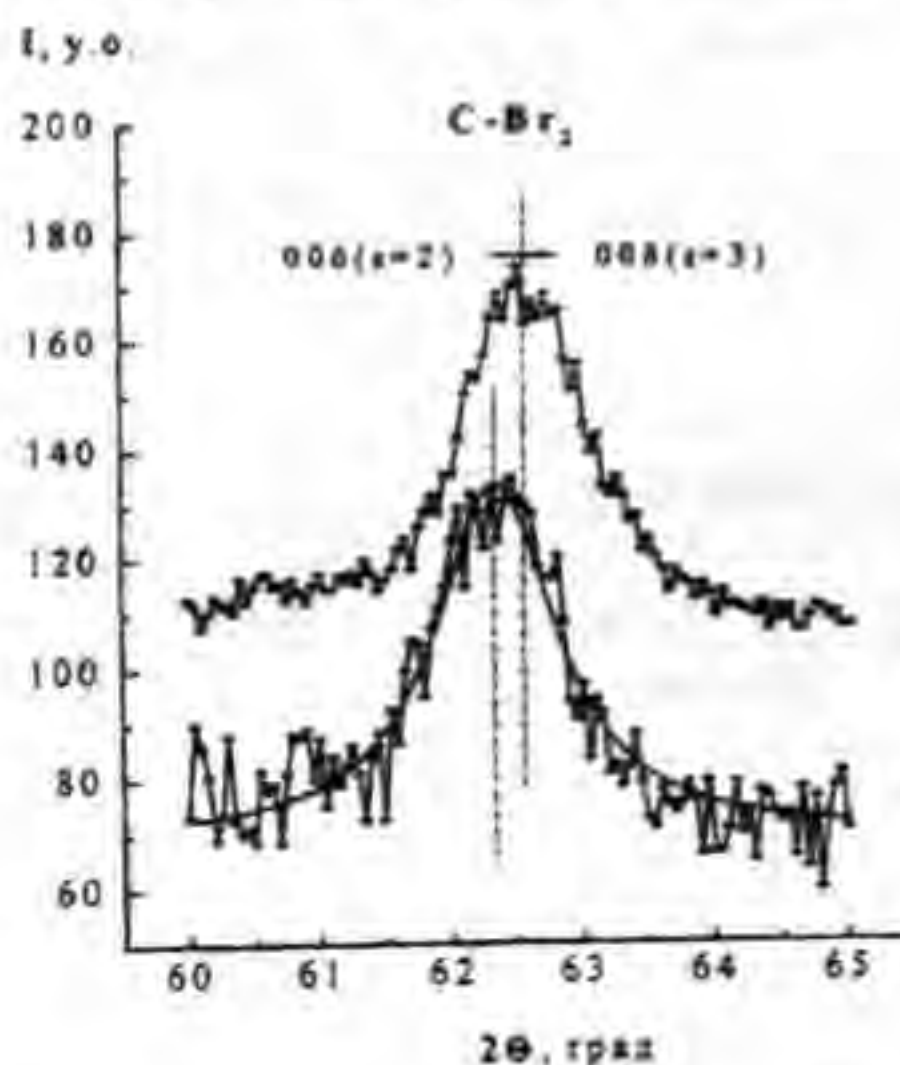
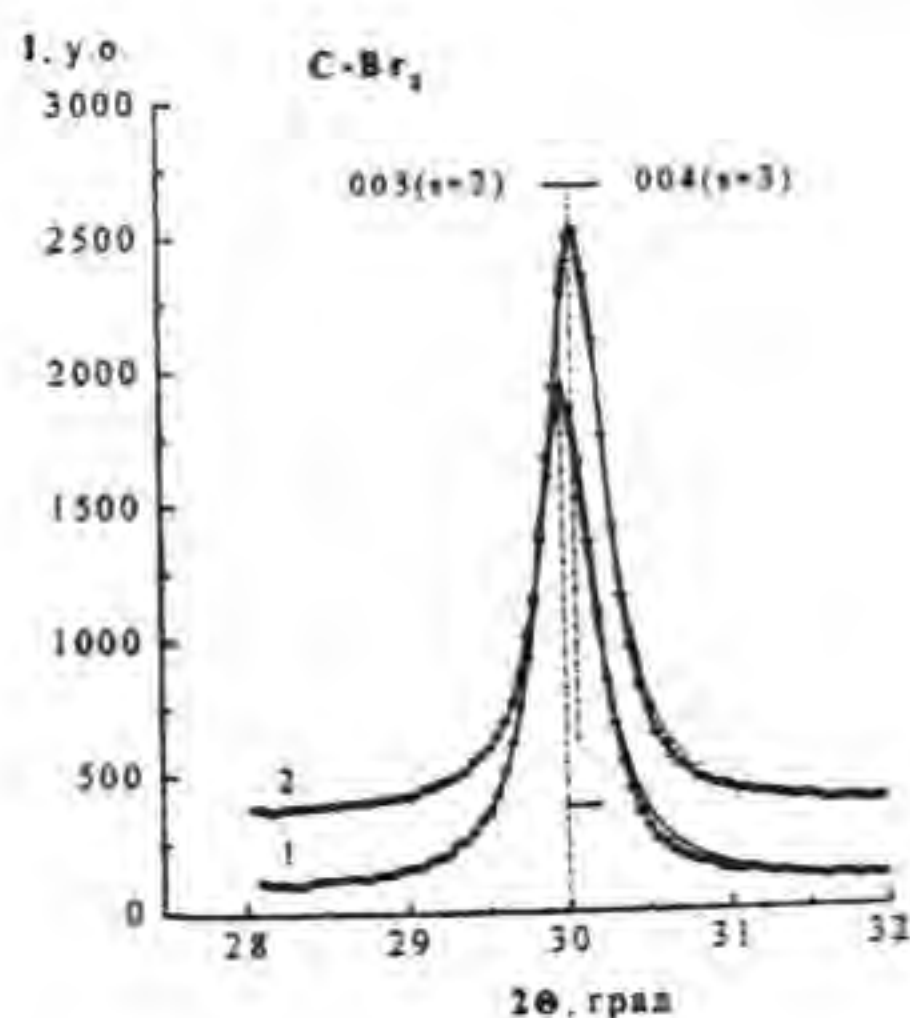


Рис. 2. Фрагменти рентгенівських дифрактограм ІСГ з бромом: 003-лінія (а) та 006-лінія (б), 1 – свіжовиготовлений зразок, 2 – зразок після витримки протягом 48 год при температурі 293 К.

Таблиця 3

Характеристики дифракційних максимумів, параметр ідентичності та номер стадії ІСГ з бромом

2 θ , град.	I, у.о.	Напівшир. W, град	00l	I _s , нм	S, стадія
ІСГ – Br ₂ , свіжовиготовлений зразок (T=293K)					
29.99	1263	0.43	003	1.038	2
62.33	111	1.1	006	1.038	2
ІСГ – Br ₂ -, після 48 годин при T=293K					
30.08	1423	0.41	004	1.383	2→3
62.55	111	1.09	008	1.380	2→3

2 θ - кутове положення лінії на дифрактограмі; I – відносна інтенсивність;
I_s – параметр ідентичності ІСГ; S – стадія ІСГ.

Як видно з наведених рисунків та таблиці, спостерігається поступовий зсув і зміна порядку найбільш максимальних за інтенсивністю ліній інтеркалянту. Так, найбільш інтенсивний максимум, який спостерігається при значенні кута 2 θ = 29.99° і відповідає 003-лінії для сполуки другої стадії, зміщується після витримки в повітрі на протязі 48 годин при кімнатній температурі в положення 2 θ = 30.08°, що відповідає, згідно з даними таблиці 2, 004-лінії для сполуки третьої стадії. Таким чином, при даних умовах в ІСГ з бромом спостерігається міжстадійний перехід від другої до третьої стадії.

Аналогічні дослідження зміни структури ІСГ в процесі старіння зразків були проведені для інтеркальованої сполуки на основі дрібнокристалічного графіту з хлоридом йоду, отриманої заодно температурною методикою.

На рис. 3 наведена дифрактограма, отримана для свіжовиготовленого зразка ІСГ з хлоридом йоду.

Як впливає з рисунку, отриманий зразок ІСГ є сполукою першої стадії з періодом ідентичності I_s = 0.737 нм.

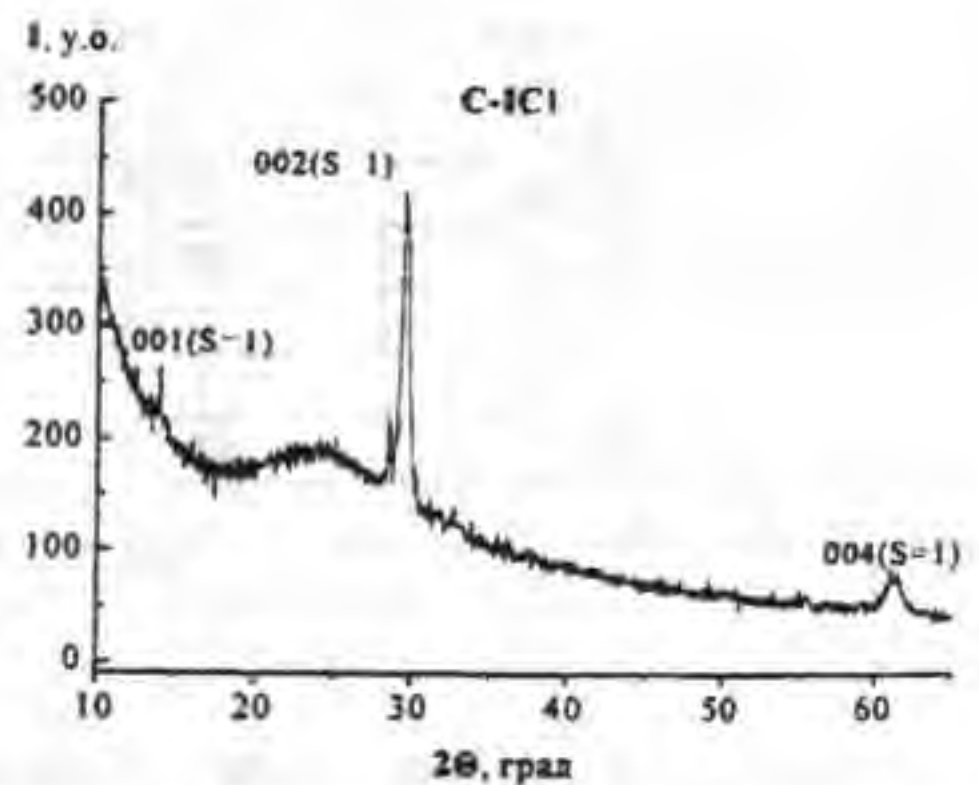


Рис. 3. Дифрактограма свіжовиготовленого зразка ІСГ з хлоридом йоду.

За формулами (1) та (2) були розраховані значення кутів 2 θ , при яких повинні спостерігатися 00l-відбиття для ІСГ різних стадій з хлоридом йоду для Co- випромінювання. Результати розрахунків наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Розраховані значення кутів 2 θ , при яких повинні спостерігатися 00l -відбиття для ІСГ різних стадій з хлоридом йоду

00l	S=1, I _s =0.704нм	S=2, I _s =1.040нм	S=3, I _s =1.38нм	S=4, I _s =1.720нм	графіт, d ₀₀₂ =0.340нм
	2 θ , град.	2 θ , град.	2 θ , град.	2 θ , град.	2 θ , град.
001	14.60	9.88	7.44	5.98	
002	29.48	19.84	14.92	11.97	30.54
003	44.87	29.94	22.45	17.99	
004	61.17	40.30	30.09	24.07	63.58
005	78.99	51.0	37.87	30.22	
006		62.22	45.83	36.45	
007		74.14	54.04	42.80	
008			62.55	49.29	

Як впливає з таблиці, при послідовному міжстадійному переході від стадії S до стадії $S+1$ положення найбільш інтенсивної лінії для ІСГ зміщується в область більш великих значень кута 2θ , що спостерігалось і для ІСГ на основі дрібнокристалічного графіту з бромом.

На рис. 4 наведено фрагменти дифрактограм, отриманих для свіжовиготовленого зразка ІСГ - ІСІ та для цього зразка, після витримки його протягом 8 та 16 діб при $T=293\text{K}$, а в таблиці 5 результати проведеного аналізу отриманих дифрактограм.

