



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



14153JB

45 коп. за л. періодики та дисерт. Ц 25.00

ВИПУСК №4 2008

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Ях'євич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Адаменко Ірина Іванівна, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Гаращенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестюк Микола Олексійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Вотякова Л.А. Нормована алгебра тернарних чисел	7
Голомозий В.В. Оцінка стійкості ланцюгів Маркова отримана методом склеювання	10
Дармосюк В.М. Факторкільця нетерових напівдосконалих кілець	15
Кликавка Б.М., Оленко А.Я. Асимптотичні властивості вагових функцій	20
Пискун М.М. Про будову груп, у яких система усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля	24
Сімонова І.Г. Локально табличні розширення довідностно-інтуїціоністської логіки	27
Таращанський М.Т., Щестюк Н.Ю. Робастні оцінки однорідних та однорідно зв'язних полів в умовах спектральної невизначеності	31
Яровая О.А. О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым	36

ДИФЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Вовченко О.М. Рух атмосфери пари вихорів	43
Говоруха В.Б., Лобода В.В. Аналіз міжфазної тріщини в п'єзокерамічному тілі скінченних розмірів	47
Гудрамович В.С., Етері Л. Гарт Вплив форми скінченного елемента на обчислювальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності	53
Гуржій О.А. Стійкість руху точкових вихорів в області обмеженій колом	59
Карнаухова Т.В. Активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань жорстко закріпленої в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки при дії на неї невідомого механічного навантаження	63
Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про гладкість розв'язків деяких квазілінійних еліптичних рівнянь	67
Майбородіна Н.В. Коливання дискретно підкріплених еліпсоїдальних ортотропних оболонок при нестационарних навантаженнях	71
Меньшиков В.О. Коефіцієнти інтенсивності напруження для дискообразної міжфазної тріщини під дією хвилі зсуву	75
Моїсеєнко В.О. Кінематична структура хвильових полів у ортотропних просторових хвильоводах	79
Мольченко Л.В., Індіамінов Р.Ш., Лоос І.І. Дослідження електромагнітних ефектів зрізаного гнучкого параболоїда обертання в осесиметричній постановці	83
Островський В.В. Рух рідини в полі пари вихорів на нерухомій сфері	87
Плахтійенко М.П., Забуга А.Т. Моделювання кеплерового руху з використанням ромбічних функцій	91

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бондарев Б.В., Жмихова Т.В. Платоспроможність страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку	99
Гарашенко Ф.Г., Карабак А.М., Солошенко Ю.І. Удосконалений оператор схрещування для генетичного алгоритму розв'язання задачі побудови плану гетерогенного багатоетапного виробництва	105
Глибовець А.М., Гороховський С.С., Жаб'юк В.Я. Вирішення проблем побудови платформи мобільних агентів за допомогою технологій JAVA, JINI	109
Гук Л.М. Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії	115
Демківський Є.О., Шевченко В.П. Технологічні та методологічні аспекти розвитку електронного навчання	119
Джалладова І.А. Стабілізація розв'язків системи лінійних стохастичних різницьових рівнянь	124
Карнаух Т.О. Властивості ірраціональних точок області визначення функцій, заданих магазинними R-перетворювачами	127
Касьянюк В.С., Карнаух Т.О. Деякі різновиди задачі оптимізації багатопродуктивних потоків у мережах	131
Мащенко С.О. Багатоцільові ігри у відношеннях переваги гравців	135

Москальков М.М., Іванов К.В. Метод фіктивних областей в задачах конвекції-дифузії	141
Назарага І.М. Застосування теорій паритету купівельної спроможності та паритету відсоткових ставок в умовах економіки України	145
Негадайлов П.А. Про моменти поглинання у випадковому блуканні з бар'єром	149
Подлипенко Ю.К., Перцов А.С. Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана	153
Пономарьов В.Д. Оптимізація керування режимом роботи системи з повторними викликами і скінченним числом користувачів	161
Семенов В.В., Апостол Р.Я. Задачі максимізації і умова Лінденштраусса	169
Сільвейструк Л.М. Логічні зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів "дивитися через" та участі	173
Слабоспицький О.С. Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях	179
Тикулов С.В. Графікові аплікативні інтерпретації та дельта-числення	183
Турчин О.Я. Використання траєкторних метаверистик для побудови методу табу-пошуку	187
Черниш Р.І. Покоординатна декомпозиція області для еволюційних задач математичної фізики	191
Якименко І.І., Цикунов В.С., Шевченко В.П., Берггрен К.-Ф. Використання паралельних обчислень для дослідження фізичних властивостей наноструктур	195

РАДІОФІЗИКА

Бех І.І., Вербицька О.В., Ільченко В.В., Лушкін О.Є., Нагула П.О. Вплив електричного поля на емісійні властивості металевопористих Sc-Ba емітерів з Re-W матрицею	203
Ільченко В.В., Присяжний В.В., Гордієнко С.О. Дослідження систем з гетеропереходом p-Si/наноструктурована плівка SnO ₂	207
Кравченко О.Ю., Левада Г.І., Лиситченко Т.Є. Розподіл іонів за енергією в РЧ розрядах в SiH ₄	212
Мельник П.В., Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sn/Si(111)-(7x7)	216
Мойсєєнко В.А., Мелков Г.А., Васючка В.І., Прокопенко О.В., Слободянюк Д.В. Кореляційна обробка інформації в плівках залізо-ітрієвого гранату	221
Первак Ю.О., Первак В.Ю. Синтез багат шарових дзеркал з максимально високою дисперсією	226
Черняк В.Я., Левко Д.С., Щедрін А.І., Наумов В.В., Ольшевський С.В., Юхименко В.В., Присяжнєвич І.В. Вихід вільного водню при плазмохімічній конверсії етанолу та води в електророзрядній плазмово-рідинній системі з різною полярністю електродів	230

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альошін О.Д., Абдікарімов Б.Ж., Рудніков Є.Г. Умова рівноваги макронеоднорідної системи у полі гравітації Землі поблизу критичної точки	239
Булавін Л.А., Вареня О.Г., Вербінська Г.М., Загородня О.А., Перепелиця С.М. Вивчення динаміки випаровування краплин рідинних систем ДНК-вода	242
Вашенко В.М., Лоза Є.А., Патлашенко Ж.І. Двовимірні геометрична теорія некласичних вигнутих дифракційних ґраток	245
Горкавенко В.М., Степанов О.Б. Поляризація вакууму непроникливою трубкою з магнітним полем	252
Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Корецький С.Л., Криворучко Я.С., Шостак С.В. Поглинання електромагнітного випромінювання біметалевими частинками та матричними дисперсними системами на їх основі	260
Гречко Л.Г., Семчук О.Ю., Гришук О.Ю., Водоп'янов Д.Л. Розсіяння електромагнітного випромінювання шорсткими фрактальними поверхнями	265
Карпенко В.І., Вашенко В.М., Разказовський В.Б., Кучер Д.Б. Використання крупноапертурних антенних систем у вигляді зон Френеля для отримання інтегральних електродинамічних характеристик ділянок поверхні води та для дослідження параметрів льодовиків	271
Онанко А.П. Вкапівна поверхня пружно-непружного тіла сплаву Ag _{0.8} Zn _{0.2}	276
Ременяк О.В., Гончаренко Ю.В., Прилуцька С.В. Вуглецеві нанотрубки для нанобіотехнології. Фізичні властивості (огляд)	279
Свечнікова О.С. Дослідження орієнтаційного порядку в орієнтованих полімерних волокнах	285

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.53

Леся А. Вотякова

Нормована алгебра тернарних чисел

В роботі закладено фундамент для побудови аналізу на алгебрі тернарних чисел. Перенесено поняття матричної норми. Як результат маємо повну нормовану алгебру.

Ключові слова: алгебра тернарних чисел, матричне подання, норма

E-mail: votsa@list.ru

Статтю представив доктор ф.-м. наук, професор Кириченко В.В.

Стаття представлена доктором фізико-математичних

Вступ. Незбагненна ефективність методів теорії функцій комплексної змінної при розв'язуванні самих різноманітних задач спонукає пошук подібних теорій на інших алгебрах, в першу чергу на алгебрі кватерніонів [1].

Однак поки-що пошук подібних теорій на алгебрах без ділення залишається поза увагою дослідників. Якраз в роботах [2], [3] нами розпочата побудова основ аналізу функцій дуальної та бінарної змінної.

Мета цієї роботи – наділити одну із алгебр рангу 3 топологічною структурою як передумову розгортання теорії функцій на такій алгебрі.

Основна частина. Нехай множина $T = \{x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ наділена в стандартний спосіб структурою лінійного простору на полем $\mathbb{R}$. Означимо множення елементів цієї множини за правилом: для будь-яких

$$\begin{aligned} t_1 &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad t_2 = y_0 e_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 \\ t_1 t_2 &:= (x_0 y_0 + x_1 y_2 + x_2 y_1) e_0 + \\ &+ (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_2) e_1 + \\ &+ (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_1 y_1) e_2, \end{aligned} \quad (1)$$

тобто множення елементів виконується за правилом множення многочленів з врахуванням таблиці множення виділених елементів e_0, e_1, e_2

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2

Lesja A. Votjakova

Normed algebra of ternary numbers

In the paper built foundation for construction analysis on algebra of ternary variable numbers. The concept of matrix norm was carried on such algebra. Thus we arrive at a complete normed algebra.

Key words: algebra of ternary numbers, matrix representation, norm

$$\begin{array}{c|ccc} e_1 & e_1 & e_2 & e_0 \\ e_2 & e_2 & e_0 & e_1 \end{array} \quad (2)$$

неважко переконатись, що T комутативна алгебра рангу 3 над полем $\mathbb{R}$, одиницею якої слугує елемент $1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. Тоді очевидно, що множення елемента t на $x \cdot e_0$ еквівалентне множенню t на дійсне число x , і тому підалгебру

$$T_0 = \{x_0 e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \mid x_0 \in \mathbb{R}\}$$

будемо ототожнювати з множиною дійсних чисел, а елементи множини T будемо записувати у вигляді

$$t = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2$$

і називати тернарними числами

Нехай $M_3^{\mathbb{C}}$ – множина всіх шкільних матриць порядку 3 з дійсними елементами. Відносно стандартних операцій додавання і множення матриць, множення матриці на число є комутативна алгебра рангу 3 над полем $\mathbb{R}$, причому алгебри T і $M_3^{\mathbb{C}}$ ізоморфні. Отож алгебра T допускає мономорфне вкладення у повну матричну алгебру M_3 , тобто кожне тернарне число має матричне подання

$$t = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto T = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тоді алгебраїчна норма t

$$N_r(t) = \det T = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2, \quad (4)$$

а числом спряженим до t буде тернарне число

$$\bar{t} = x_0^2 - x_1x_2 + (-x_0x_1 + x_2^2)e_1 + (-x_0x_2 + x_1^2)e_2 \quad (5)$$

$$(t\bar{t} = N_r(t)).$$

Якщо $N_r(t) \neq 0$, то за означенням для будь-якого $t_1 \in T$

$$\frac{t_1}{t} := \frac{1}{N_r(t)} t_1 \bar{t}. \quad (6)$$

Якщо

$$t = x_0(1 + e_1 + e_2) \quad (x_0 \neq 0)$$

$$t_1 = y_0(1 + e_1 + e_2), \text{ то}$$

$$\frac{t_1}{t} = \frac{y_0}{x_0}.$$

Аналогічно у випадку $t = x_0 - x_0e_1$,
 $t = x_0 - x_0e_2$.

Звичайно ділення виконується не завжди, більше того в T є дільники нуля $((1 + e_1 + e_2)(e_1 - e_2) = 0)$.

Власними значеннями матриці T є числа

$$\lambda_0 = x_0 + x_1 + x_2, \lambda_1 = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2, \lambda_2 = x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2, \quad (7)$$

де

$$\tau_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \tau_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

– кубічні корені з 1. тоді скориставшись формулою [4]

$$\prod_{\lambda_i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} R_T(\lambda) d\lambda,$$

де C_λ – коло з центром λ_i , поза яким лежать всі інші власні значення, $R_T(\lambda)$ – резольвента матриці T , маємо власні простори цієї матриці

$$\prod_{\lambda_0} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \prod_{\lambda_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \tau_2 & \tau_1 \\ \tau_1 & 1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\prod_{\lambda_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_2 & 1 \end{pmatrix},$$

які відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Скориставшись матричним поданням (3) дістанемо канонічне подання тернарного числа, а саме

$$t = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 = \frac{\lambda_0}{3}(1 + e_0 + e_2) + \frac{\lambda_1}{3}(1 + \tau_2e_1 + \tau_1e_2) + \frac{\lambda_2}{3}(1 + \tau_1e_1 + \tau_2e_2) = \frac{1}{3}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_0 + \tau_2\lambda_1 + \tau_1\lambda_2)e_1 + (\lambda_0 + \tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2)e_2).$$

Звідси

$$t^n = \frac{1}{3}(\lambda_0^n + \lambda_1^n + \lambda_2^n + (\lambda_0^n + \tau_2\lambda_1^n + \tau_1\lambda_2^n)e_1 + (\lambda_0^n + \tau_1\lambda_1^n + \tau_2\lambda_2^n)e_2).$$

Наділимо алгебру T топологічною нормою, скориставшись однією з матричних норм [5], а саме

$$\|t\| := \sqrt{3}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2). \quad (9)$$

Неважко перевірити, що так означена функція задовольняє аксіоми норми. Більше того, для будь-яких $t_1, t_2 \in T$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|t_1 t_2\|^2 &= 3((x_0 y_0 + x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 + \\ &+ (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_2)^2 + (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_1 y_1)^2) \leq \\ &\leq 3(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2) = \|t_1\|^2 \|t_2\|^2, \end{aligned}$$

тобто $\|t_1 t_2\| \leq \|t_1\| \|t_2\|$, а також – правило паралелограма

$$\|t_1 + t_2\|^2 + \|t_1 - t_2\|^2 = 2(\|t_1\|^2 + \|t_2\|^2).$$

(Зазначимо, що норма дійсного числа x як елемента алгебри T рівняється $\sqrt{3}|x|$.)

В стандартний спосіб означається границя послідовності тернарних чисел

$(t_n) = (x_{0n} + x_{1n}e_1 + x_{2n}e_2)$. А оскільки така послідовність породжує три послідовності дійсних чисел (x_{0n}) , (x_{1n}) , (x_{2n}) , то очевидно, що послідовність (t_n) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються послідовності (x_{0n}) , (x_{1n}) , (x_{2n}) , причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{0n} + \lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n}e_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}e_2. \quad (10)$$

Як приклад, знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

де $t \in T$. Оскільки на підставі (7) і (8)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{x_0}{n} + \frac{x_1}{n}e_1 + \frac{x_2}{n}e_2\right)^n = \\ &= \frac{1}{3}(v_0^n + v_1^n + v_2^n + (v_0^n + \tau_2 v_1^n + \tau_1 v_2^n)e_1 + \\ &\quad + (v_0^n + \tau_1 v_1^n + \tau_2 v_2^n)e_2), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + \frac{x_0 + x_1 + x_2}{n}, \quad v_1 = 1 + \frac{x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2}{n}, \\ v_2 &= 1 + \frac{x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0^n + v_1^n + v_2^n) =$$

$$\begin{aligned} &= e^{x_0+x_1+x_2} + e^{x_0+\tau_1 x_1+\tau_2 x_2} + e^{x_0+\tau_2 x_1+\tau_1 x_2} = \\ &= e^{x_0} \left(e^{x_1+x_2} + e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)} \right) \right) = \\ &= e^{x_0} \left(e^{x_1+x_2} + 2e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2) \right) = \\ &= u_0(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0^n + \tau_2 v_1^n + \tau_1 v_2^n) =$$

$$\begin{aligned} &= e^{x_0} \left(e^{x_1+x_2} + e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2) \right) \right) = u_1(x_0, x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0^n + \tau_1 v_1^n + \tau_2 v_2^n) =$$

$$\begin{aligned} &= e^{x_0} \left(e^{x_1+x_2} + e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2) \right) \right) = u_2(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}(u_0(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+ u_1(x_0, x_1, x_2)e_1 + u_2(x_0, x_1, x_2)e_2).$$

Послідовність тернарних чисел (t_n) називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність

$$\|t_{n+p} - t_n\| < \varepsilon.$$

А оскільки для таких n і p

$$|x_{i,n+p} - x_{in}| \leq \sqrt{3(x_{i,n+p} - x_{in})^2} \leq \|t_{n+p} - t_n\| < \varepsilon,$$

де $i = 0, 1, 2$, то фундаментальними, а тому збіжними будуть послідовності (x_{in}) . Звідси випливає, що кожна фундаментальна послідовність тернарних чисел є збіжною.

Таким чином, алгебра T є повний нормований простір, у якому норма породжується скалярним добутком, і фундамент для побудови аналізу функцій тернарної змінної закладено.

Список використаних джерел

1. Салбери Э. Кватернионный анализ // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике – 2004, – № 2. С. 130-157.
2. Вотякова Л.А. Основы анализа функций дуальной змінної // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Київ, 2007.
3. Працьовитий М.В., Вотякова Л.А. Основы анализа функций бинарной змінної // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Київ, 2008.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. Хорн Р., Джонсон У. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Надійшла до редколегії 15.03.2008

УДК 519.21

В. В. Голомозий, аспірант

**Оцінка стійкості ланцюгів Маркова
отримана методом склеювання**

У статті розглядається питання стійкості ланцюгів Маркова. Розглядається певний клас «близьких» ланцюгів, для яких припускається умова міноризації на всьому просторі. Для побудови оцінки використовувався метод склеювання.

Ключові слова: ланцюг Маркова, стійкість, склеювання.

E-mail: mailtower@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н. професор Ю.В. Козаченко

1. Вступ

Питання стійкості ланцюгів Маркова є малодослідженим і актуальним. У роботі [1], оцінки для стійкості були отримані методами функціонального аналізу.

В той же час, відомо що за допомогою відносно нового методу – склеювання [2], можна отримувати відомі результати, що стосуються ергодичності ланцюгів. Виявляється цей метод з невеликими змінами можна використовувати для обчислень оцінки стійкості.

Досить суттєве припущення полягає у міноризації на всьому просторі, що дає змогу отримати досить точну оцінку.

2. Постановка задачі

Нехай $(X_n, n \geq 1)$, $(X'_n, n \geq 1)$ два різних неоднорідних незалежних ланцюга Маркова зі значеннями в просторі (E, Θ) , а $P_t, P_{t,\varepsilon}$, $t \in \mathbb{R}_+$ відповідні перехідні ймовірності, що мають вигляд:

$$P_t = (1 - \varepsilon)Q + \varepsilon R_t,$$

$$P_{t,\varepsilon} = (1 - \varepsilon)Q + \varepsilon R_{t,\varepsilon}$$

де $Q, R_t, R_{t,\varepsilon}$ – стохастичні ядра, ε – малий параметр.

Припускаємо що виконана наступна умова міноризації. Існує таке $\alpha > 0$, ймовірнісна міра ν , що $\forall x \in E, \forall t$:

V.V. Golomoziy, PhD student

Stability assest for Markov chains, computed by coupling method

Stability for some 'close' Markov chains is considered in this paper. Stability assest proven in case when Minorization condition holds on all space. For computing an exact assest some coupling construction were used.

Keywords: Markov chain, stability, coupling method.

$$P_t(x, \cdot) \wedge P_{t,\varepsilon}(x) \geq \alpha \nu(\cdot)$$

Введемо позначення для ймовірностей переходу за n кроків:

$$P^{(k,n)} = \prod_{i=k}^{n+k} P_i,$$

$$P_{\varepsilon}^{(k,n)} = \prod_{i=k}^{n+k} P_{i,\varepsilon}$$

3. Основний результат

Нехай викона умова міноризації. Тоді $\forall n \geq 2, \forall A \in \Theta$, має місце нерівність:

$$|P^{(k,n)}(x, A) - P_{\varepsilon}^{(k,n)}(x, A)| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \alpha} (1 - c_{\alpha}(\alpha, \varepsilon))$$

де невід'ємна стала c_{α} дорівнює:

$$c_{\alpha}(\alpha, \varepsilon) = (1 - \alpha)(1 - \alpha - \varepsilon)^{n-1} - \alpha(1 - \alpha - \varepsilon)^{n-2}$$

Зауваження:

Розглянемо однорідні 2×2 ланцюги:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$P_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1-a_{\varepsilon} & a_{\varepsilon} \\ b_{\varepsilon} & 1-b_{\varepsilon} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix}$$

$$R_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1-r_\varepsilon & r_\varepsilon \\ s_\varepsilon & 1-s_\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$P = (1-\varepsilon)Q + \varepsilon R$$

$$P_\varepsilon = (1-\varepsilon)Q + \varepsilon R_\varepsilon$$

де ε деяка константа. Позначимо:

$$\alpha = \min(1-a, b, 1-a_\varepsilon, b_\varepsilon)$$

$$\nu\{0,1\} = \nu\{0\} = 1$$

Очевидно, що такі ланцюги задовільняють умову міноризації на всьому просторі. Для цих ланцюгів легко обчислити ймовірності переходу за n кроків $(p_{00}^{(n)}, p_{00,\varepsilon}^{(n)})$, і показати що

$$|p_{00}^{(n)} - p_{00,\varepsilon}^{(n)}| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} |p_{00}^{(n)} - p_{00,\varepsilon}^{(n)}| > 0$$

Тобто порядок отриманої оцінки є точним.

4. Доведення оцінки.

Доведення складається з декількох лем. Для початку нам потрібно побудувати склеювання двох ланцюгів.

Будемо писати $X_n \sim \mu(\cdot)$, якщо виконано $P\{X_n \in A\} = \mu(A)$, для довільного $A \in \Theta$.

Розглянемо стохастичне ядро:

$$T_i(x, x'; A \times A') = \frac{P_i(x, A) - \alpha \nu(A)}{1 - \alpha} \times$$

$$\frac{P_{i,\varepsilon}(x', A') - \alpha \nu(A')}{1 - \alpha}$$

$$T^{(k,n)} = \prod_{i=k}^{n+k} T_i$$

Розглянемо простір $Z = (E \times E \times \{0,1,2\})$ та ланцюг Маркова $(X1_n, X2_n, d_n)$ на ньому, який визначимо наступним чином. Нехай задано початковий стан $(X1_0, X2_0, d_0)$. Нехай також визначено $(X1_n, X2_n, d_n)$, визначимо $(X1_{n+1}, X2_{n+1}, d_{n+1})$.

Якщо $d_n = 0$, тоді робимо незалежне випробування, що видає 1 з ймовірністю α та 0 інакше. Якщо випала 1, тоді встановлюємо $d_{n+1} = 1$, та $X1_{n+1} = X2_{n+1} = X$, де $X \sim \nu(\cdot)$, якщо випало 0, тоді встановлюємо $d_{n+1} = 0, (X1_{n+1}, X2_{n+1}) \sim T_{n+1}(X1_n, X2_n, (\cdot, \cdot))$

Якщо $d_n \in \{1,2\}$, тоді робимо незалежне випробування, що видає 1 з ймовірністю ε , та 0 інакше. Якщо випадає 1 тоді встановлюємо $d_{n+1} = 0, X1_{n+1} \sim R_{n+1}(X1_n, \cdot)$, $X2_{n+1} \sim R_{n+1,\varepsilon}(X2_n, \cdot)$ якщо випадає 0, тоді встановимо $d_{n+1} = 2, X1_{n+1} = X2_{n+1} = X$, де $X \sim Q(X1_n, \cdot)$

Через $\bar{P}\{\cdot\}$ позначимо ймовірність породжену таким ланцюгом, а через $\bar{P}_i(x, x', d; A \times A' \times i)$ його перехідну ймовірність.

Запишемо перехідну ймовірність явно:

$$\bar{P}_i(x, x', 0; A \times A' \times \{0\}) = (1-\alpha)T_i(x, x'; A \times A');$$

$$\bar{P}_i(x, x', 0; A \times A' \times \{1\}) = \alpha \nu(A \cap A');$$

$$\bar{P}_i(x, x', 0; E \times E \times \{2\}) = 0;$$

$$\bar{P}_i(x, x', 1; A \times A' \times \{0\}) = \varepsilon I_{\{x=x'\}} R_i(x, A) R_{i,\varepsilon}(x', A');$$

$$\bar{P}_i(x, x', 1; A \times A' \times \{1\}) = 0;$$

$$\bar{P}_i(x, x', 1; A \times A' \times \{2\}) = (1-\varepsilon) I_{\{x=x'\}} Q(x, A \cap A');$$

$$\bar{P}_i(x, x', 2; A \times A' \times \{i\}) = \bar{P}_i(x, x', 1; A \times A' \times \{i\});$$

де $i \in \{0,1,2\}$, A, A' - довільні множини з Θ . Зауважимо, що $(d_n, n \geq 0)$ - є однорідним ланцюгом Маркова, що не залежить від процесу (X, X') (оскільки подія $\{x, x', 1; x \neq x'\}$ є неможливою). Тому в подальшому будемо опускати індекси під ймовірностями подій, що залежать лише від (d_n)

Введемо наступні позначення:

$$D = \{1,2,3\}; A_i = A \times \{i\}$$

Означення 1. Будемо казати, що в момент $n > 0$ відбулося склеювання якщо $d_n = 0$.

Лема 1. Для довільних $d \in D$, і $x, x' \in E$ справедливі наступні рівності:

$$P_i(x, A) = \bar{P}_i(x, y, d; A \times E \times D)$$

$$P_{i,\varepsilon}(x', A') = \bar{P}_i(y, x', d; E \times A' \times D)$$

Доведення. Досить довести твердження для $d \in \{0,1\}$, оскільки перехідні ймовірності для $d = 1$, та $d = 2$ однакові.

$$\bar{P}_i(x, y, 0; A \times E \times D) = \bar{P}_i(x, y, 0; A \times E_0) +$$

$$\bar{P}_i(x, y, 0; A \times E_1) = (1 - \alpha)T_i(x, y; A \times E) +$$

$$\alpha v(A \cap E) = P_i(x, A) - \alpha v(A) + \alpha v(A) = P_i(x, A)$$

Доведемо тепер, для $d = 1$

$$\bar{P}_i(x, x, l; A \times E \times D) = \bar{P}_i(x, x, l; A \times E_0) +$$

$$\bar{P}_i(x, x, l; A \times E_2) = \varepsilon R_i(x, A) R_{i, \varepsilon}(x, E) +$$

$$(1 - \varepsilon) Q(x, A) = P_i(x, A)$$

Доведення для P_i отримується аналогічно.

Лема 2. Нехай $d \in D$, φ - невід'ємна вимірна. Тоді:

$$P_i \varphi(x) = \int \bar{P}_i(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times i) \varphi(x_1)$$

Доведення: досить переконатися у рівності для індикаторів:

$$\int \bar{P}_i(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times i) I_A(x_1) =$$

$$\bar{P}_i(x, x', d; A \times E \times D) = P_i(x, A) = P_i \varphi(x)$$

Наслідок: Нехай $d \in D$, φ - невід'ємна вимірна, $x' \in E$, $n > 0$. Тоді:

$$P^{(k, n)} \varphi(x) = \int \bar{P}^{(k, n)}(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times i) \varphi(x_1)$$

Доведення: Проведемо за індукцією. Для $n = 1$ твердження випливає з леми. Нехай твердження виконано для n , доведемо його для $n + 1$.

$$\int \bar{P}^{(k, n)}(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) \times$$

$$\int \bar{P}^{(k, n)}(x_n, x'_n, i_n; dx_{n+1} \times dx'_{n+1} \times i_{n+1}) \varphi(x_{n+1}) =$$

$$\int \bar{P}^{(k, n)}(x, x', d; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) P_{x, n} \varphi(x_n) =$$

$$P^{(k, n+1)} \varphi(x)$$

Лема 3.

$$|P^{(k, n)}(x, A) - P^{(k, n)}_e(x, A)| \leq \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times E_0)$$

Доведення:

$$|P^{(k, n)}(x, A) - P^{(k, n)}_e(x, A)| =$$

$$|\bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; A \times E \times D) - \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times A \times D)|;$$

$$|\bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; A \times E_1) - \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times A_1)| =$$

$$|\int \bar{P}_k(x, x, l; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) \cdots \int \alpha v(A \cap E) -$$

$$\int \bar{P}_k(x, x, l; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) \cdots \int \alpha v(E \cap A)| = 0;$$

$$|\bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; A \times E_2) - \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times A_2)| =$$

$$|\int \bar{P}_k(x, x, l; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) \cdots$$

$$\int (1 - \varepsilon) Q(x_{n+1}; A \cap E) -$$

$$\int \bar{P}_k(x, x, l; dx_1 \times dx'_1 \times i_1) \cdots$$

$$\int (1 - \varepsilon) Q(x_{n+1}; E \cap A)| = 0$$

тому

$$|P^{(k, n)}(x, A) - P^{(k, n)}_e(x, A)| =$$

$$|\bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; A \times E_0) - \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times A_0)| \leq$$

$$\max(\bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; A \times E_0), \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times A_0)) \leq \bar{P}^{(k, n)}(x, x, l; E \times E \times \{0\})$$

Означення 2. Нехай τ_n момент n -того склеювання, для процесу що стартував з (x, x, l)

Де $x \sim v$. Тоді τ_n - є процесом відновлення.

Введемо позначення:

$$g_{n, r} = \bar{P}\{d_0 = 1, d_1 = 2, \dots, d_{r-1} = 2, d_r = 0, \dots, d_{n-r} = 0, d_n = 1\};$$

$$h_{n, r} = \bar{P}\{d_0 = 1, d_1 = 2, \dots, d_{r-1} = 2, d_r = 0, \dots, d_{n-r} = 0, d_n = 0\};$$

$$g_n = \sum_{r=1}^{n-1} g_{n, r}, g_0 = 1, g_1 = 0,$$

$$h_n = \sum_{r=1}^{n-1} h_{n, r}, h_0 = 0, h_1 = 1.$$

$$a_n(x) = \bar{P}^n(x, x, 1; E \times E \times \{1\});$$

$$u_n = \sum_{r \geq 0} (g^r)_n;$$

$$m_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} k g_k;$$

зауважимо, що

$$g_n = \bar{P}_{v,1}\{d_k \neq 1, d_n = 1, k < n\}$$

$$g_n = \bar{P}_{v,1}\{d_k \neq 1, k \leq n\}$$

$$a_n(x) = \bar{P}_{x,x,1}\{d_k \neq 1, d_n = 1, k < n\}$$

$$u_n = \bar{P}_{v,1}\{d_0 = 1, \dots, d_n = 1\}$$

Таким чином:

g_n - ймовірність того, що стартуючи з розподілом $(v(\cdot \cap \cdot), 1)$ в момент n відбулося перше після нуля склеювання.

h_n - ймовірність того, що стартуючи з розподілом $(v(\cdot \cap \cdot), 1)$ в момент n склеювання ще не відбулося.

u_n - ймовірність того, що стартуючи з розподілом $(v(\cdot \cap \cdot), 1)$ в момент n відбулося склеювання. Таким чином $u_n \rightarrow 1/m_\alpha$.

$a_n(x)$ - ймовірність того, що стартуючи з розподілом $(\delta_x, \delta_x, 1)$ в момент n відбулося перше після нуля склеювання

Лема 4

$$g_{n,r} = \varepsilon \alpha (1 - \varepsilon)^{r-1} (1 - \alpha)^{n-r-1}, n \geq 2$$

$$h_{n,r} = \varepsilon (1 - \varepsilon)^{r-1} (1 - \alpha)^{n-r}, n \geq 2$$

Доведення:

$$\bar{P}_{v,1}\{d_0 = 1, d_1 = 2, \dots, d_r = 0, d_n = 1\} =$$

$$\int v(dx) \int \bar{P}_k(x, x, 1; dx_1 \times dx'_1 \times \{2\}) \dots$$

$$\int \bar{P}_{k+n}(x_{n-1}, x'_{n-1}, 0; E \times E \times \{1\}) =$$

$$v((1 - \varepsilon)Q)^{r-1}(\varepsilon R_r, R_{r,x})(1 - \alpha)^{n-r-1} \times$$

$$\prod_{i=k}^{k+n-r-1} T_i(E, E) \alpha =$$

$$\varepsilon \alpha (1 - \varepsilon)^{r-1} (1 - \alpha)^{n-r-1} \times$$

$$vQ^{r-1}(R_r, R_{r,x})T^{(k,n-r-1)}(E, E)$$

Але кожен з операторів $Q, R_r, R_{r,x}, T_r$ є стохастичним, а отже їх добуток теж є стохастичним оператором.

Доведемо тепер рівність для $h_{n,r}$.

$$\bar{P}_{v,1}\{d_0 = 1, d_1 = 2, \dots, d_r = 0, d_n = 0\} =$$

$$\int v(dx) \int \bar{P}_k(x, x, 1; dx_1 \times dx'_1 \times \{2\}) \dots$$

$$\int \bar{P}_{k+n}(x_{n-1}, x'_{n-1}, 0; E \times E \times \{0\}) =$$

$$v((1 - \varepsilon)Q)^{r-1}(\varepsilon R_r, R_{r,x})(1 - \alpha)^{n-r} \times$$

$$T^{(k,n-r)}(E, E) = \varepsilon (1 - \varepsilon)^{r-1} (1 - \alpha)^{n-1} \times$$

$$vQ^{r-1}(R_r, R_{r,x})T^{(k,n-r)}(E, E)$$

Лема 5. Для довільного $n \geq 2$, справедливі наступні рівності:

$$g_n = \varepsilon \alpha \frac{(1 - \varepsilon)^{n-1} - (1 - \alpha)^{n-1}}{\alpha - \varepsilon}$$

$$h_n = \varepsilon (1 - \alpha) \frac{(1 - \varepsilon)^{n-1} - (1 - \alpha)^{n-1}}{\alpha - \varepsilon}$$

$$u_n = \frac{\alpha \varepsilon}{\alpha + \varepsilon} - \frac{\alpha \varepsilon (1 - \alpha - \varepsilon)^{n-1}}{\alpha + \varepsilon}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}$$

Доведення. Обчислимо генератрису $g(z)$ послідовності g_n .

$$\frac{g(z)}{\alpha \varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{r=1}^{n-1} (1 - \varepsilon)^{r-1} (1 - \alpha)^{n-r-1} =$$

$$z^2 \sum_{k=0}^{\infty} (z(1 - \varepsilon))^k \sum_{j=0}^{\infty} (z(1 - \alpha))^j =$$

$$\frac{z^2}{(1 - z(1 - \varepsilon))(1 - z(1 - \alpha))}$$

Отже:

$$g(z) = \frac{\alpha \varepsilon z^2}{(1 - z(1 - \varepsilon))(1 - z(1 - \alpha))} =$$

$$\frac{\varepsilon \alpha}{\varepsilon - \alpha} \frac{z}{1 - z(1 - \varepsilon)} + \frac{\varepsilon \alpha}{\alpha - \varepsilon} \frac{z}{1 - z(1 - \alpha)} =$$

$$\frac{\alpha \varepsilon}{\varepsilon - \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} z^n ((1 - \varepsilon)^{n-1} - (1 - \alpha)^{n-1})$$

Отже, рівність для g_n доведена. Рівність для h_n випливає зі зв'язку $h_{n,r}$ і $g_{n,r}$.

Знайдемо u_n

$$u(z) = \frac{1}{1-g(z)} = \frac{(1-z(1-\varepsilon))(1-z(1-\alpha))}{(1-z)(1-z(1-\alpha-\varepsilon))} =$$

$$1 + \frac{\varepsilon\alpha z^2}{(1-z)(1-z(1-\varepsilon-\alpha))} = 1 + \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \times$$

$$\left(\frac{z}{1-z} - \frac{z}{1-z(1-\alpha-\varepsilon)} \right) = 1 + \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z^n (1 - (1-\alpha-\varepsilon)^{n-1}))$$

З останньої рівності випливає зображення для u_n , $n \geq 1$

$$m_{\alpha} = \frac{1}{\lim u_n} = \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha\varepsilon}$$

Лема 6. Для довільного $x \in E$, $n \geq 2$

$$\bar{P}_{x,x} \{d_0 = 1, \dots, d_n = 0\} = \sum_{k=0}^{n-2} u_k h_{n-k} + h_n + u_{n-1}$$

Доведення. Зауважимо що:

$$a_n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \delta_x (1-\varepsilon)^{n-1} Q^{n-1} (\varepsilon R_m R_{n,\varepsilon}) \times$$

$$(1-\alpha)^{n-1} T^{(k,n-1)} \alpha V(E) =$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon \alpha (1-\varepsilon)^{n-1} (1-\alpha)^{n-1} = g_n$$

Отже $a_n(x)$ не залежить від x і $(a * u)_n = u_{n+1}$, а тому для довільного x :

$$u_n = \bar{P}_{x,x} \{d_0 = 1, \dots, d_n = 1\}$$

Запишемо розклад за першим (після 0)-останнім входженням у множину $\{d=1\}$ і скористаємось однорідністю (d_n) .

$$\sum_{k=0}^{n-1} \bar{P}_{x,x} \{d_k = 1, d_{k+1} \neq 1, 0 \leq i \leq n-k\} +$$

$$\bar{P}_{x,x} \{d_k \neq 1, k \leq n\} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k h_{n-k} + h_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} u_k h_{n-k} + h_n + u_{n-1}$$

Лема 7. Має місце наступна рівність:

$$\bar{P}_{x,x} \{d_0 = 1, \dots, d_n = 0\} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} u_k h_{n-k} + h_n + u_{n-1} = \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \times$$

$$(1 - (1-\alpha)(1-\alpha-\varepsilon)^{n-1} - \alpha(1-\alpha-\varepsilon)^{n-2})$$

Доведення. Позначимо:

$$C = \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha-\varepsilon}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} u_k h_{n-k} + h_n + u_{n-1} =$$

$$C \left[\sum_{k=1}^{n-1} ((1-\varepsilon)^{n-1-k} - (1-\alpha)^{n-1-k}) - \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n-1} ((1-\varepsilon)^{n-1-k} - (1-\alpha)^{n-1-k})(1-\alpha-\varepsilon)^{k-1} \right] + h_n +$$

$$u_n = \varepsilon \frac{1-\alpha}{\alpha+\varepsilon} (1 - (1-\alpha-\varepsilon)^{n-1}) +$$

$$\frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} (1 - (1-\alpha-\varepsilon)^{n-2}) = \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \times$$

$$(1 - (1-\alpha)(1-\alpha-\varepsilon)^{n-1} - \alpha(1-\alpha-\varepsilon)^{n-2})$$

Доведення терени тепер випливає безпосередньо з лем 3 і 7.

Висновок.

У роботі отримана оцінка стійкості для неоднорідних ланцюгів Маркова за умови міноризації на всьому просторі. На прикладі показано, що порядок оцінки є точним.

Умова міноризації на всьому просторі є досить суттєвою, але вона дала можливість виписати оцінку точно.

Список використаних джерел

1. Kartashov N.V. Strong stable Markov chains // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996. – 138 с.
2. Mayn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and Stochastic Stability // Springer-Verlag. – 1993. – 552 с.
3. Ревьюз Д. Цепи Маркова. – Москва РФФИ, 1997. – 431 с.
4. Lindvall T. Lectrues on coupling method. Dover Publication, 2002. – 249 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2008

УДК 512.552

В. М. Дармосюк

Факторкільця нетерових напівдосконалих кілець

Нехай R радикал Джекобсона черепичного порядку A . Ми довели, що черепичний порядок A є спадковим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є праворядним. Побудовано приклад черепичного порядку A , такого що A/I є праворядним, але A не є напівланцюговим.

Ключові слова: черепичний порядок, сагайдак, напівланцюгові кільця.

darmosiuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1. Сагайдаки напівдосконалих кілець

Метою даної статті є вивчення факторкільць напівланцюгових кілець, які завжди є напівдосконалими і також нетерових з двох сторін напівдосконалих напівдистрибутивних первинних кілець з ненульовим радикалом Джекобсона. Такі кільця згідно з [8, с.263] називаються черепичними порядками.

Скрізь в цій статті ми вважаємо, що A асоціативне кільце з $1 \neq 0$, R його радикал Джекобсона, всі модулі над кільцем A є правими і унітарними. Якщо модуль є лівим, то це зазначається окремо.

Нагадаємо, що модуль називається ланцюговим, якщо гратка його підмодулів є ланцюгом, тобто множина всіх його підмодулів є лінійно впорядкованою відносно включення. Модуль називається напівланцюговим, якщо він розкладається в скінчену пряму суму ланцюгових підмодулів. Кільце називається напівланцюговим справа (напівланцюговим зліва) або праворядним (ліворядним), якщо воно є напівланцюговим справа (зліва) модулем над собою. Напівланцюгове справа та напівланцюгове зліва кільце називається напівланцюговим.

В роботі [10] Накаяма довів наступну теорему.

Теорема 1. (Теорема Накаями) Артінове кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли A/R^2 є напівланцюговим артіновим кільцем.

V. Darmosiuk

Quotient ring of Noetherian semiperfect rings

Let R be the Jacobson radical of a tiled order A . We prove that a tiled order A is hereditary if and only if the quotient ring A/R^2 is right serial. We construct the example of the tiled order A such that A/I is right serial, but A is not serial.

Key words: tiled order, quiver, serial rings.

В.В. Кириченко переніс цю теорему на випадок нетерових напівдосконалих кілець.

Теорема 2. [8, с.313] Напівдосконале нетерове кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли A/R^2 є напівланцюговим артіновим кільцем.

Наведемо приклад побудований Кириченко В.В., який показує, що ця теорема не переноситься на випадок нетерових тільки з однієї сторони кілець.

Приклад 1.

Нехай ϑ дискретно нормоване кільце з класичним кільцем часток D , яке в цьому випадку є тілом. Розглянемо наступне кільце

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha \in \vartheta, \beta \in D \times D, \gamma \in D \right\}.$$

Неважко перевірити, що A є нетеровим справа кільцем, яке не є нетеровим зліва. Позначимо через M єдиний максимальний ідеал в ϑ . Тоді

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_1 \in M, \beta_1 \in D \times D \right\}$$

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 \in M^2, \beta_2 \in D \times D \right\}.$$

Зрозуміло, що $A/R^2 \simeq \vartheta/M^2 \times D$, тобто A/R^2 є прямим добутком двох ланцюгових кілець, а тому напівланцюговим кільцем. Покажемо, що кільце A не є напівланцюговим. Дійсно,

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \vartheta, \beta \in D \times D \right\}$$

є нерозкладним проективним модулем, який містить підмодуль

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in D \times D \right\}.$$

Зрозуміло, що X є прямою сумою двох простих підмодулів. З цього випливає, що модуль P_1 не є ланцюговим, а тому кільце A не є напівланцюговим.

Нагадаємо означення сагайдака нетерового справа напівдосконалого кільця.

Нехай A напівдосконале нетерове справа кільце, $P_1, \dots, P_s$ всі попарно неізоморфні нерозкладні проективні праві A -модулі. Розглянемо проективне накриття $R_i = P_i R$ ($i = 1, \dots, s$), яке позначимо через $P(R_i)$. Нехай $P(R_i) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}}$.

Поставимо у відповідність головним модулям $P_1, \dots, P_s$ точки $1, \dots, s$ в площині і з'єднаємо стрілкою t_{ij} точки i та j . Побудований граф називається правим сагайдаком (або просто сагайдаком) напівдосконалого нетерового справа кільця A і позначається $Q(A)$.

Нехай

$$A_A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$$

розклад напівдосконалого кільця A в пряму суму головних правих A -модулів, і нехай

$$P = P_1 \oplus \dots \oplus P_s, \quad B = \text{End}_A(A).$$

Згідно теореми Моріта категорія правих A -модулів є еквівалентною категорії правих B -модулів. Очевидно, $B/\text{rad} B$ є прямою сумою тїл. Кільце B називається базовим кільцем кільця A .

Означення 1. [8, с.263] Нехай A напівдосконале кільце таке, що A/R^2 є артїновим справа кільцем. Сагайдак кільця A/R^2 називається сагайдаком кільця A і позначається $Q(A)$.

Теорема 3. [7] Наступні умови еквівалентні для напівдосконалого нетерового справа та зліва кільця A :

- 1) кільце A нерозкладне;
- 2) кільце A/R^2 нерозкладне;
- 3) сагайдак кільця A зв'язний.

З прикладу 1 випливає, що сагайдак $Q(A)$ кільця A має наступний вигляд:

$Q(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \right\}$, тобто є незв'язним, а кільце A нерозкладне. З цього отримуємо, що теорема 3 не переноситься на випадок нетерових з однієї сторони напівдосконалих кілець.

Приклад 2.

Нехай A - напівланцюгове кільце, $A \simeq T_n(D)$. Кільце A є нерозкладним. Розглянемо ідеал кільця A :

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} D & \dots & \dots & D \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & D \end{pmatrix}}_{n-k}$$

Зрозуміло, що $I \not\subseteq R^2$. Тоді факторкільце A/I можна розкласти наступним чином $A/I = T_k(D) \times T_{n-k}(D)$. Кільце $T_n(D)$ є артїновим з двох сторін, а тому нетеровим з двох сторін. Ми бачимо, що якщо $I \not\subseteq R^2$, то факторкільце A/I може бути розкладним.

Наступні твердження дають можливість будувати сагайдак напівдосконалого кільця.

Твердження 1. [8, с.265] Нехай $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ розклад напівдосконалого кільця A в пряму суму головних правих A -модулів і нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто $f_i A = P_i^{n_i}$. Тоді радикал Джекобсона R кільця A має двосторонній пірсовський розклад наступного вигляду:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & R_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & R_{ss} \end{pmatrix},$$

де

$$R_{ii} = \text{rad}(f_i A f_i), \quad A_{ij} = f_i A f_j \text{ для } i, j = 1, \dots, s$$

Кільце $f_i A f_i$ є ізоморфним

$$\text{End}_A(P_i^{n_i}) \simeq M_{n_i}(\text{End}(P_i)),$$

де $\text{End}_A(P_i) = \vartheta$ - локальне кільце, згідно теореми 10.3.8 [8]. Згідно твердження 3.4.10 [8],

$$\text{rad} M_{n_i}(\vartheta) = M_{n_i}(\text{rad} \vartheta).$$

Покладемо $U_i = P_i/P_i R$. Оскільки,

$$\bar{A} = A/R = U_1^{n_1} \oplus \dots \oplus U_s^{n_s},$$

ідемпотенти $f_1, \dots, f_s$ є центральними по модулю радикала і всі прості праві A -модулі вичерпуються модулями $U_1, \dots, U_s$. Аналогічно, нехай $V_i = Q_i/RQ_i$, тоді всі прості ліві A -модулі вичерпуються модулями $V_1, \dots, V_s$.

Лема 1. (ануляторна лема) [8, с.265] Нехай

$$1 = f_1 + \dots + f_s$$

канонічний розклад $1 \in A$. Для кожного простого правого A -модуля U_i та для кожного f_j маємо $U_i f_j = \delta_{ij} U_i$, $i, j = 1, \dots, s$. Подібно для кожного простого лівого A -модуля V_i та для кожного f_j маємо

$$f_j V_i = \delta_{ij} V_i, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

Нехай A зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \dots + e_s$ розклад $1 \in A$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів.

Покладемо $U_i = e_i A / e_i R$ та $V_i = A e_i / R e_i$.

Лема 2. (Q -лема) [8, с.266] Простий модуль U_k (відп. V_k) з'являється в прямій сумі розкладу модулів $e_i R / e_i R^2$ (відп. $R e_i / R^2 e_i$) тоді і тільки тоді, коли $e_i R^2 e_k$ (відп. $e_k R^2 e_i$) строго міститься в $e_i R e_k$ (відп. $e_k R e_i$).

2. Факторкільця черепичних порядків

Теорема 4. (Айзенбуд - Гріффітс [5], Айзенбуд - Робсон [6], Фейс [2]) Якщо A - нетерове спадкове первинне кільце, то A/I - артінове напівланцюгове кільце для кожного ненульового ідеала I .

Насправді це справедливо для будь-якого спадкового зліва кільця A з плоскою ін'єктивною оболонкою і для будь-якого його ідеала I , такого, що A/I артінове зліва.

Теорема 5. Якщо I - ненульовий двосторонній ідеал черепичного порядку A , то факторкільце A/I є артіновим напівдистрибутивним кільцем.

Теорема 6. Наступні умови є еквівалентними для черепичного порядку A :

- 1) A спадкове справа і зліва кільце;
- 2) A - напівланцюгове кільце;
- 3) A/R^2 - напівланцюгове кільце;
- 4) A/R^2 - праворядне кільце.

Доведення. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Згідно теореми 12.3.4 [8] будь-яке нетерове первинне зведене кільце A є або тілом, або кільцем $s \times s$ матриць вигляду

$$H_s(\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta & \dots & \vartheta \\ M & \vartheta & \dots & \vartheta \\ M & M & \dots & \vartheta \end{pmatrix},$$

де ϑ дискретно нормоване кільце. Кільце $H_s(\vartheta)$ є нетеровим напівланцюговим первинним спадковим кільцем. Кільце A не може бути тілом тому, що його радикал Джекобсона відмінний від нуля. Оскільки кільце $H_s(\vartheta)$ є спадковим, а спадковість зберігається при Моріта еквівалентності, то теорема 12.3.4 [8] описує черепичні спадкові порядки: будь-який спадковий черепичний порядок еквівалентний в сенсі Моріта кільцю $H_s(\vartheta)$. Зауважемо також, що такі властивості кільця, як нетеровість, первинність, напівланцюговість та наявність ненульового радикала Джекобсона залишаються незмінними при переході до кілець еквівалентних в сенсі Моріта. Тому ми можемо розглядати лише зведені напівланцюгові черепичні порядки. З теореми 12.3.8 [8] випливає, що такі кільця збігаються з кільцями вигляду $H_s(\vartheta)$. Еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (2) доведено.

Доведення імплікації (2) $\Rightarrow$ (3) та (3) $\Rightarrow$ (4) випливає з того, що довільне факторкільце напівланцюгового кільця напівланцюгове, а, крім того, будь-яке напівланцюгове кільце є праворядним кільцем.

(4) $\Leftrightarrow$ (2). За означенням сагайдака напівдосконалого нетерового кільця A маємо: $Q(A) = Q(A/R^2)$. Теорема 14.6.1 [8] стверджує, що $Q(A)$ є сильнов'язним сагайдаком, тобто з кожної його вершини в іншу є шлях. З іншого боку сагайдак $Q(A/R^2)$ є праворядним сагайдаком, тобто з кожної його вершини виходить не більше однієї стрілки. Опис таких сагайдаків дано

в наслідку 10.2.3 [4, с.178]. З нього випливає, що єдиним сильнозв'язним праворядним сагайдаком є простий цикл. Кільце A є напівдистрибутивним, а тому Q - симетричним [8, с.247]. Тому лівий сагайдак кільця A є простим циклом. З теореми 12.3.11 [8] випливає, що кільце A напівланцюгове.

Теорему доведено. $\square$

Квазіфробеніусові кільця характеризуються наступною теоремою:

Теорема 7. [9, с.170] Для двостороннього артінового кільця A наступні умови є еквівалентними:

- 1) A квазіфробеніусове;
- 2) кожен головний A - модуль має єдиний максимальний підмодуль, і якщо два такі мінімальних підмодуля є ізоморфними, тоді вони є відповідними головним A - модулями. Таке ж твердження справедливе для головних лівих A - модулів.

Твердження 2. [9, с.173] Якщо A квазіфробеніусове кільце, радикал якого в квадраті дорівнює нулю, то A є напівланцюговим кільцем.

Доведення. Кожен головний A - модуль (кожен лівий чи правий) має єдиний композиційний ряд. Згідно теореми 5.4.11 [3], кожен головний модуль має єдиний максимальний підмодуль, який за гіпотезою є напівпростим. Але тоді з теореми 4 випливає, що такий модуль є простим і тоді A є напівланцюговим кільцем. $\square$

Теорема 8. Черепичний порядок A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим.

Доведення. Нехай A черепичний порядок і факторкільце A/R^2 квазіфробеніусове, тоді по твердженню 2 факторкільце A/R^2 є напівланцюговим. Кільце A є нерозкладним кільцем, тоді за теоремою 11.1.9 [8, с.268] факторкільце A/R^2 також є нерозкладним. За теоремою 12.1.2 [8, с.301] та наслідком 12.1.3 [8, с.301] сагайдак черепичного порядку є простим циклом. Оскільки черепичний порядок є напівдистрибутивним кільцем, то за теоремою 14.3.3 [8, с.346] лівий сагайдак кільця A отримується з правого поворотом всіх стрілок, тому лівий сагайдак

кільця A також є простим циклом. Тоді за теоремою 12.3.1 [8, с.313] кільце A є напівланцюговим кільцем.

Навпаки, якщо черепичний порядок A є напівланцюговим кільцем, то його лівий та правий сагайдаки є простими циклами. В такому випадку факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим. $\square$

Теорема 9. Черепичний порядок A є спадковим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим.

Теорема 10. Кільце A є спадковим тоді і тільки тоді, коли існує допустимий ідеал I такий, що A/I є квазіфробеніусовим кільцем скінченного типу.

З теореми 6 та теореми Накаями випливає наступне твердження.

Теорема 11. Нехай I - двосторонній ідеал черепичного порядку A , який лежить в R^2 . Кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/I є напівланцюговим артіновим кільцем.

Побудуємо приклад черепичного порядку такого, що A/I праворядне кільце, а черепичний порядок A не є напівланцюговим.

Приклад 3.

Розглянемо черепичний порядок A з матрицею показників

$$\varepsilon(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\varepsilon(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$\varepsilon(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо двосторонній ідеал I з матрицею показників

$$\varepsilon(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кільце A містить наступний ланцюг ідеалів $A \supset R \supset I \supset R^2$ з такими матрицями показників:

$$\varepsilon(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

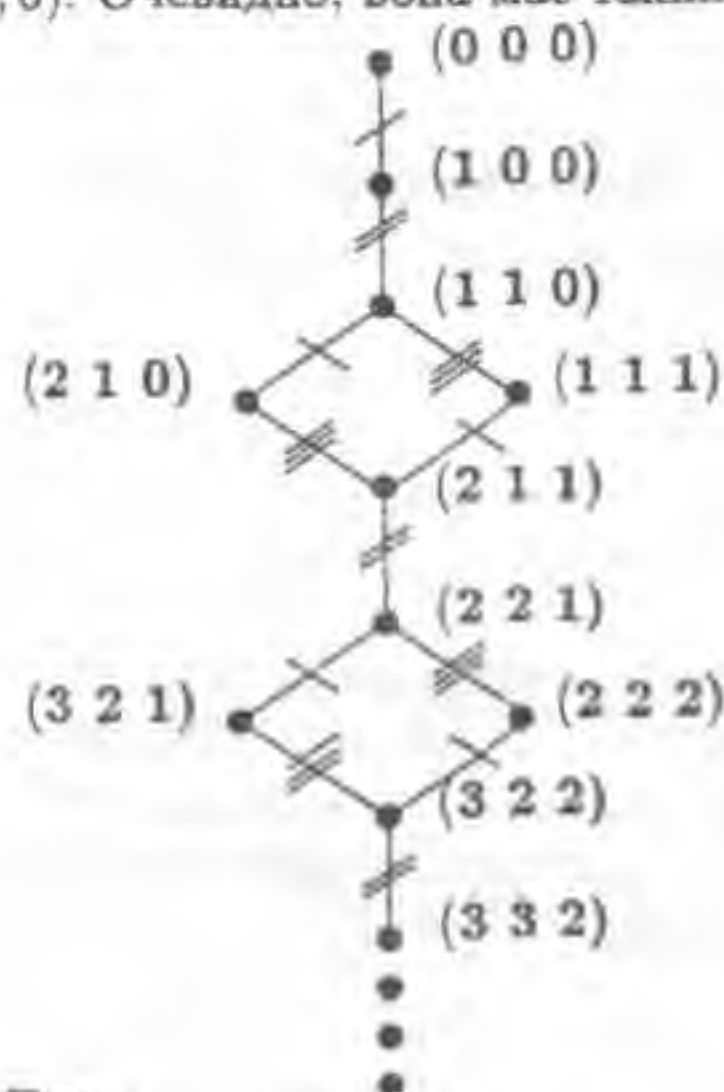
$$\varepsilon(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $I/R^2 = U_3$, де $U_3 = P_3/P_3R$.

Нехай L - гратка всіх підмодулів модуля $(0, 0, 0)$. Очевидно, вона має такий вигляд:



Тому

$$B = A/I = \bar{P}_1 \oplus \bar{P}_2 \oplus \bar{P}_3.$$

Очевидно,

$$l(\bar{P}_1) = l(\bar{P}_2) = l(\bar{P}_3) = 2$$

і всі модулі $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ ланцюгові, де $l(M)$ - довжина артінового та нетерового модуля M .

Звідси випливає, що кільце B праворядне. Зрозуміло, що фактормодуль

$$I/R^2 = U_3, \text{ де } U_3 \simeq P_3/P_3R -$$

простий модуль. Тобто навіть при таких сильних припущеннях на ідеал I з того, що A/I є праворядним та фактормодуль $I/R^2 = U_3$ - простий не випливає, що черепичний порядок A є напівланцюговим.

Висновки

В статті розглянуто приклад розкладності факторкільця A/I нерозкладного напівланцюгового кільця A , за умови, що $I \not\subseteq R^2$. Доведено теорему згідно якої факторкільце A/R^2 спадкового справа і зліва черепичного порядку A є праворядним. Побудовано приклад черепичного порядку A такого, що A/I праворядне кільце, а черепичний порядок не є напівланцюговим.

Список використаних джерел

1. Каш Ф. Модули и кольца. Издательство „Мир“, М., с. 368, 1981.
2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории II. Издательство „Мир“, М., с. 464, 1979.
3. Charles W. Curtis and Irving Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New York, 1962.
4. Drozd Yu.A., Kirichenko V.V. Finite Dimension Algebras. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p.249, 1994.
5. Eisenbud D., Griffith P. Serial rings. J. Algebra, p. 389-400, № 17, 1971.
6. Eisenbud D., Robson J. C. Modules over Dedekind prime rings. J. Algebra, №16, 1970.
7. Gubareni N., Kirichenko V.V. Rings and Modules. -Wydawnictwo Politechniki Czestochowskiej, Czestochowa, p. 306, 2001.
8. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules. - Kluwer Academic Publishers, vol.1, p. 380, 2004.
9. Kirichenko V.V. On quasi-frobenius rings and gorenstein orders. Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 4, p. 171-177, 1980.
10. Nakayama T. Note on uniserial and generalized uniserial rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo, p. 285-289, №16, 1940.

Надійшла до редколегії 30.05.2008

УДК 519.21

Б.М. Кликавка,
А.Я. Оленко, к.ф.-м.н., доцент¹

Асимптотичні властивості вагових функцій

При дослідженні зв'язку поведінки спектральних функцій в довільній точці і певних функціоналів від випадкового поля на нескінченності, важливу роль відіграють вагові функції. У роботі досліджено асимптотичні властивості вагових функцій у Тауберових теоремах для випадкових полів.

Ключові слова: спектральна функція, вагова функція, гіпергеометрична функція, випадкове поле.

B.M. Klykavka,
A.Ya. Olenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.)

Asymptotic properties of weight functions

Weight functions play an important role to study relations of spectral functions behavior in arbitrary points and some functionals of random fields on infinity. Asymptotical property of weight functions in Tauberian theorems for random fields are investigated.

Key Words: spectral function, weight function, hypergeometric function, random field.

E-mail: bklykavka@yahoo.com, a.olenko@latrobe.edu.au

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Найбільш відомі абелеві і тауберові теореми (див., напр. [1]) встановлюють зв'язок асимптотичної поведінки спектральних і кореляційних функцій однієї в нулі а іншої на нескінченності. Для полів з сильною залежністю такий зв'язок асимптотик не завжди існує. Тому у роботах [2] та [3] був запропонований підхід на основі вивчення зв'язку поведінки спектральної функції в нулі і деякого функціоналу від випадкового поля на нескінченності. Цей функціонал відіграв роль кореляційної функції у класичних тауберових теоремах і визначався як дисперсія від середнього випадкового поля по кулі чи сфері.

Нехай $\mathbb{R}^n$ – евклідов простір вимірності $n \geq 2$. $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ – дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$B_n(r) = B_n(|t|) = E\xi(0)\xi(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

$$B_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}} d\Phi(\lambda),$$

де $J_\nu(\lambda)$ – Бесселева функція першого роду.

Щоб описати локальну поведінку спектральної функції $\Phi(\cdot)$ в околі довільної точки $a \in [0, +\infty)$, нас цікавить асимптотична поведінка функції $\Phi_a(\lambda) := \Phi(a + \lambda) - \Phi(a)$ за умови $\lambda \rightarrow +0$.

Позначимо

$$\bar{b}_a(r) := (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n}{2}}(rx)}{(rx)^{\frac{n}{2}}} d\Phi_a(x).$$

У роботі [4] отримано зображення інтегрального перетворення $\bar{b}_a(r)$ у термінах дисперсії зважених інтегралів від випадкових полів.

Терема [4]. Існує така дійснозначна функція $g_{n,r,a}(\cdot)$, що

$$\bar{b}_a(r) = D \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_{n,r,a}(|t|) \xi(t) dt \right]$$

Причому

$$g_{n,r,a}(|t|) = \frac{1}{|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty (\lambda + a)^{n/2} \times \\ \times J_{\frac{n}{2}-1}(|t|(\lambda + a)) \frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}} d\lambda, \quad |t| \neq r.$$

¹Research supported by La Trobe University Research Grant 501821

У випадку $n > 2$ функція $g_{n,r,a}(|t|)$ може бути визначена як сума функціонального ряду (див. [4], Теорема 6):

$$g_{n,r,a}(|t|) = \frac{a^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n-2}{2})}{2^{\frac{n}{2}} |t|^{\frac{n}{2}}} \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) C_{n+m-3}^m \times J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{2}{a}\right)^k \Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right) \times \begin{cases} {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+1; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right), & |t| > r; \\ {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right), & |t| < r. \end{cases} \quad (1)$$

У випадку $n = 2$ функція $g_{2,r,a}(|t|)$ може бути визначена як сума такого функціонального ряду (див. [5]):

$$g_{2,r,a}(|t|) = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m J_m(|t|a) \times \begin{cases} \frac{ar {}_2F_1\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1-m}{2}; 2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)}{2|t|} + \frac{rm {}_2F_1\left(\frac{m}{2}+1, 1-\frac{m}{2}; 2; \left(\frac{r}{|t|}\right)^2\right)}{2|t|^2}, & |t| > r; \\ \frac{a|t|^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}; 1+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{2r^m m! \Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) {}_2F_1\left(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}; 1+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{|t|^{-m} r^{m+1} m! \Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)}, & |t| < r \end{cases} \quad (2)$$

де

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 0, \\ 2, & \text{якщо } m > 0, \end{cases}$$

і вважаємо, що $\Gamma^{-1}(k) = 0$, якщо $k = 0, -1, -2, \dots$

Для подальшого дослідження дисперсії зв'язаних інтегралів від випадкових полів і отримання граничних теорем нам потрібно дослідити асимптотичні властивості вагових функцій $g_{n,r,a}(|t|)$.

Надалі використовуватимемо позначення C для сталих, точні значення яких не є суттєвими у доведенні.

2 Асимптотична властивість вагових функцій

За Леммою 9.2 [7] відомо, що $g_{n,r,a}(|t|) \rightarrow 0$, при $r \rightarrow \infty$. Для вивчення асимптотичних

властивостей функцій типу $r^a \cdot g_{n,r,a}(|t|)$ використаємо зображення $g_{n,r,a}(|t|)$ у вигляді суми нескінченного функціонального ряду.

Теорема. При $n \geq 2, a \geq 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r g_{n,r,a}(|t|) = \frac{\sqrt{\pi} a^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a)}{|t|^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Доведення. Щоб дослідити асимптотичну поведінку функції $r g_{n,r,a}(|t|)$ при $r \rightarrow \infty$ у зображенні (1) нас цікавлять лише випадок $|t| < r$.

За визначенням гіпергеометричної функції

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l (b)_l}{(c)_l l!} z^l, \quad (3)$$

$(a)_0 = 1$ і $(a)_l = a(a+1)\dots(a+l-1)$, якщо $l \in \mathbb{N}$, для тих значень аргумента, для яких ряд (3) збіжний і як аналітичне продовження на інші значення аргументів (із комплексної площини) якщо таке продовження існує.

У нашому випадку функція ${}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ може бути коректно визначена за формулою (3)

$${}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2}+m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_l l!} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}. \quad (4)$$

Дійсно, зауважимо, що у правій частині рівності (4):

$$\frac{m+k+1}{2} > 0, \quad \frac{n}{2} + m > 0$$

для всіх допустимих значень $m \geq 0, n > 2, k = \overline{0, n-1}$.

У випадку, коли $m+k+1-n > 0$ використаємо результат із §2.1.1, [9]: при $\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2} \neq \{0, -1, -2, \dots\}$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2}+m\right)_l l!} &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)} l^{k-n} [1 + O(l^{-1})], \end{aligned} \quad (5)$$

і ряд (4) абсолютно збіжний, бо $|t| < r$.

Якщо $m+k+1-n < 0$ і непарне, то знову ж таки за §2.1.1, [9] можемо використати

асимптотику (5), і ряд (4) абсолютно збіжний за формулою Стірлінга для $|t| < r$.

Розглянемо випадок, коли $m + k + 1 - n \leq 0$ і $m + k + 1 - n$ - парне. Тоді функція ${}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2} + m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)$ перетворюється у многочлен степені $n - m - k - 1$:

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-m-k-1}{2}} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2} + m\right)_l l!} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}.$$

Таким чином при $|t| < r$ ряд, визначений у (4) є абсолютно збіжним для всіх допустимих значень m, n та k .

Оскільки степеневий ряд (4) збіжний при $|t| < r$, то можемо перейти до границі почленно при $r \rightarrow \infty$. У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2} + m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right) = \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_l \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_l}{\left(\frac{n}{2} + m\right)_l l!} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} \rightarrow \\ \frac{\left(\frac{m+k+1}{2}\right)_0 \left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)_0}{\left(\frac{n}{2} + m\right)_0} = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

при $r \rightarrow \infty$.

Для знаходження $\lim_{r \rightarrow \infty} r g_{n, \Gamma(a)}(|t|)$ перейдемо до границі почленно у зображенні (1), випадок $|t| < r$.

Для цього покажемо, що ряд у правій частині (1) збігається рівномірно як функція r .

Надалі будемо використовувати формулу Стірлінга (див. §540 [10]) для Гамма функцій:

$$\Gamma(k+1) = \sqrt{2\pi k} k^{\frac{1}{2}-k} e^{-k} e^{\theta_k/k},$$

де $\theta_k \in (0, \frac{1}{12})$.

За формулою Стірлінга

$$\begin{aligned} C_{n+m-3}^m = \frac{(n+m-3)!}{m!(n-3)!} = \frac{\Gamma(n+m-2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-2)} \sim \\ \sim \frac{(n+m-3)^{n+m-\frac{3}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(n-2)} \sim C \cdot m^{n-3}, \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$.

За оцінкою із §3.1 [8] для функції Бесселя і

$$\begin{aligned} |J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a)| &\leq \frac{\sqrt{\pi}(|t|a)^{\frac{n-2}{2}+m}}{2^{\frac{n-2}{2}+m}\Gamma(\frac{n-2}{2}+m)} \sim \\ &\sim C_1 \cdot \frac{(|t|a)^m}{2^m \left(\frac{n}{2} + m - 2\right)^{m+\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}} \sim \\ &\sim C_2 \cdot \frac{(|t|a)^m}{2^m m^{m+\frac{n-3}{2}}}, \end{aligned} \quad (7)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Із зображення (4) та формули (5) випливає

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2} + m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)} = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right) l^{k-n}}{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)} \times \\ \times (1 + O(l^{-1})) \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)} + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{k-n}(1+O(l^{-1}))}{\Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l}. \end{aligned}$$

Оскільки нас цікавить поведінка членів ряду при $m \rightarrow \infty$, то ми використовуємо (4) і (5) і не розглядаємо випадок $m + k + 1 - n \leq 0$.

Скориставшись тотожністю

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

отримуємо таке зображення:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\pi \frac{n-m-k+1}{2}\right)}{\pi} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} l^{k-n} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} (1 + O(l^{-1})) = \\ = \frac{\sin\left(\pi \frac{n-m-k+1}{2}\right)}{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} l^{k-n} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{2l} (1 + O(l^{-1})) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

За формулою Стірлінга, перший доданок

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+k+1-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)} \sim \\ \sim C \cdot \frac{\left(\frac{m+k-1}{2}\right)^{\frac{m+k}{2}} \left(\frac{m+k-1-n}{2}\right)^{\frac{m+k-n}{2}}}{\left(\frac{n}{2} + m - 1\right)^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}}} \sim \\ \sim C \cdot \frac{m^{k-n+\frac{1}{2}}}{2^m}, \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$.

Другий доданок у (8) - це збіжний ряд, який взагалі від m не залежить.

Підсумовуючи вищесказане отримуємо

$$\begin{aligned} & (-1)^m \left(\frac{n}{2} + m - 1 \right) C_{n+m-3}^m \times \\ & \times J_{\frac{n-2}{2}+m}(|t|a) \Gamma\left(\frac{m+k+1}{2}\right) |t|^{m+1} \times \\ & \times \frac{{}_2F_1\left(\frac{m+k+1}{2}, \frac{m+k+1-n}{2}; \frac{n}{2} + m; \left(\frac{|t|}{r}\right)^2\right)}{r^{m+k} \Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{n-m-k+1}{2}\right)} \quad (9) \\ & = O\left(m^{n-2} \frac{(|t|a)^m |t|^{m+1}}{2^m m^{m+\frac{n-3}{2}} r^{m+k}} \left(\frac{m^{k-n+\frac{1}{2}}}{2^m} + 1\right)\right) \\ & = O\left(\frac{(|t|a)^m |t|^{m+1}}{2^m r^{m+k} m^{m-\frac{n-1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

оскільки $k \leq n-1$.

Тому ряд у зображенні (1), випадок $|t| < r$, збігається рівномірно і можемо перейти до границі почленно (див. [10], §433, Теорема 4).

Із (9) та (1) випливає, що лише член ряду з $m = k = 0$ має ненульову границю, якщо $r \rightarrow \infty$.

Застосувавши (6) у результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r g_{n,r,a}(|t|) &= \frac{a^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}} |t|^{n/2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \\ &\times J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{|t|}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} a^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(|t|a)}{|t|^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

що і доводить наше твердження для $n > 2$.

Застосувавши повністю аналогічні міркування до зображення (2) отримаємо твердження теореми і для випадку $n = 2$. $\square$

3 Висновки

У роботі досліджено асимптотичну поведінку вагових функцій $g_{n,r,a}(|t|)$ при $r \rightarrow \infty$. Показано, що швидкість збіжності до нуля $g_{n,r,a}(|t|)$ еквівалентна C/r , $r \rightarrow \infty$. Одержані результати будуть використані при доведенні граничних теорем для вагових функціоналів від випадкових полів.

Список використаних джерел

1. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. – Cambridge university press, 1989.
2. Leonenko N.N., Olenko A.Ya. Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields. // Random Oper. Stoch. Eqs. – 1993. – 1, N 1. – P. 57-67.
3. Olenko A.Ya. Tauberian and Abelian theorems for strongly dependent random fields. // Ukrainian Math. Journal. – 1996. – 48, N 3. – P. 368-383.
4. Оленко А.Я. Тауберова теорема для полів з OR спектром II. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006. – 74. – С. 81-97.
5. Оленко А.Я., Кликавка Б.М. Тауберова теорема для полів на площині. // Доповіді Національної Академії Наук України. – 2006. – 6. – С. 19-25.
6. Olenko A. Ya., Klykavka B. M. Some properties of weight functions in Tauberian theorems I // Theory of Stoch. Proc. – 2006. – Vol. 12 (28). – № 3-4. – С. 123-136.
7. Кликавка Б.М. Зображення і властивості вагових функцій у Тауберових теоремах. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2007. – 77. – С. 64-81.
8. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. – Т.1. – М., 1949.
9. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. – New York: Mc Grow-Hill, – Vol. 1, 1953.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, – Т. 2, 1970.

Надійшла до редколегії 29.12.2008

Про будову груп, у яких система усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля

Вивчаються узагальнено радикальні групи, у яких система усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля.

Ключові слова: група, нормальна підгрупа, вимірність Крулля, узагальнено радикальна група.

On the structure of groups, in which the family of all not normal subgroups has the Krull dimension

We study the generalized radical groups, in which the family of all not normal subgroups has the Krull dimension.

Key Words: groups, normal subgroups, Krull dimension, generalized radical group.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В.В.

Вступ

Нехай A – частково впорядкована множина. Для елементів $a, b \in A$ покладемо $[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$. Відхилення A (див., напр., [1]), у позначеннях $\text{dev}(A)$, визначається за таким правилом. Якщо порядок на множині A є тривіальним, то покладемо $\text{dev}(A) = -\infty$. Якщо порядок на множині A має нетривіальний порядок і A задовольняє умову мінімальності, то покладемо $\text{dev}(A) = 0$. Далі $\text{dev}(A) = \alpha$ для порядкового числа α , якщо $\text{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ та для кожного спадяючого ланцюжка $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ елементів A усі, за винятком скінченної множини інтервалів, замкнені інтервали $[a_n, a_{n+1}]$ мають відхилення, яке є строго меншим, ніж α . Нехай тепер G – група та S – деяка система її підгруп. Тоді S є частково впорядкованою множиною за включенням. Якщо впорядкована множина S має відхилення, то будемо говорити, що система S має вимірність Крулля та будемо розуміти під нею відхилення частково впорядкованої множини S .

У роботах [2 – 4] вивчалися групи, у яких система $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ (відповідно $\mathcal{L}_{\text{non-no}}(G)$) всіх підгруп, що не є майже нормальними (відповідно наближено нормальними), має вимірність Крулля. У даній роботі вивчається структура груп, у яких система $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ усіх ненормальних підгруп має вимірність Крулля. Ми не можемо отримати теорему про цю будову як наслідок з результатів робіт [2 – 4], тому що ненормальна підгрупа може виявитись і майже нормальною, і наближено нормальною. Інакше кажучи, з того факту, що система усіх ненормальних підгруп групи має вимірність Крулля, не випливає, що системи усіх підгруп групи, що не є майже нормальними або наближено нормальними, мають вимірність Крулля.

Лема 1. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $H \cap K \leq L$;
- (iii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$ (звідси випливає зокрема, що підгрупи K, L також будуть H -інваріантними);

(iv) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде нормальною в G .

Доведення леми майже дослівно повторює усі ті аргументи, які були використані при доведенні леми 1.2 із [4] з використанням леми 1.1 із [4] і того очевидного факту, що перетин двох нормальних підгруп також є нормальною підгрупою.

Наслідок 1. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та K_λ є H -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K, L також будуть H -інваріантними;

(iii) підмножина $\Lambda \cap \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ є нескінченною.

Тоді підгрупа HL буде нормальною в G .

Доведення. Покладемо $M = \Lambda \cap \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ та нехай $T/L = \times_{\lambda \in M} K_\lambda/L$. Застосувавши тепер лему 1 до підгруп H, T, L , отримаємо необхідний результат.

Наслідок 2. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-norm}}(G)$. Припустимо, що L, K, H – підгрупи G , що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ та $K_\lambda \in H$ -інваріантною підгрупою для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, зокрема, підгрупи K , L також будуть H -інваріантними;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді для будь-якого елемента $h \in H$ підгрупа $\langle h \rangle L$ буде нормальною в G .

Доведення. Оскільки підгрупа $K_\lambda \in H$ -інваріантною, то вона буде і $\langle h \rangle$ -інваріантною. Очевидно, що підмножина $\text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ є скінченною, а тому різниця $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(\langle h \rangle L/L \cap K/L)$ буде нескінченною, так що є можливим застосувати зараз наслідок 1.

Наслідок 3. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-abel}}(G)$. Припустимо, що K, H – підгрупи G що задовольняють наступні умови:

- (i) $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ де K_λ – неодиначна H -інваріантна підгрупа для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (ii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді кожна підгрупа H (і зокрема сама підгрупа H) буде нормальною в усій групі G .

Доведення. Дійсно, з наслідку 2 отримаємо, що для довільного елемента $h \in H$ циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ буде нормальною в G . Звідси і буде випливати, що кожна підгрупа H є нормальною.

Наслідок 4. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-abel}}(G)$. Якщо K – така підгрупа G , що $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ де підгрупи K_λ є неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то кожна підгрупа K (і зокрема сама підгрупа K) буде нормальною в усій групі G .

Наслідок 5. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-abel}}(G)$. Припустимо, що L, K – підгрупи G що задовольняють наступні умови:

- (i) L є нормальною підгрупою в K ;
- (ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, де $K_\lambda \neq L$ для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) множина індексів Λ є нескінченною.

Тоді підгрупи K, L будуть нормальними в G .

Доведення. З того факту, що множина індексів Λ є нескінченною, випливає існування в ній таких нескінченних підмножин Δ, Σ , що $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Покладемо $U = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, $V = \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$, тоді є очевидними рівності $K = UV$ і $U \cap V = L$. Більш того, будемо мати

$K/U \cong \times_{\lambda \in \Sigma} K_\lambda/L$ та $K/V \cong \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$. З лемми 1 отримуємо, що підгрупи U, V будуть нормальними. Оскільки перетин двох нормальних підгруп та підгрупа, ними породжена, також будуть нормальними підгрупами, то наше твердження і буде випливати з рівностей $K = UV$ и $U \cap V = L$.

Наслідок 6. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-abel}}(G)$. Якщо група G містить у собі підгрупу $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ де K_λ є неодиначними для всіх індексів $\lambda \in \Lambda$, а також множина індексів Λ є нескінченною, то кожна підгрупа із G буде нормальною, тобто G є дедекіндовою групою.

Доведення. Нехай h – довільний елемент підгрупи G . З наслідку 4 випливає, що кожна підгрупа K буде нормальною в G . З наслідку 2 отримаємо тепер, що циклічна підгрупа $\langle h \rangle$ повинна бути нормальною в G . Звідси тривіально випливає, що кожна підгрупа G буде нормальною.

Наслідок 7. Нехай G – група, для якої існує вимірність Крулля $K_{\text{non-abel}}(G)$. Якщо група G містить у собі абелеву підгрупу A , яка є прямим добутком нескінченної множини неодиначних циклічних груп, то G буде дедекіндовою групою.

Теорема. Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є нормальними, має вимірність Крулля, то або кожна підгрупа G буде нормальною, або G буде майже розв'язною мінімаксною групою.

Доведення. Припустимо, що група G не є дедекіндовою. Вибираємо в групі G довільну абелеву підгрупу A та позначимо через T максимальну періодичну підгрупу A . Якщо підгрупа T не є черніковською, то, очевидно, вона містить у собі підгрупу, яка є прямим добутком нескінченної множини скінченних циклічних підгруп. Тоді з наслідку 7 отримаємо, що G буде дедекіндовою групою. Зокрема, якщо група G буде періодичною, то або вона дедекіндова, або кожна її абелева підгрупа є черніковською. В останньому випадку, враховуючи той факт, що періодична узагальнено радикальна група є локально скінченною, з теореми В.П. Шункова [5] отримаємо, що група G є черніковською. Припустимо тепер, що G не є періодичною. У цьому випадку можна вважати, що і A не є періодичною. Вибираємо в A вільну абелеву підгрупу C , для якої фактор-група A/C вже буде періодичною. Якщо підгрупа C має нескінченний θ -ранг, то з наслідку 7 отримаємо, що G буде дедекіндовою групою. Як наступний крок розглянемо ситуацію, коли C має скінченний θ -ранг. Припус-

тимо, що підгрупа A не є мінімаксною. Покладемо $E = C^p$. Позначимо через P множину всіх простих чисел. Для довільного простого p розглянемо фактор-групу A/E^p . Той факт, що A не є мінімаксною, означає, що мінімаксною не буде також і фактор-група A/E^p . Оскільки вона є періодичною, це, у свою чергу, означає, що множина $\Pi(A/E^p)$ мусить бути нескінченною. Тоді фактор-група A/E^p містить у собі підгрупу, що розкладається у прямий добуток нескінченної множини неодиначних циклічних підгруп. З наслідку 5 випливає, що підгрупа E^p буде нормальною в усій групі G . Тепер з наслідку 7 отримаємо, що G/E^p буде дедекіндовою групою. За вибором цієї фактор-групи, вона має елементи, порядок яких дорівнює 8. Якщо зважити на ту обставину, що неабелева дедекіндова група не має елементів порядку 8, то це означає, що G/E^p буде абелевою. Слід підкреслити, що це є вірним для кожного простого числа p . Оскільки E є вільною абелевою групою, то $\bigcap_{p \in P} E^p = \langle 1 \rangle$. Застосувавши тепер класичну теорему Ремака, отримаємо вкладання

$$G \cong \prod_{p \in P} G/E^p,$$

яке, у свою чергу, доводить, що G буде абелевою групою.

Тепер залишилося розглянути випадок, коли всі абелеві підгрупи групи G будуть мінімаксними. Позначимо через R – максимальну нормальну радикальну підгрупу G . З результатів робіт [6, 7] отримаємо, що R буде розв'язною мінімаксною групою. Припустимо, що $R \neq G$.

Нехай L/R – максимальна нормальна локально скінченна підгрупа G/R . Якщо L/R містить у собі абелеву підгрупу, яка не є черніковською, то, як ми бачили вище, наслідок 7 забезпечує той факт, що G/R є дедекіндовою. Але в цьому випадку є нільпотентною групою, клас нільпотентності якої не перевищує число 2. Звідси випливає, що $G = R$, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, на черзі постає розгляд випадку, коли всі абелеві підгрупи L/R будуть черніковськими. У цьому випадку група L/R також буде черніковською за теоремою В.П. Шункова [5]. Знову з вибору підгруп L, R , впливає скінченність L/R . Припустимо, що фактор-група G/R є нескінченною та позначимо через U/L локально нільпотентний радикал G/L . З наших умов випливає, що U/L буде вільною від скруту локально нільпотентною підгрупою. Скінченність L/R тягне за собою скінченність індексу $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Звідси випливає співвідношення $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Враховуючи той факт, що G/R не може містити у собі

нормальних локально нільпотентних підгруп, отримуємо рівність $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Але ж у такому випадку

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Ці співвідношення свідчать про той факт, що V/R буде неодиначною нормальною локально нільпотентною підгрупою G/R , а це суперечить властивостям, що має фактор-група G/R . Отримане протиріччя доводить її скінченність, а з цим і всю теорему.

Наслідок 8. Нехай G – узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є нормальними, то або кожна підгрупа G буде нормальною, або G буде майже розв'язною мінімаксною групою.

Доведення. Дійсно, вище вже було відмічено той факт, що в групі G , яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є нормальними, система підгруп, що не є нормальними, має вимірність Крулля, яка не перевищує 1.

Для локально майже розв'язних груп аналогічний результат був доведений в роботі [8].

Список використаної літератури

1. McConnell J.C., Robson J.C. *Noncommutative noetherian rings*. – New York: Wiley, 1987. – 597 p.
2. Пискун М.М. О применении некоторых теоретико-кольцевых понятий для систем подгрупп группы // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2007. – Вип. № 3. – С. 49–55.
3. Пискун М.М. Про застосування деяких понять теорії кілець для вивчення впливу систем підгруп групи // Доп. НАН України. – 2008. – №1. – С. 14–16.
4. Семко Н.Н., Пискун М.М. О применении некоторых понятий теории колец для изучения влияния систем подгрупп группы // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, № 5. – С. 657–668.
5. Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – 9, № 5. – С. 579–615.
6. Baer R. *Polyminimaxgruppen* // Math. Annalen. – 1968. – 175, № 1. – S. 1–43.
7. Зайцев Д.И. О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб. – 1969. – 78, № 3. – С. 323–331.
8. Курдаченко Л.А., Горенский В.Э. О группах со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 2. – С. 1705–1709.

УДК 519.9

Ірина Г. Сімонова, к.ф.-м.н., доцент

Локально табличні розширення довідностно-інтуїціоністської логіки

У статті отримано критерій локальної табличності логік із ZI^Δ . Показано, що єдиною передлокально-табличною логікою в решітці ZI^Δ являється логіка LC^Δ .

Ключові слова: решітка розширень довідностно-інтуїціоністської логіки, локальна табличність, передлокальна табличність.

E-mail: gayanovna@mail.ru

Статтю представив професор Кириченко В.В.

Довідностно-інтуїціоністське обчислення було сформульовано в [1] як аксіоматизація одніменної логіки. I^Δ визначається на основі пропозиціональної мови сигнатури

$$\& \vee \supset \neg \Delta \quad (I)$$

і змінних $p, q, r, \dots$ (можливо, з індексами), де знак Δ означає унарну пропозиціональну зв'язку.

Аксіомами I^Δ являються аксіоми інтуїціоністського пропозиціонального обчислення I [2], а також наступні три аксіоми: $(p \supset \Delta p)$, $((\Delta p \supset p) \supset p)$, $((p \supset q) \supset p) \supset (\Delta q \supset p)$.

Правилами виводу служать звичайні правила одночасної підстановки та modus ponens.

Під розширенням довідностно-інтуїціоністської логіки ми будемо розуміти множину формул сигнатури (I) , яка містить всі аксіоми I^Δ та замкнута відносно всіх її правил виводу. Сукупність всіх розширень довідностно-інтуїціоністської логіки, як частково-впорядкована множина відносно теоретико-множинного включення утворює [3] повну решітку ZI^Δ з одиницею (абсолютно суперечлива логіка).

Алгебричною інтерпретацією для I^Δ слугують Δ -псевдобулеві алгебри (Δ -ПБА) [4], тобто універсальні алгебри виду $\mathcal{A} = \langle A, \&, \vee, \supset, \neg, \Delta \rangle$, де $\langle A, \&, \vee, \supset, \neg, \Delta \rangle$ псевдобулева алгебра (ПБА) [5], а для унарної операції Δ справедливі наступні тотожності: $x \leq \Delta x$, $\Delta x \supset x = x$, $\Delta x \leq (y \vee (y \supset x))$, де $x \leq y$ означає $x \& y = x$. Найбільший елемент решітки позначається 1, найменший 0.

Під фільтром Δ -ПБА $\mathcal{A}$ будемо розуміти фільтр тої ПБА [5], яку можна отримати з $\mathcal{A}$, якщо на ній ігнорувати операцію Δ .

Система фільтрів S Δ -ПБА $\mathcal{A}$ називається

G. Simonova, Cand. Sci. (Phys. – Math.), associate professor

Local-tabular expansions of provable-intuitionistic logic

In the article we have received the criteria of local tabularity of logics from ZI^Δ and showed, that in the lattice ZI^Δ the unique prelocal-tabular logic is LC^Δ logic.

Keywords: a lattice of expansions of provable-intuitionistic logic, local tabularity, prelocal tabularity.

повною, якщо $\{1\} \in S$ і $\bigcap_{\phi \in S} \phi = \{1\}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ називається підпрямо-нерозкладною, якщо вона має повну систему фільтрів.

Кожній логіці $\ell \in ZI^\Delta$ взаємно-однозначно відповідає багатовид M_ℓ Δ -псевдобулевих алгебр, який визначається сукупністю тотожностей $\{A=1 \mid A \in \ell\}$. Якщо M багатовид Δ -псевдобулевих алгебр, то відповідна йому логіка $\ell(M) = \{A \mid M \models A=1\}$.

Домовимося про подальші позначення. Формулу $\Delta(\Delta \dots (\Delta p) \dots)$ будемо писати у вигляді

$\Delta^n p$. Результат заміни всіх входжень формули C в формулу A на формулу B будемо позначати $A[C/B]$. Логічною довжиною формули будемо називати число символів сигнатури (I) , які входять до цієї формули. Еквіваленція $A \sim B$ формул A та B позначає формулу $((A \supset B) \& (B \supset A))$.

Логіка $\ell \in ZI^\Delta$ називається локально-табличною, якщо відповідний їй багатовид Δ -псевдобулевих алгебр являється локально-скінченним, тобто будь-яка скінченно-породжувана алгебра в цьому багатовиді скінченна. Логіка ℓ називається передлокально-табличною, якщо вона не являється локально-табличною, але всяке її власне розширення є локально-табличним.

Домовимося збіднення Δ -ПБА $\mathcal{A}^\Delta$ до ПБА позначати $\mathcal{A}$, а логіки відповідних алгебр $\ell(\mathcal{A}^\Delta)$ та $\ell(\mathcal{A})$. Символи C_n^Δ та C^Δ позначають Δ -ПБА, які являють собою ланцюги потужності n і типу $\omega+1$ відповідно. Логіку $I + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$ будемо позначати символом LC , а логіку $I^\Delta + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$ символом

LC^Δ . Для кожної логіки $\ell \in ZI^\Delta$ визначимо множину формул $\nabla(\ell)$, як асерторичний фрагмент логіки ℓ [6], тобто $\nabla(\ell)$ – множина формул логіки ℓ , які не містять зв'язки Δ .

Кузнєцов А.В. переніс розбиття решітки ZI на шари за Хосої на решітку ZI^Δ , запропонувавши вважати, що логіка $\ell \in ZI^\Delta$ лежить в n -му шарі (позначимо: $\ell \in s_n^\Delta$) тоді і тільки тоді, коли $\nabla(\ell)$ належить n -му шару Хосої [6], тобто $\nabla(\ell) + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = LC_{n+1}$.

Будемо говорити, що логіка $\ell \in ZI^\Delta$ належить граничному шару (позначення: $\ell \in s_\omega^\Delta$), якщо для будь-якого натурального n , $\ell \in s_n^\Delta$.

Основним результатом даної статті буде встановлення того факту, що логіка $\ell \in ZI^\Delta$ буде локально-табличною тоді і тільки тоді, коли ℓ належить скінченному шару решітки ZI^Δ , а оскільки, як буде показано нижче, граничний шар має найменший елемент – логіку LC^Δ , яка являється єдиною передлокально-табличною в решітці LC^Δ , то звідси впливає критерій локальної табличності для розширень довідностно-інтуїціоністської логіки.

Розглянемо послідовність формул A_n ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= p_0, \\ \dots \\ A_{n+1} &= (((p_{n+1} \supset A_n) \supset p_{n+1}) \supset p_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Скористаємося наступною властивістю формул цієї послідовності.

Твердження 1. [7]. Для кожної логіки $\ell \in ZI$ справедливо:

$$\begin{aligned} \ell \in s_0 &\Leftrightarrow A_0 \in \ell. \\ \ell \in s_n &\Leftrightarrow A_n \in \ell \text{ та } A_{n-1} \in \ell \quad (1 \leq n < \omega). \\ \ell \in s_\omega &\Leftrightarrow \text{для кожного } n, A_n \in \ell. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Оскільки формули виду $A_n \supset A_{n+1}$ виводжувальні в I , то для $\ell \in ZI$ виконується умова: якщо $A_n \in \ell$, то $A_k \in \ell$ для кожного $k \leq n$. Оскільки на кожній Δ -ПБА $\mathcal{A}^\Delta$ справедлива тотожність $x \leq \Delta x$, то існує взаємно однозначна відповідність між конгруенціями цієї алгебри і фільтрами її збіднення $\mathcal{A}$. Тому Δ -ПБА $\mathcal{A}^\Delta$ буде підпрямо нерозкладна тоді і тільки тоді, коли множина $\mathcal{A} \setminus \{1\}$ матиме найбільший елемент.

Зауваження 2. Для Δ -ПБА, як і для ПБА, фактор-алгебра по головному фільтру, який породжений деяким елементом a , ізоморфна як решітка ідеалу, який породжений тим же елементом a . При цьому результат застосування операції Δ в цій решітці до елементу x дорівнює $a \& \Delta x$. Це дозволяє зробити висновок щодо включення $\ell(\mathcal{A}^\Delta) \subseteq \ell(C_{n+1}^\Delta) \subseteq \ell(C_n^\Delta)$, де $\mathcal{A}^\Delta$ нескінченна ланцюгова Δ -ПБА, а властивості послідовності формул (2) з твердження 1 доводять строгі включення $\ell(\mathcal{A}^\Delta) \subset \ell(C_{n+1}^\Delta) \subset \ell(C_n^\Delta)$.

З вищесказаного та леми 7 [8] випливає, що для кожної формули A обчислення I^Δ $LC^\Delta + A = \ell(C_n^\Delta)$ рівносильно

$$A \in \ell(C_n^\Delta) \setminus \ell(C_{n+1}^\Delta) \text{ і } LC^\Delta = \bigcap_{1 \leq n < \omega} \ell(C_n^\Delta).$$

Лема 1 Логіки LC^Δ і $\ell(C^\Delta)$ співпадають.

Доведення. Операція Δ на C^Δ визначається так: для $x \in \omega$, $\Delta x = y$, де y покриває x і $\Delta 1 = 1$. Звідси $LC^\Delta \subseteq \ell(C^\Delta)$. Припустимо, що $A \in \ell(C^\Delta) \setminus LC^\Delta$. Тоді A неправильна на деякій підпрямо-нерозкладній алгебрі $\mathcal{A}^\Delta \in M_{LC^\Delta}$. Так як $\mathcal{A}^\Delta$ підпрямо-нерозкладна і на ній формула $((p \supset q) \vee (q \supset p))$ правильна, то $\mathcal{A}^\Delta$ ланцюг. З леми 7 [8] випливає, що A неправильна на деякій скінченній C_n^Δ . Таким чином, враховуючи зауваження 2, $A \notin \ell(C^\Delta)$. Маємо протиріччя.

Лема 2. Для кожної логіки $\ell \in ZI^\Delta$, якщо $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \neq LC^\Delta$, то для єдиного натурального n , $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = LC_n^\Delta$.

Доведення. Нехай

$$\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \neq LC^\Delta, \text{ тоді } LC^\Delta \subset \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)).$$

Очевидно, що для будь-якої логіки $Z \in I^\Delta$,

$$\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \subseteq \ell(C_1^\Delta). \text{ В силу зауваження 2, } LC^\Delta = \bigcap_{1 \leq n < \omega} \ell(C_n^\Delta).$$

На основі вищесказаного та зауваження 2 про строгі включення $\ell(C_{n+1}^\Delta) \subset \ell(C_n^\Delta)$ можна зробити наступний висновок. Існує таке єдине $n \in N$, що $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \subseteq \ell(C_n^\Delta)$ і $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \not\subseteq \ell(C_{n+1}^\Delta)$, тобто існує формула $A \in \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$ така, що $A \in \ell(C_n^\Delta) \setminus \ell(C_{n+1}^\Delta)$. Згідно зауваження 2,

$LC^{\Delta} + A = \ell(C_n^{\Delta})$ Тоді маємо
 $\ell(C_n^{\Delta}) = LC^{\Delta} + A \subseteq \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \subseteq$
 $\subseteq \ell(C_n^{\Delta})$. Звідки $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = \ell(C_n^{\Delta})$.

Лема 3. В обчисленні I^{Δ} формули A_n і $\Delta^n O$ дедуктивно рівні, тобто $A_n \vdash \Delta^n O$ і $\Delta^n O \vdash A_n$.

Доведення. Методом математичної індукції доведемо, що для будь-якого натурального n $\Delta^n O \vdash A_n$. База індукції: очевидно, що $O \vdash p_0$. Припустимо, що для будь-якого натурального $k \leq n$, $\Delta^k O \vdash A_k$. Доведемо, що $\Delta^{n+1} O \vdash A_{n+1}$.

1. $\Delta^{n+1} O$ – засновок;
2. $(\Delta^{n+1} O \supset (((p_{n+1} \supset \Delta^n O) \supset p_{n+1}) \supset p_{n+1}))$ – підстановка в Δ -аксіому;
3. $((p_{n+1} \supset \Delta^n O) \supset p_{n+1}) \supset p_{n+1}$ – 1, 2, modus ponens;
4. $\Delta^n O \vdash A_n$ – припущення індукції;
5. $\Delta^n O \supset A_n$ – 4, теорема дедукції;
6. $((p_{n+1} \supset A_n) \supset p_{n+1}) \supset p_{n+1}$ – 5, 3, теорема про монотонну заміну.

Методом математичної індукції доведемо, що для будь-якого натурального n $A_n[p_i / \Delta^i O, i = \overline{0, n}] \sim \Delta^n O$. База індукції очевидна. Припустимо, що для будь-якого натурального $k \leq n$ $A_k[p_i / \Delta^i O, i = \overline{0, k}] \sim \Delta^k O$. Крок

індукції: $A_{n+1}[p_i / \Delta^i O, i = \overline{0, n+1}] \sim$
 $\sim ((\Delta^{n+1} O \supset A_n[p_i / \Delta^i O, i = \overline{0, n}]) \supset \Delta^{n+1} O) \supset \Delta^{n+1} O \sim$
 $\sim (((\Delta^{n+1} O \supset \Delta^n O) \supset \Delta^{n+1} O) \supset \Delta^{n+1} O) \sim$
 $\sim ((\Delta^n O \supset \Delta^{n+1} O) \supset \Delta^{n+1} O) \sim$
 $\sim (1 \supset \Delta^{n+1} O) \sim \Delta^{n+1} O$

Лема 4. Для будь-якої формули A обчислення I^{Δ} результат підстановки до неї формул виду O і 1 замість всіх змінних еквівалентний в I^{Δ} одній із наступних формул: $O, \Delta O, \Delta^2 O, \dots, 1$. Отже, значення цих формул на будь-якій Δ -ПБА при будь-якій оцінці співпадають з елементами її нуль-породжувальної підалгебри, яка є або ланцюгом потужності n , або ланцюгом типу $\omega + 1$.

Доведення. Доведення проведемо за логічною довжиною ℓ формули A . Результат підстановки формул виду O і 1 замість всіх змінних в формулу D будемо позначати $\bar{D}$.

База індукції очевидна. Припустимо, що для деяких формул B і C , логічна довжина яких менша ℓ , мають місце еквіваленції:

$\bar{B} \sim \Delta^k O, \bar{C} \sim \Delta^n O$, де $0 \leq k < n$. Проводячи крок

індукції, необхідно розглянути випадки, коли формула A належить одному з видів: 1) ΔB ; 2) $B \& C$; 3) $B \vee C$; 4) $B \supset C$; 5) $C \supset B$; 6) $\neg B$. Таким чином,

1. $\bar{A} \sim \Delta(\Delta^k O) \sim \Delta^{k+1} O$;
2. Враховуючи, що $I^{\Delta} \vdash \Delta(p \& q) \sim (\Delta p \& \Delta q)$, маємо $\bar{A} \sim \Delta^k O \& \Delta^n O \sim \Delta^k (O \& \Delta^{n-k} O) \sim \Delta^k O$;
3. $\bar{A} \sim (\Delta^k O \vee \Delta^n O) \sim \Delta^k O$;
4. $\bar{A} \sim (\Delta^k O \supset \Delta^n O) \sim 1$;
5. $\bar{A} \sim (\Delta^n O \supset \Delta^k O) \sim (\Delta^n O \supset (\Delta^{k+1} O \supset \Delta^k O)) \sim$
 $\sim ((\Delta^n O \& \Delta^{k+1} O) \supset \Delta^k O) \sim (\Delta^{k+1} O \supset \Delta^k O) \sim \Delta^k O$;
6. $\bar{A} \sim \neg(\Delta^k O) \sim \Delta^k O \supset O \sim O$.

Випадки, коли $n = k$, або $\bar{B} = 1$, або $\bar{C} = 1$ очевидні.

Лема 5. Для кожної логіки $\ell \in ZI^{\Delta}$, якщо $\Delta^n O \in \ell$, то $\Delta^n O \in \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$.

Доведення. Якщо $\Delta^n O \in \ell$, то за лемою 4 формула $\Delta^n O$ спростовна на деякому ланцюгу $\mathcal{A}^{\Delta}$. Очевидно, що $\mathcal{A}^{\Delta} \in M_{\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))}$.

Твердження 2. Для кожної логіки $\ell \in ZI^{\Delta}$ і будь-якого натурального n наступні твердження еквівалентні:

1. $\ell \in \mathcal{S}_n^{\Delta}$;
2. $\ell \subseteq LC_{n+1}^{\Delta}$ та $\ell \not\subseteq LC_{n+2}^{\Delta}$;
3. $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = LC_{n+1}^{\Delta}$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Відмітимо, що кожний елемент алгебри C_{n+1}^{Δ} можна представити у вигляді $\Delta^k O$, де $0 \leq k \leq n$. Припустимо, що існує формула $D \in \ell$ та означення v цієї формули на алгебрі C_{n+1}^{Δ} , при якому $v(D) = \Delta^m O$, де $m < n$. В силу леми 3, твердження 1 та леми 4 $D \in \ell$. Прийшли до протиріччя. Використовуючи твердження 1 та двічі лему 5, маємо, що $A_n \in \ell \setminus \ell(C_{n+2}^{\Delta})$.

2) $\Rightarrow$ 3). Включення $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) \subseteq \ell(C_{n+1}^{\Delta})$ очевидно. Припустимо, що існує формула $D \in \ell(C_{n+1}^{\Delta}) \setminus \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$. Тоді D відділяється від $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$ деякої підпрямо-нерозкладної Δ -ПБА $\mathcal{A}^{\Delta}$. Так як $\mathcal{A}^{\Delta}$ підпрямо-нерозкладна і на ній формула $((p \supset q) \vee (q \supset p))$

правильна, то $\mathcal{A}^\Delta$ ланцюг. З умови 2) твердження 2 та зауваження 2 випливає, що потужність $\mathcal{A}^\Delta$ не перевищує $n + 1$ і $D \in \ell(\mathcal{A}^\Delta)$. Прийшли до протиріччя.

3) $\Rightarrow$ 1). Припустимо, що $\nabla(\ell) + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = LC$. За твердженням 1, для будь-якого n , $A_n \in \nabla(\ell)$, але тоді, за лемою 3, для будь-якого n , $\Delta^n O \in \ell$, тому за лемою 5 $\Delta^n O \in \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$, що суперечить умові 3). Нехай тепер в силу леми 4.1 [8] існує єдине натуральне число $k + 1$ таке, що $\nabla(\ell) + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = \ell(C_{k+1})$. Якщо $k < n$, то в силу твердження 1 і леми 3, формула $\Delta^k O \in \ell$ і тому правильна на C_{n+1}^Δ . Маємо протиріччя. Аналогічно, якщо $k > n$, то формула $\Delta^{k+1} O \in \ell$ і за лемою 5 маємо, що $\Delta^{k+1} O \in \ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$. А це суперечить умові 3. Значить $k = n$.

Наслідок 1. Найбільшою логікою n -го шару являється логіка LC_{n+1}^Δ , найменшою - логіка $I^\Delta + \Delta^n O$. Логіка LC^Δ являється найбільшою в шарі s_w^Δ .

Доведення. Перше твердження наслідка безпосередньо випливає з означення шарів і пункту 3 твердження 2. Друге - з твердження 1 і леми 3. Третє - з твердження 2 і леми 2.

Нехай ПБА $\mathcal{A}$ підпрямо нерозкладна. Позначим її передостанній елемент через ω , а через $\mathcal{A}^-$ фактор-алгебру $\mathcal{A}/[\omega]$. За лемою 1.9 [9] має місце така властивість.

Властивість 1. Якщо $A_n \in \ell(\mathcal{A})$, то $A_{n-1} \in \ell(\mathcal{A}^-)$.

В лемі 2.1 [9] методом математичної індукції з використанням властивості 1 доведена наступна властивість.

Властивість 2. Якщо формула A_n правильна на ПБА $\mathcal{A}$ і $\mathcal{A}$ має скінченне число породжувальних, то $\mathcal{A}$ скінченна.

З огляду на вищезгадані зв'язки між конгруенціями Δ -ПБА $\mathcal{A}^\Delta$ і фільтрами її збіднення $\mathcal{A}$, можна твердити, що властивості 1 та 2 мають місце для Δ -псевдобулевих алгебр. Звідси, а також з твердження 1 відразу випливає

Лема 6. Якщо логіка ℓ із ZI^Δ належить n -му шару, то вона локально-таблична.

Теорема 1. Логіка $\ell \in ZI^\Delta$ локально-таблична тоді і тільки тоді, коли $\ell \not\subseteq LC^\Delta$.

Доведення. Якщо $\ell \subseteq LC^\Delta$, то $M_{LC^\Delta} \subseteq M_\ell$ але тоді багатовид M_ℓ не є локально-скінченним, так як містить нескінченну ланцюгову Δ -псевдобулеву алгебру, яка породжується тільки нулевим елементом. Якщо $\ell \not\subseteq LC^\Delta$, то за лемою 2 для деякого натурального n виконується рівність $\ell + ((p \supset q) \vee (q \supset p)) = \ell(C_{n+1}^\Delta)$. Звідси, згідно твердженню 2, маємо $\ell \in s_n^\Delta$. Тоді за лемою 6 логіка ℓ являється локально-табличною.

Наслідок 2. Логіка ℓ локально-таблична тоді і тільки тоді, коли ℓ скінченно шарова.

Доведення. Необхідність. За теоремою 1 $\ell \subseteq LC^\Delta$. Значить, в силу леми 2 і твердження 2, для єдиного натурального n , $\ell \in s_n^\Delta$. Достатність випливає з леми 6.

Наслідок 3. Логіка LC^Δ - єдина передлокально-таблична логіка решітки ZI^Δ .

Література

- [1] Кузнецов А. В. Доказуемость-интуиционистская логика // В сб.: Модальные и интенциональные логики (Тезисы координационного совещания). - М.: ИФ АН СССР, 1978. - с. 75-79.
- [2] Клини С. К. Введение в метаматематику. - М.: ИЛ, 1957. - 526 с.
- [3] Муравицкий А. Ю. Соответствие расширений доказуемости-интуиционистской логики расширениям логики доказуемости // Математическая логика и алгоритмические проблемы. Тр. Ин-та матем. СОАН СССР, т.12 - Новосибирск, Наука, 1989. - с. 104-120
- [4] Кузнецов А. В. О доказуемости-интуиционистском пропозициональном исчислении // ДАН СССР. 1985. 283, 1. - с. 27-29.
- [5] Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. - 592 с.
- [6] Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю. О суперинтуиционистских логиках как фрагментах расширений логики доказуемости // Математические исследования. 1987. Вып.98. - с. 15-39.
- [7] Симонова И. Г. Об интерполяционном свойстве для расширений доказуемости-интуиционистской логики // Матем. заметки. 1990. Т. 47 Вып. 5. - с. 88-99.
- [8] Hosoi T. On intermediate logics // I. Journal of the Facul of Science. 1967. XIV, part 2. P. 85-98

Надійшла до редколегії 15.09.2008

УДК 519.21

Марк Т.Тарашанський, к.т.н, доцент,
Наталія Ю.Щестюк, к.ф.-м.н, доцент

Робастні оцінки однорідних та однорідно зв'язаних полів в умовах спектральної невизначеності

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int \int_{(s,t) \in K} a(s,t)\xi(s,t)dsdt \text{ від невідомих значень}$$

однорідного випадкового поля $\xi(s,t)$, $(s,t) \in R^2$ за спостереженнями поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in R^2$. $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. За умови спектральної невизначеності щодо $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$, $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ знайдено найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала $A\xi$ для різних класів випадкових полів.

Ключові слова: випадкове однорідне поле, мінімаксна (робастна) спектральна характеристика

M.T. Taraschanskyj, Cand.Sci(Tech.), Associate Prof.,
N.U. Shchestuk, Cand.Sci(Phys.-Math), Associate Professor

Robust estimations for homogeneous correlated fields under uncertainty

Problem of estimation of the functional $A\xi = \int \int_{(s,t) \in K} a(s,t)\xi(s,t)dsdt$ on the unknown

values of a random field $\xi(s,t)$, $(s,t) \in R^2$ from observations of the field $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ for $(u,v) \in R^2$ is investigated. $\xi(u,v)$ and $\eta(u,v)$ are homogeneous correlated fields. Formulas are proposed for calculation the mean square errors and spectral characteristics of the optimal linear estimate. The least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of the linear functional $A\xi$ are found for various classes of random fields.

Key Words: random homogeneous fields, minimax-robust spectral characteristic

E-mail: mmp@univ.kiev.ua, natalyshch@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

Теорія прогнозування випадкових однорідних та однорідно зв'язаних полів повністю розроблена за умови відомої матриці спектральних щільностей. В умовах спектральної невизначеності доцільно застосовувати мінімаксний підхід, за яким шукають оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей.

Огляд результатів з мінімаксної (робастної) обробки інформації можна знайти у статтях С.А.Кассама та Г.В.Пура [1]. У статті Ю.Франка [4] проблема мінімаксної екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. У роботі [2] досліджувались задачі оцінювання

функціоналів від невідомих значень дискретних та неперервних випадкових полів за даними спостережень поля у спеціальних областях як без шуму так і з шумом. Для знаходження мінімаксних оцінок було зроблено припущення про некорельованість полів, що спостерігаються. Але в більшості випадків результати спостережень викривляються через різноманітні перешкоди, що створюють однорідне поле $\xi(u,v)$, що є корельованим з $\eta(u,v)$. У статті [3] була досліджена задача мінімаксної фільтрації лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналу

$$A\xi = \sum_{(k,j) \in E} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, за даними спостережень поля

$\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in Z^2$, де $\xi(u, v)$ та $\eta(u, v)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля, спектральні щільності яких $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ відомі, а щільність $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ не визначена.

Проте на практиці спектральна щільність $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ найчастіше не може бути точно визначена, отже ми знаходимось в умовах невизначеності не тільки щодо $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$, але й щодо $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$. За допомогою методів субдиференціального числення у даній статті знайдено формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних (робастних) спектральних характеристик для певних класів спектральних щільностей $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ та $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$.

2 Мінімаксний підхід до задач лінійної оцінки функціоналів

За умови відомої матриці спектральних щільностей лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу

$$A\xi = \int \int_{(s, t) \in K} a(s, t) \xi(s, t) ds dt$$

за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in R^2$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda, \mu) (Z_{\xi}(d\lambda, d\mu) + Z_{\eta}(d\lambda, d\mu)). \quad (1)$$

Спектральна характеристика

$$h(\lambda, \mu) = \frac{A(\lambda, \mu) f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)}{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)} \quad (2)$$

оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$, де

$$A(\lambda, \mu) = \int \int_{(s, t) \in K} a(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt$$

мінімізує величину середньоквадратичної похибки.

$$\Delta(W, h(W)) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A|^2 (f_{\xi\xi} f_{\xi\xi} - |f_{\xi\xi}|^2)}{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} + 2 \operatorname{Re} f_{\xi\eta}} d\lambda d\mu. \quad (3)$$

У формулі (3) та надалі для скорочення запису позначатимемо $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) = f_{\xi\xi}$, $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = f_{\xi\eta}$, $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) = f_{\eta\eta}$, $A(\lambda, \mu) = A$.

Якщо матрицю спектральних щільностей $W(\lambda, \mu)$ точно не відомо, але відомо, що вона належить до деякого класу D_W матриць спектральних щільностей, то доцільно знаходити

мінімаксні (робастні) оцінки, що дають найменшу похибку для всіх матриць з деякого класу D_W матриць можливих спектральних щільностей [5].

Для заданої множини матриць спектральних щільностей D_W матрицю $W_0(\lambda, \mu)$ будемо називати найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціоналу $A\xi$, якщо

$$\Delta(W_0) = \Delta(h(W_0), W_0) = \max_{W \in D_W} \Delta(h(W), W).$$

Спектральну характеристику $h^0(\lambda, \mu)$ оптимальної оцінки функціоналу $A\xi$ будемо називати мінімаксною (робастною), якщо

$$\min_{h \in H_D} \sup_{W \in D_W} \Delta(h; W) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h^0; W).$$

Найменш сприятлива матриця W_0 з опуклої множини матриць спектральних щільностей D_W та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(W_0)$ утворюють сідлову точку (h^0, W_0) функції $\Delta(h; W)$ на множині

$$H_D \times D_W.$$

Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; W) \leq \Delta(h^0; W_0) \leq \Delta(h; W_0)$$

для $\forall h \in H_D$, $\forall W \in D_W$ виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(h(W_0), W_0) = \sup_{W \in D_W} \Delta(h(W_0), W) \quad (4)$$

Задача на умовний екстремум (4) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [6]

$$\Delta_D(W) = -\Delta(h(W_0), W) + \delta(W|D_W) \rightarrow \inf,$$

де $\delta(W|D_W)$ – індикаторна функція множини D_W . Розв'язок цієї задачі визначається умовою

$$0 \in \partial \Delta_D(W_0),$$

де $\partial \Delta_D(W_0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\partial \Delta_D(W)$ в точці W_0 .

3 Мінімаксні оцінки для фіксованої щільності $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$

Нехай маємо фіксовану спектральну щільність

$$f_{\xi\xi}^0(\lambda, \mu) = c(\lambda, \mu)$$

(надалі $c(\lambda, \mu) = c$) та знаходимось в умовах невизначеності щодо $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ та $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$.

Розглядаючи (3), можна прийти до висновку, що $\forall \lambda \in R$, $\forall \mu \in R$ найменш сприятливою

$\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ буде [5]

$$\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|.$$

Тоді розглянемо

$$\Delta(W, h_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A|^2 (f_{\xi\xi} f_{\eta\eta} - |f_{\xi\eta}|^2)}{f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} - 2|f_{\xi\eta}|} d\lambda d\mu \quad (5)$$

як функцію від

$$f = f(\lambda, \mu) = |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$$

та від

$$g = g(\lambda, \mu) = f_{\eta\eta}(\lambda, \mu);$$

$$\Delta(W, h(W)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A|^2 (cg - f^2)}{c + g - 2f} d\lambda d\mu \quad (6).$$

Застосуємо мінімаксий підхід для знаходження найменш сприятливих $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ та $f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$, якщо відомо, що вони належать до деякого класу спектральних щільностей.

3.1 Найменш сприятливі щільності в класі

$$D(W) = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda).$$

Розглянемо клас спектральних щільностей

$$D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda);$$

$$D_{2\varepsilon_1}(\lambda) = \left\{ f \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f - u_1)^2 d\mu \leq \varepsilon_1(\lambda), \forall \lambda \in R \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}(\lambda) = \left\{ g \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g - u_2)^2 d\mu \leq \varepsilon_2(\lambda), \forall \lambda \in R \right\},$$

де $u_1 = u_1(\lambda, \mu)$, $u_2 = u_2(\lambda, \mu)$ — деякі фіксовані щільності.

За умови, що маємо фіксовану $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$, а також обмежені $f(\lambda, \mu)$, $g(\lambda, \mu)$, функціонал

$$\Delta(W; h(f_0, g_0)) = \Delta(f, g; h_0)$$

є неперервним лінійним функціоналом у просторі L_2 . Задача визначення найменш сприятливих в

$$D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$$

спектральних щільностей (f_0, g_0) при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$ зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\bar{\Delta}(h_0; f, g) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A|^2 (cg - f^2)}{c + g - 2f} d\lambda d\mu \quad (7)$$

на множині спектральних щільностей

$$D(W) = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda).$$

Відомо, що для $u(\lambda, \mu)$ (надалі позначатимемо

$u(\lambda, \mu) = u$) — невід'ємної фіксованої функції на $L^\infty(\mu)$ для будь-яких $\lambda \in R$, та для $\varepsilon > 0$ субдиференціал індикаторної функції $\delta(f|D_{2\varepsilon})$ у точці f_0 має наступний вигляд [4]:

$$\partial\delta(f_0|D_{2\varepsilon}) = \begin{cases} \{0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 - u)^2 d\mu < \varepsilon(\lambda); \\ \{\gamma(\lambda)\phi_0\}, & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 - u)^2 d\mu = \varepsilon(\lambda), \end{cases}$$

де

$$\phi_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(\lambda, \mu) - u(\lambda, \mu)) f(\lambda, \mu) d\mu,$$

$\gamma(\lambda)$ — невід'ємна вимірною функція (множник Лагранжа). Для знаходження мінімального значення функціоналу (7) на множині

$$D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$$

можна знайти мінімальне значення $\Delta(h_0; f, g)$ для кожного $\lambda \in R$ в кожній точці цієї множини. Для будь-яких $\lambda \in R$ маємо

$$\bar{\Delta}'_f(h; f, g) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \frac{f^2 - f(c+g) + cg}{(c+g-2f)^2} f d\mu,$$

$$\bar{\Delta}'_g(h; f, g) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \frac{(c-f)^2}{(c+g-2f)^2} g d\mu.$$

Враховуючи (7), одержуємо, що

$f_0 = f_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0 = g_0(\lambda, \mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ є найменш сприятливими щільностями, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 - u_1)^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g_0 - u_2)^2 d\mu = \varepsilon_2(\lambda) \quad (9)$$

для $\forall \lambda \in R$, та існують такі

$$\gamma_1(\lambda) \geq 0, \gamma_2(\lambda) \geq 0,$$

що для всіх варіацій $f(\lambda, \mu)$, $g(\lambda, \mu)$ щільностей $f_0(\lambda, \mu)$, $g_0(\lambda, \mu)$ та для $\forall \lambda \in R$ виконується система рівнянь

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \frac{(f-c)(f+g)}{(c+g-2f)^2} f d\mu = \gamma_1(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 - u_1) f d\mu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \frac{(f-c)(f+g)}{(c+g-2f)^2} f d\mu = \gamma_1(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 - u_1) f d\mu$$

Звідси

$$|A|^2 \frac{(f-c)(f+g)}{(c+g-2f)^2} = \gamma_1(\lambda)(f_0 - u_1) \quad (10)$$

$$|A|^2 \frac{(c-f)^2}{(c+g-2f)^2} = \gamma_2(\lambda)(g_0 - u_2) \quad (11)$$

Теорема 1. Якщо $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ – фіксована,

$$(f_{\eta\eta}(\lambda, \mu), f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)) \in D_{2c_1}(\lambda) \times D_{2c_2}(\lambda)$$

та задовольняють умову мінімальності [4], то спектральні щільності $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) = g(\lambda, \mu)$ та

$$f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -f(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|$$

є найменш сприятливими в

$$D(W) = D_{2c_1}(\lambda) \times D_{2c_2}(\lambda)$$

при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо

$$(f_0(\lambda, \mu), g_0(\lambda, \mu))$$

є розв'язком системи рівнянь (10), (11), $\gamma_1(\lambda) \neq 0$ та $\gamma_2(\lambda) \neq 0$, якщо виконуються (8), (9).

3.2 Найменш сприятливі щільності в класі
 $D(W) = D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$

Розглянемо задачу фільтрації для $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$:

$$D_f(\lambda) = \left\{ f \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f d\mu \leq P_1(\lambda), \forall \lambda \in R \right\}$$

$$D_g(\lambda) = \left\{ g \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g d\mu \leq P_2(\lambda), \forall \lambda \in R \right\}$$

Нехай щільності

$$f_0(\lambda, \mu) \in D_f^0, \quad g_0(\lambda, \mu) \in D_g^0$$

обмежені. За цих умов функціонал

$$\Delta(h(f_0, g_0), f, g)$$

є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому за умови

$$0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$$

при

$$D = D_f^0 \times D_g^0$$

знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f^0, g_0 \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$|A|^2 (f-c)(f+g) = \alpha_1(\lambda)(c+g-2f)^2,$$

$$|A|^2 (c-f)^2 = \alpha_2(\lambda)(c+g-2f)^2.$$

Таким чином,

$$f = \frac{\alpha_1(\lambda)c + \alpha_2(\lambda)g}{\alpha_1(\lambda) - \alpha_2(\lambda)} \quad (12)$$

$$g = \frac{c(\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda) + |A|\sqrt{\alpha_2(\lambda)})}{\alpha_1(\lambda) - 3\alpha_2(\lambda) - |A|\sqrt{\alpha_2(\lambda)}} \quad (13)$$

константи $\alpha_1(\lambda) \geq 0, \alpha_2(\lambda) \geq 0$. Зауважимо, що $\alpha_1(\lambda) \neq 0, \alpha_2(\lambda) \neq 0$,

якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda, \mu) d\mu = P_1(\lambda), \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda, \mu) d\mu = P_2(\lambda) \quad (15)$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 2. Нехай щільності

$$f_0(\lambda, \mu) \in D_f^0(\lambda), \quad g_0(\lambda, \mu) \in D_g^0(\lambda)$$

задовольняють умову мінімальності. Спектральні щільності $f_0(\lambda, \mu), g_0(\lambda, \mu)$ найменш сприятливі в $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо $f_0(\lambda, \mu), g_0(\lambda, \mu)$ задовольняють (12), (13) і визначають розв'язок екстремальної задачі (4). Функція $h(W_0)$, обчислена за формулою (2) є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

3.3 Найменш сприятливі щільності в класі
 $D_W = D_\alpha^0(W) \cap D_f(\lambda) \times D_u(W) \cap D_g(\lambda)$.

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $D_W = D_\alpha^0(W) \cap D_f(\lambda) \times D_u(W) \cap D_g(\lambda)$:

$$D_\alpha^0(W) = \{f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) | \alpha(\lambda, \mu) \leq f_{\eta\eta} \leq \beta(\lambda, \mu)\}$$

$$D_u(W) = \{f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) | |f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)| \leq u(\lambda, \mu)\}$$

для фіксованої $f_{\xi\xi}$.

Дослідимо функцію, визначену (6) на монотонність. Для цього дослідимо на екстремум підінтегральну функцію

$$z(f, g) = \frac{c(\lambda, \mu)g(\lambda, \mu) - f(\lambda, \mu)^2}{c(\lambda, \mu) + g(\lambda, \mu) - 2f(\lambda, \mu)}$$

як функцію від двох змінних. Зрозуміло, що суттєво

ремум для підінтегральної функції буде досягати-
ся для

$$\min(c(\lambda, \mu), g(\lambda, \mu)) = \min(f_{\xi\xi}^0(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu))$$

Отже, найменш сприятливою для перехресної
щільності буде щільність

$$f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) = -f_0(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)|,$$

де

$$|f_{\xi\eta}| = \min(c(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu), u(\lambda, \mu)).$$

Тоді підінтегральну функцію можна розглянути
лише як функцію від однієї змінної:

$$z(g) = \frac{cg - (\min(c, g, u))^2}{c + g - 2\min(c, g, u)}.$$

Тоді, якщо можна вибрати таку функцію
 $l(\lambda, \mu)$, що

$$\alpha(\lambda, \mu) \leq l(\lambda, \mu) \leq \min(c(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}(\lambda, \mu), u(\lambda, \mu)),$$

то найменш сприятливою щільністю буде:

$$f_{\eta\eta}^0 = \begin{cases} l, & \alpha \leq \min(c, f_{\eta\eta}, u) \\ \alpha, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (16)$$

Теорема 3. Якщо щільність $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ фіксо-
вана, то спектральні щільності $f_{\xi\eta}^0(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}^0(\lambda, \mu)$
будуть найменш сприятливими в класі

$$D_{\xi}^0(W) \cap D_f(\lambda) \times D_u(W) \cap D_g(\lambda),$$

якщо

$$f_{\xi\eta}^0(\lambda, \mu) = -|f_{\xi\eta}^0(\lambda, \mu)|,$$

$$|f_{\xi\eta}^0(\lambda, \mu)| = \min(c(\lambda, \mu), f_{\eta\eta}^0(\lambda, \mu), u(\lambda, \mu)).$$

$f_{\eta\eta}^0(\lambda, \mu)$ задовольняє (16). Мінімаксну спектра-
льну характеристику та середньоквадратичну по-
хибку можна обчислити за формулами (2), (3)
відповідно.

Висновки

У статті досліджено задачу мінімаксного оці-
нювання функціонала $A\xi$ від невідомих значень
випадкового однорідного неперервного у серед-
ньоквадратичному поля за спостереженнями поля

на фоні корельованого шуму. За умови, що щіль-
ність $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)$ – фіксована, а щільності
 $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu), f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)$ належать деяким моделям
спектральної невизначеності знайдено найменш
сприятливі спектральні щільності та мінімаксні
(робастні) спектральні характеристики оптима-
льних оцінок функціонала $A\xi$.

Надалі бажано дослідити випадок, коли точні
значення щільності шуму $f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)$ також неві-
домо, але відомо деякі обмеження на цю щіль-
ність.

Список використаних джерел

1. Кассам С.А., Пур Г.В. Робастные методы
обработки сигналов: Обзор // Труды института
инженеров по электронике и радиоэлектронике.-
1985.- Т.73. N 3.- С. 54-110.
2. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Про фільт-
рацію випадкових полів дискретного аргументу // Вісник Київського університету. Сер.: Математи-
ка. Механіка., – 2003, вип. № 9-10, с. 117–123
3. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Робастна фі-
льтрація однорідних та однорідно зв'язаних ви-
падкових полів дискретного аргументу // Вісник
Київського університету. Сер.: Математика. Ме-
ханіка., – 2008, вип. № 18-19, с. 117–123
4. Franke J. Minimax robust prediction of
discrete time series// Z. Wahr. Verw. Geb.- 1985.-
Vol. 68.- P. 337-364.
5. Moustakides G., Kassam S. Robust wiener
filters for random signals in correlated noise // Transactions on Inf. Th. – 1983 – Vol 29, №4,
P.614-619.
6. Pshenichnyj, B.N. Necessary conditions for an
extremum // Pure and Applied mathematics / New
York: Marcel Dekker, Inc. XVIII, 230 p (1971)
7. Rozanov, Y.A. // Stationary random processes/
San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam:
Holden-Day 1967. 211 p. (1967).

Надійшла до редакції 12.11.2008

УДК 512.544

Оксана А. Яровая

О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым

Вивчаються локально розв'язні групи, у яких всі підгрупи мають черніковський комутант.

Ключові слова: група, нормальна підгрупа, локально розв'язна група.

Oksana A. Yarovaya

About groups all own subgroups of which are near to abelian

Locally soluble groups at which all subgroups are have Chernikov's derived subgroup are studied

Key Words: groups, normal subgroups, locally soluble group.

Статью представил доктор ф.-м. наук, профессор Кириченко В.В.

О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым

Введение

В работах [1 – 3] Г.М. Ромалис и Н.Ф. Сесекин начали изучать группы, в которых имеются всего два типа подгрупп: абелевы подгруппы и нормальные подгруппы. Такие группы были названы ими *метагамильтоновыми*. История изучения метагамильтоновых групп была достаточно продолжительной. После указанных выше работ Г.М. Ромалиса и Н.Ф. Сесекина, изучение метагамильтоновых групп продолжили, при дополнительном условии их конечности, В.Т. Нагребецкий [4] и А.А. Махнев [5]. Однако решающий вклад в описание метагамильтоновых групп был внесен Н.Ф. Кузеным и Н. Н. Семко [6]. Естественным расширением класса метагамильтоновых групп являются группы, в которых всякая ненормальная подгруппа близка в том или ином смысле к абелевым группам. Так в работах [7, 8] рассматривались группы, в которых всякая подгруппа либо нормальна, либо имеет конечный коммутант (соответственно является FC-группой). Поскольку естественным обобщением конечных групп являются черниковские группы, то естественным расширением групп с конечным коммутантом являются группы с черниковским коммутантом. Пусть G – группа, через $L_{\text{norm}}(G)$ обозначим семейство всех нормальных подгрупп G и соответственно через $L_{\text{non-norm}}(G)$ обозначается семейство всех подгрупп, которые не являются нормальными. Таким образом, в нашем случае, семейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ состоит из подгрупп, имеющих черниковский коммутант. Возможны две крайние ситуации: (i) все собственные подгруппы группы G нормальны (т.е. семейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ пусто), и (ii) все собственные подгруппы группы G имеют черниковский коммутант (т.е. семейство $L_{\text{non-norm}}(G)$ совпадает с се-

мейством всех собственных подгрупп). Первая ситуация была изучена очень давно. Р. Дедекин-дом и Р. Бэром. Изучению второй ситуации посвящена данная работа. А.Ю. Ольшанский построил серию экзотических примеров бесконечных групп, все собственные подгруппы которых абелевы (см. [9, § 28]). Эти примеры показывают, что полное описание бесконечных групп, все собственные подгруппы которых абелевы, является очень сложной задачей. Поэтому и изучение групп, все собственные подгруппы которых имеют черниковский коммутант, реально возможно только при некоторых ограничениях. Одним из таких естественных ограничений является локальная разрешимость. Данная работа и посвящена изучению локально разрешимых групп, коммутант всякой собственной подгруппы которых является черниковской подгруппой.

Лемма 1. Пусть G – разрешимая группа. Если группа G имеет собственные подгруппы конечного индекса и всякая собственная подгруппа G имеет черниковский коммутант, то $[G, G]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. Будучи разрешимой, G включает в себя такую нормальную подгруппу L , что G/L – конечная циклическая p -группа для некоторого простого числа p . Пусть g – порождающий элемент этой фактор-группы, т.е. $G/L = \langle gL \rangle$. Предположим сначала, что элемент g имеет конечный порядок. Поскольку G/L – p -группа, то можно считать, что g – p -элемент. Из выбора L вытекает, что ее коммутант $[L, L]$ будет черниковской подгруппой. Покажем, что фактор-группа $G/[L, L]$ имеет черниковский коммутант, из равенства

$$[G/[L, L], G/[L, L]] = [G, G][L, L]/[L, L] = [G, G]/[L, L]$$

будет вытекать тогда, что и $[G, G]$ – черниковская

подгруппа. Поскольку все последующие рассуждения будут проводиться в фактор-группе $G/[L, L]$, то, чтобы не усложнять обозначения, будем предполагать, что $[L, L] = \langle 1 \rangle$. Как будет видно из дальнейшего, это не ограничит общности рассуждений. Другими словами, подгруппу L можно считать абелевой. Из этого допущения сразу вытекает, что пересечение $S = \langle g \rangle \cap L$ является нормальной подгруппой во всей группе G . Поскольку она конечна, то достаточно показать, что фактор-группа G/S имеет черниковский коммутант. Как и выше, чтобы не вводить новых обозначений, можно считать подгруппу S единичной. Предположим, что L включает в себя собственные подгруппы конечного индекса. Из конечности G/L получаем тогда, что L включает в себя собственную G -инвариантную подгруппу K . Если допустить теперь, что $G = K \langle g \rangle$, то получаем равенство $L = K(L \cap \langle g \rangle) = K$, которое противоречит выбору подгруппы K . Полученное противоречие показывает, что $E = K \langle g \rangle$ – собственная подгруппа G . Это влечет за собой тот факт, что коммутант D подгруппы $K \langle g \rangle$ будет черниковской подгруппой. Поскольку G/L – абелева, то $[G, G] \leq L$, а значит и $D \leq [G, G] \leq L$. Коммутативность фактор-группы E/D влечет равенство $\langle 1 \rangle = [gD, KD/D]$. С другой стороны, подгруппа L – абелева, так что и $[L/D, KD/D]$ – единична. Принимая во внимание равенство $G = \langle g \rangle L$, получим включение $KD/D \leq \zeta(G/D)$. Из конечности групп G/L и L/K получаем конечность фактор-группы $(G/D)/(KD/D)$. Другими словами, группа G/D имеет центр конечного индекса. Но тогда ее коммутант $U/D = [G/D, G/D]$ – конечен по классической теореме И. Шура. Но тогда подгруппа U – черниковская, а значит, и коммутант $[G, G]$ также будет черниковской подгруппой.

Теперь необходимо рассмотреть случай, когда подгруппа L не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Будучи абелевой, она имеет такую подгруппу V , что L/V – квазициклическая p -группа для некоторого простого числа p . Конечность G/L влечет конечность семейства $\{V^x \mid x \in G\}$. Положим $\{V^x \mid x \in G\} = \{V_1 = V, V_2, \dots, V_n\}$ и $W = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i$. Для любого элемента $x \in G$ имеем изоморфизм $L/V^x = L^x/V^x \cong L/V$, который показывает, что L/V^x является квазициклической p -группой. Из теоремы Рэмака получаем вложение

$$L/W \cong L/V_1 \times \dots \times L/V_n$$

которое, в свою очередь, доказывает, что L/W – черниковская группа. Отметим, что подгруппа W – G -инвариантна и $W \langle g \rangle$ – собственная под-

группа G . Это влечет за собой тот факт, что коммутант Y подгруппы $W \langle g \rangle$ будет черниковской подгруппой. Используя приведенные выше аргументы, можно доказать включение $WY/Y \leq \zeta(G/Y)$. Из конечности группы G/L и того факта, что L/W – черниковская, получаем, что фактор-группа $(G/Y)/\zeta(G/Y)$ будет черниковской. Но тогда и ее коммутант $Z/Y = [G/Y, G/Y]$ является черниковской подгруппой. Но тогда подгруппа Z – черниковская, а значит, и коммутант $[G, G]$ также будет черниковской подгруппой.

Предположим теперь, что элемент g имеет бесконечный порядок. Как это было ранее, можно допустить, что подгруппа L – абелева. Это допущение влечет, что пересечение $S = \langle g \rangle \cap L$ является нормальной подгруппой во всей группе G . В фактор-группе G/S образ gS элемента g имеет уже конечный порядок, и по доказанному выше, G/S имеет черниковский коммутант. Обозначим через T периодическую часть абелевой подгруппы L . Отметим, что T – G -инвариантная подгруппа и рассмотрим фактор-группу G/T . Пусть $T \neq bT \in L/T$, и положим $B/T = \langle bT \rangle^{G/T} = \langle bT \rangle^{\langle gT \rangle}$. Если $\langle gT, B/T \rangle$ – собственная подгруппа G/T , то ее коммутант будет черниковской подгруппой. С другой стороны, коммутант подгруппы $\langle gT, B/T \rangle$ содержится в B/T , а потому будет подгруппой без кручения. Отсюда следует, что коммутант подгруппы $\langle gT, B/T \rangle$ единичен, т.е. элементы gT и bT – перестановочны. Допустим теперь, что $G/T = \langle gT, B/T \rangle$. Тогда $L/T = (B/T)(L/T \cap \langle gT \rangle)$. Очевидно $L/T \cap \langle gT \rangle \leq C_{B/T}(gT)$, поэтому $C_{B/T}(gT)$ – неединичная подгруппа. Если $B/T = C_{B/T}(gT)$, то снова получаем, что элементы gT и bT – перестановочны. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда $B/T \neq C_{B/T}(gT) = C/T$. Так как извлечение корня в абелевой группе без кручения является однозначным, то C/T – сервантная подгруппа B/T . Из конечности G/L вытекает, что B/T – конечно порожденная абелева подгруппа, а потому B/C – свободная абелева группа конечного ранга. Но тогда C/T выделяется прямым множителем, т.е. $B/T = C/T \times R/T$ для некоторой подгруппы R/T . Имеем теперь $\langle gT \rangle \cap R/T = \langle 1 \rangle$, в частности, $\langle gT, R/T \rangle$ – собственная подгруппа G/T . Как мы уже видели ранее, в этом случае подгруппа $\langle gT, R/T \rangle$ – абелева, в частности, $R/T \leq C_{B/T}(gT) = C/T$. Полученное противоречие показывает, что $B/T = C_{B/T}(gT)$. Таким образом, в любом случае G/T – абелева.

Поскольку T – периодическая подгруппа, то $T \cap S = \langle 1 \rangle$. Из теоремы Рэмака получаем вложение $G \cong G/T \times G/S$. Поскольку G/T – абелева,

а фактор-группа G/S имеет черниковский коммутант, то и коммутант группы G является черниковской подгруппой.

Лемма 2. Пусть G – разрешимая группа и предположим, что она не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Если всякая собственная подгруппа G имеет черниковский коммутант, то и коммутант всей группы G будет черниковской подгруппой.

Доказательство. Будучи разрешимой, G включает в себя такую нормальную подгруппу B , что G/B – абелева делимая группа. Но тогда G включает в себя такую нормальную подгруппу L , что G/L – квазициклическая p -группа для некоторого простого числа p . В этом случае существует такая возрастающая цепочка подгрупп

$$L = L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_n \leq L_{n+1} \leq \dots \leq G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n,$$

что все факторы L_{n+1}/L_n – циклические группы порядка p^n при $n \geq 0$. Пусть $L_{n+1}/L_n = \langle g_{n+1} \rangle$, $n \geq 0$. Поскольку L – собственная подгруппа, то ее коммутант $[L, L]$ будет черниковской подгруппой. Покажем, что фактор-группа $G/[L, L]$ имеет черниковский коммутант. Как и в доказательстве предыдущей леммы, не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что $[L, L] = \langle 1 \rangle$. Другими словами, подгруппу L можно считать абелевой. Поскольку фактор – группа G/L – абелева, то для любого элемента $x \in G$ взаимный коммутант $[x, A]$ будет подгруппой, нормальной во всей группе G . В самом деле, если y – произвольный элемент G , то $x^y = xb$ для некоторого элемента $b \in L$, поэтому для любого $a \in L$, с учетом того, что L – абелева подгруппа, имеем $[x, a]^y = [x^y, a^y] = [xb, a^y] = [x, a^y]^b [b, a^y] = [x, a^y]$. Из того факта, что L_n – собственная подгруппа, получаем, что ее коммутант будет черниковской подгруппой. В частности, $[g_n, L]$ – черниковская подгруппа при любом $n \geq 0$. Выберем произвольные элементы $x, y \in G$, $a \in L$. С учетом того, что L – абелева подгруппа, имеем

$$[xy, a] = [x, a]^y [y, a] = [x, a^y] [y, a] \in [x, A][y, A].$$

В частности, $[x^k, A] \leq [x, A]$, а потому $\langle x^k, A \rangle = [x, A]$. Отсюда вытекают следующие соотношения $[g_n, L] = \langle g_n, L \rangle \leq \langle g_{n+1}, L \rangle = [g_{n+1}, L]$. Таким образом, получаем следующую возрастающую последовательность

$$[g_1, L] \leq [g_2, L] \leq \dots \leq [g_n, L] \leq [g_{n+1}, L] \leq \dots$$

G -инвариантных черниковских подгрупп L . Если F – конечная G -инвариантная подгруппа L , то фактор-группа $G/C_G(F)$ – конечна. По условию G не включает в себя собственных подгрупп ко-

нечного индекса, что приводит к равенству $G = C_G(F)$, т.е. $F \leq \zeta(G)$. Пусть теперь C – черниковская G -инвариантная подгруппа L . Будучи абелевой, C является объединением конечных G -инвариантных подгрупп, и из доказанного выше вытекает включение $C \leq \zeta(G)$. В частности, $[g_n, L] \leq \zeta(G)$ при любом $n \geq 0$. Положим $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [g_n, L]$, тогда $K \leq \zeta(G)$ и, ввиду выбора K , фактор L_n/K будет абелевым при любом $n \geq 0$. Учитывая теперь равенство $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$, получаем, что и вся фактор-группа G/L – абелева. Таким образом, G – нильпотентна и ее класс нильпотентности не превосходит 2.

Предположим сначала, что G – периодическая группа. Тогда $G = \times_{p \in \Pi(G)} G_p$, где G_p – силовская p -подгруппа G . Если допустить, что множество $\Pi(G)$ содержит не менее двух простых чисел, то группа G будет прямым произведением двух своих собственных подгрупп, и в этом случае ее коммутант будет черниковской подгруппой. Предположим теперь, что $\Pi(G) = \{p\}$ для некоторого простого числа p . Используя лемму 3.10 книги [10], получаем включение $L \leq \zeta(G)$. Принимая во внимание тот факт, что G/L – локально циклическая группа, получаем, что G – абелева группа.

Осталось рассмотреть случай, когда группа G будет непериодической. Так как G – нильпотентна, то множество T ее элементов, порядок которых конечен, является характеристической подгруппой. Фактор-группа G/T уже не имеет кручения, а потому группа G имеет такую нормальную подгруппу S , что G/S является делимой абелевой группой без кручения. В свою очередь, это приводит к существованию такой нормальной подгруппы R , что $G/R = U/R \times V/R$, где U/R и V/R – квазициклические группы. В частности, группа G будет пересечением двух своих собственных нормальных подгрупп U, V , причем $U \cap V = R$. Будучи собственными, U, V имеют черниковские коммутанты. Положим $D = [U, U][V, V]$. Теперь уже фактор-группа G/D будет произведением двух своих нормальных абелевых подгрупп UD/D и VD/D . Поэтому центр G/D включает их пересечение E/D , а поскольку, очевидно, что $RD/D \leq E/D$, то фактор-группа $(G/D)/\zeta(G/D)$ будет черниковской. Но тогда и коммутант $[G/D, G/D]$ является черниковской подгруппой (см., например, [10, теорема 3.9]). Будучи произведением двух нормальных черниковских подгрупп, подгруппа D – черниковская, а значит, и коммутант $[G, G]$ также будет черниковской подгруппой.

Из лемм 1, 2 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть G – разрешимая группа. Если всякая собственная подгруппа G имеет черниковский коммутант, то и коммутант всей группы G будет черниковской подгруппой.

Теорема. Пусть G – локально разрешимая группа. Если всякая собственная подгруппа G имеет черниковский коммутант, то и коммутант всей группы G будет черниковской подгруппой.

Доказательство. Будучи локально разрешимой, G имеет систему нормальных подгрупп S , линейно упорядоченную по включению, факторы которой абелевы. Если группа G включает в себя собственную подгруппу конечного индекса, то она включает в себя и собственную нормальную подгруппу конечного индекса. Поскольку коммутант последней будет черниковской подгруппой, то группа G – разрешима, и остается использовать следствие лемм 1, 2. Поэтому будем предполагать, что G

не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Если F – конечная нормальная подгруппа G , то фактор-группа $G/C_G(F)$ – конечна. Ввиду нашего допущения, это приводит к равенству $G = C_G(F)$, т.е. $F \leq \zeta(G)$. Пусть теперь S – черниковская нормальная подгруппа G , и обозначим через D ее делимую часть. Будучи абелевой, D является объединением своих конечных G -инвариантных подгрупп, и из доказанного выше вытекает включение $D \leq \zeta(G)$. В фактор-группе $G/\zeta(G)$ подгруппа $C\zeta(G)/\zeta(G)$ будет уже конечной и нормальной, и снова используя приводимые выше аргументы, получим включение $C\zeta(G)/\zeta(G) \leq \zeta(G/\zeta(G))$. Другими словами, второй гиперцентр $\zeta_2(G)$ группы G включает в себя всякую нормальную черниковскую подгруппу. Обозначим теперь через K объединение всех собственных подгрупп из системы S . Так как S линейно упорядочена, то K – нормальная подгруппа группы G . Если $K \neq G$ то из свойств семейства S вытекает, что G/K – абелева. Теперь принимая во внимание то обстоятельство, что $[K, K]$ – черниковская подгруппа, получаем разрешимость группы G и остается использовать следствие лемм 1, 2. Поэтому будем предполагать, что $K = G$. Очевидно, если $U \leq V$, то $[U, U] \leq [V, V]$, поэтому семейство $M = \{[U, U] \mid U \in S, U \neq G\}$ также будет линейно упорядоченным по включению. Отсюда вытекает, что $\cup M = M$ будет нормальной подгруппой группы G . Для всякой подгруппы $U \in M$ ее коммутант $[U, U]$ будет черниковской подгруппой. Из доказанного выше получаем включение $[U, U] \leq \zeta_2(G)$. Другими словами, для всякой подгруппы $U \in M$

фактор-группа $U\zeta_2(G)/\zeta_2(G)$ будет абелевой. Но тогда $G/\zeta_2(G)$, будучи объединением линейно упорядоченного семейства абелевых подгрупп, является абелевой. Это показывает, что группа G – нильпотентна. Снова осталось использовать следствие лемм 1, 2.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Семко Н.Н. за постановку задачи, постоянное внимание и помощь при ее решении.

Список использованной литературы

1. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метамгильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45 – 49.
2. Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М. О метамгильтоновых группах II // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – 6, № 5. – С. 50 – 53.
3. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. О метамгильтоновых группах III // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – 7, № 3. – С. 195 – 199.
4. Нагребцкий В.Т. Конечные нильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – 6, № 1. – С. 80 – 88.
5. Махнев А.А. О конечных метамгильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – 10, № 1. – С. 60 – 75.
6. Кузенный М.Ф., Семко М.М. Метамгильтовані групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
7. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes // Advanced in Group Theory 2002, Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoli, May – June 2002. – Roma: Aracne, 2003. – P. 93 – 110.
8. Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – December 2004. – 104A, № 2. – P. 177 – 189.
9. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 447 с.
10. Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya. Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.

Надійшла до редколегії 10.09.2008

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 539.3

Олександр М. Вовченко, аспірант

Рух атмосфери пари вихорів

В роботі досліджено рух ідеальної нестисливої рідини під дією пари вихорів. Показано, що пара вихорів супроводжується атмосферою. Побудовані лінії течії та поле швидкостей. Чисельно проінтегровані рівняння руху точок рідини на границі кругових областей, що охоплюють атмосферу та областей всередині неї. Досліджено рух по горизонтальній лінії течії до гіперболічних точок.

Ключові слова: пара вихорів, адвекція, атмосфера.

E-mail: vovchenko@univ.kiev.ua

Статтю представив професор В.В.Мелешко

1 Вступ

Вивчення переносу властивостей рідини разом з її частками (адвекції) є практичною задачею з широким застосуванням до різномасштабних явищ від течій океану до мікротечій.

У багатьох дослідженнях руху рідини використовується представлення Ейлера, при якому вектор швидкості $\vec{v}$ задається в будь-якій точці функцією координат $\vec{x}$ та часу t . Іншими словами, припускається, що ми можемо кинути на систему миттєвий погляд в будь-який момент часу, розглянувши поле швидкостей, але при цьому відслідковувати рух окремих часток не вимагається. При такому підході ми вимірюємо швидкість рідини, що проходить через елемент площі, замість переміщення частки за одиницю часу. Але як заявив Лайтхілл, «тим не менш, це не означає, що додаткова інформація, отримана при розгляді руху окремої частки, не має користі». Зараз зростаючий інтерес до процесів змішування рідин як у природі, так і в промисловості, повертає нас до підходу Лагранжа, заснованому на вивченні руху окремої частки рідини через відому ейлерову швидкість $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Ідея такого підходу була заснована в XIX столітті Максвелом, Ріке та Рейнольдсом. При розгляді руху рідини виникають ускладнення, наприклад у випадку хаотичної адвекції, введеної Арефом, - хаотичних траєкторій лагранжевих часток у відомому ейлеровому полі швидкостей [4].

2 Рівняння руху

Oleksandr M. Vovchenko, PhD student

The Motion of Atmosphere of a Vortex Pair

The motion of incompressible ideal fluid governed by a vortex pair is investigated. It is shown that the vortex pair is accompanied by an atmosphere. Streamlines and velocity field are demonstrated. The equations of motion of fluid particles on boundary of circle regions containing atmosphere and regions inside it are integrated numerically. The flow in the direction towards hyperbolic points is analyzed.

Key Words: vortex pair, advection, atmosphere.

Розглянемо двовимірний рух ідеальної нестисливої рідини під дією пари вихорів, симетрично розташованих відносно вісі абсцис з протилежними за напрямком і рівними за величиною інтенсивностями. Поле швидкостей описується у комплексних змінних наступним чином [3]:

$$\bar{\zeta} = \frac{\Gamma}{2\pi i(\zeta - z)} - \frac{\Gamma}{2\pi i(\zeta - \bar{z})}, \quad (1)$$

де $\zeta = x + iy$ - положення точки в комплексній необмеженій площині, z та $\bar{z}$ - положення точкових вихорів. Швидкості вихорів обернено пропорційні відстані між ними:

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi b}, \quad (2)$$

де b - відстань від початкового положення кожного з них до початку координат. Таким чином,

$$z = u_i t + ib, \quad \bar{z} = u_i t - ib. \quad (3)$$

Перейдемо до безрозмірних координат рухомої системи:

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{b} - \frac{\Gamma}{4\pi b^2} t; \\ \eta = \frac{y}{b} \end{cases} \quad (4)$$

Після перетворень декартових координат рівняння (1) приймуть вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\frac{\Gamma(\eta-1)}{2\pi b^2(\xi^2 + (\eta-1)^2)} + \frac{\Gamma(\eta+1)}{2\pi b^2(\xi^2 + (\eta+1)^2)} - \frac{\Gamma}{4\pi b^2}; \\ \dot{\eta} = \frac{\Gamma\xi}{2\pi b^2(\xi^2 + (\eta-1)^2)} - \frac{\Gamma\xi}{2\pi b^2(\xi^2 + (\eta+1)^2)}. \end{cases} \quad (5)$$

Компоненти даного поля швидкостей можуть бути представлені у формі Гамільтона[4]:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (6)$$

де ψ - функція току

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi b^2} \left(\ln \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} - \eta \right). \quad (7)$$

Постійні значення функції току $\psi = C$ відповідають лініям течії [5]:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= -\eta^2 - 1 + 2\eta \coth \frac{\eta + C_1}{2}; \\ C_1 &= \frac{4\pi b^2}{\Gamma} C. \end{aligned} \quad (8)$$

При $C = 0$ маємо рівняння границі атмосфери пари вихорів.

3 Атмосфера пари вихорів

Той факт, що рух пари вихорів у необмеженій площині супроводжується «атмосферою» – замкнутою областю часток рідини, – був вперше доведений Томпсоном.

Лінії току ідеальної нестисливої рідини при русі під дією двох точкових вихорів (прямолінійних вихрових трубок [1])

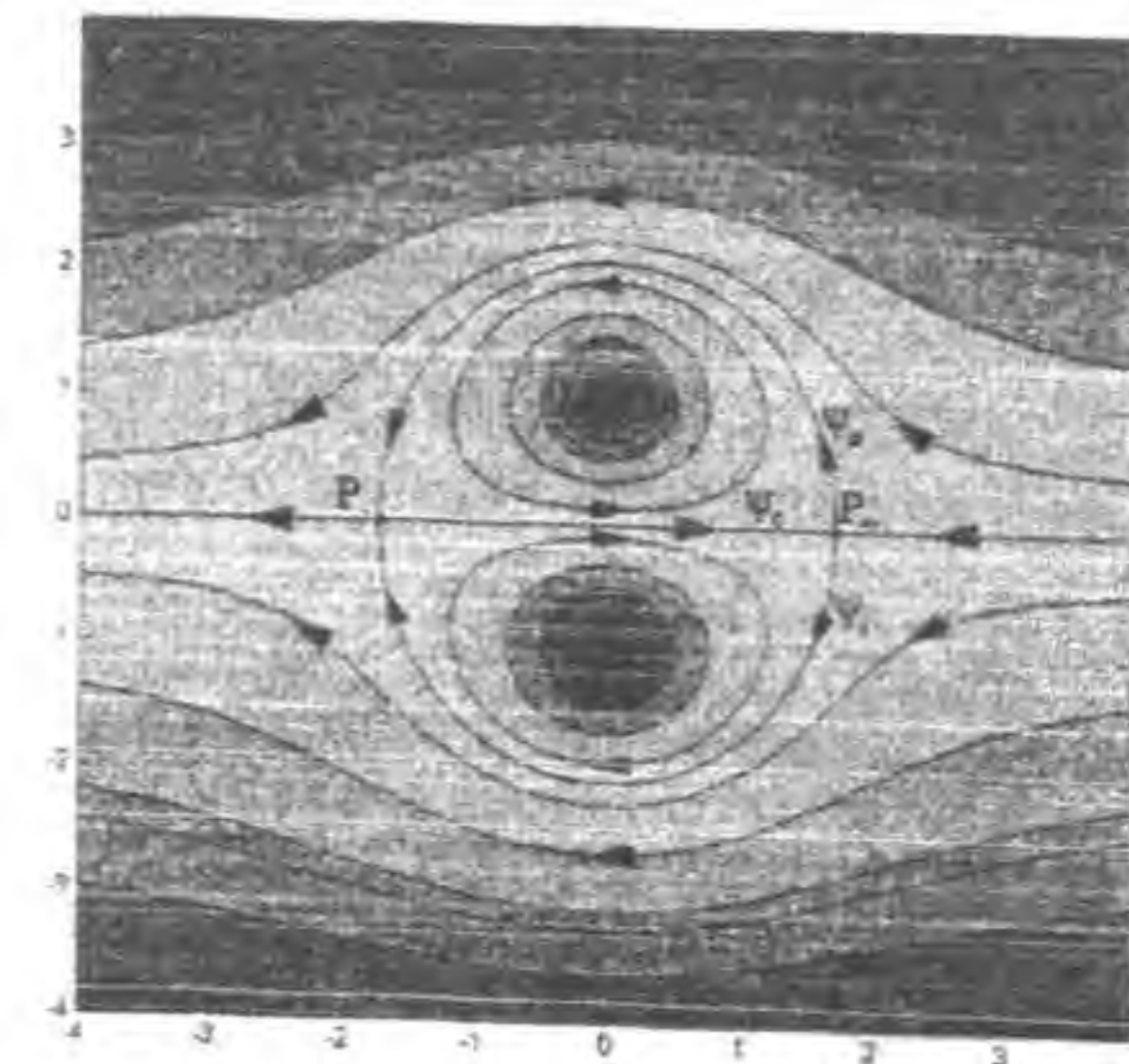


Рис. 1 Лінії току

представлені на рис. 1. Криві ψ_0 та ψ_1 , що визначаються рівняннями (8) при $C = 0$, задають границю атмосфери. Частки рідини, які знаходяться всередині атмосфери, залишаються в цій області, таким чином вона рухається разом з парою вихорів. Градієнт кольорів на рисунку відповідає різним значенням функції току ψ (при значенні інтенсивності вихорів $\Gamma = 2\pi$). Поле швидкостей та рівні значень Гамільтоніана представлені на рис. 2:

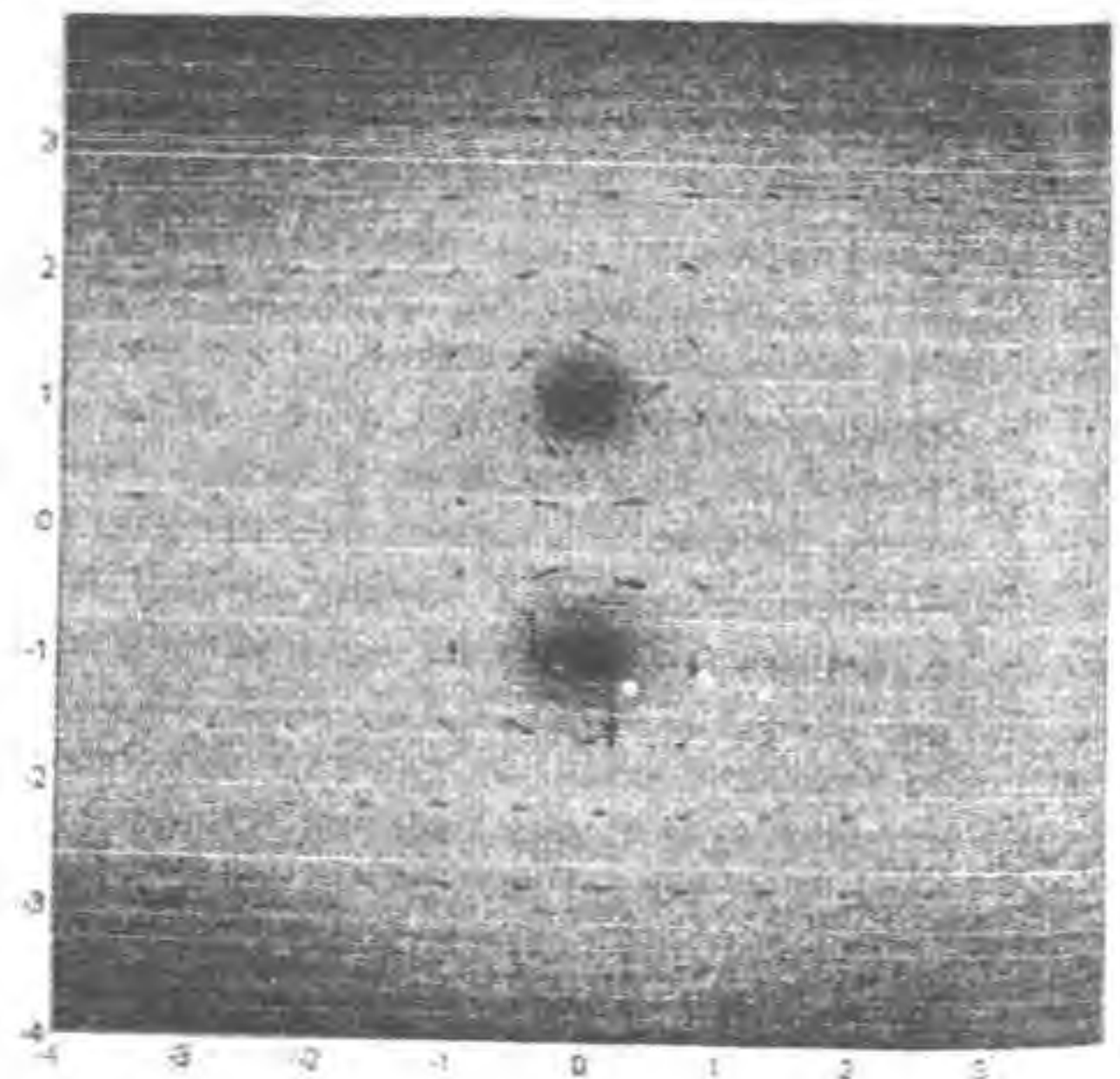


Рис. 2 Поле швидкостей

Розглянемо рух точки, що в початковий момент часу знаходилась посередині між вихорами. В рухомій системі координат (4) її швидкість напрямлена по горизонтальній осі та рівна за величиною:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\dot{x}}{b} - \frac{\Gamma}{4\pi b^2}; \\ \dot{\xi} &= \frac{\Gamma}{4\pi b^2} \cdot \frac{3b^2 - \xi^2}{b^2 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином, точка буде рухатись по лінії ψ_0 в напрямку до точки P_+ за законом:

$$\frac{b^2 + \xi^2}{3b^2 - \xi^2} d\xi = \frac{\Gamma}{4\pi b^2} dt; \quad (10)$$

$$t = -\frac{4\pi b^2}{\Gamma} \left(\xi + \ln \left(\frac{\sqrt{3}b + \xi}{\sqrt{3}b - \xi} \right)^{\frac{2b}{\sqrt{3}}} \right)$$

Звідки:

$$\xi \rightarrow \sqrt{3}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Отже, гіперболічні точки P_+ та P_- мають координати $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Побудуємо графік залежності координати даної точки від часу:

Проведемо дослідження руху областей рідини, застосовуючи підхід Лагранжа при відомому ейлеровому полі швидкостей. Внаслідок нестисливості та топології рідини її об'єм, що обмежений певною границею, не змінюється з часом та не може виходити за межі границі. Розглянемо рух з часом двох концентричних кругових областей з центром у початку координат при $t=0$. Радіуси кругових областей $r_1=2, r_2=4$ такі, що при $b=0,5$ області охоплюють атмосферу пари вихорів.

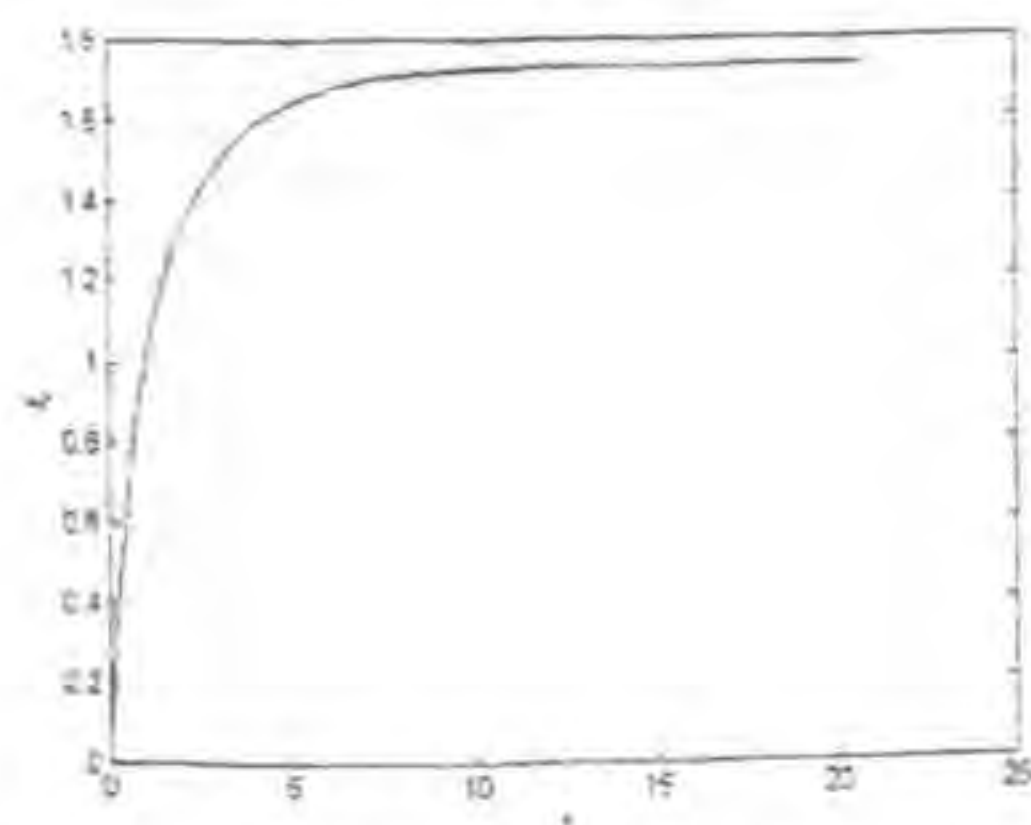


Рис. 2 Закон руху точки по прямій ψ_0

Також дослідимо рух області рідини, що обмежена лінією току $\psi=2$ ($C_1=0,5$). З часом границя області не змінюється, що доводять аналітичні та чисельні розрахунки. Похибки чисельного інтегрування руху частинок всередині атмосфери не являються критичними та не впливають суттєво на точність результату. Візьмемо по 2000 точок на кругових та еліптичних областях. Проінтегруємо за методом Рунге-Кутта рівняння руху (1) з початковими умовами у кожній з точок (при значеннях

параметрів $\Gamma=2\pi, b=0,5$). Пара вихорів, рухаючись з постійною швидкістю вздовж осі абсцис, переносить з собою область часток рідини, яка обмежена границею атмосфери $\psi_a = \psi_1 \cup \psi_2$.

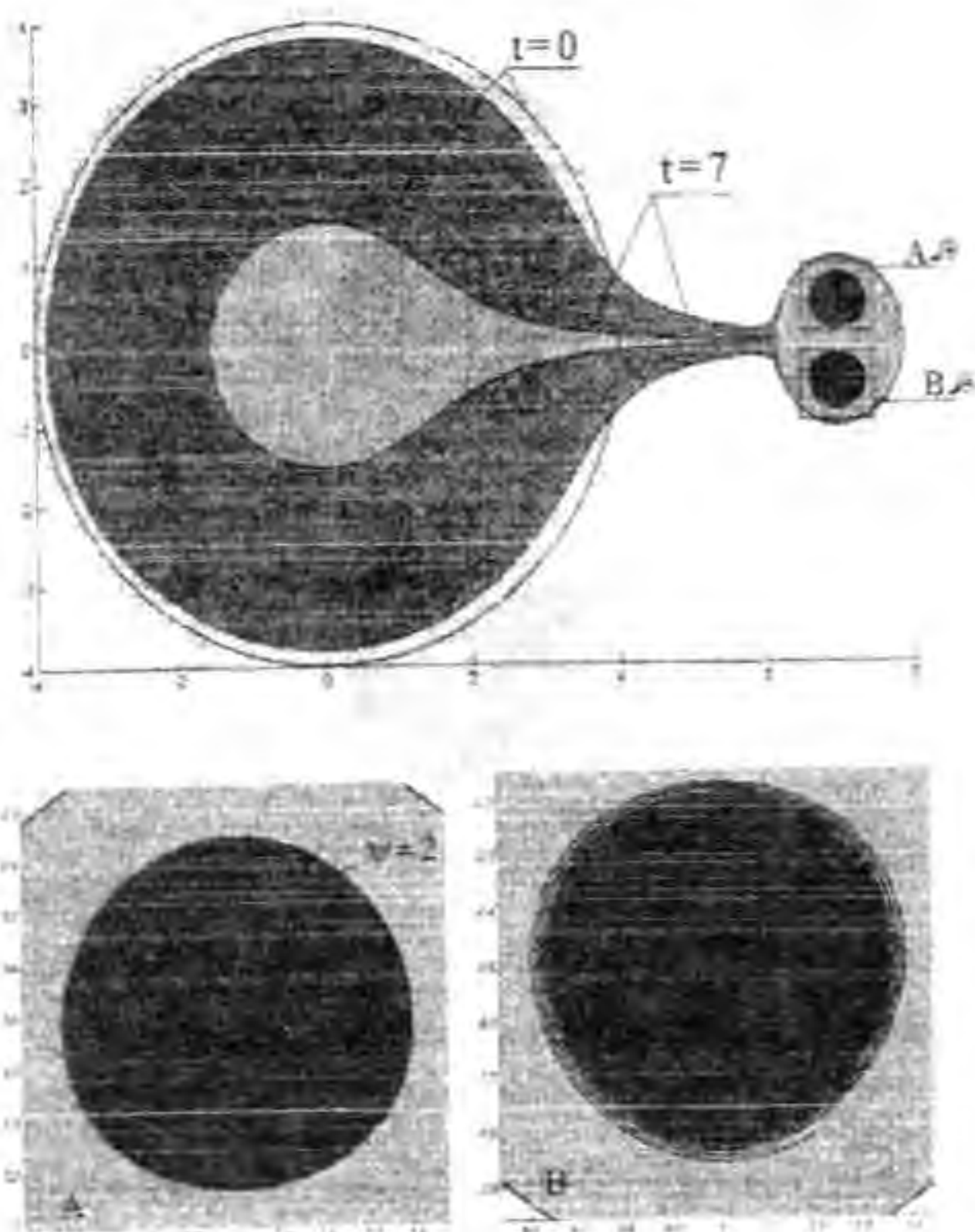


Рис. 3 Адвекція атмосфери пари вихорів

Рис. 3 демонструє цей процес. При цьому область, обмежена лінією току, зберігає границю, а кругова область, близька до неї (початкове положення демонструє рис.4), закручується по спіралі. Проміжок між границею кругових зовнішніх областей та атмосферою асимптотично зменшується. Їх точки поблизу горизонтальної осі при наближенні атмосфери будуть обтікати її, віддаляючись від осі. Тому для збереження гладкості границі областей, що охоплювали атмосферу, були взяті точки, розподілені по кубічному закону по відношенню до кута відхилення від додатнього напрямку осі абсцис:

$$\sigma = \left\{ \begin{aligned} (x, y) : x &= r \cos \varphi_k, y = r \sin \varphi_k, \\ \varphi_k &= \pi \left(\frac{k}{n} \right)^3, k = \overline{1, n} \end{aligned} \right\}.$$

Дослідження руху частинок рідини поблизу

сепаратрис ψ_0 та по ній представлено на рис.5. Обчислення руху частинки, яка у початковий момент знаходилась у верхній точці границі атмосфери $(0, \eta_0)$, проводилось за методами Рунге-Кутта та Адамса-Башфорта (лінія 1). За

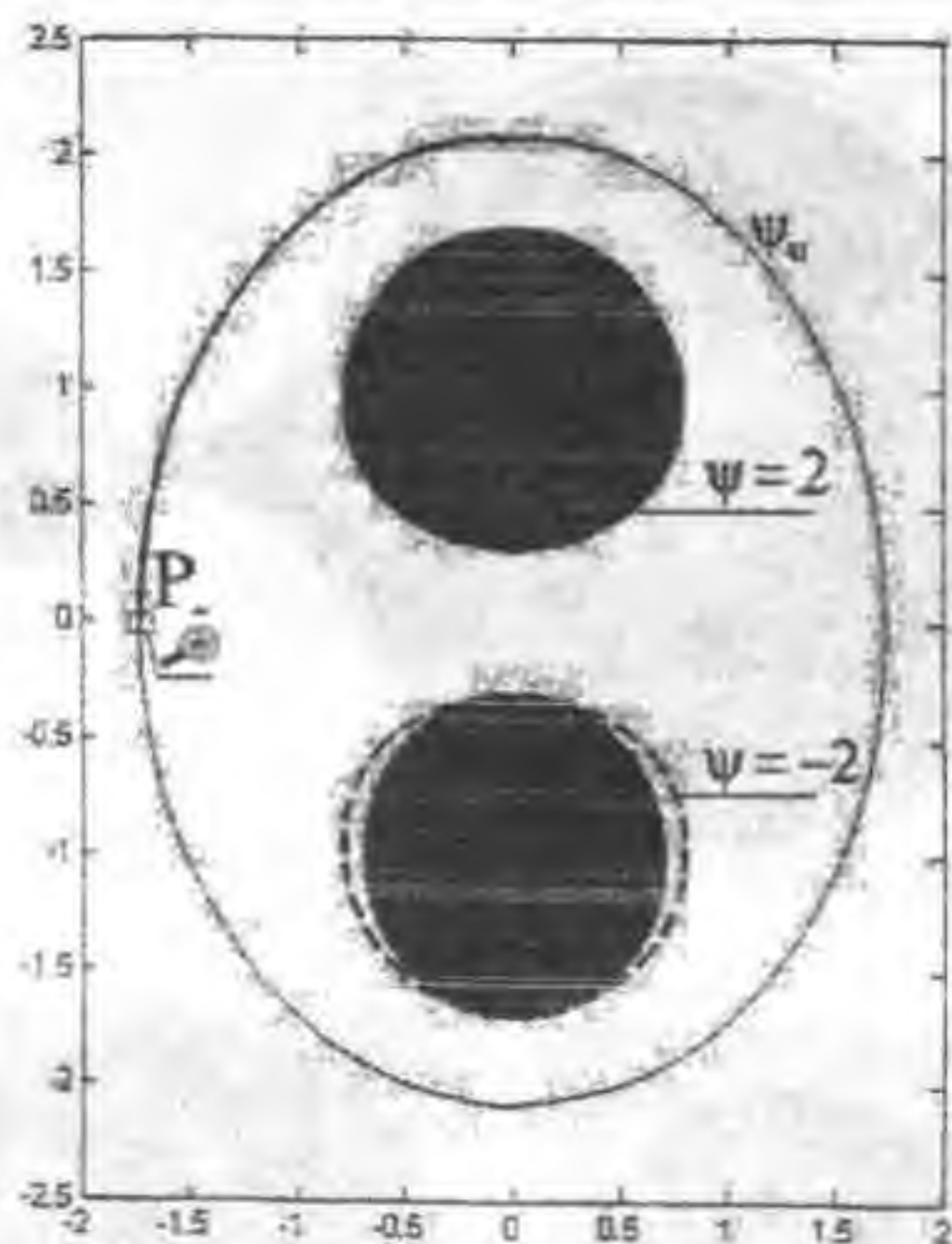


Рис. 4 Початкове положення областей всередині атмосфери

останнім методом обраховано також траєкторію руху частинки рідини, що знаходилась в точці з координатами $(0, \eta_0 - 10^{-11})$ - лінія 2. При $t = 9$ точки, що повинні асимптотично наближатись по сепаратрисі до P_- , внаслідок похибок чисельного інтегрування віддаляються від лінії $\psi = 0$. Точки, що лежали в початковий момент на границі атмосфери віддаляються від неї, а точка з початковими координатами $(0, \eta_0 - 10^{-11})$ рухається всередину атмосфери.

4 Висновки

Побудовані лінії току та поле швидкостей для руху рідини під дією пари прямолінійних вихрових трубок вказують границі атмосфери, яку вперше знайшов Томпсон [5]. Це область рідини, частки якої рухаються разом з парою вихорів.

Чисельне дослідження руху рідини підтверджує аналітичні результати. Але вже при такій простій постановці виникають питання, пов'язані зі збереженням гладкості границі області, рух якої досліджуємо, та з рухом точок, розташованих поблизу гіперболічних.

