



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



14688JB

45 - чит зал періодики та друк 25.00

ВИПУСК №2 2009

Вісник Київського університету, випуск №2, 2009

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів.

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- **Анісімов Анатолій Васильович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- **Хусаїнов Денис Ях'євич**, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Акіменко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор;
- **Анісімов Ігор Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Буй Дмитро Борисович**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- **Булавін Леонід Анатолійович**, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Гарашенко Федір Георгійович**, доктор технічних наук, професор;
- **Данилов Вадим Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Макара Володимир Арсенійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Мелешко В'ячеслав Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Перестюк Микола Олексійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Скришевський Валерій Антонович**, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- **Анісімова Тетяна Харитонівна**, **відповідальний секретар**;
- **Безущак Оксана Омелянівна**, bezusch@univ.kiev.ua;
- **Мороз Костянтин Олександрович**, morozko@univ.kiev.ua;
- **Родіонова Тетяна Василівна**, rodtnv@univ.kiev.ua;
- **Хмелюк Надія Кузьмівна**, khmeluk@univ.kiev.ua;
- **Верченко Андрій Петрович**, **технічний редактор**, ap.verchenko@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142-87-7

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Верьовкіна Г.В., Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення для деяких класів випадкових полів	7
Гудзенко С.В. Відношення Гріна на фактор степені нескінченної симетричної групи	10
Єфіменко С.В., Рибасов К.В. Розподіл відстаней між трьома випадковими точками на сфері	14
Жучок Ю.В. Про декомпозиції повної напівгрупи матриць	17
Кандьоркін А. Про клас інверсних коноїдів ко-скінченних порядкових автоморфізмів множин Z	21
Кулаковська І.В. Сагайдаки та індекси квазіфробеніусових кілець	24
Личак Д.П. Глобальна класифікація функцій з простими особливостями на поверхнях	28
Романенко С.О. Ймовірність банкрутства страхової компанії з випадковими φ -субгаусовими страховими виплатами	32
Тарашанський М.Т., Шестюк Н.Ю. Про існування доповнення у ґратах підалгебр булевої алгебри	36
Шви́ров В.В. Проективні модулі над напівланцюговими кільцями	39
Яковенко Т.О. Моделювання випадкових послідовностей в рівномірній нормі та нормі L_p	44

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини	51
Ковальчук Б.П., Лимарченко О.С. Імпульсне моментне збудження руху резервуару з рідиною при похилому русі системи	57
Крєневич А.П. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь з нелінійною правою частиною	61
Куценко О.Г., Харитонов О.М., Зражевський Г.М. Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності, що відповідає термоудару двохшарового циліндру	65
Лібов Д. Осесиметричні коливання циліндра	71
Моргунов М.О., Острик В.І. Згин пружної смуги штампом	75
Мосєєнков Б.І., Мосєєнков Ю.Б. Про ідеї та асимптотичні методи нелінійної механіки академіка М.М. Боголюбова та їх подальший розвиток і специфіка застосування цих знань в освіті студентів державних університетів України	79
Сахно Н.В., Куценко О.Г., Харитонов О.М., Каденко І.М. Визначення критичних розмірів несущальностей в теплообмінних трубах парогенераторів АЕС з ВВЕР для обґрунтування критерію глушіння труб	85
Таран С.Ю., Кондрат Р.Я. Реологічна поведінка розведеного розчину макромолекул Зімма у течіях з однорідним полем швидкості	91

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Демиденко С.В. Мінімаксне оцінювання параметрів лінійних дискретних періодичних процесів в умовах невизначеності	99
Завєршинський М.В. Моделювання механіки змішень м'яких тканин тіла людини	103
Копитіна І.О. Інструментальні програмні засоби динамічної інкапсуляції мультимедійної інформації у WEB сторінки	107
Марценюк В.П., Андрушак І.Є. Фармакокінетична модель керування патологічним процесом	113
Машенко С.О. Достатні умови індивідуальної оптимальності	119
Нікітін А.В. Теореми існування і єдиності розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі	125
Омардібірова В.Н. Модель вибору оптимального інвестиційного портфелю з використанням апарату RFT-перетворювачів	129
Полоцький С.В. Про моменти збіжних випадкових рядів та границь мартингалів, пов'язаних з гіллястим випадковим блуканням	135
Порхун О.В. Алгоритм пошуку оптимальної вибірки для вирішення задач класифікації багатовимірних об'єктів, його обчислювальна складність	141
Репецький С.П., Наконечний О.Г., Сташук Б.В. Теорія спінового транспорту в магнітовпорядкованих кристалах	145
Терещенко В.М. Принцип зводимості в задачах обчислювальної геометрії	149

Черниш Р.І. Паралельна реалізація моделі макромасштабної циркуляції атмосфери	155
Шарапов М.М., Воловода О.В., Найдьон Ю.В., Морозов К.В. Ймовірносний метод розв'язку одної перколяційної задачі	159

РАДІОФІЗИКА

Безпалій Є.В., Коваль І.П., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Стимульоване оксидування поверхні Si(001) в присутності субмоношарового покриття хрому	165
Григорук В. І., Пільгун Ю. В., Смирнов Є. М. Відновлення профілю поверхні за відліками двох часткових похідних у двокоординатному лазерному скануючому диференційно-фазовому мікроскопі	169
Григорук В.І., Понежа С.Г. Понежа Г.В. Міліметрова рефлектометрія тіла людини та води	175
Данько В.П. Вплив аберацій голографічних мікролінз на параметри сенсора хвильового фронту	179
Івашко М.А., Малишев В.Ю., Прокопенко О.В. Особливості поведінки ВАХ манганітів під дією електричних та магнітних полів	182
Клешич М.М., Фесенко С.О., Борецький В.Ф., Веклич А.М., Використання мікроконтролера ATtiny 2313 для розгортки спектру монохроматора	185
Коротков П.А., Фелінський Г. С. Декомпозиція та моделювання спектра КР підсилення в одномодових оптичних волокнах	190
Сутягіна Н.С., Котов М.М., Нікірін В.А. Двоканальний сканер хвильового фронту для детектування локальних особливостей поверхні	200
Юдіна О.С., Прокопенко О.В. Зв'язаний стан масиву джозефсонівських контактів	204
Юштин К.Е., Толочин О.П. Похибка вимірювання об'єктів з фазовою анізотропією динамічним Мюллер-поляриметром з модуляцією фазового зсуву	207

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Абдікарімов Б.Ж., Булавін Л.А., Остапчук Ю.Л., Рудніков Є.Г. Ван-дер-Ваальсова модель газу флуктуацій параметра порядку поблизу критичної точки	215
Барабаш Ю.М., Заболотний М.А., Серденко Т.В., Кшнякіна С.І. Застосування вейвлет-перетворень до вивчення кінетики електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах	219
Вашенко В.М., Гордієнко Ю.О., Мамарєв В.М. Алгоритм викриття ознак підготовки землетрусу з осередком у сейсмонебезпечних районах засобами системи сейсмічного групування ГЦСК НКАУ	229
Вашенко В.М., Лоза Є.А., Патлашенко Ж.І. Тривимірна геометрична теорія неklasичних фокусуючих дифракційних ґраток	235
Макара В.А., Казо І.Ф., Мавланова О.Д., Чорнобук С.В., Ткач В.М. Структурний стан вуглецю в кераміці системи TiB ₂ - C* отриманої методом твердофазного синтезу	243
Мельниченко М.М. Вплив хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію на анти відбиваючі характеристики	247
Ніколюк П.К., Дзісь В.Г., Лукіяничук С.М., Бурдейна Л.І., Ніколайчук В.Я., Баран В.В. Дегібридизація в сполуках RAl ₂ Si ₂	251
Пурський О.І., Сисоев В.М. Теплопровідність простих молекулярних речовин при фазовому переході кристал-рідина	257
Сташук В.С., Хакімов Р.І., Полянська О.П. Вплив структурних перетворень на оптичні властивості тонких плівок кобальту	263

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Ганна В.Верьовкіна, к.ф.-м.н., доцент,
Володимир Н.Нагорний, к.ф.-м.н., доцент

G.V.Verovkina, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate
Professor,
V.N.Nagorhiy, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate
Professor

Інтерполяційні зображення для деяких класів випадкових полів

The interpolation representation some kinds of random processes

Досліджуються інтерполяційні зображення
певного класу випадкових процесів за
нерівновіддаленими вузлами інтерполяції.

Paper deals with some interpolation
representations of random processes with no
equidistance knots interpolations.

E-mail: avv@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Розглянемо інтерполяційні зображення деяких
класів випадкових процесів [1].

Побудуємо інтерполяційні зображення деяких
класів випадкових процесів за не
рівновіддаленими вузлами інтерполяції. Вузли
інтерполяції розглянемо виду

$$t_{n0} = n \frac{5\pi}{\alpha}, t_{n1} = n \frac{5\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}, t_{n2} = n \frac{5\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z},$$

причому у вузлах $t_{n0}, n \in \mathbb{Z}$ розглядаємо значення
процесу, а в вузлах $t_{n1}, t_{n2}, n \in \mathbb{Z}$, розглядаємо
значення процесу та його похідних.
Сформулюємо необхідні, доведені нами раніше,
результати з теорії цілих функцій.

Лема 1. Нехай $f(z)$ – ціла, обмежена на
дійсній вісі функція експоненціального типу з
показником σ

Тоді для будь-якого $\alpha, \alpha > \sigma$ має місце
зображення

$$\begin{aligned} f(z) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_{n0}) - \frac{\pi}{\alpha} \right)^2} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{f(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_{n0}) - \frac{\pi}{\alpha} \right)^2} \left(\frac{-\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^4 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5} (z-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & \left. + \frac{f'(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_{n0}) - \frac{\pi}{\alpha} \right)} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{f(t_{n0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_{n0}) - \frac{2\pi}{\alpha} \right)^2} \left(\frac{-(2+3\cos \frac{2\pi}{\alpha})}{\sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5} (z-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & \left. + \frac{f'(t_{n0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_{n0}) - \frac{2\pi}{\alpha} \right)} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \right) \times \\ & \times \sin \frac{\alpha}{5} (z-t_{n0}) \sin^2 \frac{\alpha}{5} (z-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) \times \\ & \times \sin^3 \frac{\alpha}{5} (z-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}), \end{aligned} \quad (1)$$

де $t_{n0} = n \frac{5\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z}$, причому інтерполяційний
ряд (1) збігається рівномірно в будь-якій
обмеженій області комплексної площини.

При доведенні леми 1 ми отримали оцінку
залишку інтерполяційного ряду (1), яка має
наступний вигляд

$$|R_n(z)| \leq LG(z) C_f \frac{\alpha}{\alpha - \sigma n}, \quad (2)$$

де L – стала, $C_f = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$,

$G(z) = \left| \sin \frac{\alpha}{5} z \times \sin^2 \frac{\alpha}{5} (z - \frac{\pi}{\alpha}) \times \sin^2 \frac{\alpha}{5} (z - \frac{2\pi}{\alpha}) \right|$ –
функція обмежена в довільній обмеженій області
комплексної площини.

Розглянемо випадковий процес

$$\xi(t), \quad z \in \mathbb{R}, \quad M\xi(t) = 0$$

і коваріаційною функцією вигляду

$$B(t, s) = \int_{\Lambda \times \Lambda} f(t, \lambda) \overline{f(s, \mu)} F(d\lambda, d\mu) \quad (3)$$

де Λ - деяка множина параметрів, $F(.,.)$ - комплексна функція множин, адитивна за обома аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < +\infty \quad (4)$$

Відносно функції $f(t, \lambda)$ будемо припускати, що її можна довизначити в комплексній площині відносно t до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma(\lambda)$ таким чином, щоб виконувались

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t, \lambda)| = C_f < +\infty \quad (5)$$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\lambda) = \sigma < +\infty \quad (6)$$

Сформулюємо основну теорему.

Терема. Нехай $\xi(t)$ - випадковий процес, що задовольняє умовам (3)-(6).

Тоді для будь-якого α , $\alpha > \sigma$ з ймовірністю одиниця має місце формула

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\xi(t_{n0})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_{n0})} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{\xi(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^4 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & + \frac{\xi'(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{\xi(t_{n0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-(2+3\cos \frac{2\pi}{\alpha})}{\sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\xi'(t_{n0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} \Bigg) \times \\ & \times \sin \frac{\alpha}{5}(t-t_{n0}) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) \times \\ & \times \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t-t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення. Згідно з теоремою про спектральне зображення випадкових процесів [1], процес $\xi(t)$ подамо у вигляді

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda) \quad (8)$$

де $Z(d\lambda)$ - випадкова міра на Λ така, що

$$MZ(A_1) \cdot \overline{Z(A_2)} = F(A_1, A_2)$$

Для довільного натурального n розглянемо процес $\xi_n(t)$, який визначимо як часткову суму з номером n ряду (7)

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \sum_{k=-n}^n \left(\frac{\xi(t_{k0})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_{k0})} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{\xi(t_{k0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^4 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t-t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & + \frac{\xi'(t_{k0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{\xi(t_{k0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-(2+3\cos \frac{2\pi}{\alpha})}{\sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t-t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{f'(t_{k0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \times \\ & \times \sin \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0}) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) \times \\ & \times \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \end{aligned}$$

Використовуючи зображення (8) та твердження леми 1, подамо $\xi_n(t)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \sum_{k=-n}^n \int_{\Lambda} \left(\frac{f(t_{k0})}{\frac{\alpha}{5}(z - t_{k0})} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{f(t_{k0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^4 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & + \frac{f'(t_{k0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{f(t_{k0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \right)^2} \left(\frac{-(2 + 3 \cos \frac{2\pi}{\alpha})}{\sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha}) + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \Bigg) + \\ & \left. + \frac{f'(t_{k0} + \frac{2\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t - t_{k0} - \frac{2\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0}) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha}) \times \\ & \times \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t - t_{n0} - \frac{2\pi}{\alpha}) \times Z(d\lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді на підставі зображення (1), (8), (9) та оцінки (2) матимемо

$$\begin{aligned} M|\xi(t) - \xi_n(t)|^2 & \leq R_n^2(t) \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| = \\ & = L^2 G^2(t) C_f^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha - \sigma} \right)^2 \frac{1}{n^2} \times \end{aligned} \quad (10)$$

$$\times \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)|$$

Із нерівності (10), враховуючи умову (4) отримаємо, що інтерполяційний ряд (7) збігається до випадкового поля $\xi(t)$ в середньому квадратичному.

Враховуючи сепарабельність процесу $\xi(t)$ та збіжність ряду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2,$$

одержимо, що інтерполяційний ряд (7) з ймовірністю одиниця збігається до випадкового поля $\xi(t)$ рівномірно відносно t в довільній обмеженій області зміни t .

Список використаних джерел

1. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций // Труды IV всесоюз. мат. съезда, - Л., - Из-во Ленинград. ун-та, - 1963, - Т.1, - С.132-148.

Надійшла до редколегії 25.03.2009 р

УДК 519.5

С.В. Гудзенко, аспірант

Відношення Гріна на факторстепені нескінченної симетричної групи

У даній роботі розглядається напівгрупа — факторстепінь симетричної групи зліченного порядку. Досліджено відношення Гріна $\mathcal{R}$ і $\mathcal{L}$.

Ключові слова: напівгрупа, факторстепінь, відношення Гріна.

E-mail: S.Gudzenko@ipnet.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Конструкція факторстепеня $FP(S)$ напівгрупи (S, M) перетворень (можливо не скрізь визначених) деякої множини M виникає при вивченні індукованих дій цієї напівгрупи. Ця конструкція визначається наступним чином.

Для довільних $m \in M, N \subseteq M, A \in S$ позначимо $A(m) = \{a(m) : a \in A\}$, $A(N) = \{a(m) : m \in N, a \in A\}$. У глобальній наднапівгрупі $P(S)$ усіх підмножин напівгрупи S із природним множенням визначимо наступне відношення еквівалентності $\sim_M$:

$$A \sim_M B \Leftrightarrow \forall m \in M (A(m) = B(m)),$$

яке є конгруєнцією. Факторстепенем $FP(S)$ назовемо факторнапівгрупу $P(S) / \sim_M$ за цією конгруєнцією. Найбільш цікавими для нас є факторстепені симетричної групи S_M .

Поняття факторстепеня було введено в [2]. В [3] вивчалися відношення Гріна факторстепеня $FP(S_N)$. Дослідження факторстепеня нескінченної симетричної групи S_N було розпочато в [?]. В роботі [1] описано шість фінітарних факторстепенів симетричної групи зліченного степеня і досліджено будову відношень Гріна на цих факторстепенях. У цій же роботі показано, що у випадку нефінітарного факторстепеня наведена конструкція відношень Гріна не має місця.

У даній роботі описуються відношення Гріна для (нефінітарного) факторстепеня $FP(S_N)$.

2 Деякі означення

При вивченні відношень Гріна для деякої напівгрупи H найважливішим є дослідити відношення $\mathcal{R}$ і $\mathcal{L}$. Нагадаємо, що

S.V. Gudzenko, PhD student

Green's relations on factorpower of infinite symmetric group

The paper deals with the semigroup of a factorpower of the symmetric group of the denumerable order. Green's relations $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$ are investigated.

Key Words: semigroup, factorpower, Green's relations.

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists c, d \in H^1, a = bc, b = ad.$$

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow \exists c, d \in H^1, a = cb, b = da.$$

Розглянемо напівгрупу перетворень (S, M) . Для довільних $m \in M$ і $\bar{A} \subseteq FP(S)$ визначимо $\bar{A}(m) = \{a(m) | a \in \bar{A}\}$, а для довільного $N \subseteq M$ покладемо $\bar{A}(N) = \bigcup_{m \in N} \bar{A}(m)$. Крім того, будемо говорити, що $a \in \bar{B}$, якщо існує така множина $A \subseteq S$, що $a \in A$ і $\bar{A} = \bar{B}$. Це відношення можна інакше визначити за допомогою наступної очевидної леми.

Лема 1. Нехай S — напівгрупа перетворень множини M , $a \in S, \bar{B} \in FP(S)$. $a \in \bar{B}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $m \in M$ виконується $a(m) \in \bar{B}(m)$.

3 Відношення $\mathcal{R}$

Теорема 3.1. Нехай $\bar{A}^{(0)}, \bar{A}^{(1)} \in FP(S_N)$. $\bar{A}^{(0)} \mathcal{R} \bar{A}^{(1)}$ тоді і тільки тоді, коли для кожної множини $M \subseteq N$ такої, що $|\{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M\}| \neq |\{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M\}|$, і для кожного $s \in M$ існує такий ланцюг множин $\{M_n = M_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, який задовільняє наступні умови:

1) $M_0 = M$,

2) $M_i \subseteq M_{i+1}$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$,

3) для кожного $r \in \{0, 1\}$ існують такі $i \leq 0$ та k , що $M_i = \bar{A}^{(r)}(k)$ і $s \in M_i$,

4) для всіх $r \in \{0, 1\}$ і для будь-якого числа C $|\{k : \exists n > C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_n\}| = |\{k : \exists n < C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_n\}| = \infty$.

Доведення. Необхідність.

Припустимо, що $\bar{A}^{(0)}, \bar{A}^{(1)} \in FP(S_N)$ і $\bar{A}^{(0)} \mathcal{R} \bar{A}^{(1)}$. Тоді існують такі $\bar{B}^{(0)}$ і $\bar{B}^{(1)}$, що $\bar{A}^{(0)} = \bar{A}^{(1)} \bar{B}^{(1)}$ і $\bar{A}^{(1)} = \bar{A}^{(0)} \bar{B}^{(0)}$.

Розглянемо $b^{(0)}, b^{(1)} \in S_N$ такі, що $b^{(r)} \in \bar{B}^{(r)}, r \in \{0, 1\}$.

Розглянемо деяку множину $M \subseteq N$. Позначимо $M_0 = M, N_0^{(r)} = \{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M_0\}, r \in \{0, 1\}$. Припустимо, що $|N_0^{(0)}| \neq |N_0^{(1)}|$.

Тоді, оскільки $b^{(r)} \in S_N, r \in \{0, 1\}$, $|b^{(1-r)}(N_0^{(r)})| = |N_0^{(r)}| \neq |N_0^{(1-r)}| = |b^{(r)}(N_0^{(1-r)})|$. Тому для деякого $r \in \{0, 1\}$ виконується нерівність $|b^{(1-r)}(N_0^{(r)})| > |N_0^{(1-r)}|$ і принаймні одна з множин $b^{(1)}(N_0^{(0)}) \setminus N_0^{(1)}$ та $b^{(0)}(N_0^{(1)}) \setminus N_0^{(0)}$ — непорожня, тобто

$$(b^{(1)}(N_0^{(0)}) \setminus N_0^{(1)}) \cup (b^{(0)}(N_0^{(1)}) \setminus N_0^{(0)}) \neq \emptyset$$

Таким чином, принаймні для одного $r \in \{0, 1\}$ існує таке $t \in N_0^{(r)}$, що $\bar{A}^{(r)}(b^{(r)}(t)) \neq M_0$. З іншого боку, з того, що $\bar{A}^{(1-r)} = \bar{A}^{(r)} \bar{B}^{(r)}$, випливає $\bar{A}^{(r)}(b^{(r)}(t)) \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(t)$. Отже, маємо: $\bar{A}^{(r)}(b^{(r)}(t)) \subset \bar{A}^{(1-r)}(t)$. Позначимо $M_{-1} = \bar{A}^{(r)}(b^{(r)}(t)), N_{-1}^{(r)} = \{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M_{-1}\}, r \in \{0, 1\}$. Тоді $M_{-1} \subset M_0$, а тому й $N_{-1}^{(r)} \cap N_0^{(r)} = \emptyset$ для всіх $r \in \{0, 1\}$.

Зауважимо, що для будь-якого $s \in M$, за рахунок вибору $b^{(r)}$ і $t \in N_0^{(r)}$ можна гарантувати, що для кожного $r \in \{0, 1\}$ існує таке $k \in N$, що $\bar{A}^{(r)}(k) = M_0$ і $s \in M_0$, або $\bar{A}^{(r)}(k) = M_{-1}$ і $s \in M_{-1}$. Дійсно, розглянемо r таке, що $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M\}| > |\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = M\}|$. Тоді, очевидно, $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M\}| > 0$, а тому існує таке k , що $\bar{A}^{(r)}(k) = M_0$ і $s \in M_0$. Покажемо тепер, що існує також таке l , що $\bar{A}^{(1-r)}(l) = M_0$ або $\bar{A}^{(1-r)}(l) = M_{-1}$ і $s \in M_{-1}$.

Оскільки $\bar{A}^{(r)} = \bar{A}^{(1-r)} \bar{B}^{(1-r)}$, то $\bar{A}^{(r)}(k) = \bar{A}^{(1-r)}(\bar{B}^{(1-r)}(k)) = \bigcup_{i \in \bar{B}^{(1-r)}(k)} \bar{A}^{(1-r)}(i)$. Оскільки $s \in M_0$, то існує таке $b^{(1-r)} \in \bar{B}^{(1-r)}(k)$, що $b^{(1-r)}(k) = i$, а отже, $s \in \bar{A}^{(1-r)}(b^{(1-r)}(k))$. Тепер, якщо не існує такого l , що $\bar{A}^{(1-r)}(l) = M_0$, то, зокрема, $\bar{A}^{(1-r)}(b^{(1-r)}(k)) \neq M_0$, і можна взяти $t = b^{(1-r)}(k)$. Тоді $M_{-1} = \bar{A}^{(1-r)}(b^{(1-r)}(k))$, а отже, $s \in M_{-1}$, що й вимагалось.

Оскільки $t \in N_0^{(r)}$ для певного r , то $t \notin N_{-1}^{(r)}$,

а позаяк, за побудовою, $t \in b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)})$, то $b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)} \neq \emptyset$ для цього значення r . Отже

$$(b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}) \cup (b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}) \neq \emptyset$$

Для кожного $r \in \{0, 1\}$ розглянемо розклад

$$b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) = (b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)}) \cup (b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \cap N_{-1}^{(1-r)}).$$

Тоді $|b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)})| = |b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)}| + |b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \cap N_{-1}^{(1-r)}|$. Оскільки $|b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)})| = |b^{(1-r)}(N_{-1}^{(r)})| = N_{-1}^{(r)}$, то

$$|b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)}| + |b^{(r)-1}(N_{-1}^{(r)}) \cap N_{-1}^{(1-r)}| = |b^{(1-r)}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)}| + |b^{(1-r)}(N_{-1}^{(r)}) \cap N_{-1}^{(1-r)}|$$

Звідси

$$|b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}| + |b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}| + |b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \cap N_{-1}^{(1)}| + |b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \cap N_{-1}^{(0)}| = |b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}| + |b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}| + |b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \cap N_{-1}^{(1)}| + |b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \cap N_{-1}^{(0)}|$$

Зауважимо, що

$$|b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \cap N_{-1}^{(1)}| = |b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \cap N_{-1}^{(0)}|,$$

$$|b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \cap N_{-1}^{(0)}| = |b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \cap N_{-1}^{(1)}| \quad (1)$$

Можливі такі варіанти.

- 1) $|N_{-1}^{(0)}| = |N_{-1}^{(1)}| = \infty$.
- 2) Одна з множин $N_{-1}^{(0)}, N_{-1}^{(1)}$ — нескінченна, а інша — скінченна. В цьому випадку одна з множин $b^{(1-r)}(N_{-1}^{(r)}) \setminus N_{-1}^{(1-r)} (r \in \{0, 1\})$ є нескінченною, тому

$$(b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}) \cup (b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}) \neq \emptyset$$

- 3) $|b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \cap N_{-1}^{(1)}| < \infty, |b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \cap N_{-1}^{(0)}| < \infty$. Тоді з (1)

$$|b^{(0)-1}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}| + |b^{(1)-1}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}| =$$

$$|b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}| + |b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}|.$$

Ліва частина цієї рівності, очевидно, не дорівнює 0, тому і права її частина не дорівнює 0. Таким чином

$$(b^{(1)}(N_{-1}^{(0)}) \setminus N_{-1}^{(1)}) \cup (b^{(0)}(N_{-1}^{(1)}) \setminus N_{-1}^{(0)}) \neq \emptyset.$$

Отже, припустивши, що $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M_0\}| \neq |\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = M_0\}|$, ми отримали, що існує $M_{-1} \subseteq M_0$ таке, що або $|\{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-1}\}| = |\{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-1}\}| = \infty$, або

$$(b^{(1)}(\{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-1}\}) \setminus \{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-1}\}) \cup (b^{(0)}(\{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-1}\}) \setminus \{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-1}\}) \neq \emptyset.$$

У другому випадку за побудовою $M_{-1} \subseteq M_0$. Далі, в свою чергу, існує $M_{-2} \subseteq M_{-1}$ таке, що або $|\{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-2}\}| = |\{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-2}\}| = \infty$, або

$$(b^{(1)}(\{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-2}\}) \setminus \{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-2}\}) \cup (b^{(0)}(\{k : \bar{A}^{(1)}(k) = M_{-2}\}) \setminus \{k : \bar{A}^{(0)}(k) = M_{-2}\}) \neq \emptyset.$$

Продовжуючи далі, отримаємо неспадну послідовність множин $\dots \subseteq M_{-2} \subseteq M_{-1} \subseteq M_0$, яка або обривається на певному кроці, або продовжується нескінченно.

Якщо послідовність обривається на n -му кроці, то, за побудовою, $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M_{-n}\}| = \infty$ для кожного $r \in \{0, 1\}$. Продовжимо її до нескінченної, взявши $M_{-j} = M_{-n}$ для всіх $j > n$. Очевидно, в цьому випадку для будь-якого числа C виконується $|\{k : \exists m < C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_m\}| = \infty$.

Припустимо тепер, що послідовність на жодному кроці не обривається, і для деяких $r \in \{0, 1\}$, $n \leq 0$ виконується $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M_n\}| = 0$. Тоді, за побудовою, множина N_{n+1} — непорожня, тобто $|\{k : (\bar{A}^{(r)}(k) = M_n) \vee (\bar{A}^{(r)}(k) = M_{n+1})\}| \neq 0$. Очевидно, в цьому випадку для будь-якого числа C також виконується $|\{k : \exists m < C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_m\}| = \infty$.

Аналогічним чином, взявши підстановку $b^{(r)-1}$ замість $b^{(r)}$, $r \in \{0, 1\}$, будується і друга частина ланцюга.

Достатність.

Розглянемо $\bar{A}^{(0)}, \bar{A}^{(1)} \in FP(S_N)$. Припустимо, для кожної множини $M \subseteq N$, такої, що $|\{k : \bar{A}^{(r)}(k) = M\}| \neq |\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = M\}|$ існує ланцюг множин $\{M_n = M_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, який задовольняє умови 1 — 4 теореми.

Доведемо, що $\bar{A}^{(0)} \mathcal{R} \bar{A}^{(1)}$. Для цього побудуємо такі $\bar{B}^{(r)} \in FP(S_N)$, що $\bar{A}^{(1-r)} = \bar{A}^{(r)} \bar{B}^{(r)}$, $r \in \{0, 1\}$.

Будуємо їх наступним чином. Для кожного $r \in \{0, 1\}$ розглянемо множину $J^{(r)} = \{(s, t) : s \in \bar{A}^{(r)}(t)\}$. Спочатку побудуємо таку множину підстановок $\{b_j^{(r)} \in S_N\}_{j \in J^{(r)}}$, що для всіх $t \in N$, $j \in J^{(r)}$ виконуються наступні умови:

- 1) $\bar{A}^{(r)}(b_j^{(r)}(t)) \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(t)$;
- 2) $s \in \bar{A}_t^{(r)} \Rightarrow \exists j \in N : s \in \bar{A}^{(1-r)}(b_j^{(1-r)}(t))$.

Зафіксуємо деякі значення s, t ; $s \in \bar{A}^{(r)}(t)$. Візьмемо $j = (s, t)$ і побудуємо підстановку $b_j^{(1-r)} \in S_N$, для якої виконуються умова 1 і $s \in \bar{A}^{(1-r)}(b_j^{(1-r)}(t))$.

Якщо $\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = \bar{A}^{(r)}(t)\} \neq \emptyset$, візьмемо $l \in N$ таке, що $\bar{A}^{(1-r)}(l) = \bar{A}^{(r)}(t)$.

Якщо ж $\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = \bar{A}^{(r)}(t)\} = \emptyset$, то, за припущенням, існує послідовність множин $\{M_n = M_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ така, що $M_0 = M$, $M_i \subseteq M_{i+1}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$ і для будь-якого $r \in \{0, 1\}$ для будь-якого числа C $|\{k : \exists n > C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_n\}| = |\{k : \exists n < C, \bar{A}^{(r)}(k) = M_n\}| = \infty$, причому $s \in \bigcup_{i \leq 0, \exists k, \bar{A}^{(r)}(k) = M_i} M_i$ ($r \in \{0, 1\}$). Виходячи з останнього включення, виберемо таке $i \leq 0$, що $s \in M_i$ і $\{k : \bar{A}^{(1-r)}(k) = M_i\} \neq \emptyset$. Візьмемо таке l , що $\bar{A}^{(1-r)}(l) = M_i$.

Для обраних j, l побудуємо послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ елементів інверсної симетричної напівгрупи $FP(IS(N))$, таких, що для будь-яких $n > 0$, $k \geq 0$ виконуються умови:

- 1) $\theta_0(j) = l$;
- 2) $|\text{dom} \theta_k| < \infty$;
- 3) $\bar{A}^{(1-r)}(\theta_k(n)) \subseteq \bar{A}^{(r)}(n)$;
- 4) $\{x : (x > 0) \wedge (x \leq k)\} \subseteq \text{dom} \theta_k \cap \text{dom} \theta_k^{-1}$;
- 5) для кожного $x \in \text{dom}(\theta_k)$ $x \in \text{dom}(\theta_{k+1})$, причому $\theta_{k+1}(x) = \theta_k(x)$, $\theta_{k+1}^{-1}(x) = \theta_k^{-1}(x)$.

Послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ будуватимемо рекурентним чином.

В якості θ_0 візьмемо віді, окрім точки j , не визначену часткову підстановку, $\theta_0(j) = l$. Для $k > 0$ часткова підстановка θ_{k-1} будується шляхом довизначення θ_{k-1} не більше ніж у двох точках так, щоб виконувалась умова $k \in \text{dom}(\theta_k) \cap \text{im}(\theta_k)$.

Спочатку розглянемо часткову підстановку θ'_{k-1} , яку визначимо наступним чином.

Якщо $x \neq k, x \in \text{dom} \theta_{k-1}$, то $\theta'_{k-1}(x) = \theta_{k-1}(x)$.

Якщо $x \neq k, x \notin \text{dom} \theta_{k-1}$, то $\theta'_{k-1}(x)$ — невизначено.

Якщо $k \in \text{dom} \theta_{k-1}$, то $\theta'_{k-1}(k) = \theta_{k-1}(k)$.

Якщо $k \notin \text{dom} \theta_{k-1}$, то можливі варіанти:

$$a) \left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \setminus \text{dom} \theta_{k-1}^{-1} \neq \emptyset.$$

Візьмемо деяке

$$m \in \left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \setminus \text{dom} \theta_{k-1}^{-1}$$

і означимо $\theta'_{k-1}(k) = m$.

$$b) \left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \setminus \text{dom} \theta_{k-1}^{-1} = \emptyset.$$

В цьому випадку, як буде показано нижче, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $m \notin \text{im}(\theta_{k-1})$.

$\bar{A}^{(1-r)}(m) \subset \bar{A}^{(r)}(k)$. В такому разі ми беремо $\theta'_{k-1}(k) = m$.

Далі, довизначаючи аналогічним чином, часткової підстановки θ_{k-1}^{-1} в точці k (якщо вона там не визначена), отримуємо часткову підстановку θ_k .

Покажемо тепер, що припущення, яке робилось у випадку b), завжди вірне. З початкового припущення випливає, що або існує нескінченна послідовність $k_0, k_1, \dots$ така, що $\dots \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(k_1) \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(k_0) \subseteq \bar{A}^{(r)}(k)$, або такого ланцюга не існує, і тому $\left| \left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right| = \left| \left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right|$. Оскільки, за побудовою, виконується умова 2), і в першому випадку ланцюг $\dots \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(k_1) \subseteq \bar{A}^{(1-r)}(k_0) \subseteq \bar{A}^{(r)}(k)$ — нескінченний, то в цьому випадку шукане число m існує.

Розглянемо другий випадок.

Оскільки для цього випадку такого ланцюга не існує, то за побудовою θ_k маємо

$$\begin{aligned} & \theta_{k-1} \left(\left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) \neq \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \cap \\ & \left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) = \\ & \theta_{k-1}^{-1} \left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) \neq \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \cap \\ & \left(\left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Також, з того, що

$$\left| \left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right| = \left| \left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right|,$$

за побудовою θ_k , маємо

$$\begin{aligned} & \theta_{k-1} \left(\left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \subseteq \\ & \left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right), \\ & \theta_{k-1}^{-1} \left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \subseteq \\ & \left(\left\{ m : \bar{A}^{(1-r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right). \end{aligned}$$

Якби було $k \notin \text{dom} \theta_{k-1}$, тобто множина $\left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \setminus \text{dom} \theta_{k-1}$ — непорожня, то за рахунок рівних потужностей і множина $\left(\left\{ m : \bar{A}^{(r)}(m) = \bar{A}^{(r)}(k) \right\} \right) \setminus \text{dom} \theta_{k-1}^{-1}$ була б непорожня. Отже другий випадок неможливий.

Очевидно, для елементів послідовності $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ виконуються умови 1) — 5).

Після того, як побудована послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$, в якості $b_j^{(1-r)}$ візьмемо $b_j^{(1-r)} = \left(\theta_k(k) \right)$. Тепер неважко переконатись, що

$$\bar{B}^{(1-r)} = \left\{ b_j^{(1-r)} \right\}_{j \in J^{(1-r)}} \quad \square$$

4 Відношення $\mathcal{L}$

Означення 4.1. Для всіх $\bar{A} \in FP(S_N)$, $\bar{A} = \{a_k\}_{k \in I}$ покладемо $\bar{A} = \{a_k^{-1}\}_{k \in I}$.

Визначимо відображення $\varphi : FP(S) \rightarrow FP(S)$ наступним чином: $\varphi(\bar{A}) = \bar{A}$. Відображення φ є ізоморфізмом напівгрупи $FP(S)$ на двоїсту до неї напівгрупу $\overline{FP(S)}$. Оскільки при такому відображенні відношення $\mathcal{R}$ та $\mathcal{L}$ міняються місцями, то одержуємо наступну теорему.

Теорема 4.1. Нехай $\bar{A}, \bar{B} \in FP(S_N)$. $\bar{A} \mathcal{L} \bar{B}$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{A} \mathcal{R} \bar{B}$.

Список використаних джерел

1. Гудзенко С.В. Відношення Гріна на факторстепенях симетричної групи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2004. — 2. — с. 34-44.
2. Ганюшкин А.Г., Мазорчук В.С. Факторстепени и индуцированные действия полугрупп преобразований // В кн.: Третья международная конференция по алгебре. Сб. тезисов. Красноярск, — 1993. — с. 83-84.
3. Mazorchuk V. Green's Relations on $FP^+(S_n)$ // Мат. студії. — 15 (2001). — 2. — с. 151-155.

Надійшла до редколегії 06.05.2009

УДК 519.21

Світлана В. Єфіменко, к.ф.-м.н., доцент,
Костянтин В. Рибасов, к.ф.-м.н.

Розподіл відстаней між трьома випадковими точками на сфері

Визначена щільність спільного розподілу відстаней між трьома випадковими точками, рівномірно та незалежно розподіленими на сфері в n -вимірному просторі.

Ключові слова: спільний розподіл, щільність розподілу, рівномірний розподіл.

E-mail: lana@univ.kiev.ua, rybasov@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Розподіл відстані між двома незалежними та рівномірно розподіленими у кулі точками вивчався в багатьох роботах, наприклад, [1] та [4]. В монографії [5] визначено щільність розподілу двох випадкових точок, незалежно і рівномірно розподілених на двох концентричних сферах у n -вимірному просторі. Звісно, якщо покласти радіуси сфер рівними, одержимо розподіл відстані між двома точками рівномірно та незалежно розподіленими на сфері. Метою даної статті є узагальнення даного результату на випадок трьох точок.

Отже, нехай в просторі R_n ($n \geq 3$) визначена $S(r)$ – сфера радіуса r із центром в початку координат. Через $\rho(P, Q)$ позначимо відстань між точками $P \in R_n$ та $Q \in R_n$. Основний результат роботи міститься у наступній теоремі.

Теорема Нехай точки $P = P(x_1, \dots, x_n)$, $Q = Q(y_1, \dots, y_n)$ та $R = R(z_1, \dots, z_n)$ рівномірно та незалежно розподілені на $S(r)$. Тоді щільність $f(v_1, v_2, v_3)$ спільного розподілу відстаней $\rho(P, Q)$, $\rho(Q, R)$ та $\rho(R, P)$ при $0 \leq v_1 \leq 2r$, $0 \leq v_2 \leq 2r$, $l(v_1, v_2) \leq v_3 \leq h(v_1, v_2)$ рівна:

$$h(v_1, v_2, v_3) = \frac{2^{n-1} \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-3)! \pi^2 r^6} v_1 v_2 v_3 \times$$

$$\left[\frac{v_1^2 v_2^2 + v_2^2 v_3^2 + v_3^2 v_1^2}{2r^4} - \frac{v_1^4 + v_2^4 + v_3^4}{4r^4} - \frac{v_1^2 v_2^2 v_3^2}{4r^6} \right]^{\frac{n-4}{2}}.$$

де

$$h(v_1, v_2) = \sqrt{2\pi r} \times$$

S. V. Iefimenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,

K. V. Rybasov, Cand.Sci. (Phys.-Math.)

Distribution of distances between three random points on the sphere

The joint density of distances between three random points, uniformly distributed on the sphere in three-dimensional space, is considered.

Key Words: joint distribution, distribution density, uniform distribution.

$$\times \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2r^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{4r^4} - \frac{v_1 v_2}{r^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{4r^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{4r^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$h(v_1, v_2) = \sqrt{2\pi r} \times$$

$$\times \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2r^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{4r^4} + \frac{v_1 v_2}{r^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{4r^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{4r^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

і $f(v_1, v_2, v_3) = 0$ в усіх інших точках.

Доведення. Зауважимо, що в силу симетрії сфери одну з трьох точок можна вважати фіксованою, покладемо, наприклад,

$$R(z) = R(z_0) = R(r, 0, \dots, 0),$$

а дві інші точки P та Q вважатимемо рівномірно розподіленими на сфері незалежно одна від одної та від фіксованої точки.

Нехай тепер $T(v_1, v_2, v_3)$ – довільна вимірна функція трьох скалярних змінних v_1, v_2, v_3 . Тоді визначене математичне сподівання

$$MT(\rho(P, Q), \rho(Q, R), \rho(R, P)) = |S(r)|^{-2} \times \quad (1)$$

$$\times \int_{S(r)} \int_{S(r)} T(|x - z_0|, |y - z_0|, |x - y|) m(dx) m(dy).$$

Тут $m(\cdot)$ – міра Лебега на сфері. З іншого боку, те саме математичне сподівання можна виразити через щільність $f(v_1, v_2, v_3)$ спільного розподілу відстаней між трьома точками

$$MT(\rho(P, Q), \rho(Q, R), \rho(R, P)) =$$

$$= \int_0^{2r} \int_0^{2r} \int_{h(v_1, v_2)}^{h(v_1, v_2)} T(v_1, v_2, v_3) f(v_1, v_2, v_3) dv_3 dv_2 dv_1. \quad (2)$$

Зауважимо, що тут змінні v_1, v_2, v_3 визначають відстані між трьома точками на сфері, тому якщо для перших двох з них допустимі значення із інтервалу $[0, 2r]$, то третя змінна може набувати значень лише із інтервалу $[l(v_1, v_2), h(v_1, v_2)]$, межі якого залежать від відстаней v_1, v_2 і також мають бути визначені.

Обчислимо інтеграл у формулі (1), враховуючи, що $z_0 = (r, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{S(r)} \int_{S(r)} T(|x - z_0|, |y - z_0|, |x - y|) m(dx) m(dy) = \\ &= \int_{S(r)} \int_{S(r)} T\left(\sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{x_1}{r}}, \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{y_1}{r}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{r^2}}\right) m(dx) m(dy). \end{aligned}$$

Для цього застосуємо ортогональне перетворення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$: $x_1 = u_1$, $x_k = \sum_{i=2}^n a_k^i u_i$, $k = 2, \dots, n$, де на $(n-1)^2$ коефіцієнтів перетворення a_k^i , $i, k = 2, \dots, n$ накладено $\frac{(n-1)n}{2}$ умов ортогональності:

$$\sum_{k=2}^n (a_k^i)^2 = 1, \quad \sum_{k=2}^n a_k^i a_k^j = 0, \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j.$$

З цих умов випливає, що

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 = r^2.$$

Оскільки умов значно менше ніж коефіцієнтів, маємо достатню довільність їх вибору. Тому можемо покласти $a_k^1 = \frac{y_k}{Y}$, $k = 2, \dots, n$, де

$Y = \sqrt{\sum_{k=2}^n y_k^2}$ і вважати, що визначник матриці коефіцієнтів перетворення рівний 1. При цьому маємо $Y = \sqrt{r^2 - y_1^2}$ і $\sum_{k=2}^n x_k y_k = Y u_2$. Звідси

випливає, що:

$$\begin{aligned} I &= \int_{S(r)} \int_{S(r)} T\left(\sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{u_1}{r}}, \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{y_1}{r}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{u_1 y_1 + Y u_2}{r^2}}\right) m(du) m(dy) = \\ &= \int_{S(r)} \int_{S(r)} T\left(\sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{u_1}{r}}, \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{y_1}{r}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2r} \sqrt{1 - \frac{u_1 y_1}{r^2} - \frac{u_2}{r} \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{r^2}}}\right) m(du) m(dy) \end{aligned}$$

Подальші дії полягають у переході до узагальнених полярних координат:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) = (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}),$$

що дозволяє записати інтеграл I у вигляді:

$$\begin{aligned} I &= (2\pi r^{n-1})^2 \int_0^\pi \dots \int_0^\pi T\left(\sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1}, \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \psi_1}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_2}\right) d\varphi_1 d\varphi_2 d\psi_1 \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-2} \psi_1 \sin^{n-2} \varphi_2 \times \\ &\quad \times T\left(\sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1}, \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \psi_1}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_2}\right) d\varphi_1 d\varphi_2 d\psi_1. \end{aligned}$$

Тут $I_k = \int_0^\pi \sin^k \theta d\theta = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)$ (Ці множники виникають за рахунок якобіану переходу до полярної системи координат). Нарешті виконаємо останню заміну змінних.

$$\begin{aligned} \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1} &= v_1, \quad \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \psi_1} = v_2, \quad (3) \\ \sqrt{2r} \sqrt{1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_2} &= v_3. \end{aligned}$$

Знайдемо вирази для

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{v_1^2}{2r^2}, \quad \cos \psi_1 = 1 - \frac{v_2^2}{2r^2},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{v_1}{r} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{4r^2}}, \quad \sin \psi_1 = \frac{v_2}{r} \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{4r^2}},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\left(1 - \frac{v_3^2}{2r^2}\right) - \cos \varphi_1 \cos \psi_1}{\sin \varphi_1 \sin \psi_1}.$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_1 - \left(\left(1 - \frac{v_3^2}{2r^2}\right) - \cos \varphi_1 \cos \psi_1\right)^2}}{\sin \varphi_1 \sin \psi_1}.$$

Формули (3) дозволяють встановити межі зміни

для змінної v_3 : мінімальне значення досягається при $\varphi_2 = 0$ і рівне $\sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos(\varphi_1 - \psi_1)}$, а максимальне – при $\varphi_2 = \pi$ і рівне $\sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos(\varphi_1 + \psi_1)}$. Таким чином, виконавши заміну змінних (3), одержимо остаточний вираз для інтеграла I :

$$I = (2\pi)^2 (I_1 \cdots I_{n-4})^2 I_{n-3} r^{2n-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(v_1, v_2, v_3) \times \\ \times v_1 v_2 v_3 (\sin \varphi_1 \sin \psi_1 \sin \varphi_2)^{n-4} dv_3 dv_2 dv_1 = \\ = \frac{2^{n-1} \pi^{n-2}}{(n-3)!} r^{2n-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(v_1, v_2, v_3) v_1 v_2 v_3 \times \\ \times \left[\frac{v_1^2 v_2^2}{2r^2} + \frac{v_2^2 v_3^2}{2r^2} + \frac{v_3^2 v_1^2}{2r^2} - \frac{v_1^4 + v_2^4 + v_3^4}{4r^4} - \right. \\ \left. - \frac{v_1^2 v_2^2 v_3^2}{4r^6} \right]^{\frac{n-4}{2}} dv_3 dv_2 dv_1,$$

де

$$I(v_1, v_2) = \sqrt{2}\pi r \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2r^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{4r^4} - \right. \\ \left. - \frac{v_1 v_2}{r^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{4r^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{4r^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ h(v_1, v_2) = \sqrt{2}\pi r \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2r^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{4r^4} + \right. \\ \left. + \frac{v_1 v_2}{r^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{4r^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{4r^2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Порівняємо формули (1) та (2), використавши одержаний вираз для інтегралу I . Оскільки рівність інтегралів у цих формулах справджується для довільної вимірної функції трьох змінних $T(v_1, v_2, v_3)$, твердження теореми повністю доведене.

Висновки

Таким чином була одержана формула щільності розподілу відстаней між трьома довільними точками рівномірно розподіленими на сфері у n -вимірному просторі. Вона може бути корисною у багатьох дослідженнях, пов'язаних із вивченням властивостей різноманітних функціоналів від однорідних та ізотропних випадкових полів типу сферичного середнього або сферичних мір перевищення деякого рухомого рівня. Такі та подібні їм задачі досліджувались, наприклад, у роботах [2] та [3].

Важливо також зауважити, що запропонована методика доведення даного твердження, а саме: ортогональне перетворення координат та використання узагальненої полярної системи координат для обчислення інтегралів по сфері, – може бути застосована до довільної кількості точок незалежно та рівномірно розподілених на сфері. Проте, на жаль, у кожному окремому випадку даний метод потребує конкретної реалізації.

Список використаних джерел

1. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
2. Леоненко Н.Н. О мерах превышения уровня гауссовским изотропным полем // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1984. – Вып. 31 – с. 64-82.
3. Рыбасов К.В. Сферические меры превышения подвижного уровня гауссовским полем // Теория функций и ее приложения. – М.: МГУ, 1986. – с. 129-130.
4. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983. – 358 с.
5. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища школа, 1980. – 208 с.

Надійшла до редколегії 09.03.2009

УДК 512.53

Юрій В. Жучок

Про декомпозиції повної напівгрупи матриць

В роботі описується найбільша декомпозиція повної напівгрупи матриць над довільним кільцем у ліву (праву, прямокутну) суму напівгруп.

Ключові слова: напівгрупа матриць, декомпозиція, ліва сума, права сума, прямокутна сума

E-mail: zhuchok_v@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1. Вступ

При вивченні структурних властивостей напівгруп з нулем досить корисним є поняття 0-декомпозиції. Перші дослідження декомпозицій напівгруп з нулем у 0-прямі об'єднання (= ортогональні суми) належать Е.С. Ляпіну [1], [2] і Ш. Шварцу [3]. Далі ці декомпозиції вивчалися великою кількістю авторів (див. напр., [4-6]). Інші відомі типи 0-сполук – це декомпозиції напівгруп з нулем у ліву, праву та прямокутну суму напівгруп. Так конгруенції напівгруп з нулем, факторнапівгрупи за якими є 0-прямокутними сполуками вивчалися в [7], декомпозиції напівгруп з нулем у ліву, праву та прямокутну суму напівгруп – в [8, 9].

В цій роботі описуються найбільші декомпозиції повної напівгрупи матриць [8] над довільним кільцем у ліву, праву та прямокутну суму напівгруп, а також найбільші розклади доданків цих декомпозицій у ті самі 0-сполуки.

2. Основні поняття

В цьому пункті для довільної напівгрупи з нулем визначаються конструкції ортогональної, лівої, правої і прямокутної суми напівгруп.

2.1. Нехай S^0 – напівгрупа з нулем. Напівгрупу S^0 називають ортогональною сумою напівгруп $S_\alpha, \alpha \in Y$, позначаючи $S^0 = \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$, якщо $S_\alpha, \alpha \in Y$ – ненульові напівгрупи, $S^0 = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ і

при будь-яких $\alpha, \beta \in Y, \alpha \neq \beta$ виконуються умови $S_\alpha \cap S_\beta = S_\alpha \cdot S_\beta = \{0\}$. В цьому випадку, система $D = \{S_\alpha | \alpha \in Y\}$ – декомпозиція в ортогональну

Yuriy V. Zhuchok

On decompositions of complete semigroup of matrices

In this work the greatest decomposition of complete semigroup of matrices over ring into a left (right, rectangular) sum of semigroups is described.

Key words: semigroup of matrices, decomposition, left sum, right sum, rectangular sum.

суму або ортогональна декомпозиція S^0 , і S_α – ортогональні компоненти або компоненти в D . На множині всіх ортогональних декомпозицій S^0 визначимо частковий порядок $\leq$ таким чином: $D \leq D'$, якщо кожна компонента в D' є підмножиною деякої компоненти в D .

Напівгрупа S^0 є ортогонально нерозкладною, якщо $D = \{S^0\}$ – єдина ортогональна декомпозиція напівгрупи S^0 (див. [10]).

Напівгрупу S^0 називають лівою сумою напівгруп $S_\alpha, \alpha \in Y$, позначаючи $S^0 = L \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$, якщо $S_\alpha, \alpha \in Y$ – ненульові напівгрупи, $S^0 = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ і при будь-яких $\alpha, \beta \in Y, \alpha \neq \beta$ виконуються умови $S_\alpha \cap S_\beta = \{0\}$ та $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\alpha$. Двоїсто визначається права сума напівгруп $S_\alpha, \alpha \in Y$ для напівгрупи S^0 , яка позначається $S^0 = R \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

Напівгрупу S^0 називають прямокутною сумою напівгруп $S_\alpha, \alpha \in P$, позначаючи $S^0 = P \sum_{\alpha \in P} S_\alpha$, якщо $\emptyset \neq P \subseteq I \times \Lambda$, де I та Λ – непорожні множини, $S_\alpha, \alpha \in P$ – ненульові напівгрупи, які попарно перетинаються по піднапівгрупі $\{0\}$, $S^0 = \bigcup_{\alpha \in P} S_\alpha$ і при будь-яких $(i, \lambda), (j, \mu) \in P$ виконуються умови:

$$S_{(i, \lambda)} S_{(j, \mu)} \begin{cases} \subseteq S_{(i, \mu)}, & (i, \mu) \in P, \\ = 0, & \text{якщо } (i, \mu) \notin P. \end{cases}$$

$M_{m..}$ і для всіх $A, B \in P$ виконуються умови:

$$TS_A = \begin{cases} M_{m..} S_A \subset \bar{M} \subset T, \\ \bar{M} S_A = \{0\} \subset T, \end{cases}$$

$$S_A T = S_A S_B = \{0\} \subset S_A,$$

то $M_{m..}$ за визначенням є лівою сумою напівгруп $S_A, A \in P$ і T .

Подібним чином, можна розкласти будь-яку напівгрупу $M_{..n}$, $n \in N$ над кільцем K ($Q_K \neq \emptyset$) у праву суму напівгруп. Також розкладаються у прямокутну суму і напівгрупи $M_{m..n}$, де $m, n \in N$, $m \neq n$.

3.4. Нехай далі M – повна напівгрупа матриць над довільним кільцем K . Через $0_{m..n}$, де $m, n \in N$ будемо позначати нульову матрицю відповідної розмірності $m \times n$.

Лема. $\{M_{m..} | m \in N\}$ – найбільша декомпозиція повної напівгрупи матриць M над кільцем K у ліву суму напівгруп.

Доведення. Зрозуміло, що M є лівою сумою напівгруп $M_{m..}$, $m \in N$. Нехай $D = \{S_\alpha | \alpha \in Y\}$ – довільна декомпозиція M в ліву суму і $M_{..}$ – довільна компонента суми $M = L \sum_{m \in N} M_{m..}$. Оскільки для всіх $A \in M_{k..}$ маємо: $A \circ 0_{m..} = 0_{m..}$, то $M_{k..} \subseteq S_\alpha$ для деякого $\alpha \in Y$. Припустимо тепер, що існує елемент $A \in M$ ($A \neq 0$) такий, що $A \in M_{k..} \cap S_\beta$, $k \neq l$, $\beta \neq \alpha$ і візьмемо довільну матрицю $B \in M_{l..}$. Тоді з одного боку, $A \circ B \in M_{k..} \subseteq S_\alpha$, а з іншого, – $A \circ B \in S_\beta M_{l..} \subseteq S_\beta$, звідки $A \circ B \in S_\alpha \cap S_\beta$. Це означає $A \circ B = 0$, що протирічить умові $A \circ B \in M_{k..} \circ M_{l..} \subseteq M_{k..}$. Отже, $M_{k..} \subseteq S_\alpha$ для всіх $k \in N$. Таким чином, $D \leq \{M_{m..} | m \in N\}$.

Лему доведено.

3.5. Для всіх $n, k \in N$, $n \neq k$ покладемо

$$M_{n..} M_{k..} = R_{n..k}, F_{n..k} = M_{n..k} \setminus R_{n..k},$$

$$F_n = \{l \in N | l \neq n, F_{n..l} \neq \emptyset\}.$$

Лема. Якщо $F_n = \emptyset$, то напівгрупа $M_{n..}$ не розкладається у ліву суму напівгруп.

Доведення. Нехай $D = \{S_\alpha | \alpha \in Y\}$ – декомпо-

зиція $M_{n..}$ у ліву суму. З леми п.3.4 відомо, що $M_{n..}$ не розкладається у ліву суму і, отже, $M_{n..} \subseteq S_\alpha$ для деякого $\alpha \in Y$. Припустимо, що існує ненульовий елемент $A \in M_{n..}$ такий, що $A \in M_{n..} \cap S_\beta$, де $\beta \in Y$, $\beta \neq \alpha$, $l \in N$, $l \neq n$. Оскільки $F_n = \emptyset$, то $M_{n..k} = R_{n..k}$ для всіх $k \in N$, $n \neq k$. Тоді знайдуться $C \in M_{n..}$ і $B \in M_{n..l}$ такі, що з одного боку, $A = C \circ B \in S_\alpha M_{n..l} \subseteq S_\alpha$, а з іншого, – $C \circ B = A \in S_\beta$, що протирічить умові $\alpha \neq \beta$. Отже, $M_{n..} \subseteq S_\alpha$ при будь-якому $l \in N$. А це означає, що $D = \{M_{n..}\}$.

Лему доведено.

3.6. Нехай $F_n \neq \emptyset$. Покладемо тоді

$$\bar{F}_n = N \setminus F_n, H = \bigcup_{k \in \bar{F}_n, k \neq n} F_{n..k},$$

$$H^0 = H \cup \{0\}, \bar{H} = \bigcup_{k \in \bar{F}_n, k \neq n} R_{n..k},$$

$$H = \bigcup_{k \in \bar{F}_n, k \neq n} M_{n..k}, V = M_{n..} \cup H^0 \cup \bar{H}.$$

Оскільки $M_{n..} M_{n..} \subseteq M_{n..}$, $M_{n..} H = H$,

$$M_{n..} \bar{H} \subseteq \bar{H}, H V = \bar{H} V = \{0\}, H H = \{0\},$$

то V і H^0 – напівгрупи. Більш того, V є правою сумою напівгруп $M_{n..}, H, \bar{H}$.

Для кожного $A \in H$ нехай

$$G_A = \{A, 0\}.$$

Має місце наступна

Лема. Якщо $F_n \neq \emptyset$, то $\{V, G_A | A \in H\}$ – найбільша декомпозиція напівгрупи $M_{n..}$ у ліву суму напівгруп.

Доведення. Множини G_A , $A \in H$ є напівгрупами з нульовим множенням, які між собою та з напівгрупою V попарно перетинаються по нульовій піднапівгрупі $\{0\}$. Усі ці напівгрупи в об'єднанні складають $M_{n..}$, при цьому для кожного $A \in H$ виконуються умови:

$$G_A M_{n..} = \{0\} \subset G_A,$$

$$H G_A = \bar{H} G_A = \{0\} \subset V,$$

$$M_{\alpha\alpha} G_A \subseteq \bar{H} \subset V.$$

Отже, $M_{\alpha\alpha}$ за визначенням є лівою сумою напівгруп G_A , $A \in H$ і V .

Нехай $D = \{S_\alpha | \alpha \in Y\}$ – довільна декомпозиція $M_{\alpha\alpha}$ у ліву суму. Зрозуміло, що $M_{\alpha\alpha} \subseteq S_\alpha$ для деякого $\alpha \in Y$ (див. лему п.3.4). Оскільки $M_{\alpha\alpha} H' = H'$, то міркуючи як у п.3.5, отримаємо $H' \subseteq S_\alpha$. Припустимо, що існує матриця $A \in M_{\alpha\alpha}$ така, що $A \in R_{\alpha\alpha} \cap S_\beta$, де $\beta \in Y$, $\beta \neq \alpha$ і $k \in F_\alpha$. Оскільки $F_\alpha \neq \emptyset$, то $R_{\alpha\alpha} \subset M_{\alpha\alpha}$ для всіх $l \in F_\alpha$. Тоді існують $X \in M_{\alpha\alpha}$ і $Y \in M_{\alpha\alpha}$ такі, що мають місце умови:

$$X \circ Y = A \in S_\beta, A = X \circ Y \in S_\alpha \circ M_{\alpha\alpha} \subseteq S_\alpha,$$

що протирічить нерівності $\alpha \neq \beta$. Звідси $R_{\alpha\alpha} \subseteq S_\alpha$ для всіх $l \in F_\alpha$, тобто $\bar{H} \subseteq S_\alpha$. Таким чином, $V = M_{\alpha\alpha} \cup H' \cup \bar{H} \subseteq S_\alpha$. Очевидно, для кожного $A \in H$ існує $\gamma \in Y$ таке, що $G_A \subseteq S_\gamma$. Отже, $D \leq \{V, G_A | A \in H\}$.

Лему доведено.

3.7. З лем п. 3.4-3.6 випливає

Теорема. $\{M_{\alpha\alpha} | \alpha \in N\}$ – найбільша декомпозиція повної напівгрупи матриць M над довільним кільцем K у ліву суму напівгруп. Якщо $F_\alpha = \emptyset$, то напівгрупа $M_{\alpha\alpha}$ не розкладається у ліву суму. Якщо $F_\alpha \neq \emptyset$, то сукупність $\{V, G_A | A \in H\}$ – найбільша декомпозиція напівгрупи $M_{\alpha\alpha}$ у ліву суму напівгруп.

Подібним чином описуються найбільші декомпозиції повної напівгрупи матриць над довільним кільцем у праву та прямокутну суму напівгруп та найбільші декомпозиції їх доданків у відповідні суми.

Висновки

В роботі описано найбільшу декомпозицію повної напівгрупи матриць над довільним кільцем у ліву (праву, прямокутну) суму напівгруп, а також найбільші розклади компонент цієї декомпозиції у ліву (праву, прямокутну) суму.

Робота є частиною наукового дослідження, яке підтримується МОН України у рамках проекту GP/F27 для молодих учених на 2009 р.

Список використаних джерел

1. Ляпин Е.С. Полупростые коммутативные ассоциативные системы // Известия АН СССР. – 1950. – №14. – Р. 367-380.
2. Ляпин Е.С. Нормальные комплексы ассоциативных систем // Изв. АН СССР. – 1950. – 14. – С. 179-192.
3. Шварц Ш. О полугруппах имеющих ядро // Czech. Math. J. – 1951. – №1 (76). – Р. 259-301.
4. Venkatesan P.S. On decomposition of semigroup with zero // Math. Zeitsch. – 1966. – 92. – Р. 164-174.
5. Steinfeld S. On semigroups which are unions of completely o-simple semigroups // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1966. – Vol. 16. – Р. 63-69.
6. Clifford A.H., Preston G.B. The Algebraic Theory of Semigroups // Amer. Math. Soc. – Providence, R.I. – Vol. II. – 1967.
7. Lallement G., Petrich M. Decomposition I-matricielle d'une demi-groupe // J. Math. Pures Appl. – 1966. – №45. – Р. 67-117.
8. Bogdanović S., Ćirić M. Decompositions of semigroup with thero // Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série. – 1995. – №57 (71). – Р. 111-123.
9. Жучок Ю.В. Декомпозиції напівгруп з нулем // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. фіз-мат наук. – Донецьк, 2005. – № 2. – С. 7-13.
10. Bogdanović S., Ćirić M. Orthogonal sums of semigroups // Israel J. Math. – 1995. – Vol. 90. – Р. 423-428.

Надійшла до редколегії 19.02.2009

УДК 519.21

Андрій Кандрьонкін, студент

Про клас інверсних моноїдів
ко-скінченних порядкових
автоморфізмів множини $\mathbb{Z}$

У роботі розглядається клас інверсних напівгруп, які одержуються із групи порядкових автоморфізмів лінійно впорядкованої множини цілих чисел приєднанням ко-скінченного ідемпотента.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, ко-скінченний порядковий автоморфізм.

Andrii Kandrynkin, student

On some class of inverse monoids of
co-finite orderly automorphisms of
integers

In the paper a class of inverse semigroups, which is received from the group of orderly automorphisms of the linearly-ordered set of integers by the the adjunction of the co-finite idempotent, is considered.

Key Words: inverse monoid, co-finite orderly automorphism

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

Вступ

Теорія напівгруп є однією із тих областей сучасної алгебри, яка постійно розвивається. Вона має тісні зв'язки з диференціальною геометрією, функціональним аналізом, теорією графів, теорією алгоритмів, абстрактною теорією автоматів та ін. Найпростішою конструкцією, яка призводитиме до напівгруп, є просте приєднання до групи, яка влаштована досить прозоро, одного ідемпотента. Тим самим ми одержимо моноїд, який зразу ж стає суттєво складнішим.

Розглянемо у якості базової групи групу S_∞ порядкових автоморфізмів лінійно впорядкованої множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, і нехай $S_\infty = \langle b \rangle$. Позначимо напівгрупу частково визначених ко-скінченних порядкових автоморфізмів множини $\mathbb{Z}$, що визначаються групою S_∞ , символом IC_∞ . Тоді напівгрупа IC_∞ породжується автоморфізмами b та f , де для всіх $x \in \mathbb{Z}$ маємо $b : x \rightarrow x + 1$, $\text{Codom } f = \{0\}$ і для всіх $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $f : x \rightarrow x$, і задається такими визначальними співвідношеннями:

$$IC_\infty = \langle b, f \mid bb^{-1} = b^{-1}b = 1, f^2 = f,$$

$$fb^{-r}fb^r = b^{-r}fb^r, f, r \in \mathbb{N} \rangle.$$

Тим самим ми можемо ототожнити елементи напівгрупи IC_∞ із напівгруповими словами над алфавітом $S = \{b, f\}$. Тоді кожен елемент $g \in IC_\infty$ допускає єдине зображення у вигляді сло-

ва вигляду

$$h_1 \dots h_t h, \text{ де } h = b^k, h_i = b^{-\alpha_i} f b^{\alpha_i},$$

для $i \in \{1, \dots, t\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Z}$ такі, що $\alpha_1 < \dots < \alpha_t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Клас $(u_1, \dots, u_c)$ -піднапівгруп $IC_{u_1, \dots, u_c, \infty}$ моноїда IC_∞

Нехай $u_1, \dots, u_c$ — невід'ємні цілі числа такі, що $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$. Позначимо символом $f_{u_1, \dots, u_c}$ частково визначений ко-скінченний порядковий автоморфізм моноїда IC_∞ такий, що

$$\text{Codom } f_{u_1, \dots, u_c} = \{-u_c, \dots, -u_1, 0, u_1, \dots, u_c\}$$

і для всіх $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-u_c, \dots, -u_1, 0, u_1, \dots, u_c\}$ $f_{u_1, \dots, u_c} : x \rightarrow x$.

Твердження 1. 1) Нехай $u_1, \dots, u_c$ — невід'ємні цілі числа такі, що $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$. Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ частково визначений автоморфізм $b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k \in IC_\infty$ є ідемпотентом.

2) Для довільної послідовності $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$ невід'ємних цілих чисел $f_{u_1, \dots, u_c} = b^{-1} f_{u_1, \dots, u_{c-1}} b f_{u_1, \dots, u_{c-1}}$.

3) Для довільної послідовності $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$ невід'ємних цілих чисел та для довільних цілих чисел k, l ідемпотенти $b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k$ та $b^{-l} f_{u_1, \dots, u_c} b^l$ комутують.

Доведення — безпосередня перевірка.

Означення 1. Частково визначений ко-скінченний порядковий автоморфізм $b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k \in IC_\infty$ називатимемо $(u_1, \dots, u_c; k)$ -ідемпотентом.

Визначимо для послідовності $0 = u_1 < u_2 < \dots < u_c$ невід'ємних цілих чисел піднапівгрупу $IC_{u_1, \dots, u_c; \infty}$ інверсного моноїда IC_∞ як таку

$$IC_{u_1, \dots, u_c; \infty} = \langle b, f_{u_1, \dots, u_c} \rangle$$

і називатимемо її $(u_1, \dots, u_c)$ -піднапівгрупою моноїда IC_∞ .

Означення 2. Для $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ називатимемо елемент g $(k_1, \dots, k_s)$ -зміщенням елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$, якщо $Codom\ g = \{-k_1 - u_c, \dots, -k_1 - u_1, -k_1, -k_1 + u_1, \dots, -k_1 + u_c, -k_1 - k_2 - u_c, \dots, -k_1 - k_2 - u_1, -k_1 - k_2, -k_1 - k_2 + u_1, \dots, -k_1 - k_2 + u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_1, -k_1 - \dots - k_{s-1}, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_1, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_c\}$, а на області визначення елемент g діє як $b^{k_1+k_2+\dots+k_s}$.

$(k_1, \dots, k_s)$ -зміщення відповідає своїй назві. Область невизначення елемента g є об'єднанням паралельних зміщень множини $\{-u_c, \dots, -u_1, 0, u_1, \dots, u_c\}$ на $k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + \dots + k_{s-1}$ вліво.

Твердження 2. Частково визначений ко-скінченний порядковий автоморфізм g моноїда IC_∞ належить піднапівгрупі $IC_{u_1, \dots, u_c; \infty}$ тоді і тільки тоді, коли g є деяким $(k_1, \dots, k_s)$ -зміщенням елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$ ($u_1, \dots, u_c \in \mathbb{Z}$).

Доведення. Оскільки $f^2 = f$, то кожен елемент $g \in IC_{u_1, \dots, u_c; \infty}$ можна зобразити у вигляді слова такого вигляду

$$g = b^{k_1} f_{u_1, \dots, u_c} b^{k_2} \dots b^{k_{s-1}} f_{u_1, \dots, u_c} b^{k_s},$$

де $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$. Тоді матимемо $g = b^{k_1} b^{u_c} f b^{-u_c} \dots b^{u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} \dots b^{-u_c} f b^{u_c} b^{k_2} b^{u_c} f b^{-u_c} \dots b^{u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} \dots b^{-u_c} f b^{u_c} b^{k_3} \dots b^{k_{s-1}} b^{u_c} f b^{-u_c} \dots b^{u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} f b^{-u_1} \dots b^{-u_c} f b^{u_c} b^{k_s} = b^{k_1+u_c} f b^{-k_1-u_c} b^{k_1+u_{c-1}} f b^{-k_1-u_{c-1}} \dots b^{k_1+u_1} f b^{-k_1-u_1} b^{k_1} f b^{-k_1} b^{k_1-u_1} f b^{-k_1+u_1} b^{k_1-u_2} f b^{-k_1+u_2} \dots b^{k_1-u_c} f b^{-k_1+u_c} b^{k_1+k_2+u_c} f b^{-u_c-k_1-k_2} b^{k_1+k_2+u_{c-1}} \dots b^{k_1+k_2+\dots+k_s}$. Тоді $Codom\ g = \{-k_1 - u_c, \dots, -k_1 - u_1, -k_1, -k_1 + u_1, \dots, -k_1 + u_c, -k_1 - k_2 - u_c, \dots, -k_1 - k_2 - u_1, -k_1 - k_2, -k_1 - k_2 + u_1, \dots, -k_1 - k_2 + u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_1, -k_1 - \dots - k_{s-1}, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_1, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_c\}$.

$-k_1 - k_2 + u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_c, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} - u_1, -k_1 - \dots - k_{s-1}, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_1, \dots, -k_1 - \dots - k_{s-1} + u_c\}$, а для всіх $x \in \mathbb{Z} \setminus Codom\ g$ матимемо: $g(x) = b^{k_1+k_2+\dots+k_s}(x)$. $\square$

Звідси отримуємо, що область невизначення ідемпотента $b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k$ є множина $Codom\ b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k = \{k - u_c, \dots, k - u_1, k, k + u_1, \dots, k + u_c\}$. Елемент $b^{-k} f_{u_1, \dots, u_c} b^k$ природно називати ідемпотентним (k) -зміщенням елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$. Тоді ідемпотентне (k) -зміщення на області визначення діє тривіально, а його область невизначення є паралельним зсувом області невизначення елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$ на k вправо.

Твердження 3. Кожен елемент $g \in IC_{u_1, \dots, u_c; \infty}$ єдиним чином зображається у вигляді слова виду $h_1 \dots h_t h$, де $h_i = b^{-\alpha_i} f_{u_1, \dots, u_c} b^{\alpha_i}$ для $i \in \{1, \dots, t\}$, $h = b^k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Z}$ таких, що $\alpha_1 < \dots < \alpha_t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Кожен елемент $g \in IC_{u_1, \dots, u_c; \infty}$ можна зобразити у вигляді слова такого вигляду $g = b^{k_1} f_{u_1, \dots, u_c} b^{k_2} \dots b^{k_{s-1}} f_{u_1, \dots, u_c} b^{k_s}$, де $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$. Тоді із твердження 2 матимемо $g = b^{k_1} f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k_1} b^{k_1+k_2} f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k_1-k_2} \dots b^{k_1+\dots+k_{s-1}} f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k_1-\dots-k_{s-1}} b^{k_1+\dots+k_s}$. Окрім того, згідно твердження 1 елементи $b^k f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k}$ і $b^l f_{u_1, \dots, u_c} b^{-l}$ комутують як ідемпотенти, а $b^k f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k} b^k f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k} = b^k f_{u_1, \dots, u_c} b^{-k}$, що і доводить існування нашого зображення.

Тепер доведемо єдиність зображення. Нехай $g = h_1 \dots h_t h = \bar{h}_1 \dots \bar{h}_s \bar{h}$ — два зображення елемента h необхідного вигляду, де $h_i = b^{-\alpha_i} f_{u_1, \dots, u_c} b^{\alpha_i}$, $i \in \{1, \dots, t\}$, $\bar{h}_j = b^{-\beta_j} f_{u_1, \dots, u_c} b^{\beta_j}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $\bar{h} = b^{k_2}$. Тоді $Codom\ g = Codom\ (h_1 \dots h_t) = Codom\ (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_s)$ і $(h_1 \dots h_t)|_{Dom\ g} = (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_s)|_{Dom\ g} = id|_{Dom\ g}$. Тому $h|_{Dom\ g} = \bar{h}|_{Dom\ g}$, а значить $h = \bar{h}$. Більш того, область невизначення елемента $h_1 \dots h_t$ є об'єднанням паралельних зсувів на $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ вправо області невизначення елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$. Аналогічно, область невизначення елемента $\bar{h}_1 \dots \bar{h}_s$ є об'єднанням паралельних зсувів на $\beta_1, \dots, \beta_s$ вправо області невизначення елемента $f_{u_1, \dots, u_c}$ і $\alpha_1 < \dots < \alpha_t$, $\beta_1 < \dots < \beta_s$. Таким чином, $t = s$ і $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_t = \beta_t$. $\square$

Означення 3. Нехай g – довільний елемент моноїда $IC_{u_1, \dots, u_c, \infty}$. $(u_1, \dots, u_c)$ -канонічним виглядом елемента g називатимемо його зображення у вигляді слова, описаного в твердженні 3 (позначатимемо це зображення елемента g символом $[g]_{u_1, \dots, u_c}$). Число $\tau \in \{1, \dots, t\}$ таке, що $\alpha_1 < \dots < \alpha_\tau < 0 \leq \alpha_{\tau+1} < \dots < \alpha_t$, називатимемо $(u_1, \dots, u_c)$ -індексом переходу і позначатимемо символом $i([g]_{u_1, \dots, u_c})$.

З останнього твердження отримуємо, що

Твердження 4. Піднапівгрупа $IC_{u_1, \dots, u_c, \infty}$ є інверсною піднапівгрупою моноїда IC_∞ . Її задання твірними елементами і визначальними співвідношеннями має наступний вигляд: $IC_{u_1, \dots, u_c, \infty} = \langle b, f_{u_1, \dots, u_c} \mid bb^{-1} = b^{-1}b = 1, f_{u_1, \dots, u_c}^2 = f_{u_1, \dots, u_c}, f_{u_1, \dots, u_c} b^{-\tau} f_{u_1, \dots, u_c} b^\tau = b^{-\tau} f_{u_1, \dots, u_c} b^\tau f_{u_1, \dots, u_c}, \tau \in \mathbb{N} \rangle$, причому система визначальних співвідношень є незвідною, тобто жодне із цих співвідношень не є наслідком інших.

Знайдемо довжину $l_w([g]_{u_1, \dots, u_c})$ напівгрупового слова $[g]_{u_1, \dots, u_c}$. Матимемо: $l_w([g]_{u_1, \dots, u_c}) = |\alpha_1| + 1 + |\alpha_1 - \alpha_2| + 1 + \dots + |\alpha_{t-1} - \alpha_t| + 1 + |\alpha_t + k| = |\alpha_1| + \alpha_t - \alpha_1 + |\alpha_t + k| + t$, оскільки $\alpha_1 < \dots < \alpha_t$. Позначимо символом g_π слово $h_{\pi(1)} \dots h_{\pi(t)} h$ де $\pi \in S_t$ – довільна підстановка. Тоді довжина елемента g_π дорівнює $l_w(g_\pi) = |\alpha_{\pi(1)}| + 1 + |\alpha_{\pi(1)} - \alpha_{\pi(2)}| + 1 + \dots + |\alpha_{\pi(t-1)} - \alpha_{\pi(t)}| + 1 + |\alpha_{\pi(t)} + k|$, і має місце таке

Твердження 5. Для довільного елемента $g \in IC_\infty$, де $g = h_1 \dots h_t h$ – його канонічний вигляд, маємо:

$$l(g) = \min_{\pi \in S_t} \{l_w(g_\pi)\}.$$

Доведення. Нехай π – підстановка із S_t така, що $l_w(g_\pi) = \min_{\pi \in S_t} \{l_w(g_\pi)\}$. Рівність $l(g) \leq l_w(g_\pi)$ очевидна. Нехай $d = d_1 d_2 \dots d_j$ таке напівгрупове слово, що $l(g) = l_w(d) = j < l_w(g_\pi)$. Тоді ми можемо зобразити d у вигляді $d = b^{\delta_1} f b^{\delta_2} f \dots f b^{\delta_q}$, де $\delta_2 \neq 0, \dots, \delta_{q-1} \neq 0$ і $|\delta_1| + \dots + |\delta_q| + (q-1) = j$. Наша мета показати, що $l_w(d) = l_w(g_\pi)$ для деякої підстановки

$\pi \in S_t$. Оскільки згідно попереднього твердження $d = g_\pi$, то $h = b^{\delta_1 + \dots + \delta_q}$ і $b^{\delta_1} f b^{-\delta_1} b^{\delta_1 + \delta_2} f b^{-\delta_1 - \delta_2} \dots b^{\delta_1 + \dots + \delta_{q-1}} f b^{-\delta_1 - \dots - \delta_{q-1}} = h_1 \dots h_t$ є ідемпотентами. А з того, що $l(g) = l_w(d)$ випливає $\delta_1, \delta_1 + \delta_2, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_{q-1}$ є різними. Тепер необхідна рівність випливає із порівняння областей невизначення $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ та $\{\delta_1, \delta_1 + \delta_2, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_{q-1}\}$ тих ідемпотентів, які ми щойно розглядали. $\square$

Ми можемо обчислити точне значення функції довжини $l(g)$, де $g \in IC_{u_1, \dots, u_c, \infty}$.

Теорема 1. Нехай g – довільний елемент напівгрупи $IC_{u_1, \dots, u_c, \infty}$, $[g]_{u_1, \dots, u_c}$ – його $(u_1, \dots, u_c)$ -канонічне зображення, а $\tau = i([g]_{u_1, \dots, u_c})$ – індекс переходу. Тоді для $k > 0$

$$l(g) = \begin{cases} 2\alpha_t - \alpha_1 + |\alpha_1 + k| + t, & \text{якщо } \tau \neq 0, t, \\ 2\alpha_t + k + t, & \text{якщо } \tau = 0, \\ -\alpha_1 + |\alpha_1 + k| + t, & \text{якщо } \tau = t; \end{cases}$$

і для $k \leq 0$

$$l(g) = \begin{cases} \alpha_t - 2\alpha_1 + |\alpha_t + k| + t, & \text{якщо } \tau \neq 0, t, \\ \alpha_t + |\alpha_t + k| + t, & \text{якщо } \tau = 0, \\ -2\alpha_1 - k + t, & \text{якщо } \tau = t. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $k > 0$. Тоді матимемо, що довжина слова g_π не буде більшою за $\pi(1) = \tau + 1, \dots, \pi(t - \tau) = t, \pi(t - \tau + 1) = \tau, \dots, \pi(t) = 1$, тобто $l(g) = l_w(g_\pi) = l_w(h_{\tau+1} \dots h_t h_\tau \dots h_1 h)$. Для $k \leq 0$ довжина не буде більшою за $\pi(1) = 1, \dots, \pi(t) = t$, і ми маємо $l(g) = l_w(h_1 \dots h_\tau h_{\tau+1} \dots h_t h)$. Отримаємо, що довжина $l_w(g_\pi)$ у кожному із випадків має вигляд із умови твердження. $\square$

Список використаних джерел

1. А. Клиффорд, Г. Престон, Алгебраическая теория полугрупп, т. I, Москва: Мир-1972.-293 с.
2. O. Bezushchak, On growth of the inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers, Algebra and discrete mathematics, 2004, N 2.

Надійшла до редколегії 1.04.2009

УДК 512.552

Інесса В. Кулаковська, к.ф.-м.н.

Сагайдаки та індекси квазіфробеніусових кілець

У статті наводиться інше доведення теореми Е.Гріна про існування симетричної алгебри з використанням алгебри шляхів сагайдака. Побудовано приклад слабосиметричної алгебри, яка не є симетричною.

Ключові слова: квазіфробеніусове кільце, симетрична алгебра, алгебра шляхів сагайдака.

E-mail: kulaknic@ukr.net

Статтю представив професор Кириченко В.В.

Добре відомо, яку важливу роль при конструктивному описі різних класів кілець відіграє вивчення їх сагайдаків. Першими роботами в цьому напрямку були роботи [1], [2] в яких за допомогою сагайдаків (схем) було вивчено будову нетерових напівланцюгових кілець.

В даній статті ми дамо доведення відомої теореми Гріна: сагайдак довільного квазіфробеніусового кільця сильно зв'язний. Навпаки, для довільного сильно зв'язного сагайдака Q існує симетрична алгебра A , така що $Q(A)=Q$ [3].

На відміну від доведення Гріна, в якому використовується техніка спеціальних тензорних алгебр, ми використовуємо поняття алгебри шляхів kQ сагайдака Q над фіксованим полем k .

1. Попередні відомості

Нехай A – скінченновимірна алгебра над полем k . Існує двоїстість між категорією mod_A правих скінченновимірних A -модулів і категорією mod_A лівих скінченновимірних A -модулів.

Нехай $M \in \text{mod}_A$. Позначимо $M^* = \text{Hom}_k(M, k)$. Тоді M^* є лівим A -модулем.

Дійсно, для $\varphi \in M^*$ і $a \in A$ ми визначимо $a\varphi$ за формулою: $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$, де $m \in M$. Легко бачити, що M^* є скінченновимірним лівим A -модулем.

Аналогічно, якщо $M \in \text{mod}_A$, то спряжений модуль $M^* \in \text{mod}_A$.

Очевидно, $\dim_k M^* = \dim_k M$ і $M^{**} \cong M$ як A -модулі. Кожне лінійне відображення $\varphi: M \rightarrow N$ індукує спряжене відображення $\varphi^*: N^* \rightarrow M^*$, визначене рівністю $(\varphi^* f)(m) = f(\varphi m)$.

Легко перевірити, що якщо φ є гомоморфізмом, тоді φ^* також є гомоморфізмом. Більш того, $(\varphi\psi)^* = \psi^* \varphi^*$ і $1^* = 1$.

Твердження 1.1 [72, гл IX, п.1.3]. Існує взаємно однозначна відповідність між підмодулями M і M^* , яка обертає включення.

I.V. Kulakovska, Cand. Sci. (Phys. – Math.)

Quivers and indexes quasi-Frobenius rings

In the article of we have received other leading to theorem of E.Grina about existence of symmetric algebra with the use of algebra of paths of quiver. The example of poorly symmetric algebra which is not symmetric is built.

Keywords: quasi-Frobenius ring, symmetric algebra, of algebra of paths of quiver

Доведення. Нехай N підмодуль модуля M . Тоді $N^\perp = \{\varphi \in M^*: \varphi(N)=0\}$ є лівим підмодулем M^* . Відповідність $N \rightarrow N^\perp$ задовольняє наст. умовам:

- (1) для $N_1 \subset N_2$ ми маємо $N_2^\perp \subset N_1^\perp$;
- (2) $(N_1 + N_2)^\perp = N_1^\perp \cap N_2^\perp$ і $(N_1 \cap N_2)^\perp = N_1^\perp + N_2^\perp$;
- (3) $(N^\perp)^\perp = N$.

Тому в силу (3) вона є взаємно однозначною. Умова (1) показує, що відповідність $N \rightarrow N^\perp$ обертає включення.

Наслідок 1.2. A -модуль U простий тоді і тільки тоді, коли U^* – простий.

Доведення. Нехай $N \subset U$ не тривіальний підмодуль U . Тоді ми маємо таку послідовність: $0 \rightarrow N \rightarrow U \rightarrow U/N \rightarrow 0$.

Двоїстий функтор $* = \text{Hom}(-, k)$ точний. Тому ми маємо $0 \rightarrow (U/N)^* \rightarrow U^* \rightarrow N^* \rightarrow 0$.

З чого слідує, що модулі U і U^* прості одночасно.

Зауваження 1. За лемою про анулювання простих модулів [6, с.256], існує єдиний канонічний ідемпотент $f \in A$ такий, що $Uf = U$. За означенням U^* , ми маємо $Uf = U$ тоді і тільки тоді, коли $fU^* = U^*$.

Нехай A – скінченновимірна алгебра, R – її радикал, $\text{rad} M$ – перетин всіх максимальних підмодулів скінченновимірного A – підмодуля M .

Зауваження 2. $\text{rad} M = MR$.

Твердження 1.3. $(\text{rad} M)^\perp$ співпадає з $\text{soc} M^* \cong (M/\text{rad} M)^*$.

Очевидно, що будь-яка скінченновимірна алгебра є артіновим кільцем, а отже, напівдосконалим кільцем. "Переворотом всіх стрілок", застосовуючи двоїстий функтор $* = \text{Hom}(-, k)$ і теорему 10.4.10 [6] ми отримуємо теорему.

Теорема 1.4. Довільний нерозкладний ін'єктивний модуль Q над скінченновимірною алгеброю A скінченновимірний. Модуль Q є

ін'єктивною оболонкою простого A -модуля і має в точності один простий підмодуль $\text{soc } Q$. Існує взаємно однозначна відповідність між попарно неізоморфними нерозкладними ін'єктивними A -модулями $Q_1, \dots, Q_s$ і попарно неізоморфними простими A -модулями, які задаються наступними відповідностями: $Q_i \rightarrow \text{soc } Q_i$ і $U_i \rightarrow E(U_i)$, де $E(U_i)$ – ін'єктивна оболонка простого модуля U_i .

Зауваження 3. Довільний нерозкладний лівий ін'єктивний A -модуль Q має вигляд $P^* = \text{Hom}_k(P, k)$, де P є головним правим A -модулем.

2. Фробеніусові і симетричні алгебри

Означення. Скінченновимірна k -алгебра A називається *фробеніусовою*, якщо праві модулі A_A і $(A_A)^*$ є ізоморфними.

Якщо алгебра A фробеніусова, то ліві модулі ${}_A A$ і $(A_A)^*$ також ізоморфні.

Теорема 2.1. Нехай A скінченновимірна k -алгебра. Наступні твердження еквівалентні:

- (1) A фробеніусова алгебра;
- (2) існує лінійне відображення $\sigma: A \rightarrow k$ таке, що ядро σ не містить правих і лівих ідеалів;
- (3) існує не вироджена білінійна форма $f: A \times A \rightarrow k$ така, що $f(ab, c) = f(a, bc)$ для $a, b, c \in A$.

Доведення. (1) $\rightarrow$ (3). Нехай ліві A -модулі ${}_A A$ і $(A_A)^*$ ізоморфні і $\theta: {}_A A \rightarrow (A_A)^*$ – цей ізоморфізм. Тоді $\theta(ab) = a\theta(b)$ для всіх $a, b \in A$. Тому $\theta(ab)x = (a\theta(b))x = \theta(b)xa$, де $x \in A$.

Визначимо білінійну форму $f: A \times A \rightarrow k$ формулою $f(x, y) = \theta(y)x$. Ми можемо показати, що $f(x, y)$ не вироджена. Якщо $f(A, y) = 0$, тоді $\theta(y) = 0$, тобто, $y = 0$. Нехай $e_1, \dots, e_n$ базис A , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ і $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$ і $\bar{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $G = (f(e_i, e_j))$. Очевидно $f(x, y) = \bar{X} G \bar{Y}^T$, де

$$\bar{Y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Рівність $f(A, y) = 0 \Rightarrow y = 0$ еквівалентна $G \bar{Y}^T = \bar{0} \Rightarrow \bar{Y}^T = 0$. Тому $\det G \neq 0$ і $\bar{X} G = \bar{0}$ задає $\bar{X} = 0$. З чого випливає, що, якщо $f(x, A) = 0$ то $x = 0$, і білінійна форма $f(x, y)$ не вироджена. Ми отримали $f(xy, z) = \theta(z)xy$ і $f(x, yz) = \theta(yz)x = \theta(z)xy$. З чого слідує $f(xy, z) = f(x, yz)$. Імплікацію (1) $\rightarrow$ (3) довели.

(3) $\rightarrow$ (1). Нехай $f: A \times A \rightarrow k$ – асоціативна не вироджена білінійна форма. Визначимо відображення $\theta: {}_A A \rightarrow (A_A)^*$ формулою $\theta(y)x = f(x, y)$, де $x, y \in A$.

Оскільки, $f(x, y)$ – асоціативна форма, то $\theta \in A$ – ізоморфізмом.

(3) $\rightarrow$ (2). Визначимо лінійне відображення $\sigma: A \rightarrow k$ за формулою $\sigma(x) = f(x, 1)$, де $x \in A$. Нехай $I = Aa_1 + \dots + Aa_n$ лівий ідеал A і $\sigma(I) = 0$. З чого слідує, $\sigma(Aa_i) = 0$ для $i = 1, \dots, n$ і ненульовий лівий ідеал I міститься в $\ker \sigma$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \neq 0$, $a \in A$ таке, що $\sigma(Aa) = 0$. Якщо $f(Aa) = 0$, то $f(Aa, 1) = f(A, a) = 0$ і $a = 0$.

Аналогічно, $f(aA, 1) = 0$ задає $a = 0$. Тому $\ker \sigma$ не містить лівих і правих ідеалів.

(2) $\rightarrow$ (3). Нехай σ – лінійне відображення, визначене в умові (2). Легко перевірити, що білінійна форма $f(x, y) = \sigma(xy)$ задовольняє всім умовам (3). Теорема доведена.

Означення. Фробеніусова алгебра A називається *симетричною*, якщо існує не вироджена асоціативна білінійна форма $f: A \times A \rightarrow k$ така, що $f(a, b) = f(b, a)$ для всіх $a, b \in A$. Це еквівалентно існуванню лінійного відображення $\sigma: A \rightarrow k$, не $\ker \sigma$ не містить лівих і правих ідеалів, і $ab - ba \in \ker \sigma$ для всіх $a, b \in A$.

Теорема 2.2. Нехай $A = kG$ – групова алгебра скінченної групи G над полем k . Тоді A – симетрична алгебра.

Доведення. Визначимо лінійне відображення $\sigma: A \rightarrow k$ на алгебрі A за формулою $\sigma\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \alpha_1$, де 1 – одиниця групи G .

Нехай $\sigma(aA) = 0$ і $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g$. Очевидно,

$$\sigma(ag_i^{-1}) = \alpha_{g_i} = 0 \text{ для всіх } g_i \in G. \text{ Тому, } a = 0.$$

$$\text{Нехай } a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \text{ і } b = \sum_{g \in G} \beta_g g.$$

$$\text{Тоді } \sigma(ab) = \sum_{gh=1} \alpha_g \beta_h \text{ і } \sigma(ba) = \sum_{gh=1} \beta_h \alpha_g.$$

Тому $\sigma(ab - ba) = 0$.

З чого слідує, що A – симетрична алгебра.

3. Симетричні алгебри з заданим сагайдаком

Наступна лема добре відома, як теорема Гріна.

Лема 3.1. Нехай Q – зв'язний сагайдак, що не є точкою. Наступні твердження еквівалентні:

- (i) Q – сильно зв'язний;
- (ii) існує цикл $c = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ такий, що кожна стрілка σ сагайдаку Q є однією з σ_i .

Нагадаємо означення алгебри шляхів. Для сагайдака Q і поля k можна задати одну *алгебру шляхів* kQ сагайдаку Q над k . Розглянемо векторний простір kQ з k -базисом, який складається з усіх шляхів Q .

Добуток в kQ визначимо наступним чином: якщо шлях $\sigma_1 \dots \sigma_m$ з'єднує i з j , і шлях $\sigma_{m+1} \dots \sigma_n$ з'єднує j з k , тоді добуток $\sigma_1 \dots \sigma_m \sigma_{m+1} \dots \sigma_n$ з'єднує i з k . В іншому разі, добуток шляхів дорівнює нулю. Ми будемо розглядати шляхи ε_i довжини нуль. Шлях ε_i з'єднує вершину i з собою.

Одиницею алгебри kQ є сума всіх шляхів ε_i довжини нуль: $1 = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, де n – число вершин в Q . Поширюючи множення за дистрибутивністю, ми отримуємо k -алгебру (не обов'язково скінченновимірну).

Відмітимо, що kQ – скінченновимірна алгебра тоді і тільки тоді, коли Q скінченний і не має циклів, тобто ациклічний.

Нехай $Q = (VQ, AQ)$ – сагайдак. Позначимо $B_0 = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $B_1 = AQ$, $B_2 = \{\text{всі шляхи } Q \text{ довж. } 2\}$, $\dots$, $B_m = \{\text{всі шляхи } Q \text{ довжини } m\}$, $\dots$, $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$.

Очевидно B є k -базисом $\Omega = kQ$.

Для заданого k -лінійного відображення $\mu: \Omega \rightarrow k$ покладемо $S = \{b \in B: \mu(b) \neq 0\}$ і $I(\mu) = \{\omega \in \Omega: \mu(\omega\omega\omega) = 0\}$.

Позначимо через J двосторонній ідеал Ω , базисом якого є множина $B \setminus B_0$.

Лема 3.2. Нехай $\mu: \Omega \rightarrow k$ є k -лінійним відображенням. Тоді

(а) двосторонній ідеал $I(\mu)$ – найбільший двосторонній ідеал, який входить в $\ker \mu$;

(б) множина S скінченна тоді і тільки тоді, коли $J^m \subset I(\mu)$ для деякого m .

Доведення цієї леми очевидно.

Означення. Нехай відображення μ таке, як описане вище. (S, μ) називається **фробеніусовою системою**, якщо виконуються наступні умови:

(fs1) S – скінченна множина;

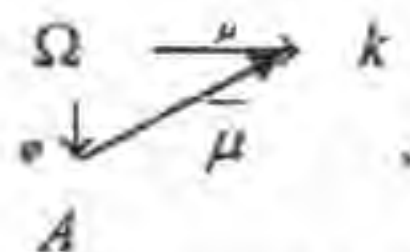
(fs2) для всіх $\omega \in \Omega$, $\omega\Omega \subset \ker \mu$ тоді і тільки тоді, коли $\Omega\omega \subset \ker \mu$.

Теорема 3.3. Нехай $\Omega = kQ$ – алгебра шляхів сагайдака Q над полем k і (S, μ) – фробеніусова система. Тоді $\Omega/I(\mu)$ є фробеніусовою алгеброю.

Доведення. Припустимо, що (S, μ) – фробеніусова система. Оскільки S – скінченна множина, то за лемою 3.2, ми маємо $J^m \subset I(\mu)$. З чого слідує, що $A = \Omega/I(\mu)$ скінченновимірна k -алгебра. Позаяк $I(\mu) \subset \ker \mu$, то лінійне відображення $\mu: \Omega \rightarrow k$ індукує лінійне відображення $\mu: A \rightarrow k$.

Враховуючи теорему 2.1, достатньо показати, що $\ker \mu$ не містить правих і лівих ідеалів. Нехай b – лівий ідеал в $\ker \mu$.

Розглянемо комутативну діаграму



де φ – канонічний кільцевий епіморфізм.

Нехай $C = \varphi^{-1}(b)$. Тоді C – лівий ідеал в $\ker \mu$ і $C \supset J(\mu)$. Покажемо, що $C\Omega \subseteq J(\mu)$.

Нехай $\omega \in C$. Тоді $\Omega\omega \subseteq C \subseteq \ker \mu$. За означенням (S, μ) ми маємо $\omega\Omega \subseteq \ker \mu$. З чого слідує, що $C\Omega \subseteq I(\mu)$. Ми отримали, що $b = 0$. Аналогічне доведення показує, що якщо b – правий ідеал в $\ker \mu$, то $b = 0$. З чого слідує, що A – фробеніусова алгебра за теоремою 2.1.

Означення. Підмножина S множини B називається **циклічною**, якщо існує цикл $c = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ такий, що

(1) кожна стрілка з AQ є однією з σ_i ;

(2) якщо $f \in B$, то

$$f \in S \Leftrightarrow f = \begin{cases} c, \text{ або} \\ (\sigma_j, \dots, \sigma_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}) \end{cases} \text{ для } j = 2, \dots, m.$$

Відмітимо, що S – скінченна множина.

Визначимо відображення множин $\mu: B \rightarrow k$ за формулою $\mu(f) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $f \in S$, для інших $b \in B$ покладемо $\mu(b) = 0$. Поширимо це відображення до k -лінійного відображення $\Omega \rightarrow k$ за "лінійністю", тобто, для кожного $\omega \in \Omega$,

$$\omega = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m \text{ покладемо } \mu(\omega) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(b_i).$$

Твердження 3.4. (S, μ) – фробеніусова система.

Доведення. Множина S – скінченна, тому умова (fs1) виконується. Оскільки S – цикл, ми отримуємо, що $f \cdot g \in S \Leftrightarrow g \cdot f \in S$ для всіх $f, g \in B$. З чого випливає, що $\mu(f \cdot g) = 0 \Leftrightarrow \mu(g \cdot f) = 0$ для всіх $f, g \in B$.

Так як μ тотожно рівне 1 на S і 0 на $B \setminus S$, ми бачимо, що лінійність μ і (*) дає наступну рівність: $\mu(\omega \cdot \omega') = \mu(\omega' \cdot \omega)$ для всіх $\omega, \omega' \in \Omega$.

Властивість (fs2) одразу слідує з (**). Тому (S, μ) – фробеніусова система.

Теорема 3.5. Нехай Q – сильно зв'язний сагайдак. Тоді для довільного поля k існує симетрична k -алгебра A така, що $Q = Q(A)$.

Доведення. Якщо Q – точка, то k -симетрична алгебра і $Q(k)$ точка. Ми можемо припустити, що Q – сильно зв'язний сагайдак, який має, у крайньому випадку, одну стрілку. За лемою 3.1 існує циклічна підмножина $S \subset B$ і k -лінійне відображення: $\mu: kQ \rightarrow k$ таке, що (S, μ) фробеніусова система. За теоремою 3.3 фактор-алгебра $A = \Omega/I(\mu)$, де $\Omega = kQ$, є фробеніусовою. Нехай $\mu: A \rightarrow k$ – лінійне відображення, індуковане μ з рівності (**)

ми маємо $\mu(a \cdot a') = \mu(a' \cdot a)$ для всіх $a, a' \in A$. За означенням симетричної алгебри отримуємо, що A симетрична k -алгебра. Очевидно, $J^{m+1} \subset I(\mu)$.

Залишилося показати, що $Q(A) = Q$. Для цього достатньо довести, що $I(\mu) \subset J^2$. Нехай $i \in \Omega J^2$. Покажемо, що $i \in I(\mu)$. Так як $i \in \Omega J^2$, тоді

$$i = \sum_{l=1}^n \alpha_l \varepsilon_l + \sum_{\sigma \in A Q} \alpha_\sigma \sigma + \sum_i \beta_i h_i,$$

де $h_i \in B \cap J^2$ і $\alpha_l, \alpha_\sigma, \beta_i \in k$.

Спочатку припустимо, що $\alpha_l \neq 0$. Ми можемо покласти $\alpha_l \neq 0$. Існує $f \in S$ таке, що $\varepsilon_l f = f$. З цього легко слідує, що $\mu(tf - \alpha_l \varepsilon_l f) = 0$. Тому $\mu(tf) = \alpha_l \neq 0$ і $i \in I(\mu)$. Звідси отримуємо, що

$$i = \sum_{\sigma \in A Q} \alpha_\sigma \sigma + \sum_i \beta_i h_i.$$

Нехай $\alpha_\sigma \neq 0$ для деякого σ . Припустимо, що $c = (\sigma, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in$ циклом.

Нехай $f^* = \sigma_2 \dots \sigma_m$ і $f = \sigma_1 \dots \sigma_m$, де $\sigma_1 = \sigma$. Очевидно, $\mu(tf^*) = \alpha_\sigma + \sum_{t \neq \sigma} \alpha_t \mu(t \sigma_2 \dots \sigma_m)$,

де $t \sigma_2 \dots \sigma_m \in B$. Число входжень σ в $(t, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ на одиницю менше, ніж число входжень σ в c . Тому $(t, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ не може бути отримана перенумерацією c і ми отримали, що $\mu(t \sigma_2 \dots \sigma_m) = 0$ для $t \neq \sigma$. З чого слідує, що $\mu(tf^*) = \alpha_\sigma \neq 0$ і $i \in I(\sigma)$. Таким чином, $I(\sigma) \subset J^2$ і $Q(A) = Q$. Теорема доведена.

Приклад слабосиметричної напівдистрибутивної алгебри A , яка не є симетричною.

Нагадаємо, що алгебра A називається слабосиметричною, якщо її підстановка Накаями є тожньою. Через $[Q]$ позначимо матрицю суміжності сагайдака Q . Нехай $k = F_2 = \{0, 1\}$ – поле з двох елементів і $\Omega = kQ$ – алгебра шляхів сагайдака Q з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Нагадаємо, що ідеал $J \subset \Omega$ називається допустимим, якщо $J^2 \subset J \subset J^3$, де J – ідеал алгебри Ω , породжений всіма ненульовими шляхами. Позначимо через I допустимий ідеал, породжений наступними шляхами: $\sigma_{21}\sigma_{12}, \sigma_{12}r_2, r_2\sigma_{21}, r_2^m$, ($m \geq 2$).

Розглянемо фактор-алгебру $A = \Omega/I$. Алгебра A є зведеною і має два неізоморфні нерозкладні проєктивні модулі P_1 і P_2 . Базис першого головного модуля P_1 складається з елементів $\varepsilon_1, \sigma_{12}, \sigma_{12}\sigma_{21}$. Базис другого головного модуля P_2 складається з елементів $\varepsilon_2, \sigma_{21}, r_2, r_2^2, \dots, r_2^{m-1}$ ($m \geq 2$). Тому $\dim A = m+4$ і скінченна алгебра A має 2^{m+4} елементів. Очевидно, $\text{soc } P_1 = U_1$ і $\text{soc } P_2 = U_2$, тобто A є слабосиметричною.

Покажемо, що алгебра A не є симетричною. Припустимо супротивне. За означенням симетричної алгебри існує лінійне відображення $\varphi: A \rightarrow k$ таке, що $\ker \varphi$ не містить односторонніх ідеалів і $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_2 a_1)$ для будь-яких $a_1, a_2 \in A$. Очевидно, $\text{soc } P_1 = U_1 = \{0, \sigma_{12}\sigma_{21}\}$ складається з двох елементів і є ненульовим ідеалом в алгебрі A . З чого слідує, $\varphi(\sigma_{12}\sigma_{21}) = \varphi(\sigma_{21}\sigma_{12}) = 0$. Таким чином, $\ker \varphi$ включає правий ідеал $\text{soc } P_1$. Суперечність доводить, що алгебра A не є симетричною.

Література

- [1] Кириченко В.В. Обобщённо однорядные кольца - Математический сборник. - т. 99 (141). - 1976. - №4. - с. 559-581.
- [2] Green E.L., Frobenius algebras and their quiver. - Can. J. Math. - 1978- v.30 - №5 - pp.1029-1044.
- [3] Пирс П. Ассоциативные алгебры. - М.: Мир. - 1986. - 426 с.
- [4] Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их кольца - Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Сборник статей. - Киев: Ин-т мат-и НАН Украины. - 1993. - с. 438-456.
- [5] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules. V.I.-Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Acad. Publishers. - 2004. - 380 p.

Надійшла до редколегії 10.01.2008

УДК 515.16

Д.П. Личак

Глобальна класифікація функцій з простими особливостями на поверхнях

Отримано глобальну гладку класифікацію функцій з простими особливостями на гладких замкнених двовимірних многовидах. Побудовано граф, що задає функцію з простими особливостями з точністю до гладкої еквівалентності.

Ключові слова: глобальна класифікація, прості особливості, граф Ріба.

amidl@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1. Попередні відомості

Локальна класифікація аналітичних функцій в околі простих критичних точок з точністю до гладкої еквівалентності була отримана Арнольдом в [1]. Глобальна класифікація гладких функцій з точністю до топологічної еквівалентності була отримана різними способами Пришляком в [5] та Шарко в [6]. В даній роботі вводиться поняття оснащеного графа Кронрода-Ріба для отримання глобальної гладкої класифікації функцій з простими особливостями.

Будемо розглядати лише функції загального положення (всі критичні точки яких лежать на різних лініях рівня).

Означення 1. Дві функції f та g будемо називати топологічно (гладко) еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) h поверхні на себе, та гомеоморфізм (дифеоморфізм) l числової прямої на себе, що зберігає орієнтацію, такі що: $l \circ f = g \circ h$. Дві функції f та g будемо називати право еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм h поверхні на себе, такий що: $f = g \circ h$.

Означення 2. Функцією Морса називається гладка функція, всі критичні точки якої невідроджені.

Означення 3. Графом Кронрода-Ріба гладкої функції з ізольованими критичними точками на замкненій поверхні називається граф, утворений стягненням кожної компоненти зв'язності

D. Lychak

The global classification of the function with simple singularities on surfaces

The global smooth classification of the functions with simple singularities on smooth closed 2-manifolds is obtained. The graph which specifies the function with simple singularities to within a smooth equivalence is constructed.

Key words: global classification, simple singularities, Reeb graph.

ліній рівня функції в точку, із заданим порядком на вершинах, що відповідає порядку зростання значень функції у відповідних точках. Графи Кронрода-Ріба називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм графів, що зберігає порядок на вершинах.

Теорема 1. Дві функції Морса на замкненій орієнтовній поверхні топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх графи Кронрода-Ріба ізоморфні.

Доведення див. в [2].

Зауваження 1. Для неорієнтовних поверхонь потрібно задати додаткову інформацію, оскільки існує два, взагалі кажучи, негомеоморфних способи приклепки циліндра, що відповідає ребру на графі Кронрода-Ріба, до околів компонент зв'язності критичних рівнів функції (атомів). Для однозначності досить довільним чином задати орієнтацію на орієнтовних сідлових атомах та циліндрах, і поставити на кінцях ребер інцидентних вершинам, що відповідають орієнтовним сідловим атомам, знаки: плюс, якщо орієнтації співпадають, і мінус інакше. Дві розстановки знаків будуть еквівалентними, якщо від однієї до другої можна перейти за допомогою наступних операцій: заміна знаків на кінцях ребер, що інцидентні якійсь вершині, на протилежні, заміна знаків на обох кінцях довільного ребра на протилежні. (Якщо знак наявний лише на одному кінці ребра, то на другому кінці можна поставити довільний знак.)

Ізоморфізм графів з такою інформацією повинен переводити набір знаків в еквівалентний.

Означення 4. Ростком функції в точці називається клас еквівалентності функцій, що визначені в деяких околах точки та вважаються еквівалентними, якщо вони співпадають в якомусь (можливо меншому за перетин їх областей визначення) околі. Росток називається простим, якщо окіл його достатнього струменя перетинається зі скінченим числом орбіт під дією групи струменів дифеоморфізмів. Критичну точку функції назвемо простою, якщо росток функції в цій точці простий.

Теорема 2. Прості ростки голоморфних функцій від двох змінних вичерпуються з точністю до правої еквівалентності в околі критичної точки $(0, 0)$ наступним списком:

$$\begin{aligned} A_{\pm k} : f(x, y) &= \pm x^{k+1} + y^2, \quad k \geq 1 \\ D_{\pm k} : f(x, y) &= \pm x^{k-1} + y^2 \cdot x, \quad k \geq 4 \\ E_6 : f(x, y) &= x^3 + y^4 \\ E_7 : f(x, y) &= x^3 + x \cdot y^3 \\ E_8 : f(x, y) &= x^3 + y^5 \end{aligned}$$

Корозмірність кожної простої особливості $A_{\pm k}$, $D_{\pm k}$, E_k дорівнює $k - 1$. Всі особливості корозмірності меншої за 7 прості.

Доведення див. в [1]

Теорема 3. Немає дві гладкі функції на гладкому замкненому многовиді мають лише прості критичні точки. Вони гладко еквівалентні тоді і лише тоді, коли вони право еквівалентні.

Доведення див. в. [4].

2. Оснащений граф Кронрода-Ріба

Дослідимо граф Кронрода-Ріба функції з простими особливостями, та з'ясуємо, яку інформацію необхідно додати, щоб він задавав функцію з точністю до гладкої еквівалентності.

Відомо (див. [5]), що в околі ізольованої критичної точки, котра не є локальним екстремумом, гладка функція на замкненій поверхні топологічно еквівалентна функції $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$ для деякого натурального m . При $m = 1$ від критичної точки можна позбутися.

Розглянемо прості ростки з точністю до топологічної еквівалентності. Всі прості ростки

мають топологічний тип $\operatorname{Re}(x + iy)^m$, де $m \leq 3$. А саме: A_{2k} , D_{2k+2} , E_6 , E_8 топологічно еквівалентні $f(x, y) = x$, при $k \geq 1$; $\pm A_{2k+1}$ топологічно еквівалентні $f(x, y) = \pm(x^2 + y^2)$, при $k \geq 0$; $A_{-(2k+1)}$, D_{2k+3} , E_7 топологічно еквівалентні $f(x, y) = y^2 - x^2$ при $k \geq 1$; і D_{-2k} топологічно еквівалентні $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3$ при $k \geq 2$.

Отже, вершини на графі Кронрода-Ріба, що відповідають простим особливостям, можуть мати степені від 1 до 4. Вершини валентності 1 відповідають особливостям типу $\pm A_{2k+1}$, при $k \geq 0$. І для однозначного задання їх типу особливості досить проставити в відповідних вершинах значення $2k + 1$. Але вершини валентності 2 та 3 можуть відповідати різним серіям особливостей, тому ми розфарбуємо всі вершини в три кольори, і будемо зображати їх колом, квадратом та трикутником, якщо відповідна особливість належить до серії A_k , D_k , та E_k , відповідно. Окрім того, граничні кола атомів, взагалі кажучи, нерівноправні, тому будемо ставити мітки (стрілки) на кінцях тих ребер графа Кронрода-Ріба, що відповідають циліндрам, які приклеюються до певної компоненти межі атома. Для визначення цих компонент проведемо сепаратиси, що з'єднують критичну точку з межею атома. Мітки на ребрах будемо ставити тоді і тільки тоді, коли відповідна компонента містить лише одну точку перетину вищезгаданих сепаратис з межею, причому ця точка лежить на від'ємній компоненті межі (на якій функція приймає значення, менше за значення в критичній точці) для A_{2k} , E_6 , $A_{-(2k+1)}$ або на додатній компоненті для $-A_{2k}$, $-E_6$, $-A_{-(2k+1)}$, або в області $y < -x^{2/3}$ для E_7 , або в області $x < -y^{k+1/2}$ для D_{2k+3} , або в областях $|x| > y^{1/k}$ для $D_{-(2k+2)}$, де $k \geq 1$. Для D_{2k+2} , E_8 , A_{-1} мітки не потрібні із міркувань симетрії. Цієї інформації достатньо для функцій топологічно еквівалентних $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$, $m \leq 2$. Справді, візьмемо малий окіл критичної точки, що не є локальним екстремумом, і відмітимо області, де функція є додатна, а де від'ємна. Кінцями будуть орієнтовані вздовж напрямку росту функції відрізки (див. рис. 1). При $m = 1$ кінців буде два, при $m = 2$ кінців буде чотири, а при $m = 3$ їх буде шість. Атом отримується попарною склейкою цих відрізків із врахуванням їх орієнтації. При $m = 1$ є лише один варіант склейки, при $m = 2$ є три варіанти

склейки, які відповідають вершинам на графі Кронрода-Ріба валентності два та три, в останньому випадку можливо два варіанти: одне ребро входить, два виходять, або навпаки.

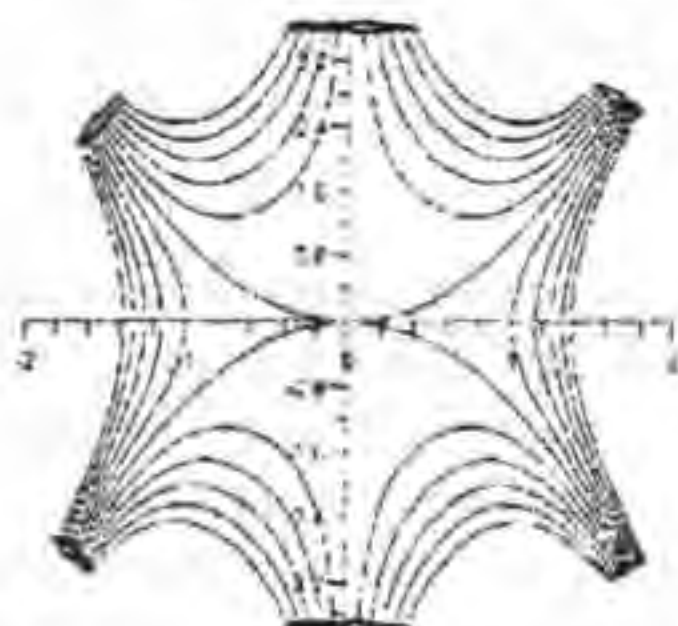


Рис. 1: Лінії рівня функції $f(x, y) = y^2 \cdot x - x^5$

Але при $m = 3$ існує сім топологічно не еквівалентних атомів (див. [3]), а варіантів графів Кронрода-Ріба лише шість: три варіанти для вершини валентності чотири, два варіанти для вершини валентності три і вершина валентності два. В останньому випадку існують два різних атоми з точністю до топологічної еквівалентності, і три різних атоми з точністю до гладкої еквівалентності, оскільки в околу критичної точки є два кінці, що відрізняються від решти чотирьох (див. рис. 1). Закодуємо ці три випадки мітками на ребрах: якщо атом утворюється з околу критичної точки попарною склейкою протилежних кінців, то не будемо ставити стрілок. Якщо склеюються пара вирізняючихся протилежних кінців, а інші склеюються через один, то поставимо стрілки на обох ребрах. І нарешті, у випадку склейки двох протилежних кінців з чотирьох однакових, а інших — через один, поставимо стрілку лише на ребрі, що входить у відповідну вершину. В цьому випадку стрілки мають інше значення, ніж описано вище, але неоднозначності не виникає, бо кожна вершина має колір (форму) та в ній проставлені значення k .

Окрім того, при $m = 3$ нерівноправність граничних кіл атомів не завжди можна усунути розстановкою стрілок, описаною вище. У атома з двома від'ємними і двома додатними компонентами межі вони нерівноправні, але можливий варіант, коли на ребрах не буде стрілок. Тому в цьому випадку поставимо на ребрах, що відповідають компонентам з однією точкою перетину сепаратрис з межею, мітки (подвійні стрілки).

Сідловим атомом будемо називати атом критичної точки, що не є локальним екстремумом.

Означення 5. Оснащеним графом Кронрода-Ріба гладкої функції з простими особливостями на замкненому двовимірному многовиді назвемо граф Кронрода-Ріба зі стрілками на кінцях ребер, розставленими, як описано вище, та вершинами трьох типів (коло, квадрат, трикутник, що відповідають трьом серіям особливостей A_k , D_k , E_k) у яких проставлені k . У випадку неорієнтовної поверхні також на кінцях ребер інцидентних вершинам, які відповідають орієнтовним сідловим атомам, задаються знаки, які визначають чи узгоджена орієнтація атома з орієнтацією циліндрів.

Оснащені графи Кронрода-Ріба називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм графів, що зберігає порядок на вершинах, форму вершин, числа в них, та мітки на кінцях ребер. У неорієнтовному випадку додатково вимагається еквівалентність наборів знаків (див. зауваження 1).

Теорема 4. Дві гладкі функції з простими особливостями на замкненій поверхні гладко еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх оснащені графи Кронрода-Ріба ізоморфні.

Доведення. Необхідність. Із теореми 3 випливає, що функції будуть право еквівалентні. Дiffeоморфізм відображає критичні рівні однієї функції, в критичні рівні іншої, а отже задає ізоморфізм графів Кронрода-Ріба. Із теореми 2 випливає, що відповідні вершини мають однакову форму, числа в них співпадають, а відповідні ребра мають однакові мітки-стрілки на кінцях. Із означення випливає, що в неорієнтовному випадку відповідні знаки будуть еквівалентні. Отже оснащені графи також будуть ізоморфні.

Достатність. Нехай оснащені графи ізоморфні. Тоді із теореми 2 випливає, що в околі кожної критичної точки існує дифеоморфізм, який задає праву еквівалентність функцій в цьому околі. Візьмемо околи (можливо менші) межі яких складаються із частин ліній рівня функцій та відрізків, що трансверсальні до ліній рівня і орієнтовані в напрямку росту функцій. Для локальних екстремумів їх околи одразу будуть атомами. Для сідлових точок оснаще-

ний граф Кронрода-Ріба задає, які з цих відрізків треба попарно склеїти із збереженням орієнтації. В результаті отримаємо атоми. Доповнення до атомів є незв'язне об'єднання циліндрів. Оснащений граф Кронрода-Ріба задає, до яких компонент атомів потрібно приклеювати циліндри. Існують два, взагалі кажучи, негомеоморфні способи приклейки циліндра до компоненти межі атома. Задамо орієнтацію на орієнтованих атомах та циліндрах. У неорієнтованому випадку знаки на графі задають, як саме треба приклеювати циліндри (узгоджуючи орієнтації, чи ні). На орієнтовній поверхні циліндри треба завжди приклеювати узгоджуючи орієнтації. На межі циліндрів (колах) дифеоморфізм вже заданий. Продовжуючи відображення на циліндри (це можна зробити оскільки відображення кола, що не змінюють орієнтацію, ізотопні) та згладжуючи отримані відображення на колах отримаємо дифеоморфізм поверхні, який задає праву еквівалентність функцій. Згідно із теоремою 3 функції будуть гладко еквівалентні. $\square$

3. Приклади

Порахуємо кількість гладко нееквівалентних функцій на поверхнях з однією сідловою критичною точкою та корозмірностями критичних точок не більшими за 2. Сідлова точка може бути типу A_{-1} ($f(x, y) = -x^2 + y^2$), A_2 ($f(x, y) = x^3 + y^2$), A_{-3} ($f(x, y) = -x^4 + y^2$). В першому випадку існують три графи Кронрода-Ріба (два ребра входять, одне виходить; одне ребро входить, два виходять; вершина валентності два). Але локальні екстремуми можуть бути типу A_1 ($f(x, y) = x^2 + y^2$) та A_3 ($f(x, y) = x^4 + y^2$). Оскільки всі критичні точки занумеровані, маємо $8 + 8 + 4 = 20$ варіантів оснащених графів Кронрода-Ріба для першого випадку. Для другого випадку маємо вершину валентності два і два варіанти розміщення стрілки (на одному з ребер). Враховуючи кількість можливих типів локальних екстремумів, в цьому випадку існує $4 + 4 = 8$ оснащених графів. І у випадку A_{-3} маємо шість варіантів розміщення стрілок у випадку вершини валентності три (оскільки на вершинах є порядок), що дає $6 \cdot 8 = 48$ різних оснащених графів, і ще існують 4 графи з вершиною валентності два. Розстановка зна-

ків в даному прикладі не потрібна, оскільки кожне ребро має одну вершину валентності один, а отже знак на іншому кінці може бути змінений довільним чином. Отже загальна кількість нееквівалентних функцій з однією сідловою точкою та корозмірностями всіх критичних точок не більшими за 2 буде 80.

Висновки

В статті розглянуто функції з простими особливостями на замкнутих поверхнях. Побудовано граф, що задає такі функції з точністю до гладкої еквівалентності. Сформульовано і доведено критерій гладкої еквівалентності функцій з простими особливостями. Отримано глобальну класифікацію функцій з точністю до гладкої еквівалентності.

Список використаних джерел

1. Арнольд В.И. *Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжесвы особенности*. Функц. анализ и его прил.—1972.—Т. 6,—№ 4,—С. 3–25.
2. Kulinich E.V. *On topologically equivalent Morse functions on surfaces*. Methods of Functional Analysis and Topology.—1998.—V. 4,—№ 1,—P. 59–64.
3. Лычак Д.П. *Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками*. Прийнято до друку в Збірник праць Інституту математики НАН України.
4. Maksymenko S. *Stabilizers and orbits of smooth functions*. Bulletin des Sciences Mathematiques.—2006.—Vol. 130,—P. 279–311.
5. Prishlyak A.O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface*. Topology and its application.—2002.—Vol. 119,—№ 3.
6. Шарко В.В. *Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях*. Український математичний журнал.—2003.—Vol. 55,—№ 5,—P. 687–700.

Надійшла до редколегії 24.04.2009

УДК 519.21

С.О.Романенко, студент

Ймовірність банкрутства страхової компанії з випадковими φ -субгауссовими величинами полісів та φ -субгауссовими страховими виплатами

У статті розглядається ймовірність банкрутства страхової компанії у випадку, коли величини полісів клієнтів та страхові виплати є φ -субгауссовими. Доводиться теорема для оцінки такої ймовірності та на конкретному прикладі ілюструється доведений результат.

Ключові слова: ймовірність банкрутства, φ -субгауссова випадкова величина.

E-mail: RomanenkoSA@i.ua

Статтю представив доктор фізико-математичних наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

У даній роботі розглядається задача обчислення оцінки ймовірності банкрутства страхової компанії з випадковими φ -субгауссовими величинами полісів та φ -субгауссовими страховими виплатами. Дано означення φ -субгауссової випадкової величини.

Означення 1.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in R\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Зауваження: Можливо, що $c = +\infty$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{F}\}$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 1.2. Нехай φ – N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$,

S.O. Romanenko, student

The ruin probability for insurance company with random φ -subGaussian premiums and φ -subGaussian values of benefits

In the paper the ruin probability for insurance company in the case of φ -subGaussian premiums and φ -subGaussian values of benefits is considered. Theorem for estimating such probability is proved, and obtained result is illustrated with the certain example.

Key Words: ruin probability, φ -sub-Gaussian random variable.

$E \exp\{\lambda \xi\}$ існує для всіх $\lambda \in R$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується така нерівність

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

(теорію φ -субгауссових процесів див., наприклад, [2]).

2 Модель страхування з φ -субгауссовими величинами полісів та φ -субгауссовими виплатами

Нехай в страховій компанії зареєстровано N клієнтів. Розмір поліса від j -того клієнта є випадковою величиною η_j . Величини $\{\eta_j\}$, $j = 1, \dots, N$, однаково розподілені, $E\eta_j = c$ та випадкові величини $(\eta_j - c)$, $j = 1, \dots, N$, є φ -субгауссовими, де

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2n}, & |x| < 1, \\ \frac{x^2}{2n}, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Тоді існує $\sigma_1 > 0$ таке, що

$$E e^{\alpha(\eta_j - c)} \leq e^{\varphi(\alpha \sigma_1)}. \quad (2)$$

Нехай ξ_k – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, що описують завдані збитки, функція розподілу яких $F_\xi(x)$ зосереджена на додатній півосі. Припустимо,

що страхова компанія виплачує лише ті позови, величини яких більше франшизи d та менше деякого рівня K . Покладемо

$$a_{d,K} = \int_d^K x dF_\xi(x) < \infty. \quad (3)$$

Випадкові величини $(\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K}) \in \varphi$ -субгауссовими, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_2 > 0$ таке, що

$$E \exp[\varepsilon(\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K})] \leq e^{\varphi(c\sigma_2)} \quad (4)$$

Нехай проміжки часу між страховими виплатами $\tau_1, \dots, \tau_k$ - незалежні між собою та від потоку величин збитків $\{\xi_k\}$, однаково розподілені випадкові величини з щільністю розподілу

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \lambda > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

де λ - інтенсивність пуассонівського потоку надходження заявок.

Дисконтована сума страхових виплат запишеться у наступному вигляді:

$$\sum_{k=1}^{\nu(T)} \xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k},$$

де v - дисконтний множник, $\nu(T)$ - кількість позовів до компанії за час $[0, T]$. Дисконтований капітал страхової компанії описується випадковою величиною

$$R(T) = u + \sum_{j=1}^N \eta_j - \sum_{k=1}^{\nu(T)} \xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k},$$

де u - її початковий капітал.

Таким чином, ймовірність банкрутства страхової компанії дорівнює:

$$P(R(T) < 0) = P\left(\sum_{k=1}^{\nu(T)} \xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k} > u + \sum_{j=1}^N \eta_j\right). \quad (5)$$

3 Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії

Оцінку ймовірності банкрутства для вказаної моделі, визначимо у наступній теоремі.

Теорема. Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії має вигляд: $P(R(T) < 0) \leq$

$$\leq \exp\left[N\left(\frac{(2n)^{2n-2} y^{2n} \sigma_1^{2n}}{(2n-1)^{2n-1}} - yc\right) - yu - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda T}{2n} + \frac{\lambda}{2n} \int_0^T e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} ds\right], \quad (6)$$

де

$$y \geq \max\left\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{(1+i)^T}{2n\sigma_2}\right\}$$

Доведення. Із зображення (5), маємо:

$$P(R(T) < 0) =$$

$$= P\left(\sum_{k=1}^{\nu(T)} \xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k} - \sum_{j=1}^N \eta_j > u\right).$$

Домножимо ліву і праву частину нерівності під знаком ймовірності на $y > 0$ та застосуємо спочатку нерівність Чебишева, а потім нерівність Гельдера. Отримаємо:

$$P(R(T) < 0) \leq e^{-yu} \times$$

$$\times (E \exp[-\frac{2n}{2n-1} (Nyc + y \sum_{k=1}^N (\eta_j - c))])^{\frac{2n-1}{2n}} \times$$

$$\times (E \exp[2ny \sum_{k=1}^{\nu(T)} (\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K}) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k} + 2ny a_{d,K} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{\tau_1 + \dots + \tau_k}])^{\frac{1}{2n}}.$$

Скористаємось наступною оцінкою (див.[1]):

$$E \exp[2ny \sum_{k=1}^{\nu(T)} (\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K}) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k}] \times$$

$$\times \exp[2ny a_{d,K} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{\tau_1 + \dots + \tau_k}] =$$

$$= E_\tau [\exp[2ny a_{d,K} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{\tau_1 + \dots + \tau_k}]] \times$$

$$\times E_\xi \prod_{k=1}^{\nu(T)} \exp[2ny (\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K}) v^{\tau_1 + \dots + \tau_k}].$$

Використовуючи незалежність ξ_k і η_k та φ -субгауссовість випадкових величин

$(\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K})$, із формули (3) $\forall y > \frac{(1+i)^T}{2n\sigma_2}$, та матимемо:

$$\begin{aligned} & E_T[\exp[2ny a_{d,K} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{\tau_1+\dots+\tau_k}] \times \\ & \times E_\xi \prod_{k=1}^{\nu(T)} \exp[2ny(\xi_k I_{[d,K]}(\xi_k) - a_{d,K}) v^{\tau_1+\dots+\tau_k}]] \leq \\ & \leq E \exp[2ny a_{d,K} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{\tau_1+\dots+\tau_k} + \\ & + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} \sum_{k=1}^{\nu(T)} v^{2n(\tau_1+\dots+\tau_k)}] = \\ & E \exp[\int_0^t (2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) d\nu(s)], \end{aligned}$$

де $\nu(t)$ – процес Пуассона, що описує кількість позовів до страхової компанії за час $[0, t]$. Нехай

$X_t = \int_0^t (2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) d\nu(s)$,
тоді за формулою Іто (див. [3]) матимемо:

$$e^{X_t} = 1 + \int_0^t e^{X_s} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} - 1) d(\nu(s) - \lambda s) + \\ & + \lambda \int_0^t e^{X_s} (e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} - 1) ds. \end{aligned}$$

Для довільного $t \in [0, T]$ інтеграл

$$\int_0^t E e^{2X_s} (e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} - 1)^2 ds, \quad (7)$$

буде скінченним (див. [1]).

Оскільки математичне сподівання від стохастичного інтеграла по мартингалу рівне 0, а послідовність $\nu(s) - \lambda s$ – мартингал і виконується (7), то

$$E e^{X_t} = 1 +$$

$$+ \lambda \int_0^t E e^{X_s} (e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} - 1) ds.$$

Позначимо

$$y(t) := E e^{X_t}$$

$$\psi(s) := \lambda (e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} - 1).$$

Тоді

$$\begin{aligned} dy(t) &= y(t) \psi(t) dt, \quad y(0) = 1 \Rightarrow y(t) = e^{\int_0^t \psi(s) ds} \\ E e^{X_t} &= E e^{\int_0^t (2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) d\nu(s)} = \\ &= e^{-\lambda t} e^{\lambda \int_0^t \exp(2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) ds} \Rightarrow \\ &= (E e^{\int_0^t (2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) d\nu(s)})^{\frac{1}{2n}} = \\ &= e^{-\frac{\lambda t}{2n}} e^{\frac{\lambda}{2n} \int_0^t \exp(2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) ds}. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (2) для φ -субгауссових випадкових величин $(\eta_j - c)$, при $y > \frac{1}{\sigma_1}$ маємо:

$$E \exp[-\frac{2n}{2n-1} (Nyc + y \sum_{k=1}^N (\eta_j - c))] \leq$$

$$\leq \exp[-\frac{2n}{2n-1} N(yc - \frac{(2n)^{2n-2}}{(2n-1)^{2n-1}} y^{2n} \sigma_1^{2n})].$$

Тоді оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії набуде вигляду:

$$\begin{aligned} P(R(T) < 0) &\leq \exp[N(\frac{(2n)^{2n-2} y^{2n} \sigma_1^{2n}}{(2n-1)^{2n-1}} - yc) - \\ &- yu - \frac{\lambda T}{2n} + \frac{\lambda}{2n} \int_0^T e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} ds]. \end{aligned}$$

Таким чином, сформульована в умові теореми оцінка доведена. $\square$

Наслідок 1. При виконанні умови

$$u + Nc > \lambda a_{d,K} \frac{(v^T - 1)}{\ln v},$$

розв'язок рівняння

$$u + Nc = N \frac{(2n)^{2n-1}}{(2n-1)^{2n-1}} y^{2n-1} \sigma_1^{2n} +$$

$$+ \frac{\lambda}{2n} \int_0^T e^{2ny a_{d,K} v^s + (2n)^{2n-1} y^{2n} \sigma_2^{2n} v^{2ns}} \times$$

$$\times (2na_{d,K} v^s + (2n)^{2n} y^{2n-1} \sigma_2^{2n} v^{2ns}) ds \quad (8)$$

мінімізує праву частину нерівності (6).

Доведення. Продиференціювавши по y праву частину нерівності (6) та прирівнявши її до нуля, ми одержимо рівняння, що фігурує в умові наслідку. Розв'язок цього рівняння буде існувати при виконанні умови:

$$u + Nc > \lambda a_{d,k} \frac{(v^T - 1)}{\ln v}. \quad (9)$$

□

Наслідок 2. Нехай $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $u + Nc > \lambda a_{d,k} \frac{(v^T - 1)}{\ln v}$, тоді $\forall y > 0$:

$$\begin{aligned} P(R(T) < 0) &\leq \\ &\leq \exp[-y^*u - N(y^*c - (y^*)^2\sigma_1^2) - \\ &- \frac{\lambda T}{2} + \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{2y^*a_{d,k}v^s + 2(y^*)^2\sigma_2^2v^{2s}} ds], \end{aligned}$$

де y^* – розв'язок рівняння:

$$\begin{aligned} u + Nc - 2Ny\sigma_1^2 + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{2ya_{d,k}v^s + 2y^2\sigma_2^2v^{2s}} \cdot (2a_{d,k}v^s + 4y\sigma_2^2v^{2s}) ds. \end{aligned}$$

Доведення. Доведення випливає із теореми при $n = 1$ та наслідку 1. □

4 Застосування отриманого результату

Проілюструємо застосування наслідку 2.

Нехай початковий капітал страхової компанії $u = 10000$; кількість клієнтів $N = 1000$; франшиза $d = 500$; максимальна величина позову, яку вишляє страхова компанія $K = 51000$; величини, що описують завдані збитки $\xi_k \simeq N(20000, 10000)$, $k = 0, 1, \dots$

Тоді за формулою (3)

$$a_{d,k} = \int_{500}^{51000} x dF_{\xi}(x) \approx 20032, 2.$$

Математичне сподівання величини полісів $c = 400$. Параметри $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 100$; час

$T = 1$; інтенсивність процесу надходження заявок $\lambda = 1$; відсоткова ставка $r = 0,1$ (тоді $v = \frac{1}{1+0,1} = \frac{10}{11}$). Умова (9) виконується, отже y^* буде існувати.

Обчисливши y^* за формулою (8), матимемо $y^* \approx 0.0000626125$.

Підставимо знайдене y^* у формулу (6) для обчислення оцінки ймовірності банкрутства і одержимо:

$$P(R(T) < 0) \leq 0.000284918.$$

Обчислення були виконані у *Wolfram Mathematica 6.0*.

5 Висновки

Отже, в роботі отримано оцінку ймовірності банкрутства страхової компанії за припущення, що величини полісів та страхові виплати φ -субгауссовими, де функція

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2n}, & |x| < 1 \\ \frac{x^{2n}}{2n}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

n – натуральне число.

Наведено приклад застосування одержаного результату.

Список використаних джерел

1. Бондарев Б.В., Математические модели в страховании. – Донецк: Издательство "АПЕКС", 2002. – 116 с.
2. Васирик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є. φ -субгауссові випадкові процеси. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 232 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Издательство "Наукова думка", 1968. – 353 с.

Надійшла до редколегії 1.04.2009

УДК 512.563

Марк Т. Тарашанський, к.т.н, доцент,
Наталія Ю. Щестюк, к.ф.-м.н, доцент

M.T. Taraschanskyj, Cand.Sci(Tech.), Associate Prof.,
N.U. Shchestuk, Cand.Sci(Phys.-Math), Associate
Professor

Про існування доповнення у ґратах підалгебр булевої алгебри

Нехай B є підалгеброю булевої алгебри A . Кажуть, що підалгебра B має доповнення в A , якщо існує така підалгебра $C \subset A$, що $B \cap C = \{0, 1\}$ й $B \cup C$ породжує A .

У цій роботі наводиться достатня умова, що забезпечує існування доповнення підалгебри $B \subset A$ в A .

Ключові слова: булева алгебра, доповнення.

E-mail: markt@net.lg.ua, Natalyshch@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1. Вступ

Нехай B підалгебра булевої алгебри A . Підалгебра B має доповнення в A , якщо існує така підалгебра $C \subset A$, що $B \cap C = \{0, 1\}$ й $B \cup C$ породжує A .

Структура ґрат $Sub(A)$ усіх підалгебр алгебри A вивчалася в багатьох роботах [1-7]. Зокрема, в [1] S. Bhaskara Rao і M. Bhaskara Rao показали, що доповнення існує для всякої скінченної підалгебри $B \subset A$, а також – сформулювали умови існування доповнення підалгебри, породженої ідеалом.

Якщо булева алгебра A зліченна, тоді всяка підалгебра $B \in Sub(A)$ має доповнення в A [5, 6].

L. Heindorf [3] довів, що булева алгебра зліченна тоді й тільки тоді, коли будь-яка підалгебра $B \in Sub(A)$ має неперервне доповнення щодо природньої топології на $Sub(A)$.

У цій роботі буде наведено достатню умову, що забезпечує існування доповнення підалгебри $B \subset A$ в A .

2. Необхідні визначення й позначення

Булеві операції будуть позначатися теоретико-множинними символами.

$\bar{A}$ позначатиме доповнення A для всякого $A \in A$ й $A \Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ – симетричну різницю A й B для $A, B \in A$.

Якщо X деяка підмножина A , тоді $\langle X \rangle$ по-

On complementation in the lattice of subalgebras of a Boolean algebra

Let B be subalgebra of a Boolean algebra A . Let us say that subalgebra B has complement with respect to A , if there exists a subalgebra $C \subset A$ such that $B \cap C = \{0, 1\}$ and $B \cup C$ generates A .

The main purpose of this paper is to explore the sufficient condition of subalgebras $B \subset A$, which have complement with respect to A .

Key Words: Boolean algebra, complement.

значає підалгебру в A , породжену X .

Символи 0_A , 1_A позначають, відповідно, нульовий і одиничний елементи булевої алгебри A , і, якщо зрозуміло про яку алгебру йде мова, то замість 0_A і 1_A будуть використовуватися символи 0 й 1 .

Підалгебра B булевої алгебри A називається щільною в A , якщо для будь-якого ненульового $A \in A$ знайдеться таке ненульове $B \in B$, що $B \subset A$.

Булева алгебра A називається ретрактивною тоді і тільки тоді, якщо для кожного ідеалу $I \subset A$ існує така підалгебра $B \subset A$, що $B \cap I = 0$ й $\langle I \cup B \rangle = A$.

Булева алгебра A називається коретрактивною тоді і тільки тоді, якщо для кожної підалгебри $B \subset A$ існує такий ідеал $I \subset A$ що $B \cap I = 0$ й $\langle I \cup B \rangle = A$.

3. Існування доповнення в $Sub(A)$

Почнемо з наступного твердження, яке має допоміжний характер.

Твердження 1. Нехай B – підалгебра алгебри A й $I \subset A$ – ідеал алгебри A такий, що $B \cap I = 0$. Тоді будь-який елемент алгебри $\langle B \cup I \rangle$ може бути єдиним чином зображений у вигляді $B \Delta I$ для деяких $B \in B$ і $I \in I$.

Доведення. Це випливає зі співвідношень $B \Delta I = \bar{B} \Delta I$ і

$$\begin{aligned} & ((B_1 \Delta I_1) \cap (B_2 \Delta I_2)) \Delta (B_1 \cap B_2) = \\ & = (I_1 \cap B_2) \Delta (B_1 \cap I_2) \Delta (I_1 \cap C_2) \subset \\ & \subset (I_1 \cup I_2) \Delta (I_1 \cap I_2) \subset (I_1 \cup I_2) \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

які показують, що множина елементів виду $B \Delta I$, $B \in \mathcal{B}$, $I \in \mathcal{I}$ замкнута щодо операцій доповнення й замикавання й отже є алгеброю, що містить $\mathcal{B}$ і $\mathcal{I}$.

Єдиність такого зображення випливає з того, що якщо $B_1 \Delta I_1$ й $B_2 \Delta I_2$ два різних зображення того самого елемента $A \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I} \rangle$, тоді $(B_1 \Delta B_2) \Delta (I_1 \Delta I_2) = 0$. Отже, $B_1 \Delta B_2 = I_1 \Delta I_2 = 0$, тобто $B_1 = B_2$ й $I_1 = I_2$.

Теорема 1. Нехай $\mathcal{B}$ – підалгебра булевої алгебри $\mathcal{A}$. Розглянемо наступні твердження:

- (i) алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$;
- (ii) існує такий ідеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \{0\}$;
- (iii) алгебра $\mathcal{B}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.

Тоді твердження (i) і (ii) еквівалентні й з кожного з них випливає (iii).

Доведення (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Якщо алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$, тоді існує принаймні один такий елемент $A^* \in \mathcal{A}$, що з відношення $B \subset A^*$, $B \in \mathcal{B}$ випливає $B = 0$. Отже, головний ідеал $\mathcal{I}_{A^*}$, породжений A^* , задовольняє умові $\mathcal{I}_{A^*} \cap \mathcal{B} = \{0\}$.

З іншого боку, нехай $\mathcal{I}$ – ідеал в $\mathcal{A}$ такий, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \{0\}$. Тоді для всякого $A \in \mathcal{I}$, з умов $B \subset A$ і $B \in \mathcal{B}$ випливає, що $B = 0$, тобто алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Множина $\mathcal{I}$ всіх таких ідеалів $\mathcal{I}$ алгебри $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ не порожня. Згідно з лемою Цорна, множина $\mathcal{I}$ має максимальний елемент $\mathcal{I}^*$. Нехай $\mathcal{C} = \langle \mathcal{I}^* \rangle$. Тоді $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0, 1\}$.

Припустимо, що $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \neq \mathcal{A}$. Тоді існує таке $A \in \mathcal{A}$, що $A \notin \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.

Покладемо $A^* = \langle \mathcal{C} \cup A \rangle$. Через максимальність ідеалу $\mathcal{I}^*$ існує ненульовий елемент $B \in A^* \cap \mathcal{B}$. З попереднього твердження випливає, що $B = C \Delta A$ для якогось $C \in \mathcal{I}^*$. Звідси $A = B \Delta C \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ всупереч вибору A . Отже, $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = \mathcal{A}$.

Це завершує доведення теореми.

Зауваження 1. В загальному випадку з (iii) не випливає (i). Нехай Ω – непушта нескінченна множина. Нехай $FC(\Omega)$ алгебра підмножин, породжена скінченними підмножинами Ω . Нехай

також $A \subset \Omega$ – нескінченна підмножина, така що $A \notin FC(\Omega)$. Покладемо $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A} \cup FC(\Omega) \rangle$. Тоді алгебра $FC(\Omega)$ не щільна в $\mathcal{A}$ і має доповнення в $\mathcal{A}$.

2. Якщо $\mathcal{C} \in \text{Sub}(\mathcal{A})$ – доповнення алгебри $\mathcal{B} \in \text{Sub}(\mathcal{A})$, то алгебра $\mathcal{C}$ може й не містити жодного ідеалу $\mathcal{I}$ алгебри $\mathcal{A}$. Нехай $(\mathcal{A}, \{f, g\})$ булевий добуток алгебр $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ ([3], стор. 66). Ототожнимо алгебри $\mathcal{B}$ й $\mathcal{C}$ з їх ізоморфними відображеннями $f(\mathcal{B})$ й $g(\mathcal{C})$ в алгебрі $\mathcal{A}$. У цьому випадку алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$ і алгебра $\mathcal{C}$ є доповненням $\mathcal{B}$. Припустимо тепер, що $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ – деякий ідеал алгебри $\mathcal{A}$. Тоді для будь-яких $B \in \mathcal{B}$ і $I \in \mathcal{I}$ справджується співвідношення $\emptyset \neq B \cap I \in \mathcal{I}$. Звідси випливає, що $B \cap I \in \mathcal{C}$. Отже $(B \cap I) \cap \bar{B} = \emptyset$ всупереч незалежності алгебр $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$.

З доведеної теореми випливають наступні відомі результати.

Наслідок 1. ([1], теорема 2.4) Усяка скінченна підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.

Доведення Згідно з теоремою 1 досить показати, що алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$. Припустимо, що для всякого $A \in \mathcal{A}$ знайдеться таке відмінне від нуля $B \in \mathcal{B}$, що $B \subset A$. Нехай тоді $\{B_i, i \in T\} \subset \mathcal{B}$ – множина всіх таких $B \in \mathcal{B}$, що $B \subset A$. Оскільки алгебра $\mathcal{B}$ скінченна, то множина T також скінченна. Таким чином, об'єднання $\bigcup_{i \in T} B_i$ існує й рівно A . Звідси випливає, що $A \in \mathcal{B}$.

Отримана суперечність доводить необхідне твердження.

Наслідок 2. [5, 6] Ірати $\text{Sub}(\mathcal{A})$ зліченої булевої алгебри $\mathcal{A}$ мають доповнення.

Доведення. Необхідне твердження буде доведено, якщо показати, що будь-яка підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ не щільна в $\mathcal{A}$.

Нехай знайдеться така підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, яка є щільною в $\mathcal{A}$. Згідно з теоремою 1, для деякого ідеалу $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ буде виконуватися співвідношення $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} \neq \{0\}$. Зауважимо, що злічену булеву алгебру $\mathcal{A}$ може бути зображено як об'єднання зростаючої послідовності скінченних булевих алгебр $\mathcal{A}_n$. Внаслідок цього $\mathcal{I} \cap (\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}) \neq \{0\}$ для деякого n , що є протиріччям з тим, що згідно з попереднім наслідком, скінченна алгебра $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.

Приклад. Простим прикладом алгебри A , кожна підалгебра якої не щільна в A , є алгебра $FC(\Omega)$ для всякої множини Ω .

Дійсно, припустимо, що існує деяка щільна підалгебра $B \subset FC(\Omega)$. Тоді алгебра B містить усі одноточкові підмножини. Отже, $B = FC(\Omega)$, оскільки $FC(\Omega)$ є мінімальною алгеброю, що містить усі одноточкові множини.

Більше того, будь-яка алгебра A , кожна підалгебра якої не щільна в A , ізоморфна $FC(\Omega)$.

Для доведення цього твердження покажемо спочатку, що визначення коретрактивності, прийняте в цій роботі, і визначення з [7], еквівалентні.

Твердження 2. Булева алгебра A коретрактивна тоді й тільки тоді, коли для всякої підалгебри $B \subset A$ існує такий гомоморфізм $h: A \rightarrow B$ що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Доведення Якщо $h: A \rightarrow B$ такий гомоморфізм, що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$, тоді $h^{-1}(0)$ ідеал у A такий, що $h^{-1}(0) \cap B = 0$ й $\langle h^{-1}(0) \cup B \rangle = A$.

З другого боку, згідно з твердженням 1 кожне $A \in \mathcal{A}$ може бути єдиним чином зображено у вигляді $B \Delta I$ для деяких $B \in \mathcal{B}$ і $I \in \mathcal{I}$.

Відображення $B \Delta I \rightarrow B$ є таким гомоморфізмом алгебри A на алгебру B , що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Теорема 2. Кожна підалгебра $B \subset A$ не щільна в A тоді й тільки тоді, коли алгебра A ізоморфна $FC(\Omega)$.

Доведення Нехай i – ізоморфізм алгебри A на алгебру $FC(\Omega)$ й B – деяка підалгебра алгебри A . Як показує попередній приклад, існує доповнення C алгебри $i(B)$ в $FC(\Omega)$. Отже, $i^{-1}(C)$ – доповнення B в A .

З другого боку, згідно з твердженням 2 і теоремою 1.9 з [7], алгебра A ізоморфна алгебрі $FC(\Omega)$.

4. Висновки

У такий спосіб показано, що умова нещільності підалгебри $B \subset A$ в алгебрі A є достатньою умовою існування доповнення C до алгебри B .

Список використаних джерел

1. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M., On the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Czechoslovak Mathematical Journal – 1979. – 29 – P. 530-545
2. Düntsch I., Koppelberg S. Complements and quasicomplements in the lattice of subalgebras of $P(\Omega)$ // Discrete Mathematics – 1985. – 53 – P. 63-78.
3. Heindorf L., Another note on countable Boolean algebras // Comment. Math. Univ. Carolinae – 1996. – 37, No. 4 – P. 815-819.
4. Heindorf L., On Subalgebras of Boolean Interval Algebras // Proceedings of the American Mathematical Society – 1997. – 125, No. 8 – P. 2265-2274.
5. Jech T., A note on countable Boolean algebras // Algebra Universalis – 1982. – 14 – P. 257-262.
6. Remmel J.B., Complementation in the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Algebra Universalis – 1980. – 10 – P. 48-64.
7. Rotman B., Boolean algebras with ordered bases // Fund. Math. – 1972. – 75 – P. 187-197.
8. Yan C. H., Decomposition of Lebesgue spaces // Adv. Math. – 1998. – V.138(2) – P.330-350.
9. Yan C. H., The theory of commuting Boolean sigma-algebras // Adv. Math. – 1999. – V.144(1) – P.94-116.
10. Plachky D., Extremal and monogenic additive set functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V.54 – P.193-196.
11. Сикорский Р., Булевы алгебры. – М.: Мир. – 1969. – 376 с.

Надійшла до редколегії 20.02.2009

УДК 512.55

В'ячеслав В. Шви́ров, асистент

Проективные модули над напівланцюговими кільцями.

В роботі розглядаються ланцюги підмодулів головних правих і лівих модулів над напівланцюговими кільцями. Знайдені умови для ґратки підмодулів головних правих та лівих модулів, за яких кільце є артиновим або нетеровим. Також наведені приклади кілець для яких ці умови не виконуються.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, радікал Джекобсона кільця, головний правий модуль, кусково-нетерове кільце

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1. Частково впорядковані множини. Ланцюги.

Частково впорядкованою множиною (ч.в. множиною) називається множина на якій визначено бінарне відношення $x \leq y$, яке має властивості рефлексивності, антисиметричності та транзитивності. Якщо у ч.в. множині для будь-яких x, y має місце $x \leq y$ або $y \leq x$, то вона називається лінійно впорядкованою множиною або ланцюгом.

Твердження 1. Всяка підмножина S ч.в. множини P сама є ч.в. множиною відносно того ж самого порядку (ограниченого на S). Зокрема, будь-яка підмножина ланцюга є ланцюгом. Функція $\theta: P \rightarrow Q$, задана на ч.в. множині P і яка приймає значення у ч.в. множині Q , називається такою, що зберігає порядок або ізотонною

(1) якщо з $x \leq y$ випливає, що $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Ізотонна функція, що допускає ізотонну зворотну функцію, називається ізоморфізмом, тобто, разом з умовою (1) виконано

(1a) з $\theta(x) \leq \theta(y)$ випливає, що $x \leq y$.

Ізоморфізм ч.в. множини P з собою називається його автоморфізмом. Дві ч.в. множини P і Q називаються ізоморфними, якщо між ними існує ізоморфізм.

Функція $\theta: P \rightarrow Q$, задана на ч.в. множині

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

On projective modules over serial rings.

In this paper we consider chains of submodules of principal right and principal left modules over serial rings. The some condition for lattice submodules of principal right and principal left modules for that the ring is artinian or noetherian are found. Also we get some examples rings for that this condition are failed.

Key Words: serial ring, Jacobson radical of the ring, principal right module, piecewise-noetherian ring.

P і яка приймає значення у ч.в. множині Q , називається антиізотонною

(2) якщо з $x \leq y$ випливає, що $\theta(x) \geq \theta(y)$.

(2a) з $\theta(x) \geq \theta(y)$ випливає, що $x \leq y$.

Взаємнооднозначна відповідність θ яка задовільняє умовам (2) і (2a) називається дуальним ізоморфізмом, або антиізоморфізмом.

Порядком ч.в. множини P називається (кардинальне) число її елементів. Якщо це число скінченне, то множина називається скінченною.

Означення. Найменшим елементом підмножини X ч.в. множини P називається елемент $a \in X$ такий, що $a \leq x$ для всіх $x \in X$. Найбільшим елементом підмножини X називається елемент $b \in X$ такий, що $b \geq x$ для всіх $x \in X$. Наведені поняття не слід змішувати з поняттями мінімального і максимального елементів. Мінімальний елемент підмножини X ч.в. множини P – це такий елемент a , що нерівність $a > x$ неможлива ні для якого $x \in X$; максимальні елементи визначаються двойственным чином. Звісно, що найменший елемент обов'язково буде мінімальним, а найбільший елемент – максимальним, але зворотні твердження вже не вірні.

Твердження 2. Будь-яка скінченна непуста підмножина X довільної ч.в. множини має мінімальні й максимальні елементи.

Твердження 3. У ланцюгах поняття мінімального і найменшого (максимального й найбільшого) елементів підмножини збігаються. Таким чином, будь-який скінченний ланцюг має найменший (перший) і найбільший (останній) елементи.

Твердження 4. Будь-який скінченний ланцюг із n елементів ізоморфен ординальному числу n (тобто ланцюгу цілих чисел $1, \dots, n$).

Іншою мовою, існує взаємнооднозначна відповідність ϕ між n -елементним ланцюгом X і множиною $\{1, \dots, n\}$, така, що $x_1 \leq x_2$ тоді й тільки тоді, коли $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$. Таким чином скінченні ланцюги – це скінченні ординальні числа.

Означення. Верхню границю підмножини X у ч.в. множині P називається елемент $a \in P$, що містить всі $x \in X$. Точна верхня границя підмножини X – це така його верхня границя, що міститься у будь-якій іншій його верхній границі; вона позначається символом $\sup X$. Якщо точна верхня границя $\sup X$ існує, то вона єдина. Поняття нижньої границі підмножини X і точної нижньої границі (що позначається символом $\inf X$) визначаються двоїстено. Також, якщо точна нижня границя $\inf X$ існує, то вона єдина.

Означення. Граткою називається ч.в. множина L у якій будь-які два елемента мають точну нижню границю або «перетин», що позначається $x \wedge y$ і точну верхню границю, або «об'єднання», що позначається $x \vee y$.

Будь-який ланцюг є граткою у якій $x \wedge y$ збігається з меншим, а $x \vee y$ з більшим із елементів x, y . Також будь-який ланцюг є дистрибутивною граткою.

2. Нетерові кільця. Кусково-нетерові напівланцюгові кільця.

Кільце називається нетеровим справа, якщо будь-яке непусте сімейство правих ідеалів має максимальний елемент.

Визначення. Кільце A називається кусково-нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

i) A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n$, таких, що $1 = e_1 + \dots + e_n$.

ii) $e_i A e_i$ – нетерова справа для кожного примітивного ідемпотента $e_i, i = 1, \dots, n$ (див. [1]).

Аналогічно визначаються кусково-нетерові зліва кільця. Кусково-нетерове зліва й справа кільце називається кусково-нетеровим.

Відзначимо, що кожне нетерове справа кільце є кусково-нетеровим. Кусково-нетерові кільця можна розглядати як деяке узагальнення нетерових (справа, зліва) кілець, яке пов'язане з наступною теоремою

Теорема 1. (3.6.1, див. [1]) Нехай A довільне кільце з ідемпотентом $e^2 = e \in A$. Покладемо $f = 1 - e, eAf = X, fAe = Y$ і

$$A = \begin{pmatrix} eAe & X \\ Y & fAf \end{pmatrix}$$

відповідна декомпозиція Пірса кільця A . Тоді кільце A є нетеровим справа (артиновим) тоді і тільки тоді, коли кільця eAe і fAf є нетеровими справа (артиновими), X – це скінченнопороджений fAf -модуль і Y – скінченнопороджений eAe -модуль.

Зокрема, відзначимо, що кожне напівланцюгове кільце є напівдосконалим, звідки – умова (i) означення завжди справедлива для таких кілець.

Наведемо також наступні факти про кусково-нетерові кільця (див. [2]).

Твердження 4. Напівланцюгове кусково-нетерове справа кільце є кусково-нетеровим зліва.

Теорема 2. Напівланцюгове кусково-нетерове напівпервинне кільце є нетеровим.

Нагадаємо, що первинним радикалом кільця A називається перетин всіх його первинних ідеалів у A . Будемо позначати його через $Pr(A)$.

Означення. Нехай $Pr(A)$ – первинний радикал кільця A . Кільце $A/Pr(A)$ називається діагоналлю A .

Теорема 3. Якщо A напівланцюгове кусково-нетерове кільце, тоді

(1) первинний радикал $Pr(A)$ – нільпотентен;

(2) діагональ A є нетеровою.

Означення. Нерозкладний проективний правий модуль над напівдосконалим кільцем A називається головним правим модулем. Аналогічно визначаються головні ліві модулі.

Будь-який головний правий A -модуль (головний лівий A -модуль) має вид eA (відповідно Ae).

Модуль M називається локальним, якщо він містить найбільший власний підмодуль. Очевидно, що найбільший власний підмодуль

модуля M збігається з радикалом Джекобсона $Jac(M)$ і множиною не-твірних елементів із M . Одже, для локального модуля M , $M = mR$ для кожного $m \in M \setminus Jac(M)$, зокрема, M – циклічний.

Лема 1. Нехай M є ланцюговим A -модулем і e – ідемпотент кільця A , тоді Me є ланцюговим eAe -модулем.

Доведення. Нехай

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset$$

це ланцюг підмодулів модуля M , йому можна поставити у відповідність ланцюг ідеалів кільця A

$$eM \supset M_1 \supset eM_2 \supset \dots \supset eM_n \supset$$

Нехай M_1 підмодуль A -модуля M . Покажемо, що M_1e – підмодуль eAe -модуля Me . Нехай $m, n \in M_1, a \in A$, тоді

$$me + ne = (m + n)e, m + n \in M_1$$

й $me + ne \in M_1e$, аналогічно

$$meae = meaeae = (me)ae \in M_1e.$$

Звідки, якщо справедливо включення для A -модулів $M_i \subset M_j$, то справедливо й включення $M_i e \subset M_j e$ для eAe -модулів. Через те, що M – ланцюговий, то Me – також ланцюговий.

Лема 2. Якщо M – локальний модуль над напівланцюговим кільцем A , і e – ідемпотент, то Me – локальний модуль для будь-якого ідемпотенту e з кільця A .

Доведення. Доведення впливає безпосередньо з леми 1, через те що, M – локальний модуль, то єдиний максимальний підмодуль це його радикал R , і, відповідно, Re – єдиний максимальний підмодуль модуля Me .

3. Проективні нерозкладні модулі над напівланцюговими кільцями.

Теорема 4. Нехай A – напівланцюгове кільце, і

$$A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s} = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_t^{n_t}$$

декомпозиція кільця A у суму головних правих модулів (у суму головних лівих модулів відповідно). Кільце A – артиново тоді і тільки тоді, коли виконані наступні умови

а) ґратка підмодулів кожного головного правого A -модуля є скінченним ланцюгом.

б) ґратка підмодулів кожного головного лівого A -модуля є скінченним ланцюгом.