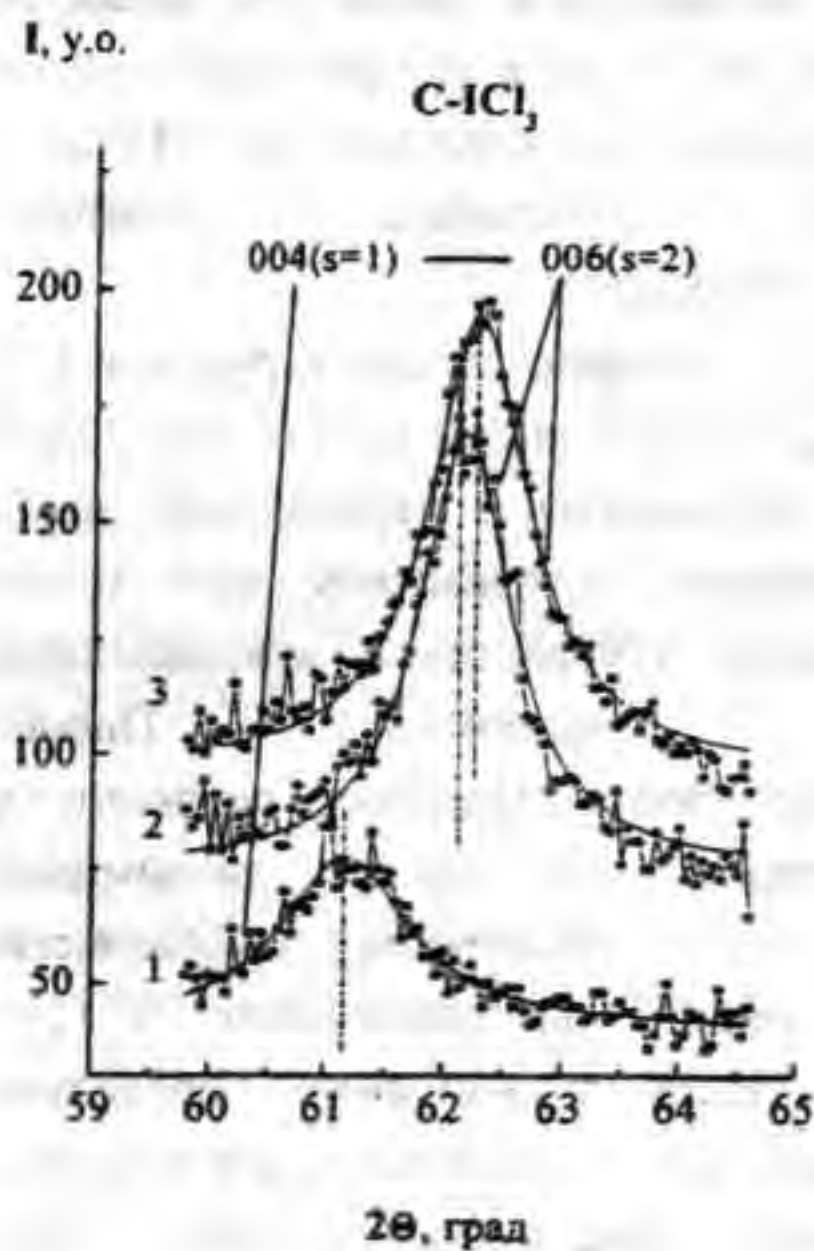
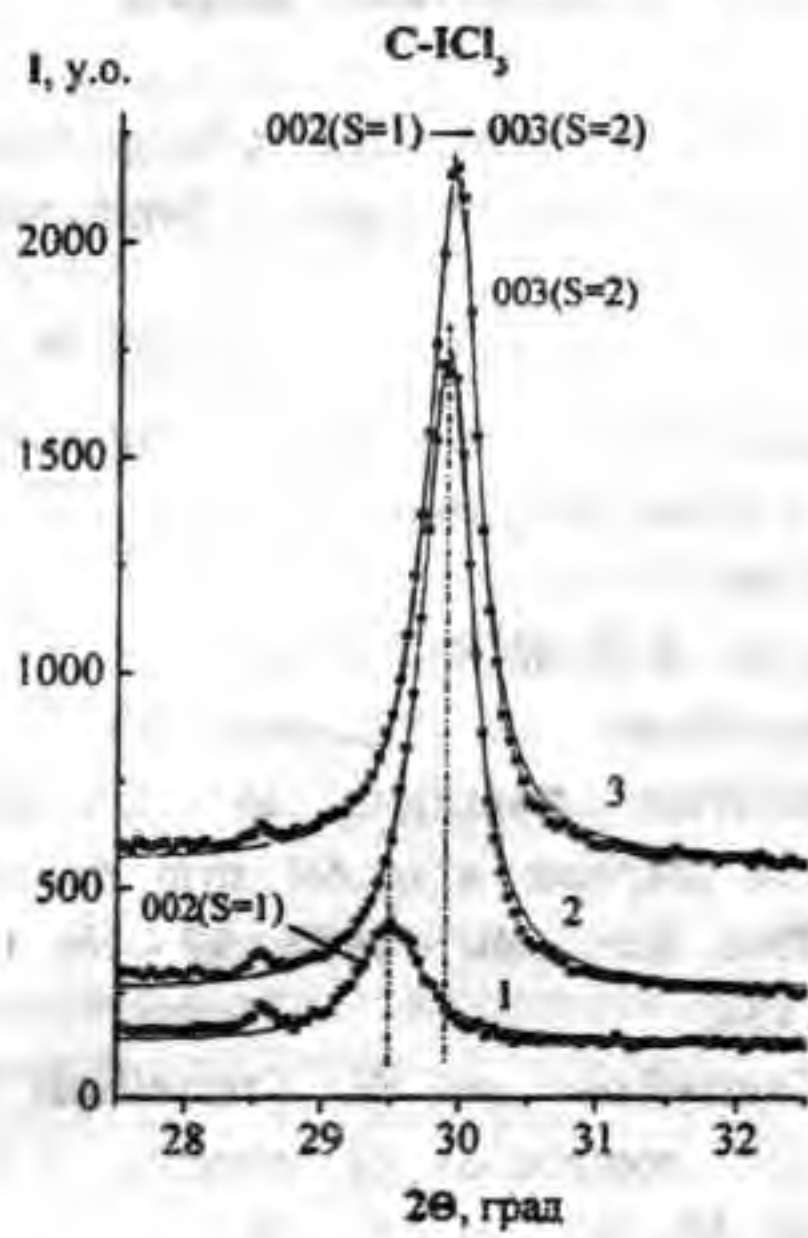


Рис. 4. Фрагменти рентгенівських дифрактограм ІСГ з хлоридом йоду бромом: 002-лінія (а) та 004-лінія (б), 1 - свіжовиготовлений зразок, 2 – зразок після витримки протягом 8 діб та 3 - після витримки протягом 16 діб при температурі 293 К.

Таблиця 5

Характеристики дифракційних максимумів, параметр ідентичності та номер стадії ІСГ з хлоридом йоду

2θ , град.	I , у.о.	Напівшир. W , град	$00l$	I_s , нм	S , стадія
Гр-ІСІ, свіжовиготовлений зразок ($T=293\text{K}$)					
13.95			001	0.737	1
28.62			$002_{\text{Гр}}$	0.340	Гр
29.49	245	0.55	002	0.7038	1
61.16	111	1.1	004	0.7041	1
Гр-ІСІ, після 8 діб при $T=293\text{K}$					
28.62			$002_{\text{Гр}}$	0.340	Гр
29.88	1029	0.43	003	1.042	1→2
62.16	138	0.94	006	1.041	1→2
Гр-ІСІ, після 16 діб при $T=293\text{K}$					
28.62			$002_{\text{Гр}}$	0.340	Гр
29.93	1100	0.43	003	1.040	2
62.27	155	1.01	006	1.039	2

Як впливає з рисунку та таблиці, при витримці свіжовиготовленого зразка ІСГ-ІСІ в повітрі спостерігається поступове зміщення положення ліній, що відповідають відбиттям від шарів інтеркалянту, в бік більш великих значень 2θ , при цьому інтенсивність ліній зростає, а їх напівширина зменшується. Зазначені зміщення ліній вказують на те, що в сполуці відбувається міжстадійний перехід від першої до другої стадії.

Розглянемо детальніше механізми міжстадійних переходів в ІСГ.

Згідно з моделлю кристалічної структури ІСГ Дома-Херольда [7] ІСГ являє собою сукупність доменів, які складаються з паралельних шарів графіту з шарами інтеркалянту між ними. Границі доменів утворюються викривленими графітовими площинами. Процес інтеркалювання, тобто введення речовини в графіт, розглядають як процес двовимірної дифузії [8, 9]. Основною особливістю двовимірної реакції інтеркалювання є рух інтеркалянту тільки в напрямку паралельно площинам графіту, тобто реагент може рухатися тільки вздовж графітових площин. Рух перпендикулярно шарам графіту неможливий, оскільки відстань між атомами графіту (0.142 нм) є значно меншою, ніж розміри молекул інтеркалянту, крім того сила взаємодії між атомами вуглецю в шарі є такою, що молекули інтеркалянту не можуть зруйнувати цей зв'язок. Інтеркалянт може переміщуватися перпендикулярно графітовим площинам тільки вздовж границь доменів або через дефекти структури графіту (вакансії, дислокації). Для інтеркальованих сполук на основі структурно досконалих форм графіту, таких, як монокристалічний графіт, високоорієнтований піролітичний графіт, ймовірність міжстадійних переходів є досить малою. Такі сполуки є стабільними, проте, при зміні зовнішніх умов, зокрема, при збільшенні температури, для таких сполук спостерігається деінтеркаляція, тобто вихід інтеркалянту з міжшарового простору графіту. Для інтеркальованих сполук на основі дрібнокристалічних графітів найбільш

ймовірним є саме процес переходу від низьких стадій до більш високих стадій завдяки можливості руху інтеркалянта вздовж границь кристалітів та по дефектам структури, що й спостерігалось експериментально.

Список використаних джерел

1. Bardhan, J.C. Wu and D.D.L. Chung. Phase transitions in Graphite-Halogens // Synth. Met. – 1980. - 2, - p. 109.
2. D. Ghosh and D. D. L. Chung. Two-dimensional structure of bromine intercalated graphite // Mater. Res. Bull – 1983. 18 –N 9. - p.1179-1189.
3. A. R. Kortan, A. Erbil, R. J. Birgeneau, and M. S. Dresselhaus // Commensurate - incommensurate transition in bromine-intercalated graphite: a model strip domain system. Phys. Rev. Lett. – 1982. -49 - No. 19, p.1427-1430.
4. M. S. Dresselhaus and G. Dresselhaus // Intercalation compounds of graphite. Adv. Phys.-1981. 30 - No. 2, p. 139-326.7
5. A. Herold. Synthesis of graphite intercalation compounds. // NATO ASY., Ser.B. - 1987. - 175. - P.3-45.
6. І. В. Овсієнко, Л.Л. Вовченко, Л.Ю. Мацуї. Вуглецеві матеріали та інтеркальовані сполуки на їх основі. К.: Наукова думка. 2009, 129 стор.
7. G. Kirczenow. Domain model of stage order and disorder in intercalation compounds. // Phys.Rev. B. 1985. -31. - N8. - P. 5376-5386.
8. J. R. Dahn, D. C. Dahn, R. R. Haering. Elastic energy and staging in intercalation compounds. // Solid State Communs. – 1982. - 42, N3. - P.179-183.
9. Черныш И.Г., Карпов И.И., Приходько Г.П., Шай В.М. Физико-химические свойства графита и его соединений. // К.: Наукова думка, 1990. - 200 с.

Надійшла до редколегії 12.2009

УДК 537.32

Копань В.С., д.ф.-м. н., проф.
Хуторянська Н.В. пров. інж.
Копань Ю.В., пров. інж.

Термо – е.р.с. вуглецевих порошків

Термоелектрорушійна сила (ТЕРС) вуглецевих порошків (нанотрубки, графіт, активоване вугілля, термічно розширений графіт) була поміряна при 293-330К. ТЕРС вуглецевих порошків більша за ТЕРС полікристалічного графіту завдяки тунелюванню вільних носіїв зарядів з гарячої частинки порошку в холодну.

Ключові слова: термоелектрорушійна сила, порошок, вуглець, нанотрубки.

E-mail: @pulsary.com.ua

В термоелектричних генераторах і холодильниках використовують матеріали, спечені з порошків. Їх термо-е.р.с. E_T досліджена добре, як і E_T кристалів. Відомо [1, 2], що в провідниках діаметром $h < 20$ мкм виникає додаткова E_T , обумовлена розсіянням електронів в при поверхневих шарах. Таке явище називають розмірним ефектом термо-е.р.с. Частинки в порошках обмежені за розмірами в трьох напрямках. Тому в насипних порошкових зразках повинні існувати додаткові фізичні механізми генерування E_T , не характерні для полікристалічних монолітних [3, 4]. Раніше досліджувався вплив технологічних параметрів на E_T вуглецевих насипних порошків [8]. Фізична природа виникнення E_T (наприклад, вплив потенціальних бар'єрів між механічно контактуючими частинками порошку) не вивчалась.

Мета роботи – дослідження фізичної природи явища генерування термо-е.р.с. у вуглецевих насипних порошках.

Методика досліджень

Термо-е.р.с. вимірювали за допомогою потенціометра з малим входним опором (20 Ом) та ціною поділки 10^{-8} В. Еталонна вітка термопари – це циліндр діаметром 5 мм і довжиною 30 мм з високочистого (99,994%) графіту (відносно свинцю $E_T = 4,6$ мкВ/К), кінці якого затиснуті в холодній ($T_{HX} = 20 \pm 0,1^\circ\text{C}$) та гарячій ($T_H = 62 \pm 0,05^\circ\text{C}$) мідних клеммах. Зразок –

V.S. Kopan', Dr of Sci, Prof,
N.V. Hutoryanska, eng.
U.V. Kopan', eng.

The thermoelectric power of carbon powders.

The thermoelectric power (TEP) of carbon powder (nanotubes, graphite, active charcoal, thermoexfoliated, graphite) was measured at 293-330K. The TEP carbon powders is bigger the TEP of the polycrystalline graphite owing to electron's tunnelling from a hot particle to a cold particle of the powder.

Key Words: thermoelectric power, powder, carbon, nanotube.

це циліндр з еластичної пластмаси («кембрик»), наповнений вуглецевим порошком і затиснутий в гарячій та другій холодній ($T_{HX} = T_{LX} \pm 0,0001^\circ\text{C}$) мідних клеммах. Паразитні термо-е.р.с., що виникають в точках електроконтактів вуглецевої термопари з мідними холодними клеммами, не перевершують 10^{-8} В [5, 6].

Були досліджені зразки з нанотрубок, з термічно розширеного графіту (ТРГ), з порошку медичного активованого вугілля типу «Sorbex» та з графітового порошку. Останні виготовлені з того ж графіту, що і еталон, шляхом 100-годинного розмелювання в графітовому тиглі, наповненому графітовими уламками. Продукти розмолу були просіяні на ситах.