Список використаних джерел

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1 - М.: Физматгиз, 1963. - 584 с.
2. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. - Киев: Наукова думка, 1993. - 283 с.
3. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. - 1984. - Vol.143. - P.1-21.
4. Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu., Gurzhi A.A., Konovaljuk T.P. Advection of a Vortex Pair Atmosphere in a Velocity Field of Point vortices // Phys. Fluids A. - 1992 - Vol.4, No.12 - P.2779-2797.
5. Thomson W. On Vortex Atoms // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh - 1876. - Vol.6. - P.94-105.

Надійшла до редколегії 04.11.2008

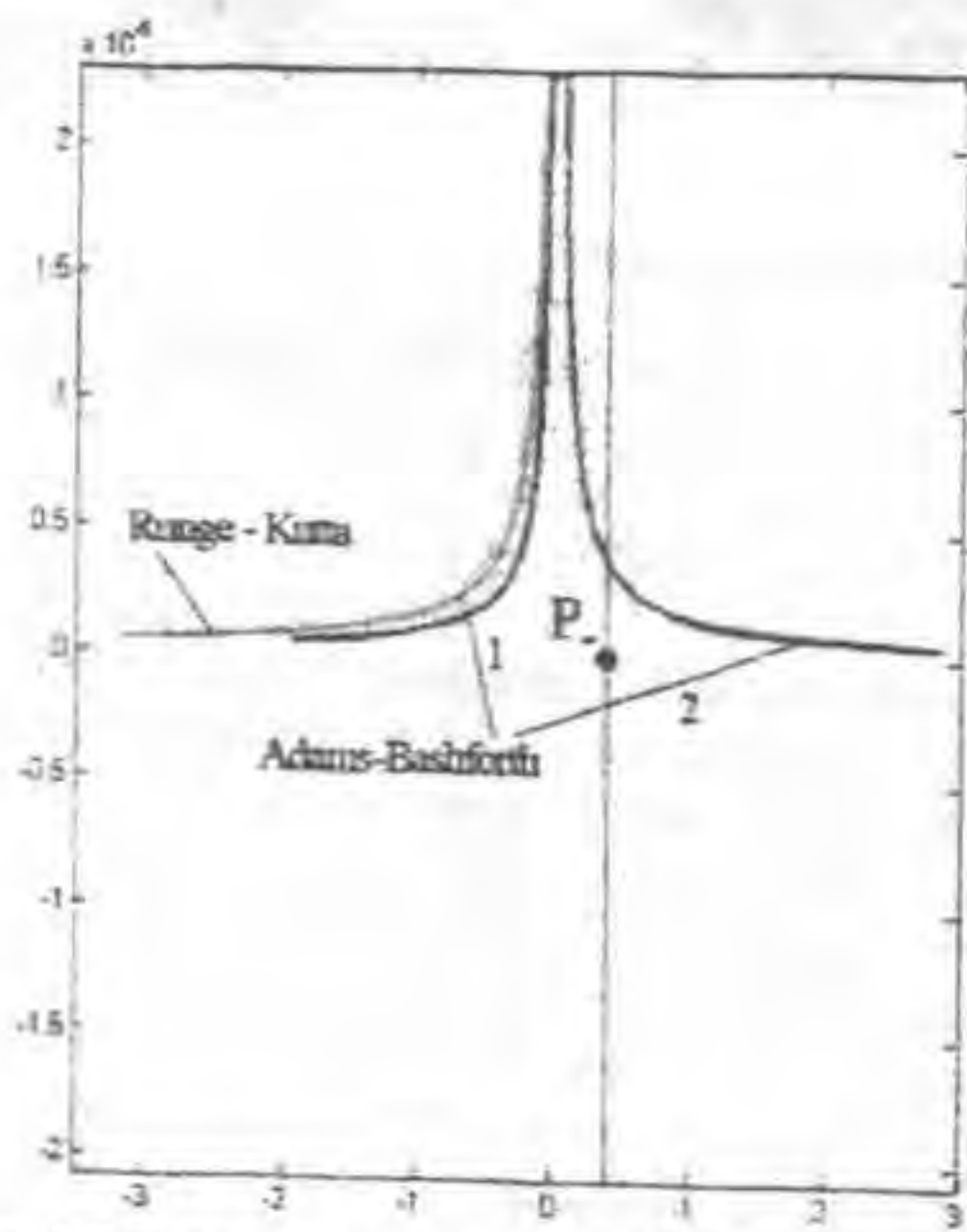


Рис. 5 Рух точки по сепаратрисі

УДК 539.3

В. Б. Говоруха*, к.ф.-м.н., доц.
В. В. Лобода, д.ф.-м.н., проф.

V. B. Govorukha, associate professor
V. V. Loboda, professor

Аналіз міжфазної тріщини в
п'єзокерамічному тілі скінченних розмірів

Analysis of an interface crack in a finite sized
piezoelectric ceramic body

Запропоновано підхід до аналізу електропроникної тріщини, що знаходиться на межі поділу двох п'єзокерамічних тіл скінченних розмірів. Досліджено осциляційну та контакту моделі міжфазної тріщини. Для моделювання електромеханічних полів навколо її вершини використано подання асимптотичного та скінченноелементного розв'язків. Визначено основні параметри руйнування у випадку різних моделей міжфазної тріщини і виконано їх порівняльний аналіз.

Ключові слова: міжфазна тріщина, п'єзокераміка, метод скінченних елементів, параметри руйнування.

An approach for the analysis of an electrically permeable interface crack between two dissimilar finite-sized piezoelectric ceramics is suggested. The oscillating and the contact zone models of the interface crack are considered. To find the singular electromechanical field at the crack tip, an asymptotic solution is derived in connection with the conventional finite element method. The stress intensity factors and the energy release rate are found for two different models of the interface crack.

Keywords: interface crack, piezoelectric ceramic, finite element method, fracture parameters.

*E-mail: govorukhavb@yahoo.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. В. В. Мелешко

1. Вступ

Для дослідження міжфазної тріщини розроблено й активно використовуються ряд моделей. У роботах [1, 2] аналіз міжфазної тріщини базувався на математичній моделі тріщини, в якій вважається, що її береги повністю відкриті. Однак ця модель дає осцилюючі розв'язки, які не можна вважати фізично коректними, оскільки спостерігається взаємне проникнення матеріалів поблизу вершин тріщини. У роботі Комніноу [3] для усунення цих протиріч та знаходження коректних розв'язків запропоновано вводити малі зони контакту берегів тріщини поблизу її вершин. Аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини відповідно до контактної моделі Комніноу було одержано в [4, 5]. Альтернативний підхід усунення осцилюючих особливостей в околі вершини міжфазної тріщини, що полягає у введенні на продовженні тріщини смуг передруйнування, запропоновано в [6]. У роботі [7] розроблено й аналітично обґрунтовано модель міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, а пізніше в [8] одержано аналітичні залежності для визначення параметрів руйнування осциляційної моделі та моделі Комніноу через коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) цієї моделі.

Слід зазначити, що значні математичні труднощі в отриманні аналітичних розв'язків, особливо для тіл скінченних розмірів, призвели до широкого використання чисельних методів, зокрема метода скінченних елементів (МСЕ). Точність цього методу значною мірою визначається коректним врахуванням особливостей електромеханічних полів навколо вершини тріщини. У роботі [9] було запропоновано методику моделювання електромеханічних полів навколо вершини міжфазної тріщини, яка поєднує аналітичний та скінченноелементний розв'язки. Нижче за допомогою цієї методики знайдено розв'язок крайової задачі теорії електропружності п'єзокерамічного композиту скінченних розмірів, що містить міжфазну тріщину, визначено основні параметри руйнування для різних моделей міжфазної тріщини і виконано їх порівняльний аналіз.

2. Постановка задачі

У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ розглянемо плоску деформацію п'єзокерамічного складеного циліндричного бруса, жорстко закріпленого по нижній частині бічної поверхні, під дією сили, рівномірно розподіленої з

інтенсивністю $P(P_1, P_3)$ вздовж деякої твірної верхньої частини його бічної поверхні. Поперечний переріз цього тіла, що є круговою областю радіуса R , представлено на рис. 1. П'єзокерамічні матеріали, з яких складається кусково-однорідний брус, мають клас симетрії btm і вважаються попередньо поляризованими в напрямку осі Ox_3 .

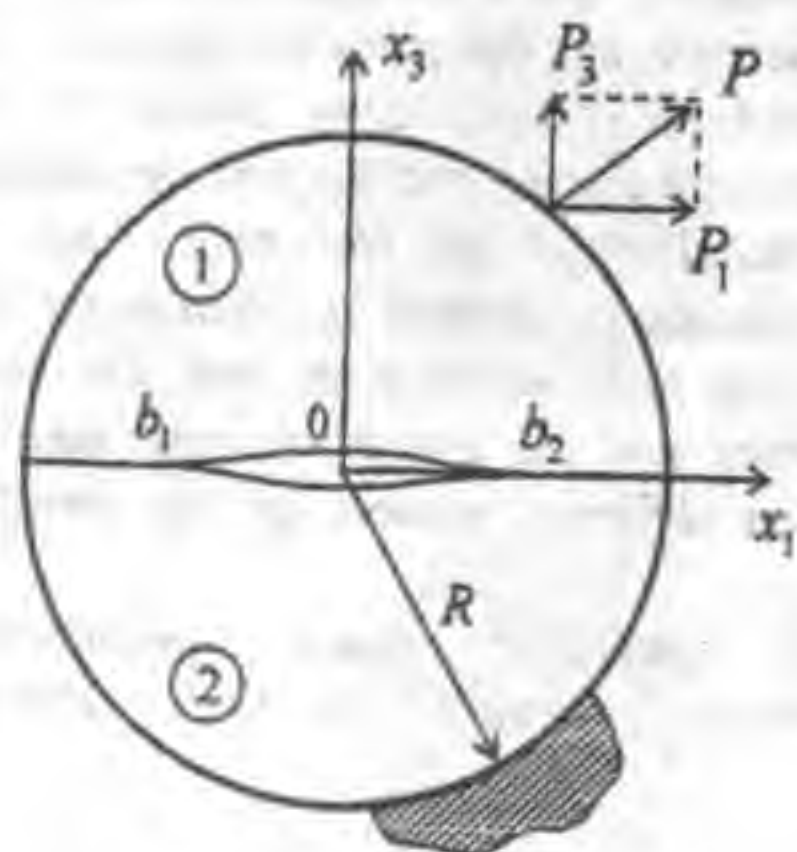


Рис. 1. Схема п'єзокерамічного композиту з міжфазною тріщиною

Усередині бруса на ділянці $b_1 < x_1 < b_2$, $x_3 = 0$ межі поділу матеріалів розташована ненавантажена електропроникна тріщина, а на решті межі поділу – матеріали жорстко зчеплені. Аналіз міжфазної тріщини будемо проводити з використанням двох моделей. Перша передбачає повністю відкриті береги тріщини (осциляційна модель), а інша ґрунтується на введенні штучної зони контакту (a, b_2) в околі правої вершини тріщини. Положення точки a поки що є довільним і буде визначено далі з додаткових умов.

Для електропроникної тріщини має місце електричний контакт між її берегами, який передбачає неперервність електричного потенціалу φ та нормальної складової вектора електричної індукції D_3 . Механічні граничні умови на поверхні тріщини такі:

для осциляційної моделі:

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad b_1 < x_1 < b_2; \quad (1)$$

для моделі зі штучною зоною контакту:

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad b_1 < x_1 < a;$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad a < x_1 < b_2,$$

де σ_{ij} , u_i – компоненти тензора напружень та вектора переміщень відповідно. Індекс “1” відповідає верхній частині тіла, а індекс “2” – нижній.

3. Асимптотична поведінка розв'язку навколо вершини тріщини

З урахуванням степеневого характеру особливості електромеханічного поля навколо вершини тріщини, асимптотичну поведінку загального розв'язку плоскої задачі електропружності можна подати у вигляді [2]

$$V_i = \sum_{k=1}^3 [A_{ik} q_k z_k^v + \bar{A}_{ik} s_k \bar{z}_k^v],$$

$$t_i = \sum_{k=1}^3 v [B_{ik} q_k z_k^{v-1} + \bar{B}_{ik} s_k \bar{z}_k^{v-1}]. \quad (2)$$

де

$$V = [u_1, u_3, \varphi]^T, \quad t = [\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3]^T, \quad q = [q_1, q_2, q_3]^T,$$

$$s = [s_1, s_2, s_3]^T, \quad z_k = x_1 + p_k x_3 \quad (i=1, 2, 3).$$

Тут A , B – відомі матриці розміру 3×3 , що визначаються характеристиками матеріалів; q_k , s_k – невідомі коефіцієнти, які слід визначити із заданих граничних умов на межі поділу матеріалів; p_k – комплексні числа, методику знаходження яких наведено в роботі [2]. Допустимі значення степеня особливості v належать до проміжку $0 < \text{Re}(v) < 1$.

Введемо полярну систему координат (r, θ) з полюсом у точці b_2 і полярною віссю, що збігається з додатнім напрямком осі Ox_1 . Тоді, задовольняючи за допомогою співвідношень (2) граничні умови (1), дістанемо систему матричних рівнянь:

$$e^{i\pi v} M_1 Q^{(1)} + e^{-i\pi v} N_1 S^{(1)} = e^{-i\pi v} M_2 Q^{(2)} + e^{i\pi v} N_2 S^{(2)},$$

$$Y^{(1)} Q^{(1)} - \bar{Y}^{(1)} S^{(1)} = Y^{(2)} Q^{(2)} - \bar{Y}^{(2)} S^{(2)},$$

$$e^{i\pi v} Q^{(1)} + e^{-i\pi v} S^{(1)} = e^{-i\pi v} Q^{(2)} + e^{i\pi v} S^{(2)},$$

$$Q^{(1)} + S^{(1)} = Q^{(2)} + S^{(2)}$$

відносно невідомих векторів

$$Q^{(j)} = B^{(j)} q^{(j)}, \quad S^{(j)} = \bar{B}^{(j)} s^{(j)},$$

де матриці Y , M_1 , M_2 , N_1 , N_2 визначаються характеристиками матеріалів [9].

Розв'язуючи цю систему, знайдемо степінь особливості v , а також вектори $q^{(j)}$ та $s^{(j)}$. Тоді, основні компоненти електромеханічного поля (2) навколо вершини тріщини у випадку

осциляційної моделі міжфазної тріщини можемо представити як:

$$\begin{aligned} V_i^{(j)}(r, \theta) &= 2 \operatorname{Re} \{ C r^v \Phi_i^{(j)}(\theta) \}, \\ i_i^{(j)}(r, \theta) &= 2 \operatorname{Re} \{ C r^{v-1} \Psi_i^{(j)}(\theta) \}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(j)}(\theta) &= \sum_{k=1}^3 \left[A_{ik}^{(j)} q_k^{(j)} (\cos \theta + p_k^{(j)} \sin \theta)^v + \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_{ik}^{(j)} s_k^{(j)} (\cos \theta + \bar{p}_k^{(j)} \sin \theta)^v \right], \\ \Psi_i^{(j)}(\theta) &= \sum_{k=1}^3 v \left[B_{ik}^{(j)} q_k^{(j)} (\cos \theta + p_k^{(j)} \sin \theta)^{v-1} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{B}_{ik}^{(j)} s_k^{(j)} (\cos \theta + \bar{p}_k^{(j)} \sin \theta)^{v-1} \right], \end{aligned}$$

C – невизначена комплексна стала.

Аналіз співвідношень (3) показує, що у малому околі вершини тріщини праві частини цих виразів нескінченну кількість разів змінюють свій знак, тобто для такої моделі тріщини спостерігається добре відома осцилююча особливість [1].

Проводячи подібний аналіз для моделі міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, одержимо основні компоненти електромеханічного поля навколо точок b_2 та a у такому вигляді

$$\begin{aligned} V_i^{(j)}(r, \theta) &= \begin{cases} C_b \sqrt{r} \Phi_{bi}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow b_2 \\ C_a \sqrt{r} \Phi_{ai}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow a \end{cases}, \\ i_i^{(j)}(r, \theta) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} C_b \Psi_{bi}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow b_2 \\ \frac{1}{\sqrt{r}} C_a \Psi_{ai}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow a \end{cases}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Phi_{bi}^{(j)}(\theta) \\ \Phi_{ai}^{(j)}(\theta) \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^3 \left[A_{ik}^{(j)} \begin{Bmatrix} q_{bk}^{(j)} \\ q_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \sqrt{\cos(\theta) + p_k^{(j)} \sin(\theta)} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_{ik}^{(j)} \begin{Bmatrix} s_{bk}^{(j)} \\ s_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \sqrt{\cos(\theta) + \bar{p}_k^{(j)} \sin(\theta)} \right], \\ \begin{Bmatrix} \Psi_{bi}^{(j)}(\theta) \\ \Psi_{ai}^{(j)}(\theta) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\frac{B_{ik}^{(j)}}{\sqrt{\cos(\theta) + p_k^{(j)} \sin(\theta)}} \begin{Bmatrix} q_{bk}^{(j)} \\ q_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{B}_{ik}^{(j)}}{\sqrt{\cos(\theta) + \bar{p}_k^{(j)} \sin(\theta)}} \begin{Bmatrix} s_{bk}^{(j)} \\ s_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \right], \end{aligned}$$

C_b, C_a – невизначені дійсні сталі.

Як бачимо, в рамках моделі міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту розподіл напружень та електричної індукції в околі точок b_2 і a має не осцилюючу, а кореневу особливість.

Асимптотичні розв'язки (3), (4), які визначають поведінку поля лише навколо особливих точок, мають поєднуватись зі скінченноелементним розв'язком для всієї області, що будується з урахуванням усіх граничних умов як на тріщині, так і на зовнішніх межах області. З умов поєднання цих розв'язків і знаходимо сталі C_b , C_a та C_0 . Детальна методика визначення цих сталих описується в [9].

4. Числовий приклад

Чисельна реалізація розглядуваної методики проводиться за допомогою МСЕ. Для розрахунків використовується скінченноелементна сітка, яка складається з 8-вузлових ізопараметричних чотирикутних скінченних елементів (рис. 2).

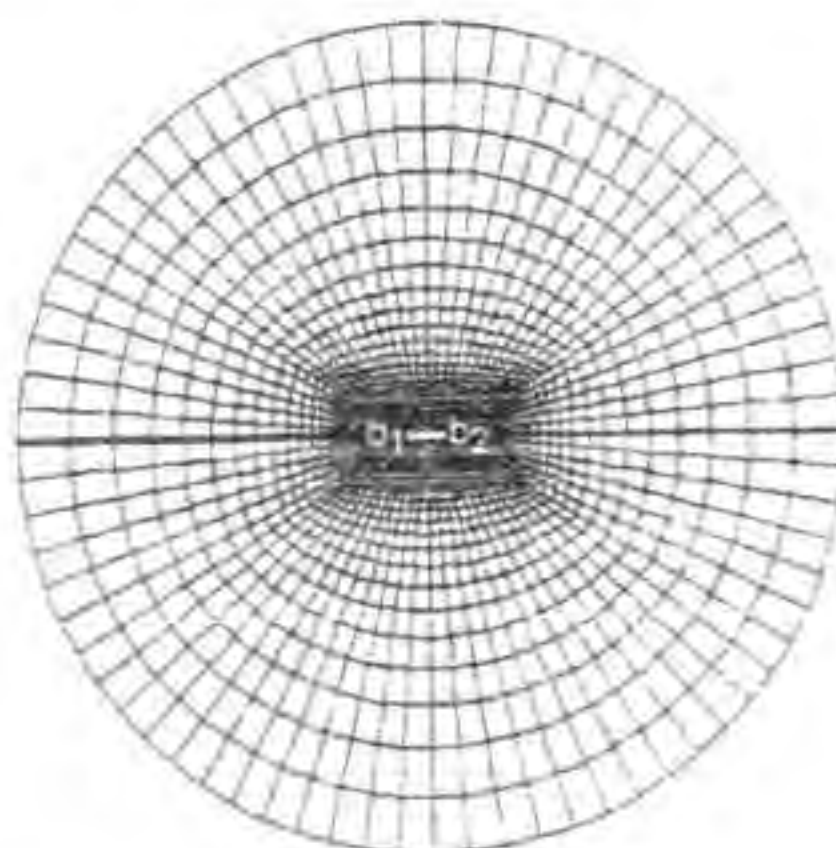


Рис. 2. Глобальне розбиття області на скінченні елементи

Згущення сітки здійснюється біля вершини тріщини, оскільки саме тут концентрація напружень і електричної індукції є найбільшою. В околі самої вершини тріщини має місце структура сітки, яка представлена на рис. 3. У випадку моделі міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту подібна структура використовується також навколо точки a .

Довжина тріщини вибиралася рівною $l = 2$ мм, а довжина найменшого скінченного елементу становила $3 \cdot 10^{-5}$ довжини тріщини. В якості верхнього та нижнього матеріалу

обиралися відповідно п'єзокераміки PZT-5H та PZT-4 [10]. Напрямок вектора прикладення сили визначається кутом α , який утворює цей вектор з додатнім напрямом осі Ox_1 . Вважається, що кут α може змінюватися, але величина інтенсивності розподіленої сили залишається при цьому завжди незмінною, рівною $P = 10^7$ Н/м.

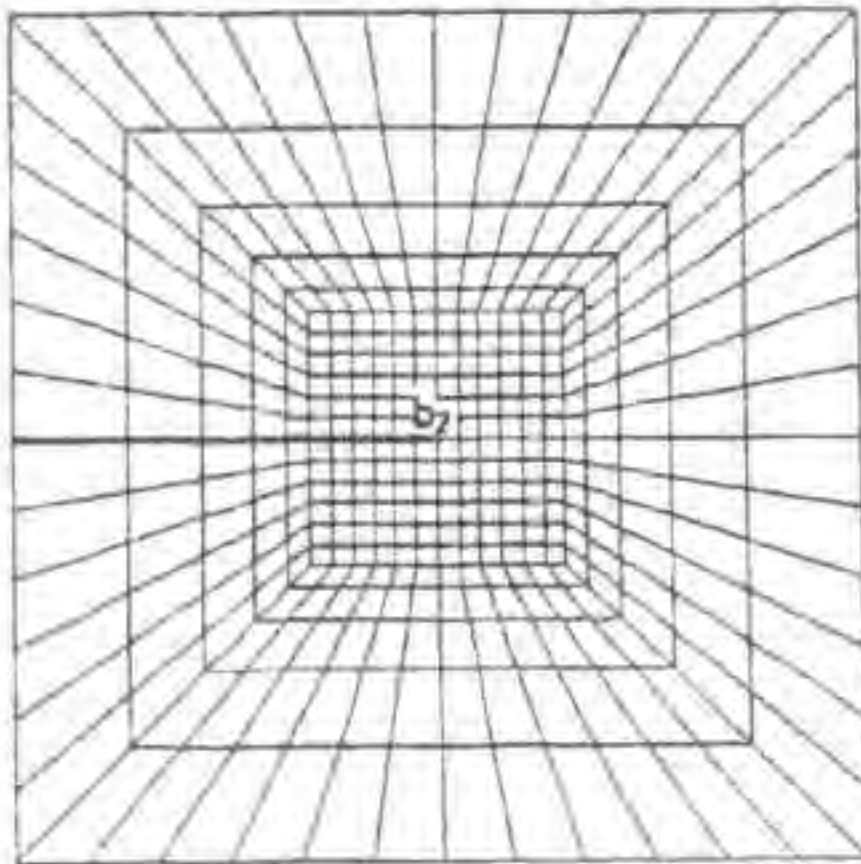


Рис. 3. Структура сітки в околі вершини тріщини

За аналогією з [11], введемо комплексний КІН осциляційної моделі у правій вершині тріщини за формулою

$$K_1^{(osc)} + iK_2^{(osc)} = \lim_{r \rightarrow 0+} \sqrt{2\pi} [\sigma_{33}(r, 0) + i\sigma_{13}(r, 0)] r^{\nu}. \quad (5)$$

Підставляючи (3) в (5), дістанемо

$$K_1^{(osc)} + iK_2^{(osc)} = \sqrt{2\pi} [\bar{\Psi}_2(0) + i\bar{\Psi}_1(0)] \bar{C},$$

де

$$s = \frac{\operatorname{Re}[\Psi_2(0)] \operatorname{Im}[\Psi_1(0)] - \operatorname{Re}[\Psi_1(0)] \operatorname{Im}[\Psi_2(0)]}{\operatorname{Re}[\Psi_1(0)] \operatorname{Re}[\Psi_2(0)] + \operatorname{Im}[\Psi_1(0)] \operatorname{Im}[\Psi_2(0)]}.$$

На рис. 4, 5 показана залежність $\langle K_1^{(osc)} \rangle = K_1^{(osc)} \sqrt{l}/P$ та $\langle K_2^{(osc)} \rangle = K_2^{(osc)} \sqrt{l}/P$ від значення кута α при різних R/l . Крива 1 відповідає значенню $R/l=3$, 2 – $R/l=6$, 3 – $R/l=10$. З отриманих результатів випливає, що місце прикладення зовнішнього навантаження суттєво впливає на КІН $K_1^{(osc)}$ та $K_2^{(osc)}$. Видно, що найбільше за модулем значення КІН $K_1^{(osc)}$ приймає приблизно при $\alpha = \pi/2$, а КІН $K_2^{(osc)}$ при $\alpha = \pi/4$ та $\alpha = 3\pi/4$. З графіків можна також помітити, що зменшення розмірів тіла

призводить до збільшення КІН $K_1^{(osc)}$ та $K_2^{(osc)}$ за модулем.

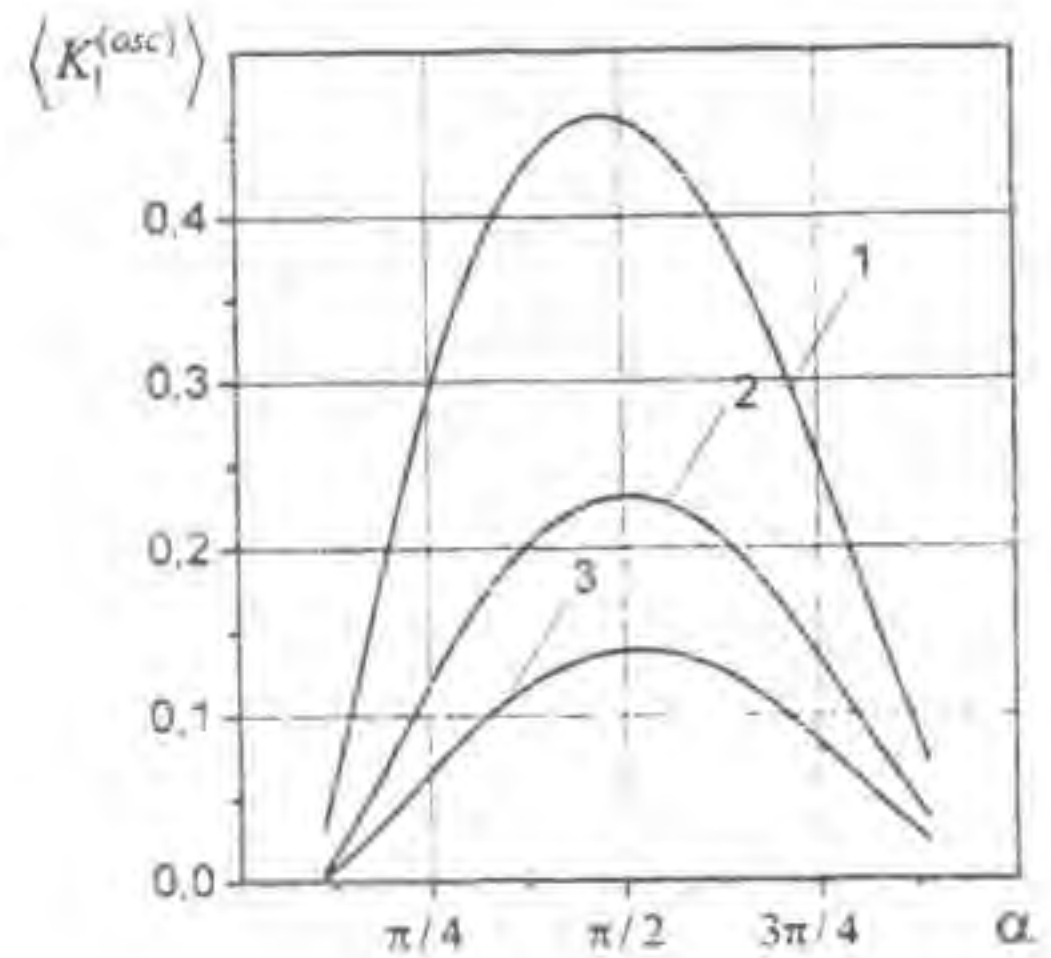


Рис. 4. Залежність КІН $K_1^{(osc)}$ від кута α

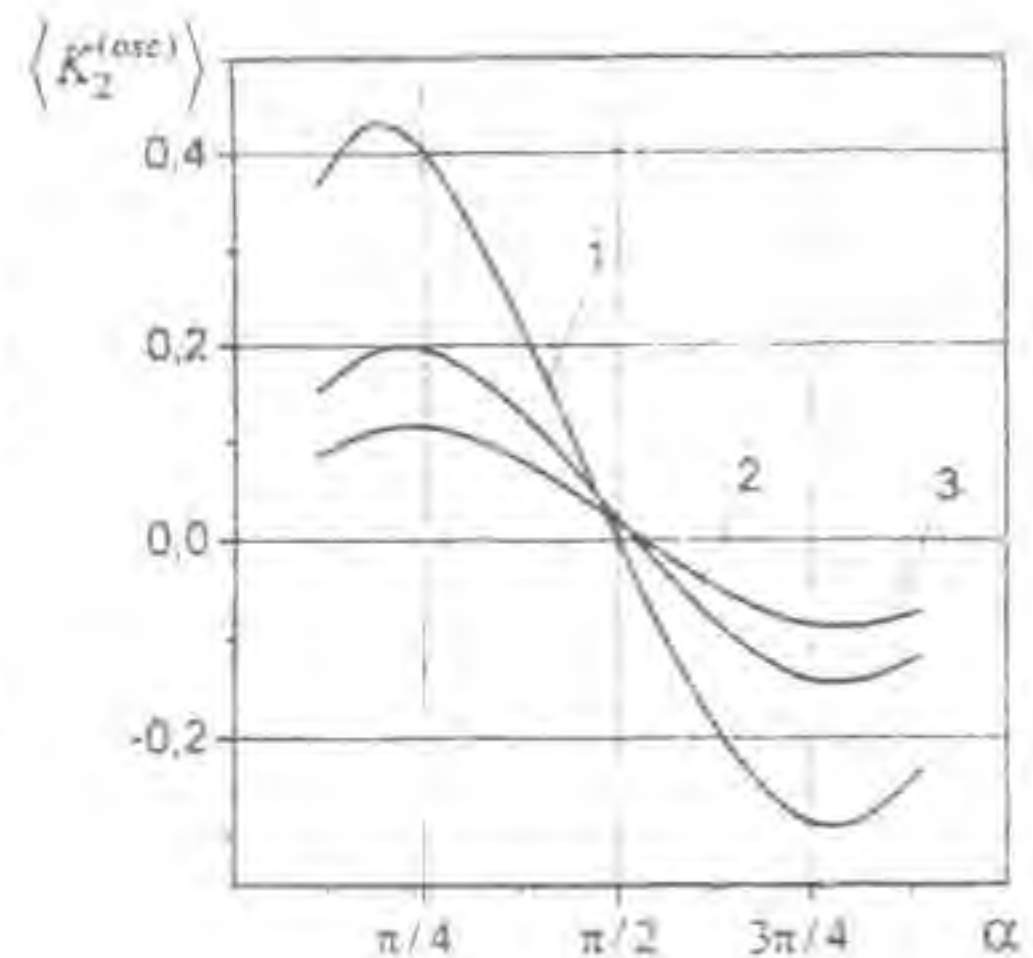


Рис. 5. Залежність КІН $K_2^{(osc)}$ від кута α

Розглянемо далі КІН контактної моделі зі штучною зоною контакту:

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{33}(x_1, 0),$$

$$K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b_2+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b_2)} \sigma_{13}(x_1, 0),$$

Скориставшись співвідношеннями (4), можна записати вирази для K_1 та K_2 у вигляді

$$K_1 = \sqrt{2\pi} C_a \Psi_{a2}(0), \quad K_2 = \sqrt{2\pi} C_b \Psi_{b1}(0).$$

При використанні моделі міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту розв'язок задачі будується при довільному положенні точки a , або величині $\lambda = (b_2 - a)/(b_2 - b_1)$, що визначає

відносну довжину зони контакту. Отримані при цьому результати є математично коректними для даного значення λ . Однак фізично можливими ці розв'язки стають лише для реальної довжини зони контакту $\lambda = \lambda_0$, коли виконуються такі додаткові умови [7]:

$$[[u_3(x_1)]] \geq 0 \quad \text{для } x_1 \in (b_1, a),$$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) \leq 0 \quad \text{для } x_1 \in (a, b_2).$$

У цьому випадку має місце модель із зонами контакту в сенсі Комніноу. Тут символ $[[\cdot]]$ означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Оскільки модель Комніноу – це частковий випадок моделі тріщини зі штучною зоною контакту, немає потреби додатково проводити її чисельний аналіз, досить скористатись отриманими в роботі [8] співвідношеннями, що зв'язують КІН для різних моделей міжфазної тріщини. Це дає можливість визначити реальну довжину зони контакту λ_0 та відповідний їй КІН $K_{20} = K_2(\lambda_0)$.

На рис. 6 показано залежність КІН $\langle K_{20} \rangle = K_{20} \sqrt{l/P}$ від значень кута α . Крива 1 відповідає значенню $R/l=3$, 2 – $R/l=6$, 3 – $R/l=10$.

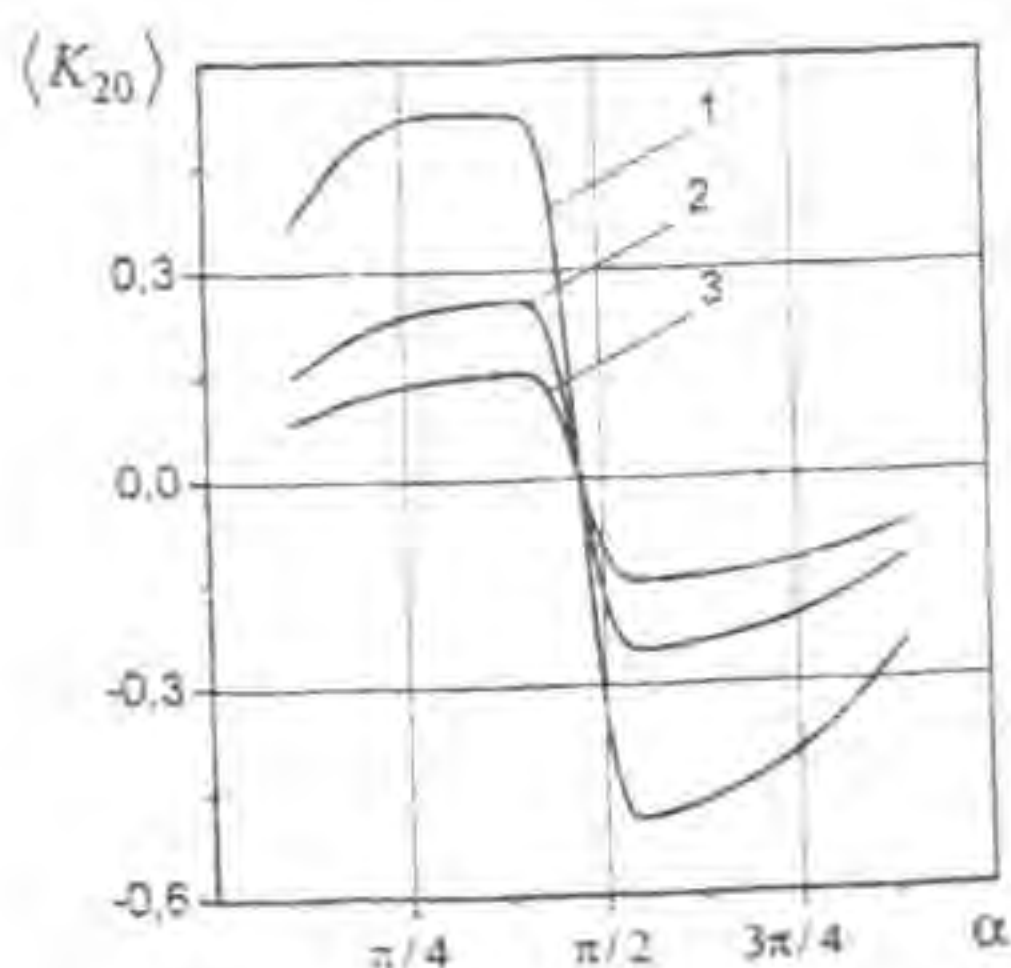


Рис. 6. Залежність КІН K_{20} від кута α

Для тих самих навантажень та розмірів тіла знайдені також числові значення відносної довжини реальної зони контакту λ_0 . Наприклад, для кута $\alpha = 5\pi/6$ вони дорівнюють $\lambda_0 = 0.1427 \cdot 10^{-7}$; $0.4331 \cdot 10^{-8}$; $0.2858 \cdot 10^{-8}$ при $R/l = 3$; 6; 10 відповідно.

З отриманих результатів випливає, що місце прикладення зовнішнього навантаження, а також розміри тіла суттєво впливають як на довжину зони контакту λ_0 , так і на КІН K_{20} . При цьому видно, що при додатних значеннях відношення проєкцій сили P_1/P_3 довжина зони контакту в околі правої вершини тріщини є дуже малою, але в той же час для $P_1/P_3 < 0$ вона може стати досить суттєвою величиною. Видно також, що зменшення розмірів тіла призводить до збільшення відносної довжини зони контакту λ_0 та КІН K_{20} за модулем.

Швидкість вивільнення енергії під час росту тріщини в околі її правої вершини визначається наступним чином [12]:

$$G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int_{t_2}^{t_2+\Delta t} (\sigma_{33}(\tau, 0)[[u_1(\tau - \Delta t)]] + \sigma_{13}(\tau, 0)[[u_1(\tau - \Delta t)]] d\tau \quad (6)$$

Електрична складова швидкості вивільнення енергії для електропроникної тріщини відсутня, оскільки стрибок електричного потенціалу дорівнює нулю вздовж всієї межі поділу матеріалів.

Як показав аналітичний аналіз [8], представлення швидкості вивільнення енергії (6), що відповідає різним моделям міжфазної тріщини, можна подати через відповідні КІН:

для осциляційної моделі міжфазної тріщини:

$$G^{(osc)} = \Omega \left[\left(K_1^{(osc)} \right)^2 + m_1^2 \left(K_2^{(osc)} \right)^2 \right],$$

для моделі міжфазної тріщини з реальною зоною контакту (моделі Комніноу):

$$G_0 = \Omega m_1^2 K_{20}^2,$$

де m_1, Ω – сталі, які залежать від характеристик матеріалу [8].

На рис. 7 зображена графічна залежність швидкості вивільнення енергії $\langle G \rangle = G/P$ від кута α . Криві 1-3 побудовані для значень $R/l = 3$; 6; 10. Суцільна лінія відповідає осциляційній моделі міжфазної тріщини, а маркерами позначено результати, одержані при використанні моделі міжфазної тріщини з реальною зоною контакту. Із результатів витікає, що значення швидкості вивільнення енергії для різних моделей міжфазної тріщини практично співпадають між собою. Видно також, що збільшення розмірів тіла призводить до зменшення значень швидкості вивільнення енергії.

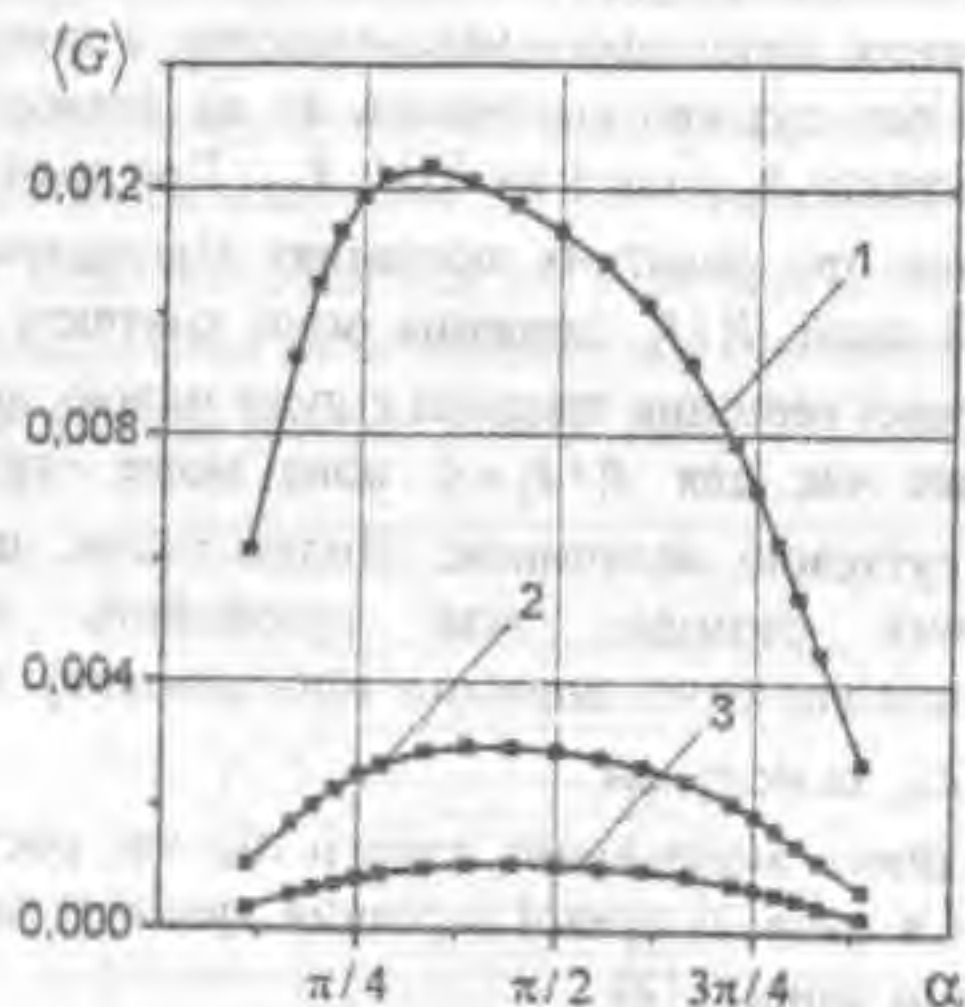


Рис. 7. Залежність швидкості вивільнення енергії G від кута α

5. Висновки

За допомогою чисельно-аналітичного підходу, що передбачає поєднання асимптотичного та скінченноелементного розв'язків, розв'язана задача електропружності для біматеріального п'єзокерамічного тіла скінченних розмірів, що містить міжфазну тріщину. Проаналізовані осциляційна й контактна моделі тріщини. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкості вивільнення енергії для обох моделей. Показано, що вони суттєво залежать від характеристик матеріалу, розмірів тіла та місця прикладення розподіленої сили. При цьому значення швидкості вивільнення енергії для різних моделей тріщини практично співпадають.

Виходячи з викладеного, можемо зробити висновок, що запропоновану тут методику можна використовувати при розв'язанні інших крайових задач електропружності для композитних п'єзокерамічних тіл довільної форми з міжфазними тріщинами шляхом перебудови скінченноелементної сітки лише в областях, віддалених від тріщини.

Список використаних джерел

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

2. Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – 40. – P. 739-765.
3. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – 44. – P. 631-636.
4. Улитко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Современ. проблемы механики сплош. среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185-193.
5. Острик В. І., Улитко А. Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 119-126.
6. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред. – Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63-68.
7. Лобода В. В. Об одном эффекте в теории межфазной трещины // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1989. – № 8. – С. 39-43.
8. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127-143.
9. Говоруха В. Б. Скінченно-елементне дослідження міжфазної тріщини в п'єзоелектричному матеріалі з урахуванням привершинної асимптотики напружень і переміщень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 114-120.
10. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т. 5).
11. Rice J. R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – 32. – P. 418-423.
12. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

Надійшла до редколегії 15.12.2008

УДК 539.3:519.6

Вадим С. Гудрамович, член-кореспондент
НАН України, професор,
Етері Л. Гарт, доцент

**Вплив форми скінченного елемента на
обчислювальну ефективність проекційно-
ітераційних методів при розв'язанні плоскої
задачі теорії пружності**

Виконано порівняльний аналіз розв'язку
плоскої задачі теорії пружності на основі
проекційно-ітераційного варіанту метода
скінченних елементів при застосуванні двох
типів скінченних елементів. Досліджена
обчислювальна ефективність запропонованого
проекційно-ітераційного варіанту та традицій-
ного методу скінченних елементів.

Ключові слова: плоска задача, пружна
пластинка з отвором, проекційно-ітераційний
метод, скінченні елементи.

E-mail: hudramovich@i.ua, compumech@ua.fm

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

При дослідженні напружено-деформівного
стану елементів сучасних конструкцій (пластин,
плит, оболонок) важливе значення мають
ефективні науково обгрунтовані методи
розрахунків. Як правило, одержання точного
розв'язку крайових та варіаційних задач теорії
пружності в аналітичному вигляді можливо лише
для досить вузького класу задач. У зв'язку з цим
актуальним є розвиток та удосконалення
наближених методів розв'язування таких задач.
Сучасна теорія наближених методів
розв'язування різних задач математики і
механіки застосовує ідеї функціонального
аналізу, що дозволяє суттєво спростити погляд на
багато чисельних методів, а також приводить до
розробки принципово нових обчислювальних
схем, які сприяють зменшенню витрат часу при
розрахунках на персональних комп'ютерах.

Серед наближених методів розв'язування
операторних рівнянь у нормованих просторах
важливе місце займають ітераційні та проекційні
методи. Фундаментальні результати у цієї галузі
належать М. М. Боголюбову, Л. В. Канторовичу,
М. В. Келдишу, Г. І. Петрову, О. А. Самарському,
А. М. Тихонову, Г. М. Вайнікко, М. О. Красно-
сельському, С. Г. Міхліну і т. ін. Поєднання ідей
проекційних та ітераційних методів знайшло

Vadim S. Hudramovych, corresponding member
of NAS Ukraine, professor
Eteri L. Hart, associate professor

**Influence of finite element form to calculated
efficiency projective-iterative methods in
solution plane problem of elasticity theory**

Comparative analysis solution for plane problem
of elasticity theory on base of projective-iterative
variant of finite elements method for two finite
elements types (triangular and rectangular) is
developed. Calculated efficiency of proposed
projective-iterative variant and traditional finite
element method is developed.

Keywords: plane problem, elastic plate with
hole, projective-iterative method, finite elements
method.

відображення у групах проекційно-ітеративних
[1], багатосіткових [3] і проекційно-ітераційних
методів [2, 4–6]. У теперішній час проекційно-
ітераційні методи є одними із ефективних
чисельних методів розв'язування нескінчен-
новимірних задач. Про це свідчить практика їх
застосування до розв'язування еліптичних
крайових задач. Розвиток цих методів і
застосування розроблених модифікацій до
розв'язування різних класів задач теорії
пружності має важливе прикладне значення.

У [5, 6] проведено теоретичне обгрунтування
проекційно-ітераційних модифікацій методів
розв'язування задач умовної мінімізації
функціоналів у гільбертових просторах, у [7, 8]
досліджена їх обчислювальна ефективність при
розв'язанні деяких класів крайових задач теорії
пружності та наведені результати
експериментальних досліджень.

У даній роботі проводиться дослідження
напружено-деформівного стану тонкої ізотропної
пластинки з прямокутним отвором при заданому
лінійному законі переміщень на її границі за
допомогою проекційно-ітераційного варіанту
метода скінченних елементів (МСЕ) при
застосуванні трикутних і прямокутних
лагранжевих скінченних елементів та
з'ясовується вплив форми скінченного елемента
на обчислювальну ефективність цього методу.

2. Постановка задачі

Розглянемо напружено-деформівний стан тонкої ізотропної прямокутної пластинки зі сторонами L_1, L_2 з прямокутним отвором у її центрі розміром $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2')$, контур якого Γ_1 є вільним від сторонніх зусиль (рис. 1). На зовнішній частині границі Γ_2 задані переміщення

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{\Gamma_2} &= g_1(x, y), \\ v(x, y)|_{\Gamma_2} &= g_2(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

де $g_1(x, y), g_2(x, y)$ – задані лінійні функції змінних x, y .

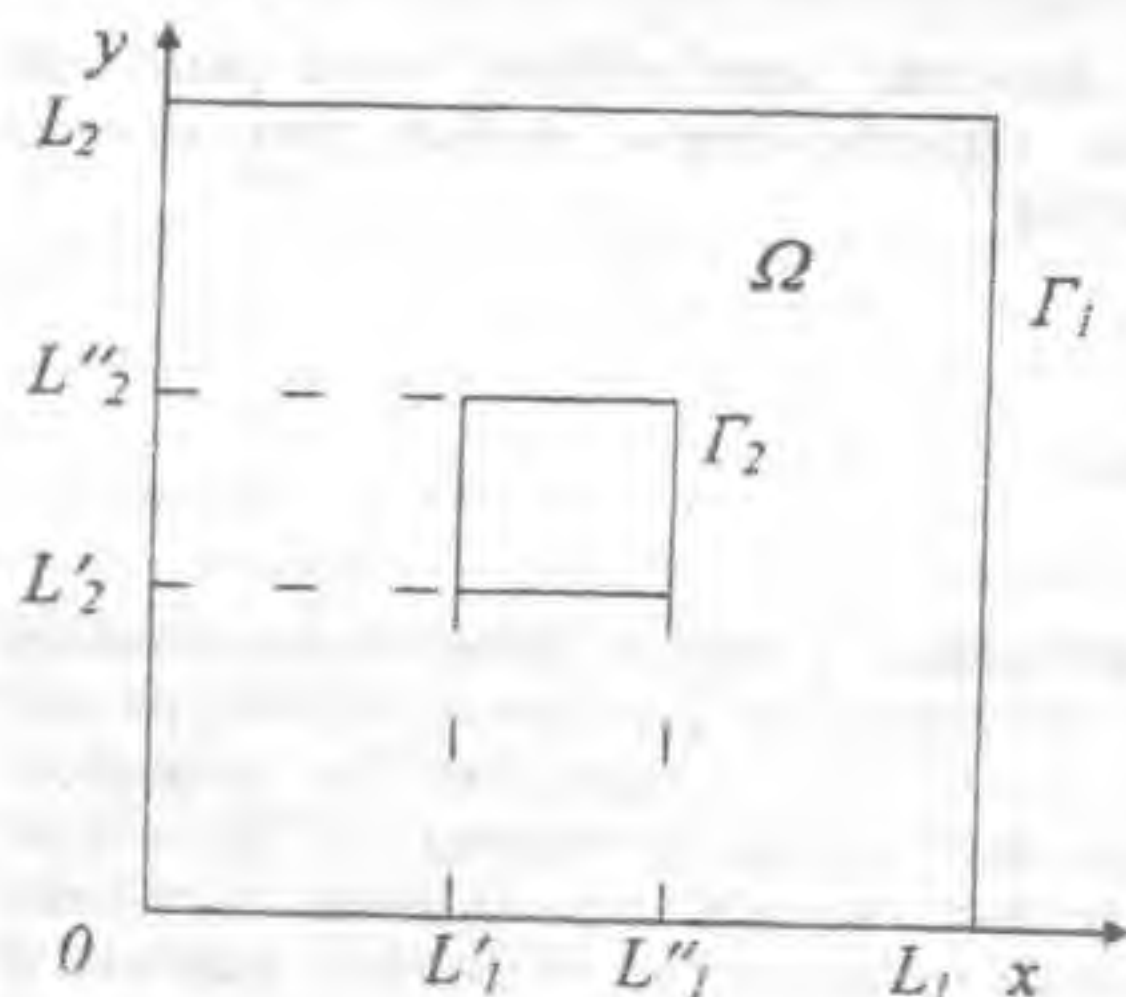


Рис. 1 – Геометрія пластинки

За варіаційним принципом мінімуму потенційної енергії математична модель задачі, що розглядається, має такий вигляд [9]. На класі функцій, які мають кусково-неперервну похідну в області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – границя Ω і задовольняють умовам (1), треба знайти $u(x, y), v(x, y)$, що доставляють мінімум функціоналу

$$\begin{aligned} I[u, v] = \int_{\Omega} & \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

де $u(x, y), v(x, y)$ – проекції вектора переміщень відповідно на осі Ox та Oy ; $\lambda, \mu > 0$ – константи Ляме.

Деформації $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ і напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Задачу пошуку мінімуму функціонала (2) можна розглядати як задачу умовної мінімізації у гільбертовому просторі

$$I[z] \rightarrow \inf, \quad z \in Z, \quad (3)$$

де $I[z]$ – лінійний неперервний функціонал, обмежений знизу на множині кінематична можливих переміщень Z дійсного гільбертова простору $H = W_2^{(1)}(\Omega)$.

3. Метод розв'язання

Для розв'язання вихідної задачі застосуємо проекційно-ітераційний варіант метода скінченних елементів, який детально викладено у [5, 6]. Наведемо його основну ідею.

Вихідна екстремальна задача (3) апроксимується за допомогою МСЕ послідовністю дискретних екстремальних задач ($n = 1, 2, \dots$) для функцій багатьох змінних. Кожна із одержаних задач розв'язується за допомогою метода послідовної верхньої релаксації, але не до кінця. Починаючи з деякого достатньо грубого розбиття для відповідної функції багатьох змінних будується лише декілька (k_n) наближень до її точки мінімуму, останнє наближення потім інтерполюється на більш дрібну скінченно-елементну сітку і служить на ній початковим наближенням до точки мінімуму для відповідної функції багатьох змінних. Процес триває, доки не буде досягнута задана точність.

За МСЕ проведемо дискретизацію області Ω прямокутними і трикутними скінченними елементами, які одержимо із прямокутних елементів при діленні їх діагоналлю (рис. 2). У кожному трикутному скінченному елементі шукані функції переміщень $u(x, y)$ і $v(x, y)$ наближено замінімо лінійними функціями, які залежать від вузлових значень u і v у кожній із трьох вершин скінченного елемента $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$. Далі застосуємо методику, запропоновану у [10] для прямокутних скінченних елементів, за якою не треба зберігати матрицю жорсткості системи у явному вигляді, а значення переміщень u і v у довільному вузлі (i, j) (рис. 2, а) можна виразити через вузлові значення переміщень $(u_1, u_2, \dots, u_6, v_1, v_2, \dots, v_6)$ шістьох прилеглих до даного вузла скінченних елементів. На рис. 2, а наведено шістьох елементний сімивузловий шаблон, в якому вузлі (i, j) , що розглядається, позначено цифрою 7.

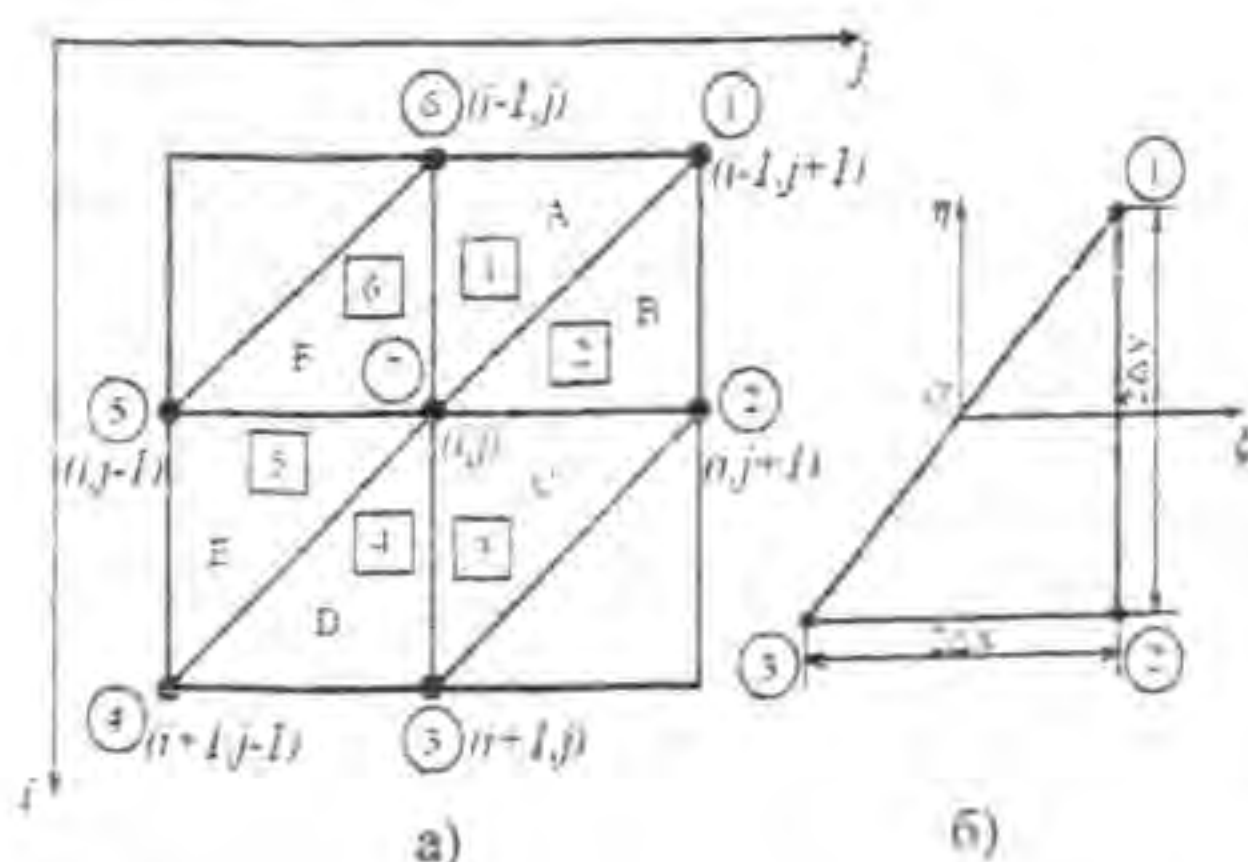


Рис. 2 – а) Нумерація скінчених елементів і вузлів, що прилігають до даного вузла (i, j) ;
б) трикутний скінченний елемент у локальній системі координат

При обході отвору потрібно застосовувати неповний шаблон, тому доцільно ввести так звані індикатори шістьох скінченних елементів А, В, С, D, Е, F, де $A=B=C=D=E=F=1$, якщо відповідний скінченний елемент належить шаблону, і $A=B=C=D=E=F=0$, в іншому випадку.

Враховуючи введені індикатори у формулах для обчислення переміщень у довільному вузлі (i, j) , одержимо:

$$\bar{u}_7 = [(R_1 \cdot B + R_1 \cdot C) \cdot u_2 + (R_4 \cdot C + R_4 \cdot D) \cdot u_3 + (R_1 \cdot E + R_1 \cdot F) \cdot u_5 + (R_4 \cdot A + R_4 \cdot F) \cdot u_6 + (R_3 \cdot A + R_3 \cdot B) \cdot v_1 - (R_2 \cdot B + R_3 \cdot C) \cdot v_2 - (R_2 \cdot C + R_3 \cdot D) \cdot v_3 + (R_3 \cdot D + R_2 \cdot E) \cdot v_4 - (R_2 \cdot E + R_3 \cdot F) \cdot v_5 - (R_3 \cdot A + R_2 \cdot F) \cdot v_6 + (R_2 \cdot C + R_3 \cdot C + R_2 \cdot F + R_3 \cdot F) \cdot v_7] / P; \quad (4)$$

$$\bar{v}_7 = [(R_2 \cdot A + R_3 \cdot B) \cdot u_1 - (R_3 \cdot B + R_2 \cdot C) \cdot u_2 - (R_3 \cdot C + R_2 \cdot D) \cdot u_3 + (R_2 \cdot D + R_3 \cdot E) \cdot u_4 - (R_3 \cdot E + R_2 \cdot F) \cdot u_5 - (R_2 \cdot A + R_3 \cdot F) \cdot u_6 + (R_2 \cdot C + R_3 \cdot C + R_2 \cdot F + R_3 \cdot F) \cdot u_7 + (R_6 \cdot B + R_6 \cdot C) \cdot v_2 + (R_5 \cdot C + R_5 \cdot D) \cdot v_3 + (R_6 \cdot E + R_6 \cdot F) \cdot v_5 + (R_5 \cdot A + R_5 \cdot F) \cdot v_6] / Q,$$

де $\eta = \Delta x / \Delta y$, $R_1 = (2\mu + \lambda) / \eta$, $R_2 = \mu \eta$,

$R_3 = \lambda$, $R_4 = \mu$, $R_5 = \mu / \eta$, $R_6 = (2\mu + \lambda) \eta$,

$$P = R_2 \cdot A + R_1 \cdot B + R_1 \cdot C + R_2 \cdot C + R_2 \cdot D + R_1 \cdot E + R_1 \cdot F + R_2 \cdot F,$$

$$Q = R_6 \cdot A + R_5 \cdot B + R_6 \cdot C + R_5 \cdot C + R_6 \cdot D + R_5 \cdot E + R_6 \cdot F + R_5 \cdot F;$$

$2\Delta x$, $2\Delta y$ – розміри трикутного скінченного елемента вздовж осей Ox і Oy відповідно.

Одержані за (4) значення $\bar{u}_7$ і $\bar{v}_7$ далі уточнюються за формулами методу послідовної верхньої релаксації [11]:

$$u_7^{(k+1)} = u_7^{(k)} + \omega(\bar{u}_7 - u_7^{(k)});$$

$$v_7^{(k+1)} = v_7^{(k)} + \omega(\bar{v}_7 - v_7^{(k)}),$$

де k – номер ітерації ($k = 0, 1, \dots, k_n$); ω – параметр релаксації ($1 < \omega < 2$).

4. Числовий аналіз

Дослідження проведено для сталюї пластини з розмірами $L_1 = L_2 = 0,0225$ м, з отвором $0,01 \times 0,01$ м, модулем пружності $E = 200$ ГПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$. Лінійні функції

$g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ перемішень на границі Γ_2 задані у вигляді [9, гл. 4, § 1]: $g_1(x, y) = \gamma_0(y - 1,125)$, $g_2(x, y) = \gamma_0(x - 1,125)$, $\gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ – кут зсуву. Проекційно-ітераційний варіант МСЕ реалізовано на 5-ох скінченно-елементних сітках (19×19 , 37×37 , 73×73 , 145×145 , 289×289) із прямокутних та трикутних лагранжових елементів першого ступеня ($h_{n+1} = h_n/2$). Кількість k_n необхідних наближень на n -ому кроці ($n = 1, 2, \dots, 5$) проекційно-ітераційного процесу обирається як найменше ціле k , що задовольняє нерівності

$$\|z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)}\| \leq \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, k_n),$$

де ε – задана похибка обчислень; $z_h^{(k)}$ – наближений розв'язок n -ої скінченновимірної задачі.

Числові результати отримані на ПК Toshiba U300 (1,73 GHz) з 1 GB оперативної пам'яті. Алгоритм метода реалізовано на мові Фортран.

Наведемо результати числової реалізації традиційного МСЕ і його проекційно-ітераційного варіанта на послідовності 5-ох скінченно-елементних сіток із застосуванням трикутних (табл. 1) та прямокутних скінченних елементів (табл. 2) при $\varepsilon = 10^{-9}$, $\omega = 1,75$.

Таблиця 1

Застосування трикутних скінченних елементів

Номер сітки	Сітка	Проекційно-ітераційний МСЕ		Традиційний МСЕ	
		k_n	Час, с	k_n	Час, с
1	19×19	140	0,07	–	–
2	37×37	119	0,20	–	–
3	73×73	323	2,20	–	–
4	145×145	1001	27,28	–	–
5	289×289	3332	367,93	6747	789,61

З таблиці 1 випливає, що, виходячи з нульового початкового наближення, яке задається на найгрубішій сітці (19×19), наближений розв'язок вихідної задачі при застосуванні трикутних скінченних елементів у проекційно-ітераційному процесі було одержано за $140 + 119 + 323 + 1001 + 3332 = 4915$ ітерацій (6 хв 38 с). При розв'язанні цієї задачі традиційним МСЕ на одній сітці (289×289) з нульовим початковим наближенням розв'язок

було знайдено за 6747 ітерацій (13 хв 9 с). При цьому з точки зору витрат машинного часу проекційно-ітераційний варіант МСЕ виявився приблизно у 2 рази ефективніше звичайного МСЕ.

Таблиця 2

Застосування прямокутних скінченних елементів

Номер сітки	Сітка	Проекційно-ітераційний МСЕ		Традиційний МСЕ	
		k_n	Час, с	k_n	Час, с
1	19×19	101	0,05	–	–
2	37×37	82	0,18	–	–
3	73×73	233	2,10	–	–
4	145×145	635	23,1	–	–
5	289×289	1393	206,2	7012	1082,69

За даними таблиці 2 наближений розв'язок вихідної задачі було одержано за допомогою проекційно-ітераційного варіанту МСЕ при застосуванні прямокутних скінченних елементів за $101 + 82 + 233 + 635 + 1393 = 2444$ ітерації (3 хв 51 с). Для розв'язання цієї задачі традиційним МСЕ на одній останній сітці (289×289) з нульовим початковим наближенням знадобилося 7012 ітерацій (18 хв 2 с). Таким чином, за часом розрахунків на ПК проекційно-ітераційний варіант МСЕ у цьому випадку виявився у 4,7 разів більш ефективним ніж звичайний МСЕ.

Аналіз таблиць 1 і 2 свідчить про те, що застосування прямокутних скінченних елементів у проекційно-ітераційному процесі приводить до зменшення машинного часу розрахунків порівняно із застосуванням трикутних скінченних елементів (приблизно у 1,7 разів). У той же час, застосування трикутних скінченних елементів у звичайному МСЕ потребує приблизно у 1,4 разів менше машинного часу порівняно із застосуванням прямокутних скінченних елементів.

Результати, які одержані у характерних перерізах пластини (рис. 1) проекційно-ітераційним варіантом МСЕ на послідовності скінченно-елементних сіток при застосуванні прямокутних та трикутних скінченних елементів, мають розбіжність не більш 1%. У кутових точках, як відомо, має місце концентрація напружень. Розв'язок, одержаний на основі МСЕ, є достовірним на відстані двох кроків від кутових точок [9, гл. 4, § 1]. На рис. 3–5 наведено, як

приклад, значення напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ у перерізі $x = L_1', 0 \leq y \leq L_2$ при застосуванні прямокутних (лінія 1) та трикутних (лінія 2) скінченних елементів, а на рис. 6 – лінії рівних напружень σ_x .

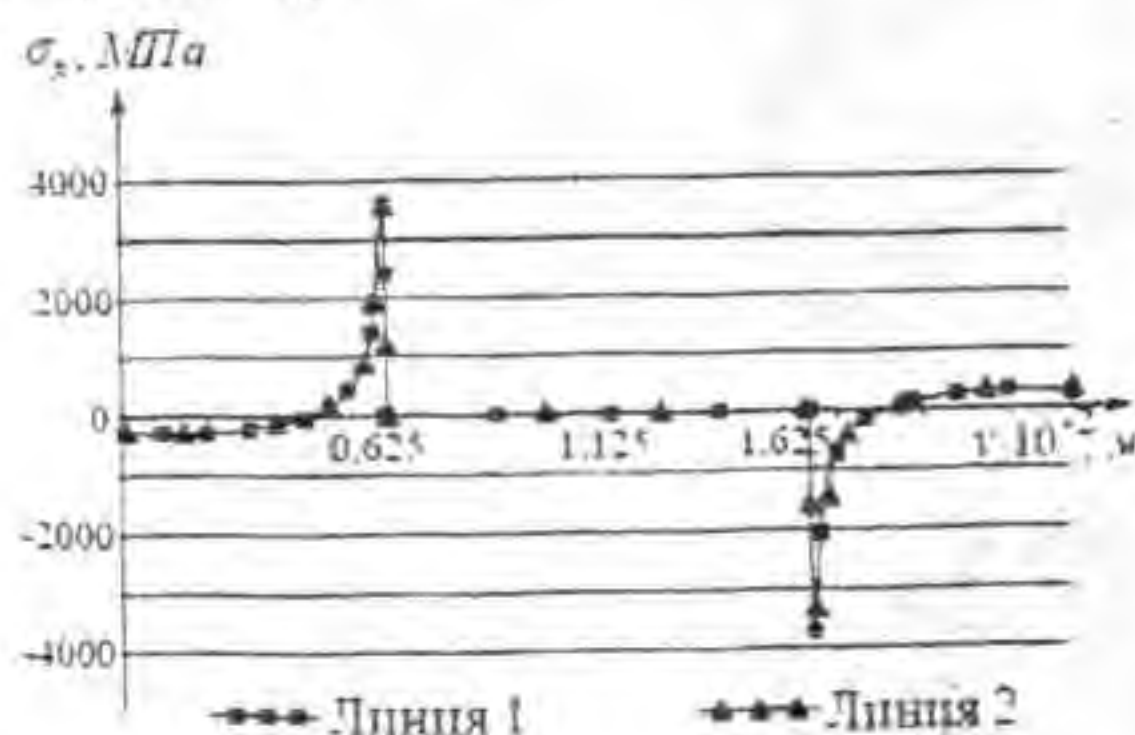


Рис. 3 – Напруження σ_x вздовж Oy

у перерізі $x = L_1', 0 \leq y \leq L_2$

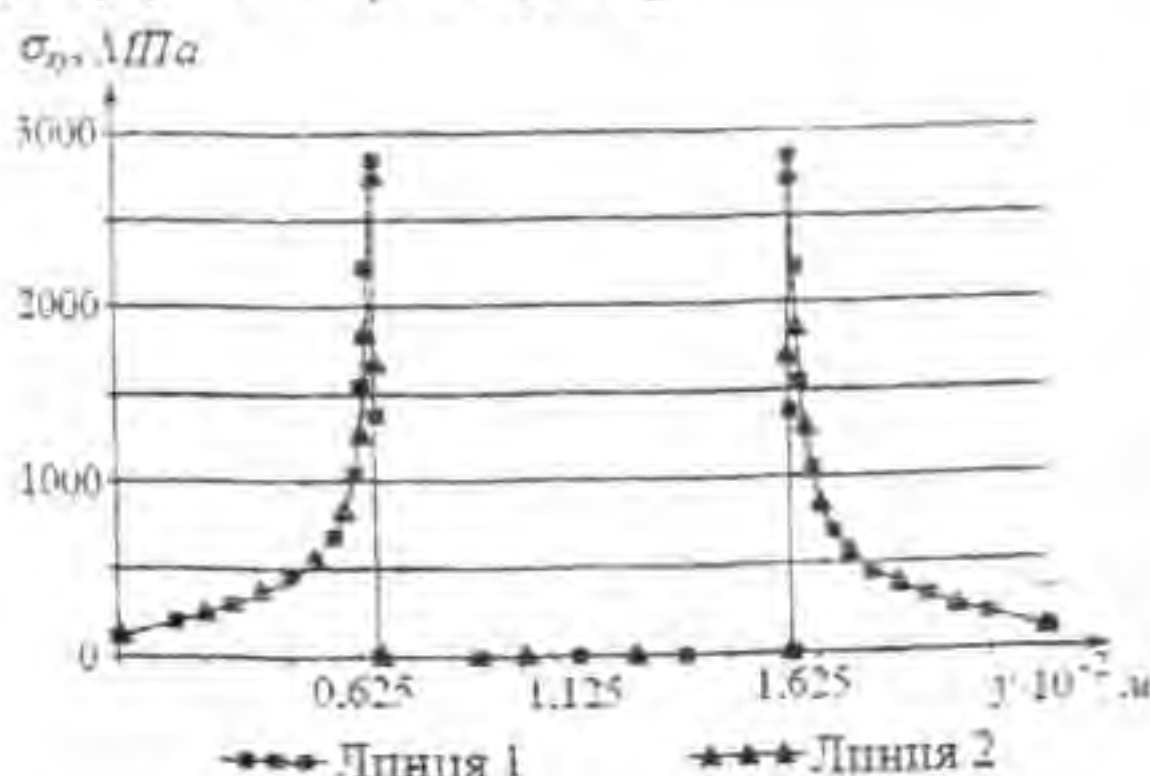


Рис. 4 – Напруження σ_y вздовж Oy

у перерізі $x = L_1', 0 \leq y \leq L_2$

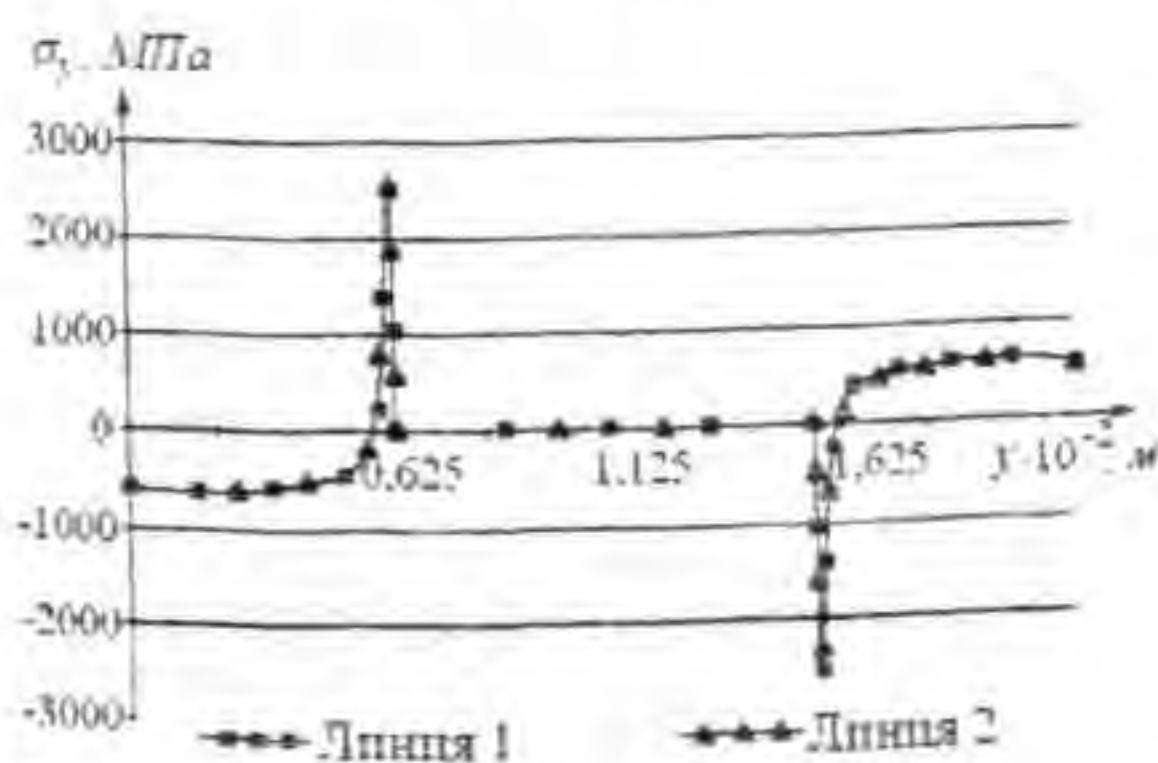


Рис. 5 – Напруження σ_y вздовж Oy

у перерізі $x = L_1', 0 \leq y \leq L_2$

Якісний і кількісний аналіз результатів свідчить про їх вірогідність (результати добре узгоджуються з розв'язками, наведеними у [9,

гл. 4] при застосуванні методу скінченних різниць).

5. Висновки

На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

1) застосування проєкційно-ітераційного варіанту МСЕ до розв'язання задач теорії пружності для пластин з прямокутними отворами має значні переваги порівняно зі звичайним МСЕ (виграш за часом розрахунків становить більш ніж у 4 рази при застосуванні прямокутних скінченних елементів і приблизно у 2 рази – трикутних скінченних елементів);

2) рекомендоване значення параметра релаксації для вказаного класу задач $\omega = 1.75$;

3) проєкційно-ітераційний варіант МСЕ при застосуванні трикутних скінченних елементів надає більш точний розв'язок, але декілька програє за часом розрахунків цьому варіанту МСЕ при застосуванні прямокутних скінченних елементів;

4) проєкційно-ітераційний варіант МСЕ доцільно застосовувати до розв'язування задач великої вимірності (з більше ніж 100 тис. невідомими), при цьому розв'язок може бути одержано за задовільний час. Зокрема, цей метод є корисним при розрахунках, що пов'язані з уточненням математичних моделей вказаного класу;

5) при збільшенні вимірності скінченно-елементної задачі обчислювальні переваги проєкційно-ітераційного варіанту МСЕ порівняно зі звичайним МСЕ суттєво зростають;

6) розроблений алгоритм і комплекс програм для ПК дозволяють розв'язувати задачі для функціоналів вигляду (2) при різних конфігураціях пластин, отворів і типів граничних умов.

У перспективі проєкційно-ітераційний варіант МСЕ при застосуванні як трикутних, так і прямокутних скінченних елементів може бути розвинуто для апроксимацій вищих порядків і застосовано до розв'язування задач про визначення напружено-деформівного стану пластин і оболонок з декількома отворами та включеннями неканонічної форми [9, 12, 13].

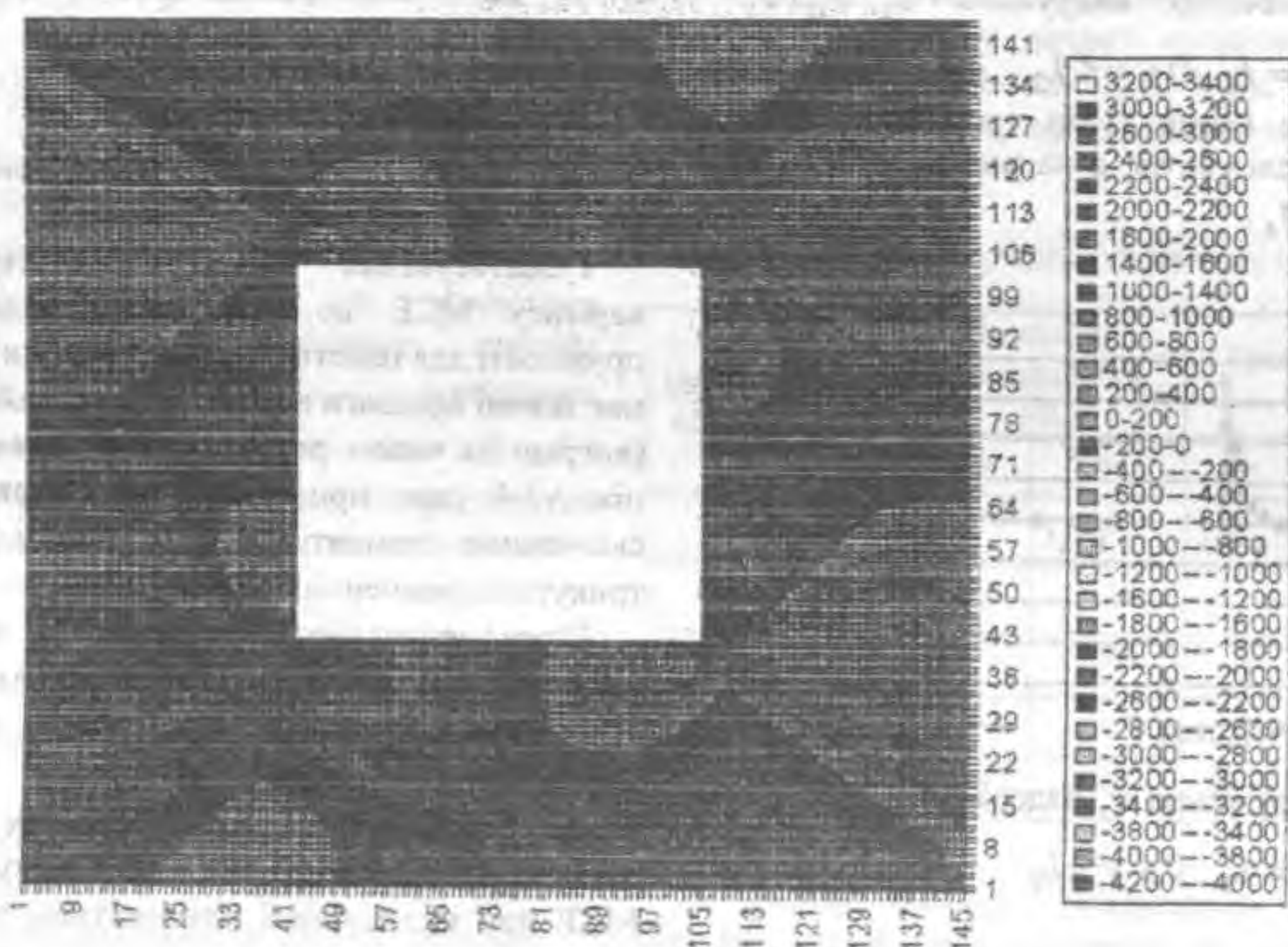


Рис. 6 – Лінії рівних напружень σ_x , МПа

Список використаних джерел

1. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
3. Шайдунов В. В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Мир, 1989. – 288 с.
4. Балашова С. Д., Плахий З. Т. Проекционно-итерационные методы решения задач минимизации с ограничениями // Вычислительная и прикладная математика. – 1988. – 64. – С. 3–8.
5. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56–61.
6. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода поточечной релаксации // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 70–79.
7. Гарт Е. Л., Лисицина О. А., Прокопало Є. Ф. Експериментальне дослідження методом фотопружності пластини з прямокутним отвором для перевірки проекційно-ітераційного варіанту метода скінчених елементів // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур: Матеріали Сьомого українсько-

- польського наукового симпозиуму (5–9 вересня 2007 р.). – Львів, 2007. – С. 57.
8. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 92–100.
9. Молчанов И. Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – К.: Наук. думка, 1979. – 316 с.
10. Кузьменко В. И. Трехмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 105–112.
11. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
12. Гузь А. Н. Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов. – К.: Наук. думка, 1980. – 692 с.
13. Сулим Г. Т. Основы математической теории равновесия деформированных твердых тел с тонкими включениями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.

Надійшла до редколегії 12.12.2008

УДК 532.5

Олександр А. Гуржій, к.ф.-м.н.

Стійкість руху точкових вихорів в області обмеженій колом

Проводиться порівняння лінійного і нелінійного методів аналізу стійкості руху системи точкових вихорів, що формують в початковий момент кругову конфігурацію. Дослідження показало, що лінійна теорія стійкості визначає достатньо точно область параметрів стійкої взаємодії вихорів. Проте лінійна теорія вносить помилки в значення критичних параметрів, які визначають зміну типів руху системи точкових вихорів в круговій порожнині.

Ключові слова: точкові вихори, теорія стійкості, нелінійна теорія

E-mail: a.gourjii@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Класичну задачу про рух точкових вихорів у нестисливій нев'язкій рідині, обмеженій границею кола, було вперше розглянуто в роботі [1]. Було побудовано аналітичний роз'язок для випадку симетричного розташування N точкових вихорів на колі меншого радіуса та досліджено в лінійному наближенні стійкість такого руху. Аналітичні методи припускають лінеаризацію рівнянь руху, введення малого збурження і аналіз його розвитку в часі. Якщо збурження в лінеаризованій системі не розвивається, то лінійна теорія оголошує такі потоки умовно стійкими. Проте це не означає, що другі й подальші доданки не можуть зробити свій внесок у розвиток збурження як у бік стійкості, так і у бік нестійкості течії. Такі випадки часто зустрічаються в системах з великим числом ступенів вільності [2, 3].

Метою роботи є порівняльний аналіз лінійного і нелінійного методів дослідження стійкості на прикладі руху системи точкових вихорів, що створюють в початковий момент часу кругову конфігурацію в круговій порожнині.

A.A. Gourjii, Ph.D. (Physics and Mathematics)

Stability of point vortex motion in a circular domain

A comparison of linear and nonlinear methods of stability analysis of motion of point vortex system formed at the initial moment a circular configuration is analysed. The investigation shows that the linear theory of stability determines rather accurately the region of parameters for steady vortex interaction. However, the linear theory brings errors into values of critical parameters, which determine the change of the types of motion of the system of point vortices in a circular cavity.

Keywords: point vortices, stability theory, nonlinear theory.

2. Постановка задачі

Розглянемо рух системи N точкових вихорів інтенсивності k_α , розмішених в точках $z_\alpha = x_\alpha + jy_\alpha$, ($\alpha = 1, \dots, N$), у круговій області радіусу a , яка заповнена ідеальною нестисливою рідиною. Рівняннями руху вихорів є система звичайних диференціальних рівнянь [2, 4]

$$\dot{z}_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{z_\alpha - z_\beta} - \sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{z_\alpha - a^2/z_\beta^*} \right] \quad (1)$$

з початковими умовами $z_\alpha(0) = z_\alpha^{(0)}$.

Динамічна система (1) має два незалежні інваріанти руху

$$I = \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha |z_\alpha|^2, \\ H = -\frac{1}{4\pi} \left[\sum_{\alpha=1}^N k_\alpha^2 \ln \frac{1}{a^2 - |z_\alpha|^2} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N k_\alpha k_\beta \ln \left| \frac{z_\alpha - z_\beta}{1 - z_\alpha z_\beta^*} \right| \right], \quad (2)$$

які виражають закони збереження моменту імпульсу і енергії руху рідини.

Якщо вихори однакової інтенсивності k утворюють симетричну кругову конфігурацію радіусу b ($b < a$), тоді рівняння руху в полярній

системі координат (ρ, φ) , яка пов'язана з центром порожнини, приймають вигляд [2, 4]

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\alpha &= \frac{k}{4\pi b} \sum_{\beta=1}^N \frac{\sin(2\pi\beta/N)}{1 - \cos(2\pi\beta/N)} - \\ &\quad - \frac{k}{2\pi b} \sum_{\beta=1}^N \frac{a^2 \sin(2\pi\beta/N)}{a^4/b^2 + b^2 - 2a^2 \cos(2\pi\beta/N)} \\ \dot{\varphi}_\alpha &= \frac{k}{4\pi b^2} (N-1) - \\ &\quad - \frac{k}{2\pi b^2} \sum_{\beta=1}^N \frac{b^2 - a^2 \cos(2\pi\beta/N)}{a^4/b^2 + b^2 - 2a^2 \cos(2\pi\beta/N)}. \quad (3)\end{aligned}$$

В цьому випадку розв'язком нелінійної системи (3) буде

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\alpha &= 0, \\ \dot{\varphi}_\alpha &= \omega = \frac{k}{4\pi b^2} \left(\frac{2N}{1-p^N} - N - 1 \right) = \text{const}, \quad (4)\end{aligned}$$

де $p = a^2/b^2$, а ω - кутова частота обертання системи вихорів.

3. Аналіз стійкості за лінійним наближенням

Внесемо в просторове положення вихорів мале збурження

$$\rho_\alpha = b + r_\alpha, \quad \varphi_\alpha = \frac{2\pi\alpha}{N} + \omega t + \Theta_\alpha. \quad (5)$$

і прослідкуємо згідно статті [1] розвиток цих збуржень в часі.

Рівняння руху першого точкового вихору можна одержати безпосередньо з системи (3). У прийнятих раніше позначеннях маємо

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \dot{r}_1 = \frac{k}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{\rho_{\beta+1} \sin \varphi}{\rho_{\beta+1}^2 + \rho_1^2 - 2\rho_{\beta+1}\rho_1 \cos \varphi} - \\ &\quad - \frac{k}{2\pi} \sum_{\beta=0}^{N-1} \frac{(a^2/b^2)\rho_{\beta+1}}{(a^4/b^4)\rho_{\beta+1}^2 + \rho_1^2 - 2(a^2/b^2)\rho_{\beta+1}\rho_1 \cos \varphi}, \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \omega(b+r_1) + b\dot{\Theta}_1 = \\ &= \frac{k}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{\rho_{\beta+1} \cos \varphi - \rho_1}{\rho_{\beta+1}^2 + \rho_1^2 - 2\rho_{\beta+1}\rho_1 \cos \varphi} + \\ &\quad + \frac{k}{2\pi} \sum_{\beta=0}^{N-1} \frac{(a^2/b^2)\rho_{\beta+1} \cos \varphi - \rho_1}{(a^4/b^4)\rho_{\beta+1}^2 + \rho_1^2 - 2(a^2/b^2)\rho_{\beta+1}\rho_1 \cos \varphi}, \quad (7)\end{aligned}$$

де $\varphi = 2\pi\beta/N + \Theta_{\beta+1} - \Theta_1$.

Визначаючи частинні похідні:

$$\frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_1} = \frac{\partial \dot{\Theta}_1}{\partial \Theta_1} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_{\beta+1}} &= -\frac{k}{4\pi a^2} \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{2p(1-p^2) \sin \varphi_0}{1+p^2-2p \cos \varphi_0}, \\ \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta_1} &= \frac{k}{4\pi b} \left\{ \frac{N^2-1}{6} + \frac{2N^2 p^N}{(1-p^N)^2} - \frac{2p}{1-p^2} + \frac{2p}{(1-p^2)^2} \right\}, \\ \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta_{\beta+1}} &= -\frac{k}{4\pi b} \left\{ \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{1}{1-\cos \varphi_0} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{(1+p^2) \cos \varphi_0 - 2p}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} - \frac{2p}{1-p^2} \right\}, \\ \frac{\partial \dot{\Theta}_1}{\partial r_1} &= \frac{k}{2\pi b^2} \left\{ \frac{N^2-1}{6} + 2(N-1) + \frac{2N^2 p^N}{(1-p^N)^2} - \frac{4N}{1-p^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(2p^2-3p+2)}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2} + \omega \right\}, \\ \frac{\partial \dot{\Theta}_1}{\partial r_{\beta+1}} &= -\frac{k}{4\pi b^2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{1}{1-\cos \varphi_0} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{2p(1+p^2) \cos \varphi_0}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} + \frac{1}{1-p^2} \right\}, \\ \frac{\partial \dot{\Theta}_1}{\partial \Theta_{\beta+1}} &= -\frac{k}{4\pi b} \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{2p(1-p^2) \sin \varphi_0}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2}. \quad (8)\end{aligned}$$

проводимо лінеаризацію системи рівнянь (6), (7).

Розклад в ряди Тейлора рівнянь руху має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{4\pi b^2}{k} \frac{\dot{r}_1}{b} &= \left\{ \frac{N^2-1}{6} + \frac{2N^2 p^N}{(1-p^N)^2} - \frac{2p}{(1-p)^2} \right\} \Theta_1 - \\ &- \sum_{\beta=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{1-\cos \varphi_0} + 2p \frac{(1+p) \cos \varphi_0 - 2p}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} \right\} \Theta_{\beta+1} - \\ &- \sum_{\beta=1}^{N-1} \left\{ \frac{2p(1-p^2) \sin \varphi_0}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} \right\} \frac{r_{\beta+1}}{b}, \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{4\pi b^2}{k} \dot{\Theta}_1 &= \left\{ \frac{N^2-1}{6} + 2(N-1) + \frac{2N^2 p^N}{(1-p^N)^2} - \right. \\ &- \frac{4N}{1-p^N} + \frac{2(2p^2-3p+2)}{(1-p)^2} \left. \right\} \frac{r_1}{b} - \\ &- \sum_{\beta=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{1-\cos \varphi_0} - 2p \frac{(1+p) \cos \varphi_0 - 2p}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} \right\} \frac{r_{\beta+1}}{b} - \\ &- \sum_{\beta=1}^{N-1} \left\{ \frac{2p(1-p^2) \sin \varphi_0}{(1+p^2-2p \cos \varphi_0)^2} \right\} \Theta_{\beta+1}. \quad (10)\end{aligned}$$

Розв'язок зручно шукати у вигляді

$$\frac{r_{\beta+1}}{b} = x(t) \exp \left\{ \frac{i2\pi m b}{N} \right\},$$

Таблиця 1. Максимальні значення радіусу стійкої вихрової конфігурації

N	m	$Q(N, m, p)$	p	b_{cr}
2	1	$7p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 4p - 1 = 0$	0,2137	0,4623
3	1	$10p^6 + 3p^5 + 6p^4 + 10p^3 + 6p^2 + 3p - 2 = 0$	0,3213	0,5668
4	2	$7p^8 + 8p^6 + 10p^4 + 8p^2 - 1 = 0$	0,3298	0,5743
5	2	$18p^{10} + 10p^8 + 15p^7 + 34p^5 + 15p^3 + 10p^2 - 1 = 0$	0,3461	0,5883
6	3	$23p^{12} + 36p^9 + 50p^6 + 36p^3 - 1 = 0$	0,2991	0,5469
7	3	$p^3(4p^{11} + 3p^8 + 4p^7 + 10p^4 + 4p + 3) = 0$	0,0000	0,0000

$$\Theta_{n+1} = \psi(t) \exp\left\{\frac{i2\pi mb}{N}\right\} \quad (11)$$

де $m=0,1,\dots,N-1$ — номер моди внесеного в систему збудження.

Зрештою диференціальні рівняння, що описують розвиток збуджень, можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{4\pi b^2}{k} \dot{x} &= -iRx + Py, \\ \frac{4\pi b^2}{k} \dot{y} &= Qx + iRy, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} P(p) &= m(N-m) - \frac{mN(p^m - p^{N-m})}{1-p^N} - \\ &\quad - \frac{N^2 p^{N-m}(1-p^m)^2}{(1-p^N)^2}, \\ Q(p) &= m(N-m) - 2(N+1) + \frac{Nm(p^m - p^{N-m})}{1-p^N} - \\ &\quad - \frac{4N}{1-p^N} + \frac{N^2 p^{N-m}(1+p^m)^2}{(1-p^N)^2}, \\ R(p) &= \frac{Nm(p^m - p^{N-m})}{1-p^N} - \frac{N^2 p^{N-m}(1+p^{2m})^2}{(1-p^N)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подальший аналіз зводиться до визначення власного значення лінійної системи алгебраїчних рівнянь (12). Одержуємо

$$\lambda = \sqrt{PQ} - iR. \quad (14)$$

Аналіз величин, які входять в рівняння (14) показує, що функція R набуває завжди дійсних значень. Тому для стійкого руху вихорів необхідне $PQ < 0$; якщо $PQ > 0$, система точкових вихорів є нестійкою. З іншого боку, можна показати, що функція P є парною і завжди виконується $P > 0$. Функція Q може змінювати

свій знак. У таблиці 1 представлені вирази для функції Q для різних значень N , m , та значення критичного радіусу b_{cr} . Якщо $b > b_{cr}$, то система вихорів є нестійкою.

З таблиці можна помітити загальну тенденцію: при збільшенні кількості вихорів значення критичного радіусу b_{cr} зменшується. Чим ближче вихори розташовані до центру порожнини, тим більш стійким буде рух вихрової конфігурації. Якщо $N=7$, то система вихорів є нестійкою за будь-якого значення b .

4. Чисельні обрахунки

Чисельні розрахунки були виконані для випадку, при якому в початковий радіус першого вихрового кільця внесено зміщення $r_1 = 0.01$. Інші параметри системи змінені так, щоб інваріанти (2) зберігали свої значення. При обчисленнях визначалися значення мінімального ρ_{1min} і максимального ρ_{1max} радіусу першого точкового вихору на широкому інтервалі часу.

При проведенні обчислень визначався горизонт передбачуваності рішення задачі Коші, при якому обчислення можуть бути проведені із заданою точністю. Розрахунки були проведені методом Рунге-Кутта-Фельберга четвертого-п'ятого порядку з контролем локальної точності розв'язку на кожному кроці інтегрування [5].

Результати обчислень показано на рис.1 для $N=3$ і $a=1.0$. Видно, що для малих значень початкового радіусу b симетричної вихрової конфігурації збудження зменшується з часом. В цьому випадку різниця між ρ_{1min} (суцільна лінія) і ρ_{1max} (пунктирна лінія) прямує до нуля. При $b \rightarrow a$ симетрія порушується і $\rho_{1max} - \rho_{1min} \gg r_1$. Аналіз чисельних даних показує, що початкові збудження, що вносяться в

систему з критичним значенням $b_{cr} = 0.5658$, стійкого на нестійкий. На рис.1,б показано призводять до зміни режиму руху вихорів із

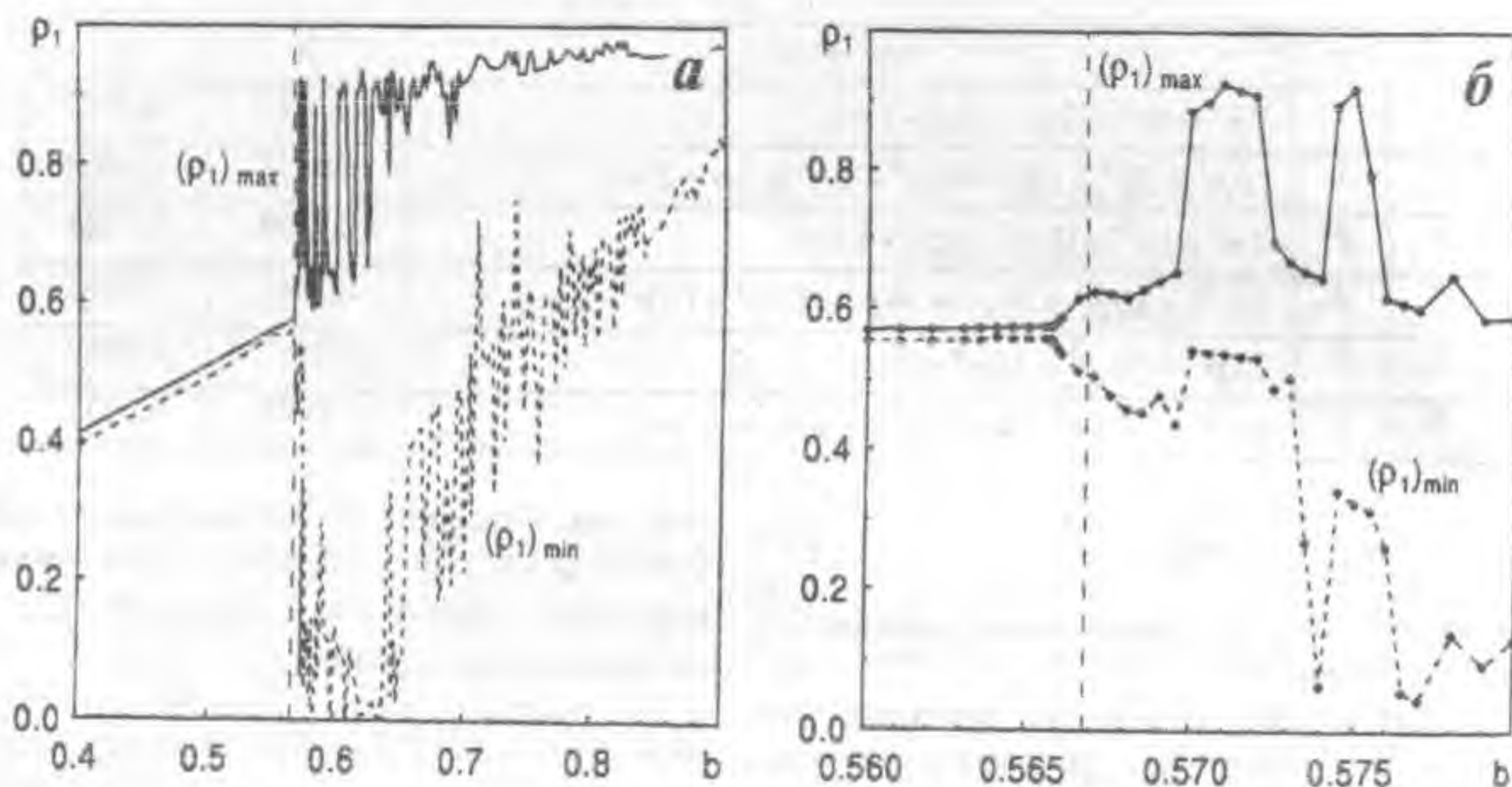


Рис.1 Залежність максимального ρ_{1max} і мінімального ρ_{1min} значень радіусу першого вихору від параметра b початкової вихрової конфігурації

область переходу стійкості системи. Вертикальна пунктирна лінія відповідає значенню b_{cr} , одержаному в межах лінійної теорії стійкості.

Список використаних джерел

Порівняльний аналіз теоретичних результатів і чисельних даних показує, що лінійна теорія стійкості дозволяє достатньо точно оцінити загальну тенденцію розвитку збуджень в розглянутій системі точкових вихорів. Чисельний аналіз провести значно легше, проте треба пам'ятати, що чисельне інтегрування вносить свої помилки в аналіз стійкості динамічної системи. Лінійна теорія стійкості, не зважаючи на лінійне наближення, точно визначає діапазони стійкої і нестійкої взаємодії вихорів. Лінеаризація, вживана при аналізі розвитку збудження в часі, не робить істотного впливу на якісний аналіз стійкості. Проте, при проведенні кількісного аналізу, лінеаризація рівнянь руху може призвести до зміни значення критичних параметрів, при яких розглянута система змінює режим стійкості.

1. Havelock T. H. The stability of motion of rectangular vortices in ring formation // Phil. Mag. Ser 7. – 1931. – 11. – P.617-633.
2. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – Киев: Наукова Думка, 1993. – 280с.
3. Кулин А.А., Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области / В кн.: "Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей" – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003, с.414–440.
4. Kimura Y. Motion of two point vortices in a circular domain // J. Phys. Soc. Japan – 1988. – 57. – P.1641–1649.
5. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512с.

Надійшла до редколегії 15.12.2008

УДК 539.3

Тетяна В.Карнаухова, к.ф.-м.н.

Активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань жорстко закріпленої в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки при дії на неї невідомого механічного навантаження

В роботі методом Бубнова-Гальоркіна розв'язано задачу про активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань ортотропної циліндричної оболонки з жорстким закріпленням торців за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів для випадку, коли механічне навантаження невідоме. Досліджено вплив температури, розміщення і розмірів сенсорів та актуаторів на ефективність активного демпфування коливань оболонки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, осесиметричні коливання, демпфування, сенсори, актуатори

E-mail: karn@inmech.kiev.ua

Статтю представив професор В.В.Мелешко

1. Вступ.

Тонкі композитні циліндричні оболонки знаходять широке застосування в багатьох галузях сучасної техніки. Дуже часто на них діє гармонічне за часом осесиметричне механічне навантаження з частотою, близькою до резонансної. В результаті в оболонці виникають інтенсивні коливання, які можуть привести до її руйнування із-за втоми або температури дисипативного розігріву. В зв'язку з цим виникає задача демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань циліндричних оболонок. Для цієї мети часто застосовуються пасивні методи демпфування, коли в структуру оболонки вводяться в'язкопружні включення з високим гістерезистивними втратами. В останні роки для демпфування вимушених коливань оболонок почали використовувати активні методи з використанням п'єзоелектричних включень. При цьому, як правило, вважається, що механічне навантаження відоме.

В даній статті розглянуто задачу про активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань тонкої в'язко-пружної ортотропної циліндричної оболонки з жорстким

Karnaukhova T. V., C.Sci. (Phys.-Math.).

Active damping of the forced axisymmetric vibrations of a viscoelastic orthotropic cylindrical shell with the built-in edges under an unknown mechanical loading

In the paper a problem of an active damping forced resonant axisymmetric vibrations of an orthotropic cylindrical shell with the built – in edges under an unknown mechanical loading is solved by Bubnov – Galerkin method. The influence of a temperature, a disposition and the sizes of the sensors and actuators on the active damping forced axisymmetric vibrations of the shell is investigated.

Key words: cylindrical shell, axisymmetric vibrations, damping, sensors, actuators

защемленням її торців. На оболонку діє заделегідь невідоме механічне навантаження. Для його визначення використовуються експериментальні показники сенсора – заряд або різниця потенціалів. Досліджено вплив механічних граничних умов, температури, розміщення сенсорів та актуаторів та їх розмірів на ефективність активного демпфування вказаних коливань.

2. Постановка задачі

Розглянемо циліндричну оболонку довжиною $2a$ з ортотропного пасивного (без п'єзоефекту) в'язкопружного матеріалу. На зовнішніх поверхнях оболонки розміщено п'єзоактивні шари, які виконують функції сенсора та актуатора. Вважається, що вказані сенсори та актуатори протилежно поляризовані, мають однакову товщину та однакові властивості, за виключенням того, що п'єзоконстанти активних шарів мають протилежні знаки:

$$d_{31}^2 = -d_{31}^1.$$

На оболонку діє заделегідь невідомий осесиметричний тиск, який змінюється з часом за гармонічним за-коном з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [3]. Якщо знехтувати позовжніми силами інерції, рівняння руху циліндричної оболонки приймають такий вигляд [2]:

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0, \quad Q_1 = \frac{dM_1}{d\alpha}, \quad (1)$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{dQ_1}{d\alpha} = -\rho h \omega^2 w - q(\alpha). \quad (2)$$

На основі механічних гіпотез Кірхгофа-Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно електричних польових величин, для вказаної вище тришарової оболонки одержимо такі визначальні рівняння стану для зусиль і моментів [2]:

$$T_1 = C_{11} \frac{du}{d\alpha} + C_{12} \frac{w}{R}, \quad (3)$$

$$T_2 = C_{12} \frac{du}{d\alpha} + C_{22} \frac{w}{R}, \quad (4)$$

$$M_1 = -D_{11} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0, \quad M_2 = -D_{12} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0. \quad (5)$$

Тут жорсткісні характеристики і вирази для M_0 для різних варіантів розміщення електродів визначаються за формулами, наведеними, наприклад, в [3].

Всі величини в наведених формулах є комплексними:

$$w = w' + iw'', \dots$$

а V_A – шукана різниця потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження.

Нехай оболонка може вільно зміщуватись в позовжньому напрямку. Тоді з (1), (3) матимемо:

$$T_1 = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = -\frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{w}{R}, \quad T_2 = C_{22} \frac{w}{R}, \quad (6)$$

$$C_{22} = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}}.$$

Підставляючи (3), (4) в (1),(2), одержимо рівняння руху відносно комплексного прогину w :

$$D_{11} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + C_{22} \frac{w}{R^2} - \rho \omega^2 w - q(\alpha) - \frac{d^2 M_0}{d\alpha^2} = 0. \quad (7)$$

Для випадку жорсткого закріплення торців оболонки

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \pm a. \quad (8)$$

3. Аналітичний розв'язок задачі і його аналіз

Введемо безрозмірну координату $\alpha = ax$. Для жорсткого закріплення торців (8) при коливаннях по першій моді представимо прогин оболонки через безрозмірну координату у вигляді:

$$w = A\varphi, \quad \varphi = (1 - x^2)^2. \quad (9)$$

Тут φ – функція форми, яка автоматично задовольняє граничним умовам (8).

Нехай на оболонку діє заделегідь невідомий рівномірний тиск та електричне навантаження, яке реалізується через різницю потенціалів V_A . Вважаємо, що центр п'єзоелектричного актуатора розміщено в точці $x = \xi$, а його безрозмірна довжина дорівнює $2d$. Для розв'язування крайової задачі (7)-(8) застосуємо метод Бубнова-Гальоркіна: підставимо (9) в рівняння (7), одержаний результат помножимо на функцію форми φ і проінтегруємо в межах $(-1,1)$. В результаті одержимо формулу для амплітуди коливань по першій моді:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (10)$$

де

$$\Delta_1 = \frac{4}{15} q_0 - M_0 d(1 - 3\xi^2 - d^2), \quad (11)$$

$$\Delta = \frac{32}{5} \bar{D}_{11} + \frac{64}{315} (\bar{C}_{22} - \rho \omega^2).$$

З наведених у [3] виразів і формул (10), (11) знаходимо, що для повного демпфування вимушених коливань по першій моді до актуатора потрібно підвести різницю потенціалів

$$V_A = \frac{(8/15)q_0}{(h_0 + h_1)\gamma_{31}d(1 - 3\xi^2 - d^2)} \quad (12)$$

Якщо виконується співвідношення (12), то при відомому навантаженні q_0 амплітуда коливань по першій резонансній моді дорівнюватиме нулю. Будемо вважати, що ефективність роботи и краща у того актуатора, до якого при фіксованому механічному навантаженні підводиться менша різниця потенціалів. З формули (12) видно, що це буде мати місце при

$\xi = 0$ і $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким чином, центр актуатора потрібно розмістити в початку координат, а безрозмірна довжина актуатора повинна дорівнювати $2d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. При цьому

$$V_A = \frac{4q_0}{5\sqrt{3}(h_0 + h_1)\gamma_{31}} \quad (13)$$

Таким чином, якщо механічне навантаження відоме, то для повного демпфування коливань по першій моді до актуатора потрібно підвести різницю потенціалів, яка розраховується за формулою (13). З неї видно, що механічні характеристики пасивного матеріалу не впливають на цю величину. А тому при її розрахунку можна не враховувати залежність цих характеристик ні від температури, ні від амплітуд деформацій у випадку фізично нелінійної поведінки пасивного матеріалу, а обмежитись найбільш простою лінійною моделлю поведінки пасивного матеріалу. З цієї ж формули видно, що залежність властивостей п'єзоелектричного матеріалу від температури може суттєво вплинути на згадану різницю потенціалів. Це впливає з того, що навіть в найпростішому випадку роботи актуатора при різних постійних температурах, вказана різниця потенціалів буде різною.

Таким чином, якщо механічне навантаження відоме, то для повного демпфування коливань по першій моді до актуатора потрібно підвести різницю потенціалів, яка розраховується за формулою (13). З неї видно, що механічні характеристики пасивного матеріалу не впливають на цю величину. А тому при її розрахунку можна не враховувати залежність цих характеристик ні від температури, ні від амплітуд деформацій у випадку фізично нелінійної поведінки пасивного матеріалу, а обмежитись найбільш простою лінійною моделлю поведінки пасивного матеріалу. З цієї ж формули видно, що залежність властивостей п'єзоелектричного матеріалу від температури може суттєво вплинути на згадану різницю потенціалів. Це впливає з того, що навіть в найпростішому випадку роботи актуатора при різних постійних температурах, вказана різниця потенціалів буде різною.

Основні недоліки підходу з використанням формули (13) полягають в тому, що 1) вільні коливання не демпфуються і 2) необхідно знати зовнішнє механічне навантаження. Перший недолік усувається гістерезисними втратами матеріалів. Для усунення другого недоліку резонансну складову механічного навантаження знайдемо за експериментальними показниками сенсора. Для розімкнутих електродів різниця потенціалів сенсора знаходиться за формулою:

$$Q = \gamma_{31}(h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} (\kappa_1 + \kappa_2) dS, \quad (14)$$

$$\kappa_1 = -\frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad \kappa_2 = 0.$$

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів сенсора знаходиться за формулою

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1 \gamma_{33}} \quad (15)$$

Якщо центр п'єзоелектричного сенсора розміщено в точці $x = \xi$, а його безрозмірна довжина дорівнює $2d$, то для визначення показників сенсора при коливаннях по першій моді матимемо таку формулу для визначення заряду:

$$Q = Bd(1 - 3\xi^2 - d^2), B = 16\pi R(h_0 + h_1)\gamma_{31}A/a. \quad (16)$$

Вважатимемо, що той сенсор більш ефективний, який має більші за модулем показники при фіксованому механічному навантаженні або при фіксованій амплітуді механічних коливань. З формули (16) видно, що розміщення і розміри сенсора з цієї точки зору будуть такими ж, як геометричні параметри актуатора. Тому для основної моди найбільш ефективними є розміщення центра сенсора в початку координат,

а його довжина $2d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. При цьому показники сенсора визначаються за формулами:

$$Q = \frac{32\sqrt{3}}{3} \pi R (h_0 + h_1) \gamma_{31} A / a, \quad (17)$$

$$V_S = 8(h_0 + h_1) \gamma_{31} A h_1 / (a \gamma_{33}). \quad (18)$$

Розв'язок задачі про резонансні механічні осесиметричні коливання циліндричної оболонки з жорстким защемленням торців по першій моді має такий вигляд:

$$A = \frac{q_0}{\Delta_1}, \Delta_1 = 24\tilde{D}_{11} + \frac{16}{21}(\tilde{C}_{22} - \rho\omega_1^2). \quad (19)$$

З (17)–(19) знайдемо зв'язок між показниками сенсора і навантаже

$$q_0 = \frac{\sqrt{3}aQ\Delta_1}{32\pi R\gamma_{31}(h_0 + h_1)}; \quad q_0 = \frac{aV_S\gamma_{33}\Delta_1}{8\gamma_{31}h_1(h_0 + h_1)}. \quad (20)$$

Підставимо тепер знайдене з виразу (20) навантаження в формулу (13) для різниці потенціалу, яка компенсує дане навантаження при коливаннях по першій моді. В результаті одержимо такі вирази для цього потенціалу:

$$V_A = \frac{aQ\Delta_1}{40\pi R[\gamma_{31}(h_0 + h_1)]^2}; \quad (21)$$

$$V_A = \frac{aV_S\Delta_1\gamma_{33}}{10\sqrt{3}[\gamma_{31}(h_0 + h_1)]^2}.$$

Як видно з формули (12), при $\xi = 0$ і при $d_1 \rightarrow 1$ і $d_1 \rightarrow 0$ різниця потенціалів прямує до безмежності. Тому при повному покритті оболонки актуатором, а також при дуже малих його розмірах демпфувати коливання оболонки неможливо. Цей результат принципово відрізняється від розглянутого в [2] випадку шарнірного обпирання торців оболонки, для якого найбільш ефективним є повне покриття оболонки активним шаром. З формули (12) також бачимо, що при досягненні температурою точки Кюрі величина γ_{31} , яка відповідає за

зв'язок механічних і електричних полів, прямує до нуля, а різниця потенціалів V_A прямує до безмежності. При цьому виключається можливість керувати процесом демпфування коливань оболонки. Аналогічні висновки можна зробити і з аналізу формули (16) для показника сенсора. Для нього при $\xi = 0$ і при $d_1 \rightarrow 1$ і $d_1 \rightarrow 0$ а також при досягненні температурою точки Кюрі показники сенсора прямують до нуля, так що зняти з сенсора інформацію про механічний стан оболонки неможливо.

4. Висновки

В статті розв'язано задачу про активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки з жорстким защемленням її торців для випадку, коли механічне навантаження заздалегідь невідоме. Воно визначається з експериментальних показників сенсора. Задача розв'язується методом Бубнова-Гальоркіна. Одержана формула для різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для демпфування коливань по першій моді і в яку входять лише експериментальні показники сенсора. На основі аналізу виведених формул проаналізовано вплив розміщення п'єзовключень, їх розмірів, в'язкості і температури на ефективність роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування за їх допомогою.

Список використаних джерел

1. Gubbert U. and Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/London. – 2001. – 384p.
2. Карнаухова Т.В. Активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань шарнірно обпертої в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки при дії на неї невідомого механічного навантаження//Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.–2008. - №3. - С.75-78.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезо-электрических неупругих при моногармоническом нагружении.– Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.

Надійшла до редколегії 4.12 2008

УДК 571.986

Кухарчук М.М. д.фіз.-мат., н., Яременко М.І. студ.

Про гладкість розв'язків деяких квазілінійних еліптичних рівнянь

В роботі розглядається гладкість розв'язків квазілінійних еліптичних диференціальних рівнянь. Розвивається метод форм для перевірки умов теореми Мінті-Браудера і для отримання результатів стосовно гладкості розв'язків.

Ключові слова: простір Соболева, теорема Мінті-Браудера, гладкість, форма.

Статтю представив д.ф.-м.н. професор М.О.Перестюк

M.M. Kukcharchuk, Professor, M.I. Yaremenko, st.

On the smoothness of solutions of quasilinear equations

We consider the smoothness of solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. In this paper we develop the form method for proving conditions of Minty-Browder's theorem and then for obtaining our results about smoothness of this solution.

Key words: the Sobolev space, Minty-Browder's theorem, smoothness, form.

1. Вступ

Наша робота присвячена дослідженню гладкості розв'язків рівнянь типу:

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u) = 0.$$

Спочатку ми перевіряємо умови теореми Мінті-Браудера, яка гарантує існування і єдиність розв'язку нашого рівняння, потім досліджуємо цей розв'язок. При дослідженні використано метод форм, зв'язок між формами і операторами, що породжені цими формами, внаслідок теореми Ріса [1,2,3].

2. Постановка задачі

Дослідження розв'язності рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, Du) = 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

за умов (2) у всьому евклідовому просторі R^l , $l \geq 3$, $1 < a \in C^\infty$ де $f(x, u, Du)$ - ліпшицева функція по u, Du , тобто

$$|f(x, y, z) - f(x, y_1, z_1)| \leq \tilde{\mu}_1(x) |z - z_1| + \tilde{\mu}_2(x) |y - y_1|$$

$$|f(x, y, z)| \leq \mu_1(x) |z| + \mu_2(x) |y| + \mu_3(x), \quad (2)$$

де $\mu_1(x), \tilde{\mu}_1(x) \in \prod_{k,p} (-\Delta)$, $\mu_3(x) \in L_2(R^l, d^l x)$.

3. Про розв'язність рівняння (1)

Теорема. Якщо для рівняння (1) виконані умови (2), то воно слабо однозначно розв'язне у просторі $W_1^2(R^l, d^l x)$, $l \geq 3$.

Доведення. Визначимо форму h_λ^2 за формулою:

$$h_\lambda^2(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle f(x, u, Du), v \rangle,$$

якщо ця форма задовольняє умови теореми Мінті-Браудера, то вона породжує нелінійний оператор $A_\lambda^2: W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$, який є біективним нелінійним відображенням, тобто рівняння (1) має єдиний розв'язок у просторі W_1^2 за умов (2).

Перевіримо виконання умов теореми Мінті-Браудера.

Лема 1. Форма h_λ^2 обмежена за умов (2).

Доведення. Дійсно, для $\forall u \in W_1^2, \forall v \in W_{1,0}^2$, маємо

$$h_\lambda^2(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle f(x, u, Du), v \rangle$$

$$|\langle \mu_1 | \nabla u | + \mu_2 | u | + \mu_3, v \rangle| \leq$$

$$\leq \|\nabla u\| \left(\beta \langle dv \circ a \circ dv \rangle + c(\beta) \|v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \|u\|_2 \left(\beta \langle dv \circ a \circ dv \rangle + c(\beta) \|v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\mu_3\|_2 \|v\|_2$$

$$|h_\lambda^2(u, v)| \leq \lambda \|u\|_2 \|v\|_2 + \langle dv \circ a \circ dv \rangle^{\frac{1}{2}} \langle du \circ a \circ du \rangle^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ (\|\nabla u\|_2 + \|u\|_2) \left(\beta \langle dv \circ a \circ dv \rangle + c(\beta) \|v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \|\mu_3\|_2 \|v\|_2 \leq \text{const} \|u\|_{W_1^2} \|v\|_{W_1^2}, \text{ тобто форма}$$

h_λ^2 - обмежена, а отже вона породжує оператор

$$A_\lambda^2: W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2 \text{ і } \|A_\lambda^2(u)\|_{W_{-1}^2} = \sup_{v \in W_1^2} \frac{h_\lambda^2(u, v)}{\|v\|_{W_1^2}}$$

Лема 2. Оператор $A_\lambda^2: W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$ - коерсіативне відображення за умов (2).

Доведення. Під коерціативним ми розуміємо такий оператор $A_\lambda^2 : W_1^2(R', d'x) \rightarrow W_{-1}^2(R', d'x)$, породжений формою, що задовольняє наступну

умову $\lim_{\|u\|_{W_1^2} \rightarrow \infty} \frac{h_\lambda^2(u)}{\|u\|_{W_1^2}} = \infty$. Оскільки для $\forall u \in W_1^2$

$$\begin{aligned} & \left| \langle \mu_1 | \nabla u | + \mu_2 | u | + \mu_3, u \rangle \right| \leq \\ & \leq \langle du \circ a \circ du \rangle^{\frac{1}{2}} \left(\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + c(\beta) \|u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \|u\|_2^2 \left(\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + c(\beta) \|u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \|\mu_3\|_2 \|u\|_2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \langle du \circ a \circ du \rangle + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left(\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + c(\beta) \|u\|_2^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \|u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + c(\beta) \|u\|_2^2 \right) + \\ & + \|\mu_3\|_2 \|u\|_2 \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \sqrt{\beta} \langle du \circ a \circ du \rangle + \left(\frac{2c(\beta)}{2(\sqrt{\beta})} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \right) \|u\|_2^2 + \\ & + \|\mu_3\|_2 \|u\|_2, \text{ де } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h_\lambda^2(u)| & \geq \left(\lambda - \left(\frac{2c(\beta)}{2(\sqrt{\beta})} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \right) + \right) \|u\|_2^2 + \\ & + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{\beta} \right) \langle du \circ a \circ du \rangle - \\ & - \|\mu_3\|_2 \|u\|_2 \text{ і тоді,} \end{aligned}$$

$\lim_{\|u\|_{W_1^2} \rightarrow \infty} \frac{h_\lambda^2(u)}{\|u\|_{W_1^2}} \geq \infty$, тобто оператор

$A_\lambda^2 : W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$ - коерціативний.

Лема 3. Оператор $A_\lambda^2 : W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$ - хемінеперервне відображення.

Доведення. За визначенням оператор

$A_\lambda^2 : W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$ - хемінеперервне відображення,

якщо $\forall u, \omega \in W_1^2(R', d'x)$ $\omega - \lim_{t \rightarrow 0} A_\lambda^2(u + t\omega) = A_\lambda^2(u)$ в просторі $W_{-1}^2(R', d'x)$.

Перевіримо це

$$\begin{aligned} & \langle A_\lambda^2(u + t\omega) - A_\lambda^2(u), v \rangle = \lambda t \langle \omega, v \rangle + \\ & + t \langle d\omega \circ a \circ dv \rangle + \\ & + \langle f(x, u + t\omega, du + td\omega) - f(x, u, du), v \rangle. \\ & \left| \langle A_\lambda^2(u + t\omega) - A_\lambda^2(u), v \rangle \right| \leq t(\lambda \| \omega \|_2 \| v \|_2 + \\ & + \langle d\omega \circ a \circ dv \rangle + \| \tilde{\mu}_1 v \|_2 \| \nabla \omega \|_2 + \\ & + \| \tilde{\mu}_2 v \|_2 \| \omega \|_2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \forall u, \omega \in W_1^2 \forall v \in W_{1,0}^2. \end{aligned}$$

Лема 3 доведена.

Лема 4. Оператор $A_\lambda^2 : W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2$ - монотонне відображення в $L_2(R', d'x)$ при $\lambda > \lambda_0$.

Доведення. Згідно з означенням монотонності в L_2 оператор $A_\lambda^2 : W_1^2(R', d'x) \rightarrow W_{-1}^2(R', d'x)$ монотонний в L_2 , якщо

$$\langle A_\lambda^2(u) - A_\lambda^2(v), u - v \rangle \geq 0 \forall u, v \in W_1^2.$$

Отже маємо

$$\begin{aligned} & \langle A_\lambda^2(u) - A_\lambda^2(v), u - v \rangle \geq \lambda \|u - v\|_2^2 + \\ & + \langle d(u - v) \circ a \circ d(u - v) \rangle + \\ & + \langle f(x, u, Du) - f(x, v, Dv), u - v \rangle \geq \\ & \geq \left(\lambda - \frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \right) \|u - v\|_2^2 + \\ & + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{\beta} \right) \langle d(u - v) \circ a \circ d(u - v) \rangle \geq \\ & \geq 0 \forall u, v \in W_1^2, \text{ оскільки, вірною є нерівність:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \langle f(x, u, Du) - f(x, v, Dv), u - v \rangle \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\beta} \langle d(u - v) \circ a \circ d(u - v) \rangle + \\ & + \left(\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \right) \|u - v\|_2^2. \text{ Отже, нелінійний} \\ & \text{оператор } A_\lambda^2 : W_1^2 \rightarrow W_{-1}^2 \text{ є монотонним} \end{aligned}$$

відображенням в $L_2(R', d'x)$, причому
 $\langle A_\lambda^2(u) - A_\lambda^2(v), u - v \rangle = 0 \Leftrightarrow u = v \forall u, v \in W_1^2$,
 тобто відображення A_λ^2 є строго монотонним
 відображенням в $L_2(R', d'x)$.

Лема 4 доведена.

Як наслідок лем 1-4 є виконання умов теореми
 Мінті-Браудера, а отже і однозначна розв'язність
 нашого рівняння.

Зауваження. Розглянемо звуження оператора A_λ^2
 на множину $u \in W_1^2(R', d'x)$ таких, що
 $A_\lambda^2(u) \in L_2(R')$ і визначимо нелінійний оператор
 $\bar{A}_\lambda^2(u) \equiv A_\lambda^2(u)$ для

$$u \in D(\bar{A}_\lambda^2) = \{u \in W_1^2(R', d'x) \mid A_\lambda^2(u) \in L_2(R')\}.$$

Теорема Оператор $\bar{A}_\lambda^2: D(\bar{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R')$
 - сюр'єктивне відображення.

Доведення. Оскільки область значень
 оператора A_λ^2 співпадає з простором
 $W_{-1}^2(R', d'x)$ і викладення
 $W_1^2(R', d'x) \subset L_2(R') \subset W_{-1}^2(R', d'x)$ є
 неперервним і щільним, тоді одержуємо, що
 $\bar{A}_\lambda^2: D(\bar{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R')$ - сюр'єктивне
 відображення. Це означає, що рівняння
 $\bar{A}_\lambda^2(u) = \varphi \forall \varphi \in L_2(R')$ має розв'язок який
 належить до множини області визначення
 оператора A_λ^2 , або що те саме рівняння
 $\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, Du) = \varphi \forall \varphi \in L_2(R')$ має
 узагальнений розв'язок в множині області
 визначення оператора $\bar{A}_\lambda^2$ яка є підмножиною
 множини $W_1^2(R', d'x)$.

Внаслідок того, що нелінійне
 відображення $A_\lambda^2: W_1^2(R', d'x) \rightarrow W_{-1}^2(R', d'x)$ є
 монотонним, тоді відображення
 $\bar{A}_\lambda^2: D(\bar{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R')$ є максимальним
 монотонним відображенням, що в свою чергу
 гарантує єдність розв'язку, а отже оператор
 $\bar{A}_\lambda^2: D(\bar{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R')$ є генератором нелінійної
 напівгрупи стиску типу C_0 . Таким чином маємо,
 що операторною реалізацією диференційного
 виразу $\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, Du), u \in D(\bar{A}_\lambda^2)$,
 при наших умовах є оператор
 $\bar{A}_\lambda^2: D(\bar{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R')$.

4. Про гладкість розв'язків рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1)$$

Наша задача показати, що коли функція
 $|f(x, y, z)| \leq \mu_1(x)|z| + \mu_2(x)|y| + \mu_3(x)$,
 тоді розв'язок рівняння (1)
 $u \in W_2^2(R', d'x)$, за додаткових умов на μ_i ,

отже нехай: $1 \leq \frac{\partial}{\partial x_i} a = a' \in C^\infty$, тоді

розв'язок $u \in W_1^2(R', d'x)$ рівняння
 $(\lambda - d \circ a \circ d)u + f(x, u, \nabla u) = 0$,

при $\mu_1 \in L_\infty, \mu_2 \in \prod_{i \in \mathbb{R}^n} (-\Delta)$,

$\mu_3 \in L_2(R', d'x), da \in L_\infty$ належить $W_2^2(R', d'x)$.

Для встановлення гладкості розв'язку
 нашого рівняння використаємо наступний метод:
 спочатку продиференціюємо дивергентну
 частину $(d \circ a \circ d)$, а потім оцінимо норму
 другого диференціала використовуючи при цьому
 структуру нашого рівняння, тобто умову (2), при
 цьому буде використана нерівність Гельдера і
 нерівність-форм обмеженості щодо. Така схема
 доведення гладкості є тісно пов'язана
 встановленням розв'язності, оскільки ми
 використовуємо оцінки та підходи подібні до тих
 які були застосовані при доведенні лем 1-4, а це в
 свою чергу дає змогу більш глибоку зрозуміти
 суть задачі, тобто залежність гладкості розв'язку
 від гладкості коефіцієнтів, слід також зауважити,
 що подальша гладкість структурних складових
 рівняння не обов'язково приводить до
 поліпшення гладкості розв'язку.
 Отже, запишемо наше рівняння - тотожність,
 після того як ми підставимо в нього розв'язок, у
 вигляді

$$a \circ d^2 u = f(x, u, \nabla u) + \lambda u - da \circ du,$$

за рівнянням, записаному у такому вигляді,
 складаємо лінійний функціонал над v , тобто

$$L(u, v) = \langle a \circ d^2 u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle +$$

$$+ \langle f, v \rangle - \langle da \circ du, v \rangle$$

використовуючи оцінку

$$|\langle da \circ du, v \rangle| \leq \|v\|_2 \|da \circ du\|_2 \leq$$

$$\leq \|v\|_2 \|da\|_\infty \|du\|_2$$

а також оцінку

$$|\langle f, v \rangle| \leq \langle \mu_1 |\nabla u| + \mu_2 |u| + \mu_3, v \rangle \leq$$

$$\leq \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|\mu_2 |u|\|_2 \|v\|_2 +$$

$+ \|\mu_3\|_2 \|v\|_2 \leq \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + (\beta \langle du \circ a \circ du \rangle +$ і оскільки $a \geq 1$ тоді $\|d^2 u\|_2$ є число, а не ∞ ,
тобто маємо що $u \in W_2^2(R', d'x)$, що і потрібно
було довести.

Одержимо оцінку

$$\begin{aligned} |\langle a \circ d^2 u, v \rangle| &\leq \lambda \|u\|_2 \|v\|_2 + \|v\|_2 \|da\|_\infty \|du\|_2 + \\ &+ \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + (\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + \\ &+ c(\beta) \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_2 + \|\mu_3\|_2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

Далі спомінаючи, що вже відомі оцінки для розв'язків $\|\nabla u\|_2$ і $\|u\|_2$ (адже $u \in W_1^2$), можемо знайти таке постійне число (яке залежить від структури рівняння) μ , що вірна оцінка

$$|\langle a \circ d^2 u, v \rangle| \leq \mu \|v\|_2, \text{ для довільного елемента}$$

v , що належить до простору $L_2(R', d'x)$.

(хотілося б відзначити, що це є суттєвий момент всього доведення "гладкості", саме те, що v належить до L_2 , а не до W_1^2 і дало можливість

стверджувати про гладкість, для цього ми і визначали кращі властивості впершу чергу від μ_1 , а також від матриці a), отже внаслідок

довільності елемента $v \in L_2$ $a \circ d^2 u$ є також елементом з L_2 (теорема Ріса):

$$\begin{aligned} \|a \circ d^2 u\|_2 &= \sup_{v \in L_2} \frac{|\langle a \circ d^2 u, v \rangle|}{\|v\|_2} = \\ &= \sup_{v \in L_2} \frac{|\langle f + \lambda u - da \circ du, v \rangle|}{\|v\|_2} \leq \\ &\leq \sup_{v \in L_2} \left(\frac{\lambda \|u\|_2 \|v\|_2 + \|da\|_\infty \|du\|_2 \|v\|_2 +}{\|v\|_2} + \right. \\ &+ \frac{\|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|v\|_2}{\|v\|_2} + \\ &+ \frac{(\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + c(\beta) \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_2}{\|v\|_2} + \\ &\left. \frac{\|\mu_3\|_2 \|v\|_2}{\|v\|_2} \right) = \\ &= \lambda \|u\|_2 + \|da\|_\infty \|du\|_2 + \\ &+ \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_2 + (\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + \\ &+ c(\beta) \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \|\mu_3\|_2 < \infty \end{aligned}$$

5. Висновки

В роботі доведено однозначну розв'язність квазілінійного диференціального рівняння за досить слабких умов на нелінійний член, основним результатом же є встановлення гладкості розв'язку при додаткових умовах на нелінійність. для цього за допомогою форм введений слабкий аналог сильної нерівності коерціативності $\|L(x, u)\|_{L_2} \geq c \|u\|_{W_1^2}$, за досить слабких обмежень на функції, що утворюють рівняння, при цьому було введено і досліджено новий клас нелінійних операторів, які породжені формою, що складена по лівим частинам цього рівняння.

Список використаних джерел

1. Кухарчук Н. М. О гладкости обобщенных решений нелинейных равномерно эллиптических уравнений. – Киев: 1986. – 12 с. – Деп. в УкрНИИТИ, 03.01.86, №156.
2. Кухарчук М.М. Яременко М.І. Про розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з нелінійністю типу кулонівського потенціалу// Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 151–155.
3. Кухарчук М.М. Яременко М.І. Про розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з не лінійністю типу кулонівського потенціалу// Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 151–155.

Надійшла до редколегії 25.06.08.

УДК 539.3

Наталія В. Майбородіна, аспірант

Nataliya V. Mayborodina, PhD student

Коливання дискретно підкріплених еліпсоїдальних ортотропних оболонок при нестационарних навантаженнях

Vibrations of discretely supported ellipsoidal orthotropic shells under nonstationary loads

Представлено постановку задач про вимушені неосесиметричні коливання підкріплених еліпсоїдальних ортотропних оболонок при нестационарних навантаженнях, побудовано чисельний алгоритм і дано аналіз результатів розрахунків.

The statement of problems of forced non-axisymmetric vibrations of supported ellipsoidal orthotropic shells under nonstationary loads is presented. The numerical algorithm of solving is constructed and analysis of obtained results is given.

Ключові слова: підкріплені еліпсоїдальні ортотропні оболонки, геометрично нелінійна теорія.

Key Words: supported ellipsoidal orthotropic shells, geometrically nonlinear theory.

E-mail: natashamai23@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Тонкостінні конструкції оболочного типу складають широкий клас механічних об'єктів, які використовуються в сучасній ракетній і космічній техніці, приладобудуванні, будівництві та інших галузях сучасної техніки. Найбільш дослідженими є задачі про гармонічні коливання підкріплених ізотропних оболонок простої геометрії (циліндричні, конічні, сферичні) [1]. Вимушені коливання підкріплених оболонок при імпульсних навантаженнях розглянуті в роботах [2]. Потреби теорії та практичні запити різних галузей сучасної техніки, вимагають розширення класу досліджуваних задач, зокрема, дослідження динамічної поведінки підкріплених ортотропних оболонок більш складної геометрії. В цьому напрямку можна виділити роботи [3 – 5], в яких представлені результати по вимушеним коливанням оболонок обертання, зокрема еліпсоїдальних оболонок.

Складність розв'язання аналітичними методами задач для оболонок складної форми, приводить до необхідності застосування різних чисельних підходів [6].

В даній роботі розглянута задача про вимушені неосесиметричні коливання дискретно підкріпленої поперечними ребрами еліпсоїдальної ортотропної оболонки, в якій один з країв вільно опертий, а інший жорстко защемлений, при дії нестационарного розподіленого навантаження.

2. Вихідні положення для гладкої оболонки

Оболонка постійної товщини h віднесена до гауссової криволінійної системи координат α_1, α_2 , причому координата α_1 відповідає меридіальному напрямку, а α_2 – крутовому напрямку. Геометрія серединної поверхні $z=0$ гладкої еліпсоїдальної оболонки задається співвідношеннями [1]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad (1) \\ z = kR \cos \alpha_1,$$

де a, b – півосі еліпса; $k = b/a$ – параметр еліптичності.

З врахуванням співвідношень (1), вирази для компонент метрики і форми серединної поверхні оболонки мають вигляд

$$a_{11} = R^2 (\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1), \quad a_{22} = R^2 \sin^2 \alpha_1, \quad (2) \\ b_{11} = kR (\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}, \\ b_{22} = kR \sin^2 \alpha_1 (\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}.$$

Згідно формул (2), коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни серединної поверхні еліпсоїдальної оболонки мають наступний вигляд

$$A_1 = a(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{1/2}, \quad A_2 = a \sin \alpha_1, \quad (3)$$

$$k_1 = \frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-3/2},$$

$$k_2 = \frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}.$$

Процеси вимушених коливань еліпсоїдальної ортотропної оболонки розглядаються в рамках гіперболічної системи нелінійних диференціальних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Приймається, що деформований стан гладкої оболонки може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U} = (U_1, U_2, U_3, \varphi_1, \varphi_2)$.

При розгляді розподілу деформацій і напружень пружної структури використовується геометрично нелінійний варіант теорії оболонок типу Тимошенка в квадратичному наближенні. Деформаційні співвідношення для оболонки мають вигляд, який наведений в [5].

3. Основні положення теорії криволінійних стержнів

1. При побудові математичної моделі деформування j -го підкріплюючого ребра направлено вздовж осі α_2 будемо виходити з гіпотези недеформованості поперечного перерізу підкріплюючого елементу в рамках геометрично нелінійної теорії стержнів типу Тимошенка. Деформований стан j -го підкріплюючого ребра визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень центру ваги поперечного перерізу ребра $\bar{U}_j = (U_{1j}, U_{2j}, U_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})$.

2. Деформаційні співвідношення для j -го підкріплюючого ребра, розміщеного вздовж осі α_2 , задано в рамках геометрично нелінійного варіанту теорії стержнів типу Тимошенка в квадратичному наближенні [5].

4. Рівняння коливань

Для виводу рівнянь коливань дискретно підкріпленої оболонки використовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(P - K) + \delta A] dt = 0, \quad (4)$$

$$\text{де } P = P_0 + \sum_{j=1}^{n_2} P_j, \quad K = K_0 + \sum_{j=1}^{n_2} K_j,$$

P_0, K_0 – потенціальна і кінетична енергія обшивки; P_j, K_j – потенціальна і кінетична енергія відповідного j -го підкріплюючого ребра; A – робота зовнішніх сил.

Вирази для δK і δP мають вигляд [5].

Приймаються умови жорсткого контакту між компонентами вектора переміщень центру ваги поперечного перерізу j -го ребра, направлено вздовж осі α_2 , та компонентами узагальненого вектора переміщення вихідної серединної поверхні [5].

Після стандартного виконання операцій варіювання та інтегрування, з врахуванням умов контакту обшивка – j -те ребро, отримуємо дві групи рівнянь:

– рівняння коливань в гладкій області

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} +$$

$$+ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) = \rho h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} +$$

$$+ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) = \rho h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 +$$

$$+ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) = \rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} +$$

$$+ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] +$$

$$+ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

Величини зусиль і моментів в рівняннях (5) виражаються через відповідні величини деформацій згідно [5].

– рівняння коливань на j -й лінії розриву

$$\frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \pm h_{vj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} \bar{T}_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \pm h_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial s_2} - k_{2j} T_{22j} + [\bar{T}_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{2j} \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}]_j &= \\ &= \rho_j F_j \left(\pm h_{2j} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \left(h_{2j}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} \pm h_{2j} \left(\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} \bar{T}_{23j} \right) + [H]_j &= \\ &= \rho_j F_j \left(\pm h_{2j} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \left(h_{2j}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Величини зусиль і моментів в рівняннях (5) виражаються через відповідні величини деформацій згідно [5].

Рівняння коливань (5), (6) доповнюються відповідними природними граничними і початковими умовами, які витікають із варіаційного функціоналу (4).

Розглядаються природні граничні умови для вільно опертого краю в напрямку координати α_2 :

$$T_{11} = 0, T_{12} = 0, U_3 = 0, M_{11} = 0, M_{12} = 0. \quad (7)$$

Природні граничні умови для жорстко защемленого краю в напрямку координати α_1 :

$$\begin{aligned} \bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) &= 0; \\ \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

5. Чисельний алгоритм

Рівняння (5) і (6) являють собою систему нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних по змінним x_1, s_2, t при наявності просторових розривів по координаті s_2 . Виходячи з цього факту, чисельний алгоритм розв'язання вихідної задачі будується наступним чином: шукається розв'язок в гладкій області еліпсоїдальної оболонки і на лініях просторових розривів. Різницевий алгоритм заснований на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевої схем по просторовим координатам і явній скінчено-різницевої апроксимації по часовій координаті. При цьому компоненти узагальненого вектора переміщень апроксимуються в цілих точках різницевої сітки, а компоненти величин деформації і зусиль в півцільних точках сітки. Перехід від неперервної

системи до скінчено-різницевої виконується в два етапи. Перший етап полягає в скінчено-різницевої апроксимації рівнянь коливань в зусиллях-моментях [5].

Другий етап апроксимації рівнянь полягає в скінчено-різницевої апроксимації зусиль-моментів і відповідних деформацій [5].

При дослідженні умов стійкості різницевої рівнянь використовуються необхідна умова стійкості

$$\Delta t \leq 2/\omega,$$

де $\omega = \max(\omega_0, \omega_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$ – максимальні частоти власних коливань дискретно-різницевої системи відповідно обшивки та j -го підкріплюючого елемента.

6. Результати

Розглядалась задача вимушених коливань поперечно підкріпленої частини еліпсоїдальної ортотропної оболонки в області $D = \{\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N}\}$. В напрямку координати α_2 розглядалися умови вільно опертого краю (7), а в напрямку координати α_1 – умови для жорстко защемленого краю (8). На підкріплену оболонку діє розподілене нормальне навантаження

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \text{ де } A - \text{амплітуда навантаження, } T - \text{тривалість навантаження. В розрахунках покладалось } A = 10^6 \text{ Па; } T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Початкові умови при $t = 0$ для всіх компонент узагальненого вектора переміщень нульові.

Задача розглядалась при наступних фізико-механічних параметрах вихідної конструкції (випадок ортотропної оболонки). Покладемо, що модуль пружності $E_1 = 210 \text{ ГПа}$, а змінюються:

$$E_2 = \mu E_1, \quad G_{12} = \lambda E_1, \quad G_{13} = G_{23} = \frac{E_1}{d},$$

$$\rho = 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3.$$

При цьому, λ, μ, ν_{12} приймають значення:

1. $\mu = 2; \lambda = 0,3; \nu_{12} = 0,075$;
2. $\mu = 1,35; \lambda = 0,215; \nu_{12} = 0,122$;
3. $\mu = 1; \lambda = 0,385; \nu_{12} = 0,3$;
4. $\mu = 0,741; \lambda = 0,159; \nu_{12} = 0,165$;
5. $\mu = 0,5; \lambda = 0,125; \nu_{12} = 0,15$.

Геометричні параметри конструкції:

$$\alpha_{10} = \pi/12, \alpha_{1N} = \pi - \pi/12, \alpha_{20} = -\pi/2, \\ \alpha_{2N} = \pi/2, a/h = 60, h_j = 4 \cdot h, F_j = 4 \cdot h^2.$$

Фізико-механічні параметри підкріплюючих елементів:

$$E_j = E_2; G_j = G_{12}, \rho_j = \rho.$$

Поперечні підкріплюючі елементи розміщувались вздовж по координаті α_2 в

перерізах $\alpha_{1j} = \frac{7}{24}\pi + \frac{5}{24}\pi j, j = 0, 1, 2$.

На рис. 1 – 2 приведено результати розрахунків.

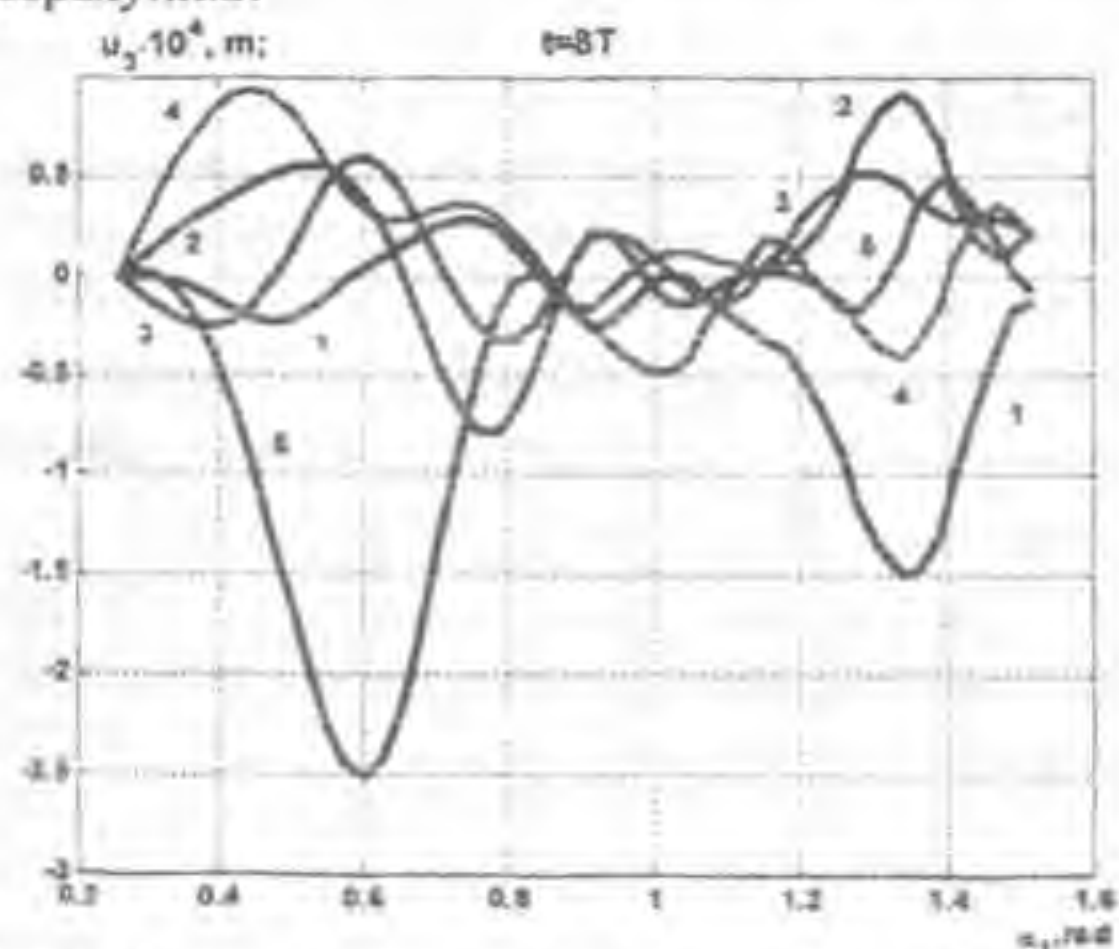


Рис.1 Залежність величини u_3 від просторової координати α_1 в перерізі $\alpha_2 = 0$

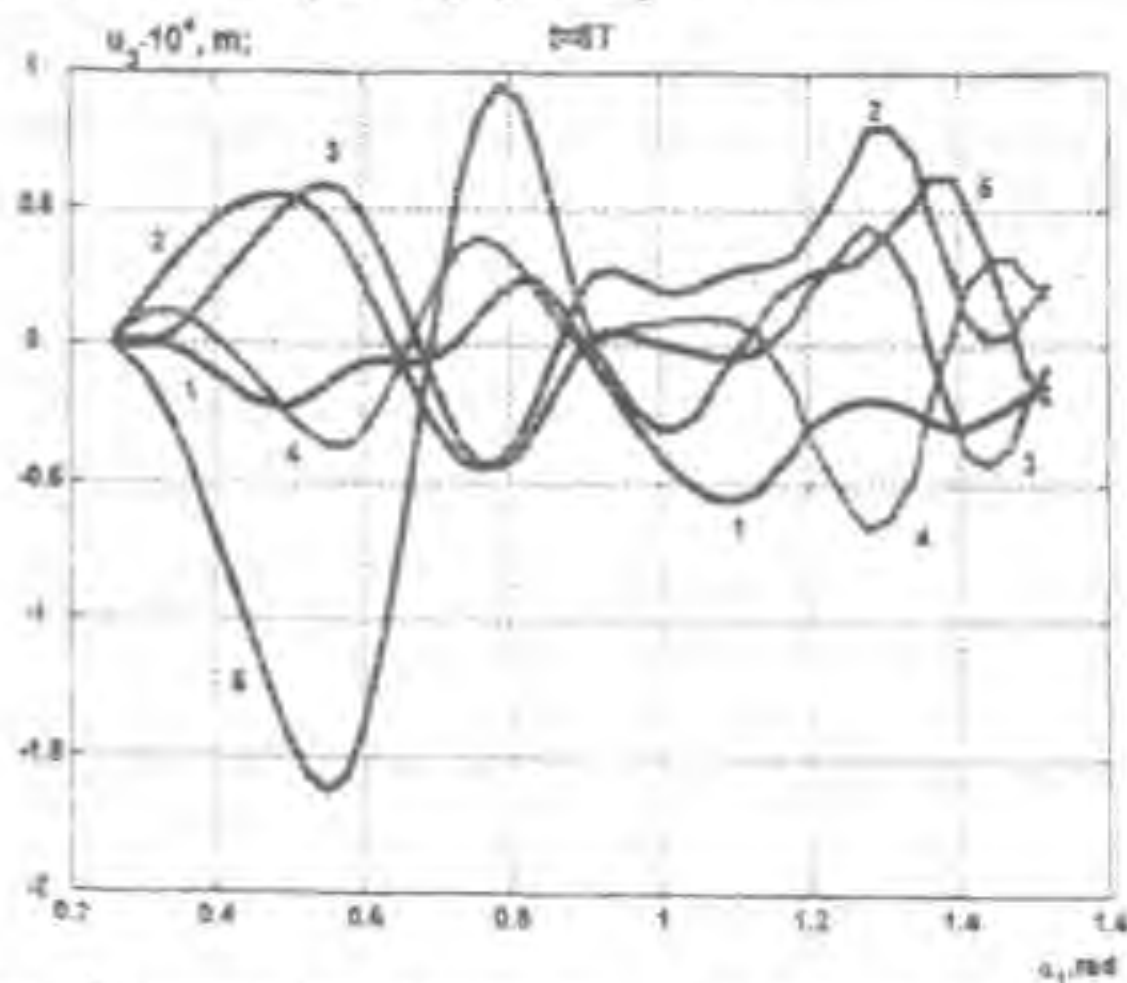


Рис.2 Залежність величини u_3 від просторової координати α_1 в перерізі $\alpha_2 = \pi/4$

Розрахунки проводилися на часовому інтервалі $t = 40T$. На рисунках приведено

найбільш характерні криві для величин u_3 (в силу симетрії приводяться залежності по координаті α_1 в діапазоні $\pi/12 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$). Розглядався час досягнення вказаними величинами максимальних значень по модулю. Як слідує, з приведенного графічного матеріалу, можна візуально визначити місця розміщення підкріплюючих ребер в перерізах α_{1j} і їх характер впливу на напружено-деформований стан підкріпленої структури. При цьому, для варіанту 3 (випадок ізотропії) графіки u_3 наближаються до графіків варіанта 2. Це означає, що варіант 2 ортотропії майже відповідає ізотропному випадку. Величина максимального прогину (варіант 5) при $\alpha_2 = 0, \pi/4$ приймає

$$\text{значення } -2.5 \text{ і } -1.6, \text{ тобто } \frac{u_3|_{\alpha_2=0}}{u_3|_{\alpha_2=\pi/4}} = 1.56.$$

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
2. Колебания ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий и др. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во полиграф. центр "Киев. ун-т", 2005. – 563 с.
4. Мейш В.Ф., Майбородина Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных нагрузках // Теоретическая и прикладная механика – 2007 – 43. с. 150–155.
5. Мейш В.Ф., Майбородина Н.В. К расчету несимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами гибких эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 63 – 73.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Надійшла до редколегії 19.11.2008

УДК 539.3

Меньшиков В.О., к.т.н., с.н.с.

Коефіцієнти інтенсивності напруження для дискообразної міжфазної тріщини під дією хвилі зсуву

Отримано чисельне рішення задачі теорії пружності для кругової тріщини в площині розподілу пружних середовищ під дією нормально падаючої хвилі зсуву. На основі знайдених параметрів напружено-деформованого стану обчислені коефіцієнти інтенсивності напруження. Проаналізовано їхню зміну залежно від частоти навантаження.

Ключові слова: міжфазна тріщина, хвиля зсуву, коефіцієнти інтенсивності напруження.

*E-mail: itl1132@online.kharkov.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

Вступ. У зв'язку із широким використанням композитних матеріалів гостроту здобуває необхідність розробки нових і уточнення існуючих методів їхнього розрахунку на міцність і стійкість до руйнування. Задачам знаходження параметрів напружено-деформованого стану біматеріалів з міжфазними тріщинами при статичному навантаженні присвячене значне число публікацій (роботи [1-4] і бібліографія в них). У той же час практично відсутні рішення динамічних задач для композитних середовищ із тріщинами на границі поділу матеріалів.

Постановка задачі. Розглянемо лінійно-пружне тіло, що складається із двох однорідних ізотропних півпросторів з різними фізико-механічними характеристиками $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}, \rho^{(m)}$ ($m = 1, 2$). Границю півпросторів беремо за площину $x_3 = 0$ в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$. У площині $x_3 = 0$ має місце зчеплення пружних середовищ скрізь, за винятком кола радіуса R , що будемо асоціювати з дискообразною тріщиною, берега якої вільні від навантажень. У складеному тілі поширюється гармонійна хвиля зсуву перпендикулярно площині поділу півпросторів. Нехай хвиля поляризована в площині $x_3 = 0$ й має кругову частоту $\omega = 2\pi/T$.

Припустимо, що фронт тріщини нерухомий, і тріщина відкрита, тобто має початкове розкриття більше ніж деформації берегів при навантаженні.

V.O. Menshykov, Ph.D., Senior Research Fellow

Stress intensity factors for the interface penny-shaped crack under shear wave

The problem of elasticity theory for the penny-shaped crack located at the interface between dissimilar elastic materials under action of the normally incident shear wave is solved numerically. The stress intensity factors are computed using obtained components of the stress-strain state. Their variation depending on the frequency of loading is investigated.

Key Words: interface crack, shear wave, stress intensity factors.

Метод рішення. Згідно [5,6] локальне руйнування визначається критеріями виду

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0, \quad (1)$$

де f – деяка функція, обумовлена експериментально, K_I – коефіцієнти інтенсивності напруження (КІН) нормального відриву, поперечного зсуву й поздовжнього зсуву (першої, другої й третьої мод).

Для КІН при динамічному навантаженні використовуємо вирази з [5, 6]

$$K_i = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij}(r, t), \quad i \in [0, T], \quad (2)$$

де σ_{ij} – компоненти напруження на поверхні зчеплення середовищ у фронті тріщини; r – відстань від фронту тріщини до точки, де знайдено напруження; t – час; T – період навантаження.

Згідно [5] співвідношення (2) є коректними при виконанні умов

$$1 \gg r/R \gg \exp^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \quad 2\pi c/\omega > R, \quad (3)$$

Тут R – характерний розмір тріщини, у нашій випадку це радіус; $\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \kappa^{(1)}}{\mu^{(2)} + \mu^{(1)} \kappa^{(2)}}$ – біпружна постійна матеріалів; c – швидкість поширення хвилі.

Отже, для обчислення параметрів механіки руйнування (2), які використані в критерії (1), необхідно знайти компоненти напруження на зчеплених поверхнях у фронту тріщини.

В [7] показано, що параметри напружено-деформованого стану біматеріального тіла із тріщиною на границі поділу середовищ в умовах гармонійного навантаження знаходяться із рішення системи граничних інтегральних рівнянь щодо компонентів комплексних амплітуд переміщень і зусиль. У системі граничних рівнянь невідомими є компоненти переміщень на берегах тріщини, а також переміщень і поверхневих сил на поверхні зчеплення. Задача може бути вирішена чисельно прямим методом граничних елементів [8].

Розрахункові дослідження. Розрахунки параметрів напружено-деформованого стану виконані для кругової тріщини $R = 1$ у площині з'єднання наступних пар матеріалів: титан – алюміній, сталь – алюміній, бор – епоксидна смола, при зміні наведеного хвильового числа $k_2 R = \omega/c_2 R$ в інтервалі $[0, 3]$ (тут c_2 – менша швидкість поперечних хвиль у кожній парі матеріалів). У зазначеному інтервалі зміни

хвильового числа виконується друга умова коректності з (3).

Верхня й нижня поверхні берегів тріщини й площа зчеплення матеріалів апроксимовані двовимірними граничними елементами, які згушались при підході до фронту як з боку тріщини, так і ззовні. Мінімальний розмір елементів, що примикають безпосередньо до вершини тріщини із двох сторін, $r/R = 0,002$. У межах граничного елемента параметри задачі покладалися незмінними.

Обрані пари матеріалів характерні тим, що їх біпружні постійні ($\beta = 0,0132$ для титан – алюміній, $\beta = 0,0305$ для сталь – алюміній, $\beta = 0,0682$ бор – епоксидна смола) перебувають в інтервалі від 0,01 до 0,07, що разом з $r/R = 0,002$ забезпечує першу умову коректності з (3).

Фізико-механічні параметри матеріалів, які використані у розрахунках, представлені в таблиці.

Таблиця 1

Механічні параметри матеріалів

Матеріал	Модуль Юнга, E , (ГПа)	Коефіцієнт Пуассона, ν	Густина, ρ , (кг/м ³)
Алюміній	70,3	0,347	2700,0
Бор	385,0	0,210	2600,0
Сталь	207,0	0,288	7860,0
Титан	108,0	0,300	4400,0
Епоксидна смола	4,6	0,360	1380,0

У результаті рішення задачі для кожної розглянутої пари матеріалів при зміні частоти навантаження в заданому інтервалі знайдені параметри напружено-деформованого стану берегів тріщини й зчеплених поверхонь матеріалів. Характер дії навантаження в розглянутому випадку робить задачу симетричною щодо площини поляризації хвилі, тобто площини $x_2 = 0$.

Аналіз знайдених параметрів напружено-деформованого стану показав наявність нормальних зсувів протилежних берегів тріщини в площині дії зсувного навантаження, що принципово відрізняє її від задачі про тріщину в однорідному матеріалі [9], де такі зсуви відсутні.

Розподіли нормальних ($\bar{p}_3$) і дотичних

компонент зусиль на зчеплених поверхнях поблизу фронту досягають своїх екстремальних величин на двох взаємно перпендикулярних діаметрах тріщини ($\bar{p}_i = p_i/p_0$, p_0 – максимальне протягом періоду навантаження зусилля на берегах). У крапках перетинання лінії фронту із площиною дії зсувних зусиль $\bar{p}_3$ і $\bar{p}_1$ мають найбільші значення. У крапках фронту, що відстоять від крапок максимумів на кут $\pm \pi/2$, $\bar{p}_3$ і $\bar{p}_1$ досягають свої мінімальні значення. Особливо відзначимо, що $\bar{p}_3 = 0$ в цих крапках.

На рис. 1 представлені розподіли екстремальних значень компонент зусиль на зчеплених поверхнях у фронту уздовж

продовження радіальних перетинів тріщини для пари сталь-алюміній при $k_2 R = 2,0$.

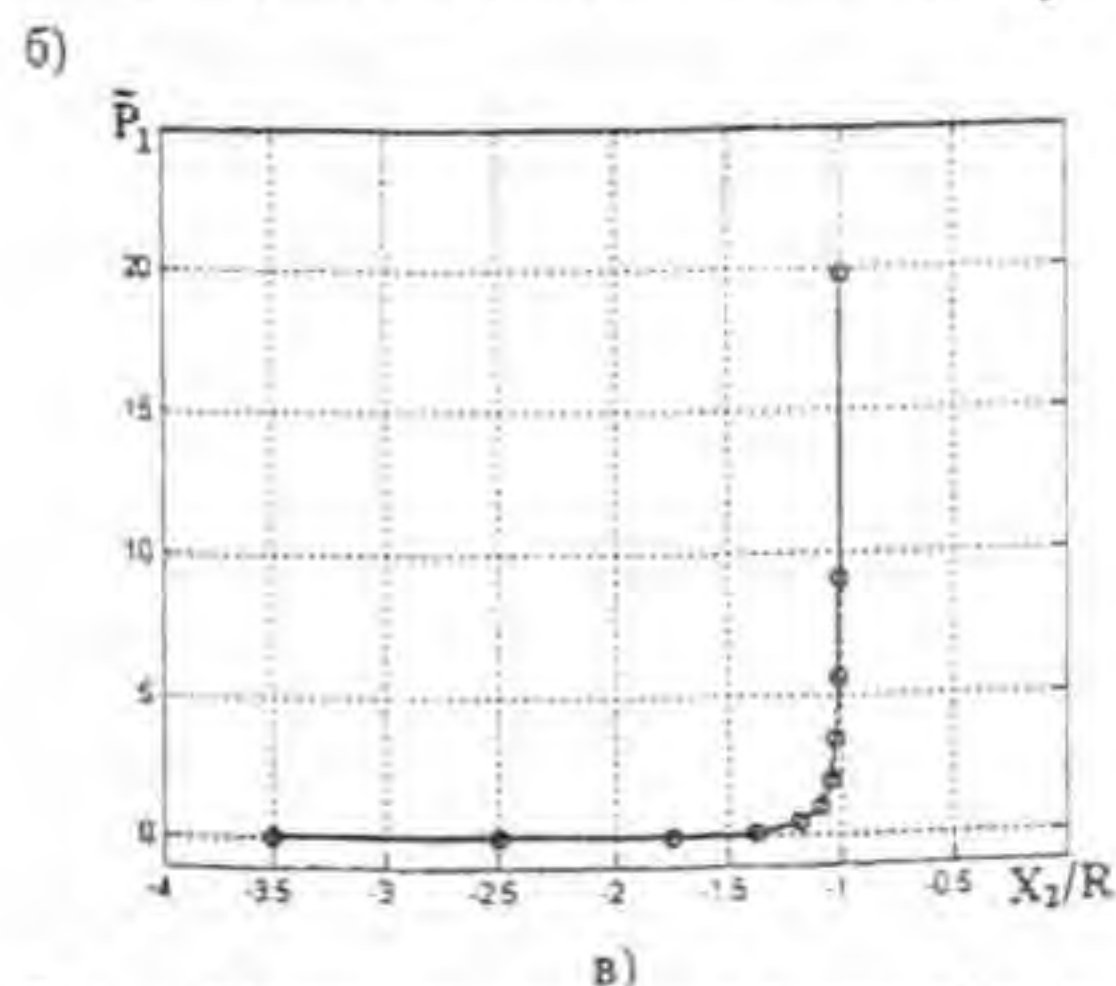
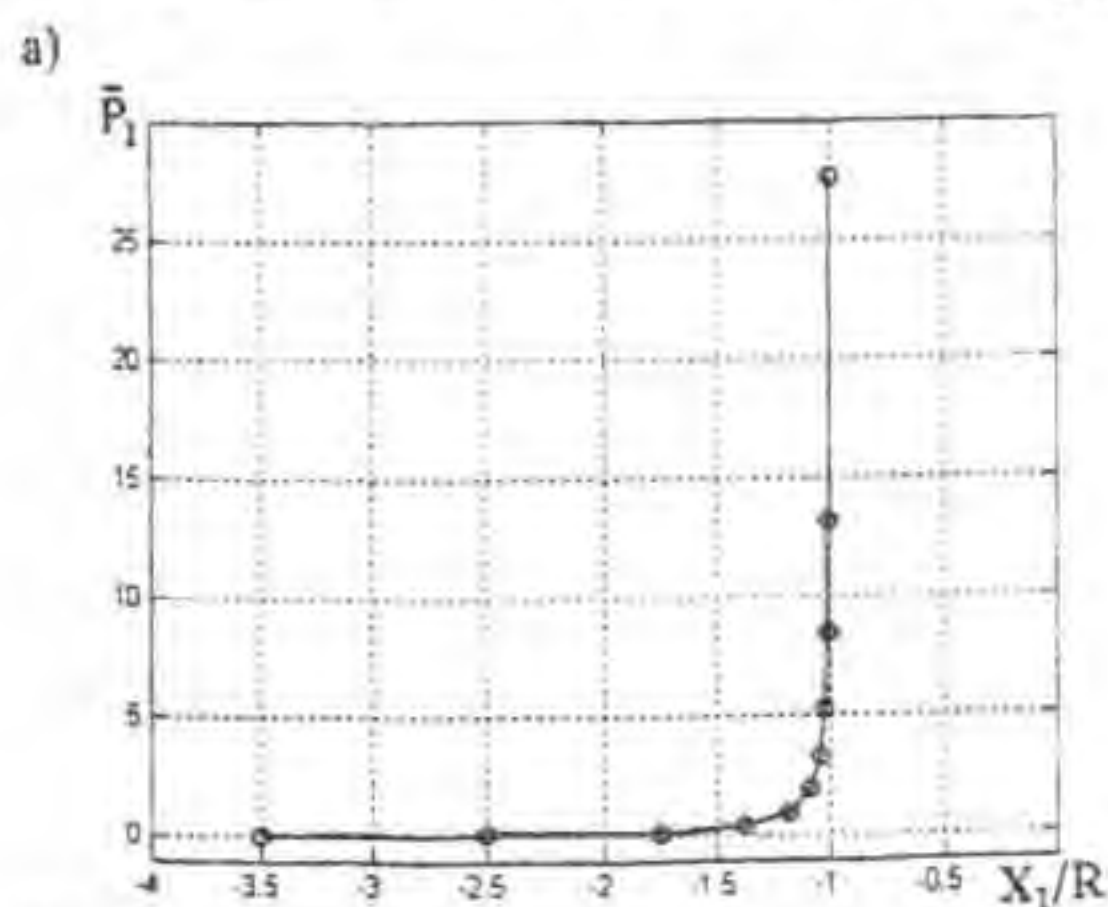
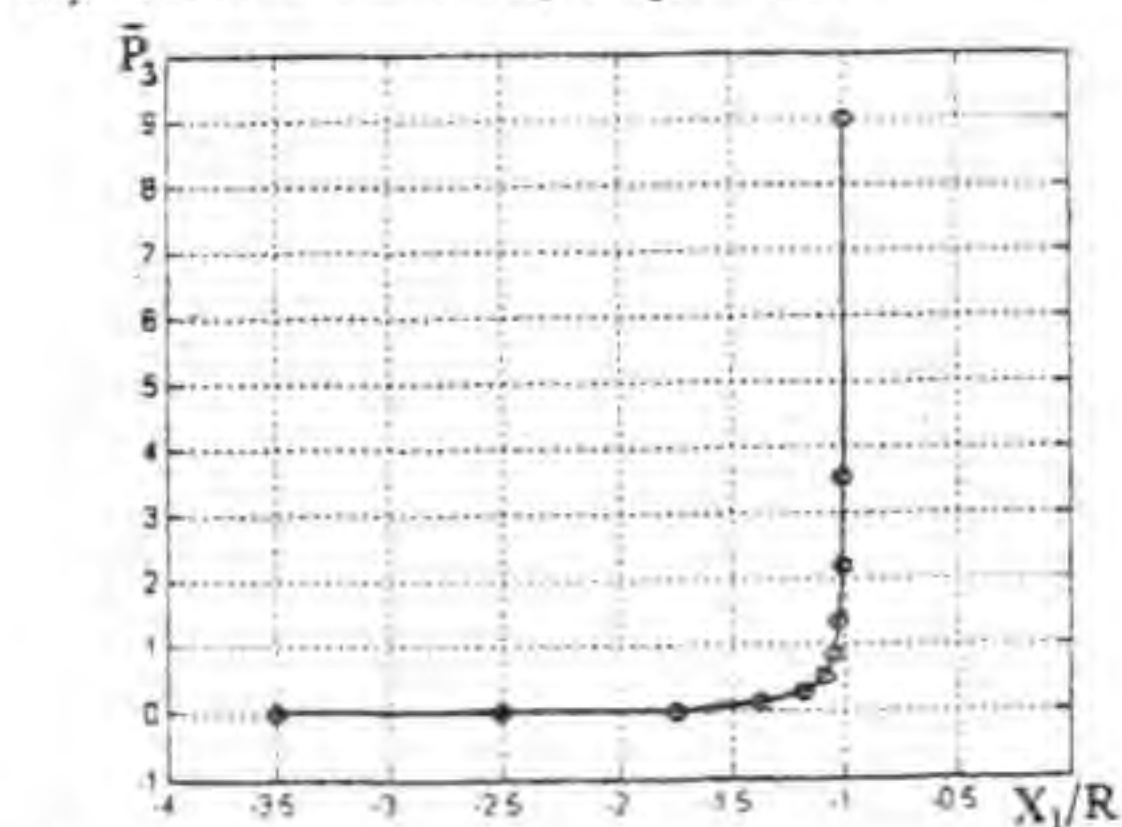


Рис. 1 Компоненти зусиль поблизу міжшарової тріщини: а), б) – у крапках перетинання лінії фронту із площиною зрушення; в) – у крапках перетинання лінії фронту, розгорнутих на $\pm \pi/2$.

Зазначені компоненти зусиль є максимальними на періоді навантаження.

Видно, що обидві компоненти зусиль швидко убавують при видаленні від фронту тріщини. величина нормальних зусиль менше дотичних

зусиль на зчеплених поверхнях у фронту тріщини.

Аналогічні розподіли мають місце й для двох інших розглянутих пар матеріалів. Причому для пари з більшим параметром β величина $\bar{P}_3$ зростає, а з меншим β – зменшується.

Отже, використовуючи знайдені компоненти зусиль поблизу фронту кругової тріщини для розглянутих пар матеріалів при частоті навантаження, що змінюється, обчислимо по співвідношеннях (2) величини коефіцієнтів інтенсивності напруження.

На рис. 2 – 4 представлені розподіли відносних коефіцієнтів інтенсивності напруження $\bar{K}_I = K_I / K_I^{stat}$, $\bar{K}_{II} = K_{II} / K_{II}^{stat}$, $\bar{K}_{III} = K_{III} / K_{III}^{stat}$ залежно від параметра $k_2 R$ для пар матеріалів: титан – алюміній, сталь – алюміній, бор – епоксидна смола.

