



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2009

Вісник Київського університету, випуск №4, 2009

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусайнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Адаменко Ірина Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безушак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-003-6

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Головащук Н.С., Грюкова Г.В. Критерій невідемновизначеності цілих квадратичних форм	7
Рябухо О.М. Перший підручник з теорії Галуа слов'янськими мовами	14
Семеновська Н.В. Задача інтерполяції однорідного та ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля за спостереженнями на нескінченній циліндричній поверхні	22
Яковенко Т.О., Ямненко Р.Є. Швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальненого накопичувального процесу Орнштейна-Уленбека	26

ДИФЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Завгородній А.В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі	33
Калайда О.Ф. Нові теореми про середнє	37
Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Петренко Н.В. Активне демпфування вимушених резонансних коливань жорстко заземленої тришарової фізично нелінійної круглої пластини	39
Лимарченко О.С., Ружицький І.С. Зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини в рухомому еліпсоїді	43
Лоос І.І. Осесиметрична деформація гнучких ортотропних конічних оболонок змінної товщини в нестационарному магнітному полі	47
Лях В.В. Точний розв'язок плоскої задачі про згин силами кільцевого сектора	51
Мартиненко М.А., Лебедева І.В. Розподіл температури в пружному тілі зі сферичним розрізом	55
Старкова О.В. Автономна нетерова крайова задача в частинному критичному випадку	59

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Акіменко В.В., Митрохін С.О. СППР з оптимального керування процесами підтоплення територій	65
Афонін А.О. Про резолюційні стратегії з слабкою факторизацією	69
Бомба А.Я., Гаврилюк В.І. Математичне моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях складної геометрії з невизначеними ділянками меж	73
Глибовець М.М., Глибовець А.М., Корень О.М. Адаптована модель реалізації навчальних матеріалів як компонентів повторного використання	77
Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Рівень людського капіталу в залежності від взаємодії між громадськістю та урядом	85
Замковий О.В. Модельний підхід до створення мультиагентної пошукової системи за допомогою середовища розробки INGENIAS	89
Іванников Є.Ю. Послуга реєстрації « HP-2. Захищений журнал» для ЗОС на базі GNU/Linux з розширенням RSBAC	95
Кулян В.Р., Требіна О.С. Про оптимізацію інвестиційної політики на основі методів математичного моделювання	101
Лебедев Є.О., Семенов В.В. Про дифузійну апроксимацію гіллястого процесу з імміграцією	105
Машенко С.О. Вибір індивідуально-оптимальних рівноваг за критерієм стабільності	113
Назарага І.М. Модель ринку праці макроекономіки України	119
Сандраков Г.В., Крилова А.С. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток	125
Семенов В.В., Чубенко О.В. Алгоритм оптимізації лінійних розподілених систем з передопуклими множинами допустимих керувань	131
Слабоспицький О.С. Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок «тяжіння» при	135

некласичних припущеннях

Терещенко В.М., Терещенко О.В. Особливості побудови опуклої оболонки в тривимірному просторі	139
Шатирко А.В., Хусаїнов Д.Я. Отримання умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова- Красовського	145

РАДІОФІЗИКА

Висоцький В.І., Висоцький М.В., Максютя М.В. Взаємодія рухомих нейтральних атомів з періодичною поверхневою структурою за умов резонансу	155
Кузнецов Г.В., Скришевський В.А., Циганова Г.І., Шулімов Ю.Г. Напівпровідникові термоелектричні датчики для імпульсного витратоміра	160
Левитський С.М. Поширення і відбивання ЛЧМ – імпульсів у неоднорідній іоносферній плазмі	167
Обуховський В.В., Ніконова В.В. Нелінійна дифузія в суміші ацетон-бензол	171
Овечко В.С. Дифракція фемтосекундних оптичних імпульсів	175

СУЧАСНА ФІЗИКА

Абдікарімов Б.Ж., Альохін О.Д., Булавін Л.А., Остапчук Ю.Л., Рудніков Є.Г. Вплив іонів на рівняння стану розчину метанол-гексан поблизу критичної температури розшарування	181
Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г., Мироненко О.К. Вплив форми молекули на теплофізичні властивості рідин. II. Теплові характеристики	185
Боровий М.О., Іщенко Р.М., Рентгенівські спектри K-LL, K-LM та K-MM радіаційного Оже-ефекту атомів Cr, Fe, Co, Ni	189
Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Шкода Н.Г., Покотило О.Я., Шостак С.В. Розрахунок ефективної діелектричної проникності матричних дисперсних систем з двошаровими кульовими включеннями	195
Гуменюк А.Ф., Дмитрук І.М., Давиденко М.О., Кутовий С.Ю., Пашенко В.Г., Становий О.П. Термостимульована люмінесценція нанокристалічного мікроефективного та об'ємного сульфідів та селенідів кадмію	201
Гречко Л.Г., Скоробагатий Т.В., Шостак С.В., Шкода Н.Г. Теорія розповсюдження електромагнітного випромінювання в аерозольно-дисперсних середовищах	207
Дегода В.Я., Золкін І.О., Когут Я.П., Свечнікова О.С. Дослідження форм спектрів фотолюмінесценції фібрилярних біополімерів (волосся людини)	213
Корнієнко М.Є. Квантові закономірності в водних розчинах електролітів 2. Збільшення розчинності кількох речовин, утворення нових сполук і раціональні відношення концентрацій іонів у максимумах розчинності	217
Пророк В.В. Залежність від часу концентрації калію, ^{137}Cs та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині	225
Терез Е.І., Терез Г.А., Ващенко В.М., Козак А.В., Патлашенко Ж.І., Лоза Є.А. Вплив температури та тиску на точність визначення параметрів атмосфери при фотометричних спостереженнях в Антарктиці	229

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

1. Введение	1
2. Основные понятия	10
3. Методы исследования	20
4. Результаты	30
5. Заключение	40
6. Литература	50
7. Приложение	60
8. Справочные материалы	70
9. Заключение	80
10. Литература	90

А.А. ТЕОРИЯ ТЕОРИЯ ИМОБИЛЬНЫХ

1. Введение	1
2. Основные понятия	10
3. Методы исследования	20
4. Результаты	30
5. Заключение	40
6. Литература	50
7. Приложение	60
8. Справочные материалы	70
9. Заключение	80
10. Литература	90

1. Введение	1
2. Основные понятия	10
3. Методы исследования	20
4. Результаты	30
5. Заключение	40
6. Литература	50
7. Приложение	60
8. Справочные материалы	70
9. Заключение	80
10. Литература	90

УДК 512.647

Н.С. Головащук, старший наук. співробітник
Г.В. Крюкова, аспірант

Критерій невід'ємновизначеності цілих квадратичних форм

У даній роботі властивості невід'ємновизначеності квадратичних форм.

Наводиться критерій невід'ємновизначеності для цілих квадратичних форм. Ми порівнюємо критерій невід'ємновизначеності для цілих квадратичних форм, цілих унітарних форм та дійсних форм.

Ключові слова: ціла квадратична форма, схема Динкіна, критерій невід'ємності квадратичної форми.

E-mail: golova@univ.kiev.ua, galyna.kriukova@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Квадратичні форми виникають в різних областях математики. Цілі квадратичні форми були запропоновані Ройтером [2]. Цілі форми відіграють важливу роль в теорії зображень, як форми, що відповідають скінченновимірним алгебрам над алгебраїчно замкненим полем. Додаткововизначеність та невід'ємновизначеність форми є дуже важливою властивістю, адже відповідна характеристика форми Тітса визначає ключові властивості відповідної алгебри Лі.

Ця стаття є продовженням попередньої статті авторів [4], в якій досліджувались властивості невід'ємновизначених цілих квадратичних форм.

Основні результати для унітарних цілих форм [3] ґрунтуються на використанні $\mathbb{Z}$ -еквівалентних перетворень інфляцій та дефляцій, — техніці, запропонованій в роботі [5]. Використовуючи цю техніку, ми проводимо дослідження цілих форм, зокрема, узагальнюємо деякі результати, відомі для унітарних форм. Ми порівнюємо відмінності критерію невід'ємновизначеності для цілих, цілих унітарних (напівунітарних) та дійсних форм.

N.S. Golovaschuk, Senior Researcher
G.V. Kriukova, PhD student

Non-negativity criterion for integer quadratic forms

The paper deals with properties of the non-negativity of quadratic forms.

For an integer quadratic form a non-negativity criterion is given. We compare non-negativity criteria for integer quadratic forms, integer unit forms, real quadratic forms.

Key Words: integer quadratic form, Dynkin diagram, non-negativity criterion for quadratic form.

2 Деякі означення

Квадратичну форму $q: k^n \rightarrow k$ виду

$$q(x) = \sum_{i \in I_n, I_n = \{1, \dots, n\}} q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$$

називатимемо цілочисельною, якщо $k = \mathbb{Z}$, та дійсною, якщо $k = \mathbb{R}$.

Цілочисельна форма називається цілою, якщо $\frac{q_{ij}}{q_i} \in \mathbb{Z}$ для усіх $i \in \{1, \dots, n\}$, ($q_i, q_{ij} \in \mathbb{Z}$). Квадратична форма називається унітарною (напівунітарною), якщо $q_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ (відповідно $q_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$).

Поляризацією квадратичної форми q називається білінійне відображення $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_q: k^n \times k^n \rightarrow k$, таке, що

$$(x, y)_q = q(x + y) - q(x) - q(y), x, y \in k^n.$$

Очевидно, що це білінійне відображення симетричне $(x, y)_q = (y, x)_q$.

Квадратична форма є збалансованою, якщо $\forall v \in k^n$ такого, що $q(v) = 0$, виконується: $(v, y)_q = 0, \forall y \in k^n$.

Зауваження 1. Властивість збалансованості залежить від області визначення форми.

Доведення. Наприклад, цілочисельна форма $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ є збалансованою, адже не існує $v \in \mathbb{Z}^2$ такого, що $q(v) = 0$.

Якщо ж розглянути дійсну форму $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ та вибрати $v = (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) \in \mathbb{R}^2$, тоді умова збалансованості $q(v, y) = q(v+y) - q(v) - q(y) = q(v+y) - q(y) = 0$ не виконується, наприклад, для $y = (1, 1)$: $q(v+y) - q(y) \neq 0$. Отже, форма не є збалансованою. $\square$

Введемо позначення: $q^{-1}(0) = \{x | q(x) = 0\}$. Радикалом квадратичної форми q називають множину $\text{rad} q = \{x | \forall y : (x, y)_q = 0\}$. Зауважимо, що 0 є елементом обох множин. Коли $q^{-1}(0)$ або $\text{rad} q$ містить деякий вектор v , тоді $\forall c \in k$ cv теж належить цій множині.

Очевидно, що $\text{rad} q \subset q^{-1}(0)$. Умову збалансованості форми можна переписати таким чином: $q^{-1}(0) = \text{rad} q$.

Квадратичну форму будемо називати *додатнєвизначеною* (невід'ємнєвизначеною), якщо $\forall v \neq 0$ $q(v) > 0$ ($q(v) \geq 0$). Квадратична форма називається *від'ємнєвизначеною* (недодатнєвизначеною), якщо $\forall v \neq 0$ $q(v) < 0$ ($q(v) \leq 0$). Форма називається *визначеною*, якщо вона належить до одного з чотирьох описаних щойно видів.

Дві форми $q, q' : k^n \rightarrow k$ називаються *еквівалентними*, якщо існує не вироджене лінійне перетворення $T : k^n \rightarrow k^n$, таке, що $q' = qT$ ($q'(x) = q(Tx)$). Зауважимо, що q' є невід'ємною / додатною / недодатною / від'ємною / збалансованою тоді і лише тоді, коли такою ж є q .

3 Критерій невід'ємнєвизначеності форми

Для цілих напівунітарних форм в роботі [3] одержано такий критерій:

Теорема 3.1 (Barot). Нехай $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ — напівунітарна форма. q невід'ємнєвизначена тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $|q_{ij}| \leq 2, \forall i < j$

2. q збалансована.

Приклад 1. Наприклад, $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ є збалансованою напівунітарною формою, але не виконується умова $|q_{ij}| \leq 2$, а тому вона не є невід'ємнєвизначеною.

Зауваження 2. Умову теореми можна інтерпретувати наступним чином: напівунітарна квадратична форма є невід'ємнєвизначеною

тоді і лише тоді, коли вона збалансована та є невід'ємнєвизначеною на кожній своїй підформі рангу 2.

Ми наводимо аналогічний критерій для випадку цілих та дійсних форм.

3.1 Критерій невід'ємнєвизначеності дійсної форми

Теорема 3.2. Нехай $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — дійсна квадратична форма. q визначена тоді і лише тоді, коли q збалансована ($q^{-1}(0) = \text{rad} q$).

Доведення. Визначеність будемо вважати невід'ємнєвизначеністю (якщо це не так, то проведемо аналогічні міркування для $-q$). Поляризація $(\cdot, \cdot)_q$ є симетричною формою. Її ліве ядро рівне правому, будемо називати його просто ядром ($-\text{rad} q$). Зауважимо, що $x \perp y$ (або $(x, y)_q = 0$) $\Leftrightarrow q(x+y) = q(x) + q(y)$.

Розглянемо ортогональний базис (відносно цієї форми) $\{v_1, \dots, v_n\}$ (тобто $(v_i, v_j)_q = 0 \forall i \neq j$). $\mathbb{R}^n = (v_1) \perp (v_2) \perp \dots \perp (v_n)$. На кожному підпросторі (v_i) квадратична форма q знакостала, адже $q(v_i)$ та $q(cv_i) = c^2 q(v_i)$ мають однаковий знак при $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Розглянемо підпростіри:

- E_0 — пряму суму підпросторів (v_i) , де $q(v_i) = 0$,
- E_+ — пряму суму підпросторів (v_i) , де $q(v_i) > 0$,
- E_- — пряму суму підпросторів (v_i) , де $q(v_i) < 0$.

Тоді маємо розклад в пряму суму ортогональних підпросторів $\mathbb{R}^n = E_0 \perp E_+ \perp E_-$, $E_0 = q^{-1}(0)$. Причому на $E_+ \perp E_-$ поляризація є не виродженою симетричною формою.

($\Rightarrow$) q — невід'ємнєвизначена, тобто $\mathbb{R}^n = E_0 \perp E_+$. Перевіримо умову збалансованості. Нехай $q(v) = 0$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Довільний вектор однозначно розкладається у суму $y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$. Тоді $(v, y)_q = q(v+y) - q(v) - q(y) = q((x_1+y_1)v_1 + \dots + (x_n+y_n)v_n) - q(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)$. Оскільки $\{v_1, \dots, v_n\}$ — ортогональний базис відносно $(\cdot, \cdot)_q$, а $x \perp y \Leftrightarrow q(x+y) = q(x) + q(y)$, то $(v, y)_q = q((x_1+y_1)v_1) + \dots + q((x_n+y_n)v_n) - (q(y_1 v_1) + \dots + q(y_n v_n)) = (x_1+y_1)^2 q(v_1) + \dots + (x_n+y_n)^2 q(v_n) - (y_1^2 q(v_1) + \dots + y_n^2 q(v_n))$. Доданки, для яких $q(v_i) = 0$ зникають, а на решті $x_i = 0$

(інакше $q(v) = 0$ не виконується), тобто доданки скорочуються. А тому $(v, y)_q = 0$. Отже, q збалансована.

($\Leftarrow$) q — збалансована. Розглянемо ядро форми $(\cdot, \cdot)_q$: $K = \text{rad } q = q^{-1}(0) = E_0$. Тоді маємо індуковану симетричну форму:

$$\tilde{q}: \mathbb{R}^n/K \times \mathbb{R}^n/K \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}^n/K \simeq E_+ \perp E_-).$$

При цьому $\tilde{q}$ не вироджена, адже її ядро рівне 0.

Припустимо, що квадратична форма q не є визначеною. Тоді можна обрати вектори з ортогонального базису $v, w \in \mathbb{R}^n$ такі, що $q(v) > 0$, $q(w) < 0$. Тоді для індукованої форми $\tilde{q}(\bar{v}) > 0$, $\tilde{q}(\bar{w}) < 0$ теж. А це значить, що ми можемо підібрати коефіцієнти $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ так, щоб $0 = c^2 \tilde{q}(\bar{v}) + d^2 \tilde{q}(\bar{w}) = \tilde{q}(c\bar{v}) + \tilde{q}(d\bar{w}) = \tilde{q}(c\bar{v} + d\bar{w})$ (остання рівність випливає з ортогональності базису). Отже, ми маємо $\tilde{q}(c\bar{v} + d\bar{w}) = 0$, а оскільки $\tilde{q}$ — не вироджена, то $c\bar{v} + d\bar{w} = 0$. Оскільки v, w — вектори з базису, то рівність можлива лише при $c = d = 0$. Прийшли до суперечності. Отже, q є напіввизначеною. $\square$

Приклад 2. Дійсна квадратична форма $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ не є визначеною, адже вона не є збалансованою.

Безпосередньо з теореми та її доведення випливають наступні твердження:

Наслідок 1. Нехай $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — дійсна квадратична форма.

- q додатньо- або від'ємно визначена $\Leftrightarrow q^{-1}(0) = \{0\}$.
- q невід'ємно визначена $\Leftrightarrow$ вона збалансована та $\exists i: q_i > 0$.
- q недодатньо визначена $\Leftrightarrow$ вона збалансована та $\exists i: q_i < 0$.
- q додатньо визначена $\Leftrightarrow q^{-1}(0) = \{0\}$ та $\exists i: q_i > 0$.
- q від'ємно визначена $\Leftrightarrow q^{-1}(0) = \{0\}$ та $\exists i: q_i < 0$.

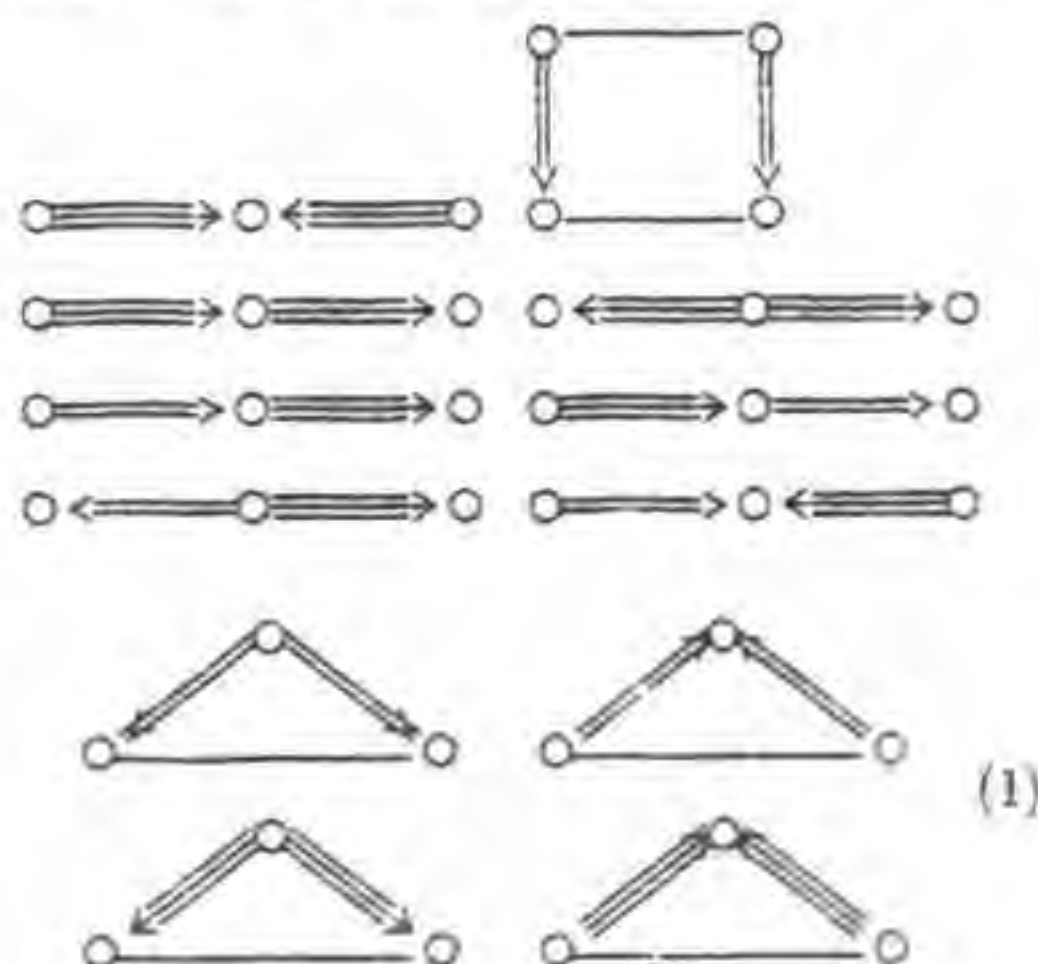
Зауваження 3. Умову теореми можна інтерпретувати наступним чином: ціла квадратична форма є невід'ємно визначеною тоді і лише тоді, коли вона збалансована та є невід'ємно визначеною принаймні на одній своїй підформі рангу 1 (невід'ємність всіх інших підформ рангу 1 в такому випадку забезпечується збалансованістю).

3.2 Критерій невід'ємно визначеності цілої форми

Доведення наступної теореми та необхідні поняття наводяться в розділі 4.

Теорема 3.3. Ціла квадратична форма $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ є невід'ємною (над $\mathbb{Q}$) тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

1. форма q збалансована;
2. $q_i > 0, i \in I_n$;
3. $q_{ij}^2 \leq 4q_i q_j, i, j \in I_n, i < j$;
4. q не містить як повну підформу жодну з форм, еквівалентних до тих, що мають один з таких біграфів:



Наслідок 2. 1. Біграф невід'ємно визначеної цілої квадратичної форми не може одночасно містити підграфи еквівалентні $\circ \rightarrow \circ$ та $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$.

2. Біграф невід'ємно визначеної цілої квадратичної форми не може одночасно містити два підграфи еквівалентні $\circ \rightarrow \circ$.

Зауваження 4. Критерії невід'ємно визначеності для цілих унітарних, цілих та дійсних форм майже однакові, але мають суттєві відмінності. Спільними є умова збалансованості та умова додатності коефіцієнтів $q_i > 0, i \in I_n$. Відмінності: для цілих унітарних форм додається умова невід'ємності на кожній підформі рангу 2, а для цілих форм — ще умова заборонених підформ рангу 3 і 4.

4 Критерій невід'ємновизначеності цілої форми: основні поняття та доведення

Спершу наведемо необхідні означення.

Розглянемо гратку $Z(R) \cong Z^n$ з базисом $R = \{\alpha_k \mid k \in I_n\}$, де $I_n = \{1, \dots, n\}$ – інтервал в Z .

Для цілої квадратичної форми q розглядають матрицю $A_q = (A_{ij})_{i,j \in I_n}$ з коефіцієнтами $A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$, якщо $q_j \neq 0$, та $A_{ij} = 0$ інакше. Тобто, $A_{ii} = 2q_i$ та $A_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_j}$, $i \neq j$ – цілі числа.

Нехай $q : Z(R) \rightarrow Z$ – ціла квадратична форма, $i, j \in I_n$ і $|A_{ij}| = 1$. Перехід від базису R до базису $\bar{R} = \{\bar{\alpha}_k \mid k \in I_n\}$ такого, що

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k &= \alpha_k, \quad k \neq j, \\ \bar{\alpha}_j &= s_j(\alpha_j) = \alpha_j - 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \alpha_i = \\ &= \alpha_j - A_{ij} \alpha_i = \alpha_j - \varepsilon \alpha_i, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varepsilon = \text{sign } q_{ij}$, називаємо *приведенням* форми q і позначаємо $\bar{q} = q T_{ij}$. Перетворення T_{ij} діє також на Z^n за правилом: для $z = \sum_{k \in I_n} z_k \alpha_k$ $\bar{z} = T_{ij}(z) = \sum_{k \in I_n \setminus \{i\}} z_k \bar{\alpha}_k + (z_i + \varepsilon z_j) \bar{\alpha}_i$. При цьому $\bar{q}(\bar{z}) = q(z)$. T_{ij} також залежно від знаку q_{ij} називають інфляцією ($q_{ij} > 0$) та дефляцією ($q_{ij} < 0$). Більш детально ми розглядали це перетворення в попередній статті [4].

Позначимо також через $\bar{T}_{ij}$ перетворення, яке формі q ставить у відповідність форму $\bar{q}|_{I_n \setminus \{i\}}$ від $n-1$ змінної $\bar{z}_k$, $k \in I_n \setminus \{i\}$.

З цілою квадратичною формою q пов'язуємо маркований біграф $B_q = (B_0, B_1, \ell_0 : B_0 \rightarrow Z, \ell_1 : B_1 \rightarrow Z^2)$ наступним чином.

1. $B_0 = I_n$ (або, що еквівалентно, $B_0 = R$); $\ell_0(k) = q_k = q(\alpha_k)$ для $k \in I_n$;
2. між довільними точками $i, j \in B_0$ існує суцільне або 0-ребро (переривчасте або 1-ребро), якщо $q_{ij} < 0$ (відповідно, $q_{ij} > 0$). Відповідно маємо $B_1 = B_1^0 \sqcup B_1^1$. Для $a \in B_1(i, j)$ визначимо $\ell_1(a) = (|A_{ij}|, |A_{ji}|)$.

Форма q називається *приведеною*, якщо $\{q_i \mid i \in B_0\}$ взаємно прості в сукупності.

У випадку $q_i = q_j$ ребро $a \in B_1(i, j)$ називаємо *простим*, інакше *кратним*. Прості ребра на діаграмі не маркуються. Кратні 0-ребра позначаються також стрілками, на-

приклад, ребро $i \xrightarrow{(k,1)} j$ зображується як стрілка $i \Longrightarrow j$, якщо $k = 2$ і як $i \Longrightarrow\Longrightarrow j$ для $k = 3$.

Повний підбіграф $B' \subset B$ назвемо *лінійним* ((відповідно, *контуром*), якщо існує нумерація вершин $B'_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$ така, що $B'_1(i, j) \neq \emptyset$ тоді і лише тоді, коли $i = i_t, j = i_{t+1}$, де $t = 1, \dots, k-1$ (відповідно, коли $i = i_t, j = i_{t+1}$, де $t = 1, \dots, k \pmod k$)).

Зауваження. Надалі під терміном *підбіграф* ми маємо на увазі *повний підбіграф*.

Дві форми q та q' , а також відповідні біграфи B та B' називаються *еквівалентними*, якщо кожна з них одержується з другої деякою послідовністю змін знаків в точках. Очевидно, що еквівалентні форми є Z -еквівалентними.

Біграф B називається *критичним*, якщо довільний його власний підбіграф визначає додатну квадратичну форму. Критичний біграф B може бути критичним слабо додатним, якщо відповідна йому форма є невід'ємно визначеною, або критичним від'ємним. В класі еквівалентності критичного біграфа існує такий, для якого найменша розмірність (відносно суми модулів координат) з недодатним значенням форми q має лише додатні координати. Назвемо його *класичним критичним біграфом*.

Неважко бачити, що довільний класичний критичний слабо додатний біграф B_q має додатний вектор $\delta \in \text{rad } q$, причому $q(z) = 0$, $z \in Z^n$ тоді і лише тоді, коли $z \in Z\delta$.

Зауваження 5. Зауважимо, що критичні біграфи, подібні до вказаних в списку теореми (3.3), мають вигляд або лінійного біграфу, або контуру. Мінімальна розмірність, в якій форма приймає від'ємне значення, має координати ± 1 в кожній точці, при цьому для довільних $i, j \in I_n$ таких, що $q_{ij} \neq 0$ має місце рівність $z_i = -\text{sign}(q_{ij})z_j$.

Зауваження 6. Список усіх класичних критичних слабо додатних біграфів, які мають максимум 3 точки, окрім відомих розширених схем Динкіна $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}, \hat{B}_3, \hat{C}_3, \hat{BC}_3$ та $\hat{G}_{21}, \hat{G}_{22}$, має два таких біграфи



Зауваження 7. Якщо для коефіцієнтів форми q виконується умова $q_{ij}^2 \leq 4q_i q_j$, $\forall i, j \in I_n$ то у відповідному біграфі можуть бути лише такі ребра:

1. $\alpha_i \circ_{q_i} \quad \circ_{q_j} \alpha_j$ (відсутнє ребро)
2. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{q_i} \circ_{q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ - - - \circ$))
3. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{-q_i} \circ_{q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \text{---} \circ$))
4. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{2q_i} \circ_{2q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ = = \Rightarrow \circ$))
5. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{-2q_i} \circ_{2q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \Longrightarrow \circ$))
6. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{3q_i} \circ_{3q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ = = \Rightarrow \circ$))
7. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{-3q_i} \circ_{3q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \Longrightarrow \circ$))
8. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{2q_i} \circ_{q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ = = = \circ$))
9. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{-2q_i} \circ_{q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \Longrightarrow \circ$))
10. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{4q_i} \circ_{4q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \equiv \equiv \Rightarrow \circ$))
11. $\alpha_i \circ_{q_i} \xrightarrow{-4q_i} \circ_{4q_i} \alpha_j$ (q_i ($\circ \equiv \equiv \Rightarrow \circ$))

Якщо виконується нерівність $q_{ij}^2 < 4q_i q_j$, то між точками i та j реалізується одне з ребер 1-7. Якщо ж досягається $q_{ij}^2 = 4q_i q_j$, то одне з ребер 8-11.

4.1 Доведення теореми 3.3

Нагадаємо твердження теореми:

Теорема 3.3 Ціла квадратична форма $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ є невід'ємною (над $\mathbb{Q}$) тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

1. форма q збалансована;
2. $q_i > 0$, $i \in I_n$;
3. $q_{ij}^2 \leq 4q_i q_j$, $i, j \in I_n$, $i < j$;

4. q не містить як повну підформу жодну з форм, еквівалентних до тих, що мають один з заборонених біграфів 1

Доведення. Необхідність. Якщо форма невід'ємно визначена, то кожна її підформа теж невід'ємно визначена, а отже умови 2, 3, 4 виконуються. Збалансованість теж легко перевіряється.

Достатність. Для форми q позначимо через $B = B_q = (B_0, B_1)$ біграф форми q і нехай $n = n(q) = |B_0|$. Позначимо $t(q) = \sum_{i \in I_n} q_i$, і для $z \in \mathbb{Z}^n$ позначимо $p(z) = \sum_{i \in I_n} |z_i|$.

Розглянемо збалансовану приведену форму q , яка задовольняє умовам теореми, але не є невід'ємно визначеною. Можемо вважати, що форма q має найменші можливі $n(q)$ і $t(q)$ серед таких форм. Зокрема, біграф B форми q є зв'язним. Форму q розглядаємо разом з вектором $z \in \mathbb{Z}^n$, для якого $q(z) < 0$. Вважаємо, що z вибрано з найменшим можливим $p(z)$. Крім того, можемо вважати, що $z > 0$ (усі координати вектора z додатні), змінивши за потреби знаки в деяких точках графа B . Отже, розглянемо таку форму q з найменшим значенням $(n(q), t(q), p(z))$ відносно лексикографічного порядку.

1. $\text{rad} q = 0$.

Доведення. Інакше для $x \in \text{rad} q$, $x \neq 0$ і $z \in \mathbb{Z}^n$ такого, що $q(z) < 0$ існує деяка лінійна комбінація $z' = cz + c'x \in \mathbb{Z}^n$ така, що $z'_i = 0$ для деякого $i \in I_n$, що суперечить умові мінімальності, оскільки $q(z') = c^2 q(z) < 0$. $\square$

2. Форма q не приймає значення 0 на $\mathbb{Z}^n$.

Це наслідок умови збалансованості та попереднього пункту.

3. Форма q є критичною, тобто, усі її власні підформи є додатньо визначеними.

Доведення. Припустимо, що для деякої підмножини $J \in I_n$ форма $q|_J$ не є додатньо визначеною. Тоді вона буде додатньо напів визначеною. Згідно з припущенням мінімальності, що неможливо, за попереднім пунктом. $\square$

4. Для довільних $i, j \in V_0$ таких, що $q_{ij} \neq 0$ має місце

$$\frac{\text{gcm}(q_i, q_j)}{(q_i, q_j)} \leq 3,$$

де gcm означає найменше спільне кратне. Якщо $q_i \neq q_j$, то підбіграф $B|_{\{i,j\}}$ має вигляд: $\circ \xrightarrow{(1,1)} \circ$ або $\circ \xrightarrow{(1,1)} \circ$, де $l = 2$ або $l = 3$.

Це прямий наслідок означення цілої форми, умови (3) теореми і пункту (2).

5. $n(q) = |V_0| \geq 4$.

У випадку $|V_0| = n(q) \leq 3$ справедливості теореми перевіряється безпосередньо, оскільки зв'язний біграф на трьох або менше точках або лінійний, або контур, причому обмеження на довільні дві точки визначає схему Динкіна.

6. Лінійний підбіграф B' біграфа B не може містити двох кратних ребер.

Доведення. Розглянемо найменший лінійний підбіграф B' , який містить два кратних ребра. Тоді B' не буде додатно визначеним, що суперечить пункту (3) у разі, якщо B' - власний підбіграф. У випадку ж $B' = B$, враховуючи пункт (2) і відсутність критичних підбіграфів вигляду $\hat{G}_{21}$ та $\hat{G}_{22}$ та подібних до вказаних в списку (3.3), одержимо, що $|V_0| = 3$, всупереч припущенню. $\square$

7. $\text{gcm}\{q_i \mid i \in V_0\} \leq 3$.

Доведення. Розглянемо найменший зв'язний приведений підбіграф $B' \subset B$, для якого ця умова не виконується. Тоді, зокрема, $k = |V'_0| \geq 3$, оскільки для $k = 1$ умова впливає з приведеності, а для $k = 2$ - з пункту (4). Неважко бачити, що B' - лінійний біграф відносно деякої нумерації $V'_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$, причому $q_{i_1} \neq q_{i_2}$, $q_{i_{k-1}} \neq q_{i_k}$, за припущенням мінімальності. А це означає, що точки i_1, i_2 зв'язані кратним ребром так само, як і точки i_{k-1}, i_k . Протиріччя з пунктом (6). $\square$

8. $4 \leq |I_n| \leq 5$. Для унітарних форм та форм, в яких лише один коефіцієнт q_i відмінний від 1, теорема справедлива.

Доведення. Для довільних $i, j \in I_n$ таких, що $q_{ij} < 0$ і $q_i \geq q_j$, або $\bar{q} = qT_{ij}$ або $\bar{q} = qT_{ij} \in$ критичною формою відповідно від n чи від $n - 1$ змінної, для якої $\bar{q}(\bar{z}) < 0$, де $\bar{z} = T_{ij}(z)$. За припущенням індукції, $\bar{q}$ - одна з форм списку (1), зокрема, $n - 1 \leq 4$ і біграф $\bar{q}$ є контуром. Якщо одержана форма $\bar{q}$ - унітарна, то $n \leq 3$ всупереч припущенню. $\square$

9. $\text{gcm}\{q_i \mid i \in V_0\} = 2$.

Доведення. Припустимо $\text{gcm}\{q_i \mid i \in V_0\} = 3$. Оскільки $z > 0$, то, за умовою, біграф B є 0-зв'язним, отже в довільній точці має суцільне ребро. Згідно з попереднім пунктом, існують щонайменше дві точки $i, j \in I_n$ такі, що $q_i = q_j = 3$. Але тоді принаймні одна з приведених форм $\bar{q}$ має коефіцієнти 3 і 1, а тому не може належати до списку (1). $\square$

10. $z_i = 1$ для довільного $i \in I_n$.

Доведення. Оскільки форма q критична, то біграф B_q є 0-зв'язним, тобто (V_0, V_1^0) - зв'язний біграф. Якщо $z_i = z_j$ для довільних $i, j \in I_n$, то твердження випливає з мінімальності z . Інакше існують $i, j \in I_n$ такі, що $q_{ij} < 0$, $q_i \geq q_j$ і $z_i \neq z_j$. В цьому випадку $\bar{q} = qT_{ij}$ є критичною формою і $\bar{z}_k = 1$ для довільного $k \in I_n$, згідно з зауваженням 5. З пункту (5) одержимо, що $n = 4$, а тоді існують $i', j' \in I_n \setminus \{j\}$ такі, що $q_{i'j'} < 0$, $q_{i'} \geq q_{j'}$ і $z_{i'} = z_{j'} = 1$. За припущенням індукції, $\bar{q} = qT_{ij}$ є критичною формою, причому $\bar{z}_j = z_j \neq 1$. Що суперечить мінімальності z та зауваженню 5. $\square$

11. Біграф B не має власного підбіграфа, який є суцільним контуром.

Дійсно, форма такого підбіграфа не додатна.

12. Біграф B не є суцільним контуром.

Доведення. Інакше, оскільки форма q не унітарна, то існують два кратні ребра. Враховуючи пункт (6), одержимо, що $n < 5$, а у випадку $n = 5$ B є критичною зі списку (1). $\square$

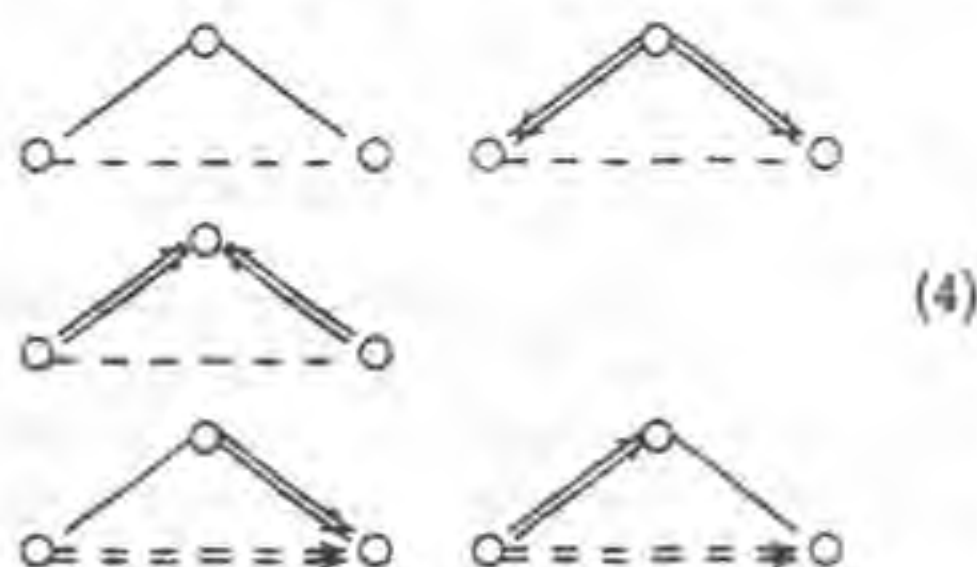
13. Біграф B не є деревом.

Доведення. Якщо B дерево, то це дерево суцільне, і довільний приведений біграф B_q форми $\bar{q} = q\tilde{T}_{ij}$ також буде деревом, а критичні зі списку (1), для яких $\text{gsm}\{q_i \mid i \in B_0\} = 2$, є контурами. $\square$

14. $B_1^1 \neq \emptyset$.

Це наслідок двох попередніх пунктів.

15. Довільні два ребра $a \in B_1^0$ і $\psi \in B_1^1$ мають спільну точку, і пайменший підбіграф, що містить a і ψ , має вигляд:



Доведення. Припустимо, існує $\psi \in B_1^1(i_1, i_2)$. Нехай $a \in B_1^0(i, j)$ – довільне суцільне ребро, причому $q_i \geq q_j$. Оскільки біграф B_q форми $\bar{q} = q\tilde{T}_{ij}$ належить до списку (1) за припущенням індукції i , зокрема, не має переривчастих ребер, то ребро a має спільну точку з ψ і пайменший підбіграф, що містить a і ψ має вигляд біграфа зі списку (4). $\square$

16. Завершення доведення теореми.

Доведення. Нехай $\psi \in B_1^1(i_1, i_2)$. Якщо $i \in I_n \setminus \{i_1, i_2\}$, то, згідно з попереднім пунктом, $B_1^0(i, i_1) \neq \emptyset$ і $B_1^0(i, i_2) \neq \emptyset$. З пункту (11) одержимо, що $B_1^0(i, j) = \emptyset$ для довільних $i, j \in I_n \setminus \{i_1, i_2\}$.

Якщо $n = 5$, то точки $I_n \setminus \{i_1, i_2\}$ не зв'язані між собою також переривчастими ребрами, тому що інакше знайдеться суцільне ребро, яке не має спільної точки з переривчастим. Неважко перевірити, що в цьому випадку з умови $\text{gsm}(q_1, \dots, q_5) = 2$ випливає, що існує власна недодатна підформа.

У випадку $n = 4$ біграф має вигляд



з певним маркуванням точок та вершин.

Справедливість теореми перевіряється безпосередньо. $\square$

На цьому доведення теореми закінчено. $\square$

Твердження теореми дає суттєве спрощення алгоритмічної перевірки невід'ємновизначеності цілої квадратичної форми.

Список використаних джерел

1. С. Ленг. Алгебра // Издательство "МИР". – 1968. – pp. 396–402.
2. А.В. Ройтер. Корни целых квадратичных форм // Квадратичные формы и поликолчаны (препринт). – 1977. – pp. 3–15.
3. M. Barot, J. A. de la Peña. The Dynkin type of a non-negative unit form // Expositiones Mathematicae. – 1999. – vol 17 – pp. 339–348.
4. N.S. Golovaschuk, G.V. Kriukova. On non-negative integer quadratic forms // To appear in: Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2009. – vol 3.
5. Ovsienko S.A. Integer weakly positive forms // Schurian Matrix problems and quadratic forms. – 1978. – pp. 3–17.

Надійшла до редколегії 08.09.2009

УДК 51(091)

Олена М. Рябухо, канд. ф.-м. н., доцент

Перший підручник з теорії Галуа слов'янськими мовами

Проведено аналіз першого підручника слов'янською мовою з теорії Галуа — монографії професора Київського університету Св. Володимира Михайла Ващенко-Захарченка та та проведено порівняльний аналіз його з іншими тогочасними працями відомих математиків, присвяченими теорії Галуа.

Ключові слова: теорія Галуа, група Галуа, розв'язність у радикалах, абелеві рівняння.

rom.olena@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко

1. Вступ

У 2010 році минає 120 років з часу опублікування підручника М.Є. Ващенко-Захарченка "Высшая алгебра. Теория подстановлений и приложения ее к алгебраическим уравнениям". Ця книга є першим підручником в слов'янському світі, в якому систематично викладено основи теорії Галуа. Автор цієї книги, професор Київського університету Св. Володимира Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко — видатний український математик і педагог, був також автором цілого ряду підручників і навчальних посібників для університетів з алгебри, геометрії, операторного числення та різницьових рівнянь, історії математики. З алгебри М.Є. Ващенко-Захарченко видав три підручники [1], [2], [3]. Книга [2] є підручником з алгебри для університетів. Предмет у ній розглядається в тому обсязі, як це було прийнято в вісімдесятих роках XIX століття. Навчальний посібник [3] присвячено систематичному викладу основ теорії визначників. Він не є першим таким викладом, але має ряд особливостей методичного характеру, які відрізняють його від інших книг на цю тему.

Метою даної роботи є аналіз підручника Ващенко-Захарченка [1] в контексті тогочасної літератури з теорії Галуа. Буде охарактеризовано ті розділи теорії Галуа, які висвітлено в підручнику [1], проведено порівняльний аналіз викладу Ващенко-Захарченка з іншими книгами,

Olena M. Ryabukho, PhD, Associate Professor

The first book concerned with Galois theory written Slavonic language

One of the first book of Galois theory was written in Slavonic language, the monograph by Mikhail Washchenko-Zakharchenko, professor of Kiev St. Vladimir University, is analyzed. We also perform the comparison of this monograph with other papers of that time of famous mathematicians which are devoted Galois theory.

Key Words: Galois theory, Galois group, solution by radicals, Abelian equation.

в яких розглядалася теорія Галуа і зазначено особливості підходу [1] до побудови систематичного курсу теорії Галуа.

2. Про історію Теорії Галуа.

Теорія Галуа в початковому значенні цього слова — це математична дисципліна, основною метою якої було виявлення умов, за яких задане алгебраїчне рівняння (з числовими коефіцієнтами) розв'язується в радикалах, тобто розв'язки цього рівняння можна визначити через його коефіцієнти за допомогою арифметичних дій $+$, $-$, $\cdot$, $:$ і дій добування коренів $\sqrt[k]{}$, $k = 2, 3, \dots$

Саме так розумів основне завдання теорії сам Е. Галуа (1811 - 1832). Формули для розв'язування загальних рівнянь третього і четвертого степенів в радикалах було отримано ще в XVI ст. Для рівнянь третього степеня їх запропонував Тарталья (Tartaglia), за іншими джерелами — Кардано (Cardano). Існує багато підходів до побудови формули для знаходження розв'язків в радикалах загального рівняння четвертого степеня і самі ці формули також є різними. Вперше таку формулу запропонував учень Кардано — Феррарі (Ferrari). Наступні важливі кроки в цій проблематиці було зроблено вже у XVII столітті. А саме, Лагранж вперше застосував підстановки і їх групи для аналізу ситуацій з розв'язністю рівнянь в радикалах, ввів поняття резольвенти (Лагранжа), висвітлив її роль у процесі розв'язування і з ці-

її нової точки зору обґрунтував розв'язність у радикалах рівнянь третього і четвертого степенів. Те, що загальне рівняння п'ятого степеня не розв'язується в радикалах, вперше пробував довести Руфіні. Але його доведення, написані дуже незрозуміло і до того ж з явними прогалинами, не були акцептовані сучасниками. А тому на початок XIX століття проблема розв'язності рівнянь степеня 5 залишалася відкритою. Наступні важливі досягнення тут отримали молоді математики Е.Галуа та Н.Г.Абель. У проблемі розв'язності рівнянь в радикалах є два різні аспекти:

1) чи існує формула (така як для рівнянь 2-го, 3-го і 4-го степенів), за допомогою якої розв'язки загального рівняння n -го степеня $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ виражаються через його коефіцієнти, причому при побудові формули використовуються лише арифметичні дії і дії добування коренів;

2) чи для кожного конкретного рівняння n -го степеня існує така "своя" формула.

Зрозуміло, що для деяких рівнянь, наприклад рівнянь вигляду $x^n - a = 0$, така "своя" формула може існувати. Якби відповідь на питання 1) була ствердною, то очевидно, що і відповідь на питання 2) також була б ствердною. Але з негативної відповіді на питання 1) в принципі не випливає негативна відповідь на питання 2): кожне рівняння могло би мати "свою" формулу для знаходження коренів, а спільної формули, яка підходила б для всіх рівнянь, могло би й не існувати. Але відповідь виявилась негативною на обидва питання. Негативну відповідь на питання 1) дав Абель, а негативну відповідь на питання 2) — Галуа. Дослідження Абеля й Галуа не відразу були сприйняті математиками; зацікавлення ними розпочалося після того, як Ліувіль опублікував праці Галуа [4]. Після цього розпочався активний період досліджень в новоствореній теорії, першою визначальною віхою в якому була публікація трактату видатного французького математика К. Жордана [5]. В цій монографії вперше було висвітлено весь комплекс проблем, пов'язаних з розв'язуванням рівнянь в радикалах: основи теорії скінченних полів та теорії груп, групи підстановок, лінійні групи над скінченними полями, групи Галуа рівнянь, критерій розв'язності рівнянь в радикалах, різноманітні застосування. Монографія К. Жордана зіграла визна-

чальну роль у формуванні розділу математики, який пізніше стало прийнято називати Теорією Галуа.

Після трактату Жордана, наприкінці XIX століття появились книги [6], [7], [8], які значною мірою були присвячені викладу основ теорії Галуа, причому це вже були навчальні посібники, які можна було використовувати у процесі навчання. Книга Вебера [8] стала загально-визнаним університетським підручником, який було перекладено іншими мовами і який слугував зразком при написанні підручників з алгебри протягом наступних п'ятдесяти років. Але книги Е. Нетто і Г. Вебера появились приблизно в той же час, що й книга Ващенко-Захарченка і тому впливу на неї не мали.

У вітчизняній математичній літературі на кінець XIX століття фундаментальних праць з теорії Галуа ще не було, за винятком дисертаційної роботи професора Харківського університету Д. Деларю "Загальна теорія алгебраїчного розв'язування рівнянь" (Харків, 1864 р.). Дисертацію Деларю було надруковано в 1870 р., одночасно зі вже цитованою монографією Жордана. Це була невелика за обсягом монографія, в якій викладено основи теорії розв'язування в радикалах рівнянь з числовими коефіцієнтами. Аналізуючи цю дисертацію А.К. Сушкевич в [9] пише, що вона фактично була реферативного характеру.

3. Зміст підручника М.Є. Ващенко-Захарченка

Характеризуючи зміст своєї праці автор пише: "Дана праця є продовженням моєї праці "Алгебраїчний аналіз або вища алгебра". В ній викладено теорію підстановок, застосування її до алгебраїчного розв'язування рівнянь і розв'язування рівнянь п'ятого степеня за допомогою еліптичних функцій. В нашій математичній літературі з цього предмету немає нічого, а тому я думаю, що ця праця буде корисною для осіб, які ґрунтовно і глибоко вивчають Вищу алгебру".

Праця "Алгебраїчний аналіз або вища алгебра", яку згадує автор, є підручником з алгебри для університетів, основна частина якого присвячена теорії многочленів від однієї та багатьох змінних, розв'язуванню рівнянь степенів ≤ 4 , та питання відокремлення коренів і наближеного знаходження розв'язків алгебраїчних рівнянь довільного степеня. Праця "Ви-

ща алгебра. Теорія підстановок і застосування її до алгебраїчних рівнянь", на відміну від попередньої має виразно монографічний характер. Це монографія, в якій представлено тогочасний стан алгебраїчної науки, в центрі якої на той час була теорія Галуа. Перейдемо тепер до аналізу змісту цієї монографії.

В першій главі викладено основи теорії підстановок. Автор розрізняє поняття перестановки (як певне упорядкування елементів даної множини) і підстановки (як бієктивне відображення множини в себе). Визначається дія множення, тобто послідовного виконання підстановок. Після цього вводиться поняття степеня підстановки, розглядаються циклічні підстановки (автор вживає термін кругові підстановки) і розклад підстановки на добуток взаємно простих циклів. Вводиться відношення подібності (спряженості) підстановок, знаходиться кількість підстановок, які подібні даній. Розглядається розклад підстановок на добуток циклів.

Наступні дві глави присвячено групам підстановок. Вводиться поняття порядку групи підстановок, описуються групи підстановок порядків 2, 3, 4. Обговорюється зв'язок між функціями багатьох змінних і групами підстановок, коли група діє на індексах змінних і в певному сенсі "вимірює" відхилення даної функції від симетричної. Розглядаються функції з даною групою симетрій — допустимих перестановок змінних, описано процедуру побудови функцій, якій відповідає наперед задана група підстановок. Далі обговорюється проблема побудови n -елементних груп підстановок для довільного натурального n і вводиться поняття транзитивності груп підстановок (автор називає їх переміщувальними).

В четвертій главі розглядаються питання алгебраїчної залежності значень багатовимірних функцій, а в п'ятій — досить великій за обсягом (стор. 70-116) — викладено необхідні для розгляду теорії Галуа відомості з теорії груп: ряди підгруп, групи прості, найпростіші і складені, поняття ізоморфізму груп, інваріанти груп.

Глава VI є вступною безпосередньо до викладу теорії Галуа, в тій формі, як це було прийнято в кінці XIX - на початку XX століття. В ній розглядається поняття групи симетрій (раціональних) функцій. Нагадаємо, що групою симетрій $G(f)$ функції $f(x_1, \dots, x_n)$ від

n змінних називається група всіх перестановок множини $1, 2, \dots, n$, які зберігають функцію f : $G(f) = \{\sigma \in S_n | f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.

Кажуть, що функції f_1 і f_2 належать до однієї групи, якщо $G(f_1) = G(f_2)$. Якщо многочлени $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над деяким числовим полем K належать до певної групи G , то сума $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і добуток $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ цих многочленів також належить до групи G . А тому множина $K[x_1, x_2, \dots, x_n]^G$ всіх многочленів від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем K утворює підкільце в кільці многочленів $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Многочлени $f_1, f_2, \dots, f_k \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ називаються алгебраїчно залежними, якщо існує такий многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_k)$, що $g(f_1, f_2, \dots, f_k) = 0$.

Далі в главі VI досліджується питання алгебраїчної залежності функцій з кільця $K[x_1, x_2, \dots, x_n]^G$, де $G < S_n$ — деяка група підстановок. Зокрема, вивчаються максимальні за кількістю алгебраїчно незалежні системи многочленів цього кільця.

В главі VII розглядається ще одна задача, яка належить до технічного аналізу теорії Галуа. Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деякий многочлен від n змінних. Надаючи змінним певних числових значень $t_1, t_2, \dots, t_n$ дістанемо деяке число $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Для довільної підстановки $\sigma \in S_n$ підставляючи в многочлен f замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ числа $t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}$ дістанемо, взагалі кажучи, інше число $f(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)})$. Кількість різних таких значень многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при фіксованому векторові $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ залежить від того, до якої групи G належить многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. А саме, це число дорівнює індексу $[S_n : G]$ групи G в симетричній групі. Так, в сучасній термінології, можна коротко охарактеризувати основний результат глави VII.

В главі VIII розглянуто приклади груп і відповідних кілець функцій. Зокрема, що знову ж таки є підготовчою роботою до дослідження питання про розв'язування алгебраїчних рівнянь в радикалах, особливу увагу звернуто на циклічні групи і многочлени, інваріантні відносно циклічних перестановок індексів змінних.

Десята глава присвячена побудові і дослідженню аналітичного зображення підстановок. Кожну множину із p^S елементів (p — деяке про-

сте число) можна ототожнити із скінченим полем, що саме складається із p^n елементів. Поле такого типу ввів до розгляду сам Еваріст для потреб своєї теорії. Якщо підстановка діє на множині із p^S елементів, то її можна задати деяким многочленом над полем, що містить p^S елементів. Такий спосіб задавання підстановок називається аналітичним. Зокрема, підстановки на множинах, що містять p елементів, задаються многочленами над полем лишків за модулем p . Розглядаються конкретні приклади аналітичного задавання підстановок і груп підстановок над многочленами з 5 і 7 елементів.

На цьому необхідну підготовчу роботу закінчено і далі — в главах X - XVII викладається теорія розв'язування алгебраїчних рівнянь в радикалах. В главі X розглядається саме поняття алгебраїчного розв'язування рівнянь в радикалах, тобто знаходження коренів рівняння через його коефіцієнти за допомогою арифметичних дій $+$, $-$, $\cdot$, $:$ і дій добування коренів натуральних степенів $\sqrt[n]{}$, $n = 2, 3, \dots$. Вводиться визначення нескоротних рівнянь, тобто рівнянь вигляду $f(x) = 0$, для яких многочлени $f(x)$ є нерозкладними. Розглядається поняття групи рівнянь. А саме, група рівнянь $f(x) = 0$ степеня n — це група підстановок $b \subset S_n$, яка визначається таким чином. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корені цього рівняння, тобто

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ і коефіцієнти многочлена задовольняють певні співвідношення, до яких згідно з теоремою Вієта належать

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n &= -\frac{a_2}{a_0} \\ &\dots\dots\dots \\ x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

Кожне співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена $f(x)$ можна записати у вигляді $F(x_1, x_2, \dots, x_n, a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$.

Нехай $R(f)$ — множина найможливіших співвідношень між коренями і коефіцієнтами многочлена f . Оскільки з того, що $g_1(x_1, \dots, x_n)$, $g_2(x_1, \dots, x_n)$ належать до $R(f)$ випливає, що $g_1 + g_2$ і $g_1 \cdot g_2$ також належать до $R(f)$, множина $R(f)$ є підкільцем кільця всіх многочленів від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем коефіцієнтів рівняння $f(x)$. А оскільки з включення $g_1 \in R(f)$

при довільному g_2 випливає, що $g_1 \cdot g_2$ також міститься в $R(f)$, це підкільце буде ідеалом в кільці всіх многочленів від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Означення 1. Підстановка $\sigma \in S_n$ зберігає співвідношення між коренями многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо для довільного співвідношення $g(x_1, x_2, \dots, x_n, a_0, a_1, \dots, a_n) \in R(f)$ виконується рівність $g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Множина всіх підстановок із групи S_n , які зберігають всі співвідношення із $R(f)$ утворює групу для дії множення підстановок, яка називається групою Галуа рівняння $f(x)$.

Залежно від того, чи звідним є многочлен $f(x)$ чи незвідним над полем коефіцієнтів, група Галуа цього многочлена має різні властивості.

А саме, з довільною групою підстановок G множини $\{1, 2, \dots, n\}$ пов'язане відношення еквівалентності на цій множині, яке визначається таким чином:

$k \sim e$ тоді й лише тоді, коли існує $g \in G$ такий, що $k^g = e$. Класи еквівалентності цього відношення називають орбітами групи G на $\{1, 2, \dots, n\}$. Група G називається транзитивною (в термінології автора підручника — перемісною), якщо вона має на многочлені $\{1, 2, \dots, n\}$ тільки одну орбіту; в протилежному разі кажуть, що група G інтранзитивна.

Доводиться теорема про те, що група Галуа рівняння $f(x) = 0$ є транзитивною в тому і лише в тому разі, коли многочлен $f(x)$ нерозкладний над полем своїх коефіцієнтів. Досліджуються інші властивості групи Галуа рівняння $f(x) = 0$, зокрема характеризуються рівняння, група Галуа яких діє 2-транзитивно або 3-транзитивно на множині коренів (група діє k -транзитивно на множині x , якщо вона діє транзитивно на множині $x^{(k)}$ всіх впорядкованих коренів довжини k над x з різними координатами, $k \leq |x|$). Для рівняння $f(x) = 0$ можна утворити інше рівняння, яке Галуа називав розв'язуючим для початкового. А саме, візьмемо лінійну функцію всіх коренів $x_1, x_2, \dots, x_n$ рівняння $f(x) = 0$ вигляду

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

і підберемо коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, щоб діючи на неї підстановками із симетричної групи S_n за правилом

$$y^\sigma = \alpha_1 x_{\sigma(1)} + \alpha_2 x_{\sigma(2)} + \dots + \alpha_n x_{\sigma(n)}, \sigma \in S_n$$

дістати $n!$ різних значень, тобто $y^{\sigma_1} \neq y^{\sigma_2}$ при $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Нехай ці рівняння дорівнюють $y_1, y_2, \dots, y_n$. Рівняння

$$F(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n)$$

степеня $n!$, коренями якого є числа $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається розв'язуючим для рівняння $f(x) = 0$. Це рівняння важливе тим, що його корені не є незалежними величинами, між ними існують раціональні залежності, а саме всі вони є раціональними функціями лише одного з коренів. Оскільки, знаючи корені рівняння $F(y) = 0$, можна знайти корені початкового рівняння $f(x) = 0$, то для розв'язування рівняння $f(x) = 0$ досить вміти знаходити один з коренів рівняння $F(y) = 0$.

Група Галуа незвідних рівнянь, всі корені якого раціонально виражаються через один з них аналізуються окремо. А саме, встановлюється, що група Галуа такого рівняння мусить бути регулярною групою підстановок, тобто діяти на множині коренів транзитивно і мати порядок, який дорівнює степеню многочлена, що стоїть в правій частині рівняння.

Як саме "спрацьовує" техніка побудови розв'язуючих рівнянь автор аналізує на прикладі рівняння третього степеня

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0.$$

Групою Галуа цього рівняння є симетрична група S_3 . Розв'язуюче рівняння для даного, згідно з визначенням рівняння шостого степеня і його групою Галуа складається з підстановок

$$\Gamma = \{e, (1, 3)(2, 4)(5, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4),$$

$$(1, 2)(3, 5)(4, 6), (1, 4, 5)(2, 3, 6), (1, 5, 6)(2, 6, 3)\}.$$

і є ізоморфною S_3 .

Це дає змогу стандартним чином, використовуючи розвинуту теорію, вивести формули для знаходження коренів загального рівняння третього степеня.

Якщо розв'язне рівняння $F(y) = 0$ для даного рівняння $f(x) = 0$ є нескоротним, то група Галуа останнього рівняння є симетричною групою S_n степеня $n = \deg f$. Далі автор аналізує рівняння, групи Галуа яких, якщо говорити в сучасних термінах, містять нормальні дільники, тобто є послідовним розширенням деяких скінченних простих груп. Цей фрагмент теорії наведено, як на сучасні вимоги, не достатньо

чітко. Основним тут є твердження VIII (стор. 203), яке формулюється таким чином:

"Якщо до даного рівняння $f(x) = 0$, якого групою є G , приєднати всі корені $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$ нескоротного рівняння

$$\varphi^m + A_1\varphi^{m-1} + A_2\varphi^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

коефіцієнти якого є раціональними в області рівняння $f(x) = 0$, а його корені є раціональними функціями коренів $x_1, x_2, \dots, x_n$ рівняння $f(x) = 0$, то група G зведеться до найбільшої особливої підгрупи Γ групи G , яка не змінює функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$. Якщо група G є простою, то $\Gamma = 1$. Лише в тому разі, коли G є складеною, вона зводиться на підгрупу відмінну від одиниці, таким чином, за допомогою розв'язування допоміжного рівняння, розв'язуюче рівняння розкладається на лінійні множники."

В розділі XI проведено докладний аналіз двочленних рівнянь, тобто рівняння вигляду $x^p - 1$. Якщо p — просте число, таке рівняння є розкладним, оскільки $x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$.

Многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ є незвідним над полем раціональних чисел, а тому група Галуа рівняння $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ є транзитивною. Якщо ω є первісним коренем з 1, то всі інші корені цього рівняння є його степенями, тобто раціонально виражаються через ω . Згідно зі сказаним вище це означає, що група Галуа цього рівняння є регулярною, тобто її порядок дорівнює $p - 1$. А тому ця група є циклічною і породжується підстановкою коренів.

$$S = \begin{pmatrix} \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1} \\ \omega^2, \omega^3, \dots, \omega \end{pmatrix}$$

Таким чином група Галуа G аналізованого рівняння дорівнює: $G = \{e, s, s^2, \dots, s^{p-2}\}$.

За допомогою цієї групи легко будується розв'язуюче рівняння, що дає змогу побудувати всі розв'язки в радикалах для початкового двочленного рівняння.

Розділ XII присвячено аналізу абелевих рівнянь. Термін абелеве рівняння було введено Кронекером для рівнянь, в яких з кожних двох коренів один раціонально виражається через інший. К. Жордан зауважив, що звідси випливає комутативність групи Галуа рівняння і назвав абелевим рівнянням з більш широкого класу —

такі, група Галуа яких є абелевою. Рівняння такого вигляду розв'язуються в радикалах і аналіз цього класу рівнянь є початковим розділом теорії розв'язності рівнянь в радикалах. Одним з основних тверджень, які стосуються абелевих рівнянь, є така теорема:

Якщо $x_i, \Theta(x_i), \Theta^2(x_i), \dots, \Theta^m(x_i)$ мають m коренів рівняння m -того степеня, де $\Theta(x)$ є раціональна функція, яка має властивість $\Theta^m(x_i) = x_i$, то рівняння розв'язується в радикалах, а його корені виражаються через один з первісних коренів рівняння $x^m - 1 = 0$ і коренів m -того степеня з відомих чисел.

Наводиться просте доведення теореми Галуа для рівнянь p -того степеня (Галуа вважав цей результат одним з найцінніших своїх результатів). Вона сформульована таким чином:

Якщо два корені нескоротного рівняння простого степеня пов'язані між собою так, що один з них є раціональною функцією іншого, то рівняння розв'язується алгебраїчно.

Далі автор аналізує, як саме слід розв'язувати рівняння складеного степеня, корені якого пов'язані раціональним співвідношенням Θ . В цьому напрямку встановлюється таке твердження:

Нехай $x_i, \Theta(x_i), \Theta^2(x_i), \dots, \Theta^{m-1}(x_i)$, де Θ — раціональна функція, а $\Theta^m(x_i) = x_i$, будуть коренями рівняння степеня $m = m_1 m_2 m_3 \dots$, щоб розв'язати це рівняння, потрібно знайти первісні корені рівнянь

$$z^{m_1} - 1 = 0, \quad z^{m_2} - 1 = 0, \quad z^{m_3} - 1 = 0, \quad \dots$$

і добути послідовно корені степенів $m_1, m_2, m_3, \dots$ з виразу, який є раціональною функцією відомих величин.

На підставі цього твердження створено алгоритм розв'язування таких рівнянь, при застосуванні якого до рівнянь з параметром $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, p_2, \dots, p_k$ є різні числа, потрібно вибрати

$$m_1 = p_1^{\alpha_1}, \quad m_2 = p_2^{\alpha_2}, \quad \dots, \quad m_k = p_k^{\alpha_k}.$$

Автор докладно аналізує дію цього алгоритму на прикладі, функція $\Theta(x)$ є дробово-раціональною:

$$\Theta(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Встановлюються умови, за яких має місце рівність $\Theta^m(x) = x$. А саме це виконується тоді й

лише тоді, коли коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ задовольняють вимоги

$$\alpha + \delta = 2 \cos \frac{\lambda \pi}{m}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1,$$

де λ — деяке натуральне число, взаємно просте з m .

Іншим прикладом функції $\Theta(x)$, яка докладно аналізується є многочлени. Для них встановлено умови як при деякому m функція Θ^m не змінює коренів $\Theta(x)$.

Далі описуються групи рівнянь такого вигляду і вводиться клас абелевих рівнянь.

Означення 2. Якщо всі корені даного рівняння є раціональними функціями одного з них x_1 і виражаються таким рядом

$$x_1, \Theta_1(x_1), \Theta_2(x_1), \dots, \Theta_{n-1}(x_1),$$

і якщо при цьому мають місце залежності

$$\Theta_\alpha \Theta_\beta(x_1) = \Theta_\beta \Theta_\alpha(x_1)$$

то дане рівняння називається абелевим рівнянням.

Теорема 1. Абелеві рівняння розв'язуються алгебраїчно.

В главі XIII розглядаються рівняння, між кожними трьома коренями яких існує деяка раціональна залежність. Клас таких рівнянь є очевидним розширенням класу рівнянь, в яких раціональна залежність існує між кожними двома коренями. Більш широкий клас також складається з рівнянь, кожне з яких розв'язується алгебраїчно (тобто в радикалах). Доведення відповідного твердження та розгляд відповідних прикладів і складає зміст цієї глави.

Наступні дві глави (глава XIV і глава XI) є центральними в монографії. В них викладено твердження, які в сумі складають дві теореми, які нині прийнято називати основними теоремами класичної теорії Галуа. А саме, доводиться що необхідною і достатньою умовою розв'язності рівняння в радикалах є розв'язність його групи Галуа і встановлюється, чому саме загальне рівняння p -того степеня не розв'язується в радикалах. Далі, в главах XVI і XVII автор докладно аналізує рівняння p -того степеня. Зокрема, встановлюється, що коли рівняння p -того степеня за допомогою оборотних замі-

змінних можна звести до т. зв. канонічної форми, розглянуто метод Чирнгаузенна перетворення рівнянь п'ятого степеня і його модифікацію, запропоновану Ермітом. Останній тип перетворень і канонічний вигляд рівняння п'ятого степеня використовується далі.

Останні глави монографії присвячено методам знаходження розв'язків алгебраїчних рівнянь за допомогою еліптичних функцій. Після того, як було встановлено, що використання самих лише арифметичних дій і дій добування коренів не досить для того, щоб корені довільного рівняння можна було за допомогою цих дій виразити через їх коефіцієнти, появились дослідження, в яких робилися спроби виразити корені рівнянь через їх коефіцієнти, розширивши множину операцій, які можна здійснювати над коефіцієнтами рівняння. Найбільших успіхів у цьому напрямку досягнув французький математик Ш. Ерміт, який в 70-х роках XIX століття опублікував у доповідях Паризької Академії наук цикл повідомлень про можливість розв'язування алгебраїчних рівнянь за допомогою т. зв. еліптичних функцій. Еліптична функція — це функція комплексної змінної, яка є періодичною в двох різних напрямках.

Серед еліптичних функцій виділяються функції подібні до елементарних тригонометричних функцій: еліптичний синус, еліптичний косинус, тощо. Ш. Ерміт встановив, що якщо дозволяти застосовувати до коефіцієнтів рівнянь не лише алгебраїчні операції $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$, $k = 2, 3, \dots$, але й одну з елементарних еліптичних функцій (наприклад еліптичний синус), то тоді корені довільного рівняння п'ятого степеня можна виразити через його коефіцієнти. Остання частина монографії Ващенко-Захарченка присвячена докладному аналізу такого підходу до розв'язування алгебраїчних рівнянь. Для цього в главі XVIII він подає необхідні відомості з теорії еліптичних функцій, які потрібні для розв'язування рівнянь п'ятого степеня, а потім характеризує і аналізує метод Ерміта розв'язування (не алгебраїчного!) рівнянь за допомогою еліптичних функцій.

4. Деякі особливості підручника.

Теорія Галуа, як певний комплекс алгебраїчних понять, методів і тверджень була на той час ще порівняно новою галуззю математики, її не можна було тоді називати досконалою з точки зору методики викладання матеріалу.

Більш досконалі підходи до викладу теорії Галуа появились пізніше: в тридцятих роках XX століття (монографії Ван дер Вардена [10], Чеботарьова [11][12], а згодом Артіна [12]). Тому з точки зору сучасного підходу, виклад має багато недоліків; він місцями є нечітким, багато-словним і від того мало зрозумілим. Особливі застереження викликає вживана автором термінологія. Цілий ряд термінів, які вживаються в монографії (напр. круговые подстановления, первообразные и первообразные подстановления, группы переместительных та інші) виявились невдалимими і в спеціальній літературі не прижилися. Але, з іншого боку, більшість термінології використовувалась в подальших публікаціях без жодних застережень.

Не слід думати, що об'єми монографії є більшими у порівнянні із сучасними викладами теорії Галуа тільки тому, що в сучасних монографіях вибрано більш досконалі підходи і простіші шляхи побудови теорії. Це так, але монографія Ващенко-Захарченка містить велику кількість матеріалу, який пізніше в монографії з класичної теорії Галуа просто не включався. Зокрема, це можна сказати про останню частину монографії Ващенко-Захарченка, яку присвячено розв'язуванню рівнянь за допомогою еліптичних функцій.

Крім того в монографії представлено багато цікавих прикладів, які можна розглядати як певну теорію того чи іншого конкретного рівняння. Така теорія може бути не тільки нетривіальною, але й красивою і часто стосується рівнянь, які вже "дезь появились", тобто знайшли певні застосування. Як приклад наведемо аналіз рівняння

$$x^n - \frac{1}{4}nx^{n-2} + \frac{1}{16}\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}x^{n-4} - \dots = 0,$$

коренями якого є числа $\cos a, \cos 2a, \dots, \cos na$, де $a = \frac{2\pi}{n}$. Покладемо $\cos a = x$. Тоді для довільного цілого числа m справедлива рівність $\cos(ma) = \Theta(\cos a)$, де Θ — деякий многочлен, який залежить від m . Якщо покладемо $\Theta_1(\cos a) = \cos m_1a$, то матимемо

$$\cos(m \cdot m_1, a) = \Theta(\cos m_1a) = \Theta\Theta_1(\cos a).$$

Аналогічно

$$\cos(m_1 \cdot ma) = \Theta_1(\cos ma) = \Theta_1\Theta(\cos a).$$

Це означає, що корені розглядуваного рівняння виражаються раціонально як функції одного з

них, причому для відповідних функцій Θ_i, Θ_j має місце рівність $\Theta_i \Theta_j(x_1) = \Theta_j \Theta_i(x_1)$.

Отже, розглядуване рівняння є алгебраїчним, а тому число $\cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{n}$ можна виразити алгебраїчно через корені рівняння.

Прикладів такого типу на сторінках монографії багато і, з нашої точки зору, це є великим плюсом організації матеріалу в цій книзі.

Іншим позитивом книги є те, що питання, які розглядаються в багатьох випадках доводяться до такого вигляду, що наступним кроком є вже чіткий алгоритм для розв'язування поставленого завдання. Слід зазначити, що кілька сформульованих в монографії Ващенко-Захарченка алгоритмічних правил можна вважати досить чітко описаними алгоритмами.

5. Висновки.

Монографія М.Е. Ващенко-Захарченка [1] є фундаментальним дослідженням з теорії Галуа, яке написане з використанням останніх досліджень тогочасної науки в цій ділянці математики. Монографія є першою в Росії монографією з " нової " алгебри, яку пізніше, після виходу книги Б. Ван дер Вардена деякий час називали "Сучасною алгеброю". На основі досліджень з теорії Галуа, які проводились в другій половині XIX - на початку XX століття оформилися такі розділи математики як теорія груп, теорія полів, теорія кілець і модулів тощо. Виходячи з висновків польського математика А. Шинця [13], монографія М.Е. Ващенко-Захарченка є також першою в усьому слов'янському світі.

Порівнюючи монографію Ващенко-Захарченка [1] з іншими відомими викладами теорії Галуа [5], [6], [8] того часу, можна зазначити, що підходи Ващенко-Захарченка часто виглядають методично свіжими, а включення розділів, що стосується еліптичних функцій відрізняє її від інших монографій. Іншою істотною особливістю, на наш погляд, є намагання навести чіткий опис, дати чітку характеристику алгоритмів, які розглядаються в тому чи іншому контексті.

Підсумовуючи, можна сказати, що монографія М.Е. Ващенко-Захарченка [1] була видатним явищем в тогочасному науково-педагогічному житті Російської імперії і зіграла видатну роль в популяризації і впровадженню ідей і методів теорії Галуа в математичну освіту. Методичні підходи, викладені в книзі Ващенко-Захарченка з певним критичним переосмисленням використовувались у викладанні алгебраї-

чних дисциплін в університетах протягом кількох наступних десятиліть.

Список використаних джерел

1. Ващенко-Захарченко М.Е. Высшая алгебра. Теория подставлений и приложение ее к алгебраическим уравнениям. Киев-Санкт-Петербург: Изд-во университета св. Владимира, 1890, 501с.
2. Ващенко-Захарченко М.Е. Алгебраический анализ или высшая алгебра. Киев: Изд-во университета св. Владимира, 1887, 608с.
3. Ващенко-Захарченко М.Е. Теория определителей и теория форм. Киев: Изд-во университета св. Владимира, 1877.
4. Galois E. OEuvres mathematiques - Publiées en 1846 dans le Journal de Liouville. Paris, Gauthier-Villars: Editions Faques Gabbay, 1897.
5. Jordan C. Traite des substitutions et des equations algebriques. Paris: Gauthier Villars, 1870. - 667 p.
6. Netto E. Vorlesungen'uber Algebra. Teubner, Leipzig, Bd. 1. (1896), Bd. 2. (1900).
7. Sequiber de J.A. Elements de La Theorie des groupes abstraits. Paris: Gauthier Villars, 1904.
8. Weber H. Lehrbuch der Algebra. Braunschweig: Verlag von Friderich Vieweg, Bd I (1898), Bd. II (1899), Bd. III. (1908).
9. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. Москва-Ленинград: ОНТИ и ГТТИ, 1931.
10. Ван дер Варден Б. Современная алгебра. Перевод с немецкого. М.
11. Чеботарев Н.Г. Основы теории Галуа. Москва-Ленинград: ОНТИ, Ч. I, 1934. - 219 с., Ч. II, 1937.
12. Артин Е. Теория Галуа, К.: Радянська школа, 1963. - 98 с.
13. Schinzel A. Historia teorii liczb w Polsce w latach 1851-1950 // Wiadomosci matematyczne. Seria II. - T. XXXI (1993). - Str. 19-50.

Надійшла до редколегії 1.10.2009

УДК 519.21

Н.В.Семеновська, інж.-мат. I кат.

Задача інтерполяції однорідного та ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля за спостереженнями на нескінченній циліндричній поверхні. II

Розглянуто задачу інтерполяції однорідного та ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля зі спектральною функцією певного вигляду за спостереженнями на нескінченній циліндричній поверхні.

Ключові слова: випадкове поле, інтерполяція.

E-mails: semenovska@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі Ю.Д.Попова [1] вивчалася задача екстраполяції ізотропних за простором та стаціонарних за часом випадкових полів за спостереженнями на нескінченній циліндричній поверхні. В роботах М.В.Карташова [2] та Н.Семеновської [3] розглядалася задача інтерполяції однорідного та ізотропного випадкового поля за спостереженнями на сфері в центрі сфери на площині та в довільній точці всередині сфери в n -вимірному просторі відповідно.

Задачу інтерполяції однорідного та ізотропного за простором і стаціонарного за часом випадкового поля в довільній точці за скінченною множиною спостережень на нескінченній циліндричній поверхні розглянуто в роботі [4]. В даній роботі отримані раніше результати звужено на клас випадкових полів зі спектральною функцією певного вигляду. Представлено певні приклади.

Для простоти будемо називати поля, що розглядаються, ізотропними за простором та стаціонарними за часом. Вивчається задача про найкращу лінійну інтерполяцію за скінченною множиною значень на нескінченній циліндричній поверхні.

Робота складається з трьох розділів. Другий розділ містить результати, отримані в робо-

N.V.Semenovska, Young researcher.

The interpolation problem of an homogeneous and isotropic by space and stationary by time random field by observations on infinite cylindric surface. II

The interpolation problem of an homogeneous and isotropic by space and stationary by time random field with definite spectral function by observations from infinite cylindric surface is investigated.

Key Words: random field, interpolation.

ті [4], без доведення. В третьому розділі представлено явні формули для однорідного та ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля зі спектральною функцією певного вигляду.

2 Інтерполяція ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля в довільній точці за скінченною множиною спостережень на нескінченній циліндричній поверхні

Нехай $\xi(x, t)$, $x = (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ – однорідне та ізотропне за просторовими координатами $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ та стаціонарне за часом t випадкове поле в $n + 1$ -вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^{n+1}$. Це означає, що $E\xi(x, t) = \text{const}$ (надалі будемо припускати $E\xi(x, t) = 0$), а кореляційна функція

$$\varphi(r, \tau) = E\xi(x, t)\overline{\xi(y, s)}$$

залежить лише від відстані $r = |x - y|$ між точками x, y та різниці τ між t та s .

Будемо надалі припускати, що існує спектральна щільність $f(x, y)$ поля, тобто виконуються співвідношення

$$\Phi(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} f(x, y) dx dy.$$

Нехай $E = \{(x, t) : r = \text{const}, 0 \leq \varphi_1 < 2\pi, 0 \leq \varphi_i < \pi, i = 2, 2, \dots, n-1, -\infty < t < \infty\}$ (нескінченна циліндрична поверхня) та $H_\xi(E)$ – замкнений в середньому квадратичному лінійний многовид, породжений $\xi(x, t), (x, t) \in E$.

Припустимо, що поле $\xi(x, t)$ спостерігається для всіх $(x, t) \in E$. Задача відшукування найкращої лінійної екстраполяційної формули для $\xi(y, s), y = (\rho, \bar{\psi}), \bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, зводиться до відшукування проєкції $\widehat{\xi(y, s)}$ елементу $\xi(y, s)$ на підпростір $H_\xi(E)$. Як відомо, ця проєкція єдина та знаходиться з умови

$$E\xi(y, s)\overline{\xi(x, t)} = E\widehat{\xi(y, s)}\overline{\xi(x, t)} \\ \text{для всіх } (x, t) \in E.$$

На практиці замість інтерполяції на просторі $H_\xi(E) = Cl\{\sum \alpha_k \xi(x_k, t_k), (x_k, t_k) \in E\}$ розглядається інтерполяція величини $\xi(y, s)$ зі спостережень на просторі

$$H_X(E) = \left\{ \sum \alpha_k \xi(x_k, t_k), (x_k, t_k) \in X \right\}. \quad (1)$$

де $X = \{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$ – деяка скінченна множина спостережень на циліндричній поверхні E .

Припускаємо надалі, що $b_m(r, \rho, \mu)$ квадратично інтегрована за μ на $(-\infty, +\infty)$. В роботі [4] отримано наступні результати.

Теорема 2.1. Нехай $X = \{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$ – фіксована множина зі спостережень на циліндричній поверхні E , $x_k = (r, \bar{\varphi}_k)$, $\bar{\varphi}_k = (\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(n-1)})$. Найкраща в сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки інтерполяція величини $\xi(y, s)$ за допомогою величин з $H_X(E)$ має вигляд

$$\widehat{\xi_X(y, s)} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \xi(x_k, t_k),$$

де вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ є розв'язком системи

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(R_{kj}, t_k - t_j) = \varphi(R_j, s - t_j), j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$R_{kj} = 2r \sin \frac{\theta_{kj}}{2}$, $R_j = 2\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta_j}$, а θ_{kj} та θ_j – кути між векторами $\{r, \bar{\varphi}_k\}$ і $\{r, \bar{\varphi}_j\}$ та $\{r, \bar{\varphi}_j\}$ і $\{\rho, \bar{\psi}\}$ відповідно.

Відповідна похибка дорівнює

$$\sigma_X^2 \equiv E \left(\xi(y, s) - \widehat{\xi_X(y, s)} \right)^2 = \sigma^2 + \widehat{\sigma_X^2} = \\ = \sigma^2 + 2^{n-2} \Gamma^2 \left(\frac{n}{2} \right) \sum_{m \geq 0} h(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_m^2(r, \rho, \mu)}{b_m(r, \mu)} d\mu - \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \alpha_j \text{Re} \{ \varphi(R_j, s - t_j) \}, \quad (3)$$

де

$$b_m(r, \rho, \mu) = \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda \rho)}{(\lambda \rho)^{\frac{n-2}{2}}} f(\lambda, \mu) d\lambda, \\ b_m(r, \mu) = b_m(r, r, \mu). \quad (4)$$

У випадках, коли точний розв'язок системи рівнянь (2) знайти важко, можна застосувати певну апроксимацію.

Позначимо через

$$F_N(\bar{\varphi}, t) = \sum_{\substack{k: \bar{\varphi}_k \leq \bar{\varphi} \\ t_k \leq t}} \alpha_k,$$

$$\varphi_1 \in [0, 2\pi], \quad \varphi_i \in [0, \pi], i = \overline{2, n-1}, \\ t \in (-\infty, +\infty),$$

кумулятивну функцію розподілу коефіцієнтів $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Тут нерівність $\bar{\varphi}_k \leq \bar{\varphi}$ означає систему поелементних нерівностей $\varphi_k^{(i)} \leq \varphi_i, i = \overline{1, n-1}$.

Теорема 2.2. Припустимо, що послідовність функцій $F_N(\cdot, \cdot)$ на $\Pi_n \times (-\infty, +\infty)$ з рівномірно обмеженою варіацією слабко збігається до функції $F(\cdot, \cdot)$ з обмеженою варіацією. Тоді гранична середньоквадратична похибка апроксимації $\widehat{\xi(y, s)}$ дорівнює

$$\widehat{\sigma_\infty^2} = c_n^2 \sum_{m \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} b_m(r, \mu) \sum_{l=1}^{h(m, n)} \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Pi_n} S_m^l(\bar{\varphi}) e^{i\mu t} dF(\bar{\varphi}, t) - e^{i\mu s} c_m^l(y, \mu) \right|^2 d\mu, \quad (5)$$

$$\text{де } c_m^l(y, \mu) = \frac{b_m(r, \rho, \mu)}{b_m(r, \mu)} S_m^l(\bar{\psi}),$$

$$\Pi_n = [0, 2\pi] \times \underbrace{[0, \pi] \times \dots \times [0, \pi]}_{n-2}$$

Наслідок 2.1. За умов Теорема 2.2, асимптотична похибка дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли для всіх $m \geq 0, l = \overline{1, h(m, n)}$.

$\mu \in (-\infty, +\infty)$ виконується

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Pi_n} S_m^l(\bar{\varphi}) e^{i\mu t} dF(\bar{\varphi}, t) = e^{i\mu y} c_m^l(y, \mu). \quad (6)$$

Наслідок 2.2. Якщо виконується

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{l=1}^{h(m,n)} |c_m^l(y, \mu)|^2 < +\infty, \quad \mu \in (-\infty, +\infty) \quad (7)$$

то асимптотична похибка дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли гранична функція щільності задовольняє тотожність

$$F'(\bar{\varphi}, t) = \frac{l(\bar{\varphi})}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\nu} C(y, x, \nu) d\nu \quad (8)$$

для $\bar{\varphi} \in \Pi_n, t \in (-\infty, +\infty)$,

де

$$l(\bar{\varphi}) = (\sin \varphi_2)^{n-2} (\sin \varphi_3)^{n-3} \dots \sin \varphi_{n-1},$$

$$C(y, x, \nu) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sum_{m \geq 0} \frac{b_m(r, \rho, \nu)}{b_m(r, \nu)} (2m + n - 2) \times$$

$$\times C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta), \quad (9)$$

θ - кут між векторами x та y , а $C_m^\nu(z)$, $m \geq 0$, - поліноми Гегенбауера.

Наслідок 2.3. Для довільної послідовності серії множин $X_N = \{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$, де $x_k = (r, \bar{\varphi}_k)$, $0 < \varphi_1^{(1)} < \varphi_2^{(1)} < \dots < \varphi_N^{(1)} = 2\pi$, $0 < \varphi_1^{(i)} < \varphi_2^{(i)} < \dots < \varphi_N^{(i)} = \pi$, $i = 2, n-1$, $t_k \in (-\infty, +\infty)$, при виконанні умови (7), якщо коефіцієнти

$$\alpha_k = l(\bar{\varphi}_k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it_k \nu} C(y, x_k, \nu) d\nu \Delta \bar{\varphi}_k \Delta t_k,$$

де $\Delta \bar{\varphi}_k := \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_k^{(i)} - \varphi_{k-1}^{(i)})$, $i \max_{k=1, N} |\prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_k^{(i)} - \varphi_{k-1}^{(i)})| \rightarrow 0$, $\max_{k=1, N} |\Delta t_k| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то

середньоквадратична похибка апроксимації $\widehat{\sigma}_X^2$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$.

3 Інтерполяція однорідного та ізотропного випадкового поля зі спектральною щільністю $f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$

Нехай для випадкового поля, що розглядається, спектральна щільність має вигляд

$$f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu), p \leq \mu \leq q, \quad (10)$$

$$f_2 = 0, \mu < p, q < \mu, p, q \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, в цьому випадку кореляційна функція випадкового поля $\varphi(r, \tau)$ також розкладається в добуток двох $\varphi(r, \tau) = \varphi_1(r) \varphi_2(\tau)$,

$$\varphi_1(r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} f_1(\lambda) d\lambda,$$

$$\varphi_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau \mu} f_2(\mu) d\mu.$$

Сформулюємо твердження, аналогічні наведеному в другому розділі, для випадкових полів, що розглядаються.

Теорема 3.1. Нехай спектральна щільність випадкового поля $\xi(x, t)$ має вигляд (10). $X = \{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$ - фіксована множина зі спостережень на циліндричній поверхні E , $x_k = (r, \bar{\varphi}_k) = (r, \varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(n-1)})$. Найкраща в сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки інтерполяція величини $\xi(y, s)$ за допомогою величин з $H_X(E)$ має вигляд

$$\widehat{\xi_X}(y, s) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \xi(x_k, t_k),$$

де вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ є розв'язком системи

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_1(R_{kj}) \varphi_2(t_k - t_j) = \varphi_1(R_j) \varphi_2(s - t_j), \quad (11)$$

$$j = \overline{1, N},$$

$R_{kj} = 2r \sin \frac{\theta_{kj}}{2}$, $R_j = 2\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta_j}$, а θ_{kj} та θ_j - кути між векторами x_k і x_j та x_j і y відповідно.

Відповідна похибка дорівнює

$$\sigma_X^2 \equiv E \left(\xi(y, s) - \widehat{\xi_X}(y, s) \right)^2 = \sigma^2 + \widehat{\sigma}_X^2 =$$

$$= \sigma^2 + 2^{n-2} \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{m \geq 0} h(m, n) \frac{b_m^2(r, \rho)}{b_m(r)} \int_p^q f_2(\mu) d\mu -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \alpha_j \operatorname{Re} \{ \varphi_1(R_j) \varphi_2(s - t_j) \}, \quad (12)$$

$$\text{де } b_m(r, \rho) = \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda \rho)}{(\lambda \rho)^{\frac{n-2}{2}}} f_1(\lambda) d\lambda,$$

$$b_m(r) = b_m(r, r).$$

Для випадкового поля зі спектральною щільністю (10) гранична похибка інтерполяції набуде наступного вигляду

$$\widehat{\sigma}_\infty^2 = c_n^2 \sum_{m \geq 0} \int_p^q f_2(\mu) b_m(r) \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Pi_n} S_m^l(\bar{\varphi}) e^{i\mu t} dF(\bar{\varphi}, t) - e^{i\mu \frac{b_m(r, \rho)}{b_m(r)}} S_m^l(\bar{\psi}) \right|^2 d\mu, \quad (13)$$

Надалі для випадкового поля, що розглядається, будемо припускати виконання умов теорему 2.2 та умови

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \frac{b_m(r, \rho)}{b_m(r)} \right|^2 < +\infty, \quad \mu \in (-\infty, +\infty). \quad (14)$$

Справедливі наступні твердження.

Наслідок 3.1. Асимптотична похибка $\widehat{\sigma}_X^2$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли для $\bar{\varphi} \in \Pi_n, t \in (-\infty, +\infty)$ гранична функція щільності задовольняє тотожність

$$F'(\bar{\varphi}, t) = \frac{l(\bar{\varphi})}{2\pi} C(y, x) \int_P^q e^{i(s-t)\nu} d\nu = \\ = \frac{l(\bar{\varphi})}{2\pi} C(y, x) F'_2(t),$$

де

$$C(y, x) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sum_{m \geq 0} \frac{b_m(r, \rho)}{b_m(r)} (2m + n - 2) \times \\ \times C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta), \\ F'_2(t) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{e^{iq(s-t)} - e^{ip(s-t)}}{t-s}, & t \neq s, \\ \frac{q-p}{2\pi}, & t = s, \end{cases}$$

θ - кут між векторами x та y , а $C_m^\nu(x), m \geq 0$, - поліноми Гегенбауера.

Наслідок 3.2. Для довільної послідовності серій множин

$X_N = \{(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)\}$, де $x_k = (r, \bar{\varphi}_k), 0 < \varphi_1^{(1)} < \varphi_2^{(1)} < \dots < \varphi_N^{(1)} = 2\pi, 0 < \varphi_1^{(i)} < \varphi_2^{(i)} < \dots < \varphi_N^{(i)} = \pi, i = \overline{2, n-1}, t_k \in (-\infty, +\infty)$, якщо коефіцієнти

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} C(y, x_k) l(\bar{\varphi}_k) F'_2(t_k) \Delta \bar{\varphi}_k \Delta t_k,$$

де $\Delta \bar{\varphi}_k := \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_k^{(i)} - \varphi_{k-1}^{(i)}), i$

$\max_{k=1, N} \left| \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_k^{(i)} - \varphi_{k-1}^{(i)}) \right| \rightarrow 0, \max_{k=1, N} |\Delta t_k| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то середньоквадратична похибка апроксимації $\widehat{\sigma}_X^2$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$.

Приклад 1. Нехай часова складова випадкового поля є гаусовою, тобто кореляційна функція має вигляд $\varphi(r, \tau) = \varphi_1(r) e^{-a|\tau|}$. Тоді відповідна спектральна щільність дорівнює $f_2(\mu) = 2a(a^2 + \mu^2)$.

Для випадкового поля з часовою кореляційною складовою

$$\varphi_2(\tau) = \begin{cases} (1 - \tau)^{\kappa-1} (1 + \tau)^{\gamma-1}, & |\tau| < 1, \\ \varphi_2(\tau) = 0, & |\tau| > 1, \end{cases}$$

відповідна спектральна складова матиме вигляд $f_2(\mu) = 2^{\kappa+\gamma-1} \beta(\gamma, \kappa) e^{i\mu} {}_1F_1(\gamma; \kappa + \gamma; -2i\mu)$, де ${}_1F_1$ - гіпергеометрична функція.

Підставивши значення $f_2(\mu)$ в (12) або в (13), отримаємо відповідно похибку інтерполяції та граничну похибку інтерполяції для даних випадкових полів.

4 Висновки

В роботі розглянуто задачу інтерполяції однорідного та ізотропного випадкового поля зі спектральною щільністю вигляду $f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$ в довільній точці за скінченною множиною спостережень на нескінченній циліндричній поверхні. Знайдено розв'язок цієї задачі, а також явну формулу для відповідної середньоквадратичної похибки. Досліджуються асимптотична поведінка похибки при зростанні числа точок, умови безпомилкової апроксимації. У зв'язку з цим рекомендовано оптимальний розподіл вагових коефіцієнтів інтерполяції для випадкових полів, що розглядаються.

Список використаних джерел

1. Ю.Д.Попов, *Некоторые задачи линейной экстраполяции для однородных и изотропных по пространству и стационарных по времени случайных полей*, ДАН УССР (1968), №12, 166-177.
2. М.В.Карташов, *Скінченновимірна інтерполяція випадкового поля на площині. Теорія ймовірностей і математична статистика* (1994), №51, 53-61.
3. Н.Семеновська, *Задача інтерполяції однорідного та ізотропного випадкового поля*, Теорія ймовірностей і математична статистика (2006), №74, 150-158.
4. Н.Семеновська, *Задача інтерполяції однорідного та ізотропного за простором та стаціонарного за часом випадкового поля за спостереженнями на нескінченній циліндричній поверхні. I*, Теорія ймовірностей і математична статистика (прийнято до друку).

Надійшла до редколегії 13.11.2009

УДК 519.21

Т.О. Яковенко, к.ф.-м.н., м.н.с.
Р.Є. Ямненко, к.ф.-м.н., доцент

**Швидкість збіжності вейвлет-розкладів
узагальненого накопичувального
процесу Орнштейна-Уленбека**

У роботі досліджується швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальнених випадкових процесів, які мають таку ж коваріаційну функцію, як і накопичений процес Орнштейна-Уленбека [4], але траєкторії яких належать простору $L_2(\Omega)$.

Ключові слова: процес Орнштейна-Уленбека, швидкість збіжності, вейвлет-розклад.

E-mails: yata2001@ukr.net, yamnenko@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

У роботі досліджується швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальнених випадкових процесів, які мають таку ж коваріаційну функцію, як і накопичений процес Орнштейна-Уленбека, але траєкторії яких належать простору $L_2(\Omega)$. Приклади таких процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ та властивості черг, утворених ними, зокрема, розглянуто у роботі [4]. Застосовуючи потужний апарат теорії випадкових процесів з просторів Соболева-Орліча (див. [3]), вдалось показати, що швидкість збіжності вейвлет-розкладів $X_n(t)$ має порядок $o(\frac{1}{2^n})$ чи $O(\frac{1}{2^n})$ при $n \rightarrow \infty$ за деяких додаткових умов на вейвлет-базис.

Додаткові відомості з теорії просторів Орліча можна отримати, наприклад, з робіт [6] та [8]. Для більш детального ознайомлення з теорією вейвлетів та вейвлет-розкладів випадкових процесів пропонуємо роботи [5], [7], [2], [9].

2 Узагальнена похідна випадкового процесу

Нагадаємо спочатку визначення узагальненої або, що еквівалентно, слабкої похідної для функції.

Означення 2.1. [9] Функція $f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається слабо диференційовною, якщо

T.O. Yakovenko, PhD, Junior Scientist
R.E. Yamnenko, PhD, Associate Professor

**Convergence rate for wavelet expansions
of generalized accumulated
Ornstein-Uhlenbeck process**

The paper investigates the rate of convergence of wavelet expansion of some generalized stochastic processes that have the same covariance function as an accumulated Ornstein-Uhlenbeck process [4] with trajectories that are from the space $L_2(\Omega)$.

Key Words: Ornstein-Uhlenbeck process, rate of convergence, wavelet expansion.

існує така функція $g = \{g(x), x \in \mathbb{R}\}$, що є інтегрованою на будь-якому обмеженому інтервалі та для всіх $a \leq b$ має місце зображення:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(u) du. \quad (1)$$

Функція g називається слабкою (узагальненою) похідною функції f . Будемо позначати слабку похідну $f^{(i)}$.

Слабко диференційовні функції неперервні на $\mathbb{R}$. Функція g визначається з точністю до еквівалентності.

Означення 2.2. [2] Функція f є N раз слабо диференційовною, якщо вона має N слабо диференційовних похідних.

Зауваження 1. [2] Функція f та похідні $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$ є неперервними функціями, а похідні $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$ є звичайними похідними.

Означення 2.3. Будемо говорити, що для процесу $X = \{X(t), t \in T\}$ існує узагальнена (слабка) похідна з ймовірністю одиниця, якщо існує локально інтегровний за Лебегом з ймовірністю одиниця випадковий процес $X^{(1)}(t)$, такий, що для всіх $a, b \in T$ $\int_a^b X^{(1)}(t) dt = X(b) - X(a)$ з ймовірністю одиниця. При цьому випадковий процес $X^{(1)}(t)$ називається узагальненою (слабкою) похідною процесу X .

Нехай $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$ – вимірний простір, $T \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(T)$ – σ -алгебра борелівських множин на T , μ – міра Лебега.

Означення 2.4. [8] Простором Соболева N -того порядку $W_q^N(T)$ називається множина класів еквівалентності функцій з функціонального простору $L_q(T)$, що задається таким чином: $W_q^N(T) = \{f: T \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ – вимірні}, f^{(k)}(t) \in L_q(T), 0 \leq k \leq N\}$, де $f^{(k)}(t)$ – узагальнена похідна функції f порядку k .

3 Вейвлет-розклади випадкових процесів

Наведемо основні відомості з теорії вейвлетів.

Розглянемо деяку комплекснозначну функцію $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ з простору $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $\varphi_{0k}(x) = \{\varphi(x - k), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$. Накладемо на φ умови.

Умова 1. [9] Система $\varphi_{0k}(x)$ є ортонормованою системою, тобто

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{0k}(x) \overline{\varphi_{0j}(x)} dx = \delta_{kj},$$

де δ_{kj} – символ Кронекера. Позначимо V_0 – це простір функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$ таких, що

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0k}(x), \quad (2)$$

де ряд (2) збігається в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$. Тоді система $\{\varphi_{0k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$ буде ортонормованим базисом у V_0 .

Визначимо простір $V_j = \{h(x): h(x) = f(2^j x); f \in V_0\}$, $j \geq 0$. Система функцій $\{\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом у V_j .

Умова 2. [9] Простори V_j мають властивість: для кожного $j \geq 0$ $V_j \in V_{j+1}$.

Умова 3. [9] Множина $V = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ щільна в $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}).$$

У книгах [2, 9] наведені необхідні та достатні умови виконання умов 1, 2, а також достатні умови, за яких виконується умова 3.

Означення 3.1. [9] Якщо для функції $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ виконуються умови 1-3, то послідовність $\{V_j\}_{j \geq 0}$, що породжується цією функцією, називають багаторівневим аналізом в $L_2(\mathbb{R})$. При цьому функцію φ називають φ -вейвлетом.

Нехай послідовність $\{V_j\}_{j \geq 0}$ є багаторівневим аналізом в $L_2(\mathbb{R})$. Позначимо $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$, тоді $V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^j W_i$. Отже, в цьому випадку $L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$.

Для будь-якого φ -вейвлета φ існує функція ψ , така, що система функцій $\{\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом в W_j , а система

$$\begin{cases} \varphi_{0k}(x) = \varphi(x - k), \\ \psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \end{cases} \quad j \geq 0, k \in \mathbb{Z}$$

є ортонормованим базисом в $L_2(\mathbb{R})$. Тоді кожную функцію з $L_2(\mathbb{R})$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \psi_{jk}(x), \quad (3)$$

де ряд (3) збігається в $L_2(\mathbb{R})$. Розклад (3) називають вейвлет-розкладом функції f .

Відомо, що φ -вейвлет φ допускає зображення $\tilde{\varphi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right)$, де $m_0(y)$ – це 2π -періодична функція з простору $L_2(0, 2\pi)$, $\hat{\varphi}(y)$ – перетворення Фур'є функції φ . Тоді функцію $\psi = \{\psi(x), x \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$ з (3) можна знайти як обернене перетворення Фур'є до функції

$$\tilde{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \hat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right). \quad (4)$$

Приклади вейвлет функцій можна знайти в усіх книгах з вейвлет аналізу.

Означення 3.2. Нехай φ – φ -вейвлет. Для φ виконується умова S , якщо існує монотонна незростаюча функція $\Phi(x)$, $x \geq 0$, така, що

$$|\varphi(x)| \leq \Phi(|x|) \quad \text{та} \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) dx < \infty.$$

Означення 3.3. Для функції φ виконується умова $S(N)$, де $N \geq 0$ – деяке ціле число, якщо для φ виконується умова S та $\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) |x|^N dx < \infty$.

Наведемо два комплекси умов, яким можуть задовольняти φ -вейвлети.

$K_1)$ Для φ виконується умова $S(N)$, φ належить простору Соболева $W_q^N(\mathbb{R})$, $N \geq 0$, $q > 1$;

$K_2)$ Для φ виконується умова $S(N)$ та одне з чотирьох припущень:

- $a_1) \varphi \in W_q^{N-1}(\mathbb{R}), N \geq 1, q > 1;$
 $a_2) |m_0(y)| = 1 + o(|y|^{2(N-1)})$ при $y \rightarrow 0$,
де $|m_0(y)|$ – функція, що визначена в
(4), $N \geq 1;$
 $a_3) \int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0, n = 0, 1, \dots, N-1,$
 $N \geq 1$, де ψ – відповідний φ м-
вейвлет.
 $a_4) \hat{\varphi}(y - 2k\pi) = o(|y|^{N-1})$ при $y \rightarrow 0,$
 $k \neq 0, N \geq 1.$

В книзі [9] наведено приклади систем вейв-
летів, для яких виконуються комплекси умов
 K_1, K_2 . Це, зокрема, вейвлети Добеші, симпле-
ти.

Для випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, $EX(t) = 0$ такого, що належить простору
 $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця і для будь-якої си-
стемі вейвлетів має місце розклад

$$X(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{0k} \varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (5)$$

де ξ_{0k} та η_{jk} – випадкові величини, такі, що

$$\xi_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \overline{\varphi_{0k}(t)} dt, \quad \eta_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \overline{\psi_{jk}(t)} dt.$$

Ряд (5) збігається в $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю
одиниця. Розглянемо наближення випадкового
процесу X частинною сумою ряду (5):

$$X_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{0k} \varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk} \psi_{jk}(t).$$

Зрозуміло, що $X_n(t)$ збігається до $X(t)$ при
 $n \rightarrow \infty$ в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю
одиниця, тобто з ймовірністю одиниця

$$\|X(t) - X_n(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

У роботі [3] було досліджено швидкість цієї
збіжності в випадку, коли випадковий процес X
належить простору $L_p(\Omega)$, $p \geq 2$.

Теорема 3.1. [3] Розглянемо числа p і q , та-
кі, що $2 \leq p \leq q$. Нехай випадковий процес
 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ є центрованим, сепарабель-
ним, вимірним, має N слабких похідних з ймо-
вірністю одиниця та виконуються наступні
умови:

$$1) \forall a, b \in \mathbb{R} : b - a \leq 1 \text{ і } \forall k = \overline{0, N}$$

$$\sup_{t \in [a, b]} \|X^{(k)}(t)\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{t \in [a, b]} \left(E |X^{(k)}(t)|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{(\max\{|a|, |b|\})^\tau},$$

де $\tau > \frac{1}{1-\gamma} \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{q}\right)$ і $0 < \gamma < 1$ – деяке фі-
ксоване число;

$$2) \forall a, b \in \mathbb{R} : b - a \leq 1$$

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} \left(E |X^{(N)}(t) - X^{(N)}(s)|^p \right)^{1/p} \leq C_{a,b} h^\alpha,$$

$$\text{де } \alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Тоді:

$b_1)$ якщо для f -вейвлету φ виконується ком-
плекс умов K_1 , то з ймовірністю одиниця
 $2^{Nn} \|X_n(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$b_2)$ якщо для f -вейвлету φ виконується ком-
плекс умов K_2 , то з ймовірністю одиниця
 $\|X_n(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{2^{Nn}}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

4 Швидкість збіжності вейвлет- розкладів накопичувального узагаль- неного процесу Орнштейна-Уленбека

Нехай T – деяка параметрична множина.

Означення 4.1. [4] Випадковий процес $\eta =$
 $\{\eta(t), t \in T\}$ називатимемо узагальненим про-
цесом Орнштейна-Уленбека з простору $L_2(\Omega)$,
якщо сім'я $\{\eta(t), t \in T\}$ належить простору
 $L_2(\Omega)$ та коваріаційною функцією для η є

$$B_\eta(t, s) = e^{-\theta|t-s|}, \quad \theta > 0. \quad (6)$$

Приклад 1. [4] Нехай $\eta = \{\eta(t), t \in [0, T]\}$ – про-
цес Орнштейна-Уленбека з коваріаційною фун-
кцією вигляду (6). Тоді η можна подати у ви-
гляді ряду, що збігається рівномірно в середньо-
му квадратичному: $\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n \psi_n(t)$, де ξ_n
– послідовність незалежних нормально розподі-
лених випадкових величин, $E\xi_n = 0$ та $E\xi_n^2 = 1$,
 λ_n^2 – власні значення, а ψ_n – відповідні вла-
сні функції наступного інтегрального рівняння
 $\psi(s) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^T B_\eta(t, s) \psi(t) dt$. Нехай тепер ζ_n –
послідовність незалежних випадкових величин
з простору $L_2(\Omega)$ таких, що $E\zeta_n = 0$, $E\zeta_n^2 = 1$.
Тоді процес $\hat{\eta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \zeta_n \psi_n(t)$ є центрованим
випадковим процесом з коваріаційною функці-
єю B_η , який належить простору $L_2(\Omega)$.

Нехай

$$X(t) = \int_0^t \eta(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

де $\eta(s)$ – узагальнений процес Орнштейна-Уленбека з простору $L_2(\Omega)$. Процес X будемо називати накопичувальним процесом Орнштейна-Уленбека. Поведінка подібних процесів досліджувалась, зокрема, у роботі [4]. Коваріаційна функція процесу $X(t)$ дорівнює

$$B_X(t, s) = \frac{2 \min(t, s)}{\theta} + \frac{e^{-\theta t} + e^{-\theta s} - e^{-\theta|t-s|} - 1}{\theta^2}.$$

Нехай $\tilde{X}(t) = g(t)X(t)$ – добуток процесу $X(t)$ на деяку неперервну парну вагову функцію $g(t)$, монотонно незростаючу при $t \geq 0$. Аналогічно, як у (5), розглянемо наближення випадкового процесу $\tilde{X}(t)$ частинною сумою ряду

$$\tilde{X}_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{0k} \varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (8)$$

де ξ_{0k} та η_{jk} – випадкові величини, такі, що

$$\xi_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(t) \overline{\varphi_{0k}(t)} dt, \quad \eta_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(t) \overline{\psi_{jk}(t)} dt.$$

З теореми 3.1 випливає наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай $X(t) = \int_0^t \eta(s) ds$, $t \geq 0$, де $\eta(s)$ – узагальнений процес Орнштейна-Уленбека з простору $L_2(\Omega)$, $g(t) = A(|t| + 1)^{-\tau - \frac{1}{2}}$, де $A^2 = \theta / (2(\tau + \frac{1}{2})^2 + \theta)$, $\tau > \frac{1}{1-\gamma} (\frac{3}{2} - \frac{\gamma}{q})$, $0 < \gamma < 1$ – деяке фіксоване число. Тоді для $q \geq 2$:*

b₁) якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_1), то з ймовірністю одиниця $2^n \|\tilde{X}_n(t)g^{-1}(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

b₂) якщо для f-вейвлету φ виконується комплекс умов K_2), то з ймовірністю одиниця $\|\tilde{X}_n(t)g^{-1}(t) - X(t)\|_{L_q(\mathbb{R})} = O(\frac{1}{2^n})$ при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Процес $\eta(s)$ є узагальненою похідною для процесу $X(t)$ в силу рівності (7). Перевіримо послідовно умови теореми 3.1 для $p = 2$ на кожному півінтервалі $0 \leq a < b < \infty$: $b - a \leq 1$ для випадкового процесу $\tilde{X}(t) = g(t)X(t)$ якщо $N = 1$.

1) $k = 0$:

$$\sup_{t \in [a, b]} \left(\mathbb{E} |\tilde{X}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{t \in [a, b]} g(t) \left(\frac{2}{\theta^2} (\theta t + e^{-\theta t} - 1) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \sup_{t \in [a, b]} g(t) \left(\frac{2t}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{2}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} A(b+1)^{-\tau} \leq \frac{1}{b^{\tau}}.$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [a, b]} \|\tilde{X}^{(1)}(t)\|_{L_2(\Omega)} = \\ & = \sup_{t \in [a, b]} \left(\mathbb{E} |g'(t)X(t) + g(t)\eta(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sup_{t \in [a, b]} \left((g'(t))^2 B_X(t, t) + g^2(t) B_{\eta}(t, t) + \right. \\ & \quad \left. + 2g(t)g'(t) \mathbb{E} X(t)\eta(t) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \sup_{t \in [a, b]} \left((g'(t))^2 \frac{1}{\theta^2} (2\theta t + 2e^{-\theta t} - 2) + g^2(t) + \right. \\ & \quad \left. + 2g(t)g'(t) \int_0^t B_{\eta}(t, s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sup_{t \in [a, b]} \left((g'(t))^2 \frac{2t}{\theta} + g^2(t) + 2g(t)g'(t) \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq A \sup_{t \in [a, b]} \left(\frac{2(\tau + \frac{1}{2})^2}{\theta} t(t+1)^{-2\tau-2} + (t+1)^{-2\tau-1} \right. \\ & \quad \left. - (2\tau+1)(t+1)^{-2\tau-2} \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq A \sup_{t \in [a, b]} \left(\frac{2(\tau + \frac{1}{2})^2 + \theta}{\theta} (t+1)^{-2\tau-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = A \left(\frac{2(\tau + \frac{1}{2})^2 + \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} (b+1)^{-\tau - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{b^{\tau}}. \end{aligned}$$

Перевіримо умову 2) теореми 3.1. Маємо

$$\begin{aligned} & \|\tilde{X}^{(1)}(t) - \tilde{X}^{(1)}(s)\| = \\ & = \|g'(t)X(t) + g(t)\eta(t) - g'(s)X(s) - g(s)\eta(s)\| \leq \\ & \leq |g'(t) - g'(s)| \|X(t)\| + |g'(s)| \|X(t) - X(s)\| + \\ & \quad + |g(t) - g(s)| \|\eta(t)\| + |g(s)| \|\eta(t) - \eta(s)\|. \end{aligned}$$

Розглянемо окремо кожен доданок у правій частині попередньої нерівності, використовуючи відому теорему Ойлера^[1] про середнє значення:

$$(i) \quad \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} |g'(t) - g'(s)| \|X(t)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} A(\tau+0, 5) \left| (t+1)^{-\tau-\frac{3}{2}} - (s+1)^{-\tau-\frac{3}{2}} \right| \times 5 \quad \text{Висновки}$$

$$\times \left(\frac{2\theta t + 2e^{-\theta t} - 2}{\theta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} A(\tau+0, 5)(\tau+1, 5) \frac{|t-s|}{(a+1)^{\tau+\frac{5}{2}}} \left(\frac{2t}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{A2^{\frac{1}{2}}(\tau+0, 5)(\tau+1, 5)}{\theta^{\frac{1}{2}}(a+1)^{\tau+2}} h;$$

$$(ii): \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} |g'(s)| \|X(t) - X(s)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} \frac{A2^{\frac{1}{2}}(\tau+0, 5)}{\theta(s+1)^{\tau+1,5}} \left(\theta|t-s| - 1 + e^{-\theta|t-s|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{A2^{\frac{1}{2}}(\tau+0, 5)}{\theta^{\frac{1}{2}}(a+1)^{\tau+1,5}} h^{\frac{1}{2}};$$

$$(iii): \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} |g(t) - g(s)| \|\eta(t)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} A \left| (t+1)^{-\tau-\frac{1}{2}} - (s+1)^{-\tau-\frac{1}{2}} \right| \leq$$

$$= \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} \frac{A(\tau+0, 5)}{(a+1)^{\tau+\frac{3}{2}}} |t-s| = \frac{A(\tau+0, 5)}{(a+1)^{\tau+\frac{3}{2}}} h;$$

$$(iv): \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} |g(s)| \|\eta(t) - \eta(s)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} \frac{A2^{\frac{1}{2}}}{(s+1)^{\tau+0,5}} \left(1 - e^{-\theta|t-s|} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A2^{\frac{1}{2}}}{(a+1)^{\tau+0,5}} \left(1 - e^{-\theta h} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A\theta 2^{\frac{1}{2}}}{(a+1)^{\tau+0,5}} h^{\frac{1}{2}}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in [a, b]}} \|\tilde{X}^{[1]}(t) - \tilde{X}^{[1]}(s)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{a,b} h^{\alpha},$$

де

$$C_{a,b} = \frac{A\sqrt{2}}{(a+1)^{\tau+0,5}} \left(\frac{(\tau+0,5)(\tau+1,5)}{\sqrt{\theta}(a+1)^{1,5}} + \right. \\ \left. + \frac{(\tau+0,5)}{\sqrt{\theta}(a+1)} + \frac{(\tau+0,5)}{\sqrt{2}(a+1)} + \theta \right), \\ \alpha = \begin{cases} 1, & \text{коли } h \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{коли } 0 \leq h < 1. \end{cases}$$

□

Досліджено швидкість збіжності вейвлет-розкладів узагальнених накопичених процесів Орнштейна-Уленбека. Дані результати планується поширити на інші класи випадкових процесів з різних функціональних просторів.

Список використаних джерел

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ. - К.: "Факт", 2004. - 560 с.
2. Козаченко Ю.В. Лекції з вейвлет аналізу. - К.: ТВіМС, 2004. - 147 с.
3. Козаченко Ю.В., Яковенко Т.О. Випадкові процеси у просторах Соболева-Орлича // Український математичний журнал - 2006. - том. 58, №. 10. - С. 1340-1356.
4. Ямненко Р. Оцінка ймовірності переповнення буфера для черги, що є узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека. // Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. - 2005. - Вип. 73. - С.164-176.
5. Chui C. K. An Introduction to Wavelets. - New York: Academic Press, 1992. - 266 p.; (Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. - М.: Мир, 2001. - 412 с.)
6. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. - AMS, Providence RI, 2000.
7. Daubechies I., Ten Lecture on Wavelets. - Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. - 324 p.; (Добеші І., Десять лекцій по вейвлетам: Пер. с англ. - Москва-Ижевск: РХД, 2001. - 463 с.)
8. Rao M.M. and Pen Z.D. Theory of Orlicz spaces. - New York - Basel - Hong Kong: Marsel Dekker, Ink., 1991. - 445 p.
9. Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, Approximation and Statistical Applications. - New York: Springer, 1998. - 265 p.

Надійшла до редколегії 01.11.2009

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 539.3

Завгородній А.В., аспірант

Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі

Дасться постановка просторової задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної товстостінної циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Задача розв'язується методом Фур'є і зводиться до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язування цих систем використано ефективний метод дискретної ортогоналізації. Розраховані амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань панелі.

Ключові слова: резонансні коливання, циліндрична панель, саморозігрів.

E-mail: Andrew-mdu@rambler.ru

Статтю представив член редколегії д. фіз.-м. н. проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

В сучасній техніці часто застосовуються товстостінні циліндричні оболонки, для розрахунку динамічного стану яких виникає потреба у використанні просторової постановки задач механіки деформівного твердого тіла. Крім того, розв'язок просторової задачі дозволяє дати оцінку точності наближених теорій тонкостінних елементів. Для циліндричних тіл з полімерних матеріалів і композитів на їх основі необхідно враховувати їх в'язкопружні властивості. При гармонічному навантаженні, особливо на резонансних частотах, в таких елементах конструкцій може мати місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву в результаті гістерезисних втрат в матеріалі. В [3–6] подано огляд основних досягнень з термомеханіки зв'язаних полів у тілах з непружних матеріалів при моногармонічному механічному навантаженні. Для розв'язування цих задач, як правило, використовуються

Zavgorodniy A.V., PhD student

The forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick-walled viscoelastic cylindrical panel

The formulation of a three-dimensional problem about the forced resonance vibrations and dissipative heating of a viscoelastic thick-walled cylindrical panel with simply supported edges is given. The nonelastic material behavior is described by conception of complex characteristics. It is supposed that mechanical and thermophysical material properties do not depend on a temperature. The problem is solved by the method of variable separation and is reduced to boundary-value problems for the systems of ordinary differential equations. These systems is solved by a method of a discrete orthogonalization. Amplitude- and temperature-frequency characteristics of the vibrations of the panels are calculated.

Key words: resonant vibrations, cylindrical panell, self-heating.

чисельні методи. В літературі відсутні розв'язки задач про резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних тривимірних тіл в просторовій постановці.

В даній роботі подана постановка задачі про резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної циліндричної панелі при її навантаженні гармонічним за часом поверхневим тиском P_0 з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання непружної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, розвинута в [3]. Вважається, що торці панелі шарнірно обперті. Це дозволяє методом Фур'є звести задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь, для розв'язку якої використовується ефективний чисельний метод дискретної ортогоналізації [1]. Він дозволяє одержати результати з наперед заданою точністю. Вважається, що характеристики матеріалу не залежать від температури. При цьому задача розпадається на декілька окремих задач: 1) задачу про вимушені резонансні коливання в'язкопружної цилін-

дричної панелі; 2) задачу розрахунку дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією.

2. Постановка задачі та метод її розв'язування

Для дослідження вимушених коливань в'язкопружної циліндричної панелі з ізотропного матеріалу в просторовій постановці використаємо рівняння, представлені в монографії [2], де розглянуті статичні пружні задачі. Для врахування динамічних ефектів ці рівняння потрібно доповнити силами інерції. Крім того, у випадку моногармонічного деформування в'язкопружного тіла відповідно до концепції комплексних характеристик [3] у вказаних рівняннях потрібно замінити дійсні параметри Ляме на комплексні. В результаті при шарнірному обпиранні торців циліндричної панелі шляхом розділення змінних вихідну тривимірну задачу можна звести до комплексної системи звичайних диференціальних рівнянь по радіальній координаті. По аналогії з викладеним в [2] як невідомі, вибираємо набір змінних $\sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_z$. Тут величини $(\cdot)'$, $(\cdot)^*$ означають відповідно дійсну та уявну частини напружень і зміщень. Процедура розділення змінних детально описана в [7]. Коефіцієнт Пуассона вважаємо дійсним. Тоді з використанням наведених в [2] результатів можна одержати систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі для циліндричної панелі з ізотропного в'язкопружного матеріалу. Випишемо лише перші два рівняння вказаної системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{d\rho} = & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \sigma_r + \lambda_n R_2 \sigma_{rz} + \mu_k \frac{1}{\rho} \sigma_{r\theta} + \\ & + \frac{1}{R_2 \rho^2} \frac{h}{1-\nu^2} \left(\sigma_z' - \frac{E^*}{E'} \sigma_z^* \right) - \frac{1}{\rho} \nu \lambda_n \frac{h}{1-\nu^2} \left(\sigma_z' - \frac{E^*}{E'} \sigma_z^* \right) - \\ & - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\sigma_{\theta z}' - \frac{E^*}{E'} \sigma_{\theta z}^* \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \sigma_r' \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{d\rho} = & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nu}{1-\nu} - i \right) \sigma_r + \lambda_n R_2 \sigma_{rz}^* + \mu_k \frac{1}{\rho} \sigma_{r\theta}^* + \\ & + \frac{1}{R_2 \rho^2} \frac{h}{1-\nu^2} \left(\sigma_z^* + \frac{E^*}{E'} \sigma_z' \right) - \frac{1}{\rho} \nu \lambda_n \frac{h}{1-\nu^2} \left(\sigma_z^* + \frac{E^*}{E'} \sigma_z' \right) - \\ & - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{h}{R_2 \rho^2} \left(\sigma_{\theta z}^* + \frac{E^*}{E'} \sigma_{\theta z}' \right) - \gamma \omega^2 \frac{R_2}{E'} h \sigma_r^* \end{aligned}$$

Решта рівнянь мають аналогічний вигляд. Задача розв'язується при таких механічних граничних умовах

$$\sigma_z = U_r = U_\theta = 0 \quad (z = 0, z = l); \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = U_r = U_z = 0 \quad (\theta = \pm \alpha);$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = -P_{kn} \quad (r = R), \quad P_0 = \sum_{k,n} P_{kn} \sin \mu_k \theta \sin \lambda_n z; \quad (3)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0 \quad (r = r_0).$$

Для розрахунку температури дисипативного розігріву при резонансних коливаннях дисипативна функція для відповідної моди коливань розраховується за формулою:

$$\begin{aligned} D = & \frac{\omega}{2} (\sigma_r' \epsilon_r' - \sigma_r' \epsilon_r^*) = \frac{\omega}{2} [(\sigma_{rr}' \epsilon_{rr}' - \sigma_{rr}' \epsilon_{rr}^*) + \\ & + (\sigma_{\theta\theta}' \epsilon_{\theta\theta}' - \sigma_{\theta\theta}' \epsilon_{\theta\theta}^*) + (\sigma_{zz}' \epsilon_{zz}' - \sigma_{zz}' \epsilon_{zz}^*) + 2(\sigma_{r\theta}' \epsilon_{r\theta}' - \sigma_{r\theta}' \epsilon_{r\theta}^*) + \\ & + 2(\sigma_{rz}' \epsilon_{rz}' - \sigma_{rz}' \epsilon_{rz}^*) + 2(\sigma_{\theta z}' \epsilon_{\theta z}' - \sigma_{\theta z}' \epsilon_{\theta z}^*)]. \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому рівняння енергії для ізотропного матеріалу запишеться у формі:

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + R_2^2 D = 0. \quad (5)$$

Розглядаються такі теплові граничні умови:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & \quad (z = 0, \frac{l}{R_2}), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 & \quad (\theta = \pm \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} + \alpha R_2 (T - T_c) = 0 & \quad (\rho = 1), \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} - \alpha R_2 (T - T_c) = 0 & \quad (\rho = \frac{R_1}{R_2}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Як і задача механіки, сформульована вище задача теплопровідності розв'язується методом Фур'є. При цьому дисипативна функція розраховується за формулою:

$$\begin{aligned} D = & \frac{\omega}{2} [D_0(\rho) + D_1(\rho) \cos(2\mu_k \theta) + \\ & + D_2(\rho) \cos(2\lambda_n R_2 z) + D_3(\rho) \cos(2\mu_k \theta) \cos(2\lambda_n R_2 z)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді температура представляється у вигляді:} \\ T = & [T_0(\rho) + T_1(\rho) \cos(2\mu_k \theta) + T_2(\rho) \cos(2\lambda_n R_2 z) + \\ & + T_3(\rho) \cos(2\mu_k \theta) \cos(2\lambda_n R_2 z)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Після розділення змінних в рівнянні енергії матимемо:

$$\lambda \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_0}{d\rho} \right) + \frac{\omega R_2^2}{2} D_0(\rho) = 0, \quad (9)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_1}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_1 \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_1(\rho) = 0. \quad (10)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_2}{d\rho} \right) - (2\lambda_n)^2 T_2 \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_2(\rho) = 0 \quad (11)$$

$$\lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{12}}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_{12} - (2\lambda_n R_2)^2 T_{12} \right] + \frac{\omega R_2^2}{2} D_3(\rho) = 0. \quad (12)$$

Для кожного з наведених рівнянь мають місце такі теплові граничні умови:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_0}{d\rho} + \alpha R_2 (T_0 - T_c) &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_0}{d\rho} - \alpha R_2 (T_0 - T_c) &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_1}{d\rho} + \alpha R_2 T_1 &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_1}{d\rho} - \alpha R_2 T_1 &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_2}{d\rho} + \alpha R_2 T_2 &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_2}{d\rho} - \alpha R_2 T_2 &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dT_3}{d\rho} + \alpha R_2 T_3 &= 0 & (\rho = 1), \\ \lambda \frac{dT_3}{d\rho} - \alpha R_2 T_3 &= 0 & (\rho = \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Як і механічні рівняння (1), рівняння енергії (9)–(12) також можна представити в нормальній формі.

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{d\rho} &= \frac{q_i}{\lambda \rho} \quad (i = 0, 1, 2, 3), \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_0) + \frac{\omega R_2^2}{2} D_0(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_1) - \lambda \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_1 + \frac{\omega}{2} D_1(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_2) - (2\lambda_n R_2)^2 T_2 + \frac{\omega R_2^2}{2} D_2(\rho) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (q_3) - \lambda \frac{1}{\rho^2} (2\mu_k)^2 T_{12} - \lambda (2\lambda_n R_1)^2 T_{12} + \frac{\omega R_2^2}{2} D_3(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Теплові граничні умови (13)–(16) можна представити через q_i, T_i ($i=0, 1, 2, 3$).

Таким чином, для незалежних від температур властивостей матеріалу задача розпадається на розв'язок крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь (2), (3) і (9)–(16).

Для їх розв'язування застосуємо метод дискретної ортогоналізації [1], який дає

можливість одержати результати з наперед заданою точністю.

Для розрахунку коефіцієнта демпфування механічних коливань використаємо універсальну характеристику внутрішньої дисипації для в'язкопружного тіла [3]

$$\psi = 2\pi \frac{\int_{(V)} (\sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} - \sigma''_{ij} \epsilon''_{ij}) dV}{\int_{(V)} (\sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \epsilon''_{ij}) dV} \quad (14)$$

Якщо коефіцієнт Пуассона дійсний, то остання формула дає:

$$\psi = 2\pi \frac{G''}{G'} \quad (15)$$

Таким чином, для ізотропного в'язкопружного матеріалу з дійсним коефіцієнтом Пуассона і з незалежними від температури властивостями коефіцієнт демпфування (15) повністю визначається через відношення уявної частини комплексного модуля зсуву до його дійсної частини.

3. Числові результати

Як приклад, розглянемо задачу про коливання циліндричної панелі з поліетилену, механічні властивості якого представлено в [8]. Коефіцієнт теплопровідності поліетилену

$\lambda = 0,18 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Панель має такі розміри: $R_1 = 0,09 \text{ м}$, $R_2 = 0,11 \text{ м}$, $L = 0,1 \text{ м}$, $\beta = \pi/3$. На її поверхнях має місце конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем з температурою $T = 20^\circ\text{C}$ і коефіцієнтом теплообміну

$$\alpha = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}.$$

Для розрахунку власної частоти з використанням просторової постановки задачі використовуємо розв'язок задачі про вимушені коливання [1].

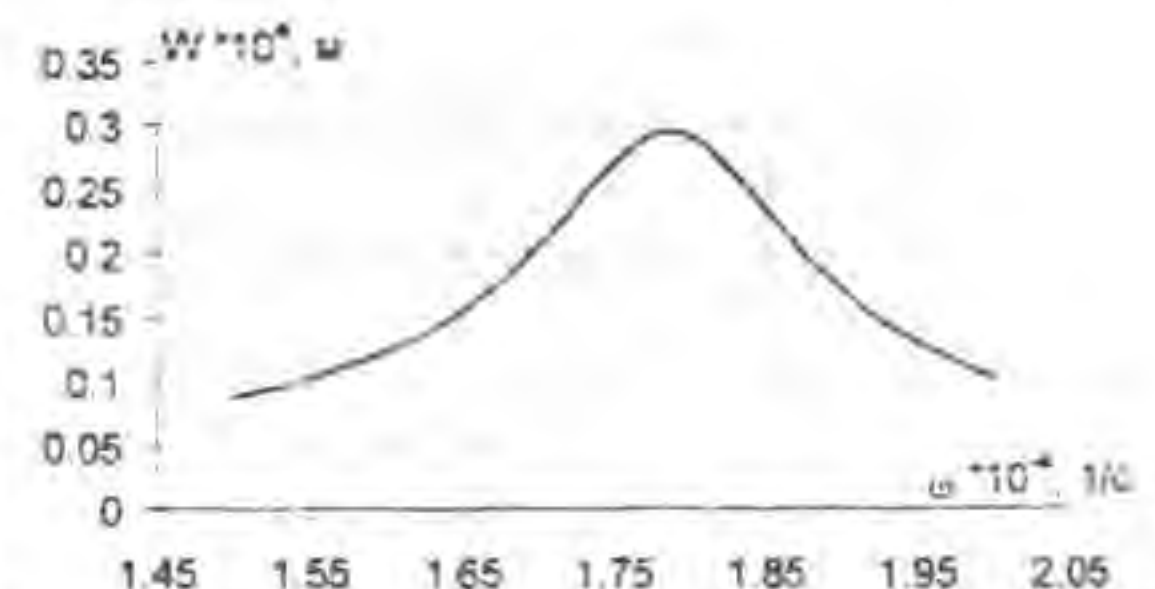


Рис. 1. Амплітудно-частотна характеристика

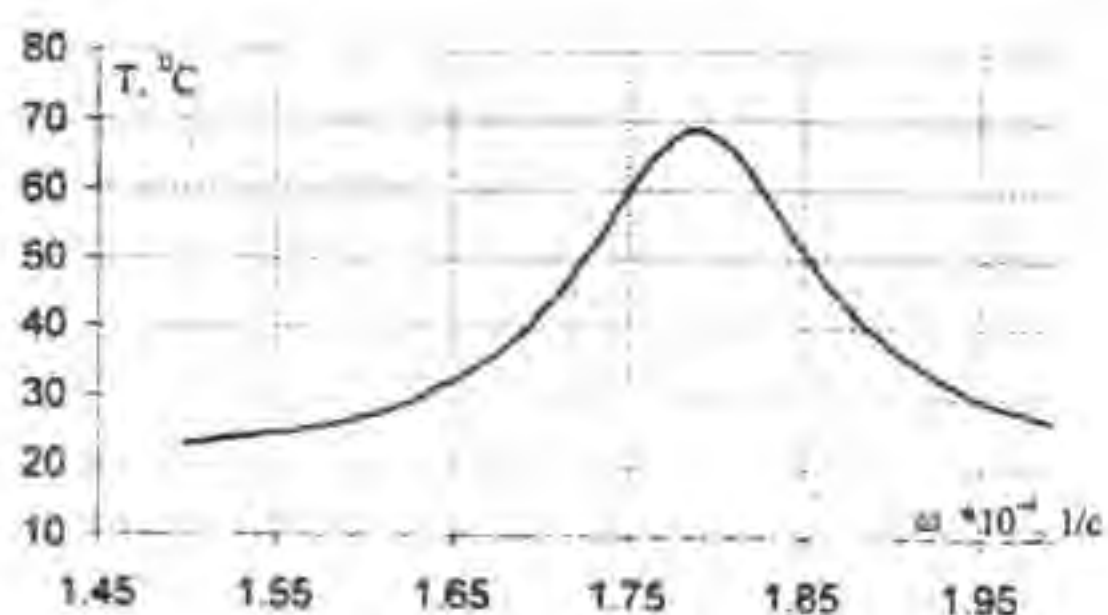


Рис. 2. Температурно-частотна характеристика

Результати розрахунків представлено на Рис. 1, 2. На Рис. 1 показана амплітудно-частотна характеристика коливань по першій згинальній моді з власною частотою $\omega_r = 17900$ ($1/s$), розрахована на основі методу дискретної ортогоналізації.

Температурно – частотна характеристика показана на Рис. 2. Як видно з цього рисунку, при коливаннях на резонансній частоті має місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву.

4. Висновки

Таким чином, в даній статті подана постановка задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої в'язкопружної циліндричної панелі з шарнірним обпиранням її торців при дії на неї рівномірного зовнішнього тиску, який змінюється з часом по гармонічному закону з частотою, близькою до першої резонансної частоти згинальних коливань. Розв'язок задачі знаходиться методом Фур'є в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Розраховані амплітудно- та температурно-частотні характеристики коливань панелі з поліетилену.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т.4. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1981. – 544 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища школа, 1985. – 190 с.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир. ЖГТУ. – 2005. – 428 с.
4. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. Обобщенные модели термомеханического поведения материалов с учетом взаимодействия механических и тепловых полей // В книге: Успехи механики: В 6-ти томах. Под редакцией А.Н.Гузя. Том 1. – Киев: А.С.К., 2005. – С. 45–68.
5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов. В книге: Успехи механики: В 6-ти томах. Под редакцией А.Н.Гузя. Том 1. – Киев: А.С.К., 2005. – С. 197–130.
6. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // В книге: Успехи механики: В 6-ти томах. Под редакцией А.Н.Гузя. Том 2. – Киев: А.С.К., 2006. – С. 185–217.
7. У.Мезона. Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика / Под редакцией Т.2, Ч.Б. – М.: Мир, 1969. – 420 с.
8. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // Thermal Stresses. – 2005. – Vol.28. – P. 783–815.

Надійшла до редколегії

17.12.2009

УДК 517.(075.8)

Олексій Ф. Калайда, к.ф.-м.н. доцент

Нові теореми про середнє

Доведено ряд нових теорем про середнє для неперервних та гладких функцій

Ключові слова: функція, теорема, середнє.

E-mail: akalayda@i.com.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор
Кириченко В.В.

Тут наведено нові теореми про середнє для неперервних функцій та нові теореми про середнє в диференціальному та інтегральному численні.

1. Теореми про середнє для неперервних функцій.

Теорема 1 (про середнє для лінійної комбінації значень функцій). Для лінійної комбінації значень неперервної функції справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = f(c) \sum_{j=1}^n \alpha_j, \alpha_j > 0, \quad (1)$$

$$f_j = f(x_j), x_j \in [a, b], x_1 = a, x_n = b, c \in [a, b].$$

Доведення. При $n=2$ рівність (1) доведено в [1], у загальному випадку для монотонних функцій – в [2]. Для неперервних функцій (без вимоги їх монотонності) доведення проведемо рекурентно – по індукції: при $n=2$ маємо рівність

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = f(c_1)(\alpha_1 + \alpha_2), c_1 \in [x_1, x_2],$$

а тому

$$f(c_1)(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 f_3 = f(c_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ c_2 \in [c_1, x_3]$$

і т.д. На $(n-1)$ – кроці дістанемо рівність (1).

Теорема 1 є дискретний аналог першої теореми про середнє в інтегральному численні.

З теореми 1 для знакосталої функції дістаємо теорему про середнє для добутку степенів значень неперервної функції.