Ділянка термопари, що знаходилась між гарячою і двома холодними клеммами, мала довжину 14-15 мм. Цю ділянку стискали спеціальними лещатами, на контактні поверхні яких були приклеєні шари з бальзи та бамбука (для зменшення тепловідводу від зразка). Деформація стискання визначалась як

$$\varepsilon = \frac{d_0 - d_i}{d_0} \cdot 100,$$

де d_0 – початкова і d_i – поточна товщини зразка, що вимірювались за величиною зазору між стискаючими поверхнями лещат.

При навантаженні зразків частинки порошку не деформувались, бо механічні

напруги були малими. Змінювався лише зазор між частинками.

Експериментальні результати та їх обговорення

На рис. 1 - 4 наведено залежності термо-е.р.с. для насипного порошка з вуглецевих нанотрубок (густина – 0,02 г/см³, діаметр $\varnothing=53$ нм), з активованого вугілля - «Sorbex» (густина – 0,012 г/см³), з графітового порошку (густина – 0,01 г/см³, розмір частинки $\varnothing=8-12$ мкм) та з термічно розширеного графіту (ТРГ) (густина – 0,002 г/см³). Одержані наступні закономірності.

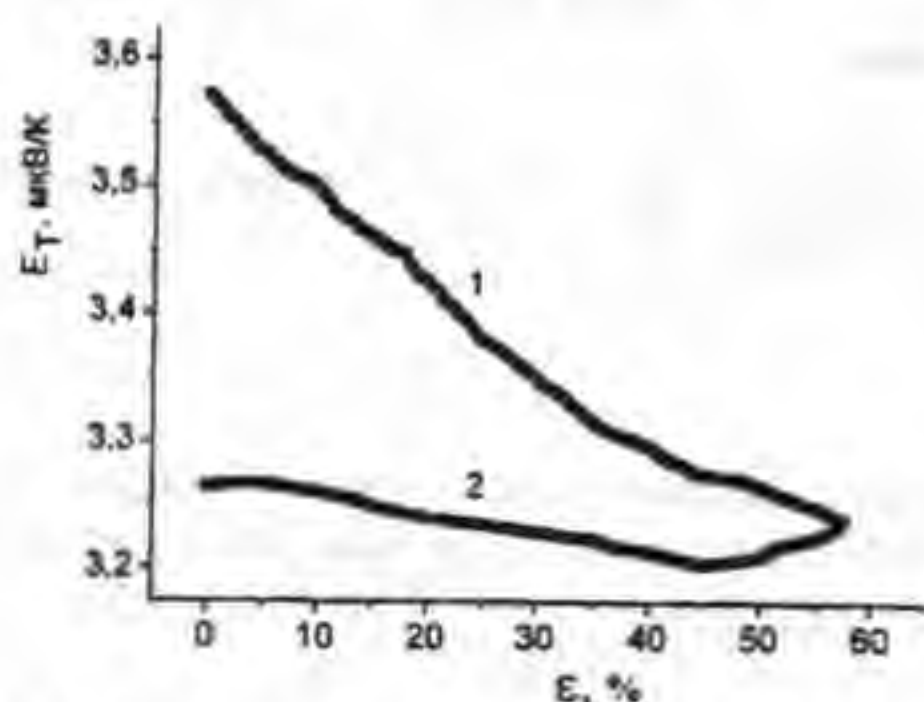


Рис. 1. Залежність термо-е.р.с. E_T від деформації стискання ε порошку з вуглецевих нанотрубок діаметром 53 нм: 1 – вітка стискання, 2 – розвантаження.

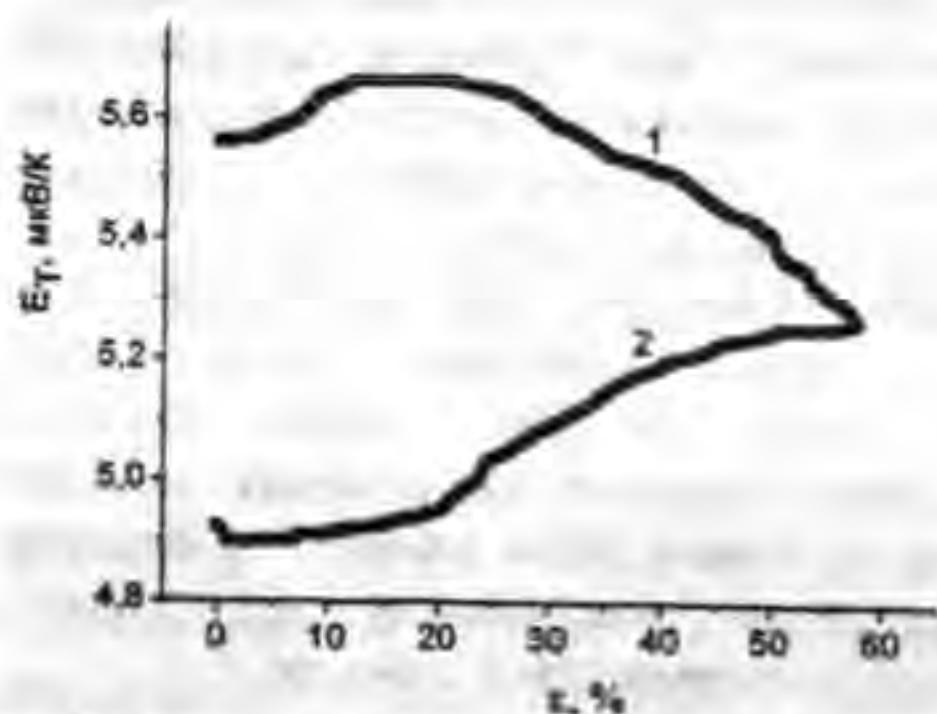


Рис. 2. Залежність термо-е.р.с. E_T від деформації стискання ε порошку з активованого вугілля: 1 – вітка стискання, 2 – розвантаження.

1. При стисканні зразків з насипного порошку зменшуються відстані між його частинками, покращується електроконтакт між ними. Як показано в роботі [4], частина термо-е.р.с., що обумовлена захопленням носіїв заряду фононами, спостерігається у вуглеграфітових

матеріалах при $T \sim 10$ К. При $T > 10$ К термо-е.р.с. структурно недосконалого анізотропного графіту «описується двозонною моделлю зі зміщенням рівня Фермі у валентну зону і визначається в основному дифузійною складовою. Малий розмір кристалітів, повна дезорієнтація кристалітів, наявність великої кількості дислокацій, мікропор, точкових дефектів призводить до того, що більшість електронів осаджується на пастках і не приймає участі у явищі переносу, концентрація дірок значно перевершує концентрацію електронів» [4]. Тоді,

$$E_T = \frac{K_B}{e} * \frac{\pi^2}{3} * \frac{K_B T}{\Delta \varepsilon_\phi}, \quad (1)$$

де K_B - стала Больцмана, e - заряд електрона, $\Delta \varepsilon_\phi$ - зсув рівня Фермі.

Термо-е.р.с., як видно з (1), більша там, де більша температура, тобто, біля гарячої клемки. З цієї причини ми вибрали довжину ділянки зразка, що знаходиться між холодною і гарячою клемками, рівною 14-15 мм. Подальше збільшення цієї довжини не впливає на термо-е.р.с.

В спечених з порошків вуглецевих матеріалах, де розмір кристалітів 20-100 нм, вклад в електроопір і термо-е.р.с. зернограничного розсіювання переважний.

У випадку насипного порошку велику роль відіграють зазори між частинками. Температура Дебая для графітових матеріалів $\Theta \sim 2300$ К, енергія електронів біля рівня Фермі при температурі вимірювання термо-е.р.с. $T \sim 293$ К становить $\sim 0,02$ еВ [8]. Тому можна припустити, що E_T генерується і за рахунок тунелювання носіїв через найменші зазори між частинками. Розглянемо це явище на базі простої задачі тунелювання [7]. Нехай кінетична енергія електрона в гарячій частинці E_K , потенціальна $U=0$, а в холодній U_2 . Якщо ширина потенціального бар'єру (ширина зазору між частинками) ω , а висота U_2 , то величину імовірності проходження електрону в холодну частинку можна знайти, виходячи зі стаціонарного рівняння Шредінгера. Тоді, згідно [7] маємо формулу (2):

$$\varepsilon = \frac{J_3}{J_1} = \frac{16K_1K_3\gamma^2}{(K_1^2 + \gamma^2)(K_3^2 + \gamma^2)} \exp(-2\gamma\omega), \quad (2)$$

де J_1 і J_3 – потоки зарядів, що налітають на потенціальний бар'єр і тунелюють;

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} [2m(U_2 - E_K)]^{1/2}, \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{1}{\hbar} (2mE_K)^{1/2}, \quad (4)$$

де m – маса електрону;

$$K_3 = \frac{1}{\hbar} [2m(E_K - U_3)]^{1/2}. \quad (5)$$

Розглянемо тунелювання через зазор ω між двома частинками, що знаходяться посередині зразка, де $T \approx 313\text{K}$. Енергія електронів $E_K \approx k \cdot 313 = 0.024\text{ eV}$. В твердих тілах $U_T \sim 1\text{ eV}$ [7]. Отже $U_2 \gg E_K$. Тому (3) можна спростити до вигляду (6):

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} (2mU_2)^{1/2}. \quad (6)$$

До зразка не прикладається стороння різниця потенціалів, а контактна різниця потенціалів між однаковими частинками нульова. Тому $U_1 = U_3 = 0$. Підставивши (4), (5) і (6) в (2), одержимо (7).

$$\frac{I_3}{I_1} = 16 \frac{E_K}{U_2} \exp(-2\gamma\omega). \quad (7)$$

Бачимо, що ширина зазору ω між частинками сильно впливає на тунелювання, бо входить в показник експоненти (7).

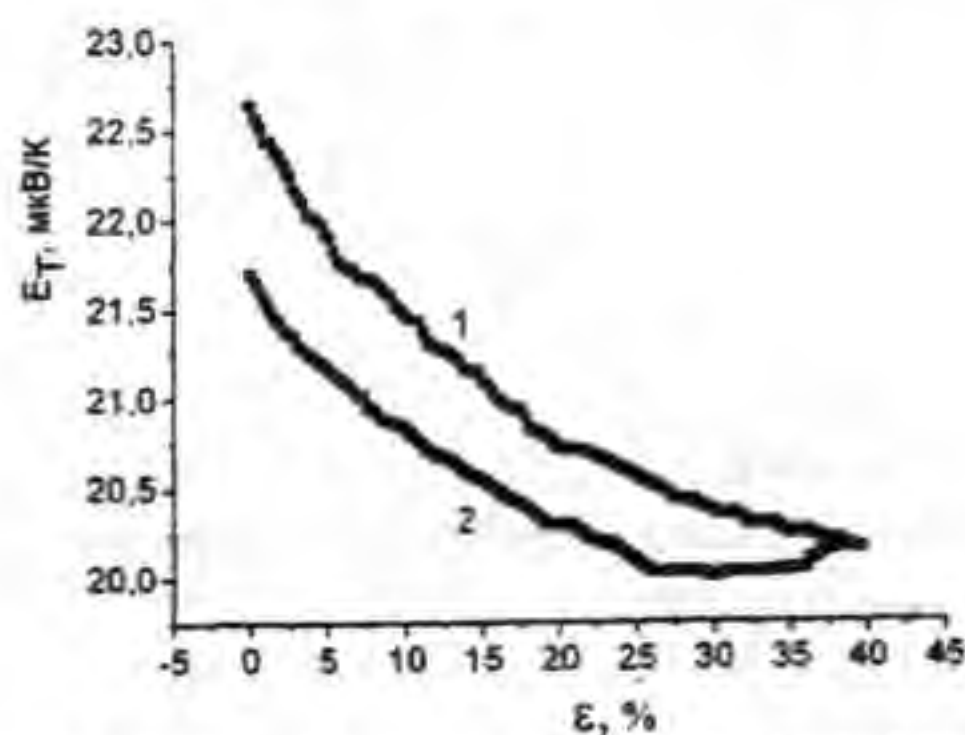


Рис. 3. Залежність термо-е.р.с. E_T від деформації стискання ε для графітового порошку: 1 – вітка стискання, 2 – розвантаження.

Між термо-е.р.с. і електропровідністю (величиною струмів J_1 і J_3) у вуглеграфітових матеріалах пряма пропорційна залежність [3]. Крім того, ширина зазорів між частинками ω зменшується пропорційно деформації стискання

ε . Отже, і $E_T(\varepsilon)$ повинна мати форму експоненти, що і спостерігаємо на досліді (рис.1, 3, 4.1). Для активованого вугілля $E_T(\varepsilon)$ неекспоненційна (рис.2), бо частинки порошку скріплені у сферичні гранули. При стисканні зразка в інтервалі $\varepsilon = 0-30\%$ наближаються гранули одна до одної, що мало впливає на зміну E_T . При $\varepsilon > 30\%$ розпочинається, напевно, деформація гранул, зменшується ω і $E_T(\varepsilon)$. Подібне явище спостерігаємо і для товстих (діаметр 8-9 мм) зразків (рис.4, вітки 3 і 4), в яких велика імовірність утворення конгломератів (аналогів сферичних гранул).