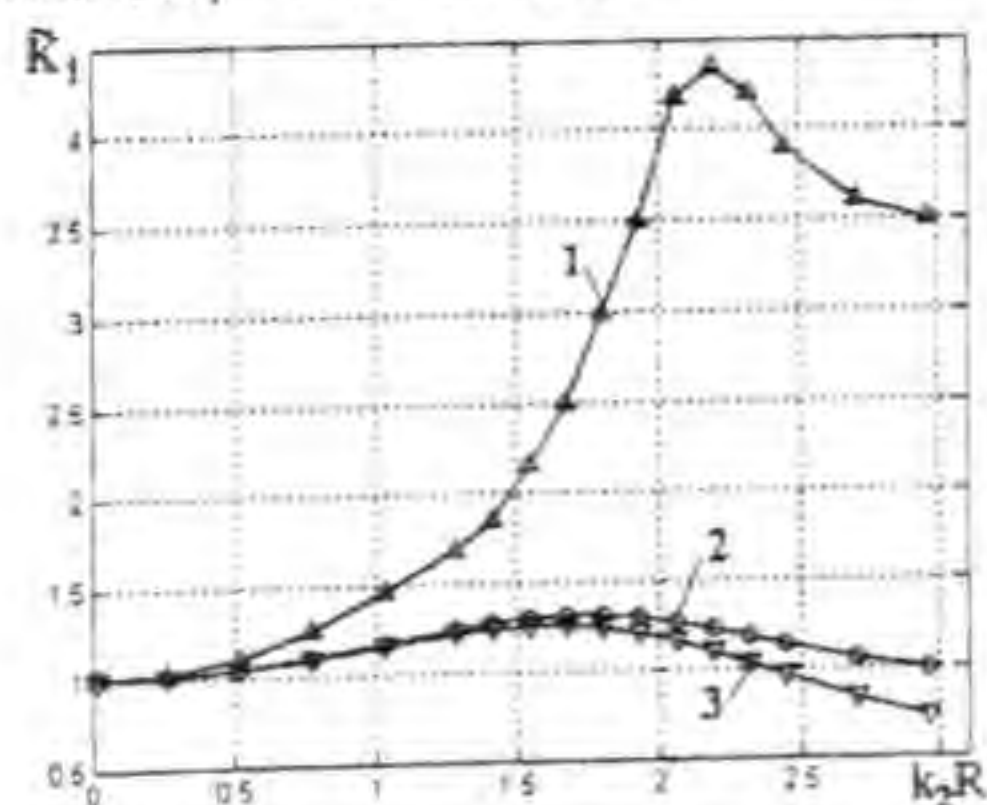


Рис. 2. КІН у парі титан – алюміній: 1 – нормального відриву; 2 – поперечного зсуву; 3 – поздовжнього зсуву

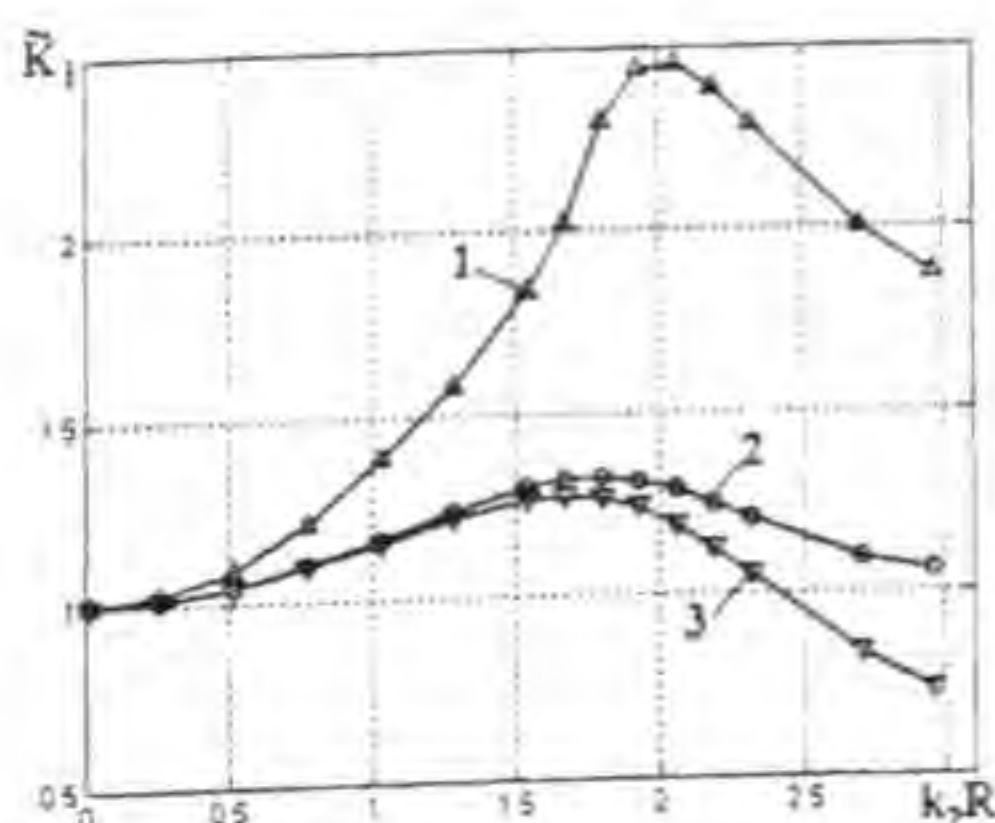


Рис. 3. КІН у парі сталь – алюміній: 1 – нормального відриву; 2 – поперечного зсуву; 3 – поздовжнього зсуву

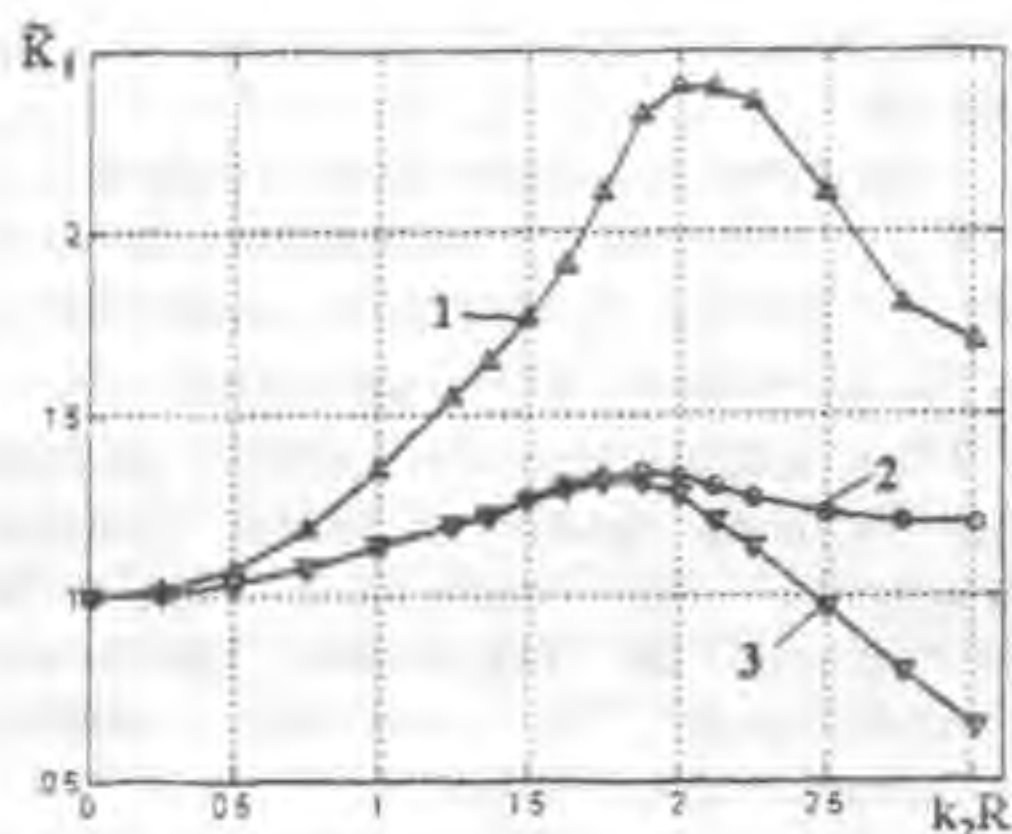


Рис. 4. КІН у парі бор-епоксидна смола: 1 – нормального відриву; 2 – поперечного зсуву; 3 – поздовжнього зсуву

K_I^{stat} , K_{II}^{stat} , K_{III}^{stat} – КІН першої, другої й третьої моди при статичному навантаженні. Вони розраховувалися по викладеній вище методиці при частоті навантаження рівної нулю.

Аналіз розподілу представлених на рис. 2 – 4 параметрів показує, що:

- розподілам значень відносних коефіцієнтів інтенсивності напруження першої, другої й третьої моди залежно від частоти навантаження властиві виражені максимуми;

- величини максимальних значень $\tilde{K}_I$ перевищують відповідні $\tilde{K}_{II}$ й $\tilde{K}_{III}$ для розглянутих пар матеріалів;

- найбільші значення $\tilde{K}_{II}$ й $\tilde{K}_{III}$ для всіх трьох пар матеріалів відрізняються незначно;

- крапки максимальних значень $\tilde{K}_I$, $\tilde{K}_{II}$, $\tilde{K}_{III}$ зміщуються до значення $k_2 R = 2,0$ зі збільшенням параметра β для розглянутих біматеріалів.

Висновок. Отже, на основі розрахунку напружено-деформованого стану в оточенні тріщини між різними пружними матеріалами при навантаженні хвилею зсуву обчислені коефіцієнти інтенсивності напруження. Показано, що в цьому випадку вплив динамічного навантаження більшою мірою позначається на величині коефіцієнта інтенсивності напруження першої моди. Виявлено, що для розглянутих пар матеріалів з

ростом біпружної постійної крапки максимуму в розподілі коефіцієнта інтенсивності напруження першої, другої й третьої моди зближаються.

Список використаних джерел

1. Острик В.І., Улітко А.Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. 43, №2. – С. 119–126.
2. Gautezen A.K., Dundrus J. The interface crack under combined loading. // Trans. ASME, Journal Appl. Mech. – 1988. – 55. – P.580–586.
3. Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Dudik M.V. On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media. // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 2. – P.136–144.
4. Loboda V.V., Sheveleva A.E. Determining prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 5. – P. 66–572.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. Черепанов Г.П. Механика разрушения композитных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
7. Men'shikov V.A., Men'shikov A.V., Guz I.A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading. // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, № 8. – P.856–873.
8. Меньшиков В.А. Уравнения метода граничных элементов в динамической пространственной задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред // Докл. НАН Украины. – 2007. – №8. – С.59–65.
9. Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меньшиков А.В. Общая пространственная динамическая задача для эллиптической трещины под воздействием нормальной волны сдвига с учетом контакта берегов трещины // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 156–159.

Надійшла до редколегії 29.08.08

УДК 539.3:534.1

Віктор О. Моїсеєнко, к.ф.-м.н., доцент.

Кінематична структура хвильових полів у ортотропних просторових хвильоводах

У роботі в тривимірній постановці досліджена кінематична структура хвильових полів у просторових хвильоводах із анізотропних матеріалів орторомбічної структури. Побудована спеціальна форма зображення загального визначального рівняння для хвильового векторного потенціалу з виділенням головної частини і характерних додатків. Проведена трансформація знайденої форми на хвильоводи із матеріалів кубічної і гексагональної структури.

Ключові слова: хвильові поля, ортотропні матеріали, просторові хвильоводи, кінематична структура хвильових полів.

E-mail: vamvamv@ukr.net

Victor A. Moiseenko, Cand.Sci.(Phys.-Math.),
Associate Professor

Kinematical structure of wave fields in orthotropic spatial waveguides

The kinematical structure of wave fields in spatial waveguide objects from anisotropic material having orthorhombic structure is analyzed in three-dimensional formulation in the paper. The nonspread function of presentation of general resolving equalization is built for wave vectorial potential with selection main part and special additions. Transformations are conducted on waveguides from materials of cubic and hexagonal structure.

Keywords: wave fields, orthotropic materials, spatial waveguides, kinematical structure of the wave fields.

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1 Вступ

Ця робота є продовженням досліджень властивостей кінематичної структури хвильових полів у ортотропних просторових хвильоводних об'єктах шляхом розробленого спеціального аналізу основного визначального рівняння для хвильового векторного потенціалу, яке одержано у роботі [2]. Для матеріалів гексагональної і кубічної структури такі дослідження загального розв'язку повної системи основних рівнянь руху виконано у роботі [3]. У цій роботі шляхом подальшого розвитку попередніх досліджень запропоновано ефективний підхід до визначення головної частини і характерних додатків у основному визначальному рівнянні для хвильового векторного потенціалу щодо анізотропних матеріалів орторомбічної структури. Основу такого підходу, як і у попередніх дослідженнях, складає запропонована автором методика зведення загального розв'язку повної системи основних рівнянь руху у тривимірній постановці до розв'язку одного векторного визначального рівняння шляхом заміни залежних компонент вектора зміщень через незалежні компоненти хвильового векторного потенціалу [2].

У роботі [2] побудована тривимірна математична модель просторового хвильоводного об'єкту з анізотропного матеріалу орторомбічної структури, з якої, як наслідок, одержані аналогічні тривимірні моделі просторових хвильоводних об'єктів з анізотропних матеріалів кубічної, гексагональної та ізотропної структури. Згідно з цією моделлю в довільній точці з заданим радіусом-вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і в довільний момент часу t кінематична структура хвильових полів у просторових хвильоводних об'єктах що розглядаються визначається конкретним видом та структурою зображень компонент вектора зміщень $U_1(\vec{x}, t)$, $U_2(\vec{x}, t)$, $U_3(\vec{x}, t)$ через компоненти хвильового векторного потенціалу $\Psi_1(\vec{x}, t)$, $\Psi_2(\vec{x}, t)$, $\Psi_3(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= L_1^{(4)} \Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &- (C_{12} + G_{12}) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &- (C_{13} + G_{13}) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{12} + G_{12}) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_1(\vec{x}, t) + \\ &+ L_2^{(4)} \Psi_2(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23}) \partial_2 \partial_3 L_{23}^{(2)} \Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13}) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_1(\vec{x}, t) - \end{aligned} \quad (1)$$

2 Постановка задачі

$$-(C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_2(\vec{x},t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\vec{x},t),$$

і конкретним виглядом та структурою самого хвильового векторного потенціала

$$\Psi(\vec{x},t) = (\Psi_1(\vec{x},t), \Psi_2(\vec{x},t), \Psi_3(\vec{x},t))$$

та визначального рівняння для нього. Невідомий хвильовий векторний потенціал визначається з диференціального рівняння шостого порядку

$$L\Psi(\vec{x},t) = 0 \quad (2)$$

з отриманою раніше [2] структурою диференціального оператора L

$$\begin{aligned} L = & D_{600}\partial_1^6 + D_{060}\partial_2^6 + D_{006}\partial_3^6 + D_{420}\partial_1^4\partial_2^2 + \\ & + D_{240}\partial_1^2\partial_2^4 + D_{402}\partial_1^4\partial_3^2 + D_{042}\partial_2^4\partial_3^2 + \\ & + D_{222}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 + D_{204}\partial_1^2\partial_3^4 + D_{024}\partial_2^2\partial_3^4 - \\ & - \rho^3 C_0^{-3}\partial_1^6 - D_{400}\rho C_0^{-1}\partial_1^4\partial_2^2 - \\ & - D_{040}\rho C_0^{-1}\partial_2^4\partial_1^2 - D_{004}\rho C_0^{-1}\partial_3^4\partial_1^2 - \\ & - D_{220}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 - D_{202}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_3^2\partial_2^2 + \\ & + D_{022}\rho C_0^{-1}\partial_2^2\partial_3^2\partial_1^2 + D_{200}\rho^2 C_0^{-2}\partial_1^2\partial_2^4 + \\ & + D_{020}\rho^2 C_0^{-2}\partial_2^2\partial_3^4 + D_{002}\rho^2 C_0^{-2}\partial_3^2\partial_1^4, \end{aligned} \quad (3)$$

де коефіцієнти при диференціальних операторах залежать тільки від пружних сталей [2].

Для виділення у операторі L головної частини і відповідних характерних структурних додатків треба проаналізувати результати попередніх досліджень для ізотропних матеріалів [1] і матеріалів гексагональної та кубічної структури [3] і потім узагальнити їх так, щоб всі попередні результати виходили з них як наслідок. Головна частина повинна залишатися завжди і трансформуватися у попередню для кожного випадку пружної симетрії, а додаткові елементи повинні або пропадати (дорівнювати нулю за рахунок коефіцієнтів) або трансформуватися у необхідні головні елементи. Аналіз показує, що таких форм завжди може бути три відповідно трьом основним пружним напрямкам по координатних осях. Результатом цього аналізу є наступна форма, що відповідає напрямку Ox_1

$$\begin{aligned} L^{(1)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + \\ & + (K_{12}^{(1)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(1)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(1)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\ & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + \\ & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(1)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\ & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(1)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\ & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(1)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ (G_{13} - G_{23})(G_{23} - G_{12}) \times$$

$$\times [(C_{22} - G_{12})\partial_2^2 + (C_{33} - G_{13})\partial_3^2] \partial_2^2\partial_3^2 + K_{123}^{(1)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2,$$

де

$$K_{12}^{(1)} = C_{11}C_{22} - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) - C_{12}^2,$$

$$K_{13}^{(1)} = C_{11}C_{33} - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - C_{13}^2,$$

$$K_{23}^{(1)} = C_{22}C_{33} - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) -$$

$$- C_{23}^2 - (G_{12} - G_{23})(G_{13} - G_{23}),$$

$$K_{123}^{(1)} = C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} +$$

$$+ 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) -$$

$$- G_{12}K_{12}^{(1)} - G_{13}K_{13}^{(1)} - G_{23}K_{23}^{(1)} -$$

$$- C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + G_{12}G_{13}] -$$

$$- C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + G_{13}(G_{12} + G_{23} - G_{13})] -$$

$$- C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + G_{12}(G_{13} + G_{23} - G_{12})]$$

Аналогічним чином можливо побудувати ще дві характерні структурні форми для оператора L :

$$\begin{aligned} L^{(2)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & + (K_{12}^{(2)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(2)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(2)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\ & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + \\ & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(2)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\ & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(2)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\ & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(2)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \\ & + (G_{23} - G_{13})(G_{13} - G_{12}) \times \\ & \times [(C_{11} - G_{12})\partial_1^2 + (C_{33} - G_{23})\partial_3^2] + \\ & + K_{123}^{(2)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L^{(3)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times \\ & + (K_{12}^{(3)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(3)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(3)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\ & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + \\ & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(3)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\ & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(3)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\ & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(3)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \\ & + (G_{23} - G_{12})(G_{12} - G_{13}) \times \\ & \times [(C_{11} - G_{13})\partial_1^2 + (C_{22} - G_{23})\partial_2^2] + \\ & + K_{123}^{(3)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$K_{12}^{(2)} = C_{11}C_{22} - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) - C_{12}^2,$$

$$K_{13}^{(2)} = C_{11}C_{33} - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) -$$

$$-C_{13}^2 - (G_{12} - G_{13})(G_{23} - G_{13}),$$

$$K_{23}^{(2)} = C_{22}C_{33} - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) - C_{23}^2,$$

$$K_{123}^{(2)} = C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} +$$

$$+ 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) -$$

$$- G_{12}K_{12}^{(2)} - G_{13}K_{13}^{(2)} - G_{23}K_{23}^{(2)} -$$

$$- C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + G_{23}(G_{12} + G_{13} - G_{23})] -$$

$$- C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + G_{13}(G_{23} + G_{12} - G_{13})] -$$

$$- C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + G_{12}(G_{23} + G_{13} - G_{12})]$$

$$K_{12}^{(3)} = C_{11}C_{22} - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) -$$

$$- C_{12}^2 - (G_{13} - G_{12})(G_{23} - G_{12}),$$

$$K_{13}^{(3)} = C_{11}C_{33} - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - C_{13}^2,$$

$$K_{23}^{(3)} = C_{22}C_{33} - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) - C_{23}^2,$$

$$K_{123}^{(3)} = C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} +$$

$$+ 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) -$$

$$- G_{12}K_{12}^{(3)} - G_{13}K_{13}^{(3)} - G_{23}K_{23}^{(3)} -$$

$$- C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + G_{23}(G_{13} + G_{12} - G_{23})] -$$

$$- C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + G_{13}(G_{23} + G_{12} - G_{13})] -$$

$$- C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + G_{12}(G_{23} + G_{13} - G_{12})]$$

Аналіз цих трьох форм показує, що всі вони різні, але мають ідентичну структуру і володіють необхідними властивостями. Так якщо перейти у побудованих формах від матеріалу орторомбічної структури до матеріалу кубічної структури і покласти $C = C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $\lambda = C_{12} = C_{13} = C_{23}$, $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$ то за рахунок того, що

$$K_{12}^{(1)} = K_{13}^{(1)} = K_{23}^{(1)} = K_{12}^{(2)} = K_{13}^{(2)} = K_{23}^{(2)} =$$

$$K_{12}^{(3)} = K_{13}^{(3)} = K_{23}^{(3)} = (C + \lambda)(C - \lambda - 2G)$$

і

$$K_{123}^{(1)} = K_{123}^{(2)} = K_{123}^{(3)} = (C - \lambda - 2G) \times$$

$$\times [(C + \lambda)(C - G) - 2(\lambda + G)^2]$$

всі три форми співпадуть і будуть мати необхідну структуру, яка отримана попередньо [2]

$$\begin{aligned} L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = & (C\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \times \\ & \times (G\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2)(G\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) + \\ & + (C + \lambda)(C - \lambda - 2G)(D^2 \partial_3^2 + \partial_1^2 \partial_2^2) \times \\ & \times (G\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) + (C - \lambda - 2G) \times \end{aligned} \quad (7)$$

$$\times [(C + \lambda)(C - G) - 2(\lambda + G)^2] \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^2$$

де $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$. Після чого легко одержати відому структуру, яка відповідає трьом однаковим формам для ізотропного матеріалу. Враховуючи, що у цьому випадку $C = \lambda + 2G$ і відповідно

$$K_{12}^{(1)} = K_{13}^{(1)} = K_{23}^{(1)} = K_{12}^{(2)} = K_{13}^{(2)} = K_{23}^{(2)} =$$

$$K_{12}^{(3)} = K_{13}^{(3)} = K_{23}^{(3)} = K_{123}^{(1)} = K_{123}^{(2)} = K_{123}^{(3)} = 0$$

для диференціального оператора L маємо класичну структуру [1,2]

$$\begin{aligned} L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = & ((\lambda + 2G)\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \times \\ & \times (G\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \times (G\nabla^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Для матеріалу гексагональної структури залишається п'ять незалежних пружних сталих C_{11} , C_{33} , C_{13} , G_{12} , G_{13} , бо для цього матеріалу $C_{22} = C_{11}$, $C_{23} = C_{13}$, $G_{23} = G_{13}$, $C_{12} = C_{11} - 2G_{12}$. Це дозволяє спростити структуру загального оператора (3) до добутку двох співмножників [2]

$$\begin{aligned} L = & \{C_{11}G_{13}D^4 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13}) \times \\ & \times D^2 \partial_3^2 + C_{33}G_{13} \partial_3^4 - (C_{11} + G_{13})D^3 + \\ & + (C_{33} + G_{13}) \partial_3^2 \rho C_0^{-1} \partial_i^2 + \rho^2 C_0^{-2} \partial_i^4\} \times \\ & \times (G_{12}D^2 + G_{13} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Побудовані характерні форми (4, 5, 6) теж спрощуються за рахунок того, що для цього матеріалу

$$K_{12}^{(1)} = K_{12}^{(2)} = 0, K_{12}^{(3)} = (G_{12} - G_{13})(G_{13} - G_{12}),$$

$$K_{13}^{(1)} = K_{13}^{(2)} = K_{13}^{(3)} = K_{23}^{(1)} = K_{23}^{(2)} = K_{23}^{(3)} =$$

$$= C_{11}C_{33} - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - C_{13}^2 = K_{12},$$

а

$$K_{123}^{(1)} = K_{123}^{(2)} = 2(G_{12} - G_{13})K_{13},$$

$$K_{123}^{(3)} = 2(G_{12} - G_{13})K_{13} + (C_{33} - G_{12})K_{12}^{(3)}$$

Перша і друга форми (4,5) у цьому випадку пружної симетрії співпадуть і дають одну форму

$$\begin{aligned} L^{(1)} = L^{(2)} = & (G_{12}D^2 + G_{13} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \times \\ & \times \left\{ (C_{11}D^3 + C_{33} \partial_3^3 - \rho C_0^{-1} \partial_i^3)(G_{13}D^2 + \right. \\ & \left. + G_{13} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) + K_{13}D^2 \partial_3^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Третя форма (6) дає друге структурне зображення

$$\begin{aligned} L^{(3)} = & (C_{11}D^2 + C_{33} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \times \\ & \times (G_{12}D^2 + G_{13} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2 + (G_{13} - G_{12}) \partial_1^2) \times \\ & \times (G_{13}D^2 + G_{12} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2 + (G_{12} - G_{13}) \partial_2^2) + \\ & + K_{13}(G_{12}D^2 + G_{13} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2)D^2 \partial_3^2 - \\ & - (G_{12} - G_{13})^2 (C_{11}D^2 + C_{33} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_i^2) \end{aligned} \quad (10)$$

для матеріалів гексагональної структури.

Перша характерна форма (9) відповідає особливостям структури загальної форми у вигляді (8), бо має однаковий співмножник. Друга характерна форма (10) не має відокремленої головної частини у відповідному вигляді і тому незручна для використання не зважаючи на те, що має необхідні властивості. Але для цього випадку пружної симетрії існує ще дві характерні форми з необхідними властивостями і відокремленою головною частиною, перша із котрих вже була отримана попередньо [3] і які можливо теж використовувати як рівноправні:

$$L = (G_{12}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times$$

$$\times \left\{ (C_{11}D^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2)(G_{13}D^2 + \right.$$

$$+ G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + [C_{11}(C_{33} - G_{12}) -$$

$$- G_{13}(C_{33} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2]D^2\partial_3^2 +$$

$$+ C_{33}(G_{13} - G_{12})\partial_3^4 + (G_{12} - G_{13})\partial_3^2\rho C_0^{-1}\partial_1^2 \left. \right\},$$

$$L = (G_{12}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) \times$$

$$\times \left\{ (C_{11}D^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2)(G_{12}D^2 + \right.$$

$$+ G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + [C_{33}(C_{11} - G_{12}) -$$

$$- G_{13}(C_{11} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2]D^2\partial_3^2 +$$

$$+ C_{11}(G_{13} - G_{12})D^4 + (G_{12} - G_{13})D^2\rho C_0^{-1}\partial_1^2 \left. \right\}.$$

Всі отримані характерні форми зображення основного визначального оператора L для матеріалу гексагональної структури при переході до ізотропного матеріалу також дають для оператора L класичну структуру (7).

3 Висновки

Таким чином, характерні структурні зображення (4), (5) і (6) оператора L на відзнаку від загальної форми його зображення (3) дають додаткову поширену інформацію про кінематичну структуру хвильового поля у довільному просторовому хвильоводному об'єкті з матеріалу орторомбічної структури. Якісна структура цих трьох характерних форм ідентична, але і головна частина і характерні додатки в них різні за рахунок пружних констант, що до них входять. Головна частина в кожній характерній формі є добутком трьох хвильових операторів які визначають відповідно одну квазіпоздовжню і дві квазіпоперечні хвильові складові що утворюють кінематичну структуру хвильового поля у кожному із базових напрямків. Характерні додатки у цих формах мають властивість обертатися в нуль при переході до

ізотропного матеріалу за рахунок отриманих чотирьох спеціальних характерних комбінацій пружних сталей для кожного базового напрямку. Ці спеціальні комбінації характеризують ступінь зв'язку трьох основних складових у структурі загального хвильового векторного потенціалу і як наслідок у структурі самого хвильового поля.

Для матеріалу кубічної структури як і для ізотропного матеріалу всі три характерні форми співпадають, але спеціальні характерні додатки для матеріалів кубічної структури залишаються і у своїй структурі мають тільки два характерні коефіцієнти, що відповідають ступеню зв'язку одної квазіпоздовжньої і двох однакових квазіпоперечних хвильових складових.

Для матеріалу гексагональної структури в кінематичній структурі хвильового поля завжди виділяються дві незалежні векторні хвильові складові. Одна є поздовжньо-поперечною (біхвильовою), а друга є відокремленою чисто поперечною хвильовою складовою. Число характерних структурних зображень основного визначального оператора L у цьому випадку, як наслідок, скорчується до двох і відповідають вони тільки біхвильовій його частині і мають додатково ще дві альтернативні модифікації.

Отримані характерні спеціальні коефіцієнти можливо також використовувати як узагальнені самостійні пружні характеристики для порівняння розглянутих анізотропних матеріалів.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
2. Моїсєєнко В.О. Хвильові потенціали для просторових хвильоводних об'єктів із анізотропних матеріалів // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – №3. – С.94 - 98.
3. Моїсєєнко В.О. Дослідження кінематичної структури хвильових полів у анізотропних просторових хвильоводних об'єктах // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – №4. – С. 88 -93.
4. Акустические кристаллы. Справочник / Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др.; под ред. Шаскольской М.П. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

Надійшла до редколегії 17.11.2008

УДК 539.3

Леонід В. Мольченко, д.ф.-м.н., Равшан Ш.
Індіамінов, к.ф.-м.н., Ірина І. Лоос, к.ф.-м.н.

Дослідження електромагнітних ефектів зрізаного гнучкого параболоїда обертання в осесиметричній постановці

Отримана розв'язувальна система рівнянь параболоїда обертання змінної товщини в осесиметричній постановці. Визначається напружено-деформівний стан параболоїда обертання. проводиться аналіз електромагнітних ефектів оболонки в нелінійній постановці. Наведені чисельні результати гнучкої оболонки ілюструють можливості застосування запропонованої методики до розв'язування задач такого типу.

Ключові слова: оболонка, магнітне поле, магнітопружність

E-mail: Mol_LV@univ.kiev.ua

Статтю представлено кафедрою механіки суцільних середовищ

1. Вступ.

Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої пов'язана з навантаженням в умовах взаємодії електромагнітних і механічних полів, обумовлює широкий інтерес дослідників до задач фізики спряжених полів. Загальні основи теорії деформації твердих тіл з урахуванням електромагнітних та інших фізичних процесів, основні фізичні представлення і принципи, математичний апарат, необхідні для побудови відповідних механічних моделей, детально розглянуті в роботах А.А.Льюїна [1], Л.І.Седова [2]. На даний час в механіці отримали значний розвиток дослідження процесів деформації електропровідних гнучких тіл під дією силових і електромагнітних навантажень. Ці процеси описуються класом нелінійних крайових задач для тонкостінних пластин і оболонок. Нижче розглянемо одну задачу з цього класу – розрахунок напружено-деформівного стану ізотропного зрізаного струмонесучого параболоїда обертання постійної товщини, на який одночасно діють стискаюче осьове зусилля, зовнішнє магнітне поле і сторонній електричний струм.

2. Постановка задачі

В процесі деформації параболоїда під дією стискаючого осьового зусилля, зовнішнього

Leonid V. Molchenko, D.Sci (Phys.-Math.),
Ravshan Sh.Indiaminov, C.Sci (Phys.-Math.), Irina
I. Loos, D.Sci (Phys.-Math.).

Investigation of electromagnetic effects in truncated flexible rotation paraboloid for axisymmetrical position

Resolving system of equations of the paraboloid rotation of variable thickness for axisymmetrical case is constructed. Stress-strained state is determined in one-dimensional statement, and the analysis of electromagnetic effects of paraboloid rotation in nonlinear position is carried out. The considered numerical example of the flexible shells of variable rigidity such procedure potentialities in solution of such class problems.

Key words: shell, magnetic field, magnetoelasticity

магнітного поля і стороннього електричного струму відбувається зміна форми його поверхні, що призводить до зміни напрямку струму, тобто змінюється електромагнітне поле оболонки, виникають вихрові струми, які, взаємодіючи із зовнішнім магнітним полем, генерують сили електромагнітного походження, так звані пондеромоторні сили Лоренца. Ці сили змінюють стан тіла і електромагнітне поле в ньому. При цьому розглядаємо тіла, виготовлені з матеріалу, який не має властивостей мимовільних поляризації і намагнічування. Температурними напруженнями нехтуємо. Механічні і електромагнітні поля виявляються взаємозв'язаними. Результат їхньої дії на оболонку визначається із розв'язку системи, яка складається з рівнянь механіки і рівнянь електродинаміки. Зв'язність полів обумовлена тензором напружень Максвелла і силою Лоренца, яка входить в систему рівнянь і включає і механічні, і електромагнітні змінні. Повна система рівнянь у криволінійній ортогональній системі координат, яка дозволяє математично описати нелінійну двовимірну задачу магнітопружності, розглянута в роботах [3, 4].

Виходячи із загальних рівнянь магнітопружності, побудуємо осесиметричну розв'язувальну систему рівнянь параболоїда обертання змінної відносно твірної товщини.

Введемо ортогональну систему координат s, θ і ζ , де s – довжина твірної параболоїда; θ – центральний кут у паралельному колі, який відраховується від вибраної площини; ζ – нормаль до контуру оболонки. Віднесемо серединну поверхню оболонки до координатної поверхні s, θ і будемо вважати, що координатні лінії співпадають з лініями головних кривизн серединної поверхні. Враховуючи осесиметричність задачі, покладемо, що всі компоненти, які входять до рівняння, не залежать від θ .

У випадку дослідження напружено-деформівного стану оболонок обертання довільної форми будемо виходити з наступних положень.

По-перше, шукана система рівнянь повинна описувати весь клас оболонок обертання; по-друге, вона повинна мати вигляд, зручний для чисельного розв'язку задачі; по-третє, вона повинна допускати формулювання граничних умов у змішаному вигляді.

Виходячи з цих міркувань, вибираємо за розв'язуючі наступні функції:

$$u_x, u_z, \theta_s, N_x, N_z, M_s, E_\theta, B_\zeta, \quad (1)$$

де u_x, u_z – радіальне і осьове переміщення; N_x, N_z – радіальне і осьове зусилля; E_θ, B_ζ – напруженість електричного і індукція магнітного полів, які виражаються через переміщення u, w і зусилля N_x, Q_s наступним чином:

$$N_x = N_s \cos \varphi + Q_s \sin \varphi; \quad N_z = N_s \sin \varphi - Q_s \cos \varphi; \\ u_x = u \cos \varphi + w \sin \varphi; \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi. \quad (2)$$

Після перетворення загальних рівнянь магнітопружності отримаємо наступну систему нелінійних диференціальних рівнянь у формі Коші [4]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = \frac{1-\nu^2}{Eh} (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \cos \varphi + \\ + \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_x + \frac{1}{R_s} u_z - \sin \varphi \theta_s - \frac{\cos \varphi}{2} \theta_s^2, \\ \frac{\partial u_z}{\partial s} = \frac{1-\nu^2}{Eh} (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \sin \varphi + \\ + \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_x - \frac{1}{R_s} u_z + \cos \varphi \theta_s - \frac{\sin \varphi}{2} \theta_s^2, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial s} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_s - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \theta_s,$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} (\nu - 1) N_x + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu \sin \varphi}{r} \right) N_z + \\ + \frac{Eh}{r^2} u_x - \cos \varphi (P_s + \rho \hat{F}_s) - \sin \varphi (P_s + \rho \hat{F}_s) + \\ + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial s} = -\frac{\cos \varphi}{r} N_x - \frac{1}{R_s} N_z - \sin \varphi (P_s + \rho \hat{F}_s) + \\ + \cos \varphi (P_s + \rho \hat{F}_s) + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} (\nu - 1) M_s + \frac{Eh^3 \cos^2 \varphi}{12 r^2} \theta_s + \\ + \cos \varphi N_x - \sin \varphi N_z + (\cos \varphi N_x + \sin \varphi N_z) \theta_s - \\ - \frac{\nu \sin \varphi}{r} M_s \theta_s - \frac{Eh^3 \cos \varphi \sin \varphi}{12 r} \theta_s^2,$$

$$\frac{\partial B_\zeta}{\partial s} = -\sigma \mu \left[E_\theta + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) \times \right. \\ \left. (B_s^+ + B_s^-) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_\zeta \right] + \\ + \frac{(B_s^+ + B_s^-)}{h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.$$

Компоненти сили Лоренца у даному випадку мають вигляд:

$$\rho \hat{F}_s = -h J_{\theta cm} B_\zeta + \sigma h [E_\theta B_\zeta + \\ + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) B_\zeta (B_s^+ + B_s^-) - \\ - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_\zeta^2], \\ \rho \hat{F}_\zeta = 0,5 h J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) + \\ + \sigma h [0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \cos \varphi \right) \times \\ \times \left(0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ + B_s^-)^2 \right) +$$

$$+ 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial u_z}{\partial t} \sin \varphi \right) B_z (B_z^+ + B_z^-) \Bigg\}.$$

Через $B_z^{\pm}$ позначено вираз

$$B_z^{\pm} = B_{z0}^{\pm} + B_{z0} - B_{z0} \theta_z + B_z \theta_z,$$

де $B_{z0}^{\pm}$ – компоненти магнітної індукції початкового власного магнітного поля, обумовлені стороннім електричним струмом; B_{z0} – компоненти зовнішнього магнітного поля, отримані з розв'язку задачі статички; B_z – нормальна складова магнітної індукції оболонки. Тут також φ – кут між нормаллю до твірної і віссю обертання; μ – магнітна проникливість матеріалу оболонки; $h = h(s)$ – товщина оболонки; M_z – згинний момент; $J_{\text{вн}}$ – густина електричного струму від зовнішнього джерела; σ – електрична провідність; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Таким чином, система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку (4) описує напружено-деформівний стан гнучких струмонесучих оболонок обертання з довільною формою меридіану.

3. Чисельний розв'язок задачі

Доповнивши отриману систему рівнянь початковими і граничними умовами, отримаємо красу задачу, розв'язування якої розіб'ємо на низку задач, розв'язок яких знаходиться послідовно для малих фіксованих проміжків часу. Для цього скористаємося скінченно-різницевою схемою Ньюмарка [8,9]:

$$\ddot{u}^{i+3/2} = \frac{u^{i+3/2} - u^i}{\beta(\Delta t)^2} - \frac{1}{\beta} \left[\frac{\dot{u}^i}{\Delta t} + \ddot{u}^i(0,5 - \beta) \right], \quad (5)$$

$$\dot{u}^{i+3/2} = \dot{u}^i + 0,5 \Delta t (\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i+3/2}), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

де β – параметр схеми; Δt – приріст за часом.

На основі чисельних розрахунків модельних задач встановлено, що схема є стійкою при $\beta = 0,25$. Приріст за часом вибирається згідно критерія Куранта [5].

В результаті розв'язувальну систему рівнянь у відповідному часовому шарі можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = \bar{f}(s, \bar{N}), \quad (6)$$

де $\bar{N} = \{u_z, u_r, \theta_z, N_z, N_r, M_z, E_\theta, B_z\}^T$.

Граничні умови у загальному випадку представимо у вигляді

$$B_1 \bar{N}|_{s=s_1} = \bar{b}_1, \quad B_2 \bar{N}|_{s=s_2} = \bar{b}_2, \quad (7)$$

де B_1, B_2 – відомі прямокутні матриці.

Крайова задача (6), (7) доповнюється початковими умовами

$$\bar{N} = 0, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8)$$

До отриманої нелінійної крайової задачі (6)–(8) застосуємо метод квазілінеаризації [6]. Ітераційна схема якого у векторному вигляді запишеться так

$$\frac{d\bar{N}^{(n+1)}}{ds} = \bar{f}(s, \bar{N}^{(n)}) + \Gamma(\bar{N}^{(n)}) (\bar{N}^{(n+1)} - \bar{N}^{(n)}) \quad (9)$$

$$B_1 \bar{N}^{(n+1)}|_{s=s_1} = \bar{b}_1, \quad B_2 \bar{N}^{(n+1)}|_{s=s_2} = \bar{b}_2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Тут Γ – матриця Якобі.

Отриману послідовність лінійних крайових задач будемо розв'язувати чисельним методом дискретної ортогоналізації [7,10].

Як приклад, що ілюструє запропонований підхід, розглядається параболоїд обертання з алюмінію.

Рівняння меридіана серединної поверхні оболонки запишемо в параметричному вигляді

$$r = a\sqrt{z}, \quad z = z \quad (0,1 \leq z \leq 0,5),$$

де a – параметр оболонки.

За незалежну змінну інтегрування виберемо координату z . Тоді для геометричних характеристик оболонки маємо:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4z}}, \quad \sin \varphi = \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{a^2 + 4z}},$$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{2a}{(a^2 + 4z)^{3/2}}.$$

Граничні умови виберемо у вигляді

$$N_r = 0, \quad N_z = -\frac{r_0 P_0}{2}, \quad M_z = 0, \quad B_z = 0,1 \sin \omega t$$

при $z = z_0$, та

$$u_z = 0, \quad N_r = 0, \quad M_z = 0, \quad B_z = 0 \quad \text{при } z = z_1$$

При розв'язуванні задачі параметри набувають наступних значень: $z_0 = 0,1$ м, $z_1 = 0,5$ м, $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0,34$, $\omega = 314,16$ с⁻¹, $\sigma = 3,63 \cdot 10^7$ (Ом·м⁻¹).

$$\mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}, \quad \rho = 2670 \text{ кг/м}^3,$$

$$J_0 = J_0 \sin \omega t \text{ А/м}^2, \quad \Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad 0 \leq t \leq 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

На рис.1 наведені розподіли напружень електричного поля оболонки при $a=2$ вздовж

меридіана $\left(z^* = \frac{z - z_0}{z_N - z_0} \right)$ у момент часу

$$t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

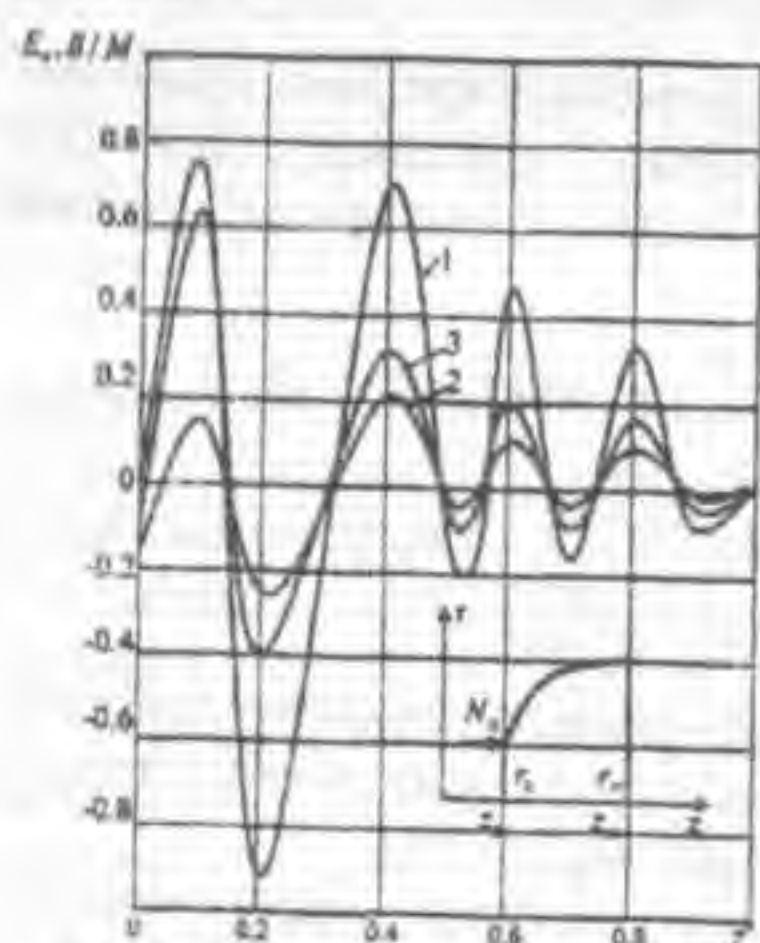


Рис.1.

Варіант 1 відповідає дії на оболонку стороннього електричного струму густини $J_0 = -5 \cdot 10^{-4} \sin \omega t \text{ А/м}^2$, зовнішнього магнітного поля $B_{z0} = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ Т}$, механічної сили $P_0 = 200 \text{ Н/м}^2$. Варіант 2 відповідає дії на оболонку $B_{z0} = 0,1 \cdot 10^{-2}$, $P_0 = 200$, $J_0 = 0$. Варіант 3 : $J_0 = -5 \cdot 10^{-4} \sin \omega t$, $B_{z0} = 0$, $P_0 = 200$.

Наведені результати дають можливість оцінити вплив на оболонку зовнішнього електричного струму і магнітної індукції, а також їх комбінований вплив.

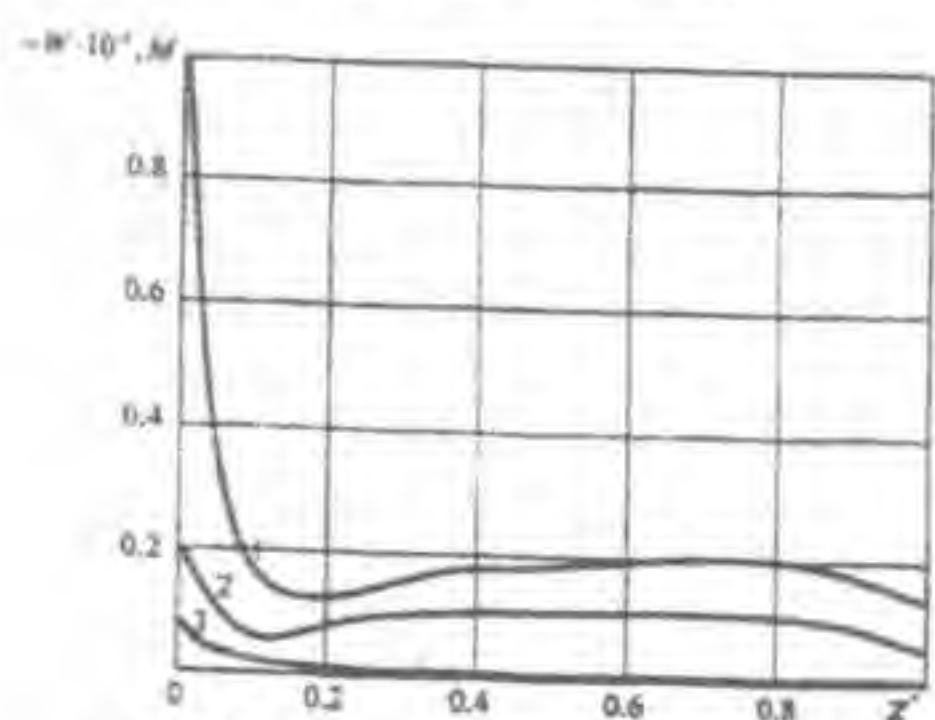


Рис.2.

На рис.2 показана зміна прогину вздовж меридіану при $t = 6 \cdot 10^{-3}$ у залежності від параметра a . Варіанти 1,2,3 відповідають

$a=2, a=1,5, a=1$. У даному випадку прийнято, що $J_0 = -5 \cdot 10^{-4} \sin \omega t$, $B_{z0} = 0,1 \cdot 10^{-2}$, $P_0 = 100$.

4. Висновки

З графіків випливає, що зі збільшенням параметра a значення прогину збільшуються.

На завершення зауважимо, що запропонований підхід дозволяє розв'язувати нові задачі магнітопружності гнучких струмонесучих оболонок обертання.

Досліджені електромагнітні ефекти, обумовлені взаємодією механічних і електромагнітних полів у нелінійній постановці.

Список використаних джерел

1. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1983. Т.1. – 536с.; Т.2. – 584 с.
3. Амбарцумян С.А., Бигдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
4. Улитко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. – Київ: Либідь, 1994. – 115 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 232 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
7. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок. – Київ: Либідь, 1993. – 231 с.
8. Newmark N.M. A method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, №7. – Р. 67-97.
9. Мольченко Л.В., Индиаминов Р.Ш. Учет влияния комбинированного нагружения на напряженное состояние конической оболочки, находящейся в магнитном поле // Док. АН Рес. Узбекистан. – 1993. – №6. – С. 21-22.
10. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат.наук. – 1961. – 16, вып. 3(99). – С. 171-174.

Надійшла до редколегії 17.10.2008.

УДК 539.3

Віталій В. Островський, аспірант

Рух рідини в полі пари вихорів на нерухомій сфері

В задачі пасивної адвекції в полі швидкостей пари вихорів на нерухомій сфері проведено чисельний аналіз розв'язків. Приведено рівняння руху точкових вихорів в сферичних координатах та у стереографічній проекції. Побудовано лінії току у нерухомій та рухомій системах координат.

Ключові слова: пара вихорів, рух рідини на сфері, стереографічна проекція.

E-mail: vitos@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Пара вихорів, які мають однакові за модулем але протилежні за знаком інтенсивності, має досить цікаві властивості і її рух глибоко досліджений у плоскому випадку [4, 6, 9].

Детальне дослідження задачі пасивної адвекції у полі пари вихорів на площині проведено у роботі [9]. У ній автори привели аналітичний вивід рівняння атмосфери пари вихорів та провели чисельне моделювання процесу її формування. Також автори дослідили взаємодію пари точкових вихорів з іншим вихором та з парою вихорів. У даній роботі ми проведемо подібне дослідження атмосфери пари вихорів на нерухомій сфері.

Задача руху вихорів на сфері вперше була досліджена у класичній роботі Громека [2]. Він записав рівняння руху вихорів у стереографічній проекції. Дослідженням руху вихорів на сфері також займався Цермело [11]. У ній автор знайшов вигляд функції току через сферичний потенціал. Сучасний вигляд рівнянь руху точкових вихорів на сфері отримав Богомоллов [1]. Він вивів рівняння руху точкових вихорів на нерухомій сфері та сфері, що обертається. Було показано, що у сферичних координатах рівняння руху можна представити у вигляді гамільтонової системи.

Дослідження і детальний аналіз можливих топологій ліній руху на сфері було проведено у роботі [8]. У ній автори користуючись теоремою Пуанкаре дослідили особливі точки, які виникають в інтегровній задачі руху двох, трьох

Vitaly V. Ostrovskyi, PhD student

Fluid motion in the field of vortex pair on a steady sphere

Advection of passive particles in the field of vortex pair on an irrotational sphere is investigated. Numerical analysis of solutions is performed. Equations of motion of point vortices in spherical coordinates and in stereographic projection are given. Streamlines in inertial and corotating frames are shown.

Keywords: vortex pair, liquid flow on sphere, advection, stereographic projection, streamlines.

та в особливому випадку руху чотирьох точкових вихорів на рухомій та нерухомій сфері.

Чисельний аналіз поведінки пари вихорів на сфері, що обертається було проведено у роботі [7]. У ній автори змоделювали неперервний градієнт завихреності, який виникає у випадку рухомої сфери, за допомогою скінченного числа однорідних шарів завихреності на сфері. Ця модель дозволила пояснити виникнення хвиль Росбі та дослідити стійкість руху пари вихорів на рухомій сфері.

У даній роботі ми приведемо рівняння руху точкових вихорів та рівняння адвекції пасивної частинки у сферичних координатах та у стереографічній проекції. Також побудуємо рівняння атмосфери пари вихорів та проведемо чисельне моделювання її формування.

2. Рівняння руху.

Рівняння руху N точкових вихорів в полі швидкості нестисливої ідеальної рідини на нерухомій сфері радіусу R в векторній формі мають наступний вигляд [5, 10]

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\mathbf{n}_j \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}, \quad (1)$$

де $\mathbf{x}_j, \Gamma_j, \mathbf{n}_j$ - координата, інтенсивність та вектор одиничної нормалі до поверхні сфери для j -го вихору.

Рівняння (1) у сферичних координатах приймуть наступний вигляд [1, 5, 10]

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j \sin(\theta_j) \sin(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos(\gamma_{ij})}, \\ \sin(\theta_i) \dot{\phi}_i &= \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j (\sin(\theta_i) \cos(\theta_j) - \cos(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j))}{1 - \cos(\gamma_{ij})},\end{aligned}\quad (2)$$

де $\cos(\gamma_{ij}) = \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) + \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j)$
 $(1 - \cos(\gamma_{ij})) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = l_{ij}^2$ - відстань по хорді
сфери між i -м та j -м вихором; (θ_i, ϕ_i) - сферичні
координати i -го вихору.

Важливо зазначити, що систему рівнянь (2)
можна записати у гамільтоновій формі

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln(l_{ij}), \\ \dot{P}_i &= \frac{\partial H_1}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial P_i},\end{aligned}\quad (3)$$

$$P_i = \sqrt{|\Gamma_i|} \cos(\theta_i), Q_i = \sqrt{|\Gamma_i|} \phi_i,$$

Для дослідження руху точкових вихорів на
сфері корисною є також стереографічна проекція,
яка задається наступним перетворенням
сферичних координат

$$r_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right), \quad (4)$$

Тоді в полярній системі координат (r, ϕ)
система (3) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned}H_2 &= \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln\left(\frac{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\phi_i - \phi_j)}{(1 + r_i^2)(1 + r_j^2)}\right), \\ \Gamma_i \frac{d}{dt}(r_i^2) &= -\frac{(1 + r_i^2)^2}{2} \frac{\partial H_2}{\partial \phi_i}, \\ \Gamma_i \frac{d\phi_i}{dt} &= \frac{(1 + r_i^2)^2}{2} \frac{\partial H_2}{\partial r_i^2},\end{aligned}\quad (5)$$

Рівняння пасивної адвекції частинки рідини
рідини в полі швидкостей точкових вихорів на
сфері можна отримати різними шляхами. В
найпростішому методі розглядається рух
пасивного маркера як вихору нульової
інтенсивності. Тоді рівняння руху у
стереографічній проекції маркера з координатами
 $z = x + iy = re^{i\phi}$ мають вигляд

$$H_3 = \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln\left(\frac{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\phi - \phi_i)}{(1 + r^2)(1 + r_i^2)}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2) = -\frac{(1 + r^2)^2}{2} \frac{\partial H_3}{\partial \phi}, \quad (6)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{(1 + r^2)^2}{2} \frac{\partial H_3}{\partial r^2},$$

Відповідні рівняння в декартових координатах

$$\begin{aligned}H_4 &= \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln\left(\frac{l_i^2}{(1 + r_i^2)(1 + r^2)}\right), \\ \dot{x} &= -\frac{(1 + r^2)^2}{2} \frac{\partial H_4}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{(1 + r^2)^2}{2} \frac{\partial H_4}{\partial x},\end{aligned}\quad (7)$$

$$\text{де } l_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2, \quad r = x^2 + y^2, \\ r_i = x_i^2 + y_i^2.$$

Використовуючи апарат функції комплексної
змінної, останні рівняння можна записати у
вигляді

$$\begin{aligned}H_5 &= \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln\left(\frac{\|z - z_i\|^2}{(1 + \|z\|^2)(1 + \|z_i\|^2)}\right), \\ \dot{z}^* &= -i \frac{(1 + \|z\|^2)^2}{2} \frac{\partial H_5}{\partial z}, \\ \text{що еквівалентно} \\ \dot{z}^* &= -i \frac{(1 + \|z\|^2)^2}{8\pi R^2} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{(z - z_i)} - \frac{\sigma z^*}{(1 + \|z\|^2)} \right], \quad (8) \\ \text{де } \sigma &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i.\end{aligned}$$

Зауважимо, що змінна z є безрозмірним
параметром системи. Еквівалентний розмірний
параметр [10] $w = 2Rz$. В термінах w система (8)
матиме вигляд

$$\begin{aligned}\dot{w}^* &= -i \frac{(4 + \|w\|^2/R^2)^2}{32\pi} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{(w - w_i)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma w^*}{R^2(4 + \|w\|^2/R^2)} \right],\end{aligned}$$

Тепер якщо розглянути граничну асимптотику
відносно малого параметра $\|w\|/R \ll 1$, при
 $R \rightarrow \infty$ з точністю до членів вищого порядку
отримаємо

$$\dot{w}^* = -\frac{i}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{(w - w_i)},$$

що повністю співпадає з рівнянням руху пасивного маркера в полі точкових вихорів на площині [6,9].

Як ми бачимо кінематична проблема пасивної адвекції формально еквівалентна Гамільтоновій динамічній системі.

3. Атмосфера пари вихорів на сфері

Неважко переконатись що

$$\theta_1 = \text{const} = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\theta_2 = \text{const} = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{1}{4\pi R^2 \cos \beta} \frac{\Gamma \sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta} t,$$

де $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, є розв'язком системи (2). Цей

розв'язок описує рух пари вихорів з інтенсивностями $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$. Як ми бачимо вихори будуть рухатись паралельно екватору з кутовою швидкістю

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \frac{1}{4\pi R^2 \cos \beta} \frac{\Gamma \sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta}.$$

В нерухомій системі координат рівняння адвекції пасивної частинки з координатами (ϕ, θ) може бути представлено в наступному вигляді

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{1 + \cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta \cos(\phi - \phi_1)}{1 - \cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta \cos(\phi - \phi_2)},$$

$$(V_\phi, V_\theta, 0) = (R\dot{\phi}, R\sin \theta \dot{\theta}, 0) = (\nabla \Psi) \times e_r =$$

$$= \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}, -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, 0 \right).$$

В рухомій системі координат

$$\xi = \theta, \eta = \phi - \frac{\Gamma \sin 2\beta}{4\pi R^2 \cos \beta (1 - \cos 2\beta)} t, \text{ у якій}$$

пара вихорів є нерухомою, рівняння адвекції пасивної частинки можна записати у наступному вигляді

$$\Psi_{rel} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \left(\ln \frac{1 + \cos \xi \sin \beta - \sin \xi \cos \beta \cos \eta}{1 - \cos \xi \sin \beta - \sin \xi \cos \beta \cos \eta} - \frac{\cos \xi \sin 2\beta}{\cos \beta (1 - \cos 2\beta)} \right)$$

$$(V_\xi, V_\eta, 0) = (R\dot{\xi}, R\sin \xi \dot{\eta}, 0) = (\nabla \Psi_{rel}) \times e_r =$$

$$= \left(\frac{1}{R \sin \xi} \frac{\partial \Psi_{rel}}{\partial \eta}, -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_{rel}}{\partial \xi}, 0 \right),$$

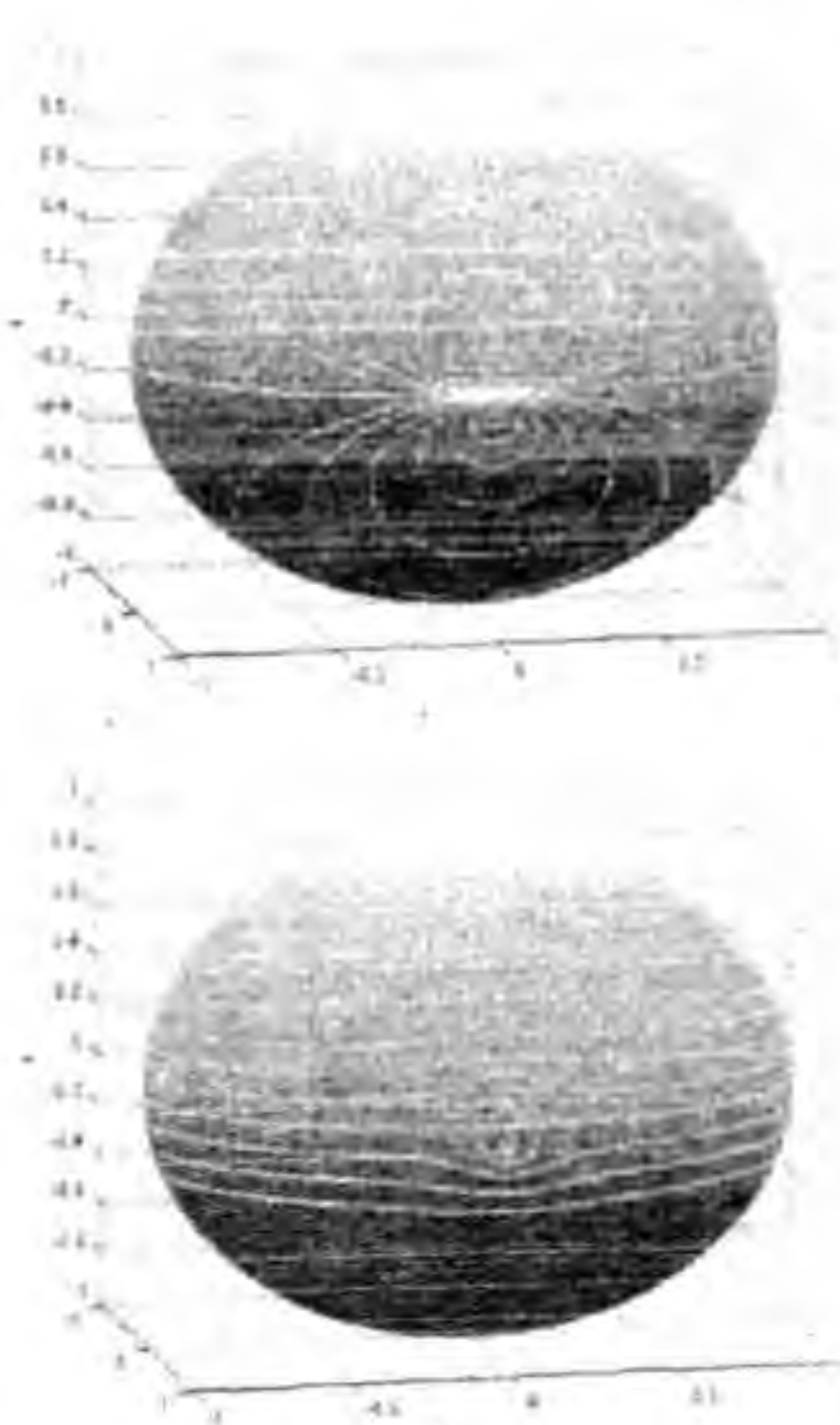


Рис. 1 Лінії току у нерухомій та рухомій системі координат.

Тут функції Ψ, Ψ_{rel} є функціями току у нерухомій та рухомій системі координат, відповідно. Знаючи функції току ми можемо знайти рівняння ліній току у цих двох системах координат.

$$\cos(\phi - \phi_1) = \frac{1 - \cos \theta \sin \beta \coth(C)}{\sin \theta \cos \beta},$$

$$\cos \eta = \frac{1 - \cos \xi \sin \beta \coth(A \cos \xi + C)}{\sin \xi \cos \beta},$$

де $A = \frac{\sin 2\beta}{\cos \beta (1 - \cos 2\beta)}$, а C - константа яка визначає лінію рівня. При $C=0$ у рухомій системі координат ми отримаємо рівняння атмосфери пари вихорів. Як видно з Рис. 1 вона по геометричним характеристикам повністю співпадає з атмосферою пари вихорів, що рухаються на площині.

Як вже було вказано вище, рух пасивного маркера у полі пари вихорів можна представити як рух вихора нульової інтенсивності в задачі про рух трьох вихорів. Користуючись даним методом змодельємо процес адвекції 400 пасивних маркерів у полі пари вихорів, кутова відстань між якими $2\beta = 0.2$. Цей процес зображено на Рис. 2.

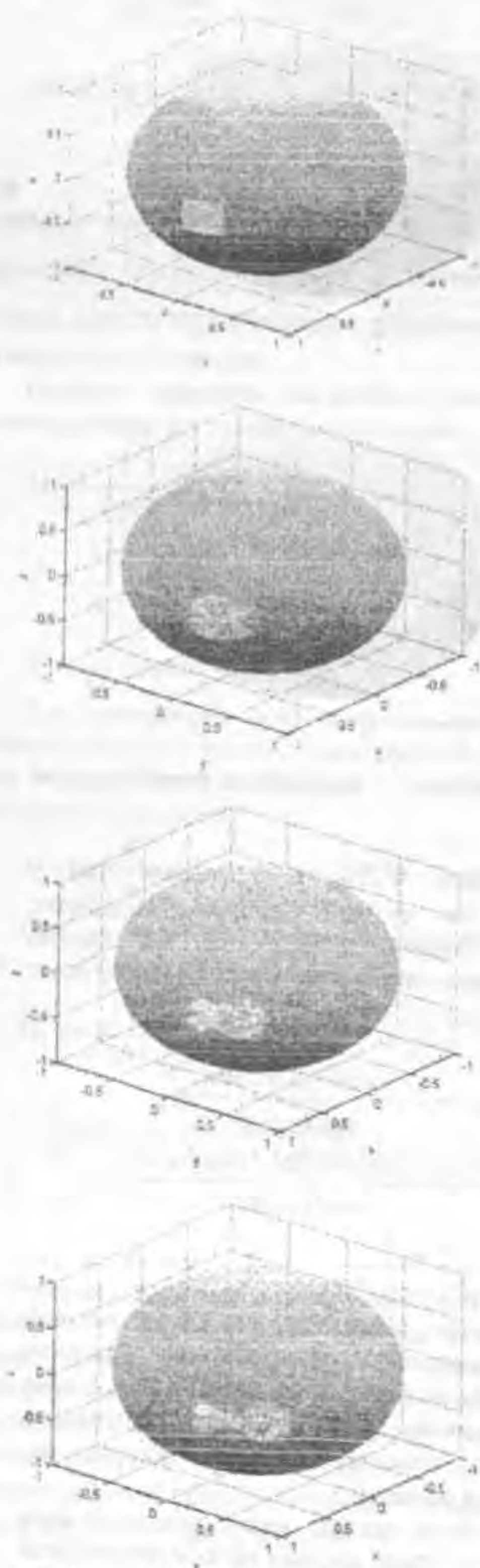


Рис. 2 Процес формування атмосфери пари вихорів на сфері в моменти часу $t=0;0.2;0.5;0.9$.

Тут одиницею часу є величина $\frac{R^2}{\Gamma}$. Незалежно від початкового розташування пасивних маркерів форма атмосфери пари вихорів асимптотично прямує до форми описаної вище аналітично.

4. Висновки

В роботі аналітично та чисельно досліджено рух пари точкових вихорів на нерухомій сфері. Побудовано рівняння руху в сферичних координатах та у стереографічній проекції. Для розв'язку, який описує рух пари вихорів, отримано рівняння атмосфери вихорів – області рідини, яка рухається разом з вихорами. Проведено чисельне моделювання руху частинок в полі пари вихорів на сфері та зображено лінії току у нерухомій та рухомій системі координат. Якщо порівняти результати з плоским випадком [9], ми можемо бачити, що у випадку нерухомої сфери, картина руху пари вихорів на сфері якісно не відрізняється від руху на площині.

Список використаних джерел

1. Богомолов В.А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. – 1977. № 6 – с. 57-65.
2. Громека И.С. Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 295 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. – М.- Л: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.
4. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – К: Наукова думка, 1993 – 283 с.
5. Островський В.В., Мелешко В.В. Динаміка точкових вихорів на сфері // Вісник КУ – 2007. – Вип. 3 – с. 23-28.
6. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. – 1984. – 143. – P. 1-21.
7. DiBattista M., Polvani L. Barotropic vortex pairs on a rotating sphere // J. Fluid Mech. – 1998. – 358 – P. 107-133.
8. Kidambi R., Newton P. Streamline topologies for integrable vortex motion on sphere // Physica D. – 2000. – 140. – P. 95-125.
9. Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu., Gurzhi A.A., Konovaljuk T.P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // Phys. Fluids – 1992 – A4. – P. 2779-2797.
10. Newton P. K. The N-Vortex problem. Analytical Techniques. – New York, Springer, 2001 – 387 p.
11. Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugel-fläche // Z. Math. Phys. – 1902 – 47 – P. 201-237.

Надійшла до редколегії 10.12.2008

УДК 539.3

Микола П. Плахтієнко, д.ф.-м.н., провідний науковий співробітник, Антоніна Т. Забуга, провідний інженер

Моделювання кеплерового руху з використанням ромбічних функцій

Моделювання кеплерового руху виконане з використанням ромбічних функцій, які є окремим випадком періодичних функцій, що виникають при русі точки на симетричних замкнених траєкторіях. Вказано високоточний спосіб обчислення координати тіла, що рухається під дією сил ньютонівського тяжіння, заснований на розв'язку рівняння типу Кеплера, визначеного в ромбічних функціях.

Ключові слова: рух Кеплера, ромбічна гармоніка, рівняння типу Кеплера, точність розв'язку.

E-mail: model@inmech.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

У роботі [4] побудовано однопараметричне сімейство періодичних функцій, що виникають при описі руху точки на замкнених плоских траєкторіях з групою симетрії $L_4 4PC$. При одиничному заданні параметра вони описують ромбічні функції, елементи теорії і використання яких викладені в роботі [1]. Ромбічні функції виявилися найбільш пристосованими для відображення плоско-ребристих поверхонь твердих тіл. Нормовані ромбічні функції виявляють властивості, що роблять їх спорідненими з коловими функціями. У зв'язку з цим представляється актуальним розширити область застосування цих функцій на задачі динаміки механічних систем з багатьма ступенями свободи. У цій роботі апарат ромбічних функцій використовується для описання руху двох точкових мас, що притягуються за законом Ньютона [2, 3]. Це кеплерів рух. Він послужив відкриттю закону всесвітнього тяжіння і до теперішнього часу є об'єктом аналізу і використання в прикладних і механіко-математичних роботах [5–8]. Виходячи з роботи [1], представимо ромбічні функції, які визначаються наступними формулами:

M.P. Plakhtienko, the doctor of physical and mathematical sciences, the leading scientific employee, A.T. Zabuga, the leading engineer

Modelling Kepler's movement with use of rhombic function

Modelling Kepler's movement with use of the rhombic functions is executed. Such functions are a special case of periodic functions which at movement of a point on the symmetric closed trajectories are arising. Calculations of coordinates of the body moving under action Newton's attraction based on the decision of the Kepler's equation in rhombic functions are determined.

Keywords: Kepler's movement, rhombic functions, Kepler's equation, accuracy of solution.

$$\cos \sigma = \begin{cases} 1 - |\bar{\sigma}|/q, & |\bar{\sigma}| \leq 2q \\ |\bar{\sigma}|/q - 3, & 2q < |\bar{\sigma}| \leq 4q \end{cases}$$
$$\sin \sigma = \begin{cases} \bar{\sigma}/q, & 0 \leq |\bar{\sigma}| \leq q \\ 2 \operatorname{sign} \bar{\sigma} - \bar{\sigma}/q, & q < |\bar{\sigma}| \leq 3q \\ \bar{\sigma}/q - 4 \operatorname{sign} \bar{\sigma}, & 3q < |\bar{\sigma}| \leq 4q \end{cases}$$

де $\bar{\sigma} = \sigma - E(\sigma/4/q)4q$, $E(x)$ – ціла частина числа x . Нормовані ромбічні гармоніки:

$$\operatorname{corn} \sigma = \cos \sigma / r(\sigma), \operatorname{sin} \sigma = \sin \sigma / r(\sigma),$$

$$r(\sigma) = \sqrt{\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma}, \operatorname{corn}^2 \sigma + \operatorname{sin}^2 \sigma = 1.$$

Разом з ромбічними гармоніками можна визначити ромбічний тангенс і котангенс

$$\operatorname{tar} \sigma = \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma} = \frac{\operatorname{sin} \sigma}{\operatorname{corn} \sigma}, \operatorname{cotar} \sigma = 1 / \operatorname{tar} \sigma.$$

2. Описання кеплерового руху з використанням ромбічних гармонік

Кеплерів рух здійснює вільна двомасова система матеріальних точок з масами M і m , що підпадає дії тільки сили ньютонівського тяжіння. Кожна з мас може здійснювати прямолінійний, еліптичний або параболічний рух залежно від початкових умов. Тут ми розглядатимемо лише еліптичний рух. Якщо розглядати рух однієї з мас (m) щодо іншої (M), враховуючи тільки

силу тяжіння, то диференціальні рівняння руху приймають вигляд [3]

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{R^3} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{R^3} = 0, \quad z = 0, \quad (1)$$

де $\mu = f(M + m)$, x, y – декартові координати точки маси m , яка рівномірно і поступально переміщується в системі координат з початком в точці M , $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, f – універсальна стала тяжіння ($f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ кг/м}^3 \cdot \text{сек}^2$). Третя координата z прийнята нульовою. Надалі матеріальну точку з масою m ототожнюватимемо з супутником Землі. За цих умов рівняння (1) є динамічною моделлю руху екваторіального супутника в системі координат Oxy , розташованої в площині екватора Землі, що розглядається як однорідна куля.

Система рівнянь (1) допускає два перші інтеграли:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{R} + 2h, \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c. \quad (3)$$

Перший з них (2) називається інтегралом енергії, другий (3) – інтегралом площ. У цих співвідношеннях величини h, c суть постійні інтегрування. Перейдемо в рівностях (2), (3) від декартових координат до полярних за формулами

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi. \quad (4)$$

Змінні $R = R(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ називатимемо ромбополярними координатами.

Обчислимо проекції швидкості маси m на осі Ox, Oy [1]

$$\frac{d}{dt}x = \dot{R} \cos \varphi - R \frac{\sin \varphi}{qr^2(\varphi)} \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}y = \dot{R} \sin \varphi + R \frac{\cos \varphi}{qr^2(\varphi)} \dot{\varphi}.$$

Тут точками позначено диференціювання по t .

Підставляючи ці вирази у співвідношення (2), (3), отримуємо інтеграли енергії і площ у формі

$$\dot{R}^2 + \frac{R^2}{q^2 r^4(\varphi)} \dot{\varphi}^2 = \frac{2\mu}{R} + 2h,$$

$$\frac{R^2}{q^2 r^4(\varphi)} \frac{d}{dt} \varphi = c, \quad h, c = \text{const}.$$

З урахуванням цих формул інтеграл енергії перепишеться у вигляді

$$\left(\frac{d}{dt}R\right)^2 = \frac{2\mu}{R} - \frac{c^2}{R^2} + 2h.$$

Це рівняння за формою збігається з інтегралом енергії в класичних полярних координатах. Разом з тим інтеграл площ відрізняється від класичного інтеграла наявністю змінного знаменника $(qr^2(\varphi))^2$.

Для отримання рівняння траєкторії руху маси m виключимо з попередніх рівнянь час t . В результаті маємо

$$\frac{c dR}{R \sqrt{2\mu R - 2fR^2 - c^2}} = \frac{d\varphi}{qr^2(\varphi)}. \quad (5)$$

Тут введено позначення $h = -f$, ($f > 0$) оскільки тільки при від'ємному значенні постійної інтегрування h траєкторія руху буде замкненою кривою другого порядку [3].

Інтегралом диференціального рівняння (5) є еліптична крива задана в ромбополярному вигляді

$$R = p / [1 + e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (6)$$

Величини p і e можна виразити через апогейне R_a і перигейне R_p відстані рухомого супутника від початку координат:

$$p = 2R_a R_p / (R_a + R_p), \quad e = (R_a - R_p) / (R_a + R_p),$$

φ_0 – постійна інтеграції.

На рис. 1 зображений еліпс при $p = 2, e = 0,3, \varphi_0 = 2q$ з початком осей декартових координат у лівому фокусі, побудований згідно формул (4), (6). З центром у цьому фокусі описано коло одиничного радіуса, в яке вписаний ромб. Довжина дуги цього кола ψ від початку в точці A до перетину з радіус-вектором R є дійсною круговою аномалією. Довжину периметра ромба ϕ з початком в точці A до перетину з тим же радіус-вектором R домовимося називати дійсною ромбічною аномалією.

У теорії кеплерових орбіт найважливішим кутовим параметром є ексцентрична аномалія. На рис. 1 ексцентрична аномалія E є довжина дуги одиничного кола з центром на середині більшої напівосі еліпса до точки перетину її з

допоміжним радіус-вектором CN , який має початок в центрі еліпса і кінець в точці N .

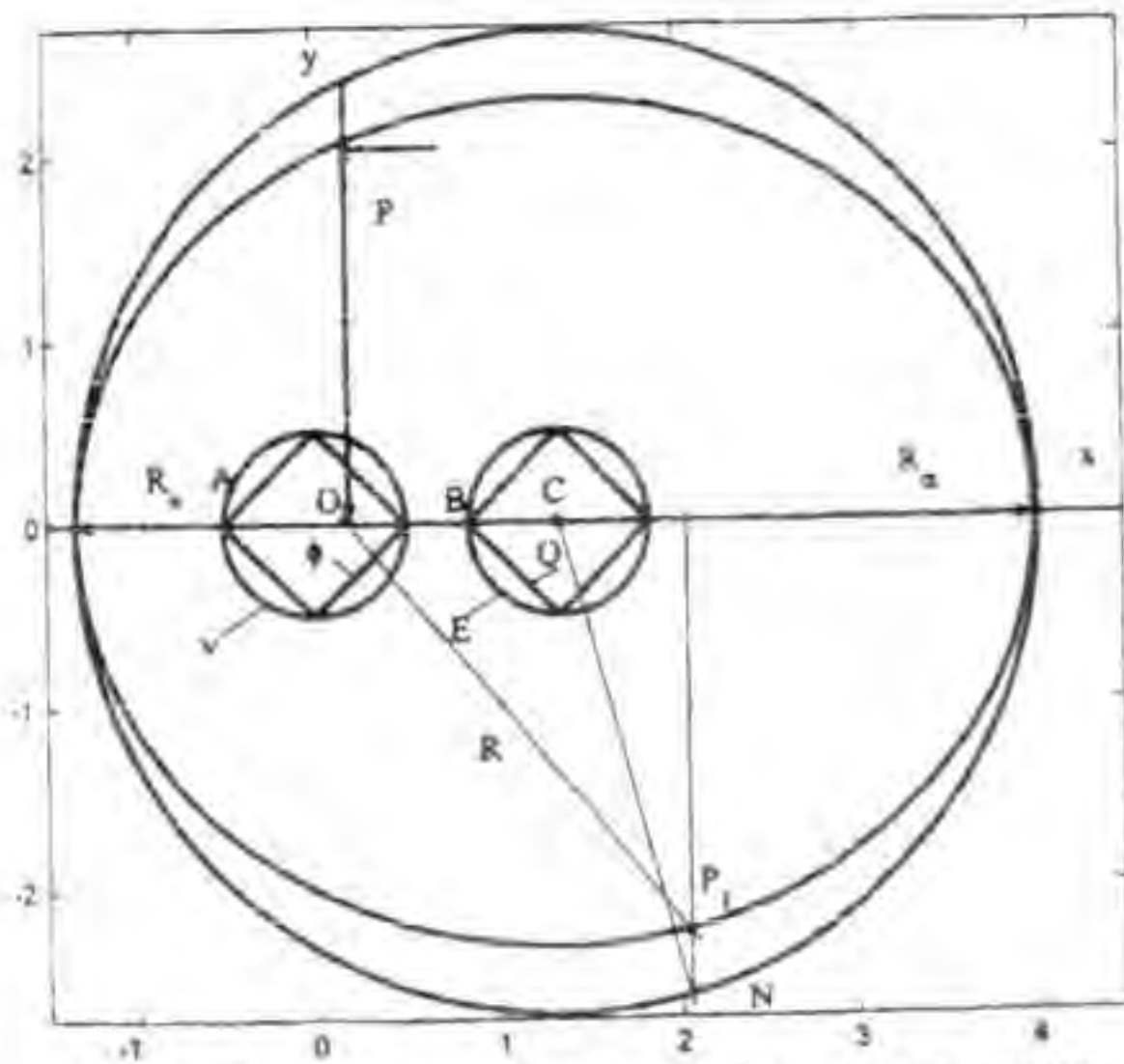


Рис. 1. До введення істинних і ексцентричних колової і ромбічної аномалій

Вона знаходиться на перетині описаного навколо еліпса кола радіуса $a = \frac{1}{2}(R_s + R_a)$ з перпендикуляром, проведеним з кінця радіус-вектора R (точка P_1) на вісь Ox [2]. Введемо ромбічну ексцентричну аномалію (РЕА) Q за допомогою заміни $\text{tg } E = \text{tar } Q$. Q – довжина периметра ромба з центром в точці C від точки B до точки перетину його з лінією CN . Диференціюючи це співвідношення, знаходимо

$$dE = dQ / (qr^2(Q)). \quad (7)$$

$$\cos E = \cos(\arctg(\text{tar } Q)) = \frac{\text{cor } Q}{r(Q)} = \text{corn } Q.$$

Отже

$$R = a(1 - e \text{corn } Q),$$

$$\text{де } a = \frac{1}{2}(R_s + R_a), \quad e = (R_a - R_s) / (R_s + R_a).$$

Враховуючи попередні співвідношення, рівності $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{R} \sqrt{2f}$ маємо

$$a \left(\frac{1}{qr^2(Q)} - e \frac{d \text{sign } Q}{dQ} \right) dQ = \sqrt{2f} dt.$$

Інтегруючи цю рівність, отримуємо рівняння Кеплера в ромбічних функціях (КПРФ):

$$\arctg(\text{tar } Q) - e \text{sign } Q = \frac{1}{a} \sqrt{2f} (t - t_0), \quad (8)$$

де t_0 – постійна інтеграції. Перший доданок лівої частини рівності (8) на інтервалі $Q \in [0, q]$ близький до лінійної функції $\frac{\pi}{2q} Q$, тому його можна представити у формі

$$Q - \bar{e} \text{sign } Q + \Phi(Q) = \bar{M}(t), \quad (9)$$

$$\text{де } \bar{e} = \frac{2q}{\pi} e, \quad \bar{M}(t) = \frac{2q}{\pi a} \sqrt{2f} (t - t_0),$$

$$\Phi(Q) = \frac{2q}{\pi} \arctg(\text{tar } Q) - Q. \quad (10)$$

$\Phi(Q)$ – мала за абсолютною величиною q – періодична непарна функція з нульовим середнім значенням

Між істинною і ексцентричною ромбічними аномаліями існує зв'язок, який отримується з класичних залежностей [3] заміною змінних

$$E = \arctg(\text{tar } Q), \quad v = \arctg(\text{tar } \varphi).$$

$$\text{corn } \varphi = \frac{\text{corn } Q - e}{1 - e \text{corn } Q}, \quad \text{sign } \varphi = \frac{\text{sign } Q \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \text{corn } Q}. \quad (11)$$

З використанням співвідношень (4), (7), (11) можна виразити декартові координати рухомого супутника як функції ромбічної ексцентричної аномалії

$$\begin{aligned} x &= R \text{corn } \varphi = a(\text{corn } Q(t) - e), \\ y &= R \text{sign } \varphi = a \sqrt{1 - e^2} \text{sign } Q(t) \end{aligned} \quad (12)$$

У теорії кеплерових орбіт найважливіше значення має отримання явних виразів координат x, y як функцій часу. Для цього доцільно обчислити Q як функцію часу: $Q = Q(t)$. Це можна зробити, розв'язавши рівняння КПРФ (9).

3. Ітеративний розв'язок рівняння Кеплера в ромбічних функціях (КПРФ).

Рівняння (9) можна розв'язати чисельно, методом Ньютона та ітеративним методом. Останній із них відноситься до точного способу рішення кінцевих рівнянь. Викладемо схему побудови цього розв'язку для рівняння (9), засновану на використанні теореми про середнє. Рівняння (9) запишемо у вигляді

$$Q = \bar{M} + \bar{e} \operatorname{sign} Q - \Phi(Q). \quad (12)$$

Умова застосовності методу ітерацій для $|u(e, Q)|$, що обертають її в одиничний максимум, рівняння (9) має вигляд

$$\left| \frac{d}{dQ} (\bar{M} + \bar{e} \operatorname{sign} Q - \Phi(Q)) \right| < 1. \quad (13)$$

Обчислюючи відповідні похідні з урахуванням формул для ромбічних гармонік та рівняння (10), знаходимо необхідну умову збіжності процесу ітерації

$$|u(e, Q)| < 1, \quad (14)$$

$$\text{де } u(e, Q) = (e \operatorname{corn} Q - 1) \frac{2}{\pi r^2(Q)} + 1.$$

Обчислимо граничне значення параметра ексцентриситету e^* , при якому виконується умова (13).

Графік залежності $u(e, Q)$ рис. 2 при різних значеннях e містить п'ять екстремумів для значень $Q = 0, \pm q$, а також при $2 < |Q| \leq 3$.

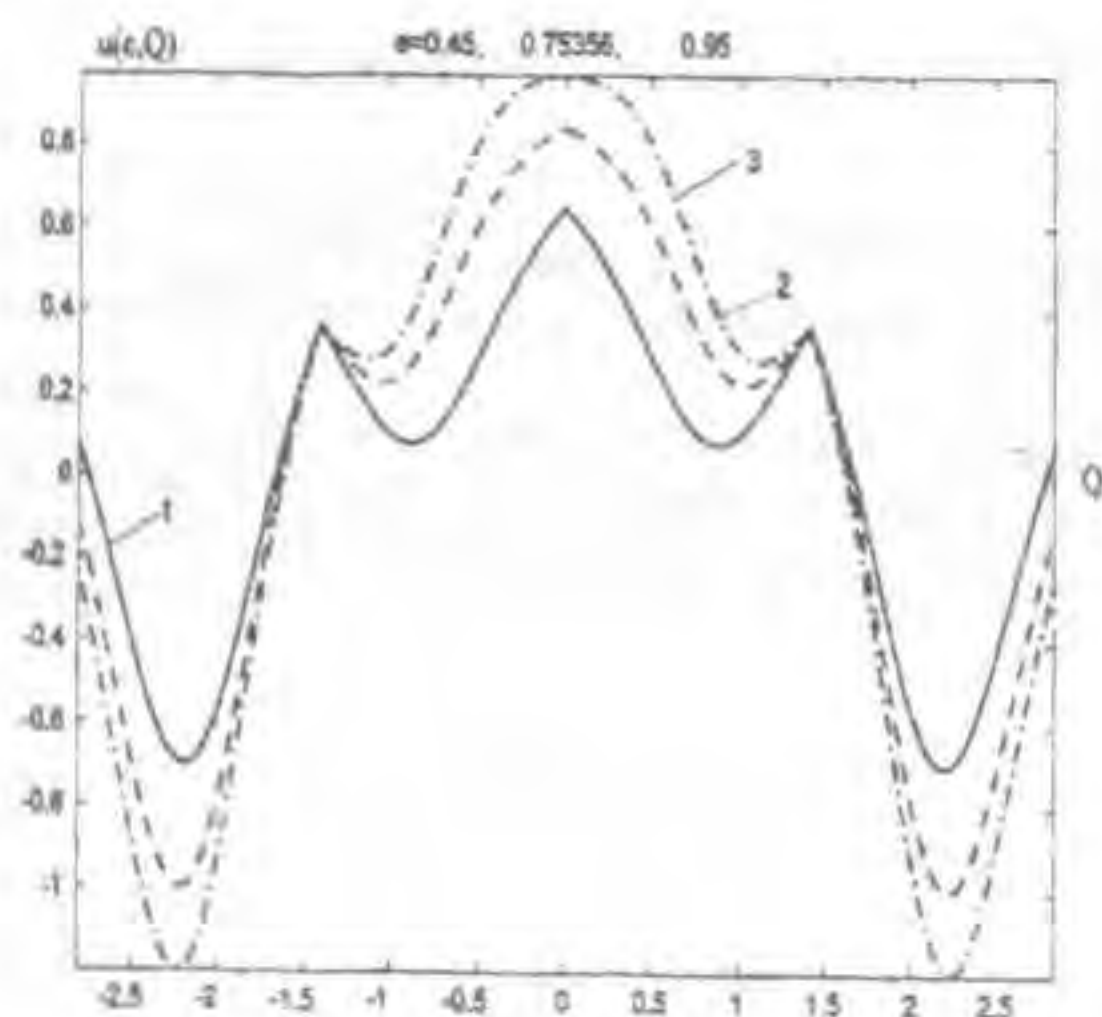


Рис. 2. Графік функції $u(e, Q)$ при трьох значеннях параметра e

У точках $Q = 0, \pm q$ екстремуми не є аналітичними. Екстремум величини $u(e, Q)$ в точці $Q = 0$ може обернутися в одиницю тільки при $e = 1$. Величина $|u(e, Q)|$ може перевершувати одиницю тільки при $2 < |Q| < 3$ і для значень ексцентриситету $e < 1$. У цих областях екстремуми є гладенькими. Їх величина і положення обчислюються класичним способом.

Позначимо через e^*, Q^* аргументи функції $|u(e, Q)|$, що обертають її в одиничний максимум.

Для їхнього визначення маємо такі рівняння

$$u(e^*, Q^*) = -1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial Q} \right|_{e=e^*, Q=Q^*} = 0.$$

Виконуючи відповідні обчислення для інтервалу $2q \geq |Q| \geq 3$, знаходимо систему рівнянь для визначення e^*, Q^* .

$$\begin{aligned} W_1(q, Q^*) + W_2(q, Q^*) &= 0, \\ e^* \operatorname{corn} Q - 1 + \pi r^2(Q^*) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1(q, Q^*) &= \pi r^2(Q^*) q (2|Q^*| - 3q) (1 - |Q^*|/q), \\ W_2(q, Q^*) &= [\pi r^2(Q^*) q (2 - |Q^*|) - 2 + |Q^*|/q]. \end{aligned}$$

З першого рівняння випливає, що розв'язку $Q = Q^*$ відповідає також розв'язок $Q = -Q^*$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо

$$e^* = 0,75356, \quad Q^* = \pm 2,2213.$$

Нехай Q_n – наближене значення ромбічної ексцентричної аномалії (РЕА). Згідно методу ітерацій, обчислюючи послідовно

$$\begin{aligned} Q_1 &= \bar{M} + \bar{e} \operatorname{sign} Q_0 - \Phi(Q_0), \\ Q_2 &= \bar{M} + \bar{e} \operatorname{sign} Q_1 - \Phi(Q_1), \end{aligned}$$

$$Q_n = \bar{M} + \bar{e} \operatorname{sign} Q_{n-1} - \Phi(Q_{n-1})$$

та використовуючи умову (13), можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ при $e < e^*$ для всіх M .

Вказані обчислення можна помітно скоротити за допомогою прийому, що приводить по суті до отримання аналітичного розв'язку. Якщо

$$\Delta_1 = Q_1 - Q_0, \quad \Delta_2 = Q_2 - Q_1, \dots, \Delta_n = Q_n - Q_{n-1}$$

Тоді

$$Q = Q_0 + \Delta_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

Пропускаючи деякі обчислення, для кореня рівняння (9) маємо таке наближене значення

$$Q = Q_0 + \Delta_1^2 / (\Delta_0 - \Delta_1)$$

Ефективність застосування цієї формули залежить від ступеня близькості початкового значення Q_0 до дійсного значення кореня рівняння (9). Спосіб отримання таких значень викладено в наступному параграфі.

4. Про вибір початкового значення кореня для вирішення рівняння Кеплера в ромбічних функціях (КПРФ).

У роботі [2] викладені способи розв'язку рівняння Кеплера, засновані на наближеному представленні колового синуса лінійним членом: $\sin E \approx E$, що забезпечує різну точність при $E \leq 9^\circ (10^{-5})$ і $E \leq 15^\circ (10^{-4})$. Природньо більшу точність можна отримати, наближено представивши коловий синус кубічним поліномом, отримуваним з допомогою ряду Тейлора. Вказаний підхід можна застосувати і для розв'язку рівнянь, що містять ромбічну і ромбоколову функції. Проте вказані функції мають тільки одну неперервну похідну. Тому для отримання дво або тричленного поліноміального представлення функцій $\Phi(Q)$, $\text{sign}Q$ формула Тейлора не підходить. Кубічне рівняння для обчислення наближеного значення Q_0 можна побудувати, використовуючи сплайн-аппроксимації функцій $\Phi(Q)$, $\text{sign}Q$. Сплайн-аппроксимації функцій на даний час широко використовуються для вирішення краєвих задач механіки твердого деформованого тіла [8]. Таким чином, отримуємо сплайн-апроксимацію ромбічної функції $\text{sign}Q$

$$\text{sign}Q = \frac{Q}{q} + A Q^2 \text{sign}Q - A/q Q^3 = S_1(Q), \quad (16)$$

$$|Q| < q, \quad q = \sqrt{2}.$$

Постійну A вибираємо з умови $\text{sign}\left(\frac{3}{4}q\right) = S_1\left(\frac{3}{4}q\right)$. Оскільки при $Q = 0$, $Q = \sqrt{2}$ праві частини рівності (16) збігаються, це дає

$$\text{для } A = \left(\sqrt{\frac{8}{5}} - 1\right) \cdot \frac{8}{3}$$

Сплайн-апроксимація функції $\text{sign}Q$ для всього періоду має вигляд

$$\text{sign}Q = \text{SPSI}(Q) = \begin{cases} S_1(Q) \\ S_2(Q) \end{cases}, \quad -q \leq Q \leq q \quad (17)$$

$$-2q \leq Q < -q, \quad q < Q \leq 2q$$

$$S_2(Q) = \frac{1}{q} W(Q) + A W^2(Q) \text{sign}W(Q) - \frac{A}{q} W^3(Q)$$

$$W(Q) = 2q \text{sign}Q - Q.$$

Аналогічно для функції $\Phi(Q)$ на періоді її існування маємо

$$\Phi(Q) = B(|Q| - q/2)Q = F(Q), \quad |Q| \leq q/2. \quad (18)$$

Постійну B визначимо із умови $\Phi(q/2) = F(q/2)$.

З урахуванням $\Phi(Q) = \frac{2q}{\pi} \arctg(\tan Q) - Q$,

отримуємо $B = B(q/2) = \Phi(q/2) / (q/2 \cdot (q/2 - 1.5))$, при $\pi = 0.32056$, $\Phi(q/2) = -0.0565$, $B = 0.4967$.

Аргументи величин $A(Q)$, $B(q/2)$ є конструктивними параметрами сплайнів, які вибираються із умови близькості функцій $\text{sign}Q$ і $\text{SPSI}(Q)$, а також $\Phi(Q)$ і $F(Q)$. Функції $\text{SPSI}(Q)$, $F(Q)$ є непарними функціями свого аргументу. Аналіз величин $\text{SPSI}(Q)$, $Z(Q) = \Phi(Q) - F(Q)$ при різних значеннях конструктивних параметрів Q, q показав, що найкращу апроксимацію отримуємо у тому випадку, якщо максимальні по модулю відхилення функцій $Z(Q)$ і $\text{SPSI}(Q)$ від нульового значення однакові. Як бачимо при $\pi = 0.32056$ досягається оптимальна апроксимація функції $\Phi(Q)$ залежністю $F(Q)$.

Залежність $\text{SPSI}(Q)$ при $A = A(3/4q)$ забезпечує квазіоптимальну апроксимацію функції $\text{sign}Q$. Таким чином, ми отримати шукані сплайн-апроксимації ромбічної функції $\text{sign}Q$ і ромбоколової функції $\Phi(Q)$. Підставимо вирази (16) – (18) у рівняння КПРФ і представимо його у формі повного кубічного рівняння, при цьому вважатимемо $0 < Q \leq q/2$

$$Q^3 + aQ^2 + bQ + c = 0. \quad (19)$$

$$a = q(B - \bar{e}A) / (\bar{e}A), \quad b = q(1 - \bar{e}q - Bq \frac{\pi}{2}) / (\bar{e}A),$$

$$c = -\bar{M}q / (\bar{e}A).$$

Дійсний корінь рівняння (19) виберемо як початкове значення для розв'язку рівняння КПРФ. Для вирішення рівняння (19) за формулами Кардано введемо величини

$$p = \frac{1}{3} \left(b - \frac{a^2}{3} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left(c + \frac{2}{27} a^3 \right) - \frac{ab}{6}.$$

Якщо $p > 0$, тоді $r^2 + p^3 > 0$, рівняння (19) має один дійсний корінь

$$Q_0 = y - \frac{a}{3},$$

$$\text{де } y = \sqrt[3]{-r + \sqrt{r^2 + p^3}} - \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 + p^3}}.$$

Якщо $p < 0$, $r^2 + p^3 < 0$, тоді

$$y = 2\sqrt{-p} \cdot \cos \frac{1}{3} \left(\arccos \frac{-r}{\sqrt{-p^3}} \right).$$

Отже, розв'язок рівняння КПРФ ітеративним способом має вигляд

$$Q = Q_2 + \frac{A^2}{A_0 - A}, \quad (20)$$

$$Q_1 = \bar{e} \sin Q_0 - \Phi(Q_0) + \bar{M}, \quad \Delta_0 = Q_1 - Q_0$$

$$Q_2 = \bar{e} \sin Q_1 - \Phi(Q_1) + \bar{M}, \quad \Delta_1 = Q_2 - Q_1$$

$$0 < e < e^*, \quad e^* = 0.75356, \quad \bar{e} = \frac{2q}{\pi} e,$$

$$\bar{M} = \frac{2q}{\pi} M, \quad M < \frac{q}{2}, \quad M = \frac{q}{4}.$$

Для значень $e > e^*$ і величин $|Q|$, що не потрапляють в інтервал $[Q_l, Q_k]$, де $|Q_l| < |Q_k|$, точки перетину графіка $u(e, Q)$ лінією $u = -1$ також справедлива формула (20). В інших випадках, рівняння КПРФ необхідно вирішувати методом січних з використанням початкового значення Q_0 , що задається коренем рівняння (19).

У таблиці 1 представлено розв'язки рівняння КПРФ при різних значеннях e та $M = 0,707107$. Величина δ_1 означає нев'язку рівняння (9) при одноразовому використанні формули (20). З таблиці 1 видно, що при одноразовому

застосуванні формули (20) похибка отриманого розв'язку для слабо витягнутих орбіт має порядок 10^{-7} , що на два порядки точніше за таблиці, складені для розв'язку звичайного рівняння Кеплера, отриманого для достатньо малих M [3].

Розв'язок рівняння КПРФ при $e = 0$ має вигляд

$$\tan Q = \tan M.$$

Список використаних джерел

1. Плахтійко М.П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. Київ. – 2005. – 132 с.
2. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Л.– М. ОГИЗ. – 1941. – Т. 1, – 344 с.
3. Шарльє К. Небесная механика. Изд-во "Наука" М., 1966. – 627 с.
4. Плахтійко М.П. Періодичні функції на замкнених траєкторіях з групою симетрій L_4 РС. Доповіді НАН України. – 2008, № 4. – С. 36–43.
5. Kiforenko B.M. Some Modeling and Optimization Problems in Space Flight Mechanics // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 1. – P. 30–50.
6. Kiforenko B.M. Optimal law-trust orbital transfers in a central gravity field // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 11. – P. 1211–1238.
7. С.Смейл. Топология и механика // Успехи математических наук. – 1972, вып. 2(164). – С. 77–133.
8. Grigorenko Ya. M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 4, p. 413–420.

Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України, Київ (Україна)

Надійшла до редколегії 04.11.2008

Таблиця 1

i	$e = 0,005 \cdot i$	Q	$\delta_1 = 1 \cdot 10^{-6}$
1	0.005000	0.653952	-0.136309
5	0.025000	0.663395	-0.054251
10	0.050000	0.675587	-0.004745
15	0.075000	0.688227	-0.007020
20	0.100000	0.701336	-0.048339

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.21

Бондарев Б.В. д.ф.-м. н., проф.,
Жмихова Т.В., асистент

Платоспроможність страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку

Для ймовірності банкрутства страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку, побудоване наближення виду $\psi_0(u) + \alpha\psi_1(u) + \alpha^2\psi_2(u)$, де $0 < \alpha < 1$ - частина капіталу, що інвестована у ризиковий актив, $1 - \alpha$ - у безризиковий. Доведено, що при малих частках вкладень у ризиковий актив на ймовірність банкрутства випадковість практично не впливає.

Ключові слова: фінансовий (B,S)-ринок,
ймовірність банкрутства.

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

1. ВСТУП

У сучасній актуарній математиці особливий інтерес викликають такі моделі ризику, коли страхова компанія виступає інвестором на фінансовому ринку [1],[2] та ін.) Однак в [1] та [2] були розглянуті моделі ризику, в яких страхова компанія інвестує свій капітал тільки в акції. В [3] досліджувалась проблематика платоспроможності страхової компанії, яка займається інвестуванням на фінансовому (B,S)-ринку, тобто інвестує власний капітал як у ризикові, так безризикові активи. Ціна ризикового активу (акції) описувалась різницеvim рівнянням $\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$, $S_0 > 0$, $n \leq N$, де $\rho = \{\rho_n\}_{n \leq N}$ - бернуліївська послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Дана стаття присвячена оцінюванню ймовірності банкрутства страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку, на якому ціна акції описується моделлю Самуельсона. Для даної моделі ризику було побудоване наближення, що має вигляд $\psi_0(u) + \alpha\psi_1(u) + \alpha^2\psi_2(u)$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано фінансовий (B,S)-ринок, що складається з двох активів: B - безризикового та S - ризикового. Ціна безризикового активу (банківського рахунку) описується рівнянням:

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad B(0) > 0, \quad (1)$$

Bondarev B.V.,
Zhmykhova T.V.

Financial solvency of insurance company, investing its capital in financial (B,S)-market

It was constructed the approximation $\psi_0(u) + \alpha\psi_1(u) + \alpha^2\psi_2(u)$ for the probability of ruin of insurance company, which is working on financial (B,S) - market, where $0 < \alpha < 1$ is the part of capital, invested in risky asset, $1 - \alpha$ - in riskless asset. It was proved, that the incidental has no affects, when the parts of inputs are small.

Key Words: financial (B, S) - market, the probability of ruin.

де r - процентна ставка банку, причому $r(t) \equiv r$, $r > 0$, $B(0)$ - сума на депозиті в початковий момент часу. Ціна ризикового активу (акції) описується моделлю Самуельсона:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad (2)$$

де $\mu > 0$, $\sigma > 0$, $W(t)$ - стандартний вінерів процес. Нехай $X_t(t)$ - капітал страхової компанії в момент t ($X(0) = x$), який компанія розміщує на фінансовому (B,S) - ринку, $\alpha X_t(t)$, де $0 < \alpha < 1$, - це частина коштів, що вкладена в акції, відповідно $(1 - \alpha)X_t(t)$ - це та частина коштів, яку страхова компанія розміщує на банківському депозиті. Будемо вважати, що компанія працює тільки з власним капіталом, надходження коштів ззовні не розглядається. Якщо в момент часу t ціна акції складатиме $S(t)$, тоді на суму $X_t(t)\alpha$ можна купити $\alpha X_t(t)/S(t)$ акцій. В момент часу $t + \Delta t$ кожна акція, ціна якої описується (2), коштуватиме:

$$S(t + \Delta t) \approx S(t)(1 + \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)), \quad (3)$$

де $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$. Вартість банківської інвестиції становитиме:

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r\Delta t). \quad (4)$$

Таким чином, на момент часу $t + \Delta t$ від інвестиційної діяльності на (B,S)-ринку страхова компанія за рахунок пакета акцій матиме:

$$\alpha X_s(t)S(t+\Delta t)/S(t) = \quad (5)$$

$$= X_s(t)\alpha(1+\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t)),$$

а за рахунок розміщення коштів на банківському депозиті

$$(1-\alpha)X_s(t)(1+r\Delta t). \quad (6)$$

За рахунок своєї основної діяльності страхова компанія отримує страхові премії. Будемо вважати, що швидкість надходження премій до страхової компанії стала і дорівнює c ($c > 0$). Сумарні виплати за позовами за час

$$\Delta t \text{ складають: } \Delta R(t) = \sum_{i=N(t)}^{N(t+\Delta t)} \eta_i \quad \text{де } N(t) -$$

стандартний процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$, що інтерпретується як число позовів, поданих клієнтами до страхової компанії, η_i - незалежні від $N(t)$, невід'ємні однаково розподілені випадкові величини, що описують розміри позовів. Нехай $G(x) = P\{\eta_i < x\}$ - функція розподілу розмірів позовів, що зосереджена на додатній півосі. Добре відомо, що

величину $\sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k, \eta_0 = 0$ можна подати у виді стохастичного інтеграла за пуассоновою мірою, а саме(див.[4]): $\sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k = \int_0^t \int_0^\infty u \nu(du, ds)$, де $\nu(B, t)$ - пуассонова міра, $M\nu(B, t) = \lambda t \int_B dF(x)$. Отже,

$$\text{зважаючи на це зображення, а також внаслідок (5) - (6), на момент часу } t + \Delta t \text{ капітал компанії складатиме:}$$

$$X_s(t+\Delta t) \cong X_s(t) +$$

$$+(X_s(t)\alpha\mu + (1-\alpha)rX_s(t) + c)\Delta t +$$

$$+X_s(t)\alpha\sigma\Delta W(t) - \int_0^\infty u\nu(du, \Delta t). \quad (7)$$

$$\text{З (7) отримуємо балансове рівняння:}$$

$$dX_s(t) = (X_s(t)\alpha\mu + (1-\alpha)rX_s(t) + c)dt +$$

$$+X_s(t)\alpha\sigma dW(t) - \int_0^\infty u\nu(du, \Delta t), \quad (8)$$

$$\text{де } X(0) = x.$$

Задача полягає в оцінюванні ймовірності банкрутства страхової компанії, капітал якої описується рівнянням (8), тобто дослідженні платоспроможності страхової компанії, що інвестує свій капітал на фінансовий (B, S) -риниок як у безризикові, так і в ризикові активи.

3. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Теорема 1. Нехай $\psi(x)$ - ймовірність банкрутства на нескінченному проміжку, тобто $\psi(x) = P\{X_s(t) \leq 0, t \in R_+\}$, та $\psi(x)$ є двічі неперервно диференційованою. Тоді у випадку, коли функція розподілу розмірів позовів $G(x)$ неперервна, ймовірність банкрутства страхової компанії, динаміка капіталу якої описується рівнянням (8), є розв'язком рівняння:

$$\lambda(1-\psi(x)) = -\psi'(x)(x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c) - \frac{(x\alpha\sigma)^2}{2}\psi''(x) + \lambda \int_0^x (1-\psi(x-y))dG(y). \quad (9)$$

Доведення. Впродовж малого проміжку часу Δt можливі наступні несумісні події:

1) відсутність стрибків процесу $N(t)$ з ймовірністю $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$; надалі банкрутство відбувається при початковому капіталі $x + (x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + x\alpha\sigma\Delta W(t)$; ймовірність такої події дорівнює: $(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))E\psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t)))$,

де $f(x, \Delta t, \Delta W(t)) = x + (x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + x\alpha\sigma\Delta W(t)$;

2) один стрибок процесу $N(t)$ з ймовірністю $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, який перевищив капітал компанії; тоді відбувається моментальне банкрутство на цьому проміжку часу; ймовірність такої події дорівнює: $\lambda\Delta t(1 - G(x)) + o(\Delta t)$;

3) один стрибок процесу $N(t)$ з ймовірністю $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, але величина позову y не перевищує капітал компанії; моментальне банкрутство не відбувається, але в подальшому банкрутство відбудеться при початковому капіталі $f(x, \Delta t, \Delta W(t)) - y$; ймовірність такої події дорівнює:

$$(\lambda\Delta t + o(\Delta t))E \int_0^{f(x, \Delta t, \Delta W(t))} \psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t)) - y)dG(y);$$

4) більш, ніж один стрибок процесу $N(t)$; надалі банкрутство відбудеться з ймовірністю $o(\Delta t)$.

Отже, користуючись формулою повної ймовірності, можемо записати:

$$\psi(x) = \lambda\Delta t(1 - G(x)) + (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))E\psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t))) + \quad (10)$$

$$(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) E \int_0^{f(x, \Delta t, \Delta W(t))} \psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t)) - y) dG(y) + o(\Delta t).$$

Оскільки

$$E\psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(f(x, \Delta t, z)) e^{-\frac{z^2}{2\Delta t}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})) e^{-\frac{v^2}{2}} dv = E\psi(f(x, \Delta t, \zeta\sqrt{\Delta t})),$$

де ми позначили через ζ - нормально $N(0,1)$ -розподілену величину, та

$$E \int_0^{f(x, \Delta t, \Delta W(t))} (\psi(f(x, \Delta t, \Delta W(t))) - y) dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, z)} (\psi(f(x, \Delta t, z)) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2\Delta t}}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, \zeta\sqrt{\Delta t})} (\psi(f(x, \Delta t, \zeta\sqrt{\Delta t})) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\zeta,$$

то рівняння (10) можна переписати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})) - \psi(x) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv = \quad (11)$$

$$-(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})) - \psi(x) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv =$$

$$-(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \psi(x) + \lambda \Delta t (1 - G(x)) +$$

$$+(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv$$

$$+ o(\Delta t) = 0.$$

Скориставшись формулою Тейлора в (11), отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi'(x) ((x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + x\alpha\sigma v\sqrt{\Delta t}) \right.$$

$$\left. + \frac{(x\alpha\sigma v)^2}{2} \psi''(x) \Delta t + o(\Delta t) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv =$$

$$-(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \psi(x) + \lambda \Delta t (1 - G(x)) +$$

$$+(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv =$$

$$+(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^x \psi(x - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv +$$

$$+(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) - \psi(x - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv$$

$$+ o(\Delta t) = 0. \text{ Легко показати, що } (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \leq$$

$$\leq (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x, \Delta t, |v|\sqrt{\Delta t})) - G(x)) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv.$$

Оскільки функція $G(x)$ неперервна та $f(x, \cdot, \cdot)$ - неперервна за x , крім того $f(x, 0, 0) = x$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x, \Delta t, |v|\sqrt{\Delta t})) - G(x)) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (12)$$

Дійсно,

$$\left| \int_{|v| \leq \Delta t^{-1/4}} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \right| \leq$$

$$\leq \int_{|v| \leq \Delta t^{-1/4}} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \leq 2 \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta t}\right\} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0,$$

$$\left| \int_{|v| > \Delta t^{-1/4}} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} \psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \right| \leq$$

$$\leq (G(f(x, \Delta t, |\Delta t|^{-1/4})) - G(x)) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Перейдемо до розгляду наступного доданку:

$$(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t})} (\psi(f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y) - \psi(x - y)) dG(y) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \right|$$

$$= (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(\bar{x}) ((x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + x\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}|v|) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \leq$$

$$\leq (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) C ((x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + 2x\alpha\sigma\sqrt{\Delta t})$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \text{ Ми використовуємо те, що}$$

$|\psi'(\bar{x})| \leq C$, оскільки функція $\psi(x)$ є двічі неперервно диференційована, де $\bar{x}$ - середня точка $[x - y, f(x, \Delta t, v\sqrt{\Delta t}) - y]$.

Отже, скориставшись цими результатами, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi'(x) \left((x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t + x\alpha\sigma v\sqrt{\Delta t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(x\alpha\sigma v)^2}{2} \psi''(x)\Delta t + o(\Delta t) \right) \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv - \\ & - (\lambda\Delta t + o(\Delta t))\psi(x) + \lambda\Delta t(1-G(x)) + \\ & + (\lambda\Delta t + o(\Delta t)) \int_0^x \psi(x-y) dG(y) + o(\Delta t) = 0. \end{aligned}$$

Інтегруючи це рівняння за v , отримаємо

$$\psi'(x)(x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c)\Delta t +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x\alpha\sigma)^2}{2} \psi''(x) \Delta t - (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \psi(x) + \\
& + \lambda \Delta t (1 - G(x)) + (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \int_0^x \psi(x-y) dG(y) \\
& + o(\Delta t) = 0.
\end{aligned}
\tag{13}$$

Поділивши рівняння (13) на Δt , при $\Delta t \rightarrow 0$ та здійснивши елементарні математичні перетворення, остаточно отримаємо (9). Теорему 1 доведено.

Зауваження. Природно шукати розв'язок рівняння (9) у класі спадних функцій, що прямують до нуля, при прямуванні аргументу до нескінченності.

Теорема 2. Нехай розміри позовів до страхової компанії мають експоненційний розподіл з параметром α , а динаміка капіталу компанії описується рівнянням (8), де $0 < \alpha < 1$. Тоді наближення розв'язку рівняння (9) степеневим поліномом з точністю до порядку α^2 , буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_a(x) &= \psi_0(x) + \alpha \psi_1(x) + \alpha^2 \psi_2(x) \\ \text{де } \psi_0(x) &= c_2^{(0)} \int_x^\infty (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy, \\ \text{тут } c_2^{(0)} &= \frac{\lambda}{c^{\lambda/r} + \lambda \gamma}, \gamma = \int_0^\infty (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy = \\ &= \frac{c^{\lambda/r}}{c \Gamma((- \lambda/r + 1) \alpha)} \left(-\frac{\Gamma(-\lambda/r) \lambda}{r} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda(\lambda-r) \Gamma\left(\frac{-\lambda}{r}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda}{r}-1, \frac{ac}{r}\right) \left(\frac{ac}{r}\right)^{-\lambda/r+1} e^{(ac/r)}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\psi_1(x) = \bar{c}_1^{(1)} + \left(-\frac{(ac/r)^{-\lambda/r+1} e^{(ac/r)} \pi r}{\sin(\pi\lambda/r)} + \frac{\pi a^{-\lambda/r+1} (r/c)^{\lambda/r} e^{(ac/r)}}{r \sin(\pi\lambda/r)} \right). \quad (15)$$

$$+c_2^{(0)}(\mu-r)\int_0^x\frac{\lambda u+c}{(ru+c)^2}\left(\int_u^\infty(ry+c)^{\lambda/r-1}e^{-ay}dy\right)du+\\ \left(\bar{c}_2^{(1)}-c_2^{(0)}(\mu-r)\left(\frac{(\lambda-r)x}{r(rx+c)}-\frac{\lambda\ln((rx+c)/c)}{r^2}\right)\right)\times\\ \times\int_t^\infty(ry+c)^{\lambda/r-1}e^{-ay}dy, \text{ де}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_1^{(1)} &= -(\mu - r)c_2^{(0)} \int_0^\infty \frac{\lambda u + c}{(ru + c)^2} \left(\int_u^\infty (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy \right) du \\ \bar{c}_2^{(1)} &= c_2^{(0)} (1 + c_2^{(0)} (\mu - r)) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\lambda u + c}{(ru + c)^2} \left(\int_u^\infty (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy \right) du.\end{aligned}$$

$$\psi_2(x) = (\bar{c}_1^{(2)} - 2(\mu - r) \left(\int_0^x \left(c_2^{(0)}(\mu - r) \left(\frac{\lambda(\lambda u^2 + cu)}{r(ru + c)^3} - \frac{\lambda(\lambda u + c) \ln((rx + c)/c)}{r^2(ru + c)^2} \right) \right) \right)$$

$$-\bar{c}_2^{(1)} \frac{\lambda u + c}{(ru + c)^2} \Big) \Big) \left(\int_u^\infty (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\sigma y} dy \right) du +$$

$$+\sigma^2 \bar{c}_2^{(0)} \int_0^x \left(\frac{(\lambda-r)(\lambda u^2 + 2cu)}{(ru+c)^3} - a \frac{(\lambda+r)u^2 + 2cu}{(ru+c)^2} \right)$$

$$\times \left(\int_0^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-ay} dy \right) du$$

$$+ (2(\mu - r) \left[c_2^{(0)}(\mu - r) \left(\frac{\lambda \ln((rx + c)/c)}{r^4} - \right. \right.$$

$$\frac{\lambda(\lambda-r)x^2}{2r^2(rx+c)^2} - \frac{\lambda^2x}{r^3(rx+c)} - \frac{\lambda^2(rx+c)\ln\left(\frac{rx+c}{c}\right)^2}{2r^4(rx+c)} - \frac{2c\lambda(\lambda-r)\ln((rx+c)/c) - 2(\lambda-r)rx}{2r^4(rx+c)} -$$

$$-\bar{c}_2^{(1)} \left(\frac{(\lambda-r)x}{r(rx+c)} - \frac{\lambda \ln((rx+c)/c)}{r^2} \right) -$$

$$-\sigma^2 \bar{c}_2^{(0)} \left[\frac{\lambda(\lambda-r) \ln((rx+c)/c)}{r^3} - \frac{\lambda(\lambda-r)x}{r^2(rx+c)} - \right.$$

$$-\frac{\lambda(\lambda-3r)x^2}{2r(rx+c)^2} - \frac{x^2r}{(rx+c)^2} + \frac{2a\lambda c \ln((rx+c)/c)}{r^3}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a(\lambda+r)x^2}{r(rx+c)} - \frac{2a\lambda xc}{r^2(rx+c)} + \bar{c}_2^{(2)} \right) \times \\ & \times \int_x^\infty (ry+c)^{\lambda/r-1} e^{-ay} dy, \\ & \text{де } \bar{c}_1^{(2)} = 2(\mu-r) \int_0^\infty \left(c_2^{(0)}(\mu-r) \left(\frac{\lambda(\lambda u^2+cu)}{r(ru+c)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\lambda(\lambda u+c) \ln((rx+c)/c)}{r^2(ru+c)^2} \right) - \right. \\ & \left. - \bar{c}_2^{(1)} \frac{\lambda u+c}{(ru+c)^2} \right) \left(\int_u^\infty (ry+c)^{\lambda/r-1} e^{-ay} dy \right) du - \\ & - c_2^{(0)} \sigma^2 \int_0^\infty \left(\frac{(\lambda-r)(\lambda u^2+2cu)}{(ru+c)^3} - a \frac{(\lambda+r)u^2+2cu}{(ru+c)^2} \right) \\ & \times \left(\int_u^\infty (ry+c)^{\lambda/r-1} e^{-ay} dy \right) du, \quad \bar{c}_2^{(2)} = c_2^{(0)} (1 - \bar{c}_1^{(2)}). \end{aligned}$$

Доведення. Нехай розміри позовів до страхової компанії мають експоненційний розподіл з параметром α , тобто $g(y) = a \cdot e^{-ay}$, $y > 0$, $0, y \leq 0$, де $a > 0$ - певна стала. Тоді ймовірність банкрутства будемо знаходити з рівняння:

$$\begin{aligned} \lambda \psi(x) &= \psi'(x)(x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c) + \\ & + \frac{(x\alpha\sigma)^2}{2} \psi''(x) + \lambda e^{-ax} + \lambda \int_0^x \psi(x-y) a \cdot e^{-ay} dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Здійснюючи заміну змінних під інтегралом $z := x - y$, отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} \lambda \psi(x) &= \psi'(x)(x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c) + \\ & + \frac{(x\alpha\sigma)^2}{2} \psi''(x) + \lambda e^{-ax} + \lambda e^{-ax} \int_0^x \psi(z) a \cdot e^{az} dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок рівняння (18) будемо шукати у вигляді поліноміального розкладу за параметром α , де $0 < \alpha < 1$, а члени полінома $\psi_k(x)$ мають 2 похідні на області визначення $(0, +\infty)$:

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \alpha^k \frac{\psi_k(x)}{k!}, \quad (19)$$

Підставивши (19) в (18), матимемо:

$$\begin{aligned} \lambda \left((\psi_0(x) + \alpha \psi_1(x) + \dots + \frac{\alpha^k}{k!} \psi_k(x) + \dots) \right) &= \\ &= (x\alpha\mu + (1-\alpha)rx + c) \times \\ &\times \left((\psi'_0(x) + \alpha \psi'_1(x) + \dots + \frac{\alpha^k}{k!} \psi'_k(x) + \dots) \right) \psi'(x) + \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & + \lambda e^{-ax} + \frac{(x\alpha\sigma)^2}{2} \left(\psi''_0(x) + \dots + \frac{\alpha^k}{k!} \psi''_k(x) + \dots \right) \\ & + \lambda e^{-ax} \int_0^x \left(\psi_0(z) + \dots + \frac{\alpha^k}{k!} \psi_k(z) + \dots \right) a e^{az} dz. \end{aligned}$$

Користуючись методом невизначених коефіцієнтів в (20), матимемо:

$$\lambda \psi_0(x) = (rx+c) \psi'_0(x) + \lambda e^{-ax} + \quad (21)$$

$$+ \lambda e^{-ax} \int_0^x \psi_0(z) a \cdot e^{az} dz;$$

$$\begin{aligned} \lambda \psi_k(x) &= (rx+c) \psi'_k(x) + x(\mu-r)k \psi_{k-1}'(x) + \\ & + \frac{(x\sigma)^2}{2} k(k-1) \psi_{k-2}''(x) + \lambda e^{-ax} \int_0^x \psi_k(z) a \cdot e^{az} dz, \\ & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Перейдемо до розв'язку (21). Розв'яжемо спочатку перше рівняння (21):

$$\begin{aligned} \lambda \psi_0(x) &= (rx+c) \psi'_0(x) + \lambda e^{-ax} + \\ & + \lambda e^{-ax} \int_0^x \psi_0(z) a \cdot e^{az} dz. \end{aligned} \quad (22)$$

Диференціюючи (22) та здійснивши елементарні математичні перетворення, остаточно маємо $(rx+c) \psi_0''(x) + [(rx+c)a + r - \lambda] \psi_0'(x) = 0$, (23)

Останнє рівняння відповідає моделі, у якій страхова компанія розміщує свій капітал тільки на банківському рахунку з процентною ставкою r (див. [1]). Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\psi_0(x) = c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \int_x^\infty (ry+c)^{\lambda/r-1} e^{-ay} dy, \quad (24)$$

де $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ визначаються з умов

$$\begin{cases} \psi(\infty) = 0, \\ \lambda(1 - \psi(0)) = -c\psi'(0). \end{cases} \quad (25)$$

Конкретизуючи в (24), $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ і користуючись

$$(25), \text{ отримаємо: } c_1^{(0)} = 0, \quad c_2^{(0)} = \frac{\lambda}{c^{\lambda/r} + \lambda\gamma}, \text{ де}$$

γ визначено в (14). Таким чином, ми довели

рівність (14). Тепер розв'яжемо друге рівняння (21), а саме рівняння:

$$\lambda \psi_1(x) = (rx + c)\psi_1'(x) + x(\mu - r)\psi_0'(x) + \lambda e^{-\alpha x} \int_0^x \psi_1(z) a \cdot e^{-\alpha z} dz. \quad (26)$$

Диференціюючи (26) та здійснивши елементарні математичні перетворення, остаточно матимемо:

$$(rx + c)\psi_1''(x) + [(rx + c)a + r - \lambda]\psi_1'(x) = -(\mu - r)x\psi_0''(x) - (\mu - r)(1 + \alpha x)\psi_0'(x). \quad (27)$$

Враховуючи те, що

$$\psi_0'(x) = -c_2^{(0)}(rx + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha x};$$

$$\psi_0''(x) = -c_2^{(0)}((\lambda - r)(rx + c)^{\lambda/r-2} - a(rx + c)^{\lambda/r-1})e^{-\alpha x},$$

рівняння (27) перепишемо у вигляді:

$$(rx + c)\psi_1''(x) + [(rx + c)a + r - \lambda]\psi_1'(x) = (\mu - r)c_2^{(0)}(\lambda x + c)(rx + c)^{\lambda/r-2} e^{-\alpha x}. \quad (28)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (28) скористаємося методом Лагранжа. Поділивши почленно (28) на $(rx + c)$, отримаємо:

$$\psi_1''(x) + [a + (r - \lambda)/(rx + c)]\psi_1'(x) = (\mu - r)c_2^{(0)}(\lambda x + c)(rx + c)^{\lambda/r-3} e^{-\alpha x}. \quad (29)$$

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є:

$$\psi_1(x) = c_1^{(1)} + c_2^{(1)} \int_x^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у виді:

$$\psi_1(x) = c_1^{(1)}(x) + c_2^{(1)}(x) \int_x^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy. \quad (30)$$

Для визначення функцій $c_1^{(1)}(x), c_2^{(1)}(x)$ необхідно розв'язати:

$$(c_1^{(1)}(x))' + (c_2^{(1)}(x))' \int_x^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy = 0; \quad (31)$$

$$(c_2^{(1)}(x))' = -(\mu - r)c_2^{(0)}(\lambda x + c)(rx + c)^{-2}.$$

Розв'язком (31) є:

$$c_2^{(1)}(x) = -(\mu - r)c_2^{(0)} \times \left(\frac{\lambda \ln((rx + c)/c)}{r^2} - \frac{(\lambda - r)x}{r(rx + c)} \right) + \bar{c}_2^{(1)}, \quad (32)$$

$$c_1^{(1)}(x) = \bar{c}_1^{(1)} + (\mu - r)c_2^{(0)} \times$$

$$\times \int_0^x \frac{\lambda u + c}{(ru + c)^2} \left(\int_x^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy \right) du,$$

де $c_2^{(0)}$ було визначено раніше, а $\bar{c}_1^{(1)}, \bar{c}_2^{(1)}$ визначаються з умов, аналогічних умовам (25):

$$\bar{c}_1^{(1)} = -(\mu - r)c_2^{(0)} \int_0^{\infty} \frac{\lambda u + c}{(ru + c)^2} \left(\int_x^{\infty} (ry + c)^{\lambda/r-1} e^{-\alpha y} dy \right) du,$$

$$\bar{c}_2^{(1)} = \frac{\lambda(\bar{c}_1^{(1)} - 1)}{c^{\lambda/r} - \lambda\gamma}.$$

Підставивши тепер (32) в (30), знайдемо загальний розв'язок рівняння (29) і отримаємо рівність (15).

Перейдемо до розв'язування третього рівняння (21). Здійснивши тіж самі дії, що і при виведенні рівнянь (23), (27), та розв'язуючи отримане рівняння методом Лагранжа, отримаємо рівність (16).

Теорему 2 доведено.

4. ВИСНОВКИ

У випадку експоненційно розподілених виплат отриманий розклад ймовірності банкрутства страхової компанії за степенями α , де $0 < \alpha < 1$ - частина капіталу, що інвестована страховиком у ризикові активи. Даний розклад має вигляд: $\psi_{\alpha}(u) = \psi_0(u) + \alpha\psi_1(u) + \alpha^2\psi_2(u)$, де $\psi_0(u), \psi_1(u), \psi_2(u)$ знайдені у явному вигляді, причому $\psi_0(u)$ залежить тільки від r , $\psi_1(u)$ залежить від r та μ та не залежить від σ , а $\psi_2(u)$ вже залежить від r та μ, σ !, де r - процентна ставка банку, μ - коефіцієнт росту та σ - коефіцієнт волатильності в моделі Самуельсона.

Список використаних джерел

1. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств.- М.: ГУ ВШЭ, 2001.-254с.
2. Kabanov Yu., Pergamenshikov S., Frolova A. In the insurance business risky investments are dangerous// Finance and Stochastics.-№6, 2002.-Р. 227-235.
3. Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В. О вероятности разорения страховой компании при заданной доле вложения в рискованные активы. // Прикладная статистика. Актуарна та фінансова математика. №1-2, 2006.-Р. 227-235.
4. Бондарев Б.В., Математические модели в страховании - Донецк, АПЕКС, 2002.- 117с.

Надійшла до редакції 17.11.2008

УДК 519.7

Гарашенко Ф.Г., Карабак А.М., Солошенко Ю.І.*

Удосконалений оператор схрещування для генетичного алгоритму розв'язання задачі побудови плану гетерогенного багатоетапного виробництва

Розглянута проблема побудови розкладів для гетерогенних багатоетапних виробництв, що є більш загальним випадком багатоетапних виробництв. Розглядаються гетерогенні багатоетапні виробництва з незалежними машинами в складі операційних центрів та залежністю часу налаштування машини від конкретної роботи.

Ключові слова: гетерогенне багатоетапне виробництво, генетичний алгоритм.

*E-mail: karabak@i.ua, patch2005@mail.ru, garash@unicyb.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.

Вступ. На даний час досить широко розглядається проблема побудови розкладів для виробництв, в тому числі для гетерогенних багатоетапних виробництв (ГБВ). ГБВ – це більш загальний випадок багатоетапних виробництв (БВ). У БВ кожний машинний операційний центр (ОЦ) складається лише з однієї машини на відміну від ГБВ в яких існує хоча б один ОЦ, який складається з більш ніж однієї машини готової до роботи. Також у ГБВ немає обмежень на ідентичність машин на ОЦ.

В цій статті представлений алгоритм побудови розкладів для ГБВ з незалежними машинами в складі операційних центрів та залежністю часу налаштування машини від конкретної роботи. В якості оптимізаційного критерію взятий період виробництва ($C_{\max}$).

Запропонований алгоритм є удосконаленим варіантом генетичного алгоритму Руїза та Марото (Ruiz and Maroto [1]). Був удосконалений оператор схрещування, критерій зупинки роботи алгоритму та умова рестартування.

Постановка задачі. Нехай $N = \{1, \dots, n\}$ – множина робіт до виконання, $M = \{1, \dots, m\}$ – множина операційних центрів, $|A|$ – кількість елементів, що міститься у множині A . У кожному операційному центрі i існує $M_i = \{1, \dots, m_i\}$ незалежних паралельних машин, які можуть виконувати роботу, $|M_i| \geq 1$. Нехай

Fedir G. Garashchenko Andrii M. Karabak,
Iurii I. Soloshenko*

An enhanced crossover operator for a genetic algorithm for Hybrid Flowshop problem

A scheduling problem for a Hybrid Flowshop is considered. The Hybrid Flowshop problem is a general case of a simple flowshop problem. A Hybrid Flowshop with unrelated machines and sequence dependent setup time is considered in this paper.

Key Words: Hybrid Flowshop, genetic algorithm, makespan optimization.

P_{ij} час виконання роботи $j \in N$ на машині l операційного центру $i \in M$, $l \in M_i$. Також береться до уваги час налаштування даної машини для виконання роботи. Нехай $S_{ij,l}$ час налаштування машини $l \in M_i$ для виконання роботи $k \in N$ після роботи $j \in N$. Якщо дана робота не потребує виконання на даному операційному центрі, то час виконання та налаштування вважається рівним нулю на всіх машинах даного ОЦ. Також нехай E_j – множина тих машин операційного центру $i \in M$, що можуть виконати роботу $j \in N$, $1 \leq |E_j| \leq m_i$.

Гаургенд у [2] показав, що для запропонованої схеми існує загалом $n! \left(\prod_{i=1}^m m_i \right)^n$ розв'язків. В свою чергу обчислення періоду виробництва ($C_{\max}$) можна наступним чином:

$$C_{i,\pi(j)} = \min_{l \in M_i} \{ \max \{ C_{i,l,\pi(j)} + S_{i,l,\pi(j)}; C_{i,l,\pi(j)} \} + P_{i,l,\pi(j)} \},$$

де π – перестановка, $\pi(j)$ – робота, яка стоїть на j -му місці у послідовності робіт, $j \in N$, $C_{i,\pi(j)}$ – час завершення виконання роботи $\pi(j)$ в операційному центрі $i \in M$, L_{ij} – остання робота, яка виконувалась на машині $l \in M_i$, $S_{ij,L_{ij},\pi(j)}$ –

час налаштування машини $l \in M$, для виконання роботи $\pi(j)$, якщо останньою на цій машині виконувалась робота L_{ij} . Якщо всі роботи призначені на машини у відповідних ОЦ, то виробничий план можна обчислити наступним

$$\text{чином: } C_{\max} = \max_{j=1, \dots, n} \{C_{m, \pi(j)}\}.$$

Кодування. Послідовність робіт до виконання представляє собою індивід (хромосому). У цьому алгоритмі індивід реалізований за допомогою стрічки з n цілих чисел, яка є перестановкою $1, 2, \dots, n$, де кожне число є номером роботи. Потрібно отримати на виході алгоритму один індивід маючи на вході популяцію з P_{size} індивідів. На першому етапі генеруємо популяцію. Другий етап складається з декількох пунктів:

1) Проводимо P_{size} раз процедуру генерування індивіду й обчислення для нього цільової функції.

2) Вибираємо індивідів за принципом змагань й, в залежності від схеми змагання, найкращих з них зберігаємо.

3) Якщо виробничий план не змінювався протягом G_{max} поколінь, то застосовуємо процедуру регенерування популяції. Якщо після цього кількість регенерувань досягла значення Rg , то після процедур схрещення та мутації, описаних в четвертому пункті, алгоритм закінчує роботу, а якщо ні, то вважаємо, що виробничий план не змінювався жодного разу й переходимо до наступного пункту.

4) Здійснюємо схрещування з ймовірністю P_c й мутацію з ймовірністю P_m . Переходимо до першого пункту.

Ініціалізація та обчислення. Популяція формується з P_{size} випадково створених індивідів. Присвоєння робіт конкретним машинам відбувається за допомогою цільової функції. У БВ, де кожний ОЦ складається лише з однієї машини, присвоєння робіт машинам відбувається автоматично, виходячи з того, що іншого варіанту не існує. Для ГВВ з незалежними машинами у складі операційних центрів та залежністю часу налаштування в нас може існувати багато варіантів присвоєння робіт машинам, тому робити цей вибір ми повинні виходячи з того, що час завершення роботи на даній машині, з урахуванням часу налаштування, повинен бути мінімальним. Для вирішення цієї

проблеми робота присвоюється тій машині цільова функція якої для даної роботи найменша.

Рестартування, схема генерування та критерій зупинки. Механізм рестартування базується на схемі, запропонованій у [3], доповненій та переробленій.

1) У кожному поколінні i ми зберігаємо мінімальний виробничий план. Позначимо його як mak_i .

2) Якщо мінімальний виробничий план не змінився ($mak_i = mak_{i-1}$) збільшуємо показник „виробничий_план_не_змінився” на одиницю, інакше присвоюємо йому значення нуль.

3) Якщо виробничий план не покращується протягом G_{max} поколінь, то застосовуємо процедуру рестартування, яка полягає у виконанні наступних дій: відсортовуємо популяцію по мірі зростання значення C_{max} , пропускаємо перші 20% індивідів з відсортованого списку, що є найкращими й 50% з решти випадковим чином замінюємо на найкращі, а решту замінюємо новими, випадково створеними, індивідами.

4) Після процедури рестартування вважаємо, що виробничий план не змінювався жодного разу.

Схема передбачає заміну деяких індивідів нового покоління індивідами з попереднього. Як показано у [4], генетичний алгоритм, де нащадок замінює гірших індивідів у популяції, показує кращі результати порівняно зі звичайним генетичним алгоритмом. Обчислення припиняються тоді, коли виробничий план не змінювався протягом 30 разів ($G_{max} = 30$), а також, після 10 регенерувань ($Rg = 10$). Алгоритм виконується 2 рази.

Відбір, схрещування та мутація. Відбір індивідів („батьків”) відбувається за допомогою так званого „змагання”. Розглядаються схеми, запропоновані у [1,5,6].

Оператор мутації використовується у цьому алгоритмі для того, щоб запобігти зупинці у локальному оптимумі, щоб відновити втрачений генетичний матеріал та різноманітність у популяції.

Для цього ми використовуємо три загальновідомі схеми: вставка (insertion), обмін (swap) та перемикання (switch).

Оператор схрещування генерує нову послідовність комбінуючи дві вхідні. Мета схрещування – створити нові розв'язки з кращими показниками C_{max} . Ми розглядаємо для

цього п'ять різних схем: OBX (Order Base Crossover) [7], PPX (Precedence Preservative Crossover) [8], OSX (One Segment Crossover) [9,10], TP (Two Point) [6]. Також запропоновано три нових схеми операторів схрещування: TPI (Two Point Inverse), OBSTX (Order Based Setup Time Crossover), ST2PX (Setup Time Two Point Crossover).

Таблиця 3

Нашадок

3	5	8						2	6
---	---	---	--	--	--	--	--	---	---

Решта позицій заповнюються елементами взятими від 2-го батька, з урахуванням залежності часу налаштування. Наприклад, для того, щоб заповнити позицію 4 нашадка ми

Таблиця 4

Час налаштування машини

Роботи що попередньо виконувались на машині											
Роботи до виконання на машині		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	0	68	19	75	84	52	64	32	56	48
	2	30	0	35	48	62	49	41	31	38	68
	3	15	35	0	16	47	72	68	93	24	38
	4	26	26	20	0	38	56	29	27	24	62
	5	60	19	28	29	0	46	57	52	50	30
	6	21	64	35	48	65	0	36	55	48	95
	7	18	29	48	75	62	18	0	29	88	25
	8	95	33	38	51	52	67	92	0	49	68
	9	66	20	26	57	82	64	49	24	0	33
	10	46	56	37	84	29	44	68	15	78	0

TPI – двухточкова, обернена. Ця схема подібна до звичайної TP. Ми випадковим чином вибираємо дві точки. Елементи послідовності, що передують першій точці, копіюються у другого батька. Елементи між другою та першою точками копіюються у першого батька. Елементи від другої точки і до кінця послідовності копіюються у другого батька.

ST2PX – двухточкова з залежністю від часу налаштування. Ця схема працює наступним чином. Випадковим чином вибираються дві точки. Елементи послідовності, які передують першій точці й від другої точки і до кінця копіюються у першого батька. Елементи від першої до другої точки копіюються у другого батька з урахуванням мінімальності часу налаштування машин, вибраних випадково на першому кроці.

Таблиця 1

Батько 1

3	5	8	9	1	4	7	10	2	6
---	---	---	---	---	---	---	----	---	---

Таблиця 2

Батько 2

1	8	6	3	2	7	10	4	5	9
---	---	---	---	---	---	----	---	---	---

Приклад. Нехай перша точка має значення 3, а друга точка 9. Значення від позиції 1 і до 3 копіюються у батька 1. Значення від позиції 9 і до 10 (кінцевої) копіюються також у першого батька. Результати дій можна бачити в таблиці:

маємо такі варіанти (це ті елементи батька 2 що ще можуть бути вибрані): 1 (поз. 1), 7 (поз. 6), 10 (поз. 7), 4 (поз. 8), 9 (поз. 10).

Так, як мінімальний час налаштування рівний 15 (таблиця 4), то вибираємо роботу 10. Аналогічно заповнюються всі інші позиції і результат дій можна бачити в таблиці:

Таблиця 3

Нашадок

5	3	8	10	7	4	9	1	2	6
---	---	---	----	---	---	---	---	---	---

Висновок. У даній статті наведено алгоритм побудови квазіоптимальних розкладів для гетерогенних багатоетапних виробництв, що показує результати значно кращі за евристичні алгоритми. Даний алгоритм використовує удосконалений оператор схрещування та оптимізований процес відбору.

Список використаних джерел

1. Ruiz R., Maroto C. A genetic algorithm for hybrid flowshops with sequence dependent setup times and machine eligibility //European Journal of Operational Research.-2006.- Vol.169.- P.781-800.
2. Gourgand M., Grangeon N., Norre S. Metaheuristics for the deterministic hybrid flow shop problem //Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Production Management

- (IEPM-1999).- Glasgow.- 1999.- P. 136.- 145.
3. *Alcaraz J., Maroto C., Ruiz R.* Solving the multi-mode resource-constraints project scheduling problem with genetic algorithms //Journals of the Operational Research Society.-2003.- Vol.54.- P.614-626.
 4. *Reeves C.* A genetic algorithm for flowshop sequencing //Computers & Operations Research.-1995.- Vol.22, Issue 1.- P.5-13.
 5. *Goldberg D.* Genetic Algorithms in Search, optimization and Machine Learning // Addison-Wesley.- Reading.- Massachusetts.- 1989.
 6. *Gen M., Cheng R.* Genetic algorithms & engineering optimization.- New York: John Wiley & Sons, 1997.- 512c.
 7. *Bierwirth C., Mattfeld D., Kopfer H.* On permutation representations for scheduling problems //PPSN.-1996.- Vol.1141.- P.310-318.
 8. *Guinet A., Solomon M.* Scheduling Hybrid Flowshops to Minimize Maximum Tardiness or Maximum Completion Time //International Journal Production Research.-1996.- Vol.34, No.6.- P.1643-1654.
 9. *Allaoui H., Artiba A.* Integrating simulation and optimization to schedule a hybrid flow shop with maintenance constraints // Computers & Industrial Engineering.-2004.- Vol.47.- P.431-450.
 10. *Yaurima V., Burtseva L., Tchernykh A.* Hybrid Flowshop with Unrelated Machines, Sequence Dependent Setup Time and Availability Constraints: An Enhanced Crossover Operator for a Genetic Algorithm //Proceedings of the International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics.- 2007.- P.3-7.

УДК 004.4'2

Глибовець А.М. ст.викл., Гороховський С.С.
доцент, Жаб'юк В.Я.

Вирішення проблем побудови платформи мобільних агентів за допомогою технологій JAVA, JINI

В роботі описано основні підходи до
вирішення базових проблем побудови
платформи мобільних агентів за допомогою
технологій JAVA, JINI.

Ключові слова: архітектурні принципи,
мобільні агенти, платформи мобільних
агентів, технології JAVA, JINI.

E-mail: ava@unicyb.kiev.ua

Статтю представив: д.ф-м.н., проф. Анісімов А.В.

A.M. Glybovets senior lecturer,
S.S. Gorokhovsky Associate Professor,
V.Y. Zhabyuk

Implimentation of Mobile Agents Platform on Java-JINI technology

Basic approaches to main issues of mobile
agents platform creation are discussed in the
paper. Java-Jini technologies are applied and
implemented.

Key Words: Architectural principles,
mobile agents, Mobile agents platforms, Java –
Jini technologies.

1. ВСТУП

Сучасний стан використання
агентних підходів до оптимального
розв'язку прикладних задач засвідчує
існування проблеми побудови
програмної архітектури, яка дозволяє
ефективно існувати й переміщуватись
агентам у розподіленому й
гетерогенному середовищі. Ця проблема
вирішується за допомогою виділення
спеціалізованої агентної платформи
(АП), яка контролює та управляє
агентною спільнотою [1, 2].

Для вирішення проблем
інтероперабельності фонд
інтелектуальних фізичних агентів (FIPA)
пропонує дотримуватися таких
стандартів при розробці АП. Платформа
має бути динамічною структурою, що
забезпечує інтеграцію систем, які
базуються на різних апаратних і
програмних архітектурах. Вона повинна
включати в себе різні протоколи зв'язку,
для забезпечення спілкування різним
агентам, які належать до різних
платформ. Звісно, для реалізації
можливості незалежної роботи АП має
бути автономною.

2. ПІДХОДИ ДО ВИРІШЕННЯ ОСНОВНИХ ПРОБЛЕМ

2. 1. Проблема знаходження віддалених вузлів, на які можуть подорожувати агенти

На нашу думку, ця проблема має
вирішуватися відповідним Middleware,
таким як Jini або CORBA. Ми віддаємо
перевагу Jini, тому що вона більше
інтегрована з Java, а також робить
систему стійкою до збоїв та динамічно
змінюваною.

2.1.1. Загальний огляд Jini

Jini є водночас архітектурою та
технологією [3]. Jini це мережна архітектура
для створення дистрибутивних
(розподільчих) систем, для яких масштаб,
швидкість, зміни та складність взаємодії є
важливими й не можуть повністю
забезпечуватися існуючими технологіями.
Технологія Jini надає гнучку інфраструктуру
для надання послуг у мережі та створення
спонтанної взаємодії із клієнтами, які
використовують дані послуги незалежно від
свого апаратного та програмного
забезпечення.

Динамічна мережна архітектура.
Традиційна мережна архітектура за своєю
природою є статичною. Дизайнери мережі
знають заздалегідь, які елементи комп'ютера
та програми будуть брати участь у певному

клієнтському рішенні, а мережна інфраструктура створюється відповідно до цієї концепції.

Динамічна мережна архітектура підтверджує, що для того, щоб досягти найкращого рішення для користувача, краще не вирішувати наперед, яке апаратне та програмне забезпечення братиме участь у рішенні. Через велику кількість наявного/доступного апаратного й програмного забезпечення для мережі, яке могло б брати участь у рішенні, краще не вибирати тип архітектури доти, доки воно не стане дійсно необхідним. Ідея полягає в тому, щоб клієнт сам шукав у мережі компоненти та ресурси, які йому потрібні, ураховуючи їхні властивості. У випадку, якщо вибрані компоненти та ресурси деградують чи не можуть впоратися із завданням, клієнт зможе замінити їх, продовжуючи працювати, тим самим підвищуючи свою надійність.

Було б досить складно зобразити діаграму мережевого з'єднання для такого рішення, оскільки вона буде постійно змінюватися під час роботи програми, поки система з'єднує, роз'єднує та знов відновлює з'єднання з різноманітним апаратним та програмним забезпеченням у мережі; тому мережна структура – *динамічна*.

Архітектура орієнтована на послуги (АОП) бере існуючі програмні компоненти, які перебувають у мережі, і вможливає їхнє розповсюдження, активацію та знаходження. АОП дозволяє програмісту моделювати програмні проблеми з точки зору послуг, запропонованих компонентами будь-кому будь-де в мережі.

2.1.2. Мережна федерація та інфраструктура

Для того щоб підтримувати керування динамічною мережною архітектурою чи АОП, необхідна нова концепція роботи в мережі та підтримки інфраструктури. Традиційна концепція мережевого адміністратора, який працює за одним певним комп'ютером, і виконує більшість функцій підтримки, є неможливою в архітектурі, де компоненти легко замінити.

Більшість функцій мережі потрібно розподілити серед учасників мережі й виконувати їх у горизонтальному порядку замість традиційного висхідного способу – заверху вниз.

Для того щоб задовольнити цю вимогу Jini визначає концепцію динамічної федерації ресурсів, служб та користувачів, які поєднуються технологічною інфраструктурою Jini та обслуговуються її службами. У мережі може бути визначено багато таких федерацій, кожна з яких поширює свої служби. Як тільки клієнт чи служба приєдналась до певної федерації, вона може використовувати сервіси Jini у федерації. Кожна федерація має службу Jini Lookup Service (на зразок телефонного довідника), яка містить інформацію та посилання на служби, які зареєструвалися у федерації; таким чином, клієнт може знайти, і використати ті послуги, які він шукає. Коли клієнт починає працювати у федерації, він може використовувати додаткові сервіси Jini для здійснення пошуку за зразком, тимчасового користування послугами ще й оброблення транзакцій. Також Jini надає послугу пошуку, яка допомагає клієнту чи сервісу знайти найбільш підходящу для нього федерацію.

Така ідеологія Jini можлива завдяки характеристикам мови Java, зокрема: поліморфізму та портативності байткоду (Portable bytecode).

Сервіси Jini базуються на мові Java, яка може використовуватися на більшості операційних систем у мережі. JavaSpaces може використовуватись програмами написаними на C++ & .NET. Поліморфний контроль типів та портативний код дозволяє технології Jini поширюватися в мережі, і обслуговувати різноманітні неспівставні елементи мережі. Javaspace є надбудовою над Jini.

Комунікаційний протокол необхідний для взаємодії між клієнтом та провайдером, фактично вбудований у код інтерфейсу. Таким чином, комп'ютер клієнта не повинен керувати комунікацією; це вможливає зв'язок одного клієнта з багатьма службами, кожна з яких має свій власний комунікаційний протокол.

Через існування багатьох федерацій у мережі та їхню динамічну природу, клієнт потребує допомоги в знаходженні Lookup Service відповідної федерації.

Клієнти, які хочуть приєднатися до федерації, повинні отримати координати (посилання) однієї чи декількох служб lookup. Технологія Jini – Виявлення (Discovery) – дозволяє отримати ці координати.

Приєднання до мережі дозволяє послужити публічно рекламувати себе та ефективно працювати з послугами у федерації.

Клас `LookupLocator` у пакеті `net.jini.core.discovery` є простим механізмом для здійснення індивідуального розпізнавання та надає методи для повернення імені хоста, на якому об'єкт намагається здійснити індивідуальне розпізнавання, повернення TCP порта до того хоста, до якого об'єкт приєднується, та повернення зразка проксі для певної послуги `Lookup`.

Динамічна федерація вимагає простих, але потужних пошукових схем та методів. Інтерфейс виведення даних уможливує використання схем пошуку за співставленням зі зразком, які підходять для пошуку в розподілених (глобальних) мережах.

2.1.3. Безпека Jini

Дизайн моделі безпеки для технології Jini ґрунтується на подвійних категоріях *principal* та *контрольного списку доступу*. Послуги Jini є доступними від імені певної особи – *principal* – яка загалом керується певним користувачем системи. Служби самі можуть вимагати доступу до інших служб, які базуються на специфікаціях того об'єкту, який здійснює послугу. Чи надається доступ, чи ні – залежить від змісту контрольного списку доступу, який асоціюється з об'єктом.

2.1.4. Оренда сервісів

У дистрибутивних програмах у мережі, де можуть траплятися збої мережі чи компонентів, необхідно перевіряти, чи компоненти мають помилки, чи стають недоступними.

Механізм тимчасового користування (*Leasing*) долає названу проблему. Він використовується для надання ресурсів на певний період часу в погоджений спосіб.

Послуга оренди має головний інтерфейс `Lease`, який забезпечує методи скасування оренди, отримання оренди, визначення часу закінчення оренди та поновлення оренди. Пакет `com.sun.jini.lease` містить деякі прості утиліти для допомоги клієнту у здійсненні операцій поновлення оренди.

Для середовища динамічної мережі повідомлення від віддалених об'єктів можуть приходити в різному порядку від різних клієнтів або ж можуть не приходити взагалі.

Модель віддалених подій технології Jini розширює модель локальної події до

архітектури динамічної мережі. Це дозволяє об'єкту з одного місця в мережі проявляти свою зацікавленість у події, яка відбувається на об'єкті в зовсім іншій частині мережі, та визначати третю сторону (об'єкта в мережі), якому має надійти повідомлення про те, що така подія сталася.

Коли члени віддаленої мережі беруть участь у транзакціях, важливо зміцнити постійну модель операцій. Тоді, у випадку, якщо один з учасників зазнає невдачі, транзакція може бути скасована, при цьому жодних часткових (проміжних) результатів зафіксовано не буде.

Служба обробки даних транзакцій підтримує двофазову модель коміту

Транзакція створюється й контролюється *менеджером*. Клієнт просить менеджера створити об'єкт транзакції. Об'єкт транзакції створюється, і потім передається як параметр при здійсненні операцій із послугою.

Транзакція *завершується*, коли будь-який учасник транзакції *комітує* або *скасовує* транзакцію. Якщо транзакція здійснюється успішно, тоді всі операції, реалізовані під час транзакції будуть завершені теж. Скасування транзакції означає, що всі операції, реалізовані під час транзакції, зникнуть наче ніколи й не відбувалися.

2.2. Проблема мобільності коду

2.2.1. Необхідність віртуальної машини

Створення платформи мобільних агентів вимагає знаходження способу здійснення наступної дії: зупинка виконання коду агента на певному вузлі, серіалізація агента (включає серіалізацію як виконуваного коду агента, так і структур даних, що визначають його стан), передача по мережі, десеріалізація (включає перевірку безпеки), продовження призупиненого виконання агента на новому вузлі.

Програма з мови Java компілюється у двійковий модуль, що складається з команд віртуального процесора Java. Такий модуль містить байт-код, призначений для виконання Java-інтерпретатором.

Якщо застосування Java повинне працювати на декількох платформах, немає необхідності компілювати його кілька разів. Один і той самий байт код, працює на всіх платформах однаково.

Таким чином, застосування Java компілюється, і налагоджує тільки один раз,

що вже значно краще. Залишається, правда, питання - як бути із програмним інтерфейсом операційної системи, що відрізняється для різних платформ?

Існує наступне вирішення даної проблеми.

Програма написана на Java не звертається прямо до інтерфейсу операційної системи. Замість цього вона користується готовими стандартними бібліотеками класів, що містять усе необхідне для організації GUI, звертання до файлів, для роботи в мережі й так далі.

Внутрішня реалізація бібліотек класів, зрозуміло, залежить від платформи. Однак усі завантажувальні модулі, що реалізують можливості цих бібліотек, поставляються в готовому виді разом із віртуальною машиною Java, тому програмістові не потрібно про це піклуватися.

Абстрагуючись від апарату рівня бібліотек класів, програмісти можуть більше не думати про розходження в реалізації програмного інтерфейсу конкретних операційних систем. Це дозволяє створювати по-справжньому мобільні застосування, що не вимагають при перенесенні на різні платформи перетрансляції й зміни вихідного тексту.

2.2.2 Серіалізація та десеріалізація об'єктів

Java надає стандартні механізми для серіалізації/десеріалізації об'єктів. Кожен об'єкт, що реалізує інтерфейс `Serializable` (або `Externalizable`) може бути записаний та прочитаний в/з `ObjectInputStream/ObjectOutputStream`.

Серіалізація є каскадною, і застосовується для всього графа об'єктів. Різниця між інтерфейсами `Serializable` та `Externalizable` полягає в наступному.

`Serializable` забезпечує маршалінг/анмаршалінг за стандартним алгоритмом Java машини для будь яких типів даних. Використовуючи інтерфейс `Externalizable` програміст сам визначає алгоритм серіалізації. Мушу зазначити, що об'єкти типу `Thread` не можуть бути серіалізовані, і на це є досить вагомі причини (це аргумент про неможливість міграції процесу). Якщо певний клас не є серіалізованим, ми завжди можемо зробити `serializable` контейнер, який містить даний об'єкт.

2.2.3 Динамічне завантаження коду агента

Крім передачі стану об'єкту, потрібно передавати також виконуваний код агента. Ця проблема була вирішена із самого початку існування Java, коли з'явилися аплети, які завантажували класи з HTTP серверів. Дане рішення використовується зараз в `rmi` (remote method invocation). Для функціонування платформи мобільних агентів, потрібно запустити `Jini Starter Kit`, який крім підтримки `jini` сервісів містить також і вбудований веб сервер, на якому розміщується класи агентів та допоміжних структур даних. Щоб перемістити серіалізованого агента на інший вузол, потрібно викликати віддалений метод `acceptAgent(MobileAgent mobileAgent)` на вузлі, який ми знайдемо з допомогою `Jini lookup service`. Для виклику віддалених методів в java існує `rmi`, яка є різновидом `RPC` (Remote procedure call).

2.3. Проблема безпеки

Зазначимо, що дана проблема є найважливішою при реалізації мобільних агентів. Ураховуючи, що Java є мовою орієнтованою на мережі, вона містить достатньо механізмів для гарантування високого рівня безпеки, якими можна скористатися при розробці АП.

2.3.1 Класифікація атак на системи мобільних агентів

Загрози для безпеки загалом поділяють на три основні категорії [4]: розголошення інформації, відмова від послуги й спотворення інформації. У нашому випадку ми використовуємо компоненти агентської системи у визначенні категорій загроз для того, щоб визначити можливе джерело небезпеки та ціль нападу.

Існує декілька моделей, які описують агентські системи [5-7]. Але, для аналізу питання безпеки достатньо використовувати досить просту модель, яка складається всього із двох компонентів: агента й платформи. У такій моделі агент складається з кодової й статичної інформації, необхідної для певних розрахунків. Мобільність дозволяє агенту рухатись серед інших агентських платформ. Платформа агента забезпечує обчислювальне середовище, у якому діє агент. Платформу, на якій створюється агент, називають домашньою/материнською платформою; зазвичай вона є найбезпечнішим середовищем функціонування для агента.

Агентська платформа може складатися з одного або декількох хостів, підтримувати функціональність великої кількості обчислювальних середовищ чи точок дотику, у яких агенти можуть взаємодіяти між собою.

Виділяють чотири категорії загроз: загрози від агента, який атакує агентську платформу; агентська платформа, яка атакує агента; агент, який атакує іншого агента на агентській платформі, та інші об'єкти, що атакують агентську систему.

Категорія «агент-платформа» включає велику кількість загроз, коли агенти використовують вразливі компоненти безпеки агентської платформи агента або атакують агентську платформу. Такі загрози включають нелегальне проникнення, відмову від послуги, несанкціонований доступ. Категорія «агент-агент» представляє собою низку загроз, при яких агенти користуються слабкими сторонами інших агентів чи атакують інших агентів. Серед них нелегальне проникнення, несанкціонований доступ, відмова від обслуговування, зміна змістової інформації. Багато компонентів агентської платформи є агентами. Ці агенти платформи забезпечують обслуговування на рівні системи, до прикладу, каталоги, внутрішні комунікації платформи. Деякі агентські платформи дозволяють безпосередню комунікацію між двома агентами, у той час як на інших платформах усі вхідні та вихідні повідомлення проходять через комунікаційного агента платформи. Через такі архітектурні рішення безпека взаємодії «агент-платформа» та «агент-агент» досить тісно переплітається. Категорія «платформа-агент» включає низку загроз, при яких платформи жертвують безпекою агентів. Ці загрози включають нелегальне проникнення, відмова від обслуговування, прослуховування та спотворення інформації. Категорія «інший об'єкт-агентська платформа» характеризує загрози, при яких зовнішні об'єкти, включаючи агентів та агентські платформи, загрожують безпеці агентської платформи. Серед них нелегальне проникнення, відмова від послуги, несанкціонований доступ, копіювання розмноження та відтворення.

Інтерпретація коду. Агентські системи часто розробляються з використанням інтерпретованого скрипту чи мови програмування. Основним стимулом цього є забезпечення підтримки агентських

платформ на різномірних комп'ютерних системах. Вищий концептуальний рівень абстракції, який забезпечується інтерпретуючим середовищем, може сприяти вдосконаленню коду агента [8]. Ідея інтерпретації коду безпеки полягає в тому, що команди, які вважаються шкідливими, можуть бути перетворені на безпечні або ж агент їх не виконує. Сьогодні однією з найпопулярніших мов інтерпретації є Java. Java використовує модель безпеки «пісочниця», у якій доступ до пам'яті відсутній, а програма виконується в повністю відокремленому середовищі.

Створено певний відокремлений простір для підозрілих завантажених кодів; а зв'язування посилань між модулями в різних іменованих областях є суворо забороненою для загального використання. Керівник - служби безпеки відповідає за всі доступи до системних ресурсів, фактично виступаючи при цьому в ролі контрольного монітора (монітора звернень). До того ж Java дійсно підтримує мобільність коду, динамічне завантаження коду, коди із цифровим підписом, метод дистанційного ініціювання, присвоєння реєстраційного номера, різномірність платформ та інші ознаки, що роблять її ідеальною платформою для розвитку та вдосконалення агента.

Кодовий підпис. Основною технікою захисту агентської системи є кодовий підпис чи інші об'єкти із цифровим підписом. Зазвичай код підпису застосовує творець агента, користувач чи інший об'єкт, який проводить експертизу агента. Через те що агент діє від імені кінцевого користувача чи організації, мобільні агентські системи завжди використовують підпис користувача як ознаку влади, за вказівками якої агент діє.

Зазначимо, що значення підпису може бути різним у залежності від стратегії, пов'язаної зі схемою підпису та стороною, яка підписує.

Microsoft Authenticode, звичайна форма кодового підпису, дозволяє підписувати апплети (прикладні програми) мови Java або ж компоненти Active X, тим самим гарантуючи користувачам, що програмне забезпечення не є зіпсованим, підробленим, чи модифікованим, і що авторство перевірене. Проте для багатьох користувачів підпис став не тільки засобом установлення автентичності, але й формою довіри програмному забезпеченню, що може в

кінцевому рахунку мати жахливі наслідки. Замість того щоб покладатися виключно на репутацію виробника кодів, розумно було б отримати оцінку та перевірку коду від надійної сторони чи незалежної служби оцінки [9, 10]. Наприклад, рішення розпочати виконання агента може бути прийняте тільки за умови схвалення адміністратора сайту, надане у вигляді цифрового підпису, який застосовується до коду. Навіть зважаючи на те, що такий підхід є дуже бажаним, досвід указує, що отримати своєчасну надійну оцінку безпеки ще досить складно.

Безсумнівно, ніяка інша технологія програмування на сьогоднішній день не забезпечує аналогічного ступеня інформаційної безпеки. Правда, Java-безпека досягається ціною істотного зниження ефективності.

2.4. Проблема стійкості до збоїв (Fault Tolerance)

Загальновідомо, що кожен елемент системи мобільних агентів (вузол, агент, мережне з'єднання) може відмовити й цим самим не дозволити нормально виконати задачу агенту, а в деяких випадках і вивести з ладу всю систему. Для використання МА, щоб вирішити сучасні задачі, життєво необхідно щоб система була надійною, і змогла протистояти збоєм у роботі обладнання, або помилкам програмістів [11].

Сучасні механізми забезпечення стійкості до збоїв можна умовно поділити на дві групи: реплікація та контрольні точки.

Ми пропонуємо інженерне вирішення даної проблеми, яке базується на алгоритмі контрольних точок, і використовує той факт, що ті виклики є синхронними, а агент може віддалено контролювати роботу іншого агента, якого він запустив.

3. ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано підходи до вирішення базових проблем побудови платформи мобільних агентів за допомогою технологій JAVA, JINI. Ефективність застосування цих рішень було продемонстровано при створенні АП підтримки мобільних агентів у національному університеті "Києво-Могилянська академія".

4. ЛІТЕРАТУРА

1. Гороховський С.С. Агентні технології: спроба критичного огляду. // Наукові записки. Національний університет "Києво-Могилянська Академія". - Т. 18: Спеціальний випуск; НаУКМА. - К., 2000. - с.391-395.
2. Н. Глибовец Использование агентных технологий в системах дистанционного образования, Журнал "Управляющие системы и машины". - 2002. - №6. - С. 69-76.
3. About Jini, <http://www.gigaspaces.com/wiki/display/GS/About+Jini>, 2007
4. Wayne Jansen and Tom Karygiannis, "MobileAgentSecurity", <http://eseer.ist.psu.edu/280117.html>
5. D. Lange and M. Oshima, "Seven Good Reasons for Mobile Agents," Communications of the ACM, Vol. 42, pp. 88-89, 1999.
6. D. Lange and M. Oshima, "Programming and Developing Java Mobile Agents with Aglets," Addison Wesley, 1998.
7. G. Samaras, P. Evripidou, and E. Pitoura, "Mobile-Agents based Infrastructure for eWork and eBusiness Applications," Proceedings of the eBusiness and Ework Conference, pp. 1092-1098, 2000.
8. IBM, "Aglets," <http://www.trl.ibm.co.jp/aglets/>, 2001.
9. IBM Japan Research Group, "Aglets Workbench," <http://www.trl.ibm.co.jp/aglets/index.html>.
10. R. Gray, "AgentTCL: A Flexible and Secure Mobile-agent System," PhD Thesis, Dartmouth College, 1997.
11. М. Глибовець Інтелектуалізація навчання в телекомунікаційних системах дистанційної освіти // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. -2002. - Випуск №3. - С. 203-211.

Надійшла до друку 01.09.2008 р.

УДК 519.9

Гук Л.М., асп.

Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії

Розглянуто метод розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії. Знайдена апіорна оцінка розв'язку, що виражає стійкість методу за початковими даними та правою частиною. Визначається вплив величини швидкості конвекції та коефіцієнта дифузійного переносу на стійкість методу. Доведено збіжність методу в рівномірній нормі.

Ключові слова: задача конвективної дифузії, різницевий метод, стійкість, збіжність.

E-mail: lessiagook@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Математична модель загальної циркуляції атмосфери складається із нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з малими параметрами при старших похідних. В силу наявності малих параметрів при старших похідних рівняння моделі можуть непередбачено змінювати свій тип в області розв'язання задачі [1,2].

Вибір оптимального методу розв'язання рівнянь параболічного-гіперболічного типу для задач метеорології є складною справою через те, що мета (точність) та засоби (економічність) суперечать один одному. Не дивлячись на постійне вдосконалення обчислювальної техніки проблема економічності для задач метеорології залишається актуальною і сьогодні.

Основу моделі циркуляції атмосфери складають рівняння конвективної дифузії. В роботі [6] запропонована різницева схема для розв'язання відповідної одновимірної задачі. В роботі [7] представлені результати теоретичних досліджень, що пов'язані із апроксимацією, монотонністю, дисипативними та дисперсійними властивостями запропонованого методу, а також наведена необхідна умова стійкості. Проте відкритим залишилося питання залежності стійкості та збіжності схеми від величин швидкості конвекції та коефіцієнта дифузійного перенесення. Нижче наведено дослідження за цим напрямком.

L. M. Huk, post-graduate student

Stability and convergence of economical method for a convective diffusion problem

The method for solving one-dimensional convective diffusion problem is considered. The priori estimate which evaluates the solution stability at the initial data and the right part is found. The relation between the stability and the convective expansion rate and diffusion coefficient is established. The convergence is proved in uniform norm.

Key words: diffusion-convection problem, difference method, stability, convergence.

Постановка задачі

В публікаціях [6, 7] була розглянута загальна постановка одновимірної задачі конвективної дифузії без обмеження на величину та напрямок швидкості конвекції. Тут, задля простоти, будемо вважати, що $v \geq 0$. Сформулюємо задачу в наступному вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$\mu > 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=\ell} = \beta(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Введемо сітку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$,

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \ell/N\}$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Апроксимуємо задачу (1)-(3) різницевою схемою

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{v}{2} \left[\frac{(y_{i+1}^n - y_i^n)}{h} + \frac{(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1})}{h} \right] - \frac{\mu}{h} \left[\frac{(y_{i+1}^n - y_i^n)}{h} - \frac{(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1})}{h} \right] = f_i^n, \quad (4)$$

$$f_i^n = f(x_i, t_n), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_i^0 = \eta_i = \eta(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (5)$$

$$y_0^{n+1} = \alpha^{n+1} = \alpha(t_{n+1}), \quad (6)$$

$$y_N^{n+1} = \beta^{n+1} = \beta(t_{n+1}),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Схема (4) – (6) є економічною, оскільки обчислення здійснюються за алгоритмом явного рахунку. Хоча формально схема є неявною.

Розглянемо простір H_h сіткових функцій $y = \{y_i\}$, що задані на сітці $\bar{\omega}_h$ та рівні нулю при $i = 0$ та $i = N$. Скалярний добуток та норму в H_h визначимо формулами

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (7)$$

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}. \quad (8)$$

Визначимо наступні оператори, що діють в H_h :

$$(Ay)_i = y_{x,i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$(A^*y)_i = -y_{x,i} = -\frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$(A_0y)_i = -0.5hy_{x,i} = -0.5h \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

$$(A_1y)_i = y_0 = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Різницеву задачу (4)–(6) запишемо в канонічному вигляді

$$By_t + Ay = \varphi, \quad (9)$$

$$y_i^0 = \eta_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

де $y = y(t) \in H_h$, $t \in \bar{\omega}_\tau$,

оператори A та B , що діють в H_h , визначаються формулами

$$(By)_i = y_i + \tau \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) (Ay)_i, \quad (10)$$

$$(Ay)_i = \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) (Ay)_i - \left(\frac{v}{2} - \frac{\mu}{h} \right) (A^*y)_i, \quad (11)$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

а вектор $\varphi = \varphi(t_n) \in H_h$ задається наступним чином

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_i = f_i + \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) \frac{\alpha^{n+1}}{h},$$

$$\varphi_i = f_i, \quad i = 2, \dots, N-2,$$

$$\varphi_{N-1} = f_{N-1} - \left(\frac{v}{2} - \frac{\mu}{h} \right) \frac{\beta^n}{h}, \quad \varphi_N = 0.$$

Покажемо, що A додатній оператор, тобто $(Ay, y) > 0$ для $\forall y \in H_h$ окрім $y \equiv 0$. Оператор A можна подати наступним чином

$$A = \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) \Lambda - \left(\frac{v}{2} - \frac{\mu}{h} \right) \Lambda^* =$$

$$= \frac{v}{2} (\Lambda - \Lambda^*) + \frac{\mu}{h} (\Lambda + \Lambda^*) = v\Lambda_1 + \frac{2\mu}{h} \Lambda_0.$$

В [3] показано, що Λ_0 – додатній оператор, а Λ_1 – кососиметричний, тобто $(\Lambda_1 y, y) = 0$. Враховуючи це маємо, що

$$(Ay, y) = \left(\frac{2\mu}{h} \Lambda_0 y, y \right) > 0.$$

Стійкість методу

Згідно [4] можна записати оператор A у вигляді суми самоспряженого і кососиметричного операторів:

$$A = A_0 + A_1,$$

де симетрична частина оператора A має вигляд

$$A_0 y = \frac{2\mu}{h} \Lambda_0 y = -\mu y_{xx}, \quad (12)$$

а кососиметрична –

$$A_1 y = v \Lambda_1 y = v y_0.$$

Для доведення стійкості різницевої схеми (4)–(6) використаємо теорему про стійкість схем із додатнім несамопряженим оператором A [3], в силу котрої розв'язок задачі (9) задовольняє нерівності

$$\|y^{n+1}\|_{\Lambda_0} \leq \exp\left(\frac{c_0}{4\varepsilon} (t_{n-1} + 1)\right) \times$$

$$\times \left(\|y^0\|_{\Lambda_0} + \sqrt{\frac{1+t_n}{2\varepsilon}} \left(\sum_{k=0}^n \tau \|\varphi(t_k)\|^2 \right)^{1/2} \right) \quad (13)$$

якщо виконуються наступні умови

$$A_0 > 0, \quad (14)$$

$$\|A_1 y\|^2 \leq c_0 (A_0 y, y) \text{ для всіх } y \in H_h, \quad (15)$$

$$B \geq \varepsilon E + \frac{\tau}{2} A_0, \quad (16)$$

де $c_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ – сталі, що не залежать від τ і h .

Очевидно, що виконання умов (14) – (16) цієї теореми для операторів (10), (11) означає стійкість схеми за початковими даними та правою частиною в нормі оператора A_0 .

У [3] показано, що

$$(A_0 y, y) \geq \frac{h}{\ell^2} \|y\|^2.$$

Звідси із врахуванням визначення оператора A_0 (12) отримуємо оцінку

$$(A_0 y, y) \geq \frac{2\mu}{\ell^2} \|y\|^2,$$

тобто $A_0 > 0$ та нерівність (14) має місце.

Для доведення (15) використаємо рівність

$$\|A_1 y\|^2 = \frac{v^2}{4} \|(A - A^*)y\|^2 \quad (17)$$

та рівність паралелограма для норми (8). Отримуємо, що

$$\|(A - A^*)y\|^2 \leq 2(\|Ay\|^2 + \|A^*y\|^2)$$

Оскільки згідно [3]

$$\|Ay\|^2 = \|A^*y\|^2 \leq \frac{2}{h} (A_0 y, y),$$

то

$$\|(A - A^*)y\|^2 \leq \frac{8}{h} (A_0 y, y) \quad (18)$$

Враховуючи (17), (18), а також визначення оператора (12) знаходимо

$$\begin{aligned} \|A_1 y\|^2 &= \frac{v^2}{4} \|(A - A^*)y\|^2 \leq \\ &\leq \frac{2v^2}{h} (A_0 y, y) = \frac{v^2}{\mu} (A_0 y, y). \end{aligned}$$

Тобто, має місце нерівність (15) із константою

$$c_0 = \frac{v^2}{\mu}.$$

Перейдемо до розгляду нерівності (16). Згідно визначенню оператора B (10) маємо

$$(By, y) = (y, y) + \tau \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) (A_0 y, y).$$

Але, як було зазначено вище, $A = A_0 + A_1$ та $(A_1 y, y) = 0$, тому

$$(By, y) = (y, y) + \tau \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) (A_0 y, y).$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} (By, y) &= (Ey, y) + \frac{\tau}{2} \frac{h}{\mu} \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{h} \right) (A_0 y, y) = \\ &= (Ey, y) + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{vh}{2\mu} \right) (A_0 y, y) \geq \\ &\geq (Ey, y) + \frac{\tau}{2} (A_0 y, y), \end{aligned}$$

яка і доводить оцінку (16) для $\varepsilon = 1$.

Отже, беручи до уваги вище доведене, конкретизуємо апріорну оцінку (13) для задачі (9)

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|_{A_0} &\leq \exp \left(\frac{v^2}{4\mu} (t_{n-1} + 1) \right) \times \\ &\times \left(\|y^0\|_{A_0} + \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \tau \|\varphi(t_k)\|^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким чином різницева схема (4)-(6) безумовно стійка за початковими даними і правою частиною в нормі оператора A_0 .

Із оцінки (19) бачимо, що при зростанні швидкості конвекції стійкість схеми погіршується, а при збільшенні коефіцієнта дифузії, навпаки, посилюється.

Збіжність методу

Проведемо дослідження збіжності схеми (4). Для цього введемо похибку $z = y - u$, де u – розв'язок задачі (1)-(3), а y – розв'язок різницевої задачі (4)-(6). Різницева схема збіжна, якщо має місце

$$\|z\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Для $z = y - u$ отримуємо умови

$$z_i + \frac{v}{2} [z_x^n + z_x^{n+1}] - \frac{\mu}{h} [z_x^n - z_x^{n+1}] = \psi, \quad (20)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = z(\ell, t) = 0,$$

де

$$\psi = \varphi + \frac{\mu}{h} [u_x^n - u_x^{n+1}] - \frac{v}{2} [u_x^n + u_x^{n+1}] - u_i^* -$$

є похибкою апроксимації рівняння (1).

Згідно [7] ψ має порядок $O\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} + \tau h\right)$.

Із умовної апроксимації випливає умовна збіжність схеми [5]. Умова збіжності має вигляд

$$\frac{\tau}{h} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Різницеву задачу (20) запишемо в канонічному вигляді

$$Bz_i + Az = \Psi(t), \quad t = n\tau \geq 0, \quad z(0) = 0, \quad (21)$$

де $z = z(t) \in H_n$ при $t \in \overline{\omega}_\tau$, лінійні оператори B та A визначаються згідно (10), (11), права частина $\Psi_i = \psi_i$, $i = 1, \dots, N-1$.

