



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 3

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13920JB

45 - чит зал перманентна дисерц 25,00

ВИПУСК №3 2008

Вісник Київського університету, випуск №3, 2008

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- **Хусаїнов Денис Ях'євич**, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор;
- **Анісімов Ігор Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Буй Дмитро Борисович**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- **Булавін Леонід Анатолійович**, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Гарашенко Федір Георгійович**, доктор технічних наук, професор;
- **Данилов Вадим Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Макара Володимир Арсенійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Мелешко В'ячеслав Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Перестюк Микола Олексійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Скришевський Валерій Антонович**, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- **Анісімова Тетяна Харитонівна**, **відповідальний секретар**;
- **Безущак Оксана Омелянівна**, bezusch@univ.kiev.ua;
- **Мороз Костянтин Олександрович**, morozko@univ.kiev.ua;
- **Родіонова Тетяна Василівна**, rodtnv@univ.kiev.ua;
- **Хмелюк Надія Кузьмівна**, khmeluk@univ.kiev.ua;
- **Сільвейструк Людмила Миколаївна**, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142-53-2

ISSN 1812-5409

З М І С Т

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко Н.В. Максимальні підалгебри та підалгебри Фраттіні алгебри Лі, асоційованої з силовською р-підгрупою скінченної симетричної групи	7
Броницька Н.А. Горенштейнові порядки ширини 2	10
Дейнека О.Ю. Експоненціальна стійкість розв'язків мішаної задачі для системи телеграфних рівнянь	13
Димарський Я.М., Непийла Д.М. Власні функції малої норми квазілінійної періодичної задачі	18
Кайдан Н.В. Про слабопервинні скінченні кільця	24
Лавренюк Я.В. Нерозкладність скінченної знаковмінної групи у пряму суму підгруп при нестандартній примітивній дії	27
Лівінський І.В. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи в напівгрупі бінарних відношень	30
Олійник Б.В. k-однорідність n-кратної прямої суми метричного простору на себе	36
Рябухо О.М. Базис Єрмакова в скінченних розв'язних групах	39

ДИФЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Андрущенко В.О., Кір'єв А.М., Лендел В.В., Лисенко О.Г., Мельниченко М.М., Мішкевич Є.І., Нікітенко В.М. Скануючий мікро-нано модифікатор	45
Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану	51
Борисейко О.В., Нікітенко В.М., Павлик А.О., Улітко І.А. Згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня	57
Булана М.О., Маципура В.Т. Поширення звукового імпульсного сигналу з багатомодовою просторовою структурою у плоскопаралельному хвилеводі	61
Головач Г.П., Калайда О.Ф. Аналітичний та чисельні методи інтегрування системи рівнянь інерціальної навігації	65
Капустян О.В., Капустян О.А. Глобальний атрактор для імпульсно-збуреного хвильового рівняння	69
Карнаухова Т.В. Активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань шарнірно обпертої в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки при дії на неї невідомого механічного навантаження	75
Ковтун О.І., Перегуда О.В., Паламарчук Ю.А. Про застосування нестационарного проєкційно-ітеративного методу для інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю та додатковими умовами	79
Кухарчук М.М., Ярменко М.І. Про аналог теореми Лакса	83
Меньшиков В.О. Дискообразна тріщина в площині поділу пружних матеріалів при дії хвилі зсуву	85
Пирогов В.В. Стійкість основного руху статично незрівноваженого обертового тіла із двома маятниками (кулями)	89
Ткачук А.М., Добродзій Т.В. Дослідження інваріантних множин різницевих рівнянь за допомогою функцій Ляпунова	95
Філімоніхіна І.І., Горошко О.О. Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізолюваних систем	99
Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація виведення космічного апарату з ядерним ракетним двигуном на сферу впливу Землі	105
Якименко М.С. Моді Крі-Лемба для скінченного пружного циліндра	111

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Анікушин А.В., Номіровський Д.А. Траєкторно-фінальна керованість гіперболічними системами в різних класах узагальнених функцій	119
--	-----

Анісімов А.В., Глибовець А.М., Жаб'юк В.Я. Основні архітектурні принципи побудови програмних систем реалізації мобільних агентів	125
Джалладова І.А. Існування та побудова асимптотичних систем для рівнянь із запізнюванням	131
Донадзе М.В., Джибладзе Н., Дидманидзе И.Ш. Диалоговая система оптимального проектирования электронных схем	136
Куршубадзе Ц.В., Дидманидзе И.Ш. Роль и назначение проекционного черчения в обучении инженерной графики	139
Машенко С.О. Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг	142
Нікітін А.В. Знаходження оптимального розв'язку узагальненого матричного рівняння Сильвестра з векторними вінеровим процесом та пуассоновою мірою	148
Панченко Т.В. Формалізація видів паралелізму у IPCL	152
Подлипенко Ю.К., Горбатенко М.Ю. Оцінювання узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, що допускають змішане варіаційне формулювання	158
Савкіна М.Ю. Уточнення меж для зсунення оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплаймової регресії	165
Сахно Н.В., Каденко І.М. Оцінка впливу людського фактору на надійність результатів неруйнівного контролю обладнання АЕС України	173
Терещенко В.М., Волошин С.Г. Розподіл прав доступу в облікових системах	180
Холод Д.В., Шевченко В.П. Аналіз алгоритмів функціонування систем автоматизації навчального процесу	184
Швець О.Ф., Дегтяр О.С. Про один адаптивний алгоритм апроксимації кусково-неперервних сигналів	192

РАДІОФІЗИКА

Короновський В.Є., Каленіченко О.О. Оптичні явища у вісмут-заміщених плівках ферит-гранатів у поперечному електричному полі	199
Мамілов С.О. Фотодисоціація оксигемоглобіну в артеріальній крові під дією лазера <i>in vivo</i>	202
Мельник П.В., Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sn/Ge(111)-c(2x8)	205
Прокопенко О.В., Верба Р.В., Борисенко М.О. Вузкосмуговий режим вимушеної фазової синхронізації магнітних наноконтактів	210

СУЧАСНА ФІЗИКА

Атамась Н.О. Вплив будови внесеної у воду молекули спирту на зміну сітки водневих зв'язків між молекулами води	217
Актан О.Ю. Вплив медичних препаратів, що містять фермент "Гіалуронідаза" на формування колагенових структур	220
Беженар А.А., Копань В.С., Хуторянська Н.В. Термо-е.р.с. фторопласту відносно міді	223
Білокриницька Л.М., Гришук О.Ю., Клименко В.Є., Шостак С.В., Гречко Л.Г. Поглинання електромагнітного випромінювання (ЕМВ) матричними дисперсними системами з багатошаровими кульовими включеннями	226
Дегода В.Я., Софієнко А.О. Фосфоресценція і релаксація струму в селеніді цинку після фото- та рентгенівського збудження	232
Дмитрук І.М., Коренюк П.І. Геометричні пояснення до визначника	241
Корнієнко М.Є. Ефекти сильної фонон-електронної взаємодії 2. Природа широкосмугового фону в спектрах комбінаційного розсіяння світла	248
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Турков О.В., Саєнко Г.В. Експериментальні дослідження температурно-часової стабільності багатокомпонентних аморфних сплавів	257
Погорелов В.Є., Дорошенко І.Ю., Чернолевська Є.А. Прояв нанорозмірних особливостей структури рідких пропанолу та бутанолу в спектрах комбінаційного розсіяння	261
Хлопов А.М., Руденко О.П. Дослідження пружних властивостей фенілтрифторметилсульфіду вздовж кривої рівноваги	264

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.554.314

Наталія В. Бондаренко

**Максимальні підалгебри та підалгебра
Фраттіні алгебри Лі, асоційованої з
силовською p -підгрупою скінченної
симетричної групи**

Вивчаються максимальні підалгебри, підалгебра Фраттіні та мінімальні ідеали алгебри Лі L_m , асоційованої з силовською p -підгрупою симетричної групи степеня p^n (p – просте число). Показано, що максимальні підалгебри цієї алгебри є паралелотопічними підалгебрами, та знайдено їх характеристики. Встановлено, що підалгебра Фраттіні алгебри Лі L_m збігається з її комутантом, а також показано, що L_m містить єдиний мінімальний ідеал – це її центр.

Ключові слова: Алгебри Лі, Алгебра Лі, асоційована з нижнім центральним рядом, підалгебра Фраттіні.

E-mail: natvbond@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко.

Вступ. Алгебри Лі, асоційовані з нільпотентними та нільпотентно апроксимованими групами відіграють важливу роль в сучасній алгебрі, особливо в теорії груп. Методи алгебр Лі виявилися ефективними для розв'язання цілого ряду теоретико-групових проблем: при вивченні групових тотожностей, росту груп, в теорії автоморфізмів з нерухомою точкою, розмірності Хаусдорфа, спектра про- p -груп та ін. Це пов'язано з тим, що багато властивостей груп відображені у властивостях відповідних їм алгебрах Лі. Одним з найбільш важливих результатів, отриманих за допомогою лієвих методів є розв'язання Е. Зельмановим послабленої проблеми Бернсайда.

Алгебра Лі L_m , асоційована з нижнім центральним рядом силовської p -підгрупи симетричної групи степеня p^n , вивчалася в роботі [3]. Було показано, що така алгебра Лі має спеціальне табличне зображення, подібне до табличного зображення силовської p -підгрупи P_m симетричної групи степеня p^n , побудоване Л.А. Калужніним [2]. Тому природним стало перенесення техніки Л.А. Калужніна на алгебру Лі L_m . В термінах характеристик описано нижній та верхній центральні ряди, ряд комутантів та енгелевий ряд алгебри Лі L_m . Вивчення будови алгебри Лі L_m

Nataliya V Bondarenko

**Maximal subalgebras and Frattini
subalgebra of Lie algebra associated with
Sylow p -subgroup of finite
symmetric group**

We study the maximal subalgebras, the Frattini subalgebra and minimal ideals of the Lie algebra L_m , associated with the Sylow p -subgroup of symmetric group of degree p^n (p is a prime). It is shown that maximal subalgebras of this Lie algebra are parallelotopic subalgebras and their characteristics are determined. It is established that the Frattini subalgebra of L_m coincides with its commutant and also shown that the center of L_m is the unique minimal ideal of L_m .

Key Words. Lie algebra, Lie algebra associated with the lower central series, Frattini subalgebra.

дало можливість зобразити її у вигляді вінцевого добутку одновимірних алгебр Лі над скінченним полем F_p порядку p [4].

В даній роботі продовжується дослідження будови алгебри Лі L_m . А саме вивчаються максимальні підалгебри, підалгебра Фраттіні та мінімальні ідеали алгебри Лі L_m . Показано, що максимальні підалгебри алгебри Лі L_m є паралелотопічними підалгебрами та знайдено їх характеристика. Встановлено, що підалгебра Фраттіні збігається з коммутантом алгебри Лі L_m , а отже, вона також є ідеалом Фраттіні. Крім того, алгебра Лі L_m має єдиний мінімальний ідеал – її центр.

Основна частина. Нехай L – алгебра Лі над полем K . Підалгебра M алгебри Лі L називається *максимальною*, якщо $M \neq L$ і з включення $M \subset M_1$, де M_1 – підалгебра в L , випливає $M_1 = L$.

Нехай $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ – множина всіх (можливо, порожня) максимальних підалгебр алгебри Лі L . Підалгебра Фраттіні $\Phi(L)$ визначається, як сама L , якщо $I = \emptyset$, і як перетин $\Phi(L) = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$, якщо $I \neq \emptyset$.

Ідеалом Фраттіні $\phi(L)$ називається максимальний ідеал алгебри Лі L , що міститься в підалгебрі Фраттіні $\Phi(L)$. Якщо L – скінченновимірна алгебра Лі над K , то з теореми Барнса ([1], ст. 38) випливає, що $\phi(L)$ – нільпотентна алгебра Лі. Крім того, якщо L – розв'язна алгебра Лі, то має місце рівність $\phi(L) = \Phi(L)$.

Сума всіх мінімальних ідеалів алгебри Лі L називається її *цоклем* та позначається $Soc(L)$.

В роботі [2] було показано, що алгебра Лі, асоційована з нижнім центральним рядом силовської p -підгрупи P_m симетричної групи S_p , має спеціальне табличне зображення. Тобто її елементами є трикутні таблиці вигляду

$$u = [a_1, a_2(x_1), \dots, a_m(x_1, \dots, x_{m-1})], \quad (1)$$

де $a_1 \in Z_p$, $a_i(x_{i-1}) \in Z_p^{(0)}[x_1, \dots, x_{i-1}]$, $i=2, 3, \dots, m$ – редуковані многочлени степеня $\leq p-1$ за модулем ідеала I_i , породженого степенями $x_1^p, x_2^p, \dots, x_{i-1}^p$.

k -ту координату таблиці (1) будемо позначати символом $\{u\}_k$.

r -координатною таблицею називається таблиця, у якій всі координати нульові, крім r -тої.

Операції на алгебрі Лі L_m визначаються наступним чином:

Сумою таблиць $u, v \in L_m$ називається таблиця $u+v$ з координатами

$$\{u+v\}_k = \{u\}_k + \{v\}_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

Добутком таблиці $u \in L_m$ на елемент $a \in L_m$ називається таблиця au з координатами

$$\{au\}_k = a\{u\}_k \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Дужкою Лі таблиць $u, v \in L_m$ називається таблиця (u, v) з координатами

$$\{(u, v)\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{v\}_k}{\partial x_i} \{u\}_i - \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \{v\}_i \right)$$

Нижче наведемо основні поняття, що використовуються для дослідження алгебри Лі L_m .

Висотою редукованого одночлена $v = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$, $0 \leq k_i \leq p-1$ ($i=1, 2, \dots, s$), називається число:

$$h(v) = 1 + k_1 + k_2 p + \dots + k_s p^{s-1},$$

а висотою $h(f)$ редукованого многочлена $f(x_1, \dots, x_s)$ – найбільша із висот його одночленів. Будемо вважати, що висота нульового мно-

члена рівна нулю. Цілочисельний вектор $h(u) = \langle h(\{u\}_1), h(\{u\}_2), \dots, h(\{u\}_m) \rangle$ будемо називати характеристикою таблиці $u \in L_m$.

На множині характеристик таблиць алгебри L_m вводиться частковий порядок покоординатного порівняння, тобто якщо $\chi = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$, $\chi' = \langle h_1', h_2', \dots, h_m' \rangle$ – дві характеристики таблиць, то покладемо $\chi \leq \chi'$ тоді і тільки тоді, коли $h_i \leq h_i'$ для всіх $i=1, 2, \dots, m$. Вектор $\langle 1, p, p^2, \dots, p^{m-1} \rangle$ є максимальним, а вектор $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ – мінімальним відносно так визначеного порядку.

Означення 1. Підалгебра $U < L_m$ називається *паралелотопічною*, якщо для довільних таблиць $u, v \in L_m$ з того, що $u \in U$ і $h(v) \leq h(u)$, випливає, що $v \in U$.

Кожна паралелотопічна підалгебра U однозначно визначається вектором

$$h(U) = \langle \max_{u \in U} \{h(\{u\}_1)\}, \dots, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_m)\} \rangle,$$

який називається її *характеристикою*. Паралелотопічна підалгебра з характеристикою h складається із всіх можливих таблиць, характеристики яких не перевищують h в сенсі покоординатного порівняння.

Далі будемо використовувати позначення $n^+ = \max\{n, 0\}$, де n – деяке число.

Лема 1 ([3]). Для довільних таблиць $u, v \in L_m$ справедлива нерівність:

$$h(\{(u, v)\}_k) \leq \max(h(\{u\}_k), h(\{v\}_k)) - 1,$$

причому для довільної таблиці $u \in L_m$ існує таблиця $v \in L_m$ така, що $h(\{(u, v)\}_k) = h(\{u\}_k) - 1$.

Теорема 1. Паралелотопічні підалгебри M_k алгебри Лі L_m з характеристикою

$$\langle 1, p, p^2, \dots, p^{k-1} - 1, \dots, p^{m-1} \rangle, \quad k=1, \dots, m$$

і лише вони є максимальними підалгебрами.

Доведення. Доведемо, що підалгебра M_k , $k=1, \dots, m$, є максимальною в L_m . Розглянемо елемент $u \in M_k$. Тоді $h(\{u\}_k) = p^{k-1}$. Оскільки підалгебра M_k є паралелотопічною, то підалгебра u, M_k містить k -координатну таблицю, на k -тій координаті якої стоїть одночлен висоти p^{k-1} .

Звідси отримуємо, що u, M_k містить всі таблиці, висоти k -тих координат яких рівні p^{k-1} . Отже, $u, M_k = L_m$, що й доводить максимальність підалгебри M_k .

Нехай M – максимальна підалгебра в L_m . Покажемо, що $M = M_k$ для деякого k . Покладемо $m_k = \max_{u \in M} h(\{u\}_k)$, $k=1, 2, \dots, m$.

Якщо $m_k < p^{k-1}$ для деякого k , то $M \subseteq M_k$. Звідси, в силу максимальності підалгебри M , маємо рівність $M = M_k$.

Припустимо, що $m_k = p^{k-1}$ для всіх $k=1, \dots, m$. Якщо M містить всі таблиці з усіма можливими характеристиками по k -тій координаті, то вона містить таблиці з усіма можливими многочленами по k -тій координаті. Тому ми можемо вибрати координату k так, що в M не існує таблиці з деякою характеристикою по k -тій координаті. Позначимо $r = \min_{u \in L_m \setminus M} h(\{u\}_k)$. Візьмемо таблицю $w \in M$, яка має характеристику $h(\{w\}_k) = p^{k-1}$. Розглянемо k -координатну таблицю $u = [0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0]$, де u_k – одночлен висоти r . За побудовою, u не належить M . Звідси отримуємо рівність $u, M_k = L_m$. Але $\{(u, v)\}_i = 0$ для будь-якого $i=1, \dots, k-1$. Отже, M містить всі i -координатні таблиці при $i=1, \dots, k-1$. Тоді існує i -координатна таблиця $v \in M$ така, що $\{(u, v)\}_k$ має висоту r . Отримали суперечність.

Наслідок. Підалгебра Фраттіні $\Phi(L)$ алгебри Лі L_m збігається з її комутантом.

Доведення. За попередньою теоремою перетин всіх максимальних підалгебр алгебри Лі L_m є паралелотопічною підалгеброю з характеристикою $\langle 0, p-1, p^2-1, \dots, p^{m-1}-1 \rangle$. Комутант $L_m^{(1)}$ алгебри Лі L_m має таку саму характеристику за теоремою 2.8 [3].

Теорема 2. Центр $Z(L_m)$ алгебри Лі L_m і лише він є мінімальним ідеалом.

Доведення. Оскільки центр алгебри Лі збігається з першим членом її верхнього центрального ряду, то за теоремою 4.4 [3] центр $Z(L_m)$ алгебри Лі L_m є одновірною паралелотопічною підалгеброю з характеристикою $\langle 0, 0, \dots, 0, 1 \rangle$. Отже,

$Z(L_m)$ є мінімальним ідеалом алгебри Лі L_m .

Нехай I – мінімальний ідеал алгебри Лі L_m . Покажемо, що $Z(L_m) \subset I$. Припустимо, що I містить m -координатну таблицю u . За лемою 1 існує таблиця $v \in L_m$ така, що

$$h(\{(u, v)\}_m) = h(\{u\}_m) - 1.$$

Оскільки I – ідеал алгебри L_m , то $(u, v) \in I$. Висоту m -тої координати таблиці (u, v) можна понизити на 1 і так далі. Таким чином, I містить всі m -координатні таблиці з константою по останній координаті. Тому маємо включення $Z(L_m) \subset I$.

Припустимо, що I не містить m -координатної таблиці. Розглянемо будь-яку таблицю $u \in I \setminus \{0\}$. Тоді, очевидно, існує m -координатна таблиця $v = [0, \dots, 0, v_m] \in L_m$ така, що $(u, v) \neq 0$, при цьому $(u, v) \in m$ -координатною таблицею. Звідси дістаємо, що $(u, v) \notin I$ і ми отримали суперечність. Теорема доведена.

Наслідок. Цоколь $\text{Soc}(L_m)$ алгебри Лі L_m збігається з її центром.

Висновки

Дана робота є ще одним прикладом того, що табличне зображення і пов'язана з ним техніка обчислень може знайти широке застосування при дослідженні алгебр Лі, асоційованих з симетричними групами та їх підгрупами. Результати даної роботи можуть бути використані при подальшому вивченні будови алгебр Лі, асоційованих з силовськими p -підгрупами скінченних симетричних груп, зокрема при вивченні вербальних ідеалів, дослідженні тотожностей в L_m , тощо.

Список використаних джерел

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
2. Kaloujnine L.A. La structure des p -groupes de Sylow des groupes symetriques finis // Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Super. – 1948. – Vol. 65, № 3. – P. 239-276.
3. Сушанский В.И., Нетреба Н.В. Алгебры Ли, ассоциированные с силовскими p -подгруппами конечных симметрических групп // Математичні Студії – 2005. – Т 24. – С. 127-138.
4. Sushchansky V.I., Netreba N.V. Wreath product of Lie algebras and Lie algebras associated with Sylow p -subgroups of finite symmetric groups // Algebra and Discrete Mathematics, – 2005. – N1. – P.122-132.

Надійшла до редакції 23.09.2008 р.

УДК 512.552

Наталя А. Броницька, аспірантка

Горенштейнові порядки ширини 2

Побудовано дві злічені множини горенштейнових черепичних порядків A таких, що $\text{inx}A = w(A) = 2$

Ключові слова: Горенштейнів порядок, матриця показників, сагайдак

natbron@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

Позначимо $M_n(\mathbb{Z})$ – кільце всіх квадратних $n \times n$ -матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ називається матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$, для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$ і $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, то матрицю $\mathcal{E}$ називають зведеною матрицею показників.

Ми будемо розглядати тільки зведені матриці показників.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників, $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})$ для $i \neq j$ і $(\beta_{ii}) = 1$ для $i = 1, \dots, n$ і $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $(\gamma_{ij}) = \min(\beta_{ik} + \beta_{kj})$. Зрозуміло, що $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ є $(0,1)$ -матрицею. Відома наступна теорема.

Теорема. Матриця $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ є матрицею показників сильно зв'язного простого сагайдака $Q = Q(\mathcal{E})$.

Означення. Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ називається сагайдаком зведеної матриці показників $\mathcal{E}$.

Означення. Сильно зв'язний простий сагайдак називається допустимим, якщо це є сагайдак зведеної матриці показників.

Індекс $\text{inx}\mathcal{E}$ – за теоремою Перрона-Фробеніуса це найбільше дійсне власне значення матриці суміжності $[Q(\mathcal{E})]$ сагайдака матриці показників $\mathcal{E}$.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Побудуємо $M_r(\mathcal{E})$ – частково впорядковану множину, асоційовану з $\mathcal{E}$. Її елементи: $p_i^k = (\alpha_{i1} + k, \dots, \alpha_{in} + k)$. На множині $M_r(\mathcal{E})$ визначено частковий порядок наступним чином: $p_i^k \leq p_j^l$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{jm} + l \leq \alpha_{im} + k$ для $m = 1, \dots, n$.

N. A. Bronickaya, PhD student

Gorenstein orders of the width two.

It is built two countable sets of Gorenstein orders A with $\text{inx}A = w(A) = 2$

Key Words: Gorenstein orders, exponent matrix, quiver

Твердження. $p_i^k \leq p_j^l$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ji} \leq k - l$.

Доведення.

Нехай матриця показників $\mathcal{E}$ – зведена. Тоді $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i \neq j$, і множина $M_r(\mathcal{E})$ може бути легко отримана з матриці (α_{ij}) : $p_i^k = (\alpha_{i1} + k, \dots, \alpha_{in} + k)$, де $i = 1, \dots, n$ і $k \in \mathbb{Z}$. Припустимо, що $p_i^k = p_j^l$. Це означає, що $\alpha_{jm} + l = \alpha_{im} + k$ для $m = 1, \dots, n$. Зокрема, $\alpha_{ii} + k = \alpha_{ji} + l$, тобто $k = \alpha_{ji} + l$. Аналогічно, $\alpha_{ij} + k = \alpha_{jj} + l$, тобто $l = \alpha_{ij} + k$. Таким чином, $k + l = \alpha_{ji} + \alpha_{ij} + k + l$ і ми отримуємо протиріччя: $\alpha_{ji} + \alpha_{ij} = 0$. Очевидно, частковий порядок на $M_r(\mathcal{E})$ може бути визначений наступним чином: $p_i^k \leq p_j^l$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{jm} + l \leq \alpha_{im} + k$ для $m = 1, \dots, n$. Таким чином, $\alpha_{ji} \leq k - l$.

Ширина $M_r(\mathcal{E})$ називається шириною матриці $\mathcal{E}$ і позначається $w(\mathcal{E})$.

Означення. Зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається Горенштейнвою, якщо існує перестановка $\sigma \{1, 2, \dots, n\}$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(j)} = \alpha_{i\sigma(j)}$ для $i, k = 1, \dots, n$.

Ми будемо використовувати термінологію і позначення [1, гл.7] и [2]. Нехай $\mathcal{O}$ – дискретно нормоване кільце з простим елементом π , D – його тіло часток, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ – зведена цілочислова матриця показників, $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}\}$ – черепичний порядок в $M_n(D)$. Якщо $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}\}$ – зведений черепичний порядок, то шириною A ($w(A)$) називається ширина $w(\mathcal{E})$ зведеної матриці показників $\mathcal{E}$.

Нехай

$$\mathcal{E}_{2n} = \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ kU_n + R_n & H_n \end{pmatrix},$$

$$\text{де } H_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$R_n = H_n + E_n$ (E_n – одинична матриця).

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ n+2 & n+3 & \dots & 2n & n+1 & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Матриця суміжності $[Q(\mathcal{E}_{2n})]$ сагайдака $\mathcal{E}_{2n}$ дорівнює $\begin{bmatrix} C_n & E_n \\ C_n & C_n \end{bmatrix}$,

де $C_n = J_n^-(0) + e_{1n}$, где $J_n^-(0)$ – нижня клітка Жордана з нульовим власним числом, e_{1n} – матрична одиниця, що відповідає позиції $(1, n)$.

Позначимо P_τ – матрицю підстановки τ . Тоді $[Q(\mathcal{E}_{2n})] = P_{\sigma^2} + P_{\sigma^3}$. Тому індекс матриці $\mathcal{E}_{2n}$ $\text{indeg} \mathcal{E}_{2n}$ дорівнює двом.

Індексом $\text{indeg} A$ черепичного порядку A називається найбільше власне число матриці суміжності $[Q(A)]$ сагайдака $Q(A)$.

Зауважимо, що $\text{indeg} A$ зведеного черепичного порядку A співпадає з $\text{indeg} \mathcal{E}(A)$, де $\mathcal{E}(A)$ – матриця показників зведеного черепичного порядку A . Крім того $Q(A) = Q(\mathcal{E}(A))$.

$A_{2n} = \{\mathcal{E}_{2n}, O\}$ є порядком ширини два ($w(A_{2n}) = 2$ за теоремою 3.6 [?]). Матриця $\mathcal{E}_{2n}$ є горенштейновою з наступною циклічною підстановкою

Зведений черепичний порядок A є горенштейновим, тоді і тільки тоді, коли його матриця показників горенштейнова [?].

Таким чином, мы побудували злічену множину циклічних горенштейнових матриць $\mathcal{E}_{2n}$ таких, що $w(\mathcal{E}_{2n}) = \text{indeg} \mathcal{E}_{2n} = 2$

Тому $A_{2n} = \{O, \mathcal{E}_{2n}\}$ – злічена множина черепичних порядків ширини два, причому $\text{indeg} A_{2n} = 2$

Теорема. Нехай A – зведений циклічний горенштейновий порядок ширини 2. Тоді $w(A) = \text{indeg} A = 2$

Розглянемо зведену матрицю показників Δ_{2n} наступного вигляду:

$$\Delta_{2n} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline k+1 & k & k & \dots & k & k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & k & \dots & k & k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k & k & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 & k & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 & k+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right]$$

або, по-іншому,

$$\Delta_{2n} = \left[\begin{array}{c|c} H_n & R_n \\ \hline R_n + kU_n & H_n \end{array} \right],$$

$$\text{де } H_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$R_n = H_n + E_n$ (причому E_n – одинична матриця),

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{квадратна матриця}$$

порядку n , всі елементи якої дорівнюють 1, k – натуральне число.

Матриця Δ_{2n} є горенштейновою з підстановкою Кириченка

$$\sigma(\Delta_{2n}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ n+1 & \dots & 2n & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Обчислимо сагайдак $Q(\Delta_{2n})$ матриці Δ_{2n} . Для цього розглянемо матриці $\Delta_{2n}^{(1)}$ і $\Delta_{2n}^{(2)}$. Матриця $\Delta_{2n}^{(1)}$ має вигляд:

$$\Delta_{2n}^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} R_n & R_n \\ \hline R_n + kU_n & R_n \end{array} \right],$$

Тоді матриця $\Delta_{2n}^{(2)}$ записується наступним чином:

$$\Delta_{2n} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline k+1 & k+1 & k & \dots & k & k & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k & k & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k & k & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 & k+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k+2 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 & k+1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

і матриця суміжності $[Q(\Delta_{2n})]$ сагайдака $Q(\Delta_{2n})$ має вигляд:

$$[Q(\Delta_{2n})] = \left[\begin{array}{c|c} C_n & C_n \\ \hline C_n & C_n \end{array} \right],$$

$$\text{де } C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Інакше кажучи, C_n є перестановочною матрицею, яка відповідає циклічній перестановці $(1\ 2\ \dots\ n)$.

За теоремою 3.6 [?] ширина матриці Δ_{2n} дорівнює 2.