Теорема 2 Для добутку степенів значень неперервної додатньої функції справедлива рівність

$$\prod_{j=1}^n f_j^{\alpha_j} = f(c)^\gamma, c \in [a, b], \gamma = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad (2)$$

Доведення. Прологарифмувавши добуток в рівності (2), дістанемо рівність (1) для $\ln f$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \ln f_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ln f(c) = \ln f(c)^\gamma,$$

O. F. Kalaida, Cand Sci (Phys.-Math.), Associate Professor

New theorems about middle

The row of new theorems is led to about middle for continuous and smooth functions

Keywords: function, theorem, middle.

звідки й слідує рівність (2).

Далі наведемо теорему про середнє для лінійної комбінації часток лінійних комбінацій двох значень двох неперервних функцій.

Теорема 3 (про середнє для лінійної комбінації часток лінійних комбінацій двох значень функцій). Для лінійних комбінацій значень часток лінійних комбінацій двох значень функцій f, g справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\alpha_j f_j + \beta_j f_{j+1}}{\alpha_j g_j + \beta_j g_{j+1}} = \frac{f(c)}{g(c)} \sum_{j=1}^n \gamma_j, c \in [a, b]. \quad (3)$$

Доведення. Спочатку доведемо рівність (3) для одного доданка. При цьому скористаємось методикою [1] доведення теореми 1 для двох доданків. Отже, доведемо рівність

$$\frac{\alpha f_1 + \beta f_2}{\alpha g_1 + \beta g_2} = \frac{f(c)}{g(c)}, c \in [x_1, x_2]. \quad (4)$$

При $c=x_1$ та $c=x_2$, відповідно, маємо рівності

$$\varphi_1 = \beta(g_1 f_2 - g_2 f_1), \varphi_2 = -\alpha(g_1 f_2 - g_2 f_1),$$

а отже, $\varphi_1 \varphi_2 = -\alpha \beta (g_1 f_2 - g_2 f_1)^2 \leq 0$. Тому при $\sigma = (f_2 g_1 - f_1 g_2) \neq 0$ маємо строгу нерівність $\varphi_1 \varphi_2 < 0$, а тому, згідно з теоремою Коші для знакозмінної на кінцях відрізка неперервної функції, маємо рівність (4) при $c \in (x_1, x_2)$. Якщо ж $\sigma = 0$, то це означає, що $f_1 / g_1 = f_2 / g_2 = \lambda$, а тому рівність (4) у цьому випадку має вигляд $f(c) / g(c) = \lambda$, тобто $(c=x_1) \vee (c=x_2)$. Цим рівність (4) доведено повністю. Тепер з рівності (4) слідує рівність (3) так само, як рівність (1) слідує з неї ж при $n=2$. Отже, теорему 3 доведено повністю. Аналогічно тому, як з теореми 1 слідує теорема 2, з теореми 3 слідує відповідна теорема про середнє для добутків доданків в рівності (3).

Теорема 4 (про середнє для добутків часток лінійних комбінацій двох значень функцій). Для добутків часток лінійних комбінацій двох значень неперервної функцій справедлива рівність.

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{\alpha f_j + \beta f_{j+1}}{\alpha g_j + \beta g_{j+1}} \right)^{\gamma_j} = \left(\frac{f(c)}{g(c)} \right)^{\sum_{j=1}^n \gamma_j}, c \in [a, b]. \quad (5)$$

Доведення. Доведення рівності (5) повністю збігається з доведенням теореми 2.

Далі наведемо нові теореми про середнє в диференціальному численні.

2. Теореми про середнє для гладких функцій.

Теорема 5 (про середнє для лінійної комбінації двох значень функції з коефіцієнтами різних знаків). Для диференційовної функції справедлива рівність

$$\alpha f(b) - \beta f(a) = \alpha h f'(c) + (\alpha - \beta) f(a), \quad (6)$$

$$\alpha\beta < 0, h = b - a, c \in (a, b).$$

Доведення. Доведення рівності (6) випливає з очевидних перетворень та теореми Лагранжа про скінченні прирости (при $\alpha = \beta$ рівність (6) перетворюється в рівність в теоремі Лагранжа).

Теорема 6 (про середнє для частки значень знакосталої функції). Для частки значень диференційовної знакосталої функції справедлива рівність

$$f(b)/f(a) = \exp(hf'(c)), h = b - a, c \in (a, b). \quad (7)$$

Доведення. Прологарифмувавши рівність (7), дістанемо рівність, чинну для теореми Лагранжа для логарифма функції f . Отже, рівність (7) має сенс.

а) Багатоточкові теореми типу теореми Лагранжа. Теорема Лагранжа та теорема Коші в диференціальному численні є, по суті, двоточковими теоремами про середнє. Разом з тим рівність $hf'(c) - \Delta f = 0$, що виражає суть теореми Лагранжа, означає те, що похибка апроксимації $\varepsilon(x) = f(x) - L_1(x)$ функції лінійним многочленом Лагранжа $L_1(x)$ за вузлами a, b як така, що має прості нулі у цих вузлах, за теоремою Ролля має точку $c \in (a, b)$, що

$$\varepsilon'(c) = f'(c) - L_1'(c) = 0, L_1'(x) = \Delta f / h, h = b - a.$$

Отже, за аналогією, можна сформулювати багатоточкові теореми типу теореми Лагранжа, взявши за основу похибку апроксимації функції многочленом Лагранжа $L_n(x)$ за $(n+1)$ вузлами x_j або, більш загально, многочленом Маркова – Ерміта $H_m(x)$ за k_j – кратними вузлами x_j , $m = k_1 + \dots + k_{n+1} - 1$. Таким чином, дістанемо багатоточкові теореми про середнє.

Теорема 7. Справедлива рівність

$$m! H_m^{(m)}(x) = f^{(m)}(c), c \in (x_1, x_n). \quad (8)$$

Доведення. Похибка апроксимації функції многочленом $H_m(x)$ має на відрізку $[x_1, x_n]$ $(m+1)$ нулів (з врахуванням їх кратності, множина вузлів упорядкована), то за наслідком з тео-

реми Ролля маємо рівність (8). Зокрема, у випадку многочлена Лагранжа рівність (8) має вигляд

$$L_n^{(n)}(x) = n! \sum_{j=0}^n f(x_j) / \psi_j(x_j) = f^{(n)}(c),$$

$$\psi_j(x_j) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i).$$

б) Теореми про середнє для функцій з параметрами. Якщо відомі теореми про середнє розглядати для функцій з параметрами (наприклад, для багатовимірних функцій), то, можливо, за рахунок цих параметрів можна добути нові теореми про середнє. Розглянемо це питання у випадку лінійної комбінації декількох функцій.

Теорема 8. Для функцій $f, g_1, \dots, g_k$ при вказаних нижче умовах справедлива рівність

$$f^{(n+k+1)}(\zeta) / \Delta_n(a, b; f) = \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j^{(n+k+1)}(\zeta) / \Delta_n(a, b; g_j), \zeta \in (a, b). \quad (9)$$

Доведення. Так звана твірна функція для рівності (9)

$$x \mapsto \varepsilon(x) = \Delta_n(a, x; f) / \Delta_n(a, b; f) - \sum_{j=1}^k \alpha_j \Delta_n(a, x; g_j) / \Delta_n(a, b; g_j),$$

$$\Delta_n(a, x, q) = q(x) - T_n(a, x, q),$$

$T_n(a, x, q)$ – многочлен Тейлора n -го порядку з центром у точці a функції q , при умові $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ має на відрізку $[a, b]$ $n+2$ нулі. Тому при довільних значеннях параметрів за теоремою Ролля рівність (9) вірна при $k=0$. Якщо ж параметри α_j задати так, щоб функція ε мала ще k нулів (з урахуванням їх кратності) на відрізку (для цього необхідно, щоб відповідна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів мала розв'язки), то матимемо рівність (9). Замість многочлена Тейлора, в (9) можна покласти многочлен Маркова – Ерміта $H_m(x)$ та n замість m .

Список використаних джерел

1. Зав'ялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошніченко В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. - 352 с.
2. Калайда О.Ф. Про деякі теореми про середнє для неперервних функцій //Одинадцята Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. К.: 2006. - С. 435.

Надійшла до редколегії 03.07.2009

УДК 539.3

Карнаухов В.Г., д.ф.-м.н., професор,
Карнаухова Т.В., к.ф.-м.н., доцент,
Петренко Н.В., інженер

Активне демпфування вимушених резонансних коливань жорстко защемленої тришарової фізично нелінійної круглої пластини

Методом Бубнова–Гальоркіна розв’язано задачу про активне демпфування вимушених резонансних згинальних коливань тришарової жорстко защемленої фізично нелінійної круглої пасивної в’язкопружної пластини за допомогою розподілених п’єзоелектричних актуаторів. Досліджено вплив фізичної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування коливань пластини.

Ключові слова: кругла пластинка, жорстке защемлення, актуатор, дисипативний розігрів

E-mail: karn@inmech.kiev.ua

Статтю представив член редколегії д. ф.-м. н. проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

Круглі пластини з непружних матеріалів знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки [1]. Дуже часто на них діють гармонічні за часом механічні навантаження з частотою, близькою до резонансної. При високому рівні деформування, яке супроводжує резонансні коливання, проявляється залежність механічних характеристик матеріалів від амплітуд деформацій [2]. Для зменшення рівня коливань пластин широко використовуються комбіновані методи демпфування, коли в структуру елемента одночасно включаються компоненти з високими гістерезисними втратами і п’єзоелектричні компоненти, які виконують роль актуаторів. При цьому основна задача полягає в розрахунку тієї різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. На роботу актуаторів може суттєво вплинути фізична нелінійність і температура дисипативного розігріву, яка виникає в результаті розсіювання електромеханічної енергії в теплову. В літературі відсутні роботи, присвячені дослідженню впливу фізичної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність

Karnaukhov V. G., D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor
Karnaukhova T. V., C.Sci. (Phys.-Math.), Ass. Professor,
Petrenko N.V., engineer

Active damping of the forced resonant vibrations of a rigidly clamped three – layer physically nonlinear circular plate

By the Bubnov–Galerkin method the problem of damping of the forced resonant vibrations of a three-layer physically nonlinear viscoelastic plate with a rigidly clamped edge by the distributed actuators is solved. The influence of the physical nonlinearity and dissipative heating on an effectiveness of the active damping vibrations of the plate is investigated.

Key words: circular plates, rigidly clamped edge, actuators, dissipative heating

активного демпфування вимушених резонансних коливань пластин. В даній роботі досліджується вплив цих факторів на активне демпфування вимушених резонансних коливань жорстко защемленої тришарової круглої пластини з фізично нелінійного матеріалу.

2. Постановка задачі

Розглянемо тришарову круглу пластину радіуса R , яка складена з середнього фізично нелінійного в’язкопружного шару товщиною h_0 і двох однакових пружних шарів товщиною h_1 . На пластину діє рівномірний поверхневий тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом з частотою ω , близькою до резонансної: $q = q_0 \exp(i\omega t)$. На верхню і нижню поверхні пластини нанесено два однакові п’єзоелектричні шари протилежної поляризації. Механічний стан середнього шару моделюється на основі концепції комплексних характеристик [2,5,6]. Для ізотропного матеріалу вважається, що дійсна G' та уявна G'' складові комплексного модуля зсуву $G = G' + iG''$ залежать від амплітуд деформацій зсуву. Ця залежність знаходиться з експери-

ментів. Такий підхід загальноновизнаний в динаміці конструкцій при моногармонічному деформуванні [2,5,6,9]. По аналогії з теорією малих пружно-пластичних деформацій для тривимірного напружено-деформованого стану вважається, що компоненти комплексного модуля залежать від інтенсивності деформацій Γ .

В даній роботі для моделювання механічної поведінки пластини використано гіпотези Кірхгофа – Лява. Основні співвідношення механіки пластин – кінематичні співвідношення, рівняння руху, механічні граничні умови – представлено в [1]. В подальшому обмежимося лише згинальними коливаннями. До вказаних рівнянь потрібно додати комплексні визначальні рівняння для моментів [2,3]

$$M_1 = -D(\kappa_r + \nu\kappa_\theta) + M_0, \quad M_2 = -D(\nu\kappa_r + \kappa_\theta) + M_0 \quad (1)$$

і для дисипативної функції

$$W = \frac{\omega}{2} [(M_r^* \kappa_r' - M_r' \kappa_r^*) + (M_\theta^* \kappa_\theta' - M_\theta' \kappa_\theta^*)]. \quad (2)$$

$$\text{Тут } M_0 = \frac{1}{2} (h_0 + h_1) \gamma_{31} V_A \quad (V_A - \text{підведена}$$

до актуатора різниця потенціалів). Універсальне стаціонарне рівняння енергії має вигляд [9]:

$$k\hbar \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) \right] - 2\alpha\theta + W = 0 \quad (3)$$

(k – коефіцієнт теплопровідності, α – коефіцієнт тепловіддачі). Коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу ν вважається дійсним і постійним, а модуль зсуву – залежним від другого інваріанту Γ девіатора тензора деформацій. Тому D в (1) буде нелінійною функцією згинальних деформацій. Підставляючи рівняння стану (1) в рівняння руху [1] і в дисипативну функцію (2), одержимо нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно комплексного прогину і температури:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[D \left(\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[D \left(\nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \right] - \quad (4)$$

$$-(\gamma h_0) R^2 \omega^2 w - R^2 q(\rho) - R^2 \Delta M_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} - \frac{2\alpha R^2}{(\lambda h_0)} (T - T^0) + \frac{\omega G^*(T) h_0^2}{12 R^2 (1-\nu) \lambda} \left[\left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \left(\frac{d^2 w^*}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw^*}{d\rho} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw^*}{d\rho} \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} \right) \right] = 0.$$

Якщо властивості матеріалу не залежать від температури, зв'язана задача термомеханіки

розпадається на такі окремі задачі: 1) нелінійну задачу про механічні коливання пластини; 2) задачу про розрахунок дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла.

3. Розв'язок задачі

Для дослідження залежності комплексних характеристик від деформацій можна використати різні моделі непружної поведінки матеріалу: в'язкопружні, пружно-пластичні, в'язко-пружнопластичні. При деформуванні на резонансних частотах за межами пружності при реальному теплообміні та розмірах пружно-пластичної чи в'язкопружно-пластичної пластини температура дисипативного розігріву, як правило, перевищує розумні межі. Допустимі рівні температур досягаються при деформаціях в області мікропластичності. При цьому можна використати модель, представлену в [5]. Ця модель дає такі вирази для дійсної і уявної частин комплексного модуля зсуву:

$$G' = G(1 - r\Gamma^\alpha), \quad G'' = gG\Gamma^\alpha. \quad (6)$$

Тут r, g, α визначаються з експериментів. Так, наприклад, наведені в [8] експериментальні дані для модуля зсуву в'язкопружного матеріалу можна досить точно апроксимувати функціями:

$$G' = a_1 - b_1 \Gamma^2, \quad G'' = a_2 - b_2 \Gamma^2, \quad (7)$$

де $a_1 = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $a_2 = 0,507 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0,451 \cdot 10^{15} \text{ Па}$ (для цього матеріалу коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,27$, а густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$).

Нехай торець пластини жорстко защемлений. Тоді при коливаннях на першій резонансній частоті її прогин можна представити у вигляді:

$$w = A(1 - \rho^2)^2. \quad (8)$$

Використовуючи (7), (8), з рівняння руху (4) методом Бубнова-Гальоркіна одержимо таке кубічне рівняння для квадрату безрозмірної амплітуди $y = |A|^2 / h^2$ коливань пластини:

$$y^3 - n_2 y^2 + n_1 y - n_0 = 0. \quad (9)$$

Тут введено такі позначення:

$$n_0 = \frac{R^8 p_0^2}{h_0 (b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \quad n_1 = \frac{R^8 (b_{11}^2 + b_{21}^2)}{h_0^4 (b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \quad (10)$$

$$n_2 = \frac{2R^4 (b_{11} b_{12} + b_{21} b_{22})}{h_0^2 (b_{12}^2 + b_{22}^2)},$$

$$\text{де } p_0 = \frac{qR^2}{6} - 2\gamma_{31} (h_0 + h_1) \rho_1^2 (1 - \rho_1^2) V_A.$$

$$b_{11} = \frac{16}{9} \frac{a_1 h_0^3}{(1-\nu)R^2} - \frac{\bar{\rho} R^2 \omega^2}{10},$$

$$b_{21} = \frac{16}{9} \frac{a_2 h_0^3}{(1-\nu)R^2}, \quad b_{12} = \frac{8}{5} \frac{b_1 h_0^3 C}{(1-\nu)R^2},$$

$$b_{22} = \frac{8}{5} \frac{b_2 h_0^3 C}{(1-\nu)R^2},$$

$$C = \frac{1}{3} [3(2\alpha_1 - \alpha_2)(7+5\nu) - (8\alpha_1 - 4\alpha_2)(1+3\nu)] -$$

$$-\frac{1}{10} [(10\alpha_1 - 3\alpha_2)(1+3\nu) - (10\alpha_1 - 3\alpha_2)(3+\nu)] \quad (11)$$

Стационарна температура дисипативного розігріву знаходиться з диференціального рівняння теплопровідності (5) при теплових граничних умовах, які відповідають заданій на краю температурі T_c :

$$T = T_c \quad \text{при} \quad r = R. \quad (12)$$

Розв'язок граничної задачі (5), (12) знайдемо методом Бубнова-Гальоркіна, використовуючи апроксимацію

$$\theta = T - T_c = T_1(1 - \rho^2) \quad (13)$$

$$\text{де параметр } T_1: T_1 = t_1 x + t_2 x^2. \quad (14)$$

Тут параметри t_1, t_2 залежать від теплофізичних та електромеханічних властивостей пасивних і п'єзоактивних матеріалів, при цьому t_1 завжди додатній, а знак t_2 залежить від знаку b_2 в апроксимації (7): $t_2 > 0$ при $b_2 > 0$ і $t_2 < 0$ при $b_2 < 0$.

4. Аналіз результатів

Розглянемо пластину радіусом $R = 0,3 \text{ м}$ та товщиною $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. На пластину діє навантаження $q = 2 \cdot 10^3 \text{ Па}$. На Рис. 1 показана залежність амплітуди коливань від частоти (АЧХ) для фізично нелінійного матеріалу.

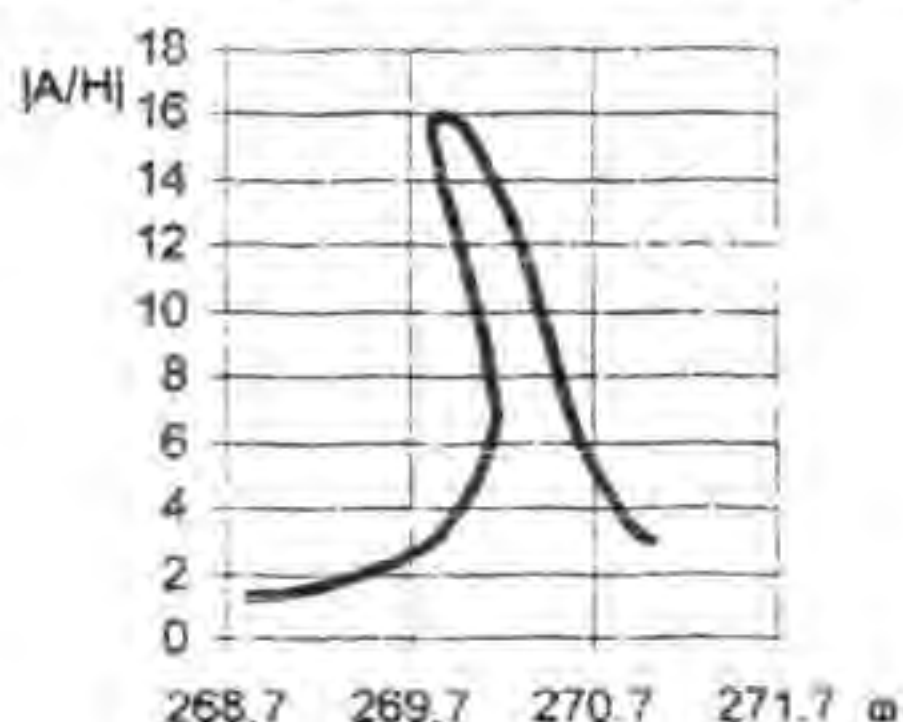


Рис. 1. АЧХ для фізично нелінійного матеріалу

Аналогічна залежність для фізично лінійного матеріалу представлена на Рис. 2. Як бачимо, фізична нелінійність погіршує ефективність пасивного демпфування коливань пластини.

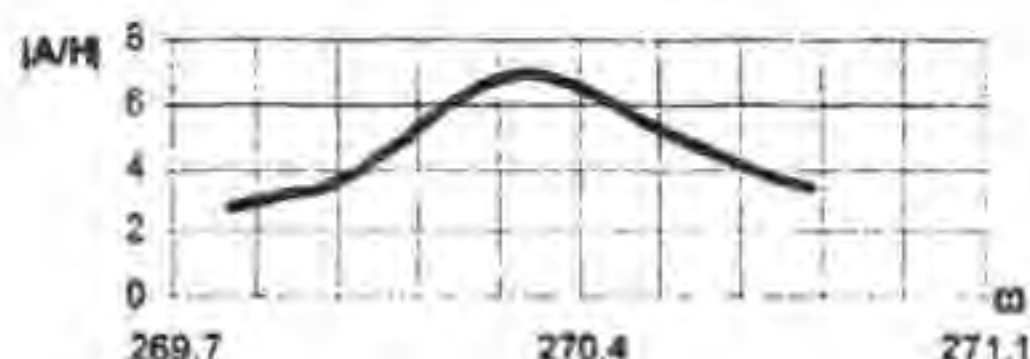


Рис. 2. АЧХ для фізично лінійного матеріалу

З виразу (11) видно, що якщо до актуатора підвести різницю потенціалів

$$V_A = qR^2 [12\gamma_{31}(h_0 + h_1)\rho_1^2(1 - \rho_1^2)], \quad (15)$$

то амплітуда вимушених коливань дорівнюватиме нулю. З виразу (15) маємо, що фізична нелінійність не впливає на різницю потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Вираз (15) також показує, що робота актуатора буде найбільш ефективною (різниця потенціалів буде мінімальною), якщо радіус актуатора $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. З розв'язку рівняння енергії (13), (14) видно, що фізична нелінійність може як збільшити (при $t_2 > 0$) температуру дисипативного розігріву, так і зменшити її (при $t_2 < 0$), що, як вказувалось вище, залежить від знаку b_2 . При досягненні температурою дисипативного розігріву точки Кюрі T_K п'єзоактивний матеріал стає пасивним і робота п'єзоактуатора погіршується. Будемо вважати, що температура не повинна досягати T_K в жодній точці пластини. З цієї умови можна знайти критичне значення навантаження q_{cr} , при якому актуатор досягає точки Кюрі в центрі пластин, де температура максимальна. Це критичне значення визначається з співвідношень (9) і (13).

Покладаючи в (13) $\theta = \theta_K = T_K - T_c = t_1 x_{cr} + t_2 x_{cr}^2$, при $t_2 > 0$ знайдемо критичне значення амплітуди коливань $x_{cr} = A_{cr}^2$:

$$x_{cr} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 + \frac{\theta_{cr}}{t_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{t_2} \right) \quad (16)$$

Підставляючи (16) в (9), знайдемо критичне значення параметра навантаження n_{0kr} :

$$n_{0kr} = \frac{x_{kr}^3}{h^6} - n_2 \frac{x_{kr}^2}{h^4} + n_1 \frac{x_{kr}}{h^2}. \quad (17)$$

Більш точне значення критичного навантаження знайдемо, вважаючи, що температура дисипативного розігріву досягається в точці $\rho = \rho_1$. При цьому в усій активній області $0 \leq \rho \leq \rho_1$ температура перевищує точку Кюрі. Тоді критичне значення параметра навантаження визначається з наведених вище формул (16), (17), якщо в них замінити величину θ_k на величину $\hat{\theta}_k = \frac{\theta_k}{1-A^2}$. При оптимальних

розмірах актуатора $\rho_1^2 = 1/2$ величина $\hat{\theta}_k = 2\theta_k$. При $t_2 < 0$ мінімальне критичне значення амплітуди x_{kr} визначається з формули

$$x_{kr} = t_1 \left((2|t_2|) - [t_1^2 / (4|t_2|) - \theta_{kr} / |t_2|]^{1/2} \right)$$

При цьому критичне значення параметра навантаження визначається з формули (17), в якій величину $-n_2$ потрібно замінити на $|n_2|$. Якщо механічне навантаження перевищує критичне значення, актуатор втрачає своє функціональне призначення із-за втрати матеріалом п'єзоефекту.

5. Висновки

Таким чином, в статті одержано аналітичний розв'язок задачі про резонансні коливання і дисипативний розігрів жорстко защемленої круглої пластини з фізично нелінійного матеріалу при дії на неї механічного поверхневого тиску і підведеної до актуатора різниці потенціалів.

З аналізу одержаного розв'язку випливає, що фізична нелінійність не впливає на різницю потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Проте фізична нелінійність суттєво впливає на температуру дисипативного розігріву. При досягненні температурою точки Кюрі, актуатор втрачає своє функціональне призначення. З цієї умови знайдено критичне значення параметра механічного навантаження, після досягнення якого керувати коливаннями пластини стає неможливим із-за втрати матеріалом п'єзоефекту.

Список використаних джерел

1. Григолюк Э.И. Прочность, колебания и устойчивость круговых пластин. – М., НИИ механики МГУ, 1997. – 134с.
2. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев, Наукова думка. – 1986. – 224с.
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Січко В.М. Моногармоничне наближення в задачах про нелінійні коливання і дисипативний розігрів неупругих тіл // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – 49, №1. – С.85 – 105.
5. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328с.
6. Савченко Е.В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: ООО "Аспект-Поліграф", 2006. – 232с.
7. Encyclopedia of Smart Materials, 1–2 (Ed. M. Schwartz,) – New York: Wiley, 2002. – 1176 pp.
8. Gandhi F. Influence of nonlinear viscoelastic material characterization on performance of constrained layer damping treatment // AIAA Journal, – 2001. – 39, N5. – P. 924–931.
9. Jones D. I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley, 2001. – 412 pp.

Надійшла до редколегії

17.12.09

УДК 532.595

Олег С. Лимарченко, д.т.н., професор,
Ігор С. Ружицький, аспірант

Зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини в рухомому еліпсоїді

Розглядається сумісний рух еліптичного резервуару і рідини з вільною поверхнею, що приводить до зародження кругової хвилі. Показано, що нелінійні механізми внутрішньої взаємодії зумовлюють зміни, як напрямку руху кругової хвилі, так і напрямку систематичного переміщення резервуару.

Ключові слова: рідина, еліптичний резервуар, кругова хвиля, напрямок обертання, систематичний рух резервуару.

E-mail: olelim2000@yahoo.com, glove20003@ukr.net

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ.

1. Вступ

Однією з важливих задач нелінійної динаміки сумісного руху резервуару з рідиною є задача про кругову хвилю. Властивості кругової хвилі досліджувалася в експериментальних роботах [1, 2], в теоретичних роботах [3, 4, 5] для випадку заданого руху резервуару. В роботі [6] розглядалися режими зародження кругової хвилі в резервуарі, який рухається під дією сили з круговим годографом, при сумісному русі резервуару і рідини з вільною поверхнею в резервуарах циліндричної форми. Експериментальні дослідження показали, що існує певний діапазон частот збудження резервуару, для яких кругова хвиля проявляє суттєво нелінійні властивості, що виражаються у нерівномірності швидкості її обертання, зокрема, в окремі моменти часу гребінь хвилі може різко змінювати швидкість та навіть напрямок свого обертання.

Задача про кругову хвилю є складною задачею, в якій моделювання динаміки процесів слід проводити на основі нелінійної постановки з урахуванням сумісного характеру руху рідини з резервуаром. В попередніх дослідженнях процес зародження кругової хвилі вивчався лише для резервуарів циліндричної форми (круговий циліндр, прямокутний паралелепіпед). Ці дослідження якісно підтвердили явища, що спостерігалися експериментально та доречність використання нелінійної моделі сумісного руху системи.

Oleg S. Limarchenko, Dr. Sci. (Engineering),
professor

Igor S. Ruzhitskiy, PhD student

Generation of circular wave on a free surface of liquid in elliptic reservoir

We consider combined motion of elliptic reservoir and liquid with a free surface, which causes generation of circular wave. It was shown that nonlinear mechanisms of internal interaction can result in changing both direction of circular wave and direction of systematical displacement of reservoir.

Key Words: liquid, elliptic reservoir, circular wave, direction of rotation, systematical motion of reservoir.

2. Постановка задачі

Метою роботи є дослідження процесу зародження кругової хвилі в резервуарах у формі еліпсоїда обертання. Розглянуто резервуар еліптичної форми, частково заповнений ідеальною однорідною нестисливою рідиною. У початковий момент часу резервуар та рідина знаходяться у стані спокою. Рух системи з початкового стану спокою збуджується силою з круговим годографом:

$$F_x = A \sin \omega t, F_y = B \cos \omega t$$

Вважаємо, що резервуар виконує рух лише у горизонтальній площині.

3. Метод розв'язання

Моделювання фізичних процесів виконується на основі нелінійної системи еліптичний резервуар-рідина з вільною поверхнею, яка розроблена та описана у роботі [7].

Дискретна модель системи описується в амплітудних параметрах збудження форм коливань рідини a_r і параметрах руху ε_r тіла та представляється системою звичайних диференціальних рівнянь.

$$\sum_{r=1}^N p_{rn}(a_r, t) \ddot{a}_r + \sum_{r=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_r, t) \ddot{\varepsilon}_{r-N} = q_r(a_r, \dot{a}_r, t), r = \overline{1, N+3}$$

Для цієї системи рівнянь розв'язується задача Коші, де вважається, що в початковий момент часу резервуар і рідина перебувають у спокої,

модельовання виконується для випадку $N=10$ форм коливань і двох скінченних параметрів руху резервуара. Система нелінійних рівнянь чисельно інтегрується на основі методу Рунге-Кутта із застосуванням покрокового чисельного приведення рівнянь до форми Коші.

Для аналізу динамічних процесів розглядалися три частотних діапазони збудження руху системи силою, яка змінюється з частотою, що співпадає з частотою першої форми коливань рідини, а також більше і менше її. Представлено результати чисельного аналізу у випадку розтягнутого еліпсоїда з півосями $a = 1$, $b = 1.4$ та глибиною заповнення рідини $H = 0.7$.

Для відображення процесу розвитку кругової хвилі використовується залежність азимуту мак-

симальної амплітуди хвилі (горба) від часу. При цьому кожне наступне коло обертання буде супроводжуватися стрибкоподібною зміною азимута на 360° , що відповідає на малюнках вертикальній ділянці кривих. Дослідження показали (Рис. 1), що при коливаннях з силою з частотою, яка більша від резонансної (суцільна крива), кругова хвиля практично рівномірно обертається у напрямку, який заданий збудженням. У випадку, коли частота збудження менша за резонансну частоту (штрихова крива), кругова хвиля також рухається односпрямовано в напрямку, що заданий силою. Проте рух кругової хвилі відбувається з нерівномірною швидкістю обертання, що зумовлене проявом нелінійних механізмів.

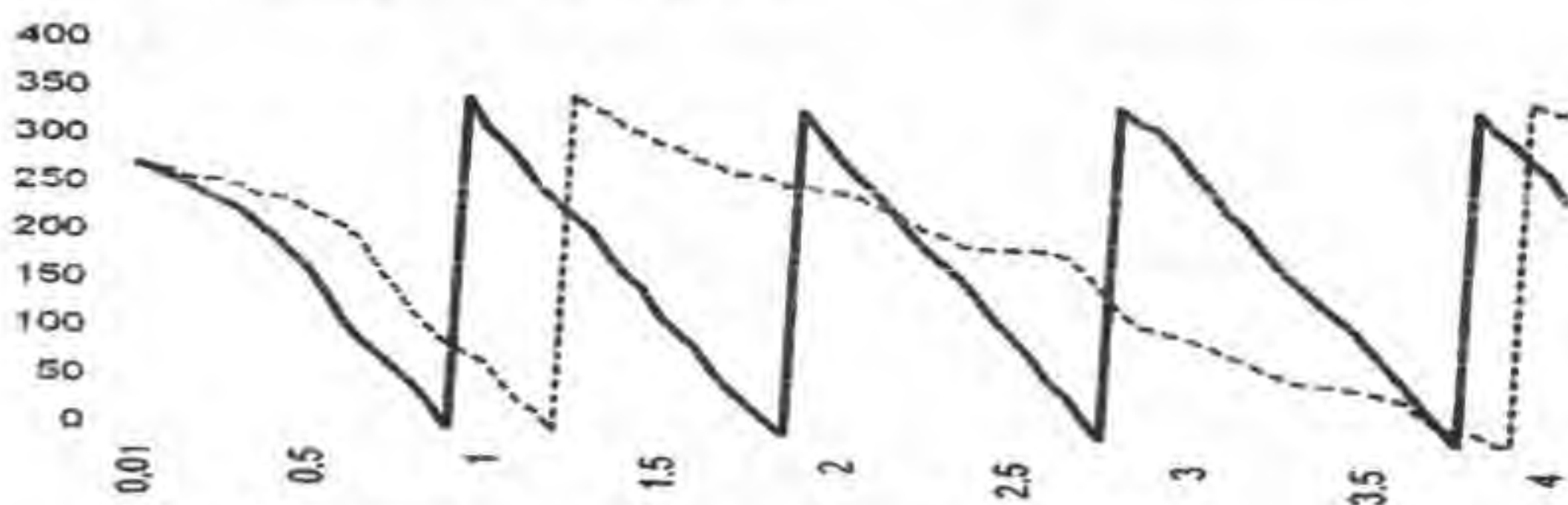


Рис. 1. Зміна азимуту кругової хвилі для нерезонансних частоти.

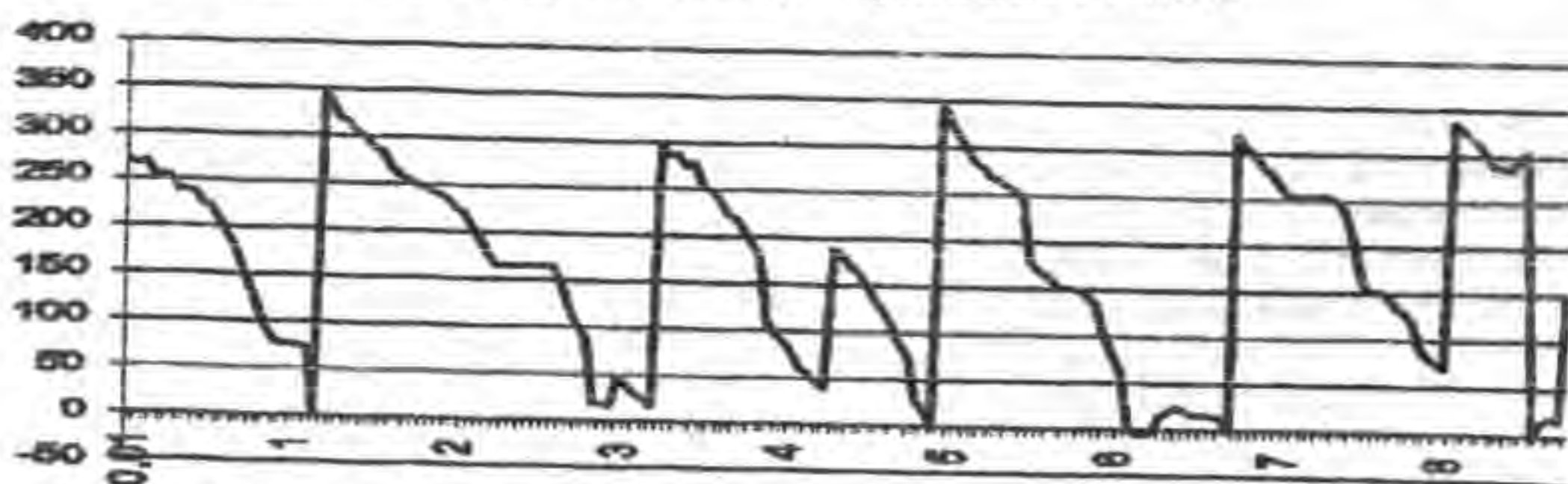


Рис. 2. Зміна азимуту кругової хвилі для резонансної частоти.

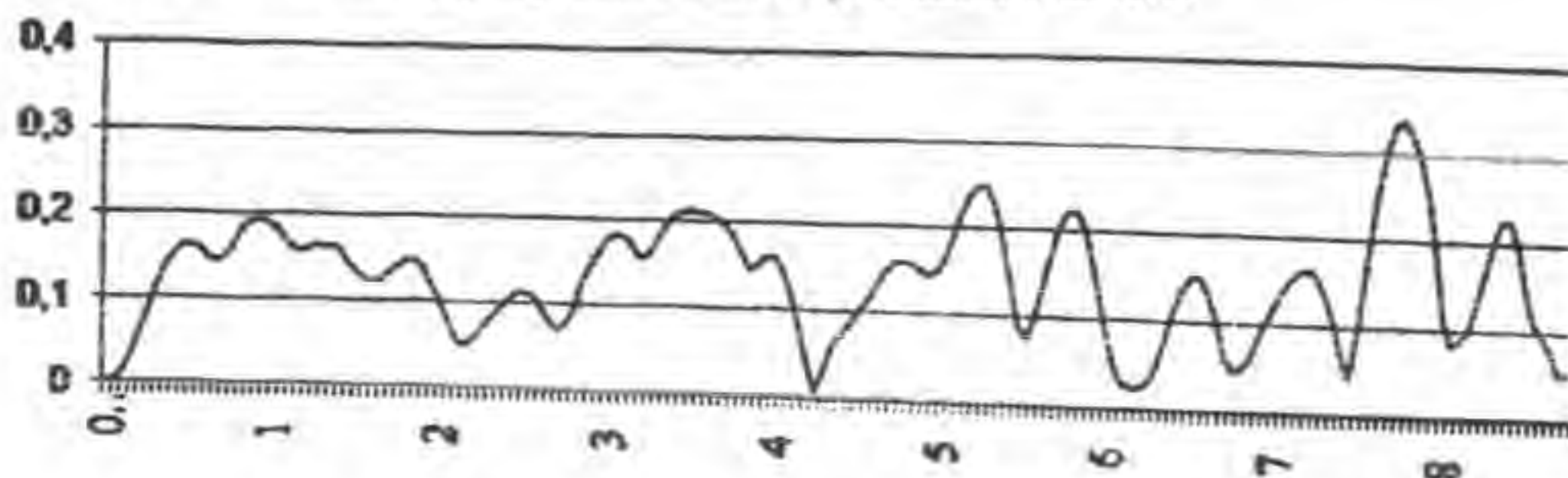


Рис. 3. Зміна амплітуди кругової хвилі.

Найбільш складним виявляється режим, у якому частота сили збурення наближається до першої резонансної частоти коливань системи (Рис. 2). В цьому випадку спостерігаються окремі ділянки, коли кругова хвиля уповільнює своє обертання і певний проміжок часу азимут залишається сталим (рух в одній площині), або здійснює свій рух у протилежному напрямку. Для аналізу причин таких процесів на Рис. 3, відображено графік зміни у часі амплітуди горба хвилі. З Рис. 2 і 3 видно, що вплив нелінійностей проявляється значно сильніше у моменти часу, коли амплітуда хвилі спадає, тобто коли головний внесок у формування кругової хвилі вносять не головні (перші) форми коливань, а вищі форми, які збуджуються за рахунок нелінійних механізмів і мають власні частоти

відмінні від частоти коливань головних форм і сили збудження. Це в підсумку приводить до втрати односпрямованості і рівномірності руху кругової хвилі.

Розглянемо тепер траєкторію руху вісі резервуара (вид зверху) у координатах Oxy при сумісному русі системи (Рис. 4). Для дослідження впливу рідини на рух резервуару поряд з постановкою задачі про рух системи при співвідношенні маси резервуару до маси рідини рівного 0,2 (суцільна крива) було розглянуто випадок, коли рідина «замерзла» (штрихова лінія). З Рис. 4 видно, що рух резервуару у цих випадках суттєво відрізняється, як за амплітудою, так, і, що головне, за напрямком систематичного уходу вісі резервуару від початкового положення.

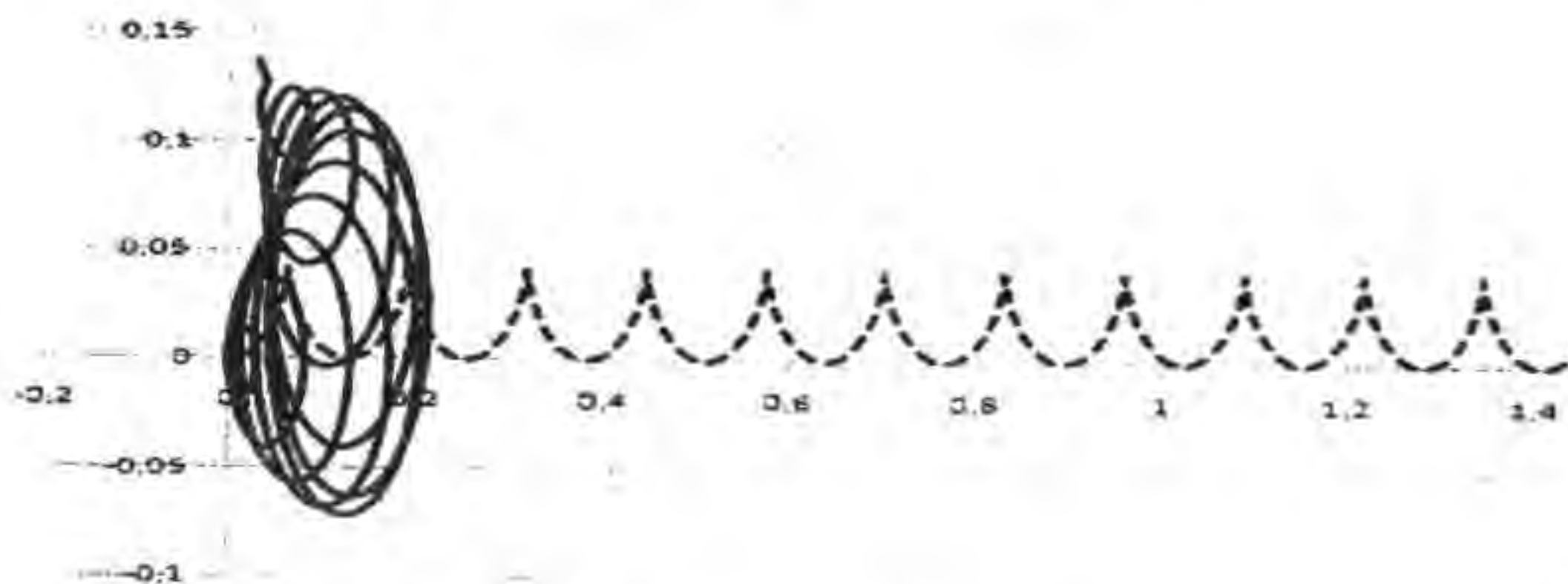


Рис. 4. Траєкторія руху вісі резервуара (нелінійна модель).

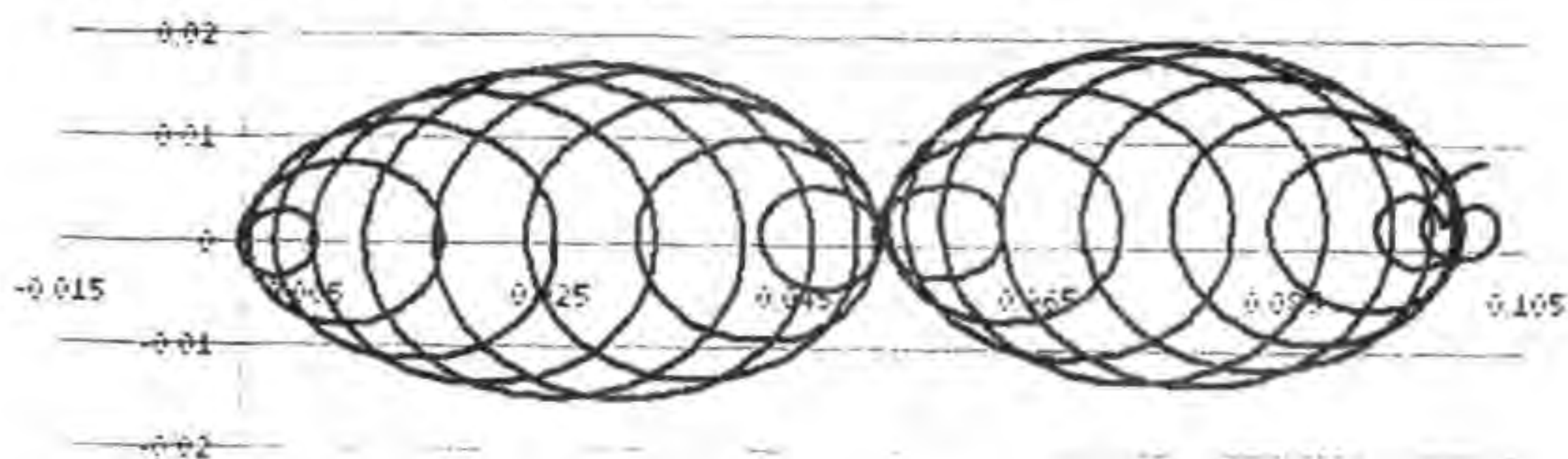


Рис. 5. Траєкторія руху вісі резервуара (лінійна модель).

Для вивчення питання про головні фактори, які викликають такі суттєві відмінності у характері руху резервуару при рідинному та «твердому» заповненні було досліджено групу тестових задач з різною мірою прояву нелінійностей і при різних співвідношеннях маси

резервуара і рідини. Зокрема було виявлено, що при співвідношенні маси резервуару до маси рідини рівного 10, траєкторія руху резервуару за своїм напрямком і характером майже збігається з випадком «замерзлої» рідини. Тобто саме рухомість рідини викликає такі суттєві відмінності в

русі резервуара при дії сили з круговим годографом. Дослідження показали, що до значення співвідношення маси резервуару і маси рідини рівного 0,25 спостерігається систематичний дрейф вісі резервуару в напрямку вісі Ox , проте вже для значень 0,24 і менше, характер руху змінюється і дрейф або відсутній взагалі, або спостерігається в напрямку вісі Oy .

Для визначення характеру впливу нелінійностей на рух резервуару було розглянуто випадок, коли для співвідношення маси резервуару до маси рідини рівного 0,2 значення сили було зменшене в 25 разів (Рис. 5). В цьому випадку коливання рідини відбувалися виключно в лінійному діапазоні зміни збурень. Як видно з Рис. 5, на відміну від випадку коливань в нелінійному діапазоні (Рис. 4, суцільна крива), спостерігається суттєва зміна характеру руху резервуару. Як і у випадку «твердого» заповнення, спостерігається дрейф резервуару у напрямку вісі Ox . Тобто, саме нелінійність сприяє зміні характеру і напрямку систематичного руху резервуару. Більший прояв впливу нелінійних процесів спостерігається при зменшенні відношення маси резервуару до маси рідини та при збільшенні значення сили, яка діє на резервуар, що викликає зростання амплітуд коливань рідини.

4. Висновки

Досліджено зародження кругової хвилі на основі нелінійної моделі динаміки сумісного руху резервуара еліптичної форми з рідиною, при дії на стінки резервуара силою з круговим годографом. Визначено залежності від часу азимута і висоти горба кругової хвилі на вільній поверхні рідини у випадку еліпсоїда при різних частотах силового збудження руху системи. Чисельно підтверджено на якісному рівні експериментальні результати, які свідчать, що в деякі моменти часу може спостерігатися «плоский» та «зворотний» рух кругової хвилі. Показано, що такі явища мають місце перш за все при сильному впливі нелінійних факторів, зокрема в моменти, коли в значеннях амплітуд хвиль головну роль відіграють не основні форми коливань, а вищі гармоніки спектру, які збуджуються через нелінійні внутрішні зв'язки в системі.

Досліджено рух твердого тіла при зародженні кругової хвилі. Зокрема встановлено, що при дії сили з круговим годографом на стінки резервуару, для великих значень співвідношення маси резервуару до маси рідини дрейф резервуару відбувається в напрямку вісі Ox , а при зменшенні значення цього співвідношення характер дрейфу

суттєво змінюється. Так систематичний дрейф може бути відсутнім або може відбуватися в напрямку вісі Oy . Показано, що саме прояв внутрішніх нелінійних механізмів визначає зміну характеру руху резервуару в часі.

Список використаних джерел

1. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов – М: Машиностроение, 1978. – 247 с.
2. Коваленко А.П., Лимарченко О.С. Экспериментальное исследование поведения жидкости при импульсном возбуждении // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 1. – С. 95–97.
3. Нариманов Г.С., Докучаев И.А., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью – М: Машиностроение, 1977. – 208 с.
4. Либин Э.Е., Якутова Н.Г. О круговой волне в цилиндрическом сосуде – Новосибирск: НЭТИ, 1974. – С. 137–141.
5. Столбцов В.И. О нелинейных колебаниях жидкости в оболочках различной формы – Новосибирск: НЭТИ, 1974. – С. 205–209.
6. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338 с.
7. Лимарченко О.С., Ружицкий І.С. Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі // Вісник Київського університету, серія Фізико-математичні науки, №1, 2009. С. 59–62.

Надійшла до редколегії 16.11.2009

УДК 539.3

Ірина І. Лоос, к.ф.-м.н.

Осесимметрична деформація гнучких ортотропних конічних оболонок змінної товщини в нестационарному магнітному полі

Розглядається напружено-деформований стан гнучкої ортотропної конічної оболонки в нестационарному магнітному полі. Проведено аналіз отриманих результатів оболонки змінної товщини.

Ключові слова: оболонка, магнітне поле, магнітопружність

E-mail: Loiri@univ.kiev.ua

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ

1 Вступ.

В багатьох галузях сучасної техніки, в фізичних та електротехнічних експериментах широке застосування знаходять елементи приборів, машин і конструкцій, які знаходяться в електромагнітних полях різноманітного походження.

В зв'язку з цим особливий інтерес викликають задачі механіки взаємодії електромагнітних полів з тонкими пружними тілами. Зокрема задачі взаємодії електромагнітного поля з струмонесучими тонкими оболонками.

У сучасній техніці використовуються конструкційні матеріали, які у недеформованому стані вже анізотропні, причому анізотропія властивостей таких матеріалів виникає в них у разі застосування різних технологічних процесів. Вивченню подібних питань були присвячені роботи [1-5].

Часто взаємодія електромагнітного поля з пружною оболонкою відбувається при наявності стороннього електричного струму. Надалі будемо розглядати деформацію гнучкого ортотропного конуса змінної жорсткості у двох напрямках з ортотропною електропровідністю при дії зовнішнього магнітного поля і стороннього електричного струму.

2 Побудова розв'язувальної системи диференціальних рівнянь в нормальній формі.

Irina I. Loos, Cand. Sci. (Phys.-Math.)

The axisymmetric deformation of flexible orthotropic conical shells of variable thickness in no stationary magnetic field

The stress-strain state of flexible orthotropic conical shell in no stationary magnetic field is considered. The analysis results of shell of variable thickness has been carried out.

Key words: shell, magnetic field, magnetoelastisity

Використовуючи методику наведену у роботах [6,7], отримуємо наступну зв'язану систему нелінійних диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\frac{\partial u_r}{\partial s} = \frac{1 - \nu_s \nu_0}{e_s h} (\cos \varphi N_r + \sin \varphi N_z) \cos \varphi + \frac{\nu_0 \cos \varphi}{r} u_r + \frac{1}{R_s} u_r - \sin \varphi \vartheta_s - \frac{\cos \varphi}{2} \vartheta_z;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial s} = \frac{1 - \nu_s \nu_0}{e_s h} (\cos \varphi N_r + \sin \varphi N_z) \sin \varphi + \frac{\nu_0 \sin \varphi}{r} u_r - \frac{1}{R_s} u_r + \cos \varphi \vartheta_s - \frac{\sin \varphi}{2} \vartheta_z;$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_0)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_0 \cos \varphi}{r} \vartheta_s;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial s} = & \frac{\cos \varphi}{r} (\nu_0 - 1) N_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_0 \sin \varphi}{r} \right) N_z + \\ & + \frac{e_0 h}{r^2} u_r - \cos \varphi (P_r + \rho f_r) - \\ & - \sin \varphi (P_z + \rho f_z) + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial s} = -\frac{\cos \varphi}{r} N_s - \frac{1}{R_s} N_z - \sin \varphi (P_r + \rho f_r);$$

$$+ \cos \varphi (P_z + \rho f_z^*) + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_s}{\partial s} = & \frac{\cos \varphi}{r} (v_0 - 1) M_s + \frac{e_0 h^3 \cos^2 \varphi}{12 r^2} \vartheta_s + \\ & + \cos \varphi N_x - \sin \varphi N_z + \\ & + (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \vartheta_s - \\ & - \frac{v_0 \sin \varphi}{r} M_s \vartheta_s - \frac{e_0 h^3 \cos \varphi \sin \varphi}{12 r} \vartheta_s^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial s} = & -\sigma_1 \mu_1 \left[E_0 + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) \times \right. \\ & \times (B_s^+ + B_s^-) - \left. \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_z \right] + \\ & + \frac{B_s^+ - B_s^-}{\mu_1 h}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial s} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_0.$$

Компоненти сили Лоренца в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho f_s^* = & -h J_{\text{всм}} B_z + \sigma_1 h [E_0 B_z + \\ & + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) B_z (B_s^+ + B_s^-) - \\ & - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_z^2]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho f_z^* = 0,5 h J_{\text{всм}} (B_s^+ + B_s^-) + \sigma_1 h \{ -0,5 E_0 \times$$

$$\times (B_s^+ + B_s^-) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) \times$$

$$\times \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right] +$$

$$+ 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_z (B_s^+ + B_s^-) \}.$$

Через B_z^* позначено вираз

$$B_z^* = B_{s0}^+ + B_{s0}^- - B_{s0}^+ \vartheta_s + B_{s0}^- \vartheta_s,$$

де B_{s0}^+ – компоненти магнітної індукції початкового власного магнітного поля на поверхнях оболонки, обумовлені стороннім електричним струмом; B_{s0}^- – компоненти зовнішнього магнітного поля, отримані з

розв'язку задачі статички: B_z^- – нормальна складова магнітної індукції оболонки.

Тут N_x, N_z – нормальні тангенціальні зусилля; ϑ_s – кут повороту нормалі; M_s – згинальний момент; u_x, u_z – компоненти переміщень; E_0 – складова напруженості електричного поля; φ – кут між нормаллю до твірної і віссю обертання; R_s – радіус головної кривини; μ_1 – магнітна проникливість матеріалу оболонки; $h = h(s)$ – товщина оболонки; $J_{\text{всм}}$ – густина електричного струму від зовнішнього джерела; σ_1 – електрична провідність; e_0 – модуль Юнга; ν_1 – коефіцієнт Пуассона.

Відмітимо, що для ефективного використання запропонованої теорії необхідно вимагати виконання умови

$$\tau = 0,5 h^2 \sigma \mu < \tau_{\text{всм}},$$

що фактично означає добре „прошивання” оболонки магнітним імпульсом. Тут $\tau_{\text{всм}}$ – характерний час дії зовнішнього магнітного поля.

Отримана зв'язана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку (1), яка описує напружено-деформівний стан гнучких струмонесучих оболонок з ортотропною електропровідністю.

Складові сили Лоренца (2) враховують швидкість деформування оболонки, зовнішнє магнітне поле, величину и напруженість струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Врахування нелінійності в рівняннях руху викликає нелінійність в пондеромоторній силі.

Додаючи до отриманої системи рівнянь початкові і граничні умови, отримаємо крайову задачу. У векторному вигляді нелінійна крайова задача має вигляд:

рівняння руху

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial s} = \bar{F} \left(s, t, \bar{N}, \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2} \right), \quad \left(s_0 \leq s \leq s_N, \right. \quad (3)$$

граничні умови

$$\bar{g}_1(\bar{N}(s_0, t)) = \bar{h}_1^*, \quad \bar{g}_2(\bar{N}(s_N, t)) = \bar{h}_2^*. \quad (4)$$

початкові умови

$$\bar{N} = 0, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (5)$$

Тут: $\bar{N} = \{\mu, \eta, \theta_N, N_N, Q_N, M_N, E_0, B_z\}^T$ – вектор стовпчик шуканих функцій; $\bar{F}, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ – у загальному випадку нелінійні вектор функцій.

В подальшому, крайова задача (3), (4) з початковими умовами (5) розв'язується чисельно у відповідності з методикою, яка викладена в роботах [7-9]. Розв'язок крайових задач магнітопружності пов'язаний з суттєвими обчислювальними труднощами. Це пояснюється тим, що розв'язуюча система рівнянь є системою диференціальних рівнянь гіперболо-параболічного типу восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Запропонований підхід до чисельного розв'язання крайової задачі базується на послідовному застосуванні схеми Ньюмарка, методу квазілінеаризації і методу дискретної ортогоналізації.

Застосовуючи схему Ньюмарка [10] інтервал зміни за часом розбіємо на окремі малі інтервали і прослідкуємо історію деформування, послідовно розв'язуючи задачі на кожному часовому шарі. Співвідношення кроків різницевої схеми за часом і просторовою координатою обумовлюється критерієм Куранта, відповідно до якого крок сітки за часом не повинен перевищувати часу, на протязі якого збурення, що розповсюджується з місцевою швидкістю звуку, пробігають відстань, яка дорівнює розміру кроку за просторовою координатою.

За допомогою методу квазілінеаризації [11] вихідна крайова задача зводиться до послідовності лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому інтервалі розв'язується чисельно за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації [12]. На першому за часом кроці за початкове наближення в ітераційному процесі вибирається розв'язок лінеаризованої крайової задачі. На наступних кроках – за початковий вибирається розв'язок, одержаний на попередньому кроці, що є розв'язком вже нелінійної задачі. Вибір такої схеми істотно зменшує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання задачі.

3 Чисельний розв'язок задачі.

Розглядається зрізана ортотропна конічна оболонка із берилію змінної товщини, яка знаходиться в зовнішньому магнітному полі під дією нормальної складової механічної сили

$P_y = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ Н/м² і зовнішнього електричного струму

$J_{\theta, m} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м². Параметри оболонки та матеріалу обираємо наступні:

$$s_0 = 0, \quad s_N = 0,4 \text{ м}, \quad h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$e_s = 22,9 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad e_0 = 10,7 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

$$\nu_s = 0,262, \quad \nu_0 = 0,32, \quad \rho = 2670 \text{ кг/м}^3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}, \quad \sigma_3 = 0,2 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1},$$

$$\mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}, \quad \omega = 314,16 \text{ с}^{-1},$$

$$B_z = 0,1 \text{ Т}, \quad B_\theta = 0,1 \text{ Т}.$$

Граничні умови обираються такі:

$$u = w = M_s = 0, \quad B_y = 0,3 \sin \omega t \quad \text{при } s = 0;$$

$$w = \theta_s = N_s = B_y = 0 \quad \text{при } s = s_N = 0,5 \text{ м}.$$

Товщина оболонки змінюється за законом

$$h = 5 \cdot 10^{-4} \left(1 - \alpha \frac{s}{s_N} \right). \text{ Напружено-деформований}$$

стан оболонки визначаємо в залежності від зміни параметра α , який приймає значення

$$\alpha = \{0,2; 0,3; 0,4; 0,5\} \text{ (4 варіанти)}.$$

Розв'язок задачі визначався на інтервалі та часом $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, шаг інтегрування за часом обирався рівним $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с при ста точках інтегрування за довжиною оболонки.

Точки 1-11 по осі s – це точки видачі результатів, які відповідають $s = 0,0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5$.

На рис. 1, 2 подано розподіл максимальних прогинів $w(s)$ та $w(t)$ при $s = 0,28 \text{ м}$ для різних значень параметра α (відповідно ряди 1-4).

4 Висновки.

Максимальних значень прогини оболонки досягають на п'ятій ітерації за часом при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с, що узгоджується з виглядом навантаження.

З рис. 1 видно, що зі збільшенням параметру α прогини збільшуються.

Спостерігаємо монотонну зміну прогинів в залежності від зміни параметра α і на рис. 2. Як і в попередньому випадку, зі збільшенням α збільшуються і значення прогинів.

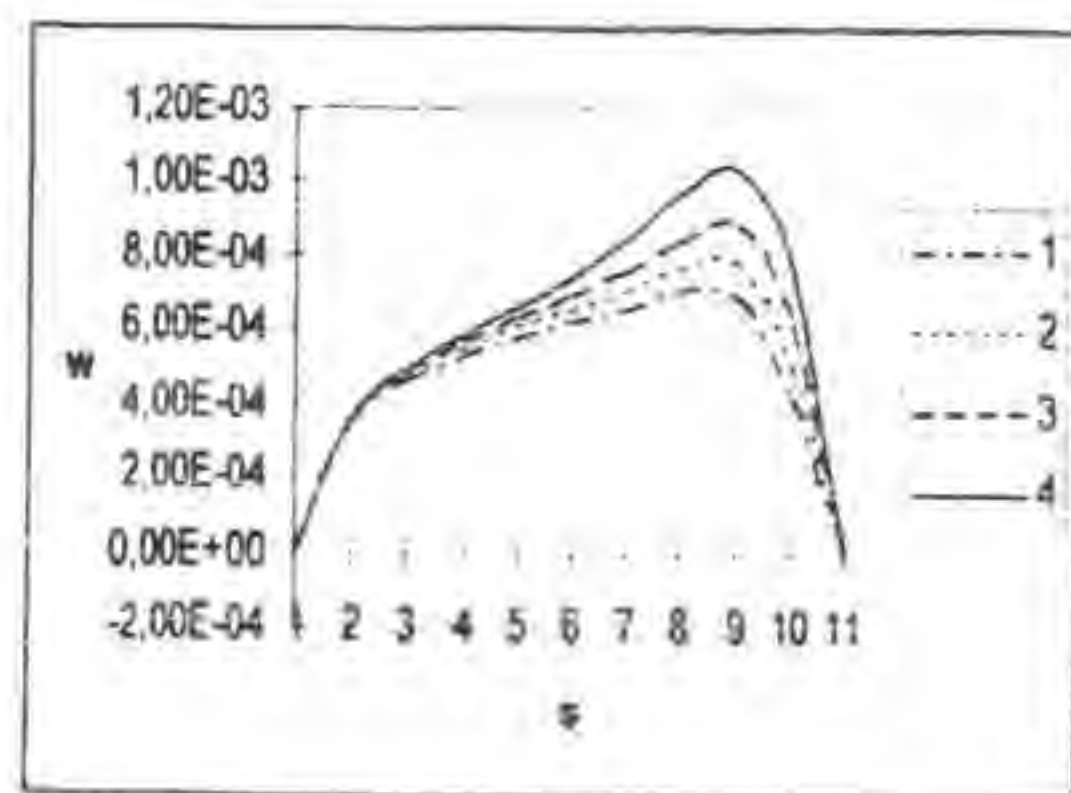


Рис. 1

ряд1 - $\alpha = 0.2$; ряд2 - $\alpha = 0.3$;
ряд3 - $\alpha = 0.4$; ряд4 - $\alpha = 0.5$.

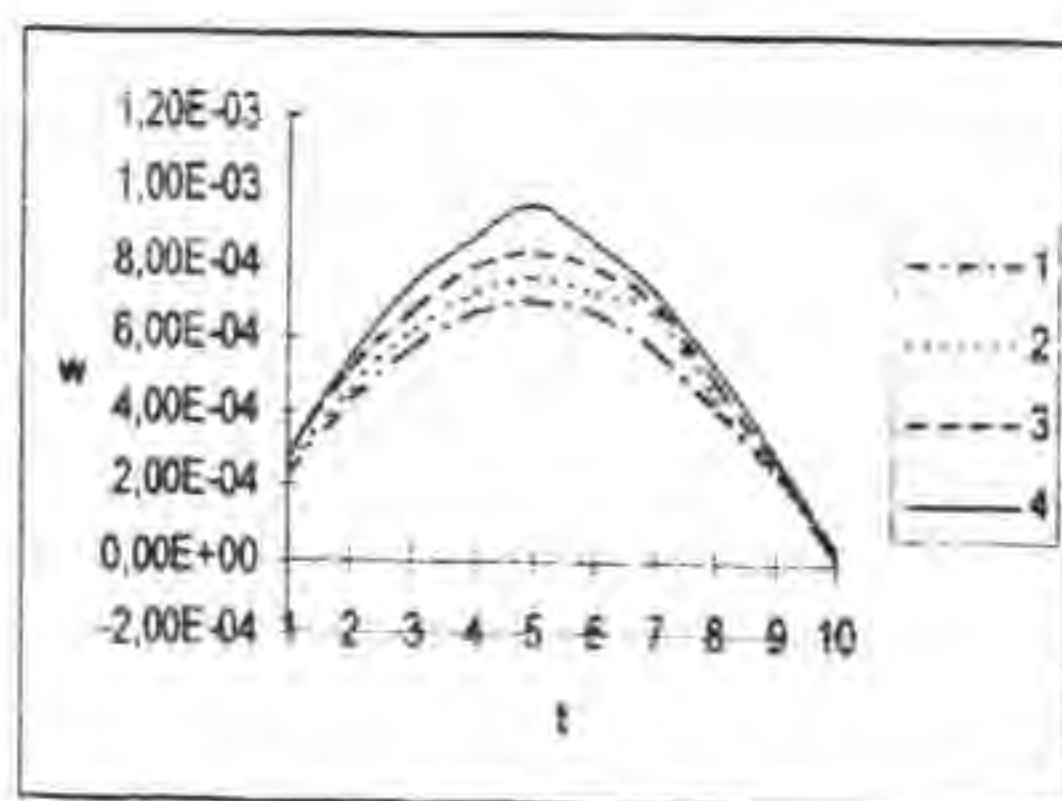


Рис. 2

Аналізуючи отримані результати, можемо судити про вплив зміни товщини на напружено-деформівний стан ортотропних оболонок.

На закінчення відмітимо наступне. Діелектричні і магнітні властивості твердого тіла змінюються не тільки при зміні густини, але і при деформаціях (зсувах), коли густина залишається сталою. В результаті деформації діелектричні і магнітні властивості тіла стають анізотропними, а скалярні діелектрична і магнітна проникливості замінюються тензорами другого рангу. На основі отриманих рівнянь, з використанням запропонованої методики, маємо можливість враховувати, як анізотропію матеріалу, так і анізотропію внутрішнього електромагнітного поля оболонки, а також вплив деформацій на електромагнітні властивості тіла.

Такі задачі електромагнітопружності досить актуальні з точки зору додатків.

Список використаних джерел

1. Багдасарян Г.Е., Даниелян З.Н. Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля // Механика: Межвуз. сб. науч. тр. Мех. деформ. тв. тела. - 1984. - Вып.3 - С.32-42.
2. Волынский В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. - М.: Связь, 1971. - 487с.
3. Kaliski S. Wave equations of thermoelectromagnetoelasticity. // Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci., - 1965. - Vol. 6, - № 3. - P. 231-265.
4. Ней Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. - М.: Мир, - 1967. - 385 с.
5. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.И. Основы кристаллофизики. - М.: Наука. - 1979. - 639 с.
6. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек. - М.: Наука. - 1977. - 272 с.
7. Улитко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. - К.: Либідь, - 1994. - 115 с.
8. Мольченко Л.В., Лоос Г.І., Індіанінов Р.Ш. Магнітопружне деформування ортотропних оболонок обертання з ортотропною електропровідністю // Вісник КУ. Математика. Механіка. - 2008. - Вип. 19-20. - С. 53-59.
9. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок. - К.: Либідь, 1993. - 231 с.
10. Newmark N.M. A method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. - 1959. - 85. - №7. - P.67-97.
11. Беллман Р., Калита Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. - М.: Мир, 1968. - 184 с.
12. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. - 1961. - 16. - Вып. 3(99). - С. 171-174.

Надійшла до редколегії 30.06.2009.

УДК 539.3

В'ячеслав В. Лях, канд. фіз.-мат. наук

Точний розв'язок плоскої задачі про згин силами кільцевого сектора

За методом суперпозиції збудований точний розв'язок плоскої задачі про згин силами кільцевого сектора. Як і для прямокутника, задача зводиться до нескінченних систем лінійних рівнянь. Врахування асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів дозволяє значно покращити редукцію і з контрольованою точністю виконати граничні умови. Графічно представлені розподіли напружень у кількох перерізах. Проведено порівняння результатів з простими інженерними розв'язками.

Ключові слова: кільцевий сектор, криволінійний брус, згин силами, метод суперпозиції

E-mail: lyakh@univ.kiev.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н. професор Мелешко В.В.

1. Вступ

У даній роботі на основі методу суперпозиції [1] побудований точний розв'язок задачі плоскої теорії пружності про згин силами кільцевого сектора $a \leq r \leq b$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ довільного кута розхилу 2α (Рис.1). Розподіл заданих напружень на торцях може бути довільним, за умови його статичної еквівалентності дії двох сил, стиску чи розтягу, на торцях, як це зазначено на рисунку. Подібно задачам про силове навантаження прямокутника, задача зводиться до нескінченних систем лінійних рівнянь. Врахування асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів дозволяє значно покращити редукцію і з контрольованою точністю виконати граничні умови.

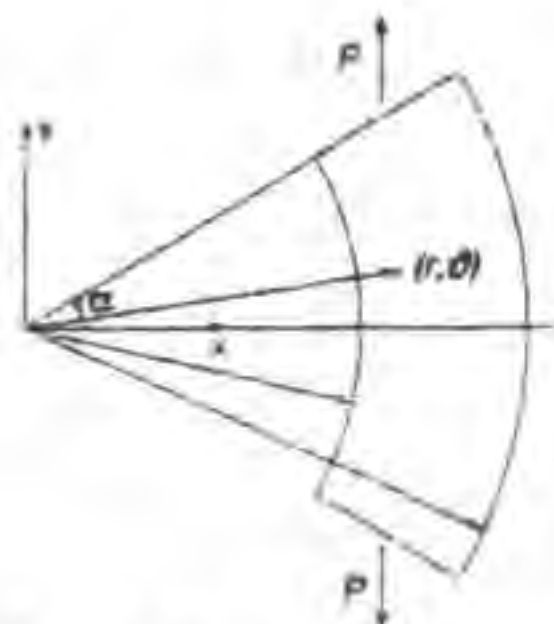


Рис. 1. Кільцевий сектор

V. V. Lyakh, Cand. Sci (Phys.-Math.)

Exact solution of plane problem on bending by forces of ring sector

By method of superposition the exact solution is obtained for plane problem on bending by forces of ring sector. As for the rectangle, the problem is reduced to infinite systems of linear equations. Due to asymptotic behaviour of unknown coefficients the reduction of systems is much improved, and boundary conditions are satisfied with controlled accuracy. Stress distributions in some sections are shown in graphs. The results are compared to simple engineering solutions.

Keywords: ring sector, curvilinear bar, bending by forces, method of superposition.

На відміну від задач для прямокутних призми і пластини, де загальний точний розв'язок встановлений і ретельно досліджений вже досить давно [1], більшість результатів для кільцевого сектора (криволінійного бруса, криволінійного прямокутника) не є достатньо строгими. Розв'язки для секторів за методом суперпозиції були збудовані у роботах [2,3]. Однак вони виявились громіздкими, не такими наочними як для прямокутника, зокрема не у повній мірі враховують геометричну симетрію по кутовій координаті, і відповідне розбиття задачі на симетричне і асиметричне завантаження. Тому ці роботи не доведені до числових розрахунків, а отримані результати незручні для технічних обчислень. Прості інженерні розв'язки кількох задач для кривого бруса вперше отримав Інґліс[4]. Пізніше їх використав у книгах [5-6] Тимошенко, вдало порівнявши їх з балочними теоріями опору матеріалів. Зокрема, для задачі згину бруса силою, прикладеною на кінці наводиться такий елементарний розв'язок:

$$\sigma_r = \frac{P}{N} \left(r - \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \vartheta,$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{P}{N} \left(3r + \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \vartheta,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left(r - \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \cos \theta.$$

де P – сила, що діє на брус на торці $\theta = 0$, N – деяка стала геометрії бруса, залежна лише від a і b . Такого роду частинні розв'язки, хоч і передають вздовж сектора по перерізах $\theta = \text{const}$ задане інтегральне навантаження у вигляді сили або моменту, проте значно «зловживають» відсиланням до принципу Сен-Венана. Отже, не претендують на задовільні результати поблизу торців, навантажених інакшим, довільним чином. Тим більше, коли геометрія сектора відрізнятиметься від балочної, а саме $(b-a) \approx (b+a)\alpha$.

Точний розв'язок загальної задачі рівноваги секторних областей, наочний і цілком аналогічний до розв'язку для прямокутника, вперше наводиться у роботах [7,8]. У роботі [8] детально розглянута задача чистого згину криволінійних брусів. Нижче розглядається більш складна задача про згин силами.

2. Постановка задачі

Розглядається задача навантаження кільцевого сектора на торцях:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \text{при } r = a, b, \quad |\theta| \leq \alpha,$$

$$\sigma_\theta = s(r), \quad \tau_{r\theta} = l(r), \quad \text{при } a \leq r \leq b, \quad |\theta| = \alpha, \quad (2)$$

де $s(r)$, $l(r)$ – довільні функції, такі що відповідне навантаження статично еквівалентне зрівноваженій дії сил паралельних осі y (Рис.1).

Задачі плоскої теорії пружності зводяться до бігармонічної задачі по відшукуванню функції напружень Φ , яка б задовольняла бігармонічне рівняння:

$$\Delta \Delta \Phi = 0, \quad (3)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа

у полярних координатах (r, θ) , а відповідні їм напруження виконували граничні умови (2), з урахуванням, що напруження пов'язані з Φ через співвідношення

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right).$$

Провівши заміну змінної r на нову τ у спосіб $\tau = \ln(r/a)$, отримаємо такий вигляд бігармонічного рівняння у координатах τ, θ

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tau^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} - 4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \tau^3} - 4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \tau \partial \theta^2} +$$

$$+ 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} = 0 \quad (4)$$

і, відповідно, напружень:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right). \quad (5)$$

3. Метод розв'язання

Виходячи з методу суперпозиції, функція напружень Φ подається у вигляді суми двох бігармонічних функцій:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (6)$$

кожна з яких вибирається у формі ряду Фур'є з достатньою свободою аби окремо задовольнити граничні умови (2) на границях $\theta = \pm \alpha$ і $r = a, b$.

З вигляду виразів напружень (5) випливає, що на відміну від задачі про рівновагу прямокутника, загальну задачу навантаження бруса не можна розділити на дві незалежні задачі: під дією окремо нормальних і дотичних напружень. У даному випадку залежними між собою, очевидно, є напруження σ_r і $\tau_{r\theta}$. Тоді для розв'язання поставленої задачі, як і загальної задачі, доцільно в першу чергу розв'язати задачу навантаження дотичними зусиллями, аби досягти заданих дотичних напружень на границі. Потім розв'язати задачу навантаження нормальними зусиллями з урахуванням тих ненульових нормальних напружень, що з'являються на кругових границях при розв'язанні першої задачі. Тому тут наведемо лише загальний вигляд функції Φ для задачі навантаження дотичними зусиллями (аналогічний вираз функції напружень і подальші викладки для другої задачі дивіться в [8]):

$$\Phi(\tau, \theta) = a e^\tau \left\{ Z_0 \tau \alpha \left[\alpha \tan \alpha \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} - \theta \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} \right] + \right.$$

$$+ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{\beta_n^2} \cdot P(\beta_n, \theta) p_n \sin \beta_n \tau -$$

$$- \frac{\tau_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\alpha_n^2} \left[X_n \left[\frac{\cosh d_n (\tau^* - \tau)}{\cosh d_n \tau^*} - \frac{\cosh c_n (\tau^* - \tau)}{\cosh c_n \tau^*} \right] + \right.$$

$$+ Y_n \left[\frac{\sinh d_n (\tau^* - \tau)}{\sinh d_n \tau^*} - \frac{\sinh c_n (\tau^* - \tau)}{\sinh c_n \tau^*} \right] \cos \alpha_n \theta \left. \right\}, \quad (7)$$

$$\text{де } \alpha_n = (n-1/2)\pi/\alpha, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{\tau_0}, \quad \tau_0 = \ln \frac{b}{a},$$

$$c_n = \alpha_n + 1, d_n = \alpha_n - 1, \quad p_n = \frac{\sinh 2\beta_n \alpha}{\cosh 2\beta_n \alpha + \cos 2\alpha},$$

$$P(\beta_n, \theta) = \frac{\cosh \beta_n \theta}{\cosh \beta_n \alpha} \cos \theta \sin \alpha - \frac{\sinh \beta_n \theta}{\sinh \beta_n \alpha} \sin \theta \cos \alpha.$$

Підставляючи розв'язок (7) в граничні умови (2) для дотичних напружень отримаємо три функціональні рівняння: два на криволінійних

$r = a, h(\tau = 0, \tau_0)$ і третє на бічних $|\vartheta| = \alpha$ границях. Беручи до уваги півсуму та піврізницю перших двох рівнянь і розділяючи третє, відповідно, на парну та непарну по n частини, обертаючи ряди Фур'є і враховуючи асимптотичну поведінку невідомих

$$X_m = E + x_m, \quad Z_{2k-1} = E + z_{2k-1}, \\ Y_m = F + y_m, \quad Z_{2k} = F + z_{2k}, \quad (8)$$

$$x_m = o(m^{-1}), y_m = o(m^{-1}), z_n = o(n^{-1}), m, n \rightarrow \infty,$$

де E, F дійсні сталі, що мають бути визначені у подальших підрахунках. Прийдемо до таких двох розділених нескінченних систем:

$$x_m \frac{\tau_0}{2} \frac{\Delta_m^{(-)}}{\alpha_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,2k-1} z_{2k-1} + E \frac{\tau_0}{2} \delta_m^{(-)} - C_m^{(-)}, m \geq 1, \\ z_{2k-1} \alpha \frac{\Delta_{2k-1}}{\beta_{2k-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{2k-1,m} x_m - \alpha E \delta_{2k-1} + D_{2k-1}, k \geq 1, \quad (9)$$

з додатковим рівнянням для визначення E

$$E \left(\frac{\tau_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^{(-)} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-1} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(-)}, \quad (10)$$

і

$$Z_0 \alpha \Delta_0 = D_0/2, k=0, \\ y_m \frac{\tau_0}{2} \frac{\Delta_m^{(-)}}{\alpha_m} = \frac{2\alpha_m^2(2Z_0 - F)}{(\alpha_m^2 - 1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,2k} z_{2k} + F \frac{\tau_0}{2} \delta_m^{(-)} - C_m^{(-)}, m \geq 1, \\ z_{2k} \alpha \frac{\Delta_{2k}}{\beta_{2k}} = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{2k,m} y_m - \alpha F \delta_{2k} + D_{2k}, k \geq 1, \quad (11)$$

з додатковим рівнянням для визначення F

$$F \left(\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k} - \frac{\tau_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^{(-)} + \frac{\alpha}{2} \left(\tan \alpha + \frac{a}{\cos^2 \alpha} \right) \right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k} - \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(-)}, \quad (12)$$

де введені наступні позначення

$$\gamma_m = \frac{4\alpha_m^2}{(\beta_m^2 + c_m^2)(\beta_m^2 + d_m^2)}, \Gamma_m = \frac{4\beta_m^2}{(\beta_m^2 + c_m^2)(\beta_m^2 + d_m^2)}, \\ \delta_m^{(+)} = \frac{\sinh \tau_0 \alpha_m \mp \alpha_m (2\alpha_m^2 - 1) \sinh \tau_0}{\alpha_m (\alpha_m^2 - 1) (\cosh \tau_0 \alpha_m \pm \cosh \tau_0)}, \\ \Delta_m^{(+)} = \frac{\sinh \tau_0 \alpha_m \pm \alpha_m \sinh \tau_0}{\cosh \tau_0 \alpha_m \pm \cosh \tau_0}, \Delta_m = \frac{\sinh 2\beta_m \alpha + \beta_m \sin 2\alpha}{\cosh 2\beta_m \alpha + \cos 2\alpha}, \\ \delta_m = \frac{\sinh 2\beta_m \alpha + \beta_m (2\beta_m^2 + 1) \sin 2\alpha}{\beta_m (\beta_m^2 + 1) (\cosh 2\beta_m \alpha + \cos 2\alpha)}, \Delta_0 = \frac{\sin 2\alpha + 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}, \\ C_m^{(+)} = \frac{aT_m^a - bT_m^b}{2}, C_m^{(-)} = \frac{aT_m^a + bT_m^b}{2},$$

$$T_m^{a,b} = \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} T^{a,b}(\vartheta) \sin \alpha_m \vartheta d\vartheta,$$

$$D_n = \frac{2}{\tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_0} T(\tau) \cos \beta_n \tau d\tau.$$

Через T_m^a, T_m^b, D_n позначені коефіцієнти Фур'є розкладів граничних функцій в ряди, відповідно,

по $\sin \alpha_m \vartheta$ і $\cos \beta_n \tau$ (у даному випадку $T_m^a = T_m^b = 0$). Причому $T(\tau) = ae^{\tau} \cdot \tilde{T}(\tau)$, де $\tilde{T}(\tau)$ – функція, отримана з $t(r)$ після змінної r на τ , загалом відмінна від неї.

Фізичний зміст додаткових рівнянь (10,12), по аналогії з задачею для нормальних напружень, такий: вони є стрибками, відповідно, піврізниць та півсум заданих граничних напружень, у даному разі дотичних, у кутових точках (тут через $\tau_{r,\vartheta}$ і τ_{ϑ} позначені граничні дотичні напруження, задані, відповідно, на кругових та бічних границях):

$$\frac{a\tau_{r,\vartheta}(a,\alpha) - b\tau_{r,\vartheta}(b,\alpha)}{2} - \frac{a\tau_{\vartheta}(a,\alpha) - b\tau_{\vartheta}(b,\alpha)}{2}; \\ \frac{a\tau_{r,\vartheta}(a,\alpha) + b\tau_{r,\vartheta}(b,\alpha)}{2} - \frac{a\tau_{\vartheta}(a,\alpha) + b\tau_{\vartheta}(b,\alpha)}{2}.$$

Після знаходження невідомих коефіцієнтів і асимптотик звичайним методом редукції з урахуванням виразів (5,7) можна порахувати напруження у довільній точці області.

4. Чисельні результати

Важливим частинним випадком задачі (2) є сталий розподіл зусиль на границі $\vartheta = \pm \alpha$:

$$\sigma_{\vartheta} = P \cos \alpha, \quad \tau_{r,\vartheta} = P \sin \alpha, \quad \text{при } a \leq r \leq b, |\vartheta| = \alpha, \quad (13)$$

зокрема згин силами півкільця, коли $\alpha = \pi/2$. У такому разі граничні умови (2) стають

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r,\vartheta} = 0, \quad \text{при } r = a; b, |\vartheta| \leq \alpha, \\ \sigma_{\vartheta} = 0, \quad \tau_{r,\vartheta} = P, \quad \text{при } a \leq r \leq b, |\vartheta| = \alpha. \quad (14)$$

Задача перетворюється на виключно у дотичних напруженнях. У цьому особливому випадку $\alpha_m = 2m-1$, зокрема $\alpha_1 = 1, d_1 = 0$. Тому у виразах (7,9-12) необхідно виконати відповідні граничні переходи.

На рис.2 представлені розподіли нормального напруження σ_{ϑ} в поперечних перерізах для чверть- і півкільця, відповідно. При порівнянні даних для півкільця з результатами елементарного розв'язку (1) для згину бруса силою, прикладеною на кінці [5,6], виявилось, що попри принципову відмінність заданих на границі дотичних напружень, розподіл нормальних напружень для обох задач збігається в усій області півкільця (див. рис. 2.б). Для дотичних напружень справедливі всі зауваження, зроблені раніше щодо чистого згину [8]. А саме, існує певна область навколо центрального перерізу $\vartheta = 0$, де результати точного і інженерних розв'язків добре узгоджуються. Проте при наближенні до навантажених торців відхилення стають значними.

Інгліс[4] розглянув задачі чистого згину і згину силами на торцях для півкільця $b/a=7$. На Рис.3 порівнюються відповідні розподіли радіального і колового напружень у поперечних перерізах сектора, з тими що відповідають точному розв'язку при умовах (14). Аналогічно випадку чистого згину [8] відзначаємо, що колові напруження, що відповідають елементарному і точному розв'язкам, ледве різняться ($<3\%$) у області біля вісі бруса $\vartheta=0$. Проте, починаючи з деякого кута ϑ , різниця стає суттєвою. Наприклад при $\vartheta=45^\circ$, 60° максимальні напруження різняться, відповідно на 15% і 30%. Тоді як радіальні напруження суттєво різняться в усій області бруса, зокрема при $\vartheta=0$ їх максимальні значення розбігаються на 40%, а при підході до збуреної границі вони стають співвимірні з коловими напруженнями.

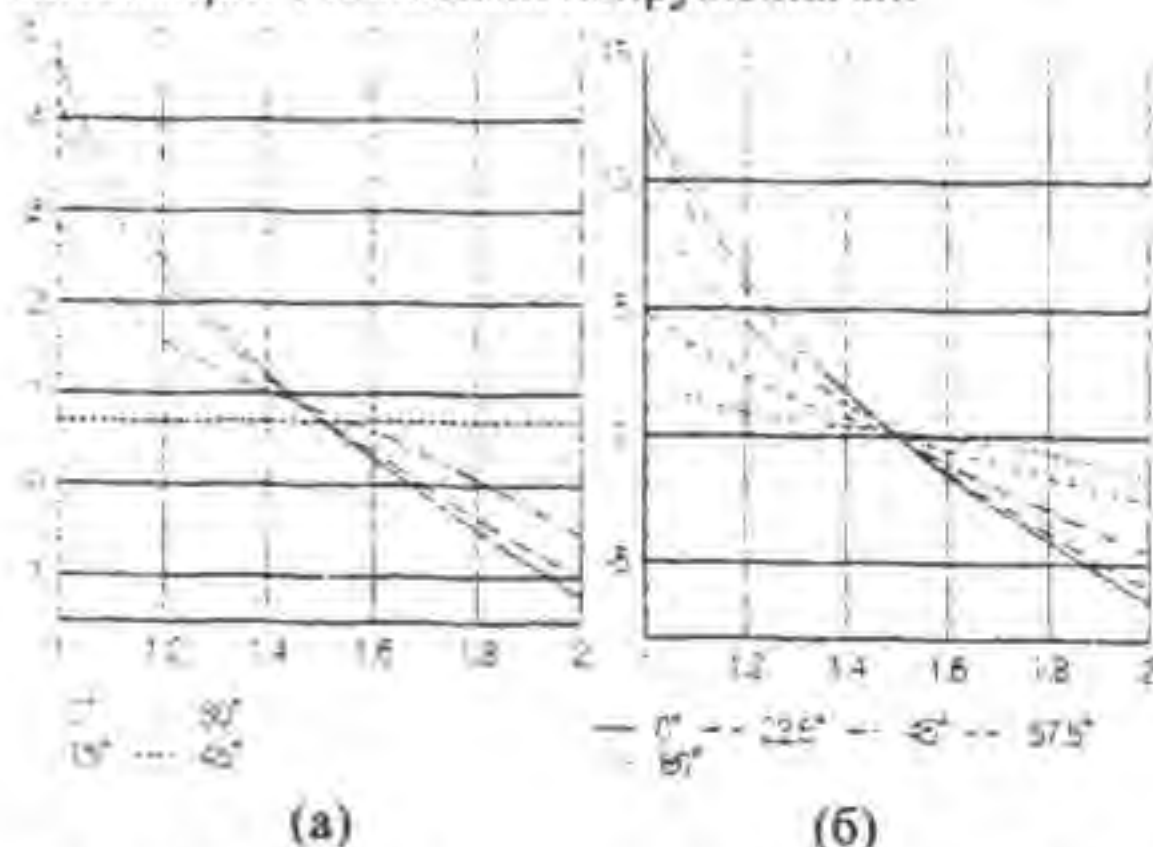


Рис. 2. Розподіли напружень σ_ϑ у чвертькільці ($\alpha = 45^\circ$, $b/a = 2$) та півкільці ($\alpha = 90^\circ$, $b/a = 2$) у перерізах $\vartheta = \text{const}$

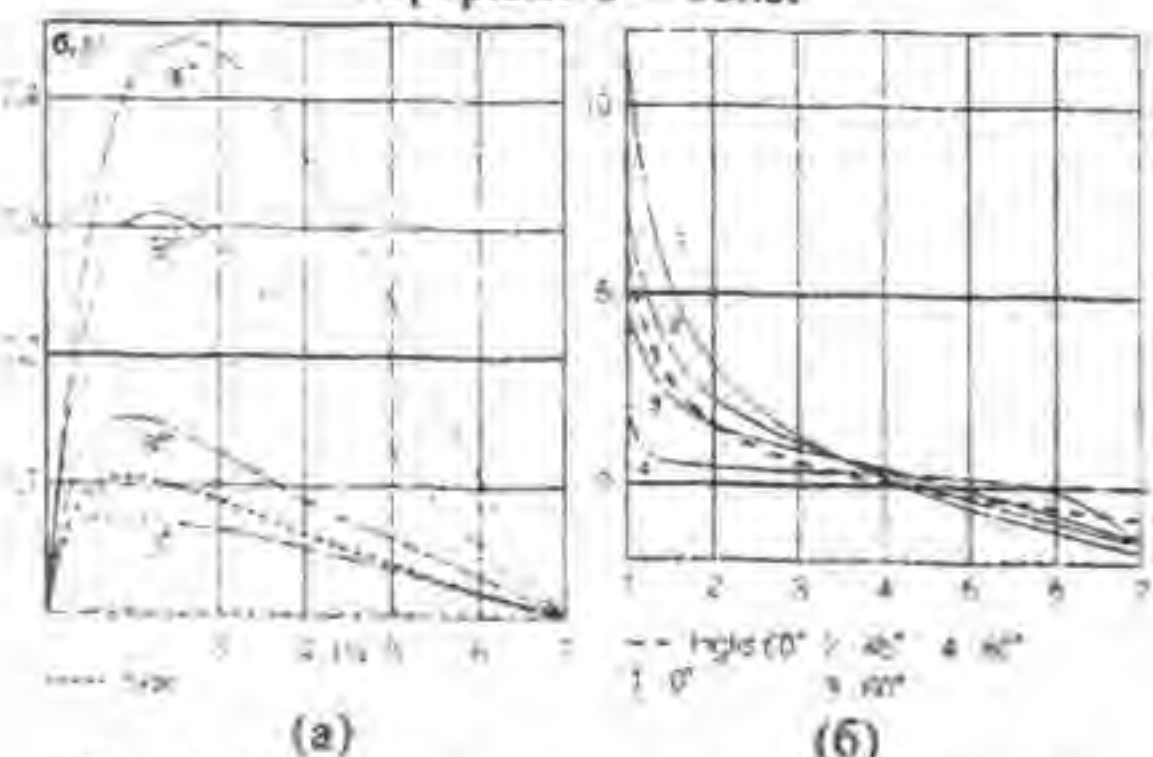


Рис. 4. Розподіли напружень σ_r (а) і σ_θ (б) у півкільці $b/a=7$ при згині силами

5. Висновки

На основі отриманого точного розв'язку і проведеного співставлення з відомими інженерними підходами приходимо до наступних висновків: наближені розв'язки теорії пружності і опору матеріалів дають надійні оцінки напружень для тонких брусів. Для товстих брусів розбіжності, залежно від конкретних граничних умов і геометрії бруса – наскільки вона відрізняється від балочної, можуть бути суттєвими, особливо біля збурених границь. Тому необхідно ретельно перевіряти межі можливого застосування наближених розв'язків, а біля кутових точок застосовувати тільки точний розв'язок.

Список використаних джерел

1. Грищенко В.Т., Улітко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – К.: Наукова думка, 1985. – 280 с.
2. Борщ Ю.А. Плоская задача теории упругости для кругового сектора в напряжениях // Изв. АН Арм. ССР. – 1975. – 28, № 5. – С. 31-40.
3. Борщ Ю.А. Смешанная задача плоской теории упругости для кольцевого сектора // Мат. физика. – 1977. – Вып. 22. – С. 73-78.
4. Inglis C. E. Some special cases of two-dimensional stress and strain // Trans. Inst. Naval Arch. – 1922. – 64. – P. 253-261.
5. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 507 с.
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
7. Lyakh V. V. Stress analysis of curved elastic bar under bending load; infinite systems and asymptotic // III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering: Book of Abstracts – Lisbon, 2006. – P. 463.
8. Улітко А.Ф., Лях В.В. Чистий згин товстих криволінійних пружних брусів // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка – 2006. – Вип. 10, №2. – С. 190-196.

Надійшла до редколегії 03.09.2009

УДК 539.3

Михайло А. Мартиненко, д.ф.-м.н., професор,
Ірина В. Лебедева*, к.ф.-м.н., доцент

Розподіл температури в пружному тілі зі сферичним розрізом

Розглянуто задачу про збурення температурного поля сферичною тріщиною у тривимірному тілі. Задачу зведено до рівняння Лапласа з мішаними граничними умовами в сферичній системі координат. Шляхом задоволення граничних умов розв'язання задачі приведено до парної системи рядів-рівнянь за поліномами Лежандра, рівняння Абеля, інтегро-диференціального рівняння Вольтера відносно введеної допоміжної функції. Розроблено загальний підхід до врахування збурної дії сферичної тріщини на просторовий розподіл температури в матеріалі. Для лінійного незбуреного температурного поля знайдено аналітичний вираз для просторового розподілу температур за наявності сферичної тріщини у пружному тілі.

Ключові слова: сферична тріщина, збурене температурне поле, парна система.

*E-mail: Lebedevai@ukr.net

Статтю представив член редколегії доктор ф.-м. н., професор В.В. Мелешко

1 Вступ

Виникнення та розвиток тріщин у матеріалах та конструкціях є однією з основних причин їх руйнування. У низці випадків це призводило до катастроф [10].

Існування температурних градієнтів у матеріалах підсилює розвиток утворення тріщин. Особливо чутливими до температурних полів є композитні матеріали, коефіцієнти термічного розширення компонент яких помітно відрізняються. Останнє означає, що врахування розподілу температур у матеріалах, в яких можливе утворення тріщин, є необхідним. З іншого боку, в свою чергу, виникнення тріщин, як буде показано у даній роботі, істотно впливає на просторовий розподіл температур у матеріалі.

У науковій літературі в основному аналізувалися внутрішні тріщини у вигляді розривів суцільності середовища вздовж деякої

M. A. Martynenko, Dr.Sci (Phys.-Math.), Professor,
I. V. Lebedyeva, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Associate Professor

Temperature Distribution in Elastic Body with a spherical cut

A problem on temperature field disturbance by a spherical crack in a three-dimensional body is solved. The problem is reduced to the Laplac equation with mixed boundary conditions in spherical coordinate. Satisfying the boundary conditions gives the interdependent system of dual equation series with respect to the Legendre functions, next, the Abel equation, the Volterra integral-differential equation relative to unknown auxiliary function. The general approach to studying the spherical crack disturbance effect on spatial temperature field in elastic material is developed. The analytical expression for space temperature distribution under spherical crack in elastic body is obtained for the case of linear undisturbed temperature field.

Key Words: spherical crack, disturbed temperature field, dual equation series.

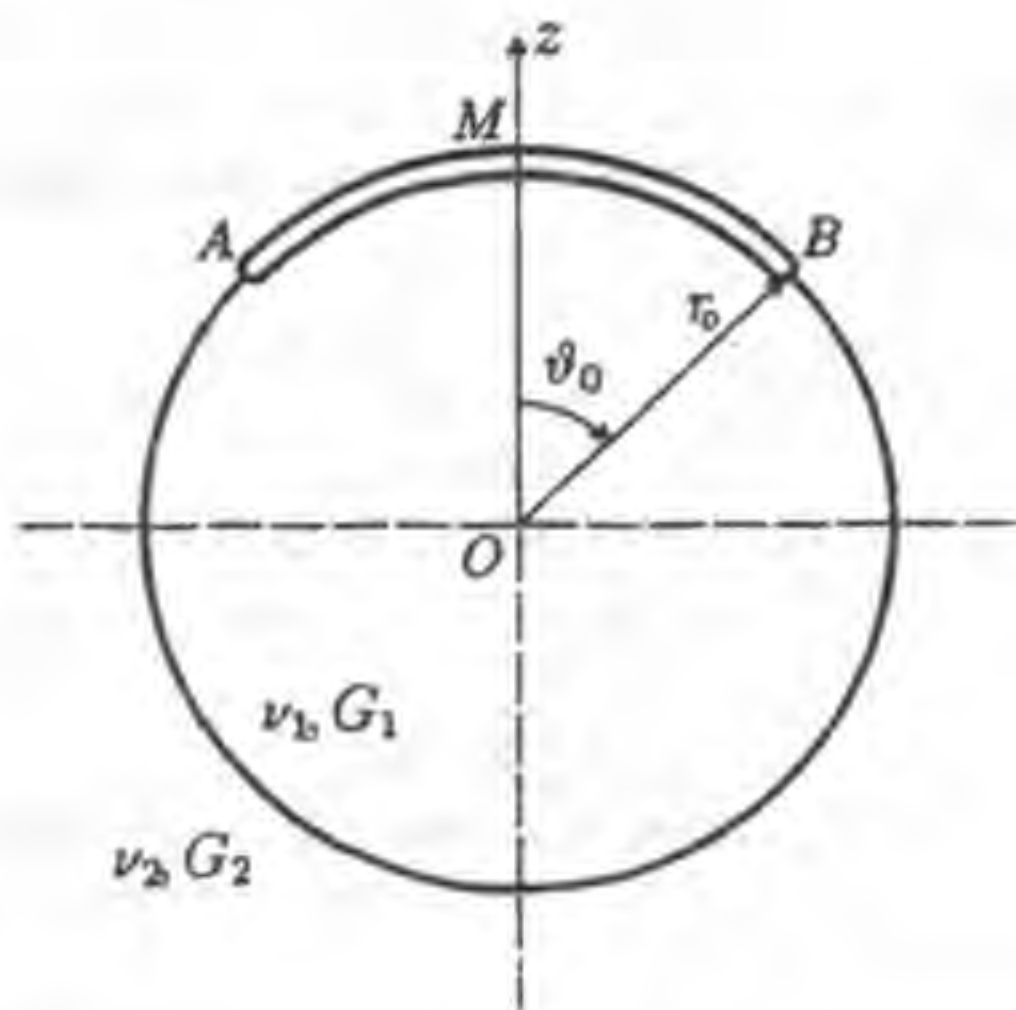


Рис.1. Сферична тріщина у необмеженому пружному тілі. Меридіональний переріз.

плоскої поверхні, зокрема, тріщини дископодібної та еліптичної форм [1]. Експериментальне вивчення частин зруйнованих деталей показало, що початкові поверхні розриву суцільності матеріалу мали сферичний та параболоїдальний вигляд, тобто не плоску, а об'ємну форму [5]. Більш реалістичною є модель тріщини по частині деякої поверхні обертання. Дана робота присвячена вивченню впливу тріщини, що моделюється математичним розрізом по частині сфери, на температурне поле у просторовому тілі.

2 Постановка задачі

Розглянемо необмежене ізотропне пружне тіло, послаблене термоізолюваною тріщиною по частині поверхні сфери ($r=r_0$, $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). На рис.1. показано меридіональний переріз, де розріз збігається з дугою АМВ. Розіб'ємо цей простір поверхнею сфери S на дві області: внутрішню область V_1 ($0 \leq r \leq r_0$) та зовнішню область V_2 ($r > r_0$). На поверхні S зовні розрізу мають виконуватись умови неперервності полів переміщень і напружень. Вважатимемо, що розподіл температури у тілі без тріщини описується заданою гармонічною функцією $t_0(r, \vartheta)$. Тоді загальний розподіл температури можна представити так [4]

$$T(r, \vartheta) = t(r, \vartheta) + t_0(r, \vartheta),$$

$$t(r, \vartheta) = \begin{cases} t_1(r, \vartheta), & 0 \leq r \leq r_0; \\ t_2(r, \vartheta), & r > r_0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут $t(r, \vartheta)$ – збурене температурне поле, яке виникає за наявності сферичної тріщини. Оскільки тріщина термоізолювана, на її поверхні виконуються умови [3]

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_2}{\partial n}; \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$(r = r_0, 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0).$$

Враховуючи (1), дістанемо

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = \frac{\partial t_2}{\partial r} = -\frac{\partial t_0}{\partial r}, \quad (3)$$

$$(r = r_0, 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0).$$

Таким чином, задача про визначення збуреного температурного поля приводиться до рівняння теплопровідності [4]

$$\Delta t = 0 \quad (4)$$

та умови (3). До цих умов слід додати умову неперервності теплового потоку на поверхні сфери зовні розрізу:

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = \frac{\partial t_2}{\partial r}, \quad t_1(r, \vartheta) = t_2(r, \vartheta), \quad (5)$$

$$(r = r_0, \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi).$$

3 Метод розв'язання

Вираз для температурного поля є розв'язком рівняння Лапласа у сферичних координатах. У випадку стаціонарного теплообміну, без джерел тепла цей розв'язок представимо розкладами за поліномами Лежандра [6]

$$t_1(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n P_n(\cos \vartheta), \quad (0 \leq r \leq r_0); \quad (6)$$

$$t_2(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{-n-1} P_n(\cos \vartheta), \quad (r > r_0), \quad (7)$$

де нескінченну послідовність невизначених коефіцієнтів α_n, β_n можна знайти з умови (3), рівняння (4) і властивості ортогональності поліномів Лежандра. Дістанемо таку залежність між коефіцієнтами

$$\beta_n = -\frac{n}{n+1} \alpha_n r_0^{2n+1}. \quad (8)$$

Задовольняючи решту умов, прийдемо до системи парних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \alpha_n r_0^n P_n(\cos \vartheta) = -r_0 \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_0}, \quad (0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \alpha_n r_0^n P_n(\cos \vartheta) = 0, \quad (\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (9)$$

Розв'язок системи (9) шукаємо у вигляді інтегрального оператора [7]

$$\alpha_n r_0^n \frac{2n+1}{n+1} = \int_0^{\vartheta_0} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt, \quad (10)$$

$$\beta_n = -\frac{n}{n+1} \alpha_n r_0^{2n+1},$$

де $f(t)$ – нова допоміжна функція, неперервна разом із своєю похідною при $0 \leq t \leq \vartheta_0$.

Скористаємось розривною сумою [2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t = \frac{H(t - \vartheta)}{\sqrt{2 \cos \vartheta - 2 \cos t}}, \quad (11)$$

де $H(t - \vartheta)$ – функція Хевісайда, та інтегральним представленням Мелера-Діріхле [2]

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \vartheta}} dx. \quad (12)$$

Друге рівняння системи (9) підстановкою (10) задовольняється тотожно. Підставляючи (10) у

перше рівняння системи (9), з урахуванням інтегрального представлення (12) після зміни порядку підсумовування та інтегрування, дістанемо інтегральне рівняння Абеля [7]

$$\int_0^{\vartheta} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos \vartheta}} \int_0^{\vartheta_0} f(t)K(t,x)dt = -r \frac{\partial t_0}{\partial r}, \quad (13)$$

$$(\vartheta < \vartheta_0),$$

де

$$K(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= -\frac{1}{2} \delta'(t-x) - \frac{1}{8} H(t-x). \quad (14)$$

Застосуємо до інтегрального рівняння Абеля формулу обернення [7, 8]:

$$\int_0^{\vartheta} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos \vartheta}} = f(x); \quad (15)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s) \sin s ds}{\sqrt{2\cos s - 2\cos x}}.$$

З урахуванням властивостей узагальнених функцій дістанемо інтегро-диференціальне рівняння Вольтера відносно функції $f(t)$:

$$4f'(x) - \int_0^{\vartheta_0} f(t)dt = G(x); \quad f(0) = 0, \quad (16)$$

де

$$G(x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(s) \sin s ds}{\sqrt{2\cos s - 2\cos x}}. \quad (17)$$

Диференціюючи рівняння (16), матимемо

$$f''(x) + \frac{1}{4}f(x) = G'(x) \quad (18)$$

з двома умовами

$$f(0) = 0, \quad f'(\vartheta_0) = G(\vartheta_0). \quad (19)$$

Перша умова випливає з припущення про обмеженість теплового потоку, друга – безпосередньо з рівняння (16). Розв'язок рівняння (18) легко будується в явному аналітичному вигляді, а коефіцієнти α_n , β_n визначаються з рівностей (10) і (19). Збурене температурне поле в областях V_1 і V_2 задається розкладами (6) і (7), а відповідний напружений стан знаходиться за відомими формулами [6].

4 Приклад

Нехай задано лінійне температурне поле

$$t_0(r, \vartheta) = \frac{q}{\lambda} r \cos \vartheta + T_0, \quad (20)$$

де q – величина теплового потоку, λ – коефіцієнт теплопровідності тіла, T_0 – температура в площині $z = 0$. Розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$f(x) = -\frac{r_0}{\pi} \frac{q}{\lambda} \left(3 \sin \frac{3}{2}x - \cos \frac{3}{2}\vartheta_0 \sec \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{x}{2} \right). \quad (21)$$

Коефіцієнти α_n , β_n визначаємо за формулами (10) з урахуванням розв'язку (21):

$$\alpha_n = \frac{r_0^{1-n}}{\pi} \frac{q}{\lambda} \frac{n+1}{2n+1} \times$$

$$\times \left\{ \cos \frac{3}{2}\vartheta_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n} - \frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1} \right] - \right.$$

$$\left. - 3 \left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1} - \frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2} \right] \right\}, \quad (22)$$

$$\beta_n = -\frac{r_0^{n+2}}{\pi} \frac{q}{\lambda} \frac{n}{2n+1} \times$$

$$\times \left\{ \cos \frac{3}{2}\vartheta_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n} - \frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1} \right] - \right.$$

$$\left. - 3 \left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1} - \frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2} \right] \right\}.$$

Після підстановки (22) у розклади (6), (7) дістанемо вираз для температурного поля:

$$t_1(r, \vartheta) = \frac{r_0}{\pi} \frac{q}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \times$$

$$\times \left\{ \cos \frac{3}{2}\vartheta_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n} - \frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1} \right] - \right.$$

$$\left. - 3 \left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1} - \frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2} \right] \right\} P_n(\cos \vartheta),$$

$$(0 \leq r \leq r_0);$$

$$t_2(r, \vartheta) = -\frac{r_0}{\pi} \frac{q}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \times$$

$$\times \left\{ \cos \frac{3}{2}\vartheta_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n} - \frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1} \right] - \right.$$

$$\left. - 3 \left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1} - \frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2} \right] \right\} P_n(\cos \vartheta),$$

$$(r > r_0).$$

Отже, задача теплопровідності для пружного тіла зі сферичним розрізом розв'язана.

5 Заключні зауваження

Таким чином, розглянуто вплив збурної дії сферичної тріщини на температурне поле в необмеженому ізотропному пружному

середовищі. Розроблено загальний підхід до врахування таких збурень. Низка застосованих математичних операцій включає розв'язання рівняння Лапласа у сферичних координатах з мішаними граничними умовами, системи рядів-рівнянь за поліномами Лежандра, наступний пошук її розв'язків у вигляді спеціальних операторів. Вказана послідовність операцій дозволила записати рівняння Абеля, а далі – інтегро-диференціальне рівняння Вольтера відносно введеної допоміжної функції.

Аналітичний вираз для збуреного сферичного тріщиною температурного поля отримано для випадку початково незбуреного лінійного поля температури.

Список використаних джерел

1. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наукова думка, 1982. – 348 с.
2. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 472 с.
3. Кит Г.С., Хай М.В. Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1982. – №5. – С. 60-67.

4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
5. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М: Мир, 1982. – 334 с.
6. Лурье А.И. пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
7. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка // Мат. физика. – 1979. – 25, – С. 106-109.
8. Уфлянд Я.С., Меленевская Е.С. Кручение упругого пространства, ослабленного сферическим разрезом // Прикл. механика. – 1971. – 7, №2. – С. 111-114..
9. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
10. Liebowitz H. (Ed.) Fracture: an Advanced Treatise. Vol.2. Mathematical Fundamentals. – London: Academic Press, 1968. – 759 pp.

Надійшла до редколегії

14.12.09

УДК 517.9

Ольга В. Старкова, аспірант

Автономна нетерова крайова задача в
частинному критичному випадку

Знайдено необхідні й достатні умови існування розв'язків нелінійної автономної нетерової крайової задачі в частинному критичному випадку. Характерною особливістю поставленої задачі є неможливість безпосереднього застосування традиційної схеми дослідження та побудови розв'язків критичних крайових задач.

Ключові слова: автономна крайова задача, критичний випадок, метод найменших квадратів, ітераційна схема, псевдообернення матриць, ортопроектор.

star-o@ukr.net

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., професор М.О. Перестюк

1. Вступ.

В статті розглядається нелінійна автономна нетерова крайова задача, для аналізу якої не може бути застосована схема дослідження, розроблена в роботах І.Г. Малкіна, А.М. Самойленка, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова і О.А. Бойчука, оскільки даний випадок не можна віднести до критичного випадку першого, другого, або вищого порядку.

2. Постановка задачі.

Досліджена задача про побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad b(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

автономної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad (1)$$

які задовольняють крайовій умові [1, 2, 3]

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Розв'язок нетерової ($m \neq n$) крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку

$$z_0(t) : z_0(\cdot) \in C^1[a, b^*], \quad b^* = b(0)$$

породжуючої задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (3)$$

Olga V. Starkova, PhD student

Autonomous Noetherian boundary-value
problem in special critical case

The necessary and sufficient terms of solution existence of nonlinear autonomous Noetherian boundary-value problem are found in special critical case. The characteristic feature of the set problems is impossibility of direct application of traditional research schematic representation and construction of solutions of critical boundary-value problems.

Key Words: autonomous boundary-value problem, critical case, least-squares method, iterative scheme, pseudoinversion of matrices, ortoprojector.

Тут A – стала $(n \times n)$ -вимірва матриця, $Z(z, \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за невідомою z у малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперервно-диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторні функціонали, $\ell z(\cdot, \varepsilon), J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою z і по малому параметру ε у малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$.

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\} = 0$$

породжуюча задача (3) має сім'ю розв'язків [1]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t),$$

$$X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q = \ell X(\cdot)$ – $(m \times n)$ -матриця, $\text{rank } Q = n_1$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} – $(m \times m)$ -матриця-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$, $X(t)$ – нормальна ($X(a) =$

I_n) фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (3); P_{Q^*} – $(n \times r)$ -матриця, складена з r -лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$;

$$G[f; \alpha](t) = X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\} + K[f](t)$$

– узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3), Q^+ – псевдообернена матриця за Муром-Пенроузом [1],

$$K[f](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f ds$$

– оператор Гріна задачі Коші для диференціальної системи (3), I_n – одинична $(n \times n)$ -матриця. В критичному випадку задача (1), (2) істотно відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач: на відміну від останніх, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (1), (2), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови розв'язків.

3. Необхідна умова.

Здійснюючи в задачі (1), (2) заміну змінної [2]

$$t = a + (\tau - a) \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right), \quad (4)$$

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon (b^* - a) \beta(\varepsilon),$$

$$\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

приходимо до задачі про відшукування розв'язків

$$z(\tau, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b^*], \quad z(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь

$$dz/d\tau = Az + f + \varepsilon \left\{ \beta(\varepsilon) A \left(z(\tau, \varepsilon) + f \right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right) Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right\},$$

які задовольняють крайові умови

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right) \left(\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right). \quad (6)$$

Тут $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ – лінійний та $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний векторні функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Розв'язок задачі (5), (6) $z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_\tau) + x(\tau, \varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язків породжуючої задачі (3). Для знаходження збурення

$$x(\tau, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b^*],$$

$$x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(\tau, 0) \equiv 0$$

отримуємо задачу

$$dx/d\tau = Ax + \varepsilon \left\{ \beta(\varepsilon) \left(A(z_0 + x) + f \right) + \right. \quad (7)$$

$$\left. + \left(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right) Z(z_0 + x, \varepsilon) \right\}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \alpha \beta(\varepsilon) + \varepsilon \left[1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right] \times \quad (8)$$

$$\times \tilde{J}(z_0(\cdot, c_\tau) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Залишаючи тільки лінійно-незалежні рядки умови розв'язності

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha \beta(\varepsilon) + \left[1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right] \tilde{J}(z_0(\cdot, c_\tau) + \right. \\ \left. + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left\{ \beta(\varepsilon) \left[A(z_0 + x) + f \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right] Z(z_0 + x, \varepsilon) \right\}(\cdot) \right\} = 0.$$

задачі (7), (8), отримуємо еквівалентну умову розв'язності задачі (7), (8)

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha \beta(\varepsilon) + \left[1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right] \tilde{J}(z_0(\cdot, c_\tau) + \right. \quad (9) \\ \left. + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left\{ \beta(\varepsilon) \left[A(z_0 + x) + f \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[1 + \varepsilon \beta(\varepsilon) \right] Z(z_0 + x, \varepsilon) \right\}(\cdot) \right\} = 0.$$

Тут P_{Q^*} – $(\rho \times m)$ -вимірний матриця, складена з ρ -лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*} . Позначаючи

$$\varphi_0(c^*) = \alpha \beta^* + \tilde{J}(z_0(\cdot, c_\tau^*), 0),$$

$$f_0(s, c^*) = \beta^* \left[A z_0(s, c_\tau^*) + f \right] + Z(z_0(s, c_\tau^*), 0),$$

аналогічно [2], приходимо до необхідної умови розв'язності задачі (7), (8).

Лема. Якщо крайова задача (1), (2) в критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) має розв'язок.

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_\tau^*)$, то вектор $(c_\tau^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ задовольняє рівнянню [2]

$$F(c_\tau^*, \beta^*) = P_{Q_\tau} \left\{ \varphi_0(c^*) - \ell K \left[f_0(s, c^*) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (10)$$

Припустимо, що рівняння (10) має дійсний корінь $(c_\tau^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$, для якого

$$\left. \frac{\partial F(c_\tau, \beta)}{\partial c_\tau} \right|_{\substack{c_\tau = c_\tau^* \\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial F(c_\tau, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{c_\tau = c_\tau^* \\ \beta = \beta^*}} \neq 0.$$

В цьому випадку традиційна схема аналізу автономних крайових задач [2] не може бути застосована, оскільки для крайової задачі (1), (2) не може мати місця жоден з критичних випадків — першого, другого або вищого порядку. З іншого боку задача (1), (2) не представляє також особливий критичний випадок [4], оскільки рівняння (10) не перетворюється на тотожність.

4. Достатня умова.

Для знаходження розв'язків $z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_\tau^*) + x(\tau, \varepsilon)$ задачі (5), (6) розкладаємо функцію $Z(z, \varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку

$$z_0(\tau, c_\tau^*) = X_\tau(\tau) c_\tau^* + G[f; \alpha](\tau)$$

і точки $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Z(z_0(\tau, c_\tau^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) &= \\ &= Z(z_0(\tau, c_\tau^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon A_2(z_0(\tau, c_\tau^*)) + R_1(z_0(\tau, c_\tau^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon); \end{aligned}$$

тут

$$A_1(\tau) = \left. \frac{\partial Z(z, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_\tau^*) \\ \varepsilon = 0}},$$

$$A_2(z_0(\tau, c_\tau^*)) = \left. \frac{\partial Z(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_\tau^*) \\ \varepsilon = 0}},$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першим аргументом векторного функціонала $J(z_0(\cdot, c_\tau^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ і неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за другим аргументом, виділяємо лінійні частини цього функціоналу [5]

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \left. \frac{\partial \bar{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_\tau^*) \\ \varepsilon = 0}},$$

$$\varepsilon \cdot \ell_2(z_0(\cdot, c_\tau^*)) = \varepsilon \cdot \left. \frac{\partial \bar{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_\tau^*) \\ \varepsilon = 0}},$$

і член $J(z_0(\cdot, c_\tau^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нульового порядку по ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{J}(z_0(\cdot, c_\tau^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) &= J(z_0(\cdot, c_\tau^*), 0) + \\ &+ \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_\tau^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_\tau^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

З урахуванням розвинення нелінійностей та рівності (10), умова розв'язності (9) задачі (7), (8) приймає вигляд

$$\begin{aligned} P_{Q_\tau} \left\{ \alpha \bar{\beta}(\varepsilon) + \varepsilon \beta(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_\tau^*), 0) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \cdot \right. \\ \cdot \left[\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_\tau^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_\tau^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] - \\ - \ell K \left\{ \bar{\beta}(\varepsilon) \left[A z_0(s, c_\tau^*) + f \right] + \varepsilon \beta(\varepsilon) Z(z_0(s, c_\tau^*), 0) + \right. \\ \left. + \beta(\varepsilon) A x(s, \varepsilon) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \left[A_1(s) x(s, \varepsilon) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon A_2(z_0(s, c_\tau^*)) + R_1(z_0(s, c_\tau^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} (\cdot) \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

Позначимо $(\rho \times m)$ -матрицю

$$\mathfrak{B}_0 = P_{Q_\tau} \left\{ \alpha - \ell K \left[A z_0(\tau, c_\tau^*) + f \right] (\cdot) \right\}.$$

Нехай $P_{\mathfrak{B}_0^*}$ — $(\rho \times \rho)$ -вимірний ортопроектор: $\mathbb{R}^{r+1} \rightarrow N(\mathfrak{B}_0^*)$. Для знаходження функції $\bar{\beta}(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ одержуємо рівняння

$$\mathfrak{B}_0 \bar{\beta}(\varepsilon) = -P_{Q_\tau} \left\{ \varepsilon \beta(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_\tau^*), 0) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2 (z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] - \\ & - \ell K \left\{ \varepsilon \beta(\varepsilon) Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon) A x(s, \varepsilon) + \right. \\ & + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \left[A_1(s) x(s, \varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + \right. \\ & \left. \left. + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} (\cdot). \end{aligned}$$

розв'язного за умови $P_{\mathfrak{B}_0^+} P_{Q_r^*} = 0$. При цьому задача (7), (8) має принаймні один розв'язок, який визначає операторна система

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = & \varepsilon G \left\{ \tilde{\beta}(\varepsilon) \left[A z_0(s, c_r^*) + f \right] + \right. \\ & + \varepsilon \beta(\varepsilon) Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon) A x(s, \varepsilon) + \\ & + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \left[A_1(s) x(s, \varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + \right. \\ & \left. + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right]; \\ & \alpha \tilde{\beta}(\varepsilon) + \varepsilon \beta(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \cdot \\ & \cdot \left[\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2 (z_0(\cdot, c_r^*)) + \right. \\ & \left. + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] \left. \right\} (\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\varepsilon) = & -\mathfrak{B}_0^+ P_{Q_r^*} \left\{ \varepsilon \beta(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \cdot \right. \\ & \cdot \left[\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2 (z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] - \\ & - \ell K \left\{ \varepsilon \beta(\varepsilon) Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon) A x(s, \varepsilon) + \right. \\ & + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) \left[A_1(s) x(s, \varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + \right. \\ & \left. \left. + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} (\cdot) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема. У критичному ($P_{Q^*} \neq 0$) випадку для кореня $(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння $F(c^*) = 0$ задача (1), (2) за умов (11) і

$P_{\mathfrak{B}_0^+} P_{Q_r^*} = 0$ має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_r^*)$.

Для побудови цього розв'язку у випадку (11) запропоновано ітераційну схему, що відповідає методу простих ітерацій [1, 2, 3].

5. Висновки.

Для автономної нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у частинному критичному випадку доведені оригінальні необхідна і достатня умови існування шуканих розв'язків.

Список використаних джерел

1. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — Utrecht: Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. Бойчук А.А. Автономные слабонелинейные краевые задачи / А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668—1674.
3. Чуйко С.М. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае / С.М. Чуйко, И.А. Бойчук // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 405—416.
4. Чуйко С.М. Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае / С.М. Чуйко // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 548—562.
5. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. Чуйко С.М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554—573.
7. Ахизер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахизер. — М.: Наука, 1965. — 408 с.

Надійшла до редколегії 25.12.2009

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

Акіменко В.В., д.т.н., проф., Митрохін С.О., асп.*

СППР з оптимального керування процесами підтоплення територій

Побудовано модель СППР з оптимального керування процесом підтоплення територій. Розроблено алгоритм функціонування системи та підтримки прийняття управлінських рішень.

Ключові слова: прийняття рішення, оптимальне керування, процес підтоплення територій.

Akimemko V.V., Mitrokhin S.A.

DMSS on optimum control of flooding of territories

The conceptual model of DMSS of optimum control of flooding of territories is created. The basic algorithm of information objects which ensure functioning of system are selected.

Key words: decision making, optimum control, water logging process.

*E-mail: akacorwin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Система підтримки прийняття рішень по оптимальному керуванню процесами підтоплення територій промислово-міських агломерацій (ПМА) повинна забезпечувати виконання наступних функцій: накопичення даних екологічного моніторингу елементів режиму ґрунтових вод та фізичних властивостей ґрунтів; прогнозування рівня підземних вод на основі прогнозування даних про можливу поведінку вхідних та вихідних водних потоків і опадах; визначення оптимального керування рівнем ґрунтових вод з метою не допустити його зменшення нижче критичного рівня

в межах доступних технічних, геологічних засобів і потужностей; контроль та керування процесом реалізації визначених управлінських рішень за фактичними результатами керування та плановими показниками; забезпечення своєчасного подання та обробки інформації щодо процесу прийняття рішень, а також багатокористувацького доступу до даних та безпеки даних. Можна запропонувати наступну модель підтримки прийняття рішень з оптимального керування процесом запобігання підтоплення території ґрунтовими водами (рис. 1):

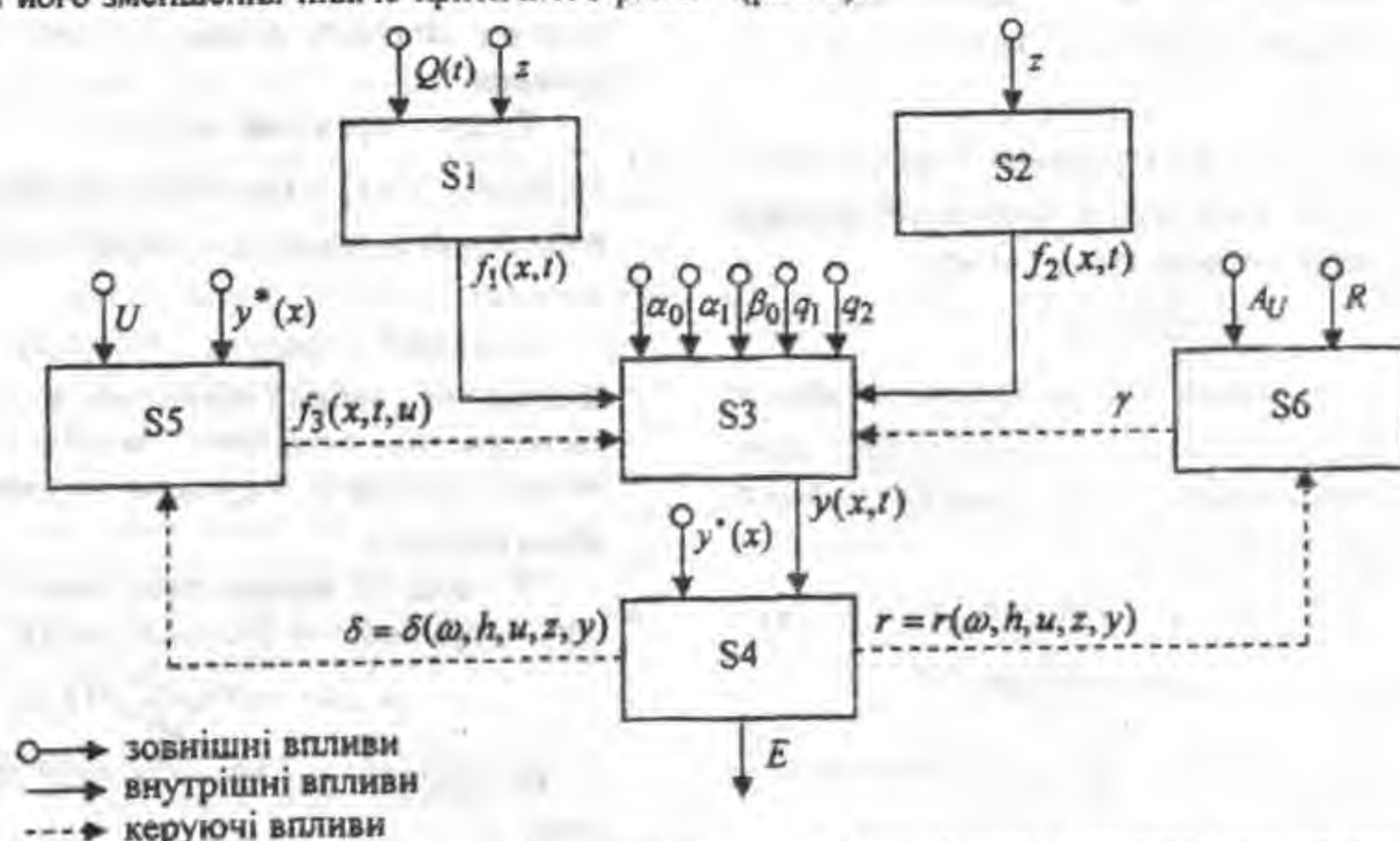


Рис. 1. Модель підтримки прийняття рішень з керування підтопленням території ґрунтовими водами.

Блок S1 - моделювання процесу проникнення атмосферних опадів у ґрунтові води. Вхідні параметри модуля: $Q(t)$ - кількість опадів, z - інтегрований параметр, що характеризує фізичні властивості ґрунту. Вихідний параметр $f_1(x, t) \leq 0$ - функція джерела (проникнення опадів у ґрунтові води).

Блок S2 - моделювання процесу випаровування вологи із ґрунту. Вхідний параметр z - інтегрований параметр, що характеризує фізичні властивості ґрунту. Вихідний параметр $f_2(x, t) \geq 0$ - функція випаровування вологи із ґрунту.

Блок S3 - моделювання процесу дифузії ґрунтових вод. Вхідні параметри модуля: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ - параметри дифузійного процесу, q_1 та q_2 - швидкості потоку ґрунтових вод, $f_1(x, t) \leq 0$ - функція джерела, $f_2(x, t) \geq 0$ - функція випаровування вологи із ґрунту, $f_3(x, t, u) \geq 0$ - функція збільшення глибини підземних вод за рахунок застосування технічних засобів, γ - комплекс організаційних та технічних заходів щодо ліквідації небезпечно-го підйому ґрунтових вод у випадку стихійних та техногенних катастроф. Вихідний параметр $y(x, t)$ - положення рівня ґрунтових вод.

При вивченні процесу дифузії ґрунтових вод в блоці S3 за основу можна взяти наступну початково-крайову задачу для $y(x, t)$ в області $Q_T = \Omega \times (0, T)$ [1], [2], [3]:

$$y_t = \sum_{i=1}^2 (a_i(x, t, y) y_{x_i})_{x_i} + f(x, t, u), \quad (1)$$

$$a_i(x, t, y) = \alpha_i(x, t) + \sum_{j=1}^J \beta_{ij}(x, t) y^{2j-1} + \sum_{k=1}^K \gamma_{ik}(x, t) y^{2k}, \quad (2)$$

де $\alpha_i(x, t) > 0, \beta_{ij}(x, t) \geq 0, \gamma_{ik}(x, t) \geq 0$ - задані набори функцій, $J \geq 1, K \geq 1$ - задані показники поліноміальних коефіцієнтів дифузії $a_i(x, t, y)$, $f(x, t, u) = f_1(x, t) + f_2(x, t) + f_3(x, t, u)$, $u(x, t) \in U$ - функція керування з множини керувань U . Момент часу T закінчення процесу моделювання визначається з умови:

$$T = \min\{\hat{T}, T^*\}, \quad (3)$$

де $\hat{T}$ - планований час завершення процесу моделювання, T^* - час, за який глибина залягання підземних вод зменшується до заданого критичного значення $y^*(x)$:

$$\exists x^* \in \Omega: y(x^*, T^*) = y^*(x^*) \quad (4)$$

Початкові й граничні умови:

$$\begin{aligned} y|_{t=0} &= \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)_{S_1} = \sigma_1(x, t, u), \\ y|_{S_2} &= \sigma_2(x, t, u), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varphi(x)$ - початковий розподіл глибини залягання ґрунтових вод, що задовольняє обмеженням:

$$0 < y^*(x) \leq \varphi(x) \leq h_0 \quad (6)$$

де h_0 - максимально можлива глибина заля-

гання ґрунтових вод.

Блок S4 - аналіз стану досліджуваної системи. Вхідні параметри модуля: $y^*(x)$ - критичне значення глибини залягання ґрунтових вод, $y(x, t, u(x, t))$ - прогнозоване положення рівня ґрунтових вод.

Вихідні параметри модуля: $\delta = \delta(\omega, h, u, z, y)$ - висновок про стан досліджуваної території, $r = r(\omega, h, u, z, y)$ - інформаційний сигнал про стан системи в тому, випадку, якщо в деяких подобластях $\Omega^* \subset \Omega$ рівень ґрунтових вод менше критичного $y(x, t_0) < y^*(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega^*$, E - масив елементів режиму ґрунтових вод.

У блоці S4 за результатами моделювання динаміки ґрунтових здійснюється порівняння елементів режиму ґрунтових вод з плановими показниками та прийняття одного з наступних рішень: f_1 - розрахунок та застосування керуючого впливу (штатний режим роботи системи), f_2 - передача керування підсистемі вибору оптимального комплексу технічних та організаційних заходів щодо запобігання підтопленню території (випадок техногенної катастрофи), f_3 - продовження спостережень за досліджуваною системою.

Блок S5 - розрахунок керуючого впливу у випадку штатного режиму роботи системи керування.

Вхідні параметри модуля: U - множина керувань, $y^*(x)$ - критичний рівень ґрунтових вод, $\delta = \delta(\omega, h, u, z, y)$ - інформація про стан системи.

Вихідний параметр $f_3(x, t, u)$ - функція збільшення глибини підземних вод за рахунок застосування технічних засобів (керуючий вплив), $u(x, t) \in U$ - функція керування з множини керувань.

У блоці S5 вирішується задача оптимального керування для системи (1)-(5):

$$u^*(x, t) = \arg \inf_{u \in U} J(y, u), \quad (7)$$

де функціонал $J(y, u)$ - критерій якості керування:

$$J(y, u) = \int_{Q_T} (\hat{y}(x) - y(x, t))^2 \chi(\hat{y}(x) - y(x, t)) dx dt. \quad (8)$$

В (8) $\hat{y}(x, t) > y^*(x, t)$ - заданий розподіл предкритического рівня ґрунтових вод, $\chi(x)$ - функція Хевісайда.

Розв'язок задачі (8) можна шукати на класі кусочно-постійних обмежених функцій насту-

пного виду:

$$u(t) = \sum_{j=1}^m u_j \chi(t - t_{j-1}) \chi(t_j - t), \quad (9)$$

де $\{u_j\}$ - набір обмежених коефіцієнтів ($0 \leq u_j \leq u_j^0(t)$, $u_j^0(t) = 0.3 + 0.005t$) на інтервалах $[t_{j-1}, t_j]$, $\chi(t)$ - функція Хевісайда.

Блок S6 - розрахунок керуючого впливу у випадку стихійних лих та техногенних катастроф.

Вхідні параметри модуля: A_U - множина управлінських рішень (організаційних та технічних заходів), R - обмеження по ресурсах,

$r = r(\omega, h, u, z, y)$ - інформація про стан системи підтоплення території.

Вихідний параметр y - комплекс організаційних та технічних заходів щодо ліквідації небезпечного підйому ґрунтових вод у випадку стихійних лих та техногенних катастроф. Рішення про застосування керуючих впливів приймає ОПР. ОПР може підтвердити доцільність впливів та ініціювати здійснення відповідних організаційних заходів щодо переведення реальної системи керування в стан, визначений СППР або відхилити запропоновані дії. В своїй роботі ОПР використовує групові технології прийняття рішень.



Рис. 2. Діаграма варіантів використання СППР

СППР, що проектується, може використовуватись суб'єктами екологічного моніторингу у таких випадках (рис. 2): для визначення фактичного стану, у якому знаходиться система, тобто для оцінки ступеня підтопленості території ПМА й характеру негативних змін навколишнього середовища, пов'язаних з розвитком процесу підтоплення; для підтримки прийняття рішення щодо керування рівнем ґрунтових вод (організації заходів щодо ліквідації небезпечного підйому ґрунтових вод) [4], [5], [6].

У процесі аналізу стану системи що досліджується (рис. 3) визначається фактичне та прогностичне положення рівня ґрунтових вод (модель нелінійного процесу дифузії для завдання підтоплення територій) та здійснюється їх порівняння з плановими значеннями показників (які було визначено на етапі прийняття рішення про керування). Результатом роботи системи є формування висновку про стан території, який визначається на множині допустимих рішень: P1 (глибини залягання ґрунтових вод відповідають плановим (мають відхилення у встановлених експертами межах), параметри процесу керування динамікою рівня ґрунтових вод не потребують змін); P2 (глибини заля-

гання ґрунтових вод менші за планові, параметри процесу керування потребують коригування);



Рис. 3. Діаграма дій процесу контролю реалізації визначених управлінських рішень

РЗ (глибини залігання ґрунтових вод перевищують планові, параметри керування можна коригувати з метою зменшення витрат).

У процесі керування рівнем ґрунтових вод (рис. 4) система генерує відповідні керуючі впливи для збільшення глибин залігання ґрунтових вод та забезпечення їх відповідності плановими показниками, визначеним на етапі прийняття рішення про застосування певних заходів щодо

ліквідації небезпечного підйому ґрунтових вод. Результатом роботи системи є визначення оптимального керуючого впливу з діапазону можливих значень встановлених за експертними оцінками. Можливими рішеннями є Р1 (застосувати керуючий вплив); Р2 (залишити природний процес коливання рівня ґрунтових вод без змін); Р3 (змінити параметри керуючого впливу).