Згідно з наведеним вище, для різницевої схеми (21) виконується апriorна оцінка

$$\|z^{n+1}\|_{A_0} \leq \exp\left(\frac{v^2}{4\mu}(t_{n+1} + 1)\right) \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \tau \|\Psi(t_k)\|^2\right)^{1/2}.$$

Перейдемо до оцінки в рівномірній нормі

$$\begin{aligned} \|z\|_C &= \max_{0 \leq i \leq N} |z_i| \leq \frac{\sqrt{1}}{2\mu} \left(\mu \sum_{i=0}^N z_{x,i}^2 h \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{1}}{2\mu} \|z(t_{n+1})\|_{A_0} \leq \frac{\sqrt{1}}{2\mu} \exp\left(\frac{v^2}{4\mu}(t_{n+1} + 1)\right) \times \\ &\times \left(\sum_{k=0}^n \tau \|\Psi(t_k)\|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким чином, різницева схема (4)-(6) стійка за правою частиною у рівномірній нормі та має місце збіжність чисельного розв'язку задачі (4)-(6) до розв'язку задачі (1)-(3) зі швидкістю $O\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} + \tau h\right)$ в нормі $\|\cdot\|_C$ за умов

$$\frac{\tau}{h} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Висновки

Із отриманої для різницевої схеми (4)-(6) апriorної оцінки (19) випливає, що досліджуваний метод розв'язку одновимірної задачі конвективної дифузії стійкий за початковими даними та за правою частиною в нормі оператора A_0 .

Також оцінка (19) дає змогу визначити залежність стійкості та збіжності схеми від величин швидкості конвекції та коефіцієнта дифузійного перенесення. Очевидно, що при зростанні швидкості конвекції стійкість схеми погіршується, а при збільшенні коефіцієнта дифузії, навпаки, посилюється.

Нерівність (22) доводить збіжність розв'язку різницевої задачі (4) – (6) до розв'язку диференційної задачі (1) – (3) в нормі $\|\cdot\|_C$.

$$\|y - u\|_C \leq M \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} + \tau h \right)$$

за умови, що $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0$.

Список використаних джерел

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделирование природных и техногенных процессов в атмосфере. – Київ: Наукова Думка, 2006. – 542 с.
2. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 376 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
6. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ, 2007, №3, С. 64 – 74.
7. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Теоретическое исследование одного численного метода решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ, 2008, №2, С. 161 – 170.

Надійшла до редколегії 10.12.2008

УДК 004.7

Демківський Є.О.* , к.т.н.,
Шевченко В.П.* , к.ф.-м.н., доц.

Demkivskiy I.O., c.t.s.,
Shevchenko V.P., c.ph.-m.s., as.prof.

Технологічні та методологічні аспекти розвитку електронного навчання

Technological and methodological aspects of E-learning development

В статті аналізується стан розвитку електронної освіти в Україні та закордоном. Перша форма електронної освіти - дистанційне навчання - з розвитком методологій викладання та технічних умов трансформується у змішане навчання, яке поєднує всі можливі технології. Все більший вплив на електронні форми навчання справляють також мобільні технології.

Ключові слова: електронне навчання, дистанційне навчання, змішане навчання, мобільні технології, синхронне та асинхронне навчання

The article analyzes the conditions of E-learning development in Ukraine and abroad. The first form of E-learning – distance learning – due to the development of education methods and technical conditions transform to blended learning, which unite all the possible technologies. Mobile technologies have larger and larger impact on electronic learning.

Key Words: electronic learning, distance learning, blended learning, mobile technologies, synchronized and unsynchronised learning.

*E-mail: demkivsky@gmail.com, vpsh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив проф., д.т.н. Ф.Г.Гарашенко

Статтю підготовлено за підтримки проекту Erasmus Mundus External Cooperation Window Lot-6

Вступ

Використання Інтернету в Європі і, зокрема, в Україні для інформаційних і комунікаційних потреб працівниками різних галузей, студентами і викладачами постійно зростає і, безумовно, стає невід'ємною частиною повсякденного життя [1]. На сьогоднішній день студенти значною мірою інтегрували використання цифрових технологій у повсякденне життя. Дослідження [2] свідчать, що більшість навчальних матеріалів студенти отримують через Інтернет. Однак, слід зауважити, що віртуальні семінари і тренінги використовуються значно менше. Перші місця у такому використанні займають медицина і комп'ютерні науки. Використання інтерактивних освітніх технологій за останні 5 років збільшилося удвічі, в той час як обсяг традиційних матеріалів на університетських сайтах практично не змінився.

Мережеві сервіси в університетських кампусах все більше і більше пропонують онлайн-доступ до бібліотек, складання іспитів, проведення оцінювань виконання різних видів завдань. Постійний акцент 90-х років на мультимедійному змісті зайшов у тупик. Сьогодні Інтернет є у меншій мірі постачальником мультимедійного контенту, а у більшій – джерело даних, інформації і, головне, засіб комунікації в освітньому процесі [2].

Поступова комп'ютеризація управління у навчальних закладах призвела до електронної інтеграції управлінського та освітнього процесів з доступом в режимі онлайн. Більше того, реалізація подібних проектів вказала на необхідність перебудови організаційної структури навчальних закладів: розташування бібліотек, серверних вузлів, медійних сервісів.

Одночасно поширення електронної освіти призвело до істотних змін у поведінці і свідомості як студентів, так і викладачів. Для багатьох студентів Google та інші пошукові сервери стають головним інформаційним знаряддям, а використання «паперових» бібліотек постійно зменшується. Семінари зі списком Інтернет-посилань та повним набором необхідної літератури, доступної онлайн, стають типовим форматом проведення занять. Люди, які навчаються в онлайн, мають доступ до високоякісних мережевих навчальних джерел і можуть шукати інформацію на форумах, а також розмішувати на них свої питання чи відгуки.

В наш час, коли Інтернет досяг значного розвитку, навіть відсутність персонального комп'ютера не буде перешкодою для збору інформації чи «нишпорення» по Інтернету. У різних кутках світу з'явилися інтернет-кафе, і низькі тарифи чи навіть безкоштовний

безпровідний доступ став вже звичним явищем у багатьох найбільших містах.

Інша сторона медалі – плагіат та подання скопійованих чи куплених наукових досліджень. З розширенням інформаційних каналів і демократизацією доступу до них ці процеси вже стають неконтрольованими, особливо тому що правова система в частині вищої освіти досі цілком ігнорувала цю проблему.

Сьогодні у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка і, зокрема, на факультеті кібернетики, є велика колекція «відцифрованих» навчальних матеріалів у різних формах: електронні конспекти, презентації, лабораторні роботи тощо. Їхня кількість вже досягла такого об'єму, що наразі одним з основних питань стала систематизація і перетворення цих матеріалів у єдину керовану систему, інтегровану у навчальний процес. Така система має включати в себе усі етапи, починаючи з запису на курси, постановки задач та завантаження навчальних матеріалів, і закінчуючи підрахунком кінцевих балів і проходженням тестів і іспитів. Тому на передній план виходить проблема вибору, впровадження і інформаційного наповнення всеохоплюючої загальної системи автоматизації навчального процесу (САНП) для університету в цілому, інститутів та факультетів. В даному дослідженні враховується досвід використання різних САНП в Інституті міжнародних відносин та ІОЦ Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Берлінському університеті імені Хумбольдта (Humboldt University's of Berlin), Києво-Могилянській академії, інших зарубіжних та українських вищих навчальних закладах.

Недоліки існуючих підходів

Доступ до Інтернету і комп'ютерні знання. Дослідження ступеня проникнення Інтернету в нашій країні показують, що багато груп населення на сьогоднішній день не мають можливості використати сучасні комунікаційні технології по фінансових, технічних, ментальних і інших причинах. Крім того, людина, що бажає навчатися дистанційно, повинна мати знання комп'ютерних технологій і програм.

Мотивація. Не останнім фактором для успішного одержання освіти дистанційно є особистісна характеристика індивідуума. При відсутності щоденного контролю, як це прийнято при традиційній очній формі навчання, необхідно мати чітку мотивацію. Не виникає сумнівів, що «живий» обмін ідеями, досвідом, психологічна

підтримка групи і момент змагальності при дистанційній формі навчання є певною мірою втраченими. Саме тому така форма навчання небажана для людей, що не мають особистісних якостей самоорганізації і дисципліни.

Технічні спеціальності. Дистанційна форма навчання більшою мірою підходить для одержання освіти в області фундаментальних наук та гуманітарних спеціальностей. Технічні спеціальності, у порівнянні з гуманітарними, користуються меншим попитом при такій формі навчання, тому що освоєння їх вимагає проведення великої кількості практичних і лабораторних робіт.

Трансформація поняття електронного навчання (ЕН).

Усе більшою мірою освіта перестас ототожнюватися з формальним шкільним і навіть вузівським навчанням. Будь-яка діяльність нині може трактуватися як освітня, якщо вона має своєю метою змінити установки і моделі поведінки індивідів шляхом передачі їм нових знань, розвитку нових вмінь і навичок. Функції освіти виконують різноманітні соціальні інститути, а не тільки школи і вузи. Важливі освітні функції беруть на себе суб'єкти підприємницької діяльності, наприклад, великі промислові підприємства обов'язково мають у своєму складі підрозділи, що займаються підготовкою і перепідготовкою кадрів. В зв'язку з цим виникає потреба в розширенні та трансформації як самого поняття освіта, так і способів донесення інформації при наданні освітніх послуг.

Трансформація форм і методів освіти, зокрема, електронної, привела до появи поняття «змішане навчання» (*blended learning*) [3], яке використовується для опису рішень, у яких комбінуються різні способи доставки навчального контенту, такі як програмне забезпечення спільної роботи, курси, побудовані на веб-технологіях, методики керування знаннями та інші. Цей же термін використовується для опису навчання, що сполучає різні види навчальних заходів, включаючи очне навчання в класі, електронне навчання онлайн і самонавчання на робочому місці.

Менш популярне і дещо обмежене визначення *змішаного навчання* – це інтеграція навчання в групі і самонавчання, що звичайно проводиться як в аудиторії, так і онлайн. Така точка зору визнає, що є ситуації, коли найбільш доречним є навчання в класі з кваліфікованим

викладачем, є ситуації, у яких онлайн-навчання працює краще, і є ситуації, у яких розсудливе сполучення обох підходів є найкращим. Рішення про комбінування даних підходів ґрунтується певною мірою на аналізі плану навчання і на врахуванні інтересів осіб, що навчаються, включаючи питання ціни і продуктивності (швидкість у підготовці, час на навчання, можливість поновлення знань).

Змішане навчання може використовувати різні навчальні стилі. Щоб дійти до кожного студента, викладач, у загальному випадку, повинен застосувати суміш навчальних методик.

У наш час, термін «змішане» почав співвідноситися з широким колом методик навчання, доступних професіоналові: в класі під керівництвом інструктора (instructor-led training), синхронне або асинхронне електронне навчання (synchronized/unsynchronized e-learning), мобільні технології і навчання під час роботи (on-the-job training).

Характеризуючи освітній процес великого ВНЗ в цілому, має сенс говорити про «змішаний» характер навчання, що включає в себе всі різноманітні форми навчання [4].

У даному контексті під формою навчання розуміється структура організації навчального процесу, пов'язана з:

- часом і місцем навчання, кількістю осіб, що навчаються;
- порядком взаємодій між особами, що навчаються, викладачем, адміністратором;
- дидактичними засобами (методичне забезпечення, інструментальні середовища тощо).

На сьогоднішній день можна виділити ряд ключових форм навчання:

- 1) аудиторне навчання, що припускає безпосередній контакт особи, що навчається, і викладача;
- 2) кейс-навчання, орієнтоване на самостійну роботу осіб, що навчаються, забезпечене набором дидактичних засобів (підручники, навчально-методичні вказівки на різних видах носіїв), достатніх для самостійного вивчення предмету;
- 3) навчання за допомогою мережі (e-learning), що організується за допомогою інструментального середовища.

Для ключових форм навчання доцільно розробити типові технології, описати їх у стандарті, що регламентує діяльність ВНЗ в напрямку освітніх технологій. На базі типових технологій зручно розробляти технології з конкретних дисциплін і спеціальностей.

Навчання з тієї або іншої спеціальності містить в собі визначені форми навчання в певній пропорції, що залежить від особливостей дисципліни.

Ефективність освоєння курсу буде прямо залежати від правильно обраного співвідношення і характеру подання матеріалу, винесеного на аудиторне і самостійне вивчення. В оптимальному сполученні форм і методів навчання – суть технології змішаного навчання.

Підготовка методичних матеріалів (дидактичної основи курсу), придатних для повноцінного самостійного вивчення, є на сьогоднішній день обов'язковою умовою реалізації будь-якої технології. З огляду на різний рівень підготовки і характер сприйняття та засвоєння матеріалу, дидактичне забезпечення технології повинне не тільки гарантувати викладання обов'язкового мінімуму, але також дати можливість здібним студентам одержати максимальну кількість знань і вмінь. Асинхронність процесів навчання дає можливість студентам більш продуктивно витратити свій час.

Основні відмінні моменти технології змішаного навчання:

1. Створення моделі «особи, що завершила навчання» - результату навчання, по кожній дисципліні.
2. Розробка індивідуальної траєкторії (road map) навчання для кожної людини, що навчається.
3. Асинхронний режим роботи.
4. Продуктивні методи навчання (проектний метод, дослідницькі методи, тестові технології, мозковий штурм, навчання в групі, ділові ігри тощо).
5. Система самоконтролю і контролю, що виливається у підсумковий контроль знань.
6. Дидактичне забезпечення в електронному вигляді, достатнє для самостійного опрацювання курсу.
7. Сполучення аудиторних семінарських (практичних) завдань з онлайн тренінгами і можливостями мережевої взаємодії (форуми, консультації, чати).

Досвід провідних університетів свідчить, що для проведення навчання за змішаною технологією варто врахувати декілька рекомендацій:

1. Основні навички навчання за цією технологією повинні формуватися у студентів з самого початку у рамках дисципліни «Вступ до спеціальності».
2. Необхідна розробка повноцінних навчально-методичних комплексів з усіх

дисциплін, кейсів дидактичних матеріалів та їх мережових реалізацій.

3. Процес навчання повинен ґрунтуватися на відносинах «суб'єкт-суб'єкт»; поняттях «особи, що навчається» і «особи, що навчає», кожний студент повинен обов'язково пройти стадію «особи, що навчає» (виступити в ролі викладача).

4. У особи, що навчає, необхідна наявність компетенції тьютора, для забезпечення можливості проведення навчання за допомогою мереж.

Для багатьох організацій змішане навчання здається настільки логічним, що вони прийняли його за основну доктрину, яка припускає тільки плановий підхід, у той час як інші підходи можуть бути більше адекватними і більш рентабельними [5]. Коли рішення (онлайн або в аудиторії) прийнято, інші можливості найчастіше вже не розглядають. Іноді це є наслідком обмеженої точки зору особи, що приймає рішення, іноді – недостатньої кількості часу на те, щоб підхід став більш зрілим. У кожному разі поняття змішаного навчання змінюється і розширюється.

Таким чином, успішна програма змішаного навчання складається з 8-ми ключових етапів:

1. *Підготовка* – початковий етап, що забезпечує особам, що навчаються, одержання базових навичок і загального розуміння з метою успішного проходження наступних етапів.

2. *Початок* – етап представлення, на якому учасники дізнаються про цілі, завдання і ключові ідеї того, чому вони будуть навчатися.

3. *Демонстрація* – демонстраційний етап висуває на перший план методи, способи, концепції і підходи які будуть застосовані в процесі навчання.

4. *Практика* – протягом практичного етапу учасники одержують можливість засвоїти нові навички, повторити вивчене раніше і забезпечити довгострокове запам'ятовування.

5. *Звіт* – оціночний етап, який являє собою звіт про використання навичок у формальній/офіційній ситуації навчання, що дозволить застосовувати навички і в неформальному середовищі.

6. *Підтримка* – стає потрібною у неформальній обстановці, коли учасники починають використовувати у роботі той досвід, який вони отримали в результаті офіційного навчання.

7. *Інструктаж* – на цьому етапі учні одержують допомогу досвідчених менеджерів, співробітників, наставників або експертів.

8. *Об'єднання* – етап спільної роботи дозволяє учасникам спільно вирішувати проблеми.

Аналізуючи роботу фахівців з навчання й розвитку персоналу, можна прийти до висновку, що виконуються, як правило, 2-й, 3-й і 4-й етапи, тобто викладачі здебільшого зневажають етапи підготовки, підтримки і звітності.

Для успішного виконання 1-го етапу потрібно:

1) провести віртуальну або очну зустріч, що роз'яснила б хід навчання і допомогла б учасникам зрозуміти, що в програмі важливо саме для них;

2) використати засоби системи керування навчанням, щоб звернутися до більшої кількості осіб а, отже, до різних цільових груп;

3) забезпечити співробітників підтримкою технічної служби і спростити роботу в питаннях використання мережі, скачування файлів тощо.

Для закріплення і вдалого практичного застосування отриманих знань необхідно забезпечити підтримку і контроль у період після проходження навчання, забезпечити доступ до інтернет-конференцій та форумів, онлайн бібліотек, об'єднати зусилля консультантів і експертів для очних зустрічей і обговорення результатів діяльності, щоб «перевірити», «підтримати», «інструктувати» і «об'єднати».

Електронне навчання і мобільні технології – лідери еволюції

Останні тенденції світової освіти вказують на стрімке збільшення частки використання в електронній освіті мобільних технологій. Це підтверджується останніми дослідженнями [4], які відзначають прагнення збільшувати інвестиції в мобільні навчальні технології в найближчі роки.

Більшість цих інвестицій націлені на прагнення відповідати ситуації зі збільшенням мобільності робочої сили. Збільшується популярність новітніх, іноді ще не дуже розвинутих, мобільних технологій, які дозволяють учням, незалежно від місцеперебування, через мобільні телефони і комунікатори, одержувати аудіо- і відеоматеріали. Одночасно відзначається уповільнення росту масштабів навчання з викладачем і навчання з використанням паперових текстових матеріалів.

При визначенні найбільш адекватної суміші методик навчання, фахівці повинні враховувати переваги кожного методу, пов'язані з ним витрати і необхідні ресурси. В таблиці показані

основні аргументи для кожного методу проведення навчання

Таблиця

Метод проведення навчання	Аргумент 1	Аргумент 2	Аргумент 3
Навчання з викладачем у класі	Найбільш підходящий метод для певного типу контенту	Значимість взаємодії студента і викладача	Значимість безпосереднього контролю студента викладачем
Синхронне електронне	Менш затратний метод, ніж навчання в класі	Найбільш підходящий метод для певного типу контенту	Значимість взаємодії студента і викладача в реальному часі
Асинхронне електронне	Гнучкий часовий графік при форматі самонавчання	Менш затратний, ніж навчання в класі	Охоплення великої аудиторії при малих витратах ресурсів
Мобільні технології	Переносимість контенту дуже значима для тих, хто навчається	Найбільш підходящий метод для певного типу контенту	Мережеве з'єднання не завжди можливо
Формальне під час роботи	Одержання знань вимагає постійного наставництва	Потрібно для підкріплення інших форм навчання	Пропаганда культури наставництва

Висновки

Проведені дослідження демонструють важливість зв'язку між типом контенту і методом проведення навчання, а також показують, що взаємодія студент-викладач має важливе значення при визначенні методу, що, зокрема, визначає превалювання традиційних методів навчання. Наприклад, значимість взаємодії студент-викладач залишається головною рушійною силою при виборі як навчання в класі, так і синхронного електронного навчання. У той же час гнучкість і вартість – аргументи вибору асинхронного електронного навчання [5].

Якщо відкинути упередженість і традиційний педагогічний консерватизм, то слід визнати, що швидкі зміни в ЕН і широке застосування мобільних технологій допоможуть перевести сферу навчання і розвитку персоналу в нову фазу. Вже зараз ми можемо описати 5 фундаментальних змін, які стануться з ЕН у найближчий час.

1. ЕН вийде за рамки суто дистанційного навчання.
2. Дистанційне навчання переміститься на робоче місце, а з розвитком сучасних мобільних і телекомунікаційних технологій поняття «робоче місце» набуває нового значення.
3. Буде перевизначене поняття «змішаного навчання».

4. ЕН буде більше орієнтоване на надбання конкретних практичних знань.

5. ЕН буде більше адаптоване відповідно до вимог і технологічних можливостей сьогодення.

Список використаних джерел

1. Анисимов А.В., Бублик В.В., Шевченко В.П. У истоках информационного общества // Мир информационных технологий – 2004, – №1 – С 11-13.
2. Technologies for E-Learning and Digital Entertainment, – Lecture Notes on Computer Science #3942. Springer, 2006, – 1391 p.
3. <http://www.wikipedia.org/>
4. The handbook of blended learning/ Global Perspectives, Local Designs / Editors Curtis J. Bonk, Charles R. Graham, – Pfeiffer, 2006, – 575 p.
5. Смешанное и корпоративное обучение. Труды Всероссийского научно-методического симпозиума «СКО-2007», – Ростов-на-Дону, 2007, – 416 с.

Надійшла до редколегії 18.06.2008

УДК 517.929

Джалладова Ірада Агаєвна*, кандидат. фіз.-мат.
наук, доцент,

Стабілізація розв'язків системи лінійних стохастичних різницевих рівнянь

У роботі отримано умови стійкості нульових розв'язків систем стохастичних різницевих рівнянь. При дослідженні використовується другий метод Ляпунова. Умови стійкості мають вигляд виконання матричних нерівностей.

Ключові слова: системи різницевих рівнянь, стійкість у середньому квадратичному, функція Ляпунова, матричні рівняння.

*E-mail: irada-05@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Фундаментальні результати з проблем стійкості розв'язків динамічних систем під впливом марківських обурень освітлені в роботах [1-4]. В роботі [5] розглянуті питання динаміки звичайних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями. Вплив марковських збурень на стійкість динамічних систем досліджено в монографіях [6-9]. Поведінка багатьох процесів в природі, економіці, медицині залежить не тільки від поточного стану системи, але і від стану в попередні моменти часу. Зокрема системи різницевих рівнянь з марківськими коефіцієнтами є математичною моделлю для таких явищ і процесів. Відмітимо, що дослідження такого типу систем має істотні труднощі і досі є актуальною задачею. У запропонованій роботі досліджується стійкість в середньому квадратичному розв'язків систем лінійних стохастичних різницевих рівнянь з коефіцієнтами, залежними від марківського ланцюга спеціального вигляду. Знайдено необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості, які мають вигляд матричних нерівностей.

1. Постановка проблеми. Розглядається система лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = A(\xi_k)X_k + H(\xi_k)u(k)X_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

I. A. Dzhalladova, Ph.D., Docent

Stabilization of solutions the system of linear stochastic difference equations

In paper we received condition of stochastic difference equations. We are using second method of Lyapunov functions. We are finding necessary and enough conditions of asymptotic stability which satisfy matrix inequities.

Key Words: differential equations, asymptotic stability in mean quadratic, Lyapunov functions, matrix inequities.

ξ_k -марківський випадковий ланцюг, що приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з ймовірностями

$$p_j(k) = P\{\xi_k = \theta_j\} \quad (j = 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Припускаємо, що ймовірності $p_j(k)$, $j = 1, 2, \dots$ задовольняють систему різницевих рівнянь

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^n \pi_{js} p_s(k), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Перехідні ймовірності

$$\pi_{js} = P\{\xi_{k+1} = \theta_j | \xi_k = \theta_s\} \quad (j, s = 1, \dots, n)$$

задовольняють сформульованим в [1] умовам

$$\pi_{js} \geq 0, \quad j, s = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_{js} = 1, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Випадкові величини $u(k)$ - некорельовані і задовольняють наступним умовам

$$\langle u(k) \rangle = 0, \quad \langle u(k)u(s) \rangle = 0, \quad k \neq s, \quad \langle u(k) \rangle. \quad (3)$$

Знак $\langle \rangle$ означає математичне сподівання. У окремому випадку умови (3) виконуються для стохастичних різницевих рівнянь [2], якщо вважати, що

$$u(k) = w(k+1) - w(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $w(k)$ - нормальний вінерівський випадковий процес.

2. Побудова функції Ляпунова для системи різницевих рівнянь. Введемо додатно визначену квадратичну форму

$$w(X, \xi) = X^* B(\xi) X, \quad B(\xi) > 0,$$

яка задовольняє умовам

$$\lambda_1 \|X_k\|^2 \leq w(X_k, \xi_k) \leq \lambda_2 \|X_k\|^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0. \quad (4)$$

Тут і далі матрична нерівність $B > 0$ для симетричної матриці B означає, що квадратична форма $X^* B X$ є додатно визначеною. Функцію Ляпунова $v(k, X, \xi)$ для системи різницьових рівнянь (1) визначимо за формулою

$$v(k, X, \xi) = \sum_{j=k}^{\infty} \langle w(X_j, \xi_j) | X_k = X, \xi_k = \xi \rangle. \quad (5)$$

Введемо, крім того, частинні функції Ляпунова

$$v_s(k, X) = \sum_{j=k}^{\infty} \langle w(X_j, \xi_j) | X_k = X, \xi_k = \theta_s \rangle, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Оскільки функції $v_s(k, X)$ є квадратичними за X , то вважаємо, що

$$v_s(k, X) = X^* C_s(k) X, \quad C_s(k) > 0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Надалі вважаємо, що ряди у залежностях (5), (6) збігаються.

Нульовий розв'язок системи різницьових рівнянь (1) називатимемо L_2 -стійким, якщо для будь-якого іншого розв'язку X_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) системи (1) сходиться ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \|X_k\|^2 \rangle. \quad (8)$$

Нульовий розв'язок системи різницьових рівнянь (1) називається асимптотично стійким в середньому квадратичному, якщо для будь-якого іншого розв'язку X_k виконано співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \|X_k\|^2 \rangle = 0. \quad (9)$$

Неважко побачити, що з L_2 -стійкості нульового розв'язку системи рівнянь (1) випливає асимптотична стійкість розв'язків в середньому квадратичному.

3. Основний результат. Сформулюємо основний результат, отриманий в роботі.

Теорема 1. Нехай виконано умови (4). Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних різницьових рівнянь (1) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб існували частинні функції Ляпунова $v_s(k, X)$ ($s = 1, \dots, n$).

Доведення. Якщо розв'язок системи (1) L_2 -стійкий, то збігається ряд (8) і, отже збігається ряд (6), що визначає функцію Ляпунова. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай збігається ряд (6). Це означає, що збігається і ряд (8). Тоді, в силу умов (4), отримаємо, що маємо L_2 -стійкість нульового розв'язку.

Оскільки із збіжності ряду загальний член ряду прямує до 0, то із L_2 -стійкості випливає асимптотична стійкість розв'язків системи рівнянь (1).

Теорема 2. Нехай коефіцієнти системи різницьових рівнянь (1) залежать від кінцевозначного марківського ланцюга ξ_k що приймає значення $\theta_1, \dots, \theta_n$ з ймовірностями

$$p_j(k) \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$$

які задовольняють систему (2) і від випадкового стандартного білого шуму. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (1) був асимптотично стійким у середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь

$$C_s = B_s + \sum_{i=1}^n \pi_{is} \{A_i^* C_i A_i + A_i^* C_i H_i\} \quad (10)$$

при $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) мала єдиний додатний розв'язок $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$)

Доведення. Для скорочення запису вважатимемо, що

$$A_s = A(\theta_s), \quad B_s = B(\theta_s), \quad H_s = H(\theta_s) \quad s = 1, 2, \dots, n$$

Розглянемо побудову функцій $v_s(k, X)$, $s = 1, 2, \dots, n$. У ряді (6) виділимо окремо перший доданок

$$v_s(k, X) = \langle w(X, \theta_s) \rangle + \sum_{i=1}^n \pi_{is} \langle v_i(k+1, A_i X + H_i u(k+1)) \rangle = w(X, \theta_s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \pi_{is} \{X^* A_i^* (k+1) A_i X + X^* H_i^* C_i (k+1) H_i X\}$$

Для матриць $C_s(k)$ знаходимо систему рівнянь

$$C_s(k) = B_s +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \pi_{is} (A_i^* C_i(k+1) A_i + A_i^* C_i(k+1) H_i). \quad (11)$$

Оскільки коефіцієнти системи (1) не залежать явно від аргументу, то справедлива рівність

$$C_s(k) = C_s = \text{Const} \quad (s = 1, \dots, n),$$

то система рівнянь (11) прийме вигляд (10).

При цьому залежності (6), (7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} v_s(k, X) &= X^* C_s X = \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \langle w(X, \xi_j) | X_k = X, \xi_k = \theta_s \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Якщо система рівнянь (10) для симетричних матриць $C_s > 0$ має єдиний розв'язок, то матриці $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) співпадають з матрицями C_s ($s = 1, \dots, n$) певними рівняннями (12). Таким чином теорема доведена.

У частинному випадку, що відповідає $H(\theta_k) = 0$, ($k = 1, \dots, n$), приходимо до відомого результату [3].

Теорема 3. Для того, щоб нульовий розв'язок різницевого рівняння

$$X_{k+1} = A(\xi_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де ξ_k - марківський ланцюг, визначений рівняннями (2), був стійким у середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь

$$C_s = B_s + \sum_{i=1}^n \pi_{is} A_i^* C_i A_i, \quad (s = 1, \dots, n) \quad (13)$$

при $B_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) мала єдиний розв'язок $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$).

Приклад. Нехай марківський ланцюг ξ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) приймає два стани θ_1, θ_2 з ймовірностями

$$p_j(k) = P\{\xi_k = \theta_j | j = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \text{які}$$

задовольняють систему рівнянь

$$p_1(k+1) = \pi_{11} p_1(k) + \pi_{12} p_2(k),$$

$$\pi_{1s} \geq 0 \quad (k, s = 1, 2)$$

$$p_2(k+1) = p_{21} p_1(k) + \pi_{22} p_2(k),$$

$$\pi_{11} + \pi_{21} = 1, \quad \pi_{12} + \pi_{22} = 1$$

Покладемо $B_s = E > 0$, E - одинична матриця і отримаємо систему матричних рівнянь

$$C_1 = E + \pi_{11} A_1^* C_1 A_1 + \pi_{21} A_2^* C_2 A_2, \quad (14)$$

$$C_2 = E + \pi_{12} A_1^* C_1 A_1 + \pi_{22} A_2^* C_2 A_2.$$

Для того, щоб розв'язок системи (13) був асимптотично стійким у середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (14) мала єдиний додатно визначений розв'язок $C_s > 0$ ($s = 1, 2$). Цей розв'язок можна отримати методом послідовних наближень.

Для асимптотичної стійкості розв'язків системи рівнянь (1) в середньому квадратичному достатньо, щоб при деяких симетричних додатно визначених матрицях $C_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$) виконувалися матричні нерівності

$$C_s - \sum_{i=1}^n \pi_{is} A_i^* C_i A_i > 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

Література

1. Тихонов В.Н., Миронов М.А. Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977. - 488 с.
2. Королюк В. С. Стохастические модели систем. - Киев: Наукова думка, 1989. - 210 с.
3. Корневский Д.Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах. - Киев: Академперіодика, 2008. - 128 с.
4. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. - М. Изд-во РУДН, 1996. - 258 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища школа, 1987. - 287 с.
6. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1987. - 328 с.
7. Korolyuk V.S., Limnios W. Stochastic systems in merging phase space. - London: Word Scientific, 2006. - 331 с.
8. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. - Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. - 222 с.
9. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 369 с.

Надійшла до редколегії 12.09.08.

УДК 510.5+519.7

Карнаух Т.О., к.ф.-м.н.

Властивості ірраціональних точок області визначення функцій, заданих магазинними R -перетворювачами

Розглядаються властивості ірраціональних точок області визначення функцій, заданих магазинними R -перетворювачами, а саме: необхідні умови визначеності в точці, прийняття в ірраціональній точці раціонального значення, диференційовності в ірраціональній точці.

Ключові слова: R -перетворювач, магазинна пам'ять, ірраціональність.

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

У роботах [1, 2] було введено поняття R -перетворювача, як пристрою, що перероблює нескінченні двійкові зображення дійсних чисел, та спосіб задання ним дійсних функцій. В [3] розглядалося поняття магазинного R -перетворювача (тобто, з магазинною пам'яттю). Зокрема, було доведено, що функція, задана магазинним R -перетворювачем, в раціональних точках приймає раціональні значення. Також в [2] було доведено (теорема 5), що всюди диференційовна на проміжку та задана магазинним R -перетворювачем дійсна функція необхідно є лінійною на цьому проміжку.

Відомо [4, 5], що за допомогою скінченних R -перетворювачів можна задавати фрактальні множини, в тому числі як область визначення функції, заданої R -перетворювачем.

Рухаючись у напрямку дослідження відповідних властивостей магазинних R -перетворювачів у цій роботі насамперед розглядаються ірраціональні точки області визначення дійсних чисел. З використанням методу розкладу зображень дійсних чисел також вдалося встановити ще кілька цікавих властивостей функцій, заданих магазинними R -перетворювачами.

Означення магазинного R -перетворювача

Нехай

$$\Sigma_p = \{0, 1, \dots, p\}, \Sigma_{\bar{p}} = \{0, 1, \dots, \bar{p}\}.$$

$$D(p) = (\{0\} \cup 1\Sigma_p^* \nabla \Sigma_p^0 \cup (\{0\} \cup 1\Sigma_{\bar{p}}^*) \nabla \Sigma_{\bar{p}}^0,$$

$$D = D(1), D'' = D(2).$$

Скористаємось поняттями R -перетворювача, $O(A)$, $O(A)$, f_A , $\| \cdot \|$, F_0 , K_0 прийнятими в роботі [1].

Магазинний R -перетворювач – це п'ятірка $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$, де

Q – скінченна множина станів;

Tetyana O. Karnaukh, PhD.

Domain irrational points properties of functions given by pushdown R -transducers

Domain irrational points properties of functions given by pushdown R -transducers are discussed. We consider some necessary conditions for function determinacy at irrational point, for rational function value at irrational point and differentiability at irrational point.

Key Words: R -transducer, pushdown memory, irrationality.

Γ – скінченна множина символів магазину;

$H \subseteq Q \times (\Sigma_0 \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times K \times \Gamma^* \times \Sigma_0^*$ – скінченна система команд, де для довільних $q \in Q$, $x \in \Sigma_0$, $c \in \Gamma$ множина $H(q, x, c) \cup H(q, \epsilon, c)$ містить не більше одного елементу;

q_0 – виділений початковий стан, $q_0 \in Q$;

$\#$ – виділений початковий символ робочої стрічки, $\# \in \Gamma$.

Магазинному R -перетворювачу $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$ поставимо у відповідність R -перетворювач $B = (K, H', q_0')$, де

$$K = Q \times \Gamma^*.$$

$$H' = \{((q, \xi), x, (p, \gamma), u) \mid (q, x, c, p, \gamma, u) \in H, \xi \in \Gamma^*\}.$$

$$q_0' = (q_0, \#).$$

тоді для A за означенням вважаємо $O_1(A) = O_1(B)$, $O(A) = O(B)$, $f_A = f_B$, $\bar{f}_A = \bar{f}_B$.

Нагадаємо, що R -перетворювач A задає дійсну функцію $\bar{f}_A$: $\bar{f}_A(x) = \|f_A(w)\|$, де $x = \|w\|$, $w \in D(K_0)$, а $\|u\|$ – дійсне число, що відповідає двійковому запису u .

Будемо казати, що результат роботи R -перетворювача A над вхідним ω -словом w визначений, якщо R -перетворювач A зчитує кожен символ ω -слова w та пише на вихід ω -слово з множини D'' .

Без обмеження загальності можемо вважати, що магазинний R -перетворювач на кожному кроці записує на вихідну стрічку не більше одного символу. Символ $\#$ не стирається в процесі роботи й не з'являється усередині магазину. Також можна вважати, що система команд R -перетворювача є повною, тобто, у процесі ро-

боти над кожним ω -словом R -перетворювач завжди може виконати один крок. (Якщо це не так, то додамо фіктивний стан, з якого не можна вийти й у якому на вихід пишеться винятково ε ; дана операція не змінить відображення $O(A)$.)

Нехай запис $q, w, \gamma_1 \rightarrow^* p, u, \gamma_2$ означає, що зі стану q зі словом γ_1 в магазині магазинний R -перетворювач переходить у стан p , змінюючи вміст магазину на γ_2 і записуючи на вихід слово u .

Лема про розклад зображень

За лемою 4 [3] для магазинного R -перетворювача $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$ для довільного ω -слова $w \in D$, кожен символ якого зчитується R -перетворювачем, існує розклад $w = v_0 v_1 \dots$ такий, що $(O_1(A))(w) = y_0 y_1 \dots$, причому $v_i \neq \varepsilon$ ($i \geq 0$), та для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(O_1(A))(v_0 v_{i_1} v_{i_2} \dots) = y_0 y_{i_1} y_{i_2} \dots$. Якщо ж R -перетворювач зчитує лише скінченний префікс w' ω -слова $w = w' w'' \in D$, то для цього префіксу існує розклад $w' = v_0 v_1 \dots$ такий, що $(O_1(A))(w') = y_0 y_1 \dots$, причому $v_i = \varepsilon$ для всіх $i \geq n$, та для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(O_1(A))(v_0 v_{i_1} v_{i_2} \dots) = y_0 y_{i_1} y_{i_2} \dots$. Нехай $w = (v_0 v_1 \dots) w''$. Отримані розклади назвемо стандартними.

Для подальшого нам знадобляться деякі версії цієї леми.

Лема 1. Для магазинного R -перетворювача $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$ довільне ω -слово $w \in \text{Dom } f_A$ можна подати у вигляді $w = w_0 w_1 \dots$ так, щоб $(O_1(A))(w) = u_0 u_1 \dots$, $w_i \neq \varepsilon$, $u_i \neq \varepsilon$ ($i \geq 0$), слова w_0 та u_0 містили символ ∇ та для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ результатом роботи R -перетворювача над вхідним ω -словом $w_0 w_{i_1} w_{i_2} \dots$ було ω -слово $u_0 u_{i_1} u_{i_2} \dots \in D''$.

Доведення. Якщо $w \in \text{Dom } f_A$, то у стандартному розкладі $w = v_0 v_1 \dots$ знайдемо найменше значення n , для якого обидва слова $v_0 v_1 \dots v_n$ та $y_0 y_1 \dots y_n$ містять символ ∇ . Покладемо $w_0 = v_0 v_1 \dots v_n$, $u_0 = y_0 y_1 \dots y_n$. Подальші слова розкладів $v_0 v_1 \dots$ та $y_0 y_1 \dots$ відповідно послідовно згрупуємо так, щоб усі слова w_i та u_i були непорожні. Тоді за побудовою $u_0 u_{i_1} u_{i_2} \dots \in D''$. Лема доведена.

Лема 2. Для магазинного R -перетворювача $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$ довільне ω -слово $w \in D \setminus \text{Dom } f_A$, яке A зчитує до кінця, можна подати у вигляді $w = (w_0 w_1 \dots)$ так, щоб $w_i \neq \varepsilon$ ($i \geq 0$) та для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ виконувалось $w_0 w_{i_1} w_{i_2} \dots \in D \setminus \text{Dom } f_A$.

Доведення. Розглянемо стандартний розклад $w = v_0 v_1 \dots$, та розберемо ситуації, за яких для $w \in D$ виконано $w \in \text{Dom } f_A$.

По-перше, це можливо, коли R -перетворювач A при роботі над вхідним словом w пише на вихід лише скінченне слово, нехай це слово u . Тоді в доведенні леми 1 візьмемо n таке, що $u = y_0 y_1 \dots y_n$ та слово $v_0 v_1 \dots v_n$ містить символ ∇ .

По-друге, це можливо, коли при роботі над ω -словом w R -перетворювач A пише на вихід нескінченне слово, яке в якості префікса має одне зі слів 2, 2, ∇ , 00, містить більше одного символу ∇ або містить додатні та від'ємні символи одночасно. Усі ці можливості можуть бути зафіксовані після обробки скінченного префіксу $v_0 v_1 \dots v_n$, що містить символ ∇ . Далі аналогічно доведенню леми 1.

Втретє, це можливо, коли при роботі над ω -словом w R -перетворювач A не пише на вихід жодного символу ∇ . У цьому випадку виберемо n так, щоб слово $v_0 v_1 \dots v_n$ містило символ ∇ та використаємо доведення леми 1.

Оскільки інших можливостей не існує, то лема доведена.

Лема 3. Для магазинного R -перетворювача $A = (Q, \Gamma, H, q_0, \#)$ довільне ω -слово $w \in \text{Dom } f_A$ можна подати у вигляді $w = w_0 w_1 \dots$ так, щоб $(O_1(A))(w) = u_0 u_1 \dots$, $w_i \neq \varepsilon$, ($i \geq 0$), слова w_0 та u_0 містили символ ∇ , жодне зі слів w_i не було власним початком іншого та для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ результатом роботи R -перетворювача над вхідним ω -словом $w_0 w_{i_1} w_{i_2} \dots$ було ω -слово $u_0 u_{i_1} u_{i_2} \dots \in D''$.

Доведення. Нехай в лемі 1 вже побудовано розклад $w = v_0 v_1 \dots$ і відповідний розклад $(O_1(A))(w) = y_0 y_1 \dots$. Якщо $v_i = v_i' v_i''$, $v_i \neq \varepsilon$, то $y_i = y_i' y_i''$. Тому враховуючи використану в доведенні леми 4 [2] техніку слідів, пару (v_i, y_i) у розкладі можна замінити парою (v_i', y_i') , а саме:

$$w = v_0 v_1 \dots v_n v_i' v_i'' v_{n+1} \dots$$

$$O_1(A)(w) = y_0 y_1 \dots y_n y_i' y_i'' y_{n+1} \dots$$

Оскільки кожне слово має скінченну кількість префіксів, то послідовно виконуючи такі заміни для $i=1, 2, \dots$ буде отримано вказаний у твердженні леми розклад. Лема доведена.

Дослідження визначеності у ірраціональних точках

Теорема 1. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, та для ірраціонального (трансцендентного) числа $x \in D_f$ для довіль-

ного $\varepsilon > 0$ існують ірраціональні числа $x_1, x_2 \in D_f$ такі, що

$$x - \varepsilon < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon,$$

причому числа $f(x)$, $f(x_1)$ та $f(x_2)$ мають однаковий характер ірраціональності (трансцендентності).

Доведення. Нехай $w \in D$, $x = \|w\|$ та $w = w_0 w_1 \dots$ — розклад ω -слова w , побудований в лемі 1. Якщо число $x = \|w\|$ ірраціональне, то за різних значень i ω -слова $w_i w_{i+1} \dots$ також різні, оскільки для ω -слова w та слова $d \neq \varepsilon$ з рівності $w = dw$ випливає $w = d^n$, що означало б раціональність числа $\|w\|$. Тоді кожне з значень $\min \{\|0 \nabla w_i w_{i+1} \dots\| \mid i \in \mathbb{N}\}$ та $\max \{\|0 \nabla w_i w_{i+1} \dots\| \mid i \in \mathbb{N}\}$ (якщо існує) зустрічається серед чисел $\|0 \nabla w_i w_{i+1} \dots\|$ не більше одного разу. Звідки, для кожного i існують значення j та l такі, що

$$\|0 \nabla w_i w_{i+1} \dots\| < \|0 \nabla w_j w_{j+1} \dots\| < \|0 \nabla w_l w_{l+1} \dots\|.$$

Тоді результат роботи R -перетворювача A на ω -словах $w_i = w_0 w_1 \dots w_i w_{i+1} \dots$ та $w_l = w_0 w_1 \dots w_l w_{l+1} \dots$ також визначений і при цьому

$$\|w\| - 2^{-i} < \|w_i\| < \|w\| < \|w_l\| < \|w\| + 2^{-l}.$$

На завершення доведення теореми залишається вибрати i з умови $2^{-i} < \varepsilon$ та покласти $x_1 = \|w_i\|$, $x_2 = \|w_l\|$. Однаковість характеру ірраціональності (трансцендентності) чисел $f(x)$, $f(x_1)$ та $f(x_2)$ випливає з способу побудови ω -слів w_i та w_l за ω -словом w та з того, що характер ірраціональності числа не змінюється при множенні на раціональне число та додаванні раціонального числа.

Наслідок 1. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, та для трансцендентного числа $x \in D_f$ для довільного $\varepsilon > 0$ існують ірраціональні числа $x_1, x_2 \in D_f$ такі, що

$$x - \varepsilon < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon,$$

причому числа $f(x)$, $f(x_1)$ та $f(x_2)$ мають однаковий характер трансцендентності.

Доведення наслідку випливає з доведення теореми 1 та того, що характер трансцендентності числа не змінюється при множенні на раціональне число та додаванні раціонального числа.

Наслідок 2. Якщо дійсна функція, задана магазинним R -перетворювачем, в ірраціональній (трансцендентній) точці x приймає раціональне значення y , то тоді як завгодно близько ліворуч і праворуч від точки x знайдуться ірраціональні (трансцендентні) точки, в яких функція також приймає значення y .

Доведення наслідку випливає з способу отримання чисел x_1 та x_2 в теоремі 1.

Наслідок 3. Якщо задана магазинним R -перетворювачем дійсна функція f в ірраціональній точці x монотонна та приймає раціональне значення, то вона стаціонарна в деякому околі цієї точки.

Доведення наслідку випливає з того, що як завгодно близько ліворуч і праворуч від точки x знайдуться точки, в яких функція також приймає значення $f(x)$. А тоді з монотонності випливає стаціонарність.

Теорема 2. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, та для ірраціонального (трансцендентного) числа $x \in D_f$ для довільного $\varepsilon > 0$ існують ірраціональні (трансцендентні) числа $x_1, x_2 \in D_f$ такі, що

$$x - \varepsilon < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon.$$

Доведення. Нехай $x = \|w\|$, $w \in D$. Якщо R -перетворювач зчитує лише скінченний префікс w' ω -слова w , то словарна функція, задана R -перетворювачем невизначена на усій множині $w' \{0, 1, i\}^{\omega} \cap D$, звідки маємо твердження теореми. В іншому випадку скористуємось доведенням теореми 1 та лемою 2.

Теорема 3. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, кожна ірраціональна точка $x \in D_f$ є граничною точкою множини D_f .

Доведення теореми випливає з теореми 1.

Теорема 4. Для дійсної функції f , заданої магазинним R -перетворювачем, кожна ірраціональна точка $x \in D_f$ є граничною точкою множини $R \setminus D_f$.

Наслідок 4. Ізольовані та виколоті точки області визначення функції, заданої магазинним R -перетворювачем, є раціональними.

Наслідок 5. Якщо для заданої магазинним R -перетворювачем дійсної функції f $D_f = (a, b)$, де $a < b$, то $a, b \in \mathbb{Q}$.

Теорема 5. Нехай функція f задана магазинним R -перетворювачем A у деякому околі ірраціональної точки a та існує скінченна похідна $f'(a)$. Тоді $f'(a) \in \mathbb{Q}$.

Доведення. Нехай для ω -слова $w \in D$ $a = \|w\|$ та ω -слово u є результатом роботи R -перетворювача A над вхідним ω -словом w . $f(a) = \|u\|$.

Нехай $w = w_0 w_1 \dots$, $u = u_0 u_1 \dots$ — розклади ω -слів w та u , побудовані в лемі 3.

Зазначимо, що для довільної послідовності натуральних чисел $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ результатом роботи R -перетворювача над вхідним ω -словом

$w_0 w_1 w_2 \dots$ буде ω -слово $u_0 u_1 u_2 \dots \in D^n$. При цьому $a = \|w_0 w_1 \dots\|, f(a) = \|u_0 u_1 \dots\|$.

Оскільки число a ірраціональне, то знайдуться два різних слова $w_i \neq w_j$. Якщо одне з них не містить символів 0, то інше обов'язково містить (інакше одне є власним початком іншого). Якщо $w_i \in \{1\}^*$, то покладемо $z_1 = w_i, z_2 = w_i w_j, y_1 = u_i, y_2 = u_i u_j$; інакше нехай $z_1 = w_i, z_2 = w_j w_i, y_1 = u_i, y_2 = u_j u_i$. В обох випадках $z_1^\omega \neq z_2^\omega$. (В останньому випадку z_1 та z_2 не є власними початками один одного і нерівність очевидна; у першому випадку слід розглянути слова $z_1^{[2]} \neq z_2^{[2]}$, які містять однакову кількість символів 1 тільки за умови, якщо $v_i \in \{1\}^*$, що неможливо.)

Нехай

$$r = \text{abs}(\|0\nabla z_1^\omega\| - \|0\nabla z_2^\omega\|),$$

$$m_n = dr(v_0 v_1 \dots v_n),$$

$$x_{i,n} = \|w_0 w_1 \dots w_n z_i^{m_n}\|,$$

$$\delta_n = \frac{f(x_{2,n}) - f(x_{1,n})}{x_{2,n} - x_{1,n}}, \quad i=1,2, n \in \mathbb{N}.$$

(Тут abs - абсолютна величина числа, dr - кількість дробових знаків зображення дійсного числа.) За побудовою маємо

$$|x_{2,n} - x_{1,n}| = 2^{-m_n} \cdot r,$$

$$|x_{i,n} - a| = 2^{-m_n} \cdot \text{abs}(\|0\nabla z_i^\omega\| - \|0\nabla w_{n+1} \dots\|) \leq 2^{-m_n}.$$

Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = f'(a)$. Для цього задамося $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon_0 = r \cdot \varepsilon / 4$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = \varepsilon(x)$$

за умови $x \in U_\delta(a) \cap D$, де $|\varepsilon(x)| < \varepsilon_0$.

Нехай K таке, що $2^{-m_K} < \delta$. Тоді для всіх $n \geq K$ маємо

$$\begin{aligned} \delta_n - f'(a) &= \frac{(x_{2,n} - a)\varepsilon(x_{2,n}) - (a - x_{1,n})\varepsilon(x_{1,n})}{x_{2,n} - x_{1,n}} = \\ &= \frac{(x_{2,n} - a)\varepsilon(x_{2,n}) - (a - x_{1,n})\varepsilon(x_{1,n})}{2^{-m_n} \cdot r} \leq \\ &\leq \frac{|x_{2,n} - a| \cdot |\varepsilon(x_{2,n})| + |a - x_{1,n}| \cdot |\varepsilon(x_{1,n})|}{2^{-m_n} \cdot r} \leq \\ &\leq \frac{2^{-m_n} \cdot \varepsilon_0 + 2^{-m_n} \cdot \varepsilon_0}{2^{-m_n} \cdot r} = \frac{2\varepsilon_0}{r} = \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

З іншого боку, $\delta_n = 2^{l_n} \cdot c$, де

$$l_n = -dr(u_0 u_1 \dots u_n) + dr(w_0 w_1 \dots w_n) \in \mathbb{Z}.$$

$$c = \frac{\|0\nabla z_2^\omega\| - \|0\nabla z_1^\omega\|}{\|0\nabla z_2^\omega\| - \|0\nabla z_1^\omega\|}.$$

Причому число $c \in \mathbb{Q}$ як частка двох раціональних чисел.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, то $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \in \mathbb{Q}$. Інакше $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \neq 0$ та з існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ випливає існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l \in \mathbb{Z}$, а тоді $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 2^l \cdot c \in \mathbb{Q}$, що й треба було довести.

Теорема доведена.

З доведеної теореми маємо такий наслідок.

Наслідок 6. Множина значень похідної для функції, заданої магазинним R -перетворювачем, не більш ніж зліченна.

З останнього випливає, що множина значень похідної функції, заданої магазинним R -перетворювачем, не більш ніж зліченна. Тому за теоремою Дарбу маємо теорему 5 з [3], за якою кожна диференційовна функція, задана магазинним R -перетворювачем, є лінійною.

Отримані результати корисні для подальшого дослідження магазинних R -перетворювачів, як засобу задання множин та функцій. У подальшому планується дослідити алгоритмічні проблеми для області визначення таких функцій та детально розглянути модель R -перетворювача із стековою пам'яттю.

Список використаних джерел

1. Лисовик Л.П. Логические свойства частично непрерывных функций. // Математическая логика и алгоритмические проблемы. - 1989. - 12. - С. 39-72.
2. Лисовик Л.П. Алгоритмические вопросы для реальных функций. // Кибернетика. - 1987. - №1. - С. 12-17.
3. Лисовик Л.П., Шкаравская О.Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями. // Кибернетика и системный анализ. - 1998. - №1. - С. 82-93.
4. Лисовик Л.П. Применения конечных преобразователей для задания фрактальных кривых. // Кибернетика и системный анализ. - 1994. - № 3. - С. 11-22.
5. Лисовик Л.П. Теория трансдюсеров. Том 3. Книга 5. Типы функций. Интерполяция. Фрактальность. - К.: Феникс. 2006. - С. 241-290.

Надійшла до редколегії 18.12.08

УДК 519.7+519.1

Касьянюк В.С., к.ф.-м.н., Карнаух Т.О.,
к.ф.-м.н.

Деякі різновиди задачі оптимізації багатопродуктових потоків у мережах

У роботі розглядаються різновиди задачі про максимальний потік, а саме будуються дискретні та неперервні моделі динамічних багатопродуктових потоків у мережах. Для побудованих моделей формулюється низка оптимізаційних питань.

Ключові слова: багатопродуктовий потік, оптимізація.

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Математична задача про максимальний потік виникає з природної для транспортної системи задачі: визначити, яку максимальну кількість продукту можна щодня перевозити з пункту А до пункту Б, якщо окремі елементи транспортної системи за добу можуть пропустити лише обмежену кількість продукту.

Математичну постановку та методи розв'язання цієї класичної задачі можна знайти, наприклад, у книгах [1, с. 9-29] та [2, с. 734-785]. Ця задача за своєю суттю є статичною, оскільки передбачає постійний однаковий рух продукту в системі. Задача про динамічний максимальний потік [1, с. 204-214] виникає тоді, коли додатково ще задається час проходження потоку через кожен елемент транспортної мережі.

Але на практиці виникають більш математично цікаві задачі. Для транспортної мережі міста можна ставити задачу знаходження максимального потоку транспорту (тобто кількості машин за одиницю часу), який може проїздити з пункту А до пункту Б за одиницю часу. В цьому випадку, вочевидь, виконується закон збереження потоку.

Дещо інший випадок виникає тоді, коли розглядаються інформаційні потоки. У них при перенавантаженні елементів системи дозволяється "викидання" зайвих даних, тобто передані дані, на відміну від машин, не зобов'язанні зберігатися у проміжних вузлах їх передачі. З цими задачами пов'язані задачі вигляду: чи здатна транспортна система пропустити задану сукупність потоків; у яких вузлах системи слід розташувати найбільш відвідувані об'єкти, щоб максимізувати пропускну спроможність транспортної системи; як слід зорієнтувати ланки транспортної системи,

Veda S. Kasyanyuk, PhD, Tetyana O. Karnaukh,
PhD.

Some variations of multicommodity flow optimization problem

We discuss some variations of multicommodity flow optimization problem. Discrete and continuous models for dynamic multicommodity flow network are built. For these models a lot of optimization problem are formulated.

Key Words: multicommodity, flow, optimization.

щоб максимізувати пропускну спроможність транспортної системи? Усі ці задачі мають важливе прикладне значення.

Аналогічно [1, с. 46-50], багатопродуктову та однопродуктову задачі можна розв'язувати як задачі лінійного програмування. У результаті задача для мережі з m дугами та n продуктами перетвориться на задачу лінійного програмування не менш ніж з mn змінними та $O(mn)$ обмеженнями. Загальні алгоритми розв'язання задачі лінійного програмування не враховують особливостей цих транспортних задач. Тому, враховуючи практичну доцільність їх розв'язання, має сенс додатково вивчати багатопродуктову задачу з метою пошуку більш ефективних методів її розв'язку.

Відомо (дивись [3] та бібліографію до неї), що для багатопродуктових задач у постановці максимізації загальної суми потоків існують наближені алгоритми, оцінки часу яких кращі за відповідні оцінки алгоритмів розв'язання задач лінійного програмування. Але в цих алгоритмах найчастіше максимізується загальна сума стаціонарних потоків або розглядаються методи маршрутизації потоків. Крім того, для багатопродуктових потоків існує величезна кількість різноманітних оптимізаційних задач, тому вважається доцільним проводити подальший аналіз моделей з метою пошуку більш ефективних алгоритмів для наведених окремих випадків багатопродуктових задач.

Спочатку, згідно [1, с. 9-29], нагадаємо найпростішу класичну модель транспортної системи. Мережею N називатимемо пару (G, c) , де $G = (V, E)$ – орграф без петель та кратних дуг, а відображення $c: E \rightarrow R$ задає пропускну

спроможність дуг.

Відображення $f: E \rightarrow R$ будемо називати потоком з джерела $s \in V$ в стік $t \in V$ у мережі N (або просто потоком у мережі N , якщо джерело та стік несуттєві для контексту), якщо для нього виконані наступні умови

1) $f(e) \leq c(e)$ для всіх $e \in E$ ($f(e) = 0$ за умови $e \in \bar{E}$);

2) $f^+(v) = f^-(v)$ для всіх $v \in V \setminus \{s, t\}$, де $f^+(v) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e)$, $f^-(v) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e)$ та $E^+(v)$ та $E^-(v)$ – множини дуг, що заходять та виходять з вершини v відповідно.

Змістовно $f(e)$ задає кількість продукту, яку дуга e пропускає за одиницю часу. Перша умова говорить про те, що жодна дуга не може пропускати потік, більший за її пропускну спроможність. Друга умова забезпечує збереження потоку: сумарний "потік", що заходить у вершину, повинен дорівнювати сумарному "потіку", що виходить з вершини. Зрозуміло, що це не стосується джерела та стоку.

Величину $f^+(v)$ будемо позначати $|f|$ та називати величиною потоку. У задачі про максимальний потік для заданої мережі N необхідно знайти потік максимальної величини з джерела s до стоку t .

Така постановка задачі дозволяє "додавати" потоки, що рухаються у зустрічних напрямках. Дійсно, якщо з пункту А до пункту Б необхідно щодня перевозити 5 одиниць продукту, а з пункту Б до пункту А – 3 одиниці продукту, то тоді достатньо перевезти з пункту А до пункту Б усього 2 одиниці продукту, а з Б до А нічого не везти. Саме ця особливість суттєво використовується методом Форда-Фалкерсона, а також методом проштовхування передпотіку [2, с. 734-795], які розв'язують задачу про максимальний потік.

Тепер повернемося до задач про потоки транспорту та передачі інформації. В цих моделях кожна одиниця продукту є унікальною, а тому зустрічні потоки не можна додавати. Дійсно, якщо з пункту А до пункту Б повинно проїхати 5 автомобілів, а з пункту Б до пункту А – 3 автомобілі, то результат таких переміщень буде зовсім інший порівняно з тим, якщо з пункту А до пункту Б проїде лише 2 автомобілі. Теж саме стосується й передачі інформації: при додаванні різноспрямованих потоків частина інформації не дійде до свого споживача. А це, зрозуміло, неприйнятно. Тому в наших задачах насправді продуктів декілька (навіть якщо вони й

мають однакову назву, наприклад, інформація), а тому ні метод Форда-Фалкерсона, ні метод проштовхування передпотіку у тому вигляді, як вони сформульовані для задачі з одним продуктом, застосовані бути не можуть. Отже, в нашій задачі є система потоків $F = \{(f_i, v_i, w_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$, де потік f_i спрямований з джерела v_i до стоку w_i . Цю систему F будемо називати багатопродуктовим потоком, маючи при цьому на увазі, що від кожного джерела до кожного стоку (споживача) передається свій унікальний продукт. Тоді наша задача набуде такої формалізації, [2].

Нехай задано мережу $N = (G, c)$, де $G = (V, E)$. Множину $F = \{(f_i, v_i, w_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$ будемо називати багатопродуктовим потоком, якщо f_i – потік з джерела v_i до стоку w_i у мережі N , та додатково виконано умову

$$\sum_{i=1}^n f_i(e) \leq c(e) \text{ для всіх } e \in E.$$

Найчастіше, [3], у задачі про максимальний багатопродуктовий потік максимізують величину $\sum_{i=1}^n |f_i|$. Але на практиці для аналізу систем часто буває достатньо просто відповісти на такі питання.

Задача 1. Чи може існувати в мережі N багатопродуктовий (multicommodity) потік $F = \{(f_i, v_i, w_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$ з заданими величинами потоків $|f_i|$? (Тобто, чи обов'язково виникнуть затори на дорогах. Дійсно, якщо такий потік існувати не може, то затори обов'язково виникнуть.)

Задача 2. Чи можна для мережі N та заданих величин потоків $|f_i|$ так обрати вузли v_i, w_i ($i \in \overline{1, n}$) так, щоб у мережі N існував багатопродуктовий потік $F = \{(f_i, v_i, w_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$? (Тобто, де слід розташувати адміністративні установи, щоб зменшити затори на дорогах міста?)

Задача 3. Побудувати таку орієнтацію неорієнтованого графа (або розподілити пропускну спроможність ребра між прямою та оберненими дугами), щоб в отриманій мережі N існував багатопродуктовий потік $F = \{(f_i, v_i, w_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$ із заданими величинами потоків $|f_i|$ (Тобто оптимізувати рух транспорту для досягнення відповідної пропускну спроможності усієї транспортної системи.)

Але наведені задачі поки що є статичними. Додамо до них динаміку. Розглянемо спочатку природні моделі. По-перше, кількість

автомобілів, які виїждять з пункту А до пункту В змінюється у часі. По-друге, якщо кількість автомобілів, які намагаються проїхати певною ланкою більша за пропускну спроможність цієї ланки, то автомобілі починають накопичуватись і при цьому зменшувати пропускну спроможність цих ланок. Тому більш точна модель повинна додатково урахувати ще й ці дві наведені особливості.

Динамічною мережею N будемо називати трійку (G, s, c) , де

$G = (V, E)$ – оргграф без петель та кратних дуг, відображення $s: E \rightarrow R$, задає накопичувальну спроможність дуг мережі,

відображення $c: E \times R \rightarrow R$, задає пропускну спроможність дуги e в залежності від накопиченого у ній продукту (кількість продукту за одиницю часу),

відображення $v: E \rightarrow R$, задає час проходження одиниці продукту по дузі.

Дискретний динамічний потік

Нехай задано множину часів $T = 1, T_0 \subseteq N_0$ та відображення v має тип $E \rightarrow N_0$. Пару відображень (f_1, f_2) типу $E \times T \rightarrow R$ будемо називати дискретним динамічним потоком з джерела $s \in V$ в стік $w \in V$ у мережі N , якщо для нього існує відображення $g: E \times T \rightarrow R$, таке, що

- 1) $g(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$,
- 2) $f_1(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$, що не виходять з вершини s ,
- 3) $g(e, t) \leq s(e)$ для всіх $e \in E, t \in T$,
- 4) $f_2(e, t) - f_1(e, t) \leq c(e, g(e, t))$ $e \in E, t \in T$,
- 5) $\sum_{j=0}^t f_2(e, j) \leq \sum_{j=0}^{t-v(e)} f_1(e, j)$ для всіх $e \in E, t \in T$,
- 6) $g(e, t+1) = g(e, t) + (f_1(e, t) - f_2(e, t))$ для всіх $e \in E, t \in T \setminus T_0$,
- 7) $f^-(v, t) = f^+(v, t)$ для всіх $(v, t) \in (V \times T) \setminus \{(s, 0)\}$, де

$$f^-(v, t) = \sum_{e \in E^-(v)} f_2(e, t), f^+(v, t) = \sum_{e \in E^+(v)} f_1(e, t).$$

У наведеній моделі відображення f_1 та f_2 задають кількість продукту, що поступає та виходить з дуги в певний час. Відображення g задає кількість продукту, що накопичено у дузі в певний час. Умова (1) каже про те, що на початку роботи мережі усі дуги порожні. За умовою (2) у початковий момент часу рух продукту відбувається лише з джерела. Умова (3) обмежує здатність дуг накопичувати продукт. За умовою (4) з жодної дуги не може вийти продукту більше, ніж її пропускну здатність. Умова (5) забезпечує те, що проходження продукту по дузі

вимагає певний час. Умови (6) та (7) є аналогом закону збереження продуктів: в кожній дузі додатково залишається стільки продукту, скільки в неї зайшло і при цьому не вийшло; в кожну вершину входить продукту стільки ж, скільки заходить.

Під величиною динамічного потоку (f_1, f_2) , що проходить по мережі за дискретний час T_0+1 ,

будемо розуміти суму $\sum_{t=0}^{T_0} f^+(w, t)$.

Побудуємо модель багатопродуктової динамічної задачі. Нехай задано множину часів $T = 1, T_0 \subseteq N_0$ та динамічну мережу $N = (G, s, c)$, де $G = (V, E)$. Множину $F = \{(f_1, f_2, v, w) \mid i \in 1, n\}$ будемо називати дискретним багатопродуктовим потоком, якщо існують відображення $g_i: E \times T \rightarrow R, i \in 1, n$, такі, що

- 1) $g_i(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$,
 - 2) $f_{1,i}(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$, що не виходять з вершини s ,
 - 3) $\sum_{i=1}^n g_i(e, t) \leq s(e)$ для всіх $e \in E, t \in T$,
 - 4) $f_{2,i}(e, t) - f_{1,i}(e, t) \leq c(e, \sum_{i=1}^n g_i(e, t))$ для всіх $e \in E, t \in T$,
 - 5) $\sum_{j=0}^t f_{2,i}(e, j) \leq \sum_{j=0}^{t-v(e)} f_{1,i}(e, j)$ для всіх $e \in E, t \in T$,
 - 6) $g_i(e, t+1) = g_i(e, t) + (f_{1,i}(e, t) - f_{2,i}(e, t))$ для всіх $e \in E, t \in T \setminus T_0$,
 - 7) $f^-(v, t) = f^+(v, t)$ для всіх $(v, t) \in (V \times T) \setminus \{(s, 0)\}$, де
- $$f^-(v, t) = \sum_{e \in E^-(v)} f_{2,i}(e, t), f^+(v, t) = \sum_{e \in E^+(v)} f_{1,i}(e, t).$$

Неперервний динамічний потік

Розглянемо тепер неперервний випадок. Нехай $T = R$. Пару відображень (f_1, f_2) типу $E \times T \rightarrow R$ будемо називати неперервним динамічним потоком з джерела $s \in V$ в стік $w \in V$ у мережі N , якщо для нього існує відображення $g: E \times T \rightarrow R$, таке, що

- 1) $f_1(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$, що не виходять з вершини s ,
- 2) $g(e, t) \leq s(e)$ для всіх $e \in E, t \in T$,
- 3) $f_2(e, t) - f_1(e, t) \leq c(e, g(e, t))$ $e \in E, t \in T$,
- 4) $\int_0^t f_2(e, x) dx \leq \int_0^t f_1(e, x) dx$,
- 5) $g(e, t) = \int_0^t (f_1(e, x) - f_2(e, x)) dx, e \in T, t \in T$,

$$6) \quad f^-(v, t) = f^+(v, t) \quad \text{для всіх } (v, t) \in (V \times T) \setminus \{(s, 0)\}, \text{ де}$$

$$f^-(v, t) = \sum_{e \in E^-(v)} f_2(e, t), f^+(v, t) = \sum_{e \in E^+(v)} f_1(e, t).$$

Тоді за час t в цій мережі проходить динамічний потік (f_1, f_2) величини $\int_0^t f^*(w, x) dx$.

f_1, f_2, g мають ту ж саму семантику, що й у дискретному випадку.

Аналогічно попередньому множини $F = \{(f_1, f_2, v, w) \mid i \in \overline{1, n}\}$ будемо називати неперервним багатопродуктовим потоком, якщо $T = R$, та існують відображення $g_i: E \times T \rightarrow R$, $i \in \overline{1, n}$, такі, що

1) $f_{1,i}(e, 0) = 0$ для всіх $e \in E$, що не виходять з вершини s .

$$2) \quad \sum_{i=1}^n g_i(e, t) \leq \kappa(e) \text{ для всіх } e \in E, t \in T,$$

$$3) \quad f_{1,i}(e, t) - f_{2,i}(e, t) \leq c(e, \sum_{i=1}^n g_i(e, t)), e \in E, t \in T,$$

$$4) \quad \int_0^t f_{2,i}(e, x) dx \leq \int_0^{t-1} f_{1,i}(e, x) dx,$$

$$5) \quad g_i(e, t) = \int_0^t (f_{1,i}(e, x) - f_{2,i}(e, x)) dx \text{ для всіх } e \in E, t \in T.$$

$$6) \quad f^-(v, t) = f^+(v, t) \quad \text{для всіх } (v, t) \in (V \times T) \setminus \{(s, 0)\}, \text{ де}$$

$$f^-(v, t) = \sum_{e \in E^-(v)} f_{2,i}(e, t), f^+(v, t) = \sum_{e \in E^+(v)} f_{1,i}(e, t).$$

Для динамічного багатопродуктового потоку можна ставити всі ті самі питання, що й для його статичного аналогу. А також ще одне специфічне: за який найменший час система здатна пропустити динамічний багатопродуктовий потік заданої величини.

І, наприкінці, розглянемо модель з втратами, тобто таку, де не виконуються закони збереження продукту. Цю модель можна звести до попередньої додавши виділену вершину – до неї спрямовуються усі надлишки продуктів, – з необмеженими пропускними спроможностями дуг. При цьому додатково можна ставити завдання мінімізації втрат.

Сформулюємо ще кілька оптимізаційних задач для багатопродуктових потоків.

Задача 4. Чи можна так перерозподілити пропускні спроможності між прямими та оберненими дугами мережі (за умови збереження суми пропускних спроможностей для кожної такої пари дуг), щоб вона могла пропустити

систему потоків із заданими величинами і при цьому залишалася сильно зв'язною? У випадку позитивної відповіді в попередніх задачах, знайти мінімальні зміни.

Задача 5. Як можна збільшити пропускну спроможність дуг, щоб мережа могла пропустити систему потоків з заданими величинами і при цьому сумарне збільшення пропускних спроможностей дуг мало б мінімальну вартість?

Задача 6. Для мережі знайти мінімальний за сумою потоків (або за сумарною вартістю) багатопродуктовий потік, що не може бути пропущений мережею.

Задача 7. Відомо, що в мережі існує багатопродуктовий потік із заданими величинами потоків. Чи буде він продовжувати існувати в мережі за умови зміни пропускних спроможностей деяких дуг? Як вихід з ладу вершини змінює пропускну спроможність усієї мережі?

Задача 8. Які за топологією мережі найменша та найбільша просто адаптуються до вимог багатопродуктових потоків?

Задача 9. За системою потоків знайти мережу (мається на увазі розподіл пропускної спроможності ребра між прямою та оберненою дугами), яка здатна пропускати кожен з заданих потоків окремо.

Наведені вище задачі можна ставити не лише у загальному випадку, але й для найбільш поширених топологій, наприклад, для радіальної транспортної системи або для решітки. Також при знаходженні відповідного потоку можна ставити питання мінімізації його вартості за умови відомих вартостей проходження потоку по дугах.

Список використаних джерел

1. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Л. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 С.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 1296 С.
3. Karakostas G. Faster approximation schemes for fractional multicommodity flow problems. // Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, 2002. – P. 166–173.

Надійшла до редколегії 18.12.08

УДК 518.9

Машченко С.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Багатоцільові ігри у відношеннях переваги гравців

Розглядаються ігри, які задаються багатьма відношеннями переваги на множині ситуацій гри. Пропонуються необхідні та достатні умови існування рівноваг, які засновані на різних принципах оптимальності.

Ключові слова: багатоцільові ігри, рівновага за Нешем, відношення переваги.

¹E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Ігри, що задані відношеннями переваги гравців, є узагальненням ігор, в яких цілі гравців описуються функціями їх виграшу. З одного боку, таке узагальнення дозволяє аналізувати конфліктні ситуації у разі неможливості побудови функцій корисності (виграшу) гравців. З іншого боку, воно дозволяє глибше зрозуміти суть конфлікту, шляхи його розв'язання і принципи оптимальності, що використовуються.

У багатьох реальних конфліктах процес прийняття рішень може бути ускладнений тим, що кожен гравець може порівнювати ситуації гри не за одним відношенням переваги, а за деякою сукупністю таких відношень, які будемо називати критеріальними.

Розглянемо гру в нормальній формі $G = (X, \{R_j^i\}_{j \in L_i}; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців; X_i - множина стратегій i -го гравця; $\{R_j^i\}_{j \in L_i}$ - множина критеріальних бінарних відношень переваги $R_j^i \subseteq X \times X$, $j \in L_i$, гравця $i \in N$, $L_i = \{1, 2, \dots, l_i\}$ - множина їх індексів, l_i - їх кількість (кожне критеріальне відношення переваги R_j^i є визначенням на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$). Гравці, вибираючи свої стратегії,

прагнуть того, що б склалася наскільки можливо більш переважна для кожного ситуація гри за усіма критеріальними відношеннями переваги. Відношення переваги R_j^i , $j \in L_i$, $i \in N$, в цій роботі розглядаються у досить широкому сенсі, як нестрогі впорядкування, тобто бінарні повні відношення, які використовується для цільової

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

Multiaims games in the relations of preferences of players

The games which are formulating by many preference relations on the set of situations of game are considered. The necessary and sufficient conditions of existence of equilibrium, which are based on different principles of optimum are offered.

Key words: the multiaims game, the Nesh's equilibrium, the relation of preference.

орієнтації гравця.

Нагадаємо, що для нестрогого впорядкування R , його асиметрична частина $S = R \setminus R^{-1}$ називається відношенням домінування (строгою перевагою, строгим впорядкуванням), яке є асиметричним та антирефлексивним, а симетрична частина $I = \overline{S} \cup (\overline{S})^{-1}$ називається відношенням байдужності, яке є симетричним та рефлексивним. Оскільки нестроге впорядкування R є повним відношенням ($xRy \vee yRx, \forall x, y \in X$), то $R \cup R^{-1} = X \times X$, тому $R \supseteq \overline{R^{-1}}$ та $R^{-1} \supseteq \overline{R}$.

Звідси випливає, що $S = R \setminus R^{-1} = R \cap (\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$ та, навпаки, $R = \overline{S^{-1}}$, а $I = R \cap R^{-1}$.

Розглянемо два способи агрегації критеріальних відношень переваги $\{R_j^i\}_{j \in L_i}$ гравця $i \in N$ в агреговане відношення переваги R_i : агрегацію об'єднанням критеріальних відношень переваги $R_i = \bigcup_{j \in L_i} R_j^i$ та агрегацію їх перетином $Q = \bigcap_{j \in L_i} R_j^i$.

Агрегація об'єднанням критеріальних відношень переваги. Представимо множину критеріальних бінарних відношень переваги $\{R_j^i\}_{j \in L_i}$ агрегованим відношенням $R_i = \bigcup_{j \in L_i} R_j^i$

для кожного гравця $i \in N$. Очевидно, що відношення R_i , $i \in N$ - повні, а тому є нестрогими впорядкуваннями. Нехай S_i - відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане агрегованим відношенням переваги R_i , тоді

$S_i = \overline{R_i^{-1}} = \overline{(\bigcup_{j \in L_i} R_j')^{-1}} = \bigcap_{j \in L_i} \overline{(R_j')^{-1}} = \bigcap_{j \in L_i} S_j'$, де $S_j' = \overline{(R_j')^{-1}}$ - j -те критеріальне відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане критеріальним відношенням переваги $R_j', j \in L_i$.

Таким чином, агрегація об'єднанням критеріальних відношень приводить до наступного розуміння агрегованого відношення домінування. Будемо вважати, що ситуація x сильно домінує ситуацію y для гравця $i \in N$, якщо x домінує y за кожним критеріальним відношенням. Якщо припустити існування функцій корисності $u_j^i: X \rightarrow E^1$ за кожним критеріальним відношенням домінування $S_j', j \in L_i$, ($x S_j' y \Leftrightarrow u_j^i(x) > u_j^i(y), \forall x, y \in X$), то наведене вище тлумачення агрегованого відношення домінування буде відповідати відомій [1] слабкій аксіомі Парето порівняння альтернатив ($x \gg y \Leftrightarrow u_j^i(x) > u_j^i(y), j \in L_i$).

Одним із способів завдання множин, а отже і бінарних відношень, є характеристична функція. Бульову функцію $r: X \times X \rightarrow \{0,1\}$ назовемо характеристичною функцією бінарного відношення R , визначеного на множині X , якщо $r(x, y) = 1 \Leftrightarrow x R y, r(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \bar{R} y, \forall x, y \in X$.

Нехай S_j' - j -те критеріальне відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане відношенням переваги R_j' , яке задане характеристичною функцією r_j^i . Тоді, очевидно, характеристична функція відношення $S_j' = \overline{(R_j')^{-1}}$ буде визначатися як $s_j^i(x, y) = 1 - r_j^i(y, x)$, а агрегованого відношення домінування S_i , відповідно $s_i(x, y) = \min_{j \in L_i} s_j^i(x, y)$. Тут і далі

позначатимемо відношення великою літерою, а відповідну характеристичну функцію - малою.

Якщо гравці повністю інформовані, то їм було розумно б укласти певну необов'язкову угоду, яку була не вигідна б жодному з них порушувати. Ідея стабільної угоди приводить до наступного визначення. Ситуація x^* називається абсолютною сильною рівновагою Неша у відношеннях переваги (їх множину позначимо APE), якщо

$$x^* S_i (y, x_{N \setminus i}^*), \forall y \in X, i \in N. \quad (1)$$

Вектор $(y, x_{N \setminus i}^*)$ позначає ситуацію, в якій гравець $i \in N$ поміняв стратегію x_i^* на y , а

решта гравців $j \in N \setminus \{i\}$ вибрала x_j^* . Відмітимо, що визначення (1) є аналогом відомої [2] рівноваги Неша для ігор, у яких переваги гравців задані функціями їх виграшу.

В термінах характеристичної функції визначення (1) прийме наступний вигляд:

$$x^* \in APE \Leftrightarrow \min_{j \in L_i} s_j^i(x^*, (y, x_{N \setminus i}^*)) = 1, \forall y \in X, i \in N.$$

Введемо $R^{NE(i)}$ - відношення NE -переваги гравця $i \in N$, породжене деяким відношенням переваги R . Говоритимемо, що $x R^{NE(i)} y$, якщо $x R y \vee (x_{N \setminus i} \neq y_{N \setminus i})$. Очевидно $R^{NE(i)} \supseteq R, i \in N$, і є повним, тому також є відношенням переваги (нестрогим впорядкуванням).

Нехай $S^{NE(i)} = \overline{(R^{NE(i)})^{-1}}$ - відношення NE -домінування, яке породжене деяким відношенням NE -переваги $R^{NE(i)}$ гравця $i \in N$. Відношення NE -переваги $R^{NE(i)}$ є породженим деяким відношенням переваги R , яке, у свою чергу, породжує відношення домінування $S = \overline{R^{-1}}$. Розглянемо зв'язок відношень S і $S^{NE(i)}$.

Теорема 1. Справедливе відношення:

$$x S^{NE(i)} y \Leftrightarrow (x S y) \wedge (x_{N \setminus i} = y_{N \setminus i}) \text{ для } \forall i \in N. \quad (2)$$

Доведення. Справедливий наступний ланцюжок імплікацій для $\forall i \in N: x S^{NE(i)} y \Leftrightarrow x (\overline{(R^{NE(i)})^{-1}}) y \Leftrightarrow \overline{((x R^{-1} y) \vee (y_{N \setminus i} \neq x_{N \setminus i}))} \Leftrightarrow \overline{((x \bar{R}^{-1} y) \wedge (y_{N \setminus i} = x_{N \setminus i}))} \Leftrightarrow (x S y) \wedge (y_{N \setminus i} = x_{N \setminus i})$. Теорему доведено.

Далі називатимемо $S^{NE(i)}$ відношенням NE -домінування гравця $i \in N$, яке породжене відношенням домінування S . Тоді критеріальному відношенню домінування $S_j', j \in L_i$ гравця $i \in N$ буде відповідати побудоване за формулою (2) відношенням NE -домінування $(S_j')^{NE(i)}$. Аналогічно, агрегованому відношенню домінування $S_i = \bigcap_{j \in L_i} S_j'$ гравця $i \in N$ буде відповідати побудоване за формулою (2) відношенням NE -домінування $S_i^{NE(i)}$. До речі, очевидно, що $S_i^{NE(i)} = \bigcap_{j \in L_i} (S_j')^{NE(i)}$.

В термінах NE -переваг визначення (1) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x^* \in APE &\Leftrightarrow x^* S_i^{NE(i)} y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^* (\bigcap_{j \in L_i} (S_j')^{NE(i)}) y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^* (S_j')^{NE(i)} y, \forall y \in X, \forall j \in L_i, \forall i \in N. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, що рівновага x^* є максимальним елементом кожного відношення $(S_j')^{NE(i)}$, $j \in L_i$, $i \in N$, тобто $x^* \in \bigcap_{i \in N} \bigcap_{j \in L_i} \max(S_j')^{NE(i)}$. Нагадаємо,

що множина максимальних елементів відношення S на множині X визначається як $\max(S) = \{x^* \in X \mid x^* S y, \forall y \in X\}$.

Існування спільного максимального елемента кожного критеріального відношення НЕ-домінування для усіх гравців загалом, навіть у простих іграх, є скоріше виключенням, ніж правилом. Тому доцільно шукати мажоранти.

Слід нагадати, що множина мажорантних елементів відношення S на множині X визначається як $\sup(S) = \{x^* \in X \mid y \bar{S} x^*, \forall y \in X\}$.

Окрім того, якщо $R = \bar{S}^{-1}$ - відношення переваги, яке індуковане відношенням домінування S , то справедливі наступні відношення [1]:

$$\sup(S) = \max(R) \supseteq \max(S) = \sup(R). \quad (4)$$

Назвемо ситуацію x^* слабкою мажорантною (векторною [3]) рівновагою (їх множину позначатимемо WME), якщо

$$\begin{aligned} y S_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y (\bigcap_{j \in L_i} (S_j')^{NE(i)}) x^*, \forall y \in X, \forall i \in N. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно $APE \subseteq WME$. Оскільки на підставі теореми 1 $y S_i^{NE(i)} x \Leftrightarrow (y S_i x) \wedge (x_{N(i)} = y_{N(i)})$, то визначення (5) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} x^* \in WME &\Leftrightarrow (y_i, x_{N(i)}^*) \bar{S}_i x^*, \forall y_i \in X_i, i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y_i, x_{N(i)}^*) (\bigcap_{j \in L_i} S_j') x^*, \forall y_i \in X_i, i \in N. \end{aligned}$$

В термінах характеристичної функції слабкі мажорантні рівноваги визначимо як

$$\begin{aligned} WME &= \{x^* \in X \mid s_i((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0, \forall y_i \in X_i, i \in N\} = \\ &= \{x^* \in X \mid \min_{j \in L_i} s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0, \forall y_i \in X_i, i \in N\}. \end{aligned}$$

Використаємо характеристичні функції відношень домінування гравців для параметризації множини слабких мажорантних

рівноваг

Теорема 2. Якщо ситуація $x^* \in WME$, то завжди існують такі вектори параметрів

$$\mu_i \in M_i = \left\{ \mu_i = (\mu_j^i)_{j \in L_i} \mid \sum_{j \in L_i} \mu_j^i = 1; \mu_j^i \geq 0, j \in L_i \right\},$$

$i \in N$, зокрема з компонентами $\mu_j^i = \bar{\mu}_j^i = 1/n$, $j \in L_i$, що для $\forall i \in N, \forall y_i \in X_i$:

$$\min_{j \in L_i} (1 + s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) - \mu_j^i) \leq \min_{j \in L_i} (1 - \mu_j^i). \quad (6)$$

Будь-яке рішення системи нерівностей (6) при заданих $\mu_i \in M_i, i \in N$, є слабкою мажорантною рівновагою.

Доведення. Покажемо достатність. Нехай x^* задовольняє (6) при деяких значеннях $\mu_i \in M_i, i \in N$. Звідси слідує, що для $\forall i \in N, \forall y_i \in X_i$ існує $j \in L_i$, що $1 + s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) - \mu_j^i \leq 1 - \mu_j^i$. Тоді $s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0$ і $\min_{j \in L_i} s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0$.

Тому $s_i((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0$ для $\forall y_i \in X_i, \forall i \in N$ і $y S_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$. Звідси $x^* \in WME$.

Доведемо необхідність. Для цього візьмемо вектори $\bar{\mu}_i = (\bar{\mu}_j^i)_{j \in L_i}, i \in N$ з компонентами $\bar{\mu}_j^i = 1/n, j \in L_i, i \in N$. Нескладно перевірити, що $\bar{\mu}_i \in M_i, i \in N$. З того, що $x^* \in WME$ слідує, що $y S_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$. Звідси слідує, що $\forall i \in N, \forall y_i \in X_i, \exists j \in L_i: s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) = 0$, а тому $1 + s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) - \bar{\mu}_j^i = 1 - \bar{\mu}_j^i$. Оскільки для $\forall i \in N$ значення $1 - \bar{\mu}_j^i = (n-1)/n, \forall j \in L_i$, то для $\forall y_i \in X_i$ буде справедливою нерівність $\min_{j \in L_i} (1 + s_j((y_i, x_{N(i)}^*), x^*) - \bar{\mu}_j^i) \leq (n-1)/n = \min_{j \in L_i} (1 - \bar{\mu}_j^i)$. Теорему доведено.

Параметри $\mu_i \in M_i$ дозволяють гравцю $i \in N$ виразити свою перевагу на множині критеріальних відношень домінування $\{S_j'\}_{j \in L_i}$. Так, наприклад, якщо він вважає, що для нього найбільш важливе відношення $j_0 \in L_i$, то йому слід вибрати $\mu_{j_0}^i = 1; \mu_j^i = 0, j \in L_i, j \neq j_0$. Варіюючи параметрами $\mu_i \in M_i, i \in N$, можна знаходити ті, або інші слабкі мажорантні рівноваги, вирішуючи нерівності (6). З іншого боку, кожна слабка мажорантна рівновага характеризується деякою множиною параметрів

$\mu_i \in M_i$, $i \in N$, і, відповідно, перевагами на множині критеріальних відношень домінування гравців.

Умови слабкої мажорантності рівноваги в термінах характеристичних функцій можуть бути значно спрощені, якщо критеріальні відношення домінування гравців задовольняють додатковим умовам. Розглянемо наступне визначення [4].

Підмножина A множини X називається щільною за відношенням домінування S , якщо для $\forall x, y \in X \setminus A \quad \exists z \in A: xSz \& zSy$.

Теорема 3. Нехай множина ситуацій гри G є або скінченною, або, якщо нескінченною, то містить щільні у ньому за кожним критеріальним відношенням домінування злічені підмножини. Нехай також кожне критеріальне відношення домінування S'_j , $j \in L$, $i \in N$ є слабким порядком (негатранзитивним строгим впорядкуванням). Ситуація $x^* \in WME$ тоді й лише тоді, коли існують функції $u_i^*: X \rightarrow E^1$, $i \in N$, які для $\forall y_i \in X_i$, $i \in N$ задовольняють умовам:

$$u_i^*(x^*) > u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) \Leftrightarrow x^* S'_j(y_i, x_{N(i)}^*), j \in L_i \quad (7)$$

$$u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) \leq u_i^*(x^*) \quad (8)$$

Доведення. Покажемо достатність. Припустимо супротивне $x^* \notin WME$. Тобто $\exists y \in X, \exists i \in N$, що $y S'_i x^*$. Звідси слідує $y(\bigcap_{j \in L_i} (S'_j)^{N(i)}) x^*$, що означає $y(S'_i)^{N(i)} x^*$ для $\forall j \in L_i$. За теоремою 1 одержимо $(y_i, x_{N(i)}^*) S'_i x^*$. Звідси за (7) слідує $u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) > u_i^*(x^*)$, що суперечить (8).

Покажемо необхідність. За припущеннями теореми, згідно з відомою теоремою [4] про існування функцій корисності для критеріальних відношень домінування існують функції $u_i^*: X \rightarrow E^1$, $j \in L_i$, $i \in N$, які задовольняють відношенням: $u_i^*(x) > u_i^*(y) \Leftrightarrow x S'_j y$ для $\forall x, y \in X$. Зокрема вони будуть виконуватися для $x = x^*$ та $y = (y_i, x_{N(i)}^*)$. Тому для $\forall i \in N, \forall y_i \in X_i, \forall j \in L_i$ має місце:

$$u_i^*(x) > u_i^*(y) \Leftrightarrow x S'_j y. \quad (9)$$

Нехай $x^* \in MNE$. Звідси за визначенням можна записати $y S'_i x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$ або $y(\bigcap_{j \in L_i} (S'_j)^{N(i)}) x^*, \forall y \in X, \forall i \in N$, що означає

$\forall y \in X, \forall i \in N \quad \exists j \in L_i$ для якого $y(S'_j)^{N(i)} x^*$. За теоремою 1 одержимо $(y_i, x_{N(i)}^*) S'_i x^*$, звідки за відношеннями (9) одержимо $\forall y \in X, \forall i \in N \quad \exists j \in L_i$, що $u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) \leq u_i^*(x^*)$. Позначимо $u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) = \min_{j \in L_i} (u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) - u_i^*(x^*))$. Тоді

$u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) \leq 0 = u_i^*(x^*, x_{N(i)}^*), \forall y_i \in X_i, i \in N$, тобто виконуються нерівності (8). Покажемо, що відношення (7) також мають місце. Нехай для $\forall y_i \in X_i, \forall j \in L_i, \forall i \in N$ має місце $(y_i, x_{N(i)}^*) S'_i x^*$. Це відношення за (9) еквівалентно нерівності $u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) > u_i^*(x^*)$, що, у свою чергу, еквівалентно нерівності

$$u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) = \min_{j \in L_i} (u_i^*(y_i, x_{N(i)}^*) - u_i^*(x^*)) > 0 = u_i^*(x^*).$$

Теорему доведено.

Слід відмітити, що нерівності (8) є визначенням [2] рівновжності за Нешем ситуації x^* . На перший погляд здається, що теорема 3 стверджує існування таких функцій виграшу (корисності) гравців $u_i^*: X \rightarrow E^1$, $i \in N$, при яких слабкі мажорантні рівноваги будуть рівновагами Неша у грі $G = (X_i, u_i^*; i \in N)$. При більш уважному розгляді теореми стає зрозумілим, що насправді лише кожній конкретній слабкій мажорантній рівновазі x^* відповідає своя гра $G = (X_i, u_i^*; i \in N)$ і, відповідно, деяка рівновага Неша. Іншими словами, теорема не стверджує існування деяких універсальних функцій виграшу гравців, які здатні описати множиною рівноваг Неша усю множину слабких мажорантних рівноваг, а лише каже про існування відповідних функцій виграшу для кожної конкретної слабкої мажорантної рівноваги здатних на це.

Агрегація перетином критеріальних відношень переваги. Представимо множину критеріальних бінарних відношень переваги $\{R'_i\}_{i \in L_i}$ агрегованим відношенням $Q_i = \bigcap_{j \in L_i} R'_j$ для кожного гравця $i \in N$. На відміну від випадку агрегації об'єднанням критеріальних відношень переваги, відношення $Q_i, i \in N$, вже можуть не бути повними, а тому можуть не бути впорядкуваннями. Нехай T_i - відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане агрегованим відношенням переваги Q_i , тоді

$$T_i = Q_i \setminus Q_i^{-1} = Q_i \cap (\bigcap_{j \in L_i} R'_j)^{-1} = Q_i \cap (\bigcup_{j \in L_i} (R'_j)^{-1}) =$$

$$= \bigcup_{j \in L_i} (Q_i \cap \overline{(R_j^i)^{-1}}) = \bigcup_{j \in L_i} (Q_i \cap S_j^i), \text{ де } S_j^i = \overline{(R_j^i)^{-1}}$$

- j -те критеріальне відношення домінування гравця $i \in N$, індуковане критеріальним відношенням переваги $R_j^i, j \in L_i$.

Таким чином, агрегація перетином критеріальних відношень приводить до наступного розуміння агрегованого відношення домінування. Будемо вважати, що ситуація x домінує ситуацію y для гравця $i \in N$, якщо x переважає y за кожним критеріальним відношенням і хоча б одне відношення повинно бути домінуванням. Якщо припустити існування функцій корисності $u_j^i: X \rightarrow E^1$ за кожним критеріальним відношенням нестрогої переваги $R_j^i, j \in L_i$, ($x R_j^i y \Leftrightarrow u_j^i(x) \geq u_j^i(y), \forall x, y \in X$), то наведене вище тлумачення агрегованого відношення домінування буде відповідати відомій [1] сильній аксіомі Парето порівняння альтернатив, а саме $x \succeq y \Leftrightarrow u_k^i(x) \geq u_k^i(y), k \in L_i, \exists j \in L_i: u_j^i(x) > u_j^i(y)$.

Характеристичними функціями агрегованих відношень нестрогої переваги Q_i та домінування T_i будуть відповідно: $q_i(x, y) = \min_{j \in L_i} r_j^i(x, y)$ та $t_i(x, y) = \max_{j \in L_i} \min(q_j^i(x, y), s_j^i(x, y)), i \in N$.

Позначимо через $Q_i^{NE(i)}$ - відношення NE -переваги гравця $i \in N$, яке породжене агрегованим відношенням переваги Q_i ($x Q_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow x Q_i y \vee (x_{N(i)} \neq y_{N(i)})$). Також нехай $T_i^{NE(i)} = R_i^{NE(i)} \setminus (R_i^{NE(i)})^{-1} = \bigcup_{j \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cap S_j^{NE(i)})$ - відношення NE -домінування, яке породжене відношенням NE -переваги $Q_i^{NE(i)}$ гравця $i \in N$.

Ідея стабільної угоди між гравцями за максимальними елементом та мажорантами агрегованих відношень нестрогої переваги та домінування приводить до наступних визначень рівноваг гри.

Абсолютні нестрогі рівноваги:

$$\begin{aligned} x^* \in ARE &\Leftrightarrow x^* Q_i^{NE(i)} y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^* (\bigcap_{j \in L_i} (R_j^{NE(i)})) y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^* R_j^{NE(i)} y, \forall y \in X, \forall j \in L_i, \forall i \in N. \end{aligned}$$

Абсолютні строгі рівноваги:

$$x^* \in ASE \Leftrightarrow x^* T_i^{NE(i)} y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^* (\bigcup_{j \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cap S_j^{NE(i)})) y, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall y \in X, \forall i \in N \begin{cases} x^* R_j^{NE(i)} y, \forall j \in L_i, \\ \exists k \in L_i: x^* R_k^{NE(i)} y. \end{cases} \end{aligned}$$

Найслабкіші мажорантні рівноваги:

$$\begin{aligned} x^* \in MME &\Leftrightarrow y Q_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, y \neq x^*, \forall i \in N \\ &\Leftrightarrow y (\bigcap_{j \in L_i} R_j^{NE(i)}) x^*, \forall y \in X, y \neq x^*, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y (\bigcup_{j \in L_i} \overline{R_j^{NE(i)}}) x^*, \forall y \in X, y \neq x^*, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall y \in X, y \neq x^*, \forall i \in N, \exists j \in L_i: y \overline{R_j^{NE(i)}} x^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall y \in X, y \neq x^*, \forall i \in N, \exists j \in L_i: x^* S_j^{NE(i)} y. \end{aligned}$$

Сильні мажорантні рівноваги:

$$\begin{aligned} x^* \in PME &\Leftrightarrow y T_i^{NE(i)} x^*, \forall y \in X, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y (\bigcup_{j \in L_i} (Q_i^{NE(i)} \cap S_j^{NE(i)})) x^*, \forall y \in X, \forall i \in N. \end{aligned}$$

З наведених вище визначень неважко побачити, що $PME \supseteq ARE \supseteq MME \supseteq ASE$. Оскільки навіть у досить простих іграх з перевагами гравців, які задані функціями їх виграшу, рівноваги Неша можуть не існувати [2], то практичний інтерес представляють лише сильні мажорантні рівноваги.

За визначенням NE -переваги $x Q_i^{NE(i)} y \Leftrightarrow x R y \vee (x_{N(i)} \neq y_{N(i)})$, тому на підставі теореми $1 \ y S_i^{NE(i)} x \Leftrightarrow (y S x) \wedge (x_{N(i)} = y_{N(i)})$, таким чином визначення сильної мажорантної рівноваги можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} x^* \in PME &\Leftrightarrow (y_i, x_{N(i)}^*) \overline{T_i} x^*, \forall y_i \in X_i, \forall i \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y_i, x_{N(i)}^*) \chi (\bigcup_{j \in L_i} (Q_i \cap S_j^i)) x^*, \forall y_i \in X_i, \forall i \in N. \quad (10) \end{aligned}$$

Якщо порівняти множини сильних та слабких мажорантних рівноваг, то оскільки

$$T_i = \bigcup_{j \in L_i} (Q_i \cap S_j^i) = \bigcup_{j \in L_i} \bigcap_{k \in L_i} (R_k^i \cap S_j^i) \supseteq \bigcap_{j \in L_i} S_j^i = S_i,$$

неважко побачити, що $WME \supseteq PME$. Тому виявляється доцільним для побудови множини PME спочатку побудувати WME , а потім за визначенням виділити множину PME .

Оскільки перевірка за визначенням сильної мажорантності рівноваги може бути у деяких випадках складною, то сформулюємо наступний критерій в термінах оптимізаційної задачі.

Теорема 4. Ситуація x^* буде сильною мажорантною рівновагою тоді й лише тоді, коли вона є розв'язком оптимізаційної задачі:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in N} \sum_{j \in L_i} r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) = \sum_{i \in N} L_i, \quad (11)$$

$$r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1, j \in L_i, y_i \in X_i, i \in N, \quad (12)$$

Доведення. Покажемо необхідність. Нехай $x^* \in PME$. Спочатку покажемо, що для $\forall i \in N$, $\forall j \in L_i$ має місце відношення

$$x^* R_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*) \text{ для } \forall y_i \in X_i : (y_i, x_{N \setminus i}^*) Q_i x^* \quad (13)$$

Припустимо супротивне, нехай $\exists i \in N$, $\exists y_i \in X_i$ такі, що $(y_i, x_{N \setminus i}^*) Q_i x^*$ та $\exists j \in L_i$, для якого $x^* \bar{R}_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*)$. Тоді оскільки критеріальні відношення переваги гравців є повними, то $(y_i, x_{N \setminus i}^*) S_i' x^*$. Звідси виходить відношення $(y_i, x_{N \setminus i}^*) (Q_i \cap S_i') x^*$. Тоді $(y_i, x_{N \setminus i}^*) \cup_{j \in L_i} (Q_i \cap S_i') x^*$.

Це означає $(y_i, x_{N \setminus i}^*) T_i x^*$, що суперечить умові $x^* \in PME$. Перепишемо відношення (13) в термінах їх характеристичних функцій, тоді для $\forall i \in N$, $\forall j \in L_i$ одержимо:

$$\min \{ r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) | q_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1, y_i \in X_i \} = 1.$$

Звідси слідує, що:

$$\min \left\{ \sum_{i \in N} \sum_{j \in L_i} r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) | q_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1, \right.$$

$$y_i \in X_i, i \in N \left. \right\} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in L_i} \min \{ r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*))$$

$$| q_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1, y_i \in X_i \} = \sum_{i \in N} L_i,$$

звідки слідує (11). Оскільки $1 = q_i((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = \min_{j \in L_i} r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*)$, то справедливі умови (12).

Доведемо достатність. Нехай ситуація x^* є розв'язком задачі (11), (12).

Припустимо супротивне, що $x^* \notin PME$. Тоді $\exists i \in N$, $\exists y_i \in X_i$, для яких $(y_i, x_{N \setminus i}^*) T_i x^*$. Звідси слідує $(y_i, x_{N \setminus i}^*) \cup_{j \in L_i} (Q_i \cap S_i') x^*$. Тоді $\exists j \in L_i$, для якого $(y_i, x_{N \setminus i}^*) (Q_i \cap S_i') x^*$. Звідси має місце відношення $(y_i, x_{N \setminus i}^*) Q_i x^*$, яке еквівалентне відношенню $(y_i, x_{N \setminus i}^*) (\cap_{j \in L_i} R_i^j) x^*$, та відношення $(y_i, x_{N \setminus i}^*) S_i' x^*$, яке в силу повноти відношення

нестрокої переваги гравців еквівалентне $x^* \bar{R}_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*)$. В термінах характеристичних функцій ці відношення мають вигляд: $r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) = 0$, $r_i^j((y_i, x_{N \setminus i}^*), x^*) = 1$, $j \in L_i$. Тоді за умовами (12) $\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in L_i} r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) =$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{j \in L_i} \min r_i^j(x^*, (y_i, x_{N \setminus i}^*)) < \sum_{i \in N} L_i. \quad \text{Одержали}$$

суперечність умові (11). Теорему доведено.

Таким чином, сильні мажорантні рівноваги, які обґрунтовані агрегацією перетином критеріальних відношень переваги гравців (кожен гравець шукає ситуацію найбільш переважну за усіма його критеріальними відношеннями переваги), утворюють множину, яка включається в множину слабких мажорантних рівноваг. З обчислювальної точки зору знаходження сильних мажорантних рівноваг є значно складнішим, ніж слабких. Можливо, їх використання є доцільним лише у випадках в одно-цільових багатокритеріальних іграх, коли кожен гравець має лише одну ціль у грі, яка характеризується набором його переваг, відповідних різним аспектам порівняння ситуацій гри.

Слабкі мажорантні рівноваги, на відміну від сильних, обґрунтовані агрегацією об'єднанням критеріальних відношень переваги гравців. Вони гарантують кожному гравцю лише ситуацію найбільш переважну хоча б за одним критеріальним відношенням переваги. Їх використання виправдовує себе в багатоцільових іграх, коли кожен гравець переслідує декілька цілей і задоволення хоча б однієї з них є для нього прийнятним.

Список використаних джерел

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
3. Мащенко С.О. Слабкі індивідуально-оптимальні рівноваги // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – 2. – с. 216-223.
4. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.

Надійшла до редколегії 17.11.08

УДК 518:517.944/947

Москальков М. М., к. ф.-м. н.
Іванов К. В., студент

Метод фіктивних областей в задачах конвекції-дифузії

Розглянута однорідна крайова задача першого роду для рівняння конвекції-дифузії другого порядку з розривними коефіцієнтами в складних областях. Для цієї задачі, побудовано економічний чисельний метод, в основі якого лежить теорія методу фіктивних областей, економічні локально-одновимірні схеми для багатовимірних задач математичної фізики та монотонні апроксимації рівняння конвекції-дифузії. Наводяться оцінки точності.

Ключові слова: рівняння конвекції-дифузії з розривними коефіцієнтами, метод фіктивних областей, економічні локально-одновимірні схеми, монотонні апроксимації.

E-mail: m31wavfarer@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Гаращенко Ф. Г.

Для знаходження чисельного розв'язку рівняння конвекції-дифузії застосовуються два основних класи методів: метод скінчених різниць та метод скінчених елементів.

Кожен з названих наближених методів розв'язання крайових задач має свої недоліки і переваги. Їх порівняльний аналіз можна знайти, наприклад, в роботі [4]. Вкажемо недоліки і переваги цих методів.

Метод скінчених елементів гарно пристосований для розв'язання задач в складних розрахункових областях. Однак обчислювальна реалізація методу скінчених елементів набагато складніше, ніж методу скінчених різниць. Простота і універсальність характерні для різницевого методів розв'язування крайових задач математичної фізики в регулярних (прямокутних) розрахункових областях.

Важливим напрямком розвитку теорії різницевого схем представляються дослідження по різницево-методам розв'язування крайових задач в складних нерегулярних областях. Тут успіх може досягатися за рахунок використання нерегулярних сіток [5], що зближає метод скінчених різниць з методом скінчених елементів. Друга класична можливість

Moskalkov M. M., Ph.D.
Ivanov K. V., student

Fictitious domain method in convection-diffusion problems

Convection-diffusion problem of the second order with homogeneous Dirichlet boundary conditions and with discontinuous coefficients in constitutive area is considered. For this problem, efficient numerical method was developed on the basis of fictitious domain method, efficient locally one-dimensional schemes for multidimensional problem of mathematical physics and monotone approximations convection-diffusion problem. The accuracy estimations are given.

Key Words: convection-diffusion problem with discontinuous coefficients, fictitious domain method, efficient locally one-dimensional schemes, monotone approximations.

пов'язана з застосуванням звичайних різницевого схем на регулярних сітках з спеціальною апроксимацією поблизу границі [2].

Привабливою є перспектива використання різницевого методів наскрізного рахунку, побудованих на основі методу фіктивних областей [6].

Такий підхід дозволяє, зокрема, суттєво підвищити ступінь автоматизації програмування, значно полегшує перехід з однієї прикладної задачі на іншу. Ці фактори технологічності методу фіктивних областей у поєднанні з методом скінчених різниць є особливо цінними при створенні функціонального наповнення пакетів прикладних програм. Основний недолік цього підходу, як і інших методів наскрізного рахунку, добре відомий – невисока точність наближеного розв'язку [1].

В даній роботі застосовуються найбільш ефективні підходи до різних етапів розв'язання рівняння конвекції-дифузії: зведення задачі з складної багатовимірної області до ланцюжка одновимірних задач в простій області; ефективний паралельний алгоритм, який набуває особливої

актуальності, якщо враховувати сучасні можливості і розвиток кластерних технологій.

I. Розглянемо наступне рівняння конвекції-дифузії.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x, t), \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} (K_a(x) \frac{\partial u}{\partial x_a}) - \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} (V_a(x) u) - \sum_{a=1}^p Q_a(x) u$$

в обмеженій просторово-часовій області:

$\Omega_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ - циліндр;

$\Omega = (x_1, x_2)$ - обмежена просторова область з границею $\partial\Omega$; p - розмірність простору;

$\partial\Omega_T = \{(x, t) | x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$ - бічна поверхня

Ω_T ; з початковими та однорідними крайовими умовами першого роду:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad x \in \Omega \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega_T \quad (3)$$

Праві частини $f(x, t) \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega)$. Функції $K_a(x)$, $V_a(x)$, $Q_a(x)$ - вимірні та задовольняють умовам

$$K_a(x) > 0, \mu_1 \xi^2 \leq \sum_{a=1}^p K_a(x) \xi_a^2, \mu_1 > 0, \xi^2 = \sum_{a=1}^p \xi_a^2,$$

$$\sum_{a=1}^p V_a(x) V_a(x) \xi_a \xi_a \leq \mu_2 \sum_{a=1}^p \xi_a^2, \quad (4)$$

де ξ_a - будь-який ненульовий вектор.

$$\left| \frac{\partial K_a}{\partial x_a} \right| \leq c_1, \left| \frac{\partial K_a}{\partial t} \right| \leq c_2, 0 \leq Q_a(x) \leq c_3, a = \overline{1, p}.$$

Розглянемо одновимірний випадок рівняння (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (V(x) u) + Q(x) u = f(x, t) \quad (5)$$

$(x, t) \in \Omega_T$, де $\Omega_T = \{(x, t) | x \in \Omega, t \in (0, T)\}$,

$T > 0$ і $\partial\Omega_T = \{(x, t) | x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$, а

$\Omega = (0, 1)$ з границею $\partial\Omega = \{0, 1\}$. До рівняння (1) додаємо початкову умову (2) та крайові умови (3).

II. Для розв'язання задачі (5), (2), (3) будемо використовувати метод фіктивних областей [1, 7, 8].

Нехай $\tilde{\Omega}$ - розширена область ($\Omega \subset \tilde{\Omega}$, наприклад, $\tilde{\Omega} = (0, 2)$) і

$\tilde{\Omega}_T = \{(x, t) | x \in \tilde{\Omega}, t \in (0, T)\}$,

$\partial\tilde{\Omega}_T = \{(x, t) | x \in \partial\tilde{\Omega}, t \in (0, T)\}$ - бічна поверхня $\tilde{\Omega}_T$.

Наближений розв'язок, який залежить від параметра ε , позначимо $u_\varepsilon(x)$ і будемо шукати його в області $\tilde{\Omega}_T$. Будемо використовувати варіант методу фіктивних областей з продовженням за старшими коефіцієнтами [1].

Розв'язок в розширеній області $u_\varepsilon(x)$ визначається як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K^\varepsilon(x) \frac{\partial u'}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (V^\varepsilon(x) u') + Q^\varepsilon(x) u' = f^\varepsilon(x, t), (x, t) \in \tilde{\Omega}_T \quad (6)$$

$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x), x \in \Omega \\ \varepsilon^{-2}, x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}, V^\varepsilon(x) = \begin{cases} V(x), x \in \Omega \\ 0, x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}$$

$$Q^\varepsilon(x) = \begin{cases} Q(x), x \in \Omega \\ 0, x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}, f^\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x, t), (x, t) \in \Omega_T \\ 0, (x, t) \in \tilde{\Omega}_T / \Omega_T \end{cases}$$

Рівняння (6) доповнюється граничною умовою

$$u'(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\tilde{\Omega}_T \quad (7)$$

і початковою

$$u'(x, 0) = \varphi_0^\varepsilon(x) \quad x \in \tilde{\Omega} \quad (8)$$

Для початкової умови (7) використовується продовження в Ω вигляду:

$$\varphi_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), x \in \Omega \\ 0, x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases} \quad (9)$$

III. Побудуємо монотонну різницьку схему для одновимірного рівняння конвекції-дифузії (6) в дивергентному вигляді з граничними і початковими умовами (7)-(8).

Розглянемо сітки

$$\bar{\omega}_x = \{x_i = \tau h, i = 0, 1, \dots, N, h = L / N\};$$

$$\bar{\omega}_t = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau = T / M\}.$$

І ω_h, ω_τ - не включаючи граничних точок.

Використовуючи інтегро-інтерполяційний метод [2], ідею регуляризації різницевої схеми для її монотонності [3], отримаємо наступну різницеву крайову задачу з ваговим множником σ :

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + \bar{A}(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma)y_i^j) &= \varphi_i^j \\ i=1, N-1; j=0, M-1 \\ \bar{A}y &= (C+D+G)y \\ Dy &= -(1+\rho(x-0.5h))K^e(x-0.5h)y_i^j, \\ Cy &= \frac{V^e}{2h}(y_{i+1} + y_i) - \frac{V^e}{2h}(y_i + y_{i-1}) \\ Gy &= Q^e y_i; \varphi_i^j = f^{e,j+0.5} \end{aligned} \quad (10)$$

$$y_i^0 = \varphi_0^e(x_i), \quad (11)$$

$$y_0^j = 0; y_N^j = 0, \quad (12)$$

де регуляризуюча функція

$$\rho_{i \pm 0.5} = \mu \theta_{i \pm 0.5}^2 = \mu \left| \frac{V^e(x_{i \pm 0.5})h}{2K^e(x_{i \pm 0.5})} \right|^2, \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Реалізація отриманої різницевої схеми проводиться модифікацією метода прогонки для дивергентного випадку [3].

IV. Нехай $z(x,t) = y(x,t) - u^e(x,t)$ - похибка схеми (10)-(12), де $x \in \omega_h, t \in \omega_\tau$, $y(x,t)$ - розв'язок задачі (10)-(12), $u^e(x,t)$ - розв'язок задачі (6),(3),(2).

Тоді

$$z_i + \bar{A}(\sigma \hat{z}_i + (1-\sigma)z_i) = \psi_i; z(x,0) = 0;$$

$$z(0,t) = 0; z(1,t) = 0$$

де $\psi = \bar{A}(\sigma \hat{u}^e + (1-\sigma)u^e) + \varphi - u^e$ - похибка апроксимації (нев'язка), $\hat{v} = v(x,t+\tau)$,

$$v_i = \frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau}$$

Теорема 1. При $\sigma \geq \frac{1}{2}$ для похибки z схеми (10)-(12) виконується наступна оцінка:

$$\|z(x,t)\|^2 \leq T e^{2C \cdot T} \max_{t \leq T} \|\psi(x,t)\|_{l_2}^2.$$

де $\|\cdot\|$ - сіткова норма $L_2(\omega_h)$,

$\|y\|_{D^{-1}} = \sqrt{(D^{-1}y, y)}$, $(\cdot, \cdot)$ - сітковий скалярний добуток.

Нехай коефіцієнти $K^e(x), V^e(x), Q^e(x)$ рівняння (6) мають розрив першого роду на прямій $l: x = \xi$ у площині (x,t) . На лінії розриву виконуються умови спряження:

$$[u^e] = 0, \left[K^e(x) \frac{\partial u^e}{\partial x} - V^e u^e \right] = 0, x = \xi, t \geq 0 \quad (13)$$

$K^e(x), V^e(x), Q^e(x), f^e(x,t)$ і розв'язок $u^e(x,t)$ за межами лінії розриву є достатньо гладким

$$u^e \in C_1^1(\Omega_T / l) \quad (14)$$

З теореми 1 при умовах (13)-(14) випливає наступна теорема [2].

Теорема 2. При $\sigma \geq \frac{1}{2}$ для похибки z схеми (10)-(12) виконується наступна оцінка:

$$\|z(x,t)\| = O(\tau^m + \sqrt{h})$$

V. Розглянемо для задачі (1)-(3) метод фіктивних областей з продовженням за старшими коефіцієнтами. Відповідна задача має вигляд:

$$\frac{\partial u^e}{\partial t} - L^e u^e = f^e(x,t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L^e u^e &= \sum_{a=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_a} (K_a^e(x) \frac{\partial u^e}{\partial x_a}) - \\ &- \sum_{a=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_a} (V_a^e(x) u^e) - \sum_{a=1}^2 Q_a^e(x) u^e, (x,t) \in \tilde{\Omega}_T \end{aligned} \quad (16)$$

$$u^e(x,t) = 0; (x,t) \in \partial \tilde{\Omega}_T, \quad (17)$$

$$u^e(x,0) = \varphi_0^e(x); x \in \tilde{\Omega}, \quad (18)$$

$$K_a^e(x) = \begin{cases} K_a(x), & x \in \Omega \\ e^{-2z}, & x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}, V_a^e(x) = \begin{cases} V_a(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}$$

$$Q_a^e(x) = \begin{cases} Q_a(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}, f^e(x) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ 0, & (x,t) \in \tilde{\Omega}_T / \Omega_T \end{cases}$$

$$\varphi_0^e(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \tilde{\Omega} / \Omega \end{cases}$$

Теорема 3. Розв'язок задачі (15)-(18) збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до розв'язку задачі (1)-(3), при цьому справедлива оцінка $\|u - u^*\|_{L_2(\Omega_T)} \leq c\varepsilon^2 (\|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)})$, [7].

VII. Розглянемо рівняння (15)-(18). Оператор $L'u'$ представимо у вигляді: $L'u' = L_1u' + L_2u'$, де

$$L_\alpha u' = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (K'_\alpha(x) \frac{\partial u'}{\partial x_\alpha}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (V'_\alpha(x) u') - Q'_\alpha(x) u', \alpha = \overline{1, p}$$

Якщо орієнтуватись на сучасні паралельні комп'ютери можна використовувати адитивно-усереднені схеми по-компонентного розщеплення. В цьому випадку перехід на новий часовий шар відбувається наступним чином [3]:

$$\frac{y_\alpha^{n+1} - y^n}{\rho\tau} + A_\alpha(\sigma_\alpha y_\alpha^{n+1} + (1 - \sigma_\alpha) y^n) = \varphi_\alpha^n,$$

$$\alpha = \overline{1, \dots, p}, n = \overline{0, 1, \dots} \quad (19)$$

$$\text{де } y^{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha^{n+1}, \varphi^n = \sum_{\alpha=1}^p \varphi_\alpha^n \approx f.$$

Для двовимірної задачі $p=2$. Тут A_α - різницевий оператор, який апроксимує оператор L_α в одновимірному випадку (див. (10)).

Розглянемо відповідну задачу для похибки $z^{n+1} = y^{n+1} - u^{n+1}, z_\alpha^n = y_\alpha^n - u_\alpha^n$, що при підстановці в (19) дає

$$\frac{z_\alpha^{n+1} - z_\alpha^n}{\rho\tau} + A_\alpha(\sigma_\alpha z_\alpha^{n+1} + (1 - \sigma_\alpha) z_\alpha^n) = \psi_\alpha^n,$$

$$\alpha = \overline{1, \dots, p}, n = \overline{0, 1, \dots}, z^{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p z_\alpha^{n+1}$$

Для похибки апроксимації маємо

$$\psi_\alpha^n = -\frac{u^{n+1} - u^n}{\rho\tau} - A_\alpha(\sigma_\alpha u^{n+1} + (1 - \sigma_\alpha) u^n) + \varphi_\alpha^n.$$

Нехай $\psi_\alpha^n = \psi_\alpha^n + \psi$, де

$$\varphi_\alpha^{(u)} = -\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - A^{(u)}(u) + f^n(x, t_n),$$

$$f(x, t_n) = \sum_{\alpha=1}^p f^n_\alpha(x, t_n), \text{ тоді } \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^n = 0 \text{ та}$$

$$\psi_\alpha^n = O(\tau + \sqrt{h_\alpha}) \text{ (див. [2])}.$$

Враховуючи властивості $\psi_\alpha^n, \psi_\alpha^n, \psi$

встановлюємо наступну теорему.

Теорема 4. При $\sigma_\alpha \geq 0.5, \alpha = \overline{1, 2, \dots, p}$ і довільних $\tau > 0$ для похибки задачі (19) виконується наступна оцінка $\|z\| = O(\tau + \sqrt{h})$,

$$\text{де } h = \max_{\alpha=1, \dots, p} \{h_\alpha\}.$$

При доведенні цієї теореми [3] використовувалася умова $A_\alpha \geq 0$. Для цього достатньо виконання наступної умови

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{1}{d}, \alpha = \overline{1, 2, \dots, p},$$

де d - діаметр області Ω , μ_1 та μ_2 - константи з умов (4).

Список використаних джерел

1. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. изд-во Московского университета, 1991. 158с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва, Наука, 1981. 616 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва, Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
4. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 334 с.
5. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики //УМН. 1976. Т. 31, №6. С. 167-197.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
7. Войцеховский С. А. Метод фиктивных областей для параболических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. № 47. Киев. 1982. С. 35-42

Надійшла до редколегії 18.12.08

УДК 519.86

Назарага І. М.*

Моделі паритету купівельної спроможності та паритету відсоткових ставок в умовах економіки України

Проведено аналіз можливості застосування моделей паритету купівельної спроможності і паритету відсоткових ставок для визначення обмінного курсу гривні/долар США в умовах української економіки.

Ключові слова: паритет купівельної спроможності, відсотковий паритет.

*E-mail: inna_na@ukr.net

Статтю представив д.т.н. Акіменко В.В.

Обмінний курс є одним із основних показників макроекономічної стабільності. У залежності від урахування чинників, що впливають на обмінний курс, застосовують різні моделі для його визначення. Серед найбільш поширених можна виділити модель паритету купівельної спроможності (purchasing power parity), модель паритету відсоткових ставок (interest rate parity), варіанти монетарних моделей, модель Mundell-Fleming, варіанти поведінкових моделей (BEER model) і модель портфеля активів (portfolio-balance model).

У подальшому детально розглядаються паритет купівельної спроможності і паритет відсоткових ставок з метою з'ясування можливості їх використання для економіки України.

Зауважимо, що вибір саме цих моделей, які є важливими самі по собі, базується зокрема і на тому, що вони є основами інших підходів визначення обмінного курсу, наприклад для монетарних моделей.

1. Модель паритету купівельної спроможності

Модель паритету купівельної спроможності (purchasing power parity, далі – ПКС) є однією з найпростіших теорій змінного обмінного курсу.

Відомі дві версії моделі паритету купівельної спроможності: абсолютна та відносна [1, с.143].

Абсолютна версія базується на законі єдиної ціни, у якому стверджується, що ідентичні товари повинні мати однакову ціну, виражену в одній валюті. На ринку товарів згідно арбітражу (процесу забезпечення закону єдиної ціни) обмінний курс встановлюється таким чином, щоб

I. M. Nazaraga*

The models of purchasing power and interest rate parity of Ukrainian economics

The analysis of a possibility of application of models of purchasing power parity and interest rate parity for definition of the exchange rate hryvnia /US dollar in conditions of the Ukrainian economy is lead.

Key Words: purchasing power parity, interest rate parity.

зрівняти ціни двох країн. Якщо цей закон виконується для всіх товарів між двома країнами, то ми отримуємо абсолютний ПКС, тобто:

$$e_t = \frac{P_t}{P_{t,j}}, \quad (1)$$

де e_t – обмінний курс,

P_t – рівень цін у країні,

$P_{t,j}$ – рівень цін за кордоном (в іноземній валюті на зовнішньому ринку).

Варто зазначити деякі теоретичні аспекти, що свідчать проти виконання ПКС [2, с.335]:

1. трансакційні витрати, торгівельні бар'єри, тарифи та квоти заважають цінам різних країн зрівнятися так, щоб виконувався закон єдиної ціни

2. індекси цін включають не тільки товари, але і послуги. Це може призводити до проблем підрахунку ПКС, коли країни мають різні продуктивності.

3. індекси цін і ваги, з якими в кошик входить той або інший товар, різні (індекси цін визначаються за різними кошиками товарів).

4. умова вільного плавання обмінного курсу порушується для більшості країн, тому що центральні банки проводять інтервенції для регулювання обмінного курсу.

Відносна версія ПКС припускає відхилення індексу внутрішніх цін від індексу зовнішніх цін (помноженого на обмінний курс) через природні та штучні бар'єри (транспортні витрати, тарифи). Але при цьому вважають, що відсоткова зміна P_t приблизно дорівнює відсотковій зміні e , $P_{t,j}$ при

умові, що природні та штучні бар'єри стійкі у часі [2, с. 335].

Такий варіант ПКС є модифікацією абсолютного ПКС (1), враховуючи зміни у часі:

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{e_t P_{z,t} - e_{t-1} P_{z,t-1}}{e_{t-1} P_{z,t-1}} \quad (2)$$

Але

$$\frac{e_t P_{z,t} - e_{t-1} P_{z,t-1}}{e_{t-1} P_{z,t-1}} \approx \frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}} + \frac{P_{z,t} - P_{z,t-1}}{P_{z,t-1}}$$

Тому із (2) маємо:

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \approx \frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}} + \frac{P_{z,t} - P_{z,t-1}}{P_{z,t-1}}$$

Звідси, при виконанні паритету купівельної спроможності, темп зміни обмінного курсу національної валюти приблизно дорівнює різниці темпу інфляції всередині країни і темпу інфляції за кордоном:

$$\frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{P_{z,t} - P_{z,t-1}}{P_{z,t-1}} \quad (3)$$

Прологарифмуємо ліву та праву частини рівняння (3), отримаємо:

$$\begin{aligned} \ln e_t - \ln e_{t-1} &\approx \\ &\approx (\ln P_t - \ln P_{t-1}) - (\ln P_{z,t} - \ln P_{z,t-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

Проти виконання відносної теорії ПКС засвідчують наступні фактори:

1. труднощі, пов'язані із торгівлею багатьма товарами,
2. розбіжності товарних "кошиків" цінних індексів різних країн.

2. Відсотковий паритет

У цій моделі обмінний курс визначається за допомогою відсоткових ставок у різних країнах. Для відсоткового паритету передбачаються абсолютна мобільність капіталу і абсолютна замінність активів.

Покритий паритет відсоткових ставок (covered interest rate parity, далі – покритий ПВС) стверджує, що інвестування одиниці валюти, яке приносить відсоток i_t за певний період та інвестування одиниці валюти за кордон (чи в іноземні активи) під відсоток $i_{z,t}$ повинні приносити однаковий прибуток [3, с. 67].

Щоб інвестувати за кордон, інвестор спочатку конвертує одиницю національної

валюти в іноземну валюту, а потім отриману кількість одиниць іноземної валюти потрібно конвертувати назад. Отримаємо величину $e_t(1+i_{z,t})/e_{t-1}$, оскільки в $(t-1)$ -му періоді за одиницю національної валюти пропонують $1/e_{t-1}$ одиниць іноземної і ця сума за досліджуваний період зростає в $1+i_{z,t}$ разів, а переведення у національну валюту відбувається за обмінним курсом e_t .

За моделлю покритого паритету відсоткових ставок різниця між національною і іноземною ставками відсотка буде дорівнювати очікуваному темпу приросту обмінного курсу національної валюти та добутку цього темпу й іноземної ставки відсотка. Дійсно, це випливає з рівності таких величин:

1) $1+i_t$ – величина, яка показує, у скільки разів за період зростуть вкладення у вітчизняні активи;

2) $e_t(1+i_{z,t})/e_{t-1}$ – величина, яка показує, у скільки разів за той же період зростуть вкладення у іноземні активи.

Тобто, з рівняння:

$$1+i_t = e_t(1+i_{z,t})/e_{t-1} \quad (5)$$

маємо

$$\frac{1+i_t}{1+i_{z,t}} = \frac{e_t}{e_{t-1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{i_t - i_{z,t}}{1+i_{z,t}} = \frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}}$$

Позначимо $\bar{e}_t = \frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}}$ – очікуваний темп зростання обмінного валютного курсу, тоді

$$i_t - i_{z,t} = \bar{e}_t(1+i_{z,t}) \Leftrightarrow$$

$$i_t - i_{z,t} = \bar{e}_t + \bar{e}_t i_{z,t}$$

Таким чином, різниця між національною і іноземною ставками відсотка дорівнює очікуваному темпу приросту обмінного курсу національної валюти та добутку цього темпу й іноземної ставки відсотка.

Непокритий паритет відсоткових ставок (uncovered interest rate parity) пов'язує відношення відсоткових ставок з очікуваною зміною обмінного курсу [4, с. 10].

Непокритий ПВС випливає з покритого ПВС у припущенні ефективності ринків, тобто

поточний обмінний курс повинен відбивати всю доступну поточну інформацію, а форвардний курс повинен включати всі очікування відносно майбутнього значення обмінного курсу.

Отже:

$$\left(\frac{1+i_t}{1+i_{z,t}} \right)^k = \frac{M_t(e_{t+k})}{e_t}, \quad (6)$$

де $M_t(\cdot)$ - математичне сподівання, що ґрунтується на доступній на час t інформації.

У досліджуваній моделі передбачається, що арбітраж можливий, тобто існує абсолютна мобільність капіталу, а також те, що інвесторам байдуже, у які активи вкладати кошти. Ці припущення є досить сильними: як правило, у країнах існують обмеження на перевезення капіталу й різні активи характеризуються різними ризиками.

3. Рівняння лінійної регресії для моделей ПКС та ПВС

Розглянуті вище моделі (1), (4), (5), (6) були записані у прийнятному для оцінювання вигляді. Базовими для досліджуваних моделей є рівняння лінійної регресії.

Зокрема, модель абсолютного ПКС представляється рівнянням [5, с. 167]:

$$\ln e_t = \beta_0 + \beta_1(p_t - p_{z,t}) + u_t. \quad (7)$$

Для відносної версії ПКС [5, с. 167] базове рівняння впливає з (4):

$$\Delta \ln e_t = \beta_0 + \beta_1(\Delta p_t - \Delta p_{z,t}) + u_t. \quad (8)$$

Рівняння лінійної регресії для покритого паритету відсоткових ставок (див. рівняння (5)):

$$\Delta \ln e_t = \beta_0 + \beta_1(\ln(1+i_t) - \ln(1+i_{z,t})) + u_t. \quad (9)$$

І для непокритого ПВС маємо наступне рівняння [4, с. 58]:

$$\ln e_{t+k} - \ln e_t = \beta_0 + \beta_1(i_{t,k} - i_{z,t,k}) + u_t. \quad (10)$$

Для рівняння (7) використано позначення:

$\ln e_t$ - логарифм номінального обмінного курсу в момент часу t ,

p_t - логарифм рівня цін на вітчизняному ринку в момент часу t ,

$p_{z,t}$ - логарифм рівня цін на іноземному ринку в момент часу t ,

β_0, β_1 - параметри моделі,

u_t - похибка.

Для рівняння (8):

$$\Delta \ln e_t = \ln e_t - \ln e_{t-1},$$

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1},$$

$$\Delta p_{z,t} = p_{z,t} - p_{z,t-1},$$

а інші позначення описано вище.

У рівнянні (9) також вживаються:

i_t - відсоткова ставка за депозитами всередині країни в момент часу t ,

$i_{z,t}$ - відсоткова ставка за депозитами для іншої країни в момент часу t .

І, нарешті, для рівняння (10), крім уже введених позначень, використано такі:

$\ln e_{t+k}$ - логарифм номінального обмінного курсу в момент часу $t+k$,

$i_{t,k}$ - відсоткова ставка за депозитами всередині країни в момент часу t на період k ,

$i_{z,t,k}$ - відсоткова ставка за депозитами для іншої країни в момент часу t на період k .

4. Перевірка основних гіпотез для моделей ПКС та ПВС

Базовими для опису поведінки досліджуваних моделей (7)-(10) є ситуації, для яких коефіцієнти $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$. Тому для цих моделей основною гіпотезою, яка перевіряється за довірчої імовірності β_c , є наступна:

$$H_0: \beta_0 = 0, \beta_1 = 1.$$

Ідентифікація параметрів для кожної із описаних моделей здійснювалася методом найменших квадратів, а для перевірки гіпотез у лінійній регресії використано критерій згоди зі статистикою, яка має F-розподіл.

Тобто, для перевірки гіпотези

$$H_0: \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$$

у лінійній регресії $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ за довірчої імовірності β_c використано наступне правило - критерій згоди.

І. Будується статистика критерію згоди, що має F-розподіл:

$$G = \frac{(RSS_H - RSS)/q}{RSS/(n-p)},$$

$$\text{де } RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

$$RSS_H = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2$$

p – кількість параметрів (для описаних моделей $p=2$),

q – кількість припущень у H_0 (для описаних моделей $q=2$),

n – кількість спостережень.

2. За довірчої імовірності β_c будується довірча область

$$D_{\beta_c} = \left(x_{1-\beta_c}^l; x_{1-\beta_c}^u \right) = \left(\frac{1}{F_{n-p, q, \frac{1-\beta_c}{2}}}; F_{q, n-p, \frac{1-\beta_c}{2}} \right),$$

$$\text{де } x_{1-\beta_c}^l = \frac{1}{F_{n-p, q, \frac{1-\beta_c}{2}}} - \text{нижня критична}$$

величина для F -розподілу рівня $\frac{1-\beta_c}{2}$,

$$x_{1-\beta_c}^u = F_{q, n-p, \frac{1-\beta_c}{2}} - \text{верхня критична величина}$$

для F -розподілу рівня $\frac{1-\beta_c}{2}$.

3. Гіпотеза приймається, якщо $G \in D_{\beta_c}$ і відхиляється, якщо $G \in D_{\beta_c}$.

Для статистичної перевірки основних гіпотез отриманих моделей обмінних курсів (гривня / долар США) використовувалися статистичні дані економік України та США [6-11].

Список використаних джерел

1. Гинзбург А. И., Михейко М. В. Рынки валют и ценных бумаг. Биржи. Инвестиции. Участники. - СПб.; М.; Нижний Новгород; Воронеж; Ростов на Дону; Питер, 2004. - 250 с.
2. Сакс Джеффри Д., Ларрен Фелипе Б. Макроэкономика. Глобальный подход // пер. с англ. - М.: Дело, 1996. - 848 с.
3. Харазішвілі Ю. М. Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України // Державний НДІ інформатизації та моделювання економіки Міністерства економіки України (ДНДІМЕ). - К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. - 324 с.

1. Для моделі абсолютного ПКС при $n=12$ (дані за 1996-2007 роки) статистика критерію $G = 39,896$, а довірча область:

$$D_{0,9} = (0,516; 4,103),$$

2. Для моделі відносного ПКС при $n=11$ (дані за 1997-2007 роки) статистика критерію $G = -4,499$, а довірча область:

$$D_{0,9} = (0,516; 4,256),$$

3. Для моделі покритого ПВС при $n=8$ (дані за 2000-2007 роки) статистика критерію $G = -2,999$, а довірча область:

$$D_{0,9} = (0,517; 5,143),$$

4. Для моделі непокритого ПВС при $n=7$, $k=2$ (дані за 2001-2007 роки) статистика критерію $G = -2,493$, а довірча область:

$$D_{0,9} = (0,518; 5,786).$$

Отже, за довірчої імовірності 0,9 для описаних моделей абсолютного і відносного паритетів купівельної спроможності та покритого і непокритого паритетів відсоткових ставок гіпотези відхиляються.

Висновки

Як показало дослідження, моделі паритету купівельної спроможності та паритету відсоткових ставок є неадекватними для визначення обмінного курсу гривня/ долар США в умовах української економіки, а тому при макроекономічному моделюванні обмінний курс варто вважати екзогенною змінною (встановленою НБУ) або застосовувати інші моделі для його визначення.

4. Четвериков С. Н. Карасев Г. Г. Структурные модели обменных курсов рубля. - М.: ИЭПП, 2005. - 125 с.

5. Шемет Т.С. Теорія і практика валютного курсу: Навч. пос. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. // О.І. Рогач (ред.). - К.: Либідь, 2006. - 358 с.

6. Страны и регионы. 2005. Статист. справочник Всемирного банка // пер. с англ. - М.: Весь мир, 2005. - 240 с.

7. Statistical Abstract of the United States: 2008. - Washington: DC, 2007. - 127 ed.

8. <http://www.ukrstat.gov.ua>

9. <http://www.nbuv.gov.ua>

10. <http://www.imf.org>

11. <http://www.imfstatistics.org>

Надійшла до редколегії 18.12.08

УДК 519.9

Негадайлов П.А., асистент

Про моменти поглинання у випадковому блуканні з бар'єром

Випадковим блуканням з бар'єром $n \in N$ назовемо послідовність $R_0^{(n)} := 0$ та $R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k 1_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}$, $k \in N$, де ξ_k - незалежні копії випадкової величини ξ , що набуває натуральних значень. В роботі досліджується асимптотична поведінка математичного сподівання та дисперсії моментів поглинання для $R_k^{(n)}$ в залежності від поведінки хвоста розподілу ξ .

Ключові слова: випадкове блукання, моменти поглинання, правильна зміна.

P.A. Negadajlov, assistant

On the absorption times in a random walk with a barrier

By a random walk with barrier $n \in N$ we mean a sequence $R_0^{(n)} := 0$ and

$R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k 1_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}$, $k \in N$, where ξ_k are i.i.d. copies of a random variable ξ . In the paper we investigate the asymptotic behavior of the mean and variance of the absorption times of $R_k^{(n)}$.

Key Words: random walk, absorption time, regular variation.

*E-mail: npasha@list.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Нехай ξ - випадкова величина, що має власний розподіл

$$p_k := P\{\xi = k\}, \quad p_k > 0, \quad k \in N.$$

Для кожного n визначимо випадкове блукання з бар'єром

$$R_0^{(n)} := 0, \quad R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k 1_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}, \quad k \in N,$$

де $\{\xi_k : k \in N\}$ - незалежні копії випадкової величини ξ , та момент поглинання у ньому

$$T_n := \inf\{k : R_k^{(n)} = n\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{R_i^{(n)} < n\}} + 1.$$

Зазначимо, що $T_1 = 1$ м.н., а при $n \geq 2$ величина $T_n < \infty$ (лема 2.1 [7]).

Покладемо $S_0 := 0$, $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$, та

$$N_n := \inf\{k \geq 1 : S_k \geq n\}, \quad n \in N.$$

Надалі запис $r(\cdot) \sim s(\cdot)$ означає, що $\frac{r(\cdot)}{s(\cdot)} \rightarrow 1$,

коли аргумент прямує до $+\infty$.

В роботі [7] була досліджена асимптотична поведінка моментів поглинання у випадковому блуканні з бар'єром в залежності від поведінки хвоста розподілу ξ . Автором було доведено, що у випадку, коли середнє випадкової величини ξ

скінченне, то послідовність T_n , належним чином нормалізована та центрована, слабо збігається до не виродженого та власного ймовірнісного розподілу. Зокрема, у випадку, коли хвіст розподілу ξ правильно змінюється з параметром -2 , граничний розподіл є нормальним з нульовим середнім та дисперсією 1. Якщо ж хвіст розподілу ξ правильно змінюється з параметром $-\alpha$, де $\alpha \in [1, 2)$, то граничний розподіл є стійким з параметром α .

Продовжуючи серію досліджень асимптотичної поведінки функціоналів, пов'язаних з випадковими блуканнями з бар'єром ([4], [5], [7]), наведені нижче результати встановлюють перші два члени розкладу для ET_n та ET_n^2 , що дозволяє знайти асимптотичну поведінку дисперсії T_n у випадку, коли середнє випадкової величини ξ скінченне.

Теорема 1. Нехай для деякого $\alpha \in (1, 2)$ і функції L , що повільно змінюється на ∞ ,

$$\sum_{k=1}^n k^2 p_k \sim n^{2-\alpha} L(n). \quad (1)$$

Тоді

$$ET_n = \frac{n}{m} + \frac{1}{(\alpha-1)m^2} n^{2-\alpha} L(n) + o(n^{2-\alpha} L(n)),$$

$$ET_n^2 = \frac{n^2}{m^2} + \frac{9\alpha - 3\alpha^2 - 2}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-1)m^3} n^{3-\alpha} L(n) + o(n^{3-\alpha} L(n)),$$

$$DT_n \sim \frac{2(\alpha^2 - 3\alpha + 1)}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-1)m^3} n^{3-\alpha} L(n),$$

де $m := E\xi < \infty$.

Теорема 2 Нехай (1) виконується для $\alpha = 2$.
Якщо $\sigma^2 := D\xi = \infty$, то

$$ET_n = \frac{n}{m} + \frac{1}{2m^2} L(n) + o(L(n)),$$

$$ET_n^2 = \frac{n^2}{m^2} + \frac{5n}{m^3} L(n) + o(nL(n)),$$

$$DT_n \sim \frac{4n}{m^3} L(n),$$

де $m := E\xi$. Якщо $\sigma^2 < \infty$, то

$$ET_n = \frac{n}{m} + \frac{3\sigma^2 + m + 3m^2}{2m^2} - 1 + o(1),$$

$$ET_n^2 = \frac{n^2}{m^2} + n \frac{5\sigma^2 + 2m^2 + 2m}{m^3} + o(n),$$

$$DT_n \sim \frac{n(3\sigma^2 + m - m^2)}{m^3}.$$

Доведення теореми 1

Згідно з елементарною теоремою відновлення

$$u_n := \sum_{l=0}^n P\{S_l = n\} \rightarrow m^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

З доведення теореми 2.5 [7] випливають співвідношення

$$ET_n \sim \frac{n}{m} \quad \text{та} \quad ET_n^2 \sim \frac{n^2}{m^2}. \quad (2)$$

Оскільки $\alpha < 2$, то

$$ET_n P\{\xi \geq n\} \sim \frac{2-\alpha}{\alpha m} n^{1-\alpha} L(n),$$

Позначимо $Y_n := n - S_{N_n-1}$, тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} ET_{Y_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} ET_{n-k} P\{S_{N_n-1} = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ET_{n-k} \sum_{j=0}^k P\{S_j = k, N_n = j+1\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ET_{n-k} \sum_{l=0}^k P\{S_l = k, \xi_{l+1} \geq n-k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ET_{n-k} P\{\xi \geq n-k\} u_k \sim \frac{1}{\alpha m^2} n^{2-\alpha} L(n). \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$ET_{Y_n}^2 \sim \frac{(2-\alpha)}{\alpha(3-\alpha)m^3} n^{3-\alpha} L(n).$$

В той же час

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{l+1} k P\{S_{k-1} = l\} &= \sum_{k=1}^n k P\{N_n \geq k\} - 1 = \\ &= (1/2)(EN_n^2 + EN_n) - 1 \sim (1/2) \frac{n^2}{m^2}, \end{aligned}$$

тому, згідно з твердженням 1.7.3 [1]

$$\sum_{k=2}^{n+1} k P\{S_{k-1} = l\} \sim \frac{n}{m^2}. \quad (3)$$

Отже,

$$\begin{aligned} ET_{Y_n} N_n &= ET_n P\{\xi \geq n\} + \\ &+ \sum_{l=1}^{n-1} ET_{n-l} P\{\xi \geq n-l\} \sum_{k=2}^{l+1} k P\{S_{k-1} = l\} = \\ &\sim \frac{2-\alpha}{\alpha(3-\alpha)m^3} n^{3-\alpha} L(n). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} P\{S_{N_n-1} = n-1\} &= \sum_{k=0}^{n-1} P\{S_k = n-1, N_n = k+1\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P\{S_k = n-1, \xi_{k+1} \geq 1\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P\{S_k = n-1\} \rightarrow m^{-1}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то, використовуючи рівність (теорема 2.2 [7])

$$T_n^u = N_n + T_{Y_n} - 2 \cdot 1_{\{Y_n=1\}} \quad (4)$$

та теореми 2.3, 2.4 [6], отримаємо

$$\begin{aligned} ET_n &= EN_n + ET_{Y_n} - 2 P\{Y_n = 1\} = \\ &= \frac{n}{m} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)m^2} n^{2-\alpha} L(n) + \end{aligned}$$

отже

$$+ \frac{1}{\alpha m^2} n^{2-\alpha} L(n) + o(n^{2-\alpha} L(n)) =$$

$$= \frac{n}{m} + \frac{1}{(\alpha-1)m^2} n^{2-\alpha} L(n) + o(n^{2-\alpha} L(n)).$$

або

$$ET_n^2 = ET_{Y_n}^2 + E(N_n - 2 \cdot 1_{\{Y_n=1\}})^2 +$$

$$+ 2ET_{Y_n} N_n - 4ET_{Y_n} 1_{\{Y_n=1\}} =$$

$$= ET_{Y_n}^2 + EN_n^2 + 2ET_{Y_n}^2 N_n + o(n^{3-\alpha} L(n)) =$$

$$= \frac{(2-\alpha)}{\alpha(3-\alpha)m^3} n^{3-\alpha} L(n) + \frac{n^2}{m^2} + \frac{4}{\alpha(\alpha-1)(3-\alpha)m^3} \cdot$$

$$\cdot n^{3-\alpha} L(n) + 2 \frac{2-\alpha}{\alpha(3-\alpha)m^3} n^{3-\alpha} L(n) + o(n^{3-\alpha} L(n)) =$$

$$= \frac{n^2}{m^2} + \frac{9\alpha-3\alpha^2-2}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-1)m^3} n^{3-\alpha} L(n) + o(n^{3-\alpha} L(n)).$$

Теорема доведена.

Доведення теореми 2

Нехай $\sigma^2 = \infty$. Покладемо

$$P(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k,$$

$$Q(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k P\{\xi > k\},$$

тоді для всіх $-1 < s < 1$ виконується рівність (див., наприклад, [3])

$$Q(s) = (1 - P(s))/(1 - s). \quad (5)$$

За теоремою про середнє існує таке $\sigma \in (s, 1)$, що

$$Q(s) = P'(\sigma),$$

тому, спрямовуючи $s \uparrow 1$ отримаємо

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{Q(s)}{P'(s)} = 1.$$

Диференціюючи (5) отримаємо

$$P'(s) = Q(s) - (1-s)Q'(s),$$

звідки

$$Q'(s) = \frac{Q(s) - P'(s)}{1-s} = \frac{Q(s) - Q(1)}{1-s} + \frac{Q(1) - P'(s)}{1-s},$$

тому за теоремою про середнє існують такі $\sigma_1 \in (s, 1)$ та $\sigma_2 \in (s, 1)$, що

$$Q'(s) + Q(\sigma_1) = P''(\sigma_2),$$

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{2Q'(s)}{P''(s)} = 1.$$

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{2 \sum_{k=1}^{\infty} k P\{\xi > k\} s^k}{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 s^k p_k} = 1, \quad (6)$$

З умови (1) та теореми 1.7.3[1]

$$\sum_{k=0}^n k^2 s^k p_k \sim L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad s \uparrow 1.$$

Отже, враховуючи рівність (6) та умову (1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^n k P\{\xi > k\} = L(n)/2 + o(L(n)). \quad (7)$$

Таким чином, при $n \rightarrow \infty$

$$ET_n = \sum_{k=0}^{n-1} ET_{n-k} \sum_{i=0}^k P\{S_i = k, \xi_{i+1} \geq n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{ET_{n-k}}{n-k} (n-k) P\{\xi \geq n-k\} u_k \sim$$

$$\sim \frac{1}{2m^2} L(n).$$

Аналогічно,

$$ET_{Y_n}^2 \sim \frac{1}{m^3} nL(n).$$

В свою чергу, з (3) випливає

$$ET_{Y_n} N_n = ET_n P\{\xi \geq n\} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} ET_{n-l} P\{\xi \geq n-l\} \sum_{k=2}^{l+1} k P\{S_{k-1} = l\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{m^3} nL(n).$$

Тому, використовуючи (4), та теореми 2.3 та 2.4 [6], отримаємо

$$ET_n = EN_n + ET_{Y_n} - 2 P\{Y_n = 1\} =$$

$$= \frac{n}{m} + \frac{1}{2m^2} L(n) + o(L(n)).$$

$$ET_n^2 = ET_{Y_n}^2 + E(N_n - 2 \cdot 1_{\{Y_n=1\}})^2 + 2ET_{Y_n} N_n$$

$$- 4ET_{Y_n} 1_{\{Y_n=1\}} = \frac{n^2}{m^2} + \frac{5n}{m^3} L(n) + o(nL(n)).$$

Нехай $\sigma^2 < \infty$, тоді для кожного $k \in N$

$$\begin{aligned} P\{Y_n = k\} &= \sum_{i=1}^{n-k+1} P\{S_{i-1} = n-k, S_{i-1} + \xi_i \geq k\} = \\ &= P\{\xi \geq k\} \sum_{i=1}^{n-k+1} P\{S_{i-1} = n-k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\{\xi \geq k\}/m = \\ &=: P\{Y = k\}. \end{aligned}$$

Послідовність $\{u_n : n = 0, 1, \dots\}$ обмежена, тому внаслідок рівності

$$\sum_{k=1}^n k P\{Y_n = k\} = \sum_{k=1}^n k P\{\xi \geq k\} u_{n-k},$$

послідовність $\{EY_n : n = 0, 1, \dots\}$ також обмежена.

Отже $Y_n \xrightarrow{L} Y, n \rightarrow \infty$. В свою чергу враховуючи рівність (див., наприклад, [2])

$$\sum_{k=1}^{\infty} k P\{\xi \geq k\} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \right),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} ET_n &= \sum_{k=1}^n \frac{ET_k}{k} k P\{Y_n = k\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{ET_k}{k} k P\{\xi \geq k\} \sum_{i=0}^{n-k} P\{S_i = n-k\} \xrightarrow{(2)} \frac{1}{m} EY = \\ &= \frac{1}{2m^2} (\sigma^2 + m^2 + m). \end{aligned}$$

Аналогічно випадку $\sigma^2 = \infty, \alpha = 2$, отримаємо

$$\begin{aligned} ET_n^2 &\sim \frac{\sigma^2 + m^2 + m}{2m^3} n, \\ ET_n N_n &\sim \frac{\sigma^2 + m^2 + m}{2m^3} n. \end{aligned}$$

Остаточно з (4) отримаємо

$$\begin{aligned} ET_n &= \frac{n}{m} + \frac{\sigma^2 + m^2 + m}{m^2} - 1 + o(1), \\ ET_n^2 &= \frac{n^2}{m^2} + \frac{6\sigma^2 + m^2 + m}{2m^3} n + o(n). \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Автор вдячний своєму науковому керівнику Іксанову О.М. за постановку задачі та ряд корисних коментарів.

Список використаних джерел

1. Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. Regular variation. — Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
2. Feller, W. Fluctuation theory of recurrent events. // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1949. №67 — P. 98-119.
3. Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. // John Wiley & Sons, Inc. — 1968. №1 — 509 P.
4. Iksanov, A. and Möhle, M. On the number of jumps of random walks with a barrier. // *Adv. Appl. Prob.* — 2008. №40 — P. 206-228.
5. Iksanov, A. and Negudajlov, P. On the number of zero increments of random walks with a barrier. // *Discr. Math. and Theor. Comp. Science.* — 2008. P. 247-254.
6. Mohan, N.R. Teugels' renewal theorem and stable laws. // *Ann. Prob.* — 1976. №4 — P. 863-868.
7. Negudajlov, P. Asymptotic results concerning the absorption times of random walks with a barrier. // *Prob. Theory and Math. Statist.* 2008.. in press (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 24.11.08

УДК 519.8

Юрія К. Подлипенко, Андрій С. Перцов

Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана

Одержані системи варіаційних рівнянь, через розв'язки яких виражаються мінімаксні оцінки функціоналів від невідомих розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, функціонали від розв'язків.

E-mail: yougir@gmail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.

Вступ. Задачам мінімаксного оцінювання станів систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями і рівняннями в частинних похідних при умові їх однозначної розв'язності присвячено значна кількість робіт (див., наприклад, [2], [3], [4] та ін.).

Однак, в ситуації, коли розв'язки крайових задач не визначені однозначно і існують лише, якщо дані цих крайових задач задовольняють деяким умовам сумісності, питання їх мінімаксного оцінювання розроблені недостатньо повно. Тут відомі роботи [7], [8], [9]. Задача мінімаксного оцінювання, що досліджується нижче відноситься до описаного кола проблем.

В даній статті за зашумленими спостереженнями розв'язків і при спеціальних обмеженнях на праві частини рівнянь і крайових умов, а також на шуми в спостереженнях, знайдені мінімаксні оцінки функціоналів від невідомих розв'язків крайових задач для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана.

Знаходження мінімаксних оцінок зведено до розв'язання деяких систем інтегродиференціальних рівнянь і доведена їх однозначна розв'язність.

Позначимо через H – гільбертів простір над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_H$ і нормою $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будемо позначати оператор, що зється ізометричним ізоморфізмом, і, що діє із H на його спряжений простір H' , який визначається рівністю $(u, v)_H = \langle J_H u, v \rangle_{H' \times H} \quad \forall u, v \in H$, де $\langle f, x \rangle_{H' \times H} := f(x)$ для $x \in H, f \in H'$. Цей оператор існує внаслідок теореми Рісса.

Позначимо через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$,

Yuri K. Podlipenko, Andriy S. Pertsov

Minimax estimation of solutions of the boundary value problem for biharmonic equation with the Neumann type boundary conditions.

We obtain systems of variational equations via whose solutions the minimax estimates of functionals from unknown solutions to the boundary value problem for biharmonic equation with the Neumann type boundary conditions are expressed.

Key Words: minimax estimates, observations, functionals from solutions.

визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H таких, що

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, H)}^2 = \int_{\Omega} \|\xi(\omega)\|_H^2 dP(\omega) < \infty. \quad (1)$$

В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $E\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega) \in H$, що називається математичним сподіванням або середнім випадкового елемента $\xi(\omega)$, що задовольняє умову

$$(h, E\xi)_H = \int_{\Omega} (h, \xi(\omega))_H dP(\omega) \quad \forall h \in H. \quad (2)$$

Застосовуючи до випадкової величини ξ це визначення приводить до традиційного означення $\bar{\Pi}$ математичного сподівання, оскільки інтеграл Бохнера (1) переходить у звичайний інтеграл Лебега по ймовірнісній мірі $dP(\omega)$. У $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega, H)} := \int_{\Omega} (\xi(\omega), \eta(\omega))_H dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \quad (3)$$

Використовуючи знак математичного сподівання для випадкових величин, рівності (1)–(3) можна записати у вигляді:

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, H)}^2 = E\|\xi(\omega)\|_H^2, \quad (4)$$

$$(h, E\xi)_H = E(h, \xi(\omega))_H \quad \forall h \in H, \quad (5)$$

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega, H)} := E(\xi(\omega), \eta(\omega))_H \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \quad (6)$$

Простір $L^2(\Omega, H)$ з нормою (4) і скалярним добутком (6) є гільбертовим.

Введемо також наступні позначення: $x = (x_1, x_2)$ – просторова змінна, що належить обмеженій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^2$ з лінійцевою границею Γ ; $dx = dx_1 dx_2$ – міра Лебєга в $\mathbb{R}^2$;

$L^2(D)$ – простір функцій, сумовних з квадратом в області D ; для цілого числа m позначимо через $H^m(D)$ – стандартні простори Соболева із звичайними нормами.

Нехай стан $\varphi(x)$ системи визначається як розв'язок крайової задачі

$$\varphi \in H^2(D), \quad (7)$$

$$\Delta^2 \varphi(x) = f(x) \quad \text{в } D, \quad (8)$$

$$N\varphi = h_1, \quad M\varphi = h_2 \quad \text{на } \Gamma, \quad (9)$$

де

$$M\varphi = \sigma \Delta \varphi + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2}, \quad (10)$$

$$N\varphi = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta) + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} (\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \nu_1 \nu_2 \right], \quad (11)$$

$f \in L^2(D)$, $h_1, h_2 \in L^2(\Gamma)$, $0 \leq \sigma < 1$, ν – одинична нормаль до Γ , зовнішня по відношенню до області D , ν_i – i -а координата одиничної нормалі ν , $\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \nu_1$ – похідна за напрямком дотичної до кривої Γ . При цьому під узагальненням розв'язком цієї задачі розуміють функцію $\varphi \in H^2(D)$, для якої справедлива інтегральна тотожність ([5], стор. 435.)

$$\begin{aligned} \int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right] dx \\ = \int_D v(x) f(x) dx + \int_\Gamma v h_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2 d\Gamma \quad \forall v \in H^2(D). \end{aligned} \quad (12)$$

Як відомо (див. наприклад, [5]), для існування розв'язку задачі (7) – (9) необхідно і достатньо, щоб виконувались умови сумісності

$$\int_D f(x) dx + \int_\Gamma h_1 d\Gamma = 0. \quad (13)$$

$$\int_D x_1 f(x) dx + \int_\Gamma x_1 h_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} h_2 d\Gamma = 0. \quad (14)$$

$$\int_D x_2 f(x) dx + \int_\Gamma x_2 h_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} h_2 d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Якщо умови (13)–(15) виконуються, то існує нескінченна множина розв'язків даної задачі, причому будь-які два розв'язки відрізняються один від одного на поліном вигляду

$$p(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 \quad (16)$$

майже скрізь в D . Позначимо множину поліномів вигляду (16) через P_1 .

Постановка задачі мінімаксного оцінювання

Задача полягає у тому, щоб за спостереженнями вигляду

$$y = y(\varphi; \eta) = C\varphi + \eta \quad (17)$$

знайти оптимальну, в деякому смислі, оцінку значення функціонала

$$l(\varphi) = \int_D l_0(x) \varphi(x) dx \quad (18)$$

в класі лінійних оцінок

$$\widehat{l(\varphi)} = (y(\varphi; \eta), u)_{H_0} + c, \quad (19)$$

де $\varphi(x)$ – розв'язок крайової задачі (7) – (9), елемент u належить гільбертову простору H_0 , $c \in \mathbb{R}$, $l_0 \in L^2(D)$ – задана функція, у принципі, що праві частини $f(x)$, h_1, h_2 рівнянь (8), (9) і похибки $\eta = \eta(\omega)$ у спостереженнях (17), які є випадковими елементами, визначеними на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ із значеннями в H_0 , невідомі, а відомо лише, що елемент $F := (f, h_1, h_2) \in G_0$ і $\eta \in G_1$. Тут $C \in \mathcal{L}(L^2(D), H_0)$ – лінійний неперервний оператор, такий що його звуження на підпростір P_1 ін'єктивне; через G_0 позначено множину функцій $\bar{F} := (\bar{f}, \bar{h}_1, \bar{h}_2) \in L^2(D) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} \int_D Q(\bar{f} - f_0)(x)(\bar{f}(x) - f_0(x)) dx \\ + \int_\Gamma Q_1(\bar{h}_1 - h_1^{(0)})(\bar{h}_1 - h_1^{(0)}) d\Gamma \\ + \int_\Gamma Q_2(\bar{h}_2 - h_2^{(0)})(\bar{h}_2 - h_2^{(0)}) d\Gamma \leq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$\int_D \bar{f}(x) dx + \int_\Gamma \bar{h}_1 d\Gamma = 0. \quad (21)$$

$$\int_D x_1 \bar{f}(x) dx + \int_\Gamma x_1 \bar{h}_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} \bar{h}_2 d\Gamma = 0. \quad (22)$$

$$\int_D x_2 \bar{f}(x) dx + \int_\Gamma x_2 \bar{h}_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} \bar{h}_2 d\Gamma = 0. \quad (23)$$

а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\omega) \in L^2(\Omega, H_0)$, з нульовими середніми, що задовольняють нерівності

$$M(Q_0 \bar{\eta}, \bar{\eta})_{H_0} \leq 1. \quad (24)$$

де Q, Q_1, Q_2 і Q_0 – обмежені самоспряжені додатно-визначені оператори в $L^2(D)$, $L^2(\Gamma)$ і H_0 відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори $Q^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$ і Q_0^{-1} , $F_0 := (f_0, h_1^{(0)}, h_2^{(0)}) \in L^2(D) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ – задані функції, що задовольняють умови (21)–(23).

Означення 1. Оцінку вигляду

$$\widehat{l(\varphi)} = (y(\varphi; \eta), \hat{u})_{H_0} + \hat{c}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(\varphi)$, якщо елемент $\hat{u}$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\sigma(u, c) := \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M |l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2 \rightarrow \inf_{u \in H_0, c \in \mathbb{C}} := \sigma^2,$$

де $\tilde{\varphi}$ – будь-який розв'язок крайової задачі (7)–(9) при $f(x) = \tilde{f}(x)$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$. Величину σ будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу (18).

Основні результати.

Лема. Задача знаходження мінімаксної оцінки значення функціоналу $l(\varphi)$ еквівалентна зада-

чі оптимального керування системою, що описується крайовою задачею

$$z(\cdot; u) \in H^2(D). \quad (25)$$

$$\Delta^2 z(x; u) = l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x) \quad \text{в } D, \quad (26)$$

$$Nz(\cdot; u) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (27)$$

$$Mz(\cdot; u) = 0, \quad \text{на } \Gamma, \quad (28)$$

$$\int_D Q^{-1} z(x; u) dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} z(\cdot; u) d\Gamma = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \int_D x_1 Q^{-1} z(x; u) dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1} z(\cdot; u) d\Gamma \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_D x_2 Q^{-1} z(x; u) dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1} z(\cdot; u) d\Gamma \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

із функцією вартості

$$\begin{aligned} I(u) = \int_D Q^{-1} z(x; u) z(x; u) dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} z(\cdot; u) z(\cdot; u) d\Gamma \\ + \int_\Gamma Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} d\Gamma + (Q_0^{-1} u, u)_{H_0} \rightarrow \inf_{u \in U}, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$U = \{u \in H_0 : \int_D (l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)) p_0(x) dx = 0 \quad \forall p_0 \in P_1\},$$

$C^* : H'_0 \rightarrow L_2(a, b)$ – оператор, спряжений до C , $\tilde{\varphi}_0 \in P_1$, маємо який визначається співвідношенням

$$\langle Cv, w \rangle_{H_0 \times H'_0} = \int_D v(x) \overline{C^* w(x)} dx$$

для всіх $v \in L^2(D)$, $w \in H'_0$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що задача (25)–(31), внаслідок умов сумісності (13)–(15), в яких покладено $f(x) = l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ і додатної визначеності операторів Q^{-1} , Q_1^{-1} і Q_2^{-1} , однозначно розв'язна при $u \in U$.

Позначимо через $\tilde{\varphi}_\perp$ єдиний розв'язок задачі (7)–(9) при $f(x) = \tilde{f}(x)$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$, ортогональний до поліномів із множини P_1 .

Тоді, оскільки, будь-який розв'язок $\tilde{\varphi}$ цієї задачі можна зобразити у вигляді $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0$, де

$$\sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M |l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2$$

$$= \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \sup_{\varphi_0 \in P_1} M |l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)}|^2.$$

Враховуючи (17)–(19), для довільного $u \in H_0$ дістанемо

$$\begin{aligned} \widehat{l(\tilde{\varphi})} &= \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)} = (y(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0; \tilde{\eta}), u)_{H_0} + \hat{c} \\ &= (C(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0), u)_{H_0} + (\tilde{\eta}, u)_{H_0} + \hat{c} \\ &= \langle C(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0), J_{H_0} u \rangle_{H_0 \times H'_0} + (\tilde{\eta}, u)_{H_0} + \hat{c} \\ &= \int_D (\tilde{\varphi}_\perp(x) + \varphi_0(x)) (C^* J_{H_0} u)(x) dx \\ &\quad + (\tilde{\eta}, u)_{H_0} + \hat{c} = \int_D \tilde{\varphi}_\perp(x) (C^* J_{H_0} u)(x) dx \end{aligned}$$

¹ Незаважно бачити, що U – непорожня, замкнена, опукла множина.

$$+ \int_D \varphi_0(x) (C^* J_{H_0} u)(x) dx + (\tilde{\eta}, u)_{H_0} + c,$$

звідки

$$l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})} = l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)}$$

$$= \int_D \tilde{\varphi}_\perp(x) (l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)) dx$$

$$+ \int_D \varphi_0(x) (l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)) dx - (\tilde{\eta}, u)_{H_0} - c.$$

Звідси, приймаючи до уваги, співвідношення $D\xi = M|\xi - M\xi|^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$ між дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ і її математичним очікуванням $M\xi$ знаходимо

$$\sup_{\varphi_0 \in P_1} M |l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)}|^2$$

$$= \sup_{\varphi_0 \in P_1} \left| \int_D \tilde{\varphi}_\perp(x) (l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)) dx \right.$$

$$\left. + \int_D \varphi_0(x) (l_0(x) - (C^* J_{H_0} u)(x)) dx - c \right|^2$$

$$+ M |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2.$$

(33)

Оскільки функція $\varphi_0(x)$ під знаком останнього інтегралу в правій частині цієї рівності пробігає весь простір P_1 , то величина

$$\sup_{\varphi_0 \in P_1} M |l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)}|^2$$

буде скінченною тоді і тільки тоді, коли $u \in U$. Враховуючи тепер, що функція $z(x; u)$, яка визначена лише тоді, коли $u \in U$, задовольняє рівняння (25)–(28), маємо

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D w(x) (l_0(x) - C^* J_{H_0} u(x)) dx \quad \forall w \in H^2(D). \quad (34)$$

Поклавши в останній тотожності $w = \tilde{\varphi}_\perp$, одержуємо рівність

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D \tilde{\varphi}_\perp(x) (l_0(x) - C^* J_{H_0} u(x)) dx. \quad (35)$$

З іншого боку, оскільки $\tilde{\varphi}_\perp$ є розв'язком крайової задачі (7)–(9) при $f = \tilde{f}$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$, то для цієї функції справджується інтегральна то-

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 z(x; u)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D z(x; u) \tilde{f}(x) dx + \int_\Gamma z(\cdot; u) \tilde{h}_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \tilde{h}_2 d\Gamma. \quad (36)$$

Враховуючи, що ліві частини (35) і (36) співпадають, дістаємо

$$\int_D \tilde{\varphi}_\perp(x) (l_0(x) - C^* J_{H_0} u(x)) dx = \int_D z(x; u) \tilde{f}(x) dx + \int_\Gamma z(\cdot; u) \tilde{h}_1 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \tilde{h}_2 d\Gamma.$$

Звідки, враховуючи (33), знаходимо

$$\inf_{\tilde{\eta} \in R} \sup_{\tilde{f} \in G_0, \tilde{h} \in G_1} M |l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2 = \inf_{\tilde{\eta} \in R} \sup_{\tilde{f} \in G_0, \tilde{h} \in G_1} \sup_{\varphi_0 \in P_1} M |l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0) - \widehat{l(\tilde{\varphi}_\perp + \varphi_0)}|^2 = \\ = \inf_{\tilde{\eta} \in R} \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left| (\tilde{f}, z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (\tilde{h}_1, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde{h}_2, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} - c \right|^2 + \sup_{\tilde{\eta} \in G_1} M |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2. \quad (37)$$

Для обчислення першого члена в правій частині Буняковського і (20). Маємо
(37) застосуємо узагальнену нерівність Коші-

$$\begin{aligned} & \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left| (\tilde{f}, z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (\tilde{h}_1, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde{h}_2, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} - c \right|^2 \\ &= \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left| (z(\cdot; u), \tilde{f} - f_0)_{L^2(D)} + (\tilde{h}_1 - h_1^{(0)}, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde{h}_2 - h_2^{(0)}, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} \right. \\ & \quad \left. + (z(\cdot; u), \tilde{f}_0)_{L^2(D)} + (h_1^{(0)}, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(h_2^{(0)}, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} - c \right|^2 \\ &\leq \left\{ (Q^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (Q_1^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu}, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} \right\} \\ &\times \left\{ (Q(\tilde{f} - f^{(0)}), \tilde{f} - f^{(0)})_{L^2(D)} + (Q_1(\tilde{h}_1 - h_1^{(0)}), \tilde{h}_1 - h_1^{(0)})_{L^2(\Gamma)} + (Q_2(\tilde{h}_2 - h_2^{(0)}), \tilde{h}_2 - h_2^{(0)})_{L^2(\Gamma)} \right\} \\ &\leq (Q^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (Q_1^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu}, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Безпосередньою підстановкою пересвідчуємось, що внаслідок співвідношень (29) - (31), нерівність (38) перетворюється в рівність на елементі $\tilde{F}^{(0)} := (\tilde{f}^{(0)}, \tilde{h}_1^{(0)}, \tilde{h}_2^{(0)}) \in G_0$, де $\tilde{f}^{(0)}(x) := \frac{1}{d} Q^{-1} z(x, u) + f_0(x)$, $\tilde{h}_1^{(0)} := \frac{1}{d} Q_1^{-1} z(\cdot; u) + h_1^{(0)}$, $\tilde{h}_2^{(0)} := \frac{1}{d} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} + h_2^{(0)}$.

$$d = \left\{ (Q^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (Q_1^{-1} z(\cdot; u), z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu}, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} \right\}^{1/2}.$$

Тому

$$\begin{aligned} & \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left| (\tilde{f}, z(\cdot; u))_{L^2(D)} + (\tilde{h}_1, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde{h}_2, \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma)} - c \right|^2 \\ &= \int_D Q^{-1} z(x, u) z(x, u) dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} z(\cdot; u) z(\cdot; u) d\Gamma + \int_\Gamma Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} d\Gamma \end{aligned} \quad (39)$$

при

$$c = \int_D z(x, u) f^{(0)}(x) dx + \int_\Gamma z(\cdot; u) h_1^{(0)} d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial z(\cdot; u)}{\partial \nu} h_2^{(0)} d\Gamma.$$

Аналогічно, обчислюючи другий доданок в правій частині (37), із використанням рівності (5), одержимо

Теорема 1. Існує єдина мінімаксна оцінка виразу $l(\varphi)$, яка може бути представлена у вигляді

$$\widehat{l(\varphi)} = (y(\varphi, \eta), \hat{u})_{H_0} + \hat{c}, \quad (40)$$

$$\sup_{\tilde{\eta} \in G_1} M |(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2 = (Q_0^{-1} u, u)_{H_0},$$

$$\text{де } \hat{u} = Q_0 C p,$$

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}(x) f^{(0)}(x) dx + \int_\Gamma \hat{z} h_1^{(0)} d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} h_2^{(0)} d\Gamma,$$

Звідси і із (37) та (39) прийдемо до справедливості висновку леми. Теорема доведена.

Далі покажемо, що розв'язок задачі оптимального керування (25) - (32) і, отже, знаходження мінімаксної оцінки зводиться до розв'язання деякої системи інтегро-диференціальних рівнянь. А саме, має місце наступний результат.

а функції $p(x)$ і $\hat{z}(x)$ визначаються із системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\hat{z} \in H^2(D), \quad (41)$$

$$\Delta^2 \hat{z}(x) = l_0(x) - C^* J_{H_0} Q_0 C p(x) \quad \text{в } D, \quad (42)$$

$$N \hat{z} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (43)$$

$$M \hat{z} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (44)$$

$$\int_D Q^{-1} \hat{z}(x) dx + \int_{\Gamma} Q_1^{-1} \hat{z} d\Gamma = 0, \quad (45)$$

$$\int_D x_1 Q^{-1} \hat{z}(x) dx + \int_{\Gamma} x_1 Q_1^{-1} \hat{z} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \quad (46)$$

$$\int_D x_2 Q^{-1} \hat{z}(x) dx + \int_{\Gamma} x_2 Q_1^{-1} \hat{z} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \quad (47)$$

$$p \in H^2(D), \quad (48)$$

$$\Delta^2 p(x) = Q^{-1} \hat{z}(x) \quad \text{в } D, \quad (49)$$

$$Np = Q_1^{-1} \hat{z} \quad \text{на } \Gamma, \quad (50)$$

$$Mp = Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma, \quad (51)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* J_{H_0} Q_0 C p(x)) dx = 0, \quad (52)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* J_{H_0} Q_0 C p(x)) x_1 dx = 0, \quad (53)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* J_{H_0} Q_0 C p(x)) x_2 dx = 0. \quad (54)$$

Задача (41)–(54) однозначно розв'язна. Похибка оцінювання σ визначається формулою $\sigma = l(p)^{1/2}$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що із вигляду функціонала $I(u)$ випливає існування єдиного елемента $\hat{u} \in U$, на якому досягається мінімум цього функціоналу на множині U . Тому, для будь-яких $\tau \in R$ і $v \in V$, де

$$V := \left\{ v \in H_0 : \int_D (C^* J_{H_0} v)(x) p_0(x) dx = 0 \quad \forall p_0 \in P_1 \right\},$$

виконуються співвідношення

$$\frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau v) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (55)$$

Враховуючи, що функцію $z(t; \hat{u} + \tau v)$ можна представити у вигляді $z(t; \hat{u} + \tau v) = z(t; \hat{u}) + \tau \bar{z}(t; v)$, де $\bar{z}(t; v)$ – єдиний розв'язок задачі (25)–(31) при $u = v$ і $l_0 = 0$, із співвідношення (55) знаходимо

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau v) \Big|_{\tau=0}$$

$$= \int_D Q^{-1} z(x; \hat{u}) \bar{z}(x; v) dx + \int_{\Gamma} Q_1^{-1} z(\cdot; \hat{u}) \bar{z}(\cdot; v) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; \hat{u})}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{z}(\cdot; v)}{\partial \nu} d\Gamma + (Q_0^{-1} \hat{u}, v)_{H_0} \quad (56)$$

Нехай $p(x)$ єдиний розв'язок крайової задачі

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D \psi(x) Q^{-1} z(x; \hat{u}) dx + \int_{\Gamma} \psi Q_1^{-1} z(\cdot; \hat{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; \hat{u})}{\partial \nu} d\Gamma \quad \forall \psi \in H^2(D). \quad (57)$$

Її розв'язність забезпечується виконанням умов сумісності (29)–(31), в яких покладено $u = \hat{u}$. Покладаючи в (57) $\psi = \bar{z}(x, v)$, дістанемо рівність

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D \bar{z}(x; v) Q^{-1} z(x; \hat{u}) dx + \int_{\Gamma} \bar{z}(\cdot; v) Q_1^{-1} z(\cdot; \hat{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{z}(\cdot; v)}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial z(\cdot; \hat{u})}{\partial \nu} d\Gamma. \quad (58)$$

Враховуючи тепер, що функція $\bar{z}(x; v)$, яка визначена лише тоді, коли $v \in V$, задовольняє рівняння (25)–(28), маємо

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{z}(x; v)}{\partial x_2^2} \right] dx = - \int_D w(x) (C^* J_{H_0} v)(x) dx \quad \forall w \in H^2(D).$$

Поклавши в останній тотожності $w = p$, одержимо

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{z}(x; v)}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{z}(x; v)}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{z}(x; v)}{\partial x_2^2} \right] dx = - \int_D p(x) (C^* J_{H_0} v)(x) dx. \quad (59)$$

Порівнюючи ліві частини рівностей (58) і (59), отримуємо

$$\int_D p(x) (C^* J_{H_0} v)(x) dx = (Q_0^{-1} \hat{u}, v)_{H_0} \quad \forall v \in V,$$

звідки приходимо до тотожності

$$(Q_0^{-1} \hat{u} - Cp, v)_{H_0} = 0 \quad \forall v \in V. \quad (60)$$

Користуючись ін'єктивністю оператора C на підпросторі P_1 , неважко бачити, що серед усіх розв'язків задачі (57) існує лише один розв'язок $p(x)$, для якого $Q_0^{-1} \hat{u} - Cp \in V$. Покладаючи тепер в рівності (60) $v = Q_0^{-1} \hat{u} - Cp$ отримуємо, що $Q_0^{-1} \hat{u} - Cp = 0$, звідки знаходимо

$\hat{u} = Q_0 Cp$. Підставляючи це значення $\hat{u}$ в рівності (29)–(31) замість u і вводячи позначення $z(x; \hat{u}) =: \tilde{z}(x)$, отримуємо, що функції $\tilde{z}(x)$ і $p(x)$ задовольняють системі рівнянь (41)–(54), однозначна розв'язність якої випливає з єдиності елемента $\hat{u}$. При цьому $\hat{c}$ виражається формулою (1).