В цьому випадку $\text{inl}\Delta_{2n} = 2$, так як $[Q(\Delta_{2n})] = 2D_{2n}$, де D_{2n} – двічі стохастична матриця. Таким чином ми побудували злічену множину горенштейнових матриць Δ_{2n} таких, що $w(\Delta_{2n}) = \text{inl}\Delta_{2n} = 2$. Звідси випливає, що ми побудували злічену множину горенштейнових черепичних порядків $B_{2n} = \{O, \Delta_{2n}\}$ шири-ни два, індекси яких також дорівнюють двом.

Розглянемо квадратну матрицю $T_{n,\alpha}$ поряд-ка n наступного вигляду:

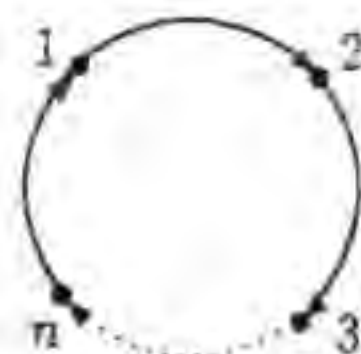
$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

де α – натуральне число.

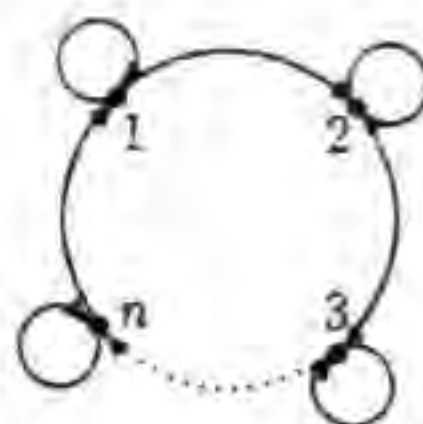
При будь-якому α це горенштейнова матри-ця з циклічною підстановкою Кириченка

$$\sigma(T_{n,\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Зрозуміло, що $T_{n,1} = H_n$ і сагайдак матриці H_n є простим циклом.



В цьому випадку $\text{inl}T_{n,1} = 1$ і $\omega(T_{n,1}) = 1$. Неважко показати, що при $\alpha \geq 2$ сагайдак $T_{n,\alpha}$ має вигляд:



І при $\alpha \geq 2$ індекс сагайдака $\text{inl}(T_{n,\alpha}) = 2$.

Матриця $T_{n,\alpha}$ має ширину рівну два, тоді і тільки тоді, коли $\alpha = 2$. При $\alpha \geq 3$ ширина ма-триці $T_{n,\alpha}$ може бути як завгодно великою. Та-ким чином, існують горенштейнові матриці індексу два як завгодно великої ширини.

Список використаних джерел

1. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko Algebras, rings and modules. Vol. 2.// Mathematics and its Applications – 586. – Springer, Dordrecht – 2007 – xii+400 pp.
2. Завадский А.Г., Кириченко Б.В. Модули без кручения над первичными кольцами. // К. "Вища школа", 1980. – 200 с.

УДК 517.9

Олег Ю. Дейнека, асистент

Експоненціальна стійкість розв'язків мішаної задачі для системи телеграфних рівнянь

Отримано необхідні і достатні умови експоненціальної стійкості розв'язків системи телеграфних рівнянь з лінійними крайовими умовами.

Ключові слова: система телеграфних рівнянь, експоненціальна стійкість нульового розв'язку.

Статтю представив д. ф.-м. наук, проф. Перестюк М.О.

1. Вступ. У даній статті вивчаються умови експоненціальної стійкості розв'язків мішаної задачі для системи телеграфних рівнянь. При цьому використовується зведення цієї мішаної задачі до відповідної системи диференціально-різницевого рівняння із початковою умовою. Такий підхід має змогу ефективно використовувати якісну теорію диференціально-різницевого рівняння для визначення необхідних і достатніх умов експоненціальної стійкості тривіального розв'язку даної мішаної задачі.

2. Постановка задачі та формулювання основного результату. Нехай $C^0(M, R^n)$ та $C^1(M, R^n)$ – простори неперервних та неперервно диференційованих на множині M функцій із значеннями в R^n з нормами $\|z\|_{C^0} = \sup_{t \in M} \|z(t)\|_{R^n}$ і $\|z\|_{C^1} = \|z\|_{C^0} + \sup_{t \in M} \left\| \frac{dz(t)}{dt} \right\|_{R^n}$, відповідно.

Вивчається експоненціальна стійкість тривіального розв'язку системи гіперболічних рівнянь

$$A \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$A \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0,$$

з крайовими

$$\frac{du(0, t)}{dt} + Cu(0, t) + Dv(0, t) = f(t), \quad (2)$$

$$B \frac{du(l, t)}{dt} + Fu(l, t) + Gv(l, t) = g(t), \quad t \geq 0,$$

та початковими умовами

Oleg Y. Deyneka, assistant

Exponential stability solutions of mixed problem for system of telegraphic equations

The necessary and sufficient conditions of exponential stability of solutions of the system of telegraph equations with linear boundary conditions are received.

Key Words: system telegraphic equations, exponential stability of trivial solution.

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad v(x, 0) = \beta(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

де $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $a_j > 0$, $j \in \overline{1, n}$; l – фіксоване додатне число; C, D, E, F, G – квадратні матриці n -го порядку; функції $f(t) \in C^1([0, +\infty), R^n)$, $g(t) \in C^0([0, +\infty), R^n)$; $\alpha(x), \beta(x) \in C^1([0, l], R^n)$.

Так як класичний розв'язок задачі (1) – (3) $v(x, t), u(x, t) \in C^1([0, l] \times [0, +\infty), R^n)$, то крайові і початкова умови (3) мають бути узгоджені в точках $(0, 0)$ та $(l, 0)$. Враховуючи рівняння (1) та умову (3), в околі точки $(0, 0)$ знаходимо:

$$\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(0, t),$$

$$\beta(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow 0} v(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} v(0, t),$$

$$-\beta'(0) = - \lim_{x \rightarrow 0} \beta'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} v'_x(x, 0) =$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} v'_x(x, t) = A \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} u'_x(x, t) = A \lim_{t \rightarrow 0} u'_x(0, t), \text{ тому}$$

$$-\alpha'(0) = - \lim_{x \rightarrow 0} \alpha'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} u'_x(x, 0) =$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} u'_x(x, t) = A \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} v'_x(x, t) = A \lim_{t \rightarrow 0} v'_x(0, t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = \alpha(0), \quad \lim_{t \rightarrow 0} u'_x(0, t) = -A^{-1} \beta'(0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(0, t) = \beta(0), \quad \lim_{t \rightarrow 0} v'_x(0, t) = -A^{-1} \alpha'(0).$$

Аналогічним чином для точки $(l, 0)$ маємо

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(l, t) = \alpha(l), \quad \lim_{t \rightarrow 0} v(l, t) = \beta(l),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u'_x(l, t) = -A^{-1} \beta'(l), \quad \lim_{t \rightarrow 0} v'_x(l, t) = -A^{-1} \alpha'(l).$$

Отримані співвідношення разом із крайовою умовою (2) визначають умови узгодження

$$\begin{aligned} C\alpha(0) + D\beta(0) &= f(0), \\ C\beta(0) + D\alpha(0) &= -Af'(0), \\ -BA^{-1}\beta(l) + F\alpha(l) + G\beta(l) &= g(0). \end{aligned} \quad (4)$$

Нагадаємо, що тривіальний розв'язок задачі (1) – (3), при виконанні умов узгодження, називається експоненціально стійким, якщо існують такі додатні числа γ і N , що для довільного розв'язку цієї задачі виконується нерівність

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, l]} (\|v(x, t)\|_{R^n} + \|u(x, t)\|_{R^n}) &\leq \\ &\leq N \exp\{-\gamma t\} \max_{x \in [0, l]} (\|v(x, 0)\|_{R^n} + \|u(x, 0)\|_{R^n}) \end{aligned}$$

для всіх $t \geq 0$.

Вважаючи, що матриця $C + D$ не вироджена позначимо

$$H(\omega) = \sum_{k, v=1}^n \exp\{-i\omega(a_k + a_v)\} P_k (C + D)^{-1} (D - C) P_v, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

де $P_k = \text{diag}(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kn})$, δ_{kn} – символ Кронекера.

Теорема. Нехай $\det B(C + D)(C - D) \neq 0$, $f(t) \equiv g(t) \equiv 0$. Тоді, якщо $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} r(H(\omega)) < 1$, то тривіальний розв'язок задачі (1) – (3) експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} \bigcup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma[(I + H(\omega))^{-1} (B^{-1}(G - F) - B^{-1}(F + G)H(\omega))] &\subset \\ &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}. \end{aligned}$$

Тут $\sigma(A)$ – спектр оператора A , а $r(A)$ – його спектральний радіус.

3. Взаємозв'язок між розв'язками задачі (1) – (3) та системою диференціально-різницьових рівнянь із початковою умовою. З результатів роботи [3] слідує, що задача (1), (2) з урахуванням представлення загального розв'язку рівняння (1) у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k (\varphi(t - a_k x) + \theta(t + a_k x)), \quad (5)$$

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k (\varphi(t - a_k x) - \theta(t + a_k x)),$$

зводиться при виконанні умов „узгодження” (4) до системи диференціально-різницьових рівнянь

$$(C + D)\varphi(t) + (C - D)\theta(t) = f(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l) + B \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n P_k \varphi(t - a_k l) + \\ + (F - G) \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l) + (F + G) \sum_{k=1}^n P_k \varphi(t - a_k l) = \\ = g(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Остання рівність після виключення функції $\varphi(t)$ та заміни

$$y(t) = \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l) \quad (8)$$

набуває вигляду диференціально-різницьового рівняння

$$\begin{aligned} B \frac{dy(t)}{dt} + \\ + B \sum_{k, v=1}^n P_k (C + D)^{-1} (D - C) P_v \frac{dy(t - (a_k + a_v)l)}{dt} + \\ + (F - G)y(t) + \\ + (F + G) \sum_{k, v=1}^n P_k (C + D)^{-1} (D - C) P_v y(t - (a_k + a_v)l) = \\ = \psi(t), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \psi(t) = g(t) - B \sum_{k, v=1}^n P_k (C + D)^{-1} \frac{df(t - a_k l)}{dt} - \\ - (F + G) \sum_{k, v=1}^n P_k (C + D)^{-1} f(t - a_k l). \end{aligned} \quad (10)$$

Крім того, розв'язки задач (1), (2) та (6), (9), (10) пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k [(C + D)^{-1} (f(t - a_k x) + \\ + (D - C) \sum_{v=1}^n P_v y(t - a_k x - a_v l)) + \\ + \sum_{v=1}^n P_v y(t + a_k x - a_v l)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k [(C + D)^{-1} (f(t - a_k x) + \\ + (D - C) \sum_{v=1}^n P_v y(t - a_k x - a_v l)) - \\ - \sum_{v=1}^n P_v y(t + a_k x - a_v l)] \end{aligned}$$

$$\text{та } y(t) = \frac{1}{2} (u(l, t) - v(l, t)). \quad (12)$$

Згідно [1] для існування та єдиності розв'язку диференціально-різницьового рівняння (9) початкову умову $y_0(t)$ необхідно задати на проміжку $[0, \Delta]$, де $\Delta = 2 \max_k a_k l$. Тобто,

враховуючи заміну $y(t) = \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l)$ досить

продовжити $\theta_k(t)$ на $[a_k l, a_k l + \Delta]$ так, щоб $\theta_k(t) \in C^1([a_k l, a_k l + \Delta], \mathbb{R})$ для $k = \overline{1, n}$. Крім

цього, разом із заданням початкової умови $y(t) = y_0(t)$ при $t \in [0, \Delta]$, для існування єдиного розв'язку рівняння (9), (10) на підставі теореми існування та єдиності [1] необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dy_0(t)}{dt} \right|_{t=\Delta} + \\ & \sum_{k=1}^n P_k (C+D)^{-1} (D-C) P_k \left. \frac{dy_0(t - (a_k + a_v)\chi)}{dt} \right|_{t=\Delta} + \\ & + B^{-1} (F-G) y_0(\Delta) + B^{-1} (F+G) x \\ & \times \sum_{k=1}^n P_k (C+D)^{-1} (D-C) P_k y_0(\Delta - (a_k + a_v)\chi) = \\ & = \psi(\Delta), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\psi(t)$ визначається формулою (10).

Опишемо алгоритм продовження початкової умови. Спочатку відмітимо, що із умов (3), (5) можна визначити функції $\varphi_k(t)$ на $[-a_k l, \Delta_0]$, а

$\theta_k(t)$ – на $[-\Delta_0, a_k l]$, де $\Delta_0 = \min_k a_k l$, $k = \overline{1, n}$.

Перша та друга умови із (4) гарантують неперервну диференційовність функцій $\theta(t)$ і $\varphi(t)$ в точці $t = 0$. Звідси випливає, що для всіх $k = \overline{1, n}$ функції

$$\varphi_k(t) \in C^1([-a_k l, \Delta_0], \mathbb{R}).$$

Далі із рівняння (7), надаючи змінній t значення від 0 до Δ_0 визначаємо функції $\theta_k(t) \in C^1([a_k l, a_k l + \Delta_0], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$, причому на підставі теореми існування та єдиності [1] та третьої умови узгодження із (4) маємо, що

$$\theta_k(t) \in C^1([0, a_k l + \Delta_0], \mathbb{R}), \quad k = \overline{1, n}.$$

При цьому, враховуючи заміну (8) справедливе співвідношення аналогічне до (13)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dy_0(t)}{dt} \right|_{t=\Delta_0} + \\ & \sum_{k=1}^n P_k (C+D)^{-1} (D-C) P_k \left. \frac{dy_0(t - (a_k + a_v)\chi)}{dt} \right|_{t=\Delta_0} + \\ & + B^{-1} (F-G) y_0(\Delta_0) + B^{-1} (F+G) x \\ & \times \sum_{k=1}^n P_k (C+D)^{-1} (D-C) P_k y_0(\Delta_0 - (a_k + a_v)\chi) = \\ & = \psi(\Delta_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Потім із рівняння (6) визначаємо $\varphi_k(t) \in C^1([-a_k l, 2\Delta_0], \mathbb{R})$, після чого знову із (7) знаходимо $\theta_k(t) \in C^1([a_k l + \Delta_0, a_k l + 2\Delta_0], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$. Враховуючи те, що нам відомо розв'язок $\theta(t)$ рівняння (7) на інтервалі

$[0, a_k l + \Delta_0]$, відповідно до теореми існування та єдиності [1] і рівності (14) робимо висновок, що $\theta_k(t) \in C^1([0, a_k l + 2\Delta_0], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$.

Повторюючи описаний алгоритм $[\Delta/\Delta_0] + 1$ число разів, де $[x]$ – ціла частина числа x , отримаємо $\theta_k(t) \in C^1([a_k l, a_k l + \Delta], \mathbb{R})$, звідки визначається початкова умова $y_0(t) \in C^1([0, \Delta], \mathbb{R}^n)$, яка задовольняє співвідношення (13).

Навпаки, нехай задано рівняння (9) з правою частиною (10), початковою умовою $y_0(t) \in C^1([0, \Delta], \mathbb{R}^n)$, для якої виконується (13) і яке ставиться у відповідність задачі (1) – (3). Тоді, із початкової умови $y_0(t) \in C^1([0, \Delta], \mathbb{R}^n)$, згідно заміни (8) визначені функції $\theta_k(t) \in C^1([a_k l, a_k l + \Delta], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$. Далі, враховуючи заміну (8) та умову (13), перейдемо до рівняння (7) і знайдемо функції $\varphi_k(t) \in C^1([-a_k l, \Delta - a_k l], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$.

Тепер, на підставі рівняння (6), а також за вже відомими $\varphi_k(t) \in C^1([-a_k l, \Delta - a_k l], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, n}$ знаходимо $\theta_k(t) \in C^1([-\Delta_0, a_k l], \mathbb{R})$. Співвідношення (13) гарантує неперервну диференційованість $\theta_k(t)$ в точках $t = a_k l$, а для $\varphi_k(t)$ – в точках $t = -a_k l$ для всіх $k = \overline{1, n}$. Отже, для усіх $k = \overline{1, n}$ отримано функції $\theta_k(t) \in C^1([0, a_k l], \mathbb{R})$, $\varphi_k(t) \in C^1([-a_k l, 0], \mathbb{R})$, які, згідно із (5) визначають початкові умови (3) – $\alpha(t), \beta(t) \in C^1([0, l], \mathbb{R}^n)$, що задовольняють умову (4).

Як наслідок із вище сказаного отримуємо твердження.

Лема 1. Нехай $\det B(C+D)(C-D) \neq 0$, $f(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $g(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Тоді розв'язок рівняння (9), (10) із початковою умовою $y_0(t) \in C^1([0, \Delta], \mathbb{R}^n)$, що задовольняє (13), та розв'язок мішаної задачі (1) – (3) із умовою узгодження (4) пов'язані співвідношенням (11), якщо початкова умова (3) визначається із $y_0(t)$ та співвідношенням (12), якщо $y_0(t)$ визначається із початкової умови (3).

Враховуючи означення експоненціальної стійкості, з леми 1 можна отримати таке твердження.

Лема 2. Нехай $\det B(C+D)(C-D) \neq 0$, $f(t) \equiv g(t) \equiv 0$. Тривіальний розв'язок задачі (1) – (3) при умові узгодження (4) є експоненціально стійким тоді і тільки тоді, коли експоненціально стійким є тривіальний розв'язок диференціально-різницевого рівняння (9), (10) з початковою умовою $y_0(t)$ при виконанні (13), тобто якщо існують такі числа $\gamma_1 > 0$ і $N_1 > 0$, що для довільного розв'язку (9), (10) із початковою умовою $y_0(t)$ виконується нерівність $\|y(t)\|_{R^n} \leq N_1 \exp\{-\gamma_1 t\} \max_{t \in [0, \Delta]} \|y_0(t)\|_{R^n}$ для всіх $t \geq 0$.

Перейдемо до доведення теореми за схемою, що запропонована В.Ю. Слюсарчуком в [5].

4. Доведення теореми. Після перепозначень

$$\sum_{k,v=1}^n P_k (C+D)^{-1} (D-C) P_v y(t - (a_k + a_v) \gamma) = \sum_{k,v=1}^n A_{k,v} y(t - \Delta_{v,k}), \quad (15)$$

$B^{-1}(G-F) = B_0$, $-B^{-1}(G+F) = B_1$ у рівнянні (9), при $\psi \equiv 0$ отримаємо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) + \sum_{k,v=1}^n A_{k,v} y(t - \Delta_{v,k}) \right) = B_0 y(t) + B_1 \sum_{k,v=1}^n A_{k,v} y(t - \Delta_{v,k}), \quad (16)$$

а умова (13) набуває вигляду

$$\left. \frac{dy_0(t)}{dt} \right|_{t=\Delta} + \sum_{k,v=1}^n A_{k,v} \left. \frac{dy_0(t - \Delta_{v,k})}{dt} \right|_{t=\Delta} = B_0 y_0(\Delta) + B_1 \sum_{k,v=1}^n A_{k,v} y_0(\Delta - \Delta_{v,k}), \quad (17)$$

де $y_0(t) \in C^1([0, \Delta], R^n)$ – початкова умова для (16), $\Delta = \max_{v,k} \Delta_{v,k}$.

Необхідність. Нехай тривіальний розв'язок задачі (1) – (4) є експоненціально стійким. Тоді, згідно лемою 2, тривіальний розв'язок (16), (17) є експоненціально стійким. Подамо цей розв'язок у вигляді $y(t) = \exp\{pt\}b$ ($b \in R^n$, p – комплексне число, $t \geq 0$). Тоді рівняння (16) набуде вигляду

$$p \exp\{pt\}b + p \exp\{pt\}H(-ip)b = p \exp\{pt\}B_0b + p \exp\{pt\}B_1H(-ip)b$$

або

$$p(I + H(-ip))b = (B_0 + B_1H(-ip))b.$$

З умови $\sup_{\omega \in R} r(H(\omega)) < 1$ теореми та рівномірної неперервності $H(\omega)$, як майже-періодичної функції, випливає існування неперервного оператора $(I + H(\omega))^{-1}$ [4]. Тому,

$$(I + H(-ip))^{-1}(B_0 + B_1H(-ip))b = pb$$

і за припущенням про експоненціальну стійкість розв'язку $y(t) = \exp\{pt\}b$ робимо висновок, що $\operatorname{Re} p < 0$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай виконуються умови теореми. Тоді існує неперервний обернений оператор $(I + H(\omega))^{-1}$ [4], тому

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|(I + H(-i\lambda))^{-1}\|_{L(R^n, R^n)} < \infty. \quad (18)$$

З умови теореми, враховуючи зроблені позначення (15) отримуємо, що

$$\bigcup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \sigma[(I + H(-i\lambda))^{-1}(B_0 + B_1H(-i\lambda))] \subset \{\mu : \operatorname{Re} \mu \leq \varepsilon < 0\},$$

тобто

$$\bigcup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \sigma[\lambda I - (I + H(-i\lambda))^{-1}(B_0 + B_1H(-i\lambda))] \subset \{\mu : \operatorname{Re} \mu > 0\}.$$

Отже,

$$0 \in \sigma[\lambda(I + H(-i\lambda)) - B_0 - B_1H(-i\lambda)] \quad (19)$$

для всіх $\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Введемо в розгляд функцію

$$z(t) = \begin{cases} \exp\{\beta t\} \mathcal{G}(t, \psi(t)), & \text{коли } t \geq 0, \\ \exp\{\beta t\} \psi(\tau), & \text{коли } t \in [0, \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \end{cases} \quad (20)$$

де $\mathcal{G}(t, \psi(\tau))$ – розв'язок побудований по функції $\psi(\tau)$, β – досить мале додатне число.

Функція $z = z(t)$ є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right) = \\ = B_0 z(t) + B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) + \\ + \beta \left(z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

З нерівності (18), включення (19) і того, що β досить мале, отримуємо, згідно з [2, с.28], що

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda < 0} \left\| I + \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda) \Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right\|_{L(R^n, R^n)} < \infty, \quad (22)$$

та

$$0 \in \sigma \left[(\lambda - \beta) \left(I + \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda)\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right) - B_0 - B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda)\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right] \quad (23)$$

для всіх $\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

До рівняння (21) застосуємо перетворення Лапласа. На підставі (22), (23) отримаємо нерівність

$$\left\| \frac{\tilde{z}(\lambda)}{\lambda} \right\|_{R^n} < \frac{c}{|\lambda|^2 + |\lambda|},$$

де $\tilde{z}(\lambda)$ – зображення за Лапласом функції $z(t)$;
 $c = \text{const} \in (0, +\infty)$; $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$.

З останньої нерівності та формули [2]

$$\int_0^t z(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \exp\{\lambda t\} \frac{\tilde{z}(\lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

в якій $\alpha > \max\left\{0, \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln(1 + \|z(t)\|_{R^n})\right\}$, маємо

$$\left\| \int_0^t z(s) ds \right\|_{R^n} \leq Q \quad \text{для всіх } t \geq 0, \quad (24)$$

де Q – постійна, що не залежить від $\psi(\tau)$.

Від рівняння (21) перейдемо до функціонального рівняння

$$\begin{aligned} z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) &= \\ &= z(0) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(-\Delta_{v,k}) + \\ &+ \beta \left(\int_0^t z(s) ds + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} \int_0^t z(s - \Delta_{v,k}) ds \right) + \\ &+ B_0 \int_0^t z(s) ds + B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} \int_0^t z(s - \Delta_{v,k}) ds, \end{aligned}$$

права частина якого обмежена на $[0, +\infty)$, згідно з оцінкою (24). На підставі властивості (22), розв'язок даного функціонального рівняння є обмеженим. Тому обмеженою є права частина рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} \frac{dz(t - \Delta_{v,k})}{dt} &= \\ &= B_0 z(t) + B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) + \\ &+ \beta \left(z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Таким чином, згідно з (22), обмеженим на

$[0, +\infty)$ є розв'язок $\frac{dz(t)}{dt}$ рівняння (25).

Отже, кожний розв'язок рівняння (21) є обмеженим для довільної правої частини

$$\psi(t) \in C^1([0, \max_{v,k} \Delta_{v,k}], R^n).$$

Тому за теоремою Банаха-Штейнгауза [5], тривіальний розв'язок рівняння (21) є стійким. Цього достатньо, на підставі представлення (20), для експоненціальної стійкості тривіального розв'язку рівняння (16). Дійсно, функція $\vartheta(t, \psi(t)) = \exp\{-\beta t\} z(t)$ є розв'язком рівняння (16) для кожної функції

$$\psi(t) \in C^1([0, \max_{v,k} \Delta_{v,k}], R^n),$$

тому має місце оцінка

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t, \psi(t))\|_{R^n} &\leq \exp\{-\beta t\} \max_{t \geq 0} \|z(t)\|_{R^n} \leq \\ &\leq N_2 \exp\{-\beta t\} \max_{t \in [0, \max_{v,k} \Delta_{v,k}]} \|\psi(t)\|_{R^n} \end{aligned}$$

для всіх $t \geq 0$.

В свою чергу лема 2 гарантує експоненціальну стійкість нульового розв'язку задачі (1) – (4). Достатність доведена.

5. Висновки. Шляхом зведення мішаної задачі для телеграфних рівнянь до початкової задачі для відповідної системи диференціально-різницьких рівнянь і застосування якісної теорії диференціально-різницьких рівнянь встановлено необхідні і достатні умови експоненціальної стійкості тривіального розв'язку вихідної мішаної задачі.

Список використаних джерел

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
3. Дейнека О.Ю. Умови існування і єдиності обмежених розв'язків системи телеграфних рівнянь з лінійними крайовими умовами // Математ. студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 59–66.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
5. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 433 с.
6. Слюсарчук В.Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. – 288 с.

УДК 517.988

Я.М. Димарський, доктор ф.-м. наук,
Д.М. Непийпа, аспірант

Власні функції малої норми квазілінійної періодичної задачі

Методом квазілінеаризації досліджено
біфуркації в околі двократного власного зна-
чення.

Ключові слова: біфуркація, квазіліній-
ність, індекс перетину.

E-mail: dymarsky@lep.lg.ua, nepiypa@yandex.ru

Роботу представлено доктором фіз.-мат. наук, професором В.В. Кириченком.

1. Вступ.

У статті розглядається дійсна квазілінійна задача на власні функції. Подібна задача раніше вже розглядалася в роботах Я.М. Димарського [4], [7]. У даній статті, по-перше, розширене коло задач. Також (і це є головним) застосовується, на наш погляд, більш зручний метод спеціального проектування на компактну підмножину (з наступним переходом до еквівалентної операторної задачі) замість використовуваного раніше методу скінченновимірних апроксимацій [7].

2. Постановка задачі.

Позначимо, як звичайно, $L_2(0, 2p) = L_2$ – простір дійсних функцій, що інтегруються із квадратом; $W_2^1(2p) = W_2^1$ – простір Соболева $2p$ періодичних функцій $y \in L_2$, які мають узагальнені похідні з L_2 до порядку 1 включно; $C^i[0, 2p] = C^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) – простір i раз безперервно диференційованих функцій. Нехай $\|\cdot\|$ – це норма в просторі L_2 , $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в просторі W_2^1 , $\|\cdot\|_i$ – норма в C^i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Розглянемо крайову періодичну задачу на власні функції $y \in W_2^2$ малої норми r і власні значення $l \in R$, яка має вигляд

$$\begin{aligned} -y'' + p(y, y', \|y\|, x)y &= l y, \\ y(0) - y(2p) &= y'(0) - y'(2p) = 0, \|y\| = r. \end{aligned} \quad (1)$$

Функція $p(y, y', \|y\|, x)$ задовольняє наступним умовам.

1. Функція p є безперервною та на $R \times R \times R^+ \times [0, 2p]$ задовольняє нерівності:

Ya. M. Dymarskii, DPhil
Dm.N. Nepiypa, PhD Student

Small eigenfunctions of quasi-linear periodical problem

Bifurcations near a double eigenvalue of the
linearized problem are investigated by quasi-
linear method.

Key Words: bifurcation, quasi-linearity, in-
tersection index.

$$|p(y, z, r, x)| < N(|y|^{2+b} + |z|^{2+b} + 1), \quad (2)$$

з деяким $b > 0$.

2. Існує таке $\varepsilon > 0$ й $K, m > 0$, що для будь-яких змінних $y, z \in R, r \in R^+, x \in [0, 2p]$ має місце оцінка:

$$|p(y, z, r, x)| < K(\|y\|^m + |z|^m + r^m) \quad (3)$$

при $y^2 + z^2 + r^2 < \varepsilon$.

Пару (l, y) , де $y \neq 0$, що задовольняє задачі (1), назовемо розв'язком. Число l_0 називається точкою біфуркації [5] для задачі (1), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ задача має розв'язок (l, y) , що задовольняє нерівності $|l - l_0| + \|y\|_{L_2} < \varepsilon$.

Нижче крайова задача (1) буде переформульована в операторному виді (7) із цілком безперервним оператором. Відомо [5], що точки біфуркації операторної задачі знаходяться тільки серед характеристичних значень лінеаризованого в нулі оператора. Пізніше ми переконаємося, що ці характеристичні значення збігаються із власними значеннями крайової задачі

$$-y'' = l y, \quad (4)$$

$$y(0) - y(2p) = y'(0) - y'(2p) = 0.$$

Власні значення задачі (4) дорівнюють: $l_n = \pi^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Власному значенню l_n ($n \geq 1$) відповідає пара ортонормованих в L_2 власних функцій $y_{2n-1} = (1/\sqrt{p}) \cos nx$, $y_{2n} = (1/\sqrt{p}) \sin nx$. Зафіксуємо номер n . Двовимірний підпростір, утворений власними функціями y_{2n-1}, y_{2n} , позначимо через H_0 , а ортогональне доповнення до нього в L_2 позначимо через H_1 . Позначимо через $S_r = \{y : \|y\| = r\}$ сферу в L_2 . Радіус r

згодом будемо брати малим. Шукаємо розв'язки (l, y) задачі (1) такі, що $y \in S$, $3 W_2^2$, l – в околі l_{2n-1} .