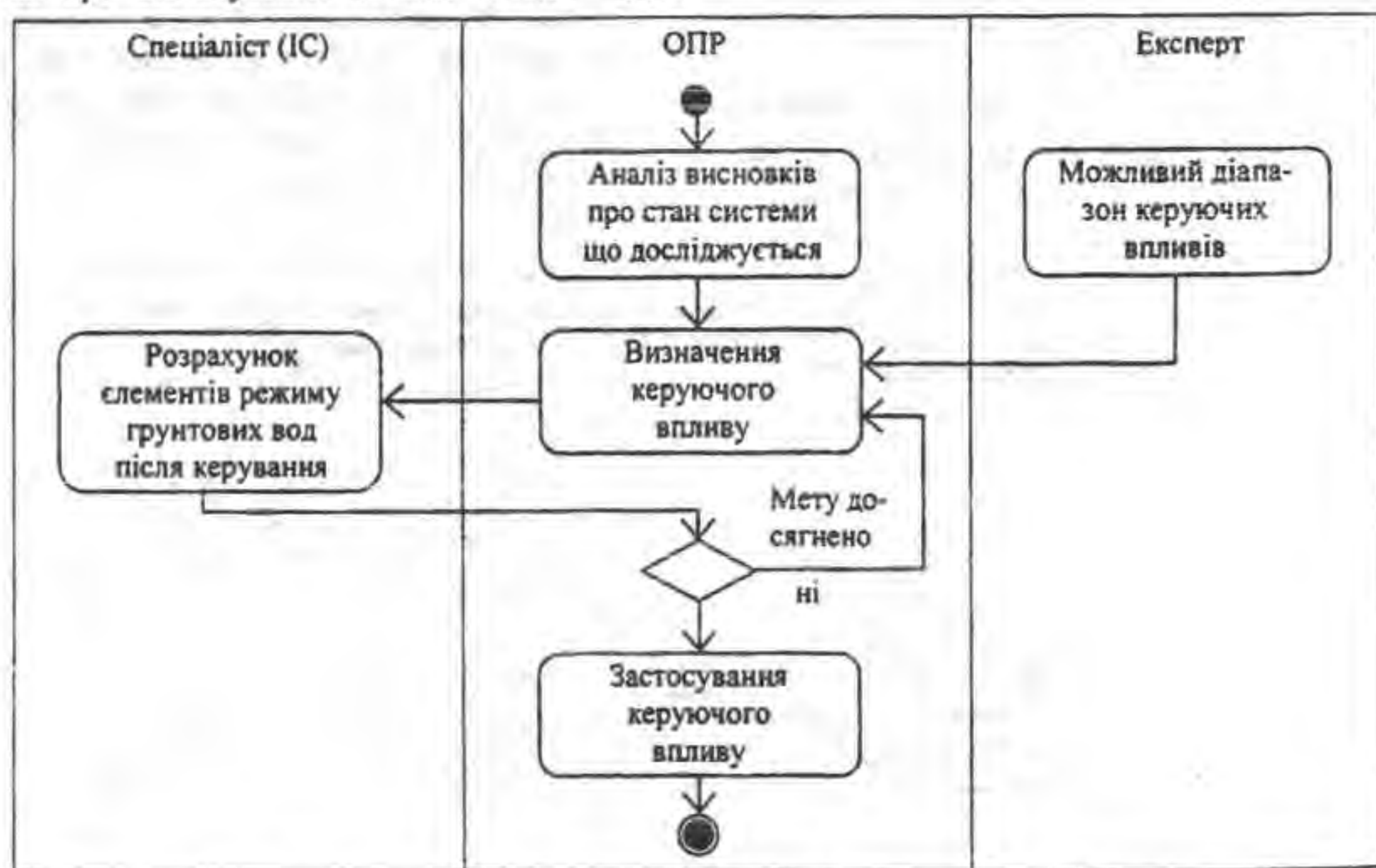


Рис. 4. Діаграма дій процесу керування рівнем ґрунтових вод

Концептуальне моделювання предметної області дозволило виділити, основні класи інформаційних об'єктів, що забезпечують роботу системи. Побудований алгоритм роботи системи підтримки прийняття рішень закладений в основу

прикладної СППР з оптимального керування процесом запобігання підтоплення територій для міських агломерацій.

Література

1. Рекомендации по методике оценки и прогноза гидрогеологических условий при подтоплении городских территорий. – М.: Стройиздат, 1983. – 126с.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.
3. Акименко В.В., Сугоняк И.И. Нелинейное моделирование многомерного процесса диффузии инноваций на основе метода расщепления //Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №4. – с.120-133.
4. Фаулер М, Скотт К. UML в кратком изложении. Применение стандартного языка объектного моделирования. М: «Мир», 1999. – 191с.
5. Штирк А.А. CASE : машинное проектирование программного обеспечения МЦИЭ: ИнтерЭВМ, 1990. – 174с.
6. Избачков Ю., Петров В. Информационные системы. изд. 2-е перероб.и доп.: –СПб: Питер. – 2005 – 656 с .

Надійшло до редколегії 25.11.09

УДК 510.649

Афонін А.О., старший викладач

Про резолюційні стратегії з слабкою факторизацією

В роботі досліджуються резолюційні стратегії лінійного типу для впорядкованих диз'юнктивів, що використовують ослаблений варіант правила факторизації. Доведення їхньої коректності та повноти спирається на так зване літеральне числення. Особливості виведення за допомогою таких стратегій демонструються на прикладах.

Ключові слова: диз'юнкт, коректність методу пошуку несумісності, лінійна резолюція, повнота методу пошуку несумісності, правило резолюції, правило факторизації, числення.

E-mail: andrew.afonin@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Сучасні інтелектуальні системи вимагають застосування ефективних машинних засобів дедуктивних перетворень в класичній логіці першого порядку. Як правило, при реалізації таких систем перевага віддається резолюційному підходу, уперше запропонованому в [1] (див. також [2]). В поточний час він є достатньо вивченими з погляду побудови різноманітних його стратегій, під якими, найчастіше, розуміються різні обмеження, яким повинні задовольняти виведення, що будуються. Зокрема, досить добре була вивчена резолюційна техніка, що оперує із впорядкованими диз'юнктами як для лінійної [3,4], так і вхідної [5] резолюції. В [6] було показано, що побудова "проекцій" деревоподібних структур, які використовуються в секвенційних численнях, призводить до появи нових повних розширень вхідної резолюції.

У даній роботі пропонуються нові резолюційні стратегії лінійного типу для впорядкованих диз'юнктивів, що спираються на результати роботи [6] про літерні дерева і використовуються для пошуку суперечності.

Особливої уваги вони набули у зв'язку з простотою організації процесу пошуку висновку на ЕОМ, який відображає послідовне застосування правил висновку з посиланнями, одним з яких обов'язково є попередній висновок. З іншого боку, відсутність в них прямих аналогів такого правила, як поглинання, призводить до

Afonin A.O., senior lecturer

On resolution strategies with weak factorization

Linear-type resolution strategies using a simplified modification of the factorization rule for ordered clause are investigated in the paper. The proofs of their soundness and completeness are based on a so-called literal calculus. Peculiarities of inference search with the help of such strategies are demonstrated by means of examples.

Key words: clause, soundness of refutation method, linear resolution, completeness of refutation method, resolution rule, factorization rule, calculus.

породження значного числа бектрекінгів, що робить значний вплив на ефективність пошуку суперечності в лінійному випадку. В зв'язку з цим розгляд лінійних стратегій для впорядкованих диз'юнктивів з обмеженнями на резольвівуємі літери може виявитися істотним поліпшенням процесу пошуку виведення порожнього диз'юнкта [7-10]. Цим пояснюється актуальність досліджень, представлених в роботі.

Відмітимо, що особливістю підходу, який розглядається, є те, що, як і в [6], коректність і повнота пропонованих стратегій є наслідком результатів і методів, розвинутих у [6], до якої і відсилається зацікавлений читач.

Також відзначимо, що всі побудови і результати стосуються тільки класичної логіки першого порядку в її резолюційній трактовці. Як звичайно, виведенням називається послідовність формул, кожна з яких є або аксіома (тобто належить вхідній множині), або отримана з попередніх формул за одним із правил виведення.

Основні поняття та позначення

Розглядається класична логіка першого порядку з функціональними символами і без рівності. При цьому, вважаються відомими поняття атомної формули, формули, літери і доповнення літери.

Якщо L - літера, то $\neg L$ означає її доповнення.

Формула, яка є результатом перейменування змінних в деякій формулі, називається її *варіантом*.

Формула виду $L_1 \vee \dots \vee L_n$ називається *диз'юнктом* ($L_1, \dots, L_n$ - літери), який отожднюється з впорядкованою мультимножиною. Порожній диз'юнкт позначається символом $\square$.

Зауваження. Представлення диз'юнкту як формули дозволяє розрізняти різні входження однієї і тієї ж літери в один і той же диз'юнкт. Ця властивість диз'юнктів грає важливу роль в подальшому. Також слід відзначити, що для досягнення мети даної роботи є дуже важливим те, що диз'юнкт являє собою "лінійний" вираз при читанні його як формули зліва направо, який задає лінійний порядок на входженнях літер в диз'юнкт.

Надалі IS позначає вхідну множину (вхідних) диз'юнктів.

Якщо $C \in IS$, і C є диз'юнкт $L_1 \vee \dots \vee L_n$, то пара $\langle C, i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$) називається *індексом* входження літери L_i в C відносно IS . Відзначимо, що при застосуванні будь-яких правил виведення до диз'юнктів з IS , а потім до їхніх наслідків і т.д., зберігаються індекси літер, що належать диз'юнктам з множини IS .

Підстановка, уніфікатор і найбільш загальний уніфікатор (н.з.у) згадуються в змісті роботи [1]. Крім того, якщо σ є підстановка і Ex є вираз чи множина виразів, то результат застосування σ до Ex позначається $Ex \cdot \sigma$.

Резолюційні стратегії, які розглядаються в роботі, базуються на деяких модифікаціях правила бінарної резолюції, а також правилах слабкої факторизації і квазіпоглинання. Виведення за допомогою цих стратегій розуміється в звичайному сенсі.

Правило вхідної резолюції IR. Нехай диз'юнкти C_1 і C_2 мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E \vee D_3$, де C_2 належить вхідній множині IS і D_1, D_2, D_3 - диз'юнкти (можливо, порожні), а L, E - літери. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \neg E\}$. Тоді можна сказати, що із C_1 і C_2 за правилом вхідної резолюції IR може бути виведений диз'юнкт $D_1 \vee D_2 \vee D_3 \cdot \sigma$.

Правило бінарної резолюції BR. Нехай диз'юнкти C_1 і C_2 мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E$, де D_1 і D_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), а L, E - літери. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \neg E\}$. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом бінарної резолюції BR може бути виведений диз'юнкт $D_1 \vee D_2 \cdot \sigma$.

Зауваження. Система "вхідна резолюція + звичайна факторизація" не є повним методом пошуку суперечності у загальному випадку навіть у разі інтерпретації диз'юнкта як множини літер [1,5]. Нижче досліджуються можливості повного розширення метода пошуку вхідного спростування (тобто на базі правила IR) до різних варіантів лінійної резолюції, коли на застосування правила факторизації накладаються додаткові вимоги відносно впорядкованих диз'юнктів.

Слабка факторизація WF. Нехай $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ є диз'юнкт, у якому $C_1, \dots, C_n$ є диз'юнкти, і $L_1, \dots, L_n$ є літери, що мають один і той же індекс. Припустимо, що існує н.з.у. σ множини $\{L_1, \dots, L_n\}$. Тоді говориться, що із $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ за правилом слабкої факторизації WF може бути виведений диз'юнкт $(C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n) \cdot \sigma$.

Зауваження. У випадку, коли у формулюванні правила WF опущена вимога, щоб літери $L_1, \dots, L_n$ мали той самий індекс, ми одержуємо звичайне правило факторизації [4] для впорядкованих диз'юнктів.

Лінійний пошук несумісності з слабкою факторизацією

Дана стратегія є модифікацією впорядкованої лінійної резолюції [2], у якій використовується правило IR, BR і WF .

Відповідно лінійній стратегії вважається, що виведення $C_1, \dots, C_m$ ($m \geq 1$) задовольняє лінійній стратегії з слабкою факторизацією відносно диз'юнкта C , що належить вхідній множині IS , якщо C_1 є варіант C , $C_1, \dots, C_m$ попарно не мають загальних змінних і для всякого $i = 2, \dots, m$ виконуються хоча б одна з таких умов:

- C_i є варіант вхідного диз'юнкта з IS ;
- C_i є результат застосування WF до C_{i-1} ;
- C_i є результат застосування IR до C_{i-1} і D , де D є варіант вхідного диз'юнкта ($1 \leq j \leq i-1$);
- C_i є результат застосування BR до C_{i-1} і D , де D є варіант раніше отриманого диз'юнкта C_j ($1 \leq j \leq i-1$).

Твердження 1 (про коректність і повноту лінійної резолюції з правилами IR, BR і WF). Нехай IS є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є сумісна множина. Множина IS є несумісною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з слабкою факторизацією порожнього диз'юнкта $\square$ в системі пошуку спростування відносно C .

Доведення. Розглянута теорема може бути легко отримана на базі досліджень з повноти літеральних числень, які були проведені в роботі, з використанням диз'юнктивних образів літеральних дерев [6]. *Q.E.D.*

Приклад 1. Нехай IS є множина $\{L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}, \neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}\}$, де L - атомарна формула, $\neg$ є знак заперечення, а впорядковані пари натуральних чисел служать індексами входжень літери L (запис $L^{(i,j)}$ означає, що літера L займає j -те місце в i -ому диз'юнкті). Тоді маємо наступне лінійне виведення в системі пошуку спростування з правилами IR , BR і WF :

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (2) і (1), за правилом IR або BR)
4. $\neg L^{(2,2)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (3) і (2), тільки за правилом IR)
5. $\neg L^{(2,2)}$ (із (4), за правилом WF)
6. $L^{(1,1)}$ (із (5) і (1), за правилом IR або BR)
7. $\square$ (із (6) і (5), тільки за правилом BR)

Отже, IS є несумісною множиною вхідних диз'юнктів.

Зауваження. Правило слабкої факторизації не може бути застосовано до вхідних диз'юнктів. От чому виникає необхідність в застосуванні правила IR . Цей приклад також демонструє, що без застосування правила WF не можна отримати висновок $\square$. Те ж саме стосується IR і BR . Крім того, звертаємо увагу на той факт, що при заміні звичайної факторизації правилом слабкої факторизації не можна уникнути появи тавтологій (тобто диз'юнктів, що містять літеру та її доповнення, таких як, наприклад, (3)) в будь-яких виведеннях $\square$, навіть у випадку застосування бінарної резолюції без будь-яких обмежень. Це легко перевіряється за допомогою тільки-но приведенного прикладу.

Наслідок. Метод (звичайної) впорядкованої лінійної резолюції [2] є коректним та повним.

Доведення. Очевидно. *Q.E.D.*

Зауваження. У випадку звичайної лінійної резолюції можна шукати виведення $\square$, що не містять тавтологій. Так, для наведеного вище прикладу маємо:

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)}$ (із (1), за правилами IR та звичайної факторизації)
4. $\neg L^{(2,1)}$ (із (2), за правилами IR та звичайної факторизації)
5. $\square$ (із (4) і (3), за правилом BR)

Лінійне виведення з квазіпоглинанням

Спроба об'єднати правило BR і WF в одне правило призводить до стратегії поглинання.

Диз'юнкт C буде називатися *початковим піддиз'юнктом* диз'юнкта D тоді і тільки тоді коли D має вигляд $C \vee D'$, де D' - диз'юнкт. (У цьому визначенні враховується те, що графічно рівні літери з різними індексами вважаються різними.)

Правило резолюційного квазіпоглинання SR . Нехай диз'юнкти D_1 і D_2 мають вигляд $C_1 \vee L$ і $C_2 \vee E$, існує н.з.у. σ множини $\{L, \neg E\}$, де L і E - літери, та C_1 і C_2 - диз'юнкти. Нехай існує така підстановка θ , що $(C_2 \cdot \sigma) \cdot \theta$ може бути виведеним із $((C_1 \vee C_2) \cdot \sigma)$ деякими послідовностями застосувань правила WF , причому $(C_2 \cdot \sigma) \cdot \theta$ є початковим піддиз'юнктом диз'юнкта $((C_1 \vee C_2) \cdot \sigma) \cdot \theta$. Тоді можна сказати, що за правилом SR із D_1 і D_2 може бути виведений диз'юнкт $(C_2 \cdot \sigma) \cdot \theta$.

Зауваження. Зрозуміло, що θ може бути одночасним найбільш загальним уніфікатором певних множин, що складаються тільки з літер, які мають той самий (свій для кожної множини) індекс. Ця властивість дозволяє "переписати" правило SR тільки в термінах метода резолюції зі звичайним алгоритмом уніфікації (не залучаючи поняття слабкої факторизації).

Стратегія лінійного виведення з квазіпоглинанням. Виведення $C_1, \dots, C_m$ ($m \geq 1$) називається лінійним виведенням з квазіпоглинанням відносно диз'юнкта C , що належить вхідній множині IS , якщо C_1 є варіант C , $C_1, \dots, C_m$ попарно не мають загальних змінних і для всякого $i = 2, \dots, m$ виконуються хоч би одна з таких умов:

- C_i є варіант вхідного диз'юнкта з IS ;
- C_i є результат застосування WF до C_{i-1} ;
- C_i є результат застосування IR до C_{i-1} і D , де D є варіант вхідного диз'юнкта ($1 \leq j \leq i-1$);
- C_i отриманий за правилом SR в інших випадках.

Твердження 2 (про коректність і повноту лінійної резолюції з квазіпоглинанням). Нехай IS є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є сумісна множина. Множина IS є несумісною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з квазіпоглинанням порожнього диз'юнкта $\square$ відносно C .

Доведення (схема). Якщо звернутися до числення IS з [6], то аналізуючи літеральні дерева у виведеннях дерев доведень в IS , і переходячи потім до їх диз'юнктивних образів одержуємо необхідне. *Q.E.D.*

Зауваження. Для пропозиціональної логіки одержуємо, що $(C, \sigma) * \theta$ є піддиз'юнктом диз'юнкта D_i (σ і θ - порожні підстановки), і надалі D_i може не приймати участь в пошуку виведення $\square$.

Приклад 2. Нехай IS є множина $\{L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}, \neg E^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}, E^{(3,1)} \vee \neg L^{(3,2)}\}$. Тоді можна побудувати наступне виведення, яке задовольняє лінійному виведенню з правилом квазіпоглинання SR .

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg E^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $E^{(3,1)} \vee \neg L^{(3,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
4. $L^{(1,1)} \vee E^{(3,1)}$ (із (3) і (1), за правилом IR)
5. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (4) і (2), за правилом IR)
6. $L^{(1,1)}$ (із (5) і (1), тільки за правилом SR)
7. $\neg E^{(2,1)}$ (із (6) і (2), за правилом SR або IR)
8. $\neg L^{(3,2)}$ (із (7) і (3), за правилом IR)
9. $\square$ (із (8) і (6), за правилом SR)

Отже, множина вхідних диз'юнктів є несумісною.

Зауваження. Як і у випадку лінійної резолюції з слабкою уніфікацією, застосування лінійного виведення з квазіпоглинанням призводить до необхідності породження тавтологій (диз'юнкт (5)). Також відзначимо, що в прикладі 2 після одержання (6) можна "блокувати" (за допомогою поглинання) використання диз'юнктів (1), (4) і (5), а після породження диз'юнкту (7) можна "блокувати" і (2); у цьому випадку, к диз'юнкту (7) може бути застосовано тільки правило IR з породженням диз'юнкту (8), для якого можливе тільки застосування правила SR з породженням $\square$ на останньому кроці (9).

Висновок

Сформульовані вище стратегії з'явилися в результаті аналізу виведень у численні літеральних дерев із [6] і їхніх диз'юнктивних образів. Тому результати про коректність і повноту побудованих стратегій виявилися наслідками коректності і повноти числення літеральних дерев, у той час як їх прямий доказ вимагав би значних зусиль, не кажучи вже про формулювання самих стратегій. Цей факт можна пояснити тією причиною, що деревоподібні структури містять більше інформації про способи організації процесу пошуку, ніж їхні лінійні аналоги.

Автор висловлює надію, що резолюційна техніка, запропонована у даній роботі, як і самі

лінійні стратегії, є корисними в різних інтелектуальних системах з апаратом пошуку логічного виведення.

Література

1. Robinson J. A. A machine-oriented logic based on resolution principle // Journal of the ACM. - 12. - 1965. - P. 23 - 41.
2. Bachmair, L., Ganzinger, H. Resolution theorem proving // Handbook of Automated Reasoning (Ed. by A. Robinson and A. Voronkov). Elsevier Science Pub. - 2001. - P. 19 - 99.
3. Loveland D. W. A unifying view of some linear herbrand procedures // Journal of the ACM. - 19(2). - 1972. - P. 366-384.
4. Minicozzi E. and Reiter R.: A note on linear resolution strategies in consequence-finding. Artificial Intelligence, 3 (1-3), 1972. - P. 175-180.
5. Chang C. and Lee R. Symbolic logic and mechanical theorem proving. Academic Press, Inc. - Orlando, FL, USA. - 1997.
6. Афонін А.О. Про машинно-орієнтовані числення секвенціального типу для класичної логіки першого порядку // Наукові записки. Національний університет "Києво-Могилянська Академія". - Комп'ютерні науки. - НаУКМА, К. - № 99. - 2009. - С. 23-28.
7. Clocksin W.F. and Mellish C.F. Programming in Prolog. New York: Springer-Verlag. - 1984.
8. Reiter R. Two results on ordering for resolution with merging and linear format // Journal of the ACM. - 18, 1971. - P. 630-646.
9. Gabbay D.M., Christopher J. Hogger Ch.J., Robinson J.A., Siekmann J.S. Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. - Volume 2, Deduction Methodologies. - Oxford University Press. - 1994.
10. Shen Y., Yuan L., You J., Zhou N. Linear tabulated resolution based on Prolog control strategy // Theory and Practice of Logic Programming. - 1(1). - 2001. - P. 71-103.

Надійшла до редколегії
11.12.2009

УДК 519.63.4.001.57+517

А. Я. Бомба, д.т.н., проф.*
В. І. Гаврилюк, асп.

**Математичне моделювання
фільтраційних процесів у криволінійних
областях складної геометрії з
невизначеними ділянками меж**

Запропоновано варіант поєднання методу „фіктивних областей” і методології розв’язання крайових задач на конформні відображення для розрахунку фільтраційних процесів у криволінійних областях складної геометрії з невизначеними ділянками меж. Пропонується новий тип постановок такого роду задач, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області, задаються умови, що характеризують процес на певній „фіктивній” прилежувальній області (території). Як приклад побудована гідродинамічна сітка, знайдено положення вільної кривої та інші характеристики процесу.

Ключові слова: метод „фіктивних областей”, вільні межі, нелінійні крайові задачі, квазіконформні відображення, пористі середовища, фільтрація, сіткові методи, блочна ітерація.

*e-mail: abomba@ukr.net

Представив: д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. У роботах [1 – 3] для побудови динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, величин перетоків, тощо) розроблений метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень) для випадку областей з вільними межами. Зокрема, у роботі [2] розглядається випадок поєднання методів „фіктивних областей” та квазіконформних відображень розв’язання нелінійних крайових задач для розрахунку фільтраційних режимів у середовищах з вільними ділянками границь (кривими депресії) та проміжками типу „височування”, а в [3] пропонується алгоритм числового розв’язання модельних нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в областях обмежених двома екіпотенціальними лініями та двома лініями течії, коли однією з ділянок границі є невідома (вільна) крива із закріпленням та вільним кінцями. У цій роботі пропонується

A. Ya. Bomba, DSc, prof.
V. I. Gavrilyuk, PhD stud.

**The filtration processes mathematical
modelling in curvilinear areas of difficult
geometry with uncertain sites of borders**

The variant of combination of the "fictitious regions" method and methodology of boundary-value problems on quasiconformal mappings solution for the calculation of filtration processes in curvilinear areas of difficult geometry with uncertain sites of borders. The new type of the raising of such problems is offered when instead of any traditional condition on this free border of area the conditions which are characterizing a process on certain fictitious area are set. As an example a hydrodynamic grid is built position of free borders and other descriptions of process are found.

Key Words: the „fictitious regions” method, free borders, nonlinear boundary value problems, quasiconformal mappings, porous mediums, filtration, grid methods, block iteration.

варіант поєднання методу „фіктивних областей” і методології розв’язання крайових задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривими, які не є ні лініями течії, ні екіпотенціальними лініями, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області [4], задаються умови, що характеризують процес на певній „фіктивній” області (території), яка прилягає до заданої ділянки області.

Загальна постановка задачі. Розглянемо квазіідеальний (зокрема ідеальний) процес (поле) в однозв’язній чотирикутній криволінійній області (пористому пласті)
 $G_2^* (z = x + iy, \partial G_2^* = A'B'CD, G_2^* \in G_2, \partial G_2 = ABCD)$
(див. рис. 1), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $AD = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, де $A'B'$ - вільна (невідома) крива, що

знаходиться в процесі розв'язку задачі, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, $f_4(x, y)$ – задані, невідома точка A' належить кривій AD , а точка B' – кривій BC . Аналогічно до [1-4] описуватимемо його рівнянням руху $\vec{u} = \kappa \text{grad} \varphi$ та рівнянням нерозривності $\text{div} \vec{u} = 0$, де $\vec{u} = (u_x(x, y) + i u_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, κ – коефіцієнт провідності, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал в точці (x, y) , такий що $\varphi|_{AD} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{AD} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{BC} = 0$, $\varphi|_{A'B'} = g(y)$, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області, $g(y)$ – обмежена неперервно-диференційована функція.

Замість другої з (однієї із традиційних, див., напр., [4-5]) умов на вільній кривій пропонуємо задати певні умови на деякій фіктивній області, що прилягає до даної ділянки межі. А саме: вважатимемо, що на ділянці $G_2 \setminus G_2^*$ також має місце деякий процес (який є певним “продовженням” (розширенням) вихідного процесу), наприклад, вважатимемо, що рух в даній області відбувається за законом $\vec{u} = \bar{\kappa} \text{grad} \varphi$, де $\bar{\kappa}$ – деякий фіктивний тензор фільтрації, зокрема $\bar{\kappa} = \kappa$. Отже, відповідну задачу розв'язуємо у визначеній області G_2 за “незмінної” умови $\varphi|_{AD} = \varphi^*$, “продовжених” умов $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{AD} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{BC} = 0$, та додаткової умови $\varphi|_{A'B'} = \varphi_*$, яка задається виходячи із змісту задачі (див., напр., нижче), при цьому вільна крива $A'B'$ шукається, як деяка внутрішня крива за умови $\varphi|_{A'B'} = g(y)$.

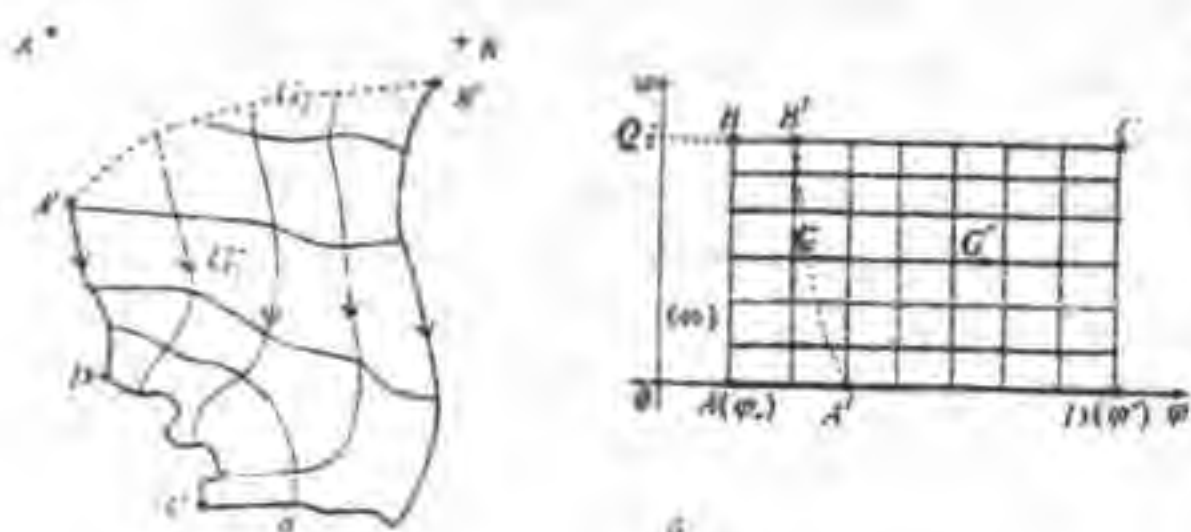


Рис. 1. Область G_2 з вільною кривою $A'B'$ (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_2^* (б)

Відповідна задача на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ розглядуваної області G_2 на відповідну область комплексного потенціалу $G_2^* = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (Q – задана повна питома витрата) з відомим параметром φ_* має вигляд [1-3]:

$$\kappa \varphi_x = \psi_y, \quad \kappa \varphi_y = -\psi_x, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AD} = \varphi_*, \quad \varphi|_{BC} = \varphi^*, \quad \varphi|_{A'B'} = g(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Обернену до (1) – (2) задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_2^* на G_2 при невідомому φ , представимо у вигляді

$$\kappa u_\varphi = x_\varphi, \quad \kappa x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_2^* \quad (3)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_3(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ g(y(\varphi, \psi)) = \varphi, & 0 \leq \psi \leq Q, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (4)$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Алгоритм числового розв'язання задачі. Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов “конформної подібності в малому” відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області $G_2^* = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta \varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta \psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta \varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/(m+1), \Delta \psi = Q/(n+1), \varphi_* = \varphi^* - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta \psi, m, n \in \mathbb{N}\}$ запишемо у вигляді [1-3, 6, 7]

$$\begin{cases} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \\ + \gamma^2 (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) = 0, \\ (y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \\ + \gamma^2 (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \\ f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \\ g(x_{i,j}, y_{i,j}) = \varphi, & j = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} f_1'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{i,j} - y_{0,j}) - \\ - f_1'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{i,j} - x_{0,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_3'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - \\ - f_3'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - \\ - f_2'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \\ f_4'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - \\ - f_4'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_{i,j} = (\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \\ + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}) / \\ (\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \\ + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}).$$

Розв'язок різницевої задачі (6) – (9) побудуємо так [1-3]. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Задання

початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9). Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [6] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$; величини γ за формулою (9) та

потенціалу φ за формулою $\varphi = \varphi^* - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta\psi$: координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in G_\omega} (|x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}|) < \varepsilon, \\ |\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}| < \varepsilon, |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}}$$

– усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_ω^* .

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників. У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [1-3] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана. Обґрунтування побудованого алгоритму "почергової фіксації характеристик процесу та середовища, параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області" проводиться аналогічно до [1-3] з використанням ідей методів блочних ітерацій [7].

Результати числових розрахунків.

1. Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при: $AB = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq 4\}$, $DC = \{z: x - \sqrt{0.64 - (y+4)^2} = 0, -4.8 \leq y \leq -3.2\}$, $BC = \{z: x = 4, -5.8 \leq y \leq 0\}$, $CC = \{z: y = -5.8, 0 \leq x \leq 4\}$, $CC = \{z: x = 0, -5.8 \leq y \leq -4.8\}$, $AD = \{z: x = 0, -3.2 \leq y \leq 0\}$, $g(y) = -y$, $\varphi^* = 3$,

$Q = 1,78 \text{ м}^3/\text{добу}$, розбитті $m \times n = 30 \times 16$ області G_2 , точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, коефіцієнти провідності середовища $\kappa = 1 \text{ м/добу}$ за $k = 1047$ кроків отримано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 2. а), знайдено потенціал $\varphi_* = 0.96$ за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 2,4 \text{ E} - 3$, встановлено положення вільної кривої $A'B'$ для відповідної фільтраційної схеми в системі кругового горизонтального дренажу.

2. Аналогічно, при $AB = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq 3\}$, $DC = \{z: y = -4, 0 \leq x \leq 1\}$, $BC = \{z: x = 3, -4 \leq y \leq 0\}$, $CC' = \{z: y = -4, 1 \leq x \leq 3\}$, $AD = \{z: x = 0, -4 \leq y \leq 0\}$, $g(y) = -y$, $\varphi_* = 3$, $Q = 1,2 \text{ м}^3/\text{добу}$, розбитті $m \times n = 30 \times 16$ області G_2 , точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, коефіцієнти провідності середовища $\kappa = 1 \text{ м/добу}$ за $k = 1568$ кроків отримано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 2. б), знайдено потенціал $\varphi_* = 0.846$ за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 2,25 \text{ E} - 3$, встановлено положення вільної кривої $A'B'$ для випадку прямолінійного горизонтального дренажу.

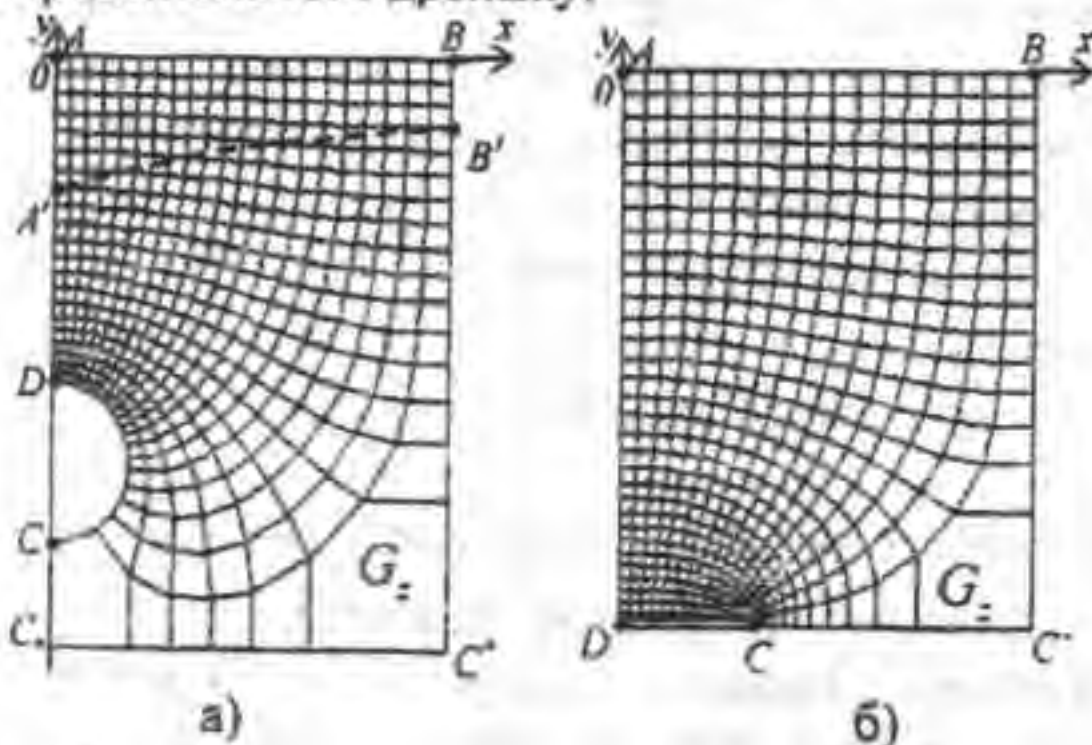


Рис. 2. Гідродинамічні сітки руху в системі горизонтального дренажу: а) кругового; б) прямолінійного

Висновки і зауваження.

Таким чином у роботі запропоновано варіант поєднання методу „фіктивних областей” і методології розв'язання крайових задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривими, які не є ні лініями течії, ні еквіпотенціальними лініями, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області, задаються умови, що характеризують процес на певній „фіктивній” області (території), яка прилягає до заданої ділянки області.

При обґрунтуванні відповідного алгоритму, що ґрунтується на почерговому „замороженні” шуканих параметра конформності, внутрішніх та

граничних вузлів криволінійної області, тощо, використовувались ідеї методу блочної ітерації.

Проведені числові розрахунки є підтвердженням того, що запропоновані в роботі постановки задач та алгоритми їх числового розв'язання можуть бути застосовані при моделюванні нелінійних фільтраційних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу. У перспективі відшукування мінімальної глибини закладання дренажу (при заданих інших конструктивних параметрах, та характеристиках процесу), для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня.

Список використаних джерел

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [текст] / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В.В. Скопецкий. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А. Я., Гаврилюк В. И., Скопецкий В. В. Новая методика решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями [текст] / А. Я. Бомба, В. И. Гаврилюк, В.В. Скопецкий // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С.31-39.
3. Бомба А.Я., Гаврилюк В.И. Модифікація алгоритму числового розв'язання обернених задач на квазіконформні відображення для випадку областей з вільними межами [текст] / А. Я. Бомба, В. И. Гаврилюк // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №833. – 2008р. – С. 39-46.
4. Капранов Ю. И., Эмих В. Н. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными [текст] / Ю. И. Капранов, В. Н. Эмих // ПМТФ, Т.45., № 4. – 2004. – С. 79-93.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1948. – 144 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. – 656 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334 с.

Надійшла до редколегії 16.09.09

УДК 004.9

Глибовець М. М., доктор фіз.-мат. наук,
Глибовець А.М., кандидат фіз.-мат. наук,
Корень О.М., магістр

**Адаптована модель реалізації навчальних
матеріалів як компонентів повторного
використання**

В роботі проаналізовані проблеми створення електронних навчальних пакетів(НП) та наведено можливі шляхи їх розв'язання. Описано розроблену адаптаційну об'єктну модель НП разом з концептуальною моделлю життєвого циклу НП та інструментальний засіб створення SCORM-сумісного НП.

Ключові слова: навчальний пакет, метадані, стандарт, специфікація.

*E-mail: glib@ukma.kiev.ua, ankoren@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

На сьогоднішній день розробниками електронних навчальних матеріалів ще не вирішено в повному обсязі цілий ряд задач. Природно ці задачі можна розділити на три основні категорії: проблема повторного використання, складність опису мета даних, педагогічна ефективність.

Значну кількість розробок та специфікацій було присвячено саме можливості навчальних пакетів (НП) повторно використовуватись у різних навчальних середовищах [1]. Серед них виділяються стандарт IMS Content Packaging [2] та стандарт опису навчального об'єкту IEEE LTSC (Learning Technology Standards Committee) LOM (Learning Objects Metadata) [3]. Власне лише ці два стандарти дозволяють легко імпортувати навчальний об'єкт до певного навчального середовища, а також дозволяти користувачам знаходити його.

Висвітленню ще одного підходу до розв'язку даної задачі і присвячені матеріали цієї статті.

Як радить [4], для того щоб навчальний матеріал можна було скомпонувати як об'єкт повторного використання він має задовольняти двом основним властивостям: *когерентність* (cohesion) – навчальний об'єкт має бути одно напрямленим, і служити єдиній меті; *незалежність* (coupling) – кожен навчальний об'єкт має бути самодостатнім і ні в якому разі не мати зовнішніх залежностей.

Для вирішення проблеми суто повторного використання навчальних об'єктів застосовують давно перевірені та надійні прийоми з розробки програмних комплексів. Нижче наведемо лише

Glybovets M. M., D.Sci.(Phys.-Math.)

Glybovets A.M.,

Koren O.M.

**Adapted implementation model of teaching
materials as reuse components**

Present work analyzes the problems of electronic educational packages(EP) creation and provides possible ways of solving them.

Describes the developed adaptation object model of EP, along with conceptual model of EP life cycle and instrumental case of SCORM – compatible EP creation.

Key Words: educational package, metadata, standard, specification.

кілька вдалих прийомів, яких ми дотримуватимемося під час проектування інструментальних засобів для компонування навчальних пакетів та для архітектури власне структури пакетів [5]:

- *Дотримання мінімальної зв'язності навчального пакету.* В ідеалі, скомпонований навчальний пакет не повинен жодним чином залежати від ресурсів чи метаданих, що знаходяться поза його середовищем.

- *Максимальна когерентність пакету.* Навчальні матеріали, що містяться у пакеті повинні стосуватись лише певної чіткої тематики, або відповідати одній меті. Власне дотримання даного принципу передбачає собою дотримання вимоги модульності у програмуванні.

- *Чітка декомпозиція частин пакету.* Структура маніфесту навчального пакету дозволяє користувачеві досягти чіткого представлення частини або повного курсу у вигляді відповідної ієрархії організацій та ресурсів.

Наразі, задача пошуку необхідних навчальних матеріалів досить ускладнена. Більшість серверів підтримують лише повнотекстовий пошук. Метадані ж дозволяють більш точно проводити знаходження потрібних результатів шляхом надання додаткових можливостей для детального опису навчального ресурсу. Проте і метадані створюють проблеми, а саме [6]:

- *Погана підтримка пошукових серверів.* Більшість пошукових сервісів загального призначення не підтримують нотацію метаданих, їх підтримують лише спеціалізовані пошукові машини навчальних середовищ. Але ця проблема

вирішиться з часом, коли метадані набудуть значного поширення.

• *Відсутність власне метаданих.* Таке трапляється коли автори навмисно не надають ніякої додаткової інформації. Мотивується таке рішення відсутністю явної ефективності, тому заповнення метаданих як правило відкладається на потім. Насправді ж наявність метаданих не лише покращить шанси навчального пакету на те щоб бути знайденим, а й полегшить інтеграцію або імпорт пакету до розподілених навчальних середовищ.

• *Багато різних стандартів.* Розробники мають у своєму розпорядженні значну кількість рекомендацій та специфікацій метаданих для навчальних матеріалів. Потрібно розв'язувати проблему цніфікації вживаної термінології. Навіть, якщо специфікації IMS та ARIADNE базуються на IEEE LTSC LOM, і здаються подібними, вони все одно відрізняються на більш детальному рівні, що потребує значного часу на їх вивчення. Багато користувачів плутаються у термінах, або потребують створення власного словника позначень елементів метаданих.

В [6] пропонується вирішення поставлених проблем використання метаданих автоматизацією «витягання» даних з певного типу документів. На практиці, за наявності спеціального API (Application Programming Interface) з кожного типу документа, малюнка чи мультимедійного файлу (звук, відео, анімація) можна отримати інформацію про автора, службову інформацію про середовище створення файлу (наприклад необхідна роздільна здатність для перегляду інтерактивної презентації) тощо. У нашому випадку вдалим рішенням буде просто надання авторіві навчального пакету зручного інструменту для ведення метаданих.

Окрім проблеми створення НП у вигляді компонента повторного використання є ще одна проблема використання власне пакету у процесі навчання – проблема педагогічної ефективності. Раніше, ми заявили, що для того щоб пакет був максимально повторно використовуваним, ми дотримуємось принципу незв'язності та деконтекстуалізації. Проте як відомо, максимальну ефективність від навчання ми отримуємо лише за умови, коли учень вирішує реальні задачі. У технічному аспекті це означає, що ресурси навчального пакету мають посылатися на зовнішні ресурси для створення реального контексту задачі. Проте це суперечить нашим принципам побудови модульності пакету. Отже маємо певну суперечність, яка є нерозв'язною в

певному сенсі. Але така ситуація не повинна в жодному разі заводити розробника в глухий кут. Вирішенням є підтримка балансу у навчальному пакеті контекстно-залежних та контекстно-незалежних ресурсів, а також надання можливості швидко встановити контекст для навчальних матеріалів безпосередньо після імпорту до розподіленого навчального середовища.

Основною задачею даної роботи є реалізація розв'язання поставлених вище проблем у вигляді адаптаційної моделі налаштовуваного компонента повторного використання.

1. Модель реалізації навчальних матеріалів

У різних навчальних середовищах, моделі представлення навчальних матеріалів можуть бути різними. В ILIAS [3], наприклад, навчальні матеріали та ресурси можуть бути представлені як у вигляді курсу, так і у вигляді електронної бібліотеки або просто директорії ресурсів (media pool). Але, усі ці ресурси при експорті до інших систем, компонуються в певний НП, який має універсальну структуру.

Розробники чи команда розробників навчального середовища намагаються створити власний формат пакування навчальних ресурсів та власний формат опису даних ресурсів. З часом, більшість з них зійшлись на тому, що для універсального опису матеріалів найкраще розміщувати інформацію в одному файлі у вигляді метаданих, що і підтримує давно відомий принцип мета програмування [5].

Проте і тут виникла проблема, яку ми вже зазначили вище. Якщо кожен розробник підтримує лише свій тип метаданих – це унеможливорює імпорт/експорт навчальних матеріалів до систем сторонніх розробників. Ця проблема на сьогодні також вирішена стандартом IMS CP [7], а також рекомендаціями та вимогами SCORM (Shared Content Reference Model)CAM [8].

Для багатьох розробників рекомендована структура навчального пакету (content package) є очевидною, прозорою та зручною, проте для непрофесійного користувача структура навчального пакету, поняття комбінації (sequencing) чи агрегації є дещо віддаленими поняттями від безпосередньо тих переваг які очікуються. Кожне навчальне середовище вирішує цю проблему по-своєму: Moodle окремо виділяє модуль SCORM-курсів, які є імпортованими навчальними пакетами; ILIAS вдало представляє навчальний пакет як навчальний курс з розділами посиланнями та зовнішніми ресурсами.

Для прозорості представлення навчального курсу було розроблено власну модель, яку можна застосовувати безпосередньо для інструментальних засобів по створенню НП.

1.1. Адаптована модель навчального пакета

Першим кроком адаптації існуючих моделей та специфікацій є уточнення понять та термінів, що використовуються. Для цього спеціалізовані терміни максимально наближені до прозорості використання. Ідея полягає у створенні враження, що навчальний пакет представляє собою інтерактивну книжку, яка сама перегортає сторінки. Проте завданням розробленого інструментального засобу не є деагрегація та представлення вмісту навчальних пакетів згідно інструкцій метаданих. Розглянемо та порівняємо поняття, що декларуються SCORM та IMS, та введені нами для відображення ієрархічної структури НП (таблиця 1).

Таблиця 1. Відображення понять специфікації у контексті застосування.

Офіційні поняття специфікацій	Відображені поняття
Пакет вмісту (Content Package)	Навчальний пакет
Маніфест (Manifest)	Структура навчальних матеріалів
Метадані (Metadata)	Анотація навчального пакету
Організації (Organization)	Розділ
Предмет (Item), контейнерний тип ¹	Підрозділ
Предмет (Item)	Сторінка, навчальний об'єкт ²
Ресурс (Resource)	Ресурс

Дані поняття використовуються як позначення та пояснення до застосування інструментального засобу компонування навчальних матеріалів. Розглянемо кожен елемент навчального пакету більш детально та сформуємо підмножину тих елементів, які будуть надані у розпорядження інструментального засобу. При цьому ми намагатимемося водночас

мати таку підмножину специфікації SCORM-сумісного навчального пакету, яка буде потім сприйматись багатьма існуючими навчальними середовищами та іншими програмними засобами.

1.2. Застосування стандарту IMS Content Package та SCORM CAM

Безумовно, концептуальна модель, що була представлена стандартом IMS Content Package, є дуже зручним засобом для універсального представлення навчальних пакетів. Специфікація вимог SCORM CAM адаптувала її для використання у кінцевих системах, додавши деякі власні елементи та елементи метаданих LOM. Наша задача полягає у кінцевій адаптації моделі, яку можна використовувати безпосередньо як об'єктну модель до реалізації модулів навчальних середовищ та інструментальних засобів.

Файл Обміну Навчальним Пакетом (Package Interchange File, далі - PIF) – є контейнером навчальних матеріалів повторного використання у вигляді архіву. PIF містить файл маніфесту зі спеціальним іменем *imsmanifest.xml*, а також усі необхідні файли представлення та ресурси, задекларовані у маніфесті. Власне SCORM рекомендує представлення PIF як єдиного файлу, з використанням архіватора PKZip 2.04g, який відповідає вимогам RFC1951 [9].

Нижче розглянемо елементи маніфесту навчального пакету та специфікуємо власну підмножину, необхідну для SCORM-сумісності.

Елемент *<manifest>*

Він є елементом повторного використання, який має контейнерний тип і інкапсулює метадані, організації та посилання на ресурси. *<manifest>* є кореневим елементом у файлі маніфесту. Якщо даний елемент зустрічається усередині кореневого елемента, то вся підмножина називається суб-маніфестом і може бути використана з метою агрегації, деагрегації чи повторного використання частин навчального пакету.

Тип даних: даний елемент має контейнерний тип і не має безпосереднього значення.

¹ Згідно специфікації SCORM CAM елемент Item може бути як листком в ієрархічному дереві пакету, так як і контейнером для інших елементів Item. В даному випадку йдеться про Item, як контейнер.

² Якщо типом Item є певний текстовий документ, то в контексті навчального пакету його краще розглядати як сторінку. Якщо ж Item посилається на ресурс мультимедіа (скажімо презентацію), то краще представити елемент у вигляді навчального об'єкту.

Атрибути:

Назва	Обов'язковий	XML Тип	Опис
identifier	Так	xs:ID	Унікальний ідентифікатор елемента, надається автором чи інструментальним засобом.
version	Ні	xs:string	Ідентифікатор версії, вказується, якщо існує кілька версій маніфестів з однаковим ідентифікатором.
xml:base	Ні	xs:anyURI(Unified Resource Identifier)	Відносний шлях до локальних ресурсів, на які посиляється маніфест.

Внутрішні елементи: `<metadata>`, `<organizations>`, `<resources>`, `<manifest>`

Аналогічно описуються і елементи: `<metadata>`, `<location>`, `<organizations>`.

Елемент `<metadata>` є контейнером для метаданих, по питанням що стосуються навчального пакету (наприклад, можливості агрегації пакету). Елемент є корневим. Це означає, що усі елементи метаданих мають бути розміщені у ньому. Розміщення метаданих у навчальному пакеті відбувається на основі розширень XML. SCORM рекомендує як мінімум розміщувати інформацію про навчальний пакет згідно стандарту LOM. Інші метадані також можна розміщувати. Механізмів ведення метаданих може бути кілька: безпосередньо у маніфесті, або у зовнішньому файлі, на який попередньо описане посилання елементом `<location>`. Елементи опису LOM можна включати до секції метаданих шляхом розширень іменного простору (namespace) XML. Елемент `<organizations>` є контейнером для однієї або більше організацій. Він представляє елемент ієрархічної структури навчального пакету. Власне термін «організація» є спеціальним і може означати урок, сторінки, модуль тощо. У нашому випадку організація є розділом. В термінах стандарту IMS Simple Sequencing [10] організація називається завданням (activity).

Описовий елемент `<title>`, служить для учня чи викладача описом певної організації НП. В залежності від опису, вона може бути курсом, уроком, модулем тощо. Елемент `<item>` описує ієрархічну структуру матеріалів. У нашому випадку елемент означає фрагмент певного уроку чи курсу і служить для подання матеріалів у вигляді дерева. Фрагмент може бути як кінцевим атомарним елементом, так і контейнером для інших елементів даного типу.

Елемент `<adlcp:timeLimitAction>` описує дію, що має бути виконана, якщо максимальний час на виконання дії, пов'язаної з фрагментом НП було вичерпано. Даний елемент може мати лише ті фрагменти (елемент `<item>`), які безпосередньо посиляються на ресурс. Елемент є

задекларованим розширенням специфікації IMS CP. Обов'язок перевірки часових обмежень має брати на себе навчальне середовище. Якщо ресурс є інтерактивним (застосування з тестовими завданнями), то він і бере на себе це зобов'язання.

Елемент `<adlcp:dataFromLMS>` містить у собі інформацію, що може бути корисна на етапі ініціалізації ресурсу, на який посиляється елемент `<item>`. Ця інформація є прозорою для навчального середовища. Якщо розробнику необхідно передати певні параметри для безпосередньої ініціалізації ресурсу, то їх необхідно передавати через вже зазначений атрибут `parameters` елементу `<item>`.

Елемент `<adlcp:completionThreshold>` задає певне порогове значення проходження навчального підрозділу, що може бути використане навчальним об'єктом. Даний елемент стосується лише тих елементів `<item>`, які посиляються на ресурси.

Елемент маніфесту `<resources>` є контейнером для елементів посилань на ресурси. Відомі специфікації не вказують в якому порядку чи ієрархії повинні слідувати елементи ресурсів.

Якщо елемент `<item>` посиляється на ресурс, то реальний файл ресурсу знаходиться за посиланням та доставляється безпосередньо учневі всередині навчального середовища. Згідно SCORM, цей елемент має відповідати наступним вимогам. Атрибут `type` має бути зі значенням `webcontent`. Атрибут `adlcp:scormType` набуває значень лише `sco` чи `asset`. Атрибут `href` є обов'язковим.

Елемент `<file>` надає безпосереднє посилання на файл ресурсу. Для кожного файлу необхідно вносити один елемент даного типу, формуючи таким чином множину файлів для конкретного ресурсу. Даний елемент має посилятися на файли, які знаходяться локально, тобто фізично розташовані в одному навчальному пакеті з маніфестом.

Елемент `<dependency>` символізує залежність певного ресурсу від іншого ресурсу, що

знаходиться в даному маніфесті. Останній може містити кілька файлів.

Описані вище елементи формуватимуть підмножину SCORM- сумісного навчального пакету, що буде генеруватись розробленим інструментальним засобом. До даної підмножини не було включено елементів, що відповідають безпосередньо за процес представлення навчального матеріалу, а саме елементів IMS SS (Simple Sequencing), а також IMS Learning Design [11]. Нас цікавить виключно та мінімальна підмножина елементів маніфесту, за допомогою якої можна побудувати навчальний пакет, а також ефективно проводити його пошук та доставку.

Далі розглянемо більш загальну картину життєдіяльності навчального пакету в контексті навчального процесу, середовища та акторів.

1.3. Компоненти життєвого циклу навчальних матеріалів: створення, збереження, використання

Попередня модель стосувалась лише побудови навчального пакету як компонента повторного використання. Розглянемо тепер загальну модель взаємодії навчального пакету в контексті використання всередині навчального середовища та його повний життєвий цикл (life cycle). Для кожного компонента життєвого циклу наведемо також його коротку специфікацію та рекомендації до реалізації чи вибору компонента серед готових програмних засобів. Слід також зазначити, що дана модель є спрощеною для покращення сприйняття, тому в ній відсутні такі актори як, вчитель (tutor), які є дуже важливими в контексті процесу навчання, а не в циклі використання навчальних матеріалів.

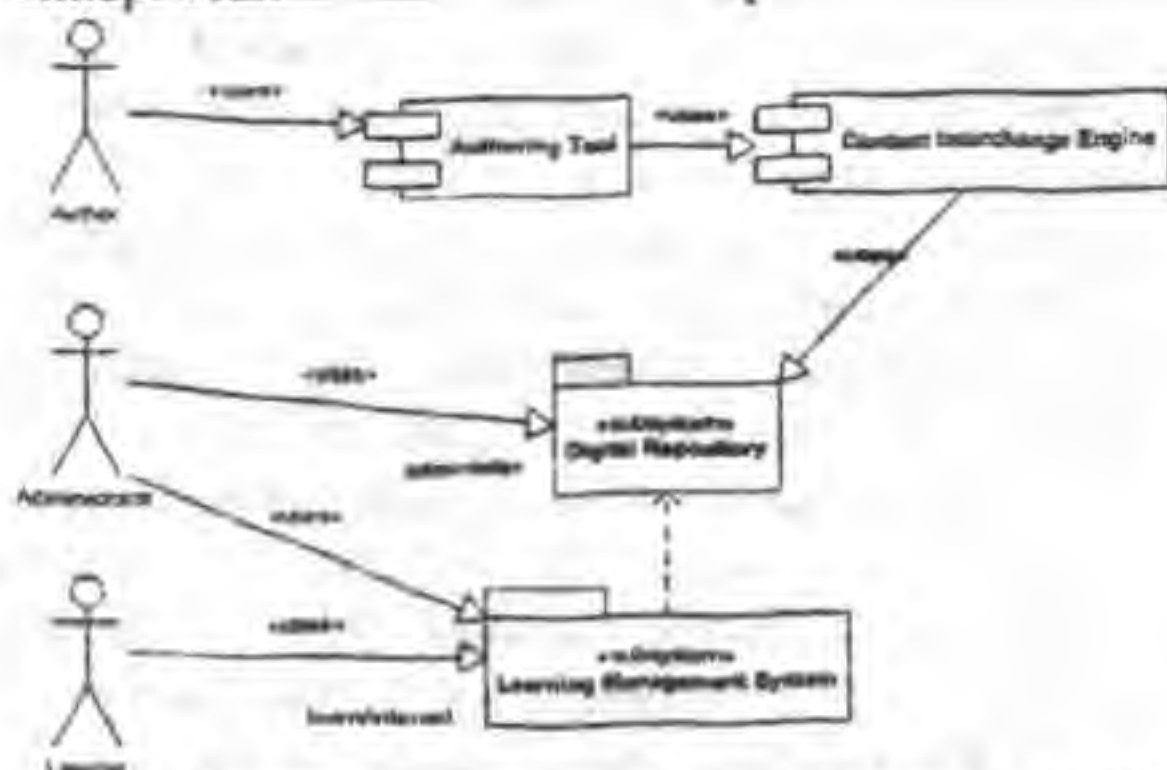


Рис. 1 Компоненти життєвого циклу навчальних матеріалів.

Розглянемо кожен з компонентів та акторів, що зображені на рис. 1 детальніше. Нижче наведено опис акторів, що беруть участь у життєвому циклі навчальних пакетів: Автор (Author) – представляє будь-яку особу (студент, викладач,

асистент), що має деяку підбірку навчальних матеріалів та бажає оформити її у вигляді навчального пакету; Адміністратор (Administrator) – людина з технічного персоналу, що відповідає за надійність роботи репозитарію навчальних матеріалів та навчальне середовище; Учень (Learner) – особа, яка користується НП у процесі навчання.

Окрім акторів маємо також такі компоненти:

- Інструментальний засіб створення навчальних пакетів (authoring tool) – розуміється спеціалізоване програмне забезпечення, що надає можливість автору створювати SCORM та IMS сумісні навчальні пакети. Метою даної роботи є опис розробки такого засобу.
- Сервіс обміну навчальними матеріалами (content interchange engine) – під сервісом розуміється веб-базоване програмне забезпечення, що виконує функції імпорту та експорту навчальних пакетів, пошук та доставку навчальних пакетів за метаданими, збереження навчальних пакетів у репозитарії. Даний компонент тісно пов'язаний з репозитарієм навчальних ресурсів і для ефективності послуг пошуку має відповідати стандарту IMS Metadata.
- Репозитарій навчальних ресурсів (digital repository) – репозитарій є кінцевою точкою для збереження навчальних пакетів. Програмне забезпечення, що виконує дані функції повинно бути сумісним з вимогами IMS DRI (Digital Repository Interoperability). Репозитарій є сервіс-провайдером для усіх компонентів, що працюють з навчальними пакетами.
- Навчальне середовище (learning management system) – це середовище представлення (rendering) навчальних пакетів та система керування навчальним процесом. Середовище знаходиться в залежності від репозитарію навчальних ресурсів і взаємодіє з ним на рівні імпорту/експорту навчальних пакетів. Правильно організоване навчальне середовище має відповідати специфікаціям IMS LIP (Learner Information Package), IMS Learning Design, IMS SS. Для тестового провадження розробленого в даній роботі інструментального засобу Content Packager пропонується використовувати системи ILIAS або Moodle.

2. Реалізація інструментального засобу "Content Packager"

Опишемо особливості процесу реалізації інструментального засобу Content Packager, мета якого надати авторам засіб легкої та прозорої компоновки SCORM-сумісних навчальних пакетів. Даний засіб було розроблено на факультеті інформатики НаУКМА для налагодження ефективного обміну знаннями.

2.1. Огляд оновлених вимог до реалізації

Проблема створення подібного інструментального засобу була поставлена з часів створення першої версії специфікації IMS CP. Проте згодом виявилось, що для коректної реалізації також необхідно підтримувати багато інших специфікацій IMS та IEEE LTSC. Для спрощення обсягу робіт задачу створення універсального НП. було зведено до надання авторіві можливості відобразити певний хаотичний набір навчальних матеріалів у чітку ієрархічну структуру з можливістю надання мінімально необхідного набору метаданих. Отже головні функції розроблюваного інструментального засобу зводяться до наступного: створення деревоподібної ієрархічної структури розділів навчального пакету, його підрозділів та сторінок; редагування властивостей кожного вузла дерева, та специфікація його типу; редагування метаданих підрозділу; імпорт ресурсів та створення посилань на ресурси окремих сторінок навчального пакету; компіляція навчального пакету; збереження тимчасового робочого маніфесту навчального пакету.

Розглянемо технічні вимоги до реалізації інструментального засобу. Дане програмне забезпечення має бути виконаним з візуальним віконним інтерфейсом, хоча і допускається створення command-line версії для підтримки автоматизованої збірки пакетів. Обов'язковою вимогою є інтуїтивність інтерфейсу користувача, що має мінімальний досвід роботи з комп'ютером та операційною системою.

Інструментальний засіб планується використовувати для компоновання навчальних матеріалів, які будуть використовувати в різних навчальних середовищах, зокрема ILIAS та Moodle. При розширенні кількості навчальних середовищ або введення спеціалізованих репозитаріїв навчальних ресурсів, контекст застосування даного інструментального засобу не зміниться.

2.2. Реалізація

Процес розробки інструментального засобу було вирішено вести з частковим застосуванням технології XP, зокрема щодо опису функціональних вимог. Останні були описані у вигляді карток і згруповані за типом функціональності: формування структури, особливості візуального інтерфейсу, збереження навчального пакету. Далі було проведено огляд технологій, які б підходили для заданої структури класів

Оскільки на сьогоднішній день значна частина користувачів, надають перевагу роботі в UNIX-подібних системах, однією з головних не функціональних вимог, була підтримка мультиплатформенності. Для виконання даної вимоги було обрано платформу Java, як найбільш зручну для виконання кросплатформених застосувань.

Наступним кроком було прийняття рішення щодо вибору каркасної моделі для реалізації ініціалізації та зв'язування головних класів інструментального засобу. Для цього було обрано легковісний контейнерний фреймворк Springframework [12], який реалізує патерн «ін'єкції залежностей» (Dependency Injection [13]). Відомий факт, що використання даної технології пропагує використання усталених патернів проектування застосування. Детально розглядати їх ми не будемо, проте тенденції легко відслідковуються на діаграмі класів та інтерфейсів.

Для реалізації прототипу інтерфейсу та власне інтерфейсу застосування було обрано технологію Thinlet [14]. Дана розробка є набором інструментів та бібліотек для створення «легких» інтерфейсів, що можна застосовувати на мобільних пристроях. Слід також зазначити, що особливою перевагою даного інструментального засобу є можливість опису набору компонентів та поведінки інтерфейсу за допомогою декларацій в спеціальному XML файлі.

Для виконання завдань збереження маніфесту навчального пакету та проміжного робочого маніфесту, а також читання було застосовано технологію та інструментальний пакет Xerces [15].

Діаграма класів представлена на рисунку 2. Візуальний інтерфейс користувача обслуговується класом *ApplicationMain*, який водночас виконує роль *Controller* у моделі MVC [16], яку реалізовано при створенні інструментального засобу. Застосування запускається класом *ApplicationLauncher*, що

створює контекст для роботи контейнера *Spring*, та активує *ApplicationMain*.

В свою чергу *ApplicationMain* створює візуальні компоненти для подальшого використання, що відповідають за різні функціональні можливості інструментального засобу: *ImportWizard* – діалогове вікно опцій імпорту навчальних пакетів; *StructureEditorArea* – вікно редагування структури навчального пакету, містить компонент типу дерева для відтворення ієрархічного характеру структури; *PropertyEditor* – область редагування властивостей елементів дерева (організацій, маніфесту, ресурсів тощо); *MetadataEditor* – область редагування властивостей метаданих елементів дерева.

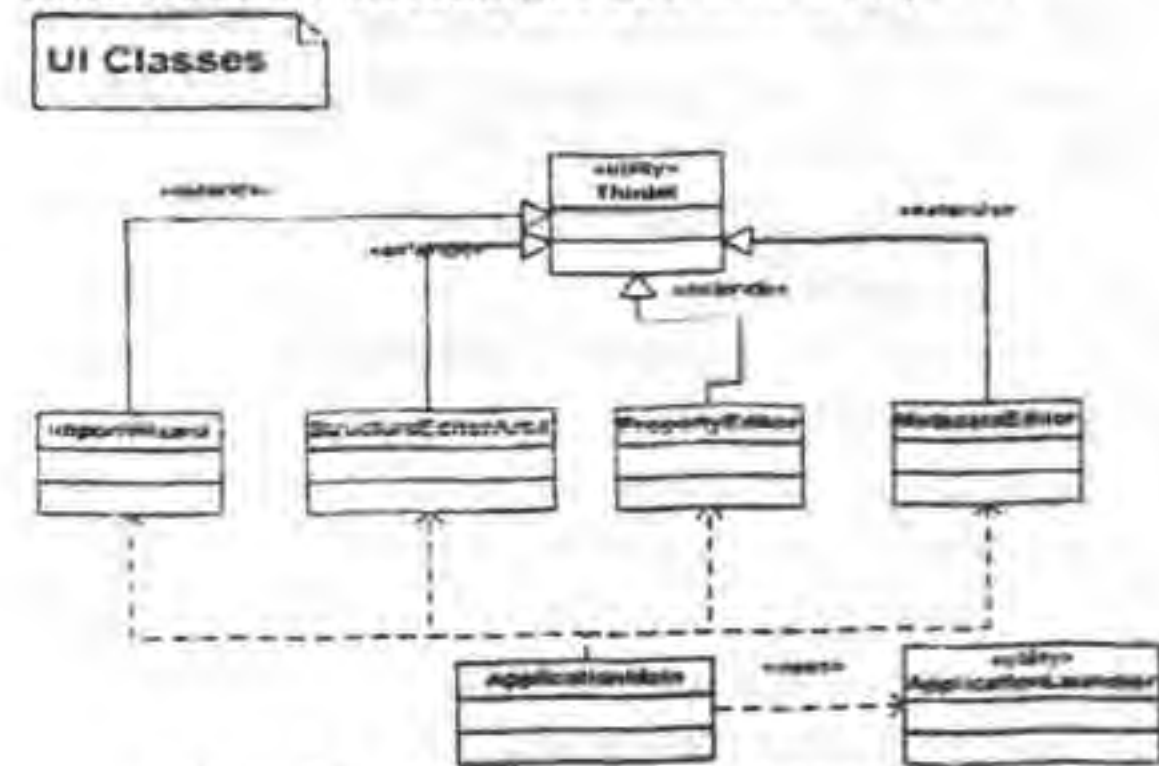


Рис. 2 Класи візуального інтерфейсу.

Для відображення візуального представлення ієрархічної структури навчального пакету, клас *ApplicationMain* використовує такі класи рівня структур даних (рис. 3.).

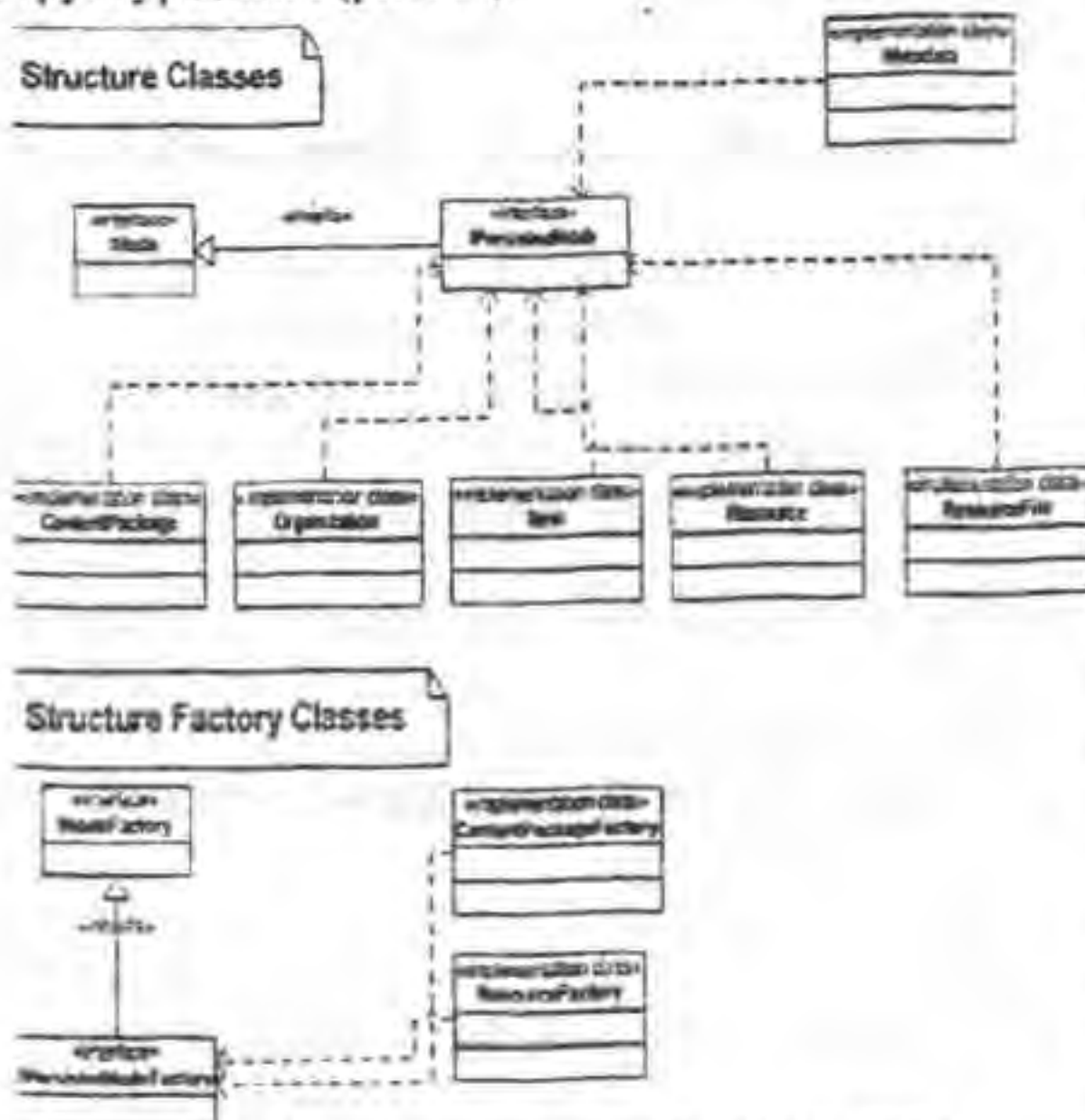


Рис. 3 Класи структур та factory-класи.

Розглянемо інтерфейси, що реалізуються класами: *INode* – надає засоби ідентифікації

елемента структури, його ім'я та список атрибутів; *IPersistedNode* – наслідуює *INode* та надає можливості виконання операцій завантаження/збереження/видалення для елементів; *INodeFactory* – створює екземпляри класів *INode* за певними параметрами; *IPersistedNodeFactory* – відтворює екземпляри класів *INode*, попередньо збережених в певному вигляді. В нашому випадку, таким типом збереження є XML.

Дані інтерфейси реалізуються класами, які виконують такі функції: *Metadata*, *ContentPackage*, *Organization*, *Item*, *Resource*, *ResourceFile* – це реалізації структур даних для збереження даних про відповідні елементи навчального пакету; *ContentPackageFactory*, *ResourceFactory* – factory-методи для створення вищезазначених структур. Дану функціональність було розділено у два класи, оскільки *ResourceFactory* має специфіку роботи власне з файлами ресурсів та внутрішньою ієрархією каталогів навчального пакету.

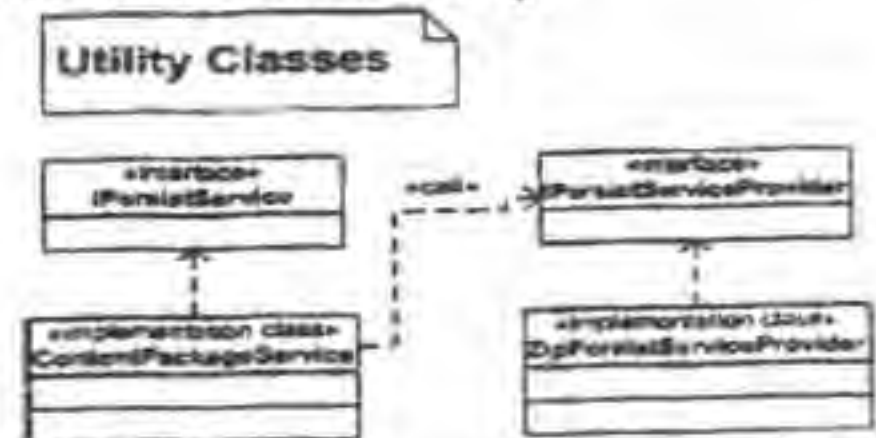


Рис. 4 Утилітні класи та інтерфейси.

Утилітні класи (рис.4.) забезпечують відображення структури маніфесту та ресурсів навчального пакету в безпосередньо єдиний *.zip* файл, а також надають можливість імпорту інших навчальних пакетів: *IPersistService* – інтерфейс провадить функції для реалізації правил збереження абстрактної структури; *IPersistServiceProvider* – інтерфейс провадить функції для збереження абстрактної структури, що представлена у довільному вигляді; *ContentPackageService* – клас реалізації, в якому задані правила та порядок формування навчального пакету; *ZipPersistServiceProvider* – утилітний клас, який надає засоби створення *.zip* архіву і розміщення маніфесту та ресурсів навчального пакету у ньому.

Зазначимо, що тут приведено лише основні класи, та відношення наслідування. Інші класи, що були розроблені в інструментальному засобі є більше утилітними і не виконують безпосередньої ролі в реалізації функціональності побудови навчального пакету.

Інтерфейс користувача підтримує наступні головні сценарії користувача, що працює з

навчальним пакетом: створення нового проекту навчального пакету, розміщення тимчасового сховища для ресурсів та маніфесту³; побудову структури навчального пакету у вигляді розділів, підрозділів та сторінок; заповнення метаданих для маніфесту, всього навчального пакету, як навчального об'єкту, та безпосередньо кожного елемента структури; імпорт ресурсів та створення посилань на ресурси кожної сторінки навчального пакету; збереження тимчасового проекту навчального пакету; компіляція навчального пакету в окремий *.zip* файл; імпорт відкомпільованого навчального пакету або пакету стороннього розробника та продовження роботи над ним.

Висновок

В роботі було окреслено коло проблем, пов'язаних з використанням НП та наведено можливі шляхи їх вирішення. Коротко описано розроблену адаптаційну об'єктну модель НП, концептуальну модель життєвого циклу НП та розроблений інструментальний засіб створення SCORM-сумісного НП. Одна з концепцій повного відображення навчальних пакетів у вигляді набору об'єктів представлена у [17].

Надалі планується провести такі вдосконалення розробленого інструментального засобу як введення можливості створення локалізаційних пакетів, автоматичний імпорт схем даних для структури навчального пакету та мета даних, підтримка інших засобів архівації навчального пакету. Даний засіб було розроблено за досить гнучким підходом, який дозволяє вносити до нього автоматичні зміни у разі зміни функціональних вимог, вимог стандартів навчальних пакетів чи метаданих. Оскільки усі компоненти конфігуруються всередині контейнера Spring, написання нових модулів не складе проблеми за умови підтримки існуючих інтерфейсів.

Основною проблемою для розробників лишається складність реалізації структури маніфестів та інформації про навчальний об'єкт в розподілених навчальних середовищах та інструментальних засобах. Особливо це стосується реалізації, таких складних аспектів IMS як Simple Sequencing, Learning Design, Question and Test Interoperability тощо. Тому перед безпосереднім етапом проектування майбутнього застосування необхідно розробити

адаптацію рекомендованих моделей для конкретних потреб та функціональних вимог.

Список використаних джерел

1. Глибовець М.М., Постніков О.С. Використання мобільного агента при пошуку в розподілених репозиторіях навчальних об'єктів, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. : Фіз.-мат. Науки. - 2004. - Спец. вип. - С. 128-130.
2. www.imsglobal.org/content/packaging/
3. www.ltsc.ieee.org/wg12/files/LOM_1484_12_1_v1_Final_Draft.pdf
4. Boyle, T. "Design principles for authoring dynamic, reusable learning objects". Australian Journal of Educational Technology, 19 (1), 46-58
5. Перевозчикова О.Л. Основи системного аналізу об'єктів і процесів комп'ютеризації. - Київ, ВД «КМ Академія», 2003. - 432с.
6. www.sonntag.cc/fileadmin/Downloads/.../Mctadata_in_E-Learning.pdf
7. www.imsglobal.org/content/packaging/.../imscp_infov1p1p4.html
8. www.edu.ru/db/portal/e-library/00000053/SCORM-2004.pdf
9. IETF RFC 1951 DEFLATE Compressed Data Format Specification version 1.3, May 1996 Available at: <http://www.ietf.org>
10. IMS Simple Sequencing Behavior and Information Model v1.0 Final Specification, IMS Global Learning Consortium, Inc., <http://www.imspjproject.org>
11. Rob Koper, Bill Olivier, Thor Anderson. IMS Learning Design Best Practice and Implementation Guide. www.imsglobal.org/learningdesign/imslid_bestv1p0.html
12. Spring framework Lightweight Container. <http://www.springframework.org/about>
13. M. Fowler. Inversion of Control Containers and the Dependency Injection pattern. 2004. <http://www.martinfowler.com/articles/injection.html>
14. Thinlet GUI Toolkit. <http://thinlet.sourceforge.net>
15. Xerces2 Java Parser. <http://xml.apache.org/xerces2-j>
16. Design Patterns: Model-View-Controller. Sun Microsystems. 2002. <http://java.sun.com/blueprints/patterns/MVC.html>
17. Permanand Mohan, Christopher Brooks. Engineering a Future for Web-based Learning Objects. www.informatik.uni-trier.de/~Brooks/Christopher_A.html

³ За задумом, до того як проект навчального пакету є опублікованим, маніфест та файли ресурсів знаходяться фізично на диску в певній директорії.

УДК 519.8

Горбачук В.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Гаркуша Н.І., к.е.н.

Рівень людського капіталу в залежності від взаємодії між громадськістю та урядом

Для актуальної проблеми раціонального планування рівня людського капіталу застосовано сучасну теорію диференційованих продуктів. Отримано системи рівнянь для обчислення рівноважних значень стратегій громадськості та уряду.

Ключові слова: людський капітал, лідерство уряду, рівновага, Неш, Штакельберг, диференційовані продукти

*E-mail: GorbachukWasyI@netscape.net, NGarkusha@unicyb.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Людський капітал (human capital) є основою суспільства. Традиційно рівень людського капіталу вимірюють кількістю та якістю освічених фахівців [1–5]. Дослідження людського капіталу проводили Нобелівський лауреат 1969 р. Тінберген [1], Нобелівський лауреат 1973 р. Ерроу (Arrow) [2] та ін.

Хоча певні рівні освіти вважаються громадськими продуктами [6] з рядом позитивних зовнішніх ефектів, застосуємо до питання людського капіталу сучасну теорію диференційованих продуктів [7–9], розроблену для приватних продуктів.

Фахівець з середньою освітою та фахівець з освітою, вищою за середню (вищою освітою), можуть як замінювати, так і доповнювати один одного. Позначимо Q кількість усіх фахівців. Якщо θ – частка фахівців з вищою освітою, $\theta \in (0,1)$, то кількість таких фахівців дорівнює θQ , а кількість фахівців з середньою освітою дорівнює $(1-\theta)Q$. Застосовуючи теорію диференційованих продуктів [7–9], ринкова ціна P_1 фахівця з середньою освітою (у середньому за рік його працевлаштування) залежить від кількості $(1-\theta)Q$ фахівців з середньою освітою та кількості θQ фахівців з вищою освітою:

$$P_1 = a_1 - b_1(1-\theta)Q - d_1\theta Q, \quad (1)$$

де a_1 та b_1 – деякі додатні параметри, d_1 – деякий параметр (додатний, коли фахівець з

V. M. Gorbachuk, Ph.D. (Physics and Mathematics), N.I. Garkusha, Ph.D. (Economics)

A level of human capital dependent on interactions between public and government

The modern theory of differentiated products has been applied to the topical problem of rational planning of human capital. The systems of equations for computing equilibrium values of public and government strategies are obtained.

Key words: human capital, government leadership, equilibrium, Nash, Stackelberg, differentiated products

вищою освітою замінює фахівця з середньою освітою, і від'ємний, коли фахівець з вищою освітою доповнює фахівця з середньою освітою).

Аналогічно ринкова ціна P_2 фахівця з вищою освітою визначається

$$P_2 = a_2 - b_2\theta Q - d_2(1-\theta)Q, \quad (2)$$

де a_2 та b_2 – деякі додатні параметри, d_2 – деякий параметр (додатний, коли фахівець з середньою освітою замінює фахівця з вищою освітою, і від'ємний, коли фахівець з середньою освітою доповнює фахівця з вищою освітою).

Природно припустити, що

$$b_i > d_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Вважаємо, що різниця значень вільних параметрів a_2 та a_1 пропорційна тривалості вищої освіти як частки τ у тривалості t працевлаштування фахівця з середньою освітою:

$$a_2 - a_1 = a\tau t,$$

де $\tau \in (0,1)$, a – певний додатний параметр.

Тоді період працевлаштування фахівця з вищою освітою становить

$$t - \tau t = (1 - \tau)t,$$

і такий фахівець за цей період заробляє суму (sum)

$$S_2 = P_2(1 - \tau)t = [a_2 - b_2\theta Q - d_2(1 - \theta)Q](1 - \tau)t =$$

$$= [a_1 + a\tau t - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q](1 - \tau)t. \quad (4)$$

Аналогічно за період t свого працевлаштування фахівець з середньою освітою заробляє суму

$$S_1 = P_1 t = [a_1 - \theta Q(d_1 - b_1) - b_1 Q]t.$$

Рациональний фахівець з вищою освітою максимізує зароблену ним суму S_2 відповідно до рівності (4), обираючи значення параметра τ тривалості навчання після середньої школи.

У свою чергу, суспільство або уряд, що виражає інтереси суспільства, максимізує суму всіх фахівців за одиницю часу (вартість, value)

$$\begin{aligned} V &= \frac{S_1(1 - \theta)Q + S_2\theta Q}{t} = \\ &= \frac{P_1 t(1 - \theta)Q + P_2(1 - \tau)t\theta Q}{t} = \\ &= Q[P_1(1 - \theta) + P_2(1 - \tau)\theta] = \\ &= Q\{(1 - \theta)[a_1 - \theta Q(d_1 - b_1) - b_1 Q] + \\ &+ (1 - \tau)\theta[a_1 + a\tau t - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q]\}, \quad (5) \end{aligned}$$

обираючи значення параметра θ частки фахівців з вищою освітою серед усіх фахівців.

Теорема 1. Нехай тривалість t працевлаштування фахівця з середньою освітою та число Q всіх фахівців обмежені зверху і знизу так, що величини t , Q , значення параметрів $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, a_1 , a , b_1 , b_2 , d_1 , d_2 задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned} \tau[d_2 Q - a_1 + 2Q(b_2 - d_2)] - 2Q(b_2 - d_2) &< at\tau^2 < \\ < 2Q(b_1 - d_1) + \tau(d_2 Q - a_1), \quad (6) \end{aligned}$$

$$a_1 - at < Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] < a_1 + at. \quad (7)$$

Тоді у рівновазі Неша (Nash), де фахівці з вищою освітою максимізують по τ функцію S_2 й одночасно уряд максимізує по θ функцію V , рівноважні значення параметрів задовольняють нелінійній системі

$$\theta^N = \frac{2Q(b_1 - d_1) + (d_2 Q - a_1 - at\tau^N)\tau^N}{2Q[b_1 - d_1 + (1 - \tau^N)(b_2 - d_2)]}, \quad (8)$$

$$\tau^N = \frac{1}{2} + \frac{Q[\theta^N(b_2 - d_2) + d_2] - a_1}{2at}. \quad (9)$$

Доведення. З умов максимізації по θ функції V маємо

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} &= Q\{Q(b_1 - d_1) - a_1 + 2\theta Q(d_1 - b_1) + b_1 Q + \\ &+ (1 - \tau)[a_1 + a\tau t - 2\theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q]\}, \\ 2\theta Q[b_1 - d_1 + (1 - \tau)(b_2 - d_2)] &= Q(2b_1 - d_1) - \\ &- a_1 + a_1 - \tau a_1 - a\tau^2 t - d_2 Q + \tau d_2 Q = \\ &= 2Q(b_1 - d_1) + (d_2 Q - a_1 - at\tau)\tau, \end{aligned}$$

звідки отримуємо функцію $\theta(\tau)$ відгуку уряду на стратегію τ фахівців з вищою освітою:

$$\theta = \frac{2Q(b_1 - d_1) + (d_2 Q - a_1 - at\tau)\tau}{2Q[b_1 - d_1 + (1 - \tau)(b_2 - d_2)]}$$

Отримане значення θ менше 1 за умов (3) і

$$\begin{aligned} (d_2 Q - a_1 - at\tau)\tau &< 2Q(1 - \tau)(b_2 - d_2) = \\ &= 2b_2 Q - 2d_2 Q - 2b_2 Q\tau + 2d_2 Q\tau, \end{aligned}$$

$$\tau[d_2 Q - a_1 + 2Q(b_2 - d_2)] - 2Q(b_2 - d_2) < at\tau^2,$$

тобто за лівої нерівності (6).

Отримане значення θ більше 0 за умов (3) і

$$\begin{aligned} 2Q(b_1 - d_1) + (d_2 Q - a_1 - at\tau)\tau &> 0, \\ at\tau^2 &< 2Q(b_1 - d_1) + \tau(d_2 Q - a_1), \end{aligned}$$

тобто за правої нерівності (6).

З умов максимізації функції S_2 по τ маємо

$$0 = \frac{\partial S_2}{\partial \tau} = at(1 - \tau)t -$$

$$-t[a_1 + at\tau - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q],$$

$$0 = at - at\tau - a_1 - at\tau + \theta Q(b_2 - d_2) + d_2 Q,$$

звідки отримуємо функцію $\tau(\theta)$ відгуку фахівців з вищою освітою на стратегію θ уряду:

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] - a_1}{2at}. \quad (10)$$

Отримане значення τ менше 1 за умови

$$\begin{aligned} Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] - a_1 &< at, \\ Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] &< a_1 + at, \end{aligned}$$

тобто за правої нерівності (7).

Отримане значення τ більше 0 за умови

$$Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] - a_1 > -at,$$

$$Q[\theta(b_2 - d_2) + d_2] > a_1 - at,$$

тобто за лівої нерівності (7).

Теорему 1 доведено.

Покажемо, що теорема 1 поліпшує відомі результати [3].

За підходом Корреа (Correa) [3], ринкова ціна типового фахівця з середньою освітою становить

$$P_1^c = a_1 - b_1(Q - \theta Q) = a_1 - b_1 Q(1 - \theta), \quad (11)$$

а ринкова ціна типового фахівця з вищою освітою дорівнює

$$P_2^c = a_1 + at\tau - d_2 Q(1 - \theta) - b_2 \theta Q, \quad (12)$$

де параметр d_2 вважається додатним.

Очевидно, рівняння (1) і (2) узагальнюють рівняння (11) і (12) відповідно.

За підходом [3], цільовою функцією уряду (government) є не вартість відповідно до формули (5), а сумарний дохід усіх фахівців протягом часу їхнього працевлаштування

$$G = P_1^c(Q - \theta Q)t + P_2^c \theta Q(t - \tau t),$$

що дає таку функцію $\theta(\tau)$ відгуку уряду на стратегію τ фахівців з вищою освітою:

$$0 = \frac{\partial G}{\partial \theta} = (1 - \theta)Qt \frac{\partial P_1^c}{\partial \theta} - P_1^c Qt +$$

$$+ \theta(1 - \tau)Qt \frac{\partial P_2^c}{\partial \theta} + (1 - \tau)P_2^c Qt,$$

$$\frac{\partial P_1^c}{\partial \theta} = -b_1 Q,$$

$$\frac{\partial P_2^c}{\partial \theta} = d_2 Q - b_2 Q = Q(d_2 - b_2),$$

$$0 = -b_1(1 - \theta)Q - [a_1 - b_1(1 - \theta)Q] +$$

$$+ \theta(1 - \tau)Q(d_2 - b_2) +$$

$$+ (1 - \tau)[a_1 + at\tau - (1 - \theta)d_2 Q - \theta b_2 Q] =$$

$$= -a_1 + \theta(1 - \tau)Q(d_2 - b_2) + \theta(1 - \tau)Q(d_2 - b_2) +$$

$$+ (1 - \tau)(a_1 + at\tau + d_2 Q),$$

$$\theta^c = \frac{(1 - \tau)(at\tau + d_2 Q) - a_1}{2(1 - \tau)(b_2 - d_2)Q}.$$

Отримана тут функція $\theta^c(\tau)$ відгуку уряду, на відміну від функції $\theta(\tau)$ відповідно до рівняння (8), не враховує параметра b_1 . Крім того, за специфікацій [3] для отримання функції відгуку уряду в явному вигляді потрібно розв'язувати нелінійне по θ рівняння.

Крім того, у підході [3] не наводяться умови (6) і (7) допустимості значень параметрів. Замість цього, для оцінок значень параметрів, проводиться докладний емпіричний аналіз літератури та статистичних даних США. Таким чином, наведене застосування сучасної теорії диференційованих продуктів до питання визначення рівня людського капіталу дозволяє отримувати більш загальні результати.

Перейдемо тепер до постановки, де громадськість – фахівці з вищою освітою – обирає параметр τ відносної тривалості вищої освіти, спостерігаючи значення θ стратегії уряду. Це означає, що уряд виступає лідером за Штакельбергом (Stackelberg), а громадськість – послідовником. Тоді уряд, максимізуючи свою цільову функцію (5), бере до уваги реакцію $\tau(\theta)$ відповідно до рівняння (9) громадськості, а з умов максимізації функції V по θ впливає

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q\{Q(b_1 - d_1) - a_1 + 2\theta Q(d_1 - b_1) + b_1 Q +$$

$$+ (1 - \tau)\left[a_1 + at\tau + at\theta \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - 2\theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q\right] -$$

$$- \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \theta [a_1 + at\tau - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q]\},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \frac{Q(b_2 - d_2)}{2at},$$

$$0 = Q(2b_1 - d_1) - a_1 + 2\theta Q(d_1 - b_1) + (1 - \tau)[a_1 +$$

$$+ at\tau + 0.5\theta Q(b_2 - d_2) - 2\theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q] -$$

$$- \frac{Q(b_2 - d_2)\theta}{2at} [a_1 + at\tau - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q],$$

$$Q(b_2 - d_2)\theta [a_1 + at\tau - \theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q] =$$

$$= 2at\{Q(2b_1 - d_1) - a_1 + 2\theta Q(d_1 - b_1) + a_1 + at\tau -$$

$$- 1.5\theta Q(b_2 - d_2) - d_2 Q -$$

$$- \tau[a_1 + at\tau - 1.5\theta Q(b_2 - d_2) - d_2Q] = \\ = 2atQ\theta[2(d_1 - b_1) + 1.5(\tau - 1)(b_2 - d_2)] + Z,$$

де

$$Z = 2at[Q(2b_1 - d_1) - d_2Q - \\ - \tau(a_1 - at - at\tau - d_2Q)]. \quad (13)$$

Звідси можна дістати значення θ в явному вигляді як розв'язок рівняння

$$X\theta^2 - Y\theta + Z = 0, \quad (14)$$

де

$$X = Q^2(b_2 - d_2)^2, \quad (15)$$

$$Y = Q\{2at[2(b_1 - d_1) + 1.5(1 - \tau)(b_2 - d_2)] - \\ + (b_2 - d_2)(a_1 + at\tau - d_2Q)\}. \quad (16)$$

Теорема 2. За умов (3) і (7) у рівновазі Штакельберга значення θ^S визначається

співвідношеннями (13)–(16), а значення $\tau^S(\theta^S)$ – співвідношенням (10) при $\theta = \theta^S$.

Якщо $Z < 0$, то θ^S є більшим розв'язком рівняння (14) за умови, що він менший 1.

Якщо $Z > 0$, то θ^S є будь-яким розв'язком рівняння (14) за умови, що він менший 1 і більший 0, а також за умови

$$Y^2 \geq 4XZ.$$

Можлива неоднозначність рівноважної за Штакельбергом стратегії уряду охоплення вищою освітою не розглядалася у підході [3] і є предметом прикладного нелінійного аналізу [10].

Теорема 1 і 2 демонструють, що лідерство уряду, на відміну від некооперативної поведінки уряду та громадськості, означає складніший процес визначення рівноважних стратегій урядом і громадськістю. Лідерство уряду передбачає науковий моніторинг значень параметрів, від яких залежить рівень людського капіталу суспільства та держави. Економічне зростання потребує сучасних проектів планування ефективного рівня людського капіталу.

Список використаних джерел

1. Correa H., Tinbergen J. Quantitative adaptation of education to accelerated growth // *Kyklos*. – 1962. – 15(4). – P. 776–786.
2. Arrow K. Higher education as a filter // *Journal of public economics*. – 1973. – 2. – P. 193–216.
3. Correa H. A game theoretic analysis of public/government interactions in human capital formation // *Journal of socio-economics*. – 2004. – 33. – P. 409–425.
4. Горбачук В.М., Гудима А.В., Кондратенко В.В. Формула для обсягу видатків на освіту бюджету міста чи району – тепер і спочатку / Сучасні інформаційні технології в економіці та досвід їх використання в навчальному процесі (27 лютого – 1 березня 2008 р.) – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 2008. – С. 42–44.
5. Горбачук В.М., Гудима А.В., Зав'ялов А.В. Усереднені трансферти на студентів закладів профтехосвіти I-II та III-IV рівнів акредитації для регіонів України у 2006–2007 роках / Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 2009. – С. 107–108.
6. Горбачук В., Гаркуша Н., Кирилюк М. До регулювання громадського продукту // PDMU-2008 (12–17 травня 2008 р., Київ – Рівне, Україна). – К.: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2008. – С. 88–89.
7. Горбачук В.М. Сравнительный анализ равновесий Курно–Нэша и Бертрانا–Нэша для дифференцированных продуктов // *Теорія оптимальних рішень*. – 2009. – № 8. – С. 120–126.
8. Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Рівноваги Курно–Неша та Бертрана–Неша для диференційованих продуктів // PDMU-2009 (Східниця, 27–30 квітня 2009 р.) – К.: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2009. – С. 85–86.
9. Горбачук В.М. Равновесия Курно–Нэша и Бертрана–Нэша для гетерогенной дуополии дифференцированных продуктов // *Кибернетика и системный анализ*. – 2010. – № 1. – С. 29–37.
10. Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Рівноваги Курно–Неша за асиметричної невизначеності та узагальнені рівноваги Курно–Штакельберга–Неша // *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. – 2007. – № 1. – С. 143–148.

Надійшла до редколегії 30.11.09

УДК 004.4'244

Замковий О.В., асп.

Модельний підхід до створення мультіагентної пошукової системи за допомогою середовища розробки INGENIAS

Дана стаття ілюструє модельний підхід до розробки агентів та мультіагентних систем (МАС), зокрема, у сфері пошуку у мережі Інтернет, показуючи при цьому Agent Unified Modeling Language (AUML) репрезентацію пошукової системи, виконану в середовищі розробки мультіагентних систем INGENIAS у рамках INGENIAS Agent Framework парадигм. Означена репрезентація є моделлю, що демонструє роботу інформаційного агента із якої може бути згенерований працюючий Java-код агентної пошукової системи. Пошуковий агент шукає інформацію за заданим користувачем запитом по базі даних пошукової системи Google.

Ключові слова: пошук, агент, ingenias, auml.

*E-mail: alex@zamkovyi.name

Статтю представив д. ф.-м. н., с.н.с. Буй Д.Б.

Вступ

Агентний підхід набуває дедалі більшого розповсюдження і дуже важливим стає впровадження агентно-орієнтованого підходу на стадії побудови моделі програмного продукту, в якому будуть застосовуватись агентні технології. Побудова моделі програмного продукту дозволяє сконцентрувати увагу на аспектах поведінки агентів, їх функціональному навантаженні, цілях і завданнях. За такого підходу найбільш зрозумілим та легким є додавання нових агентів, додатків та функцій в систему, тому це найбільш ефективний спосіб розв'язання складних і еволюціонуючих у часі проблем.

Часто МАС характеризують як розширення об'єктно-орієнтованих систем. Ця дуже спрощена точка зору часто турбує розробників систем, коли вони намагаються виявити особливості МАС за допомогою об'єктно-орієнтованих інструментів. Як наслідок, організацією, що стандартизує та досліджує проблеми, пов'язані з інтелектуальними агентами (Foundation for Intelligent Physical Agents, FIPA [1]) було розроблено AUML.

A.V. Zamkovyi*, graduate student (Ph.D.)

Model-based approach to developing Multi-Agent Search System with INGENIAS development toolkit

This article illustrates a model-based approach to developing agents and multi-agent systems (MAS), particularly in the area of the Internet search engines, while showing search engine Agent Unified Modeling Language (AUML) representation, done in INGENIAS under INGENIAS Agent Framework paradigms. Given representation is a model that shows the information search agent work process from which a working agent-based search engine Java-code may be generated. Search agent seeks information for a given user query on the Google search engine database

Key Words: search, agent, ingenias, auml.

Існують готові рішення, які дозволяють розробнику не замислюватись над протоколами обміну даними між агентами та над принципами побудови архітектури агентів при розробці МАС. Серед таких рішень виділяється платформа Java Agent Development Framework (JADE).

JADE [2] пропонує програмісту-розробнику агентних систем мультіагентну платформу, що базується на протоколах FIPA. Кожен JADE-агент має власний потік управління, але може працювати і в багатопотоковому режимі. Віртуальна машина Java (Java Virtual Machine, JVM) проводить планування завдань для агентів. Агенти працюють у об'єктно-орієнтованому програмному середовищі. Більшість концепцій, що властиві FIPA-специфікації, представляються Java-класами, які формують інтерфейс користувача. Наявна бібліотека протоколів взаємодії агентів, серед яких є стандартні інтерактивні протоколи взаємодії агентів [2]. Віконний графічний інтерфейс (Graphical User Interface, GUI) для адміністрування надає прості операції управління платформою. За допомогою GUI можна створювати, знищувати, переривати та відновлювати дії агентів, створювати ієрархії домєнів (Domain Federations, DF [2]).

JADE використовується рядом компаній і академічних груп. Серед них можна виокремити найбільш відомі: BT, CNET, NHK, Imperial College, IRST, KPN, University of Helsinki, INRIA, ATOS [3].

INGENIAS [4] надає можливість розробки MAC у вигляді AUMML-моделей, із подальшою автоматичною генерацією Java-коду системи, що створюється на платформі JADE [5].

INGENIAS Agent Framework було використано у ряді проектів на практиці [6].

Методологія INGENIAS

Розробник об'єктно-орієнтованого програмного забезпечення має справу з класами, інтерфейсами, об'єктами, успадкуванням тощо. Розробник агентно-орієнтованого програмного забезпечення може використовувати перелічені концепції та інші, такі як агент, організація, ціль, завдання, ментальний стан, ресурс тощо. В INGENIAS'і використання цих концепцій просувається від аналізу до реалізації. Тому, щоб справлятися зі складністю специфікації MAC, пропонується організовувати ці концепції у 5-ох площинах: середовище, взаємодія, організація, агенти, завдання та цілі [7].

1) *Середовище*. Якщо MAC, яка буде розроблена, має співіснувати із іншими програмами – зазвичай не агентного типу – дуже важливою є ідентифікація цих програм на початковому етапі розробки системи. Використовуючи моделі середовища, розробник може мати на увазі залежності від легалізованого і патентованого програмного забезпечення від початку. Тут бажано розглядати такі елементи програми, як сервери додатків чи системи управління базами даних, які дуже часто використовуються розробниками в своїх програмах. Після того, як ці елементи будуть визначені, розробник може означити сприйняття них агентом в термінах цих додатків та функцій, які можуть бути надані агентам.

2) *Взаємодія*. Дослідники, які звикли до об'єктно-орієнтованої парадигми можуть надавати перевагу використанню діаграм взаємодії разом з діаграмами прецедентів. Взаємодія за такого підходу схожа з аналогічною у UML, але вона включає прямі асоціації із завданнями і ментальними станами агентів. Таким чином, ця взаємодія може робити можливими подальші уточнення (діаграма агентів чи завдання та цілі).

3) *Організація*. Діаграма організації MAC визначає архітектуру системи. Ідентифікація від системи до підсистеми згори-вниз – це традиційна техніка в розробці програмного забезпечення, яка може бути застосована при побудові діаграм цього типу. Система може бути організацією, а підсистеми – групами в організації. Інтерфейси підсистем і систем можуть бути ролями, що належать кожній групі.

Інтерфейсні операції можуть бути завданнями та робочими потоками, що належать організації, і вони можуть бути асоційовані з ролями відношенням відповідальності.

4) *Агенти*. Визначати агентів на початку проектування – це ризиковане завдання. Досвід показує, що дуже легко прийти до ситуації, де все є агентами. Замість цього, краще починати з визначення ролей і пізніше призначати їх агентам. Однак, якщо MAC повинна співпрацювати із вже існуючими агентами, важливо визначити очікування від співпраці із цими агентами передусім. В таких ситуаціях існує високий ризик дублювання функціоналу, який вже реалізований в таких агентах. Таким чином, спочатку потрібно з'ясувати, що вміють готові агенти.

5) *Завдання та цілі*. Відображають функціональний підхід. Розробник визначає множину завдань та виходів системи в ході її життєвого циклу. Однак на цій діаграмі може бути дуже важко виправдовувати цілі системи, тому що їх визначає питання «чому агент має виконувати це завдання?», що асоціюється із раціональним підходом (агент виконує завдання, тому що він хоче задовольнити свої цілі). Альтернативою є ідентифікація станів, яких набуває система, визначаючи цілі системи [8].

Інструментальні засоби

Для моделювання проекту та генерації системи нам будуть потрібні наступні засоби:

IDK (Ingenias Development Kit). Редактор INGENIAS – це основний інструмент для розробки систем за допомогою методології INGENIAS [7]. Це заміна Rational Rose чи інших UML-орієнтованих інструментів для дослідників, що працюють з програмними агентами. На даному етапі, редактор дозволяє генерувати високо- чи низькорівневі представлення MAC.

JDK (Java Development Kit) – безкоштовно розповсюджуваний фірмою Sun комплект розробника додатків на мові Java, що включає у себе компілятор Java (Javac), стандартні бібліотеки класів Java, приклади, документацію.

різні утиліти та середовище виконання Java Java Runtime Environment (JRE).

JADE (Java Agent Development Framework) — програмне середовище для розробки мультиагентних систем та додатків, що підтримує FIPA-стандарти для інтелектуальних агентів. Входить до проєктів IDK за замовчуванням і є основною платформою для роботи генерованого коду IDK. Для роботи потрібно встановити JRE.

Eclipse — безкоштовно розповсюджене середовище для розробки модульних кросплатформних додатків. Зокрема, для розробки програмних продуктів на мові Java. Знадобиться для компіляції та написання реалізації для генерованих IDK-класів.

Apache ANT (Another Neat Tool) — Java-утиліта для автоматизації процесу збірки програмного продукту. Необхідно встановити для зручності компіляції і запуску коду, що генерує IDK.

Google AJAX Search API — дозволяє додавати пошук за допомогою Google на веб-сторінки з JavaScript. Дозволяє вбудовувати прості, динамічні пошукові рядки і відображати результати пошуку на користувацьких сторінках чи використовувати результати у програмних продуктах.

JSON (JavaScript Object Notation) — текстовий формат обміну даними, оснований на JavaScript і зазвичай використовується саме з цією мовою. Як і багато інших текстових форматів, JSON легко читається користувачем. Допомогає отримувати посилання від Google AJAX Search API у дружньому вигляді.

Моделювання пошукової системи, її створення та запуск

Завдання дослідження: Змоделювати поведінку агентів пошукової MAC на AUMIL [9], що є стандартом FIPA для моделювання агентів. Пошукова система складається з інформаційного агента та користувацького інтерфейсу, що реалізує взаємодію між користувачем та агентом.

Функції інформаційного агента: пошук інформації у мережі Інтернет за заданим запитом, видача результатів користувачу, релевантних запиту у дружній та читабельній формі.

Визначимо ролі та об'єкти у рамках методології INGENIAS, роль одна — шукач по Google — «Google searcher», що роль буде виконувати інформаційний агент «SearchAgent». У шукача по Google є ціль — знайти інформацію в Мережі («QueryG»), при цьому на шляху до цієї

ціль шукачу потрібно отримати запит від користувача та здійснити пошук по Мережі. Таким чином, маємо два завдання: «InputQueryT» — потрібно прийняти запит від користувача, «SearchT» — потрібно шукати інформацію за заданим запитом.

Початковий ментальний стан агента називається «InitialQueryMS» і означає очікування запиту від користувача.

Внутрішній додаток, що відповідає за діалоговий інтерфейс для взаємодії агента з користувачем, називається «GUIApp» і має два методи: `showGUI()` — відкрити діалоговий інтерфейс для роботи з користувачем, `actionPerformed()` — передача завдання агенту при натисканні кнопки «Search» діалогового інтерфейсу користувачем.

В результаті отримуємо 5 діаграм, що моделюють пошукову систему і середовище, в якому вона оперує:

1) **Діаграма «TasksCode»** (діаграма компонентів, реалізує код завдань і прив'язує реалізацію методів діалогового інтерфейсу та код ініціалізації системи, показана на рис. 1.);

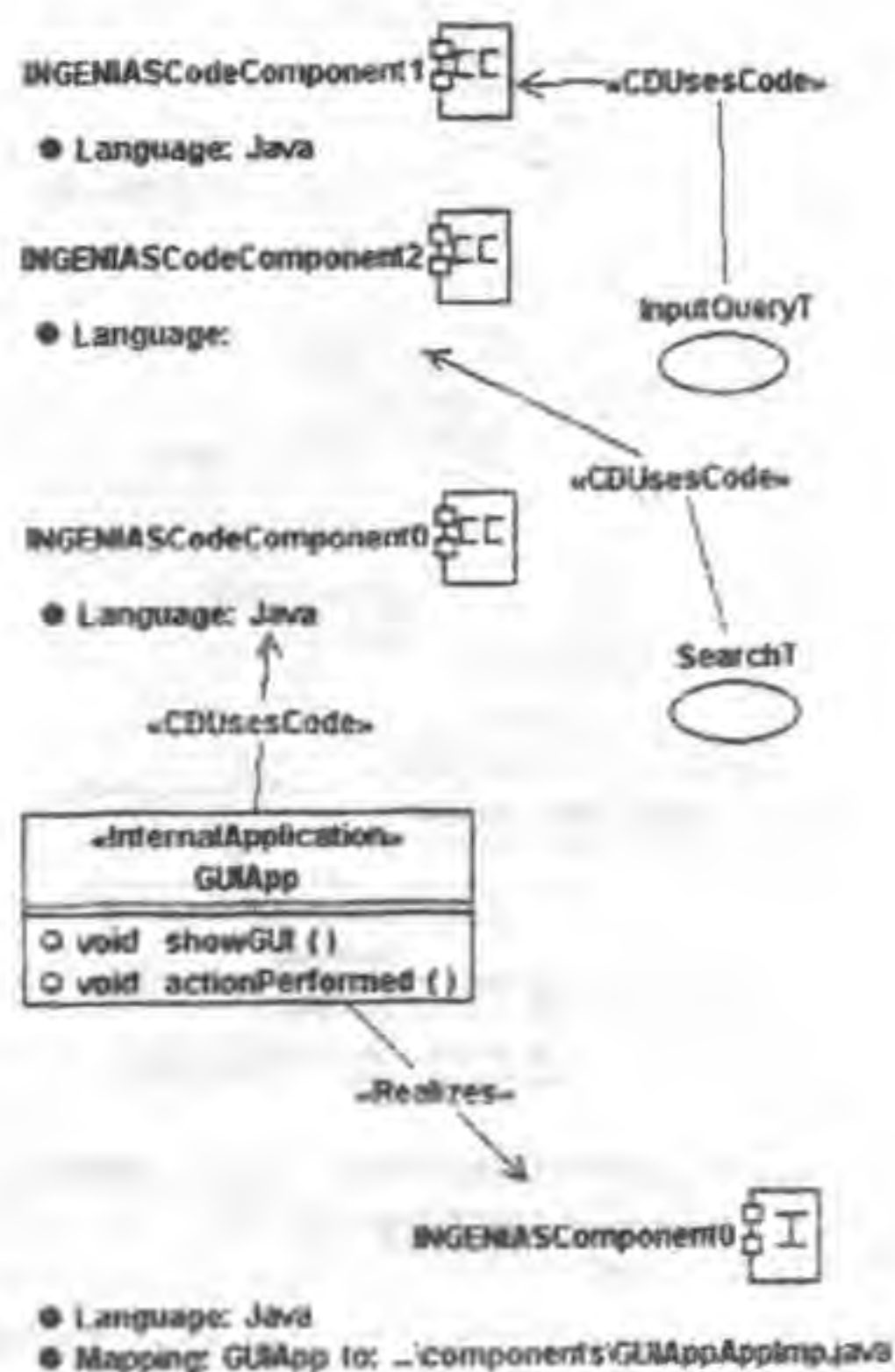


Рис. 1. Діаграми компонентів, що створюють Java-код для внутрішнього додатку та завдань

- 2) Діаграма «Deployments» (діаграма розгортання – створює простий пакет, який буде розгорнути систему, показана на рис.2.);

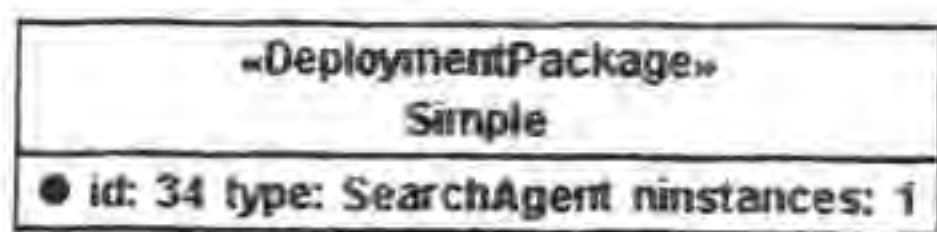


Рис. 2. Діаграма розгортання.

- 3) Діаграма «TaskDiagram» (Модель завдань і цілей, моделює зв'язок цілей, завдань, дій та зміну параметрів системи, показана на рис.3.);

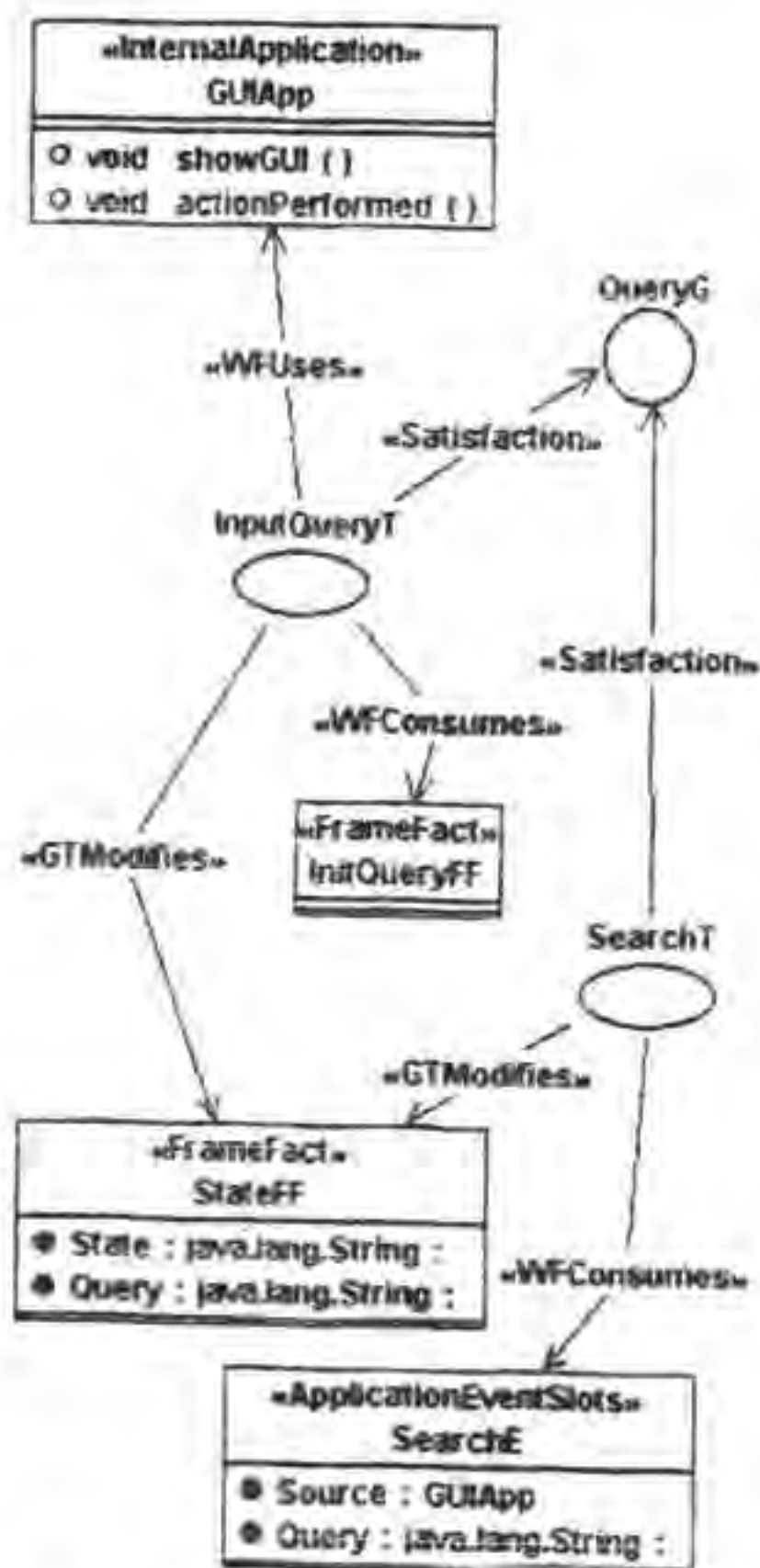


Рис. 3. Діаграма завдань і цілей агента та інтерфейсу користувача.

- 4) Діаграма «EnvironmentModel» (діаграма середовища, зв'язує внутрішній додаток із агентом, показана на рис.4.);



Рис. 4. Діаграма середовища.

- 5) Діаграма «AgentDiagram» (агентна модель, показує зв'язок початкового стану системи з ціллю та завданнями, показана на рис.5.);

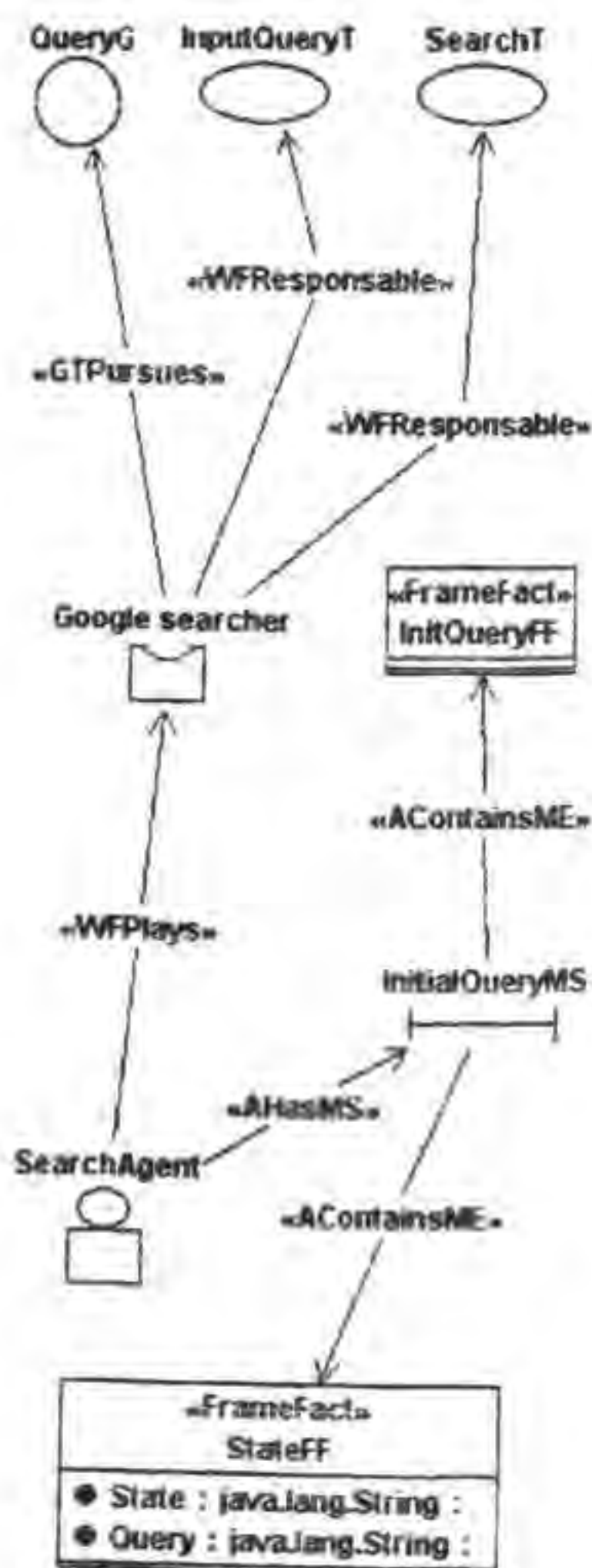


Рис. 5. Діаграма визначення пошукового агента.

Інтегроване середовище розробки INGENIAS дозволяє отримувати набір Java-класів, що працюють у середовищі розробки агентів JADE. Для того, щоб отримати виконуваний код, потрібні готові реалізації методів класів, що працюють із зовнішніми і внутрішніми програмами. В нашому випадку є клас GoogleQuery, що загортає роботу із базою даних пошукової системи Google, використовуючи набір бібліотек JSON та програмного забезпечення Google AJAX API. Для того, щоб можна було з'єднати цей клас із проектом у INGENIAS, потрібно покласти його у каталог src проекту. Реалізація методів роботи із користувачем зберігається в permsrc/.../GUIAppAppImp.java (потрібно реалізувати метод showGUI(), який відображає віконний діалог для роботи з агентом). Детально список файлів проекту та приклад роботи отриманої системи для пошукового запиту «google» зображений на рис. 6.1 та рис. 6.2.

Результат: робочий Java-проект, який здійснює пошук по мережі Інтернет за допомогою бази даних пошукової системи Google.



Рис. 6.1. Виконання генерованого проекту в середовищі розробника Eclipse.

Позначення на рис 6.1:

- «1» – Вікно із згенерованим Java-кодом
- «3» – Вікно результатів виконання компільованої програми на запит «google».
- «4» – Інтерфейс, що управляє пошуковим агентом.



Рис. 6.2. Список файлів генерованого Java-проекту в середовищі розробки Eclipse.

На рис. 6.2 цифрою «2» позначено вікно проекту, на ньому можна побачити список згенерованих Java-класів та бібліотек, що входять в проект.

Проект успішно компілюється і на результат пошукового запиту «google», який потрібно ввести у графічний інтерфейс, отримуємо список із 5-ти посилань (кількість посилань у результаті регулюється константою). Отриманий агент

працює на платформі JADE і може бути відлагоджений засобами Eclipse та JADE. Для внесення змін у модель після редагування згенерованого застосовуються модулі середовища розробки INGENIAS «під'єднання додатків» (AppLinker) та «підключення коду» (CodeUploader). Отже, IDK частково підтримує і процес зворотної розробки (у UML цей процес називають reverse engineering).

Висновки

У ході проведеного дослідження було розглянуто методологію розробки агентів та мультиагентних систем за допомогою середовища моделювання агентних систем INGENIAS, продемонстровано практичну орієнтованість підходу. Було створено просту модель пошукової системи, що складається із пошукового агента та графічного інтерфейсу користувача. Модель є працездатною: із неї генерується коректний проект на мові програмування Java, який компілюється без помилок. Роботу системи перевірено тестовими запитами. Створена система може працювати на будь-якій платформі, що підтримує JRE та має доступ до мережі Інтернет, а оскільки Java є кросплатформною мовою програмування, то і отримана система є кросплатформною. Всі необхідні бібліотеки не потребують інсталяції і працюють у середовищі Java та входять безпосередньо до проекту. Модельний підхід із використанням методології INGENIAS дозволяє розробнику сконцентруватись на аспектах взаємодії агентів та моделюванні їх функціоналу, а не на аспектах розробки архітектури для мультиагентної системи. Наведену модель можна розширити до повноцінної мультиагентної системи шляхом додавання нових агентів (наприклад, агента брокера, що буде працювати безпосередньо із веб-сайтами у мережі Інтернет чи агента пам'яті системи, що буде зберігати результати пошуку для того, щоб можна було використовувати їх у наступних пошуках) та описування взаємодії нових агентів із вже означеними компонентами моделі.

Список використаних джерел:

1. Dominic Greenwood. FIPA The Foundation for Intelligent, Physical Agents. Whitestein Technologies AG [Електронний ресурс] / Dominic Greenwood – Режим доступу до журн.: http://jade.tilab.com/papers/JADETutorialIEEE/JADETutorial_FIPA.pdf

2. F. L. Bellifemine. Developing Multi-Agent Systems with JADE / F. L. Bellifemine, G. Caire, D. Greenwood – West Sussex: John Wiley & Sons, 2007. – 286p.

3. Д.А. Кузьмин. Анализ средств разработки мультиагентных систем / Д.А. Кузьмин, Д.Г. Селютин, Л.И. Покидышева // Вестник Красноярского государственного университета, серия: физ.-мат. науки. – 2006. – №7. – с. 172.

4. Jorge J. Gómez-Sanz. INGENIAS Agent Framework. Development Guide version 1.0 [Електронний ресурс] / Jorge J. Gómez-Sanz – Madrid: Facultad de Informatica, Universidad Complutense de Madrid – Режим доступу до журн.: <http://sourceforge.net/projects/ingenias/files/INGENIAS%20Development%20Kit/Aranjuez/IAFDevelopmentGuide.pdf/download>

5. J. Pavón. Agent Oriented Software Engineering with INGENIAS / J. Pavón, J. Gómez-Sanz // Multi-Agent Systems and Applications III. – 2003. – pp. 394–403.

6. Опис функціональних можливостей та характеристик INGENIAS [Електронний ресурс] – Режим доступу до журн.: <http://grasia.fdi.ucm.es/main/?q=en/node/44>

7. J. Pavón. The INGENIAS Methodology and Tools / J. Pavón, J. Gómez-Sanz, R. Fuentes // Agent-Oriented Methodologies Brian Henderson-Sellers & Paolo Giorgini (eds.). – Hershey: Idea Group Publishing, 2005. – pp. 236-276.

8. J. J. Gómez-Sanz. Contribution to AL3 PROMAS TFG: INGENIAS methodology and tools [Електронний ресурс] / J. J. Gómez-Sanz, J. Pavón. – Madrid: Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid. – Режим доступу до журн.: <http://people.cs.uu.nl/mehdi/tfg/romefiles/J.G.Sanz.pdf>

9. James J. Odell. Representing Agent Interaction Protocols in UML / James J. Odell, H. Van Dyke Parunak, Bernhard Bauer // Agent-Oriented Software Engineering, Paolo Ciancarini and Michael Wooldridge (eds.). – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – pp. 93-106.

Надійшла до редколегії 15.12.09

УДК 004.056.53

Іванніков* Є.Ю., аспірант

Послуга реєстрації „НР-2. Захищений журнал” для ЗОС на базі GNU/Linux з розширенням RSBAC.

Запропоновано реалізацію послуги „НР-2” для дистрибутиву Debian ОС GNU/Linux з розширенням RSBAC. Досліджено стандартну схему реєстрації повідомлень в ОС Linux. Показано необхідність у її модифікації, обґрунтовано вибір іншого демону журналювання, розроблено схему реєстрації повідомлень, яка реалізує принцип найменших повноважень.

Ключові слова: захищена ОС, послуга безпеки, послуга реєстрації, ОС GNU/Linux.

Y.Y. Ivannikov, post-graduate student

Level 2 audit security service („Protected audit trail”) for a trusted OS based on GNU/Linux with RSBAC extension.

An implementation of a level 2 audit security service for a Debian GNU/Linux distribution with RSBAC extension is proposed. Linux standard logging subsystem is studied. The need of its modification is shown. The choice of a 3rd party logging daemon is demonstrated and a new logging scheme is developed. The scheme implements the least authority principle.

Key words: trusted computer system, security service, logging, GNU/Linux.

*E-mail: ivannikoff@meta.ua.

Статтю представив чл. кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Однією з вимог, які висуваються до захищених операційних систем (ЗОС), є забезпечення реєстрації дій користувачів щодо використання ресурсів комп'ютерної системи (КС), а також інших дій і подій, які так чи інакше можуть вплинути на дотримання реалізованої політики безпеки [1]. Важливість цієї вимоги знаходить своє вираження в тому, що реєстрація дій розглядається як послуга безпеки (послуга „НР”). Аналіз стандартних функціональних профілів захищеності в КС показує, що послуга реєстрації присутня у всіх без винятку профілях [3].

Нормативний документ [2] вводить ранжування послуги реєстрації залежно від повноти і вибіркової контролю, складності засобів аналізу даних журналів реєстрації і спроможності вияву потенційних порушень. Очевидно, що послуга реєстрації є важливою ланкою в захисті КС від несанкціонованого доступу. Її надійне та безперебійне функціонування гарантує, що будь-які дії, здатні скомпрометувати безпеку КС, будуть щонайменше зафіксовані у журналі (для послуги рівня „НР-1”), або заблоковані (для рівня „НР-5”).

В рамках розробки захищеної ОС на базі ОС GNU/Linux була поставлена задача по впровадженню послуги реєстрації рівня „НР-2. Захищений журнал”. Дослідження базової

ОС показує, що безпосередньо скористатись стандартною схемою реєстрації повідомлень в ній не можна, оскільки ця схема не відповідає вимогам до послуги безпеки, які висуваються у відповідних нормативних документах.

Виходячи з результатів аналізу дистрибутиву Debian операційної системи GNU/Linux з розширенням RSBAC, який виступає основою для розробки ЗОС, в цій роботі пропонується проект реалізації послуги безпеки „НР-2. Захищений журнал”.

Реєстрація повідомлень як послуга безпеки

Як зазначалося, в [2] вводиться ранжування послуги реєстрації. Всього розрізняють п'ять рівнів реалізації послуги, від найнижчого, „НР-1”, – простої фіксації повідомлень у журналі до найвищого, „НР-5”, – аналізу комплексом засобів захисту подій, які впливають або можуть вплинути на безпеку КС.

Згідно [2] до реалізації послуги „НР-2. Захищений журнал” висуваються такі вимоги:

1. Політика реєстрації повинна визначати перелік подій, що реєструються.
2. КЗЗ повинен бути здатним здійснювати реєстрацію подій, що мають безпосереднє відношення до безпеки.
3. Журнал реєстрації повинен містити інформацію про дату, час, місце, тип і успішність чи неуспішність кожної зареєстрованої події. Журнал реєстрації

повинен містити інформацію, достатню для встановлення користувача, процесу і/або об'єкта, що мали відношення до події.

4. КЗЗ повинен забезпечувати захист журналу реєстрації від несанкціонованого доступу, модифікації або руйнування.

5. Адміністратори і вповноважені користувачі повинні мати у своєму розпорядженні засоби перегляду та аналізу журналу реєстрації.

Ясно, що стандартна схема реєстрації повідомлень у звичайній ОС не призначена для застосування у КС, які здійснюють захист оброблюваної інформації; через це стандартна схема не відповідає особливим вимогам, яким має відповідати послуга реєстрації повідомлень у захищеній ОС. Нижче пропонується аналіз стандартної схеми реєстрації повідомлень у базовій ОС.

Стандартна схема реєстрації повідомлень

Нагадаємо, що в якості основи для розробки ЗОС була обрана ОС Debian Linux з розширенням RSBAC. Докладно про RSBAC можна дізнатись з [4] та [5]. Опишемо схему реєстрації повідомлень в цій ОС (див. також рис. 1). Ядро ЗОС (або його розширення RSBAC) генерує повідомлення про певну подію, що пов'язана із безпекою КС;

1. Це повідомлення потрапляє у внутрішній буфер повідомлень розташований в адресному просторі ядра;

2. Системний демон klogd зчитує повідомлення ядра із буфера, звертаючись до спеціального віртуального файлу /proc/kmsg у файлової системі ProcFS (цей файл є, по суті, файлом інтерфейсу ядра) та направляє у встановлений дисковий файл;

3. Системний демон rlogd (частина пакету RSBAC) зчитує повідомлення RSBAC із буфера, звертаючись до спеціального віртуального файлу /proc/rsbac-info/rmsg (у файлової системі RSBAC) та направляє у встановлений дисковий файл;

4. Демон журналювання (syslogd) зчитує повідомлення ядра та RSBAC, а також повідомлення з інших джерел та здійснює їхню маршрутизацію згідно визначених адміністратором правил.

Реалізація вимог до послуги „НР-2” потребує корегування традиційної схеми. Справа полягає у тому, що штатному демону журналювання, яким є програма syslog, бракує можливостей для обробки повідомлень. Він здатний розрізняти повідомлення лише на основі двох параметрів: 1) їхнього пріоритету

та 2) коду підсистеми, яка генерує повідомлення. В ОС Linux виділяють 15 кодів для позначення підсистем. Кожна програма, яка генерує повідомлення, може встановлювати код підсистеми на власний розсуд, оскільки існують лише дуже загальні рекомендації щодо вибору цих кодів. Тому спроектувати ефективну та надійну схему руху повідомлень на основі цих даних не виявляється можливим.

Ясно, що організація послуги реєстрації потребує набагато потужніших засобів фільтрації повідомлень. Потрібно мати можливості для розрізнення повідомлень згідно заданих шаблонів, у тому числі, заданих регулярними виразами, для маршрутизації повідомлень із різних джерел у різні пункти призначення відповідно до визначених правил. Існують альтернативні програмні пакети, які надають такі засоби. Відомими відкритими рішеннями є пакети rsyslog та syslog-ng. Останній виявляється більш вдалим вибором через можливість прозорого налаштування. Зрозуміло, що цей фактор має досить важливе значення, особливо в контексті захищеної ОС.

Іншою вадою (до речі, більш суттєвою!) наведеної схеми є те, що RSBAC здійснює захист інтерфейсного файлу /proc/rsbac-info/rmsg, дозволяючи його читання лише тим процесам, власником яких є адміністратор безпеки. Тому, для того, щоб системний демон syslog мав змогу здійснювати читання з цього файлу, його потрібно запускати від імені адміністратора безпеки. Однак, відомо, що роль адміністратора безпеки в ОС, які здійснюють захист критичної інформації є навіть більш вагомою, ніж роль системного адміністратора. Саме перший призначає суб'єктам (користувачам) та об'єктам КС атрибути, які визначають політику безпеки. Вважаємо, що виконання в кожному сеансі роботи КС процесу, який виступає від імені адміністратора безпеки може стати метою спроби реалізації загрози, отже бути потенційним джерелом компрометації.

Вірним підходом тут стала б реалізація такої схеми, яка відповідає принципу найменших повноважень. Важливість принципу засвідчується тим, що при проектуванні окремих компонентів комплексу засобів захисту його реалізація є додатковою вимогою, яка висувається високими рівнями критеріїв гарантій (починаючи з рівня „Г-3”).

При реалізації принципу будемо виходити з того, що, по суті, для доступу до

віртуального файлу `/proc/rsbac-info/rmsg` не потрібні повноваження адміністратора безпеки, тут можна обмежитись менш відповідальною роллю.

Отже, нами були окреслені два напрямки вдосконалення традиційної схеми на шляху до реалізації послуги „НР-2”, втілення яких пропонується у наступних підрозділах.

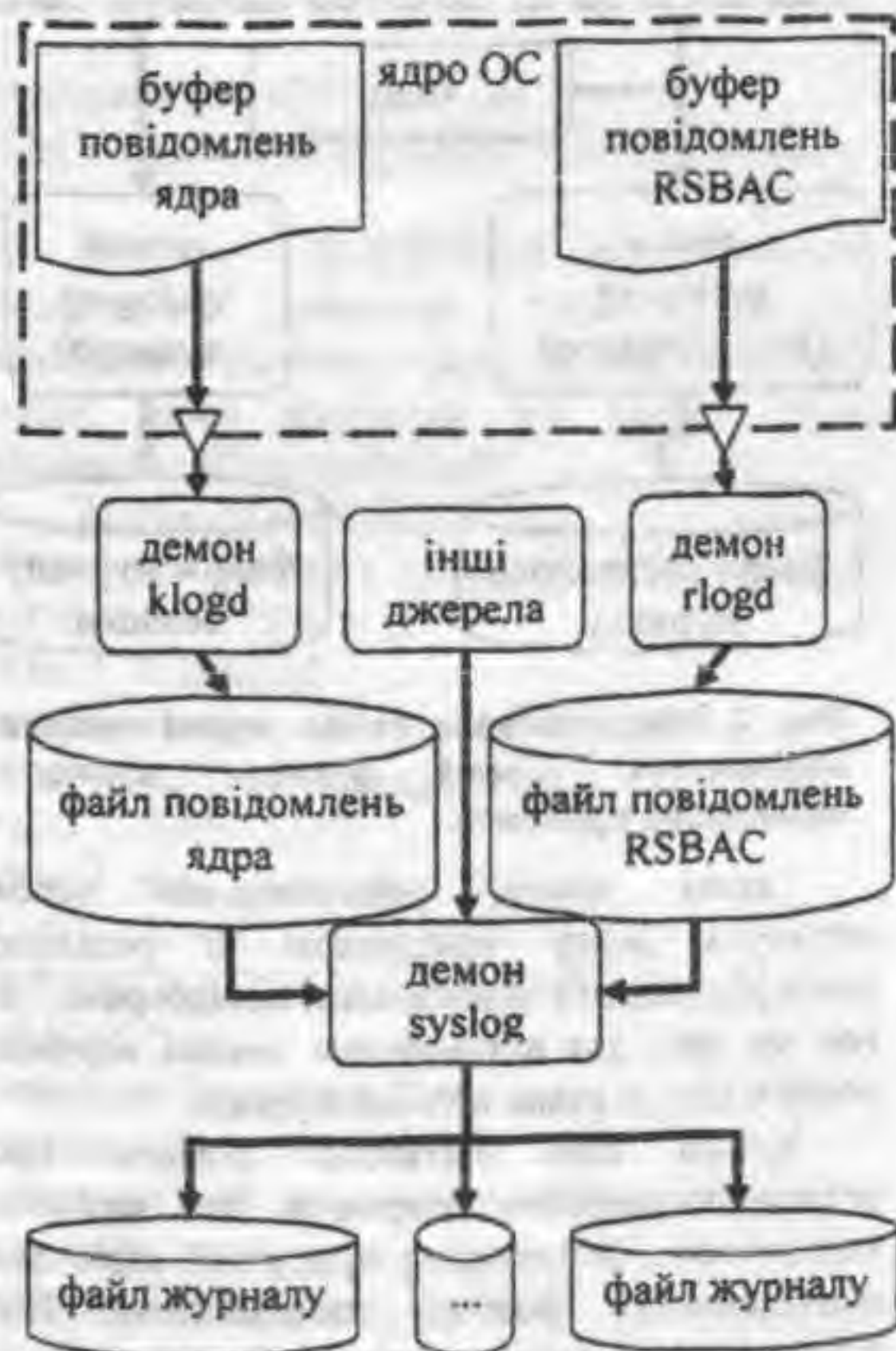


Рис. 1 Стандартна схема журналювання повідомлень в ОС Linux зі встановленим розширенням RSBAC

Демон журналювання syslog-ng

Syslog-ng оперує із поняттям маршруту журналювання. Воно складається з одного чи кількох джерел, одного чи кількох правил фільтрації, одного чи кількох пунктів призначення. Повідомлення потрапляє в syslog-ng через одне зі своїх джерел. Якщо повідомлення задовольняє правилам фільтрації, воно відсилається у вказані пункти призначення. За замовчуванням, повідомлення відсилається у всі вказані пункти, однак ця поведінка може бути змінена.