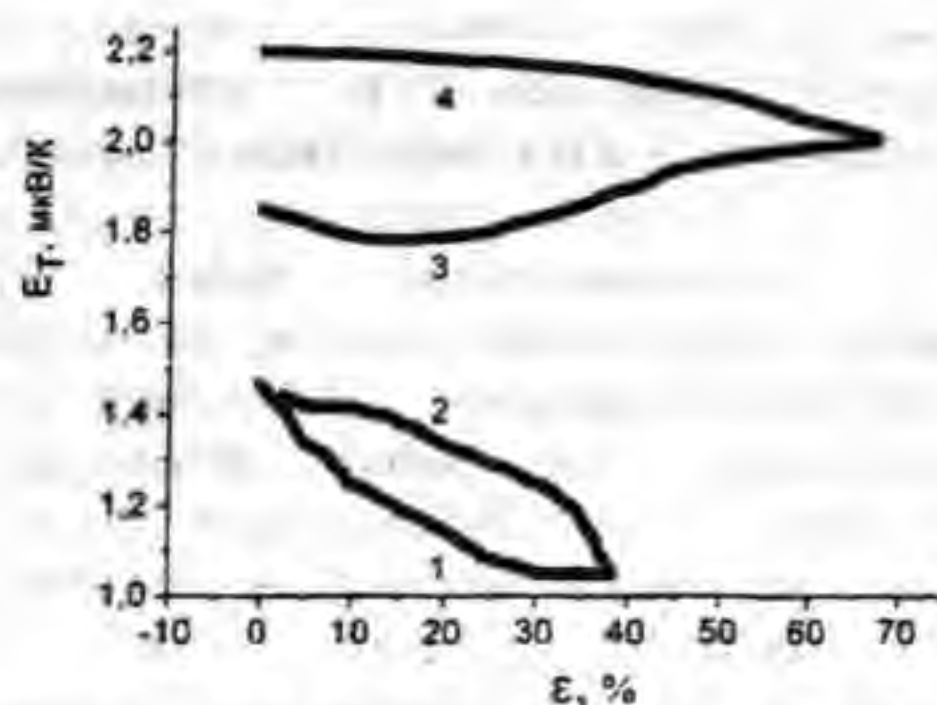


Рис. 4. Залежність термо-е.р.с. E_T від деформації стискання ε для порошка ТРГ: 1, 3 – вітка стискання, 2, 4 – розвантаження.

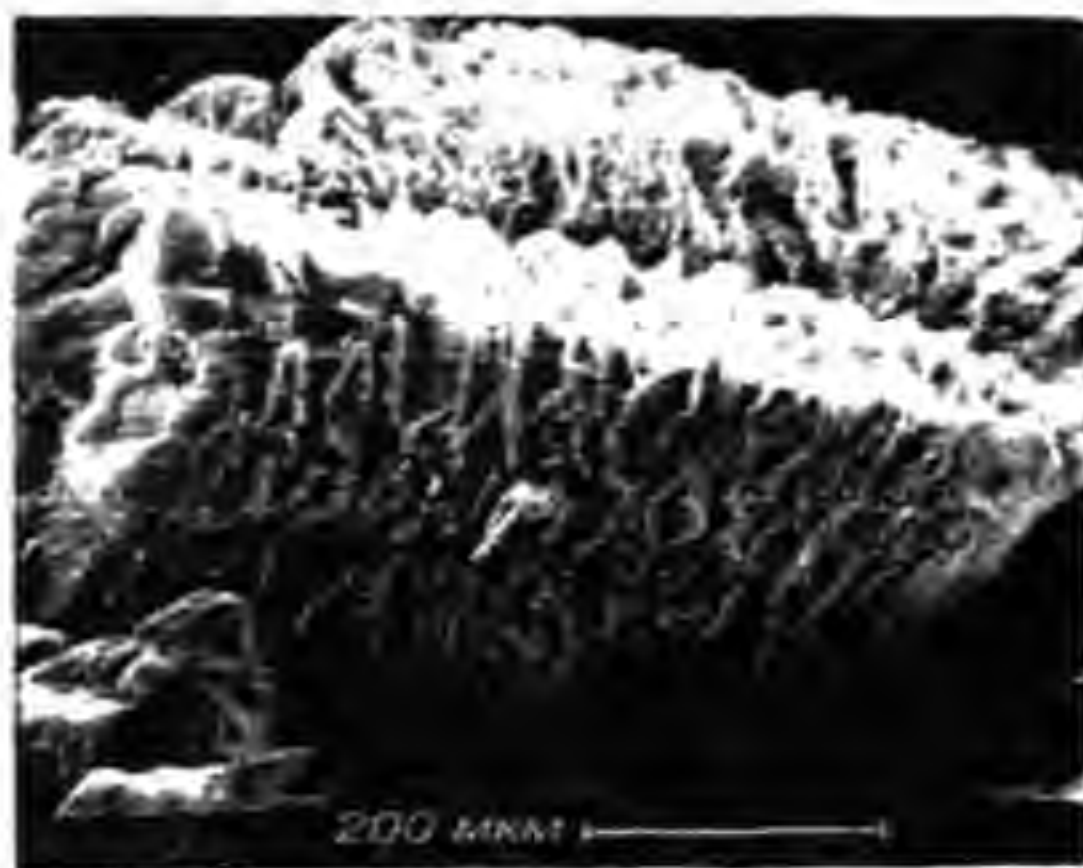


Рис. 5. Мікроструктура частинок ТРГ.

Можливо, що пояснення $E_T(\varepsilon)$ по механізму тунелювання неточне, тоді формально залежності $E_T(\varepsilon)$ можна пояснити так: при стисканні порошку зменшуються ω , порошковий зразок структурно наближається до спеченого з порошків еталону, частина зарядів

долають перешкоди між частинками порошку по стрибковому механізму, $E_T(\epsilon)$ прямує до нуля.

2. При розвантажуванні зразка ТРГ (вітки 2 і 4 на рис.4) термо-е.р.с. $E_T(\epsilon)$ перевернує $E_T(\epsilon)$, що генерується при навантаженні зразка. В трьох інших матеріалах – навпаки. Щоб продеформувати зразок з насипного порошку, необхідно подолати тертя між частинками порошку і пружність пластмасової оболонки, завдяки якій зразок і зберігає свою форму. Частинки порошку ТРГ мають форму дуг, спіралей і т.п. (рис.5 - з магістерської роботи Подоби Я.О. «Електроопір і термо-е.р.с. нанокомпозиційних систем з металевою чи полімерною матрицею та вуглецевими наповнювачами». – КНУ імені Тараса Шевченка – 2007.)

При розвантажуванні зразка ТРГ відбувається розрихлення порошку за рахунок пружної післядії частинок. Тому вітка $E_T(\epsilon)$ розвантажування йде вище вітки $E_T(\epsilon)$ навантаження. У нанотрубок форма балок, у частинок графітового порошку – пластин, у вугілля «Sorbex» - сфер. Тому при розвантажуванні зразків частинки не пружинять. Криві гістерезису мають класичний вигляд (рис.1, 3, 4.1).

Висновки

1. Термопара, одна вітка якої - з графіту, а друга – з вуглецевих порошоків, генерує термо-е.р.с E_T , величина якої тим менша, чим менший зазор між частинками порошку ω .

2. В насипних порошках вуглецевих матеріалів (нанотрубки, терморозширений графіт, активоване вугілля, графіт) генерація E_T здійснюється за рахунок а) дифузії вільних носіїв зарядів у кристалах по механізму, схожому з дифузією електронів в металевих полікристалах ($E_{кр}$); б) за рахунок дифузії зарядів по стрибковому механізму зі змінною довжиною стрибка в аморфних ділянках ($E_{ст}$); тунелювання носіїв заряду через потенціальний бар'єр шириною ω , що розділяє гарячу частинку від холодної. Тому $E_T = aE_{кр} + bE_{ст} + cE_{тун}$, де a , b і c – параметри, що враховують форму частинок порошку, їх орієнтацію, анізотропію тощо.

Список використаних джерел

1. R.P.Huebener. Thermoelectric Size Effect in Pure Gold // Phys.Rev.- 1964. -136A.- P.1740.
2. R.P.Huebener. Electrical Resistivity and Thermoelectric Power of Lattice Defects in Metals // Phys.Rev. -1965. - 138A.- P.803.
3. Шулепов С.В. Физика углеродистых материалов / М.: Металлургия. 1972. -256 с.
4. Мацуї Л.Ю. Структура та електрофізичні властивості вуглецевих матеріалів і інтеркальованих сполук на їх основі. Автореферат докторської дисертації. Київ. 2005.- 40 с.
5. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Вплив магнітного поля і механічних напруг на термо-е.р.с. нікелю // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – №1. – С. 332-338.
6. Борисенко В.Д., Копань В.С., Бессонов В.Б. Термoeлектрическое устройство для контроля неоднородности материалов. АС СССР №750357. Бюллетень изобретений.- 1980.-№27.
7. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение.- М.:Мир.-1974.- 428 с.
8. Лухвич А.А. Влияние дефектов на электрические свойства металлов.- Минск: Наука и техника.-1976.- 102 с.

Надійшла до редколегії 26.01.2010.

УДК 543.423:574

В.В. Пророк, к.ф.-м.н., ст.н.с.

Фактори, що регулюють використання рослиною високо- та низькоселективного каналів надходження цезію та калію.

На основі результатів досліджень у природних умовах встановлено, що якщо рослина не відчуває дефіциту калію, то калій надходить до рослини переважно по низькоселективним каналам. При нестачі калію в рослині вона використовує також високоселективні канали для надходження калію. Основна частина цезію завжди надходить до рослини по низькоселективним каналам.

Ключові слова: йонні канали, калій, цезій-137, ґрунтовий розчин

*E-mail: prorok@univ.kiev.ua

Вступ

Вивчення надходження радіоцезію до рослини відноситься до найбільш актуальних проблем радіоекології. Багато дослідників намагалися встановити зв'язок між концентрацією ^{137}Cs у рослині та параметрами ґрунту, на якому ця рослина виросла (див., наприклад, [1-6]). Після півстолітніх досліджень й дуже багатьох публікацій на цю тему на сьогоднішній день немає надійної методики прогнозування надходження цезію до рослин, що підтверджують останні публікації (див., наприклад, [7]). Встановлені зв'язки є кореляціями, які інколи мають місце, а інколи ні. У роботах [8-10] показано, що концентрація ^{137}Cs у рослинах даного виду, що виросли на даній ділянці з даним типом ґрунту, але у різний час, може інколи відрізнятися у десятки разів. Ці результати чітко показують, що нема однозначного зв'язку між концентрацією ^{137}Cs у рослині та характеристиками ґрунту, на якому виросла ця рослина. Причиною вказаної різниці є коливання з часом параметрів ґрунтового розчину, а також те, що ^{137}Cs та елементи макроживлення рослин у залежності від параметрів ґрунтового розчину, властивостей рослини та інших причин можуть надходити до рослини по різним каналам – або по

V.V. Prorok, senior researcher

The factors regulating the plant cesium and potassium uptake via high- and low affinity channels.

It is installed on the base of the data of investigations at natural conditions that the plant uptake potassium mostly via low affinity channels when the plant has sufficient potassium. The plant uptake potassium via high affinity channels, too when there is plant potassium starvation. The plant always uptake the more part of cesium via low affinity channels.

Key words: ion channels, potassium, cesium-137, soil solution

низькоселективним, або по високоселективним, або по тим та іншим каналам одночасно з різним вкладом кожного каналу. Задача прогнозування надходження цезію до рослини, що росте на даній ділянці з даним типом ґрунту, дуже складна. З нашої точки зору доцільно її розбивати на кілька задач: прогнозування складу ґрунтового розчину на даній ділянці, як функції часу; прогнозування надходження цезію до даної рослини у даній стадії росту в залежності від параметрів ґрунтового розчину, що змінюється з часом; прогнозування надходження цезію до рослини в залежності від властивостей рослини, стадії росту рослини та інших факторів. Це є окремі доволі складні задачі.

Мета цієї роботи – порівняти надходження цезію та калію до рослин у природних умовах та дослідити фактори, що регулюють використання низькоселективних та високоселективних каналів надходження вказаних елементів до рослин.

Моделі регулювання різних каналів надходження цезію та калію до рослини.

Багато дослідників (див., наприклад оглядові роботи [11-12]), намагаються пов'язати надходження цезію до рослини з надходженням калію до неї. На сьогоднішній день вже ніхто не ставить під сумнів існування

щонайменше двох систем (каналів) надходження калію до рослин – low affinity (низькоспоріднена) та high affinity (високоспоріднена). Як правило, надходження калію до рослини відбувається по низькоспорідненому (неселективному) та високоспорідненому (селективному) каналам одночасно. Вважається, що низькоспоріднений канал (канали) переважає при високій концентрації калію у ґрунтовому розчині (вищий за 0,039 – 0,012 мг/см³), а високоспоріднений при низькій (меншій за 0,039 – 0,012 мг/см³) [11-12].

У роботі [13] описані кілька типів мембранних неселективних катіонних каналів. Це канали, що активуються деполяризацією, гіперполяризацією, іонами Ca²⁺, механічною напругою та канали, що нечутливі до електричної напруги.

Згідно [14], Cs може попадати до рослини через вхідні калієві канали, через нечутливі до електричної напруги катіонні канали, через H⁺-насоси, через кальцієві канали. Може виходити у ґрунт через коріння рослини через вихідні калієві канали. У реальних умовах більша частина Cs попадає з ґрунту до клітин кореня через нечутливі до електричної напруги неселективні катіонні канали.

У роботах [15,16] після досліджень *Arabidopsis* були зроблені висновки, що якщо рослина не відчуває дефіциту калію, то більша частина Cs попадає до рослини через нечутливі до електричної напруги катіонні канали. При дефіциті калію у рослині значна частина Cs попадає до рослини через K⁺-транспортер AtHAK5.