Кожна власна функція може бути представлена єдиним чином у вигляді:

$$y = r(y_{2n}, \cos f + y_{2n} \sin f) + v, \quad (5)$$

де $r > 0$, $v \in H_1$, $r^2 + \|v\|^2 = r^2$. У наступних міркуваннях будемо користуватися цим фактом.

3. Формулювання теореми

Позначимо:

$$\begin{aligned} a(y) &= \int_0^{2p} p(y, y' \|y\|, x) y_{2n}^2 dx, \\ b(y) &= \int_0^{2p} p(y, y' \|y\|, x) y_{2n} y_{2n}' dx, \quad (6) \\ c(y) &= \int_0^{2p} p(y, y' \|y\|, x) y_{2n}'^2 dx, \\ d(y) &= (1/2)(a(y) - c(y)). \end{aligned}$$

Надалі межі інтегрування від 0 до $2p$ будемо опускаати. Нехай $j \in [0, 2p)$ – параметризація одиничної окружності S_1 . Функціонали $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$, опираючись на (5), позначимо відповідно через $a(r, j, v)$, $b(r, j, v)$, $c(r, j, v)$, $d(r, j, v)$. Нехай для деяких r , v і для всіх f виконується нерівність:

$$d^2(f, r, v) + b^2(f, r, v) > 0.$$

Тоді формули $\cos a = d / \sqrt{d^2 + b^2}$, $\sin a = b / \sqrt{d^2 + b^2}$ визначають відображення $a = f(r, f, v)$ окружності S_1 в окружність S_2 , де (r, v) виступають як параметри. Через $\deg f$ позначимо орієнтований ступінь цього відображення (див. [2]).

Сформулюємо основну теорему цієї роботи.

Теорема 1. Нехай існують такі $\varepsilon, N > 0$, що рівномірно для всіх $y \in S$, $3 W_2^2$ таких, що $r < \varepsilon$, $\|v\| < Nr^{m-1}$, виконується умова: існує $k > 0$, що має місце нерівність

$$\sqrt{d^2(y) + b^2(y)} > k \|y\|^m. \quad (7)$$

Нехай $\deg f(r, f, 0) \neq 2$. Тоді існує $d > 0$, для якого справедливі наступні твердження.

1. Якщо (l, y) довільний розв'язок задачі (1), що задовольняє нерівності

$\|y\| + |l - l_n| < d$, то власна функція $y \in C^2$, і $\exists V, L > 0$, що $\|v\| < V \|y\|^{m-1}$, $|l - n^2| < L \|y\|^m$.

2. Число $l_n = n^2$ є точкою біфуркації для задачі (1), причому для кожного $r < d$ задача (1) має принаймні два розв'язки (l, y) , у яких власні функції мають $2n$ нулів.

Перед тим, як перейти до доказу, обговоримо вимоги, які пред'являються до нелінійності задачі (1). По-перше, нелінійність містить невідому функцію y у вигляді співмножника. Ця обставина дозволяє трактувати надалі власну функцію нелінійної задачі як теж власну деякої асоційованої лінійної задачі (звідси термін *квазілінійна* задача, який буде уточнений нижче). Нарешті, оцінка (7) означає [4], що асоційована лінійна задача має тільки однократні власні значення в околі точки біфуркації.

Перепишемо задачу (1) у квазілінійному вигляді. Позначимо через $L(W_2^2, L_2)$ простір лінійних симетричних операторів, діючих із W_2^2 в L_2 , а через $L(L_2, L_2)$ простір самоспряжених операторів, діючих в L_2 . Визначимо нелінійне відображення $\mathcal{A}: W_2^2 \otimes L(W_2^2, L_2)$ наступним чином:

$$\mathcal{A}(y)v = p(y, y' \|y\|, x)v.$$

Тепер задача (1) може бути переписана в наступному еквівалентному вигляді:

$$-y'' + \mathcal{A}(y)y = l y \quad (8)$$

Отримана задача має *квазілінійний* (див. [3]) вигляд:

$$A(y)y = l y, \quad (9)$$

де $A: W_2^2 \otimes L(W_2^2, L_2)$. Тобто відображення A ставить у відповідність функції y лінійний симетричний оператор $A(y) := (-d^2/dx^2 + \mathcal{A}(y))$.

Операторне рівняння (9) пов'язане з парою просторів: W_2^2 та L_2 . В майбутньому нам буде зручніше працювати в одному просторі L_2 .

Доведенню теореми присвячена інша частина статті. Доведення здійснимо в чотири етапи. На першому етапі отримаємо апріорні оцінки задачі. На другому етапі перепишемо задачу в еквівалентному виді з особливим оператором проектування, що дозволяє перейти до цілком неперервних операторів. На третьому етапі перейдемо до операторного рівняння в L_2 , що має квазілінійний вид. На четвертому етапі застосуємо до цього рівняння спеціальну топологічну конструкцію [3].

У подальших міркуваннях будемо дотримуватися деяких правил. Там, де вказується константа C , будемо вважати, що C – це якась позитивна константа, яка не зобов'язана бути однією й тією ж для всіх нерівностей, де вона згадується. Там, де вказується функція $C(r)$, будемо вважати, що $C(r)$ – неперервна в околі нуля функція по r і $\lim_{r \rightarrow 0} C(r) = 0$; і ця функція не зобов'язана бути однією й тією ж для всіх нерівностей.

4. Априорні оцінки.

Одержимо априорні оцінки задачі (1).

Твердження 1. [7] Множина розв'язків $(l, y) \in R^1 \times C^2$, рівномірно обмежених у просторі $R^1 \times L_2$, рівномірно обмежена в просторі $R^1 \times C^2$.

Доведення. Доведення твердження проведено в [8]. Ω

Уточнимо попереднє твердження.

Лема 1. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку задачі (1) з рівномірно обмеженням l і $\|y\| = r < e$ виконано $\|y(x)\|_2 \leq Cr$.

Доведення. Помножимо скалярно тотожність (1) на y , в силу обмеженості p й l одержимо

$$\int_0^x (y')^2 dx + \int_0^x p(y) |y|^2 dx + l r^2 \leq Cr^2$$

В силу теорем вкладення виконана нерівність $\|y\|_0 \leq C \|y\|_{L_2}$ і тоді виконано $\|y\|_0 \leq Cr$.

Проінтегруємо тотожність (1) у проміжку $[x_0, x]$, де x_0 – припущений нуль похідної розв'язку y (у силу періодичності y наявність нулів гарантується):

$$-\int_{x_0}^x y' y'' dx + \int_{x_0}^x p(y, y' |y|, x) y' dx = l \int_{x_0}^x y' dx$$

Перетворюючи, одержимо на інтервалі $[x_0, 2p]$:

$$|y'(x)| \leq C \int_0^{2p} |y| dx + l \int_0^{2p} |y| dx \leq Cr;$$

Аналогічно, інтегруючи зі змінною нижньою межею $[x, x_0]$, одержимо таку ж нерівність в інтервалі $[0, x_0]$, а підсумком буде виконання нерівності на $[0, 2p]$.

Таким чином, буде виконано $\|y\|_1 \leq Cr$. У наслідок (3) і рівносильності норм розв'язків просторів L_2 і C^1 одержимо:

$$|p(y, y' |y|, x)| \leq Cr^m.$$

Доведемо виконання $\|y\|_2 \leq Cr$:

$$|y'| \leq |p(y, y' |y|, x) y| + C |y| \leq Cr^{m+1} + Cr \leq Cr.$$

Лема 2. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку (l, y) задачі (1) з рівномірно обмеженням l і $\|y\| < e$ добавка $v \in H_1$ задовольняє нерівності $\|v\|_2 \leq Cr^{1+m}$.

Доведення. Спроекуємо тотожність (1) на додатковий підпростір H_1 :

$$-(y')' + p_1(p(y, y' |y|, x) y) = l v,$$

де p_1 – проекція на підпростір H_1 .

У результаті нескладних перетворень одержимо:

$$v = \frac{y''}{\Delta x^2} + l \int_0^1 p_1(p(y, y' |y|, x) y) dx.$$

Пронормуємо отриману тотожність в C^2 :

$$\|v\|_2 = \left\| \frac{y''}{\Delta x^2} + l \int_0^1 p_1(p(y, y' |y|, x) y) dx \right\|_2$$

$$\leq \left\| \frac{y''}{\Delta x^2} \right\|_{L_2 \otimes C^2} + l \int_0^1 \|p_1\|_{L_2 \otimes L_2} \|p(y, y' |y|, x) y\|_2 dx$$

$$\leq C \|p(y, y' |y|, x)\| \|y\| \leq Cr^{m+1}.$$

Тепер ми можемо показати еквівалентність норми r й радіуса r в розкладенні (6).

Наслідок 1. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку (l, y) задачі (1) з рівномірно обмеженням l і $\|y\| < e$ вірно $r \leq r \leq Cr$.

Лема 3. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку (l, y) задачі (1) такого, що $\|y\| < e$ і $l \in O[l_* - C, l_* + C]$ (причому відрізок $[l_* - C, l_* + C]$ не містить інших власних значень лінеаризованої задачі (4), крім l_*) виконано:

$$|l - l_*| \leq L r^m,$$

де $L > 0$ – деяка константа.

Доведення. Спроекуємо тотожність (1) на простір H_0 :

$$-(y')' + p_0(p(y, y' |y|, x) y) = l y',$$

тут $y' = r(\cos f y_{2n-1} + \sin f y_{2n})$, p_0 – проекція на підпростір H_0 . З іншого боку вірно:

$$-(y')' = l_* y'.$$

Віднімаємо з першої тотожності другу:

$$(l - l_*) y' = p_0(p(y, y' |y|, x) y);$$

Отриману тотожність пронормуємо в L_2 :

$$|l - l_*| r = \|p_0(p(y, y' |y|, x) y)\|_2$$

$$|p(y, y\check{x} \| y \|, x)| \leq Cr^{m+1};$$

У силу наслідку до леми 1 виконано:

$$|I - I_n| \leq Lr^m. \quad \Omega$$

5. Еквівалентна задача.

Перейдемо до нової задачі, еквівалентної даній. Позначимо через $P: L_2 \otimes L_2$ – оператор проектування на множину $B_{2,2} = \{v \in H_1 \mid \|v\|_{2,2} \leq r/2\}$, що визначається через найкоротшу відстань від точки простору H_1 до множини $B_{2,2}$. Щоб такий оператор існував досить опуклості й компактності множини $B_{2,2}$. Покажемо, що це дійсно так. У силу компактності вкладення $W_2^2 \hookrightarrow ML_2$, рефлексивності W_2^2 , множина $B_{2,2}$ – предкомпактна ([6], стор. 182) в L_2 . У силу того, що, по-перше, множина $B_{2,2}$ – обмежена і замкнена у W_2^2 , по-друге, простори W_2^2, L_2 – гільбертові, вірна замкненість $B_{2,2}$ в L_2 (див. [1], стор. 83). Це означає, що $B_{2,2}$ – компактна множина в L_2 . Опуклість $B_{2,2}$ у L_2 перевіряється безпосередньо.

Отже, оператор P існує. Областю визначення P будемо вважати множину $B = \{u \in H_1 \mid \|u\| \leq r/2\}$. У силу нерівності $\|u\| \leq \|u\|_{2,2}$ в W_2^2 буде виконано $B_{2,2} \subset B$. Позначимо через P_1 – оператор проектування із множини $S_{r,v} = \{y \in S_r, v \in B\}$ на множину $S_{r,v,2,2} = \{y \in S_r, v \in B_{2,2}\}$, що діє за правилом $P_1 y = \sqrt{r^2 - \|Pv\|^2} \cos(\pi x - f) / \sqrt{p} + Pv$.

Розглянемо нову задачу виду

$$-y\check{x} + A(P_1 y) y = l y, \quad (10)$$

на множині $y \in S_{r,v}$. Відзначимо, що існує таке $e > 0$, для якого розв'язки задачі (1), що задовольняють нерівності $|I - I_n| + \|y\| < e$ будуть належати до $S_{r,v}$ у силу Леми 2.

Покажемо еквівалентність задач (1) і (10) при будь-якому досить малому фіксованому r . Для подальших міркувань нам знадобитися наступна

Лема 4. Для всіх досить малих r і $y \in S_{r,v,2,2}$ виконана оцінка

$$\|A(y)\|_{L_2 \otimes L_2} < Cr^m. \quad (11)$$

Доведення. Для $y \in S_{r,v,2,2}$ виконано

$$r = \sqrt{r^2 + \|v\|^2} \leq r + r/2 = 3r/2, \quad \text{і тоді,}$$

$\|y\|_{2,2} < r \|\cos(\pi x - f)\|_{2,2} / \sqrt{p} + r/2 < Cr$. Тобто, виконано:

$$\|y\|_{2,2} < Cr. \quad (12)$$

У силу (12) та (3), для достатньо малих r виконано

$$|p(y, y\check{x} \| y \|, x)| < Cr^m$$

Згідно з визначенням норми лінійного оператора маємо:

$$\|A(y)\|_{L_2 \otimes L_2} \leq \|A(y)v\|_{H_1} < Cr^m$$

Знайдемо апіорні оцінки задачі (10), аналогічні оцінкам задачі (1). За змістом проектування P_1 , оцінки не можуть погіршитися.

Лема 5. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку задачі (10) з рівномірно обмеженим $l > 0$ і $\|y\| = r < e$ виконано:

$$\|y(x)\|_2 < Cr. \quad (13)$$

Доведення. Помножимо скалярно тотожність (10) на y в просторі L_2 :

$$\int (y\check{x})^2 dx + \int (A(P_1 y) y) y dx = l \int y^2 dx,$$

З (11) маємо:

$$\int (y\check{x}(x))^2 dx < Cr^{m+2} + Cr^2 < C^2 r^2$$

З вкладення $W_2^1 \hookrightarrow MC^0$ випливає $\|y\|_0 < Cr$.

З (10) і тільки що доведеної оцінки, одержуємо:

$$|y\check{x}(x)| < |A(P_1 y) y| + C|y| < Cr \quad \Omega \quad (14)$$

Лема 6. Існує таке $e > 0$, що для будь-якого розв'язку (l, y) задачі (10) такого, що $\|y\| < e$ й l рівномірно обмежено, добавка $v \in H_1$ задовольняє нерівності $\|v\|_{2,2} \leq Cr^{1+m}$.

Доведення. Спроектуємо тотожність (10) на додатковий підпростір H_1 . Одержимо наступну тотожність:

$$-v\check{x} + p_1 A(P_1 y) y = l v,$$

У результаті нескладних перетворень одержимо:

$$v = \frac{\int v dx^2}{\int dx^2} + l \int_0^1 p_1 A(P_1 y) y$$

Пронормуємо отриману тотожність по нормі в C^2 :

$$\|v\|_2 \leq C \|A(P_1 y)\|_{C \otimes L_2} \|y\|_2 \leq Cr^{m+1}. \quad \Omega$$

Наслідок. Добавка $v \in H_1$ досить малих власних функцій задачі (10) у L_2 задовольняє нерівності $\|v\|_{2,2} \leq Cr^{1+m}$ при рівномірно обмежених l .

Лема 7. Існує таке $\varepsilon > 0$, що розв'язки задач (1) і (10), що задовольняють оцінці $\|y\| + |l - l_n| < \varepsilon$, збігаються.

Доведення. Вірність леми випливає із властивостей проєкційного відображення P_1 та апіорних оцінок для задачі (10). Ω

6. Операторне рівняння.

Здійснимо перехід до операторного рівняння в просторі L_2 . Доведемо симетричність і компактність оператора $\mathcal{A}(y): W_2^2 \otimes L_2$. Компактність і симетричність є наслідком того, що оператор $\mathcal{A}(y)$ є оператором множення на функцію. З (11) випливає, що норми сімейства операторів $\mathcal{A}(y)$ рівномірно обмежені для всіх $y \in S_{r,v}$, тобто, $\|\mathcal{A}(y)\|_{W_2^2 \otimes L_2} < L$, де $L > 0$ – константа.

Наступна задача також буде еквівалентна задачі (1):

$$-y'' + \mathcal{A}(P_1 y)y + Ly = (I + L)y. \quad (15)$$

Позначимо знову $A(y) = L1$, ($1: W_2^2 \otimes L_2$ – оператор звичайного вкладення) як $A(y)$, а $I + L$ як I . Отримана задача (15) має квазілінійний вигляд (див. [3]):

$$A(P_1 y)y = Iy, \quad (16)$$

де $A(P_1 y): S_{r,v} \otimes L(W_2^2, L_2)$. Тобто, відображення $A(P_1 y)$ ставить у відповідність функції $y \in S_{r,v}$ лінійний симетричний оператор $A(P_1 y) = (-d^2/dx^2 + \mathcal{A}(P_1 y) + L)$. Покажемо, що лінійний оператор $A(P_1 y): W_2^2 \otimes L_2$ є додатним при будь-якому $y \in S_{r,v}$. Дійсно, для довільного вектора $v \neq 0$ маємо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(d^2 v^2 dx^2 + \mathcal{A}(P_1 y)v + L \right) v dx &= \int_{\mathbb{R}} (v'')^2 dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} L v^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{A}(P_1 y)v)v dx \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (v'')^2 dx + \int_{\mathbb{R}} L v^2 dx - \left| \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{A}(P_1 y)v)v dx \right| \geq \int_{\mathbb{R}} (v'')^2 dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} L v^2 dx - \|\mathcal{A}(P_1 y)\| \int_{\mathbb{R}} v^2 dx > 0 \end{aligned}$$

Таким чином, внаслідок симетричності, додатності, оператор $A(P_1 y)$ є безперервним ізоморфізмом простору W_2^2 на простір L_2 для будь-якого $y \in S_{r,v}$, а це означає, що має безперервний зворотний оператор $(A(P_1 y))^{-1}$, що діє з L_2 в W_2^2 .

Введемо оператор вкладення $Im: L(L_2, W_2^2) \otimes L^c(L_2, L_2)$, де $L^c(L_2, L_2)$ – простір самоспряжених компактних операторів, що діють із L_2 в L_2 , і відображення інверсії $Inv: L(W_2^2, L_2) \otimes L(L_2, W_2^2)$. Позначимо $A^c \in Im \Psi_{Inv} \Psi \Psi: S_{r,v} \otimes L^c(L_2, L_2)$ – цілком неперервне відображення на обмеженій замкнутій множині $S_{r,v}, MS, ML_2$.

Перейдемо до нової задачі в просторі L_2 :

$$I A^c(y)y = y \quad (17)$$

Якщо $(l, y) \in [l_n - L, l_n + L] \times L_2$ – розв'язок задачі (17), що задовольняє для достатнього малого $\varepsilon > 0$ нерівності $\|y\| + |l - l_n| < \varepsilon$, то з визначення відображення A^c буде виконано: $y(x) \in W_2^2$ і пара (l, y) буде розв'язком задачі (10), а це означає і задачі (1). Для розв'язків задачі (1) виконані апіорні оцінки, тоді вони ж будуть вірними і для отриманої операторної задачі (17).

7. Доведення можливості розв'язання операторного рівняння.

Доведемо наступну лему:

Лема 7. Відображення $A^c: L_2 \otimes L^c(L_2, L_2)$ є цілком безперервним.

Доведення. Проектування $P_1: L_2 \otimes L_2$ є цілком безперервним відображенням згідно з побудовою. Відображення A^c – це суперпозиція P_1 й декількох безперервних відображень. Останнє [5] доводить лему. Ω

Виділимо у квазілінійному операторі A^c постійну (лінійну) складову й квазілінійну складову. Нехай $\mathcal{A}^0(y) = A^c(y) - A^c$, де

$$A^c = Im \Psi_{Inv} \left((-d^2/dx^2 + L \Psi) \right) OL^c(L_2, L_2).$$

Відображення $\mathcal{A}^0$ – цілком безперервно згідно з лемою 6. Квазілінійна задача (17) може бути переписана у вигляді:

$$I (A^c + \mathcal{A}^0(y))y = y, \quad y \neq 0. \quad (18)$$

Пару (l, y) , що задовольняє (18) як і раніше будемо називати розв'язком. Визначимо номер та кратність розв'язків задачі (18).

Визначення 2. [3] Розв'язок (l^0, y^0) задачі (17) називається простим (двократним), якщо таким є l^0 як характеристичне значення лінійної задачі:

$$I A^c(y^0)y = y, \quad (19)$$

Припишемо парі (l^0, y^0) ті номер і кратність, якими володіє l^0 , як власне значення задачі (18).

Визначення 2 без змін переноситься на всі квазілінійні задачі з номерами від (10) до (18).

Відзначимо, що характеристичне число l_* оператора A^* виступає як можлива точка біфуркації рівняння (18) (див. [3]). Позначимо:

$$a_1(y) = \langle \mathcal{A}^0(y) y_{2n-1}, y_{2n-1} \rangle,$$

$$b_1(y) = \langle \mathcal{A}^0(y) y_{2n}, y_{2n} \rangle,$$

$$c_1(y) = \langle \mathcal{A}^0(y) y_{2n}, y_{2n} \rangle,$$

$$d_1(y) = (1/2)(a_1(y) - c_1(y)).$$

Аналогічним чином, за допомогою розкладання (3), визначаються функції $a_1(r, f, v)$, $b_1(r, f, v)$, $c_1(r, f, v)$, $d_1(r, f, v)$. Якщо $b_1^2(r, f, v) + d_1^2(r, f, v) > 0$, то формули

$$\cos \alpha = \frac{d_1(r, f, v)}{(d_1^2(r, f, v) + b_1^2(r, f, v))^{1/2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{b_1(r, f, v)}{(d_1^2(r, f, v) + b_1^2(r, f, v))^{1/2}}$$

визначають при фіксованому v відображення $g_1: S_1 \otimes S_2$ окружності S_1 в окружність S_2 , яка параметризована кутом α . Для доказу можливості розв'язання отриманого операторного рівняння (17) скористаємося твердженням роботи [4], що відноситься до відображення $\mathcal{A}^0$ у випадку виконання для нього леми 7.

Пропозиція 1. [3, стор. 117] Нехай існують такі додатні постійні ϵ й m , для яких виконуються наступні оцінки:

1. існує таке позитивне число R^0 , що

$$\|\mathcal{A}^0(y)\| < R^0 \|y\|^m \quad (20)$$

як тільки $\|y\| < \epsilon$, $\|v\| < r/2$;

2. існують N , $R^0 > 0$, що

$$\sqrt{d_1^2(y) + b_1^2(y)} > R^0 \|y\|^m \quad (21)$$

як тільки $\|y\| < \epsilon$, $\|v\| < N \|y\|^{1+m}$.

Нехай ступінь

$$\deg(g_1(r, f, 0)) \neq 2 \quad (22)$$

для якогось $r \in O(0, \epsilon)$.

Тоді існує таке мале $d > 0$, для якого справедливі наступні твердження.

1. Якщо (l, y) — довільний розв'язок задачі (18), що задовольняє нерівності $|l - l_*| + \|y\| < d$, то існують такі постійні N й R^0 , для яких $\|v\| < N \|y\|^{1+m}$, $|l - l_*| < R^0 \|y\|^m$.
2. Всі розв'язки задачі (18), для яких виконана нерівність $|l - l_*| + \|y\| < d$, є простими.
3. Ступінь $\deg(g_1(r, f, 0))$ не залежить від вибору параметра $r \in O(0, d)$.
4. Число l_* є точкою біфуркації для рівняння (18), причому для кожного $r < d$ задача (18) має принаймні один розв'язок (l, y) з номером $2n - 1$ і один розв'язок з номером $2n$, у яких $\|y\| = r$.

Переконаємося, що всі умови пропозиції 1 в умовах теореми 1 виконані.

1. Оцінка (20) шляхом нескладних перетворень впливає з нерівності (11).
2. Оцінки (21), (22) випливають із (7), умови теореми 1 і нерівності (11).

Отже, пропозиція 1 є справедливою для задачі (18), а це означає, що всі твердження пропозиції 1 є вірними для задач (10) і (1).

Теорему 1 повністю доведено.

Список використаних джерел

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
3. Дымарский Я. М. Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 24. — С. 3-159.
4. Димарський Я. М. Про малі періодичні власні функції. Серія: фізико-математичні науки // Вісник Київського університету — 2002 — №1. — С. 33-42.
5. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
6. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1998.
7. Dymarsky Ya. M. The Periodic Choquard Equation // Operator Theory: Advances and Applications — 2000 — Vol. 117. — P. 87-99.

УДК 512.552

Наталья В. Кайдан, аспірантка

Про слабопервинні скінченні кільця

В цій статті ми розглядаємо поняття простого сильнозв'язного сагайдака. Показуємо існування скінченного слабопервинного кільця для цих сагайдаків. Ключове поняття в класичному визначенні квазіфробеніусових кілець дав Т. Накаяма як перестановки нерозкладних проєктивних модулів, яку природно називають перестановкою Накаями.

Ключові слова: радикал, кільце, сагайдак.

kaydannv@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1. Попередні відомості.

Нехай A - асоціативне кільце з $1 \neq 0$, R - його радикал Джекобсона. Всі ідеали які розглядаються нижче передбачаються двосторонніми. Кільце A називається слабопервинним, якщо добуток будь-яких двох ідеалів I і J які не належать R , відмінний від нуля. Сагайдак Q називається простим, якщо в ньому немає кратних стрілок і кратних петель. Сагайдак Q називається сильно зв'язним, якщо в ньому існує орієнтований шлях з будь-якої його вершини в іншу (можливо співпадаючу з початковою). Для зручності будь-який сагайдак, що має одну вершину, теж будемо вважати сильно зв'язним. Необхідні для нас означення сагайдака кільця A , підстановки Накаями квазіфробеніусового кільця і інші відомості містяться в монографіях [1] і [2].

Нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ буде канонічним розкладом одиниці напівдосконалого кільця A з радикалом Джекобсона R . Тоді $A_A = f_1 A \oplus \dots \oplus f_s A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ ($f_i A = A f_i \oplus \dots \oplus A f_s = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$), де $f_i A = P_i^{n_i}$ ($A f_i = Q_i^{n_i}$), для $i = 1, \dots, s$ називається канонічним розкладом кільця A в пряму суму нерозкладних правих (лівих) проєктивних правих (лівих) A -модулів. $P_1, \dots, P_s$ ($Q_1, \dots, Q_s$) всі попарно нерозкладні праві (ліві) A -модулі. Нехай $A_{ij} = f_i A f_j$ ($i, j = 1, \dots, s$). Двосторонній розклад Пірса кільця $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$ називається двостороннім канонічним розкладом Пірса кільця A . Нехай A є напівдосконале кільце і нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ буде канонічним розкладом $1 \in A$ в сумі попарно ортогональних ідемпотентів

N. V. Kaydan, PhD student

On weakly prime finite rings

In this article we consider concept simply laced strongly connected quiver. We show existence of finite weakly prime ring for these quivers. The key concept in the classical definition of quasi-Frobenius rings, given by T. Nakayama, is a permutation of indecomposable projective modules, which is naturally called a Nakayama permutation.

Key Words: radical, ring, quiver.

[1]. Тоді $I = \bigoplus_{i,j=1}^s I_{ij}$ з $I_{ij} = f_i I f_j$ ($i, j = 1, \dots, s$) називається двостороннім канонічним розкладом Пірса I ідеала I .

Означення 1. Ідеал I напівдосконалого кільця A називається мономіальним, якщо кожен рядок і кожний стовбчик канонічного двостороннього розклада Пірса I містить рівно одну відмінну від нуля компоненту Пірса.

Якщо I - мономіальний ідеал, тоді існує підстановка $\nu \in \{1, \dots, s\}$ така, що $I_{\nu(i)i} \neq 0$. Зрозуміло, ν однозначно визначається з точністю до спряженості елементом симетричної групи з s символів. Така підстановка позначається $\nu(I)$. Наступна теорема дає опис нерозкладних проєктивних модулів та простих модулів над напівдосконалим кільцем.

Теорема 1. Будь який проєктивний модуль над напівдосконалим кільцем A є скінченнопородженим. Він є проєктивним накриттям простого A -модуля u має рівно один максимальний підмодуль. Існує взаємнооднозначна відповідність між попарно неізоморфними нерозкладними проєктивними A -модулями $P_1, \dots, P_s$ і попарно неізоморфними простими A -модулями $U_1, \dots, U_s$, яка задається наступним чином: $P_i \mapsto P_i / P_i R = U_i$ і $U_i \mapsto P(U_i)$, де $P(U_i)$ проєктивне накриття модуля U_i .

Нехай M є модулем над кільцем A , R - його радикал Джекобсона. Цоколем модуля M називається сума всіх його простих підмодулів. Цей підмодуль позначається $\text{soc} M$. Фактормодуль $M / M R$ називається верхівкою модуля M і позначається $\text{top} M$.

Означення 2. Кільце A називається напів-

примарним, якщо факторкільце A/R є напівпростим артіновим і R є нільпотентним ідеалом.

Хопкінс [3] довів наступну теорему.

Теорема 2. Радикал R артінова справа кільця A є нільпотентним ідеалом.

Звідси випливає, що будь-яке артінове справа кільце є напівпримарним. Для будь-якого ненульового модуля M над напівпримарним кільцем A , модулі $\text{soc}M$ та $\text{top}M$ також є ненульовими модулями.

Означення 3. Говорять, що напівдосконале кільце A допускає підстановку Накаями $\nu(A): i \rightarrow \nu(i)$ множини $\{1, \dots, s\}$, якщо виконуються наступні умови: (1) $\text{soc}P_k = \text{top}P_{\nu(k)}$, (2) $\text{soc}Q_{\nu(k)} = \text{top}Q_k$.

Нехай A є напівдосконале кільце, яке допускає підстановку Накаями $\nu(A)$. За умовою (1), кожен головний модуль є простим і, крім того, два головних модуля з ізоморфними цоклями, ізоморфні, за теоремою 1. За умовою (2), кожен головний лівий модуль, також простий. Нерозкладний проєктивний правий (лівий) A -модуль називається головним правим (лівим) A -модулем.