Джерело – це набір драйверів, що збирають інформацію вказаним методом. Для того, щоб визначити джерело, у конфігураційному файлі вказується вираз, який має такий синтаксис:

`source <identifier> {`

`source-driver(params); source-driver(params); ... };`

Назвемо основні драйвери джерел:

- `internal()` – внутрішні повідомлення.
- `unix-stream()` / `unix-dgram()` – відкриває сокет `SOCK_STREAM` / `SOCK_DGRAM`.
- `file()` – відкриває вказаний файл.
- `pipe()`, `fifo()` – відкриває вказаний іменованний канал та читає повідомлення.
- `tcp()`/`udp()` – прослуховує вказаний TCP/UDP порт, очікуючи на повідомлення.

Зауважимо, що драйвер `file()` при вказанні додаткового параметру `follow_freq(0)` здатен зчитувати повідомлення безпосередньо з віртуальних файлів `/proc/kmsg` і `/proc/rsbac-info/rmsg`. Це елімінує необхідність використання демонів `klogd` та `rlogd`.

Фільтри задають правила фільтрації повідомлень. Фільтр – це булівський вираз над внутрішніми функціями фільтрування. Будемо використовувати фільтр `message` („рядок”), де рядок визначає регулярний вираз, який використовується для співставлення з текстом повідомлень.

Повідомлення доставляється адресату, якщо цей вираз приймає значення `true`. Визначення фільтра має такий синтаксис:
`filter <identifier> { expression; };`

Якщо повідомлення пройшло фільтр, воно доставляється у пункт призначення. Подібно до джерел, пункти призначення складаються з одного чи кількох драйверів. Пункти призначення задаються так:

`destination <identifier> {
destination-driver(params);
destination-driver(params); ... };`

Драйвери пунктів призначення співпадають із драйверами джерел. Крім того, наявні додаткові драйвери:

- `usertty()` – відправляє повідомлення на вказану консоль користувача.
- `program()` – розгалужується та запускає вказану програму, передаючи повідомлення на її стандартний вхід.

Джерела, фільтри та пункти призначень складають шлях журналювання. Він описується `log` виразом, який має такий синтаксис:

`log { source(s1); source(s2); ...
filter(f1); filter(f2); ...
destination(d1); destination(d2); ...
flags(flag1[, flag2...]); };`

Прапорці `flags` задають додаткову поведінку, розгляд якої виходить за рамки даної роботи.

Будь-яке повідомлення, яке поступає з якогось джерела, і яке пропускається всіма фільтрами, буде відправлене у всі вказані пункти призначення.

За замовчуванням повідомлення проходить всіма можливими шляхами, тому одне повідомлення може потрапити у певний пункт призначення кілька разів, якщо цей пункт присутній у кількох шляхах.

Налаштування syslog-ng

Виходячи з принципу найменших привілеїв, зробимо рух повідомлень ядра системи незалежним від руху повідомлень RSBAC. Для цього будемо запускати два екземпляри демону syslog-ng. Перший екземпляр відповідатиме за журналювання повідомлень першого типу, другий екземпляр – за журналювання повідомлень другого типу. Кожний екземпляр є цілком незалежним процесом та налаштовується окремо від іншого. Цим ми підвищуємо стійкість всього операційного середовища до відмов. Далі, різні екземпляри демону будуть запускатись від імені різних користувачів. А саме, перший екземпляр буде запускатись, як і раніше, від імені адміністратора, а другий – від імені аудитора (докладніше про це у наступному підрозділі). Крім того, політику системної безпеки можна налаштувати так, щоб різні екземпляри функціонували в різних доменах виконання. Схему проілюстровано на рис. 2.

Залишаючи поза розглядом налаштування першого екземпляру, звернімося до налаштування другого екземпляру. Пропонується така організація руху повідомлень:

1. Всі повідомлення RSBAC будуть зберігатися в загальному журналі безпеки (файл /home/secoff/log/log).

2. Повідомлення, які відповідають вказаним правилам фільтрації будуть направлятися в додаткові пункти призначення.

3. Пропонується вести окремі журнали для кожного користувача КС, окремі журнали для модулів безпеки (журнал повідомлень від модуля адміністративного контролю, журнал повідомлень від модуля довірчого контролю, журнал повідомлень підсистеми аутентифікації і т.д.)

4. Також вбачаємо за доцільне вести окремий журнал для повідомлень про заборону доступу.

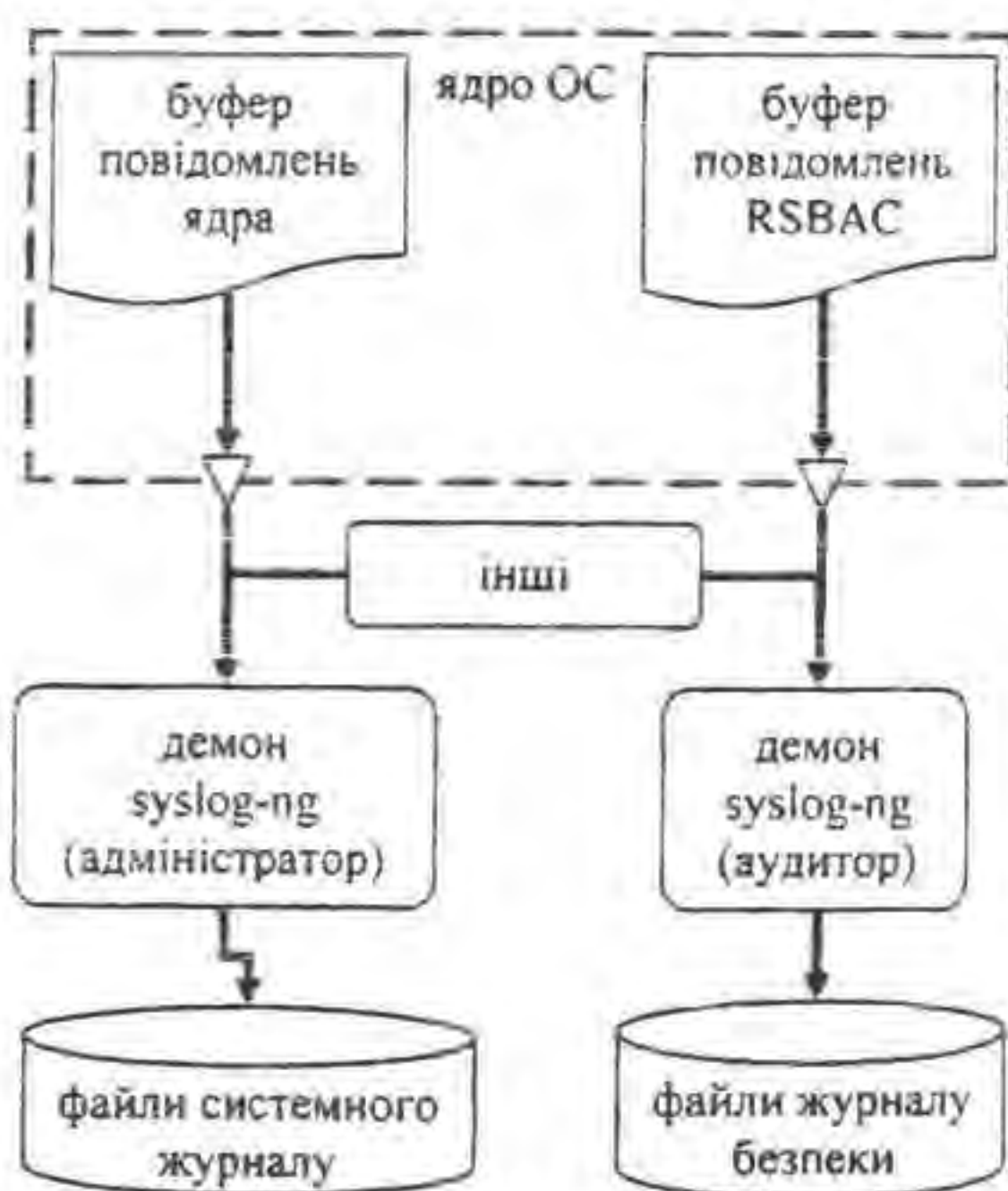


Рис. 2 Запропонована схема журналювання повідомлень. Схема реалізує принцип найменших привілеїв.

Таким чином, уповноважені особи матимуть змогу працювати із ретельно класифікованими журналами повідомлень. В той же час, для відтворення повної картини подій у нагоді стане повний журнал.

Кілька слів потрібно сказати про реалізацію окремих журналів для кожного користувача. В syslog-ng присутній засіб для синтаксичного розбору повідомлень. Він дозволяє визначити перелік полів та символ – роздільник. Підпрограма розбору сканує кожне повідомлення, послідовно виділяючи поля, розділені цим символом. Значення поля може бути використане в подальшому, в тому числі, для іменування пунктів призначень. Ідея полягає в тому, щоб виділяти поле, яке містить числовий ідентифікатор користувача (uid), та направляти повідомлення в окремий журнал, ім'я якого матиме вигляд /home/secoff/log/user-uid.

Подемо вміст конфігураційного файла.

Визначення джерел:

```

source s_rsbac {
file("/proc/rsbac-info/rmsg" follow_freq(0));
};
source s_internal {
internal();
};

```

Визначення пунктів призначень:

```

destination d_rsbac_all {
file("/home/secoff/log/log");
};

```

```
};  
destination d_rsbac_not_granted {  
file("/home/secoff/log/not_granted");  
};  
destination d_rsbac_AUTH {  
file("/home/secoff/log/AUTH");  
};  
destination d_rsbac_MAC {  
file("/home/secoff/log/MAC");  
};  
destination d_ADFRESP_uid {  
file("/home/secoff/log/user-${ADFRESP.uid}")  
};
```

Нотація `${ADFRESP.uid}` визначає підстановку значення `<uid>` виділеного програмою розбору (див. нижче). Цей запис задає імена журналів, які мають вигляд `/home/secoff/log/user-<uid>`.

Задамо такі фільтри:

```
filter f_not_granted { message("result  
NOT_GRANTED"); };  
filter f_ADFRESP {  
message("rsbac_adf_responce\\(\\)"); };  
filter f_AUTH { message("result  
NOT_GRANTED"); };  
filter f_MAC { message("result  
(NOT_GRANTED|GRANTED|DO_NOT_CARE  
|UNDEFINED|ERROR!) (\\(Softmode\\) )by(\\w|  
)* MAC") or  
message("mac_auto_") or  
message("set_attr_mac") or  
message("adf_request_set_attr_mac") or  
message("mac(_sys_)check_role") or  
message("rsbac_mac_");  
};
```

На черзі налаштування для програми розбору. Реалізація цієї ідеї вимагає приведення всіх повідомлень RSBAC до єдиного формату, а саме:

`<заголовок>`, `<ідентифікатор процесу>`,
`<ідентифікатор батьківського процесу>`, `<ім'я програми>`, `<файл програми>`, `<ідентифікатор користувача>` `<текст повідомлення>`.

Заголовок міститиме інформацію про місце, час та дату повідомлення. Відповідно до цього формату визначимо аналізатор:

```
parser p_ADFRESP {  
csv-parser(columns( "ADFRESP.HEAD",  
"ADFRESP.pid", "ADFRESP.ppid",  
"ADFRESP.progn", "ADFRESP.progf",  
"ADFRESP.uid" ) delimiters(", ")); };
```

Нарешті, задамо шляхи журналювання.

```
log {  
source(s_rsbac);  
source(s_internal);  
destination(d_rsbac_all);
```

```
};  
log {  
source(s_rsbac);  
filter(f_not_granted);  
destination(d_rsbac_not_granted);  
};  
log {  
source(s_rsbac);  
filter(f_ADFRESP);  
parser(p_ADFRESP);  
destination(d_ADFRESP_uid);  
};  
log {  
source(s_rsbac);  
filter(f_MAC);  
destination(d_rsbac_MAC);  
};
```

Налаштування RSBAC

Система розмежування доступу RSBAC містить підтримку користувачів чотирьох класів — звичайних (непривілейованих), користувачів, адміністратора КС, адміністратора безпеки і досить обмежену підтримку аудитора. Розширивши цю підтримку та увівши до переліку користувачів КС аудитора (він ідентифікується системою RSBAC за зарезервованим значенням `uid = 404`), ми досягнемо ефективного розподілу обов'язків привілейованих користувачів.

Пропонуємо задати такі атрибути доступу, щоб єдиним користувачем, який би мав повний доступ до журналів безпеки (читання та запис) був користувач-аудитор. Тут потрібно зважати на те, що адміністратор КС має повний доступ до всіх об'єктів відносно звичайного адміністративного контролю ОС Linux; в той же час адміністратор безпеки має повний доступ до всіх об'єктів відносно системи розмежування доступом RSBAC. Таким чином, використання лише одного механізму розмежування доступу не призведе до досягнення сформульованої мети.

Використаємо комбінацію двох методів розмежування доступу: а) звичайного вбудованого адміністративного контролю ОС Linux з б) довірчим керуванням доступом. Атрибути встановимо для директорії, в якій будуть зберігатися журнали (`/home/secoff/log`). Таким чином, всі файли в цій директорії успадкують батьківські атрибути. Власником цієї директорії зробимо аудитора, який єдиний матиме повний (гwx в Unix-нотації) доступ. Решта користувачів матиме доступ лише на

читання. Подібні ж атрибути встановимо для довірчого керування. В результаті:

1. Адміністративне керування обмежуватиме доступ адміністратора безпеки до журналів.

2. Довірче керування обмежуватиме доступ адміністратора КС до журналів.

3. Єдиною особою, яка не підлягатиме цим обмеженням, буде аудитор.

Другий екземпляр програми `syslog-ng` буде запускатись саме від його імені. Нічим іншим від звичайних користувачів аудитор вирізнятись не буде.

Адміністратор безпеки матиме доступ лише на перегляд (не модифікацію) журналів безпеки. Таким чином, потужна роль адміністратора безпеки не буде повсякденно використовуватись для кожного сеансу роботи з КС. Зауважимо, що аудитор та адміністратор безпеки можуть бути фізично однією особою.

Окрім програми `syslog-ng`, від імені аудитора будуть запускатись програми, які здійснюють ротацию та архівування файлів журналів.

Як зазначалося в попередньому підрозділі при розгляді налаштування для синтаксичного аналізатора, для його коректної роботи всі повідомлення системи RSBAC мають бути приведені до єдиного формату. При підготовці цієї роботи були визначені вихідні файли, які потребують модифікації. Це головний файл блоку прийняття рішень `/adf/adf_main.c`, що містить більше 3200 рядків коду, файли модуля адміністративного керування доступом `/adf/mac/mac_main.c` (5010 рядків) і `/adf/mac/mac_syscalls.c` (710 рядків), файли модуля довірчого керування `/adf/acl/acl_main.c` (494 рядки) і `/adf/acl/acl_syscalls.c` (1740 рядків) та файли контролю авторизації `/adf/auth/auth_main.c` (1200 рядків) і `/adf/auth/auth_syscalls.c` (160 рядків). При використанні інших модулів безпеки, вони також потребуватимуть модифікації.

Висновки

Проведений аналіз базової ОС засвідчив необхідність у модифікації стандартної схеми журналювання повідомлень. Були визначені напрямки вдосконалення схеми та додаткові заходи адміністративного характеру, необхідні для забезпечення виконання всіх вимог, що висуваються нормативними документами до послуги реєстрації „НР-2”.

При проектуванні цього компоненту КЗЗ суттєва увага була приділена реалізації принципу найменших привілеїв.

На користь запропонованої реалізації також свідчить можливість використати її в якості основи для впровадження більш високого рівня послуги реєстрації. Так, для послуги рівня „НР-3” додатково вимагається, щоб КЗЗ мав бути здатним негайно інформувати адміністратора про перевищення порогів безпеки і, якщо реєстраційні небезпечні події повторюються, здійснити неруйнівні дії щодо припинення повторення цих подій. Реалізація цієї вимоги може використовувати наявні точно класифіковані журнали.

Крім того, демон журналювання `syslog-ng` підтримує можливість запуску вказаної програми при спрацьовуванні заданого фільтру. Така програма може здійснити додатковий аналіз повідомлення і, при необхідності, інформувати адміністратора безпеки, заблокувати КС тощо.

Список використаних джерел

1. НД ТЗІ 1.1-002-99. Загальні положення щодо захисту інформації в комп'ютерних системах від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 21 с.

2. НД ТЗІ 2.5-004-99. Критерії оцінки захищеності інформації в комп'ютерних системах від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 59 с.

3. НД ТЗІ 2.5-005-99. Класифікація автоматизованих систем і стандартні функціональні профілі захищеності оброблюваної інформації від несанкціонованого доступу. – К.: ДСТСЗІ СБ України, 1999. – 22 с.

4. Оп А. Regelsatz-basierte Zugriffskontrolle nach dem „Generalized Framework for Access Control” Ansatz am Beispiel Linux. – Diplomarbeit. Universität Hamburg, 10. November 1997. <http://www.rsbac.org/doc/media/dipl-ps.zip>.

5. Іванніков Є.Ю. Адміністративне керування в ОС Linux на основі системи RSBAC. Матеріали всеукраїнської науково-технічної конференції студентів, аспірантів, молодих вчених з міжнародною участю «Інформаційно-керуючі системи і комплекси» – ІКСК'2008, Миколаїв, НУК, 2008 р., С. 16-21.

Надійшла до редколегії 29.09.2009

УДК 519.925.51

Кулян В.Р., к.т.н, доц.
Требіна О.С., студ.

Про оптимізацію інвестиційної політики на основі методів математичного моделювання

Розглядається проблема побудови математичної моделі та управління портфелем цінних паперів як задача оптимального керування динамічною системою.

Ключові слова: математична модель, оптимальний портфель, оптимальне керування.

*E-mail: V.Kulyan@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Проблема управління портфелем цінних паперів, активів і пасивів, інших інвестиційних інструментів є фундаментальною у фінансовій теорії та практиці. З цієї причини до неї прикута увага спеціалістів у різних прикладних областях знань. В той же час ця проблема як задача управління в умовах невизначеності відноситься також і до фундаментальних проблем теорії прийняття рішень. Дослідження Р. Беллмана, Дж. Данцига, Р. Мертона, Г. Марковиця направлені на становлення фундаментальних основ та вивчення різних змістових інтерпретацій і узагальнень процесів фінансового аналізу. Так, у статичному випадку, отримано принципові результати, що мали широке практичне застосування, наприклад, встановлено властивість розкладу оптимального портфеля на не ризиковану і ризиковану складові для випадку наявності на ринку не ризикованого активу, досліджено фундаментальні властивості рівноважного ринку оптимальних портфелів.

Зусилля математиків при дослідженні ринку фінансових інвестицій значною мірою спрямовані на розгляд багатокритеріальних задач з великою кількістю критеріїв, на вивчення і розв'язання задач інвестиційного менеджменту в динамічній постановці, способах адекватного опису випадкових процесів зміни цін, на розробку прикладних чисельних методів для розв'язання задач великої розмірності.

Мета даної роботи полягає у застосуванні методів математичного моделювання та теорії керування для розв'язання динамічних задач інвестиційного менеджменту, для дослідження стратегій управління портфелем активів та

V.R. Kulyan, Ph.D., Ass.Prof.
Trebina O.S., stud.

On investment policy optimization on the basis of mathematical modeling methods

The problems of construct of mathematical model and dynamic portfolio control for optimal portfolio selection are investigated.

Key Words :mathematical model, optimal portfolio, optimal control.

пасивів і взагалі фінансових інструментів у динамічному випадку.

Динамічні моделі управління активами і зобов'язаннями (ALM) знайшли найбільш успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади роботи методики ALM включають реалізовані моделі для пенсійних фондів, страхових компаній, інвестиційних компаній, банків, університетських фондів.

Загальна схема активного управління портфелем акцій, як правило, складається з таких кроків:

1. Розрахунок майбутньої ціни окремої акції на основі статичних детермінованих моделей.
2. Аналіз статичного портфеля акцій.
3. Моделювання динаміки активу.
4. Моделювання динаміки портфеля активів.
5. Інтегральне управління і диверсифікація портфеля активів.

Разом з тим, з метою диверсифікації ризиків інвестування розглядають задачу Д.Тобіна.

На інтервалі часу $t \in [t_0, t_1]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p , має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t)r_i(t), \quad (1)$$

де x_i – частка акцій i -того виду у портфелі;
 r_i – очікувана прибутковість акцій i -того виду.

Скористаємось побудованим в [1] співвідношенням, яке описує динаміку формування ринкової вартості акції

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \alpha_3(x(t), r(t)), i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

У [1] на основі (2) розроблено математичну модель формування ціни портфеля акцій

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t)r_i(t)\left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}\right), i \neq j. \quad (3)$$

Для кожного моменту часу $t \in [t_0, t_1]$ має місце умова

$$\sum_i x_i(t) = 1.$$

Математична модель (3) при припущеннях, зроблених в [1] описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів і детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і які полягають у тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій r_i , так і зміни структури портфеля $x_i, \dot{x}_i$. Разом з тим, ринкова ціна акцій у момент часу t залежить від її ринкової вартості у попередній (початковий) момент часу, від змін на протязі інтервалу $t \in [t_0, t_1]$, що обумовлені динамікою індексу фондового ринку, кореляційними залежностями між акціями та іншими, в тому числі і макроекономічними, факторами. Замінімо диференціальне рівняння (3) еквівалентним інтегральним

$$r_p(t) = r_{p0}(t) + \int_{t_0}^t (2\sum_i x_i(\tau)r_i(\tau) - \sum_i \sum_j x_i(\tau)r_i(\tau)\left(\frac{f_j}{r_j(\tau)} + \frac{dx_j(\tau)}{d\tau} \frac{1}{x_j(\tau)}\right))d\tau, i \neq j. \quad (4)$$

В такій постановці задачі про оптимізацію портфеля акцій логічними і послідовними видаються постановки таких задач:

- побудови значень очікуваної прибутковості акцій;
- ідентифікації параметрів функцій f_j математичної моделі, що описана у [1];

- задачі оптимізації функціонала

$$J_p(t_1) = \max_{t_0} \int_{t_0}^{t_1} (2\sum_i x_i(t)r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t)r_i(t)\left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}\right))dt. \quad (5)$$

$$r_p(t_0) = r_{p0}, \quad r_p(t_1) = r_{p1}.$$

Тут $x(t)$ – вектор часток цінних паперів, представлених у портфелі; $r(t)$ – вектор, координатами якого є норми прибутковостей відповідних цінних паперів;

$$f_j = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_j(t) + \sum_i \rho_{ij}r_i + \varepsilon_j(t);$$

коефіцієнти α_1, α_2 – обернений час реакції системи на зміну динаміки відповідних показників.

Умова на правому кінці траєкторії в задачі (5) означає бажаний рівень прибутковості портфеля у кінцевий момент часу і визначається інвестором при врахуванні r_{p0} , динаміки ринку акцій, а також існування розв'язку цієї траєкторної задачі. Загальну ж задачу варіаційного числення для пошуку оптимальної структури портфеля акцій можна записати у такому вигляді

$$J_p(t_1) = \max_{t_0} \int_{t_0}^{t_1} (2\sum_i x_i r_i - \sum_i \sum_j x_i(t)r_i(t)\left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}\right))dt, \quad (6)$$

$$r_p(t_0) = r_{p0}, \quad r_p(t_1) = r_{p1}, \quad \sum_i x_i(t) = 1.$$

Останнє обмеження у задачі (6) стосується того, що весь наявний капітал інвестора вкладається у цінні папери. Зрозуміло, що більш справедливим було б застосувати обмеження у вигляді

$$\sum_i x_i(t) \leq 1.$$

Такий запис більшою мірою відповідає інтересам інвестора, хоча додає складнощів при розв'язанні задачі.

Оптимізаційна задача (6) полягає у визначенні такого вектора $x(t)$, який максимізує вибраний критерій якості і для якого виконуються крайові умови та обмеження. Для спрощення постановки задачі на першому етапі її розв'язання знехтуємо

обмеженням і отримаємо класичну задачу варіаційного числення, яка у загальному вигляді може бути записана так

$$J_p(t_1) = \max \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

$$x(t_0) = x_0, \sum_i x_i(t_1) r_i(t_1) = r_p.$$

Стосовно існування розв'язку такої задачі з точки зору максимізації очікуваної прибутковості портфеля, то тут доцільно скористатись практичними результатами з побудови допустимої та ефективної множини портфелів. Очевидно, що, згідно теорії Г. Марковиця, оптимальний портфель акцій, побудовиний на основі розв'язку задачі (6), повинен бути елементом ефективної множини портфелів. Таким чином, наведені вище міркування дають можливість коректно сформулювати задачу варіаційного числення з побудови оптимального розподілу часток акцій різних типів з метою оптимізації прибутку портфеля у момент часу t_1 .

Наступним якісним кроком у постановці задачі оптимізації інвестиційного портфеля є задача оптимального керування, де як керуючі параметри розглядають координати вектора $x(t)$.

Критерій якості запишемо так

$$J = \sum_i x_i(t_1) r_i(t_1). \quad (7)$$

Математичну модель, як і раніше, розглянемо у вигляді

$$f(x, u, t) = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), \quad i \neq j. \quad (8)$$

Тут за змінну фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p . Як керуючі параметри, згідно з моделлю, розглядаємо вектор

$$u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}).$$

Для розв'язання задачі оптимального керування (7), (8) при заданих умовах на обох або на одному з кінців траєкторії застосуємо метод послідовних наближень.

Відомо, що загальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих

керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де u^0 – деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ – довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Для лінійної динамічної математичної моделі (3) формування вартості портфеля та критерія якості (7) $k+1$ – ітерація методу матиме такий вигляд. Нехай $u^k(t)$ визначено.

Крок 1. Розв'язати задачу Коші для початкової системи (3) і знайти фазову траєкторію $r_p^k(t)$, що задовольняє керуванню $u^k(t)$.

Крок 2. Побудувати спряжену систему і, розв'язавши для неї задачу Коші, визначити вектор-функцію $p(t)$, що відповідає керуванню $u^k(t)$; при цьому замість $x(t)$ підставляється побудована функція $x^k(t)$. Тут $p(t)$ – вектор-функція, що є розв'язком задачі Коші відповідної спряженої системи.

Крок 3. За умови максимуму функції Гамільтона за керуванням знайти нове наближення $u^k(t)$ для керування. Після цього переходимо до наступної ітерації. Умовою закінчення процесу може слугувати близькість керуючих функцій двох послідовних наближень

$$\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Величину ε можна вибирати, наприклад, за умови наявності у оптимального портфеля акцій наперед заданих якісних характеристик.

В розвиток побудованої математичної моделі та формулювання для неї задачі оптимального керування можна побудувати послідовність оптимальних на інтервалах часу керувань, яка б враховувала можливості оптимальної диверсифікації портфеля акцій у фіксовані моменти часу. Щодо моментів часу, у які проводиться процедура диверсифікації, то тут можна використати такі підходи:

Підхід 1. Виходячи із наперед заданих якісних характеристик результуючого портфеля акцій, можна сформулювати оптимізаційну задачу стосовно як кількості, так і безпосередньо моментів зміни структури інвестиційного портфеля.

Підхід 2. Практичні міркування дають підстави вважати, що реальна ринкова ситуація часто надає додаткову інформацію стосовно підходів до розв'язання цієї проблеми.

Іншою серед згаданих вище задач, розв'язок яких використовується для коректного

формулювання задачі про побудову оптимальної структури портфеля, є задача ідентифікації екстремальних значень параметрів $p = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ математичної моделі (2).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (3) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d) : \{(B(p-d), p-d) \leq 1\}, \quad (9)$$

де B - симетрична додатньо-визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки в просторі параметрів p , $p \in R^m$; d - геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^m$. Множину (9) будемо називати гарантованою множинною оцінкою, якщо кожне значення параметра p , отримане для довільних спостережень [2], [3] належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура чисельного методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d_i^0 = \sum_{j=1}^s p_j^i, i = \overline{1, m},$$

де s - кількість експериментів з розв'язання задачі параметричної ідентифікації для i параметра системи (2). На $k+1$ -кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{(B^k(p-d^k), p-d^k)\}, \quad (10)$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{(B^k(p-d^k), p-d^k)\}, \quad (11)$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(p_i - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), p_i - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1})) < (B^k(p_i - d^k), p_i - d^k), \quad (12)$$

$$\text{де } i = \arg \max_j (B(p_j - d), p_j - d). \quad (13)$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j , (j - номер кроку процедури такий, що $(B^j(p-d^j), p-d^j) < 1$, сформуємо довільну δ - сітку $\{y_i\}_{i \in K}$, з вузлами y_i . В кожному вузлі

y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\overline{n}_{e_i}$ і розв'яжемо допоміжну задачу: знайти пару $(\overline{q}_e, \overline{p}_e)$ таку, що

$$(\overline{q}_e, \overline{p}_e) = \arg \max_{p \in Q(B^j, d^j), q \in Q(1)} (\overline{n}_{e_j}, p)$$

для множини K_n векторів зовнішньої нормалі у вузлах сітки. Для обчислення пари $(\overline{q}_e, \overline{p}_e)$ визначаємо параметр λ_3 як розв'язок задачі одновимірної оптимізації

$$\lambda_3 = \arg \max_{\lambda_3 \in \Lambda} \{ |z'_e(t) - z(\overline{p}_e + \lambda_3 \overline{n}_{e_i}, x^0, \overline{q}_e, t)| < \delta \}, i \in I.$$

Нове значення вектора $\overline{p}_{e_n}$ визначаємо за формулою

$$\overline{p}_{e_n} = \overline{p}_e + \lambda_3 \overline{n}_{e_i}.$$

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $\overline{n}_{e_i}, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\overline{p}_{e_n} \in P$.

За допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для побудованої динамічної моделі портфеля акцій сформулювати і знайти розв'язок задачі оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

Список використаних джерел

1. Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутишкая В.В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента// Кибернетика и вычислительная техника. - 2005. - 148. - с. 3-10.
2. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления. - М.: Наука, 1971. - с. 247.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. -М.: Наука, 1969. -с. 408.

Надійшла до редакції 18.12.2009 р.

УДК 519.9

Лебедев Є.О., д. ф.-м. н., проф.,
Семенов В.В., асп.

Про дифузійну апроксимацію гіллястого процесу з імміграцією

В статті був розглянуто гіллястий процес з імміграцією, у якого випадкова кількість частинок-іммігрантів надходять у випадковий момент часу, причому час між двома послідовними моментами приходу іммігрантів має геометричний розподіл.

Було доведено, що певним чином знормована послідовність таких процесів збігається в рівномірній топології до дифузійного процесу.

Ключові слова: процес Гальтона-Ватсона, гіллястий процес з імміграцією, дифузійний процес.

*E-mail: leb@unicyb.kiev.ua, semenov1984@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Акіменко В.В.

Гіллястий процес звичайно визначається як марківський процес, що задовольняє умову розгалуження [1, стор. 11]. Гіллясті процеси описують достатньо широкий клас реальних явищ в фізиці, хімії, біології, техніці, демографії, теорії масового обслуговування та ін. В схему гіллястих процесів вкладаються також процеси з імміграцією, у яких поряд з розмноженням і перетворенням частинок є ще постійне надходження частинок ззовні, яке керується випадковим механізмом, що не залежить від числа існуючих частинок.

Побудуємо модель гіллястого процесу з імміграцією, що буде досліджуватись у даній роботі.

Нехай $\{Z(m), m = 0, 1, 2, \dots\}$ – гіллястий процес Гальтона-Ватсона [2, стор. 11], а $Z = \{Z_i^j(\cdot), i = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots\}$ – незалежні процеси, розподіл яких співпадає з розподілом $Z(\cdot)$. Випадкову величину $Z(m)$ можна інтерпретувати як кількість нащадків однієї частинки в момент часу m . Покладемо $Z(1) = \xi$ – кількість нащадків в першому поколінні. Крім того, нехай η – деяка цілочисельна випадкова величина. Позначимо $H = \{\eta_j, j = \overline{1, \infty}\}$ – множину цілочи-

Lebedev E.O., Doc. Sci. (Phys.-Math.), professor.
Semenov V.V., PhD student

On diffusion approximation of the branching process with immigration

In article was considered the branching process with immigration for which the random number of immigrants enter at random moments of time and the distribution of time between two successive moments of the arrival of immigrants has a geometric distribution.

It was proved, that some way normalized sequence of such processes converges to diffusion process in uniform topology.

Key Words: Galton-Watson process, branching process with immigration, diffusion process.

сельних, незалежних у сукупності випадкових величин розподіл яких співпадає з розподілом η . Генератриса випадкових величин ξ та η позначимо відповідно

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k, \quad g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k s^k,$$

де

$$P(\xi = k) = f_k, \quad P(\eta = k) = g_k, \quad k \geq 0,$$

а їх перші моменти –

$$E\eta = a_\eta, \quad E\xi = a_\xi, \quad E[\xi(\xi - 1)] = \beta_\xi.$$

Розглянемо також $\{\theta_j, j = \overline{1, \infty}\}$ – послідовність незалежних геометрично розподілених випадкових величин з параметром p . Для відповідного процесу відновлення введемо позначення

$$\tau_j = \theta_1 + \dots + \theta_j, \quad \nu(m) = \max\{j: \tau_j \leq m\}.$$

Гіллястий процес з імміграцією $Y(m)$, $m = 0, 1, \dots$ визначимо наступним чином:

$$Y(m) = \sum_{j=1}^{v(m)} \sum_{i=1}^{\eta_j} Z_i'(m - \tau_j), \quad m = 0, 1, \dots$$

Цей процес можна інтерпретувати таким чином: $Y(m)$ є гіллястим процесом з імміграцією, для якого випадкова кількість частинок-іммігрантів η_j надходить у випадковий момент часу τ_j , причому час між двома моментами приходу іммігрантів має геометричний розподіл з параметром p .

Якщо провести аналогію з теорією черг, то потік іммігрантів представляє собою неординарний потік типу M (геометричний розподіл відстані між моментами приходу іммігрантів). В цьому контексті гіллястий процес, що розглядається, можна назвати гіллястим процесом з імміграцією типу M (M -імміграцією).

При $Y(0) = k$ процес

$$\sum_{i=1}^k Z_i^0(m) + \sum_{j=1}^{v(m)} \sum_{i=1}^{\eta_j} Z_i'(m - \tau_j)$$

будемо позначати $Y(k, m)$.

Описаний вище гіллястий процес з M -імміграцією $Y(m)$ можна моделювати гіллястим процесом $Q(m) = (Q_1(m), Q_2(m))$, $m = 0, 1, \dots$, з дискретним часом і двома типами частинок T_1, T_2 . Задамо для процесу $Q(m)$ ймовірності перетворення частинок між двома послідовними моментами часу так

$$\begin{cases} P(T_1 \rightarrow T_1) = p \\ P(T_1 \rightarrow T_1 + kT_2) = qg_k, \quad q = 1 - p. \\ P(T_2 \rightarrow kT_2) = f_k \end{cases} \quad (1)$$

В початковий момент часу $Q(0) = Q(1, 0)$.

З визначення $Q(m)$ випливає, що де

$$Q_1(m) \equiv 1, \quad Q_2(m) \equiv Y(m).$$

Імміграція відбувається за рахунок розмноження фіктивної частинки типу T_1 , яка породжує нові частинки типу T_2 , і відтворює сама себе. Генератриса такого процесу матиме такий вигляд

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) &= [s_1(p + qg(s_2)), f(s_2)] = \\ &= [F_1(s_1, s_2), F_2(s_1, s_2)] \end{aligned}$$

Будемо вважати, що базові випадкові величини ξ і η залежать від n (номера серії) так, що

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(n), \quad \eta = \eta(n), \quad a_\xi = a_\xi(n), \quad a_\eta = a_\eta(n), \\ \beta_\xi &= \beta_\xi(n). \end{aligned}$$

Гіллястий процес близький до критичного, якщо $a_\xi(n) = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$. Для такого гіллястого процесу розглянемо послідовність випадкових процесів

$$y_n(t) = \frac{1}{n} Y_n([nx], [nt]), \quad x \geq 0, t > 0$$

Для $y_n(t)$ справедливий наступний результат

Теорема 1. Припустимо, що $a_\xi(n) = 1 + \frac{\alpha}{n} +$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \beta_\xi(n) = \beta_\xi + o(1), \quad a_\eta(n) = a_\eta + o(1),$$

$\beta_\xi, a_\eta > 0$. Крім того множини $\Xi_n^2 = \{\xi^2(n), n = 1, 2, \dots\}$ та $H_n = \{\eta(n), n = 1, 2, \dots\}$ - рівномірно інтегровані. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp(-\lambda y_n(t))] &= \\ \exp(-x\theta(t, \lambda)) \left(1 + \frac{1}{2} \beta_\xi \lambda \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}\right)^{\frac{-2q a_\eta}{\beta_\xi}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-(\lambda_1 y_n(t_1) + \lambda_2 y_n(t_2) + \dots + \lambda_l y_n(t_l))\}] &= \\ = \exp\{-x\theta(\Delta t_1, \lambda_1 + \theta(\Delta t_2, \lambda_2 + \dots + \theta(\Delta t_l, \lambda_l))\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} \beta_\xi \lambda \frac{e^{\alpha \Delta t_l} - 1}{\alpha}\right)^{\frac{-2q a_\eta}{\beta_\xi}}, \quad (3)$$

$$\theta(t, \lambda) = \frac{\lambda e^{\alpha t}}{1 + \frac{1}{2} \beta_\xi \lambda \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Перед тим як доводити теорему встановимо декілька допоміжних результатів.

Лема 1. Нехай гіллястий процес з двома типами частинок T_1 та T_2 задається схемою (1).

Тоді розподіл кількості частинок типу T_1 та T_2 в момент часу m має генератрису

$$F(m, s_1, s_2) = \left[s_1 \prod_{j=0}^{m-1} (p + qg(f^{(j)}(s_2))) \right] f^{(m)}(s_2).$$

Доведення. Відомо, що генератрису

$$F(m, s_1, s_2) = (F_1(m, s_1, s_2), F_2(m, s_1, s_2))$$

розміру популяції частинок типу T_1 та T_2 в момент часу m дорівнює $F^{(m)}(s_1, s_2)$. Таким чином, за індукцією легко показати, що

$$F(m, s_1, s_2) = \left[s_1 \prod_{j=0}^{m-1} (p + qg(f^{(j)}(s_2))) \right] f^{(m)}(s_2).$$

Лема 2. Сумісна генератриса випадкових величин $Y(k, m_1), \dots, Y(k, m_l)$ буде такою:

$$\begin{aligned} E[s_1^{Y(k, m_1)} s_2^{Y(k, m_2)} \dots s_l^{Y(k, m_l)}] &= \\ &= \left[f^{(\Delta m_1)}(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2 \dots (s_{l-1} f^{(\Delta m_l)}(s_l)) \dots)) \right]^k \times \\ &\times \prod_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^{\Delta m_i - 1} [p + qg(f^{(j)}(s_1 f^{(\Delta m_{i+1}}(s_{i+1}) \dots \right. \\ &\left. \dots (s_{l-1} f^{(\Delta m_l)}(s_l)) \dots))] \right], \end{aligned}$$

де $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_l$, $\Delta m_i = m_i - m_{i-1}$, $0 \leq s_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Доведення. Перевіримо це твердження для $l = 2$. Загальний випадок доводиться за індукцією. Подамо

$$\begin{aligned} Y(k, m_2) &= Y(k, m_1 + \Delta m_2) = \\ &= \sum_{i=1}^{Y(k, m_1)} Z^{(i)}(\Delta m_2) + I(\Delta m_2), \end{aligned}$$

де $\{Z^{(i)}(\cdot)\}$ – послідовність незалежних та однаково розподілених гіллястих процесів, а $I(\Delta m_2)$ – частина популяції частинок, що є нащадками іммігрантів, які надійшли в проміжку часу $(m_1, m_2]$ довжини Δm_2 . Використовуючи властивості умовного математичного сподівання та незалежність $I(\Delta m_2)$, $Y(k, m_1)$, маємо

$$E[s_1^{Y(k, m_1)} s_2^{Y(k, m_2)}] = E[s_1^{Y(k, m_1)} \times$$

$$\begin{aligned} &\times E \left[s_2^{\sum_{i=1}^{Y(k, m_1)} Z^{(i)}(\Delta m_2) + I(\Delta m_2)} \middle| Y(k, m_1) \right] = \\ &= E \left[s_1^{Y(k, m_1)} s_2^{I(\Delta m_2)} (f_{\Delta m_2}(s_2))^{Y(k, m_1)} \right] = \\ &= E[s_2^{I(\Delta m_2)}] E[(s_1 f_{\Delta m_2}(s_2))^{Y(k, m_1)}] \end{aligned}$$

З леми 1 випливає, що розподіл числа іммігрантів в момент часу Δm_2 має генератрису

$$h(\Delta m_2, s) = F_1(\Delta m_2, 1, s) = \prod_{j=0}^{\Delta m_2 - 1} [p + qg(f^{(j)}(s))].$$

Отже

$$E[s^{Y(k, m)}] = [f^{(m)}(s)]^k \prod_{j=0}^{m-1} (p + qg(f^{(j)}(s))).$$

Звідси випливає, що справедлива наступна рівність

$$\begin{aligned} E[s_2^{I(\Delta m_2)}] E[(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2))^{Y(k, m_1)}] &= \\ [f^{(m_1)}(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2))]^k \prod_{j=0}^{m_1 - 1} [p + qg(f^{(j)}(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2)))] \times \\ &\times \prod_{j=0}^{\Delta m_2 - 1} [p + qg(f^{(j)}(s_2))] \end{aligned}$$

Лема 2 доведена.

Лема 3 [3]. Припустимо, що $\beta_\xi(n) = \beta_\xi + o(1)$ та множина Ξ_n^2 – рівномірно інтегровані. Тоді для довільного числа ε ,

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \beta_\xi$ існує $s(\varepsilon) \in [0, 1]$ та $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $s \in [s(\varepsilon), 1]$, $n \geq N(\varepsilon)$ та $k = 1, 2, \dots$ справедлива оцінка

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(a_\xi(n))^{k+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2} \beta_\xi + \varepsilon\right) \frac{(a_\xi(n))^k - 1}{a_\xi(n) - 1}} &\geq f_n^{(k)}(s) \geq \\ &\geq 1 - \frac{(a_\xi(n))^{k+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2} \beta_\xi - \varepsilon\right) \frac{(a_\xi(n))^k - 1}{a_\xi(n) - 1}} \end{aligned}$$

Доведення теореми 1. Спочатку доведемо рівність (2). Використовуючи лему 1, маємо рівність

$$E[\exp(-\lambda y_n(t))] = [f_n^{(1)}(e^{-\lambda/n})]^{[nx]} \times \\ \times \prod_{j=0}^{[nx]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))].$$

Той факт, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n^{(1)}(e^{-\lambda/n})]^{[nx]} = \exp(-x\theta(t, \lambda))$$

є наслідком граничної теореми з [3]. Отже залишилося знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{[nx]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))].$$

Не порушуючи загальності будемо вважати, що $\overline{a_n} = \min_{n \geq 1} a_n(n) > 0$. Неважко перевірити тотожність

$$g_n(s) = 1 + \left(a_n(n) - \sum_{\eta=2}^{\infty} g_n \sum_{i=2}^{\eta-1} (1-s^2) \right) (s-1).$$

В силу рівномірної інтегровності H_n для довільного $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \overline{a_n}$ існує $s_1(\varepsilon) \in [0, 1]$, таке, що для довільного $s \in [s_1(\varepsilon), 1]$ і всіх $n \geq 1$ виконуються нерівності

$$1 - (a_n(n) - \varepsilon)(1-s) > g_n(s) > 1 - a_n(n)(1-s) \quad (4)$$

Нехай $s_1(\varepsilon)$ настільки близьке до 1, що всі члени нерівності (4) більші за 0. За лемою 3 для довільного $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\beta_\varepsilon$ існують $s_2(\varepsilon) \in [0, 1]$ і $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $s \in [s_2(\varepsilon), 1]$, $n \geq N(\varepsilon)$ та $j = 1, 2, \dots$ справедлива оцінка

$$1 - \frac{(a_\varepsilon(n))^{j+1}}{a_\varepsilon(n) + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon + \varepsilon\right) \frac{(a_\varepsilon(n))^j - 1}{a_\varepsilon(n) - 1}} \geq f_n^{(j)}(s) \geq \\ \geq 1 - \frac{(a_\varepsilon(n))^{j+1}}{a_\varepsilon(n) + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon - \varepsilon\right) \frac{(a_\varepsilon(n))^j - 1}{a_\varepsilon(n) - 1}} \quad (5)$$

Вважаємо, що $s_2(\varepsilon)$ настільки близьке до 1, що всі члени нерівності (5) належать відріzk $[s_1(\varepsilon), 1]$. Покладемо $s(\varepsilon) = \max[s_1(\varepsilon), s_2(\varepsilon)]$. Тоді для всіх $s \in [s(\varepsilon), 1]$ та $n \geq N(\varepsilon)$ нерівності (4) та (5) виконуватимуться одночасно. Нехай $N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq N(\varepsilon)$ $e^{-\lambda/n} \in [s(\varepsilon), 1]$. Тоді з нерівностей (4) та (5) випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{[nx]-1} \ln(1 - qa_n(n) \times$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \frac{(a_\varepsilon(n))^j (1 - e^{-\lambda/n})}{1 + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon - \varepsilon\right) \frac{(a_\varepsilon(n))^j - 1}{a_\varepsilon(n) - 1}} \right\} \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{j=0}^{[nx]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))] \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{j=0}^{[nx]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))] \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{[nx]-1} \ln(1 - q(a_n(n) - \varepsilon) \times \\ & \times \frac{(a_\varepsilon(n))^j (1 - e^{-\lambda/n})}{1 + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon + \varepsilon\right) \frac{(a_\varepsilon(n))^j - 1}{a_\varepsilon(n) - 1}} \right\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{j=0}^{[nx]-1} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^j \lambda}{1 + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon \pm \varepsilon\right) \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^j - 1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{n} = \\ = - \int_0^1 \frac{\lambda e^{\alpha u} du}{1 + \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon \pm \varepsilon\right) \frac{e^{\alpha u} - 1}{\alpha}} = \\ = - \frac{1}{\frac{1}{2}\beta_\varepsilon \pm \varepsilon} \ln \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{2}\beta_\varepsilon \pm \varepsilon \right) \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \right).$$

Наближаючи функцію $\ln(1-x)$ та враховуючи факт, зазначений вище, отримаємо:

$$\begin{aligned} & -\frac{qa_\eta}{\frac{1}{2}\beta_\xi - \varepsilon} \ln \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{2}\beta_\xi - \varepsilon \right) \frac{e^{a_\eta} - 1}{\alpha} \right) \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{j=0}^{[n]-1} \left[p + qg_n \left(f_n^{(j)} \left(e^{-\lambda/n} \right) \right) \right] \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{j=0}^{[n]-1} \left[p + qg_n \left(f_n^{(j)} \left(e^{-\lambda/n} \right) \right) \right] \leq \\ & \leq -\frac{q(a_\eta - \varepsilon)}{\frac{1}{2}\beta_\xi + \varepsilon} \ln \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{2}\beta_\xi + \varepsilon \right) \frac{e^{a_\eta} - 1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Оскільки ця нерівність виконується для довільного $0 < \varepsilon < \min \left(\frac{1}{2}\beta_\xi, \frac{1}{2}\beta_\eta \right)$, справедлива рівність

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{j=0}^{[n]-1} \left[p + qg_n \left(f_n^{(j)} \left(e^{-\lambda/n} \right) \right) \right] = \\ & = -\frac{2qa_\eta}{\beta_\xi} \ln \left(1 + \frac{1}{2}\beta_\xi \lambda \frac{e^{a_\eta} - 1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Отже, рівність (2) доведено. Рівність (3) доводиться аналогічно. Замість генератиси випадкової величини $Y(k, m)$ використовується сумісна генератриса випадкових величин $Y(k, m_1), \dots, Y(k, m_l)$, яка знайдена в лемі 2. Отже, доведення теореми завершено.

Праві частини співвідношень (2) та (3) представляють собою перетворення Лапласа скінченновимірних розподілів дифузійного процесу $y_0(t)$, $t > 0$ з коефіцієнтами переносу $a(x) = \alpha x + a_\eta$ та дифузії $b(x) = \beta_\xi x$. Таким чином, головний зміст теореми 1 полягає у встановленні збіжності процесу $y_n(t)$ до дифузійного процесу $y_0(t)$ в сенсі скінченновимірних розподілів. Покажемо, що за тих самих умов $y_n(t)$ збігається до процесу $y_0(t)$ в рівномірній топології U [4].

Теорема 2. Припустимо, що $a_\xi(n) = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\beta_\xi(n) = \beta_\xi + o(1)$, $a_\eta(n) = a_\eta + o(1)$, множини Ξ_n^2 та H_n – рівномірно інтегровані. Тоді на довільному скінченному проміжку $[0, T]$

послідовність $y_n(t)$ збігається в U топології до дифузійного процесу $y_0(t)$, $t > 0$ з коефіцієнтом переносу $a(x) = \alpha x + a_\eta$ та дифузії $b(x) = \beta_\xi x$.

При доведенні теореми буде використана наступна лема.

Лема 4. Нехай гіллястий процес з двома типами частинок T_1 та T_2 задається схемою (1). Тоді мають місце наступні твердження:

1) Якщо перші моменти ξ , η скінченні, $a_\xi, a_\eta < \infty$, то матриця математичних сподівань $A(m)$ для процесу $Q(m) = (Q_1(m), Q_2(m))$ скінченна і дорівнює

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & qa_\eta \frac{a_\xi^m - 1}{a_\xi - 1} \\ 0 & a_\xi^m \end{pmatrix}.$$

2) Якщо виконуються умови пункту 1) і крім того скінченні другі моменти $M\xi(\xi-1) = \beta_\xi$, $M\eta(\eta-1) = \beta_\eta$, то

$$\begin{aligned} & E[Q_2(m)(Q_2(m)-1)] = \\ & = q \left(\beta_\eta - a_\eta^2 + \frac{\beta_\xi a_\eta}{a_\xi(a_\xi-1)} \right) \left(\frac{a_\xi^m + 1}{a_\xi + 1} \right) \left(\frac{a_\xi^m - 1}{a_\xi - 1} \right) + \\ & + q \left(a_\eta^2 + \left(a_\eta(a_\xi - 1) - \frac{\beta_\xi a_\eta}{a_\xi} \right) \frac{1}{a_\xi^m - 1} \right) \left(\frac{a_\xi^m - 1}{a_\xi - 1} \right)^2 \quad (6) \end{aligned}$$

Доведення. 1) За означенням, матриця математичних сподівань за m поколінь дорівнює

$$A(m) = \left\| \frac{\partial F_i(m, s_1, s_2)}{\partial s_j} \right\|_{i,j=1}^2.$$

Диференціюванням отримуємо твердження 1) леми.

2) Оскільки $E[Q_2(m)(Q_2(m)-1)] = \frac{\partial^2 F_1(m, s_1, s_2)}{\partial s_2^2} \Big|_{s=1}$, то використовуючи явний вигляд $F_1(m, s_1, s_2)$ з леми 1 приходимо до формули (6).

Доведення теореми 2. Спочатку припустимо, що випадкові величини $\eta_i(n)$, які позначають кількість іммігрантів, що потрапляють в систему в моменти часу τ_i , приймають значення з обмеженої множини $\{0, 1, \dots, N\}$. Оскільки траєкторії граничного процесу з ймовірністю 1

неперервні, то для збіжності $y_n(t)$ до $y_0(t)$ в U топології достатньо показати збіжність в J топології [4]. Для цього оцінимо ймовірність

$$\Delta_n = P(|y_n(t) - y_n(t_1)| \geq \varepsilon, |y_n(t_2) - y_n(t)| \geq \varepsilon), \\ 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T,$$

$$\Delta_n = E[\overline{\chi}_\varepsilon(y_n(t) - y_n(t_1)) \overline{\chi}_\varepsilon(y_n(t_2) - y_n(t))] = \\ = E[\overline{\chi}_\varepsilon(y_n(t) - y_n(t_1)) \times \\ \times E\{\overline{\chi}_\varepsilon(y_n(t_2) - y_n(t)) | y_n(t)\}] \leq \\ \leq \varepsilon^{-2} E[\overline{\chi}_\varepsilon(y_n(t) - y_n(t_1)) \times \\ \times E\{(y_n(t_2) - y_n(t))^2 | y_n(t)\}].$$

де $\overline{\chi}_\varepsilon(x) = 1 - \chi_\varepsilon(x)$,

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $a_\varepsilon(n) = 1 + \frac{\alpha}{n}$. Тоді, використовуючи результати леми 4 неважко показати, що має місце наступна нерівність

$$E[(y_n(t_2) - y_n(t))^2 | y_n(t)] \leq \\ \leq (H_1 y_n^2(t) + H_2) \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right]^2 + \\ + (H_3 y_n(t) + H_4) \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right], \quad (7)$$

де $H_i > 0, i = \overline{1, 4}$.

$$E[(y_n(t) - y_n(t_1))^2] \leq \widetilde{H}_1 \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt] - [nt_1]} - 1}{\alpha} \right]^2 +$$

$$+ \widetilde{H}_2 \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt] - [nt_1]} - 1}{\alpha} \right]. \quad (8)$$

причому константи $H_i, i = \overline{1, 4}$ та $\widetilde{H}_i, i = \overline{1, 2}$ залежать тільки від N, T та q . Використовуючи нерівності (7) та (8), отримаємо

$$\Delta_n \leq \varepsilon^{-2} \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right]^2 E[H_1 y_n^2(t) + H_2] + \\ + \varepsilon^{-3} \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right] \left[E(y_n(t) + y_n(t_1))^2 \right]^{1/2} \times \\ \times \left[E(H_3 y_n(t) + H_4)^2 \right]^{1/2}.$$

Таким чином існують константи $K_\varepsilon^1(N, T, q)$ та $K_\varepsilon^2(N, T, q)$ такі, що справедлива нерівність

$$\Delta_n \leq K_\varepsilon^1(N, T, q) \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right]^2 + \\ + K_\varepsilon^2(N, T, q) \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2] - [nt]} - 1}{\alpha} \right] \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt] - [nt_1]} - 1}{\alpha}}.$$

Неважко перевірити, що для довільних $s, t \in [0, T]$, $t > s$ та $n \geq \bar{n} = \min \left\{ n : 1 + \frac{\alpha}{n} > 0 \right\}$ має місце наступна нерівність

$$\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt] - [ns]} - 1}{\alpha} \leq \max \left\{ \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T}, \frac{n}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \right\} \times \\ \times (n^{-1}[nt] - n^{-1}[ns]).$$

Використовуючи цю нерівність, а також те, що

$$\begin{aligned} n^{-1}[nt_2] - n^{-1}[nt] &\leq n^{-1}[nt_2] - n^{-1}[nt_1], \\ n^{-1}[nt] - n^{-1}[nt_1] &\leq n^{-1}[nt_2] - n^{-1}[nt_1]. \end{aligned}$$

маємо

$$\Delta_n \leq C_\varepsilon(N, T, q) (n^{-1}[nt_2] - n^{-1}[nt_1])^{3/2},$$

де $C_\varepsilon(N, T, q)$ константа, що не залежить від n .

Розглянемо два випадки: $t_2 - t_1 \leq n^{-1}$ та $t_2 - t_1 > n^{-1}$. В другому випадку

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq C_\varepsilon(N, T, q) (n^{-1}[nt_2] - n^{-1}[nt_1])^{3/2} \leq \\ &\leq C_\varepsilon(N, T, q) (t_2 - t_1 + n^{-1})^{3/2} \leq \\ &\leq 2^{3/2} C_\varepsilon(N, T, q) (t_2 - t_1)^{3/2} \end{aligned} \quad (9)$$

Нерівність (9) справедлива і в першому випадку, оскільки при $t_2 - t_1 \leq n^{-1}$ $\Delta_n = 0$. В силу теореми 15.6 [5] з нерівності (9) випливає збіжність $y_n(t)$ до $y_0(t)$ в J топології.

Тепер припустимо, що випадкові величини $\eta_j(n)$ приймають довільні значення з множини $\{0, 1, 2, \dots\}$. Для фіксованого $N = 1, 2, 3, \dots$ представимо процес з імміграцією у вигляді

$$Y^n(k, m) = Y_{0N}^n(k, m) + Y_{1N}^n(m), \quad m \geq 0, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} Y_{0N}^n(k, 0) &= k, \\ Y_{0N}^n(k, m) &= \sum_{i=1}^k Z_i^{0,n}(m) + \\ &+ \sum_{j=1}^{u(m)\eta_{jN}(n)} \sum_{i=1} Z_i^{j,n}(m - \tau_j), \quad m \geq 1, \\ Y_{1N}^n(0) &= 0, \\ Y_{1N}^n(m) &= \sum_{j=1}^{u(m)\bar{\eta}_{jN}(n)} \sum_{i=1} Z_i^{j,n}(m - \tau_j), \quad m \geq 1, \\ \eta_{jN}(n) &= \chi_N(\eta_j(n))\eta_j(n), \\ \bar{\eta}_{jN}(n) &= \bar{\chi}_N(\eta_j(n))\eta_j(n), \\ \chi_N(x) &= \begin{cases} 1, & |x| \leq N, \\ 0, & |x| > N, \end{cases} \quad \bar{\chi}_N(x) = 1 - \chi_N(x). \end{aligned}$$

Із співвідношення (10) випливає, що процес $y_n(t)$ розкладається на суму двох процесів

$$y_n(t) = y_{0n}^N(t) + y_{1n}^N(t),$$

де

$$\begin{aligned} y_{0n}^N(t) &= \frac{1}{n} Y_{0N}^n([nx], [nt]), \\ y_{1n}^N(t) &= \frac{1}{n} Y_{1N}^n([nx], [nt]). \end{aligned}$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що випадкові величини η_j^n слабко збігаються при $n \rightarrow \infty$ до деякої випадкової величини η . Тоді в силу рівномірної інтегрованості множини H_n

$$E\eta = a_\eta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_{jN}(n) = E\chi_N(\eta)\eta = a_\eta(N),$$

Отже,

$$E\eta_{jN}(n) = a_\eta(N) + o(1).$$

Нехай $y_0^N(t), t \geq 0$ – випадковий процес, скінченновимірні розподіли якого мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ -(\lambda_1 y_0^N(t_1) + \lambda_2 y_0^N(t_2) + \dots + \lambda_l y_0^N(t_l)) \right\} \right] = \\ \exp \left\{ -x\theta(\Delta t_1, \lambda_1 + \theta(\Delta t_2, \lambda_2 + \dots + \theta(\Delta t_l, \lambda_l))) \right\} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2} \beta_\varepsilon \lambda \frac{e^{\alpha \Delta t_l} - 1}{\alpha} \right)^{\frac{-2q - a_\eta(N)}{\beta_\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\theta(t, \lambda) = \frac{\lambda e^{\alpha t}}{1 + \frac{1}{2} \beta_\varepsilon \lambda \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}}.$$

За теоремою 1 $y_{0n}^N(t)$ слабко збігається до $y_0^N(t)$ при $n \rightarrow \infty$. З подання (11) випливає, що $y_0^N(t)$ слабко збігається до $y_0(t)$. Крім того, за вже доведеним $y_{0n}^N(t) \xrightarrow{II} y_0^N(t), n \rightarrow \infty$ для довільного N , та $y_0^N(t) \xrightarrow{II} y_0(t), N \rightarrow \infty$.

Тепер для того щоб застосувати теорему 4.2 з [5] і завершити доведення, необхідно перевірити, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} y_{1n}^N(t) > \varepsilon \right\} = 0. \quad (12)$$

Для цього розглянемо

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} y_{1n}^N(t) > \varepsilon \right\} &= P \left\{ \max_{1 \leq m \leq [nT]} Y_{1N}^n(m) > n\varepsilon \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \max_{1 \leq m \leq [nT]} \frac{Y_{1N}^n(m)}{a_{\xi}^m(n)} > n\varepsilon \left(1 + \frac{|\alpha|}{n} \right)^{-(nT)} \right\} = \\ &= E \left\{ P \left\{ \max_{1 \leq m \leq [nT]} \frac{Y_{1N}^n(m)}{a_{\xi}^m(n)} > n\varepsilon \left(1 + \frac{|\alpha|}{n} \right)^{-(nT)} \middle| F_{[nT]} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

де $F_{[nT]}$ – σ -алгебра, що породжується випадковими величинами $v([nt])$, $t \leq T$. Враховуючи те, що при фіксованій траєкторії процесу $v([nt])$, $0 \leq t \leq T$, процес

$$Y_{1N}^n(m) | a_{\xi}^m(n), \quad m = 1, 2, \dots, [nT],$$

є напівмартингалом і використовуючи нерівність Дуба [6, стор. 283] для напівмартингалів, знаходимо

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} y_{1n}^N(t) > \varepsilon \right\} &\leq \frac{1}{n\varepsilon} \left(1 + \frac{|\alpha|}{n} \right)^{[nT]} \times \\ &\times E \left\{ E \left\{ \frac{Y_{1N}^n([nT])}{a_{\xi}^{[nT]}(n)} \middle| F_{[nT]} \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\frac{1 + \frac{|\alpha|}{n}}{1 + \frac{\alpha}{n}} \right)^{[nT]} \cdot E \bar{\eta}_N(n) E \left\{ \sum_{j=1}^{v([nT])} a_{\xi}^{[nT]-\tau_j}(n) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{n\varepsilon} \left(\frac{1 + \frac{|\alpha|}{n}}{1 + \frac{\alpha}{n}} \right)^{[nT]} \cdot E \bar{\eta}_N(n) \frac{a_{\xi}^{[nT]}(n) - 1}{a_{\xi}(n) - 1} \leq \\ &\leq \frac{T}{\varepsilon} \left(\frac{1 + \frac{|\alpha|}{n}}{1 + \frac{\alpha}{n}} \right)^{[nT]} \cdot \max \left\{ \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T}, \frac{n}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \right\} E \bar{\eta}_N(n). \end{aligned}$$

З цієї оцінки випливає справедливність (12). Теорему доведено.

Таким чином в статті розглянуто гіллястий процес з імміграцією, у якого частинки-іммігранти надходять у випадковий момент часу,

причому час між двома послідовними моментами приходу іммігрантів має геометричний розподіл. Доведено, що певним чином нормована послідовність таких процесів збігається до дифузійного процесу з коефіцієнтами зносу $a(x) = \alpha x + a_{\eta}$ та дифузії $b(x) = \beta_{\xi} x$ в рівномірній топології.

Список використаних джерел

1. Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, «Теория вероятностей и математической статистики», М., 1971 г., 436 стр.
2. Theodor E. Harris The Theory of Branching Processes, Dover, New York, 2002 - 256 pp.
3. Лебедев Е.А. Уточнение одной предельной теоремы для ветвящихся процессов. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 334-338.
4. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов. – Теория вероятностей и её применения, 1956, 1, №3, с. 289–319.
5. Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер. – М.: Мир, 1977. – 352 стр.
6. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. – М.: изд. иностр. лит., 1956. – 607 стр.

Надійшла до редколегії 30.11.2009

УДК 519.8

Машченко С.О., к.ф.-м.н., доц.

Вибір індивідуально-оптимальних рівноваг за критерієм стабільності

Розглянута проблема вибору індивідуально-оптимальних рівноваг за критерієм стабільності, яка, у загальному випадку, представляє собою складну оптимізаційну задачу. Пропонується наближений метод вибору та досліджуються його властивості.

Ключові слова: некооперативні ігри, рівновага Неша, індивідуально-оптимальна рівновага.

*E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Розглянемо гру G у нормальній формі $(X, u, i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ - функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$ і приймає

дійсні значення. Кожен із гравців прагне одержати по можливості більше значення своєї функції виграшу.

Для визначення рівноважних ситуацій та дослідження їх стабільності у цій роботі пропонується використовувати принцип індивідуальної оптимальності [1], відповідно до якого кожен гравець вибирає свої стратегії індивідуально, але враховує функції виграшу всіх інших.

Принцип індивідуальної оптимальності базується на спеціальному відношенні домінування за Нешем. Будемо казати, що ситуація у гри G сильно домінує за Нешем [1]

ситуацію x і позначимо це через $y \gg x$, якщо ситуація y виходить із ситуації x зміною якимсь одним гравцем $i \in N$ своєї власної стратегії, тобто $y = (y_i, x_{-i})$ та $u_i(y_i, x_{-i}) > u_i(x)$, $j \in N$.

Ситуація x^* називається слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою, а множина цих рівноваг позначається через $WIOE$, якщо не існує іншої ситуації, яка б сильно домінувала за Нешем x^* , тобто

$$x^* \in WIOE \Leftrightarrow \neg \exists x \in X : x \gg x^*.$$

Можна сказати, що в індивідуально-

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

The choice of individual-optimum equilibriums by the criterion of stability

The problem of choice of individual-optimum equilibriums by the criterion of stability, which, in the general case, is a complex optimization problem, is considered in this article. The close method of choice is offered and his properties are explored.

Keywords: unco-operative games, the Nesh's equilibrium, the individual-optimum equilibrium.

оптимальній рівновазі кожен гравець знаходить такий компроміс з іншими гравцями, який жодному не вигідно порушувати.

Будемо вважати, що функції виграшу усіх гравців є обмеженими на множині X ситуацій гри G та позначимо через $S = \sum_{j \in N} \sup_{x \in X} u_j(x) < \infty$ -

суму їх верхніх меж. Уведемо до розгляду для кожного гравця $i \in N$ множину параметрів

$$M_i^{20} = \left\{ \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \mid \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1; \mu_i^j \geq 0, j \in N \right\}.$$

Необхідною й достатньою умови індивідуальної оптимальності встановлює теорема [1].

Теорема 1. Якщо у гри G ситуація $x^* \in WIOE$, функції виграшу $u_j(x^*) > 0$, $j \in N$, то існують такі вектори параметрів $\mu_i \in M_i^{20}$, $i \in N$, зокрема з компонентами:

$$\mu_i^j = u_j(x^*) / S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x^*) / Sn, j \in N, \quad (1)$$

що для $\forall x_i \in X_i, i \in N$, справедливі нерівності:

$$\min_{j \in N} (u_j(x_i, x_{-i}^*) - S\mu_i^j) \leq \min_{j \in N} (u_j(x^*) - S\mu_i^j). \quad (2)$$

Будь-який розв'язок x^* системи нерівностей (2) при заданих $\mu_i \in M_i^{20}$, $i \in N$, є слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою.

Слід зауважити, що параметри $\mu_i \in M_i^{20}$ дають можливість гравцю $i \in N$ виразити свою перевагу на множині функцій виграшу усіх

гравців $u_j(x)$, $j \in N$. Так, наприклад, якщо він вважає, що для нього є більш важливим критерій $j_1 \in N$, ніж $j_2 \in N$, то за теоремою 1 йому слід вибирати $\mu_i^{j_1} > \mu_i^{j_2}$. Варіюючи параметрами $\mu_i \in M_i^{20}$, $i \in N$, можна знаходити ті або інші рівноваги, розв'язуючи нерівності (2). З іншого боку, кожна індивідуально-оптимальна рівновага характеризується деякою множиною параметрів $\mu_i \in M_i^{20}$, $i \in N$, і, відповідно, перевагою на множині функцій виграшу усіх гравців.

Слід також відмітити, що параметрам μ_i^j , які фігурують у нерівностях (2), можна надати певний ігровий зміст. Нехай x^* є слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою гри G . Тоді за теоремою 1 вона є розв'язком системи нерівностей (2), принаймні при $\bar{\mu}_i^j = u_j(x^*)/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x^*)/Sn$, $i, j \in N$.

Звідси легко побачити, що для кожного фіксованого гравця $i \in N$ значення параметра μ_i^j вказує, яким, на думку гравця $i \in N$, повинне бути бажане значення функції виграшу $u_j(x)$, $j \in N$ у досягнутому компромісі x^* . Тоді й лише тоді гравцю $i \in N$ буде не вигідно відхилятися від x^* .

Як це показано в [1], множина індивідуально-оптимальних рівноваг містить у собі множини рівноваг за Нешем (NE), коаліційних рівноваг (KNE_Q), рівноваг за Берже (BE) та слабко оптимальних за Парето (SO) (оптимальних за Слейтером) ситуацій гри, тобто $NE, WKNE_Q, SO, BE \subseteq WIOE$. Ця властивість дала можливість [1] на основі теореми 1 побудувати модель оцінки максимальної стабільності індивідуально-оптимальної рівноваги $x \in X$, яку можна представити у наступному вигляді:

$$\hat{\mu}^{\max}(x) = \max_{\mu} \sum_{i \in N} \mu_i^j, \quad (3)$$

якщо для $\forall u_j \in X_j, i \in N$, має місце нерівність

$$\min_{j \in N} (u_j(y_i, x) - \mu_i^j S) \leq \min_{j \in N} (u_j(x) - \mu_i^j S) \quad (4)$$

та виконуються умови:

$$\mu_i^j \geq 0, i, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1, i \in N. \quad (5)$$

В статті [1] показано, що оцінка максимальної стабільності ситуації $x \in WIOE$ характеризує основні типи рівноваг некооперативних ігор

наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{\max}(x) &= n \Leftrightarrow x \in NE; \\ \hat{\mu}^{\max}(x) &= |K| \Rightarrow x \in KNE, \end{aligned} \quad (6)$$

де K – множина коаліцій гри G ;

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{\max}(x) &= 1 \Rightarrow x \in SO; \\ \hat{\mu}^{\max}(x) &= 0 \Rightarrow x \in BE. \end{aligned}$$

Неважко побачити, що для будь-якої фіксованої ситуації $x \in X$ задача (3) – (5) природно декомпонується на n незалежних підзадач, кожен з яких можна співставити з відповідним гравцем $i \in N$ і тоді $\hat{\mu}^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \hat{\mu}_i^{\max}(x)$, де для кожного $i \in N$:

$$\hat{\mu}_i^{\max}(x) = \max_{\mu_i} \mu_i^j, \quad (7)$$

$$\min_{j \in N} (u_j(y_i, x) - \mu_i^j S) \leq \min_{j \in N} (u_j(x) - \mu_i^j S), y_i \in X_i, \quad (8)$$

$$\mu_i^j \geq 0, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1. \quad (9)$$

Для гравця $i \in N$ розглянемо нерівності (8). Неважко перевірити їх еквівалентність нерівностям: $\min_{j \in N} (u_j(y_i, x) - S\mu_i^j) \leq u_k(x) - S\mu_i^k$, $\forall y_i \in X_i, k \in N$. У свою чергу, ці нерівності можна представити у вигляді: $\max_{j \in N} (S(\mu_i^j - \mu_i^k) - u_j(y_i, x) + u_k(x)) \geq 0$, $\forall y_i \in X_i, k \in N$, або у диз'юнктивній формі:

$$\bigwedge_{k \in N} \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N} (S(\mu_i^j - \mu_i^k) - u_j(y_i, x) + u_k(x) \geq 0).$$

Таким чином, для кожного гравця $i \in N$ задача (7) – (9) може бути сформульованою у вигляді задачі диз'юнктивного програмування [2]:

$$\hat{\mu}_i^{\max}(x) = \max_{\mu_i} \mu_i^j, \quad (10)$$

$$\bigwedge_{k \in N} \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N} (S(\mu_i^j - \mu_i^k) - u_j(y_i, x) + u_k(x) \geq 0), \quad (11)$$

$$\mu_i^j \geq 0, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1. \quad (12)$$

Задачі диз'юнктивного програмування хоча добре вивчені, але вважаються складними [2].

У випадку гри двох осіб $|N| = 2$ задачу (10) – (12) знаходження оцінки максимальної стабільності ситуації $x \in WIOE$ можна розв'язати в аналітичному вигляді [3], а саме:

$$\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \min_{y_i \in X_i} \begin{cases} 1, u_i(x) \geq u_i(y_i, x), \\ S + u_i(x) - u_j(y_i, x_j), \end{cases} \quad (13)$$

де $i, j = 1, 2; i \neq j$.

Окремо слід розглянути випадки гри G з опуклими до низу та диференційованими функціями виграшу гравців.

У випадку опуклих до низу функцій виграшу та опуклих множин стратегій гравців, згідно [4] задачі оцінки стабільності рівноваг стають задачами лінійного програмування наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i^{\max}(x) &= \max_{\mu_i} \mu_i', \\ \sum_{j \in N} \mu_j'(u_j(x) - u_j(y_i, x_{-i})) &\geq 0, \forall y_i \in X_i, \\ \mu_i' &\geq 0, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_j' = 1. \end{aligned}$$

Якщо функцій виграшу гравців є ще й диференційованими, то згідно [5] задачі оцінки стабільності рівноваг стають задачами лінійного програмування наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i^{\max}(x) &= \max_{\mu_i} \mu_i', \\ \sum_{j \in N} \mu_j' \nabla_{x_j} u_j(x) &= 0, \\ \mu_i' &\geq 0, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_j' = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, задача знаходження найбільш стабільної індивідуально-оптимальної рівноваги гри G в усіх випадках, що розглянуті вище, приймає вигляд: $\tilde{\mu}^{\max} = \sum_{i \in N} \max_{\mu_i} \tilde{\mu}_i^{\max}(x)$, де

функції $\tilde{\mu}_i^{\max}(x)$, $i \in N$, є заданими алгоритмічно. Хоча цей клас задач математичного програмування є достатньо добре вивченим і для розв'язку такого типу задач розроблені численні методи [2], які враховують різні властивості функцій, ці задачі є достатньо складними і працездатними. Тому представляється доцільним врахувати ігрову специфіку задачі і розробити спеціалізовані методи її розв'язку.

Коли оптимальний вибір за критерієм стабільності в іграх n осіб є складним, то варто скористатися деяким наближенням. Спробуємо побудувати для кожного гравця $i \in N$ функцію $\tilde{\mu}_i^{\max}(x)$, яка буде співставляти кожній ситуації $x \in X$ наближене значення $\tilde{\mu}_i^{\max}(x)$ за умовами (9), (10).

Неважко перевірити справедливості

наступного наслідку з теореми 1.

Наслідок 1. Нехай, без обмеження загальності, функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N$, $x \in X$, а вектор $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_j')_{j \in N}$ має компоненти відповідно до формули (1). Пара $(\bar{x}, \bar{\mu})$ буде або допустимим розв'язком задачі (3) - (5), або ситуація $\bar{x}$ у парі з будь-яким іншим вектором μ , який задовольняє умовам (5), не буде допустимим розв'язком задачі (3) - (5).

Доведення. Припустимо супротивне, що пара $(\bar{x}, \bar{\mu})$ не задовольняє умовам (4), (5), але існує такий вектор $\bar{\mu} \in M^{20}$, який задовольняє умовам (5) і у парі з ситуацією $\bar{x}$ задовольняє умовам (4). Звідси за теоремою 1 ситуація $\bar{x}$ буде слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою гри G і у парі з вектором $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_j')_{j \in N}$ буде задовольняти умовам (4), (5). Одержали суперечність. Наслідок доведено.

Таким чином, за допомогою наслідку 1 можна для будь-якої фіксованої ситуації $x \in X$ або визначити за формулами (1) допустиме значення вектору μ , або зробити висновок про недопустимість самої ситуації x .

Розглянемо для деякого фіксованого $x \in X$ та гравця $i \in N$ задачу (8) - (10). Як було показано вище вектор $\bar{\mu}_i = (\bar{\mu}_i')_{j \in N}$, обчислений за формулою (1), є її допустимим розв'язком, а значення $\bar{\mu}_i'$ є оцінкою знизу значення функції $\tilde{\mu}_i^{\max}(x)$. Спробуємо покращити цю оцінку вибором інших допустимих векторів $\mu_i = (\mu_i')_{j \in N}$ уздовж напрямку $(e_i - \bar{\mu}_i)$ для наближення до максимальної оцінки стабільності. У цьому виразі через $e_i = (e_j)_{j \in N}$ позначений одиничний вектор, компоненти якого: $e_j = 0, j \in N, j \neq i; e_i = 1$. Вибір цього напрямку пояснюються двома причинами. По-перше, e_i є "ідеальним" значенням μ_i для наближення до максимальної оцінки стабільності, оскільки $\mu_i' = 1$ є максимально можливим значенням. По-друге, усі точки відрізка $\lambda e_i + (1 - \lambda) \bar{\mu}_i$ для $\lambda \in [0, 1]$ задовольняють умовам (10) і залишається лише знайти таку точку $\mu_i = (\mu_i')_{j \in N}$ цього відрізка, яка буде задовольняти умовам (9) і мати максимальне значення координати μ_i' .

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. Нехай, без обмеження загальності,

функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$. Тоді для $\forall i \in N$ та $\forall x \in X$ максимальне значення цільової функції задачі (8) - (10) (якщо вона має розв'язки) $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) \geq \tilde{\mu}_i^{\max}(x)$, де

$$\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \tilde{\lambda}_i^{\max} + (1 - \tilde{\lambda}_i^{\max}) \chi(u_i(x)/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x)/Sn), \quad (14)$$

$$\tilde{\lambda}_i^{\max} = \min_{y_i \in X_i} \left\{ \max_{j \in N} \frac{1, u_i(x) \geq u_j(y_i, x), u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)} \right\}. \quad (15)$$

Доведення. Нехай для фіксованої ситуації $x \in X$ задача (8) - (10) має розв'язки. Розглянемо точку $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N}$, яка належить відрітку $\lambda_i e + (1 - \lambda_i) \bar{\mu}_i$, $\lambda_i \in [0, 1]$, де значення $\bar{\mu}_i$ визначене за формулою (1). Тоді, по-перше, точка μ_i задовольняє умовам (10), оскільки e , та $\bar{\mu}_i$ (за наслідком 1) задовольняють (10). По-друге, за наслідком 1 $\bar{\mu}_i$ у парі з ситуацією x задовольняють умовам (9). Таким чином, за (1) одержимо:

$$\begin{aligned} \mu_i^j &= \lambda_i + (1 - \lambda_i) \chi \frac{u_i(x)}{S} + \frac{1}{n} - \sum_{k \in N} u_k(x)/Sn, \\ \mu_i^j &= (1 - \lambda_i) \chi \frac{u_j(x)}{S} + \frac{1}{n} - \sum_{k \in N} u_k(x)/Sn, j \neq i. \end{aligned} \quad (16)$$

Звідси очевидно впливають три випадки:

$$S(\mu_i^j - \mu_i^k) = \lambda_i S + (1 - \lambda_i)(u_i(x) - u_k(x)); \quad (17)$$

$$S(\mu_i^j - \mu_i^k) = (1 - \lambda_i)(u_j(x) - u_k(x)), j, k \neq i; \quad (18)$$

$$S(\mu_i^j - \mu_i^j) = -\lambda_i S + (1 - \lambda_i)(u_j(x) - u_i(x)), \forall j \in N.$$

Оцінимо зверху параметр $\lambda_i \in [0, 1]$ за умовами (9). Нехай $k = i = j$. Тоді з нерівностей (9) безпосередньо одержимо

$$u_i(x) \geq u_i(y_i, x), \forall y_i \in X_i \Rightarrow \lambda_i \in E^1. \quad (19)$$

Нехай $k = i \neq j, j \in N$. Тоді з нерівностей (9)

$$\bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N} (S(\mu_i^j - \mu_i^j) - u_j(y_i, x) + u_i(x) \geq 0). \text{ Звідси з рівності (17) вийде } \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N} (-\lambda_i S + (1 - \lambda_i)(u_j(x) - u_i(x)) - u_j(y_i, x) + u_i(x) \geq 0). \text{ Тоді одержимо}$$

$$\lambda_i(u_i(x) - u_i(x) - S) - (u_j(y_i, x) - u_j(x)) \geq 0 \quad (20)$$

для $\forall y_i \in X_i, j \in N$. Оскільки функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$, то $u_i(x) - u_i(x) - S < 0$.

Звідси для фіксованого $y_i \in X_i$ остаточно одержимо оцінку $\lambda_i \leq \max_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{u_j(y_i, x) - u_j(x)}{u_i(x) - u_i(x) - S}$.

Таким чином, для $k = i$, з рахунком (19), величина

$$\lambda_i \leq \min_{y_i \in X_i} \left\{ \max_{j \in N} \frac{1, u_i(x) \geq u_j(y_i, x), u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)} \right\}. \quad (21)$$

Нехай $k \neq i, k \in N$. Тоді з нерівностей (9) одержимо вираз

$$\bigwedge_{k \in N \setminus \{i\}} \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N \setminus \{i\}} (S(\mu_i^j - \mu_i^k) - u_j(y_i, x) + u_k(x) \geq 0).$$

Тоді з рівності (18) впливають вирази:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{k \in N \setminus \{i\}} \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N \setminus \{i\}} ((1 - \lambda_i)(u_i(x) - u_k(x)) - \\ - u_j(y_i, x) + u_k(x) \geq 0), \\ \bigwedge_{k \in N \setminus \{i\}} \bigwedge_{y_i \in X_i} \bigvee_{j \in N \setminus \{i\}} (\lambda_i(u_k(x) - u_i(x)) - \\ - (u_j(y_i, x) - u_j(x)) \geq 0). \end{aligned} \quad (22)$$

Покажемо, що співвідношення (22) є наслідком (20). Нехай $\lambda_i \in [0, 1]$ задовольняє (20) для $\forall y_i \in X_i$ та деякого $j \in N$. Тобто

$$\lambda_i(u_i(x) - u_i(x) - S) - (u_j(y_i, x) - u_j(x)) \geq 0. \quad (23)$$

Припустимо супротивне, що $\exists k \in N \setminus \{i\}, \exists y_i \in X_i$, для яких мають місце нерівності: $\lambda_i(u_k(x) - u_i(x)) - (u_j(y_i, x) - u_j(x)) < 0, \forall l \neq i$. Зокрема для $l = j$ одержимо нерівність

$$\lambda_i(u_k(x) - u_i(x)) - (u_j(y_i, x) - u_j(x)) < 0. \quad (24)$$

Розглянемо різницю нерівностей (23) та (24). Тоді одержимо $\lambda_i(u_i(x) - u_k(x) - S) > 0$. Оскільки за припущенням теореми функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$, то $u_i(x) - u_k(x) - S < 0$ і тому $\lambda_i < 0$. Таким чином, одержали суперечність і (22) є наслідком (20).

Оскільки були розглянуті усі можливі випадки, то остаточно маємо оцінку (21). Звідси та з (16) для задачі (10) - (12) одержимо (14), (15). Теорему доведено.

Цей метод наближеного розв'язку задачі (10) - (12) не був би цікавим, як будь-який інший евристичний метод, аби не його властивості, які проявляються при наближеному розв'язку за його допомогою задачі (3) - (5). Доведемо наступні теореми.

Теорема 3. Нехай без обмеження загальності функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$. Тоді для $\forall x \in X$ максимальне значення (3) дорівнює

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{\max}(x) &= \sum_{i \in N} \hat{\mu}_i^{\max}(x) \geq \tilde{\mu}^{\max}(x), \text{ де} \\ \tilde{\mu}^{\max}(x) &= 1 + \left(\sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} \right) ((n-1)/n + \\ &+ \sum_{i \in N} u_i(x)/Sn) - \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} u_i(x)/S. \end{aligned} \quad (25)$$

а величини $\tilde{\lambda}_i^{\max}, i \in N$, розраховуються відповідно за формулами (15). Ситуація $x \in X$ задовольняє умовам (4), (5) тоді й лише тоді, коли має місце нерівність $\min_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} \geq 0$.

Доведення. Оскільки умови (4), (5) складаються з незалежних між собою умов (11), (12) для кожного $i \in N$, а цільова функція (3) є сумою за $i \in N$ цільових функцій (10), то, цілком зрозуміло, що $\hat{\mu}^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \hat{\mu}_i^{\max}(x)$. З теореми 2 випливає, що $\hat{\mu}_i^{\max}(x) \geq \tilde{\mu}_i^{\max}(x), i \in N$. Тому $\hat{\mu}^{\max}(x) \geq \tilde{\mu}^{\max}(x)$, де

$$\tilde{\mu}^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \tilde{\mu}_i^{\max}(x). \quad (26)$$

Звідси за формулою (14) одержимо: $\tilde{\mu}^{\max}(x) = \sum_{i \in N} (\tilde{\lambda}_i^{\max} + (1 - \tilde{\lambda}_i^{\max})(u_i(x)/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x)/Sn))$. Неважко перевірити, що звідси за умов (5) випливає формула (25).

Нехай ситуація $x \in X$ задовольняє умовам (4), (5). Припустимо супротивне, що $\exists i \in N$, для якого величина $\tilde{\lambda}_i^{\max} < 0$.

Якщо $\tilde{\lambda}_i^{\max} < 0$, то за формулою (15) $\exists y_i \in X_i$, для якого $u_i(x) < u_i(y_i, x)$ та для $\forall j \in N \setminus \{i\}$ величина $\frac{u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)} < 0$. Оскільки за припущенням теореми функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$, то має місце нерівність $S - u_i(x) + u_j(x) > 0$. Тому $u_j(x) < u_j(y_i, x), j \in N \setminus \{i\}$. Звідси одержимо:

$$u_j(x) < u_j(y_i, x), j \in N. \quad (27)$$

Тоді за означенням $x \in WIOE$ і за теоремою 1 ситуація x не буде задовольняти умовам (4), (5). Одержали суперечність. Таким чином, $\min_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} \geq 0$.

Нехай $\min_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} \geq 0$. Припустимо супротивне, що ситуація x не задовольняє умовам (4), (5). Тоді за теоремою 1 $x \in WIOE$. Звідси за означенням $\exists i \in N, \exists y_i \in X_i$, що $y_i \succ x$, а тому $u_j(x) = u_j(x, x_{N \setminus i}) < u_j(y_i, x_{N \setminus i}), j \in N$. Звідси одержимо нерівності (27). Оскільки за припущенням теореми функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$, то $S - u_i(x) + u_j(x) > 0$ і звідси величина $\frac{u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)} < 0$. Тоді за формулою (15) величина $\tilde{\lambda}_i^{\max} < 0$. Звідси випливає $\min_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} < 0$, що суперечить вихідному припущенню. Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай, без обмеження загальності, функції виграшу $u_j(x) > 0, j \in N, x \in X$. Тоді, якщо ситуація $x \in WIOE$ (є слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою), то розраховані за формулами (14) для $\forall x \in X$ наближення до максимального значення цільової функції задачі (3) - (5) $\tilde{\mu}^{\max}(x) \geq 1$. Ситуація $x \in NE$ (є рівновагою за Нешем) тоді й лише тоді, коли $\tilde{\mu}^{\max}(x) = n$.

Доведення. Розглянемо спочатку перше твердження. Нехай ситуація $x \in WIOE$. Доведемо, що $\tilde{\mu}^{\max}(x) \geq 1$. Припустимо супротивне, що $\tilde{\mu}^{\max}(x) < 1$. Тоді з (25) випливає:

$$\begin{aligned} 0 &> \left(\sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} \right) ((n-1)/n + \sum_{i \in N} u_i(x)/Sn) - \\ &- \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} u_i(x)/S = \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} (1 - (1/n - \\ &- \sum_{k \in N} u_k(x)/Sn + u_i(x)/S)) = \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_i^{\max} (1 - \bar{\mu}_i'), \end{aligned}$$

де величини $\bar{\mu}_i', i \in N$, розраховуються за формулою (1) і приймають значення з проміжку $[0, 1]$. Звідси випливає, що $\exists i \in N$, для якого величина $\tilde{\lambda}_i^{\max} < 0$. Тоді за теоремою 3 ситуація $x \in X$ не задовольняє умовам (4), (5). Звідси за теоремою 1 одержимо відношення $x \in WIOE$, що суперечить вихідному припущенню.

Розглянемо друге твердження. Нехай ситуація $x \in NE$. Тоді $u_i(y_i, x_{N \setminus i}) \leq u_i(x), \forall y_i \in X_i, i \in N$. Звідси за формулою (15) $\tilde{\lambda}_i^{\max} = 1, i \in N$. Тому за формулою (25) одержимо $\tilde{\mu}^{\max}(x) =$

$$= 1 + n((n-1)/n + \sum_{i \in N} u_i(x)/Sn) - \sum_{i \in N} u_i(x)/S = n.$$

Нехай $\tilde{\mu}^{\max}(x) = n$. Покажемо, що ситуація $x \in NE$. Оскільки, за побудовою методу, максимальне значення цільової функції задачі (3) - (5) $\hat{\mu}^{\max}(x) \geq \tilde{\mu}^{\max}(x)$, а з іншого боку, з умов (5) випливає, що $\hat{\mu}^{\max}(x) \leq n$, то $\hat{\mu}^{\max}(x) = n$. Тоді ситуація x повинна задовольняти умовам (4) із значеннями параметрів $\mu_i \in M_i^{20}$, $i \in N$, такими, що $\sum_{i \in N} \mu_i = n$. Звідси за (6) $x \in NE$. Теорему доведено.

Таким чином, хоча метод, який був розглянутим вище, є наближеним, він відрізняє слабкі індивідуально-оптимальні рівноваги від інших і дає точне значення критерію стабільності для "характерних" ситуацій, а саме рівноваг за Нешем.

Окрім розглянутих вище властивостей, виявляється, що розглянутий вище метод дає точне значення критерію стабільності для ігор двох осіб.

Теорема 5. Нехай, без обмеження загальності, функції виграшу $u_j(x) > 0$, $j \in N$, $x \in X$. Тоді у грі двох осіб ($|N| = 2$) для $\forall x \in X$ максимальне $\hat{\mu}^{\max}(x)$ значення цільової функції задачі (3) - (5) може бути розрахованими відповідно за формулами (25).

Доведення. Для гри двох осіб за формулою (26) одержимо $\tilde{\mu}^{\max}(x) = \tilde{\mu}_1^{\max}(x) + \tilde{\mu}_2^{\max}(x)$, де значення $\tilde{\mu}_i^{\max}(x)$, $i = 1, 2$ обчислюються за формулами (14). Тому для доведення теореми достатньо показати, що $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \hat{\mu}_i^{\max}(x)$, де значення $\hat{\mu}_i^{\max}(x)$, $i = 1, 2$ обчислюються за формулою (13).

Для $i = 1, 2$ за формулою (14) $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \tilde{\lambda}_i^{\max} + (1 - \tilde{\lambda}_i^{\max})(u_i(x)/S + 1/2 - u_i(x)/2S - u_j(x)/2S) = \tilde{\lambda}_i^{\max} + (1 - \tilde{\lambda}_i^{\max}) \frac{S + u_i(x) + u_j(x)}{2S}$, $j = 1, 2; j \neq i$. Звідси для $\forall u_j \in X_j$ і для $\forall j = 1, 2; j \neq i$ за (15) розглянемо два випадки.

Якщо $u_i(x) \geq u_i(y_i, x)$, то $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = 1$. Тоді оскільки за формулою (13) у цьому випадку $\hat{\mu}_i^{\max}(x) = 1$, то $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \hat{\mu}_i^{\max}(x)$.

Нехай $u_i(x) < u_i(y_i, x)$. Тоді за (15) одержимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i^{\max}(x) &= \frac{u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)} + \\ &+ \left(1 - \frac{u_j(x) - u_j(y_i, x)}{S - u_i(x) + u_j(x)}\right) \frac{S + u_i(x) + u_j(x)}{2S} = \\ &= \frac{(S + u_i(x) - u_j(y_i, x))(S - u_i(x) + u_j(x))}{2S(S - u_i(x) + u_j(x))} = \end{aligned}$$

$\frac{1}{2S}(S + u_i(x) - u_j(y_i, x))$. Оскільки за формулою (13) у цьому випадку виходить таке саме значення, то $\tilde{\mu}_i^{\max}(x) = \hat{\mu}_i^{\max}(x)$. Теорему доведено.

У висновку слід відмітити, що підхід до наближеної оцінки максимальної стабільності індивідуально-оптимальних рівноваг в некооперативних іграх, який був розглянутим у цій роботі, представляє також самостійний інтерес і може бути застосованим для наближеного розв'язку загальних задач математичного диз'юнктивного програмування.

Список використаних джерел

1. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности // Кибернетика и системный анализ. -2007. -4. -С. 162-169.
2. Андромонов М. Решение задач квазилинейной алгебры // Вестник СамГУ. Естественнаучная серия. -2007. -2. -С. 37-45.
3. Мащенко С.О. Индивидуально-оптимальные равновесия в играх двух лиц // International Book Series "Information Science&Computing". -2008. -7. -Р. 157-163.
4. Мащенко С.О. Індивідуально-оптимальні рівноваги в некооперативних опуклих іграх // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2008. -2. -С. 105-110.
5. Мащенко С.О. Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2008. -3. -С. 142-147.

Надійшла до редколегії 10.11.09

УДК 519.86

Назарага І. М.

Модель ринку праці макроекономіки України

Наведено основні рівняння, які описують сектори домогосподарств та виробників, а також співвідношення, що визначають їх взаємодію на ринку праці української економіки, обчислено параметри отриманої моделі.

Ключові слова: ринок праці, виробники, домогосподарства.

E-mail: inna_na@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Для побудови загальної моделі макроекономіки України необхідно описати її складові (державний сектор, сектор домогосподарств, сектор виробників, сектор закордон), а також процеси їх взаємодії, які відбуваються на вітчизняних ринках: товарів та послуг, валютному, грошовому, ринку праці.

Такий підхід до моделювання із застосуванням принципу економічної рівноваги, використано при побудові макроекономічної моделі "Альфа", яку розроблено у Державному науково-дослідному інституті інформатизації та моделювання економіки [1].

У рамках вказаного підходу, у статті детально розглянуто сектори виробників та домогосподарств та їх взаємодію на ринку праці.

Сектор виробників

Модель сектору виробників складають рівняння, згідно з якими обчислюються випуск продукції, попит на працю (кількість працівників, яких потребує виробничий сектор), ціна попиту на працю (заробітна плата, яку пропонують у виробничому секторі), реальний ВВП.

Загалом, основою побудови моделі сектору виробників є виробнича функція, яка показує залежність кінцевого випуску продукції чи її вартості від використання різних факторів виробництва, конкретних видів ресурсів і затрат. На макрорівні агрегована виробнича функція – це сукупна пропозиція.

У моделі функція сукупної пропозиції представлена класичною виробничою функцією Кобба-Дугласа, але в кейнсіанській інтерпретації зі сталістю віддачі від масштабу в формі Тинбергена з деякими модифікаціями:

I. M. Nazaraga

The model of labour-market macroeconomics of Ukraine

Basic equalizations, which describe the sectors of households and manufacturers, and also correlations determining their co-operations at labour-market economics of Ukraine have been brought up here. Then the parameters of the received model have been calculated.

Key Words: labour-market, manufacturers, households.

$$V_t = e^{\gamma} L_t^{\beta_1} (\vartheta_t K_t)^{1-\beta_1} \quad (1)$$

Тут V_t – випуск продукції.

e^{γ} – технічний прогрес.

γ – постійний темп технічного прогресу (приймається 0,5% на рік).

$L_t = \xi_t N_t W_t$ – витрати на працю.

ξ_t – коефіцієнт зайнятості: частка найманих працівників у загальній чисельності зайнятих в економіці.

N_t – загальна чисельність зайнятих.

W_t – середньорічна номінальна заробітна плата найманих працівників.

β_1 – коефіцієнт еластичності при витратах праці.

ϑ_t – коефіцієнт завантаження виробничого капіталу.

$K_t = (K_{t-1} - A_{t-1} + I_{t-1} + I_{ZZ,t-1})P_{t-1}$ – вартість виробничого капіталу.

K_{t-1} – виробничий капітал попереднього періоду.

A_{t-1} – амортизація попереднього періоду.

$I_{ZZ,t-1}$ – прямі іноземні інвестиції попереднього періоду.

I_{t-1} – інвестиції в основний капітал попереднього періоду.

P_{t-1} – дефлятор ВВП попереднього періоду.

Оптимальний за критерієм максимізації прибутку попит на працю N_t^D та ціна попиту на працю W_t^D дорівнюють:

$$N_i^{11} = \frac{\partial_i K_i}{\xi_i W_i^{\beta_i} \sqrt{e^{\alpha} \beta_i P_i}} = \frac{\partial_i K_i}{\xi_i W_i} (e^{\alpha} \beta_i P_i)^{\frac{1}{1-\beta_i}}, \quad (2)$$

$$W_i^{11} = \frac{\partial_i K_i}{\xi_i N_i^{\beta_i} \sqrt{e^{\alpha} \beta_i P_i}}. \quad (3)$$

Дійсно, максимум прибутку можна отримати за умови, що цінність кінцевого продукту праці дорівнює ставці заробітної плати W , тобто

$$P \frac{\partial V}{\partial \Pi} = W \text{ або } \frac{\partial V}{\partial \Pi} = \frac{W}{P}, \text{ де } \Pi = \xi N - \text{праця.}$$

Звідси, використовуючи (1), знайдемо значення оптимального попиту на працю (2) та ціну попиту на працю (3).

Реальний ВВП є частиною випуску і характеризується коефіцієнтом структури витрат - σ_i , що визначає частку ВВП у випуску продукції:

$$\begin{aligned} Q_i^*(P_i) &= \sigma_i e^{\alpha} [\xi_i N_i^{11}(P_i) W_i^{11}]^{\beta_i} (\partial_i K_i)^{1-\beta_i} = \\ &= \sigma_i e^{\alpha} [e^{\alpha} \beta_i P_i]^{\beta_i/(1-\beta_i)} \partial_i K_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, модель виробничого сектору описується рівняннями (1) – (4).

Сектор домогосподарств

Модель сектору домогосподарств описується рівняннями, які визначають пропозицію праці, ціну пропозиції праці, чисельність населення, наявний дохід домогосподарств, споживання домогосподарств, максимальну чисельність зайнятих у сфері виробництва.

Приймаючи рішення щодо продажу своєї праці [2, с. 63], домогосподарство робить вибір між пропозицією своєї праці та тривалістю вільного часу.

Перевата домогосподарств щодо вільного часу F чи одержання за працю доходу y може бути вираженою функцією корисності $U = \sqrt{yF}$. Домогосподарства отримують дохід від продажу своєї праці N^S , за яку вони одержують ставку номінальної заробітної плати. Вільний час F визначається як різниця загального фонду часу $\tilde{T}$ і відпрацьованого часу: $F = \tilde{T} - N^S$. Необхідно так розподілити $\tilde{T} = N^S + F$, щоб при наявних можливостях одержання доходу y функція корисності U досягла максимального значення.

У масштабах економіки країни $\tilde{T}$ еквівалентний чисельності населення в розгорнутий період ($\tilde{T} = T_N$), кількість робочого часу N^S – пропозиції праці, а F – чисельності

непрацюючого населення країни [1, с. 83-84]. Можливість одержання домогосподарствами доходу визначається наявними в них джерелами доходів:

$$y = WN^S + rK^*, \text{ де}$$

W – середньорічна номінальна зарплата.

N^S – пропозиція праці,

r – гранична продуктивність капіталу,

K^* – майно (капітал) у власності домогосподарств.

$$rK^* = OT_N - \text{дохід з майна населення.}$$

$y - W(T_N - F) - OT_N = 0$ – рівняння зв'язку між y та F .

Пропозиція праці $N_i^S = \frac{1}{2} T_{N,i} \left(1 - \frac{O_i}{W_i} \right)$ знахо-

диться з таких міркувань:

$$U = \sqrt{(WN^S + OT_N)(T_N - N^S)}.$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \sqrt{yF} + \lambda(y - W(\tilde{T} - F) - OT_N).$$

Необхідні умови екстремуму:

$$1) \partial L / \partial y = 0.5F / \sqrt{yF} + \lambda = 0;$$

$$2) \partial L / \partial F = 0.5y / \sqrt{yF} + \lambda W = 0;$$

$$3) \partial L / \partial \lambda = y - W(\tilde{T} - F) - OT_N = 0.$$

Звідси $y = FW$, а підставивши в третє рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} FW - W(\tilde{T} - F) - OT_N &= 0 \Rightarrow \\ (T_N - N^S)W_i - W_i N^S - O_i T_N &= 0. \end{aligned}$$

Тоді можемо записати функцію пропозиції праці за наявності грошової ілюзії (припущення про незнання майбутньої інфляції):

$$N_i^S = \frac{1}{2} T_{N,i} \left(1 - \frac{O_i}{W_i} \right). \quad (5)$$

Відповідно функція ціни пропозиції праці за наявності грошової ілюзії:

$$W_i^S = \frac{O_i T_{N,i}}{T_{N,i} - 2N_i^S}. \quad (6)$$

Зауважимо, що функції пропозиції праці та ціни пропозиції праці за відсутності грошової ілюзії мають наступний вигляд:

$$N_i^S = \frac{1}{2} T_{N,i} \left(1 - \frac{O_i P_i}{W_i} \right),$$

$$W_t^s = \frac{O_t T_{N,t} P_t}{T_{N,t} - 2N_t^s}.$$

Прихильники кейнсіанства неодноразово доводили, що повна відсутність грошових ілюзій (припущення про знання майбутньої інфляції) є неспроможною, оскільки вони змушені діяти в умовах майбутньої невизначеності [1, ст. 13].

На користь проведення обрахунків при наявності грошових ілюзій свідчать і факти неодноразових змін прогнозів таких установчих організацій, як Міністерство економіки, Міністерство фінансів і НБУ.

Отже, пропозиція праці та ціна пропозиції праці обчислюються згідно формул (5) та (6).

У моделі чисельність населення змінюється згідно із заданим темпом демографічного росту [3, ст.226]:

$$T_{N,t} = T_{N,0} \exp(\lambda_t t). \quad (7)$$

де $T_{N,0}$ - чисельність населення на початковий момент розрахунків,

λ_t - темп демографічного росту, параметр моделі.

Наявний дохід домогосподарств Y_t^F можна визначити згідно до схеми національних рахунків як різницю національного доходу Y_t та податків T_t , які стягуються з домогосподарств:

$$Y_t^F = Y_t - T_t, \quad (8)$$

$$T_t = T_{Y,t} Y_t. \quad (9)$$

$T_{Y,t}$ - ставка податку поточного періоду.

Відповідно до теорії споживання М. Фрідмена, споживання домогосподарств визначається нормою споживання, яка зберігається за людиною протягом всього її життя за умов збереження поточного рівня багатства та доходу з урахуванням її очікувань на майбутнє.

Однією із широковживаних у сучасних економічних розрахунках кейнсіанська функція споживання домогосподарств має наступний вигляд:

$$C_t = C_{Y,t} \alpha Y_t^F + C_{Y,t} (1 - \alpha) Y_{t-1}^F + C_{0,t}. \quad (10)$$

$C_{Y,t}$ - гранична схильність до споживання,

$C_{0,t}$ - ефект майна,

Y_{t-1}^F - наявний дохід домогосподарств попереднього періоду,

α - частка збільшення доходу в майбутньому, що додається до поточного доходу при обчисленні перманентного доходу, параметр моделі (емпіричне значення $\alpha = 0,8$).

$$C_{Y,t} = \Delta C_t / \Delta Y_t^F. \quad (11)$$

$$C_{0,t} = O_t T_{N,t}. \quad (12)$$

O_t - дохід з майна на душу населення,

Як показано в [1, с. 84-85], при досить великому значенні W_t/O_t , подальше зростання співвідношення оплати праці та доходу з майна не дасть значного збільшення приведеної пропозиції праці до середньорічної чисельності населення.

Дійсно, з (5) випливає, що за невід'ємних значень N_t^s , $T_{N,t}$, W_t , O_t графіком функції $N_t^s / T_{N,t} = f(W_t / O_t)$ є частина гіперболи (див.

рис. 1), причому $N_t^s / T_{N,t} \xrightarrow{W_t / O_t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

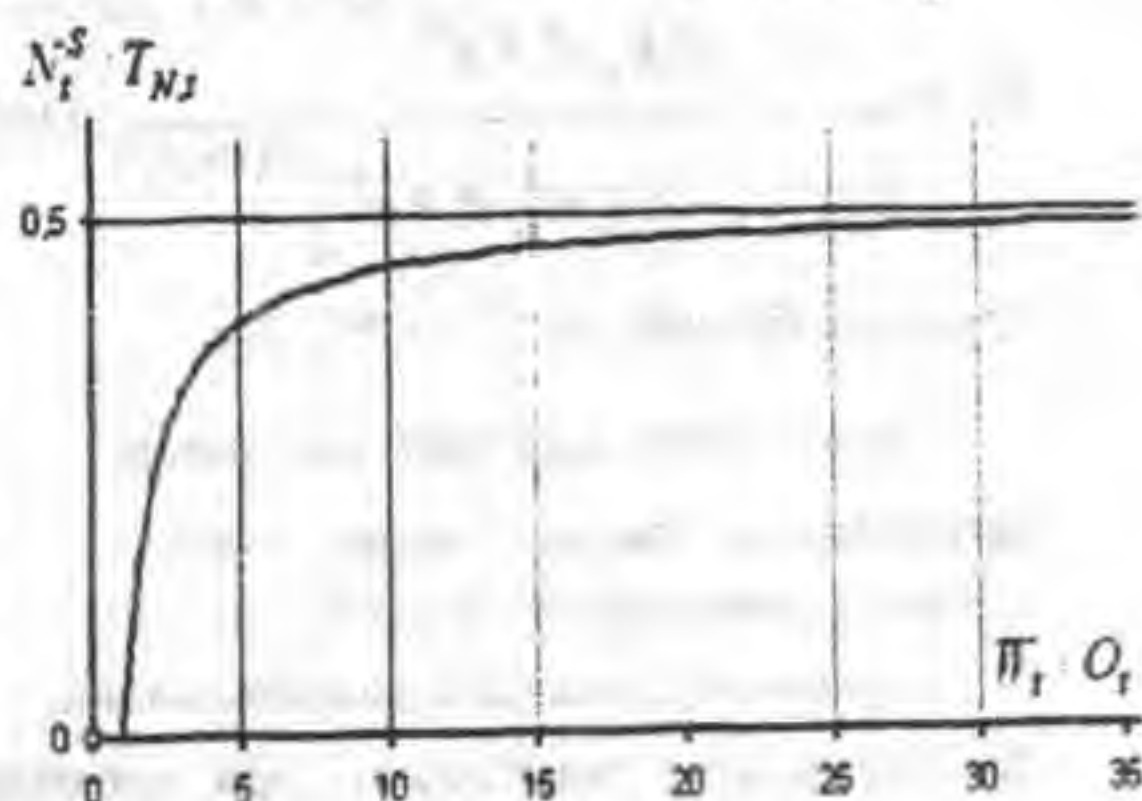


Рис.1. Графік функції $N_t^s / T_{N,t} = f(W_t / O_t)$.

Позначимо $W_t / O_t = d$, $d > 20$. Отже, при $W_{0,t} = d O_t$ пропозиція праці на ринку практично відповідає повній зайнятості. Тоді практично максимальна чисельність зайнятих у сфері виробництва дорівнює:

$$P_{0,t} = \frac{1}{2} T_{N,t} \xi_t \left(1 - \frac{O_t}{W_{0,t}} \right) = \frac{d-1}{2d} \xi_t T_{N,t}. \quad (13)$$

Отже, модель сектору домогосподарств описується рівняннями (5) – (13).

Ринок праці

Модель ринку праці складає система рівнянь, що визначає рівновагу між попитом і пропозицією праці та ціною попиту і пропозиції праці.

Зокрема, рівноважну заробітну плату повної зайнятості $W_{0,t}$ можна визначити з умови рівноваги між попитом і пропозицією праці, тобто $N_t^D = N_t^S$, а, отже, з рівнянь (2) та (5):

$$\frac{\partial_i K_i}{\xi_i W_{0,i}} (e^{\lambda_i} \beta_i P_i)^{\frac{1}{1-\beta_i}} = \frac{1}{2} T_{N,i} \left(1 - \frac{O_i}{W_{0,i}} \right). \quad (14)$$

Отже,

$$W_{0,i} = \frac{\xi_i O_i T_{N,i} + 2 \cdot \partial_i K_i \left(\beta_i P_i e^{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{1-\beta_i}}}{\xi_i T_{N,i}}. \quad (15)$$

Для знаходження рівноважної ефективної зайнятості $N_{0,i}$ запишемо умову рівноваги

$W_i^D = W_i^S$, використовуючи (3) та (6):

$$\frac{\partial_i K_i}{\xi_i N_{0,i}^{\beta_i} \sqrt{e^{\lambda_i} \beta_i P_i}} = \frac{O_i T_{N,i}}{T_{N,i} - 2N_{0,i}}$$

Звідси

$$N_{0,i} = \frac{T_{N,i} \cdot \partial_i K_i \left(\beta_i P_i e^{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{1-\beta_i}}}{\xi_i O_i T_{N,i} + 2 \cdot \partial_i K_i \left(\beta_i P_i e^{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{1-\beta_i}}}. \quad (16)$$

Природне безробіття: $F_{0,i} = N_i^S - N_{0,i}$.

Знаходження параметрів моделі

Параметрами отриманої моделі є такі:

λ_i - темп демографічного росту,

$C_{T,i}$ - гранична схильність до споживання,

β_i - коефіцієнт еластичності при витратах праці,

σ_i - коефіцієнт структури витрат,

θ_i - коефіцієнт завантаження виробничого капіталу,

ξ_i - коефіцієнт зайнятості.

У роботі темп демографічного росту λ_i визначено методом найменших квадратів, використовуючи наявну статистичну інформацію за 1993 – 2008 роки (див. рис. 2):

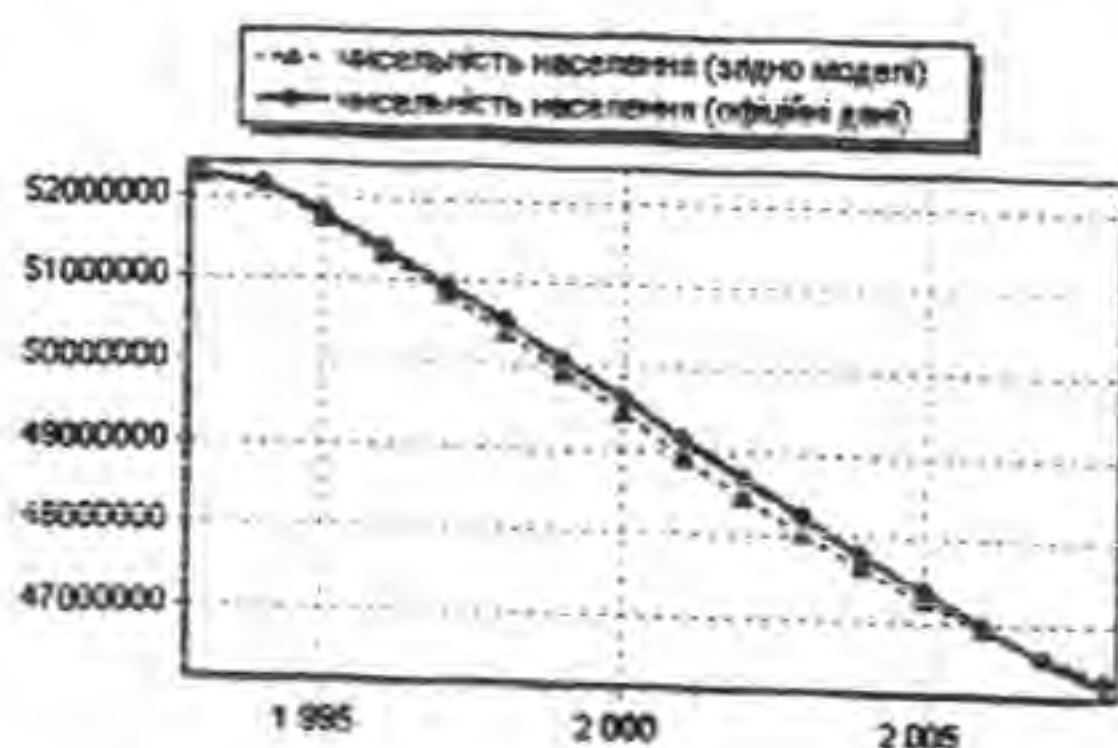


Рис. 2. Чисельність населення за 1993 – 2008 рр.

За розрахунками, $\lambda_i = -0.0081433$, $R^2 = 0.98987$.

У моделі макроекономіки України граничну схильність до споживання визначено методом найменших квадратів із використанням статистичної інформації за 2001 – 2008 роки щодо таких макропоказників, як кінцеве споживання та чистий наявний дохід населення (див. рис. 3):

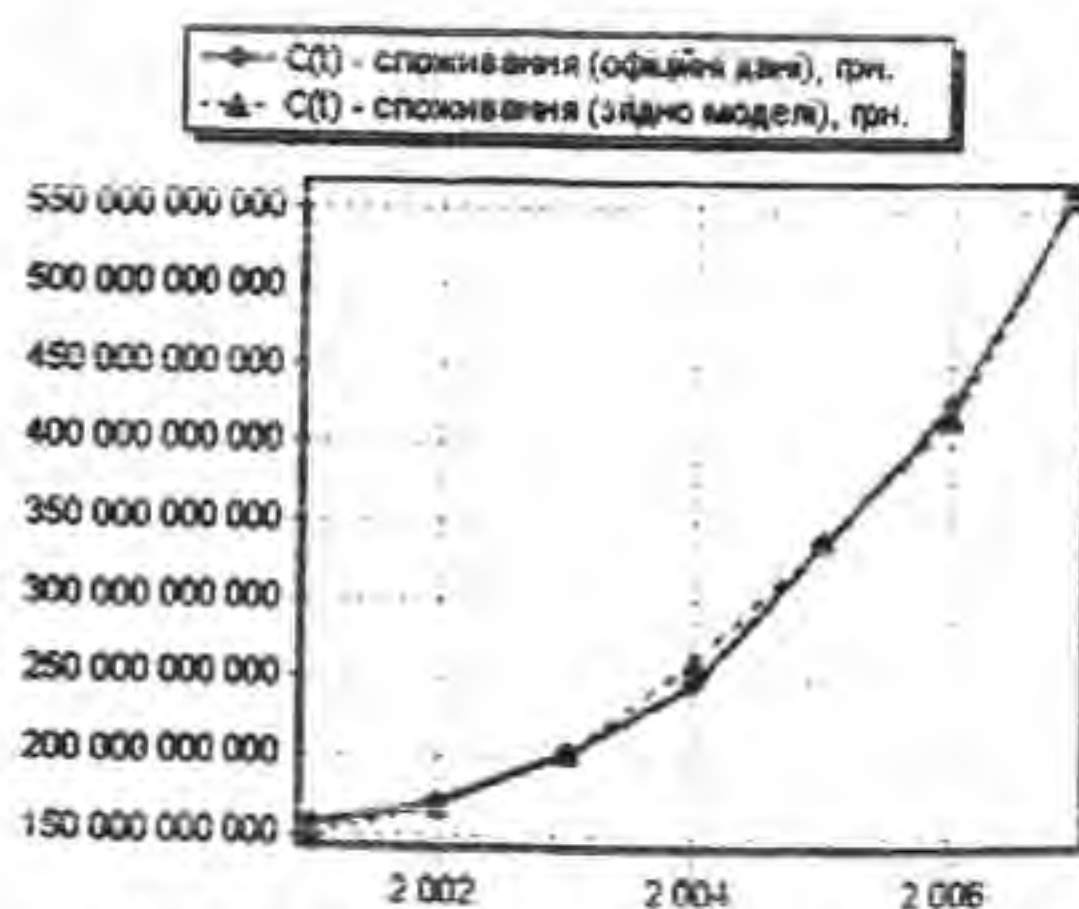


Рис. 3. Споживання населення за 2001 – 2007 рр.

Згідно із проведеними розрахунками, $C_{T,i} = 0.83919$, $R^2 = 0.99709$.

Обчислене значення граничної схильності до споживання можна порівняти із значеннями, отриманим з іншого джерела, наприклад [4]. У таблиці 8.21 вказаної книги наведено такі результати:

Таблиця 1

Гранична схильність домашніх господарств до споживання у 1996 – 2006 рр., %.

Рік	Гранична схильність до споживання
2000	87,1
2001	88,5
2002	54,5
2003	103,7
2004	68,9
2005	83,7
2006	97,7
Середнє за 1996-2000	96,8
Середнє за 2001-2005	79,9

Для знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці β_1 з рівнянь (2), (13), (14) отримаємо співвідношення:

$$P_{0j} W_j = \left[\frac{Q_j^S \beta_1 P_j}{\sigma_j (\xi_j N_j W_j)^{\beta_1}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_1}}$$

Після логарифмування та перетворення маємо:

$$-\ln \frac{P_{0j}}{\xi_j N_j} \beta_1 + \ln \frac{P_{0j} W_j \sigma_j}{Q_j^S P_j} = \ln \beta_1$$

У лівій частині рівняння – лінійна функція від β_1 , а в правій – логарифмічна. Оскільки рівняння такого виду не можна розв'язати з допомогою алгебраїчних операцій [5, с. 82], то значення β_1 можна знайти одним із наближених методів. Оскільки для періоду 2000 – 2007 років $\ln \frac{P_{0j}}{\xi_j N_j} = \ln \frac{(d-1)\xi_j T_{Nj}}{2d\xi_j N_j} = \ln \frac{(d-1)T_{Nj}}{2dN_j} > 0$, то розв'язок існує і він єдиний.

Використовуючи метод Ньютона (графічне представлення застосування методу для 2000 та 2001 років на рис. 4), отримаємо такі значення β_1 (рис. 5) для періоду 2000 – 2007 років: (0,135; 0,133; 0,141; 0,128; 0,106; 0,104; 0,101; 0,084).

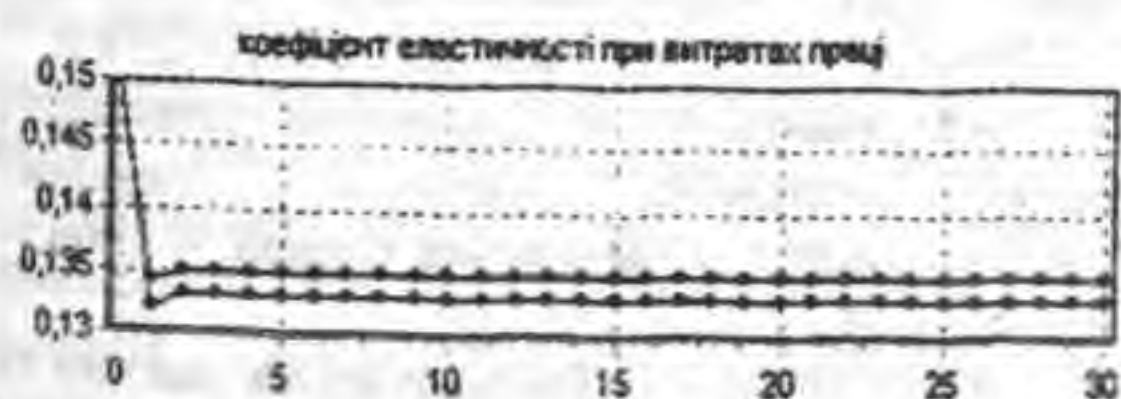


Рис. 5. Знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці за 2000 та 2001 рр. методом Ньютона.

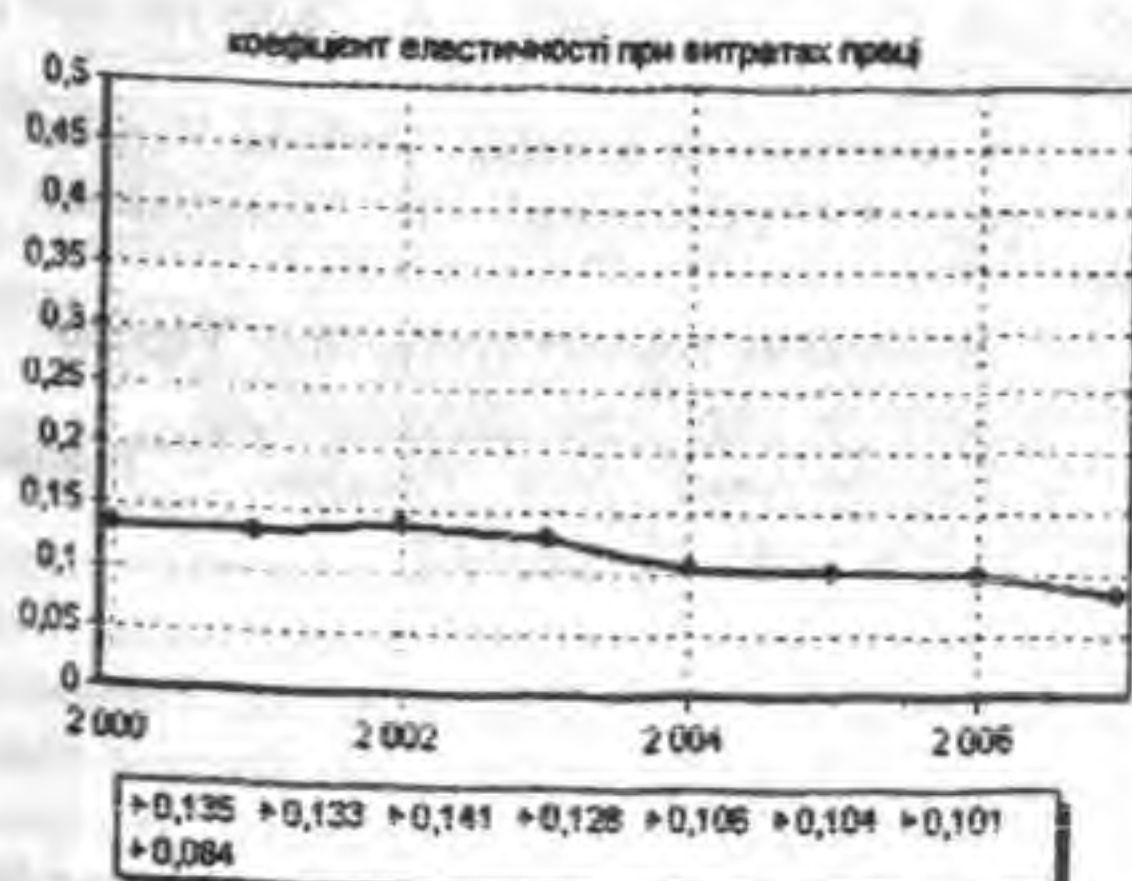


Рис. 5. Коефіцієнт еластичності при витратах праці за 2000 – 2007 рр.

Як зауважено у [6, с. 74] та [7, с. 44], оптимальне значення коефіцієнта еластичності при витратах праці згідно принципу "золотого перетину" складає 0,382, а отримані у роботі значення β_1 свідчать про наявність "тіньової" складової заробітної плати.

Коефіцієнт структури витрат σ_j обчислено, використовуючи статистичну інформацію за 2000 – 2007 роки щодо таких макропоказників, як випуск та ВВП (див. рис. 6).

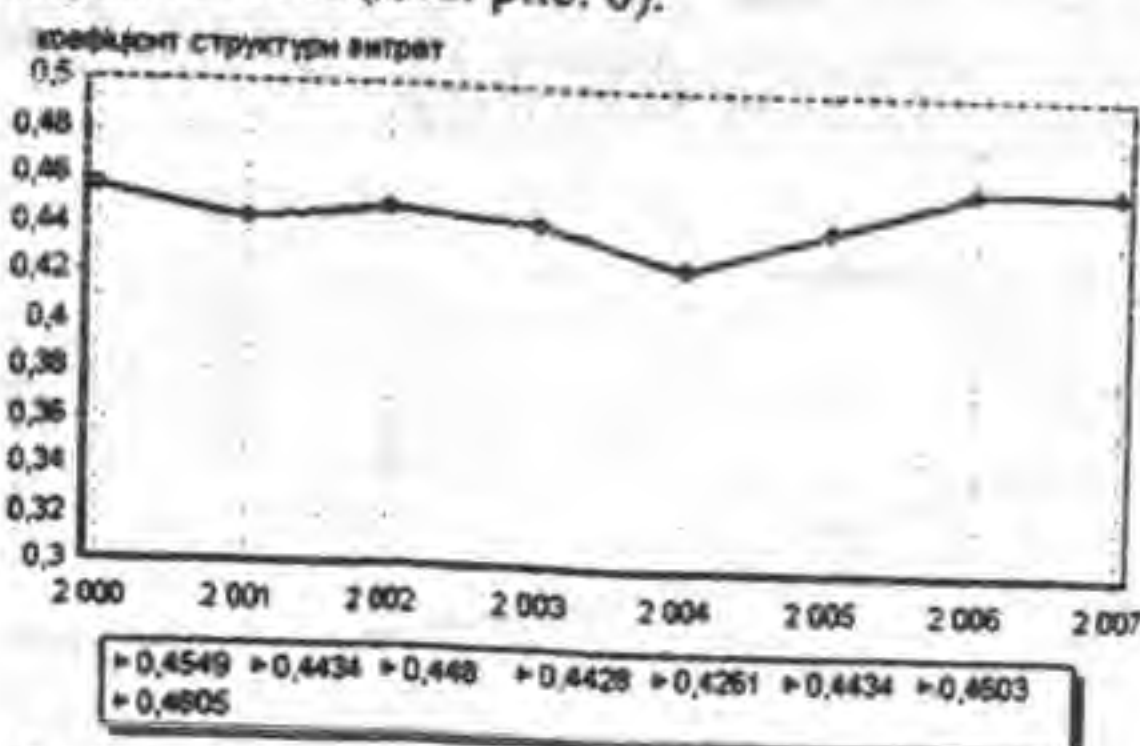


Рис. 6. Коефіцієнт структури витрат за 2000 – 2007 рр.

Для вказаного періоду вектор значень коефіцієнта структури витрат складає (0,4549; 0,4434; 0,448; 0,4428; 0,4261; 0,4434; 0,4603; 0,4605). Середнє значення σ_j дорівнює 0,447424.

Для знаходження ϑ_j – коефіцієнта завантаження виробничого капіталу, використаємо формулу:

$$\vartheta_{t-1} = \frac{1}{K_{t-1}} \left[\frac{Q_{t-1}^S}{e^{\alpha} \sigma_{t-1} (\xi N W)_{t-1}^{\beta_1-1}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_1-1}}$$

яку отримано з рівняння (4).

Використовуючи наявну статистичну інформацію за 2000 – 2007 роки, отримаємо такі значення ϑ_j (див. рис. 7):

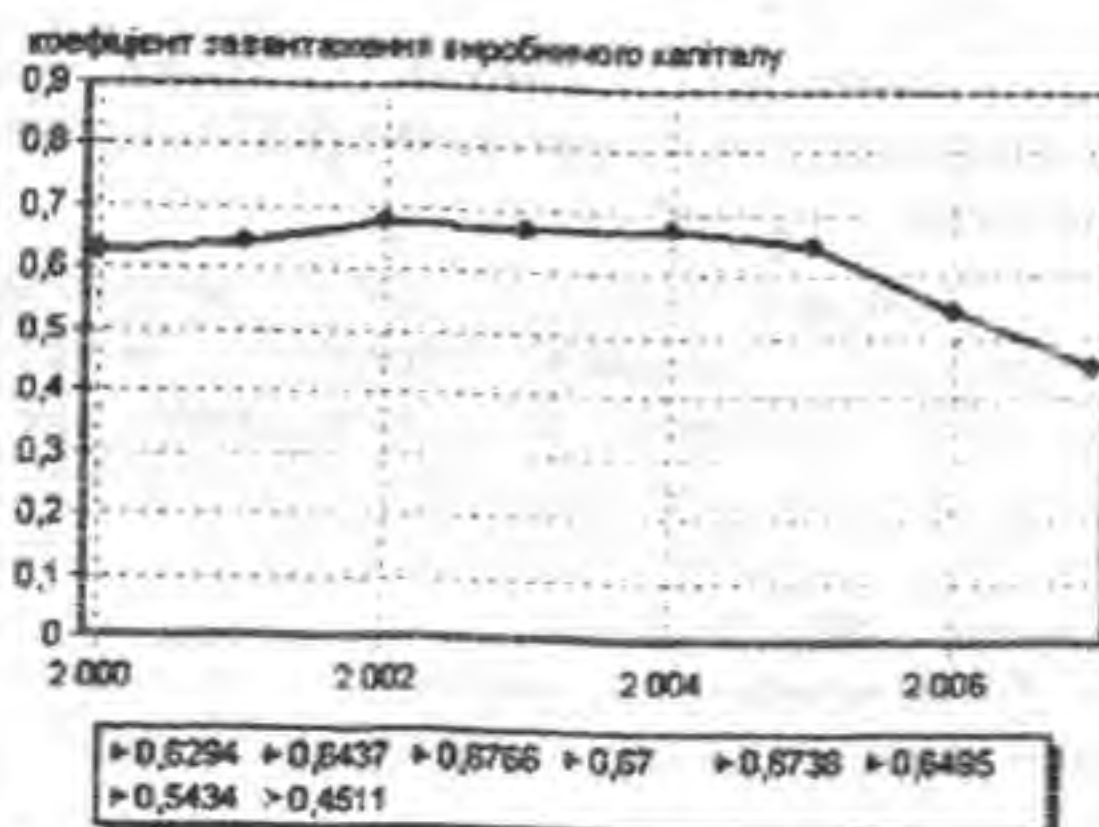


Рис. 7. Коефіцієнт завантаження виробничого капіталу за 2000 – 2007 рр.

УДК 517.9: 519.7

Сандраков Г.В., д. ф-м. н., с. н. с.
Крилова А.С.*, асп.

Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток

У статті розглядається спектральна задача на двовимірному та тривимірному «струнному хресті» з умовами контакту, умовами балансу натягу у спільному вузлі та крайовими умовами періодичності та а-періодичності. У результаті розрахунків отримано розв'язок задачі, який формує тривимірний простір при довільних константах для випадку двовимірного струнного хреста та чотиривимірний простір для випадку тривимірного струнного хреста.

Ключові слова: спектральна задача, фрагменти сіток та решіток, струнний хрест.

*E-mail: krilovaas@mail.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Розглядається моделювання фрагментів періодичних сіток та решіток на двовимірний та тривимірний струнний хрест відповідно. Дослідження спектральних властивостей отриманих моделей проводимо за допомогою систем лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. До цих рівнянь приводять багато задач фізики та механіки. Такі рівняння використовують, зокрема, при розрахунку динамічної стійкості пружних систем, сіток та решіток. У цій роботі розглядається спектральна задача для фрагментів мереж та решіток, які моделюють коливання мереж та решіток зі струн.

Подальше продовження дослідження вбачається у використанні отриманих результатів на фрагментах мереж та решіток для спектру всієї мережі та решітки методом усереднення, що розглянутий у [3] та [4].

Розглянемо спочатку поведінку струн на хресті, який є фрагментом періодичної мережі.

Модель «струнний хрест», вивчений з іншими граничними умовами у [2], складається з двох однакових однорідних натягнутих струн одиничної довжини (рис. 1), розташованих в одній площині під прямим кутом відносно одна одної та мають спільну середину, де вони зв'язані.

G.V. Sandrakov d.ph.-m.n., A.S. Krylova, postgraduate student.

A spectral task is for the fragments of nets and grates

In the article a spectral task is examined on two-dimensional and three-dimensional «string cross» with the terms of contact, by the terms of balance of pulls in a general site and by the regional terms of periodicity and a-periodicity. As a result of calculations the decision of task, which forms three-dimensional space at arbitrary constants for the case of two-dimensional string cross and four-dimensional space for the case of three-dimensional string cross, is got.

Key Words: a spectral task, fragments of nets and grates, string cross.

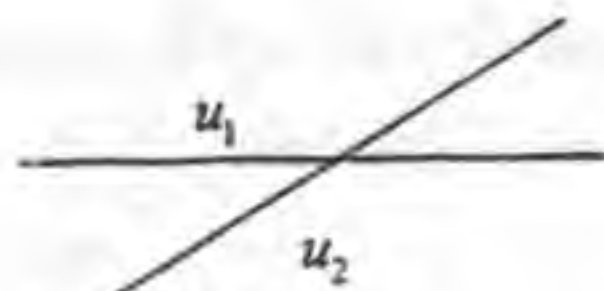


Рис. 1 Модель «струнний хрест»

Розглядається спектральна задача на цьому хресті:

$$\begin{aligned} -u_1'' &= \lambda u_1, \\ -u_2'' &= \lambda u_2. \end{aligned} \quad (1)$$

З наступними умовами контакту [2]: умова зв'язку у вузлі

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2)$$

умова балансу натягу у спільному вузлі

$$\begin{aligned} u_1'\left(\frac{1}{2}+0\right) - u_1'\left(\frac{1}{2}-0\right) + \\ + u_2'\left(\frac{1}{2}+0\right) - u_2'\left(\frac{1}{2}-0\right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

та крайовими умовами періодичності

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_1(1), \\ u_2(0) &= u_2(1), \\ u_1'(0) &= u_1'(1), \\ u_2'(0) &= u_2'(1). \end{aligned} \quad (4)$$

Кожне плече хреста є також струною, тому розглянемо систему з чотирьох функцій v_1, v_2, v_3, v_4 з періодичними крайовими умовами. У спільній точці усі чотири функції мають однакове значення, що призводить до використання умови контакту, і, для виключення зломів та розривів, перевіримо умову балансу натягу.