У роботі [17] стверджується, що Cs може попадати до рослини тільки через калієву транспортну систему, а саме K-транспортер (H⁺-насос) та калієві канали, що діють при різних зовнішніх концентраціях калію. K-транспортер (H⁺-насос) дає слабку дискримінацію Cs (зовнішня концентрація калію менша 0,3 mM), а при домінуванні калієвих каналів спостерігається сильна дискримінація Cs (велика зовнішня концентрація калію).

Погляди різних дослідників щодо каналів надходження цезію до рослини інколи не узгоджуються.

Результати досліджень та їх обговорення.

Дослідження проводилися на трьох експериментальних ділянках, розташованих у

зоні відчуження Чорнобильської АЕС: ділянка А – дерено-підзолистий середньоопідзолений глеюватий піщаний ґрунт; ділянка В – торф'яно-болотний низинного типу ґрунт; ділянка С – дерено-підзолистий середньоопідзолений ґрунт.

Для дослідження надходження цезію та калію з ґрунту до рослин ми використовували метод змішаного висіву, що описаний у роботах [8-10]. Досліджувалися зразки рослин та відповідного ґрунтового розчину. Для всіх досліджуваних рослин визначалася величина $\Gamma = (^{137}\text{Cs}/\text{K})_p / (^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$, де $(^{137}\text{Cs}/\text{K})_p$ – відношення концентрації ¹³⁷Cs та K у рослині, $(^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$ – відношення концентрації ¹³⁷Cs та K у відповідному ґрунтовому розчині. Легко показати, що величина Γ є також відношенням коефіцієнтів рослина:ґрунтовий розчин для цезію та калію. Концентрація ¹³⁷Cs у зразках визначався за допомогою гама-спектрометра "Капбета" з експериментальною похибкою 10%. Концентрація калію у зразках вимірювався оптичним методом за допомогою ICP-спектрометра "Spectro" з похибкою 0,5%. Більш докладно методика експерименту описана в роботах [8-10].

З отриманих експериментальних результатів, що представлені в роботах [8-10, 18, 19], випливає, що для усіх досліджуваних ґрунтів та рослин у даній стадії росту (до цвітіння) при концентрації розчиненого калію у ґрунті (добуток концентрації K у ґрунтовому розчині на вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту) $C_K > 0,002 - 0,004 \text{ мг/см}^3$ величина Γ змінюється не більше, ніж у кілька разів, тобто концентраційні коефіцієнти рослина:ґрунтовий розчин для цезію та калію приблизно рівні. Таким чином, можна зробити висновок, що при концентрації розчиненого калію у ґрунті $C_K > 0,002 - 0,004 \text{ мг/см}^3$ надходження калію та цезію до рослини, як правило, відбувається по низькоселективним каналам. При концентрації розчиненого калію у ґрунті $C_K < 0,002 - 0,004 \text{ мг/см}^3$ величина Γ різко зменшується – концентраційний коефіцієнт рослина:ґрунтовий розчин для калію стає набагато більшим, ніж для цезію – інколи у 40 - 50 разів. При цьому концентрація K у ґрунтовому розчині практично не змінюється [18]. Концентрація цезію у рослинах при цьому стає у багато разів меншою. Чим більша частина калію надходить до рослини по високоселективному каналу, тим менша концентрація цезію в рослині. Надходження

цезію залишається пропорційним концентрації розчиненого у ґрунті цезію (добутку концентрації цезію у ґрунтовому розчині та вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту), як це було встановлено раніше [8-10]. Цезій рослині не потрібен, тому у неї нема потреби у спеціальному високоселективному цезієвому каналі. Цезій надходить до рослини весь час по тому ж самому низькоселективному каналу (каналам), у той час як для забезпечення себе калієм рослина у цьому випадку ($C_K < 0,002 - 0,004 \text{ мг/см}^3$) використовує також й інший – високоселективний канал. А тому при низькій вологості ґрунту, коли для калію превалює надходження по високоселективному каналу, концентрація ^{137}Cs у рослині набагато нижча, ніж у випадку значного вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту. У нашому випадку добуток концентрації К у ґрунтовому розчині на вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту (концентрація розчиненого калію у ґрунті) набагато точніше вказує на момент початку переважування того чи іншого каналу, ніж концентрація калію у ґрунтовому розчині, як стверджується у [11,12,17]. Інколи переважає надходження К по високоселективному каналу при доволі високій концентрації К у ґрунтовому розчині (але при малій вологості ґрунту), а інколи переважає надходження К по високоселективному каналу при доволі низькій концентрації К у ґрунтовому розчині (але при великій вологості ґрунту). Звичайно ж, концентрація калію у ґрунтовому розчині та надходження калію до рослини завжди якимось чином зв'язані. Але ж використання високоселективного чи низькоселективного каналу визначає все-таки потреба рослини у калії. Без сумніву, ці потреби різні у різних видів рослин та у різних фазах росту даної рослини. Ми вважаємо, що превалювання високоселективного або низькоселективного каналу регулюється самою рослиною виходячи з її потреб у калії у даний момент, а не концентрацією калію у ґрунтовому розчині. Якщо рослині недостатньо калію, який надходить по низькоселективному каналу, вона більш активно використовує високоселективний канал. Потреби рослини в калії зумовлені вмістом калію у рослині, видом рослини, її стадією росту та іншими факторами.

Існує кілька каналів надходження калію та цезію до рослин [11-13]. Ми не можемо їх

однозначно ідентифікувати за результатами наших досліджень. Але ми можемо встановити, який канал надходження калію-високоселективний чи низькоселективний, переважає у кожному конкретному випадку. Скоріше за все, високоселективні калієві канали, які використовуються досліджуваними рослинами при дефіциті калію, є H^+ -насосами.

Результати наших досліджень ставлять під сумнів твердження [15], що при превалюванні H^+ -насосів значна частина цезію надходить до рослини через них, і зовсім суперечать [17], що К-транспортер (H^+ -насос) дає слабку дискримінацію Cs (зовнішня концентрація калію менша 0,3 mM), а при домінуванні калієвих каналів спостерігається сильна дискримінація Cs (велика зовнішня концентрація калію).

Спробуємо пояснити, чому момент початку превалювання високоселективного чи низькоселективного каналу надходження калію до рослини залежить від вмісту вологи у ґрунті. У польових умовах у ґрунті пори повністю або частково заповнені ґрунтовим розчином. Чим більш пористий ґрунт, тим більше ґрунтового розчину він може поглинути. Надходження елементів живлення рослин відбувається через епідерму кореня (див., наприклад, [20]). Чим більший вміст ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту, тим більша площа епідерми кореня контактує з ґрунтовим розчином. Таким чином, з даних, що наведені в роботах [8-10, 18, 19], можна побачити, що чим більша площа епідерми контактує з ґрунтовим розчином, тим більше калію та цезію надходить до рослини по неселективному пасивному каналу. У деякому наближенні ці величини приблизно пропорційні. А тому чим більший вміст ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту, тим при меншій концентрації калію у ґрунтовому розчині рослина починає відчувати дефіцит калію й починає використовувати високоселективний канал для переходу калію до рослини.

На відміну від калію, для всіх досліджуваних ділянок та видів рослин ^{137}Cs надходить до рослин завжди по низькоселективному каналу, навіть при дуже низькій вологості ґрунту.

Треба також зазначити, що якщо пори у ґрунті заповнені ґрунтовим розчином не повністю, то тільки частина розчинних речовин, що містять даний ґрунт, знаходиться у розчиненому стані. Тобто, не всі розчинні

речовини є у даний момент розчиненими та легкодоступними для рослин. Це стосується не тільки калію та цезію, а й усіх інших речовин.

Висновки

Рослина регулює використання високоселективного та низькоселективного каналів надходження калію, виходячи з своїх потреб у калії. При наших дослідженнях більша частина цезію завжди переходила до рослини по низькоселективному каналу.

Список використаних джерел

1. Прістер Б.С., Бізольд Г., Девіль-Ковелін Ж. Способ комплексной оценки свойств почвы для прогнозирования накопления радионуклидов растениями. // Радиационная биология. Радиоэкология. 2003, Т.43, №6, с.688-696.
2. Erik Smolders, Karen van den Brande, and Roel Merckx. Concentration of ^{137}Cs and K in Soil Solution Predict the plant availability of ^{137}Cs in Soils. // Environ. Sci. Technol., 1997, 31, 3432-3438
3. Johanson K.J., Dolgilevich M.I., Vasenkov G.I. The determining behavior of the radiocesium at the system soil-plant functions of the organic substance. // Bulletin of the Agriculture Science, March 1997, - p.52 – 54.
4. Frissel M.J. et al. Generic values for soil-to-plant transfer factors of radiocesium. // J. Environ. Radioact. 2002. - v.58.- p.113-128
5. Коноплев А.В., Коноплева И.В. Параметризация перехода ^{137}Cs из почвы в растения на основе ключевых почвенных характеристик. // Радиационная биология. Радиоэкология. -1999. -39. -№.4. С.455-461.
6. Ehlken S., Kirchner G. Environmental processes affecting plant root uptake of radioactive trace elements and variability of transfer factor data: a review. // J. Environ. Radioact., 2002, 58, P.97 - 112.
7. Nadia Waegeneers, Teresa Sauras-Year, Yves Thiry, Ramón Vallejo, Erik Smolders, Chantal Madoz-Escande, and François Bréchignac, Plant uptake of radiocesium from artificially contaminated soil monoliths covering major European soil types // Journal of Environmental Radioactivity, v.100, Issue 6, June 2009, Pages 439-444.
8. Пророк В.В., Мэсон К.Ф.В., Тимофеев С.Ф. та ін. Залежність вмісту ^{137}Cs у рослині від параметрів ґрунту // Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат., 2004. - Вип. 3. - С. 407 - 416.
9. Пророк В.В., Булавін Л.А., Агеев В. А., та ін. Закономірності надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини.// Ядерна фізика та енергетика. 2007.-19, №1.-С.115 – 122
10. Prorok V.V., Mason C.F.V., Ageyev V.A., та ін. The Transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants.//Proceeding of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006. -Tucson, 2006. -WM06/66.html
11. Maathuis, F.J.M., Sanders, D. Mechanisms of potassium absorption by higher plant roots.// Physiol. Plant. 1996. 96, P.158 – 168.
12. Maathuis, F.J.M., Ichida, A.M., Sanders, D et.al. Roles of High Plant K⁺ Channels. // Plant Physiol. 1997. 114, P.1141 - 1149.
13. Vadim Demidchik, Romola Jane Davenport and Mark Testerio Nonselective Cation Channels in Plants. // Annu.Rev.Plant Biol.2002, , 53; 67-107
14. Philip J.White and Martin R. Broadley. Mechanisms of caesium uptake by plants. // New Phytol.(2000), 147, 241-256.
15. Corrina R Hampton, Martin R. Droadlug, Philip J.White Short review: the mechanisms of radiocaesium uptake by Arabidopsis roots.// Nukleonika 2005; 50 (Supplement 1); S3-S8.
16. Zhi Qi, Corrina R Hampton, Ryoung Shin, Dronwyn J. Barkla, Philip J.White, and Daniel P. Schachtman. The high affinity K⁺ - transporter AtHAK5 plays a physiological role in planta at very low K⁺ concentrations and provides a caesium uptake pathway in Arabidopsis. // J.Exp.Bot., v.59, No.3, p.595-607, 2008.
17. Y-G. Zhu and E.Smolders. Plant uptake of radiocaesium: a review of mechanisms, regulation and application. // J.Exp.Bot.v.51, No.351, p.1635-1645, 2000.
18. Пророк В.В. Механізми надходження калію та цезію до рослини. // Вісник Київського ун-ту. Сер фіз.-мат. науки. 2007.-Вип.4, с.365-368
19. Пророк В.В. Пояснення закономірностей надходження ^{137}Cs та калію до рослини у природних умовах. // Вісник Київського ун-ту. Сер фіз.-мат. науки. 2009.-Вип.1, с.271-274
20. Рейан П., Эворт Р., Айхорн С. Современная ботаника, т.2, Москва, «Мир», 344с.

Надійшла до редколегії 17.12.09 р.

УДК 532.133/14:543.45

Руденко О.П., д.ф.-м.н., проф.,
Хорольський* О.В., асп.,
Гетало А.М., асп.,
Сасенко О.В., к.ф.-м.н., доц.

Реологічні та оптичні властивості 2,2,3,3-тетрафторпропанолу-1

На основі експериментальних даних про температурну залежність густини, в'язкості і показника заломлення у роботі досліджується вплив заміщення атомів водню атомами фтору в молекулі пропілового спирту на структуру асоційованої рідини і термодинамічні параметри в'язкої течії.

Ключові слова: тетрафторпропанол, в'язка течія, молекулярна рефракція, просторова структура, стеричний ефект.

*E-mail: hyperpotential@gmail.com

Вступ

Фторорганічні сполуки знайшли широке застосування у промисловості як теплоносії та холодильні агенти, у сільському господарстві як пестициди і барвники, у медицині як анестетики і кровозамінники та продовжують опановувати нові сфери використання, виступаючи проміжними продуктами в органічному синтезі та мономерами для отримання полімерних матеріалів. Тому розширення знань про їх властивості обумовлює практичну цінність досліджень фізичних параметрів фторзаміщених речовин [1,2].

Значний інтерес для фізики конденсованого стану мають фундаментальні аспекти вивчення галогенопохідних сполук. Тому мета нашої роботи полягає у з'ясуванні наслідків заміщення у молекулі пропанолу бічних атомів водню на масивніші атоми галогену: визначити вплив введення до молекули асоційованої рідини атомів фтору на її оптичні та реологічні властивості, а також на термодинамічні характеристики в'язкої течії.