Доведення. Нехай A – артинове. Позначимо

$L(P_i)$ – ґратку підмодулів головного правого модуля P_i . Покажемо, що $L(P_i)$ скінченна.

Через те, що кільце A – напівланцюгове і артинове, то P_i – ланцюговий модуль, єдиним максимальним підмодулем у P_i буде його радикал R_i . Розглянемо структуру підмодулів R_i . Т.к. модуль P_i – ланцюговий, то у R_i існує єдиний максимальний підмодуль, котрий дорівнює R_i^2 . Продовжуючи подібним чином отримаємо, що єдиний максимальний підмодуль у R_i^2 буде R_i^3 и т.д., звідки $L(P_i)$ можна представити у виді

$$P_i \supset R_i \supset R_i^2 \supset \dots \supset R_i^n \supset \dots$$

через те, що кільце A – артинове, то P_i – артинов і для деякого $n \in \mathbb{N}$, отримаємо $R_i^n = 0$ и цепочка подмодулей будет конечной

$$P_i \supset R_i \supset R_i^2 \supset \dots \supset R_i^n = 0$$

Задамо відображення ϕ з множини всіх підмодулів модуля P_i у множину $\{0, 1, \dots, n\}$ правилом

$$\phi(P_i) = 0, \phi(R_i) = 1, \dots, \phi(R_i^n) = n$$

очевидно, що для будь-яких $s, t \in \{0, 1, \dots, n\}$ виконані умови

$$P_i \supset R_i \Rightarrow 0 \leq 1, \dots, R_i^s \supset R_i^t \Rightarrow s \leq t$$

$$0 \leq 1 \Rightarrow P_i \supset R_i, \dots, s \leq t \Rightarrow R_i^s \supset R_i^t,$$

звідки, ϕ є дуальним ізоморфізмом, тобто $L(P_i)$ антиізоморфна $\{0, 1, \dots, n\}$ і діна ланцюга дорівнює $n + 1$.

Через довільність вибору P_i , твердження справедливо для кожного головного правого A -модуля.

Вважаючи, що $A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$ – декомпозиція кільця A у пряму суму головних лівих A -модулів і вибираючи довільний Q_i , ми можемо побудувати ланцюг лівих ідеалів й провести доведення аналогічним чином.

Нехай структура кожного головного правого і лівого модуля антиізоморфна скінченному ланцюгу $\{0, 1, \dots, n\}$, розглянемо деякий головний правий модуль P_i , кожному підмодулю модуля P_i можемо поставити у відповідність правий ідеал кільця A , (відповідно кожному підмодулю головного лівого модуля – лівий ідеал кільця A).

Через те, що кожен ланцюг підмодулів у P_i має мінімальний елемент, то кожен ланцюг правих ідеалів кільця A має мінімальний елемент, звідки A – двобічно артинове кільце.

Вимоги теореми як для правих, так і для лівих головних A -модулів є обов'язковими. Розглянемо приклад. Нехай

$$Q_2 = Q_2 R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V_1 \oplus V_1$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}, \text{ і } \text{rad} A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тоді $A_A = P_1 \oplus P_2$, де

$$P_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

маємо наступні скінченні ланцюги для правих модулів P_1 й P_2

$$P_1 \supset P_1 R = (0, \mathbb{C}) \supset 0, P_2 \supset 0.$$

З іншого боку, лівий модуль ${}_A A = Q_1 \oplus Q_2$, де

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

Отримуємо наступні ланцюги підмодулів модулів Q_1 і Q_2

$$Q_2 \supset 0$$

$$Q_2 = Q_2 R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V_1 \oplus V_1$$

Довжиною ланцюга будемо називати кількість елементів у ланцюгу. У зв'язку з цим наведемо

Означення. Нехай R – базисне артинове напівланцюгове кільце, сагайдак якого цикл або ланцюг. Тоді послідовність $(c_1, \dots, c_n)$, де $c_i = \text{lg}(e_i R)$ називають правим рядом Купиша кільця R . Послідовність $(d_1, \dots, d_n)$, де $c_i = \text{lg}(R e_i)$ називають лівим рядом Купиша кільця R .

Теорема 5. Нехай A – напівланцюгове кільце, і

$$A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_r^{n_r} = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_r^{n_r}$$

декомпозиція кільця A у суму головних правих модулів й у суму головних лівих модулів відповідно. Кільце A – нетерово з двох боків (не артинове) тоді і тільки тоді, коли виконані наступні умови

а) гратка підмодулів кожного головного

правого A -модуля антиізоморфна $N \cup \{0\}$.

б) гратка підмодулів кожного головного лівого A -модуля антиізоморфна $N \cup \{0\}$.

Доведення. Нехай кільце A – нетерове з обох боків. За теоремою 6.2.8 (див. [1]), напівланцюгове кільце є напівдосконалим й, за 6.3.10 (див. [1]), будь-який головний правий модуль над напівдосконалим кільцем A – є скінченнопородженим. Через твердження 3.1.10 (див. [1]), якщо A – нетерове справа, тоді будь-який скінченнопороджений правий A -модуль M нетеров, звідси маємо, що P_i – нетеров, (аналогічно головний лівий A -модуль).

Нехай $L(P_i)$ – гратка підмодулів головного правого модуля P_i . Покажемо, що $L(P_i)$ – антиізоморфна $N \cup \{0\}$.

Т.к. кільце A – напівланцюгове і P_i – ланцюговий модуль, то єдиним максимальним підмодулем у P_i буде його радикал R . Розглянемо структуру підмодулів R . Модуль P_i – нетеров і ланцюговий, через це у R існує єдиний максимальний підмодуль, котрий дорівнює R^2 . Продовжуючи аналогічно маємо, що єдиний максимальний підмодуль у R^2 буде R^3 і т.д., звідки $L(P_i)$ можна представити у вигляді

$$P \supset R \supset R^2 \supset \dots \supset R^n \supset \dots$$

встановимо відповідність

$$\phi: L(P_i) \rightarrow N \cup \{0\}$$

вважаючи

$$\phi(P_i) = 0, \phi(R_i) = 1 \dots \phi(R_i^n) = n \dots$$

очевидно, що ϕ – антиізоморфізм.

Зворотнє. З теореми 1 й того, що e – примітивний ідемпотент впливає, що кільце $e A e$ – є локальним напівланцюговим нетеровим справа кільцем (напівланцюговим нетеровим зліва кільцем). З твердження 9.4.1. (див. [1]) впливає, що такі кільця це або дискретно нормовані кільця, або артинові ланцюгові кільця, такі кільця є нетеровими з обох боків кільцями. Отже, кільце A є кусково-нетеровим.

Зважаючи на теорему 2 достатньо показати, що кільце A є первинним. Дійсно, нехай e_i, e_j – примітивні ідемпотенти, т.к. структура ідеалів головного правого модуля $e_i A$ ізоморфна $N \cup \{0\}$, то праві ідеали у $e_i A$ вичерпуються $e_i A, e_i R_i^m, m \in \mathbb{N}$. Аналогічно для модуля $e_j A$.

Розглядаючи добуток правих ідеалів $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ для довільних правих ідеалів з A отримуємо, що $\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = e_n R^n$, $n \in \mathbb{N}$ для деякого примітивного ідемпотента e_n , і $\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{I}_1 = 0$ або $\mathcal{I}_2 = 0$, подібні міркування проводимо й для лівих ідеалів, зважаючи на умову b) теореми ліві ідеали кільця A вичерпуються $Ae_m, R^m e_m, m \in \mathbb{N}$, таким чином A – є первинним. Звідки кільце A є нетеровим справа і зліва.

Розглянемо приклади кілець, що не є нетеровими. Нехай $\mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел, p – просте число, покладемо

$$Z_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid (n, p) = 1 \right\}$$

Множина $Z_{(p)}$ утворює кільце відносно звичайних операцій додавання та множення, яке називається кільцем p -інтегральних чисел. $Z_{(p)}$ є областю цілісності головних ідеалів і всі її ідеали утворюють збігаючий ланцюг

$$Z_{(p)} \supset pZ_{(p)} \supset \dots \supset p^n Z_{(p)} \supset \dots$$

такий, що $\bigcap_{n=0}^{\infty} p^n Z_{(p)} = 0$. Одже, $Z_{(p)}$ є нетеровим, але не артиновим кільцем.

Розглянемо кільце

$$A = \begin{pmatrix} Z_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

Позначимо $e = e_{11}$, і $f = e_{22}$. Одже $eAe = Z_{(p)}$ – є нетерове, але не артинове, $fAf = \mathbb{Q}$ – є поле. $eAf = \mathbb{Q}$ – скінченнопородженний правий $\mathbb{Q}$ -модуль і нескінченнопородженний лівий $Z_{(p)}$ -модуль. Одже кільце A є нетерове справа, але не зліва та не артинове.

Радікал кільця A має вид

$$R = \begin{pmatrix} pZ_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

звідки, для будь-якого $n > 0$

$$R^n = \begin{pmatrix} p^n Z_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і перетин всіх натуральних степенів R збігається з ідеалом

$$\mathcal{I} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R^n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

головними правими модулями над A будуть eA, fA і для $P = eA$ маємо таку структуру підмодулів, видно, що ланцюг не ізоморфен $N \cup \{0\}$

$$P \supset R \supset R^2 \supset \dots \supset R^n \supset \dots \supset \mathcal{I} \neq 0$$

Розглянемо наступне кільце

$$A = \begin{pmatrix} Z_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & Z_{(p)} \end{pmatrix}.$$

Позначимо $e = e_{11}$, і $f = e_{22}$. Одже $eAe = Z_{(p)}$, $fAf = Z_{(p)}$ – є нетерові. $eAf = \mathbb{Q}$ – нескінченнопороджений як правий $Z_{(p)}$ -модуль так і лівий $Z_{(p)}$ -модуль. Також A має скінченну множину $\{e, f\}$ ортогональних ідемпотентів, таких, що $1 = e + f$. Звідки A – є кусково-нетеровим кільцем.

Радікал кільця A має вид

$$R = \begin{pmatrix} pZ_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & pZ_{(p)} \end{pmatrix}$$

звідки, для будь-якого $n > 0$

$$R^n = \begin{pmatrix} p^n Z_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & p^n Z_{(p)} \end{pmatrix}$$

де перетин всіх натуральних степенів R збігається з ідеалом

$$\mathcal{I} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R^n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

і структура підмодулів головних правого і лівого модулів ізоморфна ординальній сумі $N \cup \{0\} > \mathbb{Z}$.

Список використаних джерел

1. Gubarenko N.M., Kirichenko V.V. Rings and Modules. Czestochowa. // - 2001. - 306 p.
2. Gubarenko N.M., Kirichenko V.V. Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. Биркгоф Г., Теория решеток.// Москва, 1984г. 567с.

Надійшла до редколегії 8.04.2009

УДК 519.21

Т.О. Яковенко, к.ф.-м.н., м.н.с.

Моделювання випадкових послідовностей в рівномірній нормі та нормі L_p

У статті розглядаються випадкові послідовності, кореляційні функції яких мають спеціальні властивості. Для них вводиться модель, для якої досліджується коли вона наближує послідовність в рівномірній нормі та нормі L_p з заданою точністю та надійністю.

Ключові слова: моделювання, випадкова послідовність, φ -субгауссова випадкова величина.

E-mail: yata452@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Ю.В.Козаченко.

T.O. Yakovenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Junior Researcher.

Simulation of random sequences in uniform and L_p norms

The random sequences with correlation function of special type are considered in the paper. A model for their simulation is introduced. It is also investigated when this model approximates the sequence with given accuracy and reliability in uniform and L_p norms.

Key Words: simulation, random sequence, φ -sub-Gaussian random variable.

1 Вступ

В даній роботі розглядається задача моделювання деякої випадкової послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ з заданою точністю та надійністю. Припустимо, що ця послідовність центрована, $E\xi_n = 0$, $n \geq 1$ та її кореляційна функція може бути зображена у вигляді

$$B(l, n) = E\xi_l \xi_n = \int_a^b f_l(\lambda) \overline{f_n(\lambda)} d\mu(\lambda), \quad l, n \geq 1, \quad (1)$$

де функції $f_n(\lambda)$ є інтегрованими з квадратом на $[a, b]$.

В роботі [1] було отримано розклад випадкових процесів, кореляційна функція яких має властивість (1), в ряд. Цей результат для випадкових послідовностей переформулюється наступним чином:

Теорема 1.1. Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ - центрована випадкова послідовність зі скінченими моментами другого порядку та кореляційно функцією $B(l, n) = E\xi_l \xi_n$.

Нехай $([a, b], B_{[a, b]}, \mu)$ - вимірний простір з σ -адитивною мірою μ . Функції $f_n(\lambda)$, $n \geq 1$ належать простору $L_2([a, b], \mu)$, $\{\varphi_k(\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}}$ - ортонормований базис в $L_2([a, b], \mu)$.

Кореляційна функція $B(l, n)$ може бути

зображена у вигляді

$$B(l, n) = \int_a^b f_l(\lambda) \overline{f_n(\lambda)} d\mu(\lambda)$$

тоді і лише тоді, коли випадкова послідовність може бути розкладена в ряд

$$\xi_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_{nk} \eta_k,$$

де $C_{nk} = \int_a^b f_n(\lambda) \overline{\varphi_k(\lambda)} d\mu(\lambda)$,

η_k - центровані та некорельовані випадкові величини.

Нехай μ - це міра Лебега на $[a, b]$ та $\{\varphi_k(\lambda)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - функції, що утворюють в $L_2[a, b]$ ортонормований базис. Функції $f_n(\lambda)$ можна розкласти по цьому базису

$$f_n(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_{nk} \varphi_k(\lambda), \quad \lambda \in [a, b],$$

та послідовність ξ_n може бути зображена у вигляді ряду

$$\xi_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_{nk} \eta_k, \quad (2)$$

де $E\eta_k = 0$, $E\eta_k \eta_j = \delta_{kj}$, δ_{kj} - символ Кронекера.

За модель послідовності ξ_n вибираємо

$$\widehat{\xi}_n^N = \sum_{k=1}^N C_{nk} \eta_k.$$

Похибку моделі визначимо наступним чином

$$\Delta_n^N = |\xi_n - \tilde{\xi}_n^N| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} C_{nk} \eta_k \right|.$$

Приклад 1. Розглянемо центровану випадкову послідовність ξ_n , $n \geq 1$ з кореляційною функцією

$$B_{\xi}(l, n) = E\xi_l \xi_n = \quad (3)$$

$$= \frac{2 \left[\sqrt{l} \sin \sqrt{l} \pi \cos \sqrt{n} \pi - \sqrt{n} \cos \sqrt{l} \pi \sin \sqrt{n} \pi \right]}{l - n},$$

якщо $l \neq n$; та

$$B_{\xi}(n, n) = E\xi_n^2 = \pi + \frac{1}{2\sqrt{n}} \sin 2\sqrt{n}\pi.$$

Дана кореляційна функція може бути подана у вигляді (1) на проміжку $[-\pi, \pi]$, де функції $f_n(\lambda)$ мають вигляд:

$$f_n(\lambda) = \cos \sqrt{n}\lambda, \lambda \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N}.$$

Якщо за ортонормований базис в $L_2[-\pi, \pi]$ вибрати функції $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\lambda, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\lambda \right\}$, $k \in \mathbb{N}$, тоді послідовність ξ_n можна подати у вигляді (2), де відповідні коефіцієнти дорівнюють:

$$a_{n0} = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin \sqrt{n}\pi;$$

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \sqrt{n}\lambda \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\lambda d\lambda = \\ &= 4\sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^k}{n - k^2} \sin \sqrt{n}\pi, \quad n, k \geq 1, n \neq k^2; \end{aligned}$$

$$a_{k^2 k} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos^2 k\lambda d\lambda = \sqrt{\pi}, \quad k \geq 1;$$

$$b_{nk} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \sqrt{n}\lambda \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\lambda d\lambda = 0, \quad n, k \geq 1.$$

Отже, послідовність ξ_n , $n \geq 1$ розкладається в ряд наступним чином

$$\begin{aligned} \xi_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin \sqrt{n}\pi \eta_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^k}{n - k^2} \sin \sqrt{n}\pi \mathbb{I}_{n \neq k^2} + \sqrt{\pi} \mathbb{I}_{n=k^2} \right) \eta_k, \end{aligned}$$

2 φ -субгауссові випадкові величини і процеси

Нагадаємо необхідні в подальшому означення і властивості випадкових величин і процесів із просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$.

Означення 2.1. [2] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, $x \neq 0$, та мають місце такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Означення 2.2. [2] Якщо $\varphi \in N$ -функцією, тоді перетворенням Юнга-Фенхеля цієї функції називається функція

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} [xy - \varphi(y)].$$

Приклад 2. Функція $\varphi(x) = \frac{|x|^{\alpha}}{\alpha}$ є N -функцією та перетворенням Юнга-Фенхеля цієї функції є $\varphi^*(x) = \frac{|x|^{\beta}}{\beta}$, де $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Умова Q. Будемо казати, що для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \quad (4)$$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. [2] Припустимо, що для N -функції φ виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda \xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \quad (5)$$

Теорема 2.1. [2] Простір $Sub_{\varphi}(\Omega)$ є баназовим простором з нормою

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}(x)$ – функція, обернена до функції φ при $x > 0$.

Для послідовностей випадкових величин з простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$ справедливі наступні теореми.

Теорема 2.2. [2] Нехай $\xi_1, \dots, \xi_m$ – незалежні випадкові величини з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. Якщо функція $\varphi(|x|^{1/r})$ є опуклою при деяких значеннях $r \in [1, 2]$, тоді буде виконуватись нерівність:

$$\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^m \xi_k \right) \leq \left(\sum_{k=1}^m (\tau_\varphi(\xi_k))^r \right)^{1/r}.$$

Теорема 2.3. [3] Нехай випадкові величини $\{\xi_n\}_{n=1}^m$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$, $x > 2$, $M \geq \frac{\varphi^*(2)}{\ln m}$, $b > 1$. Тоді

$$P \left\{ \max_{n=1, m} |\xi_n| > xb \max_{n=1, m} \tau_\varphi(\xi_n) \varphi^{*(-1)}(M \ln m) \right\} \leq m^{1-M} \frac{b+1}{b-1} \exp\{-\varphi^*(x)\}.$$

В роботі [4] досліджуються субгауссові випадкові процеси та їх властивості в нормі простору L_p . Результат отриманий для розподілу норми субгауссових процесів в просторі L_p для випадкових послідовностей переформулюється наступним чином:

Теорема 2.4. Нехай $\{\eta_n\}_{n=1}^m$ – випадкова послідовність з простору $Sub_\varphi(\Omega)$, така, що $\sum_{n=1}^m (\tau_\varphi(\eta_n))^p < \infty$, $p \geq 1$. Тоді $\sum_{n=1}^m |\eta_n|^p < \infty$ з ймовірністю 1 та для всіх ε : $\varepsilon > c \left(f \left(\frac{\varepsilon^{1/p}}{\varepsilon^{1/p}} \right) \right)^p$, де $c = \sum_{n=1}^m (\tau_\varphi(\eta_n))^p$, f – така функція, що $\varphi(u) = \int_0^u f(v) dv$, $u > 0$ та має місце нерівність

$$P \left\{ \sum_{n=1}^m |\eta_n|^p > \varepsilon_0 \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{c} \right)^{1/p} \right) \right\}. \quad (6)$$

Теорії φ -субгауссових випадкових величин та процесів присвячено книгу [5].

3 Моделювання випадкових послідовностей в рівномірній нормі

Означення 3.1. Будемо говорити, що модель $\widehat{\xi}_n^N$ наближає в рівномірній нормі послідовність ξ_n , $n = 1, \dots, m$ з заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \gamma$, ($0 < \gamma < 1$) якщо виконується нерівність

$$P \left\{ \max_{n=1, m} |\xi_n - \widehat{\xi}_n^N| > \varepsilon \right\} < \gamma.$$

Нехай випадкові величини $\{\eta_k\}$ в розкладі (2) – це незалежні випадкові величини з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. Тоді похибка моделі Δ_n^N буде також субгауссовою випадковою величиною.

Позначимо $\delta_N := \max_{n=1, m} \tau_\varphi(\Delta_n^N)$.

В цьому випадку справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. Модель $\widehat{\xi}_n^N$, $n = 1, \dots, m$ наближає послідовність ξ_n , $n = 1, \dots, m$ з заданою точністю ε та надійністю $1 - \gamma$ в рівномірній метриці якщо

$$(i) \delta_N \leq \frac{\varepsilon}{b \varphi^{*(-1)}(M \ln m) \varphi^{*(-1)} \left(-\ln \left(\frac{\gamma m^{M-1}(b-1)}{b+1} \right) \right)} \\ \text{при } \exp \left\{ \frac{\varphi^*(2)}{M} \right\} \leq m < \left(\frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}};$$

$$(ii) \delta_N \leq \frac{\varepsilon}{2b \varphi^{*(-1)}(M \ln m)} \\ \text{при } m \geq \left(\frac{e^{-\varphi^*(2)}}{\gamma} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^{\frac{1}{M-1}},$$

де $M > 1$, $b > 1$ – деякі фіксовані величини.

Доведення. Доведення даної теореми повністю аналогічне доведенню відповідного твердження для послідовностей, що можуть бути зображеними в вигляді ковзного підсумування з роботи [6]. $\square$

Приклад 3. Розглянемо випадкову послідовність ξ_n , $n = 1, \dots, m$ зі спектральною щільністю (3). Нехай випадкові величини $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ в розкладі (2) є незалежними, стандартно розподіленими нормальними величинами з параметрами 0 та 1. Як відомо (див. [2]), такі випадкові величини належать простору $Sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ та $\tau_\varphi(\eta_k) = 1$ для всіх k . Перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi \in \varphi^*(x) = \frac{x^2}{2}$ та $\varphi^{*(-1)}(x) = \sqrt{2x}$, $x \geq 0$. Тоді з Теорема 2.2 при

$\tau = 1$ (для $N \geq m$) впливає

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_N &= \max_{n=\overline{1,m}} \tau_\varphi(\Delta_n^N) = \\ &= \max_{n=\overline{1,m}} \tau_\varphi \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk} \eta_k \right) \leq \\ &\leq \max_{n=\overline{1,m}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi(a_{nk} \eta_k) = \\ &= \max_{n=\overline{1,m}} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{nk}| \tau_\varphi(\eta_k) = \\ &= \max_{n=\overline{1,m}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| 4 \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \frac{(1-k)^k}{n-k^2} \sin \sqrt{n} \pi \right| \leq \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \max_{n=\overline{1,m}} \sqrt{n} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (1 - \frac{n}{k^2})} \leq \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{1 - \frac{m}{(N+1)^2}} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{1 - \frac{m}{(N+1)^2}} \cdot \frac{1}{N} \leq \frac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{N}. \end{aligned}$$

Тоді, якщо в умові Теорема 3.1 покласти $b = M = 2$, то модель $\hat{\xi}_n^N$ буде наближати випадкову послідовність ξ_n з заданою точністю ε та надійністю $1 - \gamma$ якщо:

$$i) N \geq \frac{32}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m \ln m \ln \frac{3}{\gamma m}}{\pi}} \text{ при } \varepsilon \leq m < \frac{3}{\gamma \varepsilon^2};$$

$$ii) N \geq \frac{64}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m \ln m}{\pi}} \text{ при } m \geq \frac{3}{\gamma \varepsilon^2}.$$

Приклад 4. Якщо в Прикладі 3 10 членів послідовності потрібно змодельювати в рівномірній нормі з точністю $\varepsilon = 0,1$ та надійністю $1 - \gamma = 0,90$ тоді $N \geq 1733$.

4 Моделювання випадкових послідовностей в нормі L_p .

Означення 4.1. Будемо говорити, що модель $\hat{\xi}_n^N$ наближає в нормі L_p , $p \geq 1$ послідовність ξ_n , $n = 1, \dots, m$ з заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \gamma$, ($0 < \gamma < 1$) якщо виконується нерівність

$$P \left\{ \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |\xi_n - \hat{\xi}_n^N|^p > \varepsilon \right\} < \gamma.$$

Нехай випадкові величини $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ в розкладі (2), як і в попередньому розділі, – це незалежні випадкові величини з простору $Sub_\varphi(\Omega)$

для яких $\tau := \sup_{k \geq 1} \tau_\varphi(\eta_k) < \infty$. Розглянемо випадок, коли функція $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $1 < \alpha \leq 2$. Перетворенням Юнга-Фенхеля цієї функції є $\varphi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ та $\varphi^{*(-1)}(x) = (\beta x)^{1/\beta}$, $x \geq 0$.

Позначимо $\bar{\delta}_N := \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\tau_\varphi(\Delta_n^N))^p$.

В цьому випадку буде справедливою наступна теорема.

Теорема 4.1. Модель $\hat{\xi}_n^N$, $n = \overline{1,m}$ наближає послідовність ξ_n , $n = \overline{1,m}$ з заданою точністю ε та надійністю $1 - \gamma$ в метриці L_p якщо

$$(i) \bar{\delta}_N \leq \frac{\varepsilon}{(\beta \ln \frac{2}{\gamma})^{p/\beta}} \text{ при } 1 \leq p \leq \beta \ln \frac{2}{\gamma};$$

$$(ii) \bar{\delta}_N \leq \frac{\varepsilon}{p^{p/\beta}} \text{ при } p > \beta \ln \frac{2}{\gamma}.$$

Доведення. Похибки моделі Δ_n^N , $n = \overline{1,m}$ є субгауссовими випадковими величинами. Тоді для Δ_n^N та для будь-якого $p \geq 1$ виконуються умови Теорема 2.4. Справді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m (\tau_\varphi(\Delta_n^N))^p &= \sum_{n=1}^m \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} C_{nk} \eta_k \right) \right)^p \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^m \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{nk}| \tau_\varphi(\eta_k) \right)^p \leq \\ &\leq \tau^p \sum_{n=1}^m \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{nk}| \right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Тоді $\sum_{n=1}^m (\Delta_n^N)^p < \infty$ з ймовірністю 1 та для всіх $\varepsilon_0 > c p^{p/\beta}$, $c = \sum_{n=1}^m (\tau_\varphi(\Delta_n^N))^p = m \bar{\delta}_N$

$$P \left\{ \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\Delta_n^N)^p > \frac{\varepsilon_0}{m} \right\} \leq 2 \exp \left\{ - \left(\frac{\varepsilon_0}{c} \right)^{\beta/p} \right\}$$

Якщо $\frac{\varepsilon_0}{m} \leq \varepsilon$ та $2 \exp \left\{ - \left(\frac{\varepsilon_0}{c} \right)^{\beta/p} \right\} < \gamma$, тоді модель $\hat{\xi}_n^N$ буде наближувати послідовність ξ_n з заданою точністю ε та надійністю $1 - \gamma$. Для цього необхідно, щоб $m \varepsilon > c p^{p/\beta} = m \bar{\delta}_N p^{p/\beta}$, тобто $\bar{\delta}_N < \frac{\varepsilon}{p^{p/\beta}}$ та $\frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{\varepsilon m}{m \bar{\delta}_N} > \left(\ln \frac{2}{\gamma} \right)^{p/\beta}$ або $\bar{\delta}_N < \frac{\varepsilon}{(\ln \frac{2}{\gamma})^{p/\beta}}$. Отже,

$$\bar{\delta}_N < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{p^{p/\beta}}, \frac{\varepsilon}{(\ln \frac{2}{\gamma})^{p/\beta}} \right\}$$

звідки і впливає твердження теореми. $\square$

Приклад 5. Розглянемо випадкову послідовність ξ_n , $n = 1, \dots, m$ спектральна щільність якої має вигляд (3). Нехай випадкові величини $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ в розкладі (2) є незалежними, стандартно розподіленими нормальними величинами з параметрами 0 та 1. Як уже зазначалось в Прикладі 3 та доведено в [2], такі випадкові величини належать простору $Sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ та при цьому $\tau_\varphi(\eta_k) = 1$ для всіх k . Перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi \in \varphi^*(x) = \frac{x^2}{2}$, $\varphi^{*(-1)}(x) = \sqrt{2x}$, $x \geq 0$ та в умові теореми 2.4 функція $f(v) = v$ оскільки $\frac{x^2}{2} = \int_0^x v dv$. Тоді з Теореми 2.2 при $r = 1$ (для $N \geq m$) впливає:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_N &= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk} \eta_k \right) \right)^p \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{nk}| \tau_\varphi(\eta_k) \right)^p = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| 4\sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^k}{n-k^2} \sin \sqrt{n}\pi \right| \right)^p \leq \\ &\leq \frac{4^p}{\pi^{p/2} m} \sum_{n=1}^m n^{p/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (1 - \frac{n}{k^2})} \right)^p \leq \\ &\leq \frac{4^p}{\pi^{p/2} m} \sum_{n=1}^m \left(\frac{\sqrt{n}}{1 - \frac{n}{(N+1)^2}} \right)^p \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^p \leq \\ &\leq \frac{4^p}{\pi^{p/2} m} \cdot (2\sqrt{m})^p m \cdot \frac{1}{N^p} \leq \left(\frac{8}{N} \right)^p \left(\frac{m}{\pi} \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Тоді, модель $\hat{\xi}_n^N$ буде наближати в L_p , $p \geq 1$ випадкову послідовність ξ_n з заданою точністю ε та надійністю $1 - \gamma$ якщо:

$$i) N \geq \frac{8}{\varepsilon^{1/p}} \sqrt{\frac{2m \ln \frac{2}{\gamma}}{\pi}} \text{ при } 1 \leq p < 2 \ln \frac{2}{\gamma};$$

$$ii) N \geq \frac{8}{\varepsilon^{1/p}} \sqrt{\frac{mp}{\pi}} \text{ при } p \geq 2 \ln \frac{2}{\gamma}.$$

Приклад 6. Якщо в Прикладі 5 10 членів послідовності потрібно змодельовати в просторі L_2 з точністю $\varepsilon = 0,01$ та надійністю $1 - \gamma = 0,90$ тоді $N \geq 351$.

5 Висновки

Отже, в роботі отримано умови при яких випадкова послідовність, що може бути зображена у вигляді ряду, наближається запропонованою моделлю з заданою точністю та надійністю в рівномірній нормі та нормі L_p . Отримані результати проілюстровано на прикладах.

Список використаних джерел

1. Yu. V. Kozachenko, I.V. Rozora and Ye. V. Turchyn, On an expansion of random processes in series // Random Operators & Stochastic Equations. - 2007. - Vol.15, P.15-33.
2. Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000.
3. Kozachenko Yu., Sottinen T. and Vasylyk O. Lipschitz conditions for $Sub_\varphi(\Omega)$ -processes with application to weakly self-similar stationary increment processes // Preprint 483, University of Helsinki, 2008, 19pp.
4. Козаченко Ю.В., Каменщикова О.Є., Апроксимація $SSub_\varphi(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p(T)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика, № 79, 2008, с.73-78.
5. Василик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є. φ -субгауссові випадкові процеси. - К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. - 232 с.
6. Василик О.І., Козаченко Ю.В., Яковенко Т.О. Моделювання стаціонарних випадкових послідовностей // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки, №1, 2009, с. 7-10.

Надійшла до редколегії 5.03.2009

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 539.376

Владислав Р. Богданов, к.ф.-м.н., с.н.с.

Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини.

Розвинуто метод щодо визначення вірогідних тривимірних полів значень пластичних деформацій і напружень, що отримано з чисельного розв'язку три вимірних задач у пружно-пластичній динамічній математичній постановці. Розроблена методика добре моделює процес концентрації пластичних деформацій і напружень на вершині тріщини і може використовуватися для опису деградації міцності матеріалів конструкцій, які призначені для довгого терміну експлуатації при високих температурах у агресивному середовищі або під радіаційним опромінюванням.

Ключові слова: пластичні деформації, тріщина, вершина тріщини, пружно-пластична модель.

E-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ

1. Вступ

В [1–3, 5, 7, 11] розвинуто імовірнісний підхід визначення в'язкості руйнування на основі моделювання напружено-деформованого стану. Зокрема в роботах [5, 11] використовуються моделі течій і руйнування Бріджмена; у [1, 2, 7] квазістатична пружно-пластична модель; у [3] розв'язується задача плоского напруженого стану за пружно-пластичної динамічної моделі. На відміну від [1–3, 5, 7, 11] в даній роботі напружено-деформований стан визначається на основі розв'язання тривимірної задачі в пружно-пластичній динамічній моделі.

2. Постановка задачі

Розглядається проблема деформації тіла паралелепіпедної форми з пропилом посередині, що опирається на дві опори. Довжина, висота, ширина і глибина пропилу цього тіла відповідно дорівнює L , B , H , l . Абсолютно твердий ударник проникає в пружне середовище з постійною швидкістю вертикально вниз. Протягом усього відрізка часу взаємодії контакт відбувається по смузі верхньої поверхні паралелепіпеда $\{-A \leq x \leq A; y = B; 0 \leq z \leq H\}$, область контакту залишається постійною. Тіло контактує з опорами по рівних смугах нижньої поверхні тіла

V.R. Bogdanov, PhD, Senior Research Associate

Three dimension problem of plastic deformations and stresses concentration near top of crack.

The method of reliable plastic deformation and stresses fields calculations from the numerical solution of three dimension problems in dynamic elastic-plastic mathematical model has developed. The method is useful for an estimation of strength properties degradation of a structures material intended for a long-time operation at high temperatures, in aggressive environment or under radioactive radiation.

Keywords: plastic deformation, crack, top of crack, dynamic elastic-plastic model.

$\{-L - a \leq x \leq -L; y = 0; 0 \leq z \leq H\}$ і $\{L \leq x \leq L + a; y = 0; 0 \leq z \leq H\}$. Відстань між опорами дорівнює $4B$. Враховуючи симетрію процесу деформування відносно площини $x=0$, далі розглядається задача для половини паралелепіпедного тіла, коли $x \geq 0$.

Механічна модель основана на нестационарній теорії пружно-деформованого стану. Розв'язується тривимірна задача. Нехай $\vec{U} = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор зміщень, пов'язаний з деформаціями співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

На рисунку 1 наведена схема розрахункової області. Крайові умови (2) запишуться так:

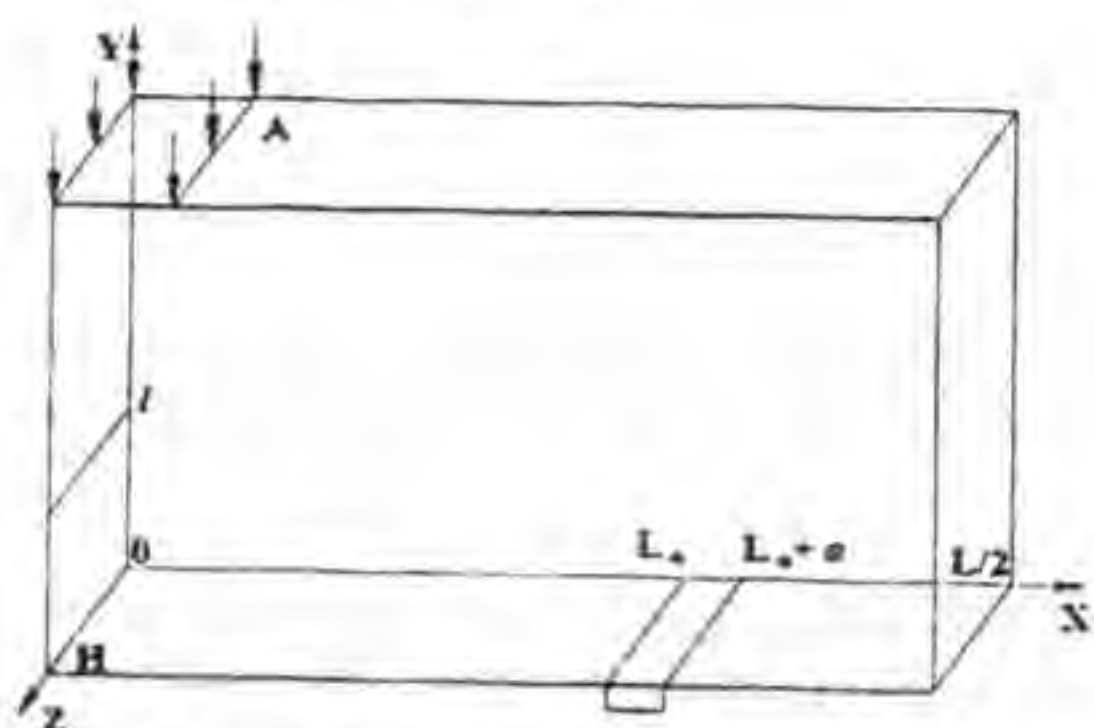


Рис. 1. Схема розрахункової області.

$$\begin{aligned} x=0; 0 < y < l; 0 < z < H: \sigma_{xx} = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{xz} = 0; \\ x=0; l < y < B; 0 < z < H: u_x = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{xz} = 0; \\ x=L/2; 0 < y < B; 0 < z < H: \sigma_{xx} = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{xz} = 0; \\ y=0; 0 < x < L; 0 < z < H: \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ y=0; L < x < L+a; 0 < z < H: u_y = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ y=0; L+a < x < L/2; 0 < z < H: \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ y=B; 0 < x < A; 0 < z < H: \sigma_{yy} = -P; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ y=B; A < x < L/2; 0 < z < H: \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ z=0; 0 < x < L/2; 0 < y < B: u_z = 0; \sigma_{xz} = 0; \sigma_{yz} = 0; \\ z=H; 0 < x < L/2; 0 < y < B: \sigma_{zz} = 0; \sigma_{xz} = 0; \sigma_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Рівняння динаміки мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

В ролі механічної моделі обрано модель, що ґрунтується на теорії неізотермічної пластичної течії для середовища із зміцненням і умовою текучості Мізеса за гіпотези короткочасної повзучості і рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями, що розглядаються як сума пружних, пластичних та повзких складових. У відповідності цієї моделі повні деформації мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} S_{ij} + K\sigma + \varphi;$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = S_{ij} d\lambda; \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \Phi(\varepsilon_{ij}^c, S_{ij}, T, t) S_{ij};$$

тут $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$; – девіатор тензора напружень, G – модуль зсуву, $K_1 = (1-2\nu)/(3E)$;

$K = 3K_1$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення 3ε , середнє напруження σ і температурне розширення φ в співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ (в нашому випадку $\varphi \equiv 0$); $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження. Припускаємо, що ця скалярна функція є квадратичною функцією девіатора напружень S_{ij} [6].

Унаслідок пластичного деформування зразка матеріал зміцнюється за таким законом [4, 6]:

$$\sigma_{ij}(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon_0}\right)^N; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}; \quad (5)$$

$$\sigma_{02}(T) = a - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273));$$

де κ – параметр Одквіста; E – модуль пружності; $T_0 = 20^\circ \text{C}$; N – коефіцієнт зміцнення.

$$\begin{aligned} a &= 867 \text{ МПа}; & c &= 0,0305 \text{ МПа К}^{-1}; \\ b &= 975 \text{ МПа}; & h &= 1,04 \cdot 10^{-2} \text{ К}^{-1}. \end{aligned}$$

В нашому випадку нестационарна взаємодія здійснюється на короткому інтервалі часу і явищем повзучості можна знехтувати $\Phi \equiv 0$.

Перепишемо (4) в розгорнутій формі:

$$d\varepsilon_{xx} = d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma)(d\lambda + \Phi dt);$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\left(\frac{\sigma_{xy}}{2G}\right) + \sigma_{xy}(d\lambda + \Phi dt); \quad (6)$$

$$\text{де } d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f = \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0; \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \text{якщо } f = 0, df = 0; \end{cases}$$

$$f > 0 \text{ неприпустиме}; \quad (7)$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6((d\varepsilon_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yz}^p)^2) \right]^{1/2};$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right]^{1/2}.$$

3. Методи розв'язку задачі

Нехай нестационарна взаємодія відбувається на інтервалі часу $[0, t_0]$. Використовується підхід врахування не стаціонарного навантаження і чисельного інтегрування, що застосовувався в динамічній пружній моделі [10]. Для чисельного інтегрування за часом використовувалася квадратурна формула Грегорі

[9] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Тоді для моменту часу $t \in [0, t_0]$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma; \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma; \\ \varepsilon_{zz}^e &= \frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma; \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G}; \quad \varepsilon_{xz}^e = \frac{\sigma_{xz}}{2G}; \\ \varepsilon_{yz}^e &= \frac{\sigma_{yz}}{2G}; \quad \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} = (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}; \\ \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} &= (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}^p}{dt} = (\sigma_{zz} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}; \\ \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} &= \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\varepsilon_{xz}^p}{dt} = \sigma_{xz} \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\varepsilon_{yz}^p}{dt} = \sigma_{yz} \frac{d\lambda}{dt}.\end{aligned}$$

Після проведення дискретизації запишемо прирости деформацій:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{xx,k} &= B_1\sigma_{xx,k} + B_2(\sigma_{yy,k} + \sigma_{zz,k}) - b_{xx}; \\ \Delta\varepsilon_{yy,k} &= B_1\sigma_{yy,k} + B_2(\sigma_{xx,k} + \sigma_{zz,k}) - b_{yy}; \\ \Delta\varepsilon_{zz,k} &= B_1\sigma_{zz,k} + B_2(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) - b_{zz}; \\ \Delta\varepsilon_{xy,k} &= B_3\sigma_{xy,k} - b_{xy}; \\ \Delta\varepsilon_{xz,k} &= B_3\sigma_{xz,k} - b_{xz}; \quad \Delta\varepsilon_{yz,k} = B_3\sigma_{yz,k} - b_{yz}; \\ B_1 &= \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0\Delta\lambda_k \right); \\ B_2 &= \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0\Delta\lambda_k \right); \quad B_3 = \frac{1}{2G} + D_0\Delta\lambda_k; \\ b_{ij} &= \frac{1}{2G} \sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} \\ \text{де} \quad & - \sum_{n=1}^{m_1} D_n (\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij} \sigma_{k-n}) \Delta\lambda_{k-n}; \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j; \end{cases} \quad (i, j = x, y, z); \\ \sigma &= (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3;\end{aligned} \quad (8)$$

Введемо позначення: $\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$.
Пружно-деформований стан визначається з умови текучості, яку з урахуванням (7) можна переписати:

$$\begin{aligned}\psi &= \begin{cases} \frac{1}{2G}, & \text{якщо } f < 0; \\ \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i}{2\sigma_i}, & \text{якщо } f = 0; \end{cases} \\ f > 0 & \quad \text{неприпустиме.} \\ \text{тут} & \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{yy})^2 + (\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{zz})^2 + (\Delta\varepsilon_{yy} - \Delta\varepsilon_{zz})^2 + 6[(\Delta\varepsilon_{xy})^2 + (\Delta\varepsilon_{xz})^2 + (\Delta\varepsilon_{yz})^2] \right\}^{1/2};$$

Для реалізації фізичної нелінійності, що міститься в умовах (9), застосовується метод послідовних уточнень, який дає можливість розв'язок нелінійної задачі замінити послідовністю лінійних задач:

$$\psi^{(n+1)} = \begin{cases} \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G}, & \text{якщо } \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) < -m; \\ \psi^{(n)}, & \text{якщо } -m < \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) < m; \\ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)}, & \text{якщо } \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) > m; \end{cases} \quad (10)$$

m – величина найбільшого відхилення інтенсивності напружень від зміцненої межі текучості, $0 \leq p \leq 1$.

Із системи (8) знайдемо вираз напружень на кожному кроці:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,k} &= A_1\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_2\Delta\varepsilon_{yy,k} + A_2\Delta\varepsilon_{zz,k} + Y_{xx}; \\ \sigma_{yy,k} &= A_2\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_1\Delta\varepsilon_{yy,k} + A_2\Delta\varepsilon_{zz,k} + Y_{yy}; \\ \sigma_{zz,k} &= A_2\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_2\Delta\varepsilon_{yy,k} + A_1\Delta\varepsilon_{zz,k} + Y_{zz}; \\ \sigma_{xy,k} &= A_3\Delta\varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}; \\ \sigma_{xz,k} &= A_3\Delta\varepsilon_{xz,k} + Y_{xz}; \\ \sigma_{yz,k} &= A_3\Delta\varepsilon_{yz,k} + Y_{yz};\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}Y_{xx} &= A_1b_{xx} + A_2b_{yy} + A_2b_{zz}; & Y_{xy} &= A_3b_{xy}; \\ Y_{yy} &= A_2b_{xx} + A_1b_{yy} + A_2b_{zz}; & Y_{xz} &= A_3b_{xz}; \\ Y_{zz} &= A_2b_{xx} + A_2b_{yy} + A_1b_{zz}; & Y_{yz} &= A_3b_{yz};\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{B_1 + B_2}{(B_1 - B_2)(B_1 + 2B_2)};$$

$$A_2 = -\frac{B_2}{(B_1 - B_2)(B_1 + 2B_2)};$$

$$A_3 = \frac{1}{B_3};$$

Прирости вектора переміщень $\Delta\vec{U}$ пов'язані з приростами деформацій такими співвідношеннями:

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \Delta\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Delta\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (12)$$

$$\Delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \Delta\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

$$\Delta \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

де $u = \Delta u_x$; $v = \Delta u_y$; $w = \Delta u_z$;

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначалися для кожної елементарної комірки із числового розв'язку. Результати розрахунків порівнювалися з відомими теоретичними результатами [8].

Коефіцієнт інтенсивності напружень K_I в кожний момент часу $T_k = k\Delta t$ визначався із співвідношення [8]:

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1.93 - 3.07 \frac{l}{B} + 14.53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25.11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25.8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right). \quad (13)$$

де F – контактна сила.

4. Числова реалізація

Для розрахунків зразків із сталі 15Х2НМФА застосовується метод скінчених різниць зі змінюваним кроком розбиття. Характерний розмір комірки навколо вершини тріщини ρ_{uc} приймається як такий, що дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу і становить $0.05 \text{ м} \times 10^{-3}$. На рисунках нижче подано результати розрахунків зразків Шарпі (зразків паралелепіпедної форми з пропилом посередині) довжиною $60 \text{ м} \times 10^{-3}$, шириною $10 \text{ м} \times 10^{-3}$, товщиною $50 \text{ м} \times 10^{-3}$ і глибиною пропилу в центрі зразка $3 \text{ м} \times 10^{-3}$, з коефіцієнтом зміцнення $N=0.05$. Довжина між опорними точками становить $40 \text{ м} \times 10^{-3}$. Крок за часом береться такий, що дорівнює $5\text{с} \times 10^{-4}$. Довжина зони контакту була $5 \text{ м} \times 10^{-3}$.

На рисунках 2 і 3 суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з круглячком, суцільна з плюсом, суцільна з зіркою, пунктирна з трикутником, пунктирна і суцільна з хрестиком лінії відповідають відповідно напруженням σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} , напруженню текучості σ_y і еквівалентному напруженню σ_{eq} . На рисунку 2 зображено графіки напружень, які виникають в області вершини тріщини тривимірного зразка Шарпі в площині $z=41.3$. На рисунку 3 зображено максимальні за абсолютною величиною значення напружень, що виникають на лінії $x=0$. Коли інтенсивність напружень набуває значення $K_I = 75.3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ максимальні нап-

руження виникають в комірці, що розташована зверху на відстані однієї комірки від вершини тріщини. Величини найбільших напружень в тривимірній моделі менш аналогічних напружень у випадку моделі плоскої деформації на 8-10 відсотків. Величини напружень у випадку просторової задачі займають проміжне положення між аналогічними напруженнями, що виникають у випадку моделей плоского напруженого стану і плоскої деформації.

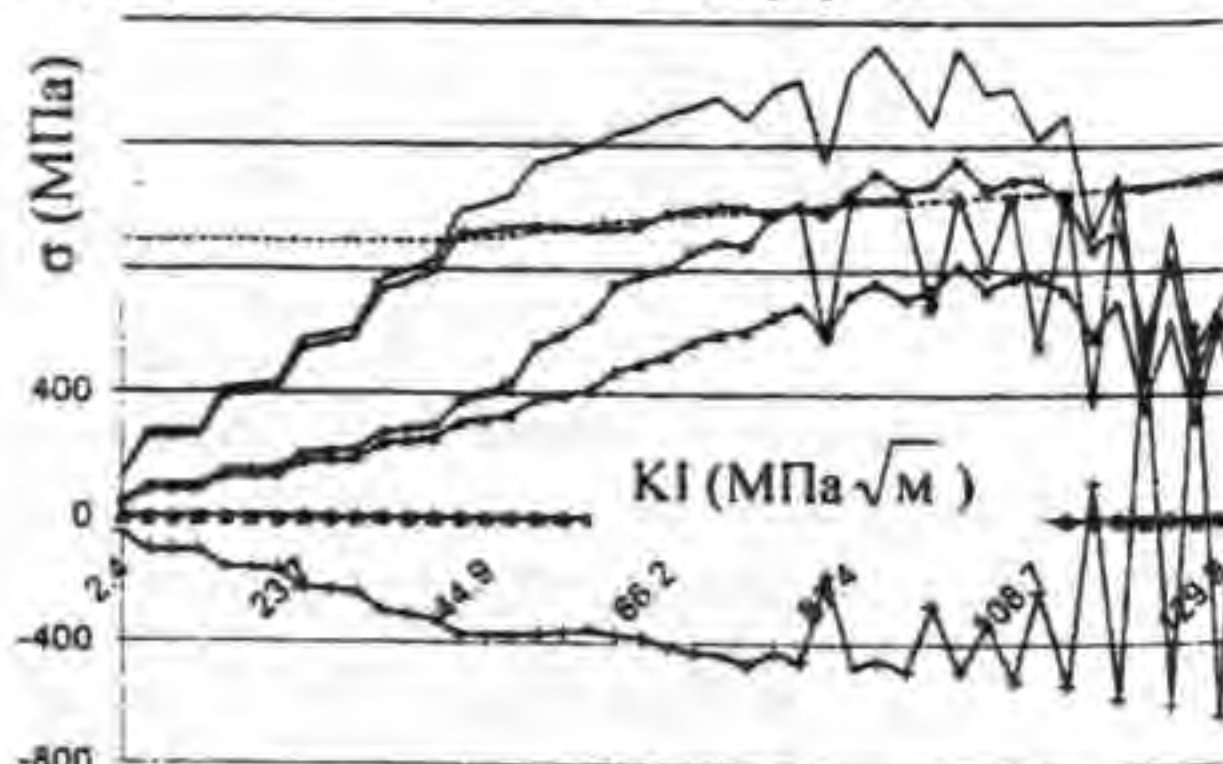


Рис.2. Напруження в області вершини тріщини

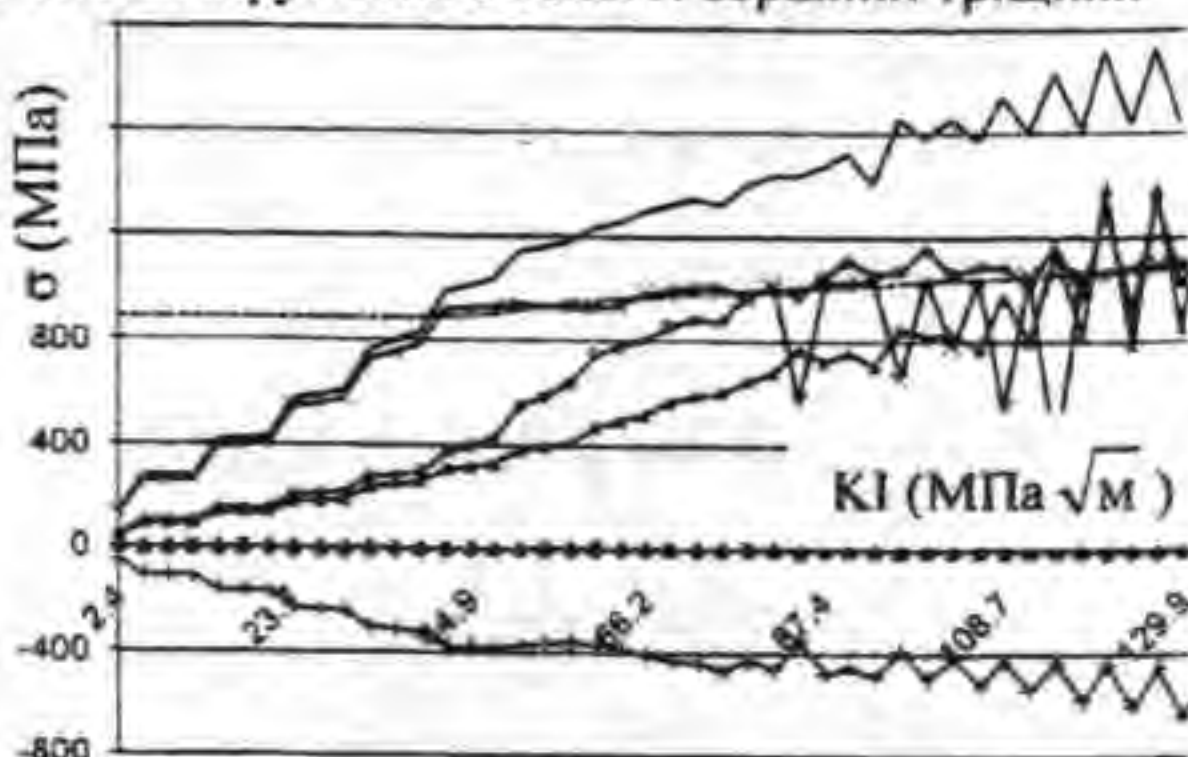


Рис.3 Максимальні напруження в області вершини тріщини

На рисунках 4 і 5 зображені графіки розподілу напружень за товщиною тривимірного зразка Шарпі в області вершини тріщини коли значення інтенсивності напружень K_I 26,7 і 93,5 $\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$ відповідно.

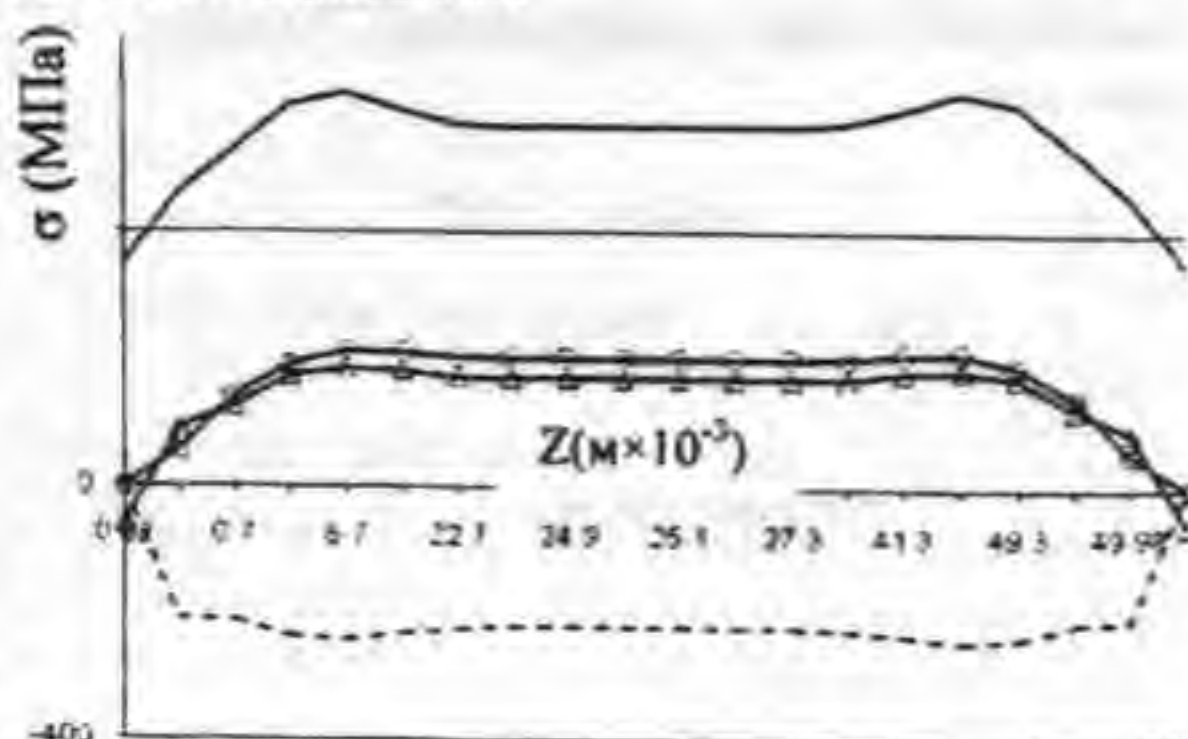


Рис.4. Напруження коли $K_I = 93.5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$

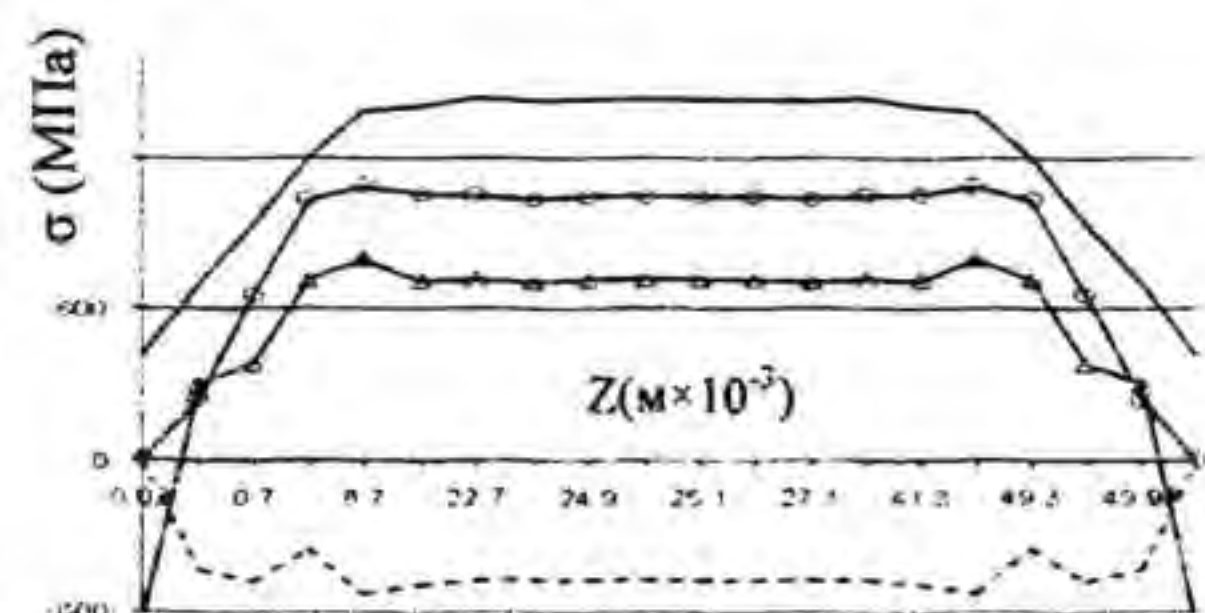


Рис. 5 Напруження коли $K_I = 93.5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$.

На наступних рисунках представлено результати в момент, коли величина коефіцієнту інтенсивності напружень $K_I = 57.1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$. На рисунку 6 зображено головні нормальні напруження σ_1 в площинах $z = 27.3, 48.3, 49.88$ і $49.98 \text{ м} \times 10^{-3}$ відповідно.

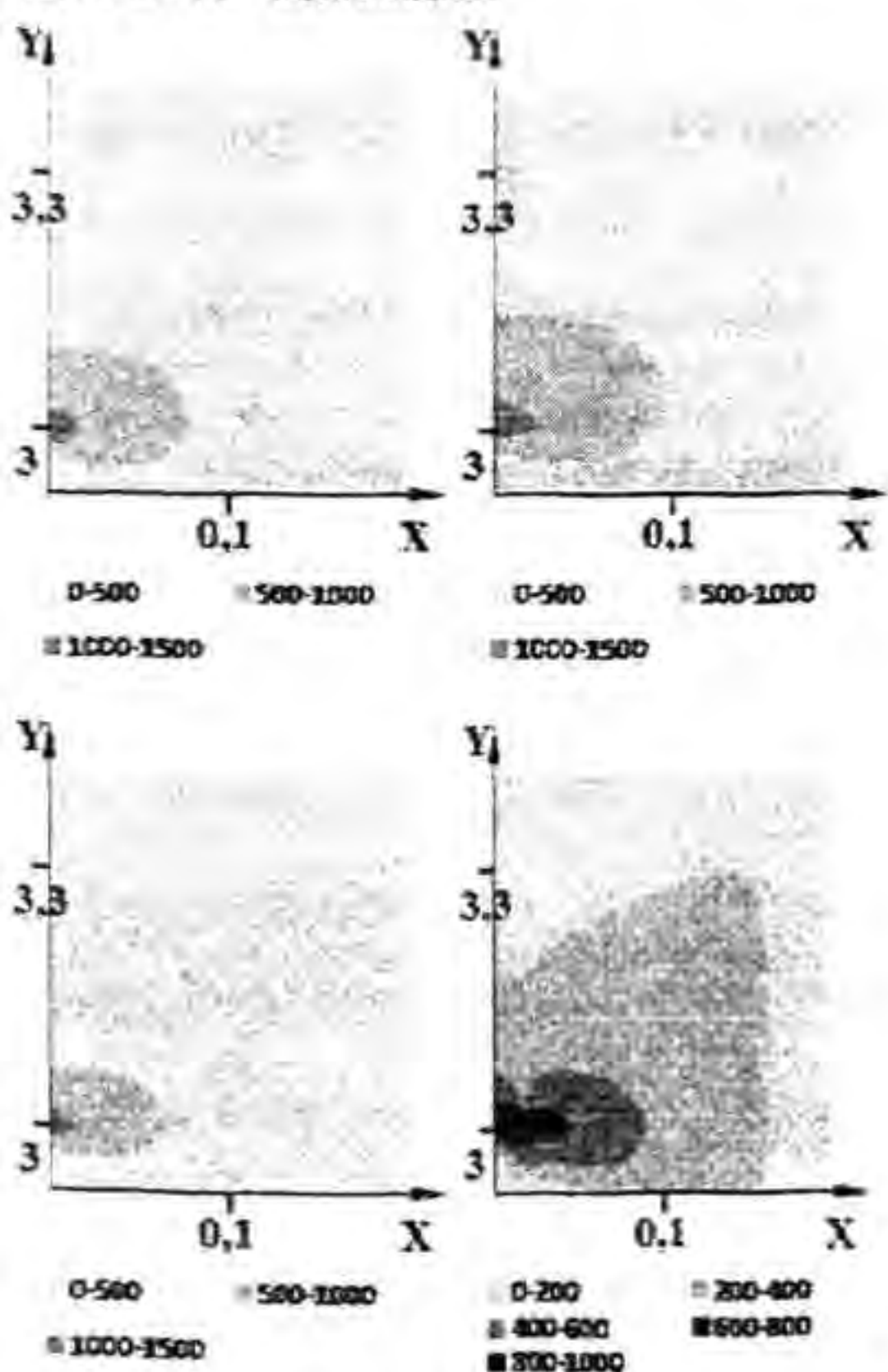


Рис. 6. Напруження σ_1 в площинах $z = 27.3, 48.3, 49.88$ і $49.98 \text{ м} \times 10^{-3}$

На рисунках 5 і 6 зображено головні нормальні σ_1 і тангенціальні τ_1 напруження в площинах $z = 27.3, 48.3, 49.88$ і $49.98 \text{ м} \times 10^{-3}$ відповідно. Зона найбільших пластичних деформацій знаходиться в радіусі приблизно $5 \text{ м} \times 10^{-4}$ навколо вершини тріщини. Найбільші пластичні деформації виникають в області максимальних головних напружень. Значення найбільших головних напружень виникають на

відстані $2-3 \text{ м} \times 10^{-3}$ від бокових поверхонь зразка і зменшуються по напрямку до вільних бокових поверхонь.

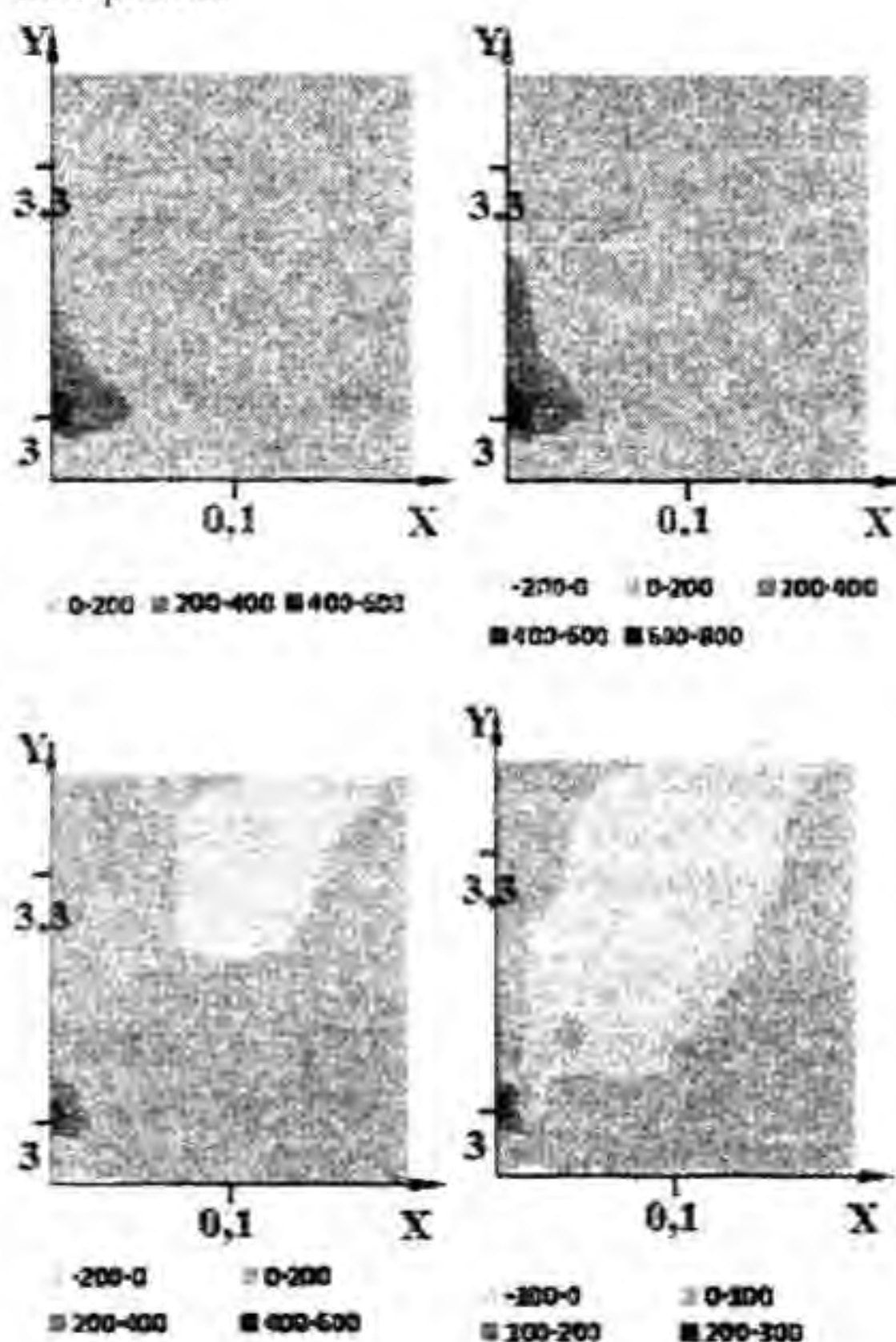


Рис. 7. Напруження τ_1 в площинах $z = 27.3, 48.3, 49.88$ і $49.98 \text{ м} \times 10^{-3}$

На рисунках 8 і 9 зображено залежності середнього напруження і параметру Одквіста від температури в області вершини тріщини відповідно. Ці залежності порівнюються з випадком плоского деформованого стану. Зі збільшенням температури спостерігається зріст пластичних деформацій.

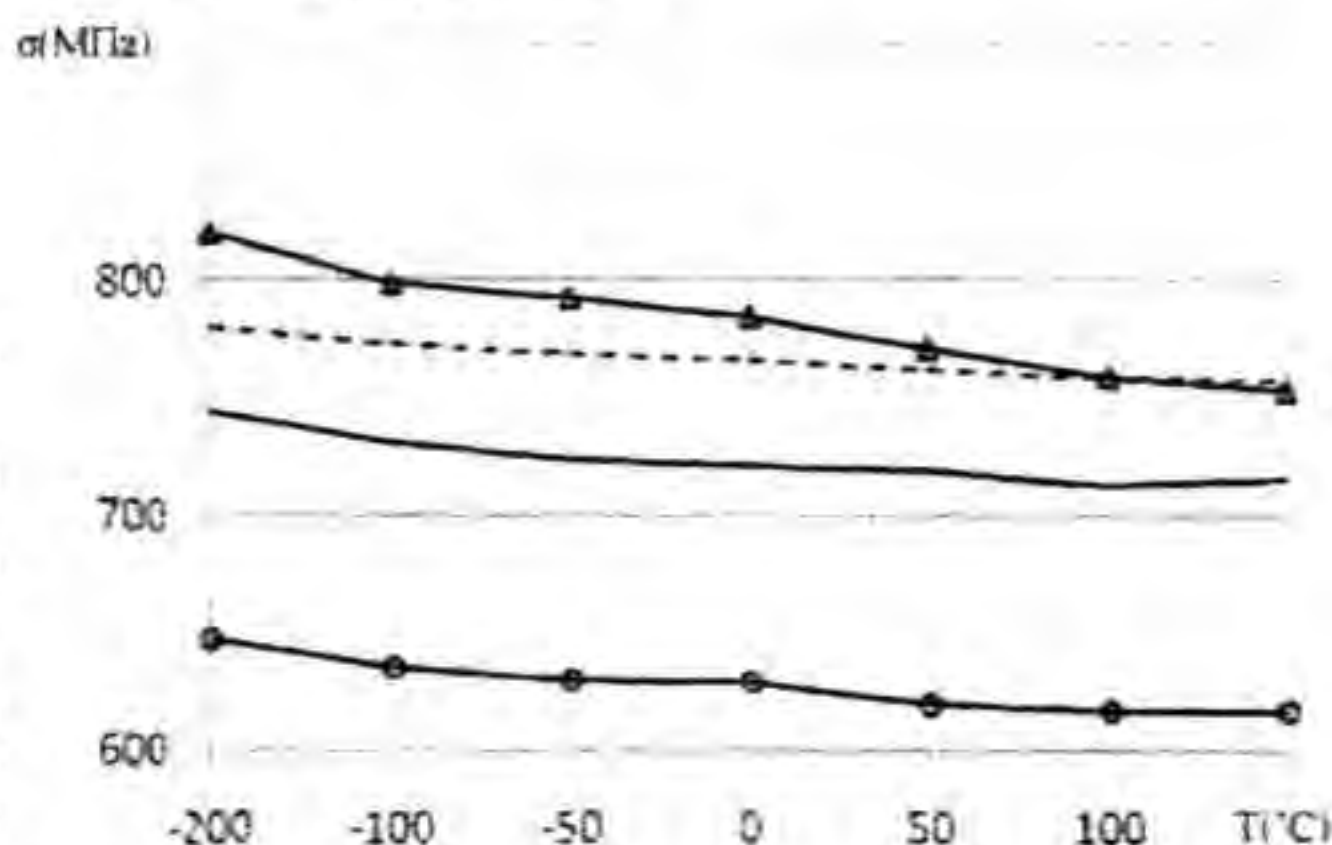


Рис. 8. Середнє напруження σ

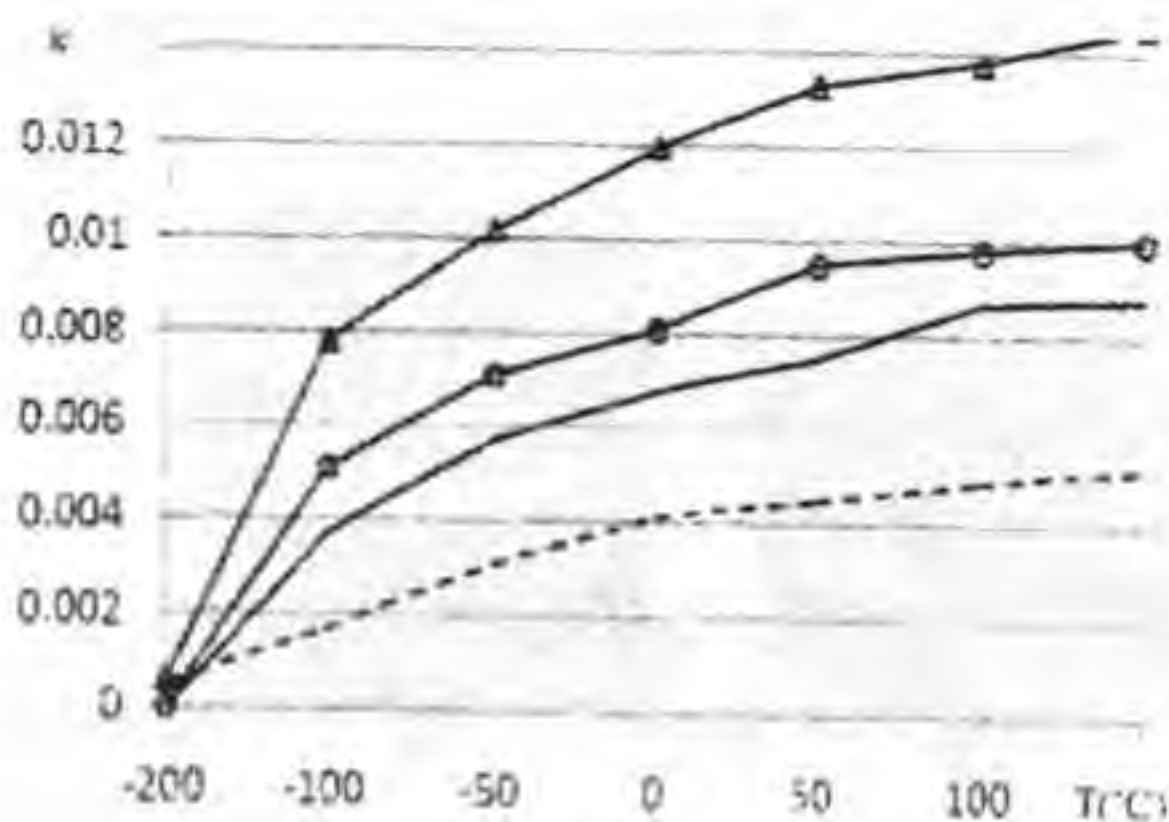


Рис. 9. Параметр Одквіста

Розроблена автором методика дає можливість поліпшити методики запропоновані в [1 3, 5 7, 11].

Розвинуто метод щодо визначення вірогідних тривимірних полів значень пластичних деформацій і напружень з чисельного розв'язку три вимірних задач у пружно-пластичній математичній постановці. Розроблена методика добре моделює процес концентрації пластичних деформацій і напружень на вершині тріщини.

Список використаних джерел

1. Богданов В.Р. Определение вязкости разрушения материала с использованием образцов небольших сечений. // Сучасні проблеми зварювання та ресурсу конструкцій: Тез. докл. междунар. конф. (Київ, 24-27 листопада 2003). – Київ, 2003. – С. 93.
2. Богданов В.Р. Построение распределения Вейбула при использовании образцов небольших сечений для определения вязкости разрушения материала. // Зварювання та суміжні технології:

Тез. докл. II Всеукраїн. наук.-техн. конф. Молодих вчених та спеціалістів. (Київ, 25-27 червня 2003), – Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона, 2003. – С.26.

3. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56.
5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: «Мир», 1964. – 360с.
5. Марголин Б.З., Швецова В.А. Критерий хрупкого разрушения: структурно-механический подход // Пробл. прочности. – 1992. – №2. – С.3 – 16.
5. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: «Наукова думка», 1976. – 320с.
6. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации. // Автоматическая сварка, – 2003. – № 10–11, – С. 112–121.
7. Саврук М.П., Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: «Наукова думка», 1988. – 620с.
8. Хемминг Р.В. Численные методы. – Москва: «Наука», 1972. – 399с.
9. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space. // Int. Appl. Mech. – 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.
10. Margolin B.Z., Shvetsova V.A., Gulenko A.G., Ilyin A.V., Nikolaev V.A., Smirnov V.I. Fracture toughness predictions for a reactor pressure vessel steel in the initial and highly embrittled states with the Master Curve approach and a probabilistic model. // Pressure Vessels and Piping. – 2002. – Jan. – P. 219–231.

Надійшла до редколегії 05.05.2009

УДК 539.595

Ковальчук Б.П., аспірант
Лимарченко О.С., доктор технічних наук,
професор

Імпульсне моментне збудження руху резервуару з рідиною при похилому русі системи

Досліджується рух рідини при кутовому русі циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, на маятниковому підвісі при різних типах моментних збудженнях руху системи. Дослідження виконане на основі варіаційних і асимптотичних методів механіки.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, кутовий рух резервуара.

*E-mail: BogdanKovalchuk@gmail.com
Olelim2000@yahoo.com

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ.

1. Вступ

Розглядається рух резервуару з рідиною з вільною поверхнею для випадку, коли резервуар здійснює не лише поступальні, а й кутові рухи. Складність такої задачі зумовлена тим, що при кутових рухах резервуару доводиться додатково розглядати векторний потенціал швидкостей $\bar{\Omega}$ замість одного скалярного потенціалу φ . При цьому загальний об'єм обчислень зростає приблизно в 4 – 5 разів. Дослідження динаміки рідини при кутових рухах тіла є достатньо складними і відомо лише незначна кількість публікацій в цій галузі в яких розглядалася побудова дискретних моделей системи і поведінка системи лише при усталених рухах [4-8]. Таку задачу найкраще розв'язувати на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [1-3]. Зокрема, при цьому вдається виключити всі компоненти потенціалу швидкостей до чисельної реалізації варіаційної задачі. В результаті отримуємо модель з $N+6$ рівнянь другого порядку відносно амплітудних параметрів руху рідини з вільною поверхнею і параметрів руху резервуару (N – число форм коливань рідини, що розглядаються) [3].

2. Варіаційне формулювання задачі

Розглянемо циліндричний резервуар довільного поперечного перерізу з абсолютно твердими стінками, частково заповнений ідеальною однорідною нестисливою рідиною. Для опису руху обмеженого об'єму рідини введемо наступні по-

Kovalchuk B.P., postgraduate student
Limarchenko O.S., doctor of engineering, professor

Impulse moment disturbance of motion of reservoir with liquid for angular motion of the system

Motion of liquid for angular motion of cylindrical reservoir, partially filled by ideal incompressible liquid, on pendulum suspension for different types of moment disturbance of motion of the system is under consideration. Investigation is done on the basis of variational and asymptotic methods of mechanics.

Key Words: nonlinear dynamics of liquid, liquid free surface, angular motion of reservoir.

значення (Рис. 1): τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня резервуару, L – контур контакту трьох середовищ, H – рівень заповнення рідини, індекс „0” в позначеннях відповідає незбуреному стану рідини.

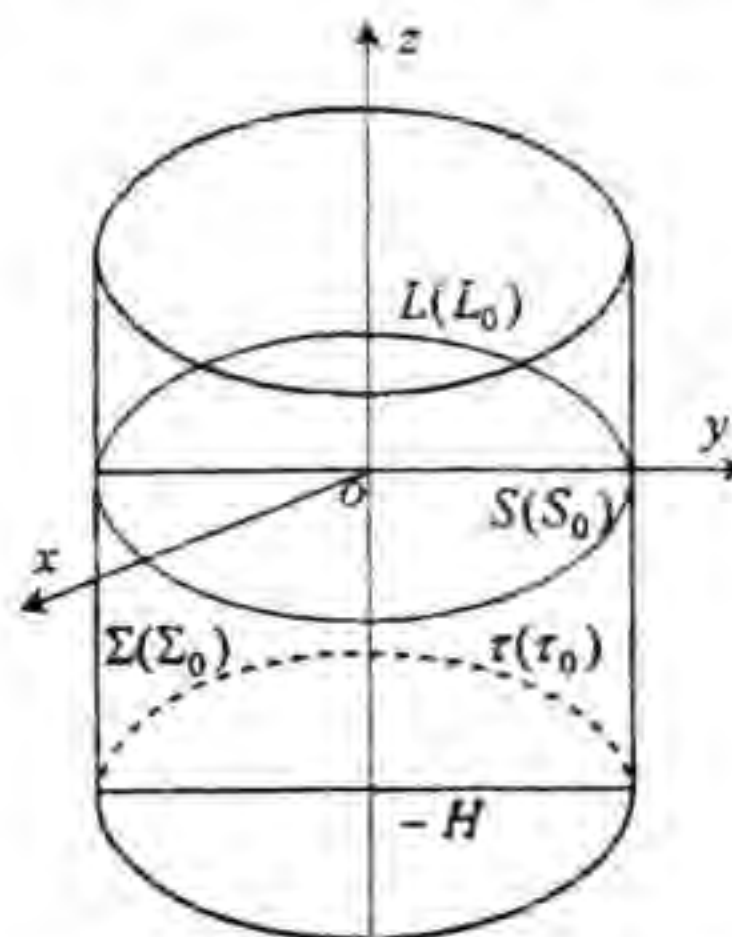


Рис. 1 Основні позначення

Математичне формулювання задачі динаміки системи “резервуар–рідина” з вільною поверхнею представляє собою сукупність кінематичних і динамічних обмежень. Кінематичні умови повинні розглядатися як механічні в'язі, які накладають обмеження на варіації невідомих при опису механічної системи на основі принципу Гамільтона–Остроградського. При цьому динамічні граничні умови впливають з варіаційного принци-

пу Гамільтона–Остроградського як природні.

До кінематичних умов відносяться:

– рівняння нерозривності потоку рідини в τ :

$$\Delta\varphi = 0, \Delta\bar{\Omega} = 0 \text{ в } \tau, \quad (1)$$

– умова неперетікання на границі контакту тіло–рідина:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{n} \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial n} = \bar{r} \times \bar{n} \text{ на } S + \Sigma, \quad (2)$$

– умова неперетікання на вільній поверхні рідини:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial t} + \bar{\nabla}\xi \cdot [\bar{\nabla}\varphi_0 + \bar{\nabla}(\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}) - \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times \bar{r}] = \\ = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \bar{\omega} \cdot \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial z} - \bar{\varepsilon}_z - (\bar{\omega} \times \bar{r})_z \text{ на } S_\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Динамічна гранична умова і рівняння руху резервуару можуть бути отримані на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з функцією Лагранжа у вигляді:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \rho \int_V [\bar{\nabla}\varphi + \bar{\nabla}(\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\bar{\varepsilon}})^2 + \\ + \frac{1}{2} I_{res}^0 \omega_i \omega_i - (M_r + M_l) g \varepsilon_z + \rho g (\cos \alpha_1 \cdot \\ \cdot \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cdot \cos \theta (\xi + H) dS - \\ - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \cdot \\ \cdot \int_{S_0} r \cdot \sin \theta (\xi + H) dS - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - \\ - (M_l h_r + M_r h_r) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\ - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\bar{\nabla}\xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{l_0} \xi dl + \bar{F} \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{M} \cdot \bar{\chi}, \end{aligned} \quad (4)$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, M_r, M_l – маси резервуару і рідини, h_r, h_l – зсуви центрів мас резервуару і рідини, σ – поверхневий натяг, θ_1 – контактний кут, I_{res}^0 – тензор інерції резервуару, $\bar{F}, \bar{M}$ – головний вектор і головний моменти зовнішніх сил.

3. Побудова розкладів шуканих змінних, які задовільняють всім кінематичним в'язям

Для ефективного використання принципу Гамільтона–Остроградського побудуємо розклади незалежних змінних задачі про рух резервуара з рідиною з вільною поверхнею, які задовільняють кінематичним граничним умовам задачі

(1)–(3). Відповідно до [2] приймемо наступну форму розкладу змінних:

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(x, y), \quad (5)$$

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(x, y) \frac{ch \chi_n(z + H)}{\chi_n sh \chi_n H}, \quad (6)$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + \sum_n \bar{q}_n(t) \psi_n(x, y) \frac{ch \chi_n(z + H)}{\chi_n sh \chi_n H}, \quad (7)$$

де ψ_n – повна ортогональна система функцій в області S_{ln} , яка отримана як розв'язок крайової задачі Неймана з параметром χ_n :

$$\Delta \psi_n + \chi_n^2 \psi_n = 0 \text{ на } S_0; \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } L_0. \quad (8)$$

Функція $\bar{\Omega}_0$ – являє собою потенціал Стокса – Жуковського, який є розв'язком крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа:

$$\Delta \bar{\Omega}_0 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \bar{\Omega}_0}{\partial n} = \bar{r} \times \bar{n} \text{ на } \Sigma + S_0. \quad (9)$$

Приведене представлення невідомих (5)–(7) в силу вибору функцій ψ_k тотожно задовільняє рівнянню нерозривності (1) і умові неперетікання (2).

4. Виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні

Найбільш складним в побудові незалежних (з точки зору аналітичної механіки) розкладів змінних $\xi, \varphi, \bar{\Omega}_0$ є задовільнення кінематичної граничної умови на вільній поверхні (3).

Проблема виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини є типовою для даного класу задач [1] і може бути вирішена за допомогою методу Гальоркіна з використанням основ нелінійної механіки. Для того, щоб виключити кінематичну граничну умову на вільній поверхні, необхідно вибрати набір базових параметрів системи, через які далі будуть виражатися залежні параметри. Виходячи з теореми про те, що безвихровий рух ідеальної, однорідної, нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, число ступеней вільності всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює числу ступеней вільності руху самої вільної поверхні. Тому за базовий параметр системи приймемо ξ , а φ і $\bar{\Omega}$ вважаємо залежними, що відповідає залежності b_i і $\bar{q}_i$ від a_i . Залежність величин b_i і

$\bar{q}_i$ від a_k шукаємо у формі

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)}, \quad (10)$$

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i^{(1)} + \bar{q}_i^{(2)} + \bar{q}_i^{(3)}, \quad (11)$$

де індекси в круглих дужках відповідають порядку малості величин. Залежності b_i і $\bar{q}_i$ від a_k представляють собою неголономні в'язі і визначаються за допомогою методу Гальоркіна [3].

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nmi}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlk}^w, \quad (12)$$

$$\bar{q}_p = \sum_i a_i \bar{\beta}_{ip}^w + \sum_{i,k} a_i a_k \bar{\gamma}_{ikp}^w + \sum_{i,k} a_i a_k a_l \bar{\delta}_{ikp}^w, \quad (13)$$

Коефіцієнти, які входять у співвідношення (12) і (13), є квадратурами від функцій ψ_i і $\bar{\Omega}_0$, що обчислюються по області S_0 .

Таким чином, на основі використання розкладів шуканих змінних по розв'язкам відповідної лінійної задачі на власні значення і попереднього задовільнення кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини за викладеною методикою побудовані розклади шуканих змінних, які тотожно задовольняють умові нерозривності потоку в області τ (1), кінематичним граничним умовам на твердій границі Σ області τ (2) і з точністю до величин третього порядку малості – кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини (3).

5. Нелінійна модель сумісного руху резервуару з рідиною з вільною поверхнею

Тепер з урахуванням задовільнення кінематичним в'язям функція Лагранжа (4) буде відповідати вільній системі, а система параметрів $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$ – сукупність незалежних змінних, які повністю характеризують поведінку механічної системи тіло – рідина з вільною поверхнею.

Рівняння руху системи в параметрах $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$ можна записати у наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^N p_m \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_m \ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_m \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r, \quad r = \overline{1, N+6}, \quad (14)$$

де p_m і q_r є алгебраїчними формами від нульового до третього порядків від $a_i, \dot{a}_i$, які також можуть залежати від часу t .

Система рівнянь (14) лінійна відносно других похідних невідомих величин, що дає можливість перетворити її до нормальної форми Коші, і виконати інтегрування системи по часу на основі стандартного методу Рунге–Кутта.

Для розв'язання нелінійної задачі сумісного руху резервуару з рідиною аналогічно роботі [2] виберемо $N = 12$ форм коливань рідини.

6. Результати дослідження

Розглянемо приклад чисельного моделювання перехідного процесу. Нехай резервуар (круговий циліндр) з рідиною має нерухому точку і виконує похилі рухи (маятниковий підвіс).

Для дослідження характеру впливу кутового руху резервуару на рух рідини розглядалася дія на резервуар імпульсів тривалістю 1 с, при цьому дія всіх імпульсів приводила до однакової кількості руху $S=6000$ Ns, для порівняння розглядалися різні довжини підвісу ($D=0.5$ м; $D=1.0$ м; $D=1.5$ м).

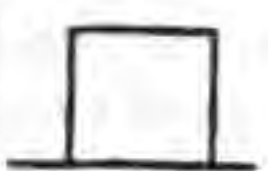
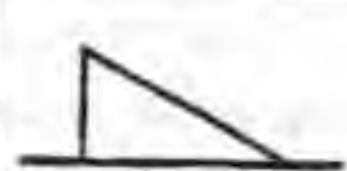
В Таблиці 1 приведені форми імпульсів і результати моделювання дії імпульсів на систему. При цьому ξ_{max} – відхилення вільної поверхні від незбуреного положення, R_{max} , M_{Rmax} – силова і моментна реакції рідини, α_{per} – кут відхилення резервуару від незбуреного положення.

Аналіз результатів свідчить, що найбільші збурення вільної поверхні рідини виникають при дії імпульсу у вигляді рівнобічного трикутника (випадок 4). Для цього випадку побудовано графіки залежностей в часі a_i і α_i , Рис. 2 і 3, відповідно. Графіки свідчать, що коливання на етапі руху по інерції відбуваються з певними порушеннями гармонічного закону, що свідчить про взаємозалежність коливань на вільній поверхні і кутового руху резервуару. Коливальний процес має суттєво нелінійний характер, що зокрема відображається зміною амплітуди a_3 , яка збурюється лише на основі нелінійних механізмів. Ознаки модуляції в зміні a_3 вказує на взаємозалежність коливань за різними формами.

Моделювання показує, що рівнобічний трикутник відповідає максимальному, а прямокутник – мініимальному розвиненню нелінійних механізмів. Силовий відгук рідини є максимальним для трикутного імпульсу з вертикальним заднім фронтом і мінімальним для трикутного імпульсу з вертикальним переднім фронтом. Максимум моментного відгуку спостерігається для рівнобічного трикутника, а мінімум для прямокутного імпульсу. Тому серед всіх імпульсів, що вносять в систему однакову кількість руху, випадок дії прямокутного імпульсу є найбільш сприятливим з точки зору найменшого збурення руху рідини.

Таблиця результатів дії імпульсів на резервуар

Таблиця 1

Імпульс															
№	1			2			3			4			5		
D	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5
$a_{1\max}$	0.042	0.083	0.125	0.057	0.115	0.172	0.053	0.106	0.160	0.061	0.122	0.183	0.056	0.111	0.167
$t(a_{1\max})$	0.70	0.70	0.70	0.60	0.60	0.60	1.05	1.05	1.05	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85
$a_{1\min}$	0.007	0.027	0.057	0.010	0.038	0.079	0.010	0.039	0.082	0.012	0.044	0.091	0.010	0.040	0.083
$t(a_{1\min})$	3.15	3.15	3.15	2.95	2.95	3.00	3.35	3.35	3.35	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15
$a_{\text{osc}1\max}$	0.049	0.096	0.144	0.053	0.106	0.157	0.054	0.107	0.159	0.056	0.110	0.163	0.054	0.107	0.159
$\xi_{\text{osc}1}$	0.044	0.091	0.167	0.060	0.136	0.241	0.058	0.136	0.256	0.065	0.151	0.287	0.059	0.137	0.257
$t(\xi_{\text{osc}1})$	0.70	7.00	5.70	0.55	6.85	3.45	1.00	3.25	3.80	0.80	7.05	3.65	0.80	7.05	3.65
$R_{\text{osc}1}$	0.325	0.651	0.976	0.312	0.622	0.931	0.495	0.989	1.480	0.390	0.779	1.169	0.351	0.702	1.050
$t(R_{\text{osc}1})$	1.00	1.00	1.00	0.50	0.50	0.50	1.00	1.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.70	0.70	0.70
$M_{\text{osc}1\max}$	0.303	0.595	0.878	0.345	0.674	0.984	0.352	0.683	1.020	0.365	0.713	1.046	0.352	0.688	1.010
$t(M_{\text{osc}1\max})$	6.40	6.40	1.10	6.20	6.20	6.25	3.90	6.60	1.20	6.40	6.40	1.00	6.40	6.40	1.05

В цілому результати, одержані на основі розробленої моделі, узгоджуються з явищами, що реально спостерігаються і свідчать про достовірне відображення моделлю динамічних властивостей системи при кутових рухах резервуару при перехідних процесах.

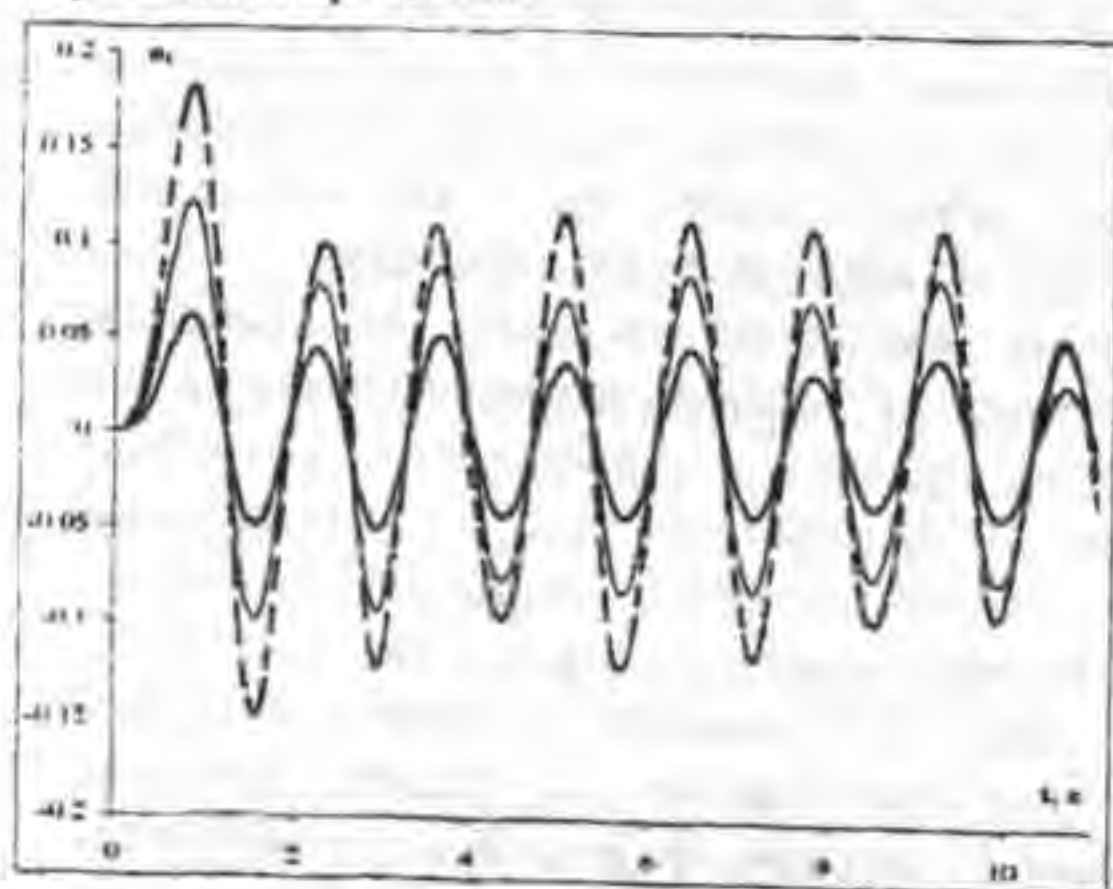


Рис. 2 Амплітуда a_1 при дії імпульсу 4 при різних довжинах підвісу.

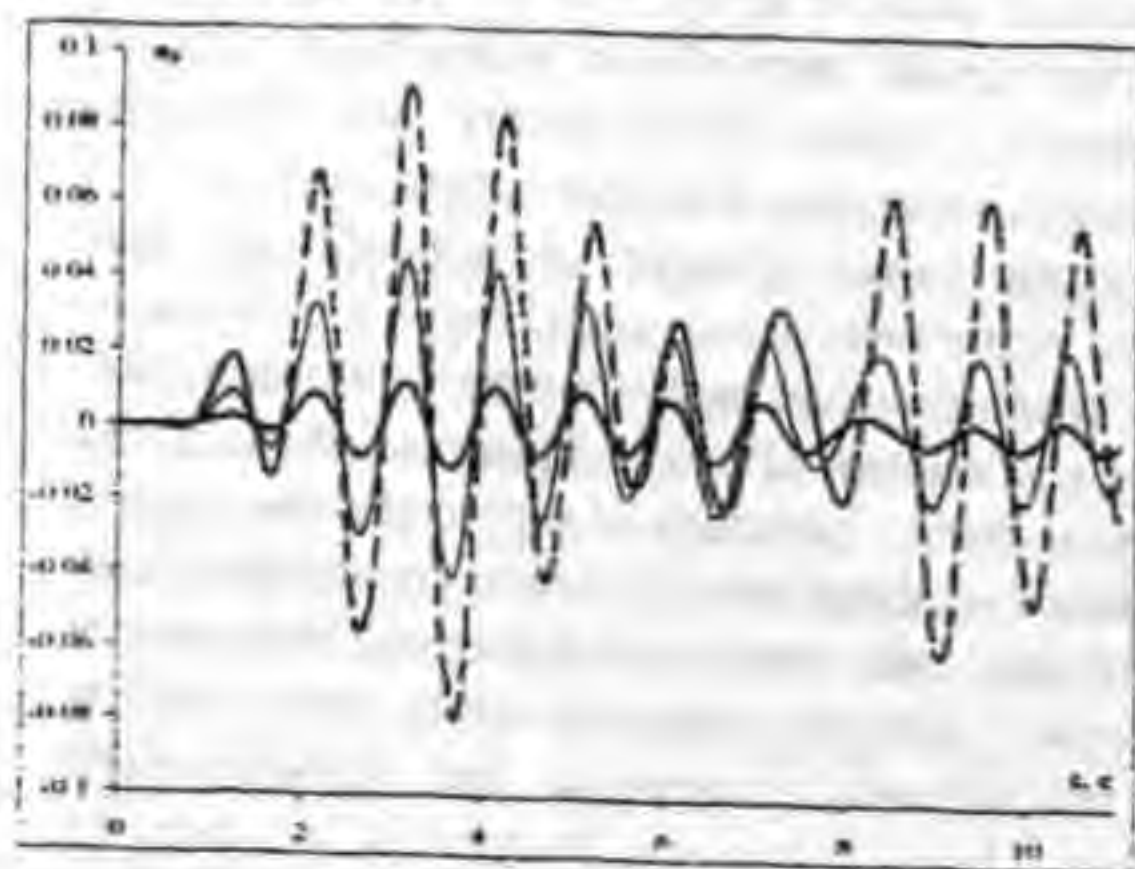


Рис. 3 Амплітуда a_2 при дії імпульсу 4 при різних довжинах підвісу.

Список використаних джерел

1. Г.С. Нариманов, Л.В. Докучаев, И.А. Луковский Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
2. О.С. Лимарченко, Дж. Матарацио, В.В. Ясинский Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. – Киев: "Гнозис", 2002. – 304с.
3. О.С. Лимарченко, В.В. Ясинский Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ "КПИ", 1997. – 348с.
4. И.А. Луковский Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев, Наук. Думка. 1990. – 295 с.
5. Л.Г. Бояришина, П.С. Ковальчук Анализ нелинейных волновых движений жидкости в цилиндрическом сосуде, совершающие заданные угловые колебания // Прикл. механика – 1990. – 26. – №6. – С.95 – 101.
6. Ibrahim, Raouf A. Liquid Sloshing Dynamics, pp. 970. ISBN 0521838851. Cambridge, UK: Cambridge University Press, June 2005.
7. Miles J. Nonlinear surface waves in closed basins // Journ. Fluid Mech. – 1976. – 75. – №3. – P. 419 – 488.
8. La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M. – A. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container, // Fluid Dynamics Research, 2000, N27, P. 23–52.

Надійшла до редколегії 30.05.09

УДК 517.9

Андрій П. Крєневич, к.ф.-м.н., асистент,

**Дослідження асимптотичної еквівалентності
сингулярних диференціальних рівнянь з
нелінійною правою частиною**

У даній роботі розглядаються сингулярні диференціальні рівняння з нелінійною правою частиною. Встановлено умови асимптотичної еквівалентності даних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: сингулярне диференціальне рівняння з нелінійною правою частиною, нелінійне сингулярне диференціальне рівняння, асимптотична еквівалентність.

*E-mail: akrenevych@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

Вступ

Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найбільш важливих розділів даної теорії є стійкість. Цій проблематиці присвячено безліч робіт, серед яких [1]. Дана робота присвячена дослідженню якісної поведінки нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь. Проте, для її дослідження використано дещо інший підхід, а саме, відшукування системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої є подібною до поведінки розв'язків вихідної сингулярної системи. Таким чином дослідження вихідної системи зводиться до дослідження значно простішої системи. Такі системи будуть називатися асимптотично еквівалентними. Слід зауважити, що даний підхід, взагалі кажучи, не є новим. У [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботах автора [2-5] дане питання досліджено для стохастичних диференціальних систем, а у роботі [6] дане питання досліджувалось для сингулярних диференціальних рівнянь з лінійною правою частиною.

У даній роботі узагальнено результати висвітлені в [6] на випадок сингулярних диференціальних рівнянь з нелінійною правою

A.P. Krenevych, Cand. Sci.(Phys.- Math.),
Assistant Professor,

**Research of asymptotic equivalence of nonlinear
singular differential equations**

In this paper nonlinear singular differential equations are considered. Sufficient conditions of asymptotic equivalence of these equations to simple differential equations were received

Key Words: nonlinear singular differential equations, asymptotic equivalence.

частиною, а саме отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності для вищезгаданого класу рівнянь.

1. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$dx(t) = Ax(t)dt, \quad (1)$$

де $x \in R^d$, $t \geq t_0$, A – стала матриця.

Поруч із рівнянням (1) розглядається сингулярне диференціальне рівняння вигляду

$$d(y(t) - g(t, y(t))) = (Ay(t) + f(t, y(t)))dt, \quad (2)$$

де $y \in R^d$, $t \geq t_0$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ – неперервні за сукупністю змінних функції, такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K_g, K_f , що для довільних $x, y \in R^d$ виконуються нерівності

$$\|g(t, y) - g(t, x)\| \leq L_g \|y - x\|, \quad (3)$$

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L_f \|y - x\|, \quad (4)$$

$$\|g(t, y)\| \leq K_g (1 + \|y\|), \quad (5)$$

$$\|f(t, y)\| \leq K_f (1 + \|y\|). \quad (6)$$

Якщо припустити виконання нерівності $L_g < 1$, то для довільної початкової умови

$$x(t_0) = x_0 \quad (7)$$

і для довільного $T \geq t_0$ існує єдиний неперервний на $[t_0, T]$ розв'язок рівняння (2) [6]. Цей розв'язок можна нескінченно продовжити вправо.

Припустимо, що крім вищенаведених умов, на функції f, g , додатково виконуються оцінки

$$\|g(t, x)\| \leq q(t)(1 + \|x\|), \quad (8)$$

$$\|f(t, x)\| \leq h(t)(1 + \|x\|), \quad (9)$$

де $q(t), h(t)$ – додатні, обмежені на півосі $t \geq t_0$ функції.

Означення. Будемо казати, що рівняння (2) асимптотично еквівалентне рівнянню (1), якщо кожному розв'язку рівняння (2) можна поставити у відповідність розв'язок рівняння (1) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0.$$

У даній роботі досліджується питання асимптотичної еквівалентності сингулярних рівнянь вигляду (2) до рівнянь вигляду (1).

2 Асимптотична еквівалентність

Наступна теорема є узагальненням відомої теореми Левінсона [1] для сингулярних диференціальних рівнянь.

Теорема. Нехай розв'язки рівняння (1) обмежені на півосі $t \geq t_0$ і нехай виконується умова

$$\int_{t_0}^{\infty} (q(t) + h(t)) dt < \infty, \quad (10)$$

причому $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тоді рівняння (2) асимптотично еквівалентне рівнянню (1).

Доведення. Так як розв'язки рівняння (1) обмежені, то характерні корені $\lambda(A)$ матриці A задовольняють нерівність $\operatorname{Re}(\lambda(A)) \leq 0$. Тому без обмеження загальності можемо вважати, що матриця A має квазидіагональний вид

$$A = \operatorname{diag}(A_1; A_2),$$

де A_1 і A_2 такі, що

$$\operatorname{Re} \lambda(A_1) < -\alpha < 0; \operatorname{Re} \lambda(A_2) = 0. \quad (11)$$

Тому матрицант системи розкладається у пряму суму [1]

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

причому

$$\|X_1(t)\| = \|e^{A_1 t}\| \leq e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$\|X_2(t)\| = \|e^{A_2 t}\| \leq b, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (13)$$

де α і b – деякі додатні сталі.

Із вищенаведеного випливає існування додатної сталої K_X такої, що для всіх $t \geq 0$, виконується нерівність

$$\|X(t)\| \leq K_X.$$

Запишемо розв'язок рівняння (2) з початковою умовою $y(t_0) = y_0$ в інтегральній формі через матрицант системи (1) [6].

$$\begin{aligned} y(t) = & X(t - t_0)(y_0 - g(t_0, y_0)) + \\ & + g(t, y(t)) + \\ & + \int_{t_0}^t X(t - \tau) A g(\tau, y(\tau)) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t X(t - \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Покажемо обмеженість $y(t)$.

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \|X(t - t_0)(y_0 - g(t_0, y_0))\| + \\ & + \|g(t, y(t))\| + \int_{t_0}^t \|X(t - \tau) A g(\tau, y(\tau))\| d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \|X(t - \tau) f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq \\ & \leq K_X (y_0 - g(t_0, y_0))\| + \\ & + q(t) \cdot (1 + \|y(t)\|) + \\ & + \|A\| K_X \int_{t_0}^t q(\tau) (1 + \|y(\tau)\|) d\tau + \\ & + K_X \int_{t_0}^t h(\tau) (1 + \|y(\tau)\|) d\tau. \end{aligned}$$

Виберемо $s \geq t_0$ настільки великим, щоб $\sup_{t \geq s} q(t) \leq K_q < 1$. Тоді для всіх $t \geq s$ остання нерівність набуває вигляду

$$(1 - K_q)(1 + \|y(t)\|) \leq 1 + K_x(y_0 - g(t_0, y_0))\| + \\ + \|A\| K_x \int_{t_0}^t q(\tau)(1 + \|y(\tau)\|) d\tau + \\ + K_x \int_{t_0}^t h(\tau)(1 + \|y(\tau)\|) d\tau.$$

Враховуючи неперервність розв'язку $y(t)$, оцінки (12), (13), умови теореми та умови на функцію g і застосувавши лему Гронуолла-Беллмана [1, ст.108] переконуємося в існуванні сталої $C(y_0, t_0) > 0$, такої, що

$$\|y(t)\| \leq C(t_0, y_0), \quad t \geq t_0. \quad (15)$$

Використовуючи еволюційну властивість матрицанта перепишемо рівняння (14) у вигляді

$$y(t) = g(t, y(t)) + X(t - t_0)[y_0 - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t X_2(t_0 - \tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \\ + \int_{t_0}^t X_2(t_0 - \tau)f(\tau, y(\tau))d\tau] + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau)f(\tau, y(\tau))d\tau - \\ - \int_{t_0}^t X_2(t - \tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau - \\ - \int_{t_0}^t X_2(t - \tau)f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

З умов теореми та оцінки (15) випливає збіжність усіх невластних інтегралів, що входять до останньої рівності

Кожному розв'язку $y(t)$ з початковою умовою $y(t_0) = y_0$ поставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ з початковою умовою

$$x(t_0) = y_0 - g(t_0, y_0) + \\ + \int_{t_0}^t X_2(t_0 - \tau)Ag(\tau, y(\tau))d\tau + \\ + \int_{t_0}^t X_2(t_0 - \tau)f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Оцінимо норму різниці між відповідними розв'язками:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|g(t, y(t))\| + \\ + \int_{t_0}^t \|X_1(t - \tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_1(t - \tau)\| \cdot \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_2(t - \tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \|X_2(t - \tau)\| \cdot \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau. \quad (16)$$

Оцінимо окремо кожен доданок нерівності (16).

$$\|g(t, y(t))\| \leq q(t)(1 + \|y(t)\|) \leq \\ \leq q(t)(1 + C(t_0, y_0)).$$

Очевидно, що права частина останньої нерівності прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Оцінимо другий доданок правої частини нерівності (16).

$$\int_{t_0}^t \|X_1(t - \tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq \\ \leq \|A\| \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot q(\tau)(1 + \|y(\tau)\|) d\tau \leq \\ \leq \|A\| (1 + C(t_0, y_0)) \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot q(\tau) d\tau = \\ = \|A\| (1 + C(t_0, y_0)) \times$$

$$\times \left(\int_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot q(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot q(\tau) d\tau \right) \leq$$

$$\leq \|A\| (1 + C(t_0, y_0)) \left(e^{-\alpha/2} \int_{t_0}^{t/2} q(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t q(\tau) d\tau \right) \leq$$

$$\leq \|A\| (1 + C(t_0, y_0)) \left(e^{-\alpha/2} \int_{t_0}^{\infty} q(\tau) d\tau + \int_{t/2}^{\infty} q(\tau) d\tau \right).$$

В силу умови (10) отримаємо прямування до нуля правої частини останньої нерівності.

Аналогічно попередній оцінці, проведемо оцінку для третього доданку нерівності (16).

$$\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| \cdot \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot h(\tau) (1 + \|y(\tau)\|) d\tau \leq$$

$$\leq (1 + C(t_0, y_0)) \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot h(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq (1 + C(t_0, y_0)) \left(e^{-\alpha/2} \int_{t_0}^{\infty} h(\tau) d\tau + \int_{t/2}^{\infty} h(\tau) d\tau \right).$$

Враховуючи умови теореми, є очевидним прямування до нуля правої частини вищенаведеної нерівності.

Оцінимо четвертий і п'ятий доданки нерівності (16).

$$\int_{t_0}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\| \cdot \|A\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq$$

$$\leq \|A\| b \int_{t_0}^{\infty} q(\tau) (1 + \|y(\tau)\|) d\tau \leq$$

$$\leq \|A\| b (1 + C(t_0, y_0)) \int_{t_0}^{\infty} q(\tau) d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\| \cdot \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq$$

$$\leq b \int_{t_0}^{\infty} h(\tau) (1 + \|y(\tau)\|) d\tau \leq$$

$$\leq b (1 + C(t_0, y_0)) \int_{t_0}^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

Отже ми отримали

$$\|x(t) - y(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Теорему доведено.

Висновки

У роботі розглянуто клас нелінійних диференціальних рівнянь сингулярного типу та узагальнено результати викладені у праці [6]. Тут отримано умови асимптотичної еквівалентності даного класу рівнянь звичайним диференціальним рівнянням. Дані результати стануть у нагоді при дослідженні стійкості нелінійних та слабо нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь, а також при дослідженні інших якісних властивостей розв'язків. У подальшому є перспектива, узагальнення даних результатів на більш широкий клас просторів та рівнянь, наприклад, дослідити умови асимптотичної еквівалентності для сингулярних диференціальних рівнянь у гільбертових просторах.

Список використаних джерел

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. – 472 с.
2. Крєневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // УМЖ.—2006.—58, №10.—С.1368—1384.
3. Крєневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто // Нелінійні коливання. Інститут математики НАН України.—2006.—9, №2.—С.213—220.
4. Крєневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків квазілінійних стохастичних систем Іто // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки –2006 Вип. 1 –ст.69-76.
5. Krenevych A. Asymptotic Equivalence Of the solutions of The Linear Stochastic Ito Equations in the Hilbert space // Theory of Stochastic Processes.—2007.—13(29), №1-2.—P.103—109.
6. Крєневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки –2009 Вип. 1 –ст.69-76.

УДК 539.3:620.192

Олексій Г. Куценко*, к. ф.-м. н., доцент,
Олексій М. Харитонов*, к. ф.-м. н., доцент,
Григорій М. Зражевський*, к. ф.-м. н., доцент

Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності, що відповідає термоудару двошарового циліндру

Запропоновано аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності, що відповідає термоудару двошарового циліндру. Нестационарна задача теплопровідності розв'язується за допомогою перетворення Лапласа. Колові та поздовжні напруження знаходяться за аналітичними виразами, отриманими шляхом розв'язання квазістатичної пружної задачі.

Ключові слова: нестационарна термопружність, двошаровий циліндр, термоудар, граничні p - T криві

O.G. Kutsenko, C.Sci. (Ph.-M.), Associate Prof.,
O.M. Kharytonov, C.Sci. (Ph.-M.), Associate Prof.,
G.M. Zrazhevsky, C.Sci. (Ph.-M.), Associate Prof.

Analytical solution of the non-stationary thermoelasticity problem which corresponds to a thermal shock of a two-layered cylinder

The analytical solution of the non-stationary thermoelasticity problem which corresponds to the thermal shock of the two-layered cylinder is proposed. The non-stationary problem of the heat conduction is solving by Laplace transform method. The circumferential and longitudinal thermostresses are computed according to analytical expressions obtained from solution of a quasistatic elastic problem.

Key Words: non-stationary thermoelasticity, two-layered cylinder, thermal shock, p - T limits curves

*E-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua, kharytonov@univ.kiev.ua, zgrig@univ.kiev.ua

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ

1. Вступ

Розвиток техніки на сучасному етапі ставить підвищені вимоги до методів та засобів діагностики та прогнозування її надійності, що пов'язано з масштабами наслідків можливих техногенних катастроф. Очевидно, що в цьому відношенні особливе місце займає обладнання атомної енергетики. Сучасні засоби неруйнівного контролю дозволяють відслідковувати розміри можливих дефектів в конструктивних частинах ядерного реактора. Проте знання розмірів дефектів саме по собі не гарантує безпечної експлуатації. Для того щоб визначити, чи є дефект небезпечним або експлуатація з ним можлива певний період часу (та визначити цей період), необхідно виконати велику кількість розрахунків на міцність за наперед заданими аварійними сценаріями. В сучасних дослідженнях вказані розрахунки проводяться на основі добре апробованих кодів методу скінчених елементів. Очевидно, що такий підхід гарантує якість виконаних робіт, проте самі роботи є значно затратними у відношенні об'єму обчислень. Для зменшення об'єму обчислень за допомогою спрощених, наближених

співвідношень оцінюється, які сценарії є більш небезпечними, а які – менш. Точні розрахунки проводяться для найбільш небезпечних сценаріїв.

Ідея даної роботи полягає в розробці аналітичного алгоритму визначення напружено-деформованого стану корпусу реактора в процесі протікання аварійного сценарію з умовною назвою „тепловий удар”.

Через явище радіаційного окрихчування найнебезпечнішою частиною корпусу реактора є його частина напроти активної зони, де він являє собою круглий циліндр. Оскільки з внутрішньої сторони корпус реактора вкрито антикорозійною наплавкою з фізичними властивостями, відмінними від фізичних властивостей основного металу, то КР напроти активної зони може моделюватися двошаровим пружним циліндром.

Аварійний сценарій „теплого удару” передбачає, що в реактор, який знаходиться в стані рівномірного нагріву при робочій температурі (біля 270 - 290°C) швидко заливається холодна вода (біля 20°C).

Таким чином, процес теплового удару КР може бути досліджений на основі розв'язку задачі термопружності, що полягає у визначенні

напружено-деформівного стану двошарового циліндру, у якого в початковий момент на внутрішній стінці миттєво змінюється температура зовнішнього середовища. Вказана задача в свою чергу розпадається на дві: задачу нестационарної теплопровідності для двошарового циліндру та квазістатичну задачу про визначення температурних напружень за відомим розподілом температури в кожний момент часу.

2. Нестационарна задача теплопровідності

Будемо розглядати випадок, коли на всій внутрішній поверхні циліндру температура зовнішнього середовища змінюється однаково, тобто осесиметричну задачу. Такий варіант аварійного сценарію є цілком реальним (так зване, повне заходження), а також, є дані [4], що вказують на його більшу критичність у порівнянні зі сценаріями часткового (секторіального) заходження. Крім того, оскільки радіус корпусу реактора на порядок більший за товщину його стінки, у випадку осесиметричної задачі теплопровідності замість двошарового циліндру можемо розглядати процес поширення тепла в кусково однорідному стержні з ізолюваною бічною поверхнею, що складається з двох однорідних частин (див. рис. 1). На лівому кінці стержня, що відповідає внутрішній поверхні циліндру, відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. Зовнішня поверхня циліндру (правий кінець стержня) вважається теплоізолюваною.

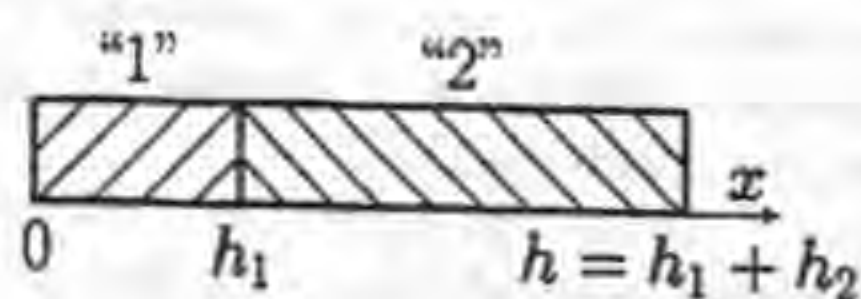


Рис. 1 Геометрія задачі теплопровідності

Таким чином, прийшли до наступної нестационарної задачі теплопровідності: потрібно визначити в будь-який момент часу $t > 0$ температуру в стержні, що складається з двох однорідних частин „1” та „2”, якщо при $t < 0$ температура в кожній точці стержня була рівна нульовій, а в початковий момент часу $t = 0$ на лівому кінці стрибкоподібно змінилася до значення T_0 . Бічна поверхня та правий кінець стержня вважаються ізолюваними.

Якщо позначити через $T_1(x, t)$ та $T_2(x, t)$ розподіли температури на частинах стержня „1”

та „2”, а через h_1 та h_2 - їх довжини, то сформульована задача може бути представлена у наступному вигляді: необхідно знайти дві функції $T_1(x, t)$ при $t > 0$, $0 < x < h_1$ та $T_2(x, t)$ при $t > 0$, $h_1 < x < h_2$, які задовольняють рівнянням

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = a_k^2 \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

початковим

$$T_k|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2)$$

та граничним умовам

$$\left(T_1 - \frac{\lambda_1}{H} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

$$T_1|_{x=h_1} = T_2|_{x=h_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=h_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=h_1}.$$

В (1)-(3) введені наступні позначення: $h = h_1 + h_2$, $a_k^2 = \lambda_k / (\rho_k c_k)$, λ_k - коефіцієнти внутрішньої теплопровідності, ρ_k - густини, c_k - теплоємності матеріалів частин стержня, H - коефіцієнт тепловіддачі. Останні дві умови в (3) є умовами зшивки і позначають неперервність розподілів температури та теплового потоку при переході від однієї частини стержня до іншої.

Розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати за допомогою перетворення Лапласа [1]

$$\tilde{T}_k(x, s) = \int_0^\infty T_k(x, t) e^{-st} dt.$$

При цьому відносно зображень $\tilde{T}_k(x, s)$ одержуємо наступну граничну задачу

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_k}{\partial x^2} - \frac{s}{a_k^2} \tilde{T}_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\left(\tilde{T}_1 - \frac{\lambda_1}{H} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{T_0}{s}, \quad \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0,$$

$$\tilde{T}_1|_{x=h_1} = \tilde{T}_2|_{x=h_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial x} \Big|_{x=h_1} = \lambda_2 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial x} \Big|_{x=h_1}.$$

Провівши нескладні, але громіздкі перетворення розв'язок зазначеної задачі можна записати у вигляді

$$\tilde{T}_k(x, s) = \frac{T_0}{s} \frac{\tilde{\Delta}_k(s, x)}{\tilde{\Delta}_0(s)}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_0(s) &= \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \beta \xi + \alpha \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} \beta \xi + \\ &+ \gamma \xi [\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \beta \xi + \alpha \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \beta \xi], \\ \tilde{\Delta}_1(s, x) &= \operatorname{ch} \beta \xi \operatorname{ch} (1 - x/h_1) \xi + \\ &+ \alpha \operatorname{sh} \beta \xi \operatorname{sh} (1 - x/h_1) \xi, \\ \tilde{\Delta}_2(s, x) &= \operatorname{ch} (1 - (x - h_1)/h_2) \beta \xi, \quad \xi = \frac{h_1}{a_1} \sqrt{s}, \\ \alpha &= \frac{a_1 \lambda_2}{a_2 \lambda_1}, \quad \beta = \frac{h_2 a_1}{h_1 a_2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{h_1 H}.\end{aligned}$$

Для знаходження розподілів температури необхідно виконати обернене перетворення Лапласа

$$T_k(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{T}_k(x, s) e^{st} ds, \quad a > 0. \quad (5)$$

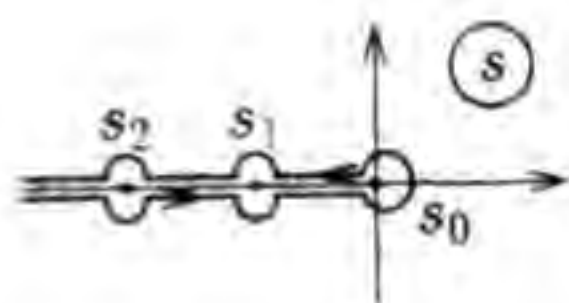


Рис. 2 Контур в оберненому перетворенні Лапласа

Зазначимо, що функція $\sqrt{s}$ є двозначною, однозначні вітки якої можна виділити в площині з розрізом, що сполучає нескінченно віддалену точку з початком координат. Проте самі зображення $\tilde{T}_k(x, s)$ є функціями однозначними. Дійсно, якщо провести вказаний розріз вздовж від'ємної частини дійсної вісі, то вітки функції $\sqrt{s}$ приймуть на його берегах чисто уявні, протилежні за знаком значення. Але оскільки функція ch , яка в цьому випадку перейде в функцію $\cos$, є парною, то самі зображення (4) залишаться однозначними. Таким чином, всі особливі точки (4) – це полюса, що розташовані на від'ємній частині дійсної вісі, починаючи з полюса $s_0 = 0$. Тому на основі другої теореми розкладу оригінали знаходяться як суми лишків від підінтегральних виразів (5).

Враховуючи, що на від'ємній частині вісі $\sqrt{s}$ приймає чисто уявні значення та вводячи позначення $\mu = i\xi = i \frac{h_1}{a_1} \sqrt{s}$, рівняння для

знаходження нулів знаменника $s_n = -\left(\frac{a_1}{h_1} \mu_n\right)^2$

можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned}\cos \mu_n \cos \beta \mu_n - \alpha \sin \mu_n \sin \beta \mu_n - \\ - \gamma \mu_n (\sin \mu_n \cos \beta \mu_n + \alpha \cos \mu_n \sin \beta \mu_n) = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язавши (6) та знайшовши лишки підінтегральних виразів в (5), остаточно розв'язок поставленої задачі теплопровідності можемо записати у вигляді

$$T_k(x, t) = T_0 \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_k(\mu_n, x)}{\mu_n \Delta_0(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a_1 \mu_n}{h_1}\right)^2 t} \right], \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}\Delta_0(\mu_n) &= \delta_1 \sin \mu_n \cos \beta \mu_n + \delta_2 \cos \mu_n \sin \beta \mu_n + \\ &+ \delta_3 \cos \mu_n \cos \beta \mu_n + \delta_4 \sin \mu_n \sin \beta \mu_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(\mu_n, x) &= \cos \beta \mu_n \cos (1 - x/h_1) \mu_n - \\ &- \alpha \sin \beta \mu_n \sin (1 - x/h_1) \mu_n,\end{aligned}$$

$$\Delta_2(\mu_n, x) = \cos (1 - (x - h_1)/h_2) \mu_n,$$

$$\delta_1 = 1 + \alpha\beta + \gamma, \quad \delta_2 = \alpha + \beta + \alpha\gamma,$$

$$\delta_3 = (1 + \alpha\beta)\gamma\mu_n, \quad \delta_4 = -(\alpha + \beta)\gamma\mu_n.$$

3. Квазістатична задача термопружності

Будемо вважати, що зміна температури у внутрішніх точках циліндру відбувається досить повільно. За таких умов можна знехтувати силами інерції, тобто в кожний момент часу розглядати статичну задачу термопружності. Проте, оскільки температурне поле все ж залежить від часової координати t , правильно говорити про квазістатичну задачу термопружності.

Таким чином, будемо розглядати рівновагу циліндру, який складається з двох однорідних пружних шарів: внутрішнього шару $a < r < b$, параметри якого будемо позначати індексом „1“, та зовнішнього шару $b < r < c$, параметри якого будемо позначати індексом „2“. Тут r – радіальна координата, що відраховується від осі циліндру. Будемо вважати, що до циліндру не прикладено зовнішніх механічних навантажень, а зовнішнє навантаження відповідає нерівномірному температурному полю $T(r, t)$,

$a < r < c$, $t > 0$. Температурне поле для кожного моменту часу визначається на основі співвідношень (6)-(7), якщо вважати, що $r = x + a$, $h_1 = b - a$, $h_2 = c - b$. Потрібно визначити напруження в точках циліндра, як функції радіальної координати. В першу чергу нас будуть цікавити колові напруження σ_θ та поздовжні напруження σ_z .



Рис.3 Геометрія термопружної задачі

Для початку розглянемо дещо іншу задачу, а саме будемо вважати, що механічні навантаження є і полягають в тому, що торці циліндру є затисненими. В будь-якому разі оскільки задача є осесиметричною, напруження, що діють в обох шарах циліндрів, задовольняють рівнянням

$$\frac{d\sigma_{rk}}{dr} + \frac{\sigma_{rk} + \sigma_{\theta k}}{r} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

де σ_r - радіальні напруження, індекс k відповідає номеру шару. Повна похідна береться в силу того, що r в даній квазістатичній задачі є фактично єдиною незалежною змінною, адже t виступає в ролі параметру, а від координат θ та z нічого не залежить. Дотичні напруження відсутні в силу осевої симетрії та припущення про рівність значень коефіцієнта Пуассона матеріалів обох шарів.

Рівняння (8) слід доповнити законом Гука для випадку термопружної деформації [2]. Виключаючи на основі гіпотези про плоску деформацію ($\varepsilon_{zk} = 0$) з останніх співвідношень поздовжні напруження

$$\sigma_{zk} = \nu(\sigma_{rk} + \sigma_{\theta k}) - \alpha_k E_k T, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

закон Гука можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rk} - (1 + \nu)\alpha_k T &= \frac{1 - \nu^2}{E_k} \left(\sigma_{rk} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{\theta k} \right), \\ \varepsilon_{\theta k} - (1 + \nu)\alpha_k T &= \frac{1 - \nu^2}{E_k} \left(\sigma_{\theta k} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{rk} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$k = 1, 2,$$

де ε_r , ε_θ , ε_z - радіальна, колова та поздовжня деформації, E - модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона, α - коефіцієнт лінійного розширення. В осесиметричному випадку в циліндричній системі координат компоненти тензора деформацій на основі співвідношення Коші можуть бути представлені у вигляді

$$\varepsilon_{rk} = \frac{du_k}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta k} = \frac{u_k}{r}, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

де u - радіальне зміщення.

Підставляючи (11) в (10), а те в свою чергу - в (9) приходимо до рівнянь відносно радіальних зміщень

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru_k)}{dr} \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_k \frac{dT}{dr}, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Загальний розв'язок (12) можна представити у вигляді

$$u_k = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_k \frac{1}{r} \int_{r_k}^r T r dr + C_{2k-1} r + \frac{C_{2k}}{r}, \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \quad r_1 = a, \quad r_2 = b.$$

На основі закону Гука (10) та співвідношень Коші (11) доповнимо вираз для радіальних зміщень (13) виразами для колових та радіальних напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta k} &= \frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr - \frac{E_i}{1 + \nu} \left[\alpha_i T + \left(\frac{C_{2i-1}}{1 - 2\nu} + \frac{C_{2i}}{r^2} \right) \right], \\ \sigma_{rk} &= -\frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr + \frac{E_i}{1 + \nu} \left(\frac{C_{2i-1}}{1 - 2\nu} - \frac{C_{2i}}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$i = 1, 2.$$

Для однозначного визначення напружено-деформівного стану, тобто сталих C_1 , C_2 , C_3 та C_4 , необхідно звернутися до граничних умов. Останні будуть складатися з умов відсутності напружень на бічних поверхнях циліндру

$$\sigma_{r1}|_{r=a} = \sigma_{r2}|_{r=c} = 0, \quad (15)$$

та умов неперервності полів зміщень та напружень

$$u_1|_{r=b} = u_2|_{r=b}, \quad \sigma_{r1}|_{r=b} = \sigma_{r2}|_{r=b}. \quad (16)$$

Підставляючи (13) та (14) в (15) та (16) відносно сталих C_1 , C_2 , C_3 та C_4 одержуємо лінійну алгебраїчну систему четвертого порядку, яка має однозначний розв'язок. Остаточні вирази для колових напружень, які представляють найбільший інтерес при розрахунку на міцність

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right] - \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} q,$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + b^2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr + \int_b^r T r dr - T r^2 \right] + \frac{r^2 + c^2}{c^2 - b^2} \frac{b^2}{r^2} q, \quad (17)$$

де

$$q = \frac{\frac{2\alpha_1}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - \frac{2\alpha_2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr}{\frac{a^2 + (1-2\nu)b^2}{(b^2 - a^2)E_1} + \frac{c^2 + (1-2\nu)b^2}{(c^2 - b^2)E_2}}.$$

Після знаходження радіальних та колових напружень поздовжні напруження знаходяться з співвідношень (9). Таким чином можна одержати поздовжні напруження, що діють в циліндрі з затиснутими торцями, тобто ті, що відповідають другій задачі. Для знаходження поздовжніх напружень в початковій задачі (циліндр з вільними торцями) від вказаних поздовжніх напружень необхідно відняти поздовжні напруження, що мають однаковий з ними головний вектор та викликають в обох шарах циліндру однакову поздовжню деформацію. Звичайно, при накладанні такого поля на поле з другої задачі на торцях циліндру поздовжні напруження будуть відмінними від нульових, проте їх головний вектор буде рівний нулеві і в силу принципу Сен-Венана [2] на відстані в декілька товщин стінки циліндра ($h = c - a$) ефект від заміни дійсного поля таким комбінованим буде непомітним.

Якщо виконати зазначену процедуру для поздовжніх напружень з першої задачі одержимо наступні вирази

$$\sigma_{z1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - T r^2 \right] + \frac{Q}{b^2 - a^2}, \quad (18)$$

$$\sigma_{z2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \left[\frac{2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr - T r^2 \right] - \frac{Q}{c^2 - b^2},$$

де

$$Q = q \left[2\nu b^2 + \frac{\frac{a^2 + (1-2\nu)b^2}{(b^2 - a^2)E_1} + \frac{c^2 + (1-2\nu)b^2}{(c^2 - b^2)E_2}}{\frac{1}{(b^2 - a^2)E_1} + \frac{1}{(c^2 - b^2)E_2}} \right].$$

Оскільки при розрахунках на міцність основна увага приділяється поздовжнім та коловим напруженням (при розрахунках на спротив крихкому руйнуванню головним чином розглядається нормальний розрив поздовжніх та поперечних тріщин), то можна вважати, що вирази (17) та (18) дають розв'язок сформульованої квазістатичної задачі термопружності.

4. Вхідні дані та результати

Апробацію одержаного розв'язку проведемо на прикладі задачі про температурний удар циліндричної частини копусу реактора ВВЕР-1000, яка складається з двох шарів: наплавки „1” та – основного металу „2”. Одержаний аналітичний розв'язок порівнювався з розв'язком, одержаним за допомогою апробованого коду метода скінченних елементів.

Таблиця °1. Геометричні дані циліндричної частини КР ВВЕР-1000

Внутрішній радіус, a	2,068 м
Товщина наплавки, h_1	0,007 м
Товщина стінки, h	0,1995 м

Таблиця °2. Усереднені фізичні властивості матеріалів циліндричної частини КР ВВЕР-1000

Шар	E_i	α_i	ν_i
	[10^3 МПа]	[10^{-6} 1/К]	
$i=1$	153	17,5	0,3
$i=2$	193	13,5	0,3
	λ_i	c_i	ρ_i
	[Вт/м·К]	[Дж/кг·К]	[кг/м ³]
$i=1$	13,5	520	7830
$i=2$	36	520	7780

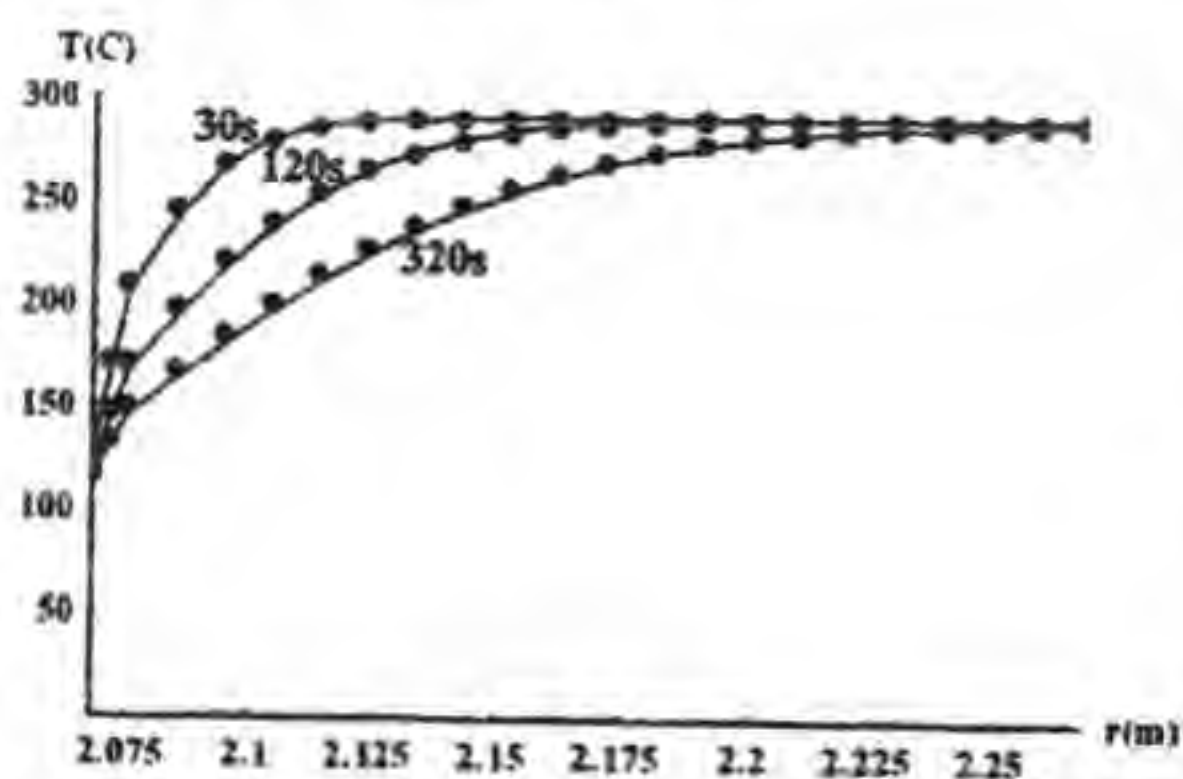


Рис.4 Розподіл температур

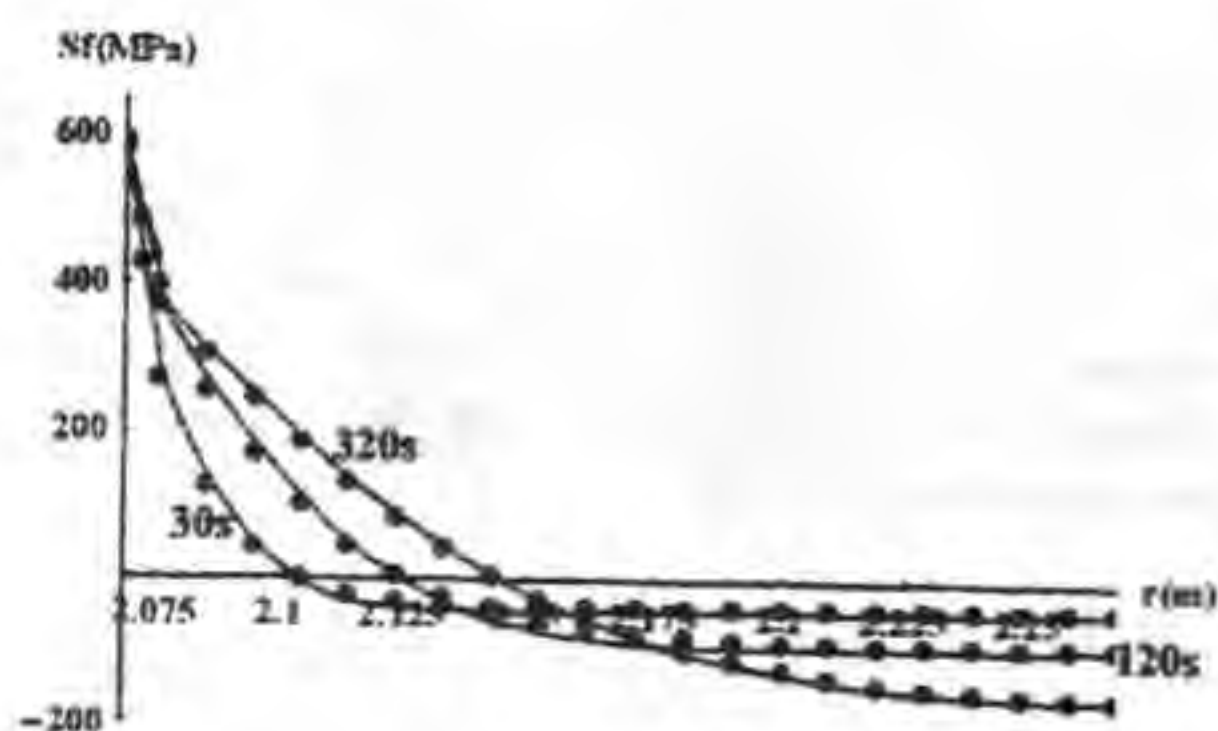


Рис.5 Розподіл колових напружень

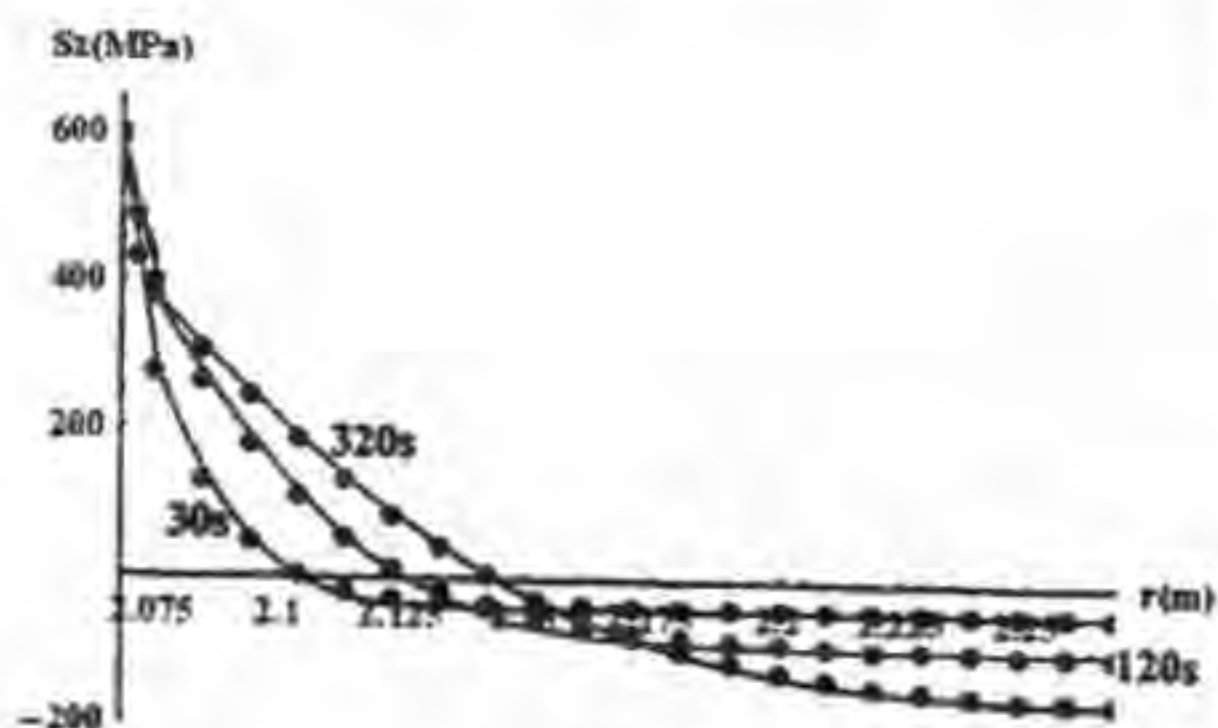


Рис.6 Розподіл поздовжніх напружень

В таблиці^{°1} подано геометричні характеристики циліндричної частини КР. При розрахунках методом скінчених елементів використовувалися фізичні характеристики наплавки та основного металу, наведені в [3]. Їх усереднені значення, що використовувалися в наведеному аналітичному розв'язку, подані в таблиці 2.

В модельній задачі вважалось, що в початковий момент часу температурне поле КР

було однорідним і відповідало нормальним умовам експлуатації (290°C), а температура теплоносія в наслідок спрацювання системи аварійного захисту миттєво змінювалася до 110°C.

На рисунках 4, 5 та 6 подано розподіли температур, колових та поздовжніх напружень для різних моментів часу ($t=30$ с, $t=120$ с, $t=320$ с). Суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку (7), (17) та (18), точки – чисельному розв'язку в вузлах сітки. Як видно з графіків, незважаючи на неврахування залежності фізичних параметрів від температури в аналітичному розв'язку, його відхилення від дійсних значень є незначним (похибка менше 5%).

5. Висновки

- Запропоновано замкнений аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності для двошарового циліндру.
- Проведено тестові розрахунки для модельної задачі повного миттєвого заохолодження циліндричної частини КР ВВЕР-1000, що підтвердили як якісну так і кількісну відповідність результатам, отриманими за допомогою верифікованого коду.
- Одержаний розв'язок можна застосовувати для побудови граничних p - T кривих, що мають велике практичне значення при експлуатації резервуарів великого тиску, що можуть зазнавати температурного удару.

Список використаних джерел

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования, -М.: Наука, 1971. - 288 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, - М.: Наука, 1975. - 575 с.
3. Guidelines on Pressurized Thermal Shock Analysis for WWER Nuclear Power Plants (IAEA-EBP-WWER-08) // IAEA, Vienna. - 2006. - 65 p.
4. Specification for the Generation of the Ukrainian VVER Operational Limits Curves for the Emergency Response Guidelines Integrity Critical Safety Function // EDAM/06/418R: Westinghouse Electric Belgium. - 2006. - 20 p.

Надійшла до редколегії 12.03.09

УДК 539.376

Д. Лібов, студент

Осесиметричні коливання циліндра

У роботі описаний метод точного розв'язку задачі про вимушені коливання циліндра скінченої довжини. На основі метода суперпозиції з часткових розв'язків рівнянь руху в циліндричних координатах будуються такі вирази для переміщень і напружень, які задовольняють граничні умови на всій поверхні циліндра. Цей спосіб дає змогу описати форми коливань та розподіл напружень у широкому діапазоні частот, що значно перевищують частоту першого товщинного резонансу такого простого з точки зору форми і складного з точки зору задовільнення граничних умов механічного об'єкту як пружний, скінчений циліндр.

Ключові слова: пружний циліндр, метод суперпозиції, переміщення, напруження.

D. Libov, student

Axisymmetrical oscillations of cylinder

In this article describes the method of exact solution problem force vibration cylinder of finite form. Method bases on possibility of construction from partial solutions movement equations in cylindrical coordinate's components of movements and stresses that satisfy boundary conditions on surface cylinder. This method describes form of oscillations and stresses distribution in wide measure of frequencies which more higher frequency of the first thickness resonance which so simple from the point of view form and so complicated satisfaction of boundary conditions mechanic object as elastic and finite cylinder.

Keywords: elastic cylinder, the method of superposition, move, stress.

*E-mail: dmytro.libov@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

Об'єкти циліндричної форми широко використовуються в якості збуджувачів, прийомників коливань, резонаторів, елементів механічних фільтрів [1]. Дослідження спектру власних частот, особливо у високочастотній області, є важливою практичною задачею. Для низькочастотної області, де відповідна довжина хвилі значно більша за товщину (тонка пластинка) або радіус (довгий циліндр), повне дослідження коливань можна провести з використанням теорії пластин і стержнів. В області високих частот, необхідно враховувати просторове коливання циліндра.

Починаючи з середини минулого століття було проведено багато досліджень, що розкривали суть коливальних процесів у циліндрі [2, 3, 4]. Метод суперпозиції, що був використаний у роботі суттєвим чином базується на відомих розв'язках для шару (пластинка) і нескінченного циліндра. Перші теоретичні дослідження, що стосувалися розповсюдження повздовжніх нормальних мод в круговому циліндрі виконані Л. Похгаммером [5] і незалежно від нього І. Крі [6]. Розв'язок динамічної задачі для шару відноситься до робіт Д. Релея [7] і Г. Лемба [8].

В задачі про коливання скінченного циліндра при виконанні граничних умов виникають значні математичні труднощі. Подальший розгляд частотного спектру у даній роботі показує, що ці труднощі пов'язані із значним ускладненням деформування циліндра.

Задача про коливання пружного скінченного циліндра методом суперпозиції зводиться до розв'язку нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. На основі асимптотичних властивостей невідомих вдається ефективно перейти від нескінченної системи до скінченної, розв'язки якої дають змогу повністю описати напружено-деформований стан скінченного пружного циліндра.

2. Побудова загального розв'язку для скінченного пружного циліндра

З існування добре вивчених розв'язків динамічної теорії пружності для нескінченного шару і циліндра [5, 6, 7, 8], розглянемо в рамках запропонованого методу задачу про вимушені коливання кругового циліндра скінченої довжини.

Нехай вісь Oz_1 циліндричної системи координат співпадає з віссю циліндра, що має висоту $2H$ і радіус a . Площина $z_1 = 0$

рівновіддалена від його торців. Введемо безрозмірні координати: $r = \frac{\rho}{a}$, $z = \frac{z}{h}$, $h = \frac{H}{a}$.

Напружено-деформований стан циліндра повністю задається вектором переміщення, який визначається своїми проекціями на осі циліндричної системи координат:

$$\vec{u} = u\vec{e}_r + w\vec{e}_z$$

Де $\vec{e}_r, \vec{e}_z$ - одиничні орти напрямлені вздовж осей $O\rho$ і Oz відповідно.

Безрозмірні (віднесені до радіуса a) амплітудні значення компонентів вектора переміщення повинні в розглядуваному випадку осесиметричної деформації задовольняти системі диференціальних рівнянь Ламе [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\rho \omega^2 a^2}{G} u = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\rho \omega^2 a^2}{G} w = 0. \quad (1)$$

Де θ - об'ємне розширення, m - число Пуассона, ω - кругова частота, G - модуль зсуву.

Вирази для компонентів вектора переміщення для симетричної відносно $z=0$ деформації циліндра:

$$u = A_0 J_0(\gamma_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_0(q_1 r) + B_n J_0(q_2 r)] \cos k_n z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \frac{\lambda_n}{p_1} \operatorname{ch} p_1 z + D_n \frac{p_2}{\lambda_2} \operatorname{ch} p_2 z \right] J_1(\lambda_n r),$$

$$w = C_0 \cos \gamma_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{k_n}{q_1} J_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{k_n} J_0(q_2 r) \right] \sin k_n z + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \lambda_n \operatorname{sh} p_1 z + D_n \operatorname{sh} p_2 z] J_1(\lambda_n r). \quad (2)$$

При цьому $k_n = \frac{n\pi}{h}$, λ_n - ненульовий корінь рівняння $J_1(\lambda) = 0$.

Для антисиметричної відносно $z=0$ деформації переміщення мають вигляд:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{q_1}{k_n} J_1(q_1 r) + B_n \frac{k_n}{q_2} J_1(q_2 r) \right] \sin k_n z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \frac{\lambda_n}{p_1} \operatorname{sh} p_1 z + D_n \frac{p_2}{\lambda_2} \operatorname{sh} p_2 z \right] J_1(\lambda_n r).$$

$$w = C_0 \cos \gamma_1 z +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_0(q_1 r) + B_n J_0(q_2 r)] \cos k_n z +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [C_n \lambda_n \operatorname{ch} p_1 z + D_n \operatorname{ch} p_2 z] J_1(\lambda_n r). \quad (3)$$

При цьому $k_n = \frac{(2n-1)\pi}{h}$, λ_n - ненульовий корінь рівняння $J_1(\lambda) = 0$.

У виразах (1), (2) A_n, B_n, C_n, D_n - константи, а $q_1^2 = k_n^2 - \gamma_1^2$, $p_1^2 = \lambda_n^2 - \gamma_1^2$, $\gamma_1 = \frac{\omega}{V_1}$ ($n = 1, 2$), V_1 - швидкість хвиль розширення, V_2 - швидкість хвиль зсуву.

Кожен окремий компонент у виразах (2), (3) задовольняє рівняння (1). Сукупність розв'язків (2), (3) складають загальний розв'язок граничної задачі для циліндра скінченної довжини у тому сенсі, що заделегіть мають достатню повноту для зодовільнення граничних умов в напруженнях на всій поверхні циліндра.

У випадку граничних умов для симетричної задачі:

$$\sigma_r = f(z), \quad \tau_{rz} = 0, \quad \text{при } r=1 \text{ та } -h \leq z \leq h,$$

$$\sigma_z = g(r), \quad \tau_{rz} = 0, \quad \text{при } z = \pm h \text{ та } 0 \leq r \leq 1,$$

та $f(-z) \equiv f(z)$. (4)

Граничні умови для антисиметричної задачі:

$$\sigma_r = f(z), \quad \tau_{rz} = 0, \quad \text{при } r=1 \text{ та } -h \leq z \leq h,$$

$$\sigma_z = \pm g(r), \quad \tau_{rz} = 0, \quad \text{при } z = \pm h \text{ та } 0 \leq r \leq 1,$$

та $f(-z) \equiv -f(z)$. (5)

Наслідком задовільнення граничних умов для дотичних напружень (4) і (5) є наступні співвідношення, для симетричного випадку:

$$A_n = -B_n \frac{k_n^2 + q_2^2 J_1(q_2)}{2q_1 q_2 J_1(q_1)},$$

$$C_n = -D_n \frac{\lambda_n^2 + p_2^2 \operatorname{sh} p_2 h}{2\lambda_n^2 \operatorname{sh} p_1 h}.$$

Та для антисиметричного випадку:

$$A_n = -B_n \frac{k_n^2 + p_2^2 J_1(p_2)}{2p_1 p_2 J_1(p_1)},$$

$$C_n = -D_n \frac{\lambda_n^2 + q_2^2 \operatorname{ch} q_2 h}{2\lambda_n^2 \operatorname{ch} q_1 h}.$$

Умови для нормальних напружень в (4), (5) приводять до систем двох функціональних рівнянь. Звичайний шлях - розклад по повним і ортогональним системам функцій - зводить ці рівняння до нескінченних алгебраїчних систем.

Отримуємо наступну систему для антисиметричного випадку:

$$\begin{aligned} & \gamma_c \sin \gamma_1 h + 2 \frac{\gamma_1^2}{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 q_1^2} = g_c, \\ & x_n P_n(q) - \gamma_c \frac{2\gamma_1 \cos \gamma_1 h}{(m-2) h q_1^2} + \\ & \frac{\gamma_1^2}{m-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{2m k_n^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{\gamma_j^2}{\lambda_j^2} \right] = f_n, \\ & \gamma_j \Delta_j(p) + \frac{\gamma_1^2}{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 + p_j^2} \left[\frac{2m k_j^2}{k_n^2 + p_j^2} - \frac{\gamma_n^2}{k_n^2} \right] = g_j, \\ & (n, j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

При позначеннях:

$$\begin{aligned} & \gamma_c = A_0 \gamma_1, \quad \gamma_j = D_j \frac{\sinh p_j h}{h} J_0(\lambda_j), \\ & x_n = B_n \frac{k_n}{q_1} I_1(q_1) (-1)^{n-1}, \\ & g(r) = g_c + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}, \\ & f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \sin k_n z, \\ & P_n(q) = q_1 \left[\frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{(k_n^2 + q_1^2)^2 I_0(q_1)}{4 k_n^2 q_1 I_1(q_1)} \right] - \frac{\gamma_n^2}{2 k_n^2}, \\ & \Delta_j(p) = p_1 h \left[\tanh p_1 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_1^2)^2}{4 \lambda_j^2 p_1 p_2} \tanh p_1 h \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Нескінченна система для симетричного випадку:

$$\begin{aligned} & \gamma_c \left[\frac{m-1}{m-2} J_0(\gamma_1) - \frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} \right] + \gamma_c \frac{\sin \gamma_1 h}{(m-2) \gamma_1 h} - \\ & \frac{\gamma_1^2 \gamma_c^2}{2(m-2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\lambda_j^2 p_1^2} = f_c, \\ & \gamma_c \frac{2J_1(\gamma_1)}{(m-2) \gamma_1} + \gamma_c \frac{m-1}{m-2} \cos \gamma_1 h - \\ & \frac{\gamma_1^2 \gamma_c^2}{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 q_1^2} = g_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_n P_n(q) - \gamma_c \frac{2\gamma_1 \sin \gamma_1 h}{(m-2) h q_1^2} + \\ & \frac{\gamma_1^2}{m-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{2m k_n^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{\gamma_j^2}{\lambda_j^2} \right] = f_n, \\ & \gamma_j \Delta_j(p) - \gamma_c \frac{2\gamma_1 J_1(\gamma_1)}{(m-2) p_1^2} + \\ & \frac{\gamma_1^2}{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 + p_j^2} \left[\frac{2m k_j^2}{k_n^2 + p_j^2} - \frac{\gamma_n^2}{k_n^2} \right] = g_j, \\ & (n, j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

При позначеннях:

$$\begin{aligned} & A_0 \gamma_1 = \gamma_c, \quad C_0 \gamma_1 = \gamma_c, \\ & \gamma_c = B_0 I_1(q_1) (-1)^{n-1}, \quad \gamma_j = D_j \frac{\sinh p_j h}{h} J_0(\lambda_j), \\ & g(r) = g_c + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}, \\ & f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \cos k_n z, \\ & P_n(q) = q_1 \left[\frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{(k_n^2 + q_1^2)^2 I_0(q_1)}{4 k_n^2 q_1 I_1(q_1)} \right] - \frac{\gamma_n^2}{2 k_n^2}, \\ & \Delta_j(p) = p_1 h \left[\cosh p_1 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_1^2)^2}{4 \lambda_j^2 p_1 p_2} \cosh p_1 h \right] \end{aligned} \quad (9)$$

В процесі розв'язку задачі вдається суттєво просунути в дослідженні нескінчених систем, якщо врахувати асимптотичний закон [10]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = - \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = a_c = \text{const.} \quad (10)$$

Характер поведінки невідомих (10) зі збільшенням номера $(n, j=0, 1, 2, \dots)$ використовується для знаходження частотного спектру.

3. Аналіз чисельного розв'язку

Так як в експерименті важко отримати всі дані об особливостях такого цікавого явища, як крайовий резонанс, то це стимулювало побудову теоретичних розв'язків і проведення розрахунків в рамках моделі ізотропного тіла. При цьому виявилось, що така модель описує дане явище. З точки зору теоретичного осмислення цього явища значну роль відіграли роботи [3, 4]. У цих роботах показаний зв'язок між явищем крайового резонансу і особливостями процесу відбиття від вільного торця хвилеводу. У зв'язку з наявністю

перетворення типів хвиль при відбитті від вільної поверхні в пружному хвилеводі сума падаючої і відбитої розповсюджувальних мод не задовольняє нульовим граничним умовам по нормальним і дотичним напруженням одночасно. Забезпечити виконання граничних умов можна тільки, якщо припустити, що у хвилеводі з'являються нерозповсюджувальні моди. Методика, представлена у роботі, дозволяє дати повний аналіз структури спектра у даному діапазоні частот.