Розглянемо спектральну задачу на струнному хресті з позиції, зв'язки чотирьох відрізків, тобто розв'яжемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$-v_1'' = \lambda v_1; -v_2'' = \lambda v_2; -v_3'' = \lambda v_3; -v_4'' = \lambda v_4 \quad (5)$$

з відповідними крайовими умовами та умовами контакту.

Відомо, що на одному відрізку диференціальне рівняння виду $-u'' = \lambda u$, має узагальнений розв'язок у вигляді [1]:

$$u = \begin{cases} C_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + C_2 \sinh \sqrt{\lambda} x, & \text{при } \lambda < 0 \\ C_1 + C_2 x, & \text{при } \lambda = 0 \\ C_1 \cos x \sqrt{\lambda} + C_2 \sin x \sqrt{\lambda}, & \text{при } \lambda > 0 \end{cases} \quad (6)$$

1. Таким чином задачу (5) можна розглянути окремо для чотирьох функцій з наступними умовами контакту, зв'язку та крайовими умовами.

Перейдемо до розгляду власних функцій, ввівши позначення коефіцієнтів $C_1 = A$, $C_2 = C$ для зручності розгляду системи, вигляд якої залежить від λ з періодичними крайовими умовами, тобто

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_2(1), \\ v_3(0) &= v_4(1). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_1'(0) &= v_2'(1), \\ v_3'(0) &= v_4'(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Умова зв'язки вузлів (2) матиме вигляд

$$v_1\left(\frac{1}{2}\right) = v_2\left(\frac{1}{2}\right) = v_3\left(\frac{1}{2}\right) = v_4\left(\frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

та умова балансу натягу (3) з огляду різних функцій на плечах хреста

$$\begin{aligned} v_1'\left(\frac{1}{2} + 0\right) - v_2'\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \\ + v_3'\left(\frac{1}{2} + 0\right) - v_4'\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Нехай $\lambda > 0$, таким чином загальний розв'язок виглядатиме таким чином

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos x \sqrt{\lambda} + C_1 \sin x \sqrt{\lambda} \\ v_2 &= A_2 \cos x \sqrt{\lambda} + C_2 \sin x \sqrt{\lambda} \\ v_3 &= A_3 \cos x \sqrt{\lambda} + C_3 \sin x \sqrt{\lambda} \\ v_4 &= A_4 \cos x \sqrt{\lambda} + C_4 \sin x \sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (11)$$

З умови (7) маємо наступне рівняння $A_1 \cos(0) + C_1 \sin(0) = A_2 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda}$

$$A_1 = A_2 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \quad (12)$$

З умови (8) отримуємо

$$\begin{aligned} -A_1 \sqrt{\lambda} \sin(0) + C_1 \sqrt{\lambda} \cos(0) = \\ = -A_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Та як $\lambda > 0$, то скорочуємо на $\sqrt{\lambda}$, звідки випливає рівність

$$C_1 = -A_2 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda} \quad (13)$$

З умови (9) маємо

$$A_1 \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_1 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = A_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Підставивши (12) та (13) в отриману рівність виведемо наступне рівняння

$$\begin{aligned} (A_2 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda}) \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \\ + (-A_2 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda}) \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = \\ = A_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \end{aligned}$$

та виконавши деякі перетворення маємо рівність

$$\begin{aligned} \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (-2A_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \\ + C_2 (\cos^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2})) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{Тобто } \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ звідки}$$

$$\lambda_n = 4\pi^2 n^2 \text{ або } -A_2 \sin \sqrt{\lambda} = -C_2 \cos \sqrt{\lambda}.$$

Таким чином $A_2 = C_2 \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}}$. Розглянемо можливість

існування цього розв'язку у виконанні наступних

Тоді матимемо розв'язок задачі у вигляді власних функцій

$$v_1 = A \cos 2\pi x + C_1 \sin 2\pi x,$$

$$v_2 = A \cos 2\pi x + C_1 \sin 2\pi x,$$

$$v_3 = A \cos 2\pi x + C_2 \sin 2\pi x,$$

$$v_4 = A \cos 2\pi x + C_2 \sin 2\pi x.$$

при довільних константах (A, C_1, C_2) , тобто будь який розв'язок можемо отримати у вигляді лінійнонезалежної комбінації функцій, що легко перевірити. При виборі констант $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ і $(0, 0, 1)$ утворюється базис розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь, який позначимо b_1, b_2, b_3 , що лінійно незалежні, адже $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким чином отримуємо власні функції, які представлені на малюнках 2.а, 2.б та 2.в.

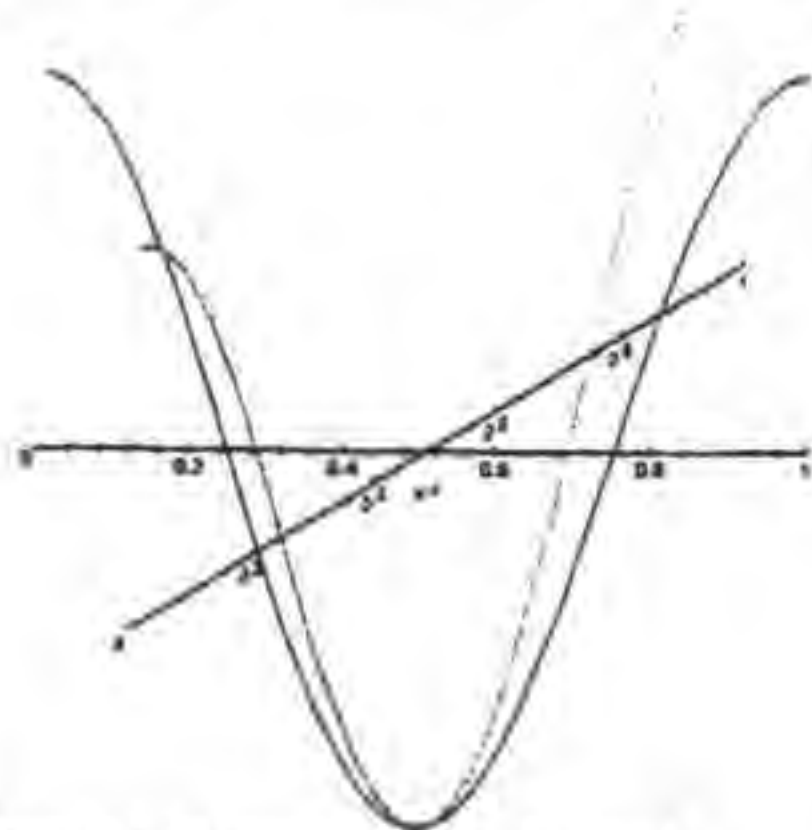


Рис. 2.а Перша власна функція

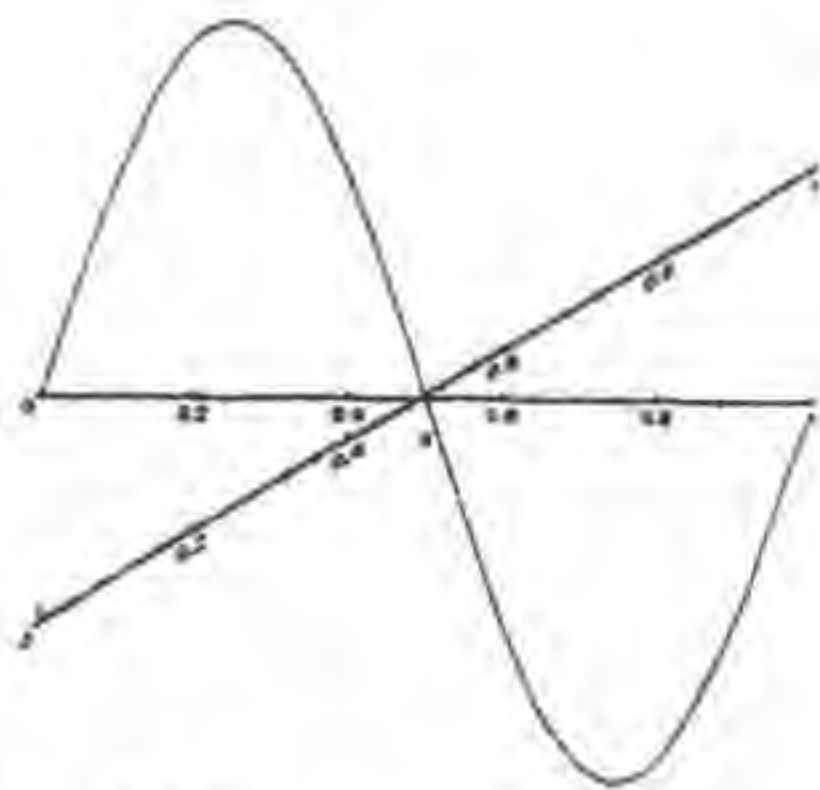


Рис. 2.б Друга власна функція

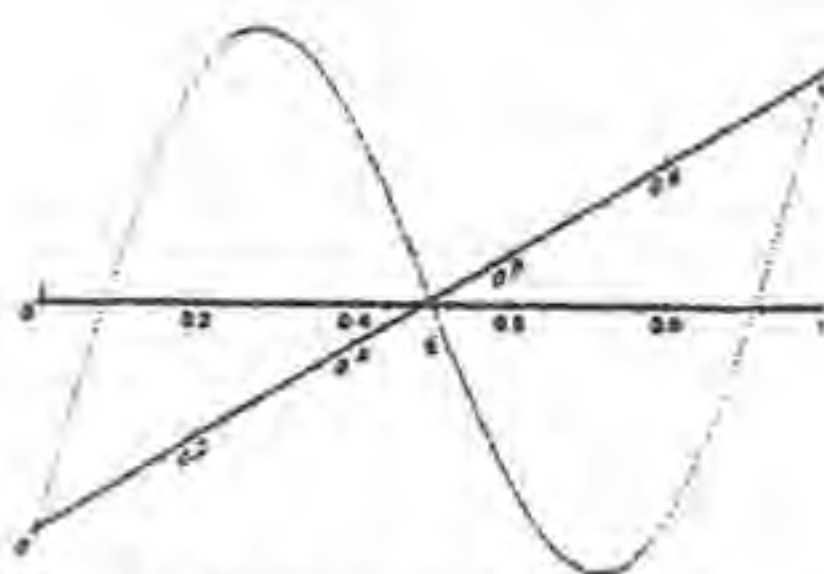


Рис. 2.в Третя власна функція

2. На тому ж хресті розглянемо а-періодичну задачу з крайовими умовами

$$v_1(0) = -v_2(1), \quad (15)$$

$$v_3(0) = -v_4(1),$$

$$v_1'(0) = -v_2'(1), \quad (16)$$

$$v_3'(0) = -v_4'(1),$$

враховуючи умови контакту та балансу натягу, аналогічно до пункту першого цього матеріалу і зробимо розрахунки що до вигляду розв'язків системи.

Розв'язки з $\lambda < 0$ та $\lambda = 0$ відкидаємо з вище розглянутих причин.

Для $\lambda > 0$ система матиме вигляд (11).

З умов (15) та (16) маємо

$$A_1 = -A_2 \cos \sqrt{\lambda} - C_2 \sin \sqrt{\lambda} \quad (17)$$

$$C_1 = A_2 \sin \sqrt{\lambda} - C_2 \cos \sqrt{\lambda}$$

Умова зв'язки вузлів та результат (17) дають значення $A_2 = -C_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\cos \sqrt{\lambda}}$.

Підставимо отримане значення константи A_2 в (17) та отримаємо $C_1 = -C_2 \frac{1}{\cos \sqrt{\lambda}}$, $A_1 = 0$. За аналогією зробимо висновок по функціям v_3 та v_4 . Отримаємо наступну систему:

$$v_1 = -C_2 \frac{1}{\cos \sqrt{\lambda}} \sin x \sqrt{\lambda},$$

$$v_2 = -C_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\cos \sqrt{\lambda}} \cos x \sqrt{\lambda} + A_2 \sin x \sqrt{\lambda},$$

$$v_3 = -C_4 \frac{1}{\cos \sqrt{\lambda}} \sin x \sqrt{\lambda},$$

$$v_4 = -C_4 \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\cos \sqrt{\lambda}} \cos x \sqrt{\lambda} + A_4 \sin x \sqrt{\lambda}.$$

Далі, з рівності $v_2(\frac{1}{2}) = v_3(\frac{1}{2})$ маємо

$$C_2 = C_4 = C.$$

Нехай функції неперервні в точці $\frac{1}{2}$, тоді
 $v_1'(\frac{1}{2}) - v_2'(\frac{1}{2}) + v_3'(\frac{1}{2}) - v_4'(\frac{1}{2}) = 0$, а звідси

$$- \left(C\sqrt{\lambda} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\cos \sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C\sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right) -$$

$$- C \frac{1}{\cos \sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$$
, з чого випливає, що
 $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$, звідки $\lambda = (1 + 2n)^2 \pi^2 = (2n - 1)^2 \pi^2$, а

система буде виглядати наступним чином:

$$v_1 = A_1 \cos(2n - 1)\pi x + C_1 \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_2 = A_2 \cos(2n - 1)\pi x + C_2 \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_3 = A_3 \cos(2n - 1)\pi x + C_3 \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_4 = A_4 \cos(2n - 1)\pi x + C_4 \sin(2n - 1)\pi x.$$

З (17) маємо $A_1 = A_2$ та $C_1 = C_2$, аналогічним чином $A_3 = A_4$ та $C_3 = C_4$.

Рівність констант C витікає з умови зв'язки вузлів.

Тоді матимемо розв'язки системи

$$v_1 = A_1 \cos(2n - 1)\pi x + C \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_2 = A_1 \cos(2n - 1)\pi x + C \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_3 = A_2 \cos(2n - 1)\pi x + C \sin(2n - 1)\pi x,$$

$$v_4 = A_2 \cos(2n - 1)\pi x + C \sin(2n - 1)\pi x.$$

що створюють тривимірний простір при довільних константах (A_1, A_2, C), і є лінійно незалежною комбінацією функцій. Доведення таке ж саме як і в попередньому пункті. Тобто отримаємо власні функції, вигляд яких представлений на малюнках 3.а, 3.б та 3.в.

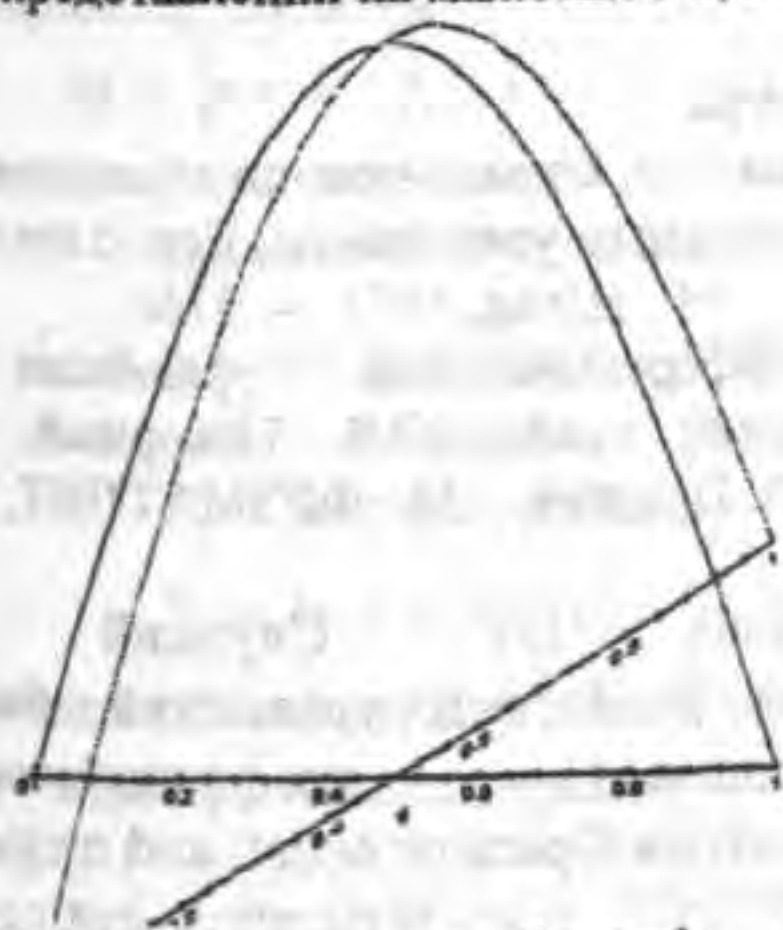


Рис. 3.а Перша власна функція

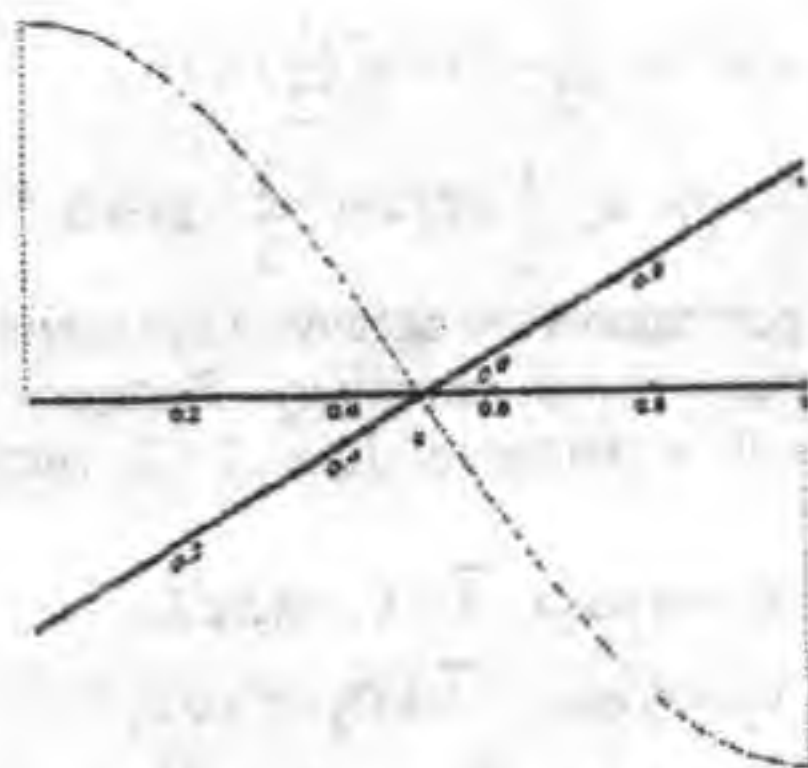


Рис. 3.б. Друга власна функція

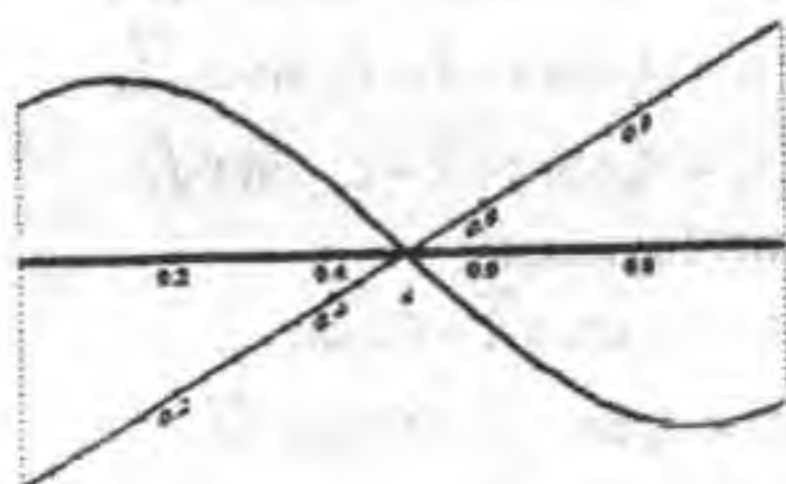


Рис. 3.в Третя власна функція

3. Далі розглянемо трьохвимірну систему струн (рис. 4), а саме зв'язку шести відрізків, тобто необхідно розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь

$$-v_1'' = \lambda v_1; -v_2'' = \lambda v_2; -v_3'' = \lambda v_3;$$

$$-v_4'' = \lambda v_4; -v_5'' = \lambda v_5; -v_6'' = \lambda v_6.$$

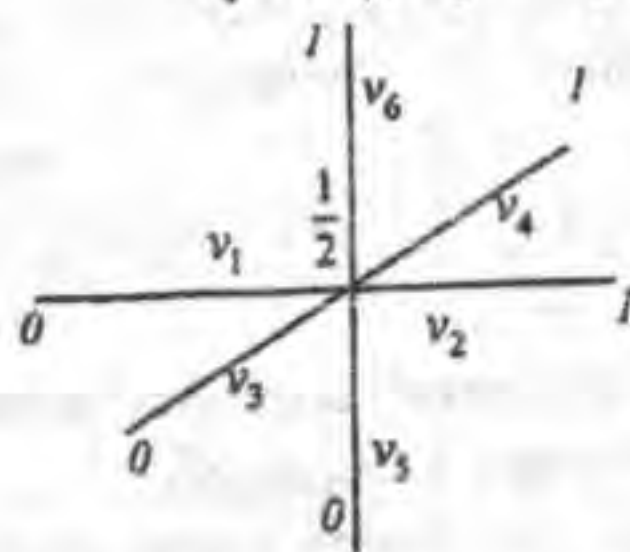


Рис. 4 Трьохвимірна система струн

Також як і на площині, розглядаємо умови періодичності, зв'язки вузлів та балансу натягу:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_2(1), \\ v_3(0) &= v_4(1), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v_5(0) &= v_6(1), \\ v_1'(0) &= v_2'(1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$v_3'(0) = v_4'(1),$$

$$v_5'(0) = v_6'(1).$$

$$v_1(\frac{1}{2}) = v_2(\frac{1}{2}) = v_3(\frac{1}{2}) = v_4(\frac{1}{2}) = v_5(\frac{1}{2}) = v_6(\frac{1}{2}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v_1'(\frac{1}{2}+0) - v_2'(\frac{1}{2}-0) + v_3'(\frac{1}{2}+0) - \\ - v_4'(\frac{1}{2}-0) + v_5'(\frac{1}{2}+0) - v_6'(\frac{1}{2}-0) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Будемо розглядати цю задачу за аналогією до пункту першого цього матеріалу. Випадки для $\lambda < 0$ та $\lambda = 0$ відкидаємо. Для $\lambda > 0$ система має вигляд

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_1 \sin x\sqrt{\lambda}, \\ v_2 &= A_2 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}, \\ v_3 &= A_3 \cos x\sqrt{\lambda} + C_3 \sin x\sqrt{\lambda}, \\ v_4 &= A_4 \cos x\sqrt{\lambda} + C_4 \sin x\sqrt{\lambda}, \\ v_5 &= A_5 \cos x\sqrt{\lambda} + C_5 \sin x\sqrt{\lambda}, \\ v_6 &= A_6 \cos x\sqrt{\lambda} + C_6 \sin x\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

З формули (18) маємо:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda}, \\ A_3 &= A_4 \cos \sqrt{\lambda} + C_4 \sin \sqrt{\lambda}, \\ A_5 &= A_6 \cos \sqrt{\lambda} + C_6 \sin \sqrt{\lambda}. \end{aligned} \quad (22)$$

З формули (19) випливають наступні рівності:

$$\begin{aligned} C_1 &= -A_2 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda}, \\ C_3 &= -A_4 \sin \sqrt{\lambda} + C_4 \cos \sqrt{\lambda}, \\ C_5 &= -A_6 \sin \sqrt{\lambda} + C_6 \cos \sqrt{\lambda}. \end{aligned} \quad (23)$$

Підставивши (22) та (23) в умову (20), маємо результат аналогічний з попереднім, тобто $\lambda_n = 4\pi^2 n^2$, а звідси

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A \quad \text{та} \quad C_1 = C_2 = C_3, \\ C_3 = C_4 = C_2, \quad C_5 = C_6 = C_3.$$

Тобто всі коефіцієнти системи можемо записати у вигляді вектору (A, C_1, C_2, C_3) .

4. Для а-періодичних задач маємо крайові умови

$$\begin{aligned} v_1(0) &= -v_2(1), \\ v_3(0) &= -v_4(1), \\ v_5(0) &= -v_6(1). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} v_1'(0) &= -v_2'(1), \\ v_3'(0) &= -v_4'(1), \\ v_5'(0) &= -v_6'(1). \end{aligned} \quad (25)$$

та умови зв'язки вузлів (20), балансу натягу (21). Значення λ знаходимо за аналогією до випадку на площині, тобто розглядаємо випадок для $\lambda > 0$ з умов (24) та (25) маємо

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_2 \cos \sqrt{\lambda} - C_2 \sin \sqrt{\lambda}, \\ A_3 &= -A_4 \cos \sqrt{\lambda} - C_4 \sin \sqrt{\lambda}, \\ A_5 &= -A_6 \cos \sqrt{\lambda} - C_6 \sin \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= A_2 \sin \sqrt{\lambda} - C_2 \cos \sqrt{\lambda}, \\ C_3 &= A_4 \sin \sqrt{\lambda} - C_4 \cos \sqrt{\lambda}, \\ C_5 &= A_6 \sin \sqrt{\lambda} - C_6 \cos \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

А звідси, з умови (20) отримаємо $\lambda = (2n-1)^2 \pi^2$. Підставивши це значення у (20) отримаємо рівність коефіцієнтів $A_1 = A_2 = A_1$, $A_3 = A_4 = A_2$, $A_5 = A_6 = A_3$ та $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C$.

Тобто всі коефіцієнти системи

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x, \\ v_2 &= A_1 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x, \\ v_3 &= A_2 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x, \\ v_4 &= A_2 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x, \\ v_5 &= A_3 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x, \\ v_6 &= A_3 \cos(2n-1)\pi x + C \sin(2n-1)\pi x. \end{aligned} \quad (26)$$

можна записати у вигляді вектору (A_1, A_2, A_3, C) .

Отже, система власних функцій має розмірність чотири і задається формулою (26), де будь який розв'язок можна отримати у вигляді лінійнонезалежної комбінації функцій при виборі констант відповідно $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

Таким чином, розглянута модель «струнний хрест» та описані власні простори на ньому.

Література:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. - 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1971. — 576с.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прудиев. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 272 с.
3. Мазья В.Г. Слуцкий А.С. «Осреднение разностных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами», Seminar Analysis Operator equat. and numerical analysis 1986/87, Karl-Weierstrab-Institut für Mathematik, Berlin, 1987, 63-92
4. Сандраков Г. В., «Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами», Матем. сб., 180:12 (1989), 1634—1679

Надійшло до редколегії 3.11.2009.

УДК 517.977.58

В. В. Семенов, к.ф.-м.н., доц.*
О. В. Чубенко, асп.

Алгоритм оптимізації лінійних розподілених систем з передопуклими множинами допустимих керувань

При різних припущеннях щодо поведінки по-
хибок розв'язання ітераційних підзадач дослід-
жено збіжність методу лінеаризації для уза-
гальненої оптимізації лінійних розподілених сис-
тем з передопуклими множинами допустимих
керувань.

Ключові слова: метод лінеаризації, опти-
мальне керування, передопукла множина, систе-
ма з розподіленими параметрами.

*e-mail: snakkar@univ.kiev.ua

Представив: д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Ряд важливих задач імпульсно-точкового ке-
рування системами з розподіленими параметрами
та задач розміщення джерел фізичних полів по-
роджують екстремальні задачі з так званими пе-
редопуклими обмеженнями.

Нехай E – лінійний простір. Нагадаємо, що
множину $M \subseteq E$ називаємо передопуклою [1, 2],
якщо існують опуклі множини $C_0, C_1, \dots, C_m$

такі, що $M = C_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m C_k$.

Наприклад, множина

$$M = \{x \in E : f_k(x) \leq 0, k = \overline{0, m}\}$$

є передопуклою якщо виконані умови:

f_0 – опуклий в E функціонал,

$f_k, k = \overline{1, m}$ – угнуті в E функціонали.

Тут

$$F_0 = \{x \in E : f_0(x) \leq 0\},$$

$$F_k = \{x \in E : f_k(x) > 0\}, k = \overline{1, m}.$$

Множина $M = \{x \in E : g(x) = 0\}$, де g – опук-
лий функціонал, також є передопуклою, причому
 $F_0 = \{x \in E : g(x) \leq 0\}, F_1 = \{x \in E : g(x) < 0\}$.

Передопуклі множини, які можна представити
у вигляді теоретико-множинної різниці двох
опуклих множин, було введено у роботі [3] та
використано у [4] для узагальнення методу про-
екції градієнта. У статті [1] введено більш ши-
рокий клас неопуклих множин, за якими збере-
жена назва передопуклих, і розглянуто модифіка-

V. V. Semenov, PhD, assoc. prof.
O. V. Chubenko, PhD stud.

Algorithm for optimization of linear distributed systems with preconvex sets of admissible controls

Convergence of linearization algorithm for ge-
neralized optimization of linear distributed systems
with preconvex admissible sets is investigated at
various assumptions in relation to the errors of sol-
ving of iterational subproblems.

Key Words: linearization method, optimal
control, preconvex set, distributed parameters
system.

цію методу умовного градієнта мінімізації глад-
ких функцій на цих множинах.

В даній роботі ми доведемо збіжність методу
типу лінеаризації розв'язання задач узагальненої
оптимізації лінійних розподілених систем з пе-
редопуклими множинами допустимих керувань.

Нехай стан системи описується рівнянням

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \quad (1)$$

де $\mathcal{L}$ – лінійний диференціальний оператор з
частинними похідними, який діє в просторі
 $L_2(Q)$ ($Q = (0, T) \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ – циліндрична об-
ласть) і має область визначення $D(\mathcal{L})$, що скла-
дається з гладких в $\overline{Q}$ функцій, які задовольня-
ють граничні умови (gr). Формально спряжений
оператор позначимо $\mathcal{L}^*$, а його область визна-
чення – $D(\mathcal{L}^*)$ – множина гладких в $\overline{Q}$ функ-
цій, які задовольняють спряжені граничні умови
(gr^*). Припускаємо, що $D(\mathcal{L})$ і $D(\mathcal{L}^*)$ щільні
в $L_2(Q)$.

Нехай побудовано ланцюжки гільбертових ос-
нащень

$$W \subseteq H \subseteq L_2(Q) \subseteq H^- \subseteq W^-,$$

$$W_* \subseteq H_* \subseteq L_2(Q) \subseteq H_*^- \subseteq W_*^-,$$

$W, H (W_*, H_*)$ – поповнення $D(\mathcal{L}) (D(\mathcal{L}^*))$
за позитивними нормами $\|\cdot\|_W, \|\cdot\|_H (\|\cdot\|_{W_*}, \|\cdot\|_{H_*})$.

W^-, H^- (W_+^-, H_+^-) – відповідні негативні простори.

Припустимо, що для операторів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ справедливі апріорні оцінки в негативних нормах

$$c_1 \|y\|_H \leq \|\mathcal{L}y\|_{W_+^-} \leq c_2 \|y\|_H \quad \forall y \in D(\mathcal{L}), \quad (2)$$

$$c_1 \|p\|_{H_+} \leq \|\mathcal{L}^*p\|_{W_+^-} \leq c_2 \|p\|_{H_+} \quad \forall p \in D(\mathcal{L}^*), \quad (3)$$

де c_1, c_2 – додатні константи.

Оцінки (2), (3) дозволяють довести теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі (1) та спряженої до неї, а також, побудувати теорію узагальненої оптимізації систем вигляду (1) [5].

Узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}y = f$ з правою частиною $f \in W_+^-$ називаємо елемент $y \in H$ такий, що

$$[y, \mathcal{L}^*p] = \langle f, p \rangle_+ \quad \forall p \in W_+ : \mathcal{L}v \in H^-,$$

де $[\cdot, \cdot]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ – канонічні білінійні форми, які побудовані на просторах H, H^- і W_+^-, W_+ .

Нехай $(V, \|\cdot\|_V)$ – скінченновимірний гільбертів простір керувань, $F: V \rightarrow W_+^-$ – оператор, що задає вплив на систему. Для керування $u \in V$ стан $y = y(u) \in H$ системи визначається як узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y = F(u)$. Нехай $\Phi: H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – заданий функціонал.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \quad u \in U, \quad (5)$$

де $U \subseteq V$ – компактна множина допустимих керувань, що має наступну структуру

$$U = G_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m \text{int } G_k,$$

де G_0 – опуклий компакт, $G_1, G_2, \dots, G_m$ – замкнені опуклі множини, причому $\text{fr } G_1, \text{fr } G_2, \dots, \text{fr } G_m$ – регулярні многовиди. Таким чином U – передопукла множина. І нехай $\text{int } U \neq \emptyset$.

Відмітимо, що множини вказаного вигляду виникають в задачах точкового керування з «забороненими» зонами.

Введемо позначення ($k = 1, 2, \dots, m$):
 $\Pi_k(u)$ – проекція $u \in U \setminus G_k$ на множину G_k ;
 $n_k(u)$ – вектор зовнішньої нормалі до G_k у точці $\Pi_k(u)$;

$S_k(u) = \{v \in V : (n_k(u), v - \Pi_k(u))_V \geq 0\}$ – допустимий напівпростір до G_k у $\Pi_k(u)$;

$$P(u) = \bigcap_{k=1}^m P_k(u), \quad \text{де } P_k(u) = G_0 \cap S_k(u).$$

Відмітимо, що $P(u)$ непорожній опуклий компакт і $u \in P(u)$.

Будемо вважати, що: на $U \subseteq V$ оператор $u \mapsto F'(u)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$; оператори $(y, u) \mapsto \Phi'_1(y, u)$ і $(y, u) \mapsto \Phi'_2(y, u)$ задовольняють на обмежених підмножинах простору $H \times V$ умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$.

З теорем роботи [5] випливає, що тоді похідна Фреше $J'(\cdot)$ задовольняє на U умову Гельдера з показником γ .

Для подальшого аналізу нам потрібна наступна необхідна умова мінімуму.

Лема 1. Нехай $\bar{u} \in U$ – локально оптимальний розв'язок задачі (4), (5). Тоді

$$\min_{u \in P(\bar{u})} \left((F'(\bar{u}))^* \bar{p} + \Phi'_2(y(\bar{u}), \bar{u}), u - \bar{u} \right)_{V^*, V} = 0,$$

де $\bar{p} = p(\bar{u}) \in W_+$ – розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^*p = \Phi'_1(y(\bar{u}), \bar{u}).$$

Позначимо через U^* множину керувань $u \in U$, для яких виконується необхідна умова мінімуму з леми 1.

Нехай $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Записом

$$f(x) \rightarrow \varepsilon - \inf_{x \in X}$$

будемо позначати задачу пошуку точок $x' \in X$ таких, що

$$f(x') \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

Для розв'язання задачі керування (4), (5) розглянемо ітераційний процес.

Алгоритм 1.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$.
Покласти $n = 0$.
2. Знаходимо $y_n \in H$ – узагальнений розв'язок рівняння:

$$\mathcal{L}y_n = F(u_n).$$

3. Знаходимо спряжений стан $p_n \in W_+^*$ – розв'язок рівняння:

$$\mathcal{L}^*p_n = \Phi'_1(y_n, u_n).$$

4. Будуємо множину $P(u_n) = \bigcap_{k=1}^m P_k(u_n)$.
5. Знаходимо $\bar{u}_n \in U$ – розв'язок екстремальної задачі:

$$\left((F(u_n))^* p_n + \Phi'_2(y_n, u_n), u - u_n \right)_V \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{u \in P(u_n)}.$$
6. Покладаємо

$$u_{n+1} = u_n + \rho_n (\bar{u}_n - u_n),$$

де $\rho_n \in (0, 1]$, $n = n+1$, переходимо на крок 2.

Зауваження 1. Наближення u_n завжди будуть лежати у компоненті зв'язності множини U , яка містить початкове наближення, що ускладнює при незв'язності множини U знаходження глобального мінімуму $J(\cdot)$, навіть у випадку опуклості $J(\cdot)$ (наприклад, коли відображення $\Phi(\cdot, \cdot)$ і $F(\cdot)$ лінійні). У даній ситуації слід запускати процес з початковими наближеннями з різних компонент зв'язності.

Зробимо додаткове припущення відносно множини U :

$$\forall u \in U: \text{int } P(u) \neq \emptyset. \quad (6)$$

Теорема 1. Нехай:

- 1) виконується умова (6);
- 2) $\rho_n \in (0, 1]$, $\rho_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \geq 0$,
 $\varepsilon_n \rightarrow 0$;
- 3) функціонал J приймає на множині U^* не більш ніж зліченну кількість значень.

Тоді всі граничні точки послідовності (u_n) утворюють компакту зв'язну підмножину в U^* , а числова послідовність $(J(u_n))$ має границю.

Доведення. Перевіримо виконання достатніх умов збіжності ітераційних процедур [6]. За побудовою всі члени послідовності (u_n) належать компактну U . Далі

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_V &= \rho_n \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq \\ &\leq \rho_n \text{diam}(U) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Нехай (u_{n_k}) – підпослідовність, що збігається до керування $u' \in U^*$. Покажемо, що існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$:

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Від супротивного. Нехай для всіх $\delta_0 > 0$ існує $k_0 = k_0(\delta_0)$ таке, що

$$\|u_n - u_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0 \text{ для всіх } n > n_{k_0}.$$

З нерівності трикутника випливає, що

$$u_n \in B_{2\delta_0}(u') \text{ для всіх } n > n_{k_0}.$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} J(u_{n+1}) - J(u_n) &= \\ &= (J'(u_n + \theta_n(u_{n+1} - u_n)), u_{n+1} - u_n)_V = \\ &= (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \\ &+ (J'(u_n + \theta_n(u_{n+1} - u_n)) - J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V \leq \\ &\leq \rho_n (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + C_0 \rho_n^{1+\gamma}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $n > n_{k_0}$, $\theta_n \in [0, 1]$.

В нерівності (7) оцінимо зверху величину $(J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V$. Оскільки $u' \in U^*$, то існує константа $\lambda > 0$ і точка $\bar{u} \in P(u')$ такі, що

$$(J'(u'), \bar{u} - u')_V < -2\lambda < 0.$$

З неперервності $J'(\cdot)$ і скалярного добутку випливає існування відкритих куль $O_{\delta_1}(\bar{u})$ і $O_{\delta_2}(u')$ таких, що для довільних керувань $u'_1 \in O_{\delta_1}(\bar{u})$, $u'_2 \in O_{\delta_2}(u')$ має місце нерівність

$$(J'(u'_2), u'_1 - u'_2)_V < -\lambda < 0.$$

Нехай $\bar{u}$ – довільна точка множини $\text{int } P(u')$.

Тоді $[\bar{u}, \bar{u}] \subset \text{int } P(u')$, оскільки множина $P(u')$ опукла та $\bar{u} \in P(u')$. Візьмемо довільну точку $\tilde{u} \in [\bar{u}, \bar{u}] \cap O_{\delta_1}(\bar{u})$. За рахунок збіжності (u_{n_k}) до точки u' при великих номерах k виконується нерівність

$$(J'(u_{n_k}), \tilde{u} - u_{n_k})_V < -\lambda < 0. \quad (8)$$

Аналогічно [1] доводимо, що $\tilde{u} \in P(u_{n_k})$.

Таким чином, існує точка $\tilde{u}$, що при великих k належить множинам $P(u_{n_k})$ і така, що виконується (8).

Візьмемо $2\delta_0 < \delta_2$, тоді

$$(J'(u_n), \tilde{u} - u_n)_V < -\lambda < 0 \text{ при } n > n_{k_0}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V &\leq \\ &\leq \min_{u \in P(u_n)} (J'(u_n), u - u_n)_V + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V &\leq (J'(u_n), \tilde{u} - u_n)_V + \varepsilon_n < \\ &< -\lambda + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Отже,

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\rho_n \lambda + \rho_n \varepsilon_n + C_0 \rho_n^{1+r}$$

при $n > n_{k_0}$.

Узявши n_{k_0} достатньо великим, отримаємо

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) < -\frac{\lambda}{2} \rho_n \text{ при } n > n_{k_0}. \quad (9)$$

Складемо нерівності (9) при $n = \overline{n_k, r}$, $k > k_0$:

$$J(u_r) - J(u_{n_k}) < -\frac{\lambda}{2} \sum_{n=n_k}^{r-1} \rho_n. \quad (10)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (10) при $r \rightarrow \infty$ та врахувавши $\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty$, отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактній множині U неперервного функціонала $J(\cdot)$.

Отже, існує $\delta_0 > 0$ таке, що для всіх k та $\delta \in (0, \delta_0]$: $\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$.

Але, обираючи достатньо маленьке $\delta_0 > 0$ і велике k_0 , можна повторити доведення оцінки (10) для $n_k \leq n \leq \tau_k$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V &\leq \sum_{n=n_k}^{\tau_k-1} \|u_{n+1} - u_n\|_V \leq \\ &\leq \text{diam}(U) \sum_{n=n_k}^{\tau_k-1} \rho_n. \end{aligned}$$

Тому

$$\sum_{n=n_k}^{\tau_k-1} \rho_n > \frac{\delta_0}{\text{diam}(U)}.$$

Враховуючи останню нерівність в (10), отримуємо, що

$$J(u_{\tau_k}) - J(u_{n_k}) < -\frac{\lambda \delta_0}{2 \text{diam}(U)},$$

$$\text{звідки } \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_{\tau_k}) < \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}).$$

Покладемо $W = J$ і пошлемось на теорему про збіжність ітераційних алгоритмів [6]. ■

Приділимо увагу моделі обчислень з не прямою при $n \rightarrow \infty$ до нуля похибкою $\varepsilon_n > 0$.

Будемо вважати, що $\varepsilon_n \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Введемо множину «майже стаціонарних» керувань

$$U_{\bar{\varepsilon}}^* = \left\{ u^* \in U : \min_{u \in P(u^*)} (J'(u^*), u - u^*)_V \geq -\bar{\varepsilon} \right\}$$

Має місце наступний результат про збіжність згенерованої алгоритмом 1 послідовності до множини $U_{\bar{\varepsilon}}^*$.

Теорема 2. Нехай:

- 1) виконується умова (6);
- 2) $\rho_n \in (0, 1]$, $\rho_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (u_n) має граничні точки, що належать множині $U_{\bar{\varepsilon}}^*$.

Список використаних джерел

1. Семенов В.В. Модификация метода условного градиента для решения экстремальных задач на одном классе невыпуклых множеств // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №1 (87). – 2002. – С. 72-76.
2. Гриненко А.А., Семенов В.В., Чубенко О.В. Мінімізація на передопуклих множинах: існування розв'язків // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2 (95). – 2007. – С. 32-35.
3. Заботин В.И., Полонский Ю.А. Предвыпуклые множества, отображения и их приложения к экстремальным задачам // Кибернетика 1981. № 5. С. 71-74.
4. Заботин В.И., Черняев Ю.А. Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001. Т. 41, № 3. – С. 367-373.
5. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. – К.: Наукова думка, 1998. – 472 с.
6. Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. – К.: Наукова думка, 1979. – 159 с.

Надійшла до редколегії 4.09.09

УДК 681.5

Олександр С. Слабоспицький*, к.ф.-м.н., доц.

Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння" при неklasичних припущеннях

Для лінійної дискретної динамічної системи при неklasичних припущеннях розглядається задача оцінювання стаціонарних параметрів у випадку, коли в довільний момент для матриці параметрів об'єкту відома її точка "тяжіння". Для матриці оцінок параметрів методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" та відповідної залишкової суми квадратів отримані рекурентні алгоритми для вищезгаданих систем. Запропоновані дві форми цих рекурентних процедур оцінювання.

Ключові слова: оцінювання стаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, лінійна дискретна динамічна система, метод найменших квадратів, рекурентний алгоритм, залишкова сума квадратів, точки "тяжіння".

Alexander S. Slabospitsky*,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Parameter estimation of linear discrete dynamic systems by the least squares method with the minimum deviation from 'attraction' points under non-classical assumptions

The estimation problem of stationary parameters is considered for linear discrete dynamic system under non-classical assumptions in case when for parameter matrix of object its 'attraction' point is known at any moment. Recurrent algorithms are obtained for matrix of parameter estimates by the least squares method with the least deviation norm from 'attraction' points and corresponding residual sum of squares for above-mentioned systems. Two forms of these recurrent estimation procedures are suggested.

Key Words: stationary parameter estimation, pseudoinverse operator, linear discrete dynamic system, least squares method, recurrent algorithm, residual sum of squares, 'attraction' points.

*E-mail: sl@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Серед усіх підходів [1], які використовуються для оцінювання стаціонарних параметрів математичних моделей об'єктів, метод найменших квадратів [2] є одним з тих, що знайшов своє широке застосування при розв'язанні практичних задач.

Особливої уваги заслуговує його поширення на випадок, коли можуть порушуватися класичні припущення, що гарантують єдиність цієї оцінки, яке описано у роботі [3] з використанням оператора псевдообернення по Муру-Пенроузу. Там же для цього випадку для регресійної моделі описано побудову рекурентних алгоритмів для оцінки параметрів методом найменших квадратів з найменшою нормою та відповідної залишкової суми квадратів. Для класу лінійних дискретних динамічних систем аналогічні рекурентні процедури оцінювання можна отримати з результатів роботи [4] по рекурентному оцінюванню нестационарних параметрів математичних моделей методом найменших квадратів зі змінним фактором забування як

частинний випадок, коли фактор забування рівний одиниці.

У роботі [5] розглянута задача оцінювання параметрів регресійної моделі методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від заданих точок "тяжіння" при порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки. Отримані явна та дві рекурентні форми представлення вищезгаданої оцінки, а також рекурент для залишкової суми квадратів.

У даній роботі останні результати поширені на клас лінійних дискретних динамічних систем. Отримані явна та дві рекурентні форми представлення для матриці оцінок параметрів методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від точок "тяжіння" для цих систем при порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки. Для перерахунку залишкової суми квадратів наводиться відповідна рекурентна процедура.

Розглянемо задачу оцінювання матриці невідомих параметрів A для лінійної динамічної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де $x(k)$ - n -вимірний вектор фазового стану,
 $\xi(k)$ - вектор похибок моделі. $\mathbb{N}$ - множина
натуральних чисел.

$$\text{Введемо позначення } Q(A, N) = \sum_{k=1}^N \|\xi(k)\|^2.$$

$$\text{Arg min}_A Q(A, N) = \left\{ \hat{A}_A(N) : \hat{A}_A(N) = X_{2,N+1}^T (X_{1,N}^T)^* + C \left[E_n - (X_{1,N}^T)(X_{1,N}^T)^* \right], C \in M_n(\mathbb{R}) \right\}, \quad (2)$$

де $(^*)$ - оператор псевдообернення по Муру- Пенроузу, E_n - одинична матриця порядку n , $M_n(\mathbb{R})$ -
множина квадратних матриць порядку n з дійсними елементами,
 $X_{1,N}^T = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, $X_{2,N+1}^T = (x(2), x(3), \dots, x(N+1))$.

На множині (2), оцінок матриці A методу найменших квадратів, існує єдина оцінка $\hat{A}_A(N)$ з
найменшою нормою, яка обчислюється таким чином:

$$\hat{A}_A(N) = X_{2,N+1}^T (X_{1,N}^T)^*. \quad (3)$$

Аналогічно, на множині (2) для довільного моменту часу N можна знайти єдину оцінку з
найменшою нормою відхилення від заданої матриці. Не важко впевнитися, що справедливе наступне
твердження, яке і дає відповідь на це питання.

Теорема 1. Нехай V - задана матриця порядку n , тоді на множині (2), усіх оцінок матриці A у
момент N методу найменших квадратів для лінійної динамічної системи (1), існує єдина оцінка
 $\hat{A}_V(N)$ з найменшою нормою відхилення від матриці V , яка визначається співвідношенням:

$$\hat{A}_V(N) = X_{2,N+1}^T (X_{1,N}^T)^* + V \left[E_n - (X_{1,N}^T)(X_{1,N}^T)^* \right].$$

Нехай для матриці параметрів A лінійної динамічної системи (1) в кожен момент N додатково
відома її точка "тяжіння" A_N , $N = 0, 1, 2, \dots$.

Тоді цілком логічно, в цій ситуації в якості єдиної оцінки $\hat{A}(N)$ методу найменших квадратів
матриці параметрів A об'єкту (1) в момент N , з урахуванням знання точок "тяжіння", серед усіх
оцінок з множини (2) використовувати саме оцінку $\hat{A}_{A_N}(N)$ з найменшою нормою відхилення від
матриці A_N , яка згідно останньої теореми має таку явну форму представлення:

$$\hat{A}(N) = X_{2,N+1}^T (X_{1,N}^T)^* + A_N \left[E_n - (X_{1,N}^T)(X_{1,N}^T)^* \right], \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

При проведенні оцінювання в on-line режимі виникає потреба в рекурентному обчисленні оцінки
(4). Таку можливість надає наступне твердження.

Теорема 2. Рекурентний алгоритм для оцінки (4) матриці параметрів A лінійної динамічної
системи (1) методу найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від заданих точок
"тяжіння" $\{A_N\}_{N=0}^\infty$ має такий вигляд:

якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + \frac{1}{\delta(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)P(N) + \\ + [A_{N+1} - A_N] \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right], \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (5)$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + \frac{1}{\gamma(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N) + [A_{N+1} - A_N]P(N), \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (6)$$

з початковими умовами $\hat{A}(0) = A_0$, $R(0) = O$, $P(0) = E_n$.

де $\gamma(N) = 1 + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, O – нульова квадратна матриця порядку n .

Доведення. Задача знаходження оцінки (4) матриці $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ для системи (1) розщеплюється на n задач визначення аналогічних оцінок $\hat{a}_i(N)$ для векторів a_i , але вже з найменшою нормою відхилення від відповідних векторів $a_{i,N}$ матриці $A_N = (a_{1,N}, a_{2,N}, \dots, a_{n,N})^T$ у момент N , у системах

$$x_i(k+1) = a_i^T x(k) + \xi_i(k), \quad k \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де $\xi(k) = (\xi_1(k), \xi_2(k), \dots, \xi_n(k))^T$, $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$.

А оцінка $\hat{a}_i(N)$ є оцінкою з найменшою нормою відхилення від $a_{i,N}$ у момент N на множині оцінок

$$\text{Arg min}_{a_i} Q_i(a_i, N), \quad \text{де } Q_i(a_i, N) = \sum_{k=1}^N \xi_i^2(k).$$

Але для моделей виду (7), рекурентні співвідношення для оцінок $\hat{a}_i(N)$ ($i = \overline{1, n}$) згідно роботи [5] мають такий вигляд:

якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)] + \\ + \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right] [a_{i,N+1} - a_{i,N}], \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases}$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)] + P(N)[a_{i,N+1} - a_{i,N}], \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases}$$

з початковими умовами $\hat{a}_i(0) = a_{i,0}$, $R(0) = O$, $P(0) = E_n$.

Тут $\gamma(N) = 1 + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$.

Об'єднавши рекурентні співвідношення для $\hat{a}_i(N)$ ($i = \overline{1, n}$), у цих двох випадках отримуємо

$$\hat{A}(N+1) = \begin{cases} \hat{A}(N) + \frac{1}{\delta(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)P(N) + \\ + [A_{N+1} - A_N] \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right], \text{ якщо } \delta(N) > 0, \\ \hat{A}(N) + \frac{1}{\gamma(N)} [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N) + [A_{N+1} - A_N]P(N), \text{ якщо } \delta(N) = 0. \end{cases}$$

при початковій умові $\hat{A}(0) = A_0$. Доведення завершено.

Робота [5] дозволяє запропонувати також другу форму представлення алгоритму (5.6).

Теорема 3. Для оцінки (4) матриці параметрів A системи (1) методу найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" $\{A_N\}_{N=0}^{\infty}$ рекурентна процедура має вигляд:

$$\hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N+1) + [A_{N+1} - A_N]P(N+1),$$

причому, якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases}$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases}$$

з початковими умовами $\hat{A}(0) = A_0$, $R(0) = O$, $P(0) = E_n$.

Взявши до уваги роботу [5], нескладно впевнитися в справедливості наступного результату.

Теорема 4. Рекурентний алгоритм для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$ для оцінки (4) матриці параметрів A системи (1) методу найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" $\{A_N\}_{N=0}^{\infty}$ приймає форму:

$$q(N+1) = \begin{cases} q(N), & \text{якщо } \delta(N) > 0, \\ q(N) + \frac{1}{\gamma(N)} \|x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\|^2, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

з початковою умовою $q(0) = 0$.

Список використаних джерел

1. Ljung L. System Identification: Theory for the User. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. - 544 p.
2. Hsia T.C. System identification. Least-squares methods. - Toronto: Lexington Books, 1977. - 165 p.
3. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. - New York: Academic Press, 1972. - 180 p.
4. Слабостицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів лінійних динамічних систем методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2000. - 2. - с. 333-336.
5. Слабостицький О.С. Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2008. - №4. - с. 179-182.

Надійшла до редколегії 27.11.2009

УДК 004.519.712, 004.92

Терещенко В.М., к.ф.-м.н., доц.,
Терещенко О.В., студент

Особливості побудови опуклої оболонки в тривимірному просторі

В роботі запропоновано модифікацію методів "розподіляй та володарюй" та «загортання подарунку» побудови опуклої оболонки в тривимірному просторі для випадку не симпліціальності результуючого політопа.

Ключові слова: опукла оболонка, політоп, симплекс, ефективність алгоритму, множина точок.

*E-mail: v_ter@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми.

Одним із критеріїв якості алгоритмів розв'язання задач обчислювальної геометрії є їх ефективна робота для масових запитів у випадку найгіршого вводу даних. При побудові опуклої оболонки у тривимірному просторі найгіршим випадком є умова не симпліціальності результуючого політопа. Поняття симпліціальності можна означити так.

Означення.

d -політоп називається симплексом, якщо він є опуклою оболонкою множини $d+1$ афінно незалежних точок. d -політоп називається симпліціальним, якщо кожна його гіпергрань являється симплексом, інакше він є не симпліціальним.

На практиці при моделюванні реальних процесів та явищ досить часто мають місце випадки, коли умова симпліціальності не виконується. Це насамперед стосується моделювання теплофізичних процесів при зварюванні, де відбуваються фазові зміни стану речовини, що зумовлює динамічні зміни структури матеріалу та форми поверхні розплаву. Для побудови реалістичних моделей таких процесів необхідно створювати нові та вдосконалювати існуючі методи, які б враховували випадок не симпліціальності політопів.

Tereshchenko V.M., C. Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.,
Tereshchenko O.V., студент

Features of construction a convex hull in three dimensions

The paper suggested improvement methods "divide-and-conquer" and "involution gift" constructing the convex hull in three dimensions for the case not simpliciality politop.

Key Words: convex hull, politop, simplecs, efficiency of algorithm, set of points.

Аналіз останніх досліджень. Серед відомих методів побудови опуклої оболонки в тривимірному просторі, найбільш популярними є ряд ефективних алгоритмів таких, як «метод загортання подарунку» [1,2], «під-над» [3], з часом виконання $O(N^2)$ та метод «розділяй та володарюй» [4] з оцінкою $O(N \log N)$. Але додатковою умовою їх безпомилкової роботи є умова симпліціальності результуючого політопа, на що в роботах [5, 6] було звернено увагу і запропоновано можливі шляхи удосконалення. Проте, запропоновані шляхи розв'язання для деяких випадків, вибраних для виконання функцій, давали не завжди точні результати.

Метою роботи є удосконалення відомих методів "розподіляй та володарюй" та «загортання подарунку» побудови опуклої оболонки в тривимірному просторі для випадку не симпліціальності результуючого політопа.

Удосконалення методу «розподіляй та володарюй» побудови опуклої оболонки у тривимірному просторі

Розглядається узагальнення відомого методу на основі стратегії «розподіляй та володарюй» для випадку, коли умова симпліціальності не виконується. Нехай на вхід алгоритму подається упорядкований по x, y, z координатах масив точок. Для довільного набору S із N точок таке впорядкування вимагає $O(N \log N)$ часу.

В основі алгоритму лежить відома рекурсивна стратегія "розподіляй та пануй" [4].

Стратегія застосовується у випадку надвеликої множини вхідних даних і складається із двох етапів: рекурсивного розбиття та злиття результатів. Так, як ключовою в цьому методі є складність кроку злиття, то саме для цього кроку пропонується нова процедура злиття та відповідна їй структура даних, що знімає обмеження симпліціальності, ефективно реалізуючи крок злиття.

На кожному кроці рекурсивного підйому, починаючи з другого, на вхід батьківського вузла v дерева алгоритму, рис.1, подаються опуклі оболонки від лівого сина CH_L ($CH_L = \text{ЛСИН}[v]$) та правого сина CH_R ($CH_R = \text{ПСИН}[v]$). Необхідно побудувати опуклу оболонку для вузла v .

Лема 1.

Етап рекурсивного злиття результатів визначення опуклої оболонки множини S із N точок у тривимірному просторі можна виконати за час $O(N)$.

Доведення.

Процедура злиття опуклих оболонок

Нехай на попередньому етапі ми отримали оболонки $CH(S_1)$ і $CH(S_2)$, що не перетинаються. Етап злиття зводиться до двох кроків:

1. Побудова циліндричної триангуляції T навколо $CH(S_1)$ і $CH(S_2)$.
2. Очищення одержаного політопа від точок, що потрапили всередину.

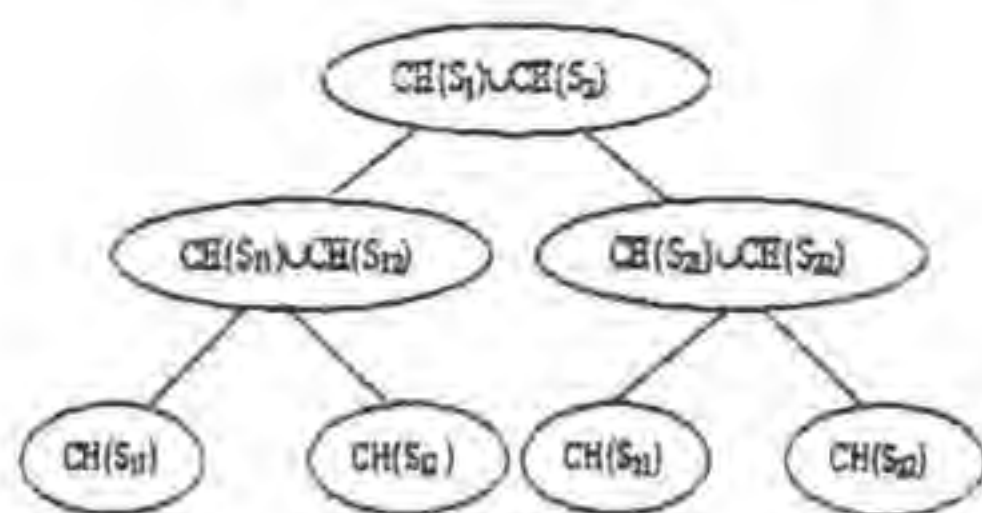


Рис.1. Граф алгоритму

Побудова циліндричної триангуляції

Побудова починається з визначення початкового ребра. Це буде перше ребро в циліндричній триангуляції. Втім, через невиконання умови симпліціальності, це ребро може безпосередньо не належати опуклій оболонці, а лише лежати в одній площині з якоюсь її гранню. Знайдемо таке ребро, для чого

спроєкуємо наші тривимірні фігури на площину xOy і знайдемо опорну пряму один кінець якої опирається на S_1 , а інший на S_2 , рис.2. Разом з цим ребром оголошуємо і першу(уявну) грань, з вектором нормалі до неї – $(0,0,1)$. Вона нам знадобиться на першому кроці для відкладання кута.

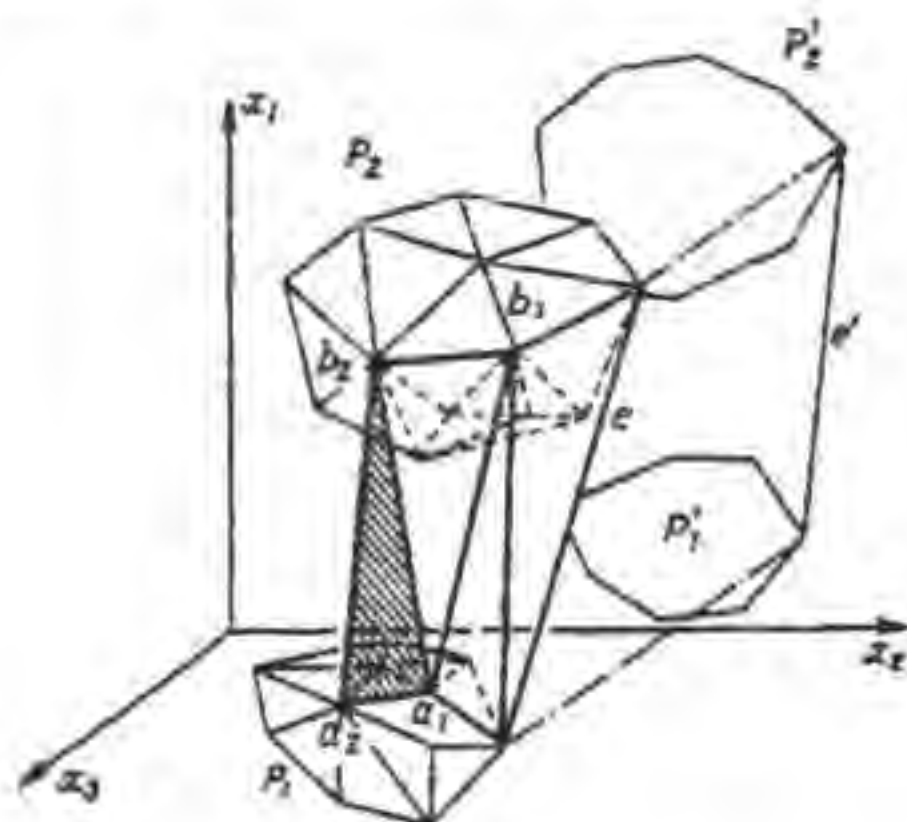


Рис.2.

На черговому етапі побудови нової грані циліндричної триангуляції, як базова використовується остання побудована грань. Нехай на даному етапі це a_2, b_2, a_1 . Виберемо серед вершин сусідніх до a_2 таку вершину a , яка утворює найбільший кут з базовою гранню. Якщо таких вершин декілька, що можливо за умови не симпліційного політопа, то вибираємо серед них таку, що нове ребро a_2a утворює з поточним ребром a_2b_2 найбільший кут. Якщо таких вершин теж декілька, то обираємо найдалшу від a_2 . Йдемо за годинниковою стрілкою, доки не зустрінемо гірше за попереднє ребро, за умови що попереднє було краще за свого попередника. Це дозволяє скоротити кількість порівнянь.

Назвемо такий пошук – *пошуком типу 0*. Аналогічну процедуру виконуємо і для точки b_2 . Для одержаних максимальних значень кутів між гранями, ребрами, та відстанями до поточних вершин a_2 і b_2 для нових вершин з S_1 і S_2 робимо порівняння, аналогічні до порівнянь типу 0 і обираємо одну найкращу з них. Ці порівняння назвемо порівняннями *типу 1*.

Переходячи таким чином до нових вершин, помічаємо міткою M_1 ті вершини, що прийняли участь в циліндричній триангуляції, та міткою M_2 ті, що опинялись на кожному етапі між старим ребром і щойно побудованим – це будуть внутрішні точки, які необхідно вилучити.

Продовжуємо процедуру, доки не дійдемо до ребра, кінці якого вже помічені міткою M_1 .

Покажемо що складність циліндричної триангуляції $O(N)$. Оскільки при перевірці типу 0, ми йдемо лише від старого ребра до нового, одночасно помічаючи їх, як претенденти на вилучення, то на наступній перевірці нам вже не обов'язково їх переглядати. Таким чином загальна кількість перевірок типу 0 буде $O(M)$, де M – кількість ребер в політопах. Але ці ребра можна представити у вигляді планарного графа. А за теоремою Ейлера кількість ребер лінійно залежить від кількості вершин, отже всього буде $O(N)$ перевірок. Очевидно що кожна перевірка виконується за константний час. Отже загальна складність буде $O(N)$.

Другий етап зводиться до очистки отриманої оболонки від внутрішніх точок. Спочатку йдемо по всіх вершинах, помічених міткою M_1 і розриваємо зв'язки з вершинами, поміченими міткою M_2 (за лінійний час). Після цього, можливо, виявляться ізольовані частини графу всередині опуклої оболонки. Їх легко встановити, рекурсивно фарбуючи вершину оболонки й усі сусідні з нею. Не зафарбовані вилучаємо.

При додаванні і вилученні ребер до кожної вершини, контролюємо, як змінюється розмірність її сусідів (за константний час). Так якщо всі сусіди лежать на одній прямій з вершиною, її розмірність 1, якщо на одній площині – 2, інакше 3.

Проходимо по всій одержаній оболонці і визначаємо максимальну розмірність вершини, яка в ній зустрічається. Ця розмірність визначатиме розмірність всієї оболонки. Так, якщо вона 1 – вона утворює собою відрізок, якщо 2 – всі точки лежать на одній площині.

Проглядаються ще раз всі точки і вилучаються ті, розмірність яких менше за розмірність усієї опуклої оболонки. При цьому зв'язуємо кожного її непоміченого на видалення сусіда з одним з непомічених сусідів (зберігається триангуляція). Таким чином ми вилучимо середні точки, що лежать на одній прямій між двома і точки, які лежать на одній площині з сусідами всередині опуклої оболонки.

Очевидно, що такі перевірки також лінійні. Після цього перевіряємо отриману триангуляцію. Якщо вона містить ребра, які перетинаються, то їх необхідно вилучити. Наприклад, починаємо з A : маємо два сусідні ребра – на B і на C_1 . Для B розриваємо зв'язки з усіма вершинами, від A рухаючись проти годинникової стрілки, доки не дійдемо до C_1 . Тобто з C_2 і C_3 . Очевидно, що

всього буде виконано операцій не більше ніж було ребер, а кількість ребер не більша ніж сумарна кількість ребер в двох оболонках, які ми злили. Отже сумарна їх кількість буде лінійною. Отже на цю операцію також витратимо лінійний час. Для практичної реалізації цього алгоритму розроблена авторами програма.

Удосконалений метод «метод загортання подарунку» побудови опуклої оболонки у тривимірному просторі.

Застосування розробленого Чандом і Капуром в 1970 році [2] і реалізованого Бхаттачарья у 1982 [1], методу “загортання подарунку” побудови опуклої оболонки для d – вимірного простору обмежується симпліціальністю політопів і потребує теж удосконалення для загального випадку. Основою алгоритму є наступна теорема.

Теорема 1.

В симпліціальному політопі деяка підгрань є спільною для двох гіперграней і дві гіперграні F_1 та F_2 мають спільну підгрань e тоді і лише тоді, коли e визначається спільною підмножиною з $(d-1)$ вершини для множин вершин, що визначаються F_1 та F_2 (в цьому випадку F_1 та F_2 називаються суміжними по e).

Метод використовує деяку підгрань e уже побудованої гіперграні F_1 для побудови суміжної з нею гіперграні F_2 , що має з F_1 спільну підгрань e . Розглянемо ідеї цього алгоритму для випадку $d=3$, тобто для тривимірного простору.

Нехай $S=\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ – скінченна множина точок в тривимірному просторі і F деяка відома гіпергрань опуклої оболонки $CH(S)$ разом з усіма своїми підгранями. Механізм переходу від гіперграні F до суміжної з нею гіперграні F' , що має з F спільну підгрань e , полягає у визначенні серед усіх точок множини S , які не є вершинами F , такої точки p' , що всі інші точки знаходяться під гіперплощиною $aff(e \cup p')$. Іншими словами, серед усіх гіперплощин, що визначаються e та точкою з S , що не належить F , шукається гіперплощина, яка утворює «найбільший кут» з $aff(F)$. Для нашого випадку $d=3$ цю ситуацію показано на рис.3 (а). Тут вирізняється сукупність півплощин, які мають спільну пряму, що проходить по ребру e . З поміж них визначаємо півплощину, яка утворює найбільший кут $< \pi$ (опуклий кут) з півплощиною, що містить

F . На рис.3(а) шукана півплощина містить точку p_6 .

Порівняння кутів виконується через порівняння котангенсів цих кутів. Нехай n – одинична нормаль до F (у півпросторі під $\text{aff}(F)$), а a – одиничний вектор, ортогональний як ребру e , так і вектору n (таким чином, орієнтація вектора a аналогічна орієнтації вектора $n \times p_1 p_2$). Позначимо через V_k вектор $p_2 p_k$. Котангенс кута, утвореного гіперплощиною, що містить F , з гіперплощиною, що містить e і p_k , задається відношенням $|Up_2|/|U|$, де $|Up_2| = V_k * aT$ і $|U| = V_k * nT$.

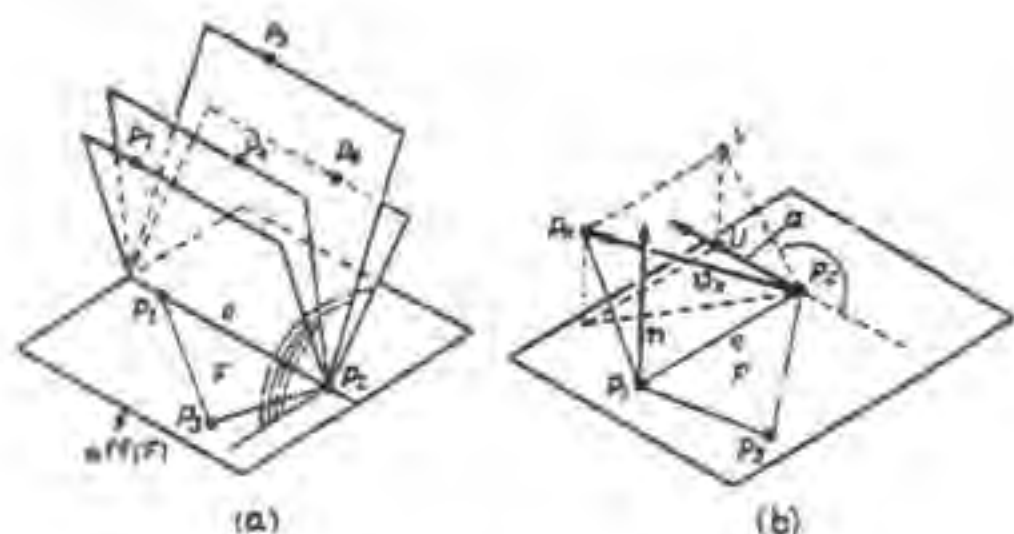


Рис.3

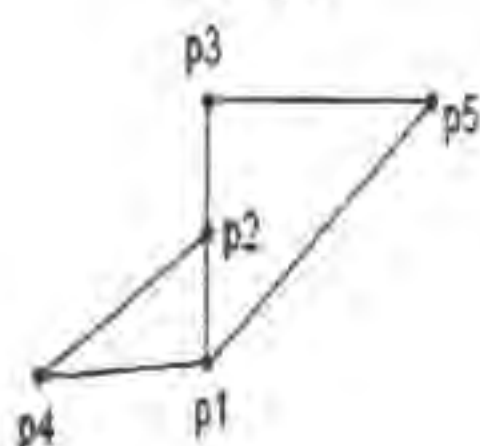


Рис.4

Таким чином, для кожної точки p_k , що не належить F , обчислюється значення

$$R_k = -V_k * aT / V_k * nT \quad (1)$$

і обирається таке R_k , що

$$R_i = \max(R_k) \quad (2)$$

Далі опишемо роботу алгоритму в цілому. Алгоритм починає роботу з деякої початкової гіперграні і для кожної її підграні будує суміжну гіпергрань. На наступному кроці він переходить до нової гіперграні і продовжує подібну обробку, доки не будуть побудовані всі гіперграні. Для кожної отриманої гіперграні будуються всі її підграні і при цьому підтримується список всіх підграней, що є кандидатами на використання на кроці «загортання подарунку». Впорядкований

обхід гіперграней краще за все організувати, використавши звичайну чергу гіперграней Q і файл T , що містить підграні. Спосіб побудови початкової гіперграні описаний в роботі [5]. В даному випадку будуємо лише верхню опуклу оболонку і в ній вибираємо «саме верхнє» ребро. Воно буде підгранню, початкової грані опуклої оболонки. Тепер проведемо через це ребро площину, паралельну осі OZ . Позначимо наше ребро $p_1 p_2$. Векторний добуток вектора $p_1 p_2$ та $(0,0,1)$ дасть нам нормаль до шойно проведеної площини. Тепер можемо зробити крок «методу загортання подарунку» і знайти третю вершину початкової гіперграні опуклої оболонки.

Як вже було сказано, наведений вище алгоритм можна застосовувати, тільки тоді, коли результуючий політоп буде симпліціальним. В даній роботі запропоновано модифікацію цього методу на випадок несимпліціальності політопу.

Перша проблема, з якою ми стикаємось у загальному випадку, є те що рівняння (2) не буде мати єдиного розв'язку, тобто знайдеться більш ніж одна точка, така, що площина, яка проходить через неї, та підгрань гіперграні, до якої будується суміжна гіпергрань буде утворювати найбільший опуклий кут. Постає питання вибору точки. Для цього, перш за все, необхідно зазначити, що трикутна грань, яку утворить точка з підгранню гіперграні, до якої ми будуємо суміжну грань, не повинна перетинати жодну з вже побудованих граней опуклої оболонки і в той же час вона не повинна містити жодну з вже побудованих граней опуклої оболонки, або міститися в ній. Це стосується точок, які утворюють найбільший опуклий кут.

Другою проблемою є те, що в площині грані опуклої оболонки, до якої ми намагаємось побудувати суміжну грань, можуть міститися точки, які утворюють найбільший кут, якщо вони лежать з одного боку нашої грані, та найменший – якщо з іншого. Але для порівняння кутів звичайний метод «загортання подарунку» використовує котангенси цих кутів, що для вищенаведеного випадку не підходить, бо $\text{ctg}(\theta)$ прямує до нескінченності і тоді точка, яка утворює, найменший кут видається алгоритму такою, що утворює найбільший. Щоб позбутися цієї проблеми, в роботі замість котангенса кута використовується його косинус. З рис. 3 видно, що косинус кута це $\sqrt{UP^2 + UV^2}$. А для вирішення проблеми «вкладеності» граней можна скористатися відомим фактом про те, що якщо точка лежить всередині трикутника, то

сума площ трикутників, утворених цією точкою з вершинами даного трикутника, повинна дорівнювати його площі.

Перша проблема, про перетин новоутвореного трикутника з вже побудованими гранями опуклої оболонки, розв'язується шляхом попарної перевірки підграней цих трикутників на перетин, що робиться тривіально.

Проте, початкові точки ніяк не впорядковані і наш метод побудови граней опуклої оболонки не гарантує, що не з'явиться ситуація зображена на рис.4. Тобто вже була побудована грань $p_1 p_2 p_4$ і на якомусь кроці, алгоритм, намагаючись побудувати грань, суміжну до деякої грані з ребром $p_1 p_5$, вибирає точку p_3 . І хоча підгрань $p_1 p_2$ вже не буде кандидатом для кроку «загортання», алгоритм цього не помітить і почне будувати зайві грані. Цю проблему можна вирішити шляхом «очистки» початкового набору даних, таким чином, щоб ніде на одній прямій не лежало більше двох точок. Складність такої «очистки» вхідного набору точок $O(N^3)$.

Таким чином можна записати «удосконалений метод загортання подарунку», рис. 5. Він буде відрізнятися від звичайного процедури «очистки» початкових даних і удосконаленим «кроком загортання», а саме – при виборі точки ми повинні не тільки перевірити чи вона утворює найбільший кут (тобто грань що проходить через неї та поточну підгрань утворює кут), а ще й пересвідчитися, що новоутворена грань, не перетинається з вже побудованими і не містить жодну з них (або не міститься в жодній).

Аналіз складності алгоритму

Грань є кандидатом для кроку загортання, якщо вона міститься лише в одній грані, що породжується алгоритмом, і, якщо підтримується файл T таких підграней, то необхідною перевіркою буде перегляд цього файлу. Можна впорядкувати файл T лексографічно і зберігати його у вигляді збалансованого по висоті бінарного дерева пошуку. Якщо є деяка підгрань e , то необхідність в доступі до T , може виникнути в двох випадках: або для перевірки приналежності e до числа кандидатів, або для зміни файлу. В першому випадку, проглядається файл T , і визначається чи він містить e . В другому випадку, також відбувається перегляд файлу T , з метою визначення приналежності e файлу, але, крім того, якщо e вже міститься в файлі, то вона вилучається, інакше вона

додається в файл. В обох випадках перегляд файлу відбувається за час $O(\log M)$, де M – розмір файлу, обмежений зверху величиною $SF(d, N)$, що в нашому випадку рівна $O(N^{d/2})$ [7], при $d=3$.

Procedure ЗАГОРТАННЯ-ПОДАРУНКУ($p_1, \dots, p_N$)

```

begin
Очистити вхідний набір точок                               1
 $Q := \emptyset; T := \emptyset;$                                 2
 $F :=$  знайти деяку початкову гіпергрань опуклої оболонки; 3
 $T \leftarrow$  підграні гіперграні  $F;$                              4
 $Q \leftarrow F$                                                   5

while ( $Q \neq \emptyset$ ) do                                       6

    begin  $F \leftarrow Q$  (взяти перший елемент із
    черги)                                                       7
     $T \leftarrow$  підграні гіперграні  $F;$                          8

    For each  $e \in T \cap T$  ( $e$  – кандидат для
    кроку загортання подарунка)                               9

        begin  $F' :=$  гіпергрань,
        суміжна з  $F$  по  $e$  («загортання
        подарунка»)                                             10
        Вставити в  $T$  всі підграні  $F'$ 
        яких ще немає у файлі та
        видалити ті, які там вже є;                             11
         $Q \leftarrow F';$                                        12
        end;

    Вивести  $F$                                                   13

end;

end.
```

Рис. 5. Алгоритм «загортання подарунку»

Як вже було зазначено, складність першого кроку алгоритму, тобто «очистки» $O(N^3)$. Складність інших кроків згідно [5] – $O(Nd^3)$, в нашому випадку $d=3$.

Кроки додавання до черги та видалення з черги можна розглядати разом. Їх загальна складність буде $O(N^{d+2})$, так само як і для кроку породження всіх підграней.

Перевірка, що виконується на кроці 9, так само як і зміна файлу на кроці 11 виконується за $O(\log(N^{d+2})N^{d+2})$.

Загальна складність «кроку загортання» в звичайному алгоритмі $O(N^{d+2})$, при $d=3$. В нашому випадку треба також враховувати зміни, які ми зробили на кроці «загортання». Загальна складність звичайного методу «загортання подарунку» $O(N^{d+2}) + O(N^{d+2} \log N)$.

Складність удосконаленого алгоритму буде складати $O(N^3)$.

Висновки

В роботі запропоновано удосконалення відомих методів «розподіляй і володарюй» та «загортання подарунку» побудови тривимірної опуклої оболонки на випадок не симпліційних політопів і їх практична реалізація у вигляді програм побудови опуклої оболонки. Досить складною виявилась адаптація існуючих алгоритмів побудови опуклої оболонки, орієнтованих на симпліціальність, до випадку не симпліціальності даних.

Удосконалений алгоритм «загортання подарунку» дає загальну оцінку складності побудови опуклої оболонки у тривимірному просторі порядку $O(N^3)$, що на перший погляд є дещо гіршим результатом ніж у випадку відповідного алгоритму для симпліціальних політопів. Проте це достатньо висока ефективність алгоритму для загального випадку у порівнянні з існуючими підходами.

Удосконалення алгоритму «розподіляй і володарюй» для випадку не симпліціальності загальну оцінку складності не погіршило і дало час $O(N \log N)$. Це співпадає з мінімальною можливою оцінкою складності побудови опуклої оболонки в 3-вимірному просторі [5,6]. Втім є простір для удосконалення методу і нових розробок для випадку, коли кількість точок, що належать опуклій оболонці значно менша ніж загальна кількість точок. Наприклад метод,

запропонований Д. Кіркпатріком і Р. Зейделем [8], працює за $O(N \log h)$, де h – кількість точок опуклої оболонки, тобто при малих h наближається до лінійного.

Список літератури

1. B. Bhattacharya, Worst-case analysis of a convex hull algorithm. unpublished manuscript, Dept. of Computer Science, Simon Fraser University, February 1982.
2. D. R. Chand and S. S. Kapur, An algorithm for convex polytopes, JASM 17(1), 78-86 (Jan, 1970).
3. M. Kallay, Convex hull algorithms in higher dimensions, unpublished manuscript, Dept. Mathematics, Univ. of Oklahoma, Norman, Oklahoma, 1981.
4. F. P. Preparata and S. J. Hong, Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions, Comm. ACM 2(20), 87-93 (Feb. 1977)
5. Препарата Ф., Шеймос Г. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. – 478 с.
6. Goodman J.E., O'Rourke J. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. - N.Y.: Chapman and Hall/CRC Press, 2004. – 1497 p.
7. B. Grünbaum, Convex Polytopes, Wiley-Interscience, New York, 1967.
8. Kirkpatrick D. G. , Seidel R. The ultimate planar convex hull algorithm? SIAM J. Comput., 15(1), 1986, p. 287-299.

Надійшла до редколегії 20.10.09

УДК 517.929.4

Шатирко А.В., к. ф.-м. н.,

Хусаїнов Д.Я., д. ф.-м. н., проф.

Отримання умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова-Красовського

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу побудови достатніх умов абсолютної інтервальної стійкості розв'язків систем непрямого регулювання з запізненням аргументу у вигляді конструктивних алгебраїчних нерівностей. Наведено оцінки експоненціальної збіжності розв'язків.

Ключові слова: функціонал Ляпунова, інтервальна абсолютна стійкість, запізнення аргумента.

E-mail: a_shatyrko@mail.ru, khusainov@unicyb.kiev.ua
Статтю представив д.т.н, проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Задачі абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання виникли з практичних проблем отримання умов стійкості систем регулювання з функцією керування заданого класу, а саме функції, що міститься в заданому секторі [1-5]. Спочатку розглядалися системи, що описані звичайними диференціальними рівняннями. Пізніше задачі поширилися на класи диференціально-різницевої систем [6,7] і систем з невизначеними коефіцієнтами [8]. Досить детальний огляд всіх робіт цього класу міститься у [9-11].

В попередній роботі [12] розглянуто нелінійні системи прямого регулювання з запізнюючимся аргументом. За допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського вигляду суми квадратичних форм та інтегралу від нелінійності та так званої S -процедури отримано умови абсолютної інтервальної стійкості та обчислено коефіцієнти експоненціального згасання. В цій роботі розглянуто системи непрямого регулювання. На відміну від багатьох відомих робіт використовується функціонал з експоненціальним множником. Це дає змогу

A.V.Shatyrko, PhD in Math.,

D.Ya. Khusainov, full prof., Dr.Sc.

Absolute stability conditions construction of non-direct regulator systems by Lyapunov-Krasovskiy functional

Construction problem of absolute interval stability sufficient conditions non-direct regulator systems solutions with time delay argument were investigated in term of constructive algebraic inequalities by direct Lyapunov method. Exponential estimates of solution convergence were obtained.

Key Words: Lyapunov functional, interval absolute stability, time delay argument

виявити характер збіжності та обчислити відповідні коефіцієнти.

1. Умови абсолютної інтервальної стійкості

Будемо розглядати систему непрямого регулювання, яка описується інтервально заданими диференціальними рівняннями з запізнюючимся аргументом вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут $\rho > 0$, матриці ΔA та ΔB можуть приймати свої значення з заданих фіксованих інтервалів

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{\Delta b_{ij}\}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нелінійна функція одного аргументу $f(\sigma)$ лежить в заданому секторі першої й третьої чверті системи координат

$$k_1 \sigma^2 \leq f(\sigma) \sigma \leq k_2 \sigma^2, \quad k_2 > k_1 > 0. \quad (1.3)$$

Дослідження стійкості систем
диференціальних рівнянь без запізнювання

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bf(\sigma(t)), \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t))\end{aligned}\quad (1.4)$$

проводиться за допомогою методу функцій
Ляпунова вигляду квадратична форма з
інтегральною добавкою [1-2].

$$V(x, \sigma) = x^T Hx + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi.$$

При дослідженні систем з запізнюванням

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)), \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t))\end{aligned}\quad (1.5)$$

використовується функціонал Ляпунова-
Красовського з інтегральною добавкою [6]

$$\begin{aligned}V[x(t), \sigma(t)] &= x^T(t) Hx(t) + \\ &+ \int_{t-\tau}^t x^T(s) Gx(s) ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi) d\xi\end{aligned}$$

В цій роботі будемо використовувати
функціонал Ляпунова-Красовського з
інтегральною добавкою та експоненціальним
множником вигляду

$$\begin{aligned}V[x(t), \sigma(t)] &= x^T(t) Hx(t) + \\ &+ \int_{t-\tau}^t e^{-c(t-s)} x^T(s) Gx(s) ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (1.6)$$

За його допомогою можна отримати не лише
умови абсолютної інтервальної стійкості, а й
обчислити коефіцієнти експоненціального
згасання, що є надзвичайно важливим для
оцінки часу перехідного процесу.

Означення 1.1. Система (1.5) називається
абсолютно стійкою, якщо нульовий розв'язок
 $x(t) \equiv 0$ системи (1.5) є асимптотично стійкий
в цілому при довільній функції $f(\sigma)$, що
задовольняє умові (1.3).

Якщо матриці A , B точно не відомі, а їх
елементи приймають значення з деяких
конкретних наперед заданих інтервалів (1.2), й

система має вигляд (1.1) то вона називається
інтервальною.

Означення 1.2. Система (1.5) називається
абсолютно інтервально стійкою, якщо система
(1.1) абсолютно стійка при довільних
матрицях ΔA , ΔB що задовольняють умовам
(1.2).

Будемо використовувати наступні векторні
та матричні норми

$$|A| = \{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}, \quad |x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{1/2},$$

$$\|x(t)\|_{\tau, \zeta} = \left\{ \int_{-\tau}^0 e^{-\zeta(t-s)} |x(s)|^2 ds \right\}^{1/2},$$

$$\|\Delta A\| = \max_{\Delta a_{ij}} \{\Delta a_{ij}\}, \quad \|\Delta B\| = \max_{\Delta b_{ij}} \{\Delta b_{ij}\},$$

$\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – екстремальні власні числа
відповідних симетричних, позитивно
визначених матриць. Позначимо

$$S_1[G, H, \zeta] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB & -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right) \\ -B^T H & e^{-\zeta\tau} G & \theta \\ -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right)^T & \theta^T & \rho \end{bmatrix}\quad (1.7)$$

θ – нульовий вектор. Спочатку розглянемо
систему без інтервальних збурень (1.5) й
отримаємо умови абсолютної стійкості цієї
системи.

Теорема 1.1. Нехай існують позитивно
визначені матриці G , H , при яких матриця
 $S_1[G, H, \zeta]$ також позитивно визначена. Тоді
система з запізненням (1.5) без інтервальних
збурень абсолютно стійка.

Доведення. Для функціоналу (1.6) вірні
наступні двосторонні оцінки

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 + \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_{\tau, \zeta}^2 + \frac{1}{2}k_1|\sigma(t)|^2 &\leq \\ &\leq V[x(t), \sigma(t)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H)|x(t)|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_{\tau, \zeta}^2 + \frac{1}{2}k_2|\sigma(t)|^2.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Обчислимо повну похідну функціоналу в силу
системи без інтервальних збурень (1.5).

Використовуючи позначення (1.7), запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t), \sigma(t)] = & -(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))) \times \\ & \times S_1[G, H, \zeta](x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T - \\ & - \zeta \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds. \end{aligned}$$

Якщо матриця $S_1[G, H, \zeta]$ позитивно визначена, та враховуючи обмеження "сектора", отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t), \sigma(t)] \leq & -\lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta]) \times \\ & \times (|x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2) - \\ & - \zeta \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \zeta}^2. \end{aligned}$$

І з ослабленої теореми Красовського М.М. [13, стор.145] отримаємо, що система з запізненням є абсолютно стійкою.

Отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи регулювання з запізненням.

Теорема 1.2. Нехай існують позитивно визначені матриці G, H , при яких матриця $S_1[G, H, \zeta]$ також позитивно визначена. Якщо збурення $\|\Delta A\|, \|\Delta B\|$ такі, що виконуються умови

$$2 \frac{\lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta])}{\lambda_{\max}(H)} \|\Delta A\| + \|\Delta B\|^2 < \left(\frac{\lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta])}{\lambda_{\max}(H)} \right)^2 \quad (1.9)$$

тоді система з запізненням (1.5) абсолютно інтервально стійка.

Доведення. Для функціоналу Ляпунова-Красовського вигляду (1.6) вірні двосторонні нерівності (1.8). Обчислимо повну похідну функціоналу вздовж розв'язків систем з інтервальними збуреннями. Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t), \sigma(t)] = & -(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))) \times \\ & \times S_1[G, H, \zeta](x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T + \\ & + (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))) S_2[G, H] \times \\ & \times (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T - \end{aligned}$$

$$- \zeta \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds$$

де

$$S_2[G, H] = \begin{bmatrix} \Delta A^T H + H \Delta A & H \Delta B & \theta \\ \Delta B^T H & \Theta & \theta \\ \theta^T & \theta^T & 0 \end{bmatrix},$$

Θ – нульова матриця. Якщо матриця $S_1[G, H, \zeta]$ позитивно визначена, тоді виділимо повні квадрати й запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t), \sigma(t)] \leq & -\{\lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta]) - 2\|\Delta A\|H\} |x(t)|^2 - 2\|\Delta B\|H |x(t)| |x(t-\tau)| + \\ & + \lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta]) |x(t-\tau)|^2 - \\ & - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(S_1[G, H, \zeta]) k_1^2 \sigma^2(t) - \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\tau, \zeta}^2. \end{aligned}$$

Як впливає з критерію Сільвестра, умовою абсолютної інтервальної стійкості систем з запізненням (1.5) буде виконання нерівностей

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S_1[G, H]) & > 0 \\ [\lambda_{\min}(S_1[G, H]) - 2\|\Delta A\|H] \times \\ & \times \lambda_{\min}(S_1[G, H]) - \|\Delta B\|^2 |H|^2 > 0 \end{aligned}$$

Перша нерівність виконується згідно умови теореми. Перепишемо другу нерівність у вигляді

$$2\|\Delta A\|H [\lambda_{\min}(S_1[G, H]) + \|\Delta B\|^2 |H|^2] < \lambda_{\min}^2(S_1[G, H])$$

Звідси, враховуючи, що $|H| = \lambda_{\max}(H)$, отримаємо умову (1.9) абсолютної інтервальної стійкості теореми 1.2.

2. Оцінки збіжності розв'язків інтервальної системи з запізненням

В попередніх теоремах було отримано умови абсолютної стійкості. З технічної точки зору більш актуальним є отримання оцінок збіжності розв'язків інтервальної системи з запізненням. Для цього будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського з експоненціальним множником

$$V[x(t), \sigma(t), t] = e^{\gamma t} \times \quad (2.1)$$

$$\times \left\{ x^T(t) H x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \right\}$$

Попередньо доведемо наступний результат.

Лема 2.1. Для довільної матриці L_1 векторів $x(t)$, $x(t-\tau)$ та скаляру ξ має місце наступна нерівність

$$\begin{aligned} & x^T(t) L_1^T L_2 x(t-\tau) + x^T(t-\tau) L_2^T L_1 x(t) \leq \\ & \leq \xi^2 x^T(t) L_1^T L_1 x(t) + \frac{1}{\xi^2} x^T(t-\tau) L_2^T L_2 x(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доведення. Розкривши очевидну нерівність, маємо наступне

$$\begin{aligned} & \left[\xi L_1 x(t) - \frac{1}{\xi} L_2 x(t-\tau) \right]^T \left[\xi L_1 x(t) - \frac{1}{\xi} L_2 x(t-\tau) \right] = \\ & = \xi^2 x^T(t) L_1^T L_1 x(t) + \frac{1}{\xi^2} x^T(t-\tau) L_2^T L_2 x(t-\tau) - \\ & - x^T(t) L_1^T L_2 x(t-\tau) - x^T(t-\tau) L_2^T L_1 x(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} & x^T(t) L_1^T L_2 x(t-\tau) + x^T(t-\tau) L_2^T L_1 x(t) \leq \\ & \leq \xi^2 x^T(t) L_1^T L_1 x(t) + \frac{1}{\xi^2} x^T(t-\tau) L_2^T L_2 x(t-\tau) \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(H) &= \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_{12}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(H)}, \\ \varphi_{13}(k, H) &= \frac{k_2}{2\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_{21}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(G)}, \\ \varphi_{22}(G) &= \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}, \quad \varphi_{23}(k, G) = \frac{k_2}{2\lambda_{\min}(G)}, \\ \varphi_{31}(k, H) &= \frac{2\lambda_{\max}(H)}{k_1}, \quad \varphi_{32}(k, G) = \frac{2\lambda_{\max}(G)}{k_1}, \\ \varphi_{33} &= \frac{k_2}{k_1}, \end{aligned}$$

$$S_3[G, H, \zeta, \gamma] = \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} -A^T H - H A - G - \gamma \left(H + \frac{1}{2} k_2 c c^T \right) & -H B & -\left(H b + \frac{1}{2} c \right) \\ -B^T H & e^{-\gamma \tau} G & \theta \\ -\left(H b + \frac{1}{2} c \right)^T & \theta^T & \rho \end{bmatrix}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. Нехай існують позитивно визначені матриці G , H і скаляри $\zeta > \gamma > 0$, при яких матриця $S_3[G, H, \zeta, \gamma]$ також позитивно визначена і виконуються умови

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - 2\lambda_{\max}(H) \|\Delta A\| - \\ & - \lambda_{\max}^2(H) \frac{\|\Delta B\|^2}{\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])} > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тоді для розв'язків $x(t)$ інтервальної системи з запізненням (1.1) при $t \geq 0$ мають місце наступні оцінки збіжності

$$\begin{aligned} & |x(t)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi[\bullet] + \gamma)t\right\} \times \\ & \times \left[\sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{r, \zeta} + \sqrt{\varphi_{13}(k, H)} |\sigma(0)| \right] \\ & \|x(t)\|_{r, \zeta} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi[\bullet] + \gamma)t\right\} \times \\ & \times \left[\sqrt{\varphi_{21}(G, H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{22}(G)} \|x(0)\|_{r, \rho} + \sqrt{\varphi_{23}(k, G)} |\sigma(0)| \right] \\ & |\sigma(t)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi[\bullet] + \gamma)t\right\} \times \\ & \times \left[\sqrt{\varphi_{31}(k, H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{32}(k, G)} \|x(0)\|_{r, \rho} + \sqrt{\varphi_{33}(k)} |\sigma(0)| \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

де

$$\begin{aligned} & \chi[\bullet] = \\ & = \min\left\{ \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)}, (\zeta - \gamma), \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) \right\} \\ & \theta[\bullet] = \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - 2\lambda_{\max}(H) \|\Delta A\| - \\ & - \lambda_{\max}^2(H) \frac{\|\Delta B\|^2}{\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Доведення. Для отримання тверджень теореми 2.1 будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського виду (2.1). Він задовольняє двостороннім оцінкам

$$e^{\eta} \times \left\{ \lambda_{\min}(H) |x(t)|^2 + \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds + \frac{1}{2} k_1 \sigma^2(t) \right\} \leq V[x(t), \sigma(t), t] \leq \quad (2.7)$$

$$\leq e^{\eta} \left\{ \lambda_{\max}(H) |x(t)|^2 + \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds + \frac{1}{2} k_2 \sigma^2(t) \right\}$$

Обчислимо повну похідну функціоналу (2.1) вздовж розв'язків інтервальної системи (1.1). Оскільки за умовою (1.3)

$$\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leq \frac{1}{2} k_2 \sigma^2(t) = \frac{1}{2} k_2 x^T(t) c c^T x(t),$$

то, застосувавши отримані в попередній теоремі перетворення й використовуючи позначення матриць $S_3[G, H, \zeta, \gamma]$ і $S_2[G, H]$, запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq -e^{\eta} (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))) S_3[G, H, \zeta, \gamma] \times \\ &\times (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T + \\ &\times (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))) \times \\ &\times S_2[G, H] (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T - \\ &- (\zeta - \gamma) e^{\eta} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо окремо другу квадратичну форму. Використовуючи нерівність (2.2) леми 2.1, отримуємо

$$\begin{aligned} &(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T S_2[G, H] \times \\ &\times (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T = \\ &= x^T(t) [\Delta A^T H + H \Delta A] x(t) + x^T(t) H \Delta B x(t-\tau) + \\ &+ x^T(t-\tau) (\Delta B)^T H x(t) \leq \end{aligned}$$

$$\leq x^T(t) [\Delta A^T H + H \Delta A] x(t) + \xi^2 x^T(t) H^T H x(t) + \frac{1}{\xi^2} x^T(t-\tau) (\Delta B)^T \Delta B x(t-\tau)$$

де ξ – довільна стала.

Нехай, як випливає з умов теореми, існують позитивно визначені матриці G , H та скаляри ζ і γ , при яких матриця $S_3[G, H, \zeta, \gamma]$ також позитивно визначена. Тоді відокремивши кожен з змінних можна записати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq - \left\{ \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - 2\lambda_{\max}(H) \|\Delta A\| - \xi^2 \lambda_{\max}^2(H) \right\} \times \\ &\times e^{\eta} |x(t)|^2 - e^{\eta} \left\{ \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - \frac{1}{\xi^2} \|\Delta B\|^2 \right\} \times \\ &\times |x(t-\tau)|^2 - e^{\eta} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) f^2(\sigma(t)) - \\ &- (\zeta - \gamma) e^{\eta} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\theta[\bullet] = \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - 2\lambda_{\max}(H) \|\Delta A\| - \xi^2 \lambda_{\max}^2(H)$$

і покладемо

$$\xi^2 = \frac{\|\Delta B\|^2}{\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])}.$$

Підставивши отриманий вираз в попереднє співвідношення, маємо

$$\begin{aligned} \theta[\bullet] &= \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) - 2\lambda_{\max}(H) \|\Delta A\| - \\ &- \lambda_{\max}^2(H) \frac{\|\Delta B\|^2}{\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])} \end{aligned}$$

І, якщо $\theta[\bullet] > 0$, то похідна функціоналу буде від'ємно визначеною.

Обчислимо оцінку збіжності розв'язків. Для цього повернемося до похідної функціоналу. Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq -e^{\eta} \theta[\bullet] |x(t)|^2 - \\ &- e^{\eta} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) k_1^2 \sigma^2(t) - \end{aligned}$$

$$-(\zeta - \gamma)e^{\gamma t} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right]. \quad (2.8)$$

Повернемося до нерівності (2.7). Запишемо праву частину нерівності (2.7) у вигляді

$$-V(x(t), \sigma(t), t) \geq -e^{\gamma t} \times \left\{ \lambda_{\max}(H) \|x(t)\|^2 + \int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds + \frac{1}{2} k_2 \sigma^2(t) \right\} \quad (2.9)$$

Розглянемо випадки.

1. Запишемо отриману нерівність (2.9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} \|x(t)\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(H)} V[x(t), \sigma(t), t] - e^{\gamma t} \frac{1}{\lambda_{\max}(H)} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right] + e^{\gamma t} \frac{k_2}{2\lambda_{\max}(H)} \sigma^2(t).$$

Підставимо отриманий вираз в (2.8) і запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq -\frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} V[x(t), \sigma(t), t] - \\ &- e^{\gamma t} \left\{ \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) k_1^2 - \frac{\theta[\bullet]}{2\lambda_{\max}(H)} k_2 \right\} \sigma^2(t) - \\ &- e^{\gamma t} \left\{ (\zeta - \gamma) - \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} \right\} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right] \end{aligned}$$

І, якщо параметри системи такі, що

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) k_1^2 - \frac{\theta[\bullet]}{2\lambda_{\max}(H)} k_2 &> 0, \\ (\zeta - \gamma) - \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} &> 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

тоді

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] \leq -\frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} V[x(t), \sigma(t), t].$$

Розв'язуючи отриману нерівність, маємо

$$V[x(t), \sigma(t), t] \leq V[x(0), \sigma(0), 0] \exp \left\{ -\frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} t \right\}, \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

2. Запишемо нерівність (2.9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right] \leq -V[x(t), \sigma(t), t] + e^{\gamma t} \lambda_{\max}(H) \|x(t)\|^2 + e^{\gamma t} \frac{k_2}{2} \sigma^2(t)$$

і знов підставимо в вихідну нерівність (2.8). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq \\ &\leq -e^{\gamma t} \left\{ \theta[\bullet] - (\zeta - \gamma) \lambda_{\max}(H) \|x(t)\|^2 - \right. \\ &- (\zeta - \gamma) V[x(t), \sigma(t), t] - \\ &- e^{\gamma t} \left\{ \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) k_1^2 - (\zeta - \gamma) \frac{k_2}{2} \right\} \sigma^2(t). \end{aligned}$$

І, якщо буде виконуватись

$$\begin{aligned} \theta[\bullet] &\geq (\zeta - \gamma) \lambda_{\max}(H), \\ \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) k_1^2 &\geq (\zeta - \gamma) \frac{k_2}{2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

тоді

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] \leq -(\zeta - \gamma) V[x(t), \sigma(t), t].$$

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо

$$V[x(t), \sigma(t), t] \leq V[x(0), \sigma(0), 0] \exp \{ -(\zeta - \gamma) t \} \quad (2.13)$$

3. Нарешті, запишемо нерівність (2.9) у вигляді

$$-e^{\gamma t} \sigma^2(t) \leq -\frac{2}{k_2} V[x(t), \sigma(t), t] + e^{\gamma t} \frac{2\lambda_{\max}(H)}{k_2} \|x(t)\|^2 + e^{\gamma t} \frac{2\lambda_{\max}(H)}{k_2} \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right]$$

і знов підставимо в нерівність (2.8). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq -\frac{2\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])}{k_2} \times \\ &\times V[x(t), \sigma(t), t] - \\ &- e^{\chi} \left\{ \theta[\bullet] - \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) \lambda_{\max}(H) \right\} |x(t)|^2 - \\ &- e^{\chi} \left\{ (\zeta - \gamma) - \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) \right\} \times \\ &\times \left[\int_{t-\tau}^t e^{-\zeta(t-s)} x^T(s) G x(s) ds \right] \end{aligned}$$

І, якщо будуть виконуватись нерівності

$$\begin{aligned} \theta[\bullet] - \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) \lambda_{\max}(H) &\geq 0, \\ (\zeta - \gamma) - \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

тоді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq -\frac{2\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])}{k_2} \times \\ &\times V[x(t), \sigma(t), t]. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо

$$\begin{aligned} V[x(t), \sigma(t), t] &\leq V[x(0), \sigma(0), 0] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2\lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma])}{k_2} t \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поєднавши отримані нерівності (2.10)-(2.15), маємо

$$V[x(t), \sigma(t), t] \leq V[x(0), \sigma(0), 0] \exp\{-\chi t\},$$

$$\chi[\bullet] = \begin{cases} \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)}, & \text{якщо (i)} \\ (\zeta - \gamma), & \text{якщо (ii)} \\ \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]), & \text{якщо (iii)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} &\leq (\zeta - \gamma), \\ \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} &\leq \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]), \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} (\zeta - \gamma) &\leq \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)}, \\ (\zeta - \gamma) &\leq \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]), \end{aligned} \quad (ii)$$

$$\begin{aligned} \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) &\leq (\zeta - \gamma), \\ \frac{2k_1^2}{k_2} \lambda_{\min}(S_3[G, H, \zeta, \gamma]) &\leq \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H)} \end{aligned} \quad (iii)$$

тобто отримали залежність (2.6).

Знов використовуємо залежність (2.7).
Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} e^{\chi} \left\{ \lambda_{\min}(H) |x(t)|^2 + \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_{\zeta, \tau}^2 + \frac{1}{2} k_1 \sigma^2(t) \right\} &\leq \\ &\leq V[x(t), \sigma(t), t] \leq V[x(0), \sigma(0), 0] \leq \\ &\leq e^{-\chi t} \left\{ \lambda_{\max}(H) |x(0)|^2 + \lambda_{\max}(G) \|x(0)\|_{\zeta, \tau}^2 + \frac{1}{2} k_2 \sigma^2(0) \right\} \end{aligned}$$

Звідси отримуємо три оцінки. По-перше, маємо

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \times \\ &\times \left\{ \lambda_{\max}(H) |x(0)|^2 + \lambda_{\max}(G) \|x(0)\|_{\zeta, \tau}^2 + \frac{k_2}{2} \sigma^2(0) \right\} e^{-(\chi t + \tau \gamma)} \end{aligned}$$

І, використовуючи позначення $\varphi_{11}(H)$, $\varphi_{12}(G, H)$, $\varphi_{13}(k, H)$, отримуємо

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\chi[\bullet] + \gamma) t \right\} \times \\ &\times \left[\sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{\zeta, \tau} + \sqrt{\varphi_{13}(k, H)} |\sigma(0)| \right] \end{aligned}$$

Далі можна записати

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_{\zeta, \tau}^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(G)} \times \\ &\times \left\{ \lambda_{\max}(H) |x(0)|^2 + \lambda_{\max}(G) \|x(0)\|_{\zeta, \tau}^2 + \frac{k_2}{2} \sigma^2(0) \right\} e^{-(\chi t + \tau \gamma)} \end{aligned}$$

І, використовуючи позначення $\varphi_{21}(G, H)$, $\varphi_{22}(G)$, $\varphi_{23}(k, G)$ отримуємо

$$\|x(t)\|_{r,\delta} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi[\cdot] + \gamma)t\right\} \times \\ \times \left[\sqrt{\varphi_{21}(G, H)}\|x(0)\| + \sqrt{\varphi_{22}(G)}\|x(0)\|_{r,\delta} + \sqrt{\varphi_{23}(k, G)}\|\sigma(0)\|\right]$$

І, нарешті, запишемо

$$\sigma^2(t) \leq \frac{2}{k_1} \times \\ \times \left\{ \lambda_{\max}(H)\|x(0)\|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(0)\|_{r,\delta}^2 + \frac{k_2}{2}\sigma^2(0) \right\} e^{-(\chi[\cdot] + \gamma)t}$$

І, використовуючи позначення $\varphi_{31}(k, H)$, $\varphi_{32}(k, G)$, $\varphi_{33}(k)$ отримуємо

$$\|\sigma(t)\| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi[\cdot] + \gamma)t\right\} \times \\ \times \left[\sqrt{\varphi_{31}(k, H)}\|x(0)\| + \sqrt{\varphi_{32}(k, G)}\|x(0)\|_{r,\delta} + \sqrt{\varphi_{33}(k)}\|\sigma(0)\|\right]$$

Поеднуючи ці залежності, отримуємо твердження теореми 2.1.

З а у в а ж е н н я. Якщо матриця $S_3[G, H, \zeta, \gamma]$ позитивно визначена, то, в силу неперервності, завжди знайдуться значення ΔA , ΔB , $\gamma > 0$, при яких будуть виконуватись умови теорем 1.2 та 2.1.

Список використаної літератури

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с.
2. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с.
3. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36.
4. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с.
5. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.
6. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.

7. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.

8. Кунцевич В.М., Управление в условиях неопределенности: Гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев, Наукова думка, 2006. – 264 с.

9. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства / Под ред. А.Х.Гелига, Г.А.Леонова, А.Л.Фрадкова – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 608 с.

10. El-Kebir Boukas, Zi-Kuan Liu. Deterministic and Stochastic Time Delay Systems. – Birkhauser, Boston-Basel-Berlin. – 2002. – 423 p.

11. X.Liao, P.Yu. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. – Springer Science+Business Media B.V., 2008. – 390 p.

12. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2009. – С.143-152.

13. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом – М.: Наука 1970. – 240 с.

Надійшла до редколегії 30.11.2009

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.529; 539.12.04

Висоцький В.І., д.ф.-м.н., проф.,
Висоцький М.В., асп.,
Максюта М.В., к.ф.-м.н., доц.

Взаємодія рухомих нейтральних атомів з періодичною поверхневою структурою за умов резонансу

Розглянуто особливості взаємодії рухомих нейтральних атомів і молекул з полем надграток. Показано, що характер руху частинок залежить від співвідношення між частотою внутрішнього електромагнітного резонансу ω_1 і баунс-частотою Ω_1 , що обумовлена періодом надгратки і швидкістю руху частинки, а також від величин моментів частинки в основному і збудженому станах. Розглянуто умови реалізації режимів притягання і відштовхування частинок до надгратки, а також передумови формування віддаленої від надгратки одновимірної потенційної ями і здійснення стійкого руху частинок у цій ямі.

Ключові слова: надгратка, рухомі атоми, резонансна взаємодія.

V. I. Vysotskii, D.Sci (Ph.-M.), Prof.,
M. V. Vysotskyi, PhD student,
M. V. Maksyuta, PhD (Ph.-M.), Associate Prof.

Interaction of moving neutral atoms with periodic surface structure at resonance conditions

Features of interaction of moving neutral atoms, molecules and clusters with a field of superlattices are considered. It was shown that the type of particles motion depends on a relation between frequency of an internal electromagnetic resonance ω_1 and the bounce-frequency Ω_1 , that is defined by the period of a superlattice, the speed of particle motion and magnitude of the possible particle moments in the main and excited states. Conditions of realization of different motion modes are considered. Such modes are attraction and repulsion of particles to a superlattice. Preconditions of formation of distant from superlattice one-dimensional potential well and realization of channeling of neutral and charged particles in this well are also considered.

Key Words: superlattice, moving atoms, resonant interaction.

*E-mail: mihas1984@bigmir.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данілов В.В.

Вступ

Дослідження особливостей упорядкованої взаємодії пучків частинок, що рухаються, з різними типами орієнтованих середовищ є одним із пріоритетних напрямків прикладної фізики. Протягом останніх десятиліть активно вивчається та частина цієї проблеми, що пов'язана з орієнтаційним рухом заряджених частинок у кристалах. Набагато менш досліджена проблема керованого орієнтаційного руху в кристалах і мікроканалах потоків і пучків нейтральних частинок (в основному, нейтронів [1,2] і нейтральних атомів [2,3]).

Вперше процес впливу періодичного середовища на внутрішні стани частинок, що рухаються, був розглянутий у циклі робіт Окорокова [4] у рамках теорії збурень при аналізі проблеми дисоціації ядер і атомарних іонів, що рухаються крізь кристал. Однак, крім тривіальних процесів збудження і іонізації, які тільки й могли бути розглянуті в рамках нестационарної теорії збурень, у даній задачі є багато інших цікавих ефектів.

Нижче розглядається процес упорядкованого приповерхнього орієнтаційного руху нейтральних атомів і багатоатомних молекул, який здійснюється за рахунок індуковано-дисперсійного механізму взаємодії наведеного моменту частинки з полем надгратки.

Особливості селективної взаємодії рухомих нейтральних частинок з неоднорідним періодичним полем біля поверхні

Розглянемо взаємодію атома або молекули, що рухається та перебуває в основному стані, з періодичним електричним або магнітним полем, що існує біля поверхні. Ці поля можна розкласти по одновимірних векторах зворотних ґраток

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, z) &= \sum_n \vec{E}_n(x) \cos k_n z, \\ \vec{H}(x, z) &= \sum_n \vec{H}_n(x) \cos k_n z, \\ k_n &= 2\pi n / \Lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

3 формул перетворення компонент

електромагнітного поля при переході в рухому систему координат впливає, що при нерелятивістському рухові таких частинок з $v \ll c$, $\gamma - 1 \ll 1$ можна знехтувати зміною амплітуд відповідних полів. У цьому випадку в системі координат, пов'язаній з нерелятивістською частинкою, розклад (1) приймає вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \sum_n \vec{E}_n(x) \cos \Omega_n t, \\ \vec{H}(x, t) &= \sum_n \vec{H}_n(x) \cos \Omega_n t, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\Omega_n = vk_n$ - баунс-частота.

У розглянутій задачі розмір елементів надгратки набагато перевершує розмір частинки. У цьому випадку розв'язок задачі можна шукати в дипольному наближенні. Розглянемо конкретний електромагнітний перехід у частинці, який може бути пов'язаний як з електричним полем, так і магнітним. Для визначеності будемо розглядати перехід типу $E1$, для якого взаємодія забезпечується за рахунок відповідної компоненти електричного поля.

Енергія взаємодії частинки з полем (2) у дипольному наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -(\vec{d} \vec{E}(x, t)) = \sum_n V_n(x) e^{-i\Omega_n t}, \\ V_n(x) &= -(\vec{d} \vec{E}_n(x))/2, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\vec{d}$ - дипольний момент частинки.

Позначимо нижній і верхній стани резонансного переходу частинки індексами 1 та 2. У власній системі координат стан рухомої частинки визначається рівняннями для матриці густини

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{n=1}^2 (V_{2n} \rho_{n2} - \rho_{2n} V_{n2}) + \frac{\rho_{22}^{(0)} - \rho_{22}}{T_1} \\ &= \frac{1}{i\hbar} (V_{21} \rho_{12} - \rho_{21} V_{12}) - \frac{\rho_{22}}{T_1}, \\ \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{n=1}^2 (V_{2n} \rho_{n1} - \rho_{2n} V_{n1}) - i\omega_{21} \rho_{21} - \frac{\rho_{21}}{T_2} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \{V_{21}(\rho_{11} - \rho_{22}) + V_{22} \rho_{21} - \rho_{21} V_{11}\} - \\ &\quad - i\omega_{21} \rho_{21} - \frac{\rho_{21}}{T_2}, \\ \rho_{12} &= \rho_{21}^*, \rho_{11} = 1 - \rho_{22} \end{aligned} \quad (4)$$

У цій системі рівнянь величина $\rho_{22}^{(0)}$

відповідає рівноважній імовірності заселення збудженого рівня частинки. Для вільного руху частинки, на яку не діє флуктуаційне поле оточення, маємо $\rho_{22}^{(0)} = 0$. Для неї існує тільки однорідне уширення міжрівневого переходу, викликане спонтанним розпадом, і виконується умова $T_2 = 1/\gamma$, $T_1 = 1/2\gamma$ (наприклад, [1]).

Елементи матриці густини визначають середній дипольний момент частинки (атома)

$$\langle \vec{d} \rangle = \rho_{11} \vec{d}_{11} + \rho_{22} \vec{d}_{22} + \rho_{12} \vec{d}_{21} + \rho_{21} \vec{d}_{12}, \quad (5)$$

індукований змінним полем (3). Недіагональні елементи залежать від частоти поля у наступній формі

$$\rho_{21} = \sigma_{21}(t) e^{-i\Omega_2 t}, \quad \rho_{12} = \rho_{21}^* = \sigma_{12}(t) e^{i\Omega_2 t} \quad (6)$$

Ефективність збудження індукованого дипольного моменту залежить від близькості частоти розглянутого атомного переходу й частоти конкретного компонента поля (2). Будемо вважати, що частота електромагнітного переходу в частинці близька до однієї з баунс-частот Ω_n .

У випадку дворівневої системи матричний елемент $\vec{d}_{21}$ може бути записаний як дійсна величина. Залишаючи в розкладі (3) тільки доданки з резонансною баунс-частотою Ω_2 , одержуємо на основі (4) спрощену систему рівнянь для матриці густини

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= ig(\sigma_{12} - \sigma_{21}) - 2\gamma \sigma_{22}, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t} &= ig(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + i(\Omega_2 - \omega_m + i\gamma) \sigma_{21}, \\ g &= -\frac{(V_2(x))_{21}}{2\hbar} = \frac{\vec{d}_{21} \vec{E}_2(x)}{2\hbar} = \frac{\vec{d}_{12} \vec{E}_2(x)}{2\hbar}, \\ g_{11} &= \frac{\vec{d}_{11} \vec{E}_0(x)}{2\hbar}, \quad g_{22} = \frac{\vec{d}_{22} \vec{E}_0(x)}{2\hbar}, \\ \omega_m &= \omega_{21}(z) - g_{22}(z) + g_{11}(z) \end{aligned} \quad (7)$$

Величина ω_m визначає частоту резонансного переходу в частинці, що рухається. У полі (2) з постійними амплітудами окремих частотних компонент $\vec{E}_n(x)$ повільно змінні амплітуди $\sigma_{mn}(t)$ елементів матриці густини (6) залежать від часу тільки протягом короткого перехідного процесу тривалістю $\Delta t \approx 1/\gamma$. Після цього інтервалу еволюція атома визначається сталими значеннями σ_{mn} (7), що відповідає стаціонарним розв'язкам

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= -\frac{g(\Omega_s - \omega_{ms} + i\gamma)}{(\Omega_s - \omega_{ms})^2 + \gamma^2 + 2g^2}, \\ \sigma_{21} &= -\frac{g(\Omega_s - \omega_{ms} - i\gamma)}{(\Omega_s - \omega_{ms})^2 + \gamma^2 + 2g^2}, \\ \sigma_{22} &= \frac{g^2}{(\Omega_s - \omega_{ms})^2 + \gamma^2 + 2g^2}, \sigma_{11} = 1 - \sigma_{22}\end{aligned}\quad (8)$$

системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}ig(\sigma_{12} - \sigma_{21}) - 2\gamma\sigma_{22} &= 0, \\ ig(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + i(\Omega_s - \omega_{21} + g_{22} - g_{11} + i\gamma)\sigma_{21} &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

З (8) при $|\Omega_s - \omega_{ms}| \gg \gamma, g$ знаходимо

$$\sigma_{12} \rightarrow 0, \sigma_{21} \rightarrow 0, \sigma_{22} \rightarrow 0, \sigma_{11} \rightarrow 1$$

Ці результати підтверджують справедливості вихідної передумови, відповідно до якої істотний вплив на переходи у квантовій системі (4) мають тільки резонансні доданки з $|\Omega_s - \omega_{ms}| \leq \gamma$.

$$\langle V(x) \rangle = \left(\frac{\hbar\{g_{11}(x) - g_{22}(x)\}G(x)}{1 + G(x) + (\Omega_s - \omega_{ms}(x))^2/\gamma^2} - 2\hbar g_{11}(x) \right) + \frac{2\hbar(\Omega_s - \omega_{ms}(x))G(x)}{1 + G(x) + (\Omega_s - \omega_{ms}(x))^2/\gamma^2}\quad (11)$$

Нижче на основі аналізу співвідношень (10) і (11) будуть розглянуті різні варіанти руху нейтральних частинок біля поверхонь надграток.

Особливості орієнтаційного руху нейтральних частинок у полі періодичної структури

Особливості енергії взаємодії (10), (11) нейтральної частинки з полем (1) і характер руху цієї частинки залежать від роду частинок і наявності постійних моментів в основному і збудженому станах, від знака і величини різниці частот $(\Omega_s - \omega_{21} + g_{22} - g_{11})$, від відстані z від частинки до періодичної структури і, природно, від типу періодичного поля.

Найпростіший випадок відповідає знакозмінному полю періодичної ґратки з $\langle \vec{E} \rangle = 0$ і відсутності власного дипольного моменту. Це може бути, наприклад, знакозмінне періодичне поле типу Кроніґа-Пенні

$$\begin{aligned}\vec{E}(0, z) &= \vec{e}_z E_0, (n-1/4)\Lambda < z < (n+1/4)\Lambda, \\ \vec{E}(0, z) &= -\vec{e}_z E_0, (n+1/4)\Lambda < z < (n+3/4)\Lambda, \\ -\infty < n < \infty,\end{aligned}\quad (12)$$

для якого $\langle \vec{E}(0, z) \rangle = 0$. У цьому випадку характер руху частинки визначається видом енергії взаємодії

У власній системі координат середнє значення енергії взаємодії рухомої частинки з періодичним полем визначається величиною

$$\begin{aligned}\langle V(x) \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_{nm} \rho_{nn} = \\ &= -\vec{d}_{11} \vec{E}_0 \sigma_{11} - \vec{d}_{12} \vec{E}_s \sigma_{21} - \vec{d}_{21} \vec{E}_s \sigma_{12} - \vec{d}_{22} \vec{E}_0 \sigma_{22} = \\ &= \left(\frac{2\hbar g^2 (g_{11} - g_{22})}{(\Omega_s - \omega_{ms})^2 + \gamma^2 + 2g^2} - 2\hbar g_{11} \right) + \\ &+ \frac{4\hbar g^2 (\Omega_s - \omega_{ms})}{(\Omega_s - \omega_{ms})^2 + \gamma^2 + 2g^2}\end{aligned}\quad (10)$$

Після введення параметра насичення атомного переходу

$$G(x) = \frac{2g^2}{\gamma^2} = \frac{(\vec{d}_{21} \vec{E}_s(x))^2}{2\hbar^2 \gamma^2}$$

вираз (10) приймає вигляд

$$\langle V(x) \rangle = \frac{2\hbar(\Omega_s - \omega_{21})G(x)}{1 + G(x) + (\Omega_s - \omega_{21})^2/\gamma^2}\quad (13)$$

Залежно від співвідношення частот Ω_s, ω_{21} можливі дві різні ситуації:

а) $\Omega_s < \omega_{21}$ і $\partial \langle V(x) \rangle / \partial x > 0$.

В цьому випадку частинки будуть притягатися до поверхні, а область біля надгратки відповідає потенційній ямі;

б) $\Omega_s > \omega_{21}$ і $\partial \langle V(x) \rangle / \partial x < 0$.

Цей випадок веде до відштовхування частинки і наявності потенційного бар'єра біля поверхні надгратки.

Для багатокомпонентного пучка, що містить атоми з різними резонансними частотами $\omega_{21a} < \Omega_s < \omega_{21b}$ або атоми з різними швидкостями $v_a k_s < \omega_{21} < v_b k_s$, можливий поділ пучка частинок. Для такого пучка схема руху і узагальнений вид потенційної енергії наведені на Рис. 1.

Висота бар'єра або глибина ями, а також положення відповідного мінімуму або максимуму $\langle V(0) \rangle$ (13) залежать від різниці частот $\Omega_s - \omega_{21}$ і амплітуди $\vec{E}_s(0)$ відповідного спектрального компонента періодичного поля (1).

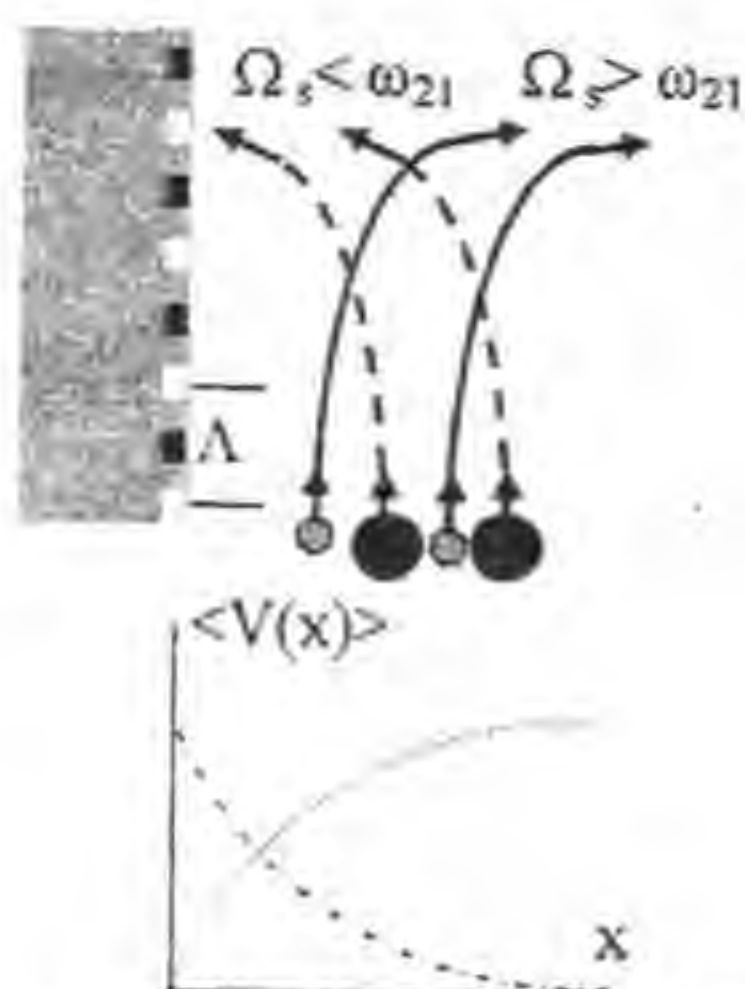


Рис. 1. Особливості надповерхневого руху частинок із внутрішнім резонансом в полі модульованого потенціалу поверхні.

Принципово інший режим руху частинок відповідає періодичному полю з $\langle \vec{E} \rangle \neq 0$. Зокрема, якщо розподіл напруженості поля на поверхні періодичної структури має вигляд періодичної послідовності

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, z) &= 2\vec{e}_z E_0, (n-1/4)\Lambda < z < (n+1/4)\Lambda, \\ \vec{E}(0, z) &= 0, (n+1/4)\Lambda < z < (n+3/4)\Lambda, \quad (14) \\ -\infty < n < \infty, \end{aligned}$$

для якої $\langle \vec{E}(0, z) \rangle \neq 0$, то просторовий розподіл напруженості цього поля $\vec{E}(x, t)$ в супутній системі координат характеризується виразом

$$\vec{E}(x, t) = \vec{e}_z E_0(x) \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\left(\frac{2(2n+1)\pi vt}{\Lambda}\right) \right], E_0(x) = E_0 e^{-x/\Lambda} \quad (15)$$

Розглянемо особливості руху частинки в поверхневому електричному полі з урахуванням розщеплення рівнів за рахунок ефекту Штарка при наявності постійної складової поля $\langle E(x, t) \rangle = E_0(x)$.

Для атома водню це розщеплення має вигляд $\omega_{21}(x) = \omega_0, \omega_0 \pm 3ea_0 E_0(x)/\hbar$.

Тут $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ - радіус Бора.

Підставивши $\omega_{21}(x)$ в рівняння для потенційної енергії, знаходимо

$$\langle V(x) \rangle = \frac{4\hbar g_0^2 e^{-2x/\Lambda} (\Omega_s - \omega_0 \mp \frac{3ea_0 E_0}{\hbar} e^{-x/\Lambda})}{(\Omega_s - \omega_0 \mp \frac{3ea_0 E_0}{\hbar} e^{-x/\Lambda})^2 + \gamma^2 + 2g_0^2 e^{-2x/\Lambda}} \quad (16)$$

З (16) випливає, що для спадаючого розв'язку $\omega_{21}(x) = \omega_0 - 3ea_0 E_0 e^{-x/\Lambda}/\hbar$ й за умови $\Omega_s < \omega_0$ потенційна енергія $\langle V(x) \rangle$ буде мати просторовий мінімум, який знаходиться на відстані $x = x_0$ від поверхні. Наявність такого мінімуму відповідає стійкому руху частинки уздовж поверхні в потенційній ямі (див. Рис.2). Такий режим руху відповідає просторовому надповерхневому каналюванню.

Цей ефект не має аналогів ні у фізиці каналювання заряджених частинок, ні у випадку руху атомів у лазерному полі.

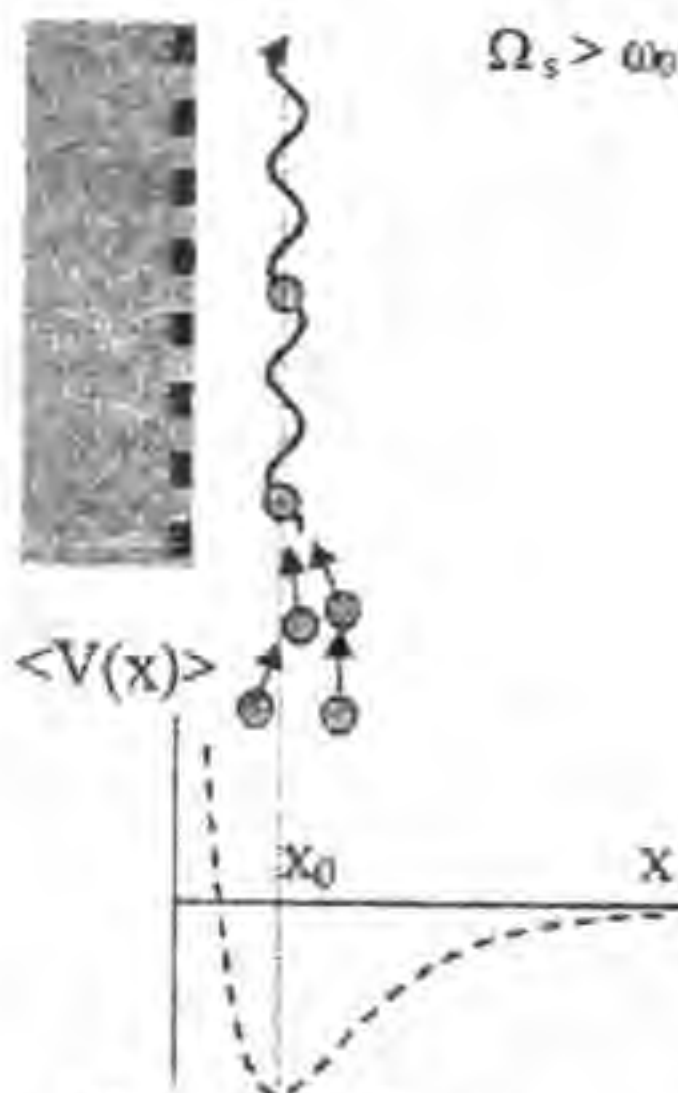


Рис. 2. Режим надповерхневого просторового каналювання нейтральних частинок із внутрішнім резонансом біля модульованого потенціалу поверхні при наявності постійної складової поля $\langle E(x, t) \rangle = E_0(x)$ і при умові $\Omega_s > \omega_0$.

Для випадків зростаючих розв'язків $\omega_{21}(x) = \omega_0 + 3ea_0 E_0 e^{-x/\Lambda}/\hbar$ або постійного розв'язку $\omega = \omega_0$ при виконанні умов ефекту

Штарка такий мінімум буде відсутній, а рух атомів буде відповідати притяганню або відштовхуванню від поверхні, що аналогічно розглянутому вище випадку.

Щоб оцінити глибину потенційної ями, обмежимося розглядом випадку, коли в знаменнику (16) основну роль для всіх значень x грає перший доданок

$$\left| \Omega, -\omega_0 + \frac{3ea_0}{\hbar} E_0 e^{-x/\Lambda} \right| \gg \gamma, g_0 e^{-x/\Lambda} \quad (17)$$

При такій комбінації параметрів вираз для енергії (16) приймає вид

$$\langle V(x) \rangle \approx \frac{4\hbar(g_0 e^{-x/\Lambda})^2 (\Omega, -\omega_0 + \frac{3ea_0}{\hbar} E_0 e^{-x/\Lambda})}{(\Omega, -\omega_0)^2} \quad (18)$$

Мінімум цієї функції відповідає координаті

$$x_0 = \Lambda \ln \left(\frac{9ea_0 E_0}{\hbar(\omega_0 - \Omega_s)} \right) \quad (19)$$

Підставивши значення координати (19) у вираз (18), можна визначити глибину потенційної ями відносно її значення $\langle V(x \rightarrow \infty) \rangle \rightarrow -0$ на нескінченності

$$\langle V(x) \rangle_{\min} \approx -\frac{16\hbar^3 g_0^2 (\omega_0 - \Omega_s)}{27 (3ea_0 E_0)^2} \quad (20)$$

Використовуючи явний вид виразу $g_0 = \vec{d}_{12} \vec{E}_s(x) / 2\hbar$ і враховуючи, що для розподілу (14) амплітуда постійної компоненти поля з точністю до коефіцієнта $4/\pi$ дорівнює амплітуді першої гармоніки (яку будемо розглядати як резонанс), а також беручи до уваги, що $|\vec{d}_{12}| \leq ea_0$, одержуємо оцінку для глибини індукованої періодичним полем надгратки потенційної ями $|\langle V(x) \rangle_{\min}| \leq ea_0 E_0 / \pi^2$, яка визначає ефективність утримання частинок.

Зокрема, у випадку, коли поле на поверхні періодичної надгратки рівно величині $E_0 = 10^5$ В/см, що може бути досягнутим в реальних сегнетоелектриках, глибина ями обмежена величиною $|\langle V(x) \rangle_{\min}| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ еВ. При цьому різниця баунс-частоти і частоти внутрішнього резонансу не повинна бути більше величини $(\omega_0 - \Omega_s) \leq 10^{14} \text{ с}^{-1}$, що може бути легко реалізоване на практиці.

Висновки

Розглянуті особливості взаємодії рухомих нейтральних частинок (атомів або молекул), які мають внутрішню електромагнітну структуру, з періодичним полем надгратки свідчать про можливість керування рухом таких частинок. Характер руху залежить від енергії електромагнітного переходу, швидкості руху частинок, періоду надгратки й наявності електричного або магнітного моментів частинки в основному й збудженому станах.

Показано, що характер руху частинок може відповідати як їхньому притяганню до надгратки, так і відштовхуванню від неї. Крім того, може бути реалізований такий режим руху, при якому частинка буде перебувати в ізольованій одновимірній потенційній ямі, яка відокремлена від поверхні надгратки і може знаходитись на досить великій відстані від неї.

Такі режими руху дозволяють розглядати задачу про керувану взаємодію потоку нейтральних частинок з поверхнею з метою посилення або ослаблення цієї взаємодії.

Метод селекції частинок залежно від значення резонансної частоти може бути використаний при, наприклад, поділі ізотопів, які рухаються у вигляді монокінетичного потоку нейтральних молекул або атомів. Вирішальним при такому процесі є питання про величину зсуву частот, викликаному різною масою ядер.

Список використаних джерел

1. Высоцкий В.И., Кузьмин Р.Н. Магнитное каналирование нейтронов в немагнитных кристаллах // ЖЭТФ, 1982, т. 82, №1, с.177-181
2. Высоцкий В.И., Максютта Н.В. Индуцированно-дисперсионный механизм ориентационном движении нейтральных частиц в кристаллах, Препринт ИМФ-13-90 института металлофизики АН УССР, Киев,

1990, 17 с.

3. Высоцкий В.И., Кузьмин Р.Н. Канализование нейтральных частиц и квантов в кристаллах // УФН, 1992, т.162, № 9, с. 2-47
4. Окороков В.В. Когерентное возбуждение оптических спектров атомов, пролетающих через кристалл // Письма ЖЭТФ, 1988, т.2, №4, с.175-179

Надійшла до редколегії 30.12.2009

УДК 621.382

Кузнецов Г.В., д.-ф.м.н.,
Скришевський В.А., д.-ф.м.н., проф.,
Циганова Г.І., інж., Шулімов Ю.Г., інж.