Об'єктами дослідження є пропанол-1 ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$) та 2,2,3,3-тетрафторпропанол-1 ($\text{HCF}_2\text{CF}_2\text{CH}_2\text{OH}$), який використовується у якості проміжного продукту у фармакології та при виготовленні пестицидів, електропровідної добавки при електрохімічному фторуванні, специфічного розчинника тощо. Довідкову інформацію можна знайти у роботах [3] і [4], але

O.P. Rudenko, Dr. Sci., Prof.,
O.V. Khorolskiy, PhD stud.,
A.M. Getalo, PhD stud.,
O.V. Saienko, PhD, Assoc. Prof.

Reological and optical properties of 2,2,3,3-tetrafluoro-1-propanol

Based on experimental data about temperature dependence of density, viscosity and index of refraction, the influence of the substitution of the hydrogen atoms by the fluorine atoms in the propanol molecule on the structure of the associated liquid and thermodynamics parameters of viscous flow was investigated.

Key words: 2,2,3,3-tetrafluoro-1-propanol, viscous flow, molecular refraction, spatial structure, steric effect.

фізико-хімічні властивості цієї сполуки й досі вивчені недостатньо.

Методика і результати експериментальних вимірювань

Вимірювання реологічних параметрів рідин проводилось у температурному інтервалі 293–363 К, оптичних характеристик – 293–333 К. Густина ρ визначалась пікнометричним методом з похибкою 0.05%, кінематична в'язкість ν досліджувалась за допомогою капілярного віскозиметра, похибка становила 2%. Показник заломлення n_D вимірювали на рефрактометрі ИРФ-454 Б з похибкою $2 \cdot 10^{-4}$ згідно методики, описаної в [5].

Значення температурної залежності експериментальних величин (ρ і n_D) і розрахованих за формулами (1) і (8) зсувної в'язкості (η_s) та молекулярної рефракції (R_D) подані у таблиці 1. Температурна залежність коефіцієнту зсувної в'язкості представлена на рисунку 1.

Із підвищенням температури спостерігається незначне (~ 0.3 см³/моль) зростання значень молекулярної рефракції.

Заміна атомів водню атомами фтору у молекулі пропанолу спричиняє збільшення молекулярної рефракції порядку 1%.

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

Таблиця 1

Температурні залежності густини, зсувної в'язкості, показника заломлення і молекулярної рефракції для пропілового та тетрафторпропілового спиртів

T , K	ρ , кг/м ³	$\eta_s \cdot 10^3$, Па·с	n_D	$R_D \cdot 10^6$, м ³ /моль	ρ , кг/м ³	$\eta_s \cdot 10^3$, Па·с	n_D	$R_D \cdot 10^6$, м ³ /моль
Пропанол-1 $M = 60.0953 \cdot 10^{-3}$ кг/моль					2,2,3,3-Тетрафторпропанол-1 $M = 132.0572 \cdot 10^{-3}$ кг/моль			
293	803.9	2.223	1.3849	17.51	1485.3	5.777	1.3214	17.71
303	795.3	1.739	1.3810	17.54	1468.6	4.190	1.3177	17.72
313	787.0	1.394	1.3772	17.57	1451.9	3.099	1.3141	17.74
323	778.1	1.120	1.3733	17.61	1435.2	2.333	1.3104	17.75
333	769.4	0.920	1.3694	17.64	1418.5	1.785	1.3067	17.76
343	760.6	0.758			1401.8	1.386		
353	751.7	0.632			1385.1	1.091		
363	742.1	0.526			1368.4	0.870		

Аналізуючи експериментальні дані, можемо констатувати, що із заміною чотирьох атомів водню на атоми фтору спостерігається зростання густини рідини на 84.5% і зменшення показника заломлення на 4.6%. У рамках температурних інтервалів залежності $\rho(T)$ і $n_D(T)$ носять лінійний характер і з підвищенням температури монотонно спадають.

Графік залежності зсувної в'язкості тетрафторпропанолу у дослідженому діапазоні температур має значно більшу кривизну в порівнянні з нефторованим спиртом, і якщо значення η_s на початку температурного інтервалу відрізнялись у 2.6 рази, то на кінці – лише у 1.7 рази. Відмітимо також, що кінематичні в'язкості досліджених рідин приймають однакові значення при температурі 342 ± 0.5 К.

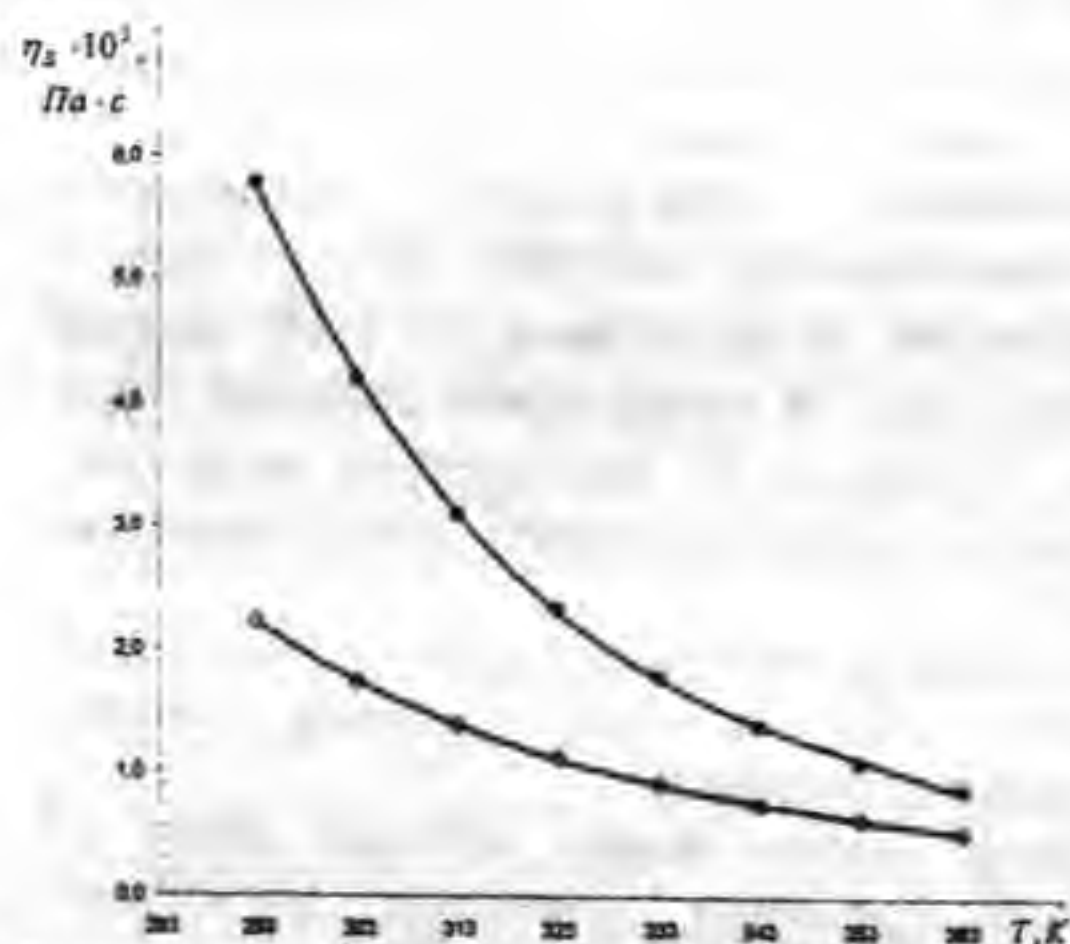


Рис. 1. Температурна залежність зсувної в'язкості для пропанолу (—○—) і тетрафторпропанолу (—●—)

Теоретична частина

Для дослідження механізму в'язкої течії рідин нас цікавила теоретична модель, яка б давала можливість оцінити зміни термодинамічних параметрів і дозволяла зробити однозначні висновки щодо структурних особливостей і міжмолекулярної взаємодії у чистому і фторзаміщеному спирті.

Зсувну в'язкість обчислювали за відомою формулою з експериментальних даних:

$$\eta_s = \rho \nu. \quad (1)$$

Залежності $\ln \nu = f(T^{-1})$ носять лінійний характер, тому правомірно застосувати для опису температурної залежності зсувної в'язкості теорію Френкеля-Ейрінга [6,7], згідно якої:

$$\eta_s = \frac{h N_A}{\chi V_\mu} \exp\left(\frac{\Delta G_\eta^\ddagger}{RT}\right) = \frac{h N_A}{\chi V_\mu} \exp\left(\frac{\Delta H_\eta^\ddagger - T \Delta S_\eta^\ddagger}{RT}\right), \quad (2)$$

де N_A – число Авогадро, h – стала Планка, χ – трансмісійний коефіцієнт, V_μ – мольний об'єм, R – газова стала, $\Delta G_\eta^\ddagger$, $\Delta S_\eta^\ddagger$, $\Delta H_\eta^\ddagger$ – вільна ентальпія, ентропія і ентальпія активації в'язкої течії. У межах похибок експерименту рівняння (2) адекватно описує залежність, зображену на рис. 1.

Використавши отримані нами дані температурної залежності коефіцієнта кінематичної в'язкості ν досліджуваних об'єктів, ми розрахували ентальпію активації в'язкої течії $\Delta H_\eta^\ddagger$ за допомогою співвідношення:

$$\Delta H_\eta^\ddagger = R \frac{\partial(\ln \nu)}{\partial(T^{-1})}. \quad (3)$$

Величину $\Delta S_\eta^\ddagger$ розрахуємо за формулою:

$$\Delta S_{\eta}^* = \frac{\Delta H_{\eta}^*}{T_k^*}, \quad (4)$$

де T_k^* – температура коливного центру активного комплексу, за яку приймемо температуру плавлення, оскільки при плавленні відбувається різка зміна механізму реакцій розриву і перерозподілу міжмолекулярних зв'язків між молекулами в активному комплексі [8].

При зсувних деформаціях протікають процеси, які прийнято вважати мономолекулярними реакціями розриву і утворення міжмолекулярних зв'язків між асоціатами динамічної системи, якою є об'єм будь-якої рідини. Припустимо, що активні комплекси виникають у результаті нормальних реакцій, які є лінійною комбінацією множини елементарних реакцій розриву міжмолекулярних зв'язків між асоціатами та комплексами у досліджуваних рідинах [8].

Для розрахунку флуктуації поточної коливної енергії активного комплексу ΔE^* , необхідної для переходу його в нестійкий стан, внаслідок чого відбувається розрив зв'язків, запишемо наступне:

$$\chi = \frac{1}{2} \exp \left[- \left(\frac{\Delta E^*}{RT_k^*} \right)^2 \right], \quad (5)$$

причому RT_k^* – стандартна флуктуація енергії реакційного центру активного комплексу, коливна температура якого T_k^* [9].

Розрахунок часу релаксації зсувної в'язкості проводився за формулою:

$$\tau_{\eta} = \frac{1}{4\pi\chi} \frac{h}{kT} \exp \left(\frac{\Delta G_{\eta}^*}{RT} \right), \quad (6)$$

тут k – стала Больцмана.

Для виявлення особливостей структури досліджуваних сполук за допомогою молекулярної рефракції необхідно мати дані про склад і молекулярну масу речовини. Ця величина прямо пропорційна поляризації молекул і має властивості адитивності, тому її можна розрахувати додаванням ряду рефракційних констант R_i складових, що входять в молекулу (атоми і їх групи, одиничні та кратні зв'язки, кільця тощо). Розрахунок прогнозованої молекулярної рефракції R_{add} проводять за атомними рефракціями, груповими рефракціями, рефракціями зв'язків і структурними інкрементами, використовуючи табличні дані.

Для розрахунку молекулярної рефракції за експериментально отриманими величинами використано формулу Лорентц-Лоренца:

$$R_D = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{M}{\rho}, \quad (7)$$

де n – показник заломлення, M – молекулярна маса, ρ – густина.

Розбіжність між експериментальною R_D і адитивною R_{add} величинами молекулярної рефракції називається екзальтацією молекулярної рефракції. Основними причинами екзальтації, окрім таких факторів як похибки вимірювання і наближений характер адитивних констант, є кратні зв'язки, розгалуження скелету, просторові конформації молекул. Величина екзальтації швидко зростає зі збільшенням довжини молекул та молекулярної маси досліджуваної речовини. Згідно [5] умова $R_D \cong R_{add}$ означає високу ймовірність запропонованої брутто-формули і структури речовини, якщо ж значення R_D перевищує значення R_{add} більше, ніж на $0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ – це може свідчити про неправильність зроблених припущень відносно будови і складу речовини або про структурно-просторові особливості молекул.

Обговорення результатів

Серед усіх галогенів фтор має найменший вандерваальсівський радіус атома (1,35 Å), близький до радіусу атома водню (1,2 Å) [9]. Тому при заміщенні чотирьох атомів водню на атоми фтору розміри молекули змінюються незначно, а маса молекули зростає більше, ніж удвічі. При цьому зазнають значних змін параметри міжмолекулярної взаємодії: зв'язки між молекулами типу $C-H \cdots H$ у пропанолі переходять у зв'язки $C-F \cdots H$ у тетрафторпропанолі.

Використавши формули (2)–(7), були розраховані термодинамічні параметри в'язкої течії досліджуваних рідин (табл. 2). Встановлено, що при заміні в молекулі пропілового спирту чотирьох бічних атомів водню на атоми фтору відбувається зростання величини ентальпії активації в'язкої течії майже на третину. Це можна пояснити, виходячи з припущення, що для підтримки енергії збудження в активному комплексі на необхідному рівні потрібно розірвати більшу кількість зв'язків: флуктуація поточної коливальної енергії активного комплексу ΔE^* зростає приблизно на 47%. Зростання часу релаксації зсувної в'язкості у три рази можна пов'язати зі збільшенням об'єму й особливо маси асоціатів, які приймають участь у в'язкій течії.