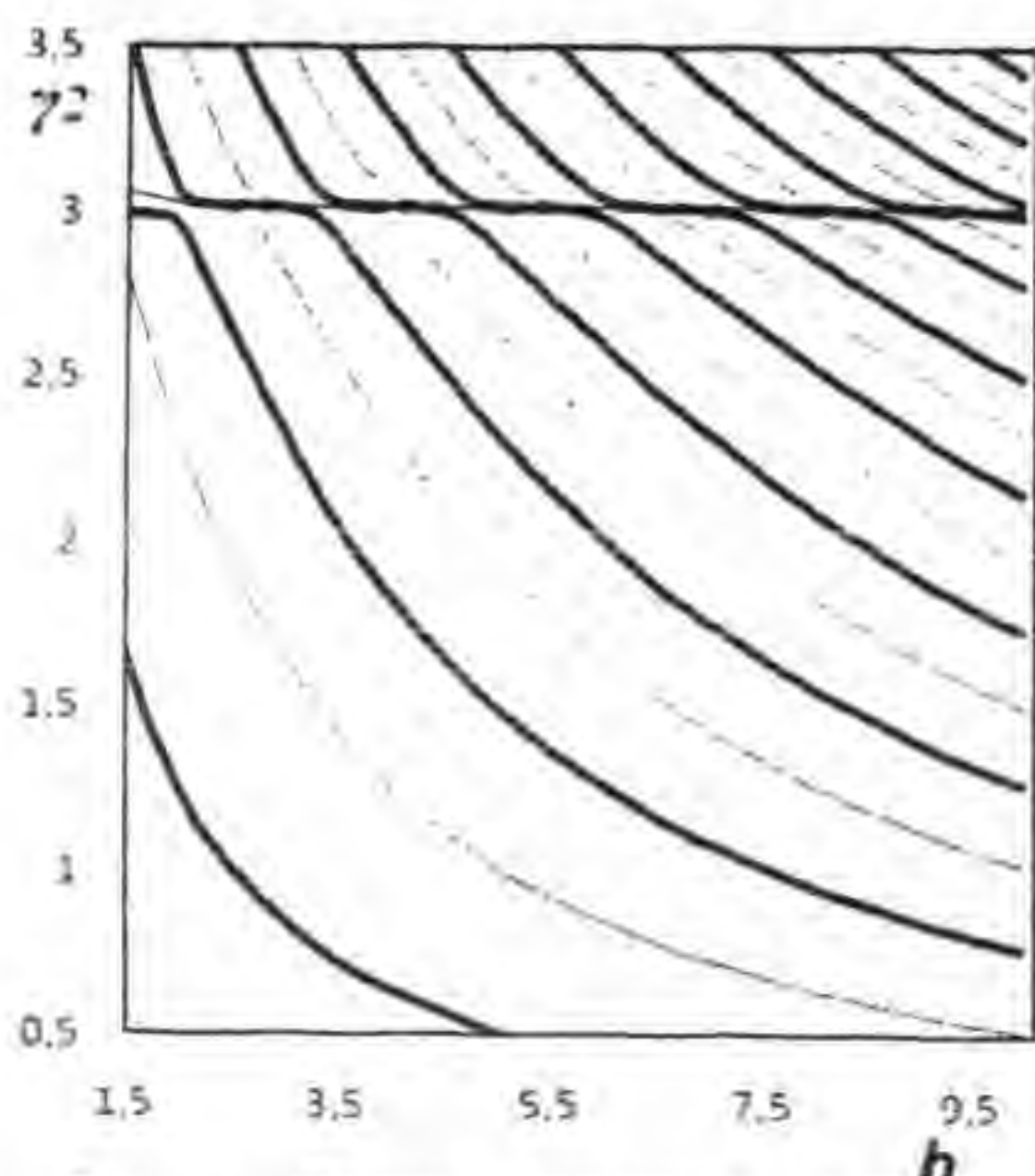


Рис. 1. Ділянка частотного спектру для циліндра з числом Пуассона $\nu = 3$.

Якщо прослідкувати за ходом кривих на рисунку, що відображає зміну власної частоти по відношенню до безрозмірної величини h , то для кожної кривої характерною особливістю є наявність плато, тобто такої області зміни геометрії циліндра, в якій значення власної частоти практично не змінюється з висотою h .

В розглядуваному випадку, при значенні числа Пуассона $\nu = 3$ плато заповнюють вузьку смугу в околі частоти $\gamma = 3.0$. В загальному випадку значення цієї частоти залежить від числа ν матеріалу. Характерним є те, що незалежно від кривої, якій належить це плато, власні форми коливань однотипні і відрізняються локалізацією зони великих амплітуд зміщень поблизу кутових точок циліндра. Збудження цих форм отримало назву крайового резонансу і вперше спостерігалось в роботі [11].

Значення частоти крайового резонансу мало залежить від типу симетрії коливань. В зв'язку з цим в спектрі власних частот циліндра

спостерігаються близько розташовані ділянки плато. Важливою особливістю частини спектра, що пов'язана з крайовим резонансом є те, що центри плато кожної симетричної форми (товста лінія) відповідають краям плато антисиметричних форм (тонка лінія). Структура спектру в діапазоні зміни частоти $0.5 < \gamma < 3.0$ досить прозора і відповідає повздовжнім коливанням довгого циліндра.

4. Висновки

Представлений точний розв'язок задачі про вимушені коливання скінченного циліндру, який задовольняє всі граничні умови на поверхні скінченного циліндру, включаючи і торці. Проведено опис частотного спектру для довгих циліндрів.

Список використаних джерел

1. Мэй Д. Волноводные ультразвуковые линии задержки. – Физическая акустика: принципы и методы. Пер. с англ., 1966, 1А, с. 489-565.
2. Onoe M., Pao Y.H. Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate. – J. Acoust. Soc. Amer., 1961, 33, N 11, p. 1628.
3. Gazis D. S., Mindlin R.D. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semifinite plate. – J. Appl. Mech., 1960, 27, N3, p.541-547.
4. Onoe M. The contour vibrations of thin rectangular plates. – J. Acoust. Soc. Amer., 1958, 30, N11, p.1159-1164.
5. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in Einem Unbegrenzten Isotropen Kreisylinder. – J. reine und angew. Math., 1876, 81, s.324-336.
6. Chree C. The equations of an isotropic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. – Trans. Cambridge Phil. Soc., 1889, N14, p.250-369.
7. Releigh. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter. – Proc. London Math. Soc., 1889, 20, p.225-234.
8. Lamb H. On waves in an elastic plate. – Proc. Roy. Soc. London A., 1917, 93, p.114-128.
9. Лав А. Математическая теория упругости. – М.: Л.:ОНТИ, 1935. 674 с.
10. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 264 с.13.
11. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by wide-band, short-duration pulse technique. – J. Acoust. Soc. Amer., 1957, 29, N2, p. 189 – 194.

Надійшла до редколегії 15.05.09

УДК 539.3

Михайло О. Моргунов,
Володимир І. Острик, д. ф.-м. н., доцент

Згин пружної смуги штампом

Розглянуто контактну взаємодію штампа з прямолінійною основою і пружної смуги, яка опирається на дві точкові опори. Із застосуванням метода Вінера – Гопфа інтегральне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Знайдено розподіл напружень в області контакту.

Ключові слова: контакт, пружна смуга, напруження, факторизація.

*E-mail: mihail@env.kiev.ua, ostrik_v@rambler.ru
Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В.

1 Вступ

Задача про згин пружної смуги, яка опирається на дві опори, жорстким круглим диском розглянута в роботі [3]. Інтегральне рівняння задачі розв'язано чисельно. Представлені результати розподілу контактних напружень для різних розмірів області контакту. Показано, що безвідривний контакт жорсткого диска і пружної смуги відбувається для достатньо помірних навантажень, коли відношення розміру області контакту до ширини смуги не перевищує 5,4. Для більших навантажень виявлено відрив межі смуги від межі диска у середній частині області контакту.

Нижче з використанням метода Вінера – Гопфа і підходу роботи [1] наведено точний розв'язок задачі про безвідривний контакт штампа з прямолінійною основою і пружної смуги.

2 Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$, яка опирається нижньою гранню $y = -h$ на дві точкові опори $x = -L$, $x = L + l$, а у верхню її грань $y = h$ вдав-

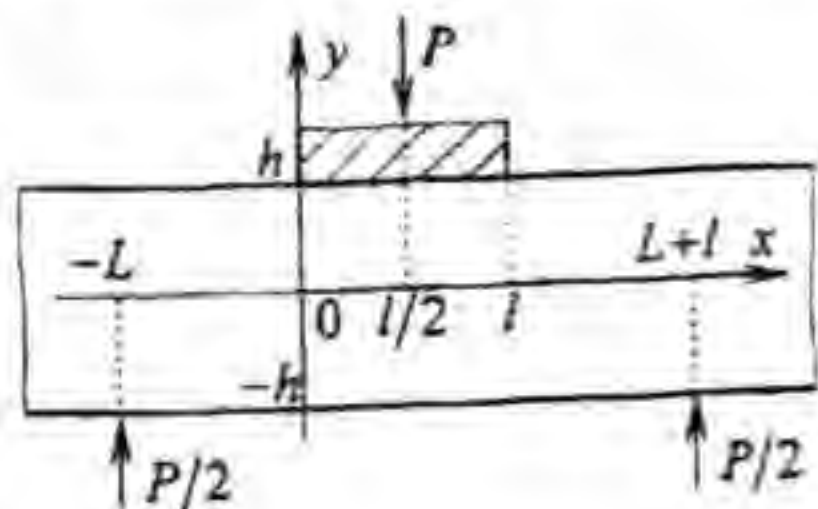


Рис. 1

M. O. Morgunov,
V. I. Ostrik, D. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof.

The Bending of an Elastic Strip by Stamp

The problem of elasticity concerning contact interaction between a flat stamp and an elastic strip, which is holding by two bearings, has been investigated. Based on Wiener – Hopf method the constructed integral equation for this problem has been transformed to infinite system of the algebraic equations. The distribution of tensions in contact domain is found.

Key Words: contact, elastic strip, stress, factorization.

люється нормальною силою P штамп з прямолінійною основою $0 \leq x \leq l$ (рис. 1). Припускаємо, що штамп залишається у контакті з верхньою гранню смуги. Сили тертя в області контакту не враховуємо. Крайові умови задачі наступні:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= 0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad \sigma_y|_{y=h} = 0 \quad (x < 0, x > l), \\ \sigma_y|_{y=-h} &= -\frac{P}{2} [\delta(x+L) + \delta(x-L-l)], \\ \tau_{yx}|_{y=\pm h} &= 0 \quad (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

3 Інтегральне рівняння задачі

Для побудови інтегрального рівняння розглянемо допоміжну задачу для смуги (G – модуль зсуву):

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= s(x), \quad \frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=-h} = p(x), \\ \tau_{yx}|_{y=\pm h} &= 0 \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Її розв'язок знаходимо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за координатою x . За цим розв'язком (ν – коефіцієнт Пуассона)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G}|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu \lambda(2\mu h) \bar{s}(\mu) + 2\lambda_1(2\mu h) \bar{p}(\mu)}{\Delta(2\mu h)} e^{-\mu x} d\mu, \\ \bar{p}(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{\mu x} dx, \quad \bar{s}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{\mu x} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &= \text{sh}^2 \tau - \tau^2, \quad \lambda_1(\tau) = \text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau, \\ \Delta(\tau) &= \text{sh} 2\tau + 2\tau.\end{aligned}\quad (3)$$

Згідно з умовами (1) покладемо

$$\begin{aligned}p(x) &= -\frac{P}{4G}[\delta(x+L) + \delta(x-L-l)], \\ s'(x) &= A \text{sign} x + s_*(x) \quad (x < 0, x > l), \\ A &= s'(\infty), \quad s(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l),\end{aligned}\quad (4)$$

де A – тангенс кута повороту смуги на нескінченності, $s(x)$ ($x < 0, x > l$) – невідома функція нормальних переміщень точок вільної частини верхньої грані смуги. Тоді

$$\begin{aligned}\bar{p}(\mu) &= -\frac{P}{8\pi G}(e^{-i\mu L} + e^{i\mu(L+l)}), \\ \bar{s}(\mu) &= \frac{i}{2\pi\mu} \left[\frac{i}{\mu} A(1 + e^{i\mu l}) + \left(\int_{-\infty}^0 + \int_l^{\infty} \right) s_*(r) e^{i\mu r} dr \right].\end{aligned}\quad (5)$$

З урахуванням (5) підставимо вираз для нормальних напружень із (3) у другу крайову умову (1). Виконуючи заміни

$$\mu = \frac{\tau}{2h}, \quad x = 2h\xi, \quad r = 2h\eta; \quad a = \frac{l}{2h}, \quad \xi_0 = \frac{L}{2h}, \quad (6)$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = s_*(2h\eta) \quad (\eta < 0, \eta > a) \quad (7)$$

отримуємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^0 + \int_a^{\infty} \right) \varphi(\eta) k(\xi - \eta) d\eta &= f(\xi) \\ (-\infty < \xi < 0, a < \xi < \infty), \quad (8) \\ k(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\Delta(\tau)}, \\ f(\xi) &= \frac{(1-\nu)P}{4Gh} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)} \left(e^{-i\tau(\xi_0 + \xi)} + e^{i\tau(\xi_0 + a - \xi)} \right) d\tau + \\ &+ \frac{A}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{\tau} \left(e^{-i\tau\xi} + e^{i\tau(a - \xi)} \right) d\tau.\end{aligned}$$

4 Розв'язання інтегрального рівняння

Інтегральне рівняння (8) розв'яжемо зведенням його до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Приймаючи, що $\varphi(\eta) = 0$ при $0 < \eta < a$, розповсюдимо інтегральне рівняння (8) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Відносно невідомих функцій

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,\end{aligned}\quad (9)$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{iz\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = e^{iza} \Psi^-(z),$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\text{Im} z > c^+$, $\text{Im} z < c^-$ ($c^+ < 0, c^- > 0$) комплексної площини, приходимо до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [2]

$$\begin{aligned}K(z) [e^{iza} \Phi^+(z) + \Phi^-(z)] - \Psi^+(z) &= F(z), \\ \Psi^+(z) &= e^{iza} \Psi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im} z < c^-),\end{aligned}\quad (10)$$

права частина якої має вигляд

$$\begin{aligned}F(z) &= e^{iza} F^+(z) + F^-(z), \quad F^-(z) \equiv F^+(-z), \\ F^+(z) &= \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{\Delta'(is_k)} \left(\frac{e^{-is_k(a+\xi_0)}}{s_k - iz} - \frac{e^{-is_k\xi_0}}{s_k + iz} \right) + \right. \\ &\left. + e^{iz\xi_0} \frac{\lambda_1(z)}{i\Delta(z)} \right] + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} \frac{e^{-is_ka} + 1}{s_k - iz},\end{aligned}\quad (11)$$

де s_k ($k = 1, 2, \dots$) – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощини $\text{Re} s > 0$. Крім того умови симетрії задачі відносно прямої $x = i/2$ приводять до тотожностей

$$\begin{aligned}\varphi(a - \xi) &\equiv \varphi(\xi), \\ \Phi^-(z) &\equiv -\Phi^+(-z), \quad \Psi^-(z) \equiv \Psi^+(-z).\end{aligned}\quad (12)$$

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (10) факторизуємо її коефіцієнт $K(z)$ у вигляді

$$K(z) = \frac{z^3}{12} K^+(z) K^-(z), \quad (13)$$

де $K^{\pm}(z)$ – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ($\text{Im} z > c^+$) та нижній ($\text{Im} z < c^-$) півплощинах відповідно. Факторизацію (13) здійснюємо у нескінченних добутках

$$K^+(z) \equiv K^-(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\zeta_n} \right) \left(1 - \frac{iz}{s_n} \right)^{-1}, \quad (14)$$

де ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ із півплощини $\text{Re} s > 0$.

З урахуванням (13) перше рівняння (10) запишемо наступним чином:

$$\frac{z^3}{12} K^-(z) \left[e^{i\alpha} \Phi^+(z) + \Phi^-(z) \right] - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = e^{i\alpha} \frac{F^+(z)}{K^+(z)} + \frac{F^-(z)}{K^+(z)}. \quad (15)$$

Другі складові лівої і правої частини рівняння (15) подамо у вигляді різниці аналітичних у верхній та нижній півплощинах функцій

$$\frac{z^3}{12} K^-(z) e^{i\alpha} \Phi^+(z) = \chi^+(z) - \chi^-(z), \quad F^-(z)/K^+(z) = f^+(z) - f^-(z). \quad (16)$$

Розкладаючи відповідні інтеграли типу Коші [2] в ряд за теорією лишків, отримуємо

$$\chi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k) \Phi^+(is_k) e^{-s_k \alpha}}{i \Delta'(s_k) K^+(is_k) (s_k + iz)},$$
$$f^-(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k^3 \lambda_1(i\zeta_k)}{12i\lambda'(i\zeta_k)} K^-(-i\zeta_k) \frac{e^{-\zeta_k \xi_0}}{\zeta_k - iz} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{\Delta'(is_k) K^+(is_k)} \frac{e^{-s_k(\alpha + \xi_0)}}{s_k + iz} + \frac{i\lambda_1(z)}{\Delta(z) K^+(z)} e^{-iz\xi_0} \right] + \frac{iA}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z^2}{12} K^-(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) K^+(is_k)} \frac{e^{-s_k \alpha}}{s_k + iz} \right). \quad (17)$$

В результаті рівняння (15) набуває вигляду

$$\frac{1}{K^+(z)} \left[\Psi^+(z) + e^{i\alpha} F^+(z) \right] - \chi^+(z) + f^+(z) = \frac{z^3}{12} K^-(z) \Phi^-(z) - \chi^-(z) + f^-(z). \quad (18)$$

Обидві частини рівняння (18) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і представляють собою довільну цілу функцію. З умов на нескінченності

$$K^-(z) = O(z^{-3/2}), \quad \Phi^-(z) = o(1), \quad \chi^-(z) = O(z^{-1}), \quad f^-(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (19)$$

випливає, що обидві частини рівняння (18) є довільна лінійна функція $C_1 z + C_2$. Отже, отримуємо

$$\Psi^+(z) = K^+(z) \left[\chi^+(z) - f^+(z) + C_1 z + C_2 \right], \quad \Phi^-(z) = \frac{12}{z^3 K^-(z)} \left[\chi^-(z) - f^-(z) + C_1 z + C_2 \right]. \quad (20)$$

Вимагаючи аналітичність функції $\Phi^-(z)$ у точці $z = 0$, знаходимо

$$C_2 = f^-(0) - \chi^-(0), \quad C_1 = \frac{d}{dz} \left[f^-(z) - \chi^-(z) \right] \Big|_{z=0} = 0 \quad (21)$$

і приходимо до додаткової умови

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[f^-(z) - \chi^-(z) \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad (22)$$

необхідної для визначення сталої A .

З урахуванням (21), (22) вираз для функції $\Phi^-(z)$ із (20) переписеться у вигляді

$$\Phi^-(z) = \frac{12}{K^-(z)} \left[\tilde{\chi}^-(z) - \tilde{f}^-(z) \right],$$
$$\tilde{\chi}^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \Phi^+(is_k)}{s_k + iz}, \quad \alpha_k = \frac{\lambda(is_k) e^{-s_k \alpha}}{s_k^3 \Delta'(s_k) K^+(is_k)},$$
$$\tilde{f}^-(z) = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)} K^-(-i\zeta_k) \frac{e^{-\zeta_k \xi_0}}{\zeta_k - iz} - \frac{1}{2(iz)^3} - \frac{b_1 - \xi_0}{2(iz)^2} - \left(2b_2 - 2b_1 \xi_0 + \xi_0^2 \right) \frac{1}{4iz} + \frac{i\lambda_1(z)}{12\lambda(z)} K^-(z) e^{-iz\xi_0} \right] + \frac{iA}{\sqrt{2\pi}} \frac{K^-(z) - 1}{12z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k A_k}{s_k + iz}, \quad (23)$$

$$A_k = i \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda_1(is_k)}{\lambda(is_k)} e^{-s_k \xi_0} + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s_k} \quad (k=1, 2, \dots),$$

де b_1, b_2 – коефіцієнти розвинення

$$1/K^+(z) = 1 + b_1 iz + b_2 (iz)^2 + O((iz)^2), \quad z \rightarrow 0, \quad b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta_n} - \frac{1}{s_n} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(b_1^2 - \frac{1}{5} \right). \quad (24)$$

Поклавши у першій рівності (23) $z = -is_n$ ($n = 1, 2, \dots$), з урахуванням другої тотожності (12) отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$x_n + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} x_k \lambda^k = g_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (25)$$

відносно невідомих

$$x_k = \Phi^+(is_k) + A_k \quad (k=1, 2, \dots), \quad (26)$$

у якій $(s_k = \pi k/2, k \rightarrow \infty)$

$$\lambda = e^{-\pi a/2}, \quad \bar{\alpha}_k = \alpha_k e^{(\pi k/2)a}, \quad \beta_n = 12/K^+(is_n),$$

$$g_n = \beta_n \left[\frac{(1-\nu)P}{8Gh\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{s_n^3} - \frac{b_1 - \xi_0}{s_n^2} - (2b_2 - 2b_1\xi_0 + \xi_0^2) \frac{1}{2s_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(i\xi_k)K^+(i\xi_k)e^{-\xi_k\xi_0}}{6\lambda'(i\xi_k)(\xi_k - s_n)} + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{12s_n} \right] \right]. \quad (27)$$

Розв'язок системи рівнянь (25) відшукуємо у вигляді

$$x_k = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km} \lambda^m \quad (k=1, 2, \dots). \quad (28)$$

Підстановкою (28) у (25) знаходимо

$$\xi_{n0} = g_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (29)$$

і отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm} = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k, m-k} \quad (n, m=1, 2, \dots). \quad (30)$$

для визначення коефіцієнтів розвинень (28).

Подавши невідомі x_k у вигляді

$$x_k = \frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}} \bar{x}_k + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \bar{x}_k \quad (k=1, 2, \dots), \quad (31)$$

із додаткової умови (22) знаходимо

$$A = \frac{(1-\nu)P}{4Gh} \left[\frac{1}{4} (2b_2 - 2b_1\xi_0 + \xi_0^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{\alpha}_k \bar{x}_k \lambda^k - \frac{\lambda_1(i\xi_k)}{12\lambda'(i\xi_k)} K^+(i\xi_k) e^{-\xi_k\xi_0} \right) \right] \times \left(\frac{1}{12} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_k \bar{x}_k \lambda^k \right)^{-1}. \quad (32)$$

5 Контактні напруження

Враховуючи (4) – (9), вираз із (3) для нормальних напружень на верхній грані смуги подамо у вигляді

$$\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=h} = -\frac{i}{1-\nu} \left[f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) (\Phi^-(\tau) + \Phi^+(\tau) e^{i\tau a}) e^{-i\tau\xi} d\tau \right]. \quad (33)$$

Застосовуючи теорію лишків, із (33) отримуємо нормальні напруження в області контакту

$$\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=h} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k)}{\Delta'(is_k)} x_k (e^{-s_k\xi} + e^{-s_k(a-\xi)}),$$

$$\xi = x/(2h) \quad (0 < x < l). \quad (34)$$

На рис. 2 показано розподіл безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = (Gl/P)\sigma_y|_{y=h}$ для відносної ширини штампа $a = l/(2h) = 1,191; 0,9; 0,6; 0,3$ (криві 1–4) при відстані між опорами $2L + l = 4h$. Якщо ширина штампа l більше критичного значення $l_* = 1,191 \cdot 2h$, в середній частині області контакту нормальні напруження стають додатними, що вказує на контакт штампа з відривом. Із зменшенням ширини штампа розподіл контактних напружень наближається до розподілу $\bar{\sigma} = \pi^{-1}(1 - (2x/l - 1)^2)^{-1/2}$ у випадку взаємодії штампа з пружною півплощиною. Значення $l_*/(2h)$ наведені у табл.

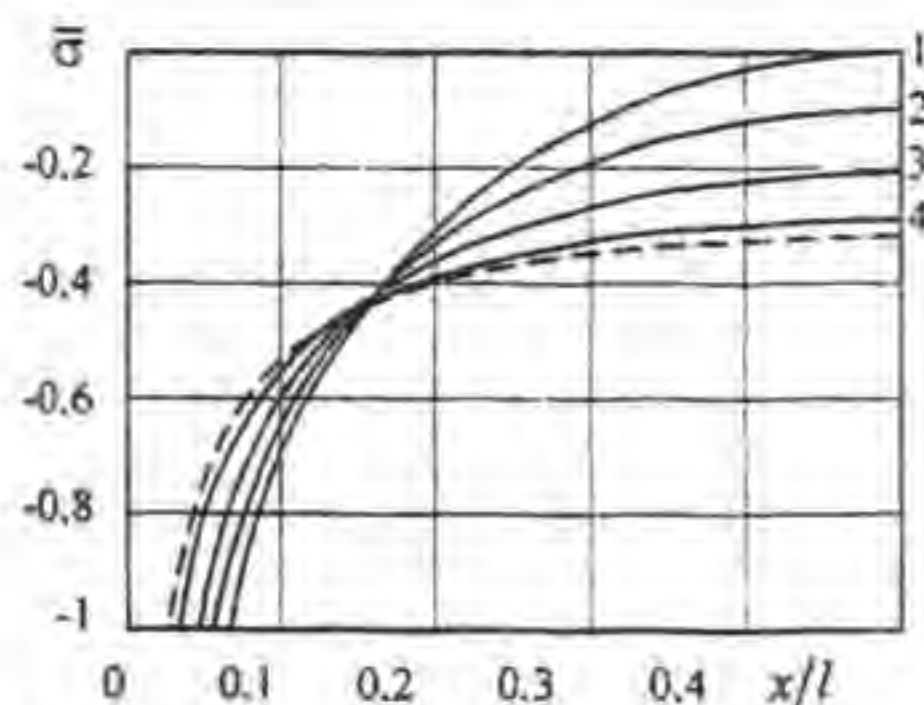


Рис. 2

Таблиця

$\xi_0 + a/2$	1	2	5	10	15	20
$l_*/(2h)$	1.191	0.689	0.418	0.293	0.239	0.207

6 Висновки

З використання метода Вінера – Гопфа отримано точний аналітичний розв'язок контактної задачі про згин пружної смуги штампом з прямолінійною основою. Знайдено розподіл контактних напружень та з'ясовано умови безвідривного контакту.

Список використаних джерел

1. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29-33.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
3. Улітко А. Ф., Моргунов М. О. Контакт жорсткого диска з тонкою пружною смугою при згині // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 164-173.

Надійшла до редколегії 07.05.2009

УДК 517.9

Борис І. Мосєєнков, к. ф. - м. н. доцент
Юрій Б. Мосєєнков, к. ф. - м. н. доцент

Про ідеї та асимптотичні методи нелінійної механіки академіка М.М. Боголюбова та їх подальший розвиток і специфіка застосування цих знань в освіті студентів державних університетів України

В роботі розглядається історія створення асимптотичних методів та їх розвиток стосовно дослідження нелінійних коливань і задач математичної фізики. Показана роль механіко-математичного факультету КНУ в поширенні ідей цих методів шляхом видання українською мовою навчальних посібників, що рекомендуються для вивчення у державних університетах України.

Ключові слова: асимптотичні методи, нелінійні коливання, задачі математичної фізики.

E-mail: yuri_mos@i.ua

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

До 100 – річчя народження академіка М.М. Боголюбова

1. Коротка суспільно-історична довідка.

Цей огляд займає великий період (десь з 1928 р. по сьогоднішній 2009 р.), за який формувалися і розвивалися Боголюбовські ідеї та методи, а суспільство України за цей час жило послідовно у двох державних формаціях: Українській РСР у складі СРСР (1928 – 1991 рр.) та після розпаду СРСР в 1991 р. у самостійній Україні. Особливістю цих формацій є державна мова – в Українській РСР вона є російською, а в самостійній Україні – українською. Роблячи огляд за період Української РСР, тобто за 63 роки, слід зазначити, що державна російська мова в школах та вищих учбових закладах сприяла при переході від шкільного навчання до студентського. Разом з тим слід зазначити, що в шкільному навчанні на селах викладання велося українською мовою при досить високому рівні вивчення російської мови. Тому при переході випускників сільських шкіл до навчання у вищих учбових закладах або в університетах вони будуть мати тимчасові труднощі, головним чином з літератури Боголюбовської тематики. Отже, в цілому, в цей розглянутий період перехід від шкільного навчання молоді до студентського в державних університетах на наш погляд був достатньо плановим.

Boris I. Moseyenko, Yuri B. Moseyenko
Cand.Sci. (Phys. - Math.), Associate Professor

About the ideas, development of the asymptotic methods of nonlinear mechanics of the academic M.M. Bogolubov and the specifics of the application this knowledge in education of the students of the Ukrainian State universities

The paper deals with the history of creating of the asymptotic methods and their development concerning the investigation of nonlinear oscillations and the problems of mathematical physics. Here presence the participation of the mech.-math. department of the KNU in spreading these methods through the publishing text-books by Ukrainian language to be advisable for studying in Ukrainian State universities.

Key Words: asymptotic methods, nonlinear oscillations, the problems of mathematical physics.

В цей час молодий талановитий науковець М.М.Боголюбов під керівництвом академіка М.М.Крилова видає ряд наукових робіт, в яких започаткував ряд ідей та методів їх дослідження. М.М.Боголюбов ще у віці 19 років захистив дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук, а в 21 рік став доктором фізико-математичних наук. Крім основної роботи на кафедрі математичної фізики Української Академії наук з 1934 року він почав працювати в Київському університеті, де обіймав посаду професора (1934-1941 рр.), завідувачого кафедрою математичної фізики і декана механіко-математичного факультету (1944-1951 рр.).

Таким чином, великі наукові досягнення і слава академіка М.М.Боголюбова є часткою досягнень механіко-математичного факультету, в якому і з яким він працював. Слід зазначити, що ідеї та методи М.М.Боголюбова завжди знаходили багато прихильників та послідовників. Він започаткував багато нових наукових напрямків, а його праці сприяли створенню численних шкіл, як в СРСР, зокрема в Києві, так і за кордоном. В цей час Київською математичною школою керував М.М.Боголюбов, його помічником був його учень доктор фізико-математичних наук Ю.О.Митропольський, який після від'їзду до Москви М.М.Боголюбова по праву вважається одним із засновників всесвітньо відомої Київської

школи асимптотичних методів нелінійної механіки. Слід відзначити, що після переїзду М.М.Боголюбова до Москви під його керівництвом створюється Московська школа теоретичної фізики, ядерних досліджень та статистичної механіки. Через кілька років Московська школа М.М.Боголюбова стає знаменитою в теоретичних дослідженнях. Разом з Київською математичною школою, спілкуючись з нею, вони складають основу нових ідей розвитку науки і техніки. В результаті поширення цих ідей на студентську університетську молодь на багатьох факультетах: механіко-математичному, фізичному, радіофізичному та інших, створюються групи фахівців, а також знатоків цих ідей, які і стають керівниками цих груп. Таким чином розвивається наукова робота університетської молоді через наукові семінари, спецкурси, курсові та дипломні роботи, аспірантуру.

В київській школі Боголюбова-Митропольського корифеями асимптотичних методів нелінійної механіки стали керівник цієї школи Ю.О.Митропольський, а також порівняно молодий (з університетської молоді 60-х років) професор А.М.Самойленко. Оскільки цей період вище описаних умов розвитку ідей Боголюбова продовжувався понад 40 років (1950-1991 рр.), аж до розпаду СРСР, то відбулися значні зміни науковців. За цей час значно виросло число кваліфікованих кадрів – докторів та кандидатів наук в університетах та академічних інститутах, а також зросло число академіків та членкореспондентів АН УРСР. Більш того, ряд старших за віком фахівців пішло на пенсію, а деякі навіть із життя (наприклад М.М.Боголюбов помер у 1992 р.). До речі, автор цього розгляду доцент Б.І.Мосеєнков був вже на пенсії до розпаду СРСР в 1991 р. Таким чином, в час розпаду СРСР було вже дуже багато опубліковано в Українській РСР літератури по тематиці академіка М.М.Боголюбова, в тому числі фундаментальних робіт, тобто десятки монографій, але всі вони видані державною російською мовою.

Продовжуючи огляд розвитку ідей М.М. Боголюбова після розвалу СРСР, тобто в самостійній Україні (1991-2009 рр.) відзначимо наступне. Розвал СРСР призвів до шокового стану життя в усіх республіках. Комуністична верхівка в Українській РСР досягла здобуття самостійності України з державною українською мовою. В зв'язку з цим з 1992 р. почалася "українізація" середніх шкіл, а саме замість російських шкіл відкривалися українські, лишаючи по декілька російських шкіл на район. Ситуація такої перебудови досить складна: не хватало вчителів української

мови, мовний суржик учнів, мало було підручників українською мовою. Це були додаткові труднощі людей зайнятих в шкільному навчанні. Цей період тривав досить довгий час і на наш погляд займав біля 5-ти років (1992-1997 рр.). Велику допомогу шкільному навчанню надав Інститут математики НАН України підготувавши ряд підручників та задачників українською мовою. Таким чином, випускник 1997 р. середньої школи, закінчивши увесь курс навчання українською мовою, міг продовжувати навчання студентом державного університету теж українською мовою. Такі можливості є у всіх випускників середніх шкіл після 1997 р. Такий перехід у навчальному процесі молоді формально можна вважати плавним, але не аналізуючи можливостей вивчення ідей та методів М.М.Боголюбова. Справа в тому, що різноманіття ідей та методів М.М.Боголюбова і їх застосування викладені у багатьох десятках книжок російською мовою, що не тільки термінологічно незручно в навчанні українською мовою в державних університетах, але й важко охопити цей великий обсяг матеріалу для більш-менш достатньої освіти студентської молоді. Разом з тим слід відзначити, що до 1997 р. фахівці-спеціалісти Боголюбівських ідей у великому об'ємі розробили відповідні методи дослідження і застосування їх для ефективного використання в науці і техніці. Зокрема це стосується важливих та ефективних асимптотичних методів Боголюбова-Митропольського. Донести цю інформацію в більш-менш повному об'ємі на державній мові до студентської молоді державних університетів – задача дуже важлива. При цьому оживиться життя студентської молоді по опануванню нових асимптотичних методів нелінійної механіки шляхом слухання спецкурсів, участі у наукових семінарах, виконання курсових та дипломних робіт та при навчанні в аспірантурі.

2. Специфіка створення навчальних посібників та їх короткий зміст.

Таким чином у фахівців – спеціалістів асимптотичних методів нелінійної механіки, співробітників механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка виникла ідея видання навчальних посібників для державних університетів українською мовою. По своєму змісту ці посібники повинні охоплювати багато методичних розробок з асимптотичних методів до відповідних задач та їх застосувань у важливих галузях науки і техніки. Отже, ці роботи науково-методичного характеру є трудомісткими і вимагають належних знань ідей та методів Боголюбова. По рекомендації доцента Мосеєнкова Б.І. механіко-мате-

матичний факультет доручив виконувати цю роботу доценту Мосєєнкову Ю.Б. Мотивування цього доручення:

1. Оскільки старий за віком пенсіонер доцент Мосєєнков Б.І. являється батьком рекомендованого виконавця і має в співавторстві з академіком Ю.О.Митропольським 4 монографії з вище зазначеної тематики на 3-х мовах (одна з них видана в США) загальним об'ємом 1230 сторінок, то робота рекомендованого виконавця буде керована зі сторони батька у формі порад;
2. Виконавець доцент Мосєєнков Ю.Б. – повний сил, вивчив асимптотичні методи нелінійної механіки, працездатний, бездоганно володіє комп'ютерною технікою для підготовки матеріалу посібників;
3. Син виконавця магістр математики Мосєєнков В.Ю. – чудовий комп'ютерщик, якого можна залучити для технічної допомоги.

В погодженні з вище вказаним доцент Мосєєнков Ю.Б. в 1998 р. розпочав підготовку до навчального посібника відносно задач коливого руху в системах зі скінченим числом степенів вільності. В результаті в 2001 р. надруковано навчальний посібник: Мосєєнков Ю.Б. "Асимптотичні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, систем звичайних диференціальних рівнянь та їх практичне застосування" (Частина 1) – 93 стор. Посібник присвячено вивченню асимптотичних методів інтегрування нелінійних автономних та неавтономних диференціальних рівнянь теорії коливань, створених академіками М.М. Боголюбовим та Ю.О.Митропольським. Посібник вищевказаної назви (Частини 1 та 2) рекомендовані Вченою радою механіко-математичного факультету 17 червня 1999 р.

У розділі I посібника (Частина 1) чітко і стисло викладені ідеї та методика асимптотичного інтегрування нелінійних автономних диференціальних рівнянь, досліджені стаціонарні режими коливань та їх стійкість. У розділі II цього ж посібника розглядається нелінійне неавтономне диференціальне рівняння при наявності малого періодичного збурення, для якого викладено методику побудови асимптотичних розв'язків і її специфіка стосовно нерезонансного, резонансного та загального випадків. Навчальний посібник (Частина 1) розрахований для студентів, аспірантів, викладачів механіко-математичних, радіофізичних, фізичних факультетів.

В кінці 2001 року вийшла друга частина посібника вище вказаної назви (Частина 2) доцента Ю.Б.Мосєєнкова в тому ж видавництві, що і навчальний посібник (Частина 1), а саме: Видавничо-поліграфічний центр "Київський універ-

ситет", 79. В ньому повторно вказано, що посібник присвячено вивченню асимптотичних методів інтегрування нелінійних автономних та неавтономних диференціальних рівнянь теорії коливань, створених академіками М.М. Боголюбовим та Ю.О.Митропольським, які працювали на механіко-математичному факультеті Київського університету.

У розділі III розглядається асимптотичне інтегрування квазілінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, зокрема, побудова асимптотичних розв'язків для автономних та неавтономних нелінійних коливальних систем. У розділі IV досліджуються нестационарні одно-частотні режими коливань у системах з N ступенями вільності. Стисло викладений принцип одно-частотності. Розглянуті системи з багатьма ступенями вільності та повільно змінними параметрами. Розділ V присвячений застосуванню енергетичного методу побудови асимптотичних розв'язків при дослідженні одно-частотних режимів коливань в системах з багатьма ступенями вільності. Розглянуте застосування цього методу до коливальних систем з N ступенями вільності та систем з розподіленими параметрами. Цей посібник розраховано на тих же осіб, що і посібник (Частина 1).

В результаті використання вище зазначеного посібника (Частини 1 та 2) в навчанні студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в 2001 – 2004 рр. переконалися в його ефективності. Але в цей же час виникають нові проблеми і потреби значно розширити тематику цього посібника на широкий клас коливальних систем з розподіленими параметрами, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Іншими словами, виникла потреба поширити застосування асимптотичного інтегрування цих задач, які є задачами математичної фізики. В термінології математичної фізики – це крайові задачі та змішані крайові задачі. За це досить нелегке завдання, маючи певний досвід створення навчальних посібників, взявся і працював з 2004 р. доцент Ю.Б.Мосєєнков. В результаті він в кінці 2007 р. видав новий навчальний посібник: Ю.Б.Мосєєнков "Асимптотичні методи інтегрування диференціальних рівнянь в частинних похідних та їх застосування для задач математичної фізики" (Частина 1) – 95 стор. у тому ж видавництві, що і попередній навчальний посібник (Частина 1 та 2), а саме: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Посібник вищевказаної назви (Частини 1) реко-

мендований Вченою радою механіко-математичного факультету 12 лютого 2007 р.

Цей посібник присвячено вивченню асимптотичних методів нелінійної механіки в їх розвитку стосовно дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань в системах з розподіленими параметрами, які описуються рівняннями в частинних похідних. У посібнику міститься стислий виклад результатів по цій тематиці. Велику увагу приділено таким важливим розділам теорії нелінійних коливань систем з розподіленими параметрами, як нелінійним крайовим задачам з урахуванням нелінійностей в рівняннях руху та крайових умовах. Поряд з теоретичними дослідженнями асимптотичних методів стосовно різних класів рівнянь, за розробленими схемами розв'язується ряд практично важливих задач.

У вступній частині посібника проведений необхідний розгляд термінологічних відомостей та понять, а також проведене методологічне знайомство з підходами при дослідженні асимптотичними методами рівнянь в частинних похідних.

В розділі I розглянуті такі важливі теми: принцип одно-частотності в теорії нелінійних коливань та традиційні методи дослідження, а саме: а) загальний метод побудови асимптотичних розв'язків; б) метод гармонічного балансу; в) метод усереднення; б) енергетичний та його поширення при дослідженні систем з розподіленими параметрами. В результаті дослідження двох-частотні нестаціонарні коливання в нелінійних системах з розподіленими параметрами: балка на пружній основі та платівка зі зосередженими масами, що лежить на нелінійно пружній основі і знаходиться під дією збурюючих сил. У розділі II розглядається побудова наближених розв'язків нелінійних змішаних крайових задач, а також нелінійних крайових задач. Крім того, в цьому розділі розглянуто побудову і структуру асимптотичних наближених розв'язків нелінійних змішаних крайових задач при дослідженні багаточастотних режимів коливань. Згідно з вказівкою автора та рецензентів вищеназваний навчальний посібник (Частина 1) рекомендовано для студентів старших курсів, аспірантів та викладачів механіко-математичних, радіофізичних та фізичних факультетів державних університетів України та усім тим особам, що цікавляться проблемами теорії нелінійних коливань і застосуваннями асимптотичних методів до задач математичної фізики.

Слід відмітити, що після підготовки посібника (Частина 1) доцент Мосєєнков Ю.Б. у 2007 – 2008 рр. працює над написанням другої частини посібника (Частина 2) вище наведеної назви. При

цьому розширюється тематика застосування асимптотичних методів нелінійної механіки при розв'язуванні більш складних задач математичної фізики. Зокрема, розглядаються важливі задачі, які мають безпосередньо промислово-технічне застосування, а також нетрадиційні задачі, що пов'язані з урахуванням випадкових сил. Специфіка останніх пов'язана зі складністю відповідних диференціальних рівнянь, так званих стохастичних. Таким чином розглянуто певний комплект цікавих крайових задач в Розділі 3.

Переходячи до розгляду нетрадиційних змішаних крайових задач математичної фізики в Розділі 4 при дослідженні диференціальних рівнянь з випадковими функціями, так званих стохастичних, відмітимо їх дуже широке і важливе технічне застосування. На детальному дослідженні цих рівнянь, про зв'язок коливних рухів з марківськими випадковими процесами, про щільність розподілу ймовірностей, які задовольняють рівнянню Колмогорова-Фоккера-Планка [КФП], про можливість застосування методу усереднення та інших питаннях теорії ймовірностей ми не зупиняємося, відсилаючи читача до відповідної літератури.

В першому пункті Розділу 4 розглядається вплив випадкових збурень на одно-частотні режими нелінійних коливань в автономних системах з розподіленими параметрами, які описуються нелінійним квазіхвильовим стохастичним диференціальним рівнянням в частинних похідних, близьким до лінійного гіперболічного з лінійними крайовими та звичайними початковими умовами. Завдяки методу усереднення рівняння [КФП] стають значно простішими і дають змогу проаналізувати деякі види випадкових збурень. У другому пункті Розділу 4 викладена схема дослідження одно-частотних режимів нелінійних коливань в неавтономних системах з розподіленими параметрами, на які одночасно діють розподілені періодичні та випадкові сили. При розгляді виділяють при певних початкових умовах нерезонансний і резонансний випадки. При цьому в нерезонансному випадку неавтономну систему можна звести усередненням по часу t до автономної – значно простішої. Ефективність методики ілюструється на наведеному цікавому прикладі. В резонансному випадку при відсутності внутрішніх резонансів схема розв'язку зводиться до розв'язку крайових задач без врахування початкових умов випадкових збурень. Рівняння [КФП] у резонансному випадку відрізняються від нерезонансного. Вони являються більш складними і це заважає отриманню їх аналітичного розв'язку в загальному випадку. Тому для цього випадку

слід використовувати чисельний аналіз диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тому при розв'язуванні нових нетрадиційних задач математичної фізики в Частині 2 посібника представлена необхідна для вивчення література відповідних розділів асимптотичних методів нелінійної механіки.

В Розділі 3 розглядаються нестационарні коливання неавтономних систем з розподіленими параметрами, які описуються нелінійними змішаними крайовими задачами. При дослідженні одно-частотних та багато-частотних коливань слід зазначити, що фізичними передумовами їх виникнення є наявність збурень миттєвого характеру певної структури в певний момент часу (див. Розділ 2, Частини 1), а подальший розвиток цих режимів коливань відбувається при наявності збурень періодичного (чи квазіперіодичного) характеру з резонансними частотами, близькими до частот збуджених власних коливань в початковий момент часу. Отже, при наявності в нелінійній системі збурень вищеназваних видів (періодичних сил з резонансними частотами та миттєвих) слід розробити схему побудови асимптотичних розв'язків, яка в попередніх розділах не розглядалась. Тому саме при врахуванні миттєвих збурень необхідний асимптотичний розв'язок задачі Коші у відповідній постановці. Надалі при дослідженні одно-частотних режимів коливань в неавтономних змішаних крайових задачах викладений асимптотичний розв'язок задачі Коші. Крім того, розглянута схема побудови розв'язку задачі Коші асимптотичними методами при дослідженні двох-частотних режимів коливань в системах з розподіленими параметрами. В кінці Розділа 3 викладена промислово-технічна крайова задача широкого застосування про дослідження нестационарних коливань стержня з нелінійно закріпленими кінцями в умовах резонансу під дією пульсуючих сил. При цьому враховується вплив на згин ні коливання стержня таких збурень: нелінійний закон пружності матеріалу стержня (по Каудереру); мала нелінійність пружного кріплення кінців стержня відносно зміщення та повороту; мала в'язка протидія середовища (за лінійним законом); дія повздовжньої (осьової) сили $F(t) = B(\tau) \cos \theta$ (в умовах можливого параметричного резонансу); мале пульсуюче поперечне навантаження $q(t) = B_1(\tau) \sin \theta$ (в умовах резонансу з одною з власних частот стержня).

Нарешті зупинимося на розгляді пункту 3 Розділу 4 "Дослідження одно-частотних режимів власних нелінійних коливань стержнів з врахуванням випадкових збурень". Дослідження коли-

вань балок (стержнів) приводить до нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних четвертого порядку з випадковими параметрами і функціями та додатковими крайовими та початковими умовами, тобто до змішаних крайових задач математичної фізики відповідного вигляду. При подальшому розгляді збуреної системи ($\varepsilon \neq 0$) розглянемо незбурену систему ($\varepsilon = 0$), яка допускає застосування методу розділення змінних (методу Фур'є) і отримання частинного розв'язку у вигляді двох-параметричної сім'ї розв'язків: $u_0(x, t) = u_k^0 X_k(x) \cos(\omega_k t + \theta_k^0)$.

А далі розглянемо одно-частотні коливання вихідної збуреної системи, близької до k -го нормального коливання незбуреної системи. Розшукуючи розв'язок цієї автономної системи в першому наближенні і використовуючи викладену раніше методику для таких систем, приходимо до системи амплітудно-фазових стохастичних диференціальних рівнянь відносно a і θ , дослідження яких проводиться за певним законом, користуючись стаціонарною щільністю розподілу ймовірності амплітуди $W_0^{(1)}(a)$ та аналізом рівняння [КФП].

В кінці розгляду 3-го пункту наведені п'ять частинних випадків розглянутої змішаної крайової задачі при різних випадкових та інших збуреннях. За наведеною методикою встановлено в двох перших випадках відсутність стійких випадкових коливань, а в трьох останніх - можливість стійких випадкових коливань з визначеною для них амплітудою.

На завершення Розділу 4 в посібнику (Частина 2) представлений Додаток до Розділу 4 об'ємом 13 сторінок, де викладені більш детально посторінкові викладки про стохастичні диференціальні рівняння та їх перетворення при розв'язанні асимптотичними методами. Отже, структура цього Додатка є посторінкове роз'яснення тих не зовсім зрозумілих викладок шляхом їх доповнення. В ньому названі 6 сторінок даного Розділу, для яких вони зроблені.

Таким чином в середині 2008 року завершено видання навчального посібника (Частина 2) – 110 стор. для задач математичної фізики, який рекомендований Вченою Радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка 16 січня 2008 року для студентів та викладачів державних університетів. Комп'ютерна можливість швидкого поширення матеріалу навчальних посібників серед державних університетів сприяє використанню наукових посібників, виданих у Ки-

ївському національному університеті імені Тараса Шевченка, у всіх державних університетах України.

Підводячи підсумки по Частині 2 цієї роботи, слід відзначити, що в двох випусках навчального посібника механіко-математичного факультету, кожен з яких складається з двох частин (Частина 1 та 2), загальний об'єм цих методичних розробок стосовно ідей та методів М.М.Боголюбова досить вагомий, бо складає біля 400 сторінок, тобто умовний том навчального посібника державною українською мовою.

3. Видання українською мовою монографій корифеями асимптотичних методів.

Тепер зупинимось на виданнях монографічної літератури українською мовою на обох етапах розвитку ідей та методів М.М.Боголюбова. На першому етапі Української РСР відомі два випадки: 1) М.М.Боголюбов у 1934 р. працював в системі Академії наук УРСР в галузі математичної фізики, зокрема нелінійної механіки, користуючись великим авторитетом. В друкарні Академії наук УРСР погодилися видати результати його нових досліджень. Тоді М.М.Боголюбов у авторстві своїм вчителем академіком М.М.Криловим видає в 1934 р. фундаментальну роботу (монографію). Академік М.М.Крилов і доктор фізико-математичних наук М.М.Боголюбов "Про деякі формальні розклади нелінійної механіки" українською мовою; 2) В 1955 р. аспірант Б.І.Мосеєнков успішно захистив кандидатську дисертацію по асимптотичним методам нелінійної механіки (науковий керівник - доктор фізико-математичних наук Ю.О. Митропольський). Запланувавши розширити наукову тематику захищеної дисертації і погодивши це питання з Ю.О.Митропольським, керівництвом механіко-математичного факультету та видавництвом Київського державного університету, в 1961 р. Б.І.Мосеєнков у видавництві КДУ в співавторстві публікує монографію: Ю.О.Митропольський, Б.І.Мосеєнков "Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи)" українською мовою. Отже на першому етапі Української РСР у корифеїв Боголюбівських ідей та методів, які пізніше стали відомими академіками, тобто у М.М.Боголюбова і Ю.О.Митропольського, видано по одній монографії державною мовою сучасної самостійної України. Мабуть не буде помилкою, коли скажемо, що таких робіт було зовсім мало на першому етапі, тобто лише одиниці.

На другому етапі самостійної України видання державною мовою монографій по розвитку ідей та методів М.М. Боголюбова полегшується,

але не є визначальним. Зараз на другому етапі корифеєм цих методів і творцем нових методологій є директор Інституту математики НАН України академік НАН України А.М. Самойленко. Тому нижче розглянемо його роботи.

Перше видання монографії А.М. Самойленко, Р.І.Петришин "Багато-частотні коливання нелінійних систем" було в 1998 р., а автори читали спецкурси відповідно в Київському та Чернівецькому університетах. Пізніше ця книга була розширена і в 2001 р. видана фундаментальна монографія А.М. Самойленко, Р.І.Петришин "Математичні аспекти теорії нелінійних коливань", яка присвячена дослідженню багато-частотних нелінійних коливань систем звичайних диференціальних рівнянь. Крім того, у А.М. Самойленка напередодні 2002 р. вийшла ще одна монографія українською мовою: А.М. Самойленко, Я.Л.Прикарпатський "Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегрованих динамічних систем та їх збурень". Про інші видання монографій з Боголюбівської тематики українською мовою на другому етапі нам не відомо. Якщо вони і є, то їх також мало.

4. Побажання покращення роботи направленої на розвиток ідей та методів

М.М.Боголюбова в державних університетах.

Необхідно збільшити кількість фундаментальних робіт виданих українською мовою по застосуванню асимптотичних методів до важливих технічних задач математичної фізики, які мають практичне застосування. Це можна зробити шляхом перегляду монографій, що видані російською мовою, виділення з них певної кількості потрібних та перекладу останніх на українську мову. Такий підхід дозволить створити бібліотечну базу на державній мові в державних університетах і сприятиме заохоченню студентської молоді займатися асимптотичними методами нелінійної механіки при розв'язанні задач математичної фізики. Цей переклад монографій з російської мови на українську матеріально себе виправдає.

Надійшла до редколегії 15.05.09

УДК 303.732.4:510.67:539.3

Надія В. Сахно, зав. лаб.,
Олексій Г. Куценко, к. ф.-м. н., доцент,
Олексій М. Харитонов, к. ф.-м. н., доцент,
Ігор М. Каденко, д. ф.-м. н., професор

**Визначення критичних розмірів
несуцільностей в теплообмінних трубах
парогенераторів АЕС з ВВЕР для
обґрунтування критерію глушіння труб**

В статті побудований чисельно-аналітичний розв'язок задачі термопружності, пов'язаної з визначенням напружено-деформованого стану стінок теплообмінної трубки (ТОТ) парогенераторів (ПГ), зумовленого спільною дією тисків першого і другого контуру та температурних градієнтів на стінки ТОТ. На основі отриманих результатів, використовуючи методи механіки крихкого руйнування, визначено умови стабільного стану тріщини, що можуть бути використані при формулюванні критеріїв глушіння ТОТ ПГ.

Ключові слова: неруйнівний контроль, АЕС, задача теплопровідності, коефіцієнт інтенсивності напружень.

N.V. Sakhno, Head, Lab.,
O.G. Kutsenko, C.Sci. (Ph.-M.), Associate Prof.,
O.M. Kharytonov, C.Sci. (Ph.-M.), Associate Prof.,
I.M. Kadenko, D.Sci. (Ph.-M.), Professor

**Determination of flaw critical sizes at steam
generator heat exchanging tubes of NPPs with
VVER for justification of tube plugging criterion**

The semianalytical solutions of thermoelasticity problem concerning determination of steam generator (SG) heat exchanging tube wall stress field due to joint effect of primary and secondary circuit pressures and temperature gradients at heat exchanging tube material are developed. Using fracture mechanic approach and based on obtained solution the conditions of cracks stability are determined. These conditions can be used to justify the SG tube plugging criterion.

Key Words: Nondestructive testing, NPP, task of heat conductivity, stress intensity factor.

E-mail: NDEF.Office@gmail.com, alex_kutz@univ.kiev.ua, kharytonov@univ.kiev.ua

Статтю представила кафедра механіки суцільних середовищ

1. Вступ

Однією з найбільш актуальних проблем безпечної та надійної експлуатації блоків АЕС з реакторами типу ВВЕР є розробка критеріїв виведення з експлуатації теплообмінних труб (ТОТ) парогенераторів (ПГ) з несцільностями. Враховуючи, що економічні втрати від відмови ПГ є дуже високими, задача розробки програми експлуатаційного контролю стану ПГ та коректного критерію виведення з експлуатації дефектних ТОТ ПГ є надзвичайно актуальною.

Практично всі підходи до розробки критерію виведення з експлуатації ТОТ ПГ пов'язані з визначенням критичних розмірів несцільностей, що з'являються у ТОТ ПГ внаслідок деградаційних процесів металу стінок [1]. Дані експлуатаційного контролю свідчать про те, що на зовнішній поверхні труби можуть виникати та зростати з часом повздовжні тріщини втоми. Закінчення терміну експлуатації ТОТ може пов'язуватися з досягненням тріщиною критичних розмірів, при яких вона стає нестабільною для навантажень, що виникають за

нормальних умов експлуатації або аварійних ситуацій. Зазначимо, що в [1] було проведено експериментальне дослідження зародження та розвитку дефектів в ТОТ ПГ, яке ґрунтувалося на вивченні водно-хімічного режиму експлуатації ТОТ.

В даній роботі виконано аналітичні дослідження умов стабільного стану несцільностей в ТОТ ПГ. При аналізі умов стабільності у відповідності до сучасних підходів [2] типові реальні несцільності схематизувалися як напівеліптичні поверхневі тріщини. У відповідності до основних положень механіки руйнування у якості параметра, що визначає стан ТОТ ПГ, був вибраний коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН).

Таким чином, розглядається задача визначення КІН для зовнішніх поверхневих дефектів у стінках ТОТ та встановлення їх критичних розмірів для нормальних умов експлуатації енергоблоку з реакторами ВВЕР. Для знаходження значень КІН необхідно визначити поля температури та напружень, які

виникають в ТОТ внаслідок дії тиску та температурних градієнтів.

2. Постановка задачі

Задача термопружності розв'язувалася загальноприйнятим шляхом, який включає два кроки. На першому кроці знаходився розв'язок задачі теплопровідності, тобто визначалося температурне поле в стінці ТОТ (рис. 1). На другому кроці отримане температурне поле використовувалося для знаходження величин механічних напружень.

Таблиця 1. Геометричні та фізичні параметри ТОТ ПГ з ВВЕР-1000

Внутрішній радіус ТОТ, a , мм	6.5
Зовнішній радіус ТОТ, b , мм	8
Довжина ТОТ, L , м	10-15
Внутрішній (перший контур) тиск, p_{int} , МПа	15.7
Зовнішній (другий контур) тиск, p_{ext} , МПа	6.4
Температура теплоносія першого контуру на вході, $T_{in}(0)$, °C	320
Температура теплоносія першого контуру на виході, $T_{in}(L)$, °C	290
Температура води другого контуру, T_{out} , °C	280
Швидкість руху теплоносія в першому контурі у трубі (всередині ТОТ), V , м/с	3.69
Число Рейнольдса, Re	$\approx 4 \times 10^5$
Число Прандтля, Pr	0.88
Коефіцієнт теплопровідності теплоносія I контуру при 300°C, λ_{in} , В/(м·К)	0.55
Матеріал стінки труби	08X18H10T
Коефіцієнт лінійного розширення матеріалу ТОТ при 300°C, α , К ⁻¹	17.4×10^{-6}
Модуль Юнга матеріалу ТОТ при 300°C, E , Па	1.8×10^{11}
Коефіцієнт Пуассона матеріалу ТОТ при 300°C, μ	0.3

Вважалося, що температурне поле в стінці ТОТ є стаціонарним та осесиметричним. Зроблене припущення цілком відповідає нормальним умовам експлуатації.

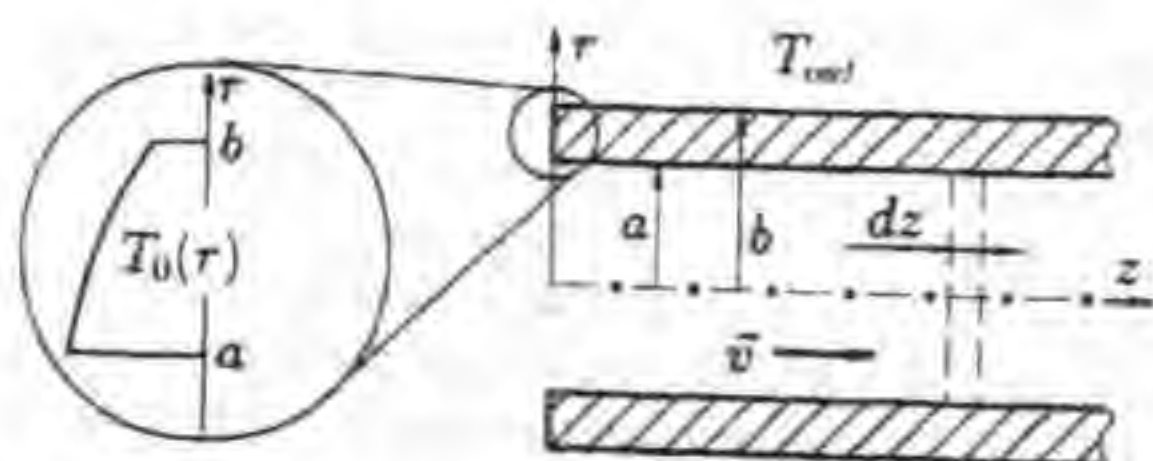


Рис. 1. До задачі визначення температурного поля в стінці ТОТ

Температурне поле в стінці труби описується рівнянням теплопровідності [3]. В циліндричній системі координат, що пов'язана з ТОТ, в осесиметричному випадку рівняння Лапласа може бути записане у вигляді

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

де r та z – радіальна та поздовжня координати (рис. 1).

Рівняння (1) необхідно доповнити відповідними граничними умовами. Зауважимо, що рух теплоносія у першому контурі в ТОТ є суттєво турбулентним, тобто всередині ТОТ відбувається інтенсивне змішування, отже можна вважати, що температура теплоносія в ТОТ ПГ зі сторони першого контуру T_m є постійною і рівною середньомасовій температурі в даному поперечному перерізі, але змінюється в осьовому напрямку: $T_m = T_m(z)$.

Для дослідження процесу передачі тепла в твердому тілі, що обтікається рідиною, звичайно застосовують граничні умови III роду [3], що впливають із законів Фур'є та збереження енергії:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = \alpha_c (T - T_m), \quad (2)$$

де α_c – коефіцієнт тепловіддачі теплоносія, $\vec{n}$ – внутрішня нормаль до поверхні тіла; S – поверхня твердого тіла (ТОТ). На основі даних, наведених в таблиці 1, та рівняння Діттуса-Болтера [5] було знайдено, що $\alpha_c = 2,8 \times 10^4$ В/(м²·К), тобто значення коефіцієнта тепловіддачі є дуже високим. Тому можна замінити граничну умову III роду (2) граничною умовою I роду

$$T|_{r=a} = T_m(z). \quad (4)$$

Така заміна збільшує консерватизм обмежень, що накладаються на розміри допустимого дефекту.

Оскільки у нашому випадку функцію $T_m(z)$ не задано наперед, то умова (4) є незамкнутою. Для замикання граничної умови використаємо умову теплового балансу енергії для малого об'єму теплоносія в трубі довжиною dz (рис. 1), через поперечний внутрішній об'єм якої за одиницю часу протікає маса рідини $\gamma_p a^2 \pi V$, де γ_p – густина рідини, а V – швидкість потоку [8]. Ця маса рідини на ділянці довжиною dz охолоджується, і, як наслідок, температура рідини знижується на величину $\frac{dT_m}{dz} dz$. При

цьому кількість тепла, що віддається теплоносієм внутрішній стінці ТОТ, рівна

$$dq = -A \frac{dT_m}{dz} dz, \quad (5)$$

де

$$A = \gamma_p a^2 \pi V c_p,$$

c_p – теплоємність рідини.

З іншого боку [7], потік тепла від теплоносія до стінки труби підпорядковується закону Фур'є, а тому тепловий потік від рідини до трубки, що проходить через її циліндричну внутрішню поверхню довжиною dz , рівний

$$dq = -B \left(\frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=a} dz, \quad (6)$$

де $B = 2\pi\lambda$.

З урахуванням співвідношень (5) та (6), граничну умову (4) для внутрішньої поверхні труби можна представити у вигляді

$$H \frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dz}, \quad r = a. \quad (7)$$

$$\text{де } H = \frac{2\lambda}{\gamma_p a V c_p}.$$

Враховуючи, що значення температури теплоносія на виході з трубки є відомим, значення сталої H , було визначене шляхом ітераційних уточнень і виявилось рівним 2×10^{-4} .

На зовнішній поверхні трубки вважалось, що температура є фіксованою і рівною значенню температури теплоносія другого контуру парогенератора $T_{out} = 280^\circ\text{C}$, тобто

$$T|_{r=b} = T_{out}. \quad (8)$$

Граничні умови (7) та (8) доповнювалися в певному сенсі початковою умовою, а саме

$$T|_{z=0} = T_0(r), \quad (9)$$

де $T_0(r)$ – початковий розподіл температури за глибиною стінки в перерізі приварювання ТОТ до колектору ПГ (рис. 1). Метод визначення $T_0(r)$ наведено нижче.

3. Розв'язок задачі

Рівняння (1), доповнене умовами (7)–(9), розв'язувалося за методом розділення змінних Фур'є [7]. Для цього задача була сформульована відносно температурного поля $\tilde{T}$, яке утворюється з шуканого зміщенням нульового рівня на значення T_{out} :

$$\tilde{T}(r, z) = T(r, z) - T_{out}.$$

Постановка задачі для невідомої температури $\tilde{T}$ легко виводиться з постановки задачі для T : рівняння (1) та гранична умова (7) не змінюють свого вигляду, а в умовах (8) та (9) від правих частин потрібно відняти T_{out} . Температурне поле $\tilde{T}$ вирізняється тим, що для нього виконується умова $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{T} = 0$.

На основі методу розділення змінних частинний розв'язок рівняння для $\tilde{T}$ може бути одержаний у вигляді

$$\tilde{T}(r, z) = GU_0(\omega r) \cdot e^{-\omega z}, \quad (10)$$

$$\text{де } U_i(\omega r) = \frac{J_i(\omega r)}{J_i(\omega b)} - \frac{Y_i(\omega r)}{Y_i(\omega b)}, \quad i = 0, 1, \quad G - \text{деяка}$$

стала, J_i – функція Бесселя першого роду та порядку i , Y_i – функція Бесселя другого роду та порядку i .

Підставляючи (10) в граничну умову (7), для визначення власних чисел ω одержуємо рівняння

$$HU_1(\omega a) = U_0(\omega a). \quad (11)$$

Рівняння (11) має нескінченну множину коренів ω_n , $n=1, 2, \dots$, тобто, маємо нескінченну множину часткових розв'язків типу (10). Вони отримані як розв'язок граничної задачі, а тому утворюють повну систему функцій. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (1) можна представити як їх суперпозицію

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n U_0(\omega_n r) \cdot e^{-\omega_n z} + T_{out}. \quad (12)$$

де $a < r < b$, $z > 0$.

Значення коефіцієнтів G_n визначаються з початкової умови (9), яка після підстановки у неї (12) приймає вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n U_0(\omega_n r) = T_0(r) - T_{out}, \quad a < r < b.$$

Отже, температурне поле в стінці ТОТ визначається зі співвідношення (12). Проте для знаходження однозначного розв'язку має бути визначено початковий температурний профіль $T_0(r)$. Для його визначення застосовувався наступний метод простих ітерацій. На першому кроці першої ітерації розв'язувалася задача теплопровідності (1), (7)–(9) з довільним розподілом температури $T_0(r)$. На другому кроці враховувалися реальні умови стикування труби з гарячим колектором (рис. 2). Розв'язувалася осесиметрична задача стаціонарної теплопровідності для області, що складається з прямокутників $ABCD$ та $AEFG$. На сторонах AB та BC задавалися розподіли температур, отримані на першому кроці даної ітерації. На сторонах AG та FG задавалася вхідна температура теплоносія $T_{in}(0)$, а на сторонах CD та DE – температура другого контуру T_{out} . Крім того, на стороні EF температура розподілялася за лінійним законом (від T_{out} в точці E до $T_{in}(0)$ в точці F). Таким чином, оскільки на всій границі області температура була заданою, то задача, що розв'язувалася на другому кроці ітерації, була класичною задачею Діріхле. В результаті її розв'язку знаходилося температурне поле в усій області, в тому числі і на відрізку AD . Останнє слугувало за початковий розподіл $T_0(r)$ для наступної ітерації і т.п. Процес уточнення

припинявся, коли відхилення між двома послідовними розподілами $T_0(r)$ ставало менше фіксованого значення.

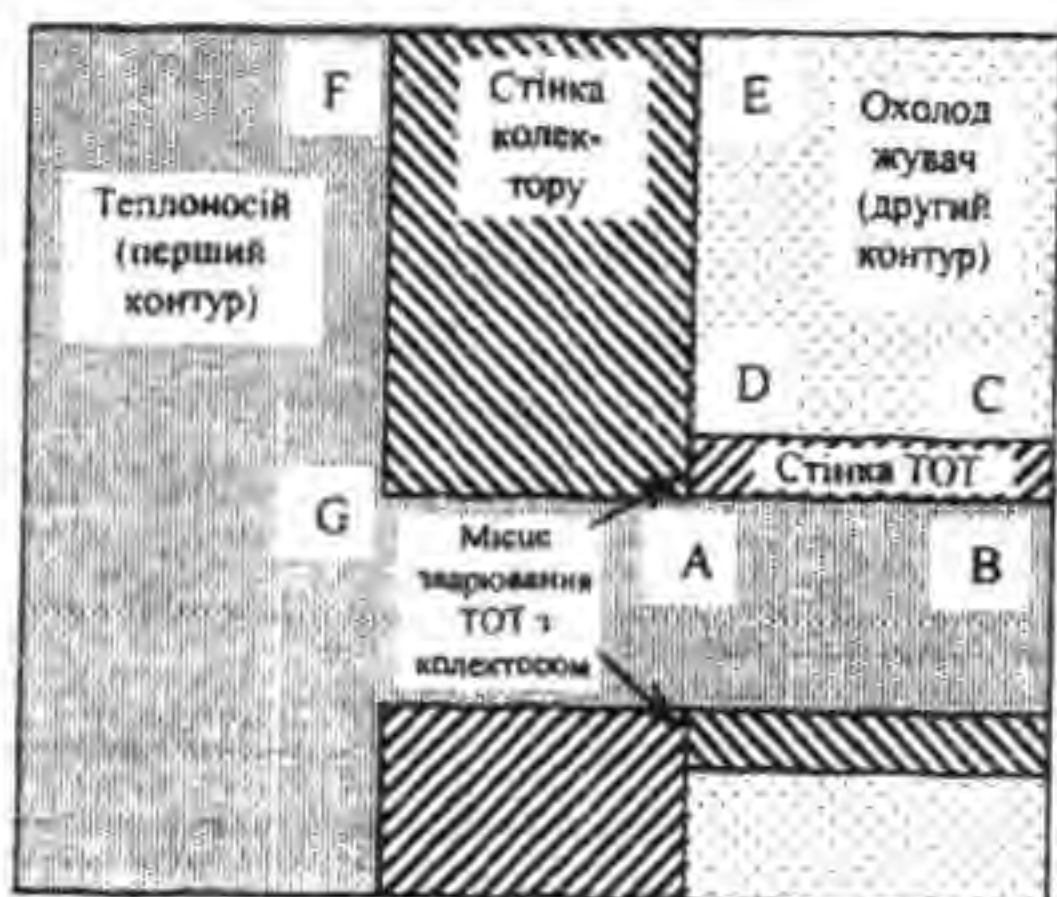


Рис. 2. Геометрія задачі Діріхле

У наших розрахунках як перше наближення $T_0(r)$ був вибраний лінійний розподіл (від T_{int} в точці D до $T_{ext}(0)$ в точці A). Ітераційний процес зійшовся вже на другій ітерації. Отриманий профіль $T_0(r)$ (суцільна крива) представлено на рис. 3 у порівнянні з лінійним профілем (пунктирна лінія). Як видно з рисунку, відхилення $T_0(r)$ від лінійного розподілу є несуттєвим.

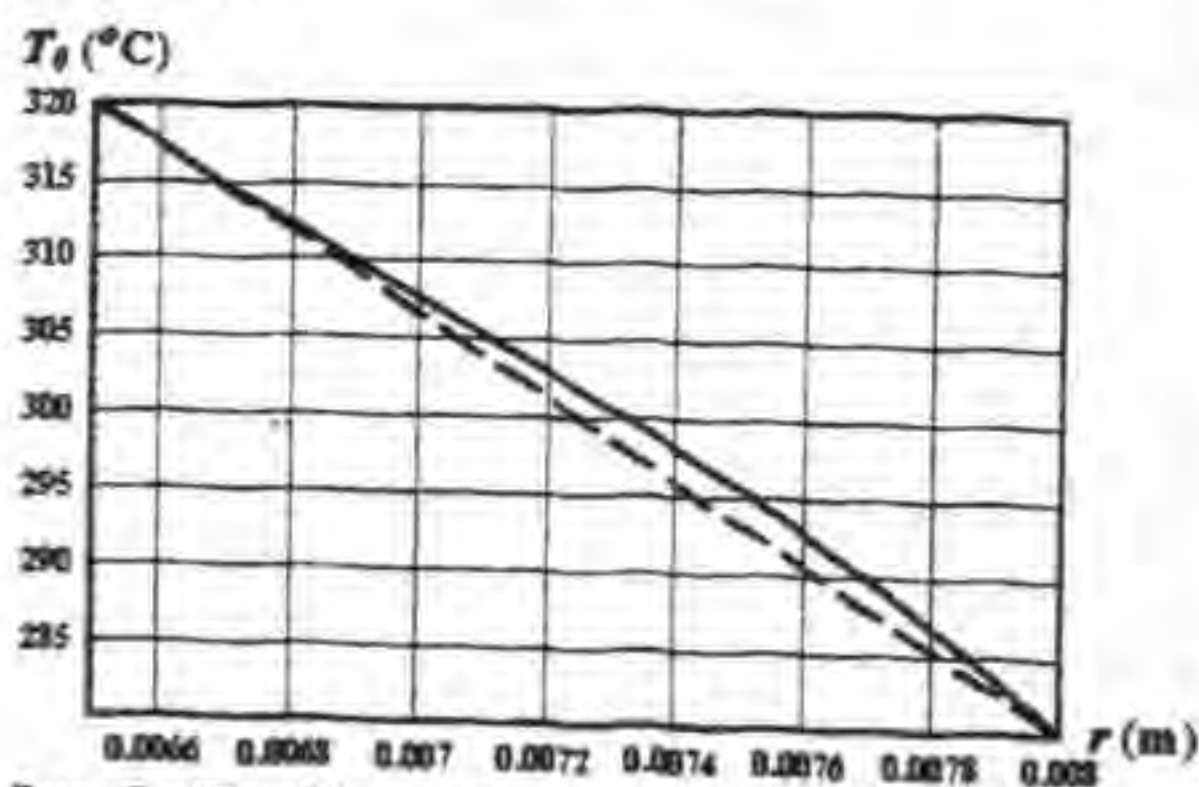


Рис. 3. Профіль початкової температури у стінці труби

Поле температури у стінці труби ПГ було побудовано, використовуючи (12). Розподіл температури на внутрішній поверхні труби вздовж її вісі представлено на рис. 4. З рис. 3 та рис. 4 можна зробити висновок, що градієнт температури в напрямку осі ТОТ є незначним у порівнянні з градієнтом у радіальному напрямку. Таким чином, при визначенні температурних напружень у довільному перерізі стінки труби, зміною температур в аксіальному напрямку можна знехтувати.

Після визначення температури, тобто коефіцієнтів G_m можна переходити до

визначення напружень. За умов, коли на боковій поверхні труби відсутнє навантаження, напруження можна знайти аналогічно методу, представленому у [7]. У нашому випадку на внутрішній і зовнішній поверхнях прикладено тиск з боку теплоносіїв першого та другого контурів, тому будемо визначати напруження наступним чином. Загальний напружений стан у стінці труби ПГ представимо у вигляді суперпозиції температурних напружень та напружень, зумовлених дією тисків на внутрішній та зовнішній поверхнях ТОТ ПГ.

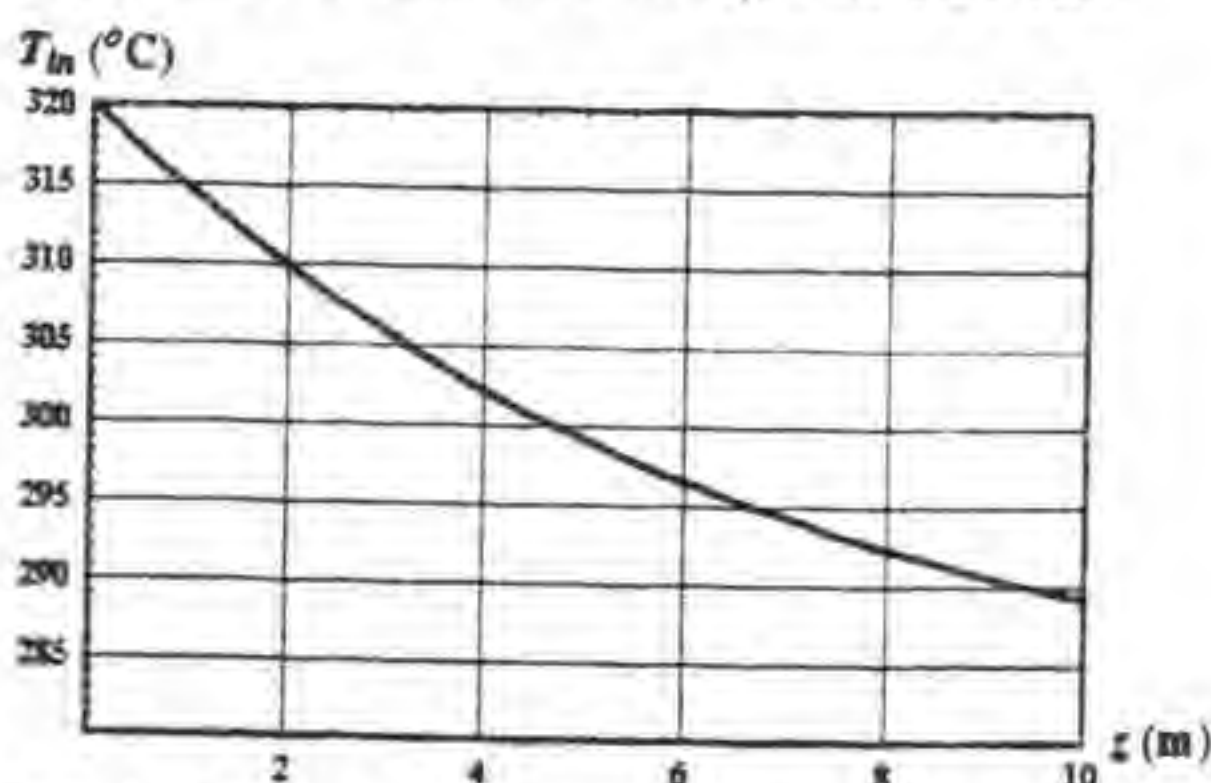


Рис. 4. Розподіл температури на внутрішній поверхні у повздовжньому напрямку труби

Оскільки впливом поздовжнього температурного градієнта на розподіл напружень можна знехтувати, температурні напруження в кожному фіксованому перерізі можуть бути визначені з відомого [9] розв'язку задачі термопружності для пустотілого циліндру з заданою температурою на внутрішній та зовнішній поверхнях. Даний розв'язок чисельно практично не відрізняється від точного розподілу напружень, наведеного в [7]. Розподіл кільцевих напружень задається співвідношенням

$$\sigma_r^T(r) = -\frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu)} \left(\frac{\log \frac{b}{r} - 1}{\log \frac{b}{a}} + \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right), \quad (13)$$

де $a < r < b$, $\sigma_r^T(r)$ – температурна складова кільцевих напружень, α – коефіцієнт лінійного розширення, E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона, $\Delta T = T_{in} - T_{ext}$ – перепад температури між внутрішньою та зовнішньою поверхнями труби.

Напруження, що викликані дією тисків першого та другого контурів, задаються відомим розв'язком задачі Ламе [9]

$$\sigma_r^p(r) = \frac{p_{in} a^2 - p_{ext} b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_{in} - p_{ext}) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}, \quad (14)$$

де $a < r < b$, $\sigma_{\theta}^{\theta}(r)$ - складова кільцевих напружень, спричинена дією тисків, p_m та p_{ext} - тиск першого та другого контурів.

Розподіл кільцевих напружень в початковому перерізі ТОТ, де їх рівень найвищий, представлено на рис. 5. Штрихпунктирна лінія відповідає температурним напруженням (13), пунктирна лінія - напруженням, зумовленим дією тиску (14), суцільна лінія відповідає загальним напруженням (сума двох зазначених вище складових). Температурні напруження, визначені з урахуванням неоднорідності температурного поля в аксіальному напрямку (температурне поле (12)), позначено великими крапками. Їх відхилення від напружень, визначених згідно (13), є не суттєвим.

Отримані розподіли напружень дають можливість виконати аналіз опору крихкому руйнуванню труби з постульованою несущістю. Приймалося, що несущість має вигляд зовнішньої напівеліптичної тріщини довжиною $2l$ та глибиною d (рис. 6). Розрахунок значень КІН у точках вздовж фронту тріщини був виконаний за допомогою методу вагових функцій, використовуючи набір поліноміальних вагових функцій та відповідні табличні дані КІН з [10].

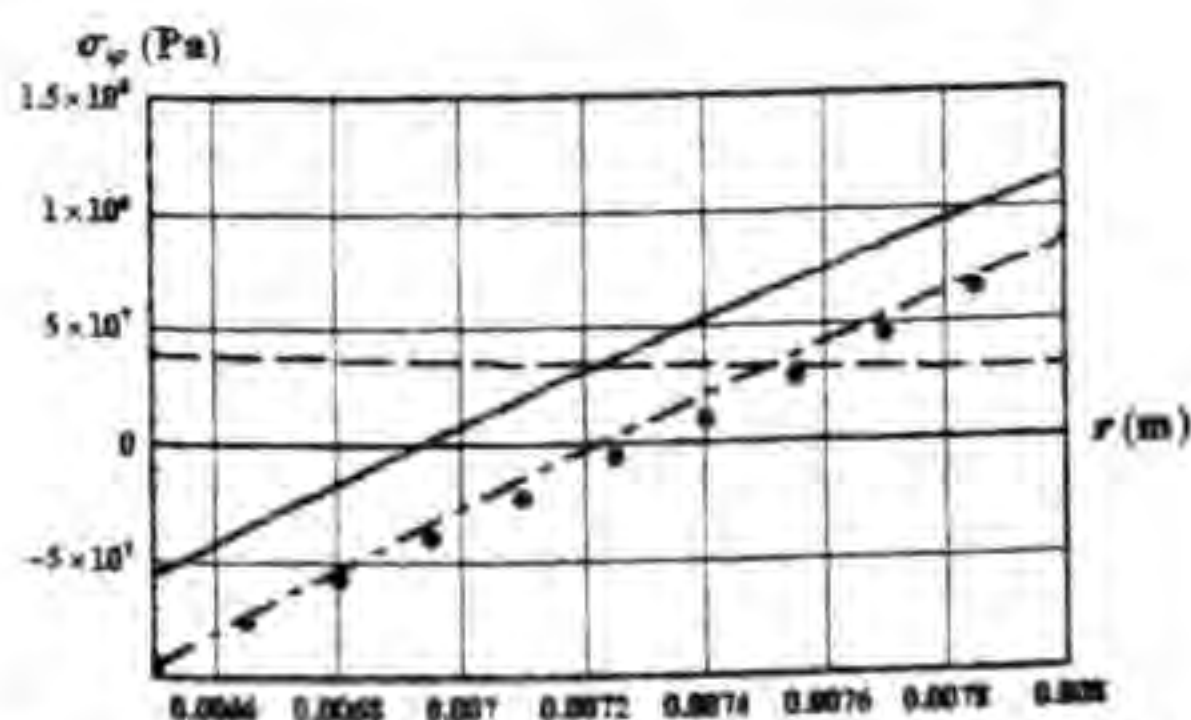


Рис. 5. Розподіл кільцевих напружень за глибиною стінки труби поблизу місця з'єднання з колектором

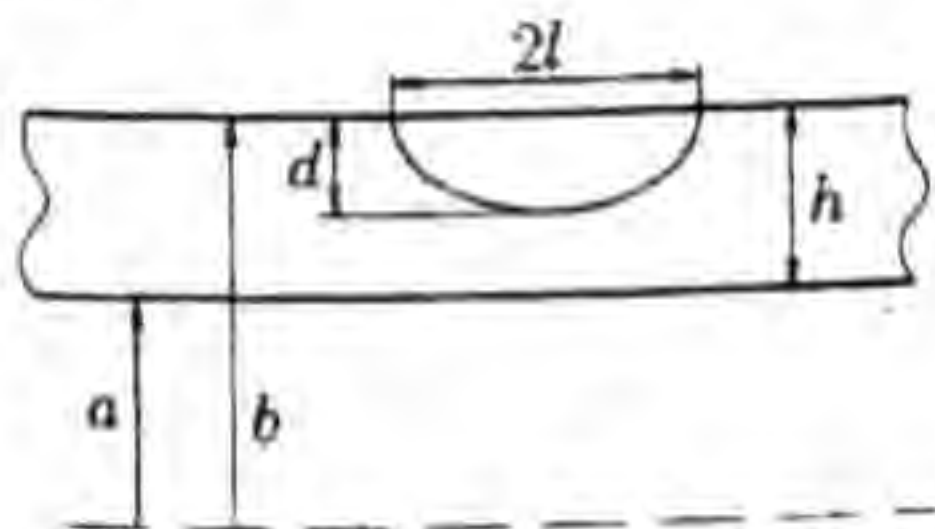


Рис. 6. Напівеліптична тріщина на зовнішній поверхні труби

$$K_I = f_0 K_{I_0} + f_1 K_{I_1} + f_2 K_{I_2},$$

де $K_{I_0}, K_{I_1}, K_{I_2}$ - табличні коефіцієнти впливу, що залежать від положення точки на фронті тріщини, яке може характеризуватися глибинною координатою точки.

Для стаціонарного поля відносна похибка (максимальне відхилення, віднесене до максимального за величиною значення) апроксимації розподілу напружень за глибиною стінки ТОТ з використанням квадратичного тричлена

$$\sigma_{\theta}(r) = f_0 + f_1(b-r) + f_2(b-r)^2, \quad b-d < r < b,$$

приблизно рівне 0.25%. Тут f_0, f_1 та f_2 - коефіцієнти, що визначаються за методом найменших квадратів.

Умову стабільного стану тріщини можна представити у вигляді

$$K_{I_{max}} < K_{IKIC}.$$

де $K_{I_{max}} = \max_{b-r} K_I$ - максимальне вздовж фронту тріщини значення КІН, K_{IKIC} - критичний КІН за умов корозійного розтріскування під напруженням (КРН), що є табличною величиною. Як було зауважено у [11], для ТОТ ПГ величина K_{IKIC} є випадковою, розподіленою за нормальним законом із середнім значенням $12,0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ та стандартним відхиленням $3,03 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. У роботі використано два прийнятних рівня надійності: 95% та 99%. Умови стабільності тріщини, що відповідають цим рівням, можуть бути представлені наступним чином:

$$K_{I_{max}} < 7 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} \text{ для рівня 95\%,} \quad (15)$$

$$K_{I_{max}} < 5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} \text{ для рівня 99\%.} \quad (16)$$

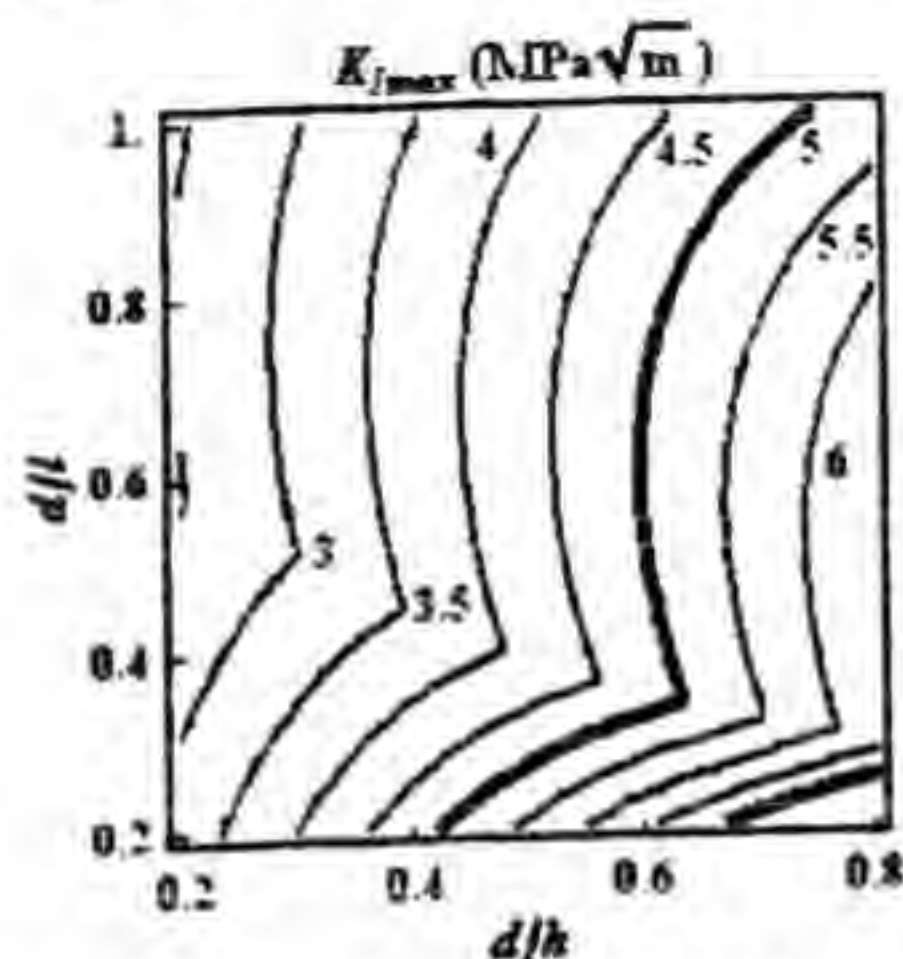


Рис. 7. Залежність $K_{I_{max}}$ від розмірів тріщини, що розташована поблизу місця з'єднання з колектором

Для початкової частини труби залежності максимальних значень КІН від параметрів тріщини (глибини та довжини) представлено на рис. 7. Кожна крива складається з двох частин: верхня частина відповідає досягненню максимального значення КІН в точці на поверхні, а нижня частина - у самій глибокій точці фронту. Зауважимо, що, відповідно до табличних даних з [10], КІН у точці поверхні не є монотонною функцією довжини тріщини з фіксованою глибиною.

Криві, виділені потовщеною лінією, розділяють площину параметрів тріщини на безпечну та небезпечну зони, відповідно до умов (15) та (16). Тріщини з параметрами, що розташовані зліва від потовщеної кривої, можуть розглядатися як припустимі з точки зору експлуатації ПГ з відповідним прийнятним рівнем надійності. Враховуючи консерватизм обраного у роботі підходу, надзвичайно цікавим результатом, отриманим на основі проведених розрахунків, є те, що з 95% ймовірністю будь-яка тріщина, що має глибину до 65% товщини стінки, є припустимою, та гарантує надійну роботу TOT відповідного ПГ та енергоблоку АЕС в цілому. Даний висновок добре узгоджується з досвідом експлуатації TOT ПГ АЕС з ВВЕР. Отримані результати свідчать про гарний запас надійності при експлуатації TOT ПГ АЕС з ВВЕР, а отримані та представлені обмежуючі криві, що виділені потовщеною лінією, можуть використовуватися для розробки аналітичного критерію виведення з експлуатації дефектних TOT ПГ.

3. Висновки

Основні результати наведених вище досліджень є такими:

1. В роботі розроблено модель теплопередачі для TOT ПГ. На основі цієї моделі розраховано розподіли температури та напружень у стінці труби за умов нормальної експлуатації ПГ.

2. Проведено аналіз умов стабільності несучильностей, що моделювалися у вигляді зовнішніх поверхневих напівеліптичних тріщин, на основі положень механіки крихкого руйнування. Також розроблено алгоритм розрахунку значень КІН вздовж фронту тріщини із застосуванням методу вагових функцій.

3. Побудовано обмежуючі криві, що відділяють площину параметрів тріщин на безпечну та небезпечну зони для рівнів надійності 95% та 99%. Представлена методологія побудови обмежуючих кривих може

бути використаною при розробці аналітичного критерію виведення з експлуатації TOT ПГ.

4. Запропонований алгоритм розрахунку КІН може застосовуватися при прогнозуванні зростання тріщин втомі.

5. Враховуючи консерватизм обраного у роботі підходу, з ймовірністю 0,95 будь-яка тріщина, що досягає до 65% стоншення товщини стінки, є припустимою, та гарантує надійну роботу TOT відповідного ПГ та енергоблоку АЕС, в цілому. Даний висновок добре узгоджується з досвідом експлуатації TOT ПГ АЕС з ВВЕР.

Список використаних джерел

1. Трунов Н.Б., Попадчук В.С., Брыков С.И., Жуков Р.Ю., Давиденко С.Е. Исследование коррозионной деградации трубчатки парогенераторов АЭС с ВВЭР // *Атомная энергия*. – Т.105, вып. 4. – 2008. – С. 195 – 201.
2. Unified Procedure for Lifetime Assessment of Components and Piping in VVER NPPs "VERLIFE", Version 5 – Final, EC 5th Euratom Framework Programme 1998-2002.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности: Справочник, – К.: Вища шк., 1993. – 415 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика, – М.: Наука, 1986. – 736с.
5. Кирилов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по теплогидравлическим расчетам, – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 60с.
6. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том 1, – М.: Наука, 1979. – 520 с.
7. Мелан Е, Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями, – М.: Физматгиз, 1958. – 167с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности, – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
9. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, – М.: Наука, 1979. – 560с.
10. Murakami Y. (ed.), *SIFs handbook*, Vol.2. - New York, Pergamon Press, 1987. – 1016 p.
11. Tutnov A.A., Loskutov O.D., Getman A.F., Konev U.N. Account Research of Influence of Hydrotests and Nondestructive Evaluation on Reliability of a Steam Generator Tubing // *7-th International Seminar on Horizontal Steam Generators*, FSUE EDO "GIDROPRESS", Podolsk, Russia, 2006.

Надійшла до редколегії 13.05.09

УДК 519.9

Євген Ю. Таран*, д.ф.-м.н., професор,
Роман Я. Кондрат, аспірант

**Реологічна поведінка розведеного розчину
макромолекул Зімма у течіях з однорідним
полем швидкості**

Вивчається реологічна поведінка розведеного розчину деформівних ланцюгових макромолекул Зімма у течіях з однорідним полем швидкості. Виводяться співвідношення для ефективних в'язкостей таких розчинів у плоскій течії, течіях одновісного розтягу та чистого зсуву.

Ключові слова: реологія, розведений розчин, ланцюгові макромоллекули, плоска течія, течія одновісного розтягу, течія чистого зсуву.

*E-mail: taran@univ.kiev.ua

Статтю представив проф. Мелешко В.В.

1 Вступ

У роботі вивчається реологічна поведінка розведених розчинів деформівних ланцюгових макромолекул полімерів з низькомолекулярними розчинниками – знаходяться вирази для ефективних в'язкостей таких розчинів у плоскій течії, течіях одновісного розтягу та чистого зсуву.

Гідродинамічною моделлю деформівних ланцюгових макромолекул слугує перлинне намисто Роуза-Зімма [1, 7]. Для проведення досліджень у роботі використовується математична реологічна модель розведених розчинів макромолекул Зімма, побудована у роботі [3].

Одержані в роботі результати можуть бути використаними для вивчення структури деформівних ланцюгових макромолекул полімерів у розчинах.

2 Реологічне моделювання розведених розчинів деформівних ланцюгових макромолекул

Характерні розміри сегментів деформівних ланцюгових макромолекул полімерів з великою молекулярною вагою є такими, що, з одного боку, їх взаємодія з розчинником може вважатися гідродинамічною, а з іншого – динаміка сегментів залежить від теплового руху атомів, які складають полімерний ланцюг [2, 6, 8].

Деформівність макромолекул полімерів і велика кількість сегментів їх молекулярних ланцюгів залишають досить свободи для утво-

Ye.Yu. Taran*, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor,
R.Ya. Kondrat, PhD student

Rheological behaviour of dilute solution of Zimm macromolecules in flows with uniform velocity field

Rheological behaviour of dilute solution of Zimm deformable chain macromolecules in flows with uniform velocity field is studied. Relations for effective viscosity's of those solutions in plane flow, in uniaxial tension flow and in pure shearing flow are obtained.

Key Words: rheology, dilute solution, chain macromolecules, plane flow, uniaxial tension flow, pure shearing flow.

рення в процесі мікроброунівського – тобто теплового – руху складових елементів ланцюгових макромолекул нескінченної кількості можливих клубкоподібних конформацій.

Для моделювання таких макромолекул, зважених у розчиннику, у роботі використовується перлинне намисто Роуза-Зімма [1, 7]. Ця модель складається з n однакових послідовно з'єднаних вільнозчеплених сегментів, кожний з яких є гнучким субланцюгом. Припускається, що відстані між кінцями сегментів макромолекул розподіляються за гаусовим законом. У перлинному намисті, яке моделює макромоллекули, гідродинамічна взаємодія з розчинником здійснюється бусинками, які розташовані на кінцях сегментів і мають коефіцієнт ξ поступального тертя при їх обтіканні розчинником. Загальна кількість бусин модельного ланцюга рівна $n+1$, вони пронумеровані від 0 до n . Розчинник моделюється класичним континуумом з ньютонівським реологічним рівнянням.

У моделі Роуза-Зімма, крім гідродинамічних сил, на кожну бусинку молекулярного намиста діють також сили так званої внутрішньої пружності та сили мікроброунівського руху атомів, з яких складається ланцюг реальних макромолекул полімерів.

Для дослідження реологічної поведінки розведених розчинів таких ланцюгових макромолекул у даній роботі використовується визначальне рівняння для напруження T_x у

довільних течіях розчинів, яке згідно [3] має вигляд

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + N_0 kT (2\alpha \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} \langle \eta_i^{\alpha} \eta_j^{\alpha} \rangle - n\delta_{ij}), \quad (2.1)$$

У (2.1) p – тиск; δ_{ij} – символ Кронекера; μ – динамічна в'язкість розчинника; d_{ij} – компоненти тензора швидкостей деформації, $d_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$, де $v_{i,j}$ – компоненти тензора градієнта швидкості v_i розчинника; N_0 – кількість макромолекул в одиниці об'єму розчину; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; α – коефіцієнт внутрішньої пружності, феноменологічний параметр, який характеризує молекули, що моделюються; λ_{α} – головні значення визначальної матриці ланцюгової макромолекули [3]; η_i^{α} – радіус-вектор, який визначає положення бусинки намиста з номером α [3].

Кутові дужки $\langle \rangle$ у рівнянні (2.1) означають осереднення у фазовому просторі координат бусинок модельної макромолекули за допомогою функції розподілу F , яка визначається рівнянням [3]

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \sum_{\alpha=0}^n \left\{ \frac{kT}{\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i^{\alpha} \partial \eta_i^{\alpha}} - [(d_{ik} + \omega_{ik}) \eta_k^{\alpha} - \frac{2kT}{\xi} \alpha \lambda_{\alpha} \eta_i^{\alpha}] \frac{\partial F}{\partial \eta_i^{\alpha}} + \frac{6kT}{\xi} \lambda_{\alpha} \alpha F \right\} = 0. \quad (2.2)$$

У (2.2) ω_{ik} – компоненти тензора вихору швидкості, $\omega_{ik} = (1/2)(v_{i,k} - v_{k,i})$.

У тензорних позначеннях, які використовуються у роботі, латинськими літерами $i, j, k, \dots$ позначаються нижні індекси. Вони можуть набувати значень x, y, z , які відповідають осям Ox, Oy, Oz прямокутної системи координат, початок якої збігається з центром мас макромолекули. Грецькими літерами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ позначаються верхні індекси, які можуть набувати значень від 0 до n . Вони відповідають номерам бусин модельного молекулярного ланцюга. Кома у нижніх індексах означає диференціювання в напрямі координатної осі, яка позначена індексом, що йде за комою. За двома однаковими індексами одного

доданку відбувається підсумовування у межах зміни індексу, що повторюється.

Рівняння (2.2) є складним для розв'язання – його розв'язки можуть бути знайденими лише при малих градієнтах швидкості для окремих найпростіших течій у вигляді асимптотичних розвинень за малими градієнтами швидкості. Використання таким чином знайдених функцій розподілу при осередненні компонент тензора напружень T_{ij} дозволяє знайти тільки їх наближені значення.

Згідно (2.1) обчислення компонентів тензора напружень T_{ij} , що виникають у довільних градієнтних течіях розчину макромолекул Зімма, потребує знання моментів $\langle \eta_i^{\alpha} \eta_j^{\alpha} \rangle$ функції розподілу F , яка визначається рівнянням (2.2). Це рівняння використовується для отримання звичайних диференціальних рівнянь для моментів функції розподілу F , які згідно [3] мають вигляд

$$\frac{d\langle \eta_i^{\alpha} \eta_j^{\alpha} \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\xi} \delta_{ij} + (d_{ik} + \omega_{ik}) \langle \eta_k^{\alpha} \eta_j^{\alpha} \rangle + (d_{jk} + \omega_{jk}) \langle \eta_i^{\alpha} \eta_k^{\alpha} \rangle - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_{\alpha} \langle \eta_i^{\alpha} \eta_j^{\alpha} \rangle. \quad (2.3)$$

Рівняння (2.1) і (2.3) складають систему визначальних рівнянь для дослідження у даній роботі реологічної поведінки розведених розчинів, що розглядаються, у течіях з однорідним полем швидкості.

3 Течії розчину макромолекул Зімма з однорідним полем швидкості

Розглянемо поведінку розведених розчинів, що вивчаються у даній роботі, в течії з однорідним полем швидкості

$$\vec{v} = \vec{S}\vec{r},$$

де $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – вектор положення точки у деякій нерухомій системі координат; $\vec{S}$ – тензор градієнта швидкості, компоненти якого не залежать від координат і часу. До таких течій належать течія Куетта, яка розглядалася у [5], плоска течія, течії одновісного розтягу і чистого зсуву, які вивчаються у даній роботі.

3.1 Плоска течія. Швидкість рідини у плоскій течії визначається такими співвідношеннями

$$v_x = 2cy, \quad v_y = 2dx, \quad v_z = 0, \quad c, d = \text{const}. \quad (3.1)$$

З урахуванням умов симетрії

$$\begin{aligned} \langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle &= \langle \eta_j^a \eta_i^a \rangle, \\ (d_{jk} + \omega_{jk}) \langle \eta_k^a \eta_j^a \rangle &= (d_{jk} + \omega_{jk}) \langle \eta_k^a \eta_j^a \rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

визначальне рівняння (2.3) дозволяє отримати систему звичайних диференціальних рівнянь для знаходження моментів $\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle$ функції розподілу F для течії (3.1) розчину

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \eta_i^a \eta_i^a \rangle}{dt} &= 2d\langle \eta_i^a \eta_i^a \rangle + 2c\langle \eta_i^a \eta_i^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_i^a \eta_i^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_i^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= 2c\langle \eta_i^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_i^a \eta_z^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= 2d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} + 2c\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} + 2d\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для стаціонарної плоскої течії (3.1) похідні за часом у (3.3) дорівнюють нулю, тому система диференціальних рівнянь (3.3) обертається на систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язки якої мають вигляд

$$\begin{aligned} \langle \eta_i^a \eta_z^a \rangle &= \langle \eta_z^a \eta_i^a \rangle = 0, \quad \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle = \frac{1}{2\alpha \lambda_a}, \\ \langle \eta_i^a \eta_i^a \rangle &= \frac{1}{2\alpha \lambda_a} \left(1 + \frac{\xi^2 c(c+d)}{2(2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd)} \right), \\ \langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle &= \frac{1}{2\alpha \lambda_a} \left(1 + \frac{\xi^2 d(c+d)}{2(2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd)} \right), \\ \langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle &= \frac{\xi k T (c+d)}{2(2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

За допомогою співвідношень (3.4) можна отримати з (2.1) компоненти тензора напружень T_{ij} , які виникають у плоскій течії (3.1) розведеного розчину деформівних макромолекул Зімма.

$$\begin{aligned} T_{xx} &= T_{yy} = 0, \quad T_{zz} = -p, \\ T_{xz} &= -p + \frac{N_0 k T}{2} \times \\ &\quad \times \sum_{a=1}^n \frac{\xi^2 c(c+d)}{2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd}, \\ T_{zz} &= -p + \frac{N_0 k T}{2} \times \\ &\quad \times \sum_{a=1}^n \frac{\xi^2 d(c+d)}{2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd}, \\ T_{xy} &= 2\mu(c+d) + N_0 k T \times \\ &\quad \times \sum_{a=1}^n \frac{\xi k T \alpha \lambda_a (c+d)}{2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вирази (3.5) дозволяють обчислити ефективну в'язкість μ^* розведеного розчину макромолекул Зімма у плоскій течії (3.1), використавши співвідношення [4]

$$\mu^* = \frac{T_{xy} d_{ij}}{2d_{km} d_{km}}, \quad (3.6)$$

яке визначає ефективну в'язкість розчину для течії будь-якої геометрії. При цьому отримується співвідношення

$$\mu^* = \mu + \frac{N_0 k T}{2} \sum_{a=1}^n \frac{\xi k T \alpha \lambda_a}{2k^2 T^2 \alpha^2 \lambda_a^2 - \xi^2 cd}.$$

Слід зазначити, що вираз для ефективної в'язкості μ^* розведеного розчину деформівних ланцюгових макромолекул Зімма у плоскій течії (3.1) при $c = K/2$ і $d = 0$ набирає вигляду

$$\mu^* = \mu + \frac{N_0 \xi \eta^2}{24\alpha}.$$

Одержаний вираз співпадає з виразом для ефективної в'язкості μ^* розчину деформівних ланцюгових макромолекул Зімма у течії Куетта, що розглядалася у роботі [5].

3.2 Течія одновісного розтягу. Поле швидкості у течії одновісного розтягу визначається співвідношеннями

$$v_x = q_1 x, v_y = -\frac{1}{2} q_1 y, v_z = -\frac{1}{2} q_1 z, q_1 = \text{const}, (3.7)$$

де q_1 – паралельний градієнт швидкості.

Система звичайних диференціальних рівнянь, отримана із співвідношення (2.3), для знаходження моментів $\langle \eta_x^a \eta_y^a \rangle$ функції розподілу F для течії, що досліджується, з урахуванням умов симетрії (3.2) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle}{dt} &= \frac{1}{2} q_1 \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= \frac{1}{2} q_1 \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_y^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= -q_1 \langle \eta_y^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_y^a \eta_z^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_x^a \eta_y^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} + 2q_1 \langle \eta_x^a \eta_y^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_y^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_y^a \eta_y^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} - q_1 \langle \eta_y^a \eta_y^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_y^a \eta_y^a \rangle; \\ \frac{d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{\xi} - q_1 \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle - \\ &\quad - \frac{4kT}{\xi} \lambda_a \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle. \end{aligned} (3.8)$$

Для стаціонарної течії одновісного розтягу (3.7) диференціальні рівняння у (3.8) перетворюються на лінійні алгебраїчні рівняння, тому моменти функції розподілу F , які є розв'язками системи (3.8), будуть рівні

$$\begin{aligned} \langle \eta_x^a \eta_y^a \rangle &= \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle = \langle \eta_y^a \eta_z^a \rangle = 0, \\ \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle &= \frac{kT}{2kT\lambda_a - \xi q_1}, \\ \langle \eta_y^a \eta_y^a \rangle &= \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle = \frac{kT}{2kT\lambda_a + 1/2 \xi q_1}. \end{aligned} (3.9)$$

Вирази (3.9) дозволяють отримати з (2.1) компоненти тензора напружень T_{ij} , які виникають у течії одновісного розтягу (3.7)

розведеного розчину деформівних макромолекул Зімма,

$$\begin{aligned} T_{xx} &= T_{yy} = T_{zz} = 0, \\ T_{xx} &= -p + 2\mu q_1 - N_0 kTn + \\ &\quad + N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{2kT\lambda_a}{2kT\lambda_a - \xi q_1}, \\ T_{yy} &= T_{zz} = -p - \mu q_1 - N_0 kTn + \\ &\quad + N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{2kT\lambda_a}{2kT\lambda_a + 1/2 \xi q_1}. \end{aligned} (3.10)$$

Друге і третє співвідношення у (3.10) представимо в іншому вигляді

$$\begin{aligned} T_{yy} &= -p + 2\mu q_1 - N_0 kTn + \\ &\quad + N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\xi q_1}{2kT\lambda_a}}, \\ T_{zz} &= T_{yy} = -p - \mu q_1 - N_0 kTn + \\ &\quad + N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\xi q_1}{2kT\lambda_a}} \end{aligned} (3.11)$$

і розглянемо випадок, коли параметр $\frac{\xi q_1}{2kT\lambda_a} < 1$ для $\forall a \geq 1$. Це дозволяє розвинути вирази під знаками суми у (3.11) в ряди за цим параметром

$$\begin{aligned} T_{xx} &= -p - N_0 kTn + 2\mu q_1 + N_0 \sum_{a=1}^n \left(kT + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi q_1}{2\lambda_a} + \frac{\xi^2 q_1^2}{4kT\lambda_a^2} + \frac{\xi^3 q_1^3}{8k^2 T^2 \lambda_a^3} + \dots \right), \\ T_{yy} &= T_{zz} = -p - N_0 kTn - \mu q_1 + N_0 \sum_{a=1}^n \left(kT - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi q_1}{4\lambda_a} + \frac{\xi^2 q_1^2}{16kT\lambda_a^2} - \frac{\xi^3 q_1^3}{64k^2 T^2 \lambda_a^3} + \dots \right). \end{aligned} (3.12)$$

Виконаємо підсумовування у (3.12), враховуючи, що згідно [7]

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \lambda_a &= 2n, \quad \sum_{a=1}^n \frac{1}{\lambda_a} = \frac{n^2}{6}, \quad \sum_{a=1}^n \frac{1}{\lambda_a^2} = \frac{n^4}{90}, \\ \sum_{a=1}^n \frac{1}{\lambda_a^3} &= \frac{n^6}{945}, \quad \text{а } \lambda_0 = 0. \end{aligned}$$

Це дає наступні співвідношення для компонент тензора напружень T_{ij}

$$T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0,$$

$$T_{xx} = -p + \left[2\mu + N_0 \frac{\xi n^2}{12\alpha} \left(1 + \frac{1}{30} \frac{\xi n^2}{kT\alpha} q_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{630} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_1^2 + \dots \right) \right] q_1,$$

$$T_{yy} = T_{zz} = -p + \left[-\mu + N_0 \frac{\xi n^2}{24\alpha} \left(-1 + \frac{1}{60} \frac{\xi n^2}{kT\alpha} q_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2520} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_1^2 + \dots \right) \right] q_1.$$

Ці вирази дозволяють згідно (3.6) обчислити ефективну в'язкість μ_e розведеного розчину макромолекул Зімма у течії одновісного розтягу (3.7)

$$\mu_e = \mu + N_0 \frac{\xi n^2}{24\alpha} \left(1 + \frac{1}{60} \frac{\xi n^2}{kT\alpha} q_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{840} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_1^2 + \dots \right) \quad (3.13)$$

Співвідношення (3.13) показує, що ефективна в'язкість μ_e розведеного розчину деформівних ланцюгових макромолекул Зімма у течії одновісного розтягу (3.7) збільшується зі збільшенням градієнта швидкості q_1 .

3.3 Течія чистого зсуву. Компоненти швидкості у течії чистого зсуву задаються такими співвідношеннями

$$v_x = q_2 x, \quad v_y = -q_2 y, \quad v_z = 0, \quad q_2 = \text{const}. \quad (3.14)$$

З урахуванням умов симетрії (3.2) і особливостей течії чистого зсуву (3.14) отримаємо із співвідношення (2.3) систему звичайних диференціальних рівнянь для знаходження моментів $\langle \eta_i^a \eta_j^a \rangle$ функції розподілу F для течії, що розглядається,

$$\frac{d\langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle}{dt} = -\frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle;$$

$$\frac{d\langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle}{dt} = q_2 \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle;$$

$$\frac{d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle}{dt} = -q_2 \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle;$$

$$\frac{d\langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\xi} + 2q_2 \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle - \\ - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle;$$

$$\frac{d\langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\xi} - 2q_2 \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle - \\ - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle; \quad (3.15)$$

$$\frac{d\langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\xi} - \frac{4kT}{\xi} \alpha \lambda_a \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle.$$

Для стаціонарної течії чистого зсуву (3.14) система диференціальних рівнянь (3.15) спрощується до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, звідки отримаємо наступні вирази для моментів функції розподілу

$$\langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle = \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle = \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle = 0, \\ \langle \eta_x^a \eta_x^a \rangle = \frac{kT}{2kT\alpha\lambda_a - \xi q_2}, \\ \langle \eta_x^a \eta_z^a \rangle = \frac{kT}{2kT\alpha\lambda_a + \xi q_2}, \\ \langle \eta_z^a \eta_z^a \rangle = \frac{1}{2\alpha\lambda_a}. \quad (3.16)$$

Використовуючи вирази (3.16) для моментів функції розподілу та рівняння (2.1), отримаємо компоненти тензора напружень T_{ij} , які виникають у течії чистого зсуву (3.14).

$$T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0, T_{zz} = -p.$$

$$T_{xx} = -p + 2\mu q_2 - N_0 kT n +$$

$$+ N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{2kT\alpha\lambda_a}{2kT\alpha\lambda_a - \xi q_2},$$

$$T_{yy} = -p - \mu q_2 - N_0 kT n +$$

$$+ N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{2kT\alpha\lambda_a}{2kT\alpha\lambda_a + \xi q_2}.$$

Два останні співвідношення представимо в іншому вигляді

$$T_{xx} = -p + 2\mu q_2 - N_0 kT n +$$

$$+ N_0 kT \sum_{a=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\xi q_2}{2kT\alpha\lambda_a}},$$

$$T_{xy} = -p - 2\mu q_2 - N_0 k T n + \\ + N_0 k T \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\xi q_2}{2kT\alpha\lambda_\alpha}}$$

Розглянемо випадок, коли параметр $\frac{\xi q_2}{2kT\alpha\lambda_\alpha} < 1$ для $\forall \alpha \geq 1$, що дозволяє розвинути вирази під знаками суми $\sum_{\alpha=1}^n$ в ряди за цим параметром і отримати співвідношення

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = 0, T_{zz} = -p, \\ T_{xx} = -p + q_2 \left[2\mu + N_0 \frac{\xi n^2}{12\alpha} \left(1 + \frac{1}{30} \frac{\xi n^2}{kT\alpha} q_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{630} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_2^2 + \dots \right) \right], \quad (3.17) \\ T_{yy} = -p + q_2 \left[-2\mu + N_0 \frac{\xi n^2}{12\alpha} \left(-1 + \frac{1}{30} \frac{\xi n^2}{kT\alpha} q_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{630} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_2^2 + \dots \right) \right].$$

Співвідношення (3.17) дозволяють згідно (3.6) знайти ефективну в'язкість μ_e^* розведеного розчину макромолекул Зімма у течії чистого зсуву

$$\mu_e^* = \mu + N_0 \frac{\xi n^2}{48\alpha} \left(2 + \frac{1}{315} \left(\frac{\xi n^2}{kT\alpha} \right)^2 q_2^2 + \dots \right). \quad (3.18)$$

Отриманий вираз показує, що ефективна в'язкість μ_e^* розчину макромолекул Зімма у течії чистого зсуву (3.14) збільшується зі збільшенням градієнта швидкості q_2 .

4 Висновки

1. Отримані у даній роботі і в роботі [5] результати показують, що реологічні властивості розведеного розчину деформівних ланцюгових макромолекул Зімма суттєво залежать від геометрії течії. Так, у течії простого зсуву [5] ефективна в'язкість розчину μ_e^* не залежить від

швидкості зсуву K , а згідно з (3.13) і (3.18) ефективні в'язкості μ_e^* і μ_e^* для течій одновісного розтягу (3.7) і чистого зсуву (3.14) залежать від градієнтів швидкості q_1 і q_2 .

2. Показано, що вирази для ефективних в'язкостей μ_e^* , μ_e^* , μ_e^* явно залежать від мікрохарактеристик зважених макромолекул: n , ξ , α . Це дозволяє пропонувати одержані теоретичні результати для вивчення макромолекул полімерів віскозиметричними методами.

Список використаних джерел

1. Зими Б. Динамика полимерных молекул в разбавленном растворе: вязкоупругие свойства, двойное лучепреломление и диэлектрические потери // Физика полимеров: Сборник / Под. ред. М.В. Волькенштейна. – М.: ИЛ, 1960. – С. 379-411.
2. Моравец Г. Макромолекулы в растворе. – М.: Мир, 1967. – 399с.
3. Придатченко Ю.В., Таран Є.Ю., Кондрат Р.Я. Структурно-феноменологічна теорія напруженого стану у градієнтних течіях розведених розчинів полімерів з деформівними ланцюговими макромолекулами // Укр. фіз. журн. – 2006. – 51, №4. – С. 374-380.
4. Таран Є.Ю. Структурно-феноменологіческая реология разбавленных суспензий: Дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.05. – Харьков, 1994. – 346с.
5. Таран Є.Ю., Кондрат Р.Я. Реология розведеного розчину деформівних макромолекул у течії простого зсуву // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 67-72.
6. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структура макромолекул в растворах. – М.: Наука, 1964. – 720с.
7. Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Fluids. V.2. – New York: Wiley, 1987. – 437p.
8. Kirkwood J.G. Macromolecules. – New York: Gordon and Breach, 1967. – 294p.

Надійшла до редколегії 18.05.2009

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.962.22: 519.246.2

Демиденко С.В., аспірант

Мінімаксне оцінювання параметрів лінійних дискретних періодичних процесів в умовах невизначеності.

В роботі розглядається задача мінімаксного оцінювання параметрів періодичного процесу, що моделюється системою лінійних різницевих рівнянь з періодичною крайовою умовою та невизначеними параметрами.

При деяких обмеженнях на параметри моделі запропоновано підхід для обчислення оцінок та розроблено відповідний програмний пакет в середовищі Mathematica 7.

Ключові слова: лінійний дискретний періодичний процес, мінімаксне оцінювання.

*E-mail: s.demidenko@gmail.com

Статтю представив д.т.н. Акіменко В.В.

Вступ

Задачі оцінювання для рівнянь з дискретним часом досліджувалися в основному для лінійних рівнянь з початковими або спеціальними краєвими умовами [1], [2]. В той же час на практиці виникають задачі де системи описуються рівняннями з періодичними умовами. Зокрема у випадках коли проводиться лінеаризація нелінійних систем в околі їх періодичних розв'язків [3].

В статті досліджується питання оцінювання розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з невизначеною правою частиною, що моделюють періодичні процеси які протікають в умовах невизначеності.

Невизначеність знімається шляхом застосування методів гарантованого оцінювання.

Постановка задачі

Нехай в моменти часу $k = 0, \dots, T$ спостерігається реалізація вектору $y_k \in R^N$ у вигляді:

$$y_k = H_k x_k + \eta_k, \quad (1)$$

де H_k – матриці розмірності $N \times n$, η_k – випадкові вектори, причому $M\eta_k = 0$, $M\eta_k \eta_k^T = R_{\eta(k)}$, а вектори $x_k \in R^n$ задовольняють наступним умовам:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k f_k, \\ x_0 &= x_T. \end{aligned} \quad (2)$$

S. V. Demidenko, PhD student

Minimax parameters estimation of linear discrete periodic processes under uncertainty

We consider a set-membership state estimation problem for the uncertain linear difference equation with periodical boundary condition.

We present a state-estimation framework for some class of bounding sets describing parametric uncertainty in the plant.

The estimator is implemented as a software package for computer algebra system Mathematica 7.

Key Words: linear discrete periodic process, minimax estimation.

Тут A_k , B_k – матриці розмірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, $f_k \in R^m$ – невідомі вектори, які належать множині $G = \{f_k : \sum_{k=0}^{T-1} (Q_k, f_k) \leq 1\}$, Q – симетрична додатно визначена матриця. Припустимо також, що матриця $(E - \prod_{k=0}^{T-1} A_k)$ не вироджена.

Необхідно оцінити скалярний добуток (a, x_s) , $0 < s < T$, a – заданий вектор з R^n . Оцінку будемо шукати у вигляді

$$(a, \hat{x}_s) = \sum_{k=0}^{T-1} (u_k, y_k) + c, \quad (3)$$

де c – довільна константа, u_k – невідомі вектори з R^N .

Позначимо через $\sigma^2(u, c)$ середньоквадратичну похибку такої оцінки, тобто:

$$\sigma^2(u, c) = M[(a, x_s) - (a, \hat{x}_s)]^2. \quad (4)$$

Означення 1. Оцінка, для якої $\hat{u}$ та $\hat{c}$ належать множині $\arg \min_{u, c} \sigma^2(u, c)$, де

$$\sigma_1^2(u, c) = \sup_{f \in G} \sigma^2(f, u, c), \quad (5)$$

називається мінімаксною середньоквадратичною оцінкою, а величину $\sigma_1^2(\hat{u}, \hat{c})$ назовемо похибкою мінімаксного оцінювання.

Вигляд мінімаксної оцінки

Твердження 1. Нехай x_k задовольняє (2), а y_k має вигляд (1) при всіх $k = 0, \dots, T$. Тоді для будь-якого s , $0 < s < T$ справедлива рівність

$$(a, x_s) - (a, \hat{x}_s) = \sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k) - c - \sum_{k=0}^{s-1} (\eta_k, u_k),$$

де

$$z_k = \begin{cases} z'_k, & k \leq s-1 \\ z''_k, & k > s-1 \end{cases} \quad (6)$$

причому вектори z'_k, z''_k задовольняють наступним умовам:

$$\begin{aligned} A_k^T z'_{k+1} - z'_k - H_k^T u_k &= 0, \\ A_k^T z''_{k+1} - z''_k - H_k^T u_k &= 0, \\ z'_T &= z'_0, z'_s - z''_s = a. \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення. Неважко переконатися, що

$$\begin{aligned} (a, x_s) &= \sum_{k=0}^{s-1} (x_{k+1}, z'_{k+1}) - (x_k, z'_k) + \\ &+ \sum_{k=s}^{T-1} (x_{k+1}, z''_{k+1}) - (x_k, z''_k). \end{aligned} \quad (8)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{s-1} (x_{k+1}, z'_{k+1}) - (x_k, z'_k) + \\ &+ \sum_{k=s}^{T-1} (x_{k+1}, z''_{k+1}) - (x_k, z''_k) = \\ &= (x_s, z'_s) - (x_0, z'_0) + (x_T, z''_T) - (x_s, z''_s) = \\ &= (x_s, (z'_s - z''_s)) + (x_0, z'_0 - z'_0) = \\ &= (a, x_s). \end{aligned}$$

З іншого боку, на основі (2) отримаємо

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{s-1} (x_{k+1}, z'_{k+1}) - (x_k, z'_k) + \sum_{k=s}^{T-1} (x_{k+1}, z''_{k+1}) - (x_k, z''_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (x_k, A_k^T z'_{k+1} - z'_k) + \sum_{k=s}^{T-1} (x_k, A_k^T z''_{k+1} - z''_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T f_k, z'_{k+1}) + \sum_{k=s}^{T-1} (B_k^T f_k, z''_{k+1}). \end{aligned}$$

Скориставшись (1) можна представити $(a, \hat{x}_s)$ у наступному вигляді

$$(a, \hat{x}_s) = \sum_{k=0}^{s-1} (H_k^T u_k, x_k) + \sum_{k=0}^{s-1} (u_k, \eta_k) + c.$$

Отже будемо мати

$$\begin{aligned} (a, x_s) - (a, \hat{x}_s) &= \sum_{k=0}^{s-1} (x_k, A_k^T z'_{k+1} - z'_k - H_k^T u_k) + \\ &+ \sum_{k=s}^{T-1} (x_k, A_k^T z''_{k+1} - z''_k - H_k^T u_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z'_{k+1}, f_k) + \sum_{k=s}^{T-1} (B_k^T z''_{k+1}, f_k) - \\ &- \sum_{k=0}^{s-1} (\eta_k, u_k) - c = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k) - c - \sum_{k=0}^{s-1} (\eta_k, u_k). \end{aligned}$$

Твердження 2.

$$\begin{aligned} \sup_{f \in G} M \left[(a, x_s) - (a, \hat{x}_s) \right]^2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T z_{k+1}, z_{k+1}) + \sum_{k=0}^{s-1} (R_{\eta(k)} u_k, u_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned} M \left(\left(\sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k) - c \right) - \left(\sum_{k=0}^{s-1} (\eta_k, u_k) \right) \right)^2 &= \\ &= \left(\sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k) - c \right)^2 + \sum_{k=0}^{s-1} (R_{\eta(k)} u_k, u_k). \end{aligned}$$

Користуючись узагальненою нерівністю Коші-Буняковського та умовою для множини G , отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{f \in G} \left(\sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k) - c \right)^2 &= \\ \sup_{f \in G} \sum_{k=0}^{s-1} (B_k^T z_{k+1}, f_k)^2 &= \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T z_{k+1}, z_{k+1}). \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} \sup_{f \in G} M \left[(a, x_s) - (a, \hat{x}_s) \right]^2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T z_{k+1}, z_{k+1}) + \sum_{k=0}^{s-1} (R_{\eta(k)} u_k, u_k). \end{aligned}$$

Позначимо через $I(u)$ функцію

$$I(u) := \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T z_{k+1}, z_{k+1}) + \sum_{k=0}^{s-1} (R_{\eta(k)} u_k, u_k).$$

Тоді має місце

Твердження 3.

$$\inf_u I(u) = I(\hat{u}), \quad \hat{u}_k = R_{\eta(k)}^{-1} H_k p_k, \quad (10)$$

де

$$p_k = \begin{cases} p'_k, & k \leq s-1 \\ p''_k, & k > s-1 \end{cases} \quad (11)$$

а вектори p'_k, p''_k задовольняють наступним умовам

$$\begin{aligned} p'_{k+1} - A_k p'_k &= B_k Q^{-1} B_k^T z'_{k+1}, \\ p''_{k+1} - A_k p''_k &= B_k Q^{-1} B_k^T z''_{k+1}, \\ p'_T - p'_0 &= 0, p'_s - p''_s = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Доведення. Будемо знаходити $\hat{u}_k$ із рівняння

$$\frac{d}{d\tau} I(\hat{u}_k + \tau v_k) \big|_{\tau=0} = 0, \forall v_k \in R^N. \quad (13)$$

Нехай

$$\tilde{z}_k = \begin{cases} \tilde{z}'_k, k \leq s-1 \\ \tilde{z}''_k, k > s-1 \end{cases} \quad (14)$$

а вектори $\tilde{z}'_k, \tilde{z}''_k$ задовольняють наступним умовам:

$$\begin{aligned} A_k^T \tilde{z}'_{k+1} - \tilde{z}'_k - H_k^T v_k &= 0, \\ A_k^T \tilde{z}''_{k+1} - \tilde{z}''_k - H_k^T v_k &= 0, \\ \tilde{z}''_T &= \tilde{z}'_0, \tilde{z}'_s = \tilde{z}''_s. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u}_k + \tau v_k) \big|_{\tau=0} &= \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T \tilde{z}'_{k+1}, z'_{k+1}) + \\ &+ \sum_{k=s}^{T-1} (B_k Q^{-1} B_k^T \tilde{z}''_{k+1}, z''_{k+1}) + \sum_{k=0}^{T-1} (R_{\eta(k)} u_k, v_k). \end{aligned}$$

Користуючись співвідношеннями (12), (15) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s-1} (B_k Q^{-1} B_k^T \tilde{z}'_{k+1}, z'_{k+1}) &= \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (p'_{k+1}, \tilde{z}'_{k+1}) - (p'_k, A_k^T \tilde{z}'_{k+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} ((p'_{k+1}, \tilde{z}'_{k+1}) - (p'_k, \tilde{z}'_k)) - \sum_{k=0}^{s-1} (H_k p'_k, v_k) = \\ &= (p'_s, \tilde{z}'_s) - (p'_0, \tilde{z}'_0) - \sum_{k=0}^{s-1} (H_k p'_k, v_k). \end{aligned}$$

З аналогічних міркувань

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^{T-1} (B_k Q^{-1} B_k^T \tilde{z}''_{k+1}, z''_{k+1}) &= \\ &= (p''_T, \tilde{z}''_T) - (p''_s, \tilde{z}''_s) - \sum_{k=s}^{T-1} (H_k p''_k, v_k). \end{aligned}$$

Помітимо, що

$$(p'_s, \tilde{z}'_s) - (p'_0, \tilde{z}'_0) + (p''_T, \tilde{z}''_T) - (p''_s, \tilde{z}''_s) = 0.$$

Отже рівняння (13) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{T-1} (R_{\eta(k)} u_k - H_k p_k, v_k) = 0.$$

В силу довільності v_k отримаємо

$$\hat{u}_k = R_{\eta(k)}^{-1} H_k p_k.$$

Альтернативне представлення мінімаксної оцінки

Слід зазначити, що в багатьох випадках, зокрема при чисельному моделюванні, оцінку для (a, x_s) краще мати у вигляді $(a, \hat{x}_s)$, тоді система для визначення оцінки не буде залежати від a , на відміну від представлення (10). Покажемо, що має місце наступне

Твердження 4. Нехай

$$\hat{p}_k = \begin{cases} \hat{p}'_k, k \leq s-1 \\ \hat{p}''_k, k > s-1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\hat{x}_k = \begin{cases} \hat{x}'_k, k \leq s-1 \\ \hat{x}''_k, k > s-1 \end{cases} \quad (17)$$

а вектори $\hat{p}'_k, \hat{p}''_k, \hat{x}'_k, \hat{x}''_k$ задовольняють наступним умовам

$$\begin{aligned} \hat{p}'_k - A_k^T \hat{p}'_{k+1} &= H_k^T R_{\eta(k)}^{-1} (y_k - H_k \hat{x}'_k), \\ \hat{p}''_k - A_k^T \hat{p}''_{k+1} &= H_k^T R_{\eta(k)}^{-1} (y_k - H_k \hat{x}''_k), \\ \hat{p}'_s &= \hat{p}''_s, \hat{p}'_0 = \hat{p}''_T, \\ \hat{x}'_{k+1} - A_k \hat{x}'_k &= B_k Q^{-1} B_k^T \hat{p}'_{k+1}, \\ \hat{x}''_{k+1} - A_k \hat{x}''_k &= B_k Q^{-1} B_k^T \hat{p}''_{k+1}, \\ \hat{x}'_s &= \hat{x}''_s, \hat{x}'_0 = \hat{x}''_T. \end{aligned} \quad (18)$$

Тоді мінімаксну оцінку для (a, x_s) можна подати

$$\text{у вигляді } (a, \hat{x}_s) = (a, \hat{x}'_s).$$

Доведення. Згідно попереднього твердження $\hat{u}_k = R_{\eta(k)}^{-1} H_k p_k$, тоді в силу (18)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} (\hat{u}_k, y_k) &= \sum_{k=0}^{T-1} (p_k, H_k^T R_{\eta(k)}^{-1} y_k) = \\ &= I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{k=0}^{s-1} (p'_k, \hat{p}'_k - A_k^T \hat{p}'_{k+1}), I_{12} = \sum_{k=s}^{T-1} (\hat{p}''_k, \hat{p}''_k - A_k^T \hat{p}''_{k+1}), \\ I_{21} &= \sum_{k=0}^{s-1} (p'_k, H_k^T R_{\eta(k)}^{-1} H_k \hat{x}'_k), I_{22} = \sum_{k=s}^{T-1} (\hat{p}''_k, H_k^T R_{\eta(k)}^{-1} H_k \hat{x}''_k). \end{aligned}$$

Згідно (12)

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{k=0}^{s-1} (p'_k, \hat{p}'_k) - \sum_{k=0}^{s-1} (p'_{k+1} - B_k Q^{-1} B_k^T z'_{k+1}, \hat{p}'_{k+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (p'_k, \hat{p}'_k) - (p'_{k+1}, \hat{p}'_{k+1}) + \sum_{k=0}^{s-1} (z'_{k+1}, B_k Q^{-1} B_k^T \hat{p}'_{k+1}) = \\ &= (p'_0, \hat{p}'_0) - (p'_s, \hat{p}'_s) + \sum_{k=0}^{s-1} (z'_{k+1}, B_k Q^{-1} B_k^T \hat{p}'_{k+1}). \end{aligned}$$

В свою чергу

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s-1} (z'_{k+1}, B_k Q^{-1} B_k^T \hat{p}'_{k+1}) &= \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (z'_{k+1}, \hat{x}'_{k+1}) - \sum_{k=0}^{s-1} (A_k^T z'_{k+1}, \hat{x}'_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} (z'_{k+1}, \hat{x}'_{k+1}) - (z'_s, \hat{x}'_s) - \sum_{k=0}^{s-1} (H_k^T \hat{u}_k, \hat{x}'_k) = \\ &= -(z'_0, \hat{x}'_0) + (z'_s, \hat{x}'_s) - \sum_{k=0}^{s-1} (p'_k, H_k^T R_k^{-1} H_k \hat{x}'_k). \end{aligned}$$

Очевидно, що аналогічні співвідношення мають місце і для I_{12} , тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} (\hat{u}_k, y_k) &= (p'_0, \hat{p}'_0) - (p'_s, \hat{p}'_s) + (p'_s, \hat{p}'_s) - (p''_T, \hat{p}''_T) - \\ &- (z'_0, \hat{x}'_0) + (z'_s, \hat{x}'_s) - (z''_s, \hat{x}''_s) + (z''_T, \hat{x}''_T) - \\ &- \sum_{k=0}^{s-1} (H_k^T \hat{u}_k, \hat{x}'_k) - \sum_{k=s}^{T-1} (H_k^T \hat{u}_k, \hat{x}''_k) + I_{21} + I_{22} = (\hat{x}'_s, a). \end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Робота алгоритму оцінювання на прикладі моделі маятника

На основі наведених у статті результатів в середовищі Mathematica 7 розроблено програмний пакет для проведення процедури оцінювання. Проілюструємо роботу алгоритму оцінювання на прикладі моделі маятника.

Для цього на основі [4] побудуємо різницеву схему та перейдемо від неперервної моделі до дискретної.

Неперервна модель описується рівнянням $x''(t) + \eta x(t) = f(t)$ з відповідними початковими умовами. Після введення різницевої сітки із кроком h , заміні похідних їх різницевиими представленнями та деякій заміні змінних, можемо перейти до наступної дискретної моделі

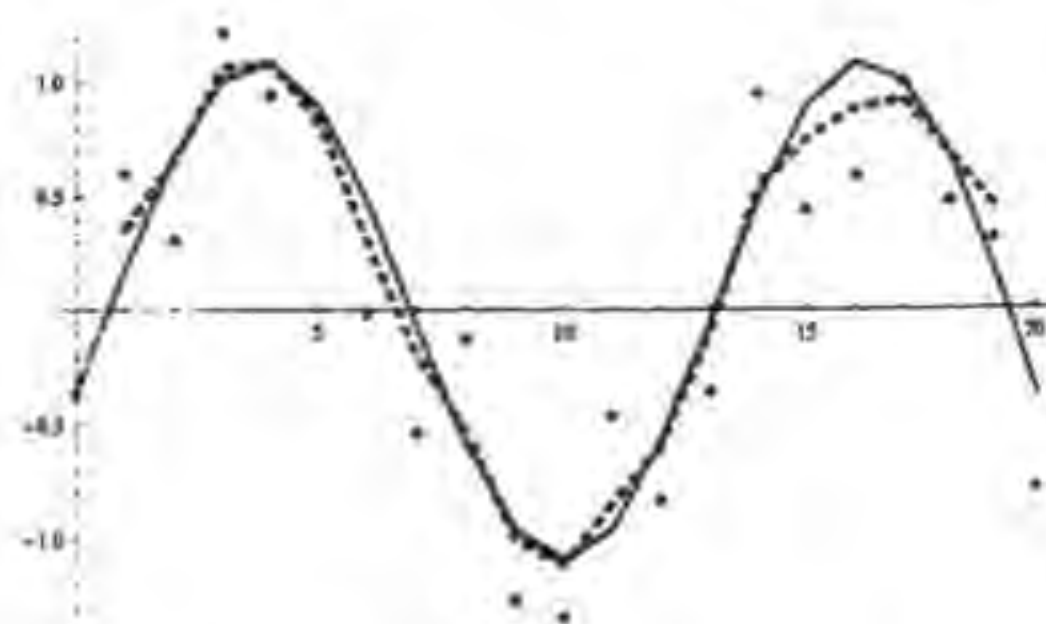
$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k f_k,$$

$$x_0 = x_{T_1}.$$

Тут $x_k \in R^2$, $A_k = \begin{pmatrix} 2-h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = E$, $T_1 = 100$, $h = 0,1$.

Будемо розглядати задачу оцінювання (a, x_s) , $a = (1 \ 0)^T$ при всіх $s: 0 < s < T_1$. Зауважимо, що f_k невідома величина з множини G , але для симуляції роботи моделі виберемо фіксовані вектори f_k та згенеруємо шум η_k . На основі отриманого вектора спостережень y_k проведена процедура обчислення оцінки. Результати

моделювання та оцінювання зображені на наступному графіку



Тут точками зображені спостереження y_k , суцільна лінія – «реальний» сигнал (змодельована траєкторія маятника), штрихова лінія – оцінка

Висновки

Показано, що для лінійних періодичних процесів та систем із дискретним часом гарантовані оцінки виражаються через розв'язки систем лінійних рівнянь.

Для модельного прикладу наведені результати чисельного моделювання.

Список використаних джерел

1. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності //Наукові записки КНУ ім.Т.Г. Шевченка.– 2004.– Том 7: факультет кібернетики.– С. 102–112.
2. *Подлипенко Ю.К.* Минимаксное оценивание правых частей нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности //Доповіді НАНУ.– 2005.– 12.– С.36–44.
3. *Андреев Ю.Н.* Управление конечно-мерными линейными объектами.– М.: Наука, 1976.– 416 с.
4. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. *Демиденко С., Жук С., Наконечний О.* До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач //Тавр.вісн.інформ. і мат. – 2007. – №1. С. 7–24.

Надійшла до редколегії 22.04.09

УДК 51.7

Завершинський М.В. студент

Моделювання механіки зміщень м'яких тканин тіла людини

Запропонована система, моделює та прогнозує розвиток зміщень м'яких тканин людини, у час, під впливом різних факторів.

Модель є достатньо універсальною для моделювання і прогнозування таких схожих механічних зміщень, як: зміщень під впливом гематом та росту пухлин.

Ключові слова: математичне моделювання, прогноз зміщення тканин, гематоми, ракові пухлини

*E-mail: zaver.max@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

В сучасній медицині існує багато проблем, які піддаються математичному моделюванню і автоматизації обробки інформації. Особливо велику користь комп'ютерне моделювання може принести там, де потрібно приймати рішення в обмеженій кількості часу, а також там де потребується прогнозування ситуації. Представлена робота направлена на вирішення обох цих проблем.

Актуальність

Розглянемо алгоритм роботи цієї системи на проблемі прогнозування зміщень тканин мозку людини, під впливом гематоми чи пухлини. Система дозволяє моделювати тільки ті випадки, де можна відокремити більш-менш замкнену систему. Відомо, наприклад, що черепно-мозкові травми поділяються на відкриті і закриті, с гематомами та без гематом, зі зміщеннями та без зміщень. Система дозволяє моделювати тільки закриті травми. Крім цього відомо, що у випадку відкритої черепно-мозкової травми хірург завжди приймає позитивне рішення про проведення операції, та не потребує консультації з програмою. Особливий випадок, коли травма закрита, та має місце зміщення мозку, в такому випадку, хірург користуючись своїм великим досвідом прогнозує розвиток зміщення, та приймає рішення чи проводити оперативне хірургічне втручання.

M.V. Zavershinskiy student

Modeling human body tissue displacement mechanics

In this paper introduced system, that helps to predict tissue displacement.

Model is sufficiently general to simulate and predict development any similar mechanical injury with tissue dislocation, such as tumor or haematoma.

Key Words: mathematical modeling, traumatic brain injure, tumor growth prediction

Запропонована модель спрямована на прогнозування розвитку саме такої ситуації, коли закрита травма зі зміщенням має складний розвиток у часі (декілька днів). Розв'язання цієї задачі надасть можливість хірургам більш точно планувати методику лікування і призначати необхідність хірургічного втручання.

У випадку росту пухлини програма робить прогноз на декілька днів, тижнів чи навіть місяців.

Мета

Мета цієї роботи розробити надати хірургам апарат для аналізу та швидкого прогнозування розвитку травм, які викликають зміщення тканин.

Основний результат

Запропонована модель системи підходить для аналізу великої кількості травм зі зміщеннями, але програмна реалізація робиться для аналізу зміщень тканин мозку людини. Пропонується такий підхід (чотири основних модулі):

1. Обробка та аналіз знімків комп'ютерної томографії тканин.
2. Побудова тривимірної моделі тканин по обробленим образам
3. Побудова математичної моделі зміщення тканин у часі.
4. Аналіз моделі тканин.

Ці проблеми розв'язуються окремо і майже незалежно. Робиться це для того, щоби отримана модель мала більшу універсальність та апаратну незалежність.

Так наприклад перший модуль, який обробляє образи комп'ютерної томографії враховує особливості обладнання конкретного типу томографів. Тобто для того щоб система працювала зі знімками принципово іншого томографа, достатньо переробити тільки цю частину.

Другий модуль, може будувати тривимірну модель не тільки по обробленим (вже апаратно-незалежним) образам, які можуть бути не тільки знімками з томографа. Також ця частина системи може враховувати окремі особливості форми черепа пацієнта, чи інші фактори, які хірург зазначить важливими.

Третій модуль будує фізичну модель зміщення мозку у черепі людини, в часі. На цьому етапі вже все відомо про внутрішнє положення мозку в черепі, особливості травми, тощо. Фізична модель, моделюючи с деяким кроком дискретизації, механічну взаємодію тканин мозку між собою та черепом, показує, яке положення буде займати мозок через потрібний хірургу час.

Четвертий модуль, аналізуючи зміщення тканин мозку в фіксований момент часу, дає відповіді на питання:

1. Чи є защемлення тканин головного мозку
2. Яка частина мозку защемлена
3. Чи є це защемлення критичним для життя пацієнта.

На основі цих даних, своїх знань та життєвого досвіду хірург приймає рішення чи потрібно проводити оперативне втручання.

Обробка та аналіз знімків комп'ютерної томографії мозку

Ця частина системи розпізнає в знімках комп'ютерної томограми мозку, основні частину голови, які роблять основний механічний вплив на зміщення тканин мозку. На поточному етапу розробки, до них входять: мозок, череп, гематоми чи пухлини. Обробляється масив знімків, з кожного з них отримується інформація про взаємне положення цікавих нам тканин. Розглянемо детально математичні методи розпізнання мозку по знімку.

Процес складається з кроків:

1. Читання зображення з файлу електронної медичної книжки (формат DICOM).
2. Бінарізація зображення методом Оцу.
3. Знаходження основних точок мозку.
4. Морфологічна обробка зображення.

Зображення читається з файлу за допомогою OpenSource бібліотек, для обробки DICOM файлів (див. мал. 1). Потім за методом Оцу [1,116-124], знаходиться поріг по якому треба проводити бінарізацію.

На малюнках 1-6 демонструється робота модуля розпізнання на непошкодженій голові людини. Демонструється відокремлення тканин мозку.



Мал. 1.



Мал. 2.



Мал. 3.



Мал. 4.



Мал. 5.



Мал. 6.

Використовуючи такі основні точки, як центр, та середнє відхилення точок від центру, які ми теж знаходимо через матсподівання і дисперсію точок всього зображення, знаходимо ключові точки знімку (див мал. 2).

На основі цього робиться висновок де приблизно мозок знаходиться. Потім комбінуючи операції бінарної морфології зображень: нарощування, ерозія, замикання та розмикання образів, з бінарного зображення

відокремлюється мозок та візуально приєднані до нього частини (див. мал. 4).

На цьому малюнку зображено особливий випадок розпізнання мозку - коли тканини мозку візуально з'єднані з іншими тканинами. В цьому випадку робляться додаткові операції бінарної морфології, які з великою долею вірогідності відокремлюють мозок від сторонніх тканин. Для цього будується маска (див. мал. 5) по якій вирізається мозок з малюнку 4 (див. мал. 6).

Маска будується вирізанням частин мал. 4, які не можуть бути частинами мозку за його природою. Як відомо, мозок має зовнішній вигляд опуклого об'єкту, тому частини, які порушують опуклість не є частинами мозку.

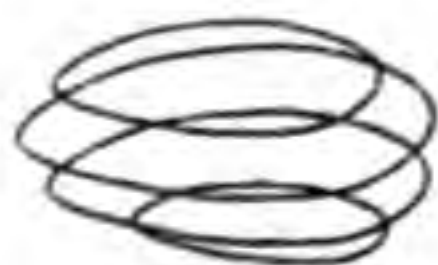
Для цього будується матриця маски - той шаблон, по якому обробляється матриця

$$B(i, j) = \exists i', j' : i - i' \leq m \wedge j - j' \leq m \wedge (A(i, j) \vee (A(i', j') \wedge M(i' - i, j' - j))) \quad (1)$$

$$B(i, j) = \forall \Delta_1, \Delta_2 = -m, m \wedge (M(\Delta_1, \Delta_2) \rightarrow A(i + \Delta_1, j + \Delta_2)) \quad (2)$$

Побудова тривимірної моделі мозку і черепу по обробленим знімкам

На основі масиву оброблених знімків будується тривимірна модель мозку. Для цього кожна з основних тканин: мозок, череп, гематома чи пухлина зіставляються з своїм масивом зображень, впорядкованих за їх положенням у просторі (див. мал. 7).



Мал. 7.



Мал. 8.

Тривимірна модель будується по масивам зрізів методом апроксимації поверхні сплайнами. Тобто робиться зріз масиву площиною, який утворює масив точок на площині, по яким апроксимується сплайнами замкнена лінія (див. мал. 8). На цій основі паралельно будуються:

- Меш - об'єкт фігури, в даному випадку це мозок.

$$C = \{(x, y, z) | f(x, y, z) \wedge (\neg f(x + \Delta, y, z) \vee \neg f(x - \Delta, y, z) \vee \neg f(x, y + \Delta, z) \vee \neg f(x, y - \Delta, z) \vee \neg f(x, y, z + \Delta) \vee \neg f(x, y, z - \Delta))\} \quad (3)$$

Побудова математичної моделі зміщення тканин мозку у часі

зображення. Позначимо A, B, M - матриці вхідного, вихідного зображень та маски. Вважається, що 0 - це false, а 1 - це true. Матриця M має розмір $2m+1$. Матриця маски буде розмірності 5×5 .

Нарощування та ерозія

Для цього на кожну точку з вхідного зображення накладається матриця маски так, щоб центр маски співпадав з цією точкою. Нарощування робиться так: якщо в точці знаходиться одиниця, то тоді кожній точці вихідного зображення ставиться одиниця там де стоїть одиниця в масці, або якщо там стоїть одиниця в вхідному зображенні. (формула 1).

Ерозія робиться навпаки, по формулі 2.

Комбінуючи морфологічні операції, ми отримуємо зображення тканин мозку.

- Множина точок, які мають просторові координати та скрізь заповнюють цей Меш - об'єкт. Позначимо цю множину C .
- Множина точок які є підмножиною попередньої множини, та є граничними точками між внутрішньою частиною об'єкту і зовнішньою. Тобто утворюють оболонку. Позначимо цю множину S .

Робота цього модуля вимагає щоб об'єкт, по якому будується меш - об'єкт та множини C та S були без внутрішніх порожнин.

Алгоритм побудови множини точок C

Для цього треба мати функцію, яка по трьом координатам точки вирішує чи знаходиться вона в об'єкті. Ця функція обчислюється по меш-об'єкту, який утворюється апроксимацією сплайнами масиву зрізів. Позначимо цю функцію f , вона повертає true, якщо точка усередині об'єкту, та false інакше. Тоді множина C описується рівнянням (3).

На основі отриманих множин C та S будується фізична модель об'єктів: мозок, гематоми чи пухлини та череп, за таким

принципом: кожна точка з множини S з'єднується ребрами з найближчими до неї точками (кількість ребер від 3 до 6). Кожному ребру ставиться у відповідність його звичайна довжина та коефіцієнти жорсткості на стискання та розтягання, та його максимальна та мінімальна довжини. Ребра які з'єднують точки з множини оболонки можуть мати свої більш жорсткі коефіцієнти. Ребра стискаються та розтягаються за законом Гука. Закон Гука дуже непогано моделює процес стискання та розтягання пружних предметів, на

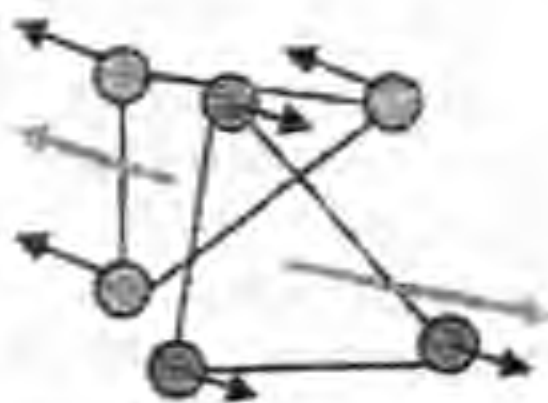


мікроскопічному рівні, з достатньою точністю. Також він дуже легко обчислюється, що важко коли час щільно дискретизований та кількість точок велика. Важливо зауважити, що в нашій задачі можна позбутися деякою невеликою ступінню точності, вигравши в швидкості обробки та щільності дискретизації.

Сумарна взаємодія ребер на кожную точку зумовлює її рухатись у якомусь напрямку. Також для кожної точки визначається під яким тиском вона знаходиться, як сума норм векторів сил, які на її діють. Множина точок які заповнюють об'єкт утворює тривимірну сітку у просторі. Тому при побудові об'єкту точки мембрани можна визначити тільки с геометричних міркувань (див. формулу (3)).

Проблема дифузії різних об'єктів крізь друг друга

Дифузія окремих об'єктів крізь друг друга, та дифузія окремих частин одного об'єкта блокується обробкою мембран S . Яка набагато більш складна ніж рух точок множини C . Для цього в клітинковий автомат вводиться правило:



Трикутники, які утворюють з'єднані точки повинні знаходитись на такий відстані, щоб їх центри зближались не ближчі ніж на задану дистанцію.

Аналіз моделі мозку

Фіксуємо момент часу, в який хірург планує досліджувати хворобу. Отриманні з

фізичної моделі множини S та C , з відомим тиском для кожної точки дозволяють визначити чи існує десь защемлення тканин мозку. Для цього аналізуються множини сусідніх точок, якщо знайдена десь множина точок тканин мозку, які мають високий тиск, сконцентрований в малому просторі, то вважаємо що ці тканини защемлені. По відомим точкам легко відновлюються інформація про положення защемлених точок в мозку, та дізнатися чи небезпечно це защемлення для життя людини.

Висновки

Більшість запропонованих алгоритмів мають елементарну складність та обчислюються за невеликий час. При цьому обчислення залишаються достатньо точними для моделювання і прогнозування розвитку черепно-мозкових травм.

В деяких частинах точність обчислень не можливо дізнатись, так як іноді приходить застосовувати складні евристичні алгоритми. Випадки, коли алгоритм розпізнання не працює існують, але вони занадто штучні, і в нормальній людини таких зрізів зображень комп'ютерної томографії просто не може бути. Програма була протестована на багатьох зображеннях, та значних похибок в її функціонуванні не було виявлено. Важливо зауважити, що поки що програма знаходиться на стадії налагодження та тестування.

Список використаних джерел

1. Л.Шапиро, Дж.Стокман Компьютерное зрение Пер. с англ.-М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 752с.
2. Д.Форсайт, Ж.Понс Компьютерное зрение. Современный подход Пер. С англ.. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. - 928с.
3. С.А.Кривошея, М.О.Перестюк, В.М.Бурим Диференціальні та інтегральні рівняння-К.:Либідь, 2004 -408с.
4. В.В.Мещеряков Задачи по математике с MATLAB & SIMULINK М.:ДИАЛОГ-МИФИ, 2007 – 528с.
5. Хомутов А.Е., Кульба С.Н. Анатомия центральной нервной системы: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. -320с.

Надійшла до редколегії 18.05.09

УДК 681.3.062

Копитіна І.О., аспірантка

Інструментальні програмні засоби динамічної інкапсуляції мультимедійної інформації у WEB сторінки

В статті описуються інструментальні програмні засоби динамічної інкапсуляції мультимедійної інформації у WEB сторінки. Розглянуті основи побудови, склад та технічні особливості веб-додатків, основні функції систем керування Web-контентом, описані вимоги до сучасної CMS-системи.

Ключові слова: CMS-системи, веб-додаток, запит, редагування, контент, керування.

*E-mail: kopytina@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Одним з ключових моментів у розвитку всесвітнього павутиння займає веб-розробка – процес створення веб-сайта або веб-додатку. Термін включає розробку додатків, веб-дизайн, програмування для веб на стороні клієнта і серверу, а також конфігурування веб-серверу. Основними етапами веб-розробки є: проектування сайту або веб-додатку, створення макетів сторінок, наповнення, обслуговування працюючого сайту або його програмної основи.

Основи побудови, склад і технічні особливості веб-додатків.

Веб-додаток – додаток, в якому клієнтом виступає браузер, а сервером – веб-сервер. Браузер здатний відображати веб-сторінки і, як правило, входить до складу операційної системи, а функції його оновлення і супроводу лежать на постачальнику операційної системи. Вся логіка додатку зосереджується на сервері, а браузер лише відображає інформацію, завантажену по мережі з серверу. Однією з переваг такого підходу є той факт, що клієнти не залежать від конкретної операційної системи, і веб-додатки таким чином є міжплатформними сервісами.

Істотною перевагою побудови Web додатків для підтримки стандартних функцій браузера є те, що функції повинні виконуватися незалежно від операційної системи даного клієнта. Замість того, щоб писати різні версії для MS Windows,

I.O. Kopytina, PhD Student

Software tools of dynamic encapsulation the multimedia information to the WEB pages.

The Software tools of dynamic encapsulation the multimedia information to the WEB pages are described in this article. The bases of construction, composition and technical features of web-additions, basic functions of Web-content control system are considered and requirements to the modern cms-system are described.

Key Words: CMS-system, web-addition, query, editing, content, management.

Mac OS X, GNU/Linux і інших операційних систем, додаток створюється один раз і розвертається на будь-якій платформі. Проте різна реалізація HTML, CSS, DOM і інших специфікацій в браузерах може викликати проблеми при розробці веб-додатків і подальшої підтримки. Крім того, можливість користувача налаштовувати багато параметрів браузера (наприклад, розмір шрифту, кольору, відключення підтримки сценаріїв) може перешкоджати коректній роботі додатку.

Інший підхід полягає у використанні Adobe Flash або Java аплетів для повної або часткової реалізації призначеного для користувача інтерфейсу. Оскільки більшість браузерів підтримує ці технології, Flash- або Java-додатки можуть виконуватися з більшою легкістю, тому що вони надають програмісту більший контроль над інтерфейсом, вони здатні обходити багато несумісностей в конфігураціях браузерів, хоча несумісності між Java або Flash реалізаціями на стороні клієнта можуть приводити до різних ускладнень. У зв'язку з архітектурною схожістю із традиційними клієнт-серверними додатками існують суперечки щодо коректності віднесення подібних систем до веб-додатків.

Веб-додаток одержує запит від клієнта і виконує обчислення, після цього формує веб-сторінку і відправляє її клієнту по мережі з

використанням протоколу HTTP. Саме веб-додаток може виступати як клієнт інших служб, наприклад, бази даних або іншого веб-додатку, розташованого на іншому сервері.

У даний час набирає популярності новий підхід для розробки веб-додатків – Аяx. При використанні Аяx сторінки веб-додатки не перезавантажуються цілком, а лише довантажують необхідні дані з серверу, що робить їх більш інтерактивними і продуктивними. Для створення веб-додатків використовуються різноманітні технології і мови програмування, наприклад: PHP, ASP, ASP.NET, JSP, Java, CGI, Perl, Python, Ruby on Rails.

Ряд з них (PHP, Perl, Python) мають відкритий код, розповсюджуються вільно і можуть використовуватися практично на будь-яких веб-серверах, інші (ASP, ASP.NET, Java) – прив'язані до конкретних веб-серверів.

На сьогодні існує безліч систем створення веб-додатків, які розділяють на 3 різні категорії: текстові редактори (Emacs, gedit, Notepad, TextEdit, UltraEdit); текстові редактори HTML-коду (Alleycode HTML Editor, Aptana, Arachnophilia, BBEdit, Bluefish, Crimson Editor, CoffeeCup HTML Editor, EditPlus, HateML Pro, HotHTML, HTML-Kit, HTMLPad, Macromedia HomeSite, Notepad++, NoteTab, PSPad, Quanta Plus, SCREAM, Siteaid, skEdit, Taco HTML Edit, TextMate, TopStyle, WebTide); редактори WYSIWYG («What You See Is What You Get» або «що ви бачите, те ви і отримаєте»: Adobe Contribute "Dreamweaver Lite", Adobe Dreamweaver, Adobe GoLive, Amaya, Blockstar, Bluevoda, HotDog, iWeb, Media Lab SiteGrinder, Microsoft Expression Web, Microsoft SharePoint Designer, Microsoft Visual Studio / ASP.NET Web Matrix, Microsoft Visual Web Developer, NetObjects Fusion, Nvu, Quanta Plus, Sandvox, SeaMonkey Composer, Softpress Freeway, RapidWeaver, WorldWideWeb) [2].

На сьогодні найпопулярнішою системою розробки веб-додатків є Dreamweaver – HTML-редактор. Розроблений компанією Macromedia у версіях до MX, а нині – Adobe. Багатий інструментарій, доступність додатку для різних налаштувань, зручний інтерфейс і інші особливості зробили Dreamweaver одним з найпопулярніших HTML-редакторів у світі.

Dreamweaver включає багато інструментів і засобів для редагування і створення професійного сайту: HTML, CSS, JavaScript, відладчик JavaScript, редактори коду, що дозволяє редагувати JavaScript, XML і інші текстові документи, які підтримуються в

Dreamweaver. Технологія Roundtrip HTML імпортує документи HTML без переформатування коду. Можливість візуального редагування в Dreamweaver також дозволяє швидко створювати або змінювати дизайн проекту без написання коду.

Останнім часом стали популярними системи CMS – система управління вмістом або система управління контентом (англ. Content management system, CMS) – комп'ютерна програма, що використовується для управління вмістом чогось-небудь (звичайно цей вміст розглядається як неструктуровані дані задачі на протилежності структурованим даним, які знаходяться під управлінням СУБД (Система Управління Базами Даних)). Такі системи використовуються для зберігання і публікації великої кількості документів, зображень, музики або відео. Окремим випадком такого роду систем є системи управління web-контентом. Подібні CMS дозволяють керувати текстовим і графічним наповненням веб-сайта, надаючи користувачу зручні інструменти зберігання і публікації інформації.