Теорема 3. Нехай A є напівдосконале кільце таке, що цоклі всіх головних правих A -модулів і всіх головних лівих A -модулів – прості. Припустимо далі що, якщо цоклі двох головних правих A -модулів P та P' ізоморфні, то $P \cong P'$. Тоді A задовольняє наступним умовам: (i) $\text{soc}A_A = \text{soc}_A A = \mathcal{Z}$ та $\mathcal{Z}$ – моноідеальний ідеал; (ii) кільце A допускає підстановку Накаями $\nu = \nu(A)$ з $\nu(A) = \nu(\mathcal{Z})$.

Нагадаємо, що квазіфробеніусове кільце A завжди є артіновим з двох сторін кільцем. Добре відомо, що будь-яке артінове кільце є напівдосконалим. Тоді $A_A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ (${}_A A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$) буде розкладом правого (лівого) регулярного A -модуля в пряму суму головних правих (лівих) A -модулів.

Означення 4. Двостороннє артінове з двох сторін кільце A називається квазіфробеніусовим (скорочено, QF -кільцем), якщо A допускає перестановку Накаями $\nu(A)$ множини $\{1, 2, \dots, s\}$. Квазіфробеніусове кільце A називається Фробеніусовим, якщо $n_{\nu(i)} = n_i$ для всіх $i = 1, \dots, s$.

Зрозуміло, що перестановка ν визначена з точністю до спряженості в симетричній групі на з символах, і ці спряженості відповідають перенумерації головних модулів $P_1, \dots, P_s$.

2. Черепичні порядки. Згідно з [1] кільце

A називається черепичним порядком, якщо воно є первинним нетеровим напівдосконалим і напівдистрибутивним кільцем з ненульовим радикалом Джекобсона. Нагадаємо, що нетерове з двох сторін ланцюгове справа (зліва) кільце O називається дискретно нормованим кільцем з простим елементом π , якщо в O існує рівно один максимальний ідеал M (правий, лівий, двосторонній), такий що $M = \pi O = O\pi$ і елемент π не є нільпотентним.

Наступні два приклади є дуже важливими прикладами дискретно нормованих кілець.

1. Нехай Q – поле раціональних чисел, Z – кільце цілих чисел, $p \in Z$ просте число. Позначимо через Z_p наступне кільце $Z_p = \{\frac{m}{n} \in Q | (n, p) = 1\}$, де (n, p) – найбільший спільний дільник n та p . Кільце Z_p – комутативне дискретно нормоване кільце з простим елементом p .

2. Нехай K – поле і t – невідоме. Позначимо $K[[t]]$ – кільце формальних степенних рядів над полем K . Це кільце також є комутативним дискретно нормованим кільцем з простим елементом t . Будь-яке факторкільце Z_p по ненульовому ідеалу є скінченим. Факторкільце кільця $K[[t]]$ по ненульовому ідеалу буде скінченим, тоді і тільки тоді коли поле K скінченне.

Позначимо через D класичне тіло часток дискретно нормованого кільця O , $M_n(D)$ – кільце всіх квадратних матриць з елементами з D .

Позначимо $M_n(Z)$ кільце всіх квадратних $n \times n$ матриць над кільцем цілих чисел Z . Нехай $\epsilon \in M_n(Z)$. Ми назвемо матрицю $\epsilon = (\alpha_{ij})$ матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, \dots, n$, $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Матрицю ϵ назвемо зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$.

Ми застосуємо наступне позначення: $A = \{O, \epsilon(A)\}$, де $\epsilon(A) = (\alpha_{ij})$ матриця показників кільця A , тобто $A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} O$, де e_{ij} матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведений, тобто факторкільце A/R є прямим добутком тіл, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Таким чином $\epsilon(A)$ є зведеною матрицею.

Згідно теореми 14.5.2 [1], будь-який черепичний порядок має наступний вигляд $A = \{O, \epsilon(A)\}$, де $\epsilon(A) = (\alpha_{ij})$ матриця показників кільця A .

Теорема 4. Для будь-якого простого сильно зв'язного сагайдака Q без петель, існує скінченне слабопервинне кільце A , таке, що $Q(A) = Q$.

Фробеніусове кільце A називається слабо симетричним, якщо його підстановка Накаями

тотожна. Сагайдак Q називається допустимим якщо він є сагайдаком нетерова первинного напівдосконалого напівдистрибутивного кільця з ненульовим радикалом Джекобсона. Позначимо через $|A_n|$ - число елементів кільця A_n .

Теорема 5. Для будь-якого допустимого сагайдака Q існує скінченна множина слабопервинних скінченних кілець A_n , таких, що $Q(A_n) = Q$ і $|A_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Через $\nu(A_n)$ позначається підстановка Накаями квазіфробеніусового кільця A_n .

Теорема 6. Для кожної підстановки $\sigma \in S_n$ без нерутомит елементів, існує злічене число скінченних фробеніусових слабопервинних кілець A_n , таких, що $\nu(A_n) = \sigma$ і $|A_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 7. Для кожної підстановки $\sigma \in S_n$ існує злічене число скінченних фробеніусових слабопервинних кілець A_n , таких, що $\nu(A_n) = \sigma$ і $|A_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Скінчені кільця. Нехай $A = \{O, \varepsilon(A)\}$ - зведений черепичний порядок та I фіксований двосторонній ненульовий ідеал.

Теорема 8. Наступні умови еквівалентні: (1) факторкільце A/I скінченне; (2) факторкільце $A/\pi A$ скінченне; (3) факторкільце A/I скінченне для будь-якого ненульового двостороннього ідеалу $I \subset A$; (4) кільце $O/\pi O$ скінченне.

Означення 5. Модуль називається ланцюговим, якщо решітка підмодуля є лінійно впорядкована, тобто множина всіх його підмодулів лінійно впорядкована за включенням. Модуль називається напівланцюговим, якщо він є прямою сумою ланцюгових модулів.

Кільце A називається ланцюговим справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є ланцюговим. Кільце називається ланцюговим, якщо воно ланцюгове справа і зліва. Кільце A називається напівланцюговим справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є напівланцюговим. Кільце називається напівланцюговим, якщо воно напівланцюгове справа і зліва. Модуль M називається дистрибутивним, якщо всі його підмодулі K, L, N $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$. Зрозуміло, підмодуль та фактормодуль дистрибутивного модуля є дистрибутивними. Модуль називається напівдистрибутивним якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа (зліва) кільце називається напівдистрибутивним. Зрозуміло, що кожний ланцюговий модуль є

дистрибутивним модулем і кожний напівланцюговий є напівдистрибутивним модулем.

Теорема 9. Нехай A - артінове слабопервинне напівдистрибутивне кільце, R - його радикал Джекобсона. Наступні умови рівносильні для кільця A : (1) кільце A скінченне; (2) факторкільце A/R скінченне; (3) існує локальний ідемпотент $e \in A$ кільця A такий, що кільце eAe скінченне.

Наведемо приклад напівпримарного кільця A , радикал R якого в квадраті дорівнює нулеві, для якого теорема 9 не має місця. Позначимо через X - зліченну пряму суму полів $\mathbb{F}_p$ і розглянемо множину A всіх (2×2) матриць наступного вигляду: $A = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ X & \mathbb{F}_p \end{pmatrix}$. Таким чином,

якщо $a \in A$, то $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ x & \gamma \end{pmatrix}$ де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_p$ і $x \in X$. Нехай $a_1 \in A$ і $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ x_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$.

Тоді $a + a_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha_1 & \beta + \beta_1 \\ x + x_1 & \gamma + \gamma_1 \end{pmatrix}$ та $aa_1 = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 & \alpha\beta_1 + \beta\gamma_1 \\ x\alpha_1 + \gamma x_1 & \gamma\gamma_1 \end{pmatrix}$. Кільце A має ради-

кал Джекобсона $R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{F}_p \\ X & 0 \end{pmatrix}$ та $R^2 = 0$.

Зрозуміло, що кільце A є нескінченним кільцем. Нехай $\mathbb{F}_2$ - поле з двох елементів, $O = \mathbb{F}_2[[t]]$ - кільце формальних степеневих рядів над $\mathbb{F}_2$. В цьому випадку t є простим елементом кільця O , $M = tO$ - єдиний максимальний ідеал кільця O . Розглянемо кільце $H_2(O)$ (2×2) - матриць наступного вигляду: $H_2(O) = \begin{pmatrix} O & O \\ M & O \end{pmatrix}$. Радикал Джекобсона R_2 кільця $H_2(O)$ має вигляд: $R_2 = \begin{pmatrix} M & O \\ M & M \end{pmatrix}$ і $R^2 = \begin{pmatrix} M & M \\ M^2 & M \end{pmatrix}$. Факторкільце $B_2 = H_2(O)/R_2^2$ можна розглядати в такому вигляді: $B_2 = \begin{pmatrix} O/M & O/M \\ M/M^2 & O/M \end{pmatrix}$. Це буде скінченне кільце (16 елементів), яке фробеніусове і напівланцюгове.

Список використаних джерел

1. M. Hazewinkel, N. Gubarenı and V. V. Kirichenko, Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. K.A.P., Dordrecht, 2004, xii+380 pp.
2. M. Hazewinkel, N. Gubarenı and V. V. Kirichenko, Algebras, rings and modules. Vol. 2. Mathematics and its Applications, 586. Springer, Dordrecht, 2007, xii+400 pp.
3. G. Hopkins, Rings with minimal condition for left ideals. Ann. of Math., v.40 (1939), p.712-730

УДК 512.54

Ярослав В. Лавренюк

Нерозкладність скінченної знакозмінної групи у пряму суму підгруп при нестандартній примітивній дії

В роботі встановлена нерозкладність скінченної знакозмінної групи в нетривіальну пряму суму деяких підгруп при нестандартній примітивній дії.

Ключові слова: знакозмінна група, примітивна дія, пряма сума.

ylavrenyuk@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко

Нерозкладність. Групи підстановок відіграють важливу роль в сучасній теорії груп, бо групові дії та конкретні зображення груп використовуються у всіх розділах теорії груп. В даній роботі розглядається базовий тип дії скінченних груп підстановок — примітивна дія.

Теорема 1. Нехай n — натуральне число більше ніж 35. Нехай також Ω — скінченна множина потужності відмінної від n , така що

- 1) Alt_n діє на Ω точно і примітивно.
- 2) Точковий стабілізатор M групи (Alt_n, Ω) не є примітивною підгрупою групи (Alt_n, n) .

Тоді не існує підгрупи H групи Alt_n , такої що (H, Ω) є нетривіальною прямою сумою своїх підгруп.

Доведення. За теоремою М.Лібєка, С.Прегер та Дж.Саксла (див. [1]) є три можливості для примітивної дії Alt_n на Ω , в залежності від точкового стабілізатора M цієї групи на n -множині.

- 1) Alt_n діє на k -елементних підмножинах множини $N = \{1, \dots, n\}$. У цьому випадку $|\Omega| = C_n^k$, $1 < k < n - 1$, та M діє на n -множині інтранзитивно.
- 2) Alt_n діє на розбитті N на b підмножин потужності a . У цьому випадку $|\Omega| = n!/((a!)^b b!)$, $n = ab$, $1 < a$, $1 < b$, та M діє на n -множині транзитивно та імпримітивно.

Yaroslav V. Lavrenyuk

Indecomposability of finite alternating groups into the direct sum of subgroups provided nonstandard primitive action

Indecomposability of finite alternating groups into the direct sum of certain subgroups provided nonstandard primitive action is obtained.

Key Words: alternating group, primitive action, direct sum.

3) M діє на n -множині примітивно.

За умовами теореми можливі лише перші два випадки.

Нехай $H = H_1 \times H_2$ — підгрупа Alt_n . Нехай також $g \in H_1$ та $h \in H_2$ — нетривіальні елементи.

1. Нехай $C_m = \{(k_1, \dots, k_m) \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n\}$, де $1 < m < n - 1$. Ми розглянемо дію Alt_n на C_m у цьому випадку.

Нехай $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$. Нехай також $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ та $\alpha^g \neq \alpha$. Ми можемо вважати, що $a_1^g \notin \{a_2, a_3, \dots, a_m\}$ та $a_1^g = a_n$. Розглянемо множини такого вигляду

$$D = \{\{a_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\} \mid 1 < i_2 < \dots < i_m < n\}.$$

Для кожного $\gamma \in D$ маємо $\gamma^g \neq \gamma$. Припустимо, що множини рухомих точок підстановок g та h не перетинаються. Тоді для кожного $\gamma \in D$ виконуватиметься рівність $\gamma^h = \gamma$. Множини α , $\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m, a_{m+1}\}$ ($1 < i < m + 1$) і $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_j\}$ ($m < j < n$) є об'єднаннями орбіт h на N і ці множини містяться в D . Таким чином, $a_i^h = a_i$ для $1 < i < m + 1$ та $a_j^h = a_j$ для $m < j < n$. Тобто $a_i^h = a_i$ для $1 < i < n$, і, отже, $a_1^h = a_1$. Звідси, рухомою точкою h може бути лише одна точка — a_n . Тому h — одиничний елемент. Отримали суперечність.

2. Можемо вважати, що $g(k_1) = k_2 \neq k_1$, $h(m_1) = m_2 \neq m_1$.

Виберемо $g(k_3) \in \{k_3, k_4\}$, $\{k_3, k_4\} \cap \{k_1, k_2, m_1, m_2\} = \emptyset$. Також виберемо $h(m_3) \in \{m_3, m_4\}$, $\{m_3, m_4\} \cap \{k_1, k_2, k_3, k_4, m_1, m_2\} = \emptyset$.

Такий елемент g діє нетривіально на розбитті $\{\{k_1, k_3, \dots\}, \{k_2, \dots\}, \{k_4, \dots\}, \dots\}$ у випадку $a \geq 2$, $b \geq 3$ і на розбитті $\{\{k_1, k_3, k_4, \dots\}, \{k_2, \dots\}, \dots\}$ у випадку $a \geq 3$, $b \geq 2$. Подібним чином, елемент h діє нетривіально на розбитті $\{\{m_1, m_3, \dots\}, \{m_2, \dots\}, \{m_4, \dots\}, \dots\}$ у випадку $a \geq 2$, $b \geq 3$ і на розбитті $\{\{m_1, m_3, m_4, \dots\}, \{m_2, \dots\}, \dots\}$ у випадку $a \geq 3$, $b \geq 2$.

Неважко помітити, що для $a \geq 8$, $b \geq 2$ розбиття $\{\{k_1, k_3, k_4, m_1, m_3, m_4, \dots\}, \{k_2, m_2, \dots\}, \dots\}$ є рухомою точкою і для g , і для h у випадку $m_1 \neq k_2$. Оскільки $g \neq h$, то ми можемо вважати, що $m_1 \neq k_2$ (можливо для цього потрібно буде розглянути елемент h^{-1} замість h).

А для $a \geq 2$, $b \geq 6$ розбиття $\{\{k_1, k_3, \dots\}, \{k_2, \dots\}, \{k_4, \dots\}, \{m_1, m_3, \dots\}, \{m_2, \dots\}, \{m_4, \dots\}, \dots\}$ є рухомою точкою і для g , і для h у випадку $m_1 \neq k_1$. Оскільки $g \neq h$, то ми можемо вважати, що $m_1 \neq k_1$ (можливо для цього потрібно буде розглянути елемент h^{-1} замість h). Отримали суперечність у випадку $n \geq 36$.

Отже, у випадку інтранзитивної чи імпримітивної дії M , будь-який нетривіальний прямий добуток H не може бути прямою сумою нетривіальних підгруп на Ω для $n \geq 36$. $\square$

Теорема 2. Нехай n — натуральне число більше ніж 9. Нехай також Ω — скінченна множина потужності відмінної від n , така що

- 1) Alt_n діє на Ω точно і примітивно.
- 2) Точковий стабілізатор M групи (Alt_n, Ω) примітивна підгрупа групи (Alt_n, n) .

Тоді не існує такої підгрупи H групи Alt_n , яка задовольняє одночасно таким умовам.

- 1) $(H, \Omega) = (H_1, \Omega) \oplus (H_2, \Omega)$ та $(H, n) = (H_1, n) \oplus (H_2, n)$, де $H_1 \simeq \text{Alt}_{k_1}$ та $H_2 \simeq \text{Alt}_{k_2}$, $k_1 > 4$ та $k_2 > 4$.

- 2) Кожна нетривіальна орбіта групи H_i на множині Ω має довжину k_i для $i = 1, 2$.

Доведення. Припустимо, що така підгрупа H існує. Розглянемо стабілізатор $H_0 = \text{Stab}_H(\alpha)$ для $\alpha \in \Omega$. Оскільки зображення (Alt_n, Ω) підстановково ізоморфно зображенню Alt_n за правими класами суміжності по M , то ми можемо ототожнити множину Ω з множиною правих

класів суміжності Alt_n по M . Тоді для довільної точки $\gamma \in \Omega$ виконується одна з двох умов: $\gamma^{H_1 \cap H_0} = \gamma$ або $\gamma^{H_2 \cap H_0} = \gamma$. Тобто для довільного $a \in \text{Alt}_n$ виконується одна з двох умов

$$1) a(H_1 \cap H_0)a^{-1} < M,$$

$$2) a(H_2 \cap H_0)a^{-1} < M.$$

Нехай O_1 та O_2 нетривіальні орбіти на множині N груп $H_1 \cap H_0$ і $H_2 \cap H_0$ відповідно. А значить $H_1 \cap H_0$ діє тривіально на O_2 і $H_2 \cap H_0$ діє тривіально на O_1 . Нехай також $h_1 \in H_1 \cap H_0$ та $h_2 \in H_2 \cap H_0$ є циклами довжини три на орбітах O_1 та O_2 відповідно. Виберемо $a \in \text{Alt}_n$, таким щоб $ah_1a^{-1} = h_1^2$, $ah_2a^{-1} = h_2^2$ та множина рухомих точок a на множині N містила лише 4 точки (a — добуток двох транспозицій). Тоді M містить один з елементів: $ah_1a^{-1}h_1^{-1}$ чи $ah_2a^{-1}h_2^{-1}$. Кожен з них діє на множині N як цикл довжини 3. Врахувавши, що M діє примітивно на множині N , одержимо, що M містить Alt_n . Це суперечить точності дії Alt_n на Ω . $\square$

Приклад застосування. Спочатку ми нагадаємо визначення простої локально скінченної групи Фібоначчі F (див. [2]), а потім доведемо теорему

Теорема 3. Кожна локальна система групи F містить не просту групу.

Насправді ця теорема є наслідком з більш загального твердження ([3, Statement 2.1]). Але ми наведемо її елементарне доведення, що базується на класифікаційних властивостях скінченних знакозмінних груп встановлених вище.

Розглянемо послідовність Фібоначчі:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n > 1).$$

Також розглянемо послідовності груп підстановок $(G^{(n)}, X^{(n)})$, $(G_1^{(n)}, X_1^{(n)})$, $(G_2^{(n)}, X_2^{(n)})$, $n > 3$, де $X^{(n)} = X_1^{(n)} \sqcup X_2^{(n)}$, $|X_1^{(n)}| = f_{n-1}$, $|X_2^{(n)}| = f_{n-2}$, $(G^{(n)}, X^{(n)}) = (G_1^{(n)}, X_1^{(n)}) \oplus (G_2^{(n)}, X_2^{(n)})$, $G_1^{(n)} \simeq \text{Alt}_{f_{n-1}}$ та $G_2^{(n)} \simeq \text{Alt}_{f_{n-2}}$.

Бієкції $X^{(n)} \rightarrow X_1^{(n+1)}$ та $X_1^{(n)} \rightarrow X_2^{(n+1)}$ індукують ізоморфізми груп підстановок: $\phi_1^{(n)} : (G^{(n)}, X^{(n)}) \rightarrow (G_1^{(n+1)}, X_1^{(n+1)})$ та $\phi_2^{(n)} : (G_1^{(n)}, X_1^{(n)}) \rightarrow (G_2^{(n+1)}, X_2^{(n+1)})$ відповідно.

Визначимо для $n > 3$ мономорфізми $\phi^{(n)} : G^{(n)} \rightarrow G^{(n+1)}$ так: $\phi^{(n)}((g_1, g_2)) = (\phi_1^{(n)}((g_1, g_2)), \phi_2^{(n)}(g_1))$ для довільних $g_1 \in G_1^{(n)}$,

$g_2 \in G_2^{(n)}$. Індуктивна границя F системи $(\{G^{(n)}\}, \{\phi^{(n)}\}, n > 3)$ називається локально скінченною групою Фібоначчі. Відомо, що ця група є простою локально скінченною групою 1-типу (див. [4]).

Доведення теореми 3. Припустимо, що існує локальна система Σ групи F , яка містить лише прості групи. Виділимо в Σ підсистему Σ_1 за правилом: $H \in \Sigma_1$ тоді і лише тоді, коли H є скінченною знакозмінною групою. За лемою [5, Lemma 1.A.10] виконується хоча б одна з наступних умов:

1) $\Sigma \setminus \Sigma_1$ є локальною системою F .

2) Σ_1 є локальною системою F .

Нехай $\Sigma_1 = \{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ та $\Sigma \setminus \Sigma_1 = \{M_i, i \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, що в першому випадку множина пар $\{(M_i, E), i \in \mathbb{N}\}$, де E — одинична підгрупа F , утворює покриття Кегеля групи F . Оскільки ж група F має 1-тип, то $\{(M_i, E), i \in \mathbb{N}\}$ не може бути покриттям Кегеля F . Отримали суперечність.

Таким чином, можна вважати, що F є об'єднанням скінченних знакозмінних груп з Σ_1 , тобто $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$.

Також можна вважати, що існують зростаючі послідовності натуральних чисел $\{s_1, s_2, \dots\}$ та $\{r_1, r_2, \dots\}$, такі що $r_1 > s_1 > 10$ та $K_i := \phi_{s_i, s_{i+1}}(G^{(s_i)}) \leq H_{r_i} \leq G^{(s_{i+1})}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Оскільки $G^{(s_{i+1})} < \text{Alt}(X^{(s_{i+1})})$, то H_{r_i} є власною підгрупою групи $\text{Alt}(X^{(s_{i+1})})$.

Оскільки $G^{(s_{i+1})}$ є прямою сумою, то дія групи H_{r_i} на $X^{(s_{i+1})}$ не є транзитивною.

Група H_{r_i} містить підгрупу K_i , яка діє на $X^{(s_{i+1})}$ як пряма сума груп $\text{Alt}_{f(s_{i-1})}$ та $\text{Alt}_{f(s_{i-2})}$ з природним діагональним зануренням множників. Тобто $X^{(s_{i+1})} = \bigcup_{j=1}^t Y_j \cup \bigcup_{t=1}^m Z_t$, $|Y_j| = |X^{(s_{i-1})}|$, $|Z_t| = |X^{(s_{i-2})}|$, та $\text{Alt}_{f(s_{i-1})}$ діє стандартно на кожній Y_j та $\text{Alt}_{f(s_{i-2})}$ діє стандартно на кожній Z_t .

Дія H_{r_i} на кожній орбіті на $X^{(s_{i+1})}$ є примітивною. Дійсно, припустимо, що H_{r_i} діє на $X^{(s_{i+1})}$ імпримітивно. Оскільки H_{r_i} містить K_i , то кожна Y_j повністю міститься у якомусь блоці імпримітивності, і те ж саме правильно для Z_t . Таким чином, максимальна нормальна підгрупа, яка фіксує блоки імпримітивності є нетривіальною, що суперечить простоті H_{r_i} .

Група H_{r_i} містить пряму суму K_i , тому для кожної орбіти O групи H_{r_i} на $X^{(s_{i+1})}$ існують такі j та t , що $Y_j \subset O$ та $Z_t \subset O$. Оскільки

$H_{r_i} < \text{Alt}(X_1^{(s_{i+1})}) \oplus \text{Alt}(X_2^{(s_{i+1})})$, то кожна орбіта цілком міститься або в $X_1^{(s_{i+1})}$ або в $X_2^{(s_{i+1})}$. Оскільки ж два послідовні члени послідовності Фібоначчі взаємно прості, то хоча б один з них є непарним числом. Тому хоча б одна орбіта O_0 містить непарну кількість точок. За Теоремою 1 та Теоремою [6, Theorem] група H_{r_i} діє на орбіті O_0 як $\text{Alt}(O_0)$. Таким чином, $(H_{r_i}, X^{(s_{i+1})})$ діє на кожній орбіті стандартним чином за Теоремами 1 та 2. Отже, всі орбіти мають однаковий розмір, а саме $|O_0|$. Тому потужності $X_1^{(s_{i+1})}$ та $X_2^{(s_{i+1})}$ мають спільний дільник — $|O_0|$. З іншого боку ці потужності є взаємно простими, як два послідовні члени послідовності Фібоначчі. Одержали суперечність. Таким чином, кожна локальна система групи F містить не просту скінченну групу. $\square$

Висновки

В роботі вивчена розкладність скінченної знакозмінної групи в пряму суму деяких підгруп при нестандартній примітивній дії. Наведено приклад застосування одержаних результатів.

Список використаних джерел

1. M. W. Liebeck, C. E. Praeger, and J. Saxl A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups. J. Algebra 111 (1987), 365-383.
2. Sushchansky V.I. Locally finite simple Fibonacci group. Voprosy Algebr, V.14 (1999), 107-114.
3. F. Leinen, O. Puglisi Ideals in group algebras of simple locally finite groups of 1-type. Pacific J. of Math. V.207, N.2 2002, 433-445.
4. Lavrenyuk Ya. and Nekrashevych V. On classification of inductive limits of direct products of alternating groups. J. Lond. Math. Soc. 75 (2007), no. 1, 146-162.
5. O.H.Kegel, B.A.F.Wehrfritz Locally finite groups. North-Holland, Amsterdam-London, 1973.
6. M. W. Liebeck, J. Saxl The primitive permutation groups of odd degree. J. Lond. Math. Soc. (2) 31 (1985), 250-264.

Надійшла до редколегії 27.05.2008

УДК 512.53

Іван В. Лівінський

Максимальні нільпотентні піднапівгрупи в напівгрупі бінарних відношень

У цій роботі описано всі нільпотентні піднапівгрупи, максимальні серед нільпотентних піднапівгруп даного ступеня нільпотентності у напівгрупі всіх бінарних відношень скінченної множини. Підраховано кількість таких піднапівгруп і доведено критерій ізоморфності двох таких піднапівгруп.

Ключові слова: нільпотентна піднапівгрупа, бінарне відношення.

Ivan V. Livinsky

Maximal nilpotent subsemigroups of a binary relations semigroup

In this paper all nilpotent subsemigroups maximal among the nilpotent subsemigroups of given nilpotency class of binary relations semigroup of a finite set are presented. The quantity of such subsemigroups is counted and criteria of isomorphism of two such subsemigroups is proved.

Key Words: nilpotent subsemigroup, binary relations semigroup.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В.В.

1. Вступ

Напівгрупа S з нулем 0 називається нільпотентною, якщо $S^k = \{0\}$ для деякого k . Ступенем нільпотентності напівгрупи ми будемо називати найменше таке число k , нільелементом – елемент напівгрупи, який в деякому степені дорівнює нулю, ступенем нільпотентності нільелемента – найменший такий степінь. Вивченням нільпотентних піднапівгруп різних напівгруп займалось багато авторів. Однією з перших робіт у цьому напрямі була робота [1], де вивчалися нільпотентні піднапівгрупи у симетричній напівгрупі T_n всіх перетворень n -елементної множини. В роботі [2] аналогічна задача розв'язана і для інверсної симетричної напівгрупи IS_n всіх часткових підстановок n -елементної множини. Загальний підхід до вивчення нільпотентних піднапівгруп перетворень було запропоновано в [3]. Інший підхід до вивчення нільпотентних піднапівгруп, не пов'язаний з дією напівгрупи на деякій множині, запропоновано в [4].

У даній роботі вивчаються нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи B_n всіх бінарних відношень на n -елементній множині. Ступінь нільпотентності таких піднапівгруп не перевищує n . Для кожного k , $1 \leq k \leq n$, описані всі максимальні нільпотентні

піднапівгрупи ступеня нільпотентності k (тобто такі, які не містяться в жодній іншій нільпотентній піднапівгрупі ступеня k). Встановлено також критерій ізоморфності таких піднапівгруп. Зауважимо, що максимальні нільпотентні піднапівгрупи в B_n описані в [4]. Піднапівгрупи напівгрупи бінарних відношень ми будемо позначати великими латинськими літерами, а її елементи – малими грецькими. Позначимо також $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

2. Будова нільпотентних піднапівгруп

Для довільного відношення $\alpha \in B_n$ розглянемо множини $l(\alpha) = \{a \in N \mid \exists b \in N: a\alpha b\}$, $r(\alpha) = \{b \in N \mid \exists a \in N: a\alpha b\}$, які будемо називати лівою і правою проекціями α . Наприклад, якщо $\alpha = \{(1, 2), (1, 3)\}$, то $l(\alpha) = \{1\}$, $r(\alpha) = \{2, 3\}$; $l(\emptyset) = r(\emptyset) = \emptyset$. Очевидною є така лема:

Лема 1. $nil(\alpha) \leq 2 \Leftrightarrow l(\alpha) \cap r(\alpha) = \emptyset$.

Теорема 2.

$$nil(S) \leq 2 \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha) \right) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha) \right) = \emptyset$$

Доведення. Справді, якщо $nil(S) \leq 2$, то для будь-яких $\alpha, \beta \in S$ виконується $\alpha\beta = \emptyset$, і $\beta\alpha = \emptyset$, а тому $l(\alpha) \cap r(\beta) = l(\beta) \cap r(\alpha) = \emptyset$. Отже, $l(\alpha) \cap \left(\bigcup_{\beta \in S} r(\beta) \right) = \emptyset$ для всіх $\alpha \in S$, а

тому $i \left(\bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha) \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in S} r(\beta) \right) = \emptyset$. Навпаки, якщо таке співвідношення виконується, то для будь-яких $\alpha, \beta \in S$ буде $\alpha\beta = \emptyset$, і $\beta\alpha = \emptyset$. А це означає, що $\text{nil}(S) = 2$, якщо $S \neq \{\emptyset\}$. Теорему доведено.