Доведення співвідношення $\sigma = l(p)^{1/2}$ здійснюється шляхом підстановки значення $\hat{u} = Q_0 Cp$ у вираз $I(\hat{u})$ із врахуванням позначення $\tilde{z}(x) = z(x; \hat{u})$ і міркувань аналогічних тим, що викладені на стор. 6. В результаті прийдемо до таких співвідношень

$$\sigma^2 = I(\hat{u}) = \int_D Q^{-1} \tilde{z}(x) \tilde{z}(x) dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} \tilde{z} \tilde{z} d\Gamma + \int_\Gamma Q_2^{-1} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} d\Gamma + (Cp, Q_0 Cp)_{H_0}, \quad (61)$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D \tilde{z}(x) Q^{-1} \tilde{z}(x) dx + \int_\Gamma \tilde{z} Q_1^{-1} \tilde{z} d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu} d\Gamma, \quad (62)$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{z}(x)}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{z}(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{z}(x)}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_D p(x) (l_0(x) - C^* J_{H_0} Q_0 Cp(x)) dx. \quad (63)$$

Рівності (62) і (63) випливають з того факту, що функції p і $\tilde{z}$ задовольняють рівняння (49)–(51) і (42)–(44), а із співвідношень (61)–(63) випливає формула $\sigma^2 = l(p)$.

Теорема доведена.

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи інтегродиференціальних рівнянь спеціального вигляду, що не залежить від конкретного вигляду функціонала (18), отримано в наступній теоремі.

Теорема 2. Мінімаксна оцінка виразу (18) має вигляд

$$\widehat{l(\varphi)} = l(\hat{\varphi}) \quad (64)$$

де функція $\hat{\varphi}(x, \omega)$ визначається із розв'язку наступної системи стохастичних інтегродиференціальних рівнянь:

$$\hat{p} \in L^2(\Omega, H^2(D)), \quad (65)$$

$$\Delta^2 \hat{p}(x; \omega) = C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(x; \omega) \quad \text{в } D, \quad (66)$$

$$N\hat{p}(\cdot; \omega) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (67)$$

$$M\hat{p}(\cdot; \omega) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (68)$$

$$\int_D Q^{-1} \hat{p}(x; \omega) dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} \hat{p}(\cdot; \omega) d\Gamma = 0, \quad (69)$$

$$\int_D x_1 Q^{-1} \hat{p}(x; \omega) dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1} \hat{p}(\cdot; \omega) d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}(\cdot; \omega)}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \quad (70)$$

$$\int_D x_2 Q^{-1} \hat{p}(x; \omega) dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1} \hat{p}(\cdot; \omega) d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}(\cdot; \omega)}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \quad (71)$$

$$\varphi \in L^2(\Omega, H^2(D)), \quad (72)$$

$$\Delta^2 \hat{\varphi}(x; \omega) = Q^{-1} \hat{p}(x; \omega) + f_0(x) \quad \text{в } D, \quad (73)$$

$$N\hat{\varphi}(\cdot; \omega) = Q_1^{-1}\hat{p}(\cdot; \omega) + h_1^{(0)} \quad \text{на } \Gamma, \quad (74)$$

$$M\hat{\varphi} = Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}(\cdot; \omega)}{\partial \nu} + h_2^{(0)} \quad \text{на } \Gamma, \quad (75)$$

$$\int_D C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(x; \omega) dx = 0, \quad (76)$$

$$\int_D x_1 C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(x; \omega) dx = 0, \quad (77)$$

$$\int_D x_2 C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(x; \omega) dx = 0, \quad (78)$$

в якій рівності (65) – (78) виконуються з ймовірністю 1. Задача (65)–(78) однозначно розв'язна.

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 1.

Висновки. Результати даної статті, таким чином, полягають у тому, що для систем, які описуються крайовими задачами для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана, при сформульованих вище обмеженнях на невідомі дані цих задач, отримані представлення для мінімакських оцінок функціоналів від їх розв'язків, що спостерігаються, і потім оцінювання через розв'язки однозначно розв'язних систем інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду.

Методика і результати роботи можуть бути застосовані в подальших теоретичних і практичних дослідженнях процесів в теорії пружності, а також при використанні системного аналізу цих процесів.

Список використаних джерел

[1] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

[2] Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.

[3] Наконечный А.Г. Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами. – Киев: Препринт Ин-та кибернетики АН УССР, №79, 1979. – 55 с.

[4] Ковалюк А., Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К. Минимаксное оценивание решений краевых задач Неймана для эллиптических уравнений в условиях неопределенности. // Проблемы управления и информатики. №6. 2001. – с. 77 – 95.

[5] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589 с.

[6] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их применение. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[7] Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.

[8] Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Оптимальное прогнозирование решений параболических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Доповіді НАН України. – 2003. – №9. с. 107 – 112.

[9] Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Оценивание параметров вырожденных эллиптических краевых задач Неймана в условиях невязанности. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – №1. с. 262 – 269.

Надійшла до редколегії 29.08.08

УДК 519.9

Пономарьов В.Д., аспірант.

Оптимізація керування режимом роботи системи з повторними викликами і скінченним числом користувачів

В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю обслуговування в системі $M/M/2$ з повторними викликами і обмеженим числом джерел вимог на обслуговування. Використовуються два типи стратегій керування роботою системи: порогові та гістерезисні стратегії. Для кожного типу керування знайдено явний вигляд стаціонарних ймовірностей, що дає алгоритм розв'язку відповідної оптимізаційної задачі, наводяться чисельні приклади.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, стаціонарний режим, оптимізація.

e-mail: vponomarov@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

1. Вступ

В класичній теорії масового обслуговування, зазвичай, припускається, що вхідний потік вимог на обслуговування є пуасонівським. Це означає, що кількість незалежних джерел (потенційних клієнтів) є нескінченною і кожне з них звертається до системи досить рідко. Також припускається, що якщо вимога не може бути виконана одразу, то вона або встає в чергу або губиться назавжди. Насправді, припущення про втрату вимог є лише попередньою апроксимацією реальної ситуації. Зазвичай, клієнт, який не отримав обслуговування, через деякий випадковий проміжок часу повертається до системи і знову намагається отримати обслуговування. Класичні моделі теорії масового обслуговування не беруть до уваги цей феномен повторних викликів, а тому не можуть бути застосовані для розв'язку деяких практично важливих задач. Для усунення даного недоліку були запропоновані системи з повторними викликами. Загальна схема функціонування таких систем представлена на рисунку 1.

Рані роботи Костена [1], Вилкінсона [2] та Кохена [3] довели, що системи з повторними викликами є підходящою математичною моделлю для дослідження поведінки абонентів телефонної мережі. Після публікації цих новаторських робіт в 50-ті роки в різних

Ponomarov V.D., Phd student

Behavior control optimization of retrieval queue with finite source of calls

In the paper an optimal control problem of service rate for the $M/M/2$ retrieval queue with a finite source of primary calls is considered. Two control policies are introduced: threshold and hysteresis policies. For each type of control policy an explicit form of quality functional is found. These forms give an algorithm for solving the corresponding optimization problem. Some numerical results are also given.

Key words: queue, repeated calls, stationary regime, optimization.

математичних, статистичних та телекомунікаційних журналах було надруковано більше 500 статей присвячених системам з повторними викликами.

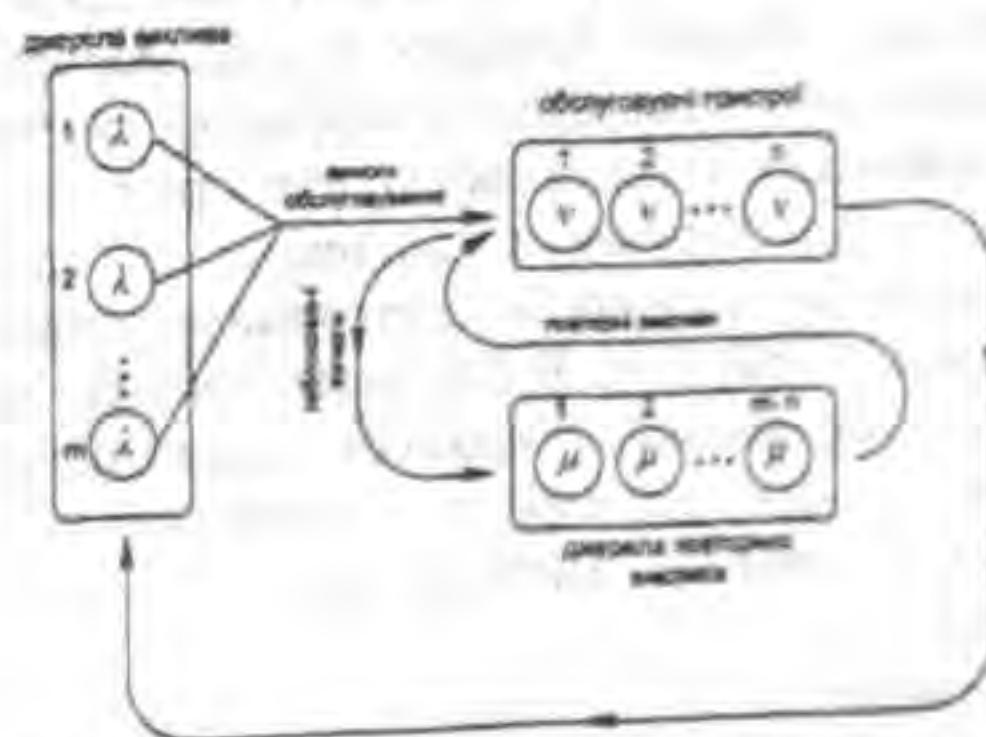


Рис. 1. Загальна схема функціонування системи

Багато підручників включають розділи та глави присвячені системам з повторними викликами. Також нещодавно була видана монографія Фаліна і Темпелтона [4]. З детальним порівняльним аналізом стандартних систем та систем з повторами, основними результатами і літературою можна ознайомитись в [5]. В [6] наведено явний вигляд стаціонарних ймовірностей і проведено дослідження характеристик системи з єдиним обслуговуючим приладом. Дослідження стаціонарного режиму

системи з N приладами і алгоритм обчислення стаціонарних ймовірностей розглянуто в [7].

В багатьох практичних задачах необхідно враховувати, що інтенсивність первинних викликів зменшується при зростанні кількості користувачів в системі (джерел повторних викликів). Цього можна досягти використанням систем з обмеженим числом джерел. Після статті Корнишева [8], яка була першою публікацією присвяченою системам з повторними викликами і обмеженим числом джерел, почалося стрімке зростання кількості літератури на дану тематику. Дослідження стаціонарного режиму систем з повторними викликами та обмеженим числом джерел є досить складною задачею. Більшість публікацій на дану тематику присвячена системам з єдиним обслуговуючим приладом [9], [10]. В загальному випадку системи з N приладами зазвичай проводять моделювання системи [11] або використовують чисельні алгоритми пошуку стаціонарних ймовірностей [12], [13].

Окрім розрахунку і аналізу характеристик системи на практиці часто виникає задача оптимізації її роботи. В другій частині роботи [14] розглянуто основні типи керувань і функціоналів якості, які використовуються при оптимізації стохастичних систем. Найчастіше для оптимізації роботи системи використовують порогові або гістерезисні стратегії. Явний вигляд функціоналу якості у випадку єдиного приладу і порогової стратегії знайдено в [15]. Алгоритми знаходження оптимального керування системою з N приладами за порогової стратегії розглянуто в [16], [17]. Керування системою з єдиним сервером за допомогою гістерезисної стратегії наведено в [18], [19]. В [20] розглядається задача вибору оптимальної кількості обслуговуючих приладів для системи з обмеженим числом джерел первинних викликів на основі нечіткої логіки.

2. Модель

Розглянемо систему, яка складається з двох обслуговуючих пристроїв. Вимоги на обслуговування надходять від m користувачів. Кожен користувач через випадкові проміжки часу, які мають показниковий розподіл з параметром λ , звертається до системи і обслуговується негайно, якщо є хоча б один вільний прилад. Час обслуговування - показниково розподілена випадкова величина з параметром ν . Якщо усі прилади зайняті, то вимога залишає систему і повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром μ .

Припускається, що періоди між надходженнями вимог, часи обслуговування і моменти надходження повторних викликів взаємно незалежні.

Стан системи в будь-який момент часу t будемо описувати двовимірним процесом $X(t) = (C(t); N(t))$, де $C(t) \in \{0, 1, 2\}$ - кількість зайнятих приладів, $N(t) \in \{0, 1, \dots, m-2\}$ - кількість джерел повторних викликів. В рамках зроблених припущень процес $X(t)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S(X) = \{0, 1, 2\} \times \{0, \dots, m-2\}$. Його

інфінітезимальні характеристики визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0, j=\{0, 1, \dots, m-2\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j); \\ j\mu, & \text{при } (i', j') = (1, j-1); \\ -[(m-j)\lambda + j\mu], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (1.1)$$

2) якщо $i=1, j=\{0, 1, \dots, m-2\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (2, j); \\ j\mu, & \text{при } (i', j') = (2, j-1); \\ \nu, & \text{при } (i', j') = (0, j); \\ -[(m-1-j)\lambda + j\mu + \nu], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (1.2)$$

3) якщо $i=2, j=\{0, 1, \dots, m-2\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-2-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j+1); \\ 2\nu, & \text{при } (i', j') = (1, j); \\ -[(m-2-j)\lambda + 2\nu], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (1.3)$$

Графічно стохастичну поведінку процесу $X(t)$ можна подати за допомогою діаграми переходів, яка представлена на рисунку 2.

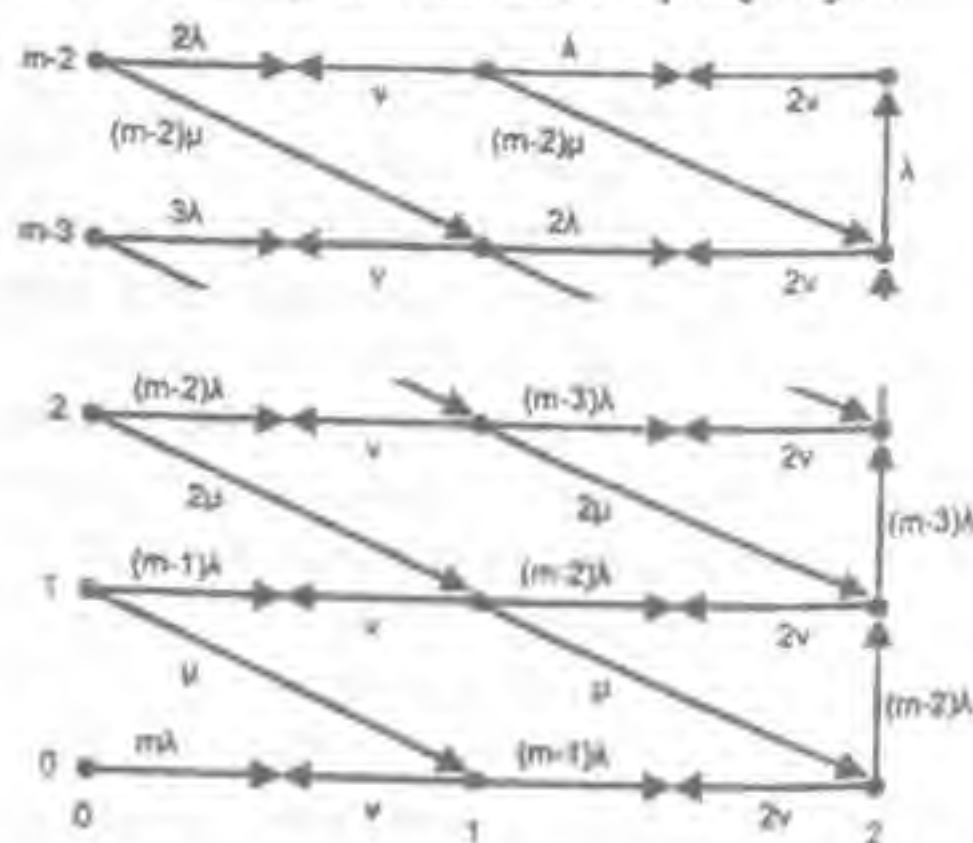


Рис. 2. Діаграма переходів ланцюга Маркова $X(t)$

3. Процес обслуговування при заданій пороговій стратегії

Розглянемо спочатку порогові стратегії керування інтенсивністю обслуговування. В цьому випадку, якщо кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H , то система функціонує в першому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $\nu^{(1)}$. Якщо кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить у другий режим з інтенсивністю обслуговування $\nu^{(2)}$. Поріг H приймає значення $-1, 0, \dots, m-2$. При $H=-1$ система весь час функціонує у другому режимі, $\nu = \nu^{(2)}$. Якщо $H=m-2$, то при будь-якому значенні $N(t)$ система знаходиться в першому режимі, $\nu = \nu^{(1)}$.

Формально керування $X(t)$ на основі порогової стратегії означає, що інтенсивності (1.1) не змінюються, а (1.2) та (1.3) замінюються на наступні:

2.1) якщо $i=1, j=\{0, 1, \dots, H\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i',j') = (2,j); \\ j\mu, & \text{при } (i',j') = (2,j-1); \\ \nu^{(1)}, & \text{при } (i',j') = (0,j); \\ -[(m-1-j)\lambda + j\mu + \nu^{(1)}], & \text{при } (i',j') = (i,j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

2.2) якщо $i=1, j=\{H+1, \dots, m-2\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i',j') = (2,j); \\ j\mu, & \text{при } (i',j') = (2,j-1); \\ \nu^{(2)}, & \text{при } (i',j') = (0,j); \\ -[(m-1-j)\lambda + j\mu + \nu^{(2)}], & \text{при } (i',j') = (i,j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

3.1) якщо $i=2, j=\{0, 1, \dots, H\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-2-j)\lambda, & \text{при } (i',j') = (1,j+1); \\ 2\nu^{(1)}, & \text{при } (i',j') = (1,j); \\ -[(m-2-j)\lambda + 2\nu^{(1)}], & \text{при } (i',j') = (i,j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

3.2) якщо $i=2, j=\{H+1, \dots, m-2\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-2-j)\lambda, & \text{при } (i',j') = (1,j+1); \\ 2\nu^{(2)}, & \text{при } (i',j') = (1,j); \\ -[(m-2-j)\lambda + 2\nu^{(2)}], & \text{при } (i',j') = (i,j); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

При фіксованій пороговій стратегії до позначень процесу $X(t)$ і його характеристик

будемо додавати індекс H , $X(t)=X(H,t)$, $C(t)=C(H,t)$, $N(t)=N(H,t)$,

Нехай $\pi_{0,j}(H)$, $\pi_{1,j}(H)$, $\pi_{2,j}(H)$, $j=0, \dots, m-2$ стаціонарні ймовірності системи:

$$\begin{aligned} \pi_{0,j}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H,t)=0, N(H,t)=j\}, \\ \pi_{1,j}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H,t)=1, N(H,t)=j\}, \\ \pi_{2,j}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H,t)=2, N(H,t)=j\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ймовірності $\pi_{ij}(H)$, $(i,j) \in S(X)$ можна подати через параметри системи в явному вигляді.

Теорема 1. Стаціонарні ймовірності (2.1) мають наступний вигляд:

$$\pi_{0,j}(H) = \alpha_j \pi_{0,0}(H), \quad j=1, 2, \dots, m-2,$$

$$\pi_{1,j}(H) = \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{\nu_j} \alpha_j \pi_{0,0}(H), \quad j=0, 1, \dots, m-2,$$

$$\begin{aligned} \pi_{2,j}(H) &= \frac{((m-j-1)\lambda + j\mu)((m-j)\lambda + j\mu) + j\mu\nu_j}{2\nu_j^2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\text{sgn}(m-2-j)(m-2-j)\lambda\nu_{j+1}}{(m-j-1)\lambda(2\nu_j + \nu_{j+1}) + 2\nu_j(\nu_{j+1} + (j+1)\mu) - \lambda\nu_{j+1}} \right) \times \\ &\times \alpha_j \pi_{0,0}(H), \quad j=0, 1, \dots, m-2 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\lambda^2}{j! \mu^j} \prod_{i=1}^j \frac{\nu_i}{\nu_{i-1}} (m-i-1) \times \\ &\times \frac{[(m-i)\lambda + (i-1)\mu][(m-i+1)\lambda + (i-1)\mu] + (i-1)\mu\nu_{i-1}}{(m-i)\lambda(2\nu_{i-1} + \nu_i) + 2\nu_{i-1}(i\mu + \nu_i) - \lambda\nu_i}, \\ \nu_j &= \begin{cases} \nu^{(1)}, & j \leq H, \\ \nu^{(2)}, & j > H. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{0,0}(H) &= \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_j \left[1 + \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{\nu_j} + \right. \\ &+ \frac{((m-j-1)\lambda + j\mu)((m-j)\lambda + j\mu) + j\mu\nu_j}{2\nu_j^2} \times \\ &\times \left. \left(1 - \frac{\text{sgn}(m-2-j)(m-2-j)\lambda\nu_{j+1}}{(m-j-1)\lambda(2\nu_j + \nu_{j+1}) + 2\nu_j(\nu_{j+1} + (j+1)\mu) - \lambda\nu_{j+1}} \right) \right] \end{aligned}$$

Доведення.

Для пошуку $\pi_{0,j}(H)$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі ([21] ст.49). Для кожного $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(1)}(X) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X)$, $S_j^{(1)}(X) = \{(p,q) \in S(X) : q \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(X)$, знаходимо

$$j\mu\pi_{0j}(H) + j\mu\pi_{0j}(H) = (m-j-1)\lambda\pi_{2j-1}(H), \quad (2.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, m-2.$$

Тепер для $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору

$$S(X) = S_j^{(2)}(X) \cup \bar{S}_j^{(2)}(X), S_j^{(2)}(X) = \{(0, j)\}.$$

Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}(X)$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0j}(H) = \nu_j\pi_{1j}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-2. \quad (2.3)$$

Нарешті, для кожного $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(1)}(X) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X), S_j^{(1)}(X) = \{(1, j)\}.$

Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(X)$, будемо мати

$$j\mu\pi_{0j}(H) + (m-j+1)\lambda\pi_{0j-1}(H) + 2\nu_{j-1}\pi_{2j-1}(H) =$$

$$= [(m-j)\lambda + (j-1)\mu + \nu_{j-1}]\pi_{1j-1}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=0}^{m-2} (\pi_{0j}(H) + \pi_{1j}(H) + \pi_{2j}(H)) = 1. \quad (2.5)$$

Останнє рівняння - це запис умови нормування.

З (2.3) подамо $\pi_{1j}(H)$ через $\pi_{0j}(H)$:

$$\pi_{1j}(H) = \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{\nu_j} \pi_{0j}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-2 \quad (2.6)$$

Підставляючи результат (2.6) у (2.4), отримуємо вираз $\pi_{2j}(H)$ через $\pi_{0j}(H)$:

$$\pi_{2j}(H) = \frac{((m-j-1)\lambda + j\mu)((m-j)\lambda + j\mu) + j\mu\nu_j}{2\nu_j^2} \pi_{0j}(H) -$$

$$- \frac{(j+1)\mu}{2\nu_j} \pi_{0j-1}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-2 \quad (2.7)$$

Підставивши отримані вирази в рівняння (2.2), будемо мати рекурентне рівняння першого порядку відносно $\pi_{0j}(H)$, розв'язком якого є:

$$\pi_{0j}(H) = \alpha_j \pi_{00}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-2. \quad (2.8)$$

Таким чином, з рівнянь (2.6), (2.7) та (2.8) маємо вирази стаціонарних ймовірностей через $\pi_{00}(H)$.

Ймовірність $\pi_{00}(H)$ знаходимо з умови нормування (2.5).

Теорему доведено.

Застосовуємо доведену теорему до оптимізації прибутку в системі з повторними

викликами, коли вибір порогу H знаходиться у нашому розпорядженні.

Нехай

$S_1(t, H)$ - число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у першому режимі;

$S_2(t, H)$ - число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у другому режимі;

$S_3(t, H)$ - число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_4(t, H)$ - число перемикачів інтенсивності обслуговування.

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H)$ позначимо через $S_i(H), i = 1, \dots, 4.$

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$C_1 S_1(H) + C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) - C_4 S_4(H) \rightarrow \max,$$

$$H = \{-1, 0, 1, \dots, m-2\}, \quad (2.9)$$

де $C_i, i=1, 2$ - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику при роботі системи у i -ому режимі;

C_3 - штраф за відмову в обслуговуванні;

C_4 - штраф за перемикач інтенсивності обслуговування.

Розв'язком задачі (2.9) є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для класичних моделей одноканальних систем з повторними викликами розглядалися в роботі [22].

Граничні функціонали $S_i(H), i = 1, \dots, 4$ можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H) = \nu^{(1)} \sum_{j=0}^H (\pi_{1j}(H) + 2\pi_{2j}(H)),$$

$$S_2(H) = \nu^{(2)} \sum_{j=H+1}^{m-2} (\pi_{1j}(H) + 2\pi_{2j}(H)),$$

$$S_3(H) = \lambda \sum_{j=0}^{m-3} (m-j-2)\pi_{2j}(H),$$

$$S_4(H) = \lambda(m-2-H)\pi_{2H}(H) + (H+1)\mu\pi_{0H+1}(H) + (H+1)\mu\pi_{1H+1}(H)$$

що разом з результатом теореми 1 дає алгоритм розв'язку задачі (2.9).

4. Гістерезисні стратегії керування процесом обслуговування

Процес керування на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2 , які називаються порогами, $H_1 \leq H_2$. Якщо в

деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1 , то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $\nu^{(1)}$. Якщо кількість повторних викликів більше за H_2 , то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю обслуговування $\nu^{(2)}$. Якщо кількість повторних викликів лежить у проміжку $(H_1, H_2]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу.

При фіксованій гістерезисній стратегії $H = (H_1, H_2)$ стан системи в будь-який момент часу t може бути описаний тривимірним процесом $Y(H, t) = \{C(H, t); N(H, t); R(H, t); t \geq 0\}$, де $C(H, t)$ – кількість зайнятих приладів, $N(H, t)$ – кількість джерел повторних викликів, $R(H, t)$ – режим роботи системи. Якщо $R(H, t) = 1$, то система працює у першому режимі з інтенсивністю обслуговування $\nu^{(1)}$. Якщо $R(H, t) = 2$, то система працює у другому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $\nu^{(2)}$. Процес $Y(H, t)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів

$$S(Y) = \{0, 1, 2\} \times \{0, \dots, m-2\} \times \{1, 2\}.$$

Його інфінітезимальні характеристики b_{ij} , $i = (i_1, i_2, i_3)$, $j = (j_1, j_2, j_3)$, $(i, j) \in S(X)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $[(i_1 = 0) \wedge (i_2 \in \{0, 1, \dots, H_2\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee [(i_1 = 0) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 2, \dots, m-2\}) \wedge (i_3 = 2)]$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - i_2)\lambda, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2, i_3); \\ i_2\mu, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2 - 1, i_3); \\ -[(m - i_2)\lambda + i_2\mu], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $[(i_1 = 1) \wedge (i_2 \in \{0, 1, \dots, H_2\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee [(i_1 = 1) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 2, \dots, m-2\}) \wedge (i_3 = 2)]$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - 1 - i_2)\lambda, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2, i_3); \\ \nu^{(1)}, & \text{при } j = (i_1 - 1, i_2, i_3); \\ i_2\mu, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2 - 1, i_3); \\ -[(m - 1 - i_2)\lambda + i_2\mu + \nu^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

3) якщо $[(i_1 = 2) \wedge (i_2 \in \{0, 1, \dots, H_2 - 1\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee [(i_1 = 2) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 1, \dots, m-2\}) \wedge (i_3 = 2)]$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - 2 - i_2)\lambda, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2, i_3); \\ 2\nu^{(1)}, & \text{при } j = (i_1 - 1, i_2, i_3); \\ i_2\mu, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2 - 1, i_3); \\ -[(m - 2 - i_2)\lambda + i_2\mu + 2\nu^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

4) якщо $i = (2, H_2, 1)$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - 2 - H_2)\lambda, & \text{при } j = (2, H_2 + 1, 2); \\ 2\nu^{(1)}, & \text{при } j = (1, H_2, 1); \\ H_2\mu, & \text{при } j = (1, H_2, 1); \\ -[(m - 2 - H_2)\lambda + H_2\mu + 2\nu^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

5) якщо $i = (0, H_1 + 1, 2)$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - H_1 - 1)\lambda, & \text{при } j = (1, H_1 + 1, 2); \\ (H_1 + 1)\mu, & \text{при } j = (1, H_1, 1); \\ -[(m - H_1 - 1)\lambda + (H_1 + 1)\mu], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

6) якщо $i = (1, H_1 + 1, 2)$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m - H_1 - 2)\lambda, & \text{при } j = (2, H_1 + 1, 2); \\ \nu^{(1)}, & \text{при } j = (0, H_1 + 1, 2); \\ (H_1 + 1)\mu, & \text{при } j = (2, H_1, 1); \\ -[(m - H_1 - 2)\lambda + (H_1 + 1)\mu + \nu^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

Позначимо

$$\pi_{ij}^{(r)}(H), i = 0, 1, 2, r = 1, 2, j = 0, 1, \dots, m-2$$

стаціонарні ймовірності системи:

$$\begin{aligned} \pi_{0j}^{(r)}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = 0, N(H, t) = j, R(H, t) = r\}, \\ \pi_{1j}^{(r)}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = 1, N(H, t) = j, R(H, t) = r\}, \\ \pi_{2j}^{(r)}(H) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = 2, N(H, t) = j, R(H, t) = r\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

У подальшому для скорочення викладок в позначеннях стаціонарних ймовірностей індекси H будемо опускати. Для $\pi_{ij}^{(r)}(H) = \pi_{ij}^{(r)}$ справедливий результат, аналогічний теоремі 1.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(r)} &= \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu \nu^{(r)}} \right)^j \prod_{i=1}^j \frac{(m-i-1)[(m-i)\lambda + (i-1)\mu][(m-i+1)\lambda + (i-1)\mu] + (i-1)\mu \nu^{(r)}}{3(m-i)\lambda - \lambda + 2i\mu + 2\nu^{(r)}}, \\ \beta_j^{(r)} &= \frac{2(H_1 + 1)[(m-1-H_1)\lambda + (H_1 + 1)\mu + \nu^{(2)}] \nu^{(1)} \alpha_j^{(r)}}{\nu^{(2)}} \sum_{i=0}^{j-H_1-2} \frac{1}{(j-i)[3(m-j+i)\lambda - \lambda + 2(j-i)\mu + 2\nu^{(1)}] \alpha_j^{(r)}}, \quad r = 1, 2, \\ \gamma_j &= (m-j)\lambda + j\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_j^{(1)} &= \alpha_j^{(1)} - \left\{ \operatorname{sgn}(j - H_1) \right\} \left[\frac{\lambda v^{(2)}}{(H_1 + 1)\mu v^{(1)}} \beta_j^{(1)} + \frac{\alpha_{H_1}^{(1)}}{\alpha_{H_1}^{(1)}} \frac{(m-1-H_1)\lambda(2v^{(1)} + v^{(2)}) - \lambda v^{(2)} + 2(H_1+1)\mu v^{(1)} + 2v^{(1)}v^{(2)}}{(m-2-H_1)[(\gamma_{H_1} - \lambda)\gamma_{H_1} + H_1\mu v^{(1)}]} \right] \\ &\times \left\{ \frac{\lambda v^{(2)}}{(H_1 + 1)\mu v^{(1)}} \beta_{H_2}^{(1)} + \frac{\alpha_{H_2}^{(1)}}{\alpha_{H_1}^{(1)}} \frac{(m-1-H_1)\lambda(2v^{(1)} + v^{(2)}) - \lambda v^{(2)} + 2(H_1+1)\mu v^{(1)} + 2v^{(1)}v^{(2)}}{(m-2-H_1)[(\gamma_{H_1} - \lambda)\gamma_{H_1} + H_1\mu v^{(1)}]} + \right. \\ &\left. + \frac{2(\gamma_{H_1+1} + v^{(2)})v^{(1)}}{(m-2-H_2)[(\gamma_{H_1} - \lambda)\gamma_{H_2} + H_2\mu v^{(1)}]} \right\} \alpha_{H_2}^{(1)}, \\ \phi_j^{(2)} &= \left[\frac{\alpha_j^{(2)}}{\alpha_{H_1+1}^{(2)}} + \frac{v^{(2)}\alpha_{H_2}^{(2)}}{v^{(1)}\alpha_{H_2}^{(2)}} \beta_{H_2}^{(2)} \right] \times \\ &\left\{ \frac{\lambda v^{(2)}}{(H_1 + 1)\mu v^{(1)}} \beta_{H_2}^{(1)} + \frac{\alpha_{H_2}^{(1)}}{\alpha_{H_1}^{(1)}} \frac{(m-1-H_1)\lambda(2v^{(1)} + v^{(2)}) - \lambda v^{(2)} + 2(H_1+1)\mu v^{(1)} + 2v^{(1)}v^{(2)}}{(m-2-H_1)[(\gamma_{H_1} - \lambda)\gamma_{H_1} + H_1\mu v^{(1)}]} + \frac{2(\gamma_{H_1+1} + v^{(2)})v^{(1)}}{(m-2-H_2)[(\gamma_{H_1} - \lambda)\gamma_{H_2} + H_2\mu v^{(1)}]} \right\} \times \\ &\times \frac{\lambda v^{(2)}}{(H_1 + 1)\mu v^{(1)}} \alpha_{H_1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Стаціонарні ймовірності (3.1) мають наступний вигляд:

$$\pi_{0j}^{(1)} = \phi_j^{(1)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, H_2,$$

$$\pi_{1j}^{(1)} = \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{v^{(1)}} \phi_j^{(1)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, H_2,$$

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{(j+1)\mu}{2v^{(1)}} \left[\frac{3(m-1-j)\lambda - \lambda + 2(j+1)\mu + 2v^{(1)}}{(m-2-j)\lambda} - \operatorname{sgn}(H_2 - j) \right] \phi_{j+1}^{(1)} - (1 - \operatorname{sgn}(j - H_1)) \phi_{H_1+1}^{(2)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, H_2,$$

$$\pi_{0j}^{(2)} = \phi_j^{(2)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = H_1 + 1, \dots, m-2,$$

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{v^{(2)}} \phi_j^{(2)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = H_1 + 1, \dots, m-2,$$

$$\pi_{2j}^{(2)} = \frac{(j+1)\mu}{2v^{(2)}} \left[\frac{3(m-1-j)\lambda - \lambda + 2(j+1)\mu + 2v^{(2)}}{(m-2-j)\lambda} - \operatorname{sgn}(m-2-j) \right] \phi_{j+1}^{(2)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = H_1 + 1, \dots, m-3,$$

$$\pi_{2m-2}^{(2)} = \frac{(\lambda + (m-2)\mu)(2\lambda + (m-2)\mu) + (m-2)\mu v^{(2)}}{2(v^{(2)})^2} \phi_{m-2}^{(2)} \pi_{00}^{(1)},$$

де

$$\begin{aligned} \pi_{00}^{(1)} &= 1 + \frac{m\lambda}{v^{(1)}} + \sum_{j=1}^{H_2} \left(1 + \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{v^{(1)}} + \frac{(m-j)\lambda + j\mu + v^{(1)}}{(m-1-j)\lambda v^{(1)}} j\mu \right) \phi_j^{(1)} - \frac{(H_1+2)\mu}{2v^{(1)}} \phi_{H_1+1}^{(2)} + \frac{3(m-1-H_1)\lambda - \lambda + 2(H_2+1)\mu + 2v^{(1)}}{2(m-2-H_2)\lambda v^{(1)}} (H_2+1)\mu \phi_{H_2}^{(1)} \\ &+ \sum_{j=H_1+1}^{m-2} \left(1 + \frac{(m-j)\lambda + j\mu}{v^{(2)}} \right) \phi_j^{(2)} + \sum_{j=H_1+1}^{m-2} \frac{(m-j)\lambda + j\mu + v^{(2)}}{(m-1-j)\lambda v^{(2)}} j\mu \phi_j^{(2)} + \frac{(\lambda + (m-2)\mu)(2\lambda + (m-2)\mu) + (m-2)\mu v^{(2)}}{2(v^{(2)})^2} \phi_{m-2}^{(2)}. \end{aligned}$$

Доведення:

Для пошуку $\pi_j^{(r)}$ знову використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі. Для кожного $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору $S(Y) = S_j^{(1)}(Y) \cup \bar{S}_j^{(1)}(Y)$, $S_j^{(1)}(Y) = \{(0, j, i_3) \in S(Y)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(Y)$, знаходимо

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0j}^{(1)} = v^{(1)}\pi_{1j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, H_2, \quad (3.2)$$

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0j}^{(2)} = v^{(2)}\pi_{1j}^{(2)}, \quad j = H_1 + 1, \dots, m-2. \quad (3.3)$$

Тепер для $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору

$$S(Y) = S_j^{(2)}(Y) \cup \bar{S}_j^{(2)}(Y),$$

$$S_j^{(2)}(Y) = \{(i_1, i_2, i_3) \in S(Y) : i_2 \leq j\}. \quad \text{Прирівнюючи}$$

потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}(Y)$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$j\mu\pi_{0j}^{(1)} + j\mu\pi_{1j}^{(1)} = (m-j-1)\lambda\pi_{2j-1}^{(1)}, \quad j=1, 2, \dots, H_1, \quad (3.4)$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(1)} + j\mu\pi_{1j}^{(1)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\mu\pi_{1H_1+1}^{(2)} = \\ = (m-j-1)\lambda\pi_{2j-1}^{(1)}, \quad j=H_1+1, \dots, H_2+1, \quad (3.5)$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(2)} + j\mu\pi_{1j}^{(2)} = (m-j-1)\lambda\pi_{2j-1}^{(2)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + \\ + (H_1+1)\mu\pi_{1H_1+1}^{(2)}, \quad j=H_1+2, \dots, H_2, \quad (3.6)$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(2)} + j\mu\pi_{1j}^{(2)} + (m-H_2-2)\lambda\pi_{2H_2}^{(2)} = (m-j-1)\lambda\pi_{2j-1}^{(2)} + \\ + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\mu\pi_{1H_1+1}^{(2)}, \quad j=H_2+1, \dots, m-2 \quad (3.7)$$

Нарешті, для кожного $j=0, 1, \dots, m-2$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(1)}(X) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X)$, $S_j^{(3)}(X) = \{(1, j, i_j)\}$.

Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}(X)$, будемо мати

$$j\mu\pi_{0j}^{(1)} + (m-j+1)\lambda\pi_{0j-1}^{(1)} + 2\nu^{(1)}\pi_{2j-1}^{(1)} = \\ = [(m-j)\lambda + (j-1)\mu + \nu^{(1)}]\pi_{1j-1}^{(1)}, \\ j=1, 2, \dots, H_1, H_1+2, \dots, H_2+1, \quad (3.8)$$

$$(H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(1)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (m-H_1)\lambda\pi_{1H_1}^{(1)} + 2\nu^{(1)}\pi_{2H_1}^{(1)} = \\ = [(m-H_1-1)\lambda + H_1\mu + \nu^{(1)}]\pi_{1H_1}^{(1)}, \quad (3.9)$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(2)} + (m-j+1)\lambda\pi_{0j-1}^{(2)} + 2\nu^{(2)}\pi_{2j-1}^{(2)} = \\ = [(m-j)\lambda + (j-1)\mu + \nu^{(2)}]\pi_{1j-1}^{(2)}, \quad j=H_1+2, \dots, m-1, \quad (3.10)$$

Далі доведення аналогічне доведенню теореми 1.

Застосуємо доведену теорему для розв'язку наступної оптимізаційної задачі.

Нехай

$S_1(t, H_1, H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у першому режимі;

$S_2(t, H_1, H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у другому режимі;

$S_3(t, H_1, H_2)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_4(t, H_1, H_2)$ – число перемикань інтенсивності обслуговування.

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H_1, H_2)$ позначимо через $S_i(H_1, H_2)$, $i=1, \dots, 4$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$C_1 S_1(H_1, H_2) + C_2 S_2(H_1, H_2) - C_3 S_3(H_1, H_2) - \\ - C_4 S_4(H_1, H_2) \rightarrow \max, \quad (3.15) \\ H_1 = \{-1, 0, 1, \dots, m-2\}, H_2 = \{0, 1, \dots, m-2\}, \\ H_1 \leq H_2,$$

де C_i , $i=1, 2$ – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику при роботі системи у i -ому режимі;

C_3 – штраф за відмову в обслуговуванні;

C_4 – штраф за перемикання інтенсивності обслуговування.

Розв'язком задачі (3.15) є такі пороги H_1 та H_2 , які максимізують середній прибуток від роботи системи.

Граничні функціонали $S_i(H_1, H_2)$, $i=1, \dots, 4$ можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H_1, H_2) = \nu^{(1)} \sum_{j=0}^{H_1} (\pi_{1j}^{(1)} + 2\pi_{2j}^{(1)}),$$

$$S_2(H_1, H_2) = \nu^{(2)} \sum_{j=H_1+1}^{m-2} (\pi_{1j}^{(2)} + 2\pi_{2j}^{(2)}),$$

$$S_3(H_1, H_2) = \lambda \sum_{j=0}^{m-3} (m-2-j)(\pi_{2j}^{(1)} + \pi_{2j}^{(2)}),$$

$$S_4(H_1, H_2) = (m-2-H_2)\lambda\pi_{2H_2}^{(1)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + \\ + (H_1+1)\mu\pi_{1H_1+1}^{(2)},$$

що разом із результатом теореми 2 дає алгоритм розв'язку задачі (3.15).

5. Приклад

В якості прикладу розв'язано задачу оптимізації систем масового обслуговування з наступними характеристиками: $m=50$, $\lambda=1$, $\nu^{(1)}=5$, $\nu^{(2)}=8$, $\mu=2$. Вартісні коефіцієнти функціоналу якості: $C_1=5000$, $C_2=3258$, $C_3=1$, $C_4=1$.

На рисунку 3 представлено графік залежності функціоналу якості (2.9) від порогової стратегії управління H для заданої системи. Як видно з рисунку 3, максимальне значення функціоналу якості у випадку порогової стратегії управління досягається при $H=35$ і дорівнює 47200,33. Якщо ж при керуванні роботою системи обрати гістерезисну стратегію, то максимальне значення функціоналу якості досягається при $H_1=15$ та $H_2=47$ і дорівнює 47630,64.

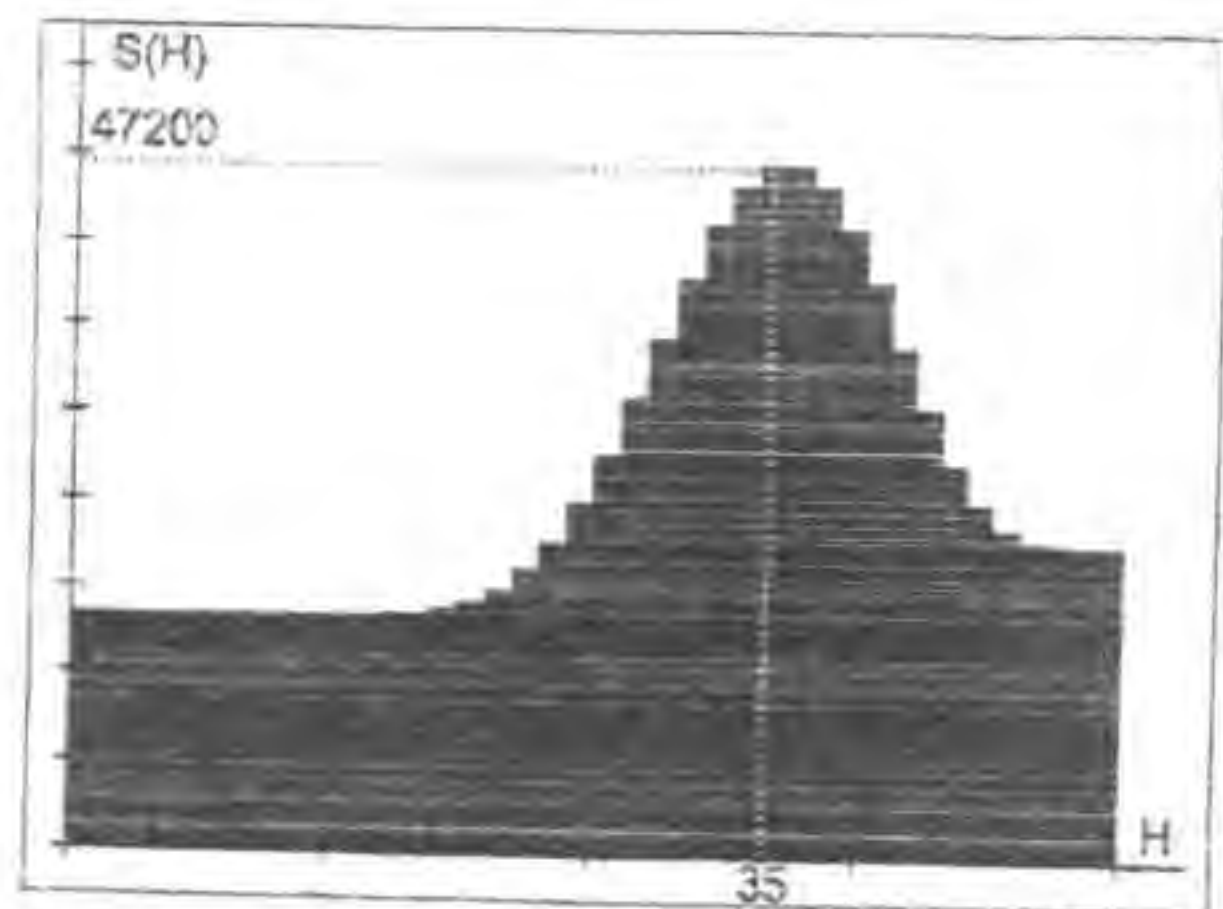


Рис. 3. Графік залежності функціоналу якості (2.9) від стратегії управління

Список використаних джерел

1. L. Kosten. On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking, *De Ingenieur* (1947), 1-25.
2. R.I. Wilkinson. Theories for toll traffic engineering in the USA, *The Bell System Technical Journal* (1956), 421-514.
3. J.W. Cohen. Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunication Review* (1957), 49-100.
4. G.I. Falin and J.G.C. Templeton, *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London, 1997.
5. J.R. Artalejo, *Retrial Queueing Systems*, *Mathematical and Computer Modeling*, No. 3-4 (1999), 1-228.
6. Daduna, H., *Queueing networks with discrete time scale: explicit expressions for the steady state behavior of discrete time stochastic networks*, Vol. 2046 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer, 2001.
7. V. Abramov. Analysis of multiserver retrial queueing system: A martingale approach and an algorithm of solution, *Ann Oper Res* 141: 19-50, 2006.
8. Kornyshev Y.N. Design of a fully accessible switching system with repeated calls, *Telecommunications* (1969), 46-52.
9. Gomez Corral A. Analysis of a single-server retrial queue with quasi-random input and nonpreemptive priority, *Computers and Mathematics with Applications* (2002) 767-782.
10. Falin G.I., Gomez Corral A. On a bivariate Markov process arising in the theory of single-server retrial queues, *Statistica Neerlandica* (2000) 67-78.
11. G. Bolch, J. Roszik, J. Sztrik, P. Wucchner. Modeling Finite-Source Retrial Queueing Systems with Unreliable Heterogeneous Servers and Different Service Policies using MOSEL, HAS-DFG, 2005.
12. J. Roszik, J. Sztrik. Performance Analysis of Finite-source Retrial Queueing Systems with Heterogeneous Non-reliable Servers and Different Service Policies, Technical Report No.2004/6, 2004.
13. M. Ajmone Marsan, G. De Carolis, E. Leonardi, R. Lo Cigno, M. Meo. Efficient Estimation of Call Blocking Probabilities in Cellular Mobile Telephony Networks with Customer Retrials, ICC 2000.
14. Lotfi Tadj, Gautam Choudhury. Optimal Design and Control of Queues, *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top* Vol. 13, No. 2, pp. 359-412, 2005.
15. Che Soong Kim, A. Kanechny, A. Dudin. Threshold control by a single-server retrial queue with batch arrivals and group services, *Operations Research Letters*, Volume 34, Issue 5, September 2006, Pages 548-556.
16. D. Efrosinin, L. Breuer. Threshold policies for controlled retrial queues with heterogeneous servers, *Ann Oper Res* (2006) 141: 139-162.
17. B. Krishna Kumar, J. Raja. On multiserver feedback retrial queues with balking and control retrial rate, *Ann Oper Res* 141: 211-232, 2006.
18. Alfredo G. Hernández-Díaz, Pilar Moreno. Analysis and optimal control of a discrete-time queueing system under the (m,N)-policy. *ACM International Conference Proceeding Series*, Vol. 180, 2006.
19. Lee H.W., Park N. I., Jeon J., Queue length analysis of batch arrival queues under bilevel threshold control with early set-up. *International Journal of Systems Science* 34, 195-204, 2003.
20. Maria José Pardo, David de la Fuente. Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queueing system, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 159, Issue 3, 325-342, 2008.
21. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир. 1993.
22. Клименюк В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами, *Автоматика и вычислительная техника*, №1, с.25-30, 1990.

Надійшла до редакції 01.12.2008

УДК 517.97

В. В. Семенов¹, к.ф.-м.н., доц.
Р. Я. Апостол, студ.

Задачі максимізації і умова Лінденштраусса

Отримано нелінійні узагальнення результату Лінденштраусса [1, твердження 1, с. 143] про щільність множини лінійних неперервних операторів, що досягають норми на одиничній сфері $S_1(E)$ банахового простору E з спеціальною геометричною структурою.

Ключові слова: максимізація, умова Лінденштраусса, щільність, мале збурення, властивість T , функціонали.

V. V. Semenov, PhD, assoc. prof.
R. Y. Apostol, undergrad. stud.

Maximization problems and Lindenstrauss condition

Nonlinear generalizations of Lindenstrauss result [1, proposition 1, p. 143] about denseness of set of bounded linear operators which attain their norm on the unit sphere $S_1(E)$ in Banach space E with special geometric structure is obtained.

Key Words: maximization, Lindenstrauss condition, denseness, small perturbation, property T , functionals.

¹E-mail: snakkar@univ.kiev.ua

Представив: д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д. Я.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ – банахів простір.

Означення 1 ([1]). Сім'ю $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq S_1(E)$ називають рівномірно строго виставленою, якщо існує сім'я $\{e'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq S_1(E')$ така, що:

- 1) $\langle e'_\alpha, e_\alpha \rangle_{E', E} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A};$
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \alpha \in \mathcal{A} \forall x \in B_1(E)$
 $\langle e'_\alpha, x \rangle_{E', E} > 1 - \delta \Rightarrow \|x - e_\alpha\|_E < \varepsilon.$

У рівномірно опуклому банаховому просторі [2] сфера $S_1(E)$ рівномірно строго виставлена.

Означення 2. Банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ задовольняє умову Лінденштраусса, якщо існує рівномірно строго виставлена сім'я $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq S_1(E)$ така, що $B_1(E) = \overline{\text{conv}}\{\pm e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}.$

В [3] доведено результат про еквівалентне перенормування: якщо $(E, \|\cdot\|_E)$ – банахів WCG-простір, то для кожного $\varepsilon > 0$ на E існує норма $\|\cdot\|$ така, що $B_1(E) \subseteq B(\|\cdot\|) \subseteq B_{1+\varepsilon}(E)$ і простір $(E, \|\cdot\|)$ задовольняє умову Лінденштраусса.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ – банахові простори; $f: B_1(E) \rightarrow F$ – неперервне і обмежене відображення. Розглянемо екстремальну задачу:

$$\|f(x)\|_F \rightarrow \sup_{x \in B_1(E)} \quad (1)$$

Припустимо, що банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ задовольняє умову Лінденштраусса.

Означення 3. Кажемо, що неперервне і обмежене відображення $f: B_1(E) \rightarrow F$ має властивість T , якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $A \in \mathcal{L}(E, F)$ з нормою $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \varepsilon$:

$$\sup_{x \in B_1(E)} \|f + A\|_F = \sup_{x \in B_1(E)} \|f\|_F$$

Доведемо для відображень з властивістю T існування як завгодно малих лінійних ядерних збурень задачі (1), які забезпечують існування розв'язків.

Теорема 1. Нехай банахів простір E задовольняє умову Лінденштраусса; неперервне і обмежене відображення $f: B_1(E) \rightarrow F$ має властивість T . Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує ядерний оператор $N \in \mathcal{L}(E, F)$ такий, що $\|N\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \varepsilon$ і задача

$$\|f(x) + Nx\|_F \rightarrow \sup_{x \in B_1(E)} \quad (A)$$

має розв'язки.

Доведення. Нехай $\sup_{x \in B_1(E)} \|f\|_F = 1$. Візьмемо число $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ і таку спадну послідовність (ε_n) додатних чисел, що виконуються нерівності:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon, \quad 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_k^2, \quad \varepsilon_k < \frac{1}{10k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Нехай $f_1 = f$. Оберемо e_α так, що

$$\|f_1(e_{\alpha_1})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_1\|_F - \varepsilon_1^2,$$

Беремо функціонал $e_{\alpha_1}^*$ і будуємо відображення

$$f_2: f_2(x) = f_1(x) + \varepsilon_1 \langle e_{\alpha_1}^*, x \rangle_{E^*, E} f_1(e_{\alpha_1}).$$

Тепер візьмемо e_{α_2} так, що

$$\|f_2(e_{\alpha_2})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_2\|_F - \varepsilon_2^2,$$

функціонал $e_{\alpha_2}^*$ і будуємо відображення f_3 :

$$f_3(x) = f_2(x) + \varepsilon_2 \langle e_{\alpha_2}^*, x \rangle_{E^*, E} f_2(e_{\alpha_2}).$$

Виконавши аналогічні побудови, отримаємо послідовності (f_n) , (e_{α_n}) такі, що

$$\|f_n(e_{\alpha_n})\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2. \quad (3)$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \varepsilon_n \langle e_{\alpha_n}^*, x \rangle_{E^*, E} f_n(e_{\alpha_n}). \quad (4)$$

Легко показати, що $\sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F \leq \frac{4}{3}$ для $n \geq 2$, тому маємо

$$\sup_{B_1(E)} \|f_n - f_k\|_F \leq 2 \sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon_i < \varepsilon_{k-1}^2, \quad n > k. \quad (5)$$

З (3) і (4) для $n \geq 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{B_1(E)} \|f_{n+1}\|_F &\geq \|f_{n+1}(e_{\alpha_n})\|_F = \\ &= \|f_n(e_{\alpha_n}) + \varepsilon_n \langle e_{\alpha_n}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} f_n(e_{\alpha_n})\|_F = \\ &= \|f_n(e_{\alpha_n})\|_F (1 + \varepsilon_n) \geq \\ &\geq (\sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2) (1 + \varepsilon_n) \geq \\ &\geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F + \varepsilon_n \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - 2\varepsilon_n^2. \end{aligned}$$

З отриманої нерівності випливає, що для $n \geq 1$ виконується $\sup_{B_1(E)} \|f_{n+1}\|_F \geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F$.

Далі, якщо $n > k$ маємо

$$\begin{aligned} \|f_{k+1}(e_{\alpha_n})\|_F &\geq \|f_n(e_{\alpha_n})\|_F - \sup_{B_1(E)} \|f_n - f_{k+1}\|_F \geq \\ &\geq \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2 - 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \varepsilon_i > \\ &> \sup_{B_1(E)} \|f_n\|_F - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_{k+1}^2 > \\ &> \sup_{B_1(E)} \|f_{k+1}\|_F - 2\varepsilon_k^2. \end{aligned}$$

Отже, для $n > k$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned} \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F + \varepsilon_k \langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F &\geq \\ &\geq \|f_k(e_{\alpha_n}) + \varepsilon_k \langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} f_k(e_{\alpha_n})\|_F = \\ &= \|f_{k+1}(e_{\alpha_n})\|_F > \sup_{B_1(E)} \|f_{k+1}\|_F - 2\varepsilon_k^2 \geq \end{aligned}$$

$$\geq \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F + \varepsilon_k \sup_{B_1(E)} \|f_k\|_F - 4\varepsilon_k^2.$$

Скоротивши, отримаємо нерівність

$$|\langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E}| > 1 - 4\varepsilon_k > 1 - \frac{1}{k+1}, \quad n > k. \quad (6)$$

Послідовність (f_n) є рівномірно фундаментальною на кулі $B_1(E)$. Нехай $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Тоді з (5) і (2) для ядерного оператора

$$\begin{aligned} Nx = \bar{f}(x) - f(x) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(e_{\alpha_k}) \langle e_{\alpha_k}^*, x \rangle_{E^*, E} \quad (x \in E) \end{aligned}$$

маємо $\|N\|_{L(E, F)} < \varepsilon$.

Покажемо, що з (6) випливає існування у послідовності (e_{α_n}) збіжної підпослідовності.

Розглянемо числові послідовності

$$y_n = (y_1^{(n)}, \dots, y_k^{(n)}, \dots) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

де $y_k^{(n)} = \langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Оскільки $\{e_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_1(E)$ і $\{e_{\alpha_n}^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_1(E^*)$, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $y_n \in B_1(l_\infty)$. Одинична куля $B_1(l_\infty)$ компактна в топології $\sigma(l_\infty, l_1)$, а топологія, що індукована топологією $\sigma(l_\infty, l_1)$ на $B_1(l_\infty)$, є метризованою [4]. Отже, можна з (y_n) виділити збіжну в топології $\sigma(l_\infty, l_1)$ підпослідовність, яку теж позначатимемо через (y_n) . Зокрема, для кожного $k \in \mathbb{N}$ числова послідовність $y_k^{(n)} = \langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E}$ збігається при $n \rightarrow \infty$ до числа $\bar{y}_k \in \mathbb{R}$. Перейшовши в нерівності

$$1 \geq |y_k^{(n)}| = |\langle e_{\alpha_k}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E}| > 1 - \frac{1}{k+1}, \quad n > k,$$

до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$1 \geq |\bar{y}_k| \geq 1 - \frac{1}{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності випливає, що $|\bar{y}_k| \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Перейшовши, якщо треба, до підпослідовності, можна досягти збіжності $(\bar{y}_k)$ до одного з двох чисел 1 або -1, яке позначимо у

Покажемо, що отримана підпослідовність (e_{α_k}) сильно збіжна в просторі E . Використаємо означення рівномірно строгої виставленості сім'ї $\{e_{\alpha_k}\}$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і зафіксуємо. Для обраного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_1(E) \quad \langle e_{\alpha_k}^*, x \rangle_{E^*, E} > 1 - \delta \Rightarrow \\ \|x - e_{\alpha_k}\|_E < \varepsilon.$$

Оскільки $\bar{y}_k \rightarrow y$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для $k \geq k_0$ виконується нерівність $|\bar{y}_k - y| < \frac{\delta}{2}$. Візьмемо два довільних числа $k' \geq k_0$ і $k'' \geq k_0$. Використовуючи збіжності

$$y_{k'}^{(n)} = \langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} \rightarrow \bar{y}_{k'} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$y_{k''}^{(n)} = \langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} \rightarrow \bar{y}_{k''} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

можемо записати

$$\left| \langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} - y \right| \leq \left| \langle e_{\alpha_{k'}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} - \bar{y}_{k'} \right| + \\ |\bar{y}_{k'} - y| < \delta.$$

$$\left| \langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} - y \right| \leq \left| \langle e_{\alpha_{k''}}^*, e_{\alpha_n} \rangle_{E^*, E} - \bar{y}_{k''} \right| + \\ |\bar{y}_{k''} - y| < \delta.$$

Звідки отримуємо

$$\left\langle e_{\alpha_{k'}}^*, \frac{e_{\alpha_n}}{y} \right\rangle_{E^*, E} > 1 - \delta \quad \text{і} \quad \left\langle e_{\alpha_{k''}}^*, \frac{e_{\alpha_n}}{y} \right\rangle_{E^*, E} > 1 - \delta.$$

З цих нерівностей випливає, що

$$\left\| \frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k'}} \right\|_E < \varepsilon \quad \text{і} \quad \left\| \frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k''}} \right\|_E < \varepsilon.$$

Отже,

$$\|e_{\alpha_{k'}} - e_{\alpha_{k''}}\|_E \leq \left\| e_{\alpha_{k'}} - \frac{e_{\alpha_n}}{y} \right\|_E + \left\| \frac{e_{\alpha_n}}{y} - e_{\alpha_{k''}} \right\|_E < 2\varepsilon,$$

тобто послідовність (e_{α_k}) фундаментальна в банаховому просторі $(E, \|\cdot\|_E)$.

Нехай $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{\alpha_n} \in B_1(E)$. З нерівності (3) випливає, що

$$\sup_{B_1(E)} \|f + N\|_E = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_E = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(e_{\alpha_n})\|_E = \|f(\bar{x}) + N\bar{x}\|_E.$$

Отже, задача (A) має розв'язок $\bar{x} \in B_1(E)$. ■

У зв'язку з теоремою 1 виникає питання явного опису класів відображень, що мають властивість T. Теорема 1 була анонсована в [5] з помилкою у формулюванні.

Нехай (X, ρ) – повний метричний простір, $(E, \|\cdot\|_E)$ – банахів простір. Розглянемо банахів простір $BC(X, E)$ обмежених неперервних відображень X в E з рівномірною нормою

$$\|f\|_{BC(X, E)} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E.$$

Зафіксуємо в $BC(X, E)$ деякий лінійний підпростір B – клас „допустимих” моделей. Будемо вивчати екстремальні задачі

$$\|f(x)\|_E \rightarrow \sup_{x \in X}, \quad (7)$$

де $f \in B \subseteq BC(X, E)$.

Мета – перенести на задачі (7) попередню техніку та отримати результат про існування малих збурень, що лежать у підпросторі B і забезпечують існування розв'язків.

Означення 4. Множину $N \subseteq X$ називаємо нормуючою для підпростору $B \subseteq BC(X, E)$, якщо для кожного $f \in B$: $\|f\|_{BC(X, E)} = \sup_{x \in N} \|f(x)\|_E$.

Означення 5. Функція $g \in BC(X, \mathbb{R})$ строго виставляє точку $x \in X$, якщо $|g(x)| = 1$, x – точка строгого максимуму функції $|g|$ на X .

Відмітимо, що якщо $g \in BC(X, \mathbb{R})$ строго виставляє точку $x \in X$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що з нерівності $|g(y)|^n > 1 - \varepsilon$ випливає $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Означення 6. Лінійний підпростір

$$B \subseteq BC(X, E)$$

називаємо правильним, якщо для B існує така нормуюча множина $N \subseteq X$ і така множина функцій $G = \{g_i\}$ строго виставляє $x : x \in N$, що

$$\left\{ \sum_{k=1}^n g_{\alpha_k} e_{\alpha_k} : g_{\alpha_k} \in G, \alpha_k \in N, e_{\alpha_k} \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq B.$$

Теорема 2. Нехай B – правильний замкнений лінійний підпростір простору $BC(X, E)$. Тоді для довільних $f \in B$ і $\varepsilon > 0$ існує відображення $g \in B$ таке, що $\|g\|_{BC(X, E)} \leq \varepsilon$, і задача

$$\|f(x) + g(x)\|_E \rightarrow \sup_{x \in X} \quad (B)$$

має розв'язки.

Доведення. Нехай $f \in B$ і $\|f\|_{BC(X, E)} = 1$. Візьмемо число $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ і таку спадну послідовність (ε_n) додатних чисел, що виконуються нерівності:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon, \quad 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_k^2, \quad \varepsilon_k < \frac{1}{10k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Нехай $f_1 = f$. Оберемо $x_1 \in N$ так, що

$$\|f_1(x_1)\|_E \geq \sup_X \|f_1\|_E - \varepsilon_1^2.$$

Беремо функцію $g_1 = g_{x_1} \in G$, яка строго виставляє точку $x_1 \in N$, і будуємо відображення f_2 :

$$f_2(x) = f_1(x) + \varepsilon_1 g_1^{m_1}(x) f_1(x_1),$$

де $m_1 \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності

$$|g(x)|^{m_1} > 1 - \frac{1}{2}$$

впливає $\rho(x, x_1) < \frac{1}{2}$.

Тепер візьмемо $x_2 \in N$ так, що

$$\|f_2(x_2)\|_E \geq \sup_X \|f_2\|_E - \varepsilon_2^2,$$

і функцію $g_2 = g_{x_2} \in G$, яка строго виставляє точку x_2 , і будуємо відображення f_3 :

$$f_3(x) = f_2(x) + \varepsilon_2 g_2^{m_2}(x) f_2(x_2),$$

де $m_2 \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності

$$|g(x)|^{m_2} > 1 - \frac{1}{3}$$

впливає $\rho(x, x_2) < \frac{1}{3}$.

Виконавши аналогічні побудови, отримаємо послідовності (f_n) , (x_n) такі, що

$$\|f_n(x_n)\|_E \geq \sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2, \quad (9)$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \varepsilon_n g_n^{m_n}(x) f_n(x_n), \quad (10)$$

де $m_n \in \mathbb{N}$ обрано так, що з нерівності

$$|g(x)|^{m_n} > 1 - \frac{1}{n+1}$$

впливає $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n+1}$.

Методом математичної індукції легко показати, що $\|f_n\|_{BC(X,E)} \leq \frac{4}{3}$ для $n \geq 2$ - тому маємо

$$\|f_n - f_k\|_{BC(X,E)} \leq 2 \sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon_i < \varepsilon_{k-1}^2, \quad n > k. \quad (11)$$

З (9) і (10) для $n \geq 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_X \|f_{n+1}\|_E &\geq \|f_{n+1}(x_n)\|_E = \\ &= \|f_n(x_n) + \varepsilon_n g_n^{m_n}(x_n) f_n(x_n)\|_E = \\ &= \|f_n(x_n)\|_E (1 + \varepsilon_n) \geq (\sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2) (1 + \varepsilon_n) \geq \\ &\geq \sup_X \|f_n\|_E + \varepsilon_n \sup_X \|f_n\|_E - 2\varepsilon_n^2. \end{aligned}$$

З отриманої нерівності випливає, що для $n \geq 1$ виконується $\sup_X \|f_{n+1}\|_E \geq \sup_X \|f_n\|_E$.

Далі, якщо $n > k$ маємо

$$\|f_{k+1}(x_k)\|_E \geq \|f_n(x_n)\|_E - \|f_n - f_{k+1}\|_{BC(X,E)} \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \sup_X \|f_n\|_E - \varepsilon_n^2 - 2 \sum_{i=k+1}^{n-1} \varepsilon_i > \\ &> \sup_X \|f_{k+1}\|_E - 2\varepsilon_k^2. \end{aligned}$$

Отже, для $n > k$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned} \sup_X \|f_k\|_E + \varepsilon_k |g_k^{m_k}(x_n)| \sup_X \|f_k\|_E &\geq \\ &\geq \|f_{k+1}(x_n)\|_E > \sup_X \|f_{k+1}\|_E - 2\varepsilon_k^2 \geq \\ &\geq \sup_X \|f_k\|_E + \varepsilon_k \sup_X \|f_k\|_E - 4\varepsilon_k^2. \end{aligned}$$

Скоротивши, отримаємо нерівність

$$|g_k^{m_k}(x_n)| > 1 - 4\varepsilon_k > 1 - \frac{1}{k+1}. \quad (12)$$

За побудовою (f_n) є фундаментальною послідовністю елементів замкненого підпростору B . Нехай $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in B \subseteq BC(X, E)$. Тоді з

(11) і (8) для $g = \bar{f} - f = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(x_k) g_k^{m_k} \in B$ маємо $\|g\|_{BC(X,E)} \leq \varepsilon$. З (12) робимо висновок, що послідовність (x_n) є фундаментальною. Дійсно, для довільного $\delta > 0$ при $n > k > \frac{1}{\delta} - 1$ маємо

$$\rho(x_n, x_k) < \delta.$$

Отже, існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \in X$. З (10) випливає, що

$$\begin{aligned} \sup_X \|f + g\|_E &= \sup_X \|\bar{f}\|_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{BC(X,E)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x_n)\|_E = \|\bar{f}(\bar{x})\|_E = \|f(\bar{x}) + g(\bar{x})\|_E. \end{aligned}$$

Отже, задача (B) має розв'язок $\bar{x} \in X$. ■

Список використаних джерел

1. Lindenstrauss J. On operators which attain their norm // Israel J. Math., Vol. 1 (1963), pp.139-148.
2. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. - К.: Выща школа, 1980. - 215 с.
3. W. Schachermayer Norm attaining operators and renormings of Banach spaces // Israel J. Math., Vol. 44 (1983), No. 3, pp. 201-212.
4. Дэй М. Нормированные линейные пространства. - М.: Изд-во иностр. лит., 1961. - 232 с.
5. Семенов В.В. Лінійні збурення та еквівалентні перенормування // International Workshop "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2008)", Crimea (Novy Svit), Ukraine, 2008. - P.109-110.

Надійшла до редколегії 10.12.08

УДК 681.3.062

Сільвейструк Л.М.

Логічні зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів „дивитися через” та участі

Розглядаються і формалізуються обмеження кардинальності моделі „сутність-зв'язок”: кардинальність „дивитися через”, кардинальність участі. Обґрунтовуються логічні зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів „дивитися через” та участі.

Ключові слова: модель „сутність-зв'язок”, обмеження кардинальності, кардинальність „дивитися через”, кардинальність участі.

E-mail: slm-klm@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

При розгляді моделі „сутність-зв'язок”, особлива увага приділяється обмеженням, які застосовують до її елементів. Одне з таких обмежень – кардинальність (*cardinality*). Обмеження кардинальності (*cardinality constraints*) застосовують до типів зв'язків; існує декілька різновидів вказаних обмежень, які можна знайти, наприклад, у роботах Ферга (Ferg) [1], Тхелхеїма (Thalheim) [2], Лензеріні (Lenzerini) і Сантуккі (Santucci) [3].

Обмеження кардинальності, в залежності від так званих базових типів обмежень кардинальності та концепцій відображення значень обмежень кардинальності, можна розглядати у розрізі наступних типів: *min* та *max* обмежень кардинальності (обмежена кардинальність), *min* та *max* обмежень кардинальності (необмежена кардинальність), *top* обмеження кардинальності.

В літературі найчастіше зустрічаються два наступні різновиди обмежень кардинальності: кардинальність „дивитися через” (*look across cardinality*) [4] та кардинальність участі (*participation cardinality*) [1].

Кардинальність „дивитися через” – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать решті типів сутностей даного типу зв'язку.

Кардинальність участі – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), яке залежить від зв'язків типу зв'язку

Silveystruk L.N.

Logical connections are between the values of cardinality constraints for approaches look across and participation

The cardinality constraints of „entity-relationship” model – look across cardinality, participation cardinality – are considered and formalized. Logical connections are between the values of cardinality constraints for approaches look across and participation are grounded.

Key words: entity-relationship model, cardinality constraints, look across cardinality, participation cardinality.

для будь-якої сутності, що належить типу-параметру.

Розглядаючи дані види обмежень кардинальності (обмеження кардинальності „дивитися через” та обмеження кардинальності участі) цікаво знайти логічний зв'язок між ними або показати, що його не має. В роботі [5] Хартман (Hartmann) висловив декілька спостережень щодо даних логічних зв'язків та розглянув конкретні приклади, які їх ілюструють.

Різниця між даними підходами до обмежень кардинальності очевидна, коли розглядаються багатосторонні типи зв'язків; для бінарних типів зв'язків різниця полягає у питанні виду, тобто ці два підходи співпадають (див., наприклад, [5, 1]).

У роботі подана низка тверджень про зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для двох підходів – „дивитися через” та участі, які обґрунтовуються за допомогою нижче поданих уточнень обмежень кардинальності.

Обмеження кардинальності типів зв'язків уточнюються на мові теорії відношень. В роботах [6, 7, 8, 9, 10] були розглянуті та уточнені наступні поняття: *max* обмеження кардинальності (обмежена кардинальність), *top* обмеження кардинальності і *min* та *max* обмеження кардинальності (необмежена кардинальність); в роботах [6, 7] ці поняття для бінарних типів зв'язків мають такі назви відповідно – показник кардинальності, ступінь участі сутності в зв'язку і структурні обмеження вигляду (*min*, *max*).

Всі невизначені тут поняття можна знайти у роботах [6, 7, 8, 9, 10].

Якщо типи сутностей $E_1, E_2, \dots, E_n$ інтерпретуються як множини $E_1, E_2, \dots, E_n$, а тип зв'язку R , заданий на типах сутностей $E_1, E_2, \dots, E_n$, як n -арне відношення R , причому $R \subseteq E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, то базові типи обмежень кардинальності формалізуються за допомогою функціональності відношення за i -тою компонентою (так обмеження кардинальності, концепція обмеженої кардинальності), найменшої та найбільшої потужності повних образів одноелементних множин, побудованих певним чином на основі n -арного відношення (мін та так обмеження кардинальності, концепція

необмеженої кардинальності), проєкції відношення (мін обмеження кардинальності, концепція обмеженої кардинальності та тор обмеження кардинальності).

Далі дані уточнення розглянуто детальніше.

Функціональність за i -тою компонентою n -арного відношення R зведено до функціональності деякого бінарного відношення. А саме, n -арне відношення R представляється у вигляді бінарного відношення виду ${}^1R_i \subseteq (E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n) \times E_i$ (для кардинальності „дивитись через”), де

$${}^1R_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle, e_i \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \}$$

i розглядається функціональність першого роду за i -тою компонентою; або бінарного відношення

$${}^2R_i \subseteq E_i \times (E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n) \quad (\text{для кардинальності участі}), \text{ де}$$

$${}^2R_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle e_i, \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \rangle \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \}.$$

i розглядається функціональність другого роду за i -тою компонентою.

Очевидно, що n -арне відношення R на множинах функціональне за i -тою компонентою (першого або другого роду) тоді і тільки тоді, коли відповідне бінарне відношення функціональне, $i = 1, \dots, n$.

Випадок, коли вихідне відношення R бінарне, потребує деяких пояснень: одноелементний кортеж отожднюється з самим елементом (тобто кортеж $\langle e \rangle$ з елементом e),

тоді отримуються рівності ${}^1R_1 = R^{-1}$, ${}^1R_2 = R$, ${}^2R_2 = R^{-1}$ та ${}^2R_1 = R$.

Повний образ одноелементної множини $\{ \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \}$ відносно відношення 1R_i позначено через ${}^1R_i[e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n]$, а множину потужностей повних образів всіх комбінацій елементів множин $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n$ через ${}^1\text{Im}_i(R)$; згідно з означеннями повного образу та відношення 1R_i множини потужностей повних образів отримуються рівності

$${}^1R_i[e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n] = \{ e_i \mid \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R \}.$$

$${}^1\text{Im}_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ [R[e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n]] \mid e_i \in E_i \wedge \dots \wedge e_{i-1} \in E_{i-1} \wedge e_{i+1} \in E_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n \in E_n \}$$

В подальших конструкціях припускається, що множини $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, \dots, E_n$ не більш ніж злічені, а всі повні образи одноелементних множин (кортежів) скінченні; з огляду на фінітність всіх об'єктів такі обмеження є природними. Очевидно, що коли відношення R непорожнє, то і введена множина непорожня також. Зрозуміло, що ${}^1\text{Im}_i(R)$ — непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто

обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-якому випадку ця множина має найменший елемент, якій позначено як ${}^1\min_i(R)$. Найбільшого ж елементу множина ${}^1\text{Im}_i(R)$ може і не мати, тому введено наступне означення, в якому ∞ — деякий елемент, що не належить множині натуральних чисел:

$${}^1\max_i(R) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } {}^1\text{Im}_i(R), & \text{якщо } {}^1\text{Im}_i(R) \text{ скінченна множина;} \\ \infty, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Безпосередньо з означень випливають порядком $\leq$ найбільшим елементом ∞ . де
рівності ${}^1\min_i(R) = \prod {}^1\text{Im}_i(R)$. $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \cup \{\infty\}$.

${}^1\max_i(R) = \prod {}^1\text{Im}_i(R)$, де символи Аналогічно вводяться поняття повного
 $\prod, \prod$ використовуються для позначення образу ${}^2R_i[e_i]$ одноелементної множини $\{e_i\}$
інфімумів та супремумів відповідно в повній відносно відношення 2R_i та множини
решітці $\langle N', \leq \rangle$, яка отримується поповненням потужностей повних образів всіх елементів
множини натуральний чисел N з стандартним множини E_i — ${}^2\text{Im}_i(R)$, де

$${}^2R_i[e_i] = \{ \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \mid e_i \in E_i, (\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R) \},$$

$${}^2\text{Im}_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ {}^2R_i[e_i] \mid e_i \in E_i \}.$$

Найменша та найбільша потужність повних образів одноелементних множин означаються так: ${}^2\min_i(R) = \prod {}^2\text{Im}_i(R)$,

Проекції відношень першого та другого роду за i -тою компонентою (${}^1\pi_i^n(R)$ та ${}^2\pi_i^n(R)$) визначаються наступним чином

$${}^2\max_i(R) = \prod {}^2\text{Im}_i(R).$$

$${}^1\pi_i^n(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \mid \exists e_i (\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R) \},$$

$${}^2\pi_i^n(R) = \{ e_i \mid \exists e_1, \dots, \exists e_{i-1}, \exists e_{i+1}, \dots, \exists e_n (\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \in R) \}.$$

Для бінарних відношень проекції першого та другого роду пов'язані рівностями (звісно, за умови ототожнення одноелементних кортежів з самими компонентами):

$${}^1\pi_1^2(R) = \pi_2^2(R), \quad {}^1\pi_2^2(R) = \pi_1^2(R).$$

$${}^1\pi_1^2(R) = {}^2\pi_2^2(R), \quad {}^1\pi_2^2(R) = {}^2\pi_1^2(R).$$

Для формулювання тверджень про логічні зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів — „дивитися через” та участі знадобляться позначення, наведені в табл. 1; другий її стовбчик відповідає кардинальності „дивитися через”, а третій —

кардинальності участі. Обмеження кардинальності розглядаються як (параметричні) унарні оператори на відношеннях; значення оператора mor позначено через m (обов'язкове), o (необов'язкове; від mandatory та optional відповідно), значення операторів $\min$, $\max$ для обмеженої та необмеженої кардинальності — через n , ∞ , де $n \in N$, а ∞ відповідає значенню „багато”. У випадку обмеженої кардинальності в позначеннях операторів буде використовуватися верхній індекс r (restricted).

Таблиця 1

Позначення обмежень кардинальності

Базові обмеження кардинальності	Кардинальність „дивитися через”	Кардинальність участі
Mor обмеження кардинальності	${}^1\text{mor}(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \in \{m, o\}$	${}^2\text{mor}(E_i; R) \in \{m, o\}$
Min і max обмеження кардинальності (обмежена кардинальність)	${}^1\min_r(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \in \{0, 1\}$ ${}^1\max_r(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \in \{1, \infty\}$	${}^2\min_r(E_i; R) \in \{0, 1\}$ ${}^2\max_r(E_i; R) \in \{1, \infty\}$
Min і max обмеження кардинальності (необмежена кардинальність)	${}^1\min(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \in N$ ${}^1\max(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \in N \cup \{\infty\}$	${}^2\min(E_i; R) \in N$ ${}^2\max(E_i; R) \in N \cup \{\infty\}$

Символ $\square$ позначає кінець формулювання твердження (доведення в роботі не наводяться).

Твердження 1 (зв'язок між обмеженнями кардинальності для бінарних типів зв'язків).

Нехай R тип зв'язку між типами сутностей E_1, E_2 , а R, E_1, E_2 — відповідні бінарні відношення та множини. Тоді виконуються рівності:

1. ${}^1\text{mor}(E_i, R) = {}^2\text{mor}(E_i, R)$ для $i = 1, 2$;
2. ${}^1\text{min}_2'(E_i, R) = {}^2\text{min}_1'(E_i, R)$ та ${}^1\text{min}_1'(E_i, R) = {}^2\text{min}_2'(E_i, R)$;
3. ${}^1\text{max}_2'(E_i, R) = {}^2\text{max}_1'(E_i, R)$ та ${}^1\text{max}_1'(E_i, R) = {}^2\text{max}_2'(E_i, R)$;
4. ${}^1\text{min}_2(E_i, R) = {}^2\text{min}_1(E_i, R)$ та ${}^1\text{min}_1(E_i, R) = {}^2\text{min}_2(E_i, R)$;
5. ${}^2\text{max}_2(E_i, R) = {}^2\text{max}_1(E_i, R)$ та ${}^1\text{max}_1(E_i, R) = {}^2\text{max}_2(E_i, R)$. $\square$

Практичне значення даного твердження заключається у тому, що min , max , mor обмеження кардинальності для кардинальності „дивитися через” та кардинальності участі для бінарних типів зв'язків співпадають.

Розглядаючи обмеження кардинальності для кардинальностей „дивитися через” та участі при необмеженій кардинальності, виявляється, що має місце аналог теореми про сумісність значень операторів min , max на взаємноінверсних

бінарних відношеннях (див., наприклад, [7, 10]) для багатосторонніх типів зв'язків. Якщо ставити питання точно, то мова йде про сумісність значень вигляду ${}^1\text{min}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$, ${}^1\text{max}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$ та ${}^2\text{min}_i(E_i, R)$, ${}^2\text{max}_i(E_i, R)$ для кожного $i = 1, \dots, n$.

Для формулювання цієї теореми знадобиться наступна таблиця в якій зафіксоване деяке $i = 1, \dots, n$.

Таблиця 2

Всі варіанти значень операторів ${}^1\text{min}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$, ${}^1\text{max}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$ та ${}^2\text{min}_i(E_i, R)$, ${}^2\text{max}_i(E_i, R)$ для n -арного відношення R та сумісність їх значень, $i = 1, \dots, n$

		$\overset{\text{def}}{p'} = {}^2\text{min}_i(E_i, R), \quad \overset{\text{def}}{p} = {}^2\text{max}_i(E_i, R)$					
		$p' = 0, p = 0$	$p' = p, p' > 0$	$p' = 0, p \geq 1, p \in N$	$p' = 0, p = \infty$	$p' \geq 1, p > p', p \in N$	$p' \geq 1, p = \infty$
$\overset{\text{def}}{k'} = {}^1\text{min}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$ $\overset{\text{def}}{k} = {}^1\text{max}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$	$k' = 0, k = 0$	+	—	—	—	—	—
	$k' = k, k' > 0$	—	+	—	+	+	—
	$k' = 0, k \geq 1, k \in N$	—	+	+	+	+	+
	$k' = 0, k = \infty$	—	+	+	+	+	+
	$k' \geq 1, k > k', k \in N$	—	+	+	+	+	+
	$k' \geq 1, k = \infty$	—	+	+	+	+	+

Теорема 1 (про сумісність значень відповідними значеннями операторів ${}^1\text{min}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$, ${}^1\text{max}_i(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n, R)$ та ${}^2\text{min}_i(E_i, R)$, ${}^2\text{max}_i(E_i, R)$ для n -арних відношень, $n \geq 2$). Для комірок таблиці 2, позначених „+” („—”), існує (відповідно не існує) відношення R .

сутностей $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n$, де $n \geq 3$, і $\min$ та $\max$ обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i багатостороннього типу зв'язку R , який з'єднує типи сутностей $E_1, \dots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \dots, E_n$ (за умови, що R непорожній зв'язок).

З останньої теореми випливає, що між значеннями ${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R)$ та ${}^2\max_j(E_i; R)$ в загальному випадку немає логічного зв'язку. Виявляється, що причина цієї ситуації полягає у спеціальному вигляді обмежень кардинальності – рівності індексів при двох підходах до обмежень кардинальності; якщо ж зняти цю вимогу, то ситуація суттєво змінюється, про що каже наступне твердження.

Твердження 2 (верхня оцінка значення $\max$ обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності при підході „дивитися через” для багатосторонніх зв'язків). Нехай R тип зв'язку між типами сутностей $E_1, \dots, E_n$, де $n \geq 2$, а $R, E_1, \dots, E_n$ – відповідні n -арне відношення та множини. Зафіксуємо деяке $i \in \{1, \dots, n\}$, тоді для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$, таких, що $j \neq i$, виконується нерівність

$${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) \leq {}^2\max_j(E_i; R). \square$$

1. ${}^1\min_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) = 0 \Leftrightarrow {}^1\min_j(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) = 0$;
2. ${}^1\min_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) = 1 \Leftrightarrow {}^1\min_j(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \geq 1$;
3. ${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) = 1 \Leftrightarrow {}^1\max_j(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) \leq 1$;
4. ${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) = \infty \Leftrightarrow {}^1\max_j(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_n; R) > 1$. $\square$

Твердження 4 (зв'язок між значеннями $\min$, $\max$ обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, кардинальність участі, багатосторонні зв'язки). Нехай R тип зв'язку між типами сутностей $E_1, \dots, E_n$, де $n \geq 2$, а $R, E_1, \dots, E_n$ – відповідні n -арне відношення та множини. Для довільного $i \in \{1, \dots, n\}$ виконуються наступні еквівалентності

1. ${}^2\min_j(E_i; R) = 0 \Leftrightarrow {}^2\min_j(E_i; R) = 0$;
2. ${}^2\min_j(E_i; R) = 1 \Leftrightarrow {}^2\min_j(E_i; R) \geq 1$;
3. ${}^2\max_j(E_i; R) = 1 \Leftrightarrow {}^2\max_j(E_i; R) \leq 1$;
4. ${}^2\max_j(E_i; R) = \infty \Leftrightarrow {}^2\max_j(E_i; R) > 1$. $\square$

З встановлених зв'язків між обмеженою та необмеженою кардинальностями випливає наступний аналог твердження 2 (про верхню оцінку $\max$ обмеження кардинальності для

Отже, значення ${}^2\max_j(E_i; R)$ виступає верхньою оцінкою значень вигляду ${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R)$ для всіх $j = 1, \dots, n$, відмінних від (зафіксованого) $i = 1, \dots, n$. Саме в цьому проявляється, зокрема, принципова різниця між підходами „дивитися через” та участі.

З теореми 1 та твердження 2 видно, що підходи до обмежень кардинальності – кардинальність „дивитися через” та кардинальність участі – принципово різні при розгляді багатосторонніх типів зв'язків; тому в моделі доцільно розглядати їх разом.

В наступних двох твердженнях розглядаються логічні зв'язки між обмеженнями кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності (підходи „дивитися через” та участі, багатосторонні зв'язки).

Твердження 3 (зв'язок між значеннями $\min$, $\max$ обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, підхід „дивитися через”, багатосторонні зв'язки). Нехай R тип зв'язку між типами сутностей $E_1, \dots, E_n$, де $n \geq 2$, а $R, E_1, \dots, E_n$ – відповідні n -арне відношення та множини. Для довільного $i \in \{1, \dots, n\}$ виконуються наступні еквівалентності

необмеженої кардинальності при підході „дивитися через”) для обмеженої кардинальності.

Наслідок 1 (зв'язок між значеннями $\max$ обмеження кардинальності для обмеженої кардинальності при підходах „дивитися через” та кардинальності участі, багатосторонні зв'язки). Нехай R тип зв'язку між типами сутностей $E_1, \dots, E_n$, де $n \geq 2$, а $R, E_1, \dots, E_n$ – відповідні n -арне відношення та множини. Зафіксуємо деяке $i \in \{1, \dots, n\}$, таке, що ${}^2\max_j(E_i; R) = 1$. Тоді для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$, таких, що $j \neq i$, виконується рівність

$${}^1\max_j(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_n; R) = 1. \square$$

Для бінарних типів зв'язків (тобто $n = 2$) наслідок 1, аналогічно твердженню 1 (в якому нерівності переходили в рівності), приймає тривіальний вигляд; дійсно для першого випадку $i = 2$, тобто $j = 1$ рівності ${}^2\max_j(E_i; R) = 1$ та

${}^1\max_i(E_i, R) = 1$ еквівалентні, бо говорять про функціональність відношення R^{-1} ; для другого випадку $i = 1$, тобто $j = 2$ рівності ${}^2\max_i(E_i, R) = 1$ та ${}^1\max_j(E_i, R) = 1$ також еквівалентні, бо говорять про функціональність відношення R .

З останніх двох тверджень 3, 4 випливає, що обмеження $\min$, $\max$ кардинальності для необмеженої кардинальності є більш виразними ніж ті самі обмеження для обмеженої кардинальності, причому для обох підходів, що

розглядаються – „дивитися через” (твердження 3) та кардинальності участі (твердження 4). Таким чином, для багатосторонніх зв'язків успадковується аналогічне положення для бінарних зв'язків.

Ціль подальшої роботи – обґрунтування відсутності логічного зв'язку між значеннями $\min$ та $\max$ обмежень кардинальності „дивитися через” і $\min$ та $\max$ обмежень кардинальності участі в загальному випадку.

Список використаних джерел

1. Ferg S. Cardinality concepts in entity-relationship modeling / S. Ferg // Entity-Relationship Approach: international conference, October 23-25, 1991, San Mateo, California: proceeding. – 1991. – P. 1-30.
2. Thalheim B. Fundamentals of cardinality constraints / B. Thalheim // Entity-Relationship Approach: international conference, October 7-9, 1992, Karlsruhe, Germany: proceeding. – 1992. – P. 7-23.
3. Lenzerini M., Santucci G. Cardinality constraints in the entity-relationship model // Proceeding of the International Conference on the Entity-Relationship Approach to Software Engineering. – 1983. – P. 529-549.
4. Chen P.P. The entity-relationship model – towards a unified view of data / P.P. Chen // ACM Transactions on Database Systems. – March 1976. – Vol. 1, No. 1 – P. 9-36.
5. Hartmann S. Reasoning about participation constraints and Chen's constraints / S. Hartmann // Conferences in Research and Practice in Information Technology. – 2003. – Vol. 17. – P. 8-16.
6. Буй Д. Формализация структурных ограничений связей в модели „сущность-связь” / Д. Буй, Л. Сильвейструк // Knowledge-Dialogue-Solution: international conference, June 20-25, 2006, Varna, Bulgaria: proceedings. – Sofia. – 2006. – P. 223-229.
7. Буй Д.Б. Модель „сущность-связь”: формализация сущностей та зв'язків / Д.Б. Буй, Л.М. Сильвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 143-152.
8. Буй Д.Б. Уточнення обмежень кардинальності типу зв'язку у моделі „сущность-связь” / Д.Б. Буй, Л.М. Сильвейструк // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, September 22-26, 2008: abstracts. – Kyiv. – 2008. – Ч. 2. – С. 10-15.
9. Сильвейструк Л.М. Обмеження кардинальності типу зв'язку у моделі „сущность-связь” / Л.М. Сильвейструк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: всеукраїнська наукова конференція, 23-25 вересня 2008 р., Львів, Україна: тези. – 2008. – С. 119.
10. Сильвейструк Л.М. Схема доведення основної теореми про властивості операторів $\min$, $\max$ в формалізації ER-моделі / Л.М. Сильвейструк // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, 4-9 September 2007, Berdyansk, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2007. – P. 229-234.

Надійшла до редакції 01.11.2008

УДК 681.5

Олександр С. Слабоспицький*, к.ф.-м.н., доц.

Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при неklasичних припущеннях

Для регресійної моделі при неklasичних припущеннях розглядається задача оцінювання стаціонарних параметрів у випадку, коли в кожен момент додатково для вектора параметрів відома його точка "тяжіння". Для оцінок параметрів методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від точок "тяжіння" та залишкової суми квадратів отримані відповідні рекурентні алгоритми для вищезгаданих систем. Представлені дві форми цих рекурентних процедур оцінювання.

Ключові слова: оцінювання стаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, регресійна модель, метод найменших квадратів, рекурентний алгоритм, залишкова сума квадратів.

*E-mail: sl@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Для оцінювання стаціонарних параметрів математичних моделей можна використовувати багато різних підходів [1]. Одним із таких, що широко застосовується, є підхід, який базується на методі найменших квадратів [2]. Його поширення на випадок, коли можуть порушуватися класичні припущення про єдиність цієї оцінки, представлено у роботі [3] через оператор псевдообернення по Муру-Пенроузу. У цій же праці для регресійної моделі описано побудову рекурентних алгоритмів для оцінки параметрів методом найменших квадратів з найменшою нормою та відповідної залишкової суми квадратів. Дві форми представлення вищезгаданих рекурентних процедур оцінювання можна також отримати з результатів робіт [4, 5] по рекурентному оцінюванню нестационарних параметрів математичних моделей методом найменших квадратів зі змінним фактором забування як частинний випадок, коли фактор забування тотожній одиниці.

Як правило, підхід, який базується на методі найменших квадратів, не використовує

Alexander S. Slabospitsky*, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Usage of supplementary information in the recurrent parameter estimation of the systems with discrete time by the least squares method under non-classical assumptions

The estimation problem of stationary parameter is considered for regression model under non-classical assumptions in case when in addition for parameter vector his 'attraction' point is known at any moment. Corresponding recurrent algorithms are obtained for parameter estimates of above-mentioned systems by the least squares method with the minimum deviation from 'attraction' points and residual sum of squares. Two forms of these recurrent estimation procedures are presented.

Key Words: stationary parameter estimation, pseudoinverse operator, regression model, least squares method, recurrent algorithm, residual sum of squares.

додаткової інформації про вектор невідомих параметрів об'єкту, що підлягає визначенню. У даній роботі для регресійної моделі аналізується оцінка методу найменших квадратів при порушенні класичних припущень про її єдиність у випадку, коли для вектора параметрів системи додатково в кожен момент відома його точка "тяжіння". При цих припущеннях отримані явна та дві рекурентні форми представлення оцінки параметрів методом найменших квадратів з найменшим відхиленням від точок "тяжіння". Наводиться також рекурентна процедура перерахунку відповідної залишкової суми квадратів.

Розглянемо задачу оцінювання вектора невідомих стаціонарних параметрів α для наступної регресійної моделі:

$$y(k) = x^T(k)\alpha + \xi(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де $y(k)$ - скалярні спостереження, $x(k)$ - детерміновані вектори, $\alpha \in R^n$, $\xi(k)$ - похибки моделі.

Перепишемо систему (1) у матричному вигляді:

$$y_N = X_N \alpha + \xi_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

де

$$y_N = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}, \quad X_N = \begin{pmatrix} x^1(1) & x^2(1) & \dots & x^p(1) \\ x^1(2) & x^2(2) & \dots & x^p(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^1(N) & x^2(N) & \dots & x^p(N) \end{pmatrix}, \quad \xi_N = \begin{pmatrix} \xi(1) \\ \xi(2) \\ \vdots \\ \xi(N) \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$Q(\alpha, N) = \|\xi_N\|^2.$$

Відомо [3], що при порушенні класичних припущень, оцінка методу найменших квадратів не обов'язково буде єдиною, а множина усіх цих оцінок має вигляд:

$$\text{Arg min}_{\alpha} Q(\alpha, N) = \{\hat{\alpha}_c(N)\};$$

$$\hat{\alpha}_c(N) = X_N^+ y_N + (E_p - X_N^+ X_N) \alpha, \quad \alpha \in R^p, \quad (2)$$

де $(^+)$ – оператор псевдообернення по Муру-Пенроузу, E_p – одинична матриця порядку p .

На множині оцінок (2) методу найменших квадратів існує єдина оцінка $\hat{\alpha}_v(N)$ з найменшою нормою і яка має наступну явну форму [3]:

$$\hat{\alpha}_v(N) = X_N^+ y_N. \quad (3)$$

Теорема 2. Рекурентний алгоритм для оцінки (4), з найменшим відхиленням від точок "тяжіння" $\{\alpha_N\}_{N=0}^{\infty}$, методу найменших квадратів вектора параметрів α системи (1) має вигляд: якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}(N)] + \\ + \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right] [\alpha_{N+1} - \alpha_N] \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) + P(N) x(N+1) x^T(N+1) R(N)] + \\ + \frac{y(N)}{\delta^2(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N), \end{cases} \quad (5)$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\gamma(N)} R(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}(N)] + P(N) [\alpha_{N+1} - \alpha_N] \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N) x(N+1) x^T(N+1) R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (6)$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}(0) = \alpha_0$, $R(0) = O$, $P(0) = E_p$.

Легко бачити, що у загальному випадку справедливе наступне твердження.

Теорема 1. Нехай v – заданий вектор розмірності p , тоді на множині (2), усіх оцінок методу найменших квадратів, існує єдина оцінка $\hat{\alpha}_v(N)$ з найменшим відхиленням від вектора v , яка визначається співвідношенням:

$$\hat{\alpha}_v(N) = X_N^+ y_N + (E_p - X_N^+ X_N) v.$$

Припустимо, що для вектора параметрів α моделі (1) в кожен момент N додатково відома його точка "тяжіння" α_N , $N = 0, 1, 2, \dots$.

Тоді логічно, в цій ситуації в якості єдиної оцінки $\hat{\alpha}(N)$ методу найменших квадратів вектора параметрів α моделі (1) в момент N , з урахуванням знання точок "тяжіння", серед оцінок з множини (2) використовувати саме оцінку $\hat{\alpha}_v(N)$ з найменшим відхиленням від вектора α_N , яка згідно останньої теореми має таку явну форму представлення:

$$\hat{\alpha}(N) = X_N^+ y_N + (E_p - X_N^+ X_N) \alpha_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Вигляд рекурентної процедури для перерахунку оцінки (4) задає наступне твердження.

де $\gamma(N) = 1 + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, o, O – нульові вектор та матриця відповідних розмірностей.

Доведення. Введемо позначення $R(N) = (X_N^T X_N)^{-1}$, $P(N) = E_p - X_N^* X_N$, $N = 1, 2, \dots$. Тоді оцінку (4) в момент $N+1$ можна записати таким чином:

$$\hat{\alpha}(N+1) = X_{N+1}^* y_{N+1} + (E_p - X_{N+1}^* X_{N+1}) \alpha_{N+1} = \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1) \alpha_{N+1}.$$

Але для оцінки $\hat{\alpha}_0(N+1)$ рекурентна процедура відома [3, 4] і має форму: якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}_0(N)], \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} [R(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) + P(N) x(N+1) x^T(N+1) R(N)] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N), \end{cases} \quad (7)$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0(N+1) = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\gamma(N)} R(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}_0(N)], \\ R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N) x(N+1) x^T(N+1) R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (8)$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}_0(0) = o$, $R(0) = O$, $P(0) = E_p$.

Таким чином, процедури для перерахунку $R(N)$ та $P(N)$ вже є, залишилося отримати рекурентний алгоритм тільки для оцінки $\hat{\alpha}(N)$.

Проаналізуємо спочатку випадок, коли $\delta(N) > 0$. Співвідношення (7) та врахування, що $\hat{\alpha}_0(N) = \hat{\alpha}(N) - P(N) \alpha_N$, дозволяє записати:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(N+1) &= \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1) \alpha_{N+1} = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}_0(N)] + \\ &+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right] \alpha_{N+1} = \hat{\alpha}(N) - P(N) \alpha_N + \\ &+ \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) (\hat{\alpha}(N) - P(N) \alpha_N)] + \\ &+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right] \alpha_{N+1} = \\ &= \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) [y(N+1) - x^T(N+1) \hat{\alpha}(N)] + \\ &+ \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N) x(N+1) x^T(N+1) P(N) \right] [\alpha_{N+1} - \alpha_N] \end{aligned}$$

В протилежному випадку використання (8) та прийняття до уваги, що $P(N) x(N+1) = o$, дозволяють отримати наступне:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(N+1) &= \hat{\alpha}_0(N+1) + P(N+1)\alpha_{N+1} = \hat{\alpha}_0(N) + \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}_0(N)] + \\ &+ P(N)\alpha_{N+1} = \hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_N + \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)(\hat{\alpha}(N) - P(N)\alpha_N)] + P(N)\alpha_{N+1} = \\ &= \hat{\alpha}(N) + \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] + P(N)\{\alpha_{N+1} - \alpha_N\}\end{aligned}$$

Доведення завершено.

Легко отримати другу форму представлення алгоритму (5, 6), якщо прийняти до уваги роботу [5].

Теорема 3. Для оцінки (4), з найменшим відхиленням від точок "тяжіння" $\{\alpha_N\}_{N=0}^{\infty}$ методу найменших квадратів вектора параметрів α системи (1) рекурентна процедура має вигляд:

$$\hat{\alpha}(N+1) = \hat{\alpha}(N) + R(N+1)x(N+1)[y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)] + P(N+1)\{\alpha_{N+1} - \alpha_N\},$$

причому, якщо $\delta(N) > 0$, то

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\delta(N)} \left[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right] + \\ + \frac{\gamma(N)}{\delta^2(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (5)$$

у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = R(N) - \frac{1}{\gamma(N)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N), \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (6)$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}(0) = \alpha_0$, $R(0) = O$, $P(0) = E_p$.

де $\gamma(N) = 1 + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$.

Наступний результат є очевидним з огляду на процедуру побудови оцінки $\hat{\alpha}(N)$ та роботу [5].

Теорема 4. Рекурентний алгоритм для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N)$ для оцінки (4), з найменшим відхиленням від точок "тяжіння" $\{\alpha_N\}_{N=0}^{\infty}$ методу найменших квадратів вектора параметрів α системи (1) приймає форму:

$$q(N+1) = \begin{cases} q(N), & \text{якщо } \delta(N) > 0, \\ q(N) + \frac{1}{\gamma(N)} [y(N+1) - x^T(N+1)\hat{\alpha}(N)]^2, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

з початковою умовою $q(0) = 0$, де $\gamma(N) = 1 + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$.

Список використаних джерел

1. Ljung L. System Identification: Theory for the User. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
2. Hsia T.C. System identification. Least-squares methods. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
3. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
4. Слабоспицький О.С. Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших

квадратів зі змінним фактором забування при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1999. – №4. – с. 237-240

5. Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – №1. – с. 282-285.

Надійшла до редколегії 15.11.2008

УДК 519.9

Тикулов Є. В.¹

Графікові аплікативні інтерпретації та дельта-числення

У роботі розглядаються інтерпретації дельта числення в моделях, елементами яких є множини. Вказано подання рекурсивних функцій через рекурсивно перелічні множини в термінах графікової аплікації.

Ключові слова: аплікація, дельта-числення, модель, рекурсивна функція.

¹ E-mail: eugene.tikulov@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Буй Д. Б.

Дельта-числення (див. [1]) як аплікативна аксіоматична теорія інтерпретується в теоріях частково рекурсивних функцій, частково неперервних функцій в канторівському та берівському просторах. Одним з важливих питань в рамках розвитку дельта-числення є пошук та побудова нових інтерпретацій. При цьому часто доводиться розглядати варіанти модифікацій аксіоматики дельта-числення. Інтерпретації дельта-числення вже розглядалися раніше в роботах Л. П. Лісовика (див. [1]). Дана робота присвячена питанням інтерпретації дельта-числення в моделях, елементами яких є множини.

Під N будемо розуміти множину $\{0, 1, 2, \dots\}$. Будемо розглядати рекурсивно перелічні множини. Необхідно дати визначення для операції аплікації. Раніше був запропонований наступний підхід до розв'язку цього питання [2].

Нехай $K, L, L_1, \dots, L_n$ є рекурсивно перелічні множини. Тоді

$$K(L) = M_1, \\ K(L_1, \dots, L_n) = M_2,$$

де $M_1 = \{y \mid \exists x (x \in L \ \& \ c(x, y) \in K)\}$ та

відповідно, $M_2 = \{y \mid \exists x_1, \dots, \exists x_n (\&_{i=1}^n x_i \in L_i \ \& \ c^{n+1}(x_1, \dots, x_n, y) \in K)\}$.

Далі необхідно задати універсальну рекурсивно перелічну множину, тобто таку рекурсивно перелічну множину U , що

E. V. Tykulov

The graphic applicative interpretations and delta-calculus

They are considered delta-calculus interpretations in the models with set elements. Recursive function representations via recursively enumerable set in graphic application terms are described.

Key Words: application, delta-calculus, model, recursive function.

виконується тотожність

$$U(X_0, X) = X_0(X),$$

для довільних множин X_0 та X . Візьмемо рекурсивно перелічну множину $U = \{c^3(x_0, x, y) \mid x_0 = c(x, y)\}$. Неважко побачити, що U – універсальна рекурсивно перелічна множина, тобто універсальна рекурсивно перелічна множина у вказаному вище сенсі.

На множині T_1^2 , де T_1 – множина всіх рекурсивно перелічних множин, задається відповідна бієкція $c^n: T_1^2 \rightarrow T_1$. Для цього покладається $c^n(L_1, L_2) = M$ так, що для довільного натурального числа i виконуються еквівалентності

$$i \in L_1 \leftrightarrow 2i \in M, \\ i \in L_2 \leftrightarrow 2i + 1 \in M.$$

Якщо характеристичні функції для рекурсивно перелічних множин L_1 та L_2 подані відповідно послідовностями $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots$ та $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots$, то характеристична функція для рекурсивно перелічної множини M подана відповідно послідовністю $\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \dots$.

Виникає питання: які терми та чи всі терми можуть бути подані рекурсивно перелічними множинами при такому розумінні аплікації як графікової аплікації над множинами, або лише над рекурсивно перелічними множинами. Неважко бачити, що не існує рекурсивно перелічної множини V , що задовольняє

тотожності $\nabla(X \neq Y, Z) = V(X, Y, Z)$. Крім того, не існує множини натуральних чисел V , що задовольняє цій тотожності. В [2] як вихід з цих труднощів було запропоновано в правилах 2.1 та 2.2 вважати, що U та V є рекурсивні множини, причому рекурсивні множини пропонувалося розуміти як рекурсивно перелічні множини, доповнення яких також є рекурсивно перелічними множинами.

Далі наводиться інше означення для аплікації.

$$K(L) = M \Leftrightarrow M = \{y \mid \exists k \in N^*, x_i \in L, 1 \leq i \leq k, (c^{k+2}(k, x_1, \dots, x_k, y) \in K)\}$$

$$K(L_1, \dots, L_s) = M \Leftrightarrow M = \{y \mid \exists k_i \in N^*, 1 \leq i \leq s, x_{ij} \in L_i, 1 \leq j \leq k_i, (c^{k_1 + \dots + k_s + 1}(k_1, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, k_2, x_{21}, \dots, x_{2k_2}, \dots, k_s, x_{s1}, \dots, x_{sk_s}, y) \in K)\}.$$

Звідси приходимо до наступного визначення для універсальної множини U , що задовольняє тотожності $K(L) = U(K, L)$:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

$$U_k = \{c^{k+2}(1, c^{k+2}(k, x_1, \dots, x_k, y), k, x_1, \dots, x_k, y)\}$$

Необхідно також побудувати універсальну рекурсивно перелічну множину U_{s+1} так, щоб виконувалась тотожність $U_{s+1}(K, L_1, \dots, L_s) = K(L_1, \dots, L_s)$.

Побудуємо цю множину U_{s+1} аналогічно тому, як вище було побудовано множину U . Тоді маємо

$$U_{s+1} = \bigcup_{k_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{k_s=1}^{\infty} U_{k_1, \dots, k_s},$$

$$\text{де } U_{k_1, \dots, k_s} = \{c^{k_1 + \dots + k_s + 1}(1, c^{k_1 + \dots + k_s + 1}(k_1, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, k_2, x_{21}, \dots, x_{2k_2}, \dots, k_s, x_{s1}, \dots, x_{sk_s}, y), k_1, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, k_2, x_{21}, \dots, x_{2k_2}, \dots, k_s, x_{s1}, \dots, x_{sk_s}, y)\}.$$

Слід зазначити, що в цьому випадку, строго кажучи, мова йде не про інтерпретації дельта-числення, а лише про інтерпретації відповідної модифікації дельта-числення.

Крім того, на основі введеної вище операції аплікації можуть бути задані процеси обчислень. Для цього на класі множин що розглядаються

введемо бінарне відношення безпосередньої виводимості $|-$, таким чином, що $L |- M$, якщо $M = L_1(L_2)$, де $L_1 = l(L)$, $L_2 = r(L)$ – проєкції рекурсивно перелічної множини L на ліву та праву координати.

Тобто $L_1 = \{x \mid \exists y (c(x, y) \in L)\}$, $L_2 = \{y \mid \exists x (c(x, y) \in L)\}$. Нехай $=$ – рефлексивно-транзитивне замикання відношення $|-$. Це бінарне відношення називається відношенням вивідності.

Далі, вважаємо, що $P(X) \models Y$, якщо для деякого найменшого натурального числа m маємо $P(X) = X_1 |- X_2 |- \dots |- X_m$, де $l(X_m) = \{0\}$, $r(X_m) = Y$. Якщо в послідовності $X_1 |- X_2 |- \dots$ немає X_m такого, що $l(X_m) = \{0\}$, то маємо нескінченний процес обчислення та результат не визначено. Вважасмо, що процес обчислення припиняється, якщо маємо $X_i = \emptyset$ для деякого числа i . Таким чином, рекурсивно перелічна множина P визначає частковий оператор на множині всіх рекурсивно перелічних множин.

Нехай $M[x_0]$ є позначення одноеlementної множини $\{x_0\}$ для довільного натурального числа $x_0 \in N$, тобто

$$M[x_0] \equiv \{x_0\}.$$

Далі пропонується наступне просте подання довільної рекурсивної функції $f(x)$ за допомогою рекурсивно перелічної множини L так, що виконуються тотожності

$$L(M[x]) = M[f(x)].$$

Для цього можна взяти

$$L = \{c(x, f(x)) \mid x \in N\}.$$

При іншому підході до поставленого запитання можна взяти L так, що буде виконуватись тотожність

$$L(M[x]) = \{c(0, f(x)) \mid x \in N\}.$$

З цією метою можна вибрати рекурсивно перелічну множину L у вигляді

$$L = \{c(x, c(0, f(x))) \mid x \in N\}.$$

Але, вказані вище два способи подання частково рекурсивної функції $f(x)$ через рекурсивно

перелічну множину L в термінах графікової аплікації побудовані так, що інформація про функцію $f(x)$ прямо міститься в рекурсивно перелічній множині L . Далі пропонується більш вишуканий розв'язок того ж питання, що спирається на поняття 3-лічильникової машини.

Лема 1. Для довільної частково рекурсивної функції $f(x)$ існує 3-лічильникова машина $A = (K, 3, H, q_0, q^*)$, так, що для довільного $x \in N$ вірно відношення $(q_0, x, 0, 0) \vdash (q^*, f(x), 0, 0)$, якщо значення $f(x)$ визначене, а в іншому випадку, почавши з конфігурації $(q_0, x, 0, 0)$, машина A працює нескінченно довго (див. [3]).

Симетрично до канторівських нумераційних функцій $c^n(x_1, \dots, x_n)$, $n = 2, 3, \dots$ введемо функції $\bar{c}^n(x_1, \dots, x_n)$, $n = 2, 3, \dots$, а також функції $\bar{c}_m(z)$, $1 \leq i \leq n$, так, що $\bar{c}^2(x, y) = \bar{c}(x, y) = c(x, y)$, $\bar{c}^n(x_1, \dots, x_n) = \bar{c}(x_1, \bar{c}^{n-1}(x_2, \dots, x_n))$, $n = 3, 4, \dots$, $\bar{c}^n(\bar{c}_{n1}(z), \dots, \bar{c}_{nn}(z)) = z$. Вважаємо при цьому, що $\bar{c}_{11}(z) = z$, $\bar{c}^1(z) = z$.

Теорема 1. Для довільної частково рекурсивної функції $f(x)$ існує рекурсивно перелічна множина L така, що виконується тотожність $L(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Доведення. Рекурсивно перелічна множина L визначається за системою команд 3-лічильникової машини $A = (K, 3, H, q_0, q^*)$, що обчислює частково рекурсивну функцію $f(x)$ згідно з лемою 1. Будемо вважати, що для машини $A = (K, n, H, q_0, q^*)$ виконані наступні умови: $K = \{q_i \mid 0 \leq i \leq m\}$, $q^* = q_m$, $m > 0$, заключна конфігурація має вигляд $(q^*, s_1, 0, 0)$. В загальному випадку конфігурація машини A має вигляд $\pi = (q_i, s_1, s_2, s_3) \in K \times N^3$. Кодом цієї конфігурації π будемо вважати число $\text{cod}(\pi) = \bar{c}^4(\bar{i}, s_1, s_2, s_3)$, де $\bar{i} = m - i$, якщо π не заключна конфігурація. У випадку, коли $\pi = (q^*, s_1, 0, 0)$ – заключна конфігурація, вважаємо, що $\text{cod}(\pi) = c(0, s_1)$.

Рекурсивно перелічна множина L будується нижче. Ми отримаємо формальний опис шуканої

множини L , діючи методом послідовних наближень, тобто шляхом її послідовного розширення.

Нехай F – рекурсивна функція (операція перетворення кодів конфігурацій) така, що $F(\text{cod}(\pi)) = \text{cod}(\nu)$, якщо $\pi \vdash \nu$. Неважко показати, що можна вибрати відповідну примітивно рекурсивну функцію та навіть елементарну за Кальмаром функцію F .

Розглянемо спочатку випадок, коли графік функції $f(x)$ складається з одного елемента

$$\Gamma_f = \{(x_0, f(x_0))\}.$$

Нехай $\pi_0 = (q_0, x_0, 0, 0)$ та $M_0 = \{\pi_i \mid 0 \leq i \leq k\}$, де $\pi_0 \vdash \pi_1 \vdash \dots \vdash \pi_k$ – послідовність вивідних конфігурацій, причому $\pi_k = (q^*, f(x_0), 0, 0)$ – заключна конфігурація. Нехай $M'_0 = \{\text{cod}(\pi_i) \mid 0 \leq i \leq k\}$. Неважко побачити, що для цього особливого випадку шуканою буде така рекурсивно перелічна множина L_0 , що виконується умова

$$L_0(\{x_0\}) = L_1.$$

де $L_1 = c(U_0, \{\bar{c}^4(m, x, 0, 0)\})$, причому U_0 – мінімальний розв'язок рівняння $U_0 = \bigcup_{\tau \in M_0} c(\tau, W)$, де

$$W = \begin{cases} c(U_0, F(\tau)) & \text{при } l(\tau) \neq 0, \\ c(\{0\}, l(r(\tau))) & \text{при } l(\tau) = 0. \end{cases}$$

Визначена таким чином множина U_0 буде рекурсивно перелічною. Відповідно, поклавши $L_0 = \{c(x_0, l) \mid l \in L_1\}$, отримаємо шукану рекурсивно перелічну множину L_0 .

В загальному випадку можна діяти аналогічно. Для цього слід покласти $M = \{\text{cod}(\pi) \mid \pi \in (K \setminus \{q^*\} \times N^3)\}$ та замість множини L_0 взяти множину $L = \{c(x, l) \mid l \in L'_1\}$, причому $L'_1 = c(U, \{\bar{c}^4(m, x, 0, 0)\})$ и U – мінімальний розв'язок рівняння $U = \bigcup_{\tau \in M} c(\tau, W)$, де

$$W = \begin{cases} c(U, F(\tau)) & \text{при } l(\tau) \neq 0, \\ c(\{0\}, l(r(\tau))) & \text{при } l(\tau) = 0. \end{cases}$$

Як і вище в окремому випадку множини U та L будуть рекурсивно перелічними.

Розглянемо наступний спосіб інтерпретації аплікації. Нехай Λ – клас всіх відкритих множин в канторівському просторі $C_\alpha = \{0,1\}^\omega$. На цьому просторі визначені функції $c': C_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha$, $r': C_\alpha \rightarrow C_\alpha$, $r': C_\alpha \rightarrow C_\alpha$, аналогічні канторівським нумераційним та координатним функціям. В даному випадку відкрита множина є злічене об'єднання λ -конусів, що мають вигляд V_α , де слово α належить множині $\{0,1\}^*$ та $V_\alpha = \{\beta \mid \beta = \alpha\gamma, \gamma \in \{0,1\}^\omega\}$. Для довільних двох λ -конусів V_α та V_β має місце одне з співвідношень $V_\alpha \subseteq V_\beta$, $V_\beta \subseteq V_\alpha$, $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Тому довільна відкрита множина в C_α є зліченне або скінченне об'єднання λ -конусів, що попарно не перетинаються.

Нехай K та L – λ -конуси, де $K = V_\alpha$, $L = V_\beta$. Якщо $|\alpha| = 2|\beta|$, де $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n}$, $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$ ($\alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq j \leq n$), то $K(L) = M_1$, де

$$M_1 = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \alpha, \alpha_1 \dots \alpha_{2n-1} \neq \beta \\ \xi & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

тут $\xi = \{y \mid y \in \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n} \{0,1\}^\omega\}$.

Якщо $|\alpha| > 2|\beta|$, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n+2}$, то $M_1 = \emptyset$ при $\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1} \neq \beta$, в іншому випадку $M_1 = \{y \mid y \in \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n-2} \{0,1\}^\omega\}$.

В інших випадках множину K можна подати у вигляді скінченного об'єднання λ -конусів виду V_α таких, що для кожного з цих слів α буде виконана умова $|\alpha| = 2|\beta|$ або $|\alpha| > 2|\beta|$.

Якщо $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$, тоді покладемо

$$K(L) = \bigcup_{i=1}^m K_i(L).$$

Таким чином, множина $K(L)$ визначена в кожному з випадків. Аналогічно визначається множина $K(L_1, \dots, L_n)$.

Нехай K та L – λ -конуси, $1 \leq i \leq n$, де $K = V_\alpha$, $L_i = V_{\beta_i}$, $1 \leq i \leq n$. Розглянемо лише випадок $|\alpha| = (n+1)\beta_1$, $|\beta_1| = m$, $|\beta_i| = |\beta_1|$,

$2 \leq i \leq n$. Тоді маємо $K(L_1, \dots, L_n) = M_2$, $M_2 = \emptyset$, якщо $V_\alpha \cap C^{n+1}(L_1, \dots, L_n, \{0,1\}^\omega) = \emptyset$, в іншому випадку $M_2 = \{y \mid y \in \alpha_{n+1} \alpha_{2(n+1)} \dots \alpha_{m(n+1)} y, \text{ де } y \in \{0,1\}^\omega\}$.

Всі інші випадки можуть бути уточнені наступним чином. Якщо $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$, $L_i = \bigcup_{j=1}^m L_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, то покладемо

$$K(L_1, \dots, L_n) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m_n} K_i(L_{i,j_1}, \dots, L_{i,j_n}).$$

Аналогічно у випадку, коли $K, L_1, \dots, L_n$ – відкриті множини, отримасмо загальне означення для множини $K(L_1, \dots, L_n)$, коли $K, L_1, \dots, L_n$ – відкриті множини:

$$K(L_1, \dots, L_n) = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j_1=1}^\infty \dots \bigcup_{j_n=1}^\infty K_i(L_{i,j_1}, \dots, L_{i,j_n}),$$

якщо $K = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, $L_i = \bigcup_{j=1}^\infty L_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, та K, L_{ij} – λ -конуси для всіх $i \geq 1$, $j \geq 1$, $1 \leq i \leq n$.

В роботі розглядаються питання інтерпретації дельта-числення в моделях, елементами яких є множини. За основу береться клас рекурсивно перелічних множин. В залежності від іменування таких множин доводиться розглядати відповідні модифікації дельта-числення. Кожна рекурсивно перелічна множина в термінах введеної аплікації задає частковий оператор на множині всіх рекурсивно перелічних множин. Це дає можливість подання рекурсивних функцій через рекурсивно перелічні множини. Розглядаються кілька варіантів такого подання, в одному з яких використовуються 3-лічильникові машини.

Список використаних джерел

1. Лисовик Л. П. Теория трансдюсеров. Том 3. Книга 6. Функции и аппликативные системы. – К.: Феникс, 2007. – 288 с.
2. Лисовик Л. П. Трансдюсеры. II. – К.: Феникс, 2007. – 256 с.
3. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 368 с.

Надійшла до редакції 20.09.2008

УДК 519.9

Турчин О.Я.

Використання траєкторних метаевристик для побудови методу табу-пошуку

Розглядається метаевристичний метод комбінаторної оптимізації, що базується на використанні алгоритмів табу-пошуку та прискореного імовірнісного моделювання. Наведено загальну обчислювальну схему методу, названого GS-tabu. Подано результати обчислювального експерименту.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, метаевристика, табу-пошук.

O.Y. Turchyn*

Usage of trajectory metaheuristic in tabu search method scheme

Combinatorial optimization problem is stated. Metaheuristic, built on tabu search and accelerated probabilistic modeling algorithms, is given. General scheme of presented algorithm called GS-tabu is given. Experimental results are presented.

Key Words: combinatorial optimization, metaheuristic, tabu search.

*E-mail: turchin@ua.fm

Статтю представив д. т. н. Акіменко В.В.

1. Формальна постановка задачі комбінаторної оптимізації

Більшість задач комбінаторної оптимізації, які розв'язуються дослідниками, складні в теоретичному плані та мають значну практичну цінність, а різноманітність предметних областей, у яких виникли ці задачі, свідчить про надзвичайну важливість побудови відповідних математичних моделей та розробки ефективних методів розв'язання [1-2].

Більш того, специфіка переважної кількості прикладних задач оптимізації полягає у наявності багатьох екстремумів цільової функції та трудомісткості розв'язання задач у загальному випадку.

Перейдемо до означення задачі комбінаторної оптимізації, запропонованого Пападімітріу і Стайгліцем [2]. Нехай X – деякий скінченний (або злічений нескінченний) простір, R – множина припустимих розв'язків задачі. Часто X розглядається як метричний простір, тобто вважається заданою певна метрика $d(x, y), x, y \in R$. На множині X визначена цільова функція $f(x)$ та задано певну метрику. Задача полягає у тому, щоб знайти

$$\bar{x} = \arg \min \{f(x) : x \in R \subseteq X\}. \quad (1)$$

Таке означення однозначно відносить до ЗКО всі оптимізаційні проблеми на скінченних множинах, але у випадку нескінченних просторів задач не дозволяє чітко класифікувати задачі оптимізації відповідно до структури елементів простору розв'язків.

К.Берж [3] запропонував формалізувати поняття комбінаторної конфігурації наступним чином: нехай маємо m, n – натуральні, а також дві множини $U = \{1, \dots, m\}$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, причому на V задано деякий строгий порядок $v_1 < \dots < v_n$ (тобто V – ланцюг).

Означення 1. Комбінаторною конфігурацією називається відображення $\varphi: U \rightarrow V$, яке задовольняє деякому комплексу обмежень Λ .

З означення випливає, що при фіксованих m та n число комбінаторних конфігурацій є скінченним. Вибір обмежень у Λ дозволяє описувати різні комбінаторні конфігурації.

У роботі [4] пропонується наступне узагальнення схеми Бержа. Нехай задані $Y = \{1, \dots, m\}$, Z – дискретний, наприклад, скінченний простір (назвемо його твірним), φ – гомоморфізм, $\varphi: Y \rightarrow Z$, що задовольняє деякій системі обмежень Ω . Зазначимо, що згідно з означенням під дискретним простором розуміється множина, що складається з ізольованих точок.

Означення 2. Під комбінаторним об'єктом κ будемо розуміти трійку $\kappa = (\varphi, \bar{X}, \Omega)$, де $\bar{X}$ – базовий простір.

Означення 3. Назвемо комбінаторними об'єктами 1-го порядку такі комбінаторні об'єкти, у яких базовий простір співпадає з твірним:

$$\kappa = (\varphi, X_{(1)}, \Omega),$$

де $X_{(1)} \equiv Z$.

Легко пересвідчитись, що якщо Z – це скінченний ланцюг, то такі комбінаторні об'єкти

співпадають з комбінаторними конфігураціями у розумінні Бержа [3].

Означення 4. Комбінаторними об'єктами k -го порядку ($k > 1$) назвемо комбінаторні об'єкти

$$\kappa = (\varphi, X_{(k)}, \Omega),$$

де $X_{(k)} \subseteq X_{(k-1)} \cup X^k$.

Повертаючись до оптимізаційної задачі (1), дамо наступне

Означення 5. Задача (1) називається задачею комбінаторної оптимізації, якщо простір її рішень – це простір, елементами якого є комбінаторні об'єкти.

Серед найбільш ефективних підходів до розв'язання задач комбінаторної оптимізації слід виділити використання метаевристичних алгоритмів, або метаевристик. Існує декілька підходів до класифікації метаевристик, серед яких найбільш вдалим є розподіл на метаевристики 1-го та 2-го роду. Важливість використання такого підходу зумовлена тим, що у багатьох вітчизняних літературних джерелах дослідники використовувати означення за допомогою простих евристик, у той самий час коли значна частина закордонних наукових шкіл використовує термін «метаевристика». Отже, існує певний конфлікт непорозуміння. Але, головною ідеєю обох підходів є розподіл технік пошуку на більш прості та більш складні. Саме тому і виглядає вдалим введення до розгляду терміну «метаевристика 1-го роду». По-перше, такий підхід пропонує чітке розмежування як існуючих методів – так і тих, що будуть запропоновані у майбутньому; по-друге, ця класифікація буде інтуїтивно зрозумілою великій кількості наукових дослідників різних шкіл.

У свою чергу, метаевристики 1-го роду діляться на траєкторні (імітаційний відпал, табу-пошук, алгоритми прискореного імовірнісного моделювання) та популяційні (генетичні алгоритми, метод розсіювання, оптимізація мурашиними колоніями).

До метаевристик 2-го роду відносяться більш складні методи, що використовують переваги декількох різних метаевристик 1-го роду (напр. гібридні алгоритми, генетичний відпал тощо).

2. Метаевристичний алгоритм GS-tabu

У роботі [5] запропоновано підхід до побудови метаевристичного методу на основі алгоритмів табу-пошуку та прискореного імовірнісного моделювання. У якості базового було обрано *GS-method* [6], який реалізує стратегію «золотого перетину». Для

побудованого алгоритму запропоновано назву *GS-tabu*.

Алгоритми прискореного імовірнісного моделювання були розроблені для подолання таких вад методів локального пошуку, як передчасна збіжність алгоритму та велика залежність остаточного результату від вибору початкового наближення розв'язку. А серед алгоритмів, які належать до класу прискореного імовірнісного моделювання, слід виділити G-алгоритми, які успішно застосовувались для розв'язання багатьох складних практичних задач.

Головна ідея алгоритму табу-пошуку полягає у постійній локальній модифікації поточного розв'язку задачі з запам'ятовуванням здійснених змін – щоб запобігти повторній побудові неефективних розв'язків та за циклюванню процедури пошуку розв'язку [7]. Здійснені модифікації запам'ятовуються у спеціальних банках пам'яті, які мають назву «табу-списків» (*tabu list*). Загальна схема запропонованого метаевристичного методу *GS-tabu* приведена у роботі [8].

Оскільки *GS-tabu* побудовано на базі алгоритму прискореного імовірнісного моделювання, потрібно зауважити – які підходи були використані при реалізації такого підходу. По-перше, у схемі *GS-tabu* використано систему околів поточного розв'язку, відстань елементів яких за транспозиційною метрикою до центру околу дорівнює 1. *GS-tabu* також використовує імовірнісні переходи у околі поточного розв'язку, причому правило «золотого перетину» задає динаміку здійснення цих переходів (більша імовірність на початку роботи алгоритму, менша – ближче до кінця роботи) (див. [6]).

Під час практичної апробації *GS-tabu* встановлено, що найкращі результати були отримані при розмірності банку пам'яті близько $n/3$, де n -розмірність задачі.

У якості правила припинення роботи алгоритму може бути використано: закінчення перебору всіх точок у околі без реалізованого переходу у нову точку; обмеження за часом роботи алгоритму; досягнення бажаної точності розв'язку – при відомій нижній межі цільової функції. Ще одне загально відоме правило – порівняння різниці максимального та мінімального значень цільової функції з максимальним значенням зміни цієї функції при даному значенні μ : якщо це співвідношення прямує до одиниці, то обчислення завершуються.

3. Дослідження практичної ефективності GS-tabu.

Прикладами ЗКО, які досліджуються давно та визнані як класичні задачі комбінаторної оптимізації, можливо назвати:

- задача комівояжера
- квадратична задача про призначення

Задача комівояжера (ЗК, англ. *Traveling Salesman Problem, TSP*), є однією з класичних задач комбінаторної оптимізації. ЗК визнана як ефективний "полігон" для оцінювання ефективності побудованих алгоритмів розв'язання ЗКО. За весь час, який досліджується ця задача, було отриману значну кількість важливих результатів.

Найпростіша постановка ЗК буде наступною: комівояжер має відвідати задану кількість міст, потрібно побудувати циклічний маршрут найменшої довжини, при якому комівояжер відвідає кожне з міст лише одного разу.

Квадратична задача про призначення (КЗП, англ. *Quadratic Assignment Problem, QAP*) вперше була запропонована у якості математичної моделі

для оптимального розміщення множини економічних об'єктів. Розглядалась проблема розташування множини об'єктів на множині можливих розміщень, у якості цільової функції задачі використовувалась функція, що залежить від довжини відстані між розміщеннями та інтенсивністю потоку між розміщеннями, плюс ціна розташування об'єкта у розміщенні.

Для дослідження практичної ефективності GS-tabu порівняно з алгоритмом GS-method були обрані задачі комівояжера з бібліотеки TSPLIB95 [9] та квадратичні задачі про призначення з бібліотеки QAPLIB [10]. Важливо зауважити, що ці бібліотеки складаються з реальних практичних задач.

Результати розв'язання серій реальних та тестових задач алгоритмами GS-method та GS-tabu приведені в Табл.1 (задача комівояжера) и Табл. 2 (квадратична задача про призначення). Для кожної задачі приведено її бібліотечне ім'я [9,10], розмірність (n) и найкращий з відомих розв'язків.

Задача	n	Найкращий відомий розв'язок	Методи			
			GS-method	Час,с	GS-tabu	Час,с
burma14	14	3 323	3 340	1,2	3 323	1,2
ulysses16	16	6 850	6 876	2,1	6 891	2,1
gr17	17	2 085	2 114	1,9	2 092	1,9
ulysses 22	22	7 013	7 116	14,0	7 054	14,0
gr24	24	1 272	1 282	14,5	1 286	14,5
fri26	26	937	959	19,5	943	20,5
bays29	29	2 020	2 052	28,8	2 020	24,8
sui ss42	42	1 273	1 278	42,3	1 286	42,3
dantzig42	42	699	710	50,0	699	50,0
att48	48	10 628	10 930	72,6	10 670	76,6
hk48	48	11 461	11 464	78,4	11 603	78,4
eil51	51	426	431	106,0	430	106,0
brazil58	58	25 395	25 927	123,1	25 460	111,0
st 70	70	675	688	112,3	676	114,3
pr76	76	108 150	110 571	144,1	109 940	147,1
rat 99	99	1 211	1 244	173,0	1 251	153,3
kroA100	100	21 282	22 243	152,1	21 826	160,1
kroB100	100	22 141	22 609	154,0	22 540	159,0
kroC100	100	20 749	22 095	183,0	21 148	175,5
pr124	124	50 030	52 067	241,3	52 124	252,3
pr152	152	73 682	76 533	288,8	76 107	293,8
rat195	195	2 323	2 412	320,8	2 380	323,8

Табл. 1. Результати розв'язання задач комівояжера

Задача	n	Найкращий відомий розв'язок	Методи			
			GS-method	Час,с	GS-tabu	Час,с
chr15a	15	9 896	10 112	1,8	9 956	1,8
chr15b	15	7 990	8 064	3,2	8 011	2,9
bur26d	26	3 821 225	3 929 672	21,2	3 911 457	23,6
bur26e	26	5 386 879	5 478 936	22,8	5 502 452	25,9
bur26f	26	3 782 044	3 802 312	28,3	3 788 565	34,2
esc64a	64	116	121	89,1	118	92,0
lipa70a	70	169 755	175 341	107,4	170 753	112,5
lipa70b	70	4 603 200	4 781 819	111,3	4 711 844	132,8
lipa80a	80	253 195	255 221	129,5	254 198	144,4
lipa80b	80	7 763 962	7 945 390	141,9	7 878 543	150,1
lipa90a	90	360 630	361 717	166,5	363 991	182,1
lipa90b	90	12 490 441	12 832 091	170,4	12 774 910	188,1
sko100a	100	152 002	156 748	179,9	154 340	202,2
sko100b	100	153 890	154 120	212,0	157 463	195,5

Табл. 2. Результати розв'язань квадратичних задач про призначення

На Рис. 1 наведено графік відхилень за точністю отриманих GS-tabu та GS-алгоритмом варіантів розв'язків від найкращих з відомих розв'язків; дані впорядковано за зростанням розмірності задач.

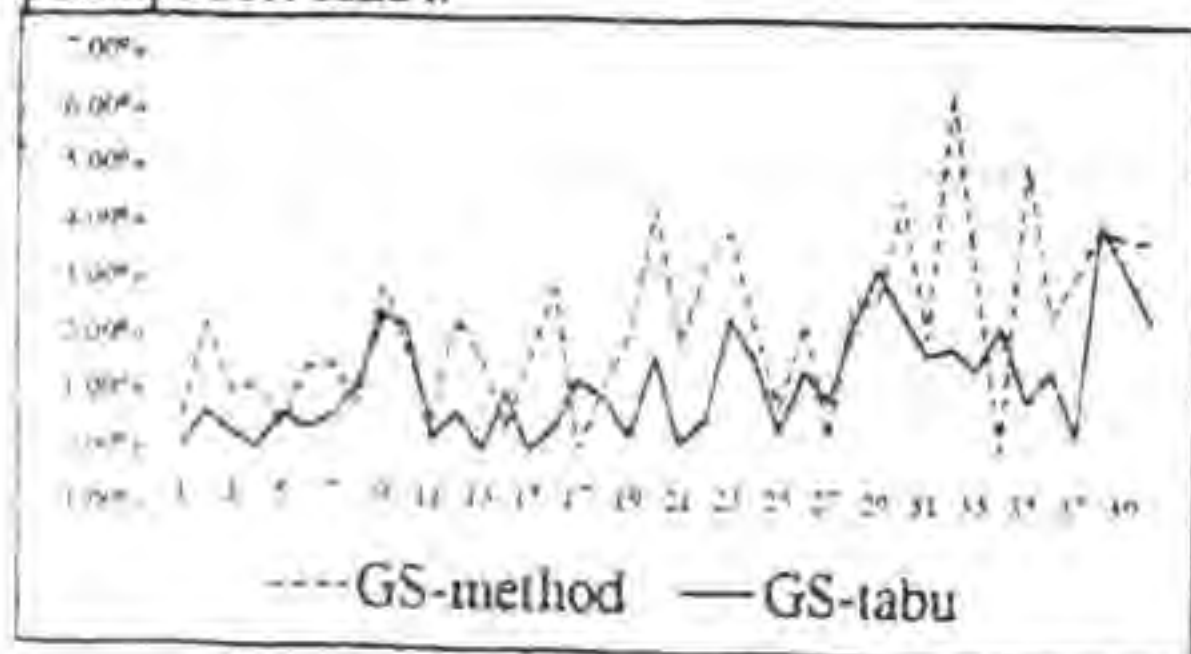


Рис. 1. Відносна точність розв'язків

4. Висновки.

Результати обчислювального експерименту свідчать про те, що застосування запропонованого методу, побудованого на базі алгоритмів GS-method та табу-пошуку, дозволило покращити точність отриманих розв'язків порівнюючи з використанням окремих алгоритмів, що входять в його схему.

Список використаних джерел

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1985. – 384 с.
2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.

3. Berge C. Principes de combinatoire. – Paris: Dunod, 1968. – 146 p.
4. Гуляницький Л.Ф., Сергиенко И.В. Метаэвристический метод деформируемого многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 70–79.
5. Турчин О. Використання алгоритму імовірнісного моделювання у схемі методу табу-пошуку // Пр. Між. симп. «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)». – К.: ІК ім.В.М.Глушкова НАН України, 2007. – Р. 73–77.
6. Hulyanitsky L., Turchin O. "Golden section" rule in probabilistic modeling algorithms // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2001. – №415. – С. 50–53.
7. Glover F. Heuristics for Integer Programming using surrogate constraints // Decision Sciences. – 1977. – N 8. – P.156–166.
8. Л. Гуляницький, А. Турчин Использование алгоритма ускоренного вероятностного моделирования в схеме табу-поиска // Artificial Intelligence and Decision Making - Sofia, 2008, - №7, pp.137–142.
9. <http://softlib.rice.edu/pub/tsplib>
10. <http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~karisch/qaplib>

Надійшла до редколегії 03.12.08

УДК 519.9

Черниш Р.І., асп.

Покоординатна декомпозиція області для еволюційних задач математичної фізики

Розглянуто початково-крайову задачу на одиничному гіперкубі. Для її розщеплення за просторовими напрямками використано модифікований адитивно-усереднений метод. Для кожної підзадачі запропонована своя декомпозиція області, яка дозволяє здійснювати розв'язання у підобластях без ітерацій та обмінних умов.

Проведено чисельний експеримент на прикладі тривимірної задачі конвективної дифузії, що має аналітичний розв'язок. Показана залежність часових витрати від точності та кількості підобластей у декомпозиції.

Ключові слова: декомпозиція області, метод розщеплення, модифікована адитивно-усереднена схема.

R.I. Chernysh, Phd student

Coordinate-wise domain decomposition for evolutionary problems of mathematical physics

An initial boundary value problem on unit hypercube is considered. The modified additively-averaged scheme is used to split the problem with respect to spatial variables. The own decomposition is proposed for each subproblem which allows us to get solution on the subdomain without using iterations and exchange conditions.

Computing experiment has been carried out. The three-dimensional convective diffusion problem which has an analytical solution is considered. It is shown how the time cost depends on accuracy of solution and the amount of decomposition subdomains.

Key words: domain decomposition, splitting method, modified additively-averaged scheme.

E-mail: chernysh@uhmi.org.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Реалізація математичної моделі на ЕОМ є відповідальною ланкою у розв'язанні прикладних задач. Від організації обчислень в значній мірі залежить ефективність та доцільність отримання остаточного результату. Як відомо [1, 2], сучасна обчислювальна техніка ґрунтується на концепіях паралельних та розподілених обчислень. Тому нині саме ця обставина першочергово береться до уваги під час розробки чи модифікації алгоритмів.

Застосування парадигми розподілених структур даних [1, 2] (декомпозиції просторової області) для задач математичної фізики зумовлює появу принципової проблеми. Вона пов'язана із необхідністю постановки крайових умов на границях підобластей, тобто всередині розрахункової області. Найпоширенішими шляхами її вирішення є постановка обмінних умов на границях підобластей [3 – 5] чи постановка крайових умов із явного шару та ітерування [5, 7, 8].

У статті на прикладі модифікованого адитивно-усередненого методу розщеплення пропонується підхід до декомпозиції, що не

потребує постановки крайових умов всередині області.

Покоординатна декомпозиція

Розглянемо еволюційну крайову задачу в просторовій області $\Omega = [0; 1]^p$ із однорідними крайовими умовами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f, \quad x \in \Omega/\Gamma, \quad t \in (0; T], \quad (1)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0; T], \quad (3)$$

де $\Gamma = \partial\Omega$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, $u = u(t, x)$ – невідома функція, $f = f(t, x)$ – вільний член рівняння,

$\Lambda = \sum_{k=1}^p \Lambda_k$ – просторовий оператор подається

через суму простіших операторів, $f = \sum_{k=1}^p f_k$ – права частина теж має адитивне подання.

Обмежимося розглядом коректно поставлених задач (1) – (3). Тобто всі параметри та умови задачі (1) – (3) узгоджені таким чином, що існує єдиний розв'язок, який неперервно залежить від цих параметрів та умов.

Припустимо, що кожна компонента адитивного подання оператора Λ пов'язана лише зі своїм просторовим напрямком. Наприклад, у випадку оператора диференціювання Λ кожна компонента Λ_k містить похідні усіх порядків за напрямком x_k та не містить жодної похідної за будь-яким іншим напрямком.

Введемо сіткові множини, що апроксимують часову та просторову області

$$\omega_\tau = \{t^n = n\tau : \tau = T/N, n = \overline{0, N}\},$$

$$\omega_h = \{(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) : h_k = J_k^{-1}, j_k = \overline{0, J_k}, k = \overline{1, p}\},$$

$$\gamma_h^k = \{(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) : j_k \in \{0, J_k\}\},$$

$$\gamma_h = \bigcup_{k=1}^p \gamma_h^k.$$

Означимо гільбертів простір H_0 як множину векторів $\{y(x) : x \in \omega_h; y(x) = 0, x \in \gamma_h\}$ зі скалярним добутком

$$(y, v) = h \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x),$$

$$\text{де } h = \prod_{k=1}^p h_k.$$

Згідно модифікованого адитивно – усередненого методу розщеплення [6] задача (1) – (3) зводиться до сукупності підзадач за напрямками

$$y_k^{qm} = y_k^{qm-1}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{p} \frac{y_k^{qm+\lambda} - y_k^{qm+\lambda-1}}{\tau} + B_k y_k^{qm+\lambda} - A_k y_k^{qm+\lambda-1} = \varphi_k^{qm+\lambda-1}, \quad \lambda = \overline{1, m}, \quad (5)$$

$$y_k^{qm+m} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k^{qm+m}, \quad (6)$$

де $A_k \approx B_k - A_k + O(\tau)$, $B_k \geq 0$, $k = \overline{1, p}$.

Пропонується декомпозиція (розбиття) просторової області ω_h , що є залежною від напрямку підзадачі (5). Покоординатна декомпозиція за k -м напрямком

$$\omega^{(k)} = \{\omega_i^{(k)}, \omega_j^{(k)} \mid \omega_j^{(k)}, j \neq i, i = \overline{1, s_k}\}$$

визначається так:

1) $\forall x \in \omega_i^{(k)}$ має місце $\{(x_1, \dots, r h_k, \dots, x_p) : r = \overline{0, J_k}\} \subseteq \omega^{(k)}$;

2) можливе також існування інших напрямків, що мають властивість 1).

Приклад покоординатної декомпозиції для $p=3$ наведено на рис.1. Тут подано випадок, коли одночасно мають місце умови 1) та 2).

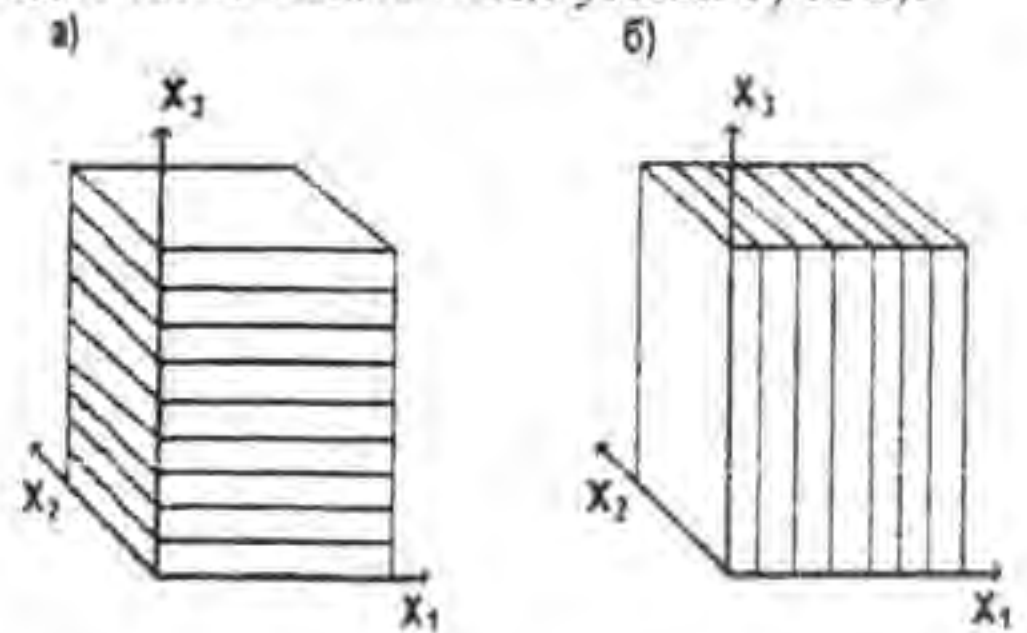


Рис.1. Покоординатна декомпозиція області:
а) вздовж x_1 та x_2 ; б) вздовж x_2 та x_3 .

Очевидно, що у разі застосування декомпозиції $\omega^{(k)}$ для задачі (4) – (5) k -го напрямку стає можливою її паралельна реалізація для кожної із підобластей $\omega_i^{(k)}$, $i = \overline{1, s_k}$. Дійсно, завдяки цілісності підобластей вздовж k -го напрямку кожна підзадача є повноцінною задачею та використовує відповідну частину крайових умов γ_h^k . За такого підходу відсутня потреба в узгодженні розв'язків підзадач шляхом обмінних крайових умов, ітерування тощо.

Проведемо теоретичне обґрунтування такого підходу до розщеплення задачі за підобластями. Для цього спершу введемо низку означень та співвідношень. Розглянемо характеристичну сіткову функцію $\chi_i^{(k)}(x)$, $i = \overline{1, s_k}$

$$\chi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_i^{(k)} \\ 0, & x \in \omega_j^{(k)} \end{cases}$$

Із вище наведеного випливає, що $\forall x \in \omega_h$ має місце

$$\sum_{i=1}^{s_k} \chi_i^{(k)}(x) = 1, \quad k = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Визначимо оператори $A_{k,i}$, $B_{k,i}$ та вектор $\varphi_{k,i}^n$ таким чином ($x \in \omega_h$)

$$A_{k,i} = \chi_i^{(k)}(x) A_k, \quad B_{k,i} = \chi_i^{(k)}(x) B_k,$$

$$\varphi_{k,i}^n = \chi_i^{(k)}(x) \varphi_k^n.$$

Враховавши (7) із попереднього отримуємо

$$A_k = \sum_{i=1}^{s_k} A_{k,i}, \quad B_k = \sum_{i=1}^{s_k} B_{k,i},$$

$$\varphi_k^n = \sum_{i=1}^{s_k} \varphi_{k,i}^n.$$

Суперпозиція розбиттів $\omega^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$ в області ω_h також утворює розбиття. Позначимо через d_j , $j = \overline{1, S}$, $S = \prod_{k=1}^p s_k$ елементи цього розбиття та введемо норму $\|\cdot\|_d$ та півнорму $\|\cdot\|_{k,j}$ в просторі H_0

$$\|w\|_d = \sum_{i=1}^S \sqrt{h \sum_{x \in d_i} w^2(x)},$$

$$\|w\|_{k,j} = \sum_{d_i \subset \omega_j^{(k)}} \sqrt{h \sum_{x \in d_i} w^2(x)},$$

для яких мають місце співвідношення

$$\|w\|_d = \sum_{i=1}^{s_k} \|w\|_{k,i}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (8)$$

$$\|\chi_i^{(k)}(x)w\|_d = \|w\|_{k,i}, \quad i = \overline{1, s_k}. \quad (9)$$

Розглянемо регіональну схему розщеплення для задач (4) – (5) ($i = \overline{1, s_k}$, $k = \overline{1, p}$)

$$y_{k,i}^{qm} = \chi_i^{(k)}(x) y_k^{qm}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{p} \frac{y_{k,i}^{qm+\lambda} - y_{k,i}^{qm+\lambda-1}}{\tau} + B_{k,i} y_{k,i}^{qm+\lambda} - A_{k,i} y_{k,i}^{qm+\lambda-1} = \varphi_{k,i}^{qm+\lambda-1}, \quad \lambda = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$y_k^{qm+m} = \sum_{i=1}^{s_k} \chi_i^{(k)}(x) y_{k,i}^{qm+m}, \quad (12)$$

та регіоналізацію усереднення (6)

$$y^{qm+m} = \sum_{i=1}^{s_j} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \chi_i^{(k)}(x) y_k^{qm+m} \right), \quad (13)$$

де $\omega^{(j)}$ – довільна із декомпозицій області ω_h .

Сформулюємо теорему про стійкість регіональної схеми (8) – (11).

Теорема. Для розв'язку задачі (1) – (3), що отриманий за схемою (8) – (11), має місце оцінка

$$\|y^N\|_d \leq \exp(cpT) \left(\|u^0\|_d + T \sum_{k=1}^p \|\varphi_k\|_d^* \right), \quad (14)$$

де $\|\varphi_k\|_d^* = \max_{k=1, \dots, N-1} \|\varphi_k^*\|_d$, $c > 0$ – деяка стала.

Доведення. Для фіксованого значення i із (10) та (11) при $x \in \omega_i^{(k)}$ отримуємо, що $y_{k,i}^{qm+m} = 0$. При

$x \in \omega_i^{(k)}$ із рівняння (11) маємо оцінку ($B_k \geq 0$)

$$\|y_{k,i}^{qm+m}\|_{k,i} \leq (1 + c_k p \tau)^m \|y_{k,i}^{qm}\|_{k,i} +$$

$$+ p \tau \sum_{r=1}^m (1 + c_k p \tau)^r \|\varphi_{k,i}^{qm+r-1}\|_{k,i},$$

де $c_k = \|A_k\|_d$.

Перейдемо до норми в (12) і врахуємо попередню оцінку разом із співвідношеннями (4), (8), (9)

$$\|y_k^{qm+m}\|_d \leq (1 + c_k p \tau)^m \left(\|y_k^{qm}\|_d + p \tau \sum_{r=1}^m \|\varphi_k^{qm+r}\|_d \right).$$

Перейдемо до норми в (13) із врахуванням останньої нерівності та співвідношень (8), (9), отримуємо

$$\|y^{qm+m}\|_d \leq (1 + cp \tau)^m \left(\|y^{qm}\|_d + \tau \sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^m \|\varphi_k^{qm+r}\|_d \right),$$

де $c = \max_{k=1, \dots, p} c_k$.

Рекурентне застосування цієї оцінки безпосередньо дає оцінку (14).

З а у в а ж е н н я 1. Норми $\|w\|_d$ та $\|w\| = \sqrt{(w, w)}$ є еквівалентними. Має місце нерівність

$$\|w\| \leq \|w\|_d \leq \sqrt{S} \|w\|.$$

З а у в а ж е н н я 2. Узагальненням покоординатної декомпозиції є узгодження розбиттів області визначення задачі із адитивними компонентами оператора Λ . Такий підхід може забезпечити розщеплення задачі на низку підзадач, що є абсолютно незалежними при переході на наступний часовий шар.

Чисельний експеримент

Розглянемо задачу конвективної дифузії в області $\Omega = [0; 1]^3$, $t \in [0; 1]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + f,$$

$$u(0, x) = u_A(0, x),$$

$$u(t, x) = u_A(t, x), \quad x \in \Gamma,$$

де $A, v^{(k)}, \mu^{(k)} = \text{const} > 0$, $u_A(t, x)$ – аналітичний розв'язок задачі

$$u_A(t, x) = A \exp \left(- \sum_{k=1}^3 \left(t \mu^{(k)} + (x_k - v^{(k)} t)^2 \right) \right),$$

$$f(t, x) = u_A(t, x) \sum_{k=1}^3 \mu^{(k)} \left(1 - 4(x_k - v^{(k)} t)^2 \right).$$

Компоненти адитивного подання для Λ та f обрано такими:

$$\Lambda_k = \sum_{k=1}^3 v^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

$$f_k(t, x) = \mu^{(k)} u_k(t, x) \left(1 - 4(x_k - v^{(k)} t)^2 \right).$$

Параметри задачі та чисельної схеми були наступними: $A=1$, $v^{(k)}=0.5$, $\mu^{(k)}=0.03$, $J_k=32$, $m=4$, $s_1=s_2=s_3=s$. Часовий крок τ варіювався в межах від 10^{-1} до 10^{-6} .

Обчислення проведено на супер ЕОМ, що складалась із 24 процесорів Dual-Core Intel 1.6 ГГц із архітектурою IA64 та системою доступу до пам'яті NUMalink 4. Паралельна реалізація задачі здійснена за допомогою бібліотеки функцій MPI.

З метою зменшення впливу особливостей реалізації програмних засобів розпаралелення на оцінку прискорення обчислень, до уваги бралися лише обчислювальні витрати часу (тобто без врахування обмінів даними, переформатувань масивів тощо). Структурно розпаралелення задачі здійснено як за підобластями (згідно декомпозиції на рис.1), так і за всіма просторовими напрямками.

Відстань ε (точність) між чисельним та аналітичним розв'язками знайдена в нормі $\|\cdot\|$. Чисельні експерименти проводилися для кількостей підобластей $s \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. Їхні результати були інтерпольовані та подані у вигляді графіка (рис. 2).

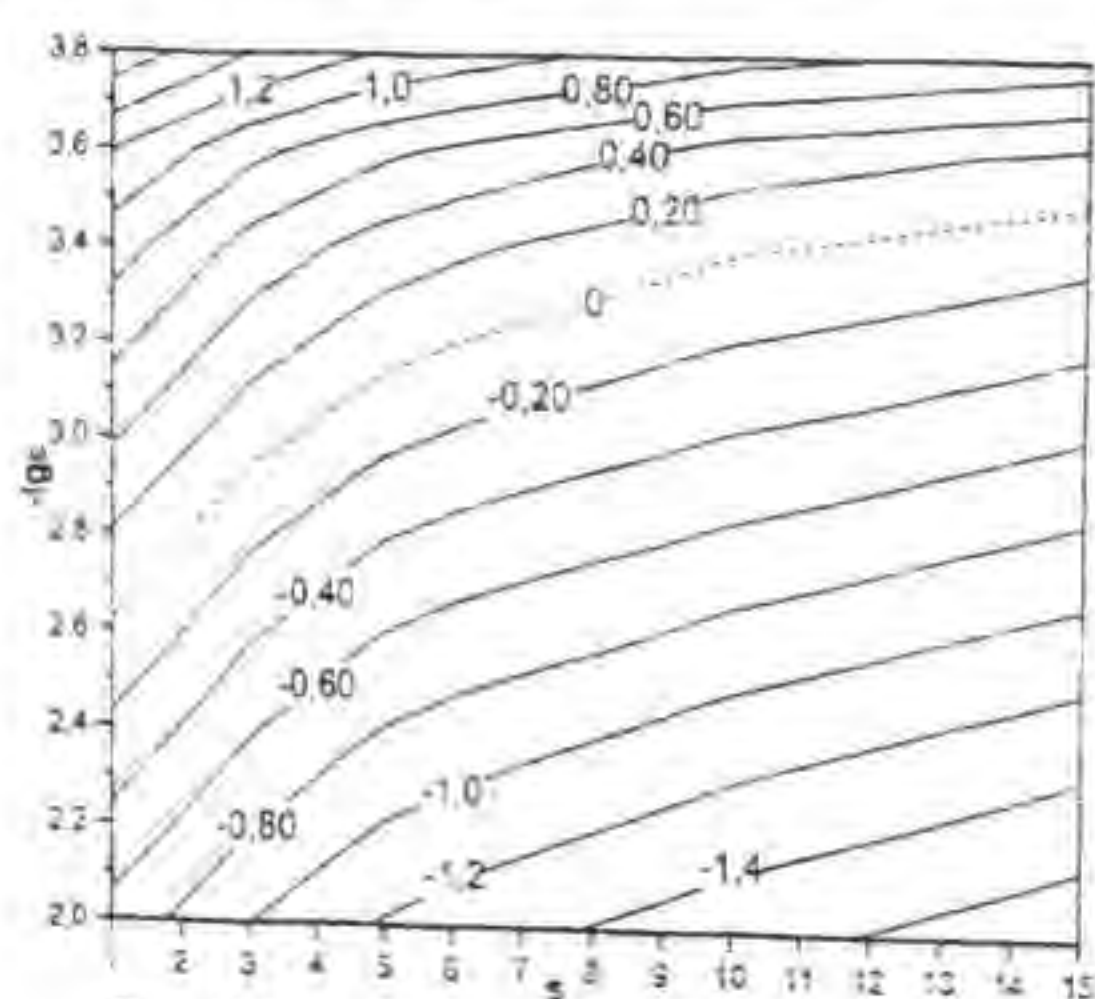


Рис.2. Залежність обчислювальних витрат часу $\lg T$ від кількості підобластей s та точності розв'язку $-\lg \varepsilon$.

Як видно, досить чітко простежується зменшення часу обчислень при збільшенні кількості підобластей у декомпозиціях (за фіксованої точності). Неоднорідність цієї тенденції пояснюється двома причинами. По-

перше, оскільки залежність часових витрат від кількості підобластей має вигляд $T(s) \approx s^{-1}$, то це зумовлює існування збільшених градієнтів ізоліній (за змінною s) в лівій частині графіка. По-друге, згущення ізоліній, що спостерігається у верхній частині рисунка, пояснюється наближенням точності розв'язку до межі, яка встановлена просторовою дискретизацією задачі, тобто параметрами h_1 , h_2 та h_3 .

Висновки

Запропонований підхід до просторового розщеплення задачі має перевагу перед відомими методами декомпозиції. Відсутність потреби в узгодженні розв'язків, що отримані у підобластях, зменшує додаткові витрати часу. Ця властивість алгоритму підвищує ефективність обчислень та зменшує загальний час розв'язання задачі. Отже, запропонований підхід до декомпозиції області задачі має безпосередню практичну цінність.

Список використаних джерел

1. Дорошенко А.Ю. Лекції з паралельних обчислювальних систем. – Київ: видавничий дім „КМ Академія”, 2003. – 44 с.
2. Миллер Р., Боксер Л. Последовательные и параллельные алгоритмы. Общий подход. – М.: Бинум, 2006. – 406 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 2001. – 320 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. – Минск: ЦОТЖ, 1998. – 442 с.
6. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ. – 2009 – №1. – С. 100 – 107.
7. Danek D. Domain decomposition method for contact problems with small range contact. // Mathematics and computers in simulation. – 2003. – vol. 61 – p. 359 – 373.
8. Le Tallec P. Domain decomposition methods in computational mechanics. // Computational Mechanics Advances. – 1994 – vol. 1 – pp. 121 – 220.

Надійшла до редколегії 3.12.08

УДК 519.9

Yakimenko I. I.⁽¹⁾, c.ph.-m.s., as.prof.,

Tsykunov V. S.⁽²⁾,

Shevchenko V. P.⁽²⁾, c.ph.-m.s., as.prof.,

Berggren K.-F.⁽¹⁾, prof.

Якименко І.І., к.ф.-м.н., доц.,

Цикунов В.С.,

Шевченко В.П., к.ф.-м.н., доц.,

Берггрен К.-Ф., проф.

On the use of parallel computing in studies of physical properties of nanostructures

The article analyzes the numerical simulation of commonly used gated GaAs/AlGaAs heterostructure. The electron transport properties of these nanostructures have been studied. For simulation the continuous system of differential equations are transformed into a discrete system of algebraic equations. To improve the simulation method the algorithm was adapted for parallel high performance cluster with distributed memory using the described parallelization method.

Key Words: numerical simulation, nanostructures, parallelization method, cluster with distributed memory.

Використання паралельних обчислень для дослідження фізичних властивостей наноструктур

В статті аналізується чисельне моделювання поширеної гетерогенної GaAs/AlGaAs структури. Вивчаються властивості електронного транспорту у цих структурах. Для моделювання неперервна система диференціальних рівнянь зводиться до дискретної системи алгебраїчних рівнянь. Для покращення методу алгоритм було адаптовано для високошвидкісного кластера з розподіленою пам'яттю за допомогою описаного метода розпаралелювання.

Ключові слова: чисельне моделювання, наноструктури, метод розпаралелювання, кластер з розподіленою пам'яттю.

(1) Department of Physics, Chemistry and Biology, Linköping University, Sweden
(2) Department of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine

*E-mail: irina@ifm.liu.se, bool@unicyb.kiev.ua

Статтю представив проф., д.т.н. Ф.Г.Гарашенко

Introduction

The study of the low-dimensional semiconductor nanostructures (such as quantum dots, quantum wires and quantum point contacts) possesses great potential for both scientific breakthroughs and for applications including even the implementation of such new computational paradigms as quantum computing [1]. Since such nanostructures are basically quantum objects, the wave nature of the electrons is of major importance in the formation of device functionalities. In more detail, most, if not all, of the physical phenomena occurring in nanostructures, no matter how different they may seem, relate to the dynamics of electrons occupying the quantum states - as allowed by the quantum confinement of the nanostructure and electron-electron interactions - under the influence of applied external electromagnetic fields. In discussing the overall generic properties of nanostructures, we will here focus on a specific illustrative case. A commonly used one is the gated GaAs/AlGaAs heterostructure [2], shown schematically in Fig. 1a.

As a negative voltage is applied to the metallic gated sections in Fig. 1b, the two-dimensional gas (2DEG) at the GaAs/AlGaAs interface is squeezed from underneath the gate into the regions under the ungated openings. By changing the form of the split gate one can obtain a variety of nanostructures, among them a channel between two electron pads or a ballistic quantum point contact (QPC) (Fig. 1b), which is, in many respects, the simplest system in mesoscopic physics.

In the research group at Linköping University these structures have been simulated self-consistently within the framework of the Kohn-Sham local spin-density approximation (LSDA) [3] including the contribution from the exchange-correlation potential which makes it possible to find the magnetized states in quantum dots, single QPC and arrays of QPCs [4-6]. As a result, the electron transport properties of these nanostructures have been studied in the general context of the spin-dependent phenomena in semiconductor nanosystems. In particular, it has been shown that

the celebrated 0.7-conductance anomaly [7] may be discussed in terms of spin polarization effects. The further research will be focused on the study of noncollinear magnetic structures, ferro- and antiferromagnetic states, spin-density waves and other states that may be induced by electron interactions and are of decisive importance for the

characteristics of quantum wires and related nanostructures. It is planned also to investigate the problems linked to the application of the theory of nanomagnetism in spintronics and nanoelectronics, and to extend the research to the class of systems suitable for the realization of quantum computing.

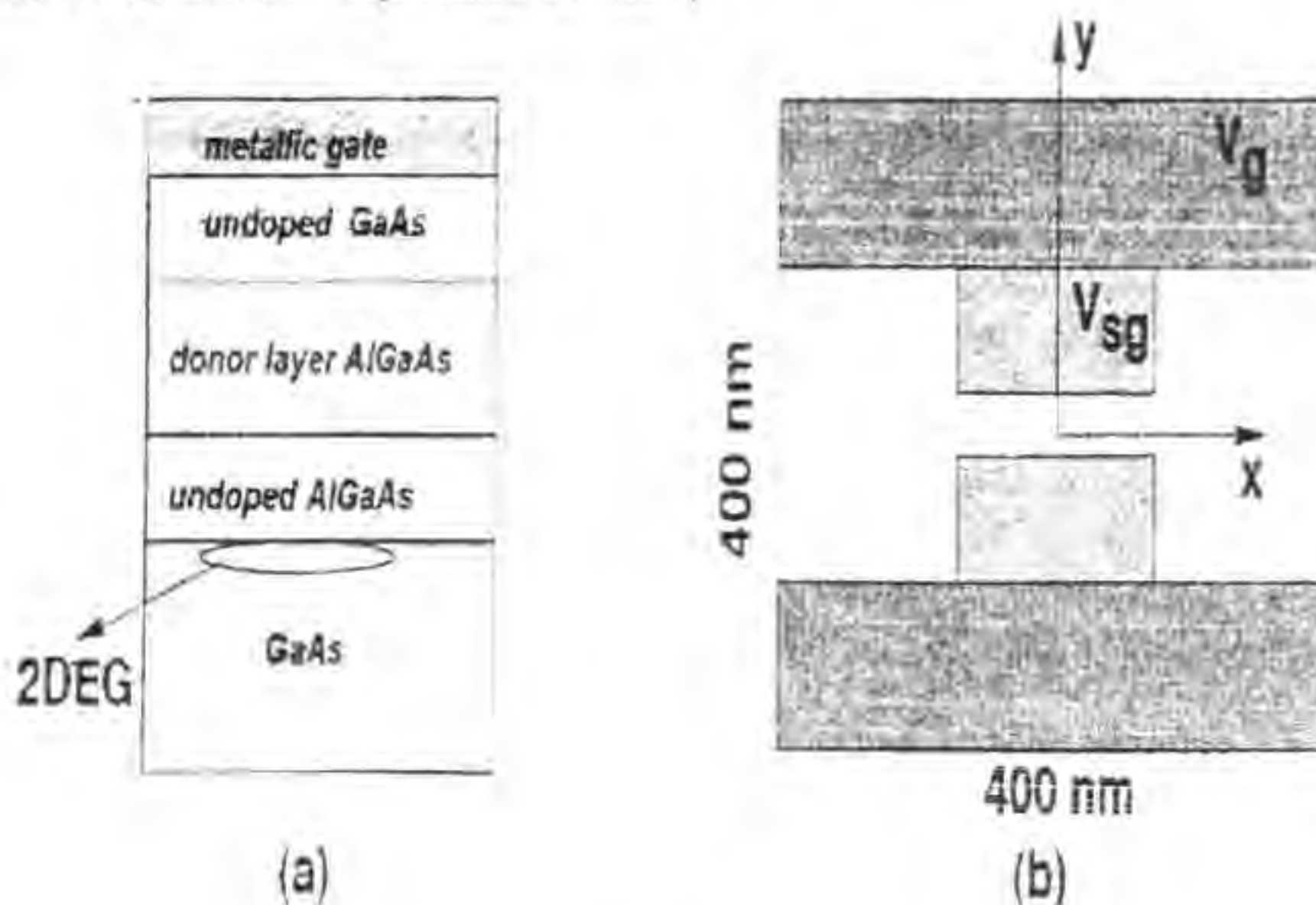


Fig.1

Figure 1 shows schematic picture of the split gate device used in the modeling. (a) Vertical cross-section of the gated modulation-doped GaAs/AlGaAs heterostructure. The electron gas resides at the interface between the GaAs substrate and the undoped AlGaAs spacer layer on the depth of 70 nm from the top. The electron density is controlled by an applied voltage between the gate and the substrate. (b) Top view of the patterned device. Dark-grey colored gates hold on the higher negative voltage V_g than the light-grey split-gates voltage V_{sg} . In the present simulations 1b defines a unit cell.

As these investigations have evolved, both the immediate objects under study and the suitable mathematical models have become increasingly complex. Accordingly, the problems with computer simulations related to these models have accumulated over time. More and more real time is required to reduce theory to numbers. Actually, just

2. Model

To explore the magnetic properties of quantum point contacts, we apply the self-consistent scheme to the solution of the following Kohn-Sham equation [3]:

now that we are close to the time threshold beyond which further developments of our investigations becomes practically impossible without stepping away from a conventional technology of computer simulations based on a single (even high-capacity) processor. There is some paradox that our study is ultimately directed to the physical realization of a quantum computer which would do away with all the current difficulties. But for the time being quantum computers are nowhere in sight, and therefore it is necessary to search for some alternative ways of using techniques of today. The best candidate is the parallel computing which already proves itself as a powerful tool for the solution of many scientific and technical problems. In the present paper we demonstrate its adaptability to the simulation of nanostructures by the example of the magnetic properties of QPC's realizable in the layered semiconductor systems.

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi^\sigma(x, y) + U_{eff}^\sigma(x, y) \varphi^\sigma(x, y) = E^\sigma \varphi^\sigma(x, y). \quad (1)$$

where $\varphi^\sigma(x, y)$ and E^σ are the one-electron wave functions and energy eigenvalues for up-spin ($\sigma = +1/2$) and down-spin ($\sigma = -1/2$) electrons; $U_{\text{eff}}^\sigma(x, y)$ is the total effective potential consisting of four different terms,

$$U_{\text{eff}}^\sigma(x, y) = U_c(x, y) + U_s(x, y) + U_{\text{exch}}^\sigma(x, y) - g\mu_B B\sigma \quad (2)$$

The first term, $U_c(x, y)$, is the confinement potential which describes the electrostatic environment of the two-dimensional electron gas, and includes the contributions from the gate, split-gates, donor layer and surface states (one may find the detailed expressions for the corresponding potentials in, for example, [4] and [8]). Typical confinement potential for QPC is shown in Fig.2. $U_s(\mathbf{r})$, represents the mean value of the Coulomb potential created by all other electrons in a 2DEG layer, and is given by the expression

$$U_s(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + 4z^2}} \right] d\mathbf{r}' \quad (3)$$

where the second term within brackets corresponds

distributed with the density $-e\rho(\mathbf{r})$ along the plane placed at the distance z above the gate. In Eq. (3) $\epsilon = 1.9$ is dielectric constant for GaAs. e is an electron charge.

The third term in Eq. (2), $U_{\text{exch}}^\sigma(x, y)$, consists of the sum of the exchange, $U_{\text{exch}}^\sigma(\mathbf{r})$, and correlation, $U_c^\sigma(\mathbf{r})$, potentials. For the former one we adopt the Dirac expression,

$$U_{\text{exch}}^\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{\epsilon\epsilon_0(\pi)^{3/2}} \rho_\sigma^{1/2}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

where ρ_σ ($\sigma = \pm 1/2$) are the densities of up- and down-spin electrons. Unfortunately, any closed analytical form for the correlation potential, $U_c^\sigma(\mathbf{r})$, is not available. In this situation, we resort to the derivation of this potential in a parameterized form using the accurate value of the correlation energy for the uniform gas of the density ρ_σ , obtained by quantum Monte Carlo calculations [9]. The last term in Eq. (2) $g\mu_B B\sigma$ is the Zeeman splitting for electrons in a magnetic field B . In Eq. (1) m^* is effective mass of electrons: $m^* = 0.067m_e$ for GaAs.

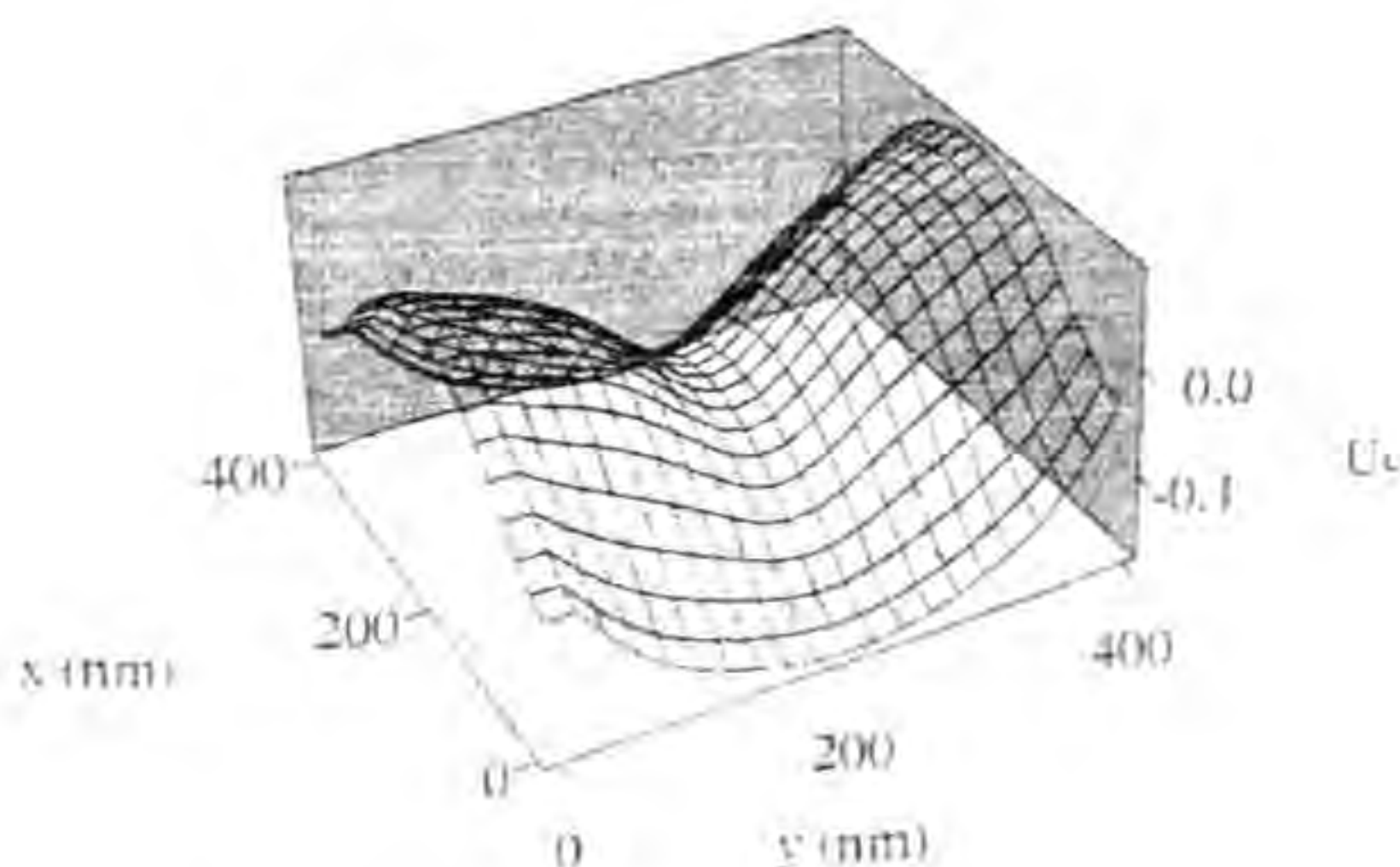


Fig.2 Confinement potential of one unit cell at $V_F = -0.5$ eV and $V_{bg} = -0.48$ eV.