На Рис.1 вказані вимоги до програмного забезпечення для деяких систем керування контентом[4]:

	Веб сервер	База даних	Мова
Рис. 1. Вимоги до програмного забезпечення			
Ruby on Rails	Apache, FastCGI	MySQL, PostgreSQL, SQLite, Oracle, SQL Server, DB2, Firebird	Ruby
Drupal	Apache IIS	MySQL, PostgreSQL	PHP
Mambo	Apache IIS	Apache IIS	PHP
Typo3	Apache IIS	Apache IIS	PHP
Movable Type	Apache, Jetty, Tomcat, IIS	Apache, Jetty, Tomcat, IIS	PHP
Word Press	Apache, mod_rewrite	Apache	PHP
Text Pattern	Apache	Apache	PHP

Зараз існує безліч готових систем управління вмістом сайту, у тому числі і безкоштовних. Їх можна розділити на три типи за способом роботи:

Генерація сторінок за запитом. Системи такого типу працюють на основі зв'язки «Модуль редагування > База даних > Модуль представлення». Модуль представлення генерує сторінку із вмістом при запиті на нього на основі інформації з бази даних. Інформація в базі даних

змінюється за допомогою модуля редагування. Сторінки наново створюються сервером при кожному запиті, а це створює навантаження на системні ресурси. Навантаження може бути понижено при використанні засобів кешування, які є в сучасних веб-серверах.

Генерація сторінок при редагуванні. Системи цього типу існують для редагування сторінок, які при внесенні змін у зміст сайту створюють набір статичних сторінок. При такому способі налаштовується інтерактивність між відвідувачем і вмістом сайту.

Змішаний тип. Як зрозуміло з назви, поєднує в собі переваги перших двох. Може бути реалізований шляхом кешування – модуль представлення генерує сторінку один раз, надалі вона швидше підвантажується з кеша. Кеш може оновлюватися як автоматично по закінченню деякого терміну або при внесенні змін в певні розділи сайту, так і вручну по команді адміністратора. Інший підхід – збереження певних інформаційних блоків на етапі редагування сайту і збірка сторінки з цих блоків при запиті відповідної сторінки користувачем.

CMS класифікують, спираючись на модель представлення даних – об'єктні, мережеві та модульні [4].

Об'єктна модель представлення даних оперує такими поняттями, як клас і об'єкт. У CMS –системах дані звичайно зберігаються у реляційній та об'єктній базах даних. Упершому випадку об'єктна модель даних відображається

на реляційну модель бази даних. Зв'язки між об'єктами створюються, наприклад, за допомогою таблиць вигляду id, from_object, from_object_version, to_object. На рис.2 приведена можлива структура класу «Стаття» та його представника.

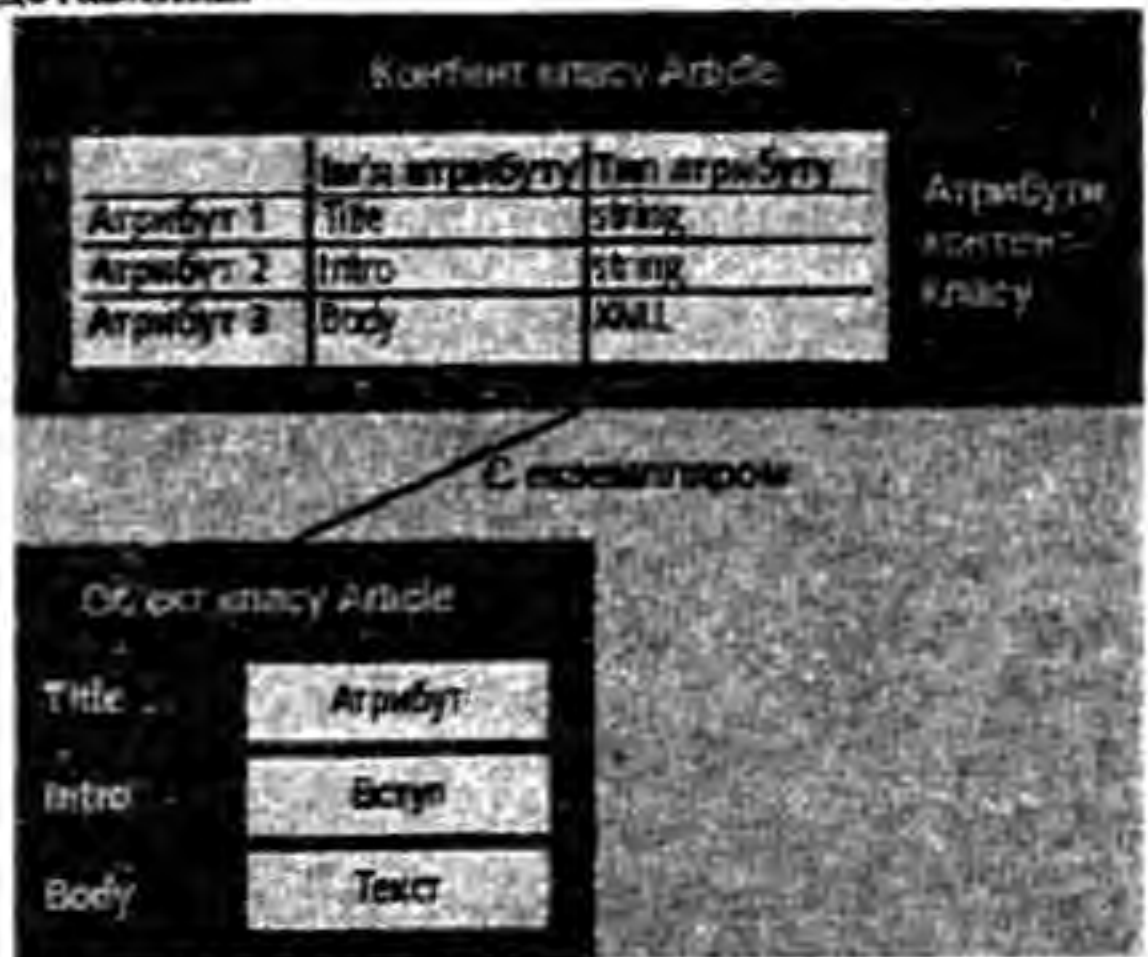


Рис.2. Приклад організації контенту за допомогою об'єктної моделі даних

Об'єктна модель підтримує розробку у середовищі Visual Studio .Net и .Net Framework. Як правило, системи, засновані на об'єктно-орієнтованій моделі даних, найбільш функціональні, гнучкі, але і найбільш складні.

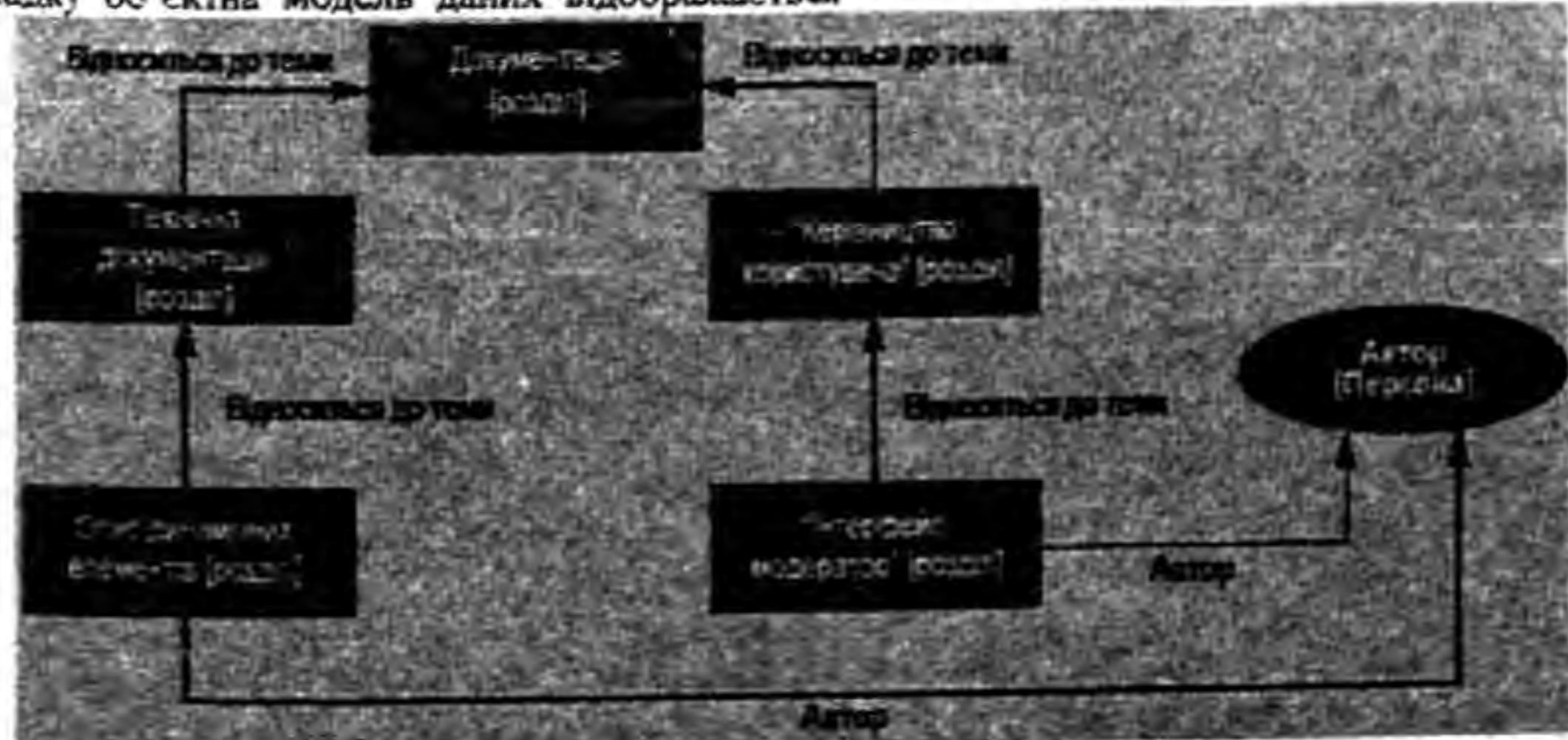


Рис.3 Приклад організації контенту за допомогою мережевої моделі даних

Мережева модель представлення даних спирається на теорію графів: структура інформації представляється у вигляді вузлів із поміченими зв'язками між ними. Фундаментом

системи може слугувати як мережева, так і традиційна реляційна СУБД.

В реляційних базах зберігається інформація про вузли, їх атрибути та зв'язки між ними. Зв'язок відрізняється від атрибута тим, що в ньому зберігається посилання на інший вузол, а в

атрибути – безпосередньо значення. Для вилучення даних з неправильного графа звичайно використовуються рекурсивні процедур обробки, такі як складання списків вузлів, визначення атрибутів вузла по атрибутам попередника. На Рис.3 представлений варіант організації структури даних у вигляді графа.

У подібних системах контент розділений на окремі модулі по типам наповнення. Структура даних залежить від модуля, і вся робота з контентом зосереджена всередині модуля. Модулі незалежні і повністю відповідають за роботу з документами даного типу. Документи описуються за допомогою фіксованого набору характеристик – типи документів строго фіксовані. Розширювати функціональність можна за рахунок додавання нового модуля, заміни чи редагування існуючого коду. Частіше немає системи зв'язків між документами різних модулів і між документами одного і того ж модуля. Стандартний набір типів контенту (модулів) такий : посилання, статті, файли, новини, розділи, форум.

Далі опишемо загальний вигляд архітектури систем керування Web-контентом.

Основні функції систем керування Web-контентом.

Виробники систем керування Web-контентом однакові тільки в загальному визначенні того, що повинні надавати такі системи. Їхні основні параметри можна згрупувати в три категорії: розробка контенту, керування сайтом, доставка контенту.

Розробка контенту – це один із ключових компонентів усієї системи.[1]. Саме тут починається життєвий цикл будь-якого матеріалу, який публікується на сайті. На цьому етапі відбувається обробка інформації, що надходить з різних джерел: від авторів публікацій і статей, від бізнес-партнерів, від клієнтів. Задача підтримки спільної роботи авторів, редакторів, програмістів і менеджерів цілком перекладається на систему. Як правило, для цього використовуються контент-моделі (моделі представлення інформаційного

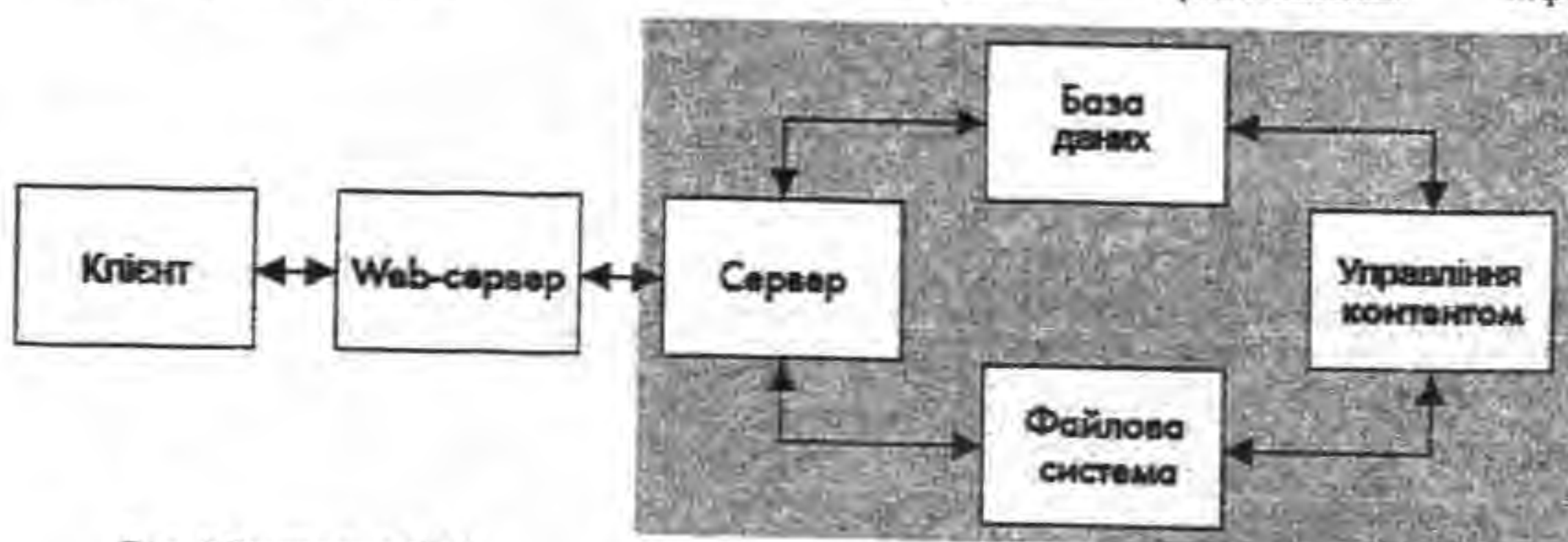


Рис. 4 Структура CMS

У модульних CMS-систем є один загальний недолік – строго фіксована у межах модуля структура змісту. Але для розширення їх функціональності можна скористатися зовнішніми модулями, яких у Мережі багато. Очевидна перевага – можливість отримання майже повністю готового до використання порталу за деякий час.

Системи керування Web-контентом

Для створення й обслуговування динамічних сайтів можна користуватися спеціальними системами керування Web-контентом. Це програмне забезпечення, яке встановлюється на Web-сервері. Основна задача таких систем – контроль контенту, який надходить на сайт з метою забезпечення вірогідності і своєчасності його доставки користувачу[2].

наповнення сайту) і способи описання та механізми керування дизайном. Усі компоненти сайту, включаючи шаблони і наповнення, зберігаються у визначених місцях сховища даних. Система ж автоматично звертається в потрібні місця сховища, дозволяючи користувачам працювати над підготовкою контенту до публікації, включаючи перевірку його вірогідності.

Керування сайтом. На цьому рівні відбувається розробка самого сайту, попередній перегляд і публікація підготовленого контенту. Тут розробляється зовнішній вигляд, готуються шаблони, розподіляються ролі користувачів і класифікація необхідної бізнес-інформації. У набір функцій цього рівня також повинно входити доступне неспеціалістам середовище, що відображає структуру контенту і забезпечує зручну навігацію по масивах документів, що

містять тексти, графіку й інші мультимедійні компоненти.

Доставка контенту. Коли сайт повністю підготовлений до публікації, необхідні засоби для динамічного формування Web-сторінок у залежності від виду конкретних користувачів. Тому один з важливих компонентів даного етапу – персоналізація чи розподіл профілів, щоб кожен користувач одержував тільки ту інформацію, що відповідає його ролі.

Основні інструменти CMS показані на Рис.5:

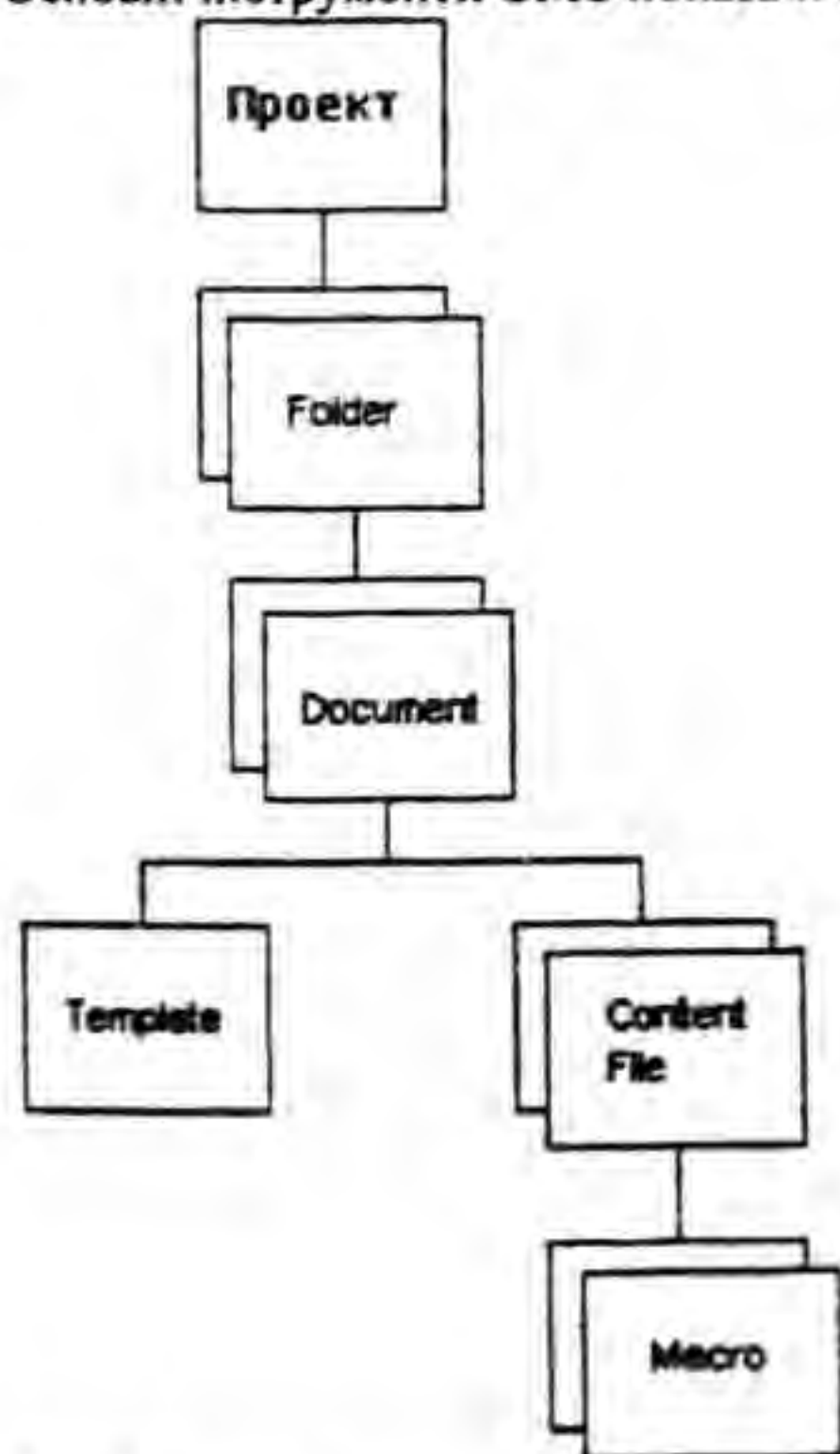


Рис.5 Основні інструменти CMS

Термін контент-менеджер позначає рід людської діяльності – редактор сайту. Велика частина сучасних систем управління вмістом реалізується за допомогою візуального (WYSIWYG) редактора – програми, яка створює HTML-код із спеціальної спрощеної розмітки, що дозволяє користувачу простіше формувати текст. Приклади CMS: CMS під вільними ліцензіями - Drupal; Etomite CMS; eZ publish; Irokez; Joomla; Mambo; mojoPortal; Nucleus CMS; OpenCms; PHP-Nuke; Plone; PostNuke; ReloadCMS; RunCMS; Sapid; SmallNuke; Webpro; WebGUI; Textpattern; Typo3; Wordpress; Xar MODx; CMS під пропрієтарними ліцензіями - A-Real CMS; Cairo CMS; DJEM; IBM Content Manager, S.Builder, Site Sapiens ECMP; Twilight CMS; UlterSuite; Бітрікс.[4]

- CMS можуть бути цікавими різним структурам: від компаній, яким потрібно

підтримувати свій сайт, до студій, що займаються розробкою сайтів;

- CMS не вимагають професійної технічної підготовки при використанні;
- CMS можуть бути успішно інтегрованими у внутрішньокорпоративну інформаційну систему і служити для організації документообігу;
- CMS може працювати у зв'язці з системою документообігу;
- CMS може бути використаний як інструмент при наладці сайту як каналу зв'язку з клієнтами компанії – в цьому випадку доцільно зв'язати CMS і CRM-систему компанії;
- CMS дозволяє здійснювати доступ до редагування інформації різними адміністраторами. Можливо чітке розмежування прав на редагування окремих блоків різними людьми;
- CMS економічно доцільні при організації внутрішньокорпоративних систем і інформаційних порталів;
- CMS рішень багато, але при виборі варто спиратися на наступні можливості:
 - призначений для користувача сервіс – наявність функцій і модулів, зрозумілість і доступність користувачу;
 - технологічність – використання технологій, що дозволяють підвищити пропускну спроможність і надійність системи;
 - сумісність (апаратна і програмна) – можливість функціонування системи на різних платформах, сумісність із СУБД, можливість підключення додаткових модулів;
 - масштабованість – можливість розвитку і нарощування системи.

Не будь-яка контент-система являє собою готовий програмний продукт. Це може бути лише набір модулів або ж варіант створений по індивідуальному замовленню. Таким чином, по ступеню готовності контент-система діляться на наступні різновиди:

- продукт коробочки – готове ПО, що дозволяє встановити систему автоматично і самостійно її набудувати;
- розробник сам встановлює і налаштовує контент-систему на сервері замовника;
- контент-система проектується і розробляється під кожний окремий проект і встановлюється розробником.

Отже, система керування контентом – це пакет програм, спеціально розроблений для керування сайтом. Він встановлюється розроблювачами, але призначений для використання користувачами.

Вимоги до сучасної CMS-Системи

Загальні вимоги:

- модульність конструкції та різні інтерфейси для кожного типу модулів, від простих безкоштовних, до просунутих комерційних;
- постійне відновлення ядра системи і цілодобова технічна підтримка;
- програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом (open-source software);
- масштабованість системи, можливість поетапного нарощування функціональності;
- безкоштовні та бюджетні версії з обмеженими можливостями та інструментарієм;
- використання технологій AJAX;
- мобільність архітектури бази даних, можливість внесення доповнень;
- система кешування.

Вимоги до можливостей:

- керування великою кількістю сайтів і підтримка ієрархії як на кожному сайті, так і між сайтами. Адміністратор сайту підтверджує/не підтверджує подальше просування контенту. Можливість керування багатьма (при наявності прав) сайтами через єдиний інтерфейс.
- багатомовна підтримка;
- можливість збереження/використання індивідуального дизайнерського рішення для кожного сайту, без втрати функціональності;
- інструментарій шаблонів для оформлення розділів і змісту у сполученні з можливістю створювати й редагувати шаблони за допомогою самої системи;
- підтримка зовнішніх програмних модулів.[5]

Висновки

Система керування контентом – пакет програм, спеціально розроблений для керування сайтом. Він встановлюється розробниками, але призначений для використання користувачами. Системи керування контентом – річ відносно нова на ринку, і хоча багато користувачів не знайомі з ними, вони можуть набагато спростити обслуговування веб-сайтів.

CMS – універсальна система, призначена для зручного, швидкого і якісного модулювання, створення і супроводу Web-ресурсів. Керування системою здійснюється через простий, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, завдяки якому складний процес написання Web-ресурсу, зводиться до

наочного, цілісного конструювання функціональності і змісту ресурсу шляхом віддачі системі простих команд. CMS надає можливість керувати не тільки програмними компонентами ресурсу, а і зручно формувати елементи його оформлення – вставляти і змінювати зображення, коректувати розмітку сторінок.

Таким чином, CMS полегшує виконання своїх функцій як Web-програмістами, так і Web-дизайнерами, що приводить до економії засобів, часу на створення і супровід ресурсу.

Користувачеві не потрібно знати досконально HTML, скриптові мови і SQL. До основних базових можливостей CMS відносяться: керування структурою ресурсу, керування наповненням інформації ресурсу, синхронізація різних Баз Даних, підтримка багатокористувацької архітектури, контроль і розподіл доступу користувачів до розділів Web-ресурсу, організація поштових розсилок, проведення опитувань на Web-ресурсі і перегляд результатів проведених опитувань, організація електронної комерції, підтримка багатомовності на Web-ресурсі, редагування будь-яких статичних написів (текстів) Web-ресурсу, ведення журналу дій усіх користувачів CMS, широкий набір готових plugins для забезпечення рішення більшості вимог до ресурсу, просте і швидке створення нових plugins, керування даними з різним набором властивостей.

Список використаних джерел

1. Джон Вандюк //CMS Drupal 6: система для создания сайтов и управления ими// 576 стр. ISBN 978-5-8459-1513-9
2. Денис Колисниченко Движок для вашего сайта. CMS Joomla!, Slad, PHP-Nuke (+ CD-ROM)// БХВ-Петербург, 2008 г.-368стр.
3. Using XSLT to Make Websites/ Worric Faithfull. - Retrieved on 2007-11-08
4. <http://www.opensourcecms.com>
5. <http://www.wikipedia.org/>
6. <http://www.dlib.org>

Надійшла до редколегії 21.05.2009

УДК 681.51/.52 + 61:004.891

Марценюк В.П., д.тех.н., проф., Андрушак І.Є.*

Фармакокінетична модель керування патологічним процесом

В роботі запропоновано модель керування патологічним процесом з урахуванням фармакокінетичної дії. Модель представлено як задачу оптимального керування системою нелінійних диференціальних рівнянь з лінійним щодо керування критерієм якості. Сформульовано необхідні умови оптимальності та аналітично показано вигляд оптимального розв'язку на деякому початковому інтервалі часу. За допомогою спеціально розробленої комп'ютерної програми в модельному прикладі отримано оптимальний розв'язок.

Ключові слова: оптимальне керування, фармакокінетика, необхідні умови оптимальності

*E-mail: marceniuk@yahoo.com

Статтю представив доктор тех. наук, професор Акіменко В.В.

Вступ. При проведенні системних медичних досліджень виникають питання прогнозування кількісної та якісної поведінки захворювання. Це, в першу чергу, форма патологічного процесу, на яку впливає цілий ряд невизначеностей – час формування каскаду специфічних плазматичних клітин, вплив ушкодженого органа на імунну відповідь, схема проведеного лікування і ін. Розв'язування проблем такого роду вимагає розробки відповідних алгоритмів системного аналізу [1-6].

У роботі [7] запропоновано підхід до опису патологічного процесу P , згідно якого вирізняються такі складові: патогенний фактор L (проліферуючі ракові клітини, антигени і ін.), захисно-приспосувальні реакції організму F (імунна система, включаючи антитіла, плазматичні клітини і ін.), поведінка нормальних органів та систем N . Для певності матимемо на увазі під патогенним фактором проліферуючі клітини. Введемо наступні позначення. Нехай $\beta_L, \beta_F, \beta_N$ – народжуваність, а $\delta_L, \delta_F, \delta_N$ – природня смертність проліферуючих клітин, антитіл та нормальних клітин відповідно; $\alpha_{N,L}$ та $\alpha_{L,N}$ – швидкість переходу нормальних клітин в проліферуючі та навпаки; γ – число антитіл, які

V.P.Martsenyuk, Doctor of Eng.Sci., Prof.,
I.Ye.Andrushchak*

Pharmacokinetical Model of Pathologic Process Control

In the work there is offered the model of control for pathologic process taking into account pharmacokinetic effect. The model is presented as optimal control problem for the system of nonlinear differential equations with linear as for control cost criterion. There are stated necessary optimality conditions and the form of optimal solution is analytically shown on some initial interval. With help of special software for simulated case optimal solution is obtained.

Key Words: optimal control, pharmacokinetics, necessary optimality conditions

вимагаються для „нейтралізації” однієї проліферуючої клітини; ρ – ймовірність для γ антитіл „нейтралізувати” одну проліферуючу клітину за одиницю часу; σ – число антитіл, яке з'являтиметься в організмі за одиницю часу в результаті імунної відповіді на наявність однієї проліферуючої клітини. Таким чином приходимо до системи рівнянь для опису некерованого патологічного процесу:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \left((\beta_L - \delta_L) - \frac{\rho}{\gamma} F \right) L + \alpha_{N,L} N, \\ \frac{dF}{dt} &= (\beta_F - \delta_F) F + \sigma L,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \alpha_{L,N} L + (\beta_N - \delta_N - \alpha_{N,L}) N, \quad t > 0, \\ L(0) &= L_0, \quad F(0) = F_0, \quad N(0) = N_0.\end{aligned}$$

Вважається, що початкові умови є додатніми. Зауважимо, що модель носить спрощений характер:

- представлено лише один пул проліферуючих клітин, не розглядаються популяції клоногенічних клітин;
- при розгляді імунної відповіді не беруться до уваги плазматичні клітини, циркулюючі

імунні комплекси, а також вплив на імунну відповідь ступеня ушкодження органа-мішені;

- вважається, що імунна відповідь настає миттєво. Тобто не розглядаються ефекти післядії. Насправді ж потрібен час для формування каскаду плазматичних клітин;

- нормальні клітини представлені лише однією популяцією дормантних клітин.

Керована динаміка без фармакокінетики. Лікування лікарським препаратом моделюється за допомогою обмеженої вимірної функції u , яка

набуває значень на компактному інтервалі $[0,1]$.

Подібно до того, як це розглядалося в попередніх роботах [8] змінна u насправді не моделює дозу препарату, а вплив хіміотерапевтичного лікування. Так $u=1$ представляє випадок

максимальної хіміотерапії, при $u=0$ - хіміотерапія відсутня. У той час як хіміотерапія знищує проліферуючі клітини, в моделі

вважається, що хіміотерапевтичний агент не чинить жодного впливу на нормальні клітини (тобто в моделі не розглядаються питання токсичності лікування).

Введемо параметр ефективності лікарського засобу $s > 0$. Тоді приходимо до системи керування:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \left((\beta_L - \delta_L) - \frac{\rho}{\gamma} F - su(t) \right) L + \alpha_{N,L} N \\ \frac{dF}{dt} &= (\beta_F - \delta_F) F + \sigma L \\ \frac{dN}{dt} &= \alpha_{L,N} L + (\beta_N - \delta_N - \alpha_{N,L}) N, \quad t > 0, \\ L(0) &= L_0, \quad F(0) = F_0, \quad N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо формально припустити миттєву дію лікарського засобу (математично це означало б існування керування нульового порядку, яке пов'язує дозу лікарського препарату та ефективність лікування), то u можна було б назвати дозою лікарського препарату.

Якщо покладемо $P = (L, F, N)^T$, то приходимо до білінійної системи:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= (A + F\Gamma + suB)P, \quad t > 0, \\ P(0) &= P_0, \end{aligned} \quad (3)$$

Тут A, B, Γ - сталі 3×3 -матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \beta_L - \delta_L & 0 & \alpha_{N,L} \\ \sigma & \beta_F - \delta_F & 0 \\ \alpha_{L,N} & 0 & \beta_N - \delta_N - \alpha_{N,L} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\rho/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна показати, що для довільного керування u траєкторія (тобто розв'язок (3) при керуванні u) існує при всіх $t \in [0, T]$, а кожна з координат $P(t)$ залишається додатньою при всіх $t \geq t_0$ (буде доведено далі).

Керована динаміка з урахуванням фармакокінетики. Нехай u позначає дозу лікарського препарату. При цьому $u=1$ означає максимальну дозу, а $u=0$ означає відсутність лікування. Найпростішою є лінійна компартментна система першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = -k_d x + hu, \quad (4)$$

$$x(0) = 0$$

де x - концентрація лікарського препарату у тілі (або плазмі крові), k_d, h - додатні сталі. Така система експоненціального росту (спадання) переважно використовується для моделювання неперервних інфузій. Розглянемо дещо загальнішу білінійну систему вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -(k_d + ug)x + hu, \quad (5)$$

$$x(0) = 0$$

з додатковим додатнім параметром g . Така модель дозволяє показати, що максимальний рівень концентрації досягається при швидкості, яка відрізняється від швидкості, з якою система очищується від препарату, якщо лікарський препарат не поступає додатково. Це має сенс, оскільки фізіологічно це зовсім різні процеси.

Якщо в (3) замінити змінну u на концентрацію x , то отримуємо систему:

$$\frac{dP}{dt} = (A + F\Gamma + sxB)P, \quad P(0) = P_0, \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = -(k_d + ug)x + hu, \quad x(0) = 0, \quad (7)$$

Критерій якості. Метою будь-якого лікування є знищення патогенного чинника або принаймні приглушити його подальший розвиток, при цьому дотримуючись токсичності щодо нормальних тканин. Отже, метою такої моделі є ввести якомога більше лікарського препарату (який знищуватиме патогенний чинник), але при цьому зберігаючи високий рівень кісткового мозку. У роботі [9] метою є максимізація функціоналу:

$$J = \int_0^T a(L(t) + N(t)) - \frac{b}{2}(1 - u(t))^2 dt \rightarrow \max \quad (8)$$

в класі $\mathcal{U}$ усіх вимірних за Лебегом функцій, які майже скрізь приймають значення на множині керування $U = [0, 1]$; a, b - додатні сталі. Використання функції, яка є квадратичною щодо керування, має математичні переваги, оскільки відповідна функція Гамільтона-Понтрягіна:

$$H = a(L(t) + N(t)) - \frac{b}{2}(1 - u(t))^2 + \dots$$

буде строго ввігнутою відносно керування і прийматиме єдиний максимум. Як показано в [9], для досить малого T існує єдине оптимальне керування, яке є неперервним на проміжку $[0, T]$. Однак лише в термінальний час T оптимальне керування приймає максимальне значення $u = 1$, в інші моменти воно строго менше одиниці: $u(t) < 1, t < T$. При цьому оптимальне керування починається з $u = 0$. Потім з певного моменту часу доза лікарського препарату строго зростає, досягнувши рівня 1 в термінальний момент часу. Це призводить до виснаження кісткового мозку під кінець, оскільки останні значення приносять менший внесок в цільову функцію.

У той час як математично задача спрощується при використанні в критерії якості квадратичного вигляду керування, з точки зору моделювання це веде до негативних наслідків застосування лікарського препарату, оскільки, для прикладу, застосування половини дози зараховується лише як четвертина. Звідси оптимальні розв'язки мають тенденцію вводити частини від максимальної дози. Критерій якості, який є лінійним відносно керування, не містить такого примусу і як буде показано далі призводить до схем лікування, які складаються з чергування інтервалів, коли надається повна доза лікарського препарату, або коли препарат не

надається взагалі. В даній роботі розглядатиметься критерій якості вигляду:

$$J = rP(T) + \int_0^T qP(t) + bu(t) dt \rightarrow \max \quad (9)$$

де $r = (r_1, r_2, r_3), q = (q_1, q_2, q_3)$ - вектор-

рядки, причому $r_i > 0, q_i \geq 0, b$ - додатня стала.

У критерії якості (9) в підінтегральній частині використано доданок

$$qP(t) = q_1L(t) + q_2F(t) + q_3N(t) \quad \text{з метою}$$

підтримати високий рівень кісткового мозку. На відміну від робіт, де використовуються нижні межі на рівень кісткового мозку, тут використано так зване „м'яке” обмеження, які неявно максимізує рівень кісткового мозку. Також сюди входить термінальна складова

$r_1L(T) + r_2F(T) + r_3N(T)$, яка представляє зважене усереднене сумарне значення кісткового мозку наприкінці розглядуваного фіксованого

інтервалу терапії $[0, T]$, з метою запобігання надто сильному виснаженню кісткового мозку на кінець інтервалу терапії. Оскільки метою терапії є знищити патогенний чинник (ракові клітини), то ми також хочемо максимізувати кількість введеного лікарського препарату, який діятиме всупереч максимізації клітин кісткового мозку. Отже, інтегрування в критерії якості моделює кумулятивні ефекти лікування.

Має сенс замість u використати в інтегралі концентрацію x :

$$J = rP(T) + \int_0^T qP(t) + bx(t) dt \rightarrow \max \quad (10)$$

Отже, математичне формулювання задачі полягає в максимізації (10) (або (9)) на множині вимірних за Лебегом функцій u , які приймають значення на $[0, 1]$ при динамічних обмеженнях (6), (7) та заданих початкових умовах.

Необхідні умови оптимальності. Застосування необхідних умов оптимальності, заданих принципом максимуму Л.С.Понтрягіна, призводить до твердження.

Теорема 1. Нехай u^* - оптимальне керування задачі (9), (6), (7) з відповідною траєкторією (P^*, c^*) . Тоді існують абсолютно неперервні функції (λ, μ) , при цьому $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (вектор-рядок), $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,

які задовольняють спряжену систему рівнянь з умовами трансверсальності:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda(A + FT + sxB) - q, \quad \lambda(T) = r, \quad (11)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(k_{el} + ug) - s\lambda BP, \quad \mu(T) = 0, \quad (12)$$

такі, що виконується наступна умова: оптимальне керування u^* максимізує функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$H = qP + bu + \lambda(A + FT + sxB)P + \mu(-(k_{el} + ug)x + hu) \quad (13)$$

на множині керування $[0,1]$ вздовж $(\lambda(t), \mu(t), P^*(t), x^*(t))$.

Оскільки оптимальне керування u^* максимізує Гамільтоніан H , то

$$(b + \mu(t)(h - gx(t)))u^*(t) = \max_{0 \leq u \leq 1} (b + \mu(t)(h - gx(t)))u \quad (14)$$

Отже, якщо ми означимо функцію перемикавання:

$$\Phi(t) = b + \mu(t)(h - gx(t)), \quad (15)$$

то оптимальне керування буде:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \Phi(t) > 0, \\ 0, & \Phi(t) < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Зокрема, оскільки $\Phi(T) = b > 0$, то оптимальне керування завжди закінчуватиметься на інтервалі, коли $u(t) \equiv 1$. Априорі оптимальне керування не може бути визначене за допомогою умови (14) в моменти часу, коли $\Phi(t) = 0$. Керування такого виду називається сингулярним. Оптимальне керування повинне будуватися на основі аналізу функції перемикавання. Наприклад, якщо $\Phi(\tau) = 0, \dot{\Phi}(\tau) \neq 0$, то керування матиме точку перемикавання в τ .

Теорема 2. Усі координати P_i та відповідно λ_i , $i = \overline{1,3}$ є додатніми на деякому початковому інтервалі $[0, \tau]$. Концентрація x є нульовою на $[0, \tau]$ якщо не застосовується жодне керування. Потім концентрація стає додатньою а відповідний множник μ від'ємним при $t < T$.

Доведення. З рівняння (7) видно, що для довільного допустимого керування u концентрація x прийматиме невід'ємні значення і буде додатньою при застосуванні керування. Додатність станів $P_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ впливає з додатності початкових умов та з того, що позадіагональні елементи матриці $A + FT + sxB$ є додатніми.

Покладемо: $\tau_i = \inf \{t \in [0, T] : P_i(t) \leq 0\}$, $i = \overline{1,3}$. Припустимо, що існує τ_1 (аналогічні викладки можна провести і для τ_2, τ_3), при цьому $\tau_1 < \min \{\tau_2, \tau_3\}$. Але тоді $P_1'(\tau_1) = \alpha_{N.L.} P_3(\tau_1) > 0$, що суперечить означенню τ_1 .

Подібним чином, оскільки τ_i , $i = \overline{1,3}$ є додатніми, то $\lambda(T)$, $i = \overline{1,3}$ є також додатніми. Позначимо $\sigma_i = \sup \{t \in [0, T] : \lambda_i(t) \leq 0\}$, $i = \overline{1,3}$. Отже, $\lambda_i(\sigma_i) = 0$. Якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то $\lambda_i'(\sigma_i) = -q_i \leq 0$. Якщо всі $q_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, то з (11) випливає, що $\lambda(t) \equiv 0$, що суперечить термінальним умовам в момент часу T . Звідси, принаймні $q_i > 0$ (аналогічні викладки можна провести припустивши додатність q_2 або q_3). Але тоді $\lambda_i(t) < 0$ при $t > \sigma_1$, досить близьких до σ_1 , що суперечить означенню σ_1 . Якщо ж $\sigma_1 < \min \{\sigma_2, \sigma_3\}$, то $\lambda_1(\sigma_2) > 0$ і отже $\lambda_2'(\sigma_2) = -q_2 \leq 0$. Звідси λ_2 є від'ємною при $t > \sigma_2$, що суперечить означенню σ_2 . Аналогічні суперечності отримуємо, якщо $\sigma_2 < \min \{\sigma_1, \sigma_3\}$ або $\sigma_3 < \min \{\sigma_1, \sigma_2\}$. Зокрема звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \lambda(t)BP(t) &= (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P(t) \\ &= -\lambda_1(t)P_1(t) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Звідси $\mu'(\sigma_1) > 0$ при $\mu(\sigma_1) = 0$. Оскільки $\mu(T) = 0$, то звідси μ є від'ємною у всі попередні моменти часу.

Приклад. За допомогою Java-програми dyn.Opt знайдено чисельний розв'язок задачі оптимального керування (6), (7), (9). Файл вводу для опису коефіцієнтів моделі та параметрів чисельного алгоритму має наступний вигляд:

```
# Pathologic process combined with
# pharmacokinetics
#
state P1 P2 P3 x
control u
real beta_L delta_L beta_F delta_F alpha_NL
sigma alpha_LN beta_N delta_N rho gama s k_el g h
r1 r2 r3 q1 q2 q3 b
```

```
beta_L = 1.47
delta_L = 5.643
beta_F = 12.5
delta_F = 2.7
alpha_NL = 0.48
sigma = 0.3
alpha_LN = 5.643
beta_N = 0.001
delta_N = 0.165
rho = 0.8
gama = 4
s = 1
k_el = 3.4657
g = 4*k_el
h = k_el+g
r1 = 1
r2 = 1
r3 = 1
q1 = 1
q2 = 1
q3 = 1
b = 1
```

```
method = dyn_sqp
ode = huen
output_file
PathologicProcessAndPharmacokinetics
nodes = 10
epsilon = 1.0e-4
```

initial_condition:

```
P1 = 0.1
P2 = 0.001
P3 = 0.9
x = 0.0
```

dynamic_equation:

```
ddt P1 = ((beta_L-delta_L)*(rho/gama)*P2-
s*x)*P1+alpha_NL*P3
ddt P2 = (beta_F-delta_F)*P2+sigma*P1
ddt P3 = alpha_LN*P1+(beta_N-delta_N-
alpha_NL)*P3
ddt x = -(k_el+u*g)*x+h*u
```

inequality_constraint:

```
d = u-1
d = -u
d = -P1
d = -P2
d = -P3
d = -x
```

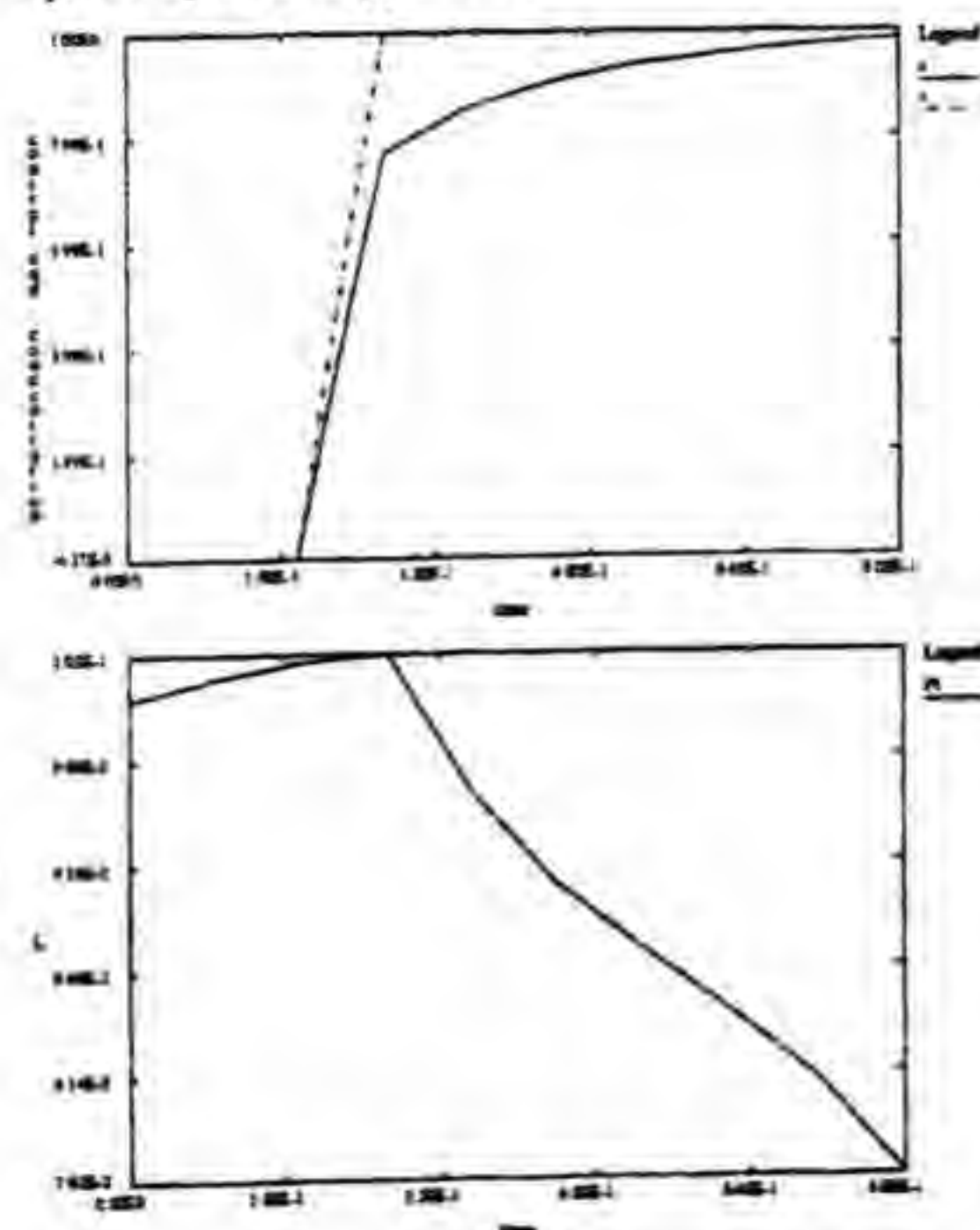
cost_functional:

```
L = -q1*P1-q2*P2-q3*P3-b*u
initial_time = 0.0
final_time = 0.8
```

terminal_condition:

```
phi = -r1*P1-r2*P2-r3*P3
```

На рисунках показано вигляд оптимальних траєкторій та керування.



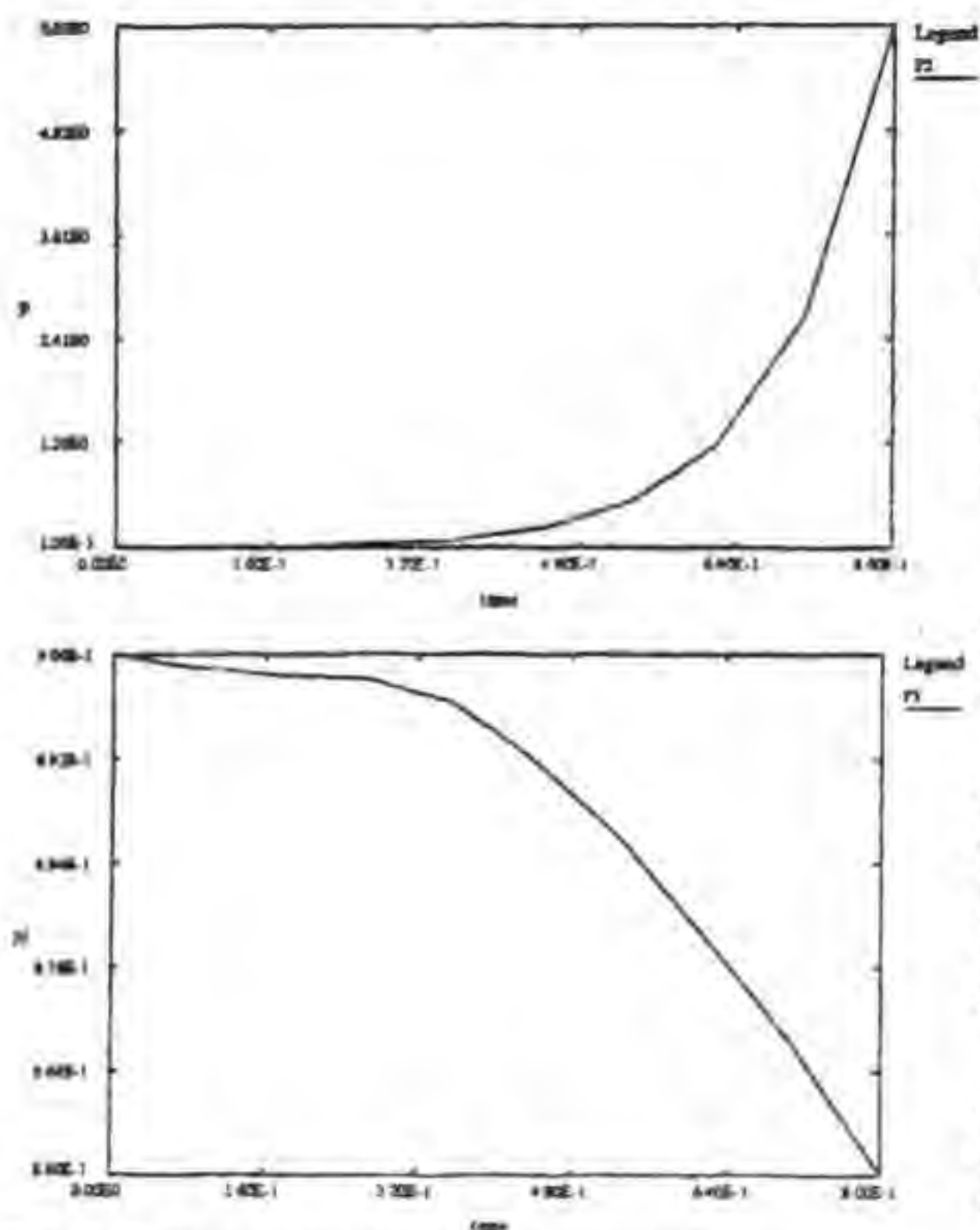


Рис. 1 Оптимальне керування та розв'язки

Висновки. В роботі запропоновано модель керування патологічним процесом з урахуванням фармакокінетики. Модель представлено як задачу оптимального керування системою нелінійних диференціальних рівнянь. Критерій якості вибрано в лінійному щодо керування вигляді, що має клінічне обґрунтування порівняно з квадратичним. Сформульовано необхідні умови оптимальності та аналітично показано вигляд оптимального розв'язку на деякому початковому інтервалі часу. За допомогою спеціально розробленої комп'ютерної програми в модельному прикладі отримано вигляд оптимального керування, що відповідає передбачуваному Теоремою 2.

Список використаних джерел

1. Марценюк В.П. О задаче выбора схемы химиотерапии с точки зрения теории управления // Проблемы управления и информатики. - 2003, - №2. - с. 134-145.
2. Marzeniuk V.P. Taking Into Account Delay in the Problem of Immune Protection of Organism, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol 2/4, 2001. - P. 483-496.
3. Марценюк В.П. О бифуркации Хопфа и периодических решениях в модели иммунной защиты Г.И.Марчука // Проблемы управления и информатики. - 2003. - №4. - С. 140-146.
4. Марценюк В.П., Ладика Р.Б., Ковальчук О.Я. Про оптимізаційний підхід в задачі вибору схеми хіміотерапії // Вісник Харківського національного університету. Серія: математика, прикладна математика і механіка. - 2003, том 582, вип. 52. - С. 71-80.
5. Марценюк В.П. Об устойчивости в модели иммунной защиты с учетом нарушения функционирования органа-мишени: метод вырожденных функционалов Ляпунова // Кибернетика и системный анализ, 2004. - №1. - С. 153-164.
6. Наконечный А.Г., Марценюк В.П. Задачи управляемости для дифференциальных уравнений динамики Гомперца // Кибернетика и системный анализ. - 2004. - №2. - С. 123-133.
7. Марценюк В.П. Об обобщенной модели динамики Гомперца // Проблемы управления и информатики. - 2004. - №6. - С. 130-141.
8. Марценюк В.П. Построение и изучение устойчивости модели противоопухолевого иммунитета // Кибернетика и системный анализ. - 2004. - №5. - С. 123-130.
9. K.R.Fister, J.C.Panetta, Optimal control applied to cell-cycle-specific cancer chemotherapy, SIAM J. Appl. Math. 60 (2000) 1059
10. A.Krener, The high-order maximum principle and its application to singular controls, SIAM J. Contr. Optim. 15 (1977) 256.

Надійшла до редколегії 06.04.2009

УДК 519.8

Машченко С.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Достатні умови індивідуальної оптимальності

Розглядаються достатні умови існування індивідуально-оптимальних рівноваг у некооперативних іграх, які задані як відношеннями переваги гравців, так і функціями їх виграшу.

Ключові слова: загальні ігри, рівновага Неша, індивідуально-оптимальна рівновага.

*E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив доктор техн. наук, проф. Гарашенко Ф.Г.

Розглянемо загальну гру G у нормальній формі $(X, R, i \in N)$, де N - множина з n гравців, $N = \{1, 2, \dots, n\}$; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$, яка є довільною множиною топологічного простору E_i ; R_i - бінарне відношення переваги гравця $i \in N$, яке визначене на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, яка є підмножиною топологічного простору $E = \prod_{i \in N} E_i$.

Відношення переваги $R_i, i \in N$, будемо розглядати у досить широкому сенсі, як нестрогі впорядкування, тобто бінарні повні відношення, які використовуються для цільової орієнтації гравця. Як відомо [1], відношення переваги $R_i, i \in N$, породжують відношення домінування $S_i = \overline{(R_i)^{-1}}$ та байдужості $I_i = R_i \cap R_i^{-1}, i \in N$.

Загальна гра G узагальнює гру GU у нормальній формі $(X, u, i \in N)$ з функціями виграшу гравців, оскільки кожна функція виграшу $u_i: X \rightarrow E^1$ породжує відношення домінування $S_i (u_i(x) > u_i(y) \Rightarrow x S_i y, \forall x, y \in X)$, яке є слабким порядком [1]. Відношення домінування S_i гравця $i \in N$, у свою чергу, породжує відношення байдужості $I_i = \overline{S_i} \cap \overline{S_i}^{-1}$ і переваги $R_i = \overline{S_i}^{-1}$, яке є повним, а тому є нестрогим порядком.

Будемо вважати, що гра відбувається в умовах повної інформованості. Тобто кожен гравець знає не тільки своє відношення переваги, але і відношення переваги інших гравців. Будемо також вважати, що гравці діють некооперативно,

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

The sufficient conditions of individual optimum

The sufficient conditions of existence of individual-optimum equilibriums in the non-cooperative games, which are set by both the relations of preference of players and functions of their winning, are considered.

Key words: general games, the Nesh's equilibrium, the individually-optimum equilibrium.

тобто кожен вибирає свої стратегії самостійно і незалежно від інших.

Одним із принципів оптимальності в некооперативних іграх є концепція індивідуальної оптимальності [2,3], відповідно до якої, кожен гравець вибирає свої стратегії індивідуально (некооперативно), але враховує інтереси всіх інших гравців (компроміс заради вирішення конфлікту).

У цій роботі будуть розглядатися умови індивідуальної оптимальності як у загальних іграх, так і в іграх з функціями виграшу гравців.

Представимо відношення переваги $R_i, i \in N$ гравців агрегованим відношенням $Q = \bigcap_{i \in N} R_i$.

Незважаючи на те, що усі відношення $R_i, i \in N$ є повними, агреговане відношення Q , вже може не бути нестрогим впорядкуванням. Нехай T - відношення домінування, індуковане агрегованим відношенням переваги Q , тоді

$$T = Q \setminus Q^{-1} = Q \cap \left(\bigcap_{i \in N} R_i^{-1} \right) = \bigcup_{i \in N} (Q \cap S_i), \quad \text{де}$$

$S_i = \overline{R_i}^{-1}$ - відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане відношеннями переваги R_i .

Будемо казати, що ситуації $x, y \in X$ знаходяться у відношенні NE -домінування гравця $i \in N$, що породжене агрегованим відношенням домінування T , і позначати це через $x T^{NE(i)} y$, якщо $x T y \wedge (x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i})$.

Ситуацію x^* будемо називати сильною індивідуально-оптимальною рівновагою загальної гри G (їх множину будемо позначати через $SIOE$), якщо $y T^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$.

Існування функцій виграшу гравців дає більш широкі можливості для дослідження сильних індивідуально-оптимальних рівноваг.

Будемо казати, що ситуація y гри GU з функціями виграшу знаходиться у відношенні NE -домінування гравця $i \in N$ до ситуації x і позначати це через $y \succ^{NE(i)} x$, якщо $u_j(y, x_{-j}) \geq u_j(x), \forall j \in N$ та $\exists k \in N$, для якого $u_k(y, x_{-k}) > u_k(x)$.

Ситуацію x^* будемо називати сильною індивідуально-оптимальною рівновагою гри GU з функціями виграшу гравців, якщо $\forall i \in N, \forall y \in X: y \not\succ^{NE(i)} x^*$.

Стабільність індивідуально-оптимальних рівноваг є обґрунтованою в одноцільовій грі, коли у всіх гравців ціль – одна, але вона характеризується для кожного гравця своїм відношенням переваги. В ідеалі, ця ціль, полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найбільш переважна ситуація для усіх гравців. Оскільки досить часто таких ситуацій не існує, то гравці згодні піти на компроміс, заради спільної цілі. Але у силу того, що гравці діють не кооперативно, кожен бачить цей компроміс по своєму, що приводить до конфлікту.

В тому, і лише тому випадку, якщо основою угоди між гравцями буде сильна індивідуально-оптимальна рівновага, зміна будь-яким гравцем $i \in N$, погодженої з іншими гравцями, стратегії x_i^* на іншу, яка є небайдужою до x_i^* , приведе до ситуації домінованої хоча б для одного гравця. Тобто ціль гравця $i \in N$, яка складається з його особистих інтересів та інтересів інших гравців, які він враховує, може бути не задоволеною та досягнутий у ході попередніх переговорів компроміс може бути зруйнованим.

Представимо бінарні відношення переваги гравців $R_i, i \in N$, які за постановкою гри G є повними, агрегованим відношенням $R = \bigcup_{i \in N} R_i$. Очевидно, що відношення R буде також повним, а тому буде нестрогим впорядкуванням.

Нехай S – відношення домінування, індуковане агрегованим відношенням переваги R , тоді $S = R^{-1} = (\bigcup_{i \in N} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in N} (R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in N} S_i$, де $S_i = (R_i)^{-1}$ – відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане відношенням переваги R_i .

Будемо казати, що ситуації $x, y \in X$ знаходиться у відношенні сильного NE -

домінування гравця $i \in N$, що породжене агрегованим відношенням домінування S , і позначати це $xS^{NE(i)}y$, якщо $xSy \wedge (x_{-i} = y_{-i})$.

Ситуацію x^* будемо називати слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою гри G (їх множину будемо позначати через $WIOE$), якщо $yS^{NE(i)}x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$.

У випадку існування функцій виграшу, ці означення набувають наступного вигляду.

Будемо казати, що ситуація y гри GU з функціями виграшу гравців знаходиться у відношенні сильного NE -домінування гравця $i \in N$ до ситуації x і позначати це через $y \succ \succ^{NE(i)} x$, якщо $u_j(y, x_{-j}) > u_j(x), \forall j \in N$.

Ситуацію x^* будемо називати слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою гри GU з функціями виграшу гравців, якщо $\forall i \in N, \forall y \in X: y \not\succ \succ^{NE(i)} x^*$.

Застосування слабких індивідуально-оптимальних рівноваг у одноцільовій грі мотивується таким же сценарієм гри, що і сильних. Але у тому випадку, якщо основою угоди буде слабка індивідуально-оптимальна рівновага x^* , зміна будь-яким гравцем $i \in N$, погодженої з іншими гравцями, стратегії x_i^* на іншу, завжди приведе до ситуації, яка не буде домінувати x^* хоча б для одного гравця (зокрема, і його самого). Тому ціль гравця $i \in N$, яка складається з його особистих інтересів та інтересів інших гравців, які він враховує, може бути не задоволеною та досягнутий у ході попередніх переговорів компроміс, кожного гравця з іншими, може бути зруйнованим.

Позначимо s_i – характеристичну функцію відношення домінування S_i гравця $i \in N$, тобто $s_i(x, y) = 1 \Leftrightarrow xS_i y, s_i(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \bar{S}_i y, \forall x, y \in X$.

Використаємо характеристичні функції відношень домінування гравців для формалізації умов індивідуальної оптимальності.

Теорема 1. Якщо для деякого фіксованого вектору параметрів $\mu = (\mu_j)_{j \in N} \in M^{>0}$ ($\mu = (\mu_j)_{j \in N} \in M^{\geq 0}$), де множина

$$M^{>0} = \{\mu = (\mu_j)_{j \in N} \mid \sum_{j \in N} \mu_j = 1, \mu_j > 0, j \in N\}$$

$$(M^{\geq 0} = \{\mu = (\mu_j)_{j \in N} \mid \sum_{j \in N} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0, j \in N\}).$$

ситуація x^* задовольняє наступній системі:

$$\sum_{i \in N} \mu_i s_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 0, \forall y_i \in X_i, i \in N, \quad (1)$$

то $x^* \in SIOE$ ($x^* \in WIOE$) у загальній грі G .

Доведення. Нехай x^* – задовольняє (1) з деяким фіксованим вектором параметрів $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in M^{>0}$ (вектором параметрів $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in M^{>0}$). Припустимо супротивне, що $x^* \notin SIOE$ ($x^* \notin WIOE$). Тоді, за означенням, $\exists y_i \in X_i, \exists i \in N$, що має місце відношення $y_i T^{N \setminus \{i\}} x^*$ (відношення $y_i S^{N \setminus \{i\}} x^*$). Звідси випливає, що $\exists i \in N, \exists y_i \in X_i$, для яких $(y_i, x_{N \setminus i}^*) T x^*$ (для яких $(y_i, x_{N \setminus i}^*) S x^*$). Звідси $(y_i, x_{N \setminus i}^*) \in (\bigcup_{i \in N} (Q \cap S_i)) x^*$, тоді $(y_i, x_{N \setminus i}^*) \in (\bigcup_{i \in N} S_i) x^*$ (одержимо $(y_i, x_{N \setminus i}^*) \in (\bigcap_{i \in N} S_i) x^*$). У термінах характеристичних функцій це означає: $\exists i \in N, \exists y_i \in X_i$, для яких $\exists j \in N$, що $s_j((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1$ (для яких для $\forall j \in N$ $s_j((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1$). Якщо візьмемо суму цих рівностей з коефіцієнтами $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in M^{>0}$ (з коефіцієнтами $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in M^{>0}$), то одержимо нерівність $\sum_{i \in N} \mu_i s_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) > 0$, яка суперечить (1). Теорему доведено.

Незважаючи на те, що алгебраїчні умови індивідуальної оптимальності хоча є важливими та конструктивними, певний інтерес представляють загально-топологічні умови.

Будемо спиратися на відоме [4] узагальнення теореми Какутані про непорушну точку.

Лема. Нехай відображення φ ставить у відповідність кожній точці $x \in X$ непорожню підмножину $\varphi(x) \subseteq X$ і має властивість відокремлюваності: якщо $x \notin \varphi(x)$, то існує такий окіл N_x точки $x \in X$, що $N_x \cap \text{co}[\bigcup_{y \in N_x} \varphi(y)] = \emptyset$, де $\text{co}[\cdot]$ – опукла оболонка множини. Тоді φ має непорушну точку, тобто існує $x \in X$, що $x \in \varphi(x)$.

Позначимо через P агреговане відношення домінування, безвідносно до способу агрегації відношення переваги гравців, а через

$$IOE = \{x^* \in X \mid y_i \bar{P}^{N \setminus \{i\}} x^*, \forall y_i \in X_i, \forall i \in N\}$$

– множину індивідуально-оптимальних рівноваг гри G за агрегованим відношенням домінування P . Цілком зрозуміло, що коли $P = T$, то $IOE = SIOE$, а коли $P = S$, то $IOE = WIOE$.

Теорема 2. Нехай у загальній грі G множина стратегій X_i гравця $i \in N$ є опуклим компактом, а відношення P є не рефлексивним та для $\forall i \in N$ множина $\{x \in X \mid (y_i, x_{N \setminus i}) P x\}$ є відкритою (відношення P є напів-відкритим знизу) для $\forall y_i \in X_i$, а множина $\{y_i \in X_i \mid (y_i, x_{N \setminus i}) P x\}$ є опуклою для $\forall x \in X$. Тоді множина індивідуально-оптимальних рівноваг IOE є непорожньою.

Доведення. Оскільки за умовою теореми множина $\{x \in X \mid (y_i, x_{N \setminus i}) P x\}$ є відкритою у компактній X для $\forall y_i \in X_i, \forall i \in N$, то для кожного гравця $i \in N$ існує скінченна кількість таких стратегій $y_i^k \in X_i, k \in K_i = \{1, 2, \dots, k_i\}$, які породжують покриття $\bigcup_{k \in K_i} \{x \in X \mid (y_i^k, x_{N \setminus i}) P x\} = X$ множини ситуацій X , яка є також компактом. Нехай $Y_i = \text{co}(\{y_i^k\}_{k \in K_i})$ – опукла оболонка набору стратегій $y_i^k \in X_i, k \in K_i$ гравця $i \in N$. Позначимо через $Y = \prod_{i \in N} Y_i$. Очевидно, що множина Y афінно гомеоморфна деякій компактній опуклій множині у евклідовому просторі. Тому, для будь-якого гравця $i \in N$ на множині Y існують такі неперервні функції $u_i^k(y), k \in K_i$, що $u_i^k(y) > 0 \Leftrightarrow (y_i^k, y_{N \setminus i}) P y$. Побудуємо відображення $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N} : Y \rightarrow Y$ таке, що для $i \in N$:

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} y_i, & \sum_{k \in K_i} u_i^k(y) = 0, \\ \sum_{k \in K_i} y_i^k u_i^k(y) / \sum_{k \in K_i} u_i^k(y), & \sum_{k \in K_i} u_i^k(y) > 0. \end{cases}$$

Припустимо супротивне, що $IOE = \emptyset$. Тоді для $\forall x \in X, \exists i \in N, \exists y_i \in X_i$, що $y_i \bar{P}^{N \setminus \{i\}} x$. Тоді, звідси випливає, що для $\forall x \in X, \exists i \in N, \exists y_i \in X_i$, для яких $(y_i, x_{N \setminus i}) P x$. Таким чином $x \in \varphi(x)$. Покажемо, що відображення φ задовольняє умові відокремлення леми, а саме, існує окіл N_x точки x , що

Доведення. Нехай існує вектор змінних $y \in Y$ для якого виконуються нерівності (2). Припустимо супротивне, що $\hat{x} \notin SIOE$ ($\hat{x} \notin WIOE$). Тоді за означенням $\exists x \in X, \exists i \in N: x \succ^{NE(i)} x^* \quad (x \succ x^*)$, тобто $\exists i \in N, \exists x_i \in X_i: u_i(\hat{x}) \leq u_i(x_i, \hat{x}_{-i}), \forall j \in N; \exists k \in N: u_k(\hat{x}) < u_k(x_k, \hat{x}_{-k}) \quad (u_i(\hat{x}) < u_i(x_i, \hat{x}_{-i}), \forall j \in N)$. Звідси, оскільки функція φ є монотонно зростаючою за відношенням домінування (сильного домінування), одержимо нерівність $\varphi(y, U(\hat{x})) < \varphi(y, U(x_i, \hat{x}_{-i}))$, яка суперечить (2). Теорему доведено.

Наведемо приклади монотонно зростаючих за відношенням домінування (сильного домінування) функцій, які використовуються в теорії прийняття рішень.

Позначимо наступні множини параметрів через $Y_1 = \{y = (y^j)_{j \in N} \mid y^j > 0, j \in N\}$ та $\bar{Y}_2 = \{y = (y^j)_{j \in N} \mid \sum_{j \in N} y^j = 1, y^j > 0, j \in N\}$.

Прикладами монотонно зростаючих за відношенням сильного домінування є функції:

$$\varphi(y, U) = \min_{j \in N} y^j u_j, \text{ де } y \in \bar{Y}_2; \quad (3)$$

$$\varphi(y, U) = \min_{j \in N} (u_j - y^j), \text{ де } y \in R^n; \quad (4)$$

$$\varphi(y, U) = \sum_{j \in N} y^j u_j, \text{ де } y \in \bar{Y}_2; \quad (5)$$

$$\varphi(U) = u_j, \text{ де } j - \text{довільний індекс з } N; \quad (6)$$

$$\varphi(y, U) = \prod_{j \in N} (u_j)^{y^j}, \text{ де } y \in \bar{Y}_2. \quad (7)$$

Функції:

$$\varphi(y, U) = \sum_{j \in N} y^j u_j, \text{ де } y \in Y_1; \quad (8)$$

$$\varphi(y, U) = \prod_{j \in N} (u_j)^{y^j}, \text{ де } y \in Y_1. \quad (9)$$

є монотонно зростаючими за відношенням домінування.

Лінійні функції (5), (8) є особливо привабливими для конструювання достатніх умов індивідуально-оптимальних рівноваг. Для ілюстрації розглянемо наступний наслідок з теореми 3.

Наслідок 2. Ситуація $\hat{x}$ буде сильною (слабкою) індивідуально-оптимальною рівновагою гри GU з функціями виграшу гравців, якщо для $\forall i \in N$ буде сумісною система

нерівностей:

$$\sum_{j \in N} y^j (u_j(x_i, \hat{x}_{-i}) - u_j(\hat{x})) \leq 0, \forall x_i \in X_i,$$

$$y^j > 0, j \in N; \sum_{j \in N} y^j = 1.$$

$$(\sum_{j \in N} y^j (u_j(x_i, \hat{x}_{-i}) - u_j(\hat{x})) \leq 0, \forall x_i \in X_i,$$

$$y^j \geq 0, j \in N; \sum_{j \in N} y^j = 1).$$

Слід зауважити, що навіть у досить простих прикладах може не існувати такої лінійної згортки функцій виграшу гравців, за якою можна знайти індивідуально-оптимальну рівновагу (це стосується і інших функцій φ).

Для гри GU з функціями виграшу гравців, теорема 2 конкретизується наступним чином.

Розглянемо допоміжну гру GV у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де N - множина гравців гри GU ; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$ у грі GU ; $u(x)$ - деяка спільна функція виграшу усіх гравців, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$ та максимізується. Позначимо через

$IOE = \{x^* \in X \mid u(x^*) \geq u(y_i, x_{-i}^*), \forall y_i \in X_i, \forall i \in N\}$ - множину індивідуально-оптимальних ситуацій гри GV і розглянемо умови її непорожності.

Теорема 4. Нехай у допоміжній грі GV множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими компактами евклідових просторів, а спільна функція виграшу гравців $u(x)$ є неперервною за $x \in X$ та квазіувігнутою за стратегіями гравців $x_i \in X_i$ (при будь-яких фіксованих наборах $x_{-i} = (x_j)_{j \in N, j \neq i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N, j \neq i} X_j$ стратегій доповнювальної коаліції $N \setminus \{i\}$ гравця i). Тоді у грі GV множина $IOE \neq \emptyset$.

Доведення. Визначимо багатозначне відображення $\psi: X \rightarrow 2^X$ наступним чином: для $\forall x \in X$ покладемо $\psi(x) = \prod_{i \in N} \psi_i(x_{-i})$, де

$$\psi_i(x_{-i}) = \{x \in X \mid u(x) \geq u(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i\}$$

- множина найкращих відповідей гравця $i \in N$ на фіксований набір $x_{-i} = (x_j)_{j \in N, j \neq i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N, j \neq i} X_j$ стратегій його доповнювальної коаліції $N \setminus \{i\}$.

Оскільки функція $u(y_i, x_{-i})$ є квазіувігнутою за стратегіями $y_i \in X_i$ гравця $i \in N$, то для

фіксованого $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, буде опуклою множина $L_i(x_{N \setminus i}) = \{x = (x_i, x_{N \setminus i}) \mid u_i(x) \geq u_i(y_i, x_{N \setminus i}), \forall y_i \in X_i\}$, яка є множиною Лебега для функції $u_i(y_i, x_{N \setminus i})$. Тому множина $\psi_i(x_{N \setminus i})$ буде опуклою, як перетин $L_i(x_{N \setminus i})$ з опуклою множиною стратегій X_i . Оскільки нерівності є нестрогими, множина стратегій X_i гравця $i \in N$ є компактом, а спільна функція виграшу гравців $u(x)$ є неперервною за $x \in X$, то множина $\psi_i(x_{N \setminus i})$ буде замкнутою.

Звідси випливає, що декартів добуток $\psi(x) = \prod_{i \in N} \psi_i(x_{N \setminus i})$ буде опуклою та замкнутою множиною у просторі ситуацій гри. Тоді багатозначне відображення $\psi: X \rightarrow 2^X$ буде замкненим та опуклозначним. Тому ψ задовольняє умовам теореми Какутані [4] і має непорушну точку $x^* \in \psi(x^*)$, яка буде належати множині IOE . Таким чином, $IOE \neq \emptyset$. Теорему доведено.

Слід відмітити, що для доведення цієї теореми використовувався метод аналогічний методу доведення теореми Неша про існування рівноваг [4].

Розглянемо умови непорожності множин слабких та сильних індивідуально-оптимальних рівноваг, які випливають з теорем 3, 4.

Наслідок 3. Нехай $\varphi(y, U)$ є параметричною функцією, що монотонно зростає за відношенням домінування (сильного домінування) для $\forall y \in Y$. Нехай також у грі GU множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими компактами евклідових просторів і хоча б для одного значення параметрів $y^* \in Y$ функція $\varphi(y^*, U(x))$, де $U(x) = (u_i(x))_{i \in N}$, є неперервною за $x \in X$ та квазіувігнутою за стратегіями гравців $x_i \in X_i$ (при будь-яких фіксованих наборах $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus i} \in X_{N \setminus i} = \prod_{j \in N \setminus i} X_j$ стратегій доповнювальної коаліції $N \setminus \{i\}$ гравця i). Тоді у грі GU множина $SIOE \neq \emptyset$ ($WIOE \neq \emptyset$).

Доведення. Нехай виконуються умови теореми для деякого вектору параметрів $y \in Y$. Розглянемо множину

$$W = \{x \mid \varphi(y, U(x)) \geq \varphi(y, U(x_i, x_{N \setminus i})), x_i \in X_i, i \in N\}.$$

За теоремою 4 множина $W \neq \emptyset$. Нехай $\varphi(y, U)$ є параметричною функцією, що монотонно

зростає за відношенням домінування (сильного домінування). Тоді за теоремою 3 множина сильних (слабких) індивідуально-оптимальних рівноваг $SIOE \neq \emptyset$ ($WIOE \neq \emptyset$). Наслідок доведено.

Слід відмітити, що у ролі параметричних функцій φ можна вибрати будь-яку з (3)-(9). Зокрема, якщо вибрати параметричну функцію φ за формулою (6), то одержимо цікавий наслідок.

Наслідок 4. Нехай також у грі GU з функціями виграшу гравців множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими компактами евклідових просторів і хоча б для одного гравця $j \in N$ функція його виграшу $u_j(x)$ є неперервною за $x \in X$ та квазіувігнутою за стратегіями $x_i \in X_i$ кожного гравця $i \in N$ (при будь-яких фіксованих наборах $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus i} \in X_{N \setminus i} = \prod_{j \in N \setminus i} X_j$ стратегій доповнювальної коаліції $N \setminus \{i\}$ гравця i). Тоді у грі GU множина слабких індивідуально-оптимальних рівноваг $WIOE \neq \emptyset$.

У висновку відмітимо, що розглянуті умови індивідуальної оптимальності є слабкішими за відповідні для рівноваг Неша, що свідчить про більш широкі можливості застосування індивідуально-оптимальних рівноваг.

Список використаних джерел

1. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
2. Мащенко С.О. Слабкі індивідуально-оптимальні рівноваги // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – 2. – с. 216-223.
3. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – 4. – С. 162-169.
4. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. – Л.: Наука, 1980. – 168 с.

Надійшла до редколегії 08.05.09

УДК 519.21

Нікітін А.В., к.ф.-м.н., доц.

Теорема існування і єдиності розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі

Сформульовані та доведені умови існування та єдиності розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, гільбертовий простір.

*E-mail: nik_tol@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Хусаїнов Д.Я.

Вступ.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = X_t A dt + \sum_{k=1}^{\infty} (X_t B_k dW_k(t) + \int_U X_t C_k(u) \tilde{\nu}_k(dt, du)), \quad (1)$$

де $A, B_k, C_k(u), k=1, \dots$ – необмежені лінійні оператори, визначені на деякій щільній в X множині D , причому для $x \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k(x)\|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \|C_k(u)x\|^2 \Pi(du) < \infty,$$

$W_k(t)$ – незалежні між собою вінерові процеси, $\tilde{\nu}_k(dt, du)$ – незалежні між собою центровані пуассонові міри такі, що

$$\tilde{\nu}_k(dt, du) = \nu_k(dt, du) - M \nu_k(dt, du).$$

Рівняння (1) можна переписати у вигляді [1]

$$dX_t = X_t A dt + X_t dY_t, \quad (2)$$

де Y_t – однорідний операторний процес із гаусовими незалежними приростами, визначений на щільній множині D . Процес Y_t можна представити у вигляді ряду з незалежних вінерових процесів та інтегралів за пуассоновими мірами, тому рівняння (1) є загальним лінійним рівнянням з однорідним гаусовим процесом з незалежними приростами.

Нас цікавитиме випадок, коли рівняння (1) має розв'язок, що володіє другим

Nikitin A.V., Ph.D., docent

Theorems of existence and unicity of decisions of the systems of stochastic differential equations of Ito-Schorohod in space of Gilbert

Formulated and the well-proven conditions of existence and unicity of decisions of the systems of stochastic differential equations of Ito-Schorohod in space of Gilbert.

Keywords: stochastic differential equation, space of Gilbert.

моментом. Зауважимо, що розв'язком цього рівняння вважається такий сильний операторний процес X_t , для якого при $x \in D$ функція $X_t x$ має стохастичний диференціал, який збігається з результатом застосування до x правої частини (1).

Якщо рівняння (1) має єдиний розв'язок, то з ним можна пов'язати однорідну сильну стохастичну півгрупу X_t^s (це розв'язок (1) для $t > s$ з початковою умовою $X_s^s = I$). Якщо розв'язок володіє другим моментом, то $V_t(G) = M X_t^{0*} G X_t^0$ є півгрупою обмежених лінійних операторів в $L(X)$ з наступною властивістю: для всіх $x, y \in D, G \in L(X)$ існує границя

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(V_t(G)x, y) - (Gx, y)] = (Q(G)x, y),$$

де

$$Q(G) = A^* G + G A + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^* G B_k + \int_U C_k^*(u) G C(u) \Pi(du)) \quad (3)$$

Мета.

Метою роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування та єдиності розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

Основний результат.

Теорема 1. Для існування і єдиності розв'язку (1) з локально обмеженим другим моментом, необхідно, а для єдиності і достатньо, щоб існувала півгрупа в $L(X)$ з твірним оператором $Q(G)$, заданим рівністю (3).

Доведення. Зауважимо, що з обмеженості $V_t(G)$ в околі нуля і того, що для $x \in D, y \in D$ $(V_t(G)x, y) \rightarrow (Gx, y)$, випливає, що $V_t(G)$ слабо неперервна по t в точці 0. Тому із загальної теорії півгруп випливає, що на деякій множині $\Delta \subset L(X)$ існує слабка границя

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [V_t(G) - G] = \dot{Q}(G), G \in \Delta,$$

при цьому $\dot{Q}(G) \in L(X)$. Очевидно, що при $G \in \Delta$ $\dot{Q}(G) = Q(G)$.

Оператор $\dot{Q}(G)$ слабо замкнутий на Δ . Оператор $Q(C)$ слабо замкнутий на області, де $Q(G) \in L(X)$. Тому Δ співпадає з множиною тих G , для яких $Q(G) \in L(X)$ і $\dot{Q}(G) = Q(G)$. Цим необхідну умову існування розв'язку (1), що володіє локально обмеженим другим моментом, яка полягає в тому, що для цього необхідно, щоб оператор $Q(G)$ був твірним оператором деякої слабо неперервної півгрупи в $L(X)$, встановлено.

Покажемо, що у цьому випадку розв'язок (1), який володіє локально обмеженими другими моментами, єдиний. Локальна обмеженість $V_t(G)$ випливає з нерівності

$$|M(GX, x, X, y)| \leq \|G\| \sqrt{M|X, x|^2 M|X, y|^2} \leq \|G\| \cdot \|MX, X\| \|x\| \|y\|$$

випливає, що при деякому $\alpha > 0$ $\|V_t(\cdot)\| = O(e^{\alpha t})$.

Нехай X_t та $\hat{X}_t$ – два розв'язки (1), для яких $\|MX_t, X_t\| + \|\hat{M}\hat{X}_t, \hat{X}_t\| = O(e^{\alpha t})$.

Припустимо, що

$$R_t = M(X_t - \hat{X}_t, X_t - \hat{X}_t). \text{ Тоді для } x, y \in D$$

$$\frac{d}{dt}(R_t x, y) = (Q(R_t) x, y).$$

Оскільки $R_t = O(e^{\alpha t})$, то при $\lambda > \alpha$ $\int_0^\infty e^{-\lambda t} R_t dt$ визначений і

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(R_t x, y) e^{-\lambda t} dt = (Q(\int_0^\infty e^{-\lambda t} R_t dt) x, y),$$

звідки випливає

$$(\lambda \int_0^\infty R_t e^{-\lambda t} dt) x, y = (Q(\int_0^\infty e^{-\lambda t} R_t dt) x, y).$$

Припустимо, що $\int_0^\infty R_t e^{-\lambda t} dt = G_\lambda \in L(X)$.

Очевидно [10]

$$\frac{d}{dt} V_t(G_\lambda) = V_t(Q(G_\lambda)) = \lambda V_t(G_\lambda),$$

$V_t(G_\lambda) = G_\lambda e^{\lambda t}$. Якщо $G_\lambda \neq 0$, то це протирічить тому, що $\|V_t(\cdot)\| = O(e^{\alpha t})$, оскільки $\lambda > \alpha$. Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер достатні умови існування розв'язку (1), який володіє локально обмеженими другими моментами.

Лема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) є обмеженими операторами. Крім того, $B_k = 0$ і $C_k(u) = 0$ при $k > m$. Якщо

$$2(Ax, x) + \sum_{k=1}^m (|B_k x|^2 + |C_k(u)x|^2) \leq \alpha |x|^2,$$

то розв'язок (1) з початковою умовою $X_0 = I$ задовольняє співвідношенню

$$MX_t^* X_t \leq e^{\alpha t} I.$$

Доведення. На підставі умов леми оператор $Q(G)$ є обмеженим і, значить, $\|V_t(I) - I - tQ(I)\| = o(t)$. Тому для всякого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що при $t \leq \delta$

$$(V_t(I)x, x) \leq (x, x) + t[(Q(I)x, x) + \varepsilon(x, x)] \leq (x, x)(1 + t(\alpha + \varepsilon)) \leq e^{(\alpha + \varepsilon)t}(x, x).$$

Оскільки півгрупа $V_t(G)$ є монотонною, то

$$V_{2t}(I) = V_t(V_t(I)) \leq V_t(e^{(\alpha + \varepsilon)t} I) \leq e^{(\alpha + \varepsilon)2t} I,$$

$$V_{nt}(I) = V_{(n-1)t}(V_t(I)) \leq V_{(n-1)t}(e^{(\alpha + \varepsilon)t} I) \leq e^{(\alpha + \varepsilon)nt} I.$$

Тому для довільного $s > 0$ $V_t(I) \leq e^{(\alpha + \varepsilon)s} I$, яке б не було $\varepsilon > 0$. Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримуємо доведення леми.

Теорема 2. Нехай при деякому $\alpha > 0$ для всіх $x \in D$ виконана нерівність

$$2(Ax, x) + \sum_{k=1}^m (|B_k x|^2 + |C_k(u)x|^2) \leq \alpha |x|^2.$$

Тоді рівняння (1) має розв'язок з початковою умовою $X_0 = I$, для якого $MX_t^* X_t \leq e^{\alpha t} I$.

Доведення. Нехай $X_t^{n,m}$ є розв'язком рівняння

$$dX_t^{n,m} = X_t^{n,m} A_n dt + \sum_{k=1}^m (X_t^{n,m} B_k^n dW_k(t) + \int_U X_t^{n,m} C_k^n(u) \tilde{\nu}_k(dt, du)), \quad X_0^{n,m} = I,$$

де $A_n = P_n A P_n$, $B_k^n = B_k P_n$, $C_k^n(u) = C_k(u) P_n$, P_n – послідовність проектуючих операторів, які монотонно зростають до I , причому $P_n x \in D$ для всіх x . Оператори A_n , B_k^n та $C_k^n(u)$ обмежені і

$$\begin{aligned} 2(A_n x, x) + \sum_{k=1}^m (|B_k^n x|^2 + |C_k^n(u) x|^2) = \\ = 2(AP_n x, P_n x) + \sum_{k=1}^m (|B_k P_n x|^2 + |C_k(u) P_n x|^2) \leq \\ \leq \alpha |P_n x|^2 \leq \alpha |x|^2. \end{aligned}$$

Тому на підставі леми 1 $\|MX_t^{n,m} X_t^{n,m}\| \leq e^{\alpha t}$.

Покладемо $\tilde{D} = \bigcup_n P_n x$. Для $x \in \tilde{D}$

$$\begin{aligned} M |X_{t_2}^{n,m} x - X_{t_1}^{n,m} x| \leq 2M \left| \int_{t_1}^{t_2} X_s^{n,m} A_n x ds \right|^2 + \\ + 2M \int_{t_1}^{t_2} |X_s^{n,m} B_k^n x|^2 ds + 2M \int_{t_1}^{t_2} |X_s^{n,m} C_k^n(u) x|^2 ds \leq \\ \leq 2(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} |X_s^{n,m} A_n x|^2 ds + \\ + 2 \int_{t_1}^{t_2} M |X_s^{n,m} B_k^n x|^2 ds + \\ + 2 \int_{t_1}^{t_2} M |X_s^{n,m} C_k^n(u) x|^2 ds \leq 2(|Ax|^2 + \\ + \sum_{k=1}^m (|B_k x|^2 + |C_k(u) x|^2)) \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha s} ds, \end{aligned}$$

якщо тільки $t_2 - t_1 < 1$ і n досить велике.

Отже, скінченновимірні розподіли процесів

$$(X_t^{n,m} x, y), \quad x \in \tilde{D}, \quad y \in D_1,$$

де D_1 – деяка зліченна в $\tilde{D}$ множина, слабо компактні.

Нехай n_k, m_k вибрані таким чином, щоб $n_k, m_k \rightarrow \infty$ та скінченновимірні розподіли процесів

$$\{(X_t^{n_k, m_k} x, y); x, y \in D_1, W_k(t), \tilde{\nu}_k(dt, du), k = 1, 2, \dots\}$$

збігались до скінченновимірних розподілів процесів

$$\{(Z_t, x, y); x, y \in D_1, W_k(t), \tilde{\nu}_k(dt, du), k = 1, 2, \dots\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (Z_t, x, y) = \int_0^t (Z_s, Ax, y) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \{(Z_s, B_k x, y) dW_k(s) + \\ + \int_U (Z_s, C_k(u) x, y) \tilde{\nu}(ds, du)\} \end{aligned}$$

на підставі про припущення про D_1 для досить великих n $A_n x = Ax$ і без обмеження загальності можна вважати, що

$$Ax, B_k x, C_k(u) x \in D_1$$

при $x \in D_1$, D_1 – лінійний простір над полем раціональних чисел. (Z_t, x, y) є білінійною формою на D_1 , яка задовольняє умовам

$$M(Z_t, x, y)^2 \leq e^{\alpha t} |x|^2 \cdot |y|^2. \quad (3)$$

Тому вона продовжується за неперервністю (у середньому квадратичному) на X , причому зберігається нерівність (3). Поки (Z_t, x, y) тільки позначення білінійної форми. Покладаючи

$$X_t x = \sum_{k=1}^{\infty} (Z_t, x, e_k) e_k,$$

де $\{e_k\}$ – деякий базис у D_1 такий, що $P_n e_k = 0$ для всіх достатньо великих k , отримаємо розв'язок рівняння (1).

Збіжність ряду випливає з того, що

$$\begin{aligned} M \sum_{k=1}^{\infty} (Z_t, x, e_k)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \sum_{k=1}^n (X_t^{n,m} x, e_k)^2 = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} M |X_t^{n,m} x|^2 \leq |x|^2 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

і цим теорему 2 доведено.

Висновки.

Таким чином, встановлені умови існування та єдиності є важливими для подальших досліджень на стійкість: якщо рівняння (1) має єдиний розв'язок, то з ним можна пов'язати однорідну сильну стохастичну півгрупу X_t^s (це розв'язок (1) для $t > s$ з початковою умовою $X_s^s = I$).

Список використаних джерел

1. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических

- дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
2. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
 3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
 4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
 5. Еремин Е.П., Нгуен Тхук Лоан., Чхартшвили Г.С. Беспорисковая система идентификации с моделью, синтезируемая по критерию гиперустойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1973. – №5. – С.54–65.
 6. Дарийчук И.В., Никитин А.В., Ясинский В.К. Анализ устойчивости стохастических систем с пуассоновскими возмущениями. II. Устойчивость решений в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №6. – С.50–66.
 7. Кац И.Я. Метод функции Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. – 222 с.
 8. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Изд-во "Советское радио", 1977. – 488 с.
 9. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 821 с.
 10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. – К.: Наук.

думка, 1980. – 612 с.

Надійшла до редакції 21.04.2009

УДК 519.711

Вікторія Н. Омардирова*

**Модель вибору оптимального
інвестиційного портфелю з
використанням апарату RFT-
перетворювачів**

*Стаття присвячена опису моделі вибору
оптимального інвестиційного портфелю з
використанням апарату RFT-
перетворювачів.*

*Ключові слова: інвестиційний портфель,
RFT-перетворювачі, фондовий індекс*

*E-mail: vika1301@gmail.com

Статтю представив д.т.н., професор В.В.Акіменко

Вступ

Однією з найважливіших задач в сучасних фінансах є задача створення оптимального портфелю цінних паперів. Така задача є актуальною в сучасних умовах, зважаючи на велику кількість інвесторів, що інвестують кошти на вторинному ринку акцій як на вітчизняному фондовому ринку так і на світових фондових ринках. Першим підхід до створення інвестиційного портфелю з використанням математичного апарату запропонував нобелівський лауреат Гаррі Марковиць [1]. Його підхід до формування був вдало розвинений іншими нобелівськими лауреатами Вільямом Шарпом, та видатним американським економістом Джеймсом Тобіном [1]. В статті розглядається задача формування оптимального портфелю інвестором, що інвестує кошти на вторинному ринку акцій, та прогнозування його поведінки на періоді інвестування. Основою підходу, який пропонується у статті є відмова від використання кривих байдужості і теорії корисності при виборі оптимального інвестиційного портфелю з ефективної границі портфелів та співставлення характеристик інвестиційних портфелів, що належать ефективній границі, з характеристиками фондового індексу. Співставлення характеристик інвестиційного портфелю з характеристиками можливого інвестування у фондовий індекс є загальноприйнятим підходом при інвестуванні коштів на вторинному ринку акцій. Тут фондовий індекс виступає еталонним інвестиційним портфелем або так званим

Victoria N. Omardybirova*

**Optimal investment portfolio selection model
based on RFT-transformations**

*The article is devoted to the description of
optimal investment portfolio selection model
based on RFT-transformations.*

*Key words: investment portfolio, RFT-
transformations, stock market index.*

benchmark portfolio, співставлення з яким і дозволяє оцінити ефективність інвестування коштів у конкретний інвестиційний портфель. У якості прогностичного засобу пропонується застосування апарату RFT-перетворювачів, які дозволяють прогнозувати поведінку обраного портфелю на горизонті інвестування [2,3].

Основні позначення

Нехай $x_i = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ - частки капіталу, що

інвестуються у кожний актив з n можливих активів у портфелі.

$\mathcal{R}_i = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_n(t) \end{pmatrix}$ - очікувані доходності

кожного ризикованого активу в портфелі.

Тоді очікувана доходність портфелю за один рік в залежності від обраного розподілу капіталу по ризикованих активах може бути записана у вигляді:

$$P(x) = x^T \mathcal{R}_i = \sum_{i=1}^n R_i \cdot x_i.$$

1. **Ефективність портфелів: модель
Марковиця і модель Тобіна.**

Загалом, розв'язок оптимізаційних задач для портфелів у згаданих авторів залежить від того,

чи є серед інструментів з яких складається портфель, безризиковані. Оптимізаційна задача для портфелю складаного виключно з ризикованих інструментів позначають як модель Марковиця. Якщо серед інструментів може бути наявним безризикований актив, відповідна оптимізаційна модель носить назву модель Тобіна.

Підхід до диверсифікації запропонований Марковицем, приводить до створення портфелю, який для заданого рівня ризику має максимальну очікувану дохідність. Такий портфель отримав назву ефективний портфель Марковиця. Ризик розглядається як варіабельність відповідного інструменту: вважається що із збільшенням змінюваності збільшується ризик. У свою чергу змінюваність інструменту розглядається як дисперсія цін відповідного інструменту на тому чим іншому інтервалі часу. Отже, з одного боку ризик – це дисперсія, а з іншого, щоб реалізувати можливість вимірювання-оцінювання дисперсії доводиться припускати, що на певному інтервалі часу відліки цін інструменту є незалежними між собою однаково розподіленими випадковими величинами. Як правило припускається, що вони є нормально розподіленими. Отже, для оцінювання параметрів нормального розподілу: математичного сподівання та дисперсії використовуються стандартні формули оцінювання через вибіркве середнє та вибіркву дисперсію.

В подальшому, коваріаційну функцію $\mathcal{R}_t$ вважаємо сталою на певному інтервалі часу, тому індекс t будемо опускати.

1.1. Модель Марковиця:

В моделі Марковиця всі активи вважаються ризикованими, тобто всі вони мають ненульову дисперсію. Це означає, що в матриці коваріації $V = \text{Cov}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) = (V_{ij})$ всі діагональні елементи, які є дисперсіями відповідних інструментів, є ненульовими: $DR_i > 0, i = \overline{1, n}$. Загалом, матриця V вважається додатньо визначеною.

Нехай $V = \text{Cov}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) = (V_{ij})$, в якій на діагоналі стоять дисперсії $DR_i, i = \overline{1, n}$. матриця коваріацій.

$$V = \text{Cov}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) = (V_{ij}) =$$

$$= M(\mathcal{R} - M\mathcal{R})(\mathcal{R} - M\mathcal{R})^T = (\text{Cov}(R_i, R_j))$$

Зауважимо, що $V_{ii} = M(R_i - MR_i)^2 = D(R_i), i = \overline{1, n}$ є дисперсією i -того інструменту.

$$D_p = D(P) = D(x^T R) = x^T \text{Cov}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) x = \\ = x^T V x = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij},$$

де $D(P)$ - ризик портфелю (дисперсія) з n ризикованих активів

x - як і раніше, вектор ваг кожного ризикованого активу в портфелі

$\text{cov}(R_i, R_j)$ - попарні коваріації між всіма активами, що входять до складу портфелю

$\sigma(P) = \sqrt{D(P)}$ - стандартне відхилення дохідності портфелю.

Перепишемо формулу для визначення ризику портфелю у наступному вигляді:

$$V_p = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij},$$

де $V_p = D(P)$ - ризик портфелю з n ризикованих активів, $V_i^2 = D(R_i), i = \overline{1, n}$ - ризик кожного з n ризикованих активів.

Визначення 1: Припустимим портфелем будемо називати будь-який портфель, який може побудувати інвестор з наявних активів. Набір припустимих портфелів має назву припустимою множиною портфелів.

Стандартними характеристиками будь якого припустимого портфелю є очікувана дохідність та ризик. Нагадаймо, що останній ототожнюється з стандартним відхиленням.

Визначення 2: Зображення множини всіх припустимих портфелів множиною пар дохідність-ризик будемо називати діаграмою ризик-дохідність для множини можливих портфелів.

Визначення 3: Ефективний портфель – це портфель, який має мінімальний рівень ризику серед всіх портфелів з заданим рівнем очікуваної дохідності, або максимальну очікувану дохідність серед всіх портфелів з заданим рівнем ризику. Він також має назву портфель, ефективний за критерієм дохідність/ризик.

На діаграмі дохідність/ризик це портфель (чи портфелі), що відповідають крайній верхній(крайній лівій) точці перетину діаграми з вертикальною (чи горизонтальною прямою), тобто є «огинаючою» відповідної діаграми.

Визначення 4: Для кожного рівня очікуваної дохідності існує свій ефективний портфель з мінімальним рівнем ризику. Набір таких портфелів має назву ефективною множиною портфелів Марковиця. Ефективну множину портфелів також називають ефективною границею Марковиця, оскільки ефективні

портфелі лежать на границі множини припустимих портфелів. Портфелі що лежать зовні ефективної границі недосяжні, а ті що лежать всередині – не ефективні.

Приклад ефективної границі наведений на рис. 1.1. Ефективна границя портфелів представлена кривою блакитного кольору.

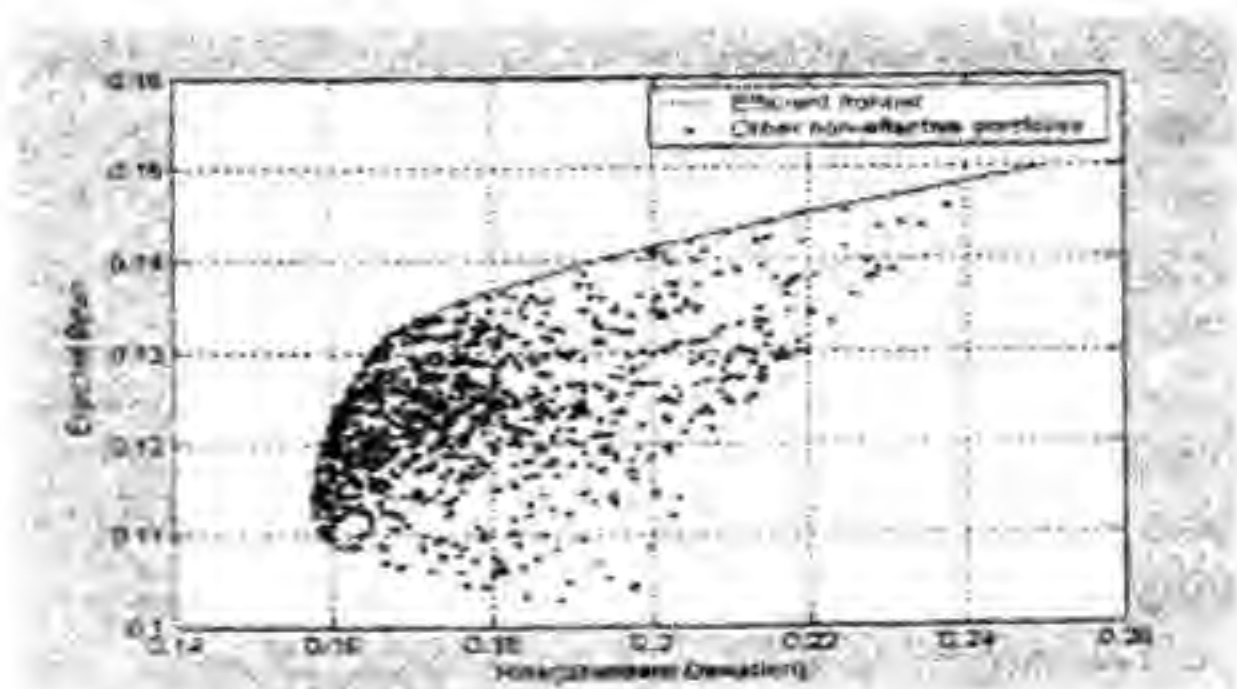


Рис. 1.1. Приклад діаграми дохідність/ризик та ефективної границі портфелів

Загалом, ефективна границя портфелю визначається розв'язком задачі умовної оптимізації, що має вигляд:

$$V_p = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min,$$

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^n R_j \cdot x_j = M, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Розв'язок цієї задачі, що визначає загальний вигляд ефективної границі портфелів дається теоремою 1.

Наступні результати, які нижче будуть оформлені у вигляді теорем 1, 2 та 3, можна знайти у [4].

Теорема 1. Якщо вектор μ має нормальний $N(MR, V)$ розподіл. Тоді множина $\Omega_{\mathcal{R}}$ всіх ефективних портфелів Марковиця для різних значень очікуваною дохідності M визначається співвідношенням:

$$\Omega_{\mathcal{R}} = \left\{ \tilde{x} = V^{-1} \frac{M(IJ_{12} - RJ_1) + RJ_{12} - IJ_2}{J_{12}^2 - J_1 J_2}, M \in (0, \infty) \right\}, \quad (4)$$

$$\text{де } J_1 = I^T V^{-1} I; J_2 = R^T V^{-1} R; J_{12} = I^T V^{-1} R.$$

Зауваження 1. Загалом, оптимальний портфель $\tilde{x}$, вигляд якого визначається (4) може мати від'ємні компоненти. Наявність таких компонент інтерпретується як боргові зобов'язання інвестора і реалізується через так звані «короткі продажі» (short sale), які полягають у тому, що

інвестор бере в борг у брокера цінні папери та продає їх на ринку, за що отримує кошти які інвестує у покупку інших акцій, що входять до портфелю.

Зауважимо також, що такі «короткі продажі» можуть бути заборонені як це, зокрема, має місце для взаємних інвестиційних фондів. Опис множини всіх ефективних портфелів у цьому випадку може бути описаний аналогом теореми 1, в якій в умови теореми введені додаткові обмеження невід'ємності всіх компонент вектору портфелю: $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

У цьому випадку задача опису ефективних портфелів перетворюється у задачу квадратичного програмування:

$$V_p = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^n K_j \cdot x_j = M, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\text{де } x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Ця задача може бути розв'язана зведенням до попередньої через введення доданих множників $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, загальної кількості, що відповідають кількості досліджуваних коефіцієнтів.

Теорема 2. Розв'язок задачі (5) в термінах доданих множників має вигляд:

$$\tilde{x} = V^{-1} \left\{ C^T (C V^{-1} C^T)^{-1} \left[d + \frac{1}{2} C V^{-1} \mu \right] - \mu \right\},$$

$$\text{де } d^T = \{1, M\}, C^T = \{I^T, R^T\}$$

а вектори μ і $\tilde{x}$ задовольняють умовам вигляду: $\mu_i \tilde{x}_i = 0; \mu_i \geq 0; \tilde{x}_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ тобто $\mu_i = 0$ або $\tilde{x}_i = 0$.

Доведення аналогічно доведенню теореми 1.

Зауваження 2: За зміни M може змінюватися кількість компонент $\tilde{x}_i$, що дорівнюють нулю, але інші змінні визначаються з системи рівнянь, в яку M входить лінійно. Ця властивість веде до кусково-лінійного характеру залежності оптимальної структури портфелю від очікуваної дохідності портфелю $\tilde{x}(M)$.

1.2. Модель Тобіна

Як зазначалося вище, в моделі Тобіна, на відміну від моделі Марковиця, допускається

використання безризикованого активу. Наявність такого активу призводить до модифікації оптимізаційної задачі (5). Вона перетворюється до вигляду

$$V_F = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$P = \sum_{j=0}^n R_j \cdot x_j = M, \quad \sum_{i=0}^n x_i = 1,$$

де x_0 – додаткова компонента в моделі Марковиця, що відповідає безризикованому активу.

Матричний вигляд задачі (6) представляється варіантом умовної задачі квадратичної оптимізації наступного вигляду:

$$\tilde{x} = \arg \min_{x^T R x + R_0 x_0 = M, \quad 1^T x + x_0 = 1} \{x^T V x\} \quad (7)$$

Теорема 3 [7]. Розв'язок задачі (7) має вигляд:

$$\tilde{x} = \frac{V^{-1}(R - R_0 I)}{(R - R_0 I)^T V^{-1}(R - R_0 I)} (M - R_0)$$

Зауваження 3. Якщо $x_0 = 0$, то тоді оптимальний портфель в моделі Тобіна складається тільки з ризикованих активів, а відповідно, повинен бути також оптимальним серед можливих варіантів тільки ризикованих активів.

При рівності інформації і можливостей формування портфелю справедлива теорема незалежності Тобіна: при наявності можливостей брати в борг і давати в борг за безризиковою ставкою вибір портфелю інвестором не залежить від його відношення до ризику.

Теорема 4: Розв'язок задачі (7) при умові $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, може бути представлений у вигляді:

$$\tilde{x} = \frac{(M - R_0)}{(R - R_0 I)^T V^{-1}(R - R_0 I)} V^{-1}(R - R_0 I) + \frac{1}{2} V^{-1} \left[\frac{(R - R_0 I)(R - R_0 I)^T V^{-1}}{(R - R_0 I)^T V^{-1}(R - R_0 I)} - I \right] \cdot \mu,$$

де $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ – множники, що задовольняють разом з компонентами $\tilde{x}$ умові $\mu_i \tilde{x}_i = 0, i = 1, \dots, n$.

Доведення аналогічно доведенню теореми 3.

Модель вибору оптимального інвестиційного портфелю з використанням RFT-перетворювачів

При виборі оптимального інвестиційного портфелю за підходом запропонованим Марковицем, існує суб'єктивізм пов'язаний з тим, який портфель є оптимальним в залежності від кривих байдужості кожного можливого інвестора до ризику. Криві байдужості інвестора до прийняття ризику будуються з використанням теорії корисності і раціональної поведінки інвестора при оцінці корисності для нього кожного з можливих варіантів інвестування. Запропонована нижче модель дає змогу уникнути вище згаданого суб'єктивізму при виборі оптимального портфелю. Опис використання RFT-перетворювачів як прогнозного засобу можна знайти, наприклад у [3].

Загальноприйнятим підходом до оцінки ефективності інвестування у портфель цінних паперів є співставлення дохідності інвестиційного портфелю з дохідністю фондового індексу. Якщо дохідність портфелю вище дохідності фондового індексу, то ефективність інвестування у портфель вища за фондовий індекс. Власне, інвестору важливо щоб в середньому дохідність інвестування у портфель була вища ніж дохідність індексу, або дорівнювала їй. Отже, для уникнення суб'єктивізму, притаманного моделі Марковиця, в запропонованій моделі при прийнятті рішення про інвестування, інвестор може або інвестувати в один з інвестиційних портфелів, що розташований на границі ефективних портфелів, або інвестувати у фондовий індекс. При цьому для співставлення двох інвестиційних можливостей для того ж рівня ризику що має фондовий індекс знаходиться відповідна дохідність портфелю, що належить границі ефективних портфелів. Якщо очікувана дохідність портфелю з ефективною границі вища за очікувану дохідність фондового індексу, то більш привабливим є можливість інвестування у портфель. Якщо навпаки, очікувана дохідність фондового індексу вища за очікувану дохідність інвестиційного портфелю для одного і того самого рівня ризику для обох можливостей інвестування, то можливість інвестування у фондовий індекс є більш привабливою.

В представленій прогнозній моделі спочатку здійснюється навчання моделі на ринкових даних таким чином, що вхідним даним, які представлені очікуваними дохідностями

портфелю з акцій і фондового індексу, а також значенням ризику, відповідають вихідні дані, що представлені фактично отриманими в кінці горизонту інвестування дохідностями для портфелю з акцій і фондового індексу, а також фактичними значеннями ризику для обох інвестиційних можливостей.

Навчання моделі – це формування основних параметрів RFT-перетворювачів на основі історичних даних з метою подальшого прогнозу. Нагадаємо, що RFT-перетворювач це послідовність стандартних функціональних перетворювачів з'єднаних за певною топологією. Такими способами з'єднання є паралельне за входом та виходом з'єднання та послідовне. Стандартними функціональними перетворювачами є композиція нелінійного покомпонентного векторного перетворення та афінного перетворення, яке будується засобами псевдообернення в явному вигляді. Отже, навчання «окремого» функціонального перетворювача – це формування нелінійних покоординатних перетворень та формування матриці афінних перетворень. Ці процедури оцінювання відповідних характеристик описані в [2,3].

Після етапу навчання моделі можна здійснювати прогноз того, що обраний інвестиційний портфель покаже краще співвідношення ризик-дохідність ніж еталонний портфель у формі фондового індексу.

Як вже зазначалося вище, математичним підґрунтям для моделі є апарат RFT-перетворювачів, за допомогою якого зручно описати поведінку моделі у часі та розв'язати задачу навчання та прогнозу, тобто вибору більш привабливої інвестиційної можливості на періоді інвестування.

Загалом алгоритм роботи запропонованої моделі є наступним:

1. Обирається розмір проміжку часу, за який будуть використовуватися дані для побудови ефективної границі портфелів.
2. Обирається розмір проміжку часу на який буде здійснюватися інвестування коштів у обраний оптимальний портфель.
3. Здійснюється навчання моделі з використанням історичних даних.
4. На наявний момент використання моделі та за наявними ринковими даними робиться вибір і прогноз поведінки обраного портфелю на періоді інвестування.

Відповідна схема описаного алгоритму представлена на рис. 1.2.

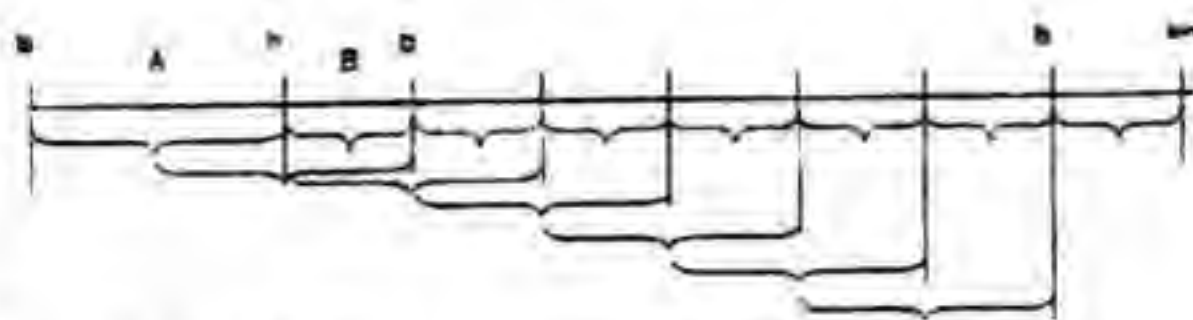


Рис. 1.2. Схема алгоритму роботи моделі

На рис. 1.2 відрізок часу t_1-t_0 позначений літерою «А» означає що при побудові ефективної границі портфелів у момент часу t_1 будуть використовуватися історичні дані за цей період, а період інвестування у обраний в момент t_1 оптимальний портфель становитиме $t_2 - t_1$, відрізок «В» на малюнку 1.3. Таким чином при навчанні системи маємо рухоме вікно у часі розміром $t_2 - t_1$, на яке здійснюється зсув при закінченні одного періоду інвестування і вибору нового оптимального портфелю на наступний період інвестування. Навчання моделі здійснюється до моменту часу t_n , тобто поточного моменту часу у який потрібно обрати портфель на період інвестування $t_{n+1} - t_n$. У момент часу t_n на вхід моделі подаються характеристики портфелю з акцій і фондового індексу та отримується прогноз яка інвестиційна можливість повинна бути обрана як оптимальна.

Нижче наведені результати розрахунків для модельного прикладу використання запропонованої прогнозної моделі. Дані для модельного прикладу були взяті з [5]. Ситуація на ринку є такою, що інвестор у якості наявних інвестиційних можливостей має набір акцій, які були відібрані на етапі класифікації [6,7] і сформовану з них ефективну границю портфелів за моделлю Марковиця з одного боку та можливість інвестування у такий фондовий індекс як Standard & Poors 500 з іншого боку. Для практичної реалізації інвестування у фондовий індекс інвестору не потрібно купувати всі 500 акцій, що входять до складу індексу з відповідними вагами кожної акції в складі індексу, а достатньо інвестувати кошти у один з так званих Exchange Traded Funds або ETF, які відтворюють дохідність обраного фондового індексу і торгуються на біржі як звичайні акції. У нашому випадку таким ETF, що відтворює дохідність індексу Standard & Poors 500 є S&P Depository Receipts, що торгується на NYSE. На момент прийняття рішення інвестором про інвестування коштів очікувана дохідність інвестування у фондовий індекс складає -9%, ризик інвестування у фондовий індекс складає 41,2%. Такому самому рівню ризику у 41,2% на ефективній границі портфелів з відібраних акцій відповідає портфель з очікуваною дохідністю,

що дорівнює 47%. Ця ситуація продемонстрована на рис. 1.3 нижче.

Після застосування запропонованої моделі розрахунки показали, що портфель з ефективною границі, який має очікувану дохідність 47% та ризик такий як і у фондового індексу є більш привабливим для інвестування ніж фондовий індекс і модель прогнозує, що його дохідність перевищить дохідність фондового індексу на горизонті інвестування.

Перевірка на історичних даних показала, що інвестування коштів у портфель, з відібраних акцій згенерувало дохідність у 16,7%, а фондовий індекс показав дохідність у 4,3% на періоді інвестування. Отже, обраний інвестиційний портфель показав вищу за фондовий індекс дохідність і тому інвестування коштів у обраний інвестиційний портфель є більш ефективним ніж інвестування коштів у фондовий індекс.

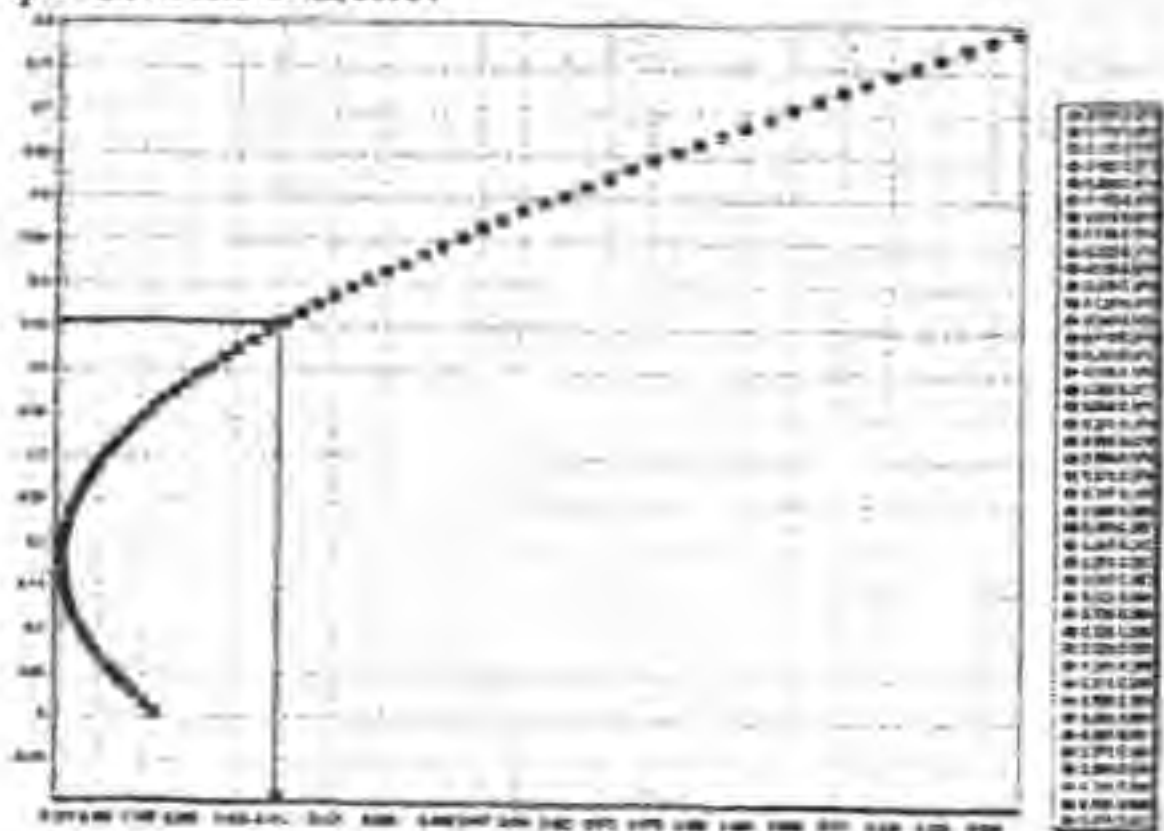


Рис. 1.3. Ринкова ситуація у момент прийняття рішення інвестором

Запропонована у статті модель вибору оптимального інвестиційного портфелю з використанням RFT-перетворювачів програмно реалізована у вигляді відповідної підсистеми системи підтримки прийняття рішень інвестором, що інвестує кошти на вторинному ринку акцій [6].

Висновки

У статті представлено опис моделі оптимального вибору інвестиційного портфелю з використанням апарату RFT-перетворювачів, яка розвиває ідеї портфельного підходу Марковиця і Тобіна. Цей розвиток полягає: по-перше, у використанні ідеї ефективною границі портфелів як множини альтернатив інвестуванню у фондовий індекс. По-друге, у зміні концепції ефективності через відмову від кривих байдужості. Замість цього порівнюються

очікувані характеристики інвестування у фондовий індекс з очікуваними характеристиками інвестування у портфель з ефективною границі портфелів з метою визначення ефективнішої за іншу інвестиційної можливості. По-третє, використання прогнозних засобів, зокрема апарату RFT-перетворювачів для розв'язання задачі прогнозування поведінки обраного інвестиційного портфелю на горизонті інвестування. Запропонована модель вибору оптимального інвестиційного портфелю з використанням апарату RFT-перетворювачів була перевірена на модельному прикладі та показала високу ефективність.

Література

1. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001.–1028с.
2. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98-107.
3. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С., Сербаяев Д.П. Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация. // Кибернетика и системный анализ – 2005. – №3,–с. 58-68.
4. Аванесов Э.Т., Ковалев М.М., Руденко В.Г. Инвестиционный анализ. Пособие для студентов экономических специальностей.– М. БГУ, 2002. – 247 с.
5. <http://finance.yahoo.com>
6. Омардибірова В.Н. Система підтримки прийняття рішень керуючого інвестиційними фондами // Вісник Київського університету.- 2007.-№4.-с. 182-186.
7. Донченко В.С., Кириченко М.Ф., Омардибірова В.Н. Класифікація акцій за критерієм інвестиційної привабливості // Вісник Київського університету.-2006.-№3.-с. 180-185.

Надійшла до редакції 24.03.2009

УДК 519.9

Полоцький С.В., асистент

Про моменти збіжних випадкових рядів та границь мартингалів, пов'язаних з гіллястим випадковим блуканням.

В роботі представлено результати для двох різних ймовірносних моделей. Знайдено критерій скінченності моментів випадкових рядів при певних умовах, необхідних для збіжності ряду. Також з першого результату одержано умови скінченності моментів граничної випадкової величини для рівномірно інтегровного мартингалу, пов'язаного з надкритичним гіллястим випадковим блуканням. Друге твердження доводилося в припущенні, що умови $x \log x$ не виконувалися. Головні теореми даної статті доповнюють результати, одержані в роботі [2] Г. Альсмайера та О. Іксановим.

Ключові слова: випадкові ряди, гіллясте випадкове блукання, моменти.

S. V. Polotsky, assistant

Moment results for perpetuities and martingales related to branching random walks.

The paper offers two groups of assertions dealing with two different probabilistic models. First, we provide a moment type result for convergent series of a special kind called perpetuities. The most general situation is considered in the sense that no assumptions beyond those ensuring convergence of the series are made. Secondly, a moment type result for the almost sure limits of the uniformly integrable intrinsic martingales related to the supercritical branching random walk is deduced from the corresponding result for perpetuities. Again, the most general situation is investigated where, for example, the classical $x \log x$ condition is not required. The results complement those obtained recently by G. Alsmeyer and A. Iksanov [2].

Key words: perpetuity, BRW, moments.

*E-mail: pilot_ser@mail.ru.

Статтю представив доктор техн. наук Гаращенко Ф.Г.

Вступ та основні результати

Нехай $\{(M_n, Q_n) : n = 1, 2, \dots\}$ – визначені на фіксованому ймовірнісному просторі незалежні копії випадкового вектора (M, Q) . Покладемо

$$\Pi_0 := 1, \quad \Pi_n := M_1 M_2 \dots M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо послідовність

$$Z_n := \sum_{k=1}^n \Pi_{k-1} Q_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

збігається м.н., то граничну випадкову величину

$$Z_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{k-1} Q_k \quad (1)$$

часто називають perpetuity. Покладемо

$$A(x) := \int_0^x P\{-\log |M| > y\} dy, \quad x > 0,$$

та нагадаємо критерій збіжності м.н. випадкового ряду (1), одержаний в роботі [7].

Твердження 1.1. Припустимо, що

$$P\{M = 0\} = 0 \quad \text{і} \quad P\{Q = 0\} < 1. \quad (2)$$

Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0 \quad \text{і} \quad I := \int_1^{\infty} \frac{\log x}{A(\log x)} P\{|Q| \in dx\} < \infty, \quad (3)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty \quad \text{і} \quad |Z_\infty| < \infty.$$

Якщо за додаткового припущення

$$P\{Q + Mc = c\} < 1 \quad \text{для всіх } c \in \mathbb{R}$$

хоча б одна з умов (3) не виконується, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = \infty \quad \text{за ймовірністю.}$$

В даній статті знайдені необхідні та достатні умови скінченності деяких моментів Z_∞ . Подібна задача розглядалася в роботах [9], [11], [10] і [2]. В перших двох розглядався окремий випадок умови (3), а саме

$$(i) \quad E \log |M| \in (-\infty, 0) \quad \text{і} \quad E \log^+ |Q| < \infty. \quad (4)$$

Ми ж розглядаємо два інші, більш складні випадки цієї умови.

$$(ii) \quad E \log |M| = -\infty \quad \text{і} \quad I < \infty;$$

$$(iii) \quad E \log^+ |M| = E \log^- |M| = +\infty,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{A(\log x)} P\{|M| \in dx\} < \infty, \quad I < \infty.$$

Нехай $b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ вимірною функцією, $\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = \infty$ та існує $x_0 \geq 0$ таке, що b зростає і є вгнутою на інтервалі $[x_0, \infty)$. Для $x \in \mathbb{R}^+$ введемо нову функцію $b_{x_0}(x) := b(x \vee x_0)$. Тепер мо-

жемо сформулювати перший результат.

Теорема 1.1. Припустимо, що виконуються умови (2). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ м.н., та

$$\int_1^\infty \frac{\log x b_{x_0}(\log x)}{A(\log x)} P\{|M| \in dx\} < \infty \quad (5)$$

$$\int_1^\infty \frac{\log x b_{x_0}(\log x)}{A(\log x)} P\{|Q| \in dx\} < \infty, \quad (6)$$

то $|Z_\infty| < \infty$ м.н. та

$$E h_{x_0}(\log^+ |Z_\infty|) < \infty. \quad (7)$$

Якщо (7) має місце, і розподіл Z_∞ не вироджений, то (5) та (6) також виконуються.

У випадку, коли h правильно змінюється на нескінченності з додатним показником, аналогічний результат отриманий в роботі [2]. Однак, на відміну від цитованого результату, наша теорема 1.1 частково покриває випадок, коли h повільно змінюється на нескінченності. Наприклад, функції $x \mapsto \log^p x$, $x \mapsto \log^p \log x$ і $x \mapsto e^{p \log^r x}$, $p > 0$, $r \in (0, 1)$, повільно змінюються на нескінченності і є вгнутими при досить великих значеннях аргументу.

Нехай $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ - надкритичне гіллясте випадкове блукання (ГВБ). Ми не накладаємо обмежень на розмір популяції, крім надкритичності. Припустимо, що існує $\gamma > 0$ таке, що

$$m(\gamma) := E \int_R e^{\gamma S_1} (dx) \in (0, \infty).$$

Для $n = 1, 2, \dots$ позначимо через $F_n := \sigma(S_1, \dots, S_n)$ σ -алгебру, породжену точковими процесами $S_1, \dots, S_n$ (як завжди F_0 позначає тривіальну σ -алгебру). Покладемо

$$W_n := m^{-n}(\gamma) \int_R e^{\gamma S_n} (dx) = m^{-n}(\gamma) \sum_{|u|=n} e^{\gamma u} = \sum_{|u|=n} Y_u,$$

де $Y_u := e^{\gamma u} / m^{|u|}(\gamma)$, A_u - позиція індивідуума u , а запис $|u| = n$ означає, що він знаходиться в n -ому поколінні.

Послідовність $\{(W_n, F_n) : n = 0, 1, \dots\}$ є невід'ємним мартингалом з $W_0 = EW_\infty = 1$.

Нехай $M_1, M_2, \dots$ - незалежні копії випадкової величини M , чий розподіл задається рівністю

$$Ek(M) := E \sum_{n=1}^\infty Y_n k(Y_n),$$

яка припускається виконаною для довільної обмеженої борелівської функції $k(\cdot)$.

Теорема 1.2. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} M_1 M_2 \dots M_n = 0$ м.н., і

$$\int_1^\infty \frac{x \log x b_{x_0}(\log x)}{\int_1^{\log x} P\{-\log M > y\} dy} P\{W_1 \in dx\} < \infty, \quad (8)$$

то W_n збігається м.н. і в середньому до випадкової величини W , і

$$EW b_{x_0}(\log^+ W) < \infty. \quad (9)$$

Якщо (9) виконується, і $P\{W_1 = 1\} < 1$, то (8) теж виконується.

Доведення теореми 1.2 з невеликими уточненнями збігається з доведенням теореми 1.4 [2], і тому не наводиться.

Припускаючи,

$$E \log M \in (-\infty, 0) \text{ і } EW_1 \log^+ W_1 < \infty$$

(і часто розглядаючи випадок м.н. скінченної кількості нащадків кожного індивідуума), та застосовуючи інші підходи від тих, що використовувалися в [2], багато авторів досліджували існування моментів W (див. [3], [4], [5], [9], [11], [14]).

Надалі записи $F \sim G$ та $F \approx G$ означають $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)/G(x) = 1$ та $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)/G(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \overline{F(x)/G(x)} < \infty$ відповідно.

Властивості функцій

В цьому розділі ми розглянемо властивості функцій b , $A(x)$ і $l(x) := x/A(x)$, якими будемо користуватися в подальшому.

Для зручності визначимо функцію l на всій прямій. Для цього, користуючись неперервністю, визначимо її значення в нулі як $l(+0) = (P\{|M| < 1\})^{-1}$ і покладемо $l(x) = 0$ для $x < 0$. Тепер умова (6) може бути переписана у вигляді $El(\log^+ |Q|) < \infty$. Подібні зауваження стосуються усіх інтегралів, в яких присутня функція $x/A(x)$.

Розглянемо тепер властивості функцій. Перші дві не потребують доведення.

(P1) $A(x)$ не спадає;

(P2) $l(x)$ не спадає, і $\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = \infty$;

(P3) Існує вгнута диференційовна функція f , яка не спадає на проміжку $[0, \infty)$, задовольняє умовам $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $f'(+0) < \infty$, така що $b(\log x) \sim f(x)$, і

$$f(xy) \leq C(f(x) + f(y)), \quad (10)$$

для усіх $x, y \in \mathbb{R}^+$ та деякого $C \in (0, \infty)$.

Доведення. Визначимо функцію

$$\bar{b}(x) := b(x + x_0) - b(x_0), \quad x \geq 0.$$

Оскільки $\bar{b}(x)$ зростає і є вгнутою і $\bar{b}(0) = 0$, то вона субадитивна. З двох нерівностей

$$\frac{\bar{b}(x)}{b(x)} = \frac{b(x) - b(x_0)}{b(x)}; \quad (11)$$

$$\frac{\bar{b}(x)}{b(x)} \leq \frac{\bar{b}(x - x_0) + \bar{b}(x_0)}{b(x)} = \frac{b(x) - 2b(x_0) + b(2x_0)}{b(x)},$$

впливає, що $b(x) \sim \bar{b}(x)$, і $b(\log x) \sim \bar{b}(\log x)$.

Визначимо функцію $h(x) := \bar{b}(\log(x+1))$ і покажемо, що $b(\log x) \sim h(x)$.

Нерівність $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}(\log(x+1))}{h(\log x)} \geq 1$ впливає з тих самих міркувань, що і (11). Оскільки $2x \geq x+1$

для $x \geq 1$ і функція $\bar{b}(x)$ є субадитивною, то

$$\bar{b}(\log(x+1)) \leq \bar{b}(\log 2x) \leq \bar{b}(\log x) + \bar{b}(2).$$

З останньої нерівності $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}(\log(x+1))}{h(\log x)} \leq 1$, і $b(\log x) \sim h(x)$. Зі вгнутості та монотонності $h(x)$ впливає

$$h(x)/4 \leq x^{-1} \int_{x/2}^x h(y) dy \leq x^{-1} \int_0^x h(y) dy =: \bar{h}(x) \leq h(x).$$

Так як (10) виконується для $h(x)$, то, по-

кладши $f(x) = \bar{h}(x)$, одержимо бажаний результат.

(P4) Існує функція $\psi(x)$, яка не зростає, дорівнює нулеві для $x < 1$, і

$$\psi(xy) \leq a(\psi(x) + \psi(y)), \quad (12)$$

для усіх $x, y \in [1, \infty)$ та деякої додатної константи

$$a, \text{ та } \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} \sim \psi(x).$$

Доведення. Функція $x \rightarrow xf(e^x)$ не зростає. Виб-

равши x_0 таким, як в означенні $\bar{b}(x)$, визначимо функцію $q(x) = b(x_0)x$ для $x \in [0, x_0)$, і $= xb(x)$ для $x \geq x_0$. Дана функція не спадає. Для $x \geq 0$

покладемо $u(x) := \frac{q(x)}{A(x)}$ і зауважимо, що $u(x)$ та-

кож не спадає. Для $x \geq y \geq 0$

$$\frac{u(x+y)}{u(x)+u(y)} \leq \frac{u(2x)}{u(x)} \leq \frac{q(2x)}{q(x)}$$

Дійсно, права частина залишається обмеженою для малих $x \geq 0$.

Для великих x права частина дорівнює $\frac{2b(2x)}{b(x)}$.

Так як b є вгнутою, то права, а тому і ліва частини є обмеженими. Тепер, помінявши x та y місцями, одержуємо, що для усіх $x, y \geq 0$

$$u(x+y) \leq \text{const}(u(x) + u(y)).$$

Функція $\psi(x) := u(\log x)$ для $x \geq 1$, і $= 0$ для $x < 1$ задовольняє усім необхідним властивостям.

Допоміжні результати, пов'язані зі збіжними випадковими рядами

Надалі ми завжди вважаємо, що умова (2) виконується, і розглядаємо випадок, коли $|Z_\infty| < \infty$ м.н., та розподіл Z_∞ не вироджений. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ за твердженням 1.1 та

$$Z_\infty = Q_1 + M_1 Z_\infty^{(1)} = Q^{(m)} + \Pi_m Z_\infty^{(m)}$$

виконується для кожного $m \geq 1$, де $\Pi_{k,l} := M_k \cdot \dots \cdot M_l$,

$$Q^{(m)} := \sum_{k=1}^m \Pi_{k-1} Q_k \quad \text{та}$$

$$Z_\infty^{(m)} := Q_{m+1} + \sum_{k \geq m+2} \Pi_{m+1,k-1} Q_k.$$

Тут $Z_\infty^{(m)}$ копії Z_∞ , незалежні від $(M_1, Q_1), \dots, (M_m, Q_m)$. Замінивши m довільним м.н. скінченним моментом зупинки σ , одержимо

$$Z_\infty = \sum_{k=1}^{\sigma} \Pi_{k-1} Q_k + \Pi_\sigma Z_\infty^{(\sigma)},$$

де $Q^{(\sigma)} := \sum_{k=1}^{\sigma} \Pi_{k-1} Q_k$ та $Z_\infty^{(\sigma)}$ копії Z_∞ незалежні від σ та $\{(M_n, Q_n) : 1 \leq n \leq \sigma\}$ (а тому і від $(\Pi_\sigma, Q^{(\sigma)})$). Для доведення теореми 1.1 нам потрібно декілька допоміжних лем.

Лема 3.1 (Лема 3.1 в [2]) Нехай розподіл Z_∞ не вироджений, а функція f визначена в (P3). Покладемо

$$Q_n^{(2)} := Q_{2n-1} + M_{2n-1} Q_{2n},$$

для $n \geq 1$. Через $\bar{Q}_n^{(2)}$ будемо позначати умовно симетризовані $Q_n^{(2)}$ при заданому $M_{2n-1} M_{2n}$. Тоді з $Ef(|Z_\infty|) < \infty$ впливає

$$Ef(|Q|) < \infty \text{ і } f(|M|) < \infty.$$

$$Ef(\sup_{n \geq 1} |\Pi_{n-1} Q_n|) < \infty.$$

$$Ef(\sup_{n \geq 1} |\Pi_{2n-2} \bar{Q}_n^{(2)}|) < \infty,$$

$$Ef(\sup_{n \geq 1} |\Pi_n|) < \infty.$$

Лема 3.2 (Лема 3.3 в [2]). Припустимо $P\{|M| \leq 1\} = 1$ та $P\{|M| < 1\} > 0$. Нехай для кожного $x \in (0, 1)$ виконується нерівність

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\Pi_n| > x\} \leq 2 \frac{-\log x}{A(-\log x)}. \quad (13)$$

Якщо існує $x_0 > 0$ таке, що $C := P\{\sup_{n \geq 1} |\Pi_{n-1}| |\bar{Q}_n| \leq x_0\} > 0$, то для кожного $x \in (0, 1)$

$$V(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{\max_{1 \leq k \leq n} |\Pi_{k-1}| |\bar{Q}_k| \leq x_0, |\Pi_n| > x\} \geq$$

$$\geq C \frac{-\log x}{A(-\log x)}.$$

Лема 3.3 (Лема 3.4 в [2]). Припустимо, що $M, \bar{Q} \geq 0$ м.н., $P\{M \leq 1\} = 1$ та $P\{M < 1\} > 0$. Нехай функція f визначена в (P3). Тоді

$$Ef(\sup_{n \geq 1} \Pi_{n-1} \bar{Q}_n) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{\bar{Q} \in dx\} < \infty.$$

Імплікація $(b) \Rightarrow (c)$ наступного результату є наслідком попередньої леми.

Лема 3.4 Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ м.н. та функція f визначена в (P3). Тоді наступні твердження є еквівалентними

(a) $Ef(|\Pi_{\sigma}|)1_{\{\sigma < \infty\}} < \infty$;

(b) $Ef(\sup_{n \geq 0} |\Pi_n|) < \infty$;

(c) $\int_1^{\infty} \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{\sup_{0 \leq n \leq \sigma-1} |\Pi_n| \in dx\} < \infty$;

(d) $\int_1^{\infty} \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{M \in dx\} < \infty$.

де $\tau := \inf\{n \geq 1 : |\Pi_n| < 1\}$ і $\sigma := \inf\{n \geq 1 : |\Pi_n| \geq 1\}$.

Доведення. Доведення імплікацій $(b) \Rightarrow (c)$ та $(c) \Rightarrow (d)$ збігається з доведенням відповідних імплікацій леми 3.5 роботи [2].

$(d) \Rightarrow (a)$. Покладемо

$$\Psi(y) := I_{[0, \infty)}(y) + \sum_{n \geq 1} P\{\max_{0 \leq j \leq n-1} S_j < S_n \leq y\},$$

де $S_n := -\log |\Pi_n|$. В [13] було доведено

$$\Psi(x) \approx \frac{x}{A(x)}. \quad (14)$$

З [6] нам відомо, що

$$P\{-S_{\sigma} \geq t, \sigma < \infty\} = \int_0^{\infty} F(-t-y) d\Psi(y), t \geq 0. \quad (15)$$

де F функція розподілу S_1 . З (15), використовуючи (14) та теорему Фубіні для $t > 0$, отримаємо

$$P\{-S_{\sigma} \geq t, \sigma < \infty\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dF(-z) |\Psi(z-t)| \approx \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dF(-z) \frac{z-t}{A(z-t)} =$$

$$= \int_0^{\infty} dF(-z) \int_0^{z-t} d\left(\frac{y}{A(y)}\right). \quad (16)$$

Домноживши обидві сторони рівності (16) на $f'(t)$ та проінтегрувавши по $t \in [0, \infty)$, одержимо

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt \int_0^{\infty} dF(-z) \int_0^{z-t} d\left(\frac{y}{A(y)}\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} dF(-z) \int_0^z f(z-y) d\left(\frac{y}{A(y)}\right). \quad (17)$$

З одного боку права частина (17) не перевищує

$$\int_0^{\infty} |dF(-z)| f(z) \frac{z}{A(z)},$$

а з іншого не менше ніж

$$\int_0^{\infty} dF(-z) \int_0^{z/2} f(z-y) d\left(\frac{y}{A(y)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} |dF(-z)| f(z) \frac{z}{A(z)}.$$

Тому інтеграл в (17) збігається тоді і тільки тоді, коли виконується умова (d) леми.

$(a) \Rightarrow (b)$ Оскільки функція f субадитивна, то дана імплікація випливає з еквівалентності $(v) \Leftrightarrow (vii)$ теореми 1 [12].

Доведення теореми 1.1

Необхідність. З умови (6) випливає, що $I < \infty$. Тому $|Z_{\infty}| < \infty$ м.н. за твердженням 1.1.

Умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ м.н. виконується для двох різних випадків, які ми будемо досліджувати окремо:

(1) $P\{|M| \leq 1\} = 1$ і $P\{|M| < 1\} > 0$;

(2) $P\{|M| > 1\} > 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ м.н.

Насправді, другий випадок зводиться до першого, використовуючи моменти зупинки.

Випадок (1): Покажемо, що з (6) випливає (7). Згідно (P3) достатньо перевірити, що з

$$\int_1^{\infty} \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{|\bar{Q}| \in dx\} < \infty \quad (17)$$

випливає

$$Ef(|Z_{\infty}|) < \infty.$$

Зауважимо, що, враховуючи (P2), з (17) випливає

$$Ef(|Q|) < \infty. \quad (18)$$

Для фіксованого $u > 1$ та $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Ef\left(\left|\sum_{k=1}^n \Pi_{k-1} Q_k\right|\right) &\leq E \sum_{k=1}^n f(|\Pi_{k-1} Q_k|) \leq \\ &\leq \int_0^\infty f'(x) \sum_{k=1}^\infty P\{|\Pi_{k-1} Q_k| > x\} dx = \\ &= \int_0^\infty f'(x) \sum_{k=1}^\infty P\{|\Pi_{k-1} Q_k| > x, |Q_k| > ax\} dx + \\ &+ \int_0^\infty f'(x) \sum_{k=1}^\infty P\{|\Pi_{k-1} Q_k| > x, x < |Q_k| \leq ax\} dx =: \\ &=: J_1 + J_2. \\ J_2 &\leq \int_0^\infty f'(x) P\{|Q| > x\} dx \sum_{k=1}^\infty P\{|\Pi_{k-1}| > a^{-1}\} = \\ &= const Ef(|Q|) < \infty. \end{aligned}$$

Ми скористалися тим, що $\sum_{k=1}^\infty P\{|\Pi_{k-1}| > a^{-1}\}$ є значенням функції відновлення в точці $\log a > 0$ випадкового блукання $\{-\log |\Pi_n|; n=0,1,\dots\}$ з невід'ємним та не виродженим в 0 кроком, а тому є скінченним.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty f'(x) \sum_{k=1}^\infty \int_a^\infty P\{|\Pi_{k-1}| > x/q\} P\{|Q| \in dq\} dx \leq \\ &\leq 2 \int_0^\infty f'(x) \int_a^\infty \left(\frac{\log(q/x)}{A(\log(q/x))} \right) P\{|Q| \in dq\} dx = \\ &= 2 \left(\int_{(0,1)} + \int_{(1,\infty)} \right) =: 2(J_{11} + J_{12}). \end{aligned} \quad (15)$$

Далі,

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_0^\infty f'(x) \int_a^\infty \left(\frac{\log(q/x)}{A(\log(q/x))} \right) P\{|Q| \in dq\} dx \stackrel{(P1),(P2)}{\leq} \\ &\leq \int_0^\infty f'(x) dx \left(\int_a^1 \frac{-\log x}{A(\log a)} \right) P\{|Q| \in dq\} + \\ &+ \int_0^\infty f'(x) dx \left(\int_1^\infty \frac{\log q}{A(\log q)} \right) P\{|Q| \in dq\} \leq \\ &\leq If(1) + (A(\log a))^{-1} f'(0) < \infty. \end{aligned}$$

Для оцінки J_{12} проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned} J_{12} &\leq \int_1^\infty f'(x) dx \int_x^\infty \left(\frac{\log(q/x)}{A(\log(q/x))} \right) P\{|Q| \in dq\} = \\ &= -f(1) \int_1^\infty \frac{\log q}{A(\log q)} P\{|Q| \in dq\} + \\ &+ \int_1^\infty P\{|Q| \in dq\} \int_1^q f(q/x) f\left(\frac{\log x}{A(\log x)}\right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq -f(1)I + \int_1^\infty f(q) \frac{\log q}{A(\log q)} P\{|Q| \in dq\} < \infty.$$

Розглядаючи тепер усе разом, можемо зробити висновок, що

$$Ef\left(\left|\sum_{k=1}^n \Pi_{k-1} Q_k\right|\right) \leq const, n=1,2,\dots$$

Оскільки f неперервна і ряд $\sum_{k=1}^\infty \Pi_{k-1} Q_k$ збігається м.н. до Z_∞ , то $f(|\sum_{k=1}^\infty \Pi_{k-1} Q_k|)$ збігається м.н. до $f(|Z_\infty|)$. І за лемою Фату

$$Ef(|Z_\infty|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Ef\left(\left|\sum_{k=1}^n \Pi_{k-1} Q_k\right|\right) \leq const.$$

Випадок (2): Оскільки $b(\log x) \sim f(x)$, то ми можемо припустити, що

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{|Q| \in dx\} &< \infty \text{ та} \\ \int_1^\infty \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{|M| \in dx\} &< \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Визначимо моменти зупинки

$$N_0 := 0, N_{i+1} := \inf\{n > N_i : |\Pi_n| < |\Pi_{N_i}|\}, i=0,1,\dots$$

Зауважимо, що $N_i < \infty$ м.н.

Для $k=1,2,\dots$ покладемо

$$\bar{M}_k := |M_{N_{k-1}+1}||M_{N_{k-1}+2}|\dots|M_{N_k}|;$$

$$\bar{\Pi}_0 := 1, \bar{\Pi}_k := \bar{M}_1 \dots \bar{M}_k;$$

$$\bar{Q}_k := |Q_{N_{k-1}+1}| + |M_{N_{k-1}+1}||Q_{N_{k-1}+2}| + \dots +$$

$$+ |M_{N_{k-1}+1}|\dots|M_{N_k}||Q_{N_k}|.$$

Випадкові вектори $\{(\bar{M}_n, \bar{Q}_n); n=1,2,\dots\}$ є незалежними копіями вектора

$$(\bar{M} := |\Pi_{N_1}|, \bar{Q} := \sum_{k=1}^{N_1} |\Pi_{k-1} Q_k|).$$

Тепер ми можемо записати наступну важливу рівність

$$\sum_{k=1}^\infty |\Pi_{k-1} Q_k| = \sum_{k=1}^\infty \bar{\Pi}_{k-1} \bar{Q}_k.$$

За побудовою $|\Pi_{N_1}| \in (0,1)$ м.н. Тому показавши, що

$$\int_1^\infty \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{\bar{Q} \in dx\} < \infty, \quad (20)$$

ми зможемо скористатися вже доведеною части-

ною теореми, замінивши (M, Q) на $(\bar{M}, \bar{Q})$, і одержати $Ef(|Z_\infty|) < \infty$.

Використовуючи (P4), достатньо взяти (20) в еквівалентній формі $E\psi(\bar{Q}) < \infty$. Оскільки

$$\sum_{k=1}^{N_1} |\Pi_{k-1} \parallel Q_k| \leq N_1 \sup_{1 \leq k \leq N_1} |\Pi_{k-1} \parallel Q_k| \leq N_1 \sup_{0 \leq k \leq N_1-1} |\Pi_k| \sum_{i=1}^{N_1} |Q_i|.$$

То, беручи до уваги (12), приходимо до висновку, що достатньо перевірити виконання трьох нерівностей:

(I) $E\psi(N_1) < \infty$;

(II) $E\psi(\sup_{0 \leq k \leq N_1-1} |\Pi_k|) < \infty$;

(III) $E\psi(\sum_{i=1}^{N_1} |Q_i|) < \infty$.

Оскільки $EN_1 < \infty$, та ψ зростає повільніше, ніж лінійна функція, то (I) виконується. З (P4) маємо $\psi(x) \sim \frac{\log xf(x)}{A(\log x)}$. Тому з імплікації (c) $\Rightarrow$ (d) леми 3.4 та другої нерівності в (19) випливає (II). Так як ψ субадитивна, а випадкові величини $I_{1:N_1 \geq n}$ та $|Q_n|$ є незалежними, то

$$E\psi\left(\sum_{i=1}^{N_1} |Q_i|\right) \leq E\sum_{i=1}^{N_1} \psi(|Q_i|) = EN_1 E\psi(|Q|) < \infty.$$

Достатність. Припустимо, що $Ef(|Z_\infty|) < \infty$. Тоді за лемою 3.1

$$Ef(\sup_{n \geq 1} |\bar{\Pi}_{n-1} \bar{Q}_n|) \leq f(\sup_{n \geq 1} |\Pi_{n-1} Q_n|) < \infty,$$

де $\bar{\Pi}_n := \prod_{k=1}^n (M_k \wedge 1)$, і за лемою 3.3

$$\int_1^\infty \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{|Q| \in dx\} < \infty.$$

Застосувавши лему 3.1 ще раз, одержимо $Ef(\sup_{n \geq 1} |\Pi_n|) < \infty$. Остаточно за лемою 3.4

$$\int_1^\infty \frac{\log xf(x)}{A(\log x)} P\{|M| \in dx\} < \infty.$$

Теорему 1.1 доведено.

Автор вдячний своєму науковому керівнику Іксанову О.М. за велику кількість зауважень та коментарів.

Список використаних джерел

1. Alsmeyer G. On generalized renewal measures and certain first passage times. // Ann. Probab. – 2000. – V. 20, №3. – P. 1229-1247.
2. Alsmeyer G., Iksanov A. A log-type moment result for perpetuities and its application to martingales in supercritical branching random walks. // Electronic Journal of Probability. – 2009. – V. 14. – P. 289-313.
3. Alsmeyer G., Kuhlbusch D. Double martingale structure and existence of ϕ -moments for weighted branching processes. // Preprint no. 08/05-S. (2006). Universitat Munster, Germany.
4. Biggins J. Martingale convergence in the branching random walk. // J. Appl. Probab. – 1977. – V. 14, №1. – P. 25-37.
5. Bingham N., Doney R. Asymptotic properties of supercritical branching processes II: Crump-Mode and Jirina processes. // Adv. in Appl. Probab. – 1975. – V. 7, №1. – P. 66-82.
6. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. – New York: John Wiley & Sons. 1966. – 752 p.
7. Goldie C., Maller R. Stability of perpetuities. // Ann. Probab. – 2000. – V. 28, №3. – P. 1195-1298.
8. Iksanov A. Elementary fixed points of the BRW smoothing transforms with infinite number of summands. // Stoch. Proc. Appl. – 2004. – V. 114, №1. – P. 27-50.
9. Iksanov A. On the rate of convergence of a regular martingale related to the branching random walk (in Ukrainian). // Ukr. Math. J. – 2006. – V. 58, №3. – P. 326-342.
10. Іксанов О. Випадкові ряди спеціального вигляду, гіллясте випадкове блукання та саморозкладність. – Київ: Зірка, 2007. – 192 с.
11. Iksanov A., Rösler U. Some moment results about the limit of a martingale related to the supercritical branching random walk and perpetuities. // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №4. – С. 451-471.
12. Janson S. Moments for first-passage and last-exit times, the minimum, and related quantities for random walks with positive drift. // Adv. in Appl. Probab. – 1986. – V. 18, №4. – P. 865-879.
13. Kesten H., Maller R. Two renewal theorems for general random walks tending to infinity. // Probab. Theory Relat. Fields. – 1996. – V. 106, №1. – P. 1-38.
14. Liu Q. On generalized multiplicative cascades. // Stoch. Proc. Appl. – 2000. – V. 86, №1. – P. 263-286.

Надійшла до редколегії 27.04.2009

УДК 519.168

Олена В. Порхун

Алгоритм пошуку оптимальної вибірки для вирішення задач класифікації багатовимірних об'єктів, його обчислювальна складність.

В статті розглядається новий універсальний алгоритм пошуку оптимальної вибірки для побудови векторів ознак об'єктів в задачах класифікації. Наводяться оцінки складності запропонованого алгоритму із врахуванням випадків наявності у вибірці прикладів з нерівномірним розподілом груп ознак.

Ключові слова: вектор ознак, різномірні групи ознак, критерій оцінки навчання, оптимальна вибірка, нейронна мережа.

*E-mail: elena_porkhun@mail.ru

Статтю представив член-кореспондент НАНУ, доктор фіз.-мат. наук Анісімов А.В.

Вступ

Головна проблема, яку необхідно вирішувати розробникам систем аналізу та класифікації багатовимірних об'єктів – це структуризація їх вихідних описів. Постає необхідність у розробці методів, які б дозволили проводити аналіз впливу вибраних дослідником ознак на результат класифікації і на основі цього аналізу здійснювати перетворення вхідних даних. Особливо актуальною дана проблема стає у випадку, коли вибраний дослідником набір ознак, що описує корпус об'єктів, містить декілька різномірних груп ознак. У статті пропонується метод, згідно якому структуризація простору ознак здійснюється шляхом визначення коефіцієнтів важливості кожної ознаки. Застосування розробленого алгоритму пошуку оптимальної вибірки зводить вирішення задачі вибору простору ознак до визначення оптимального розв'язку задачі класифікації для вибраного набору параметрів.

Метод формування вектора ознак об'єкту

Характерною особливістю запропонованого методу побудови вектора ознак, розподілених по різномірним групам, є те, що його формування відбувається в процесі навчання нейронної мережі прямого розповсюдження.

Helen V. Porkhun

The algorithm of determining optimum selection for solving classification tasks of multidimensional objects, its estimations of complexity.

In this paper the new universal algorithm of determining optimum selection for constructing features vector for classification objects is considered. Taking into account uneven distribution of features groups estimations of complexity of algorithm are submitted.

Key words: features vector, heterogeneous features groups, criterion of learning estimation, optimum selection, neural network.

За цим методом проводиться пошук такого співвідношення компонент вектора, що дозволить врахувати вплив кожної ознаки на процес класифікації і, в результаті, налаштувати систему вірно розпізнавати класи об'єктів за даними ознаками.

Покладемо, що набір ознак, які характеризують вибірки об'єктів, складається із двох різномірних груп – α та β . Пошук співвідношення компонент вхідного вектора пропонується здійснювати в такий спосіб.

Визначимо 3 типи вибірок прикладів.

Вибірка А. Складається з векторів, що містять лише ознаки групи α , інші компоненти вектора нульові:

$$p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0, \dots, 0}_k),$$

де p – вектор-приклад з навчальної вибірки, α_i – ознака групи α .

Вибірка В. Містить вектори, що складаються із ознак групи β , компоненти, що відповідають ознакам групи α – нульові:

$$p = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, \dots, 0}_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_l),$$

де β_j – ознака групи β .

Вибірка С. Включає вектори, що складаються зі зважених значень ознак груп α і β , тобто:

$$p = \begin{cases} ((\alpha_1 * \sqrt{b/a}), (\alpha_2 * \sqrt{b/a}), \dots, (\alpha_m * \sqrt{b/a}), \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l), a < b, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, (\beta_1 * \sqrt{a/b}), (\beta_2 * \sqrt{a/b}), \dots, (\beta_l * \sqrt{a/b})), a > b \end{cases}$$

де $a = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2$, $b = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_l^2$.

Для кожної із сформованих вибірок окремо проводиться навчання нейронної мережі та перевіряється критерій оцінки навчання.

В якості тестового прикладу для налаштованої мережі рекомендується використовувати вектор ознак одного із об'єктів навчальної вибірки. Відповідно принципу побудови векторів вибірок A , B та C , формуються 3 вектори ознак для даного тестового прикладу.

Критерієм оцінки навчання мережі пропонується вважати відстань між векторами – виходом налаштованої мережі для даного тестового прикладу та відомою для цього прикладу відповіддю (класом).

Відстань між векторами визначається за формулою:

$$D = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – два вектори, D – відстань між ними.

Тоді критерій оцінки навчання можна визначити таким чином:

$$F = \underset{\Omega}{\operatorname{Arg\,min}} D,$$

де Ω – множина вибірок векторів, що використовувалися для навчання мережі. На початку алгоритму Ω складається із вибірок A , B та C .

У процесі алгоритму кожен раз формуються нові вибірки векторів. Визначимо функцію ϕ , яка кожній вибірці із множини Ω ставить у відповідність деяке дійсне число. Дана функція є ін'єктивним відображенням, тобто, для кожного числа із області значення функції ϕ існує тільки одна відповідна йому вибірка. Для вибірок A , B та C відповідно: $\phi(A) = 0$, $\phi(B) = 1$, $\phi(C) = 0.5$. Таким чином, початковий відрізок, на якому буде здійснюватися пошук оптимальної вибірки – $[0, 1]$. Для сформованих вибірок проводиться навчання мережі та за результатами тестування визначаються дві найкращі, що задають наступний інтервал пошуку оптимальної вибірки, для якої виконується умова зупинки алгоритму.

Умовою зупинки алгоритму будемо вважати одержання відрізка, довжина якого менше достатньо малої вибраної величини ε , або якщо нова сформована вибірка, не є кращою (за значенням F) за попередні. Вибірку

будемо вважати оптимальною, якщо для відрізка, одній з крайніх точок якого вона відповідає, виконується умова зупинки алгоритму та за значенням F вона є кращою за вибірку, що відповідає іншій крайній точці даного відрізка.

Нехай V та W – вибірки, що відповідають крайнім точкам відрізка, G – вибірка, що відповідає середині відрізка; v_j , w_j і g_j , відповідно, компоненти векторів вибірок V , W і G , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, де k – число векторів у вибірці (однакове для кожної вибірки), n – розмірність векторів ознак (однакова для кожного вектора із множини вибірок Ω). Позначимо через η – точку відрізка, що відповідає шуканій оптимальній вибірці.

Тоді алгоритм пошуку оптимальної вибірки можна формалізувати в такий спосіб.

Алгоритм пошуку оптимальної вибірки

ВХІД: $\Omega = \{A, B, C\}$ – множина вибірок

векторів, що складається із вибірок A , B та C .

РЕЗУЛЬТАТ: η – число, що відповідає оптимальній вибірці.

1. Проводимо навчання мережі на вибірках A , B та C .

2. Відповідно принципу побудови векторів вибірок A , B та C формуємо 3 вектори для тестового прикладу.

3. Обчислюємо значення критерію F для кожної із вибірок A , B та C .

4. Якщо мінімальне значення критерію F досягається на вибірці C , то

4.1. Перевіряємо критерій F на множині $\Omega = \{A, B\}$.

4.2. Якщо вибірка A – краще вибірки B за значенням F , то

4.2.1. Вибірку V формуємо із векторів вибірки A .