Тепер нехай $S \subset B_n$ і $\text{nil}(S) = 2$. Якщо

$$\left(\bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha) \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha) \right) \subset N \quad (1)$$

(включення строге), то піднапівгрупа S не максимальна, бо ми можемо в S додати ще один елемент, наприклад відношення $\{(k, l)\}$, де

$$k \in \bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha), \quad \text{а} \quad l \in \left(\bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha) \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha) \right).$$

Напівгрупа $S \cup \{(k, l)\}$ також має ступінь нільпотентності 2, а тому за умовою (1) напівгрупа S не буде максимальною серед нільпотентних піднапівгруп ступеня 2. Тому для максимальних нільпотентних піднапівгруп S ступеня 2 проєкції $\bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha)$ і $\bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha)$ утворюють розбиття множини N .

Теорема 3. Кожна нільпотентна піднапівгрупа B_n ступеня 2 має вигляд $2^{L_1 \times L_2}$, де $L_1 \cup L_2 = N$ – розбиття множини N . Порядок такої напівгрупи дорівнює $2^{|L_1||L_2|}$, причому для кожної пари натуральних чисел (l_1, l_2) , такої, що $l_1 + l_2 = n$, існує $\binom{n}{l_1} = \binom{n}{l_2}$ різних піднапівгруп S таких, що $l_1 = \left| \bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha) \right|$ і

$$l_2 = \left| \bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha) \right|. \quad \text{Всього в } B_n \text{ є}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2 \quad \text{різних}$$

максимальних піднапівгруп ступеня 2.

Доведення. Нехай S деяка нільпотентна піднапівгрупа ступеня 2. Позначимо для неї $L_1 = \bigcup_{\alpha \in S} l(\alpha)$ і $L_2 = \bigcup_{\alpha \in S} r(\alpha)$. Тоді, очевидно,

$S \subseteq 2^{L_1 \times L_2}$. Крім того, піднапівгрупа $2^{L_1 \times L_2}$ максимальна, бо якщо ми до неї додамо ще яке-небудь відношення α , то для нього буде

$r(\alpha) \cap L_2 \neq \emptyset$ або $l(\alpha) \cap L_1 \neq \emptyset$, і тому піднапівгрупа, яка містить і $2^{L_1 \times L_2}$, і α , уже не буде нільпотентною ступеня 2.

Розглянемо тепер випадок $k = 3$.

Лема 4. Якщо λ – максимальне відношення серед всіх нільпотентних відношень ступеня 3, то воно транзитивне.

Доведення. Припустимо, що λ максимальне, але не транзитивне, тобто $(k, l) \in \lambda$ і $(l, m) \in \lambda$, але $(k, m) \notin \lambda$, для деяких чисел k, l, m . Розглянемо відношення $\lambda \cup \{(k, m)\}$. Оскільки $(k, m) \in \lambda^2$, то $m \notin l(\lambda)$, і $k \notin r(\lambda)$, бо інакше ступінь λ не дорівнюватиме 3. Тому $(\lambda \cup \{(k, m)\})\lambda = \lambda^2$, $(\lambda \cup \{(k, m)\})^2 = \lambda^2 \cup (\lambda \circ \{(k, l)\}) = \lambda^2$, і $(\lambda \cup \{(k, m)\})^3 = \lambda^2(\lambda \cup \{(k, m)\}) = \lambda^3 \cup (\lambda^2 \circ \{(k, m)\}) = \emptyset$. Таким чином, $\text{nil}(\lambda \cup \{(k, m)\}) = 3 = \text{nil}(\lambda)$, що суперечить максимальності λ .

Нагадаємо, що для довільних бінарних відношень $\alpha, \beta, \gamma \in B_n$, $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$, $(\alpha \cup \beta)\gamma = \alpha\gamma \cup \beta\gamma$ (2). Нехай тепер λ – максимальне відношення. Розглянемо множину 2^λ . Ця множина є напівгрупою, для цього нам досить показати, що для довільних $\lambda_1, \lambda_2 \in 2^\lambda$ виконується $\lambda_1\lambda_2 \in 2^\lambda$. Це справді так, бо $\lambda_1, \lambda_2 \subseteq \lambda$, і тому $\lambda_1\lambda_2 \subseteq \lambda^2 \subseteq \lambda \in 2^\lambda$. Тому 2^λ – це нільпотентна напівгрупа, причому неважко бачити, що вона має ступінь 3. Тепер доведемо головне твердження:

Теорема 5. Піднапівгрупа $T \subseteq B_n$ буде максимальною серед нільпотентних піднапівгруп із B_n ступеня нільпотентності 3 тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд 2^λ , де λ максимальне відношення серед нільпотентних відношень ступеня 3.

Доведення. Припустимо, що λ максимальне, але напівгрупа 2^λ не максимальна, тобто

$2^\lambda \subset S$, де $\text{nil}(S) = 3$. Це означає, що в S є деякий елемент α , який не лежить в 2^λ . Розглянемо елемент $\alpha \cup \lambda$. Доведемо, що цей елемент теж нільпотентний і теж має ступінь 3. Справді, користуючись дистрибутивністю (2), маємо: $(\alpha \cup \lambda)^3 = \alpha^3 \cup \alpha^2\lambda \cup \alpha\lambda\alpha \cup \dots \cup \lambda^3$, але всі доданки в правій частині дорівнюють $\emptyset$, бо $\alpha, \lambda \in S$, а $\text{nil}(S) = 3$. Отже $(\alpha \cup \lambda)^3 = \emptyset$, що суперечить припущенню про максимальність λ , і тому 2^λ – максимальна піднапівгрупа.

Тепер залишилось довести, що таким чином вичерпуються всі максимальні піднапівгрупи. Отже, нехай S – максимальна піднапівгрупа ступеня 3. Виберемо в ній максимальний за включенням елемент λ . Тоді $2^\lambda \subseteq S$. Якщо $2^\lambda \subset S$, виберемо $\alpha \in S \setminus 2^\lambda$, тоді неважко побачити, що елемент $\lambda \cup \alpha$ теж нільпотентний ступеня 3, і $2^{\lambda \cup \alpha}$ – напівгрупа ступеня 3. Доведемо, що $2^{\lambda \cup \alpha} \cup S$ є нільпотентною піднапівгрупою ступеня 3, яка строго містить S . Розглянемо добуток довільних трьох елементів з цієї напівгрупи. Якщо в цьому добутку є елементи з $2^{\lambda \cup \alpha}$, замінимо їх на $\lambda \cup \alpha$, від цього добуток хіба що збільшиться. Але коли ми розкриємо дужки за дистрибутивністю, ми отримаємо суму добутків по три елементи з напівгрупи S , яка має ступінь 3, тому всі ці добутки дорівнюють нулю. Отже $2^{\lambda \cup \alpha} \cup S$ – нільпотентна піднапівгрупа ступеня 3, що і треба було довести.

Таким чином, при $k = 2, 3$ відшукування максимальних піднапівгруп звелось до відшукування максимальних за включенням елементів ступеня k . Подивимось, як вони виглядають при $k = 3$.

Нехай λ – максимальний елемент ступеня 3. Тоді, $I(\lambda) \cap r(\lambda) \neq \emptyset$, бо тоді буде $\text{nil}(\lambda) \leq 2$. Позначимо $L_1 = I(\lambda) \setminus r(\lambda)$, $L_2 = I(\lambda) \cap r(\lambda)$, $L_3 = r(\lambda) \setminus I(\lambda)$. Очевидно, множини L_1, L_2, L_3 попарно не перетинаються. Крім того, λ не

містить елементів з $L_2 \times L_2$, бо якщо $(l_1, l_2) \in L_2 \times L_2$, і $(l_1, l_2) \in \lambda$, то $l_1 \in I(\lambda)$, і $l_2 \in r(\lambda)$, звідки $\lambda^3 \supseteq \lambda \circ \{(l_1, l_2)\} \circ \lambda \neq \emptyset$. Тому $\lambda \cap 2^{L_2 \times L_2} = \emptyset$, і ми маємо включення $\lambda \subseteq (L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_3) \cup (L_1 \times L_3)$, причому, відношення справа має ступінь 3.

Лема 6. Відношення λ максимальне тоді і тільки тоді, коли $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = N$.

Доведення. Справді, якщо $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subset N$, виберемо $k \in N \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, і розглянемо $(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_3) \cup (L_1 \times L_3) \cup \{(k, l)\}$, де $l \in L_1$. Ясно, що це відношення має ступінь 3 (для перевірки досить піднести його до куба, і розкрити дужки).

Тому максимальних елементів існує стільки, скільки існує способів розбити n -елементну множину на три непусті підмножини, якщо порядок множин є істотним. Наприклад, при $n = 4$ розбити на три підмножини можна 6 способами – одна множина двоелементна, а інші одноелементні, і впорядкувати кожне таке розбиття можна також 6 способами. Тому в B_4 є 36 максимальних елементів, і стільки ж максимальних піднапівгруп, причому, в кожній такій напівгрупі $|2^{(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_3) \cup (L_1 \times L_3)}| = 2^{1+2+2} = 32$ елементи. Тепер ми можемо сформулювати класифікаційну теорему для випадку $k = 3$.

Теорема 7. Кожна нільпотентна піднапівгрупа B_n ступеня 3 має вигляд $2^{(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_3) \cup (L_1 \times L_3)}$, де $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = N$ – розбиття. Для кожного розбиття $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ існує 6 різних піднапівгруп; всього в B_n міститься $3!S_n^3 = 6 \cdot \frac{1}{6}(3^n - 3 \cdot 2^n + 3) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ різних максимальних піднапівгруп, де S_n^3 – число Стирлінга другого роду.

Тепер узагальнимо наші міркування на випадок довільного k . Як і раніше, розглянемо множину всіх елементів ступеня k , а з неї виберемо всі максимальні за включенням.

Лема 8. *Кожне максимальне відношення транзитивне.*

Доведення. Справді, нехай λ – максимальний елемент ступеня k , і припустимо, що λ не транзитивний, тоді $\lambda \subset \lambda \cup \lambda^2$, але $(\lambda \cup \lambda^2)^k = \emptyset$. Щоб переконатись в цьому, досить просто розкрити дужки і скористатись дистрибутивністю (2). Тому припущення про максимальність було невірним, і λ – транзитивний.

Лема 9. 2^λ – нільпотентна піднапівгрупа ступеня k .

Доведення. Дійсно, якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in 2^\lambda$, то $\lambda_1 \lambda_2 \subseteq \lambda^2 \subset \lambda \in 2^\lambda$, для довільних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in 2^\lambda$. Звідси $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \subseteq \lambda \lambda \dots \lambda = \lambda^k = \emptyset$, і оскільки $\text{nil}(\lambda) = k$, то $\text{nil}(2^\lambda) = k$.

Теорема 10. *Піднапівгрупа $T \subseteq B_n$ буде максимальною серед нільпотентних піднапівгруп із B_n ступеня нільпотентності k тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд 2^λ , де λ максимальне відношення серед нільпотентних відношень ступеня k .*

Доведення. Нехай $2^\lambda \subset S$, де S – деяка піднапівгрупа ступеня k . Тоді в S є елемент α , який не міститься в λ . Тому $\lambda \subset \lambda \cup \alpha$, і $(\lambda \cup \alpha)^k = \lambda^k \cup \lambda^{k-1} \alpha \cup \dots \cup \alpha^k = \emptyset$, бо $\text{nil}(\alpha) = k$. Отже $2^\lambda \subset 2^{\lambda \cup \alpha}$. Тому така піднапівгрупа S не існує, і 2^λ – максимальна.

Тепер покажемо, що таким чином вичерпуються всі максимальні піднапівгрупи. Нехай S – максимальна піднапівгрупа ступеня k . Виберемо λ як максимальний за включенням елемент S . Очевидно, що з максимальності S

маємо $2^\lambda \subseteq S$. Якщо $2^\lambda \subset S$, виберемо $\alpha \in S \setminus 2^\lambda$. Тоді α не міститься в λ , і $S \subset 2^{\lambda \cup \alpha} \cup S$. Досить показати, що $2^{\lambda \cup \alpha} \cup S$ – нільпотентна піднапівгрупа ступеня k . Розглянемо добуток довільних k елементів з цієї напівгрупи. Якщо в ньому є елементи з $2^{\lambda \cup \alpha}$, замінимо їх на $\lambda \cup \alpha$, від цього добуток хіба що збільшиться. Але після того, як ми розкриємо дужки за дистрибутивністю, в нас вийде сума добутоків по k елементів з напівгрупи S , яка має ступінь k . Тому всі ці добутки дорівнюють нулю, і $2^{\lambda \cup \alpha} \cup S$ – нільпотентна напівгрупа ступеня k .

Отже, у загальному випадку також потрібно шукати максимальні за включенням елементи ступеня k . Ці елементи можна описати наступним чином:

Теорема 11. *Кожне максимальне відношення λ ступеня k має вигляд $\lambda = \bigcup_{i < j} (L_i \times L_j)$, де множини $L_1, L_2, \dots, L_k$ утворюють розбиття множини N .*

Доведення. Візьмемо довільне максимальне відношення λ ступеня k і для нього визначимо наступні множини: $L_1 = l(\lambda^{k-1})$, $R_k = r(\lambda^{k-1})$, $L_2 = l(\lambda^{k-2}) \setminus L_1$, $R_{k-1} = r(\lambda^{k-2}) \setminus R_k$, ..., $L_{k-1} = l(\lambda) \setminus L_{k-2}$, $R_2 = r(\lambda) \setminus R_3$.

Тоді маємо низку наступних включень:

$$\begin{aligned} \lambda^{k-1} &\subseteq L_1 \times R_k, \lambda^{k-2} \subseteq (L_1 \times R_{k-1}) \cup \\ &\cup (L_1 \times R_k) \cup (L_2 \times R_k), \dots, \lambda \subseteq (L_1 \times R_2) \\ &\cup \dots \cup (L_1 \times R_k) \cup (L_2 \times R_3) \cup \dots \cup \\ &\cup (L_2 \times R_k) \cup \dots \cup (L_{k-1} \times R_k), \text{ при цьому} \\ &\text{маємо } l(\lambda^i) = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{k-i}, \\ &r(\lambda^i) = R_{i+1} \cup R_{i+2} \cup \dots \cup R_k, i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Якщо покласти $\lambda^0 = N \times N$, то ці рівності будуть виконуватись і при $i = 0$, якщо ми покладемо $L_k = N \setminus L_{k-1}$, і $R_1 = N \setminus R_2$. Тому обидва набори множин $L_1, L_2, \dots, L_k$ і $R_1, R_2, \dots, R_k$ утворюють

розбиття N . Крім того $\lambda^i \lambda^{k-i} = \emptyset$, а тому $l(\lambda^i) \cap r(\lambda^{k-i}) = r(\lambda^i) \cap r(\lambda^{k-i}) = \emptyset$, тобто

$$(L_1 \cup \dots \cup L_{k-i}) \cap (R_{k-i+1} \cup \dots \cup R_k) = \emptyset, (3)$$

$$(R_1 \cup \dots \cup R_{k-i}) \cap (L_{k-i+1} \cup \dots \cup L_k) = \emptyset. (4)$$

Із (3) випливає включення $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{k-i} \subseteq R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{k-i}$, а з (4) протилежне включення. Тому $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{k-i} = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{k-i}$, звідки $L_i = R_i$ при всіх $i = 1, 2, \dots, k$, $\lambda \subseteq \bigcup_{i < j} (L_i \times L_j)$, і залишається помітити, що відношення у правій частині є нільпотентним ступеня k .

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 12. Кожна нільпотентна піднапівгрупа B_n ступеня k має вигляд 2^λ , де $\lambda = \bigcup_{i < j} (L_i \times L_j)$, $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k = N$ – розбиття. Для кожного розбиття $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ існує $k!$ різних піднапівгруп; всього в B_n міститься $k! S_n^k$ різних максимальних піднапівгруп, де S_n^k – число Стирлінга другого роду.

Набір $(|L_1|, |L_2|, \dots, |L_k|)$ будемо називати типом піднапівгрупи

3. Критерій ізоморфності

Нехай S, T – дві піднапівгрупи ступеня k , $S = 2^\lambda$, $T = 2^\mu$, $\lambda = \bigcup_{i < j} (L_i \times L_j)$, $\mu = \bigcup_{i < j} (M_i \times M_j)$. Позначимо $l_i = |L_i|$, $m_i = |M_i|$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тоді, очевидно, $l_1 + l_2 + \dots + l_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Теорема 13. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи S і T із B_n ступеня нільпотентності 2 типів (l_1, l_2) та (m_1, m_2)

відповідно будуть ізоморфними тоді і тільки тоді, коли $(l_1, l_2) = (m_1, m_2)$, або $(l_1, l_2) = (m_2, m_1)$.

Доведення. Нільпотентна напівгрупа ступеня 2 є напівгрупою з нульовим множенням. Дві такі напівгрупи будуть ізоморфними тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий порядок. $|S| = 2^{|\lambda|} = 2^{l_1 l_2}$; аналогічно $|T| = 2^{m_1 m_2}$, тому якщо $S \cong T$, то $l_1 l_2 = m_1 m_2$, крім того, у нас $l_1 + l_2 = m_1 + m_2$, звідки отримуємо, що або $l_1 = m_1$, і $l_2 = m_2$, або $l_1 = m_2$, і $l_2 = m_1$.

Тепер нехай $k \geq 3$. Знайдемо кількість таких відношень $\alpha \in S$, що $S^p \alpha = \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p \alpha \mid \sigma_i \in S\} = \{\emptyset\}$, і $\alpha S^{k-q} = \{\alpha \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-q} \mid \sigma_i \in S\} = \{\emptyset\}$. Зауважимо, що серед всіх добутків $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p$ максимальним є λ^p . Тому множина тих α , для яких $S^p \alpha = \{\emptyset\}$ збігається з множиною тих α , для яких $\lambda^p \alpha = \emptyset$. Аналогічно, множина тих α , для яких $\alpha S^{k-q} = \{\emptyset\}$, збігається з множиною тих α , для яких $\alpha \lambda^{k-q} = \emptyset$. Зауважимо, що $\lambda^p \alpha = \emptyset \Leftrightarrow r(\lambda^p) \cap l(\alpha) = \emptyset$. Неважко побачити, що $\lambda^m = \bigcup_{i+m-1 < j} (L_i \times L_j)$, зокрема,

$$\lambda^{k-1} = \bigcup_{i+k-2 < j} (L_i \times L_j) = L_1 \times L_k, \quad \lambda^k = \emptyset. \quad \text{Тому}$$

$$r(\lambda^p) = L_{p-1} \cup L_{p+2} \cup \dots \cup L_k, \quad \text{звідси } l(\alpha) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p. \quad \text{Аналогічно, } \alpha \lambda^{k-q} = \emptyset$$

$$\text{еквівалентно } r(\alpha) \cap l(\lambda^{k-q}) = \emptyset. \quad \text{Але}$$

$$l(\lambda^{k-q}) = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_q, \quad \text{тому } r(\alpha) \subseteq L_{q+1} \cup L_{q+2} \cup \dots \cup L_k. \quad \text{Тепер візьмемо}$$

$$1 \leq p \leq q \leq k. \quad \text{Тоді ми маємо, що } \alpha \subseteq (L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p) \times$$

$$(L_{q+1} \cup L_{q+2} \cup \dots \cup L_k), \quad \text{і всі такі відношен-$$

$$\text{ня } \alpha \text{ утворюють піднапівгрупу, яка збігається з } 2^{(L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p) \times (L_{q+1} \cup L_{q+2} \cup \dots \cup L_k)}.$$

$$\text{Всього таких відношень } 2^{(l_1 + l_2 + \dots + l_p)(l_{q+1} + l_{q+2} + \dots + l_k)}. \quad \text{Аналогічно, в}$$

T кількість таких відношень β , що
 $T^p \beta = \beta T^{k-q} = \{\emptyset\}$ дорівнює
 $2^{(m_1+m_2+\dots+m_p)(m_{q+1}+m_{q+2}+\dots+m_k)}$. Із ізоморфності S і T
випливає, що

$$2^{(l_1+l_2+\dots+l_p)(l_{q+1}+l_{q+2}+\dots+l_k)} = \\ = 2^{(m_1+m_2+\dots+m_p)(m_{q+1}+m_{q+2}+\dots+m_k)},$$

звідки $(l_1+l_2+\dots+l_p)(l_{q+1}+l_{q+2}+\dots+l_k) =$
 $(m_1+m_2+\dots+m_p)(m_{q+1}+m_{q+2}+\dots+m_k)$ (5)

для довільних $1 \leq p \leq q \leq k$.

Тепер зафіксуємо p і випишемо співвідношення (5) для всіх $q \geq p$:

$$(l_1+l_2+\dots+l_p)(l_{p+1}+l_{p+2}+\dots+l_k) = \\ = (m_1+m_2+\dots+m_p)(m_{p+1}+m_{p+2}+\dots+m_k), \dots, \\ (l_1+l_2+\dots+l_p)l_k = (m_1+m_2+\dots+m_p)m_k.$$

Віднімаючи від кожної рівності наступну, отримаємо рівності $(l_1+l_2+\dots+l_p)l_q =$
 $(m_1+m_2+\dots+m_p)m_q$, для всіх $p < q$.

Тепер зафіксуємо q і для всіх $p < q$ випишемо

$$(l_1+l_2+\dots+l_{q-1})l_q = (m_1+m_2+\dots+m_{q-1})m_q, \\ (l_1+l_2+\dots+l_{q-2})l_q = (m_1+m_2+\dots+m_{q-2})m_q, \\ \dots, l_1 l_q = m_1 m_q.$$

Знову віднімаючи від кожної рівності наступну, отримуємо $l_p l_q = m_p m_q$ для

всіх $p < q$, тобто $l_p l_q = m_p m_q$, при $p \neq q$.

Враховуючи це, з рівності

$$(l_1+l_2+\dots+l_k)^2 = (m_1+m_2+\dots+m_k)^2 = n^2,$$

отримуємо $l_1^2+l_2^2+\dots+l_k^2 = m_1^2+m_2^2+\dots+m_k^2$.

Звідси аналогічним чином отримуємо для всіх i ,
 $1 \leq i \leq k$, $l_i^2 + (l_1+\dots+l_{i-1}+l_{i+1}+\dots+l_k)^2 =$
 $= m_i^2 + (m_1+\dots+m_{i-1}+m_{i+1}+\dots+m_k)^2$.

Отримане можна переписати наступним чином: $l_i^2 + (n-l_i)^2 = m_i^2 + (n-m_i)^2$, що еквівалентно $(l_i-m_i)(l_i+m_i-n) = 0$. Тому для кожного $i = 1, 2, \dots, k$, або $l_i = m_i$, або $l_i + m_i = n$.

Теорема 14. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи S і T із B_n ступеня нільпотентності $k \geq 3$ будуть ізоморфними тоді і тільки тоді, коли вони однотипні.

Доведення. Припустимо, що для деякого i , $l_i + m_i = n$. Покажемо, що тоді, для всіх $j \neq i$ буде $l_j = m_j$. Якщо це не так, і для деякого $j \neq i$ $l_j + m_j = n$, ми отримаємо $(l_i + l_j) + (m_i + m_j) = 2n$, звідки або $l_i + l_j \geq n$, або $m_i + m_j \geq n$. Але кожна з цих нерівностей неможлива, бо якщо, наприклад, $l_i + l_j \geq n$, то $\sum_{k \neq i, j} l_k \leq 0$, у той час, як $l_k > 0$. Тому $l_j = m_j$ при $i \neq j$. А звідси $l_i = n - \sum_{k \neq i} l_k = n - \sum_{k \neq i} m_k = m_i$. Тому, для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, $l_i = m_i$. Таким чином, умова $(l_1, l_2, \dots, l_k) = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ є необхідною для того, щоб напівгрупи S і T були ізоморфними. Очевидно, що вона є і достатньою. Якщо $(l_1, l_2, \dots, l_k) = (m_1, m_2, \dots, m_k)$, то напівгрупи S і T спряжені і ізоморфні.

Список літератури

1. R. Biggs, S. Rankin, C. Reis, A study of graph closed subsemigroups of a full transformation semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. 219 (1976), 211-223. 2. А. Ганюшкин, Т. Кормышева Т, О нильпотентных подполугруппах конечной симметричной инверсной полугруппы. Мат. Заметки 56 (1994), №3, 29-35. 3. О. Ganyushkin, V. Mazorchuk, On the structure of semigroup IO_n . Semigroup forum 66 (2003), no. 3, 455-483. 4. О. Ganyushkin, V. Mazorchuk, On classification of maximal nilpotent subsemigroups. J. of Algebra 320 (2008) 3081-3103

Надійшла до редколегії 25.05.2008

УДК 519.11

Б. В. Олійник¹

k —однорідність n -кратної прямої суми метричного простору на себе

Введено до розгляду конструкції прямої суми метричних просторів і n -кратної прямої суми метричного простору на себе. Доводиться, що n -кратна пряма сума k -однорідного метричного простору X є k -однорідним метричним простором ($1 \leq k \leq |X|$).

Ключові слова: метричний простір, k -однорідність, сильна однорідність, пряма сума метричних просторів, матриця відстаней.

bogd@ukma.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1. Нагадаємо, що метричний простір (X, d_X) називається однорідним, якщо для довільних точок x і y цього простору існує ізометрія g така, що $x^g = y$. Розглянемо деякі узагальнення цього поняття, а саме k -однорідність і сильну однорідність.

Означення 1. Метричний простір (X, d_X) будемо називати k -однорідним, якщо для довільних двох k -елементних ізометричних підпросторів U і V цього простору існує ізометрія g така, що $U^g = V$, тобто підпростір V є образом підпростору U при ізометрії g .

Зауважимо, що 1-однорідний простір є однорідним. Таким є, наприклад, простір Хемінга — простір всіх булевих векторів довжини n з відстанню Хемінга. Відстань Хемінга між двома булевими векторами дорівнює кількості їх попарно різних координат.

Матриця $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ називається матрицею відстаней метричного простору $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, якщо елементи a_{ij} цієї матриці дорівнюють відстаням між точками x_i і x_j , тобто $a_{ij} = d_X(x_i, x_j)$ для всіх $1 \leq i, j \leq n$.

З k -однорідності метричного простору не випливає його $(k-1)$ -однорідність. Розглянемо такий приклад. Нехай метричний простір зада-

B. V. Oliynyk

k -homogeneity of the n -fold direct sum of metric space over itself

It is introduced constructions of direct sum of metric spaces and n -fold direct sum of metric space over itself. It is proved that the n -fold direct sum of k -homogeneous metric space X is a k -homogeneous metric space ($1 \leq k \leq |X|$).

Key words: metric space, k -homogeneity, strong homogeneity, direct sum of metric spaces, distance matrix.

ється такою матрицею відстаней

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що цей простір не є однорідним (1-однорідним), але є 2-однорідним.

Скінченний n -точковий метричний простір назвемо сильно однорідним, якщо він є k -однорідним для будь-якого $k \leq n$. Нескінченний метричний простір назвемо сильно однорідним, якщо він є k -однорідним для будь-якого $k \in \mathbb{N}$.

Прикладом сильно однорідного простору є простір зі сталою метрикою, тобто простір, в якому відстань між двома різними точками дорівнює деякому додатному числу. Іншим прикладом сильно однорідного простору є, як легко зрозуміти, простір всіх дійсних чисел з евклідовою метрикою.

Нагадаємо, що скінченні метричні простори (X, d_X) і (Y, d_Y) називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $\sigma : X \rightarrow Y$ між множинами X і Y , яка зберігає рівності і строгі нерівності відстаней між парами точок, тобто

¹Робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Ф 25./157-2008 № ДР 0107U010499 та Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської Академії.

для довільних точок $x, y, u, v \in X$ з рівності $d_X(x, y) = d_X(u, v)$ випливає рівність

$$d_Y(\sigma(x), \sigma(y)) = d_Y(\sigma(u), \sigma(v)),$$

а з нерівностей $d_X(x, y) < d_X(u, v)$ і $d_X(x, y) > d_X(u, v)$ випливають відповідні нерівності для чисел $d_Y(\sigma(x), \sigma(y))$ і $d_Y(\sigma(u), \sigma(v))$. Для скінченних метричних просторів ця умова рівності сильна існуванню монотонно зростаючої неперервної функції $s: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $s(0) = 0$, яку називають шкалою, такої, що $d_X = s(d_Y)$ ([1], [2]). Очевидним є таке твердження

Твердження 1. Якщо метричні простори (X, d_X) і (Y, d_Y) ізоморфні, і (X, d_X) є k -однорідним (сильно однорідним) метричним простором, то (Y, d_Y) також k -однорідний (сильно однорідний) метричний простір.

Тривіальні приклади k -однорідних просторів даються таким твердженням.

Твердження 2. Нехай (X, d_X) n -точковий метричний простір у якого всі ненульові значення метрики попарно різні. Тоді цей простір є k -однорідним для всіх $2 \leq k \leq n$.

Доведення. Очевидно, що простір (X, d_X) не є 1-однорідним. Нехай U і V k -точкові ізометричні підпростори цього простору. Оскільки всі ненульові значення метрики d_X різні, то це означає, що $U = V$. Тоді тотожне відображення простору в себе є ізометрією g простору (X, d_X) такою, що $U^g = V$. $\square$

2. Охарактеризуємо тепер конструкцію прямої суми метричних просторів. Нехай (X_1, d_{X_1}) , (X_2, d_{X_2}) , ..., (X_n, d_{X_n}) скінченна послідовність просторів скінченного діаметра. Зафіксуємо деяке додатне число c , для якого справедлива така нерівність

$$\max\{\text{diam}(X_1), \dots, \text{diam}(X_n)\} < c. \quad (1)$$

На диз'юнктному об'єднанні $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$ визначимо функцію

$$\tau_c(x, y) = \begin{cases} d_{X_i}(x, y), & \text{якщо } x, y \in X_i, \\ c, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (2)$$

тобто значення $\tau_c(x, y)$ дорівнює відстані між точками x і y в просторі X_i , $1 \leq i \leq n$, якщо x і y належать X_i , і дорівнює c , якщо точки x і y належать до різних множин X_i і X_j , $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Теорема 1. Функція, визначена на множині $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$ формулою (2) є метрикою на цій множині.