The Kohn-Sham equations (1) is solved by discretization on the grid together with the spin-dependent electron density defined as

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} |\varphi_k^\sigma(x, y)|^2. \quad (5)$$

Since this density depends on the eigenfunctions $\varphi_k^\sigma(x, y)$ which we search for, the solution of the

Kohn-Sham equation must be obtained in a self-consistent manner using an iteration scheme with some guessed value of the electron density as input to the zero step. In each step of the iterations we update the effective potential (2), whose value is used for calculation of a new electron density. The iterative procedure is finished when consecutive electron densities become identical within a given tolerance. At the output, we get the eigenstates $(\varphi_k^\sigma, E_k^\sigma)$, the electron densities $\rho_\sigma(\mathbf{r})$, the total potential distributions for up- and down-spin electrons, and the spin polarization

$$p(\mathbf{r}) = \rho_{\uparrow}(\mathbf{r}) - \rho_{\downarrow}(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Specifically, we have studied QPCs of different lithographic length L (in the range 100 to 300 nm) and lithographic width W (in the range 80 to 350 nm). For convenience, we apply the periodic boundary conditions which implies the periodicity of the eigenfunctions,

$$\varphi_k^\sigma(x+T, y) = \varphi_k^\sigma(x, y)e^{ikT}, \quad (7)$$

where T is the period in x -direction (equal to 400 nm in our calculations), and k is the wave vector,

$$k = \frac{2\pi m}{MT}, \quad (8)$$

where m is an integer belonging to the first Brillouin zone, $-M/2 < m \leq M/2$, M being the number of unit cells (10 in our calculation). For negative k , energy values are the same so the problem is solved for the positive k values and wave functions count twice.

3. Numerical algorithm

The numerical method for solving Eq. (1) is based on the transformation of the continuous system of differential equations into a discrete

system of algebraic equations or, in other words, on using the finite difference method to approximate the derivatives and to replace integrals by finite summations. We thus set $x = ia$ and $y = ja$ where a is the discretization length and $i, j = 1, 2, \dots$ are integer numbers. For the continuous function $\varphi(x, y)$, we thus select the values $\varphi_{i,j} = \varphi(ia, ja)$, and represent the partial derivatives as

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{a^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{a^2}. \quad (10)$$

With these expressions, Eq. (1) takes the form

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*a^2} [(\varphi_k^\sigma)_{i+1,j} + (\varphi_k^\sigma)_{i-1,j} + (\varphi_k^\sigma)_{i,j+1} + (\varphi_k^\sigma)_{i,j-1} - 4(\varphi_k^\sigma)_{i,j}] + (U_{eff}^\sigma)_{i,j} (\varphi_k^\sigma)_{i,j} = E_k^\sigma (\varphi_k^\sigma)_{i,j} \quad (11)$$

This is an eigenvalue equation for $(\varphi_k^\sigma)_{i,j}$, which couples adjacent grid points (i, j) through the coefficient $(-\hbar^2/2m^*a^2)$. The self-coupling coefficient is $(2\hbar^2/m^*a^2 + (U_{eff}^\sigma)_{i,j})$. Rewriting φ_k^σ as a column vector φ_k^σ we can represent Eq. (11) in matrix form as follows:

$$[A_k^\sigma(U_{eff}^\sigma) - E_k^\sigma \mathbf{I}] \varphi_k^\sigma = 0 \quad (12)$$

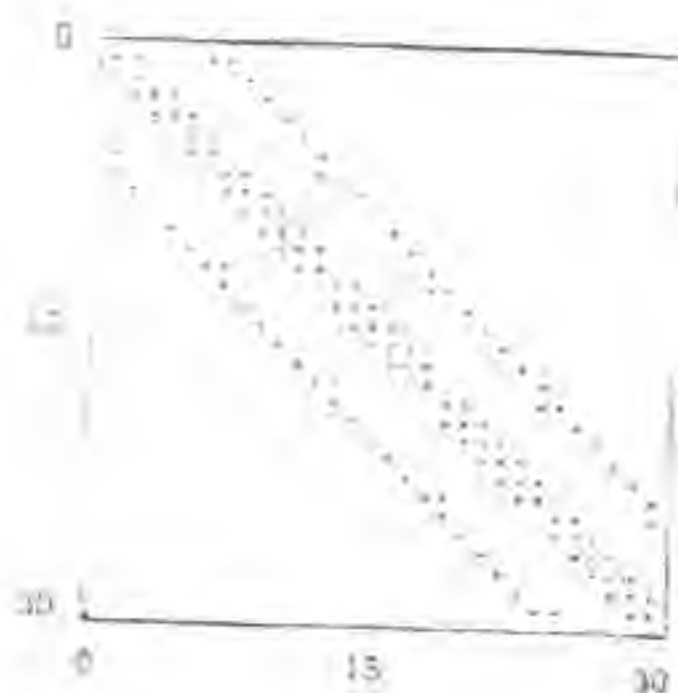


Fig.3 Non-zero elements of matrix A_k^σ for $P=6$.

In each row of a matrix A_k^σ there are five non-zero elements, where only the diagonal element

depends on the effective potential while the others are equal to the constant $(-\hbar^2/2m^*a^2)$. The

problem given by Eq. (12) should be solved with the boundary conditions on the edges of the unit cell. We assume the zero boundary conditions in y -direction and periodical boundary conditions in x -direction, so that we put $(\varphi_k^\sigma)_{i,0} = (\varphi_k^\sigma)_{i,P} = 0$ for all points i , and $(\varphi_k^\sigma)_{P,j} = (\varphi_k^\sigma)_{0,j} e^{ikT}$ for all points j , where P is the number of grid points in x and y -directions. The non-zero elements of the matrix A_k^σ for $P=6$ are shown schematically in Fig.3. In the straightforward calculation of the eigenstates and eigenvalues for the matrix equation (12) we have used the standard LAPACK package (<http://www.netlib.org/lapack/>).

Our algorithm for the calculation of the electron density (5) and spin polarization (6) is composed of the following consecution of steps:

1. Calculate $(U_i)_{i,j}$.
2. Guess ρ_σ .
3. With this electron density, calculate $(U_{eff}^\sigma)_{i,j} = (U_s^\sigma)_{i,j} + (U_v^\sigma)_{i,j} + (U_{ex}^\sigma)_{i,j}$ from Eqs. (2)-(4).

4. For $k = 0, \frac{2\pi}{MT}, \frac{4\pi}{MT}, \dots, \frac{\pi}{T}$ find eigenvalues and eigenfunctions $E_{k,l}^\sigma$ and $(\varphi_{k,l}^\sigma)_{i,j}$ from Eq. (12), where l labels the eigenvalues for each k and σ .

For each k , eigenvalues and eigenfunctions could be calculated separately, i.e. the eigenvalue problem might be distributed among n different processors. The number of processors corresponds to the number of k values. As a result this problem might be solved on classical high performance clusters with distributed memory.

5. Calculate new $(\rho_\sigma)_{i,j}$ according to $(\rho_\sigma)_{i,j} = \sum_{E_{k,l}^\sigma < 0} |(\varphi_{k,l}^\sigma)_{i,j}|^2$.

If $k = \frac{2\pi}{MT}, \frac{4\pi}{MT}, \dots, \frac{2\pi(M/2-1)}{T}$ count the orbital twice.

6. Iterate steps 2,3 and 4 until convergence in eigenvalues is achieved.

Finally, we consider some comments concerning the convergence rate of Kohn-Sham local spin-density approximation scheme. Usually, in order to trigger the onset of spin polarization, one introduces a small Zeeman splitting from a weak magnetic field ($g\mu_B B = 10^{-6} \text{ eV}$) in the first few iterations. However, even with this trigger the convergence of the iterative scheme remains sensitive to disturbances. For further improvement, we have used the scheme in which the effective

potentials at the two adjacent steps are mixed according to:

$$U_{eff}^{\sigma,(i+1)} = \alpha U_{eff}^{\sigma,(i)calc} + (1-\alpha) U_{eff}^{\sigma,(i)},$$

where α is the parameter (0.01 in our calculation), and $U_{eff}^{\sigma,(i)calc}$ is the effective potential calculated from Eq. (2) with the electron densities obtained in the i -th iteration. The self-consistency is assumed to be reached when electron densities in successive iterations are identical within 10^{-6} eV .

4. Results

Physical results. The numerical simulation outlined above shows that the electron gas in quantum point contacts tends (at low electron densities) to become ferromagnetic, and this tendency persists for a wide range of QPC geometries. Physically, this picture can be understood in the following way: as the gate voltage decreases, the density of electrons in a channel also diminishes, and at some gate voltage the exchange energy starts to prevail over the kinetic energy, which leads to the beginnings of the spin polarization. The onset of spin polarization is shown in Fig. 4 where a clear peak in polarization occurs in the middle of quantum point contact. It follows that for some gate voltage the barriers for up-spin and down-electron split in a way that effective potential for down-spin electron becomes higher than chemical potential and effective potential for up-spin electron becomes lower than chemical potential. As a result, only the up-spin electrons turn out to be propagating in a channel, while the down-spin electrons will be blocked. This effect can be used in spintronics for the physical realization of the spin-injection mechanism. The effect of spontaneous magnetization in quantum point contacts can also be interesting for creating the magnetic memory devices [5-7].

Computational results. The algorithm outlined in section 3 has been implemented in FORTRAN language in single thread way at first turn. As the result we achieved time of 21 min per iteration on available hardware¹ for the matrix $A_k^\sigma (U_{eff}^\sigma)$ of the size 1600×1600 . The convergence

¹ Calculations were performed with the use of parallel computing facilities at Linköping University, Sweden on 74 nodes cluster; each node has one Intel Pentium 4 3.4Ghz processor and 2Gb RAM (detailed information about hardware and software implementation of the cluster available on official site <http://www.nsc.liu.se/systems/cluster/green/>)

of the system might be achieved after 150-200 iterations, which gives total time per one numerical

experiment about 70 hours.

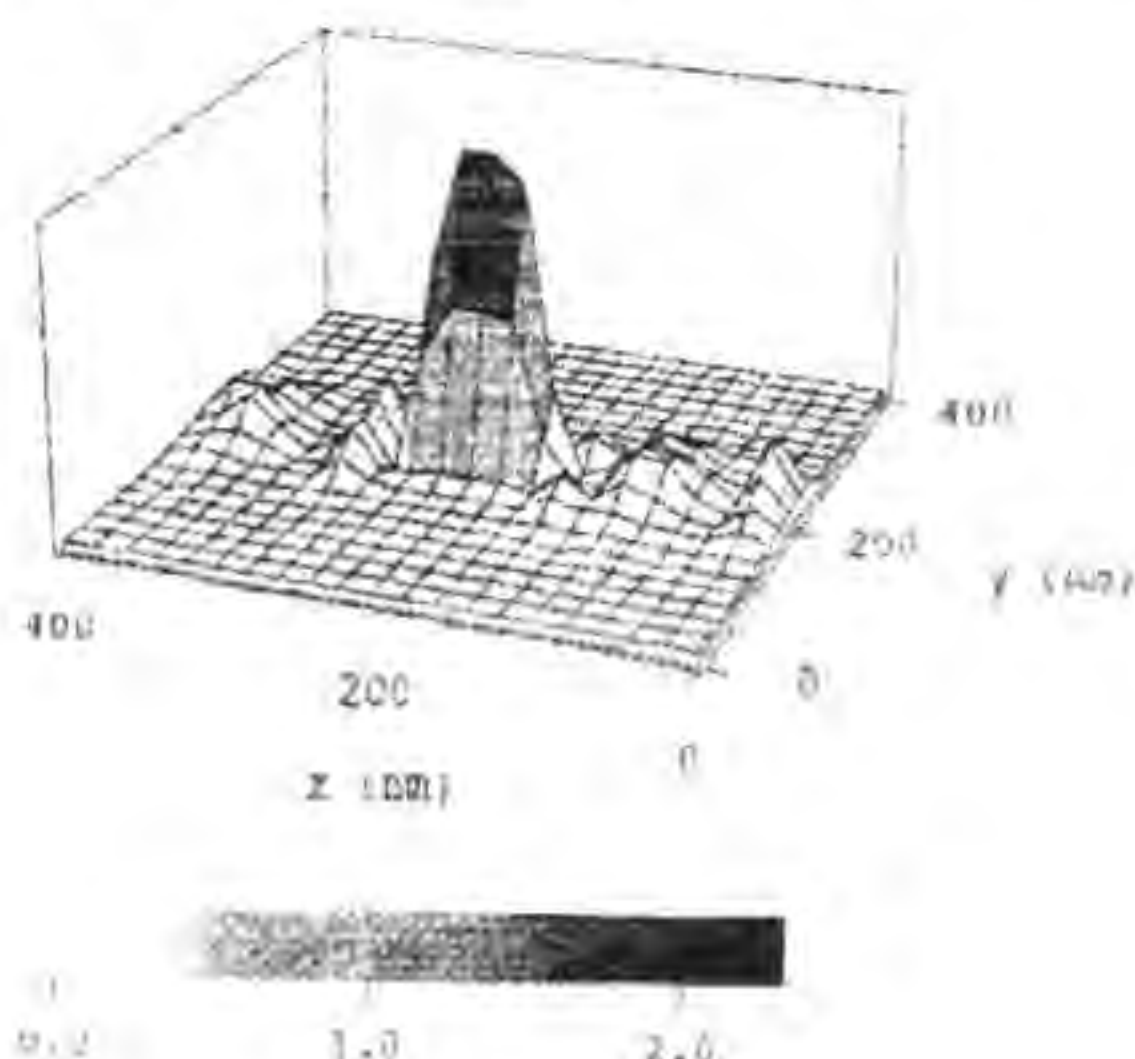


Fig. 4 Onset of spin polarization per square Ångström for QPC of the length 250 nm and width 80 nm.

This performance was unacceptable for obtaining physically reliable results due to

- requirements of increasing the size of the matrix (e.g. decreasing calculation step) till 6400*6400;

- increasing number of k values;
- requirements of performing large series (20-50) experiments with different input parameters.

To improve performance to an acceptable level the algorithm was adapted for parallel high performance cluster with distributed memory using the parallelization method described in section 3, step 4.

As a result the calculation performance was increased up to 2.58 min per iteration for the matrix 1600x1600, and to 2 h 35 min for the matrix 6400*6400. This increase in performance allows us to get physical results in reasonable time.

In the following research we will focus on developing algorithms and implementations of the problem mentioned in section 2 on modern computer facilities.

In conclusion, this example demonstrates that the use of parallel computing really allows us to make gains in time large enough to ensure that all the series of problems outlined in introduction could be solved by this method. We hope to return to the discussion of this topic in our subsequent publications.

Acknowledgments:

We are grateful to the National Supercomputer Centre (NSC) in Linköping for computer time and technical assistance. We are also grateful for financial support from the Swedish Research Council.

References

1. K.-F. Berggren and M. Pepper, *Physics Worlds*, October 2002, 37-42.
2. J.H. Davies, *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
3. R. G. Parr and W. Yang, *Density-functional theory of atoms and molecules* (Oxford University Press, New York, 1989).
4. K.-F. Berggren, I.I. Yakimenko, and A.M. Bychkov, *Nanotechnology* **12**, 529 (2001).
5. K.-F. Berggren and I.I. Yakimenko, *Phys. Rev. B* **66**, 085323 (2002).
6. A. Heyman, I.I. Yakimenko, and K.-F. Berggren, *Nanotechnology* **15**, 143 (2004).
7. P. Jaksch, I.I. Yakimenko, and K.-F. Berggren, *Phys. Rev. B* **74**, 235320 (2006).
8. B. Tanatar, D.M. Ceperley, *Phys. Rev. B* **39**, 5005 (1989).

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.039.6

Бех І.І. к.ф.-м.н., доц., Вербицька О.В., студ.,
Ільченко В.В., д.ф.-м.н., проф., Лушкін О. Є.,
к.ф.-м.н., доц., Нагула П.О., інж.

Вплив електричного поля на емісійні властивості металевопористих Sc-Ba емітерів з Re-W матрицею

Робота містить результати дослідження
впливу електричного поля на емісійні
властивості скандатних металевопористих
емітерів з реній-вольфрамовою матрицею.

Показано, що зростання напруженості
прикладеного до емітера електричного поля
призводить до зміни хімічного складу його
емісійно активної речовини, і, як результат, до
зменшення автоелектронної складової
загального анодного струму. Збільшення
температури емітера при сталому значенні
напруженості електричного поля призводить
до відновлення складу його емісійно-активної
речовини та до відновлення термо-
автоемісійного характеру його емісії.

Ключові слова: термoeмісія, автоемісія,
металевопористий, скандій.

E-mail: sun@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.

Вступ

Додавання окису скандію у металевопористі
емітери (МПЕ) є одним з шляхів поліпшення
їхніх емісійних властивостей. Вивчення
властивостей емітерів такого типу є важливим,
оскільки на сьогодні вони мають кращі
характеристики у порівнянні зі звичайними
металевопористими емітерами та оксидними
емітерами [2, 3].

Як було показано у наших попередніх
роботах, вольт-амперні характеристики (ВАХ)
металевопористих емітерів, особливо скандат-
них, не підкоряються закону "3/2" [3]. Це можна
пояснити термо-автоелектронним механізмом
їхньої емісії. Крім того, експериментально було
встановлено, що в інтервалі температур 1100 –
1500 К спостерігається вплив електричного поля
на емісійну здатність емітерів такого типу.

Дана робота містить результати вивчення
впливу електричного поля на емісійні

I.I. Bekh, PhD, O.V. Verbytska, student,
V.V. Il'chenko, Doct. Sci., Prof., O. E. Lushkin,
PhD, Nagula P.O., engineer.

The influence of the electric field on the emissions properties of the Sc-Ba dispensed emitters with the Re-w matrix

The influence of the electric field on the
emission properties of the Sc-Ba dispensed emitters
with the Re-W matrix are studied in a high vacuum.

It is shown that increasing of tension of the
electric field, enclosed to the emitter at the constant
temperature, results in violation of chemical
composition of his emission-active matter and, as a
result, to diminishing of field emission component in
the anodic current. Increasing of temperature of the
emitter at constant tension of the electric field
results in renewal of chemical composition of his
emission-active matter and, as a result, to renewal
the thermo-field mechanism of emission.

Key Words: thermo emission, field emission,
dispenser, scandium.

властивості скандатних металевопористих
емітерів з реній-вольфрамовою матрицею.

Методика експерименту

Дослідження проводились у робочій камері
надвисоковакуумної установки. Тиск залишкових
газів при проведенні експериментів не
перевищував $5 \cdot 10^{-9}$ торр. Вимірювання емісійних
властивостей зразків здійснювалося у плоскій
діодній системі в імпульсному режимі
безпосередньо у робочій камері. Тривалість
імпульсу анодної напруги – 7 мкс, амплітуда
змінювалася до 5000 В. У якості анода
використовувалася молибденова пластина
(2x2x0,2 см), що прогрівалася електронним
бомбардуванням. Під час проведення досліджень
відстань між емітером і анодом складала 1 мм,
0,8 мм і 0,6 мм та ретельно контролювалася.
Такий набір відстаней дозволив вивчати вплив
електричного поля на емісійні властивості зразків
в широких межах значень напруженості.

У відповідності до поставленої задачі досліджувався вплив електричного поля на емісійні властивості Sc-Ba МПЕ з Re-W (80%:20%) матрицею та з таким фазовим складом активної речовини: 2.4 BaO: 0.6 CaO: 0.1 Sc₂O₃: 0.9 Al₂O₃.

Результати експерименту та їхнє обговорення

На рис. 1 у координатах Чайльда-Ленгмюра наведено типові вольт-амперні характеристики досліджуваного емітера, виміряні при відстані емітер-анод у 1 мм. Видно, що у всьому діапазоні температур вимірювання вони не підкоряються закону "3/2".

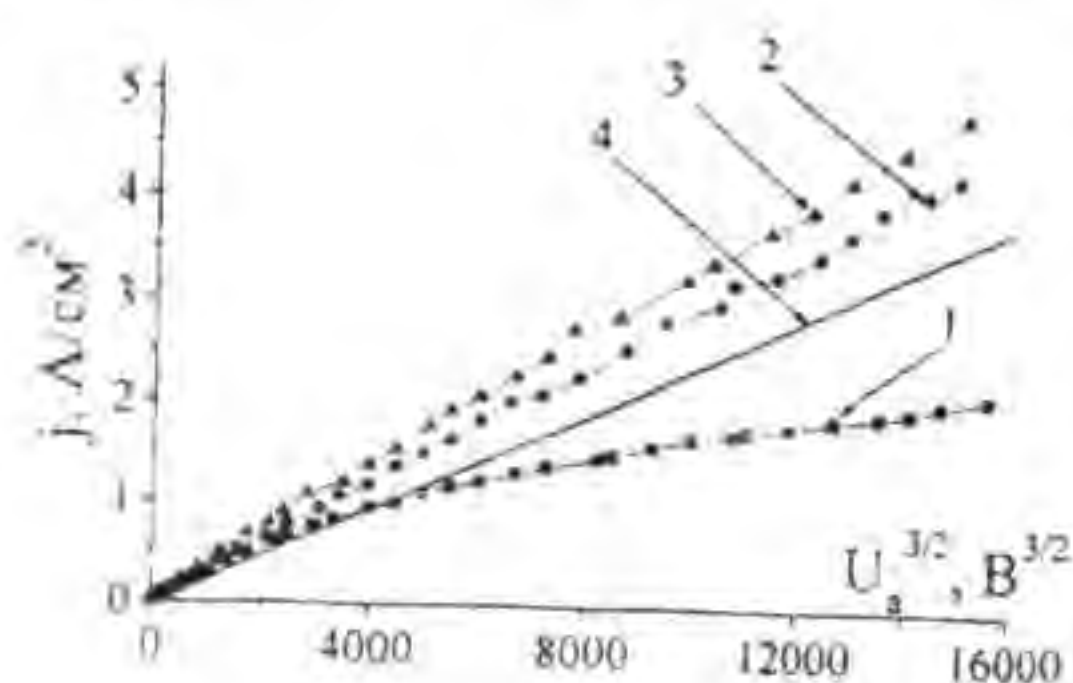


Рис. 1. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод у 1 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1300$ К, 3 – $T = 1500$ К, 4 – закон Чайльда-Ленгмюра.

Зменшення відстані між емітером та анодом до 0.8 мм еквівалентно до збільшення напруженості електричного поля, що прикладається до емітера, у 1,25 раз.

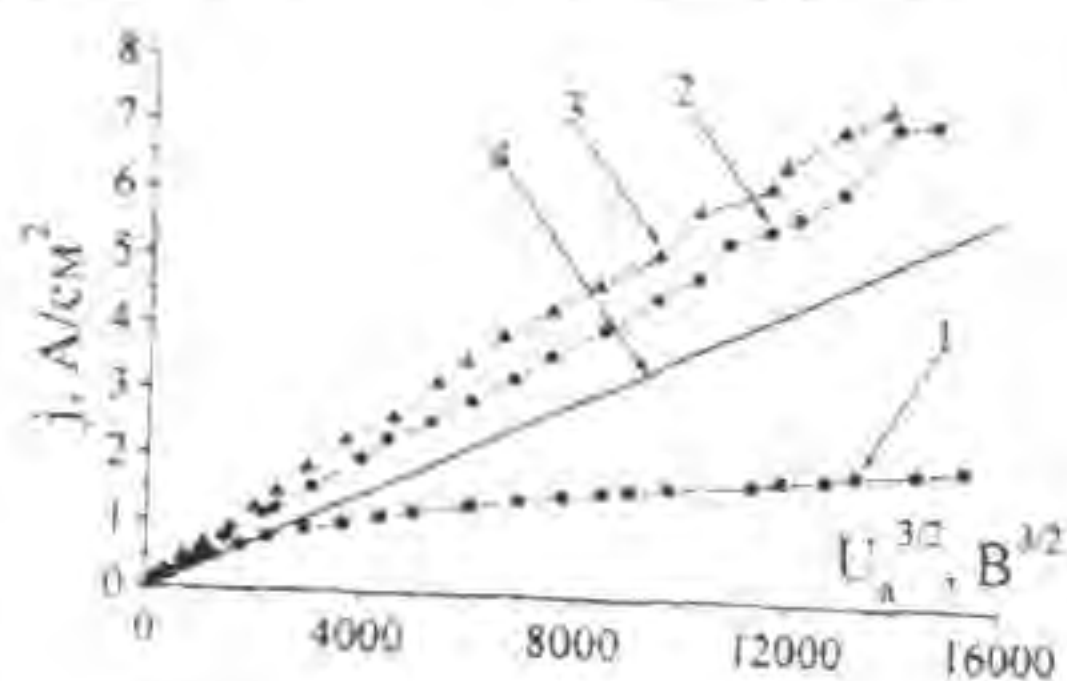


Рис. 2. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод у 0.8 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1300$ К, 3 – $T = 1500$ К, 4 – закон Чайльда-Ленгмюра.

Це призводить до того, що вольт-амперна характеристика емітера, виміряна при

температурі $T=1100$ К, співпадає із теоретичною залежністю в діапазоні анодних напруг від 20 В до 250 В (див. рис. 2). ВАХ, виміряні при більш високих температурах, у цьому ж діапазоні напруг теж наближаються до залежності Чайльда-Ленгмюра.

Подальше зменшення відстані емітер-анод до 0.6 мм (це еквівалентно збільшенню напруженості електричного поля у 1.7 раз у порівнянні з її значенням для відстані у 1 мм) призводить до співпадиння вольт-амперної характеристики, виміряної при температурі $T=1200$ К, з теоретичною залежністю у діапазоні анодних напруг від 20 В до 200 В. А вольт-амперна характеристика, виміряна при температурі $T=1300$ К, співпадає з теоретичною залежністю практично у всьому діапазоні анодних напруг (до 600 В), як це зображено на рис. 3.

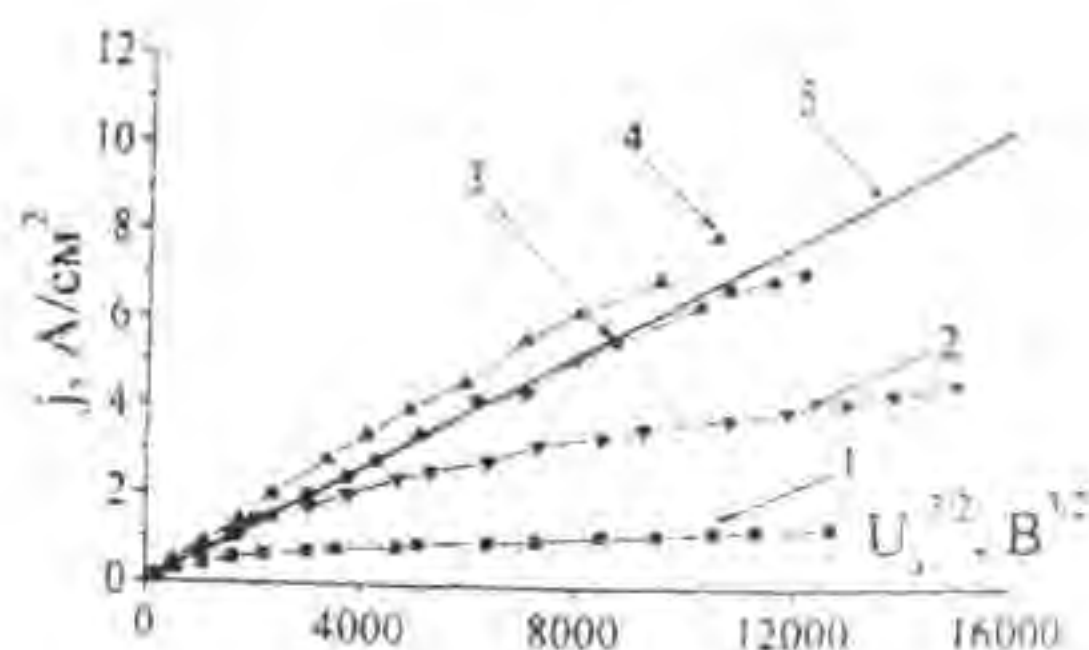


Рис. 3. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод у 0.6 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1200$ К, 3 – $T = 1300$ К, 4 – $T = 1500$ К, 5 – закон Чайльда-Ленгмюра.

З метою більш детального аналізу поведінки отриманих залежностей вони були побудовані у координатах Фаулера-Нордгейма.

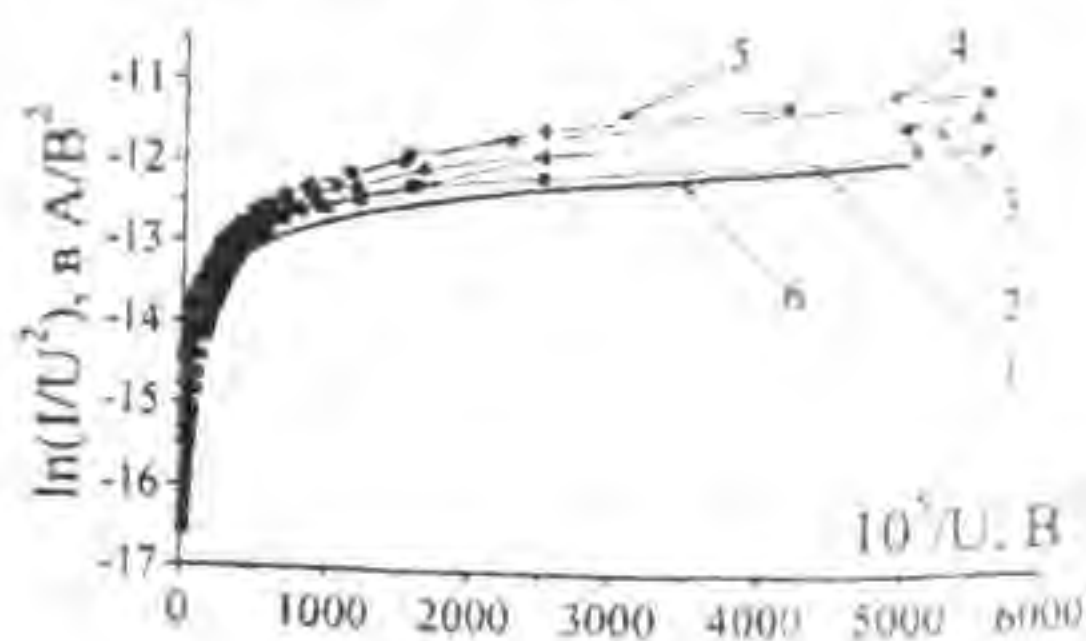


Рис. 4. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод, рівній 1 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1200$ К, 3 – $T = 1300$ К, 4 – $T = 1400$ К, 5 – $T = 1500$ К, 6 – закон Чайльда-Ленгмюра.

Типове сімейство ВАХ для відстані емітер-анод в 1 мм наведено на рис. 4.

З рис. 4 видно, що при відстані емітер-анод рівній 1 мм, усі характеристики лежать вище кривої Чайльда-Ленгмюра, яка, як відомо, відображає залежність анодного струму від анодної напруги у випадку, коли поблизу поверхні емітера є об'ємний просторовий заряд, утворений електронами, що вийшли з емітера за рахунок термоелектронної емісії. Причому, чим вище температура, тим більш помітне відхилення від закону "3/2". Даний факт вказує на те, що у скандатних МПЕ температура робочої поверхні дуже суттєво впливає на її склад та структуру, від яких, у свою чергу, залежить механізм емісії емітерів. Збільшення напруженості електричного поля ($U_a > 100$ В) поступово нівелює вплив температури на активність зразків; експериментальні характеристики практично збігаються в одну. Такий хід вольт-амперних характеристик можна пояснити наступним чином. У скандієвих МПЕ в результаті прогріву утворюється такий склад емісійно-активної речовини, який має незначну термоелектронну складову струму емісії і дуже помітну автоелектронну складову. Бо навіть при анодних напругах в декілька вольт усі термоелектрони потрапляють на анод, тобто об'ємний негативний заряд біля емітера відсутній. Це дозволяє електричному полю навіть при таких напругах помітно знижувати потенціальний бар'єр. При анодних напругах, більших за 250 В, зростання густини анодного струму відбувається вже не тільки за рахунок збільшення прозорості потенціального бар'єру, але і за рахунок підтягування електронів до поверхневого шару емітуючих центрів.

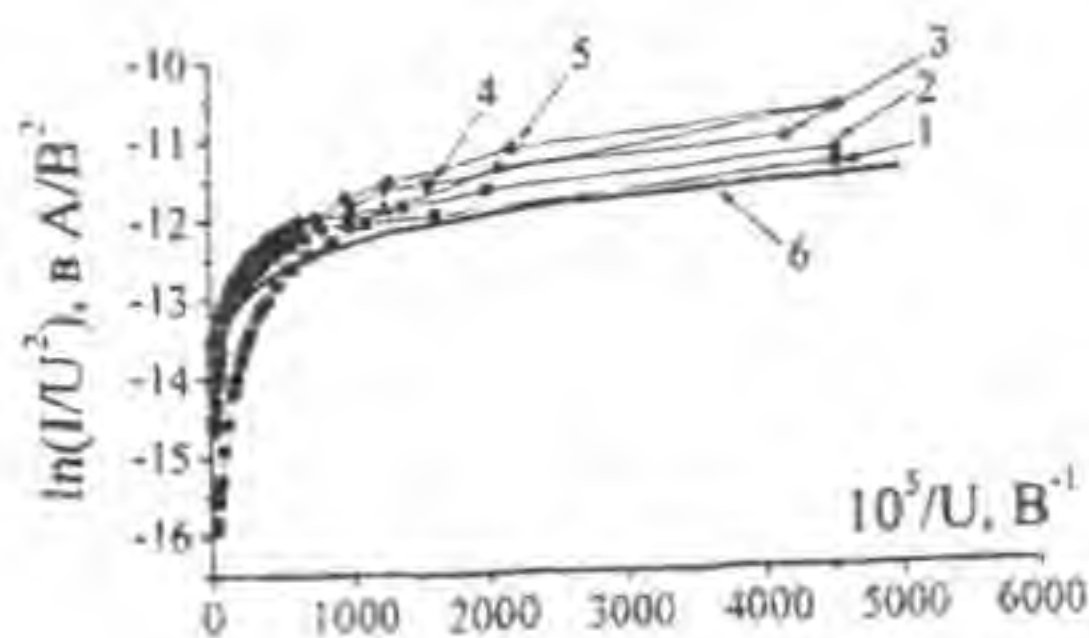


Рис. 5. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод у 0,8 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1200$ К, 3 – $T = 1300$ К, 4 – $T = 1400$ К, 5 – $T = 1500$ К, 6 – закон Чайльда-Ленгмюра.

При зменшенні відстані між емітером та анодом описана вище поведінка експериментальних характеристик на якісному рівні зберігається, як це видно з рис. 5 та рис. 6.

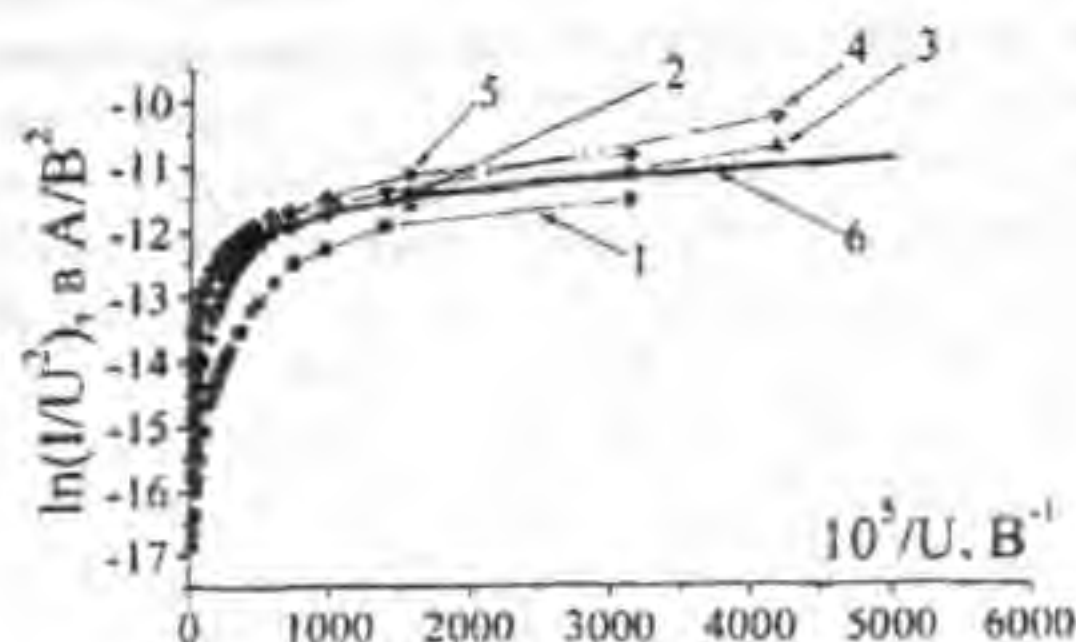


Рис. 6. ВАХ зразка, виміряні при відстані емітер-анод у 0,6 мм. 1 – $T = 1100$ К, 2 – $T = 1200$ К, 3 – $T = 1300$ К, 4 – $T = 1400$ К, 5 – $T = 1500$ К, 6 – закон Чайльда-Ленгмюра.

Згідно даних, наведених в [1], збігання характеристик зразка, отриманих при різних температурах, в одну при $U_a > 250$ В вказує на те, що на поверхні скандатних МПЕ утворюється напівпровідник, в якому електричне поле вироджує електронний газ.

Спостережені зміни емісійної здатності Sc-Va МПЕ при збільшенні напруженості електричного поля, які ілюструються рис. 1 – 3, можуть бути пояснені наступним чином. Рівноважний склад поверхні емітера при сталій температурі визначається двома конкуруючими процесами. З одного боку це дифузія активної речовини (зокрема вільного барію та його окису) з об'єму емітера та подальше хімічне відновлення барію з його окису при взаємодії BaO з матеріалом матриці. З іншого боку – зменшення кількості активатора за рахунок його випаровування при даній температурі. Для скандатних МПЕ ситуація ускладнюється тим, що на їхню робочу поверхню дифундує і скандієва компонента, яка сприяє зміні хімічного складу емісійно-активної речовини. Це призводить до більш істотного впливу електричного поля на емісійні властивості зразків [4].

У відповідності з електронною теорією випаровування бінарних напіпровідникових сполук типу A_2B_6 [5], зростання напруженості електричного поля, прикладеного до емітера при сталій температурі, збільшує потік металу (у даному випадку це може бути барій та скандій).

що випаровується з поверхні емітера. Це призводить до збіднення його поверхні на вільний метал та до порушення хімічного складу емісійно-активної речовини при даній температурі. Внаслідок цього автоелектронна складова загального анодного струму істотно зменшується і експериментальні характеристики починають співпадати з теоретичною залежністю. З ростом температури при сталій напруженості електричного поля процес дифузії активної речовини з об'єму емітера та хімічні реакції відновлення вільного металу починають переважати над процесом його випаровування, що призводить до відновлення хімічного складу емісійно-активної речовини та до відновлення термо-автоелектронного характеру емісії.

Висновки

1. Спостережені зміни емісійної здатності Sc-Ba МПЕ при збільшенні напруженості електричного поля, прикладеного до емітера при сталій температурі, вказують на порушення хімічного складу його емісійно-активної речовини, що призводить до зменшення автоелектронної складової загального анодного струму. Зростання напруженості електричного поля також нівелює вплив температури на активність зразків, що досліджувалися.

2. Поведінка ВАХ Sc-Ba МПЕ зі зростанням температури при сталій напруженості електричного поля вказує на відновлення хімічного складу емісійно-активної речовини та на відновлення термо-автоелектронного характеру емісії.

Подяки

На завершення колектив авторів висловлює щиру подяку співробітникам Інституту проблем матеріалознавства імені І.Ф. Францевича НАН України доктору техн. наук Панічкіній В.В. та канд. техн. наук Гетьман О.І. за люб'язно надані зразки для досліджень.

Список використаних джерел

1. Елисон М.Н., Васильев Г.Ф. Автоэлектронная эмиссия. // – Москва: "Государственное издательство физ.-мат. литературы", 1958. – 273 с.
2. Haiqing Yuan, Xin Gu, Kexin Pan, Yiman Wang, Wei Liu, Ke Zhong, Jinshu Wang, Meiling Zhou, Ji Li. Characteristics of scandate-impregnated cathodes with sub-micron scandia-doped matrices. // Appl. Surf. Sci. – 2005. – 251. – P. 106 – 217.
3. Бех І.І., Дмитришин О.А., Ільченко В.В., Лушкін О.Є., Присяжний В.В. Особливості механізму емісії скандатних металевопористих емітерів. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – 4. – С. 269 – 274.
4. I.I. Bekh, A.A. Dmytryshyn, V.V. Il'chenko, A.E. Lushkin, A.V. Stavnichuk. The features of I-V curves of the Sc-Ba dispensed emitters with the Re-W matrix. // Proceedings of the III International conference "Electronics and Applied Physics". – 2007. – P. 56 – 57, Kiev, Ukraine
5. V.F. Shnyukov, G.E. Chaika, G.Ya. Pikus. Surface Composition of Binary Ionic Crystals: Correlation Between Evaporation and Electronic Processes. // Progr. in Surf. Sci. – 1996. – 51. – № 3. – P. 175 – 231.

Надійшла до редколегії 28.11.08

УДК 621.382

Ільченко В.В., д.ф.-м.н., проф., Присяжний В.В.,
студент, Гордієнко С.О., студент

Дослідження систем з гетеропереходом p-Si / наноструктурована плівка SnO₂

Розглядаються властивості структур наноструктурована плівка SnO₂ – кремній з різною товщиною адсорбційно-активного шару. Експериментально отримана немонотонна залежність зміни висоти потенціального бар'єру з наявністю максимуму. Для пояснення залежності, що спостерігається розглядаються механізми проходження струму крізь плівку, що утворює гетероструктуру. Показано, що при ваговій товщині плівки 30 нм в ній міститься найбільша кількість пасток.

Ключові слова: сенсор, адсорбційно-активний шар, чутливість.

E-mail: gordienko@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Левитський С.М.

Вступ

В багатьох задачах сучасної сенсорики постає питання про необхідність інтеграції на одному чипі пристрою обробки інформації і сенсорної системи. Такий пристрій може "відчувати" і аналізувати параметри зовнішнього середовища (температура, тиск, електричне або магнітне поле, склад газового середовища або наявність певної компоненти тощо). В науковій літературі інтегровані сенсорні системи у поєднанні з мікроелектронним пристроєм дістали назву smart sensor [1].

Якщо розглянути більш визначену область сенсорики, а саме твердотільну газову сенсоріку, то основними проблемами в ній є вивчення фізичних принципів, які обумовлюють чутливість і селективність адсорбційно-активної поверхні, що може слугувати чутливим елементом сенсорної системи.

На сьогоднішній день в науковому світі проводяться дослідження багатьох поверхнево бар'єрних систем, які можуть стати базовими для створення газових сенсорів типу smart sensor [5,6]. Серед усіх елементів виділяють системи з плівками оксиду олова. Основними перевагами саме SnO₂ є: 1) висока поруватість плівок; 2) можливість управління селективністю системи введенням каталітичних домішок. Наприклад, в

V.V. Il'chenko, Ph.D., prof., V.V. Prysiashnyi,
student, S.O. Gordienko, student

Investigation of the systems with hetero- junction p-Si / nanostructured film SnO₂

The properties of the structures nanostructured SnO₂ film - silicon for different thickness of adsorption-active layer were investigated. Nonmonotonic dependence of the potential barrier height was got. For explanation of the noted dependence the mechanisms of the current transport through the adsorption-active layer was considered. It was shown that at the mass thickness 30 nm of the film SnO₂ it is contained maximum traps.

Key Words: sensor, adsorption-active layer, sensing.

роботах [7-10] досліджується чутливість таких систем до певних газових середовищ.

Однією з нерозв'язаних проблем цієї області є аналіз механізмів впливу змін складу газового середовища на формування функціонально важливого сигналу приладу. В напівпровідникових сенсорних структурах вплив оточуючого середовища обумовлюється змінами параметрів, що характеризують адсорбційно-активний шар та змінами у проходженні струму через нього. Саме тому, метою роботи є аналіз механізмів проходження струму та впливу структури адсорбційно-активного шару на формування електрофізичних параметрів гетероструктури в залежності від товщини шару SnO₂.

Експериментальна частина та отримані результати

У роботі досліджувались експериментальні структури, які були виготовлені методом піролізу аерозолі з розчину 0,2 М дибутилдіацетату олова в ацетилацетате. Схематичний вигляд експериментальної структури наведено на Рис. 1. В якості підкладки було обрано стандартну кремнієву пластину КДБ - 4 Ом·см (111). У процесі виготовлення були отримані зразки з товщинами плівки оксиду олова в 4, 7, 15, 20, 30 та 110 нм. Товщина плівок контролювалась параметрами технологічного процесу і фактично

являла собою вагову товщину плівки. Омичний контакт виготовляли шляхом термічного вакуумного напорошення нікелю (товщиною 0,1 мкм) на попередньо шліфовану зворотню поверхню пластини Si. З боку плівки SnO_2 таким же методом через маску були нанесені золоті контакти площею 50 мкм^2 і товщиною 300 нм.

Нами були досліджені електрофізичні параметри вольт-амперних характеристик (ВАХ) експериментальних зразків у межах напруг від -3 В до 3 В. Типовий вигляд ВАХ у напівлогарифмічному масштабі наведено на Рис. 2. Характеристики для всіх структур мають типовий випростуючий характер, при цьому знак випростування відповідає випростуванню на потенціальному бар'єрі області просторового заряду (ОПЗ) кремнію. Кількісно ВАХ для прямої і зворотної гілок характеризуються параметрами $\alpha = \frac{d \ln I}{dV}$ та $\alpha^* = \frac{d \ln I_m}{dV}$. Для гетероструктури p-Si/ SnO_2 ці параметри склали

$\alpha = 9-3,5 \text{ В}^{-1}$ та $\alpha^* = 0,9-1,3 \text{ В}^{-1}$ для товщин плівки в межах від 7 до 110 нм відповідно.

Як видно з Рис. 2 та наведених значень α , загальний вигляд ВАХ має характерний вигляд для неідеальних контактних структур з бар'єром Шоткі [1]. Струм в таких структурах, у першому наближенні, може бути описаним наступним виразом:

$$i = i_s \cdot (e^{\frac{eV_1}{kT}} - e^{-\frac{eV_1}{kT}}) \quad (1)$$

Тут i_s – струм насичення, V_1 – напруга, що падає на адсорбційно-активного шару (у нашому випадку до наноструктурованої плівки оксиду олова), V_2 – напруга, яка падає на ОПЗ.

Прикладена до структури напруга (V) розподіляється між областю просторового заряду (V_2), плівкою оксиду олова (V_1), об'ємною областю (V_h) напівпровідника та на контактах ($V_{\text{конт}}$). Так, справедливе співвідношення:

$$V = V_1 + V_2 + V_h + V_{\text{конт}} \quad (2)$$

Величинами опорів омичних контактів на плівці можна знехтувати. Оцінка величини опору об'ємної області дає величину порядку 0,1 Ом. При струмах одиниць мА отримуємо малі величини напруг у порівнянні з одиницями вольт, які можна врахувати.

Для ВАХ у наближенні надбар'єрного струму були отримані величини висоти бар'єру на межі оксид олова – кремній. У цьому наближенні, залежність висоти бар'єру від масової товщини плівки наведена на Рис. 3. Як видно з Рис. 3 залежність висоти бар'єру від товщини плівки не є монотонною, а має максимум при товщинах $\approx 30 \text{ нм}$.

Для того, щоб знайти падіння напруги на плівці SnO_2 скористаємось порівнянням властивостей ідеального контакту метал – напівпровідник (Рис. 2 а) та контакту кремній – широкозонний напівпровідник (Рис. 2 б), у ролі якого виступає наноструктурована плівка оксиду олова.

Значення напруги V_1 може бути знайдене як різниця між ідеальною ВАХ контакту метал – напівпровідник та реальною ВАХ. У випадку прямого зміщення – це різниця напруг між реальною та ідеальною ВАХ (для сталого струму). Для зворотної характеристики значення напруги, яка падає на плівці, обчислюється за наступною формулою:

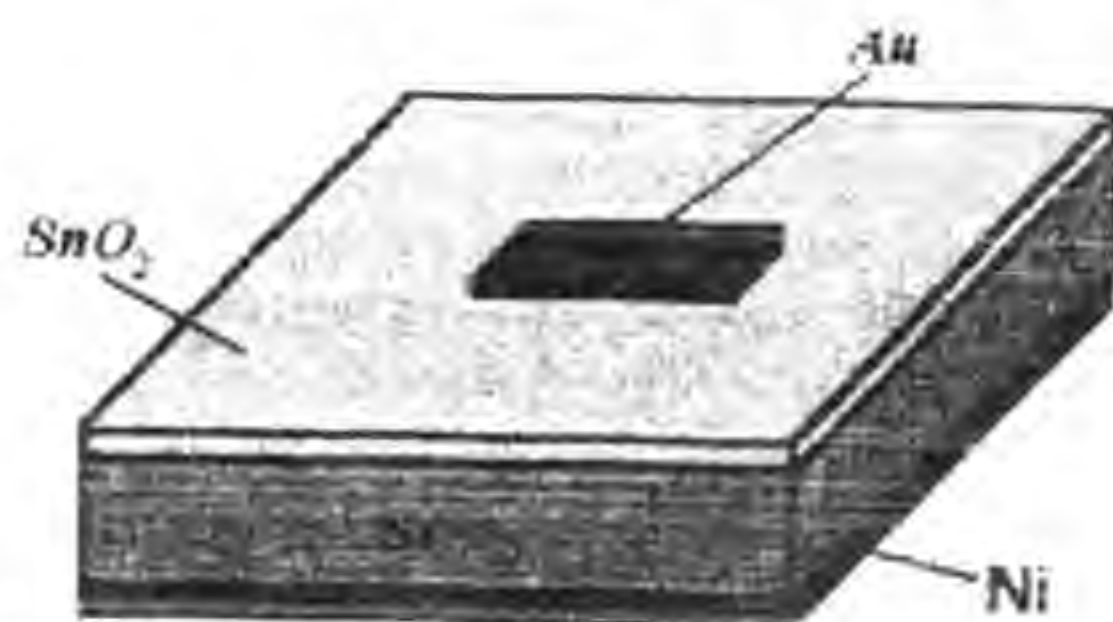


Рис. 1. Схематичний вигляд експериментальних структур p-Si/ SnO_2 .

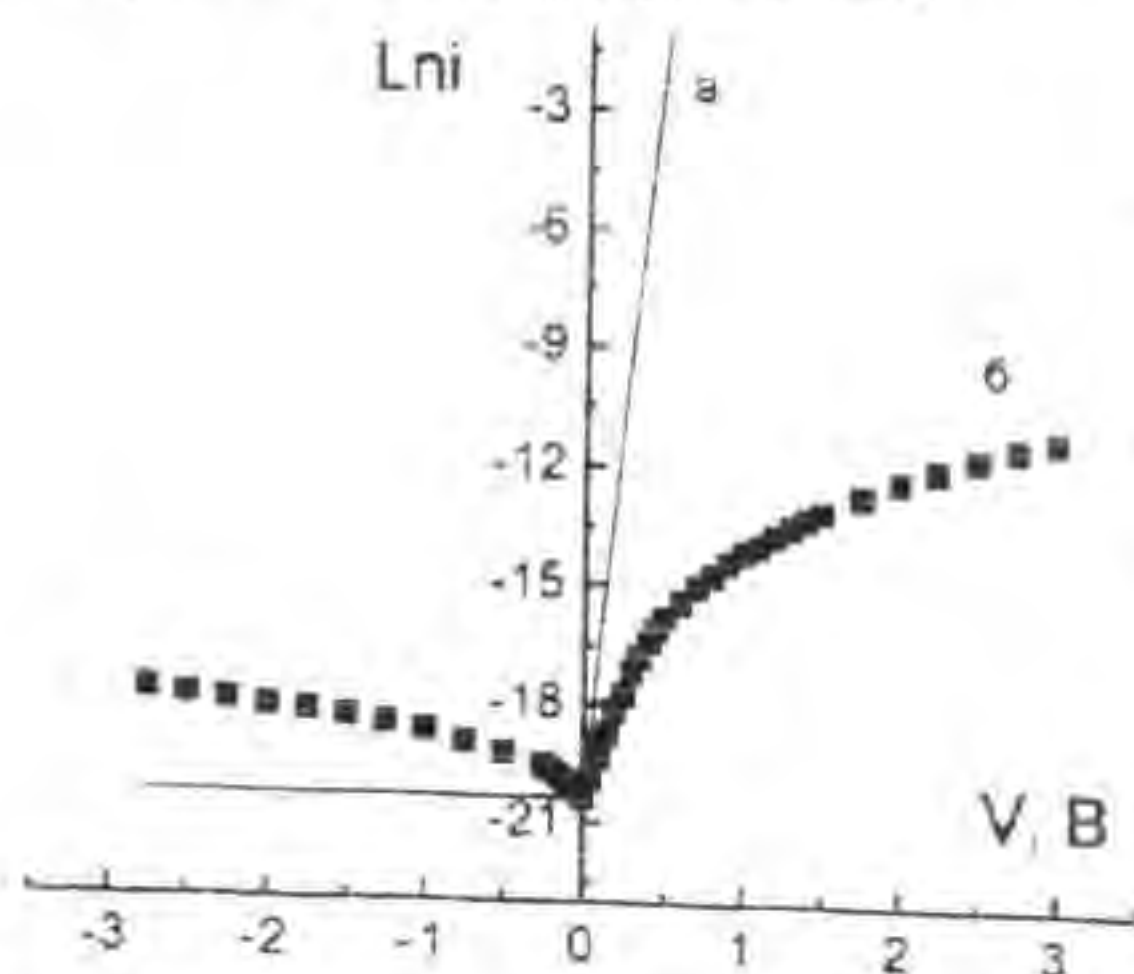


Рис. 2. Типова ВАХ гетероструктури p-Si/ SnO_2 для товщини адсорбційного шару 7 нм. а – теоретична ВАХ ідеального контакту метал-напівпровідник; б – експериментальна ВАХ.

$$V_1 = \frac{kT}{e} \ln\left(1 - \frac{i_{\text{exp}} - i_{\text{theor}}}{i_s}\right) \quad (3)$$

Тут i_{exp} – експериментальні значення струму для певного значення сумарної напруги, а i_{theor} – описується співвідношенням для ідеального контакту метал – напівпровідник (4).

$$i_{\text{theor}} = \bar{i}_s \cdot (e^{\frac{eV_1}{kT}} - 1) \quad (4)$$

Таким чином, було визначено значення величин напруги, яка падає на плівці SnO_2 . На Рис. 4-6 наведені ВАХ для наноструктурованої плівки SnO_2 (залежності $\lg(i) = f(\lg V_1)$) для позитивних значень напруг.

Обговорення отриманих результатів

Величина бар'єру на границі гетеропереходу зумовлюється як контактуючими матеріалами, так і величиною заряду в плівці SnO_2 . Оскільки усі зразки виготовлялись в однакових умовах, то логічним поясненням наявності максимуму буде величина заряду, що накопичується в плівці SnO_2 .

Як показали дослідження на атомно-силовому мікроскопі (Рис. 7), плівки оксиду олова мають острівцеву структуру. Це означає, що при товщинах, які використані в наших дослідженнях, плівки оксиду олова ростуть за механізмом Странского-Крастанова. Кількість і величина острівців змінюється по мірі збільшення вагової товщини плівки по якісно зрозумілому закону. Із збільшенням вагової товщини кількість і розмір острівців спочатку зростає. Але, починаючи з товщини 20 нм, кількість острівців практично не змінюється. З подальшим збільшенням вагової товщини деякі острівці починають зливатися один з одним.

Ці зміни у морфології відображаються у змінах електронної структури. З Рис. 4-6 можна зробити висновок, що у плівці SnO_2 переважають інжекційні струми, обмежені просторовим зарядом (СОПЗ) [2]. Оскільки плівка оксиду олова при товщинах, які використовуються в дослідженнях, є сильно пористою, то можна очікувати, що частина об'ємних пасток виходить на поверхню. У таблиці 1 представлені дані щодо значень точок перегину, показника

$\frac{\Delta \lg(I)}{\Delta \lg(V_1)}$, який характеризує нахил кривої в області СОПЗ у плівці. Значення $\frac{\Delta \lg(I)}{\Delta \lg(V_1)}$ вказує на те, що в плівці SnO_2

присутні лише неглибокі пастки. Для товщин 7, 15, 20, 110 нм при збільшенні напруги виникає

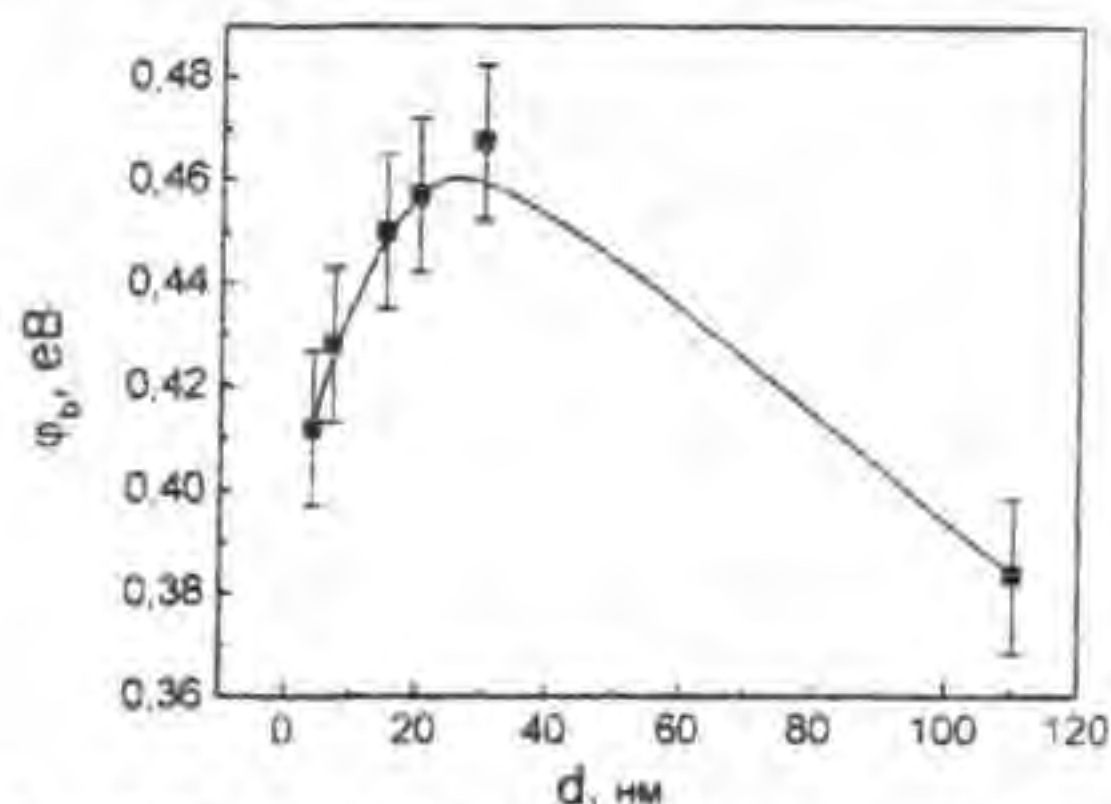


Рис. 3. Залежність висоти бар'єру від товщини адсорбційної плівки SnO_2

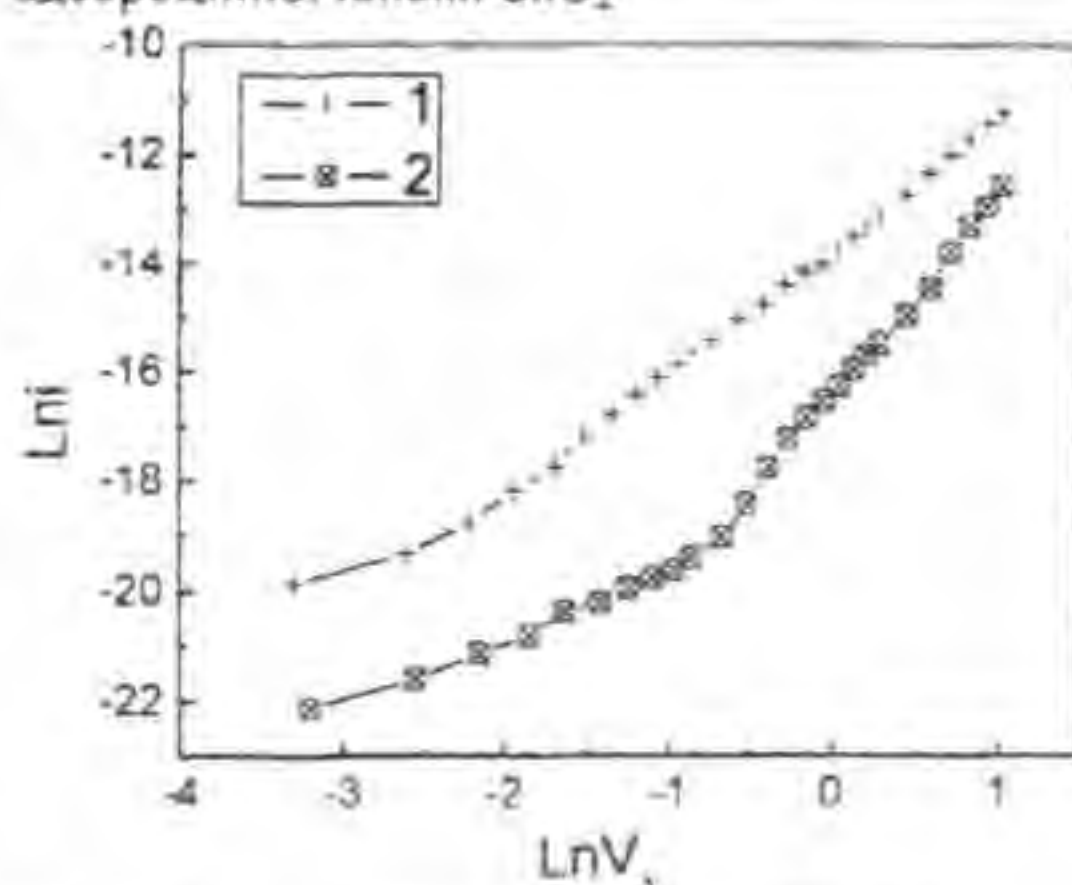


Рис. 4. Залежність логарифму струму від логарифму падіння напруги на адсорбційній плівці SnO_2 , при товщині плівки 1-4 нм, 2-30 нм.

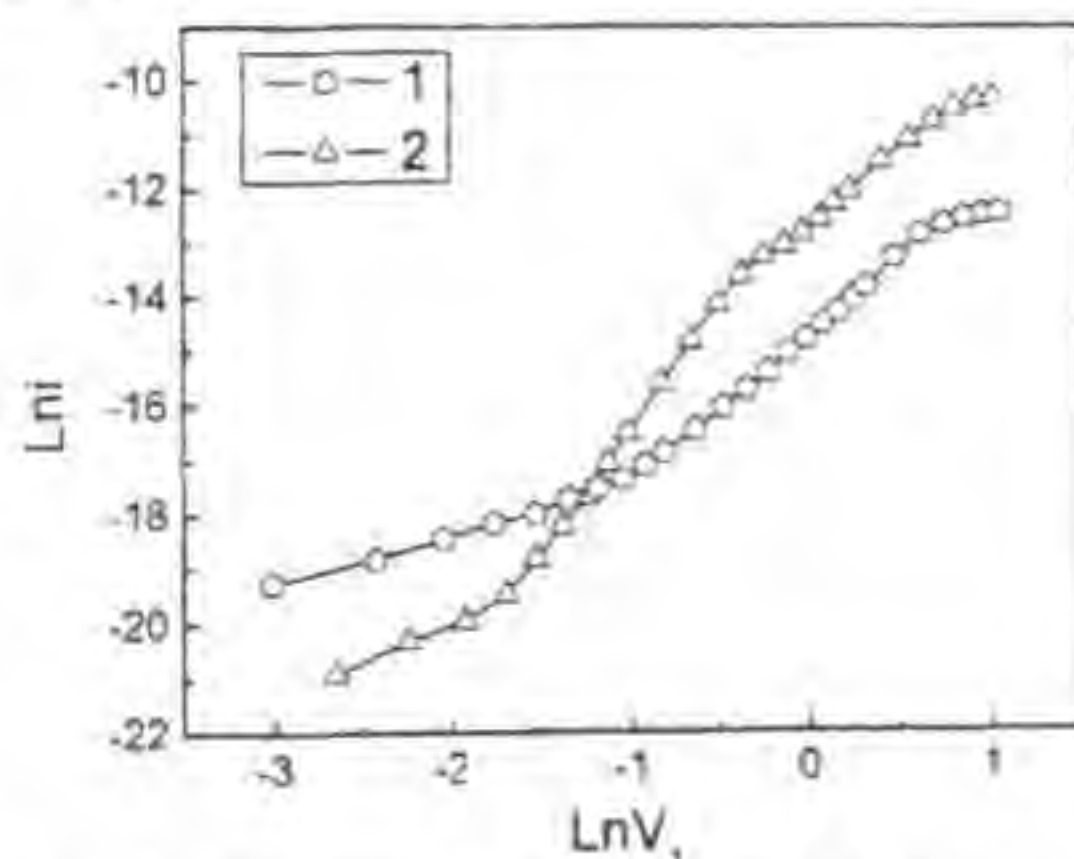


Рис. 5. Залежність логарифму струму від логарифму падіння напруги на адсорбційній плівці SnO_2 , при товщині плівки 1-110 нм, 2-20 нм

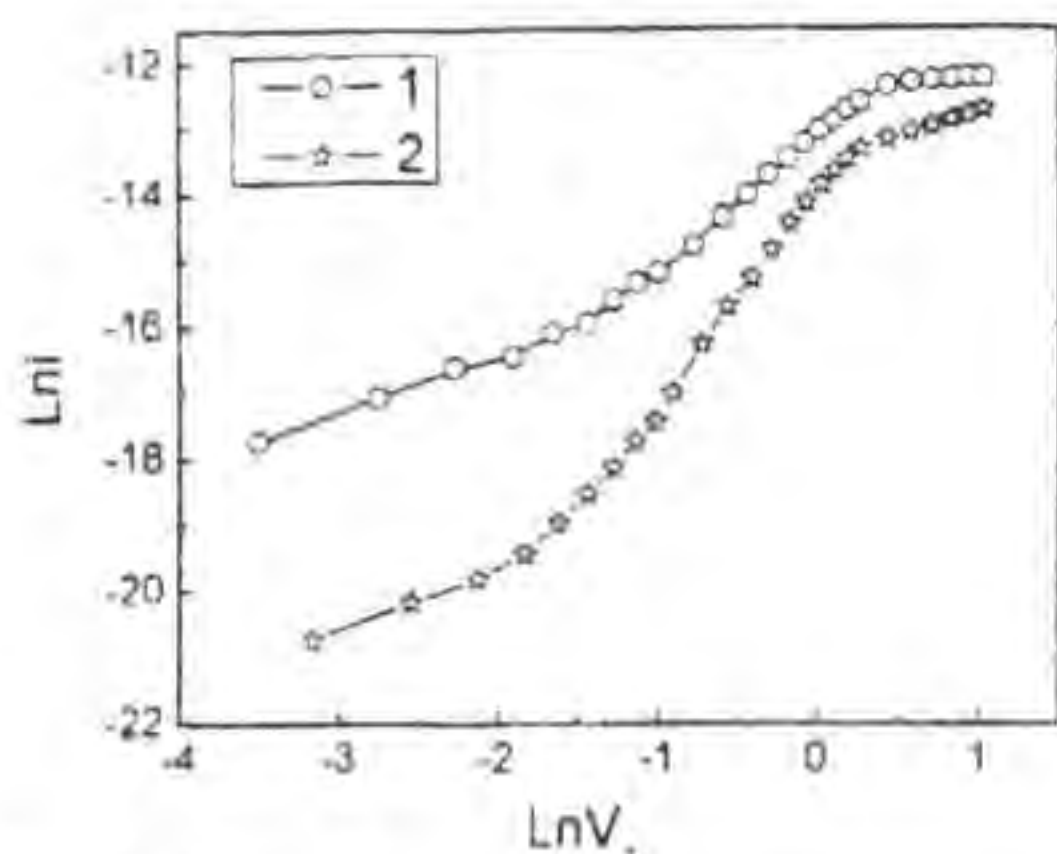


Рис. 6. Залежність логарифму струму від логарифму падіння напруги на адсорбційній плівці SnO_2 при товщині плівки 1 - 15 нм, 2 - 7 нм.



Рис. 7. Зображення поверхні p-Si/ SnO_2 для товщини плівки SnO_2 7 нм за допомогою атомно-силового мікроскопа.

Таблиця 1

Значення напруг точок перегину та крутості в областях де струм протікає за законом Ома і в умовах обмеження просторовим зарядом характеристик для зразків гетероструктур SnO_2 -p-Si при $V > 0$ та різних товщина плівки SnO_2 .

Товщина плівки SnO_2 , нм	Точка перегину, V_p , В	$\Delta \text{Lg}(I) / \Delta \text{Lg}(V_1)$ в області виконання закону Ома	$\Delta \text{Lg}(I) / \Delta \text{Lg}(V_1)$ в області СОПЗ
4	0,0018	1,1	2,55
7	0,024	0,972	3,22
15	0,026	1,224	2,02
20	0,03	1,56	3,54
30	0,154	1,22	3,77
110	0,085	1,02	2,88

друга точка перегину. Нахил прямої, яка спостерігається після цієї точки перегину відповідає випадку коли всі пастки заповнені, і струм стає таким як у зразку без пасток. Для товщини 30 нм друга точка перегину відсутня. Це означає, що пастки не встигли повністю заповнитися.

Лінійна ділянка що відповідає закону Ома присутня для всіх товщин адсорбційного шару. Напруга V_p при якій відбувається перехід від лінійної ділянки закону Ома до ділянки СОПЗ пропорційна до кількості центрів захоплення носіїв заряду. Як видно з таблиці 1 найбільше значення V_p спостерігається для плівки з товщиною 30 нм, а це означає, що при даній товщині плівки вона міститиме максимальну кількість пасток. З цієї точки зору можна пояснити екстремум потенційного бар'єру на

поверхні гетероструктур із товщиною плівки оксиду олова 30 нм. У відсутності прикладеної напруги величина поверхневого заряду для такої системи буде максимальною. Це спричинятиме найбільший вигин зон і, відповідно, призводитиме до утворення потенційного бар'єру з максимальним значенням у порівнянні з іншими досліджуваними структурами.

Потрібно зазначити, що оскільки плівка SnO_2 є неупорядкованим напівпровідником то можна очікувати поведінку провідності характерну для такої системи. А саме, згідно [3] припускається існування трьох головних механізмів провідності: по делокалізованим станам, стрибкова по локалізованим станам у хвостах густини станів, стрибкова по локалізованим станам поблизу рівня Фермі. В останніх двох випадках провідність залежить від частоти прикладеного сигналу.

Висновки

У результаті проведених досліджень встановлена оптимальна товщина адсорбційної плівки $d = 30$ нм при якій присутня максимальна кількість пасток. Це означає, що газовий датчик з такою товщиною адсорбційного шару SnO_2 буде характеризуватися найбільшою чутливістю (при всіх інших однакових умовах). Таким чином, у випадку нанорозмірних систем розмір систем є

одним з головних факторів який визначає її фізичні властивості. У випадку гетероструктури нанорозмірна плівка оксид олова – кремній товщина плівки визначає структуру та кількість пасток носіїв заряду. Скоріш за все це пов'язано з переходом у морфологічній структурі: від окремих острівців до суцільної плівки.

Список використаних джерел

1. Стриха В.И. Контактные явления в полупроводниках. – Київ: Вища школа, 1982. – 223 с.
2. Ламперт М., Марк П. Инжекционные токи в твердых телах. – М.: Мир, 1973. – 416 с.
3. Киселев В.Ф., Крылов О.В. Электронные явления в адсорбции и катализе на полупроводниках и диэлектриках. – М.: Наука, 1979. – 233 с.
4. Волькенштейн Ф.Ф. Электронные процессы на поверхности полупроводников при хемосорбции. – М.: Наука, 1987. – 431.
5. Бомк О.Й. Газова чутливість поверхнево – бар'єрних структур на основі кремнію, арсеніду галію та сульфіді кадмію з надтонкими плівками титану та нікелю. // Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук, УДК 537.311.322 – Київ, 2000. – 122 с.
6. Васильев Р.Б., Гаськов А.М., Румянцев М.Н., Рыжиков А.С., Рябова Л.И., Акимов Б.А. Свойства гетероструктур диодного типа на основе нанокристаллического p-SnO_2 на p-Si в условиях газовой адсорбции // ФТП – 2000. – 4, №8 – с. 993-997.
7. Акимов Б.А., Албул А.В., Гаськов А.М., Ильин В.Ю., Лабо М., Румянцев М.Н., Рябова Л.И. Сенсорные свойства по отношению к сероводороду и электропроводность поликристаллических пленок $\text{SnO}_2(\text{Cu})$ // ФТП – 1997. – 31, №4 – с. 400-404.
8. Васильев Р.Б., Дорофеев С.Г., Румянцев М.Н., Рябова Л.И., Гаськов А.М. Импеданс-спектроскопия ультрадисперсной керамики SnO_2 с варьируемым размером кристаллита // Физика и техника полупроводников – 2006 – 40, №1 – с.108-111.
9. Jinhuai Liu et al. H_2S Detection sensing characteristics of CuO/SnO_2 sensor. // Sensors – 2003. – 3 – P. 110-118.
10. Ménini P., Parret F., Guerrero M., Soullantica K., Erades L., Maisonnat A., Chaudret B. CO response of a nanostructured SnO_2 gas sensor doped with palladium and platinum. // Sensors and Actuators B: Chemical, 103, Issues 1-2, 29 September 2004. – P. 111-114.
11. Zee F., Judy J. Micromachined Mems chemical gas sensor using a polymer based array // Digest of Technical Papers (Transducers '99) 10th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, Sendai, Japan – June 7-10, 1999. – P. 680-683.
12. Il'chenko V.V., Kravchenko A.I., Telega V.M., Chehun V.P., Gaskov A.M., Grinchenko V.T. Frequency dependence of the second derivative of the current - voltage characteristic of the heterostructure $\text{SnO}_2\text{-Si}$ at the gas adsorption. // Book of abstracts Second IEEE International Conference Sensors, Toronto, Canada – October 22-24, 2003, P.567-568.

Надійшла до редколегії 28.11.08

УДК 533.9

Kravchenko O.Yu., Ph. D., docent, Levada
G.I., engineer, Lisitchenko T.Y., head of laboratory

Ion Energy Distributions in SiH_4 RF Discharges

In this paper we study ion energy distributions functions (IEDFs) within an rf sheath with dust particles in SiH_4 radio-frequency discharges and compare results with ones in Ar rf discharges. The simulations are carried by PIC/MCC method over a wide range of pressure, dust density and dust radius. Our model includes electron-neutral collisions, various kinds of collisions of ions with neutrals, positive-negative ion collisions.

Results of calculations show that IEDFs for positive ions SiH_4^+ in silane rf-discharge essentially differ from IEDFs for positive ions in Ar discharges. Ions near electrodes get greater energy in electronegative discharge in consequence of inessential charge exchange processes in the rf-sheath. Peaks of high energy ions are appeared in IEDFs, which are caused by significant decreasing of the radio-frequency sheath width and the ratio of ion penetrating time through sheath to the radio-frequency discharge period. Results of calculations show that big dust particles slow down ions in rf-sheaths, but the presence small dust particles can increase energy of ions. It is explained by the increasing of the potential drop near electrode.

Key Words: dusty plasma, radio frequency discharge, computer simulation.

О. Ю. Кравченко, кандидат фіз.-мат. наук,
доцент, Г.І. Левада, інженер, Т.Є. Лиситченко,
завідувач лабораторії

Розподіли іонів за енергією в РЧ розрядах в SiH_4

В цій роботі ми досліджуємо функції розподілу іонів за енергією в приелектродному шарі з пиловими частинками в смісному радіочастотному розряді в силані та порівнюємо результати з результатами одержаними в аргоновому розряді. Моделювання виконувалось за допомогою PIC/MCC методу для широкого діапазону тиску, концентрації та радіусу пилових частинок. Наша модель включає зіткнення електронів з нейтралами, різні види зіткнень іонів з нейтралами, зіткнення позитивних та негативних іонів.

Результати обчислень показали, що функції розподілу іонів за енергією для позитивних іонів SiH_4^+ в силановому РЧ розряді відрізняються від функцій розподілу іонів в аргоновому розряді. Іони біля електрода одержують більшу енергію в електронегативному розряді внаслідок несуттєвої ролі процесів обміну зарядом в цих розрядах. В іонних функціях розподілу з'являються піки, які пов'язані зі значним зменшенням ширини радіочастотного приелектродного шару і відношення часу прольоту іонів через приелектродний шар до періоду розряду.

Ключові слова: запорошена плазма, радіочастотний розряд, комп'ютерне моделювання.

*E-mail: kay@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Introduction

High density plasma sources are widely studied due to their growing use in semiconductor manufacturing and fabrication. In processing plasmas, it is well known that the ion energy arriving at the substrate is crucial in etching and deposition rates of the film. This explains the extensive experimental [1,2] and numerical [3,4] studies of the ion-energy distribution function (IEDF) in capacitively coupled radio frequency reactors. In general, the motion of the ions as well as the ion distribution functions are determined by the

spatiotemporal variations of the sheath electric field and the collisions the ions undergo while traversing the sheath. Dust particles can appear in sheaths of rf discharges as the product of the plasma-wall interaction or can be created due to coagulation of various components in chemically active plasmas. It is known [1,2] that the dust particles can essentially influence the parameters of the rf discharges due to a continuous selective collection of background electrons and ions that can essentially influence their energy distribution functions.

Analytical models assume limiting approximations such as constant sheath width, sinusoidal sheath potential drop, and therefore give only qualitative features of the IEDF. Because of the complexity of rf sheath dynamics, most calculations of IEDFs rely on numerical methods.

In the present paper we discuss IEDFs within an rf sheath both in Ar discharges and in SiH_4 discharges with dust particles. The simulations are carried out over a wide range of pressure, dust density and dust radius.

Model

A one-dimensional RF discharge is considered between two plane electrodes separated by a gap of d , which is filled with Ar or SiH_4 at various pressures. Immobile dust particles of a given radius R_d are distributed uniformly in the interelectrode gap with a density N_d . The dust particles collect and scatter electrons and ions distributed in the discharge with density n_e and n_i , respectively. A harmonic external voltage $V_e(t) = V_0 \sin(\omega t)$ at a frequency $f = 13.56$ MHz and various amplitudes V_0 sustains the RF discharge. The discharge is grounded at $x = d$.

The PIC/MC method is based on a kinetic description of the particle motion in velocity position space. Positive and negative 'superparticles' move in the self-consistent electric field they generate. The electric field is obtained by solving the Poisson equation. A Monte Carlo formalism is used to describe the effect of collisions. The displacement between collisions is ruled by Newton's law.

The PIC/MCC method described in detail earlier for discharges without dust particles [3] is developed for computer simulations of the RF discharge with dust particles [5]. The Monte Carlo technique is used to describe electron and ion collisions. The collisions include elastic collisions of electrons and ions with atoms, ionization and excitation of atoms by electrons, charge exchange between ions and atoms, Coulomb collisions of electrons and ions with dust particles, as well as the electron and ion collection and scattering by dust particles.

In addition to a usual PIC/MCC scheme, the weighting procedure is used also for the determination of a superparticle charge part, which is interacting with a dust particle.

There are three kinds of charged particle in our model of SiH_4 discharge (electrons, positive ions SiH_4^+ and negative ions SiH_3^-) and two kinds of charged particle in the model of Ar discharge (electrons and ions Ar^+).

We include following reactions caused by electron and ion impact in our code at the simulation of the rf discharge in SiH_4 [6]:

- elastic collisions,
- vibrational excitation $\text{SiH}_4 + e \rightarrow \text{SiH}_4^{(13)} + e$,
 $\text{SiH}_4 + e \rightarrow \text{SiH}_4^{(24)} + e$,
- attachment $\text{SiH}_4 + e \rightarrow \text{SiH}_3^- + \text{H}$,
- dissociation $\text{SiH}_4 + e \rightarrow \text{SiH}_3^- + e + (4-n)\text{H}$,
- ionization $\text{SiH}_4 + e \rightarrow \text{SiH}_3^+ + 2e + \text{H}$,
- recombination $\text{SiH}_3^+ + \text{SiH}_3^- \rightarrow \text{SiH}_2 + \text{SiH}_2$.

Ion-neutral elastic collision cross sections are obtained according to the Langevin formula. The total number of ion-ion recombination in the discharge is obtained from the integral of the product of the recombination rate coefficient and the ion density profiles. The recombination event is attributed to the negative ion; it recombines with the nearest positive ion. We focus on the energy dissipation, IEDF and ion flux to the wall but not on the details of chemical reactions. Chemical reactions are not included in our code.

Simulation results

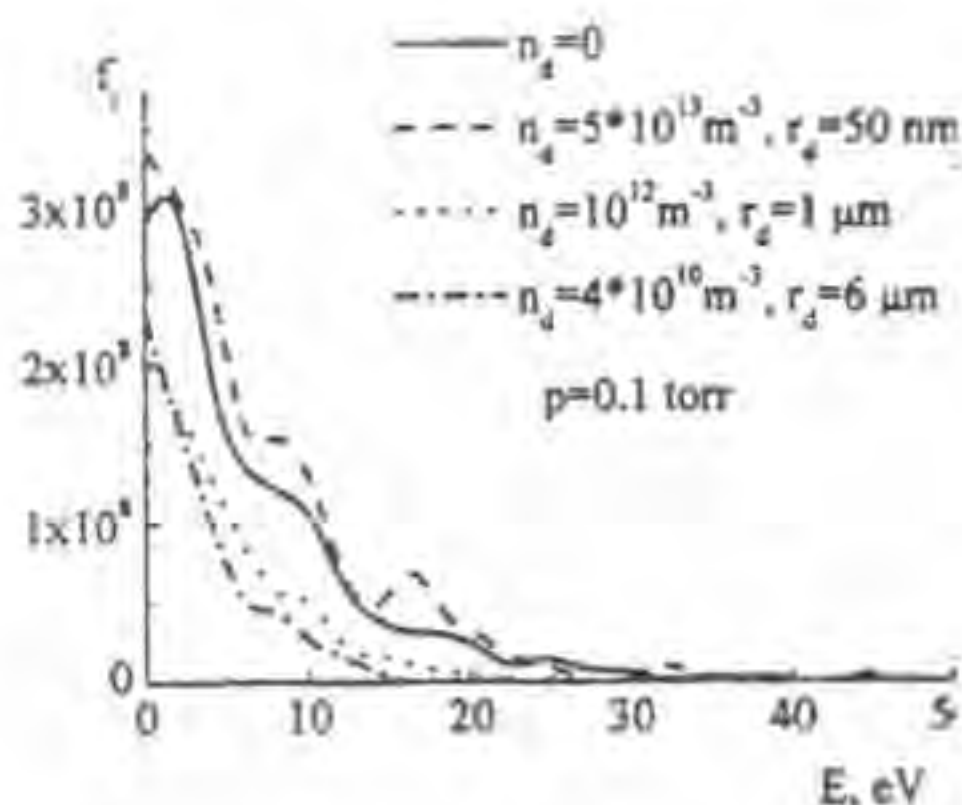


Fig.1 Computed IEDFs for Ar discharges at pressure $p=0.1$ torr.

In this paper we present results for argon and silane discharges with dust particles, as well as without ones. Calculations are performed at some values of the dust density, dust particle radius, the neutral gas pressure and the interelectrode distance. The frequency and amplitude of the radio-frequency voltage were $\omega = 13.56$ MHz, $V_0 = 150$ V.

Figure 1 shows ion energy distribution functions for Ar^+ in rf-sheaths at pressure $p=0.1 \text{ torr}$. Various curves correspond to various dust densities and dust radii. It is seen that big dust particles slow down ions in rf-sheaths, but the presence small dust particles can increase energy of ions (case with dust radius $r_d = 50 \text{ nm}$ and dust density $n_d = 5 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$). It is explained by the increasing of the potential drop near electrode. Furthermore, some peaks are appeared in IEDFs for case with dust radius $r_d = 50 \text{ nm}$ and dust density $n_d = 5 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$. The reason of these peaks is the decreasing of the sheath width and, therefore, the decreasing of ion penetrating time through sheath τ_i .

In figure 2 are pictured IEDFs for positive ions SiH_3^+ in silane rf-discharge at various pressures. It is seen the appearance of peaks of high energy ions, which are caused by significant increasing plasma potential in the electronegative discharge. The increasing of a gas pressure is caused the shift peaks towards to an energy decreasing. The increasing of the dust grain radius causes the decreasing of the ion flow on the wall.

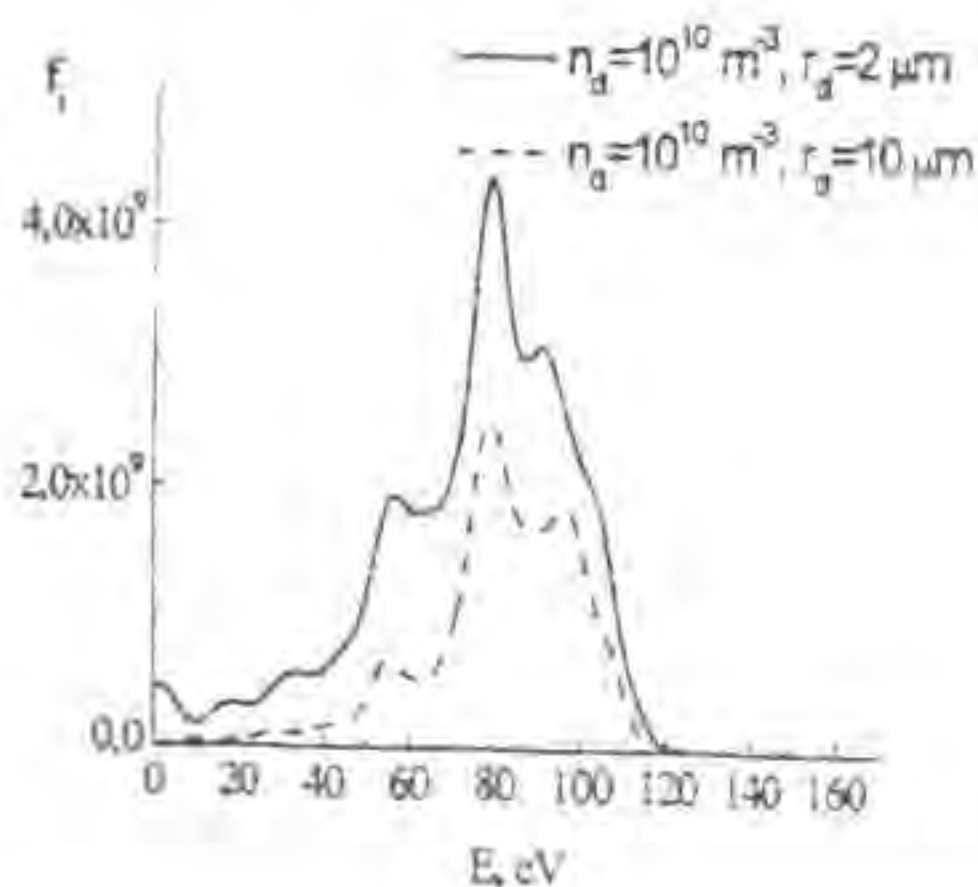


Fig.2 Computed IEDFs for SiH_3^+ ions in silane discharges at pressure $p=0.1 \text{ torr}$ and $p=0.3 \text{ torr}$.

Peaks of high energy ions are appeared in IEDFs, which are caused by significant decreasing of the radio-frequency sheath width and the ratio of the ion penetrating time through sheath to the radio-frequency discharge period.

In fig.3 phase portraits of ions Ar^+ , SiH_3^+ and SiH_2^+ are presented. It is significant, that ions near electrodes get greater energy in electronegative discharge, than in electropositive one. This result is due to the inessential role of charge exchange

processes in the rf-sheath in electronegative discharges. We can see that ion flows are appeared in the central region of the Ar discharge with dust particles. This phenomenon is determined by layer-like dust structures [7]. Negative ions have much more energy in this region than positive ones.

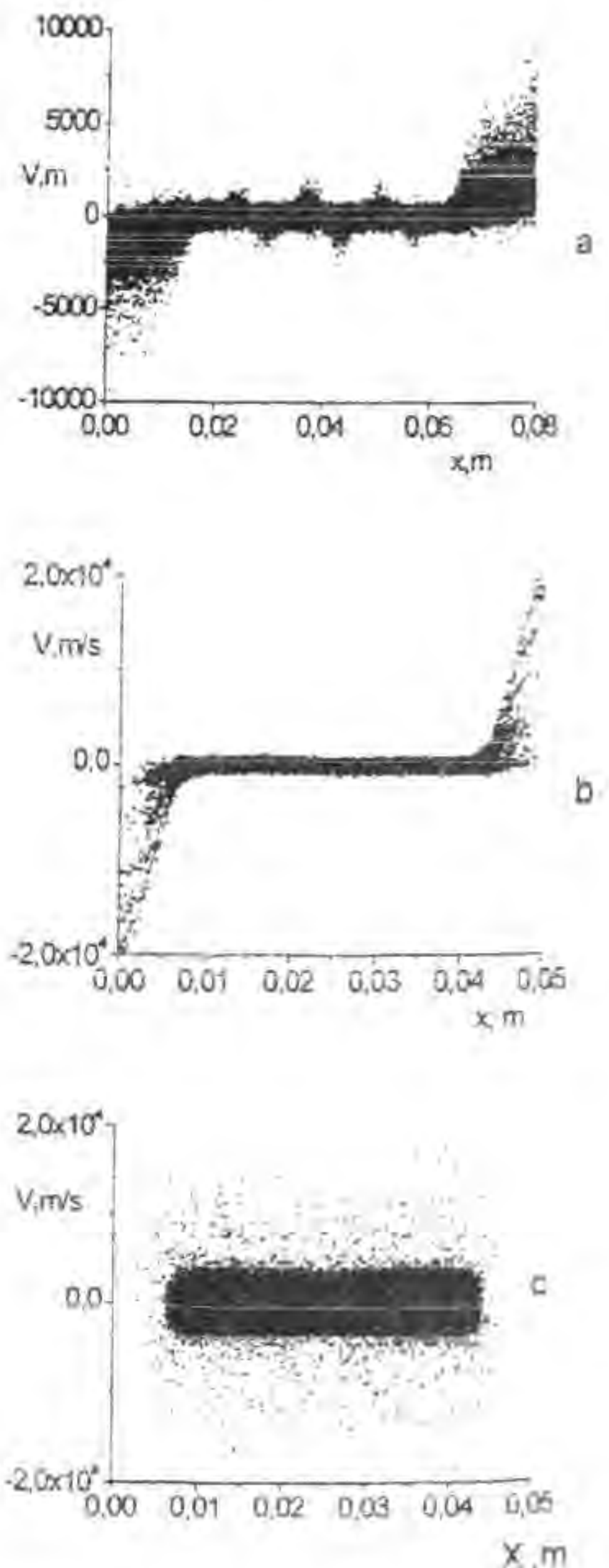


Fig.3 Phase portrait of ions:
a) - Ar^+ , b) - SiH_3^+ , c) - SiH_2^+ at
 $n_d = 4 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$, $r_d = 6 \text{ μm}$.

Results of calculations show that big dust particles slow down ions in rf-sheaths, but the presence small dust particles can increase energy of ions. It is explained by the increasing of the potential drop near electrode.

Comparison of simulation results with analytical calculations in a collisionless rf sheath is discussed.

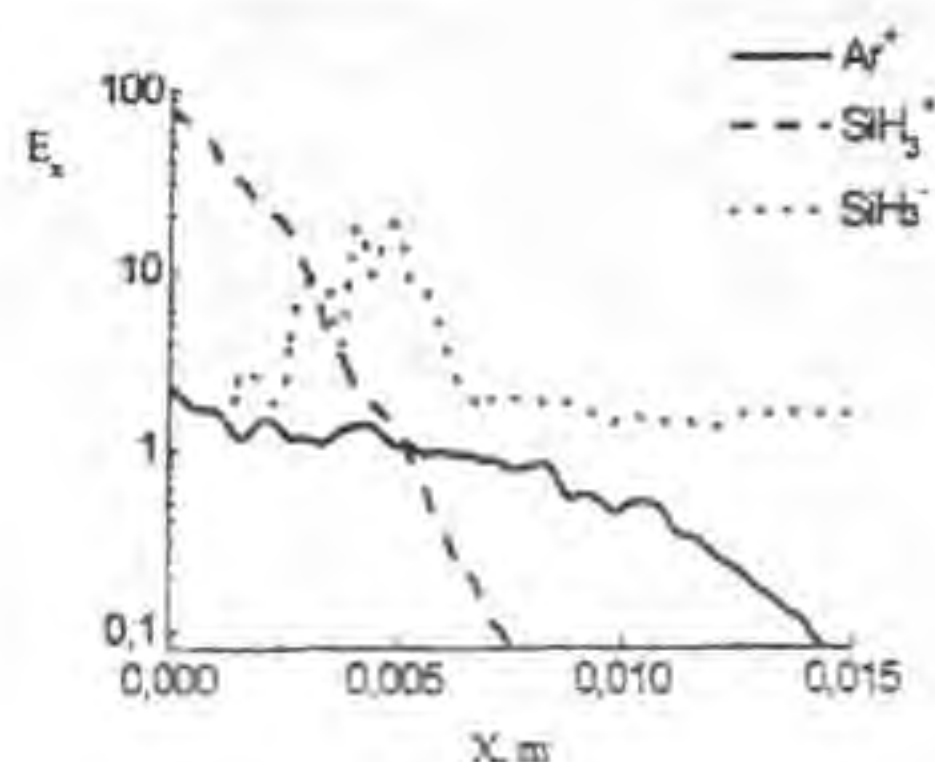


Fig.4 Mean energy of ions in the rf sheath at

Spatial distributions of the time-averaged ion energy near the left electrode are shown in figure 4. As can be seen, the energy of SiH_3^+ is much more bigger than the energy of Ar^+ . Besides, the peak of negative ions energy is situated at the sheath edge. It

References

1. L. Boufendi, A. Bouchoule. Particle nucleation and growth in a low-pressure argon-silane discharge // *Plasma Sources Sci. Technol.* – 1994. –N.3. – P. 262-267.
2. M. Surendra, D.B. Graves, G.M. Jellum. Self-consistent model of a direct-current glow discharge: Treatment of fast electrons // *Phys. Rev. A.* – 1990, 41, N.2. – P. 1112-1126.
3. C.K.Birdsall. Particle-in-cell charged – particle simulations, plus Monte Carlo Collisions with neutral atoms, PIC-MCC // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 1991. –19. – P.65-85.

is confirmed that the reason of the negative ion heating is stochastic heating mechanism.

Conclusions

The evolution of the IEDF at various combinations of pressure, dust density and dust radius has been studied by means of a 1D PIC/MCC model and compared between an electropositive rare gas (argon) discharge and an electronegative molecular gas (silane) discharge.

Results of our simulations show that negative ions are distributed in the central part of the discharge chamber and their mean energy much more than one of positive ions in this place. Dust particles increase the mean energy of negative ions in the discharge. In rf-sheaths of electronegative discharges positive ions are accelerated to bigger energies than in the case of argon discharge. It caused by essential role charge exchange processes in electropositive (argon) discharges. Results of calculations show that big dust particles slow down ions in rf-sheaths, but the presence small dust particles can increase energy of ions. It is explained by the increasing of the potential drop near electrode.

4. V. Vahedi, G.DiPeso, C.K. Birdsall, M.A. Lieberman, T.D. Rognlien // *Plasma Sources Sci. Technol.* – 1993 – N.2. – P. 261-272.
5. Y. Chutov, W. Goedheer, O. Kravchenko, V. Zuz, Yan Min // *J. Plasma and Fusion Research.* – 2001. –N.4. – P. 340-348.
6. M.Yan, W.J.Goedheer. A PIC-MC simulation on the effect of frequency on the characteristics of VHF SiH_4/H_2 discharges // *Plasma Sources Sci. Technol.* –1999. –8. –P.349-354.
7. А.В. Вакуленко, О.Ю. Кравченко. Просторово-періодичні структури в радіочастотних розрядах з пиловими частинками // *Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки.* – 2007. –№1. –С.226-229.

Надійшла до редколегії 1.12.08

УДК 621.385.833

Мельник П.В., канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Находкін М.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
академік НАН,
Федорченко* М.І., канд. фіз.-мат. наук

Формування інтерфейсу Sn/Si(111)-(7x7)

За допомогою методів електронної спектроскопії досліджені зміни структури та електронних властивостей інтерфейсів Sn/Si(111)-(7x7). Встановлено металічний характер поверхні зі структурою Si(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$:Sn імовірно обумовлений напруженнями в її приповерхневій області.

Ключові слова: Sn, Si(111)-(7x7), інтерфейс, поверхневі стани.

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Melnik P.V., Ph.D., prof.,
Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of
Ukraine,
Fedorchenko* M.I., Ph.D.

Formation of the Sn/Si(111)-(7x7) interface

The modification of the structure and electronic properties of the Sn/Si(111)-(7x7) interfaces have been investigated using electron spectroscopy. It is established a metallic character the Si(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$:Sn surfaces probably related with strais in the subsurface area.

Keywords: Sn, Si(111)-(7x7), interface, surface states.

Вступ

Структури нанометрових розмірів, які утворюються на поверхнях Si та Ge при адсорбції чужорідних атомів викликають значний інтерес, обумовлений їх застосуванням в наноелектроніці [1-2]. У багатьох випадках наноструктури виникають внаслідок самоорганізації атомів адсорбату, які потрапляють на підкладку з механічними латеральними напруженнями. Великий інтерес до процесів самоорганізації на поверхні росту в пружньо-напружених гетеросистемах обумовлений можливістю одержання упорядкованих нанооб'єктів без використання складних процесів фото- або електронно-променевої літографії [3].

Адсорбція субмоношарових покриттів атомів Sn на поверхні Si(111) приводить до утворення на ній ряду надструктур ($\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ R30°, $2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$ R30°, 3×3) [4-5]. Утворення тієї чи іншої надструктури обумовлено концентрацією атомів Sn, температурою відпалу та температурою утримання.

Одним із наслідків утворення багатьох надструктур є латеральні напруження в приповерхневій області досліджуваних систем [6-9]. Однак, до цих пір було отримано мало прямих експериментальних доказів зміни величини латеральних напружень при зміні надструктури поверхні [9]. Враховуючи існування поверхневих електронних станів поблизу рівня Фермі, які виникають в результаті латеральних напружень в приповерхневій області при надходженні до поверхні домішкових атомів [8], можна було б допустити взаємозв'язок між появою поверхневих електронних станів поблизу рівня Фермі та їх інтенсивністю з величиною латеральних напружень при адсорбції на поверхню домішкових атомів. При дослідженні електронних властивостей поверхні Si(111)-($\sqrt{3}\times\sqrt{3}$):Sn [7] було встановлено існування поблизу рівня Фермі поверхневих електронних станів, обумовлених присутністю атомів Sn в T₄ місцях на поверхні Si(111). Але жодного припущення про природу цих поверхневих станів в роботі [7] не було зроблено.

© П.В. Мельник, М.Г. Находкін,
М.І. Федорченко, 2008

Метою цієї роботи було проведення експериментального дослідження формування інтерфейсів Sn з кристалічною поверхнею Si(111)-(7x7), дослідження електронної структури валентної зони цього інтерфейсу для прояснення можливого впливу латеральних напружень на електронні властивості наноструктурованих поверхонь.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакумній камері з базовим тиском $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ тор з використанням методик Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 6.0–10,8 eV. В камері містилась іонна гармата для очищення досліджуваної поверхні Ge іонами Ag та система для контрольованого нанесення шарів Sn заданої товщини *in situ*.

Дані ОЕС, ДПЕ та ФЕС дозволяли визначати елементний склад поверхні, її кристалографічну структуру, електронну структуру валентної зони, роботу виходу та величину загину зон. Потік парів адсорбатів отримувався за допомогою джерела Кнурсена, а ступінь покриття поверхні атомами Sn (Θ_{Sn}) визначався за допомогою спеціально проградуйованих кварцових терезів.

Результати експериментів та їх інтерпретація

Очищена та відпалена атомарно чиста поверхня Si(111) завжди мала чітку картину рефлексів 7x7. При поетапному напilenні атомів Sn на таку поверхню при кімнатній температурі з ростом Θ_{Sn} рефлекси 7x7 втрачали свою інтенсивність і контрастність. При $\Theta_{Sn} \geq 0.5$ МШ на картині ДПЕ спостерігались лише ослаблені рефлекси структури 1x1, а при $\Theta_{Sn} \geq 2$ МШ рефлексів взагалі не спостерігалось. Це може свідчити, що при адсорбції атомів Sn на Si(111)-(7x7) має місце аморфізація приповерхневого шару.

Якщо після напilenня атомів Sn при кімнатній температурі поверхня Si(111) прогрівалась до температур $\approx 350^\circ\text{C}$, досліджувана система упорядковувалась. Після адсорбції атомів Sn до $\Theta_{Sn} = 0.3$ МШ та прогріві системи до температури $\approx 360^\circ\text{C}$ спостерігалась поява досить чіткої і контрастної картини рефлексів ДПЕ, яка свідчила про формування на поверхні структури $\sqrt{3} \times \sqrt{3} R30^\circ$. При збільшенні Θ_{Sn} до значень ≈ 0.4 – 0.6 МШ та прогріві системи до температури $\geq 360^\circ\text{C}$ на поверхні зберігалась структура $\sqrt{3} \times \sqrt{3} R30^\circ$. Подальше збільшення Θ_{Sn} до значень ≈ 0.7 – 0.9 МШ та відпал системи до температури $\approx 360^\circ\text{C}$ призводив до появи картини ДПЕ з чіткими рефlekсами $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} R30^\circ$. І вже при $\Theta_{Sn} \approx 1$ МШ з'являлась картина ДПЕ з рефlekсами від структури 1x1.

Одночасно зі спостереженням картин ДПЕ реєструвались і спектри ФЕС. На рис. 1 представлені ФЕС виміряні при $h\nu = 7.7\text{ eV}$ для системи Sn/Si(111) з наступним відпалом

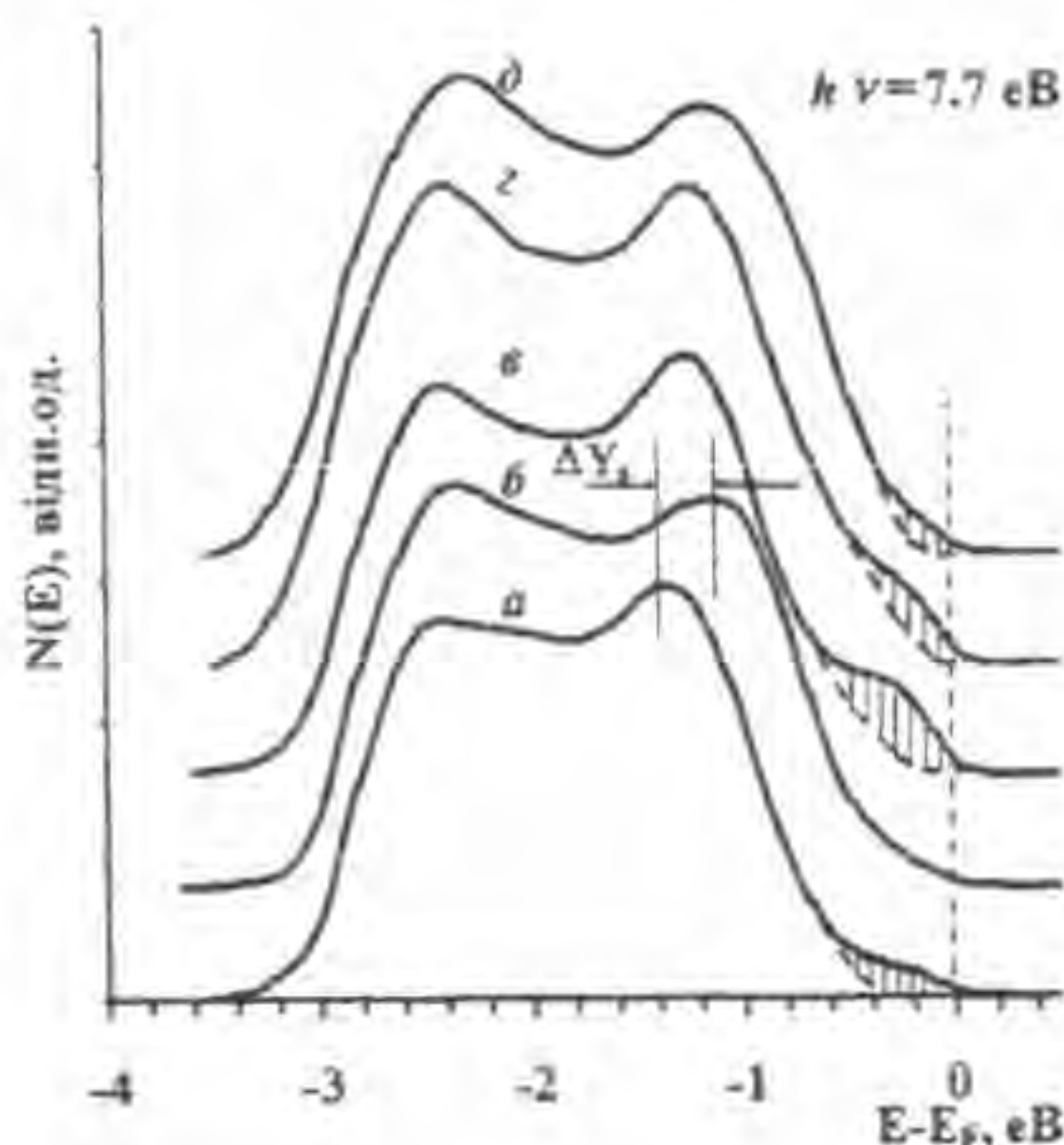


Рис. 1. ФЕС валентної зони інтерфейсу Sn/Si(111): а– Si(111)-(7x7) ($\Theta_{Sn}=0$); б– Si(111)- $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn}=0.3$ МШ, $T \approx 20^\circ\text{C}$); в– Si(111)- $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn}=0.3$ МШ, $T \approx 360^\circ\text{C}$); г– Si(111)- $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn}=0.5$ МШ, $T \approx 360^\circ\text{C}$); д– Si(111)- $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn}=0.9$ МШ, $T \approx 360^\circ\text{C}$).

до 360°C . З рис.1 видно, що атомарно чиста поверхня $\text{Si}(111)7\times 7$ має біля рівня Фермі ($\approx$ на 0.2 eV нижче рівня Фермі) особливість електронної структури, яка відома з літературних джерел [10-12], як обумовлена поверхневими станами (крива *a*). Після наплення на поверхню $\text{Si}(111)-(7\times 7) \approx 0.3$ МШ атомів Sn при кімнатній температурі на кривій ФЕС можна бачити зменшення густини електронних станів поблизу рівня Фермі та зсув всього спектру приблизно на 0.35 eV в бік рівня Фермі (крива *b*). Зсув всього спектру свідчить про зміну загибу зон на величину $\Delta Y_s = 0.35\text{ eV}$, що обумовлено зміною густини відповідних поверхневих станів. При прогріві до 350°C та формуванні надструктури $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ фотоелектронний спектр інтерфейсу різко змінюється (крива *c*). Значно зростає інтенсивність станів впритул до рівня Фермі. При збільшенні покриття до $\Theta_{\text{Sn}} \approx 0.5\text{ МШ}$ та прогріві системи надструктура поверхні практично не змінюється ($\sqrt{3}\times\sqrt{3}$). З урахуванням зміни загибу зон можна стверджувати, що густина станів біля рівня Фермі дещо зменшується при такому покритті (крива *z*). При формуванні надструктури $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ (для $0.7\text{ МШ} \leq \Theta_{\text{Sn}} \leq 0.9\text{ МШ}$) густина станів біля рівня Фермі суттєво зменшується (крива *d*), незважаючи на ріст густини станів для піків розташованих поряд. При $\Theta_{\text{Sn}} \geq 1\text{ МШ}$ після прогріву в діапазоні $300\text{--}750^{\circ}\text{C}$ на поверхні зберігається тільки 1 МШ Sn і формується надструктура 1×1 з кривою ФЕС ідентичною кривій *d* на рис. 1 для надструктури $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$.

Про зміну густини станів біля самого рівня Фермі можна судити провівши їх наближене виділення, яке представлено у вигляді заштрихованих ділянок спектрів на рис.1. Як відомо [10-12], площа цих заштрихованих областей пропорційна кількості електронів емітованих із відповідних електронних станів і може бути використана для оцінки густини цих станів. Наближена оцінка відносної густини електронних станів біля рівня Фермі для різних надструктур, які реалізуються при зміні Θ_{Sn} (рис. 2), дозволила встановити, що

поверхня з надструктурою $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, яка утворюється при адсорбції ≈ 0.3 МШ атомів Sn на поверхню $\text{Si}(111)-(7\times 7)$, має найбільшу густину станів біля самого рівня Фермі серед

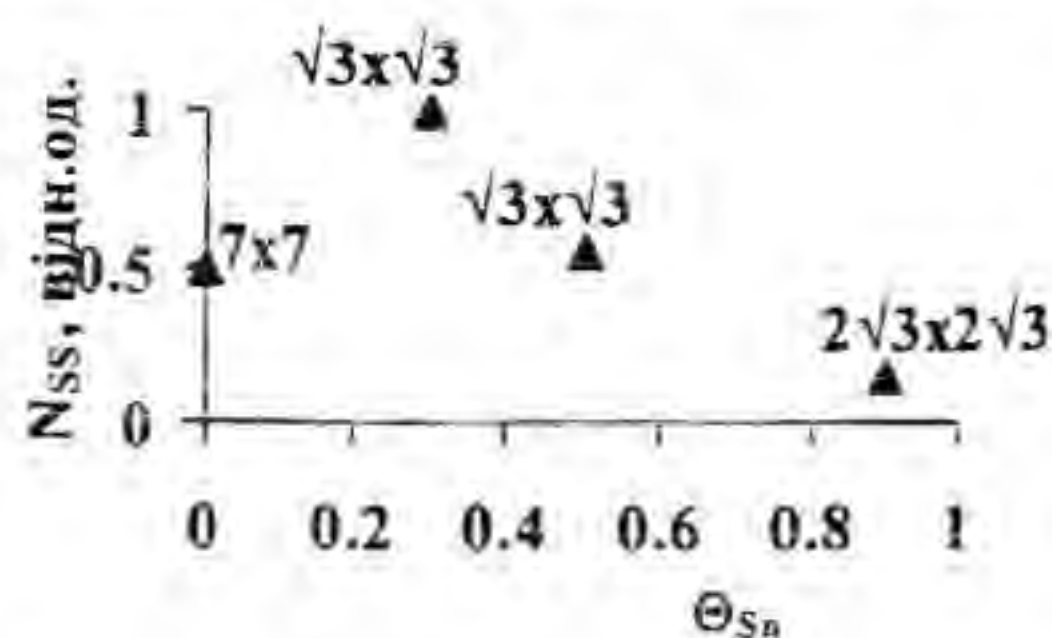


Рис. 2 Залежність відносної густини електронних станів N_{SS} поблизу рівня Фермі від Θ_{Sn}

надструктур, які отримуються на цій поверхні (7×7 , $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$, $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$, 1×1). В той же час природа цих станів біля рівня Фермі залишається не визначеною.

Для визначення природи станів, які утворюються біля рівня Фермі було досліджено адсорбцію атомів Ві на поверхню $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ з $\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ МШ}$. Атоми Ві були вибрані з тих міркувань, що їх адсорбція використовувалась раніше для ідентифікації поверхневих станів на атомарно чистих поверхнях кремнію [13] і їх можна порівняно легко десорбувати з поверхні кремнію. Була вибрана поверхня з $\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ МШ}$ для якої спостерігалась найбільш помітна особливість електронних станів впритул до рівня Фермі (рис.3, крива *a*). При напленні 0.2 МШ атомів Ві (крива *b*) густина цих станів починала зменшуватись, а при $\Theta_{\text{Vi}}=1.0\text{ МШ}$ ці електронні стани зовсім зникали (крива *z*). В процесі наплення атомів Ві зменшувалась контрастність картин ДПЕ і при $\Theta_{\text{Vi}} \approx 1.0\text{ МШ}$ картина $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ повністю розпливалась і можна було спостерігати лише розмиту структуру 1×1 від більш глибоких шарів атомів. При прогріві системи до $\approx 300^{\circ}\text{C}$ наплені атоми Ві десорбувались і знову можна було реєструвати різко-контрастну картину ДПЕ $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ і таку ж саму густину електронних станів поблизу рівня Фермі, як і

до адсорбції атомів Bi. Таким чином, отримані результати свідчать про те, що електронні стани поблизу рівня Фермі є насправді поверхневими.

Необхідно відмітити, що напilenня атомів Bi на поверхню $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{:Sn}$ супроводжується насиченням обірваних

поверхневі стани, які реєструються на поверхні $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{:Sn}$ з $\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ML}$ обумовлені ненасиченими орбіталями атомів Si. Але кількість таких поверхневих атомів Si з ненасиченими орбіталями становить менше $1/3$ від кількості атомів Si на неперестроєній поверхні $\text{Si}(111)$ [5]. Враховуючи це, для насичення поверхневих станів, які обумовлені обірваними орбіталями атомів Si на поверхні $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{:Sn}$ при $\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ML}$, необхідно було нанести лише $1/3$ моношару атомів Bi. Насправді експеримент показав, що ці поверхневі стани зникають при адсорбції одного моношару атомів Bi. З іншого боку зникнення поверхневих станів як при адсорбції атомів Sn на поверхню $\text{Si}(111)7\times7$, так і при адсорбції атомів Bi на поверхню $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ при кімнатній температурі супроводжується аморфізацією приповерхневої області. Поверхневі електронні стани знову з'являються при упорядкуванні приповерхневого шару. Це може бути доказом того, що природа цих поверхневих станів поблизу рівня Фермі обумовлена напруженнями міжатомних зв'язків в приповерхневій області [8,9]. Ці напруження можуть виникати в приповерхневій області внаслідок зміни сил взаємодії між атомами при поверхневих шарів внаслідок вбудовування в основну ґратку атомів Si домішкових атомів Sn при температурах значно вищих за кімнатну. Має місце невідповідність параметрів кристалічної ґратки адатомів і підкладки. Адсорбція на таку поверхню атомів Bi у кількості приблизно одного моношару призводить до аморфізації приповерхневого шару і до значної зміни установлених латеральних напружень. Після термодесорбції атомів Bi приповерхнева область упорядковується і величина латеральних напружень знову змінюється.

Висновки

Дослідження особливостей формування інтерфейсів Sn з кристалічною поверхнею $\text{Si}(111)-(7\times7)$ дозволило встановити, що серед

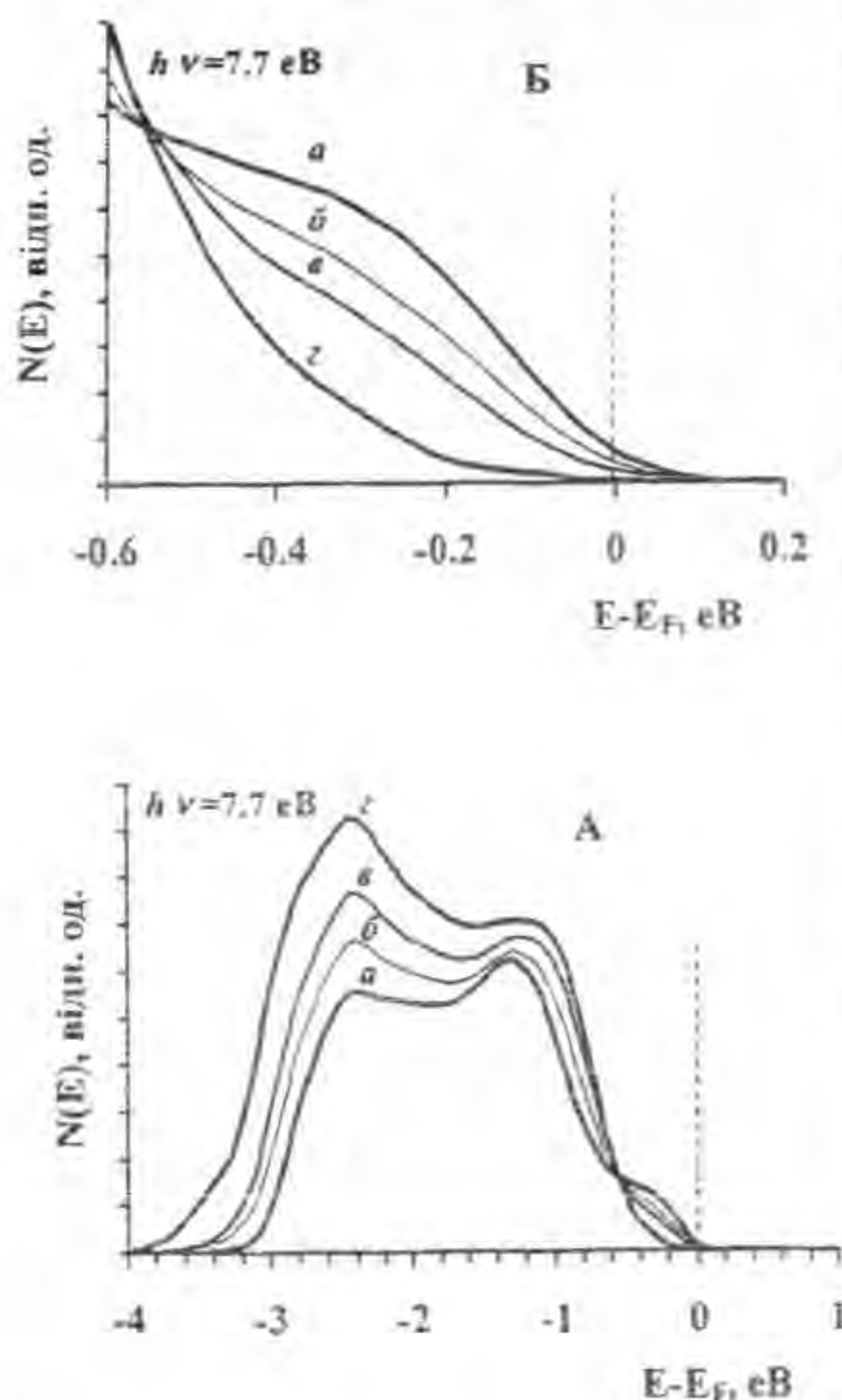


Рис.3 ФЕС ($h\nu=7.7\text{ eV}$) валентної зони інтерфейсу Sn/Si(111) при адсорбції Bi: а– $\text{Si}(111)-\sqrt{3}\times\sqrt{3}(\Theta_{\text{Sn}}\approx 0.3\text{ML}, T\approx 360^\circ\text{C})$; б– $\text{Si}(111)-\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{:Sn+Bi}(\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ML}, \Theta_{\text{Bi}}=0.3\text{ML}, T\approx 20^\circ\text{C})$; в– $\text{Si}(111)-\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{:Sn+Bi}(\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ML}, \Theta_{\text{Bi}}=0.4\text{ML}, T\approx 20^\circ\text{C})$; г– $\text{Si}(111)-1\times1\text{:Sn+Bi}(\Theta_{\text{Sn}}=0.3\text{ML}, \Theta_{\text{Bi}}=1\text{ML}, T\approx 20^\circ\text{C})$ (А–весь спектр, Б– ділянка спектру біля рівня Фермі).

орбіталей атомів Si на цій поверхні. Тому можливо було б зробити висновок, що

усіх утворюваних при цьому надструктур поверхня $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{R}30^\circ\text{Sn}$ має найбільшу густину зайнятих поверхневих станів впритул до рівня Фермі. Імовірною причиною появи цих поверхневих станів є латеральні напруження, які виникають при формуванні надструктури $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ внаслідок невідповідності параметрів кристалічної ґратки адатомів і підкладинки.

Робота виконувалась за бюджетного фінансування та часткового фінансування Міністерства освіти та науки України, грант М/175-2007

1. Hsiao G. S., Penner R. M., Kingsley J. Deposition of metal nanostructures onto $\text{Si}(111)$ surfaces evaporation in the scanning tunneling microscope // *Appl. Phys. Lett.* - 1999. - 64, № 11, P.1350-1352.
2. Hofman K. B., Kammner M., Reinking D., Horn-von Hoegen M. Surfactant mediated epitaxy of Ge/Si heterostructures for device applications // *Journal of Electronic Materials.* 1999. - 28, № 7. - P.1018-1028
3. Востоков Н.В., Гусев С.А., Долгов И.В. и др. Упругие напряжения и состав самоорганизующихся наноструктур GeSi на $\text{Si}(001)$ // *Физика и техника полупроводников* - 2000, 34, В.1. - С.8-12.
4. Taleb-Ibrahimi A., Sebenne C. A., Proix F. and Maigne P. Adsorption of Sn on cleaved $\text{Si}(111)$ surfaces // *Surface Science* - 1985 - 163, № 2-3. - P. 478-488
5. Yoshimura M., Yokogawa K., Ueda K. STM observation of Sn overlayers on $\text{Si}(111)$ // *Appl. Phys.* - 1998. - A 66. - P.1047 - 1049
6. Deibuk V. G., Korolyuk Yu.G. The effect of strain on the thermodynamic properties of Ge-Si, Ge-Sn, Si-Sn, Si-C thin solid films // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics.* - 2002. - 5, № 3. - P.247-253.
7. Escudro A. A., Goodner D. M., Okasinski J. S., and Bedzyk M. J. X-ray standing wave analysis of the $\text{Sn}/\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ surface // *Phys.Rev.* - 2004. - B.70. - P.235416-235423.
8. Kaxiras E., Pandey K. C., Himpsel F. J., Tromp R. M. Electronic states due to surface doping: $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}\text{B}$ // *Phys.Rev.* - 1990. - B41, №2. - P.1262-1265.
9. Sander D., Tian Z. and Kirschner J. Cantilever measurements of surface stress, surface reconstruction, film stress and magnetoelastic stress of monolayers // *Sensors* - 2008. - 8, - P.4466-4486
10. Wagner L.F. Spicer W.E. Photoemission study of the effect of bulk doping and oxygen exposure on silicon surface states // *Phys.Rev.* - 1974. - V.B9. P.1512-1515.
11. Eastman D.E., Grobman W.D. Photoemission densities of Intrinsic Surface States for Si, Ge and GaAs. // *Phys.Rev.Lett.* - 1972. - 28, №21. - P.1378-1381.
12. Becker R. S., Golovchenko J. A., Hamann D. R. and Swartzentruber B. S. Real-Space Observation of Surface States on $\text{Si}(111)7\times7$ with the Tunneling Microscope", // *Phys. Rev. Lett.* 1985. - 55, - P.2032-2037
13. Hanada T., Kawai M. Surface structure and oxidation of $\text{Si}(001)\text{-Bi}$ // *Vacuum* - 1990. - 41, №1-3. - P.650-651.

Надійшла до редколегії 22.11.2008 р.

УДК 537.86/87

Мойсеєнко В.А.^{*}, студент,
Мелков Г.А., доктор фіз.-мат. наук,
Васючка В.І., кандидат фіз.-мат. наук,
Прокопенко О.В., кандидат фіз.-мат. наук,
Слободянюк Д.В., студент

Кореляційна обробка інформації в плівках залізо-ітрієвого гранату

В роботі теоретично та експериментально досліджено кореляцію імпульсів магнітостатичних хвиль в плівках залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ). Використання цього методу дозволяє в широкому діапазоні частот виділяти сигнали з рівня шуму. Було запропоновано використовувати додатковий імпульс накачки з метою створення оберненого в часі опорного сигналу для кореляції затриманого прямого та оберненого накачкою сигнальних імпульсів. Експеримент проведено на плівках ЗІГ в шести сантиметровому діапазоні довжин хвиль, при цьому співвідношення сигнал-шум у вихідному сигналі вдалося підвищити на 20 дБ.

Ключові слова: спин-хвильовий пакет, кореляційна функція, магнітостатична хвиля, адитивний гаусів шум.

Moiseienko V.A.^{*}, Student,
Melkov G.A., Doct. Sci.,
Vasyuchka V.I., Ph.D.,
Prokopenko O. V., Ph.D.,
Slobodianiuk D.V., Student

Correlation signal processing in yttrium-iron garnet films

The correlation of magnetostatic wave pulses in yttrium-iron garnet (YIG) films was investigated theoretically and experimentally in the paper. This method allows to extract the signals from the noise level in a wide frequency band. An additional pumping pulse is proposed to be used for the creation of time inverted reference signal, for the correlation of delayed direct and reversal by pumping signal pulses. The experiment has been carried out for YIG films in 6-sm wave band. The signal-noise ratio in the output signal was increased by 20 dB.

Key words: spin-wave packet, correlation function, magnetostatic wave, additive Gaussian noise.

^{*}E-mail: v_a_m@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В.В.

Вступ

У системах зв'язку існує проблема виділення слабого корисного сигналу з рівня шуму. Шум низького рівня (порівняно з рівнем сигналу) можна видалити за допомогою амплітудного дискримінатора, поріг спрацьовування якого перевищує амплітуду шуму [1]. Але дуже часто сигнал шуму має амплітуду вищу за амплітуду корисного сигналу. При збільшенні порогу спрацьовування дискримінатора, існує велика ймовірність того, що дискримінатор «зріже» корисний сигнал. Тобто ймовірність прийняти хибний сигнал і втратити корисний в цьому випадку зростає. Таким чином, в сучасних системах зв'язку залишається актуальним питання про те, як з максимальною точністю виділити корисний сигнал з множини інших сигналів (шуму). У цьому випадку стає

ефективним використання кореляційної обробки інформації [1–2].

У роботі представлена методика кореляційної обробки інформації, заснована на нелінійній взаємодії опорної та сигнальної магнітостатичних хвиль (МСХ) однакової частоти f , в плівках залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ). Розглянуто випадки кореляції прямокутних імпульсів МСХ та прямокутних імпульсів МСХ модульованих трьох та п'яти символним кодом Баркера (Barker's code) [7].

Одним з найбільш ефективних методів виявлення та виділення залежного від часу t корисного сигналу $S(t)$ з рівня шуму $N(t)$ є метод, заснований на вимірюванні кореляційної функції $B(\tau)$ [4]:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [S(t) + N(t)]S(t + \tau)dt, \quad (1)$$

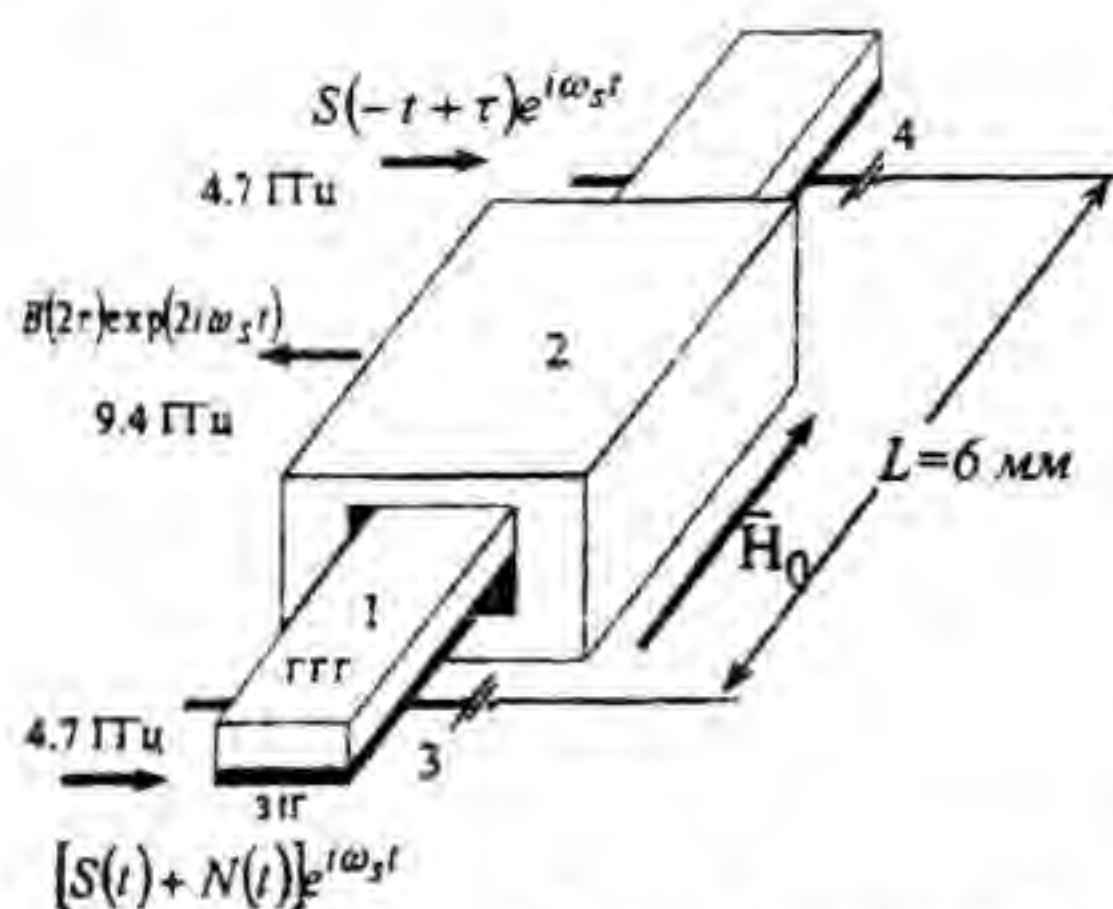


Рис.1 Схема мікрохвильового конвольвера: 1 – плівка залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) на підкладці з галій-гадолінієвого гранату (ГГГ); 2 – об'ємний діелектричний резонатор; 3 та 4 – мікросмужкові антени.

тут τ – затримка сигналу в часі. Відношення сигнал-шум SNR можна записати, як: $SNR = S^2(t) / \langle N^2(t) \rangle$. З (1) видно, що кореляційний прийом заснований на виконанні операції множення сумарного вхідного сигналу $\eta(t) = N(t) + S(t)$ на опорний затриманий сигнал $S(t + \tau)$ з наступним інтегруванням цього добутку по часу. Кореляційна функція $B(\tau)$ являє собою (див. (1)) суму автокореляційної та взаємнокореляційної функції, перша з яких визначається властивостями тільки корисного сигналу $S(t)$, а друга залежить також і від шуму $N(t)$. Вплив шуму на $B(\tau)$ зменшується за експоненціальним законом зі збільшенням τ . Наприклад при $\tau \rightarrow \infty$ з'являється принципова можливість виявлення слабкого гармонічного сигналу на фоні довільного шуму [2, 7].

Як показано в [3], хвиля $\eta(t) \exp(j\omega_s t - \beta z)$ і хвиля з оберненою в часі обвідною $S(-t + \tau) \exp(j\omega_s t + \beta z)$, які поширюються назустріч одна одній в нелінійному середовищі, утворюють однорідний сигнал на подвійній частоті $2\omega_s$, який являє собою сигнал кореляції $B(2\tau)$ сигналу $\eta(t)$ й затриманого на 2τ інвертованого в часі сигналу $S(t)$:

$$B(2\tau) = \text{const} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t) S(-t + 2\tau) dt. \quad (2)$$

Коефіцієнт 2 в аргументі $S(t)$ призводить до стиснення в часі сигналів кореляції й обумовлений тим, що швидкість зустрічних

імпульсів відносно один-одного в 2 рази перевищує швидкість v кожної з хвиль. Межі в інтегралах (1), (2) необхідні для коректного виконання операції кореляції. Запис (1) та (2) можливий лише при тривалостях сигнальних імпульсів $\tau_s \leq L/v$, де L – довжина активної області, де відбувається нелінійна взаємодія хвиль.

Теоретична модель

В роботі використовується геометрія зворотних об'ємних магнітостатичних хвиль (ЗОМСХ), коли поле підмагнічування лежить в площині плівки і направлене паралельно до напрямку поширення хвиль (рис. 1). ЗОМСХ можуть збуджуватись в діапазоні мікрохвильових частот: від ω_H до $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$, де $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, H_0 , M_0 – постійне внутрішнє поле та намагніченість насичення, γ – гіромагнітна стала (2,8 МГц/Е).

Дисперсійна залежність при цьому має вигляд:

$$\omega^2(k) = \omega_H \left(\omega_H + \omega_M \frac{1 - e^{-kd}}{kd} \right), \quad (3)$$

де k – хвильове число, d – товщина плівки.

Виходячи з міркувань поданих в роботі [4], представимо намагніченість всередині плівки ЗІГ у вигляді розкладу в ряд за плоскими хвилями:

$$\bar{m}(\bar{r}, t) = \sum_k C_k(t) \bar{m}_k(x) \exp\{ikz\}, \quad (4)$$

де $\bar{m}_k(x)$ – просторовий профіль моди з хвильовим числом k , $C_k(t)$ – амплітуди збудження окремих складових спектру, z , x – повздовжня і поперечна до напрямку поширення хвилі координати, відповідно. Неважко показати [4], що при збудженні хвиль описаним методом, амплітуда k -ої парціальної складової, кожного з сигналів, визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \{C_{k1}(t, z) &= \text{const} \cdot F_k I_k \exp(i\omega_k t - \Gamma t - ikz), \\ C_{k2}(t, z) &= \text{const} \cdot F_k I_k \exp(i\omega_k t - \Gamma t - ikz) + \\ &+ N_k F_k \exp[i\omega_0 t - \Gamma t - ik(L - z) + i\varphi(k)]\}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $F_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \exp\{ikz\} dz$ – Фур'є компонента

розподілу струму $F(z)$ по мікросмужковій антені. В розрахунках використовується співвідношення $F_k = \exp\{-(k/k_0)^4\}$.

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) \exp\{i\omega_k t\} dt \quad - \text{спектр вхідного}$$

сигналу. Нами буде використовуватись модель прямокутного відеоімпульсу з несучою частотою ω_0 , та тривалістю τ . $\varphi(k)$ – випадкова фаза рівномірно розподілена в інтервалі $[0, 2\pi]$. Дисипація хвиль визначається через напівширину феромагнітного резонансу:

$$\Gamma = \gamma \frac{\Delta H}{2}, \text{ де } \Delta H - \text{ширина лінії феромагнітного резонансу, } L - \text{відстань між антенами.}$$

В теоретичних розрахунках використовувалась модель гаусівського шуму на частоті сигналу. Спектр шумового сигналу

$$\text{визначався як } N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\omega^2}} e^{-\frac{(\omega_k - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2}}, \text{ де } \Delta\omega -$$

частотна смуга шумового сигналу. Врахувавши все вищесказане, сигнал на вихідній антені був

$$\text{знайдений таким чином: } P(t, z) = \left| \sum_k C_k(t, z) \right|^2.$$

Зауважимо, що запропонована модель є лінійною і може бути використана тільки для опису лінійних процесів, тобто при малих потужностях вхідних сигналів.

Сигнал кореляції (1) збуджує коливання відкритого діелектричного резонатора (ВДР) C_v :

$$\frac{dC_v}{dt} - i\omega_v C_v + \Gamma_v C_v = f(t), \quad (6)$$

де ω_v , Γ_v – відповідно власна частота та частота релаксації ВДР, $\omega_v = 2\omega_s$. Вважаючи $\Gamma \ll \Gamma_v$, отримуємо остаточний вираз:

$$C_v = \frac{1}{\Gamma_v} e^{-2\Gamma t} \sum_k I_{1k} I_{2k} e^{ikL} e^{i\omega_k(2t+\tau)}, \quad (7)$$

Теоретичні значення вихідного сигналу кореляції пропорційні амплітуді коливань ВДР C_v , знаходились за допомогою (7) шляхом чисельного розрахунку.

Експеримент та обговорення результатів

Для експериментального спостереження кореляції двох сигналів $\eta(t)$ й $S(t)$ використовувалась розроблений нами раніше [5] мікрохвильовий конвольвер на основі плівки ЗІГ, розташованої всередині ВДР.

Резонатор був виготовлений з термостабільної НВЧ кераміки з діелектричною проникністю $\epsilon = 80$ та тангенсом кута діелектричних втрат

$\tan \delta = 10^{-3}$. Плівка з розмірами $5,1 \text{ мкм} \times 1 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$ намагнічувалась зовнішнім магнітним полем $H_0 = 941 \text{ Е}$ вздовж її довжини, тобто використовувалась геометрія ЗОМСХ. Для збудження спінових хвиль в плівці використовувались дві мідні мікросмужкові антени діаметром 25 мкм , які були розташовані на протилежних кінцях плівки на відстані $L = 6 \text{ мм}$ одна від одної (див. рис. 1).

Вхідний сигнал $\eta(t) \exp(j\omega_s t)$ подавався на одну з антен. На протилежну антену подавався опорний сигнал $S(-t) \exp(j\omega_s t)$. Таким чином в плівці назустріч друг другу поширювались два хвильових пакети ЗОМСХ з однаковими

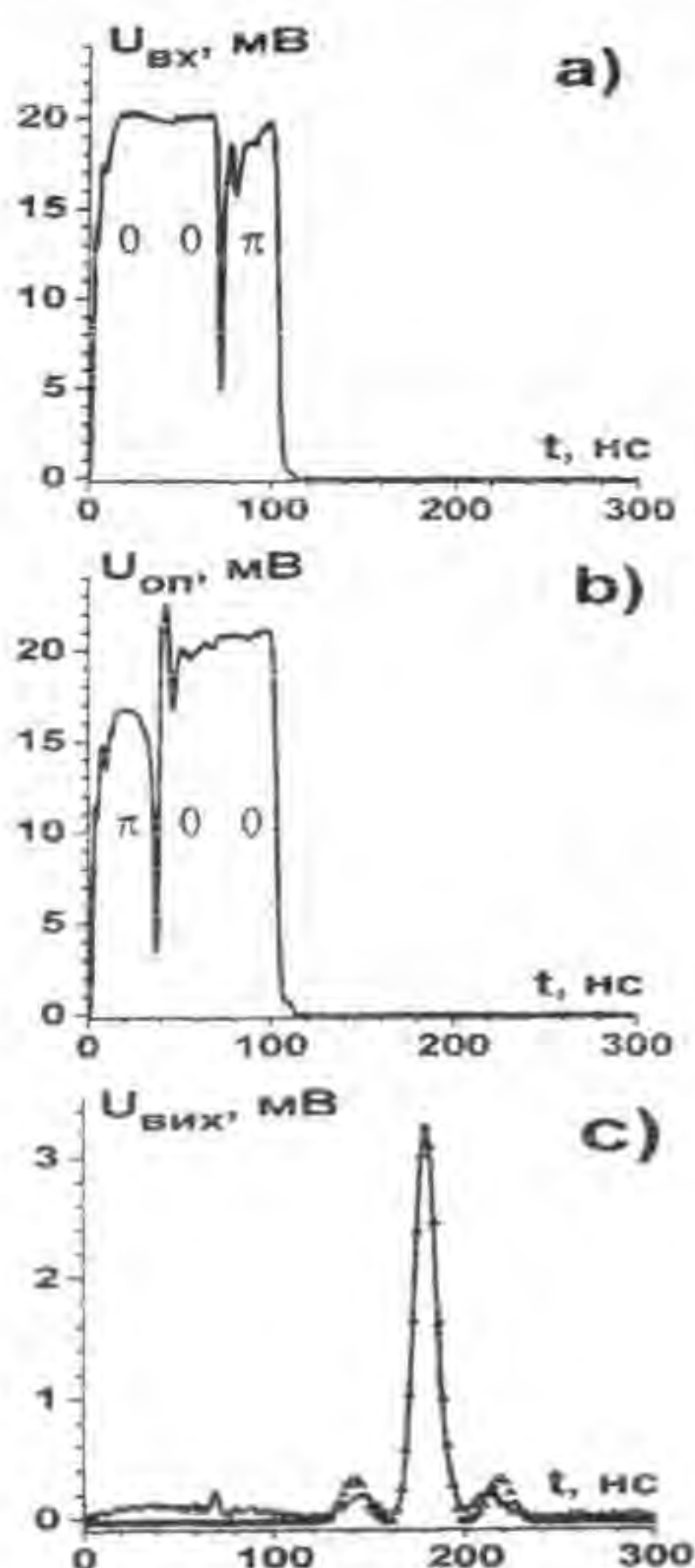


Рис 2. Осцилограми вхідного (а), опорного (б) та вихідного кореляційного (с) імпульсів; 0, π – фаза коливань несучої частоти вхідного та опорного сигналів. $\blacktriangle$ – теоретичний розрахунок, нормований до експерименту в точці глобального максимуму.

центральною частотою ω_s та центральною хвильовою числом k_s ; в наших експериментах $f_s = \omega_s / 2\pi \approx 4,7$ ГГц та $|k_s| \sim 10^2$ см⁻¹. В результаті нелінійної взаємодії двох зустрічних пакетів виникає намагніченість на подвійній частоті $2\omega_s$, напрямлена вздовж постійного магнітного поля [4, 5]. Ця намагніченість збуджує налаштований на частоту $2\omega_s$ ВДР, обвідна амплітуди коливань якого буде пропорційна кореляційній функції $B(2\tau)$ двох сигналів $\eta(t)$ й $S(t)$ [3]. Для реєстрації сигналу кореляції конвольвер вміщувався всередину стандартного прямокутного хвильоводу трьохсантиметрового діапазону, через який енергія цього сигналу потрапляла на підсилювач й сприймалась квадратичним детектором; сигнал з останнього подавався на осцилограф Tektronix TDS3032B, частотна смуга якого становила близько 300 МГц. Для отримання сигналу кореляції необхідно на протилежні входні антени 3 та 4 (див. рис. 1) подавати сигнали з інвертованими в часі обвідними $S(t)$ та $S(-t)$ відповідно. З цією метою входний сигнальний імпульс тривалістю $\tau_s = 100$ нс був

промодульований трьох та п'яти символьним кодом Баркера. Для цього синусоїдальні коливання несучої частоти на протязі імпульсу піддавались трьох- та п'ятикратній двійковій маніпуляції фази від 0 до π радіан. Наприклад, входний імпульсний сигнал, що подавався на антену 3 розбивався на деякі проміжки часу – кодові інтервали, на протязі першого (0–33 нс) та другого (33–67 нс) кодових інтервалів він мав фазу несучої частоти, а на протязі третього (67–100 нс) фазу, що дорівнювала π – утворювався фазовий код (0, 0, π). Опорний сигнал, який подавався на антену 4 (див. рис. 2b) був розбитий на однакові інтервали зміни фази (π , 0, 0).

У випадку п'яти символьного коду Баркера використовувалась п'ятикратна двійкова фазова маніпуляція імпульсів: (0, π , 0, 0, 0) та (0, 0, 0, π , 0). Зміна фази проводилась за допомогою двох швидкодіючих дискретних напівпровідникових фазообертачів, які вмикались в обидва входи конвольвера. Кінцевий час перемикання (~ 3 нс) та малі ($\leq 0,8$ дБ) зміни потужності входного та опорного сигналів в момент перемикання (див. Рис.2) пов'язані з не ідеальністю модулаторів фази.

Коефіцієнт білінійності $P_{2\omega} = BP_s^2$ при цьому складав $B = -9$ дБм. На всіх малюнках рис. 2 час відраховується від часу запуску сигнального та опорного імпульсів в феритову плівку. При $t = t^* = 180$ нс ці імпульси по мірі їх поширення по плівці повністю перекриваються один з одним й утворюють сигнал кореляції, показаний на рис. 2c. При цьому фази несучої частоти обох імпульсів в кожній точці хвильоводу однакові, в результаті чого вихідний сигнал подвоєної частоти максимальний. Два невеликих максимуми на рис.3b зліва і справа від головного максимуму відповідають синхронізації фази несучих коливань імпульсів лише на одній третині їх довжини. У випадку п'яти символьного коду Баркера амплітуда додаткових максимумів зменшується через зменшення часу синхронності взаємодіючих коливань.

В наших експериментах на першу входну антену подавався не тільки корисний сигнал потужністю $P_s = 1,4$ мВт та тривалістю $\tau_s = 100$ нс модульований кодом Баркера, а й неперервний сигнал шуму потужністю $P_N = 14$ мВт, так щоб відношення сигнал-шум (SNR) дорівнювало 0,1. Сигнал шуму мав гаусівський профіль з центральною частотою близько 4,7 ГГц, його спектральна ширина перевищувала 200 МГц. Обвідна сумарного

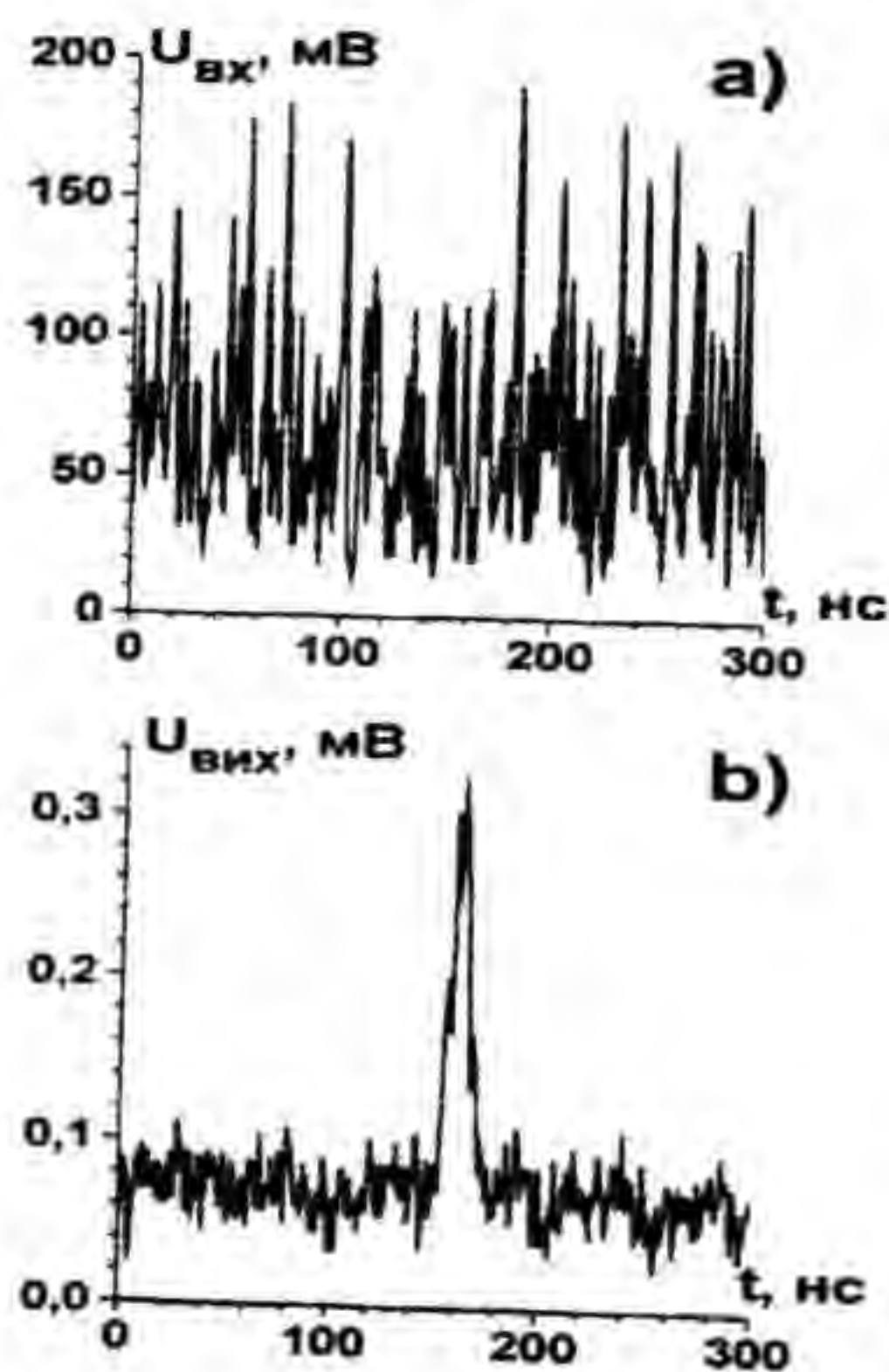


Рис. 3. Обвідна сумарного входного (модульований імпульс + шум, SNR=0,1) сигналу (a) та кореляційного (b) сигналу на виході (SNR=10).

вхідного сигналу показана на рис. 3а. З цього малюнка видно, що завдяки малому відношенню сигнал-шум корисний імпульсний вхідний сигнал не помітний на фоні шуму. Опорний сигнал був обернений в часі відносно вхідного сигналу й мав потужність $P_{ref}=7$ мВт. Обвідна вихідного сигналу кореляції частотою $f_{кор} = f_{рез} = 9,4$ ГГц показана на рис. 3б. На фоні шумів чітко помітний центральний пік, вихідна потужність якого $P_{out} = 3$ мкВт, а бокові максимуми сховані в шумі.

Як результат кореляції сумарного вхідного сигналу з імпульсним опорним сигналом відношення сигнал-шум у вихідному сигналі вдалося підвищити більш ніж на 20 дБ, й воно стало рівним 10. Подальше збільшення SNR можливе, наприклад, при збільшенні потужності P_{ref} опорного імпульсного сигналу. Теоретичні оцінки показують, що можливе виділення сигналу до $SNR \leq 30$ дБ. Експериментально встановлено, що лінійне збільшення вихідної кореляційної потужності спостерігається до межі $P_{ref} \leq 20$ мВт, після чого настає насичення й певне зменшення амплітуди сигналу кореляції.

Висновки

Теоретично та експериментально досліджено кореляційний приймач на магнітотатичних хвилях. Робота такого приймача базується на нелінійній взаємодії зворотних об'ємних магнітотатичних хвиль в плівках залізо-ітрієвого гранату. Запропонований метод дозволяє підвищити співвідношення сигнал-шум у вихідному сигналі на 20 дБ. Було розроблено програмне забезпечення для знаходження часових профілів сигналу кореляції чисельними методами. Результати теоретичного моделювання знаходяться у добрій відповідності з даними, отриманими на експерименті.

Список використаних джерел

1. Кирилов В.И. Многоканальные системы передачи: Учебник. – М.: Новое знание, 2002. – 751 с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: «Наука», 1981. – 640 с.
3. Luukkala M., Surrakka J. Acoustic convolution and correlation and the associated nonlinearity parameters in LiNbO₃ // *Journal of Applied Physics*. – 1972. – 43. – P. 2510-2518.
4. Васючка В.І., Лазовський В.В., Мойсесенко В.А., Чумак А.В. Вплив ефективних параметрів плівок залізо-ітрієвого гранату на характеристики пасивної лінії затримки // Вісник Київського університету. Серія: радіофізика та електроніка. – 2006. – №9. – С. 15-18.
5. Kobljanskyj Yu.V., Melkov G.A., Serga A.A., Tiberkevich V.S., Slavin A.N. Effective microwave ferrite convolver using a dielectric resonator // *Applied Physics Letters*. – 2002. – 81. – № 9. – P. 1645-1647.
6. Сайт Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Электронное пособие «Свойства Сигналов», http://www.spbstu.ru/ed_kurs/stthrs/132.htm
7. Мелков Г.А., Мойсеев В.А., Прокопенко А.В., Слободянюк Д.В. Использование корреляционной обработки информации в ферромагнитных пленках для выделения сигналов из уровня шума // Материалы 18-й Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо 2008, 8–12 сентября, 2008). – Севастополь (Автономная Республика Крым, Украина). – С. 501-502.

Надійшла до редколегії 20.11.08

УДК 535.345.67

*Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., Первак В.Ю.,
канд.ф.-м.н.

Синтез багат шарових дзеркал з мак- симально високою дисперсією

Дисперсійні багат шарові покриття пред-
ставляють інтерес як компактні, доступні за
ціною пристрої для компенсації часової дисперсії
і багатоканальної частотної селекції. Їх ефек-
тивність залежить від повної групової затримки
і просторового зсуву, які можуть бути досягну-
ті. Поки що для багат шарових покриттів від-
сутня аналітична модель, що пов'язує їх ефек-
тивність з параметрами багат шарової струк-
тури, такими як показники заломлення, товщини
шарів їх кількість. Показано, що максимальна
групова затримка або просторовий зсув можуть
бути більшими, ніж отримано в запропонованій
раніше емпіричній моделі, що пов'язує парамет-
ри багат шарового покриття з максимальною
груповою затримкою або просторовим зсувом.
Зокрема, отримана групова затримка в 2600 фем-
тосекунд в багат шаровій структурі товщи-
ною 46 мкм в спектральному діапазоні від 1520
до 1560 нм.

Ключові слова: дисперсійне багат шарове по-
криття, часова дисперсія, просторове зміщення.

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Прогрес оптики ультракоротких світлових імпульсів і нанотехнологій привів до створення нового наукового напрямку – світлохвильової електроніки [2]. Світлові імпульси тривалістю в кілька фемтосекунд стали робочим інструментом фундаментального вивчення електронних процесів в атомах і молекулах твердого тіла, рідин та газів [3-8]. В значній мірі ці успіхи завдячують розв'язку фундаментальної проблеми генерації і керування ультракороткими світловими імпульсами фемто- і аттосекундної тривалості [9, 10]. Генерація і керування ультракороткими світловими імпульсами в значній мірі стала можливою завдяки створенню і інтенсивному розвитку унікальних багат шарових наноструктур - чирпованих дзеркал, що дозволяють керувати часовою дисперсією світлових імпульсів [11]. Необхід-

Yu.A.Pervak, doc.sci., V.Yu.Pervak, ph.doc.

The synthesis of the multilayer mirrors with maximal high dispersion

Dispersive multilayer coatings are interesting as compact, cost-effective devices for temporal dispersion compensation and wavelength multiplexing. Their performance depends on the total group delay or spatial shift that can be achieved. Meanwhile for general multilayer coatings, no analytic model exists relating the performance to the multilayer structure parameters such as the refractive indices, layer thicknesses and the number of layers. We demonstrate that a maximum group delay or spatial shift can be more than it is in the proposed earlier empirical model for relation of multilayer coating parameters and a maximum group delay or spatial shift. In particular we obtained the group delay of 2600 fs with 49 μm -thick multilayer structures at the spectral range from 1520 to 1560 nm.

Key words: dispersive multilayer coating, temporal dispersion, spatial shift.

ність отримання все більш коротких світлових імпульсів стимулювала удосконалення методів синтезу чирпованих дзеркал [12-14], а також встановлення граничних можливостей таких структур [15]. Було висунене припущення, що при сучасному рівні розвитку технології реально отримати робочий діапазон чирпованого дзеркала до двох третин оптичної октави [15]. Однак, невдовзі вдалося синтезувати і виготовити чирповані дзеркала з робочим діапазоном в 1,5 октави [16]. Особливістю чирпованих дзеркал є лінійність хвильової залежності групової затримки, що дозволяє використовувати їх не лише як елементи компенсації часової дисперсії, але і як базові елементи пристроїв багатоканальної частотної селекції [17-20]. Була запропонована емпірична модель, що дозволяє оцінити параметри бага-

тошарової структури, яка забезпечує отримання бажаної часової або просторової дисперсії [20]. Однак, запропонована модель дає суттєво занижені максимальні значення досяжних групової затримки і просторового зсуву, що буде показано в даній роботі.

При заданих параметрах багатошарової структури (q – число шарів, n_r – показник заломлення, k_r – екстинкція, d_r – товщина r -го шару, n_m і k_m – оптичні сталі підкладки, n_0 і k_0 – оптичні сталі зовнішнього середовища, θ_0 – кут падіння) легко розраховуються матричним методом [1] спектр відбивання $R(\lambda)$, зміна фази при відбиванні $\varphi(\lambda)$, групова затримка GD и дисперсія групової затримки GDD :

$$R = \left(\frac{\eta_0 B - C}{\eta_0 B + C} \right) \left(\frac{\eta_0 B - C}{\eta_0 B + C} \right)^*, \quad (1)$$

$$\text{tg } \varphi = \text{Im}[\eta_0 (CB^* - BC^*)] / (\eta_0^2 BB^* - CC^*) \quad (2)$$

$$GD = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (3)$$

$$GDD = -\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = -\frac{\lambda^2}{(2\pi c)^2} \cdot \left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{d\varphi}{d\lambda} \right). \quad (4)$$

При цьому характеристична матриця ансамблю має вигляд

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left(\prod_{r=1}^q \begin{bmatrix} \cos \delta_r & (i \sin \delta_r) / \eta_r \\ i \eta_r \sin \delta_r & \cos \delta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де $\delta_r = (2\pi N_r d_r \cos \theta_r) / \lambda$, $\eta_{r,m} = \chi_{vac} N_{r,m} \cos \theta_{r,m}$ для ТЕ хвиль, $\eta_{r,m} = \chi_{vac} N_{r,m} / \cos \theta_{r,m}$ для ТМ хвиль, $\chi_{vac} = 2,6544 \cdot 10^{-3}$ сменс, λ – довжина хвилі, $N_r = n_r - ik_r$ – комплексний показник заломлення r -го шару, η_0 – провідність зовнішнього середовища, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла. Значення кутів θ_r визначається законом Снеліуса

$$N_0 \sin \theta_0 = N_r \sin \theta_r = N_m \sin \theta_m. \quad (6)$$

Максимальна зміна групової затримки ΔGD прямо пропорційна просторовому зсуву Δs , обернено пропорційна груповій швидкості вздовж шарів v_{gr} і згідно емпіричної моделі [20] описується виразом

$$\Delta GD = \frac{\Delta s}{v_{gr}} \approx 16 \Delta n \frac{L}{c}, \quad (7)$$

де Δn – різниця показників заломлення шарів

(багатошарова структура утворена шарами двох різних оптичних матеріалів, що чергуються), L – повна товщина багатошарової структури, c – швидкість світла.

При синтезі багатошарових структур і моделюванні їх спектральних характеристик врахована дисперсія вибраних плівкових матеріалів: оксидів кремнію (SiO_2) і ніобію (Nb_2O_5). Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показники заломлення SiO_2 визначали за формулою $n_s = 1,46 + (3,35 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (1,41 \cdot 10^{-5} / \lambda^4)$, а Nb_2O_5 за формулою $n_n = 2,22 + (2,18 \cdot 10^{-2} / \lambda^2) + (4 \cdot 10^{-3} / \lambda^4)$, де λ довжина хвилі в мкм. Врахована також дисперсія показника заломлення підкладки за формулою $n_g = 1,50 + (5,33 \cdot 10^{-3} / \lambda^2) + (4,92 \cdot 10^{-4} / \lambda^4)$. Екстинкція шарів і підкладки в досліджуваному спектральному діапазоні не перевищує 10^{-5} і в розрахунках не враховувалася.

Пошук конструкції багатошарової структури з максимальною часовою дисперсією в діапазоні 1520-1560 нм виконувався без початкового наближення по процедурі, раніше описаній в роботі [21].

На рис.1 для трьох синтезованих структур показано пошарову зміну оптичних товщин.

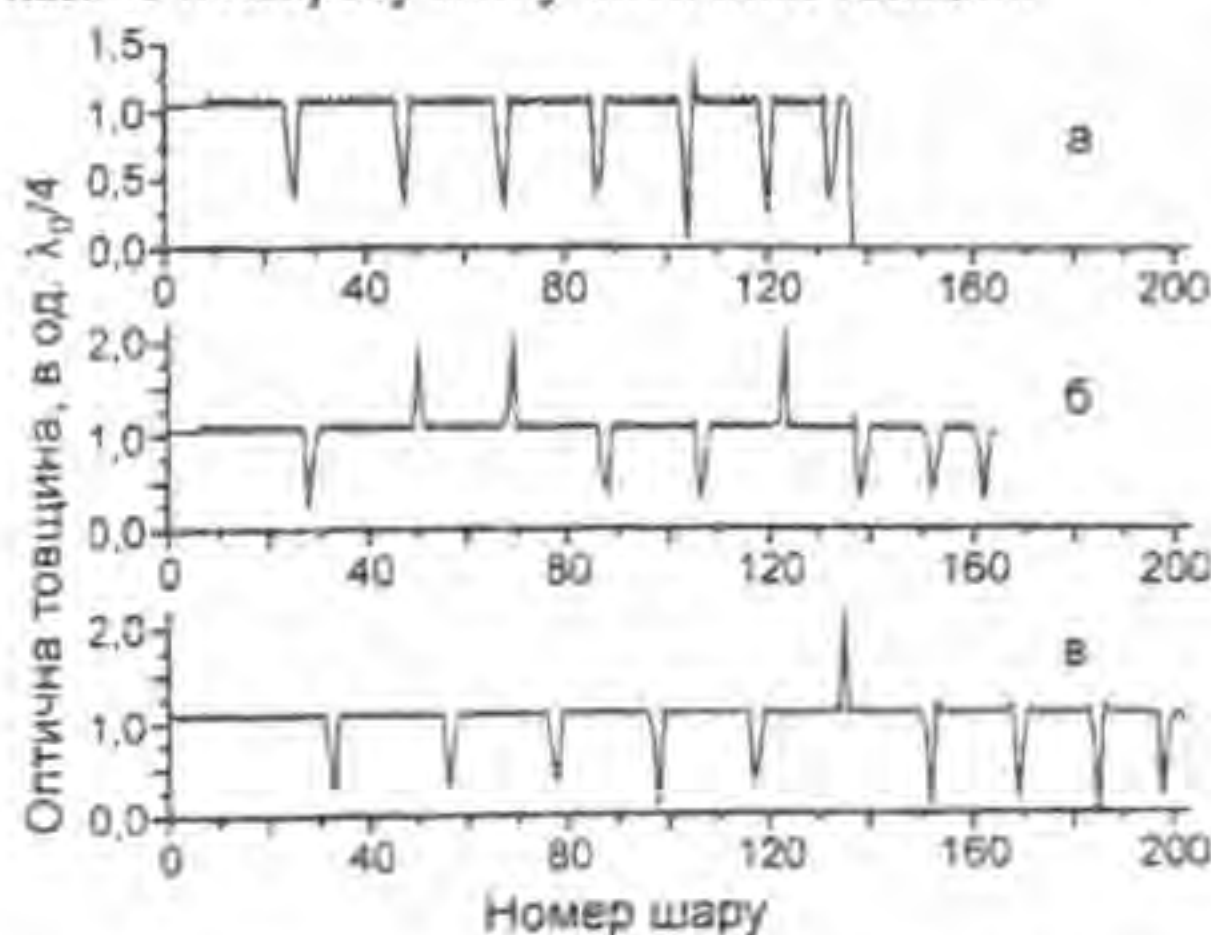


Рис.1. Залежність оптичної товщини від номеру шару для структур з 138 (а), 165 (б) і 202 (в) шарами.

Усі структури утворені шарами Nb_2O_5 і SiO_2 , які чергуються. Останній шар межує з повітрям, перший розташований на підкладці з оптичного скла. Структури, що містять 138 (рис.1а) і 165 (рис.1б) шарів, починаються шарами з Nb_2O_5 . В структурі з 202 шарів перший шар з SiO_2 . В усіх структурах оптичні товщини більшості шарів близькі $\lambda_0/4$ на довжині хвилі $\lambda_0 = 1550$ нм (рис.1). При цьому фізичні товщини шарів Nb_2O_5 порядку 180 нм, а шарів SiO_2 – 294 нм. Мінімальні товщини шарів в структурах з 138, 165 і 202 шарів

дорівнюють відповідно 4,9 (138 шар), 41,9 (29 шар) і 6,37 нм (185 шар). В структурі з 138 шарів 106 шар має максимальну оптичну товщину $1,35 \lambda_0/4$, що складає 357,6 нм. В структурі з 165 шарів є два шари, оптична товщина яких близька $\lambda_0/2$. Це 124 шар з товщиною 568,5 нм (оптична товщина $2,15\lambda_0/4$) і 70 шар з товщиною 545 нм (оптична товщина $2,06\lambda_0/4$). В структурі з 202 шарів усього один шар, оптична товщина якого близька $\lambda_0/2$. Це 135 шар товщиною 574,6 нм (оптична товщина $2,17\lambda_0/4$). Не дивлячись на відсутність пів хвильових шарів, структура з 138 шарів характеризується спектром відбивання з найбільшим зменшенням відбивання на довжині хвилі 1553 нм ($R = 97,89\%$), що свідчить про існування пів хвильового резонатору в структурі (рис.2а). Такий резонатор може бути утворений будь-якою з груп шарів, в центрі якої знаходиться шар з оптичною товщиною суттєво меншою $\lambda_0/4$. В структурі з 138 шарів таких шарів 8. Це 27 (товщина 63 нм), 49 (товщина 53,25 нм), 69 (товщина 49,63 нм), 87 (товщина 69,16 нм), 105 (товщина 11,96 нм), 121 (товщина 44,27 нм) і 133 (товщина 64,49 нм) шари. В структурі з 165 шарів кількість екстремальних шарів складає 9, причому три з них, 51, 70 і 124, мають оптичні товщини порядку $\lambda_0/2$.

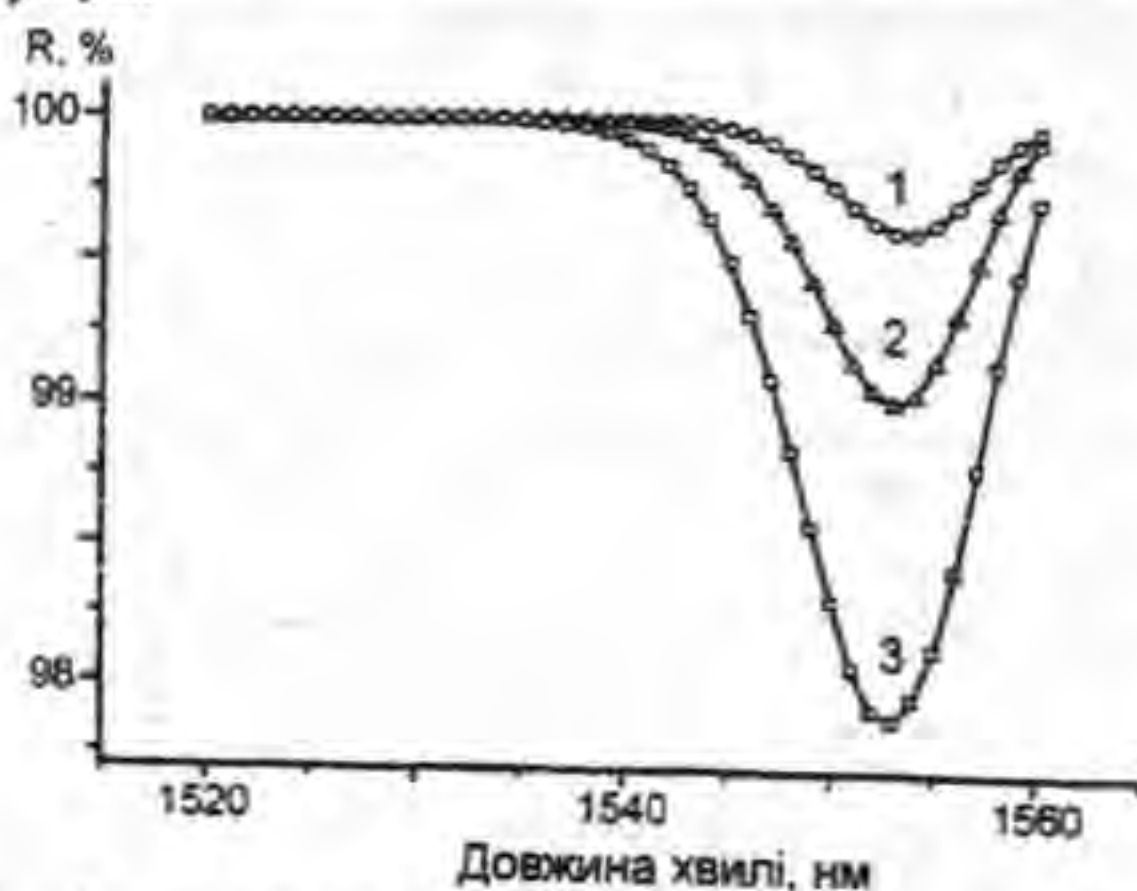


Рис.2. Спектральні залежності відбивання для структур з 138 (крива 1), 165 (крива 2) і 202 шарами (крива 3).

Ще 6 шарів (29, 89, 107, 139, 153, 163) можуть бути центральними шарами пів хвильових резонаторів, утворених кількома сусідніми шарами. Відбивання, як і в попередньому випадку, мінімальне на довжині хвилі 1553 нм і дорівнює 99%. Мінімальний провал в спектрі відбивання спостерігається для 202-шарової структури. Відбивання дорівнює 99,61% на довжині хвилі 1554 нм. В 202-шаровій структурі усього один явно виражений пів хвильовий резонатор, утворений

135 шаром, і 9 можуть бути утвореними групами шарів.