Напівпровідникові термоелектричні датчики для імпульсного витратоміра

Проаналізовані особливості застосування напівпровідникового термоелектричного елементу Пельтьє в якості імпульсного витратоміра потоку рідини. Досліджено вплив потоку води в трубопроводі на кінетику теплообміну та електричні характеристики термоелектричного датчика. Нестационарні методи вимірів витрат (імпульсний, метод перехідних характеристик) значною мірою вирішують проблеми розширення діапазону та компенсації температурних і динамічних погрешностей термоанемометра.

Ключові слова: витратомір, термодатчик, імпульсний метод

E-mail: kuznetsov@univ.kiev.ua,

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

В термоанемометрах для вимірів витрат газу або рідини зазвичай використовується залежність тепловіддачі нагрітого тіла від швидкості потоку. Перевагами термоанемометричних методів є висока швидкість, чутливість, точність, залежність показів від густини рухомого середовища, компактність. [1, 2]. В той же час суттєвим недоліком термоанемометрів з класичними стаціонарними методами вимірів (термоанемометр постійної температури, термоанемометр постійного струму) є значна залежність показів від температури контрольованого середовища. Процес індивідуального градування таких приладів при різних температурах є досить трудомістким і потребує значних часових витрат.

Перспективними в цьому плані є імпульсні термоанемометри з нестационарним режимом зміни температури чутливого елемента з подальшою реєстрацією характеристик, які пов'язані з умовами теплообміну, а отже, і з витратою газу або рідини [3, 4]. Методи вимірів витрат в нестационарному режимі значною мірою вирішують проблеми розширення діапазону, компенсації температурних та динамічних погрешностей. В даний час зростає активність

Kuznetsov G.V., Dr. Sci.,
Skrychevsky V.A., Dr. Sci., Prof.,
Tsiganova A.I., Eng., Shulimov Y.G., Eng.

Semiconducting thermoelectric sensors for a pulse flowmeter

The possibilities of usage of the semiconducting thermoelectric sensor as pulse flowmeter of stream of fluid are studied. The influence of a stream of water on heat exchange and electrical characteristics of thermoelectric sensor is explored. The methods of non-steady measurements (pulse method, method of transition characteristics) augment measurement range of flow velocity and reduce temperature and dynamic errors of a thermoanemometer.

Key words: flowmeter, thermosensor, pulse method

розробок термоанемометричних витратомірів з частотно-часовими вихідними характеристиками що зв'язано з удосконаленням мікропроцесорних систем обробки інформації [2, 4].

Більшість термоанемометрів (терморезисторних, тонкоплівкових металевих, дровових) реагують на зміну гідродинамічних параметрів потоку в режимі нагріву термочутливого елемента. При вимірі об'ємних та теплових витрат води можна використовувати термоанемометри на основі ефекту Пельтьє з охолодженою поверхнею теплообміну, що дозволяє уникнути характерного для розігрітого водного потоку виділення розчиненого газу і утворення парів води [7]. В даній статті розглянуті особливості нестационарного режиму роботи напівпровідникового термоелектричного датчика витрат води на основі ефекту Пельтьє.

Процеси теплообміну в потоці рідини

Процеси теплообміну в потоці рідини визначаються його фізичними та гідродинамічними властивостями. Як правило, в плинному рідинному середовищі теплообмін забезпечується за рахунок теплопровідності та конвекції. При русі потоку води в трубопроводі основним механізмом теплопередачі є примусова

конвекція, що забезпечує значно інтенсивніший теплообмін порівняно з теплопровідністю та випромінюванням [6, 8].

В умовах теплового балансу поглинання теплоти на холодному контакті в результаті термоелектричного ефекту $-Q_n$ компенсується надходженням теплоти в результаті джоулевого розігріву Q_j , теплопровідності гілок термоелемента Q_x та теплового притоку із рухомого середовища Q_0 [5].

$$-Q_n + \frac{1}{2}Q_j + Q_x + Q_0 = 0 \quad (1)$$

де $Q_n = \alpha_{12}IT_K$; $Q_j = I^2R$; $Q_x = \lambda(T_0 - T_K)$; $Q_0 = \alpha^*S_k(T_0 - T_K)$; I - струм через термоелемент; T_K - температура робочого холодного контакту; T_0 - температура рухомого середовища; $\alpha_{12} = (\alpha_1 - \alpha_2)$; $l = (\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)/I$; $R = (\rho_1/s_1 + \rho_2/s_2)l$, відповідно, термоелектрорушійна сила, теплопровідність та електроопір термоелемента. Індекси 1, 2 для значень коефіцієнта термоерс α_1 , α_2 , питомої теплопровідності λ_1 , λ_2 , питомого опору ρ_1 , ρ_2 , відносяться відповідно до n -типу та p -типу напівпровідникових гілок термоелементу з площею перерізу s_1 , s_2 і довжиною l (рис.1).

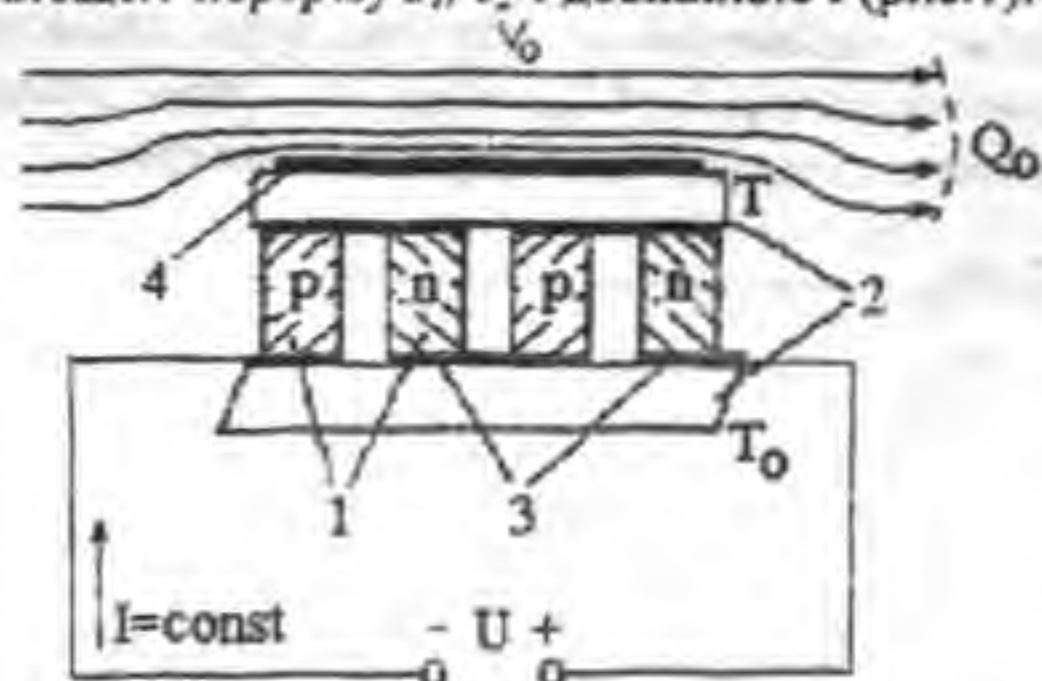


Рис.1 Схема термоелектричного датчика на ефекті Пельтьє

1 - гілки термоелемента; 2 - тепловоди;
3 - контакти; 4 - поверхня обтікання

Коефіцієнт тепловіддачі α^* визначається як кількість теплоти, що передається в одиницю часу одиницею поверхні теплообміну S_k при різниці температур між поверхнею T_K і рідиною T_0 в один градус. Кількість переданої теплоти зростає при підвищенні коефіцієнту тепловіддачі, збільшенні площі поверхні обтікання, збільшенні різниці температур між теплоносієм і теплообмінником.

Інтенсивність конвективного теплообміну характеризується коефіцієнтом тепловіддачі α^* , який складним чином залежить від гідродинамічної ситуації в трубопроводі, теплофізичних властивостей теплоносія, розмірів

і форми датчика. Теоретична постановка завдання розрахунку ефективності теплообміну в потоках рідини навіть при певних обмеженнях призводить до рішення складної системи рівнянь у часткових похідних щодо температури й швидкості. Задача може вирішуватися аналітично лише в деяких випадках простих потоків з стаціонарним теплообміном [6].

Для визначення коефіцієнту тепловіддачі α^* використовують безрозмірний запис у формі гідродинамічних критеріїв подібності - узагальнених безрозмірних ступеневих комплексів (чисел), що описують процеси руху і теплообміну в потоці. Подання залежностей в критеріях подібності дозволяє результати окремих експериментів поширювати на всі подібні процеси [6]. Рух рідини характеризується трьома основними режимами: ламінарним, турбулентним та перехідним, що відрізняються різною інтенсивністю тепло- і масообмінних процесів. Співвідношення між силами інерції та тертя в плинному середовищі і відповідно режим руху потоку визначається критерієм Рейнольдса Re ($Re < 2300$ - ламінарний, $2300 < Re < 10000$ - перехідний, $Re > 10^4$ - турбулентний).

На рис.2 показано вплив швидкості потоку води на режим руху для трубопроводу діаметром $D=25$ мм. Зміна режиму руху відбувається при деякій критичній швидкості, що залежить від температури і діаметру труби. Ламінарний режим при кімнатній температурі зберігається при $v_0 < 0,1$ м/с ($D=25$ мм) і $v_0 < 0,05$ м/с ($D=50$ мм). Перехід до турбулентного режиму спостерігається при швидкості $v_0 > 0,8$ м/с ($D=25$ мм) та $v_0 > 0,4$ м/с ($D=50$ мм).

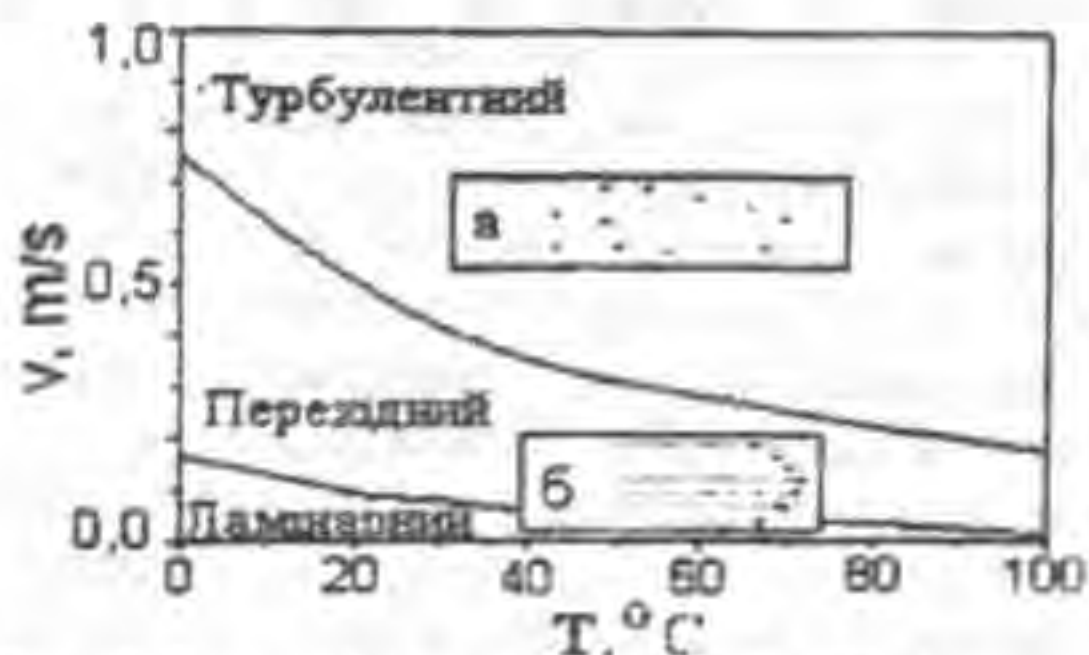


Рис. 2 Залежність режиму руху (а, б) від швидкості та температури потоку води (в) в циліндричному трубопроводі ($D=25$ мм)

Визначальною для термоанемометрії в критеріях подібності є залежність числа Нусельта $Nu = \alpha^*l/\lambda$ (характеризує інтенсивність процесів теплообміну в рідині) від числа Рейнольдса

$Re = v_0 l / \nu$ (характеризує гідродинамічні властивості потоку). Існує значна кількість критеріальних співвідношень, що обумовлено різноманітністю типів та конструкцій датчиків і методик обробки експериментальних даних. Для термо-анемометричних датчиків вони зводяться до загально прийнятого виду [6]:

$$Nu = A + B \times Re^n \quad (2)$$

де A і B - безрозмірні коефіцієнти. В умовах стабілізованого ламінарного руху ($Re < 2300$) потік рідини являє собою сукупність окремих шарів, що не перемішуються (рис.2) і коефіцієнт тепловіддачі лінійно залежить від швидкості, теплоємності та густини рідини:

$$\alpha^* = v_0 c \rho \quad (3)$$

Для турбулентного руху потоку рідини ($Re > 10000$) в круглій трубці критерій Нусельта Nu з урахуванням лише вимушеної конвекції обчислюється по напівемпіричній формулі:

$Nu \approx 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$, де $Pr = \nu / a = \mu / \lambda$ - число Прандтля (характеризує фізичні властивості рідини). Підставляючи відповідні значення критеріїв подібності знаходимо для коефіцієнта тепловіддачі в турбулентному потоці:

$$\alpha^* = \frac{0,023 \lambda}{(a \nu)^{0,4} d^{0,2}} v_0^{0,8} \quad (4)$$

В виразах (3-4) v_0 - середня по перерізу швидкість рідини, ρ - густина, λ - коефіцієнт теплопровідності, c - питома теплоємність, ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості, μ - коефіцієнт динамічної в'язкості; a - коефіцієнт температуропровідності, l - характерний геометричний розмір потоку (для круглої труби $l = D$), d - діаметр чутливого елемента.

При ламінарному режимі відсутні процеси конвективного переносу тепла в поперечному напрямку (лише за рахунок теплопровідності рідини). З розвитком турбулентності зростає інтенсивність процесу конвективного переносу теплоти. Конвективна теплопередача є корисною для чутливості датчика, у той час як його висока теплопровідність погіршує метрологічні характеристики. Підвищення температури рухомого середовища призводить до збільшення конвективного коефіцієнту тепловіддачі в усьому інтервалі швидкостей, що обумовлює зростання чутливості термоелектричного датчика.

При проходженні струму на контактах термоелектричного елемента виникає падіння напруги, що визначається як опором напівпровідникового матеріалу $U_R = IR$, так і

протидією виникаючої термоелектрорушійної сили $U_T = \alpha_{12}(T_0 - T_K)$ [7]:

$$U = IR + \alpha_{12}(T_0 - T_K) \quad (5)$$

де I - струм через термоелемент, T_K - температура робочого контакту, T_0 - температура рухомого середовища. З урахуванням (1) вираз (5) для напруги на термодатчику в режимі термоохолодильника приймає вигляд:

$$U = IR + \frac{\alpha_{1,2} I (\alpha_{1,2} T_0 - \frac{1}{2} IR)}{\chi + \alpha_{1,2} I + \alpha^* S_K} \quad (6)$$

З рівняння (6) легко розрахувати коефіцієнт теплопередачі α^* , залежність якого від швидкості водного потоку v_0 описується виразами (3, 4). Проте розрахунок ускладнюється впливом температурних змін параметрів як датчика, так і рідини. Підвищення температури призводить до зростання інтенсивності теплообміну, спостерігається зростання сигналу термодатчика в усьому інтервалі швидкостей обумовлено зростанням теплоти Пельтьє.

Тому перевагу слід надавати розрахункам швидкості по параметрам, що безпосередньо вимірюються при даній температурі потоку. Такими параметрами можуть бути характерні значення напруг U_0 , U_R , U_I при сталому значенні струму I через термодатчик (рис.3).

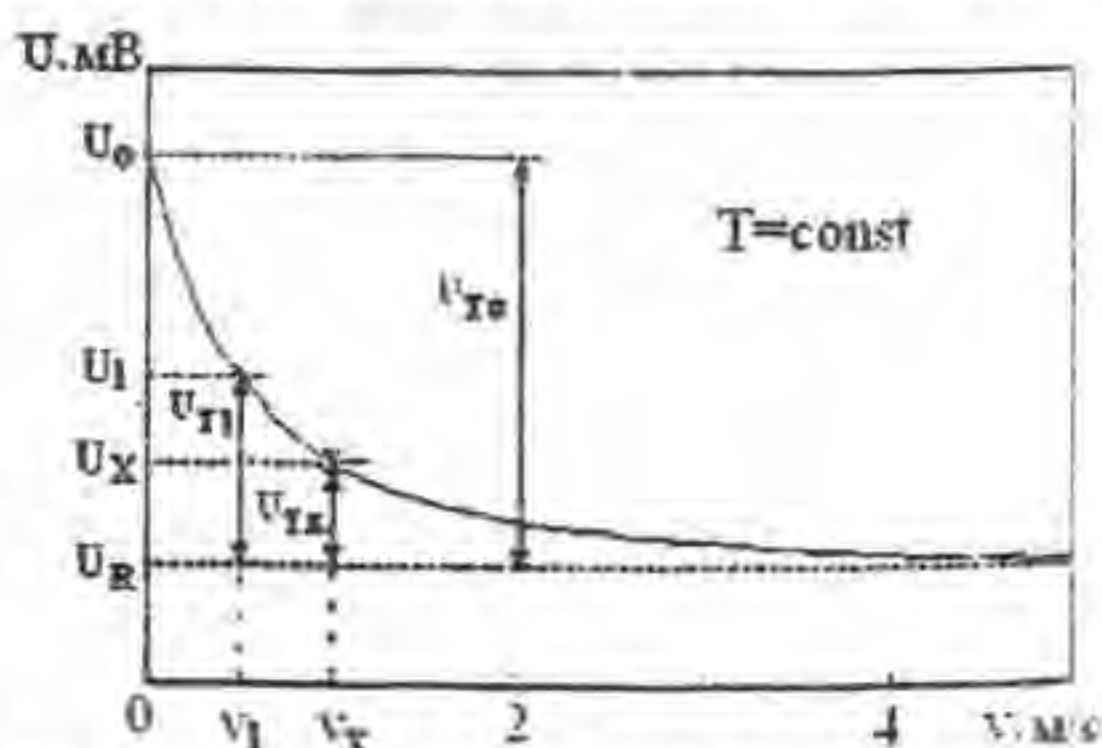


Рис. 3. Залежність напруги на термодатчику від швидкості потоку.

Як слідує з рис. 3 з ростом швидкості потоку сигнал датчика змінюється від напруги холостого ходу U_0 (швидкість потоку $v_0 = 0$) до напруги, що визначається значенням омичного опору $U_R = IR$ (швидкість потоку $v_0 \rightarrow \infty$). Напруга U_I є тестовою для вибраної відомої швидкості потоку $v_0 = v_I$, а напруга U_X характеризує значення контрольованої швидкості потоку $v_0 = v_X$. Визначення швидкості потоку v_X зводиться до розрахунку по результатам експериментальних вимірів змін сигналу термоелектричного датчика

при заданих значеннях струму I та температури рідини T_0 . Із виразів (2-6) для швидкості потоку можна отримати:

$$v_x = \left[K_s(T_0) \left(\frac{U_0 - U_R}{U_x - U_R} - 1 \right) \right]^n \quad (7)$$

де $K_s(T_0) = v_1 \left(\frac{U_0 - U_R}{U_0 - U_1} - 1 \right)$, $n=1$ для

ламінарного і $n=1,25$ для турбулентного руху.

Температурні залежності параметрів $U_0(T_0)$, $U_1(T_0)$, $U_R(T_0)$ є технічними характеристиками даного датчика або партії датчиків і визначаються завчасно в процесі градування. Формула (7) не залежить від режиму включення термоелектричного датчика і дає змогу визначення швидкості потоку води при будь-якій температурі безпосередньо по результатам вимірів напруги U_x .

Нестационарні процеси в термодатчику

Специфіка роботи термоелектричного датчика Пельтьє в нестационарному режимі обумовлена тим, що теплота Пельтьє виділяється на контактах, а теплота Джоуля в об'ємі напівпровідника [5]. Завдяки цьому в нестационарному режимі можна отримати більш глибоке охолодження поверхні обтікання датчика. В умовах ідеальної теплоізоляції термоелемента від оточуючого середовища знаходження часової залежності температури робочого контакту зводиться до рішення диференційного рівняння:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT}{dt} - \frac{Q_j}{\lambda} \quad (8)$$

Розрахунок перехідних процесів при включенні термоелемента звичайно проводиться операційним методом і потребує чисельних рішень [3, 9]. Часова залежність температури робочого контакту представляється у вигляді розкладу по експонентам, при чому час виходу на стаціонарний режим визначається найбільшою із часових констант в показниках експонент.

Розрахунок часу виходу на стаціонарний режим спрощується в наближенні зосереджених теплоємностей (до робочого контакту відносять половину теплоємності напівпровідникової гілки) [5]. В цьому випадку рівняння (8) зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь, які містять лише похідні за часом t і описують тепловий баланс на робочому контакті. Рішення є досить точним при відносно малих струмах, коли часова зміна температури

холодного контакту має близьку до експоненціальної залежність. Цій умові задовольняють найбільш важливі для практичного застосування режими максимальної холодопродуктивності та максимального холодильного коефіцієнта елемента Пельтьє..

Застосовуючи описаний вище метод розрахунку й використовуючи введені вище позначення, можна представити рівняння (1) теплового балансу для нестационарного випадку:

$$\alpha_{12} I T_K - \lambda(T_0 - T_K) + c \frac{dT_K}{dt} = 0 \quad (9)$$

де $c = c_1 + c_2 + c_3$ – повна теплоємність теплопоглинаючого контакту, c_1 – теплоємність контактних пластин, c_2 – теплоємність напівпровідникових гілок, c_3 – теплоємність охолоджуваного середовища рідини. В нестационарному режимі можна знехтувати величиною незалежної від часу теплоти Джоуля, так як вона не впливає на час перехідного процесу. При зазначених вище умовах після включення імпульсу струму в момент часу $t=0$ перепад температури $\Delta T = T_0 - T_K$ на контактах наближається до стаціонарного значення $(\Delta T)_{стат}$ по експоненційному закону:

$$\Delta T = (\Delta T)_{стат} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (10)$$

Постійною тепловою часу τ для визначеності зазвичай вважають час досягнення значення перепаду температур, що відрізняється від стаціонарного на 5% [9]. Вибір 5% зручний тому, що з достатньою точністю $\ln(0,05) \approx -3$ і тоді для тривалості часу t_n перехідного процесу маємо $t_n = 3\tau$. Використовуючи (9-10) для приблизної оцінки тривалості перехідних процесів теплової постійної часу τ отримаємо:

$$\tau \approx \frac{c}{\lambda + \alpha_{12} I} \quad (11)$$

Теплова постійна часу термоелектричного елемента трохи більша, ніж у дрових і плівкових термоанемометрів, і залежно від розміру елемента становить 0,5-2,5с. Коефіцієнти Пельтьє пропорційні струму і перепаду температури на контактах і через них впливають на часову залежність сигналу. Швидкість охолодження робочого контакту зростає при збільшенні струму і теплопровідності напівпровідникової гілки термоелемента. В той же час теплова постійна часу практично не залежить від варіації температури контрольованого середовища [4].

Імпульсний метод.

В імпульсних витратомірах для визначення швидкості потоку рідини використовується її вплив на зміну амплітуди сигналу або тривалість перехідних процесів в термоелектричному датчику.

При імпульсному методі реєстрації зміни амплітуди сигналу витратомір працює в режимі періодичного включення або виключення джерела стабілізованого постійного струму [7]. Контроль швидкості та витрат потоку води здійснюється по вимірам падіння напруги на розміщеному в трубопроводі термоелектричному датчику при послідовній подачі імпульсів струму. Виміри напруги при періодичному імпульсному включенні і виключенні джерела живлення дозволяють компенсувати температурні зміни параметрів датчика та розділити складові падіння напруги, обумовлені термоелектрорушійною силою і омичним опором напівпровідника.

Згідно (5) при включеному джерелі струму падіння напруги U на термоелектричному датчику визначається сумою напруг $U = U_T + U_R$ обумовлених протидією термоелектрорушійної сили $U_T = \alpha_{12}(T_K - T_0)$ та опором напівпровідникової гілки $U_R = IR$. При виключенні джерела струму $U_R = 0$ і падіння напруги на датчику визначається лише значенням термоелектрорушійної сили, яка залежить від температури поверхні теплообміну контакту, тобто, від швидкості обмірюваного потоку рідини. Різниця падіння напруги на датчику $U - U_T = IR$ у включеному та виключеному стані визначається лише струмом I та опором напівпровідникового матеріалу R , що безпосередньо залежить від температури оточуючого середовища. Імпульсний метод дозволяє по результатам вимірів лише одного термоелектричного датчика одночасно визначати швидкість і температуру потоку води.

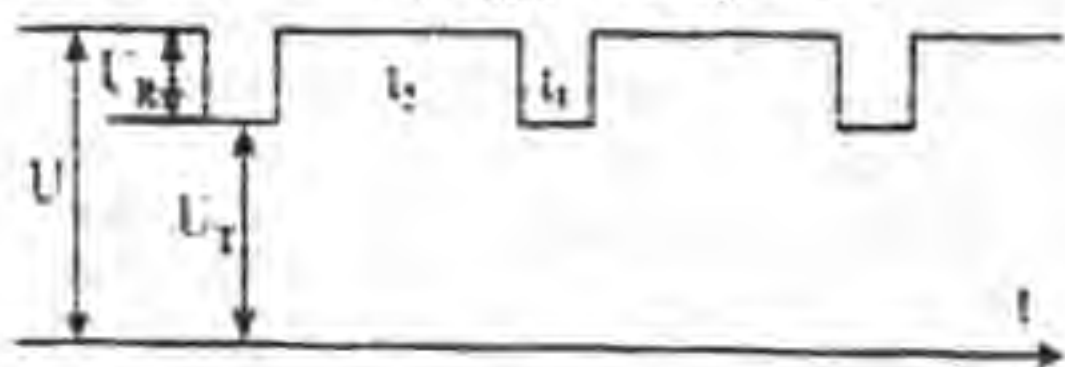


Рис. 4. Часова залежність сигналу термоелектричного датчика в імпульсному режимі

На рис. 4 наведена часова залежність напруги на термоелектричному датчику. При

короткочасному відключенні джерела струму $U_R = 0$ і падіння напруги на термоелектричному датчику визначається лише сигналом термоелектрорушійної сили $U = U_T$. За рахунок теплопровідності термоелектричного датчика температури теплового і холодного спайів з часом зближуються $T \rightarrow T_0$, що обумовлює нестационарне падіння напруги $U \rightarrow 0$. Інерційність процесу зменшення напруги:

$$U \sim U(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (12)$$

визначається постійною часу τ , яка для типових термоелектричних датчиків на основі Bi_2Te_3 з розмірами напівпровідникових гілок 1-2 мм характеризується значеннями $\tau \sim 1$ сек. Виконання умов $t \ll \tau$ визначає фіксовану тривалість часу виключення джерела струму ($t_1 < 10^{-2} - 10^{-3}$ с), протягом якого напруга на термоелектричному датчику зберігає значення $U \approx U(0)$, де $U(0)$ – напруга на датчику в початковий момент виключення $t=0$.

Розрахунок швидкості v_0 потоку води здійснюється по значенням напруги на термоелектричному датчику U_{T0} , U_{T1} , U_{TX} (рис.3), які обумовлені лише дією термоелектрорушійної сили і безпосередньо вимірюються в режимі виключеного джерела струму. В імпульсному режимі вимірів вираз (7) приймає вигляд:

$$v = \left[K_1(T_0) \left(\frac{U_{T0}}{U_{TX}} - 1 \right) \right]^n \quad (13)$$

$$\text{де } K_1(T_0) = v_1 \left(\frac{U_{T1}}{U_{T0} - U_{T1}} - 1 \right), \quad n=1 \text{ у}$$

випадку ламінарного і $n=1,25$ у випадку турбулентного руху потоку. При градуванні датчика попередньо фіксуються необхідні для розрахунків експериментальні значення напруги U_{T0} при швидкості потоку $v_0=0$ та напруги U_{T1} при відомому тестовому значенні швидкості $v_0=v_1$. Формула (13) дозволяє визначати швидкості потоку води при будь-якій температурі безпосередньо по вимірюваному значенні напруги U_{TX} . Різниця між значеннями сигналу термоелектричного датчика у включеному та виключеному стані визначається величиною омичного опору $U_R = IR$. Оскільки залежність опору для даного напівпровідника від температури $R(T)$ є відомою характеристикою, то експериментально виміряні значення падіння напруги U_R можна використовувати для контролю температури потоку T_0 .

Метод перехідних характеристик.

Тривалість перехідних процесів в режимі розігріву або охолодження термоелектричного елементу в значній мірі визначається умовами теплообміну в рухомому середовищі. При розробці імпульсних термоанометрів можна використовувати різні види нестационарних переходів (рис.5): після виключення імпульсу: живлення (а), в момент включення імпульсу живлення (б), в режим комутації процесів нагріву та охолодження термоелектричного елементу (в).

В режимі реєстрації тривалості перехідного процесу після припинення дії імпульсу струму на термоелектричний елемент подають послідовність імпульсів струму ΔI з фіксованою тривалістю t_1 та інтервалом проходження t_2 (рис.5а). Тривалість імпульсу джерела живлення повинна забезпечувати охолодження робочого контакту до сталого мінімального значення температури, якому відповідає значення електричної напруги на елементі U_T . Після закінчення імпульсу поверхня робочого контакту нагрівається в потоці контрольованого середовища води. Як вище зазначалося,

тривалість перехідного процесу t_n однозначно пов'язана з тепловою постійною термоелемента $t_n = 3\tau$, а отже, є функцією швидкості потоку рідини. Метод застосовується для малоінерційних витратомірів і забезпечує підвищення точності вимірів витрат в умовах суттєвих коливань температури контрольованого середовища.

Режим реєстрації часу перехідного процесу при подачі імпульсного живлення (рис.5б) використовується для визначення тривалості часу охолодження робочого контакту до певного заданого значення температури. В цьому випадку дія імпульсного впливу струму припиняється при досягненні контактом характерного значення температури (відповідно і сигналу датчика). Тривалість часу t_1 нагрівання термочутливого елементу пропорційна кількості тепла, що надходить на поверхню обтікання холодного контакту датчика, тобто, визначається швидкістю потоку рідини. Метод застосовується в системах керування витратами і дозволяє регулювати швидкістю датчика за рахунок вибору необхідного значення характерної температури.

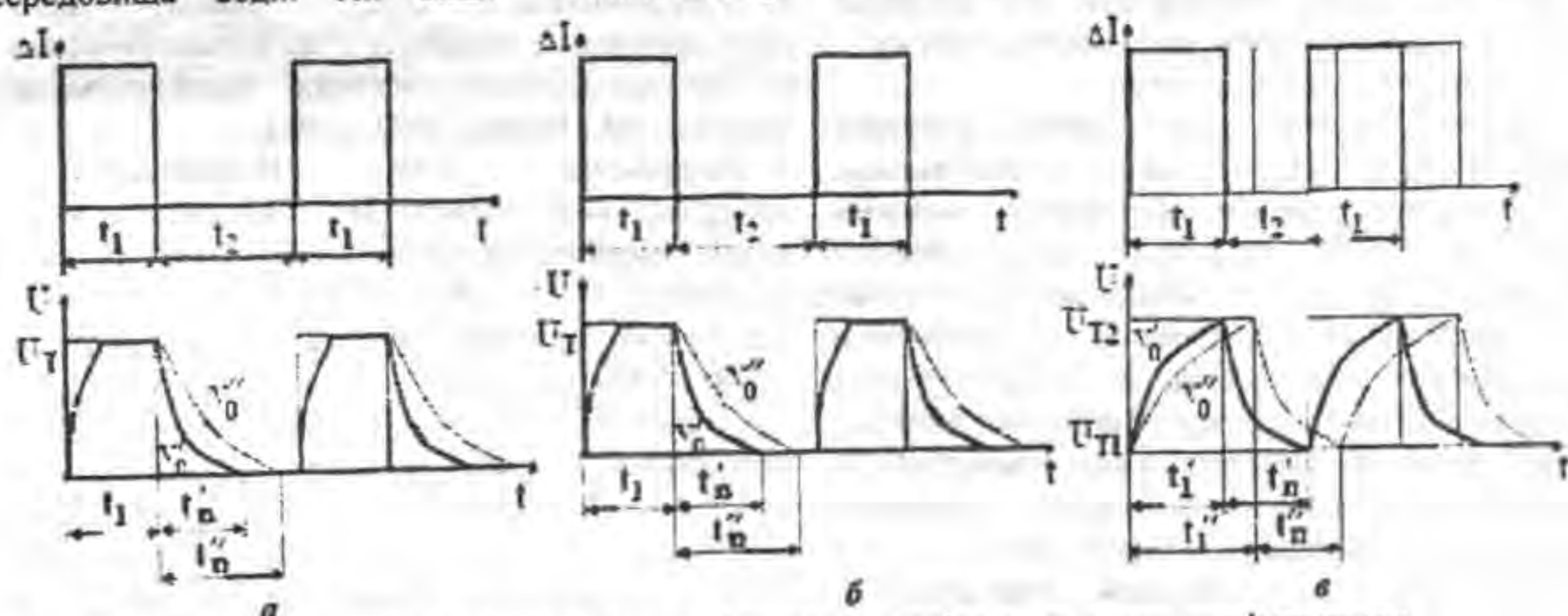


Рис.5. Методи реєстрації тривалості перехідних процесів: а - виключення імпульсу; б - включення імпульсу; в - комутації процесів нагріву та охолодження



Рис.6 Блок-схема вимірювача імпульсних та перехідних характеристик

Режим комутації енергетичного стану між фіксованими значеннями температури робочого контакту при його нагріві і охолодженні застосовують при вимірах витрат в потоках, що швидко змінюються (рис.5в). При подачі більшого струму (режим постійної температури) поверхня робочого контакту охолоджується до деякого сталого значення температури, що відповідає значенню сигналу датчика U_{T1} . В цей момент термоелектричний елемент переходить в режим малого струму (режим термометра) і нагрівається до температури, коли сигнал датчика стає U_{T2} . Після цього поновлюється подача імпульсу більшого струму для повторного нагріву з встановленням значення сигналу U_{T1} .

Інтенсивність процесів охолодження і нагріву між заданими значеннями сигналу термодатчика визначається умовами теплообміну і відповідно величиною об'ємних витрат рідини. Комплексна обробка результатів вимірів дає змогу одночасного отримання інформації про зміну швидкості і температури контролюваного середовища. Режим термоанемометра (режим постійної температури) використовується для досягнення заданої температури при поточній швидкості, режим термометра (малого струму) - для виміру поточної температури.

Зросла активність досліджень теплових витратомірів з використанням нестационарних процесів в термодатчику обумовлена сучасним розвитком систем мікропроцесорної обробки інформації. На рис. 6 зображено структурна схема розробленої експериментальної установки для вимірів нестационарних характеристик термоелектричного датчика при імпульсному режимі живлення. Блок-схема включає імпульсне джерело живлення з стабілізованим значенням струму, блок комутації для перемикання режимів виміру, аналого - цифровий перетворювач, мікропроцесорний блок обробки інформації, реєструючий пристрій. Реєструючий термоелектричний датчик знаходиться усередині вимірювального відрізка трубопроводу.

Джерело живлення забезпечує подачу імпульсів стабілізованого струму до $I=100$ мА в смузі частот 0-30 кГц. При вимірах амплітудних змін сигналу тривалість періоду включення джерела живлення складає $t_2=1-10$ с, а виміри амплітуди термоелектрорушійної сили здійснюються при тривалості часу відключення блоку живлення $t_1<10^{-2}-10^{-3}$ с. При вимірах тривалості нестационарних перехідних процесів в термоелектричному датчику постійна тепла постійна часу τ визначається в діапазоні $10^{-2}-10$ с.

Висновки

Визначено вплив гідродинамічних параметрів водного потоку в трубопроводі на кінетику процесів конвективного теплообміну з термоелектричним елементом на основі ефекту Пельтьє. Термоелектричні датчики з охолодженою поверхнею теплообміну дозволяють уникнути впливу парової фази на інтенсивність тепловіддачі.

Методи вимірів витрат в нестационарному режимі (імпульсний, метод перехідних характеристик) значною мірою вирішують проблеми розширення діапазону та компенсації температурних і динамічних погрешностей термоанемометричного витратоміра.

Список використаних джерел

1. Кремлевский П.П. Расходомеры и счетчики количества веществ. -С.-Пб.: Политехника. - Кн.1. -2002. -409 с.; -Кн.2. -2004. -412 с.
2. Зорин А.А., Корнев В.Д., Хламов М.Г. Методы, средства, системы измерения и контроля параметров водных сред. -Донецк. -2000.-338 с.
3. Иорданшвили Э.К., Бабин В.П. Нестационарные процессы в термоэлектрических и термомагнитных системах преобразования энергии. -М.: Наука. -1983. -350 с.
4. Романченко А.Ф. Информационно-измерительные системы нестационарного энергетического состояния. -Уфа. -2000. -173 с.
5. Анатичук Л.И. //Термоэлементы и термоэлектрические устройства. -Киев: Наукова думка. -1979. -767 с.
6. Себиси Т., Бредшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. -М.: Мир. -1987. -278с.
7. Кузнецов Г.В., Скрышевский В.А., Третьяк О.В. Полупроводниковый термоэлектрический датчик скорости потока жидкости. //Сенсорная электроника и микросистемные технологии. -2007. -№1. -С.22-27.
8. Дрейцер Г.А. Нестационарный конвективный теплообмен при турбулентном течении газов и жидкостей в каналах. //Теплоэнергетика. -1998. - №12. -С.29-35.
9. Равич Ю.И., Гордиенко А.Н. Метод расчета времени переходного процесса многоступенчатой охлаждающей термобатареи. Физика и техника полупроводников. -2007. -41, №1. -С.112-116.

Надійшла до редколегії 29.10.09

УДК 538.566

Левитський С.М., докт. фіз.-мат. наук, проф.

**Поширення і відбивання ЛЧМ – імпульсів у
неоднорідній іоносферній плазмі**

При проходженні радіоімпульсів з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ – імпульсів) у неоднорідній іоносферній плазмі ці імпульси за рахунок дисперсійних властивостей плазми деформуються і можуть навіть зазнавати на певній висоті повну компресію.

Компресію ЛЧМ – імпульси можуть зазнавати також і при відбиванні від іоносфери, що може давати певні переваги при застосуванні подібних імпульсів для іоносферного зондування.

Ключові слова: ЛЧМ-імпульс, компресія, неоднорідна плазма, іоносфера.

*E-mail: sml@univ.kiev.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Імпульси з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ- імпульси) використовуються як для покращення співвідношення сигнал-шум у радіолокаційних системах [1], так і для збільшення миттєвої потужності генераторів радіоімпульсів НВЧ - діапазону [6], а також для створення надкоротких світлових імпульсів [2]. У подібних імпульсах частота зростає на протязі імпульсу лінійно

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t,$$

в межах від $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ в момент $t - \frac{T}{2}$ до $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ при $t + \frac{T}{2}$, де T - тривалість імпульсу.

Очевидно, що $\Delta\omega = \mu T$. Добуток $\Delta\omega T = B$ має назву бази ЛЧМ – імпульсу і характеризує ступінь його частотної модуляції.

При обробці ЛЧМ – імпульсу він пропускається через узгоджений фільтр, тобто систему з дисперсією, у якій час затримки сигналу зменшується з частотою. Тому на виході подібної системи відбувається стискання імпульсу у часі, що дає основний пік відгуку набагато більший, ніж початкова амплітуда коливань у ЛЧМ – імпульсі. На практиці для подібного стискання (компресії) ЛЧМ –

Levitsky S.M., Dr. of Sci., Prof.

**Propagation and reflection of chirped pulses in
the nonuniform ionospheric plasma**

By passing of a chirped pulse in a inhomogeneous ionospheric plasma this pulses due to the dispersion futures of the plasma becomes deformed and can be strongly compressed.

The chirped pulse can be compressed also being reflected by the ionosphere. This can give some advantage using such pulses in the experiments of ionospheric zonding.

Key Words: LFM-pulse, compression, nonuniform plasma, ionosphaera.

імпульсів застосовуються пасивні або активні лінії затримки, які мають потрібний закон дисперсії і являють собою досить складні системи [3].

В нашій попередній роботі [7] було показано, що при поширенні ЛЧМ – імпульсів у іоносферній плазмі за рахунок її природної дисперсії можлива їх компресія. При цьому ця плазма вважалась однорідною. Це припущення мало під собою певні підстави, бо шлях, на якому відбувалась компресія, складав лише кілька десятків кілометрів, тоді як відстань характерної неоднорідності іоносфери є на порядок більшою.

В даній роботі робиться розрахунок руху ЛЧМ – імпульсів у неоднорідній плазмі, що при завданні певного закону розподілу концентрації електронів, дозволяє одержати точніші результати та дає можливість розглянути процес компресії подібних імпульсів як при їх поширенні, так і при відбиванні від шару неоднорідної плазми.

У загальному випадку форма ЛЧМ – імпульсу, що пройшов у середовищі з дисперсією деякий шлях, буде визначатися формулою

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(\omega) \exp[i\omega t - i\varphi(\omega)] d\omega \quad (1)$$

де $\dot{s}(\omega)$ - спектр початкового ЛЧМ - імпульсу а $\varphi(\omega)$ - набіг фази сигналу з частотою ω на цьому шляху. При цьому вважається що хвиля при своєму поширенні не зазнає втрат, що стосовно до F - шару іоносфери є цілком справедливим. Щоправда, при бажанні втрати можна було б врахувати вважаючи $\varphi(\omega)$ комплексним.

Для ЛЧМ - імпульсів з базою $B \gg 1$ спектр наближено може бути представлений як [4]

$$\dot{s}(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp\left[-i \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right], \quad (2)$$

а закон дисперсії $\varphi(\omega)$ у загальному вигляді може бути поданий через ряд Тейлора як

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)\Omega + \frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\Omega^2 + \dots, \quad (3)$$

де $\Omega = \omega - \omega_0$. Оскільки $\Omega \ll \Delta\omega$, а у ЛЧМ - імпульсах завжди $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, то цей ряд може бути обірваний на квадратичному члені.

При русі у однорідному дисперсійному середовищі

$$\varphi(\omega) = \omega \frac{z}{c} n(\omega) = \theta \omega n(\omega) \quad (4)$$

де z - пройдений шлях, $n(\omega)$ - показник заломлення середовища, а $\theta = z/c$ - час руху електромагнітної хвилі у вакуумі на шляху z .

Для плазми $n(\omega) = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$ де $\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m}$, а

n_e - концентрація електронів.

Отже, у плазмі на частоті ω_0

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_0) &= \theta \omega_0 n(\omega_0) \\ \varphi'(\omega_0) &= \theta / n(\omega_0) \\ \varphi''(\omega_0) &= -\frac{\theta}{\omega_0} \frac{1 - n^2(\omega_0)}{n(\omega_0)^3} \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\varphi'(\omega_0) = z/v_{gr}(\omega_0)$, де $v_{gr}(\omega_0)$ - групова швидкість в околі частоти ω_0 . Отже, з фізичної точки зору $\varphi'(\omega_0)$ є ні що інше, як $\tau(\omega_0)$ - час затримки обвідної імпульсу на шляху z . А $\varphi''(\omega_0) = d\tau(\omega_0)/d\omega$ є відповідальною за деформацію імпульсу, що зумовлюється залежністю групової швидкості від частоти.

ЛЧМ - імпульс, що пройшов певний шляху дисперсійному середовищі, буде мати вигляд

$$U(t) = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \exp[i\omega_0 t - \varphi(\omega_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left[\frac{1}{2\mu} + \frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\right]\Omega^2 + [t - \varphi'(\omega_0)]\Omega\right\} d\Omega \quad (6)$$

Інтеграл у правій частині виразу (6) характеризує форму обвідної ЛЧМ-імпульсу і може бути записаний як

$$V(t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \exp\left\{-i\left[\frac{1}{2\mu} + \frac{d\tau(\omega_0)}{d\omega}\right]\Omega^2 + [t - \tau(\omega_0)]\Omega\right\} d\Omega \quad (7)$$

Що до конкретного випадку поширення ЛЧМ імпульсу у неоднорідній іоносферній плазмі, то за даними [5] типовий розподіл концентрації електронів у F -шарі іоносфери може бути задовільно описаний до висоти у 300 км за експоненціальним законом $n_e(x) = \alpha \exp(px)$. Тут для денного стану іоносфери $\alpha = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$ і $p = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, а для нічного $\alpha = 10^8 \text{ м}^{-3}$ та $p = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$.

Таким чином час затримки сигналу з частотою ω_0 до висоти h може бути підрахований як

$$\tau(\omega) = \int_0^h \frac{dx}{v_{gr}(x, \omega)} = \frac{1}{c} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1 - b e^{px}}} \quad (8)$$

де c - швидкість світла у вакуумі а $b = e^2 \alpha / \epsilon_0 m \omega^2$. Інтегрування (8) дає

$$\begin{aligned} \tau(h, \omega) &= \frac{2}{cp} \{ \text{ArcTanh} [\sqrt{1 - b}] - \\ &\quad - \text{ArcTanh} [\sqrt{1 - b e^{ph}}] \} \end{aligned} \quad (9)$$

Для $\omega_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ та денного стану іоносфери $b = 1,8 \cdot 10^{-2}$, так що для висоти $h = 230 \text{ км}$ час затримки обвідної імпульсу складатиме 875 мкс.

Диференціювання (9) по ω для висоти $h = 230$ км дає $d\tau(\omega_0)/d\omega = -7,16 \cdot 10^{-12} \text{ с}^2$. Отже, щоб одержати на цій висоті компресію ЛЧМ – імпульсу його параметр $1/\mu$ має дорівнювати саме цій величині. Якщо покласти тривалість імпульсу $T = 25$ мкс, то $\Delta\omega$ має бути $3,5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, що дійсно є на порядок меншим від ω_0 . При виконанні цієї умови під інтегралом (7) залишається лише член $[t - \tau(\omega_0)]\Omega$, що після інтегрування дає

$$V(t) = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \Delta\omega \frac{\sin[t - \tau(\omega_0)] \frac{\Delta\omega}{2}}{[t - \tau(\omega_0)] \frac{\Delta\omega}{2}} \quad (10)$$

Це є не що інше, як функція $\sin(x)/x$, зсунута у часі на $\tau(\omega_0)$ – час затримки обвідної імпульсу. Тривалість основної частини імпульсу $V(t)$ у момент оптимальної компресії складає $4\pi/\Delta\omega$ і для розглянутого вище прикладу дорівнює 3,5 мкс, тобто є в 7 разів коротшою з тривалістю початкового імпульсу.

Цей результат є цілком зрозумілим, бо після компенсації за рахунок $d\tau(\omega_0)/d\omega$ фазових зсувів у початковому ЛЧМ – імпульсі ми одержуємо спектр імпульсу, у якому усі спектральні компоненти є синфазними. А t -відображення подібного імпульсу як раз і є саме функцією $\sin(t)/t$.

Очевидно, що подібним же шляхом можна було б розв'язувати і обернену задачу – задавши несучу частоту, параметри ЛЧМ – імпульсу та закон розподілу концентрації електронів, одержати висоту, на якій відбувалася б оптимальна компресія цього імпульсу. Слід лише взяти до уваги, що частота ω_0 не повинна перевищувати $\omega_p(\text{max})$ – максимальну плазмову частоту у F – шарі, яка для наведених вище умов відповідає концентрації електронів $n_e(\text{max}) = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ і складає приблизно $6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, бо при $\omega_0 > \omega_p(\text{max})$ наведена вище апроксимація $n_e(x)$ є несправедливою, і сигнал мав би проходити наскрізь через F – шар.

Методом аналогічним до вищевикладеного можна розрахувати і процес компресії ЛЧМ – імпульсів при їх відбиванні від F – шару іоносфери, що може мати місце, якщо частота ω_0 менша від $\omega_p(\text{max})$. Тоді затримка часу імпульсу, що, зазнавши відбивання, повертається на земну поверхню, буде

$$\tau = \frac{2}{c} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{1 - b e^{px}}} = \frac{4}{cp} \text{ArcTanh}[\sqrt{1 - b(\omega)}] \quad (11)$$

де H – висота, на якій відбувається відбивання, тобто де $b \exp(pH) = 1$.

Так, наприклад, для частоти $\omega_0 = 3,32 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ця висота дорівнюватиме 200 км, а час затримки буде $\tau = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Похідна по ω від $\tau(\omega)$ в околі $\omega \approx \omega_0$ дорівнює

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{4}{cp} \frac{1}{\omega \sqrt{1 - b}}$$

і для наведеного вище прикладу складає $2,58 \cdot 10^{-11} \text{ с}^2$. Для одержання компресії повернутого сигналу має бути $\mu = 3,87 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-2}$, що при тривалості початкового імпульсу у 25 мкс відповідає $\Delta\omega \approx 10^6 \text{ с}^{-1}$.

При невиконанні цієї умови інтеграл (6) набуває вигляду

$$U(t) = A \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \exp[i(ax^2 + bx)] dx$$

де

$$A = \frac{U_m}{4\sqrt{\pi\mu}} \exp[i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0))]$$

$$a = -\left[\frac{1}{2\mu} + \frac{d\tau(\omega_0)}{d\omega}\right],$$

$$b = t - \tau(\omega_0).$$

Тут A – комплексна амплітуда несучої частоти, b – час руху імпульсу у дисперсійному середовищі, а параметр a – описує ступінь компресії імпульсу. Процес компресії ЛЧМ – імпульсу у цих параметрах зображено на рис.1.

Добре видно, як початково широкий імпульс поволі звужується, досягає своєї найбільшої амплітуди та найменшої тривалості при $a = 0$ і далі знову розширюється.

Слід звернути увагу на те, що у першому розглянутому випадку, коли імпульс просто поширюється в плазмі, $d\tau/d\omega < 0$, а при відбиванні $d\tau/d\omega > 0$. Для одержання компресії це вимагає у першому випадку $\mu > 0$, тобто зростання частоти протягом імпульсу, а у другому $\mu < 0$, тобто спадання частоти. Це зрозуміло, бо у першому випадку високі частоти, маючи більшу групову швидкість, зазнають на заданому шляху меншу затримку у часі. У другому ж випадку вищі частоти більш заглиблюються у неоднорідну іоносферну плазму і зазнають більшої затримки.

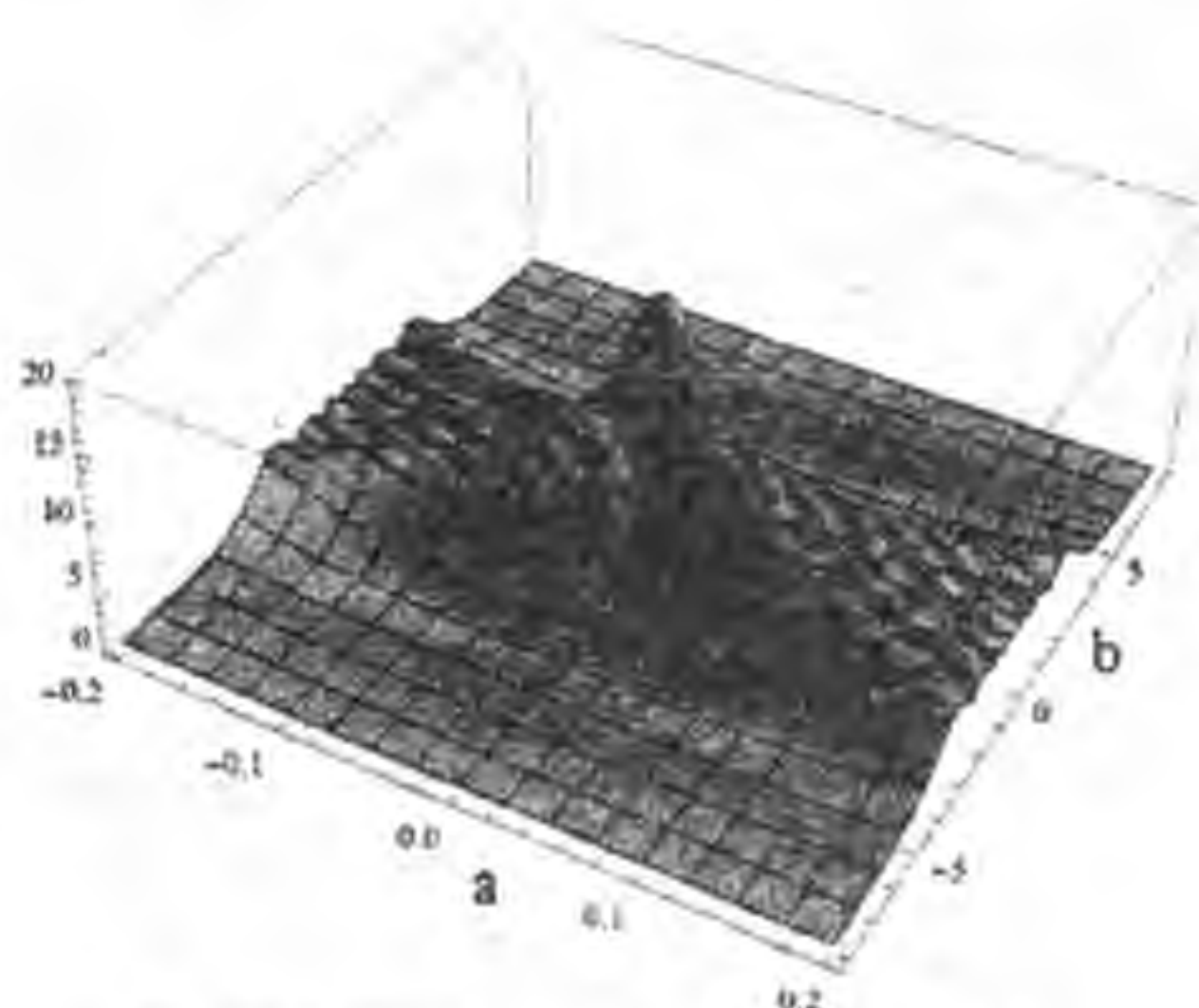


Рис. 1. Процес компресії ЛЧМ – імпульсу

Висновки

1. При поширенні ЛЧМ – імпульсу у неоднорідній іоносферній плазмі на певній висоті можлива компресія імпульсу, що приведе до істотного збільшення амплітуди електромагнітного поля.
2. При певному підборі параметрів ЛЧМ – імпульсу можна одержати компресію цього імпульсу при його поверненні на земну поверхню.
3. Застосування ЛЧМ – імпульсів для зондування іоносфери може дати певні переваги, бо за рахунок дисперсії у плазмі звичайні прямокутні радіоімпульси розширюються, розпливаються і послаблюються, тоді як і підсилюються.

Список використаних джерел

1. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. – М. Сов.радио. 1971.–283 с.
2. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М. Наука. 1988.– 159-162 с.
3. Ширман Я.Д. Расширение и сжатие сигналов.– М. Сов.Радио. 1974.– 112с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М. Выс.школа.1988.– 104с.
5. Гуревич А.В., Швацбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.– М. Наука, 1973.– 9с.
6. Бартман В.Л., Денисов Г.Г. Метод достижения мультимегаваттных пиковых мощностей путем компрессии импульсов СВЧ в винтовом волноводе // Изв.вузов, сер. Радиофизика –2007.– 50, №1.– С.40-53.
7. Левитський С.М. Компресія ЛЧМ – імпульсів у плазмі іоносфери // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009, №3 . (У друці).

Надійшла до редколегії 1.12.2009

УДК 519.9

Обуховський В.В., д. ф.-м. н., проф.,
Ніконова В.В., асп.

Нелінійна дифузія в суміші ацетон-бензол

Розглянуто нелінійну дифузію у багатоконпонентних рідких системах за умови протікання хімічних реакцій. Теорія застосовується для аналізу масопереносу у розчині ацетон-бензол. Показано, що для пояснення експериментально зафіксованої залежності коефіцієнта дифузії від концентрації розчину треба враховувати реакцію утворення молекулярних комплексів. Знайдено матрицю коефіцієнтів взаємодифузії і визначено ефективні (усереднені) параметри комплексів.

Ключові слова: дифузія, молекулярні комплекси, нелінійність.

*E-mail: vobukhovskiy@vandex.ru

**E-mail: vika_p_06@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Introduction

The diffusion in liquids is usually described by standard diffusion equation (Fick's law) [1]. Numerous experimental data indicates that in «binary» solutions the Fick's diffusion coefficients D_i are not constant, but depend on solute concentration [1-2]. Up to now there is not general theory to explain in details the dependence of the diffusivities versus solvent concentration for many-components liquids.

It is known the chemical reactions accompany processes of dissolving. In particular, due to intermolecular interactions [4, 5] "molecular complexes" can occur. But effect of these processes on diffusivity is investigated only a little.

The macroscopic version of the nonlinear diffusion theory was developed in [5-7] for liquid solutions that take into account the reaction between the mixture components. The purpose of this work is theoretical study of diffusion in acetone-benzene solution.

1. Diffusion in liquid solution

Let's consider the diffusion in molecular solutions formed by mixing of two substances X and Y . Interaction between molecules of the original

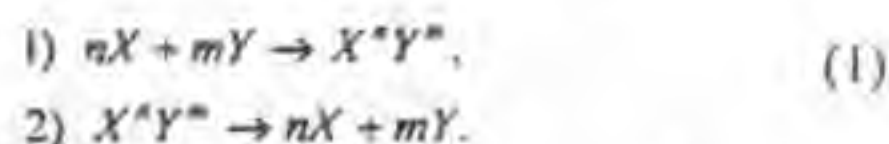
V. V. Obukhovskiy*, Doct. Sci., prof.,
V. V. Nikonova**, post grad. stud.

Nonlinear diffusion in Acetone-Benzene Solution

The nonlinear diffusion in multicomponent liquids under chemical reactions influence has been studied. The theory is applied to the analysis of mass transfer in a solution of acetone-benzene. It has been shown, that the creation of molecular complexes should be taken into account for the explanation of the experimental data on concentration dependence of diffusion coefficients. The matrix of mutual diffusivities has been found and effective (averaged) parameters of the system have been computed.

Key Words: diffusion, molecular complexes, nonlinearity.

components leads to the formation (with some probability) complexes of the type $[X^nY^m]$. In further confine our investigations by systems with reactions



(To simplify the calculations, the intermediate steps of reactions are not considered).

In the frames of our model, this kind of mixture consists of three components: X , Y , $[X^nY^m]$. Hereinafter these components are denoted as 1, 2, 3. The basis of the nonlinear diffusion theory [5-7] is conception: the diffusion transfer of macroscopic amounts of matter in one direction is accompanied by a countercurrent of other substances inevitably (it is necessary for conservation of the total volume of mixture).

Since individual molecules can vary in size widely, it makes sense to formulate a theory in terms of "partial volume" M_n . Under this approach, the diffusion is described by such laws:

- equations of continuity

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_i = S_i, \quad (2)$$

- nonlinear diffusion flows

$$\bar{j}_i = \sum_j d_{ij} [M_j \nabla M_i - M_i \nabla M_j]. \quad (3)$$

Here the following notation were used: the indices i, j numerate the components of the liquid mixture; M_i - volume fraction of components i ("partial volume"); $\bar{j}_i$ - volume's flow of i -substance; S_i - function of sources, which depend on the processes of i -component birth (decay); d_{ij} - mutual diffusion coefficients, that forms matrix $\{d_{ij}\}$.

It can be shown the nonlinear form of the flow (3) in particular cases does not contradict the linear Fick's law (see Appendix A). Equations (2-3) are valid in the range $0 \leq M_n \leq 1$ ($n=1,2,\dots$). In the case of negligible small influence of shrinkage/swelling phenomenon on the processes of diffusive transport, we take into account the law of volume conservation:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 1 \quad (4)$$

Reactions (1) determine the form of functions S_i (sources):

$$\begin{aligned} S_1 &= \beta_1 M_3 - \alpha_1 M_1^n M_2^m, \\ S_2 &= \beta_2 M_3 - \alpha_2 M_1^n M_2^m, \\ S_3 &= -S_1 - S_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Below it is supposed the chemical reactions proceed quickly, but the spatial mass transfer - slowly. It corresponds to the condition

$$S_i \equiv 0. \quad (6)$$

Another words, diffusion occurs when local chemical equilibrium has been took place. In this case it follows from (5):

$$M_3 \equiv \gamma M_1^n (1 - M_1 - M_3)^m, \quad \left(\gamma = \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (7)$$

Under diffusion process molecules are transported both individually and as part of the complex $[X^n Y^m]$. Therefore the total flow of matter "X" (measurable in experiments) is defined as a linear combination:

$$\bar{j}_1^{total} = \bar{j}_1 + \eta_1 \bar{j}_3 \quad (8)$$

(Here $\eta_1 = n\Delta V_1 / (n\Delta V_1 + m\Delta V_2)$ - volume fraction of substance X in complex $[X^n Y^m]$). Excluding M_2 one can find

$$\bar{j}_1^{total} = [-d_{12} + q_{11} M_3] \nabla M_1 + [-\eta_1 d_{23} - q_{11} M_1] \nabla M_3, \quad (9)$$

where $q_{11} = (d_{12} - d_{13}) + \eta_1 (d_{13} - d_{23})$.

As we pointed out above, the substance 1 may be in solution in two states: free and bound (part of molecular complex composition). Therefore, its total volume is

$$M_1^{total} = M_1 + \eta_1 M_3, \quad (10-a)$$

Similarly, we can determine M_2^{total} :

$$M_2^{total} = M_2 + \eta_2 M_3, \quad \left(\eta_2 = \frac{m\Delta V_2}{n\Delta V_1 + m\Delta V_2} \right). \quad (10-b)$$

In this case the normalization condition automatically execute

$$M_1^{total} + M_2^{total} = 1. \quad (10-g)$$

It is easy to verify assertion: the value M_1^{total} completely determines all other functions, if conditions (6) take place: i.e. $M_i = M_i(M_1^{total})$, ($m=1,2,3$). Therefore the total flux of substance 1 also can be represented as a function of M_1^{total} only:

$$\bar{j}_1^{total} = -D^{ef}(M_1^{total}) \nabla M_1^{total}. \quad (11)$$

It is obvious, formula (11) has the form corresponds to the law of Fick's diffusion with generalized (effective) coefficient of diffusion D^{ef} . The last is depending on the "concentration" of interacting substances. If the reactions (sources) are described by (5), one can found

$$D_1^{ef}(M_1^{total}) = \frac{(d_{12} - q_{11} M_3) + \frac{\partial M_3}{\partial M_1} (\eta_1 d_{23} + q_{11} M_1)}{1 + \eta_1 \frac{\partial M_3}{\partial M_1}}, \quad (12-a)$$

where

$$\frac{\partial M_3}{\partial M_1} = \frac{M_3 [n(1 - M_1 - M_3) - m M_1]}{M_1 (1 - M_1 - M_3 + m M_1)}. \quad (12-b)$$

The results (12) describe the diffusion in the liquid mixture with components $X, Y, [X^n Y^m]$. Material parameters of this system are the following: $\alpha_n, \beta_n, d_{nm}, \Delta V_n$.

2. Analysis of diffusion in acetone - benzene mixture

Let's apply a modified system of diffusion equations (2-5) to analyze the mass transfer processes in a liquid mixture of acetone with benzene. These substances are mutually soluble completely. Experimental data on diffusion in acetone-benzene mixture [8-9] were obtained at $T = 25^\circ\text{C}$.

In further acetone (A) is considered as component 1, and benzene (B) as a component 2. Enthalpy of mixing ΔH for these substances is nonzero (see Fig.1 based on data from [3]).

The ΔH peak corresponds to a molar ratio 1:1 (or one molecule of acetone, on average, to one molecule of benzene). It can be interpreted as the result of reaction $A + B \rightarrow C$, where $C \equiv [A^1 B^1]$. Hence, $n=1$, $m=1$. In such reaction molecules of acetone or benzene does not change chemically, but "attached" to each other (with some probability). Thus, the initially binary system (before mixing) in the process of diffusion must be considered as a ternary (triple).

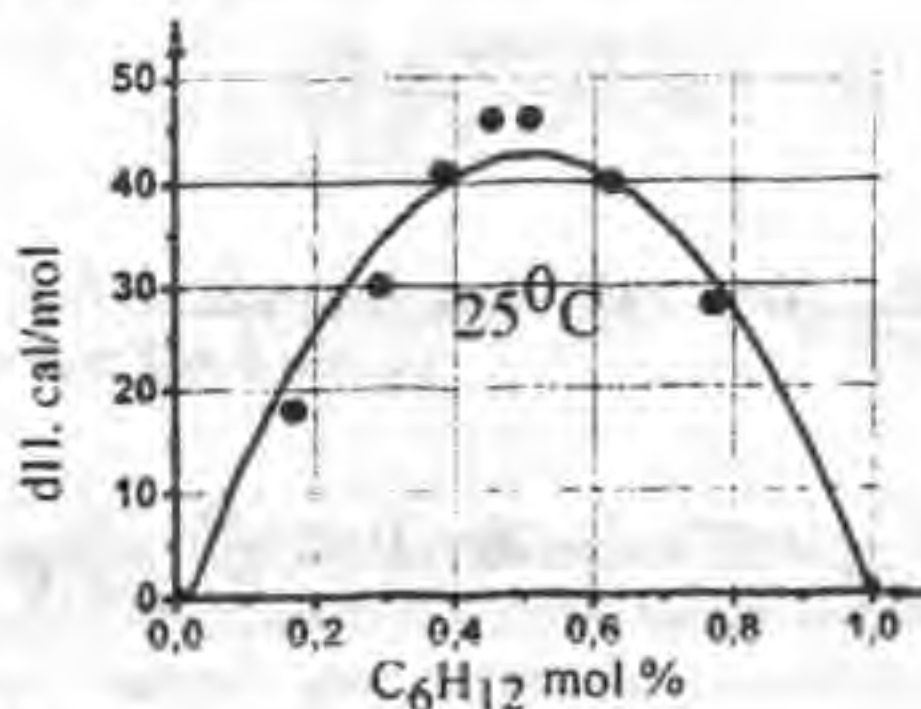


Fig. 1 Enthalpy of acetone-benzene mixing at 25°C [3]

Under chemical reactions one portion of the molecules A, B remain in a free state, but another is spent on formation of molecules C . Partial volumes of the substances (that proportional to concentrations) satisfy the condition (4).

In results for diffusion coefficient [7-8] the standard flow (in particles/cm²s) and the usual concentrations (particles/cm³) were used. These experimental data have been restated to construct a graph of the diffusion coefficient D^{exp} as a function of the acetone partial volume. Theoretical curve $D_1^{ef}(M_1^{total})$ for acetone-benzene mixture was calculated according to (12) numerically. From the condition of the best agreement of theoretical curve with experimental results, the following material parameters were found:

$$d_{12} = 2.18, \quad d_{13} = 7.24, \quad d_{23} = 3.83, \quad \gamma = 1.17, \quad (13)$$

Molecule volumes

$$\Delta V_1 = 122.6 \left(\frac{0}{A} \right)^3, \quad \Delta V_2 = 148.6 \left(\frac{0}{A} \right)^3$$

were calculated according to data [3]. Theoretical results with experimental data presented in Fig.2.

The good agreement can be interpreted as a confirmation of the assumption: the coefficients d_{nm} are constants and do not depend on concentrations.

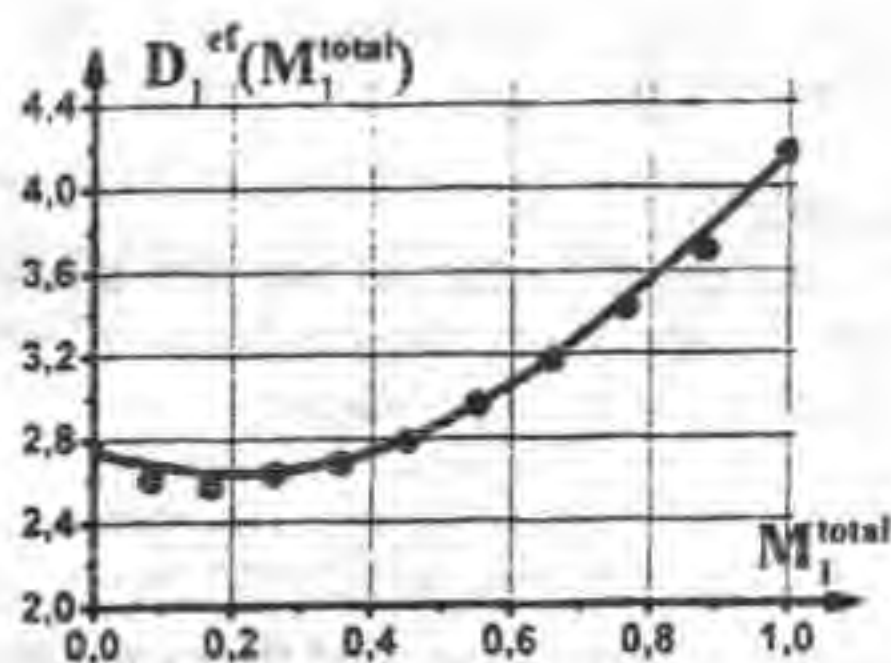


Fig. 2 Concentration dependence of the effective diffusion coefficient. Points - experimental data [10-11], solid curve - theoretical calculation.

Parameters (13), which were found from diffusion measurements, permit to solve the additional task: to find the concentration of molecular complexes. The results of numerical simulation are presented in Fig.3.

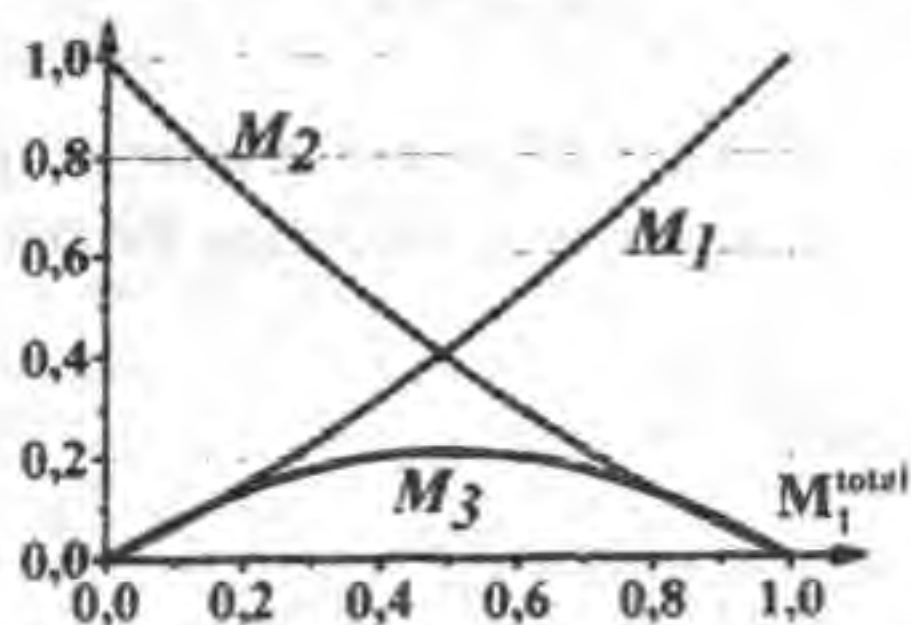


Fig. 3 Concentration dependence of partial volumes acetone-benzene solution.

Values of M_i are proportional to concentrations of components.

Conclusions

Summarizing, we can do the following conclusions:

- three-component model $\{A, B, C\} = \{X, Y, [X^m Y^n]\}$ can be successfully applied to modeling of diffusion in mixtures, where only one type of complexes is formed,

- non-monotonic dependence of the diffusion coefficient versus the initial concentration of acetone can be explained by generation of the molecular complex in acetone-benzene mixture. Its structure is similar to $[A^1 B^1]$.

It should be noted that the generalization of this theory to the case of accounting of

shrinkage/swelling phenomenon can be done similarly as in [10].

Appendix A

Let's consider a mixture of two non interacting molecular liquids. From the condition of volume conservation $M_1 + M_2 = 1$, follows:

$$M_2 = 1 - M_1, \quad \nabla M_2 = -\nabla M_1, \quad (\text{A-1})$$

Substituting (A-1) to (3) we find the expression for the "volume flow"

$$\bar{j}_1 = -d_{12} \nabla M_1, \quad (\text{A-2})$$

Diffusion coefficient in (A-2) is constant. If each molecule of substance 1 occupies a volume ΔV_1 , from above follows the diffusion equation in the standard form of Fick's law

$$\bar{J}_1 = -D_F^0 \nabla N_1, \quad (\text{A-3})$$

Here $\bar{J}_1 = \bar{j}_1 / \Delta V_1$ - the number of particles (molecules) of type 1, which cross the unit surface

area per unit time, and $N_1 = M_1 / \Delta V_1$ - the concentration of these particles.

Appendix B

In extreme cases ($M_1^{mol} = 0$, $M_1^{mol} = 1$), effective diffusion coefficient (12) and its first derivative can be written as:

$$D_1^{ef} (M_1^{mol} = 0) = \frac{d_{12} + (\gamma \cdot \eta_1) d_{23}}{1 + (\gamma \cdot \eta_1)} \quad (\text{B-1})$$

$$D_1^{ef} (M_1^{mol} = 1) = \frac{d_{12} + (\gamma \cdot \eta_2) d_{13}}{1 + (\gamma \cdot \eta_2)} \quad (\text{B-2})$$

$$\frac{dD_1^{ef}}{dM_1^{mol}} (M_1^{mol} = 0) = +2(\gamma \eta_1)(1 + \gamma) \frac{(d_{12} - d_{23})}{(1 + (\gamma \cdot \eta_1))^2} \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{dD_1^{ef}}{dM_1^{mol}} (M_1^{mol} = 1) = -2(\gamma \eta_2)(1 + \gamma) \frac{(d_{12} - d_{13})}{(1 + (\gamma \cdot \eta_2))^2} \quad (\text{B-4})$$

The left part on (B-1)-(B-4) are determined from the experimental data. Four parameters d_{12} , d_{13} , d_{23} , γ can be found by solving the system of four equations by numerical methods.

References

1. Дюкло Ж. Диффузия в жидкостях. - Л.-М.: ГОНТИ - 1939. - 68 с.
2. John J. Mc. Ketta. Encyclopedia of Chemical Processing and Design - N.-Y. - 1985.
3. Белоусов В.П., Морачевский А.Г. Теплоты смешения жидкостей. Л.: Химия ЛО. - 1970. - 256 с.
4. Пиментел Джордж, К. Мак-Келлан, Обри Л. Водородная связь. - М.: Мир - 1964. - 462 с.
5. E.S. Gyulnazarov, V.V. Obukhovsky, T.N. Smirnova. Theory of holographic recording on a photopolymerized material // SPIE "Milestone Series". - 1996. -130. - P. 473-475.
6. G.M. Karpov, V.V. Obukhovsky, T.N. Smirnova, V.V. Lemeshko. Spatial transfer of matter as a method of holographic recording in photoformers // Opt. Communication. - 2000. -174, № 5-6. - P. 391-404.
7. Ю.В. Гріднева, В.В. Обуховський. Вплив міжмолекулярної взаємодії на дифузію в рідинах // Вісник Київського університету. - 2003. - №3. - С. 284-288.
8. Chaohong He. Prediction of the calculation dependence of mutual diffusion coefficients in binary liquid mixtures. // Eng. Chem. Res. 1995 34. - P.2148-2153.
9. David W. McCall, Dean C. Douglass. Diffusion in binary solutions. // J. Phys. Chem. 1967. - 71. - P. 987-997.
10. H.M. Karpov, V.V. Obukhovsky, T.N. Smirnova. Generalized model of holographic recording in photopolymer materials // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. - 1999. -2, №3. - P. 66-70.

Надійшла до редколегії 01.12.09

УДК 621.375+535

Овечко В.С., д.ф.-м.н., професор Дифракція фемтосекундних оптичних імпульсів

В роботі запропоновано використувати розклад оптичних імпульсів на елементарні хвильові пакети (ЕХП) для розрахунку дифракційних інтегралів.

Ключові слова: ряд елементарних хвильових пакетів, фемтосекундні оптичні імпульси, дифракція Фраунгофера.

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.
E-mail:ovs@univ.kiev.ua

Вступ

Оптичні імпульси фемтосекундного (10^{-15} с) діапазону тривалостей відрізняються надвеликою смугою частот, що обумовлює особливості їх дифракції, зокрема відсутність нульових амплітуд в дальньому полі при дифракції на щілині [1,3]. Загальний розв'язок (для довільної форми електромагнітного імпульсу) може бути отриманий, якщо розкласти його в ряд за елементарними хвильовими пакетами (ЕХП), що запропонований в роботах автора [4,5], і який не обмежений квазімонохроматичним наближенням [2]. В роботі буде розглянутий найбільш цікавий для фемтосекундної оптики випадок дифракції оптичних імпульсів, що можуть бути розкладені за ортонормованими ЕХП-функціями нижчих порядків ($n=0,1,2$). Запропонована методика легко може бути поширена на ЕХП-функції вищих порядків.

1. Властивості фемтосекундних імпульсів (ФІ)

Подемо ФІ у вигляді ряду за ЕХП [4]

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n U_{2n+1}(x) + B_n U_{2n+2}(x)), \quad (1)$$

де

$$U_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[\frac{\sin[x(2n+2)]}{2(n+1)\sin[x]} - \cos[x(2n+3)] \right], \quad (2)$$

Ovechko V.S., Doct. Sci., professor Diffraction of the femtosecond optical impulses

It has been proposed to use series of the elementary wave packets (EWP) for calculation of the diffraction integrals for the femtosecond optical impulses.

Key Words: series of the elementary wave packets, femtosecond optical impulses, Fraunhofer diffraction

$$U_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)}} \left[\frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin[x(2n+3)]}{\sin[x]} - 1 \right) - \cos[x(2n+4)] \right], \quad (3)$$

$$x = \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{c} \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

A_n, B_n - амплітуди непарних і парних ЕХП - функцій відповідно.

Графіки парних $U_{2,4,6}$ і непарних $U_{1,3,5}$ ЕХП-функцій подано на рис.1 і рис.2 відповідно. Їх явні вирази наведено в Таблиці 1.

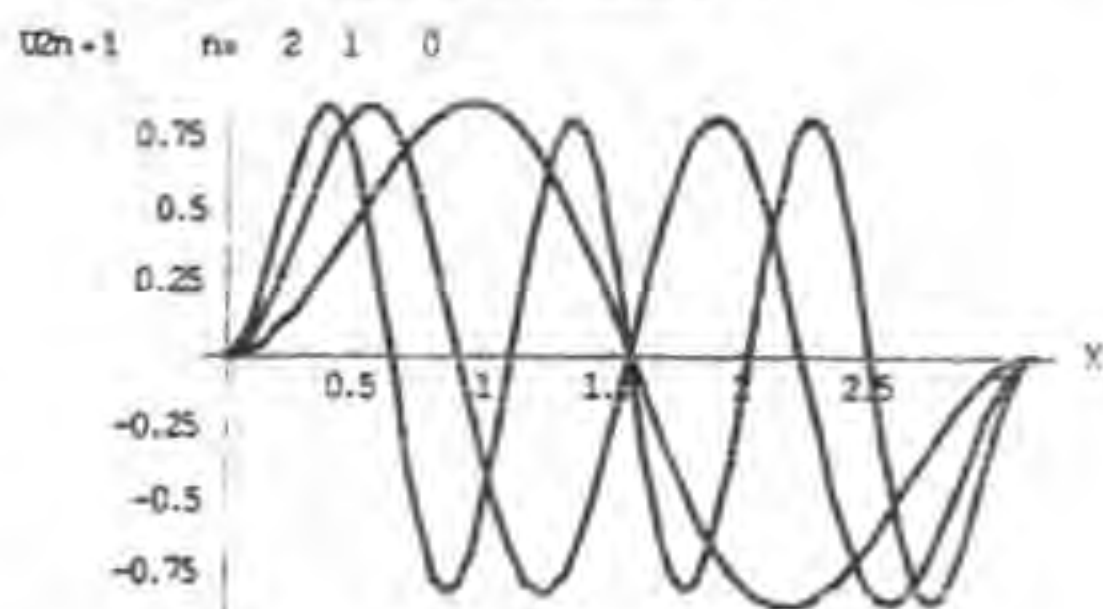


Рис.1 Непарні ЕХП-функції

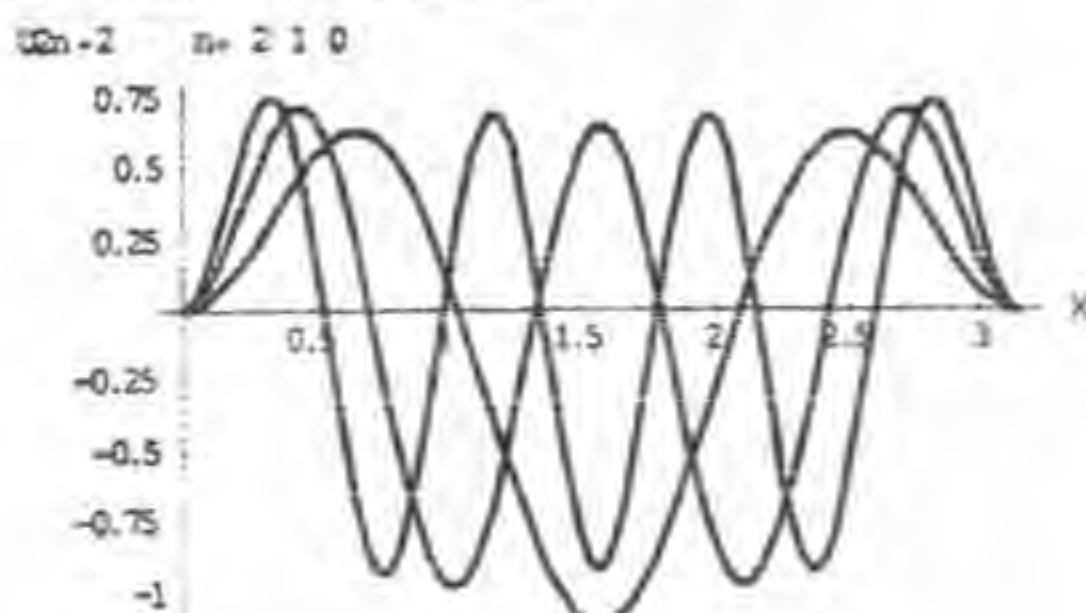


Рис.2 Парні ЕХП-функції

Таблиця 1.
Ортонормовані ЕХП-функції нижчих порядків

	$U_{2n+1}(x)$	$U_{2n+2}(x)$
$n=0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos x - \cos 3x)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos 2x - \cos 4x)$
$n=1$	$\frac{1}{\sqrt{3\pi}}(\cos x + \cos 3x - 2\cos 5x)$	$\frac{1}{\sqrt{3\pi}}(\cos 2x + \cos 4x - 2\cos 6x)$
$n=2$	$\frac{1}{\sqrt{6\pi}}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x - 3\cos 7x)$	$\frac{1}{\sqrt{6\pi}}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x - 3\cos 8x)$

Не важко впевнитись, що ці функції є ортогональними і нормованими. Для ілюстрації надширокополосних властивостей розрахуємо їх Фур'є спектри

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} U_{2n+1, 2n+2}(x) \cos(\omega x) dx \quad (4)$$

Результати розрахунків подано на рис. 3, рис.4. Ширини спектрів складають 1,0...3 октави (кількість октав визначається $\log_2(\omega_{\max} / \omega_{\min})$).

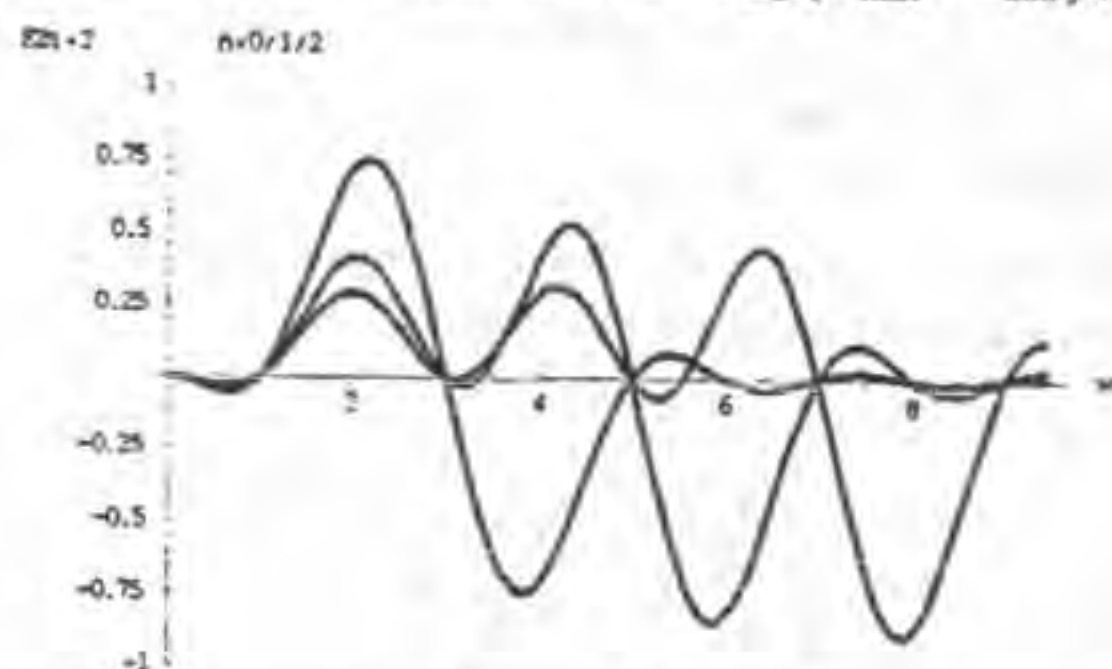


Рис.3 Фур'є спектри парних ЕХП-функцій

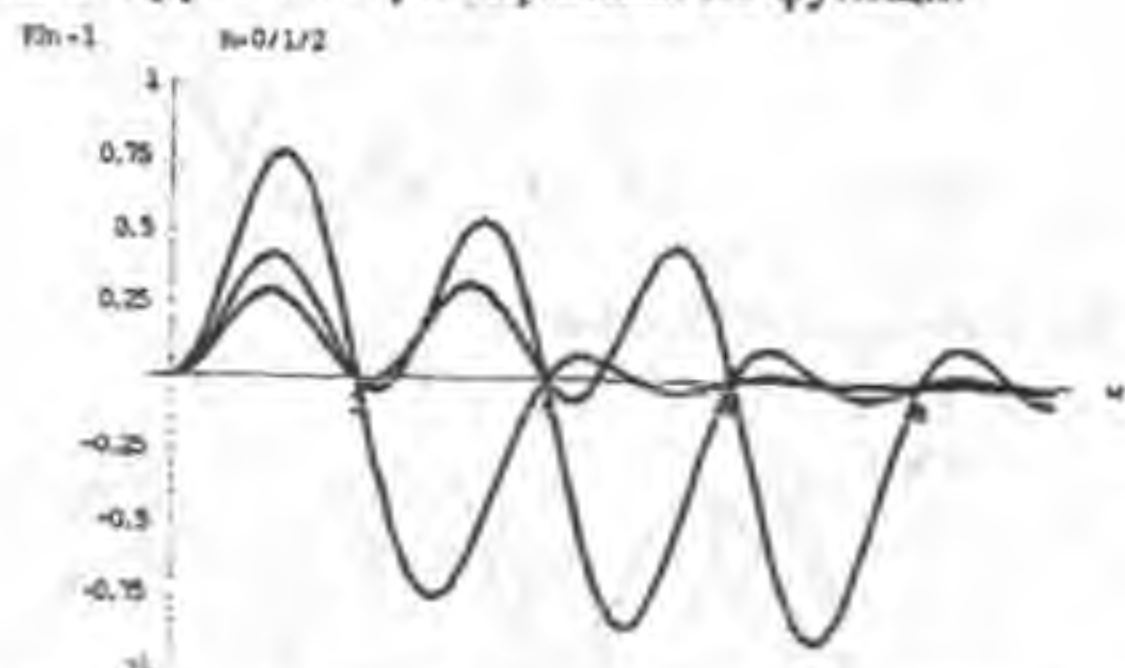


Рис.4 Фур'є спектри непарних ЕХП-функцій

Очевидно, що збільшення смуги частот оптичних сигналів має вплинути на характер їх дифракції. Розглянемо це питання більш докладно.

2. Дифракція ФІ в наближенні Фраунгофера

Використаємо скалярну теорію дифракції в наближенні Кірхгофа [1,2]. Нехай в площині $z=0$ розташована прямокутна апертура $2a \cdot 2b$. Незбурене поле – це плоска хвиля, що поширюється в напрямку z

$$E|_{z=0} = E_0 \left(x, y, t - \frac{z}{c} \right) = E(x_0, y_0, t)$$

Якщо вважати, що точка спостереження (x, y, z) розташована на великій відстані від екрану, так що

$$\frac{|E(x_0, y_0)|}{z} \ll \frac{1}{c} \left| \frac{\partial E(x_0, y_0)}{\partial t} \right|,$$

то дифрагзоване поле буде дорівнювати [2]

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c} \iint_{S_0} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial E_0}{\partial t} \Big|_{t=\frac{r}{c}} dS_0, \quad (5)$$

$$|r - r_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z)^2}$$

В наближенні $a, b \ll r$

$$\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{1 + z/r}{r},$$

$$|r - r_0| = r + x \frac{x_0}{r} + y \frac{y_0}{r},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Тоді

$$E(x, y, z, t) = \frac{1 + z/r}{4\pi c r} \iint_{S_0} \frac{\partial E_0}{\partial t} \Big|_{t=\frac{r}{c}} dx_0 dy_0 \quad (6)$$

Таким чином, задача дифракції зводиться до розрахунку інтеграла (6). Останнє виконаємо методом розкладу за ЕХП-функціями (2),(3). Тоді замість (6) запишемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n U_{2n+1} + B_n U_{2n+2}) \Big|_t = \frac{1 + z/r}{4\pi c r} \iint_{S_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \frac{\partial U_{2n+1}^0}{\partial t} + B_n^0 \frac{\partial U_{2n+2}^0}{\partial t} \Big|_{t=\frac{r}{c}} dx_0 dy_0, \quad (7)$$

де індекс «0» відзначає відомий розподіл поля на дифракційній апертурі.

Для знаходження коефіцієнтів розкладу (A_n, B_n) домножимо (7) на відповідну функцію $U_{2n+1}(x), U_{2n+2}(x)$ і проінтегруємо по часу в межах тривалості імпульсу τ . Тоді одержимо

$$A_n \int_0^{\tau} U_{2n+1}^2(t) dt = \frac{1 + z/r}{4\pi c r} \iint_{S_0} \sum_{n'} B_{n'}^0 \left(\int_0^{\tau} U_{2n'+1}(t) \frac{\partial U_{2n'+2}^0}{\partial t} dt \right) dx_0 dy_0 \quad (8)$$

$$B_n \int_0^{\tau} U_{2n+2}^2(t) dt = \frac{1+z/r}{4\pi cr} \quad (9)$$

$$\iint_{S_0} \sum_{n'} A_{nn'}^0 \left(\int_0^{\tau} U_{2n+2}(t) \frac{\partial U_{2n'+2}^0}{\partial t} dt \right) dx_0 dy_0$$

В виразах (8),(9) враховано прозорість апертури (S_0), парність ЕХП функцій та їх похідних. Інтеграли у лівих частинах рівнянь (8),(9) завдяки тому, що ЕХП функції ортонормовані, дорівнюють одиниці. Далі ми покажемо, що недіагональні елементи матриць $A_{nn'}$, $B_{nn'}$

$$A_{nn'} = \int_0^{\tau} U_{2n+1}(t) \frac{\partial U_{2n'+2}^0}{\partial t} dt \quad (10)$$

$$B_{nn'} = \int_0^{\tau} U_{2n+2}(t) \frac{\partial U_{2n'+1}^0}{\partial t} dt \quad (11)$$

швидко зменшується, якщо $n \neq n'$.

Таким чином, коефіцієнти в розкладі (7) дорівнюють

$$A_{nn'} \equiv \frac{1+z/r}{4\pi cr} \quad (12)$$

$$\iint_{S_0} \left(\rho(x_0, y_0) \sum_{n'=n-1}^{n+1} B_{nn'}^0 \int_0^{\tau} (U_{2n+1}) \frac{\partial U_{2n'+2}^0}{\partial t} dt \right) dx_0 dy_0,$$

$$B_{nn'} \equiv \frac{1+z/r}{4\pi cr} \quad (13)$$

$$\iint_{S_0} \left(\rho(x_0, y_0) \sum_{n'=n-1}^{n+1} A_{nn'}^0 \int_0^{\tau} (U_{2n+2}) \frac{\partial U_{2n'+1}^0}{\partial t} dt \right) dx_0 dy_0,$$

де $\rho(x_0, y_0)$ - прозорість апертури.

Розрахуємо елементи передаточних матриць $[A_{nn}]$, $[B_{nn}]$. Останні можуть бути названі передаточними, тому що визначають амплітуди A_{nn} , B_{nn} , з якими ЕХП - функція $2n'+2$ - го порядку поля на апертурі збуджує ЕХП-функцію $2n'+1$ - го порядку в дифрагованому полі. Обмежимося зміною n, n' в межах 0,1,2. Розглянемо, як приклад $n=0$, $n'=0$. Тоді

$$A_{12} = \int_0^{\tau} U_1(t) \frac{\partial U_2}{\partial t} \Big|_{\frac{|r-r_0|}{c}} dt = \quad (14)$$

$$= 2\pi \frac{8}{105} (7 \cos f + 84 \cos 3f),$$

$$\text{де } f = \frac{\pi}{\pi cr} (xx_0 + yy_0)$$

Матриці $[A_{ij}]$ та $[B_{ij}]$ мають вигляд

$$[A_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} A_{12} & A_{14} & = 0 & \cdot \\ A_{32} & A_{34} & A_{36} & \cdot \\ = 0 & A_{54} & A_{56} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$A_{12} = -64 (7 \cos[2f] + 4 \cos[4f]) / 105 \pi,$$

$$A_{14} = -64 (7 \cos[2f] - 4 \cos[4f] + 2 \cos[6f]) / 3^{1/2} 105 \pi,$$

$$A_{32} = 64 (-9 \cos[2f] + 68 \cos[4f]) / 315 \pi 3^{1/2},$$

$$A_{34} = -64 (99 \cos[2f] + 748 \cos[4f] + 906 \cos[6f]) / 10395 \pi,$$

$$A_{36} = 32 \cdot 2^{1/2} (1287 \cos[2f] + 9724 \cos[4f] - 5889 \cos[6f] + 4656 \cos[8f]) / 135135 \pi,$$

$$A_{54} = 64 \cdot 2^{1/2} (-429 \cos[2f] - 2132 \cos[4f] + 19626 \cos[6f]) / 135135 \pi,$$

$$A_{56} = -64 (429 \cos[2f] + 2132 \cos[4f] + 9813 \cos[6f] + 18960 \cos[8f]) / 135135 \pi.$$

$$[B_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} B_{21} & B_{23} & = 0 & \cdot \\ B_{41} & B_{43} & B_{45} & \cdot \\ = 0 & B_{63} & B_{65} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де

$$B_{21} = 8 (7 \cos[f] + 81 \cos[3f]) / 105 \pi,$$

$$B_{23} = (-8/315 \pi) (-21 \cos[f] + 243 \cos[3f] + 250 \cos[5f]) / 3^{1/2},$$

$$B_{41} = 8 (9 \cos[f] + 31 \cos[3f]) / 315 \pi 3^{1/2},$$

$$B_{43} = 8 (297 \cos[f] - 1023 \cos[3f] + 14750 \cos[5f]) / 10395 \pi,$$

$$B_{45} = 4 \cdot 2^{1/2} (-3861 \cos[f] + 13299 \cos[3f] + 95875 \cos[5f] + 167727 \cos[7f]) / 135135 \pi,$$

$$B_{63} = 8 \cdot 2^{1/2} (2145 \cos[f] - 3783 \cos[3f] + 40750 \cos[5f]) / 135135 \pi,$$

$$B_{65} = 8 (2145 \cos[f] - 3783 \cos[3f] - 20375 \cos[5f] + 272685 \cos[7f]) / 135135 \pi.$$

Якщо вважати, що $\rho(x_0, y_0) = 1$, то в (12), (13) можна проінтегрувати по x_0, y_0

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \cos[\pi x_0 + \pi y_0] dx_0 dy_0 = 4ab \sin c(am) \sin c(bn), \quad (17)$$

$$\text{де } m = \frac{\pi x}{\pi cr}, \quad n = \frac{\pi y}{\pi cr},$$

Таким чином, компоненти передаточних матриць $[A_{ij}]$ та $[B_{ij}]$ визначають передаточні коефіцієнти між j -м ЕХП на вході в апертуру та i -м ЕХП в дифрагованому полі. Причому, поле складається з розподілів $\sin c(Mf(x, y))$, де $M^{\max} = 2n+2$ для $[A_{ij}]$ і $2n+1$ для $[B_{ij}]$.

Розглянемо, наприклад, яким чином дифрагує непарний ЕХП U_1 ($n=0$). Звернемось до матриці (16). Побачимо, що просторовий розподіл для всіх ЕХП в дифракційному полі відповідає $\cos(f)$, $\cos(3f)$, але для кожного ЕХП свої амплітудні коефіцієнти.

Отже

$$E(x, y, z, t) = A_0 \frac{1+z/r}{4\pi c r} \cdot \left[B_{21} U_2 \left(t - \frac{r}{c} \right) + B_{41} U_4 \left(t - \frac{r}{c} \right) + B_{61} U_6 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right], \quad (18)$$

де

$$B_{21} = -\frac{256ab}{105\pi} \cdot$$

$$[7 \sin c(2x) \sin c(2y) + 4 \sin c(4x) \sin c(4y)],$$

$$B_{41} = \frac{256ab}{315\sqrt{3}\pi} \cdot$$

$$[-9 \sin c(2x) \sin c(2y) + 68 \sin c(4x) \sin c(4y)],$$

$$B_{61} = \frac{256ab}{3465\pi} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} [-33 \sin c(2x) \sin c(2y) + 164 \sin c(4x) \sin c(4y)],$$

$$\sin c(Qx) = \frac{\sin\left(\frac{Q\pi xa}{\tau c r}\right)}{\frac{Q\pi xa}{\tau c r}}, \quad \sin c(Qy) = \frac{\sin\left(\frac{Q\pi ya}{\tau c r}\right)}{\frac{Q\pi ya}{\tau c r}}$$

Очевидно, що основне перетворення відповідає $U_1^{(i)} \rightarrow U_2^{(i)}$. Амплітуди інших переходів $U_1(t) \rightarrow U_4(t), \dots$ монотонно зменшуються. Результати розрахунків за формулою (18) подано на рис.5.

$B_{41} / \sqrt{3} / B_{61} / \sqrt{6} / B_{21}$

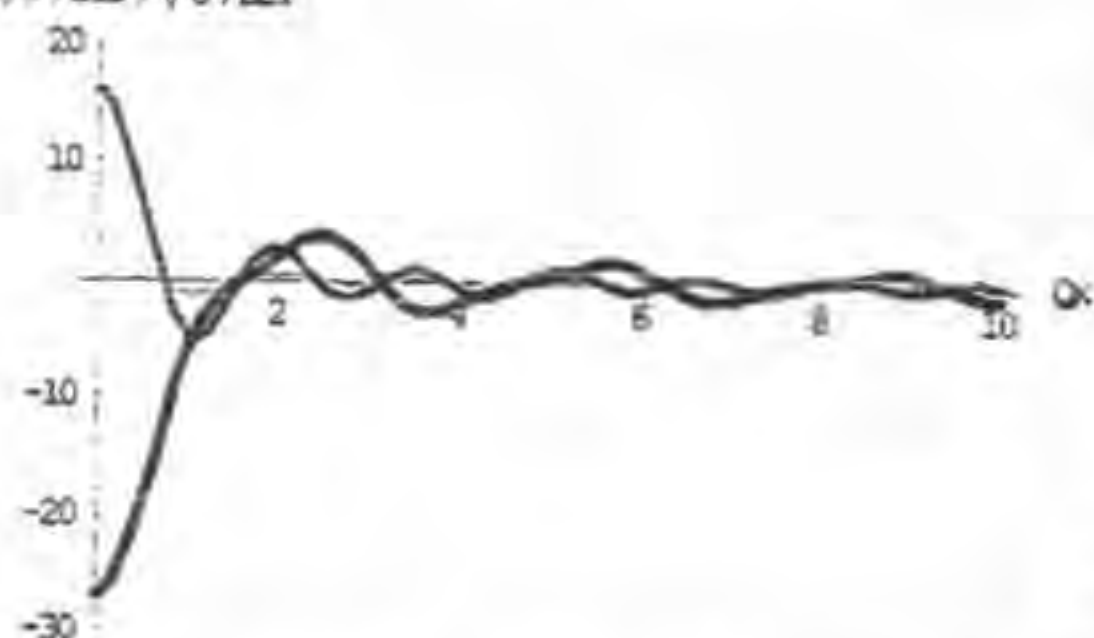


Рис.5 Розподіл ЕХП – компонент в дифрагованому полі для $y=0$

Загальний висновок, що впливає з цих залежностей полягає в тому, що процес дифракції надширокополосних імпульсів супроводжується перетворенням і просторово-часовим розділенням оптичного сигналу в дифрагованому полі на лінійну суперпозицію елементарних хвильових

пакетів. Якщо результат наближеного розрахунку дифрагованого поля не повною мірою задовольняє умовам ЕХП, то це може свідчити про його недосконалість.

Висновки

Дифракція фемтосекундних оптичних імпульсів визначається часовою залежністю збуджуючого імпульсу, його просторовим розподілом на апертурі і передаточними матрицями ЕХП-функцій. Причому, в процесі дифракції відбувається перетворення парних ЕХП-функцій в непарні і навпаки. Найбільшим коефіцієнтам перетворення відповідають близькі порядки ЕХП-функцій, а отже діагональні компоненти матриць перетворення $[A_j]$ та $[B_j]$. Дифракція на прямокутній апертурі може бути представлена як перетворення ортонормованих часових ЕХП-функцій з просторовим розподілами $\sin c\left(\frac{Nax}{\tau c r}\right)$, де

$N^{\max}$ визначається порядком збудженого ЕХП-сигналу. Зокрема, для парного $N_e^{\max} = 2n+4$, для непарного $N_o^{\max} = 2n+3$, $n=0,1,\dots$. Критерій дифракції Фраунгофера для фемтосекундних імпульсів має вигляд $r \gg \frac{x_0^2 + y_0^2}{2\tau c}$, що нагадує критерій для квазімонохроматичного імпульсу, але є більш м'яким.

Список використаних джерел

1. Папулис. А. Теория систем и преобразований в оптике. М., „Мир“, 1971.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., „Наука“, 1979.
3. Овечко В.С. „Поширення та дифракція на діафрагмі оптичних відеоімпульсів“ УФЖ, 40, №6, 1995, 544-549.
4. Овечко В.С. „Ортонормований базис для радіосигналів“. Вісник Київського університету. Серія Фізико-математичних наук, №1, 2009, с.196-202.
5. Ovechko V. Orthogonal normalized base for the optical and radio signals. V International conference “Electronics and Applied Physics”, October 21-24, 2009, Kyiv, Ukraine, 23-24.

Надійшла до редколегії 1.12.2009р.

Сучасна фізика

Вступ

Абсолютно чистий світ, який ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів. Наприклад, світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів. Наприклад, світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів.

Світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів. Наприклад, світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів.

Світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів. Наприклад, світло, яке ми бачимо, є результатом складної взаємодії різних факторів.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Абдікарімов Б.Ж., кандидат фіз.-мат. наук
Альохін О.Д., доктор фіз.-мат. наук, професор
Булавін Л.А., академік НАНУ, професор
Остапчук Ю.Л., кандидат фіз.-мат. наук
Рудніков Є.Г., кандидат фіз.-мат. наук

Вплив іонів на рівняння стану розчину метанол-гексан поблизу критичної температури розшарування

В роботі рефрактометричним методом проведені експериментальні дослідження впливу іонів KCl на рівняння стану розчину метанол-гексан поблизу критичної температури розшарування. Одержані експериментальні дані проаналізовані на основі моделі системи поблизу критичної точки як газу флуктуацій параметру порядку з властивостями реального газу Ван дер Ваальса. Аналіз показав, що внесення іонів збільшує радіус кореляції системи та сили взаємодії між флуктуаціями параметра порядку. Це приводить до збільшення амплітуд рівняння стану і зменшення коефіцієнту об'ємного розширення розчину в однофазній області температур.

Ключові слова: рівняння стану, іони, критична точка

* E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

На даний час актуальною залишається проблема вивчення властивостей рідинних систем поблизу критичної точки (КТ) під дією різноманітних зовнішніх факторів: неоднорідного поля гравітації Землі; електромагнітного, дії полів заряджених іонів [1, 2].

Завдяки цим дослідженням у роботах [3-5] вперше виявлено ряд якісно нових особливостей поведінки реальних просторово неоднорідних рідких систем поблизу критичної точки (КТ) у полі гравітації Землі. У таких неоднорідних системах виявлено наявність неоднорідного внутрішнього поля $\Delta U(z) = \Delta \mu(h) = (\mu - \mu_c) \mu_c \gg h = \rho_c g z / \rho_c$. Тут ρ_c , μ_c , ρ_c – критичні параметри речовини; z – висота, відрахована від рівня з критичною густиною речовини. Показано, що величина цього поля залежить від сил міжмолекулярної взаємодії ϵ , від критичної температури речовини T_c , від геометричних розмірів L і форми системи, від середньої густини $\bar{\rho}$ заповнення системи речовиною. У роботах [6, 7] вивчено вплив заряду Q і маси M

UDK 532.536

Abdikarimov B.Zh., Ph.D.
Alekhin O.D., Dr. of Sci., Prof.
Bulavin L.A., academician of HANU, Prof.
Ostapchuk Yu.L. Ph.D.
Rudnikov E.G., Ph.D.

Influence of ions on the equation of state of methanol-hexane solution near the critical consolute temperature

The influence of KCl ions on the equation of state of methanol-hexane solution near the critical consolute temperature has been experimentally studied in the work by using refractometric method. The obtained experimental data have been analyzed on the basis of the model of system near the critical point as gas of order parameter fluctuations with the properties of the real Van der Waals gas. Analysis showed that the ions increase the correlation length of the system and interaction forces between the fluctuations of the order parameter. This leads to an increase of the amplitudes of equation of state and the decrease of the volumetric expansion coefficient of the solution in one-phase temperature range.

Keywords: equation of state, ions, critical point

іонів на величину цього внутрішнього поля в речовині та на його критичні параметри.

Тобто, висотна зміна внутрішнього поля $\Delta \mu$ в неоднорідному середовищі є складною функцією цих зовнішніх чинників $\Delta U(z) = f(\epsilon, T_c, L, \bar{\rho}, Q, M)$. Завдяки дослідженням [2-8] можна запропонувати нове рівняння рівноваги неоднорідної речовини в полі гравітації Землі поблизу КТ.

$$|\Delta \mu| = |\Delta U(z) = f(\epsilon, T_c, L, \bar{\rho}, Q, M)| \quad (1)$$

Необхідно відмітити, що врахування цих властивостей внутрішнього поля і виконання рівності (1) є обов'язковою умовою при дослідженнях властивостей просторово неоднорідних систем поблизу КТ рідин і фазових переходів другого роду в різноманітних зовнішніх полях.

Впродовж цих досліджень в [9, 10] показано, що введення іонів у систему приводить до збільшення радіуса кореляції R_c . Тобто звідси слідує, що зміна флуктуаційної частини

термодинамічного потенціалу $F_\phi = C_0 R_c^{-3}$ [11] такої системи повинна привести і до зміни параметрів рівняння стану речовини $\Delta\rho = dF_\phi / d\mu$ поблизу КТ.

У зв'язку із зазначеним вище, метою цієї роботи є вивчення впливу іонів на рівняння стану розчинів поблизу критичної температури розшарування. Об'єктом досліджень був обраний розчин метанол-гексан.

У цій роботі рефрактометричним методом [12] була досліджена температурна залежність показника заломлення $n(T)$ даного розчину уздовж лінії рівноваги рідина-рідина ($\Delta T = T - T_c < 0$), а також уздовж напрямку критичної ізоконцентрати в області температур ($\Delta T = T - T_c > 0$). Отримані експериментальні дані $n(T)$ (1) показані на рис. 1.

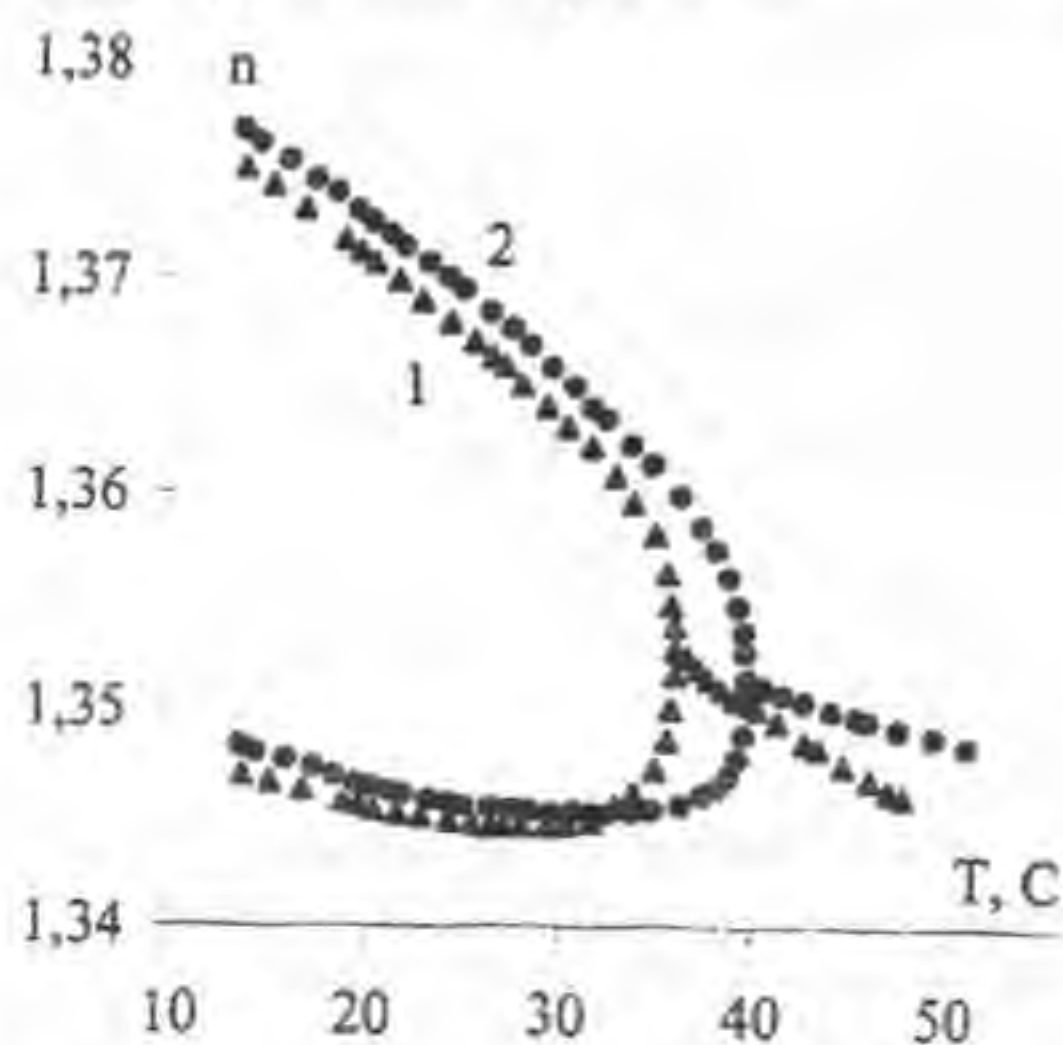


Рис. 1. Температурна залежність показників заломлення розчинів метанол-гексан (1) та метанол-гексан + KCl (2).

Після проведення цієї серії експериментів у даний розчин була додана невелика кількість солі KCl так, що масова концентрація $c_{\text{мх}}$ цієї солі в розчині метанол-гексан становить 0,04 %.

Після додавання солі в розчин була проведена така ж серія вимірів показника заломлення $n(T)$ уже іонної системи метанол-гексан + KCl в області температур $T > T_c$ і $T < T_c$. Ці дані (2) також представлені на рис. 1. Як видно, при додаванні іонів KCl у розчин відбулися деякі зміни: 1) збільшилася критична температура розчину, що узгоджується з теоретичними розрахунками, представленими в роботі [7]; 2) трохи зменшився по величині нахил температурної залежності показника заломлення

розчину уздовж напрямку критичної ізоконцентрати ($\Delta T = T - T_c > 0$, $dn/dT(m-r+KCl) < dn/dT(m-r)$).

На основі цих даних $n(T)$ (рис. 1) за допомогою формули Лорентц-Лоренца [13] у наближенні адитивності питомих об'ємів та питомих рефракцій компонентів розчину, за аналогією з [12] було розраховано температурні залежності молярних концентрацій $c_\mu(t)$ даного розчину без іонів та з добавкою іонів KCl.

Отримані дані $\Delta c_\mu = \frac{c_\mu - c_{\text{мх}}}{c_{\text{мх}}}$ показані на рис. 2.

Аналіз отриманих даних $\Delta c_\mu(t)$ проведемо на основі запропонованої в роботах [2, 14] моделі системи в околі КТ як газу флуктуацій параметра порядку, що підпорядковується рівнянню Ван-дер-Ваальса [15]. Ця модель враховує власний об'єм флуктуацій параметра порядку й сили взаємодії між ними на відстані $r \geq R_c$.

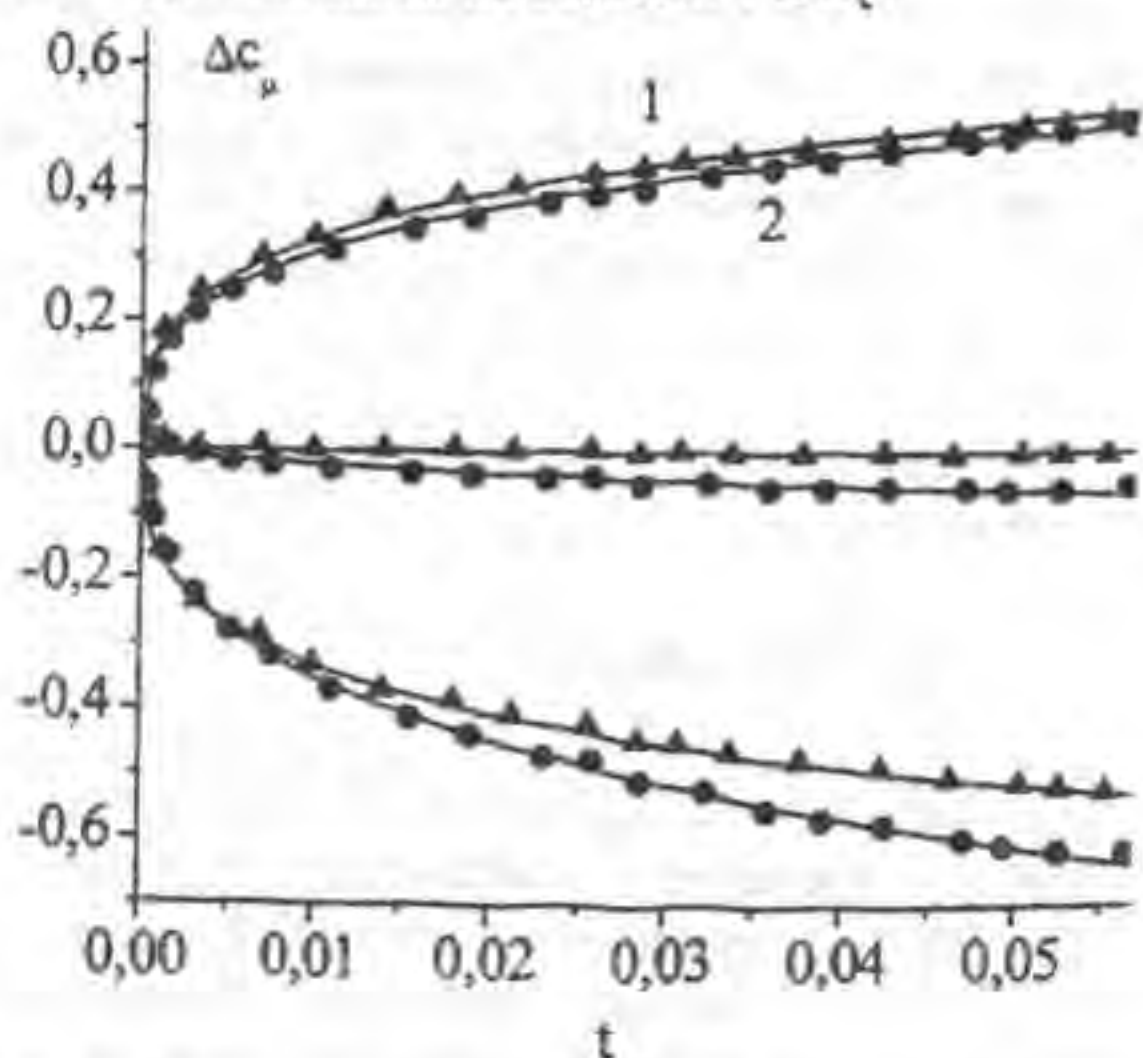


Рис. 2. Температурна залежність молярних концентрацій розчинів метанол-гексан (1) та метанол-гексан + KCl (2).

У цій моделі, виходячи з [2, 14], рівняння флуктуаційної частини термодинамічного потенціалу [11] можна представити у вигляді

$$F_\phi = \frac{F_0}{\omega} \left(1 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \Delta\rho_0 \right) \left(1 - \frac{n-1}{n} x \right) - A C_0^3 R_c^{-4} \quad (2)$$

Тут $\Delta\rho \approx -\Delta V = (V_s - V)/V_s$; $\omega = (1 - V_\phi/V_s)$; $\rho_\phi = \rho_s/(1 - \omega)$ – густина речовини всередині флуктуації параметра порядку; "A" – постійна, яка характеризує сили взаємодії між кластерами флуктуацій на відстанях $r \geq R_c$;

$F_0 = N_\phi k_B T = C_0 R_c^{-3}$ – флуктуаційна частина термодинамічного потенціалу ФТФП [11]; $\Delta\rho_0 = dF_0/d\mu$; $C_0 \approx 10^{-22} \text{ см}^3$ [2]; параметр $x = N_{\phi n}/N_\phi = x_0 t^{\Delta_0} = x_0 \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{\Delta_0}$ визначає, за аналогією з [16, 17], ступінь асоціації флуктуацій у системі; N_ϕ – загальне число флуктуацій в одному молі речовини, які займають об'єм $V_\phi = \frac{4}{3}\pi R_c^3 N_\phi$; $N_{\phi n}$ – число флуктуацій, які утворюють комплекси з n флуктуацій (при $t \Rightarrow 0$, $x \Rightarrow 0$); $1/\omega \approx 1/\omega_0(1 + \text{const} \cdot \Delta S_\mu) = 1/\omega_0(1 + \text{const}' \cdot t^{1-\alpha-\beta})$, $\omega_0 = 1 - b/V_\phi$, $b \sim V_\phi$ – ефективний власний об'єм молекул одного моля речовини усередині флуктуацій параметра порядку. Згідно [11] вздовж напрямку межі поділу фаз радіус кореляції $R_c^{-1} = t^\nu \Phi_1(Z_1^*) = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\Delta\mu | t|^{-\beta\delta})^n$.

Тоді на основі (2) знаходимо рівняння для параметра порядку $\Delta\phi = \Delta c_\mu = \frac{c_\mu - c_{\mu c}}{c_{\mu c}}$ ($c_{\mu c}$ – критична мольна концентрація розчину).

$$\Delta\phi = \frac{dF}{d\mu} = \pm B_0 |t|^\beta \pm B_1 |t|^{\beta+\Delta_0} + B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\nu} + \dots \quad (3)$$

За допомогою рівняння (3) проаналізуємо експериментальні дані $\Delta c_\mu(t)$ (рис. 2). Для цього спочатку використаємо симетричну частину цього рівняння

$$\frac{c_{\mu 1} - c_{\mu 2}}{2c_{\mu c}} = \pm B_0 |t|^\beta \pm B_1 |t|^{\beta+\nu} \quad (4)$$

На основі цього рівняння і експериментальних даних $\Delta c_\mu(t)$ (рис. 2) знаходимо амплітуди B_0 і B_1 . З рис. 2 видно, що додавання іонів приводить до деякого збільшення амплітуд $B_0 \sim 1/\omega_0$ і $B_1 \sim 1/\omega_0$ симетричної частини рівняння стану розчину (4). В асимптотичній області температур ($t < 2 \cdot 10^{-3}$) амплітуда B_0 незначно збільшується від величини 1,69 до 1,72. Згідно [2] це може бути пов'язано із зміною параметра ($\omega_0 = 1 - b/V_\phi = 1 - V_\phi/V_c = 1 - \frac{4}{3}\pi R_c^3 N_\phi/V_c$).

Раніше в роботах [9, 10] було показано, що додавання іонів NaCl і KCl у розчин 3-метилпіридин- D_2O (3МП- D_2O) [18] приводить до

збільшення інтенсивності розсіювання нейтронів $I \sim R_c^2$ і радіуса кореляції R_c (рис. 3).

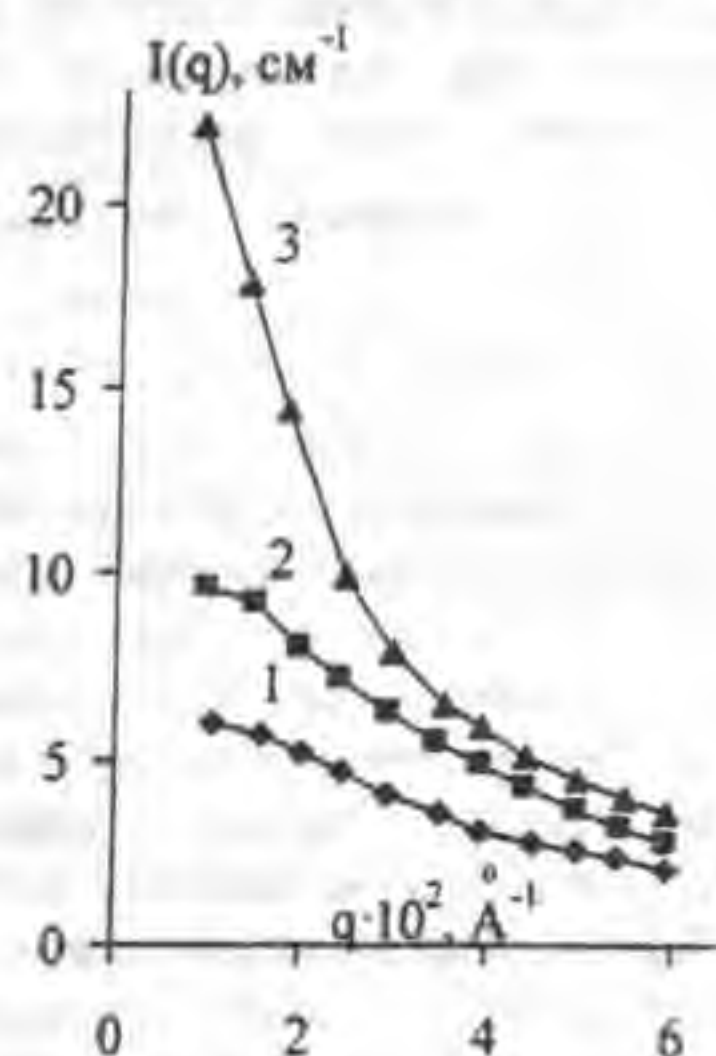


Рис. 3. Залежність інтенсивності малокутового розсіювання нейтронів від хвильового вектора q – у нейтральному розчині 3МП- D_2O (крива 1) при $t = 0,0283$; у заряджених розчинах 3МП- $D_2O + K^+Cl^-$ (крива 2) при $t = 0,0234$ та 3МП- $D_2O + Na^+Cl^-$ (крива 3) при $t = 0,0287$.

Як видно з цього рисунка, при додавання іонів KCl та NaCl у розчин 3-метилпіридин- D_2O у всьому діапазоні змін хвильових векторів $q = 4\pi/\lambda \sin \theta/2$ інтенсивність розсіювання нейтронів значно зростає. Тобто додавання іонів у систему приводить до збільшення радіуса кореляції та власного об'єму флуктуацій параметра порядку $V_\phi = \frac{4}{3}\pi R_c^3 N_\phi$. Отже, це приводить і до збільшення параметра $b \sim V_\phi$ рівняння (2), зменшення параметра $\omega_0 = 1 - b/V_c$ й збільшення амплітуди $B_0 \sim 1/\omega_0$.

Тепер проведемо аналіз діаметра кривої співіснування (рис. 2) за допомогою асиметричної частини рівняння стану (3)

$$\frac{c_{\mu 1} + c_{\mu 2}}{2c_{\mu c}} = B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{\beta+\nu} + \dots \quad (5)$$

З рис. 2 випливає, що концентрація $\Delta c_\mu(t)$ розчину метанол-гексан без додавання іонів є майже симетричною у всьому досліджуваному діапазоні температур. Це пов'язано з тим, що внесок асиметричних членів $B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha}$

компенсується членом $-B_4|t|^{p+v}$ протилежного знака ($B_2|t|^{2p} + B_3|t|^{1-a} - B_4|t|^{p+v} + \dots \Rightarrow 0$).

Однак в іонному розчині внаслідок зростання сил взаємодії між флуктуаціями параметра порядку зростає роль негативного члена $-B_4|t|^{p+v}$, що і порушує симетрію $\Delta c_u(t)$ рівняння стану (3) цього розчину ($B_2|t|^{2p} + B_3|t|^{1-a} - B_4|t|^{p+v} + \dots < 0$).

Проаналізуємо тепер дію іонів на температурну поведінку показника заломлення розчину метанол-гексан в за критичній області температур ($T > T_c$) вздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори – ізоконцентрати. З рис. 1 видно, що дія іонів приводить до певного зменшення нахилу кривої температурної залежності показника заломлення $n(T)$ даного розчину. Такий самий висновок можна зробити з експериментальних даних температурної залежності показника заломлення $n(T)$ розчинів 3-метилпіридин- D_2O та 3-метилпіридин- D_2O + NaCl в однофазній області температур, представлених раніше в роботі [19]. Ці дані показані на рис. 4:

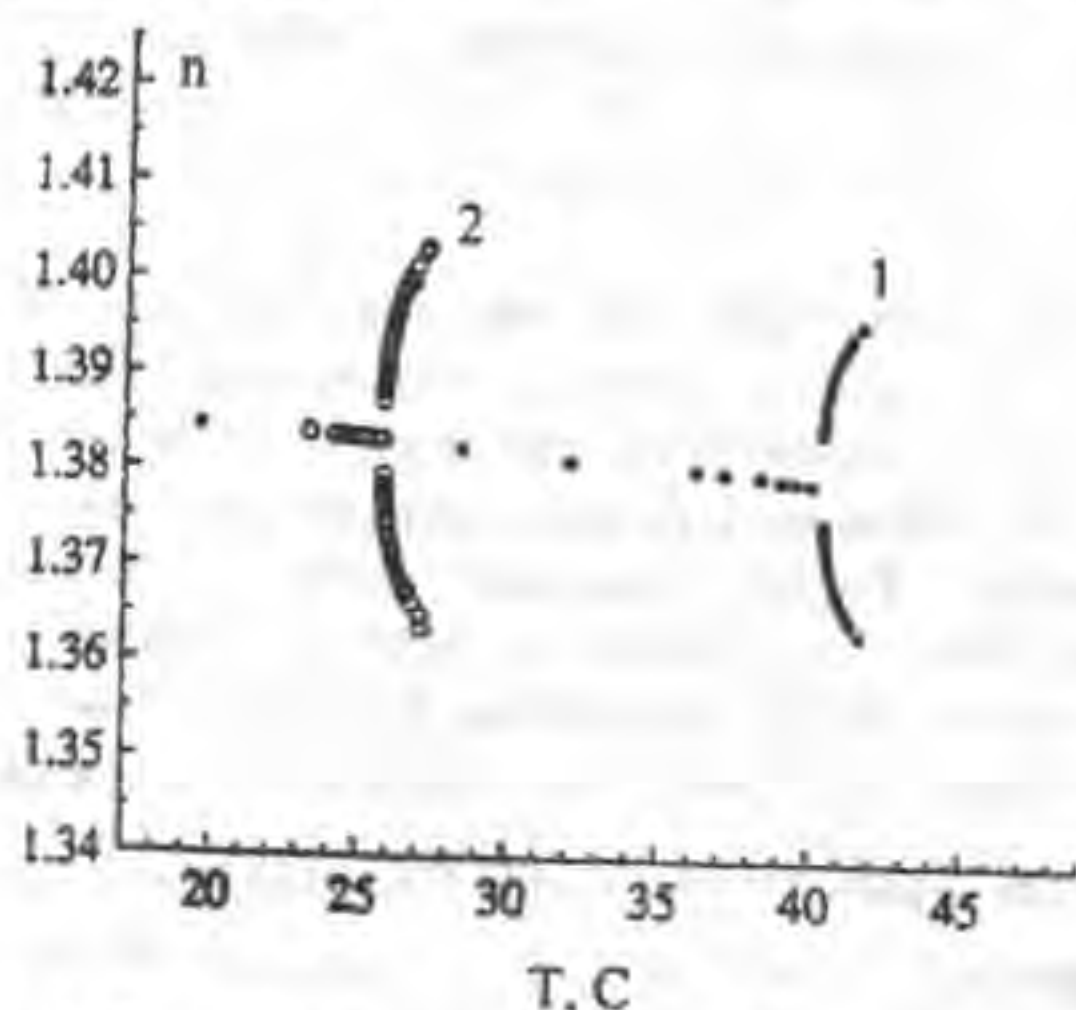


Рис. 4. Температурні залежності показника заломлення розчину ЗМП- D_2O (1) та ЗМП- D_2O +NaCl (2) в однофазній області температур.

Як видно, додавання іонів NaCl в даний розчин також приводить до зменшення нахилу температурної залежності $n(T)$. Даний результат пояснюється тим, що внесення іонів у систему, збільшуючи сили взаємодії між флуктуаціями параметра порядку, природно приводить і до зменшення коефіцієнта об'ємного розширення

такої системи: $\frac{dn(m-r+KCl)}{dT} \sim \frac{dV(m-r+KCl)}{dT}$

$$< \frac{dn(m-r)}{dT} \sim \frac{dV(m-r)}{dT}$$

Список використаних джерел

1. Булавін Л.А. Властивості рідин у критичній області. – Київ: "Київський університет". 2002.
2. Альохін О.Д., Дорош А.К., Рудніков Є.Г. Критичний стан речовини в полі гравітації Землі. – Київ, Політехніка. 2008.
3. Алехин А.Д. // УФЖ 28(8), 1261 (1983).
4. Alekhin A.D. // Journal of Molecular Liquids 127, 62 (2006).
5. Алехин А.Д. // Оптика и спектр. –58, № 3 – 654 (1985).
6. Алехин А.Д. // УФЖ, 47(11), 1045 (2002).
7. Алехин А.Д., Абдикаримов Б.Ж., Копильчук В.П. // УФЖ 44(3), (1999).
8. Альохін О.Д., Абдікарімов Б.Ж., Рудніков Є.Г. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки, 4. (2008).
9. Алехин А.Д., Абдикаримов Б.Ж., Булавин Л.А. // УФЖ 42(10), 1222 (1997).
10. Алехин А.Д., Булавин Л.А., Абдикаримов Б.Ж., Копильчук В.П. // УФЖ 45(11), 1333 (2000).
11. Паташинский А.З., Покровский В.А., Флуктуационная теория фазовых переходов, – Москва, Наука. 1982.
12. Alekhin O.D., Krupsky M.P., Ostapchuk Yu.L., Rudnikov E.G. // Journal of Molecular Liquids 105/2-3, 191 (2003).
13. Волькенштейн М.В. Молекулярная оптика. – Москва, Гостехиздат. 1944.
14. Алехин А.Д. // Известия вузов. Физика 3, 103 (1983).
15. Ван-дер-Ваальс И.Д., Констанм Ф. Курс термостатики. Т.2. – Москва, ОНТИ. 1936.
16. Кипнис А.Я., Явелов Б.Е. Иоганнес Дидерик Ван-дер-Ваальс. – АН СССР. Ленинград, Наука. 1985.
17. Альохін А.Д. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки, 2, 322 (2003).
18. Булавін Л.А., Олейнікова А.В., Копильчук В.П. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки, 2, 288 (1996).
19. Булавін Л.А., Олейнікова А.В., Піпич В.А. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. наук, 1, 411 (2001).

Надійшла до редколегії 03.11.2009

УДК 532

Адаменко І.І., доктор фіз.-мат. наук., професор,
Григор'єв А.М., канд. фіз.-мат. наук.,
Кузовков Ю.Г., канд. фіз.-мат. наук., ст. наук. сп.
Мироненко О.К., студент

Вплив форми молекули на теплофізичні властивості рідин. II. Теплові характеристики.

Методом Монте-Карло для модельних систем двохатомних гантелеподібних молекул з різними факторами несферичності розраховані ізохорична та ізобарична теплоємності, коефіцієнт теплового розширення, ентальпія в широкому інтервалі приведених густин та тисків. Проаналізовано вплив несферичності молекул на баричну залежність теплових властивостей.

Ключові слова: ізохорична та ізобарична теплоємності, коефіцієнт теплового

розширення, ентальпія, несферичність молекули.

I.I. Adamenko, professor
A.N. Grigoriev,
Yu.I. Kuzovkov
O.K. Myronenko

Molecular shape and thermophysical properties of liquids. II. Thermal properties.

Isobaric and isochoric heat capacities, thermal expansion coefficient and enthalpy of soft dumb-bell fluids were determined in Monte-Carlo simulations in a wide range of reduced densities and pressures. Molecular nonsphericity influence on pressure dependencies of elastic thermal properties was analyzed.

Key words: isobaric and isochoric heat capacities, thermal expansion coefficient, enthalpy, molecular nonsphericity.