Доведення. Функція τ_c є симетричною і набуває невід'ємних значень, причому $\tau_c(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли для деякого i , $1 \leq i \leq n$, $d_{X_i}(x, y) = 0$, а це означає, що $x = y$. Покажемо, що виконується нерівність трикутника. Нехай u, v, w точки, що належать диз'юнктному об'єднанню $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$. Якщо існує таке i , $1 \leq i \leq n$, що $u, v, w \in X_i$, то нерівність трикутника, очевидно, виконується. Тому достатньо розглянути такі два випадки.

1) $u, v \in X_i$, $w \in X_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Тоді за визначенням функції τ_c

$$\tau_c(u, w) = \tau_c(v, w) = c,$$

причому справедливою є нерівність

$$\tau_c(u, v) < c = \tau_c(v, w).$$

А тому в цьому випадку нерівність трикутника виконується.

2) $u \in X_i$, $v \in X_j$, $w \in X_k$, $i \neq j \neq k$, $i \neq k$, $1 \leq i, j, k \leq n$. Тоді за визначенням τ_c справедливими будуть рівності

$$\tau_c(u, w) = \tau_c(v, w) = \tau_c(u, v) = c.$$

Очевидно, нерівність трикутника в цьому випадку також виконується, що і доводить твердження теореми. $\square$

Простір $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_c)$ будемо називати c -прямою сумою метричних просторів X_i , $1 \leq i \leq n$.

Твердження 3. Нехай c_1 і c_2 додатні числа, що задовольняють нерівності 1. Тоді простори $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_{c_1})$ і $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_{c_2})$ ізоморфні.

Доведення. Покажемо, що тотожне відображення φ множини $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ на себе є ізоморфізмом просторів $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_{c_1})$ і $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_{c_2})$. Достатньо показати, що відображення φ зберігає рівності і строгі нерівності відстаней між точками. Справді,

$$\tau_{c_1}(u, v) \neq \tau_{c_2}(\varphi(u), \varphi(v))$$

в тому і лише тому випадку, коли точки u і v належать до різних просторів X_i і X_j . Але в

цьому випадку за визначенням метрик τ_{c_1} і τ_{c_2} маємо $\tau_{c_1}(u, v) = c_1$, $\tau_{c_2}(u, v) = c_2$, причому для чисел c_1 і c_2 справедливою є нерівність (1), тобто кожне з цих чисел більше найбільшого значення метрик d_{X_i} , $1 \leq i \leq n$. А отже рівності і нерівності відстаней при відображенні φ будуть зберігатись. $\square$

Таким чином, введена нами конструкція є єдиною з точністю до ізоморфізму, а тому вважатимемо константу c фіксованою, а простір $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_c)$ будемо називати прямою сумою метричних просторів X_i , $1 \leq i \leq n$ і позначати $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$.

Якщо кожен елемент скінченної послідовності $(X_1, d_{X_1}), \dots, (X_n, d_{X_n})$ є ізометричною копією простору (X, d_X) , то простір $(X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n, \tau_c)$ будемо називати n -кратною прямою сумою метричного простору (X, d_X) на себе і позначати $X \oplus X \oplus \dots \oplus X$.

Теорема 2. Матриця відстаней прямої суми $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ метричних просторів (X_i, d_{X_i}) , $1 \leq i \leq n$, має такий вигляд

$$\begin{pmatrix} D_{X_1} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ C_1 & D_{X_2} & C_3 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & D_{X_3} & \dots & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & D_{X_n} \end{pmatrix}$$

де D_{X_i} — матриця відстаней метричного простору X_i , а C_i квадратна матриця порядку $|X_i|$, кожен елемент якої дорівнює константі c , для всіх $1 \leq i \leq n$.

Доведення. Доведення впливає безпосередньо з визначення конструкції прямої суми метричних просторів. $\square$

Теорема 3. Нехай метричний простір (X, d_X) є k -однорідним метричним простором. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ n -кратна пряма сума простору (X, d_X) на себе є k -однорідним метричним простором.

Доведення. Нехай Y і Z — два k -елементні ізометричні підпростори простору $X \oplus \dots \oplus X$. За визначенням n -кратної прямої суми простору (X, d_X) на себе досить обмежитись випадком, коли Y є підпростором деякої ізометри-

чної копії (X, d_X) . Тоді з визначення метрики τ випливає, що підпростір Z також належить до однієї з ізометричних копій простору X . Якщо Y і Z належать до тієї ж копії простору X , то існування ізометрії φ безпосередньо впливає з k -однорідності простору X . Нехай тепер Y міститься в i -й ізометричній копії X_i простору X , а підпростір Z — в j -й копії X_j , $1 \leq i \neq j \leq n$. Тоді в X_i існує підпростір Z' ізометричний Z , а оскільки простір (X, d_X) є k -однорідним, то існує ізометрія f простору X_i для якої виконується рівність $f(Y) = Z'$. Оскільки X_i і X_j є ізометричними копіями простору X , то існує ізометрія g простору X_i на X_j , $g(X_i) = X_j$. Побудуємо тепер ізометрію φ простору $X \oplus X \oplus \dots \oplus X$ на себе таким чином: $\varphi(X_i) = g(f(X_i)) = X_j$, $\varphi(X_j) = g^{-1}(f^{-1}(X_j)) = X_i$, на інших ізометричних копіях простору X φ діє як тотожне перетворення. Очевидно, що $\varphi(Y) = Z$. $\square$

Зауважимо, що на довільні прямі суми метричних просторів теорема (3) не узагальнюється.

Висновки

Введено до розгляду конструкцію прямої суми скінченної послідовності метричних просторів скінченного діаметра і n -кратної прямої суми метричного простору на себе. Охарактеризовано матрицю відстаней прямої суми метричних просторів в термінах матриць відстаней цих просторів. Доведено, що n -кратна пряма сума k -однорідного метричного простору на себе є k -однорідним метричним простором.

Список використаних джерел

1. Shoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions The Annals of Mathematics, p.811-841, v.39 N4, 1938.
2. Олійник Б.В. I -універсальні метричні простори з тривіальною групою ізометрій Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки — Том 22.— с.35-39. — 2004

Надійшла до редколегії 30.05.2008

УДК 51(091) Єрмаков

Олена М. Рябухо, к.ф.-м.н., доцент

Базис Єрмакова в скінченних розв'язних групах

Наводиться характеристика в сучасних термінах результатів професора Київського університету Василя Єрмакова (1845-1922) про скінченні розв'язні групи.

Ключові слова: скінченні розв'язні групи, теорія Галуа, бази Єрмакова.

E-mail: rom.olena@gmail.com

1 Вступ

Скінченні розв'язні групи є цікавим і важливим класом груп, який відіграє істотну роль в різних розділах сучасної алгебри: теорії Галуа, теорії груп підстановок, гомологічній алгебрі, тощо [4]. Дослідження будови і властивостей скінченних розв'язних груп завжди цікавило фахівців з теорії груп. Починаючи з 60-х років минулого століття в таких дослідженнях використовуються комп'ютерні методи [2], [6], [8]. За допомогою комп'ютерів в останні десятиліття було отримано цілий ряд цікавих результатів з теорії скінченних розв'язних груп [7]. При цьому було побудовано різні алгоритми для обчислення в таких групах: для поелементних перетворень, тестування різних властивостей, побудови і дослідження тих чи інших підгруп. Більшість таких алгоритмів увійшла до програмного комплексу GAP для обчислень в теорії груп [4]. Усі алгоритми спираються на стандартні методи зображення групи підстановками чи матрицями або зображення більш складно організованими числовими наборами [3]. При застосуванні останнього типу зображень елементів групи в ній вибираються системи твірних спеціального типу так звані бази розв'язної групи. У зв'язку з цим використовуються різні підходи до побудови баз та дослідження їх властивостей.

З аналізу робіт на цю тему випливає, що історично першою працею, в якій фактично було введено поняття бази розв'язної групи і досліджено основні властивості баз, був опублікований в 1901 році мемуар професора Київського університету В.П. Єрмакова [1]. Основною метою цієї роботи є спрощений виклад теорії Галуа розв'язності в радикалах алгебраїчних рівнянь над числовими полями. З часу виходу друком монографії К. Жордана [5] дослідження розв'яз-

O.M. Ryabukho, Cand.Sci (Phys.-Math.), Associate Professor

Base of Ermakov in finite soluble groups

Results of professor of Kyiv University Vasil Ermakov (1845-1922), concerned with finite soluble groups, are characterizing in the modern terms in our work.

Key Words: finite soluble groups, Galois theory, base of Ermakov.

ності алгебраїчного рівняння означало дослідження його групи Галуа на предмет існування в ній субнормального ряду з абелевими факторами (групи, в яких такі ряди існують, і було названо розв'язними). В.П. Єрмаков описує інший підхід до цієї задачі – він встановлює, що розв'язність рівняння в радикалах рівносильна існуванню в його групі Галуа спеціальних систем твірних, що задовольняють ряд вимог. Пізніше системи твірних такого типу почали називати базами розв'язних груп. Саме тому далі ми називатимемо системи твірних, описані в роботі [1] базами Єрмакова розв'язних груп.

Робота [1] залишилася фактично невідомою алгебраїстам, і отримані в ній результати не використовувалися в подальших дослідженнях. Метою даного повідомлення є характеристика в сучасних термінах результатів Єрмакова про скінченні розв'язні групи, порівняння їх з подальшими результатами інших авторів і опис деяких нових властивостей баз Єрмакова.

2 Бази Єрмакова в скінченних розв'язних групах.

Нехай G – скінченна група, $g_1, g_2, \dots, g_n$ – послідовність елементів групи G . Характеризуючи скінченні групи підстановок, які є групами Галуа розв'язних в радикалах рівнянь, Єрмаков ([1], §14) вводить до розгляду спеціальні системи твірних групи. В сучасній термінології їх можна визначити таким чином.

Означення 1. Послідовність елементів $g_1, g_2, \dots, g_n$ називається базою Єрмакова групи G , якщо виконано такі дві вимоги:

(а) послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n$ є незвідною системою твірних групи G ;

(б) для довільного k , $1 \leq k \leq n-1$, підгрупа, породжена елементами $g_1, g_2, \dots, g_k$, комутує в

цілому з елементом g_{k+1} .

Твердження 1. Скінченна група G має базу Єрмакова в тому і лише в тому випадку, коли G є розв'язною.

Доведення цього твердження в один бік легко здійснюється індукцією за числом n елементів бази, а в інший – впливає з означення розв'язної групи і основної теореми про скінченні абелеві групи.

Для бази $B = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ групи G покладемо $G_k = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$. Підгрупи G_k , $1 \leq k \leq n$, утворюють строго зростаючий ланцюг підгруп $\{1\} < G_1 < G_2 < \dots < G_n = G$, який називатимемо її базисним рядом.

Далі Єрмаков визначає поняття відносного порядку елемента групи щодо такої системи.

Означення 2. Порядком елемента $g \in G_{k+1} \setminus G_k$ відносно бази B називається таке найменше натуральне число m , що $g^m \in G_k$.

Твердження 2. Порядок елемента g відносно бази скінченної розв'язної групи G є дільником (абсолютного) порядку G .

Доведення впливає з теореми Лагранжа.

Порядок елемента h_i деякої бази $B = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ групи G позначимо символом $|h_i|_B$. Для відносних порядків елементів бази розв'язної групи виконується наступна вимога.

Твердження 3. Нехай g – скінченна розв'язна група з базою $B = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ – порядки елементів $g_1, g_2, \dots, g_n$ відносно бази B . Тоді $|G| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

Доведення. Індукцією за числом n легко переконатися, що кожен елемент групи G можна подати у вигляді добутку $g_1^{l_1} \cdot g_2^{l_2} \cdot \dots \cdot g_n^{l_n}$, де $0 \leq l_i \leq |g_i| = k_i$ ($1 \leq i \leq n$), а різні добутки $g_1^{l_1} \cdot g_2^{l_2} \cdot \dots \cdot g_n^{l_n}$, $g_1^{l'_1} \cdot g_2^{l'_2} \cdot \dots \cdot g_n^{l'_n}$ визначають той самий елемент групи в тому і лише в тому разі, коли $l_i \equiv l'_i \pmod{k_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Звідси й дістаємо потрібне твердження.

Твердження 4. Нехай $B = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ – база групи G . Тоді для довільного i , $1 \leq i \leq n$, порядок $|g_i|$ елемента g_i ділиться на його порядок $|g_i|_B$ відносно бази B .

Доведення. Оскільки $G_i \cdot g_i = g_i \cdot G_{i-1}$, то

$$|G_i| = |\langle G_{i-1}, g_i \rangle| = \frac{|G_{i-1}| \cdot |g_i|}{|G_{i-1} \cap \langle g_i \rangle|}.$$

З іншого боку, $|G_i| = |G_{i-1}| \cdot |g_i|_B$. Тому

$$|g_i|_B = \frac{|g_i|}{|G_{i-1} \cap \langle g_i \rangle|}.$$

В.П. Єрмаков описує також перетворення, які можна здійснювати над елементами бази розв'язної групи так, щоб знову діставати деяку іншу її базу. Це перетворення таких двох типів:

(I) заміна твірної g_i на її степінь $g_i^{s_i}$, де s_i є взаємно простим з порядком k_i твірної g_i відносно бази;

(II) заміна твірної g_i на добуток $g_i \cdot g$, де $g \in G_{i-1}$.

Твердження 5. Нехай $g_1, g_2, \dots, g_n$ є базою скінченної розв'язної групи G , $h_1, h_2, \dots, h_n$ – послідовність елементів цієї групи, утворені з бази за допомогою перетворень типу (I), (II), які застосовуються в довільній скінченній кількості і довільному порядку. Тоді система $h_1, h_2, \dots, h_n$ також утворює базу групи G і визначає в ній той же базисний ряд, що й початкова база.

Доведення. Нехай $g_1, g_2, \dots, g_n$ – база групи G , $\{1\} < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$ – ряд підгруп, визначений цією базою, тобто $G_i = \langle g_1, g_2, \dots, g_i \rangle$ для довільного $i = 1, 2, \dots, n$. Досить переконатися, що застосовуючи до цієї бази якесь з перетворень (I), (II) ми знову дістанемо базу групи G , яка визначає той же ряд $\{1\} < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$. Зрозуміло, що кожне перетворення типу (I), (II) зберігає властивість бути незвідною системою твірних групи G , тобто при замінах $g_i \rightarrow g_i^{s_i}$, (де k_i – порядок елемента g_i відносно бази і $(s_i, k_i) = 1$) та $g_i \rightarrow g_i \cdot g$ (де $g \in G_{i-1}$) для нової системи елементів $g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n$ виконується умова (а) означення 1. Оскільки при перетворенні $g_i \rightarrow g_i \cdot g = \bar{g}$, $g \in G_{i-1}$, новий елемент $\bar{g}$ міститься в підгрупі, породженій g_i , G_{i-1} , то $\langle g_1, g_2, \dots, g_i \rangle = \langle g_1, g_2, \dots, \bar{g} \rangle$, тобто нова система твірних визначає той же базисний ряд $\{1\} < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$, що й початкова. А тому для неї також виконується умова (б) означення 1.

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай база $B' = \{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ отримана з бази $B = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ за допомогою скінченної кількості перетворень типу (I) і (II).

Тоді $|g_i|_B = |g'_i|_{B'}$ для довільного $i, 1 \leq i \leq n$.

Доведення. Доведення випливає з рівності $|G_i| = |G_{i-1}| \cdot |g_i|_B = |G_{i-1}| \cdot |g'_i|_{B'}$.

Приклад 1. Одним з найпростіших прикладів розв'язних груп, який відіграє важливу роль в теорії Галуа, є симетрична група S_4 . Вона містить субнормальний ряд

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright \{e\}$$

довжини 3, тобто є розв'язною довжини 3 (символом V_4 позначено четверну групу Клейна). Оскільки $|S_4/A_4| = 2$, $|A_4/V_4| = 3$, $|V_4| = 4$ то база Єрмакова в цій групі складається з чотирьох підстановок g_1, g_2, g_3, g_4 , які повинні задовольняти умови:

$$g_1 \in S_4/A_4, \quad g_2 \in A_4/V_4, \quad \langle g_3, g_4 \rangle = V_4.$$

Ці підстановки можна вибрати, наприклад, таким чином: $g_1 = (1234)$, $g_2 = (123)$, $g_3 = (12)(34)$, $g_4 = (13)(24)$. Для вибраної в такий спосіб бази B маємо:

$$|g_1| = 4, |g_1|_B = 2, |g_2|_B = |g_2| = 3, \\ |g_3|_B = |g_3| = 2, |g_4|_B = |g_4| = 2$$

Отже, для порядку групи S_4 згідно з твердженням 3 дістаємо

$$|S_4| = |g_1|_B \cdot |g_2|_B \cdot |g_3|_B \cdot |g_4|_B = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24.$$

При перетворенні бази, яке визначається рівностями $g'_1 = g_1 \cdot (124)$, $g'_2 = g_2 \cdot g_4$, $g'_3 = g_3 \cdot g_4$, $g'_4 = g_4$, дістаємо

$$|g'_1| = 4, |g'_1|_{B'} = 2, |g'_2|_{B'} = |g'_2|_B = 3, \\ |g'_3|_{B'} = |g'_3|_B = 2, |g'_4|_{B'} = |g'_4|_B = 2.$$

Окремо виділяється випадок, коли порядок твірної підстановки є простим числом, оскільки в такому разі до неї можна застосовувати довільні перетворення типу $g \rightarrow g^{s_i}$, де $1 \leq s_i < |g_i|$.

Якщо підстановка g є циклом довжини p і для деякої підстановки $h \in S_p$ має місце рівність $h^{-1}ph = g^s$, $1 \leq s < p$, то $|h| \mid (p-1)$. Враховуючи це, легко дістаємо, що циклічна підстановка g порядку p спряженням елементами із S_p може бути перетворена в довільну підстановку g^s ($1 \leq s < p$).

Приклад 2. Транзитивна розв'язна група підстановок простого степеня p (такі групи є групами Галуа незвідних рівнянь степеня p , розв'язних у радикалах має базу Єрмакова, яка визначається таким чином.

Нехай g_1 – цикл довжини p , $g_1 = (01 \dots p-1)$.

Перетворення g_1 природним чином ототожнюється із зсувом $x \rightarrow x+1$ поля лишків Z_p за модулем простого числа p . Для елемента g_2 бази Єрмакова g_1, g_2 повинна виконуватися умова $\langle g_1 \rangle g_2 = g_2 \langle g_1 \rangle$, або, $g_2 g_1 g_2^{-1} = g_1^s$, де s – деяке натуральне число, що задовольняє вимогу $0 < s < p$. З останньої рівності випливає, що підстановка g_2 має вигляд $x \rightarrow sx$, $x \in Z_p$. Якщо s – первісний елемент за модулем p , то $|s| = p-1$. У такому разі група $G_4 = \langle g_1, g_2 \rangle$ є максимальною розв'язною підгрупою симетричної групи S_p і з точністю до спряженості визначається однозначно; в противному разі G – деяка підгрупа цієї групи. Згідно з твердженням 4 порядок максимальної розв'язної підгрупи симетричної групи S_p дорівнює

$$|g_1|_B \cdot |g_2|_B = |g_1| \cdot |g_2| = p(p-1),$$

а тому її підгрупи можуть мати порядки вигляду

$$\frac{1}{\delta} p(p-1), \text{ де } \delta \mid (p-1).$$

Базою Єрмакова підгрупи такого порядку будуть підстановки g_1, g_2^{δ} . Це повністю характеризує всі бази Єрмакова в розв'язних групах підстановок степеня p з точністю до спряженості.

3 Системи твірних елементів розв'язних груп в комп'ютерних обчисленнях.

Поняття бази розв'язної групи виявилось дуже зручним при побудові різноманітних алгоритмів для обчислень в розв'язних групах, які почали здійснюватись на комп'ютерах починаючи з шістдесятих років минулого століття. Однією з основних праць у цьому напрямку є стаття Х. Юргенсена [6], в якій вводяться до розгляду так звані AG -системи груп. Здійснюється це таким чином.

Нехай G – скінченна група, e – її нейтральний елемент.

Означення 3. AG -системою групи G називається пара (S, U) , де $S = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ система твірних групи G , $U = \{g_{ij} \mid 1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq n\}$ – деяка множина її елементів, такі, що виконуються вимоги:

$$(1) \quad g_{ij} \in \langle e, g_1, \dots, g_{j-1} \rangle = G_{j-1} \quad 1 \leq i \leq j, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \quad g_j^{s_j} = g_{jj}, 1 \leq j \leq n;$$

$$(3) \quad [g_i, g_j] = g_{ij}, 1 \leq i < j \leq n;$$

$$(4) \quad g_j^t \in G_{j-1} \text{ для довільного числа } t \text{ такого, що}$$

$$1 \leq i < s_j, 1 \leq j \leq n$$

Твердження 6. Нехай (S, U) – AG -система групи G , в якій система твірних S є незвідною системою. Тоді S є базою Єрмакова групи G , а ряд підгруп $\{e\} < G_1 < G_2 < \dots < G_n = G$ є її базисним рядом.

Доведення. Умова (а) означення 1 бази Єрмакова виконується автоматично, а його умова (b) випливає з умови 3) означення AG -системи.

Як наслідок дістаємо, що кожна скінченна група, яка має AG -систему, є розв'язною.

Твердження 7. За допомогою перетворень типів (I), (II) кожену базу Єрмакова скінченної групи G можна перетворити в AG -систему цієї групи.

Далі в роботі [6] встановлюється, що елементи $g_{ij} \in U$ можна записувати в певній нормалізованій формі $g_{ij} = g_1^{m_1} g_2^{m_2} \dots g_{j-1}^{m_{j-1}}$, де показники $m_1, m_2, \dots, m_j$ визначаються як певні функції від i, j . Це дає змогу записувати в канонічній формі (як певні слова в твірних $g_1, g_2, \dots, g_j$) всі елементи групи G і далі працювати із зображеннями цих елементів у формі канонічних слів над алфавітом $g_1, g_2, \dots, g_j$. Зокрема, множенню елементів групи відповідає операція послідовного приписування до одного зі слів частин іншого слова зі зведенням отриманого в такий спосіб довшого слова до канонічної форми. Маючи алгоритм множення елементів групи далі можна будувати алгоритми для проведення різноманітних поелементних обчислень у цій групі.

Подібний метод задання розв'язних груп розглядався Дж. Уамслеєм [9], робота якого присвячена побудові модифікацій відомого алгоритму «нільпотентні фактори» для скінченних розв'язних груп. Пізніше в кількох роботах Ч. Сімпса (див. напр. [8]) було розвинуто інший підхід до побудови систем твірних розв'язних груп, заданих як групи підстановок. Цей підхід ґрунтується на виділенні в основній множині, на якій діє група, ряду підмножин – так званої бази Сімпса групи підстановок, і побудови спеціальних твірних підстановок, які стабілізують певні підмножини цієї бази. Не вдаючись в деталі, зазначимо, що такі системи твірних скінченних розв'язних груп мають властивості, близькі до властивостей баз Єрмакова.

4 Деякі висновки.

Зі всього сказаного вище випливає, що поняття бази скінченної розв'язної групи, по суті вве-

дене на межі XIX і XX століть київським математиком В.П. Єрмаковим, випередило свій час десь на півстоліття. Лише в другій половині XX століття почали з'являтися дослідження, пов'язані з побудовою і вивченням систем твірних у групах для потреб комп'ютерної алгебри. У ряді робіт, фактично перевідкривалися конструкції Єрмакова, і проте розвиток алгебри на цей час вже сягнув нових рубежів, автори використовували іншу термінологію і нові методологічні підходи, а також істотно розвивали підхід В.П. Єрмакова. Таким чином, результати В.П. Єрмакова про спеціальні системи твірних (базис) в скінченних розв'язних групах були першим кроком в дослідженнях надзвичайно важливих і цікавих проблем, пов'язаних зі становленням нових методів дослідження скінченних розв'язних груп.

Список використаних джерел

1. *Єрмаков В.П.* Алгебраические уравнения, решаемые в радикалах // Университетские известия, 1901. – №5. – С. 1-65. – №6. – С. 65-101.
2. *Cannon J., Holt D.* Computing chief series, composition series and socles in large permutation groups // J. Symbolic Comput. – 1997. – №3-4, 285-301.
3. *Eick B.* Special presentations for finite soluble groups and computing (pre-) Frattini subgroups in: W. Kantor and L. Finkelstein, editors. Groups and Computations II, of Amer. Math. Soc. DIMACS Series. – 1997. – 101-112 p.
4. *Holt D., Eick B., O'Brien E.* Handbook of Computational Group Theory. In the series "Discrete Mathematics and its Applications". (Boca Raton) Chapman & Hall. – 2005. – 514 p.
5. *Jordan C.* Traite des substitutions et des equations algebriques. Paris: Goutier Villard, 1870.
6. *Jurgensen H.* Calculation with the elements of finite groups given by generators and defining relations in: Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, 1970, pp. 47-57.
7. *Seress A.* An introduction to Computational Group Theory. // Notices of the AMS. – 1997. – №6-7, 671-679 p.
8. *Sims C.C.* Computing the order of a solvable permutation groups // J. Symbolic Computation. – 1990. – №5-6, 699-705 p.
9. *Wamsley J.* Computing soluble groups, Group Theory [Lecture Notes in Mathematics, 573]. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. – 1977. – 93-117.

Надійшла до редколегії 18.06.2008

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 620.178.1519.9

Андрущенко В.О., пров. інж., Кір'єв А.М., пров. інж., Лендел В.В., пров. інж., Лисенко О.Г. кан. тех.наук., ст.н.спів., Мельниченко М.М., кан. фіз-мат. наук, ст.н.спів., Міцкевич Є.І., пров. інж., Нікітенко В.М., пров. інж.

Скануючий мікро-нано модифікатор

Пропонується розроблений та виготовлений авторами прототип скануючого мікро-нано модифікатора (МікроНаноМод) для створення мікро і нано розмірних структур, та дослідження фізико-механічних властивостей поверхні матеріалів і тонких плівок. Простота і надійність конструкції приладу МікроНаноМод, а також легкість у налаштуванні і керуванні дозволяють використовувати його не тільки в школах, вузах і дослідницьких лабораторіях, але й у технологічних процесах в умовах виробництва.

Ключові слова: тунельний мікроскоп, нанотехнологія, наномодифікація, інденування.

*E-mail: andron@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Мелешко

Вступ

З початку 90-х років минулого століття до вивчення контактних взаємодій почали залучати сучасні фізичні методи, які мають нанометрову роздільну здатність (такі як скануюча тунельна й атомно-силова мікроскопія, мікро-наноінденування) [1-4]. Потреби нанотехнології, наноматеріалознавства, мініатюризації елементної бази мікроелектроніки й оптоелектроніки, створення інтегрованих мікроелектромеханічних систем, інтелектуальних мікророботів змусили в останні роки різко активізувати роботи з вивчення явищ на рівні окремих елементарних подій в одному мікро - (нано) контакті. Зокрема, технології дослідження і модифікації приповерхневих шарів, що використовують атомно-гострі голки, локалізують вплив в обсягах нанометрового масштабу і повинні враховувати велику різницю в механічних і інших властивостях матеріалу при переході від макро - до наномасштабів об'єкта. Мікроінденування - один з розповсюджених не руйнуючих методів аналізу механічних властивостей твердих тіл. Незважаючи на великі досягнення в області інденування (нові методики, апаратура й отримані якісно нові

V.O. Andrushchenko, A.M. Kir'ev,
V.V. Lendel, O.G. Lysenko,
M.M. Melnichenko,
E.I. Mitskevich,
V.M. Nikitenko

Scanning micro-nano modifier

The prototype of scanning micro-nano modifier (MicroNanoMod) developed and made by authors usable for creation of micro and nano dimensional structures and research of physico-mechanical properties of a surface of materials and thin films is offered. Simplicity and reliability of a design of the device MicroNanoMod, and also simplicity of its adjustment and management allow its use not only at schools, high schools and research laboratories, but also in technological processes in conditions of production

Key Words: tunnel microscope, nanotechnology, nanomodification, indentation.

результати), ряд питань, що стосуються поводження матеріалу при заглибленні в нього твердого індентора, залишається відкритим. Наноінденування матеріалів — це методика, що інтенсивно використовується в останні 15 років для характеристики механічних властивостей тонких плівок і приповерхневих шарів об'ємних матеріалів. Істотний прогрес у розробці і застосуванні наноінденування пов'язаний головним чином з розвитком мікро- і нанотехнологій у сучасній аналітичній техніці. Завдяки зручності, гнучкості, відсутності твердих вимог до зразка і навколишнього середовища методи наноінденування отримали велику популярність в останні кілька років [5-18]. Вони дозволяють наблизитися до умов, що виникають у реальних мікро - і наноконтактах, і змодельовати при добре контрольованих умовах елементарні процеси в областях, сильно деформованих високим локальним навантаженням. Відповідно до напрямку руху зонduючого поверхню інструмента (найчастіше це добре атестована тригранна діамантова пірамідка Берковича) відносно площини зразка їх підрозділяють на наноінденування (інденатор рухається по нормалі до поверхні) і наносклерометрію (інденатор рухається по

дотичній до поверхні) Шляхом багаторазового навантаження однієї і тієї ж області або нанесення наноподряпин моделюють процеси зносу й утоми в приповерхневих шарах, вивчають фазові переходи, індуковані високим гідростатичним тиском під індентором, досліджують залежні від часу характеристики матеріалу і коефіцієнти швидкісної чутливості механічних властивостей як на стадії занурення, так і на стадії в'язкопружного відновлення відбитка після розвантаження. Методом наноіндентування можна також оцінювати пористість матеріалу, величину і розподіл внутрішніх напружень, товщину, ступінь адгезії і механічні властивості тонких шарів і покриттів, досліджувати структуру багатофазних матеріалів, визначати модулі пружності, швидкість звуку й анізотропію механічних властивостей, а також багато чого іншого.