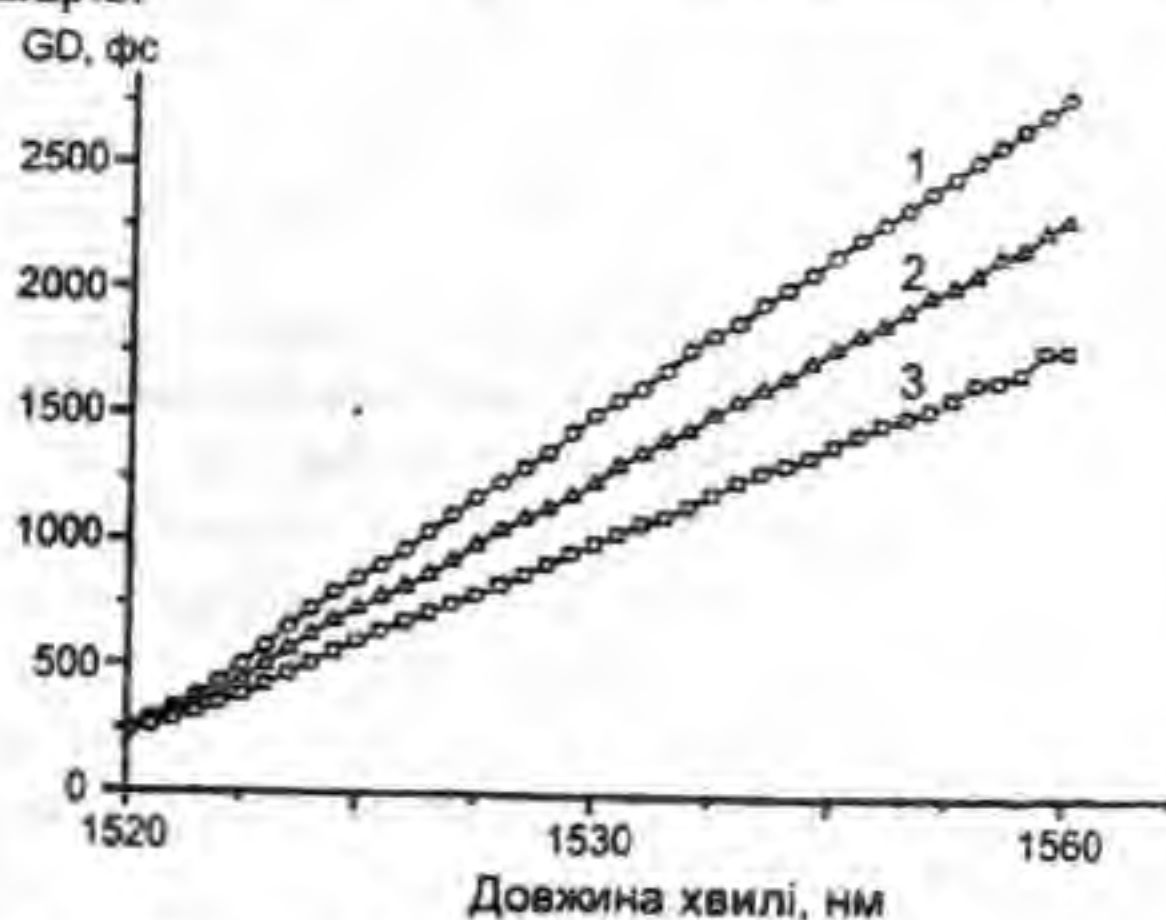


Рис.3. Спектральні залежності групової затримки для структур з 138 (1), 165 (2) і 202 (3) шарами.

Описані структури дозволяють отримати лінійну спектральну залежність GD в діапазоні від 1520 до 1560 нм (рис.3). Для 138-, 165- і 202-шарових структур зміна GD у вказаному спектральному діапазоні складає 1544, 2056 і 2544 фс, відповідно. Ці значення суттєво вищі отриманих за формулою (7). Повна товщина L досліджуваних 138-, 165- і 202-шарових структур дорівнює 30803, 38507 і 46139 нм, відповідно. Різниця показників заломлення Δn сусідніх шарів Nb_2O_5 і SiO_2 в області 1500-1600 нм близька 0,77. Використовуючи вираз (7), отримуємо для 138-, 165- і 202-шарових структур значення ΔGD , що дорівнюють 1265, 1581 і 1895 фс, відповідно. Використовуючи запропоновану в [19, 20] процедуру визначення групової швидкості v_{gr} вздовж шарів, отримуємо значення 15,14 фс/мкм для 138-шарової структури, 15,128 фс/мкм для 165-шарової структури і 15,135 фс/мкм для 202-шарової структури. Це дає можливість оцінити просторовий зсув s світлового потоку вздовж межі поділу багатошарової структури з повітрям. Для 138-, 165- і 202-шарових структур значення s , дорівнюють 101,98 мкм, 135,9 мкм і 168,1 мкм, відповідно. Отже, величина просторової дисперсії для досліджуваних 138-, 165- і 202-шарових структур складає 2,55 мкм/нм, 3,4 мкм/нм і 4,2 мкм/нм, відповідно. Висока просторова дисперсія досліджуваних структур і лінійність спектральної залежності групової затримки забезпечують високу негативну дисперсію групової затримки (рис.4).

Таким чином, запропонована раніше в роботі [20] емпірична модель для визначення параметрів багатошарової структури, яка б забезпечувала отримання бажаної часової і просторової диспер-

сії, дає суттєво занижені максимальні значення групової затримки. Це можна пояснити недосконалістю оптимізаційних процедур, використаних в [20] для визначення параметрів багатошарової структури. Крім того, можна також стверджувати, що і отримані в даній роботі значення групової затримки і просторового зсуву не є максимально досяжними для заданого спектрального діапазону, хоча вони і суттєво перевищують відповідні значення, передбачені емпіричною моделлю. Лише в випадку вирішення проблеми пошуку глобального мінімуму багато параметричної функції можна буде з впевненістю говорити про синтез багатошарових структур, що дозволять отримувати максимально досяжні значення часової і просторової дисперсії.

Список використаних джерел

1. MacLeod H. A., Thin-Film Optical Filters. - Inst. Phys. Publish., Philadelphia, Pa., 2001. - 645 p.
2. Goulielmakis E., Yakovlev V., Pervak V., et al. Attosecond Control and Measurement: Lightwave Electronics // Science - 2007 - 317 - P. 769-775.
3. Goulielmakis E., Schultze M., Hofstetter M., et al. Single-Cycle Nonlinear Optics // Science - 2008 - 320 - P. 1614-1617.
4. Kienberger R., Krausz F. Attosecond Metrology Comes of Age // Physica Scripta - 2004 - T110 - P.32-38.
5. Uiberacker M., Uphues Th., Schultze M., et al. Attosecond real-time observation of electron tunnelling in atoms // Nature - 2007 - 446 - P.627-632.
6. Baltuska A., Udem Th., Uiberacker M., et al. Attosecond control of electronic processes by intense light fields // Nature - 2003 - 421 - P.611-615.
7. Drescher M., Hentschel M., Kienberger R., et al. Time-resolved atomic inner-shell spectroscopy // Nature - 2002 - 419 - P. 803-807.
8. O.Smirnova, M.Spanner, M.Yu.Ivanov. Coulomb and polarization effects in sub-cycle dynamics of strong-field ionization // J. Phys.B - 2006 - 39 - P.S307-S321.. (2006), pp.323-339.
9. Nisoli M., De Silvestri, Svelto S. Appl. Phys. Lett. - 1996 - 68 - P.2793-2795.
10. Nisoli M., De Silvestri, Svelto S., et al. Compression of high-energy laser pulses below 5 fs // Opt. Lett - 1997 - 22, No.8 - P. 522-524.
11. Szpöcs R., Ferencz K., Spielmann C., and Krausz F. Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers // Opt. Lett. - 1994 - 19 - P.201-203.

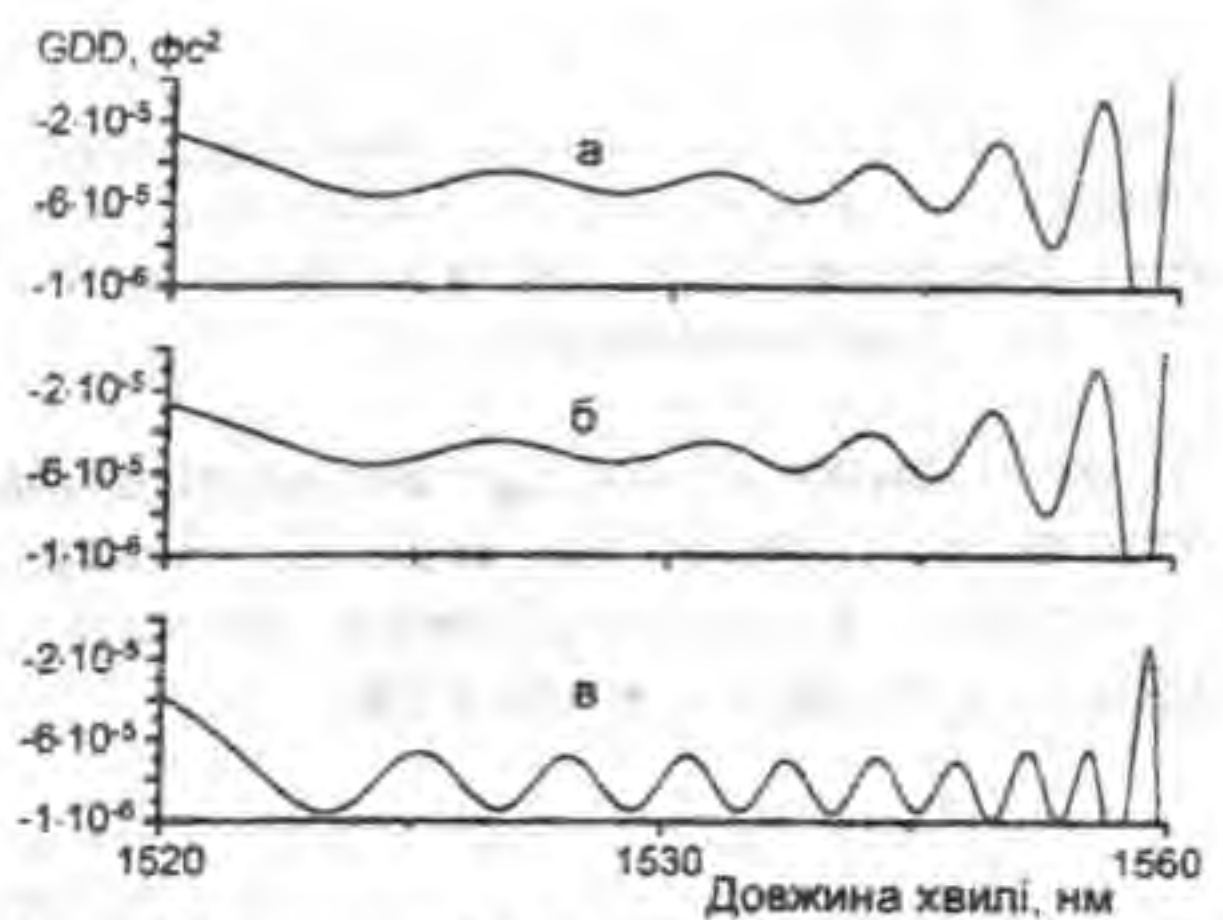


Рис.4. Спектральні залежності дисперсії групової затримки структур з 138 (а), 165 (б) і 202 (в) шарами.

12. Kärtner F. X., Matuschek N., Schibli T., et al. Design and fabrication of double-chirped mirrors // Opt. Lett. - 22 - P.831-833.
13. Kärtner F. X., Morgner U., Schibli I., et al. Ultrabroadband double-chirped mirror pairs for generation of octave spectra // J. Opt. Soc. Am. B - 2001 - 18, No.6 - P.882-885.
14. Matuschek N., Gallmann L., Sutter D. H., et al. Back-side-coated chirped mirrors with ultra-smooth broadband dispersion characteristics // Appl. Phys.B - 2000 - 71 - P.509-522.
15. Steinmeyer G. Femtosecond dispersion compensation with multilayer coatings: toward the optical octave // Appl. Opt. - 2006 - 45 - P.1484-1490.
16. Pervak V., Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K., et al. 1.5-octave chirped mirror for pulse compression down to sub-3 fs // Appl. Phys.B - 2007 - 87 - P.5-12.
17. Momeni B., Adibi A. Optimization of photonic crystal demultiplexers based on the superprism effect // Appl.Phys.B - 2003 - 77 - P.555-560.
18. M. Gerken and D. A. B. Miller, Multilayer thin-film structures with high spatial dispersion // Appl. Opt. - 2003 - 42, P.1330-1345.
19. M. Gerken M., Miller D.A.B. Wavelength demultiplexer using the spatial dispersion of multilayer thin-film structures // IEEE Photon. Technol. Lett. - 2003 - 15 - P.1097-1099.
20. Gerken M., Miller D.A.B. Limits on the performance of dispersive thin-film stacks // Appl.Opt. - 2005 - 44, No.6 - P.3349-3357.
21. Pervak V., Teisser C., Sugita A., et al. High-dispersive mirrors for femtosecond lasers // Optics Express - 2008 - 16, No.14 - P.10220-10233.

Надійшла до редколегії 20.11.08

УДК 537.52

Черняк В.Я., д.ф.-м.н., проф., Левко Д.С., асп.,
Щедрін А.І., д.ф.-м.н., проф., Наумов В.В., к.ф.-
м.н., Ольшевський С.В., к.ф.-м.н., Юхименко
В.В., асп., Присяжневич І.В., інж.

**Вихід вільного водню при плазмохімічній
конверсії етанолу та води в електро-
розрядній плазмово-рідинній системі з
різною полярністю електродів**

Досліджено вихід вільного водню (H_2) при
плазмохімічній конверсії етанолу або води під
дією електричного розряду в газовому каналі з
рідкою стінкою. Проведено детальне чисельне
моделювання кінетики плазмохімічних процесів
у плазмово-рідинному реакторі, де плазмо-
формуючий газ (повітря) інжектується у
рідину через один електрод, а інший електрод
контактує із робочою рідиною за схемою
"рідкий анод" або "рідкий катод". З'ясовано, що
полярність електродів жодним чином не
впливає на виробництво H_2 у випадку, коли
робочою рідиною є етанол. Але вплив
полярності має місце у випадку, коли
використається вода. Більш значний вихід H_2
спостерігається тоді, коли вода контактує з
позитивно зарядженим електродом ("рідкий
анод"), а негативно заряджений електрод
(металевий катод) межує із газовою
порожниною, в якій відбувається електричний
розряд. Цей ефект пояснюється додатковим
катодним виділенням H_2 за рахунок електролізу.

Ключові слова: електричний розряд,
плазмохімічна конверсія, водень

*E-mail: chern@univ.kiev.ua, ashched@iop.kiev.ua
Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Introduction

Today, hydrogen is considered as one of the most
prospective energy sources for the future that can be
renewable, ecologically clean and environmentally
safe [1]. Among possible technologies for free
hydrogen (H_2) production, including steam
reforming and partial oxidation of hydrocarbons [2],
a low-temperature plasma-assisted reforming of
biomass-derived ethanol (ethyl alcohol C_2H_5OH) is
believed to be a good alternative approach [3-6].

There are various electric-discharge techniques of
plasma conversion of C_2H_5OH into H_2 using thermal

V. Ya. Chernyak*, Doct.Sci., Prof., D. S. Levko,
asp., A. I. Shchedrin*, Doct.Sci., Prof., V. V.
Naumov, Ph.D., S. V. Olszewski, Ph.D., V. V.
Yukhymenko, asp., I. V. Prisyazhnevych, eng.

**A free hydrogen yield during plasma-
chemical conversion of ethanol and water in
the electric-discharge plasma-liquid system
with different polarity of electrodes**

The yield of free hydrogen (H_2) produced during
plasma-chemical conversion of ethanol and water
under the action of the electrical discharge in a gas
channel with liquid wall is studied. The detailed
numerical simulation of the kinetics of plasma-
chemical processes in a plasma-liquid reactor,
where a plasma-forming gas (air) is injected into
the work liquid through the one electrode, and
another electrode is contacted with the work liquid
by a scheme of "liquid anode" or "liquid cathode",
is conducted. It is found that the polarity of
electrodes does not influence on the H_2 yield in the
case when the work liquid is ethanol. However, the
influence of the voltage sign takes place in the case
when water is used. The H_2 yield is considerably
higher when water is contacted with the negative
electrode ("liquid anode") and the positive
electrode (metal cathode) is contacted with the
gaseous cavity where electrical discharge occurs.
This effect is explained by an additional cathodic
evolution of H_2 due to the water electrolysis.

Key Words: electrical discharge, plasma
chemical conversion, hydrogen

(equilibrium) and non-thermal (non-equilibrium)
plasmas: arc, corona, spark, MW, RF, DBD, etc. [7].
Among them, one of the most efficient is the plasma
processing in the electric discharge in a gas channel
with liquid wall (DGCLW) [8, 9]. Advantages of this
technology are high chemical activity of used plasma
and selectivity of plasma-chemical transformations,
providing high enough productivity and efficiency of
conversion at relatively low power consumption on
the high-voltage discharging in a flow at atmospheric
pressure [10]. The nonequilibrium plasma assists as
an energetic catalyst containing electronically
excited particles: molecules, atoms and radicals

which initiate fast chain-branching reactions of conversion of hydrocarbons that does not occur in normal conditions. The highly developed plasma-liquid interface with the large surface-to-volume ratio and the deep injection of plasma particles into the liquid also favor to the intensification of the ethanol conversion in the system. At that, there is no problem with excess heat removal since such plasma is thermally cold. The plasma-liquid system (PLS) with the DGCLW has demonstrated its ability in the plasma-chemical conversion of liquid ethanol into the hydrogen-rich syngas in experiments [11, 12]. However, there are still enough issues for research.

This work presents the results of the study related to kinetics of the plasma-chemical reforming of ethanol and water in the DGCLW in the regime with the liquid electrode, focusing on the hydrogen yield and effects of cathodic electrolysis.

Methodology

The kinetic modeling of the process of the plasma conversion of liquid fuel (ethanol and water) into hydrogen was done for the scheme of the DGCLW that was used in experiments [12] (Fig. 1 and Fig. 2).

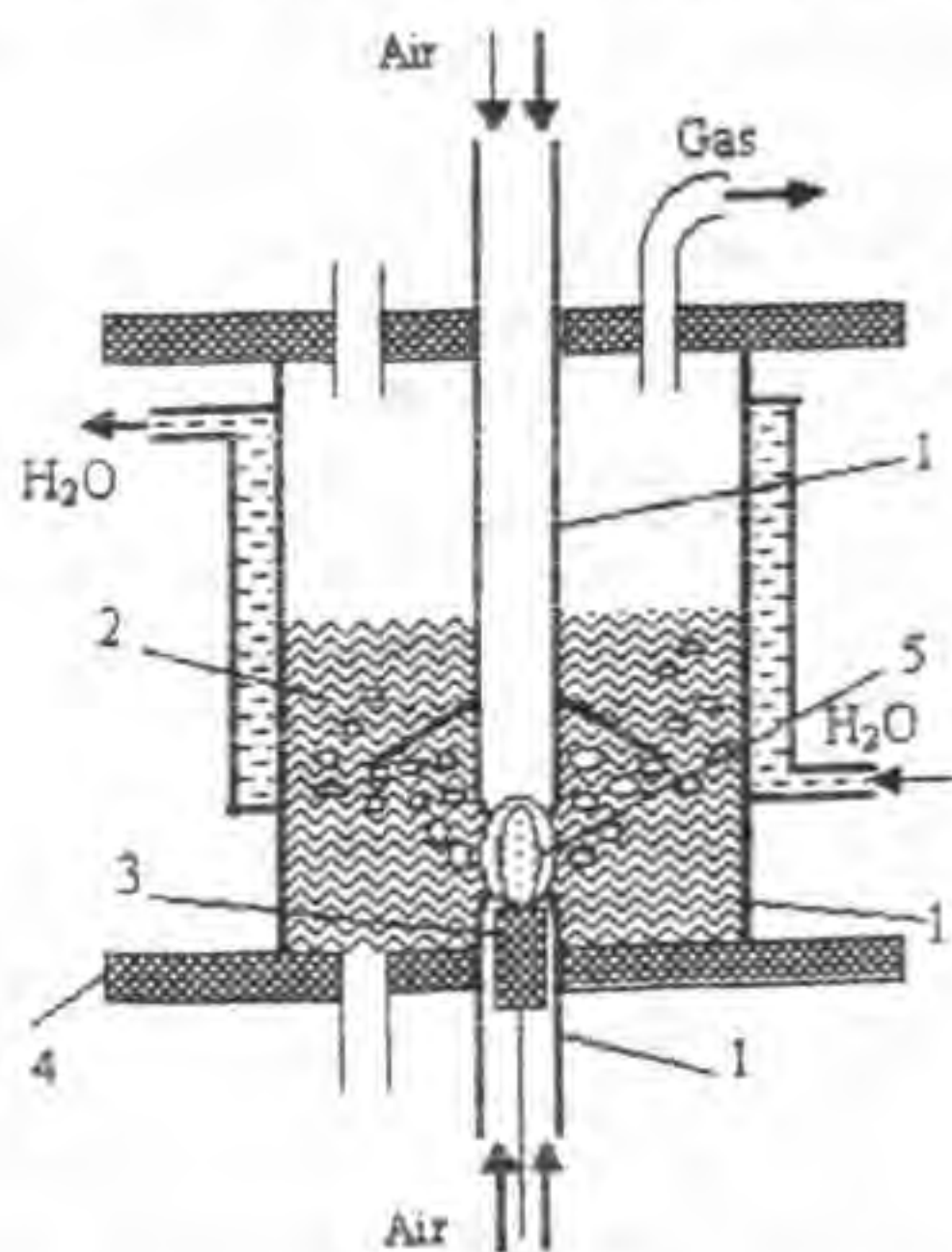


Fig.1 Schematic of plasma-chemical reactor: 1 – quartz tubes; 2 – liquid fuel; 3 – copper rod electrode; 4 – metal flange; 5 – discharge cavity

The plasma-forming gas (atmospheric air) was pumped into the work liquid through the one electrode (the copper rod inserted in the quartz tube immersed in the liquid), and another electrode (4) was contacted with the work liquid under the

positive (+) or negative (-) potential (work modes of "liquid anode" or "liquid cathode"). The electric discharge was burning in the appearing gaseous cavity in the mixture of air and ethanol or water vapors. The output gas discharge products in the form of bubbles entered the liquid volume in the reactor and then passed into the chamber where they were collected. The discharge worked in the continuous dc regime and its power did not exceed 700 W. The air flow rates, ethanol-water mixing ratio and processing time were varied to optimize the process.

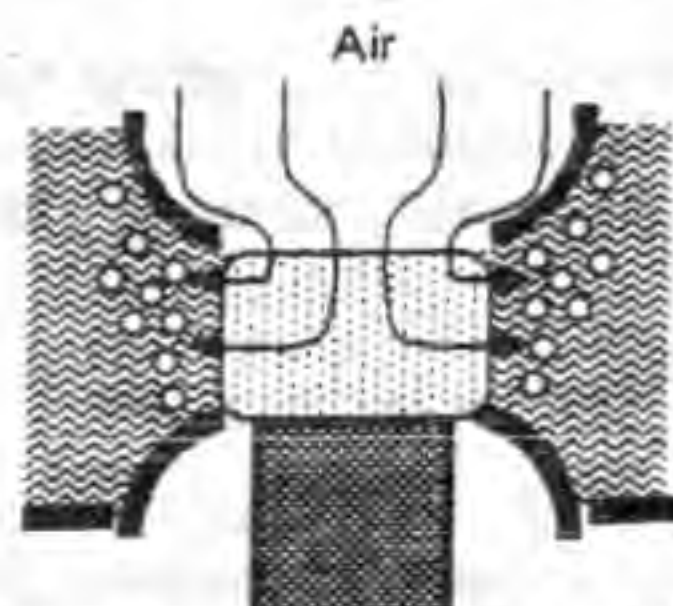


Fig.2. Schematic of DGCLW with a liquid electrode

In plasma-chemical calculations, the process was divided into two stages: 1) the process in the discharge cavity, and 2) the process outside the discharge in the reactor volume. In the model statement it was supposed that the gas discharge was burning in a cylinder cavity with a radius that equals to the internal radius of the tubes and with a length that equals to the distance between the electrodes. Since one electrode was located completely in the liquid, in the system, besides gas discharge, the electrolysis also occurred: hydrogen was liberated on the cathode, and oxygen was liberated on the anode.

According to the first law of electrolysis, the number of gas particles, ΔN , which was liberated on the electrodes per unit of time per unit of volume, it was described by the equation:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{k_{ech} N_A}{V \cdot M} I \quad (1)$$

where k_{ech} is the electrochemical equivalent for H_2 or O_2 , M is a molecular mass, N_A is Avogadro number, I is the electric current, V is the cavity volume.

For description of plasma-chemical kinetics and calculation of the component content in the plasma-chemical system under consideration, the following system of kinetic equations was used:

$$\frac{dN_i}{dt} = S_{ei} + \sum_j k_{ij} N_j + \sum_m k_{im} N_m N_l + P_i - k N_i \quad (2)$$

where N_n , N_j , N_m , N_l are concentrations of molecules, atoms and radicals, k_{ij} , k_{im} are rate constants of chemical reactions, S_{ei} is the rate of formation of the

species in electron-molecular reactions, P_i is the supply of the primary components in the cavity, kN_i is the escape of gas products from the cavity caused by the unbalanced heat expansion.

The values P_i for H_2O and C_2H_5OH molecules was derived by the energy of their evaporation; for N_2 and O_2 , it was derived by the input air flow rate; and for H_2 , it was derived according to the cathodic evolution described by eq. (1).

The values S_{ei} were determined as:

$$S_{ei} = \frac{W}{V} \frac{1}{\varepsilon_{ei}} \frac{W_{ei}}{\sum W_{ei} + \sum W_i} \quad (3)$$

where W is the electric discharge power; W_{ei} is a specific power consumed in the electron-molecular process of the inelastic scattering with a threshold energy ε_{ei} :

$$W_{ei} = \sqrt{\frac{2q}{m}} n_e N_i \varepsilon_{ei} \int_0^\infty \varepsilon Q_{ei}(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4)$$

where $q = 1.602 \cdot 10^{-12}$ erg/eV, m and n_e are the mass and concentration of electrons, Q_{ei} is a cross-section of the corresponding inelastic process; W_i is a specific power spent into the gas heating:

$$W_i = \frac{2m}{M_i} \sqrt{\frac{2q}{m}} n_e N_i \int_0^\infty \varepsilon^2 Q_i(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5)$$

where M_i is a molecular mass, Q_i is a transport cross-section of the electron scattering, and $f(\varepsilon)$ is the electron energy distribution function (EEDF).

The EEDF was calculated from the Boltzmann kinetic equation in the standard two-term approximation [13-15]. It was assumed that the electric field in the discharge is constant ($E = 20$ kV/cm). Only processes with primary components: N_2 , O_2 , H_2O and C_2H_5OH were taken into account because all other secondary products poorly affected the EEDF since their concentrations are relatively small. The calculated EEDF in the case of both liquids, H_2O and C_2H_5OH , had a similar form characteristic for the air plasma because the air (N_2 - O_2) is the main plasma-forming gas and the concentration of evaporated liquids in the cavity does not influence the conditions [16, 17].

According to the model, the reacting plasma is characterized by two temperatures: the electron temperature T_e is determined by the electric field E/N and EEDF; the gas temperature T is determined by the temperature of surrounding liquid medium.

The full kinetic mechanism in the plasma-chemical system under study included 65 species (C_2H_5OH , H_2O , N_2 , O_2 , H_2 , CO , etc.) and about 400 reactions (details are described in [18-22]).

At the first stage of the model calculations in the discharge cavity, the plasma-chemical kinetics was computed with the full system eq. (2) including the

terms P_i and kN_i . The complete time of the discharge burning was divided into the equal time intervals which duration is determined by the cavity filling time, i.e. by the time of the gas flowing that is equal to the ratio of the cavity volume V to the gas flow rate G , $\tau = V/G \approx 10^{-3}$ s. During this time the calculated concentrations of the components came to the stationary state due to the balance between the supply of the primary components and their plasma-chemical transformations in the cavity, on the one side, and the gas products escape from the cavity, on the other side. It was assumed that at the beginning of the every time interval the gas in the cavity was totally refreshed, and the previous periods did not influence on the subsequent periods. This allowed doing plasma-chemical calculations by the system eq. (2) in the discharge during the one time interval only as the concentrations of the components in the every time interval come to the same values.

At the second stage of the model calculations in the reactor during the time period from 10^{-3} s to 10^{-1} s, when the gas discharge products in the form of the bubbles entered the liquid volume and then passed into the chamber where they were collected, the plasma-chemical kinetics was also calculated using the system eq. (2) but without processes of electron-molecular interactions S_{ei} and additional terms of P_i and kN_i . In fact, the output concentrations of the main stable gas-phase components (hydrocarbons, oxides and acids) did not reveal big changes because the active plasma particles, atoms and radicals, outside the discharge had disappeared [14].

Results and discussions

The parametric kinetic calculations allow to learn the peculiarities and regularities of the process of the plasma conversion of ethanol and water into hydrogen in the DGCLW with the liquid electrode. Fig.3. shows the dependences of the H_2 yield on the discharge current for different regimes and conditions of the processing.

It is seen that in the case of water at low currents ($I < 100$ mA) the initial H_2 yield due to the cathodic electrolysis is almost the same as due to the gas discharge if the gas cavity is contacted directly with the metal anode. It is also seen that the summary H_2 yield in the system due to the cathodic evolution and discharge production is practically equal to the H_2 yield in the mode with the liquid anode.

In the case of ethanol it is found that the polarity of electrodes does not influence on the H_2 yield. It is caused by the fact that the concentration of H_2 produced due to the electrolysis is many times

smaller than the H_2 produced in the discharge, and, therefore, it can be neglected.

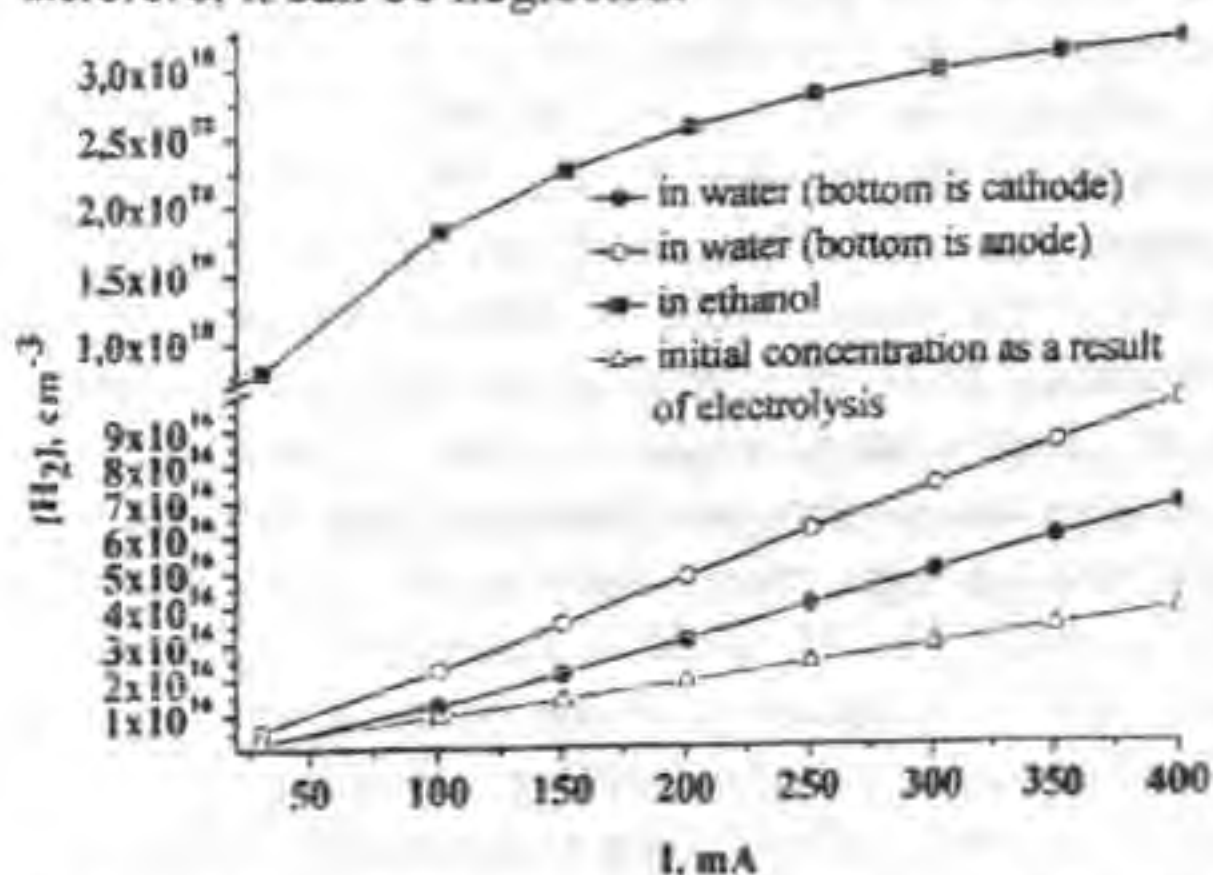
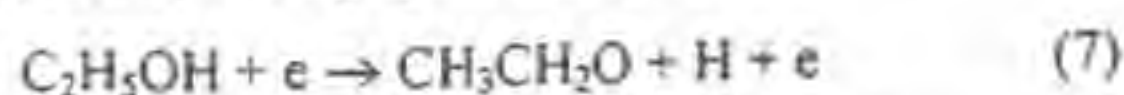


Fig.3. Concentrations of hydrogen after the processing of ethanol and water in the DGCLW

The behavior of the H_2 concentration curves in Fig.3 can be explained by the concurrent processes of the formation and dissociation of H_2 molecules. The main channel of generation of H_2 under the discharge in ethanol vapors is the reaction with the participation of H atoms:



Since the concentration of C_2H_5OH during the discharge varies weakly, the rate of the H_2 production in the reaction (6) is proportional to the concentration of H atoms. The main channel of generation of H atoms here is the e-impact dissociation of C_2H_5OH molecules:



Since the rate of this process according to eq.(3) is proportional to the specific power deposited in the discharge, it consequently depends on the discharge current. Therefore, the H_2 production in the reaction (6) grows up linearly with the current. At the same time, the processes of destruction of H_2 molecules in the discharge also occur, and the main channel among them is also the e-impact dissociation



As a result, the production of H_2 increases with the current nonlinearly tending to the saturation at higher currents ($I > 100$ mA).

During the discharge in water vapors in the case of the liquid anode, the initial content of H_2 , which was produced by the electrolysis, first decreases with the time due to the dissociation (8), then this decrease ceases, when the H_2 generation enters into the force due to the fast bimolecular reactions:



The main channel of generation of H atoms here is the reaction of dissociation of H_2O molecules:



which rate is proportional to the discharge current.

The dependences of the production of the H, OH, and HO_2 radicals as a function of the discharge current are shown in Fig.4. It is seen that the concentration of H and OH permanently increases while the concentration of HO_2 slightly decreases with the current. As a result, the production of H_2 linearly increases in the entire range of currents.

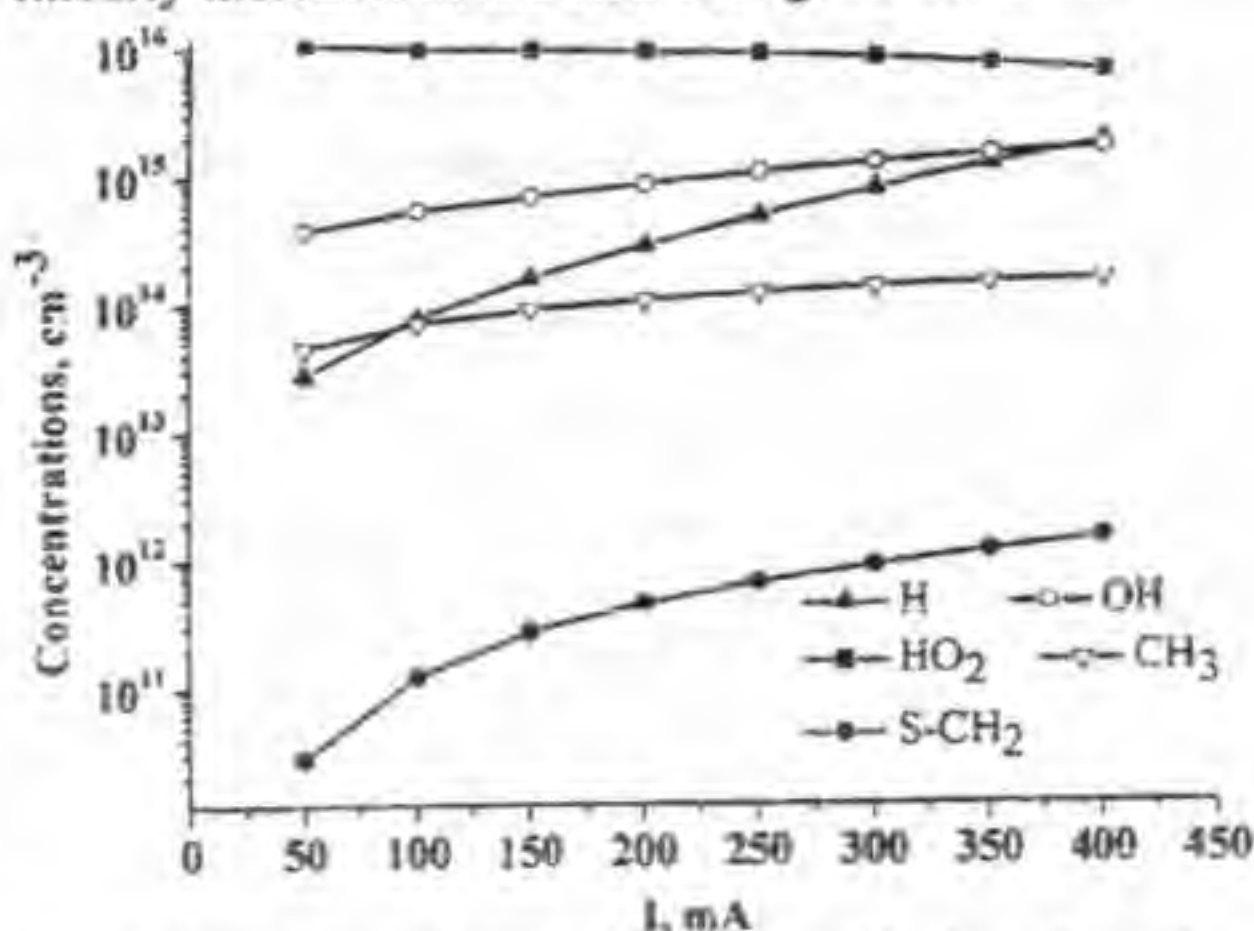


Fig.4. Concentrations of some radicals after the processing of ethanol and water in the DGCLW

The dependences of the production of the stable gas-phase components in the discharge in the ethanol and water are shown in Fig.5 and Fig.6, respectively. One can see that in the case of ethanol the H_2 and CO reach the greatest values; in the water – HNO_3 , HNO_2 , and H_2 , especially at higher currents.

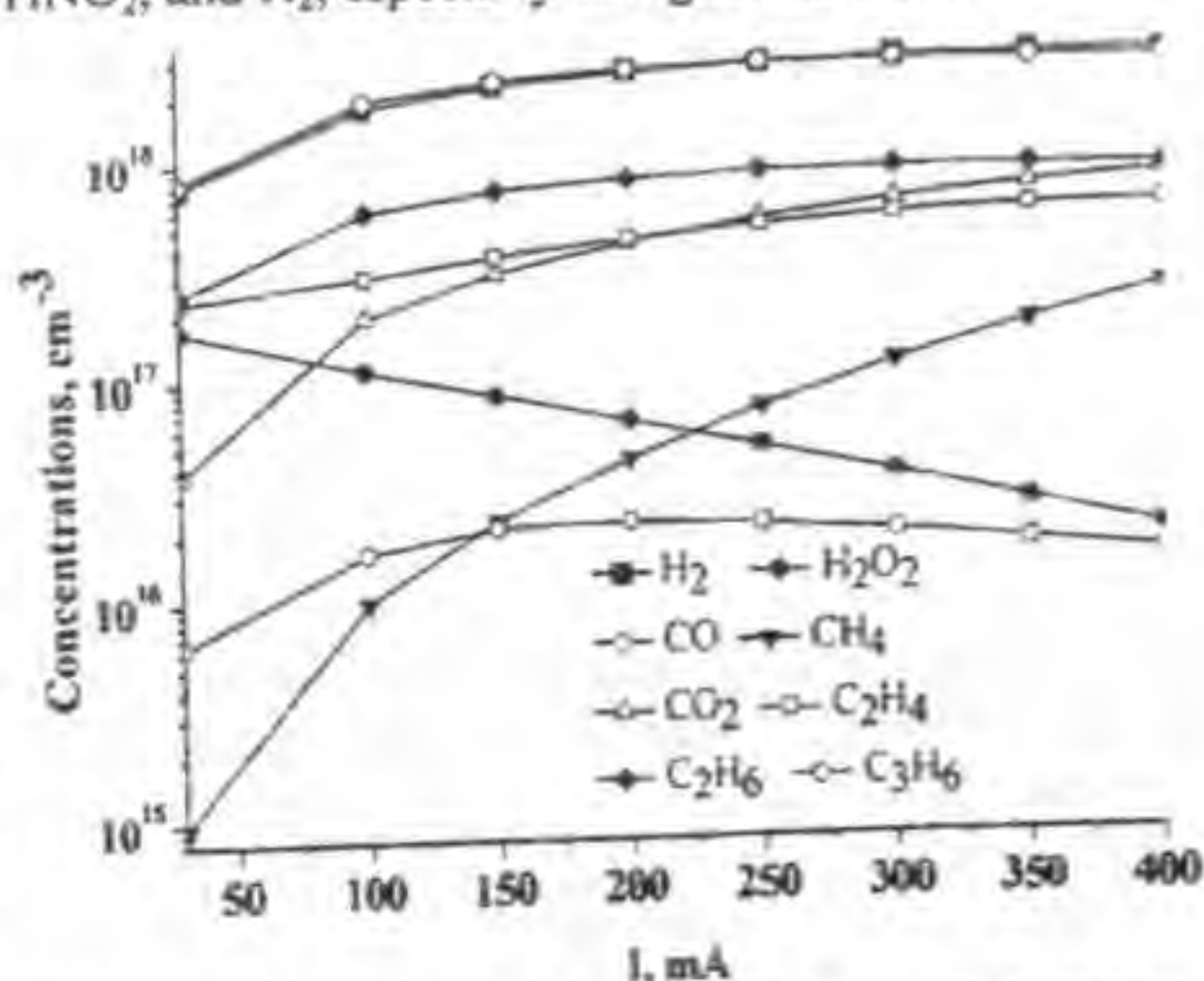


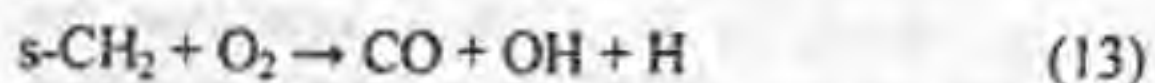
Fig.5. Concentrations of some stable gas components after the processing of ethanol in the DGCLW

Here, the CO transforms with the time into the H₂ by the water-gas shift process

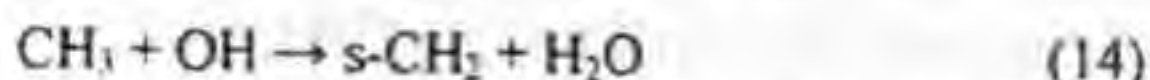


which rate depends on the time of the presence of the mixture in the reactor.

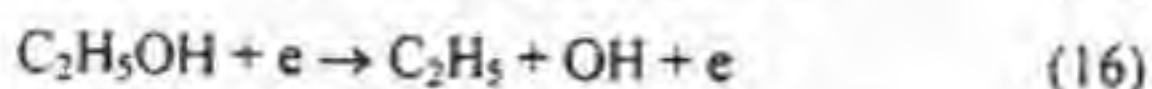
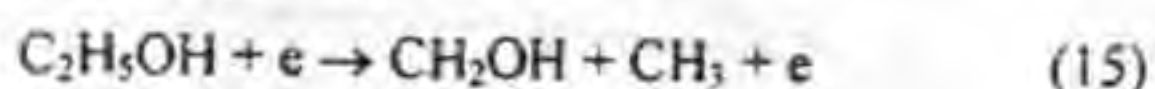
The main channel of generation of CO during the discharge in ethanol vapors is the reaction of O₂ and singlet CH₂ radicals:



In turn the production of s-CH₂ is determined by the reaction:



Since the CH₃ and OH radicals in the discharge are formed mainly during the dissociation of C₂H₅OH molecules by two channels:



therefore the rate of the CO production is proportional to the square discharge current.

The main process of disappearance of CO in the system is the reaction



which rate is also linearly dependent on the current. However, the increase of CO on Fig.5 shows that the process of the CO formation (13) is stronger than the disappearance (17).

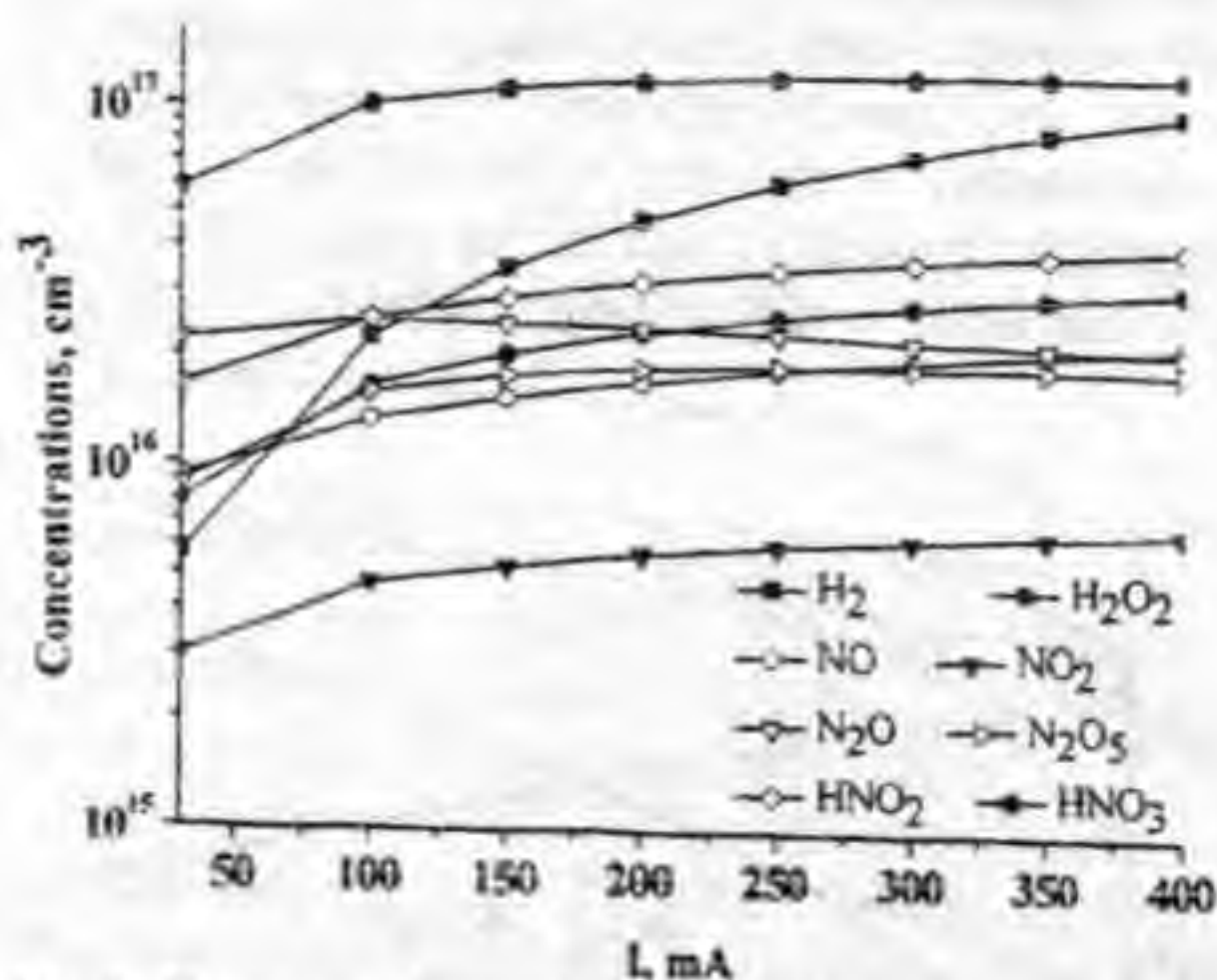


Fig.6. Concentrations of some stable gas components after the processing of water in the DGCLW with the liquid cathode

Conclusions

The numerical plasma-chemical kinetic modeling of the plasma conversion of ethanol and water into hydrogen in the DGCLW with the liquid electrode

allowed to understand the peculiarities and regularities of the processing in different regimes and conditions. It is confirmed that the DGCLW is quite efficient in the plasma reforming of liquid hydrocarbons. It is found that the polarity of electrodes does not influence on the H₂ yield in the case when the work liquid is ethanol because the concentration of H₂ produced in the discharge in the mixture of air-ethanol vapors is many times larger than due to the electrolysis. However, the influence of the voltage sign takes place in the case when water is used. The H₂ yield is considerably higher when water is contacted with the negative electrode ("liquid anode") and the positive electrode (metal cathode) is contacted with the gaseous cavity where electrical discharge occurs. This effect is explained by an additional cathodic evolution of H₂ due to the process of water electrolysis.

Acknowledgements

This work was supported in part by the Ministry of Science and Education of Ukraine and by the National Academy of Sciences of Ukraine.

References

2. Ni M., Leung D.Y.C., Leung M.K.H. A review on reforming bio-ethanol for hydrogen production // *Int. J. Hydrogen Energy*. - 2007. - 32. - P.3238-3247.
3. Deminsky M., Jivotov V., Potapkin B., Rusanov V. Plasma-assisted production of hydrogen from hydrocarbons // *Pure Appl. Chem.* - 2002. - 74, N 3. - P. 413-418.
5. Yanguas-Gil A., Hueso J.L., Cotrino J., Caballero A., Gonzalez-Elise A.R. Reforming of ethanol in a microwave surface-wave plasma discharge // *Appl. Phys. Lett.* - 2004. - 85. - P. 4004-4006.
6. Aubry O., Met C., Khacef A., Cormier J.M. On the use of a non-thermal plasma reactor for ethanol steam reforming // *Chem. Eng. J.* - 2005. - 106. - P. 241-247.
7. Petitpas G., Rollier J., Darmon A., Gonzales-Aguilar J., Metkemeijer R., Fulcheri L. A comparative study of non-thermal plasma assisted reforming technologies // *Int. J. Hydrogen Energy*. - 2007. - 32. - P. 2848-2867.

8. Chernyak V.Ya., Yukhymenko V.V., Slyusarenko Y.I. Conversion of ethanol in plasma of the gas discharge with liquid walls // Bull. Univ. of Kyiv. Series: Physics & Math. – 2007. – № 1. – P. 292-295.
9. Yukhymenko V.V., Chernyak V.Ya., Naumov V.V., Veremii Iu.P., Zrazhevskij V.A. Combustion of ethanol+air mixture supported by transverse arc plasma // Problems Atomic Sci. Technol. – 2007. – №1. – P. 142-144.
10. Veremii Iu.P., Chernyak V.Ya., Trokhymchuk A.K., Kondratyuk Ya.V., Zrazhevskii V.A., Physicochemical properties of a plasma-liquid system with an electric discharge in a gas channel with a liquid wall // Ukr. J. Phys. – 2006. – 51, № 8. – P. 769-774.
11. Yukhymenko V.V., Chernyak V.Ya., Olshevskii S.V., Prisyzhnevich I.V., Zrazhevskii V.A., Verovchuk M.O., Solomenko O.V., Skalny J.D., Matejcek S., Demchina V.P., Kudryavtsev V.S., Naumov V.V. Plasma conversion of ethanol-water mixture to synthesis gas // Ukr. J. Phys. – 2008. – 53, № 5. – P. 409-413.
13. Калужная А.Г., Левко Д.С., Щедрин А.И. Сравнение различных методов расчета плазменной кинетики в барьерном разряде // ЖТФ. – 2008. – 78, № 6. – С. 122-126.
14. Калужная Г.Г., Левко Д.С., Щедрин А.И. Влияние параметров барьерного разряда атмосферного тиска у повітрі на плазмову кінетику // УФЖ. – 53, №10. – С. 957-961.
15. Головинский П.М., Щедрин А.И. Слабопылевая абсолютная отрицательная проводимость в смеси $\text{Xe} : \text{F}_2$, ионизированной пучком быстрых электронов // ЖТФ. – 1989. – 59, Вып.2. – С. 51-56.
16. Щедрин А.И., Левко Д.С., Черняк В.Я., Юхименко В.В., Наумов В.В. Влияние воздуха на концентрацию молекулярного водорода при конверсии этанола посредством неравновесной плазмы газового разряда // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – 88, в.2. – С. 107-110.
17. Nighan W.L. Electron energy distributions and collision rates in electrically excited N_2 , CO , and CO_2 // Phys. Rev A. – 1970. – 2, No5, P. 1989.
18. Marinov N.M. A Detailed Chemical Kinetic Model for High Temperature Ethanol Oxidation // Int. J. Chem. Kinet. – 1999. – 31, P. 183-220.
19. Petrova M.V., Williams F.A. A small detailed chemical-kinetic mechanism for hydrocarbon combustion // Combustion and Flame. – 2006. – 144. – P. 526-544.
20. Atkinson R., Baulch D.L., Cox R.A., Crowley J.N., Hampson R.F., Hynes R.G., Jenkin M.E., Rossi M.J., and Troe J. Evaluated kinetic and photochemical data for atmospheric chemistry: Volume II – gas phase reactions of organic species // Atmos. Chem. Phys. – 2006. 6. – P. 3625-4055.
21. Atkinson R., Baulch D.L., Cox R.A., Hampson R.F., Kerr J.A., Rossi M.J., and Troe J. Evaluated Kinetic, Photochemical and Heterogeneous Data for Atmospheric Chemistry // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 1997, 26, №3. – P. 521-1011.
4. Bromberg L., Cohn D.R., Rabinovich A., Nadidi K., Alexeev N., Samokhin N. Plasma catalytic reforming of biofuels // MIT Plasma Science & Fusion Center Report JA-03-28. – 2003. Available <http://www.psfc.mit.edu>
12. Черняк В.Я., Ольшевский С.В., Юхименко В.В., Наумов В.В., Щедрин А.И., Левко Д.С. и др. Конверсия углеводородных топлив в сингаз в плазможидкостных системах с поперечным газовым разрядом // Тр. V Межд. симп. по теор. и прикл. плазмохимии. – Иваново: ИГХТУ, – 2008. – 1. – С. 315-318.
1. 17th World Hydrogen Energy Conf., 15-19 June 2008, Brisbane, Queensland, Australia. <http://www.whec2008.com>
22. <http://www.iop.kiev.ua/~plasmachemgroup/>

Надійшла до редколегії 01.12.08

СУЧАСНА ФІЗИКА

СЪРАСНА ФІЗІКА

УДК 532.536

Альошин О.Д., доктор ф.-м. наук, професор
Абдікаримов Б.Ж., кандидат ф.-м. наук
Рудніков Є.Г., кандидат ф.-м. наук
Умова рівноваги макроеднорідної системи у полі гравітації Землі поблизу критичної точки

У роботі досліджено умову рівноваги макроеднорідної рідинної системи у полі гравітації землі поблизу критичної точки. Показано, що ця умова залежить від ряду зовнішніх та внутрішніх факторів: від критичної температури речовини, тобто від сил міжмолекулярної взаємодії; від лінійного розміру системи; від густини заповнення системи речовиною та змінюється залежно від ступеня близькості системи до критичного стану. Показано, що ця умова залежить не від величини зміни зовнішнього поля, а від внутрішнього поля в системі, що індукується зовнішнім полем.

Ключові слова: критична точка, гравітаційний ефект, умова рівноваги, критична температура, середня густина заповнення системи

* E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

Згідно [1], віддалік від критичної точки (КТ) для нестисливих рідин умова рівноваги системи у зовнішньому гравітаційному полі h представляється у вигляді $\mu(P,T)+mgz=\text{const}$, з якого слідує співвідношення

$$|\Delta\mu=(\mu-\mu_c)/\mu_c| = |h=\rho_k g \Delta z \cdot P_k^{-1}| \quad (1)$$

Тут: m – маса молекули речовини; μ_c , ρ_k , P_k – критичні значення хімічного потенціалу, густини, тиску речовини, g – прискорення земного тяжіння, Δz – зміна висоти.

У той же час, виходячи з сучасної флуктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [2] речовина поблизу КТ являє собою газ кластерів флуктуацій. У зовнішньому полі h поблизу КТ, коли стисливість системи прямує до нескінченності, такі характеристики речовини як: радіус кореляції R_c , маса кластера флуктуації $m_c=4/3 \cdot \pi R_c^3 \rho_f$ і кількість кластерів в одиниці об'єму N_f змінюються уздовж висоти системи [3,4]. Виходячи з цього, для таких реальних флуктуаційно-дисперсних систем поблизу КТ

УДК 532.536

Alekhin A.D., Dr. of Sci., Prof.
Abdikarimov B.Zh., Ph.D.
Rudnikov E.G., Ph.D.
Equilibrium condition of macro-inhomogeneous system under Earth gravity near the critical point

Equilibrium conditions of macroinhomogeneous liquid system under Earth gravity near the critical point have been investigated in paper. It have been shown that this condition are dependent on set of exterior and interior factors: on the critical temperature of substance i.e. on the forces of intermolecular interactions; on size of system, on average density of sample cell filling and are changed with the critical state is approaching. It has been shown that this condition is not dependent on the change of external field but on the interior field which is indicated by external field.

Keywords: critical point, effect of gravity, equilibrium condition, average density of sample cell filling

умова рівноваги (1) не може вважатись коректною.

Дослідження таких флуктуаційних систем проводяться різними експериментальними методами [3,4,5]: молекулярного розсіяння світла, рефрактометричним, проходження повільних нейтронів, методом руху межі поділу фаз. Ці дослідження вперше показали [4,6,7], що в неоднорідній рідині в критичному стані дія поля гравітації Землі приводить до виникнення в системі внутрішнього неоднорідного поля $U(h)$, висотна зміна якого $\Delta U(h)=\Delta\mu(h)=(10^{-3} \div 10^{-2})h \gg h$.

У роботах [4,8,9] уперше було показано, що висотна зміна внутрішнього поля в неоднорідній макроскопічній системі $\Delta\mu(h) \gg h$ залежить від критичної температури речовини, тобто від сил міжмолекулярної взаємодії

$$(\Delta\mu(h) \sim h + \alpha T_k^3) \quad (2)$$

Ці дані показані на рис. 1.

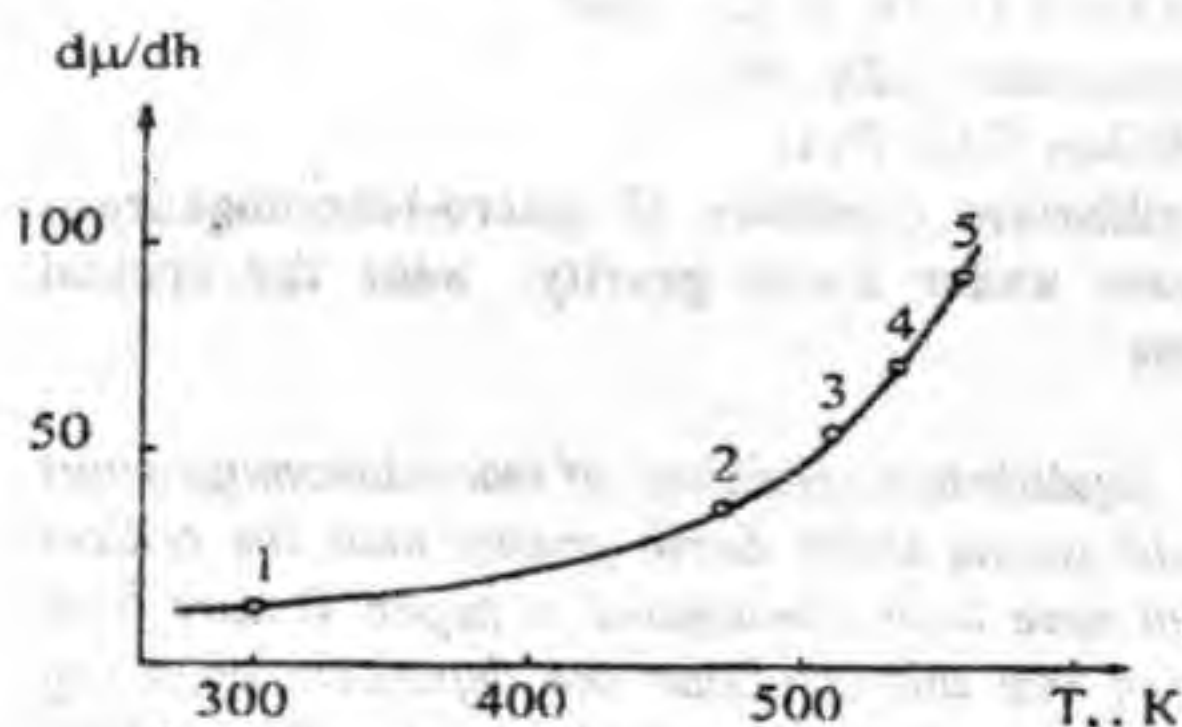


Рис. 1. Залежність похідної $d\mu/dh$ від критичної температури індивідуальних речовин: 1 - CO_2 ; 2 - н-пентан; 3 - гексан; 4 - гептан; 5 - бензол.

Експериментальні дослідження гравітаційного ефекту [4,10] уперше показали, що при зменшенні висоти макроскопічної системи L градієнт внутрішнього поля такої системи $\frac{\partial \mu}{\partial h}$, а також величина $\Delta\mu(h)$ збільшується

$$\Delta\mu(L) \sim \frac{\text{const}}{1 - \varepsilon L^{-1}} \sim L^{-\xi}, \xi \approx 0,4 \quad (3)$$

Ці дані представлені на рис. 2.

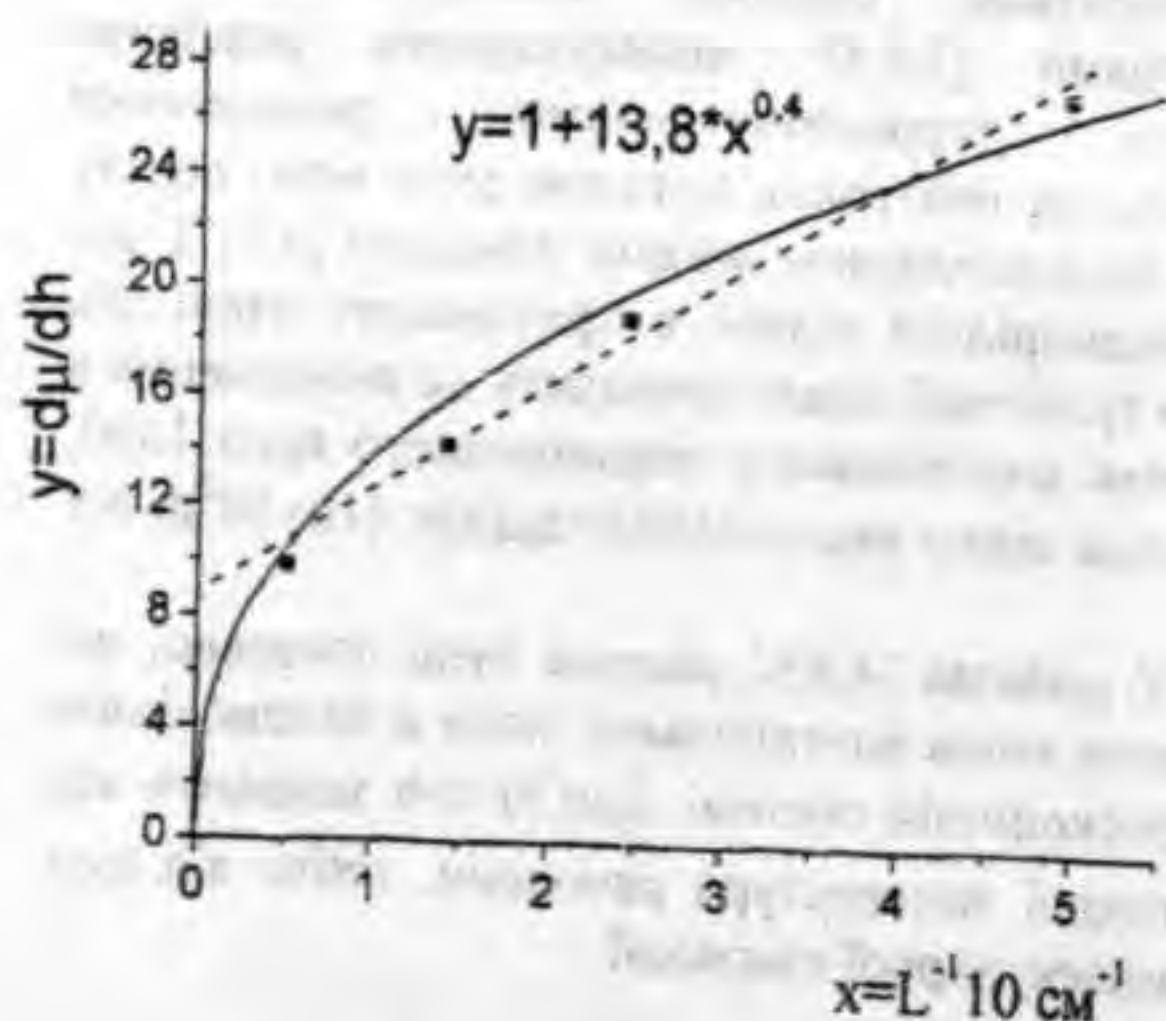


Рис. 2 а. Залежність похідної $d\mu/dh$ у CO_2 від лінійного розміру системи L .

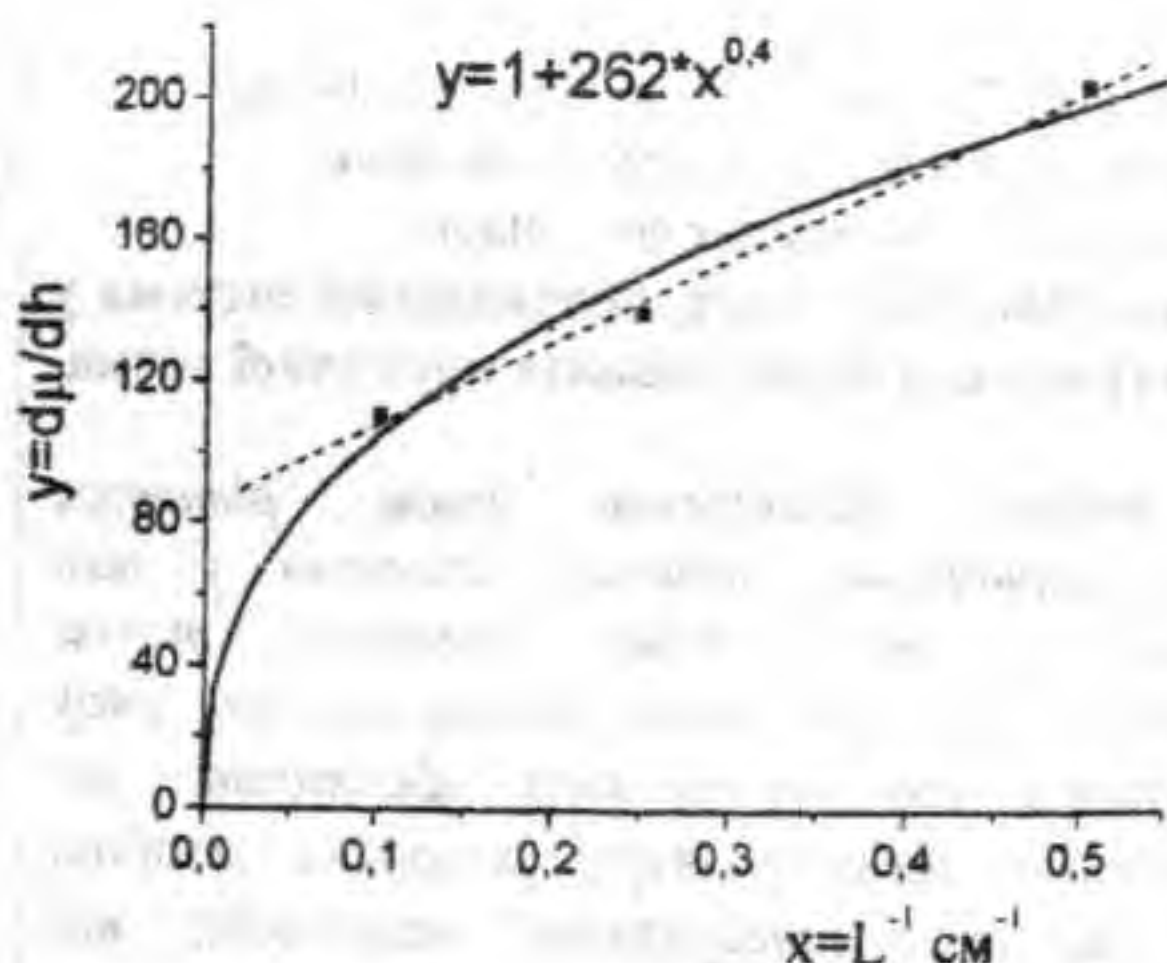


Рис. 2 б. Залежність похідної $d\mu/dh$ для н-пентану й фреону-113 від лінійного розміру системи L .

Якісно такий самий результат слідує з теоретичних розрахунків М. Фишера [11,12] для малих обмежених систем

$$(\Delta\mu_\phi(L) \sim L^{-\frac{1}{\xi}}, \xi = 0,4, \frac{1}{\xi} = 2,5).$$

Експериментальні дослідження висотної залежності інтенсивності розсіяного світла показали, що величина градієнта внутрішнього поля $d\mu/dh$ залежить від середньої густини заповнення системи [13] (рис. 3).

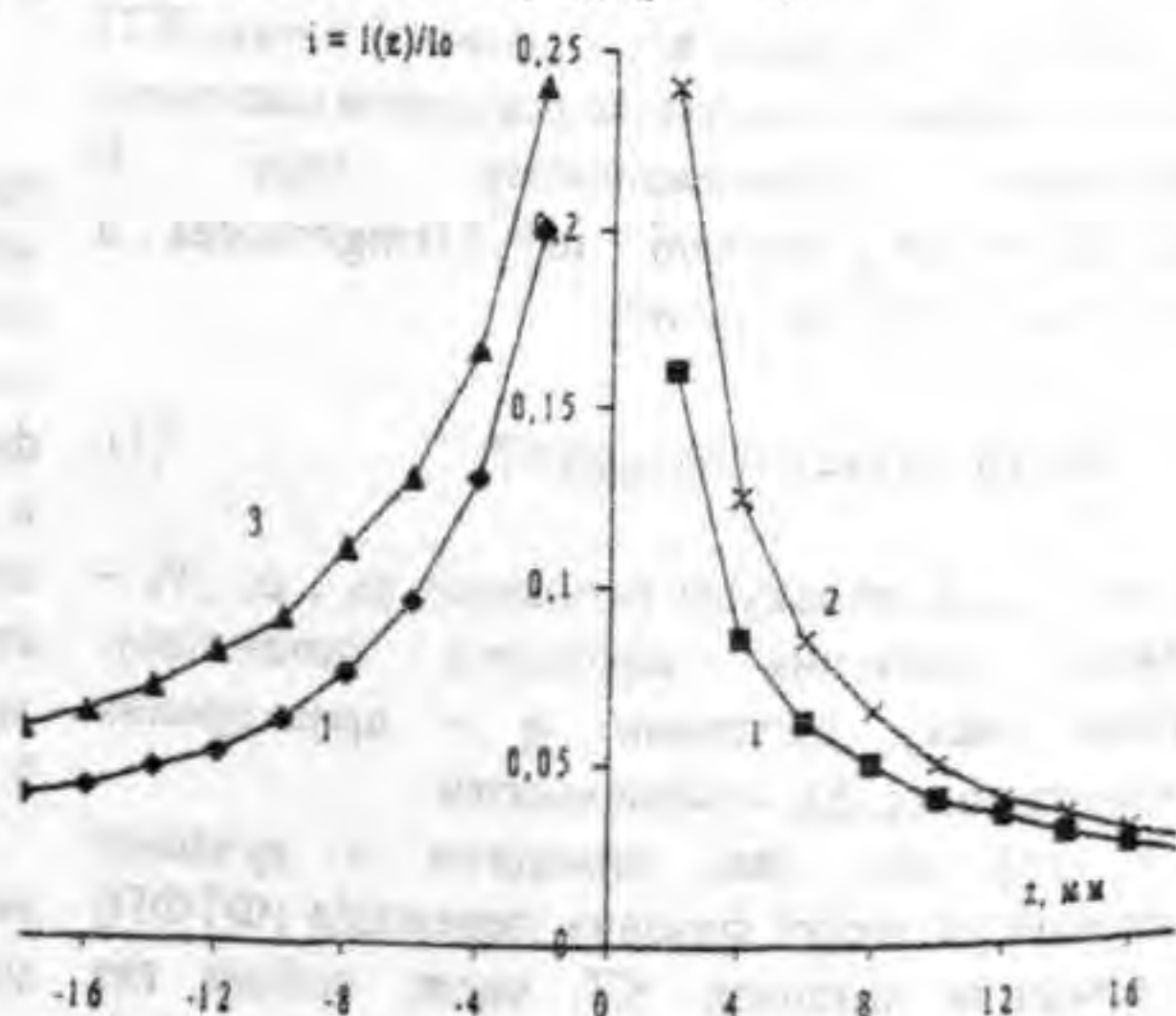


Рис. 3. Висотна залежність інтенсивності розсіяного світла ($\lambda=546$ нм) при критичній температурі фреона-113 при різних густинах заповнення системи: 1 - $\bar{\rho}_1 = \rho_k$; 2 - $\bar{\rho}_2 > \rho_k$; 3 - $\bar{\rho}_3 < \rho_k$.

Із цих даних слідує, що при критичному заповненні камери речовиною градієнт внутрішнього поля $d\mu/dh$ ($\bar{\rho} = \rho_c$) перевищує цю похідну при густині заповнення $\bar{\rho} > \rho_c$ і $\bar{\rho} < \rho_c$ ($d\mu/dh$ ($\rho = \rho_c$) $>$ $d\mu/dh$ ($\bar{\rho} \neq \rho_c$)).

Таким чином, представлені дані показують, що зміна внутрішнього поля в системі залежить:

а) від критичної температури речовини ($\Delta U(T_c) = \Delta \mu(T_c) \sim T_c^{-1}$), тобто від сил міжмолекулярної взаємодії;

б) від лінійного розміру системи ($\Delta U(L) = \Delta \mu \sim f(L) \sim L^{-3}$);

в) від густини ρ заповнення системи речовиною $\Delta U(\rho) = \Delta \mu(\rho) = f(\rho)$.

Звідси слідує, що умова рівноваги неоднорідної речовини в полі гравітації Землі має відмінний від (1) вид, а саме

$$|\Delta \mu| = (\mu - \mu_c) \mu_c = |\Delta U(T_c, L, \bar{\rho})| \gg |\hbar| \quad (4)$$

Співставлення рівностей (1) і (4) дозволяє зробити висновок, що умова рівноваги в неоднорідній речовині змінюється залежно від ступеня близькості системи до критичного стану: від класичного виразу $|\Delta \mu| = |\hbar|$ (далеко від КТ) до виразу $|\Delta \mu| = |\Delta U(T_c, L, \bar{\rho})| \gg |\hbar|$ (поблизу КТ).

При цьому необхідно відзначити, що поле $\Delta U(T_c, L, \bar{\rho})$ не є зовнішнім полем. Це поле є неоднорідним внутрішнім полем у конденсованій системі, індукованим зовнішнім гравітаційним полем Землі $\hbar$.

Згідно гіпотези універсальності для фазових переходів другого роду, аналогічні умови рівноваги необхідно враховувати і використовувати для подвійних розчинів і багатокомпонентних систем.

Також це необхідно при прогнозуванні властивостей якісно інших об'єктів поблизу точок фазових переходів другого роду – систем, що відносяться до класу універсальності тривимірної моделі Ізінга, магнетиків, сегнетоелектриків, бінарних металевих сполук в зовнішніх магнітних, електричних та інших неоднорідних полях.

На даний час інтенсивні дослідження таких неоднорідних систем в різноманітних зовнішніх полях широко проводяться як в Україні, так і за кордоном.

Список використаних джерел

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1976. 584 с.
2. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 2-е изд. – 1982. – 382 с.
3. Голик А.З., Шиманский Ю.И., Алехин А.Д., Артюховская Л.М., Крупский Н.П., Чалый А.В., Шиманская Е.Т. // Уравнение состояния газов и жидкостей. – М.: Наука, 1975. – С. 189-216.
4. Альохін О.Д., Дорош А.К., Рудніков Є.Г. Критичний стан речовини в полі гравітації Землі. / Київ. Політехніка. – 2008. – 404 с.
5. Булавін Л.А. Критичні явища у рідинах. / Київ: "Київський університет", 1997. – 174 с.
6. Альохін О.Д., Булавін Л.А., Рудніков Є.Г. // УФЖ – 1996. – Т. 41, № 11-12. – С. 1059–1061.
7. Алехин А.Д., Абдикаримов Б.Ж., Булавин Л.А. // УФЖ – 1991. – Т. 36, № 4. – С. 547–550.
8. A.D. Alekhin // Journal of Molecular Liquids. 2006. 127. 62.
9. Алехин А.Д. Энергия флуктуаций вблизи критической точки. // УФЖ. – 1988. – Т. 33, № 1. – С. 152-155.
10. Алехин А.Д. Геометрия образца и гравитационный эффект вблизи критической точки. // УФЖ. – 1985. – т. 30, № 1. – С. 23-25.
11. M.E. Fisher, M.N. Barber. // Phys. Rev. Lett. 1972. – 28 – 1516.
12. K. Binder // Annu. Rev. Phys. Chem. – 1992. – Vol. 43 – P. 33-59.
13. Альохін О.Д. // УФЖ – 2006. – Т. 51, № 7. – С. 660–662.

Надійшла до редколегії 12.11.2008

УДК 539.1, 577.32, 57.088

Булавін Л.А. проф., д.ф.м.н., акад. НАНУ,
Вареня О.Г. студ.,
Вербінська Г.М. к.ф.м.н., доц.,
Загородня О.А. к.ф.м.н., н.с.,
Перепелиця С.М. к.ф.м.н.

Вивчення динаміки випаровування краплин рідинних систем ДНК-вода

Метод був розроблений для вивчення зовнішніх гідратних оболонок молекули ДНК за допомогою вимірювання швидкості випаровування краплин рідинних систем ДНК-вода та порівняння її з результатами по випаровуванню води. Експерименти проводились для таких масових концентрацій ДНК в розчині: 0.001, 0.003, 0.007, 0.015, 0.03, 0.06, 0.12, 0.25, 0.5 та 1%. Результати показали, що швидкість випаровування крапель рідинних систем ДНК-води знижується та взагалом відрізняється від швидкості випаровування краплин води.

Ключові слова: рідинні системи ДНК-вода, випаровування, краплини.

E-mail: oksana_varenia@mail.ru

Water playing the key role in shaping the DNA double helix, the structure of hydrated shells has been thoroughly studied with the use of numerous techniques, including X-ray structure analysis, infrared and Raman spectroscopy, calorimetry, etc.

The DNA molecule is known to be strongly and unevenly hydrated. It has been showed that there are, at least, 3 hydrated shells near the DNA molecule [1]. The first hydrated shell consists of about 20 water molecules per nucleotide directly interacting with the atomic groups of the double helix. It should be noted that the strongest connection is observed for water molecules that interact with free oxygen atoms of phosphate groups of DNA backbone, oxygen atoms of deoxyribose and nitrogenous bases. The second hydrated shell consists of water molecules connected with the DNA double helix through water molecules from the first shell (Fig.1, 2). It is known that under the temperature lower than 0°C the water of both first and second shells does not freeze. The third hydrated shell is treated as the intermediate layer between the bulk water and the ion-hydrated

L.A. Bulavin Dr. Sci., Prof., Acad. NASU,
O.G. Varenia stud.,
G.M. Verbinska PhD,
O.A. Zagorodnia PhD, Sci. Res.,
S.M. Perepelytsia PhD.

Study of evaporation dynamics of DNA water solution drops

The method has been developed for studying the external hydrated shell of DNA through measuring the evaporation rate of droplets of DNA water solution and comparing it with the results for pure water droplets. The experiments have been conducted for mass concentrations 0.001, 0.003, 0.007, 0.015, 0.03, 0.06, 0.12, 0.25, 0.5, and 1 % of DNA in the solution. The results have showed a decrease in evaporation rate of DNA water solution drops as compared with that of pure water drops.

Key Words: DNA water solution, evaporation, drops.

shell of macromolecules. As of today, the structure of the first and the second shells has been studied quite well [2, 3], whereas the structure of the third has been investigated a little for the difficulties to identify it in the sample.

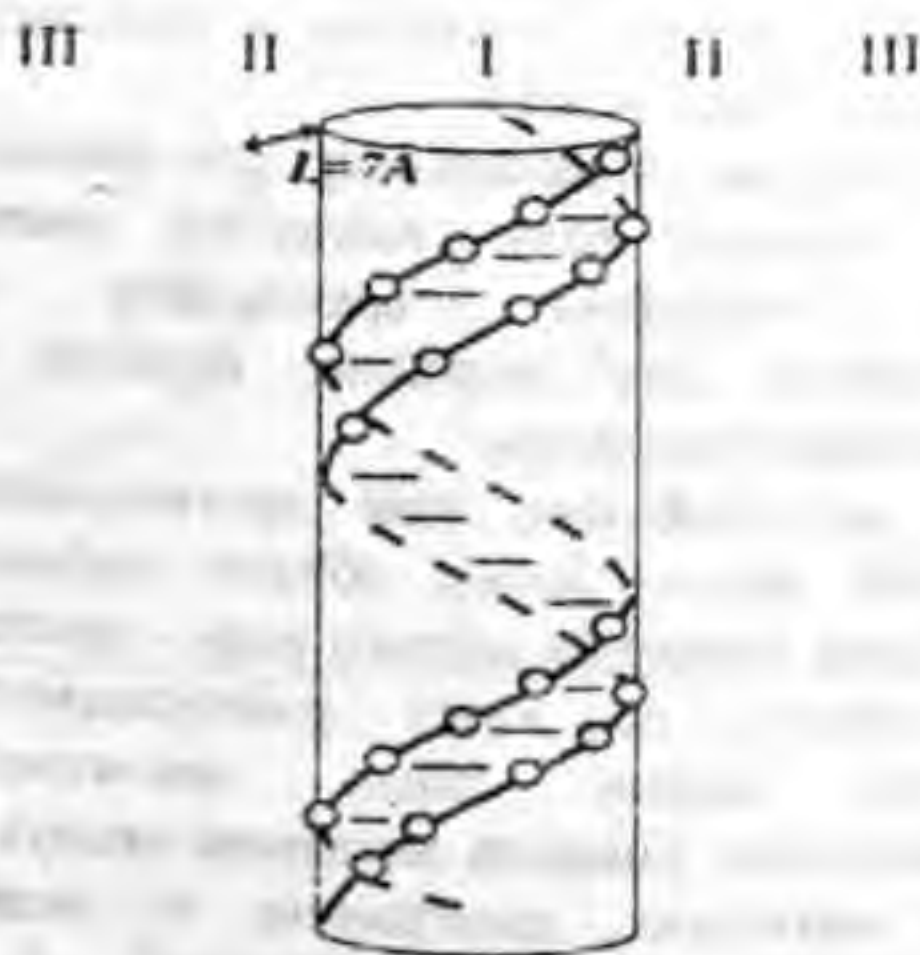


Fig. 1 Conventional picture of location of the first, second and third hydrated shell of DNA molecule

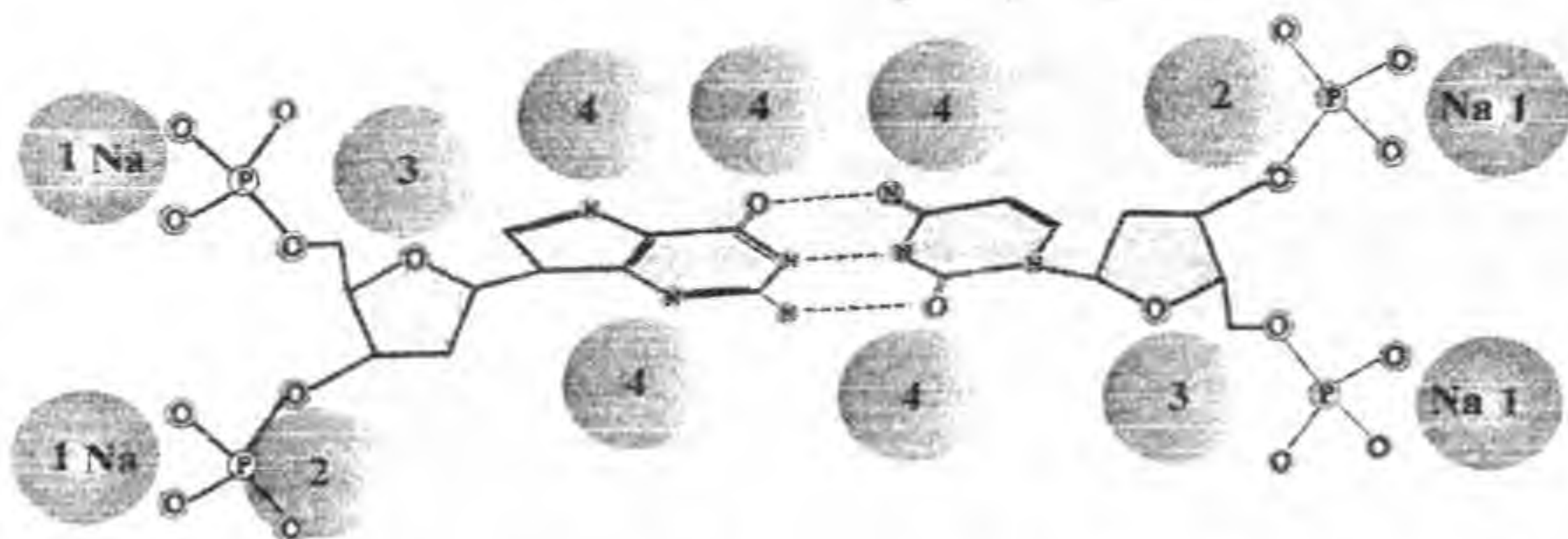


Fig. 2 Binding of water molecules from the first hydrated shell with B-DNA [5], numbers from 1 to 4 showing the strength of interaction in descending order

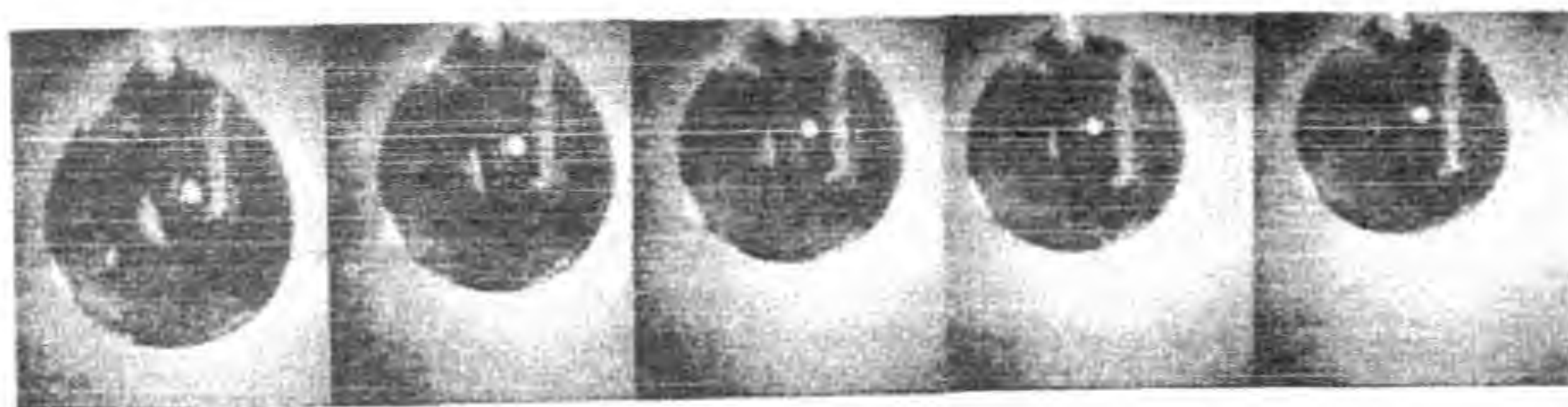


Fig. 3 Pictures of droplet in the process of evaporation

Methods of research

For the purpose of studying the effect of DNA molecules presence in the water system the method has been developed that is based on measuring the evaporation rate of droplets of DNA water solution and comparing it with the results for pure water droplets.

The DNA-water samples are prepared according to the method described in [5,6] from 12 mg thymus DNA that is dissolved in water to mass concentration of 0.3 per cent and further to the required concentrations, during a week. The drop is fixed on the hanger with the help of sterile syringe. The droplet is pictured with video camera every 30 second (Fig. 3). Then, with the use of special program the pictures are processed to obtain the rate of decrease in the drop's surface area. The measurements are made under the identical external conditions (constant temperature, humidity and pressure of environment). Having processed the pictures we obtain time dependence of the drop's

surface area which is linear for both pure water and DNA water solution drops (Fig. 4, 5). The absence of whatever irregularities in the time dependence allows us to assume that the DNA molecules tend to be located within the bulk or towards "the center" of the droplet, having no effect on the number of water molecules on the drop's surface.

Then, the dependence of evaporation rate on mass concentration of DNA is built. The results have showed that the evaporation rate of DNA water solution drops decreases as mass concentration of DNA in the sample increases (Fig. 6).

As known, the evaporation rate of spherical drop may be described by formula:

$$I = 4\pi r^2 n_0 v (2L/kT) \exp(-L/kT) \quad (1)$$

where $4\pi r^2$ is the drop's surface area, n_0 concentration of molecules at the drop's surface, v frequency of surface molecules vibrations, L heat of evaporation per one molecule.

Hence, the DNA molecules have been experimentally proved "to bind" water molecules that results in slowing down the evaporation rate affecting not only the neighboring and bulk, but also the surface water molecules. Using the obtained results and the formula (1) we can also calculate the energetic effect of DNA molecule presence which is the aim of our further research.

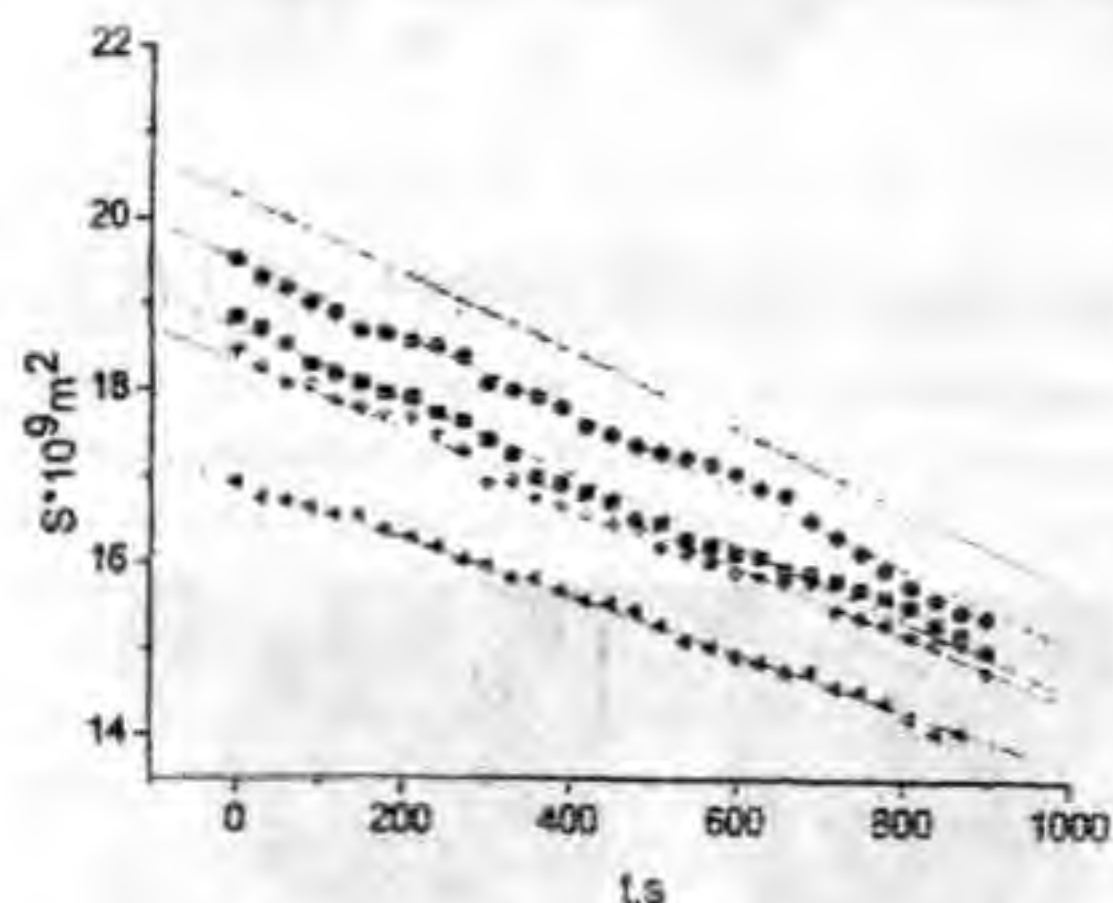


Fig. 4 Time dependence of the drop's surface area during the process of evaporation (0.01% DNA water solution)

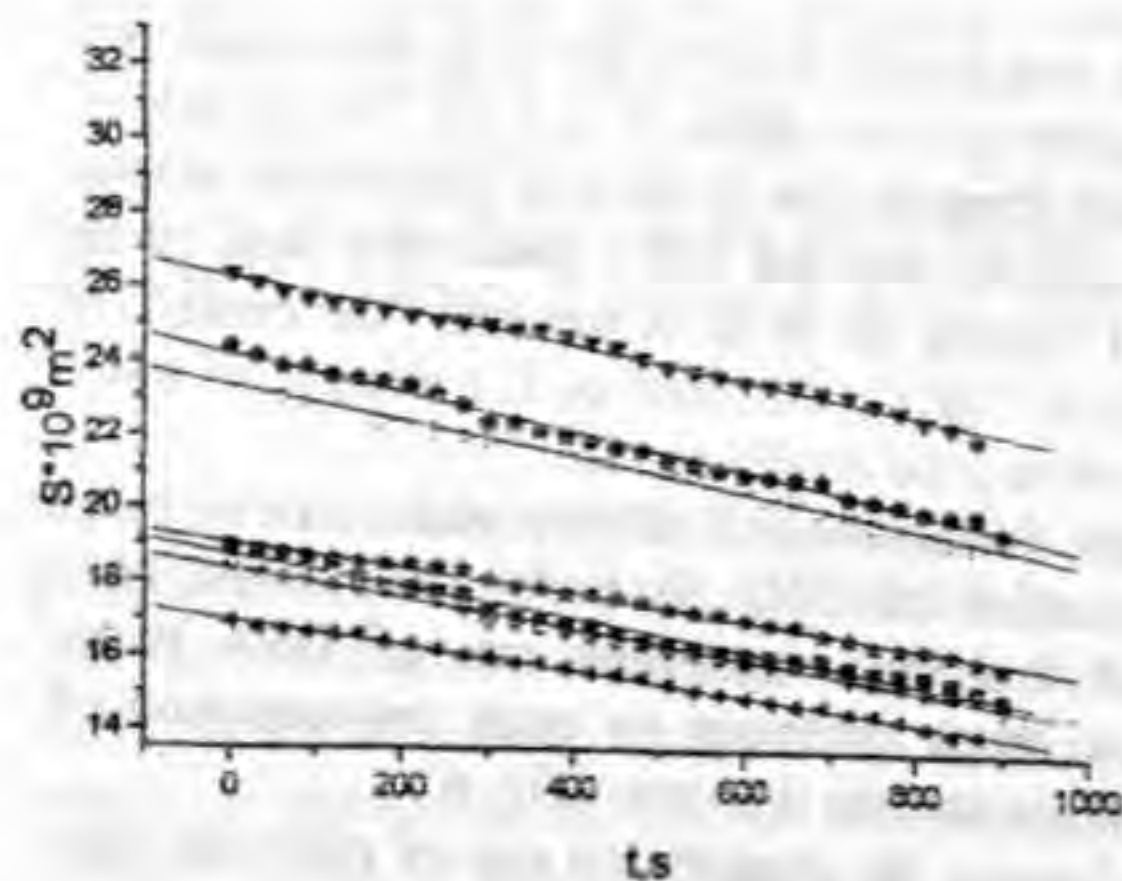


Fig. 5 Time dependence of the drop's surface area during the process of evaporation (0.12% DNA water solution)

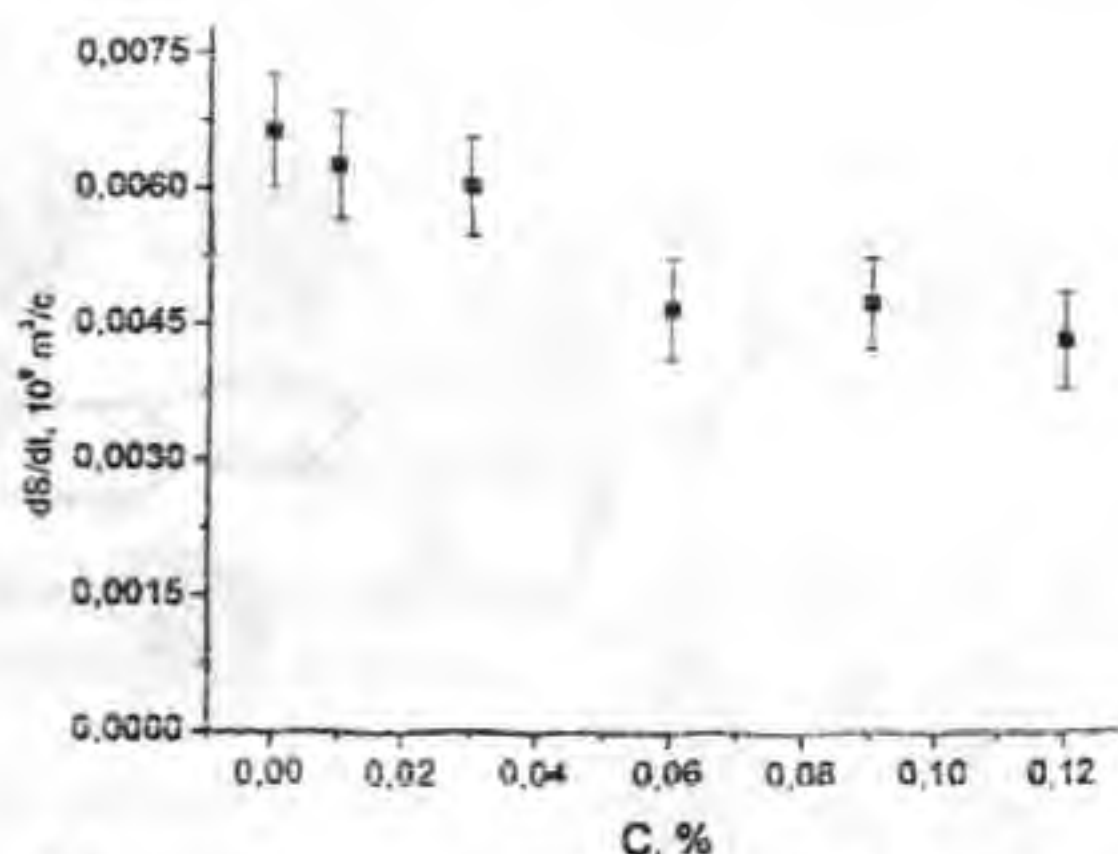


Fig. 6 Evaporation rate of DNA water solution drops depending on DNA concentration in the sample

Conclusions

The experimental results have showed that the evaporation rate of DNA water solution drops decreases as mass concentration of DNA in the sample increases. Hence, the DNA molecules have been experimentally proved "to bind" not only neighboring and bulk, but also surface water molecules that results in slowing down the evaporation rate.

References

1. Зенгер В. Принципы структурной организации нуклеиновых кислот. - М.: Мир, 1987. - 584 с.
2. Малеев В.Я., Семенов М.А., Гасан А.И., Каштур В.А. Биофизика. - М.: Мир, 1993. - 768 с.
3. Guzman M.R., Liquier J., Taillandier E. Hydration and conformational transitions in DNA, RNA, and mixed DNA-RNA triplexes studied by gravimetry and FTIR spectroscopy // J. Biomolec. Struct. Dyn. - 2005. - Vol. 23, № 3. - P. 1 - 9.
4. Das R., Mills T. T., Kwok L.W., Maskel G.S., Millett I.S., Doniach S., Finkelstein K.D., Herschlag D., Pollack L. Counterion distribution around DNA probed by solution X-ray scattering // Phys. Rev. Lett. - 2003. - Vol. 90, № 18. - P. 188103-1 - 188103-4.
5. Булавін Л.А., Волков С.Н., Кутовий С.Ю., Перепелиця С.М. // Доп. НАН України, 2007 №9.
6. L.A. Bulavin, S.Yu. Kutovy, S.N. Volkov, S.M. Perepelytsya // arXiv: 0805.0696v1 [q-bio.BM] 6 May 2008

Надійшла до редколегії:

УДК 520.245

Вашенко В.М.¹, Лоза Є.А.²,
Патлашенко Ж.І.¹

Двовимірна геометрична теорія некласичних ввігнутих дифракційних ґраток

Проведено теоретичний аналіз зображення, що створюється ввігнутою некласичною дифракційною ґраткою, та спектральна залежність його абераційних властивостей в ультрафіолетовому спектральному діапазоні 250 – 350 нм. Приводиться розв'язок задачі виправлення аберацій для одинарного монохроматора, та представлені результати оптимізації форми «геометричної» фокальної поверхні.

Ключові слова: дифракційна ґратка, зображення, спектр, фокальна поверхня.

V.M.Vaschenko¹, E.A.Loza²,
Jh.I.Patlashenko¹

2D geometrical theory of unclassic diffraction gratings

Theoretical analysis of an image created by concave diffraction grating is presented. The spectral dependency of its aberration parameters in UV spectrum 250 to 350 nm is analyzed. The problem of aberration correction of single monochromator solution is shown. Results of focal surface form optimizations are presented.

Key Words: diffraction grating, image, spectre, focal surface.

¹Київський національний університет імені Т.Г.Шевченка, Київ: daniilko@mail.ru

²Національний антарктичний науковий центр, Київ: Loza@bmyr.kiev.ua

Вступ

Серед дифракційних диспергуючих елементів широкого застосування набули голографічні та нарізні дифракційні ґратки. Але розвиток сучасної спектрометрії вимагає створення нестандартних диспергуючих елементів із наперед заданими характеристиками. Проте фізико-технічна концепція таких елементів здебільшого будується на наближених уявленнях про їх фізичні властивості. Особливо складним є питання оцінки оптичних аберацій та спектральних властивостей зображення, створеного оптичною системою. При цьому найголовнішою задачею приладобудування, якраз і є розробка і створення самої оптико-спектральної системи, здатної відтворити спектральне зображення з заданими параметрами для вирішення коректно поставленої задачі. Саме тому потрібні більш точні та універсальні методи і засоби абераційного розрахунку оптичних схем спектральних приладів.

Сучасна космічна супутникова спектрометрія дистанційного дослідження атмосфери та поверхні Землі вимагає досить складних і дорогих спектрометрів, складовою частиною яких обов'язково є оптичний блок, який найчастіше реалізується як дифракційний монохроматор. Проблема розрахунку таких пристроїв являє собою складну фізико-інженерну задачу, яка на сьогодні не має досконалого

теоретичного апарату, а також відповідних методів для проведення оптико-фізичних розрахунків монохроматора із наперед заданими його робочими параметрами для виконання конкретно поставленої спектрометричної задачі. Тому в даній роботі проводиться розробка нового уточненого математичного апарату з метою аналізу схеми монохроматора на некласичній ввігнутій дифракційній ґратці (асферична поверхня, змінний крок нарізки), що дасть змогу розв'язати дві основні практичні інженерно-фізичні задачі – мінімізацію аберацій і сформуванню розподілу енергії випромінювання в площині вихідних щілин монохроматора. Розроблений алгоритм дає можливість провести уточнені абераційні розрахунки і розв'язати обернену задачу визначення оптико-фізичних параметрів якими повинен характеризуватись розроблюваний спектрометр для забезпечення його наперед заданих технічних параметрів, а також забезпечити їх оптимальне значення з точки зору поставленої спектрометричної задачі.

В даній роботі ми обмежуємося розглядом двовимірного випадку, що дозволяє отримати конкретні точні робочі формули. Розгляд тривимірного випадку дозволить побудувати кінцеве спектральне зображення і досліджувати ґратки із довільною формою штрихів, але це виходить за межі даної роботи.

В даній роботі проводиться аналіз властивостей зображення, що створюється неklasичною ввігнутою дифракційною ґраткою – в даному випадку асферичною ввігнутою ґраткою зі змінним кроком нарізки. Викладається теорія за допомогою якої можливо проводити аналіз та оптимізацію обраної схеми одинарного монохроматора.

1. Постановка задачі

Для дослідження проблем, сформульованих у вступі, перейдемо до строгого математичного аналізу властивостей дзеркальної дифракційної ґратки довільної однозначної і неперервної форми зі змінним кроком нарізки. Нехай поверхня ґратки описується тривимірною асферичною поверхнею, у вершині якої розташуємо початок прямокутної Декартової системи координат. Вісь x спрямуємо вздовж перпендикуляру до її поверхні в точці початку координат $(0;0;0)$. Розглянемо задачу для меридіональної площини. Радіус кривини $R(y)$ в меридіональній площині визначається за формулою [1]

$$R(y) = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2x}{dy^2}. \quad (1.1)$$

Вісь z спрямуємо в сагітальній площині вздовж центрального штриха ґратки. Для коректного застосування виразу (1.1) на функцію $x(y)$ слід накласти умову однозначності та неперервності її першої похідної. Відповідно, центр кривини, в залежності від координати y , буде знаходитися у точці:

$$R_z(y) = x(y) + R(y) \cos \theta, \quad (1.2)$$

$$R_y(y) = y - R(y) \sin \theta, \quad (1.3)$$

де кут θ визначається як кут між віссю x та нормаллю до поверхні дифракційної ґратки.

Кожна ділянка дифракційної ґратки створює окремий елемент спектрального зображення. Головною задачею в нашому випадку є знаходження положення точки перетину двох променів, що продифрагували на різних ділянках поверхні ґратки. Знаючи параметри математично-визначеної абераційної плями можна проводити оптимізацію її форми або її спектральних властивостей з метою оптимізації цільової функції монохроматора в залежності від конкретної поставленої задачі. Далі розглянемо дві найбільш практично-корисні задачі, а саме – виправлення аберацій сферичної дифракційної

ґратки і виправлення кривини поля асферичної дифракційної ґратки.

2. Зображення, створене двома ділянками поверхні дифракційної ґратки

Елемент зображення, створений парою променів дифрагованих на ґратці, утворюється на відстані

$$L' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad (2.1)$$

від початку координат (тобто від вершини ґратки), де x' і y' – координати точки перетину відповідних променів.

Кут дифракції будемо визначати з класичної формули дифракційної ґратки [2, 3]:

$$\sin \psi_y + \sin \varphi = \frac{n\lambda}{e(y)} \cos \theta, \quad (2.2)$$

де ψ_y – кут падіння променя у площині дифракції (в нашому випадку – меридіональній площині) на ґратку відносно нормалі до поверхні в точці падіння, φ – кут дифракції цього ж променя за тих же умов, n – порядок дифракції, а $e(y)$ задає неоднорідність кроку нарізки, відповідно $e(0) = e_0$, тобто рівний номінальному кроку нарізки. Оскільки ширина штриха $e(y)$ визначається, як відстань між паралельними площинами, в перетині яких з поверхнею ґратки утворюються штрихи на ґратці, то реальна ширина штриха на поверхні ґратки буде складати $e(y)/\cos \theta$, що враховано у (2.2) додатковим множником $\cos \theta$, де θ визначається з рис.1. Обмеження формули (2.2) полягає в умові [2]

$$e(y) \ll R(y), \quad (2.3)$$

яка справджується для більшості випадків. Важливим також є той факт, що величина ψ_y залежить від координати y , до того ж досить складним чином, як це буде показано в наступному параграфі.

Розглянемо дві точки на поверхні ґратки (рис.1). Для зручності математичних обчислень одна з них розташована в початку координат, тобто у вершині ґратки. Друга точка умовно переміщується по поверхні ґратки $x(y)$, де y єдина незалежна змінна.

В результаті дифракції кут між напрямом променя та нормаллю до поверхні ґратки в точці падіння відповідатиме куту дифракції φ . Тоді напрям поширення першого променя буде задаватися вектором $\vec{k}_0$, спрямованим з вершини

гратки $(0; 0)$ під кутом φ до осі x , а іншого – $\bar{k}_y$, направлено під кутом $\varphi' + \theta$ з точки (x, y) . Кути φ і φ' в загальному випадку не співпадають, особливо у випадку змінного кроку нарізки.

Для двовимірної задачі координати точки перетину будуть визначатися через формули:

$$x' = \frac{y - x \operatorname{tg}(\varphi' + \theta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}(\varphi' + \theta)}, \quad (2.4)$$

$$y' = \frac{y - x \operatorname{tg}(\varphi' + \theta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}(\varphi' + \theta)} \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.5)$$

Для кута θ (рис.1) можна записати

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{R_y(y) - y}{R_x(y) - x} = \frac{dx}{dy}. \quad (2.6)$$

Загальний вигляд формул (2.4)-(2.5) після підстановки відповідних виразів для φ , φ' і θ буде дуже складний і для спрощення їх запису можна ввести наступні змінні:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi'} = \eta' = \sqrt{1 / \left(\frac{n \lambda_r}{e(y)} \cos \theta - \sin \psi_y \right)^2 - 1}; \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \eta = \sqrt{1 / \left(\frac{n \lambda_r}{e_0} - \sin \psi_{y=0} \right)^2 - 1} = \eta' |_{y=0}; \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi' + \theta) = g = \frac{(R_x(y) - x) - \eta' (R_x(y) - y)}{(R_x(y) - x) \eta' + (R_x(y) - y)}; \quad (2.9)$$

$$\zeta = y' = \frac{y - x g}{1 - \eta g}, \quad (2.10)$$

то вирази (2.4) і (2.5) значно спростяться:

$$x' = \eta \zeta; \quad (2.11)$$

$$y' = \zeta. \quad (2.12)$$

Звідки легко знайти відстань (2.1) від вершини ґратки (тобто початку координат) до точки перетину двох променів

$$L' = \zeta \sqrt{1 + \eta^2}. \quad (2.13)$$

Задавши форму поверхні $x(y)$ можна отримати максимальне і мінімальне значення L' , які визначаються як її екстремуми на заданому наборі y та відповідають астигматичній різниці.

Важливим є те, що вирази (2.11)-(2.12) є пропорційні один одному з точністю до сталого множника η . Це відповідає тому, що всі елементи зображення розташовуються на одній прямій для будь-яких поверхонь $x(y)$ та кроків нарізки $e(y)$. Не зважаючи на неочевидність цього результату він є вірним, оскільки для визначення елементу зображення ми обираємо одну точку фіксованою, що призведе до того, що усі елементи зображення, створені ґраткою, будуть лежати на прямій, що задається променем, дифрагованим з цієї точки ґратки. Відповідно, при такому розгляді можна дослідити лише аберацію астигматизму. Для визначення інших складових аберацій потрібно буде використовувати інші пари променів.

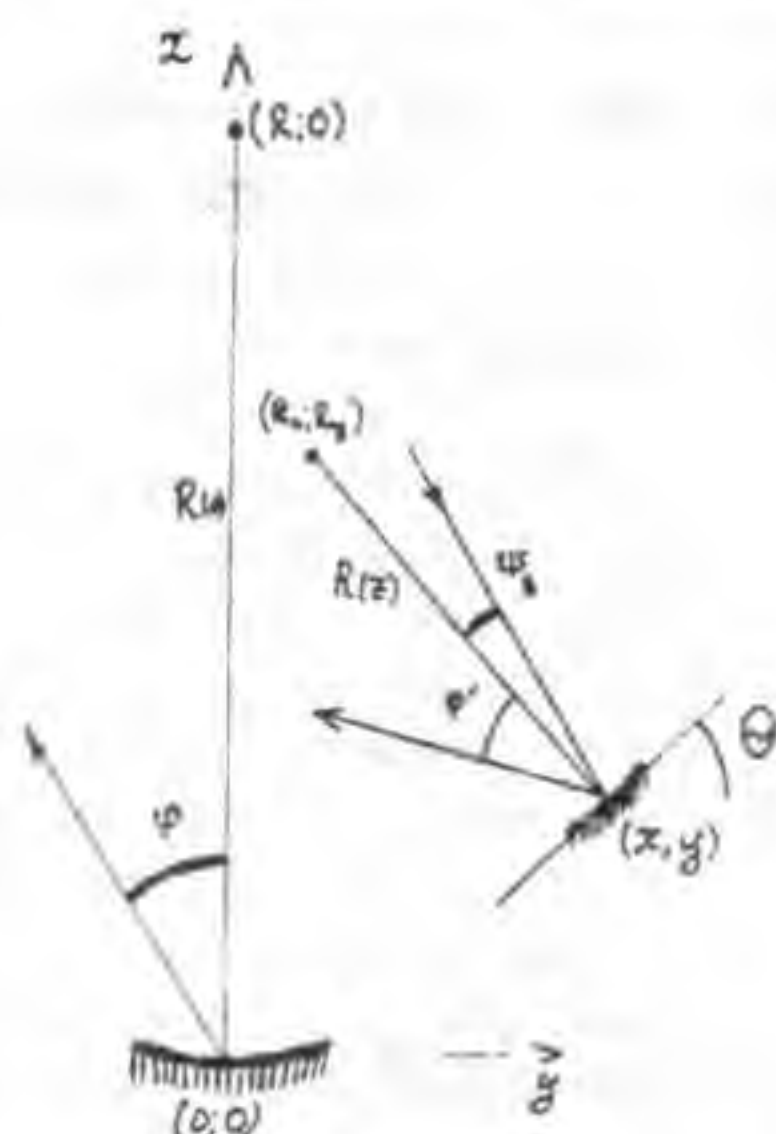


Рис.1. Дифракція променя на поверхні дифракційної ґратки.

3. Оптимізація абераційних параметрів схеми

Маючи вирази (2.11)-(2.12) можна цілеспрямовано змінювати параметри схеми для оптимізації цільової функції. Найпершим і найочевиднішим є те, що змінюючи $e(y)$ можна досягнути корекції геометричних аберацій дифракційної ґратки, що досить суттєво для одинарного монохроматора, і що також можливо досягнути за рахунок іншого незалежного параметру, наприклад форми поверхні ґратки $x(y)$ або положення вхідної щілини ψ .

Розглянемо далі задачу для виправлення геометричних аберацій на одній довжині хвилі, для якої отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{dx'}{dy} = 0; \quad \frac{dy'}{dy} = 0, \quad (3.1)$$

де для простоти запису опущено індекс i .

В будь-якому реальному випадку $\eta = \text{const} \neq 0$ згідно (2.8), а, отже, обидві умови (3.1) є еквівалентні

$$\frac{d\zeta}{dy} = 0. \quad (3.2)$$

Цей висновок є дуже важливим, оскільки вказує на можливість виправлення геометричних аберацій дифракційної ґратки лише за рахунок одного незалежного параметру.

На даному етапі слід зробити припущення про задану форму поверхні $x(y)$, оскільки в

$$\frac{de(y)}{dy} = \left[\left(1 - \frac{y}{R-x} \right) \frac{1 - \eta \frac{y}{R-x}}{\eta y - x} \frac{(R-x)\eta' - y)^2}{R^2} + \frac{\eta'^2 - 1}{R-x} \right] \times \eta' \left(\frac{n\lambda}{e(y)} \cos \theta - \sin \psi_y \right)^3 - \frac{d \sin \psi_y}{dy} \left[\frac{e(y)^2}{n\lambda} - e(y) \frac{y/R^2}{\cos \theta} \right], \quad (3.3)$$

з початковою умовою $e(0) = e_0$. Виходячи з того, що функції η' і ϑ є складними нелінійними функціями $e(y)$, рівняння (3.3) слід розв'язувати чисельними методами, наприклад, Рунге-Кута [4].

Але слід зробити зауваження, що крок нарізки визначений з (3.3) дозволить повністю виправити аберації лише для однієї довжини хвилі та її найближчого околу. Для інших довжин хвиль абераційне зображення в середньому погіршиться. Для ліквідації цієї незручності потрібно ввести функціонал аберацій (цільову функцію), що підсумовував би абераційні спотворення на всіх хвилях робочого діапазону. Ще один недолік отриманого розв'язку полягає у можливості створення досконалого зображення лише у меридіональній площині. Для розв'язку задачі у сагітальній площині слід застосовувати тривимірний метод абераційного аналізу некласичних ґраток.

4. Оптимізація форми фокальної площини

Виходячи з постановки задачі, далі розглянемо іншу важливу проблему – забезпечення виправлення кривини фокальної площини. Ця задача є актуальною для одинарних монохроматорів із плоскими приймачами, або для кратних монохроматорів, де проміжні щілини повинні бути плоскими. Для цього візьмемо три різних довжини хвиль λ_1 , λ_2 та λ_0 і накладемо умову, щоб їх зображення знаходилися на одній прямій. Умову можна дещо змінити, наприклад для пошуку мінімуму квадратичного відхилення форми фокальної поверхні від площини. В загальному випадку слід вводити вагову функцію щоб виділити робочий

протилежаю випадку згідно (1.1) рівняння (3.2) перетвориться в диференціальне рівняння 3-го порядку відносно dx/dy і матиме недоцільно складний вигляд. Більше того, форма поверхні, отримана як розв'язок (3.3), навряд чи буде технологічною. Більш корисно розглянути відомі типи технологічних поверхонь і добиватися виправлення аберацій за рахунок змінного кроку нарізки або інших параметрів, зміну яких легше реалізувати практично. В даній роботі теоретичний розгляд обмежимо найпоширенішою сферичною поверхнею, для якої

спектральний діапазон і підкреслити більш важливі довжини хвиль.

Повернемося до узагальненої форми поверхні $x(y)$ і для кожної довжини хвиль розглянемо точку перетину пари променів $(x'; y')$, як описано вище. Умова знаходження цих точок на одній прямій матиме вигляд:

$$\frac{(\eta_2 - \eta_0)}{\zeta_1} + \frac{(\eta_0 - \eta_1)}{\zeta_2} + \frac{(\eta_1 - \eta_2)}{\zeta_0} = 0 \quad (4.1)$$

Не зважаючи на простоту вигляду система (4.1) є складним нелінійним рівнянням. Шляхом чисельного розв'язку цього рівняння отримуємо значення $e(y)$ в кожній заданій точці y .

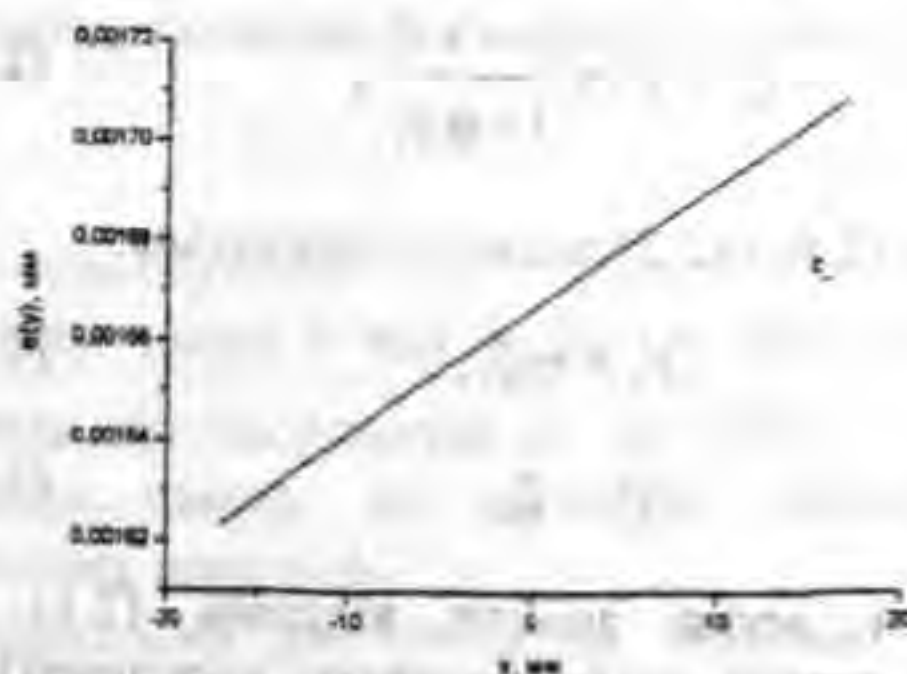


Рис.2. Густина нарізки штрихів.

Слід зробити зауваження, що виправлення кривини поля в нашій роботі проводиться лише для трьох довжин хвиль і лише для одного значення ψ_y . Це призводить до виникнення додаткових перегинів у фокальній площині і зменшить її середньоквадратичну нерівність у визначеному спектральному інтервалі. Повного виправлення, нажаль, неможливо досягти лише за рахунок змінного кроку нарізки. Варто

особливо відмітити, що за рахунок абераційних спотворень, і насамперед астигматизму, поняття "фокальної поверхні", а тим більше "фокальної площини", є не досить коректним, оскільки в результаті дифракції світла на ґратці ми отримуємо тривимірний розподіл освітленості у просторі, який складає абераційну пляму.

З метою оптимізації схеми для більшої кількості довжин хвиль виникає потреба вводити додаткові змінні параметри – наприклад, форму поверхні $x(y)$. Однак, виходячи із технологічних складностей форма поверхні дифракційної ґратки повинна бути проста – в найкращому випадку сферична. Зміна положення вхідної апертури ψ , також може дати ще один додатковий параметр при оптимізації схеми.

В загальному випадку рівняння (4.1) може не мати однозначного розв'язку $e(y)$. Ця обставина

додатково ускладнюється технологічними складностями виготовлення дифракційних ґраток зі змінним кроком нарізки, а також і принциповою дискретністю кількості штрихів, що призведе до дискретності величини $e(y)$, яка в нашій моделі не враховується за умови (2.3).

Часто важливим є визначення загальної кількості штрихів на ґратці, оскільки ця величина визначає її роздільну здатність, а також дуже важлива при її виготовленні. Для ґратки із розміром сторони $2d$, кількість штрихів на всій її поверхні буде складати

$$N = \int_{-d}^d \frac{1}{e(y)} dy \quad (4.2)$$

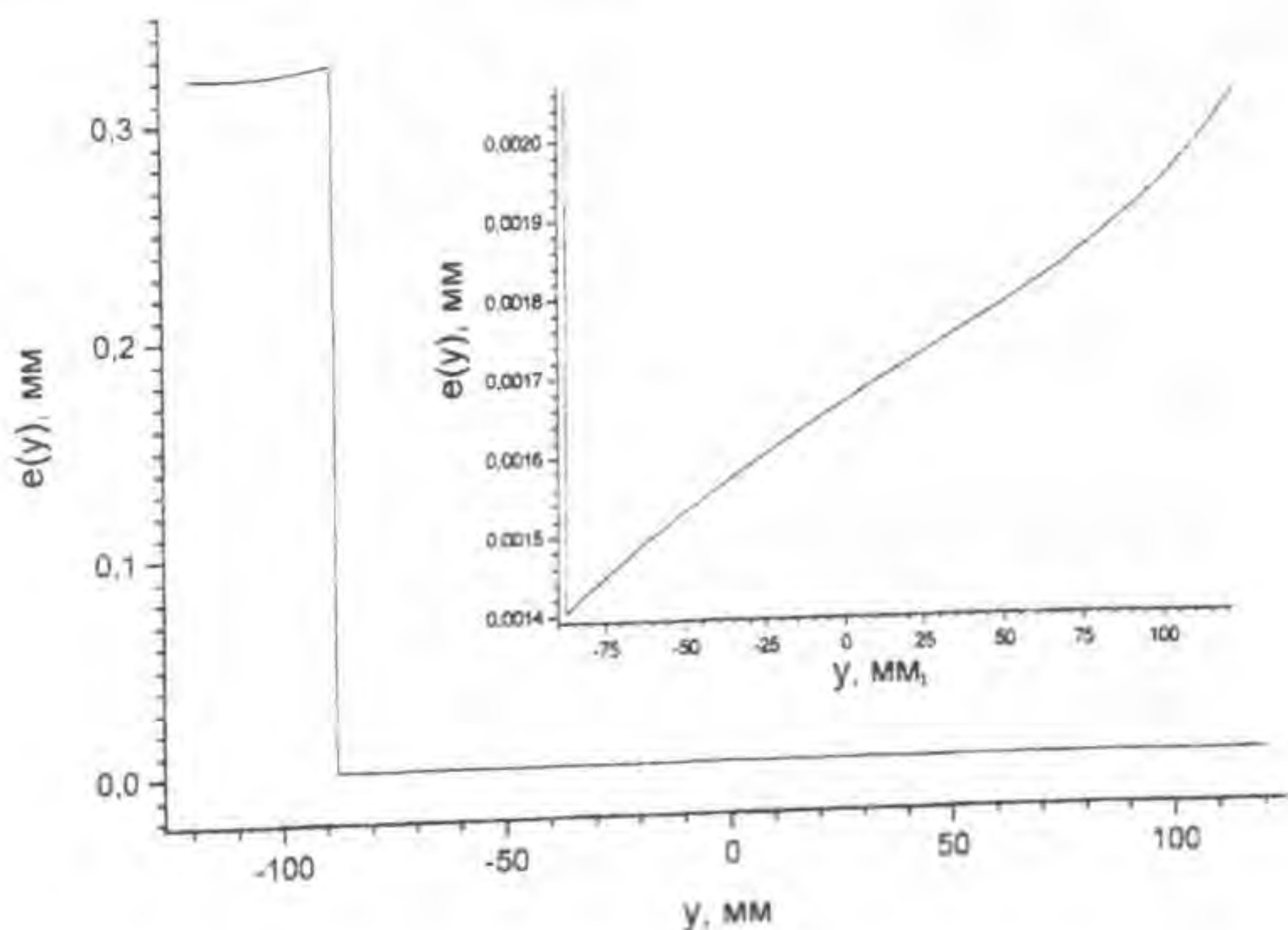


Рис.3. Нелінійність густини нарізки штрихів.

5. Результати оптимізації форми фокальної площини

Для прикладу розглянемо ввігнуту, сферичну дифракційну ґратку із радіусом кривини $R=250$ мм і номінальною густиною нарізки штрихів $e_0=600$ мм⁻¹. Розмір поверхні ґратки $2d=34$ мм. Центральна точка вхідної щілини знаходиться в центрі кривини дифракційної ґратки. Оптимізацію схеми будемо проводити

для трьох довжин хвиль ультрафіолетового діапазону: 2500, 2750 і 3000 Å.

Шляхом чисельного розв'язку рівняння (4.1) з точністю до 10^{-17} отримаємо наступну залежність $e(y)$ для +4 порядку спектру (рис.2).

Функція $e(y)$ із середньоквадратичним відхиленням 0,07% описується лінійною функцією в робочому діапазоні

$$e(y) = 0,00167 + 2,50781 \cdot 10^{-6} y,$$

яка є непарною функцією і згідно (4.2) загальна кількість штрихів буде зберігатися. Для інших спектральних порядків ситуація є дуже подібною, лише зі зміною відповідних коефіцієнтів.

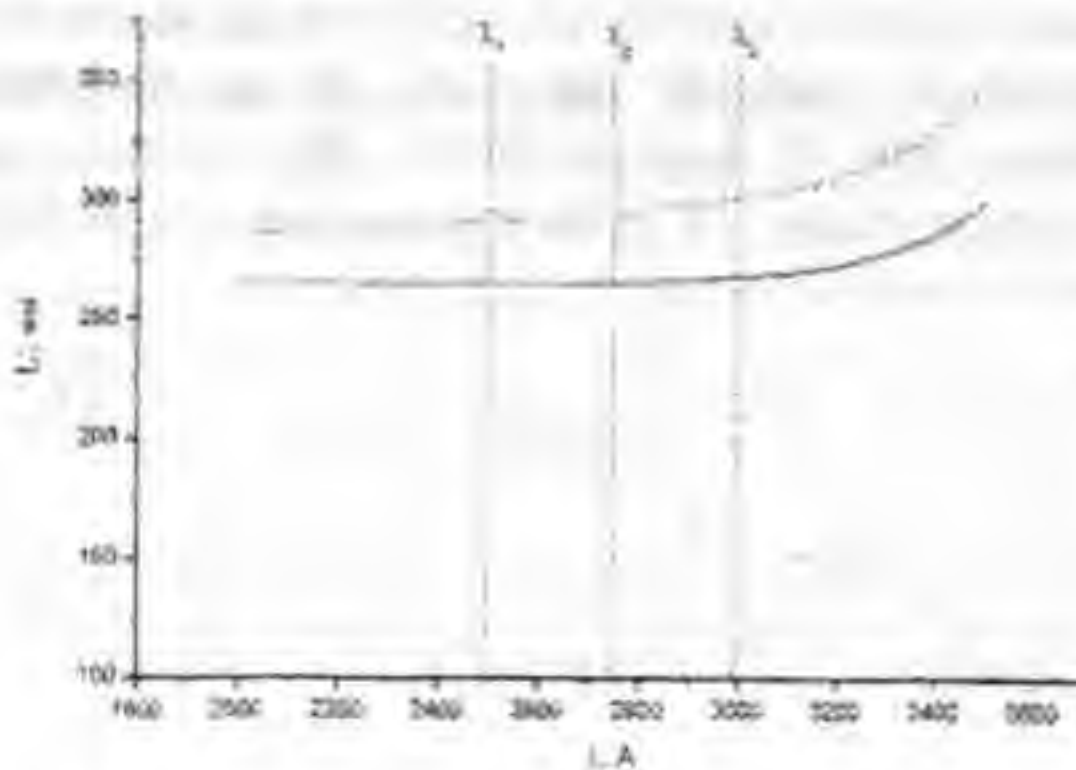


Рис.4. Максимальна та мінімальна відстань від вершини ґратки до спектрального зображення. Суцільна та пунктирна лінії – ґратки зі змінним та постійним кроком нарізки відповідно.

На рис.3 зображено хід функції $e(y)$ для більшого розміру робочої поверхні досліджуваної ґратки. Помітна суттєва нелінійність цієї функції в межах y від -75 до 100мм. Додатково спостерігається стрибок на -90мм до нефізичних величин кроку нарізки, який швидше за все відповідає зміні напрямку дифракції, оскільки зображення в цьому випадку створюється в середині круга Роуланда.

Відстань від початку координат до спектрального зображення приведена на рис.4, помітний значний астигматизм ввігнутої ґратки.

На рис.5 показано просторовий розподіл інтенсивності спектрального зображення в спектральному діапазоні 2000-3500Å. Нагадаємо, що менші довжини хвиль розташовуються ближче до осі x , тобто зазнають дифракції на менші кути.

Спектральні порядки класичної сферичної дифракційної ґратки розташовані на крузі Роуланда, причому спостерігається суттєва тенденція до збільшення аберації астигматизму зі збільшенням довжини хвилі або номеру спектрального порядку. Найбільш суттєвою кривина поля є для найвищого спектрального порядку, що й слід було очікувати.

Для неklasичної ґратки фокальна поверхня має значно більш плоску форму і певна нелінійність візуально спостерігається лише для 4-го порядку (рис.5). Одночасно з цим помітне також значне збільшення аберації астигматизму,

приріст якого особливо великий для першого порядку спектру.

Чисельно значення астигматизму можна визначити з (2.13), а результати розрахунків наведені в табл.1. Видно, що для обох ґраток величина астигматизму збільшується із довжиною хвилі. Для класичної сферичної дифракційної ґратки величина астигматизму збільшується із номером спектрального порядку, для неklasичної – має максимум у 2 порядку спектру і дещо менші значення для 3 і 4 порядків, однак все ж залишається більшою на 25÷80%, ніж для ґратки із постійним кроком нарізки. Дуже важливим результатом також є те, що спектральні порядки класичної та неklasичної дифракційних ґраток знаходяться в майже однакових тілесних кутах відносно вершини ґратки.

Більш детальний аналіз форми фокальної поверхні для класичної ґратки показує, що в області перекриття порядків форма абераційних спотворень також співпадає. Для неklasичної дифракційної ґратки фокальні поверхні зазнають додаткового перегину за виключенням 1-го спектрального порядку і при достатньо малій довжині хвилі перетинаються у точці, що відповідає зображенню, що створювалося б ввігнутим сферичним дзеркалом, тобто в нашому випадку зображення співпадає із вхідною щільною. В довгохвильовій частині спектру існує певна „гранична” довжина хвилі $\lambda = e_0 / n(1 + \sin \psi_0)$ до якої дифракція

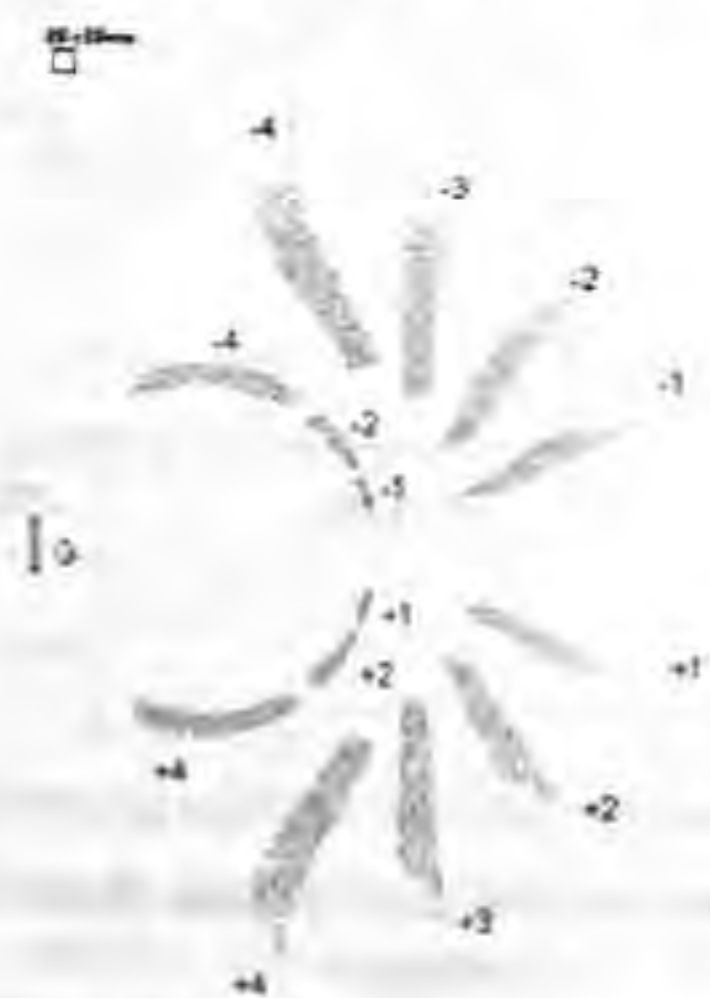


Рис.5. Просторове розташування площин найкращого фокусування для різних спектральних порядків, для класичної та неklasичної сферичних дифракційних ґраток. Квадратик 20х20мм над рисунком наведено для визначення масштабу. Спектральний діапазон – від 2000Å до 3500Å.

спостерігається на кути менше 90° , тобто вираз (2.8) є дійсною величиною. Для змінного кроку нарізки ця величина зменшується на 10%-20% за рахунок того, що замість номінального кроку нарізки e_0 слід використовувати мінімальне значення $e(y)$, визначене на ґратці. На більших довжинах хвиль для неklasичної дифракційної ґратки також спостерігається випромінювання фокальної площини, яка маючи клиновидну форму в першому та другому порядках спектру має вершину у тій самій точці формування дзеркального зображення, а для 3 і 4 порядків розташована далеко за межами круга Роуанда. Внаслідок клиновидності поверхні найкращого фокусування при збільшенні довжини хвилі астигматична різниця зростає лінійно. Також можна відзначити, що за межами оптимізаційного діапазону спостерігаються два вигини площини найкращого фокусування, поблизу яких спостерігається локальне збільшення астигматичної різниці.

Табл. 1.

Астигматизм сферичної дифракційної ґратки

Порядок спектру	Найбільша величина астигматизму, мм			
	Класична ґратка		Некласична ґратка	
	2500Å	3000Å	2500Å	3000Å
1	6	6	48	66
2	10	12	46	68
3	16	19	26	34
4	21	25	26	33

Оптимізація форми фокальної поверхні проводиться окремо для кожного спектрального порядку. Тобто, така некласична ґратка придатна для роботи лише в одному спектральному порядку, для якого вона розраховувалася.

Висновки

1. Розроблений в даній роботі універсальний уточнений алгоритм абераційного розрахунку дифракційного монохроматора на базі некласичної дифракційної ґратки, дозволяє мінімізувати аберації і сформувати розподіл випромінювання в площині вихідних щілин монохроматора шляхом розрахунку форми асферичної поверхні ґратки та змінного кроку нарізки штрихів. Отриманий алгоритм дає можливість точних розрахунків монохроматорів із наперед заданими спектрометричними характеристиками у відповідності із вихідними даними для вирішення конкретної фізичної задачі. Це особливо актуально в біологічно-небезпечній УФ ділянці спектру при виконанні процедур юстування монохроматора.

2. Отриманий розв'язок задачі для двовимірного випадку дає можливість отримати неявний аналітичний розв'язок головних інженерно-фізичних задач мінімізації аберацій оптичної схеми монохроматора, а також забезпечення ефективності використання енергії випромінювання на його виході шляхом цілеспрямованого формування розподілу випромінювання в площині вихідних щілин монохроматора. Розроблений алгоритм має максимально можливий ступінь узагальнення та математичної строгості в межах геометричної оптики, що дозволяє суттєво збільшити точність величин, що розраховуються.

3. Запропонований алгоритм за допомогою використання відповідних цільових функцій (функціонал аберацій, кривина фокальної поверхні та ін.) дозволяє забезпечити оптимальні значення необхідних робочих оптико-фізичних параметрів монохроматора для виконання конкретно-поставленої задачі. Показано, що мінімізуючи аберації за рахунок вибору форми поверхні дифракційної ґратки можливо досягти виправлення кривини площини вихідних щілин за рахунок оптимального вибору змінного кроку нарізки.

5. Результати абераційних розрахунків вибраної для прикладу схеми монохроматора показують добру узгодженість результатів алгоритму із результатами розрахунків за допомогою класичної теорії, при цьому вигини в точності отриманого змінного кроку нарізки незначний для малих кутів дифракції і стає суттєвим для великих кутів дифракції.

Список використаних джерел

1. Бронштейн Н.Н., Семенов К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ // Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1953г. – 608с.
2. Зайдель А.Н., Островская Г.В., Островский Ю.И. "Техника и практика спектроскопии" // Москва, Наука, 1976. 375с.
3. Одарич В.А. Основы теории та методів розрахунку оптичних систем. ч.1. // Київ, видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2001. 220 с.
4. Катиткин Н.Н. Численные методы // Москва, Наука, 1978. 508с.

Надійшла до редколегії 24.09.2008

УДК 530.145

В.М. Горкавенко, к.ф.-м.н., асистент,
О.Б. Степанов, студ.

**Поляризація вакууму непроникливою
трубкою з магнітним полем.**

У роботі досліджено узагальнену на випадок простору-часу довільної розмірності задачу про вплив на вакуум зарядженого масивного скалярного поля зовнішнього магнітного поля, розташованого в трубці скінченого радіусу. Трубка є непроникливою для бозонного поля та має на поверхні граничні умови типу Діріхле. Показано, що для часткового випадку простору-часу розмірності $2+1$ індукована густина енергії вакууму ззовні трубки може бути знайдена чисельними методами без застосування процедури регуляризації.

Ключові слова: поляризація вакуума, ефект Казимира, ефект Ааронова-Бома

E-mail: gorka@univ.kiev.ua, _pnd_@ukr.net

1 Introduction

It is known, since Casimir's seminal paper [1], that existence of the external boundary conditions in quantum field theory leads to a non-zero vacuum expectation value of the energy-momentum tensor (see, e.g. Refs. [2, 3]). This may have far reaching consequences; in particular, the vacuum energy-momentum tensor serves as a source of gravitation, and the so-called self-consistent cosmological models of the Universe are proposed, where matter is absent and its role is played by the vacuum quantum effects [4].

In this respect it seems to be of interest to look for various situations when the vacuum energy-momentum tensor is calculable and finite. Let X be the base space manifold of dimension d and Y be a submanifold of dimension less than d . The matter field is quantized under certain boundary condition imposed at Y . In most implications of the Casimir effect, Y is chosen to be noncompact disconnected (e.g. two parallel infinite plates, as generically in Ref. [1]) or closed compact (e.g. box or sphere), see Ref. [3].

In [5, 6], the Casimir effect was considered in detail when Y is a noncompact connected manifold that has dimension $d-2$, i.e. is a $d-2$ -

V.M. Gorkavenko, PhD, assistant,
O.B. Stepanov, stud.

**Induced vacuum polarization by
impermeable magnetic tube.**

We investigated the influence of external magnetic field in the tube on the vacuum of massive charged scalar field for the case of arbitrary space-time dimension. The tube is considered impermeable for scalar field and obeys Dirichlet boundary condition on bounding surface. It was shown that for particular case of $2+1$ dimensional space-time the induced vacuum energy of scalar field outside the tube can be numerically calculated without regularization procedure.

Key words: vacuum polarization, Casimir effect, Bohm-Aharonov effect

brane in d -dimensional space (in case of $d=2$ is a point, in case of $d=3$ is a line, in case of $d=4$ is a plane). This brane was filled with the magnetic flux lines, and it was a generalization of the Bohm-Aharonov [7] singular magnetic vortex in 3-dimensional space. The condition of vanishing of the matter field at Y was imposed and the vacuum polarization of the field was investigated in the space manifold X . So, in [5], [6] was considered the Casimir-Bohm-Aharonov effect, see also Ref. [8]. It should be noted that in this case the effect of vacuum polarization was calculated analytically.

In 3-dimensional space solution of the singular magnetic vortex problem can be applied as in astrophysics (physics of cosmic strings), as in condensed matter physics (Abrikosov vortex in type II superconductor). But in both this cases magnetic vortex has a non-zero transverse size that is determined by Compton wavelength of corresponding scalar field at phase transition epoch [9] or by radius of Cooper pair [10] correspondingly. So, it is more interesting to investigate the Casimir-Bohm-Aharonov effect in the case of finite size magnetic tube.

We choose Y to be noncompact connected and possessing dimension $d-1$, i.e. a $d-1$ -brane in

d -dimensional space. This brane envelops the part of d -dimensional space in which we fill the $d - 2$ -dimensional brane with magnetic field (in case of $d = 2$ is a circle with point-like magnetic field inside, in case of $d = 3$ is a cylinder with a magnetic line inside).

Throughout the present paper, we restrict ourselves by the case of scalar matter. A peculiarity of this case is that the energy-momentum tensor depends on the coupling (ξ) of the scalar field to the scalar curvature of space-time even when the space-time is flat. If scalar field is massless, then conformal invariance of the theory is achieved at $\xi = \xi_c$, where [11, 12, 13]

$$\xi_c = (d - 1)/4d. \quad (1)$$

Note that ξ_c varies from 0 to $1/4$ when d varies from 1 to ∞ .

2 Energy-momentum tensor and vacuum polarization

The energy-momentum tensor for the quantized charged scalar field $\Psi(x)$ is given by expression

$$T^{\mu\nu} = T_{can}^{\mu\nu} + \xi (g^{\mu\nu} \square - \nabla^\mu \nabla^\nu - R^{\mu\nu}) [\Psi^\dagger, \Psi]_+ \quad (2)$$

where

$$T_{can}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\nabla^\mu \Psi^\dagger, \nabla^\nu \Psi]_+ + \frac{1}{2} [\nabla^\nu \Psi^\dagger, \nabla^\mu \Psi]_+ - g^{\mu\nu} L, \quad (3)$$

and

$$L = \frac{1}{2} [\nabla^\mu \Psi^\dagger, \nabla_\mu \Psi]_+ - \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) [\Psi^\dagger, \Psi]_+, \quad (4)$$

∇_μ is the covariant derivative involving both affine and bundle connections, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ is the covariant d'Alembertian, $R^{\mu\nu}$ is the Ricci tensor and $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ is the scalar curvature of space-time, signature of space-time metric $g_{\mu\nu}$ is chosen as $(+ - \dots -)$. Canonical tensor (3) is obtained by applying Noether's theorem to lagrangian (4), whereas tensor (2) is obtained by varying L (4) over metric tensor $g_{\mu\nu}$.

Eq.(2) can be rewritten in a form

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - (\xi - 1/4) (g^{\mu\nu} \square - \nabla^\mu \nabla^\nu) [\Psi^\dagger, \Psi]_+ - \xi R^{\mu\nu} [\Psi^\dagger, \Psi]_+, \quad (5)$$

where

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T_{can}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} \square - \nabla^\mu \nabla^\nu) [\Psi^\dagger, \Psi]_+ \quad (6)$$

is the canonical tensor corresponding to lagrangian $\tilde{L}$ which differs from L (4) by a total divergence:

$$\tilde{L} = L - \frac{1}{4} \square [\Psi^\dagger, \Psi]_+ = -\frac{1}{4} [\Psi^\dagger, \square \Psi]_+ - \frac{1}{4} [\square \Psi^\dagger, \Psi]_+ - \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) [\Psi^\dagger, \Psi]_+. \quad (7)$$

Both L (4) and $\tilde{L}$ (7) yield the same equations of motion,

$$\begin{aligned} [\square + (m^2 + \xi R)] \Psi &= 0, \\ [\square + (m^2 + \xi R)] \Psi^\dagger &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

but $\tilde{L}$ is strictly vanishing on the solutions to the equations of motion. In fact, $\tilde{L}$ is used as a lagrangian in the path integral approach to quantization, since namely $\tilde{L}$ is directly related to the inverse propagator of the quantized scalar field.

If Ψ is a solution to Eq.(8), then one gets

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\nabla^\mu \Psi^\dagger, \nabla^\nu \Psi]_+ + \frac{1}{2} [\nabla^\nu \Psi^\dagger, \nabla^\mu \Psi]_+ - \frac{1}{4} \nabla^\mu \nabla^\nu [\Psi^\dagger, \Psi]_+, \quad (9)$$

and

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \left(\xi d - \frac{d-1}{4} \right) \square [\Psi^\dagger, \Psi]_+ + m^2 [\Psi^\dagger, \Psi]_+, \quad (10)$$

where d is the dimension of space. Thus, there is a distinctive value of parameter ξ ($\xi = \xi_c$, see Eq.(1)) under which the trace of the energy-momentum tensor becomes proportional to the mass squared.

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}|_{\xi=\xi_c} = m^2 [\Psi^\dagger, \Psi]_+, \quad (11)$$

and the tracelessness of $T^{\mu\nu}$ and conformal invariance are achieved in the massless limit ($m = 0$).

In the case of a static background ($\nabla_0 = \partial_0$, $g_{00} = 1$), the operator of the quantized charged scalar field is represented in the form

$$\Psi(x^0, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\lambda}}} \left[e^{-iE_{\lambda}x^0} \psi_{\lambda}(\mathbf{x}) a_{\lambda} + e^{iE_{\lambda}x^0} \psi_{-\lambda}(\mathbf{x}) b_{\lambda}^{\dagger} \right] \quad (12)$$

Here, $a_{\lambda}^{\dagger}$ and a_{λ} ($b_{\lambda}^{\dagger}$ and b_{λ}) are the scalar particle (antiparticle) creation and annihilation operators satisfying commutation relation; λ is the set of pa-

rameters (quantum numbers) specifying the state; $E_\lambda = E_{-\lambda} > 0$ is the energy of the state; symbol $\sum_\lambda$ denotes summation over discrete and integration (with a certain measure) over continuous values of λ ; wave functions $\psi_\lambda(x)$ are the solutions to the stationary equation of motion,

$$\{-\Delta + [m^2 + \xi R(x)]\} \psi_\lambda(x) = E_\lambda^2 \psi_\lambda(x), \quad (13)$$

$\Delta = \nabla^2$ is the covariant laplacian.

Temporal component of the vacuum expectation value of the energy-momentum tensor will define the vacuum polarization

$$t^{00} = \langle \text{vac} | T^{00} | \text{vac} \rangle. \quad (14)$$

After substitution of field operator (12) one obtains the explicit expression

$$t^{00} = \sum_\lambda E_\lambda \psi_\lambda^*(x) \psi_\lambda(x) - (\xi - 1/4) \Delta \sum_\lambda E_\lambda^{-1} \psi_\lambda^*(x) \psi_\lambda(x). \quad (15)$$

Relation (15) can be regarded as purely formal and, strictly speaking, meaningless: it is ill-defined, suffering from ultraviolet divergencies. The well-defined quantity is obtained with help of regularization procedure, especially the zeta function regularization [14, 15, 16], i.e. by inserting an inverse energy in a sufficiently high power

$$t_{reg}^{00}(s) = \sum_\lambda E_\lambda^{-2s} \psi_\lambda^*(x) \psi_\lambda(x) - (\xi - 1/4) \Delta \sum_\lambda E_\lambda^{-2(s+1)} \psi_\lambda^*(x) \psi_\lambda(x). \quad (16)$$

Sums (integrals) are convergent in the case of $\text{Re } s > d/2$. Thus, summation (integration) is performed in this case, and then the result will be analytically continued to the case of $s = -1/2$.

It is amazing, that the energy-momentum tensor (5) and, consequently, its vacuum expectation value remain to be dependent on parameter ξ even in the case of flat space-time ($R = 0$). If scalar field is quantized in the background of a static magnetic field in the flat space-time, then the covariant derivative is defined as

$$\nabla \Psi = (\partial - iV) \Psi, \quad \nabla \Psi^\dagger = (\partial + iV) \Psi^\dagger, \\ \nabla [\Psi^\dagger, \Psi]_\pm = \partial [\Psi^\dagger, \Psi]_\pm, \quad (17)$$

and the magnetic field strength takes form

$$B^{j_1 \dots j_{d-2}}(x) = -\epsilon^{j_1 \dots j_d} \partial_{j_{d-1}} V_{j_d}(x), \quad (18)$$

where $V(x)$ is the bundle connection (vector potential of the magnetic field), and $\epsilon^{j_1 \dots j_d}$ is the totally antisymmetric tensor, $\epsilon^{12 \dots d} = 1$.

As it was already mentioned in Introduction, we consider the bundle curvature (magnetic field strength) to be nonvanishing in the $d-2$ -brane (i.e. point in the $d=2$ case, line in the $d=3$ case, plane in the $d=4$ case, and $d-2$ -hypersurface in the $d>4$ case). Denoting the location of the $d-2$ -brane by $x^1 = x^2 = 0$, one gets

$$B^{3 \dots d}(x) = 2\pi \Phi \delta(x^1) \delta(x^2), \quad (19)$$

where Φ is the total flux (in the units of 2π) of the bundle curvature; then the bundle connection can be chosen in the form:

$$V^1(x) = -\Phi \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ V^2(x) = \Phi \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ V^j(x) = 0, \quad j = \overline{3, d}. \quad (20)$$

We require the vanishing of scalar field on the $d-1$ -dimensional brane Y and within the part of d -dimensional region that is surrounded by Y . The location of the d -dimensional region, forbidden for scalar field, we define as

$$\Psi(x) = 0, \quad \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \leq r_0, \\ -\infty \leq x^k \leq \infty, \quad k > 2. \quad (21)$$

Then the location of the d -dimensional region with the scalar field is

$$r_0 < \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} < R_0, \quad R_0 \rightarrow \infty, \\ -\infty \leq x^k \leq \infty, \quad k > 2. \quad (22)$$

In Eqs.(21), (22) parameters r_0 and R_0 define the transverse size of this regions.

As was mention above, scalar field function obeys condition $\Psi(r=r_0)=0$. Condition on other border at $r=R_0$ is not substantial, for definiteness it can be $\Psi(r=R_0)=0$. In this case the complete set of solutions Eq.(13) in background (19)-(20) within the region (22) is given by functions

$$\psi_{knp}(x) = (2\pi)^{\frac{1-d}{2}} e^{in\varphi} e^{ipx_{d-2}} \beta_{|n-\Phi|}(kr_0) \times \\ \times [Y_{|n-\Phi|}(kr_0) J_{|n-\Phi|}(kr) - \\ - J_{|n-\Phi|}(kr_0) Y_{|n-\Phi|}(kr)] , \quad (23)$$

where $\beta_{|n-\Phi|}(kr_0)$ is the normalization coefficient

$$\beta_{|n-\Phi|}(kr_0) = [Y_{|n-\Phi|}^2(kr_0) + J_{|n-\Phi|}^2(kr_0)]^{-1/2} \quad (24)$$

and

$$0 < k < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad -\infty < p^j < \infty, \quad j = \overline{3, d},$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \varphi = \arctan(x^2/x^1),$$

$$x_{d-2} = (0, 0, x^3, \dots, x^d), \quad (25)$$

$J_\mu(u)$ and $Y_\mu(u)$ is the Bessel functions of order μ of the first and second kind correspondingly and $\mathbb{Z}$ is the set of integers. Since solutions (23) in the limit $R_0 \rightarrow \infty$ correspond to the continuous spectrum ($E_{knp} = \sqrt{p^2 + k^2 + m^2} > m$), they obey orthonormality condition

$$\int d^d x \psi_{knp}^*(x) \psi_{k'n'p'}(x) = \\ = \frac{1}{k} \delta(k - k') \delta_{nn'} \delta(p - p') \quad (26)$$

Now, to compute zero component of the vacuum expectation value of the energy-momentum tensor we have to substitute (23) into Eqs.(16) and then obtain

$$t_{reg}^{00}(s) = \bar{t}_{reg}^{00}(s) + \left(\frac{1}{4} - \xi\right) \Delta_r \bar{t}_{reg}^{00}(s), \quad (27)$$

where $\Delta_r = \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r$ is the transverse radial and $S(kr, kr_0, F)_{corr.}$ is a correction term

$$S(kr, kr_0, F)_{corr.} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{n+F}(kr_0) Y_{n+F}(kr) \frac{J_{n+F}(kr_0) Y_{n+F}(kr) - J_{n-F}(kr) Y_{n+F}(kr_0)}{J_{n+F}^2(kr_0) + Y_{n+F}^2(kr_0)} + \right. \\ \left. + J_{n+1-F}(kr_0) Y_{n+1-F}(kr) \frac{J_{n+1-F}(kr_0) Y_{n+1-F}(kr) - J_{n-1-F}(kr) Y_{n+1-F}(kr_0)}{J_{n+1-F}^2(kr_0) + Y_{n+1-F}^2(kr_0)} \right] - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{n+F}^2(kr_0) \frac{J_{n+F}^2(kr) + Y_{n+F}^2(kr)}{J_{n+F}^2(kr_0) + Y_{n+F}^2(kr_0)} + J_{n+1-F}^2(kr_0) \frac{J_{n+1-F}^2(kr) + Y_{n+1-F}^2(kr)}{J_{n+1-F}^2(kr_0) + Y_{n+1-F}^2(kr_0)} \right] \quad (33)$$

In the absence of the magnetic flux in the tube (i.e. at $\Phi = 0$) Eq. (28) takes the form

$$t_{reg}^{00}(s)|_{F=0} = (2\pi)^{1-d} \int d^{d-2}p \int_0^\infty dk k (p^2 + k^2 + m^2)^{-s} S(kr, kr_0, F=0), \quad (34)$$

part of the laplacian and

$$\bar{t}_{reg}^{00}(s) = (2\pi)^{1-d} \int d^{d-2}p \times \\ \times \int_0^\infty dk k (p^2 + k^2 + m^2)^{-s} S(kr, kr_0, \Phi), \quad (28)$$

where

$$S(kr, kr_0, \Phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{|n-\Phi|}^2(kr_0) \times \\ \times [Y_{|n-\Phi|}(kr_0) J_{|n-\Phi|}(kr) - \\ - J_{|n-\Phi|}(kr_0) Y_{|n-\Phi|}(kr)]^2. \quad (29)$$

As a result of infinite range of summation last expression will depend only from fractional part of the flux

$$F = \Phi - [\Phi], \quad (0 \leq F < 1), \quad (30)$$

where $[u]$ is the integer part of quantity u (i.e. the integer which is less than or equal to u).

We can also rewrite (29) in form

$$S(kr, kr_0, F) = S(kr, F)_{z.s.} + S(kr, kr_0, F)_{corr.}, \quad (31)$$

where $S(kr, F)_{z.s.}$ corresponds to the appropriate series in the case of vacuum polarization by magnetic tube of zero transverse size [5, 6]

$$S(kr, F)_{z.s.} = \sum_{n=0}^{\infty} [J_{n-F}^2(kr) + J_{n+1-F}^2(kr)] = \\ = \int_0^{kr} d\tau [J_F(\tau) J_{-1-F}(\tau) + J_{-F}(\tau) J_{1-F}(\tau)] \quad (32)$$

and $S(kr, kr_0, F)_{corr.}$ is a correction term

The function $S(kr, kr_0, F = 0)$ can be split on two part also

$$S(kr, kr_0, F = 0) = \tilde{S}(kr)_{z.s.} + \tilde{S}(kr, kr_0)_{corr.}, \quad (35)$$

where $\tilde{S}(kr)_{z.s.}$ corresponds to the appropriate series in the case of vacuum polarization by magnetic tube of zero transverse size [5, 6]

$$\tilde{S}(kr)_{z.s.} = J_0^2(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(kr) = 1 \quad (36)$$

and a correction term

$$\begin{aligned} \tilde{S}(kr, kr_0)_{corr.} = & 2 \left[J_0(kr_0)Y_0(kr) \frac{J_0(kr_0)Y_0(kr) - J_0(kr)Y_0(kr_0)}{J_0^2(kr_0) + Y_0^2(kr_0)} + \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_0)Y_n(kr) \frac{J_n(kr_0)Y_n(kr) - J_n(kr)Y_n(kr_0)}{J_n^2(kr_0) + Y_n^2(kr_0)} \left. \right] - \\ & - \left[J_0^2(kr) \frac{J_0^2(kr) + Y_0^2(kr)}{J_0^2(kr_0) + Y_0^2(kr_0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(kr) \frac{J_n^2(kr) + Y_n^2(kr)}{J_n^2(kr_0) + Y_n^2(kr_0)} \right]. \quad (37) \end{aligned}$$

Expressions (27) and (34) are still a bad quantities even after analytically continuation to the case of $s = -1/2$. We need a renormalization procedure. In this paper we will be interested to find a variation of vacuum energy in the case of finite transverse size tube with magnetic flux ($F \neq 0$) and the same tube without magnetic flux ($F = 0$). So, we define renormalized vacuum energy as:

$$t_{ren}^{00} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} [t_{reg}^{00}(s) - t_{reg}^{00}(s)|_{F=0}]. \quad (38)$$

It should be noted that t_{ren}^{00} is the periodic function of flux F , since it depends only on F (being symmetric under $F \leftrightarrow 1 - F$).

In this paper we will consider the simplest situation for magnetic tube of finite transverse size, i.e. we consider situation for half-integer values of magnetic flux $F = 1/2$ (in this case we expect the maximal effect of vacuum polarization by analogy with [5, 6]) in $2 + 1$ -dimensional space-time, in order to avoid additional integration over p_{d-2} components of momentum, and for case of $\xi = 1/4$ to avoid consideration of second term in (15). In this case the relation (38) became

$$t_{ren}^{00} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk k (k^2 + m^2)^{-s} G(kr, kr_0), \quad (39)$$

where $G(kr, kr_0)$ is

$$G(kr, kr_0) = S(kr, kr_0, F = 1/2) - S(kr, kr_0, F = 0) \quad (40)$$

and $S(kr, kr_0, F)$ is defined by (31) and (35).

We faced difficulties in analytical evaluation of $G(kr, kr_0)$ function and, unfortunately, could not obtain induced energy density (42) in analytical form.

But we found that this problem can be solved numerically. To do it we have to introduce a dimensionless variables

$$kr = z, \quad \lambda = r_0/r, \quad (41)$$

where $z \in (0, \infty)$, $\lambda \in [0, 1]$. The case of $\lambda = 1$ corresponds to $r = r_0$, i.e. the point on the boundary of tube, the case of $\lambda = 0$ corresponds to the point on the infinity $r \rightarrow \infty$ or the case of singular tube ($r_0 = 0$). In this variables Eq. (42) become

$$r^3 t_{ren}^{00} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz z \left(z^2 + \left(\frac{mr_0}{\lambda} \right)^2 \right)^{-s} \times G(z, \lambda z). \quad (42)$$

3 Numerical evaluation of energy density

Before performing numerical analysis, let us point out some analytical properties of integrand function: straight on the brane ($\lambda = 1$) function is zero

$$G(z, z) = 0; \quad (43)$$

at small distance from a brane

$$G(z, \lambda z)|_{z \rightarrow 0} = -\ln(\lambda)/\ln(\lambda z); \quad (44)$$

at small values of λ (i.e. at the large distance from a brane or in the case of singular tube) integrand

corresponds to the function in case of singular tube

$$G(z, \lambda z)|_{\lambda \rightarrow 0} = S(z, F = 1/2)_{z.s.} - \bar{S}(z)_{z.s.} \quad (45)$$

We pay your attention that the above properties are valid in general case for space-time of any dimension $d > 1$.

Numerical analysis indicated that under calculation of $G(z, \lambda z)$ function one can use series in (33), (37) with finite limits. It is enough to cut off the summation limits by range $n \in (0, \lfloor |z + 35| \rfloor)$. In this case the relative error is

$$\left| \frac{G(z, \lambda z)|_{n \in (0, z+30)} - G(z, \lambda z)}{G(z, \lambda z)} \right| < \varepsilon(\lambda),$$

$$\varepsilon(\lambda) < 10^{-17}, \quad \lambda \in [1/10, 9/10]. \quad (46)$$

One can make sure that envelope of $G(z, \lambda z)$ is exponentially decreasing function at large z , see Fig.1, except the case $\lambda = 0$ (i.e. in case of singular magnetic tube). So, for finite size magnetic tube we can immediately take $s = -1/2$ in (42).

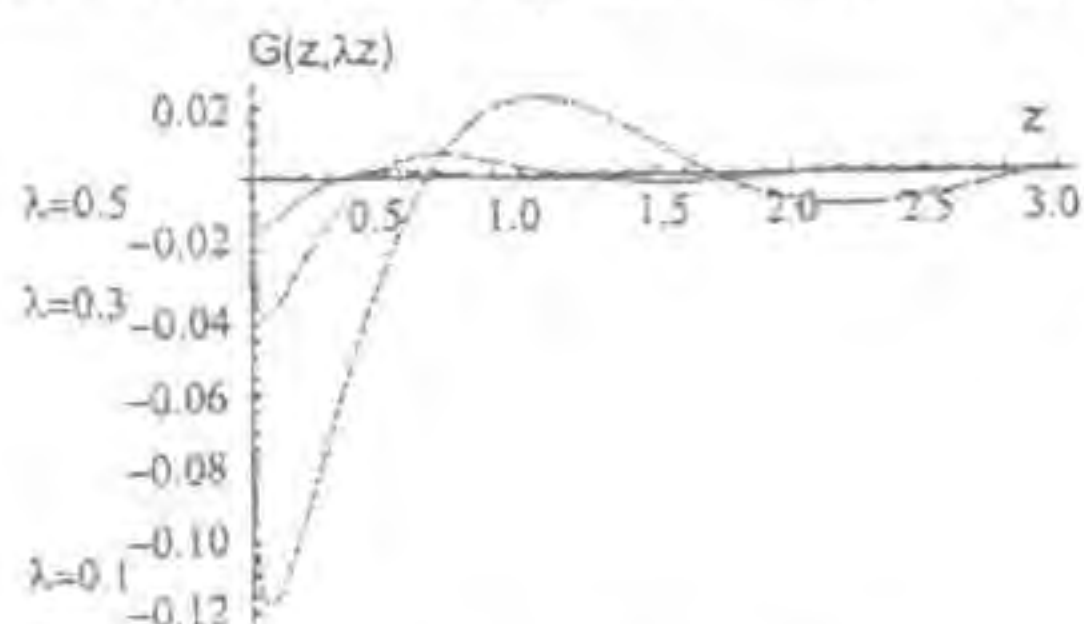


Fig.1 Behavior of $G(z, \lambda z)$ at different values of λ .

So, we can evaluate values of dimensionless quantity $r^3 t_{rem}^{00}$ (42) for different, but not very small, λ . To do it we need a high precision evaluation that we realized in a following way.

As one can see from Fig.2 the function $G(z, \lambda z)$ is negative from $z = 0$ to first function root at $z = z_1$ ($z_1 \neq 0$). So, appropriate integral in (42) is negative also. Because of decreasing character of envelope function the integral from z_1 to z_3 will be positive. It is useful to define period of $G(z, \lambda z)$ function as an interval between two nearest roots of function in which the derivation of this function is positive. Then the full integral in (42) will be the sum of negative integral from $z = 0$ to $z = z_1$ and the multitude of positive values of integrals over periods.

For small z ($\lambda z \lesssim 30$) we made a direct integration of $G(z, \lambda z)$ function over periods with help of MatLab 6.5. This procedure can ensure

absolute accuracy up to 10^{-13} . For large z we created a table of values of $G(z, \lambda z)$ function for each period with help of Mathematica 6.0 and replaced this function by more simple function in form

$$G_{int}(z, \lambda z) = a \frac{e^{-bz}}{z^c} \frac{A_q(z^2)}{B_q(z^2)} \sin(kz + j \ln z + \phi_0), \quad (47)$$

where sine function ensures that roots of $G(z, \lambda z)$ coincides with roots of $G_{int}(z, \lambda z)$; $A_q(x)$ and $B_q(x)$ are q -degree polynomials, q can be 3, 4 or 5; all unknown parameters can be found from interpolation procedure. During calculation we made interpolation with the relative error of

$$\left| \frac{G_{int}(z, \lambda z) - G(z, \lambda z)}{G(z, \lambda z)} \right| < 10^{-8} \quad (48)$$

for each period. The function $G_{int}(z, \lambda z)$ can be immediately integrated with the required accuracy. In this way we made integration up to $z \simeq 100/\lambda$ with absolute accuracy up to 10^{-17} .

So, we obtained a table of contributions from integration over each period. We extrapolated this table to infinity and after it founded full integral in (42) as sum of negative integral from $z = 0$ to $z = z_1$ and multitude of positive integrals over periods. The absolute accuracy of obtained result is 10^{-13} . It should be noted that 99 % of integral value in (42) is obtained by direct calculation and only one percent is a contribution from interpolation.

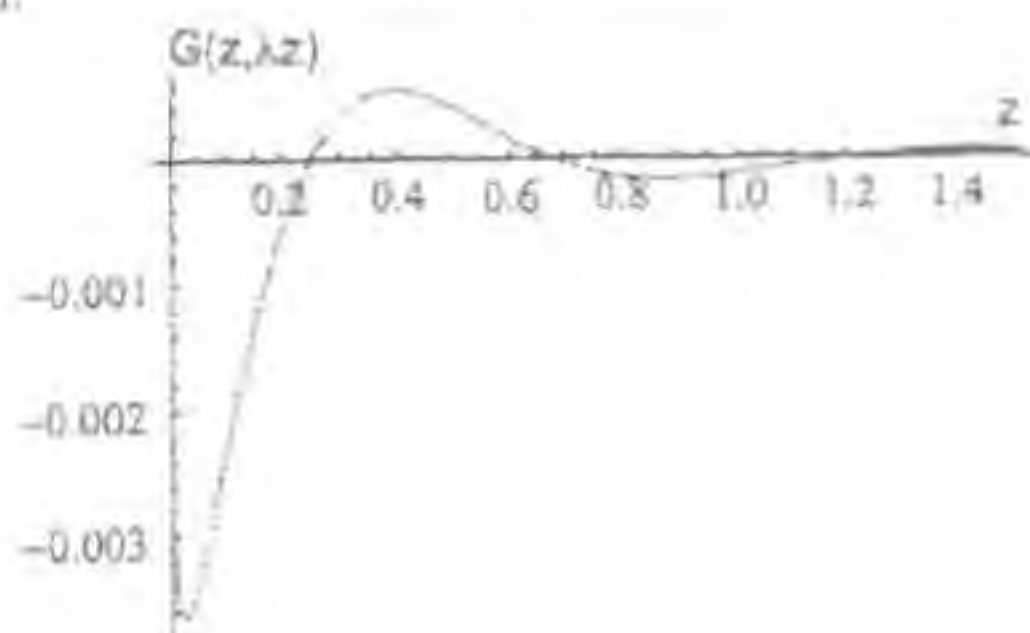


Fig.2 The location of $G(z, \lambda z)$ roots at $\lambda = 0.7$.

In this paper we made calculations for particular case when tube transverse size is just Compton wave-length of scalar field $m\tau_0 = 1$. Obtained in such way values of temporal component of the vacuum tensor (i.e. energy density) is illustrated by Fig.3. Here variable $m\bar{r}$ is along

x -axis ($\bar{r} = r - r_0$ is a distance from the brane in transverse direction), and dimensionless tensor component $\bar{r}^3 t_{ren}^{00}(m\bar{r})$ is presented by solid line. The dots on the solid line corresponds to points that was calculated, the solid line is a result of interpolation. We see from Fig.3 that the vacuum energy density is positive and has maximum at $m\bar{r} \approx 2$; the maximal value of energy density is $\bar{r}^3 t_{ren}^{00} \approx 5 \cdot 10^{-10}$. For comparison with the case of singular magnetic tube we illustrate, with help of dashed line, the magnitude of $3 \cdot 10^{-8} \bar{r}^3 t_{ren,z.s.}^{00}(m\bar{r})$ at $\xi = 1/4$, $F = 1/2$ (in this case $\bar{r} \equiv r$), see [5, 6].

4 Summary

We have shown that the vacuum of the quantized charged scalar field is polarized in the background of a $d-3$ -brane with static magnetic field inside in flat $d+1$ -dimensional space-time. Vector potential of the brane induces a finite energy-momentum tensor in the vacuum; therefore, this effect may be denoted as the Casimir-Bohm-Aharonov effect. We showed that induced vacuum energy depends periodically on the brane flux and possesses large-distance exponential asymptotics for $m > 0$ like in the case of singular magnetic tube, see (45), [5, 6].

We showed that in particular case of space with dimension $d = 2$ temporal component of energy-momentum tensor (energy density) can be numerically calculated without regularization procedure. We directly obtained (see Fig.3) behavior of energy density at small transverse distances from the brane for the particular case of half-integer magnetic flux ($F = 1/2$), coupling $\xi = 1/4$ and when tube transverse size is just Compton wave-length of scalar field $mr_0 = 1$.

Qualitatively, the energy density is zero at the brane, increases with the increase of the distance, reaches maximum at $\bar{r} \sim m^{-1}$, decreases and reaches zero asymptotically from above. This is distinct from the conventional Casimir effect, which corresponds to the vacuum energy density being space independent constant, either negative or positive [3].

Comparing our result with the case of singular magnetic tube [5, 6] one can see next distinguishing characteristics. At first, the induced vacuum energy in case of impermeable magnetic tube is zero on the bounding surface in contrast to the case of singular magnetic tube. At second, one can

see the striking difference in magnitudes of induced vacuum energies. At third, the vacuum energy density integrated over transverse coordinates is infinite in case of singular magnetic tube, but is finite for impermeable finite size magnetic tube. The origin of this differences is in different topology of bounding surface and different conditions on it: in case of impermeable magnetic tube scalar field obeys Dirichlet boundary condition, in case of singular magnetic tube — regularity condition.