4.2.2. $\phi(V) \leftarrow 0$.

4.2.3. Вибірку W формуємо із векторів вибірки C .

4.2.4. $\phi(W) \leftarrow 0.5$.

Інакше

4.2.5. Вибірку V формуємо із векторів вибірки C .

4.2.6. $\phi(V) \leftarrow 0.5$.

4.2.7. Вибірку W формуємо із векторів вибірки B .

4.2.8. $\phi(W) \leftarrow 1$.

4.3. Поки не виконується умова зупинки

4.3.1. Формуємо вибірку G із векторів з компонентами:

$$g_{ij} = (v_{ij} + w_{ij})/2, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}.$$

4.3.2. Проводимо навчання мережі на вибірці G .

$$4.3.3. \varphi(G) \leftarrow (\varphi(V) + \varphi(W))/2.$$

4.3.4. Обчислюємо значення критерію F на множині $\Omega = \{V, W, G\}$.

4.3.5. Якщо G – краща вибірка за значенням F , то

Якщо вибірка V краще вибірки W за значенням F , то

4.3.5.1. Вектори вибірки V замінюються векторами вибірки G .

$$4.3.5.2. \varphi(W) \leftarrow \varphi(G).$$

Інакше

4.3.5.3. Вектори вибірки V замінюються векторами вибірки G .

$$4.3.5.4. \varphi(V) \leftarrow \varphi(G).$$

Інакше

4.3.6. Якщо вибірка V краще вибірки W за значенням F , то

4.3.6.1. Вектори вибірки G замінюються векторами вибірки V .

$$4.3.6.2. \varphi(G) \leftarrow \varphi(V).$$

Інакше

4.3.6.3. Вектори вибірки G замінюються векторами вибірки W .

$$4.3.6.4. \varphi(G) \leftarrow \varphi(W).$$

$$4.3.7. \eta \leftarrow \varphi(G).$$

Інакше

5. Якщо мінімальне значення критерію F досягається на вибірці A , то

$$5.1. \eta \leftarrow \varphi(A).$$

Інакше

$$5.2. \eta \leftarrow \varphi(B).$$

6. Результат $\leftarrow \eta$.

Кінець.

Таким чином, в процесі алгоритму пошуку оптимальної вибірки ми одержимо таке значення функції φ , відповідно якому буде формуватися вектор ознак об'єкту, що класифікується.

Обчислювальна складність алгоритму пошуку оптимальної вибірки

Під обчислювальною складністю алгоритму пошуку оптимальної вибірки будемо розуміти верхню границю для максимального числа основних операцій, які необхідно

виконати алгоритму для знаходження оптимальної вибірки.

Лема 1. Нехай n – розмірність вектора ознак об'єкту одноелементної вибірки; ε – задана точність алгоритму пошуку оптимальної вибірки (довжина відрізка, одна з крайніх точок якого відповідає оптимальній вибірці); W – число вагових зв'язків між нейронами, включаючи зсуви внутрішніх та вихідних нейронів.

Тоді оцінка складності алгоритму пошуку оптимальної вибірки з використанням одноелементної вибірки складає: $n \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(W)$.

Доведення. Згідно [3] обчислювальна складність алгоритму зворотнього розповсюдження помилки для навчання багатосарового перцептрону, який містить W вагових зв'язків, включаючи зсуви нейронів, лінійно залежить від W . Таким чином для навчання нейронної мережі прямого розповсюдження необхідно здійснити $O(W)$ обчислень ваг між нейронами мережі.

Згідно алгоритму пошук оптимальної вибірки здійснюється на відрізку $[0, 1]$. Точкам цього відрізка відповідають вектори ознак $\bar{X}_i$. Кожна наступна точка відрізка є середньою точкою попереднього та задає новий інтервал пошуку, тобто:

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \Rightarrow [\bar{A}_1, \bar{B}_1], \quad \bar{X}_2 = \frac{\bar{A}_1 + \bar{B}_1}{2} \Rightarrow [\bar{A}_2, \bar{B}_2], \quad \dots$$

$$\bar{X}_{m+1} = \frac{\bar{A}_m + \bar{B}_m}{2} \Rightarrow [\bar{A}_{m+1}, \bar{B}_{m+1}], \text{ де } \bar{A} \text{ та } \bar{B} -$$

вектори ознак, що відповідають початковим крайнім точкам відрізка.

Цей процес продовжується доти, доки довжина відрізка, що містить шуканий вектор ознак, не стане менше ніж 2ε . Середня точка останнього відрізка задає оптимальний вектор ознак із заданою точністю ε .

$$\text{Оскільки } |\bar{B}_{m+1} - \bar{A}_{m+1}| = \frac{1}{2} |\bar{B}_m - \bar{A}_m|, \text{ то}$$

$$|\bar{X}_{m+1} - \bar{X}^*| \leq \frac{1}{2^{m+1}} |\bar{B} - \bar{A}|, \text{ де } \bar{X}^* - \text{вектор ознак з}$$

оптимальної вибірки. Звідси, для кількості ітерацій потрібних для виконання нерівності

$$|\bar{X}_{m+1} - \bar{X}^*| \leq \varepsilon \quad \text{справедлива оцінка:}$$

$$m \geq \log_2 \frac{|\bar{B} - \bar{A}|}{\varepsilon} = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Оскільки обчислення компонент вектора ознак, що відповідають середнім точкам інтервалів, лінійно залежить від його

розмірності n , то оцінка складності алгоритму пошуку оптимальної вибірки дорівнює:

$$n \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(W) \blacksquare$$

Теорема 1. Нехай N – розмірність вектора ознак, розподілених по групах, для об'єктів навчальної вибірки; P – кількість прикладів (об'єктів) у вибірці; ε – задана точність алгоритму пошуку оптимальної вибірки; W – число вагових зв'язків між нейронами, включаючи зсуви внутрішніх та вихідних нейронів.

Тоді оцінка складності алгоритму пошуку оптимальної вибірки складає: $N \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(WP)$.

Доведення. У випадку, коли одна з груп ознак для об'єктів навчальної вибірки будується на основі перетину множини ознак, визначених для корпусу об'єктів, та множини ознак, визначених окремо для кожного об'єкту, значення N дорівнює сумарній кількості ознак даної групи, визначених для корпусу об'єктів, та ознак, які містять інші групи.

Оскільки при навчанні вибірки, що містить множину прикладів, прямий та зворотній прохід сигналу здійснюється для кожного прикладу, то кількість обчислень, які необхідно здійснити при навчанні нейронної мережі, лінійно залежить від кількості прикладів у вибірці. Звідси для навчання вибірки із P прикладів нейронною мережею прямого розповсюдження необхідно здійснити $O(WP)$ обчислень ваг між нейронами мережі.

Використавши лему 1 та встановлену оцінку для обчислення ваг мережі при навчанні вибірки з P прикладів, одержимо, що сумарна оцінка складності для алгоритму пошуку оптимальної вибірки з використанням вибірки, яка містить P об'єктів, заданих векторами ознак розмірності N , дорівнює: $N \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(WP) \blacksquare$

Позначимо через *приклад виду T* – приклад, для якого вектор по одній з груп ознак не містить значень, а по іншій групі ознак його розмірність дорівнює N (довжині вектора-прикладу).

Наявність у вибірці прикладу виду T можлива, коли існує група ознак, за якою вектори для різних об'єктів вибірки будуть мати різну розмірність. Наприклад, таку групу ознак можуть складати точки на графіках функцій, що задають опис об'єктів та мають різні допустимі області визначення для кожного об'єкту, або ознаками можуть виступати цифри,

які зустрічаються в описі об'єкту (наприклад, у тексті) і т.п.

Наслідок 1. Нехай N – розмірність вектору ознак для об'єктів навчальної вибірки, що включає ознаки всіх груп, які виділені при класифікації. Якщо навчальна вибірка із P прикладів містить приклад виду T , то оцінка складності алгоритму пошуку оптимальної вибірки дорівнює: $N \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(WP)$.

Наслідок 2. Якщо у вибірці з P прикладів є приклад виду T по групі α та приклад виду T по групі β , то оцінка складності алгоритму пошуку оптимальної вибірки складає: $2N \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(WP)$.

Наслідок 3. Якщо у вибірці з P прикладів є приклад виду T та приклад, для якого одна з груп ознак обмежена по довжині значенням C , то оцінка складності для алгоритму пошуку оптимальної вибірки складає:

$$(N + C) \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \cdot O(WP).$$

Література

1. Анисимов А.В., Порхун Е.В., Тарануха В.Ю. Алгоритм формирования параметрического вектора для решения задач классификации нейронной сетью прямого распространения // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №2. – С. 3-14.
2. Порхун О.В. Побудова параметричного простору в задачах атрибуції текстів. Метод формування вхідного вектору для розпізнавання стилю тексту нейронною мережею // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. – 2005. – №4. – С. 207-212.
3. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation – New York: MacMillan College Publishing Co., 1994. – 696 p.
4. Fausett L. Fundamentals of Neural Network. Architectures, algorithms and applications // New Jersey: Prentice Hall, 1994. – P. 289-316.

Надійшла до редколегії 05.05.2009

УДК 539. 501

Репецький С.П., проф., д. ф-м. н.,
Наконечний О.Г., проф., д. ф-м. н.,
Стащук Б.В., аспірант.

Теорія спінового транспорту в магнітовпорядкованих кристалах

Розвинено метод розрахунку електропровідності магнітовпорядкованих кристалів. Метод заснований на теорії багаторазового розсіювання. Отримано кластерний розклад для двохчастинкової функції Гріна (електропровідності) кристала з урахуванням електрон-електронної взаємодії. В якості нульового одновузельного наближення в цьому розкладі вибирається наближення когерентного потенціалу. Отримані вирази дозволяють дослідити явище спінового транспорту в сильнокорельованих системах. Проведено розрахунок спінового транспорту для сплаву Fe-Co. Показано, що різниця потоків електронів з різною орієнтацією спіна залежить від положення рівня Фермі відносно квазіщільнини в енергетичному спектрі електронів.

Ключові слова: функція Гріна, кластерний розклад, електрон-електронна взаємодія, електропровідність.

S.P. Repetsky, prof., Dr.Sc.,
O.G. Nakonechniy, prof., Dr.Sc.,
B.V. Stashchuk, PhD Student

Theory of the of spin transport in magnetic-ordered crystal

The method for calculation of conductivity of disorder systems with strong electron correlations is developed. The method is based on the theory of multiple scattering. The cluster expansion is derived for two-particle Green's function of a disorder system with the account electron-electron interaction. As a zero one-site approximation of that expansion it is chosen the coherent potential approximation. The received expressions allow investigating the phenomenon of spin transport in strong correlated systems. Calculation of spin transport for Fe-Co equiatomic alloy is carried out. It is shown, that the difference of electron streams for various spin orientation depends on position of Fermi level in respect of quasi-gap or energy band edge in electron energy spectrum.

Key Words: Green's function, cluster expansion, electro-electron interactions, electrical conductivity

E-mail: srepetsky@univ.kiev.ua, nakonechniy@unicvb.kiev.ua, bogdan.stashchuk@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

У системах із сильними електронними кореляціями в зовнішньому електричному полі існує, як давно відомо, явище переносу заряду, так і порівняно недавно відкрите явище переносу спінів електронів.

Істотний прогрес у дослідженні спін-залежного транспорту й перспективи застосування цього явища в мікроелектроніці стимулюють велику кількість робіт як по фундаментальному вивченню цього явища, так і по практичному його застосуванню. Проводяться дослідження згаданих ефектів для створення спінових фільтрів, діодів і транзисторів, керованих магнітним полем, пристроїв для запису й обробки інформації [1].

Характерною властивістю електронної структури феромагнітних кристалів є наявність кулонівської щільнини в енергетичному спектрі

електронів, поява якої пов'язана з кулонівським відштовхуванням електронів із протилежно направленими спінами.

Встановлено, що характер атомного і магнітного впорядкування, магнітні й кінетичні властивості сильнокорельованих систем (наприклад, сполук з вузькими енергетичними зонами) суттєво залежать від положення рівня Фермі по відношенню до щільнини в енергетичному спектрі [2,3].

Однак більшість робіт з дослідження електропровідності кристалів виконані в одноелектронному наближенні без врахування електрон-електронної взаємодії. У даній роботі розвинуто метод розрахунку провідності неупорядкованих систем з урахуванням електрон-електронних кореляцій [3]

використанням добре відомої в феромагнетизмі моделі Хаббарда [4].

Гамільтоніан системи електронів неупорядкованого кристала має вигляд [2,3]

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

де гамільтоніан нульового наближення складається з гамільтоніана підсистеми невзаємодіючих електронів і енергії електростатичної взаємодії йонів у положенні рівноваги, а гамільтоніан збурення складається з гамільтоніана електрон-йонної (електрон-домішкової) взаємодії, гамільтоніана парної електрон-електронної взаємодії й зєсманівської добавки за рахунок взаємодії магнітного моменту електрона із зовнішнім магнітним полем.

Використовуючи для обчислення температурних функцій Гріна магнітовпорядкованого кристалу збіжність поправок до когерентного потенціалу [5] та діаграмну техніку, аналогічну діаграмній техніці для однорідної системи [6], для повної густини електронних станів на один атом можна записати [2,3]

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{v} \sum_{i,j,\sigma,\lambda_i,m_{\lambda_i}} P_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}} g_{i0j\sigma}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon), \quad (2)$$

де $P_{in}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}$ – ймовірність знайти у вузлі (in) атом сорту λ_i із проекцією локалізованого магнітного моменту m_{λ_i} , $g_{i0j\sigma}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon)$ – умовна парціальна густина електронних станів, v – кількість підґраток у кристалі.

Для умовної парціальної густини станів при нехтуванні процесами розсіювання на кластерах із трьох і більше вузлів маємо

$$g_{i0j\sigma}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \tilde{G}_{i0,j0}^{\sigma\sigma} + \tilde{G}_{i0,j0}^{\sigma\sigma'} t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}} \gamma \gamma' \tilde{G}_{i0,j0}^{\sigma'\sigma'} + \right. \\ \left. + \sum_{(j'l)(i0)} P_{j'l,i0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j} / \lambda_i,m_{\lambda_i}} \left[\tilde{G}_{i0,i0} [I - t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}} \tilde{G}_{i0,jl} t_{jl}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{jl,j0}]^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \times t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}} \tilde{G}_{i0,jl} t_{jl}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} (\tilde{G}_{jl,j0} + \tilde{G}_{jl,j0} t_{j0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{i0,j0}) + \right. \\ \left. + \tilde{G}_{i0,jl} [I - t_{jl}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{jl,j0} t_{j0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{i0,jl}]^{-1} t_{jl}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{jl,j0} \times \right. \\ \left. \times t_{j0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} (\tilde{G}_{i0,i0} + \tilde{G}_{i0,jl} t_{jl}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}} \tilde{G}_{jl,j0}) \right]_{\sigma\sigma'} \left. \right\}, \quad (3)$$

де $P_{j'l,i0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j} / \lambda_i,m_{\lambda_i}}$ – умовна ймовірність знайти у вузлі ($j'l$) атом сорту λ_j із проекцією локалізованого магнітного моменту m_{λ_j} за умови, що у вузлі ($i0$) перебуває атом сорту λ_i із

проекцією локалізованого магнітного моменту m_{λ_i} , $t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}$ – значення матричних елементів одноцентрових операторів розсіювання для випадку, коли у вузлі ($i0$) перебуває атом сорту λ_i із проекцією локалізованого магнітного моменту m_{λ_i} , $\tilde{G}$ – функція Гріна ефективного середовища.

Тоді, використовуючи формулу Кубо-Грінвуда [7,8,9], можна отримати вираз для тензора статичної електропровідності кристала

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{e^2 \hbar}{4\pi\Omega_0 v} \sum_{s,s'} (2\delta_{ss'} - 1) \times \quad (4)$$

$$\times \left\{ \sum_{\sigma\tau,i0} [v_{\beta} \tilde{K}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'})]_{i0,i0} + \sum_{i,\lambda_i,m_{\lambda_i}} P_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}} \times \right. \\ \times \sum_{\substack{j'l \neq i0 \\ \lambda_j,m_{\lambda_j}}} P_{j'l,i0}^{\lambda_j,m_{\lambda_j} / \lambda_i,m_{\lambda_i}} [[\tilde{K}(\varepsilon_i^s, v_{\beta}, \varepsilon_i^{s'}) v_{\alpha} \tilde{G}(\varepsilon_i^{s'})]_{i0,i0} \times \\ \times T_{(i0,j'l)}^{(2d)\lambda_i,m_{\lambda_i} \lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^{s'}) + [\tilde{K}(\varepsilon_i^s, v_{\beta}, \varepsilon_i^{s'}) v_{\alpha} \tilde{G}(\varepsilon_i^{s'})]_{i0,j'l} \times \\ \times T_{(j'l,i0)}^{(2n)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^{s'}) + [\tilde{K}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) v_{\beta} \tilde{G}(\varepsilon_i^{s'})]_{i0,i0} \times \\ \times T_{(i0,j'l)}^{(2d)\lambda_i,m_{\lambda_i} \lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^{s'}) + [\tilde{K}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) v_{\beta} \tilde{G}(\varepsilon_i^{s'})]_{i0,j'l} \times \\ \times T_{(j'l,i0)}^{(2n)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^{s'}) + \tilde{K}_{i0,j'l}(\varepsilon_i^s, v_{\beta}, \varepsilon_i^{s'}) \times \\ \times (t_{j'l}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^s) \tilde{K}_{j'l,i0}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^{s'}) + \\ + t_{j'l}^{\lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^s) \tilde{K}_{j'l,i0}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) T_{(i0,j'l)}^{(2d)\lambda_i,m_{\lambda_i} \lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^{s'}) + \\ + T_{(j'l,i0)}^{(2d)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^s) \tilde{K}_{j'l,i0}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) t_{i0}^{\lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^{s'}) + \\ + T_{(j'l,i0)}^{(2d)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^s) \tilde{K}_{j'l,i0}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) \times \\ \times T_{(i0,j'l)}^{(2d)\lambda_i,m_{\lambda_i} \lambda_j,m_{\lambda_j}}(\varepsilon_i^{s'}) + T_{(j'l,i0)}^{(2n)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^s) \times \\ \times \tilde{K}_{i0,j'l}(\varepsilon_i^s, v_{\alpha}, \varepsilon_i^{s'}) T_{(j'l,i0)}^{(2n)\lambda_j,m_{\lambda_j} \lambda_i,m_{\lambda_i}}(\varepsilon_i^{s'}) \left. \right\}_{\sigma\tau,\sigma\tau} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F},$$

де e – заряд електрона; $\hbar = h/(2\pi)$, h – стала Планка; Ω_0 – атомний об'єм;

$$\tilde{K}(\varepsilon^s, v_{\beta}, \varepsilon^{s'}) = \tilde{G}(\varepsilon^s) v_{\beta} \tilde{G}(\varepsilon^{s'});$$

індекс $s(s')$ приймає значення «+» і «-», що вказує, відповідно, на запізнювальну й випереджувальну функції Гріна; $v_{\beta\hbar}$ – оператор швидкості електрона, який визначається з виразу [7]

$$v_{\beta\hbar}^{\gamma_1\gamma_2} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar^{\gamma_1\gamma_2}}{\partial k_{\beta}}, \quad (5)$$

у якому $h_{\vec{k}}^{r_1/r_2}$ - інтеграли перескоку в $\vec{k}$ - представленні, а

$$T_{(n_1, n_2)}^{(2n)} = [I - t^{n_1} \tilde{G} t^{n_2} \tilde{G}]^{-1} t^{n_1} \tilde{G} t^{n_2},$$

$$T_{(n_1, n_2)}^{(2d)} = T_{(n_1, n_2)}^{(2n)} \tilde{G} t^{n_1} \quad (6)$$

Формули (3) і (4) дають можливість досліджувати кінетичні властивості сильнокорельованих систем в залежності від орієнтації спіна носіїв заряду, тобто спіновий транспорт, і пов'язати їхні особливості з будовою енергетичного спектра електронів у таких матеріалах.

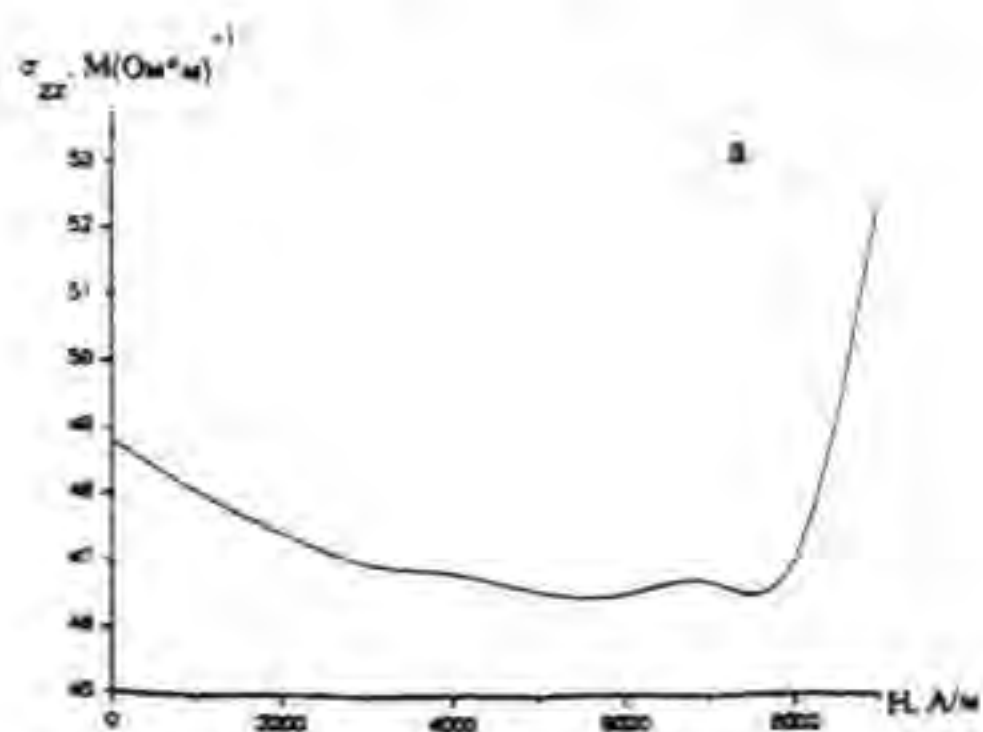
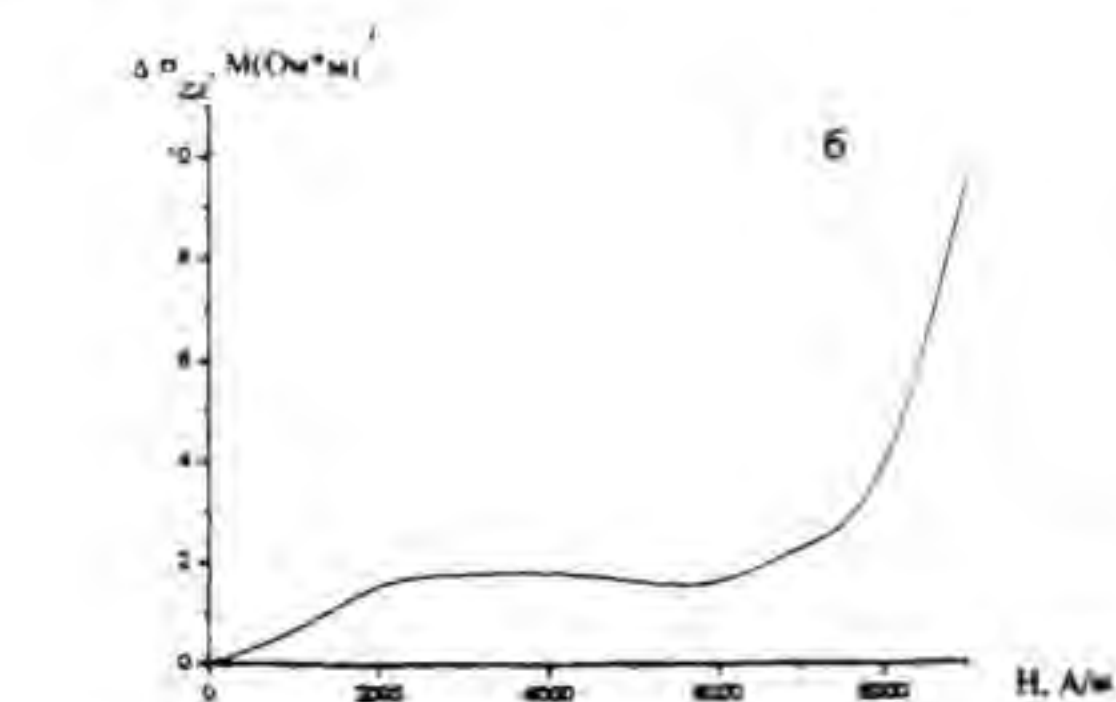


Рис.1 Залежність електропровідності σ_{xx} (а) та різниці внесків у неї $\Delta\sigma_{xx}$ (б) від електронів зі спінами, направленими проти та вздовж магнітного поля, сплава FeCo від величини напруженості H зовнішнього магнітного поля.

В якості системи для чисельного дослідження електронної структури й електропровідності в залежності від напруженості зовнішнього магнітного поля був обраний еквіатомний сплав залізо-кобальт.

На рис. 1 представлені сумарна електропровідність системи (σ_{xx}) (рис. 1а) і

різниця внесків у неї електронів зі спінами, направленими проти й уздовж зовнішнього магнітного поля ($\Delta\sigma_{xx} = \sigma_{xx\uparrow} - \sigma_{xx\downarrow}$) (рис. 1б) в залежності від величини напруженості H цього поля.

Слід зазначити, що при нульових значеннях напруженості й температури розраховане з перших принципів значення електричного опору інтерметаліда Fe-Co $\rho_{теор} = \sigma^{-1}_{теор} = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ добре узгоджується з експериментальним [10] значенням $\rho_{експ} = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ для відпаленого при 773 К сплаву.

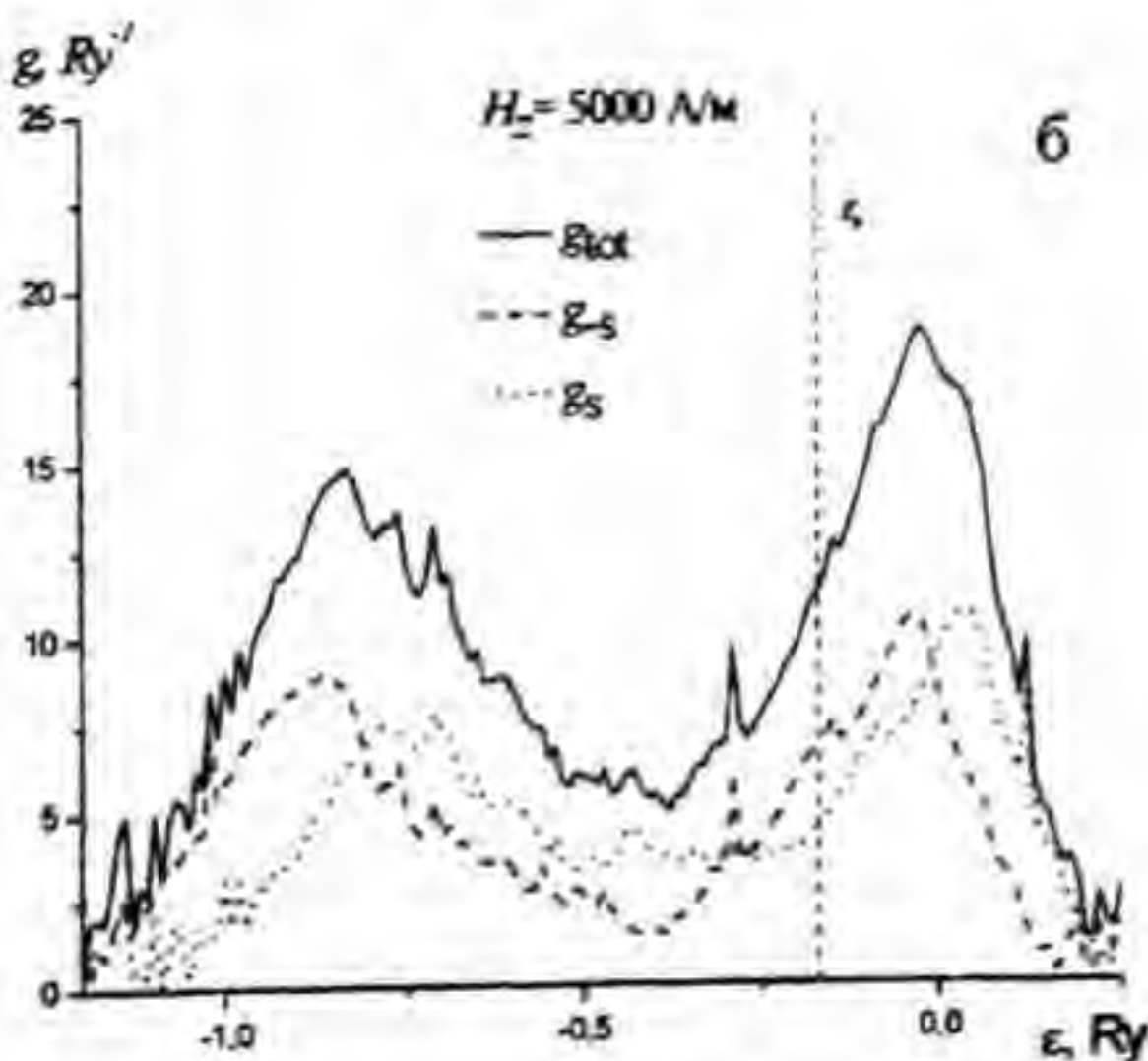
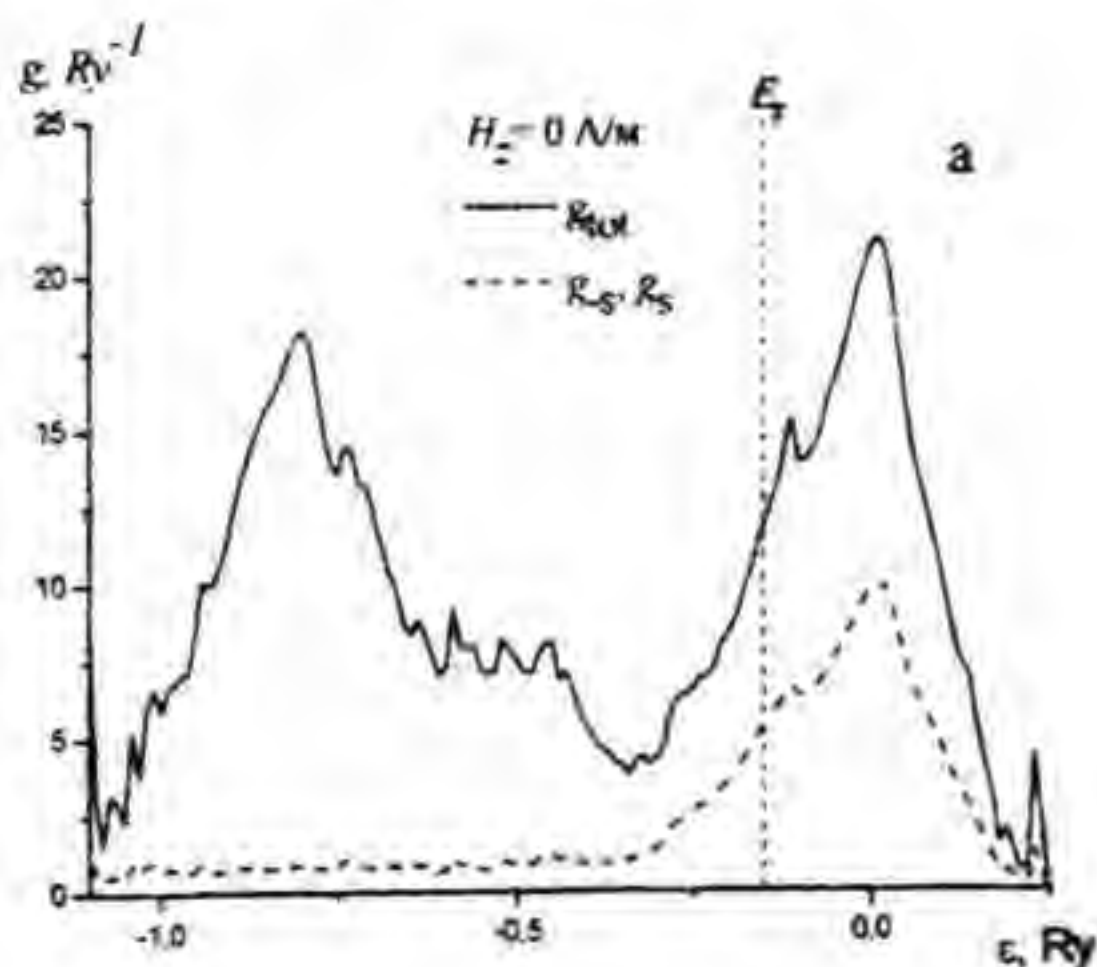


Рис.2 Енергетичні залежності густини електронних станів g_{tot} та внески в неї від електронів зі спінами, направленими проти g_s та вздовж g_s магнітного поля, сплава FeCo при відсутності (а) $H_z=0$ магнітного поля та у магнітному полі з напруженістю $H_z=5000 \text{ А/м}$ (б).

Як видно з рис. 1, основний внесок в електропровідність дають електрони в стані з проекцією спіна проти зовнішнього поля ($\Delta\sigma_z > 0$). Це викликано тим, що в зовнішньому магнітному полі власні магнітні моменти електронів орієнтуються переважно вздовж поля. При відсутності зовнішнього магнітного поля умовні парціальні густини станів задовольняють рівностям

$$g_{\sigma}^{\mu}(\varepsilon) = g_{-\sigma}^{\mu}(\varepsilon), g_{\sigma}^{\nu}(\varepsilon) = g_{-\sigma}^{\nu}(\varepsilon). \quad (7)$$

Густини станів для електронів із проекцією спіна вздовж та проти поля будуть однаковими

$$g_{\sigma} = g_{-\sigma}.$$

На рівні Фермі E_F густини електронних станів для електронів з різною орієнтацією спіна відносно магнітного поля теж будуть однаковими (див. рис. 2, а). В результаті цього, електрони з різною орієнтацією спіна стосовно магнітного поля будуть давати однаковий внесок в електропровідність.

У випадку, коли напруженість магнітного поля не дорівнює нулю, рівності (7) не виконуються. На рівні Фермі густини електронних станів стають різними для електронів із різною орієнтацією спіна (див. рис. 2, б).

Спіни електронів переорієнтуються таким чином, щоб локалізований магнітний момент на вузлах ґратки був направлений вздовж поля.

Густини станів електронів зі спіном, орієнтованим протилежно полю (власні магнітні моменти орієнтовані уздовж поля) стають вищими за густини станів електронів із протилежно орієнтованими спінами.

Необхідною умовою існування ефекту спінового транспорту є наявність кулонівської щільності в енергетичному спектрі електронів (рівень Фермі E_F лежить в області щільності).

При сильних зовнішніх магнітних полях більшість електронів набуває спінову поляризацію проти поля, що визначає їхній внесок в ефект спінового транспорту, і приводить до збільшення сумарної електропровідності неупорядкованої системи (внаслідок збільшення ступеня магнітного порядку).

Описаний ефект може бути використаний у приладах мікроелектроніки для зміни досить слабкими магнітними полями поляризації електронів.

Розвинений підхід дозволяє досліджувати мікроскопічний механізм спінового транспорту з урахуванням електрон-електронних кореляцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. R. Fiederling, M. Kelm, G. Reuseher, W. Ossan, G. Schmidt, A. Waag, L.W. Molenkamp // *Nature* (1999), **402**, №6763, с.787-790.
2. С.П. Репецкий, Т.Д. Шатний. Термодинамический потенциал системы электронов и фононов неупорядоченного сплава // *ТМФ* (2002), **131**, № 3, с.456-478.
3. С.П. Репецкий, Т.Д. Шатний. Термодинамический потенциал электронов и фононов неупорядоченного кристалла // *ФММ* (2003), **96**, № 1, с.18-27.
4. Ю.А. Изюмов. Модель Хаббарда в режиме сильных корреляций // *УФН* (1995), **165**, №4, с.403-427.
5. М.А.Иванов, Ю.В. Скрипник, К вопросу о сходимости и парных поправках к когерентному потенциалу // *ФТТ* (1994), **36**, № 1, с.94-104.
6. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, Москва, 1962. – 444с.
7. В.Ф. Лось, С.П. Репецкий. Методы теории неупорядоченных систем. Наукова думка, Киев, 1995. – 175с.
8. B. Velicky Theory of electronic transport in disordered binary alloys: Coherent-potential approximation // *Phys.Rev* (1969), **184**, №3, с.614-627.
9. V.F. Los', S.P. Repetsky. A theory for the electrical conductivity of an ordered alloy // *J.Phys.: Condens Matter* (1994), **6**, с.1707-1730.
10. О.Л. Шматко, Ю.В. Усов. Структура и свойства металлов и сплавов. Электрические и магнитные свойства металлов и сплавов. Наукова думка, Киев, 1987. – 584с.

Надійшла до редколегії 8.04.09

УДК 004.519.712, 004.94

Терещенко В.М., к. ф. - м. н., доц.

Принцип зводимості в задачах обчислювальної геометрії

В роботі запропоновано підхід розробки ефективних алгоритмів розв'язання широкого класу задач обчислювальної геометрії, в основі якої лежить принцип зводимості. Цей підхід вказує один із способів формування повної множини класів зводи мості, генератором якої є множина задач обчислювальної геометрії.

Ключові слова: принцип зводимості, обчислювальна геометрія, складність алгоритмів, класи зводимості, повнота, перетворення задач.

V.M. Tereshchenko, C.Sci(Phys-Math.), Ass. Prof.

The reduction principle in problems of computational geometry

In this paper is proposed an approach to develop effective algorithms for solving a wide class of problems of computational geometry. The basis of this methodology is the principle of transformation. This approach indicates a way of creating a complete set of classes of transformations for which the generator is a set of computational geometry problems.

Key Words: reduction principle, computational geometry, algorithmic complexity, reduction classes, completeness, conversion problems.

*E-mail: v_ter@ukr.net

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. А.В. Анісімов.

Вступ

Постановка проблеми. Для переважної більшості класів задач обчислювальної геометрії існують алгоритми поліноміальної складності. Це алгоритми, в яких кількість кроків необхідних для їх реалізації є поліноміальна функція від довжини входу. Проте, далеко не для всіх задач відомі алгоритми поліноміальної складності. До таких задач, наприклад, належить відома задача комівояжера, в якій комівояжеру потрібно об'їхати N міст за мінімальний час, так, щоб не відвідати жодне місто двічі. Ця задача розв'язується лише методом перебору. Постає питання, чи існують підходи, які б дозволяли знайти більш ефективне розв'язання такого типу задач? Одним із таких підходів можна назвати метод зведення задач, за допомогою якого вдається зводити задачі одного класу до задач іншого класу, які розв'язуються не переборними методами. Для цього необхідно лише знайти перетворення, яке перетворює вхід однієї задачі до іншої за число кроків пропорційне певному ступеню довжини початкових даних. І, якщо для задачі з даного класу буде знайдений алгоритм поліноміальної складності, то тим самим буде знайдений алгоритм такої ж складності для всіх інших задач цього класу. Отже, постає проблема побудови повної множини класів задач, які

розв'язуються за поліноміальний клас, до яких би можна було звести будь-яку, коректно сформульовану, задачу інформатики чи прикладної математики, і тим самим одержати поліноміальний алгоритм їх розв'язання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В деяких роботах були спроби побудови повної множини класів зводи мості задач. Серед них слід відзначити роботи С. А. Кука [1] і П.М. Карпа [2]. Так, зокрема С.А. Кук пропонує за повну множину класів зводи мості задач взяти задачі булевої алгебри, а Карп П.М. – задачі розпізнавання образів. Проте, множина класів задач булевої алгебри виявилась досить незручною для застосування, а перетворення досить громіздкими. Класи задач розпізнавання образів виявились обмеженими і такими, що не покривають усю можливу сукупність задач. Ця проблема на сьогоднішній день залишається відкритою.

Метою даної статті є розробка методології побудови ефективних алгоритмів розв'язання широкого класу задач обчислювальної геометрії, в основі якої лежить принцип зводимості, а також формування повної множини класів зводимості, генератором якої є множина задач комбінаторної та дискретної геометрії.

Основні поняття та означення принципу зводимості

Досить часто при побудові алгоритмів розв'язання різних класів задач виникає потреба дослідження питання не лише їх принципової розв'язності, а й пошуку самих ефективних алгоритмів їх розв'язання – алгоритмів з оцінкою складності близькою до нижньої оцінки складності для цього класу задач. Проте, фахівець, вирішуючи задачу, завжди повинен рахуватися з можливістю того, що вона може виявитися нерозв'язною.

Опишемо суть принципу зводимості та доцільність його використання, як базового принципу при побудові узагальнених методологій, а також спроби застосування його для побудови генеруючих задач-прототипів. Сформулюємо основні поняття, означення та твердження, а також визначення основних інструментів методології.

В основу принципу зводимості над множиною класів задач обчислювальної геометрії в даній роботі покладено визначення та теореми в наступній інтерпретації.

Означення 1 (зводимість). Нехай задана множина класів задач $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$; кожен клас K_i складається із j задач: $K_i = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_j\}$, і нехай A_i^k – множина алгоритмів розв'язання задачі Z_k класу K_i , яка складається з r алгоритмів: $A_i^k = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$, тоді $A' = \{A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{r_1}\}$ – множина алгоритмів розв'язання задач класу K_1 . Позначимо через $U_{in}(Z_k)$ множину вхідних даних задачі Z_k , через $U_{out}(Z_k)$ множину вихідних даних задачі Z_k , як розв'язок задачі, одержаний за допомогою алгоритму $A_s \in A_i^k$. Припустимо, що потужності множин $U_{in}(Z_k)$ та $U_{out}(Z_k)$ рівні N та M , відповідно.

Нехай є дві задачі, A – із входом $U_{in}(A)$ та виходом $U_{out}(A)$ і B – із входом $U_{in}(B)$ та виходом $U_{out}(B)$. Тоді кажуть, що задача A зводима до задачі B , якщо виконуються наступні умови [3]:

1. Існує перетворення R_{AB} , яке за час $O(\tau_1(N))$ вхідні дані задачі A ($U_{in}(A)$) перетворює у відповідні вхідні дані для задачі B ($U_{in}(B)$).

2. Існує алгоритм розв'язання $A_p \in A_i^k$ задачі задачі B .

3. Існує перетворення R_{BA} , яке за час $O(\tau_2(M))$ результат розв'язання задачі B ($U_{out}(B)$) перетворює у вірний розв'язок задачі A ($U_{out}(A)$).

Якщо взяти за час $O(\tau(N)) = \max(O(\tau_1(N)), O(\tau_2(M)))$, і покласти $M \leq N$ – то кажуть, що задача A $\tau(N)$ – зводима до задачі B , і позначають $A \propto_{\tau(N)} B$.

Методологічну основу методу зведення характеризують дві наступні теореми про нижні і верхні оцінки.

Теорема 1. Якщо час розв'язання задачі A , розмірності N , за допомогою алгоритму $A_p \in A_i^k$ рівний $T(N)$ і задача A $\tau(N)$ – зводима до задачі B , тоді задачу B можна розв'язати за час, не менший $T(N) - O(\tau(N))$.

Наслідок 1. Якщо нижня оцінка складності задачі A , розмірності N , рівна $\Omega(T(N))$ і задача A $\tau(N)$ – зводима до задачі B , тоді нижня оцінка складності задачі B рівна $\Omega(T(N)) - O(\tau(N))$. Якщо $T(N) > \tau(N)$, то нижня оцінка складності задачі B буде $\Omega_B(f(N)) = \Omega(T(N))$.

Теорема 2. Якщо час розв'язання задачі B , розмірності N , за допомогою алгоритму $A_p \in A_i^k$ рівний $O(T(N))$ і задача A $\tau(N)$ – зводима до задачі B , тоді задачу A можна розв'язати за час який не перевищує $O(T(N)) + O(\tau(N))$.

Наслідок 2. Якщо верхня оцінка складності задачі B , розмірності N , рівна $O(T(N))$ і задача A $\tau(N)$ – зводима до задачі B , тоді верхня оцінка складності задачі A рівна $O(T(N)) + O(\tau(N))$. Якщо $T(N) > \tau(N)$, то верхня оцінка складності задачі A буде $O_A(f(N)) = O(T(N))$.

Доведення. Доведемо теорему 1. Так, як $A \propto_{\tau(N)} B$, то знайдеться перетворення R_{AB} , яке за час $O(\tau_1(N))$ перетворить вхідні дані задачі A ($U_{in}(A)$) у відповідні вхідні дані для задачі B ($U_{in}(B)$). Тоді знайдеться алгоритм $A_p \in A_i^k$, який за час $f(N)$ розв'яже задачу B , і для якого існує перетворення R_{BA} , яке за час $O(\tau_2(M))$ результат розв'язання задачі B ($U_{out}(B)$) перетворить у вірний розв'язок задачі A ($U_{out}(A)$). Тоді для сумарного часу розв'язання задачі B матиме місце співвідношення:

$$O(\tau_1(N)) + f(N) + O(\tau_2(M)) \geq T(N), \quad (1)$$

з якого визначиться час розв'язання задачі B :

$$f(N) \geq T(N) - O(\tau_1(N)) - O(\tau_2(M)) \geq T(N) - O(\tau(N)) \quad (2)$$

де $O(\tau(N)) = \max(O(\tau_1(N)), O(\tau_2(M)))$. Отже, якщо нижня оцінка задачі A рівна $\Omega_A(T(N))$, то нижня оцінка задачі B рівна $\Omega_B(f(N)) = \Omega_A(T(N))$.

$O(\tau(N))$, і якщо $T(N) > \tau(N)$, то $\Omega_B(f(N)) = \Omega_A(T(N))$. Теорему доведено. ⁴

Аналогічно доводиться теорема 2; достатньо у співвідношенні (1) поміняти місцями $f(N)$ і $T(N)$.

Означення 2. Задачі для яких встановлені нижні оцінки складності називаються *задачами прототипами*.

Більш важливими є наслідки із теорем 1 та 2. Так, наслідок 1 вказує метод встановлення нижніх оцінок складності задач через відомі оцінки за задач-прототипів. Наслідок 2 вказує метод розв'язання задачі: уся множина алгоритмів розв'язання задачі прототипу є основою алгоритмів розв'язання розглядуваної задачі.

Принцип зводимості (редукція) на множині класів задач $\mathcal{K}' = \{K_1, K_2, \dots, K_h\}$ можна розглядати як деяке відношення R_Z . Дослідимо властивості цього відношення.

Властивості відношення зводимості R_Z

Проведемо аналіз властивостей відношення зводимості R_Z на множині задач $\mathcal{K}' = \{K_1, K_2, \dots, K_h\}$. Нехай задано клас задач $K_i \in \mathcal{K}'$.

Теорема 3. (Транзитивність). Нехай задані задачі $A, B, C \in K_i$, розмірності N , які зв'язані відношенням R_Z : $A \propto_{\tau(N)} B$, $B \propto_{t(N)} C$, тоді має місце відношення $A \propto_{\gamma(N)} C$, причому $\gamma(N) = \tau(N) + t(N)$.

Доведення. Так, як $A \propto_{\tau(N)} B$, то існує перетворення R_{AB} , яке перетворює вхідні дані задачі $U_m(A)$ за час $O(\tau_1(N))$ у відповідні вхідні дані задачі $B(U_m(B))$. Із зводимості $B \propto_{t(N)} C$ випливає, що існує перетворення R_{BC} , яке перетворює вхідні дані задачі $U_m(B)$ за час $O(t_1(N))$ у відповідні вхідні дані задачі $B(U_m(C))$. Окрім цього, існує алгоритм $A_C \in A_i^k$, який знаходить розв'язки задачі C за час $O(f_c(N))$, які за допомогою перетворення R_{CB} перетворюються у вірні розв'язки задачі $B(U_{out}(B))$ за час $O(t_2(N))$. З іншого боку, із зводимості $A \propto_{\tau(N)} B$, існує перетворення R_{BA} , яке перетворює вихідні дані задачі $B(U_{out}(B))$ у вірні розв'язки задачі $A(U_{out}(A))$ за час $O(\tau_2(N))$. Таким чином, якщо покласти за $\gamma_1(N) = \tau_1(N) + t_1(N)$ - час перетворення вхідних даних задачі $A(U_m(A))$ у вхідні дані задачі $B(U_m(B))$, а за $\gamma_2(N) = \tau_2(N) + t_2(N)$ час, який іде на перетворення відповідних вихідних даних задач, то поклавши $\gamma(N) = \max(\gamma_1(N), \gamma_2(N)) = \tau(N) + t(N)$. Таким чином теорема доведена. ⁴

Із властивості транзитивності відношення R_Z випливають наступні важливі теореми.

Теорема 4. Нехай задані задачі $A, B, C \in K_i$, розмірності N , які зв'язані відношенням R_Z : $A \propto_{\tau(N)} B$, $B \propto_{t(N)} C$, тобто має місце $A \propto_{\gamma(N)} C$, тоді якщо нижня оцінка складності задачі A рівна $\Omega_A(T(N))$, то вона буде нижньою оцінкою й задачі C , якщо $T(N) > \gamma(N)$.

Доведення. Із того, що $A \propto_{\tau(N)} B$, $B \propto_{t(N)} C$, а також, враховуючи наслідок теореми 1 та доведення транзитивності відношення R_Z , можемо відразу записати:

$$U_m(A) \xrightarrow{R_{AB}(\tau_1(N))} U_m(B) \xrightarrow{R_{BC}(t_1(N))} U_m(C) \xrightarrow{A_C(f_c(N))} U_{out}(C)$$

$$U_{out}(C) \xrightarrow{R_{CB}(t_2(N))} U_{out}(B) \xrightarrow{R_{BA}(\tau_2(N))} U_{out}(A)$$

$$U_{out}(A) \Rightarrow T(N) \leq \tau_1(N) + t_1(N) + f_c(N) + \tau_2(N) + t_2(N) \leq$$

$$\leq \{ \text{так як } \tau(N) = \max(\tau_1(N), \tau_2(N)) \text{ і } t(N) = \max(t_1(N), t_2(N)) \} \leq 2\tau(N) + 2t(N) + f_c(N) = 2(\tau(N) +$$

$$t(N)) + f_c(N) = 2\gamma(N) + f_c(N), \text{ звідки } f_c(N) \geq T(N) -$$

$$O(\gamma(N)), \text{ враховуючи } T(N) > \gamma(N) \text{ маємо } \Omega_C(f_c(N)) = \Omega_A(T(N)). ⁴$$

Також має місце теорема для верхніх оцінок.

Теорема 5. Нехай задані задачі $A, B, C \in K_i$, розмірності N , які зв'язані відношенням зводимості: $A \propto_{\tau(N)} B$, $B \propto_{t(N)} C$, тобто має місце $A \propto_{\gamma(N)} C$, тоді, якщо відомий алгоритм розв'язання задачі C з часом $T(N)$, то задачу A можна розв'язати за час $f_A(N) \leq T(N) + O(\gamma(N))$, тобто верхня оцінка складності задачі A буде рівна $O(f_A(N)) \leq O(T(N)) + O(\gamma(N))$, а якщо $T(N) > \gamma(N)$, то верхня оцінка складності задачі C $O(T(N))$ буде верхньою оцінкою задачі A $O(f_A(N))$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 4. Необхідно лише поміняти місцями $T(N)$ і $f_c(N)$.

Теорема 6. Розглянемо підмножину задач $K'_Z = \{Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_h\} \subseteq K_i$ для яких має місце теорема 3. Тоді відношення R_Z є відношення часткового порядку на множині задач K'_Z .

Доведення. Для доведення теореми достатньо перевірити властивості які задовольняють відношення часткового порядку: рефлексивність, антисиметричність, транзитивність.

1. **Рефлексивність.** Нехай задача $A \in K'_z$, розмірності N , тоді має місце відношення $A \propto_{\eta(N)} A$, причому $\eta(N) = \text{const}$.

2. **Антисиметричність.** Нехай задані задачі $A, B \in K'_z$, розмірності N , тоді $A \propto_{\tau(N)} B$ і $B \propto_{\tau(N)} A$ лише тоді коли $A = B$. Це дійсно має місце так, як далеко не завжди знайдеться перетворення яке б переводило вхідні дані задачі B у вхідні дані задачі A .

3. **Транзитивність.** Транзитивність доведена в теоремі 3.

Отже, теорему доведено ⁴.

Відомий факт [4], що відношення часткового (строого) порядку на множині об'єктів дозволяє створювати упорядковані множини. Тому теорема 6 дозволяє нам будувати упорядковані класи й упорядковані множини класів задач та відповідні множини алгоритмів їх розв'язання за їх складністю, тобто будувати так звані *класи зводимості задач*.

Означення 3. Множину задач $K'_z = \{ Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_k \} \subseteq K_i$ назовемо *підкласом зводимості задач i -того класу K_i* . Якщо відома нижня оцінка $\Omega(f(N))$ підкласу K'_z , то назовемо його *підкласом зводимості задач i -того класу K_i порядку $f(N)$* , позначивши його $K'_{z,f(N)}$.

Означення 4. Множину алгоритмів $A'_{z,f(N)} = \{ A'_1, A'_2, \dots, A'_k \} \subseteq A'$ назовемо *множиною алгоритмів розв'язності підкласу зводимості задач i -того класу K_i порядку $f(N)$* , якщо верхня оцінка складності алгоритмів рівна $O(f(N))$.

Означення 5. Множину задач $K_{z,f(N)} = \{ K^1_{z,f(N)}, K^2_{z,f(N)}, \dots, K^n_{z,f(N)} \}$ назовемо *множиною зводимості підкласів класів задач порядку $f(N)$* . Множину алгоритмів $A_{z,f(N)} = \{ A_1, A_2, \dots, A_k \}$ розв'язання такої множини задач назовемо *множиною алгоритмів розв'язності множини зводимості підкласів класів задач $K_{z,f(N)}$ порядку $f(N)$* .

Теорема 7. Задача A належить підкласу зводимості $A \in K'_{z,f(N)}$, якщо існує задача $Z'_k \in K'_{z,f(N)}$, така що $A \propto_{\tau(N)} Z'_k$, при чому $f(N) > \tau(N)$.

Теорема 8. Два підкласи зводимих задач одного порядку $f(N)$ $K'_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ і $K^k_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ утворюють об'єднаний підклас зводимості задач $K^{1+k}_{z,f(N)}$ порядку $f(N)$, якщо знайдеться така задача $A \in K'_{z,f(N)}$ та задача $B \in K^k_{z,f(N)}$, для яких має місце відношення $R_z: A \propto_{\tau(N)} B$, причому $f(N) > \tau(N)$.

Розіб'ємо множину класів задач $\mathcal{K} = \{ K_1, K_2, \dots, K_h \}$ на підмножини класів задач відповідних предметних областей, позначивши їх як $K_{\Pi O_i} = \{ K_{i,1}, K_{i,2}, \dots, K_{i,m} \}$, $K_{i,l} \in \mathcal{K}, \forall l=1, \dots, m, \forall i=1, \dots, h$. Тоді $\mathcal{K} = \{ K_1, K_2, \dots, K_h \} = \{ K_{\Pi O_1}, K_{\Pi O_2}, \dots, K_{\Pi O_h} \}$. Сформулюємо теорему 8 у визначених щойно термінах.

Теорема 8'. Нехай підклас задач $K'_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ порядку $f(N)$ є підмножиною класів задач предметної області $K_{\Pi O_i}$, а підклас задач $K^k_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ порядку $f(N)$ є підмножиною класів задач предметної області $K_{\Pi O_k}$. Два підкласи зводимих задач одного порядку $f(N)$ $K'_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ і $K^k_{z,f(N)} \in K_{z,f(N)}$ утворюють об'єднаний підклас зводимості задач $K^{1+k}_{z,f(N)}$ порядку $f(N)$, якщо знайдеться така задача $A \in K'_{z,f(N)}$ та задача $B \in K^k_{z,f(N)}$, для яких має місце відношення $R_z: A \propto_{\tau(N)} B$, причому $f(N) > \tau(N)$.

У теоремі 8' йде мова про зводимість задач з різних предметних областей. Це дозволяє обрати добре структуровану щодо класів зводимості задач предметну область, яка має повні набори високоефективних алгоритмів розв'язання усієї множини класів задач такої предметної області і спробувати побудувати об'єднані класи зводимості задач та множини відповідних високоефективних алгоритмів їх розв'язання. Однією із таких предметних областей може бути обчислювальна геометрія, яка має чітко структуровану множину класів зводимості $KOG_z = \{ K^{(K)}_{z,f_1(N)}, K^{(K)}_{z,f_2(N)}, \dots, K^{(K)}_{z,f_m(N)} \}$, а також множини ефективних алгоритмів для

кожного класу задач $K_i^{(X)} \in K^{OG} = \{ K_1^{(X)}, K_2^{(X)}, \dots, K_n^{(X)} \}$.

Метод зведення і проблема NP-повноти

У теорії складності обчислень є область досліджень, яка носить назву проблемою NP-повноти. Повнота визначається для пари (клас складностей, тип зведення) і математично строге визначення говорить про задачу, повну в даному класі щодо даного типу зведення. Кожен тип зведення визначає свою множину задач, повних у класі NP. Питання про співвідношення між такими множинами (співпадають чи відрізняються) у багатьох випадках залишається відкритим і з повною підставою може називатися проблемою NP-повноти. Підкреслимо, що ця проблема цікава, головним чином, у контексті дослідження структури класу NP. Коли ж мова йде про складність якої-небудь конкретної задачі T , то досить продемонструвати довільну (поліноміальну, детерміновану) зводимість, скажемо, задачі ВИКОНАННЯ до T . Це буде свідченням обчислювальної складності задачі T в тому сенсі, що з існування для неї поліноміального детермінованого алгоритму буде випливати, що $P = NP$. Таким чином має місце наступна проблема: *проблема співвідношення класів P і NP* .

На даний момент вона є однією з найбільш важливих і найбільш невирішених математичних проблем. Безумовно, ведуться в зв'язку з цією проблемою і серйозні дослідження, але, як уже було сказано вище, проблема співвідношення класів P і NP залишається відкритою. Проте, на наш погляд, стан досліджень цієї проблеми заслуговує більш глибокого обговорення.

Найбільш відомими працями у цьому напрямку є, вище згадані, праці Кука [1] і Карпа [2], а також усім відома монографія Гері і Джонсона [5]. Питання про співвідношення класів P і NP - це частина загальної проблеми

співвідношення між детермінованими і не детермінованими обчисленнями.

Через $PSPACE$ ($LOGSPACE$) позначимо клас мов, які розпізнаються детермінованими машинами Тьюринга на поліноміальній (логарифмічній) пам'яті, відповідно. Тоді мають місце наступні включення

$$LOGSPACE \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \quad (3)$$

і *проблема співвідношення обмежень на час і пам'ять*.

Питання про те, які з трьох включень виразу (3) є строгими, залишається відкритим. Відомо, що клас $PSPACE$ ширший за клас $LOGSPACE$ (так звана теорема про ієрархію). Тому хоча б одне з цих трьох включень повинно бути строгим. Можна припустити, що всі три є такими. Тоді, спочатку можна взятися за більш "легку" задачу - відокремити клас P від $PSPACE$. Співвідношення цих класів - ще одна з центральних невирішених проблем теорії складності. Нехай BPP - імовірнісний аналог класу P . Тоді має місце *проблема співвідношення імовірнісних і не детермінованих обчислень і відповідних класів складностей*. Очевидно, що $BPP \subseteq NP$.

Ні включення $BPP \subseteq NP$, ні протилежне йому ($NP \subseteq BPP$), на даний момент не доведені. Відомо, що $BPP \subseteq \sum_2^P$ ($\sum_2^P$ - клас другого рівня поліноміальної ієрархії). При цьому не доведено навіть, що клас $NEXP$ ширший за BPP (клас $NEXP$ визначається аналогічно класу NP з заміною обмежень виду $O(n^k)$ на обмеження виду $O(2^{n^k})$). З іншого боку, ведуться дослідження з дерендомізації ефективних імовірнісних алгоритмів. Сформульовано гіпотезу, при якій $P = BPP$ [6].

Існує наступний цілком очевидний шлях для відокремлення класу NP від P : взяти яку-небудь NP - повну задачу і довести для неї над поліноміальну нижню оцінку складності. Через

відому двоїстість між машинами Тьюринга і схемами з функціональних елементів, можна скористатись кожною з цих моделей обчислень. На даний момент найбільш висока нижня оцінка схемної складності для конкретної (індивідуальної) функції має порядок $4n$, де n довжина входу [7]. Не тривіальні результати одержано також в ряді інших робіт [8, 10].

У самій же постановці проблеми відокремлення класу NP від P стоїть квантор узагальнення по множині всіх поліноміальних детермінованих алгоритмів: жоден з цих алгоритмів не розпізнає NP - повну мову. Скоріш за все, суть основних труднощів зазначених вище проблем теорії складності обчислень полягає у необхідності досліджувати загальної властивості елементів з дуже великої і дуже неоднорідної множини.

Висновки

Запропонований в роботі підхід дозволяє обрати структуровану щодо класів зводимості задач предметну область, яка має повні набори високоефективних алгоритмів розв'язання усієї множини класів задач та сформулювати генеруючу множину класів зводимості задач та множини відповідних високоефективних алгоритмів їх розв'язання. Однією із таких предметних областей може бути обчислювальна геометрія, яка має чітко структуровану множину класів зводимості та множини ефективних алгоритмів для кожного класу задач. Але питання зводимості у таких випадках потребує детального дослідження. По-перше, необхідно встановити чи завжди існують такі перетворення вхідних та вихідних даних двох задач, які адекватно забезпечують зводимість; по-друге, необхідно відповісти на питання, у якому випадку вхідні та вихідні дані задачі однієї предметної області можуть бути перетворені у відповідні вхідні та вихідні дані задачі іншої предметної області; по-третє, що зумовлює постановку задачі однієї предметної області сформулювати у термінах задачі іншої предметної області, і чи завжди це може бути здійсненим; ну і багато інших питань, на які необхідно дати відповідь. Важливими, в цьому сенсі, також видаються проблеми зводимості та співвідношення класів повноти NP і P.

Список використаних джерел

1. Cook S.A. The complexity of theorem-proving procedures, Proceedings Third Ann. ACM Symposium on the Theory of Computing, Shaker Heights, N.-Y., 1971, 151-158.
2. Карп Р. М. Сводимость комбинаторных проблем. Кибернетический сборник, вып. 12.-М.: Мир, 1975, с. 16-38.
3. F. Preparata and M.I. Shamos. Computational Geometry: An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1985, -475 p.
4. Н.Бурбаки. Теория множеств. М.:Мир, 1965, -454 С.
5. Гэри М., Джонсон Д. Обчислювальні машини і трудно решаемые задачи. М.: Світ, 1982.
6. Lautemann C. BPP and the polynomial hierarchy. Inf. Process. Letters, 17, N 4, 1983, 215-217.
7. Zwick U. A $4n$ lower bound on the combinational complexity of certain symmetric Boolean functions over the basis of unate dyadic Boolean functions. SIAM J. Comput., 20, 1991.
8. Розборів А. А. Нижні оцінки монотонної складності деяких булевих функцій. Доповіді АН СРСР, 281, N 4, 1985, С.798-801.
9. Андреев А. Е. Про один метод одержання ефективних нижніх оцінок монотонної складності. Доповіді АН СРСР, 282, N 5, 1985, С. 1033-1037.
10. Ajtai M. Σ_1^1 -formulae on finite structures. Annals of Pure and Applied Logic, 24, 1983, 1-48.

Надійшла до редколегії 14.04.09

УДК 519.62

Черниш Р.І., асп.

Паралельна реалізація моделі макромасштабної циркуляції атмосфери

Розглянуто модель циркуляції атмосфери, що описується основними гідро- та термодинамічними законами за припущення нестисливості повітря. Модель також враховує явище турбулентності. Додаткові умови визначалися шляхом інтерполяції даних об'єктивного аналізу спостережень за станом атмосфери.

Чисельна реалізація моделі здійснена згідно алгоритму, який розпаралелює обчислення за рівняннями, напрямками та підобластями. Чисельні експерименти проведено на ЕОМ зі спільною пам'яттю.

Ключові слова: паралельний алгоритм, модель циркуляції атмосфери, модифікований адитивно-усереднений метод.

R.I. Chernysh, Phd student

Parallel realization of macrometeorology atmosphere circulation model

An atmosphere circulation model is considered. It consists the primitive hydro- and thermodynamics laws under the assumption of air incompressibility. The model also takes into account atmospheric turbulence. Side conditions are given by interpolating data objective analysis of atmospheric monitoring.

The model numerical implementation has been done according to an algorithm which parallelizes calculations into equations, directions and subdomains. Numerical experiments have been carried out by using supercomputer with shared memory.

Key words: parallel algorithm, atmosphere circulation model, modified additively-averaged scheme.

E-mail: chernysh@uhmi.org.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Головною практичною метою моделювання стану атмосфери є передбачення розвитку процесів та появи різноманітних явищ. Особливістю задач прогнозу є обов'язкове застосування ефективних чисельних методів та сучасних засобів їхньої реалізації. Така необхідність пояснюється значною складністю моделі, великим обсягом необхідної інформації та існуванням часового обмеження на отримання остаточного результату [7].

Спроби запропонувати відповідні чисельні методи були зроблені у наступних роботах. В [6] подано метод розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії, що поєднує переваги явних та неявних схем. Цей метод є абсолютно стійким та реалізується за алгоритмом явного рахунку. В [5] розглянуто модифікований адитивно-усереднений метод (МАУМ) розщеплення, що дозволяє регулювати часові витрати на розв'язання завдяки поступкам у точності. В роботі [8] пропонується використовувати покоординатну декомпозицію області, що узгоджена із оператором задачі. Такий підхід до поділу області визначення задачі дозволяє розв'язувати підзадачі абсолютно незалежно одна від іншої. У праці [9] розглянуто

трирівневий паралельний алгоритм реалізації багатовимірної задачі, що базується на попередніх двох роботах.

Стаття присвячена питанню доцільності використання трирівневого паралельного алгоритму для моделей циркуляції атмосфери. Для цього алгоритм поєднано із чисельним методом [6] та застосовано для реалізації моделі макромасштабної циркуляції сухої атмосфери. Основна увага приділялася передусім не якості змодельованих полів метеовеличин, а підвищенню ефективності чисельної реалізації моделі.

Модель циркуляції атмосфери

Фізичною основою моделей атмосферної циркуляції є закони збереження імпульсу, маси та енергії. В залежності від просторового розташування та просторово-часових масштабів процесів, що відтворюються моделлю, також розглядають й інші фізичні закономірності. Їх прикладами є теплообмін внаслідок фазових переходів вологи, нерівномірність нагрівання земною поверхнею нижнього шару атмосфери, поглинання хмарами променистої енергії різних діапазонів та інше.

Розглянемо модель, яка описує процеси та явища із характерними розмірами порядку

сотень-тисяч кілометрів. Для цих масштабів цілком прийнятним є припущення про нестисливість повітря. Також обмежимося шаром сухої атмосфери, де впливом земної поверхні можна знехтувати (вільна атмосфера). Фізичними законами, на яких базується така модель, є:

– збереження кількості руху

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - 2\Omega \times V + F_g + \frac{1}{\rho} F_f, \quad (1)$$

– збереження маси (нестисливість середовища)

$$\text{div} V = 0, \quad (2)$$

– збереження теплової енергії

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta}{c_v \rho}, \quad (3)$$

– рівняння стану повітря

$$p = \rho R_c T, \quad (4)$$

де V – вектор швидкості у неінерційній системі координат, ρ – густина повітря, p – атмосферний тиск, Ω – вектор кутової швидкості обертання Землі, F_g – сила тяжіння, F_f – щільність сили тертя, T – абсолютна температура, δ – приплив тепла до одиниці об'єму повітря, c_v – питома теплоємність сухого повітря за сталого об'єму, R_c – питома газова стала сухого повітря.

У моделях, що описують макромасштабну циркуляцію, використовують сферичну систему координат [1]. Рівняння (1) – (3) після деяких спрощень матимуть вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \left(2\omega + \frac{u}{a \cos \varphi} \right) + \frac{1}{\rho} F_\lambda, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - u \left(2\omega + \frac{u}{a \cos \varphi} \right) \sin \varphi - \frac{wv}{a} + \frac{1}{\rho} F_\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\delta}{c_v \rho}, \quad (8)$$

де λ – довгота, φ – широта, z – висота над рівнем моря, $V = (u, v, w)$, a – радіус Землі, ω – швидкість добового обертання Землі, $F_f = (F_\lambda, F_\varphi, F_z)$.

За умов вільної атмосфери у середовищі виникає лише внутрішнє тертя F_f , передусім завдяки турбулентності. Для задач метеорології типовим є подання компонент F_λ та F_φ через похідні другого порядку [1, 2, 4]:

$$F_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (9)$$

$$F_\varphi = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (10)$$

де $\mu_{\lambda\varphi}$ та μ_z – коефіцієнти горизонтального та вертикального турбулентних обмінів.

Як відомо [2, 4], теплові процеси в атмосфері переважно є неадіабатичними. Головною причиною цього також є турбулентність. Тому в (8) вважатимемо, що δ має лише турбулентну складову теплообміну

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (11)$$

Для параметризації коефіцієнтів турбулентності в (9) – (11) оберемо найпростіші моделі, що ґрунтуються на емпіричних закономірностях. Так, за формулою Смагоринського [2, 10] маємо

$$\mu_{\lambda\varphi} = \sigma \left(k_0 + 0.08a (\Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi + \Delta \varphi^2) \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \right),$$

а за гіпотезою Прандтля [3, 4] –

$$\mu_z = (b\chi)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2},$$

де σ – параметр, що варіює рівень дисипації у моделі, k_0 – стала величина, $\Delta \lambda$, $\Delta \varphi$ – параметри скінченно-різницевої сітки, b – висота граничного шару атмосфери, χ – стала Кармана,

$$D_1 = \frac{\partial u}{\partial (\lambda \cos \varphi)} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \tan \varphi,$$

$$D_2 = \frac{\partial v}{\partial (\lambda \cos \varphi)} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \tan \varphi.$$

Постановка додаткових умов для моделі здійснювалася шляхом інтерполювання архівних даних об'єктивного аналізу спостережень за

станом атмосфери. Значення тиску p для усієї області були складовою додаткових умов моделі. Просторова область визначення задачі відповідала наявним архівним даним та становила: $\lambda \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$, $z \in [8000; 18000]$.

Чисельна реалізація моделі

Програмним інструментом реалізації моделі (4) – (8) обрано засоби OpenMP. Такий вибір пояснюється тим фактом, що рівняння моделі мають досить тісні інформаційні зв'язки. Відтак, процес їхнього розв'язання супроводжується інтенсивним обміном даними. У разі, якщо передача даних є повільною ланкою програми, то очікуваної ефективності від розпаралелювання моделі не буде. Більше того, матиме місце зворотній ефект: збільшення кількості обчислювачів призведе до зростання загального часу розв'язання задачі. Така ситуація простежується, наприклад, у разі використання інтерфейсу MPI до моделі (4) – (8). В той же час, концепція спільної пам'яті та можливість доступу до локальних даних інших потоків роблять OpenMP доцільним засобом реалізації алгоритму, складові ланки якого мають тісні інформаційні зв'язки.

Проте використання спільних ресурсів зумовлює появу принципової проблеми: одночасне звертання кількох потоків до однієї ділянки пам'яті призводить до їхнього взаємного блокування та, фактично, до послідовного доступу. Нажаль, цілком уникнути цю ситуацію в алгоритмі не вдалося. Вона має місце під час обміну інформацією між потоками через спільні масиви даних (для горизонтальних складових вітру та температури). Саме ця ділянка програми має послідовне виконання. Частковим вирішенням проблеми одночасного доступу до спільного ресурсу стало зберігання чи дублювання частин спільних даних у локальній пам'яті потоків. Наприклад, таким чином за підобластями розподілені масиви даних значень тиску.

Паралельна реалізація моделі (4) – (8) здійснена згідно трирівневого алгоритму [9], який передбачає розпаралелювання за рівняннями, просторовими напрямками та підобластями. До розрахункової області застосовано покоординатні декомпозиції [8]: розбиття вздовж λ для підзадач за напрямками φ та z ; розбиття вздовж φ для підзадач за напрямком λ . Тому у програмі використано два формати подання даних у масивах: основний

$[\lambda][\varphi][z]$ та допоміжний $[\varphi][z][\lambda]$. Із рівняння (5) та (6) визначалися горизонтальні складові руху u та v , із (7) – вертикальна складова w , із (8) – температура T , а із (4) – густина ρ .

Обчислювальний цикл програми, що реалізує головні розрахунки, поділявся на п'ять частин. Першою частиною є запис даних зі спільних масивів до локальних. Друга – підготовка до m -циклу МАУМ: постановка крайових умов, обчислення коефіцієнтів рівнянь та вертикальної складової швидкості тощо. Третя частина – це m -цикл МАУМ. Четверта – усереднення результатів, що відповідають різним напрямкам, зі зберіганням крайових умов. У п'ятій частині результати записуються до спільних масивів. Інформація щодо відповідності між частинами циклу та рівнями розпаралелювання наведена в табл. 1.

Таблиця 1.

Розпаралелювання головного циклу.

частина циклу	за рівнян.	за напрямк.	за підобласт.
1	–	–	–
2	+	+	+
3	+	+	+
4	+	–	+
5	–	–	–

Обчислення задачі здійснено на супер ЕОМ, що складалась із 24 процесорів Dual-Core Intel I.6 ГГц із архітектурою IA64 та системою доступу до пам'яті NUMalink 4. Проведено серію чисельних експериментів, що мали такі значення параметрів алгоритму: $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 0.5^\circ$, $\Delta z = 1000$ м; модельний час розрахунку 24 години, часовий крок $\tau = 10$ сек, $\sigma = 25$. Експерименти відрізнялися двома параметрами: кількістю підобластей у декомпозиціях z та параметром m . За їхніми результатами побудовано графік залежності загальних часових витрат від цих параметрів (рис. 1).

Як і очікувалось, розраховані поля вітру та температури задовільно співпадали із відповідними архівними даними лише на якісному рівні. Головною причиною цього є невідповідність рівнів адекватності моделі та додаткових даних. Модель описує лише основні гідротермодинамічні процеси за умови нестисливості середовища, тому вона є менш адекватною, ніж дані об'єктивного аналізу спостережень за станом атмосфери. Ця неузгодженість призвела до того, що не всі

процеси та явища, інформація про які містилася у додаткових даних, відтворювалися моделлю на потрібному рівні. А деякі із них взагалі не описувалися рівняннями моделі. Отже, результати цього моделювання в принципі не можна порівнювати кількісно із даними об'єктивного аналізу спостережень.

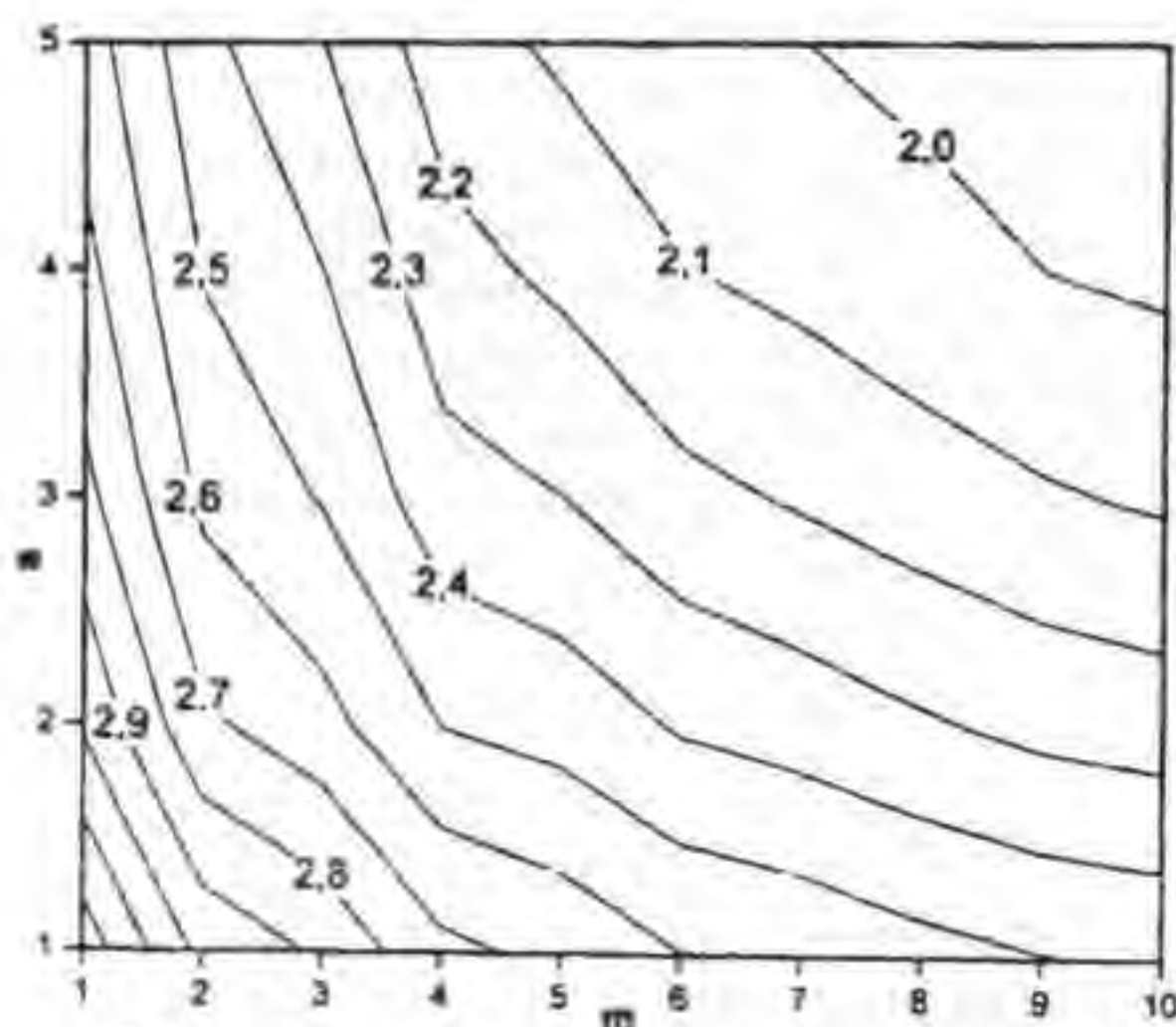


Рис. 1. Залежність часу розв'язання задачі ($\lg \theta$) від параметра МАУМ та кількості підобластей у декомпозиціях.

Аналіз результатів експериментів (рис. 1) засвідчує досить чітке зменшення часу обчислень як при збільшенні кількості підобластей у декомпозиціях, так і при зростанні значень параметра МАУМ. Функція, що описує залежність часу обчислень від одного із параметрів за фіксованого другого, є гіперболою вигляду $\theta(s) = c_1 + c_2 s^{-1}$. Цей результат цілком підтверджує теоретичну оцінку із [9].

Висновки

Застосування алгоритму трирівневого розпаралелювання до моделі циркуляції атмосфери дає змогу за певних поступок у точності досягти вагомого зменшення часу обчислень. Але це є можливим за умови використання ЕОМ зі спільною пам'яттю та можливістю доступу до локальної пам'яті інших потоків. Хоча обрана математична модель не є достатньо адекватною із фізичної точки зору, проте щільність її внутрішніх інформаційних зв'язків цілком відповідає повноцінним моделям циркуляції атмосфери. Таким чином, можна вважати, що практично доведена доцільність застосування трирівневого паралельного алгоритму для реалізації моделей циркуляції атмосфери.

Список використаних джерел

1. Белов П.Н. Практические методы численного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1967. – 336 с.
2. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. и др. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 320 с.
3. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 352 с.
4. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделирование природных и техногенных процессов в атмосфере. – К.: Наукова Думка, 2006. – 542 с.
5. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю., Черныш Р.И. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №1. – С. 100 – 107.
6. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. – С. 64 – 74.
7. Толстых М.А., Фролов А.В. Некоторые современные проблемы численного прогноза погоды. // Физика атмосферы и океана. – 2005. – №3. – С. 315 – 327.
8. Черныш Р.И. Покоординатна декомпозиція області для еволюційних задач математичної фізики. // Вісник КНУ, серія ф.-м. н. – 2008. – №4. – С. 191 – 194.
9. Черныш Р.И., Турчак Ю.М., Іваненко П.А. Побудова паралельного алгоритму чисельного розв'язання багатовимірної задачі моделювання навколишнього середовища. // Проблеми програмування – 2009. – №1. – С. 85 – 91.
10. Smagorinski J. General circulation experiment with the primitive equations: Part I. The basic experiment. // Monthly Weather Review. – 1963. – № 1. – P. 99 – 164.

Надійшла до редколегії 14.05.09

УДК 519.21

Шарапов М.М., к.ф.-м. н.,
Воловода О.В., студент, Найдьон Ю.В., студент,
Морозов К.В., студент.

Ймовірносний метод розв'язку одної перколяційної задачі

В статті розглядається застосування методів теорії ймовірностей до розв'язку одної перколяційної задачі просочування. Запропонований алгоритм дозволяє суттєво скоротити час пошуку відповіді.

Ключові слова: перколяція, просочування, алгоритм, числа Фібоначчі, числа Каталана.

*E-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua,

Статтю представив доктор тех. наук Гаращенко Ф.Г.

Suppose we have $mn+2$ points (states) $L_0, \dots, L_{mn+1}$ and some of them are directly connected. Matrix $c_{ij} = C(i, j)$, $i, j = \overline{0, mn+1}$, describes which points are connected directly: $C(i, j) = 1$ if points L_i and L_j are connected directly and $C(i, j) = 0$ otherwise.

M.M. Sharapov* Candd.Sci.(Phys.-Math.),
students: Volovoda O.V., Naidyon Y.V.,
Morozov K.V.

Probabilistic approach of one percolation problem

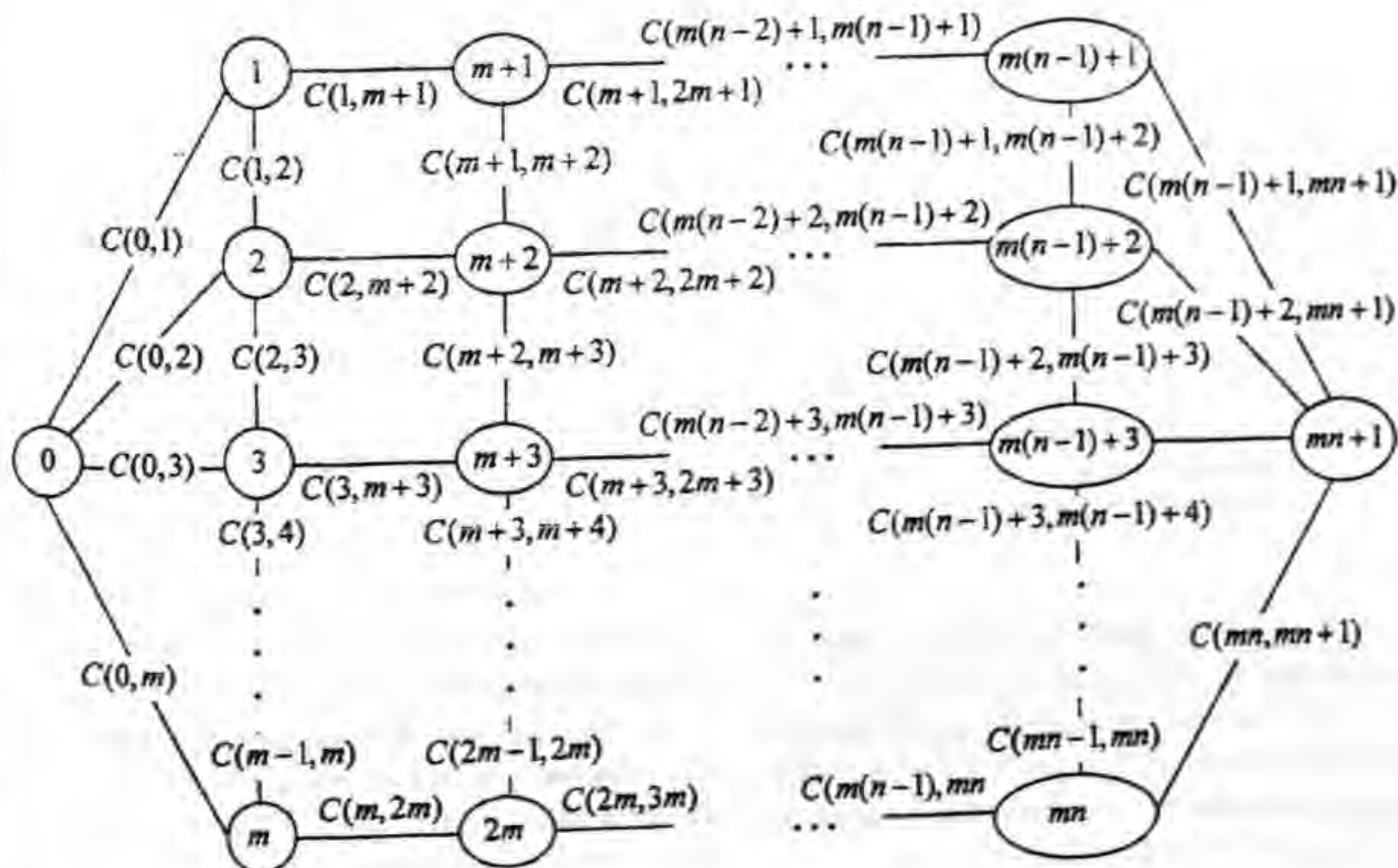
Here we consider a probabilistic approach on one percolation problem. The introduced algorithm makes it easier to find the desired solution.

Key Words: percolation, penetration, algorithm, Fibonacci numbers, Catalan numbers.

Let

$$\begin{aligned} C(0, i) &= C(m(n-1) + i, mn+1) = 1, \quad i = \overline{1, m}; \\ C(m(j-2) + i, m(j-1) + i) &= 1, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{2, n}; \\ C(m(j-1) + i, m(j-1) + i + 1) &= 1, \\ i &= \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

while all other $C(i, j) = 0$.



Then every connection can be destroyed with probability 0.5. The question is what is the chance for L_0 and L_{m+1} to be connected (indirectly) afterwards. The problem is to find easier solutions than brute-force methods (these methods make us consider 2^{2m+m-n} variants).

The idea is to bring in a step-by-step solution (just like for $m=2$) at complete group of events (CGE) fixed each time at a certain level $S_i = \{L_{im+1}, \dots, L_{m(i+1)}\}$. The events of CGE should show which points of level S_i are connected with L_0 (indirectly) and which are connected (indirectly) with one another. This will give a recurrent solution like when $m=2$ but with much more big CGE.

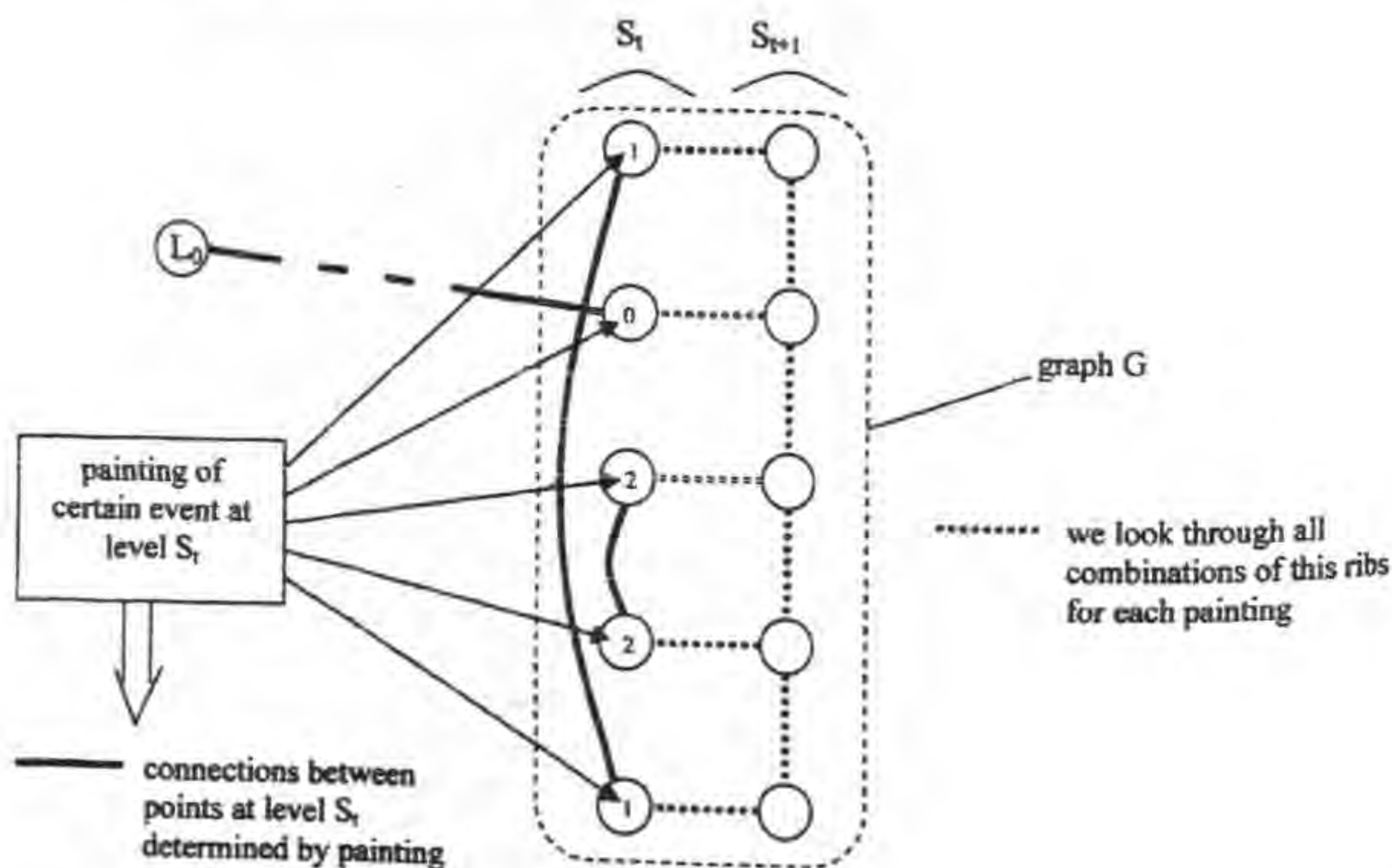
Let's describe a method of building a transitions probabilities matrix $P = \|p_{ij}\|$ for our CGE. We'll paint each level S_i next way: let's

$$A = \|a_i\|_{i=0, m-1} = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})^T,$$

where $a_i \in \{0, \dots, m-1\}$ is a colour of the i^{th} peak. $a_i = a_j$ (two peaks are painted the same colour) if and only if peaks i, j are connected. If $a_i = 0$ then the i^{th} peak is connected with L_0 . This painting describes certain event at level S_i .

1. At first P is 1×1 -matrix and. Each i^{th} row and column brings into accord with some event at level S_i . First row and column brings into accord with event described by zero filled painting.

2. For each k^{th} event at level S_i we have to find transitions probabilities for all reachable events at level S_{i+1} , that is we filling out the k^{th} row of matrix P doing it next way:



a. We build the graph G_0 with $2m$ peaks (m peaks of level S_i and m peaks of level S_{i+1}).

b. Then we look through the combinations of intact ribs between S_i, S_{i+1} and at level S_{i+1} itself. For each combination of ribs we build up graph G by adding new elements to graph G_0 .

i. First we suppose colour $C=1$ for the following painting at level S_i .

ii. Then we look through unpainted peaks of S_{i+1} . Suppose s to be such a peak and $T \subset S_{i+1}$ is a set of reachable from s peaks. If one of 0-colored peaks from S_i is reachable then we 0-paint all

$T \cup \{s\}$ peaks else we C-paint them changing the current colour to $C+1$.

iii. So we've got a new painting of level S_{i+1} . If 0-colour is absent then we throw away such a painting else we got m -peak (event) at level S_{i+1} . If this is for the first time then we broad matrix P by a new column (and row). Enlarge p_{km} by 1.

3. Divide each p_{ij} by 2^{2m-1} .

So P is nothing but desired transitions probabilities matrix for our CGE.

For example, for $m=2$ the transitions probabilities matrix for our CGE is

$$P = P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

The matrix is not stochastic (that is our CGE is quasi-CGE) for we leave out (omit) degenerate events from CGE when not a single point of level S_i is connected with L_0 (indirectly). The first row (column) corresponds to attainability of both points of level S_i from L_0 while second and third rows corresponds to attainability of only one point of level S_i from L_0 . We omit the occasion of unattainability of both points of level S_i . So we've got a 3×3 matrix for $m=2$. Now it is easy to solve the problem for $m=2$ and any natural n : the answer can be written the next way

$$\sum (1 \ 0 \ 0) P_{(2)}^n.$$

It is interesting to note that this answer has another (easier) form

$$\frac{F_{2(n+2)}}{4^{n+1}},$$

where F_i are Fibonacci numbers, $F_1 = F_2 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$.

For $m=3$ we'll get a 9×9 -matrix

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & 0 & \frac{1}{32} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{5}{32} & \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Today we don't have the easier way of answer but

$$\sum e_9 P_{(3)}^n = \sum (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) P_{(3)}^n.$$

For $m=4$ $P = P_4$ is a 28×28 -matrix and so on.

In general one can easily estimate the dimension of matrix P : it is less than K_n where $K_{n,1} = 1$ ($n > 0$), $K_{n,m} = 0$ ($n \leq 0$ or $n < m$),

$$K_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i K_{n-i,m-1}, \quad K_n = \sum_{i=1}^n K_{n,i}.$$

Let us show the way to obtain the exact dimension d of matrix P . Obviously it must coincide with amount of all non-degenerate levels S_i . In other words it must coincide with all corresponding (non-degenerate) stated above paintings $A = \|a_i\|_{i=0,m-1} = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})^T$. Note, that if for some $s < t$

$$a_s a_{s+1} \dots a_t \neq 0$$

then non of these peaks is connected with L_0 , i.e. $\forall i = \overline{s, t} \ a_i \neq 0$ and non of these peaks is coloured as any other a_j ($j < s, j > t$). So we can divide the amount of paintings $A = \|a_i\|_{i=0,m-1}$ into groups according to amount v ($v = \overline{1, m}$) of 0-painted peaks and amount w ($w = \overline{1, C_m^v}$) of their positions.

Suppose $Z(v, w)$ is a number of paintings in a group with v 0-painted peaks and w^{th} way of distributing these 0-painted peaks at m possible positions. Each (v, w) determines groups of (non-0)-painted peaks. Suppose there are $N(v, w)$ groups of (non-0)-painted peaks (in a case of (v, w) -painting) and each j^{th} group has b_j elements.

To make it easier to understand our symbols let's deal with a simple example. If $m = 5$ then one of the paintings could be $(x, 0, y, z, 0)$, where $xyz \neq 0$, i.e. x, y, z are some non-0 colours. This painting has $v = 2$ 0-painted peaks (the 2nd and the 5th) and corresponds to some way (w^*) of their distribution at $m = 5$ places. Here we have $N(2, w^*) = 2$ groups of (non-0)-painted peaks, the first group is x while the second group is (y, z) , i.e. first group has $b_1 = 1$ element while the second group has $b_2 = 2$ elements.

So,

$$d = \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^{C_m^v} Z(v, w)$$

with

$$Z(v, w) = \begin{cases} 1, & N(v, w) = 0 \\ \prod_{j=1}^{N(v, w)} f(b_j) \end{cases}$$

where $f(k)$ is a number of different possible paintings of k successive (non-0)-painted peaks $a_g, a_{g+1}, \dots, a_{g+k-1}$. At last we have to obtain $f(k)$ for any $k = 1, 2, \dots$. Here we shall use one interesting trick (i.e. a good idea)! If a_{g+h} is the nearest same-painted (as a_g) peak in $a_g, a_{g+1}, \dots, a_{g+k-1}$, i.e. h is the smallest number when $a_g = a_{g+h}$ then there are $f(h-1)$ ways to paint peaks $a_{g+1}, \dots, a_{g+h-1}$ and $f(k-h)$ ways to paint peaks $a_{g+h}, \dots, a_{g+k-1}$. So,

$$f(k) = \begin{cases} 1, & k \leq 1 \\ f(k-1) + \sum_{h=1}^{k-1} f(h-1)f(k-h), & k > 1 \end{cases}$$

and $f(k)$, $k \geq 1$, are nothing more but Catalan numbers, i.e.

$$f(k) = \frac{C_{2k}^k}{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Finally,

$$d = \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^{C_m^v} \prod_{j=1}^{N(v, w)} f(b_j), \quad f(k) = \frac{C_{2k}^k}{k+1} \quad (k \geq 1).$$

Now one can see the rate of d increasing:

m	1	2	3	4	5	6	7	8
d	1	3	9	28	90	297	1001	3432

One can easily show ([3], p.181) that

$$d = f(m+1) - f(m).$$

or

$$d = \frac{3 \cdot m \cdot f(m)}{m+2} = \frac{3 \cdot m \cdot C_{2m}^m}{(m+1)(m+2)}.$$

References

1. Harry Kesten, What is Percolation?, *Notices of the American Mathematical Society*, 53 (5), May 2006. pp. 572-573.
2. Austin David, Percolation: Slipping through the Cracks, *American Mathematical Society*, July 2008.
3. C.H. Pah, An application of Catalan Numbers on Cayley tree of order 2: single polygon counting, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2) 31 (2) (2008), 175-183.

Надійшла до редколегії 10.03.2009

РАДІОФІЗИКА

ALLI-DOIT A 3

УДК 621.385.833

Безпалій Є.В., студент,
Коваль І.П., канд.ф.-м.н., доцент,
Лень Ю.А., провідний інженер,
Находкін М.Г., д.ф.-м.н., проф., академік НАН
України.

Стимульоване оксидування поверхні Si(001) в присутності субмоношарового покриття хрому

В даній роботі проведено дослідження взаємодії молекулярного кисню з поверхнею кремнію вкритою субмоношаровим покриттям Cr в діапазоні експозицій O_2 від 1 до 500Л при кімнатній температурі до та після відпалу при $450^\circ C$. Отримано залежності коефіцієнта прилипання молекулярного кисню від експозиції для субмоношарового покриття на кремнії та системи Cr/Si(001) відпаленої при $450^\circ C$.

Ключові слова: кремній, хром, окислення.

*E-mail: len@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Анісімов І.О.

Вступ

Мікроскопічні механізми взаємодії молекулярного кисню з поверхнею монокристалічного кремнію та процеси утворення термічних оксидів досить добре досліджено в зв'язку із застосуванням останніх в класичній інтегральній електроніці.

Відомо, що невеликі домішки чужорідних атомів можуть суттєво впливати на швидкість оксидування на поверхні кремнію, значно підвищуючи її (випадок лужних, лужно- та рідкоземельних адсорбатів [1-2]), або, навпаки, гальмуючи (As, Sb, Bi [3-5]).

Менше відомо про вплив домішок перехідних металів, хоча сполуки останніх вже використовуються в технології в складі силіцидів, підзатворних оксидів, буферних та перехідних шарів металізації. Ще одним застосуванням сполук перехідних металів в сучасній кремнієвій технології може стати застосування напівпровідникових силіцидів хрому в якості сенсорів ІЧ-випромінювання, омичних контактів та бар'єрів Шотткі [6]. Раніше в роботах [7-8] було показано, що наявність субмоношарового покриття хрому на поверхні кремнію може стимулювати зростання нанометрових плівок оксиду кремнію вже при

Bespaliy E.V., student, Koval I.F., Ph.D., docent, Len Yu.A., engineer, Nakhodkin M.G., Dr. Sci., Professor, Academician of NAS of Ukraine.

Stimulated oxidation of Si(001) surface with the pre-adsorbed submonolayer coverage of chromium

In this article the investigation of the molecular oxygen interaction with Si(001) surface covered by the pre-adsorbed submonolayer of chromium at exposures from 1 to 500L (Langmuir) at room temperature before and after annealing at $450^\circ C$ was studied. The dependence of sticking coefficient for the molecular oxygen versus exposition for submonolayer coverage chromium on the Si(001) surface and system Cr/Si(001)+ $450^\circ C+O_2$ was obtained.

Key words: silicon, chromium, oxidation.

температурах трохи вище кімнатної, або навіть при кімнатній температурі.

Нагадаємо що процес окислення складається з таких елементарних процесів, як: адсорбція молекули кисню, її дисоціація, дифузія атомів кисню, що утворилися на поверхні внаслідок дисоціації в глибину та утворення зв'язків між атомами кисню та кремнію. В разі наявності на поверхні субмоношарового покриття хрому, перші три процеси, які контролюють швидкість утворення оксиду будуть відрізнятися від таких, що відбуваються на чистій поверхні Si(001).

В попередніх дослідженнях нами [8] було зафіксовано факт появи оксидів кремнію та хрому в системі 1 МШ Cr/Si(001) при витримках в молекулярному кисні на багато порядків менших, ніж на чистих поверхнях Si(001) та на поверхнях товстих плівок хрому. В результаті, було висунуто гіпотезу, згідно якої хром виступає в ролі прискорювача процесу окислення кремнію.

Метою даної роботи було продовження досліджень з метою кількісного визначення коефіцієнтів прилипання для молекулярного кисню в діапазоні експозицій O_2 від 1 до 500Л ($1Л = 10^{-6}$ мм рт.ст.·с) при кімнатній температурі, а також порівняння отриманих характеристик з відповідними значеннями, отриманими на

відпаленій при типових температурах силіцидоутворення поверхні кремнію вкритою субмоношаровими покриттями Cr.

Методика досліджень

Умови експерименту були аналогічними описаним в [8].

Хром наносився на поверхню Si(001) методом термічного наплення із прямонакального джерела. Аналіз складу поверхні зразків та контроль кількості напленого хрому здійснювались методом електронної Оже-спектроскопії.

Для запобігання появи біля зразка неконтрольованих потоків іонів та збуджених атомів кисню при проведенні експозицій в кисні вимикались нитки розжарювання іонізаційного манометра, електронної гармати, мас-спектрометра тощо.

Результати і їх обговорення

В даній роботі було проведено порівняльне дослідження взаємодії молекулярного кисню з поверхнею кремнію вкритою субмоношаровим покриттям Cr, та з відпаленою при 450°C системою Cr/Si(001) в діапазоні експозицій O₂ від 1 до 500Л при кімнатній температурі.

Перш за все була визначена температура, при якій починається помітна взаємодифузія атомів хрому та кремнію. На рис.1 наведено залежність відношення інтенсивностей оже-ліній хрому та кремнію нормованого на відповідне значення при кімнатній температурі $\frac{I_{CrLMM}/I_{SiLVV}}{(I_{CrLMM}/I_{SiLVV})_{KT}}$ від температури відпалу.

З цієї залежності можна зробити висновок, що помітна взаємодифузія на границі розділу Cr/Si(001), починається при температурах відпалу більших за 400°C.

Спираючись на отриманий результат, ми вирішили провести порівняльне дослідження кінетики окислення в молекулярному кисні поверхні кремнію свіженанпленого субмоношарового покриття хрому, такого ж покриття відпаленого при 450°C та чистої поверхні Si(001). Температура відпалу була вибрана типовою для початку формування силіцидоподібних фаз на кремнії.

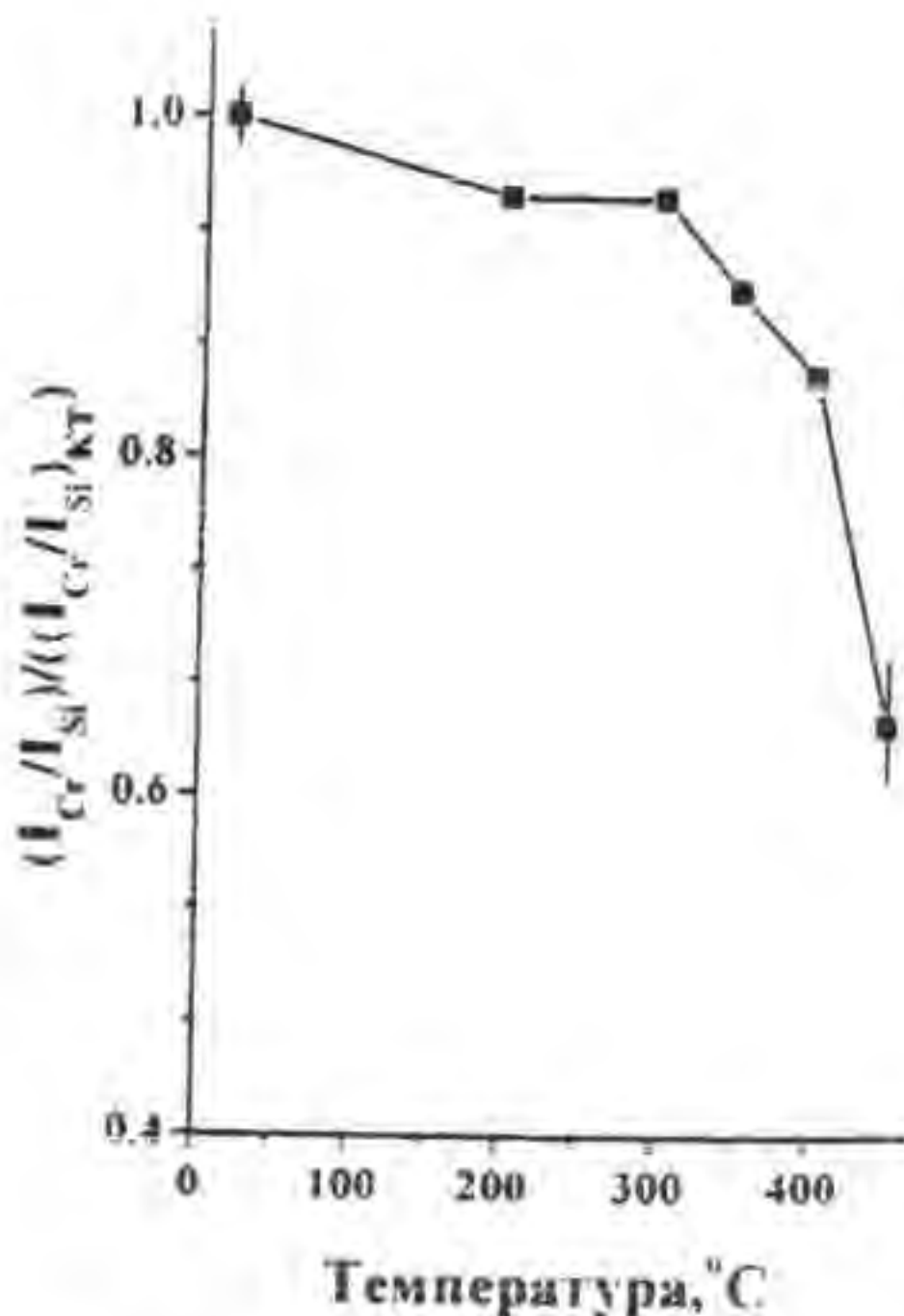


Рис. 1 Залежність нормованого відношення інтенсивностей оже-ліній хрому та кремнію на відповідне значення при кімнатній температурі $(I_{CrLMM}/I_{SiLVV})/(I_{CrLMM}/I_{SiLVV})_{KT}$ від температури відпалу.

Залежність відношення інтенсивностей оже-ліній кисню та кремнію (I_{OKLI}/I_{SiLVV}) від експозиції в молекулярному кисні субмоношарового покриття хрому на кремнії, відпаленої при 450°C поверхні Cr/Si(001), а також для чистої поверхні Si(001) наведено на рис. 2. З рисунка видно, що накопичення кисню на поверхні кремнію, вкритою субмоношаровим покриттям хрому та відпаленої при 450°C відбувається набагато швидше порівняно з чистою поверхнею кремнію Si(001).

Найбільш хімічно активною в даному випадку є не відпалена поверхня кремнію, що вкрита субмоношаровим покриттям хрому. На відпаленій поверхні Cr/Si(001) кількість доступних для утворення проміжних оксидів атомів хрому менша, ніж на не відпаленій системі. В результаті, накопичення молекулярного кисню на відпаленій поверхні Cr/Si(001) йде менш інтенсивно в порівнянні з не відпаленою поверхнею кремнію, що вкрита субмоношаровим покриттям хрому. Звертає на себе увагу принципово різний характер залежностей на рис. 2б та рис. 2в. Якщо

залежність відношення інтенсивностей оже-ліній кисню та кремнію від експозиції на відпаленій при 450°C поверхні $\text{Cr/Si}(001)$ носить зростаючий характер на всьому досліджуваному проміжку експозицій, то аналогічна залежність для не відпаленої системи виходить на насичення вже при експозиції в 50Л, і майже не змінюється при подальшому збільшенні експозиції.

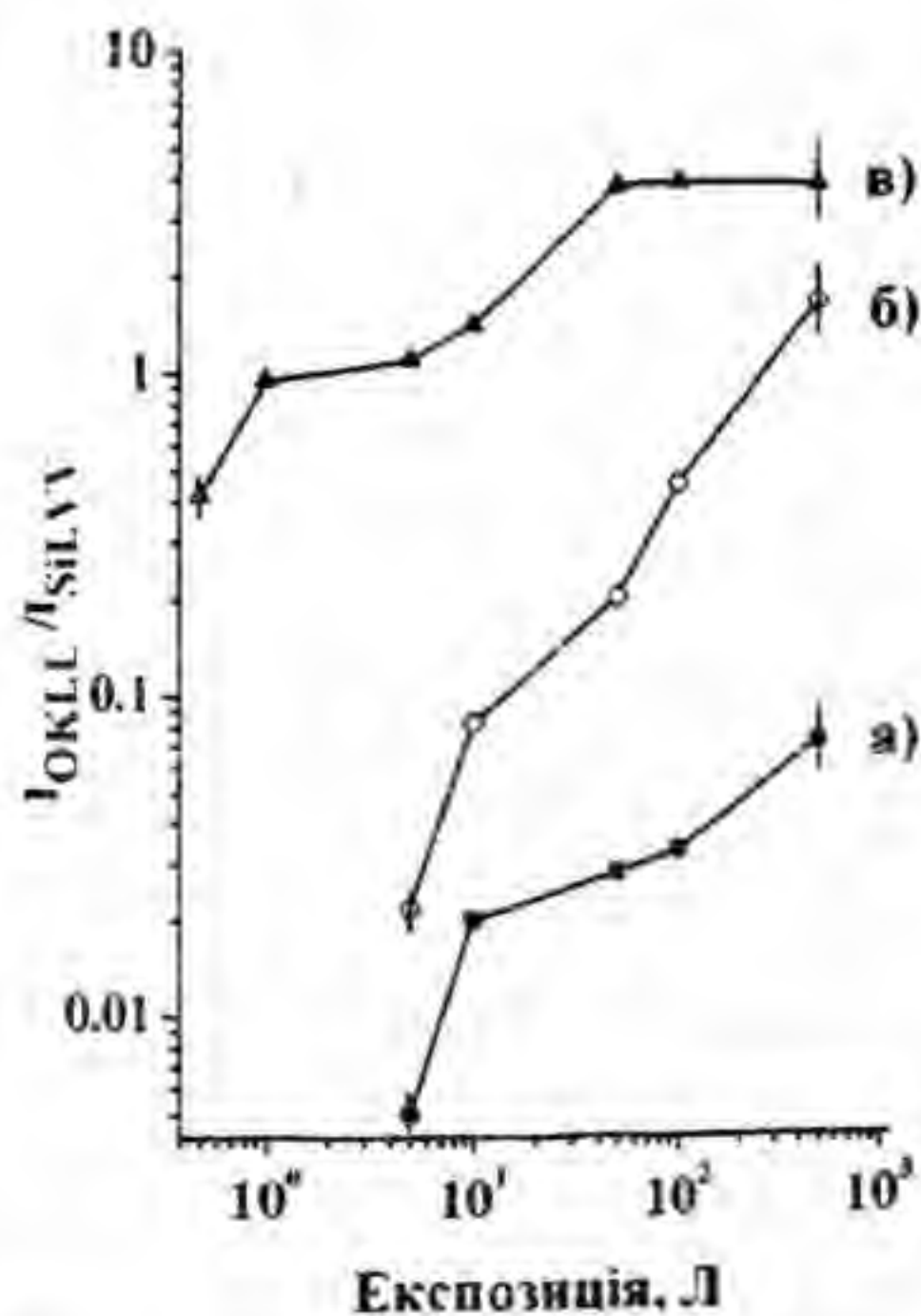


Рис. 2 Залежність відношення інтенсивностей оже-ліній кисню та кремнію ($I_{\text{OKLL}}/I_{\text{SiLVV}}$) від експозиції в молекулярному кисні в логарифмічному масштабі: а) - чиста поверхня $\text{Si}(001)$, б) - відпалена при 450°C поверхня $\text{Cr/Si}(001)$, в) - субмоношарове покриття хрому на кремнії.

Аналізуючи відношення кількості хемосорбованих атомів кисню, що знаходяться на поверхні, до загальної кількості атомів, що йдуть на поверхню під час експозиції, було отримано ряд значень коефіцієнта прилипання атомів кисню на поверхні $\text{Si}(001)$ в присутності субмоношарового покриття хрому, та для відпаленої при 450°C системи $\text{Cr/Si}(001)$. Так, рис. 3 ілюструє залежності коефіцієнта прилипання молекулярного кисню від експозиції в кисні на відпаленій при 450°C (рис. 3а) та не відпаленій (рис. 3б) поверхнях $\text{Cr/Si}(001)$.

Максимальне значення коефіцієнта прилипання для відпаленої системи $\text{Cr/Si}(001)$

спостерігається при експозиції в 10Л і становить ~ 0.04 , після чого спостерігається поступове спадання величини до значення ~ 0.007 при експозиції в 500Л.

Залежність для не відпаленої системи $\text{Cr/Si}(001)$ носить схожий характер, але необхідно звернути увагу на те, що максимальне значення коефіцієнта прилипання досягається вже при експозиції в 50Л та складає ~ 0.1 , що на порядок перевищує відповідну величину для відпаленої системи. Для порівняння зазначимо, що коефіцієнт прилипання молекулярного кисню на чистій поверхні $\text{Si}(001)$ згідно [9] складає близько 0.0001 при кімнатній температурі.

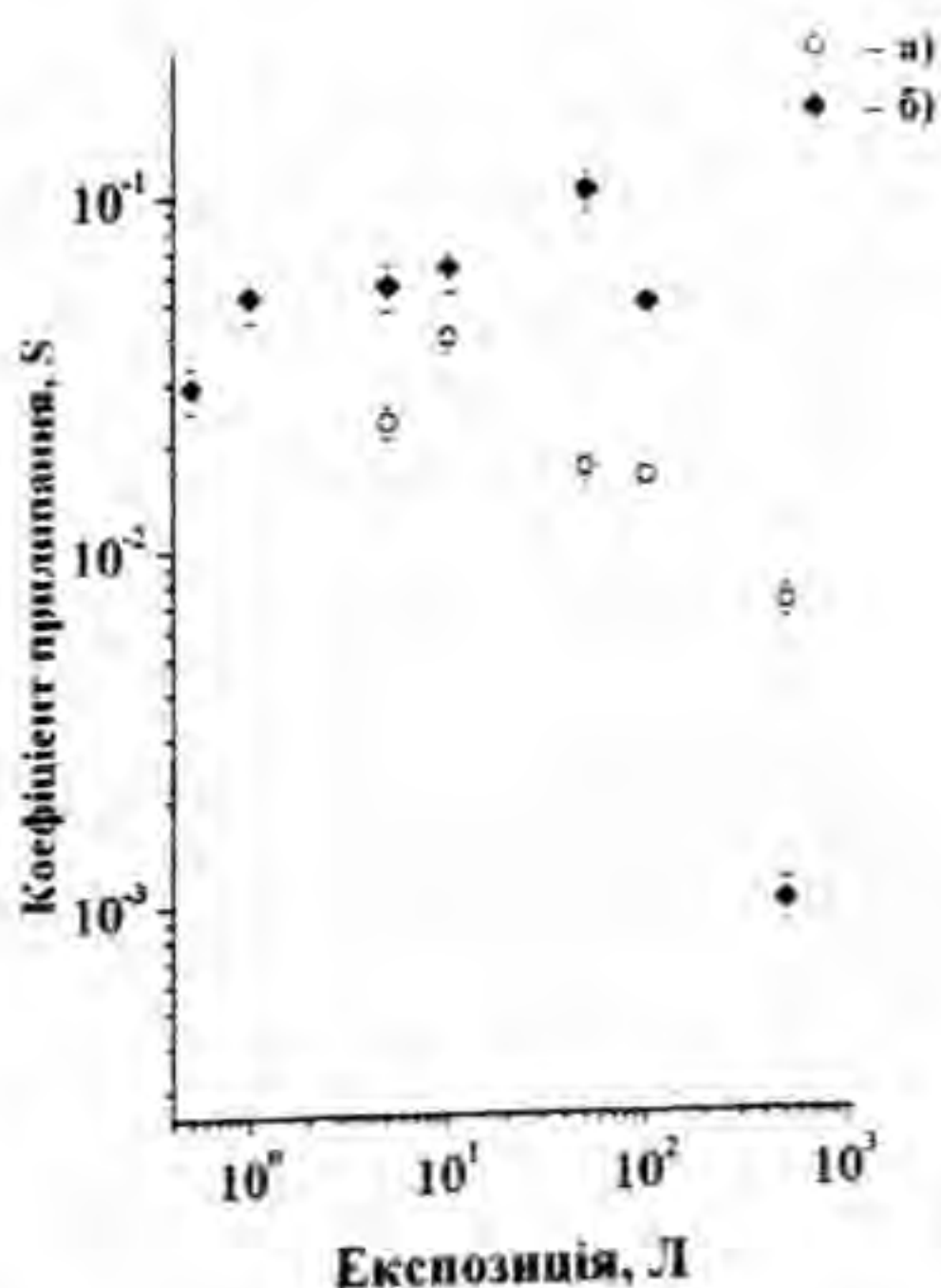


Рис. 3 Залежність коефіцієнта прилипання молекулярного кисню від експозиції в логарифмічному масштабі: а) - $\circ$ відпалена при 450°C поверхня $\text{Cr/Si}(001)$, б) - $\bullet$ не відпалена система $\text{Cr/Si}(001)$.

Таким чином, отримані результати підтверджують раніше висловлену в роботі [8] гіпотезу про те, що атоми хрому прискорюють процес окислення поверхні кремнію $\text{Si}(001)$.

Висновки

В роботі показано, що взаємодифузія на інтерфейсі системи $\text{Cr/Si}(001)$ починається при температурах більших за 400°C .

Вперше показано, що коефіцієнт прилипання для молекулярного кисню на поверхні Si(001) вкритій субмоношаровим покриттям хрому сягає ~ 0.1 , що на три порядки перевищує відповідну величину для чистої поверхні Si(001).

Встановлено, що після відпалу системи Cr/Si(001) при типових температурах силіцидоутворення, максимальне значення коефіцієнту прилипання зменшується з ~ 0.1 до ~ 0.04 .

Автори висловлюють подяку за фінансову підтримку МОН України, надану за грантом №М/175-2007.

Список використаних джерел

1. Yamada K., Nishigaki S. Oxidation of a Si(001) surface mediated by repetitive adsorption/desorption cycles of Cs: a metastable deexcitation spectroscopy study. – Appl. Surf. Sci. – 1996. – 99, № 1. – P. 21-26.
2. Niedfeldt K., Nordlander P., Carter E.A. Prediction of structure-dependent charge transfer rates for a Li atom outside a Si(001) surface. – Surf. Sci. – 2007. – 601, № 5. – P. L29-L33.
3. Rochet F., Poncey C., Dufour G., Roulet H., Rodrigues W.N., Sauvage M., Boulliard J.C., Sirotti F., Panaccione G. The As-terminated Si(001) surface and its oxidation in molecular oxygen: an Si 2p and As 3d core-level study with synchrotron radiation. – Surf. Sci. – 1995. – 326, № 3. – P. 229-242.
4. Koval I.F., Melnik P.V., Nakhodkin N.G., Pyatnitsky M.Yu., Afanasieva T.V. Interaction of O₂ with the Bi/Si(001) system: from passivation to promoted oxidation. – Surf. Sci. – 1997. – 384, №1-3. – P. L844-L847.
5. Коваль І.П., Лапоша В.В., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Адсорбція молекулярного кисню на поверхні Sb/Si(001). // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – № 4. – С. 307-314.
6. Filonenko O. Structural investigations of thin chromium disilicide films on silicon. – Chemnitz, 2004. – P. 1-112.
7. Shimizu H., Sato T. Influence of Cr on initial thermal oxidation and its kinetics on Si(001) surfaces // Surf. Interface Anal. – 2006 – 38. – P. 506-509.
8. Коваль І.П., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Початкові стадії взаємодії молекулярного кисню з поверхнею Si(001), вкритою субмоношаром хрому // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – №4 – С. 255-258.
9. Engstrom J.R., Engel Th. Atomic versus molecular reactivity at the gas-solid interface: The adsorption and reaction of atomic oxygen on the Si(100) surface // Physical Review B. – 1990. – №41. – P. 1038-1041.

Надійшла до редколегії 23.04.2009

УДК 535.512

Григорук В. І., д.ф.-м.н., Пільгун Ю. В., інженер,
Смирнов Є. М., к.ф.-м.н.

Відновлення профілю поверхні за відліками двох часткових похідних у двокоординатному лазерному скануючому диференційно-фазовому мікроскопі

Запропоновано метод відновлення профілю поверхні об'єкта за відліками двох часткових похідних профілю по перпендикулярних напрямках. Метод використовує суттєву надлишковість інформації про об'єкт, яка міститься у даних про обидві часткові похідні, для адекватного відновлення профілю поверхні за умови наявності шумів. Метод застосовано для відновлення профілю об'єктів за вимірами, отриманими за допомогою лазерного скануючого диференційно-фазового мікроскопа.

Ключові слова: диференційно-фазовий, відновлення, часткова похідна, обернена задача

*E-mail: ply@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В. В.

Диференційно-фазовий метод дослідження, що використовується в лазерному скануючому диференційно-фазовому мікроскопі, давно відомий у комп'ютерній мікроскопії і має певні переваги порівняно з іншими інтерферометричними методами дослідження поверхні об'єктів. Відмінними особливостями даного методу є висока чутливість до змін висоти профілю та гарна віброзахисність вимірювального пристрою за рахунок диференційного характеру вимірів [3].

Однак однією з найбільш суттєвих проблем, що обмежує практичне використання даного методу, є необхідність коректного відновлення профілю об'єкта за диференційними вимірами. Звичайно задачу вирішують в одновимірному випадку та для певного класу об'єктів [1, 2]. Складнощі відновлення полягають у тому, що в умовах наявності шумів безпосереднє інтегрування вимірюваних даних не приводить до отримання адекватних результатів, оскільки відбувається неминуче накопичення похибок. Дотепер актуальною є задача розробки методу, що дозволить коректно відновлювати профіль об'єктів за наявності шумів, пов'язаних із процесом вимірювання. Дана стаття присвячена

V.I. Grygoruk, D. Sci., Yu. V. Pilgun, engineer,
Ye.M. Smirnov, Ph.D.

Surface profile reconstruction from samples of two partial derivatives for two-coordinate laser scanning differential-phase microscope

A method of an object surface profile reconstruction from samples of two partial derivatives in perpendicular directions is proposed. The method uses substantial information redundancy for object, which is available in data for both partial derivatives. This allows obtaining adequate reconstruction of the surface profile in the presence of noise. The method is applied to reconstruction of object profile from data samples, obtained by laser scanning differential-phase microscope.

Keywords: differential-phase, reconstruction, partial derivative, inverse problem

розробці такого методу. Запропонований метод використовує певну надлишковість даних, що з'являється при вимірюванні не однієї, а двох часткових похідних профілю об'єкта по всій площині дослідження.

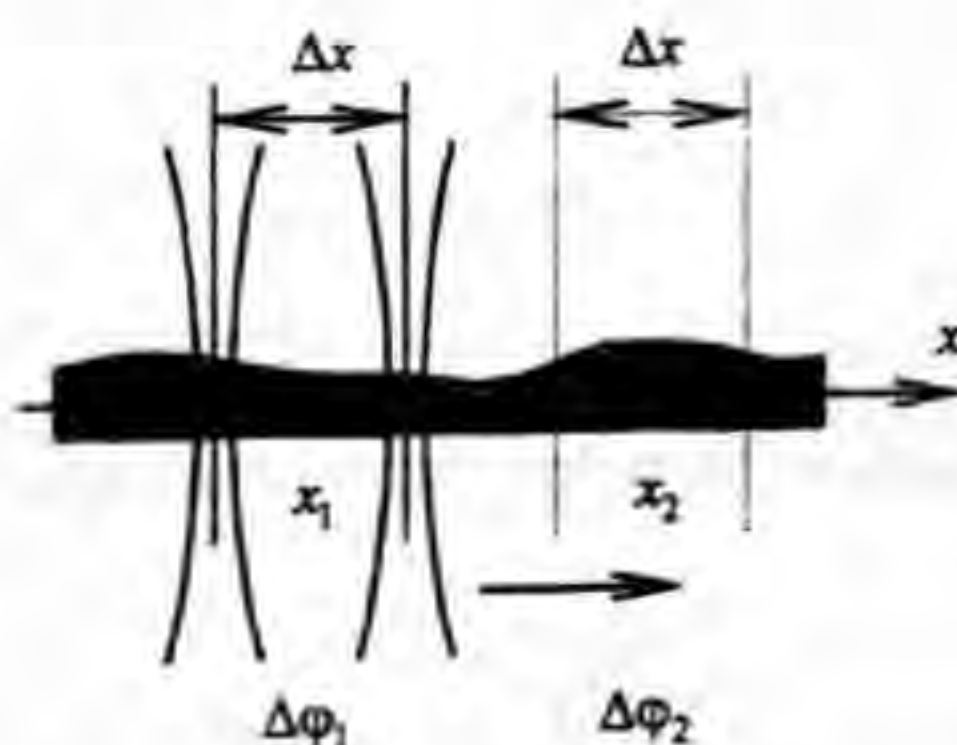


Рис. 1. Схема диференційно-фазових вимірів

Диференційно-фазовий метод

Диференційно-фазовий метод дозволяє вимірювати різницю оптичного ходу променів між двома рознесеними на невелику відстань зондуючими променями. Фактично вимірюється

різниця фаз оптичних променів $\Delta\varphi$, що присутня у фазі гетеродинного сигналу

$$I(t) = I_0 \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Delta\varphi). \quad (1)$$

Виконуючи виміри фази при розміщенні пари променів у різних точках x , на поверхні об'єкта, ми можемо побудувати розподіл часткової похідної профілю об'єкта у скінченно-різницевому вигляді (див. рис. 1).

Якщо ми робимо виміри у кожній точці двічі – спочатку з рознесенням променів Δx по одній координаті, а потім – з рознесенням Δy по перпендикулярному напрямку, то ми отримаємо два масиви даних d^x , d^y часткових похідних висоти профілю $h(x, y)$ по різних координатах x та y

$$\begin{aligned} d^x_{i,j} &= h([x_i + \Delta x], y_j) - h(x_i, y_j), \\ d^y_{i,j} &= h(x_i, [y_j + \Delta y]) - h(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Під висотою профілю h ми будемо розуміти величину набігу оптичного ходу променів. У різних модифікаціях диференційно-фазового методу ми можемо вимірювати або набіг за рахунок змін висоти відбиваючої поверхні, або набіг, пов'язаний із проходженням через шар із змінною товщиною чи змінним показником заломлення середовища у випадку дослідження прозорих об'єктів. Для кожного конкретного випадку відповідна характеристика – висота профілю, чи його оптична товщина – буде пов'язана із висотою h через певний масштабний коефіцієнт.

Пряме інтегрування даних

Масиви вимірів, отримані диференційно-фазовим методом фактично є чисельним наближенням до часткових похідних від висоти профілю:

$$\begin{aligned} d^x_{i,j} &\approx \left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_j}, \\ d^y_{i,j} &\approx \left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right|_{x_i, y_j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Висоту профілю ми можемо знайти прямим інтегруванням даних по рядках однієї похідної, використавши у якості початкових умов дані похідної по іншій координаті

$$h_{0,0} = 0, \quad (4)$$

$$h_{0,j+1} = h_{0,j} + d^y_{0,j}, \quad (5)$$

$$h_{i+1,j} = h_{i,j} + d^x_{i,j}. \quad (6)$$

Але виявляється, що метод безпосереднього інтегрування непридатний для практичного використання, оскільки зашумленість вимірів похідної призводить до накопичення похибок.

Значення висоти профілю, отримані таким способом, можуть сильно відрізнятися від рядка до рядка, особливо на кінцях діапазону

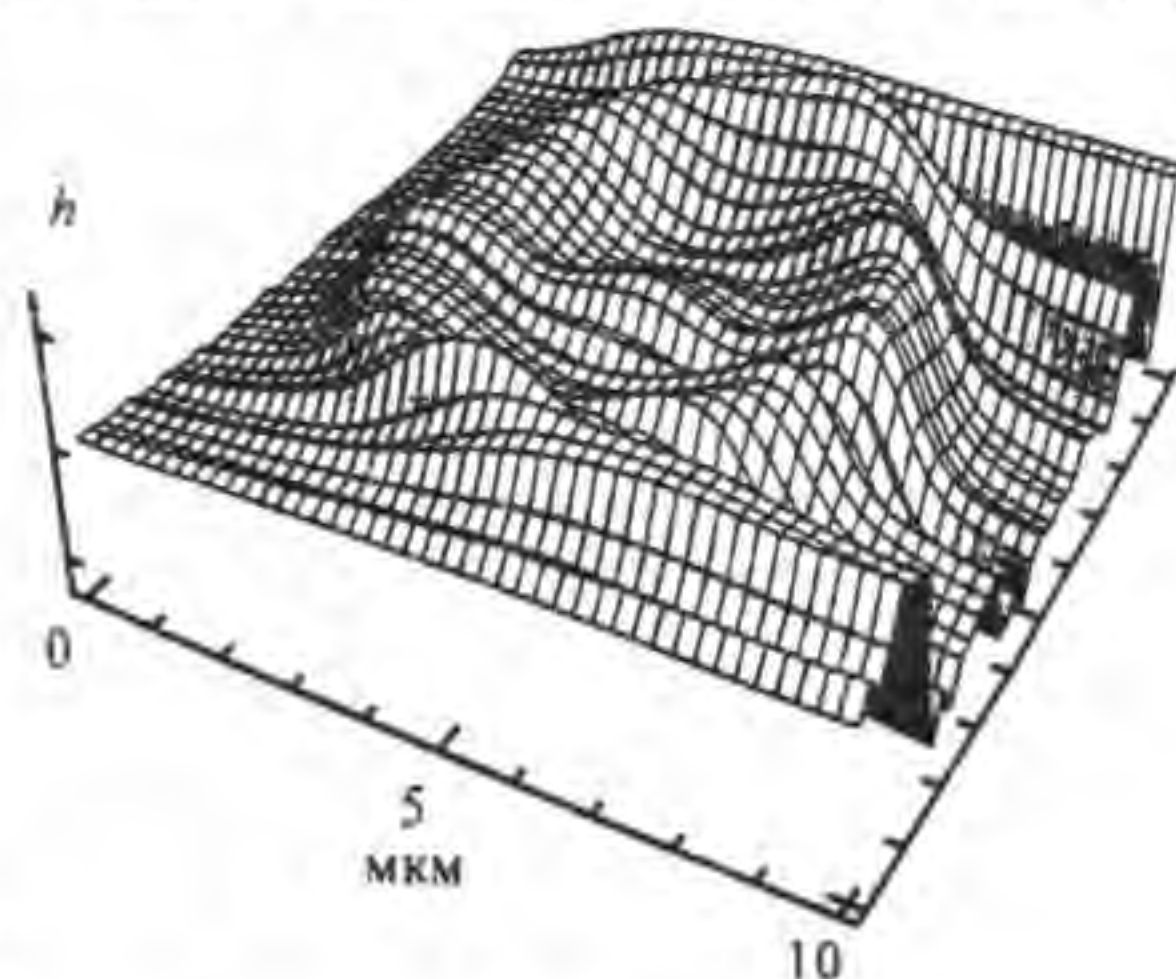


Рис. 2. Профіль, отриманий безпосереднім інтегруванням по рядкам

інтегрування (див. рис. 2). Крім того, більшість даних похідної по іншій координаті взагалі не використовується. Тому виникає потреба у алгоритмі, що буде знаходити розв'язок із одночасним урахуванням обох часткових похідних у повній мірі.

Запропонований метод відновлення профілю

Лінійні обернені задачі часто розв'язують за допомогою методу регуляризації рішення [4], суть якого зводиться до знаходження такого розв'язку задачі, який одночасно відповідає моделі задачі та, крім того, задовольняє певним додатковим регуляризуючим умовам. Регуляризуючі умови звичайно відображають деяку апіорну інформацію про поведінку розв'язку, що відсутня у моделі задачі. Такою може бути, для прикладу, вимога рівномірності та гладкості отриманого розв'язку. Потреба у регуляризації виникає тоді, коли при вимірах втрачається певна частина важливої інформації про досліджуваний об'єкт. Тоді без регуляризації рішення звичайно отримується некоректний розв'язок, оскільки безпосереднє обернення

задачі призводить до підсилення шумів вище рівня корисного сигналу.

У нашому випадку такою втраченою інформацією є значення низькочастотних складових у просторовому спектрі профілю об'єкта, оскільки процедура диференціювання підсилює високочастотні компоненти та пригнічує низькочастотні. Ми можемо бачити негативний вплив шумових компонент на прикладі прямого інтегрування даних. Для кожного окремого рядка процедура інтегрування (6) фактично мінімізує відхилення виміряних даних від моделі до абсолютного нуля. Але при цьому очевидна неадекватність загального відтворення профілю, оскільки між сусідніми рядками з'являється хибний зсув по висоті.

Математично розв'язання оберненої задача полягає у знаходженні такого розв'язку, що мінімізує вираз

$$\hat{f} = \arg \min \{ \|d - Af\|^2 + \lambda^2 \|L(f - f^e)\|^2 \}, \quad (7)$$

де d – виміряні дані, f – шуканий профіль, A – лінійний оператор, що характеризує процедуру отримання вимірів, L – певна функція, що визначає критерій регуляризації рішення, f^e – апріорне рішення, до якого прагне регуляризуючий член. Параметр регуляризації λ визначає співвідношення між прагненням методу знайти достовірне рішення виходячи з виміряних даних d та між рішенням, що найближче до ідеального розв'язку f^e у термінах функції віддаленості L . При відсутності регуляризації (поклавши $\lambda = 0$) ми можемо інтерпретувати цю задачу як знаходження такого профілю f , що при проведенні процедури вимірювання A буде давати найбільш близькі результати до значень виміряних даних d за критерієм мінімізації суми квадратів відхилень.

У випадку диференційно-фазового методу ми заздалегідь маємо надлишкові дані, тому можна не застосовувати додаткових умов регуляризації, а використати натомість дані про іншу часткову похідну. Ми пропонуємо розв'язувати задачу відновлення профілю у вигляді:

$$\hat{f} = \arg \min \{ \|d^x - A_x f\|^2 + \|d^y - A_y f\|^2 \}, \quad (8)$$

де d^x , d^y – масиви виміряних часткових похідних по x та y , f – шуканий профіль, A_x , A_y – лінійні оператори диференціювання профілю по відповідних координатах. У даному формулюванні задача полягає у знаходженні

такого розв'язку, що мінімізує відхилення від масивів виміряних даних часткових похідних одночасно по одній та іншій координаті. Таким чином, для відновлення профілю використовується вся наявна інформація про об'єкт по двох координатах. Практична перевірка методу показує, що додаткова регуляризація не потрібна, оскільки частина виразу (8), що відповідає вимірам похідної по одній координаті, виступає у якості регуляризуючого члена для вимірів похідної по іншій координаті.

Реалізація алгоритму відновлення

Для реалізації запропонованого алгоритму відновлення (8) у першу чергу потрібно визначити матричні оператори диференціювання A_x та A_y . Їх конкретний вигляд залежить від способу впорядкування виміряних даних d^x та d^y . Виміряні масиви часткових похідних $d^x_{i,j}$ та $d^y_{i,j}$ являють собою вилаштовані відповідно до вибірок координат $(x_{i,j}, y_{i,j})$ двовимірні матриці розміром $N \times N$. Але, з точки зору розв'язку поставленої задачі мінімізації (8), вхідні дані являють собою два набори незалежних змінних у кількості N^2 кожен, і тому мають бути представлені у вигляді двох векторів-стовпчиків розміром N^2 . Врахування взаємного просторового розташування елементів вхідних даних закладається у відповідному розташуванні ненульових елементів операторів A_x та A_y . Тому вигляд цих операторів залежить від способу приведення матриць $d^x_{i,j}$ та $d^y_{i,j}$ до вигляду однорозмірних послідовностей значень d^x та d^y . Якщо ми впорядковуємо дані про профіль в одну довгу послідовність рядок за рядком, то оператори A_x та A_y матимуть такий вигляд:

$$A_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & & & & & & & & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад матриць операторів A_x та A_y наведено для $N = 4$, за більших розмірів масивів відповідні матриці будуються аналогічно та мають схожий блочний вигляд з великою кількістю нулів. При кінцево-різницевому диференціюванні кількість елементів зменшується – при диференціюванні вздовж рядків кожен рядок вкорочується на один елемент; так само при диференціюванні вздовж стовпчиків кожен зі стовпчиків теж зменшується. Тому розмір матриць A_x та A_y становить $N^2 \times N(N-1)$, а масиви даних d^x та d^y повинні бути впорядковані по-різному з урахуванням зменшення кількості стовпчиків чи рядків відповідно.

Можна показати, що задача мінімізації (8) може бути зведена до розв'язку лінійної системи рівнянь [5]:

$$H \hat{f} = G, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} H &= A_x^T A_x + A_y^T A_y, \\ G &= A_x^T d^x + A_y^T d^y. \end{aligned} \quad (10)$$

Дана систему рівнянь може бути розв'язана відносно $\hat{f}$ прямим методом, але такий шлях пов'язаний зі знаходженням оберненої матриці H^{-1} , що практично неможливо виконати через її великий розмір. Тому для знаходження розв'язку звичайно застосовують ітеративні методи. Ми будемо використовувати метод спряжених градієнтів [5], що дозволяє отримати розв'язок із заданою точністю за відносно невелику кількість ітерацій. Ітеративний алгоритм, що нами реалізований, може бути записаний псевдокодом таким чином:

$$\begin{aligned} f &= (0) \\ \xi &= \varepsilon \|G\| \\ r &= G - Hf \\ S &= (2r) \\ \text{while } \|r\| > \xi \text{ do} \\ & c = (S^T r)(S^T H S)^{-1} \\ & f_1 = f + S c \\ & r = G - H f_1 \\ & S = (2r \quad f_1 - f) \\ & f = f_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Реалізація чисельних алгоритмів, що працюють із великими масивами даних, звичайно пов'язана з подоланням певних обмежень обчислювальної техніки. Проблеми виникають зі швидкодією та з об'ємом пам'яті, що потрібен для зберігання проміжної інформації. Для випадку запропонованого алгоритму основною такою проблемою є обчислення матричних добутків Hf_1 та HS . Матриця H містить $N^2 \times N^2$ елементів, що при $N = 512$ потребує об'ємів пам'яті, практично недосяжних для сучасних комп'ютерів. Але, враховуючи нескладний вигляд матриць A_x й A_y , з яких отримується оператор H , а також те, що вони мають велику кількість нульових елементів, обчислення згаданих матричних добутків можна реалізувати не зберігаючи повну матрицю H у явному вигляді. Це дозволить значно оптимізувати алгоритм – число елементів, які насправді необхідно опрацювати, набагато менше за кількість елементів матриці H .

Також у процесі ітерацій обчислюється залишкове відхилення $r = G - Hf_1$. Оскільки вектор G не залежить від f , його можна обчислювати на самому початку алгоритму. Процедура знаходження добутків $A_x^T d^x$ й $A_y^T d^y$, що входять у G , слід виконувати враховуючи конкретний вигляд операторів A_x та A_y – це так само значно спростить обчисунки. Кожна з цих матриць містить всього $2N(N-1)$ ненульових елементів при повному розмірі $N^2 \times N(N-1)$ елементів.

Слід відзначити, що виміряні дані d^x та d^y входять лише у вираз для G – таким чином масив G містить усі необхідні вхідні дані для алгоритму. Кількість елементів вектора G

співпадає з кількістю елементів у шуканому векторі f .

Процес ітерацій припиняється при досягненні заданої точності. Критерієм зупинки може бути зменшення залишкової норми нижче заданої величини

$$\|G - Hf\| < \varepsilon \|G\|, \quad (12)$$

де параметр ε задає відносну точність, тобто у скільки разів залишкова норма повинна бути менша за норму вектора, до якого прагне алгоритм.

Слід звернути увагу, що наявної точності операцій із плаваючою комою може не вистачити для досягнення бажаного значення ε . Помилки заокруглення, врешті-решт, призводять до зациклювання алгоритму, коли наступна ітерація вже не може уточнити попереднє значення шуканої функції. У таких випадках треба підвищувати розрядність регістрів із плаваючою комою. Також бажано передбачити примусову зупинку алгоритму при перевищенні максимальної кількості ітерацій, навіть якщо бажана точність ще не досягнута.

Перевірка алгоритму

Запропонований алгоритм перевірено на даних, отриманих за допомогою диференційно-фазового методу в режимі на пропускання. Об'єктом дослідження був сухий препарат еритроцитів людини. Часткові похідні по перпендикулярних напрямках були виміряні у сітці 512×512 точок. Оскільки в процесі диференційно-фазових вимірів втрачається значення нуля фази, отримані масиви були прив'язані до нуля за допомогою спеціального калібрування. Після цього дані було оброблено запропонованим алгоритмом, із заданим параметром точності $\varepsilon = 10^{-3}$. Для цього набору даних алгоритм досяг заданої точності приблизно за 1100 ітерацій, витративши близько 2 хвилин на комп'ютері з процесором Intel Pentium і тактовою частотою 1,6 ГГц. Частина відтвореного профілю зображена на рис. 3.

Порівняння з результатом прямого інтегрування (рис. 2) показує набагато кращу рівномірність відтвореного профілю. Для подальшого аналізу достовірності результату ми продиференціювали відновлений профіль по двох координатах. Результуючі часткові похідні ми порівняли з виміряними похідними (рис. 4).

Виявилось, що найбільша розбіжність між виміряними та відновленими даними з'являється

у областях «чистих напрямків», де лише одна похідна має ненульове значення. Це можна

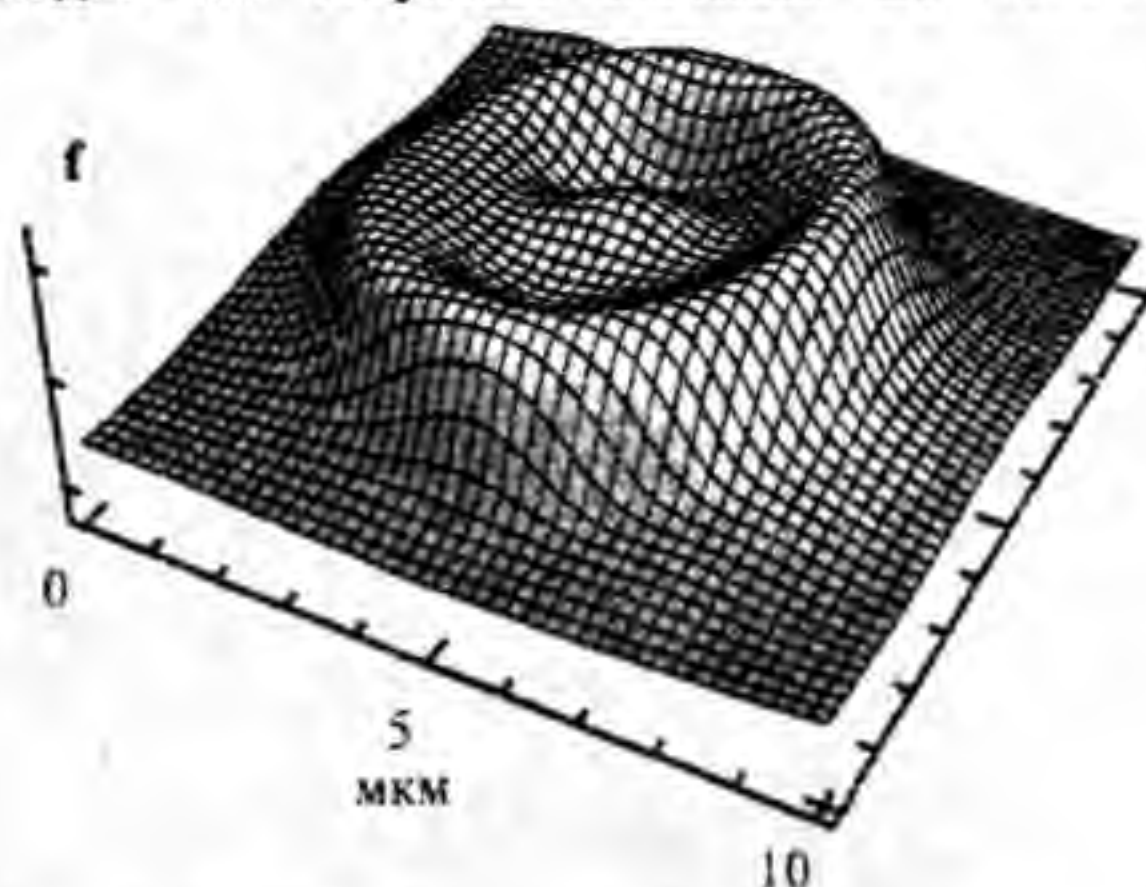


Рис. 3. Профіль, відновлений запропонованим методом

пояснити тим, що на виміряне значення часткової похідної впливає нахил по обох координатах, а не лише по відповідному напрямку, як це закладено у модель. Вплив, очевидно, виникає через скінченний розмір зондуючих променів. Таким чином аналіз показує, що для диференційно-фазового методу виміри часткових похідних по перпендикулярних напрямках не можна вважати повністю незалежними.

Порівняння з результатами прямого інтегрування також підтверджує взаємну залежність вимірів часткових похідних. При інтегруванні вздовж одного напрямку часто спостерігається ефект «затягування». Він з'являється при накопиченні помилок саме в тих областях, де взаємний вплив проявляється найсильніше – тобто там, де похідна по напрямку інтегрування повинна бути нульова, а по перпендикулярному напрямку – максимальна.

Висновки

Запропоновано метод відновлення профілю поверхні об'єкта за відліками двох часткових похідних профілю по перпендикулярних напрямках. Метод полягає у знаходженні такого профілю, часткові похідні якого матимуть найменше відхилення від масивів виміряних часткових похідних за критерієм мінімізації суми квадратів відхилень. Такий спосіб враховує при відновленні профілю обидва масиви виміряних часткових похідних у рівній мірі та дозволяє адекватно відтворити профіль за наявності шумів вимірювання. Запропонований алгоритм перевірено на експериментально отриманих даних.

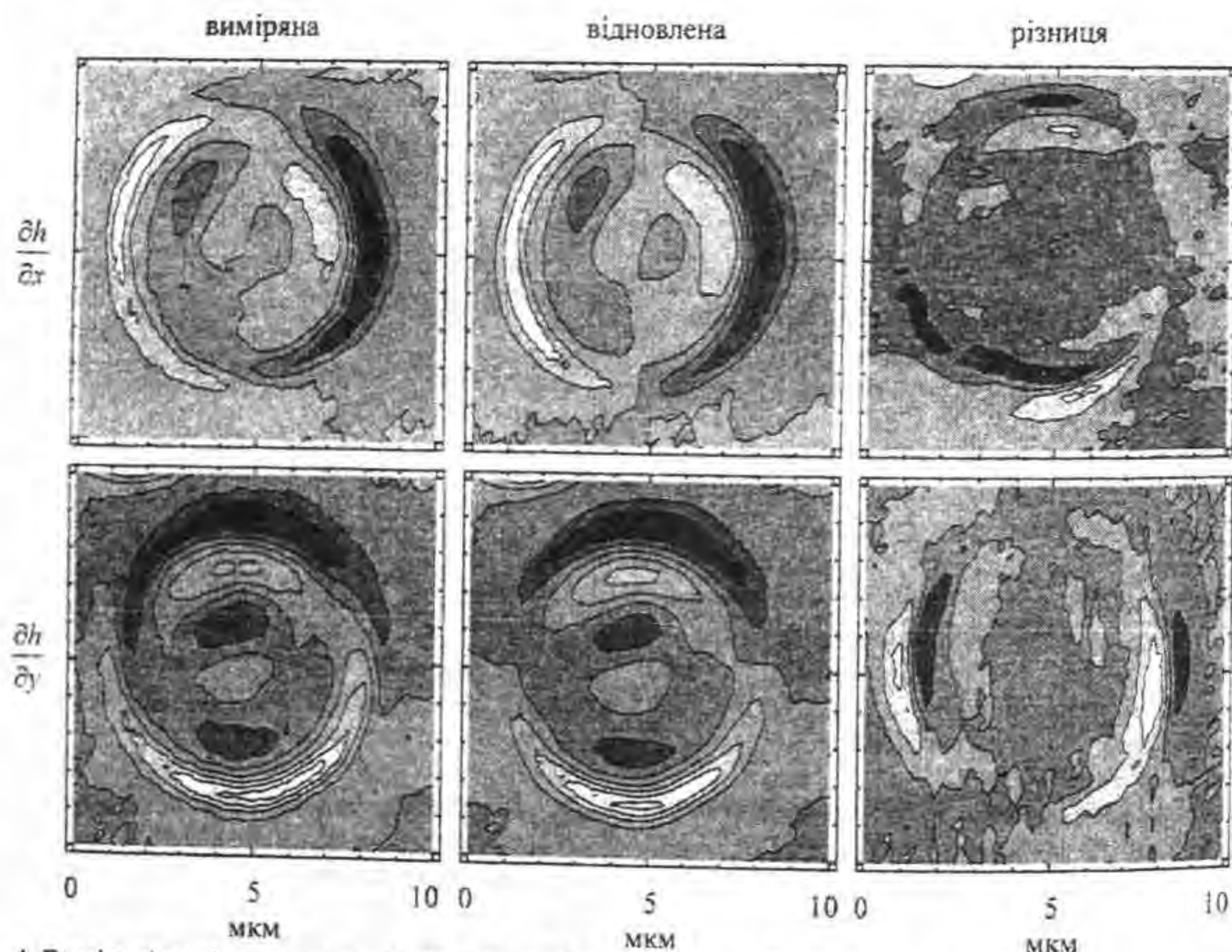


Рис. 4. Виміряні та відновлені часткові похідні. Масштаб по глибині відносний. Максимальна різниця між виміряними та відновленими значеннями сягає 1/3 частини значень самих похідних

Встановлено принципову залежність вимірів похідної по вибраному напрямку від нахилу профілю у перпендикулярному напрямку, що зумовлено скінченною товщиною зондуючих променів. Це свідчить про те, що виміри часткових похідних у диференційно-фазовому

методі не можна вважати незалежними. Не зважаючи на те, що дана модель відновлення не враховує взаємну залежність похідних, запропонований метод відновлення показує набагато кращі результати, ніж метод прямого інтегрування диференційно-фазових даних.

Список використаних джерел

1. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Формирование отображения микроступенчатого профиля в гетеродинном дифференциально-фазовом микроскопе // Квантовая электроника, 23. – 1996. – №4. – с. 368-372.
2. Баранов Д.В., Егоров А.А., Золотов Е.М., Свидзинский К.К. Восстановление профиля микрообъекта в гетеродинном дифференциальном микроскопе // Оптика и спектроскопия, Т. 83. – 1997. – № 3. – с. 516-527.
3. Molebny V.V., Kamerman G.W., Smirnov E.M., Ilchenko L.M., Kolenov S.O., Goncharov V.O. Three-beam scanning laser radar microprofilometer // Proc. SPIE, 3380. – 1998. – p. 280.
4. Tan S.M., Fox C., Nicholls G. Inverse Problems 453.707: Lecture notes / The University of Auckland, Auckland, New Zealand, 2001. – <http://home.comcast.net/~SzeMengTan/>
5. Shewchuk J.R. An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain: Technical Report / Carnegie Mellon University. Pittsburgh, USA. – CS-94-125. – 1994. – 58 p.

Надійшла до редколегії 17.04.2009

УДК 537.86; 615.849

Григорук В.І., д-р ф-м. наук, проф.,
Понежа С.Г. інж., Понежа Г.В., канд. ф-м. наук,
ст. наук. сп.

Міліметрова рефлектометрія тіла людини та води

За допомогою вимірювача коефіцієнта стоячої хвилі (КСХ) P2-69 вимірювали температурні залежності коефіцієнта відбиття міліметрових електромагнітних хвиль від тіла людини та води. Встановлено, що він зростає з температурою для води, в той час як для шкіри людини така залежність не спостерігалась. На групі пацієнтів досліджено також вплив міліметрового випромінювання на організм людини при опромінюванні біологічно активних точок (БАТ). Було встановлено, що КСХ від БАТ перевищує КСХ від оточуючих індиферентних ділянок шкіри, а його значення для різних БАТ має індивідуальний характер та корелює з станом здоров'я. Величина та знак змін КСХ, як і їх наявність чи відсутність, однозначно та достовірно відображають як загальний стан організму, так і функціонування його окремих органів і систем.

Ключові слова: міліметрове випромінювання, коефіцієнт відбиття, температурна залежність, діагностика

Grygoruk V.I. D. Sci., Prof., Ponezha S.G.
engineer, Ponezha G.V. Ph.D., senior scientist

Microwave reflectometry of human body and water

With the help of the P2-69 device that measures a standing wave coefficient (SWC), temperature dependences of a reflection coefficient from a human body and water has been measured. It was shown that it increases with temperature for water, but at the same time such a dependence was not observed for a human skin. On a group of patients, the effect of microwave radiation on a human organism under the irradiation of biologically active points (BAP) was investigated. It was determined that SWC from BAP exceeds SWC from surrounding indifferent points and its value for different BAP has an individual character and correlates with the state of a human health. The magnitude and the sign of the SWC deviations as well as its presence or absence reliably reflects the whole state of a human organism and functioning of separate organs and systems

Key Words: microwave radiation, reflective coefficient, temperature dependence, diagnostics.

*E-mail: ponezha@bitp.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Данилов В.В.

1. Вступ

На сьогодні достовірно встановлено, що живі організми мають високу чутливість до низькоінтенсивного електромагнітного випромінювання (ЕМВ) в міліметровому (ММ) діапазоні довжин хвиль, яке не призводить до істотного нагрівання ($>0,1$ K) опромінюваного об'єкту [1, 2, 4, 5]. Вивчення впливу ММ хвиль на організм людини почалося понад 30 років тому після створення та застосування в техніці та побуті ефективних джерел вкріпленого високочастотного випромінювання. Актуальність досліджень обумовлена як перспективами використання міліметрового випромінювання в медицині [4, 5], так і необхідністю врахування шкідливих наслідків впливу на організм людини зростаючого з кожним роком електромагнітного забруднення довкілля [10]. Одним із важливих параметрів

оцінки взаємодії ЕМВ з різними об'єктами є коефіцієнт відбиття ЕМВ від опромінюваного тіла. Зокрема, він характеризує рівень сприйняття ЕМВ об'єктом, що важливо, наприклад, при оцінюванні ступеня ризику опромінювання конкретної особи у зовнішньому електромагнітному полі.

Великий практичний інтерес становлять діагностичні можливості використання коефіцієнта відбиття ЕМВ від біологічно активних точок (БАТ) і зон шкіри, чутливих до патофізіологічних змін органів і тканин [8], що досить часто супроводжуються локальними змінами температури. У зв'язку з цим важливо простежити можливу температурну залежність мікрохвильового коефіцієнта відбиття ЕМВ. З урахуванням того, що організм людини на ~ 65% складається з води, доцільно також провести температурні дослідження на воді – модельному

однорідному гомогенному середовищі – з тим, щоб надалі зробити відповідні оцінки для тіла людини. Результати таких досліджень наведено в розділі 3.

Бважається [4, 5], що ефективною мішенню для ММ-хвиль є так звані БАТ – рецепторні структури шкіри, пов'язані з основними регуляторними системами організму. У цій роботі для групи людей з різним станом здоров'я виміряно коефіцієнт відбиття від різних ділянок долоні людини, включаючи БАТ й оточуючі індіферентні ділянки. Про можливості використання цього параметра для діагностики захворювань вже зазначалося в наших попередніх роботах [6, 7], а в цій роботі проведено детальніші дослідження з цього питання.

2. Методика вимірювань коефіцієнтів відбиття

Для вимірювань використовували панорамний вимірювач коефіцієнта стоячої хвилі (КСХ) і ослаблення Р2-69, якій забезпечує вимірювання коефіцієнта стоячої хвилі в межах від 1,1 до 5,0 з індикацією від 1 до ∞. Для біологічних об'єктів експериментальні значення КСХ зазвичай перевищують 5,0. З метою розширення діапазону вимірювання КСХ в схему перед навантаженням вмикали хвилевідний поляризаційний атенюатор ДЗ-38, який ослабляв як падаючу на навантаження, так і відбиту від навантаження хвилі на N дБ. Це уможливило зменшення коефіцієнта стоячої хвилі в основному хвилеводі до значень, що відповідають діапазону вимірювання КСХ.