Методика вимірювання

Розвиток мікроелектроніки призводить до необхідності застосування субмікронного діапазону розмірів елементів і рухатися далі по обраному шляху мікромініатюризації. У зв'язку з цим неминучим переходом виникає ряд проблем, що вимагають свого вирішення. По-перше, це проблема створення елемента з нанометровими розмірами, по-друге це проблема комутації його з іншими аналогічними елементами, і в третіх, це проблема створення групових методів обробки, що дозволить одержувати необхідну структуру відразу на всій поверхні підкладки або досить великої її області. В даний час єдиним методом, за допомогою якого вдається домогтися подібного результату є застосування тунельно-зондових технологій. Насамперед це тунельно-зондовий масоперенос. Процес здійснюється в скануючому тунельному мікроскопі (або аналогічному пристрої) і полягає в створенні в тунельному проміжку між голкою-зондом і підкладкою умов для емісії окремих атомів з поверхні зонда. Можливо також реалізувати осідання атомів або молекул з об'єму навколишнього середовища під впливом тунельного струму. Конкурентних методів у тунельно-зондових пристроїв для створення нанорозмірних структур поки що не має й у найближчий час не передбачається.

У роботі пропонується розроблений та виготовлений авторами прототип скануючого мікро-нано модифікатора (МікроНаноМод) для створення мікро і нано розмірних структур, а також для дослідження властивостей поверхні і вимірювання твердості матеріалів і тонких плівок (Рис.1).



Рис.1 Зовнішній вигляд МікроНаноМод.

Прилад МікроНаноМод складається з наступних вузлів:

- скануючо-індентуюча п'єзокерамічна голівка,
- діамантовий зонд-індентор (піраміда Берковича з радіусом закруглення 100 нм,
- стіл позиціонування,
- електронний блок приладу,
- програмний комплекс для керування, настроювання, збору, і візуалізації поверхні зразків.

Модифікація поверхні здійснюється діамантовим зондом-індентором, що у той же час може бути використаний як гостра голка для сканування поверхні й одержання її топографічного (двох або тривимірного) зображення. При цьому реєстрація рельєфу поверхні відбувається з нанометричною просторовою роздільною здатністю порядку 10 нм. Така конструкція індентора дозволяє, не змінюючи консоль, проводити модифікацію поверхні і вимірювати її рельєф з високою просторовою роздільною здатністю.

Поле сканування по координатах XY від 10 на 10 нм до 4 на 4 мкм.

Розмір зразків до 16 мм у діаметрі, або 16 на 16 мм. Керування приладом здійснюється за допомогою персонального комп'ютера. Усі виміри відбуваються на відкритому повітрі.

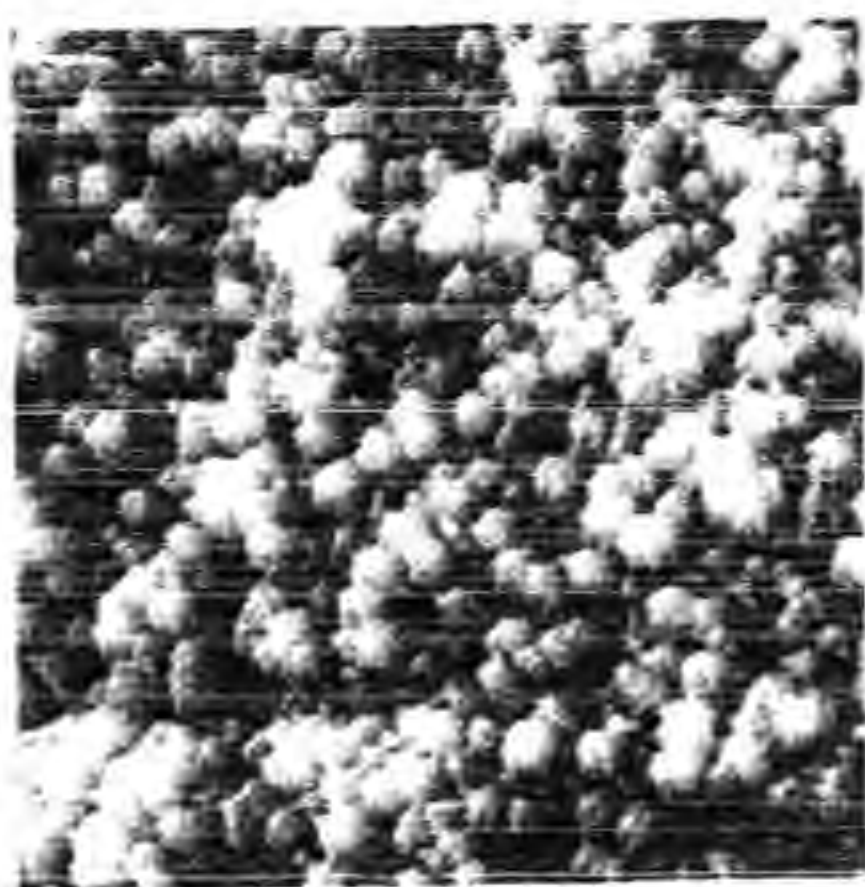
Простота і надійність конструкції приладу МікроНаноМод, а також легкість у настроюванні

і керуванні дозволяють використовувати його не тільки в школах, вузах і дослідницьких лабораторіях, але й у технологічних процесах в умовах виробництва.

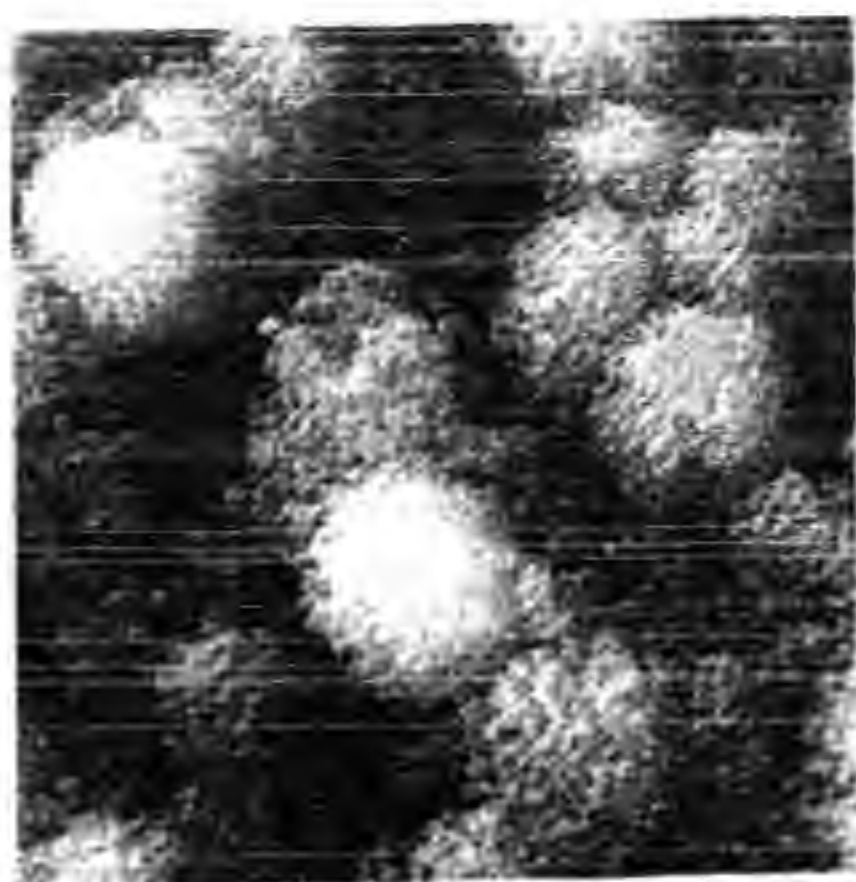
Отримані результати

Перед експериментами з використанням приладу МікроНаноМод і по їхньому закінченні проводилося калібрування представленого приладу на стандартних матеріалах.

За допомогою МікроНаноМод (Рис.1) було проведено наступні дослідження. Спочатку прилад було апробовано в експериментах по отриманню зображення морфології поверхні. Одержані при цьому результати представлені на рис.2-5.



а



б

Рис.2. Тривимірне зображення поверхні напівпрозорого покриття із золота на скляній підкладці отриманого методом магнетронного розпилення розміром 4 на 4 мікрона (а) та 250 на 250 нанометрів (б).



Рис.3. Тривимірне зображення поверхні покриття із золота на слюдяній підкладці отриманого методом термічного розпилення розміром 500 на 500 нанометрів.



Рис.4. Тривимірне зображення дифракційної ґратки сформованої на поверхні плівки хрому на скляній підкладці розміром 4 на 4 мікрона.



Рис.5. Тривимірне зображення дифракційної ґратки сформованої на поверхні нікелю розміром 4 на 4 мікрона.

Далі в роботі були проведені експерименти по модифікації поверхні за рахунок індентування та склерометрії, а також за рахунок локального окислення поверхні. Одержані при цьому результати представлені на рис.6-11.

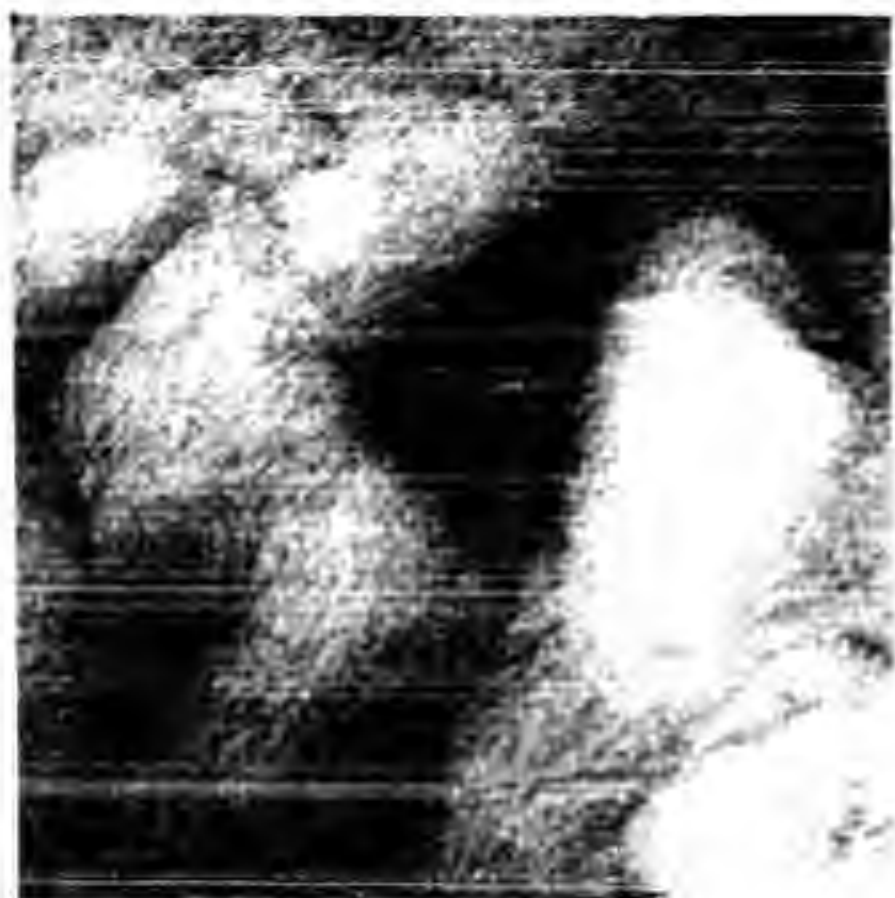


Рис.6. Тривимірне зображення модифікованої поверхні міді уколom діамантового індентора (розмір сканування 2 на 2 мікрметри).

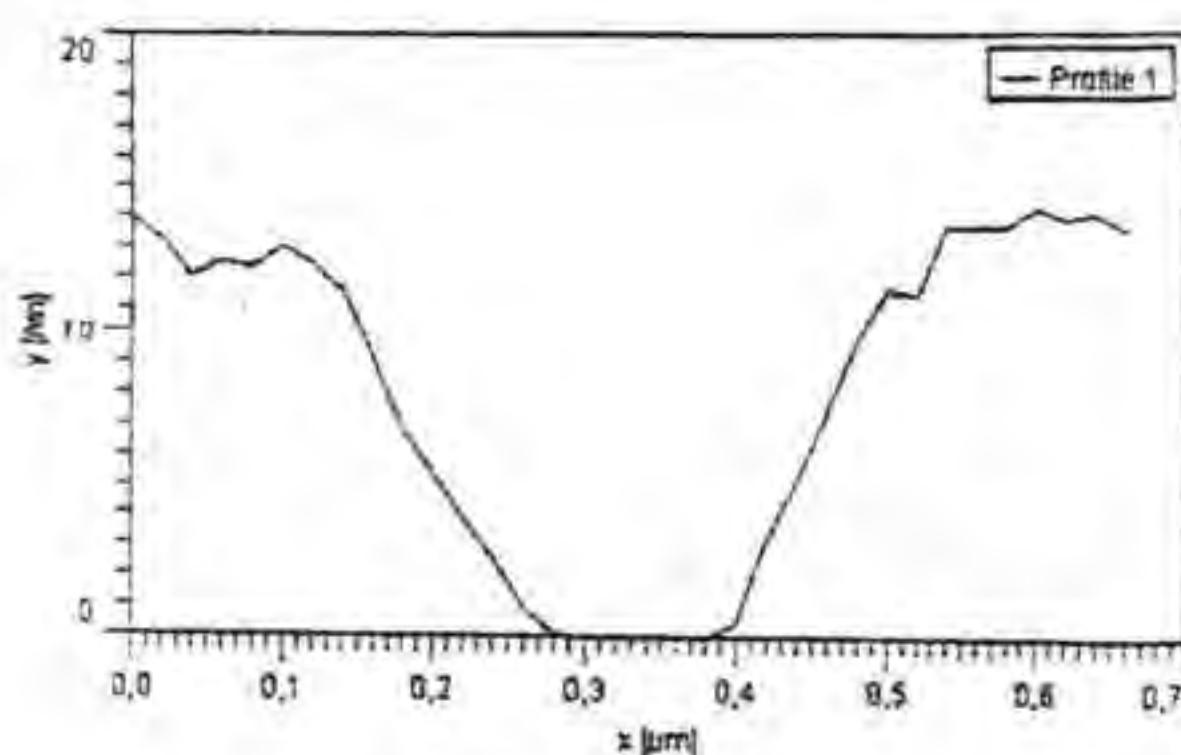
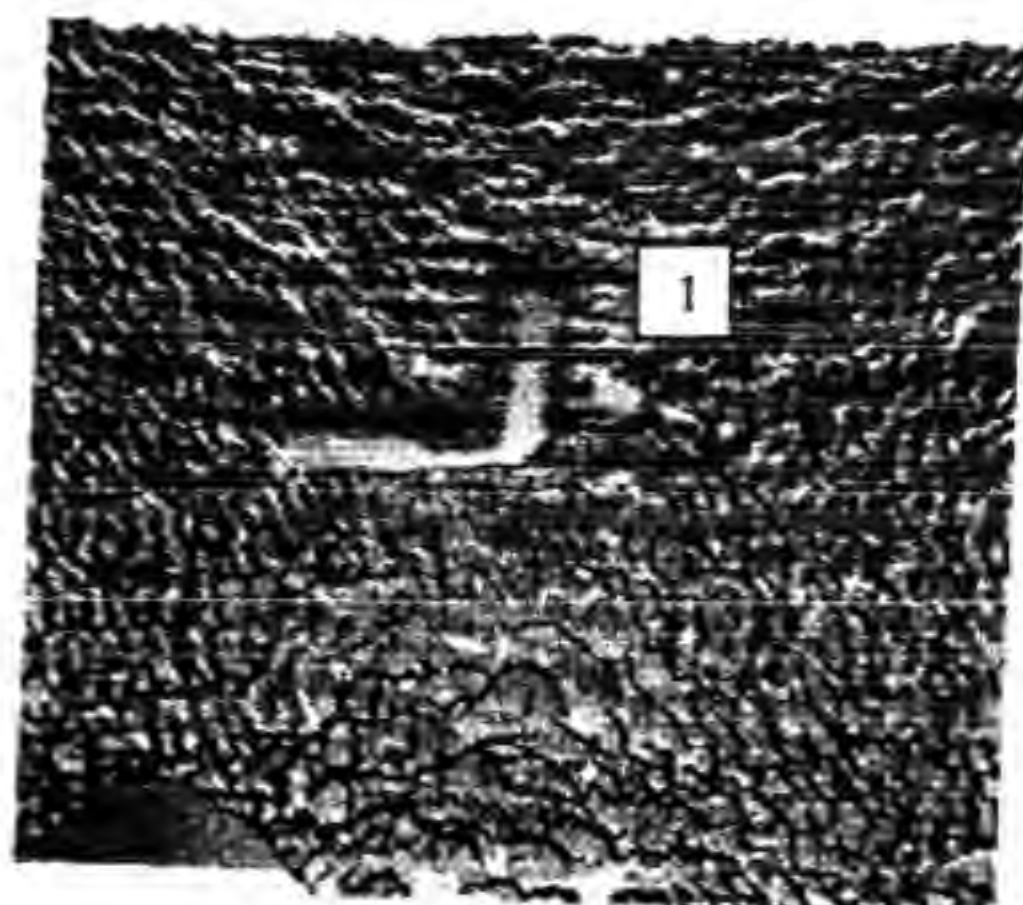
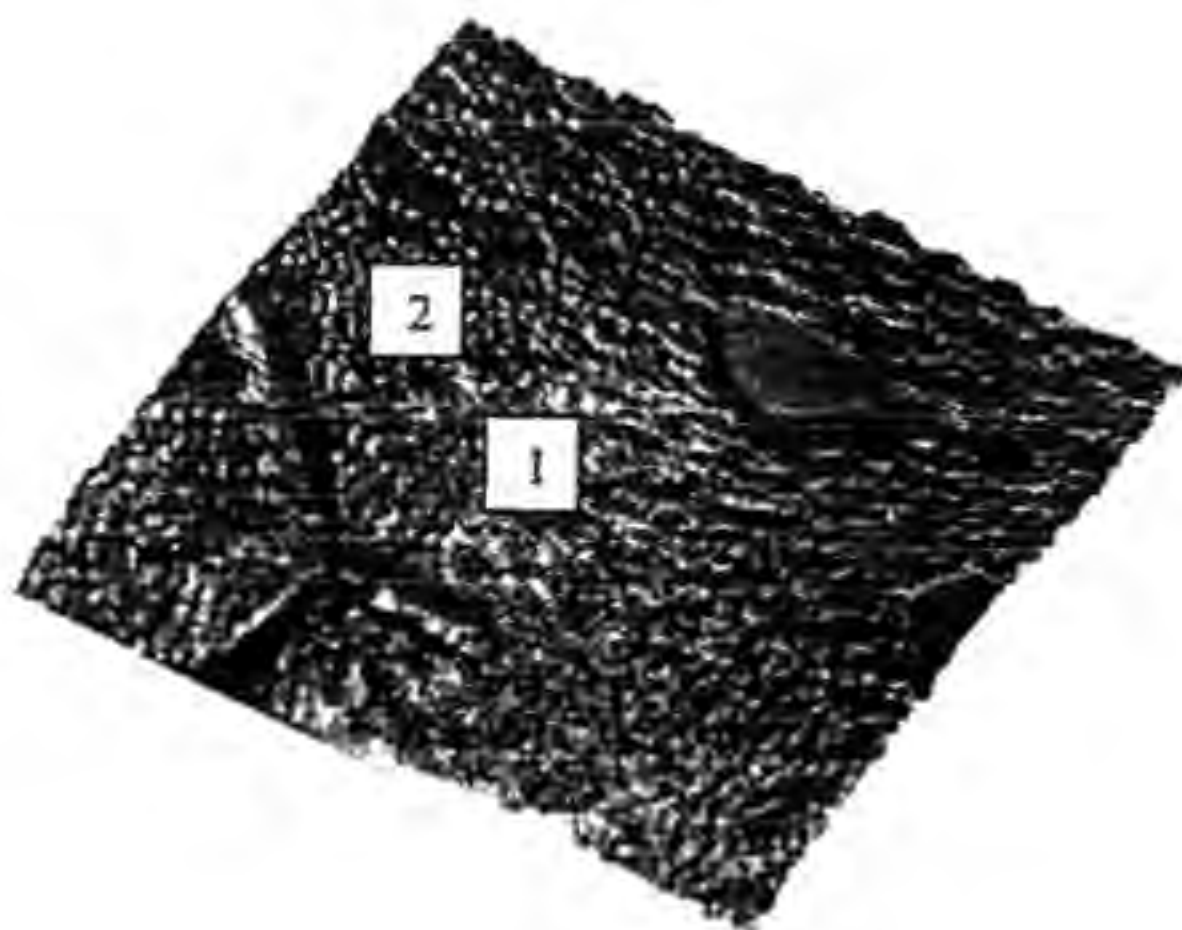


Рис.8. Тривимірне зображення модифікованої за рахунок наносклерометрії поверхні індієвої плівки на скляній підкладці (розмір сканування 4 на 4 мікрметра) та профіль зрізу.



Рис.7. Тривимірне зображення полірованої поверхні міді модифікованої діамантовим індентором (глибина відбитку 60 нанометрів) розміром 4 на 4 мікрметри.



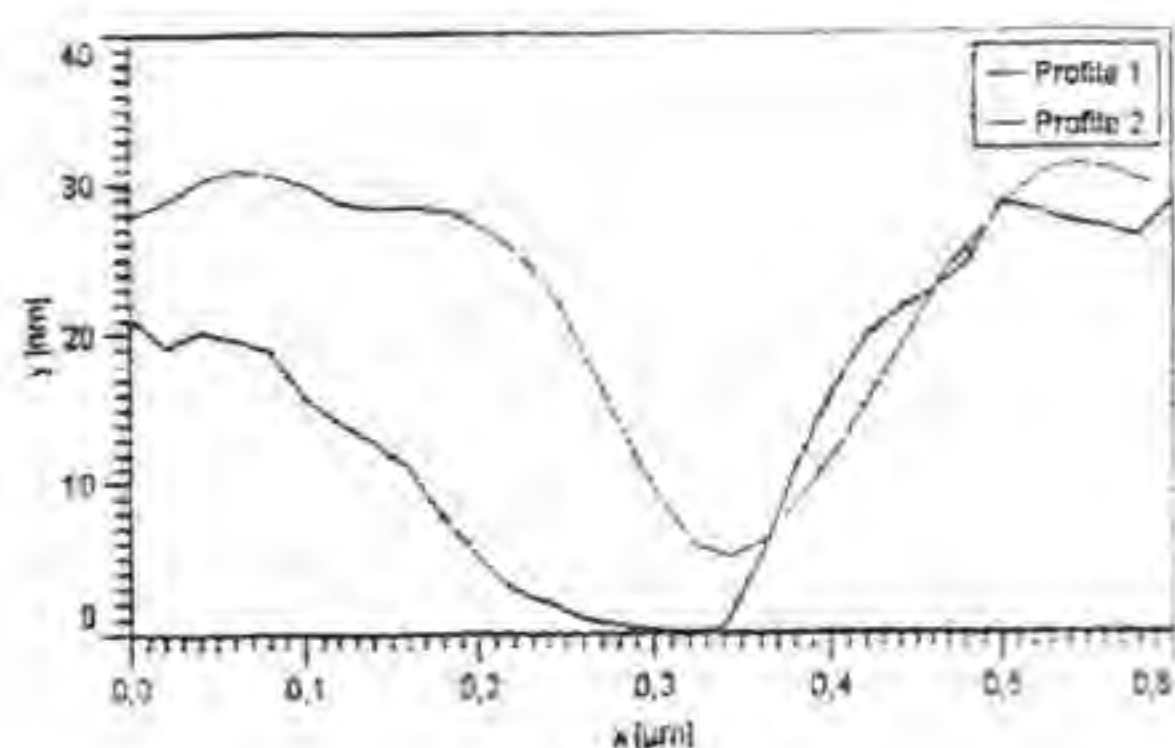


Рис.9. Тривимірне зображення модифікованої за рахунок наносклерометрії поверхні індієвої плівки на скляній підкладці (розмір сканування 4 на 4 мікрометра) та профілі зрізу.

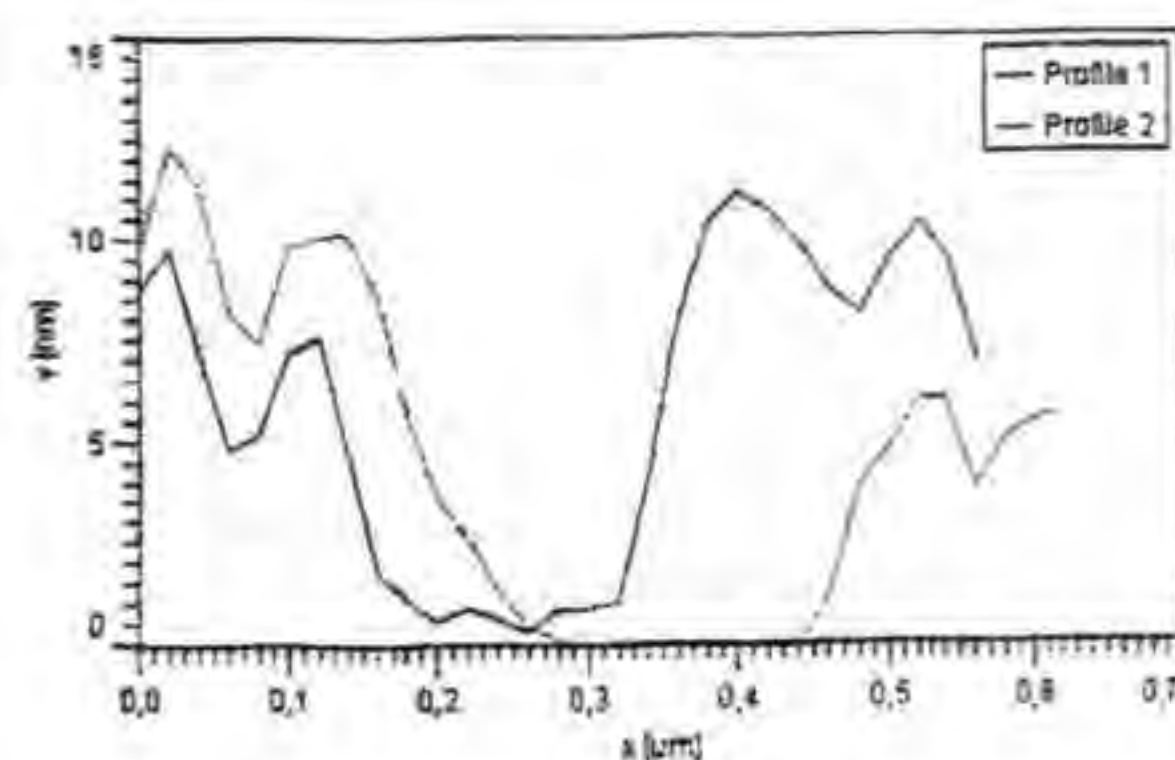
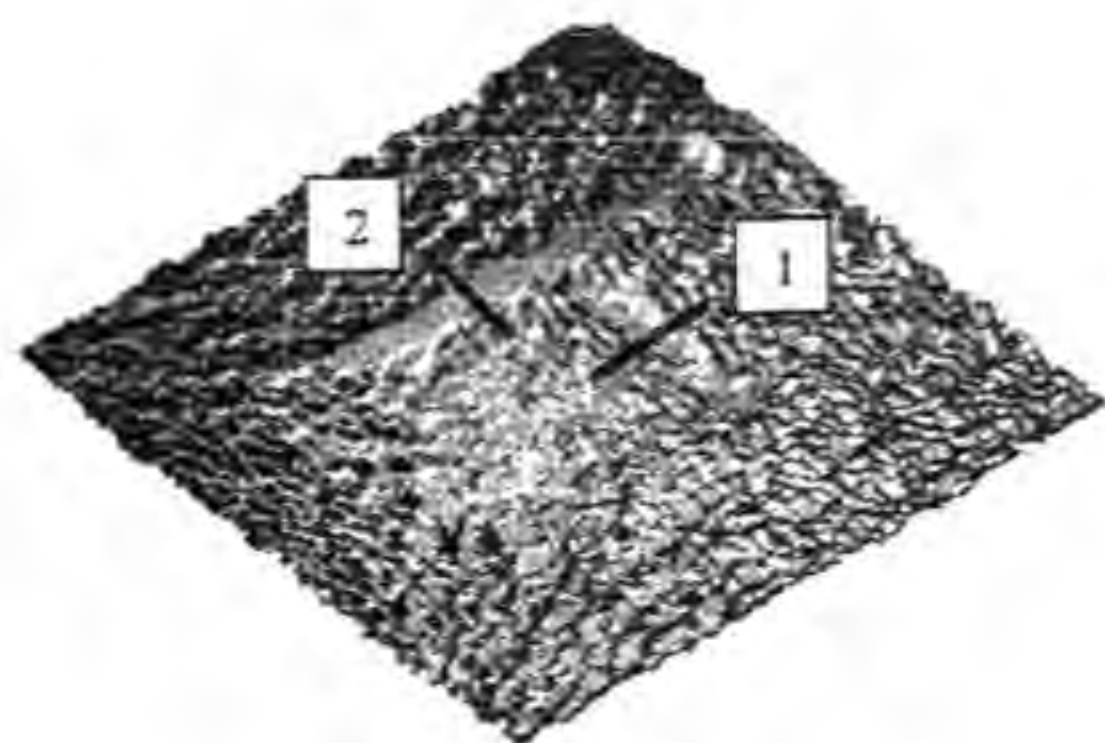


Рис.10. Тривимірне зображення модифікованої за рахунок локального окислення поверхні індієвої плівки на скляній підкладці (розмір сканування 4 на 4 мікрометра) та профілі зрізу.