Таблиця 2
Термодинамічні характеристики в'язкої течії
пропанолу і тетрафторпропанолу

Величина	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$	$\text{HCF}_2\text{CF}_2\text{CH}_2\text{OH}$
T_g, K	148.76	258.15
$\Delta H_g^*,$ кДж/моль	17.22	22.89
$\Delta S_g^*,$ Дж/моль·К	115.8	88.6
$\Delta E^*,$ кДж/моль	4.9	7.2
$\tau_g \cdot 10^{11},$ с	6.8	21.1

Звернемо увагу на те, що експериментальні молекулярні рефракції пропанолу і тетрафторпропанолу, розраховані за формулою (7), відрізняються незначною мірою, що свідчить про схожість структур цих спиртів. Для пропільового спирту значення експериментальної та розрахункової молекулярної рефракції співпадають у межах похибки експерименту, у той час як для тетрафторпропанолу експериментальне значення значно відрізняється від розрахованих значень за таблицями Фогеля [5] методами атомної рефракції та рефракції зв'язків. Це свідчить про наявність особливостей структури, які спричиняють екзальтацію молекулярної рефракції. Згідно досліджень [2] можна припустити присутність у молекулі тетрафторпропанолу стеричного ефекту галогена-замісника, що спричиняє відштовхування між сусідніми атомами фтору. Як правило, проявами стеричного ефекту є зміна довжини зв'язків і валентного кута між карбоновим скелетом і галогеном, що викликає напруження внутрішньомолекулярної структури та її зміну (рис. 2).

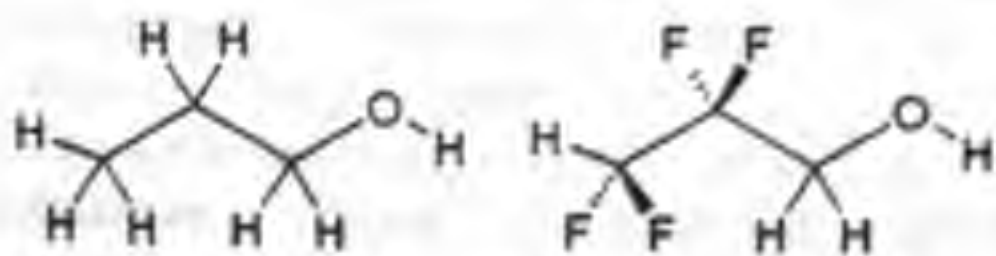


Рис. 2. Зигзагоподібна структура молекули пропанолу (зліва) і спіральне розташування атомів фтору в молекулі тетрафторпропанолу (справа) [2].

Стеричні перешкоди атома-замісника можуть впливати на утворення водневих зв'язків і суттєво знижувати кислотні властивості спиртів. Причиною цьому є негативний індуктивний ефект ($-I$ -ефект), властивий сильному електронно-акцепторному заміснику фтору [10].

Таким чином, проведені реологічні та рефрактометричні дослідження пропанолу і тетрафторпропанолу показують, що при заміщенні чотирьох бічних атомів водню атомами фтору, крім зростання маси і об'єму молекули тетрафторпропанолу, вірогідна зміна її просторової структури. Зростання активаційних параметрів в'язкої течії свідчить про зміну характеру і енергії міжмолекулярних зв'язків при відсутності принципових відмінностей у механізмах в'язкої течії досліджуваних рідин.

Список використаних джерел

1. Ягупольский Л.М. Ароматические и гетероциклические соединения с фторсодержащими заместителями / Ягупольский Л.М. – К.: Наукова думка, 1988. – 316 с.
2. Kirsch P. Modern Fluoroorganic Chemistry: Synthesis, Reactivity, Applications / Kirsch P. – Wiley, Germany, 2004. – 320 p.
3. CRC Handbook of Chemistry and Physics. Internet Version 2007. (87th Edition) / [David R. Lide, ed.]. – Taylor and Francis, Boca Raton, FL, 2007. – 2388 p.
4. Максимов Б.Н. Промышленные фторорганические продукты: Справочник / Максимов Б.Н. – Л.: Химия, 1990. – 462 с.
5. Иоффе Б.В. Рефрактометрические методы химии / Иоффе Б.В. – Л.: Химия, 1983. – 352 с.
6. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей / Френкель Я.И. – Л.: Наука, 1975. – 375 с.
7. Глестон С. Теория абсолютных скоростей реакций / Глестон С., Лейдер К., Эйринг Г. – М.: ИЛ, 1948. – 581 с.
8. Шахпаронов М.И. Механизмы быстрых процессов в жидкостях / Шахпаронов М.И. – М.: Высшая школа, 1985. – 352 с.
9. Новое в технологии соединений фтора: пер. с японск. / [под ред. Н. Исиавы]. – М.: Мир, 1984. – 592 с.
10. Ведерников А.Н. Кислотность и основность органических соединений в растворах и газовой фазе / А.Н. Ведерников // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – №8. – С. 47-53.

Надійшла до редколегії 12.12.2009

УДК 53.086, 535.326

Терентьева Ю.Г., к. ф.-м.н., доц.,
Стукаленко В.В., к. ф.-м.н., м.н.с.

Метод фазового контрасту

Роботу фазоконтрастного мікроскопа розглянуто з двох точок зору – з використанням зон Френеля, а також представленням фазоконтрастного мікроскопа як складного амплітудно-фазового фільтра просторових частот мікрооб'єкта. Зроблено висновок про фізичну суть перетворення модульованого за фазою сигналу – вихідний сигнал з амплітудною модуляцією пропорційний першій похідній функції фазової модуляції, а не самій фазовій функції, як це вважалося до тепер.

Ключові слова: фазовий контраст, амплітудно-фазовий фільтр, фазоконтрастний мікроскоп, спектр просторового сигналу.

*E-mail: stu@univ.kiev.ua

Ідею перетворення фазової модуляції в амплітудну запропонував в 1934 році Фріц Церніке (автору винаходу присуджена Нобелівська премія, 1953 р.), з того часу фазоконтрастний метод знайшов широке застосування в оптичній мікроскопії і став програмним питанням. На жаль, висвітлення його у вузівських підручниках (див. наприклад, [1-4]) дещо поверхове, що спотворює суть явища¹. Жодний з них не пояснює, звідки береться різниця фаз між прямою і дифрагуючою хвилями саме 90° (у такого авторитета як Р. В. Поль [3] навіть зазначається „приблизно 90° “), а кінцевий висновок („фазова модуляція перетворюється на амплітудну“) не є правильним, що для навчальної літератури неприпустимо. В тих випадках, коли представляють затриману хвилю сумою двох, не пояснюється, чому вони просторово розділені. В результаті все пояснення виглядає штучним, непереконливим. В [2, 3] розглядається локальне зміщення фази, про наявність дифракції світла на

¹ Навіть в книзі М. Франсона [5], яка є класичною з цієї тематики, стверджується, що в ФКМ потерігаємо об'єкт („бактерію“), хоча це суперечить навіть тим фотографіям, які наведено в книзі.

Yu.G.Terentyeva, PhD, Ass. Prof.,
V.V.Stukalenko, PhD, Sci. Res.
Yu.G.Terentyeva, PhD, Ass. Prof.,
V.V.Stukalenko, PhD, Sci. Res.

The Phase Contrast Method

We reviewed the work of phase contrast microscope from the two standpoints - using the method of Fresnel zones and using the Fourier transform. After that, we represented phase-contrast microscope as a complicated amplitude-phase filter of space frequencies of microsample. The conclusions were made about the physical nature of the transformation of phase modulated signal – the output of amplitude-modulated signal is proportional to the first derivative of phase modulation, but not the phase function, as was considered before.

Key Words: phase contrast, amplitude-phase filter, phase-contrast microscope, spectrum of space signal.

мікрооб'єкті взагалі не йдеться. Інше типове пояснення, наприклад, в [1] мовою оригіналу виглядає так. "При помощи указанного отличия в показателе преломления часть света испытывает рассеяние (дифракцию), давая отклоненную волну D , а большая часть S пройдет по первоначальному направлению, но испытает по сравнению с волной D некоторое смещение по фазе, например, запаздывание, если показатель преломления этого участка больше, чем показатель преломления окружающей среды". Далі це „некоторое“ представляється сумою, один з членів якої зсунутий на 90° і рухається чомусь в іншому напрямку. По-перше, тут відсутня логіка. По-друге, оскільки „некоторое“ може бути будь-яким, на кожне конкретне „смещение“ потрібен свій конкретний фазовий фільтр (а при зсуві на 180° чи 360° не потрібен ніякий), що протирічить практиці. Неприйнятність цього пояснення в тому, що, оскільки, як видно з рис.1, не існує ніякої „трохи зсунутої“ хвилі, є дві – пряма S та дифрагуюча C , між ними завжди є стабільна різниця фаз 90° .

Дифракційна теорія Аббе задовільно описувала всі явища у мікроскопі, проте дещо спрощене пояснення роботи фазоконтрастного мікроскопа (ФКМ), яке перекочуючи з книги в

книгу, ще й досі зустрічається у літературі, залишає більше питань, ніж відповідей. Разом з тим роботу ФКМ можна пояснити навіть використовуючи метод зон Френеля.

Нехай світло паралельним пучком S падає на однорідне середовище із обмеженою апертурою A , на якому є мала, майже точкова флуктуація $\varphi(x)$ показника заломлення, показана на пластинці у вигляді малої області B (рис. 1). Плоска хвиля S , дійшовши до області B , частково дифрагує у вигляді сферичної хвилі C . Таким чином, у деяку віддалену точку D , розташовану на осі, дійдуть дві хвилі: сферична хвиля C' , яка

отримуємо рівномірно освітлене поле на екрані E , і це означає (відмітимо попутно), що у будь-якій точці x_1 екрану E різниця фаз інтерферуючих хвиль строго дорівнює $\pi/2$.

Другий суттєвий момент явища – інтерференція когерентних хвиль відбувається у спільній області перекриття їх. Цей очевидний факт зводить нанівещ існуючі популярні пояснення роботи ФКМ. З тих пояснень виходить, що у ФКМ видима картина являє собою амплітудну модуляцію, яка однозначно пропорційна фазовій, однак це не так.

Очевидно, щоб суттєво змінити розподіл

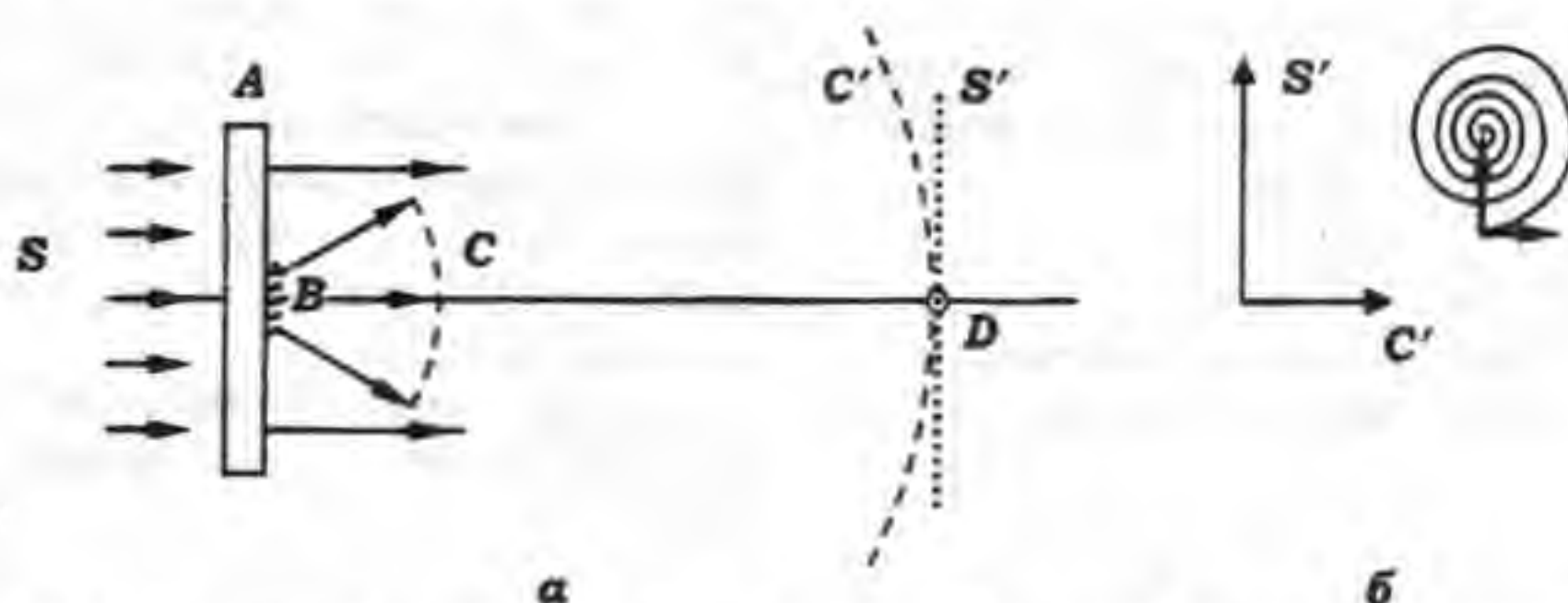


Рис. 1. Падаюча плоска хвиля S та розсіяна на об'єкті B сферична хвиля C ; D – точка на осі, в яку приходять обидві хвилі (а).
Співвідношення між фазами кожної із хвиль у віддаленій точці D (б).