*E-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

Представлена стаття є продовженням роботи [1]. Загальна мета дослідження – з'ясування впливу форми молекули на теплофізичні властивості рідин. У першій частині статті були розглянуті пружні характеристики (адіабатичний та ізотермічний модулі пружності). У другій частині розглядаються теплові характеристики: ізохорична та ізобарична теплоємності, коефіцієнт теплового розширення, ентальпія. Ці характеристики розраховувалися методом Монте-Карло для системи двохатомних молекул різного ступеня несферичності в наближенні атом-атомної схеми [2].

В якості потенціалу міжатомної взаємодії обирався потенціал м'яких сфер з показником $m = 12$:

$$\varphi(r) = \varepsilon \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12},$$

де σ – діаметр атома, ε – енергетичний параметр, r – відстань між взаємодіючими атомами.

Відстань між атомами L однієї молекули була жорстко зафіксована і дорівнювала 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 і 0.6. Параметр ε у всіх випадках дорівнював 0.25. Діаметр атома молекули вибирався таким, щоб об'єм двохатомної молекули не змінювався і був рівним об'єму сфери діаметром $\sigma = 1$.

Розрахунок проводився в канонічному ансамблі для систем із $N=108$ молекул в інтервалі приведених густин $\rho = 0.4+0.9$ при температурах $T=1.0$ і $T=2.0$. Інші деталі комп'ютерного експерименту наведені в попередній роботі [1].

На Рис. 1 і 2 зображено залежність ізобарної C_p та ізохорної C_v теплоємностей від густини при $T=2.0$. Як видно з графіків, залежність C_p і C_v від густини є зростаючою і близькою до лінійної. Що стосується впливу фактору несферичності молекули, то значення теплоємностей при переході від сферичних молекул до несферичних спочатку зменшуються (в інтервалі $L=0+0.4$), а потім зростають (в інтервалі $L=0.4+0.6$).

На Рис. 3 і 4 зображено баричну залежність відповідно ізобарної та ізохорної теплоємностей при $T=2.0$. Як видно з графіків, залежність C_p і C_v від тиску є нелінійною і зростаючою, причому швидкість зростання із тиском зменшується. Як видно з порівняння графіків залежностей теплоємностей від густини і тиску, форма молекули слабше впливає на баричні залежності. Отже, при застосуванні термодинамічної теорії збурень для розрахунку теплоємностей молекулярних рідин, як і у випадку модулів пружності, доцільно використовувати ізотермічно-ізобаричний ансамбль.

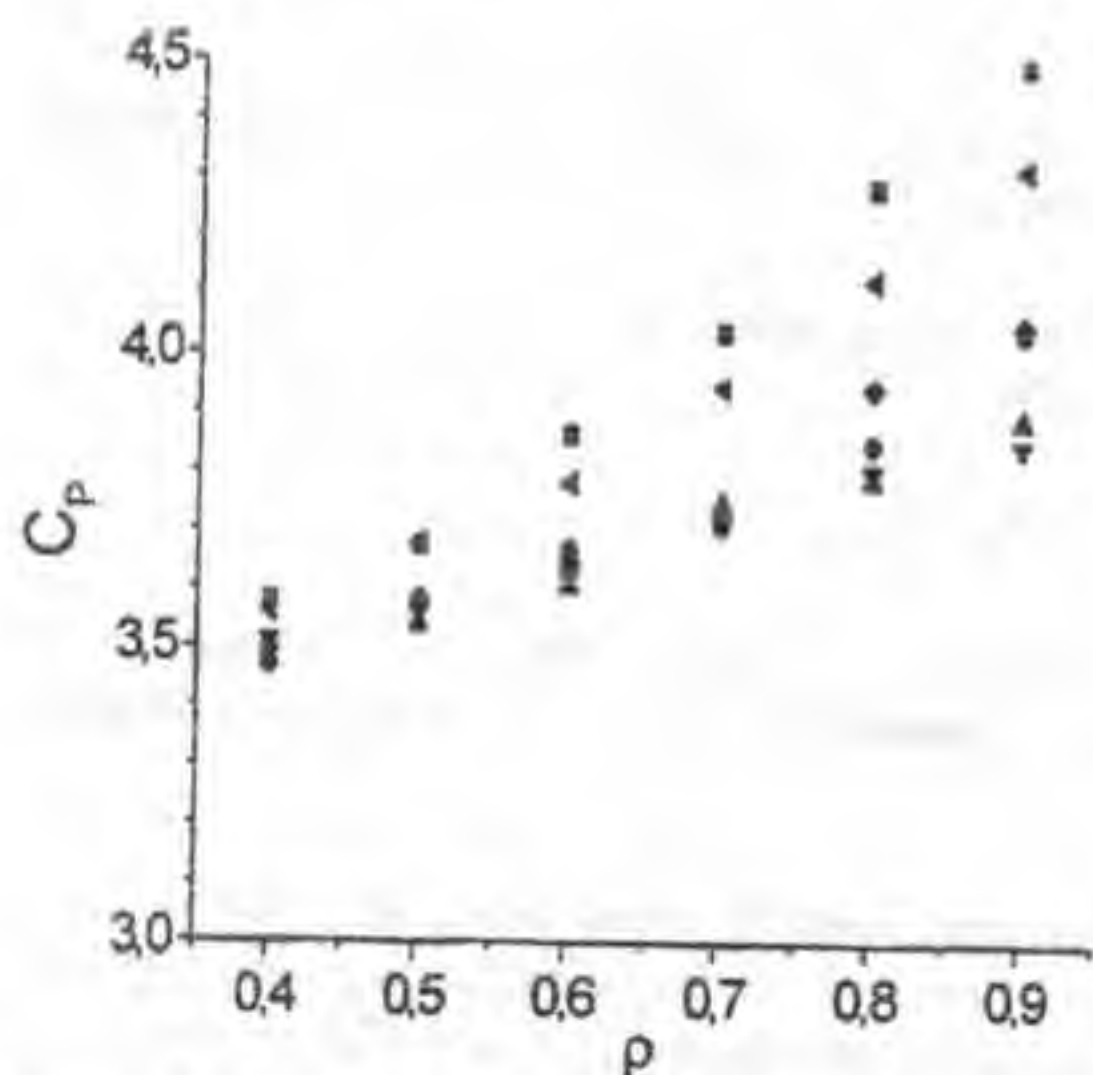


Рис. 1. Залежність ізобарної теплоємності від густини ($\blacksquare$ – $L=0.0$, $\bullet$ – $L=0.1$, $\blacktriangle$ – $L=0.2$, $\blacktriangledown$ – $L=0.3$, $\blacklozenge$ – $L=0.4$, $\blacktriangleleft$ – $L=0.6$).

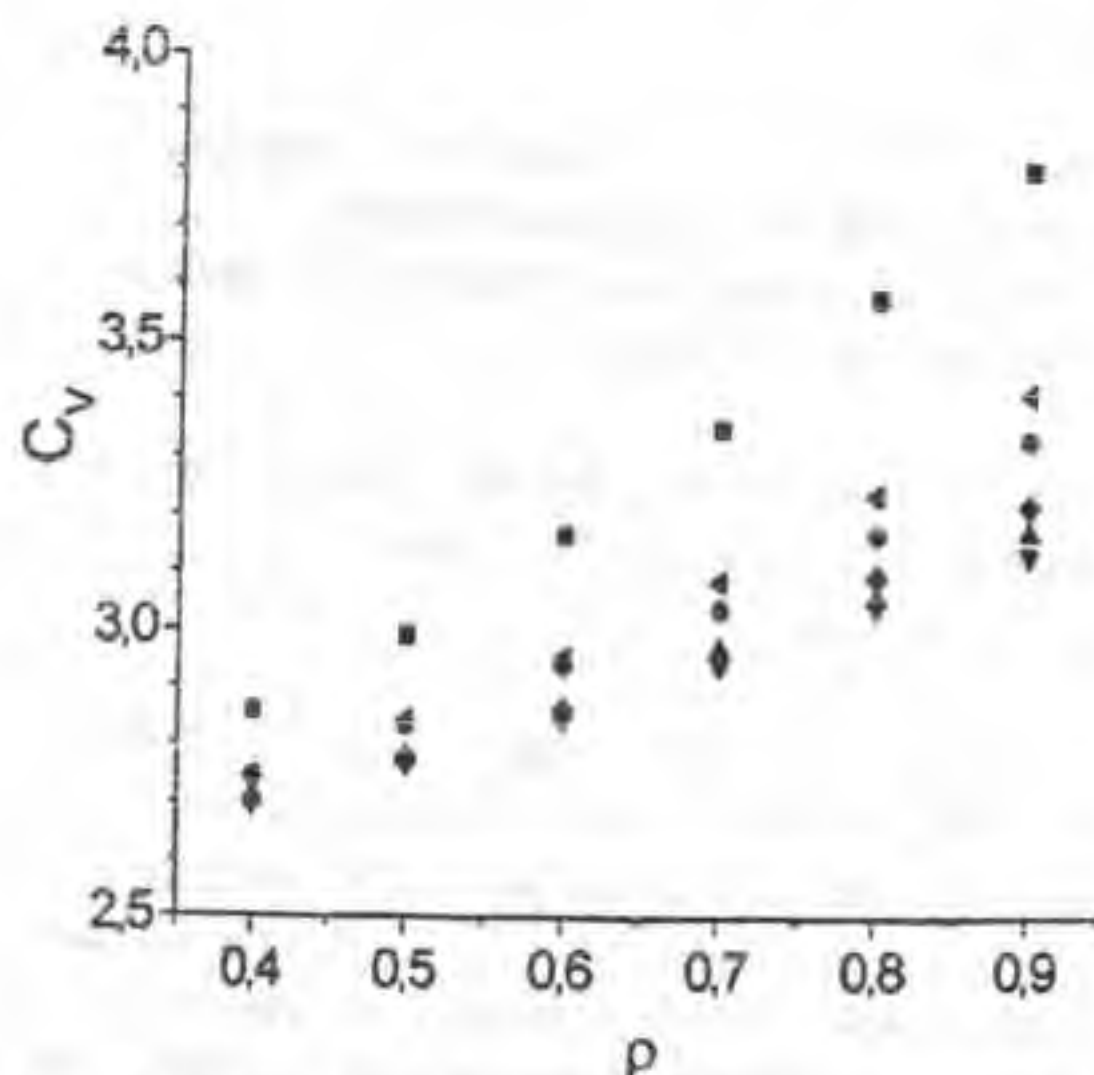


Рис. 2. Залежність ізохорної теплоємності від густини ($\blacksquare$ – $L=0.0$, $\bullet$ – $L=0.1$, $\blacktriangle$ – $L=0.2$, $\blacktriangledown$ – $L=0.3$, $\blacklozenge$ – $L=0.4$, $\blacktriangleleft$ – $L=0.6$).

На Рис. 5 зображено залежність коефіцієнта теплового розширення α_p від густини при $T=2.0$. Як видно з графіків, залежність α_p від густини є слабо нелінійною і спадною. Як і у випадку попередньо розглянутих теплофізичних властивостей, вплив фактора несферичності молекул є значним. Значення коефіцієнта

теплового розширення при переході від сферичних молекул до несферичних спочатку зростає приблизно на 30 % (в інтервалі $L=0 \div 0.4$), а потім зменшується (в інтервалі $L=0.4 \div 0.6$).

На Рис. 6 зображено баричну залежність коефіцієнта теплового розширення при $T=2.0$. Як видно з рисунку, залежність α_p від тиску є

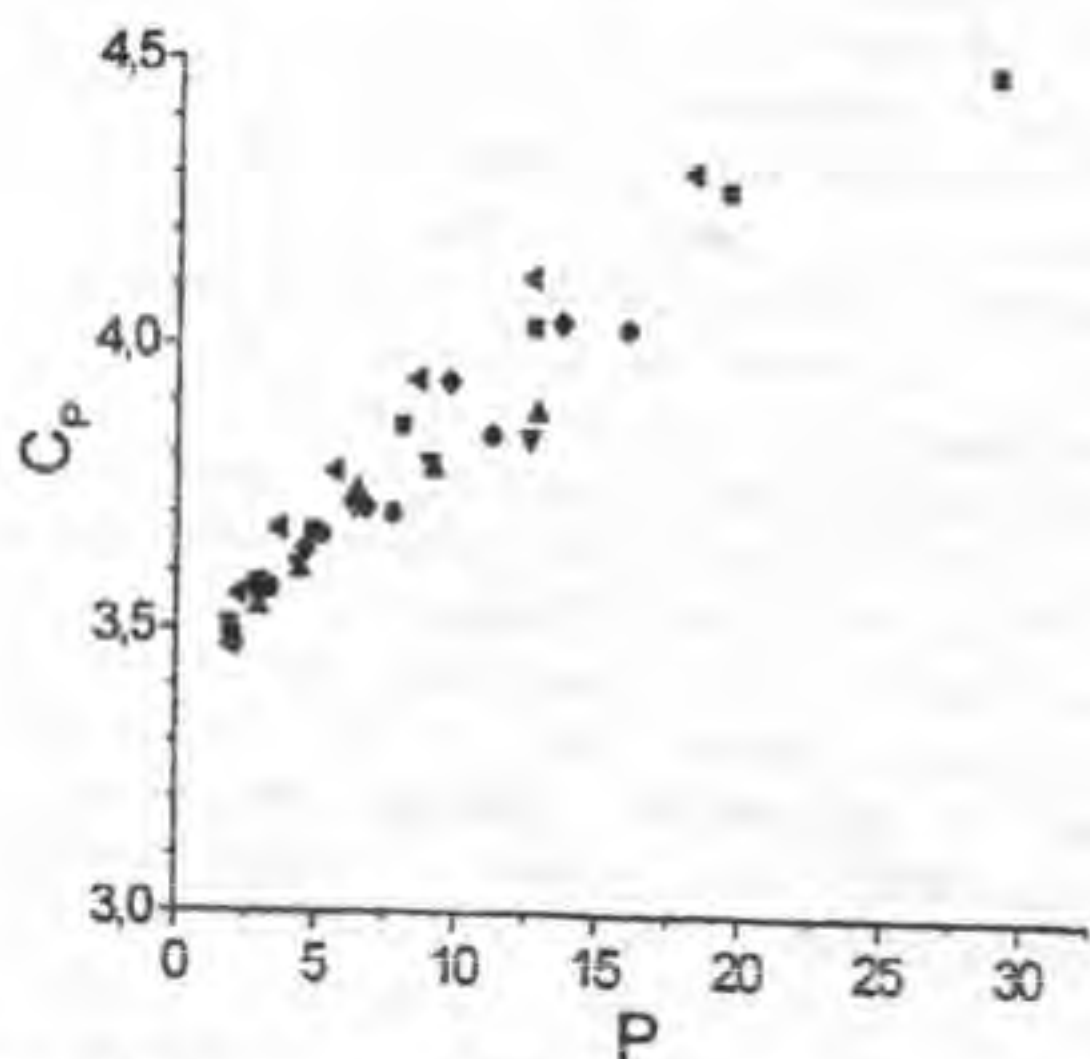


Рис. 3. Залежність ізобарної теплоємності від тиску ($\blacksquare$ – $L=0.0$, $\bullet$ – $L=0.1$, $\blacktriangle$ – $L=0.2$, $\blacktriangledown$ – $L=0.3$, $\blacklozenge$ – $L=0.4$, $\blacktriangleleft$ – $L=0.6$).

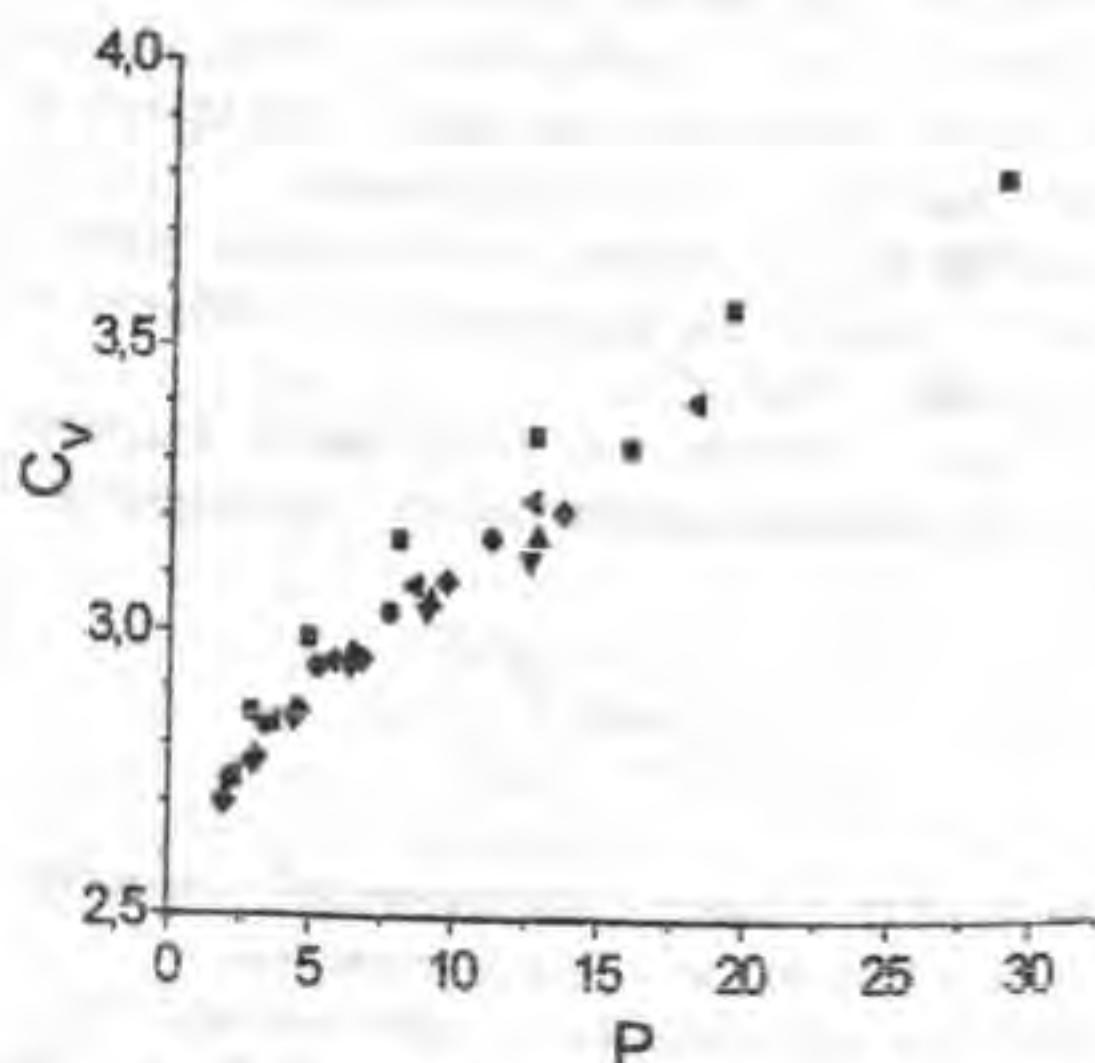


Рис. 4. Залежність ізохорної теплоємності від тиску ($\blacksquare$ – $L=0.0$, $\bullet$ – $L=0.1$, $\blacktriangle$ – $L=0.2$, $\blacktriangledown$ – $L=0.3$, $\blacklozenge$ – $L=0.4$, $\blacktriangleleft$ – $L=0.6$).

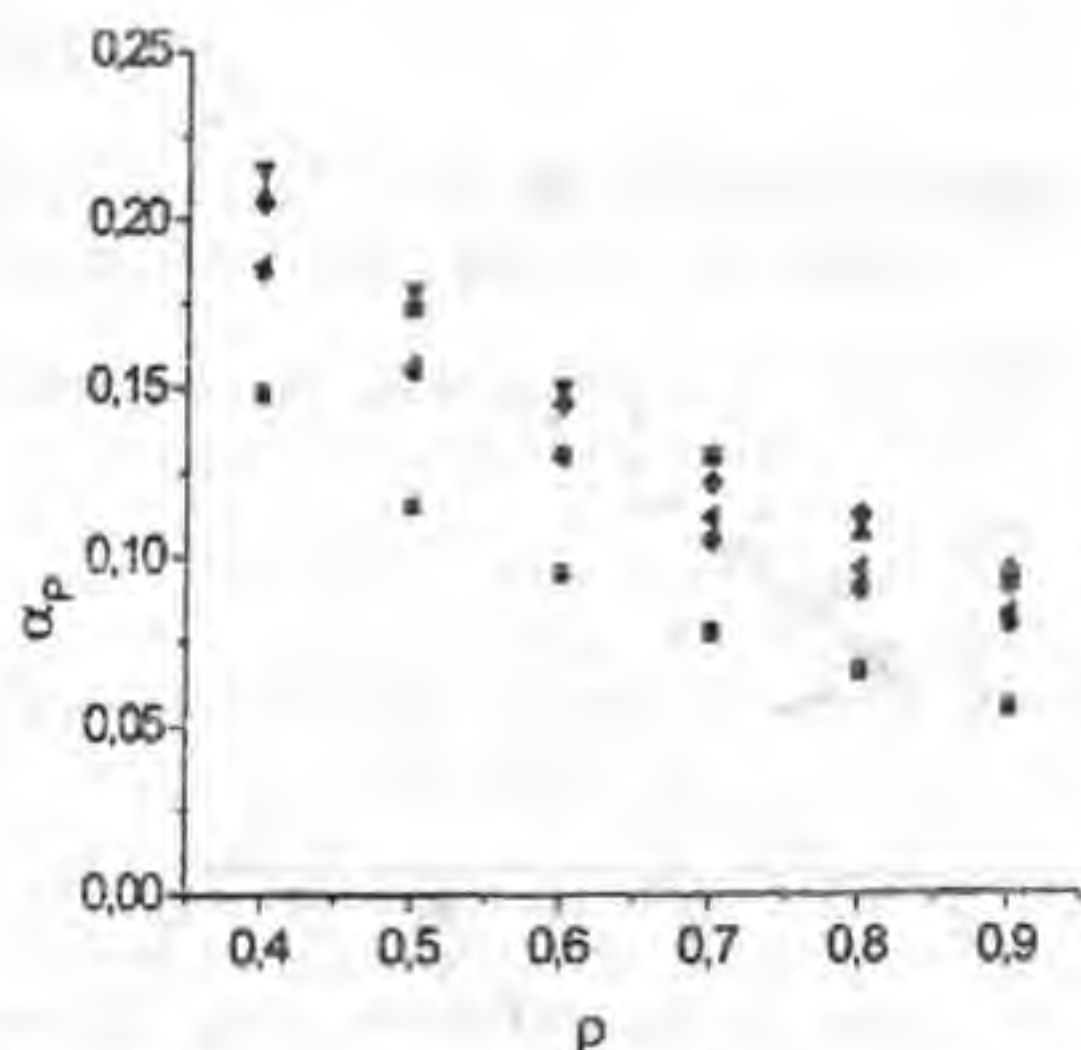


Рис. 5. Залежність коефіцієнта теплового розширення від густини ($\blacksquare - L=0.0$, $\bullet - L=0.1$, $\blacktriangle - L=0.2$, $\blacktriangledown - L=0.3$, $\blacklozenge - L=0.4$, $\blacktriangleleft - L=0.6$).

нелінійною і спадною, причому швидкість спадання із тиском зменшується. Порівняння графіків залежностей α_p від густини і тиску показує, що форма молекули значно слабше впливає на баричні залежності. Отже, як і при розгляді інших теплофізичних властивостей, при обчисленні коефіцієнта теплового розширення за допомогою термодинамічної теорії збурень доцільно використовувати ізотермічно-ізобаричний ансамбль.

На Рис. 7 показана залежність ентальпії H від густини при $T=2.0$. Як видно з графіків, ентальпія є зростаючою і нелінійною функцією густини. На Рис. 8 зображено баричну залежність ентальпії при $T=2.0$. Як видно з порівняння графіків залежностей H від густини і тиску, форма молекули значно слабше впливає на баричні залежності ентальпії.

Порівняння результатів досліджених усіх теплових властивостей дозволяє зробити висновок, що форма молекули майже не впливає на характер їх баричних залежностей.

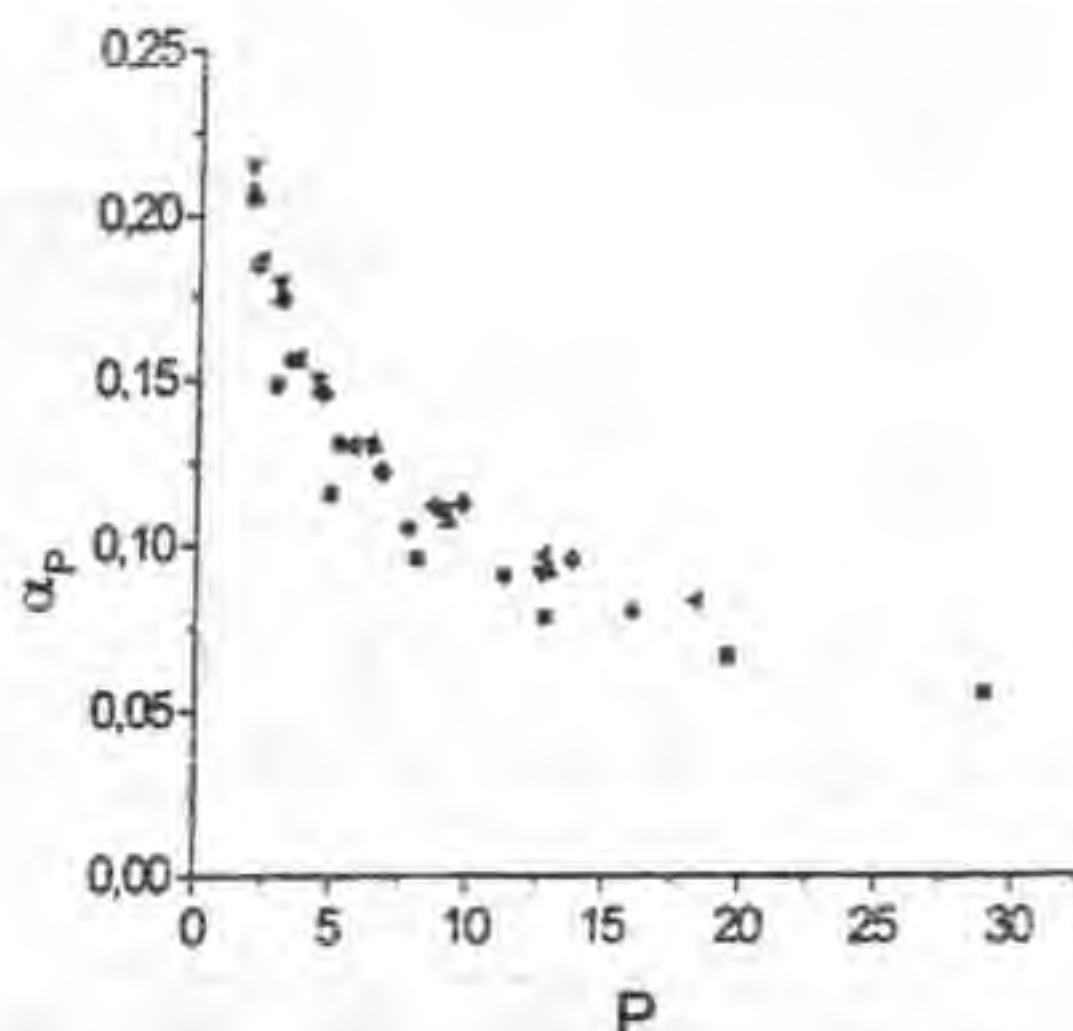


Рис. 6. Залежність коефіцієнта теплового розширення від тиску ($\blacksquare - L=0.0$, $\bullet - L=0.1$, $\blacktriangle - L=0.2$, $\blacktriangledown - L=0.3$, $\blacklozenge - L=0.4$, $\blacktriangleleft - L=0.6$).

У нашій попередній статті [1] було показано, що барична залежність ізотермічного модуля пружності K_T сумісна з ізотермічним рівнянням стану Марнегхена [3, 4]:

$$K_T = \frac{P + B}{A},$$

де P_0 – відповідно молярний об'єм і тиск на лінії рівноваги рідина-пара, A – стала, B – функція лише температури. Нечутливість K_T до форми молекули означає у певній мірі таку саму нечутливість сталої A та функції B . Рівняння стану Марнегхена може бути записано у формі

$$V = V_0 \left(\frac{B + P_0}{B + P} \right)^A$$

де V_0 і P_0 – відповідно молярний об'єм і тиск на лінії рівноваги рідина-пара. Диференціюванням цього рівняння по температурі при сталому тиску

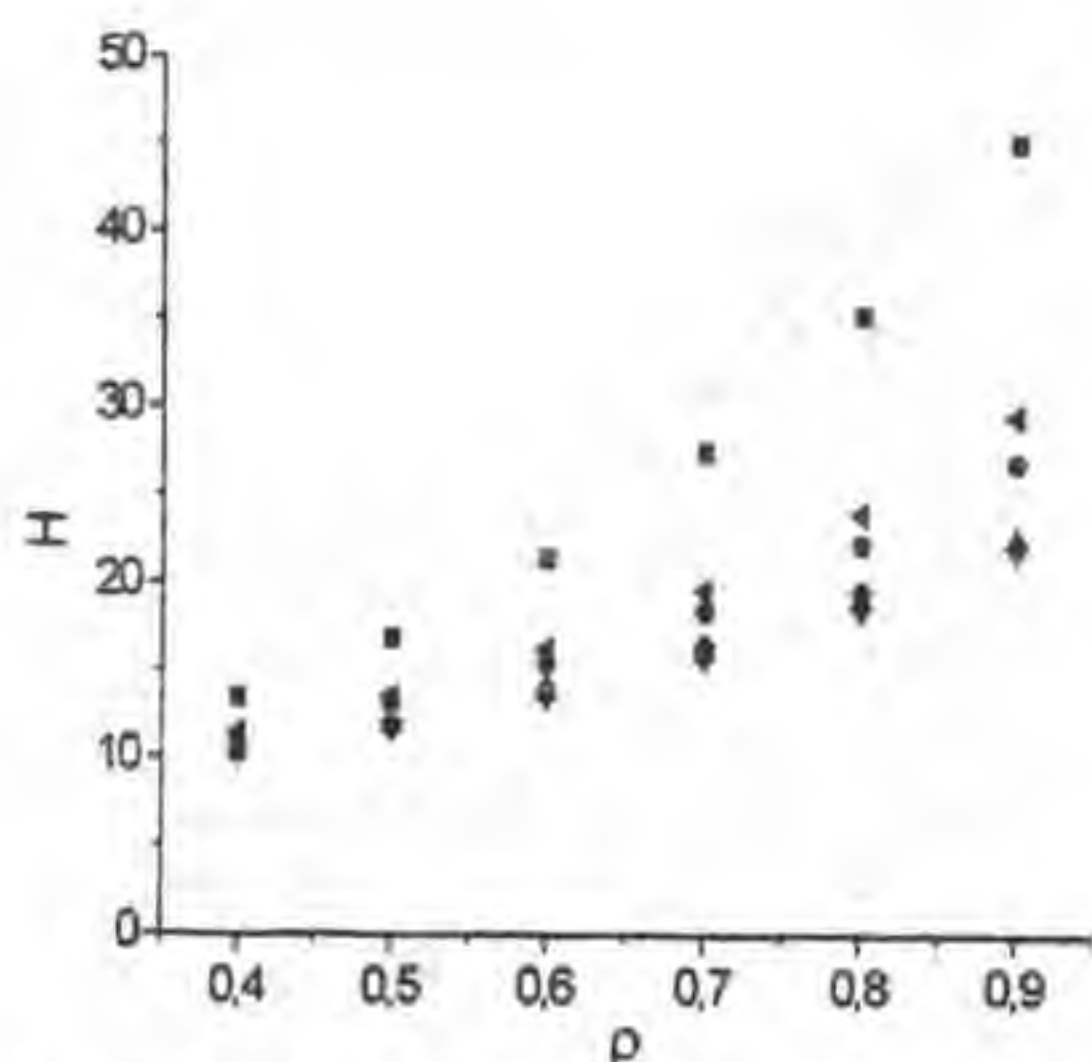


Рис. 7. Залежність ентальпії від густини (■ – $L=0.0$, ● – $L=0.1$, ▲ – $L=0.2$, ▼ – $L=0.3$, ◆ – $L=0.4$, ◀ – $L=0.6$).

можна отримати вираз для коефіцієнта теплового розширення:

$$\alpha_P = \alpha_P^0 + \frac{A(P - P_0)}{V(B + P_0)(B + P)} \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_P$$

Отже, чутливість до форми молекули для коефіцієнта теплового розширення може з'явитися лише через температурну похідну функції B .

До речі, барична залежність коефіцієнта теплового розширення відповідно до рівняння стану Марнегхена має бути гіперболічною, що дійсно спостерігається (див. Рис. 6).

Основним результатом наших досліджень є встановлення того факту, що за умови однаковості власних об'ємів молекул баричні залежності як пружних так і теплових характеристик систем, взаємодія частинок яких має характер відштовхування, майже не залежать від форми молекули.

Реальні рідини характеризуються анізотропією потенціалу сил як відштовхування так і притягання між

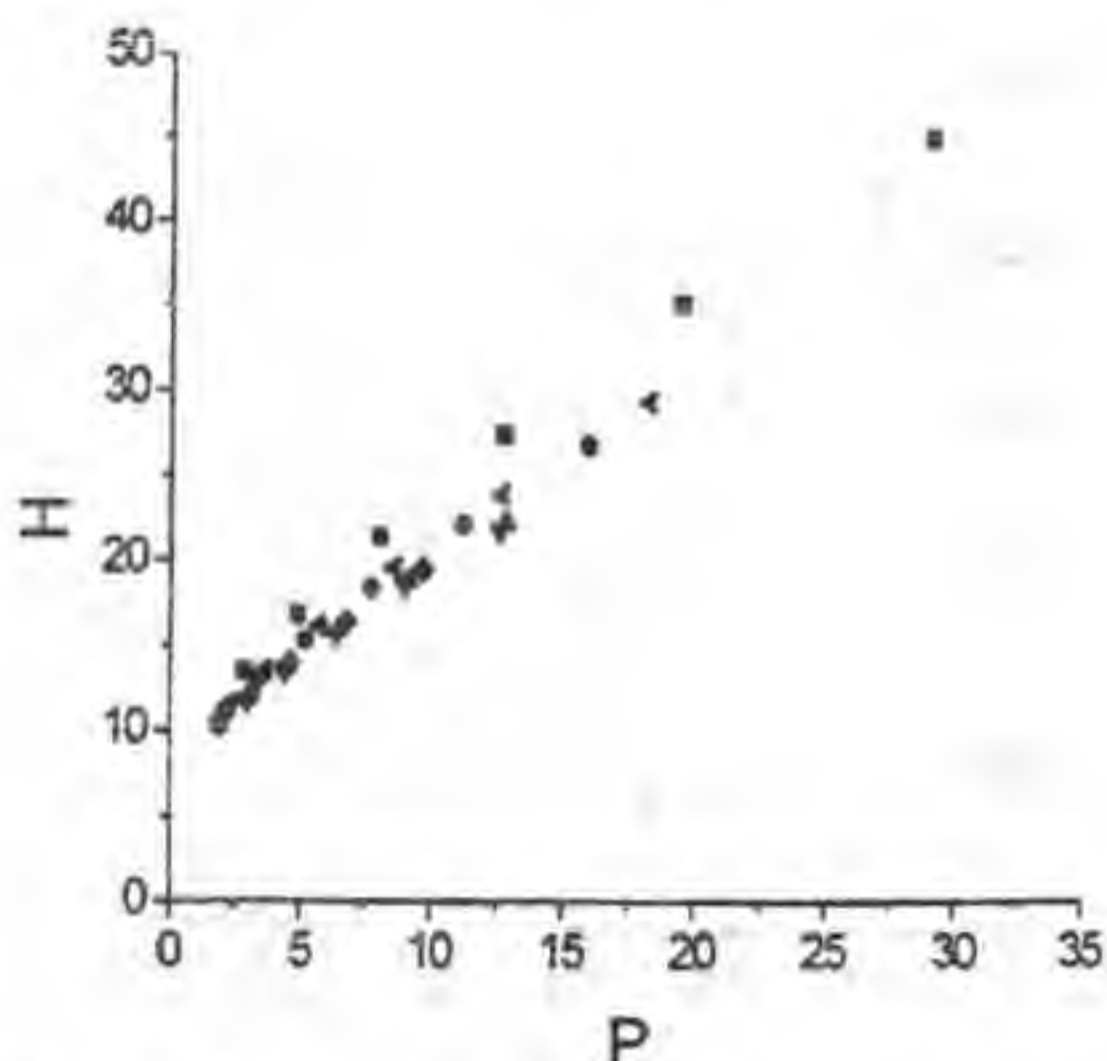


Рис. 8. Залежність ентальпії від тиску (■ – $L=0.0$, ● – $L=0.1$, ▲ – $L=0.2$, ▼ – $L=0.3$, ◆ – $L=0.4$, ◀ – $L=0.6$).

молекулами. Для того щоб обговорювати властивості реальних рідин необхідно провести дослідження впливу анізотропії потенціалу сил притягання між молекулами на теплофізичні властивості рідин. Це буде об'єктом нашої подальшої роботи.

Список використаних джерел

1. Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г., МIRONENKO О.К. Вплив форми молекули на теплофізичні властивості рідин. I. Пружні характеристики // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №3. – С.
2. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer simulation of liquids. – Oxford, Clarendon Press, 1986. – 385 p.
3. Адаменко І.І., Булавін Л.А. Фізика рідин та рідинних систем. – К.: АСМІ, 2006. – 660 с.
4. Адаменко И.И., Самойленко Л.П. Об уравнении состояния Тейта // Физика жидкого состояния. – 1987. – Вып. 15. – С. 117-120.

Надійшла до редколегії 2.11.2009р

УДК 519.9

Боровий М.О.^{1*}, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Іщенко Р.М.², канд. фіз.-мат. наук, доцент

**Рентгенівські спектри K-LL, K-LM та K-MM
радіаційного Оже-ефекту атомів Cr, Fe, Co, Ni**

Експериментально досліджено рентгенівські спектри K-LL, K-LM та K-MM радіаційного Оже-ефекту (РОЕ) атомів 3d-металів Cr, Fe, Co і Ni при електронному бомбардуванні. Встановлено, що у спектрах кожного з типів РОЕ можна виділити дві основні групи радіаційних Оже-переходів (РО-переходів). У випадку K-LL РОЕ низькоенергетичну групу переходів утворюють $K-L_1L_1$, а високоенергетичну – $K-L_1L_{2,3}$ і $K-L_{2,3}L_{2,3}$ РО-переходи. У спектрах K-LM РОЕ до першої групи належать $K-L_1M_{1,2,3}$, а до другої – відповідно $K-L_1M_{4,5}$ та $K-L_{2,3}M_{1,2,3}$ РО-переходи. При K-MM РОЕ низькоенергетична група пов'язана з $K-M_1M_{1,2,3}$, а високоенергетична – з $K-M_{2,3}M_{2,3}$ і $K-M_1M_{4,5}$ РО-переходами. Експериментально визначено відносні ймовірності K-LL, K-LM і K-MM РОЕ Cr, Fe, Co, Ni та проведено їх порівняння з теоретичними розрахунками, які виконані у наближенні миттєвого збурення. Виявлено, що теоретичні значення відносних ймовірностей усіх типів РОЕ систематично перевищують отримані експериментальні результати, причому у випадку K-LL і K-MM РОЕ таке перевищення складає 2,0÷2,4 рази, тоді як для K-LM РОЕ – тільки 20-25%. Зроблено висновок про необхідність врахування електронних кореляцій у процесах однофотонних двоелектронних K-LM та, особливо, K-LL і K-MM переходів.

Ключові слова: радіаційний Оже-ефект K-LL, K-LM, K-MM, наближення миттєвого збурення, електронна оболонка

* E-mail: borovoy@univ.kiev.ua

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Київ, Україна

²Національний транспортний університет,
Київ, Україна

Одним з можливих каналів розпаду вакансії в електронній K-оболонці атому є радіаційний Оже-ефект (РОЕ), при якому заповнення вакансії в K-оболонці електроном з L

Borovoy N.A., Ph.D.,
Borovoy N.A., Ph.D.,
Ischenko R.M., Ph.D.

X-Ray spectra of K-LL, K-LM and K-MM radiative Auger effect of Cr, Fe, Co, Ni atoms

X-Ray spectra of K-LL, K-LM and K-MM radiative Auger effect (RAE) of 3d-metals Cr, Fe, Co and Ni are experimentally investigated at electron bombardment. It is found, that the structure of all RAE types characterizes by two principal groups of radiative Auger transitions (RA-transitions). In case of K-LL the RAE the low-energy group of transitions is formed by $K-L_1L_1$ and high-energy by $K-L_1L_{2,3}$ and $K-L_{2,3}L_{2,3}$ RA-transitions. In spectra of K-LM RAE RA-transitions of type $K-L_1M_{1,2,3}$ belong to the first group and $K-L_1M_{4,5}$, $K-L_{2,3}M_{1,2,3}$ RA-transitions to the second group accordingly. At last, the low-energy group of K-MM RAE is caused by $K-M_1M_{1,2,3}$ RA-transitions whereas the high-energy group by $K-M_{2,3}M_{2,3}$ and $K-M_1M_{4,5}$ RA-transitions. The relative probabilities of K-LL, K-LM and K-MM RAE Cr, Fe, Co, Ni were experimentally measured and compared with theoretical calculations based on sudden approximation. It is established, that theoretical values of relative probabilities of all RAE types the regularly exceed the data of our experiment, in particular for K-LL and K-MM RA-transitions such excess makes 2.0÷2.4 times, whereas for K-LM only 20-25 %. The conclusion about necessity of the account of electron correlations in one-photon two-electronic K-LM and, especially, K-LL and K-MM transitions is made.

Key Words: radiative Auger effect K-LL, K-LM and K-MM, sudden approximation, electron shell

чи M-оболонки супроводжується не тільки емісією електрона з цих електронних оболонок (звичайний Оже-ефект), а ще й випромінюванням рентгенівського фотону. Відповідно, можливими

каналами РОЕ є $K\text{-}LL$, $K\text{-}LM$ та $K\text{-}MM$ двоелектронні однофотонні процеси [1,2]. Відомо, що рентгенівські спектри РОЕ спостерігаються на низькоенергетичних схилах $K\alpha_{1,2}$ -ліній ($K\text{-}LL$, $K\text{-}LM$ РОЕ) та $K\beta_{1,3}$ -ліній ($K\text{-}MM$ РОЕ) у вигляді протяжних (до $100\div 500$ еВ) несиметричних структур малої інтенсивності, що мають границі зі сторони максимальних енергій фотонів [3-6]. Такі спектральні масиви, накладаючись на контури діаграмних рентгенівських ліній, впливають на точність рентгеноспектрального елементного аналізу, що особливо помітно при пошуку елементів малих домішок. Тому існує потреба у з'ясуванні форми, спектрального положення та відносної інтенсивності основних компонентів вказаних спектрів РОЕ для груп елементів, які широко застосовуються, зокрема, $3d$ -металів.

Необхідно відзначити, що із збільшенням порядкового номеру елемента імовірність усіх типів РОЕ швидко зменшується. І якщо для $K\text{-}MM$ спектрів РОЕ $3d$ -елементів у літературі представлена певна кількість робіт, присвячених експериментальному дослідженню їх інтенсивності та структури [7-10], то вже у випадку $K\text{-}LM$ спектрів РОЕ існуючі експериментальні результати є нечисленними і суперечливими [11-13]. А експериментальних даних щодо інтенсивності та структури спектрів $K\text{-}LL$ РОЕ $3d$ -металів у літературі не знайдено.

Відомо, що загальноприйнята теоретична модель, яка описує РОЕ, базується на одноелектронному наближенні миттєвого збурення (МЗ-модель) [1,2]. Однак, такий підхід до опису РОЕ може виявитися недостатнім для коректного відображення багаточастинкового процесу, який має місце при радіаційних Оже-переходах (РО-переходах). Про це, зокрема, свідчить певна розбіжність між існуючими експериментальними значеннями відносних ймовірностей $K\text{-}LM$ та $K\text{-}MM$ РОЕ і теоретичними розрахунками, виконаними у наближенні МЗ-моделі [7-10,11-13]. Тому питання щодо можливості застосування МЗ-моделі до опису РОЕ потребує подальшого з'ясування.

Зважаючи на вказане вище, у даній роботі виконано систематичне експериментальне дослідження структури та інтенсивності рентгенівських емісійних спектрів $K\text{-}LL$, $K\text{-}LM$ і $K\text{-}MM$ РОЕ $3d$ -металів Cr , Fe , Co та Ni . Визначено відносні ймовірності $K\text{-}LL$, $K\text{-}LM$ і $K\text{-}MM$ РОЕ для вказаної групи елементів і виконано їх порівняння з теоретичними розрахунками, отриманими в наближенні миттєвого збурення.

Методика експерименту

Рентгенівські емісійні спектри РОЕ $3d$ -елементів Cr , Fe , Co та Ni при електронному бомбардуванні були отримані за допомогою брегівського спектрометра з плоским монокристалом кварцу у другому порядку відбивання від площин $(10\bar{1}0)$ (спектри $K\text{-}LL$ і $K\text{-}LM$ РОЕ) та від площин (спектри $K\text{-}MM$ РОЕ). За джерело рентгенівського випромінювання використовувався модуль ИРИС-7М, який здійснював живлення рентгенівських трубок типу БСВ-29 з анодами Cr , Fe , Co та Ni . Режим роботи трубок: напруга – $(30\div 35)$ кВ, сила струму – 30 мА. Спектри РОЕ реєструвалися у режимі покрокового сканування. При зйомці спектрів $K\text{-}LL$ і $K\text{-}LM$ РОЕ діапазони брегівських кутів змінювалися від $(32,03\div 40,89)^\circ$ для Cr до $(22,61\div 28,15)^\circ$ для Ni (в шкалі енергій – $(4440\div 5480)$ еВ і $(6160\div 7560)$ еВ відповідно). Крок сканування залежав від спектрального діапазону і дорівнював $\Delta\theta=(0,02\div 0,08)^\circ$, що в шкалі енергій відповідає $\Delta E=(2,3\div 9,4)$ еВ для Cr та $\Delta E=(5,0\div 20,2)$ еВ для Ni . Обернена лінійна дисперсія в області $K\alpha_{1,2}$ -ліній складала 46,2 еВ/мм; 57,6 еВ/мм; 63,5 еВ/мм; 69,6 еВ/мм для Cr , Fe , Co і Ni відповідно при ширині вхідної щільності детектора 0.1 мм. Під час реєстрації спектрів $K\text{-}MM$ РОЕ діапазони брегівських кутів змінювалися від $(57,40\div 64,10)^\circ$ для Cr до $(37,30\div 39,60)^\circ$ для Ni (у шкалі енергій – $(5600\div 5980)$ еВ і $(7900\div 8310)$ еВ відповідно). Крок сканування дорівнював $\Delta\theta=(0,01\div 0,04)^\circ$, у шкалі енергій – $\Delta E=(0,6\div 2,4)$ еВ для Cr і $\Delta E=(1,7\div 7,0)$ еВ для Ni . Обернена лінійна дисперсія в області $K\beta_{1,3}$ -ліній складала 31,8 еВ/мм; 48,3 еВ/мм; 58,1 еВ/мм; 66,2 еВ/мм для Cr , Fe , Co та Ni відповідно при ширині вхідної щільності детектора 0.1 мм. Рентгенівські емісійні спектри РОЕ знімалися у режимі накопичення сталої кількості імпульсів ($N=1,5\cdot 10^5$) у кожній точці.

Оскільки зйомка протяжних спектрів $K\text{-}LL$, $K\text{-}LM$ і $K\text{-}MM$ РОЕ здійснювалася у досить широких кутових діапазонах, розглядалася можливість накладання паразитних ліній, які випромінюються атомами-домішками речовини анодів трубок чи є результатом флуоресценції елементів конструкції спектрометра. У результаті пошуку таких ліній було виявлено присутність слабого $K\alpha_{1,2}$ -дублету Si в спектрі $K\text{-}LM$ РОЕ Cr , який був вилучений з спектрального масиву. При подальшій обробці спектрограм вводилися корекції, які враховували кутову залежність

коефіцієнта відбивання кристала-аналізатора, дисперсію приладу при переході від шкали кутів до шкали енергій, поглинання рентгенівських фотонів різної енергії в повітрі та берилієвому віконці трубки.

Обговорення результатів

Рентгенівський емісійний $K\alpha$ -спектр Cr разом з $K-L$ та $K-LM$ РО-сателітами наведено на рис. 1. Що стосується $K\alpha$ -спектрів Fe , Co і Ni , то вони принципово подібні до спектру Cr . Як видно з рис. 1а, спектри $K-LM$ і $K-L$ РОЕ являють собою досить протяжні структури низької інтенсивності.

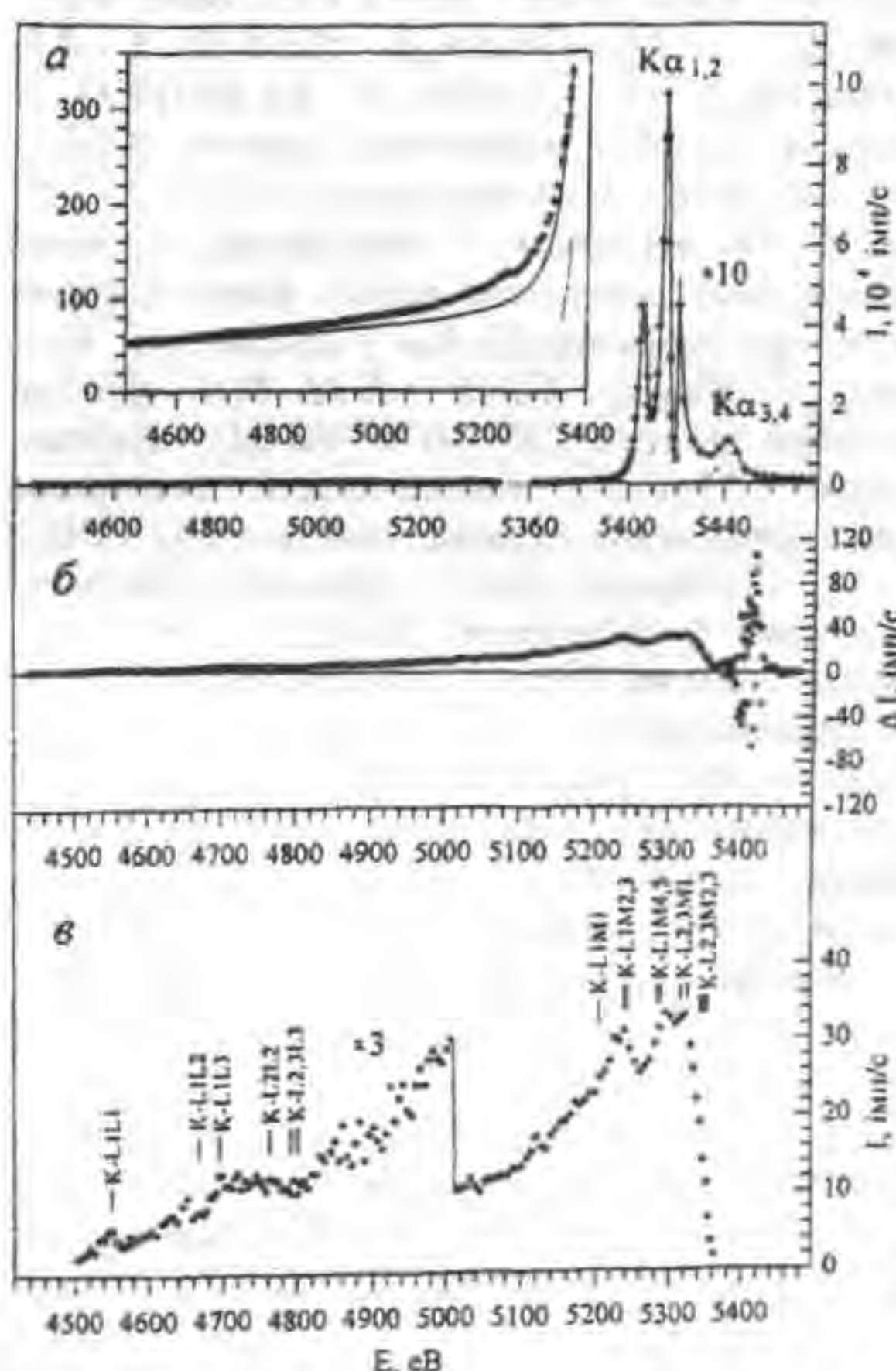


Рис. 1. Рентгенівський емісійний $K\alpha$ - спектр Cr разом з $K-L$ та $K-LM$ РО-сателітами

Тому певні труднощі виникли вже на етапі виділення спектрів $K-LM$ і, особливо, $K-L$ РОЕ з повного спектрального $K\alpha$ -масиву. Зокрема, зважаючи на складну мультиплетну структуру $K\alpha_{1,2}$ -ліній (переходи $K-L_{2,3}$) $3d$ -металів Cr , Fe , Co і Ni , зумовлену магнітним розщепленням, аналітична апроксимація $K\alpha_{1,2}$ -

дублетів двома функціями Лоренца чи Гауса не дала задовільних результатів. Суттєво кращі результати було отримано при апроксимації $K\alpha_{1,2}$ -ліній двома псевдофункціями Фойгта. Відзначимо, що на високоенергетичному схилі $K\alpha_1$ -лінії спостерігаються $K\alpha_{3,4}$ -сателіти (переходи $KL_{2,3}-L_{2,3}L_{2,3}$) [14,15], які також апроксимувались за допомогою двох псевдофункцій Фойгта (рис. 1а). Коректність апроксимації можна оцінити з рис. 1б, на якому для $K\alpha$ -спектру Cr наведено різницю (ΔI) між значеннями експериментальної інтенсивності та апроксимуючої кривої. Видно, що на низькоенергетичному схилі $K\alpha_{1,2}$ -ліній спостерігаються спектри $K-L$ і $K-LM$ РОЕ, а на високоенергетичній частині $K\alpha_1$ -лінії, де знаходяться $K\alpha_{3,4}$ -сателіти, значення ΔI практично прямують до нуля; при цьому розкид значень інтенсивності в області $K\alpha_{1,2}$ -дублету не перевищує границю абсолютної похибки накопичення імпульсів. Виділені у такий спосіб спектри $K-L$ і $K-LM$ РОЕ Cr наведені на рис. 1в. Оскільки максимальні енергії рентгенівських фотонів, що відповідають різним РО-переходам, співпадають з кінетичними енергіями відповідних Оже-електронів у випадку „чистого” Оже-ефекту, для пояснення структури спектрів РОЕ було використано значення енергій основних типів KL_L , KL_M та KLM_M Оже-переходів для даної групи елементів [16].

Розглядаючи структуру $K-L$ спектрів РОЕ (рис. 1в), необхідно відзначити, що положення слабого низькоенергетичного максимуму у таких спектрах узгоджується з максимальними енергіями $K-L_1L_1$ РО-переходів. Однак, головний внесок в інтенсивність $K-L$ РОЕ створюють РО-переходи $K-L_1L_{2,3}$ та $K-L_{2,3}L_{2,3}$, пов'язані з ежекцією $2p$ -електронів. Щодо $K-LM$ спектрів РОЕ, то в цьому випадку РО-переходи утворюють дві групи: першу складають переходи $K-L_1M_{1,2,3}$, другу з дещо більшою енергією – РО-переходи $K-L_1M_{4,5}$ та $K-L_{2,3}M_{1,2,3}$. В той же час, максимумами РО-переходів $K-L_{2,3}M_{4,5}$, які призводять до появи в кінцевому стані $3d$ -вакансій, для елементів Cr , Fe , Co , Ni , зсунуті по відношенню до максимуму $K\alpha_2$ -лінії у бік меншої енергії лише на $(2-4)$ еВ і тому експериментально не виділяються з загальних $K\alpha$ -контурів. Отже, у випадку $3d$ -металів головний внесок в інтенсивність $K-LM$ спектру створюють РО-переходи, пов'язані з викидом $3s$ та $3p$ -електронів. Варто відзначити досить добре узгодження між розрахованими значеннями максимальних енергій фотонів різних $K-L$ і $K-LM$ РО-переходів [16] та основними

компонентами структури експериментальних спектрів РОЕ *Cr*. Така відповідність є характерною і для спектрів *Fe*, *Co* та *Ni*.

Розглянемо далі особливості спектрів *K-MM* РОЕ. Як приклад, на рис. 2 представлено рентгенівський емісійний $K\beta$ -спектр *Ni*, зокрема, його низькоенергетичний схил разом з *K-MM* РО-сателітами.

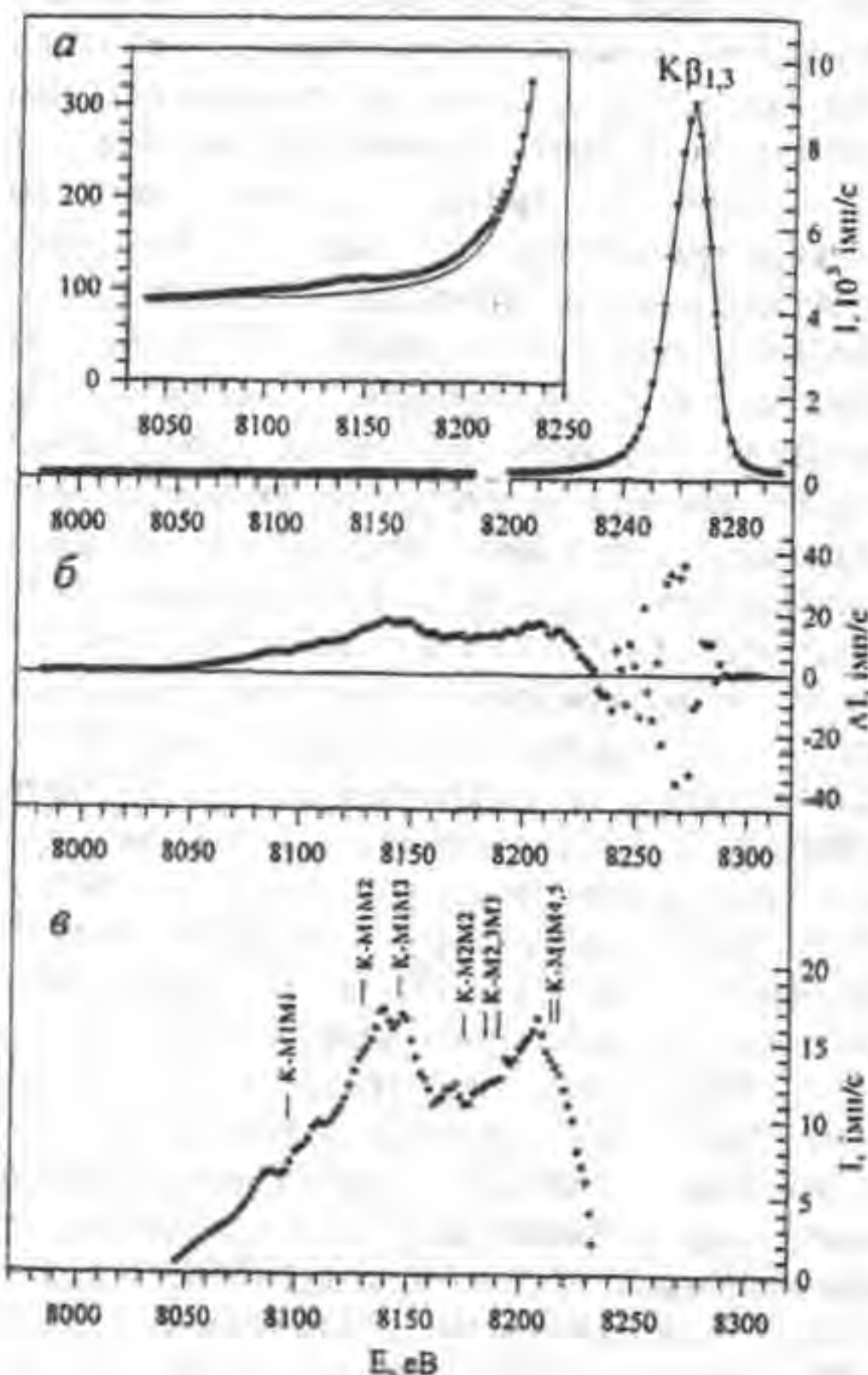


Рис. 2. Рентгенівський емісійний $K\beta$ -спектр *Ni* разом з *K-MM* РО-сателітами

Як і раніше для $K\alpha$ -спектрів, $K\beta$ -спектри інших елементів, що досліджувалися у даній роботі – *Cr*, *Fe* та *Co*, за основними елементами структури подібні до спектру *Ni*. Апроксимація $K\beta_{1,3}$ -ліній (переходи $K-M_{2,3}$) також виконувалася за допомогою двох псевдофункцій Фойгта (рис. 2а). На рис. 2б наведено різницю ΔI між значеннями експериментальної інтенсивності $K\beta$ -спектру *Ni* та апроксимуючою кривою. Видно, що на низькоенергетичному схилі $K\beta_{1,3}$ -ліній добре виділяється спектр *K-MM* РОЕ, а розкид інтенсивності в області $K\beta_{1,3}$ -ліній також не перевищує границю абсолютної похибки накопичення імпульсів. У *K-MM* спектрі РОЕ

одна група ліній пов'язана з $K-M_1M_{1,2,3}$, а друга – з $K-M_{2,3}M_{2,3}$ та $K-M_1M_{4,5}$ РО-переходами (рис. 2б). Важливо, що для групи досліджуваних 3d-елементів $K-M_{2,3}M_{4,5}$ та $K-M_{4,5}M_{4,5}$ РО-переходи потрапляють в область максимуму $K\beta_{1,3}$ -лінії і, як наслідок, не надають внеску до виділених *K-MM* спектрів.

Для отримання значень відносних ймовірностей груп РО-переходів *K-LL*, *K-LM* та *K-MM* визначалися інтегральні інтенсивності відповідних спектральних масивів як площі під кривими їх спектральних розподілів ($I(K-LL)$, $I(K-LM)$ та $I(K-MM)$ відповідно), а також інтегральні інтенсивності $K\alpha_{1,2}$ - та $K\beta_{1,3}$ -ліній – $I(K\alpha_{1,2})$ та $I(K\beta_{1,3})$. Тоді, згідно з [2], відносні ймовірності (виходи) *K-LL*, *K-LM* і *K-MM* РОЕ дорівнюють: $\chi(K-LL) = I(K-LL)/I(K\alpha_{1,2})$, $\chi(K-LM) = I(K-LM)/I(K\alpha_{1,2})$ та $\chi(K-MM) = I(K-MM)/I(K\beta_{1,3})$. Відносні похибки визначення величин $\chi(K-LL)$, $\chi(K-LM)$ та $\chi(K-MM)$ складають 50-65%, 15-22% та 10-15% відповідно і обумовлені, головним чином, неоднозначністю вибору рівня та форми фону при апроксимації $K\alpha$ - і $K\beta$ -спектрів. Крім того, у випадку *K-LM* і *K-LL* РОЕ відносні похибки величин $\chi(K-LM)$ та $\chi(K-LL)$ пов'язані також з певною невизначеністю положення високоенергетичної границі спектрів *K-LL* РОЕ.

Експериментально отримані значення відносних ймовірностей $\chi(K-LL)$ *Cr*, *Fe*, *Co*, *Ni* складають 0,16; 0,13; 0,11; 0,10% відповідно. Ці експериментальні дані, а також результати теоретичного розрахунку [2], виконаного у наближенні МЗ-моделі, наведені на рис. 3а. Як видно, значення $\chi(K-LL)$ *Cr*, *Fe*, *Co* і *Ni* виявилися систематично меншими у 2,2+2,2 рази за теоретичні дані [2]. Зауважимо, що інші експериментальні дані щодо величини $\chi(K-LL)$ *Cr*, *Fe*, *Co* і *Ni* нам невідомі.

У випадку *K-LM* РОЕ у ряду *Cr*, *Fe*, *Co*, *Ni* експериментальні відносні ймовірності $\chi(K-LM)$ складають 0,43; 0,38; 0,34; 0,31% відповідно. Ці дані, результати розрахунку [2] та відомі експериментальні значення $\chi(K-LM)$ інших авторів [3,11-13] для широкого кола елементів представлено на рис. 3б. Можна бачити, що визначені у даній роботі значення $\chi(K-LM)$ помітно перевищують результати попередніх вимірювань [3,11] і значно краще узгоджуються з теоретичними розрахунками [2], хоча і залишаються систематично меншими (у середньому, на 20+25%) за результати [2].

Нарешті, визначені відносні ймовірності $\chi(K-MM)$ *Cr*, *Fe*, *Co*, *Ni* складають відповідно 2,4; 1,8; 1,6; 1,4% і також разом з даними розрахунку [2] та експериментальними результатами [3,7-

10,13] наведені на рис. 3в. Для цього виду РОЕ отримані нами експериментальні значення $\chi(K-MM)$ для усіх досліджуваних елементів менші за теоретичні дані [2] у 2,0÷2,4 рази.

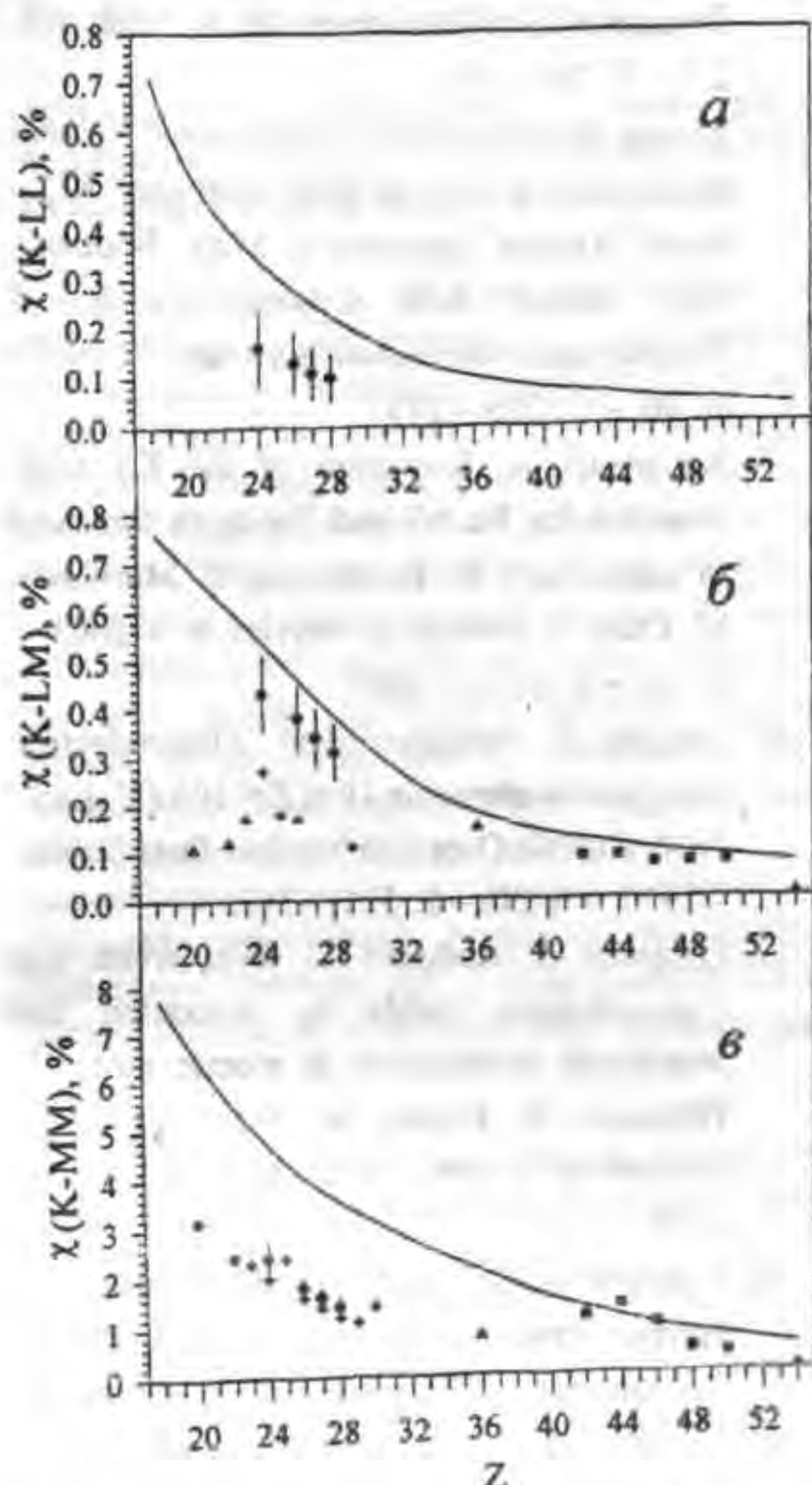


Рис. 3. Відносні ймовірності $K-LL$ (а), $K-LM$ (б) і $K-MM$ (в) РОЕ. Експериментальні результати: ● – дана робота; ▲ – [3]; ♦ – [9]; ○ – [13]; + – [11] (б), [7,8] (в); ■ – [12] (б), [10] (в); розрахунок [2] – суцільна лінія.

Отже, для $3d$ -металів Cr , Fe , Co , Ni спостерігається систематичне перевищення теоретично розрахованих значень відносних ймовірностей усіх типів РОЕ над відповідними експериментальними значеннями, причому у випадку $K-LL$ та $K-MM$ РОЕ таке перевищення складає 2,0÷264 рази, тоді як для $K-LM$ РОЕ – лише 20÷25%. Частково воно може бути зумовленим неврахуванням деякої частини інтенсивності експериментально отриманих

спектрів РОЕ, яка пов'язана з неточністю виділення фону та неможливістю відокремлення РО-переходів типу $K-L_{2,3}M_{4,5}$, $K-M_{2,3}M_{4,5}$, $K-M_{4,5}M_{4,5}$ від контурів $K\alpha_{1,2}$ та $K\beta_{1,3}$ -ліній в області їх максимумів. Однак, основна причина вказаної розбіжності, на нашу думку, пов'язана з тим, що МЗ-модель [1,2] описує явище РОЕ лише частково, не враховуючи кореляційні ефекти при двоелектронних однофотонних переходах. Зокрема, найбільш інтенсивні частини спектрів $K-LL$, $K-LM$ і $K-MM$ РОЕ біля високоенергетичних границь відповідають процесам рентгенівської емісії, які супроводжуються вильотом з атому повільного $2s$ чи $2p$ -електрона ($K-LL$ РОЕ), або $3s$, $3p$, $3d$ -електрона ($K-LM$ та $K-MM$ РОЕ) з кінетичною енергією від нуля до $(10\div 20)$ еВ. У цьому випадку можуть бути суттєвими багаточастинкові ефекти, пов'язані з релаксацією електронних оболонок у полі K -вакансії та змішуванням різних каналів розпаду K -вакансії з урахуванням станів неперервного спектру [17,18]. Крім того, при вильоті двох електронів з однієї оболонки важливим може бути і внесок ефектів післяспівударної взаємодії у системі „атомний залишок – повільні електрони, що вилітають” [19,20]. Така ситуація, зокрема, реалізується при $K-LL$ та $K-MM$ РОЕ, де спостерігається максимальна розбіжність між розрахунком [2] та даними експерименту. Отже, можна говорити про певну обмеженість МЗ-моделі, особливо у випадку $K-LL$ та $K-MM$ РОЕ, і необхідність врахування впливу зазначених багаточастинкових ефектів на ймовірності РО-переходів.

Таким чином, у представленій роботі виконано систематичне експериментальне дослідження структури та відносної інтенсивності рентгенівських емісійних спектрів $K-LL$, $K-LM$ та $K-MM$ РОЕ $3d$ -металів Cr , Fe , Co і Ni . Встановлено, що відносні ймовірності усіх типів РОЕ систематично менші за результати теоретичних розрахунків, які виконано у наближенні миттєвого збурення.

Список використаних джерел

1. Aberg T. Theory of the Radiative Auger Effect / T. Aberg // Physical Review A. – 1971. – V. 4, №5. – P. 1735 – 1739.
2. Scofield J., Exchange corrections of K x-ray emission rates / J. Scofield // Physical Review A. – 1974. – V. 9. – P. 1041–1045.

3. Muhleisen A. K-LM and K-MM radiative Auger effect from Kr and Xe / A. Muhleisen, M. Budnar // *Physical Review A*. – 1996. – V. 54, №5. – P. 3852–3857.
4. Kawai J. X-ray Absorption Spectroscopy Using X-ray Fluorescence Spectrometer / J. Kawai, K. Hayashi, O. Kazuaki // *The Rigaku Journal*. – 1998. – V.15. – P. 33–38.
5. Kawai J. Radiative Auger effect and extended X-ray emission Fine Structure (EXEFS) / J. Kawai // *Analytical sciences*. – 2005. – V. 21. – P. 733–739.
6. Raju S. A study of K x-ray hyper-satellites and KMM radiative Auger effect (RAE) of the elements $19 \leq Z \leq 25$ by photon excitation / S. Raju, R. Seetharami, M. Murti // *X-ray spectrometry*. – 2007. – V. 36, №1. – P. 35–39.
7. Servomaa A. K to M^2 radiative Auger effect in transition metals. I / A. Servomaa, O. Keski-Rahkonen // *Journal of Physics C*. – 1975. – V. 8, №23. – P. 4124–4128.
8. Keski-Rahkonen O. The K to M^2 radiative Auger effect in transition metals. II / O. Keski-Rahkonen, J. Ahopelto. // *Journal of Physics C*. – 1980. – V. 13. – P. 471–476.
9. K-MM radiative Auger effect in solid Ca, Ti and Cr targets after ionization with 0.7–1.5 MeV protons / M. Budnar, A. Muhleisen, M. Hribar [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B*. – 1992. – V. 63. – P. 377–381.
10. Herren Ch. High-resolution measurements of the K-MM radiative Auger effect in medium-mass atoms / Ch. Herren, J. Dousse // *Physical Review A*. – 1996. – V. 53. – P. 717–721.
11. $K\alpha$, $K\beta$, and radiative Auger photon intensities in K x-ray spectra from atoms in the $20 \leq Z \leq 40$ region / J. Campbell, A. Perujo, W. Teesdale [et al.] // *Physical Review A*. – 1986. – V. 33. – P. 2410–2415.
12. Herren Ch. Experimental evidence for the K-LM radiative Auger effect in medium-mass atoms / Ch. Herren, J. Dousse // *Physical Review A*. – 1997. – V. 56. – P. 2750–2754.
13. Muhleisen A. K-LM radiative Auger effect in argon / A. Muhleisen, M. Budnar, J. Dousse // *X-ray Spectrometry*. – 1998. – V. 27. – P. 337–341.
14. Вплив типу та енергії іонізуючої частинки на інтенсивність рентгенівської $KL_{2,3}$ -емісії атомів кремнію / М.О. Боровий, В.В. Іванов, В.Ф. Суржко [та ін.] // *Український Фізичний Журнал*. – 2001. – В. 46. – С. 285–289.
15. Kawatsura K. Evolution of the $K\alpha$ x-ray satellites for Fe, Ni and Zn: from threshold to saturation / K. Kawatsura, T. Morikawa, M. Oura. // *Journal of Physics B*. – 2003. – V. 36. – P. 4065–4069.
16. Larkins F. Semiempirical Auger-electron energies for elements $10 \leq Z \leq 100$ / F. Larkins // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. – 1977. – V.20. – P. 311–317.
17. Fritzsche S. Reduced L_1 level width and Coster-Kronig yields by relaxation and continuum interactions in atomic zinc / S. Fritzsche, B. Fricke, W. Sepp // *Physical Review A*. – 1992. – V. 45. – P. 1465–1469.
18. Боровой Н.А. Парциальная ширина L_1 -уровня, связанная с переходом Костера-Кронига $L_1 - L_3M_5$ в атомах элементов W, Re, Os, Ir, Pt / Н.А. Боровой, Р.Н. Ищенко, В.И. Шияновский // *Оптика и спектроскопия*. – 2003. – В. 95. – С. 566–572.
19. Кучиев М.Ю. Послестолкновительное взаимодействие в атомных процессах / М.Ю. Кучиев, С.А. Шейнерман // *Успехи Физических наук*. – 1989. – Т. 158, №7. – С. 353–359.
20. Hopersky A.N. Non-perturbative quantum theory of the post-collision interaction effect / A.N. Hopersky, V.V. Chuvenkov // *Journal of Physics B*. – 2003. – V. 36. – P. 2987–2992.

Надійшла до редколегії 14.12.09

УДК 535.3

Гречко, Л.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.*,
Лерман Л.Б., канд. техн. наук,
Шкода Н.Г., канд. фіз.-мат. наук,
Покотило О.Я., провідний інженер,
Шостак С.В., канд. фіз.-мат. наук

**Розрахунок ефективної діелектричної
проникності матричних дисперсних систем з
двошаровими кульовими включеннями**

Запропоновано теоретичний підхід для
обчислення ефективної діелектричної
проникності $\tilde{\epsilon}$ матричної дисперсної системи
(МДС), яка складається із діелектричної
матриці з двошаровими кульовими включеннями
різних радіусів, випадково розміщених в ній.
Вивчено відхилення від формули Максвелл-
Гарнетта, які виникають в системі внаслідок
збільшення об'ємної доли включень. Показано,
що при цьому істотними стають ефекти
прямої мультипольної взаємодії між
частинками. В електростатичному наближенні
точно розв'язано задачу відгуку такої N -
частинкової системи на зовнішнє електричне
поле та розраховано поправки до формули
Максвелл-Гарнетта для $\tilde{\epsilon}$ з урахуванням лише
парної дипольної взаємодії між включеннями.

Ключові слова: електромагнітне випромінювання,
малі частинки, діелектрична проникність, погли-
нання

*E-mail: lgrechko@isc.gov.ua

Вступ

Підвищений інтерес до вивчення процесів
взаємодії електромагнітного випромінювання з
дисперсними системами (ДС), який намітився
останнім часом, пов'язаний в першу чергу з тими
особливостями цих процесів в ДС, які відсутні у
випадку суцільних неперервних середовищ [1-
11]. Найпростіший і найбільш ефективний метод
розрахунку електродинамічних характеристик
цих систем є метод знаходження для них
ефективної діелектричної проникності $\tilde{\epsilon}$ і
ефективної провідності $\tilde{\sigma}$. Детальний огляд
різних методів розрахунку $\tilde{\epsilon}$ та $\tilde{\sigma}$ для
різноманітних ДС можна знайти в монографіях
[1-4]. Особливо детально вивчені матричні
дисперсні системи (МДС), які складаються, як
правило, з діелектричної матриці та розміщеними
в ній випадковими чином включеннями різної

Grechko L.G., Dr. Sc., prof.*
Grechko L.G., Dr. Sc., prof.*
Lerman L.B., Ph. D.,
Shkoda N.G., Ph. D.,
Pokotylo O. Ya, principal engineer,
Shostak S.V., Ph. D

**Effective permittivity of the matrix disperse
systems with two-layer spherical inclusions**

We propose a theoretical approach to
calculation of the effective dielectric permittivity $\tilde{\epsilon}$
of matrix disperse systems (MDS) that consist of a
dielectric matrix with two-layer randomly located
spherical inclusions of different radiuses.
Departures from the Maxwell-Garnett formula
associated with increasing in a volume fraction of
inclusion are studied. It is shown that effects of the
direct dipole-dipole interaction between inclusions
become important. In the electrostatic approach, we
exactly solved the problem of a response of this N -
particle system on the external electric field and
obtained corrections to the Maxwell-Garnett
formula of with taking account of the pair dipole-
dipole interactions between inclusions.

Key Words: electromagnetic irradiation, little
particles, dielectric permeability, absorption

фізико-хімічної природи та форми (шари,
еліпсоїди, циліндри та інші). Зрозуміло, що такі
МДС добре моделюють реальні системи,
починаючи з ґрунтів та гірських порід і
закінчуючи живими біологічними об'єктами
(типу суспензій клітин). Крім того МДС та
статистичні суміші є основою для створення
різноманітних композитних матеріалів з наперед
заданими та регульованими електродинамічними
властивостями.

У даній роботі проведено розрахунок
ефективної діелектричної проникності $\tilde{\epsilon}$ МДС з
двошаровими кульовими включеннями різного
розміру. На основі методу розкладу
поляризованості такої системи за групами
частинок [5-7] та теорем додавання сферичних
гармонік [8-9] в першому розділі розв'язана
задача знаходження електростатичного
потенціалу в довільній точці простору для N -
частинкової системи, розміщеної у зовнішньому

електричному полі $\sim \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$, де i – уявна одиниця, t – час, ω – частота, і при цьому довжина хвилі поля $\lambda = 2\pi c/\omega$, (c – швидкість світла) значно більша як за розмір частинок, так і за середню відстань між ними (електростатичне наближення [2]). Отримані співвідношення дозволяють провести розрахунок потенціалу поля з врахуванням будь-якого порядку мультипольної взаємодії між частинками МДС. В розділі 2 одержано співвідношення для $\bar{E}$ такої МДС з врахуванням лише парної дипольної взаємодії між включеннями.

1 Задача взаємодії багатьох частинок

Розглянемо систему, що складається з N – частинок, які розміщені в об'ємі V , і знаходяться у зовнішньому однорідному електричному полі $\bar{E}_0(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$. В електростатичному наближенні поле $\bar{E}(\bar{r})$ у довільній точці системи знаходиться із співвідношення $\bar{E}(\bar{r}) = -\text{grad}\phi(\bar{r})$, де $\phi(\bar{r})$ задовольняє рівнянню

$$\Delta\phi = 0. \quad (1)$$

Частинки системи є сферичними двошаровими кулями із наступними параметрами: зовнішній радіус кулі є b_i , ядра кулі a_i , діелектрична проникність ядра кулі є $\epsilon_1^{(i)}(\omega)$, оболонки – $\epsilon_2^{(i)}(\omega)$, а оточуючого середовища – ϵ_0 .

Виходячи з симетрії задачі, розв'язок рівняння (1) з центром на i -й частинці можна записати [12] наступне:
для ядра частинки

$$\phi_i^{(I)} = -E_0 \sum_{l,m} A_{lm}^{(i)} |\bar{r} - \bar{r}_i|^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i), \quad (2)$$

для оболонки частинки

$$\phi_i^{(II)} = -E_0 \sum_{l,m} \left[C_{lm}^{(i)} |\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i|^l + \frac{D_{lm}^{(i)}}{|\bar{r} - \bar{r}_i|^{l+1}} \right] Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i), \quad (3)$$

і також для зовнішнього середовища

$$\phi^{(III)}(\bar{r}) = -E_0 \sum_{l,m} d_{lm}^{(i)} |\bar{r} - \bar{r}_i|^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i) -$$

$$- \bar{E}_0 \sum_{l,m} \frac{B_{lm}^{(i)}}{|\bar{r} - \bar{r}_i|^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i) - \\ - \bar{E}_0 \sum_{j \neq i} \frac{B_{lm}^{(j)}}{|\bar{r} - \bar{r}_j|^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad (4)$$

де $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i)$ сферичні функції [13], $\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_i = (\bar{r} - \bar{r}_i)/|\bar{r} - \bar{r}_i|$. У рівнянні (4) перший член є потенціал зовнішнього поля (розкладений за сферичними гармоніками з центром $\bar{r}_i$) в точці спостереження P ; другий член є потенціал, який створює i -та частинка внаслідок її поляризації в P ; а третій – сума потенціалів, які створюють $N-1$ інших частинок в точці P . Відмітимо, що при написанні (2)–(4) було враховано регулярність потенціалу $\phi_i^{(I)}$ в центрі i -ї кулі та на нескінченності $\phi^{(III)}(\bar{r})$. Для знаходження сталих $A_{lm}^{(i)}, B_{lm}^{(i)}, C_{lm}^{(i)}, D_{lm}^{(i)}$ розв'язки (2)–(4) повинні задовольняти наступним граничним умовам [13]

$$\begin{aligned} \phi_i^{(I)}|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}} &= \phi_i^{(II)}|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}}; \\ \epsilon^{(i)}(\bar{n}_i \cdot \text{grad}\phi_i^{(I)})|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}} &= \epsilon_2^{(i)}(\bar{n}_i \cdot \text{grad}\phi_i^{(II)})|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}}; \\ \phi_i^{(II)}|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}'} &= \phi_i^{(III)}|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}'}; \\ \epsilon_2^{(i)}(\bar{n}_i \cdot \text{grad}\phi_i^{(II)})|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}'} &= \epsilon_0(\bar{n}_i \cdot \text{grad}\phi_i^{(III)})|_{\bar{r}=\bar{r}_{Si}'} \end{aligned} \quad (5)$$

де вектори $\bar{r}_{Si} - \bar{r}_i$ та $\bar{r}_{Si}' - \bar{r}_i$ паралельні зовнішній нормалі $\bar{n}_i$, а $|\bar{r}_{Si} - \bar{r}_i| = a_i$, $|\bar{r}_{Si}' - \bar{r}_i| = b_i$.

Оскільки сферичні гармоніки у третьому доданку (4) центровані на j -му центрі, то безпосередньо задовольнити умові (5) неможливо, тому що потрібно здійснити перехід на i -й центр. Для цього скористаємося теоремами додавання для сферичних гармонік [8–9], одна з яких за умови $|\bar{r} - \bar{r}_i| < |\bar{r}_j - \bar{r}_i|$ дає:

$$\frac{Y_{lm}(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^{l+1}} = \sum_{i'm'} a_{i'm'}^{lm} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \vec{r} - \vec{r}_i|^l Y_{i'm'}(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (6)$$

$$a_{i'm'}^{lm} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \frac{Y_{l+l',m'-m}^*(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^{l+l'+1}} \times \\ \times (-1)^{l+m} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{(2l'+1)(2l+2l'+1)} \right] K_{i'm'}^{lm},$$

де

$$K_{i'm'}^{lm} = K_{em}^{lm} = \\ = \left[\frac{(l+l'+m-m')!(l+l'+m-m)!}{(l+m')!(l-m')!(l+m)!(l-m)!} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Підставляючи (2)-(4) та (6) в (5), знаходимо:

$$\begin{cases} A_{lm}^{(i)} - C_{lm}^{(i)} = \frac{D_{lm}^{(i)}}{a_i^{2l+1}}; \\ A_{lm}^{(i)} - \frac{\epsilon_2^{(i)}}{\epsilon_1^{(i)}} C_{lm}^{(i)} = -\frac{\epsilon_2^{(i)}}{\epsilon_1^{(i)}} \cdot \frac{(l+1)}{l} \cdot \frac{D_{lm}^{(i)}}{a_i^{2l+1}}; \\ C_{lm}^{(i)} + \frac{D_{lm}^{(i)}}{b_i^{2l+1}} = N_{lm}^{(i)} + \frac{B_{lm}^{(i)}}{b_i^{2l+1}}; \\ C_{lm}^{(i)} - \frac{(l+1)}{l} \cdot \frac{D_{lm}^{(i)}}{b_i^{2l+1}} = \\ = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2^{(i)}} \left[N_{lm}^{(i)} + \frac{B_{lm}^{(i)}}{b_i^{2l+1}} \cdot \frac{(l+1)}{l} \right] \end{cases} \quad (8)$$

де

$$N_{lm}^{(i)} = d_{lm}^{(i)} + \sum_{i'm'} B_{i'm'}^{(j)} a_{i'm'}^{lm} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (9)$$

З (8) та (9) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $B_{em}^{(i)}$:

$$\frac{B_{lm}^{(i)}}{\alpha_i^{(i)}} + \sum_{j=1}^N \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^l B_{i'm'}^{(j)} a_{i'm'}^{lm} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -d_{lm}^{(i)}, \quad (10)$$

де $d_{lm}^{(i)}$ – коефіцієнти розкладу зовнішнього поля за сферичними функціями, які центровані на i -му включенні, а

$$\alpha_i = l b_i^{2l+1} \frac{A+B}{C+D}, \quad (11)$$

де

$$A = [\epsilon_2^{(i)}(2l+1) + l\epsilon_1^{(i)}](\epsilon_2^{(i)} - \epsilon_0),$$

$$B = (\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_2^{(i)})[(l+1)\epsilon_2^{(i)} + l\epsilon_0]q_i^{2l+1},$$

$$C = [\epsilon_2^{(i)}(l+1) + l\epsilon_1^{(i)}][(l+1)\epsilon_0 + l\epsilon_2^{(i)}],$$

$$D = l(l+1)(\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_2^{(i)})(\epsilon_2^{(i)} - \epsilon_0)q_i^{2l+1},$$

$q_i = a_i / b_i$, а $a_{em}^{i'm'}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ дається формулою (7).

Після знаходження $B_{lm}^{(i)}$, інші коефіцієнти $A_{lm}^{(i)}, C_{lm}^{(i)}, D_{lm}^{(i)}$ знаходяться із (8).

В електростатичному наближенні співвідношення (7) – (8) та (10) – (11) повністю розв'язують задачу електричного відгуку системи N двошарових куль на зовнішнє поле $\vec{E}_0$ із врахуванням мультипольної взаємодії між частинками. Обмежуючись в (10) членами порядку $l = l' = 1$, враховується лише дипольна взаємодія між ними, а якщо обмежитись членами $l = l' = 2$ – то квадрупольна і т.д.

Відмітимо, що $\alpha_i^{(i)}$ є поляризованість i -ї частинки порядку l в полі $\vec{E}_0$. При $l=1$ (дипольна поляризованість) формула (11) переходить в формулу (5.36) з монографії [2], а при $q_i = 0$, $\alpha_i^{(i)}$ співпадає з l -польною поляризованістю i -ї кулі [6].

2. Ефективна діелектрична проникність МДС з двошаровими включеннями

Порівнюючи співвідношення (10), (11) з відповідними співвідношеннями робіт [7], [10], [11] (наприклад, формули (10) та (11) із [10]) можна помітити, що відмінність системи рівнянь для знаходження $B_{lm}^{(i)}$ у випадку МДС з двошаровими включеннями відрізняються від подібних співвідношень для МДС з одношаровими кульовими включеннями лише значенням l - польної поляризуємості ($\alpha_i^{(l)}$) і - включення. Іншими словами, для знаходження $\bar{\epsilon}$ нашої МДС ми можемо зразу скористатися формулами робіт [7], [10], [11], замінивши в них $\alpha_i^{(l)}$ на вираз (11). Так, використовуючи формулу (1) роботи [11], можна зразу знайти $\bar{\epsilon}$ для МДС з двошаровими сферичними включеннями з урахуваннями лише парної дипольної взаємодії між ними:

$$\frac{\bar{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\bar{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1}{\frac{4}{3} \sum_k n_k \alpha_i^{(k)}} - \frac{1}{\left(\sum_k n_k \alpha_i^{(k)} \right)^2} \cdot \sum_{k,p} n_k n_p \int_0^{\infty} R_{kp}^2 \varphi(R_{kp}) \times \\ \times dR_{kp} [\beta_{kp}''(R_{kp}) + 2\beta_{kp}^+(R_{kp})] \quad (12)$$

Тут $\alpha_i^{(l)}$ дається формулою (11) при $l=1$, $R_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$, де $n_k = N_k/V$ є концентрація частинок k -го сорту, $\varphi(R_{kp})$ - двохчастинкова функція розподілу включень в матриці, яка приймалась у вигляді:

$$\varphi(R_{kp}) = \begin{cases} 0, & \text{коли } R_{kp} < b_k + b_p \\ 1, & \text{коли } R_{kp} \geq b_k + b_p \end{cases} \quad (13)$$

У випадку парної дипольної взаємодії ($l=l'=1$) β_{ij}'' і β_{ij}^+ мають вигляд:

$$\beta_{ij}'' = \chi_{i10}^{(i)}(R_{ij}) - \alpha_i^{(i)} - 2 \frac{\alpha_i^{(i)} \alpha_j^{(j)}}{R_{ij}^3} \quad (14)$$

$$\beta_{ij}^+ = \chi_{i11}^{(i)}(R_{ij}) - \alpha_i^{(i)} + \frac{\alpha_i^{(i)} \alpha_j^{(j)}}{R_{ij}^3}$$

де $\chi_{i10}^{(i)}(R_{ij})$ та $\chi_{i11}^{(i)}(R_{ij})$ (при $l=l'=1$) знаходять із (10):

$$\chi_{i10}^{(i)}(R_{ij}) = \frac{1}{2} b_i^3 \times \\ \times \left[\frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{1/2} + \Delta_{ij}^{3/2}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{1/2} - 2\Delta_{ij}^{3/2} \delta_i^3} + \frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{1/2} - \Delta_{ij}^{3/2}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{1/2} + 2\Delta_{ij}^{3/2} \delta_i^3} \right], \quad (15)$$

$$\chi_{i11}^{(i)}(R_{ij}) = \frac{1}{2} b_i^3 \left[\frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{1/2} + \Delta_{ij}^{3/2}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{1/2} - \Delta_{ij}^{3/2} \delta_i^3} + \frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{1/2} - \Delta_{ij}^{3/2}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{1/2} + \Delta_{ij}^{3/2} \delta_i^3} \right]$$

$$\text{де } \Delta_{ij} = \frac{b_j}{b_i}, \quad \delta_i = \frac{b_i}{R_{ij}} \quad \text{і} \quad B_i = \frac{\alpha_i^{(i)}}{b_i^3}.$$

Із врахуванням виду функції $\varphi(R_{ij})$ (13) та співвідношень (14)-(15), із (12) отримуємо

формулу для обчислення $\tilde{\epsilon}$ МДС з двошаровими кульовими включеннями в наближенні парної дипольної взаємодії між ними:

$$\frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \sum_i n_i \alpha_i^{(k)}} - \frac{1}{3 \left(\sum_i n_i \alpha_i^{(k)} \right)^2} \times$$

$$\times \sum_{k,p} n_k \cdot n_p \cdot \alpha_k^{(k)} \cdot \alpha_p^{(p)} \times$$

$$\left[\left[1 + \frac{b_k^3}{b_p^3} \cdot \left(\frac{\alpha_k^{(p)}}{\alpha_k^{(k)}} \right)^{1/2} \right] \ln \frac{(b_k + b_p)^3 + (\alpha_k^{(k)} \alpha_p^{(p)})^{1/2}}{(b_k + b_p)^3 - 2(\alpha_k^{(k)} \alpha_p^{(p)})^{1/2}} \right] +$$

$$\left[1 - \frac{b_k^3}{b_p^3} \cdot \left(\frac{\alpha_k^{(p)}}{\alpha_k^{(k)}} \right)^{1/2} \right] \ln \frac{(b_k + b_p)^3 - (\alpha_k^{(k)} \alpha_p^{(p)})^{1/2}}{(b_k + b_p)^3 + 2(\alpha_k^{(k)} \alpha_p^{(p)})^{1/2}} \right] \quad (16)$$

Якщо знехтувати в правій частині (16) другим доданком, то одержимо співвідношення Максвелл-Гарнетта для МДС з двошаровими включеннями, що складають собою суміш частинок з гістограмою розподілу як за розмірами так і за різними електродинамічними характеристиками частинок (різні $\epsilon_{1,2}^{(i)}$). У випадку однакових частинок, із (16) маємо:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \left[1 + \frac{3fB}{1 - fB - \frac{2}{3}fB \ln \frac{8+B}{8-2B}} \right], \quad (17)$$

де

$$a_i = a_j = a; \quad b_i = b_j = b; \quad \epsilon_1^{(i)} = \epsilon_1^{(j)} = \epsilon_1; \quad \epsilon_2^{(i)} = \epsilon_2^{(j)} = \epsilon_2,$$

$$B = \frac{\alpha_i}{b^3} = \frac{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_0) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)(2\epsilon_2 + \epsilon_0)q^3}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)(2\epsilon_0 - \epsilon_2) + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_0)q^3},$$

$q = a/b$; $f = (4/3)\pi b^3 n$, n – концентрація включень.

За умови $fB \ll 1$, із (17) випливає, що:

$$\frac{\epsilon_0}{\tilde{\epsilon}} = 1 - 3fB - 2(fB)^2 \ln \left[\ln \frac{8+B}{8-2B} - 3 \right] + \dots; \quad (18)$$

або

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + 3fB + f^2 B^2 \left[3 + 2 \ln \frac{8+B}{8-2B} \right] + \dots; \quad (19)$$

Формула (18) співпадає з формулою (18) роботи [14], а (19) з формулами (5) та (7) роботи [6] за умовою, що $q = 0$ ($a \rightarrow 0$).

Висновки

Із одержаних у даній роботі результатів слідує ряд загальних висновків. З вигляду системи рівнянь (10)-(11) випливає, що задача знаходження коефіцієнтів $B_{em}^{(i)}$ і $\tilde{\epsilon}$ для МДС із складними кульовими включеннями (одношаровими різного радіусу, двошаровими, неоднорідними, тощо) повністю еквівалентна задачі знаходження цих коефіцієнтів та $\tilde{\epsilon}$ для МДС з суцільними кульовими включеннями, але із новим значенням мультипольної поляризуємості окремого включення $\alpha_i^{(i)}$. Цей результат слідує з граничних умов (8), так як добавки із-за мультипольної взаємодії (коефіцієнти $B_{lm}^{(i)}$ в (18) додаються до коефіцієнтів взаємодії включень із зовнішнім полем $d_{lm}^{(i)}$ (формула (9)). Аналогічна картина буде спостерігатись і для МДС з еліпсоїдальними включеннями. Слід також відмітити, що розвинутий вище метод розрахунку $\tilde{\epsilon}$ для подібних МДС дозволяє враховувати і вищі члени мультипольної взаємодії між включеннями, але при цьому потрібно знати

статистичні багаточастинкові (трьох, чотирьох, і т.д) функції розподілу куль в матриці. На жаль ці функції на сьогодні точно не відомі, на відміну від точного виразу для двохчастинкової функції [15].

Список використаних джерел

1. Kreibig U., and Volmez M., Optical properties of metal clusters. Springer Series in Material Science 25, Springer, 1995.
 2. Борен Х., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.-М.: Мир, 1986. – 664 с.
 3. Венгер Е.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л., Оптика малих частинок і дисперсних середовищ.-Київ.:Наукова думка, 1999. – 347 с.
 4. Light Scattering by Nonspherical Particles (edited by M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis), Academic press, 2000. – 392 с.
 5. Фанкельберг В. М. //ЖЭТФ.-1967.-53.- С. 401-412.
 6. Felderhof B. U., Ford G.W., Cohen E.G.D. Cluster expansion for the dielectric constant of a polarizable suspension // J. Stat. Phys.- 1982.-28.- P. 649-658.
 7. Гречко Л.Г., Огенко В.М., Мотрич В.В., Пинчук А.А., Биля Р.В. Особенности резонансного поглощения электромагнитного излучения в матричных дисперсных системах с металлическими включениями // Химия, физика и технология поверхности. - 1997.- № 2. – С. 74-89.
 8. Danos M., Maximon L.C. Multipole Matrix Elements of the Translation Operator // J. Math. Phys.- 1965.-6.- P.766-779.
 9. Grechko L.G., Levandfovskii V.G., Ogenko V.M., Pintchuk A.N. Effective dielectric function of metallic particles aggregates // Pros. SPIE. -1996. - 3055. P. 111-117.
 10. Blank A. Ya., Goranina L.V., Grechko L.G. Optical surface modes in a system of fine metallic particles // Low temperature physics. - 1999. -25. - № 10. - P. 797-801.
 11. Grechko L.G., Pustovit V.N., Whites K. W. // Appl. Phys. Lett.-2000.-76.-p. 1854-1856.
 12. Fu L. and Resca L. Electrical response of heterogeneous systems containing inclusions with permanent multipoles // Phys. Rev.B.-1994.- 50.- P 15719 – 15732.
 13. Джексон Дж. Классическая электродинамика.-М.:Мир, 1995. – 720 с.
 14. Barrera R.G., Monsivais G., Mochan W.L. and Anda E. Diagrammatic approach to the effective dielectric response of composites // Phys. Rev. B.- 1989. - 39, N14. - P.9998-10008.
 15. Wertheim M.S. Exact Solution of the Percus-Yevick Integral Equation for Hard Spheres// Phys. Rev. Lett. – 1963. –10. – P. 321-326.
- Робота частково фінансувалася в рамках договорів: № 28 – спільного конкурсу НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень № 37/08н – програма НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали, нанотехнології»

Надійшла до редколегії 25.05.09

УДК 535.377; 535.375

Гуменюк А.Ф., канд. ф.-м. н., доц.,
Дмитрук І.М., д. ф.-м. н., проф.,
Давиденко М.О., інж.,
Кутовий С.Ю., канд. ф.-м. н., доц.,
Пашенко В.Г., асп.,
Становий О.П., асп.

Термостимульована люмінесценція нанокристалічного мікроткристалічного та об'ємного сульфідів та селенідів кадмію

Методом термостимульованої люмінесценції (ТСЛ) досліджено енергетичний спектр пасток нанокристалічного, мікроткристалічного та об'ємного CdS та CdSe в області 80-450 K. Показано, що для всіх зразків (нано-, мікро- та об'ємних) CdS та CdSe в області 100-350 K спостерігається одна система піків ТСЛ. За положеннями максимумів оцінено енергії активації пасток CdS та CdSe, які лежать в межах 0,14-0,64 eV. Зроблено припущення щодо природи ТСЛ: піки, положення яких співпадають для всіх зразків, обумовлені дефектами, спричиненими вакансіями Se чи S; інші піки ТСЛ проявляються, в основному, завдяки вакансіям Cd.

Ключові слова: нанокристали, термолюмінесценція, пастки, енергія активації.

*E-mail: lns@univ.kiev.ua

Вступ

Серед напівпровідникових наночастинок матеріали $A^{\text{II}}B^{\text{VI}}$ займають домінуюче становище, переважна більшість досліджень нанокристалів виконана на матеріалах даного класу. Причиною цього є їхня технологічність – тобто відносна простота приготування хімічними методами (в багатьох випадках навіть з водних розчинів), а також висока стійкість до окислення. Але, незважаючи на значний обсяг виконаних досліджень, ці матеріали ще зберігають великий нерозкритий потенціал.

Оскільки нанотехнології напівпровідників активно впроваджуються в електроніку, постає питання про існування та вплив дефектів в наноструктурах на їх властивості. Одним із основних методів непрямого дослідження дефектів є термостимульована люмінесценція (ТСЛ).

Методом ТСЛ нами вивчено енергетичний спектр пасток в ряді кристалів з іонним та іонно-ковалентним типом зв'язку [1-11]. Як виявилось, енергія термічної активації пасток описується

A.F. Gumenjuk, PhD, Assoc. Prof.,
A.F. Gumenjuk, PhD, Assoc. Prof.,
I.M. Dmitruk, Dr. Sci., Prof.,
M.O. Davydenko, Eng.,
S.Yu. Kutovyi, PhD, Assoc. Prof.,
V.G. Pashchenko, PhD stud.,
O.P. Stanovyi, PhD stud.

Thermally stimulated luminescence of the cadmium sulphide and selenide nano-, micro- and bulk crystals

The activation energy spectra of traps in CdS and CdSe nano-, micro- and bulk crystals has been studied by the thermally stimulated luminescence (TSL) methods in the temperature range 80-450 K. It was found that for all samples (nano-, micro- and bulk) CdS and CdSe one system of TSL-peaks exists. The energies of thermal activation of traps were estimated by the TSL-peak position method, they are in the range of 0.14-0.64 eV. The assumption about the nature of TSL was done: the peaks the temperature position of which are coincident for all the samples are caused by vacancies of S (Se), the others peaks exhibit due to Cd vacancies.

Key Words: nanocrystals, thermoluminescence, traps, activation energy.

формулою гармонічного осцилятора $E_n = \hbar\omega_{\text{TSL}}(n+1/2)$, де енергія кванта $\hbar\omega_{\text{TSL}}$ приймає значення, характерні для коливань ґратки (0,01-0,18 eV). В залежності від кристалу спостерігалось від однієї до п'яти осциляторних серій, кожній з яких відповідає своє значення енергії коливального кванта. Для кристалів з складною ґраткою більшість значень $\hbar\omega_{\text{TSL}}$ збігаються з енергіями певних ліній основного спектру комбінаційного розсіювання світла (КРС) першого порядку, інші значення $\hbar\omega_{\text{TSL}}$ відповідають енергіям ліній КРС другого порядку, локальним модам та ін. Не знайдено відповідності між $\hbar\omega_{\text{TSL}}$ та $\hbar\omega_{\text{KR}}$ для кристалів з простими ґратками – лужногалоїдних кристалів. На основі отриманих результатів була запропонована поляронна модель центрів прилипання та процесу ТСЛ.

Постає питання, чи існує подібна закономірність у кристалічних структурах іншого типу, наприклад, у вузькозонних (напівпровідникових) моно- і полікристалах, а

також в широко досліджуваних зараз наночастинок отримували на автоматизованій наноструктурах, які складаються, як правило, з відомих хімічних сполук, але завдяки малим розмірам структурних елементів проявляють порівняно з об'ємними матеріалами нові фізичні властивості. Питання не випадкове, оскільки важливим напрямком сучасної спектроскопії твердого тіла є пошук нових об'єктів дослідження з властивостями, недосяжними для відомих на сьогоднішній день кристалів.

Деякі наноструктури типу $A^{\text{II}}B^{\text{VI}}$ методами ТСЛ вже почали досліджувати [12-15]. CdS та CdSe досліджувались в цеолітах [13] та скляних матрицях [14,15]. Колоїдні розчини наночастинок, а також мікропорошки CdS та CdSe є для таких досліджень об'єктами новими (а для CdSe і монокристали).

В даній роботі наведено результати попереднього дослідження нанокристалічних CdS та CdSe методами ТСЛ, а також мікротрипильних та об'ємних (далі – моно-) CdS та CdSe з метою порівняння отриманих даних, за положеннями максимумів оцінено енергії активації центрів прилипання.

Зразки. Методика експерименту

Досліджувались нано-, мікро- та монокристали CdS та CdSe.

Наночастинок CdSe були вирощені хімічним методом в двофазній системі вода-толуол [16]. Середній розмір наночастинок та дисперсію розмірів визначали зі спектрів поглинання, використовуючи залежність енергії екситонного переходу від розміру наночастинок [16]. Середній діаметр досліджуваних нанокристалів CdSe становив 2,0 нм з дисперсією розмірів 27%. Для вимірювань розчином наночастинок покривалась полірована поверхня мідної пластинки (15x20x0,2 мм), після випаровування толуолу процедура повторювалась (до 20 разів). В результаті утворювалась плівка наночастинок товщиною кілька десятків нм, діаметром ~1 см, після чого пластинка з плівкою поміщалась в кріостат і кріпилась до нагрівача.

Синтез колоїдних розчинів нано-CdS проводили з використанням в якості стабілізатору L-цистеїну, температура синтезу 50°C, наночастинок $\text{CdS}_{0.5}\text{Se}_{0.5}$ стабілізували тіогліколевою кислотою (ТГК), співвідношення реагентів $[\text{Cd}^{2+}]:[\text{S}^{2-}+\text{Se}^{2-}]:[\text{TGA}] = 1:0,5:2,5$. Перед синтезом реакційну суміш барботували аргонном протягом 20 хв, рН вихідних розчинів доводили до 10,5. Перед нанесенням плівок мідні пластини витримували в концентрованій сірчаній кислоті протягом 12 год для повного видалення оксидної плівки з її поверхні. Плівки

наночастинок отримували на автоматизованій установці за методикою пошарового нанесення. А саме, послідовним зануренням в розчин поліелектроліту (полі(діалілдиметиламоніум) хлорид (PDDA)) (10 хв), з наступною промивкою в деіонізованій воді (2 хв) і витриманням в водному розчині наночастинок (15 хв). За такою схемою формували 20 бішарів PDDA/CdS і 30 бішарів PDDA/CdS_{0.5}Se_{0.5} на поверхні мідної пластинки. (Півень Н., Щербак Л., Чернівецький університет).

Мікротрипильні порошки CdS та CdSe - продукт фірми Wako, Japan, чистота > 99% та 99,99% відповідно, розмір зерна ~1 мкм. Для вимірювань мікротрипильний CdS та CdSe також наносився на мідну пластинку тонким шаром і змочувався толуолом, після висихання толуолу порошок достатньо міцно тримався мідної підкладки.

Об'ємні кристали CdS та CdSe (пластинки розмірами ~0,1x2x3 мм) також спеціальним чином кріпились до мідної поверхні нагрівача кріостата.

Дослідження ТСЛ кристалів CdS та CdSe проводилось в інтервалі температур 80-450 К. Програмно забезпечувалась швидкість нагрівання $0,2 \pm 5\%$ К/с. Експериментальні дані реєструвались і оброблялись за допомогою спеціально розроблених комп'ютерних програм. Інтенсивність ТСЛ реєструвалась з кроком 0.0024 ЕРС термопары хромель-копель, що відповідало ~0.1 К при 80 К і ~0.03 К при 600 К. Зразки поміщались у вакуумний кріостат і збуджувались рентгенівським випромінюванням (БСВ-2, W, 30 кВ, 10 мА) крізь берилієве вікно товщиною 0,5 мм при 80 К. Тривалість збудження змінювалась і становила 20-60 хв.

Результати експерименту. Обговорення

На рис.1а-с наведено типові криві ТСЛ монокристалічного (об'ємного), мікротрипильного та нанокристалічного CdS, відповідно; та на рис.1д - нанокристалічного $\text{CdS}_{0.5}\text{Se}_{0.5}$. Для всіх зразків CdS спостерігається подібні системи піків: низькотемпературна слабкорозділена смуга в області 100-200 К, високотемпературна 250-400 К та проміжні за температурою піки при ~200-250 К; положення максимумів піків залежать від зразка (див. Табл.1).

Для нанокристалічного CdS найбільш інтенсивними є система низькотемпературних піків, для об'ємного CdS, навпаки, найбільш вираженими є високотемпературні піки. Мікротрипильний CdS посідає проміжне положення: для цього зразка на кривих ТСЛ і низькотемпературні і високотемпературні піки приблизно однакової інтенсивності.

Криві ТСЛ були розкладені на елементарні контури, форма кожного контуру для узгодження з експериментальними кривими вибиралась у відповідному для лінійної та квадратичної кінетики вигляді [17]:

$$I(T) = -\frac{dn}{dt} = n_0 p_0 \exp(-E/kT) \exp\left(-\frac{p_0}{\beta} \int_0^T \exp(-E/kT) dT\right)$$

для лінійної кінетики та

$$I(T) = -\frac{dn}{dt} = n_0 p_0 \exp(-E/kT) \left[1 + \frac{p_0}{\beta} \int_0^T \exp(-E/kT) dT\right]^{-2}$$

для квадратичної. Тут n_0 – початкова концентрація носіїв на пастках (світлосума), p_0 – частотний фактор, β – швидкість нагрівання; n_0 , p_0 , E є параметрами розкладу, що відповідають мінімуму середньоквадратичного відхилення (СКВ) аналітичної кривої від експериментальної.

Розклад піків для кривих ТСЛ досліджених зразків CdS показав (рис. 1), що низькотемпературна смуга (100-180 K) містить чотири елементарні піки, високотемпературна (250-400 K) – п'ять піків ТСЛ. Ще один пік міститься в проміжній області 200-230 K (Табл.1), і який доречніше віднести до системи високотемпературних. Форма елементарних піків відповідає лінійній кінетиці висвічування.

Те, що відмінності положення максимумів відповідних піків для моно-, мікро- та нанокристалів досягають для деяких з них 10 K, можна пояснити різною технологією отримання зразків (а не залежністю від розмірів), а також, імовірно, дещо іншою електронною структурою дефектів, які обумовлюють ТСЛ в моно- чи нанозразках.

Наші результати досить добре узгоджуються з даними роботи [18], де досліджувалась термостимульована люмінесценція CdS, відпаленого в різних умовах.

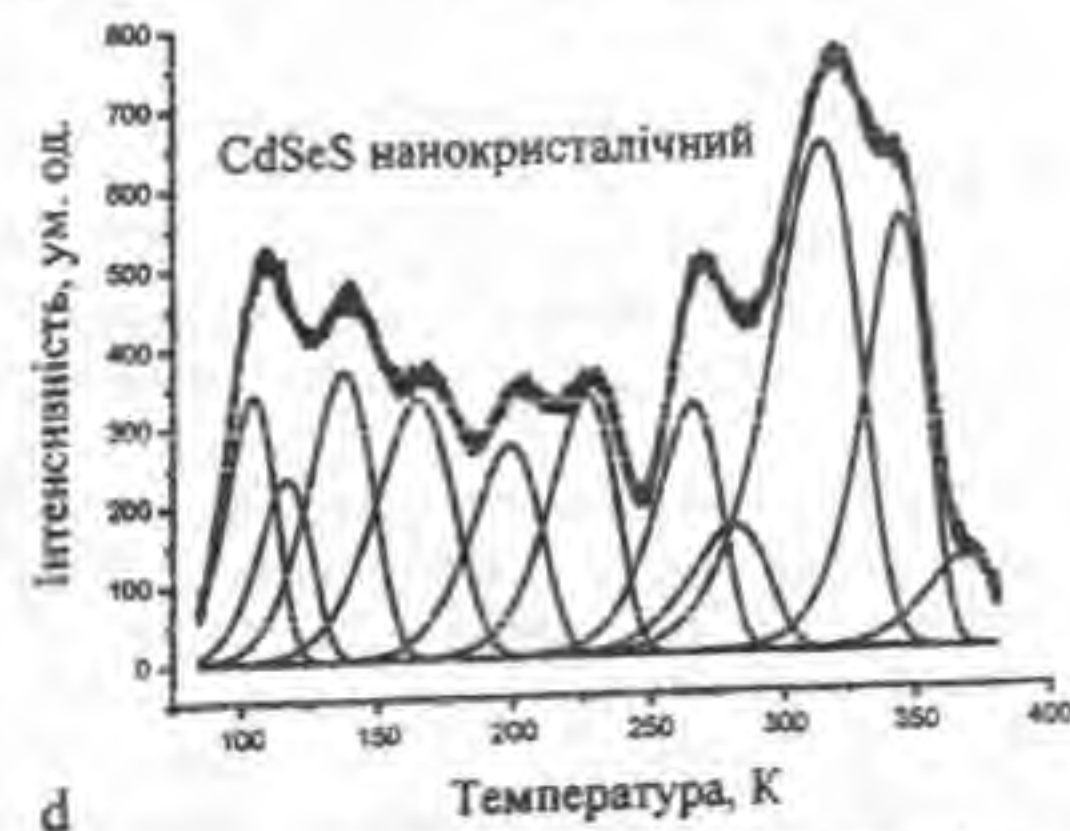
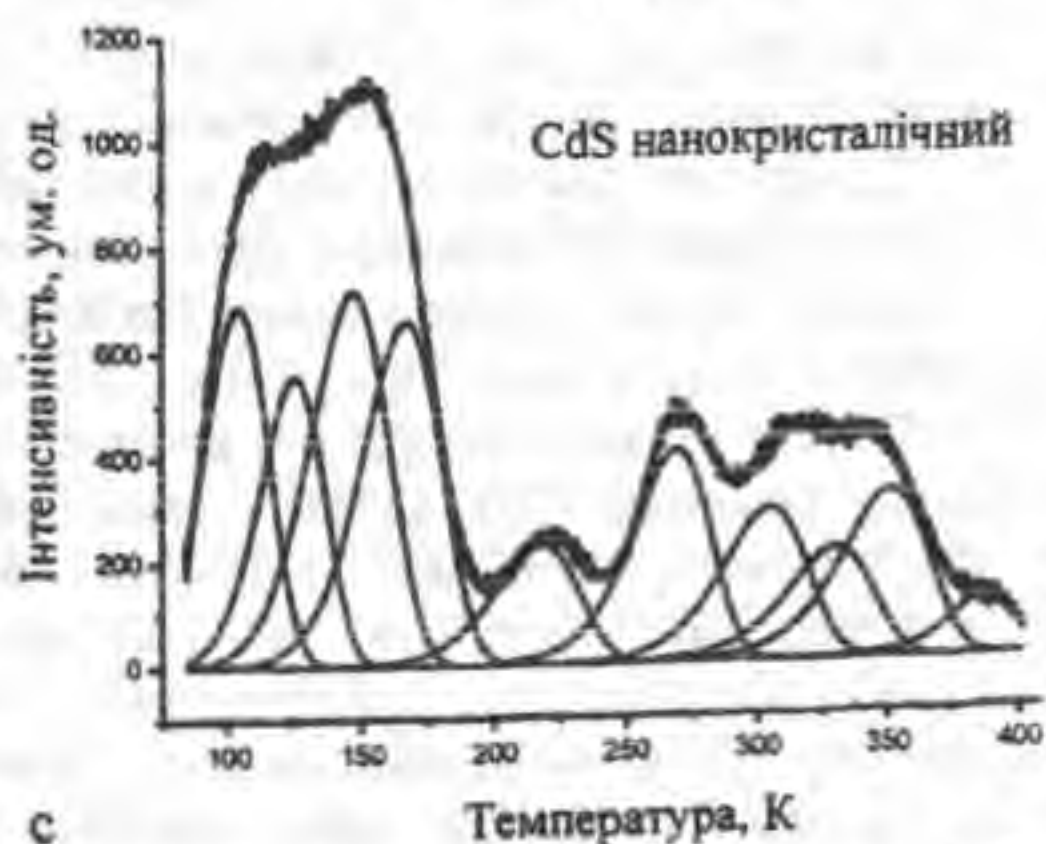


Рис. 1. Криві інтегральної інтенсивності ТСЛ монокристалічного (а), мікроткристалічного (b), нанокристалічного (c) CdS, та нанокристалічного $\text{CdS}_{0.5}\text{Se}_{0.5}$ (d). Збудження – рентген.

Таблиця 1

Положення максимумів ТСЛ (T_m , K) та значення енергій активації (E_{act}) для зразків CdS, CdSe, CdS_{0.5}Se_{0.5}

Моно-CdS	T_m , K	105	124	–	149	175	212	–	258	295	327	353	392
	E_{act} , eV	0.14	0.16	–	0.19	0.23	0.28	–	0.34	0.39	0.43	0.46	0.51
Мікро-CdS	T_m , K	109	125	–	157	176	223	–	267	296	332	353	395
	E_{act} , eV	0.17	0.20	–	0.25	0.28	0.37	–	0.43	0.48	0.53	0.57	0.64
Нано-CdS	T_m , K	105	125	–	148	167	218	–	269	305	330	352	388
	E_{act} , eV	0.16	0.19	–	0.23	0.26	0.34	–	0.42	0.47	0.51	0.55	0.60
Моно-CdSe	T_m , K	109	122	139	154	176	209	236	272	–	321	347	382
	E_{act} , eV	0.16	0.18	0.20	0.23	0.26	0.31	0.35	0.40	–	0.47	0.51	0.56
Мікро-CdSe	T_m , K	106	123	146	161	193	236	268	289	320	343	381	
	E_{act} , eV	0.16	0.19	0.22	0.25	0.30	0.36	0.41	0.42	0.49	0.52	0.58	
Нано-CdSe	T_m , K	106	121	139	159	187	217	243	270	290	325	355	
	E_{act} , eV	0.16	0.18	0.21	0.24	0.28	0.33	0.37	0.40	0.44	0.49	0.53	
Нано-CdSe-УФ	T_m , K	104	122	139	161	185	220	251	–	287	307	333	–
	E_{act} , eV	0.15	0.18	0.20	0.24	0.27	0.33	0.37	–	0.42	0.45	0.49	–
Нано-CdS _{0.5} Se _{0.5}	T_m , K	105	117	138	165	199	227	–	268	281	314	345	370
	E_{act} , eV	0.16	0.18	0.22	0.26	0.31	0.36	–	0.42	0.44	0.49	0.54	0.58

На рис. 2 наведено криві ТСЛ об'ємного, мікрокристалічного та нанокристалічного CdSe при збудженні рентгенівським випромінюванням (рис. 2a-c) та нанокристалічного CdSe при збудженні УФ-випромінюванням (рис. 2d) азотного N₂-лазера (337 нм). За даних умов експерименту збудження зразків мікрокристалічного та об'ємного CdSe ультрафіолетовим випромінюванням виявилось неефективним. Наведено також результати розкладу кривої ТСЛ на елементарні контури. Форма елементарних піків відповідає лінійній кінетиці висвічування.

На кривих ТСЛ спостерігаються, як і для CdS, слабкорозділені низько- та високотемпературна системи піків (4 та 6 піків, відповідно), проміжні за температурою піки при ~200-250 K не виділяються так очевидно, як в CdS, їх скоріше можна віднести до низькотемпературної області (див. рис. 2 та Табл. 1).

Зазначимо, що розклад кривих ТСЛ був достатньо однозначним, оскільки, наприклад, не вдавалося отримати гарне співпадіння експериментальної кривої ТСЛ з сумою контурів при розкладі, якщо він проводився за контурами кінетики іншого типу – навіть при намаганнях підгонки зміною параметрів і кількості елементарних контурів.

Як і для зразків CdS, для нанокристалічного CdSe найбільш інтенсивними є низькотемпературні піки, для об'ємного CdSe – високотемпературні. Для кривих ТСЛ мікро-CdSe більш інтенсивною є високотемпературна область. Зауважимо, що низькотемпературні (до 200 K)

області кривих ТСЛ практично співпадають і при рентгенівському і при УФ збудженні, в системі високотемпературних піків ТСЛ відмінності суттєвіші, зокрема, інтенсивність ТСЛ в області вище 200 K значно нижча.

Також вивчалися наночастинки CdS_{0.5}Se_{0.5}. На рис. 1d подано графік кривої ТСЛ. Видно, що для CdS_{0.5}Se_{0.5} проявляються ті ж системи піків, що і для CdS та CdSe, що пов'язано з загалом подібною електронною структурою дефектів.

Положення максимумів піків ТСЛ для всіх досліджених зразків наведено в Таблиці 1.

В цілому, з порівняння нано-, мікро- та об'ємних CdS та CdSe слідує, що деякі піки ТСЛ висвічуються при майже одних і тих же температурах для всіх типів зразків CdS та CdSe. Найпростішим поясненням є припущення про майже однакову природу відповідних дефектів, як за будовою, так і за електронною структурою.

Конкретно пов'язати спостережувану нами ТСЛ, і, відповідно, механізм термолюмінесценції, з певним типом дефектів важко без дослідження спектрального складу ТСЛ. Одна з можливостей – ТСЛ обумовлена поширенням в структурах типу A_{II}B_{VI} (зокрема, CdS, CdSe) типом дефектів – міжвузловими атомами Cd⁺ чи S(Se)⁻ і відповідними вакансіями, V⁺_{Cd}, V⁺_{S(Se)}, що є парами Френкеля. Ненульовий зарядовий стан цих дефектів обумовлений більшою ймовірністю утворення зарядженої пари дефектів [19]. В зонній схемі такої парі відповідають енергетичні рівні, розташовані в забороненій зоні, і в спектрах люмінесценції проявляються переходи між домішковими рівнями. Після випромінювання

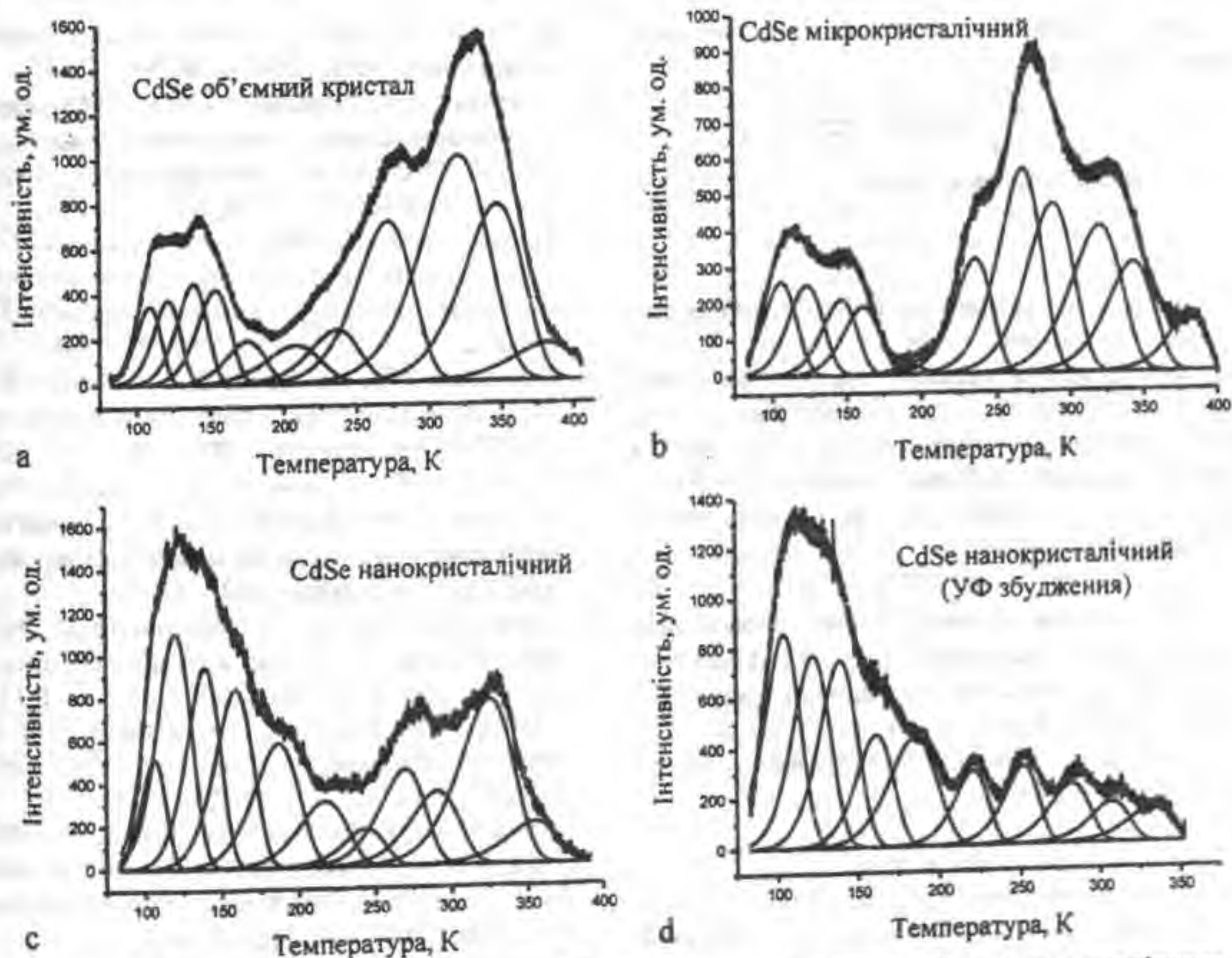


Рис. 2. Криві інтегральної інтенсивності ТСЛ монокристалічного (а), мікрокристалічного (б), нанокристалічного (с) CdSe (рентгенівське збудження) та нанокристалічного CdSe (УФ-збудження (д)).

дефекти можуть анігілювати або ж частково залишатись в кристалі, дифундуючи до поверхні.

Енергія активації пастки визначається в основному взаємодією з найближчим оточенням. Для вказаних дефектів (вакансії S або Se) в кристалічній структурі CdS та CdSe в найближчому оточенні знаходяться атоми кадмію, отже цим дефектам мають відповідати піки ТСЛ з максимумами при однакових температурах. Це й спостерігалось в обох досліджуваних матеріалах для ряду піків: ~105, ~123, ~270, ~325, ~350 K. Щодо відповідних піків, положення яких різне в CdS та CdSe, то можна припустити, що вони обумовлені вакансіями кадмію, або ж міжвузловими атомами S, Se чи Cd: для них найближче оточення відмінне в CdS та CdSe - S та Se (для вакансій кадмію), або ж S(Se)-Cd для міжвузлових атомів.

Припущення, що принаймі частина піків ТСЛ зумовлені наявністю в кристалічних структурах CdS та CdSe вакансій сірки (селену) та кадмію підтверджується результатами роботи [18], хоча в цілому в наших зразках структура кривих ТСЛ (система піків) складніша. В роботі [18]

досліджено термостимульовану люмінесценцію об'ємного CdS, відпаленого в атмосфері кадмію, сірки та в повітрі. На кривих ТСЛ зразка CdS:Cd спостерігались інтенсивні високотемпературні піки при 280, 330 та 350 K, а для зразків CdS:S – піки при 110 та 190 K. Авторами показано, що низькотемпературні піки найімовірніше зумовлені вакансіями кадмію, а високотемпературні – вакансіями сірки.

Автори [12,13] механізм ТСЛ наночастинок пов'язують з рекомбінацією носіїв з поверхневих станів або дефектів, проте це є дискусійним. Залишається дискусійним також питання щодо природи зарядів (електрони чи дірки), які звільняються у процесі ТСЛ.

За положеннями максимумів визначено енергію активації пасток для досліджуваних зразків CdS та CdSe (Таблиця 1). Цей метод звичайно застосовується для визначення енергії активації пасток, що дають малоінтенсивні піки ТСЛ, які досліджувати методом початкового нахилу складно. В нашому випадку точність визначення енергії активації склала ~0.01 eV.

Для лінійної кінетики справедливе співвідношення:

$$\frac{E\beta}{kT_m^2} = p_0 \exp\left(-\frac{E}{kT_m}\right)$$

Або, після логарифмування:

$$\frac{E}{kT_m} = \ln\left(\frac{p_0 k T_m^2}{E\beta}\right) = C$$

Оскільки логарифмічна функція змінюється значно повільніше, ніж аргумент T_m , C наближено можна вважати сталою величиною при умові сталості інших параметрів, зокрема припускається, що частотний фактор, який в даному випадку набуває значення $\sim 10^6$ (с⁻¹), змінюється для різних піків не більше, ніж на порядок. Тоді:

$$E = CkT_m$$

Тобто енергія активації пастки пропорційна температурі в максимумі піка. Коефіцієнт C визначався з параметрів апроксимації кривої ТСЛ сумою елементарних контурів. З розрахунків виходить, що C набуває значення в межах 14 - 17 в залежності від зразка.

Висновки

Таким чином, методом термостимульованої люмінесценції вперше виконано порівняльний аналіз нано- та мікрокристалічних CdS та CdSe. Також отримано спектри відповідних об'ємних кристалів, малодосліджених методами ТСЛ. З порівняння випливає, що деякі піки ТСЛ висвічуються при майже одних і тих же температурах для всіх типів зразків CdS та CdSe, положення інших відповідних піків дещо відмінні. Щодо природи ТСЛ можна зробити попередній висновок, що піки, положення яких співпадають для всіх зразків, обумовлені здебільшого дефектами, спричиненими вакансіями Se чи S; інші піки ТСЛ проявляються, в основному, завдяки вакансіям Cd. Можливі, проте, і інші типи дефектів.

Список використаних джерел

1. Горбань І.С., Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю. Осциляторні залежності в енергіях пасток в кристалах ZnWO₄ // УФЖ-1995.-40, N1-2.-С.73.
2. Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю., Охріменко О.Б. Осциляторні залежності в енергіях центрів прилипання в кристалах CdWO₄ // УФЖ - 1997.- 42, N7.- С.870.
3. Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю. Закономірності в енергіях активації центрів прилипання в кристалах NaCl // УФЖ.-2000.- 45, N9.-С.1093.
4. Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю. Дослідження термолюмінесценції нелегованих кристалів LiF. I. Метод аналізу складних піків термолюмінесценції // УФЖ- 2005.- 50, N4.- С.345.
5. Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю. Дослідження термолюмінесценції нелегованих кристалів LiF. II. Осциляторна закономірність енергій пасток // УФЖ - 2005.- 50, N10.- С. 1125.
6. Гуменюк А.Ф., Кутовий С.Ю., Становий О.П. та ін. Осциляторна залежність в енергетичному спектрі центрів прилипання кристалів KCl та NaI // УФЖ- 2009.- 54, N10.- С.1000.
7. Блишников Г.П., Голоужжа В.Н., Гуменюк А.Ф. Энергетический спектр ловушек в кристаллах CsCdCl₃ // Опт. и спектр.-1990.- 69, N5.-С.1054.
8. Горбань И.С., Гуменюк А.Ф., Дегода В.Я., Кутовой С.Ю. Закономірності в енергіях делокалізації носителей заряда из ловушек в ИАГ // Опт. и спектр.-1993.- 75, N1.- С.47.
9. Gumenjuk A., Kutovyi S., Grebenovish M. Oscillator regularity of the trap activation energies in Al₂O₃ crystals // Func. Mat.- 2002.- 9, N2.- P.314.
10. Gumenjuk A., Kutovyi S. Oscillator rule of the trap activation energies in NaCl crystals // Centr. Europ. J. Phys. - 2003.- 1, N2.- P. 307-331.
11. Gumenjuk A. F. Kutovyi S. Yu. The method of an analysis of complicated thermoluminescent peaks by the example the 141 K peak in LiF // Functional Materials - 2006. -13, N1. - P. 173.
12. Chen W., Wang Z., Lin Z. et al. Thermoluminescence of ZnS nanoparticles // Appl. Phys. Lett. - 1997. - 70, N11.- P. 1465.
13. Chen W., Wang Z., Lin L. Thermoluminescence of CdS clusters in zeolite-Y // J.Lumin. -1997.- 71. - P.151.
14. Dekanozishvili G., Driaev D., Kalabegishvili T. et al. Thermoluminescence and absorption spectra of CdSe quantumdot-doped glass irradiated by X-rays // J. Lumin.- 2009.- 129 - P. 1154.
15. Miyoshi T., Makidera Y., Kawamura T. et al. Thermoluminescence in semiconductor-doped glasses // J.Lumin.-2003.- 102-103.- P. 614.
16. Bacherikov Yu.Yu., Davydenko M.O., Dmitruk I. M. et al. CdSe nanoparticles grown with different chelates // Semicond. Physics, Quantum Electr. and Optoelectr. - 2006.- 9, N2.- P.75.
17. Furetta C. Handbook of Thermoluminescence / World Scientific Publishing - 2003.
18. C. Lee, S. Kim, H. Du et al. Thermoluminescence of CdS single crystals annealed in various conditions // J. Phys. D:Appl.Phys.- 1991.-24.- P.422.
19. Островский И.В. Акустолюмінесценция - новое явление акустооптики // Соросовский образов. журнал. - 1998. - N1. - P.95.

Надійшла до редколегії 25.11.2009

УДК 535.3

Гречко Л.Г., д. ф.-м. н., проф.,
Скоробагаты Т.В., к.ф.-м.н.,
Шостак С.В., к.ф.-м.н.,
Шкода Н.Г., к.ф.-м.н.

Теория распространения электромагнитного излучения в аэрозольно-дисперсных средах

Найдено значение сферического альбедо и показано, что его величина существенно зависит от мнимой части показателя преломления аэрозольно-дисперсной среды и от длины волны электромагнитного излучения – с уменьшением мнимой части показателя преломления рассеивателей системы и с увеличением длины волны ее альбедо увеличивается. Как следует из расчетов, при уменьшении мнимой части показателя преломления в четыре раза – альбедо увеличивается в 1.945 раза (для $\lambda = 0.4 \text{ мкм}$). Разработанные здесь методы могут найти широкое применение при исследовании радиационного баланса Земли.