Для зменшення невизначеності вимірювання КСХ ослаблення атенюатора N встановлювали таким, щоб КСХ дорівнював значенню $КСХ_e$ еталона, за допомогою якого градуювали вимірювач Р2-69. У цьому випадку вимірювач Р2-69 використовували фактично як нуль-індикатор для певного значення $КСХ_e$.

Користуючись визначеннями КСХ і коефіцієнтів відбиття за напруженістю поля $|E|$ та потужністю випромінювання $|E|^2$, неважко встановити зв'язок між справжніми значеннями $КСХ_e$, $|E_e|$ та $|E_e|^2$ і виміряними $КСХ_e$, $|E_e|$ та $|E_e|^2$:

$$КСХ_e = \frac{КСХ_e \left(1 + 10^{\frac{N}{10}} \right) + 1 - 10^{\frac{N}{10}}}{КСХ_e \left(1 - 10^{\frac{N}{10}} \right) + 1 + 10^{\frac{N}{10}}}, \quad (1)$$

$$|E_e| = 10^{\frac{N}{20}} |E_e|, \quad |E_e|^2 = 10^{\frac{N}{10}} |E_e|^2$$

Для еталонного навантаження Н-2.0, за допомогою якого градуювали вимірювач Р2-69, коефіцієнт $КСХ_e = 2$, і розрахункові формули набувають вигляду:

$$КСХ_e = \frac{3 + 10^{\frac{N}{10}}}{3 - 10^{\frac{N}{10}}}, \quad (2)$$

$$|E_e| = \frac{10^{\frac{N}{20}}}{3}, \quad |E_e|^2 = \frac{10^{\frac{N}{10}}}{9} \quad (3)$$

При вимірюваннях встановлювали поляризаційним атенюатором ДЗ-38 таке ослаблення N , при якому коефіцієнт стоячої хвилі в основному хвилеводі (між світильником і атенюатором) щоразу дорівнював еталонному значенню $КСХ_e = 2$. Потім, підставляючи отримані значення N у формули (2) та (3), обчислювали значення $КСХ_e$, $|E_e|$ та $|E_e|^2$.

3. Температурні ефекти коефіцієнта відбиття ММ хвиль від води та тіла людини

За наведеною методикою було виміряно $КСХ_e$ та обчислено значення $|E_e|^2$ з використанням формул (2) та (3), а також обчислено температурний показник $\frac{\Delta(|E_e|^2)}{\Delta T}$ коефіцієнта відбиття за потужністю на частоті 60 ГГц для води.

Результати вимірювання $|E_e|^2$ на частоті 60 ГГц для води наведено на рисунку 1. З отриманих результатів випливає, що при збільшенні температури води від 0°C до 50°C коефіцієнт стоячої хвилі на частоті 60 ГГц зростає від 4,0 до 6,7 з середньою швидкістю $\sim 0,055 (^\circ\text{C})^{-1}$. Коефіцієнт відбиття за потужністю ЕМВ на частоті 60 ГГц відповідно зростає від 0,36 до 0,55. Середнє значення температурного показника $\frac{\Delta(|E_e|^2)}{\Delta T}$ у діапазоні температур $0^\circ\text{C} \div 50^\circ\text{C}$ становить $\sim 0,004 (^\circ\text{C})^{-1}$.

Дослідження на інших частотах діапазону 54÷78 ГГц демонструють в межах невизначеності вимірювань такі самі результати. Резонанси у спектрах відбиття в діапазоні 54÷78 ГГц не спостерігалися. Зовсім несподіваними виявилися результати досліджень для тіла людини. Ми ретельно виміряли коефіцієнт відбиття від різних ділянок долоні при зовнішньому охолодженні, а також нагріванні за допомогою фена. При цьому температура шкіри змінювалася в межах $23^\circ\text{C} \div 50^\circ\text{C}$. Контроль температури відповідних ділянок тіла здійснювали термопарою, зафіксованою на тілі

тонкою клейкою стрічкою.

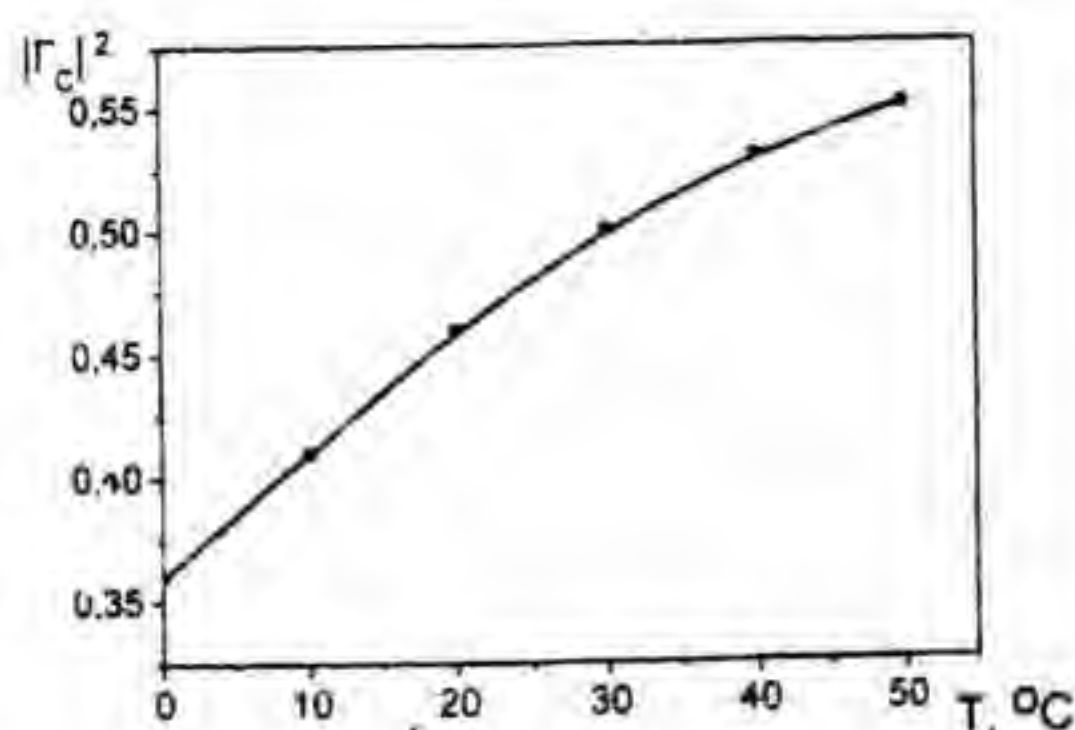


Рис. 1 Температурна залежність коефіцієнта відбиття за потужністю для води

Вимірювання показали, що коефіцієнт відбиття для всіх доступних для досліджень ділянок долоні не реагує на зміну температури шкіри.

4. Вимірювання КСХ від БАТ та його діагностичне значення

У роботі також вимірювали КСХ та коефіцієнт відбиття при ММ опроміненні БАТ та індивідуальних точок, розташованих на долонях людини. Для БАТ притаманне підвищене виділення вуглекислого газу, підвищена температура (на $\sim 0,2^\circ\text{C}$) і знизений електричний опір (на 1-2 порядки) [3], тому можна очікувати, що для них значення КСХ та коефіцієнта відбиття будуть відрізнятися від оточуючих індивідуальних ділянок.

У процесі вимірювань КСХ відрізок хвилеводу з поперечним перерізом $3,6 \times 1,8 \text{ мм}^2$, розташований на виході поляризаційного атенюатора ДЗ-38, безпосередньо прикладали до кожної з досліджуваних БАТ. Потужність випромінювання становила $\sim 10 \text{ мВт/см}^2$. Коефіцієнт відбиття визначали на так званій терапевтичній частоті 60 ГГц.

Для вимірювань КСХ ми брали, як і в методі Накатані [3], шість точок на обох руках, розташованих по три на тильному й лицьовому згині кисті в зоні променево-зап'ястного суглоба, а саме, точки H_1 -P(I)9, H_2 -MC(IX)7, H_3 -C(V)7, H_4 -IG(VI)5, H_5 -TR(X)4, H_6 -GI(II)5. Ці точки є репрезентативними, тому що уможливають діагностику стану енергетичного каналу (так званого меридіану) в цілому [3].

Дослідження проводилися протягом місяця на групі з 5 осіб: двох жінок віком 60 та 66 років та трьох чоловіків віком 17, 32 та 61 років.

Результати вимірювань показали, що КСХ від БАТ істотно більше, ніж КСХ від оточуючих ділянок шкіри. Точне положення БАТ на долоні визначалося по досягненню максимального КСХ для даної ділянки шкіри. Для всіх обстежених осіб значення КСХ для БАТ знаходились в інтервалі $4,1 \div 4,8$. Для індивідуальних точок ці значення перебували в інтервалі $1,4 \div 3,2$.

Далі для кожної людини обчислювали середнє значення КСХ для 6-ти репрезентативних БАТ, відхилення від середнього значення для кожної із БАТ та встановлювали кореляцію останнього із станом здоров'я. Вимірювання показали, що для всіх пацієнтів відхилення від середнього для певної БАТ щоденно змінюються залежно від їхнього фізіологічного стану (гарне самопочуття, стомлення, хвороба тощо), а також від змін у погоді (магнітні бури, зміна атмосферного тиску та ін.).

Особи з хронічними захворюваннями мали знижені в середньому значення. У них спостерігалися стабільні відхилення для БАТ, які репрезентують хворий орган. Зокрема, для деяких людей з досліджуваної групи відхилення від середніх значень спостерігалися для точок H_2 й H_3 , що характеризує їхній індивідуальний стан здоров'я. Причому було з'ясовано, що при поганому самопочутті (підвищений тиск, захворювання, втома та ін.) ці значення знижувалися порівняно з вимірами при нормальному самопочутті (наприклад, для пацієнта Л. для точки H_2 від 4,18 до 4,0, а для H_3 від 4,32 до 4,26).

У роботі досліджено також, як впливає на організм тривале опромінювання ММ ЕМВ. Для цього на початку сеансу вимірювань реєстрували покази КСХ для тих БАТ, які мали суттєве відхилення від середніх значень для даної людини. Далі протягом 5 хв. на них впливали ММ ЕМВ та знову вимірювали КСХ від цих точок. Вимірювання повторювали знову через 30 хв. Результати вимірювань мали індивідуальний характер, тобто для кожного з пацієнтів відрізнялися. Наприклад, для пацієнта Л. для точок H_2 й H_3 безпосередньо після впливу покази в основному не змінилися, однак після 30 хв. відпочинку спостерігалось збільшення показів на $\sim 5-6\%$, що свідчить про початок регуляції процесів життєдіяльності. Для пацієнта С. зміна показів з часом спостерігалась тільки для точки H_2 , для інших точок покази були сталими в межах невизначеності. Для пацієнта К. з хронічними захворюваннями вплив ММ ЕМВ не приводив до підвищення значень КСХ для точок, які мали покази нижчі від середніх, а

спостерігалось навіть деяке їхнє зниження.

5. Висновки

Дослідження впливу температури на коефіцієнт відбиття ММ ЕМВ для води показали, що він залежить від температури, збільшуючись при її зростанні. Для коефіцієнта відбиття від тіла людини такої залежності не спостерігалось. Це свідчить про те, що вплив ММ хвиль на біологічні об'єкти й, зокрема людини, має іншу пр. роду, ніж звичайне поглинання цих хвиль водними складовими верхніх шарів шкіри. Зокрема, у роботі [9] було показано, що при впливі ММ-хвиль на шкіру виникає такий важливий ефект, як збільшення транспорту води через шкірний покрив (невідчутна перспірація). Це свідчить про те, що вплив ММ ЕМВ на шкіру супроводжується активною мікрокапілярною терморегуляцією. При підвищенні температури шкіри на 10°C інтенсивність невідчутної перспірації зростає приблизно в 2 рази [9].

Результати, отримані в нашій роботі, підтверджують висновки роботи [8] про те, що вимірювання КСХ від БАТ можливо використовувати для вивчення впливу ММ ЕМВ на організм людини. У той же час в наших результатах є деякі відмінності з роботою [8], де

зазначалося, що КСХ від БАТ є меншим, ніж КСХ від індиферентних точок. Наші дослідження однозначно показали, що КСХ від БАТ перевищують КСХ від навколишніх точок шкірної поверхні.

Відхилення КСХ від середнього для певної БАТ може слугувати характеристикою фізіологічного стану організму. Величина та знак змін КСХ, як і їх наявність чи відсутність, відображає як загальний стан організму, так і функціонування окремих органів і систем. Наші результати підтверджують усталену точку зору, що низькоінтенсивне ЕМВ ММ діапазону є чинником, здатним регулювати фізіологічні процеси, а також, що терапевтична дія ММ ЕМВ залежить від початкового стану організму – нормально функціонуючий організм не реагує на ЕМВ.

Звичайно, результати, отримані на невеликій групі людей і за нетривалий час, не є остаточними, і тому необхідно провести триваліші дослідження на більшій кількості пацієнтів та за допомогою чутливішої вимірювальної апаратури.

Список використаних джерел

1. Девятков Н.Д., Голант М.Б., Бецкий О.В. Миллиметровые волны в процессах жизнедеятельности. – М: Радио и связь, 1991. – 168 с.
2. Искин В.Д. Биологические эффекты миллиметровых волн и корреляционный метод их обнаружения. – Харьков: Основа, 1990. – 248 с.
3. Самосюк И.З., Лысенюк В.П., Лиманский Ю.П. и др. Нетрадиционные методы диагностики и терапии. – К.: Здоров'я, 1994. – 240 с.
4. Ситько С.П., Мкртчян Л.Н. Введение в квантовую медицину. – Киев: Паттерн, 1994. – 147с.
5. Теппоне М.В. Многозональная КВЧ-терапия или КВЧ-пунктура. – М.: Колояр, 1997. – 250с.
6. Григорук В.І., Понезжа Г.В., Понезжа С.Г., Ніжельська А.І. Вимірювання коефіцієнта відбиття тіла людини в міліметровій області довжин хвиль // Вісник Київ. нац-
7. Понезжа Г.В., Понезжа С.Г., Ніжельська А.І. Физические аспекты измерений микроволнового электромагнитного излучения человека // Физика живого. 2001, – 9, №2. – С. 33–54.
8. Пясецкий В.И., Писанко О.И. Устойчивость физиологических функций организма человека в процессе взаимодействия с экологическим КВЧ-излучением/ В сб. «Аппаратный комплекс «Электроника - КВЧ» и его применение в медицине». – М., 1991. – С. 10 – 18.
9. Родштат И.В. Физиологические аспекты КВЧ-диагностики органических и функциональных заболеваний человека // Миллиметровые волны в биологии и медицине. – 1999. – № 3(15). – С. 15-21.
10. Тихонов М.Н., Довгуша В.В. Прогрессирующая трансформация электромагнитной среды обитания человека: медико-экологическая проблема XXI века // Экологические системы и приборы. – 2000. – № 1. – С. 46-54.

Надійшла до редколегії 20.03.09

УДК 535.317.1

В.П. Данько, провідний інженер

Вплив аберацій голографічних мікролінз на параметри сенсора хвильового фронту

Проведена теоретична оцінка величини первинних аберацій та викликаних ними поперечних зміщень дифракційного фокусу голографічних мікролінз, що застосовуються в сенсорі хвильового фронту Шека-Хартмана. Показано, що зміщення дифракційного фокусу значно менші від похибки визначення центрів ваги плям в гартманогамі і не можуть вплинути на точність відновлення хвильового фронту.

Ключові слова: дифракційний фокус, аберації, матриця голографічних мікролінз.

E-mail: wlad@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.м. наук Данилов В.В.

Вступ

Останні роки були відзначені широким застосуванням сенсора хвильового фронту Шека-Хартмана в різних галузях науки і техніки. Його принцип роботи ґрунтується на вимірюванні локальних нахилів досліджуваного хвильового фронту за допомогою матриці мікролінз і подальшій реконструкції розподілу його фази [3]. Кожна мікролінза формує дифракційно обмежену пляму на поверхні фотодетектора, розміщеного у фокальній площині матриці. Картина розподілу цих плям, зафіксована фотодетектором, утворює так звану гартманогаму. Зміщення плям у гартманогамі відносно оптичної осі кожної мікролінзи прямо пропорційні локальним нахилам хвильового фронту. Головна перевага такого сенсора - робота в реальному масштабі часу, оскільки одночасно фіксуються всі пробні точки, проте він не підходить для контролю оптичних компонентів, які дуже сильно, або, навпаки, дуже слабо спотворюють хвильовий фронт: з одного боку, максимальне зміщення плям не повинно перевищувати величину апертури мікролінзи, щоб уникнути неоднозначності в інтерпретації отриманих даних, з іншої - фокусна відстань мікролінзи, як правило, досить мала, тому сенсор виявляється нечутливим до малих змін нахилів хвильового фронту. Такий зв'язок між фокусною відстанню матриці, кутовою чутливістю та кутовим динамічним

V.P. Dan'ko, principal engineer

Influence of holographic lenslet aberrations on the parameters of wavefront sensor

The theoretical estimation of the primary aberrations and related to them lateral displacements of the diffractive focus of holographic lenslets that are used in the Shack-Hartmann wavefront sensor are carried out. It is shown that the diffractive focus displacements are much smaller than the error in determining the hartmannogram spots centroids, and can not influence on the wavefront reconstruction accuracy.

Key Words: diffractive focus, aberrations, holographic lenslet array.

діапазоном сенсора ускладнює його оптимізацію для конкретних застосувань. Одним з способів покращення параметрів сенсора є застосування матриць голографічних мікролінз, які дозволяють використати при побудові сенсора специфічні властивості голографічних оптичних елементів.

Проте при застосуванні голографічних мікролінз слід враховувати, що вони за певних умов самі вносять аберації в відновлений хвильовий фронт [2]. Це може привести до виникнення додаткових похибок вимірювання фази хвильового фронту. В роботі [4] був розглянутий експеримент по визначенню власних аберацій матриць голографічних мікролінз та їх впливу на точність відновлення хвильового фронту і показано, що при певних умовах їх можна не враховувати. Але в цій роботі були проаналізовані не всі фактори, що можуть викликати похибки вимірювання фази хвильового фронту.

В даній роботі проведена теоретична оцінка величини аберацій окремої голографічної мікролінзи та їх впливу на точність визначення положення центрів плям у гартманогамі.

Аберації окремої голографічної мікролінзи та зміщення її дифракційного фокусу.

Аберації лінзи, в тому числі й голографічної, викликають спотворення форми

плями в фокальній площині та зміну положення її дифракційного фокусу. Це в свою чергу може привести до виникнення додаткової похибки визначення локальних нахилів хвильового фронту, а отже, і розподілу його фази.

Оцінка аберацій голографічної лінзи проводилась в рамках геометричної теорії аберацій [1] шляхом порівняння пучка, відновленого голограмою, з гаусовим сферичним пучком та визначення її первинних хвильових аберацій.

Хвильову аберацію голографічної лінзи можна записати у вигляді [2]:

$$W = \frac{2\pi}{\lambda} \left[-\frac{1}{8} \rho^4 S + \frac{1}{2} \rho^3 (C_x \cos \theta + C_y \sin \theta) - \frac{1}{2} \rho^2 (A_x \cos^2 \theta + A_y \sin^2 \theta + 2A_{xy} \cos \theta \sin \theta) - \frac{1}{4} \rho^2 E + \frac{1}{2} \rho (D_x \cos \theta + D_y \sin \theta) \right] \quad (1)$$

де W – хвильова аберація в радіанах; λ – довжина хвилі; ρ , θ – полярні координати в межах апертури голографічної лінзи. Коефіцієнти мають наступний зміст: S – сферична аберація, C_x , C_y – кома; A_x , A_y , A_{xy} – астигматизм; E – кривизна поля, D_x , D_y – дисторсія (вважаємо, що голографічна лінза розміщена в площині XOY , а її центр співпадає з початком координат). Задля економії місця громіздкі вирази для коефіцієнтів ми тут не наводимо, їх можна подивитися в [2].

Проаналізуємо аберації голографічної мікролінзи для випадку застосування її в сенсорі Шека-Хартмана:

- голограма розміщена в початку координат в площині XOY ;

- об'єктний пучок плоский, спрямований перпендикулярно площині голограми вздовж осі Z (координати відповідного точкового джерела $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \rightarrow -\infty$); опорний пучок збіжний сферичний з радіусом кривизни в площині голограми $R_R = \sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}$, рівним фокусній відстані голографічної мікролінзи (x_R, y_R, z_R – координати відповідного точкового джерела); вісь пучка лежить в площині XOZ ($y_R = 0$) і утворює з віссю Z кут $\alpha_R \neq 0$.

- голограма відновлюється плоским пучком ($z_C \rightarrow \infty$), нахиленим на деякий кут відносно об'єктного пучка (проекції осі відновлюючого

пучка на площини XOZ та YOZ утворюють з віссю Z кути α_C та β_C).

Тоді коефіцієнти первинних аберацій запишуться наступним чином:

$$S = 0, \quad C_x = \frac{\text{tg } \alpha_C}{z_R^2}, \quad C_y = \frac{\text{tg } \beta_C}{z_R^2};$$

$$A_x = -\frac{\text{tg } \alpha_C (2 \text{tg } \alpha_R + \text{tg } \alpha_C)}{z_R};$$

$$A_y = -\frac{\text{tg}^2 \beta_C}{z_R};$$

$$A_{xy} = -\frac{\text{tg } \alpha_R \text{tg } \beta_C + \text{tg } \alpha_C \text{tg } \beta_C}{z_R};$$

$$E = -\frac{\text{tg } \alpha_C (2 \text{tg } \alpha_R + \text{tg } \alpha_C) + \text{tg}^2 \beta_C}{z_R};$$

$$D_x = -3 \text{tg } \alpha_C \text{tg } \alpha_R (\text{tg } \alpha_C + \text{tg } \alpha_R), \quad D_y = 0.$$

Розглянемо два випадки відновлення:

- 1) відновлюючий пучок лежить в площині XOZ ($\alpha_C \neq 0$, $\beta_C = 0$);
- 2) відновлюючий пучок лежить в площині YOZ ($\alpha_C = 0$, $\beta_C \neq 0$).

Проаналізувавши наведені вище вирази можна зробити висновок, що вплив власних аберацій голограми найсильніший для випадку 1, який і будемо далі розглядати. Для цього випадку $C_y = A_y = A_{xy} = D_y = 0$. Тоді хвильові аберації (1) можна записати у вигляді:

$$W(\rho, \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \rho^3 \frac{\text{tg } \alpha_C}{z_R^2} \cos \theta + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{1}{z_R} \text{tg } \alpha_C (2 \text{tg } \alpha_R + \text{tg } \alpha_C) \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \rho^2 \frac{1}{z_R} \text{tg } \alpha_C (2 \text{tg } \alpha_R + \text{tg } \alpha_C) - \frac{3}{2} \rho \text{tg } \alpha_C \text{tg } \alpha_R (\text{tg } \alpha_C + \text{tg } \alpha_R) \cos \theta \right] \quad (2)$$

Далі перейдемо до реальних параметрів голографічних мікролінз: $\rho = 0.2$ мм, $\alpha_R = 13^\circ$, $R_R = 24$ мм ($z_R = R_R \cos \alpha_R = 23.385$ мм) та

розрахуємо за формулою (2) аберації для значень кута $\alpha_c = -2^\circ \dots 2^\circ$, які з деяким запасом перекривають робочий діапазон локальних нахилів сенсора Шека-Хартмана з матрицею таких мікролінз.

На рис. 1 зображені внески окремих абераційних членів в загальні хвильові аберації голографічної мікролінзи на краю її апертури (для дисторсії використана окрема шкала W в правій частині графіка). З рисунка видно, що максимальний внесок в загальну хвильову аберацію дає дисторсія (близько λ), мінімальний – кома (близько 0.0004λ).

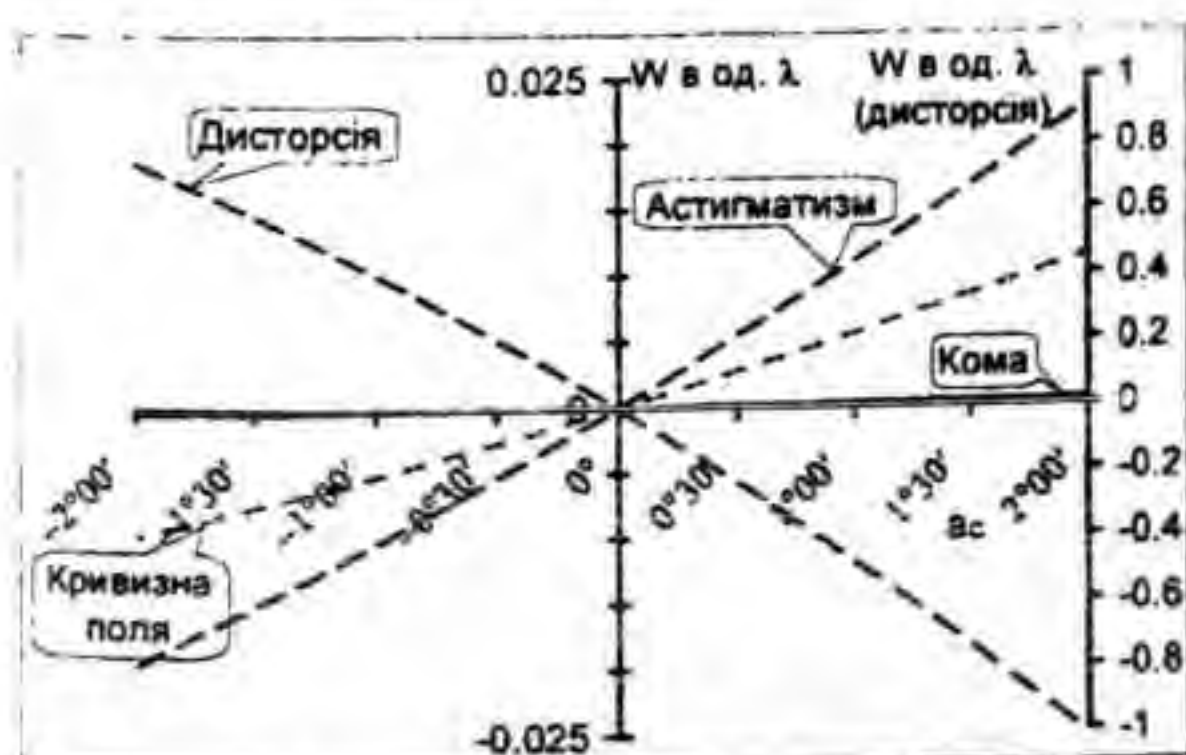


Рис. 1 – Залежність первинних аберацій голографічної мікролінзи від кута нахилу відновлюючого пучка.

Оскільки в сенсорі Шека-Хартмана фотоприймач встановлений на фіксованій відстані від матриці мікролінз, то впливати на точність визначення локальних нахилів хвильового фронту будуть аберації, які викликають зміщення дифракційного фокусу в

поперечному напрямку. За даними, наведеними в роботі [1], це кома (спотворює осьову симетрію зображення точкового джерела) та дисторсія (зображення точкового джерела не спотворює, але викликає його зміщення в поперечному напрямку).

Оцінка максимального зміщення дифракційного фокуса за методикою, описаною в [1] для цих аберацій, дала наступні результати:

$$\Delta x_{\text{кома}} \approx 0.0014 \text{ мкм}, \Delta x_{\text{дист}} \approx 0.02 \text{ мкм}.$$

За даними [4] похибка визначення центра ваги плям в гартманогамі складає $0.04 \dots 0.07$ піксел, що навіть для розміру пікселя 6.25 мкм , типового для серійної ПЗЗ-камери, дає величину, не меншу від 0.25 мкм . Таким чином, зміщення дифракційного фокусу, викликані власними абераціями голографічної мікролінзи, значно менші від похибки визначення центрів ваги дифракційно обмеженої плями в її фокальній площині.

Висновки

Теоретична оцінка первинних аберацій голографічних мікролінз показала, що викликані ними поперечні зміщення дифракційного фокусу значно менші від похибки визначення центрів ваги плям в гартманогамі і не можуть вплинути на точність визначення локальних нахилів хвильового фронту в сенсорі Шека-Хартмана з матрицею голографічних мікролінз.

Список використаних джерел

1. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики: Пер. с англ. 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. М.Милер. Голография: Пер. с чеш. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1979. – 207 с.
3. Adaptive Optics for Astronomy / Ed. D. M. Alloin and J.-M. Mariotti. NATO ASI Series: Kluwer Academic Publ., 1994. – 423 p.
4. D.V.Podanchuk, V.N.Kurashov, A.V.Kovalenko, V.P.Dan'ko, A.V.Yurchenko. Measurement of light phase distortions in acousto-optical deflector with Shack-Hartmann wave-front sensor // Proc. SPIE. – 1999. – 3904. – P.311-318.

Надійшла до редколегії 15.05.2009 р.

УДК 537.63, 549.748

Івашко М.А*, студ.,
Малишев В.Ю., пров.інж.,
Прокопенко О.В., канд. ф.-м. наук

Особливості поведінки ВАХ манганітів під дією електричних та магнітних полів

Експериментально досліджено вплив
магнітних полів та величин амплітуд сталих
струмів на вольт-амперні характеристики
(ВАХ) плівок манганітів в кімнатному і
азотному діапазоні температур. Показано, що
ВАХ плівок манганітів є суттєво нелінійними,
особливо в області малих значень струму.
Виявлена залежність величини провідності від
напрямку струму, що протікає через зразок.

Ключові слова: манганіти, магнітне поле.

*E-mail: ima@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Анісімов І.О.

Однією з важливих характеристик заміщених
манганітів зі структурою перовскіту є ефект
колозального магнітоопору. Завдяки цьому
ефекту тонкі плівки манганітів розглядають як
перспективні матеріали для розробки нового
покоління магнітних сенсорів і пристроїв
зчитування магнітної інформації.

Складність електронних процесів зумовлена
наявністю сильно взаємодіючих спінової,
орбітальної та зарядової підсистем. В результаті
конкуренції протилежно спрямованих взаємодій
поведінка таких матеріалів є дуже чутливою до
зовнішніх факторів (магнітне та електричне поле,
механічне напруження та інше).

Природа магнітних і електричних процесів,
що відбуваються в манганітах, до цього часу не
повністю зрозуміла, що спонукає до більш
глибокого вивчення факторів, які визначають їх
особливості. Об'єм експериментальних даних
про фізичні властивості манганітів постійно
поповнюється, але результати часто є досить
суперечливими.

Дана робота спрямована на з'ясування
особливостей магнітних та електричних
властивостей манганітових сполук зі структурою
перовскіту.

В дослідженнях використовувались
епітаксійні манганітні плівки $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$, де
 $x=0,3$, на підкладках LaAlO_3 . Ці манганіти
інтенсивно досліджується, тому що при $x \approx 1/3$
вони мають максимальне значення температури

Iwashko M.A*, stud.,
Malyshev V.Yu., principal eng.,
Prokopenko O.V., Ph. D.

The features of I-V curves of manganite thin films under the influence of electric and magnetic fields

The influence of magnetic field and direct
current magnitude on the I-V curves of manganite
thin films at room and liquid nitrogen temperatures
was experimentally investigated. It is shown that the
I-V curves are substantially non-linear, especially
for small currents. It was found that the manganite
film conductivity depends on the current direction
through the sample.

Key words: manganite, magnetic field, I-V
curve

Кюрі. Плівки відрізняються умовами осадження
(різний тиск газового середовища), режимами
термообробки (час відпалу) та мають різні
фізичні параметри, що наведені у таблиці 1.

Фізичні параметри зразків

Таблиця 1

Зразок №	1	2	3
$t_{\text{відпалу}}$, год	3,5	5	4,5
Товщина, А°	3000	6000	2000
R , кОм	30	10	200
$R_{\text{після віль}}$, кОм	12	3,5	70

Досліджені зразки мали однакові
геометричні розміри діелектричних підкладок –
 $9 \times 3.2 \times 0.5$ (мм), одна сторона якої була вкрита
напиленою суцільною плівкою манганіту різної
товщини (див. табл. 1.).

В експерименті постійне магнітне поле
створювалося за допомогою потужного
електромагніта та змінювалось в межах від 0 до
1 Тл. Дослідження проводились в кімнатному і
азотному діапазоні температур. Зразок
охолоджувався в нульовому магнітному полі.
Температура фіксувалася і стабілізувалася з
точністю $\pm 0,02$ К. Для формування контактів
дротів з плівкою використовували срібну пасту.

На рис. 1,2 показані отримані в роботі
залежності питомого опору (ρ) зразків від
магнітного поля (H), паралельного струмові.

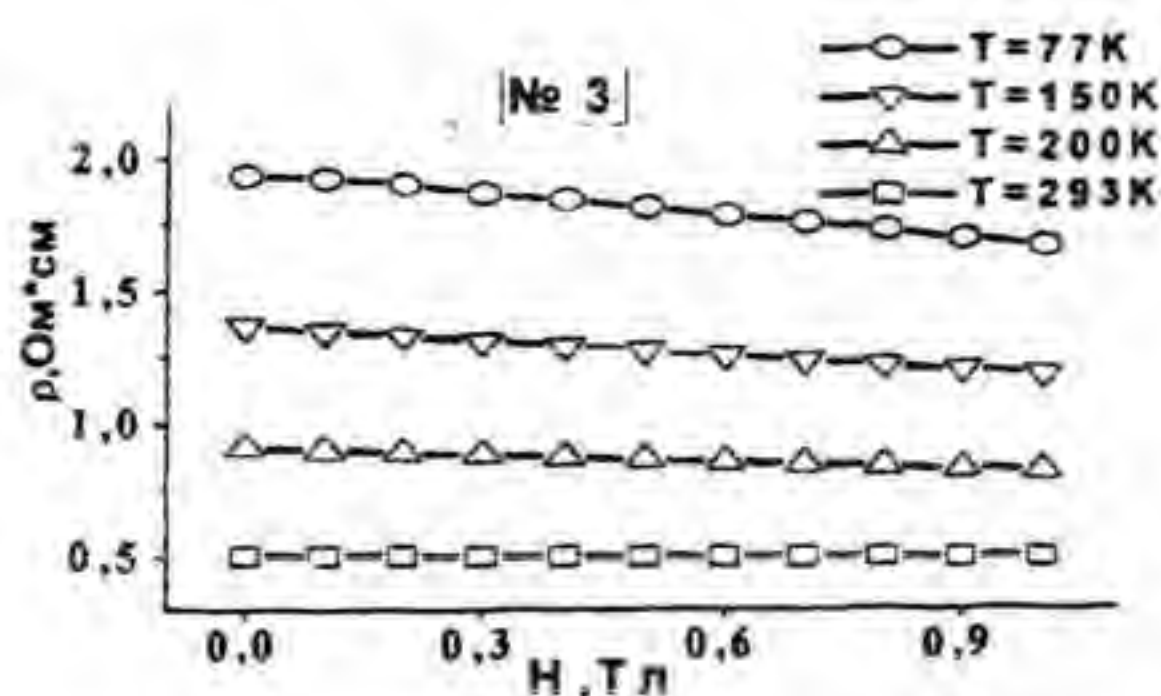
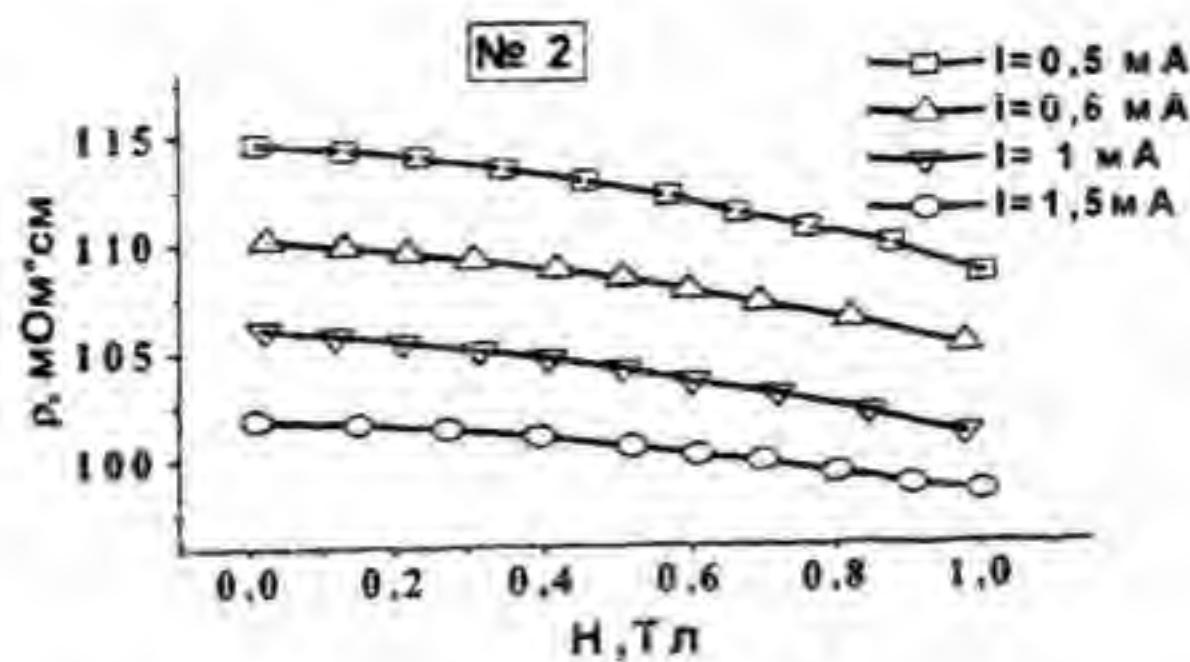


Рис. 1. Залежності питомого опору від магнітного поля при стабілізованому струмі 100 мкА для різних температур.

Дослідження питомого опору відбувалось лише при декількох характерних сталих значеннях температури, оскільки аналіз цих залежностей не є метою даної роботи.



а)

Рис. 2 Залежність питомого опору від магнітного поля при різних значеннях стабілізованого струму при кімнатній (а) та при азотній (б) температурі.

У досліджуваних нами температурних діапазонах спостерігаються нелінійні вольт-амперні характеристики, причому нелінійність збільшується при пониженні температури.

Нелінійні вольт-амперні характеристики в зразках заміщених манганітів зазвичай

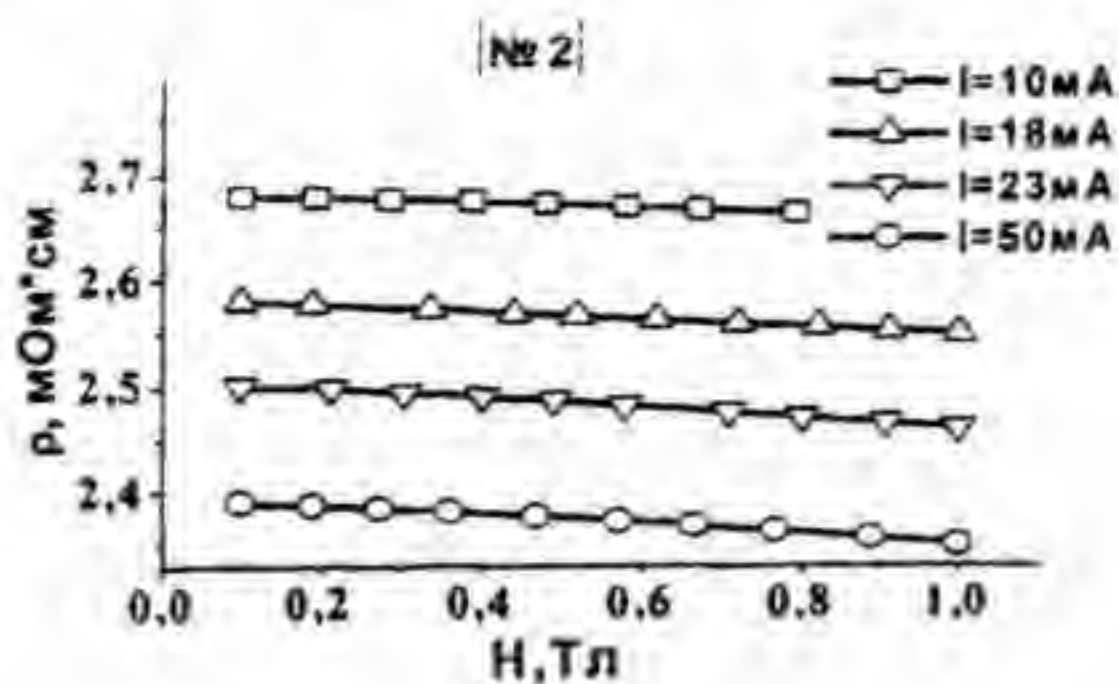
Наведені графіки показують, що для всіх зразків характерним є зменшення опору зі збільшенням поля.

При зміні орієнтації зразків в магнітному полі або зміні напрямку струму, що протікає через зразок, також відбувається незначна зміна опору (порядку 1-2% для різних зразків), причому якщо змінити орієнтацію плівки в полі то зміна опору відбувається практично миттєво, другий процес є дещо інерційним ($t_{\text{зміни}} \sim 20\text{с}$).

Питомий опір плівок як функція магнітного поля при різних значеннях сили струму (I) показано на рис.2.

Як видно, має місце значний вплив струму на провідність зразків, а саме при збільшенні густини струму плівка переходить у більш провідний стан.

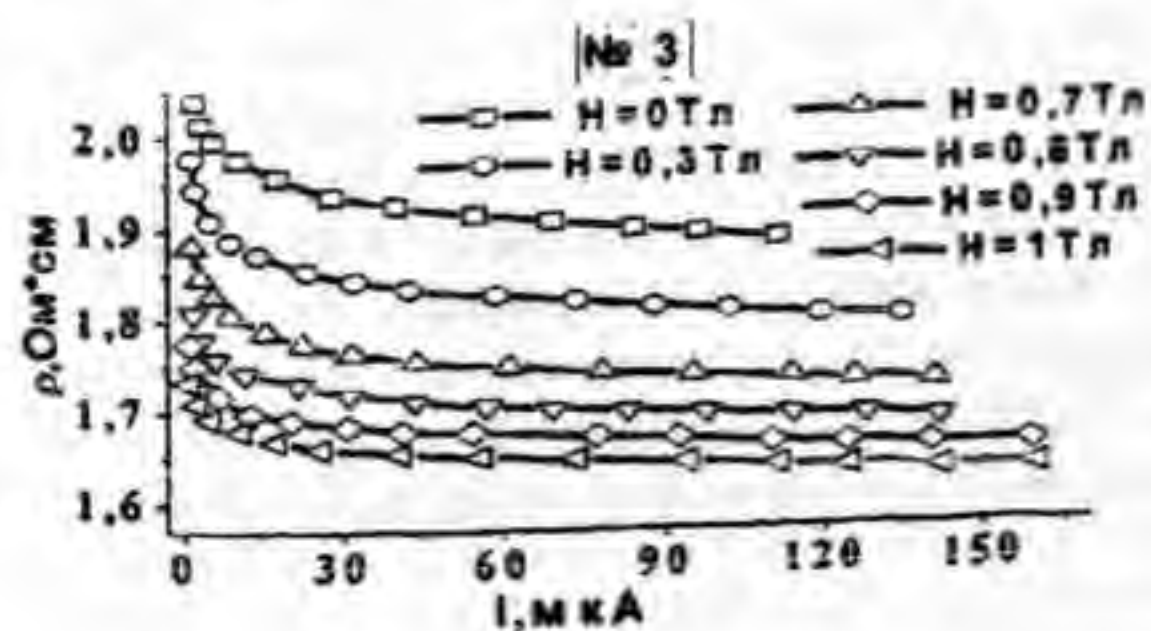
Більш детальні результати дослідження цього ефекту представлені на рис. 3



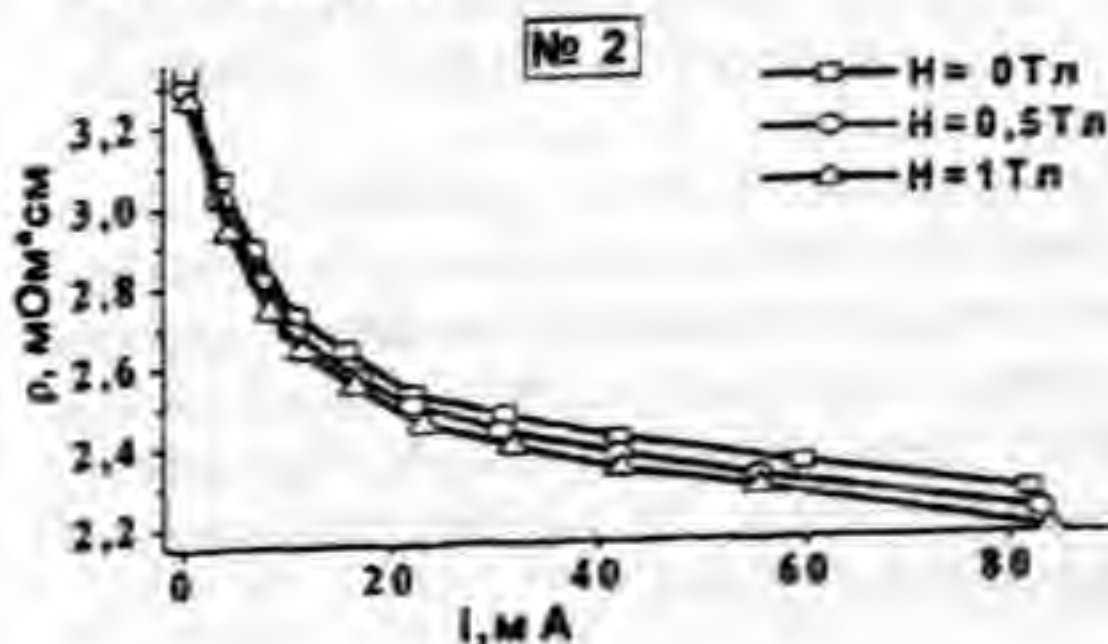
б)

пов'язують з тунелюванням носіїв заряду через ізолюючі або слабо провідні бар'єри.

Отримані результати продемонстрували для всіх трьох зразків значне збільшення опору при зменшенні струму, особливо при малих значеннях струму.



а)



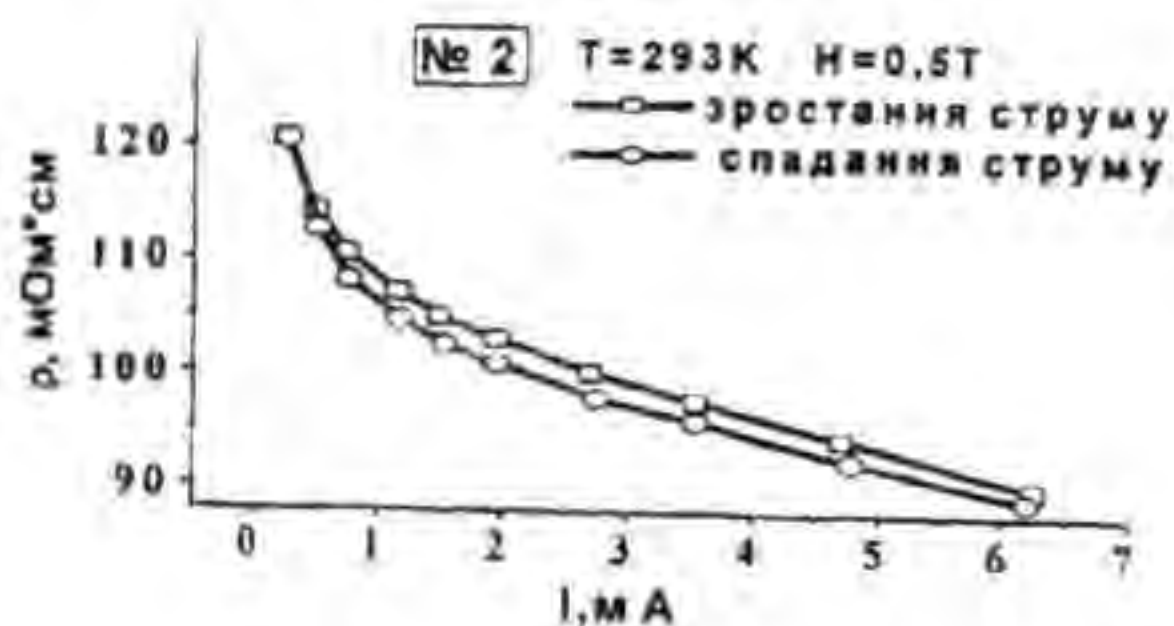
б)

Рис. 3. Залежність опору від сили протікаючого струму для різних магнітних полів при азотній температурі.

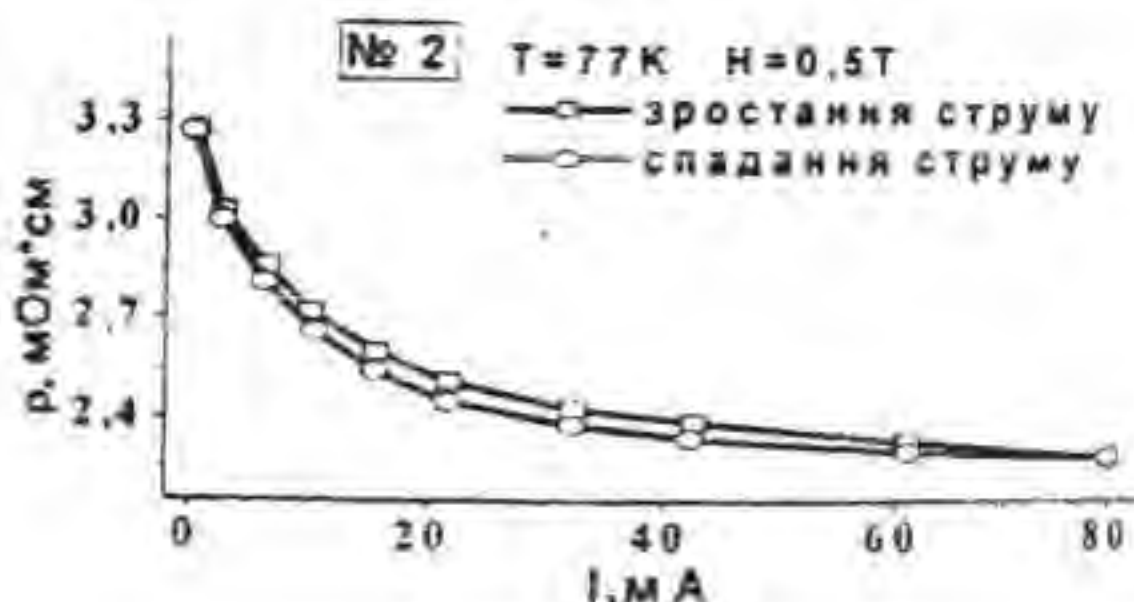
Особливо цікавою є залежність величини провідності від напрямку зміни струму, що протікає через зразок. Спочатку струм збільшували до певного значення, потім зменшували до нуля. При цьому на шляху

зменшення струму спостерігалось покращення провідності, що наведено на рис.4.

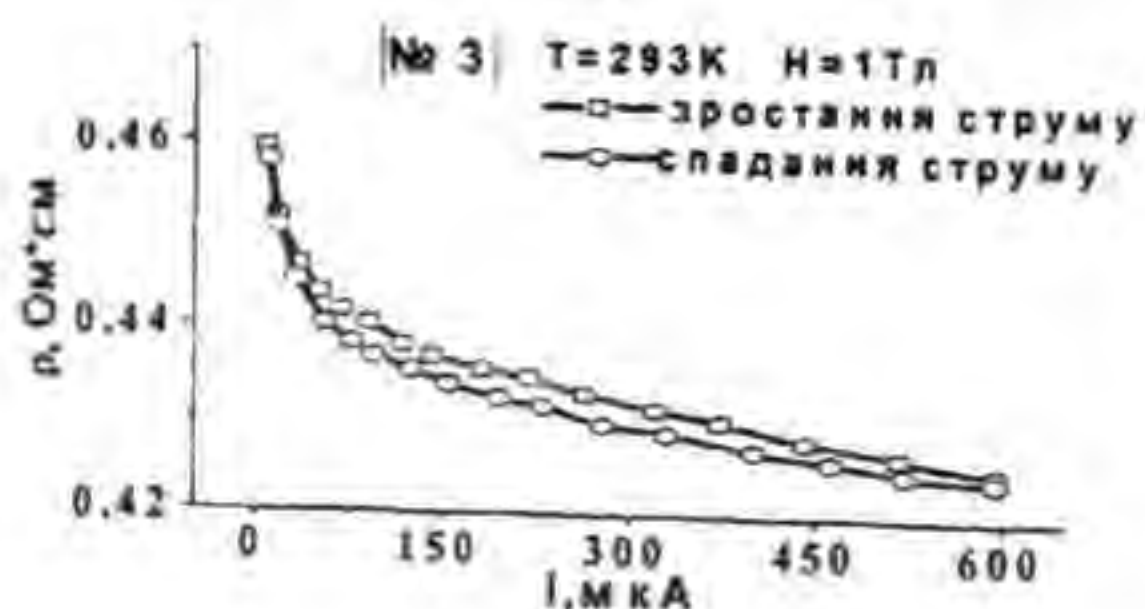
Для першого зразка цей ефект має зовсім малий порядок тому і не наводиться.



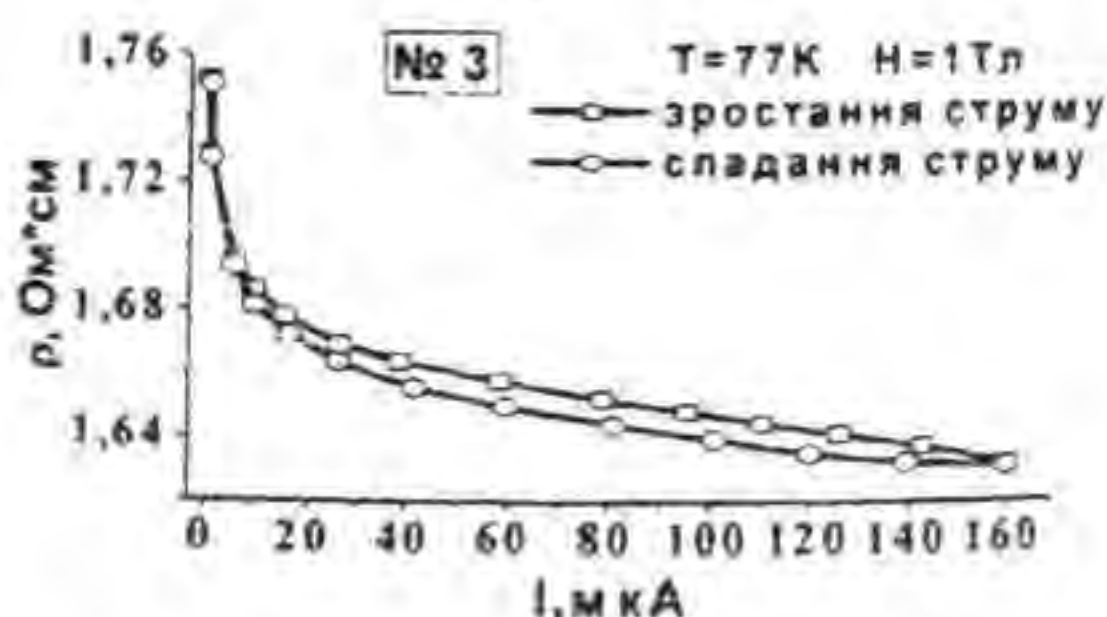
а)



б)



в)



г)

Рис. 4 Зміна опору в залежності від зміни напрямку струму при кімнатній (а,в) та азотній (б,г) температурі.

Такі експериментальні дані мають логічне пояснення, якщо в зразку співіснують фази з різним характером провідності, причому кількість кожної з фаз залежить від величини струму, що протікає через зразок.

Ефект гістерезису на вольт-амперних характеристиках мало змінюється в різних магнітних полях, змінюється лише абсолютна величина, а характер залежностей не міняється (досліджена область зміни поля 0 – 1 Тл). Цей ефект свідчить про складний характер залежності провідності від струму і потребує додаткових досліджень.

Таким чином в роботі досліджено вплив магнітних полів на вольт-амперні характеристики плівок манганітів. Показано, що вони є суттєво нелінійними, особливо в області малих значень величини сили струму. Виявлена залежність величини провідності від напрямку зміни струму, що протікає через зразок.

Колектив авторів висловлює щирі подяки Товстоліткіну А.І. за люб'язно надані зразки для досліджень.

Список використаних джерел

1. Погорелый А.Н., Товстолыткин А.И., Лежненко И.В., Матвиенко А.И., Кравчик В.П. Индуцированное током изменение характера проводимости в пленках $\text{La}_{0.775}\text{Sr}_{0.225}\text{MnO}_{3-\delta}$ // ФНТ. – 2003. – 29, №7. – С. 754-757.
2. Локтев В.М., Погорелов Ю.Г. Особенности физических свойств и колоссальное магнитосопротивление манганитов // ФНТ. – 2000. – 26, №3. – С. 171 – 193.
3. Borges R.P., Guichard W., Lunney J.G., Coey J.M.D. Magnetic and electric 'dead' layers in $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$ thin films // J. Appl. Phys. – 2001. – 89, №. 7. – P. 3868 – 3873.
4. Pogorily A.N., Tovstolytkin A.I., Lezhnenko I.V., Matviyenko A.I., Podyalovski D.I. Peculiar magnetic and magnetoresistive properties of $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_{3-\delta}$ polycrystalline thin films // Functional Materials. – 2003. – 10, №. 1. – P. 30-33.

Надійшла до редколегії 24.04.2009

УДК 681.325.5:533.9.082.5

Клещич М.М., студент, Фесенко С.О., студент,
Борецький В.Ф., аспірант, Веклич А.М., канд.
фіз.-мат. наук, доцент.

Використання мікроконтролера ATtiny 2313 для розгортки спектру монохроматора

Представлено результати розробки інтерфейсного пристрою на основі мікроконтролера ATtiny 2313 виробництва Atmel для розгортки спектру монохроматорів з кроковим двигуном ШДР-711. Проаналізовані принципи побудови схеми керування двигуна. Запропонований та реалізований оригінальний алгоритм програми мікроконтролера. Розглянута принципова можливість використання USB інтерфейсу для керування пристроєм за допомогою персонального комп'ютера.

Ключові слова: мікроконтролер, кроковий двигун, шина USB, спектроскопія, монохроматор.

*E-mail: van@univ.kiev.ua mail

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

1. Вступ

В емісійній та абсорбційній спектроскопії ще до цього часу широко використовуються спектральні комплекси типу КСВУ виробництва ЛОМО [2]. В залежності від задачі, яка вирішується, та від модифікації самого комплексу можливе використання в якості спектрального приладу монохроматорів типу МДР-12 або МДР-23. Спільним для обох типів монохроматорів є те, що для розгортки спектру (точніше – для обертання дифракційної ґратки цих приладів) використовується кроковий двигун ШДР-711. Для сканування спектру або вибору необхідної для вимірювань фіксованої довжини хвилі у складі комплексу було передбачене використання спеціального блоку керування, який з позицій сьогодення не є прийнятним як через застарілу матеріальну базу електронних компонентів, так і вкрай ненадійну роботу впродовж тривалого терміну експлуатації. Крім того, бажаною є можливість забезпечення керування роботою таких комплексів через сучасні стандартні порти введення-виведення IBM-сумісних персональних комп'ютерів (ПК).

На сьогоднішній день відомі альтернативні рішення цієї проблеми. Зокрема, можна згадати технічну реалізацію керування скануванням спектру та збором даних з використанням, у тому

М.М. Kleshich, student, S.O. Fesenko, student,
V.F. Boretskij, postgraduate student, A.N. Veklich*,
Ph.D., Associate Professor

Spectrum scanning of monochromator by microcontroller ATtiny 2313

The results of interface device developing on the base of Atmel microcontroller ATtiny 2313 are shown. This device is dedicated to the spectrum scanning of monochromators by the step motor. The design principles of motor control scheme are analyzed. The original algorithm of microcontroller program was suggested and realized. The principal performance availability of the USB interface for the purpose of the device control by the personal computer is considered.

Key Words: microcontroller, step motor, bus USB, spectroscopy, monochromator.

числі, шини ISA [6]. Проте, ця шина все рідше використовується у сучасних материнських платах комп'ютерів і тому не виглядає перспективною. Саме через цю обставину можна віддати перевагу, зокрема, шині USB.

Відомі також технічні рішення керування виконавчими механізмами типу крокових двигунів за допомогою спеціалізованих мікроконтролерів [7]. Проте, очевидним недоліком їх є відносно велика вартість. Тому схемно-технічні рішення з використанням більш універсальних (а тому порівняно недорогих) мікроконтролерів, зокрема, типу PIC16F84 виробництва MicroCHIP є більш привабливими [3, 4].

Відомі також і рішення на основі інших контролерів, які забезпечують, зокрема, гнучкість у керуванні швидкістю обертання [5]. Однак, на наш погляд, все ж таки доцільнішим є використання універсальних мікроконтролерів виробництва Atmel, для підтримки яких ґрунтовно розроблене і перебуває у вільному доступі програмне забезпечення (як для програмування власне контролерів, так і драйверів конкретних пристроїв) [1, 8]. Крім того, порівняно просто може бути розроблене та виготовлене для такого типу контролерів інтерфейсне обладнання з використанням USB порту.

Метою даної роботи є розробка інтерфейсного пристрою на основі мікроконтролерів ATtiny 2313 виробництва Atmel для розгортки спектру монохроматорів з кроковим двигуном ШДР-711. Передбачається можливість керування та обмін даними з IBM-сумісним персональним комп'ютером через USB порт.

2. Особливості технічної реалізації керування кроковим двигуном

В цій роботі реалізовано інтерфейс керування кроковим 4-фазним двигуном ШДР-711, номінальна частота відпрацювання кроків якого становить 400 Гц. Кількість кроків на один оберт – 120. На рис. 1 показана схема увімкнення електродвигуна. L1, L3 та L2, L4 – пари його робочих обмоток, які мають один спільний вивід – напруга живлення +8 В (номінальне значення: +10 В). Ці пари абсолютно рівнозначні (опір обмотки 2 Ом) і, якщо поміняти їх місцями, зміниться лише напрямок обертання. Напрямок зміниться також якщо поміняти місцями виводи однієї пари. Для того, щоб двигун почав обертатися (здійснювати циклічне крокове переміщення) необхідно організувати на його виводах певну часову послідовність зміни напруги. Для реалізації такої строго визначеної

послідовності (її програмування та формування) логічно скористатися перевагами мікроконтролера. Зокрема, на схемі показаний такий пристрій D1 – ATtiny 2313.

Характеристики мікроконтролера ATtiny 2313:

- Мікросхема ATtiny 2313 є восьмирозрядним мікроконтролером із внутрішньою програмованою Flash-пам'яттю розміром 2 Кбайт.
- AVR RISC архітектура.
- 32 восьмирозрядних регістра загального призначення.
- Робоча тактова частота зовнішнього генератора 11.0592 МГц (Q1).
- Корпус PDIP – 20 контактів.
- Напруга живлення : +5 В.

В даній схемі порт В (вихід, розряди 0-3) використовується для комутації транзисторними ключами VT1-VT4 (КТ 829 Б) обмоток двигуна; порт D (вхід, розряд 0) – для переключення (S1) напрямку обертання двигуна. В схемі також використані елементи: діоди VD1-VD4 (КД 213 А), резистори R1-R4 (1,7 кОм) та конденсатори C1-C2 (22 пкФ).

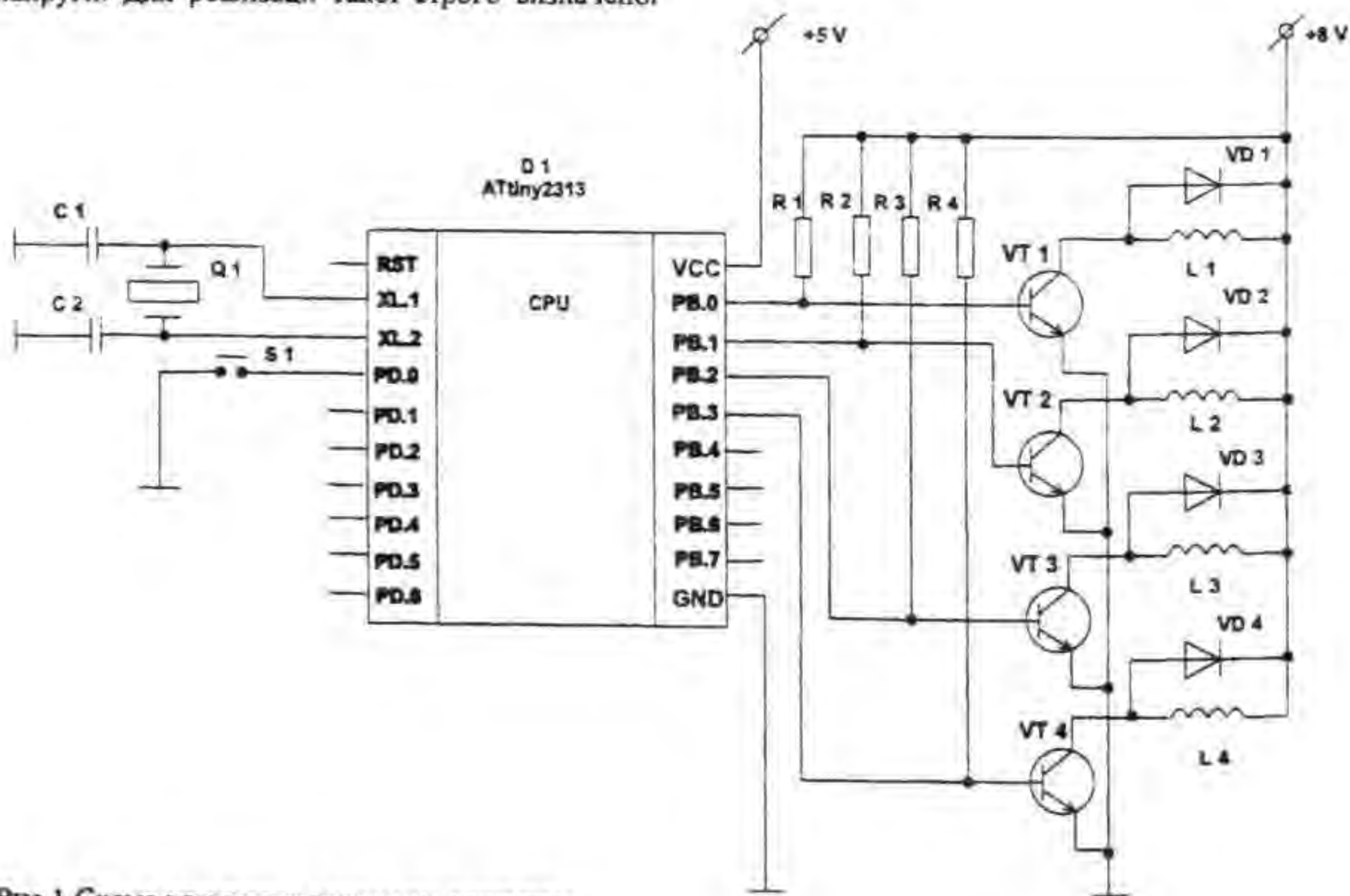


Рис.1 Схема керування кроковим двигуном

Таким чином, залишилось розглянути специфіку формування та програмування послі-

довності зміни напруги керування кроковим двигуном за допомогою мікроконтролера.

3. Особливості розробки алгоритму керування кроковим двигуном

Ідея запропонованого до виконання алгоритму полягала в наступному:

- передбачити можливість змінювати швидкість обертання двигуна (частоту комутації обмоток двигуна) зміною тактової частоти (або періоду T) меандру (рис.2). Для цього використовується лічильник таймера, який дозволяє мікроконтролеру формувати часові проміжки, визначені мінімальними (bottom) та максимальними (top) заданими наперед числами (у нашому випадку – 0 та f_r / $\max=255$), відповідно);
- передбачити можливість змінювати фазу живлення різних пар обмоток (фазу комутації обмоток двигуна) зміною затримки t між меандрами, які генеруються для цих пар мікроконтролером (рис.2). Для цього знову ж використовується лічильник, який надає можливість таймеру через інший канал формувати часовий проміжок, визначений тепер уже іншим максимальним, заданим наперед числом (у нашому випадку f_z);
- керування значеннями напруги (у меандрах), які подаються з вихідного порту мікроконтролера на різні пари обмоток двигуна PORTB0, PORTB2, та PORTB1, PORTB3, покласти на процедури обробки перериваннями (14 та 15).

Для роботи програми використовуються такі вбудовані периферійні пристрої та регістри:

- регістри загального призначення R16-R18;
- регістри восьмирозрядного таймера/лічильника T0:
 - регістри збігу OCR0A, OCR0B;
 - лічильний регістр TCNT0;
 - регістри керування TCCR0A, TCCR0B;
 - регістр маски переривань TIMSK;
- порти вводу-виводу:
 - регістри даних PORTB (восьмирозрядний порт B) та PORTD (семирозрядний порт D);
 - регістри напрямку передачі інформації DDRB (порт B) та DDRD (порт D);
- восьмирозрядний регістр вказівника стеку SPL;
- оперативно запам'ятовуючий пристрій (ОЗП): адреси комірок пам'яті 0x60, 0x61;

Таймер T0 в даній програмі працює наступним чином:

в регістри збігу OCR0A (канал A), OCR0B (канал B) записуємо константи f_r (частота комутації обмоток двигуна) та f_z (фаза комутації обмоток двигуна), відповідно (значення константи f_r завжди більше за f_z);

якщо значення лічильного регістра TCNT0, співпадає із вмістом OCR0A, то виникає переривання за вектором 15 (встановлення непарних розрядів (0, 2) порту B на виведення);

якщо значення лічильного регістра TCNT0, співпадає із вмістом OCR0B, то виникає переривання за вектором 14 (встановлення парних розрядів (1, 3) порту B на виведення);

Алгоритм роботи програми:

задаємо параметри роботи мікроконтролера:

порт B конфігуруємо на виведення (розряди 0-3);

порт D конфігуруємо на введення (розряд 0);

ініціалізація таймера T0;

таймер встановлюємо в режим роботи за збігом (CTC) у каналах A (визначає частоту переключення обмоток двигуна) та B (визначає зсув по фазі при переключенні обмоток двигуна);

робоча частота 11,0592 МГц (синхронізація від зовнішнього кварцового генератора);

коефіцієнт ділення робочої частоти 64;

дозволяємо переривання за вектором 15 (адреса 0x000E - переривання за збігом таймера T0, канал A);

дозволяємо переривання за вектором 14 (адреса 0x000D - переривання за збігом таймера T0, канал B);

визначаємо константи для каналів A (f_r) та B (f_z);

ініціалізація стека (вершину встановлюємо в максимальну адресу зі значенням RAMEND);

вимикаємо компаратор;

визначаємо константи const1 та const2 для переключення непарних (розряди 0, 2 порту B) та парних (розряди 1, 3 порту B) обмоток двигуна;

основна програма:

перехід на нескінченний цикл;

якщо є переривання, то переходимо на відповідний вектор у таблиці переривань;

процедури обробки переривань таймера T0:

вектор 15:

читаємо розряд 0 порту D (визначаємо положення кнопки);

якщо 0:

перевірка const1 (розряд 0):

якщо 0:

встановлюємо розряди (0, 2) порту B в 0 та 1 відповідно;

переставляємо тетради у const1;

якщо 1:

встановлюємо розряди (0, 2) порту B в 1 та 0 відповідно;

переставляємо тетради у const1;

якщо 1:

перевірка const1 (розряд 0):

якщо 0:
встановлюємо розряди (0, 2) порту В в 1 та 0;
переставляємо тетради у const1;
якщо 1:
встановлюємо розряди (0, 2) порту В в 0 та 1;
переставляємо тетради у const1;
вектор 14: (аналогічно до вектора 15,
замінюючи const1 на const2, а розряди порту В (0,
2) на (1, 3))
читаємо розряд 0 порту D (визначаємо поло-
ження кнопки):
якщо 0:
перевірка const2 (розряд 0):
якщо 0:
встановлюємо розряди (1, 3) порту В в 0 та
1 відповідно;

переставляємо тетради у const2;
якщо 1:
встановлюємо розряди (1, 3) порту В в 1 та
0 відповідно;
переставляємо тетради у const2;
якщо 1:
перевірка const2 (розряд 0):
якщо 0:
встановлюємо розряди (1, 3) порту В в 1 та
0 відповідно;
переставляємо тетради у const2;
якщо 1:
встановлюємо розряди (1, 3) порту В в 0 та
1 відповідно;
переставляємо тетради у const2;

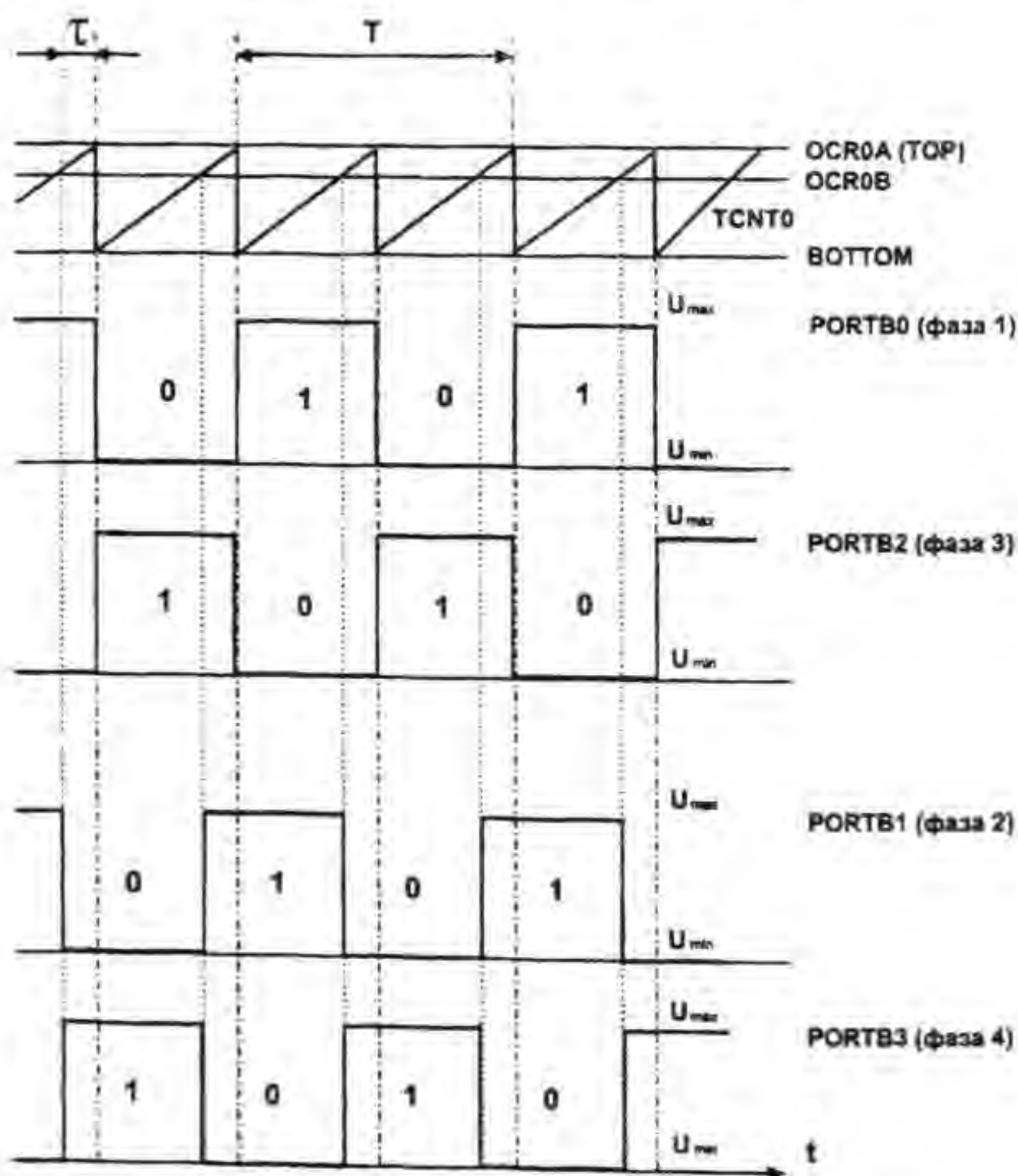


Рис.2 Часова діаграма послідовності зміни напруги керування кроковим двигуном

Таким чином, змінюючи константи f_r та f_z , можна керувати скануванням спектру монохроматора в достатньо широкому діапазоні швидкостей з можливістю контролю плавного обертання двигуна. Крім того, змінюючи константи const1 та const2 (початкові значення –

(XXX0XXX1)_в, можна одержати необхідно часову послідовність імпульсів із зсувом фаз.

На наступному етапі передбачено доповнити цей алгоритм та реалізувати схему інтерфейсу для керування та обміну даними з IBM-сумісним персональним комп'ютером через послідовний

USB порт. Для цього використовується існуючий у складі мікроконтролера ATtiny 2313 пристрій послідовної передачі інформації USART.

Крім того, передбачена можливість ручного апаратного керування режимами роботи крокового двигуна (швидкість та напрямок обертання). У цьому випадку інтерфейсний пристрій буде доповнений додатковими елементами індикації.

4. Особливості програмування мікроконтролера

Більшість мікроконтролерів AVR підтримують два способи програмування: паралельний та послідовний. Кожен із способів програмування має свої переваги та недоліки. Так при послідовному способі програмування можливе внутрішньосхемне програмування, тобто програмування без вилучення контролера зі схеми. Проте при такому способі неможливо встановити біти захисту від зчитування та перезапису пам'яті програм та пам'яті констант. Від вказаних недоліків вільний паралельний спосіб програмування, проте у цьому випадку вимагається обов'язкове вилучення мікроконтролера із схеми.

Зараз існує багато програматорів у промисловому виконанні, які здатні запрограмувати мікроконтролер, як паралельним, так і послідовним способом, проте такі програматори мають порівняно велику вартість. Натомість, оскільки в даній роботі недоліки послідовного способу програмування були неважливі (конструкцією передбачений знімний варіант монтажу мікроконтролера), то для програму-

вання контролера було виготовлено відносно дешевий програматор (моделі STK200/300) [1, с. 324]. Цей пристрій підключається до ПК через LPT порт і містить буферну мікросхему SN74HC244N для захисту LPT порту від короткого замикання на його виході. З метою перевірки виготовленого програматора було складено просту схему [1, с. 117], а контролер був запрограмований тестовою програмою [1, с. 124]. Правильність роботи програми свідчила про коректну роботу програматора.

На наступному етапі мікроконтролер ATtiny 2313 був запрограмований згідно з розробленим алгоритмом. Тестування запропонованого інтерфейсного пристрою виконувалось керуванням розгортки спектру монохроматора МДР-23.

5. Висновки

Тестування інтерфейсного пристрою для керування розгортки спектру монохроматора з кроковим двигуном ШДР-711 підтвердило ефективність використання мікроконтролера ATtiny 2313.

Розроблений та реалізований оригінальний алгоритм програми мікроконтролера дозволяє гнучко керувати швидкістю та напрямком обертання крокового двигуна.

Запропонований інтерфейсний пристрій може бути рекомендований для керування та обміну даними з IBM-сумісним персональним комп'ютером через послідовний USB порт.

Список використаних джерел

1. Белов А.В. Самоучитель разработчика устройств на микроконтроллерах AVR. – СПб.: Наука и техника. – 2008. – 544 с.
2. Лебедева В.В. Техника оптической спектроскопии. – М.: Изд.-во МГУ. – 1986. – 352 с.
3. Яценков В.С. Микроконтроллеры Micro-SHIP. Практическое руководство – М: Горячая линия – Телеком. – 2002. – 296 с.
4. Пушкарёв О. Подключение шагового двигателя. – Омск, – 2008, – <http://www.mirmk.net/content/view/102/29>.
5. Чиа В.Ш. Компоненты и технологии. – 2004. – № 9. – С. 136-139.
6. Продукция НПЧП Терекс - автоматизация оборудования и научного эксперимента. – <http://www.terex.kiev.ua/products/eqautomatics.php>.
7. CNC Soft - контроллеры, шаговые двигатели, станки с ЧПУ. – <http://cnc-soft.spb.ru/products>.
8. Последние версии программного обеспечения от ATMEL. Оборудование от Корпорации ATMEL. – <http://www.atmel.ru>.

Надійшла до редколегії 21.04.09

характеристики фотон-фононної взаємодії, які формуються на нанofізичному рівні коливальними властивостями молекулярних комплексів аморфної серцевини волокон. Разом з цим, аморфний характер спектра ВКР підсилення, для якого характерні смуги з напівшириною до 100 см^{-1} і навіть більше, дозволяє природним чином реалізувати ширину смуги підсилення понад 10 ТГц .

Волоконні КР підсилювачі (ВКРП) з багатохвильовою накачкою дозволяють перекрити усю смугу частот $S+L$ діапазонів [8, 9]. Накачка кількома довжинами хвиль надає можливість розширити смугу підсилення впритул до теоретичної межі, що складає приблизно 12 ТГц [7]. Ця теоретична межа визначається тим, що профіль КР підсилення у волокнах на основі плавленого кварцу має зсув по частоті, який приблизно дорівнює 13 ТГц (440 см^{-1}).

Незважаючи на надзвичайну простоту конструкції КР підсилювача, при прямих розрахунках багатоканального підсилення ВКРП з кількома хвилями накачки стандартна система зв'язаних рівнянь [1, 8-9] ускладнюється настільки, що проблема точності визначення профілю підсилення сильно загострюється і виходить на перший план. Дійсно важко очікувати адекватних результатів моделювання, що спирається на сотні диференціальних рівнянь, в яких коефіцієнти зв'язку між взаємодіючими хвилями містять систематичну і часто досить значну похибку. Величина взаємодії між накачками та ступінь зв'язку між кожною з хвиль накачок з конкретною хвилею сигналу у процесі ВКР кількісно визначається величиною коефіцієнта КР підсилення. Цей параметр є ключовим для описання КР підсилення, а його неналежним вибором можна пояснити, на наш погляд, значні відхилення зроблених спроб моделювання ВКРП у порівнянні з експериментальними даними. Тому для практичного моделювання основних параметрів ВКРП навіть без використання рівнянь розповсюдження необхідною є розробка максимально точної теоретичної моделі для описання спектра ВКР в оптичних волокнах.

Спектроскопічне моделювання як спонтанного, так і вимушеного КР в одномодових волокнах є предметом досліджень на протязі значного часу. У роботі [14] представлені узагальнені результати теоретичного аналізу коефіцієнта КР підсилення при накачці від однієї довжини хвилі. Вперше спектроскопічна класифікація, декомпозиція на кілька коливальних мод та інтерпретація експериментальних спектрів спонтанного КР у стоксовій області була зроблена у роботі [10].

Після відновлення спектра КР підсилення із експериментального спектра спонтанного КР [11,12], була запропонована [13] декомпозиція профілю КР підсилення на кілька коливальних мод за допомогою моделі проміжного уширення.

У даній роботі запропонована спектроскопічна модель аналізу спектра КР підсилення на основі теорії фононних осциляторів. Ця модель є узагальненням розробленої нами раніше моделі актуальної смуги [17, 18], що розповсюджується на випадок урахування багатьох коливальних мод. Наводяться результати її застосування до проєктування ВКРП, що працюють за схемою з кількома довжинами хвиль накачки.

2. Теорія КР підсилення

У процесі комбінаційного розсіювання з частотою накачки ω_p молекулу, що розсіює можна розглядати як квантовий осцилятор з частотою ω_s , а динамічне рівняння для зміни кількості фотонів n_s на одиничній довжині z для стоксових фотонів $\omega_s = \omega_p - \omega$ має вигляд [14]

$$\frac{dn_s}{dz} = C \rho(\hbar\omega_s) \frac{\omega_p \omega_s}{\omega_s} \times \\ \times \{n_s(n_s + 1)n_p - n_s n_p n_p - n_s n_s + (n_s + 1)n_p\} \quad (1)$$

де $C = |\partial\alpha_y/\partial q_s|^2 (\pi\hbar^2)/(4V^2 N m \epsilon_s \epsilon_p v)$, $\partial\alpha_y/\partial q_s$ – диференціальна поляризованість, $\vec{q}$ – вектор зміщення, що відповідає i -ій компоненті дипольного моменту, $\hbar = h/2\pi$ – постійна Планка, N – кількість осциляторів в об'ємі взаємодії V , m – маса, що зв'язана з коливанням, ϵ_s , ϵ_p – діелектричні проникності для хвилі накачки та стоксової хвилі, відповідно, v – фазова швидкість стоксової хвилі.

Щільність станів $\rho(\hbar\omega_s)$ залежить від загасання, що супроводить молекулярний перехід від кінцевого стану до основного стану. Найчастіше для представлення функції $\rho(\hbar\omega_s)$ використовують лорентцеву форму лінії [2, 14].

Вважаючи, що фонони знаходяться у стані рівноваги при температурі T , значення величини заселеності n_s дорівнює числу фононів у стані теплової рівноваги $n_s = [\exp(\hbar\omega_s/k_B T) - 1]^{-1}$, де k_B – постійна Больцмана.

Динамічні рівняння (1) для фотонів, що розсіюні у стоксову область, містять чотири доданки, які звичайно називають відповідно вимушеним випромінюванням, вимушеним поглинанням, спонтанним поглинанням та спонтанним випромінюванням. Необхідно відзначити, що члени для спонтанного випромінювання стоксових фо-

тонів пропорційні n_v+1 , а для анти-стоксових – величині n_v і тому залежать від температури волокна. Залежність фононної щільності від величини КР зсуву як для стоксових, так і для анти-стоксових фононів при температурі $T=300\text{K}$ представлені на рис.1.



Рис.1. Залежність фононної щільності від хвильового числа КР зсуву як для стоксового, так і для анти-стоксового фотонів при $T=300\text{K}$

На відміну від спонтанних процесів вимушене поглинання та випромінювання не залежить від величини кількості фононів n_v і тому не залежить від температури. Крім цього, величина доданка, відповідного за спонтанне поглинання звичайно значно менше інших доданків і ним, як правило, нехтують.

У процесі ВКР частотні компоненти стоксового випромінювання розташовуються у межах лінії спонтанного випромінювання на коливальних модах матеріалу волокна. У відповідності до напівкласичного розгляду [14], ВКР описують за допомогою класичного виразу для поля оптичної хвилі, а молекулярну систему розглядають як гармонічний осцилятор, на який діє зовнішня сила. Ця модель встановлює зв'язок між диференційною поляризованістю $(\partial\alpha_i/\partial q_n)$ молекулярної ґратки і комплексною величиною нелінійної сприйнятливості $\chi^{(3)}$:

$$\chi_{nn}^{(3)}(\omega) = \frac{N}{12\pi\epsilon_0 V} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} \sum_n \frac{\partial\alpha_i}{\partial q_n} \left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_n} \right)^*, \quad (2)$$

де ω_0 – незміщена резонансна частота фонона, ω – кутова частота фонона, Γ – постійна загасання фонона, q_n – нормальна координата, що описує локальні зміщення, які виникають під дією зале-

жного від часу електричного поля, ϵ_0 – діелектрична стала.

Оскільки оптичні волокна виготовляють з кварцового скла, яке є аморфним матеріалом, то коефіцієнт КР підсилення на стоксовій частоті $\omega_s = \omega_p - \omega$ можна представити у вигляді [14]

$$g_R(\omega) = -\frac{3\omega_p}{\epsilon_0 c^2 n_p n_s} \frac{\text{Im}[\chi_{nn}^{(3)}(\omega) + \chi_{nn}^{(3)}(\omega)]}{2A_{eff}}. \quad (3)$$

Якщо не враховувати власної частотної залежності поляризованостей третього порядку, ми бачимо, що коефіцієнт підсилення g_R лінійно залежить від частоти стоксової хвилі, а власна частотна залежність визначається уявною частиною нелінійної поляризованості $\chi^{(3)}$, яка, в свою чергу, має резонансний знаменник фононного гармонічного осцилятора (див. співвідношення (2)).

Із співвідношень (2) та (3), нормовану функцію форми лінії $S(\nu)$ для КР підсилення на єдиному гармонічному осциляторі фонона можна представити у вигляді

$$S_\nu(\nu) = \frac{\nu_0 \nu \gamma^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \gamma^2}, \quad (4)$$

де ν – хвильові числа ($\nu_0 = \omega_p/2\pi c$, $\nu = \omega/2\pi c$ та $\gamma = \Gamma/2\pi c$), а γ приблизно дорівнює значенню повної ширини на половині висоти лінії (FWHM) для функції $S(\nu)$.

Для того, щоб спектроскопічна модель стала застосовною для достатньо складних спектрів, необхідно застосовувати модель із багатьма коливальними модами, вводячи відповідний набір апроксимуючих функцій для кожного з нормальних коливань, що проявляються у процесі ВКР.

3. Модель кількох коливальних мод

Спектр підсилення при комбінаційному розсіянні відновлювався із експериментального спектра спонтанного КР в [12] і він містить значну кількість коливальних мод, що вносять внески у КР підсилення у кварцових волокнах. Спектр спонтанного КР зображений на рис.2. В попередній роботі [10] описана аналітична методика розкладання спонтанного спектра КР в кварцових волокнах за допомогою набору гауссових компонент. У цьому розкладі здійснювалася строга прив'язка до спостережуваних особливостей спектра – положення максимумів, схилів та п'єдесталів, що наявні у спектрі. У результаті декомпозиції спектра отриманий набір відносних амплітуд та ширини використаних компонент. Виявлено, що за допомогою всього 10 компонент

область КР, що укладена між 0 та 900 см^{-1} можна апроксимувати з точністю не гірше, ніж 1%.

Як відмічалось у попередньому розділі, спектр КР підсилення відрізняється від спонтанного спектра КР (рис.2) на множник теплової заселеності основного стану $n_0 + 1$. Ця відмінність ґрунтується залежностями, що зображені на рис.1, які викликають розходження інтенсивності спектральних компонент в області малих зсувів частоти у низькочастотній області.

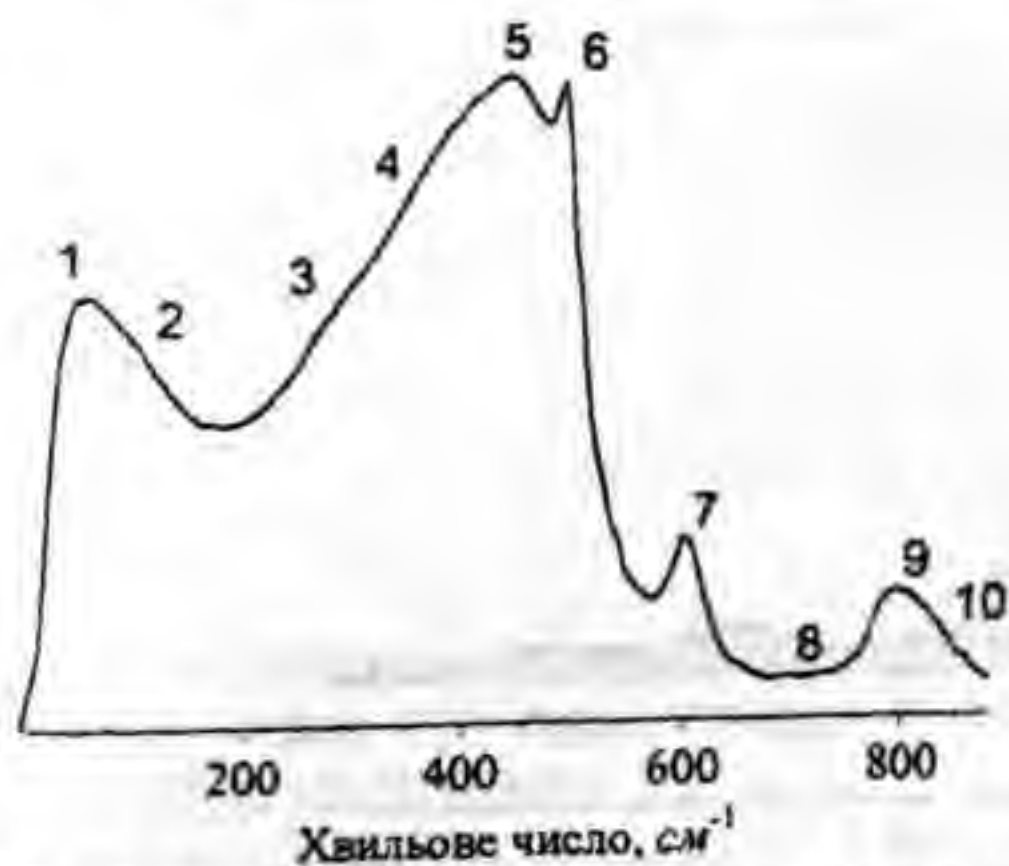


Рис.2. Спектр стоксового спонтанного випромінювання КР у волокнах з плавненого кварцу для області від 0 до 900 см^{-1} . Числами позначені особливості спектра – максимуми, схили та п'єдестали (оцифрований з роботи [10]).

Ми також відновили спектр КР підсилення із спектра стоксового спонтанного КР випромінювання (рис.2) і він зображений штриховою лінією на рис.3 спільно зі спектром КР підсилення з роботи [12] (суцільна лінія). Обидва спектри нормовані на одиницю в абсолютному максимумі КР з хвиловим числом 440 см^{-1} . Інтегральні інтенсивності обох спектрів співпадають з точністю $<1\%$ у стоксовій КР області між 0 і 900 см^{-1} . Різниця відносної інтенсивності спектральних компонент на 495, 810 і в області поблизу 100 см^{-1} ми пов'язуємо з можливими розходженнями у складі серцевини волокна.

Деякі з семи явно виражених піків на рис.3 є настільки асиметричними, що за грубою оцінкою вони можуть відповідати сумі приблизно 10–15 коливальних мод, кожна з яких є ансамблем гармонічних осциляторів і вносить свій внесок до КР спектра кварцового волокна.

Такий спектр не можна точно описати за допомогою простої функції з одним максимумом, апроксимація трикутником дає надто грубе наближення, а моделювання лише однією функцією

осцилятора або гауссовою функцією у ряді випадків може виявитися незадовільним, наприклад для обчислення коефіцієнтів зв'язаних рівнянь при їх числовому розв'язку. Вирішення цієї задачі потребує застосування декомпозиції КР контуру за допомогою кількох коливальних мод.

Кожна коливальна мода у плавненому кварці є надзвичайно широкою і може мати гауссовий профіль, якщо має місце неоднорідне розширення або ж залишатися у лінії, що характерна



Рис.3. Спектр КР підсилення з [12] (суцільна лінія) та відновлений спектр підсилення із спектра спонтанного випромінювання (СВ) КР (штрихова лінія), показаний на рис.2. Обидва спектри нормовані на одиницю у максимумі КР на 440 см^{-1} .

для осцилятора ("Лорентцевого" типу) у випадку однорідного розширення. Така спектроскопічна класифікація лежить в основі декомпозиції та інтерпретації експериментального спектра КР підсилення.

Моделльний аналіз спектра КР за допомогою гауссових профілів лінії заснований на наступному виразі

$$g_k(\omega) = \sum_{i=1}^{N_m} A_i \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_{i,j})^2}{\Gamma_i^2}\right], \quad (5)$$

де N_m – кількість мод, що використовуються для декомпозиції, які вибираються виходячи із спектрального діапазону, який підлягає до аналізу ($N_m=10$ в [10] для області $0-800\text{ см}^{-1}$ або $N_m=13$ в [13] для області $0-1500\text{ см}^{-1}$), $\omega_{i,j}$ – центральна частота i -ого гауссового профілю, параметр $\Gamma_i = \text{FWHM}_i / 2\sqrt{\ln 2} \approx 0,6 \cdot \text{FWHM}_i$, де FWHM_i – повна ширина на половині від максимуму для i -ого гауссового профілю, яку звичайно використовують у спектроскопії. Величини амплітуд A_i

спільно з ω_0 та Γ , ми використаємо в якості параметрів для нелінійної апроксимації.

В обґрунтування фізичного змісту процедури гауссової декомпозиції спектра КР підсилення треба відзначити той факт, що плавлений кварц становить собою аморфний матеріал. Тому кожний загасаючий осцилятор з резонансною частотою

вигляду (2) має довільну орієнтацію відносно своїх сусідів, які вносять довільні збурення у частоту цього осцилятора. Тому треба очікувати формування гауссового профілю для суперпозиції великої кількості вузьких спектральних максимумів з нормальним розподілом випадкових значень частот для цих осциляторів.

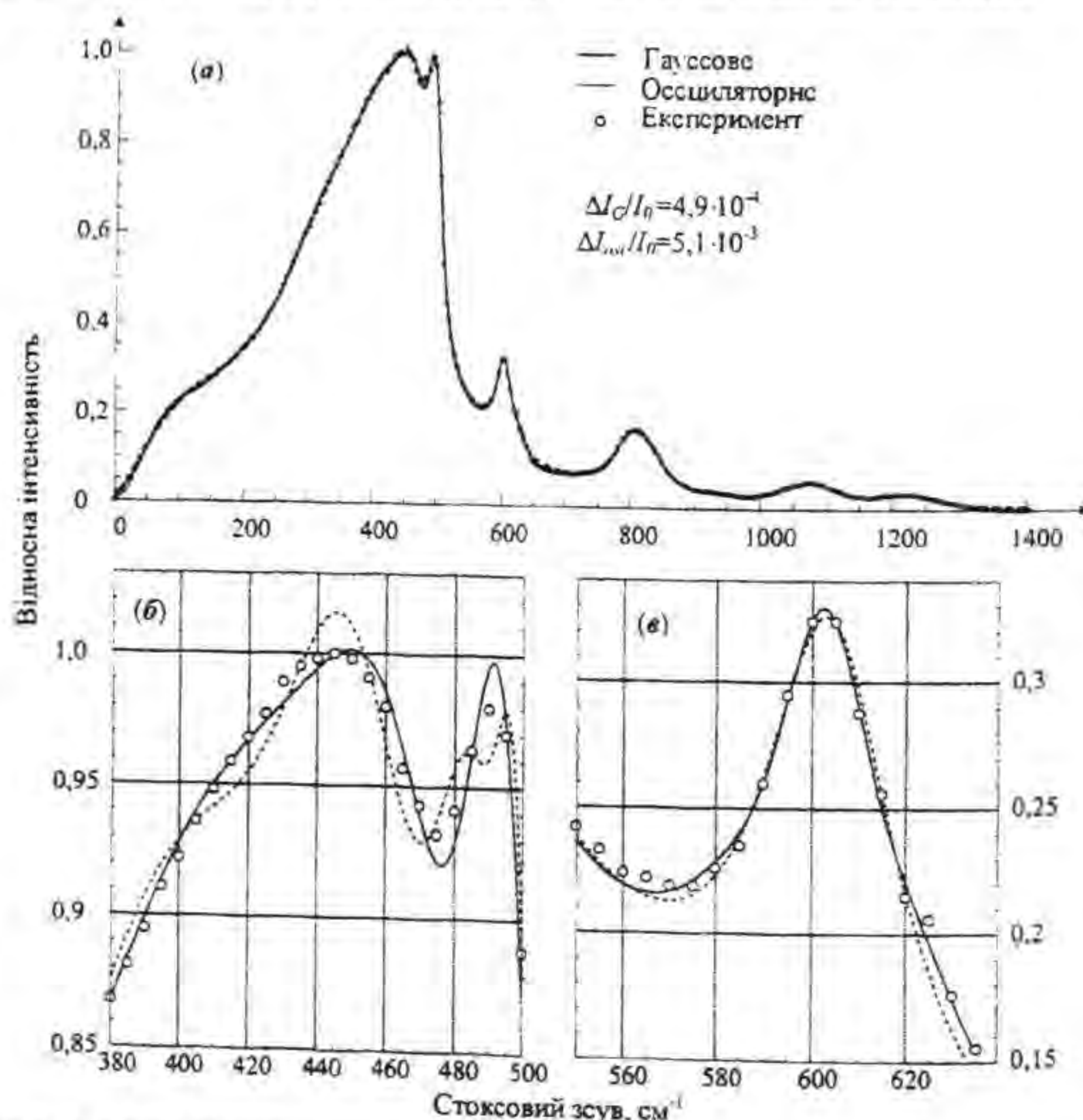


Рис.4. Результат нелінійної апроксимації профілю ВКР підсилення за гауссовими та осциляторними профілями у волокнах з чистого кварцу: (а)- область 0-1400 см^{-1} ; (б) область 380-500 см^{-1} ; (в) область 550-630 см^{-1}

На відміну від неоднорідного розширення у випадку однорідного розширення коливальних частот для декомпозиції складного спектрального контуру доцільно використати набір нормованих функцій фонових осциляторів, що введені у (4)

$$g_s(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\omega_{s,i}} \cdot \frac{\omega_{s,i} \gamma_i^2 \omega}{(\omega^2 - \omega_{s,i}^2)^2 + (\omega \gamma_i)^2} \quad (6)$$

Треба відзначити, що доцільність процедури декомпозиції має два аспекти. По-перше, це спектроскопічний аспект. Декомпозицію можна розглядати як можливий метод поділу щільності станів на цілком визначені внески. Як відмічалося у [10] смуги КР з частотами меншими за 1055 або 1180 см^{-1} відносяться, в основному, до фонових фундаментальних коливань, а область

багато фононних обертонів і складових тонів простирається, починаючи від лінії з частотою або 1180 cm^{-1} , або 1460 cm^{-1} до частоти 2600 cm^{-1} і вище. Залишається не цілком ясним чи є лінія 1180 cm^{-1} одно- або двох фононним станом.

По-друге, є прикладний аспект декомпозиції, при якому за мету ставиться побудова, по можливості найбільш простої функції $g_R(\omega)$, яка б відповідала експериментальному профілю КР підсилення з максимальною точністю. Оскільки досягнення найкращої відповідності ставилось нами як основна задача декомпозиції, то у даній роботі ми застосували комп'ютерну процедуру нелінійної апроксимації за методом Левенберга-Марквардта. Цей метод використовує алгоритм пошуку мінімуму суми найменших квадратів методом якнайшвидшого спуску до квадратичної мінімізації і він дозволяє одержати дуже гарні практичні результати при апроксимації спектра КР підсилення (рис.4).

Таблиця 1

Вихідні параметри декомпозиції спектра ВКР підсилення у кварцовому волокні за методом Левенберга-Марквардта

№	Гауссові (5)			Осциляторні (6)		
	A_i	ω_i [cm^{-1}]	Γ_i [cm^{-1}]	A_i	ω_i [cm^{-1}]	Γ_i [cm^{-1}]
1	0,105	79	49			
2	0,175	158	85	0,143	193	312
3	0,759	372	151	0,416	335	195
4	0,258	432	55	0,466	404	118
5	0,247	469	32	0,495	452	70
6	0,356	495	14	0,308	484	31
7	0,071	603	10	0,365	498	18
8	0,136	606	32	0,203	604	35
9	0,068	734	242			
10	0,11	810	42	0,144	810	73
11	0,048	1077	60	0,045	1079	89
12	0,032	1221	79	0,023	1224	74

Після накладання кривої, що розрахована за допомогою апроксимуючих функцій як гауссового вигляду, так і для функцій фононного осцилятора, на експериментальний профіль КР підсилення обидві криві виглядають як одна крива у будь-якому масштабі прийнятному для відображення всього спектра. На рис.4 б, в у збільшеному масштабі зображені області $380\text{--}500 \text{ cm}^{-1}$ та $550\text{--}630 \text{ cm}^{-1}$ відповідно, де відмічаються найбільші відхилення розрахунків від експериментальних точок на профілі ВКР підсилення.

Відмітимо, що переважна більшість експериментальних точок виміряного спектра знаходиться безпосередньо на кривих апроксимації неза-

лежно від вибору базисної функції (5) або (6). Причому відхилення від розрахункових кривих, що перевищують 1% від значення g_{Rmax} , мають лише окремі одиничні точки експериментального спектра. Тому апроксимацію можемо вважати практично точною, оскільки середньоквадратичне відхилення приблизно на порядок менше за типову точність вимірювань та оброки спектра.

Дійсно, відношення інтегральної інтенсивності складає $\Delta I_C/I_0=4,9\cdot 10^{-4}$ при гауссовій апроксимації, а при апроксимації функціями фононного осцилятора $\Delta I_{osc}/I_0=5,1\cdot 10^{-3}$, де $\Delta I_{C,osc} = I_{C,osc} - I_0$, а $I_{C,osc}$ та I_0 – інтегральні інтенсивності відповідних розрахункових та експериментального спектра КР підсилення. Всі інтегрування функціональних залежностей, що зображені на рис.4, виконувалися в області від 0 до 1400 cm^{-1} .

Схожа, але менш точна модель кількох коливальних мод з 13 компонентами використовувалась у роботі [13] для декомпозиції спектра вимушеного КР підсилення у волокнах із плазмонно-кварцу і для моделювання експериментального профілю КР підсилення. Апроксимація була побудована на моделі проміжного розширення із значно більш складним набором базових функцій і за рядом причин апроксимація виконувалась вручну.

Слід зауважити, що проміжна модель розширення, що приводить до виразів типу інтеграла згортки від функцій лорентцевого вигляду з функціями Гаусса, сама собою не призводить до кращої точності, що видно при безпосередньому порівнянні результатів [13] з нашими даними, що отримані шляхом нелінійної апроксимації за методом Левенберга-Марквардта. С точки зору практичних застосувань необхідність використання великої кількості додаткових параметрів апроксимації, як наслідок достатньо складних базових функцій, які не виражаються через елементарні функції, на наш погляд, навряд чи можна вважати виправданним.

Навпаки, високу точність при відносно простих аналітичних виразах для профілю КР підсилення ми можемо забезпечити у результаті застосування нелінійної апроксимації. У даному випадку аналітичні вирази є лінійною комбінацією з $N_{\omega}=12$ функцій Гаусса вигляду (5) або $N_{\omega}=10$ функцій фононного осцилятора вигляду (6) від однієї незалежної змінної ω та набором постійних параметрів. Ці $3N_{\omega}$ параметрів утворюються в результаті застосування процедури нелінійної апроксимації. Вони представлені у Таблиці 1 для декомпозиції експериментального профілю КР

підсилення (в області 0-1400 cm^{-1}) на 12 гауссових або 10 осциляторних коливальних мод.

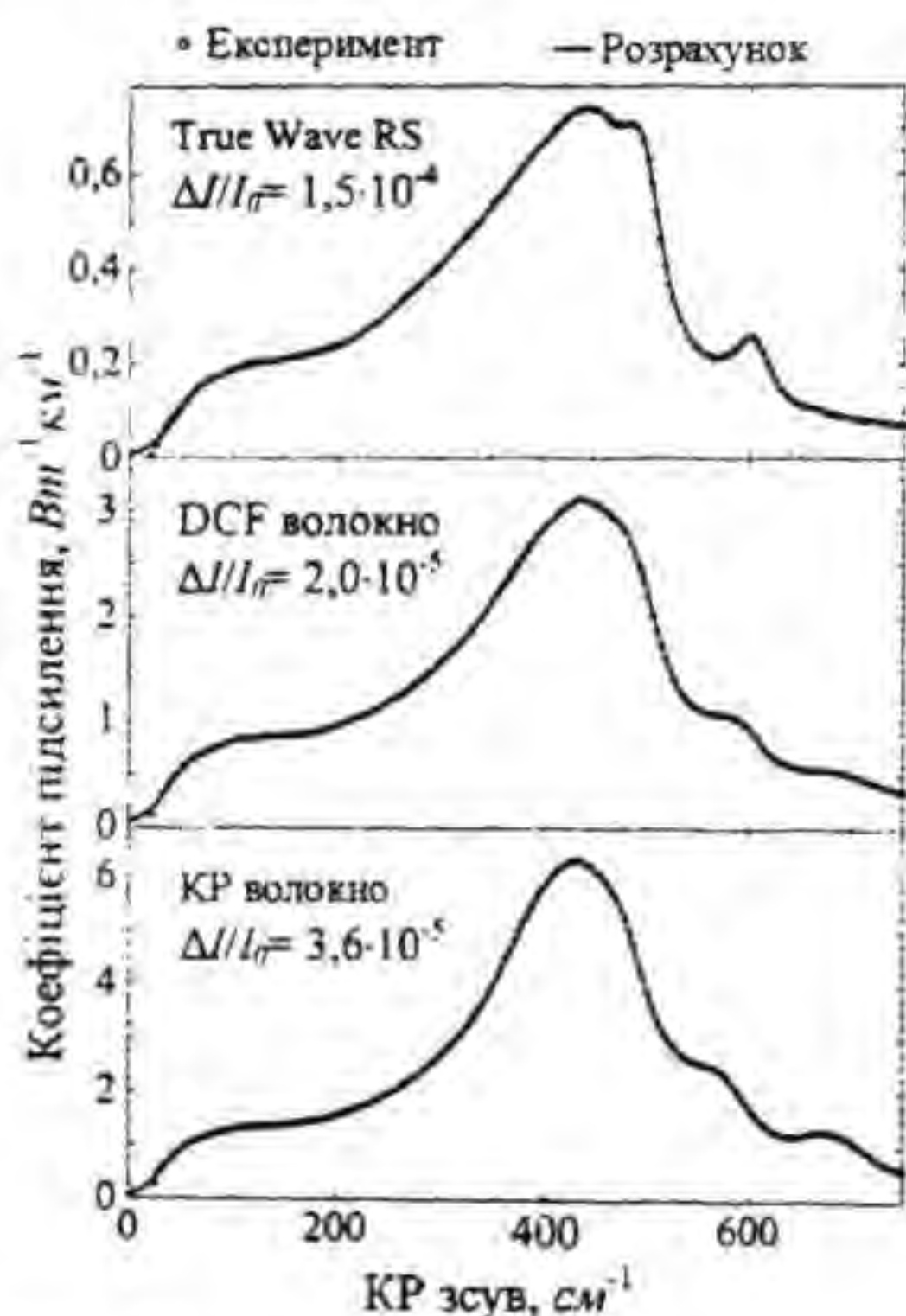


Рис.5. Результат нелінійної апроксимації профілю ВКР підсилення у волокнах на основі плавленого кварцу: (а) – волокно типу True Wave RSTM; (б) – волокно з компенсованою дисперсією (DCF); (в) – КР волокно з вмістом ~20% GeO₂. Експериментальні дані з роботи [14].

Зауважимо, що формальне використання осциляторних функцій є еквівалентним до припущення про однорідне розширення ліній ВКР. Апроксимація за допомогою осциляторних функцій, як бачимо може забезпечити цілком прийнятну для практики точність наближених розрахунків. Однак, отримані дані моделювання свідчать, що точність гауссової апроксимації в середньому більша, ніж на порядок краща за точність осциляторного наближення. Це можна розглядати як певний додатковий факт (хоча і непрямий) на користь неоднорідного механізму розширення ВКР профілю у кварцових волокнах. Тому для подальшого моделювання ми віддавали перевагу застосуванню гауссових функцій (5) як базису для декомпозиції спектрів ВКР інших кварцових волокон.

На рис.5 зображені профілі КР підсилення для трьох типів волокон, що отримані шляхом апрок-

симації (суцільна лінія) в точках дискретизації експериментального спектра КР підсилення (заштриховані точки) для гауссової апроксимації експериментальних профілів. Слід відзначити, що параметри, зведені до Таблиці 2 відповідають профілям, що показані на рис.5.

Для вимірної [14] області спектра ВКР 25 – 750 cm^{-1} отриманий нами оптимальний набір параметрів, які фігурують в таблиці 2, містить $N_m=10$ коливних мод для волокна типу True Wave RSTM та $N_m=8$ – для двох інших типів волокна. Про достатню точність апроксимації свідчать відносні відхилення Δ/I_0 , що обчислювались для кожного представленою волокна аналогічно до описаного випадку чистого кварцового волокна, але область інтегрування складала від 25 cm^{-1} до 750 cm^{-1} . Зокрема $\Delta/I_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ для волокна типу True Wave RSTM; $\Delta/I_0 = 2,0 \cdot 10^{-5}$ для волокна зі змщеною дисперсією (DCF волокно); $\Delta/I_0 = 3,6 \cdot 10^{-5}$ для спеціалізованого КР волокна, яке має максимальний коефіцієнт КР підсилення серед волокон на основі плавненого кварцу.

На практиці, реальний розподіл домішок у різних волокнах може давати деякі зміни інтенсивності слабких додаткових мод спектра, що може дещо змінювати профіль КР підсилення та відповідно призводить до зміни величин параметрів апроксимації для функції $g_R(\omega)$. Однак параметри наведені в таблиці 2 можна використати як вхідні параметри для декомпозиції спектрів таких модифікованих волокон, оскільки більшість одномодових волокон у плавненому кварці мають близькі параметри частот та напівширини ліній. Тоді при повторному застосуванні процедури апроксимації можна забезпечити досить швидку збіжність ітераційного процесу, а одержання нового набору оптимальних параметрів не викликає будь-яких утруднень.

4. Застосування

На основі нашої спектроскопічної моделі КР підсилення ми розраховали спектр підсиленого спонтанного випромінювання (ПСВ) для порівняння з експериментальними вимірюваннями залежності коефіцієнта шуму реального підсилювача від довжини хвилі [15].

На рис. 6 надані результати обчислення спектра ПСВ для КР підсилювача з 6 джерелами накачки, що працює у C + L діапазоні. Розрахунковий спектр ПСВ для конфігурації ВКРП з кількома накачками зображений для двох методів моделювання – на основі моделі з кількома коливальними модами (суцільна лінія) та моделі однієї актуальної моди (штрихова лінія). Зафарбова-

ними точками нанесені дані вимірювань ефективного коефіцієнта шуму з роботи [15] для КР підсилювача з 6 довжинами хвиль накачки. При експериментальних вимірюваннях і наших розрахунках були використані шість довжин хвиль,

а саме: 1428, 1445, 1466, 1480, 1494 та 1508 нм, причому потужності накачки відповідно складали 338, 215, 83, 30, 19 и 39 мВт.

Таблиця 2

Вихідні параметри гауссової апроксимації спектра ВКР підсилення для трьох найбільш поширених типів оптичних волокон

№ мо- ди	True Wave RS TM $g_{Rmax}=0,74 \text{ (Вт·км)}^{-1}$			DCF $g_{Rmax}=3,1 \text{ (Вт·км)}^{-1}$			Raman Fiber $g_{Rmax}=6,3 \text{ (Вт·км)}^{-1}$		
	A_i	ω_i [см ⁻¹]	Γ_i [см ⁻¹]	A_i	ω_i [см ⁻¹]	Γ_i [см ⁻¹]	A_i	ω_i [см ⁻¹]	Γ_i [см ⁻¹]
1	0,01	69,7	38,3	0,064	54,9	27,4	0,057	49,5	28,6
2	0,175	125,5	66,1	0,155	99,6	58,5	0,117	89,8	51,0
3	0,362	268,9	117,9	0,241	203,4	107,7	0,129	155,7	73,1
4	0,709	413,5	103,2	0,594	378,4	116,8	0,327	298,8	112,7
5	0,387	472,4	61,4	0,579	460,4	78,9	0,922	439,1	90,9
6	0,205	496,8	17,8	0,095	488,9	22,8	0,064	478,8	23,0
7	0,112	571,9	38,4	0,173	584,7	39,9	0,233	572,5	43,0
8	0,135	604,9	21,0						
9	0,104	622,6	59,5	0,170	671,7	111,2	0,195	672,6	80,1
10	0,096	722,2	107,5						

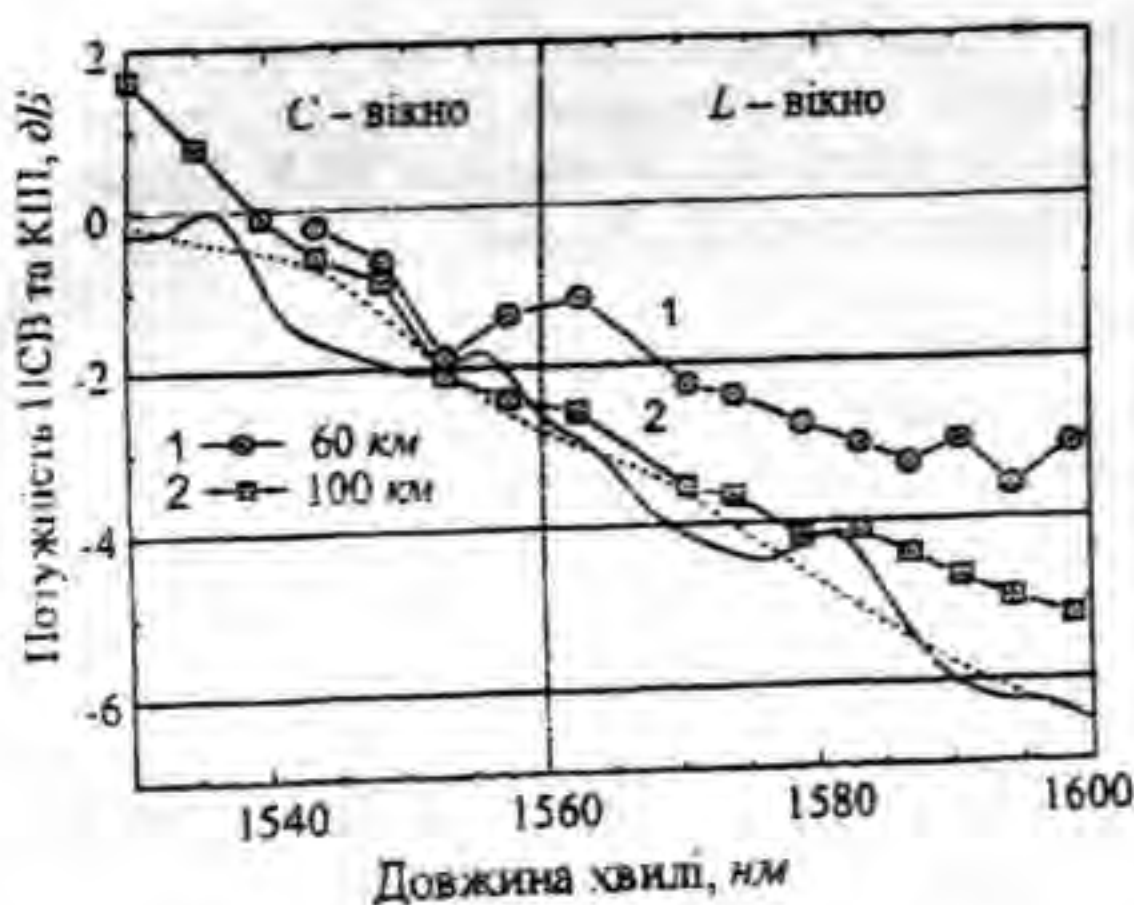


Рис. 6. Розрахунковий спектр ПСВ для ВКРП за схемою кількох накачок з моделі декількох коливальних мод (суцільна лінія) та моделі актуальної смуги (пунктир). Точки відповідають даним прямих вимірювань ефективного коефіцієнта шуму [15] для КР підсилювача з накачкою на 6 довжинах хвиль для C + L діапазонів.

На жаль, при вирівнюванні підсилення виникає значний спад майже 7 дБ у розподілі коефіцієнта шуму вздовж повної смуги C+L діапазонів. Цей спад визначається нерівномірним розподілом потужності накачки за довжинами хвиль і

добре описується як наведеною моделлю із кількома коливальними модами, так і попередньою моделлю актуальної смуги [17], як видно з рис.6. Обидві моделі дають близькі значення для ПСВ з майже рівною величиною спаду у смугі довжин хвиль.

Слід зауважити, що експериментальні дані, представлені на рис. 6, отримані у розподіленому КР підсилювачі, що працює в оптичному волокні типу True-Wave RS [15]. Для такого волокна точність апроксимації профілю КР підсилення за допомогою однієї коливальної моди не можна вважати задовільною. Однак непоганий збіг ходу обох розрахункових кривих для підсиленого спонтанного випромінювання, а також спостережувана відповідність їх нахилу до даних прямих вимірювань коефіцієнта шуму реального підсилювача свідчить про те, що рамки застосовності моделі актуальної смуги дещо ширші за ті, що спочатку можна було очікувати, і в певних межах її можна застосовувати для оцінки шумових параметрів КР підсилювачів та виконання інженерних розрахунків.

В інших випадках, наприклад при моделюванні дисперсійних параметрів ВКРП модель актуальної моди є неприйнятною. Правильне описання специфічних неоднорідностей профілю КР підсилення в області максимуму для реальних волокон можна отримати тільки за допомогою моделі кількох коливальних мод.

Дисперсійні параметри КР підсилення з одним джерелом накачки представлені на рис. 7 де залежність групової затримки підсилювача від частоти КР зсуву у ТГц зображена у смузі підсилення на рівні 3 дБ. Обидві апроксимації, як гауссова, так і за допомогою функцій фононного осцилятора дають близькі залежності групового часу затримки від частоти. Це є результатом гарної апроксимації вихідного профілю КР підсилення.

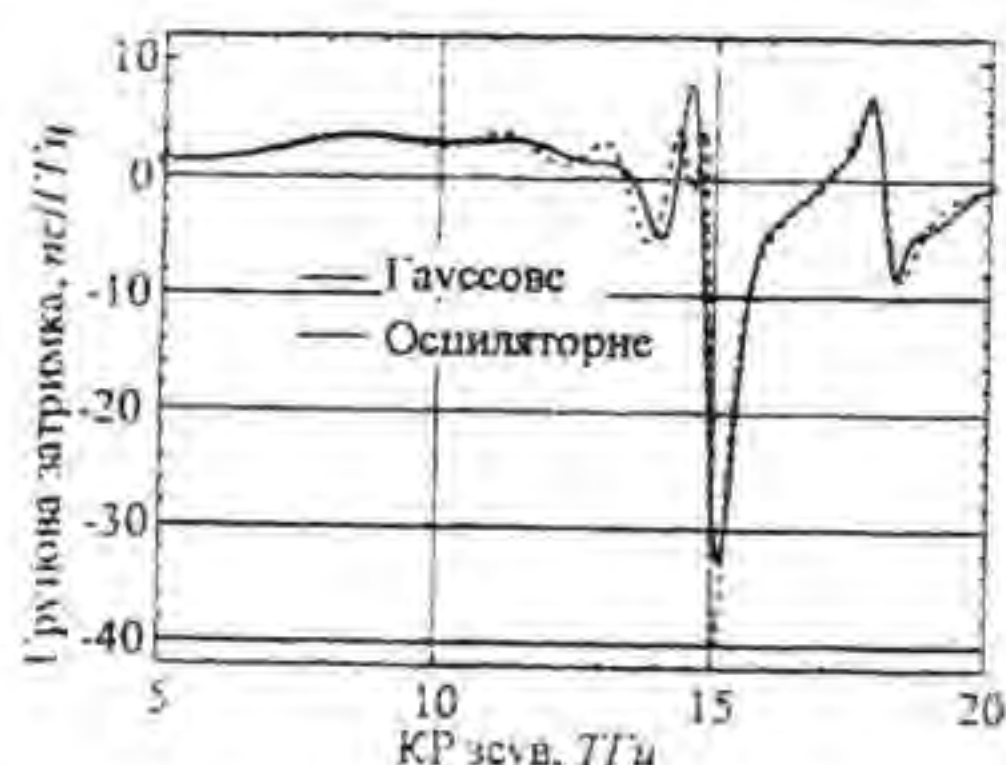


Рис. 7. Параметри дисперсії для КР підсилення у плавленому кварці, обчислені за функціями для профілю з кількома коливальними модами. Залежність групової затримки від частоти КР зсуву показана для 3-дБ смуги КР підсилення від однієї накачки.

ПСВ), що генерується сигналом на 1,56-мкм при 300 К. При наших обчисленнях спонтанних стоксових і анти-стоксових спектрів КР максимальне значення КР підсилення вважалось таким, що дорівнює $g_R=0,5 \text{ (Вт·км)}^{-1}$. Слід зауважити, що асиметрія спектра стоксового спонтанного випромінювання по відношенню до анти-стоксових спектральних компонент пов'язана з різними залежностями від теплової щільності фононів $n_s(\omega)$.

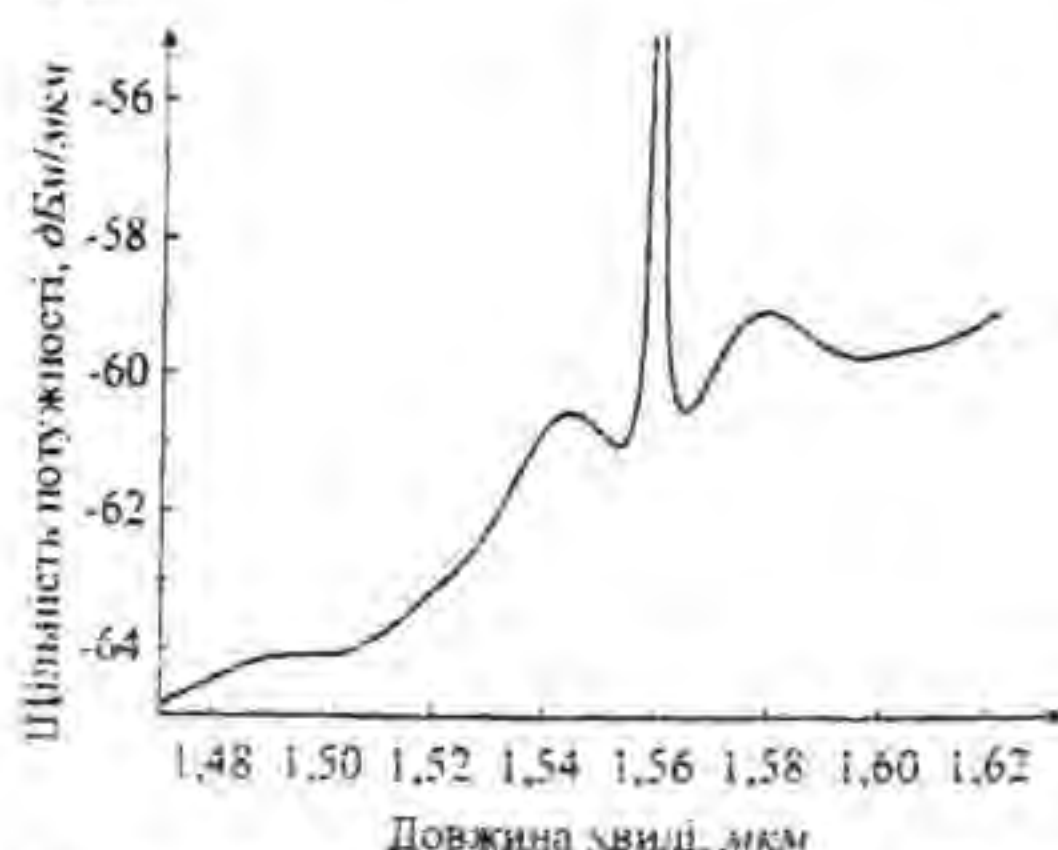


Рис. 8. Спектральна щільність оптичного шуму (стоксове та анти-стоксове ПСВ), що генерується сигналом на 1,56 мкм при 300 К. Пікове КР підсилення $g_R=0,5 \text{ (Вт·км)}^{-1}$

Рівень неоднорідності вихідного профілю КР підсилення значно зростає для дисперсійних параметрів КР підсилення за рахунок осциляцій першої похідної від функції, що має кілька екстремумів і описує спектр КР підсилення. Тому надзвичайно простий аналітичний вигляд апроксимуючих функцій (5) або (6) є істотною перевагою представленого методу, оскільки всі похідні від спектральної функції можна обчислити в аналітичному вигляді і вони відповідно легко можуть бути розраховані у числовому вигляді. Остання особливість може бути дуже корисною для оптимізації величини групової затримки у ВКРП з багато хвильовою накачкою та для створення відповідних пристроїв корекції.

В роботі [9] було показано, що анти-стоксове підсилене спонтанне випромінювання грає суттєву роль у шумових параметрах реальних ВКРП. За допомогою аналітичних виразів для спектра КР $g_R(\omega)$ можна легко одержати абсолютні значення як для стоксової, так і для анти-стоксової компонент спонтанного випромінювання.

На рис. 8 зображені спектральні щільності оптичного шуму (стоксового та анти-стоксового

Наслідком квантової теорії КР підсилення є те, що доданки для спонтанного випромінювання містять множник $n_s(\omega)+1$ для стоксового фонона і множник $n_s(\omega)$ для анти-стоксового фонона, відповідно (див рис.1). Результати нашого моделювання, що представлені на рис. 8 знаходяться у повній відповідності до прямих вимірювань спектральної щільності підсиленого спонтанного випромінювання [9].

Таким чином, запропоноване спектроскопічне моделювання профілю ВКР підсилення шляхом багатомодової декомпозиції спектра, надаючи практично точну апроксимацію експериментальних даних, може скласти надійну основу для обчислення головних параметрів ВКРП.

Висновки

У даній роботі запропонована спектроскопічна модель апроксимації складного ВКР спектра одномодових волокон, яка основана на теорії коефіцієнта КР підсилення в оптичних волокнах і декомпозиції спектра КР підсилення на кілька коливальних мод. Застосовуючи процедуру нелінійної апроксимації профілю КР підсилення, одержано досить прості аналітичні вирази, які з

високою точністю описують спостережуваний спектр КР підсилення у кварцових волокнах. Наведений оптимальний набір параметрів дозволяє побудувати аналітичну функцію від частоти для спектрів КР підсилення в найбільш поширених оптичних волокнах.

Спектроскопічна модель дозволяє просто і безпосередньо зробити кількісні оцінки для достатньо широкого набору параметрів КР підсилювачів, у тому числі: смуги підсилення та її нерівномірності, групового часу затримки, а також оцінити величину шумових параметрів підсилювача. Модель може застосовуватись для проєктування ВКРІІ в оптичних волокнах з відомим спектром ВКР довільної складності.

Список використаних джерел

1. Григорук В.І., Коротков П.А., Фелінський Г.С. Нелінійні та лазерні процеси в оптичних волокнах: підручник – Київ. Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2008. – 576с.
2. Лоудон Р. Квантовая теория света (пер. с англ.). – М.: „Мир”, 1976г. – 488с.
3. Dianov E.M., Prokhorov A.M. Medium-Power CW Raman Fiber Lasers // IEEE J. Sel. Top. Quan. Electr. – 2000. – 6, № 6. – P. 1022-1028.
4. Коротков П.А., Фелінський Г.С. Волоконні ВКР лазері неперервної дії // УФЖ. Огляди. – 2007 – 4, № 1. – с. 36-60.
5. Kim S. K., Chang S. H., Han J. S., Chu M. J., Lee J. H. Distributed fiber Raman amplifiers with localized loss // J. Lightwave Techn. – 2003. – 21, N 5. – P. 1286-1293.
6. Islan M. N. Raman Amplifiers for Telecommunications // IEEE J. Sel. Top. Quan. Electr. – 2002. – 8, N 3. – P. 548-559.
7. Perlin V. E., Winful H. G. On Distributed Raman Amplification for Ultrabroad-Band Long-Haul WDM Systems // J. Lightwave Techn. – 2002. – 20, N 3. – P. 409-416.
8. Kidorf H., Rottwitt K., Nissov M., Ma M., Rabbajaona E. Pump interactions in 100 nm bandwidth Raman amplifier // IEEE Photonics Technology Letters. – 1999. – 11, N 5. – P. 530-532.
9. Mandelbaum I., Bolshtyansky M. Raman Amplifier Model in Single-Model Optical Fiber // IEEE Photonics Technology Letters. – 2003. – 15, N 12. – P. 1704-1706.
10. Walrafen G. E., Krishnan P. N. Model analysis of the Raman spectrum from fused silica optical fibers // Appl. Opt. – 1982. – Vol. 21, N 3. – P. 359-360.
11. Stolen R. H., Gordon J. P., Tomlinson W. J., Haus H. A. Raman response function of silica-core fibers // J. Opt. Soc. Am. – 1989. – B6, N 6. – P. 1159-1166.
12. Stolen R. H., Lee C., Jain R. K. Development of the stimulated Raman spectrum in single-mode silica fibers // J. Opt. Soc. Am. – 1984. – B1, N4. – P. 652-657.
13. Hollenbeck D., Cantrell C.D. Multiple-vibrational-mode model for fiber-optic Raman gain spectrum and response function // J. Opt. Soc. Am. – 2002. – B19, N12. – P. 2886-2892.
14. Rottwitt K., Bromage J., Stentz A. J., Leng L., Lines M. E., Smith H. Scaling of the Raman Gain Coefficient: Applications to Germanosilicate Fibers // J. Lightwave Techn. – 2003. – 21, N 7. – P. 1652-1662.
15. Mermelstein M.D., Horn C., Radic S., Headley C. Six-wavelength Raman fibre laser for C- and L-band Raman amplification and dynamic gain flattening // Electr. Lett. – 2002. – 38, N13. – P. 636-638.
16. Bromage J., Rottwitt K., Lines M. E. A method to predict the Raman gain spectra of germanosilicate fibers with arbitrary index profiles // IEEE Photon. Technol. Lett. – 2002. – 14. – P. 24-26.
17. Felinskyi G. S., Korotkov P. A. Actual band model for design of optical fiber Raman amplifier with multiwave pumping // Proc. SPIE/Ukraine. – 2006. – 6, N1-6. – P.409-417.
18. Felinskyi G.S. Spectroscopic multiple-vibrational-modeling of Raman gain for FRA design // Proc SPIE/Ukraine. – 2006. – 6, N1-6. – P.418-426.

Надійшла до редколегії 21.04.09

УДК 519.9

Сутягіна Н.С., аспірант,
Котов М.М., провідний інженер,
Нікірін В.А., студент

Двоканальний сканер хвильового фронту для детектування локальних особливостей поверхні

У даній роботі розглядається двоканальний сканер хвильового фронту, який аналізує відбиту від тестового зразка хвилю в двох ортогональних лінійних поляризаціях, з метою розділення фазових зсувів, пов'язаних з неоднорідностями рельєфу та локальними змінами показника заломлення.

Ключові слова: сканер хвильового фронту, дефекти поверхні.

*E-mail: sunata@univ.kiev.ua, mkot@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Данилов В.В.

1. Вступ.

В сучасній метрології актуальною є задача неруйнівного дослідження форми поверхні. Вона знаходить практичне застосування для контролю площинності підкладок в електронній промисловості, для визначення аберацій компонентів оптичних систем, для визначення деформацій та напружень механічних конструкцій. При безконтактному тестуванні форма поверхні досліджуваного об'єкту знаходиться за формою відбитого від нього хвильового фронту. Завдяки розвитку адаптивної оптики набули поширення сенсори хвильового фронту. Як правило, сенсори визначають не безпосередньо фазу фронту, а його градієнт (тобто локальні нахили) або другу похідну (кривизну). Серед вказаного класу сенсорів хвильового фронту найбільш поширеним є сенсор Шека-Гартмана [1], який визначає фазу за її першою похідною, тобто за локальними нахилами хвильового фронту.

У попередніх роботах [2, 3] для дослідження особливостей поверхні було запропоновано використовувати сфокусований лазерний пучок, який після оптичного перетворення формує у площині сенсора сигнал, що є фазовим зображенням ділянки поверхні. При вимірюваннях за такою схемою досліджуваній хвильовий фронт є майже плоским, тому окрім високої роздільної здатності необхідна висока

N. S. Sutyagina, post graduate student,
M. M. Kotov, leading engineer,
V. A. Nikirin, student

Two-channelled wavefront scanner for determining surface features

The current paper considers the two-channelled wavefront scanner that analyze the wavefront, reflected from the tested sample, in two orthogonal linear polarizations for the purpose of separating the phase shifts concerned with the relief inhomogeneities and local changes of the surface refractive index.

Key Words: wavefront scanner, surface defects.

чутливість, яка сенсором не завжди може бути забезпечена. Одним з рішень цієї проблеми є використання сканера хвильового фронту [4, 5].

Зауважимо, що дослідження дефектів у мікроскопічному діапазоні може бути ускладнено тим що, фаза відбитого пучка може бути залежна не тільки від геометричних дефектів зразка, а й від локальних змін показника заломлення поверхні. Зрозуміло, що зміна показника заломлення буде вносити різний вклад в різницю набігу фаз між поляризаційними компонентами, таким чином буде можливість розділити особливості поверхні, пов'язані з рельєфними змінами, та особливості обумовлені зміною показника заломлення. Таким чином виявляється доцільним вимірювання форми хвильового фронту в різних поляризаціях з метою розрізнення вказаних вище особливостей поверхні.

Метою даної роботи було створення двоканального сканера хвильового фронту, який дозволяв би проводити дослідження об'єктів за формою відбитої від їх поверхні хвилі у двох ортогональних поляризаціях.

2. Оптична схема двоканального сканера хвильового фронту.

На рис. 1 представлено оптичну схему експериментальної установки. Пучок від гелій-неонового лазера ($\lambda=0,63$ мкм) проходить крізь

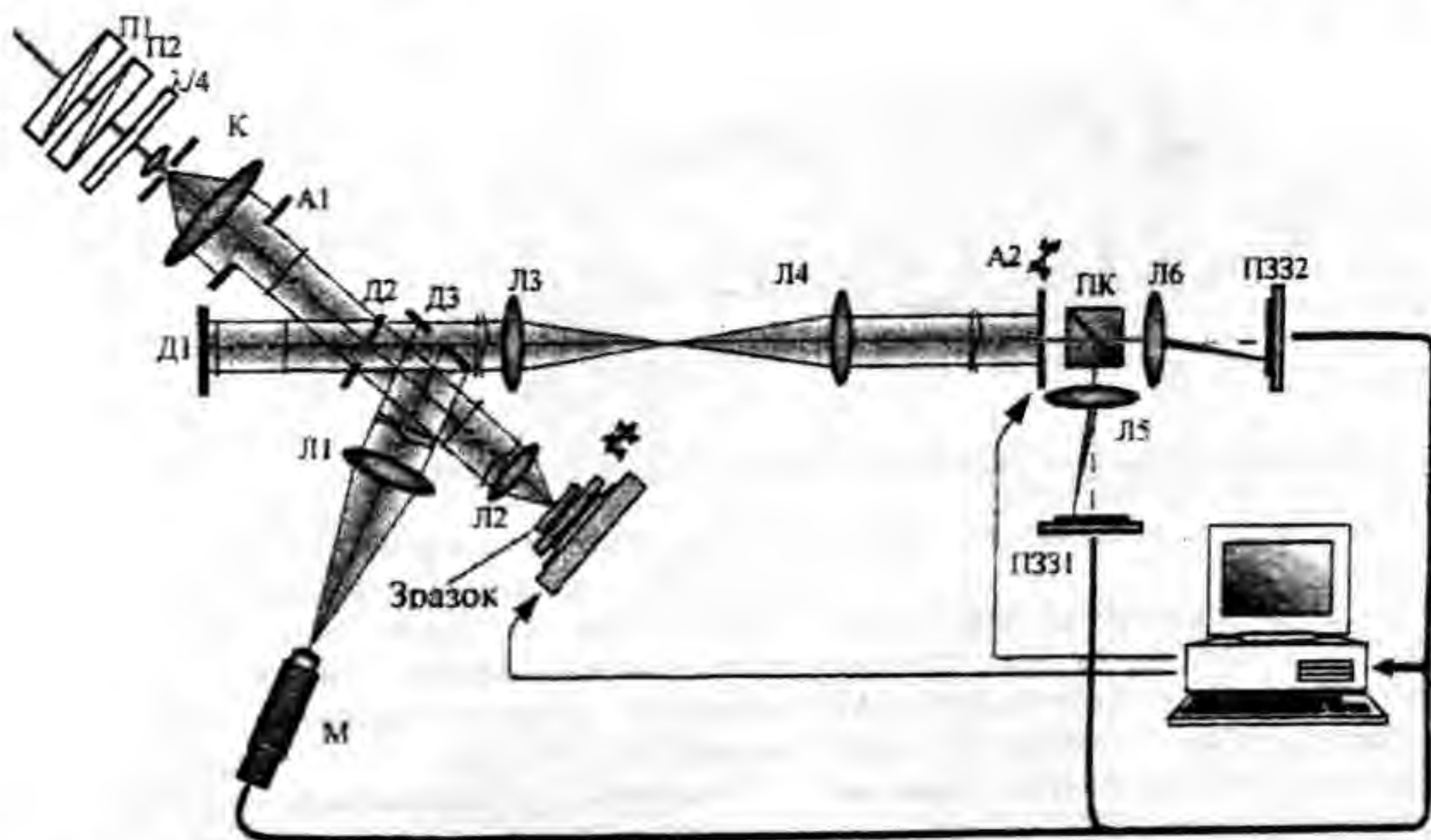


Рис. 1. Оптична схема двоканального сканера хвильового фронту.

поляризаційний атенюатор П1–П2, за допомогою якого може регулюватись його інтенсивність.

Лінійно поляризований лазерний пучок після проходження фазової платівки $\lambda/4$ набуває кругову поляризацію і у подальшому розширюється коліматором К. Діафрагмою А1 задається діаметр пучка, який далі падає на дзеркало Д2. Частина пучка відбивається і спрямовується на плоске дзеркало Д1 для формування еталонної (опорної) плоскої хвилі. Та частина пучка, що пройшла крізь Д2, фокусується на поверхні зразка мікрооб'єктивом Л2. Сам зразок закріплено на столику з комп'ютерним керуванням, який може рухатись у двох ортогональних напрямках у площині, перпендикулярній до осі пучка. Таким чином, існує можливість сканування поверхні зразка з кроком ~ 10 мкм на апертурі у кілька міліметрів. Система об'єктивів Л2–Л1 та напівпрозорих дзеркал Д2, Д3 переносить площину зразка у предметну площину мікроскопа М, за допомогою якого здійснюється візуальний контроль фокусування пучка на досліджуваній поверхні.

Відбитий від зразка пучок після повторного проходження через мікрооб'єктив Л2 дає об'єктну хвилю, яка за допомогою 4F системи довгофокусних об'єктивів Л3–Л4 та набору дзеркал Д2–Д4 переноситься у вимірювальну площину двоканального сканера хвильового фронту, який складається з керованої діафрагми А2, поляризаційного кубика ПК, об'єктивів Л5, Л6 та ПЗЗ-фотодетекторів ПЗ31, ПЗ32. Поляризаційний кубик ПК розділяє падаючий на

нього промінь на дві ортогональні лінійно поляризовані компоненти, які вимірюються у двох ідентичних каналах сканера. Всі зображення, які фіксуються фотодетекторами ПЗ31–2 та мікроскопом, надходять до комп'ютера для подальшої обробки та аналізу.

3. Методика експериментальних вимірювань.

Перевірка роботи двоканального поляризаційного сканера хвильового фронту була виконана з використанням лінзи з двозаломленням, яка виготовлена з кристалічного кварцу. Оптичні вісі матеріалу лінзи лежать в площині лінзи і з точністю ~ 10 кутових хвилин напрямлені перпендикулярно розповсюдженню світла. Діаметр аперттури лінзи складає 9 мм, а її ефективні фокусні відстані $F_1 = 81.95$ мм та $F_2 = 79.55$ мм для звичайної та незвичайної хвилі, відповідно.

Вказана лінза (Л4') встановлювалась замість об'єктиву Л4 таким чином, щоб її фокальна площина F_1 співпала із задньою фокальною площиною об'єктиву Л3. Таким чином хвиля з круговою поляризацією після проходження лінзи з двозаломленням буде мати різний набіг фази в двох поляризаційних каналах по входній апертурі сканера і при відповідній орієнтації лінзи в одному з каналів сканера буде реєструватись плоска хвиля, а в другому – сферична. На рис. 2 схематично зображено хід променів у такому випадку. В передній фокальній площині лінзи з

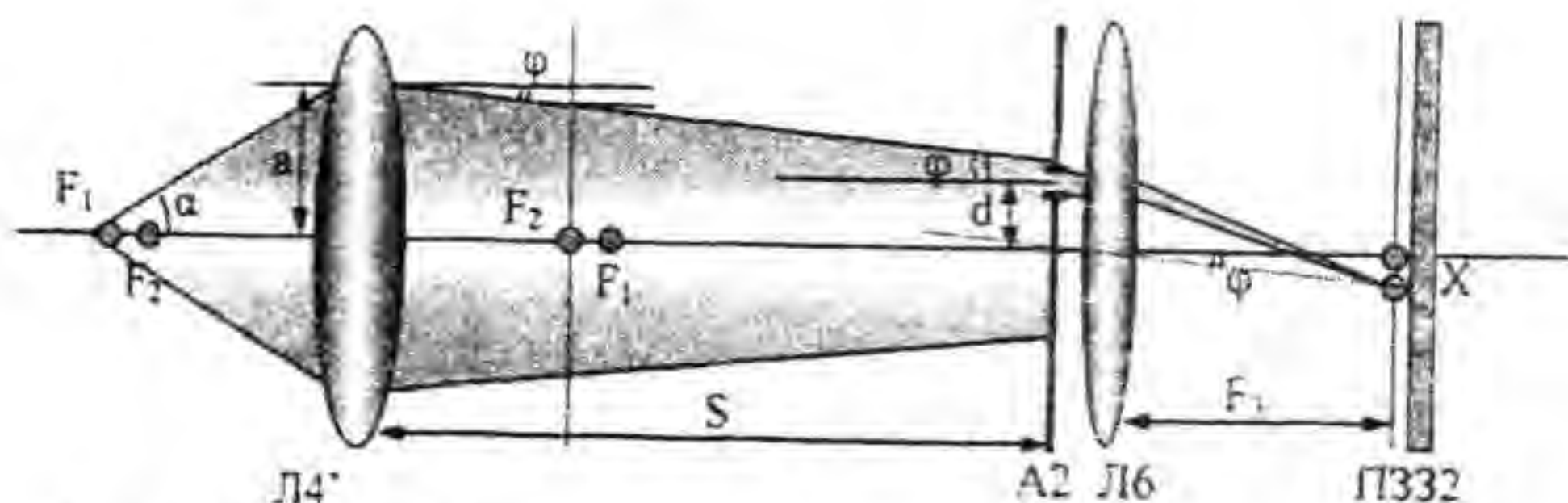


Рис. 2. Формування зображення у сканері хвильового фронту

двозаломленням $L4'$ знаходиться центр розбіжної хвилі.

Після лінзи $L4'$ ця хвиля розділиться на дві складові – плоску хвилю (яку ми розглядати не будемо) та збіжну. Зі збіжної хвилі апертура $A2$ виділяє субапертуру, в якій вимірюється нахил хвильового фронту. Виділений пучок падає на об'єктив $L6$ та фокусується на $P332$.

Максимальне зміщення сфокусованої точки в каналі сканера, в який потрапить сферична хвиля, може бути визначено наступною формулою:

$$X = \frac{a(F_1 - F_2)}{F_1 F_2} F_3, \quad (1)$$

де F_1 та F_2 – ефективні фокусні відстані лінзи з двозаломленням, F_3 – фокусна відстань об'єктива $L6$, a – радіус апертури лінзи $L4'$.

Підставивши в (1) значення для F_1 , F_2 та $F_3=200$ мм, та для $a=1,05$ мм, отримаємо, що максимальне зміщення сфокусованої точки в сканері хвильового фронту в даному випадку буде дорівнювати 0,77 мм, що, враховуючи розмір пікселя камери $P332$ – 6,25 мкм, буде дорівнювати 12,4 пікселя.

Експериментальне вимірювання максимального зміщення сфокусованої точки сканера при тих самих параметрах, що і в розрахунку, проводилось наступним чином. Як референтний використовувався хвильовий фронт, відбитий від дзеркала $D1$ та з використанням об'єктива $L4$. Потім об'єктив $L4$ виводився з системи та замінювався лінзою $L4'$. Як було вказано вище, в одному каналі сканера реєструється плоска хвиля, а в другому сферична.

Шляхом зміщення діафрагми A_2 у двох взаємно перпендикулярних напрямках було проведено серію з п'яти вимірювань локальних нахилів хвильового фронту на апертурі пучка 1.2×1.2 мм.

Максимальні зміщення крайових точок для сферичного фронту дорівнюють приблизно

$11,5 \pm 0,2$ пікселів, що дещо менше розрахункової величини (така відмінність може пояснюватись неточностями юстування лінзи $L4'$ – зміна положення лінзи вздовж оптичної вісі на 0,05 мм призводить до зміни положення точки на $P332$ матриці на 1 піксел).

Топограма відновленого сферичного хвильового фронту наведена на рис. 3. Рельєф топограми плоского хвильового фронту не перевищує похибку вимірювання фази.

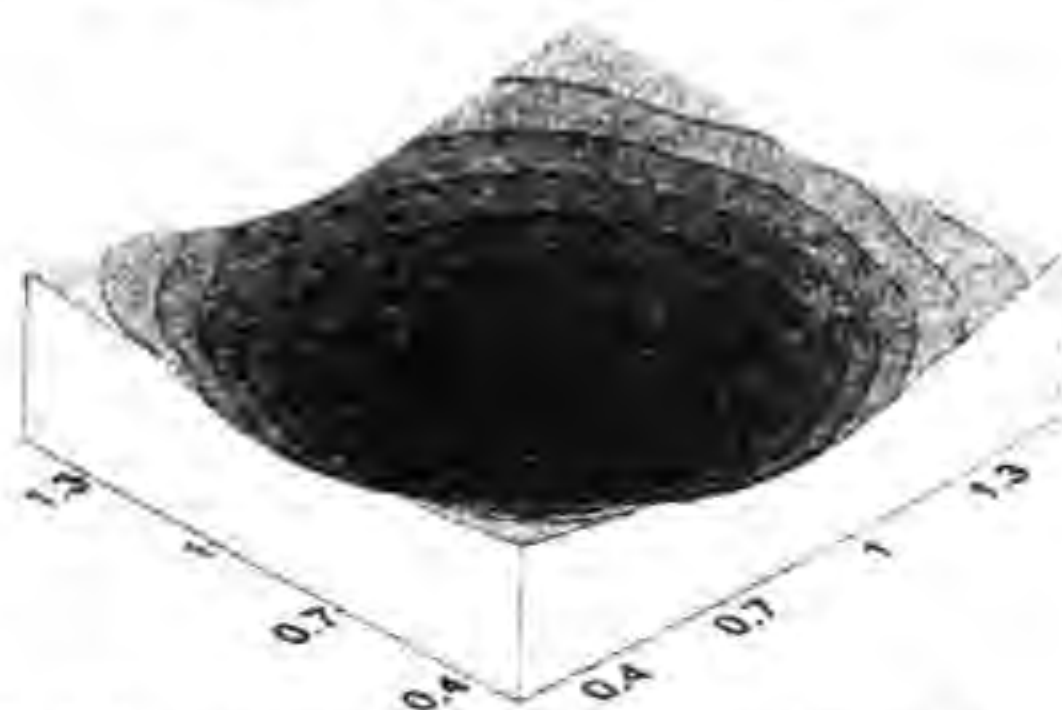


Рис. 3. Топограма відновленого тестового хвильового фронту, що була зареєстрована сканером хвильового фронту. Лінії однакової фази проведені через $0,05\lambda$.

4. Сканування тестової поверхні

Для тестування описаного лабораторного макету по виявленню дефектів поверхні проводились наступні вимірювання. В якості зразків використовувались "шахматки" на фоторезисті розміром 50×50 мкм з просторовим напівперіодом $l=0.8$ мкм та $l=1.2$ мкм; глибина рельєфу Δh поверхні 160 та 320 нм (рис. 4). Вимірювання проводились наступним чином: аналізувались локальні нахили хвильового фронту відбитого від трьох точок (для усереднення) на чистій поверхні фоторезисту та від трьох точок на кожній з вказаних шахматок на його поверхні. Для кожної з точок записувалась серія з 5 реалізацій хвильового

фронту через рівні інтервали часу для врахування статистичного розкиду даних. Вимірювання проводились в певній субапертурі хвильового фронту – на відстані 1 мм від оптичної вісі системи, діаметр діафрагми сканера 0,5 мм.

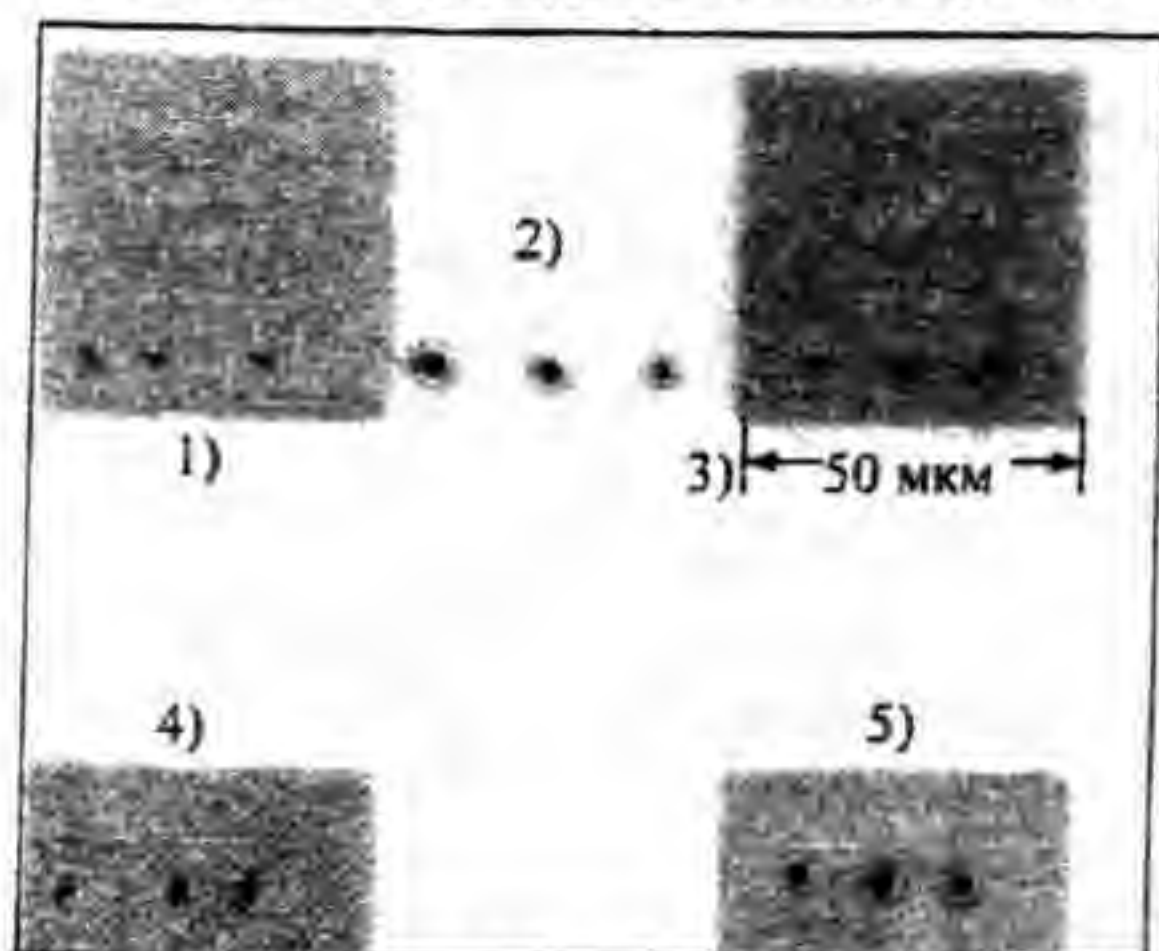


Рис. 4 Зображення фрагменту зразка: 1) $l=1,2$ мкм, $\Delta h=160$ нм, 2) чиста поверхня, 3) $l=0,8$ мкм, $\Delta h=160$ нм, 4) $l=1,2$ мкм, $\Delta h=320$ нм, 5) $l=0,8$ мкм, $\Delta h=320$ нм

На рисунку 5 наведені значення локального нахилу хвильового фронту у вказаній субапертурі для двох ортогональних поляризацій зонduючого променя на різних ділянках зразка з різним просторовим напівперіодом та глибиною рельєфу. Видно, що значення локального нахилу хвильового фронту для чистої поверхні суттєво відрізняються від значень для поверхонь з «шахматками». Слід відзначити також, що значення локальних нахилів хвильового фронту в межах похибки однакові для двох ортогональних лінійно поляризованих компонент. Це підтверджує, що зсув локальних нахилів пов'язаний тільки з рельєфом поверхні.



Рис. 5 Значення локального нахилу хвильового фронту для двох ортогональних поляризацій.

5. Висновки

Наведений двоканальний сканер хвильового фронту дозволяє виявляти особливості поверхні за формою відбитої від неї хвилі у двох лінійно ортогональних поляризаціях. Отримані значення локального нахилу хвильового фронту, відбитого від тестового зразка, для двох ортогональних поляризацій мають однакові значення, що свідчить про «геометричну» природу наявних дефектів.