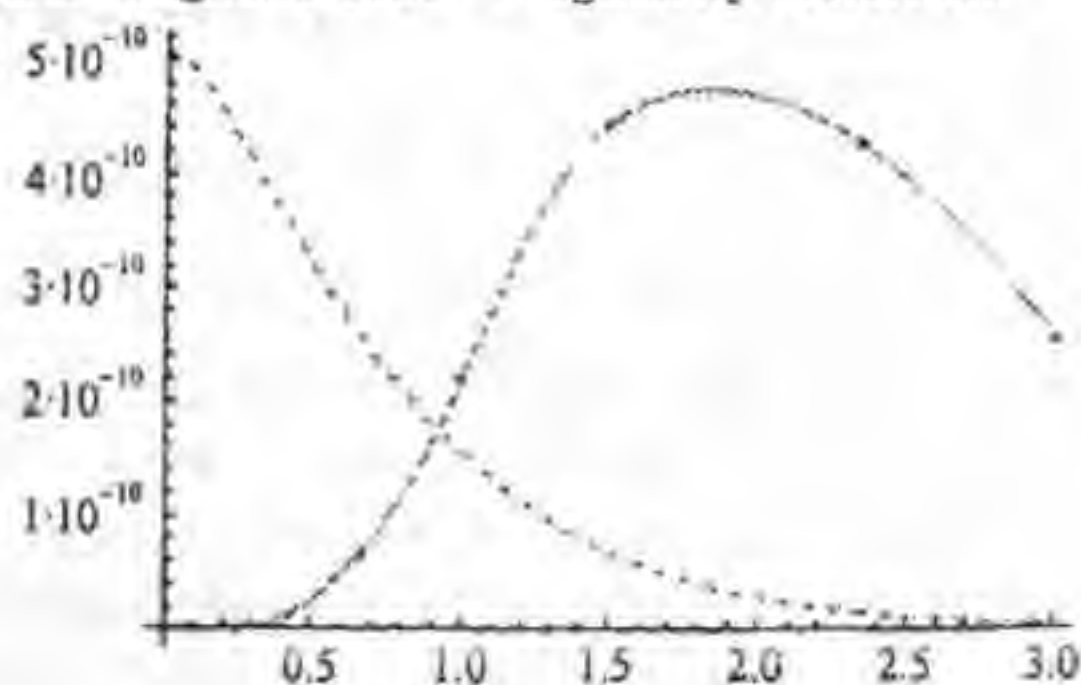


Fig.3 Induced vacuum energy for impermeable magnetic tube (solid line) and for the case of singular magnetic tube with a coefficient $3 \cdot 10^{-8}$ (dashed line).

It should be noted that temporal components of the vacuum tensor for the quantized scalar (with $\xi = 1/4$) and spinor matter in magnetic backgrounds in low-dimensional ($d = 2, 3$) spaces were considered in Refs.[17]–[22]. Since the authors of these works are concerned with the case when the region of nonvanishing background field is of nonvanishing transverse size and is overlapped with the region of nonvanishing quantized matter, their results differ considerably from ours: in particular, the dependence on the flux of the background magnetic field is not periodic.

It is known, from the general features of Bohm-Aharonov effect, that in our case (i.e. when region with scalar field do not overlap with region with magnetic field) effects outside the brane is determined only by fractional part of brane flux. Interesting question for further investigation is the dependence of induced vacuum energy from the distribution of magnetic field inside the tube under fixed flux. Then we will be able to compare finite energy of classical magnetic field with induced vacuum energy of scalar field.

Because of our results were obtained by numerical calculations we have also to notice Ref.[23] where some relations for cylindrical functions like (23) were obtained analytically.

References

- [1] *Casimir H.B.G.* Introductory remarks on quantum electrodynamics // *Physica* – 1953. – 19. – P.846-849.
- [2] *Birrel N.D. and Davies P.C.W.* Quantum Fields in Curved Space. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. – 352 p.
- [3] *Mostepanenko V.M. and Trunov N.N.* The Casimir Effect and Its Applications. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 199 p.
- [4] *Starobinsky A.A.* A new type of isotropic cosmological models without singularity // *Phys. Lett. B.* – 1980. – 91. – P.99-102.
- [5] *Sitenko Yu.A., Gorkavenko V.M.* On the dependence of the induced vacuum energy-momentum tensor on the coupling to the curvature scalar // *УФЖ.* – 2003. – 48. – C.1286-1290.
- [6] *Sitenko Yu.A., Gorkavenko V.M.* Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a $(d-2)$ – brane in $(d-1)$ – dimensional space-time // *Phys. Rev. D.* – 2003. – 67. – P.085015 (19 pages).
- [7] *Aharonov Y. and Bohm D.* Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory // *Phys. Rev.* – 1959. – 115. – P.485-491.
- [8] *Sitenko Yu.A. and Babansky A.Yu.* The Casimir-Aharonov-Bohm effect? // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1998. – 13(5). – P.379-386.
- [9] *A. Vilenkin, E. P. S. Shellard.* Cosmic strings and other topological defects. – Cambridge: Cambridge university press, 1994. – 517 p.
- [10] *Абрикосов А.А.* О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы // *ЖЭТФ.* – 1957. – 32(6). – С.1442-1452; *Киржниц Д.А.* Модель Вайнберга и "горячая" Вселенная // *Письма в ЖЭТФ.* – 1972. – 15(12). – С.745-748.
- [11] *Penrose R.* in: *Relativity, Groups and Topology*, edited by B.S. DeWitt and C. DeWitt. – New York: Gordon and Breach, 1964.
- [12] *Chernikov N.A., Tagirov E.A.* Quantum theory of scalar fields in de Sitter space-time // *Ann. Inst. Henri Poincare.* – 9A. – P.109-141.
- [13] *Callan C.G., Coleman S., Jackiw R.* A new improved energy-momentum tensor // *Ann. Phys. (N.Y.)* – 1970. – 59. – P.42-73.
- [14] *Salam A., Strathdee J.* Transition electromagnetic fields in particle physics // *Nucl. Phys. B.* – 1975. – 90. – P.203-220.
- [15] *Dowker J.S., Critchley R.* Effective lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space // *Phys. Rev. D.* – 1976. – 13. – P.3224-3232.
- [16] *Hawking S.W.* Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime // *Commun. Math. Phys.* – 1977. – 55. – P.133-148.
- [17] *D. Cangemi D., Dunne G., D'Hoker E.* Effective energy for QED_{2+1} with semi-localized static magnetic fields: a solvable model // *Phys. Rev. D.* – 1995. – 52. – P.3163-3167.
- [18] *Fry M.P.* QED in inhomogeneous magnetic fields // *Phys. Rev. D.* – 1996. – 54. – P.6444-6452.
- [19] *Dunne G., Hall T.M.* An exact QED_{3+1} effective action // *Phys. Lett. B.* – 1998. – 419. – P.322-325.
- [20] *Bordag M., Kristen K.* The ground state energy of a spinor field in the background of a finite radius flux tube // *Phys. Rev. D.* – 1999. – 60. – P.105019 (14 pages).
- [21] *Scandurra M.* Vacuum energy in the presence of a magnetic string with delta function profile // *Phys. Rev. D.* – 2000. – 62. – P.085024 (10 pages).
- [22] *Bordag M.* Ground State Energy for Massive Fields and Renormalization // *arXiv:hep-th/9804103* (12 pages).
- [23] *Saharian A.A.* The generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect // *arXiv:0708.1187* (120 pages).

Надійшла до редколегії 17.12.08

УДК 535.3

Гречко Л.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
Лерман Л.Б.*, канд. техн. наук,
Корецький С.Л., канд. економ. наук, доц.,
Криворучко Я.С., викладач,
Шостак С.В., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Поглинання електромагнітного випромінювання біметалевими частинками та матричними дисперсними системами на їх основі

Досліджено поглинання електромагнітного випромінювання кульовими біметалевими кульовими частинками та матричними дисперсними системами на їх основі. За допомогою узагальненого розв'язку Мі розроховано спектри та ефективності поглинання електромагнітного випромінювання на двошарових частинках. Також в електростатичному наближенні визначено поглинання в матрично-дисперсних системах із такими включеннями в моделі диполь-дипольної взаємодії. Наводяться результати чисельних розрахунків.

Ключові слова: електромагнітне випромінювання, малі частинки, діелектрична проникність, поглинання

*E-mail: llerman@yandex.ru

Вступ

Останнім часом великий інтерес викликають матрично-дисперсні системи (МДС) із кульовими біметалевими наночастинками з благородних металів типу срібне ядро – золота оболонка, чи навпаки – золоте ядро – срібна оболонка. Таки системи внаслідок значної відмінності частот поверхневих плазмонів золота і срібла дозволяють керувати максимумами поглинання електромагнітного випромінювання (ЕМВ) в залежності від об'ємної долі того чи іншого компонента. В цьому повідомлінні у продовження досліджень [1-5] у хвильовому наближенні розглядається задача взаємодії ЕМВ із двошаровою кульовою частинкою із срібним ядром і золотою оболонкою. Також в електростатичному наближенні [6, 7] визначено поглинання в МДС із такими включеннями в межах диполь-дипольної взаємодії. У вигляді відповідних графіків наводяться результати виконаних чисельних розрахунків.

Grechko L.G., Dr. Sc., prof.,
Lerman L.B., Ph. D.,
Koretskyi S.L., Ph. D., docent,
Krivoruchko Ya. S., lecturer,
Shostak S.V., Ph. D., docent

Absorption of electromagnetic irradiation by bimetal particles and matrix disperse systems with such inclusion

Absorption of electromagnetic radiation bimetal spherical particles and matrix disperse systems on their basis are investigated. By the generalized the solution Mie spectrums and efficiency of absorption of electromagnetic radiation on two-slabs particles is calculated. Also in the electrostatic approximation the absorption in the matrix-dispersible systems with such including in the model of dipole-dipole interaction. Results over of numeral calculations are presented.

Key Words: electromagnetic irradiation, little particles, dielectric permeability, absorption

1 Поглинання ЕМВ біметалевою кульовою частинкою

Точний розв'язок задачі розсіювання електромагнітного випромінювання на суцільній кулі в межах класичної електродинаміки, який отримав назву розв'язка Мі [6, 7], добре відомий. Потрібні оптичні функції (перерізи та ефективності розсіювання, поглинання, екстинкція) обчислюються за допомогою коефіцієнтів, так званих, рядів розсіювання [7]. Наприклад, для ефективностей згаданих величин розрахункові формули мають вигляд

$$Q_{\infty} = \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(|c_l|^2 + |b_l|^2), \quad (1)$$

$$Q_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(c_l + b_l), \quad (2)$$

де c_l, b_l – коефіцієнти ряду розсіювання [3, 7], $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, ω – кругова частота, c – швидкість світла, λ – довжина

хвилі. Ефективність поглинання обчислюється за формулою $Q_{abs} = Q_{ext} - Q_{scat}$.

Раніше [3] нами за допомогою трансляційних матриць розв'язок Мі було узагальнено на багатошарову кулю. При цьому у ряді розсіювання змінюються тільки вирази для коефіцієнтів, а самі ряди формально зберігають свій вигляд. Отже, маючи значення c_l, b_l можна обчислити потрібні характеристики для окремої багатошарової частинки, або для системи частинок, які не взаємодіють між собою.

Наведемо деякі результати виконаних розрахунків. Розглядалась частинка із срібним ядром і золотою оболонкою. В розрахунках було прийнято, що зовнішній радіус частинки $R = 10$ нм, який зберігався сталим, а радіус ядра змінювався. Для малих частинок головний внесок в екстинкцію вносить поглинання, що і підтвердили виконані розрахунки. На рис. 1, 2 наведені спектри поглинання для двох значень радіусів ядра: $r = 2,5$ нм (рис. 1) і $r = 6$ нм (рис. 2). Для визначення діелектричних функцій срібла і золота в даному випадку використовувалась модель Друде [7] без врахування розмірної поправки.

$$\epsilon = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_p)} \quad (3)$$

де ω_p – плазмова частота для суцільного матеріалу, γ_p – частота поглинання. В розрахунках прийнято, що для срібла $\epsilon_\infty = 4,5$, $\gamma_p = 0,24 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, а для золота $\epsilon_\infty = 10,0$, $\gamma_p = 0,34 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ (i – уявна одиниця) [7-8].

З наведених даних та інших виконаних розрахунків випливає, що в спектрах поглинання біметалевої частинки присутні два максимуми, які відповідають плазмовим частотам срібла і золота. В залежності від співвідношення радіусів ядра і оболонки абсолютні значення максимумів суттєво змінюються.

Нами для визначення головної частоти поглинання було прийнято другий максимум (по максимуму хвилі) на спектральних кривих типу, поданих на рис. 1, 2. В результаті було отримано залежність довжини хвилі λ_p головного поверхневого плазмону від відношення радіуса ядра і оболонки, яка показана на рис. 3.

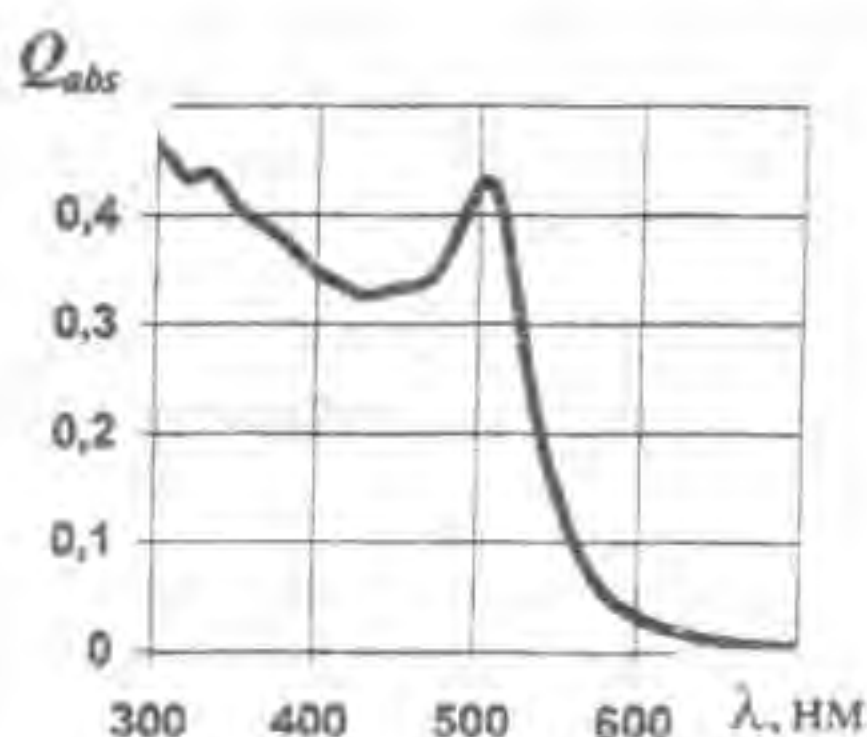


Рис. 1. Спектральна залежність ефективності поглинання для частинки із срібним ядром і золотою оболонкою (радіус ядра $r = 2,5$ нм)

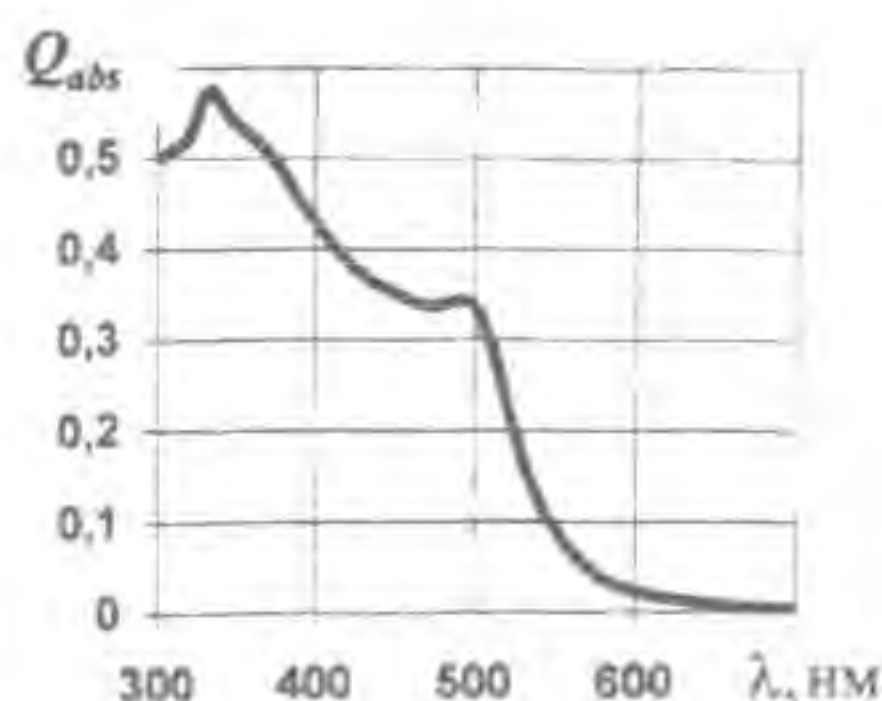


Рис. 2. Спектральна залежність ефективності поглинання для частинки із срібним ядром і золотою оболонкою (радіус ядра $r = 6$ нм)

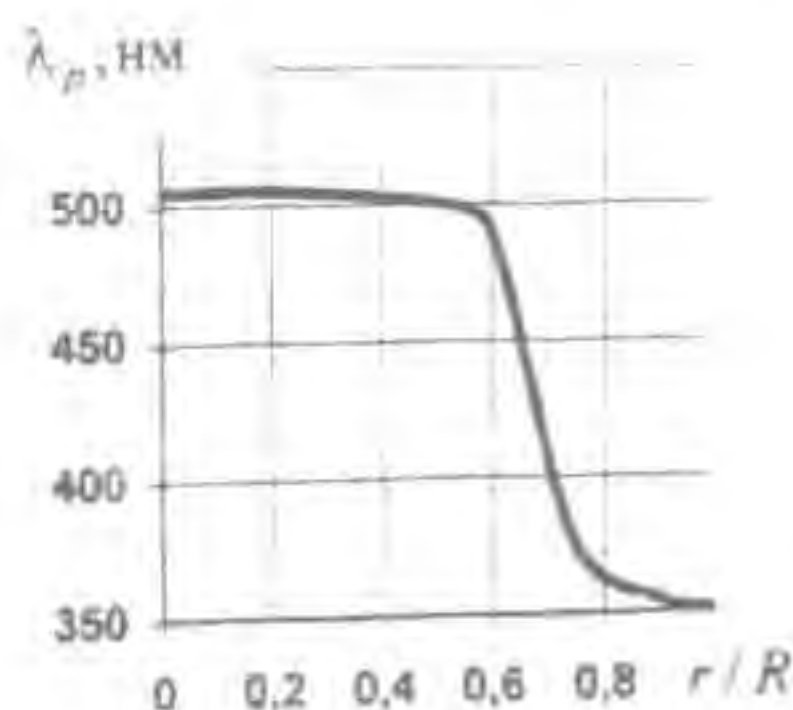


Рис. 3. Залежність довжини хвилі λ_p поверхневого плазмону від відношення радіуса ядра r і R оболонки

З наведених результатів випливає, що коли срібне ядро відносно мале, тобто практично до значення відношення $r/R < 0,6$ плазмова частота визначається золотою оболонкою, і тільки при подальшому збільшенні розмірів ядра довжина хвилі плазмового резонансу прямує до відповідної довжини хвилі для суцільної срібної частинки.

2 Поглинання ЕМВ у МДС з бімателевими кульовими включеннями

Іншим підходом для розрахунку процесів взаємодії ЕМВ з МДС є метод ефективного середовища. Суть цього методу полягає у тому, що неоднорідна немагнітна МДС замінюється однорідним середовищем з деякою ефективною діелектричною проникністю (ДП) $\bar{\epsilon}$, величина якої залежить від ДП включень та матриці, концентрації включень та їх форми [1, 6, 7]. Тоді після знаходження $\bar{\epsilon}$ коефіцієнт поглинання κ може бути обчислений за формулою [6, 7]:

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\bar{\epsilon}} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{Im} \sqrt{\bar{\epsilon}}. \quad (4)$$

Найбільш відомим і обґрунтованим наближенням для розрахунку $\bar{\epsilon}$ МДС з кульовими включеннями є співвідношення Максвелл-Гарнетта [1, 2, 5-7], яке має місце при ступенях заповнення $f = V_0/V < 0,1$, (V_0 - об'єм, зайнятий включеннями, V - загальний об'єм системи) [6,7]. Наприклад, для суцільних кульових включень ця формула може бути записана у вигляді

$$\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_m}{\bar{\epsilon} + 2\epsilon_m} = f \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m}$$

або еквівалентним чином

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_m \left[1 + 3f \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m - f(\epsilon - \epsilon_m)} \right], \quad (5)$$

де ϵ , ϵ_m - діелектричні проникності включень і матриці відповідно.

При одержанні цих співвідношень припускається, що ДП матриці залишається незмінною при збільшенні f . Але при $f > 0,1$ таке наближення дає результати, які погано узгоджуються з експериментом. Це, головним чином, зобумовлено тим, що відстань між включеннями у МДС зменшується, і стає суттєвою взаємодія між ними, яка може сильно

змінити характер частотних залежностей спектрів розсіяння та поглинання ЕМВ такими МДС [4,6].

Більш точне наближення дає врахування диполь-дипольної взаємодії між окремими кульовими частинками. Докладно метод і необхідні розрахункові формули викладено в роботах [1-5]. В цьому випадку зручним є заміна окремої двошарової частинки суцільною частинкою з деякою ефективною ДП. Для визначення ефективного ДП окремої частинки можливо використання правила сумішей, і тоді двошарові частинки замінюються суцільними кульовими частинками з радіусом, який дорівнює радіусу оболонки, а ДП включень ϵ_{ins} , може бути визначена, наприклад, за одним із варіантів формули Ліхтенекера, зокрема, виразом

$$\epsilon_{ins} = f\epsilon_{Ar} + (1-f)\epsilon_{Au}. \quad (6)$$

Деякі результати виконаних за вказаними формулами розрахунків у вигляді спектрів коефіцієнта поглинання κ наведені на рис. 4-7. На рис. 4 наведені спектри поглинання для суцільних кульових частинок радіусом $R = 10$ нм (для срібла - це рис. 4, для золота - рис. 5), розташованих у воді ($\epsilon_m = 1,7$).

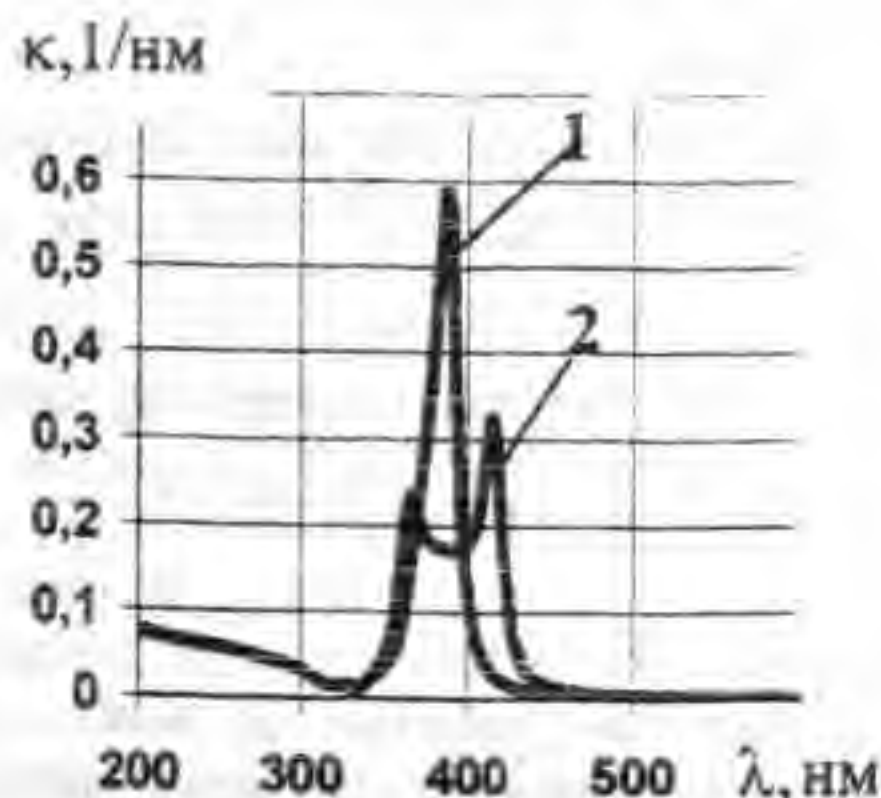


Рис. 4. Спектри поглинання ЕМВ в МДС із суцільними срібними включеннями: 1 - наближення Максвелл-Гарнетта; 2 - диполь-дипольне наближення

Для завдання ДП срібла і золота, як і в [4] були використані експериментальні залежності [8] для масивних зразків із врахуванням розмірної поправки. Розрахунки виконані в наближенні Максвелл-Гарнетта (на рисунках позначено цифрою 1) і із застосуванням моделі диполь-дипольної взаємодії (цифра 2).

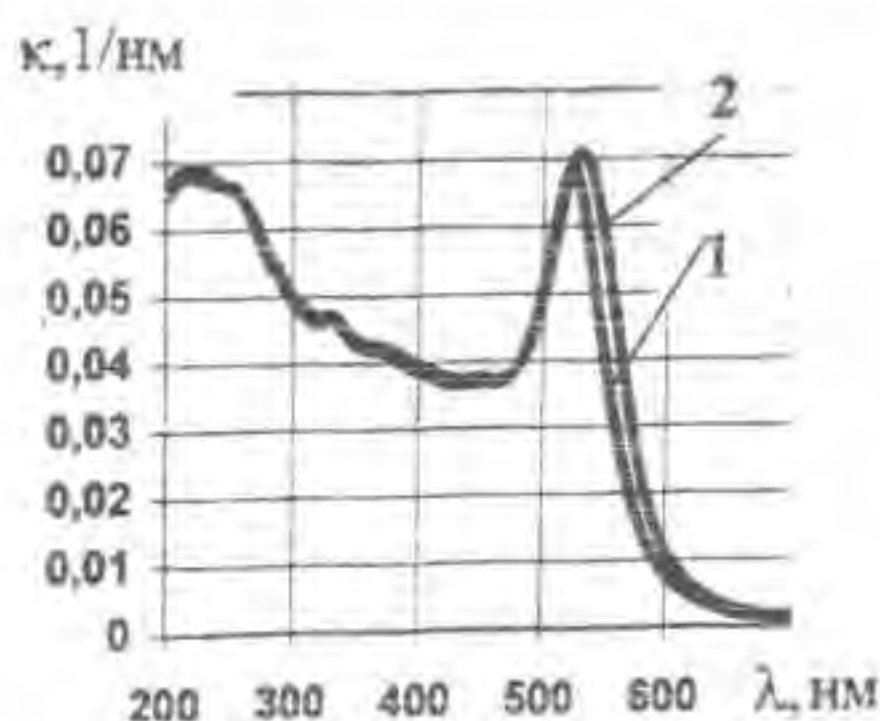


Рис. 5. Спектри поглинання ЕМВ в МДС із суцільними золотими включеннями: 1 – наближення Максвелл-Гарнетта; 2 – диполь-дипольне наближення

З наведених результатів випливає наступне. Якщо для срібних частинок врахування диполь-дипольної взаємодії приводить до розщеплення спектру, то для золотих частинок такого явища не спостерігається. При цьому, якщо для срібних частинок максимуми поглинання, які дає врахування диполь-дипольної взаємодії менше, ніж ті значення, які дає формула Максвелл-Гарнетта, то для золотих частинок навпаки.

На рис. 6 наведено спектр коефіцієнта поглинання для МДС з біметалевими частинками, ДП яких обчислювалась за формулою (6) при змісті срібла у частинці у 33%.

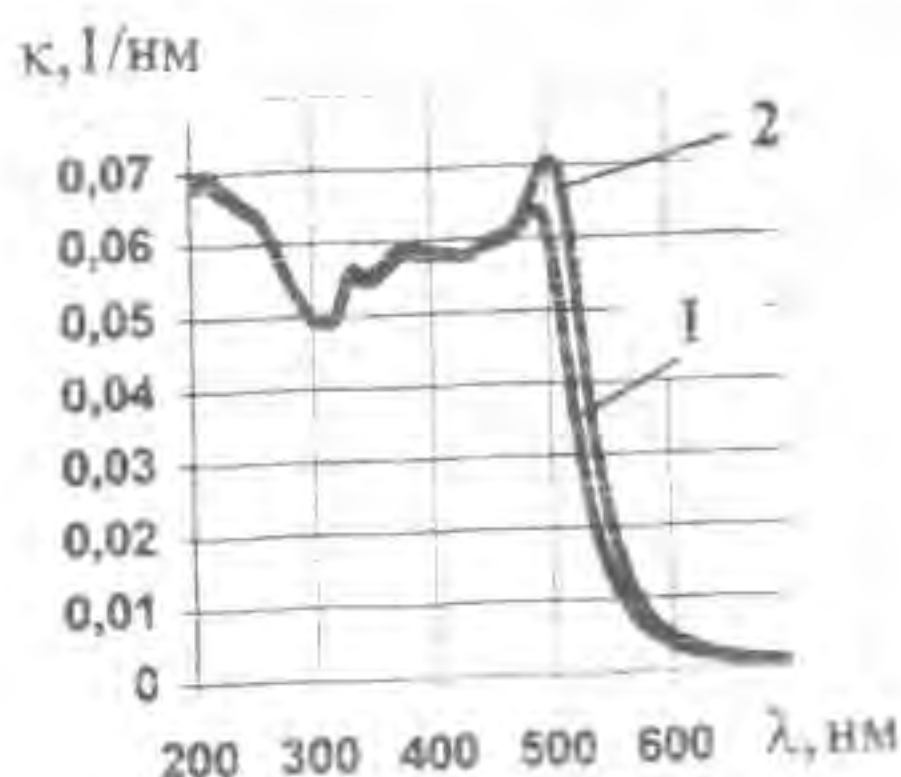


Рис. 6. Спектри поглинання ЕМВ в МДС із біметалевими включеннями (зміст срібла 33% за об'ємом): 1 – наближення Максвелл-Гарнетта; 2 – диполь-дипольне наближення

Як видно, в цьому випадку також не відбувається розщеплення плазмонів, але сама залеж-

ність має більш складний характер.

Користуючись залежностями типу зображеної на рис. 6, можна встановити залежність довжини хвилі, що відповідає максимуму поглинання від об'ємної долі вміста срібла, аналогічно графіку, який наведено на рис. 3. Така залежність показана на рис. 7.

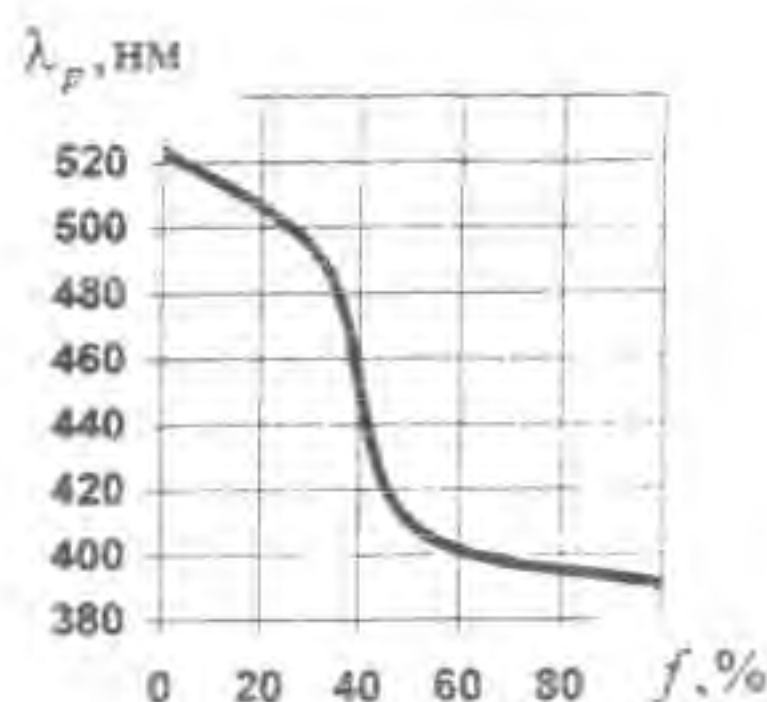


Рис. 7. Залежність довжини хвилі λ_p , що відповідає максимуму поглинання від об'ємної долі f вміста срібла

Як видно з отриманої залежності довжина хвилі, яка відповідає максимуму поглинання монотонно зменшується від довжини хвилі поверхневого плазмону золота до довжини хвилі поверхневого плазмону срібла. Найбільш залежність від об'ємної долі ядра спостерігається в межах 30-50%. Порівняння з аналогічною залежністю для окремої частинки, яка наведена на рис. 3, вказує на їх якісну відповідність, а відміна пояснюється різними шкалами (на рис. 3 по осі абсцис відкладено відношення радіусів r/R , а на рис. 7 – об'ємів, тобто r^3/R^3)

Висновки

Проведено розрахунки спектрів поглинання на біметалевих частинках із срібним ядром та золотою оболонкою, а також спектрів поглинання в МДС із такими включеннями зі врахуванням парної диполь-дипольної взаємодії між частинками. При цьому в останньому випадку використана заміна частинки з оболонкою суцільною ча-

стинкою із ефективними значенням діелектричної проникності, яка знаходилась за правилом сумішей.

Чисельними експериментами встановлено, що найбільш істотно вплив структури біметалевих частинок (срібло – золото) виявляється, коли об'ємна доля ядра складає близько 50% наповнення частинок.

Залежності довжини хвилі максимумів поглинання, знайдені за допомогою точного розв'язок задачі розсіяння на двошаровій кулі, якісно співпадають з результатами при використанні моделі ефективного середовища. В останньому випадку результати отримано при використанні електростатичного наближення та при величині ступеня заповнення МДС $f < 0,1$. Слід відмітити, що використання моделі Друде для завдання ДП благородних металів дає результати, які якісно не співпадають з результатами розрахунків при використанні експериментальних залежностей від частоти випромінювання показників заломлення золота і срібла. Тому в даному випадку потрібні додаткові експериментальні дослідження спектрів поглинання.

Робота частково фінансувалася в рамках договорів: № 28 – спільного конкурсу НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень та № 37/08н – програма НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали, нанотехнології»

Список використаних джерел

1. Гречко Л.Г., Шкода Н.Г., Шостак С.В. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з двошаровими кульовими включеннями // Український фізичний журнал.-2002. – Т.47, №7. – С.694–698.
2. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Шкода Н.Г. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з багатошаровими включеннями: пряма та обернена задачі // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. – 2004. – №2 – С. 474–481.
3. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Шкода Н.Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатошаровій кулі // Вісник Київського університету. Сер.фіз.-мат. – 2004. – №3. – С. 376–384.
4. Гречко Л.Г., Єременко А.М., Крилова Г.В., Лерман Л.Б., Смірнова Н.П., Шкода Н.Г. Оптичні властивості малих частинок срібла в колоїдних розчинах // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. – 2004. – №4. – С. 450–458.
5. Гречко Л.Г., Грищук О.Ю., Куницька Л.Ю., Лерман Л.Б., Люценко М.О. Поглинання електромагнітного випромінювання в матрично-дисперсних системах з багатошаровими кульовими включеннями. // Металлофізика: новейшие технологии. – 2008. – Т. 30, № 6. – С. 789–804.
6. Венгер У.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л. Оптика малих частинок дисперсних середовищ.-Київ: Наук.думка, 1999. – 348с.
7. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.
8. Johnson P.B., Christy R.W. Optical Constants of the Noble Metals // Physical Review B. – 1972. – V.6, No 12. – P. 4370–4379.

Надійшла до редколегії 21.11.08

УДК 538.3: 535.34

Л.Г. Гречко, докт. фіз.-мат. наук, проф.,
О.Ю. Семчук, канд. фіз.-мат наук, ст.н.с., О.Ю.
Гришук, аспірант, Д.Л. Водоп'янов, аспірант

Розсіяння електромагнітного випромінювання шорсткими фрактальними поверхнями

Проведено комп'ютерне моделювання реальних шорстких поверхонь за допомогою двовимірної функції Вейерштраса. На основі скалярної теорії Кірхгофа розраховано індикатрису розсіяння електромагнітних хвиль для різних типів шорстких поверхонь та кутів падіння. Показано, що індикатриса розсіювання електромагнітних хвиль шорсткою поверхнею з фрактальним рельєфом має складну структуру і містить сплески інтенсивності в напрямках, які лежать досить далеко від напрямку дзеркального відбиття.

Ключові слова: фрактали, розсіювання, електромагнітне випромінювання, шорстка поверхня

*E-mail: aleksandr1950@meta.ua

Вступ

Геометричні образи та поняття займають важливе місце у фізичних дослідженнях. По-перше, фізичні властивості будь-яких об'єктів завжди тісно пов'язані з їх геометрією. Наприклад, фізичні властивості кристалів багато у чому визначаються геометрією їх кристалічних ґраток. По-друге, переважна більшість фізичних структур та процесів дозволяють геометричну інтерпретацію (наприклад, у вигляді репрезентації графіками функцій, фазовими траєкторіями, та інше). У переважній більшості випадків в фізиці для побудови таких об'єктів використовуються традиційні геометрії: Евклідова, Ріманова, Лобачевського та інші. Логічним продовженням цього процесу стало введення в фізику нового, спочатку суто геометричного поняття – фракталу. Підвищення зацікавленості до подібних об'єктів та усвідомлення їх важливого місця у фізиці пов'язане з ім'ям Б. Мандельброта [1], який ввів термін "фрактал" і дав загальне визначення цього поняття. Дуже перспективним може виявитися застосування фрактального підходу до описання процесів розсіяння електромагнітного випромінювання реальними

L.G. Grechko, professor, O. Yu. Semchuk, Ph.D, O. Yu. Grischuk, graduate student, D.L. Vodop'yanov, graduate student

Electromagnetic radiations scattering by rough fractal surfaces

A two-dimensional Wierstrass function is applied to computer simulation of real rough fractal surfaces. On the base of the scalar Kirchhoff theory the electromagnetic wave scattering indicatrix is obtained for different types of rough surfaces and falling angles. It is shown, that indicatrix of electromagnetic waves scattering by a rough surface with a fractal relief and has complex structure and contains bursts of intensity in directions, which lay enough far from a direction of mirror reflection.

Key Words: fractal, scattering, electromagnetic radiations, rough surface.

поверхнями. Всі реальні поверхні є в тій чи іншій мірі шорсткими. Тому дослідження розсіяння електромагнітних хвиль шорсткими поверхнями є важливою та цікавою експериментальною і теоретичною проблемою. Вивчення закономірностей такого розсіяння важливе, насамперед, для неруйнівного контролю реальних поверхонь [2].

В даній роботі на основі чисельних розрахунків середнього коефіцієнту розсіяння нами було побудовано графіки залежності середнього коефіцієнту розсіяння (індикатриси розсіяння) для різних типів поверхонь та кутів падіння. При розрахунках ми не враховували реальну залежність коефіцієнту відбиття від довжини падаючої хвилі та кута падіння та використовували простий скалярний варіант теорії розсіювання Кірхгофа.

Функція Вейерштраса-Мандельброта

При теоретичних дослідженнях розсіяння електромагнітних хвиль (світла) самоподібними неоднорідними об'єктами (шорсткими (фрактальними) поверхнями) виникає необхідність використовувати ті чи інші математичні

Представлено:
д.ф.-м.н., проф. Адаменко І.І.

моделі розсіюючих поверхонь. В якості основного розсіюючого об'єкту виберемо шорстку поверхню. Шорстка поверхня, як відомо, описується функцією $z(x, y)$ відхилень z точок M поверхні від опорної площини (x, y) (Рис. 1) і вимагає безпосереднього задання рельєфу поверхні.

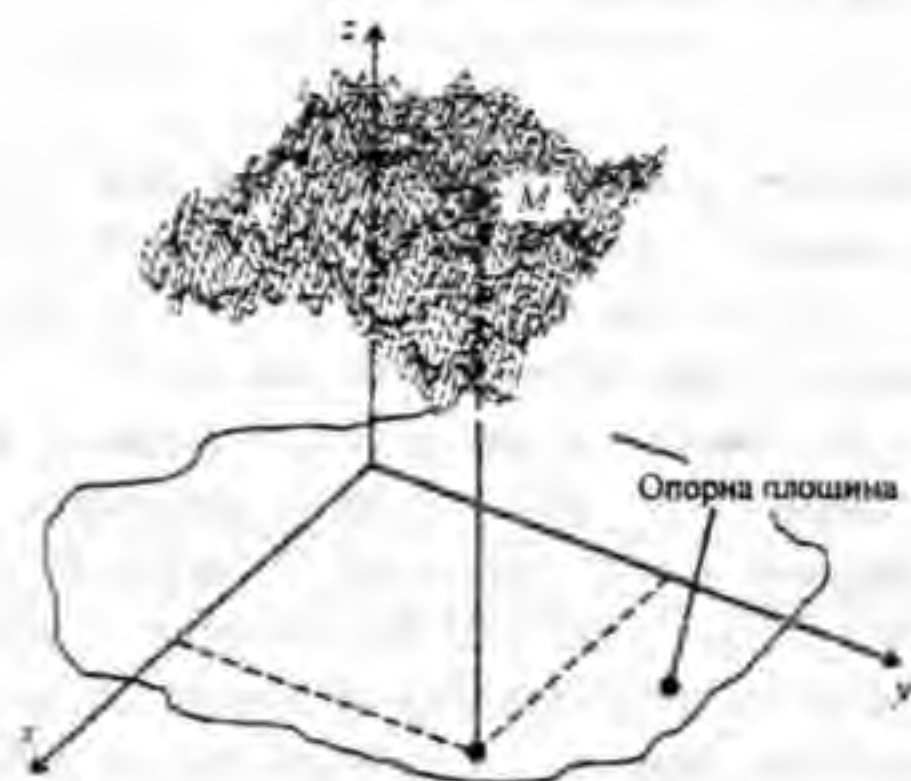


Рис. 1. Схема опису шорсткої поверхні.

В сучасних моделях шорсткої поверхні використовують різні модифікації функції Вейерштрасса-Мандельброта. В цій роботі для моделювання шорсткої поверхні використовується двовимірний обмежена смугою функція Вейерштрасса $z(x, y)$ [3,4]:

$$z(x, y) = c_w \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M q^{(D-3)n} \sin \left\{ Kq^n \begin{bmatrix} x \cos \frac{2\pi m}{M} \\ y \sin \frac{2\pi m}{M} \end{bmatrix} + \varphi_{nm} \right\}, \quad (1)$$

де c_w - нормувальна константа; $q > 1$ - основна просторова частота поверхні; K - фундаментальне хвильове число поверхні; D - фрактальна розмірність розсіюючої поверхні ($2 < D < 3$); N, M - кількість обертонів; φ_{nm} - фазові доданки.

Фази φ_{nm} можна вибирати детерміновано або випадково, отримуючи відповідно детерміновані або випадкові функції $z(x, y)$. Ми надалі вважатимемо φ_{nm} випадковими величинами, що рівномірно розподілені на відрізку $[-\pi; \pi]$. При кожному конкретному виборі числових значень всіх $N \times M$ фаз φ_{nm} (наприклад, за допомогою генератора випадкових чисел) отримуємо конкретну (при заздалегідь вибраних значеннях

параметрів c_w, q, K, D, N, M) реалізацію функції $z(x, y)$.

Всеоможливі реалізації функції $z(x, y)$ утворюють ансамбль поверхонь. Відхилення точок шорсткої поверхні від опорної площини пропорційні c_w , тому цей параметр пов'язаний з висотою нерівностей профілю поверхні. В подальшому виявляється зручнішим задавати шорстку поверхню, вказуючи середньоквадратичну висоту її профілю σ , що визначається таким чином:

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle h^2 \rangle},$$

де $h = z(x, y)$, $\langle \dots \rangle = \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_{nm}}{2\pi} (\dots)$ - означає усереднення за ансамблем поверхонь.

Після дещо громіздких обчислень отримаємо наступний вираз для середньоквадратичної висоти профілю шорсткої поверхні з фрактальним рельєфом:

$$\sigma = \left[\prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_{nm}}{2\pi} z^2(x, y) \right]^{\frac{1}{2}} = c_w \left[\frac{M(1 - q^{2N(D-3)})}{2(1 - q^{2(D-3)})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Отже, величина σ пропорційна величині нормувальної константи c_w і залежить від фрактальної розмірності D поверхні та величин q, N, M .

Таким чином, шорстка поверхня в нашій моделі описується функцією із шістьма параметрами: c_w (або σ), q, K, D, N, M . Вплив різних параметрів на вигляд поверхні можна дослідити вивчаючи профілі поверхонь, побудованих за результатами чисельних розрахунків функції Вейерштрасса. Аналіз профілів поверхонь побудованих за результатами чисельних розрахунків функції Вейерштрасса (Рис.2) призводить до таких висновків: хвильове число K задає довжину хвилі основної гармоніки поверхні; на яку накладаються мікомасштабні брижі від додаткових гармонік; числа N, M, D та q визначають ступінь покарбованості профілю за рахунок накладання на основну хвилю додаткових гармонік, причому N та M визначають кількість гармонік, що накладаються; D визначає амплітуду гармонік, q - і амплітуду, і частоту гармонік водночас. Зауважимо,

що зі збільшенням N, M, D та q збільшується і мілкомасштабні неоднорідності все більше просторова неоднорідність поверхні у великому нагадують брижі на плоскій поверхні. Масштабі: великомасштабні «пагорби» зникають, а

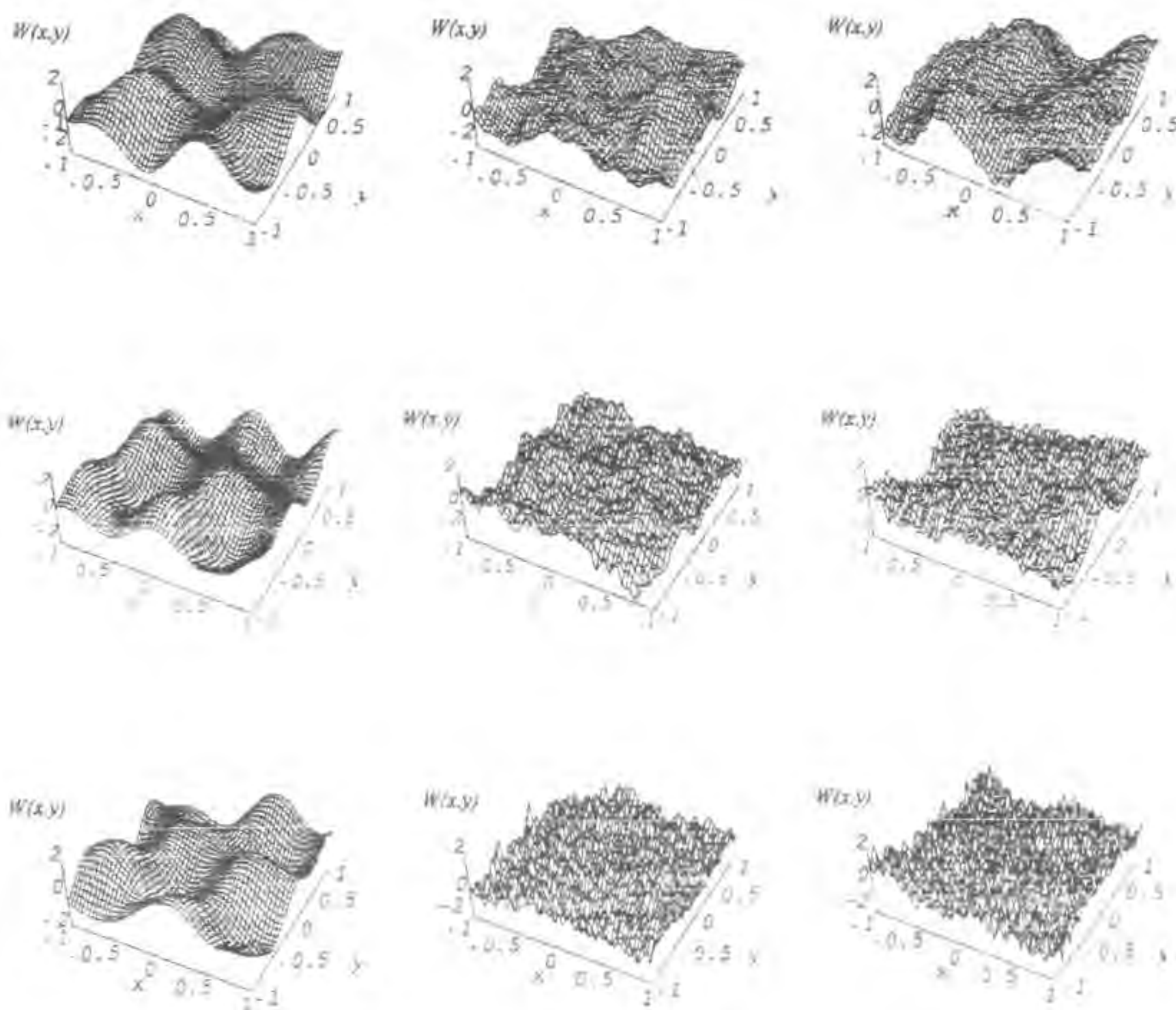


Рис 2. Приклади моделювання шорсткої поверхні функцією Вейерштрасса. $K = 2\pi$; $N = M = 5$; $\sigma = 1$. $D = 2.1$; $D = 2.5$; $D = 2.9$ (зверху донизу); $q = 1.1$; $q = 3$; $q = 7$ (зліва направо).

Розсіяння електромагнітних хвиль неоднорідною фракталоподібною поверхнею

Нехай на шорстку поверхню S під кутом Θ_1 падає електромагнітна хвиля і розсіюється в усіх напрямках. Розсіяна хвиля спостерігається за допомогою детектора D в напрямку, що характеризується полярним кутом Θ_2 та азимутальним кутом Θ_3 . Вимірюваною величиною є інтенсивність електромагнітної хвилі (світла) I_s , розсіяного в напрямку (Θ_2, Θ_3) . Нам необхідно побудувати індикатрису розсі-

яння $I_s = I_s(\theta_2, \theta_3)$ електромагнітної хвилі шорсткою фракталоподібною поверхнею, яка моделюється функцією Вейерштрасса (1). На рис. 3, наведено схему експерименту зі спостереження розсіювання електромагнітних хвиль шорсткою поверхнею.

Оскільки інтенсивність розсіяної хвилі I_s пов'язана з напруженістю $\vec{E}$ електричного поля співвідношенням

$$I_s = \vec{E} \cdot \vec{E}^*, \quad (3)$$

де $\vec{E}_s$ - електричне поле розсіяної хвилі в комплексному представленні, то проблема знаходження I_s зводиться до знаходження розсіяного поля $\vec{E}_s$.

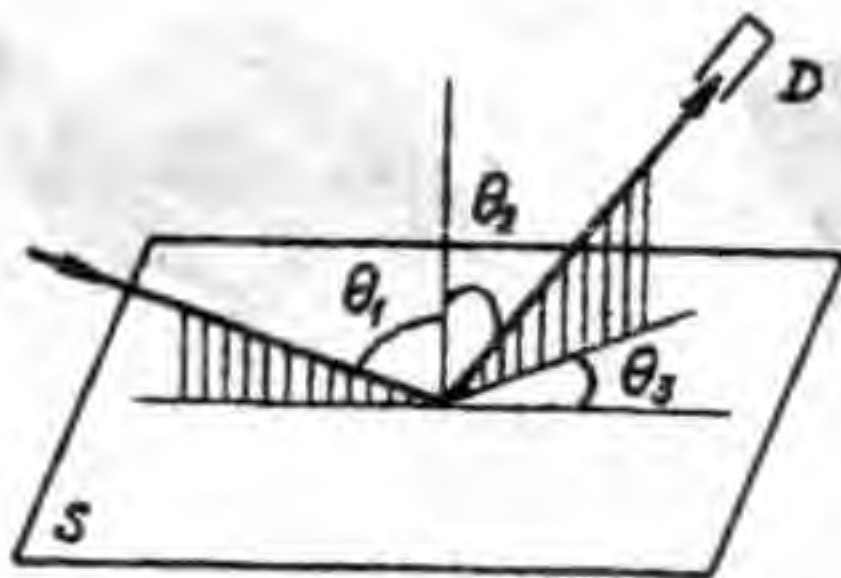


Рис. 3. Схема експерименту з розсіювання електромагнітних хвиль шорскою (фрактальною) поверхнею: S - розсіююча поверхня, D - детектор, θ_1 - кут падіння, θ_2 - полярний кут розсіювання, θ_3 - азимутальний кут розсіювання.

Розсіяне поле будемо знаходити за методом Кірхгофа [3], причому з огляду на складність задачі, скористуємося більш простим скалярним варіантом теорії, згідно якого електромагнітне поле описується скалярною величиною $E(\vec{r}, t) = |\vec{E}(\vec{r}, t)|$. При цьому ми втрачаємо можливість аналізувати поляризаційні ефекти. Структура розсіюючої поверхні та вибір вісей координат показано на рис. 4.

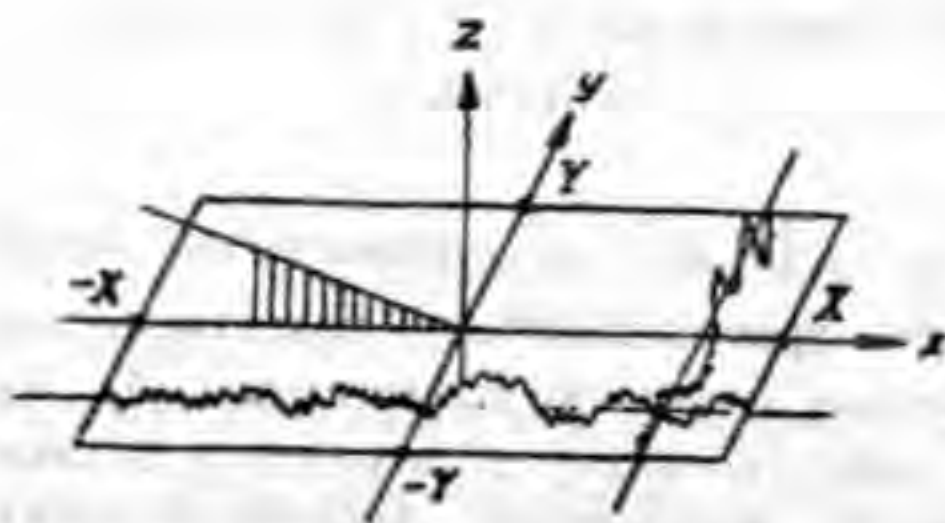


Рис. 4. Фрагмент розсіюючої поверхні та вибір осей координат.

Базова формула методу Кірхгофа дозволяє знайти розсіяне поле $E_s(\vec{r}, t)$ за таких умов: падаюча хвиля є монохроматичною плоскою; розсіююча поверхня є шорсткою всередині деякого прямокутника $(-X < x_0 < X, -Y < y_0 < Y)$ та гладкою поза його межами (Рис. 4); розмір

шорсткої ділянки набагато більший за довжину падаючої хвилі; всі точки поверхні мають скінчений градієнт; коефіцієнт відбиття однаковий для всіх точок поверхні; розсіяне поле спостерігається у хвильовій зоні, тобто достатньо далеко від розсіюючої поверхні. За цих умов розсіяне поле є також монохроматичним з просторовою залежністю [3]:

$$E_s(\vec{r}) = -ikrF(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \times \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_{S_0} \exp[ik\varphi(x_0, y_0)] dx_0 dy_0 + E_c(\vec{r}) \quad (4)$$

де k - хвильове число падаючої хвилі;

$$F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = -\frac{R}{2C}(A^2 + B^2 + C^2) \quad \text{- кутовий}$$

фактор; R - коефіцієнт відбиття;

$$\varphi(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + Ch(x_0, y_0) \quad \text{- фазова}$$

функція; $h(x_0, y_0) = z(x_0, y_0)$;

$$A = \sin \Theta_1 - \sin \Theta_2 \cos \Theta_3; \quad B = -\sin \Theta_2 \sin \Theta_3;$$

$$C = -\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2;$$

$$E_c(\vec{r}) = -\frac{R}{C} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} (AI_1 + BI_2) \quad \text{- крайовий доданок,}$$

$$I_1 = \int_{-Y}^Y [e^{ik\varphi(X, y_0)} - e^{ik\varphi(-X, y_0)}] dy_0, \quad (5)$$

$$I_2 = \int_{-X}^X [e^{ik\varphi(x_0, Y)} - e^{ik\varphi(x_0, -Y)}] dx_0.$$

Після обчислення інтегралів (4) та (5) за допомогою формули [5]

$$e^{i\varphi \sin \theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(z) e^{il\theta},$$

(де $I_l(z)$ - функція Бесселя цілого порядку l), отримуємо:

$$E_s(\vec{r}) = -\frac{2ikFXY}{\pi r} e^{ikr} \sum_{\{l\}} \left\{ \frac{\prod_{uv} I_{l_{uv}}(\xi_{uv})}{e^{\sum_{nm} l_{nm} \theta_{nm}}} \right\} \times \text{sinc}(k_x X) \text{sinc}(k_y Y) + E_c(\vec{r}), \quad (6)$$

де

$$F = F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \quad \sum_{\{l\}} \equiv \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{(N-1)l_{N-1}=-\infty}^{\infty},$$

$$\prod_{uv} \prod_{\mu=1}^{N-1} \prod_{\nu=0}^M \sum_{nm} \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^M, \quad \xi_v \equiv kc_v C q^{(1/3)\mu},$$

$$\sin cx \equiv \frac{\sin x}{x},$$

$$k_c \equiv kA + K \sum_{nm} q^n l_{nm} \cos \frac{2\pi m}{M},$$

$$k_s \equiv kB + K \sum_{nm} q^n l_{nm} \sin \frac{2\pi m}{M},$$

$$E_c(\vec{r}) = -ik\chi Y \frac{R}{C} \left(\frac{A^2 + B^2}{B^2} \right) \frac{e^{ikr}}{\pi r} \text{sinc}(kAX) \text{sinc}(kBY).$$

Отже, вираз (6) дає розв'язок задачі про знаходження поля, розсіяного шорсткою (фрактальною) поверхнею (1), в рамках методу Кірхгофа.

Тепер за формулою (6) можна обчислити інтенсивність розсіяної хвилі, якщо задати параметри розсіюючої поверхні c_v (або σ), $D, q, K, N, M, X, Y, \varphi_{nm}$, параметр k (або $\lambda = 2\pi/k$) падаючої хвилі та параметри $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ геометрії експерименту. Ця інтенсивність характеризуватиме розсіяння на конкретній реалізації поверхні $z(x, y)$ (з конкретним набором випадкових фаз φ_{nm}). Для порівняння розрахунків з експериментальними даними необхідно оперувати середньою за ансамблем поверхонь інтенсивністю $\langle I_s \rangle = \langle \vec{E}_s \vec{E}_s^* \rangle$. Така

інтенсивність виявляється пропорційною до інтенсивності хвилі $I_0 = \left(\frac{2k\chi Y \cos \theta_1}{\pi r} \right)^2$.

відбитої від відповідної гладкої опорної поверхні, тому для теоретичного аналізу результатів розрахунків зручніше користуватися середнім коефіцієнтом розсіяння $\langle \rho_s \rangle \equiv \langle I_s \rangle / I_0$. Після обчислення $\langle I_s \rangle$ згідно (2) та (3), виходячи з (6), отримаємо точний вираз

$$\langle \rho_s \rangle = \left[\frac{F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)}{\cos \Theta_1} \right]^2 \times \sum_{\{l_{nm}\}} \prod_{\{l_{nm}\}} I_{l_{nm}}^2(\xi_v) \text{sinc}^2(k_r X) \times \text{sinc}^2(k_r Y) + \left[\frac{R(A^2 + B^2)}{2C \cos \Theta_1} \right]^2 \times \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY). \quad (7)$$

Оскільки вираз (7) містить нескінченну суму, користуватися ним для чисельних розрахунків індикатрисы розсіяння незручно. Суттєве спрощення досягається у випадку $\xi_v < 1$. Використовуючи при цьому розклад функцій Бесселя в ряд [5]

$$J_\nu(z) = \left(\frac{3}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

та відкидаючи члени порядків вищих, ніж ξ_v^2 , отримаємо з (7) наближений вираз

$$\langle \rho_s \rangle \approx \left[\frac{F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)}{\cos \Theta_1} \right]^2 \times \left\{ \left[1 - \frac{1}{(k\sigma C)^2} \right] \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY) + q^{2(D-3)/6} \text{sinc}^2 \left[\left(kA + Kq^n \cos \frac{2\pi m}{M} \right) X \right] + \frac{1}{2} c_f^2 \sum_{nm} \text{sinc}^2 \left[\left(kB + Kq^n \sin \frac{2\pi m}{M} \right) Y \right] \right\} + \left[\frac{R}{2C \cos \Theta_1} \left(\frac{A^2 + B^2}{B^2} \right) \right]^2 \text{sinc}^2(kAX) \times \text{sinc}^2(kBY). \quad (8)$$

$$\text{де } c_f \equiv kc_v C = k\sigma C \left[\frac{2}{M} \frac{1 - q^{2(D-3)/6}}{1 - q^{2N(D-3)/6}} \right]^2.$$

Зауважимо, що отримані нами вирази (7) та (8) відрізняються від відповідних виразів у [2] наявністю крайових членів та коефіцієнтами перед $(k\sigma C)^2$ та c_f^2 .

Результати чисельних розрахунків

На основі виразів (1) та (8) за допомогою оригінальної програми, розробленої в середовищі Mathematica 5.1, нами проведено моделювання шорсткої поверхні функцією Вейерштрасса та чисельні розрахунки середнього коефіцієнту розсіяння та побудовано графіки залежності $\langle \rho_s \rangle$ (нормованої індикатрисы розсіяння) від полярного (θ_1) та азимутального

(θ_3) кутів розсіювання для різних типів фрактальних поверхонь та кутів падіння θ_1 . Середньоквадратична висота σ , фундаментальне хвильове число поверхні K та розміри X , Y фрагменту шорсткої поверхні задавались в одиницях k , оскільки хвильове число падаючої хвилі k входить у вигляді безрозмірних комбінацій $k\sigma$, kX та kY . В розрахунках використовувалось значення френелівського коефіцієнту відбиття поверхні $R=1$.

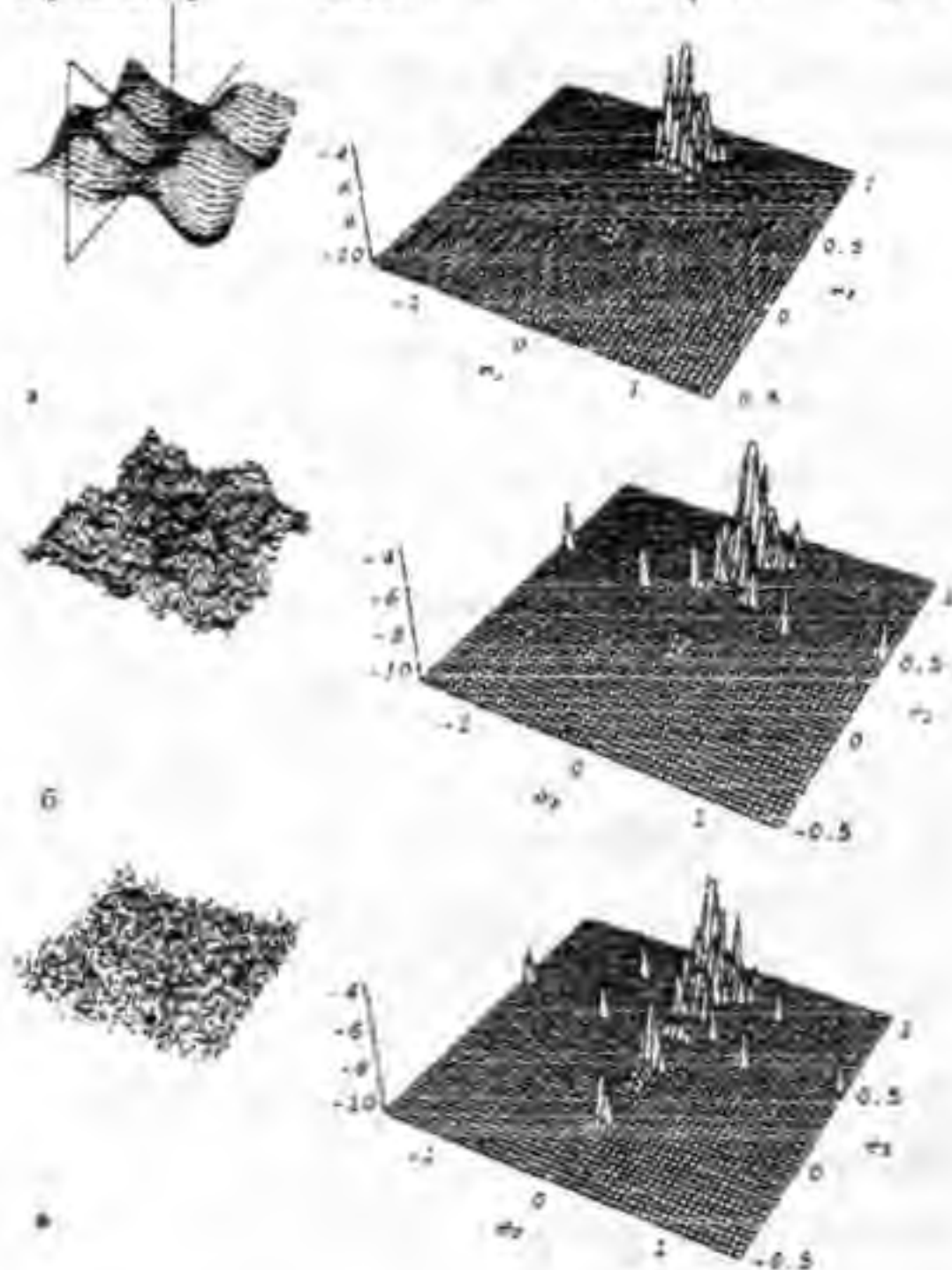


Рис. 5. Залежності коефіцієнта розсіювання $\ln\langle\rho_s\rangle$ від θ_2 та θ_3 для різних фрактальних поверхонь при $D=2,5$; $q=1,8$; $K=1/(2\lambda)$; $\sigma=0,05\lambda$; $X=Y=30\lambda$; $\theta_1=45^\circ$. а – $N=2$, $M=3$; б – $N=M=5$; в – $N=M=10$. Напрямок падіння хвилі на поверхню показано стрілкою вгорі ліворуч

Приклади типових індикатрис розсіювання, отриманих нами при чисельних розрахунках, наведено на рис. 5.

Висновки

Аналіз графіків залежності коефіцієнта розсіювання $\ln\langle\rho_s\rangle$ від θ_2 та θ_3 для різних типів фрактальних поверхонь, наведених на рис. 5, призводить до наступних висновків:

- розсіювання є симетричним відносно площини падіння;
- найбільша інтенсивність розсіяної хвилі спостерігається в напрямку віддзеркаленої хвилі;
- існують інші напрямки, в яких спостерігаються сплески інтенсивності;
- зі збільшенням ступеня викарбуваності поверхні (або з ростом її великомасштабної однорідності) картина розсіювання ускладнюється.

Зазначені особливості розсіювання є наслідками поєднання хаотичності та самоподібності рельєфу фракталоподібної поверхні.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного проекту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (договір №28) та наукового проекту «Моделювання процесів взаємодії електромагнітного випромінювання з регулярними, стохастичними та фрактальними поверхневими структурами» програми НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали, нанотехнології» (договір № 37/07-Н).

Список використаних джерел

1. Мандельброт, Б. Самоафінные фрактальные множества // Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. – М.: Мир, 1988. – 500 с.
2. Wang S.H., Tay C.J., and Shang H.M.. Surface roughness measurement in the submicrometer range using laser scattering // Opt. Eng.- 2000. – v.39, No.6. – p.1597-1601.
3. Berry M.V. and Lewis Z.V. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function // Proc. R. Soc. London A. – 1980. – Vol. 370. – P. 459-484.
4. Lin N., Lee H.P., Lim S.P., and Lee K.S. Wave scattering from fractal surfaces // J. Mod. Opt. – 1995. – Vol. 42, N 1. – P. 225-241.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Надійшла до редколегії 10.11.2008р

УДК 621.371.029: 621.396.96

Карпенко В.І. д.т.н., проф.
Вашенко В.М. д.ф.-м.н., с.н.с. *
Разсказовський В.Б. д.ф.-м.н., проф.
Кучер Д.Б. д.т.н., проф.

Використання крупноапертурних антенних систем у вигляді зон Френеля для отримання інтегральних електродинамічних характеристик ділянок поверхні води та для дослідження параметрів льодовиків

У роботі розглядається можливість використання крупноапертурних антенних систем у вигляді зон Френеля для отримання інтегральних електродинамічних характеристик ділянок водної поверхні та дослідження параметрів льодовиків. Показано, що використання таких антен із значними лінійними розмірами дає можливість реалізовувати радіотелескоп в міліметровому діапазоні довжин хвиль, що дозволяє приймати сигнали із космосу на резонансних частотах води. Наведено структурну схему дослідження крупних льодовикових мас на базі антен, нанесених на поверхню льодовика у вигляді зон Френеля для обраних ультразвукових частот.

Ключові слова: зона Френеля, вода, льодовик, Антарктика, електродинаміка, антена.

*E-mail: daniilko@mail.ru

Постановка задачі

Для аналізу перспектив розвитку флори і фауни прибережних морських районів і особливо Антарктичних районів важливою є інформація про тенденції зміни інтегральних електродинамічних параметрів поверхні води і параметрів крупних льодовикових мас, а саме інтегральні значення діелектричної проникності води, льоду, коефіцієнта екстинкції, коефіцієнта відбивання електромагнітних хвиль від межі повітря-вода, усереднених по великих площах, інтегральні характеристики льоду. По зміні цих параметрів водній поверхні можна надалі передбачати або ж виявляти на ранній стадії безпосередню дію на воду процесів, що відбуваються в земній корі. Все це приводить до необхідності розглянути можливість визначення інтегральної діелектричної проникності в першу чергу води на великих площах.

V.I.Karpenko, Dr.
V.N.Vaschenko, Dr. *
V.B.Razskazovskiy, Dr.
D.B.Kucher, Dr.

Application of large aperture antennas systems in Frenel zones for retrieving integral electrodynamic characteristics of water surface and investigation of glaciers

The possibility of use of large aperture antennas systems as Frenel zones for both receiving integral electrodynamic characteristics of water surface areas and investigating parameters of glaciers has been considered in the study. It was shown that use of such zones with considerable linear sizes will enable to realize a radio-telescope in the millimeter, decimeter, meter wave bands range enabling to accept signals from space on resonance frequencies of water. The schematic diagram of investigating large glacial masses on basis of the antennas coated on the surface of a glacier in Frenel zones form for the chosen ultrasonic frequencies is presented.

Key Words: Frenel zone, water, glacier, Antarctic, electrodynamics, antenna.

Аналіз літератури

Для оцінки відбивних характеристик води в ідеальних умовах [1, 2] в міліметровому діапазоні довжин хвиль досить визначити коефіцієнт відбивання цих хвиль від межі повітря-вода, яке є комплексною величиною і визначається виразами

$$\bar{r} = \frac{n_z - \bar{n}}{n_z + \bar{n}} = \frac{1 - n + j\alpha}{1 + n - j\alpha} = r \exp^{j\varphi} \quad (1)$$

$$r = \frac{\sqrt{(1 - n^2) + \alpha^2}}{\sqrt{(1 + n^2) + \alpha^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\alpha}{1 - (n^2 + \alpha^2)}$$

де n_z - показник заломлення повітря, рівний 1; $\bar{n}$ - показник заломлення води.

Для вертикальної і горизонтальної поляризацій електромагнітних хвиль коефіцієнти відбивання r_v і r_h і поглинання w_v і w_h мають наступний вигляд

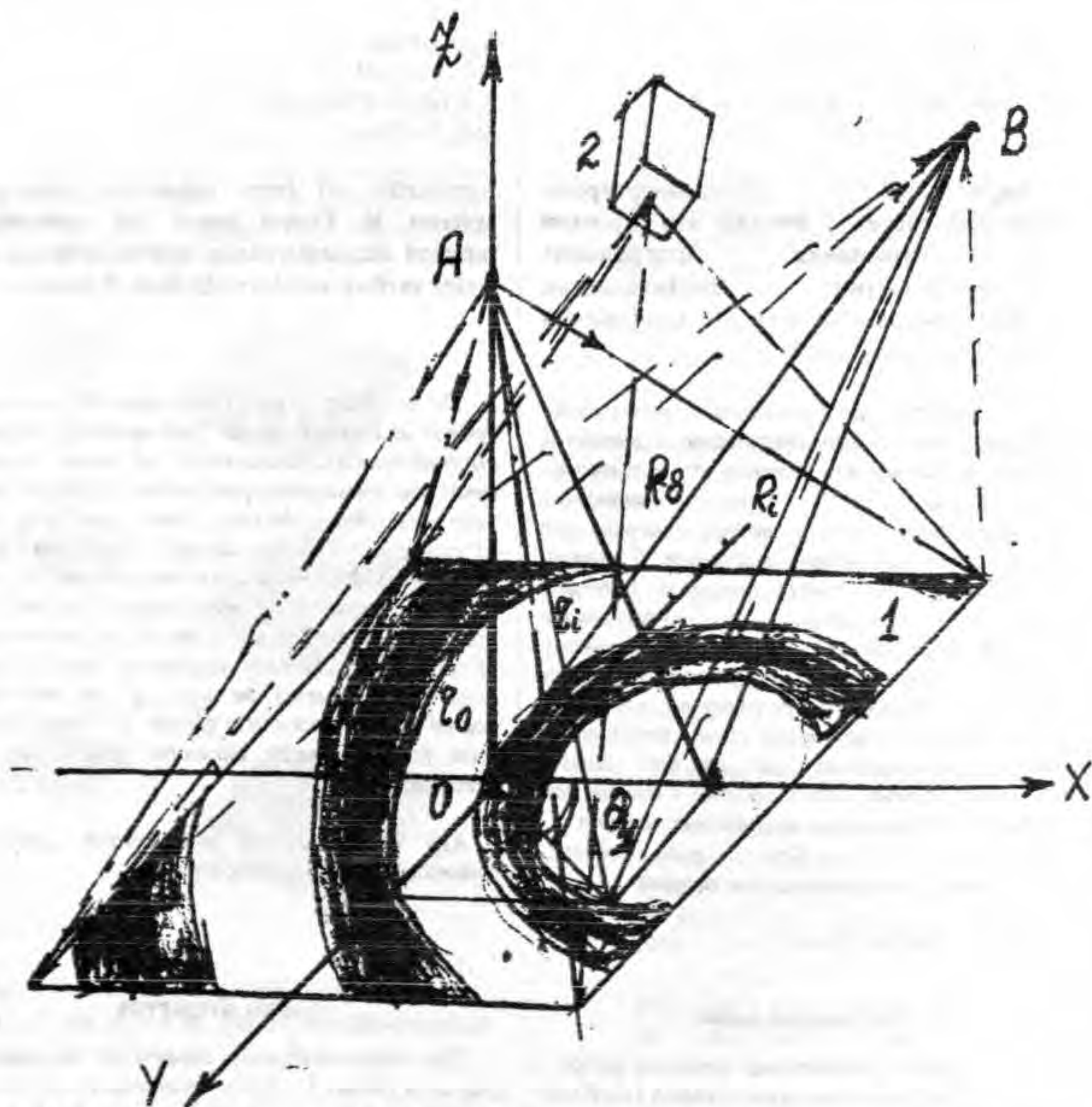


Рис. 1. Схема оптично-керованої крупноапертурної антени у вигляді зон Френеля

$$r_s = \frac{\varepsilon \cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}; \quad w_s = \frac{2 \cos \vartheta}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}; \quad (2)$$

$$r_i = \frac{\cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}; \quad w_i = \frac{2 \cos \vartheta}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}; \quad (3)$$

де ε – діелектрична проникність води; ϑ – кут падіння.

Відомі також методи прецизійного вимірювання діелектричних постійних рідких діелектриків в міліметровому діапазоні довжин хвиль, і технічного використання цих

властивостей [3, 4]. Проте даний метод дає добрий результат лише в лабораторних умовах. Відомо і ряд інших робіт по вимірюванню коефіцієнтів відбивання і діелектричної проникності води, наприклад [5, 6].

В усіх цих роботах визначення діелектричної проникності води здійснюється згідно отриманого коефіцієнта відбивання вибраного діапазону довжин хвиль. До того ж дані методи дозволяють визначати лише точкові значення коефіцієнта відбивання.

Як відомо, морська поверхня [2, 5] є нерівною поверхнею і у відбитому сигналі

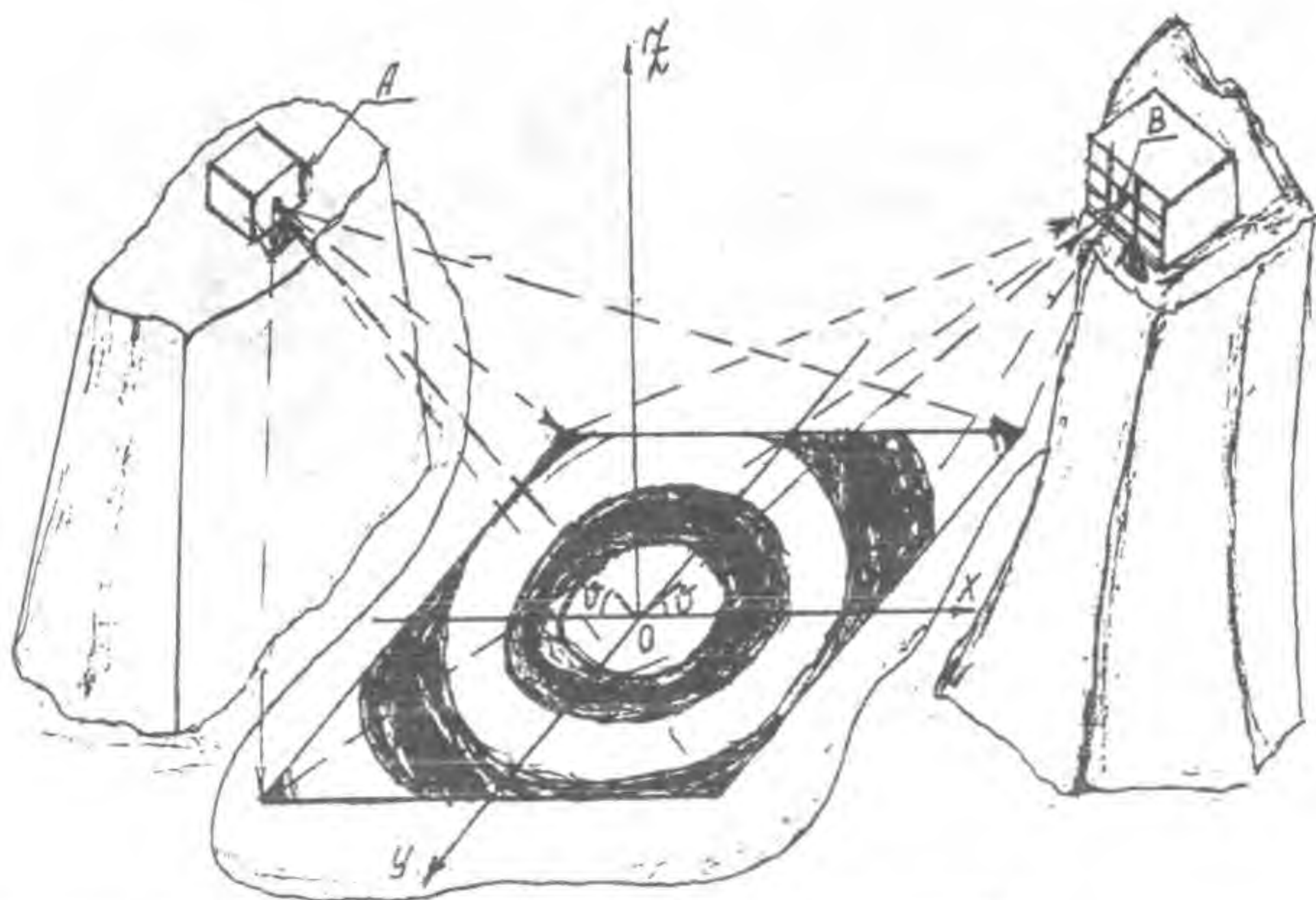


Рис.2. Крупно-апертурний радіотелескоп міліметрового діапазону довжин хвиль

присутні дзеркальна і дифузна складові відбитого поля. Причому середнє поле по всіх своїх властивостях аналогічне дзеркально відбитому від плоскої межі розділу. При віддзеркаленні від поверхонь, що флюктуують, ця компонента має незмінні в часі амплітуду і фазовий зсув по відношенню до падаючого поля, внаслідок чого ряд авторів, зокрема [2, 5] називають її когерентною компонентою. Причому всі властивості дзеркальної компоненти містяться лише у коефіцієнті Френеля і не залежать від статистики нерівностей водної поверхні.

Для визначення інтегральної характеристики діелектричної проникності, усередненої за великою площею необхідно забезпечити фокусування відбитого СВЧ-поля з цієї поверхні на один приймач або декілька поряд розташованих приймачів. Цю функцію, як показано в роботах [7, 8, 9, 10] успішно виконують сформовані на оптично-чутливій поверхні зони Френеля. У цих роботах розглянуті принципи побудови крупноапертурних адаптивних оптично-керованих антен, що забезпечують граничну дифракційну роздільну

здатність при лоціюванні об'єктів в умовах фазових спотворень прийнятого поля.

Принцип роботи цих антен полягає в тому, що в кожній точці оптично-керованої поверхні крупноапертурної антени під дією оптичного випромінювання змінюється комплексний коефіцієнт відбивання СВЧ-поля, як в режимі випромінювання, так в режимі прийому таким чином, що оптично-керована поверхня є адаптивною радіолінзою. На Рис. 1 пояснюється робота такої системи при забезпеченні сканування за кутовими координатами, де 1 – поверхня оптично-керованої антени; 2 – оптичний освітлювач.

Джерело випромінювання СВЧ сигналу знаходиться в точці А. Для фокусування випромінюваного поля в задану точку Б необхідно створити на покритті антени освітленість у вигляді світлих і темних кілець, що формують відповідні зони Френеля. Межі освітлених і темних кілець для випадку, коли точка В належить площині XOZ , описуються функцією

$$x^2 \left(\frac{\cos^2 \Theta_j}{2R_0} + \frac{1}{2r_0} \right) + y^2 \left(\frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2r_0} \right) - x \sin \Theta_j = \frac{n\lambda}{2},$$

де n – ціле число; R_0 і r_0 – відстань від початку координат до точок фокусування і розташування випромінювача; λ – довжина хвилі випромінюваного поля.

У загальному випадку, незалежно від форми поверхні антени, ці межі визначаються виразами

$$R_i - r_i = \frac{n\lambda}{2},$$

де $R_i - r_i$ – різниця ходу променів до i -ї точки на площині оптично-керованої антени від точки фокусування B і точки A розташування випромінювача.

Таким чином, для визначення інтегрального коефіцієнта відбивання ділянки водної поверхні, на ній потрібно сформувати зони Френеля, які відповідають взаємному розташуванню передавача СВЧ сигналу і приймача. Припустимо, що на досліджувану водну поверхню накладена плівка, що представляє відповідні зони Френеля, для умов розміщення передавача в точці A і фокусування відбитого випромінювання в точку B , де розташований приймач (матриця приймальних елементів).

Джерело випромінювання міліметрового діапазону довжин хвиль зколімованим випромінюванням опромінює всю поверхню плівки, сигнал, що відбився від водної поверхні, у відповідних місцях зон Френеля фокусується в точці B – де розташований приймач випромінювання.

Коефіцієнт відбивання, наприклад, для вертикальної складової поляризації випромінювання описується виразом

$$r_0 = \frac{E_{\text{дзеркальна}} + E_{\text{дифузійна}}}{E_{\text{падаюче}}}, \quad (4)$$

де $E_{\text{дзеркальна}}$ – дзеркальна складова відбитого поля; $E_{\text{дифузійна}}$ – дифузна складова відбитого поля; $E_{\text{падаюче}}$ – падаюче поле на поверхню покриту плівкою з урахуванням кілець, що відображають.

Методика визначення дзеркальної і дифузної складових сфокусованого відбитого сигналу детально описана в [2] і полягає в усередненні за часом поля, що приймається.

Таким чином, при відомих параметрах відбитого і падаючого поля, а також значенні

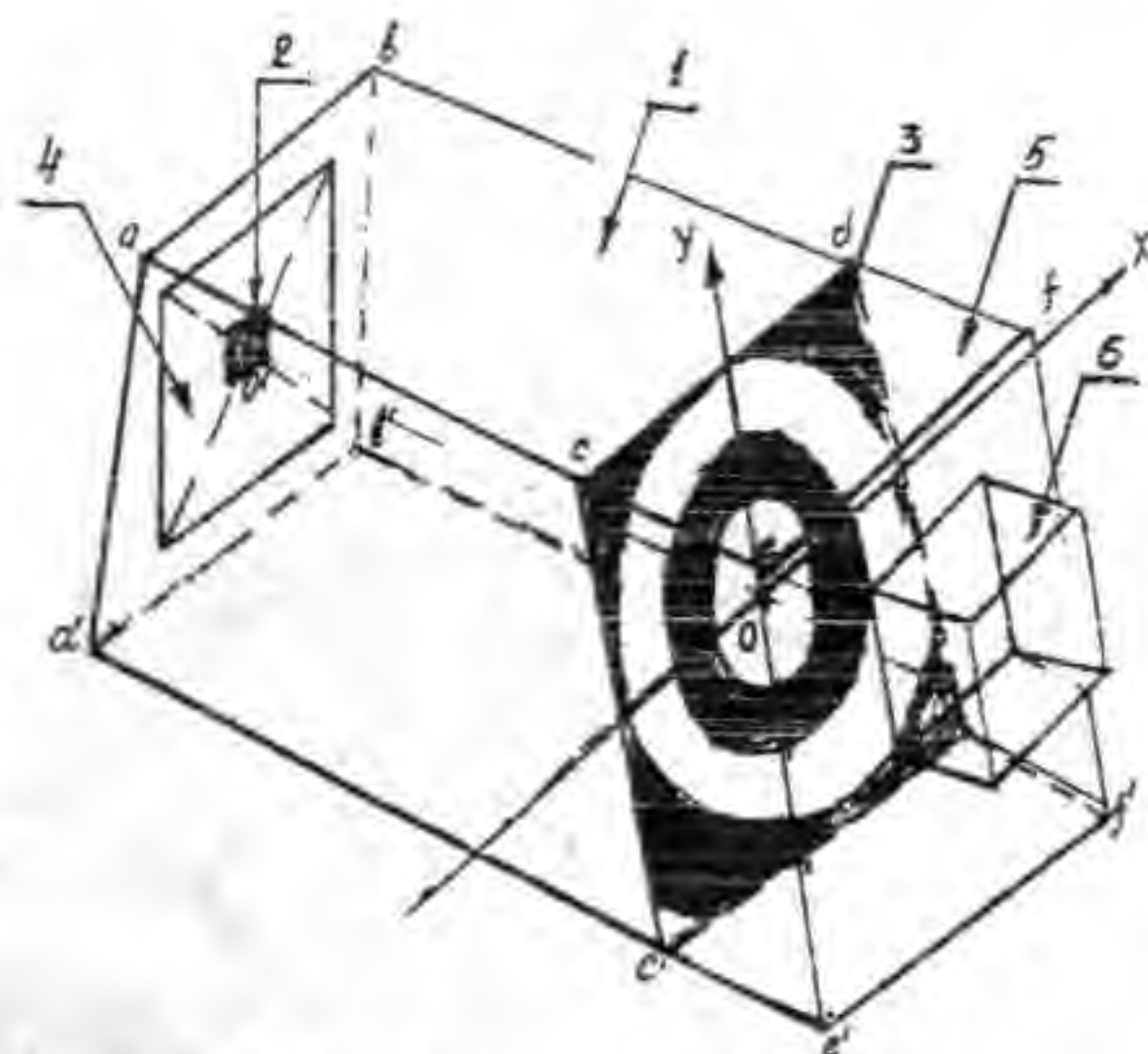


Рис.3. Схема дослідження поверхні льодовика.

кута віддзеркалення θ і використовуючи вирази (4) і (2) можна визначити усереднене по поверхні значення діелектричної проникності водної поверхні ϵ . Дана схема дозволяє відстежувати динаміку змін діелектричної проникності середовища, і має перспективу подальшого розвитку за умови використання, наприклад, оптично-керованої плівки, що дозволяє реалізувати адаптивну систему, слабо залежну від хвилювання морської поверхні.

Важливо відзначити, що дана схема отримання інтегральних електродинамічних параметрів води може бути використана як крупно-апертурний радіотелескоп міліметрового діапазону довжин хвиль. Для цього плівка великих розмірів з відповідними зонами Френеля встановлюється на нерухомій або водній поверхні, а зони Френеля відповідають приходу хвилі, що приймається, з вертикального напрямку, вздовж осі OZ (Рис. 2), які сфокусуються в точку B , де розташована матриця приймальних елементів. Такий радіотелескоп володіє істотною перевагою перед існуючими, оскільки, завдячуючи великій поверхні, антена володіє хорошим підсиленням поля, що приймається, легко реалізовується, що дає можливість проведення досліджень сигналів з космосу на власних резонансних частотах води, яка є основою життя у Всесвіті.

Використання зон Френеля також дозволяє істотно розширити можливості по дослідженню за допомогою ультразвукових хвиль льодовикових мас. Одна з таких схем приведена на Рис. 3, де $aa'bb'cc'$ – льодовик, що досліджується – 1; 2 – джерело ультразвукових хвиль; 3 – зони Френеля, нанесені на поверхню

льодовика $cc'dd'$, протилежну джерелу ультразвукового випромінювання 2; 4 – відбивний екран; 5 – узгоджуючий елемент $cc'ee'ff'dd'$; 6 – матриця ультразвукових приймачів.

Від джерела випромінювання 2 ультразвукових хвиль проходять льодовик 1 і, за допомогою зон Френеля 3 і узгоджуючого елементу, 5 фокусуються на приймальних елементах 6. Така система дозволяє визначити імпульсний відгук льодовика, що дозволить судити про однорідність льодовикових мас. Використовуючи замість матриці приймальних елементів 6, матрицю приймально-перевипромінюючих елементів і змінюючи вид зон Френеля 3 можливо по аналогії з [8] побудувати систему, що забезпечує фокусування поля, що приймається, уздовж осі oo' . Рис. 3.

Висновки

У роботі показана принципова можливість використання крупно-апертурних антенних систем у вигляді зон Френеля для отримання інтегральних електродинамічних характеристик ділянок водної поверхні і дослідження параметрів льодовиків. Показано, що використання таких антен із значними лінійними розмірами дасть можливість реалізувати радіотелескоп в міліметровому діапазоні довжин хвиль, що дозволяє приймати сигнали з космосу на резонансних частотах води. Приведена структурна схема дослідження крупних льодовикових мас на основі антен, нанесених на поверхню льодовика у вигляді зон Френеля для вибраних ультразвукових частот.

Технічна реалізація вказаних методів не викликає великих економічних витрат, а практично вся елементна база існує на підприємствах радіотехнічної промисловості України. Дуже цікавим виявився б і сумісний міжнародний проект, який можливо провести біля узбережжя Антарктиди.

Список використаних джерел

1. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 424.
2. Кулемин Г.П., Разсказовский В.Б. Рассеяние миллиметровых радиоволн поверхностью земли под малыми углами. – К. «Наукова думка», 1987. – 430.
3. Голуб Ю.В., Левин Г.Я., Терехин С.Н. Измерение диэлектрических постоянных жидких диэлектриков в миллиметровом и

субмиллиметровом диапазонах. Сборник научных трудов. – Харьков, Институт радиофизики и электроники НАН Украины. – 1995. – с. 194-201.

4. Карпенко В.И., Голуб Ю.В., Франков А.В. Применение жидкостей с высокой диэлектрической проницаемостью для построения антенн в миллиметровом диапазоне длин волн. Изв. Вузov, сер. Радиоэлектроника, 1996. – т. 39, № 9. – с. 75-80.
5. Зинченко Н.С. Измерение коэффициентов отражения диэлектрической проницаемости воды в миллиметровом диапазоне. // Ученые записки. Труды радиотехнического факультета ХГУ. – 1959. т. 3, с. 81-87.
6. Кулемин Г.П., Харченко В.Н. О распределении ЭПР земной поверхности при малых углах скольжения. // Распределение и дифракция радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. – К. «Наукова думка», 1984. – с. 25-33.
7. Карпенко В.И., Ващенко В.Н., Карпенко О.В. Принципы построения крупно апертурных радиотехнических систем определения собственных резонансных частот отдельных ледников или участков водной поверхности. // Збірник наукових праць ХВУ. – Х. ХВУ – 2004. – Вып. 7(35) с. 61-64.
8. Карпенко В.И., Фещенко А.Б., Мазанов В.Г. Способы фокусирования СВЧ-излучений и принципы построения голографических устройств оптической обработки радиосигналов в оптоуправляемых системах. // Радиотехника (Москва). – 2001. – Вып. 6. с. 38-42.
9. Карпенко В.И., Фещенко А.Б., Голуб Ю.В., Карпенко О.В. Синтез оптимального алгоритма формирования фазосопреженного поля, реализуемого в раскрытых оптоуправляемых антеннах. // Наука и оборона. – К. 1994. – Вып. 3. с. 105-110.
10. Карпенко О.В. Оптические проекционные устройства управления в оптоуправляемых антеннах. // Збірник наукових праць ХВУ. – Х. ХВУ. – 1997. – Вып. 14. с. 85-88.

Надійшла до редколегії 24.09.2008

УДК 548:539.32

Онанко А.П., зав. лаб., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Вказівна поверхня пружно-непружного тіла сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$

Досліджувалась температурна залежність внутрішнього тертя і модуля пружності (вказівної поверхні пружно-непружного тіла) сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$. Після електронного опромінення спостерігалось різке експоненціальне зростання фону внутрішнього тертя Q^{-1}_ϕ при температурах $T > 610$ К.

Ключові слова: внутрішнє тертя, модуль пружності, дефекти.

E-mail: onanko@mail.kiev.ua

Onanko A.P., PhD, Sen. Sci. Res.

Indicator surface of elasticity-inelasticity state of $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ alloy

Temperature dependence of internal friction and elastic module (indicator surface of elasticity-inelasticity state) of $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ alloy were explored. The exponent increasing of internal friction phone Q^{-1}_ϕ after electron irradiation at temperature $T > 610$ K was observed

Key words: internal friction, elastic module, defects.

У цій роботі досліджувався вплив радіаційної дії на температурні залежності внутрішнього тертя (ВТ) і модуля пружності E сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$, що упорядковується, виявлені температурні інтервали утворення і перебудови ближнього порядку. Проведено вивчення впливу електронного опромінення і термомеханічної обробки на процеси ближнього упорядкування твердих розчинів $Ag-Zn$.

Вимірювання фону ВТ Q^{-1}_ϕ після різних термообробок дає інформацію про зміни полів термопружних напруг σ в сплаві $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$. Ефекти дислокаційного поглинання пружної енергії проявляються в різних формах і зв'язані з багатьма параметрами, виявилось можливим пояснити результати ВТ за допомогою моделі, в якій дислокація розглядається як струна, що коливається – струнна модель дислокації з двома типами точок закріплення: точковими дефектами та вузлами дислокаційної сітки. При малих амплітудах ультразвукової деформації ϵ спостерігається лише коливання дислокаційних сегментів між стопорами, як наслідок, мають місце лише ті витрати енергії, що зумовлені в'язкими силами – дислокаційні резонансні витрати. При більших амплітудах деформації ϵ дислокації відриваються від точкових дефектів, і їх рух обмежується лише вузлами дислокаційної сітки. У цьому випадку мають місце дислокаційні витрати відриву – амплітудно-

залежне ВТ. Вивчення дислокаційного поглинання ультразвуку являє собою метод вивчення дислокацій і точкових дефектів реальних сплавів. Ця робота є продовженням [1].

Експеримент

Для виміру температурних залежностей ВТ і модуля пружності E сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ після механічного різання і шліфування використовувалися електростатичний метод згінних резонансних коливань Ш-подібного зразка на частоті $f \approx 4$ кГц і чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті $f \approx 118$ кГц при знакозмінній деформації $\epsilon \approx 10^{-6}$ у вакуумі $P \approx 10^{-3}$ Па [1,2,3]. Опромінення здійснювалось на лінійному електронному прискорювачі ИЛУ-6 електронами з енергією $W \approx 1,5$ МеВ флюенсом $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17}$ см⁻². Погрішність виміру відносної зміни модуля пружності $\Delta E/E$ дорівнювала $\sim 0,1\%$, а виміру ВТ $\sim 2\%$. Для визначення температурного положення максимумів ВТ по релаксації модуля пружності $\Delta E/E$ одночасно вимірювалась температурна залежність E .

Результати і їх обговорення

На рис.1 наведено температурну залежність ВТ сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$.

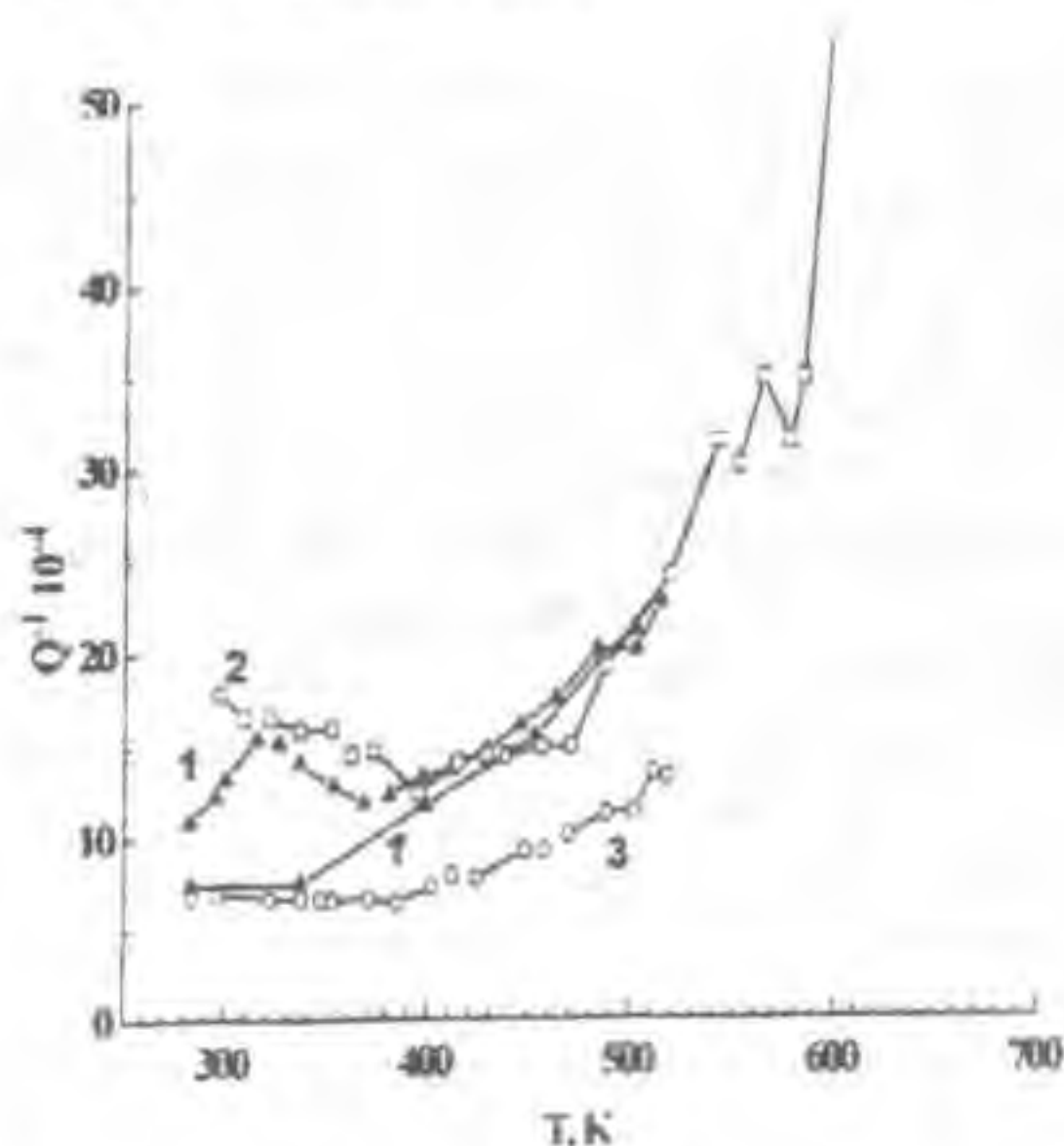


Рис. 1. Температурна залежність внутрішнього тертя Q^{-1} сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$:

1- нагрів сплаву у початковому стані; 1' - охолодження; 2 - після електронного опромінення флюенсом $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$; 3 - півторний нагрів опроміненого зразка.

У початковому стані спостерігалось монотонне зростання ВТ. Відпал структурних дефектів викривляє вигляд температурного спектру ВТ. При відпалі має місце ухід домішок, вакансій.

Виявлено нестійкий малий максимум ВТ ($Q^{-1}_{\text{м}} - Q^{-1}_{\text{ф}} \approx 4,5 \cdot 10^{-4}$ шириною $\Delta T_{\text{м}} \approx 60 \text{ K}$ в сплаві $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ при $T_{\text{м}} \approx 310 \text{ K}$. Для максимуму ВТ умова його існування записується у вигляді [2]:

$$\omega \tau_0 \exp(H/k_B T_{\text{м}}) = 1. \quad (1)$$

Енергію активації H максимуму ВТ оцінювалася за формулою Верта-Маркса [1].

Для максимуму при $T_{\text{м}} \approx 310 \text{ K}$ було отримано значення енергії активації $H = 0,58 \pm 0,1 \text{ eV}$. З умови існування релаксацийного максимуму ВТ $\omega \tau_0 \exp(H/k_B T_{\text{м}}) = 1$ визначили постійну часу релаксації $\tau_0 \approx 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ сек}$ і частотний фактор релаксації $f_0 \approx 4,2 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$. При охолодженні на зворотному ході спостерігалось пониження фону ВТ $Q^{-1}_{\text{ф}}$ і абсолютної величини модуля пружності E . Після електронного опромінення флюенсом $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ спостерігалась сталість фону ВТ $Q^{-1}_{\text{ф}} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ до $T \approx 470 \text{ K}$ и різке

експоненціальне зростання фону $Q^{-1}_{\text{ф}}$ при більш високих температурах $T > 600-610 \text{ K}$.

Динамічний модуль пружності E є більш чутливою характеристикою процесів фізико-хімічної взаємодії при зміні типу упорядкування по границям розділу фаз, ніж ВТ. Результати вимірювання температурної залежності модуля пружності E сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ представлені на рис.2.

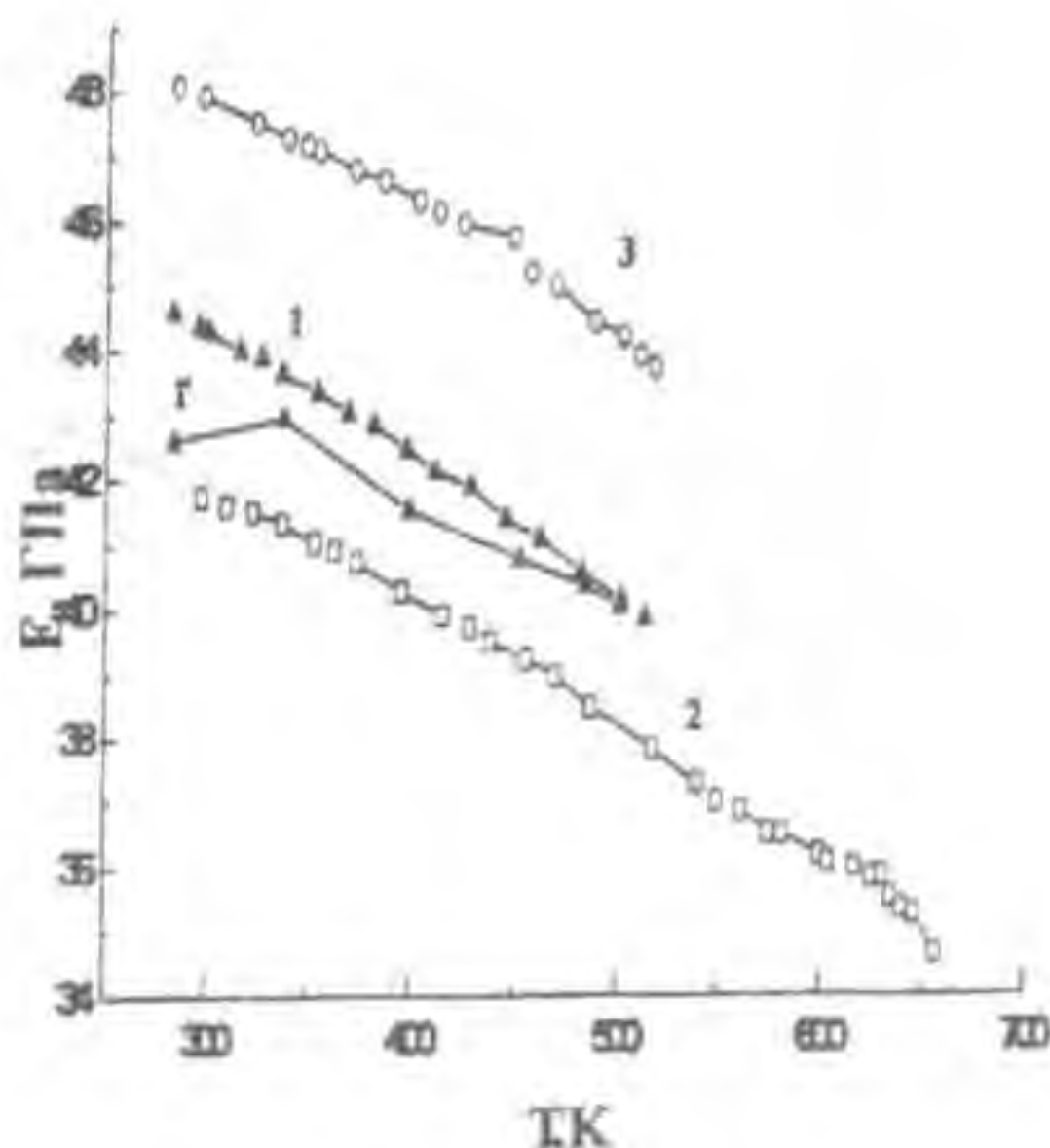


Рис. 2. Температурна залежність модуля пружності E сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$:

1- нагрів сплаву у початковому стані; 1' - охолодження; 2 - після електронного опромінення флюенсом $\Phi \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$; 3 - півторний нагрів опроміненого зразка.

Модуль пружності E має спадний лінійний характер, що пояснюється теорією ангармонізму кристалів з врахуванням квадратичних членів [4]. При вимірюванні амплітудної залежності ВТ до і після опромінення ВТ було амплітудно-незалежним, що свідчить про відсутність дислокаційного гістерезисного механізму ВТ при використовуваних експериментальних ультразвукових деформаціях $\epsilon \approx 10^{-6}$.

На кривій 2 рис.2 температурній залежності E сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ спостерігалась релаксація модуля пружності $\Delta E/E$ при $T \approx 610 \text{ K}$. $\Delta E/E = (E - E_0)/E_0 = \Delta/(1 + \omega^2 \tau^2)$, де максимальний дефект модуля $s = (E_{\text{нр}} - E_{\text{р}})/E_{\text{нр}}$, $E_{\text{нр}}$ - нерелаксацийний, $E_{\text{р}}$ - релаксацийний модуль

пружності. E_{np} вимірювався у час прикладення напруги σ , коли непружний вклад у деформацію $\epsilon_{np} = 0$; E_p вимірювався після інтервалу часу $\Delta t \gg \tau$, коли непружна деформація максимальна $\epsilon_{np} = \max$.

На рис.3 представлена температурна залежність вказівної поверхні пружно-непружного тіла сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ у початковому стані після механічної обробки.

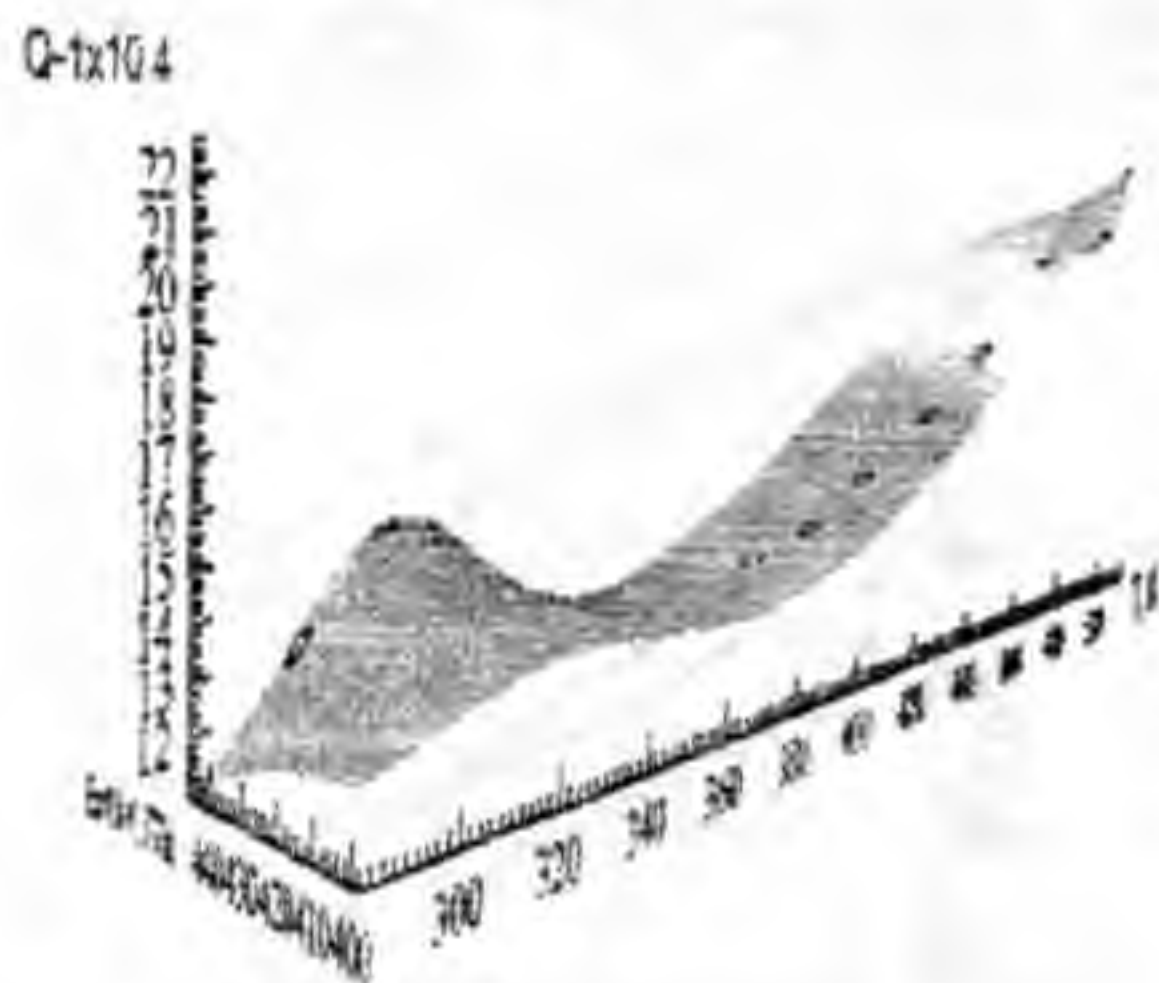


Рис. 3. Температурна залежність внутрішнього тертя Q^{-1} і модуля пружності E (вказівної поверхні пружно-непружного тіла) сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ у початковому стані після механічної обробки.

У твердому розчині $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ у температурному інтервалі $\Delta T = 620 \div 300$ К відбувається зміна типу упорядкування від L_{12} типу до низькотемпературного δ -фази. Характер зміни залишкового електроопору $\rho(T)$ пояснюється існуванням ближнього порядку різних типів у різних температурних діапазонах, прообразом яких є відповідні фази, що примикають до твердого розчину. Спостерігався максимум залишкового електроопору $\rho(T)$ для сплаву $Ag_{0.8}Zn_{0.2}$ при $T_{np} \approx 610$ К. Хід залежностей $\rho(T)$ для загартованих і відпалених зразків свідчив про оборотність процесів, що відбувались.

Встановлення низькотемпературного типу ближнього порядку утруднено через малу дифузійну рухливість атомів. Стимулювати ці процеси можна введенням різного роду структурних дефектів. В результаті опромінення електронами з енергією $W \approx 1,5$ MeV флюенсом $\Phi \approx 2 \cdot 10^{17}$ см⁻² при кімнатній температурі спостерігалось зменшення $\rho(T)$ і параметрів

Каулі на першій координаційній сфері, що свідчило про поглиблення процесу перебудови ближнього порядку по низькотемпературному типу. Зміна параметрів ближнього порядку Каулі, розрахованих для відпалених і загартованих від температур максимуму T_{np} опору $\rho(T)$ зразків, свідчить про те, що процеси ближнього упорядкування не можуть бути пояснені в рамках моделі однорідного ближнього порядку. При зменшенні температури термообробки параметри Каулі на першій координаційній сфері зменшуються, що вказує на зменшення ступені ближнього порядку. При однорідному упорядкуванні ці параметри повинні були б зростати.

Введені внаслідок радіаційного опромінення міжвузлові атоми J і вакансії V стимулюють дифузійні процеси. Таким чином, передбачається, що виявлена релаксація модуля пружності $\Delta E/E$ обумовлена ближнім упорядкуванням відповідно до теорії Ле Клера-Ломера [4].

Список використаних джерел

1. Онанко А.П. Вказівна поверхня непружно-пружного тіла сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ // Вісник Київського університету. Сер.: фізико-математичні науки.- 2007.- №4.- с.359-361.
2. Onanko A.P., Lyashenko O.V., Lyashenko I.O., Onanko Y.A. Acoustic attenuation in silicon and silicon oxide// J. Acoust. Soc. Am.- 2008.- V.123, № 5, Pt. 2.- p.3701.
3. Lyashenko O.V., Onanko A.P., Veleschuk V.P., Lyashenko I.O., Onanko Y.A. Structural defects relaxation during complex thermal and dynamical mechanic processing of CdTe// Photoelectronics.- 2008.- №17.- p.10-13.
4. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах.- М.: Атомиздат, 1975.- 472 с.

Надійшла до редколегії 28.11.08

УДК 575:577

Ременяк О.В., асп., Гончаренко Ю.В., студ.
Прилуцька* С.В., к.б.н, м.н.с.

Вуглецеві нанотрубки для нанобіотехнології. Фізичні властивості (огляд)

Розглянуто структуру і основні фізичні властивості (електронні та механічні) вуглецевих нанотрубок, які зумовлюють їх біоактивність *in vitro* та *in vivo*.

Ключові слова: вуглецеві нанотрубки, структура, електронні та механічні властивості, біоактивність

*E-mail: psvit@bigmir.net

Використання нетоксичних і біосумісних матеріалів у біології та медицині є фундаментальною і прикладною задачею для розвитку біотехнології. Справжній бум у цьому напрямку викликали відкриття у кінці ХХ століття нових форм вуглецю – фулеренів (Нобелівська премія з хімії 1996р.) та нанотрубок [1-2]. Дослідники одразу звернули увагу на ці наноструктури (квантові точки, ями, дроти) з унікальними фізико-хімічними властивостями та на перспективи їх широкого застосування у нанотехнологіях. Виявлена біоактивність вуглецевих наноматеріалів, у свою чергу, сприяла появі нових галузей науки, таких як наномедицина та нанофармакологія.

Не дивлячись на зростаючу з кожним роком кількість публікацій, присвячених біологічній тематиці вуглецевих нанотрубок (ВНТ), на сьогодні у дослідників відсутня єдина думка щодо механізмів взаємодії ВНТ з біомакромолекулами (наприклад, з ДНК), їх здатності проникати крізь мембрану клітини з одного боку та бути блокувачами іонних каналів з іншого боку. Потребують детального аналізу питання біосумісності та цитотоксичності ВНТ, які пов'язані як з ефектами розміру, типу та функціоналізації ВНТ, так і типом самих клітин.

Метою цієї роботи було розглянути структуру, електронні та механічні властивості ВНТ, які зумовлюють їх біоактивність *in vitro* та *in vivo*.

O.V. Remenyak, PhD stud.
Yu.V. Goncharenko, stud.
S.V. Prylutska*, PhD

Carbon nanotubes for nanobiotechnology. Physical properties (Review)

The structure and main physical properties (electronic and mechanical ones) of carbon nanotubes, which cause their bioactivity *in vitro* and *in vivo*, are considered in detail.

Key words: carbon nanotube, structure, electronic and mechanical properties, bioactivity

Структура

Сучасні напрямки з нанотехнологій включають сукупність технологічних прийомів і дослідницьких методик, які дозволяють створювати об'єкти розміром 1-100 нанометрів і маніпулювати ними. Нагадаємо, ще у 1905р. А. Ейнштейн у своїй роботі, аналізуючи експериментальні дані з дифузії цукру у воді, розрахував, що розмір молекули цукру складає 1 нм. Це було першим визначенням розміру індивідуальної молекули. Для порівняння розмір атома кремнію складає 0,24 нм, діаметр молекули фулерену C_{60} – 0,7 нм, спіралі ДНК людини – 2 нм, розмір молекули гемоглобіну – 6,4 нм, молекули гемоціаніну – 50 нм, бактерії *Mycoplasma mycoides* – 100-250 нм, діаметр еритроцитів крові людини – 7000 нм, а товщина людської волосини – 50000-60000 нм.

У 1981р. був створений перший електронний скануючий тунельний мікроскоп (СТМ), який дав можливість не лише отримувати зображення окремих атомів, але і маніпулювати ними. Справжнє "нано" розпочинається з моменту прояву так званих ефектів пониження розмірності – появи фізичних властивостей речовин, пов'язаних з переходом до цих масштабів, які відрізняються від властивостей об'ємних матеріалів. На прикладі вуглецевих наноматеріалів можна спостерігати весь спектр пониження розмірностей:
– фулерен є нуль-вимірним об'єктом, або так званою квантовою точкою;

- ВНТ є одновимірним об'єктом, або квантовою ниткою;
- молекула графену (одноатомний шар вуглецю) представляє собою двовимірну структуру, або квантову площину.

Однією з найважливіших подій у розвитку нанотехнологій стало відкриття ВНТ. Зупинимося більш детально на її геометричній структурі.

У біології досить часто зустрічаються трубчасті структури, які складаються з регулярно упакованих протеїнових мономерів. Таку форму мають мікротубулени, які виконують багато функцій у вищих організмах, як, наприклад, флагели деяких бактерій. Подібно до того, як фулерени C_{60} мають свого двійника серед ікосаедричних вірусів, певні бактеріофаги (бактеріолітичні віруси) мають структуру, що нагадує структуру ВНТ. Як приклад, рис. 1 зображує капсид (або головку бактеріофага) CbK, який складається з трубочки з гексагональним впорядкуванням протеїнових елементів. Ця структура закрита напівсферичними фулереноподібними куполами.



Рис. 1 Геодезична модель капсиду бактеріофага CbK: а – вигляд з боку; б – вигляд уздовж головної вісі трубочки.

Існує два способи "конструювання" структури одностінної ВНТ (ОСВНТ). У першому способі пропонується в уявному експерименті згорнути моноатомний графеновий шар (молекулу графену) у циліндр діаметром, що дорівнює діаметру фулерену C_{60} , так, щоб гексагональна сітка атомів вуглецю замкнулася без швів, а на два відкритих кінця утвореної нанотрубки "надіти" половинки молекули C_{60} . Користуючись іншим способом, потрібно уявно розрізати молекулу фулерену C_{60} навпіл, ввести у розріз додаткові десять атомів вуглецю і, як результат, отримуємо молекулу фулерену C_{70} . Потім, доповнюючи цю молекулу поясом ще з десяти вуглецевих атомів, можна отримати різноманітні структури із загальною формулою C_{80} . Повторюючи цей процес багаторазово,

вдається побудувати ОСВНТ необмеженої довжини і діаметром, таким як у фулерену C_{60} .

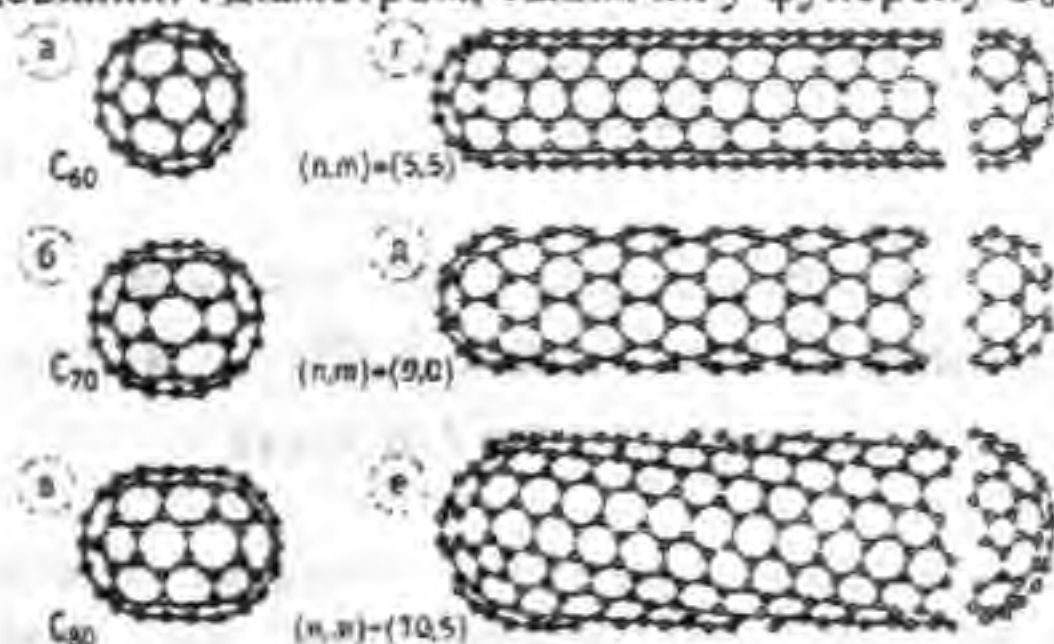


Рис. 2 Побудова молекулярної структури одностінних вуглецевих нанотрубок шляхом поетапного додавання екваторіальних поясів з 10 атомів вуглецю до молекули C_{60} : а – C_{60} ; б – C_{70} ; в – C_{80} ; г – зубчаста (armchair) нанотрубка; д – зигзагоподібна (zigzag) нанотрубка; е – хіральна нанотрубка.

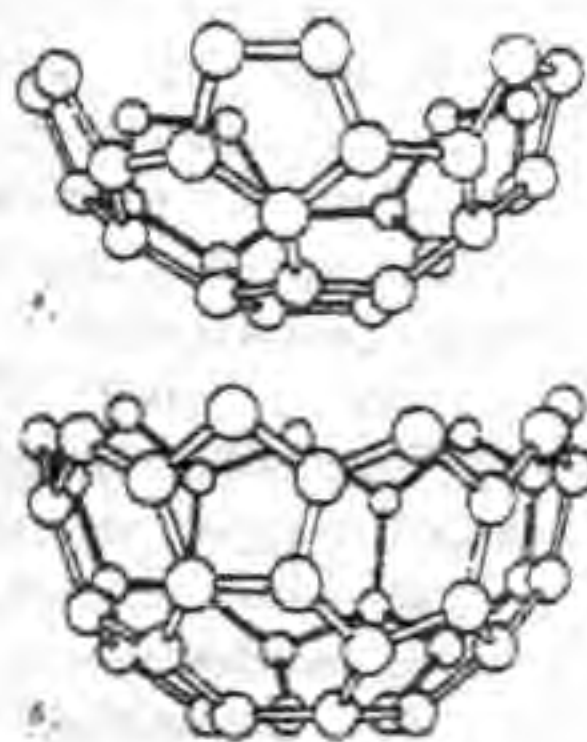


Рис. 3 Зрізи фулерену C_{60} : а – зубчастий (armchair); б – зигзагоподібний (zigzag).

На рис. 2 і 3 показано, що існують три типи ОСВНТ – в залежності від того, як двовимірний шар графену згорнутий по відношенню до її гексагональної ґратки: (1) нанотрубки зі структурою armchair (зубчасті ОСВНТ), у яких сторони графенових шестикутників орієнтовані перпендикулярно до осі циліндра, а молекула C_{60} розрізана навпіл перпендикулярно до осі п'ятого порядку – рис. 2г і 3а; (2) нанотрубки зі структурою zigzag (зигзагоподібні ОСВНТ), у яких сторони графенових шестикутників орієнтовані паралельно до осі циліндра, а молекула C_{60} розрізана навпіл перпендикулярно до осі третього порядку – рис. 2д і 3б; (3) різноманітні хіральні ОСВНТ, у яких гвинтова вісь паралельна до осі нанотрубки – рис. 2е.

Структуру ОСВНТ можна математично описати за допомогою хірального кута

нанотрубки θ і хірального вектора C_h , які показані на рис. 4а, причому:



Рис. 4 Фрагмент одностінної вуглецевої нанотрубки, отриманої шляхом згортання молекули графену: а – елементарна комірка нанотрубки з параметрами $(n,m)=(4,2)$ обмежена чотирикутником $OAB'B$ (щоб утворити нанотрубку, ця комірка згортається так, що O “зустрічає” A , а $B - B'$); б – у zigzag нанотрубок $\theta=0^\circ$ і $(n,0)$ або $(0,m)$; у armchair нанотрубок – $n=m$ і $\theta=30^\circ$; хіральні нанотрубки мають будь-які значення (n,m) і $0<\theta<30^\circ$ (крапки у кружках позначають нанотрубки з металевими властивостями, а малі крапки відповідають напівпровідним нанотрубкам).

$$C_h = na_1 + ma_2.$$

Тут a_1 і a_2 – одиничні вектори у двовимірній гексагональній ґратці графену, а n і m – цілі числа. θ – кут між векторами C_h і a_1 . Він дорівнює, відповідно, 0 і 30° для zigzag і armchair ОСВНТ.

Набір можливих хіральних векторів показаний на рис. 4б. Властивості ОСВНТ визначаються їх діаметром d_i і кутом θ , які у свою чергу залежать від значень n та m як [3]

$$d_i = C_h/\pi = \sqrt{3} a_{cc} (n^2 + m^2 + nm)^{1/2}/\pi,$$

$$\theta = \tan^{-1} [\sqrt{3} m/(2n + m)],$$

де a_{cc} – відстань між найближчими атомами вуглецю (у графіті вона становить $0,142$ нм).

Індекси (n,m) називають індексами хіральності, або просто хіральністю ОСВНТ. Так, наприклад, про ОСВНТ, які зображені на рис. 2а, б і в, говорять, що вони володіють хіральністю $(5,5)$, $(9,0)$ і $(10,5)$, відповідно.

Строго кажучи, терміном “хіральність” називають властивість об’єктів не співпадати зі своїм дзеркальним відображенням ні за яких обертань та трансляцій. Іншими словами, хіральними називають об’єкти, які володіють асиметрією при заміні “правого” на “ліве”. Наприклад, багато органічних молекул є хіральними, тобто можуть існувати у двох формах – L та D , тобто, лівій і правій, які відрізняються, як ліва і права рука. У природі та або інша форма (їх називають енантіомерами) може переважати. Так, білки побудовані з амінокислот у L -формі, а їх

штучно синтезовані праві енантіомери організмом не засвоюються. Хіральними є й інші компоненти живих клітин – природні вуглеводи та нуклеїнові кислоти.

Усі ОСВНТ, за виключенням зигзагоподібних (zigzag) і зубчастих (armchair), є хіральними, тобто володіють або лівою, або правою спіральністю. У роботі [4] автори запропонували і експериментально підтвердили гіпотезу про те, що ліві або праві енантіомери ОСВНТ переважно абсорбують відповідно ліві, або праві ізомери хіральної молекули дипорфірину. У роботі [5] була досліджена оптична активність ОСВНТ з накрученою молекулою ДНК. Після такого “накручування” відокремити ці хіральні молекули одну від одної надзвичайно важко.

Зазначимо, що при дослідженні ВНТ надзвичайно важливою виявилася роль теоретичного моделювання: багато особливостей структури і властивостей ВНТ були передбачені за наслідками розрахунків і лише потім знайшли експериментальне підтвердження. Зокрема, наведені вище теоретичні рівняння були підтверджені численними вимірюваннями діаметру ОСВНТ та їх хіральних кутів за допомогою СТМ і просвічуючої електронної мікроскопії високої роздільної здатності (ПЕМВРЗ). У 1993р. група С. Іджіма і Т. Ічіхаші з Японії [6] вперше отримала і методом ПЕМВРЗ ідентифікувала ОСВНТ.

На сьогоднішній день отримані ОСВНТ з діаметром від $0,43$ до 5 нм. У приведених вище схемах (рис. 2 і 3) для замикання відкритих кінців ВНТ використовують пієсфери молекули C_{60} . Очевидно, що мінімальним діаметром повинна володіти ОСВНТ, замкнута половинками найменшого фулерену C_{20} [7].

В експериментах спостерігали також і багатостінні ВНТ (БСВНТ). Вони складаються із вкладених один в одний коаксіальних циліндрів ОСВНТ, стінки яких знаходяться на відстані, близькій до міжплосинної відстані у графіті ($0,3334$ нм). Кількість стінок може варіюватися від 2 до 50 (рис. 5). Вперше структура БСВНТ була експериментально продемонстрована методом ПЕМВРЗ у 1991р. С. Іджімою [8].

Чи володіють ВНТ такими властивостями, які роблять їх перспективними у нанотехнологіях? Щоб відповісти на це питання розглянемо деякі фізичні властивості ВНТ, які є справді унікальними.

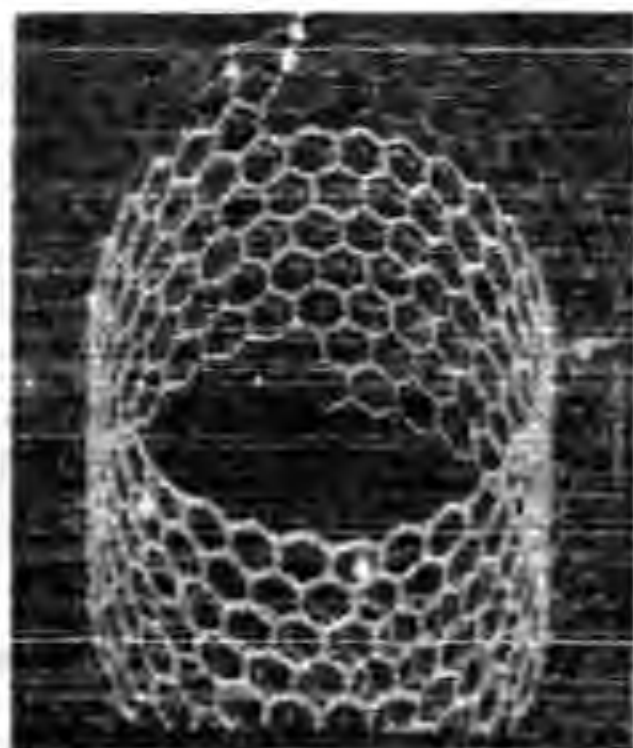


Рис. 5 Схематичне зображення вуглецевої нанотрубки з двома стінками.

Електронні властивості

Ще у 1992р. були зроблені теоретичні прогнози зонної структури та електронних властивостей ОСВНТ, які були експериментально підтверджені через шість років. Усі атоми вуглецю у ВНТ мають потрібну координацію, а це означає, що ВНТ є спряженими ароматичними системами, у яких три з чотирьох валентних електронів кожного атома вуглецю утворюють локалізовані σ -зв'язки, а четвертий бере участь в утворенні делокалізованої π -системи (як, наприклад, у бензолі). Ці π -електрони слабо пов'язані зі своїми атомами, тому саме вони можуть брати участь у перенесенні заряду. Теорія пояснює електронні властивості ВНТ квантовим обмеженням руху електронів по нормалі до осі нанотрубки. У радіальному напрямі переміщення електронів обмежені товщиною моношару графену. Вздовж периметра ВНТ виникають періодичні граничні умови. Внаслідок цих квантових обмежень електрони можуть рухатися лише вздовж осі нанотрубки, так що їх хвильові вектори направлені вздовж осі нанотрубки. У результаті кількість одновимірних зон провідності і валентних зон залежить від набору стоячих хвиль, які виникають уздовж периметра ВНТ. Ці прості міркування використовують при розрахунках одновимірних зон, які пов'язують хвильовий вектор електрона з його енергією. Результати показали, що параметри n і m ВНТ визначають, якими властивостями вона володіє: металевими або напівпровідниковими. При цьому хімічний зв'язок між атомами вуглецю залишається в обох випадках однаковим. Залежно від значень d і θ , одна третина ОБНТ малого діаметру володіє

металевими властивостями, тоді як інші дві третини є прямозонними напівпровідниками. У загальному випадку ОСВНТ (n,m) буде металевою, якщо $n-m=3q$, де q – ціле число. Усі armchair ОСВНТ володіють металевими властивостями, також як і одна третина усіх можливих zigzag ОСВНТ. Ширина забороненої зони у напівпровідникових ОСВНТ також залежить від їх хіральності, зменшуючись обернено пропорційно діаметру ВНТ. Зауважимо, що усі БСВНТ є металевими. Отже, на питання, чи є ВНТ металом або напівпровідником, можна відповісти: і тим і іншим одночасно. Така залежність електронних властивостей від структурно-геометричних параметрів ВНТ дозволила передбачити можливість виготовлення на її основі приладів (наприклад, випрямляючого нанодіоду) з гетеропереходами метал/напівпровідник (рис. 6) [9]. Перенесення заряду у ВНТ якісно відрізняється від властивого звичайним тривимірним провідникам, що пояснюється одновимірним характером перенесення. Однією з відмінностей є балістичний механізм перенесення заряду, за яким електрон долає ділянку ВНТ довжиною приблизно 1 мкм взагалі без розсіювання. Це дає змогу створювати на основі ВНТ так звані квантові дроти, які здатні у пристроях наноелектроніки підводити і витримувати, не нагріваючись при цьому, струми величезної щільності – на тричотири порядки більші, ніж у звичайних провідниках.

Ще однією особливістю ВНТ є вражаюча чутливість їх провідності до механічної напруги. Зокрема, було виявлено різке (на два

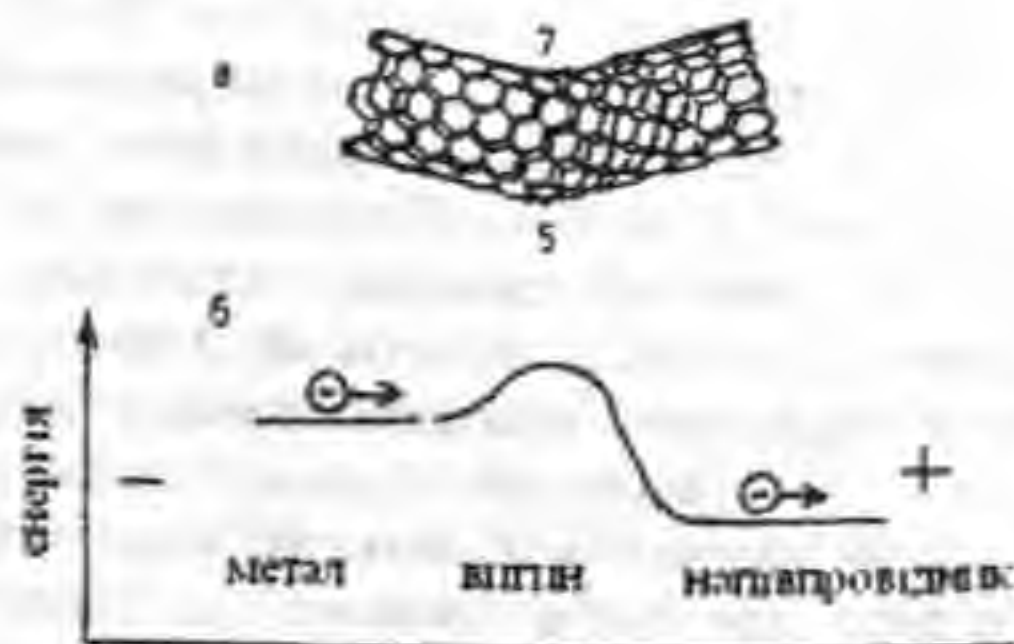


Рис. 6 Схематичне зображення гетеропереходу метал/напівпровідник: а - вигин одностінної вуглецевої нанотрубки за рахунок введення дефекту "семикутник-п'ятикутник"; б – вплив вигину нанотрубки на енергію рухомих електронів.

порядки за величиною) зменшення провідності за невеликого, у 5–10 градусів, вигині ОСВНТ. Отже, з одного боку, ВНТ є готовим високочутливим перетворювачем механічних коливань в електричний сигнал і навпаки, а з іншого боку, ми маємо практично готовий датчик найдрібніших деформацій. Але головне, що ці явища відкрили можливість створити на основі ВНТ принципово новий надмініаторний електронний прилад – так званий одноелектронний транзистор (2001р.), який ефективно і стабільно функціонує за кімнатної температури [10].

Характерною особливістю геометрії ВНТ є рекордне значення питомої поверхні – у середньому 1600 м²/г для ОСВНТ. Ця особливість, разом з високою чутливістю електронних характеристик ВНТ до присутності молекул, сорбованих на їх поверхні, робить їх перспективною основою для створення надмініаторних датчиків для визначення вмісту газових домішок в атмосфері. Нещодавно було продемонстровано, наприклад, що, вимірюючи провідність ланцюга випадково розташованих ОСВНТ у польовому транзисторі, можна виявити присутність біомаркера астми – оксиду азоту.

Інша особливість ВНТ – велике відношення довжини нанотрубок до їх діаметру (100000 і вище) – обумовлює так звані перколяційні властивості ВНТ, або, строго кажучи, нитку межу перколяції. Введення навіть невеликої кількості провідних ВНТ у діелектричні матеріали значно покращує їх електричні властивості. Наприклад, додавання в гуму і пластики ОСВНТ у концентрації всього лише 0,1–0,2% приводить до зростання електричної провідності такого композиційного матеріалу в 10⁵ разів.

Висхіднок вимірні ВНТ із зарядженими компонентами біологічних суттєво відрізняються від електроніки, що дозволяє використовувати ВНТ як біосенсор. Якщо ж розташувати ВНТ уздовж ліній електричного поля, тоді напруженість поля на кінчику нанотрубки виявиться дуже високою, причому тим більшою, чим тоншою буде ВНТ. Таке локальне поле вириває електрони з ВНТ. Під дією зовнішнього поля електрони, що летять, формують пучок. Сьогодні з електродів, які містять ВНТ, вдається отримати емісію 1 мА/см² за напруги 1000 В. На основі таких автоелектронних нанотрубчастих катодів створені плоскі дисплеї, люмінесцентні

джерела світла і навіть рентгенівського випромінювання.

Механічні властивості

Надзвичайно корисним може виявитися використання ВНТ в імунологічних, генотерапевтичних і тому подібних біотехнологічних експериментах, наприклад, при перенесенні генів, введенні у клітини лікарських речовин і т.д. Завдяки надзвичайній міцності та нанометровому діаметру ВНТ, проникнення їх у клітини стає високо ефективним і абсолютно нешкодливим. Так, саме для введення рідин у клітини дослідники з Drexel University (США) виготовили лабораторну піпетку з нанотрубною на кінці (рис. 7) [11]. Для цього на першому етапі всередину ВНТ були введені магнітні наночастинки. Потім вони поміщалися в "оптичний клей" і шикувалися у магнітному полі вздовж осі піпетки. Після закріплення ВНТ на кінчику піпетки клей застигав під дією ультрафіолету. Було показано, що таким шприцом можна проколювати клітинні стінки і вприскувати рідину всередину, а клітинна мембрана при взаємодії з ВНТ не деформується.

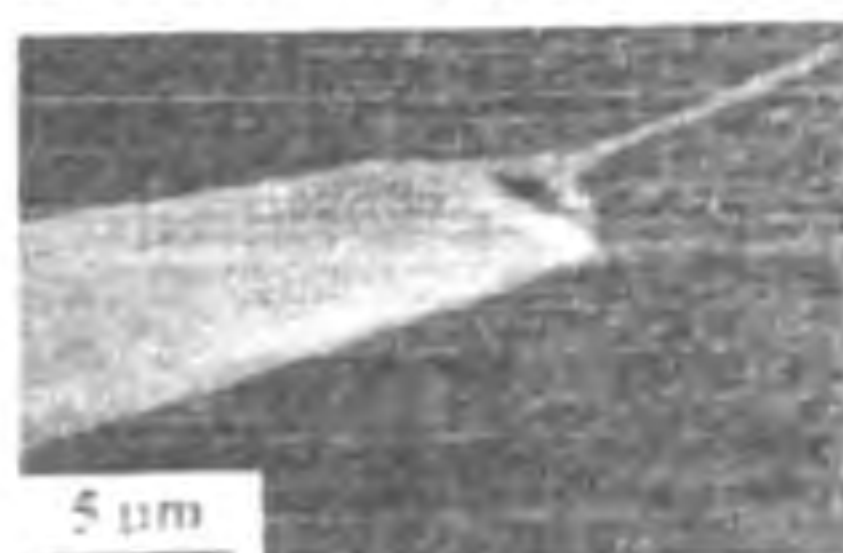


Рис. 7 Піпетка з вуглецевою нанотрубною на кінчику (з'єднання піпетки з трубкою герметично закріплене оптичним клеєм)

Довжина ВНТ, що перевищує їх діаметр як мінімум у десятки тисяч разів, висока міцність вуглець-вуглецевих зв'язків, сітчаста гексагональна будова і відсутність дефектів обумовлюють їх унікальні фізико-механічні характеристики. Хоча на перший погляд ВНТ здаються крихкими, насправді вони виявилися міцними при навантаженнях як на розтягування, так і на вигин. ВНТ у 10–12 разів міцніші і в 6 разів легші за сталь. Дійсно, модуль Юнга для ОСВНТ перевищує величину порядку 1 ТПа. Це на порядок вище, ніж у сталі, а щільність ВНТ при цьому менша (1,4 г/

см³). ВНТ не лише міцні, але й гнучкі. За поведінкою вони нагадують не ламкі соломинки графітових стержнів, а жорсткі гумові трубки. А здатність ВНТ витримувати неодноразові навантаження і при цьому зберігати свою структуру і механічну цілісність аналогічна властивостям м'язової тканини. ОСВНТ можуть пружно подовжуватися на 16%. Більше того, навіть за механічної напруги, що перевищує критичну, а також під дією тепла або випромінювання ВНТ не "рвуться" і не "ламаються", а просто перебудовуються. Це "самозаліковування" стає можливим завдяки тому, що за істотної деформації гексагональної структури ВНТ утворюється дефект - конденсована пара п'ятичленного і семичленного циклів (рис. 6). Ці дефекти, переміщуючись по поверхні пошкоджених ВНТ, перегруповують атоми вуглецю.

На початку 2007р. з'явилося повідомлення про отримання масиву вертикально орієнтованих ОСВНТ довжиною до 7 мм, тобто майже у 100 разів довших за типові ВНТ. А ще через декілька місяців - методом хімічного осадження з парової фази на спеціальному шаблоні були отримані орієнтовані пучки БСВНТ завдовжки 18 мм. Такі пучки ВНТ викликають великий інтерес у дослідників, оскільки з них можна отримати надміцні нанотрубчасті джгути.

Не викликає сумніву, що ВНТ виявляться незамінними скрізь, де необхідне поєднання міцності з гнучкістю і малою вагою. На їх основі планують створити штучні м'язи, активні елементи вимірювальних пристроїв (зонди), що визначають нанометрову структуру поверхонь, композиційні матеріали, які забезпечують високу міцність за надвисоких деформацій.

Висновки

Отже, у цьому короткому фізичному огляді було продемонстровано унікальний зв'язок геометричної структури ВНТ (хіральність, велика питома поверхня) з її електронною будовою (метал/напівпровідник) та механічними характеристиками (надзвичайно висока міцність, гнучкість), які зумовлюють у подальшому біоактивність ВНТ *in vitro* та *in vivo*. Актуальні питання розчинності ВНТ, їх біосумісності, цитотоксичності, мембранотропності і, нарешті, можливого застосування ВНТ у різноманітних

нанобіотехнологіях, зокрема, як біосенсори, засоби транспортування лікарських речовин у клітини, препарати для лікування вірусних та онкозахворювань є предметом наступної біологічної частини цього огляду.

Список використаних джерел

1. Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Eklund P.C. Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes: Their Properties and Applications. - New York: Academic Press, 1996. - 985 p.
2. Harris P.J.F. Carbon Nanotubes and Related Structures. - Cambridge: Univ. Press, 1999. - 294 p.
3. Dresselhaus M. S., Dresselhaus G., Saito R. Physics of carbon nanotubes // Carbon. - 1995. - 33. - P. 883 - 891.
4. Peng X., Komatsu N., Bhattacharya S., Shimawaki T., Aonuma S., Kimura T. Optically active single-walled carbon nanotubes // Nature Nanotechnology. - 2007. - 2. - P. 361 - 365.
5. Dukovic G., Balaz M., Doak P., Berova N.D., Zheng M., Mclean R.S., Brus L.D. Single-Walled Carbon Nanotubes Exhibit Circular Dichroism when Wrapped with DNA // J. Am. Chem. Soc. - 2006. - 128. - P. 9004 - 9005.
6. Iijima S., Ichihashi T. Single-Shell carbon nanotubes of 1-nm diameter // Nature. - 1993. - 363. - P. 603 - 605.
7. Hayashi T., Kim Y.A., Matoba T., Esaka M., Nishimura K., Tsukada T., Endo M., Dresselhaus M.S. Smallest Freestanding Single-Walled Carbon Nanotube // Nano Letters. - 2003. - 3(7). - P. 887 - 889.
8. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. - 1991. - 354. - P. 56 - 58.
9. Chico L., Crespi V.H., Benedict L.X., Louie S.G., Cohen M.L. Pure Carbon Nanoscale Devices: Nanotube Heterojunctions // Phys. Rev. Lett. - 1996. - 76. - P. 971 - 974.
10. Postma H.W.C., Teepen T., Yao Z., Grifoni M., Dekker J. Carbon Nanotube Single-Electron Transistors at Room Temperature // Science. - 2001. - 293. - P. 76 - 79.
11. Freedman J.R., Mattia D., Korneva G., Gogotsi Y., Friedman G., Fontecchio A.K. Magnetically assembled carbon nanotube tipped pipettes // Appl. Phys. Lett. - 2007. - 90. - P. 103108 - 103111.

Надійшла до редколегії 12.12.2008р

УДК 541.64:539.199

Свечнікова О.С., к.ф.м.н., с.н.с.

Дослідження орієнтаційного порядку в орієнтованих полімерних волокнах

За допомогою запропонованого методу визначення поперечних компонент тензора комплексної податливості полімерних волокон отримані температурні залежності компонент S_{11} , S_{12} , S_{44} для орієнтованих поліпропіленових (ПП) волокон. Проведені розрахунки фактора орієнтації.

Одержані результати показали, що поперечні компоненти тензора податливості S_{44} та S_{11} неоднакові, а фактор орієнтації ПП-волокон дорівнює $\langle q \rangle \approx 0,885$.

Таким чином доведено, що для високоорієнтованих ПП-волокон (кратність витягування 11) полімерні ланцюги розташовуються практично паралельно один одному, тобто досягають граничної анізотропії.

Ключові слова: в'язкопружна анізотропія, орієнтовані полімерні волокна, компоненти тензора податливості, орієнтаційний параметр – фактор орієнтації.

*E-mail: svechnikova@mail.univ.kiev.ua

Вступ

При утворенні полімерних анізотропних структур (плівок та волокон) розташування полімерних ланцюгів описується полем директора $\bar{r}$ [1], напрямок якого співпадає з переважним напрямком ланцюгів в даній точці. Один з параметрів, що характеризує орієнтацію в полімерах – так званий фактор орієнтації [2]

$$q(\bar{r}) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \quad (1)$$

де $\cos^2\theta$ – проекція директора на певний обраний напрямок – наприклад, вісь волокна. Якщо ввести дві системи координат: одну – лабораторну, або «штриховану» (саме ці значення визначаються з експерименту) та другу – головну, або фізичну чи «не штриховану», одна з осей якої співпадає з віссю симетрії (для нашого випадку, наприклад, з віссю волокна [3]),

Svechnikova O.S., PhD, Sen.Sci.Res.

The orientation order investigation in the oriented polymer fibers

The S_{11} , S_{12} and S_{44} components dependences on temperature are found for the oriented polypropylene fibers with the help of the suggested complex pliancy tensor components estimation method. Orientation factor calculations are made.

The obtained results show the inequality of the pliancy tensor cross components S_{44} and S_{11} . The orientation factor for the PP fibers appeared to be $q=0,885$.

In such a way it is proved for the polymer chains of highly oriented PP fibers (stretch multiplicity 11) to be placed parallel one to the other, therefore they reach the limiting anisotropy.

Key Words: the viscoelastic anisotropy, the polymers oriented fibers, components of susceptibility tensor, the parameter of orientation – factor of orientation.

то тоді між компонентами тензора податливості можна записати таке співвідношення [3]

$$\begin{aligned} \langle S_{yy} \rangle = & \frac{1}{9}(4S_{11} + 2S_{44}) + \\ & + \frac{\langle q \rangle}{9}(2S_{44} - 8S_{11}) + \\ & + \frac{4\langle q^2 \rangle}{9}(S_{11} - S_{44}) \end{aligned} \quad (2)$$

З формули (2) видно, що для визначення фактору орієнтації потрібно знати компоненти тензора податливості: поздовжню S_{11} та поперечні S_{11} та S_{44} .

Звичайно при визначенні фактору орієнтації застосовували (наприклад, [4]) формулу (2), при цьому без обґрунтування, довільно припускаючи, що

$$S_{11} = S_{44} \quad (3)$$

Це припущення, мабуть, вводили тому, що малий діаметр орієнтованих волокон (порядку десятої

Представлено:
акад. НАНУ, к.ф.-м.н.,
проф. Булакін Л.А.

частки міліметра) не дозволяє здійснити прямі вимірювання поперечних компонент тензора податливості. Тому до останнього часу не існувало експериментального методу визначення поперечної компоненти S_{44} для волокон. Отже, метою цієї роботи було перевірити достовірність методу визначення орієнтації, що ґрунтується на припущенні рівності (3) та визначити фактор орієнтації. Для цього треба спочатку з експерименту визначити поперечні компоненти S_{11} та S_{44} .

Метод одержання поперечних компонент тензора податливості S_{11} та S_{44}

Метод одержання поперечних компонент тензора податливості S_{11} та S_{44} ґрунтується на експериментальних значеннях жорсткості C , які одержуються за допомогою оберненого крутильного маятника [5]. Сутність цього методу полягає в наступному. Орієнтовані полімерні волокна прийнято розглядати як анізотропне середовище, що має осьову симетрію. В цьому випадку компоненти тензора податливості у двоіндексних позначеннях мають вигляд

$$S_{jk} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} - S_{12} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Оскільки S_{jklm}^* є тензором четвертого рангу, то відповідно при перетворенні координат (від лабораторної до фізичної) компоненти S_{jklm}^* змінюються згідно з співвідношенням

$$S_{j'k'l'm'}^* = \alpha_{j'j} \alpha_{k'k} \alpha_{l'l} \alpha_{m'm} S_{jklm}^* \quad (5)$$

Як видно з (5), для знаходження головних компонентів S_{jklm}^* необхідно знати косинуси кутів між системами координат α_{ij} , мати достатню кількість експериментально вимірених $S_{j'k'l'm'}^*$ - тоді розв'язок системи (5) дасть шукані поперечні компоненти S_{jklm}^* . Необхідну кількість рівнянь "набираємо", змінюючи взаємне розташування обох систем координат. Цього досягаємо, вирізаючи зразки досліджуваного анізотропного матеріалу під різними кутами φ до фізичних "не штрихованих" осей, оскільки положення лабораторної системи зафіксовано в просторі незмінною геометрією експерименту (рис. 1).

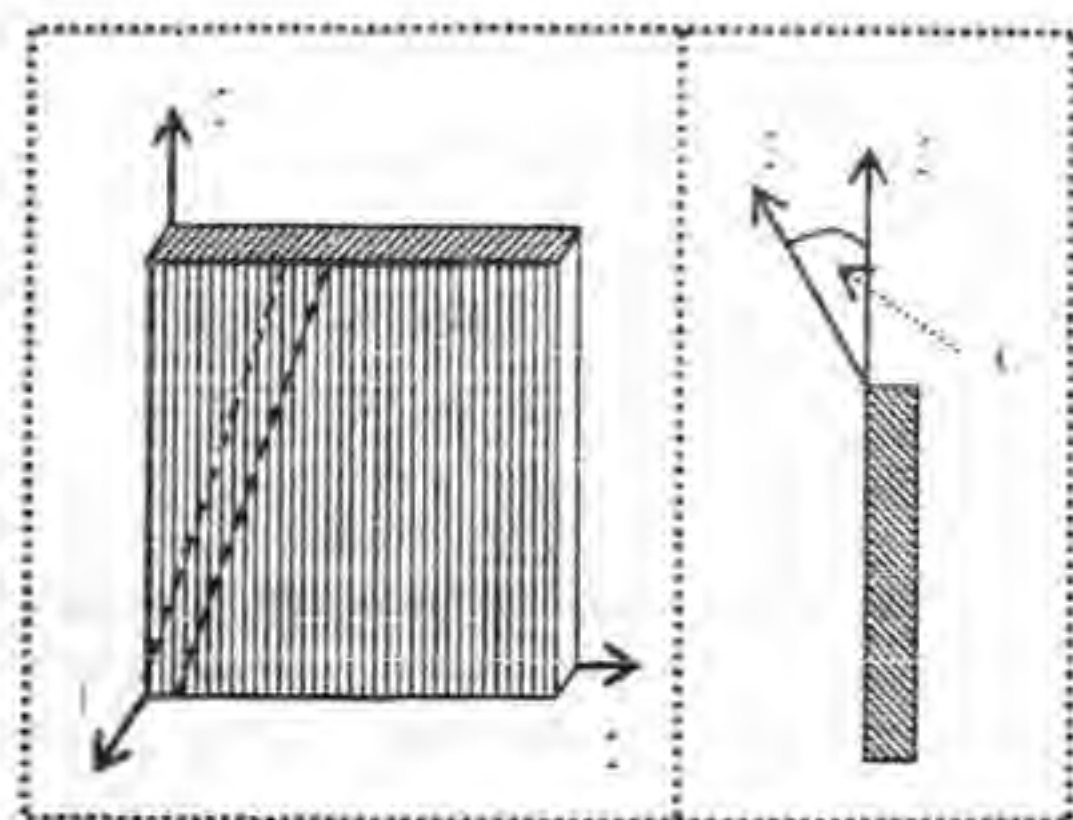


Рис. 1. Схема вирізання зразків

З експерименту визначаємо ефективну податливість $B_{j'k'l'm'}^*$

$$B_{j'k'l'm'}^* = \frac{\pi a^3 b}{C_{j'k'l'm'}} \quad (6)$$

Використовуючи позначення $\gamma = \cos(\varphi, \varphi)$ за формулою (5) для випадку осової симетрії маємо розрахунковий вираз для ефективної податливості B^*

$$B^* = X^* + Y^* \gamma^2 + Z^* \gamma^4, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} X^* &= S_{44}^* + 2 \frac{a^2}{b^2} (S_{11}^* - S_{12}^*) \\ Y^* &= 4(S_{11}^* + S_{33}^* - 2S_{13}^* - S_{44}^*) + \frac{a^2}{b^2} (S_{44}^* - 2(S_{11}^* - S_{12}^*)) \\ Z^* &= -4(S_{11}^* + S_{33}^* - 2S_{13}^* - S_{44}^*) \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (7) методом квазірішень [6], можна одержати поперечні компоненти S_{11} , S_{12} , S_{44} тензора в'язко-пружної податливості.

Опис експерименту

Оскільки волокна дуже тоненькі, то зразки для дослідження робили у вигляді композитної плівки, що складалась з високоорієнтованих поліпропіленових волокон, які "склеєні" аморфним полістиролом (ПС) (температурні залежності B для ПС наведені на рис. 2 а, б на кривих 4). З наведених експериментальних кривих видно, що внеском матриці в формування анізотропії можна знехтувати, так що анізотропія плівок визначається анізотропією волокон (тобто орієнтацією полімерних ланцюгів у ПП).

Формули (7) – (8) вказали спосіб, за яким ми визначали головні поперечні компоненти S_{44}^* , S_{11}^* .

На першому етапі експериментально вимірювалась крутильна жорсткість зразків C .

що відповідала різним значенням параметра γ (зразки вирізали з плівки під кутами 0° , 30° та 45°). Жорсткість C^* характеризує в'язкопружну природу досліджуваних об'єктів та входить у рівняння руху крутильного маятника

$$I\ddot{\theta} + C^*\dot{\theta} = 0 \quad (9)$$

Розв'язок останнього рівняння для в'язкопружного середовища

$$\theta = \theta_0 e^{(i\omega - \alpha)t}, \quad (10)$$

де ω – циклічна частота коливань $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$; α – коефіцієнт затухання крутильних коливань $\alpha = \Delta\omega/2\pi$. При підстановці (10) у (9) маємо

$$I(i\omega - \alpha)^2 \theta + C^* \theta = 0$$

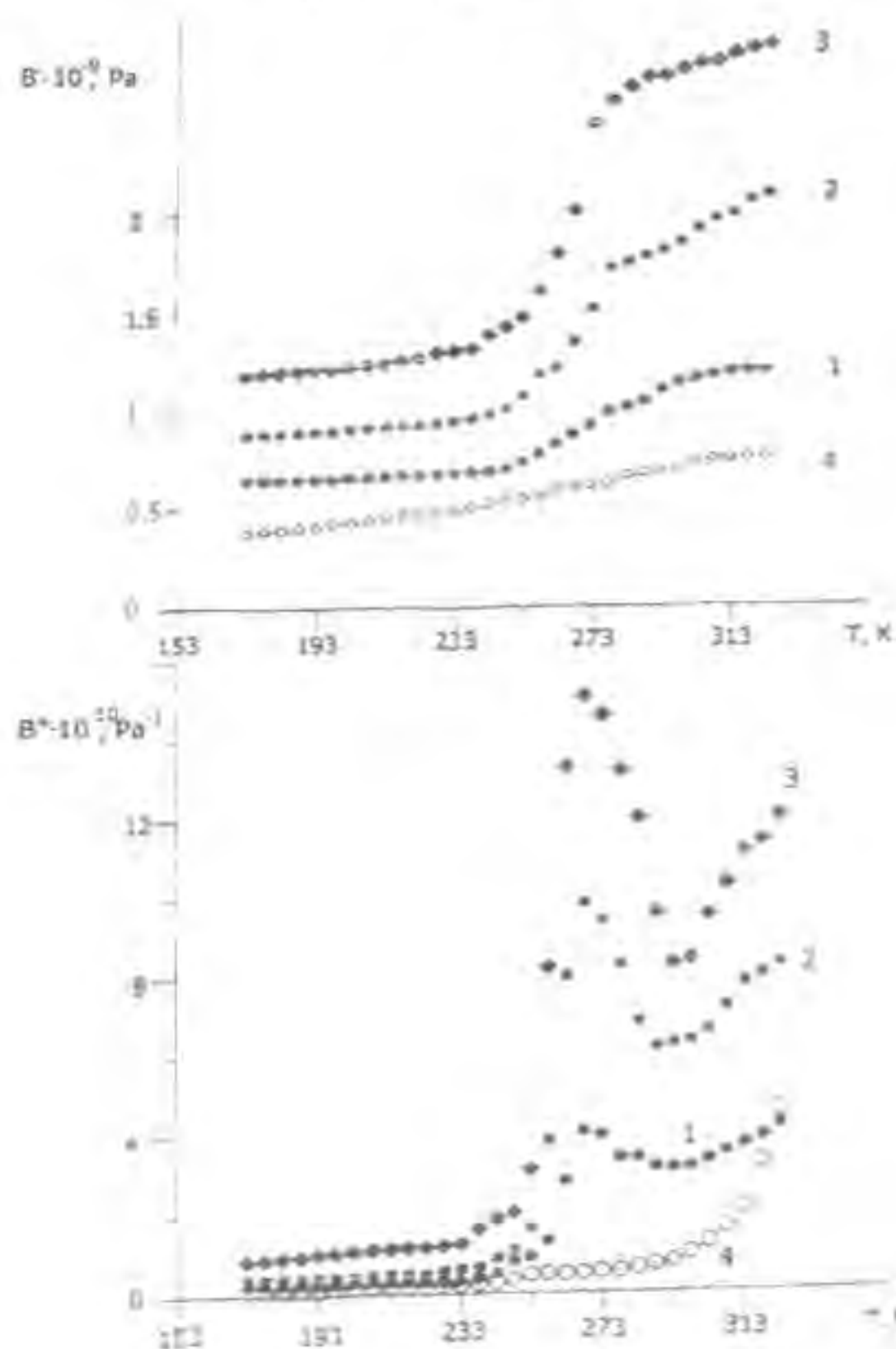


Рис. 2. Температурні залежності дійсної (а) та уявної (б) частини ефективної податливості B для полімерних композиційних плівок на основі ПП-волокон та ПС-в'язуючого, вирізаних під кутами φ до вісі симетрії волокна (1 - $\varphi = 0^\circ$, 2 - 30° , 3 - 45° , 4 - ПС)

Після елементарних перетворень отримано

$$C^* = I\omega^2 \left(1 - \frac{\Delta^2}{4\pi^2} \right) + iI\omega^2 \frac{\Delta}{\pi}$$

або

$$C^* = Iv^2 (4\pi^2 - \Delta^2 + i4\pi\nu\Delta)$$

Дійсна та уявна частин жорсткості C^* розраховуються з експериментальних вимірів частоти та декременту затухань вільних коливань маятника

$$C' = Iv^2 (4\pi^2 - \Delta^2), \quad C'' = 4\pi Iv^2 \Delta$$

Наступним кроком був розрахунок ефективної податливості $B^* = \frac{\pi a^3 b}{C^*}$.

Температурні залежності розрахованих B наведені на рис. 2 (для дійсної частини) та 3 (для уявної частини).

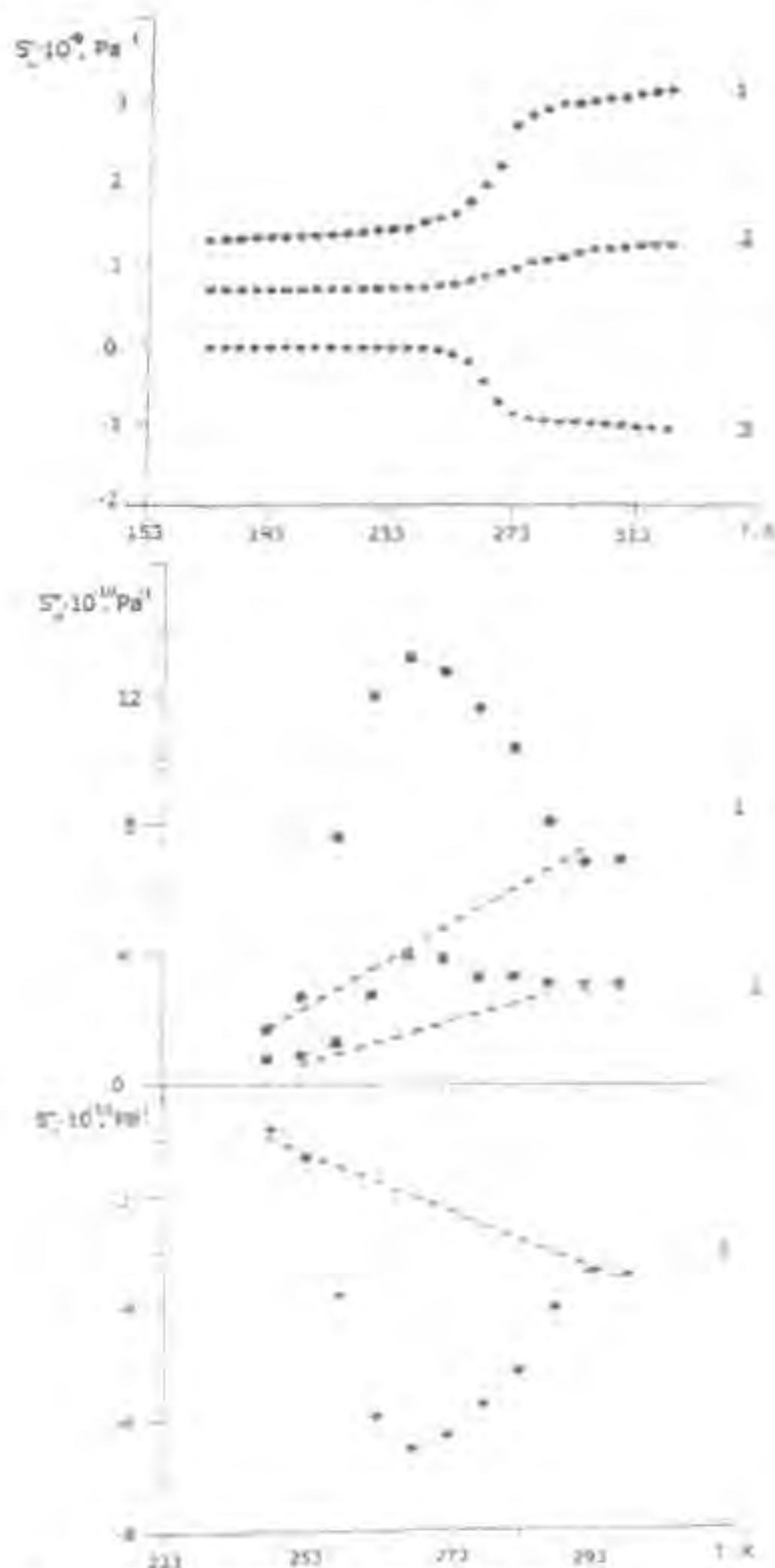


Рис. 3. Температурні залежності головних компонент дійсної (а) та уявної (б) частини тензора податливості для ПП-волокон (кратність витягування 11) (1 - S_{11} , 2 - S_{44} , 3 - S_{12})

Результати та їх обговорення

В результаті експерименту отримали систему рівнянь типу (7) відносно невідомих

$S'_{44}, S'_{11}, S'_{12}$. Однак розв'язок цієї системи не є тривіальним, оскільки термодинаміка накладає певні обмеження на тензор S' : відомо, що матриця S'_{ijkl} позитивно визначена. Згідно з теоремою Сільвестра, головні мінори цієї матриці повинні бути позитивними. Зважаючи на осьову симетрію досліджуваного матеріалу, записуємо що умову для мінорів першого і другого порядку, які містять компоненти, що нас цікавлять

$$S'_{11} > 0, S'_{44} > 0, S'_{66} > 0, S'^2_{11} - S'^2_{12} > 0, \quad (11)$$

Враховуючи, що $S'_{66} = 2(S'_{11} - S'_{12})$, з останніх виразів (11) одержуємо

$$-S'_{11} < S'_{12} < S'_{11} \quad (12)$$

Співвідношення (11) та (12) визначають область, де слід шукати невідомі.

Оскільки задача про розв'язок системи є некоректною, то для її розв'язання використали метод квазірішень [6].

Температурні залежності розрахованих цих поперечних компонент $S'_{44}, S'_{11}, S'_{12}$ для ПП-волокон наведені на рис. 3 (а - для дійсної частини, б - для уявної частини тензора податливості).

Аналізуючи отримані результати, наведені на останніх рис. 3, бачимо, що поперечні компоненти тензора податливості S_{44} та S_{11} неоднакові. Тобто, припущення щодо рівності $S_{11} = S_{44}$, на якому ґрунтувались попередні дослідники, м'яко кажучи, некоректні.

Визначення фактору орієнтації для поліпропіленових волокон

Фактор орієнтації розраховували за формулою

$$\langle q \rangle = 2,1 \cdot \frac{8 \cdot S_{11} + 2S_{44} - 15 \cdot S_{33}}{16 \cdot S_{11} + 5 \cdot S_{44}}$$

Оскільки отримані на першому етапі досліджень результати дозволяють безпосередньо мати поперечні компоненти тензора податливості S_{44} та S_{11} (див. рис. 4), то ми розрахувати фактор орієнтації ПП-волокон.

Значення поздовжньої компоненти S_{33} для тих самих ПП-волокон, отримане за допомогою акустичного інтерферометра, взяли з раніш проведених вимірів [7] (швидкості звуку $S_{33} = 1/E = 1/\rho c^2$ ($c = 3,7$ км/с в ПП, $\rho = 0,91$ г/см³)).

Одержали

$$\langle q \rangle = 2,1 \cdot \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9} - 15 \cdot 0,096 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-9} + 5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}} \approx 0,885$$

Висновки

Таким чином, основний результат проведеного експерименту $S'_{44} \neq S'_{11}$.

Попередні дослідники [4-6] для ПП-волокон з кратністю витягування ≈ 11 (з урахуванням припущення про рівність поперечних компонент тензора податливості) наводять значення 0,59. Як бачимо, значення фактору орієнтації, розраховані попередніми дослідниками, виявляються набагато меншими за значення, одержані за методом, який враховує різні значення поперечних компонент S_{44} та S_{11} ($\langle q \rangle \approx 0,89$). Це означає, що метод, за яким раніше розраховували фактор орієнтації полімерних волокон, є некоректним.

Доведено, що для високоорієнтованих ПП-волокон (кратність витягування 11) полімерні ланцюги розташовуються практично паралельно один одному, тобто досягають граничної анізотропії.

Список використаних джерел

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1987. 248 с.
2. Забашта Ю.Ф., Коченюк Н.Я. Об исследовании ориентационного порядка в полимерных волокнах акустическим методом // Акустический журнал, 1983. Т. XXIX. Вып. 3. С.347 - 351.
3. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. - М.: Наука, 1979. - 640 с.
4. Ward I.M. The Correlation of Molecular Orientation Parameters Derived from Optical Birefringence and Sonic Velocity Methods // Text. Res. J., 1964. V. 34. N 9 P.806-807.
5. Свечникова О., Сенчуров С., Походенко Д. Автоматизация досліджень в'язко-пружних властивостей полімерів за допомогою подвійного крутильного маятника // Сучасні проблеми молекулярної фізики - К: ВПЦ "КУ", 2006. С.241-252.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986. - 288 с.
7. Забашта Ю.Ф., Свечникова О.С. Определение упругих констант полимерных волокон по измерениям крутильной жесткости композитов // Композ. полим. материалы, 2003. Т.25. № 2. С. 76-82.

Надійшла до редколегії 19.11.08

Підп. до друку 10.12.2008 р.
Формат 70х100^{1/16}
Ум. друк. арк. 23,38. Наклад 350.
Зам. 405.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланада 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