отримає запізнення по фазі завдяки пробігу відстані BD , та плоска S , яка у точці D створює збудження S' лише половиною центральної зони Френеля, причому фаза його відстає від фази центральної зони (або, що те ж саме, від фази сферичної хвилі C) на кут $\alpha = \pi/2$ (рис. 1). Хвилі C' , S' когерентні і повинні створювати інтерференційну картину, проте результуюча інтенсивність у будь-якій точці перетину хвиль

$$I_D = I_S + I_C + 2\sqrt{I_S I_C} \cos \alpha \quad (1)$$

дорівнює простій сумі інтенсивностей інтерферуючих хвиль, оскільки $\alpha = \pi/2$. Очевидне співвідношення між інтенсивностями двох хвиль: $I_C \ll I_S$.

Поставимо на оптичній осі лінзу L (об'єктив) так, щоб у спряженій з A площині E отримати зображення B' точки B (рис. 2). Освітленість екрана E у довільній точці x утворюється двома когерентними хвилями: C' , що дифрагувала на об'єкті B , та залишками прямої хвилі S' , яка пройшла по решті площі A . Розподіл інтенсивностей цих хвиль умовно зображено на рис. 2. Очевидно, завдяки різниці фаз знову

інтенсивності на екрані E в області точки B' , зробити її зримою, треба у рівнянні (1) довести різницю фаз до 0° або 180° – це і досягається встановленням у фокальній площині F , де збирається вся хвиля S , тонкої фазової пластинки, яка створює відповідне запізнення хвилі S' на $\pi/2$ або на $3\pi/2$. Додатковий вииграш у контрасті буде, якщо приблизно вирівняти інтенсивності інтерферуючих полів. Практично для цього потрібно ослабити хвилю S' , тобто, фільтр в площині F мусить бути амплітудно-фазовим.

Розглянемо приклад. На пластинці A (рис. 2) міститься тонкий шар рідини – плоска пляма діаметром λ і товщиною $\lambda/10$. В полі E мікроскопа при цьому буде видно світле кільце на сірому фоні. Збільшимо діаметр плями до 10λ (100λ , 1000λ) при незмінній товщині $\lambda/10$. В

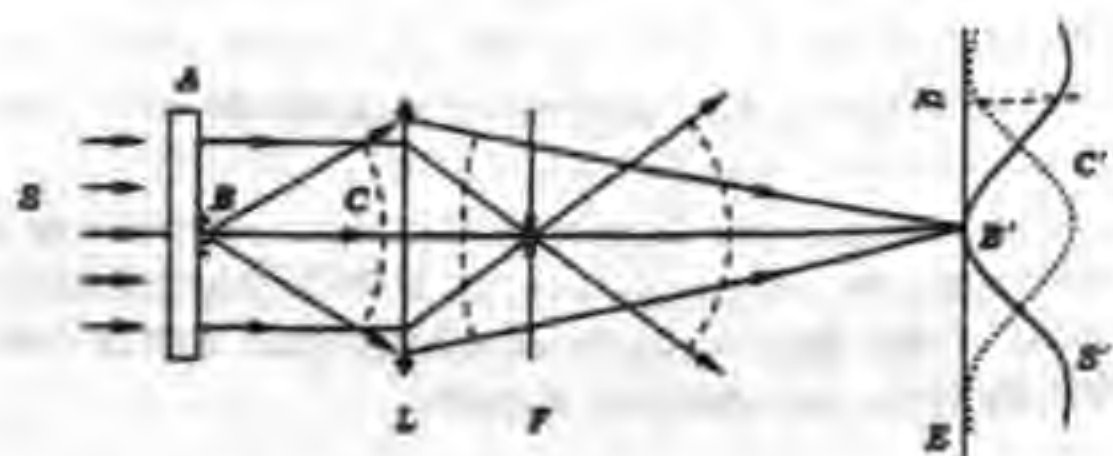


Рис. 2. Утворення зображення в ФКМ.

полі зору ФКМ будемо бачити однакове сіре тло, як в середині плями, так і зовні її. Це означає, що у ФКМ спостерігається не сама функція φ , а її похідна $d\varphi/dx$. Вказаний ефект з очевидністю спостерігається на всіх фотографіях у наукових публікаціях, починаючи з перших наукових повідомлень Ф. Церніке (рис. 3). Часто реальне зображення у ФКМ виглядає більш складно, оскільки має місце невідповідність обраної моделі (точкова неоднорідність) і реального просторового об'єкту. Контраст може бути не 100-відсотковим, якщо інтенсивність дифрагованої хвилі відрізняється від послабленої прямої (послаблення стандартне, а окремі об'єкти дають відмінну дифракцію). Проте висновки, отримані у даній моделі, є правильними – сигнал на виході пропорційний *похідній* від сигналу на вході. На рис. 3 наведено приклад поля, видного в ФКМ.

Використання елегантного апарату Фур'є-перетворень [6] дозволяє особливо лаконічно і точно продемонструвати ідею Церніке.

Когерентне світло, що розсіялось на мікрооб'єкті, який міститься на предметному



Рис. 3. Фотографія зображення в ФКМ [5].

столику мікроскопа, у загальному випадку описується комплексною функцією $f(x,y)$. У фокальній площині об'єктива маємо Фур'є-образ предмета $G(\omega_x, \omega_y)$ [6], ω_x, ω_y – просторові частоти. Надалі для простоти розглянемо одномірний випадок: $\varphi(x,y) \rightarrow \varphi(x)$, $\mathcal{F}f(x) = G(\omega_x)$, $\mathcal{F}$ – оператор Фур'є.

На рис. 4 показано формування зображення у ФКМ. Предмет 1, що знаходиться в однорідному середовищі 2, освітлюється паралельним пучком когерентних променів, які після розсіювання на предметі разом з нерозсіяними проходять через об'єктив мікроскопа 3. При цьому промені, які у межах середовища 1-2 не змінили напрямку, збираються у центрі фокальної площини 4 і формують Фур'є-образ плоскої хвилі $G_1(\omega_x)$ у вигляді дельта-функції, а ті, що розсіялись на предметі 1, падають широким пучком на об'єктив 3, формуючи у фокальній площині Фур'є-образ розсіюючого об'єкта, $G_2(\omega)$, а далі разом з першим пучком збираються у спряженій площині 5, утворюючи невидиме «зображення» розсіюючого предмета 6.

Отже, у фокальній площині 4 знаходиться Фур'є-образ, що складається з двох частин: дельта-функції $G_1(\omega_x)$, яка відповідає плоскій хвилі перед об'єктивом, та Фур'є-образу розсіюючого предмета $G_2(\omega_x)$. З рисунка видно, що $G_1(\omega_x)$ та $G_2(\omega_x)$ просторово розділені: дельта-функція $G_1(\omega_x)$ зосереджена майже у точці $(\omega_x = 0)$, тоді як $G_2(\omega_x)$ роззосереджена по фокальній площині. Якщо у точці $\omega_x = 0$ розташувати комплексний фільтр Φ малих розмірів, таких, щоб він коректував лише функцію $G_1(\omega_x)$, то функція $G_2(\omega_x)$ майже не зазнає змін. Проте його дія може різко змінити загальну ситуацію у площині зображення, яке є оберненим перетворенням Фур'є від суми обох вказаних спектрів (це останнє перетворення Фур'є виконує шар простору, за визначенням [6]).

Нехай функція на вході (це майже плоска хвиля після проходження предметного столика) має вигляд $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, де $\varphi(x)$ – слабка (мала) фазова модуляція, яка виникає через варіації показника заломлення Δn на мікрошляху Δl у області координати x об'єкта, через малість її можна представити першими двома членами ряду Тейлора: $\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \Delta x$. Її спектр у фокальній площині об'єктива:

$$\mathcal{F}f(x) = e^{i\varphi_0} (\mathcal{F}(1) + i\mathcal{F}(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \Delta x)). \quad (2)$$

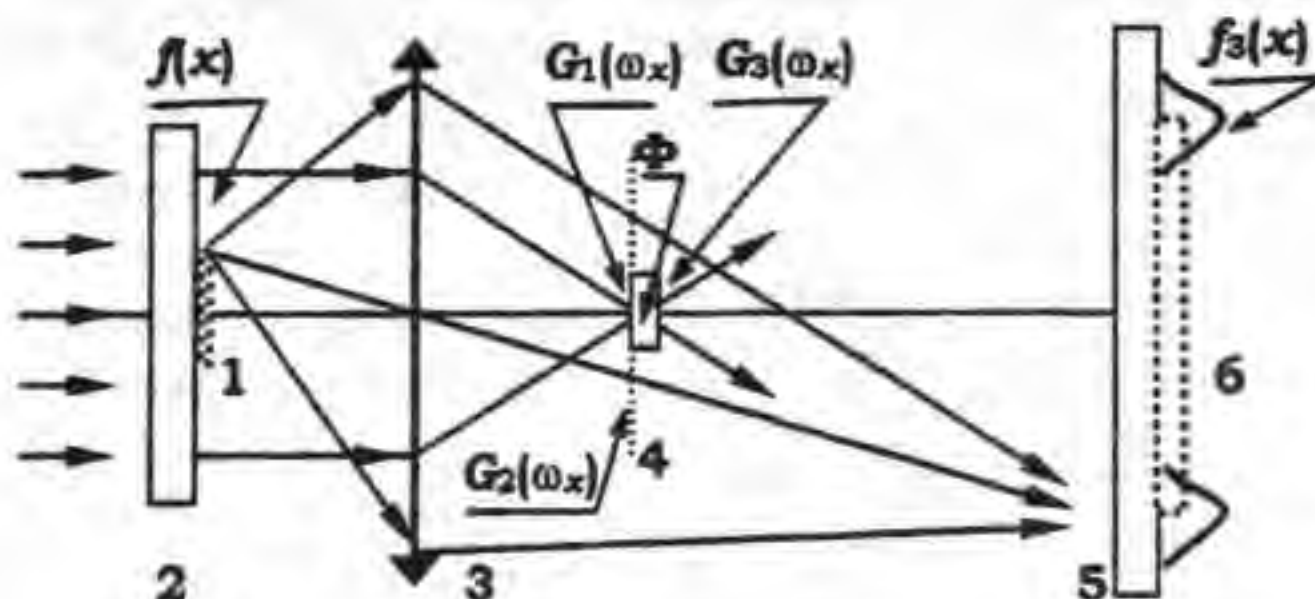


Рис. 4. Схема ФКМ.

Тут $\mathcal{F}$ - оператор перетворення Фур'є, $\mathcal{F}(1)$ - дельта-функція, перетворення Фур'є від числа, $e^{i\varphi_0}$, абсолютно несуттєва константа, деяка початкова фаза, її можна без втрати загальності опустити. Нехай амплітудно-фазовий фільтр, який діє лише на дельта-функцію, зміщує фазу на $\pi/2$, а також зменшує її амплітуду у M разів. Тоді зображення у спряженій площині 5 буде сформовано новим спектром $G_3(\omega_x)$, а саме:

$$G_3(\omega_x) = (\mathcal{F}(1) \frac{1}{M} e^{i\pi/2} + i\mathcal{F}(\Delta x \partial\varphi(x)/\partial x)) = \frac{i}{M} (\mathcal{F}(1) + M\mathcal{F}(\Delta x \partial\varphi(x)/\partial x)). \quad (3)$$

Зазначене зображення $f_3(x)$ є оберненим перетворенням Фур'є від спектру $G_3(\omega_x)$, тобто

$$f_3(x) = \mathcal{F}^{-1}G_3(\omega_x) = \frac{i}{M} (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(1) + \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(M \Delta x \partial\varphi(x)/\partial x)) = \frac{i}{M} (1 + M \Delta x \partial\varphi(x)/\partial x) \approx \frac{i}{M} e^{M \Delta x \partial\varphi(x)/\partial x}. \quad (4)$$

Як бачимо, фазова модуляція у площині 1 перетворилася на амплітудну у площині 5. Хоча і децю своєрідно - функція $\varphi(x)$ тепер представлена своєю похідною $\partial\varphi(x)/\partial x$. Розподіл інтенсивності у площині зображення вздовж координати x дається виразом:

$$|f_3(x)|^2 = \frac{1}{M^2} e^{2M \Delta x \partial\varphi(x)/\partial x}, \quad (5)$$

тобто, лише у місцях, де похідна $\partial\varphi(x)/\partial x$ відмінна від нуля, можемо спостерігати деталі прозорого об'єкта. Наприклад, краплина води на

склі 2 у площині 5 виглядає як коло, тобто, видно лише місця, де кривина поверхні максимальна.

Практично можна візуалізувати варіації фази у декілька кутових градусів з досить пристойним контрастом. Та обставина, що наближення $e^a \approx 1 + a$ справедливе лише для малих a , на якісну сторону ефекту не впливає. В цій статті ми не торкались другорядних питань роботи ФКМ як то - реальна форма і розміри амплітудно-фазового фільтра, наявність і тип освітлювача чи окуляра, дифракція світла на обмежуючих оправах, ми намагались лише довести пояснення роботи ФКМ до такого вигляду, який би не входив в протиріччя з практикою і був би зрозумілий студенту із звичайною попередньою підготовкою.

Автори вдячні доценту Г.Л. Конончуку за увагу до роботи і корисні дискусії.

Список використаних джерел

1. Ландсберг Г.С. Оптика. - М: Наука, 1976. - С. 363-366.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, оптика. - М: Наука, 1980. - С. 378-380.
3. Поль Р.В. Оптика и атомная физика. - М: Наука, 1966. - С. 160-165.
4. Физический энциклопедический словарь. - М: Сов. Энциклопедия, 1963. - 3. - С. 236.
5. Франсон М. Фазово-контрастный и интерференционный микроскопы. - М: Физ.мат.лит., 1960. - 180 с.
6. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. - М: Мир, 1970. - 364 с.

Надійшла до редколегії 29.11.09

Підп. до друку 12.04.2010 р.
Формат 70х100¹/₁₆. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 18,70. Наклад 350.
Зам. 112.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланада 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