Список використаних джерел

1. G.Rousset. *Wavefront sensing*. Adaptive Optics for Astronomy. Ed. D. M. Alloin and J.-M. Mariotti. – NATO ASI Series: Kluwer Academic Publ., 1994. – P.116–137
2. М.М.Котов, В.Н. Курашов, Д.В.Поданчук, Т.В. Родіонова, В.М. Соловійов. Виявлення дефектних структур поверхні сенсором хвильового фронту Шека-Хартмана. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 3. С. 341–348.
3. Голобородько А.О., Григорук В.І., Котов М.М., Курашов В.Н., Поданчук Д.В., Сутягіна Н.С. Визначення локальних дефектів поверхні сенсором хвильового фронту Шека-Хартмана // Український фізичний журнал. – 2008. – 53, № 10, С. 946-951.
4. S.Oliver, V.Laude, J.-P. Huignard. Liquid-crystal Hartmann wave-front scanner // Applied Optics. – 2000. – 39, № 22, P. 3838–3846.
5. Kotov M., Podanchuk D.V., N.S.Suryagina, Nikirin V.A., Osadchuk O.I. Wavefront Scanner For Testing The Surface Of Optical Elements. // Proceedings of VIII International Young Scientists' Conference on Applied Physics – 2008, – Kyiv, P 192.

Надійшла до редколегії 28.04.09

УДК 621.127, 621.272.832.01

Юдіна* О.С., студ., Прокопенко О.В.,
канд. ф.-м. наук.

Зв'язаний стан масиву джозефсонівських контактів.

Розглянуто ланцюжок джозефсонівських контактів, які є нелінійними осциляторами. Для опису такої системи застосовано модель Курамото. Показано, що при певних параметрах зовнішнього кола можливий режим синхронізації джозефсонівських переходів.

Ключові слова: джозефсонівських контакт, модель Курамото, синхронізація.

*E-mail: yudina@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Данілов В.В.

Джозефсонівські контакти є, мабуть, найбільш розповсюдженим елементом надпровідної електроніки. Системи з джозефсонівськими контактами знайшли своє застосування як параметричні підсилювачі, детектори та стандарти вольту [1]. Тому вони широко вивчаються з точки зору своїх нелінійних явищ. Зокрема, оскільки у приладах необхідно забезпечити однакову роботу всіх контактів незважаючи на певний розкид їх параметрів, то найбільш цікавим є синхронізований стан масиву джозефсонівських контактів. Існує декілька підходів до розгляду синхронізації масивів, наприклад резистивна модель [1]. Модель Курамото [2] для зв'язаних осциляторів також може бути застосована до джозефсонівських контактів [3]. Метою даної роботи є отримати за допомогою моделі Курамото параметри, при яких відбувається синхронізація.

Розглянемо ланцюжок контактів, як на рис. 1. Вважатимемо ємність контактів достатньо малою, щоб нею можна було знехтувати.

За законом Кірхгофа:

$$\frac{\hbar}{2eR_j} \dot{\phi}_i + I_c \sin \phi_i + \dot{Q} = I_0$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \frac{\hbar}{2e} \sum_{j=1}^N \dot{\phi}_j$$

де $i = 1, 2, \dots, N$. Тут ϕ_i - різниця фаз вздовж кожного контакту, I_c - критичний струм, R_j - опір кожного контакту, I_0 - струм живлення, Q - заряд на зовнішньому конденсаторі, L , R та C -

Iudina* O.S., stud., Prokopenko O.V., Ph. D.

Coupled state of Josephson junction array.

Josephson junction array as nonlinear oscillator array was considered. The Kuramoto model to overview such system was used. Possibility to obtain in-phase state under certain parameters of loaded circuit was shown.

Keywords: Josephson junction, the Kuramoto model, synchronization.

індуктивність, опір та ємність зовнішнього кола, $\hbar$ - стала Планка, поділена на 2π , e - заряд електрона.

Використавши процедуру усереднення у першому наближенні для повної фази, що докладно описана у [3], [4] та [5], одержимо систему рівнянь:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\Lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (1)$$

Тут N - кількість ДК у масиві, кожен з яких характеризується власною частотою генерації ω_i , θ_i - фаза кожного ДК, Λ - коефіцієнт зв'язку. Рівняння (1) є, фактично, рівняннями Курамото у наближенні глобального зв'язку, коли всі коефіцієнти зв'язку однакові. Частота ω_i в (1) - це власна частота ω_c , нормована на резонансну

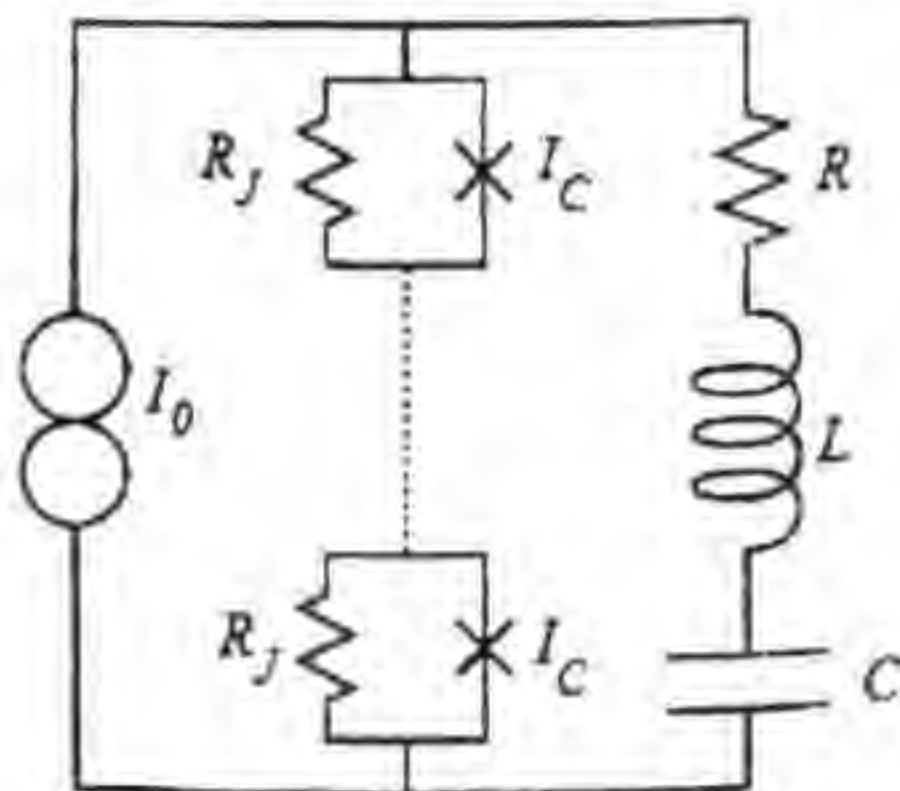


Рис. 1. Схематичне зображення навантаженого масиву джозефсонівських переходів.

частоту зовнішнього кола: $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{2eR_j I_c}{\hbar}$.

Очевидно, що коли зв'язок дуже слабкий $\Lambda \rightarrow 0$, то другим доданком можна знехтувати, тоді частота генерації кожного осцилятора є його

власною частотою: $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$.

Рівняння (1) не змінять свого вигляду, якщо під позначенням ω_i розуміти відхилення власної частоти i -того осцилятора від середнього значення власної частоти усіх осциляторів [4]. Оскільки зазвичай про значення власних частот відомо лише, що вони знаходяться в межах певного діапазону, то вважатимемо їх розподіл $g(\omega)$ нормальним. Підібравши відповідне нормування, будемо розглядати нормальний розподіл на інтервалі $[-1, +1]$.

Щоб детальніше розглянути поведінку системи зв'язаних осциляторів, введемо комплексний параметр порядку, який буде характеризувати спільну фазу та амплітуду генерації усього масиву осциляторів, наступним чином:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (2)$$

Тут $0 < r < 1$. Значення $r = 0$ відповідає повністю хаотичному режиму генерації осциляторів, а $r = 1$ відповідає повній синхронізації.

Саме $\frac{d\psi}{dt}$ і визначає загальну частоту

генерації масиву осциляторів. Модуль параметри порядку r показує, при якій величині Λ вже відбуватиметься синхронізація осциляторів.

Існує декілька різновидів моделі Курамото. Найбільш поширений з них – так звана модифікована модель Курамото [3].

Її особливістю є наявність фазового зсуву α між окремими осциляторами:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\Lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha). \quad (4)$$

Наявність параметра α проявляється наступним чином: він додатково розносить фази сусідніх осциляторів, затруднюючи тим самим синхронізацію. Тому система з $\alpha \neq 0$ потребує сильнішого зв'язку, тобто більшого значення Λ . Ця модифікація моделі Курамото була вперше отримана якраз при розгляді масивів джозефсонівських контактів.

На рис. 2 представлені залежності r від $\Lambda/\delta\omega$ для різних наборів власних частот ω_i для систем з $N=5$ (рис. 2а) та $N=10$ (рис. 2б) джозефсонівських контактів. Помітно, що перехід до синхронізованого стану контактів (коли $r=1$) відбувається поблизу точки $\Lambda/\delta\omega=1$. Бачимо, що на кожній кривій спостерігається декілька ділянок плавного росту r , причому в деяких випадках чітко видно, що їх саме $N-1$.

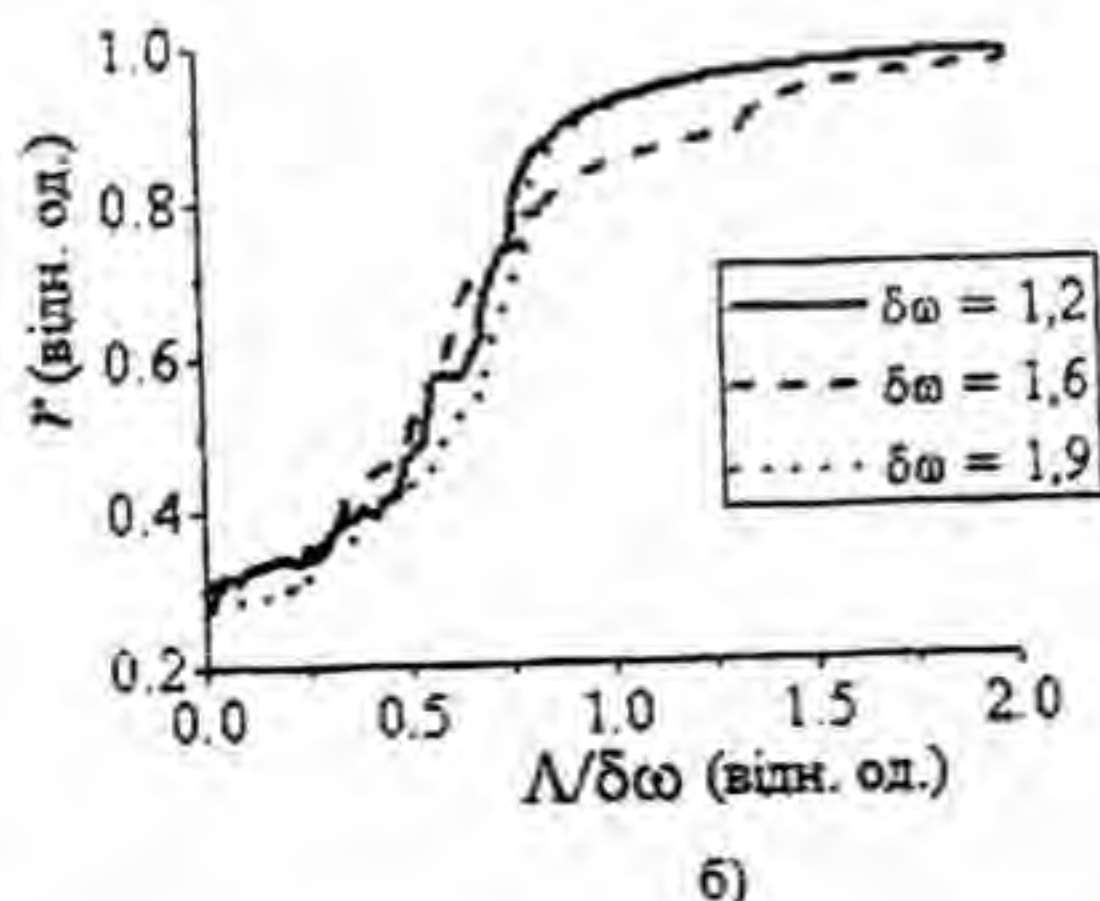
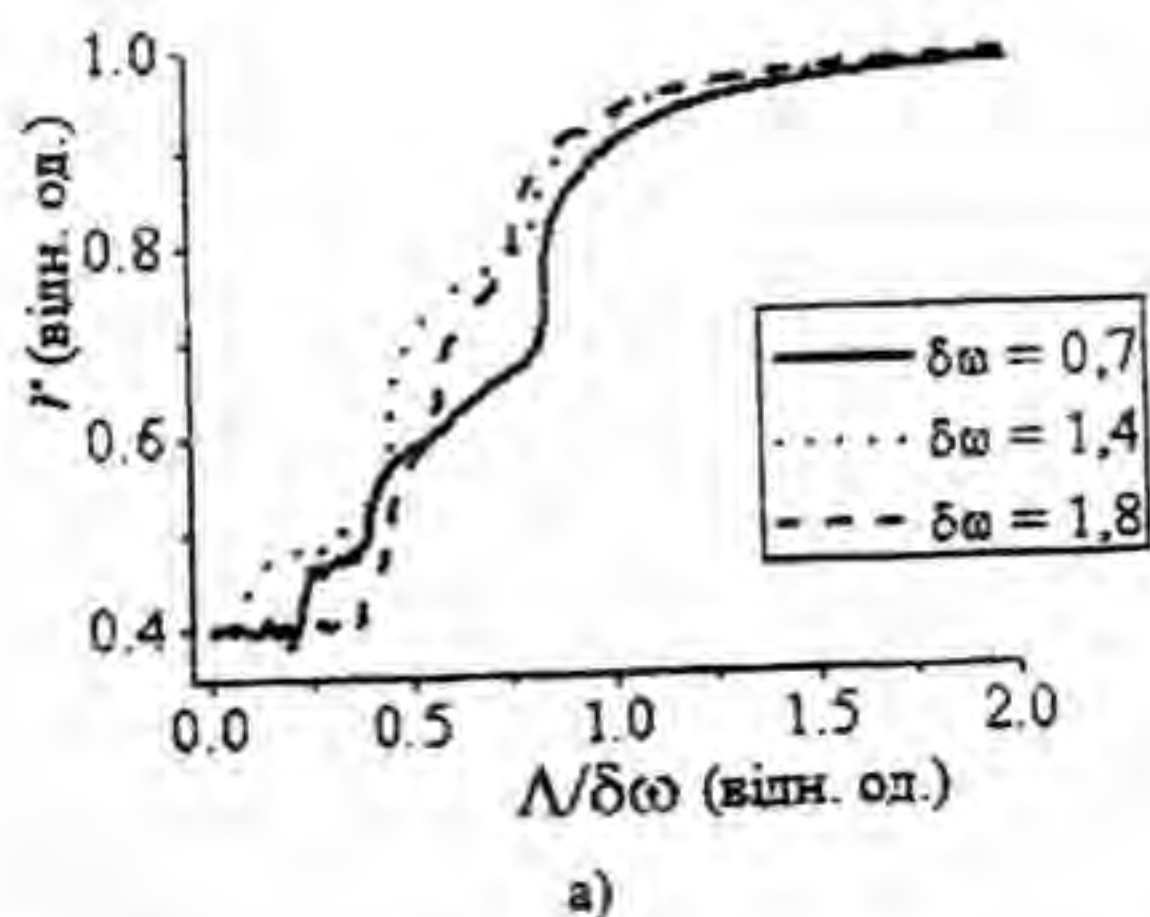


Рис. 2. Залежність модуля параметра порядку r від узагальнено параметра зв'язку $\Lambda/\delta\omega$ при різних розкидах частот $\delta\omega$ для ланцюжка з: а) $N=5$ контактів; б) $N=10$ контактів.

В якості характеристик зв'язку контактів обрано узагальнений параметр зв'язку $\Lambda/\delta\omega$, де $\delta\omega$ - різниця між максимальною та мінімальною власними частотами генерації контактів. За допомогою рівнянь (1) та означення (2) отримано залежності r від $\Lambda/\delta\omega$ для випадкових наборів власних частот $\{\omega_i\}$, що характеризуються різними $\delta\omega$. Результат обчислень не залежить від самих значень $\{\omega_i\}$, а лише від $\delta\omega$.

Було встановлено за допомогою чисельного моделювання, що при збільшенні фазового зсуву α відбувається розстройка системи і при $\alpha = \pi/2$ режим синхронізації взагалі не спостерігається.

Оскільки власні частоти всіх контактів є величинами випадковими, а тому невідомими, то показовим є усереднений графік $\langle r \rangle$ (див. рис. 3).

Усереднення робиться по 10 випадкових вибірках $\{\omega_i\}$ в межах нормального розподілу з нульовим середнім. Результати представлено на рис. 3.

Порівняння залежностей $\langle r \rangle$ для масивів з $N = 5$ та 10 контактів показує, що для менших ланцюжків амплітуда генерації більша на 5-10%. Це пов'язано з тим, що розкид власної частоти контактів статистично менший для меншої їх кількості. Однак швидкість росту амплітуди $\langle r \rangle$ з ростом узагальненого параметра зв'язку більша для довших ланцюжків. Така поведінка пояснюється тим, що зі збільшенням параметра зв'язку поле кожного контакту буде поширюватись все далі і впливати на все більшу кількість контактів, тоді як у випадку ланцюжка з 5 ДК таке поширення взаємного впливу швидко вичерпується.

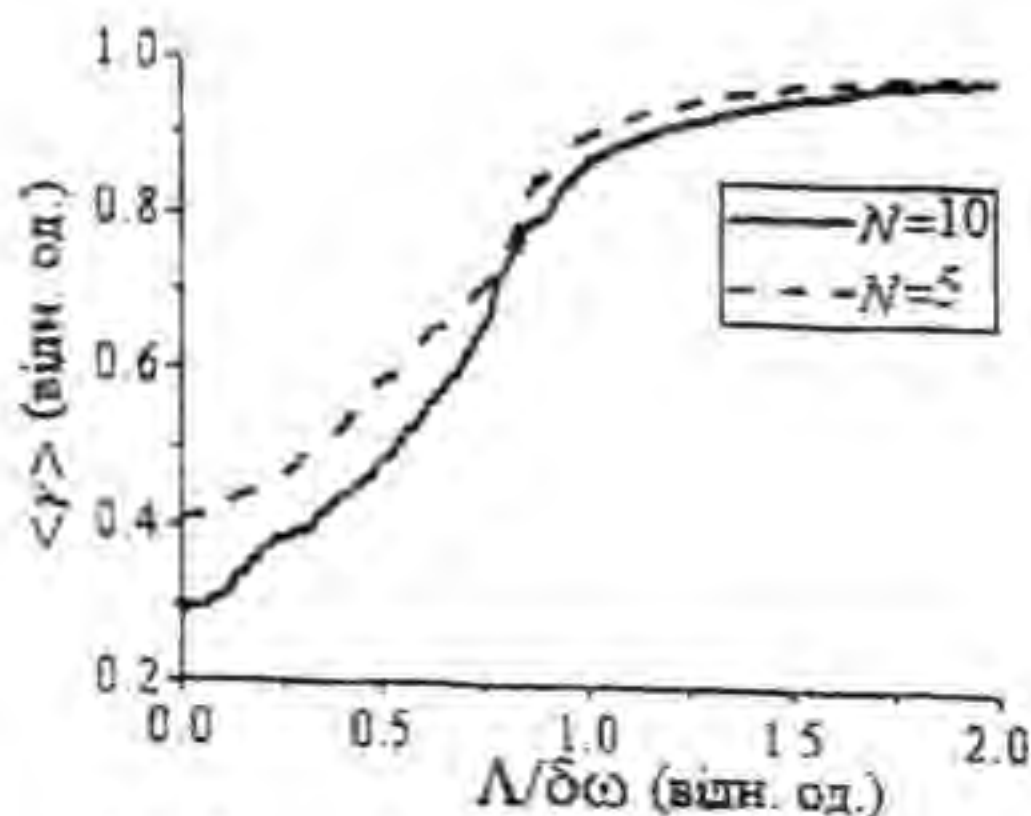


Рис. 3. Залежність усередненого по 10 експериментах модуля параметра порядку $\langle r \rangle$ від узагальнено параметра зв'язку $\Lambda/\delta\omega$ для ланцюжків з $N=5$ та $N=10$ контактів.

Проаналізувавши поведінку модуля параметра порядку, можна визначити, при яких параметрах кола навантаження бути реалізовуватись режим синхронізації.

Так, з рис. 3 видно, що достатньо взяти $\Lambda > \delta\omega$, щоб забезпечити режим синхронізованої роботи контактів.

Таким чином, масив джозефсонівських контактів добре описується моделлю Курамото для зв'язаних осциляторів в наближенні глобального зв'язку. За допомогою чисельного моделювання розглянуто поведінку модуля параметра порядку та з'ясовано, що при певних значеннях фазового зсуву відбувається зрив синхронізації. Визначено поріг синхронізації масиву у випадку відсутності фазового зсуву.

Список використаних джерел

1. Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 447с.
2. Acebron J.A., Bonilla L.L., Vicente C.J.P., Spigler R. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. // Rev. Mod. Phys. – 2005. – 77, № 1. – P. 137-185.
3. Wiesenfeld, K. New results on frequency-locking dynamics of disordered Josephson arrays // Physica B. – 1996. – 222 – P. 315-319.
4. Wiesenfeld, K. Averaged equations for Josephson junction series arrays // Phys. Rev. E. – 1995. – 51, № 2. – P. 1020-1025.
5. Strogatz S.H., Mirollo R.E. Splay states in globally coupled Josephson arrays: Analytical prediction of Floquet multipliers // Phys. Rev. E. – 1993. – 47, №1. – P. 220-227.
6. Wiesenfeld, K., Colet P., Strogatz S.H. Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // Phys. Rev. Lett. – 1996. – 76, №3. – P. 404-407.

Надійшла до редколегії 28.04.2009

УДК 535.51

Юштин К.Е., канд. фіз.-мат. наук, Толочин О.П., студент

Похибка вимірювання об'єктів з фазовою анізотропією динамічним Мюллер-поляриметром з модуляцією фазового зсуву

В представленій роботі проведено оптимізацію параметрів динамічного Мюллер-поляриметра з модуляцією фазового зсуву одночасно в зондуєму та приймальному каналах для аналітичного розрахунку похибки вимірювання кожного елементу матриці Мюллера досліджених типів об'єктів. З отриманих, за допомогою модельних вимірювань, матриць Мюллера досліджуваних об'єктів, з наявною заданою похибкою кожного елементу, отримано розподіли параметрів анізотропії та оцінено їх похибку.

Ключові слова: Мюллер-поляриметр, модуляція фазового зсуву, похибка вимірювання, параметри анізотропії.

E-mail: gkons@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

Стрімкий прогрес науки і техніки дедалі більше викликає необхідність одержання нових відомостей про властивості та будову різноманітних об'єктів та середовищ. Такі відомості, зокрема, можна отримати шляхом вивчення та моделювання процесів взаємодії електромагнітного випромінювання з об'єктами, а саме аналізу поляризаційної структури розсіяного випромінювання та її зв'язку з характеристиками досліджуваного об'єкту.

Отже, сутність поляриметричних методів вимірювань полягає в дослідженні зміни стану поляризації електромагнітного випромінювання в результаті його відбиття або розсіювання від об'єкту, що досліджується.

Говорячи про переваги поляриметричних методів, у порівнянні з іншими методами, можна відзначити наступне:

1. Використання поляризаційної модуляції може бути здійснене без збільшення інтенсивності зондуємого випромінювання до пошкоджуючих або навіть руйнуючих величин потужності.

K.E. Yushtin, Ph.D., O.P. Tolochin, student.

Mueller-polarimeter with double retardance modulation measurement error of the phase anisotropy objects

The dynamic Mueller polarimeter optimization with double retardance modulations in probing and receiving channels has been made. The measurement error value dependence on the polarimeter parameters has been investigated. The simulation experiment has been carried out to determine anisotropy value calculation error dependence on the anisotropy type. The average measurement error value has been compared with other polarimeter types.

Keywords: Mueller-polarimeter, Mueller-polarimeter optimization, retardance modulation, measurement error, anisotropy.

2. Методи можуть бути реалізовані практично в довільному діапазоні довжин хвиль електромагнітного випромінювання;

3. Дані методи більш чутливі і точні у порівнянні з класичними методами, що базуються на вимірюваннях інтенсивності, оскільки перші є відносними за своєю природою і не залежать від флуктуацій інтенсивності зондувального випромінювання.

4. Поляриметричні методи, за рахунок дослідження поляризаційних характеристик електромагнітного випромінювання, дозволяють суттєво розширити обсяг інформації, отриманої при дослідженні об'єкту.

5. Найбільш виразно переваги поляризаційних методів проявляються при дослідженні оптично анізотропних середовищ.

Максимально повне використання поляризації випромінювання при дослідженні анізотропних середовищ реалізовано в рамках Мюллер-поляриметрії. Визначення матриці Мюллера звичайно є досить складною процедурою, тому при створенні поляриметрів значну увагу приділяють простоті реалізації, швидкодії та точносним характеристикам.

На сьогодні найоптимальнішим підходом до створення Мюллер-поляриметра вважається використання у якості перетворювачів поляризації в його зонduючому та приймальному каналах мінімально рухомих поляризаційних елементів, параметрами яких можна керувати з великою швидкістю та точністю, наприклад, електрично (рідкокристалічні, фотопружні, електрооптичні, магнітооптичні кристали тощо). Крім того значної уваги почали приділяти оптимізації алгоритмів вимірювання, що, як виявилось, дозволяє підвищити точність вимірювання елементів матриць Мюллера іноді в рази, при незмінних характеристиках вузлів поляриметра, тому **метою роботи** було визначення точносних характеристик Мюллер-поляриметра з подвійною модуляцією фазового зсуву в приймальному та зонduючому каналу для вимірювання оптичних характеристик об'єктів, що характеризуються лінійною та циркулярною фазовою анізотропією.

Методика експерименту

Матричний метод Мюллера полягає в представленні поляризації випромінювання вектором Стокса, а деполаризуючої оптичної системи – матрицею 4×4 , елементи якої є дійсними числами і в загальному випадку можуть бути незалежними [1,2,3].

Отже, різні стани поляризації світлової хвилі можна представити чотирикомпонентним вектором Стокса S із дійсних чисел. Його елементи мають розмірність інтенсивності та являють собою наступні фізичні величини:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle, \\ S_2 &= \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle, \\ S_3 &= 2 \cdot \langle E_x \cdot E_y \cdot \cos \Delta \rangle, \\ S_4 &= 2 \cdot \langle E_x \cdot E_y \cdot \sin \Delta \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

де E_x , E_y – миттєві значення амплітуд взаємно перпендикулярних компонент електричного вектора; Δ – різниця їх фаз; $\langle \rangle$ – означає усереднення в часі.

Зв'язок поляризації випромінювання до та після його взаємодії з досліджуванним середовищем описується за допомогою наступного лінійного співвідношення:

$$S^{\text{out}} = M \cdot S^{\text{in}},$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

де S^{in} , S^{out} – вектори Стокса випромінювання до та після його взаємодії з середовищем.

Матрицю зв'язку M називають матрицею Мюллера досліджуваного об'єкта.

Таким чином за допомогою вектора Стокса можна представляти випромінювання з довільним ступенем поляризації, його елементи мають розмірність інтенсивності – характеристики випромінювання, що безпосередньо вимірюється фотодетектором. За допомогою метода Мюллера можна описувати неоднорідні анізотропні середовища, що змінюють ступінь поляризації повністю

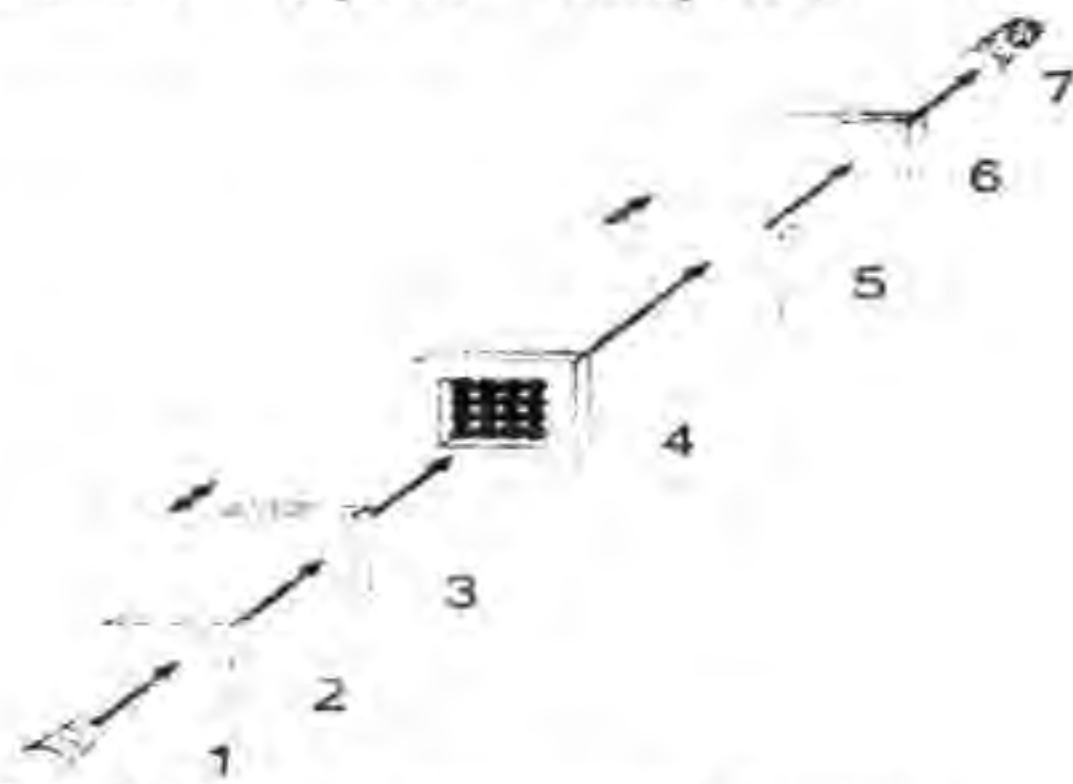


Рис. 1 Функціональна схема Мюллер-поляриметра

поляризованого випромінювання [12].

Його зонduючий канал складається з джерела електромагнітного випромінювання 1, поляризатора 2, фазової пластинки 3 з модульованим фазовим зсувом d_1 .

Приймальний канал вимірювача складається з фазової пластинки 5 з модульованим фазовим зсувом d_2 , аналізатору 6, та детектору 7. Здійснення подвійної модуляції фазових зсувів платівок d_1 та d_2 призводить до модуляції інтенсивності сигналу на виході аналізатора 6. В результаті, на виході фотоприймача 7 маємо періодичний електричний сигнал, спектр якого залежить від частоти та амплітуди модуляції зсуву платівок 3 і 5, азимутів орієнтації лінійних поляризаторів 2 і 6 та, власне, анізотропних характеристик досліджуваного об'єкта 4. Аналізуючи сигнал з фотоприймача можна

розрахувати шукані величини елементів матриці Мюллера, які описують анізотропні властивості досліджуваного об'єкта.

У якості фазових платівок в даній схемі автори використали фотопружні модулятори, за допомогою яких реалізовано фазові платівки з керованим фазовим зсувом. (Початково швидка вісь кожного модулятора розташована під кутом 45 град. до вісі відповідного поляризатора

(аналізатора) для забезпечення найбільшої глибини модуляції стану поляризації випромінювання при заданій амплітуді модуляції фазового зсуву).

Спектр сигналу на виході фотодетектора є нескінченим тому для його аналізу залучаються перетворення з використанням функцій Бесселя, що ускладнює розрахунок величин елементів матриці Мюллера:

$$\begin{aligned}\sin(d_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)) &= 2(J_1(d_1) \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + J_3(d_1) \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot t) + J_5(d_1) \cdot \sin(5 \cdot \omega_1 \cdot t)) \\ \sin(d_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)) &= 2(J_1(d_2) \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) + J_3(d_2) \cdot \sin(3 \cdot \omega_2 \cdot t) + J_5(d_2) \cdot \sin(5 \cdot \omega_2 \cdot t)) \\ \cos(d_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)) &= J_0(d_1) + 2 \cdot (J_2(d_1) \cdot \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t) + J_4(d_1) \cdot \cos(4 \cdot \omega_1 \cdot t)) \\ \cos(d_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)) &= J_0(d_2) + 2 \cdot (J_2(d_2) \cdot \cos(2 \cdot \omega_2 \cdot t) + J_4(d_2) \cdot \cos(4 \cdot \omega_2 \cdot t))\end{aligned}\quad (3)$$

де індекси 1 і 2 відповідають приймальному та зонduючому каналах відповідно; J_i – функція Бесселя i -того порядку;

Для проведення оптимізації вимірювання елементів матриці Мюллера було отримано аналітичний вигляд виразу сигналу на детекторі:

$$S_0^{out} = I(t) = \sum_k \sum_n (A_{k,n} \cdot \cos(2 \cdot t \cdot (k \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2)) + (B_{k,n} \cdot \sin(2 \cdot t \cdot (k \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2))) \quad (5)$$

Співвідношення (5) визначає систему рівнянь, з якої можуть бути визначені величини елементів матриці Мюллера. Дана система, що характеризує зв'язок елементів матриці Мюллера об'єкту 4 з виміряними амплітудами гармонік, може бути переписана в наступному матричному вигляді:

$$AB = T \cdot M \quad (6)$$

де M – 16-елементний вектор побудований з елементів матриці Мюллера досліджуваного об'єкту, AB – 61-елементний вектор, що складається з амплітуд гармонік сигналу на детекторі, T – характеристична матриця поляриметра.

Ранг характеристичної матриці T рівний десяти, а це означає, що за один цикл вимірювань не можна отримати повну матрицю Мюллера досліджуваного об'єкту. Зміна комбінації величин азимутальних кутів швидких вісей фазових платівок 3,5 та величин кутів орієнтації поляризаторів 2,6 дає можливість знаходження всіх елементів матриці Мюллера.

$$S_{out} = M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 S_{in} \quad (4)$$

де M_i – матриця Мюллера відповідного елемента поляриметра наведеного на Рис.1.

Враховуючи (4), сигнал на детекторі представляється у вигляді ряду Фур'є [5,6]:

Як відомо [4], в найпростішому випадку, похибка величини q , що є добутком величин x та y , виміряних з малими відносними похибками $\frac{\delta x}{x}$, $\frac{\delta y}{y}$ рівна:

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y} \quad (7)$$

Оскільки даний підхід дуже простий і дає доволі велику похибку, існує більш покращений метод розрахунку точності вимірюваної величини q , яка є функцією, раніше виміряних, з певною похибкою, величин x та y :

$$\delta q = \frac{dq}{dx} \cdot \delta x + \frac{dq}{dy} \cdot \delta y \quad (8)$$

де q – вимірювана величина, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$ – часткові похідні q по x та y , δx , δy – похибки виміряних елементів x та y .

Представлення результатів вимірювання за допомогою функції нормального розподілу, або функції Гауса (9), дає можливість замінити суму (8) квадратичною сумою, де величини x та y розподілені нормально з параметрами ширини σ_x та σ_y , які ми будемо розглядати як похибки відповідних величин.

$$f_{x,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

x - вимірювана величина, X - істинне значення x , σ - стандартне відхилення.

Функція $f_{x,\sigma}(x)$, описує розподіл ймовірності значень результатів вимірювань. Кажуть, що результати вимірювань розподілені нормально, якщо їх розподіл ймовірності значень описується функцією Гауса.

Якщо ж функція залежить більше ніж від двох незалежних $q = f(x, \dots, z)$, то просто додається зайвий член для кожної нової змінної. Все це приводить до загальної формули обчислення похибок непрямих вимірювань:

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{dq}{dx} \cdot \delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{dq}{dz} \cdot \delta z\right)^2} \quad (10)$$

У випадку застосування динамічного Мюллер-поляриметра з модуляцією фазового зсуву [11,13,14], оцінка точності вимірювань величини кожного елементу матриці Мюллера відбувається згідно до наведеної формули (10) шляхом вирішення вищерозглянутої системи рівнянь (6).

Результати та обговорення

Систему рівнянь для визначення всіх елементів матриці Мюллера, з використанням даного поляриметра, для комбінації базових орієнтацій, має наступний вигляд:

$$A_{00} = 2(M_{11} + M_{22}J_0(d2) + J_0(d1)(M_{12} + M_{22}J_0(d2)))$$

$$A_{20} = 2(M_{12} + M_{22}J_0(d2))J_2(d1)$$

$$A_{20} = 2(M_{13} + M_{23}J_0(d2))J_2(d1)$$

$$B_{10} = 2(M_{14} + M_{24}J_0(d2))J_1(d1)$$

$$A_{02} = 2(M_{21} + M_{22}J_0(d1))J_2(d2)$$

$$A_{22} = 2M_{22}J_2(d1)J_2(d2)$$

$$A_{22} = 2M_{23}J_2(d1)J_2(d2)$$

$$B_{12} = 2M_{24}J_1(d1)J_2(d2)$$

$$A_{02} = 2(M_{31} + M_{32}J_0(d1))J_2(d2)$$

$$A_{22} = 2M_{32}J_2(d1)J_2(d2)$$

$$A_{22} = 2M_{33}J_2(d1)J_2(d2) \quad (11)$$

$$B_{12} = 2M_{34}J_1(d1)J_2(d2)$$

$$B_{01} = -2(M_{41} + M_{42}J_0(d1))J_1(d2)$$

$$B_{21} = -2M_{42}J_1(d2)J_2(d1)$$

$$B_{21} = -2M_{43}J_1(d2)J_2(d1)$$

$$A_{11} = 2M_{44}J_1(d1)J_1(d2)$$

Аналогічно до (6) виділяємо характеристичну матрицю, з якої ми отримуємо число обумовленості, як функцію тих же параметрів d_1, d_2 . Дослідження на мінімум отриманої функції дозволило встановити, що в даному випадку мінімальні значення числа обумовленості $V_d = 24,8207$ досягаються за наступних умов: $d_1 = -146,4^\circ$ $d_2 = 146,4^\circ$.

Кожен елемент матриці Мюллера об'єкту є функцією відповідних амплітуд вимірюваних гармонік AB та величин модульованих фазових зсувів d_1 та d_2 в зондуючому та приймальному каналах відповідно.

Таким чином, рівняння оцінки точності вимірювання елементів матриці Мюллера, згідно до формули, (10), приймає наступний вигляд:

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial AB} \cdot \Delta AB\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial d1} \cdot \Delta d1\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial d2} \cdot \Delta d2\right)^2} \quad (12)$$

де ΔAB - похибка визначення амплітуд гармонік, Δd_1 і Δd_2 - похибка визначення величини модульованих фазових зсувів.

Відповідно до раніше вивчених джерел [7,8,9], модульовані фазові зсуви визначаються з точністю 0,2-0,3%, похибку ж визначення амплітуд гармонік сигналу задано рівною 1%.

Матриці Мюллера досліджуваних середовищ з лінійною фазовою та круговою фазовою анізотропією мають наступний вигляд:

1) лінійна фазова анізотропія (лінійне двопронезаломлення):

$$[Lin.PH] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cl^2 + sl^2\beta & clsl(1-\beta) & -sl\mu \\ 0 & clsl(1-\beta) & sl^2 + cl^2\beta & cl\mu \\ 0 & sl\mu & -cl\mu & \beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

де $\beta = \cos(\delta)$, $\mu = \sin(\delta)$; δ - величина лінійної фазової анізотропії (фазовий зсув, що вноситься між власними, для даного виду анізотропії, лінійно поляризованими коливаннями); $cl = \cos(2\alpha)$, $sl = \sin(2\alpha)$; α - орієнтація швидкої вісі.

2) кругова фазова анізотропія (оптична активність):

$$[Cir.PH] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

де φ - величина кругової фазової анізотропії (кут повороту азимуту еліпса поляризації).

Отже, похибки вимірювання кожного елементу матриці Мюллера досліджуваних середовищ при заданих параметрах анізотропії $\varphi = 30^\circ$, $\alpha = 40^\circ$, $\delta = 70^\circ$, приймають наступні значення:

$$M[Lin.Ph] = \begin{bmatrix} 1 \pm 0.005 & 0 \pm 0.01 & 0 \pm 0.01 & 0 \pm 0.01 \\ 0 \pm 0.01 & 0.36 \pm 0.02 & 0.11 \pm 0.02 & -0.93 \pm 0.02 \\ 0 \pm 0.01 & 0.11 \pm 0.02 & 0.98 \pm 0.02 & 0.16 \pm 0.02 \\ 0 \pm 0.01 & 0.93 \pm 0.02 & -0.16 \pm 0.02 & 0.34 \pm 0.02 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$M[Cir.ph] = \begin{bmatrix} 1 \pm 0.005 & 0 \pm 0.01 & 0 \pm 0.01 & 0 \pm 0.01 \\ 0 \pm 0.01 & 0.506 \pm 0.02 & 0.862 \pm 0.02 & 0 \pm 0.02 \\ 0 \pm 0.01 & -0.862 \pm 0.02 & 0.506 \pm 0.02 & 0 \pm 0.02 \\ 0 \pm 0.01 & 0 \pm 0.02 & 0 \pm 0.02 & 1 \pm 0.02 \end{bmatrix}$$

З отриманих, за допомогою модельних вимірювань матриць Мюллера механізмів кругової фазової та лінійної фазової анізотропії, з наявною заданою похибкою вимірювання кожного елементу, було одержано розподіл параметрів анізотропії та оцінено їх похибку.

Загалом процес оцінки похибки визначення параметрів анізотропії полягав в виконанні наступних етапів:

1. Обирався досліджуваний об'єкт з фіксованими параметрами анізотропії.

2. На базі обраних параметрів анізотропії розраховувались величини елементів матриці Мюллера.

3. На базі матриці Мюллера, за відсутності похибки вимірювань, розраховувалась похибка вимірювань всіх елементів матриці Мюллера досліджуваних об'єктів.

4. На базі отриманих похибок вимірювань, проводились «зашумлення» з метою моделювання експериментальних вимірювань у кількості 1000 матриць.

5. За кожною матрицею розраховувались параметри анізотропії і за цими параметрами будувалась гістограма.

Наведемо гістограми, що характеризують модельний розподіл похибок вимірювання параметрів анізотропії, у випадку даних досліджуваних об'єктів:

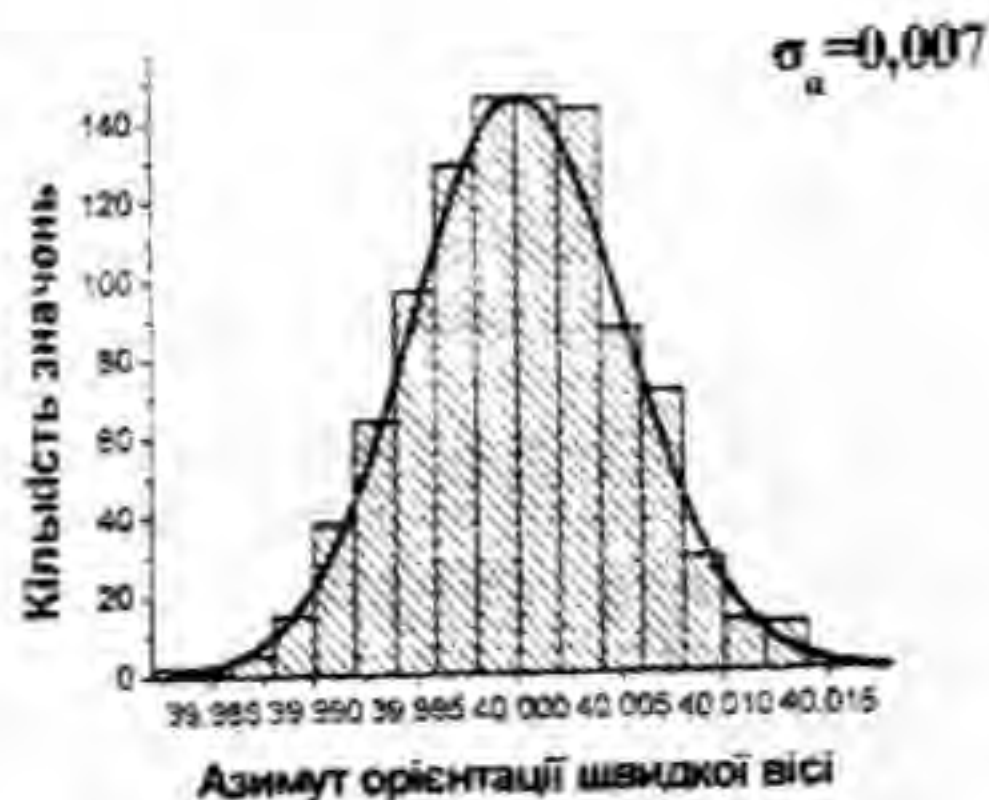


Рис. 2 Розподіл розрахованих значень для модельного об'єкта лінійної фазової анізотропії з величиною азимуту орієнтації швидкої вісі 40 градусів

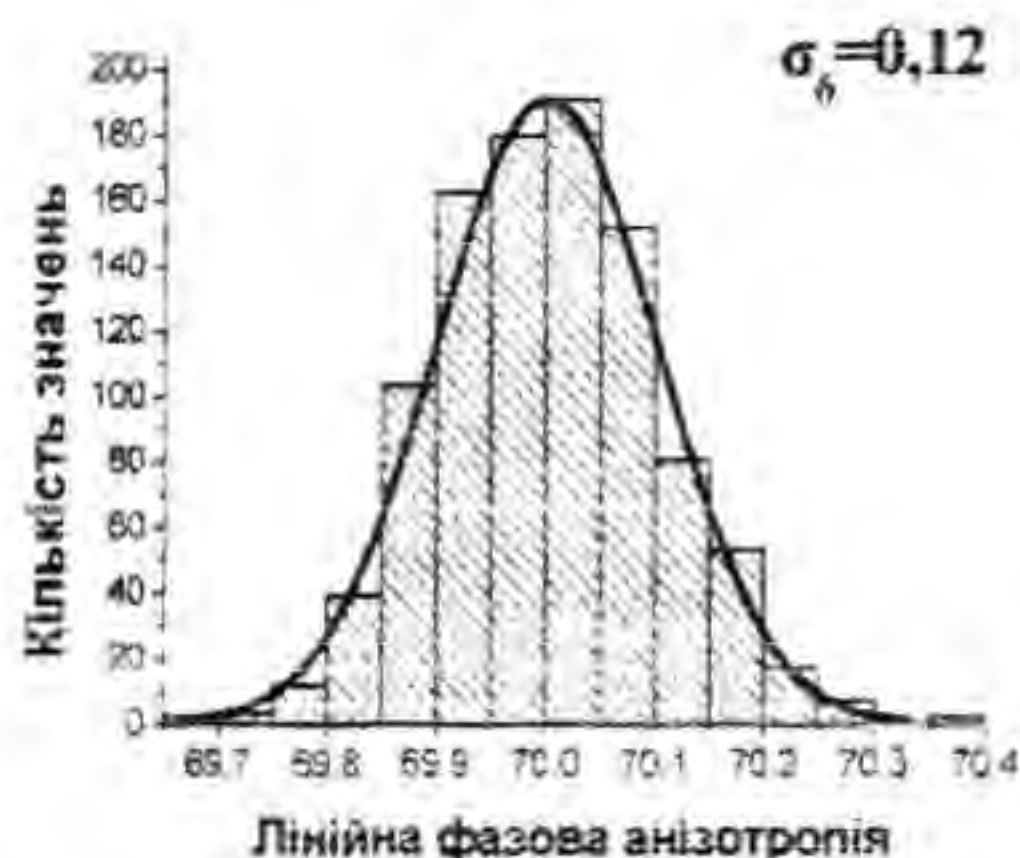


Рис. 3 Розподіл розрахованих значень величини лінійної фазової анізотропії з величиною лінійного фазового зсуву 70 градусів та азимутом орієнтації швидкої вісі 40 градусів

Як можна бачити з наведених розподілів, якість визначення параметрів анізотропії досліджуваних об'єктів у випадку використання динамічного Мюллер-поляриметра з модуляцією фазового зсуву досить висока. З оцінки середньої похибки результатів проведених вимірів σ .

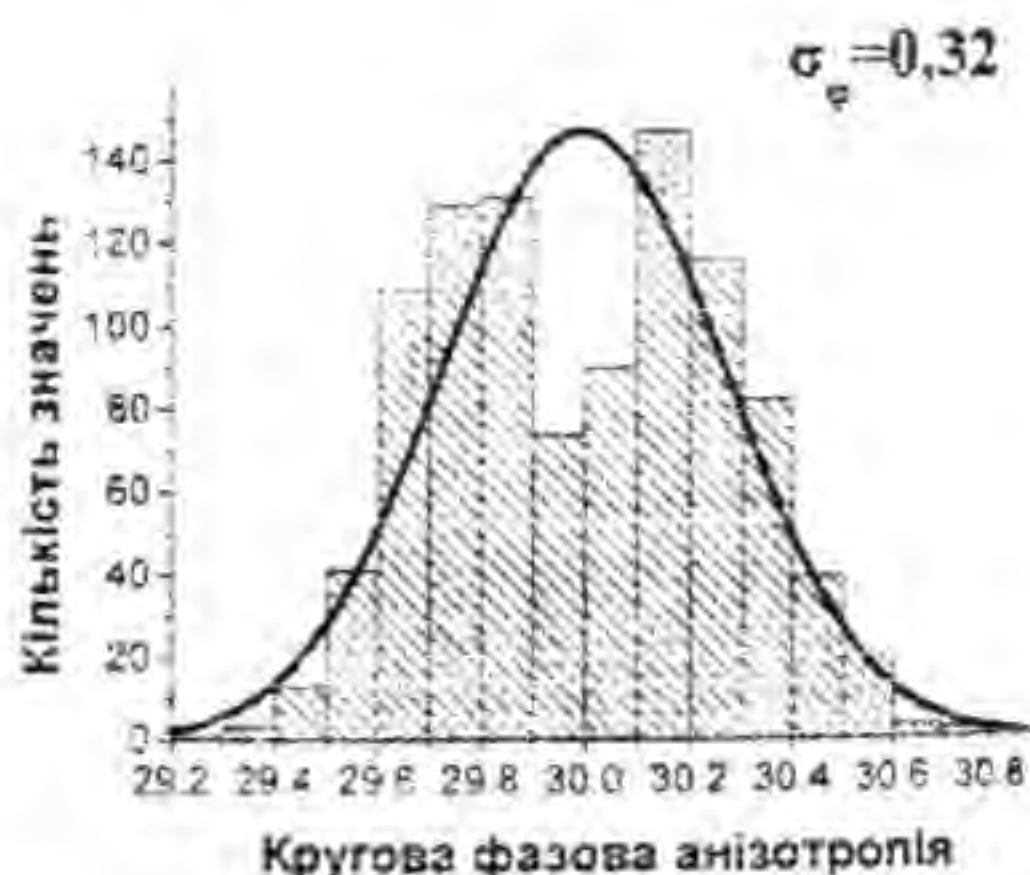


Рис.4 Розподіл розрахованих значень кругового фазового зсуву з величиною 30 градусів

видно, що точність відновлення об'єктів з лінійною фазовою анізотропією вища ніж об'єктів з круговою фазовою анізотропією.

Список використаних джерел

1. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет – М.: Мир. 1981. – 584 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики – М.: Наука, 1973. – 719 с.
3. Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику – М.: Мир. 1978
4. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок – М.: Мир. 1985 – 259 с.
5. Azzam R.M.A. A simple Fourier photopolarimeter with rotating polarizer and analyzer for measuring Jones and Mueller matrices // Opt. Commun. – 1978. – №25 – P. 137–140.
6. Azzam R.M. Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal // Opt. Lett. – 1978. – №2. – P. 148–150.
7. Jellison, Jr., G.E., Modine F.A., Two-modulator generalized ellipsometry: Theory // Appl. Opt. – 1997. – №31. – pp.8190–8198.
8. Jellison, Jr., G.E., Modine F.A., Two-modulator generalized ellipsometry: Experiment and calibration // Appl. Opt. – 1997. – №31. – P. 8184–8189.
9. Gerald E. Jellison Jr., Frank A., Modine F.A., Chi Chen., Calibration procedures for a two-modulator generalized ellipsometer // Solid State Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN 3783 – P. 6030–6032.
10. Tyo J. S. Noise equalization in Stokes parameter images obtained by use of variable-retardance polarimeters // Opt. Lett. – 2000. – №16. – P. 1198–1200.
11. Шутов А. М. Оптические схемы устройств измерения параметров поляризованного излучения // оптикомеханическая промышленность. – 1985. – № 11. – С. 52–56.
12. Hauge P.S. Mueller matrix ellipsometry with imperfect compensators // J. Opt. Soc. Am. – 1978. – №68. – P. 1519–1528.
13. Thomson R. C., Fry E. S. Mueller matrix measurements using polarization modulation techniques // J. Opt. Soc. Am. – 1974. – №64. – P. 1399
14. Sabatke D., Descour M. R., Dereniak E. I., Sweatt W. C., Kemme S. A., and Phips G. S. Optimization of retardance for a complete Stokes polarimeter // Opt. Lett. – 2000. – №11. – P. 802–804.

Надійшла до редколегії 17.04.2009

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альошин О.Д., доктор фіз.-мат. наук, професор
Абдікарімов Б.Ж., кандидат фіз.-мат. наук
Булавін Л.А., академік НАНУ, професор
Остапчук Ю.Л., кандидат фіз.-мат. наук
Рудніков Є.Г., кандидат фіз.-мат. наук

Ван-дер-Ваальсова модель газу флуктуацій параметра порядку поблизу критичної точки

В роботі на основі флуктуаційної теорії фазових переходів і моделі системи поблизу критичної точки як газу флуктуацій параметра порядку, що відповідає рівнянню Ван-дер-Ваальса, запропоновано вираз для флуктуаційної частини термодинамічного потенціалу. На основі цієї моделі розроблено розширене рівняння кривої співіснування рідинних систем у флуктуаційній області. Одержане рівняння стану апробовано на основі експериментальних даних температурної залежності густини рідини і пари індивідуальних речовин етану, двоокису вуглецю поблизу критичної точки, а також ряду подвійних розчинів нітробензол-алкани (гептан – гексадекан).

Ключові слова: критична точка, Ван-дер-Ваальсова модель, газ флуктуацій, параметр порядку

* E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

На даний час продовжує залишатись актуальною проблема розробки розширеного рівняння стану речовини в широкому околі термодинамічних параметрів, включаючи і близький окіл критичної точки (КТ) [1]. В рамках флуктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [1] рівняння стану речовини, що відповідають наближенню "нульового скейлінгу", є симетричними і знаходять своє підтвердження лише в близькому околі КТ, в області параметрів $\Delta\rho = (\rho - \rho_c)/\rho_c < 10^{-1}$ і $t = (T - T_c)/T_c < 10^{-3}$, де ρ_c , T_c – відповідно критичні густина та температура. Однак, при віддаленні від КТ в область параметрів $\Delta\rho > 10^{-1}$ і $t > 10^{-3}$ властивості реальних фізичних систем не відповідають симетричним рівнянням стану речовини [2, 3].

В даній роботі для розробки розширеного рівняння кривої співіснування (КС) речовини була використана модель системи в околі КТ, як газ флуктуацій параметра порядку [4, 5], що відповідає властивостям реального газу Ван-дер-Ваальса [6]. Ця модель логічно впливає з

УДК 532.536

Alekhin O.D., Dr. of Sci., Prof.
Abdikarimov B.Zh., Ph.D.
Bulavin L.A., academician of HANU, Prof.
Ostapchuk Yu.L. Ph.D.
Rudnikov E.G., Ph.D.

Van der Waals model of gas of fluctuations of the order parameter near the critical point

The equation for the fluctuation part of the thermodynamic potential has been proposed in the work on the basis of fluctuation theory of phase transitions and the model of the system near the critical point as the gas of fluctuations of the order parameter according to the Van der Waals equation. On the basis of this model the extended equation of the coexistence curve of the fluid system in the fluctuation range has been developed. The obtained equation of state has been approved by using the experimental data of temperature dependences of the densities of the liquid and vapor of the ethane and carbon dioxide near the critical point and some binary solutions nitrobenzene-alkanes (heptane – hexadecane).

Keywords: critical point, Van der Waals model, gas of fluctuations, order parameter

симетричної ФТФП [1].

Доцільність вибору такої моделі є фізично обґрунтованою. Дійсно, згідно з ФТФП поблизу КТ [1] речовина є газом нанофлуктуацій, розміри яких дорівнюють радіусу кореляції системи R_c . Флуктуаційна частина термодинамічного потенціалу F_0 такої системи має вигляд, подібний до виразу для енергії ідеального газу $F_0 = N_\phi k_B T = C_0 R_c^{-3}$. В цьому виразі N_ϕ – не число молекул речовини, а чисельна кількість нанофлуктуацій параметра порядку в одному молі речовини.

У зв'язку з цим природно припустити, що, доповнюючи властивості невзаємодіючих між собою кластерів флуктуацій ФТФП [1] властивостями реального газу Ван-дер-Ваальса [6], можна на основі симетричних масштабних рівнянь стану речовини [1] одержати асиметричні рівняння стану, які б відповідали більш широкому околу КТ. Для цього, згідно [6], необхідно врахувати власний об'єм кластерів флуктуацій та сили взаємодії між ними на відстанях $r \geq R_c$. Для врахування неасимптотичних доданків [7] в [8] була використана теорія квазіасоціації Ван-дер-Ваальса [9]. В основу цієї

теорії покладено припущення, що речовина складається як з окремих молекул, так із їх комплексів з n молекул.

В цьому випадку виходячи з [4, 5], рівняння флуктуаційної частини термодинамічного потенціалу [1] можна представити у вигляді

$$F_{\phi} = \frac{F_0}{\omega} \left(1 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \Delta \rho_0 \right) \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot x \right) - AC_0^3 R_c^{-3} \quad (1)$$

Тут: $\Delta \rho \approx -\Delta V = (V_c - V)/V_c$, $\omega = (1 - V_{\phi}/V_c)$, $\rho_{\phi} = \rho_c/(1 - \omega)$ – густина речовини всередині флуктуації, "A" – стала, що характеризує сили взаємодії між кластерами флуктуацій на відстанях $r \geq R_c$: $F_0 = N_{\phi} k_B T = C_0 R_c^{-3}$ [1–3], $\Delta \rho_0 = dF_0/d\mu$, $C_0 \approx 10^{-22} \text{ см}^3$ – стала величина [5, 6], параметр $x = N_{\phi n}/N_{\phi} = x_0 t^{1/\delta} = x_0 \Delta \mu^{1/\delta \beta}$ [8] визначає ступінь асоціації флуктуацій в системі, N_{ϕ} – загальне число флуктуацій в одному молі речовини, які займають об'єм $V_{\phi} = 4/3 \pi R_c^3 \cdot N_{\phi}$, $N_{\phi n}$ – число флуктуацій, які утворюють комплекси із n флуктуацій (при $t \Rightarrow 0$, $x \Rightarrow 0$).

Проаналізуємо фізичний зміст параметра $\omega = (1 - V_{\phi}/V_c)$. Об'єм всіх флуктуацій V_{ϕ} в одному молі речовини природно представити у вигляді двох незалежних доданків: $V_{\phi} = \Delta V_1 + \Delta V_2$. Тут $\Delta V_1 = b = \text{const}$ – об'єм всіх молекул одного моля речовини, аналогічно рівнянню Ван-дер-Ваальса [6], $\Delta V_2 = V_{\phi} - b$ – "непорядкований" внесок в V_{ϕ} , що визначається середніми відстанями між молекулами речовини всередині флуктуації параметра порядку l який змінюється при відході від критичної точки. Цю величину ΔV_2 будемо характеризувати як функцію зміни ентропії моля речовини $\Delta V_2 = \Delta V_2(\Delta S_{\mu})$, $\Delta S_{\mu} = S_{\mu} - S_{\mu c}$ – ентропія моля речовини, відрахована від її значення $S_{\mu c}$ в критичній точці. Тобто $V_{\phi} = b + (\partial V_2 / \partial S_{\mu})_{N_{\phi}} \cdot \Delta S_{\mu}$, $\omega = \omega_0 (1 - \text{const} \cdot \Delta S_{\mu})$, $\omega_0 = 1 - b/V_c$.

Згідно ФТФП [1], масштабна розмірність мольної ентропії $\Delta S_{\mu} = \Delta(S/N)$ дорівнює масштабній розмірності питомої ентропії $\Delta(S/V) \sim t^{3\nu-1} = t^{1-\alpha}$ (або для польових залежностей $\Delta(S/V) \sim \Delta \mu^{(3\nu-1)/\beta\delta} = \Delta \mu^{(1-\alpha)/\beta\delta}$) поділеної на масштабну розмірність чисельної густини $\Delta(N/V) \sim t^{3\nu-\beta\delta} = t^{\beta} \sim \Delta \mu^{(3\nu-\beta\delta)/\beta\delta} = \Delta \mu^{1/\delta}$. Тоді $\Delta(S/N) = \Delta S_{\mu} \sim t^{1-\alpha-\beta} = \Delta \mu^{(1-\alpha-\beta)/\beta\delta}$.

Отже, отримуємо, що для температурних залежностей параметр $1/\omega \approx 1/\omega_0 (1 + \text{const} \cdot \Delta S_{\mu}) = 1/\omega_0 (1 + \text{const} \cdot t^{1-\alpha-\beta})$ або для польових залежностей $1/\omega \approx 1/\omega_0 (1 + \text{const} \cdot \Delta \mu^{(1-\alpha-\beta)/\beta\delta})$.

Використаємо співвідношення (1) для розрахунків розширеного рівняння КС речовини вздовж граничних термодинамічних напрямків.

Для межі поділу фаз $\Delta \mu = 0$ ($\Delta \mu = (\mu - \mu_0)/\mu_c$, μ_0 – хімічний потенціал системи на межі поділу фаз, μ_c – критичне значення хімічного потенціалу). В цьому випадку згідно [1] рівняння для радіуса кореляції має вигляд: $R_c^{-1} = t^{\nu} \Phi_1(Z_1^*) = t^{\nu} \sum_n b_n Z_1^{*n}$. Тут $\Phi_1(Z_1^*)$

$Z_1^* = \Delta \mu |t|^{1/\delta} \ll 1$ – відповідно, масштабна функція та масштабна змінна, ν , β , δ – критичні показники ФТФП [1].

На основі (1), знаходимо рівняння для параметра порядку $\Delta \phi$ уздовж кривої співіснування ($\Delta \mu = 0$; $\Delta \rho(t < 0) = dF/d\mu$)

$$\Delta \phi = \frac{dF}{d\mu} = \pm B_0 |t|^0 \pm B_1 |t|^{1-\alpha-\beta} + B_2 |t|^{2\beta} + B_3 |t|^{1-\alpha} - B_4 |t|^{1-\alpha-\beta} + \dots \quad (2)$$

В рівнянні стану (2) всі параметри $B_n > 0$: $B_0 = 3C_0 b_0^{-2} b_1$; $B_1 = B_0 \cdot x_0 \cdot (n-1)/n$, $B_2 = \kappa (B_0^2 - C_0 b_0^3 \Gamma_1)$, $\Gamma_1 = 6C_0 B_0^{-2} b_2$, $B_3 = (B_0 \cdot \text{const})/\omega_0$, $\kappa = (1-\omega)/\omega$, $B_4 = 4/3 \cdot AB_0 C_0 b_0$.

Зауважимо, що одержане рівняння (2) за своїм виглядом співпадає з іншими розширеними рівняннями КС речовини [1,2,3,7,10,11], які успішно застосовуються при аналізі і обробці експериментальних даних в широкому okolí КТ. Разом з тим параметри B_n рівняння (2), на відміну від розширених рівнянь стану [1,2,3,7], мають чітко визначений фізичний зміст.

Дійсно, перший асиметричний доданок $B_2 |t|^{2\beta}$ в (2), який враховує власний об'єм флуктуацій в системі [4,5], співпадає з відповідним доданком, введеним М. Фішером [11] на основі розширеного варіанту алгебри флуктуючих величин і пояснюється врахуванням тиску в рівнянні стану речовини.

Другий асиметричний доданок рівняння КС речовини (2) $B_3 |t|^{1-\alpha}$ співпадає з доданком розширеного рівняння стану, запропонованого на основі алгебри флуктуючих величин [1,11] і пояснюється врахуванням хімічного потенціалу в рівнянні стану речовини.

Асиметричний негативний доданок $(-B_4 |t|^{1-\alpha-\beta} < 0)$, який згідно Ван-дер-Ваальсу [6] враховує сили притягання між флуктуаціями на відстанях $r > R_c$, за модулем співпадає з відповідним доданком розширеного феноменологічного розкладу термодинамічного потенціалу за оберненим радіусом кореляції [10]. Однак на

відміну від моделі Ван-дер-Ваальса, цей доданок в [10] вважається позитивним ($B|t|^{\beta-\nu} > 0$).

Неасимптотичний доданок $\mp B_1 |t|^{\beta-\Delta_0}$ в (2), аналогічно ідеям Ван-дер-Ваальса [9], визначає ступінь асоціації флуктуацій. За своїм виглядом він подібний доданкам, які отримують з використанням методів ренормгрупи [1, 3] (розширених розкладів Гріна $(\rho_p - \rho_n)/2\rho_c = B_1 |t|^{\beta-\Delta_1} + B_2 |t|^{\beta-\Delta_2}$). В даній моделі припускається, що величина показника Δ_0 в (2) близька до показника Δ_1 за Вегнером [7] ($\Delta_0 \approx \Delta_1 = 0.5$, $2\Delta_0 \approx \Delta_2 \approx \nu + \Delta_1$).

В роботі рівняння КС (2) було використано при аналізі температурної залежності густини $\rho(T)$ однокомпонентних речовин стану та двоокису вуглецю вздовж напрямку межі поділу фаз в діапазоні температур $t_\phi = 10^{-2} \div 10^{-5}$. Обраний інтервал температур t_ϕ був обмежений лише флуктуаційною областю, яка, згідно критерію Гінзбурга [1], визначається нерівністю $t_\phi < Gi$ ($t_\phi \leq 10^{-2}$). Це дозволяє не враховувати кроссоверні доданки [4] у рівнянні КС речовини.

Для визначення параметрів рівняння КС (2) B_n окремо були проаналізовані експериментальні дані кривої співіснування $\Delta\rho(T < T_c, z=0)$ просторово неоднорідних стану та двоокису вуглецю (рис. 1), одержані методом проходження повільних нейтронів поблизу критичної точки [12] в полі гравітації Землі.

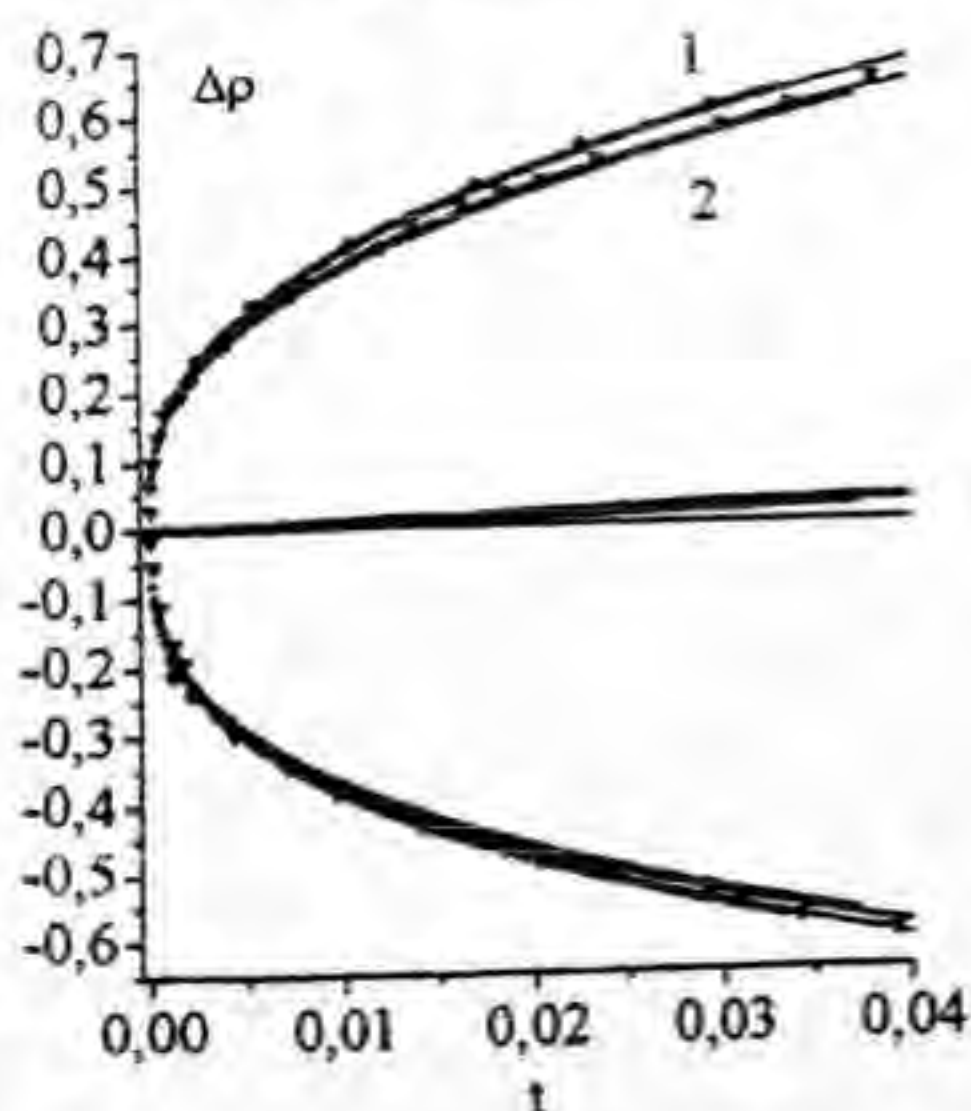


Рис. 1. Рівняння кривої співіснування етану (1) та двоокису вуглецю (2) однорідних та неоднорідних систем.

Крім того, було проаналізовано літературні дані температурних залежностей густини $\Delta\rho(t)$

цих об'єктів уздовж КС рідина-пара [13, 14], одержані на основі P-V-T вимірювань (рис. 1).

Результати розрахунків параметрів B_n представлені в таблиці 1. При розрахунках B_n були використані значення критичних показників, отримані методом введення малих параметрів [15] у співвідношення ФТФП [1,2]: $\nu = 0.636$; $\beta = 0.338$; $\alpha = 0.091$.

Табл. 1. Критичні параметри та амплітуди B_n рівняння рівноваги (2)

Речовина	P_c	ρ_c	T_c, K	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
Двоокис вуглецю	4.87	207	305.33	1.87	0.18	0.12	1.4	1.1
Етан	7.38	467.6	304.13	1.78	0.18	0.08	0.9	0.6

Виходячи з гіпотези ізоморфізму [2] у даній роботі ми також використовували рівняння стану (2) для аналізу температурних залежностей мольної концентрації $c_\mu(T)$ ряду розчинів алканів (гептан, октан, декан, ундекан, додекан, тридекан, тетрадекан, гексадекан) у нітробензолі [16, 17] уздовж межі поділу фаз у діапазоні температур $t_\phi = 10^{-5} \div 10^{-2}$. Ці дані представлені на рис. 2.

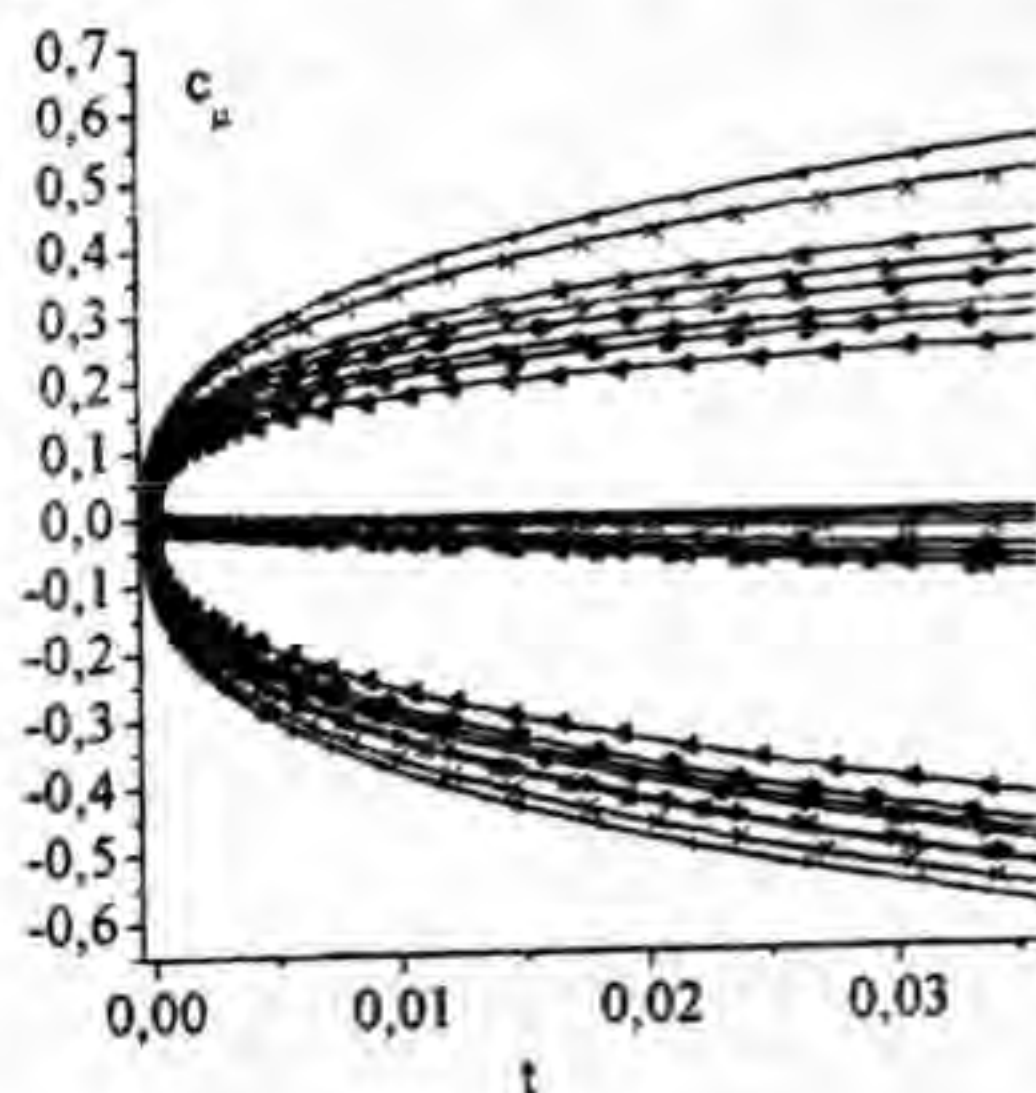


Рис. 2. Температурна залежність молярної концентрації розчинів нітробензол – алкани (+ гептан, x октан, * декан, ► ундекан, ● додекан, ★ тридекан, ● тетрадекан, ◀ гексадекан) та діаметри кривих співіснування.

На основі даних, представлених на рис. 2, і розрахунків згідно рівняння (2) були розраховані параметри $B_n(N^c)$ рівняння стану (2). Одержані результати представлені в табл. 2.

Із цих рисунків видно, що експериментальні дані $\Delta\rho(t)$ та $c_{\text{ш}}(t)$ добре узгоджуються з розширеним рівнянням кривої рівноваги (2) і (3), яке запропоновано в цій роботі на основі моделі системи поблизу КТ як газ флуктуацій параметра порядку з властивостями реального газу Ван-дер-Ваальса [7].

Табл. 2. Критичні параметри та амплітуди B_n рівняння рівноваги (2)

Розчин	$C_{\text{шк}}$	T_c, K	B_0	B_1	B_2	$B_3 - B_2$
нітробензол-						
гептан	0.471	291.9	1.77	0	-0.2	0.2
октан	0.505	293.1	1.66	0	-0.27	0.1
декан	0.574	296.0	1.47	0	-0.52	0
ундекан	0.606	298.0	1.41	0	-0.7	0.03
додекан	0.63	300.4	1.31	0	-0.69	0.05
тридекан	0.654	303.0	1.22	0.09	-0.8	0
тетрадекан	0.676	304.9	1.16	0.11	-0.81	-0.05
гексадекан	0.717	309.7	1.02	0.16	-0.83	0

Таким чином, представлений в даній роботі перехід від моделі системи поблизу КТ як ідеального газу нанофлуктуацій, що впливає з сучасної ФТФП [1, 2] до Ван-дер-Ваальсової моделі реального газу [4 – 6] виявився досить успішним. Підтвердженням цього є той факт, що розширене рівняння стану речовини (2), запропоноване в даній роботі, яке враховує особистий розмір флуктуацій параметра порядку, сили їх взаємодії між собою, утворення їх комплексів, підтверджується сучасними рівняннями стану речовини в околі КТ. Ці рівняння базуються на розширеному варіанті алгебри флуктуюючих величин [12], використанні методів ренормгрупи [1, 2, 4], використанні різних типів параметричних моделей та інших.

Список використаних джерел

1. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 2-е изд., перераб. 1982. – 382 с.
2. Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. – М.: Наука. – 1987. – 271 с.
3. Cheng Hongyuan, M.A. Anisimov, J.V. Sengers / Fluid Phase Equilibria 1997. – 128, 67.
4. Алехин А.Д. Модель Ван-дер-Ваальса и масштабный закон вблизи критической точки // Известия вузов. Физика. – 1983. – Вып.3. – С. 103–105.

5. Алехин А.Д., Булавин Л.А. Модель Ван-дер-Ваальса и расширенное масштабное уравнение состояния вещества // УФЖ – 1991. – Т. 36, № 3. – С. 383–387.
6. Ван-дер-Ваальс И.Д., Констамм Ф. Курс термостатики. Т.2 – М.: ОНТИ – 1936. – 439с.
7. Wegner F.J. Corrections to scaling laws // Phys. Rev. B: Solid state – 1972. – Vol. 5, N 11. – С. 4529–4536.
8. Алехин А.Д. Вестник Киевского университета. Серия физ-мат. науки. 2. 322 (2003).
9. А.Я. Кипнис, Б.Е. Явсолов Иоганнес Дидерик Ван-дер-Ваальс АН СССР. Ленинград. Изд-во «Наука». 1985. – 309 с.
10. Чалый А.В. Разложения по обратному радиусу корреляции // УФЖ – 1976. – Т. 21, № 3. – С. 474–476.
11. M.E. Fisher, G. Orkoulas, Phys. Rev. Lett 85 (2000) 696; Y.C. Kim, M.E. Fisher, G. Orkoulas, Phys. Rev. E 67 (2003) 061506
12. Булавин Л.А. Властивості рідин у критичній області. Київ: “Київський університет”. – 2002. – 208 с.
13. Span, R., Wagner, W., A New Equation of State for Carbon Dioxide Covering the Fluid Region from the Triple-Point Temperature to 1100 K at Pressures up to 800 MPa, J. Phys. Chem. Ref. Data, 1996, 25, 6, 1509-1596.
14. Friend, D.G., Ingham, H., Ely, J.F., Thermophysical properties of ethane, J. Phys. Chem. Ref. Data, 1991, 20(2), 275-347
15. A.D. Alekhin // Journal of Molecular Liquids. – 2005. – 120 – P. 43-45.
16. Xueqin An, Fuguo Jiang, Haihong Zhao, Chuanyin Chen, and Weiguo Shen Measurements of coexistence curves and turbidity for $\{xC_6H_5NO_2 + (1-x)CH_3(CH_2)_6CH_3\}$ in the critical region // J. Chem. Thermodynamics 1998, 30, 751-760.
17. Xueqin An, Fuguo Jiang, Haihong Zhao, Weiguo Shen The measurements of coexistence curves and turbidity for $\{xC_6H_5NO_2 + (1-x)CH_3(CH_2)_6CH_3\}$ in the critical region // J. Chem. Thermodynamics 1998, 30, 751-760

Надійшла до редколегії 27.04.2009

УДК 577.32

Барабаш Ю.М., канд. хім. наук,
Заболотний** М.А., канд. фіз.-мат. наук,
Серденко* Т.В., аспірантка,
Кшнякіна С.І., канд. фіз.-мат. наук.

Застосування вейвлет-перетворень до вивчення кінетики електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах

Дана робота присвячена кінетиці електронного транспорту в бактеріальних реакційних центрах (РЦ). Досліджуються процеси релаксації та фотоіндуковані структурні зміни в молекулярних комплексах РЦ *Rhodobacter sphaeroides* у процесі внутрішньомолекулярного переносу електронів. Представлено результати експериментального дослідження динаміки показників поглинання РЦ та теоретичного аналізу релаксаційних кривих за допомогою вейвлет-перетворень.

Ключові слова: реакційний центр, електронний транспорт, вейвлет-перетворення.

*E-mail: honarevyska.taisa@gmail.com ** zabolotny@univ.kiev.ua

Відомо [1-3], що при поглинанні кванту світла у РЦ відбувається фотоокиснення первинного донора електрона – димера бактеріохлорофілу (P) (рис. 1). Далі збуджений електрон через ряд проміжних переносників потрапляє на первинний (Q_a) хінонний акцептор (150 пс), а потім на кінцевий (Q_b) акцептор (10⁻⁴ с). Електрон між P і (Q_b) переноситься на відстань близько 30 Å. Визначальна роль у цьому процесі належить білковому оточенню. При фіксованому освітленні РЦ електрон знаходиться в динамічній рівновазі. Параметри такої рівноваги залежать від інтенсивності та часу освітлення. Поглинання розчину РЦ ($\lambda = 865\text{ нм}$) зменшується. Після вимикання світла починається релаксація РЦ у темновий стан та відбувається повільне повернення електрона. Поглинання розчину РЦ ($\lambda = 865\text{ нм}$) відновлюється. Ймовірність $p(t)$ знаходження електрона на донорі РЦ залежить від інтенсивності збуджуючого світла та часу релаксації РЦ. За умови, коли час релаксації збудженого РЦ більше, ніж період надходження

Barabash Y.M., Ph.D.,
Zabolotny** M.A., Ph.D.,
Serdenko* T.V., postgraduate student,
Kshnyakina S. I., Ph.D.

Wavelet transformation in the study of kinetics of electron transport in bacterial reaction centers

The present paper discusses kinetics of electron transport in bacterial reaction centers (RC). Aspects of relaxation processes and photoinduced structural changes in a molecular complex RC of *Rhodobacter sphaeroides* as the result of intramolecular electron transport were studied. The results of experimental study of dynamics of absorption coefficient and theoretical analysis of relaxation curves by the method of wavelet transformation are presented.

Key Words: reaction center, electron transport, wavelet transformation.

квантів світла, виникає ефект накопичення структурних змін РЦ [4-5].

Метою роботи є аналіз кінетики електронного транспорту в РЦ за допомогою вейвлет-перетворень.

МОДЕЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Описані процеси дозволяють нам розглядати систему РЦ як дворівневу [6]. Відповідно до цієї моделі РЦ знаходяться в основному стані (0), коли електрон локалізований на донорі P. При поглинанні кванту світла, РЦ переходить у збуджений стан, а електрон переміщується на акцептор Q_b – стан (1). Кінетика процесу в такій моделі задається швидкостями прямого (k_{01}) та оберненого (k_{10}) переходів. Дослідження цих характеристик дає інформацію про електронно-конформаційні процеси в РЦ. Дослідження показали, що швидкість переходу електрона з донора на акцептор (k_{01}) пропорційна інтенсивності збуджуючого світла I_0 і, відповідно, справедливим є представлення:

$$k_{01} = I_0 \cdot \alpha \quad (1)$$

де α – коефіцієнт екстинкції, що не залежить від часу.

Особливості кінетики РЦ описуються за допомогою моделювання швидкості (k_{10}) оберненого переходу. Передбачається, що ця швидкість залежить від часу. Кінетика процесів, що відбуваються в РЦ під дією світла, може бути описана рівнянням:

$$\frac{dp(t)}{dt} = I_0 \cdot \alpha \cdot p(t) + k_{10}(t) \cdot (1 - p(t)) \quad (2)$$

У якості початкової умови використовується:

$$p(0) = 0 \quad (3)$$

Ця умова відповідає тому, що до моменту включення світла усі електрони знаходились на донорі. Процеси, що відбуваються в комплексі РЦ, при виключенні освітлення описуються рівнянням, аналогічним (2):

$$\frac{dq(t)}{dt} = -k_{10}(t) \cdot q(t) \text{ і } q(0) = q_0 \quad (4)$$

$$\text{та } p(t) + q(t) = 1$$

де параметр $k_{10}(t)$ характеризує швидкість переходу електронів з акцептора (Q_b) на донор (P) при вимкненому освітленні; $q(t)$ – ймовірність знаходження електрона на акцепторі РЦ; q_0 – описує знаходження електронів на акцепторі РЦ у момент вимкнення збуджуючого світла і залежить від параметрів збуджуючого світла та температури зразка.

Співвідношення, аналогічне (4), може бути записане і для поглинання $A(t)$ розчину РЦ, яке вимірюється експериментально:

$$k_{10}(t) = \frac{\frac{dA(t)}{dt}}{(A(0) - A(t))} \quad (5)$$

У функціонуванні макромолекул дуже важливу роль відіграє геометрія системи, еволюцію якої можна прослідкувати за кінетикою повернення РЦ в темноадаптований стан. Розглянемо повільні конформаційні рухи, що виникають при перерозподілі електронної щільності. Для пояснення вказаних особливостей

поведінки k_{10} була запропонована модель (рис. 2), відповідно до якої, електрон може знаходитися на донорі (стан 1) або на акцепторі (стан 2). Під дією світла електрон здійснює перехід $1 \rightarrow 2$. Повернення електрона в первинне положення описується переходом $2 \rightarrow 1$. Коли електрон знаходиться в стані 1, він локалізований в околі точки y_1 . Надалі в цю точку помістимо початок координат і покладемо $y_1 = 0$. Зміну потенціальної енергії електрона при його відхиленні від положення рівноваги опишемо в лінійному наближенні за допомогою потенціальної енергії $U_1(y)$, яку виберемо в параболічній формі.

$$U_1(y) = \frac{a}{2} y^2 \quad (6)$$

Тут a – параметр, що визначає крутизну гілок потенціалу $U_1(y)$.

У разі переходу електрона в стан 2, центр його рівноважного стану зміщується у точку y_2 . Зрозуміло, що при такому переході оточення електрона змінюється і, відповідно, повинна змінюватися взаємодія з ним. Форма потенційної енергії електрона в стані 2 в лінійному наближенні буде мати вигляд:

$$U_2(y) = \frac{b}{2} (y - y_2)^2 + E_2 \quad (7)$$

Де b – параметр, що визначає крутизну гілок потенціалу $U_2(y)$. Величина E_2 задає мінімальне значення потенційної енергії електрона, що знаходиться в стані 2. Припускаємо, що положення сусідів електрона в стані 2 не є жорстко закріпленим і при попаданні електрона в стан 2 за рахунок його взаємодії з оточенням відбувається поляризація області його локалізації, що змінюється в часі. Це приводить до того, що величини b , y_2 , E_2 повинні залежати від часу. Пояснюючи особливості кінетики $k_{10}(t)$, зупинимося на дослідженні особливостей переходу $2 \rightarrow 1$. На рис.2 приведена схема електронних переходів в дворівневій системі. Відзначимо, що величина k_{10} визначалася характеристиками бар'єру, що розділяє просідання 2 і 1 за допомогою співвідношення:

$$k_{10}(t) = \nu \cdot \exp\left(-\frac{\Delta(t)}{k_B T^0 K}\right) \quad (8)$$

Тут ν – частота підходу електрона до бар'єру $\Delta(t)$, k_B – постійна Больцмана, T^0K – температура зразка.

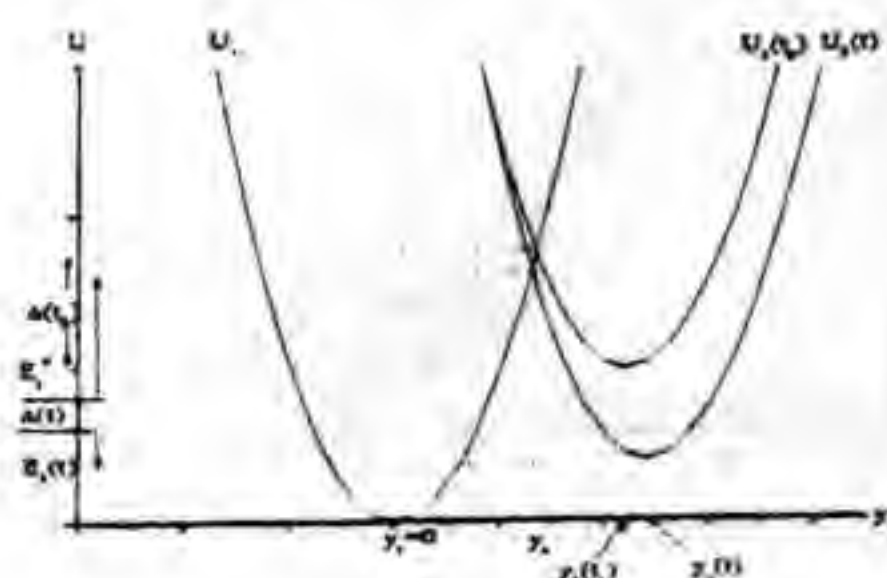


Рис. 1. Схема електронних переходів у дворівневій системі.

Положення функція $U_2(y)$ залежить від часу. З рис. 1 видно, що висота потенціального бар'єру Δ , що заважає переходу $2 \rightarrow 1$ також залежить від часу, так як вона визначається точкою перетину графіків $U_1(y)$ та $U_2(y)$. Зрозуміло, що при "просіданні" функції U_2 величина бар'єру Δ зменшується – $\Delta(t_1) > \Delta(t_2)$. З цього можна зробити висновок, що процес повернення електрона із стану 2 в стан 1 буде тим легше, чим сильніше "просіла" U_2 , що може відбуватися за рахунок поляризаційних процесів. Визначимо залежність $\Delta(t)$ від величини $E_2(t)$, що є мінімально можливим значенням $U_2(y)$ у момент часу t . Відмітимо, що просідання $E_2(t)$ відносно рівноважного темноадаптованого стану буде $E_2^0 - E_2(t)$. Визначимо точку перетину y_n графіків $U = U_1(y)$ та $U = U_2(y)$ з рівняння $U_1(y_n) = U_2(y_n)$. Використовуючи формули (7) та (8), отримаємо наступний вираз для y_n :

$$y_n = \frac{-b \cdot y_2(t) + \sqrt{2 \cdot (a-b) \cdot E_2(t) + a \cdot b \cdot y_2^2(t)}}{a-b}, \quad (9)$$

цей вираз набуває особливо простого вигляду у випадку $a = b$:

$$y_n(t) = \frac{a \cdot y_2^2(t) + 2 \cdot E_2(t)}{2 \cdot a \cdot y_2(t)}. \quad (10)$$

Відносно можливої залежності $y_2(t)$ зробимо припущення, що зміщення $(y_2^0 - y_2(t))$ пропорційне величині "просідання" $E_2^0 - E_2(t)$. Тут y_2^0 – координата центру рівня 2 у

рівноважному темноадаптованому стані. Отже, має місце співвідношення:

$$y_2^0 - y_2(t) = \alpha \cdot (E_2^0 - E_2(t)), \quad (11)$$

де α – розмірний коефіцієнт пропорційності.

Використовуючи вирази (10) і (11) величину енергетичного бар'єру $\Delta(t)$ можна представити таким чином:

$$\Delta(t) = \frac{a}{8} [y_2^0 - \alpha \cdot (E_2^0 - E_2(t))]^2 + \frac{E_2^2(t)}{2 \cdot a \cdot [y_2^0 - \alpha \cdot (E_2^0 - E_2(t))]^2} - \frac{E_2(t)}{2}. \quad (12)$$

З останнього співвідношення видно, що в рамках вибраної моделі величина бар'єру, що визначає особливості переходу електрона $2 \rightarrow 1$ повністю задається кінетикою $E_2(t)$ і $y_2(t)$. Окремим завданням є розробка моделі, що визначає особливості переміщення рівня 2. При попаданні електрона на рівень 2 (ймовірність перебування електрона на ньому – q) під дією його електричного поля відбувається поляризація оточення. Рівень 2 опускається. Припускаємо, що швидкість зменшення потенціальної енергії електрона пропорційна ймовірності знаходження його на рівні 2 (позначимо μ відповідний коефіцієнт пропорційності). Після відходу електрона з рівня 2 починається релаксація рівня до первинного положення. Припускаємо, що швидкість цього процесу тим більше, чим сильніше відхилення рівня від первинного положення $(E_2^0 - E_2(t))$, а характерний час релаксації (τ) не залежить від цієї величини. У такому разі рівняння, що описує динаміку рівня 2, матиме наступний вигляд:

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = -\mu \cdot q(t) + \frac{E_2^0 - E_2(t)}{\tau}. \quad (13)$$

Природною початковою умовою, що доповнює рівняння (13), є вимога

$$E_2(t=0) = E_{2,0}, \quad (14)$$

де $E_{2,0}$ – значення енергії рівня 2 у момент виключення збуджуючого світла. Розв'язок задачі (13), (14) має наступний вигляд:

$$E_2(t) = E_2^0 - (E_2^0 - E_{2,0}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \mu \cdot \int_0^t q(t') \cdot \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \quad (15)$$

Зрозуміло, що має виконуватись умова

$$(E_2^0 - E_{2,0}) \geq 0. \quad (16)$$

Таким чином, система рівнянь, що описує процес повернення електрона в початкове положення на донор РЦ матиме наступний вигляд:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -k_{10}^T(t) \cdot q(t),$$

$$k_{10}^T(t) = \nu \cdot \exp\left(-\frac{\Delta(t)}{k_B \cdot T}\right),$$

$$\Delta(t) = \frac{\sigma}{8} [y_2^0 - \alpha \cdot (E_2^0 - E_2(t))^2] + \frac{E_2^2(t)}{2 \cdot \sigma [y_2^0 - \alpha \cdot (E_2^0 - E_2(t))^2]} - \frac{E_2(t)}{2},$$

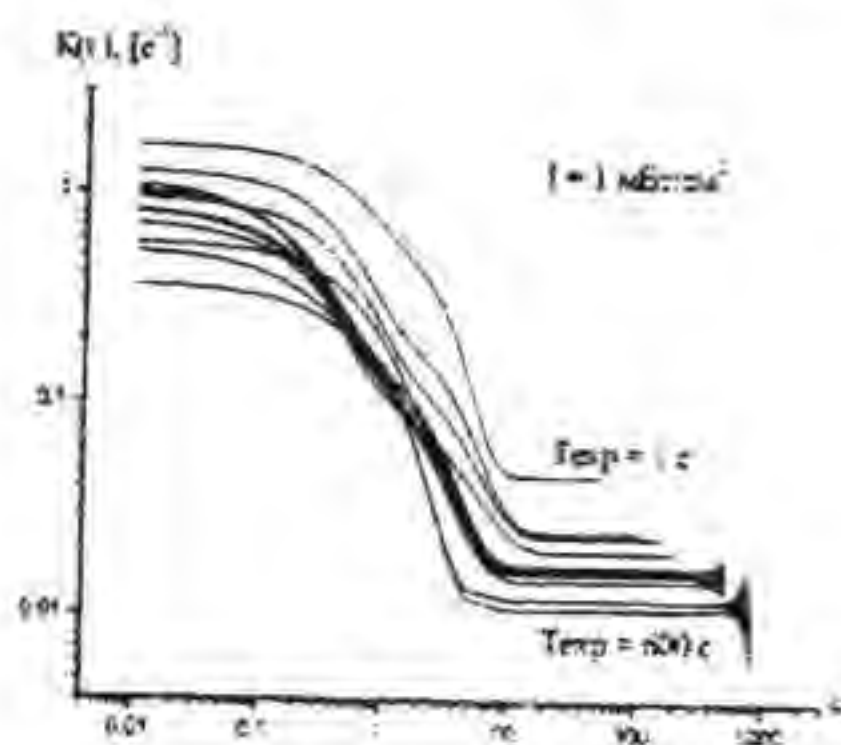
$$E_2(t) = E_2^0 - (E_2^0 - E_{2,0}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \mu \cdot \int_0^t q(t') \cdot \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt',$$

$$E_2(t=0) = E_{2,0}, \quad q(t=0) = q_0. \quad (17)$$

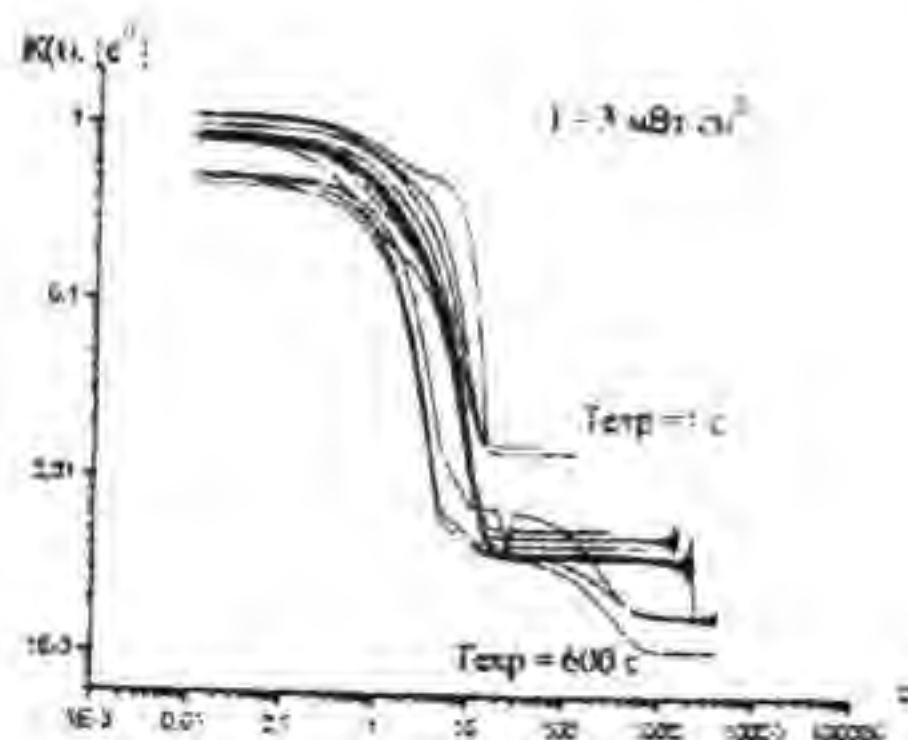
Константа швидкості релаксації електрона (відновлення донора) суттєво залежить від ймовірності відсутності електрона на донорові, що робить задачу самоузгодженою. Збільшення деформації пропорційне величині «просідання» рівня 2.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДАНІ

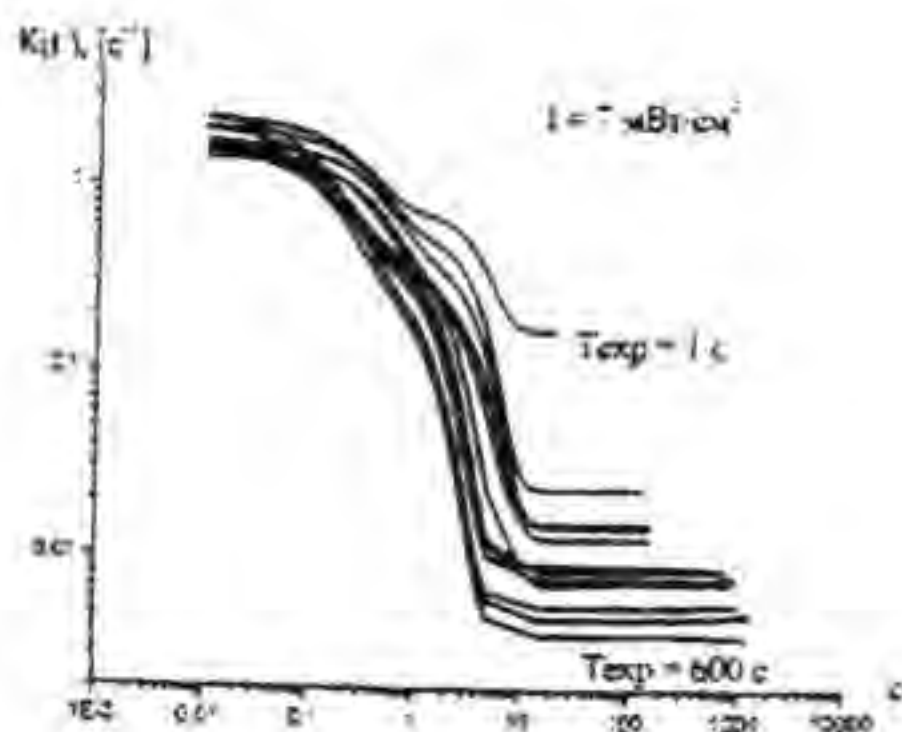
Були проведені експериментальні дослідження зміни показника поглинання водного розчину РЦ при різних режимах освітлення. На рис.2 показано результуючі швидкості зміни показника поглинання ($K(t)$) після вимикання світла (швидкість релаксації).



а)



б)



в)

Рис.2(а, б, в). Залежність зміни показника поглинання ($K(t)$) водного розчину комплексів РЦ, після виключення збуджуючого світла при різних значеннях часу експозиції (1, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 90, 120, 300, 600 секунд) та інтенсивності світла $I_0 = 1$ (а), 3 (б), 7 (в) мВТ/см².

Рівень релаксації структурних змін РЦ після вимикання світла має S-подібний характер. Зміни варіюються у часовому діапазоні від 0,2 – 0,4 с (початкове поле) до 6 – 10 с (кінцеве поле) в залежності від умов експерименту. Швидкості

релаксації РЦ у початковий та кінцевий момент відрізняються у десятки разів.

Таким чином, структурні зміни РЦ відбувається за рахунок електростатичного поля, що виникає в результаті збільшення енергетичної щільності між Q_a і Q_b . Процес переносу електрона циклічний. Чим довше електрон перебуває на акцепторі, тим сильніше проявляються деформації.

$$K(t) = |A'(t)/A(t)| = k'(t) \cdot t + k(t) \quad (18)$$

де $A(t) = A_0 \cdot \exp(-k(t) \cdot t)$ поглинання РЦ, A_0 – поглинання РЦ в момент вимкнення світла. Різним значенням дискримінанта k відповідає різний ступінь структурних змін.

Наступним кроком нашого дослідження був вейвлет-аналіз експериментальних кривих. Застосування вейвлет-аналізу зумовлено недоліками фітування та аналізу за допомогою Фур'є-перетворень. При фітуванні кривої експоненціальними функціями одну й ту саму криву можна описати різними наборами параметрів k та v , що призводить до неоднозначності розкладу, тобто така задача некоректна. Релаксаційні криві РЦ нестационарні. При аналізі нестационарних сигналів необхідна часова локалізація, так як кожна конкретна частота може бути присутньою в них не глобально, а локально, лише на деякому проміжку. Аналіз Фур'є не дозволяє отримати частотно-часове представлення сигналу. Вейвлет-аналіз дозволяє знайти певні особливості S-подібних кривих, такі як критичні точки, тобто точки, в яких відбувається зміни частотних складових сигналу [7-9].

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ

Вейвлет-перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу. Вейвлети – узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми, локальних в часі і по частоті, в яких усі функції отримані з однієї базисної шляхом її зсуву і розтягів по часовій осі.

Вейвлети мають вигляд коротких хвилових пакетів з інтегральним нульовим значенням, локалізованих по осі аргументів (незалежних змінних), інваріантних відносно зсуву та лінійних по відношенню до операцій масштабування (стиснення, розтяг).

Вейвлети – локалізовані функції, які конструюються з одного материнського вейвлету $\psi(t)$ шляхом операції зсуву по часу (b) та зміни часового масштабу (a):

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (19)$$

$$(a, b) \in R, \psi(t) \in L^2(R)$$

де множник $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ забезпечує незалежність норми

функції від масштабуючого числа ' a '.

Неперервне (інтегральне) вейвлет-перетворення сигналу $s(t) \in L^2(R)$, яке застосовується для якісного частотно-часового аналізу, за змістом відповідає перетворенню Фур'є з заміною гармонічного базису $\exp(-j\omega t)$ на вейвлетний $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$:

$$W(a, b) = \langle s(t), \psi_{ab}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (a, b) \in R, a \neq 0 \quad (20)$$

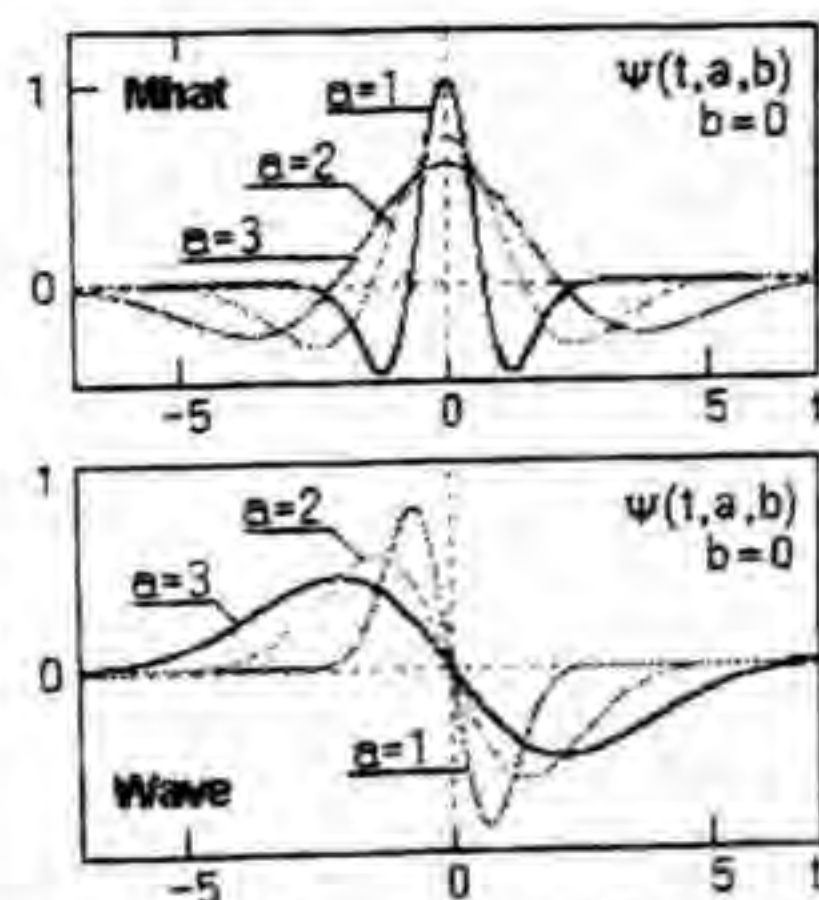


Рис.3. Вейвлети Mhat и Wave.

Вейвлетний масштабно-часовий спектр $W(a, b)$ на відміну від Фур'є-спектру є функцією двох аргументів: частотного масштабу вейвлету ' a ' (в одиницях, обернених частоті), та часовому зміщенню вейвлету по сигналу ' b ' (в одиницях часу), при цьому параметри ' a ' та ' b ' можуть приймати будь-які значення у межах області визначення [10].

На рис.3 наведено приклади простих неортогональних вейвлетів парного (Mhat) та непарного (Wave) типів.

$$\psi_{\text{Mhat}}(t, a, b) = \frac{1.031}{\sqrt{2}} \cdot \left[\exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] \right]$$

(21)

$$\psi_{\text{wave}}(t, a, b) = \frac{-1,786}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t-b}{a} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right]. \quad (22)$$

Властивості вейвлетів, принципово важливі для реалізації вейвлетних перетворень:

- Локалізація. Вейвлет повинен бути неперервним, інтегровним, мати компактний носій та бути локалізованим як в часі (в просторі), так і по частоті. Якщо вейвлет у просторі звужується, то його "середня" (домінуюча) частота підвищується, спектр вейвлета переміщується в область більш високих частот і розширюється. Цей процес має бути лінійним – звуження вейвлета вдвічі повинно підвищувати його домінуючу частоту і ширину спектра також вдвічі.

Вейвлетну функцію можна вважати достатньо локалізованою, якщо виконується умова:

$$\psi(t) \leq \frac{C}{(1+|t|)^{-\epsilon}}, \quad \Psi(f) \leq \frac{C}{(1+|f|)^{-\epsilon}}, \quad \text{при } \epsilon > 0. \quad (23)$$

- Нульове середнє значення, тобто виконання умови для нульового моменту:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \text{що забезпечує виділення}$$

локальних особливостей сигналів, нульове підсилення постійної складової сигналу з нульовим значенням частотного спектра вейвлета при $\omega = 0$, та локалізацію вейвлета у вигляді смутового фільтра з центром на певній (домінуючій) частоті ω_0 вейвлетної функції.

- Обмеженість. Необхідна і достатня

$$\text{умова: } \|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

Оцінка хорошої обмеженості та локалізації може здійснюватись за допомогою виразів:

$$|\psi(t)| < \frac{1}{(1+|t|^n)}, \quad \text{або } |\Psi(\omega)| < \frac{1}{(1+|\omega_0|^n)}. \quad (24)$$

де ω_0 – середня частота вейвлета. Число n повинне бути якнайбільшим.

- Автоподібність базису або самоподібність. Форма усіх базисних вейвлетів $\psi_{\omega}(t)$ повинна бути подібна до материнського вейвлету $\psi(t)$, тобто повинна залишатись такою ж при зсувах та масштабуванні, мати одне й те ж число осциляцій [11-12].

Вейвлетні перетворення дозволяють отримати не лише загальну частотну характеристику сигналу, а й відомості про певні локальні координати, на яких проявляються ті чи інші групи частотних складових, або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу.

Вейвлет аналіз одномірних сигналів забезпечує двовимірну розгортку, при цьому частота та координата розглядаються як незалежні змінні, що дає можливість аналізувати сигнал відразу у двох просторах.

Одна з головних ідей вейвлетного перетворення сигналів на різних рівнях декомпозиції (розкладу) полягає у розділенні функцій наближення до сигналу на дві групи: апроксимуючу – грубу, з повільною часовою динамікою змін, та деталізуючу – з локальною та швидкою динамікою змін на фоні плавної динаміки, з подальшим їх дробленням та деталізацією на інших рівнях декомпозиції сигналів.

В основі вейвлет-перетворень лежить використання двох неперервних, взаємозалежних та інтегровних по незалежній змінній функцій.

- Вейвлет-функції $\psi(t)$, як psi-функції часу з нульовим значенням інтегралу та частотним Фур'є-образом $\Psi(\omega)$. Ця функція, яка зазвичай і називається вейвлетом, виділяє деталі сигналу і її локальні особливості. У якості аналізуючих вейвлетів зазвичай вибираються функції, добре локалізовані і в часовій, і в частотній області. Приклад часового та частотного образу функції приведено на рис.4.

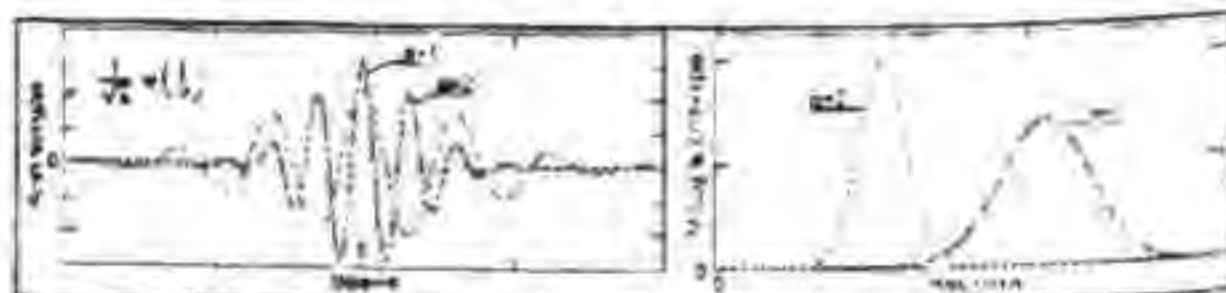


Рис.4. Вейвлетні функції у двох масштабах.

- Масштабуючої функції $\phi(t)$, як часової скейлінг-функції $\phi(t)$ з одиничним значенням інтегралу, за допомогою якої виконується грубе наближення

(апроксимація) сигналу. Phi-функції притаманні не усім, а, як правило, тільки ортогональним вейвлетам.

Розглянемо неперервне вейвлет-перетворення (НВП). Припустимо, що ми маємо функції $s(t)$ кінечної енергії у просторі $L^2(R)$, визначені на всій дійсній осі $R(-\infty, \infty)$. Неперервним вейвлет-перетворенням (або вейвлетним образом) функції $s(t) \in L^2(R)$ називають функцію двох змінних:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi(a, b, t) dt, \quad a, b \in R, \quad a \neq 0 \quad (25)$$

де вейвлети $\psi(a, b, t) \equiv \psi_{ab}(t)$ – масштабовані та зсунуті копії породжуючого вейвлета $\psi(t) \in L^2(R)$, сукупність яких створює новий базис простору $L^2(R)$.

Вейвлетний базис функціонального простору утворюється шляхом масштабних перетворень та зсувів породжуючого вейвлета $\psi(t)$:

$$\psi(a, b, t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left[\frac{(t-b)}{a}\right], \quad a, b \in R, \quad a \neq 0, \quad \psi(t) \in L^2(R). \quad (26)$$

Вейвлет-перетворення дає сімейства спектрів масштабних коефіцієнтів a стиснення, розтягнення:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left[\frac{(t-b)}{a}\right] dt \quad (27)$$

За рахунок зміни масштаба вейвлети здатні виявляти відмінності на різних частотах, а за рахунок зсуву b проаналізувати властивості сигналу в різних точках на всьому досліджуваному часовому інтервалі [13].

Спектр $C(a, b)$ одновимірного сигналу є поверхнею в тривимірному просторі. Способи візуалізації спектру можуть бути різними. Найбільш поширений спосіб – проекція на площину ab з ізолініями (ізорівнями), що дозволяє прослідкувати зміни коефіцієнтів на

різних масштабах по часу, а також виявити картину локальних екстремумів цих поверхонь, так званий “скелет” структури процесу, що аналізується. При широкому діапазоні масштабів застосовуються логарифмічні координати $(\log a, b)$. На рис.5 наведено приклад вейвлетного спектра простого сигналу (розклад вейвлетом Mhat).



Рис.5. Сигнал, вейвлетний спектр (Mhat) і масштабні перстини спектру.

Вибір конкретного виду та типу вейвлетів залежить від сигналу і задач аналізу. Вибір типу вейвлета вносить певну суб'єктивність дослідника в методику дослідження сигналів, але в той же час дає нові можливості при пошуку найбільш ефективних та оптимальних методів обробки сигналів та отримання з них необхідної інформації. Тому для вибору оптимального вейвлета необхідно провести тестування кривих різними типами вейвлетів [14].

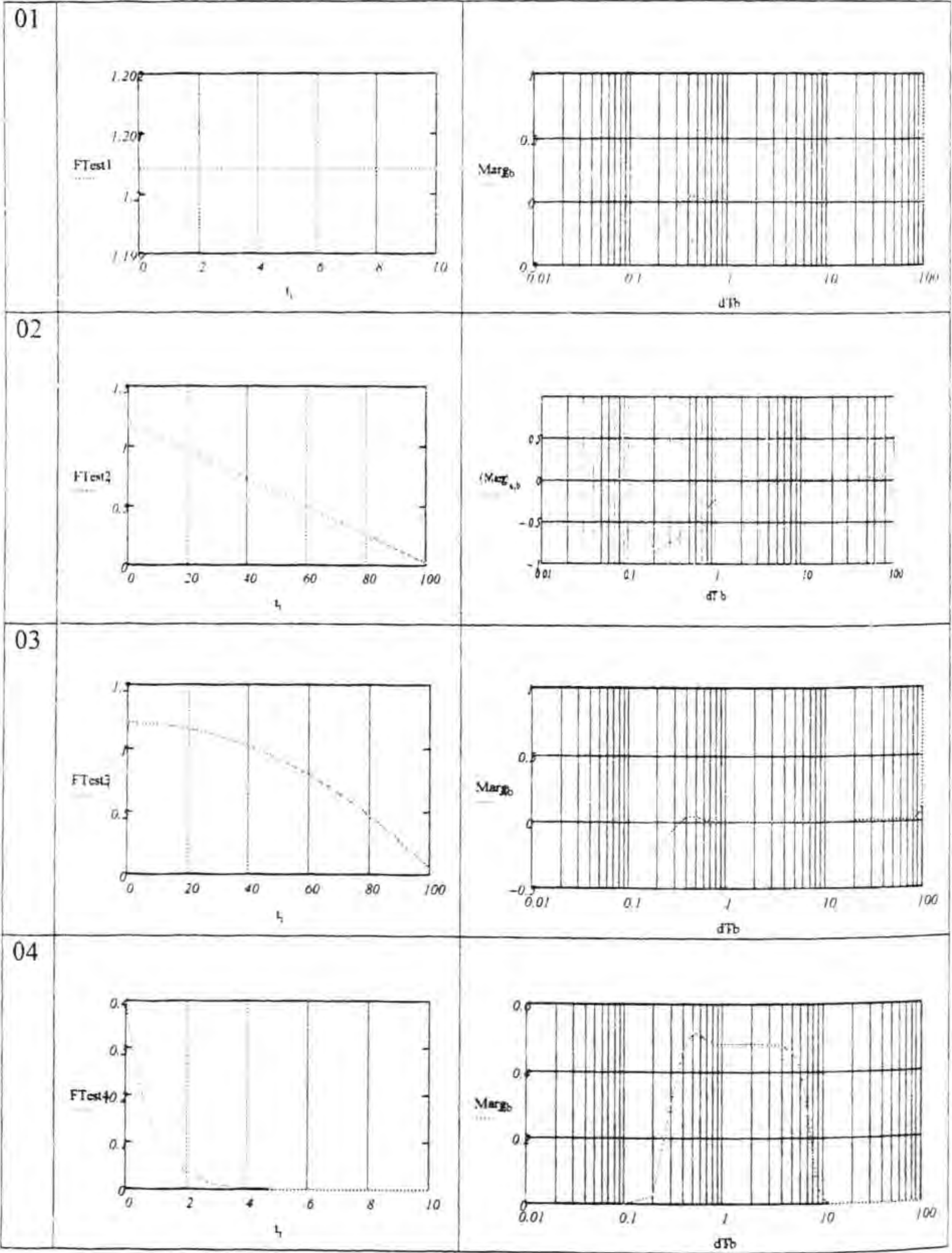
РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Було протестовано три види вейвлетів: wave, Mhat та комплексний вейвлет Морле (Morlet). За допомогою аналізу тестових кривих можна визначити, до яких особливостей кривих чутливий кожен з розглянутих вейвлетів.

У результаті проведеного аналізу було виявлено, що для дослідження експериментальних кривих релаксації РЦ найбільше підходить комплексний вейвлет Морле.

$$\psi_{Morlet}(t, a, b) = \frac{1}{\pi \sqrt{a}} \left[\exp\left(-i\kappa \left(\frac{t-b}{a}\right)\right) - \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \cdot \epsilon\right) \right] \quad (28)$$

На рис.6 наведено декременти $(FTest, (t,))$ тестових кривих та їх вейвлетні спектри $(Marg_b(dTb))$.



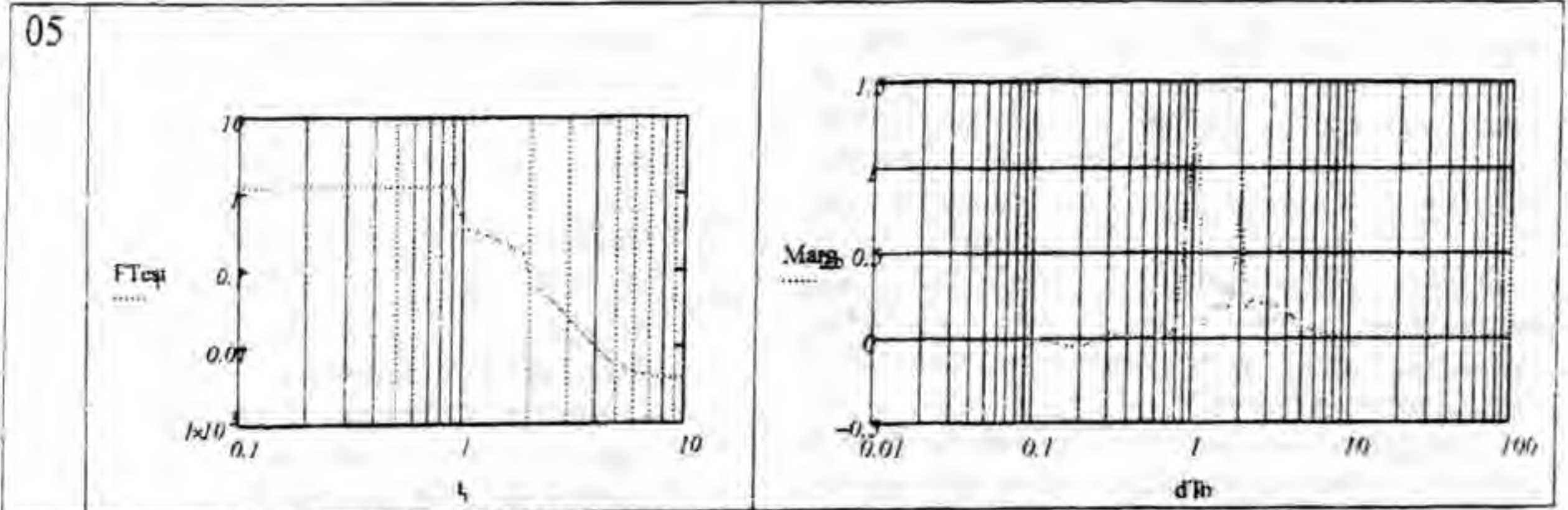
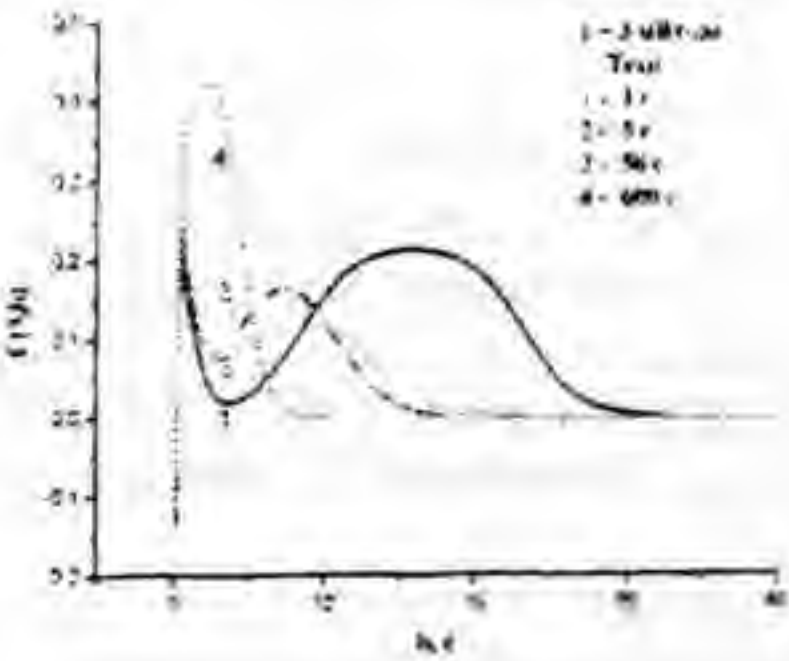


Рис. 7. Декременти тестових кривих (тестові криві 1-5) та їх вейвлетні спектри (Morlet).

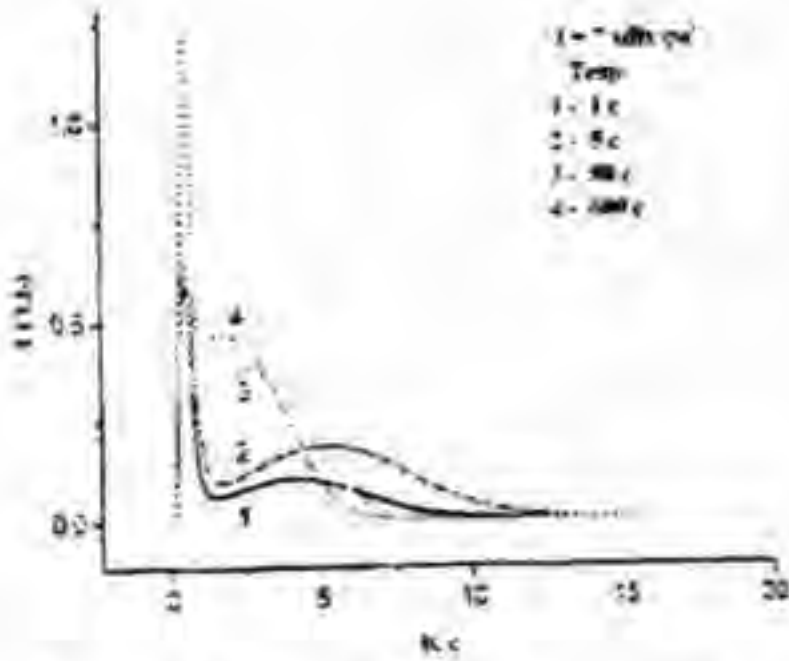
Ми можемо бачити, що якщо закон декременту кривої не змінюється в часі (тестові криві 1-3 на рис. 6), то вейвлетний спектр такої кривої не має виражених особливостей (крім граничних умов). У випадку гіперболічної залежності кривої (тестова крива 4 на рис. 7), маємо куполоподібний вейвлетний спектр. Цей випадок вимагає подальшого вивчення та тестування за допомогою інших типів вейвлетів. Тестова крива 5 (рис. 7) має декілька "сходинок", що відповідають змінам функціональної залежності декременту цієї кривої. Вейвлетний спектр у місцях зміни залежності декременту має чітко виражені піки.

Нами було проаналізовано декілька серій експериментальних кривих при різних режимах освітлення (інтенсивність 100, 300, 700 одиниць, що відповідає 1, 3, 7 мВт/см² відповідно) та для різних значення часу експозиції (1, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 90, 120, 300, 600 с).

На рис. 7 наведено вейвлет-спектри релаксаційних кривих РЦ при інтенсивності світла 1, 3, 7 мВт/см² та часу експозиції 1, 5, 50, 600 с, параметр вейвлет-перетворення $a = 3$.

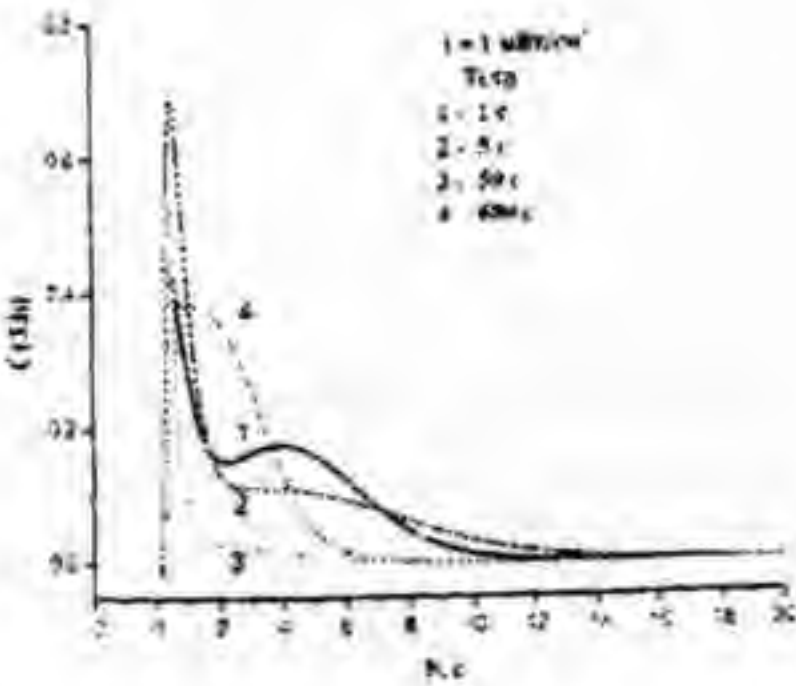


б)



в)

Рис. 7 (а, б, в). Вейвлет-спектри релаксаційних кривих РЦ. Інтенсивність світла 1 (а), 3 (б), 7 (в) мВт/см², час експозиції 1, 5, 50, 600 с. $a = 3$.



а)

Аналіз експериментальних кривих показує, що існує певна часова залежність $K(t)$, так як вейвлетні спектри релаксаційних кривих мають виражені особливості. Проаналізуємо вигляд вейвлетних спектрів тестових кривих та проведемо аналогію зі спектрами експериментальних кривих релаксації. Перший пік на вейвлетних спектрах релаксаційних кривих можна співставити з піками спектру тестової кривої 5. Припускаємо, що спочатку після виключення світла існує швидкий канал релаксації, але він швидко вигорає (протягом

першої секунди). Перший пік є закінченням дії швидкого каналу. Далі вмикається повільний канал релаксації. Другий пік не виражений, розмитий, має куполоподібний вигляд, аналогічно до спектру тестової кривої 4. Цю особливість можна пов'язати з набором зсувів експонент – почерговим їх включенням, або релаксацийні криві на цьому проміжку проявляють таку ж функціональну залежність, яку має тестова крива 4.

Для різних інтенсивностей та часу експозиції другий пік має різний вигляд, тоді як перший пік однаковий. Якісні відмінності вейвлетних спектрів залежно від часу експозиції свідчать про якісні зміни стану фотоцентів.

ВИСНОВКИ

1. Швидкість релаксації структурних змін в РЦ після 10 с мало змінюється в часі та залежить від інтенсивності світла та часу експозиції.
2. S-подібний характер декременту релаксації РЦ не залежить від інтенсивності світла та часу експозиції.
3. Вейвлет-аналіз виявляє особливості експериментальних кривих релаксації, які залежать від інтенсивності та часу експозиції. Він показує, що відновлення поглинання розчинів РЦ є нестационарним у часі процесом. Тобто, можемо зробити припущення, що експоненти в релаксацийних кривих не діють одночасно, а включаються почергово.
4. Процес релаксації РЦ можна описати моделлю, в якій РЦ динамічні у часі, при цьому вони однакові. Тоді з вигляду вейвлетних спектрів можна припустити, що існують швидкий та повільний канали релаксації. Якісні відмінності вейвлетних спектрів залежно від часу експозиції свідчать про якісні зміни стану фотоцентів.

Список використаних джерел

1. Рубин А.Б. Биоптика в 2 томах. – М.: изд. Университет, 2000 – 468 с.
2. Шайтан К.В. Каким образом электрон движется по белку // Соревновательный образовательный журнал. – 1999 – № 3. – с. 55-62.
3. Шайтан К.В. Конформационная подвижность белка с точки зрения физики. – 1999, – № 5. – с. 5-13.
4. Комаревська Т. В., Кишнякіна С. І., Заболотний М. А. Структурні зміни

макромолекул фотосинтетичних реакційних центрів Rb. Spharoides. Наукові записки. Фізико-математичні науки. – 2007. – Т. 61 – С. 54-57

5. Барабаш Ю.М., Заболотний М.А., Куліш М.П., Гуляє О.В., Дмитренко О.П., Комаревська Т.В., Мартинчук Е.І. Повільні фотоіндуковані зміни об'єму комплексів бактеріальних реакційних центрів. Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2007 – №4. – С. 290-295. (Стаття надійшла до редакції 21.01.08).
6. Барабаш Ю.М., Заболотний М.А., Соколов Н.И., Харкянен В.Н. Исследование медленных фотоиндуцированных изменений в реакционных центрах Rb. Spharoides R-26 методом голографической интерферометрии. Биоптика. – 2002. – №6. – С. 152-160.
7. Штарк Г.-Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
8. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ. Основы теории и примеры применения. Успехи физических наук. – 1996. – Т.166. № 11. – С. 1145-1170.
9. Чуи К. Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001.
10. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике — Изд. 2-е перераб. и доп. — М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 400 с.
11. Дремин И., Иванов О., Нечитайло В. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – т. 171, № 5. – с. 465-501.
12. Переберин А.В. О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование — 2001. — Т. 2, № 2. — С. 133-158.
13. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб – ВУС – 1999. – 204 с.
14. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов. Пер. с англ. — М.: Мир, 2005 — 671 с.

Надійшла до редколегії 22.02.09

УДК 550.34

Вашенко В.М.¹, Гордієнко Ю.О.²,
Мамарев В.М.²

Алгоритм викриття ознак підготовки землетрусу з осередком у сейсмонебезпечних районах засобами системи сейсмічного групування ГЦСК НКАУ

В роботі досліджуються шляхи удосконалення можливості виявлення засобами моніторингової системи сейсмічного групування ГЦСК НКАУ змін сейсмічного режиму сейсмоактивних зон, пов'язаних з процесами підготовки землетрусу. Запропоновано алгоритм для виявлення ознак підготовки землетрусу з осередком у сейсмоактивних зонах засобами системи сейсмічного групування.

Ключові слова: землетрус, сейсміка, прогноз, моніторинг.

V.M.Vaschenko¹, Yu.O.Gordiyenko²,
Mamarev V.M.²

The algorithm of detection of the signatures of earthquake preparation with an epicentre in a seismic region by the MCSM NSAU seismic array

In article review the possibility of a seismic array in detection of the seismic region mode changes, related to the earthquake preparation. Authors propose the detection algorithm of the signatures of earthquake preparation to the seismic array MCSM NSAU

Key Words: earthquake, seismic, detection, monitoring.

¹Національний Антарктичний науковий центр, daniilko@mail.ru

²Головний центр спеціального контролю НКАУ, Київська обл., м. Макаріїв-1, oper@gcsk.gov.ua

Вступ

З метою підвищення безпеки проживання населення та експлуатації виробничих фондів у сейсмонебезпечних районах та координації діяльності органів виконавчої влади щодо забезпечення захисту населення, об'єктів та територій від впливу землетрусів Постановою Кабінету Міністрів України від 11 вересня 1995 року №728 була утворена Національна система сейсмічних спостережень (НССС). Одним з інформаційних підрозділів НССС є Національне космічне агентство України (НКАУ) в складі якого контроль за сейсмічною обстановкою та іншими геофізичними явищами здійснює Головний центр спеціального контролю (ГЦСК). Одним з головних завдань ГЦСК, в межах функціонування НССС, є викриття ознак підготовки землетрусів та оперативне визначення місця, часу і параметрів землетрусів, інших геофізичних явищ, забезпечення органів виконавчої влади інформацією про землетруси та їх можливі наслідки [1].

Прогноз землетрусів на основі моніторингових даних здійснюється на підставі виявлення провісникових ефектів, пов'язаних із змінами властивостей гірської породи в районі осередку майбутнього землетрусу. Аналіз відомих провісників землетрусів – варіації рівня сейсмічності, деформація земної поверхні, нахил земної поверхні, форшоки, зміни швидкостей сейсмічних хвиль, аномалії крипу на розломі,

телуричний струм, флуктуація дебіту нафти у свердловинах, зміни геомагнітного поля, зміни електроопору гірських порід, та ін., показує, що більшість з них потребують створення спеціальної вимірювальної системи спостережень, яка повинна знаходитись безпосередньо у сейсмоактивній зоні (САЗ) [2]. Наповнення інформаційної системи ГЦСК новими методами спостережень для реєстрації відомих провісників, потребує значних фінансових затрат. Крім того, розташування пунктів спостережень ГЦСК в асейсмічних районах на значних відстанях епіцентрів, також зумовлює неможливість використання більшості відомих підходів при проведенні прогнозних спостережень.

Найбільш доцільним для вирішення завдань виявлення ознак підготовки землетрусу мережею сейсмічних спостережень ГЦСК є використання таких провісників, як – варіації рівня сейсмічності, швидкість сейсмічних хвиль та форшоки перед головним поштовхом. Основним недоліком перших двох провісників є низька точність прогнозування місця та часу майбутнього землетрусу [2]. Крім того, для аналізу варіацій швидкостей сейсмічних хвиль потрібен відносно регулярний ефект підсвічування – віддалений землетрус або вибух.

Форшокова активізація сейсмічності потребує виявлення сейсмічних сигналів з визначених сейсмоактивних районів з малою амплітудою [3].

Визначення належності сигналу малої амплітуди до певної САЗ за результатами оцінки координат джерела за даними трикомпонентної сейсмічної установки (ТКСУ) з використанням лише кутових показників, здійснюється з низькою точністю.

Суттєвого покращення умов виявлення сейсмічного сигналу можна досягнути шляхом використання системи сейсмічного групування. У основі принципу сейсмічного групування лежить використання властивості когерентності сигналу і некогерентності перешкод, та відмінності їх швидкості розповсюдження [4], що дозволяє разом з частотною фільтрацією здійснити при сейсмічному групуванні і швидкісну фільтрацію коливань [5].

Для вирішення завдань викриття змін сейсмічного режиму САЗ шляхом реалізації дистанційного моніторингу засобами ССГ, пропонується сформувати окремий контур обробки даних, в основі якого лежатиме формування багато променевої характеристики вибіркової з максимумами характеристик, направленими на сейсмоактивні зони, наслідки від землетрусів з осередками у яких можуть являти небезпеку для України – Крим, Вранча, Закарпаття.

Запропонований підхід дозволяє реалізувати систему моніторингу САЗ, наведену на рис. 1.



Рис. 1. Система моніторингу сейсмонебезпечних районів ССГ ГЦСК

Саме завдяки використанню сейсмічного групування є змога виділяти сейсмічні сигнали малої інтенсивності з САЗ, які пов'язані з підготовкою землетрусу [4].

2. Використання системи сейсмічного групування для моніторингу сейсмоактивних зон

Переваги системи сейсмічного групування особливо помітні при використанні спеціальних способів обробки даних, зареєстрованих окремими сейсмометрами групи. На даний час для обробки вимірювальних даних ССГ

використовуються метод складання з затримками (МС) та метод кросс-кореляції (МКК) [4].

Обробка даних сейсмічної групи на основі методу складання з затримками проводиться шляхом затримки сигналу на виході кожного сейсμοприймача на час руху хвилі від вибраного сейсμοприймача до останнього в групі, з відповідного напрямку, та подальшим їх складанням.

Кросс-кореляційний метод обробки інформації полягає в поділенні групи на дві підгрупи. Сигнали з сейсмометрів кожної підгрупи через лінії затримки надходять на суматори підгруп, далі вихідні сигнали з обох суматорів надходять на перемножувач.

В граничному випадку, якщо зареєстровані сигнали когерентні, а перешкоди некорельовані, коефіцієнт підсилення групи η приймає максимальне значення N для МС, де N - кількість сейсмометрів в групі, та L^2 для МКК, де L - кількість сейсмометрів в підгрупі.

З метою підвищення магнітудної чутливості проведено аналіз можливості змін способу обробки інформації ССГ. Для цього група сейсмометрів з 24 сейсμοприймачів поділялась на певну кількість підгруп (МКК(3/8) - 3 підгрупи по 8 сейсμοприймачів, МКК(4/6) - 4 підгрупи по 6 сейсμοприймачів, МКК(6/4) - 6 підгруп по 4 сейсμοприймача), після чого в межах підгрупи вимірювальна інформація складалась з затримками, визначеними для певного району земної кулі, вихідна інформація з підгруп надходила на перемножувач. Критерієм ефективності використання різних способів вибрано коефіцієнт підсилення групи та коефіцієнт кореляції між результатами обробки та хвилювими формами на одиночному каналі. Коефіцієнт підсилення визначається як відношення дисперсії сигнальної складової на виході групи, за відповідним способом обробки, та на виході окремого сейсμοприймача групи

$$\eta = \frac{D_{\text{методу}}[c]}{D_1[c]}$$

Результати оцінки коефіцієнтів підсилення групи для різних способів обробки та коефіцієнтів кореляції приведено у таблиці 1.

За результатами досліджень для моніторингу САЗ з метою виявлення ознак підготовки землетрусу шляхом аналізу змін сейсмічного режиму, було запропоновано спосіб обробки вимірювальних даних, отриманий шляхом розбиття групи на три підгрупи.

Даний спосіб дозволяє отримати коефіцієнт підсилення групи 21,7, що відповідно в 4,6 та 1,9 рази більше, ніж при використанні методів

складання з затримкою та крос-кореляції. При цьому коефіцієнт кореляції хвильової форми, отриманої за даним способом обробки, з хвильовою формою, отриманою окремим сейсмоприймачем групи, складає 0.83, що не менше середнього значення взаємної кореляції сигналів між елементами ССГ, який складає 0.82.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів підсилення та кореляції між сигналами на виході ССГ та на виході окремого сейсмоприймача групи в залежності від способу обробки даних ССГ

Спосіб обробки	Коефіцієнт кореляції	Коефіцієнт підсилення
МС	0.93	4.7
МКК (2/12)	0.85	11.4
МКК (3/8)	0.83	21.7
МКК (4/6)	0.74	33.5
МКК (6/4)	0.36	61.6

Збільшення коефіцієнту підсилення групи, при обробці вимірювальних даних запропонованим способом, дає можливість покращити магнітудну чутливість ССГ, яка визначає мінімальну магнітуду сейсмічної події у певному районі Земної кулі, сигнал від якої буде виявлено системою моніторингу ГЦСК.

3. Аналіз вимірювальних даних апаратом фрактальної розмірності

В якості апарату обробки вимірювальної інформації на виході ССГ, пропонується використовувати апарат фрактальної розмірності (АФР). Для аналізу хвильових форм використано метод нормованого розмаху (метод Херста), для якого послідовність вимірювальних даних характеризується показником Херста – H , що визначається співвідношенням [6]:

$$R/\sigma = (N/2)^H \quad (1)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення досліджуваного хвильового фрагмента, що розраховується за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(i) - \langle x \rangle)^2} \quad (2)$$

R – розмах зміни $X(i)$, розраховується як

$$R = \max_{1 \leq i \leq N} X(i) - \min_{1 \leq i \leq N} X(i) \quad (3)$$

$X(i)$ – накопичення відхилення $x(i)$ від $\langle x \rangle$ середнього:

$$X(i) = \sum_{u=1}^i \{x(u) - \langle x \rangle\} \quad (4)$$

$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i)$ – середня значення $x(i)$ за період N ;

$x(i)$ – часовий ряд вимірювальних даних.

У свою чергу хвильовий фрагмент являє собою криву фрактальної розмірності:

$$D = 2 - H \quad (5)$$

Виявлення сейсмічного сигналу здійснюється за критерієм Неймана-Пірсона [7]. Згідно з цим критерієм мінімізується величина ймовірності пропуску сигналу β за умови, що ймовірність виявлення хибного сигналу α не перевищує заданої величини α_0 . На рис.2 представлено щільності розподілу дисперсії та розмірності вибірки вимірювальних даних на виході ССГ при умові наявності та відсутності сигналу з САЗ Вранча.

За відомою функцією правдоподібності і заданою величиною α_0 можна знайти поріг h , що відповідає розбиттю області спостереження на S_0 – відсутності сигналу, та S_1 – наявності сигналу [7]. Перехід до оперування від дисперсії вибірки, яка використовується у ГЦСК на даний час для обробки вимірювальних даних на виході ССГ, до розмірності дозволяє при однакових вимогах щодо виявлення хибного сигналу $\alpha_0 = 0.05$ підвищити ймовірність правильного виявлення сейсмічного сигналу з 0.76 до 0.88. При цьому, використання апарату фрактальної розмірності дозволяє викривати сигнали з САЗ Вранча магнітудою $M=1 \div 1.2$ та більше, на відміну від дисперсного аналізу, який дозволяє викривати сигнали з САЗ Вранча магнітудою $M=1.4 \div 1.6$ та більше.

Викриття сигналів з підконтрольної САЗ реалізовано шляхом порівняння розрахованого значення розмірності з порогом:

$$\tilde{D}_k = \begin{cases} 1, D_k \leq h \\ 0, D_k > h \end{cases} \quad (6)$$

де $\tilde{D}$ – оцінка наявності сигналу, D – розраховане значення розмірності вибірки, h – значення порогу (рис. 2, б).

Для аналізу сейсмічного режиму розраховується кумулятивна сейсмічність для кожного з СНР включеного до моніторингу, яка визначається як:

$$\theta_{Dk} = \theta_{Dk-1} + \tilde{D}_k \quad (7)$$

де, θ_{Dk} – кумулятивна сейсмічність k -ї САЗ на момент часу i ; $\tilde{D}_k$ – оцінка наявності сигналу з k -ї САЗ. Перехід до обробки інформації на виході сейсмічної групи АФР дозволяє зменшити поріг

магнітудної чутливості, тим самим виявляти зміни режиму сейсмічності підконтрольної САЗ, пов'язаного з активізацією процесів підготовки землетрусу. На рис.3 представлено варіації кумулятивної сейсмічності для САЗ Вранча з 3 по 10 годину, за Київським часом, 27.09.2004р., розрахованої за результатами дисперсійного аналізу (рис.3,а), який використовується на даний час, та за фрактальною розмірністю (рис.3,б) для різних способів обробки даних на виході ССГ.

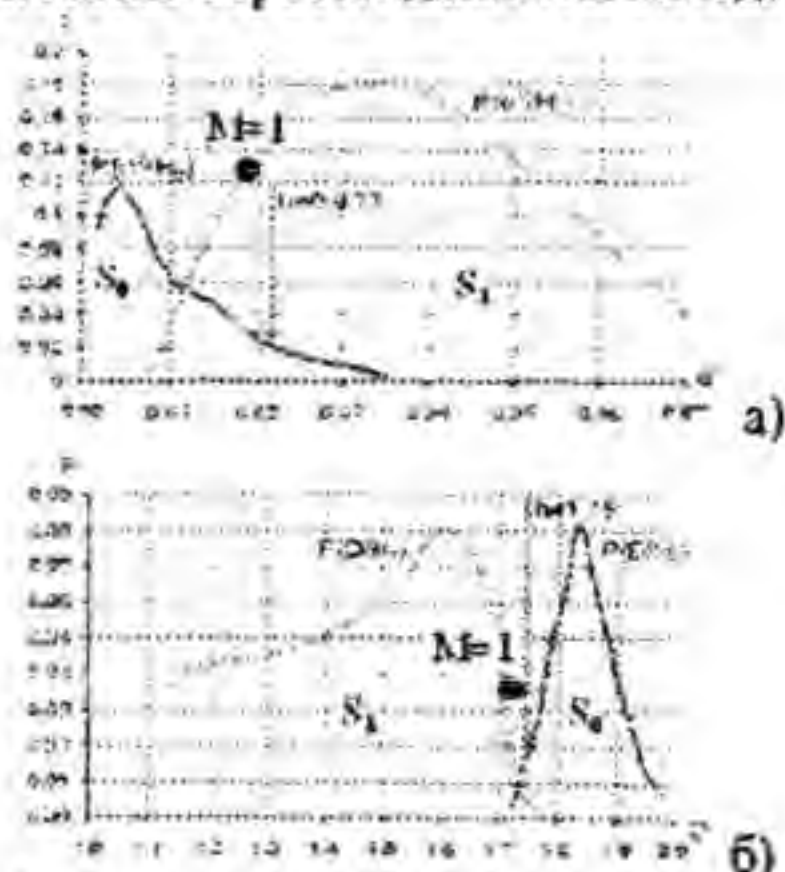


Рис.2. Щільність розподілу оцінки дисперсії (а) та розмірності (б) вибірки при умові наявності та відсутності сигналу.

Стрілкою відмічено момент землетрусу з магнітудою $M=5.2$. Як видно з наведеного, на момент землетрусу значення кумулятивної сейсмічності розрахованої за результатами використання АФР більше ніж розрахованої за результатами дисперсійного аналізу для всіх способів обробки інформації на виході ССГ.

Аналіз часових варіацій кумулятивної сейсмічності показує, що для САЗ Вранча гістограма розподілу випадкової величини кумулятивної сейсмічності (рис. 4, а) для асейсмічного періоду відповідає Пуасоновському закону розподілу випадкової величини з параметром $\alpha=1.25\div1.37$, що підтверджено критерієм χ^2 Пірсона [8]. При активізації процесів підготовки землетрусу у підконтрольній САЗ розподіл випадкової величини кумулятивної сейсмічності відповідає Пуасоновському закону розподілу випадкової величини з параметром $\alpha=8.7\div9.8$ (рис. 4, б).

Для викриття змін сейсмічного режиму підконтрольної САЗ використовується критерій Вальда, який полягає в порівнянні на кожному k -му кроці відношення правдоподібності $\wedge(x_1, \dots, x_k)$ вибірки $x_1, x_2, \dots, x_k$ з двома фіксованими порогамі A та B ($A > B$). При $\wedge \leq B$ вважають справедливою гіпотезу H_0 , при $\wedge \geq A$

приймається альтернатива H_1 . З умови $B < \wedge < A$ експеримент продовжується [9].

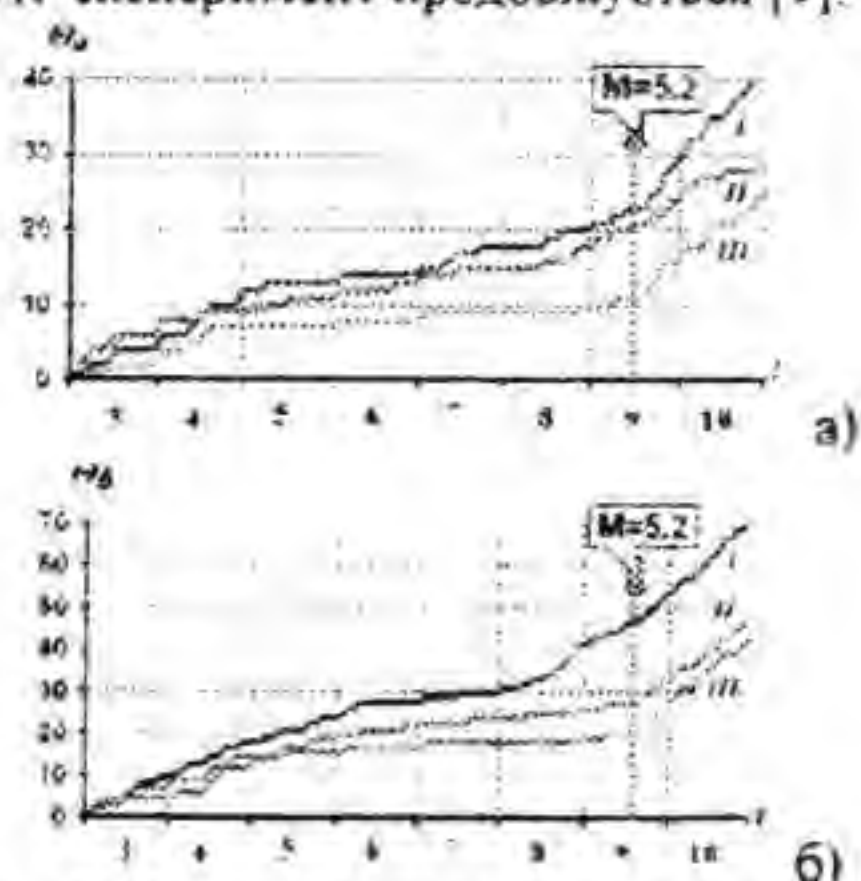


Рис. 3. Кумулятивна сейсмічність для САЗ Вранча з 3 по 10 годину за Київським часом 27.09.2004р., розрахована за результатами дисперсійного аналізу (а) та АФР (в) для різних способів обробки вимірювальних даних ССГ: I - МКК(3/8); II - МКК(2/12); III - МС.

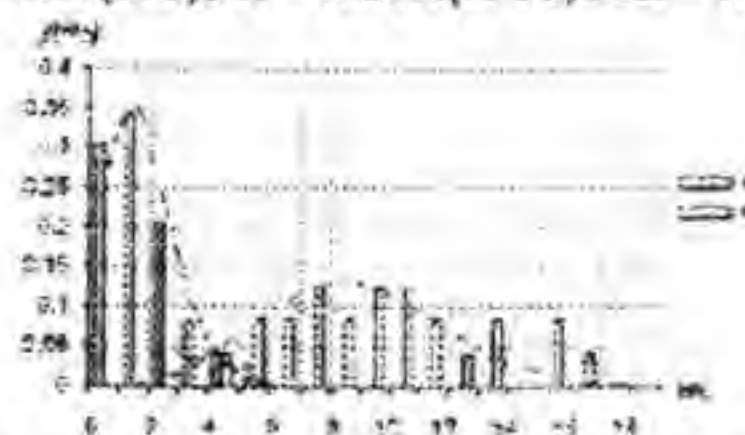


Рис. 4. Гістограма розподілу випадкової величини Θ_D для асейсмічного періоду (а) та для періоду активізації процесу підготовки землетрусу (б).

Головні пороги вальдівського критерію A та B можуть бути знайдені з ймовірностей похибок α та β . Оцінка зверху для A визначається як:

$$A \leq (1 - \beta) / \alpha = D / F \quad (8)$$

де D – ймовірність правильного виявлення, F – ймовірність хибної тривоги. Аналогічно, оцінку знизу для порогу B визначають як:

$$B \geq \beta / (1 - \alpha) = (1 - D) / (1 - F) \quad (9)$$

На практиці для незалежних вибірок зручно користуватись не відношенням правдоподібності, а його логарифмом. При цьому розраховується накопичене значення розв'язувальної статистики Z_k :

$$Z_k = \sum_{i=1}^k z_i = Z_{k-1} + z_k = \ln \left\{ \lambda(\Theta_{D1}) / \lambda(\Theta_{D2}) - \lambda(\Theta_{Dk}) \right\} \quad (10)$$

де, Z_k – накопичене значення головної

статистики; z_i – значення головної статистики; $\lambda(\Theta_D)$ – відношення функцій правдоподібності при умові наявності $P(\Theta_D/H_1)$ та відсутності сигналу $P(\Theta_D/H_0)$. При розподілу випадкової величини кумулятивної сейсмічності Пуасоновському закону функції відношення функцій правдоподібності λ визначатиметься як:

$$\lambda(\Theta_D) = \frac{a_1^{\Theta_D}}{a_0^{\Theta_D}} \times e^{a_0 - a_1} \quad (11)$$

Накопичене значення розв'язувальної статистики Z_k на кожному кроці порівнюється із значеннями порогів:

$$A^* = \ln A = \ln(D/F) \quad (12)$$

$$B^* = \ln B = \ln[(1-D)/(1-F)] \quad (13)$$

У випадках, коли $Z_k \leq B^*$, $Z_k \geq A^*$ та $B^* < Z_k < A^*$ приймається відповідно рішення про справедливість H_0 , H_1 або необхідність продовження експерименту.

Таким чином, проведення послідовної процедури Вальда складається з операцій обчислення головної статистики z_k для кожного елементу вибірки, обчислення накопиченого значення головної статистики $Z_k = Z_{k-1} + z_k$ і порівняння його на кожному кроці процедури з головними порогами A^* та B^* .

4. Алгоритм викриття ознак підготовки землетрусу засобами ССГ

Логічна схема алгоритму викриття ознак підготовки землетрусу в САЗ засобами системи сейсмічного групування наведена на рис. 5.

В блоці 2 здійснюється введення даних. Даними для роботи алгоритму є вимірювальна інформація каналів ССГ – матриця хвильового фрагменту S розмірністю $n \times m$, де n – кількість сейсмоприймачів у складі ССГ, m – розмір вибірки, та значення матриці часових затримок T розмірністю $n \times k$, де k – кількість САЗ включених до моніторингу.

В блоці 3 здійснюється формування променів, з максимумами характеристик вибірковості ССГ спрямованими на відповідні САЗ. На виході блоку одержуємо вибірку вимірювальної інформації перерахованої за формулою:

$$s_{jk}(t) = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{M} \sum_{l=(i-1)M+1}^M x_{ij}(t + \tau_{ik}) \right)$$

де, M – кількість сейсмометрів у підгрупі; τ_{ik} – час затримки для i -го сейсмометру при

моніторингу k -ої САЗ.