Ключевые слова: электромагнитное излучение, аэрозольно-дисперсная среда, теория переноса, уравнения переноса, сферическое альбедо.

*E-mail: lgrechko@isc.gov.ua

Grechko L.G., Dr. Sc., prof.,
Skorobagaty T.V., Ph. D.,
Shostak S.V., Ph. D.,
Shkoda N.G., Ph. D.

Transfer theory of electromagnetic irradiation in aerosol-disperse media

A value was found of spherical albedo and it was shown to depend significantly on the imaginary part of refraction index for aerosol-disperse media particles and on the wavelength of electromagnetic irradiation: the system albedo increases when the imaginary part of refraction index of diffusers decreases and the electromagnetic irradiation wavelength increases. As it follows from the calculations, when the imaginary part of refraction become one quarter of initial one, the albedo becomes 1.945 times as much (for $\lambda = 0.4 \text{ mcm}$). The teoretical methods developed here and related program can find a wide use for investigations of radiation balance of the Earth atmosphere.

Key Words: electromagnetic irradiation, aerosol-disperse media, transfer theory, spherical albedo.

При использовании теории переноса излучения для анализа лабораторных измерений или результатов дистанционных наблюдений необходимы эффективные теоретические методы решения уравнения переноса в его исходной интегральной или производной интегро-дифференциальной форме. Это уравнение сложно поддается аналитическому и численному решению. Для упрощения задачи необходимо сделать предположения о том, что дисперсная рассеивающая среда является плоскопараллельной, имеет бесконечное горизонтальное протяжение и освещается

сверху плоской электромагнитной волной или параллельным и однородным квазимонохроматическим пучком света бесконечного поперечного сечения, следовательно все свойства, как рассеивающей среды, так и поля излучения, изменяются только в вертикальном направлении и не зависят от горизонтальных координат. Это определяет так называемую стандартную задачу в атмосферной оптике и позволяет ввести теоретическую модель светорассеяния, находящую многочисленные применения в разнообразных областях науки и техники. Данные уравнения, описывающие

как внутреннее поле излучения, так и диффузное излучение, покидающее среду, являются обобщениями уравнений, которые были получены для частного случая макроскопически изотропных и зеркально симметричных сред [1–4]. Но, в отличие от всех предыдущих работ, в данной работе не накладываются никакие ограничения на форму и ориентацию рассеивающих частиц. И того более, все производные уравнения выводятся непосредственно из уравнения переноса. Этим подчеркивается прямая выводимость всех результатов классической теории переноса излучения в случайных дисперсных средах из уравнений Максвелла.

При постановке стандартной задачи рассматривается плоскопараллельный слой разреженной дисперсной среды. Направление распространения излучения $\hat{n}$ в точке наблюдения будет задаваться упорядоченной парой $\{u, \varphi\}$, где $u = -\cos \theta \in [-1, 1]$ – направляющий косинус, а $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ и $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ]$ – зенитный и азимутальный углы в локальной системе координат, имеющей ту же пространственную ориентацию, что и лабораторная система координат. Рассеивающий слой освещается сверху плоской электромагнитной волной или параллельным квазимонохроматическим пучком света. Однородность и бесконечное поперечное сечение падающей волны или падающего пучка света означают, что все характеристики как внутреннего поля излучения, так и излучения, покидающего среду, не зависят от координат x и y . Поэтому уравнение

$$-u \frac{d\bar{I}(z, \hat{n})}{dz} = -n_0(z)K(z, \hat{n})\bar{I}(z, \hat{n}) + n_0(z) \int_{4\pi} d\hat{n}' Z(z, \hat{n}, \hat{n}') \bar{I}(z, \hat{n}') \quad (1)$$

дополняется граничными условиями:

$$\begin{aligned} \bar{I}(z_1, \hat{n}) &= \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \\ \bar{I}(z_2, -\hat{n}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{I}(z, \hat{n}) = \delta(\hat{n} - \hat{n}_0) I_c(z) + \bar{I}_d(z, \hat{n})$ – полный удельный вектор Стокса, включающий как когерентный, так и диффузный компоненты, K и Z – матрица экстинкции и фазовая матрица, усреднённые по всем состояниям частиц (отметим, что угловые скобки, означающие усреднение здесь и далее опускаются), I_0 – вектор Стокса, 0 – четырехэлементный столбец с нулевыми элементами.

Интенсивность отраженного излучения дается формулой:

$$I(-\mu, \varphi) = \mu_0 R(\mu, \mu_0, \varphi) F, \quad (3)$$

где $R(\mu, \mu_0, \varphi)$ – функция отражения, а πF – падающий поток на единицу площади. Потом находим функцию отражения при точном решении уравнения переноса. Собственно раскладываем функцию $R(\mu, \mu_0, \varphi)$ в ряд Фурье по азимуту:

$$R(\mu, \mu_0, \varphi) = R^0(\mu, \mu_0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R^m(\mu, \mu_0) \cos(m\varphi). \quad (4)$$

И после решаем численно нелинейное интегральное уравнение Амбарцумяна [5]

$$\begin{aligned}
 (\mu + \mu_0)R^m(\mu, \mu_0) &= \frac{\varpi}{4}P^m(-\mu, \mu_0) + \\
 &+ \frac{\varpi}{2}\mu_0 \int_0^1 P^m(\mu, \mu')R^m(\mu', \mu_0)d\mu' + \\
 &+ \frac{\varpi}{2}\mu \int_0^1 R^m(\mu, \mu')P^m(\mu', \mu_0)d\mu' + \\
 &+ \varpi\mu\mu_0 \int_0^1 \int_0^1 R^m(\mu, \mu')P^m(-\mu', \mu'')R^m(\mu'', \mu_0)d\mu',
 \end{aligned} \quad (5)$$

где ϖ – альbedo однократного рассеяния, $P^m(\mu, \mu')$ – Фурье компоненты фазовой функции.

На рисунках (1-3) показаны результаты проведенных численных расчетов углового распределения удельной интенсивности отраженного света $I_{rs}(\mu, \varphi)$ Вт·м⁻²·ср⁻¹ (ср – стеррадиан) для полубесконечного плоскопараллельного слоя для частиц распределенных по степенному закону [2]. Задаются разные относительные показатели преломления $m = 1,53 + i \cdot 0,005$, $m = 1,53 + i \cdot 0,002$ и $m = 1,53 + i \cdot 0,008$ при трех различных значениях длины волны (мкм) $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,63$, $\lambda = 0,7$ неполяризованного параллельного пучка света. При этом зенитный угол падения $\mu_0 = 0,7$ ($\mu = |\cos(\theta)|$), азимутный угол падения считается равным нулю. Интенсивность падающего света равна $I_0 = \pi$ Вт·м⁻². Эффективный радиус частиц в расчетах не изменялся и считался равным $a = 0,6$ мкм. Расчет поглощения и рассеяния отдельной частицы велся по теории Ми [1].

Для каждого случая указано рассчитанное значение сферического альbedo [5], которое вычислялось как

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu_0 \int_0^1 \mu d\mu \int_0^{2\pi} R(\mu, \mu_0, \varphi) d\varphi d\mu_0. \quad (6)$$

Расчеты показали, что с уменьшением мнимой части показателя преломления частицы аэрозоля сферическое альbedo существенно возрастает. Действительно, для показателя преломления частицы с мнимой частью 0,008 альbedo составляет 0,240, а для 0,002 альbedo составляет – 0,427 (для длины волны 0,4 мкм и среднего размера частицы 0,6 мкм). Приблизительно те же соотношения имеют место и для других длин волн. Таким образом основным фактором, определяющим величину альbedo данной системы является рассеяние излучения частицами аэрозоля. В данном конкретном случае альbedo также чувствительно длине волны электромагнитного излучения, с увеличением длины волны альbedo возрастает. Развитые численные методы решения уравнения переноса в полубесконечном слое могут быть использованы при расчете альbedo земной атмосферы при его экспериментальных измерениях (космическими средствами), а также при различных дистанционных наблюдениях состояния аэрозоля разных областей земной поверхности (города, промышленные районы).

В 70-е годы XX века была высказана идея о возможности целенаправленного воздействия сульфатного аэрозоля на климатические процессы и замедления тем самым глобального потепления [6], которая активно обсуждается в последнее

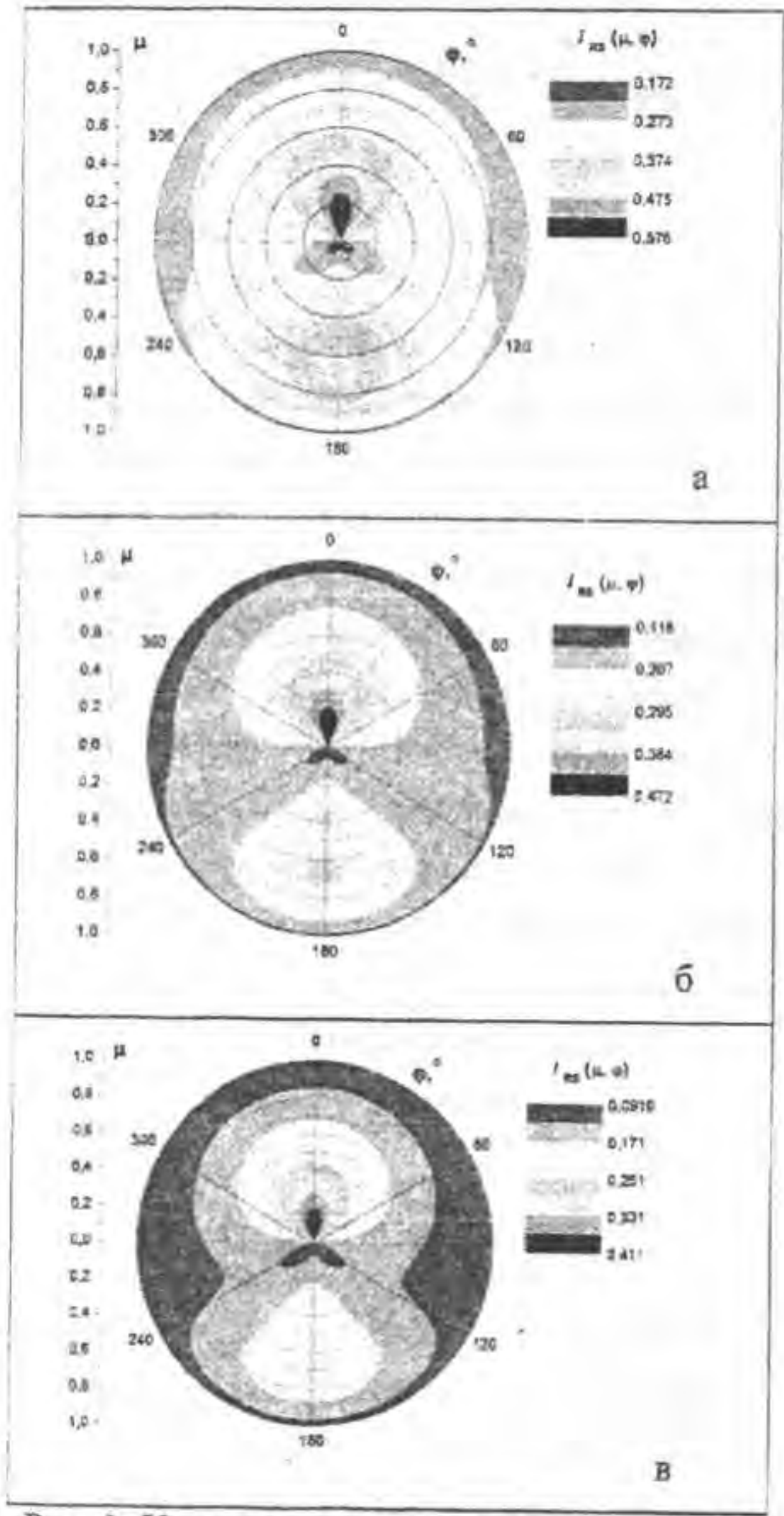


Рис. 1. Удельная интенсивность отраженного света ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$) как функция μ та φ для полубесконечных слоев при разных значениях относительного показателя преломления.

относительный показатель преломления, а).
а) $m = 1,53 + i \cdot 0,002$, б) $m = 1,53 + i \cdot 0,005$
в). $m = 1,53 + i \cdot 0,008$
эффективный радиус $a = 0,6$ мкм
сферическое альbedo
а). 0,467
б). 0,314
в). 0,240
длина волны падающего света $\lambda = 0,4$ мкм
зенитный угол падения $\mu_0 = 0,7$

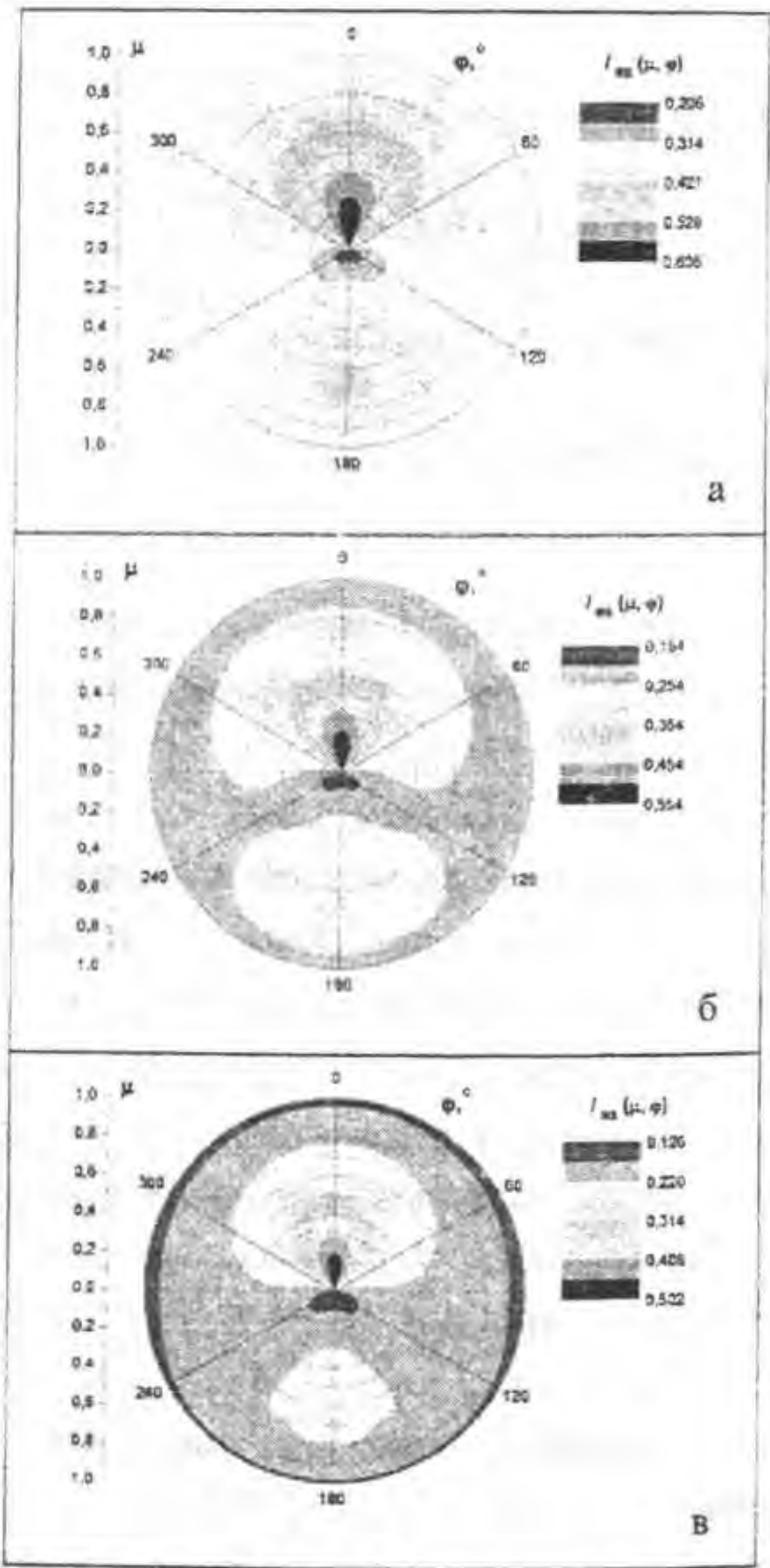


Рис. 2. Удельная интенсивность отраженного света ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$) как функция μ та φ для полубесконечных слоев при разных значениях относительного показателя преломления.

относительный показатель преломления
а) $m = 1,53 + i \cdot 0,002$, б) $m = 1,53 + i \cdot 0,005$,
в) $m = 1,53 + i \cdot 0,008$
эффективный радиус $a = 0,6$ мкм,
сферическое альbedo а). 0,556, б). 0,404,
в). 0,324
длина волны падающего света $\lambda = 0,63$ мкм
зенитный угол падения $\mu_0 = 0,7$

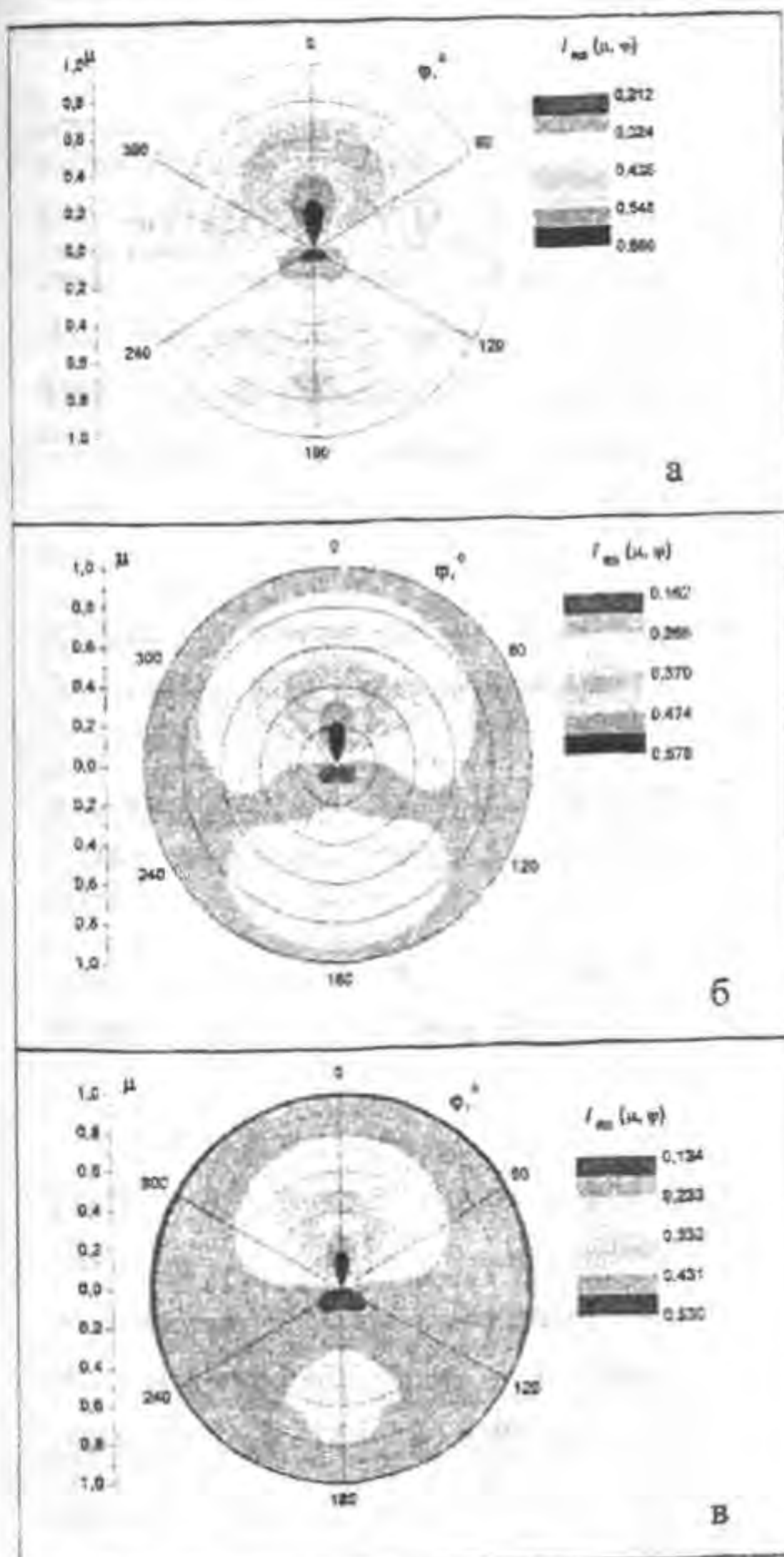


Рис. 3. Удельная интенсивность отраженного света ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$) как функция μ та φ для полубесконечных слоев при разных значениях относительного показателя преломления.

относительный показатель преломления, а).
 $m = 1,53 + i \cdot 0,002$, б). $m = 1,53 + i \cdot 0,005$
в). $m = 1,53 + i \cdot 0,008$

эффективный радиус $a = 0,6$ мкм

сферическое альbedo

а). 0,576

б). 0,425

в). 0,345

длина волны падающего света $\lambda = 0,7$ мкм

зенитный угол падения $\mu_0 = 0,7$

время [7,8]. В [6] было показано, что увеличение удельной массы стратосферных аэрозолей примерно на 10^{-6} г/см^2 приводит к понижению средней температуры нижнего слоя атмосферы на $1,5^\circ\text{C}$. В работе [7] был предложен метод массированного воздействия на климат путем распыления в атмосферу 200000 т. Серы, которая при горении и взаимодействии с влагой воздуха образует 600000 т. сернокислотных аэрозольных частиц. Предположительно при этой массе аэрозоля температура понизится на несколько десятых градуса. Такой массированный выброс в стратосферу позволил бы предотвратить глобальное потепление. Эксперимент по доставке в стратосферу и сжиганию в ней больших количеств серы (пирогенный синтез наночастиц) с последующим гидролизом триоксида серы водой можно осуществить имеющимися техническими средствами.

Оценка изменения потоков излучения, а также температуры поверхности и тропосферы Земли, в которой рассматривается перенос энергии только за счет излучения на верхней границе атмосферы, показывает, что поглощение излучения происходит в верхних слоях тропосферы, там же происходит разогрев воздуха при охлаждении земной поверхности. При предлагаемом в [9,10] увеличении массы стратосферных аэрозолей охлаждение может достигать 2°C при альbedo подстилающей поверхности, равном 0,3. Прямые наблюдения за составом стратосферных аэрозолей и, в частности, полярных стратосферных облаков показали,

что это аэрозоли вулканического происхождения, которые содержат сульфатные частицы и сосредоточены в слое толщиной в несколько километров на высоте 18-20 км. Они с наибольшей вероятностью и способствуют выхолаживанию стратосферы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке общего проекта НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (договор №28).

Список литературы

1. Mishchenko M.I. Radiative transfer theory: from Maxwell's equations to practical applications // Wave Scattering in Complex Media: From Theory to Applications / Eds.: B.A. van Tiggelen, S.E. Skipetrov. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – P. 367-414.
2. Hansen J.E., Travis L.D. Light scattering in planetary atmospheres // Space Sci. Rev. – 1974. – Vol. 16. – P. 527-610.
3. Hovenier J.W., van der Mee C, Domke H. Transfer of polarized light in planetary atmospheres – basic concepts and practical methods. – Berlin: Springer, 2004. – 258 p.
4. Lenoble J. (Ed.) Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: standard computational procedures. – Hampton, VA: A. Deepak Publishing, 1985. – 300 p.
5. Мищенко М.И. Отражение и пропускание поляризованного света анизотропными атмосферами. I. Основные уравнения и методика расчета // Кинемат. и физ. неб. тел. – 1988. – Т.4. №6. – С. 3-10.
6. Будыко М.И. Изменения климата. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 280с.
7. Израэль Ю.А. / Метеорология и гидрология. – 2005. – № 10. – С. 5-9.
8. Crutzen P.J. An Editorial Essay. Climatic Chance. – 2006. – V. 77, № 6. – P. 211.
9. Гинзбург А.С., Губанова Д.П., Минашкин В.М. Влияние естественных и антропогенных аэрозолей на глобальный и региональный климат // Рос. хим. журн. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 112-119.
10. Dozier J., Painter T.H. Multispectral and hyperspectral remote sensing of alpine snow properties // Annu. Rev. Earth Planet. Sci. – 2004. – Vol. 32. – P. 465-194.

Надійшла до редколегії 05.10.09

УДК 535.37: 577.3

Дегода В.Я., д. ф.-м.н., с.н.сп.,
Золкін І.О., магістр фізики,
Когут Я.П. магістр фізики,
Свечнікова О.С., к.ф.-м.н.

Дослідження форм спектрів фотолюмінесценції фібрилярних біополімерів (волосся людини)

Досліджено 25 різних зразків фібрилярних біополімерів (ФБП) – волосся людини та експериментально отримано спектри фотолюмінесценції (ФЛ) при однакових умовах. Проведений аналіз форм цих спектрів ФЛ ФБП. Описана методика розкладання форм складних спектрів ФБП на індивідуальні компоненти, що ґрунтується на припущенні про однакову природу центрів свічення в різних зразках ФБП. Отримані характеристики елементарних смуг свічення (напівширини та положення максимуму). Усі експериментально одержані спектри ФЛ розкладено на чотири елементарні смуги із задовільною точністю.

Ключові слова: спектри фотолюмінесценції, фібрилярні біополімери, розклад спектрів на індивідуальні компоненти.

*E-mail: svechnikova@mail.univ.kiev.ua

Розуміння механізмів структурних і фізико-хімічних змін в макромолекулах білків має важливе фундаментальне значення для дослідження їх фізичних та біологічних властивостей в організмі [1-3]. В макромолекулах, що є основою живого, відбуваються складні процеси трансформації енергії, які включають міграцію енергії електронного збудження та транспорт електронів. Основу функціонування макромолекул складають електронно-конформаційні взаємодії, які проявляються в різноманітних процесах, де приймають участь біологічно активні макромолекулярні комплекси. Головна проблема полягає в тому, щоб розкрити природу взаємодій атомних груп, які визначають конформаційні особливості та внутрішню динаміку біомакромолекул, механізми взаємодії

Degoda V.Ya., doct. sc.,
Degoda V.Ya., doct. sc.,
Zolkin I.O., magistr of physics,
Kogut Ya.P., magistr of physics
Svechnikova O.S., PhD.

Fibrillar Biopolymers (Human Hair) Photoluminescence Spectra Form Research

25 different fibrillar biopolymers samples (FBP) have been studied and the experimental photoluminescence (PL) spectra have been obtained under the similar conditions. The FBP PL spectra form analysis have been carried out. The method to expand the composite FBP spectra form into the individual components based on the similar nature of the glow centers assumption for the different samples is described. The elementary glow lines characteristics are obtained (half-width and maximum position). All the experimental PL spectra are expanded into four elementary lines with the satisfactory accuracy.

Keywords: photoluminescence spectra, fibrillar biopolymers, spectral factorization into individual components

електронних та конформаційних переходів, і на цій основі зрозуміти механізми функціонування біополімерів в живих системах [1]. Тому дослідження особливостей люмінесценції та механізмів передачі електронного збудження в біологічних об'єктах (наприклад, кератинових білках типу волосся) є важливою та актуальною проблемою в медичній та біологічній фізиці.

Для дослідження були обрані фібрилярні біополімери (ФБП) – волосся людини різних типів. Зразки для вимірювань мали форму жмута. Волосини в зразку укладались паралельно одна одній та стискувались до гранично малого об'єму повітряних проміжків між окремими волосинами, після чого жмут закріплювався у вимірювальній рамці та обрізувався за поперечним перерізом. Збуджуюче випромінювання в експерименті було

направлене на поперечний переріз жмута волосся під кутом 45° . Вибір саме такої «геометрії» збудження і реєстрації люмінесценції обумовлений висновками за результатами попередніх досліджень в нашій лабораторії [4,5]. Спектри ФЛ всіх зразків ФБП вимірювались при однакових умовах (при кімнатній температурі на повітрі).

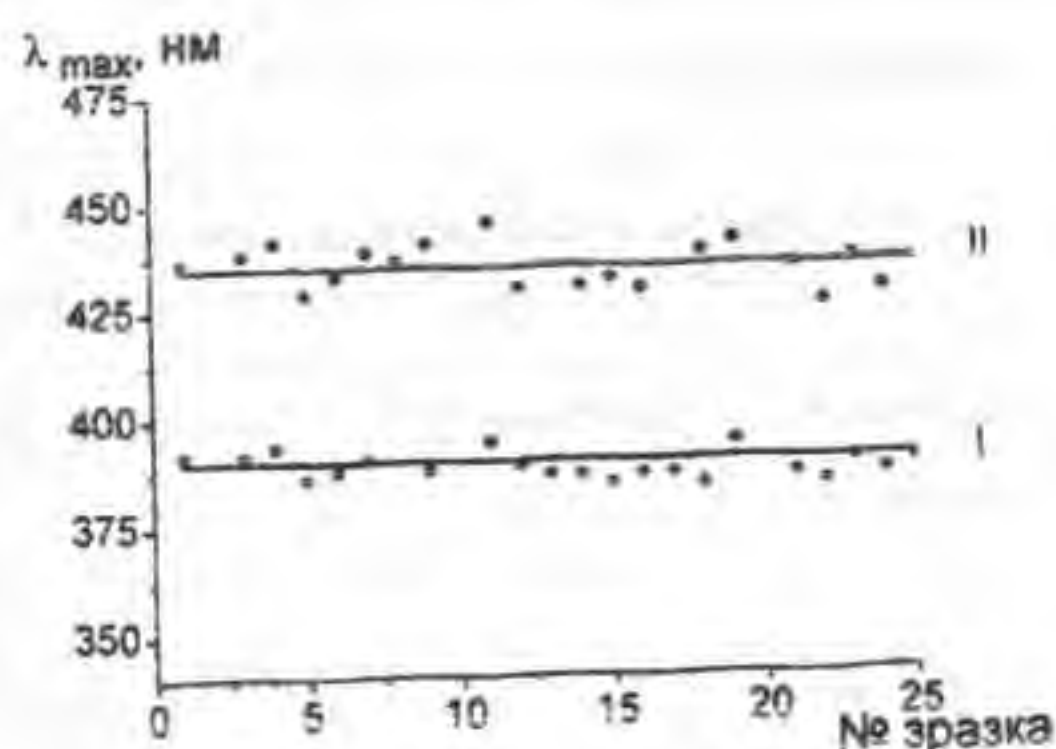
Дослідження люмінесцентних явищ в ФБП (волосі людини) проводились на комплексній установці для проведення люмінесцентних, електронно - оптичних досліджень матеріалів [6]. Фотолюмінесценція (ФЛ) збуджувалася імпульсним азотним лазером ЛП-21. Спектри люмінесценції реєструвались під кутом 45° до нормалі зразка в оптичному діапазоні від 300 нм до 800 нм за допомогою світлосильного монохроматора МДР-2 (з дифракційною ґраткою, який має постійну дисперсію $d\lambda/dl$ по відношенню до довжин хвиль) та фотоприймача ФЕП-106. Тому початковий аналіз спектрів люмінесценції проводився в залежності від довжини хвилі. Цифрова інформація після підсилювачів надходила на IBM-сумісний комп'ютер, де й проходила подальшу програмну обробку. Усі спектри ФЛ виправлені на спектральну чутливість реєструючої системи.

В результаті проведеного експерименту одержані спектри ФЛ ФБП двадцяти п'яти різних зразків. Оскільки відомо [4-6], що в спектрах ФЛ волосся домінує комплексна смуга свічення, то виникла необхідність розкладу загального спектру ФЛ на індивідуальні компоненти з метою перевірки співпадання компонентів в зразках ФБП різних зразків.

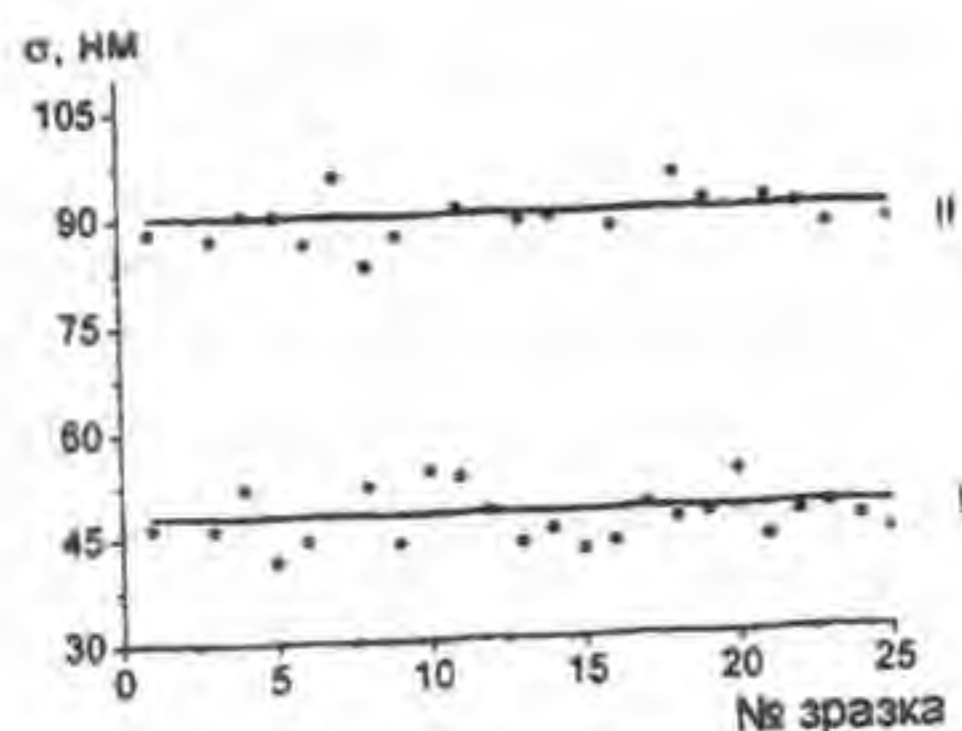
На першому етапі проводилось розкладання на симетричні смуги в режимі вільного пошуку: параметри індивідуальних смуг (напівширина та положення максимуму) підбирались таким чином, щоб середньоквадратичне відхилення сумарної теоретичної кривої від експериментального спектру було мінімальним. Оскільки напівширини окремих смуг залишаються значно меншими за енергію відповідного електронного переходу, то розклад проводили в спектральній шкалі довжин хвиль, а не енергій квантів. В результаті розкладу отримали значення напівширин та положення максимуму перших двох індивідуальних смуг (рис. 1).

Після усереднення цих параметрів розклад спектрів на компоненти проводився з фіксованими значеннями положення максимуму (для першої смуги - 390 нм, для другої - 435 нм) та напівширини (для першої смуги - 49 нм, для другої - 93 нм). Змінним параметром залишалась інтенсивність кожної смуги. Отримані результати описують ліві частини експериментальних спектрів (короткохвильова область).

Значення, одержані для третьої та четвертої смуг, не дали змогу з достатньою точністю описати експериментальні спектри ФЛ (довгохвильова область) при зміні значень амплітуди із фіксованими значеннями напівширини та положення максимуму. Було припущено, що такі результати розкладу обумовлені несиметричністю третьої та четвертої елементарних смуг свічення.



a



б

Рис. 1. Значення положення максимуму (а) та напівширини (б) для першої (I) та другої (II) індивідуальних смуг свічення

Виходячи з цього, для знаходження форм цих смуг використали метод Алєнцева-Фока [7]. Цим методом досліджувались частини спектрів ФЛ, з яких вилучені перша та друга смуги свічення. Були отримані спектральні характеристики двох несиметричних смуг свічення: третя смуга – положення максимуму – 442 нм, напівширина з короткохвильового боку становить 53 нм, з довгохвильового – 78 нм; четверта смуга – положення максимуму 539 нм, напівширина з короткохвильового боку становить 69 нм, з довгохвильового – 96 нм.

На наступному етапі досліджень були опрацьовані 25 експериментальних спектрів ФЛ

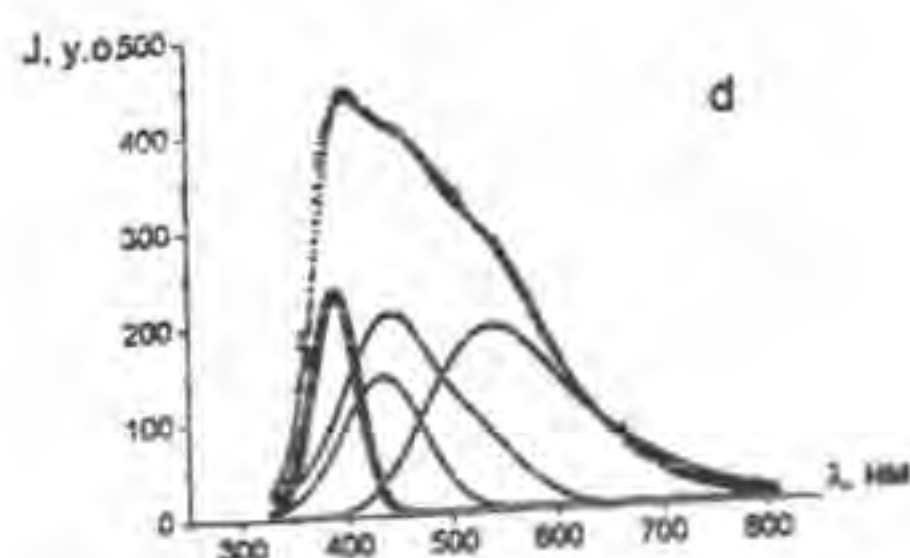
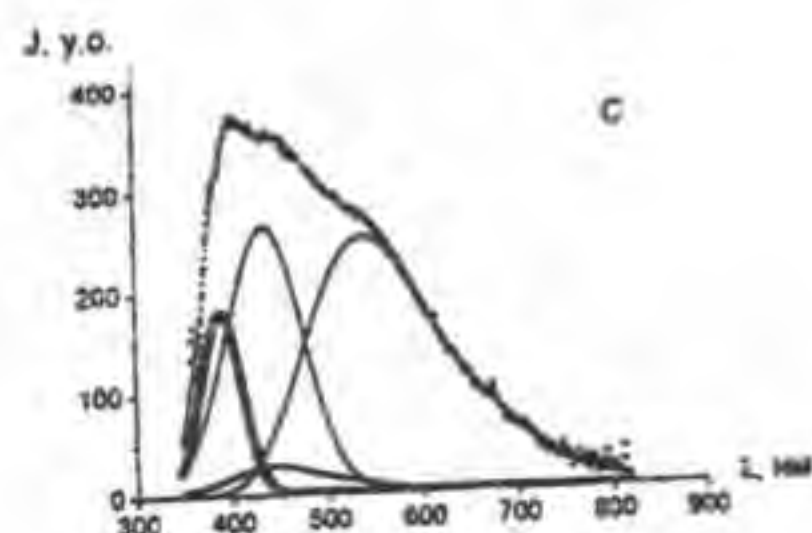
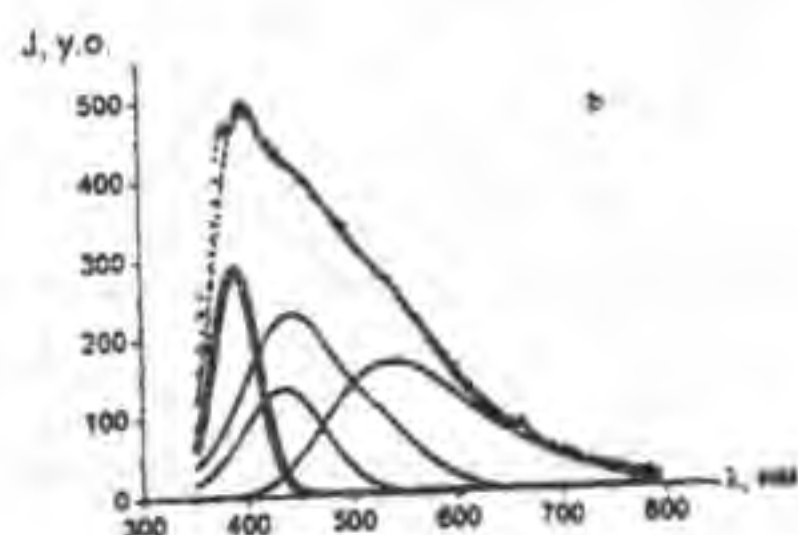
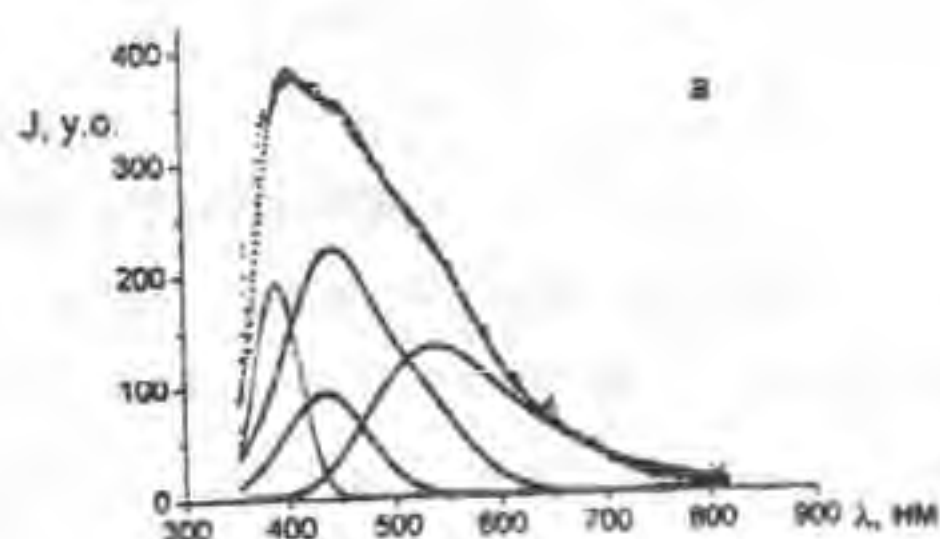


Рис. 2. Результат розкладу експериментально отриманих спектрів ФЛ ФБП на індивідуальні складові смуги свічення для зразків, характерний для 1 (а), 2 (б), 3 (с) та 4 (д) груп зразків

ФБП шляхом розкладу на чотири індивідуальні компоненти за допомогою підбору інтенсивності для кожної смуги свічення окремо. Така послідовність розкладу спектрів ФЛ усіх 25 зразків дозволила із задовільною точністю

описати експериментальні спектри ФБП. Зазначений результат розкладу експериментально отриманих спектрів ФЛ ФБП на індивідуальні складові смуги свічення для деяких зразків наведений на рис. 2. В результаті аналізу співвідношення інтенсивностей окремих елементарних смуг свічення спектри ФЛ всіх досліджених зразків були узагальнені в чотири групи.

Таким чином, усі 25 досліджених спектрів ФЛ ФБП описуються чотирма елементарними смугами в межах похибки експерименту. Це, ймовірно, свідчить про те, що в люмінесценції ФБП (волосся людини) приймають участь одні й ті фотохромні групи, а всі відмінності в спектрах можна пояснити різною концентрацією фотохромних центрів у зразках. Одержані форми елементарних смуг свічення мають такі характеристики:

- перша смуга – симетрична, положення максимуму 390 нм, напівширина - 50 нм;
- друга смуга – симетрична, положення максимуму 435 нм, напівширина - 93 нм.
- третя смуга – несиметрична, положення максимуму 442 нм, напівширина з короткохвильового боку становить 53 нм, а з довгохвильового – 78 нм;
- четверта смуга – несиметрична, положення максимуму 539 нм, напівширина з короткохвильового боку становить 69 нм, а з довгохвильового – 96 нм.

Отриманий результат є підґрунтям для подальшого розвитку досліджень природи люмінесценції в кератинових ФБП: наприклад, проведення структурного аналізу та вимірювання ФЛ складових ФБП, зміна характеру збуджуючого випромінювання (наприклад, рентгенівського), визначення часу затухання цих індивідуальних смуг свічення, а також

визначення температурних залежностей з метою встановлення природи фотохромних груп.

Список використаних джерел

1. Рубин А.Б. Биопизика. В 2-х книгах – М: Высшая школа, 1999.
2. Фрайфелдер Д. Физическая биохимия. – М: Мир, 1980г. – 582с.
3. Ленинджер А. Основы биохимии [в 3 т.] т.1 (пер. с англ.) М: Мир, 1985г. – 367 с.
4. Degoda V., Svechnikova O. The peculiarities of the research on human hair luminescence // Abstr. Intern Scientific Confer. "Spectroscopy in special applications". Kyiv, 18-21.06.2003. P.81.
5. Дегода В.Я., Когут Я.П., Макаренко О.В., Свечнікова О.С. Особливості дослідження люмінесценції кератинових фібрилярних біополімерів // Сучасні проблеми молекулярної фізики: Зб.наук.праць. – К: ВПЦ «КУ», 2006. С.272-282
6. Дегода В.Я., Когут Я.П., Свечнікова О.С. Люмінесценція фібрилярних біополімерів (волосся людини) // Вісник КУ: сер. Фізика, 2005. № 7, С. 56-57
7. Фок М.В. Разделение сложных спектров на индивидуальные полосы с помощью обобщенного метода Аленцева. // Труды ФИАН. 1972. Т. 59. С. 3-24.

Надійшла до редколегії 10.08.09

УДК 546.8; 541.183

Корнієнко М.Є., ст. наук. співр.

Квантові закономірності в водних розчинах електролітів 2. Збільшення розчинності кількох речовин, утворення нових сполук і раціональні відношення концентрацій іонів у максимумах розчинності

Робота спрямована на поглиблення і вдосконалення фізико-хімічних уявлень про природу водних розчинів. Обговорюється значне підвищення розчинності деяких речовин при спільному розчиненні інших, пов'язане з ростом коливальної нелінійності розчинів. Класифіковано різні типи збільшення спільної розчинності декількох солей у воді, що показано на прикладі багатьох нітратів і нітритів. Цілочислові відношення концентрацій різних катіонів у максимумах розчинності, а також спостереження немонотонних залежностей для рядів металів 1-ї і 2-ї груп періодичної системи елементів, як і подібність процесів розчинення та плавлення, ясно вказують на роль електронних оболонок атомів і прояви квантових властивостей розчинів на макроскопічному рівні. Коливально-квантова концепція розчинності підтверджується підсиленням ефектів з ростом температури.

Ключові слова: водний розчин, розчинність, катіон, квантові властивості.

E-mail: nikkorn@mail.univ.kiev.ua

Вступ

Тривалий час вважалося, що при розчиненні електролітів під дією сильних електростатичних полів іонів відбувається орієнтаційна поляризація молекул води. Тому з ростом концентрацій речовин, що розчиняються, все менше залишається так званої "вільної" води з незмінними властивостями. При цьому вважалося, що у випадку розчинення у воді декількох солей відбувається конкуренція іонів за "вільну" воду, з чим пов'язана межа розчинності. До теперішнього часу по розчинності різних речовин накоплено обширний експериментальний матеріал, що не отримав належного осмислення, систематизації та розуміння. Незважаючи на домінуючу роль розчинів у природі і технологічних процесах,

M. Ye. Korniyenko, senior res.

Quantum behaviors in water solutions of electrolytes 2. An increasing of solubility of several substances and an existence of rational attitudes of cations concentration in maxima of solubility

Work is directed on a deepening and perfection of physical and chemical representations about the nature of water solutions. Substantial solubility increasing of some substances is discussed at joint dissolution of others, connected with growth of vibrational nonlinearity of solutions. Different types of increasing in joint solubility of several salts in water that is shown on an example of many nitrates and nitrites are classified. Integer attitudes of different cations numbers in solubility maxima, and also supervision of nonmonotonic dependences for metals series of 1-st and 2-nd groups of periodic system elements as well as similarity of processes of dissolution and fusion, clearly specify a role of atoms electron envelopes and display of quantum properties at a macroscopical level. The vibration-quantum concept of solubility proves to be true by strengthening of effects with growth of temperature.

Key Words: water solution, solubility, cation, quantum properties.

прогрес у науці про розчини стримувався відсутністю належної фундаментальної бази. Вайскопф навіть висловлював думку, що сучасних знань недостатньо, не тільки для аналізу властивостей рідкого стану речовини, але навіть для передбачення самої можливості його існування.

Ситуація почала змінюватися після відкриття колективних властивостей коливальних збуджень рідких середовищ методами спектроскопії вимушеного комбінаційного, а також гіперкомбінаційного розсіяння [1-8], і реєстрації колективних властивостей рідин методами спонтанного розсіяння світла і ІЧ поглинання [9-11]. В розумінні природи рідкого стану речовини радикальну роль відіграло розкриття нелінійно-квантової природи фазових переходів, і зокрема,

Представлено:
д.ф.-м.н., проф. І.І. Адаменко

процесів плавлення і кипіння [12-13], а також колективно-резонансних механізмів теплопровідності [14,15]. Виявилося, що для рідин у першу чергу важлива нелінійна взаємодія різних коливальних мод. Це приводить до нерівноважного збудження вищих коливальних станів, які нерозривно пов'язані з електронними станами. Сильна взаємодія коливальних і електронних станів викликає трансформацію останніх і відповідну зміну структури речовини і її властивостей. Велика роль нелінійних хвильових взаємодій приводить до нівелювання відмінностей мас атомів (іонів) і електронів, істотному порушенню адіабатичного наближення й прояву ефектів сильної фонон-електронної взаємодії. В результаті зв'язку теплового руху атомів з квантовою поведінкою електронів, рідини в цілому є нелінійно-квантовими об'єктами. Тут важливе значення має інтенсивність теплового руху атомів, яка досягає такого ступеня, коли проявляються нові особливості конденсованого стану речовини, властиві рідинам. Найбільш характерними особливостями рідин є висока ефективність нелінійних резонансних процесів і сильна взаємодія коливальних і електронних станів, що тривалий час залишалося без належної уваги. Через малу вивченість таких процесів і підході до рідкого стану речовини з позицій лінійної фізики й спостерігаються великі розбіжності між існуючими уявленнями і дійсністю. Тут у першу чергу слід відзначити, що властива нелінійним середовищам просторово-частотна концентрація енергії [16,17] приводить до підвищеної інтенсивності дифузійних процесів і випаровування рідин при довільних температурах. Це раніше сприймалося як прояви слабкості міжмолекулярних взаємодій і домінування стохастичних процесів. У результаті цього в фізиці рідин замість розгляду нелінійно-детермінованих процесів тривалий час

використовувалися методи термодинаміки й статистичної фізики, що в значній мірі було обумовлено складністю процесів.

В даній роботі на основі нелінійно-квантової концепції конденсованого стану проводиться більше глибокий аналіз експериментальних даних по розчинності двох різних речовин у воді. На відміну від більшості робіт, у яких розглядається розчинність тієї або іншої речовини, ми проводимо порівняльний аналіз розчинності великих груп речовин, спрямований на розкриття істинної природи явищ. У роботі широко використовуються відомі результати дослідження розчинності широкого кола речовин [18-20]. При цьому встановлюється ряд нових незвичайних закономірностей, які безсумнівно вказують на наявність певних квантових властивостей розчинів. Це розширює квантові закономірності водних розчинів, показані на прикладі зв'язки енергій гідратації різних іонів з енергіями іонізації [21]. Дана серія робіт спрямована насамперед на поглиблення і вдосконалення фізико-хімічних уявлень про рідкий стан речовини й інтеграцію всіх природничих наук, що необхідно для їх подальшого розвитку й розгляду широкого кола явищ і процесів з єдиних ідейних позицій.

1. Збільшення розчинності речовин у складних розчинах

Згідно уявлень про зв'язану з іонами воду, гранична розчинність пов'язана з відсутністю в насичених розчинах "вільної" води. В зв'язку з припущенням про конкуренцію різних іонів за «вільну» воду, слід було б очікувати зменшення розчинності для кожної із солей при їх спільному розчиненні. Але результати експериментів, які приведені на рис. 1а-с, показують неадекватність таких початкових уявлень. Тут по осях відкладаються концентрації двох речовин, які одночасно використовуються для приготування розчину. Кожна точка на площині з додатними

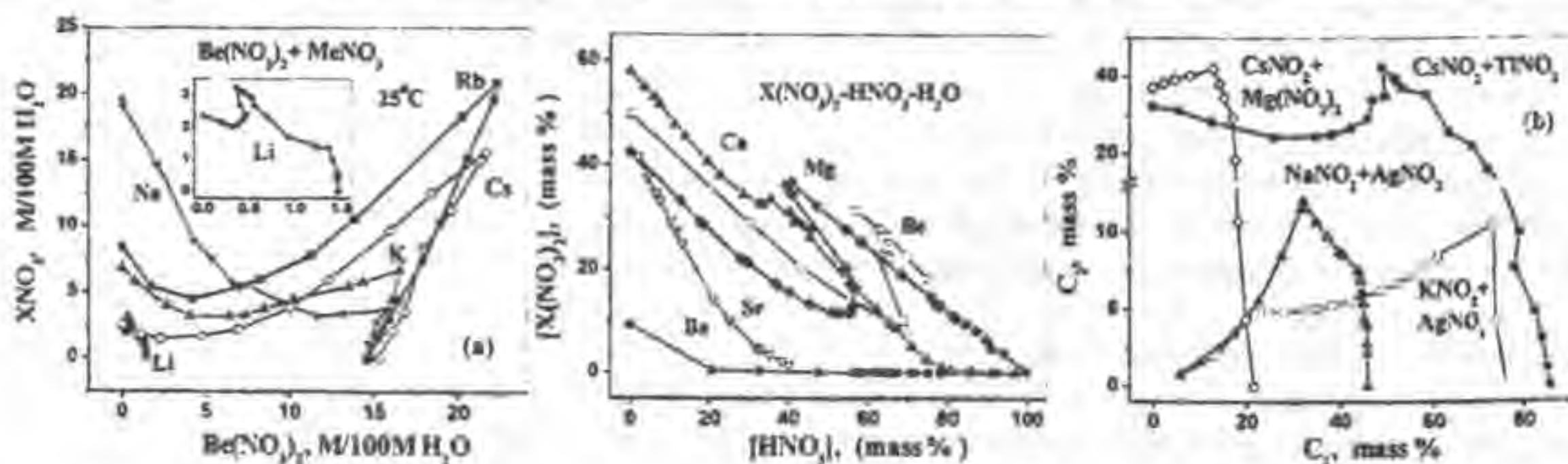


Рис. 1. Сумісні максимальні розчинності нітратів лужних металів і нітрату берилію в воді (а), нітратів лужно-земельних металів у суміші води та азотної кислоти (б) і ряду нітридів XNO_2 і $Mg(NO_3)_2$ у воді (с).

координатами вказує склад розчину, а точки на осях відповідають простим розчинам. Ми розглядаємо розчинність нітратних і нітритних солей, що пов'язане з їх досить високою розчинністю в воді й дозволяє проявитися новим закономірностям. Це пов'язане з активною участю аніонів NO_3 і NO_2 у водневих зв'язках (ВЗ) з молекулами води й вбудовуванням їх у сітку ВЗ. Завдяки низьким температурам плавлення багатьох нітратних солей, для багатьох з них температурні залежності розчинності закінчуються при відповідних температурах плавлення [21]. Останнє показує нерозривний зв'язок процесів плавлення й розчинення. Ці процеси відповідно до робіт [12,13] пов'язані з ефективною генерацією високочастотних коливань, їх сильним зв'язком з електронними станами й трансформацією останніх.

На рис.1а показана залежність розчинності в воді при 25°C нітратів лужних металів залежно від концентрації нітрату берилію. Концентрації речовин, що розчиняють, дані в молях на 100 молей води. Видно що при початкових концентраціях $\text{Be}(\text{NO}_3)_2$ розчинності нітратів лужних металів XNO_3 , де $\text{X}=\text{Li}, \text{Na}, \text{K}, \text{Rb}$ і Cs , спочатку зменшуються, досягають мінімуму й починають зростати. З іншої сторони розчинність $\text{Be}(\text{NO}_3)_2$ у воді зростає при додатковому розчиненні XNO_3 , для всіх катіонів крім Li . Спільна розчинність за участю LiNO_3 у збільшеному масштабі показана на вставці до рис.1а. Важливим моментом проведеного розгляду є істотне збільшення розчинності двох солей у порівнянні з розчинністю кожної із солей окремо. Це проявляється в існуванні виражених максимумів спільної розчинності. Наприклад, максимальна розчинність CsNO_3 підвищується приблизно в 6 разів, хоча абсолютний максимум розчинності досягається для RbNO_3 . Таким чином, розчинення двох солей може сприяти підвищенню розчинності кожної із солей. Це

показує обмеженість існуючих уявлень про процеси розчинення. Відповідно до попередньої роботи [21] близькість енергій гідратації іонів до сумарних енергій іонізації відповідних атомів вказує на хімічну взаємодію іонів з водою. Вбудовування в сітку ВЗ з відновленням їх нейтральності. Слід відзначити немонотонну залежність максимумів розчинності для нітратів елементів 1-ї групи під впливом $\text{Be}(\text{NO}_3)_2$. Він підвищується в ряді нітратів Na, K , досягає максимуму для Rb і зменшується для Cs . Це вказує на важливість взаємозв'язку між гідратованими катіонами лужного металу й берилію. Згідно рис.1а максимальна взаємодія здійснюється між катіонами Rb^+ і Be^{2+} . Вкажемо, що максимальні розчинності нітратів $\text{Na}, \text{K}, \text{Rb}$ і Cs досягаються в області підвищених концентрацій $\text{Be}(\text{NO}_3)_2$, а максимальна розчинність LiNO_3 реалізується при проміжних концентраціях. Можливо це пов'язано з більше міцним зв'язком Li в сітці ВЗ. З подібності явищ розчинності й плавлення ясно, що для підвищення спільної розчинності речовин важливе значення має зростання коливальної нелінійності водних розчинів і взаємодія вищих коливальних станів з електронними.

Подібна немонотонна поведінка розчинності спостерігається і для нітратів елементів 2-ї групи, що ілюструється рис.1б. Тут показані розчинності нітратів $\text{Be}, \text{Mg}, \text{Ca}, \text{Sr}$ і Ba разом з HNO_3 у воді. Локальні максимуми розчинності спостерігаються для нітратів Be, Mg і Ca . Розчинність солей Sr і Ba монотонно зменшується з ростом концентрації азотної кислоти. Підвищення розчинності зростає при переході від Be до Mg і значно зменшується для нітрату Ca . Така немонотонна залежність підвищення розчинності від положення елемента в періодичній системі вказує на прояви взаємодій на рівні електронних оболонок атомів, а отже й квантові властивості для потрійних розчинів. Особливості взаємодії води з іонами малого

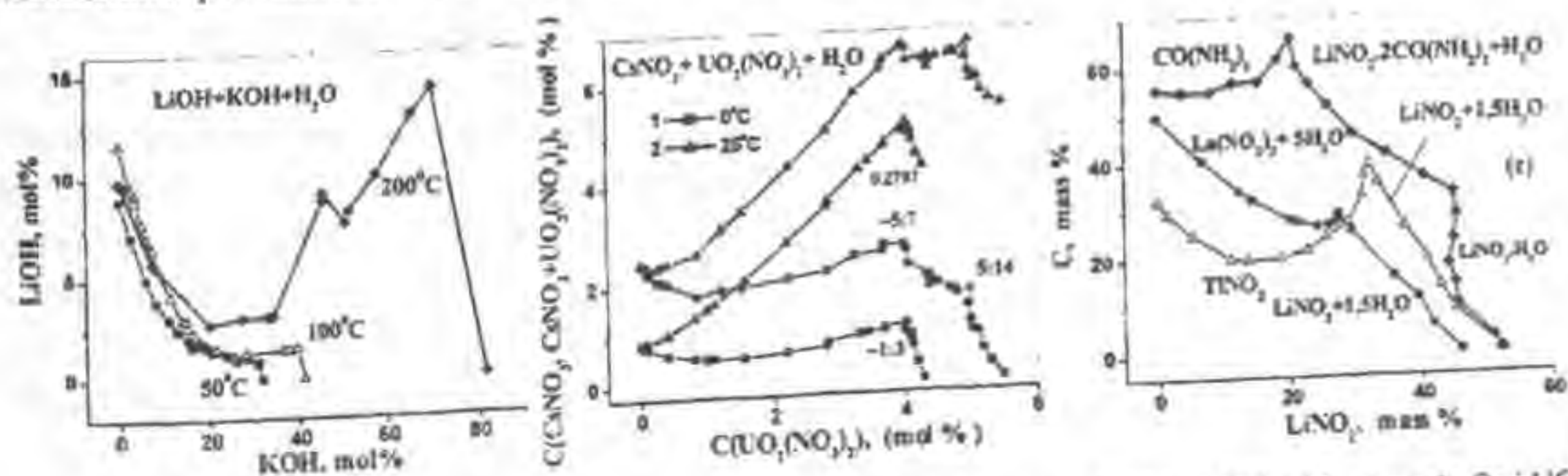


Рис. 2. Сумісні максимальні розчинності в воді при різних температурах LiOH і KOH (а) і нітратів Cs і UO_2 (б), а також нітратів $\text{Li}, \text{Tl}, \text{La}$ і карбаміду (с).

радіуса (Li, Be і Mg) проявляються в тім, що вершини максимумів нахилені в бік менших концентрацій додаткової речовини, у той час як для іонів більшого радіуса (K, Rb і Cs) максимумами зміщуються в область підвищених концентрацій. Характерною рисою розглянутих розчинів є можливість існування 2 або 3 різних концентрацій розчинів при одній концентрації супутньої речовини. Те, який стан розчину реалізується в реальності, залежить від передісторії й способу приготування розчинів.

Зростання розчинності в потрійних розчинах у порівнянні з бінарними спостерігається також для нітритів ряду елементів, що показано на рис.1с. Зростання розчинності CsNO_2 спостерігається при додаванні у водний розчин нітридів магнію й талію. Особливо велике підсилення розчинності в складних розчинах може спостерігатися для малорозчинних солей, наприклад, AgNO_2 . Додавання нітритів Na і K підвищує розчинність AgNO_2 у кілька десятків разів. Це вказує на важливість хімічної взаємодії між речовинами, що розчиняються, і вплив положення елементів у періодичній системі, що свідчить на прояви квантових властивостей розчинів на макроскопічному рівні.

2. Утворення нових сполук у водних розчинах і вплив температури на структуроутворення

Характерною особливістю рідких розчинів у порівнянні з кристалами, як уже вказувалось, є нелінійна взаємодія коливальних мод і сильна фонон-електронна взаємодія. Це проявляється в більшій різноманітності можливих у рідких середовищах процесів перебудови структури і їх залежності від температури й складу середовища. Нетривіальний вплив температури показаний на рис.2а на прикладі спільного розчинення гідроксидів Li і K. В області температур нижче 100°C розчинність LiOH монотонно зменшується з ростом концентрації KOH у розчині. Але при підвищенні T спостерігається сильний ріст розчинності LiOH в області підвищеного вмісту KOH . Згідно рис.2а при 200°C існує два максимума розчинності, в області між якими розчин знаходиться в рівновазі з кристалогідратом, а при менших і гранично високих концентраціях KOH – в рівновазі з LiOH

і KOH відповідно. Таким чином, в розчинах можливе утворення нових сполук, що вказує на підсилення хімічної взаємодії. Вся сукупність результатів може бути зрозумілою тільки з позицій нелінійної коливально-електронної концепції, що розвивається нами. Спостережувані максимумами розчинності і утворення нових сполук можна пояснити посиленням збудження вищих коливальних станів з ростом температури і їх впливом на електронні стани, які визначають взаємодію між складовими розчину, в тому числі підсилення реакційної здатності.

Зростання розчинності й можливість утворення нових речовин з ростом T демонструється також рис.2b, де показане збільшення розчинності у воді CsNO_3 при спільному розчиненні нітрату двоокису урану, а також ріст сумарної розчинності. При $T=0^\circ\text{C}$ спостерігається простий максимум розчинності CsNO_3 , а при кімнатній температурі спостерігається істотний ріст загальної розчинності і розщеплення максимуму. У цьому випадку максимумами сумарної розчинності мають приблизно однакову величину, а в інтервалі між ними також утворюється кристалогідрат.

Характерною особливістю розглядуваних випадків є спостереження цілочислових відношень концентрацій іонів в максимумах розчинності. Для цього концентрації речовин, що розчиняються, даються в молярних відсотках. У максимумі розчинності відношення концентрацій цезію й двоокису урану при 0°C близько до 1/3, а у двох максимумах при 25°C це відношення близьке до 5:7 і 5:14. Більш детально це питання буде розглянуто в наступному розділі.

Локальні максимумами розчинності спостерігаються для нітридів талію й лантану при додаванні в водний розчин LiNO_2 , що показано на рис.2с. В області проміжних концентрацій LiNO_2 спостерігається утворення кристалогідратів $\text{LiNO}_2 + 1,5\text{H}_2\text{O}$ (див. рис.2с), у той час як при низьких концентраціях здійснюється рівновага розчинів з чистими солями Tl і La, а при високих – з LiNO_2 . При розчиненні у воді карбаміду $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ і LiNO_2

спостерігається два максимуми розчинності й крім гідрату $\text{LiNO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ в широкій області концентрацій утворюється змішаний кристалогідрат $\text{LiNO}_2 + \text{CO}(\text{NH}_2)_2 + \text{H}_2\text{O}$. На закінчення розділу вкажемо, що утворення нових сполук у складних водних розчинах обумовлено підвищенням ролі нелінійних хвильових і електрон-фононних взаємодій при підвищенні температури й високих концентраціях розчинів.

3. Цілочислові відношення концентрацій двох катіонів у потрійних розчинах

Немонотонні залежності розчинності в рядах солей металів 1-ї і 2-ї групи періодичної системи елементів ясно вказують на вагому роль електронних оболонок катіонів, а отже, і їх квантових властивостей, які в розчинах електролітів проявляються на макроскопічному рівні. Іншим яскравим проявом квантових властивостей водних розчинів є цілочислові відношення концентрацій різних іонів в особливих точках кривих розчинення. До таких точок крім максимумів розчинності відносяться точки зламів на залежностях розчинності від концентрації або температури. Такі точки добре представлені на рис.1,2, а також рис.3. Зокрема, в розчині нітратів Li і Be в максимумі розчинності LiNO_3 відношення концентрацій катіонів Li^+ і Be^{2+} дорівнює 9, а в іншій особливій точці їх концентрації рівні (див. вставку на рис.1а).

Дуже добре особливі точки спільної розчинності нітритів Mg і K видно на рис.3а. В них відношення концентрацій катіонів Mg^{2+} і K^+ дорівнює 9:5 і 1:5. Хоча водні розчини

електролітів представляють просторові багаточастинкові структури з колективними властивостями, умовно можна розглядати обмежені групи частинок аналогічні елементарним коміркам у кристалах. Раніше, коли ще не були відомі колективні й квантові властивості рідких середовищ, і домінував статистичний підхід у фізиці рідкого стану, часто спостережувані цілочислові відношення компонентів пов'язувалися з утворенням кластерів з невеликої кількості атомів або молекул. Рациональні відношення концентрацій різних катіонів або аніонів у зв'язаних конденсованих середовищах вказують на прояви нових квантових властивостей у неперіодичних некристалічних середовищах. Як відомо, для кристалів не можуть проявлятися осі симетрії п'ятого порядку. Однак така симетрія локально може бути властива рідким середовищам, про що може свідчити відношення катіонів Mg^{2+} і K^+ в нітратних розчинах.

В водних розчинах $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ і HNO_3 спостерігається три максимуми розчинності солі, що видно з рис.3б. В цих максимумах відношення чисел катіонів Zn^{2+} і H^+ відповідно рівні 1, 5/3 і 1/2. Таким чином, в абсолютному максимумі розчинності, імовірно, також проявляється координація п'ятого порядку. На відміну від основних максимумів спільної розчинності на рис. 1а, для змішаних розчинів води й азотної кислоти (рис.1б, рис.3,с) максимуми розчинності нахилені в сторону менших концентрацій HNO_3 . Такого ж типу максимуми розчинності спостерігаються для розчинів нітратів літію й кадмію в воді й азотній кислоті, що показано на рис.3б,с. Таким чином,

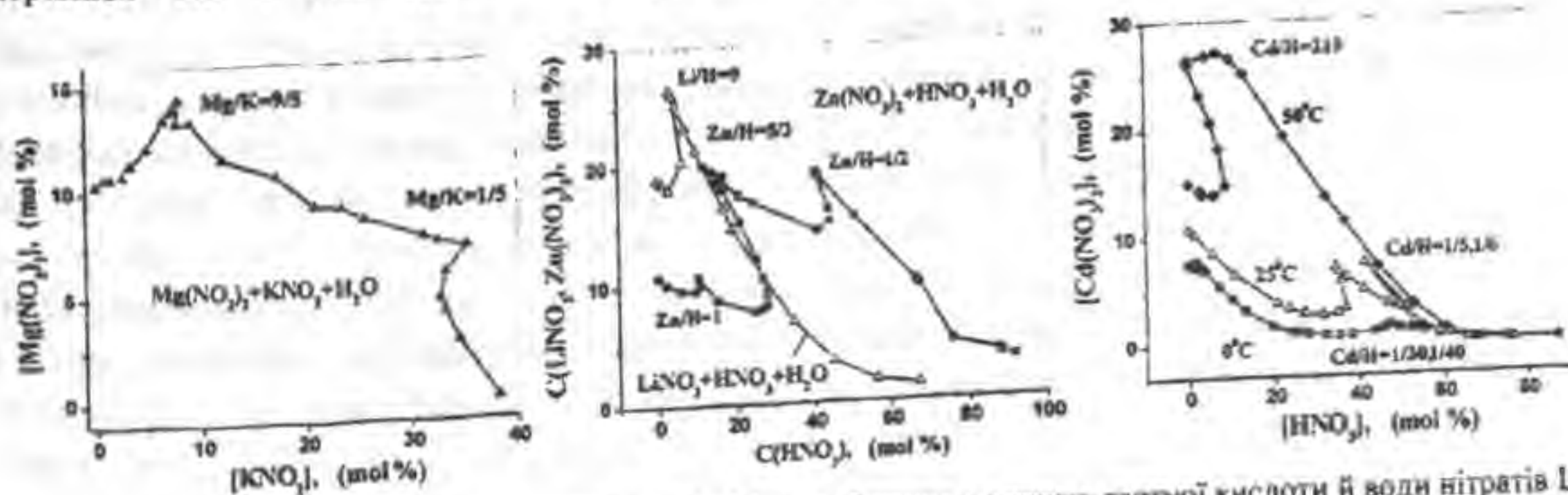


Рис.3. Спільні розчинності у воді нітритів K і Mg (а), і в змішаних розчинах азотної кислоти й води нітратів Li і Zn (б), а також нітратів Cd при різних температурах (с).

можна виділити два типи максимумів спільної розчинності: в основних максимумах концентрації двох речовин спільно зростають (рис.1a), а в додаткових менших максимумах концентрація однієї компоненти зростає при зменшенні концентрації іншої компоненти (мал. 1b,3b). Розчини другого типу досить часто реалізуються при підвищеній концентрації іонів H^+ і наявності іонів з малим радіусом Li^+ , Be^{2+} , Mg^{2+} , для яких властива сильна гідратація. Слід відзначити, що максимуми розчинності 2-го типу можуть реалізуватися в чисто водних розчинах, що видно на вставці рис.1a. Іони Li^+ і Be^{2+} мають досить малі радіуси хоч і значно більші протона. В водно-кислотному розчині $LiNO_3$ (рис.3) відношення Li/H як і відношення Li/Be для водного розчину нітратів Li і Be (рис.1a) дорівнює 9. Розглянуті приклади показують, що тут, імовірно, важлива не абсолютна величина радіусів катіонів, а їх співвідношення, що можна бачити з рис.1c. Для нітридів Cs і Tl спостерігається екстремум 2-го типу, що може бути пов'язане з більшим радіусом іона талію й участю його d-електронів в утворенні міжчастинкових зв'язків.

Важлива роль температурного фактору в зміні типу максимуму й співвідношення чисел катіонів показана на рис.3c. Тут показані результати дослідження розчинності $Cd(NO_3)_2$ в водних розчинах азотної кислоти. При $0^\circ C$ спостерігаються два невеликих максимуми розчинності солі, в яких на один іон Cd^{2+} приходить близько 30 і 40 іонів H^+ . Незважаючи на малий розмір протона, при низьких T не реалізуються максимуми 2-го типу. Вони починають проявлятися при підвищенні температури до кімнатної, коли ріст розчинності $Cd(NO_3)_2$ відбувається при зменшенні концентрації HNO_3 . При цьому відношення Cd/H дорівнює $1/5$ і $1/6$, тобто проявляється пентагональне або гексагональне локальне впорядкування. Слід зазначити дуже малу напівширину другого максимуму розчинності при $25^\circ C$, що також може бути проявом ще не вивчених нелінійно-квантових закономірностей. При підвищенні температури до $50^\circ C$ максимум

розчинності нітрату кадмію сильно зростає. Імовірно, два максимуми трансформуються в один більше широкий, у якому ріст розчинності $Cd(NO_3)_2$ супроводжується значним зменшенням концентрації кислоти. Тут відношення Cd/H досягає величини 219, тобто зростає більш ніж у шість тисяч разів. Такі сильні зміни співвідношення концентрацій іонів при відносно невеликих змінах температури можливі в результаті важливої ролі вперше розглянутих нелінійно-квантових механізмів процесів розчинення.

Обговорення результатів і висновки

1. Показано можливість підвищення розчинності ряду солей до десятків разів при розчиненні необхідної супутньої солі, що пояснюється ростом нелінійності розчинів у коливальній області частот. Останнє веде до збудження вищих коливальних станів і їх взаємодії з електронними станами, що індукує підсилення хімічних взаємодій у водних розчинах. Таким чином, у роботі вперше розкриваються фізичні механізми інтенсифікації хімічних реакцій.
2. Встановлено існування двох різних типів підвищення спільної розчинності речовин у воді. У випадку комбінації катіонів малого й великого радіуса, наприклад, Be^{2+} і Rb^+ , Cs^+ можливо сильне зростання розчинності кожної з солей. Однак тут більшою мірою важливий не геометричний, а новий хімічний фактор, пов'язаний із взаємодією іонів з водним оточенням і наступною взаємодією гідратованих атомів. В цьому випадку реалізується більше можливостей створення нових структурних утворень в порівнянні з вільними атомами. Цей факт уже давно використовується при здійсненні більшості хімічних реакцій в розчинах. Яскравим підтвердженням підсилення структуроутворення в розчинах є підвищення спільної розчинності речовин. З цим пов'язана стійкість гідратованих біологічних макромолекул і виникнення життя у воді. При комбінації двох катіонів малого радіуса, наприклад, H^+ , Li^+ , Be^{2+} , Mg^{2+} висока розчинність реалізується по типу заміщення

одних іонів іншими, тому з ростом концентрації однієї солі, вміст іншої зменшується.

3. Спільна розчинність, хімічні взаємодії й утворення нових речовин у розчинах сильно підсилюються при підвищенні температури, що показано на прикладі водних розчинів LiOH, KOH і інших речовин. Відповідно до нелінійно-хвильової концепції розчинності, що розвивається, це пояснюється підвищенням інтенсивності початкового термічного збудження нелінійно взаємодіючих хвиль. Посилення хімічних взаємодій у розчинах доводиться утворенням нових речовин, у тому числі кристалогідратів і змішаних кристалів, наприклад, $\text{LiNO}_2 \cdot 2\text{CO}(\text{NH}_2)_2$, з якими водний розчин перебуває в рівновазі.

4. На наявність квантових властивостей розчинів електролітів вказують немонотонні зміни розчинності в рядах катіонів металів 1-ї і 2-ї груп періодичної системи елементів, що свідчить про важливість при розчиненні станів електронних оболонок. Яскравим проявом квантових властивостей розчинів є раціональні відношення чисел різних іонів у максимумах розчинності. При цілочислових відношеннях концентрацій різних гідратованих катіонів на відповідних діаграмах розчинності спостерігаються особливості. Це показує спорідненість розчинів і кристалів, але в розчинах на відміну від кристалів реалізуються більш багаті можливості структуроутворення. Це підтверджується як зміною концентрацій речовин у більше широких межах, так і існуванням декількох станів розчинів при фіксованій концентрації однієї з речовин.

5. Певні групи атомів у розчинах раніше відносили до кластерів, які дійсно можуть утворюватися в газових середовищах або молекулярних пучках. В конденсованому стані раціональні відношення чисел іонів пов'язані не з кластерами, а з проявами колективних взаємодій у багаточасткових неперіодичних середовищах. На відміну від кристалів, у розчинах може проявлятися координація гідратованих катіонів з 5 або 9 іншими катіонами, що спостерігається в

розчинах нітридів Mg і K, нітратів Li і Be, а також LiNO_3 і HNO_3 у воді.

Розвинутий новий концептуальний підхід до проблеми структуроутворення і властивостей конденсованих неупорядкованих середовищ відкриває нові можливості розвитку хімії, біології і медицини і інтегрування всіх природничих наук. Отримані результати дають можливість більш свідомо і цілеспрямовано підходити до реалізації різноманітних технологічних процесів, в тому числі з використанням каталізаторів.

Список використаної літератури

1. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Природа частотно-угловой структуры излучения при ВКР в жидкостях// Доклады АН УССР, сер.А-1983.- № 4.- с.65-68.
2. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Антистоксово комбинационное рассеяние на поляритонах в жидкости, индуцированное ВКР// Оптика и спектроскопия – 1986. - т. 60, № 6.- с. 1171-1174.
3. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Генерация возбужденных колебательных состояний при ВКР и поляритонный механизм релаксации в жидкостях// Оптика и спектроскопия –1986.- т.61, № 1.- с.174-177.
4. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Федорченко А.М. Тонкая структура и аномальное уширение спектров при вынужденном комбинационном рассеянии// Сб."Физика жидкого состояния", Киев,-1986.- вып. 14. - с. 41-54.
5. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Спектральное проявление особенностей генерационных механизмов излучения ВКР// Сб. научных трудов, "Спектроскопия неметаллических кристаллов", Киев, Наукова думка, -1990.- с.120-123.
6. Корниенко Н.Е., Гайдук В.Ф., Малый В.И., Понежа Г.В. Возбуждение обертонов колебательных возбуждений при

- вынужденном комбинационном рассеянии в самофокусирующих жидкостях, поляритонный механизм релаксации и измерение ангармонизма колебаний// Сб. научных трудов, "Оптическая спектроскопия", АН Украины, Ин-т физики, Киев, - 1993.- с. 171-176.
7. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е. Гиперкомбинационное рассеяние на поляритонах в четыреххлористом углероде// Письма в ЖЭТФ - 1982. - т. 35, вып. 8.- с. 312-314.
8. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е. Гиперкомбинационное рассеяние и правила отбора по волновому вектору и матричному элементу в колебательных спектрах стекол и жидкости// ЖЭТФ -1983.- т. 84, вып. 4.- с. 1266-1278.
9. Корнієнко М.Є., Спостереження позовжньо-поперечного розщеплення в спектрах комбінаційного розсіяння рідкого хлороформу //УФЖ – 2001.-Т.46, № 5- 6. - с.546-552.
10. Корнієнко М.Є., Низькочастотні колективні моди системи водневих зв'язків води// УФЖ – 2002.- Т.47, № 4. - с.361-364.
11. Корнієнко М.Є., Круть О.В., Спостереження граткових мод рідкого CS_2 в області сумарних коливальних смуг ІЧ поглинання// Вісник Київсько-го університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№1- с.345-357.
12. Корнієнко М.Є., Про зв'язок теплот плавлення кристалів з енергіями оптичних фононів // Вісник Київського університету, Серія: фізико- математичні науки.- 2004.- № 4.- с.466-476.
13. Корнієнко М.Є., Про фонону дискретність теплот кипіння// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2005. - №3.- с. 520-534.
14. Корнієнко М.Є., Про колективну природу теплопровідності води і деяких інших рідин// Вісник Київського університету, Серія: фізико- математичні науки.- 2005.-№3.- с.511-519.
15. Корнієнко М.Є. Колективні властивості теплопровідності рідин. І. Резонансні властивості теплопровідності води і водних розчинів// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2005. -№4.- С.372-384.
16. Корниенко Н.Е., Михницкий С.И. Явление концентрации энергии при многоволновой колебательной релаксации в воде// XIII національна школа-семінар з міжнародною участю "Спектроскопія молекул та кристалів", Суми, 20-26 квітня 1997 р., Тези доповідей, с.157.
17. Корнієнко М.Є. П'ятихвильове наближення в теорії вимушеного розсіяння світла// УФЖ- 2002.- т. 47, № 5.- С. 435-440.
18. Проценко П.И., Разумовская О.Н., Брукова Н.А., Справочник по растворимости нитритных и нитратных солевых систем// Л., Химия.- 1971.
19. Справочник по растворимости, сост. Коган В.Б. и др. т.1, кн. 1-2, Бинарные системы.
20. Иткина Л.С. Гидроксиды лития, рубидия и цезия М.,Наука.-1973.- 36 с.
21. Корнієнко М.Є. Квантові закономірності в водних розчинах електролітів І. Природа розчинності речовин в воді і гідратації іонів// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2006.- № 2.

Надійшла до редколегії 15.06.2006

УДК 543.423:574

В.В. Пророк, к.ф.-м.н., ст.н.с.

Залежність від часу концентрації калію, ^{137}Cs та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині

Експериментально досліджено залежність від часу концентрації калію, ^{137}Cs та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині протягом двох років на трьох дослідних ділянках з різними типами ґрунту у природних умовах у зоні відчуження Чорнобильської АЕС. Згідно отриманих даних, ці величини змінювалися у декілька разів протягом часу досліджень.

Ключові слова: калій, цезій-137, ґрунтовий розчин

*E-mail: prorok@univ.kiev.ua

Вступ

Вивчення надходження радіоцезію та радіостронцію до рослини відноситься до найбільш актуальних проблем радіоекології. Протягом більш ніж півстоліття дослідники вивчають надходження цих елементів до рослин. На відміну від стронцію, в якого є дуже гарний аналог відносно надходження до рослини (кальцій), що значно полегшує прогнозування надходження стронцію до рослини, у цезію такого аналога серед елементів макроживлення рослин нема. Численні дослідження надходження цезію до рослин, на жаль, проводяться не завжди коректно. Часто проводять порівняння надходження цезію до різних видів рослин, що вирости в різних умовах. Між тим, у роботах [1-3] показано, що навіть в рослинах одного й того ж виду, що вирости на тій самій ділянці, але в різний час, вміст цезію інколи відрізняється у десятки разів. Автори вказаних публікацій пояснюють це різною концентрацією ^{137}Cs у ґрунтовому розчині в різний час та різною вологістю ґрунтів в різний час.

Задача прогнозування надходження цезію до рослини, що росте на даній ділянці з даним типом ґрунту, дуже складна. З нашої точки зору доцільно її розбивати на дві задачі: – задачу прогнозування складу ґрунтового

V.V. Prorok, senior researcher

Dependencies of concentration of potassium, ^{137}Cs and ratio $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ in soil solution on time

Dependencies of concentration of potassium, ^{137}Cs and ratio $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ in soil solution on time were investigated experimentally for three types of soil at natural conditions at the Chornobyl Exclusion Zone during two years. According to the obtained data, all these values varied for several times during the time of investigations.

Key words: potassium, cesium 137, soil solution

розчину на даній ділянці, як функції від часу, та задачу прогнозування надходження цезію до рослини в залежності від параметрів ґрунтового розчину та властивостей рослини. Це дві окремі доволі складні задачі. Ми вважаємо, що об'єднання цих двох задач в одну є також однією з причин того, що після півстолітніх досліджень й дуже багатьох публікацій на цю тему на сьогоднішній день немає надійної методики прогнозування надходження цезію до рослин, що підтверджують останні публікації (наприклад, [4]).

Надходження цезію до рослини у якийсь конкретний момент часу визначається в першу чергу параметрами ґрунтового розчину в цей момент часу. Є чимало теоретичних досліджень (наприклад, [5-8]) щодо вмісту цезію у ґрунтовому розчині в залежності від параметрів ґрунту. На жаль, експериментальних даних щодо вмісту цезію у ґрунтовому розчині у природних умовах у літературі дуже мало.

У радіоекології використовується поняття коефіцієнту розподілу K_d – відношення рівноважної сумарної концентрації радіонукліда у твердій фазі до його рівноважної концентрації у розчині. При поглинанні елементів за механізмом іонного обміну ця величина є постійною. Використовується також поняття обмінного

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

потенціалу зв'язування радіоцезію RIP (Radiocaesium Interception Potential). Обмінний потенціал зв'язування ^{137}Cs – постійна величина для даного сорбенту, що характеризує його здатність селективно та зворотно сорбувати ^{137}Cs [8-10]. Згідно цих понять, у ґрунтовому розчині на даній ділянці відношення концентрацій ^{137}Cs та калію також не залежить від часу. У деяких роботах, наприклад [4], це використовується у процесі досліджень як встановлена закономірність. Вважається, що зменшення відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині відбувається за рахунок збільшення загальної концентрації калію у ґрунті, або незворотної фіксації ^{137}Cs у ґрунті.

Мета цієї роботи – експериментальне дослідження залежності від часу концентрації калію, ^{137}Cs та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині у природних умовах.

Опис експерименту та обговорення отриманих результатів

Дослідження проводилися на трьох експериментальних ділянках, розташованих у зоні відчуження Чорнобильської АЕС: ділянка А – дерено-підзолистий середньопідзолений глеюватий піщаний ґрунт; ділянка В – торф'яно-болотний низинного типу ґрунт; ділянка С – дерено-підзолистий середньопідзолений ґрунт.

Кожного разу з кожної ділянки відбирали по п'ять проб ґрунту за допомогою пробовідбірника діаметром 5 см на глибину 20 см. Усі відібрані в один день з однієї й тієї ж ділянки проби змішувалися. З ґрунту екстрагувався ґрунтовий розчин за допомогою центрифуги РС-6. Доцентрове прискорення при цьому дорівнювало 3000 g. З деяких зразків ґрунту ґрунтовий розчин видобувався зразу, а в деякі зразки ґрунту добавлялася вода, потім цей ґрунт оброблявся на ротаторі протягом однієї години, а вже потім з нього екстрагувався ґрунтовий розчин. Наші оцінки для всіх досліджуваних ґрунтів показують, що

додавання води у ґрунт змінює концентрацію ^{137}Cs у ґрунтовому розчині не більше ніж на 5 %, якщо після додавання води вологість цього ґрунту не перевищує вологості насичення для цього ґрунту. Ми використовували наші експериментальні дані по концентрації ^{137}Cs у ґрунтовому розчині, вологості досліджуваних ґрунтів та концентрації ^{137}Cs у цих ґрунтах, а також літературні дані по вмісту обмінної форми ^{137}Cs у чорнобильських ґрунтах [11] для оцінки можливої зміни концентрації ^{137}Cs у ґрунтовому розчині при додаванні води до досліджуваного ґрунту.

Наші експериментальні результати для ділянки А також підтверджують, що в межах експериментальної похибки таке незначне додавання води в досліджуваний ґрунт не змінює концентрацію ^{137}Cs у ґрунтовому розчині. Тобто, у деякому наближенні додавання води у ґрунт до повного заповнення ґрунтовим розчином ґрунтових капілярів не змінює процентного складу ґрунтового розчину. Якщо пори у ґрунті заповнені ґрунтовим розчином не повністю, то тільки частина розчинних речовин, що містить даний ґрунт, знаходиться у розчиненому стані та є доступною для рослин.

Як правило, кожного разу ми екстрагували приблизно 200 мл ґрунтового розчину для досліджуваного ґрунту. Центрифугований розчин фільтрувався спочатку скрізь скляний фільтр Whatman GF/A, а потім скрізь фільтр ТУ 6-09-1678-86 з діаметром пор ~ 3 мкм. Ґрунтовий розчин після фільтрування був прозорим. Для консервації цього розчину додавали концентровану азотну кислоту у пропорції 1 мл кислоти на 500 мл ґрунтового розчину та нагрівали його до кипіння.

Вміст ^{137}Cs у зразках визначався за допомогою гама-спектрометра "Canberra" з експериментальною похибкою 10%. Вміст калію у зразках вимірювався оптичним методом за допомогою ІСР-спектрометра "Spectro" з похибкою 0,5%. Більш докладно методика експерименту описана в роботах [1-3].

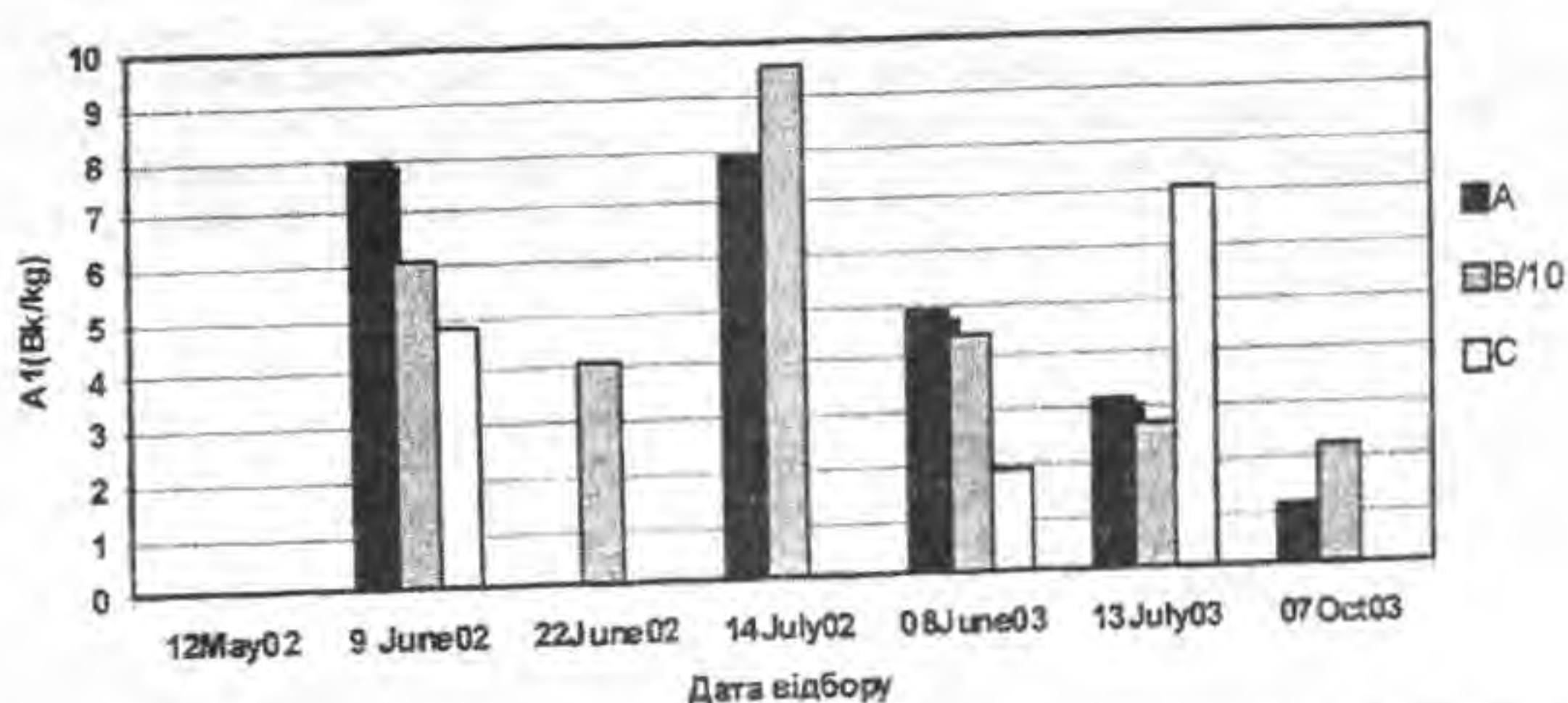


Рис.1. Вміст ^{137}Cs у ґрунтовому розчині A_1 (Bq/kg) для дослідних ділянок А, В та С та різних дат відбору зразків

На рис.1 представлений вміст ^{137}Cs у ґрунтовому розчині для всіх трьох дослідних ділянок та різних дат відбору зразків. З рис.1 можна бачити, що концентрація цезію у ґрунтовому розчині на даній ділянці змінюється протягом сезону у декілька разів. Загальна кількість ^{137}Cs у досліджуваних ґрунтах за два роки досліджень змінювалась незначно. Це монотонне зменшення по експоненціальному закону. Якщо K_d^{cs} (обмінний коефіцієнт розподілу ^{137}Cs для даного ґрунту) постійний, то концентрація ^{137}Cs у ґрунтовому розчині теж не повинна істотно змінюватись. Такі значні зміни концентрації ^{137}Cs , які ми отримали шляхом прямих вимірів, обумовлені, очевидно, тим, що у природних умовах коефіцієнт K_d^{cs} з часом змінюється. Це можна пояснити зміною з часом кількості або властивостей центрів захвату іонів ^{137}Cs у ґрунті в природних умовах. Жодною існуючою на сьогоднішній день теоретичною моделлю розрахунку вмісту цезію у ґрунтовому розчині не можна пояснити такої залежності від часу концентрації цезію у ґрунтовому розчині. А тому найбільш надійний шлях визначення цієї величини на сьогоднішній день – прями виміри вмісту цезію у ґрунтовому розчині.

У таблиці 1 наведені концентрація калію та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині, на дослідних ділянках А, В та С для різних дат відбору зразків.

Таблиця 1

Концентрація калію ($\text{мг}/\text{см}^3$) та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ (Бк/мг) у ґрунтовому розчині для дослідних ділянок А, В та С та різних дат відбору зразків.

Ділянка	Дата відбору	K ($\text{мг}/\text{см}^3$)	$^{137}\text{Cs}/\text{K}$ (Бк/мг)
A	09.06.2002	0,007	1,143
A	14.07.2002	0,0282	0,280
A	08.06.2003	0,0214	0,229
A	13.07.2003	0,0217	0,147
B	09.06.2002	0,0045	13,555
B	22.06.2002	0,007	5,828
B	14.07.2002	0,0047	20,213
B	08.06.2003	0,0217	2,041
B	13.07.2003	0,020	1,350
C	09.06.2002	0,0475	0,101
C	08.06.2003	0,0475	0,40
C	13.07.2003	0,0528	0,134

З наведеної таблиці видно, що концентрація калію у ґрунтовому розчині та відношення концентрації $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині суттєво змінюються з часом.

Ніякі добрива на досліджувані ділянки протягом експерименту не вносилися. Оскільки загальний вміст калію в досліджуваних ґрунтах суттєво змінюватися не міг, тому вищевказані зміни концентрації калію у ґрунтовому розчині можуть бути обумовлені зміною з часом співвідношення між водорозчинною, обмінною та фіксованою фракціями калію у ґрунті в природних умовах. Це узгоджується з даними [12], що протягом року у природних умовах кількість обмінного калію у ґрунті змінюється у 2-3, а інколи у 5 разів. Ми вважаємо, що найбільш ймовірною причиною цих змін є неконтрольовані фізико-хімічні та біологічні процеси у досліджуваних ґрунтах. Згідно отриманих нами експериментальних даних відношення концентрації $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині протягом часу досліджень змінювалося навіть більше, ніж окремо взяті концентрації калію та ^{137}Cs у ґрунтовому розчині. Це вказує на різну природу змін концентрації калію та ^{137}Cs у ґрунтовому розчині.

Найбільш надійний шлях визначення досліджуваних величин на сьогоднішній день – їх прямі виміри.

Висновки

У природних умовах концентрація калію та ^{137}Cs у ґрунтовому розчині та їх відношення весь час змінюються. Причиною цього є зміна з часом кількості та властивостей центрів захвату ^{137}Cs та кількості обмінного калію у ґрунті в природних умовах.

Список використаних джерел

1. Пророк В.В., Масон К.Ф.В., Тимофеев С.Ф. та ін. Залежність вмісту ^{137}Cs у рослині від параметрів ґрунту // Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат., 2004. - Вип. 3. - С. 407 - 416.
2. Пророк В.В., Булавін Л.А., Агеев В. А., та ін. Закономірності надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини. // Ядерна фізика та енергетика. 2007.-19, №1.-С.115 – 122
3. Prorok V.V., Mason C.F.V., Ageyev V.A., та ін. The Transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants. // Proceeding of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006. -Tucson, 2006. -WM06/66.html
4. Nadia Waegeneers, Teresa Sauras-Year, Yves Thiry, Ramón Vallejo, Erik Smolders, Chantal Madoz-Escande, and François Bréchignac, Plant uptake of radiocaesium from artificially contaminated soil monoliths covering major European soil types, Journal of Environmental Radioactivity, v.100, Issue 6, June 2009, Pages 439-444.
5. Протас Н.М., Шпинар Л.И., Ясковец И.И. Механизмы, контролирующие миграцию радионуклидов в системе почва-растение. // Агроэкологический журнал. -2004. -№2. - С.67-72.
6. Пристер Б.С., Бизольд Г., Девиль-Ковелли Ж. Способ комплексной оценки свойств почвы для прогнозирования накопления радионуклидов растениями. // Радиационная биология. Радиоэкология. -. 2003. -43. -№.6. -С.688-696.
7. Ehlen S., Kirchner G. Environmental processes affecting plant root uptake of radioactive trace elements and variability of transfer factor data: a review. J. Environ. Radioact., 2002, 58, P.97 - 112.
8. Коноплев А.В., Коноплева И.В. Параметризация перехода ^{137}Cs из почвы в растения на основе ключевых почвенных характеристик. // Радиационная биология. Радиоэкология. -1999. -39. -№.4. С.455-461.
9. Wauters, A. Elsen and A. Cremers, Prediction of solid/liquid distribution coefficients of radiocaesium in soils and sediments. Part 3: a quantitative test of a K_D predictive equation, Applied Geochemistry 11 (1996), pp. 601-603
10. L. Sweeck, J. Wauters, E. Valcke and A. Cremers, The Specific Interception Potential of Soils for Radiocaesium. In: G. Desmet, Editor, Transfer of Radionuclides in Natural and Semi- Natural Environments, Elsevier Applied Science, London (1990), pp. 249-258.
11. Агеев В.Ю. Миграция радионуклидов в почвах Беларуси // Изв. Академии аграрных наук Республики Беларусь. - 2002. - № 1. - С. 61 - 65.
12. Най П.Х., Тинкер П.Б. Движение растворов в системе почва-растение. М. «Колос», 1980, 257с.

Надійшла до редколегії 07.10.09 р.

УДК 551.521.3

Е.І.Терез¹, Г.А.Терез², В.М.Вашченко³,
А.В.Козак², Ж.І.Патлашенко⁴, Є.А.Лоза⁴

Вплив температури та тиску на точність визначення параметрів атмосфери при фотометричних спостереженнях в Антарктиці

Показано, що основний вклад в похибку визначення аерозольної оптичної товщини атмосфери при проведенні сонячних фотометричних спостережень вносять неточності обчислення релеевської оптичної товщини. Це особливо сильно проявляється у синій та ультрафіолетовій областях спектру при спостереженнях в Антарктиці, де загальна оптична товщина атмосфери менше 0.1. Обговорюються похибки обчислення релеевської оптичної товщини в залежності від зміни тиску та температури. Показано, що цей ефект мінімальний для берегової антарктичної станції «Академік Вернадський», але для материкових антарктичних станцій необхідно при розрахунках релеевської оптичної товщини враховувати величини як тиску, так і температури.

Ключові слова: релеевська оптична товщина, похибки обчислення, Антарктида.

E.I.Terez¹, G.A.Terez², V.M.Vashchenko³,
A.V.Kozak², Zh.I.Patlaschenko⁴, Ye.A.Loza⁴

Influence of temperature and pressure on the accuracy of atmospheric parameter determination during photometric observations in Antarctica

It is shown that determination errors of the atmospheric aerosol optical thickness during solar photometric observations are mainly caused by uncertainties in the Rayleigh optical thickness calculations. It is especially noticeable in the blue and ultra-violet spectral regions during observations in Antarctica, where the total atmospheric optical thickness is less than 0.1. Errors of the Rayleigh optical thickness calculations depending on pressure and temperature changes are discussed. It is shown that the effect is negligible for the shore-located station "Akademik Vernadsky", but for the Antarctic stations located on the land it is necessary to take into account both temperature and pressure while calculating the Rayleigh optical thickness.

Key Words: Rayleigh optical thickness, errors, Antarctic.

¹ НДІ «Кримська астрофізична обсерваторія», 98409, Україна, Крим, Бахчисарайський район, с.Научний, email: terez@crimea.ua

² Таврійський національний університет імені В. І. Вернадського, 95007, Україна, Крим, Сімферополь, пр.Вернадського, 4

³ Національний антарктичний науковий центр, Київ, email: daniilko@mail.ru

⁴ Київський національний університет імені Т.Г.Шевченка, Київ.

Вступ

Аерозольна оптична товщина $\tau_{\text{аер}}(\lambda)$ є однією з основних характеристик оптичних властивостей атмосфери. Ця величина визначається за даними натурних спостережень спектральної прозорості атмосфери $\rho(\lambda)$, яка потім перераховується у величину загальної оптичної товщини атмосфери $\tau(\lambda)$ [$\tau(\lambda) = -\ln \rho(\lambda)$]. Оптична товщина атмосфери, в загальному випадку, є сумою трьох компонент

$$\tau(\lambda) = \tau_{\text{рел}}(\lambda) + \tau_{\text{аер}}(\lambda) + \tau_{\text{мол}}(\lambda), \quad (1)$$

де $\tau_{\text{рел}}(\lambda)$ - релеевська оптична товщина, $\tau_{\text{мол}}(\lambda)$ - оптична товщина, обумовлена дійсним молекулярним поглинанням в смугах

атмосферних газів.

При проведенні фотометричних спостережень поза молекулярними смугами поглинання ($\tau_{\text{мол}}(\lambda) = 0$), згідно формули (1) аерозольна оптична товщина рівна

$$\tau_{\text{аер}}(\lambda) = \tau(\lambda) - \tau_{\text{рел}}(\lambda) \quad (2)$$

З формули (2) видно, що похибка визначення аерозольної оптичної товщини визначається похибкою вимірювання загальної товщини атмосфери $\tau(\lambda)$ і похибкою обчислення значення релеевського розсіяння. Сучасні фотометричні спостереження в місцях з хорошим астрокліматом дозволяють мінімізувати похибки вимірювань величин $\tau(\lambda)$ 0,1% - 0,2%. Тому

основний внесок до похибок визначення аерозольної оптичної товщини спектру вносять неточності розрахунку релеевської оптичної товщини. Це особливо сильно виявляється в синій і ультрафіолетовою областях спектру, також при спостереженнях в умовах високогір'я, в Арктиці і особливо сильно - в Антарктиці [1]. Цей ефект, так званої аномально високої прозорості (загальна оптична товщина атмосфери $\tau(\lambda)$ менше 0,1), був виявлений ще в 70-х роках Родіоновим [2]. В умовах такої аномальної прозорості неточність визначення релеевської оптичної товщини приводить до того, що в ультрафіолетовій області спектру виходять негативні величини аерозольної оптичної товщини [3], що відповідає прозорості атмосфери більше 100 % і тому не має фізичного сенсу. Прикладів подібних спостережень, виконаних і в Україні і за кордоном, достатньо багато. Так, в роботі [4] автори на підставі проведених сонячних фотометричних спостережень заявили про аномально високу прозорість атмосфери (тобто про дуже малу величину аерозольної оптичної товщини) в ультрафіолетовій області спектру на високогірній станції НАН України «Терскол». Проте пізніше [5] було показано, що в цій роботі були невірно обчислені значення релеевської оптичної товщини. Звідси і занижені значення $\tau_{\text{аер}}(\lambda)$.

Огляд робіт за визначенням релеевського розсіювання

Вперше формулу, що описує розсіювання світла в повітрі, отримав Дж.Релей (Rayleigh). Релей використовував уявлення про розсіююче середовище як про сукупність осциляторів (які він ототожнював з молекулами), що володіють тепловим рухом. В цьому випадку величина розсіювання визначається за формулою

$$\tau_{\text{рс}} \sim \lambda^{-4} \quad (3)$$

Згодом теорія розсіювання розвивалася і уточнювалася. Л.І.Мандельштам в 1907 р. показав, що принциповою умовою для розсіювання світла в суцільному середовищі є порушення її оптичної однорідності, при якому показник заломлення середовища не постійний, а міняється від точки до точки. Пізніше фізик М.Смолуховський розвинув повну теорію

розсіювання світла розрідженими газами, викликаного тепловими флуктуаціями (так зване молекулярне розсіювання світла). Він показав, що розсіювання відбувається не на молекулах, а на оптичних неоднорідностях середовища, викликаних флуктуаціями щільності, яка у свою чергу виникає внаслідок хаотичного руху молекул.

Для виведення формули розрахунку релеевського розсіювання реальної атмосфери необхідно враховувати зміну показника заломлення повітря від довжини хвилі і чинник деполаризації, який виникає внаслідок анізотропії молекул повітря і який теж змінюється в залежності від довжини хвилі. Одна з перших робіт, де були виконані ретельні розрахунки коефіцієнтів релеевського розсіювання і оптичної товщини стандартної ізотермічної атмосфери, тобто за умови, що повітря сухе, таке, що містить 0,03% CO_2 в одиниці об'єму при нормальному тиску 760 мм Hg (1013,25 мб) і температурі повітря 15°C в спектральній області 0,2 мк - 20,0 мк, була робота Пендорфа [6]. Елтерман [7, 8] розширив дослідження Пендорфа, додавши в таблиці величини коефіцієнта об'ємного релеевського розсіювання і релеевської оптичної глибини як функції довжини хвилі (0,27 - 4,0 мкм) і висоти (0 - 50 км) використовуючи дані стандартної атмосфери США, 1962 [9]. Він також використовував формулу Едлена [10] для індексу заломлення повітря і постійну величину 0,035 для чинника деполаризації. Грунтуючись на останніх даних деполаризації, Хойту [11] вдалося створити таблицю величин релеевської оптичної глибини як функції довжини хвилі (0,3 - 1,5 мк) для шести стандартних атмосфер за допомогою формули Едлена [10] для індексу заломлення і постійної величини чинника деполаризації 0,0139. Трохи пізніше Фрьоліх і Шоу [12], на підставі нових даних про оптичні параметри атмосфери зробили перерахунок значень релеевської оптичної товщини в області спектру 0,2 мк - 1,5 мк для п'яти стандартних атмосфер [13]. При цьому було використано значення чинника деполаризації, отримане раніше Хойтом [11]. Результати Фрьоліха і Шоу нижче за дані Пендорфа на 4,5%, що, мабуть, пояснюється заниженим значенням чинника деполаризації, яке згідно Янгу [14]

повинне бути 0,0279. Дас і Ікбел [15] провели порівняння коефіцієнтів релеевського розсіяння в спектральній області 0,3 мк - 0,9 мк, отриманих Лекнером [16] з показником ступеня рівним 4,08 і заснованих на теоретичній роботі Пендорфа, коефіцієнтів релеевського розсіяння, обчислених Ельтерманом [8], і коефіцієнтів релеевського розсіяння, отриманих Кнайжісом [17]. Результати виявилися близькими. Слід також відзначити дослідження Бейтса [18], що дозволили уточнити величину поперечного перетину молекулярного розсіяння. На підставі даних Бейтса, Ніколет [19] запропонував формулу для обчислення перетинів релеевського розсіяння.

У фундаментальній роботі Бучольца [20] були переглянуті результати попередніх робіт і представлений узгоджений набір нових величин для поперечних перетинів релеевського розсіяння, коефіцієнтів абсолютного релеевського розсіяння, а також релеевських оптичної товщини для діапазону довжин хвиль 0,2 мк - 4 мк шляхом використання якнайкращих оцінок індексу заломлення і чинника деполаризації повітря. Більш того, до обчислень також увійшла дисперсія чинника деполаризації залежно від довжини хвилі. Представлено також порівняння величин, отриманих в даній роботі, з попередніми обчисленнями параметрів релеевського розсіяння, а також наново визначені значення релеевської оптичної товщини для стандартної атмосфери (США, 1962) і для п'яти допоміжних моделей з урахуванням сезонних і широтних варіацій. (тобто для тропічної атмосфери з широтою $N = 150$, двох середньоширотних атмосфер з $N = 450$ для липня і січня, відповідно, і субарктичної атмосфери з $N=600$ для січня). Нові значення релеевських оптичної товщини приблизно на 3 % у видимій і до 10 % у УФ області вище отриманих раніше.

Визначення релеевського розсіяння

Згідно теорії Релея, тобто для випадку, коли розміри розсіюючих частинок малі в порівнянні з довжиною хвилі світла, поперечний перетин розсіяння $\sigma(\lambda)$, розрахований на одну молекулу, рівний

$$\sigma(\lambda) = \frac{24\pi^3(n^2 - 1)^2}{\lambda^4 N^2 (n^2 + 2)^2} \cdot \frac{6 + 3d}{6 - 7d}, \quad (4)$$

тут n - показник заломлення повітря, N - число молекул в 1 см^3 (число Лошмідта). Для стандартного повітря, тобто при $t = +15^\circ\text{C}$ і $P = 1013,25 \text{ мбар}$, $N = 2,54743 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Перший співмножник формули (4) був запропонований самим Релеєм, другий співмножник формули (поправка Кінга) був введений пізніше при подальшому уточненні теорії розсіяння з урахуванням деполаризації молекул. Цей співмножник також декілька залежить від довжини хвилі і чисельно рівний 1,05 для видимої області спектру. (Точні значення по довжинах хвиль приведені в роботі [18]). Він включає величину d - так званий чинник деполаризації молекул. Поперечний перетин розсіяння $\sigma(\lambda)$ зазвичай приводиться в см^2 .

Оскільки $n \approx 1$, то $(n^2 - 1) \approx 2(n - 1)$ і $(n^2 + 2) \approx 3$. Враховуючи, що член з чинником деполаризації для повітря рівний 1,05, формулу (4) можна записати так:

$$\sigma(\lambda) = 1.05 \frac{32\pi^3(n - 1)^2}{3\lambda^4 N^2} \quad (5)$$

Кількість розсіяння в об'ємі газу за даних умов характеризується об'ємним коефіцієнтом релеевського розсіяння в

$$\beta(\lambda, h) = \sigma(\lambda) \cdot N(h) \quad (6)$$

де $N(h)$ - число молекул (щільність) в 1 см^3 на даній висоті. У формулі (6) $\beta(\lambda, h)$ виражено в зворотних сантиметрах (см^{-1}).

Враховуючи (6) для нульової висоти h_0 (рівень моря)

$$\beta(\lambda) = 1.05 \frac{32\pi^3(n - 1)^2}{3\lambda^4 N} \quad (7)$$

Щоб набути значення оптичної товщини $\tau_{\text{рел}}$ обумовленою об'ємним релеевським розсіянням для висоти h , потрібно проінтегрувати коефіцієнт об'ємного розсіяння $\beta(\lambda, h)$ по всій висоті атмосферного стовпа.

$$\tau_{\text{рел}}(\lambda, h) = \int_h^\infty \beta(\lambda) dh = \int_h^\infty \sigma(\lambda) \cdot N(h) dh \quad (8)$$

Для однорідної стандартної атмосфери

поперечний перетин релеевського розсіяння приймається однаковим по всій висоті, тобто $\sigma(\lambda) = \text{const}$. В цьому випадку формула (8) приймає вигляд

$$\tau_{\text{рел}}(\lambda, h) = \sigma(\lambda) \int_h^{\infty} N(h) dh. \quad (9)$$

Значення коефіцієнтів $\beta(\lambda)$ і $\sigma(\lambda)$ для стандартної атмосфери в інтервалі довжин хвиль 0,2 мк - 4,0 мк приведено в роботі Бучольца [16].

Слід звернути увагу на те, що у формулі (4) кількість молекул в одиниці об'єму N стоїть в знаменнику. Це слідство того, що величина $(n-1)$ пропорційна N і у результаті $\beta(\lambda)$ пропорційно N , а не $1/N$. Згідно формули (4) показник ослаблення за рахунок релеевського розсіяння назад пропорційний λ^{-4} . Це явна залежність. У формулі ж є ще і невелика неявна залежність у від λ через показник заломлення n . Якщо врахувати залежність $n(\lambda)$, то в знаменнику показник ступеня у λ буде 4,09 замість 4.

При розрахунках величину інтеграла у формулі (9) прийнято замінювати висотою однорідної атмосфери. Це умовна атмосфера, в якій щільність повітря не міняється з висотою, а тиск при її підставі рівний тиску при підставі відповідного стовпа повітря в реальній атмосфері. Перетворюючи рівняння стану газу і барометричну формулу, знаходимо

$$H = R \cdot T/g, \quad (10)$$

де R - газова постійна, T - температура повітря на висоті h в градусах Кальвіна, g - прискорення вільного падіння. Звідси витікає, що висота однорідної атмосфери лінійно залежить від температури повітря на поверхні Землі. Висота однорідної атмосфери для висоти h обчислюється за формулою

$$H(h) = H_0 \cdot P(h) / P_0, \quad (11)$$

де H_0 - висота однорідної атмосфери на рівні моря, а $P(h)/P_0$ - відношення тиску повітря на висоті h до тиску на рівні моря. Така оцінка досить груба, оскільки висота однорідної атмосфери на рівні моря згідно формули (10) помітно залежить від температури (див. табл. 1).

Табл.1. Залежність висоти однорідної атмосфери H_0 від температури t при $h_0 = 0$

H_0 (м)	7113	7552	7991	8430	8869
t°, C	-30	-15	0	+15	+30

При найточніших обчисленнях величини релеевської оптичної товщини необхідно враховувати також залежності показника заломлення повітря від вологості і тиску.

Для спрощення практичних розрахунків ряд авторів намагалися знайти емпіричну формулу для визначення величини релеевського розсіяння. Так, в області спектру 500 нм - 1200 нм формула (12) для релеевської оптичної товщини, запропонована в роботі [21], дає добрі чисельні результати для апроксимації експериментальних спостережень.

$$\tau_{\text{рел}} = 0,00879\lambda^{-4,09} P/P_0, \quad (12)$$

де P - тиск в даний момент в місці спостереження, P_0 - тиск на рівні моря, λ - довжина хвилі в мікронах.

Терез [22] на підставі порівняння модельних розрахунків і експериментальних даних запропонувала для розрахунків коефіцієнтів релеевського розсіяння в області спектру 300 нм - 500 нм наступну формулу

$$\tau_{\text{рел}} = (-2,022 + 2,654\lambda^{-1} - 1,186\lambda^{-2} + 0,201\lambda^{-3})P/P_0 \quad (13)$$

Похибка апроксимації релеевської оптичної товщини по формулі (13) менше 0,2 % в області 320 - 500 нм, в ультрафіолетовій області спектру похибки зростають (для довжин хвиль 320 нм і 300 нм - 0,3 % і 0,6 % відповідно).

Ефект атмосферного тиску

Як видно з формул (5) і (3) на величину релеевської оптичної товщини істотно впливає зміна атмосферного тиску. На рис. 1 приведена крива зміни атмосферного тиску на станції «Академік Вернадський». Як видно із рис.1 середнє значення атмосферного тиску $P = 989,7$ мб. Але воно може мінятися протягом року в межах від 942,1 мб до 1025,5 мб. Наскільки сильно вплинуть ці зміни на оптичну товщину релеевського розсіяння? На рис.2 приведені відхилення від середнього значення t для мінімальних і максимальних значень атмосферного тиску на станції «Академік Вернадський».

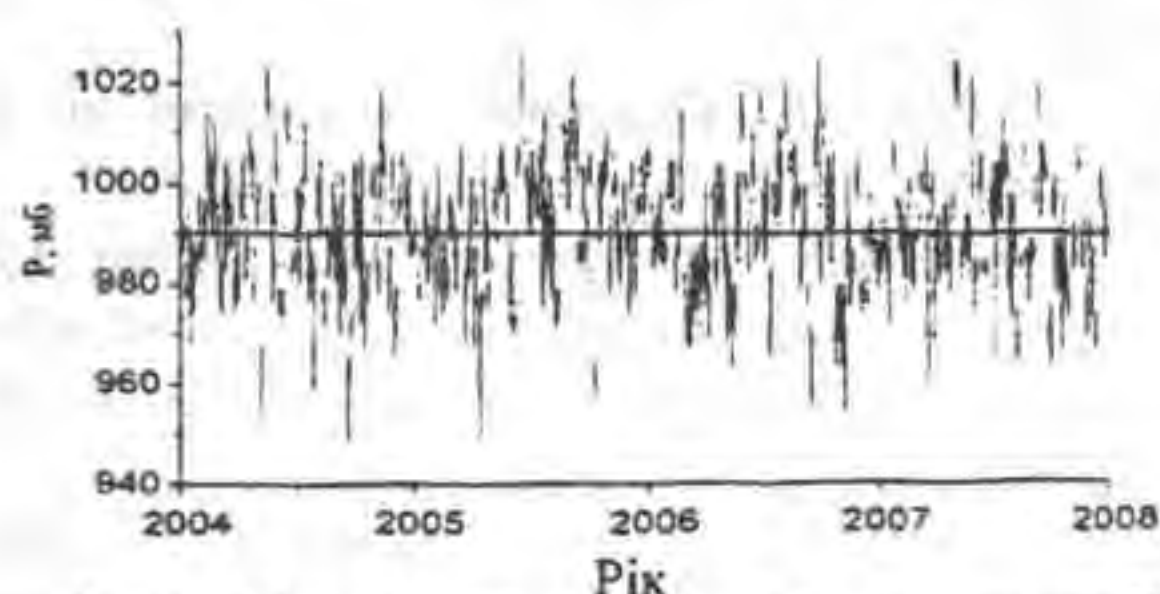


Рис.1. Коливання тиску на антарктичній станції «Академік Вернадський»

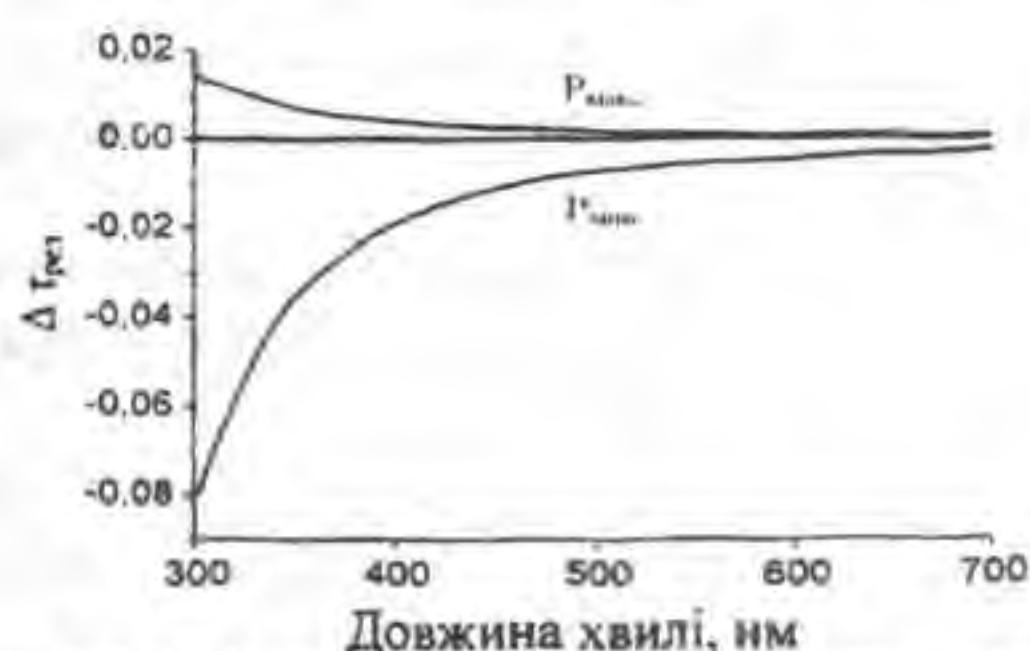


Рис.2. Відхилення від середнього значення релеевської оптичної товщини для мінімальних і максимальних величин атмосферного тиску для станції «Академік Вернадський»

Ефект температури

Як зазначено вище, релеевська оптична товщина безпосередньо залежить від висоти однорідної атмосфери на рівні моря (H_0), яка у свою чергу, істотно залежить від температури (див. табл.).

Антарктична станція «Академік Вернадський» розташована на острові в межах антарктичного шельфу. І температурні перепади на станції мінімальні, як видно із рис.3.

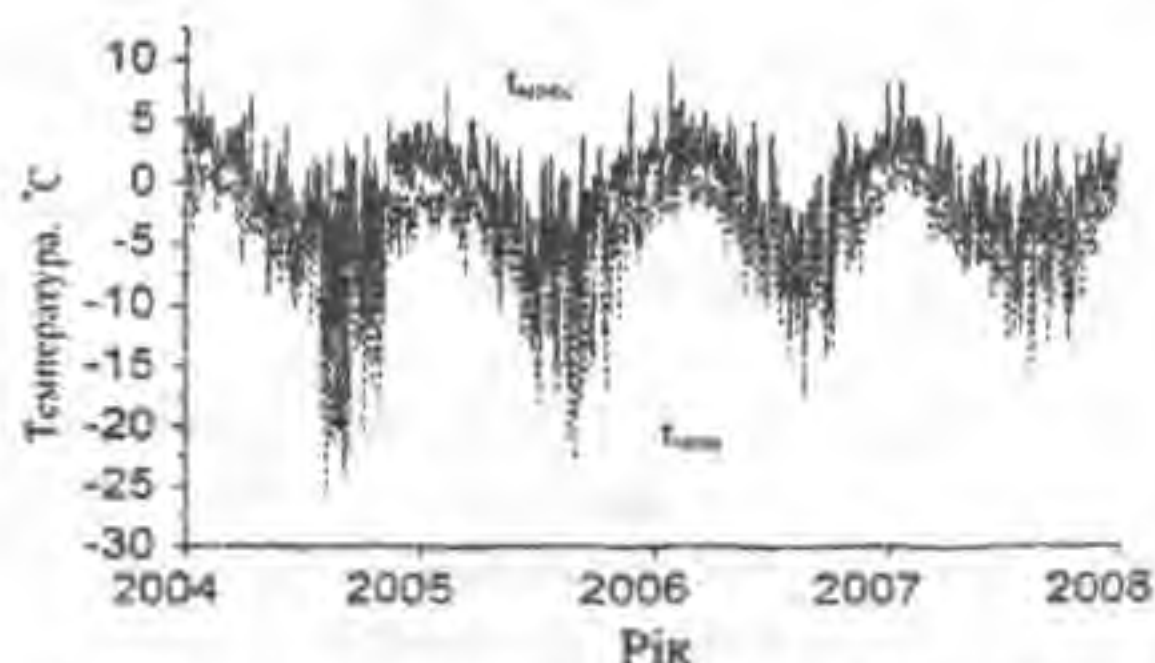


Рис.3. Зміна температури на Антарктичній станції «Академік Вернадський»

Але максимальна різниця в зимових і літніх

температурах досягає 30°C . На рис.4 і 5 показані величини релеевської оптичної товщини $\tau_{\text{рел}}$ для різних температур повітря по відношенню до величини $\tau_{\text{рел}}$ при температурі $t = 0^{\circ}\text{C}$.

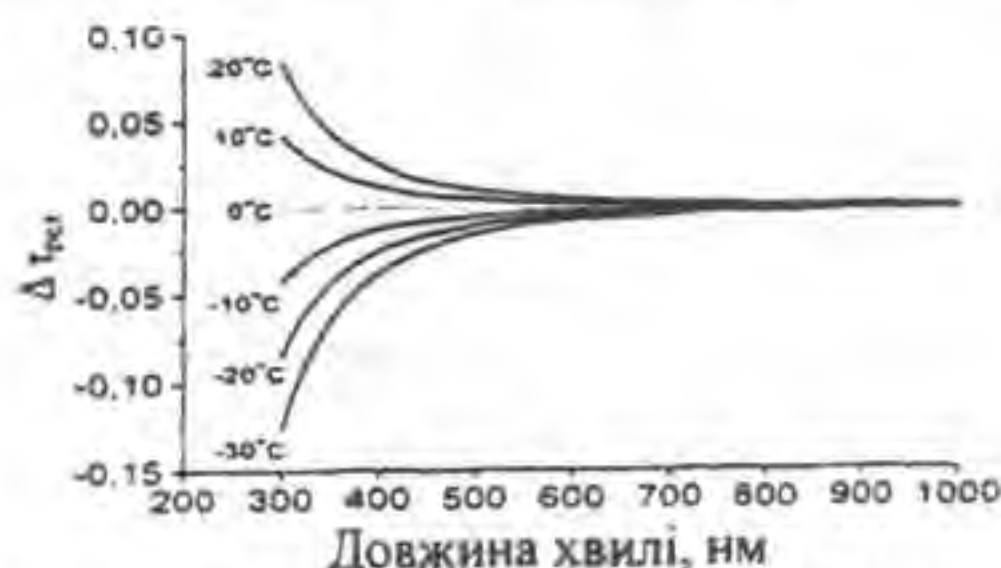


Рис.4. Зміна релеевської оптичної товщини по спектру при різних температурах повітря по відношенню до $\tau_{\text{рел}}$ при температурі $t = 0^{\circ}\text{C}$

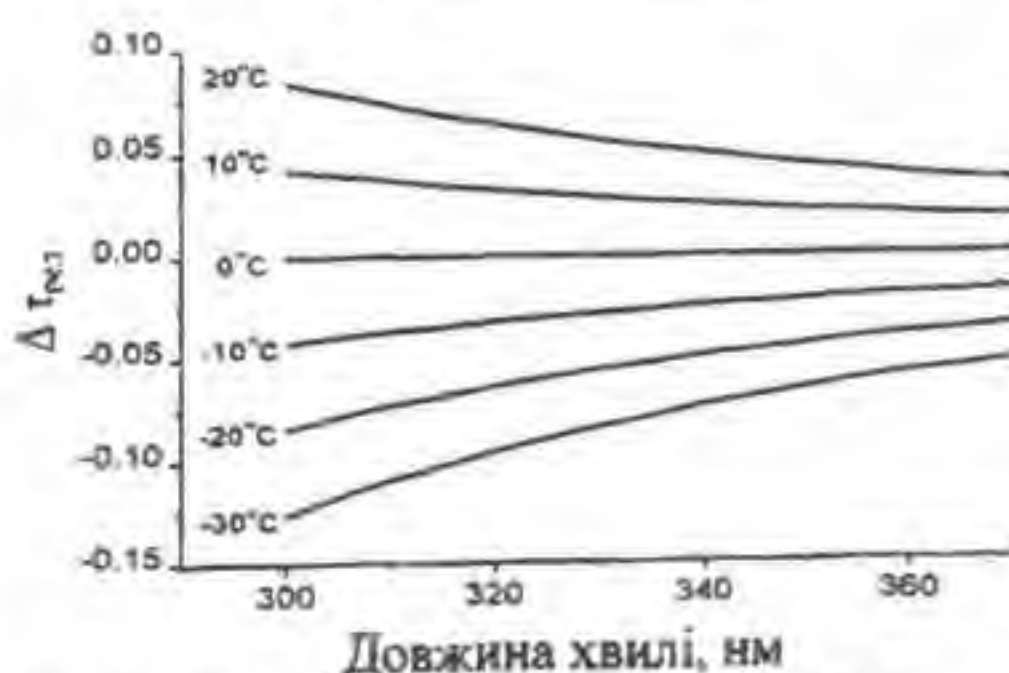


Рис.5. Зміна релеевської оптичної товщини в УФ області спектру при різних температурах повітря відносно $\tau_{\text{рел}}$ при температурі $t = 0^{\circ}\text{C}$.

Необхідно відзначити, що відносна величина $(\Delta\tau/\tau_{\text{рел}})$ відхилення релеевської оптичної товщини (тобто похибка) від $\tau_{\text{рел}}$, розрахованою для температури $t = 0^{\circ}\text{C}$, лінійно залежить від температури незалежно від довжини хвилі (див. рис.6).

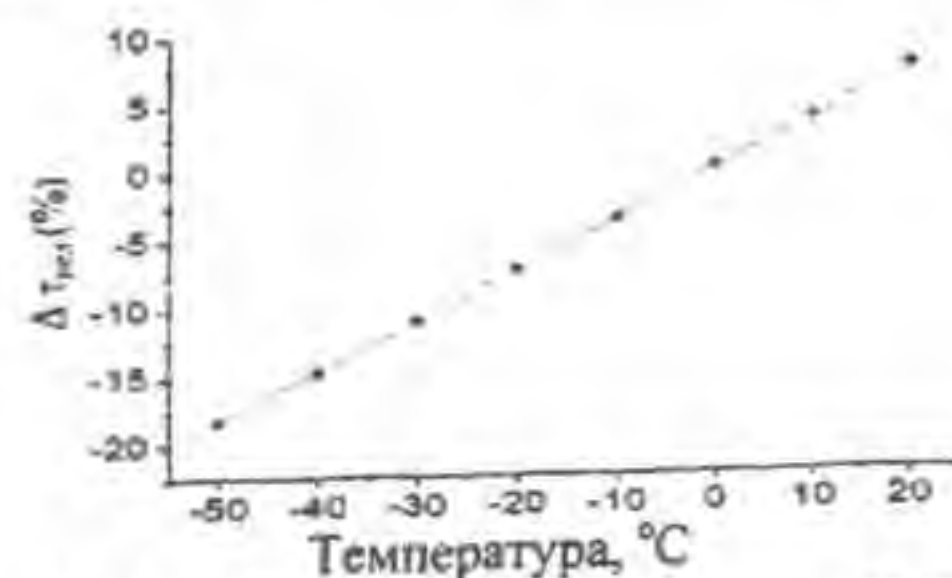


Рис.6. Похибки визначення релеевської оптичної товщини для різних температур по відношенню до $\tau_{\text{рел}}$, розрахованою для температури $t = 0^{\circ}\text{C}$

Висновки

Проведений аналіз показав, що при проведенні розрахунків релєєвської оптичної товщини для берегової антарктичної станції «Академік Вернадський» цілком досить враховувати лише зміну тиску, тобто використовувати формули (12) і (13). Проте для континентальних антарктичних станцій, де є значні зміни тиску і температури, при визначенні релєєвської оптичної товщини необхідно враховувати і тиск, і температуру.

Література

1. Leiterer U., Sakunow G. Messungen von Aerosolpartikeln im Grossenbereich 0,2 bis 4,0 μ in der Antarktis // Zeit. Meteorol. – 1989. – V. 39. – N 6. – S. 309-316.
2. Родионов С.Ф. Электрофотометрические исследования на Эльбрусе. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1970. – 125 с.
3. Ghan S., Laulainen N., Easter R., Wagener R., Nemesure S., Chapman E., Zhang Y., Leung R. Evaluation of aerosol direct radiative forcing in MIRAGE // J. Geoph. Research. – 2001. – V. 106. – N D6. – P. 5295-5316.
4. Бурлов-Васильев К.А., Васильева И.Э. Спектральная прозрачность земной атмосферы в ближней УФ-области спектра // Известия АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана». – 1992. – Т. 28. – № 12. – с. 1170-1175.
5. Терез Г. А. О точности разделения спектральной прозрачности атмосферы на компоненты // Известия АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана». 1995. – Т. 8. – № 10. – с. 1545-1546.
6. Penndorf R. Tables of the refractive index for standard air and the Rayleigh scattering coefficient for the spectral region between 0.2 and 20.0 μ and their application to atmospheric optics // J.Opt.Soc.Am.. – 1957. – V. 47. – P. 176-182.
7. Elterman L. Atmospheric attenuation model, in the ultraviolet, the visible, and the infrared windows for altitudes to 50 km // Environ. Res. Paper N46. U.S. Air Force Cambridge Research Laboratory. – Bedford, Mass, 1964. – 57 p.
8. Elterman L. UV, visible, and IR-attenuation for altitudes to 50 km // Environ. Res. Paper N285. (U.S. Air Force Cambridge Research Laboratory), 1968. – 59 p.
9. U.S.Standard Atmosphere, 1962. – Washington, D.C.: U.S.Government Printing Office, 1962. – 120p.
10. Edlen B. Dispersion of standard air // J.Opt.Soc.Am.. – 1953. – V. 43. – P. 339-344.
11. Hoyt D.V. A redetermination of the Rayleigh optical depth and its application to selected solar radiation problems // J.Appl. Meteorol.. – 1977. – V. 16. – P. 432-436.
12. Frohlich C. and Shaw G.E. New determination of Rayleigh scattering in the terrestrial atmosphere // Appl. Opt.. – 1980. – V. 19. P. 1773-1775.
13. U.S.Standard Atmosphere Supplement, 1966. – Washington, D.C.: U.S.Government Printing Office, 1966. – 65.
14. Young A.T. Revised depolarization corrections for atmospheric extinction // Appl. Opt.. – 1980. – V. 19. – P. 3427-3428.
15. Das A.K., Iqbal M. Modifications to an algorithm to compute diffuse solar spectral radiation under clear skies // Rev. int. heliotechn.. – 1984. – N2. – P.2-6.
16. Leckner B. The spectral distribution of solar radiation at the Earth's surface-elements of a model // Solar energy. – 1978. – V.20. – P.143-150.
17. Kneizys F.X., Shettle E.P. et al. – 1980: Washington, D.C.: Air Force Geophysics Lab. Bedford. M., AFGLTR -80- 0067.
18. Bates D.R. Rayleigh scattering by air // Planet and Space Sci. – 1984. – V.32. – N 6. – P.785-790.
19. Nicolet M. On the molecular scattering in terrestrial atmosphere: an empirical formula for its calculation in the homosphere. Planet and Space Sci., 1984, V.32, N 11, P 1467-1468.
20. Bucholtz A. Rayleigh – scattering calculations for the terrestrial atmosphere // Appl. Optics. – 1995. – V. 34. – N 15. – P. 2765-2773.
21. Leiterer U., Schulz K.-H. Zur Abweichung des realen von dem nach der Rayleigh'schen Theorie berechneten Luftstreckkoeffizienten // Gerlands Beitrage zur Geophysik. -1986. – Bb. 93. – Heft 3. – S. 262-266.
22. Терез Г. А. Об учете релеевского рассеяния при разделении атмосферной экстинкции на составляющие // Известия АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана». – 1990. Т 26. – № 5. – С. 550-553.

Надійшла до редколегії 2.11.09

Підписано до друку 22.12.2009. Формат 70x100¹/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 19,03.
Наклад 350 прим. Зам. № 336.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