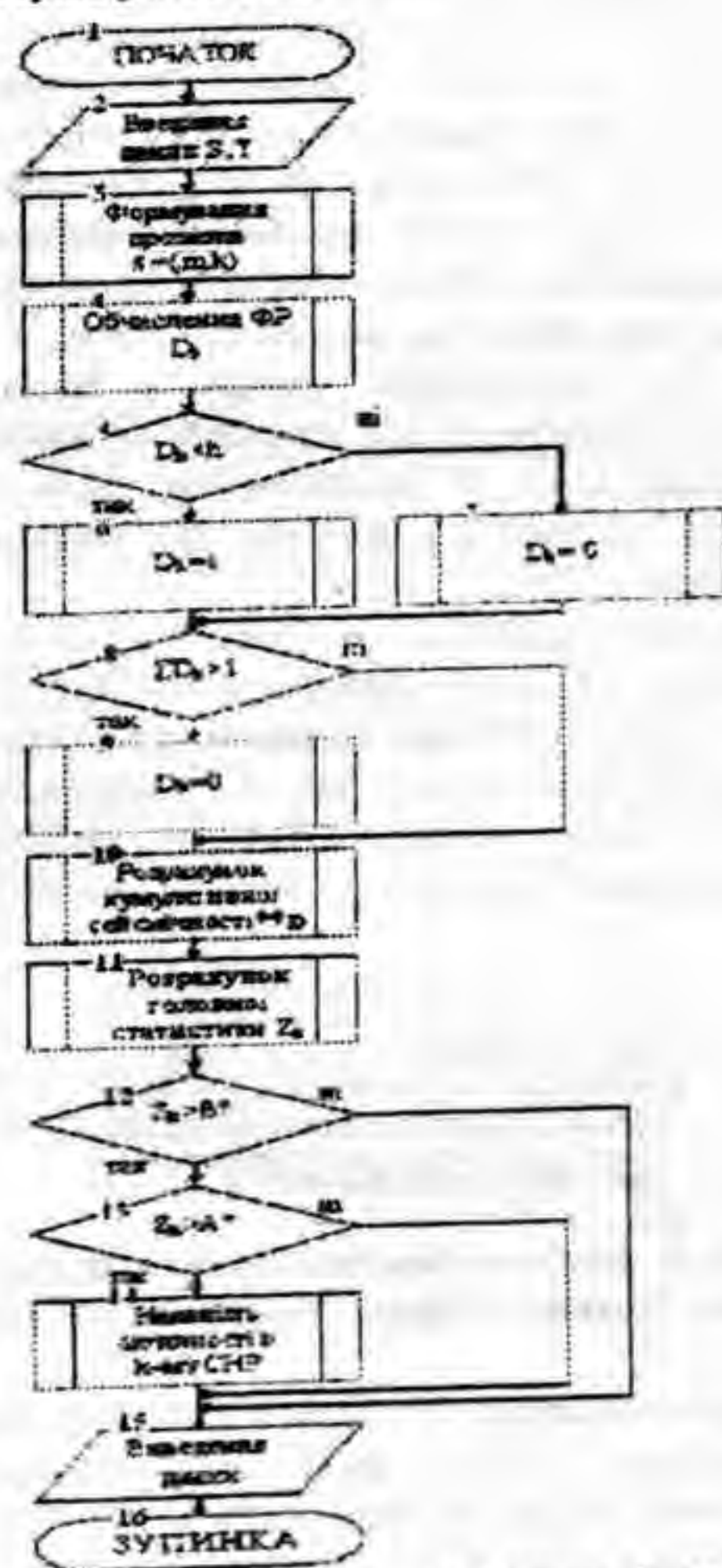


Рис. 5. Алгоритм викриття ознак підготовки землетрусу в ССР БЗ засобами ССГ

В блоці 4 обчислюються значення фрактальної розмірності для отриманих вибірок з вимірювальною інформацією з підконтрольних САЗ за формулами (1-5).

В блоці 5 здійснюється порівняння розрахованих значень розмірності для кожної з САЗ з порогом (6). При умові перевищення порогу в блоці 6 оцінка значення приймається рівною 1, в іншому випадку в блоці 7 оцінка значення приймається рівною 0.

В блоці 8 здійснюється перевірка відсутності у вибірках, що аналізується наявності хвильових форм від подій з інших районів. При виконанні умови в блоці 9 значенням оцінки фрактальної розмірності для підконтрольних районів присвоюється 0.

В блоці 10 розраховується кумулятивна сейсмічність для САЗ включених до моніторингу за формулою (7).

В блоці 11 розраховується накопичене значення

головної статистики Z_4 за формулою (10)

В блоці 12 здійснюється порівняння умови перевищення значення головної статистики Z_4 порогу B^* . При перевищенні порогу в блоці 13 здійснюється порівняння умови перевищення значення порогу $A^*=6,9$ головної статистики Z_4 . При перевищенні порогу в блоці 14 приймається рішення про наявність активності у відповідній САЗ. При перевищенні порогу в блоці 13 приймається рішення про наявність активності у відповідній САЗ. В протилежному випадку в блоці 14 приймається рішення про відсутність активності.

В блоці 15 здійснюється виведення даних.

На рис. 6 представлено результат розрахунку накопиченого значення головної статистики Z_4 для району Вранча за період 24-27 вересня 2004 року. Стрілкою відмічено момент землетрусу який відбувся 27.09.2004 р. з магнітудою $M=5,2$.

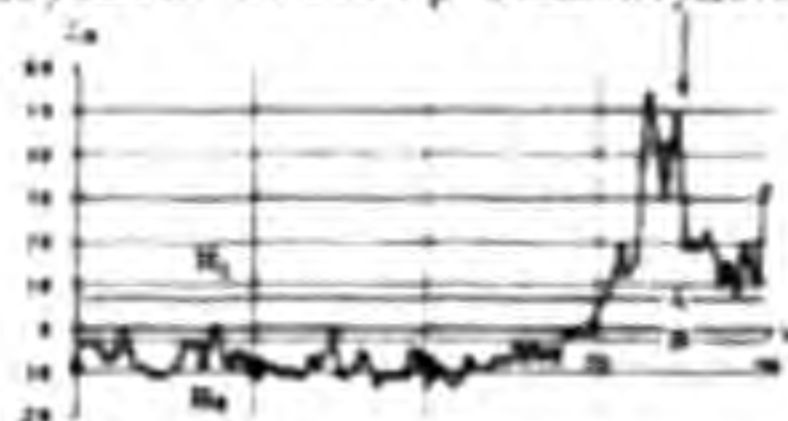


Рис. 6. Значення головної статистики Z_4 для району Вранча за період 24-27 вересня 2004р.

Запропонований алгоритм безперервного моніторингу САЗ засобами сейсмічного групування дозволяє викривати зміни режиму сейсмічності підконтрольних САЗ, пов'язаних з процесами підготовки землетрусів за декілька годин від основного поштовху.

Висновки

В роботі запропоновано підходи для викриття змін сейсмічних режимів сейсмоактивних зон, пов'язаних з підготовкою землетрусу шляхом моніторингу засобами системи сейсмічного групування Головного центру спеціального контролю НКАУ.

Для зменшення порогу магнітудної чутливості системи сейсмічного групування запропоновано новий спосіб обробки вимірювальних даних, який отримується шляхом розбиття групи на три підгрупи, що дозволяє при однаковій конфігурації сейсмічної групи отримати коефіцієнт підсилення групи 21,7, що більше ніж при використанні традиційних методів складання з затримкою та крос-кореляції в 4,6 та 1,9 рази відповідно, зберігаючи при цьому інформацію про основні параметри сейсмічного сигналу.

Для аналізу вимірювальних даних на виході сейсмічної групи запропоновано використання апарату фрактальної розмірності, який дозволяє

збільшити ймовірність правильного виявлення з 0,76 до 0,88. При цьому зменшення порогу магнітудної чутливості сейсмічної групи для зони Вранча до $M=1-1,2$ дає можливість виявляти зміни режимів сейсмічності підконтрольних сейсмоактивних зон.

В якості характеристики сейсмічного режиму підконтрольної сейсмоактивної зони запропоновано використання кумулятивної сейсмічності. Аналіз варіацій кумулятивної сейсмічності, як характеристики сейсмічного режиму, показує, що для зони Вранча гістограма розподілу випадкової величини кумулятивної сейсмічності для асейсмічного періоду відповідає Пуассонівському закону розподілу випадкової величини з параметром $\alpha=1,25-1,37$, а при активізації процесів підготовки землетрусу – з параметром $\alpha=8,7-9,8$.

Для викриття ознак підготовки землетрусу з осередком у сейсмоактивній зоні запропоновано алгоритм, який дозволяє викривати зміни режиму підконтрольних районів пов'язаного з процесами підготовки землетрусів за декілька годин до основного поштовху.

Список використаних джерел

1. Про утворення Міжвідомчої комісії із сейсмічного моніторингу (Постанова Кабінету Міністрів України від 11 вересня 1995 р., №728).
2. Рикитакє Т. Предсказание землетрясений // М. Мир, 1979. - 384с.
3. Соболев Г.А. Основы прогноза землетрясений // М. Наука, 1993. - 313 с.
4. Голкін Д.В., Салонець О.І., Бутенко О.С., Гордієнко Ю.О. Моніторинг сейсмонезбезпечних районів засобами сейсмічного групування. ЗНП ХВУ // Системи обробки інформації. Випуск 8 (36), 2004. С. 67-70.
5. Напалов Ю.В. О теории группирования сейсмоприемников // Прикладная геофизика. - Вып.27, 1960.
6. Гордієнко Ю.О. Аналіз геофізичної інформації методами фрактальної розмірності. // Вісник ЖДТУ, вип. № II (29), 2004. С. 170-175.
7. Кушнір А.Ф., Мостовой С.Ф. Статистический анализ геофизических полей // Киев. Научова думка, 1990. 276 с.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. // М.: Наука, 1988. 480 с.
9. Никсифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. // М.: Наука, 1983. 198 с.

Надійшла до редколегії 27.03.2009

УДК 520.245

Вашенко В.М.¹, Лоза Є.А.²,
Патлашенко Ж.І.¹

Тривимірна геометрична теорія некласичних фокусуючих дифракційних ґраток

В даній роботі представлені результати розробки математичного апарату для точного абераційного розрахунку траєкторій променів в дифракційному монохроматорі із некласичними оптичними елементами (асферичні поверхні, нерівномірність кроку нарізки штрихів і змінність їх форми на дифракційній ґратці, елементи адаптивної оптики тощо) і для аналізу спектрального зображення, що створюється монохроматором. Розрахункові формули і алгоритми, отримані в роботі, оптимізовані для чисельних комп'ютерних розрахунків.

Ключові слова: дифракційна ґратка, зображення, спектр, фокальна поверхня, рейтрейсінг.

V.M.Vaschenko¹, E.A.Loza²,
Zh.I.Parlashenko¹

3D geometrical theory of unclassic focusing diffraction gratings

This paper considers the results of mathematical approach development for accurate calculation of ray trajectory in a diffraction monochromator with unclassical optical elements (aspheric surfaces, non uniform lines density, variability of line form, adaptive optics elements etc). Analysis of spectral image formed by the monochromator is also considered. The calculation formulae and algorithms proposed in the paper are optimized for computer calculations.

Key Words: diffraction grating, image, spectre, focal surface, raytracing.

¹Київський національний університет імені Т.Г.Шевченка, Київ: daniilko@mail.ru

²Національний антарктичний науковий центр, Київ: Loza@bmyt.kiev.ua

Вступ

Створення нових дифракційних спектрометрів для виконання наперед заданих конкретних задач суттєво ускладнюється обмеженістю існуючої серійної елементної бази і обмеженістю класичних теорій абераційного, енергетичного і поляризаційного розрахунків для точного визначення необхідних спектрометричних параметрів на стадії розробки концепції монохроматора на базі некласичних оптичних елементів.

Багато фізичних процесів, що виникають при взаємодії оптичного випромінювання із оптичними елементами монохроматора ще не мають завершеного теоретичного опису - зміна напрямку розповсюдження, інтенсивності та стану поляризації випромінювання в залежності від матеріалу, кута падіння випромінювання, профілю оптичної поверхні та інших параметрів. Складний комплекс фізичних явищ із випадковими статистичними характеристиками (розсіяння, поглинання, дзеркальне відбивання,

дифракція, інтерференція, люмінесценція, зміна поляризації випромінювання та інші явища), що відбувається на кожній неоднорідності структури поверхні оптичних елементів здатні впливати на результати вимірювань досліджуваного випромінювання.

Класичні абераційні теорії придатні для досить простих сферичних дифракційних ґраток, що мають незмінну густину нарізки штрихів. Однак використання в дифракційних монохроматорах сучасних некласичних оптичних елементів дає багато технологічних і метрологічних переваг. Тому в даній роботі розглядається узагальнена геометрична абераційна теорія здатна описувати некласичні оптичні схеми.

В даній роботі, яка є продовженням циклу робіт по удосконаленню абераційних алгоритмів для розрахунку дифракційних монохроматорів [1, 2], викладається універсальна тривимірна геометрична теорія дифракційних ґраток, яка дозволяє із підвищеною по відношенню до

класичної теорії точністю розрахувати параметри оптичної схеми монохроматора та оптимізувати їх відповідно до наперед поставленої задачі.

Постановка задачі та етапи її розв'язку

Центральна задача роботи – це точний розрахунок зміни напрямку оптичного променя, що падає на дифракційну ґратку під довільним кутом в довільній точці на її поверхні. Для розв'язку цієї задачі слід розглянути її геометричну постановку, дати основні визначення і записати точно, в межах геометричної оптики, рівняння дифракційної ґратки, розглянути закони перетворення різних складових вектора направленості оптичного променя, що зазнає дифракції на дифракційній ґратці. Для подальшої комп'ютерної реалізації отриманого алгоритму розглядається задача чисельного аналізу вихідного спектрального зображення, що створюватиметься дифракційною ґраткою, і шляхи його оптимізації згідно із поставленою задачею.

В даній роботі розглянуто лише розв'язок задачі для власне дифракційної ґратки, оскільки задачі для інших оптичних елементів мають значно простіше рішення і можуть бути знайдені у відповідних джерелах, або отримані шляхом нескладних розрахунків.

Отже, розглянемо тривимірну поверхню асферичної дифракційної ґратки з штрихами довільної форми, у вершині якої розташуємо центр прямокутної Декартової системи координат $(0;0;0)$. Вісь oz спрямуємо вздовж дотичної до середньої точки центрального штриха ґратки, а вісь ox – вздовж внутрішньої нормалі до її поверхні у вершині [3] для фокусуючої ґратки. Для випадку розсіюючої ґратки слід використовувати зовнішню нормаль. За такої геометрії площина XOY називається меридіональною площиною, а площина XOZ сагітальною [4], однак, слід зробити зауваження, що на відміну від класичного випадку, коли набір цих двох площин однозначно характеризував усю ґратку, в даній роботі розглядається окремий набір сагітальних і меридіональних площин для кожної точки на поверхні ґратки в залежності від локальних особливостей форми поверхні та

штриха.

В обраній системі координат поверхня ґратки задається рівнянням:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

при цьому для справедливості геометричної теорії світла для кожної точки на поверхні ґратки має виконуватися умова

$$\lambda \ll e(x, y, z) \ll R(x, y, z), \quad (2)$$

де λ – довжина хвилі оптичного випромінювання, R – усереднений радіус кривини поверхні ґратки (діаметр круга Роуланда) в околі точки (x, y, z) , e – відстань між двома штрихами на поверхні ґратки поблизу точки (x, y, z) , тобто фізичний крок нарізки. Величини $e(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ для некласичних оптичних елементів можуть змінюватися в різних ділянках поверхні, отже є функціями координат. При виконанні умови (2) функцію $e(x, y, z)$ можна вважати неперервною. Реальний технологічний крок нарізки штрихів являє собою проєкцію відстані між штрихами на площину YOZ і тому відрізняється від фізичного кроку нарізки $e(x, y, z)$.

В кожній точці поверхні (1) задамо «напрямок штриха» $\vec{\tau}$, тобто дотичну до просторової лінії штриха (для простоти приймемо $|\vec{\tau}| = 1$). Нехай кожен штрих є неперервною дійсною лінією. Для визначеності будемо вважати, що $\vec{\tau}$ спрямований в позитивному напрямі осі oz , тобто $\tau_z > 0$. У випадку складної форми штриха треба додатково ввести умову неперервності $\vec{\tau}$ уздовж штриха і тоді $\tau_z > 0$ матиме місце лише у певній початковій точці для даного штриха, однак немає нагальної потреби розглядати цей випадок, оскільки такі ґратки є нетехнологічні, а їх властивості ще теоретично не усвідомлені.

Визначення площини дифракції

Центральним поняттям теорії, що розглядається, є площина дифракції. Для плоскої дифракційної ґратки згідно із класичною геометричною дифракційною теорією дифракції зазнає лише та складова вектора, що знаходиться

у площині перпендикулярній штрихам на ґратці; інша ж складова зазнає дзеркального відбивання [4].

Для випадку неklasичної дифракційної ґратки умовно розіб'ємо поверхню ґратки на велику кількість маленьких квазі-плоских сферичних класичних дифракційних ґраток (лінійні розміри ґратки значно менше радіусу її кривини R), центри яких можуть бути досить близько один від одного – менше розміру такої ґратки. Така маленька ґратка повинна мати реальні розміри (тобто відносно велику кількість штрихів, що можливе за умови (2)) для того, щоб для неї з достатньою точністю працювала формула дифракційної ґратки. Взагалі кажучи, навіть для двох штрихів головні напрями дифракції будуть зберігатися із напрямками головних максимумів дифракційної ґратки із тією самою відстанню між штрихами, однак виникне багато неврахованого фонового розсіяного випромінювання. Тоді, для невеликого розміру робочої поверхні, класична формула дифракційної ґратки буде забезпечувати високу точність.

Отже, площина дифракції для даної точки на поверхні дифракційної ґратки – це *площина, що проходить через точку падіння променя на ґратку і є перпендикулярною до напрямку штриха $\vec{\tau}$ в цій точці* [1]. Радіус кривини поверхні ґратки задається неоднозначно [3], і тому для фокусуючих ґраток напрям $\vec{R}$ коректніше визначити, як напрям на центр кривини кривої, що утворюється перетином поверхні ґратки і площини дифракції.

Перетин площини дифракції і поверхні ґратки утворює просторову криву, радіус кривини якої R за величиною рівний діаметру круга Роуланда, який повністю лежить у площині дифракції. Таким чином в результаті ми отримуємо сукупність кругів Роуланда з різними параметрами R і орієнтацією для кожної точки на дифракційній ґратці, а також сукупність меридіональних і сагітальних площин, як було згадано вище.

Далі для кожної маленької дифракційної ґратки необхідно розглянути перетворення напрямку поширення оптичного променя при його

дифракції та відбиванні на її поверхні.

Уточнення рівняння дифракційної ґратки

Напрямок падіння променя в довільну точку (x, y, z) робочої поверхні ґратки з деякої довільної точки (l_x, l_y, l_z) , що знаходиться у півпросторі невід'ємних значень l_x , задається нормованим вектором

$$\vec{k} = \frac{\{x-l_x; y-l_y; z-l_z\}}{\sqrt{(x-l_x)^2 + (y-l_y)^2 + (z-l_z)^2}}, \quad |\vec{k}|=1 \quad (3)$$

компоненти якого внаслідок дифракції та відбивання змінюють напрям на $\vec{k}'$. При цьому слід пам'ятати про можливе скручування променів на апертурі оптичних деталей.

Узагальнена формула дифракційної ґратки в тривимірному випадку записується наступним чином [4].

$$(\vec{k}_\parallel)_{\vec{S}} + (\vec{k}'_\parallel)_{\vec{S}} = n\lambda / e(x, y, z), \quad (4)$$

де символ $\vec{S}$ відповідає проєкції на напрям, що задається дотичною до лінії перетину поверхні ґратки і площини дифракції, n – порядок дифракції, $\vec{k}_\parallel$ і $\vec{k}'_\parallel$ – проєкції, відповідно, напрямів $\vec{k}$ і $\vec{k}'$ на площину дифракції. Розглянувши відповідні проєкції векторів $\vec{k}$ і $\vec{k}'$ перепишемо (4) в зручнішій і звичнішій формі [1]:

$$\sin \psi + \sin \varphi = n\lambda / e(x, y, z) |\vec{k}_\parallel| \quad (5)$$

де φ – кут дифракції, ψ – кут падіння, який можна визначити через скалярний добуток $\vec{k}_\parallel$ і $\vec{R}$ (рис. 1):

$$\cos(\pm\psi) = -\vec{k}_\parallel \cdot \vec{R} / |\vec{k}_\parallel| |\vec{R}|, \quad (6)$$

де $\text{sgn}(\pm\psi) = -\text{sgn}(y)$ у випадку, якщо центральний штрих прямих. Або більш точно $\text{sgn}(\pm\psi) > 0$ якщо точка (x, y, z) лежить у від'ємному напрямі осі oy відносно центрального штриха і від'ємний в протилежному випадку.

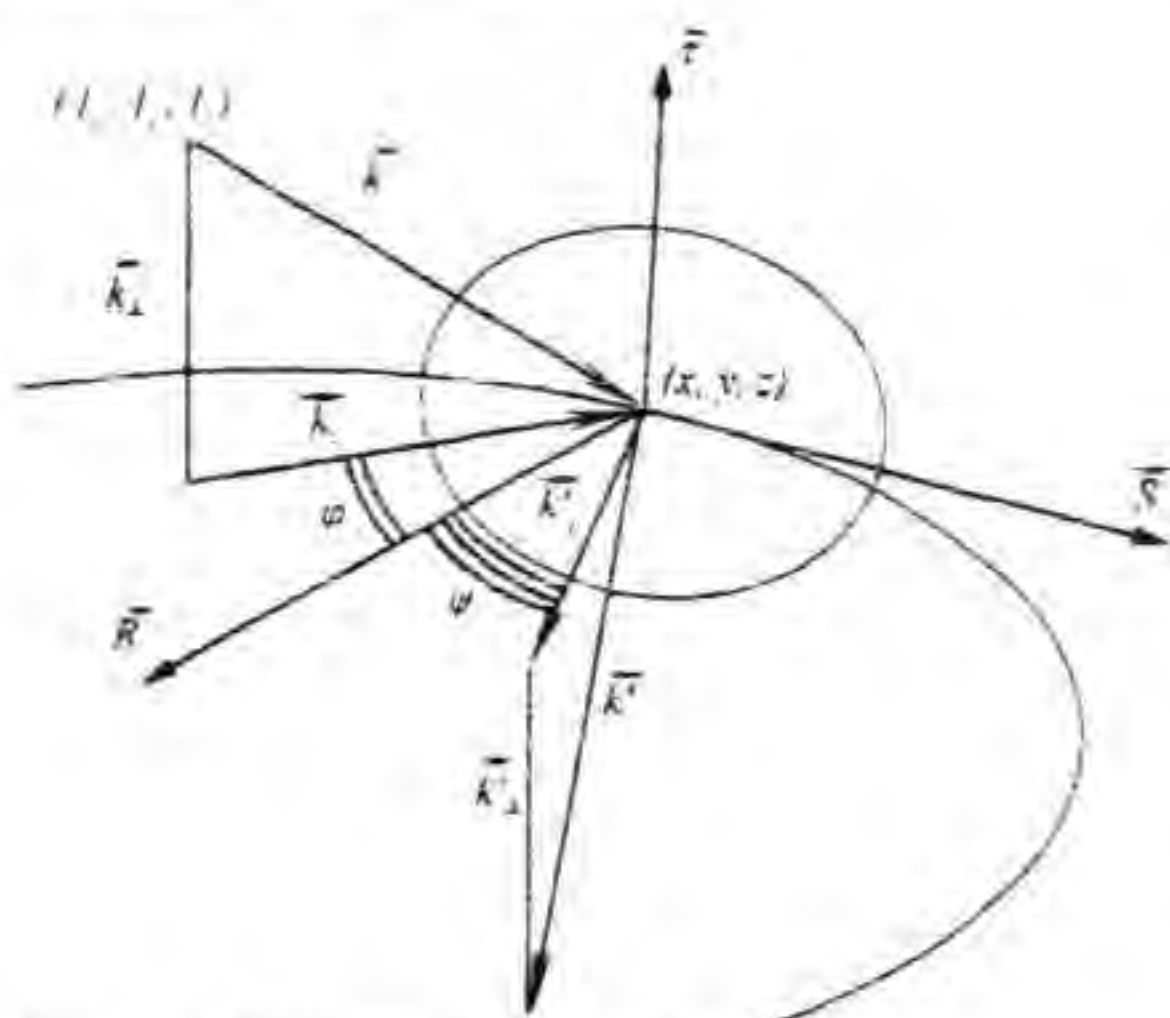


Рис. 1. Дифракція променя на ґратці.

Напрямок $\vec{k}_\perp$ перпендикулярної до площини дифракції складової $\vec{k}$ задається вектором $\vec{\tau}$:

$$\vec{k}_\perp = (\vec{k} \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{\tau}, \quad |\vec{k}_\perp| = |\vec{k}| \cdot |\vec{\tau}|. \quad (7)$$

Відповідно напрям іншої складової:

$$\vec{k}_\parallel = \vec{k} - \vec{k}_\perp, \quad |\vec{k}_\parallel| = \sqrt{1 - |\vec{k}_\perp|^2} \quad (8)$$

Виходячи з того, що $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = 1$ та згідно закону збереження імпульсу можна записати [1]

$$\vec{k}_\perp = \vec{k}'_\perp, \quad (9)$$

відповідно $|\vec{k}_\parallel| = |\vec{k}'_\parallel|$.

В площині дифракції відбувається поворот $\vec{k}_\parallel$ навколо вектора $\vec{\tau}$ на кут $\varphi - \psi$ (з урахуванням правила знаків [5]), тобто

$$\vec{k}'_\parallel = \hat{C}_{\varphi-\psi}^T \vec{k}_\parallel, \quad (10)$$

де $\hat{C}_{\varphi-\psi}^T$ – математична матриця повороту навколо вектора $\vec{\tau}$.

Аналіз рівняння поверхні дифракційної ґратки

Дифракційна ґратка характеризується трійкою основних параметрів $\vec{R}$, $\vec{S}$ і $\vec{\tau}$, заданих в кожній точці на її поверхні. Для визначення кривини поверхні потрібно проаналізувати просторову

криву, що утворюється в результаті перетину поверхні ґратки і площини дифракції, тобто розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \vec{\tau} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

де $\vec{x} - \vec{x}_0$ задає вектор зміщення координати відносно точки $\vec{x}_0$ падіння променя на ґратку на поверхні ґратки. Розв'язок системи (11) при однозначному заданні поверхні (1) може бути поданий у параметричному вигляді

$$\vec{r}(y) = \{x(y), y, z(y)\} \quad (12)$$

Продиференціюємо систему (11) по y і отримаємо:

$$x' = (F'_y \tau_x - F'_x \tau_y) / \Delta, \quad (13)$$

$$z' = (F'_z \tau_y - F'_y \tau_z) / \Delta, \quad (14)$$

$$\Delta = F'_z \tau_x - F'_x \tau_z, \quad (15)$$

де F'_x , F'_y , F'_z – частинні похідні функції $F(x, y, z)$ по x , y і z відповідно, а x' і z' – похідні відповідних змінних по y (очевидно, що $y' = 1$).

Аналогічно визначаються і другі похідні відповідних змінних по y :

$$z'' = -\tau_x \cdot \zeta, \quad (19)$$

$$x'' = \tau_z \cdot \zeta; \quad (20)$$

$$\zeta = (F''_{xx} x'^2 + F''_{yy} + F''_{zz} z'^2 + 2F''_{xy} x' + 2F''_{xz} x' z' + 2F''_{yz} z') / \Delta, \quad (18)$$

де F''_{xy} – другі частинні похідні функції $F(x, y, z)$ по відповідним координатам. Величини Δ і ζ є змінними, введені для зручності представлення та комп'ютерного обчислення результату.

Отримавши, як проміжний результат явні вирази для похідних від розв'язку системи (11) ми можемо перейти до розв'язку наступної задачі знаходження центру кривини тривимірної поверхні в площині дифракції.

Центр кривини тривимірної поверхні
Для розв'язку задачі точного знаходження напрямку дифрагованого променя важливо визначити діаметр круга Роуланда, тобто кривину R просторової кривої (12). Для цього розглянемо коло кривини в точці $\vec{r}(y)$, яке математично визначається, як граничне положення кола, що проходить через $\vec{r}(y)$ і дві найближчі точки кривої $\vec{r}(y \pm dy)$ при $dy \rightarrow 0$ [6]. В результаті досить громіздких перетворень отримаємо:

$$-\vec{R} = \vec{r}(y) - \vec{C} = [\vec{S} \times \vec{\tau}] \cdot |\vec{S}|^2 / \vec{\tau} \cdot \vec{B}, \quad (16)$$

де $\vec{C}$ – координати центра кривини кривої, $\vec{S}$ – дотична до кривої (12), яка визначається, як

$$\vec{S} = \{x'; y'; z'\}, \quad (17)$$

а $\vec{B}$ – бінормаль (перпендикуляр, що встановлений з точки на кривій до дотичної площини) до кривої (12), яка визначається, як

$$\vec{B} = \left\{ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right\}. \quad (18)$$

де $\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$ – детермінант відповідної матриці; в нашому випадку $\vec{B} \parallel \vec{\tau}$.

Матриця повороту

Отримавши відповідний набір параметрів, що характеризують властивості певної точки на поверхні дифракційної ґратки, введемо “локальний” ортонормований базис

$$\vec{e}'_x = \vec{R}/|\vec{R}|; \quad \vec{e}'_y = \vec{S}/|\vec{S}|; \quad \vec{e}'_z = \vec{\tau}. \quad (19)$$

В даному випадку ми розглядаємо поворот навколо вектора і тому нас не цікавить, чи лівий чи правий базис утворюється сукупністю векторів (19).

Перехід від базиса, пов'язаного із вершиною дифракційної ґратки $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ до локального базиса $(\vec{e}'_x; \vec{e}'_y; \vec{e}'_z)$ задається матрицею [7] (рис. 1)

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} R_x/|\vec{R}| & S_x/|\vec{S}| & \tau_x \\ R_y/|\vec{R}| & S_y/|\vec{S}| & \tau_y \\ R_z/|\vec{R}| & S_z/|\vec{S}| & \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \quad (20)$$

де t_{ij} – відповідні компоненти цієї матриці; якщо ввести позначення

$$c = \cos(\varphi - \psi), \quad s = \sin(\varphi - \psi). \quad (21)$$

То в результаті отримаємо матрицю повороту вектора $\vec{k}_i$ навколо вектора $\vec{\tau}$ на кут $\varphi - \psi$.

$$\hat{C}_{\varphi-\psi}^T = \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

де

$$C_{xx} = (t_{yx}^2 + t_{zx}^2)c + t_{xx}^2;$$

$$C_{yy} = (t_{xy}^2 + t_{zy}^2)c + t_{yy}^2;$$

$$C_{zz} = (t_{yz}^2 + t_{xz}^2)c + t_{zz}^2;$$

$$C_{xy}^{\pm} = (t_{yy}t_{yx} + t_{xy}t_{xx})c \pm (t_{yy}t_{xz} - t_{xy}t_{yx})s + t_{xx}t_{xy}; \quad (23)$$

$$C_{yz}^{\pm} = (t_{yz}t_{yy} + t_{yz}t_{xy})c \pm (t_{yz}t_{xy} - t_{yz}t_{yy})s + t_{xy}t_{yz};$$

$$C_{zx}^{\pm} = (t_{yz}t_{yz} + t_{zx}t_{zx})c \pm (t_{yz}t_{zx} - t_{zx}t_{yz})s + t_{zx}t_{zx};$$

Формули (23) оптимізовані для комп'ютерних розрахунків елементів матриці (22). В загальному випадку вираз для елементів матриці (22) є наступний:

$$C_{ij} = (t_{ji}t_{ji} + t_{ji}t_{ii}) \cdot \cos(\varphi - \psi) + (t_{ji}t_{ii} - t_{ji}t_{ji}) \cdot \sin(\varphi - \psi) + t_{ii}t_{ji} \quad (24)$$

де індекси i, j незалежно приймають значення x, y, z .

Вихідна площа

Вихідне спектральне зображення спостерігається на певній вихідній поверхні, де розташована ПЗЗ матриця приймачів, або маска проміжних або вихідних шліпів. Ця поверхня повинна бути досить простою для

технологічності пристрою сканування спектру. Для кратних дифракційних монохроматорів це має бути площина, що задається канонічним рівнянням:

$$\frac{x_1}{d_x} + \frac{y_1}{d_y} + \frac{z_1}{d_z} = 1, \quad (25)$$

де d_x, d_y, d_z – відрізки, що їх відтинає площина (25) на осях координат.

Напрямок, вздовж якого розповсюджується дифраговане випромінювання визначається вектором $\vec{k}'$ і задається прямою

$$\{x_1, y_1, z_1\} = \{x, y, z\} + b \cdot \vec{k}', \quad (26)$$

Розв'язавши систему (25)-(26) отримаємо

$$b = \left(1 - \left(\frac{x}{d_x} + \frac{y}{d_y} + \frac{z}{d_z} \right) \right) / \left(\frac{k'_x}{d_x} + \frac{k'_y}{d_y} + \frac{k'_z}{d_z} \right). \quad (27)$$

Підставимо (27) у (26) і отримаємо точку перетину напрямку поширення дифрагованого випромінювання $\vec{k}'$ із площиною (25).

Для площини, дотичної до «центрального» круга Роуланда радіусом $\rho = R/2$ в точці, напрям на яку складає кут ϕ із віссю ox , відповідні параметри вихідної площини визначаються наступним чином.

$$d_x = \rho \frac{(1 + \cos \phi)}{\cos \phi}; \quad d_y = \rho \frac{(1 + \cos \phi)}{\sin \phi}; \quad d_z = \infty. \quad (28)$$

Для аналізу та візуалізації результуючого зображення слід ввести проекційну систему координат на площині, яка у випадку (28) буде задаватися наступними формулами.

$$V = z_1 - z_0, \quad (29)$$

$$U = \text{sgn}(y_1 - y_0) \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$$

де величини

$$x_0 = \rho(1 + \cos \phi); \quad y_0 = \rho \sin \phi; \quad z_0 = 0, \quad (30)$$

задають положення початку відліку для цієї системи

В загальному випадку дуже зручно, щоб одна

з осей, наприклад U , була направлена вздовж лінії дисперсії. Це можна досягти за допомогою визначення координат точок перетину із вихідною поверхнею двох пробних променів, що виходять із центру вхідної щілини і потрапляють на центр дифракційної ґратки, але відповідають різним довжинам хвиль. Одну з цих точок можна обрати за початок відліку.

Чисельне представлення неklasичної ґратки

Для того, щоб працювати із отриманими закономірностями і формулами слід ввести чисельне представлення неklasичної ґратки, яке б дозволяло досить зручно змінювати локальні й глобальні параметри дифракційної ґратки (форму поверхні, густину нарізки штрихів та їх просторову форму) при вирішенні задачі оптимізації спектрального зображення у вихідній площині монохроматора.

Задамо сітку точок на поверхні ґратки $(y_{i,j}, z_{i,j})$ (рис.2). Введемо величину $x_{i,j} = x(y_{i,j}, z_{i,j})$, що описує поверхню (1). Тоді сукупність $(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ задають точки на поверхні ґратки, нульове наближення для яких визначається із спрощеного розгляду

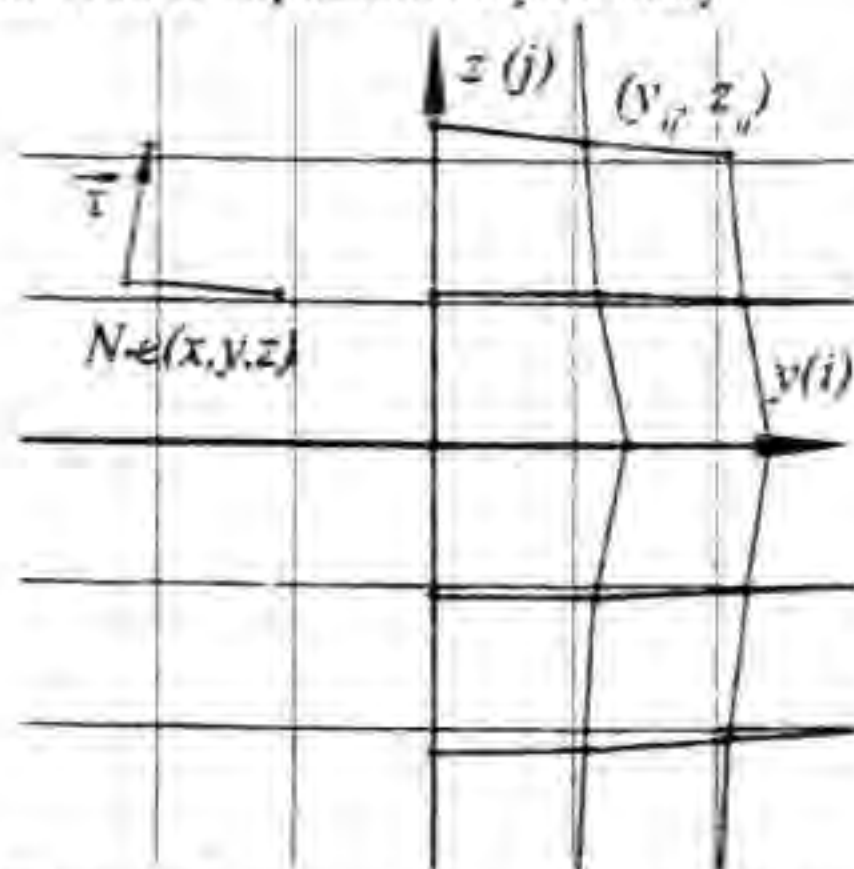


Рис.2. Сітка робочих точок на поверхні ґратки.

Нехай між кожними двома вузлами сітки по осі ou знаходиться однакова кількість штрихів ґратки N , яка в силу (2) може бути не цілим числом і знаходиться за формулою.

$$N = l_0 / e_0 \gg 1, \quad (31)$$

де l_0 – відстань між двома лініями сітки поблизу

вершини ґратки, e_0 – номінальний крок нарізки. Тоді, для кожної точки на ґратці крок нарізки e та вектор $\vec{r}$ наближено визначатимуться, як

$$e_{i,j} = l/2N, \quad (32)$$

$$\vec{r}_{i,j} = \frac{\{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}; y_{i,j+1} - y_{i,j-1}; z_{i,j+1} - z_{i,j-1}\}}{2l}. \quad (33)$$

$$l^2 = (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2 + (z_{i,j+1} - z_{i,j-1})^2. \quad (34)$$

Точність виразів (32)–(33) є досить задовільна при слабкозмінній функції e та досить густій сітці.

Зображення, що створюється двома променями

Для того, щоб отримати оцінку просторового положення спектрального зображення та його спектральних і абераційних властивостей слід розв'язати задачу перетину двох променів, які виходять з однієї вхідної точки і дифрагують на різних ділянках дифракційної ґратки:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{x}_{01} + b_1 \vec{k}_1', \\ \vec{x}_2 &= \vec{x}_{02} + b_2 \vec{k}_2', \end{aligned} \quad (35)$$

де $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ задають точки на відповідних прямих із початковими точками $\vec{x}_{01}$ і $\vec{x}_{02}$, направляючими векторами $\vec{k}_1'$ і $\vec{k}_2'$ та параметрами прямої b_1 і b_2 .

В загальному тривимірному випадку, на відміну від двовимірного [2], система (35) не має розв'язку. Можна піти іншим шляхом і визначити спектральне зображення як середину найменшого відрізка $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$, що з'єднує дві точки прямих (35). Тоді величина $r_d = \min|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|/2$, тобто напів-довжина цього відрізка, буде відповідати “дефокусуванню” такого зображення.

Умова мінімальності $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ відповідає [7]

$$\begin{cases} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \vec{k}_1' = 0, \\ (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \vec{k}_2' = 0 \end{cases} \quad (36)$$

в результаті розв'язку отримаємо:

$$\begin{aligned} b_1 &= - \frac{((\vec{x}_{01} - \vec{x}_{02}) \cdot (\vec{k}_1' - (\vec{k}_1' \vec{k}_2') \vec{k}_2'))}{1 - (\vec{k}_1' \vec{k}_2')^2}, \\ b_2 &= + \frac{((\vec{x}_{01} - \vec{x}_{02}) \cdot (\vec{k}_2' - (\vec{k}_1' \vec{k}_2') \vec{k}_1'))}{1 - (\vec{k}_1' \vec{k}_2')^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Тоді положення “зображення” і величина “дефокусування” буде задаватися:

$$\vec{x}_d = (\vec{x}_1(b_1) + \vec{x}_2(b_2))/2, \quad (38)$$

$$r_d = |\vec{x}_1(b_1) - \vec{x}_2(b_2)|/2. \quad (39)$$

Отримавши положення вихідного зображення, створеного двома променями ми, власне кажучи, отримаємо повну інформацію про вихідну спектральну абераційну пляму, яку можливо аналізувати з метою оптимізації параметрів системи та положення вихідної площини.

Визначення площини оптимального зображення

Маючи набір точок $\{\vec{x}_i\}$ (38) спектрального зображення вхідної щілини потрібно визначити його орієнтацію у просторі. Найперше слід знайти “центр ваги” зображення, який будемо використовувати, як початкову точку вихідної площини:

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{M} \sum_i \vec{x}_i, \quad (40)$$

де індекс i нумерує відповідні пари променів, а M – загальна кількість таких пар. Очевидно, для найкращих результатів пари променів повинні обиратися на більш-менш рівномірній сітці.

Нехай вихідна площина задається рівнянням:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{G} = 0; \quad |\vec{G}| = 1, \quad (41)$$

де $\vec{G}$ – нормаль до площини. Тоді для визначення оптимального розташування вихідної площини треба мінімізувати функціонал

$$H^2 = \sum_i \rho_i |(\vec{x}_i - \vec{x}_0) \vec{G}|^2 \quad (42)$$

по компонентах вектора $\vec{G}$, де ρ_i – вагові

коефіцієнти, які можна прийняти $\rho_i = 1/r_{d_i}$. Ця задача є нелінійною і має розв'язуватися чисельно. Визначена таким чином вихідна площа (41) є найбільш оптимальною і може застосовуватися навіть для визначення площини найкращого фокусування для відносно великої спектральної ділянки, а також оцінки величини дефокусування кінцевого зображення. Також можна піддати її процесу оптимізації згідно заданого алгоритму, у випадку, якщо технічним завданням передбачена інша умова оптимальності зображення (наприклад, у випадку, коли зображення фокусується на фотодіодну лінійку не плоскої форми).

Висновки

1. Розроблено універсальну строгу тривимірну геометричну теорію неklasичних фокусуючих дифракційних ґраток, основною перевагою якої є її придатність для розрахунків неklasичних оптичних елементів (складна асферична поверхня, змінний крок нарізки, тощо) та для великих кутів падіння оптичних променів на ґратку.

2. Отримано строгі, оптимізовані для комп'ютерних розрахунків формули, що описують дифракцію променів на поверхні неklasичної дифракційної ґратки в залежності від її локальних особливостей в околі точки падіння.

3. Запропоновано чисельну модель неklasичної дифракційної ґратки, яка дозволяє аналізувати форму поверхні, густину та форму штрихів, тощо, та проводити оптимізацію таких параметрів.

4. Розроблено алгоритм для побудови спектрального зображення та для аналізу його просторових властивостей.

5. Отримані формули і алгоритми дозволяють розраховувати та графічно будувати спектральне зображення, що створюється на довільній площині і в результаті обчислювати апаратну функцію монохроматора для визначення її відповідності технічному завданню та забезпечити її оптимальність. Розроблений в роботі ефективний (швидкий) і точний підхід дозволяє розрахувати параметри вихідного зображення до створення робочого макету

приладу.

7. Запропонований в роботі чисельний метод, в наслідок великого об'єму розрахунків, недоцільно використовувати на стадії побудови простої геометричної оптичної схеми і розрахунку її габаритних параметрів. Тому для отримання початкових наближень варто використовувати аналітичні методи такі, як двовимірна геометрична теорія неklasичних фокусуючих дифракційних ґраток [2].

Список використаних джерел

1. Ващенко В.М., Лоза Є.А., Патлашенко Ж.І., Банников О.О., Черний О.Є. Чисельний метод абераційного розрахунку монохроматорів Ч.1 // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. – 2005 – №4 – С.430-440.
2. Ващенко В.М., Лоза Є.А., Патлашенко Ж.І. Двовимірна геометрична теорія неklasичних зв'гнутих дифракційних ґраток // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. – 2008 – №3 – С.245-251.
3. Бронштейн Н.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ // Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953 – 608с.
4. Зайдель А.Н., Островская Г.В., Островский Ю.И. "Техника и практика спектроскопии" // Москва, Наука, 1976, 375с.
5. Одарич В.А. Основи теорії та методів розрахунку оптичних систем. ч.І. // Київ. Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2001, 220 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров // Издательство «Наука», Москва, 1973, 831 с.
7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии // Издательство «Наука», Москва, 1972, 272 с.

Надійшла до редколегії 22.05.2009

УДК 519.9

Макара В. А., член-кор. НАНУ, професор,
Казо І.Ф., к. ф.-м. наук, Мавланова* О. Д.,
аспірант, Чорнобук С.В., аспірант, Ткач В.М.,
кан. ф.-м. н.

Структурний стан вуглецю в кераміці системи $TiB_2 - C^*$ отриманої методом твердофазного синтезу

У роботі використаний метод електронної
мікроскопії й мас-спектрометричних
досліджень для аналізу структури вільного
вуглецю в кераміці системи $TiB_2 - C^*$. Показано,
що вуглець, який виділяється, зосереджений
переважно по границях зерен TiB_2 як у вигляді
фази графіту, так і у вигляді
рентгеноаморфної фази. Запропоновано
можливий дислокаційний механізм утворення
виявлених вуглецевих поліедричних кластерів.

Ключові слова: кераміка, вуглецеві
поліедричні кластери, дислокаційний механізм.

*E-mail: masker@i.ua

Вступ

У процесі кристалізації, залежно від умов
охладження, можуть реалізовуватися різні
механізми формування структури сплавів.
Традиційні уявлення про процеси кристалізації
розглядаються в роботах М.В.Білоуса,
М.А.Васильєва, В.Т.Черенина й ін. [1], однак,
останні досягнення в області вуглецевих сполук
показали, що в залізо-вуглецевих сплавах
можливе утворення вільного вуглецю у вигляді
фулеренів, бакитьюбів і глобул. Автори роботи
виявили фулерени в чавуні, надлишковий
вуглець при охолодженні розплаву залізо-вуглець
виділяється у вигляді включень, у яких присутні
поліедричні кластери. Добре відомо, що
вуглецеві поліедричні кластери й фулерени
можна виділити зі сконденсованих пар графіту, із
сажі, отриманої після спалювання ароматичних
вуглеводнів. Великий інтерес викликають
роботи, у яких описуються структури вуглецю,
які дуже нагадують фулерени. До них
відносяться кільця вуглецевих атомів або
ланцюжки з'єднаних атомів вуглецю, зв'язаних
ковалентно (карбін). Їх розглядають як
"передграфіт", "передцементит", "передалмаз".
Важливо, що в процесі кристалізації може
відбуватися як взаємне перетворення вуглецевих
модифікацій одна в іншу, так і утворення
вуглецевих кластерів.

Макара В. А., Казо І. Ф., Мавланова О. Д.,
Чорнобук С.В., Ткач В.М., 2009

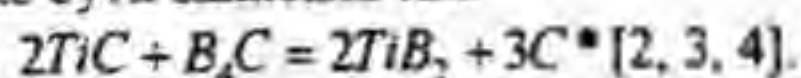
Makara V.A., cor.-memb. of NASU, prof.,
Kazo I.F., M.Sc., Mavlanova* O.D., post graduate,
Chornobuk S.V., post graduate, Tkach V.M., M.Sc.

Structural status of carbon in ceramics of system $TiB_2 - C^*$ received by a method of solid-state synthesis.

The method of electronic microscopy and mass-
spectrometer researches are used in work for the
analysis of structure of free carbon in ceramics of
system $TiB_2 - C^*$. It is shown, that the allocated
carbon is concentrated mainly on borders of TiB_2
grains both as a phase of graphite, and as an
amorphous phase. The possible mechanism of
formation of researched carbon polyhedral clusters
is offered.

Key Words: ceramics, carbon polyhedral
clusters, dislocation mechanism.

Згадані результати дозволяють припустити,
що утворення вуглецевих кластерів може
відбуватися в багатьох процесах, при яких
раніше зв'язаний вуглець виділяється в окрему
тверду фазу. Нами були проведені дослідження
фаз вуглецю, які виділяються в кераміці при
утворенні бориду титану з карбіду титану й
карбіду бора при високих температурах.
Формула хімічної реакції цього процесу синтезу
може бути записана так:



Методика дослідження й підготовка зразків

Виготовлення вихідних зразків кераміки, що
містять вуглець проводили аналогічно способу,
описаному в роботі [4]. Суміш порошків TiC , B_4C
у мольному співвідношенні 2:1 використали для
готування шихти. Розміри зерен порошків
становили 1-2 мкм - B_4C і 2-4 мкм - TiC , що
забезпечувало найкращий міжзеренний контакт.
У стані заводських поставок порошки TiC не
мають забруднюючих домішок. У порошок B_4C
виявлена домішка вільного вуглецю у вигляді
графіту в кількості ~2% по масі.

Гаряче пресування (ГП) зразків робили на
установці з резистивним нагріванням без
захисної атмосфери з температурними режимами
від 1500°C до 2250°C, зовнішньому тиску від 0

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

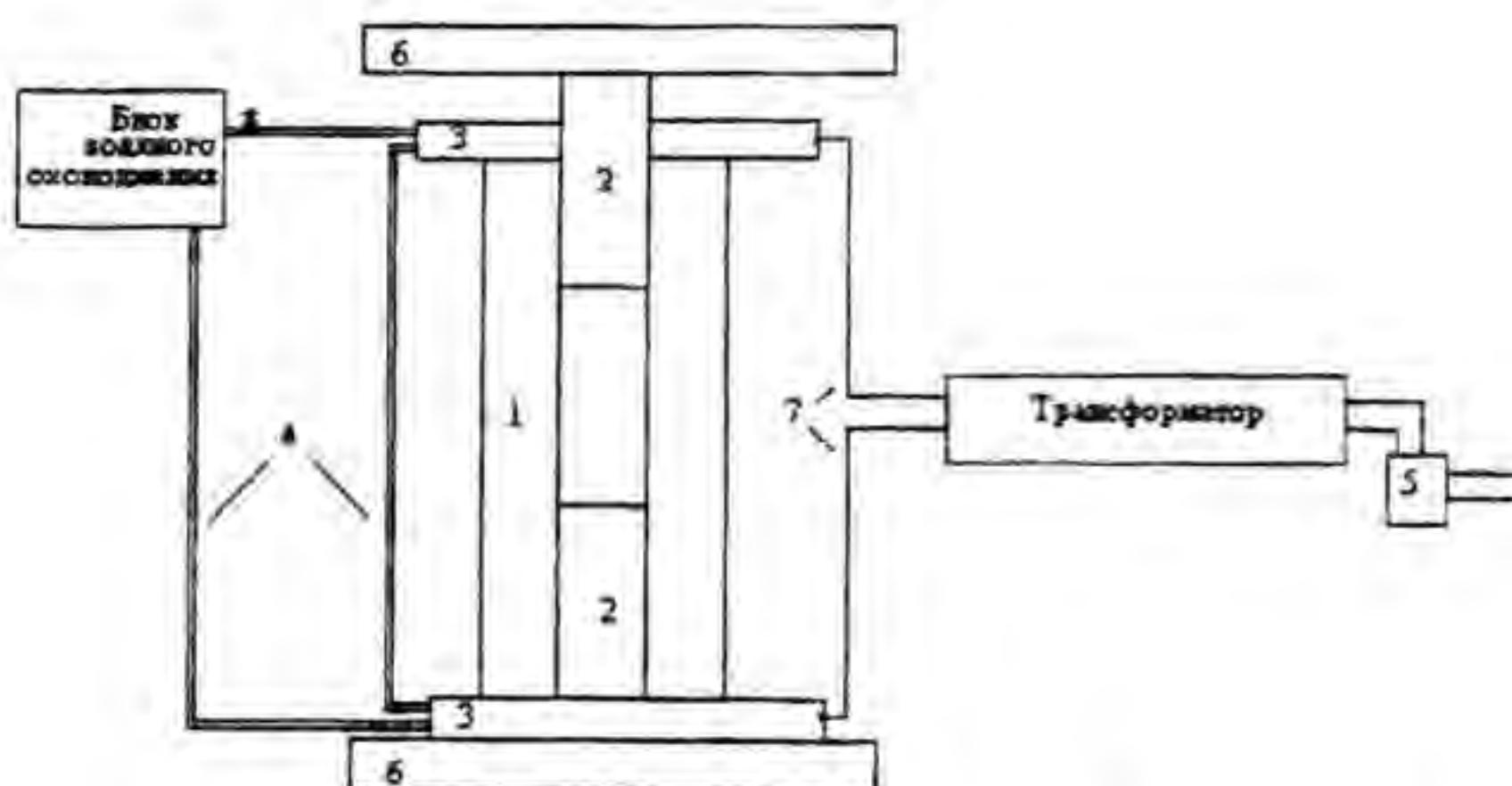


Рис. 1. Блок-схема установки для горячего прессования порошковых материалов. 1 - графитовая пресс-форма; 2 - пуансоны; 3 - водоохлаждающие электроды; 4 - резиновые шланги; 5 - масляный трансформатор; 6 - полки преса; 7 - медные шины

від 1500°C до 2250°C, зовнішньому тиску від 0 до 30 МПа й часом витримки від 60 до 2400 з у графітових пресс-формах. Установка, схема якої зображена на малюнку 1, складається з наступних функціональних частин: живлення подається через трансформатори типу ОСУ-20/0,5 Т4 і масляним трансформатором типу РНО-250-10 на електроди, пресс-форма, що одночасно є нагрівачем, система водного охолодження, система виміру температури (лабораторний пірометр).

Після спікання були отримані суцільні зразки (циліндричної форми з діаметром 13 мм і висотою 5-10 мм), які піддавали алмазній обробці для видалення поверхневого шару товщиною 0,5 мм. Фазовий аналіз виготовлених зразків, а також сумішей вихідних порошків проводився за допомогою дифрактометра ДРОН-3М (мідне випромінювання), рентгенограми знімали в кроковому режимі. Дані оброблялися методом порівняння отриманих рентгенограм зі стандартними наборами рентгенівських ліній вихідних фаз. На деяких рентгенограмах зразків крім графіту було виявлене структурне гало, що дозволяє припустити наявність рентгеноаморфного вуглецю (C*) в даному матеріалі. Для уточнення елементної складу зразків і визначення типу присутніх хімічних сполук дослідження зразків проводилося методом вторинної іонної мас-спектрометрії з використанням квадрупольного мас-спектрометра.

Для виділення вільного вуглецю охолоджені зразки після горячого прессування

подрібнювали до середнього розміру зерен 5 мкм, після чого протравлювали в розчині азотної кислоти з метою видалення TiB₂, промивали залишок водою, висувували. Залишок (сажа) являє собою пористий вуглець зі значною частиною аморфної складової. Потім проводили екстракцію вуглецевих кластерів витримкою порошку в толуолі марки ч. д. а. протягом 7-14 діб при кімнатній температурі. Розчин наносили на підкладку з монокристалічного кремнію КДБ-40 орієнтації (100). Толуол відганяли під вакуумом при тиску 10⁻¹ мм. рт. ст. Активування підкладки монокристалічного кремнію органічними поверхневими активаторами приводить до значного забруднення спектра, що істотно утрудняє його подальшу ідентифікацію. Також як підкладка був використаний пористий кремній, що привело до забруднення спектра іонами H₂O, N₂, CO₂ і т. д.

Мас-спектроскопічні дослідження сухого залишку після випарення екстракту проводили на мас-спектрометрі фірми Bruker Daltonics (Німеччина) Autoflex II, MALDI TOF mass-spectrometer із часопроботним аналізатором. Зразки досліджувалися також на системі для вивчення поверхні LAS-2000 фірми "Riber" (Франція) методом електронної оже-спектроскопії з використанням спектрометра типу "циліндричне дзеркало".

Результати й обговорення

Під час горячого прессування суміші 2TiC + B₄C відбувається реакція високотемпературного твердофазного синтезу бориду титану з виділенням вуглецю. За даними рентгеноскопії

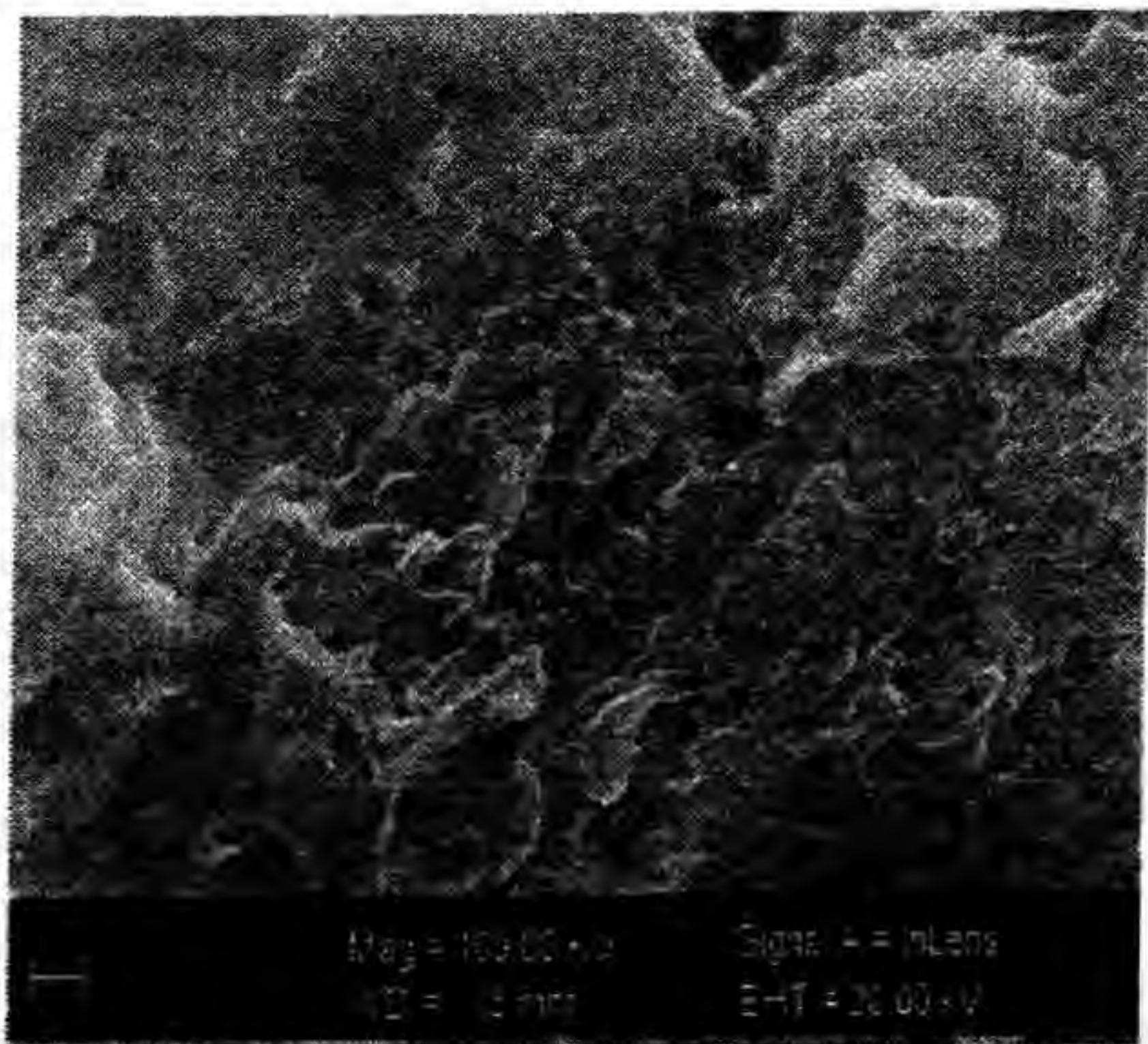


Рис.2 Вид лусочок вуглецю (сажа) у скануючому електронному мікроскопі.

вуглець в отриманих зразках перебуває як у вигляді твердого розчину в кристалічній решітці TiB_2 (зміна параметрів ґратки) так і у вигляді графітної й аморфної фаз між зернами бориду титану.

Графітова фаза вуглецю має вигляд лусочок розмірами від 10 до 1000 нм (рис.2)

У попередніх дослідженнях авторами [5] було показано, що в ході реакції формуються вуглецеві кластери. У результаті аналізу експериментальних даних був складений

вибірковий мас-спектр чистовуглецевих кластерів (кількістю вуглецевих атомів від $n=4$ до $n=107$). При низьких температурах ($1500^\circ C$), має місце дифузійний механізм транспортування В до поверхні TiC , де відбувається поступове перетворення TiC до TiB_2 , з виділенням вуглецю, що під дією виникаючих внаслідок невідповідності між періодами решіток реагентів і реактанта пружних сил, реагентів і реактанта пружних сил, дифундує у двох напрямках до поверхні й у середину зерен TiC [6].

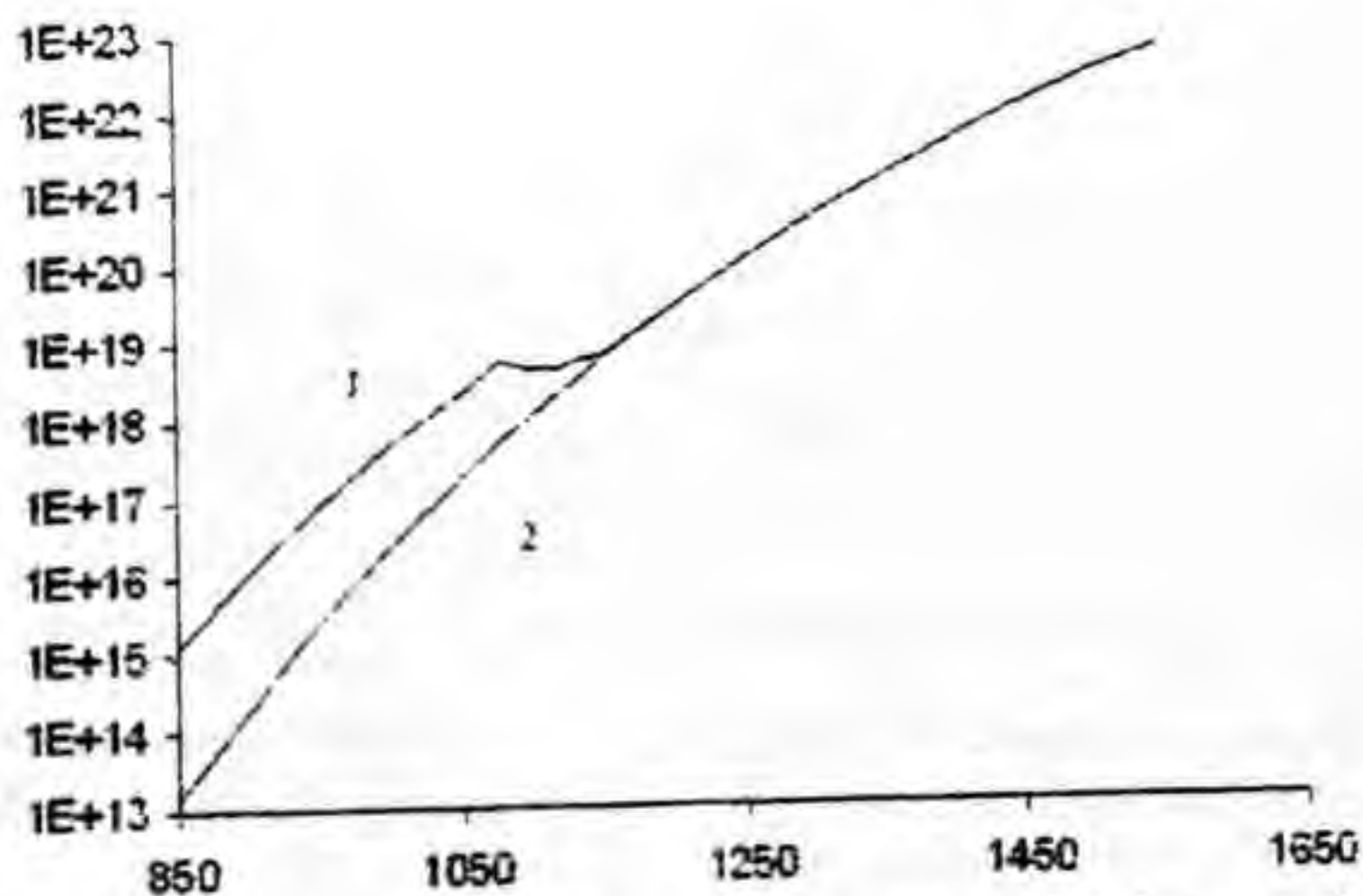


Рис. 3. Залежність потоку вуглецю на поверхню від температури T - 1 крива. 2 крива - демонструє залежність від температури тільки дифузійного потоку вуглецю [9]

Приповерхневі атоми вуглецю групуються в різні модифікації (графіт, вуглецеві цикли, ланцюжки, кільця), у тому числі й до C_n ($n=4-107$).

Підвищення температури, як відзначено в роботах [7,8], стимулює перехід атомів вуглецю

Таким чином, ковзна дислокація перерозподіляє атоми вуглецю по кристалі, розподіл вуглецю стає просторово-неоднорідним. Інші ковзні дислокації підсилюють виникаючу неоднорідність. Аналогічні процеси проходять у часточках карбиду бора.

Оскільки швидкість ковзання дислокації перевищує середню швидкість дифузії, як вакансій, так і міжвузельних атомів, у кінетиці формування розподілу точкових дефектів можна виділити два режими: швидкий і повільний. Перший, пов'язаний з "замітанням" дефектів ковзною дислокацією, за час ковзання дислокації через зразок концентрація дефектів внаслідок переходу вуглецю в міжвузельне положення й дифузії практично не міняється. В інтервалі між пробігами дислокацій концентрація й міжвузельних атомів вуглецю міняється тільки внаслідок термічної генерації й дифузії. Ковзання дислокації за малий час викликає неоднорідність розподілу дефектів, і до появи наступної ковзної дислокації ця неоднорідність релаксує (рис.). Дані теоретичні уявлення добре узгоджуються з експериментальними даними: при низьких температурах синтезу довжина пробігу дислокацій дозволяє їм захопити й винести на границі зерен велику кількість атомів вуглецю, де останні формують кластери із числом атомів до $n=107$, при високих температурах – дислокації не встигають винести вуглецеві атоми й скидають їх у середині зерен реагентів, де формуються кластери з кількістю атомів $10 \leq n \leq 70$.

Внутрішні потоки вуглецю під впливом зовнішнього тиску з'єднуються в більше масивні комплекси й графітову фазу. Ці прошарки виділяються в окремі області, у вигляді лусочок (див. рис. 2), чим і обумовлена лусочкова структура кераміки TiB_2+C^* отримана при низьких температурах. Під дією тиску й більше високої температури здійснюється активне злиття малих кластерів до стійких форм із кількістю атомів $50 \leq n \leq 70$.

Таким чином, як вважають автори роботи, одним з можливих механізмів стимулююче утворення поліедричних кластерів з окремих атомів вуглецю є ковзання й переповзання дислокацій у нестехіометричному карбіді титану пересиченого атомами вуглецю.

Список використаних джерел

1. Шпак А.П., Куницкий Ю.А., Карбовский В.А. Кластерные и наноструктурные материалы. – Киев: Академперіодика, 2001.
2. Скороход В.В., Уваров І.В., Рагуля А.В. Фізико-хімічна кінетика в наноструктурних системах. – Київ: Академперіодика, 2001.
3. Быков А.И., Груднева И.В. Взаимодействие карбида бора с карбидами титана и циркония под давлением. // Порошковая металлургия – 1998. – №1/2. – с.52-55.
4. Kato I.F., Porov A.Yu. Mechanical properties of $TiB_2 - TiC - C^*$ ceramic materials // Functional Materials. – 2002. – №3. – p.503 – 506.
5. Кузько Ю.Б., Чабан Н.Ф. Двойные и тройные системы содержащие бор. – М.: Наука, 1974.
6. Макара В.А., Михайловский В.В., Селищев П.А. Перераспределение углерода движущимися дислокациями в нанокompозитных соединениях $Ti-C-V$ при термомеханическом воздействии.
7. Гусев А. И. Превращение беспорядок – порядок и фазовое равновесие в сильно нестехиометрических соединениях // УФН. – 2000 г. – Т170 – №1. – с. 3-40.
8. Эткинс П., Шрайвер Д. Современная неорганическая химия. М. Наука. – 2004.
9. А. В. Елецкий. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства. // УФН. т.174, № 4. – с. 401-438.
10. Фуллерены: Учебн. пособие / Л. Н. Сидоров, М. А. Юровская и др. – М.: Издательство «Экзамен», 2005. – 688 с.
11. T.Donovan, J. Brodbelt Org. Mass Spectrom., 1992, 27, 9.
12. В. Л. Тальрозе, А. К. Любимова, ДАН СССР 1952, 86, 909.
13. F. P. Lossing, I.J. Tanaka, Chem. Phys., 1956, 25, 1031.
14. Гусев А. И. Фазовые равновесия фазы и соединения в системе $Ti-C$ // Успехи химии, 2002, т.71, № 6, – с. 507-532.

Надійшла до редколегії 27.08.08

УДК 621.315.59

Мельниченко М.М., к.ф.-м.н., ст.н.с.

Вплив хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію на антивідбиваючі характеристики

У роботі проведено вивчення впливу хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію на антивідбиваючі характеристики. Встановлено, що використання тонких шарів наноструктурованого кремнію (3-60 нм) сформованих методом хімічного травлення на підкладках монокристалічного кремнію для сонячних елементів приводить до покращення антивідбиваючих характеристик. Показано, що через рік після формування зразків проявляються ті ж самі закономірності в спектральній залежності коефіцієнту відбивання, але в області 300-700 нм спостерігається незначне погіршення (~10%) антивідбиваючих характеристик. Зміни антивідбиваючих характеристик при збільшенні товщини наноструктурованого шару пояснюються на основі структурних змін, що відбуваються в результаті процесу формування наноструктурованого кремнію при хімічній модифікації монокристалічного кремнію.

Ключові слова: монокристалічний кремній, наноструктурований кремній, антивідбивання.

*E-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

Основним матеріалом для одержання сонячних елементів є кремній. Технологія одержання напівпровідникового кремнію і фотоелементів на його основі базується на методах, розроблених у мікроелектроніці – найбільш розвиненої промислової технології. Якщо врахувати, що перші сонячні елементи були виготовлені з кремнію біля сорока років тому, то стає зрозумілим, що цей матеріал є першим в програмах фотоелектричної сонячної енергетики. Фотоелементи з монокристалічного кремнію мають переваги в дешевизні напівпровідникового матеріалу з високими параметрами одержуваних на його основі приладів.

Фотоелектричний перетворювач із застосуванням поруватого кремнію є подальшим удосконаленням фотоелектричних перетворювачів дифузійного типу [1-5]. Поруватий кремній має цілий комплекс

M. M. Melnichenko, senior researcher.

The influence of chemically modified surface of single-crystal silicon on antireflection characteristics.

In the work the influence of chemically modified surface of single-crystal silicon on antireflection characteristics is studied. It is established that the use of thin layers of nanostructured silicon (3-60 nm) formed by method of chemical pickling on single-crystal silicon substrate for solar elements improves antireflection characteristics. It is shown that one year after shaping the sample it reveals the same regularities in spectral dependency of the reflection coefficient, but in the field of 300-700 nm small deterioration (~10%) of antireflection characteristics exists. Changes of antireflection characteristics with increase of thickness nanostructured layer are explained on basis of the structural changes, which occurs in the process of formation of nanostructured silicon by the method of chemical modification of single-crystal silicon.

Key Words: single-crystal silicon, nanostructured silicon, antireflection.

властивостей — гетеруючі, пасивуючі, просвітлюючі й оптичні властивості, — що дозволяє застосовувати його в технології фотоелектричних перетворювачів для подальшого поліпшення їхніх фото енергетичних характеристик.

Одним з найбільш ефективних шляхів підвищення коефіцієнту корисної дії сонячних елементів є нанесення на їх поверхню антивідбиваючих покриттів [6]. Це дозволяє різко зменшити відбивання світла від поверхні сонячних елементів і є особливо актуальним для сонячних елементів, виготовлених на основі матеріалів, що мають великий показник заломлення в області максимуму сонячного спектру. Наприклад, для Si в спектральному інтервалі 400-1100 нм показник заломлення змінюється від 5,2 до 3,5, що дає значення коефіцієнту відбивання в межах 30-50% [7]. В останній час різні дослідницькі групи [4, 8, 9]

пропонують застосовувати замість традиційних анти відбиваючих покриттів (АВП) шари поруватого кремнію. Рельєфна поверхня поруватого кремнію ефективна при захопленні фотонів, різко знижує втрати на відбивання світла. В роботі [5] пропонується формування текстурованої поверхні з поруватим кремнієм. Автори огляду [10], присвяченого застосуванню поруватого кремнію як АВП шару, зокрема переконливо продемонстрували, що шари поруватого кремнію, отримані ними хімічним травленням, – приваблива альтернатива, що стосується відношення вартість – робочі параметри сонячних елементів (СЕ) на полікристалічному кремнії, у порівнянні з іншими підходами. Крім анти відбиваючих важливі і пасивуючі властивості поруватого кремнію. Швидкість поверхневої рекомбінації поруватого кремнію сильно залежить від умов одержання і наступних спеціальних обробок, зокрема процесів окислення. Використання замість традиційних анти відбиваючих плівок тонкого шару поруватого кремнію дає можливість замінити одразу три технологічні операції: текстурування, пасивацію поверхні та нанесення анти відбиваючого покриття [5].

Метою даної роботи було вивчення впливу хімічно модифікованої поверхні монокристалічного кремнію на анти відбиваючі характеристики.

Зразки і методи вимірів

Плівки наноструктурованого кремнію одержували методом хімічного травлення (stain etching) [11] на підкладках монокристалічного кремнію (100) орієнтації, р-типа провідності з питомим опором 1 Ом·см.

Оптичні спектри відбивання реєстрували в режимі відображення за допомогою однопроменевого спектрофотометра SPECORD M40. Спектральний діапазон дослідження від 190 до 1100 нм. Джерелом світла прилад використовує галогенову і дейтерієву лампи. Вимір спектрів фотолюмінесценції наноструктурованого кремнію проводився за допомогою призмового монохроматора. Для збудження фотолюмінесценції використовувалася ксенонова лампа. Усі виміри проводилися при кімнатній температурі. Елементний склад поверхні наноструктурованого кремнію вивчався методом електронної оже-спектроскопії. Для вивчення розподілу елементів по глибині наноструктурованого кремнію поверхня досліджуваних зразків піддавалася

іонному травленню зі швидкістю 30 ангстрем за хвилину.

Результати та їх обговорення

Проведені дослідження показали, що застосування наноструктурованого кремнію приводить до збільшення діапазону спектральної чутливості як у ближній інфрачервоній області, так і в ультрафіолетовій. Це обумовлено підвищенням часу життя носіїв заряду як в об'ємі напівпровідника, так і на його поверхні завдяки гетеруючим та пасивуючим властивостям наноструктурованого кремнію, а також внаслідок зміни оптичних і просвітлюючих характеристик кремнієвої структури.

На рис.1 представлено експериментальні спектри відбивання монокристалічної підкладки кремнію, монокристалічної підкладки кремнію з шаром наноструктурованого кремнію та сонячного елемента з промисловим анти відбиваючим покриттям.

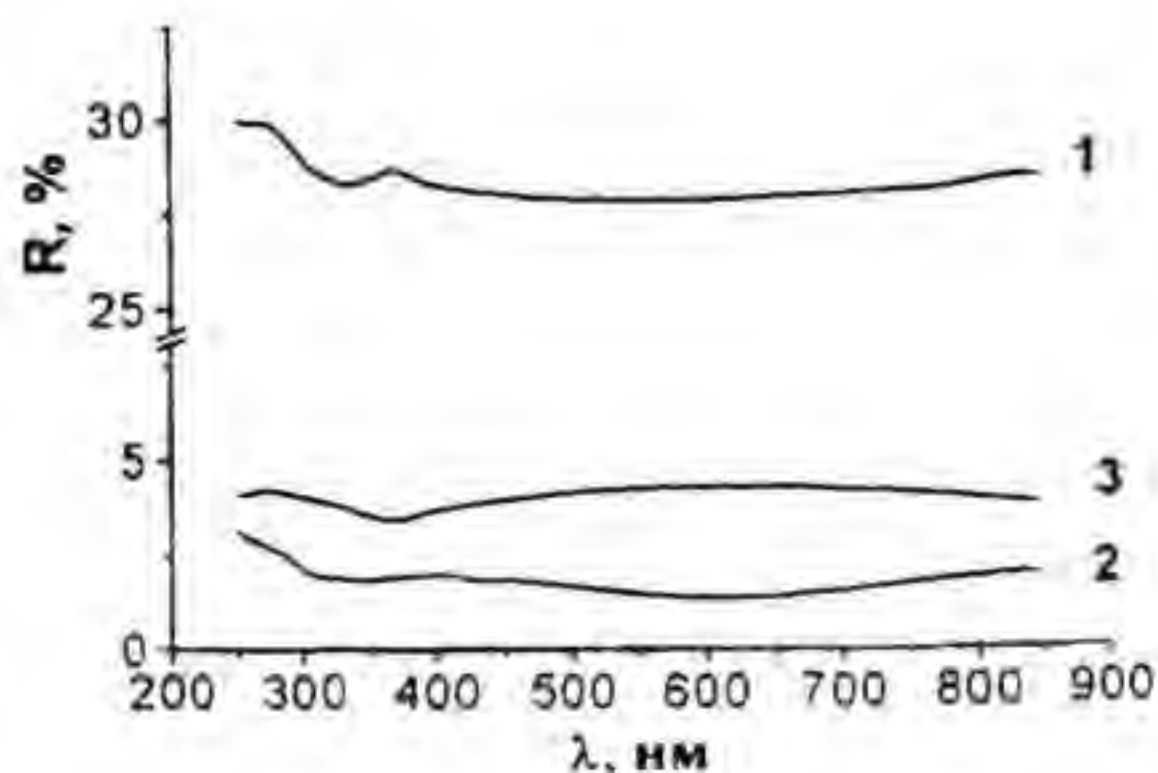


Рис.1. Спектри відбивання монокристалічної підкладки кремнію (1), монокристалічної підкладки кремнію з шаром наноструктурованого кремнію (2) та сонячного елемента з промисловим анти відбиваючим покриттям (3).

Як видно, в усій області дослідження антивідбиваючі втрати менші для зразків з наноструктурованим кремнієм. При цьому слід зазначити, що в області $\lambda \sim 650$ нм для зразків з наноструктурованим кремнієм спостерігаються мінімальні втрати на відбивання.

Як відомо наноструктурований кремній – це об'єкт, при контакті якого з повітрям можуть суттєво змінюватися його властивості, тому для ефективного практичного використання його в якості анти відбиваючого покриття в технології

виготовлення сонячних елементів необхідно дослідити стабільність відбиваючих характеристик наноструктурованої поверхні монокристалічного кремнію в процесі старіння на повітрі. Спектри відбивання для зразків з наноструктурованим кремнієм досліджувалися через день після їх формування, та через півроку та рік перебування на повітрі (рис.2).

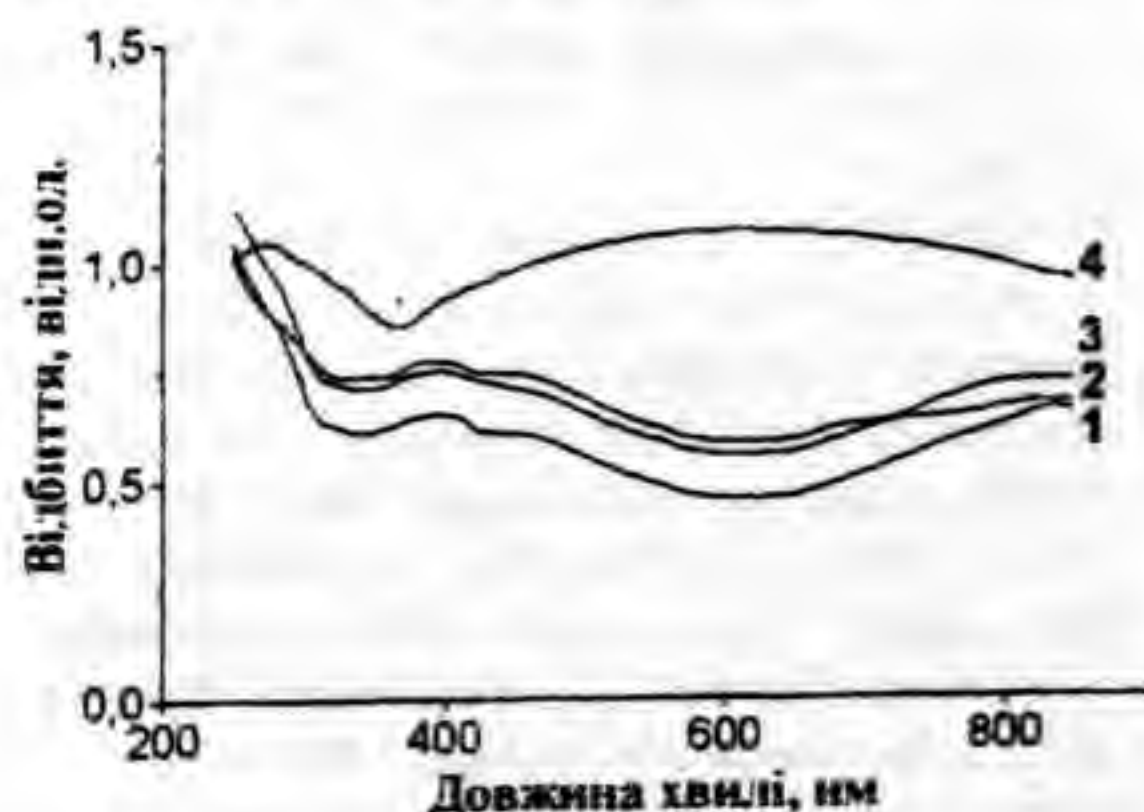


Рис.2. Деградація анти відбиваючих характеристик під час старіння на повітрі: 1 – зразок після формування наноструктурованої поверхні кремнію, 2 – через пів року, 3 – через рік, 4 – сонячний елемент з промисловим анти відбиваючим покриттям.

Як видно з рис.2 для всіх зразків через рік після формування зразків проявляються ті ж самі закономірності в спектральній залежності коефіцієнту відбивання, але в області 300-700 нм спостерігається незначне погіршення (~10%) анти відбиваючих характеристик зразків з наноструктурованою поверхнею монокристалічного кремнію. Порівняння спектрів відбивання зразків з наноструктурованим кремнієм після року перебування на повітрі та стандартного промислового анти відбиваючого покриття показало, що анти відбиваючі втрати для зразків з наноструктурованим кремнієм навіть після погіршення менші ніж для зразків з промисловим покриттям.

В роботі [12] відзначається, що максимальне покращення анти відбиваючих характеристик може бути досягнуто лише для товстих шарів поруватого кремнію ($> 1,5 \mu\text{м}$). На жаль, сумісність формування товстих шарів поруватого кремнію з традиційною технологією кремнієвих сонячних елементів все ще залишається недосяжною, так як застосування емітера товщиною 0,3 мкм несумісне з товщиною

поруватого кремнію, потрібного для створення гарного анти відбиваючого ефекту. Приймаючи це до уваги в роботі було проведено дослідження анти відбиваючих характеристик в залежності від товщини шару наноструктурованого кремнію. На рис.3 представлені спектри відбивання для зразків з наноструктурованим кремнієм товщиною від 3 до 60 нм та монокристалічної підкладки кремнію.

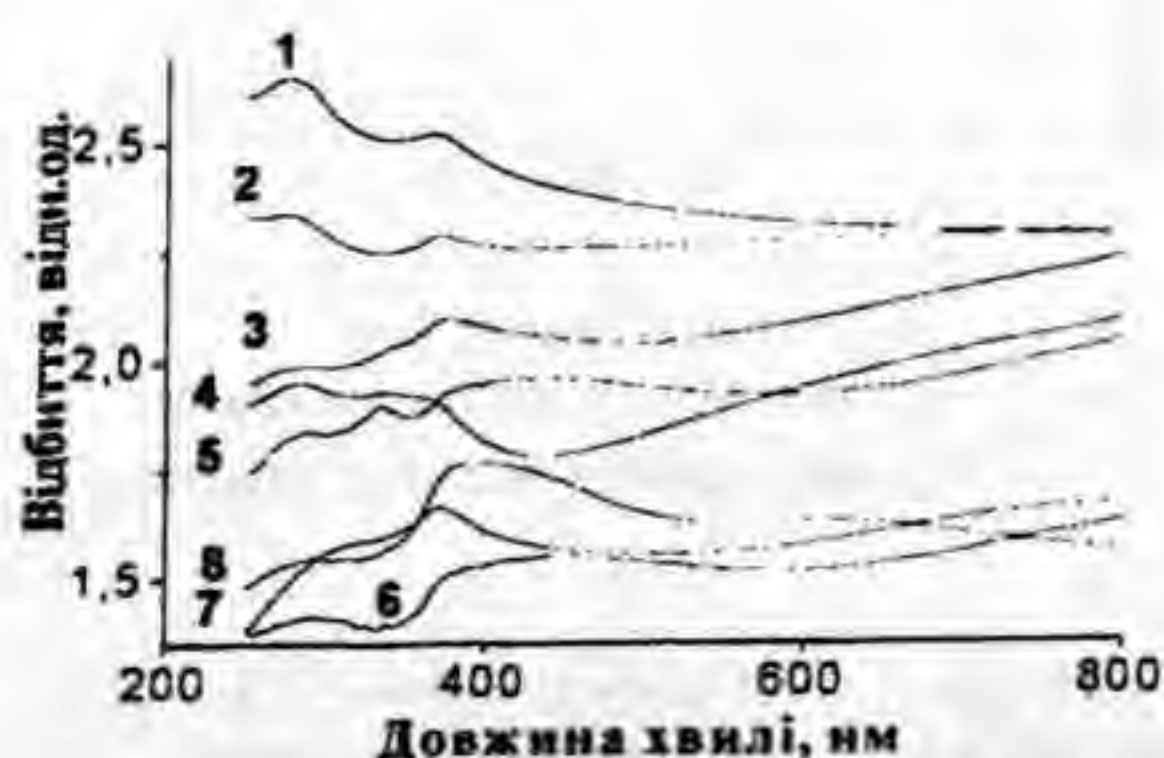


Рис.3. Залежність коефіцієнту відбивання від товщини шару наноструктурованого кремнію (1 – монокристалічна підкладка кремнію, 2 – 3 нм, 3 – 9 нм, 4 – 15 нм, 5 – 20 нм, 6 – 35 нм, 7 – 60 нм, 8 – 60 нм).

Як видно з рис.3 збільшення товщини наноструктурованого шару від 3 до 35 нм призводить до зменшення втрат на відбивання. При подальшому збільшенні товщини від 35 до 60 нм загальна інтенсивність спектру відбивання майже не змінюється, але спостерігається зміна вигляду спектральної залежності коефіцієнту відбивання. При цьому найкращі анти відбиваючі характеристики мають зразки з наноструктурованим кремнієм товщиною 35 нм, що характеризуються яскравою інтенсивною фотолюмінесценцією та високою однорідністю властивостей по площі зразка (рис.4).

Для всіх зразків спостерігається кореляція між фотолюмінесценцією та анти відбиваючими властивостями, тому таку поведінку анти відбиваючих характеристик при збільшенні товщини наноструктурованого шару можна пояснити як і у випадку змін фотолюмінесценції на основі структурних змін, що відбуваються в результаті процесу формування наноструктурованого кремнію при різній тривалості травлення. На першому етапі при збільшенні часу травлення від 1.5 до 5 хв.

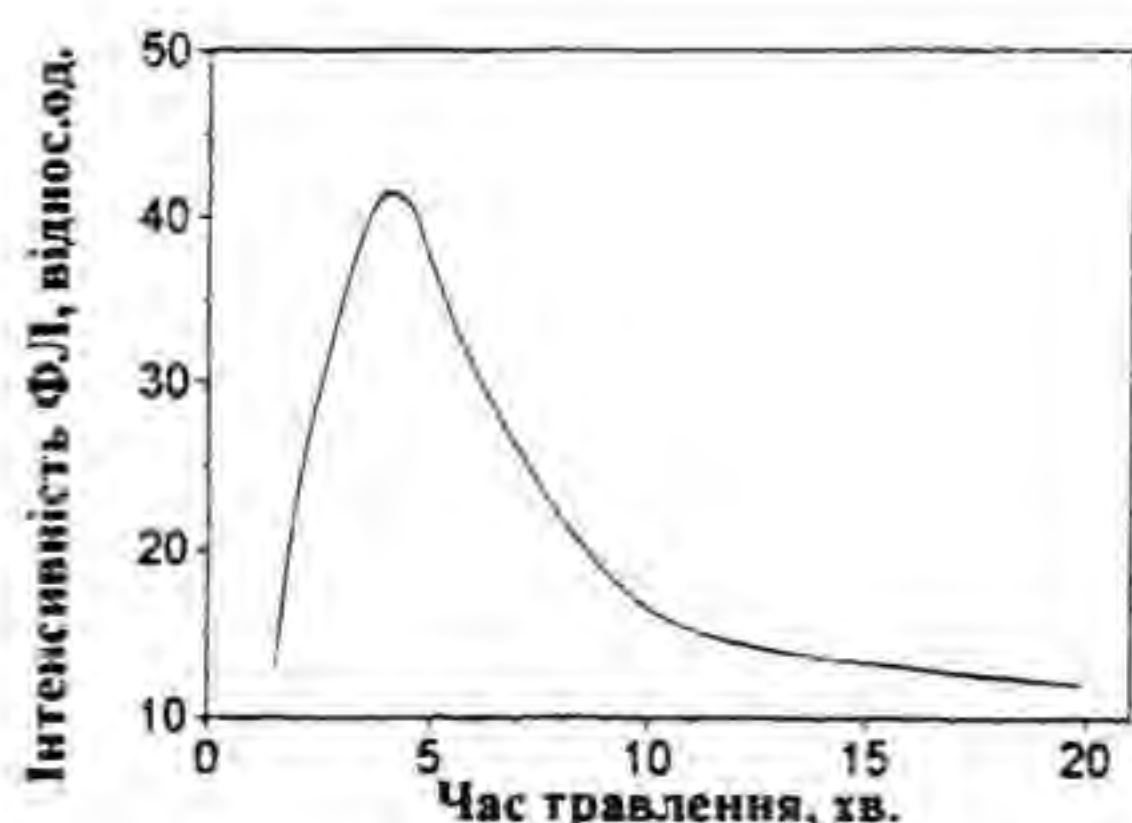


Рис. 4. Залежність інтенсивності фотолюмінесценції наноструктурованої поверхні монокристалічного кремнію від часу травлення.

покращення фотолюмінесцентних та анти відбиваючих властивостей пов'язано із збільшенням площі поверхні за рахунок збільшення висоти нанорельєфу. При подальшому збільшенні часу формування наноструктурованого кремнію площа поверхні зменшується, тому що страплюється вихідний мікрорельєф поверхні, а наноструктура, що формується на ньому, розтравлюється, що і приводить до зменшення фотолюмінесцентних та анти відбиваючих властивостей.

Висновки

Використання тонких шарів наноструктурованого кремнію товщиною від 3 до 60 нанометрів сформованих методом хімічного травлення на підкладках монокристалічного кремнію для сонячних елементів, що характеризуються розвиненим мікрорельєфом, дозволяє зменшити втрати на відбивання за рахунок збільшення площі поверхні.

Список використаних джерел

1. Ghannam M.Y., Abouelsaood A.A., Nijs J.F. A semiquantitative model of a porous silicon layer used as a light diffuser in a thin film solar cell // Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 2000. – Vol. 60, № 2. – P. 105-125.
2. Kore L., Bosman G. Feasibility of porous silicon as a primary material in solar cells //

Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 1999. – Vol 57. – P. 31-48.

3. Bilyalov R., Stalmans L., Beaucarne G., Loo R., Caymax M., Poortmans J., Nijs J. Porous silicon as an intermediate layer for thin-film solar cell // Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 2001. – Vol. 65. – P. 447-485.
4. Strehlke S., Bastide S., Levy-Clement C. Optimization of porous silicon reflectance for silicon photovoltaic cells // Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 1999. – Vol. 58. – P. 399-409.
5. Bilyalov R.R., Ludemann R., Wettling W., Stalmans L., Poortmans J., Nijs J., Schirone L., Sotgui G., Strehlke S., Levy-Clement C. Multicrystalline silicon solar cells with porous silicon emitter // Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 2000. – Vol. 60, № 6. – P. 391-420.
6. Фаренбрух А., Бьюб Р. Солнечные элементы. Теория и эксперимент: Пер. с англ. - М.: Энергоатомиздат, 1987. – 278 с.
7. Мосс Т., Баррел Т., Еллис Б. Полупроводниковая оптоэлектроника // М. Мир, 1976. – 432 с.
8. Matic Z., Bilyalov R.R., Poortmans J. Firing through porous silicon antireflection coating for silicon solar cells // Phys. Stat. Sol.(a). – 2000. - №182. - С. 457-460.
9. Martin-Palma R.J., Vazquez L., Martinez-Duart J.M., Schnell M., Schaefer S. Antireflective porous-silicon coatings for multicrystalline solar cells: the effects of chemical etching and rapid thermal // Semicond. Sci. Technol. – 2001. – №16. – С. 657-661.
10. Menna P., Francia G.Di, Ferrara V. Porous silicon in solar cells: a review and a description of its application as an AR coating // Solar Energy Mater. & Solar Cells. – 1995. – Vol. 37, №.1 - P. 13-24.
11. Свеженцова Е.В., Мельниченко М.М., Шмирева О.М. Використання субмікронних шарів поруватого кремнію в сонячних елементах // Електроніка та зв'язок. – 2003. – №4. – С. 204-208.
12. Скришевський Валерій Антонович. Генераційно - рекомбінаційні процеси в гетероструктурах з тонкими шарами поруватого кремнію та оксиду кремнію. Дис. д-ра фіз.-мат. наук:01.04.10. – К., 2001. – 298 с.

Надійшла до редколегії 15.05.09

УДК 539.26

Ніколюк П.К., д. ф.-м. н., проф.,
Дзись В.Г., к.т.н., доц.,
Лукіянчук С.М., асп.,
Бурдейна Л.І., к.п.н., доц.,
Нікслайчук В.Я., асист.,
Баран В.В., студ.

Дегібридизація в сполуках RAI_2Si_2

Проведено теоретичний розгляд явища дегібридизації для інтерметалічних ізоструктурних сполук ряду RAI_2Si_2 ($R - Sm, Eu, Gd, Tb, Er, Yb$). Показана фізична природа виникнення δ -подібного піку, величина якого пропорційна N кількості вузлів, утворених структурними елементами $R-Si$. В порівнянні з одиначною домішкою величина δ -подібного піку зростає в N раз. Це обумовлено тим, що $R-Si$ -орбітали відіграють роль електронних дефектів, періодично розташованих у межах всієї кристалічної решітки.

Проведені експериментальні та теоретичні дослідження показали високу ступінь кореляції і самоузгодженості. Це дозволяє розглядати атомні зв'язки $R-Si$ як своєрідні електронні дефекти, що сильно збурюють електронну систему сполук ряду RAI_2Si_2 . Це збурення проявляється у виникненні інтенсивних резонансних піків електронних станів, що формуються у валентній зоні досліджених інтерметалідів в результаті дії дегібридизаційного фактору.

Ключові слова: дегібридизація, електронна структура, електронні дефекти

E-mail: pnikola@planeta.ua

Явище дегібридизації для інтерметалічних ізоструктурних сполук ряду RAI_2Si_2 ($R - Sm, Eu, Gd, Tb, Er, Yb$) описано в роботах [1-3], в яких отримано і співставлено в єдиній енергетичній шкалі $K\beta_{1,x}$ і $L_{2,3}$ -смуги емісії Al та Si . На рис.1 в якості ілюстрації представлені рентгенівські емісійні смуги Al та Si в сполуках $ErAl_2Si_2$, $GdAl_2Si_2$ та $EuAl_2Si_2$, співставлені в єдиній енергетичній шкалі з допомогою рентгеноелектронних даних. У вказаних сполуках спостерігаються специфічні

Nikoluyk P.K., Dr. Sci., Prof.,
Dzis V. G., PhD, As. Prof.,
Lukiyanchuk S.M., PhD stud.,
Burdeina L.I., PhD, As. Prof.,
Nikolaichuk V. Y., As.,
Baran V.V., stud.

Degibridization in RAI_2Si_2 compounds

The theoretical consideration of degibridization phenomenon for intermetallic isostructural compounds of RAI_2Si_2 ($R - Sm, Eu, Gd, Tb, Er, Yb$) row has been performed. The physical nature occasion of δ -like hump, value of which is proportional to N the number of lattice sites formed by $R-Si$ structural elements. In comparison with single admixture the value of δ -like hump is more in N times. This is caused those, as $R-Si$ -orbitals are played role of electronic perfections, which is periodic location in the frame of crystal.

Performed theoretical and experimental investigation is shown great degree of correlation and selfconsistency. This give possibility to view $R-Si$ bonds as specific electronic defects, which is strongly perturbed electronic system of RAI_2Si_2 compounds. Such perturbation is displayed in arising intensive resonance humps of electronic states, which are formed in valence zone developed intermetallids as a result degibridization factor action.

key words: degibridization, electronic structure, electronic defects

трансформації емісійних смуг обох компонентів, але особливо $L_{2,3}$ -смуг Al . Характерною особливістю є те, що $L_{2,3}$ -смуги Al складаються з інтенсивних високо- та низькоенергетичних піків (піки A та C на рис.1), розділених глибоким мінімумом. При цьому виявляється, що має місце точне співпадіння максимумів $SiK\beta_{1,x}$ -смуг (маркер B на рис.1) з мінімумами $AlL_{2,3}$. Вказана особливість не випадкова і дозволяє констатувати факт існування специфічного явища – явища дегібридизації, наслідком якого є розділення (сепарація) електронних станів одного

компонента сполуки під впливом іншого компонента (в даному випадку електронні стани Al розділяються енергетично стійкими електронними станами Si). Фізична суть явища полягає в тому, що гібридна $K\beta_{1,x}$ -смуга Si розділяє $s(d)$ -стани Al ($L_{2,3}$ -смуга), внаслідок чого з'являються інтенсивні низько- та високоенергетичні особливості на $L_{2,3}$ -смугах Al , розділені мінімумом, на який припадає центр мас $SiK\beta_{1,x}$ -смуги кремнію. Описане розділення електронних станів Al ми називаємо явищем *дегібридизації*. Наслідком даного феномену є енергетичне зміщення електронних станів $s(d)$ -симетрії Al під впливом заколапсованих (енергетично стійких) електронних станів Si . Роль таких станів відіграють двоцентрові гібридні валентнозв'язуючі орбіталі типу $(3spd)_{Si} - (4f5d6s)_R$ [2,3], наявність яких власне і спричиняє енергетичну стійкість $K\beta_{1,x}$ -смуги.

Явище дегібридизації являє собою фактично прояв дії валентних орбіталей у складних (багатокомпонентних) металічних сполуках, де електровід'ємності хоча б двох компонентів суттєво різняться, що приводить до формування стійких електронних конфігурацій між елементами з різко відмінними електровід'ємностями.

Отже, суть явища полягає в тому, що гібридна $K\beta_{1,x}$ -смуга Si розділяє $s(d)$ -стани Al . Вагомим наслідком описаного дегібридизаційного явища є те, що спостерігається збурення електронної системи сполук RAl_2Si_2 , так що орбіталі $(3spd)_{Si} - (4f5d6s)_R$ відіграють роль специфічних електронних дефектів.

Розглянемо тепер теоретичну модель даного відкритого експериментальним шляхом явища. Нехай в результаті збурення електронних станів валентної зони енергія електронних рівнів

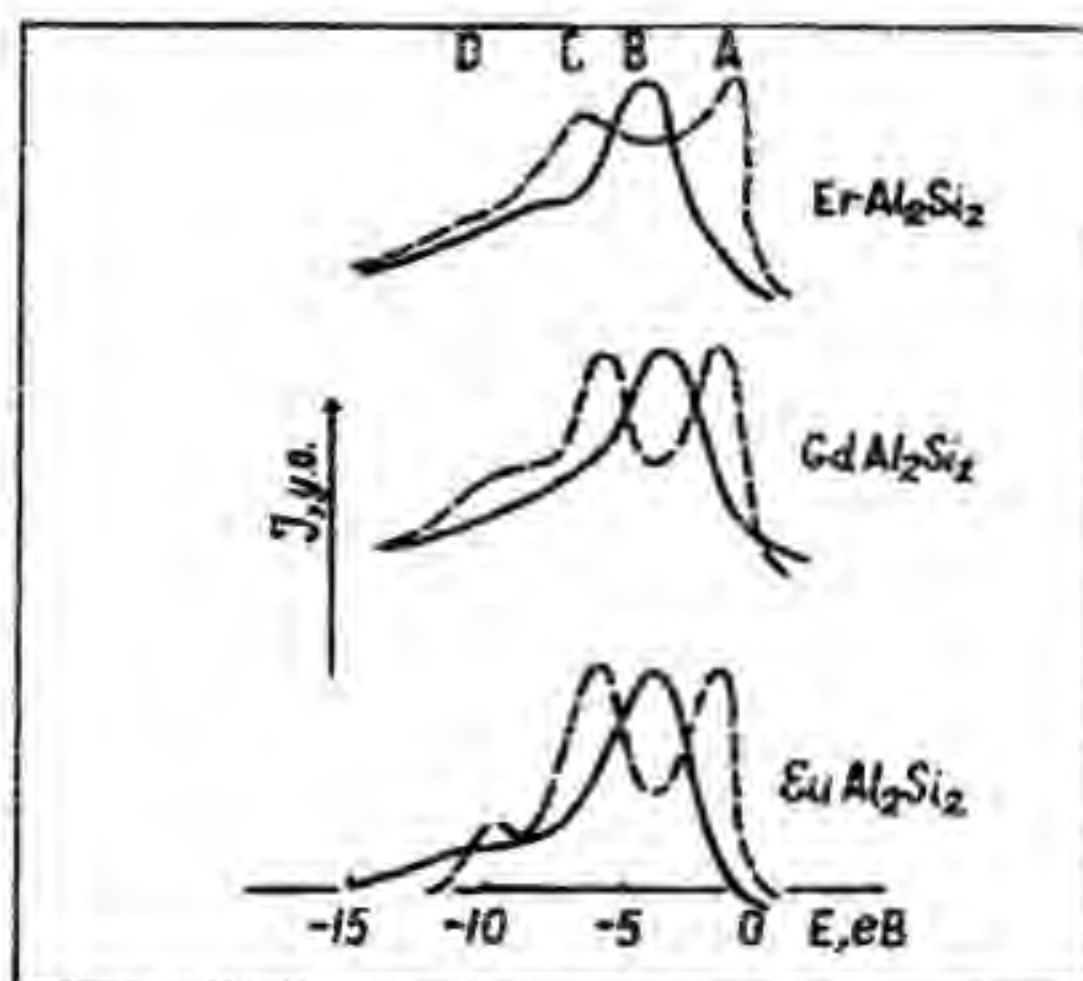


Рис. 1. Електронна структура валентної зони полук ряду RAl_2Si_2 ($R = Er, Gd, Eu$), що ілюструє явище дегібридизації: (суцільна лінія – $SiK\beta_{1,x}$ -смуга емісії, пунктир – $AlL_{2,3}$ -смуга).

зростає на величину U . Тоді гамільтоніан такої системи матиме вигляд

$$\hat{H} + \hat{H}_0 + \hat{U}, \quad (1)$$

$\hat{H}_0$ – гамільтоніан ідеального кристалу;

$\hat{U}$ – оператор збурення, джерелом якого являються орбіталі вказаного вище типу, періодично розташовані по всьому кристалу.

Густина станів $g(E)$ в загальному випадку [4] представляється як сума δ -функцій від точних власних значень:

$$g(E) = \sum_v \delta(E - E_v) = Sp \delta(E - \hat{H}), \quad (2)$$

де E_v – власні значення гамільтоніана $\hat{H}$,

$Sp \delta(E - \hat{H})$ – шпур.

Визначимо функцію Гріна $G(E)$ даної системи через повний гамільтоніан таким чином

$$\hat{G}(E) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{E - \hat{H} - is} \quad (3)$$

Оператор $\delta(E - \hat{H})$ із (2) пов'язаний з функцією Гріна тотожністю Сохоцького [5]

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{E - \hat{H} - is} = P \left(\frac{1}{E - \hat{H}} \right) + i\pi \delta(E - \hat{H}), \quad (4)$$

де P – символ головного значення;
 $\delta(E - \hat{H})$ – дельта-функція.

Із (2), (3) і (4) отримуємо:

$$g(E) = \sum_v \delta(E - E_v) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_v (E - \hat{H} - is)^{-1} = \frac{1}{\pi} \text{Im} [\text{Sp} \hat{G}(E)]. \quad (5)$$

Припустимо тепер, що нам відома незбурена функція Гріна системи:

$$\hat{G}_0(E) = (E - \hat{H}_0 - is)^{-1}. \quad (6)$$

Для її побудови потрібно знати власні функції і власні значення гамільтоніана $\hat{H}_0$. Із (1), (3) і (6) отримуємо:

$$[\hat{G}(E)]^{-1} = [\hat{G}_0]^{-1} - \hat{U} = [\hat{G}_0(E)]^{-1} [1 - \hat{G}_0(E)\hat{U}] \quad (7)$$

Перетворивши (7), матимемо:

$$\hat{G}(E) = [1 - \hat{G}_0(E)\hat{U}]^{-1}. \quad (8)$$

Для довільного оператора $\hat{A}$ має місце співвідношення

$$\det \hat{A} = \exp(\text{Sp} \ln \hat{A}). \quad (9)$$

Тоді, врахувавши, що $\frac{d}{dE} [\ln \hat{G}(E)] = -\hat{G}(E)$,

для $\text{Sp} \hat{G}(E)$ матимемо:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{G}(E) &= -\frac{d}{dE} [\text{Sp} \ln \hat{G}(E)] = \frac{d}{dE} [\text{Sp} \ln (1 - \hat{G}_0(E)\hat{U})] \\ &= -\frac{d}{dE} [\text{Sp} \ln \hat{G}_0(E)] = \frac{d}{dE} [\ln \det (1 - \hat{G}_0(E)\hat{U})] + \text{Sp} \hat{G}_0(E), \end{aligned}$$

де використано (8) і (9).

Для густини станів згідно (5) отримаємо:

$$g(E) = g_0(E) + \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{d}{dE} [\ln \det (1 - \hat{G}_0(E)\hat{U})], \quad (10)$$

де через $g_0(E)$ позначено $(\frac{1}{\pi}) \text{Im} [\text{Sp} \hat{G}_0(E)]$.

Співвідношення (10) дає принциповий розв'язок задачі про зміну густини станів під дією збурення $\hat{U}$. В принципі, таке збурення може бути обумовлено різними причинами (атомами домішок, вакансіями і т.п.). Проте в даному випадку мова йде про збурення, спричинене своєрідними електронними дефектами, утвореними замкнутими електронними орбітальми типу $(3spd)_S - (4f5d6s)_R$, які спричиняють перерозподіл електронних станів валентної зони сполук ряду RAl_2Si_2 . Представимо власні функції і власні значення гамільтоніана $\hat{H}_0$ у вигляді

$$a_n(\vec{k}) = N^{-1/2} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}_n), E(\vec{k}) = \beta(\vec{k}) \quad (11)$$

де $\vec{k}$ – пробігає першу зону Бріллюена; N – число вузлів решітки; $\vec{R}_n$ – радіус-вектор вузла із номером n ; $\beta(\vec{k})$ – закон залежності енергії зонних електронів від хвильового вектора.

Тоді матричні елементи функції Гріна $\hat{G}_0(E)$ матимуть вигляд

$$[G_0(E)]_{mn} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_m(\vec{k}) \hat{a}_n(\vec{k}) / [E - \beta(\vec{k}) - is] =$$

$$N^{-1} \sum_{\vec{k}} \exp[i\vec{k}(\vec{R}_n - \vec{R}_m)] / [E - \beta(\vec{k}) - is] \quad (12)$$

Знайдемо тепер матрицю

$$(1 - G_0(E)U)_{mn} = \delta_{mn} - [G_0(E)]_{mn} U_{mn} \quad (13)$$

Ермітовому оператору $\hat{U}$ відповідають матричні елементи U_{mn} , що виражаються через хвильові функції типу χ_{SiR} . Такі функції не гібридизуються з хвильовими функціями A . Остання обставина обумовлена компактністю орбіталей типу $(3spd)_{Si} - (4f5d6s)_R$. Показником даної компактності є наявність розглянутих дегібридизаційних електронних процесів. В зв'язку з цим матричні елементи U_{mn} можна представити таким чином:

$$U_{mn} = \int \chi_m^*(\vec{r}) \hat{U} \chi_n(\vec{r} - \vec{R}_{lat}) d\vec{r} = U \delta_{mn} \quad (14)$$

оскільки $\hat{U} \chi_n = U \chi_n$, де χ_n - хвильові функції, що описують замкнуті орбіталі $(Si - R)$ -типу; $\vec{R}_{lat}$ - радіус-вектор, кратний періоду кристалічної решітки; U - потенціал збурення електронної системи, тобто власні значення оператора $\hat{U}$. Запишемо (13) з урахуванням (14)

$$(1 - G_0(E)U)_{mn} = \delta_{mn} - (N^{-1} \sum_{\vec{k}} \exp[i\vec{k}(\vec{R}_n - \vec{R}_m)] /$$

$$[E - \beta(\vec{k}) - is]) U \delta_{mn} = \delta_{mn} - N^{-1} U \sum_{\vec{k}} [E - \beta(\vec{k}) - is]^{-1} \quad (15)$$

Із (15) видно, що матриця $(1 - G_0(E)U)_{mn}$ є діагональною з однаковими матричними елементами, рівними

$$1 - N^{-1} U \sum_{\vec{k}} [E - \beta(\vec{k}) - is]^{-1} \quad (16)$$

Тоді

$$\det(1 - G_0(E)U)_{mn} = [1 - N^{-1} U \sum_{\vec{k}} [E - \beta(\vec{k}) - is]^{-1}]^N \quad (17)$$

Введемо позначення

$$F(E) = N^{-1} \sum_{\vec{k}} [E - \beta(\vec{k}) - is]^{-1}$$

Після цього (17) прийме вигляд

$$[1 - UF(E)]^N$$

Визначимо тепер

$$d/dE \{ \ln[1 - UF(E)]^N \} = -N [UF'(E)] / [1 - UF(E)]$$

Згідно (10) матимемо

$$g(E) = g_0(E) + (1/\pi) \text{Im}[-NUF'(E)] / [1 - UF(E)] =$$

$$g_0(E) - (NU/\pi) \text{Im}[F'(E)] / [1 - UF(E)] \quad (18)$$

Якщо $E > \max \beta(\vec{k})$ або $E < \min \beta(\vec{k})$, то $F(E)$ та $F'(E)$ є дійсні величини, а уявна частина (18) відмінна від нуля лише у випадку

$$1 = UF(E), \quad (19)$$

що являє собою рівняння для знаходження енергії локалізованих станів.

Тепер згідно (4) і (18) матимемо

$$g(E) = g_0(E) + UNF(E) \delta(1 - F(E)U) =$$

$$g_0(E) + N \delta(E - E_{Loc}) \quad (20)$$

де E_{Loc} - енергія локалізованого δ -подібного резонансного піку.

Таким чином, дані рентгеноелектронних вимірювань, спектроскопічні дослідження, теоретичні розрахунки та дослідження інших авторів підтверджують висловлену тут позицію стосовно організації хімічних взаємодій типу $R-Si$ в ізоструктурних сполуках-гомологах ряду RAI_2Si_2 ($R-Sm, Eu, Gd, Tb, Er, Yb$). Це призводить до дегібридаційних процесів електронних станів, які можна описати з допомогою запропонованої моделі.

Неможливо пов'язати виникнення специфічної трансформації електронної структури, спостережувані у розглядуваному ряду сполук ні з розщеплюючою дією кристалічного поля, ні з гібридаційними ефектами. Якби існував розщеплюючий вплив кристалічного поля, то він проявлявся б у всіх сполуках ряду RAI_2Si_2 , як ізоструктурних формуваннях.

Отже, описане явище дегібридації носить, очевидно, універсальний характер. Для виникнення такого феномену необхідно, щоб мали місце такі умови:

1. Число компонентів сполуки повинно бути не меншим трьох.
2. Електровід'ємності хоча б двох атомів-компонентів сполуки повинні суттєво відрізнятися.
3. Стійкі електронні конфігурації утворюються між атомами, що мають найнижчу та найвищу електровід'ємності. При цьому електронні стани з проміжною електровід'ємністю терплять розділення.

Список використаних джерел

1. Ніколюк П.К. Явище дегібридації електронних станів в сполуках $SmAl_2Si_2$ та

$EuAl_2Si_2$ // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2001. – т.23, №1. – с.27-33.

2. Ніколюк П.К. Дегібридація в сполуках $GdAl_2Si_2$ та $ErAl_2Si_2$ // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2001. – т.23, №8. – с.1111-1116.

3. Ніколюк П.К., Зузяк П.М., Мартинюк В.Л., Дзісь В.Г., Стасенко В.А., Шаргородський В.М. Дегібридація в сполуках $TbAl_2Si_2$ та $YbAl_2Si_2$ // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2002. – т.24, №11. – с.1477-1482.

4. Р. Уайт. Квантовая теория магнетизма. – М.: Мир, 1985. – 303 с.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

6. Е.А.Жураковский, И.Н.Францевич. Рентгеновские спектры и электронная структура силицидов и германидов (Киев: Наук. думка, 1982).

7. П.К. Николюк. Электронная структура некоторых тройных силицидов переходных и непереходных металлов (Дис. ... канд. физ.-мат. наук) (Киев, 1985).

8. U.A. Kranenberg, Z. Anorg. Allg. Chem., 625:1787 (1999).

9. U.A. Kranenberg et al., Solid State Sci., 2, 215 (2000).

Надійшла до редакції 12.11.2008р

УДК 536.21: 539.2

Пурський О.І., к.ф.-м.н., доцент
Сисоєв В.М., д.ф.-м.н., професор

Теплопровідність простих молекулярних речовин при фазовому переході кристал-рідина.

На прикладі CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 , CHF_2Cl , C_2F_6 , C_2H_6 , SF_6 і C_6H_{12} проведено дослідження зміни теплопровідності при фазовому переході кристал-рідина. Величина зменшення теплопровідності в результаті плавлення залежить від ступеня орієнтаційної впорядкованості кристалів в області передплавильних температур.

Ключові слова: теплопровідність, кристали, рідини, плавлення.

O.I. Pursky, Ph.D.
Sysoev V. M. Dr. Sci., Prof.

Thermal conductivity of simple molecular substances at crystal-liquid phase transition

By the example of CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 , CHF_2Cl , C_2F_6 , C_2H_6 , SF_6 and C_6H_{12} we have investigated the isobaric thermal conductivity jump at crystal-liquid phase transition. It is shown that the reduction in the thermal conductivity at melting derives from the degree of orientational ordering of the crystals at premelting point.

Key Words: thermal conductivity, crystals, liquids, melting.

E-mail: Pursky_O@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м. н., професор Яшук В.М.

1. Вступ

В області передплавильних температур діелектричних кристалів можуть відбуватися структурні зміни пов'язані наприклад із збільшенням кількості дефектів, або зменшенням упорядкованості в трансляційній і орієнтаційній підсистемах молекулярних кристалів. При подальшому підвищенні температури відбувається фазовий перехід кристал-рідина, в результаті якого теплопровідність стрибкоподібно зменшується. Дослідження термодинамічних характеристик великої кількості речовин в твердому і рідкому стані, привело до загального висновку – у всіх відомих речовин ентропія в рідкому стані більша ніж в твердому, тобто перехід з кристалічної фази в рідку фазу супроводжується підвищенням неупорядкованості системи [1]. Оскільки значення і поведінка температурної залежності теплопровідності простих молекулярних кристалів, при температурах порядку і вище відповідної температури Дебая суттєво залежить від ступеня неупорядкованості в трансляційній і

орієнтаційній підсистемах [2,3], виглядає цілком логічним пов'язати зменшення теплопровідності, під час плавлення, із збільшенням загальної ентропії системи. В грубому наближенні загальну ентропію плавлення можна вважати сумою компонент, кожна з яких відповідає конкретному типу плавлення. Різним структурам можуть відповідати різні механізми плавлення. В результаті плавлення в кристалах всіх типів відбуваються процеси позиційного розупорядкування. В багатьох молекулярних кристалах, що утворюються неферичними молекулами, а також в кристалах з багатоатомними іонами при плавленні спостерігається орієнтаційне розупорядкування. В тому чи іншому конкретному випадку також можлива одночасна дія декількох механізмів плавлення.

В даній роботі, на прикладі CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 , CHF_2Cl , C_2F_6 , C_2H_6 , SF_6 і C_6H_{12} проведено експериментальне дослідження поведінки

теплопровідності простих молекулярних речовин при фазовому переході кристал-рідина.

2. Техніка експерименту

Дослідження ізобарної теплопровідності в області передплавильних температур виконано плоским стаціонарним методом, під тиском власних насичених парів [4]. Вимірювання проводилися по методу теплового потенціометра [5], за допомогою одного термометра, що дозволило мінімізувати похибки в значеннях коефіцієнта теплопровідності за рахунок неврахованих потоків тепла і різної калібровки термометрів. Неконтрольовані потоки тепла, викликані тепловим випромінюванням, були суттєво зменшені за допомогою радіаційного екрана, на поверхні якого системою термопар і прецизійним терморегулятором відтворювалося поле температур вимірювальної ампули. Чистота досліджуваних речовин була не гіршою ніж 99.96%. Сумарна систематична похибка експерименту не перевищувала 5%. Зазначимо, що проводити експериментальні дослідження коефіцієнта теплопровідності в даній температурній області досить складно – низькі значення коефіцієнта теплопровідності потребують тривалого проміжку часу для встановлення стаціонарного режиму теплового потоку, а підтримка в процесі вимірювань заданого градієнта температур, може ініціювати плавлення частини дослідного зразка. Тому в даній роботі термін «передплавильний» відноситься до температур нижче зони плавлення на 0.5-5 К. Експериментальні дослідження ізобарної теплопровідності речовин в рідкій фазі, виконані в області після плавильних температур, на двох зразках, що знаходилися під атмосферним тиском. Хімічна чистота досліджуваних речовини була не гіршою ніж 99.96%. Вимірювання проводилися стаціонарним методом на установці коаксальної геометрії, конструкція якої описана в [6]. Невизначеність виміряних значень коефіцієнта теплопровідності рідин не перевищувала 3%.

3. Результати та їх обговорення

Дослідження поведінки теплопровідності при фазовому переході кристал-рідина виконані на прикладі простих молекулярних речовин. В даному випадку, термін «прості» стосується речовин в яких процеси переносу тепла не ускладнюються додатковим впливом внутрішньомолекулярних коливань. Динаміка молекулярних кристалів вимагає розгляду трансляційних коливань, орієнтаційного руху молекул як цілого, обертального руху сегментів молекул, а також внутрішньомолекулярних коливань, при цьому взаємодію цих механізмів теплового руху не можна розглядати як взаємонезалежну. Врахування кожного додаткового виду теплового руху, порівняно з атомарними кристалами, значно ускладнює побудову теоретичної моделі. В той же час підбором відповідного експериментального матеріалу, можна виключити із розгляду той чи інший механізм теплового руху. Наприклад, використовуючи для аналізу теплопровідності прості молекулярні кристали внутрішньомолекулярні обертання сегментів молекул можна виключити з розгляду, за рахунок простоти самих молекул. Значення внутрішньомолекулярної енергії зв'язку для більшості простих молекулярних кристалів значно перевищує енергію міжмолекулярної взаємодії. Відповідно частоти внутрішньомолекулярних коливань настільки високі, що не дають помітного внеску в теплопровідність. Як наслідок, при аналізі механізмів переносу тепла в простих молекулярних кристалах можна обмежитися врахуванням трансляційних коливань молекул у вузлах кристалічної решітки і орієнтаційного руху молекул як цілого.

З точки зору задач які вирішуються в роботі, вибір для дослідження тієї чи іншої речовини (кристалу) визначався двома головними факторами: 1) реалізація у всій сукупності досліджуваних кристалів максимально широкого спектру можливих варіацій орієнтаційного руху молекул; 2) наявність необхідних структурних і

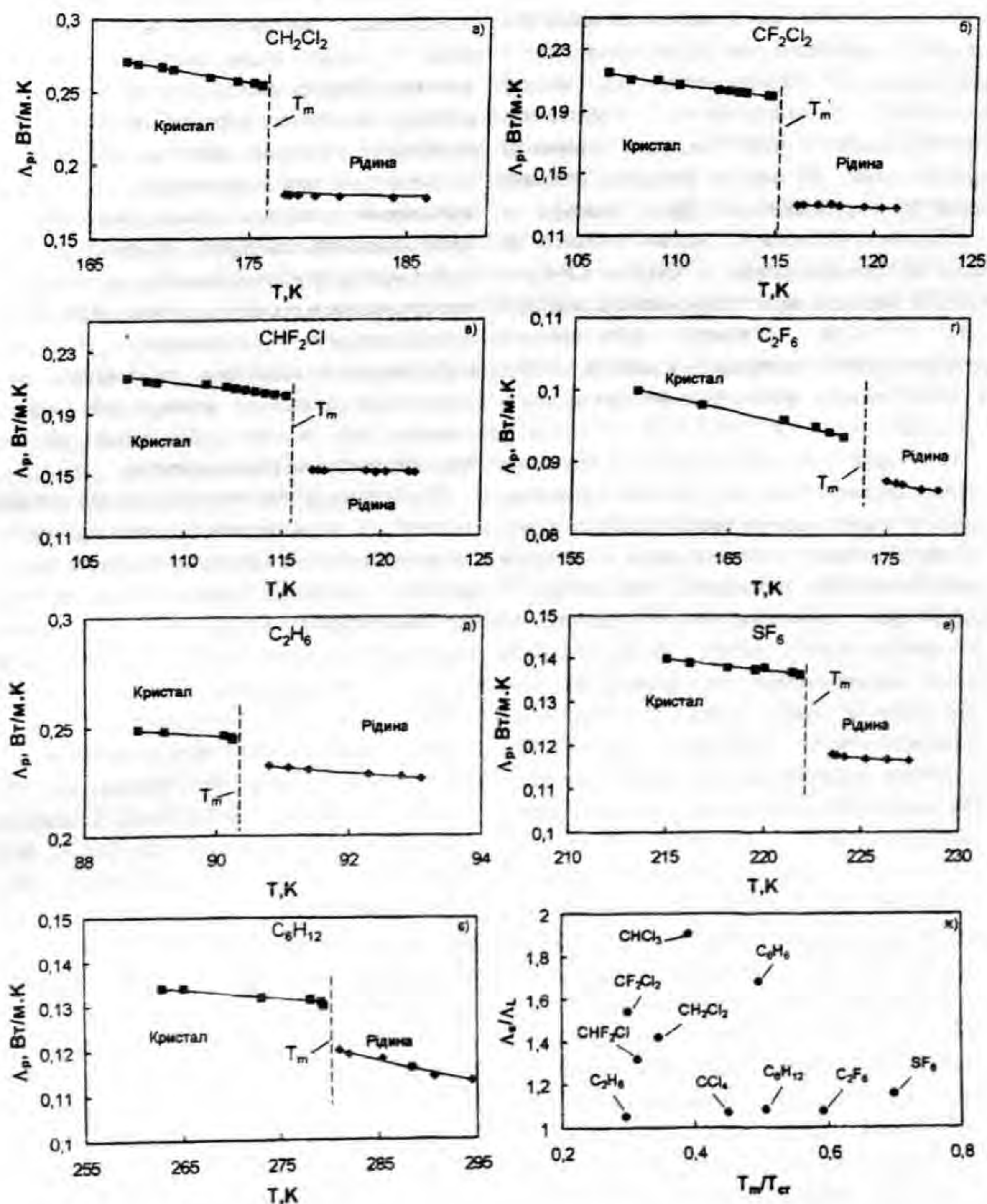


Рис. 1. Температурні залежності ізобарної теплопровідності а) CH_2Cl_2 , б) CF_2Cl_2 , в) CHF_2Cl , г) C_2F_6 , д) C_2H_6 , е) SF_6 і є) C_6H_{12} в області передплавильних і післяплавильних температур. T_m – температура плавлення. ж) Відношення значень теплопровідності в твердій Λ_s і рідкій Λ_l фазах досліджуваних молекулярних речовин, поблизу температури плавлення.

термодинамічних характеристик кристалів, на основі яких можна було б зробити висновок про характер орієнтаційного руху молекул, і використати ці характеристики для аналізу поведінки температурної залежності теплопровідності при фазовому переході кристал-рідина. Всі вибрані речовини, стосовно характеру орієнтаційного руху молекул в передплавильній області, можна поділити на орієнтаційно-впорядковані - CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 і CHF_2Cl , частково орієнтаційно-невпорядковані - C_2F_6 і C_2H_6 (процеси орієнтаційного розупорядкування розвиваються навколо однієї з вибраних вісей) і орієнтаційно-невпорядковані - C_6H_{12} і SF_6 .

Результати досліджень поведінки теплопровідності C_2F_6 і C_2H_6 при фазовому переході кристал-рідина показані на рис. 1(а,б). Теплопровідність досліджуваних речовин зменшується при підвищенні температури. В рідкій фазі залежність теплопровідності від температури значно слабша. Тверді C_2F_6 , C_2H_6 мають високотемпературні фази [7,8], і є кристалами в яких наростання орієнтаційної невпорядкованості відбувається за рахунок посилення переорієнтаційного руху груп CF_3 і CH_3 навколо вісі C-C. Низькі значення ентропії плавлення (C_2H_6 - $\Delta S_f/R=0.78$ [9], C_2F_6 - $\Delta S_f/R=1.86$ [9], що значно менше, ніж критерій Тімерманса, у відповідності до якого, кристал можна вважати пластичним при $\Delta S_f/R < 2.5$ [9]), вказують на наявність посиленого реорієнтаційного руху молекул цих кристалів в області передплавильних температур, і дозволяють їх класифікувати як кристали, що мають пластичні фази. Зміна теплопровідності при фазовому переході в рідкий стан складає для C_2H_6 $\Delta\lambda=0.01$ Вт/м·К, для C_2F_6 $\Delta\lambda=0.006$ Вт/м·К (у відносних величинах 4.9% для C_2H_6 6.4% для C_2F_6). Що більше ніж в десять разів нижче значень зміни теплопровідності при плавленні в CHCl_3 і C_6H_6 [6]. Якщо також прийняти до уваги, що в CCl_4 зменшення теплопровідності складає $\Delta\lambda=0.007$ Вт/м·К [6], можна зробити припущення, що незначні зміни в теплопровідності під час плавлення характерні

для речовин в яких в кристалічному стані реалізуються високотемпературні пластичні фази. В області передплавильних температур пластичні фази простих молекулярних кристалів, внаслідок посиленого переорієнтаційного руху і ослаблення кореляцій орієнтаційних коливань молекул, характеризуються низькими значеннями теплового опору пов'язаного з трансляційно-орієнтаційною взаємодією [2,3]. Звідси можна зробити висновок, що зменшення теплопровідності під час плавлення орієнтаційно-невпорядкованих молекулярних кристалів, відбувається в основному за рахунок зміни позиційного розподілу молекул, або іншими словами за рахунок збільшення ентропії трансляційної підсистеми кристалів.

Для підтвердження припущення про незначні зміни в значеннях теплопровідності орієнтаційно-невпорядкованих кристалів, під час фазового переходу кристал-рідина, виглядає доцільним проведення додаткових досліджень на прикладі речовин в яких реалізуються пластичні кристалічні фази. В якості об'єктів дослідження вибрані C_6H_{12} і SF_6 . Кристалічні C_6H_{12} і SF_6 мають високотемпературні орієнтаційно-невпорядковані фази [9]. Низьке значення ентропії плавлення $\Delta S_f/R=1.14$ [11] дозволяє класифікувати високотемпературну фазу твердого C_6H_{12} як пластичну. Щодо високотемпературної кристалічної модифікації SF_6 , то тут однозначно сказати, що вона є пластичною не можна, оскільки навіть в області передплавильних температур характер орієнтаційного руху молекул SF_6 все ще далекий від вільного обертання [12,13]. Про це, зокрема, свідчить значення ентропії плавлення SF_6 ($\Delta S_f/R=2.61$ [14]), що навіть трохи перевищує критерій Тімерманса ($\Delta S_f/R=2.5$). Теплопровідність кристалічного SF_6 в області передплавильних температур вимірювалася раніше в [10].

Результати експерименту показані на рис. 1(в,г). Теплопровідність C_6H_{12} і SF_6 зменшується при підвищенні температури в обох фазах. Зменшення теплопровідності при фазовому переході в рідкий стан складає для C_6H_{12} $\Delta\lambda=0.01$

Вт/м·К. для SF_6 $\Delta\lambda=0.018$ Вт/м·К (у відносних величинах 7.7% для C_6H_{12} 13.5% для SF_6). Отримані результати в цілому підтверджують вказане раніше припущення.

Дослідження поведінки теплопровідності при фазовому переході в рідку фазу виконано на прикладі чотирьох речовин, що мають орієнтаційно-невпорядковані високотемпературні кристалічні фази, виникає необхідність в проведенні додаткових досліджень молекулярних кристалів, що залишаються орієнтаційно-впорядкованими до температури плавлення. Це перш за все необхідно для отримання можливості робити однозначні висновки по результатам експериментів. Об'єктами дослідження вибрано CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 і CHF_2Cl . Ізобарна теплопровідність вказаних кристалів, в області передплавильних температур експериментально досліджувалася в [15,16,17]. Згідно даних структурних досліджень [9,18,19] в кристалічних CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 і CHF_2Cl відсутній фазовий перехід типу орієнтаційне плавлення і вони зберігають орієнтаційну впорядкованість до температури плавлення. Результати досліджень зміни теплопровідності в результаті плавлення, показані на рис. 1(д,е,є). Теплопровідність CH_2Cl_2 , CF_2Cl_2 і CHF_2Cl зменшується при підвищенні температури. В рідкій фазі залежність теплопровідності від температури значно слабша. Зміна теплопровідності при фазовому переході в рідкий стан складає: для CH_2Cl_2 $\Delta\lambda=0.076$ Вт/м·К, для CF_2Cl_2 $\Delta\lambda=0.071$ Вт/м·К і для CHF_2Cl $\Delta\lambda=0.05$ Вт/м·К (у відносних величинах 29.6% для CH_2Cl_2 , 35.1% для CF_2Cl_2 і 24.5% для CHF_2Cl). Як видно величина зменшення теплопровідності при плавленні орієнтаційно-впорядкованих кристалів значно перевищує зменшення у випадку плавлення орієнтаційно-невпорядкованих кристалів. Найменша зміна теплопровідності спостерігається в CHF_2Cl , що може пояснюватися можливим посиленням переорієнтаційного руху молекул CHF_2Cl навколо вісі C-Cl, для якої величина потенціального бар'єру, що перешкоджає обертанню найменша.

Можна констатувати суттєву залежність величини зміни теплопровідності простих молекулярних кристалів при фазовому переході кристал-рідина, від характеру орієнтаційного руху молекул в області передплавильних температур.

Для встановлення загальних тенденцій представляє інтерес співставлення значень теплопровідності одних і тих же речовин в твердому і рідкому стані поблизу температури плавлення. Результати такого співставлення, наведені на рис. 1(ж), і показують чітку залежність відношення λ_s/λ_l від ступеня орієнтаційної впорядкованості кристалів в передплавильній області. Так для кристалів, що мають пластичні фази, відношення λ_s/λ_l близьке до одиниці. В той час коли для кристалів, що складаються з молекул низької симетрії, і в яких повна або часткова орієнтаційна впорядкованість зберігається до температури плавлення відношення λ_s/λ_l значно більші. Вказані відмінності пояснюються значними процесами розупорядкування в трансляційній і орієнтаційній підсистемах орієнтаційно-впорядкованих молекулярних кристалів під час фазового переходу в рідкий стан.

4. Висновки

Проведені дослідження показують, що зменшення теплопровідності молекулярних кристалів під час плавлення, визначається спільним впливом процесів розупорядкування, що відбуваються в трансляційній і орієнтаційній підсистемах. Величина зміни теплопровідності молекулярних кристалів при фазовому переході кристал-рідина суттєво залежить від ступеня неупорядкованості орієнтаційної підсистеми кристалів в області передплавильних температур: так в повністю і частково орієнтаційно-впорядкованих молекулярних кристалах внесок процесів орієнтаційного розупорядкування в збільшення теплового опору, під час фазового переходу, може складати більше 50% від величини збільшення повного теплового опору (наприклад C_6H_6 [6]), в орієнтаційно-неупорядкованих фазах молекулярних кристалів

(наприклад $\text{CCl}_4(\text{Ib})$ [6]) характер орієнтаційного руху молекул під час плавлення змінюється мало і як наслідок тепловий опір пов'язаний з трансляційно-орієнтаційною взаємодією практично не змінюється, тобто в даному випадку, зменшення теплопровідності відбувається, головним чином внаслідок зміни позиційного розподілу молекул під час плавлення. Результати експериментальних досліджень показують значне перевищення значень зміни теплопровідності під час фазового переходу кристал-рідина в орієнтаційно-впорядкованих кристалах, у порівнянні з орієнтаційно-невпорядкованими кристалами.

Список використаних джерел

1. Уббелде А. Плавление и кристаллическая структура: Пер. с англ. – М.: Мир. – 1969. – 420 с.
2. Pursky O.I., Zholonko N.N., Konstantinov V.A. Influence of rotational motion of molecules on the thermal conductivity of solid SF_6 , CHCl_3 , C_6H_6 , and CCl_4 // ФНТ – 2003. – Т. 29, №9/10. – С. 1021-1026.
3. Пурський О.І. Вплив теплового розширення на процеси переносу тепла в орієнтаційно-невпорядкованих фазах молекулярних кристалів // УФЖ. – 2009. – Т. 54, №5. – С. 469-470.
4. Анцыгина Т.Н., Городилов Б.Я., Жолонко Н.Н., Кривчиков А.И., Манжель В.Г., Слюсарев В.А. Перенос тепла в слабых растворах неона в параводороде // ФНТ. – 1992. – Т. 18, №4. – С. 418-423.
5. Уайт Г.К. Экспериментальная техника в физике низких температур. – Физматгиз, 1961. – 368 с.
6. Pursky O.I., Konstantinov V.A., Bulakh V.V. The thermal conductivity jump at crystal-liquid phase transition in CHCl_3 , C_6H_6 and CCl_4 : the action of rotational molecular motion // ФНТ – 2009. – Vol. 35, №4. – P. 401-404.
7. Клименко Н.А., Гальцов Н.Н., Прохвятилов А.И. Структура, фазовые переходы и тепловое расширение этана C_2H_6 // ФНТ – 2008. – Т. 34, №12. – С. 1319-1326.
8. Pace E.L., Aston T.G. The thermodynamics of hexafluoroethane from calorimetric and spectroscopic data // J. Am. Chem. Soc. – 1948. Vol. 70, №2. – P. 566-570.
9. Parsonage B.G., Staveley A.K. Disorder in crystals. – Oxford: Clarendon Press, 1978. – 335p.
10. Пурський О.І. Дослідження ізобарної теплопровідності твердої SF_6 // УФЖ. – 2000. – Т. 45, №9. – С. 1076-1077.
11. Kahn R., Fourme R., Andre D., Renaud M. Crystal structure of cyclohexane I and II // Acta Cryst. (B) – 1973. – Vol. 29. – P. 131-138.
12. Исакина А.П., Прохвятилов А.И. Структура и термодинамические свойства SF_6 // ФНТ. – 1993. – Т. 19. – №2. – С. 201-206.
13. Dove M.T., Pawley G.S., Dolling G., Powell B.M. Collective excitations in an orientationally frustrated solid: neutron scattering and computer simulation studies of SF_6 // Mol. Phys. – 1986. – Vol. 57, №4. – P. 865-880.
14. Eucken A., Schroder E. Calorische tief temperaturmessungen an einigen Fluoriden // J. Phys. Chem. – 1938. – 41. – P. 307-319.
15. Pursky O.I. Thermal conductivity of solid CH_2Cl_2 // Журнал Фізичних Досліджень. – 2005. – Т. 9, №4. С. 337-342.
16. Pursky O.I., Konstantinov V.A. Thermal conductivity of solid CHF_2Cl // Physica B. – 2008. – Vol. 403. – P. 190-194.
17. Pursky O.I., Konstantinov V.A. Thermal conductivity of solid CF_2Cl_2 // ФНТ – 2007. – Vol. 33, №6/7. – С. 765-767.
18. Gutowsky H.S., McCall D.W. Temperature dependence of the chlorine pure quadrupole resonance frequency in molecular crystals // J. Chem. Phys. – 1960. – Vol. 82, №2. – P. 548-552.
19. LeBlanc L.M., Anderson A. Raman and infrared spectra of the solid chlorodifluorocarbons. II – Dichlorodifluoromethane // J. Raman Spectr. – 1991. – Vol. 22. – P. 255-260.

Надійшла до редколегії 29.10.99

УДК 519.9 669.25:535.32

Стащук В.С., докт. фіз-мат наук, Хакімов*Р.І.,
студент, Полянська О.П., студентка.

Вплив структурних перетворень на оптичні властивості тонких плівок кобальту

При кімнатній температурі виміряні показники заломлення і поглинання тонких плівок аморфного і кристалічного кобальту в спектральній області 0,25–17,0 мкм (0,07–4,96 eV). На основі цих даних розрахована оптична провідність, яка пов'язана з міжзонними переходами. Показано, що при структурних перетвореннях "аморфний – кристалічний стан" оптичні властивості металевого кобальту визначаються в першу чергу найближчим оточенням і електронна структура не зазнає суттєвих змін.

Ключові слова: оптичні властивості, структурні перетворення, електронна структура, спектроскопія.

*E-mail: khakimov.rom@gmail.com

Оптичні властивості полікристалічного кобальту повно і різнобічно вивчені [3–5]. Проведені теоретичні розрахунки енергетичної зонної структури кобальту [7], які дозволяють ототожнювати експериментально спостережувані смуги поглинання з відповідними міжзонними переходами електронів.

Проте, не вивченим залишається питання про вплив структурних перетворень на оптичні та електронні властивості феромагнітного кобальту, який завдяки своїм винятковим магнітним властивостям набув поширення в техніці. Зокрема, магнітний запис інформації прямо пов'язаний з використанням поверхні таких матеріалів. Виходячи з цього, метою даної роботи було вивчення у широкому спектральному діапазоні оптичних властивостей плівок кобальту в аморфному і кристалічному станах. Оптичні властивості кобальту досліджено за кімнатної температури на плівкових зразках товщиною 40 мкм, отриманих методом магнетронного розпилення на охолоджені рідким гелієм лейкосапфірові підкладки. Внаслідок великої швидкості охолодження ($\sim 10^5$ K/c) була сформована аморфна структура плівок і цей метастабільний аморфний стан може існувати за кімнатної температури тривалий час.

V.S. Stashchuk, Dr.Sc., R.I. Khakimov*, student,
O.P. Poljanska, student.

Influence of the structure transformations on the optical properties Co thin films

The refraction and absorption indices of amorphous and crystal Co of thin films were measured in a wide spectral region 0,25–17,0 μm (0,07–4,96 eV) at room temperature. On this basis the contributions to optical conductivity are made due to the interband transitions. It is shown that in the structure transformations "amorphous – crystalline state" the optical properties of metallic Co are determined mainly by nearest neighborhood and the electronic structure is not subjected to significant modifications.

Key Words: optical properties, structure transformations, electronic structure, spectroellipsometry.

Перехід кобальту до кристалічного стану здійснювався шляхом термічного відпалу аморфних стрічок у вакуумі 0,1 мПа при 500°C протягом 3 год. Структурний стан плівок контролювався за допомогою рентгенівського дифрактометра та шляхом дослідження температурної залежності питомого електроопору.

Оптичні характеристики дзеркальних поверхонь кобальту в аморфному і кристалічному станах досліджувалися в спектральному інтервалі 0,25–17,0 мкм (0,07–4,96 eV) за допомогою спектральної еліпсометрії, використовуючи метод Бітті [1]. На експерименті вимірювалися еліпсометричні параметри Δ та ψ поблизу головного кута падіння і на їх основі розраховувалися оптичні сталі n і k . Похибки у визначенні показників заломлення n та поглинання k суттєво залежать від області спектру, в якій проводяться вимірювання: так, в ультрафіолетовій, видимій та ближній ІЧ областях спектру вони не перевищували 1,5 %, а в ІЧ зростали до 3–4 % і при довжинах хвиль $\lambda = 16–17$ мкм збільшувалися до 6%.

На основі оптичних сталих n і χ розраховані інші оптичні характеристики: діелектрична проникність $\epsilon = n^2 - \chi^2$, оптична провідність $\sigma = n\chi\nu$ (ν – частота світла) та коефіцієнт відбивання $R = ((n-1)^2 - \chi^2) / ((n+1)^2 - \chi^2)$ при нормальному падінні світла на зразок. Аналіз залежностей оптичних характеристик від енергії фотонів $h\nu$ у досліджуваному спектральному

особливості: широкий максимум при 0,77 eV та менш інтенсивні вузькі максимуми при 0,38 та 0,16 eV, в той час як для кристалічного Co в цій області спектру виявлено лише два максимуми: основний – при 0,88 eV та додатковий – при 0,18 eV. Третій максимум при 0,38 eV в аморфному стані при переході в кристалічний стан зникає і з'являються менш інтенсивні смуги в

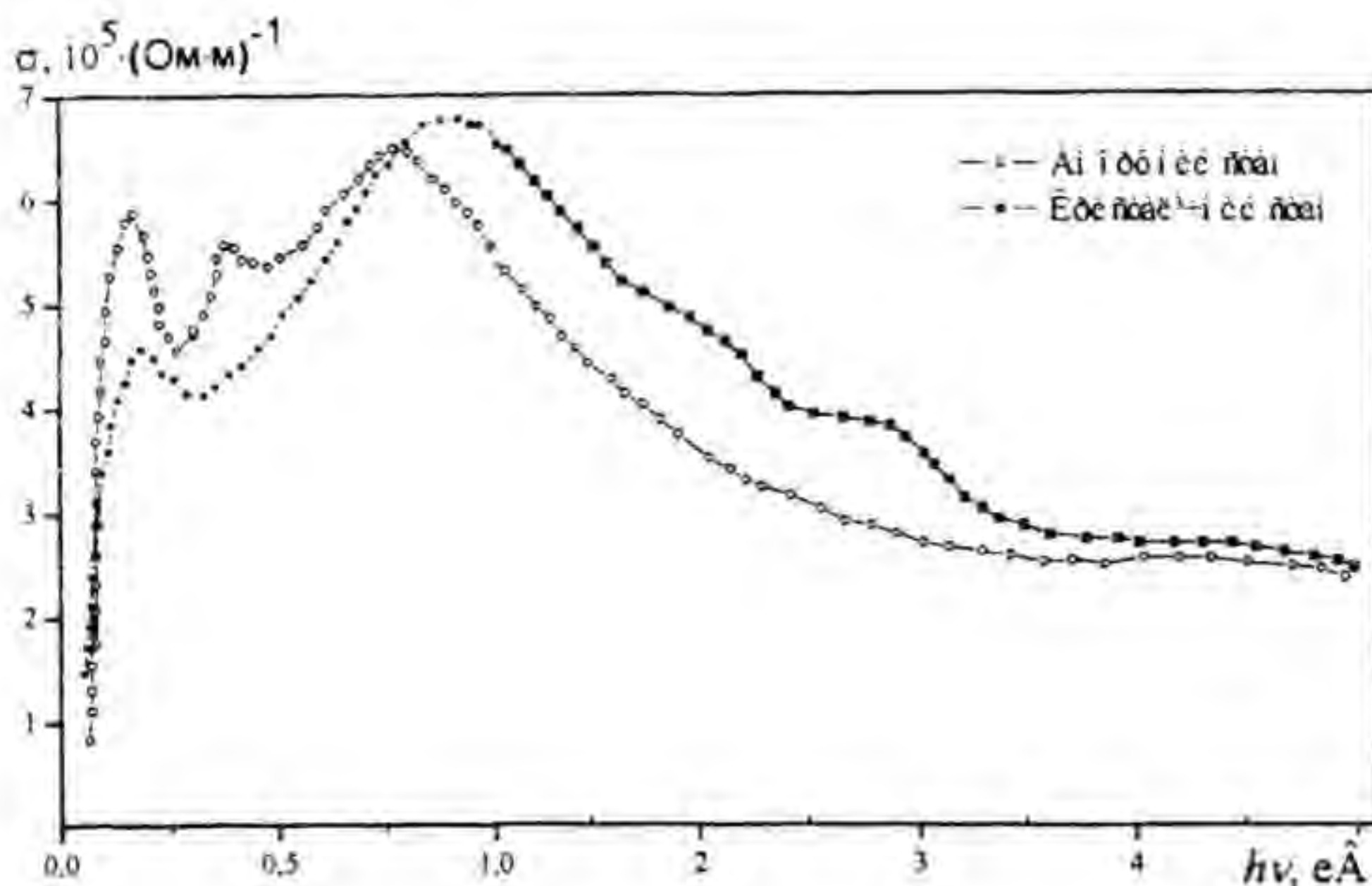


Рис.1. Дисперсійна залежність оптичної провідності $\sigma(h\nu)$ кобальту в аморфному та кристалічному станах.

інтервалі $h\nu = 0,07 - 4,96$ eV дозволяє отримати інформацію про електронну структуру досліджуваних систем. Особливий інтерес являє дисперсія оптичної провідності $\sigma(h\nu)$, яка пропорційна міжзонній густині електронних станів $G(h\nu)$ [4].

На рис.1 наведено спектри оптичної провідності $\sigma(h\nu)$ плівок кобальту в аморфному і кристалічному станах. Видно, що у всій досліджуваній області спектра поглинання світла зумовлене лише міжзонними переходами електронів. Тобто, на відміну від масивного кобальту, для досліджуваних зразків у довгохвильовій області спектру відсутній внесок внутрішньозонних переходів електронів, який проявляється у вигляді монотонного зростання оптичної провідності σ при збільшенні довжини хвилі λ (при зменшенні енергії квантів світла $h\nu$).

На кривій $\sigma(h\nu)$ аморфного Co спостерігаються принаймні три характерні

короткохвильовій області спектру при 2,1 – 2,2, 2,6 – 2,7 та, можливо, при 4,4 – 4,5 eV. Крім того, при переході до кристалічного стану пік основної смуги зміщується на 0,11 eV в короткохвильову область, а довгохвильова смуга (при 0,16 eV) стає менш інтенсивною.

З порівняння отриманих результатів для пліткових систем зі спектром $\sigma(h\nu)$ масивного кобальту [4] (рис. 2) видно, що основна потужна смуга поглинання, яка відповідає міжзонним переходам, практично не змінює свого положення на шкалі енергій, це також стосується інтенсивності вказаної смуги поглинання. Це свідчить про домінуючу роль ближнього оточення на формування енергетичних станів, що відповідають за міжзонне поглинання. Смуга при 0,35 eV пов'язана з міжзонними переходами і в масивних зразках, можливо, маскується інтенсивними внутрішньозонними переходами в цій області спектру.



Рис.2. Дисперсійні залежності міжзонної оптичної провідності $\tilde{\sigma}(h\nu)$ для масивних зразків кобальту.

1, 3 – розраховані криві $\tilde{\sigma}(h\nu)$ в моделі непрямих і прямих переходів відповідно.
2 – експериментальна крива [4].

кристалічному стані (рис.2) з результатами [4] для масивного зразка, наведених на рис.2 (крива 2), де представлена міжзонна складова оптичної провідності $\tilde{\sigma}(h\nu)$. Видно, що в масивному Co спостерігається подвійна структура основної смуги поглинання, розташованої в околі 1 eV, та зникає довгохвильовий максимум при 0,18 eV. Замість нього в масивному Co спостерігається перегин кривої $\tilde{\sigma}(h\nu)$, що, на нашу думку, зумовлено накладанням довгохвильової смуги поглинання з основною, інтенсивність якої вища. Крім того, в цій області спектра внутрішньозонні переходи стають більш інтенсивними, ніж міжзонні.

Зумовлене обмінною взаємодією розщеплення основної смуги поглинання масивного кобальту в області 1 eV [4] в плівкових системах не проявляється. Це пояснюється незначною його величиною (~0,4 eV) і додатковим уширенням, зумовленим зменшенням часу життя носіїв заряду. В короткохвильовій області для масивного Co $\sigma(h\nu)$ спадає не так різко, бо в цій області розташована менш інтенсивна, ніж основна смуга поглинання.

Отримані дані свідчать про суттєві зміни в електронному спектрі Co при втраті трансляційної симетрії, які пов'язані з дефектною структурою досліджуваних зразків не лише в

аморфному, а й в кристалічному станах. Зміщення основних максимумів для кристалічного стану відносно аморфного (приблизно на 0,11 eV) у високоенергетичну область спектру (див. рис. 1) та збільшення напівширини основних максимумів на кривих $\sigma(h\nu)$ пов'язано з уширенням зон в результаті структурних перетворень.

Зрозуміло, що максимумами на кривій оптичної провідності $\sigma(h\nu)$ та її міжзонної складової $\tilde{\sigma}(h\nu)$ визначають енергетичні щілини в електронному спектрі Co, який представлено на рис. 3, де вертикальними лініями зі стрілками показані прямі переходи електронів, які формують вказані структури. Вище зазначалось, що міжзонна оптична провідність $\tilde{\sigma}(h\nu)$ пропорційна міжзонній густині електронних станів. Останню розраховують на основі даних про густини електронних станів [4] вільних та заповнених зон. Результати розрахунку наведено на рис. 2 (крива 1). Видно, що в цілому експериментальні дані (крива 2) якісно узгоджуються з результатами розрахунку в моделі непрямих переходів, однак деталі експериментального спектра не проявляються. Значно краще результати теоретичних розрахунків узгоджуються з експериментальними даними в моделі прямих переходів [7] (крива 3). В цьому випадку спостерігається тонка структура основної смуги поглинання з величиною розщеплення ~0,55 eV, що задовільно узгоджується з експериментом (~0,42 eV). Однак обидва максимума на розрахованій кривій зміщені приблизно на 0,45 eV в короткохвильову область спектру, що значно перевищує похибки експерименту. Таким чином, навіть у випадку масивного кобальту не досягнуто повної відповідності експериментальних даних з теоретичними.

У випадку досліджених плівок ситуація ускладнюється, що пов'язано з умовами їх отримання. Крім всього іншого, такі плівки характеризуються сильною дефектністю структури, особливо в аморфному стані. Цей фактор можна розглядати як засіб модифікації структури, а отже й оптичних та електронних властивостей досліджуваних систем.

Тепер більш детально розглянемо зміни в електронних спектрах Co при втраті трансляційної симетрії. Зазначимо, що навіть малі зміни в структурі найближчого оточення призводять до суттєвих змін в електронній підсистемі [2]. Так, зміщення основного максимуму поглинання у спостережуваній

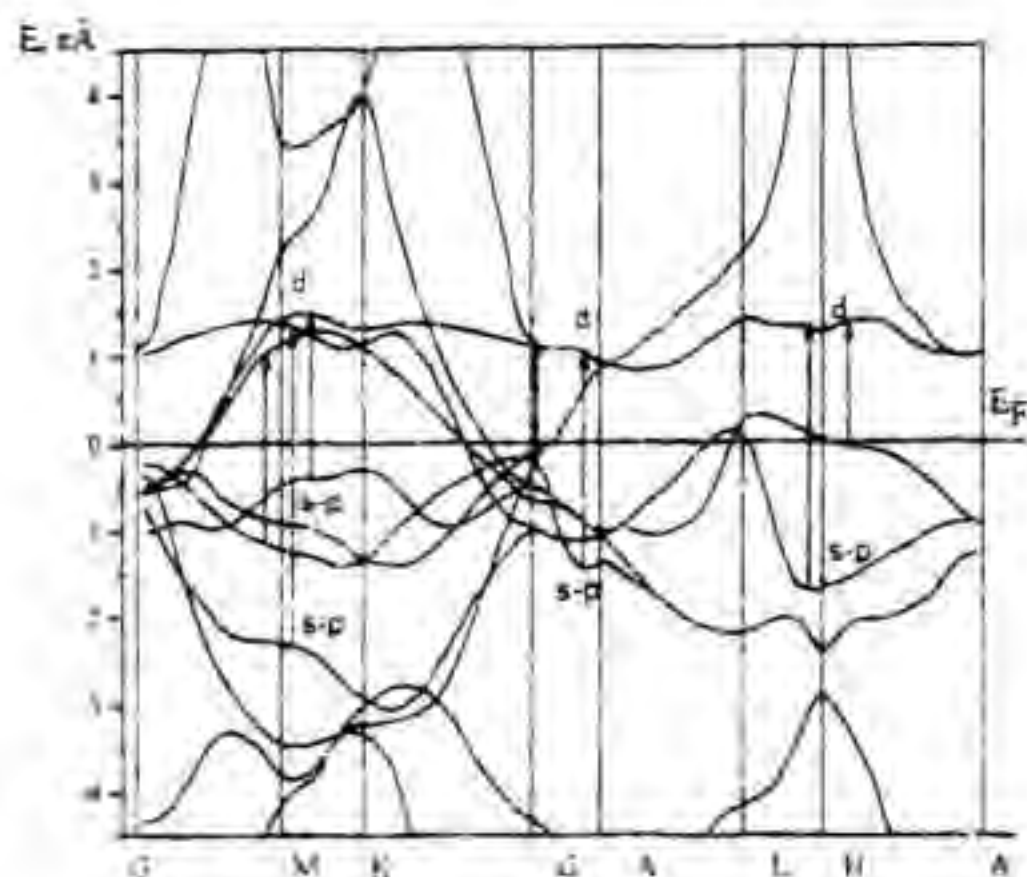


Рис. 3. Енергетична зонна структура кобальту з гексагональною міцноупакованою ґраткою для електронів зі спіном, направленим проти спонтанної намагніченості [7]. Вертикальними лініями зі стрілками показані можливі міжзонні переходи електронів.

області спектру (приблизно на 0,11 еВ) та збільшення напівширини цієї смуги поглинання в кристалах Со, порівняно з аморфним, свідчить про уширення енергетичних зон у зв'язку зі зменшенням міжатомних відстаней та збільшенням ймовірностей (матричних елементів) відповідних переходів (див. рис.3). Однак, уширення енергетичних зон Со не вдається пояснити зменшення поглинання в низькоенергетичній області спектру ($h\nu < 0,5$ еВ).

Поява в спектрі $\sigma(h\nu)$ аморфного кобальту нової смуги поглинання при 0,38 еВ свідчить про формування нової зони, найбільш ймовірно пов'язаної з вакансіями, які при переході до кристалічного стану частково релаксують, і тому відповідна смуга зникає. Інша можлива причина появи додаткової смуги – модифікація електронного енергетичного спектру в околі рівня Фермі [6]. Однак ми вважаємо, що остання зумовлена переходами електронів з нової зони, пов'язаної з вакансіями, на рівень Фермі E_F . Тоді на основі експериментальних даних можна оцінити її положення в електронному спектрі та напівширину. Згідно з експериментальними даними ця зона розташована приблизно на 0,38 еВ нижче рівня Фермі E_F і її напівширина складає приблизно 0,15 еВ. Нарешті, суттєве зменшення інтенсивності внутрішньозонних переходів як в аморфних, так і в кристалічних зразках,

порівняно з масивним кобальтом, пов'язано, на нашу думку, з двома факторами: по-перше, зі значним збільшенням частоти зіткнень електронів з дефектами структури; по-друге, із суттєвим зменшенням розміру зерен в плівкових зразках.

Таким чином, в електронному спектрі Со формується нова енергетична зона, яка розташована на 0,38 еВ нижче рівня Фермі E_F , що пов'язана з дефектами структури. Структурні перетворення призводять до перебудови електронного спектру кобальту, причому, поява додаткової смуги поглинання в довгохвильовій ділянці спектру вказує на те, що найпомітніші зміни в електронному спектрі відбуваються поблизу рівня Фермі.

Список використаних джерел

1. Поперенко Л.В., Стащук В.С., Шайкевич І. А., Одарич В.А. Діагностика поверхні поляризованим світлом. – К.: Київський університет, 2006. – 328 с.
2. Стащук В.С., Шпак А.П., Куницький Ю.А. Особливості електронної структури бінарних сплавів 3d-перехідних металів // Успехи физ. мет. – 2004. – Т.5. – С.1–36.
3. М.М.Кириллова, Г.А. Болотин, Л.В. Номерованная. Анизотропия оптических свойств одноосных кристаллов. Ферромагнитный кобальт // Опт. и спектр. – 1986. – Т.49, №.4. – С.742–748.
4. Стащук В.С., Мовсесян Л.Р. Оптические свойства и их связь с электронной структурой ферромагнитного кобальта // УФЖ. – 1986. – Т.31, №11. – С.1656–1661.
5. Кудрявцев Ю.В., Лежненко И.В. Оптические свойства пленок ГПУ и ГЦК кобальта в энергетической области 0,095 – 1,2 еВ // ФТТ. – 1981. – Т.23, вып.2. – С.440–448.
6. Широковский В.П., Кириллова М.М., Шилова Н.А. Аномалия оптического поглощения в железе // ЖЭТФ. – 1982. – Т.82, №3. – С.784–792.
7. Kulikov N.I., Kulatov E.T. Electronic band structure Fermi surface and optical properties of cobalt under pressure // J. Phys. F. – 1982. – V.2, №10. – P.2267–2289.

Надійшла до редколегії 03.04.09

Підп. до друку 25.05.2009 р.
Формат 70x100^{1/16}.
Ум. друк. арк. 21,60. Наклад 350.
Зам. 245.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

0101

00110

0011

10101111

10101111

11010111

010

0011

010

01011111

01010111

00101111

01001111

01010111

01010111

01001111

00111111

01010111

01010111

10101111

11010111