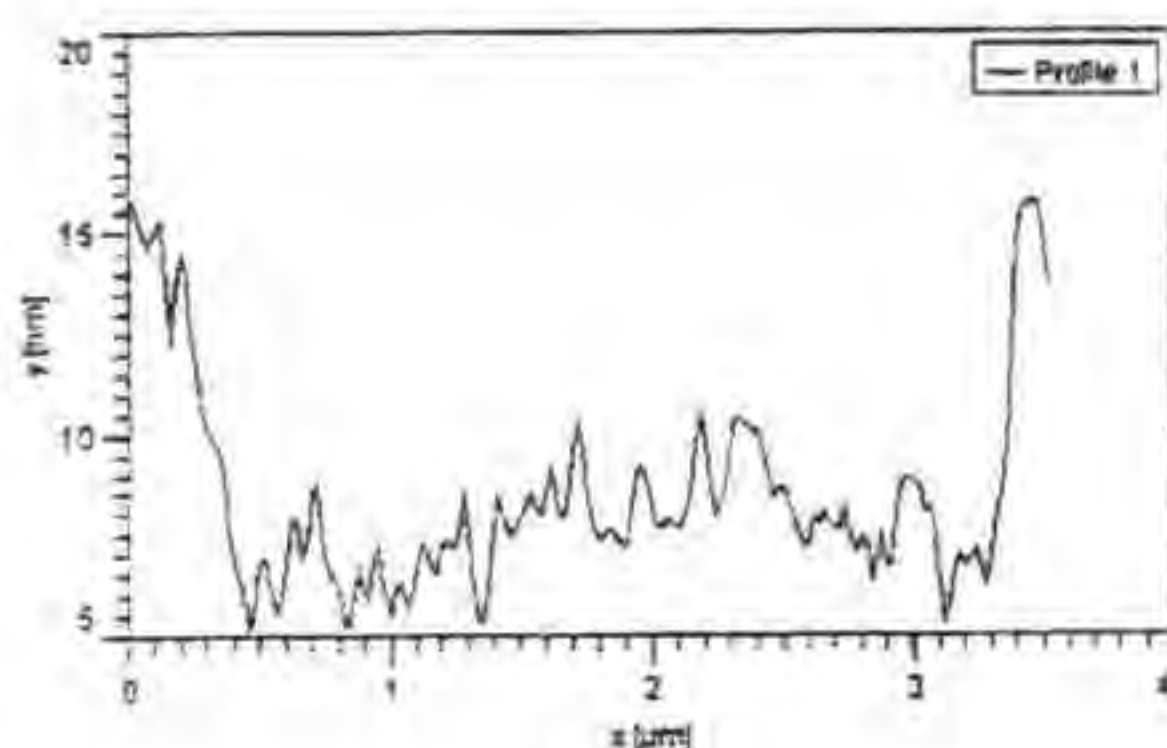
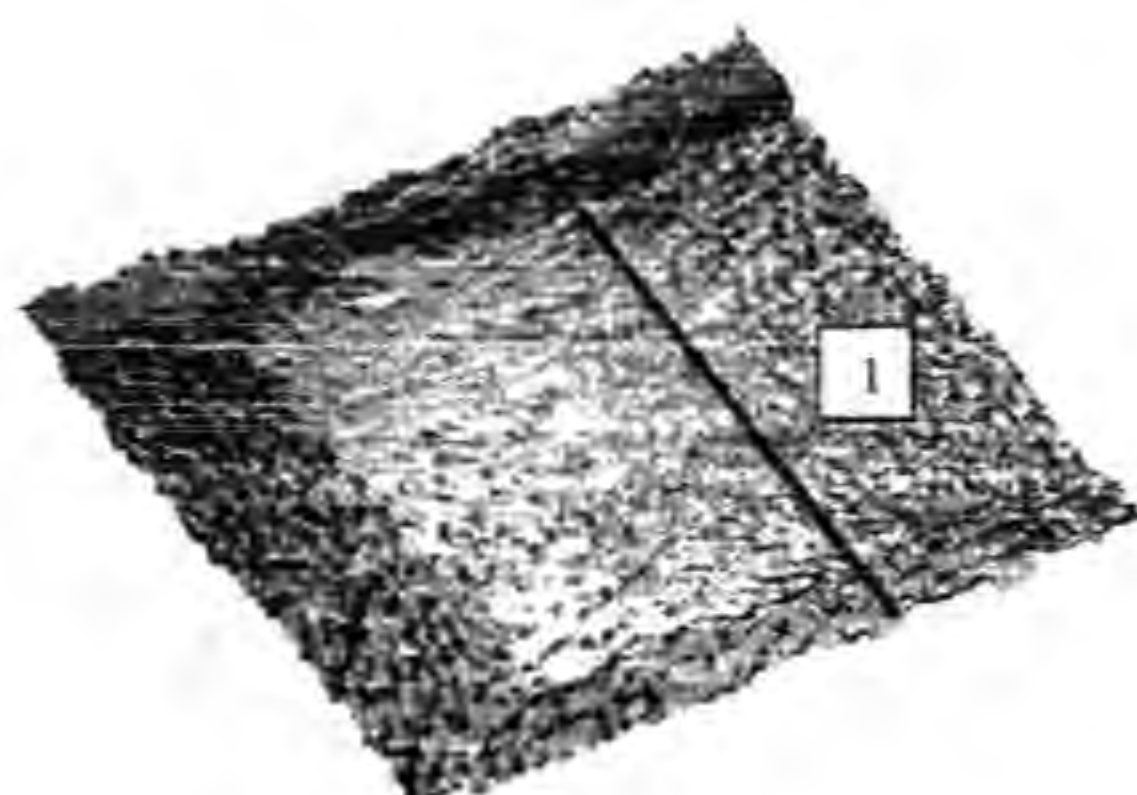


Рис.11. Тривимірне зображення модифікованої за рахунок локального окислення поверхні індієвої плівки на скляній підкладці (розмір сканування 4 на 4 мікрометра) та профіль зрізу.

Висновок

Проведені дослідження за допомогою представленого в роботі приладу МікроНаноМод вказують на можливе застосування приладу як для дослідження морфології поверхні, так і для модифікації поверхні за рахунок мікро-нано індентування, наносклерометрії та локального окислення. Отже, стає можливим використання представленого приладу для потреб нанотехнології, наноматеріалознавства, мініатюризації елементної бази мікроелектроніки та оптоелектроніки.

Список використаних джерел

1. Дедков Г.В. Нанотрибология: экспериментальные факты и теоретические модели // УФН. 2000., 170. №6. С.585-618.
2. Eltsov K.N., Klimov A.N., Priadkin S.L. et al. Ultra high vacuum scanning tunneling microscope for chemical surface reactions study and nanotechnology // Phys. Low-Dim. Struct. 1996., 7/8. P. 115-125.
3. Heike S., Hashizume T., Wada Y. In situ control and analysis of the scanning tunneling microscope tip by formation of sharp needles on the Si sample and W tip // J. Vac. Sci. Technol. B. 1996., 14. P. 1522-1526.
4. Гоголинский К.В., Решетов В.Н. Применение сканирующих зондовых микроскопов для анализа с субмикронным и нанометровым разрешением структуры и распределения механических свойств материалов, Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 1998, № 6, 64, с.30-43.
5. Pethica J.B., Hutchings R., Oliver W.C. Hardness measurement at penetration depths as small as 20 nm // Phil. Mag. A. 1983, 48. №4. P.593-606.
6. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // J. Mater. Res. 1992., 7, №6, P.1564-1583.
7. Wolf B. Inference of Mechanical Properties from Instrumented Depth Sensing Indentation at Tiny Loads and Indentation Depths // Cryst. Res. Technol. 2000., 35, №4., P.377-399.
8. Bhushan B., Kulkarni A.V., Bonin W., Wyrobek J.T. Nanoindentation and picoindentation measurements using a capacitive transducer system in atomic force microscopy // Phil. Mag. A. 1996., 74, №5, P.1117-1128.
9. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. М., 1990.
10. Farber B.Ya., Orlov V.I., Hewer A.H. Energy Dissipation during High Temperature Displacement-Sensitive Indentation in Cubic Zirconia Single Crystals // Phys. Stat. Sol.(a). 1998., 166, №1. P.115-126.
11. Гоголинский К.В., Львова Н.А., Усешнов А.С. Применение сканирующих зондовых микроскопов и нанотвердомеров для изучения механических свойств твердых материалов на наноуровне, Заводская лаборатория. Диагностика материалов №6. 2007, 73, стр.28 - 36
12. Елецкий А.В. Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе // УФН, 2007, -177. №3. с. 233-274
13. Ельцов К.Н., Климов А.Н., Косяков А.Н., Обьедков О.В., Юров В.Ю., Шевлюга В.М. Сверхвысоковакуумный сканирующий туннельный микроскоп GPI-300 //Труды института общей физики им.А.М. Прохорова, - 2003 59, с.45-63.
14. Шугуров А.П., Панин А.В., Оскомов К.В. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // Физика твердого тела. 2008.- 50.-вып.6, с.1007-1012.
15. Nanostructure Science and Technology A Worldwide Study, Final Report, September 1999, <http://itri.loyola.edu/nano/final/>.
16. Галанов Б.А., Григорьев О.Н., Мильман Ю.В., Rogozin И.П., Трефилов В.И. Определение твердости и модуля Юнга при упругопластическом внедрении инденторов в материалы // Техническая физика, Доклады академии наук Украины -84, №3.- с 815-817
17. Меженный М.В., Мильвидский М.Т., Югова Т.Г. Влияние состава твердого раствора на высокотемпературную микротвердость гетероэпитаксиальных слоев SiGe, выращенных на подложках Ge и Si // Физика твердого тела - 2003.- 45.-вып. 9.-с. 1641-1644.
18. Сойфер Я.М., Верден А. Исследование локальных механических свойств монокристаллов хлористого натрия методом атомно-силовой микроскопии // Физика твердого тела - 2003.-45.-вып 9 - с.1621 - 1625.

Надійшла до редколегії 20.06.08

УДК 539.376

Владислав Р. Богданов, к.ф.-м.н., с.н.с.

Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану

Розвинуто неруйнівний метод щодо визначення границі міцності і в'язкості руйнування K_{IC} будь-яких металевих і зварних конструкцій, який базується на точних значеннях пластичних деформацій і напружень, що отримано з чисельного розв'язку задачі плоского напруженого стану у пружно-пластичній нестационарній математичній постановці. Розроблена методика добре описує деградацію міцності матеріалів конструкцій, які призначені задля довгого терміну експлуатації при високих температурах, у агресивному середовищі або під радіаційним опромінюванням, окрихчених реакторних сталей (15X2HMΦA, 10ГН2МΦA, 2Cr-Ni-Mo-V).

Ключові слова: в'язкості руйнування, пластичні деформації, тріщина, міцностний ресурс.

E-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

Статтю представив професор В.В. Мелешко

1. Вступ

В [1-3, 4, 6, 10] розвинуто імовірнісний підхід визначення в'язкості руйнування. В роботах [4, 10] використовується моделі течій і руйнування Бриджмена. В [1-3, 6] використовувалася квазістатична пружно-пластична модель. На відміну від [1-3, 4, 6, 10] в даній роботі пружно-деформований стан визначається на основі розв'язку задачі плоского напруженого стану в пружно-пластичній динамічній моделі. Автором показано, що введений в [4, 10] експериментальний параметр $m_0 = 0.1$ не потрібен, побудовані криві в'язкості руйнування точніше описують експериментальні результати для реакторних сталей типу 2Cr-Ni-Mo-V, 15X2HMΦA, 10ГН2МΦA.

2. Постановка задачі

В роботі використовується локальний критерій крихкого руйнування полікристалічного матеріалу і функція розподілення Вейбулла для опису розподілення карбідів по міцності. Важливо точно визначати пластичні деформації і виникаючі напруження в кожній елементарній комірці полікристалічного матеріалу.

V.R. Bogdanov, PhD, Senior Research Associate

Destruction Toughness Determination Based On The Planar Stress State Numerical Modeling

The non-destructive method of life resource and fracture toughness K_{IC} calculations of any metal and welded constructions, based on the strict determination of plastic deformation and stresses fields from the numerical solution of problem of planar stress state in plastic-elastic non-stationary mathematical model developed. The method is useful for an estimation of strength properties degradation of a structures material intended for a long-time operation at high temperatures, in aggressive environment or under radioactive radiation, embrittled reactor pressure vessel steels (15X2HMΦA, 10ГН2МΦA, 2Cr-Ni-Mo-V).

Keywords: Fracture toughness, plastic deformation, crack, life resource, critical intensity factor.

Границя текучості $\sigma_{02}(T)$ і критичні напруження крихкого руйнування $S_c(\kappa)$ [10] визначаються із залежностей:

$$\sigma_{02}(T) = a - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273)); \quad (1)$$

$$S_c(\kappa) = [C_1 + C_2 \exp(-A_d \kappa)]^{1/2}; \quad (2)$$

де $k = \int d\epsilon^p$; – параметр Одквіста; $d\epsilon^p$ – приращення інтенсивності пластичних деформацій; T – температура.

Параметри a, c, b, h, C_1, C_2 і A_d , що характеризують властивості матеріалу, визначаються [10] на основі результатів руйнування маломасштабних зразків при їх експериментальних випробуваннях на трьохточковий згин. Для іспиту використовувалися маломасштабні зразки Шарпі – зразка паралелепіпедної форми з пропилом посередині. В даній роботі для опису процесу поширення тріщин в маломасштабних зразках Шарпі використовується плоска пружно-пластична модель.

Для елементарної комірки прийнято локальний критерій крихкого руйнування у вигляді [4, 10]

$$\sigma_1 + m_{T\epsilon}(T, \kappa) \sigma_{eff} \geq \sigma_d; \quad (3)$$

$$\sigma_1 \geq S_c(\kappa); \quad (4)$$

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 - \sigma_{02}; \quad (5)$$

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 - \tau_{02}; \quad (6)$$

де σ_1 – максимальне головне напруження; σ_{eff} – ефективне напруження, так як основний вклад на виникання пластичних деформацій роблять зсуваючі зусилля, то більш істотно використовувати в критерії крихкого руйнування вираз (6). Однак, як в [4, 10], використовувався вираз (5). σ_1 – інтенсивність напружень; σ_d – ефективна міцність карбідів або інших часток, на котрих зароджуються мікротріщини відколу; $m_{T\epsilon}$ – параметр, котрий залежить від температури T і пластичної деформації і може бути записаний як [10]

$$m_{T\epsilon}(T, \kappa) = m_T(T) m_\epsilon(\kappa); \quad (7)$$

$$m_\epsilon(\kappa) = S_0 / S_\epsilon(\kappa); \quad (8)$$

$$m_T(T) = m_0 \sigma_{ys}(T); \quad (9)$$

$S_0 \equiv S_\epsilon(\kappa = 0)$; m_0 – постійна, що визначається експериментально [10] і дорівнює 0.1, в роботі показано, що якщо для розрахунків ефективних напружень і пластичних деформацій використовувати нижченаведену методику, то константа m_0 не потрібна; σ_{ys} – температурно-залежна компонента границі текучості. Критерій (3) формулюємо у імовірнісній постановці. Параметр σ_d є стохастичним з функцією розподілення Вейбулла [11]

$$p(\sigma_d) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_d - \sigma_{d0}}{\bar{\sigma}_d}\right)^\eta\right]. \quad (10)$$

де $\eta, \sigma_{d0}, \bar{\sigma}_d$ – параметри розподілення Вейбулла.

На відміну від методики, запровадженої в [10], параметр Одквіста, ефективні і головні напруження визначаються із точного чисельного розв'язку плоскої задачі згину маломасштабних зразків типу Шарпі в динамічній постановці. При цьому використовуються відомі методики для квазістатичної пружно-пластичної [1-3, 5, 6] моделі, використовується підхід врахування нестационарного навантаження і чисельного інтегрування, що застосовувався в динамічній пружній моделі [9]. Абсолютно твердий ударник проникає в пружне середовище з постійною швидкістю. На протязі всього відрізка часу взаємодії область контакту залишається постійною.

Механічна модель основана на нестационарній теорії пружно-деформованого стану. Розв'язується плоска задача напруженого стану. Нехай $\bar{U} = (U_x, U_y)$ – вектор зміщень, пов'язаний з деформаціями співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x}; & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial U_y}{\partial y}; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (11)$$

На рисунку 1 наведена схема розрахункової області.

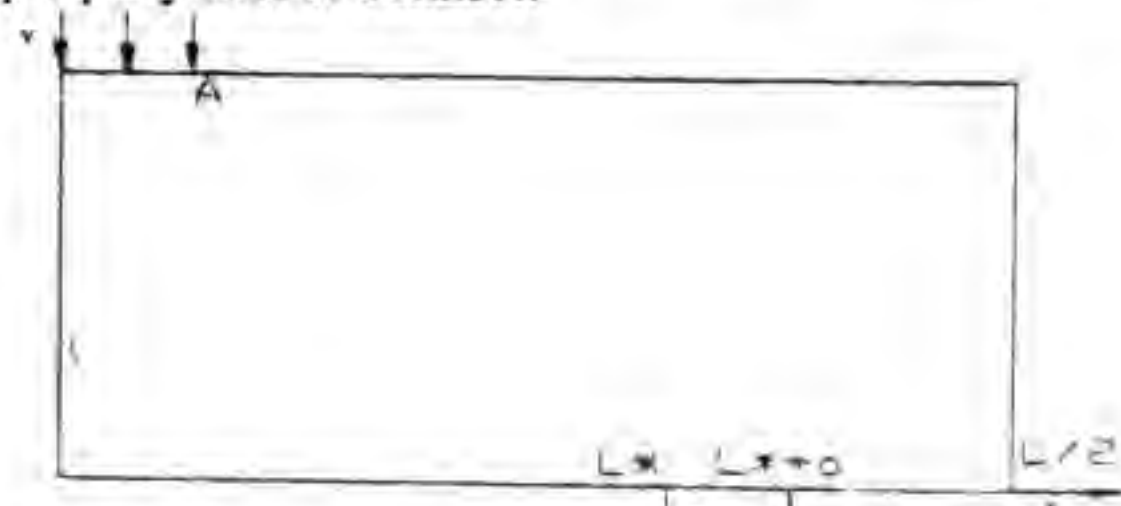


Рис.1. Схема розрахункової області.

Граничні умови (12) запишуться так:

$$\begin{aligned} x=0; 0 < y < l; & \sigma_{xx} = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ x=0; l < y < B; & U_x = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ x=L/2; 0 < y < B; & \sigma_{xx} = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ y=0; 0 < x < L; & \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ y=0; L < x < L+a; & U_y = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ y=0; L+a < x < L/2; & \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = 0; \\ y=B; 0 < x < A; & \sigma_{xx} = -P; \sigma_{xy} = 0; \\ y=B; A < x < L/2; & \sigma_{xx} = 0; \sigma_{xy} = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

Рівняння динаміки мають вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (13)$$

В якості фізичної моделі обрана модель, що основана на теорії неізотермічної пластичної течії для середовища із зміцненням і умовою текучості Мізеса з гіпотезою короткочасної повзучості.

Рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями у відповідності цієї моделі мають вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^c; \\ \epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{2G} S_{ij} + K \sigma + \varphi; & d\epsilon_{ij}^p &= S_{ij} d\lambda; \\ \dot{\epsilon}_{ij}^c &= \Phi(\epsilon_{ij}^c, S_{ij}, T, t) S_{ij}; \end{aligned} \quad (14)$$

тут $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$; – діватор тензора напружень, G – модуль зсуву, $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$; $K = 3K_1$; – модуль об'ємного сжаття, що зв'язує об'ємне розширення 3ε , середнє напруження σ и φ – температурне розширення в співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$; в нашому випадку $\varphi \equiv 0$, $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження. Передбачаємо, що ця скалярна функція є квадратичною функцією діватора напружень S_{ij} [5].

В результаті пластичної деформації зразка матеріал зміцнюється за таким законом [5]:

$$\sigma_i(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{k}{\varepsilon_0}\right)^N; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}; \quad (15)$$

де k – параметр Одквіста, E – модуль пружності Юнга, $T_0 = 20^\circ C$, N – коефіцієнт зміцнення.

В нашому випадку нестационарна взаємодія здійснюється на короткому інтервалі часу і явищем повзучості можливо відкинути $\Phi \equiv 0$. Перепишемо (14) в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma)d\lambda; \\ d\varepsilon_{yy} &= d\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{yy} - \sigma)d\lambda; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xy} &= d\left(\frac{\sigma_{xy} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xy} - \sigma)d\lambda, \\ \text{де } d\lambda &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } f = \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0; \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \text{якщо } f = 0, df = 0; \\ f > 0 & \text{неприпустимо} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 \right)^{1/2}; \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xy}^2)}. \end{aligned}$$

3. Методи розв'язку задачі

Нехай нестационарна взаємодія протікає на інтервалі часу $[0, T_0]$. Для чисельного інтегрування по часу використовувалася квадратурна формула Грегори [8] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Тоді для моменту часу $T \in [0, T_0]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma; \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma; \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{\sigma_{xy}}{2G}; \quad \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} = (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}; \\ \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} &= (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}; \\ \Delta\varepsilon_{xx,k} &= B_1\sigma_{xx,k} + B_2\sigma_{yy,k} - b_{xx}; \\ \Delta\varepsilon_{yy,k} &= B_2\sigma_{xx,k} + B_1\sigma_{yy,k} - b_{yy}; \\ \Delta\varepsilon_{xy,k} &= B_3\sigma_{xy,k} - b_{xy}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0\Delta\lambda_k \right); \quad B_2 = \frac{1}{2G} + D_0\Delta\lambda_k; \\ B_3 &= \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0\Delta\lambda_k \right); \quad \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/3; \end{aligned}$$

де $\delta_{ij} = \{1, \text{if } i = j; 0, \text{if } i \neq j; (i, j = x, y)\}$.

Із системи (18) знайдемо вираз напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,k} &= A_1\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_2\Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{xx}; \\ \sigma_{yy,k} &= A_2\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_1\Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}; \\ \sigma_{xy,k} &= A_3\Delta\varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}; \\ Y_{xx} &= A_1b_{xx} + A_2b_{yy}; \quad A_1 = B_1/(B_1^2 - B_2^2); \\ Y_{yy} &= A_2b_{xx} + A_1b_{yy}; \quad A_2 = -B_2/(B_1^2 - B_2^2); \\ Y_{xy} &= A_3b_{xy}; \quad A_3 = 1/B_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Прирошення вектора зміщень $\Delta\bar{U}$ пов'язані з прирошеннями деформацій слідуючими співвідношеннями:

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \Delta\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (20)$$

де $u = \Delta U_x$; $v = \Delta U_y$. Введемо позначення:

$\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$. Пружно-деформований стан визначається із умови текучості, котру з врахуванням (17), (18) можна переписати:

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2G}, & \text{якщо } f < 0; \\ \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i}{2\sigma_i}, & \text{якщо } f = 0; \\ f > 0 & \text{неприпустимо,} \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{тут } \Delta\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left((\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{yy})^2 + (\Delta\varepsilon_{xx})^2 + (\Delta\varepsilon_{yy})^2 + 6(\Delta\varepsilon_{xy})^2 \right)^{1/2}.$$

Для реалізації фізичної нелінійності, що міститься в умовах (21), застосовується метод послідовних уточнень, котрі дозволяють розв'язок нелінійної задачі замінити послідовністю лінійних задач, що розв'язуються:

$$\psi^{(n+1)} = \begin{cases} \psi^{(n)} + \frac{1-p}{2G} \cdot \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) < -m; \\ \psi^{(n)}, & -m < \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) < m; \\ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)}, & \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T) > m; \end{cases} \quad (22)$$

m – величина найбільшого відхилення інтенсивності напружень від зміщеної границі текучості. $0 \leq p \leq 1$.

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначалися для кожної комірки із чисельного розв'язку. Схема розрахунків порівнювалася з відомими теоретичними результатами [7].

Інтенсивність напружень K_I в кожний момент часу $T_i = k\Delta t$ визначалися із співвідношення [7]

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{I}}{BH} \left(1.93 - 3.07 \frac{I}{B} + 14.53 \left(\frac{I}{B} \right)^2 - 25.11 \left(\frac{I}{B} \right)^3 + 25.8 \left(\frac{I}{B} \right)^4 \right) \quad (23)$$

де $L = 4B$ – довжина між опорами.

Для даного значення температури T_0 і даного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I розраховується імовірність крихкого руйнування в передбаченні, що руйнування в кожній комірці є незалежне явище, за такою формулою [6]:

$$P_i(K_I) \Big|_{T=T_0} = 1 - \exp \left[- \frac{\varpi}{(\bar{\sigma}_d)^n} \sum_{m=1}^n \sum_{n=1}^n (\sigma_{nuc}^{n,m} - \sigma_{d0})^n \right] \quad (24)$$

$\sigma_{nuc}^{n,m} = \sigma_i^{n,m} + m_1^{n,m} m_e^{n,m} \sigma_{eff}^{n,m}$; $\varpi = 2H/\rho_{uc}$; H – товщина мало масштабного зразка.

Додаються в (24) тільки комірки, в котрих може бути крихке руйнування, тобто елементарні комірки, для котрих виконуються умови:

$$\sigma_{eff}^{n,m} \geq 0; \quad \sigma_i^{n,m} \geq S_i^{n,m}; \quad \sigma_{nuc}^{n,m} \geq \sigma_{d0}^{n,m} \quad (25)$$

4. Чисельна реалізація

Для розрахунків зразків із сталі 15Х2НМФА застосовувався метод кінечних різниць зі змінним кроком розбиття. Харак-

терний розмір комірки навколо вершини тріщини ρ_{uc} приймається рівним середньому розміру зерна випробуваного металу і складає $0.05 \text{ м} \cdot 10^{-3}$. На рисунках нижче наведено результати розрахунків зразків Шарпі довжиною $60 \text{ м} \cdot 10^{-3}$, шириною $10 \text{ м} \cdot 10^{-3}$, товщиною $50 \text{ м} \cdot 10^{-3}$ і глибиною пропила в центрі зразка $3 \text{ м} \cdot 10^{-3}$, з коефіцієнтом зміцнення $N=0.05$. Довжина між опорними точками складає $40 \text{ м} \cdot 10^{-3}$. Крок за часом брався рівним $5 \text{ с} \cdot 10^{-4}$. Довжина зони контакту була $5 \text{ м} \cdot 10^{-3}$.

На рисунку 2 наведено графіки напружень, що виникають в області вершини тріщини двох вимірного зразка Шарпі. Суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з хрестиком і пунктирна лінії зображують відповідно напруження σ_{xx} , σ_{yy} – напруження текучості σ_s і еквівалентні напруження σ_{eq} . На рисунку 3 зображено параметр Одквіста. Пластичні деформації пульсують з впливом часу.

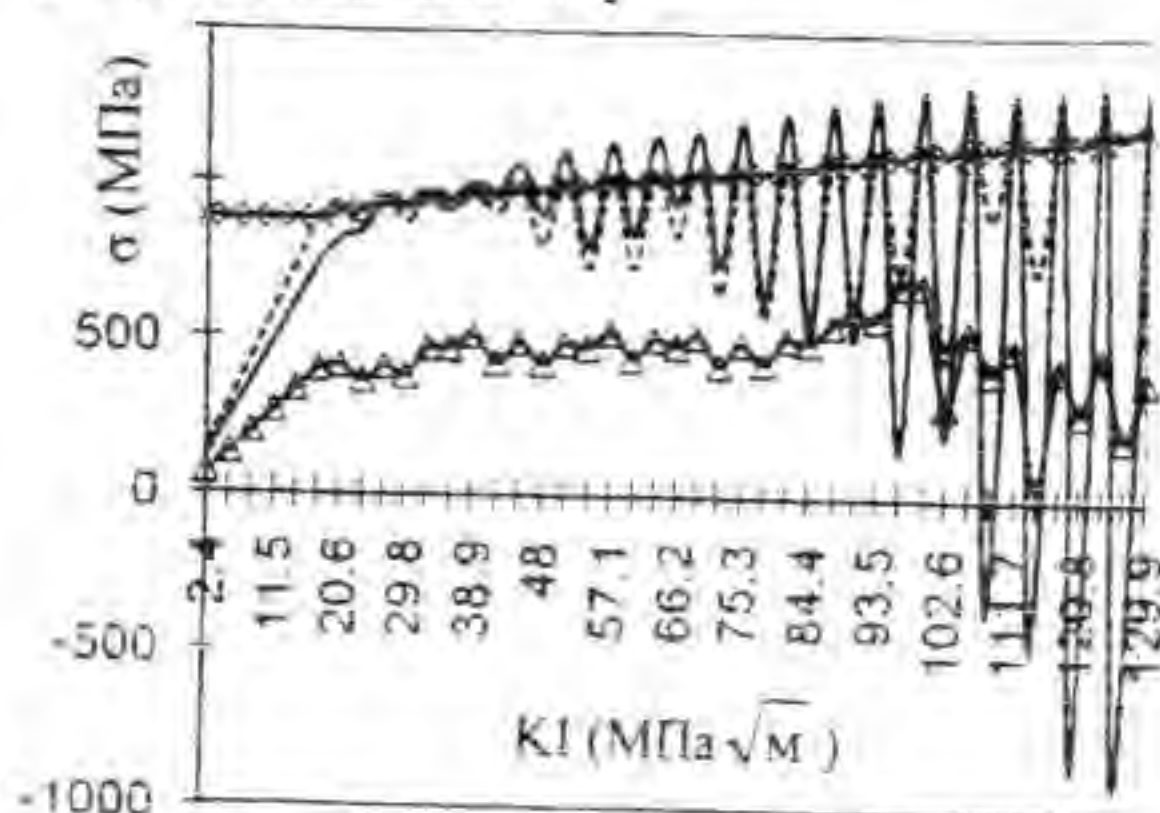


Рис.2. Напруження в області вершини тріщини

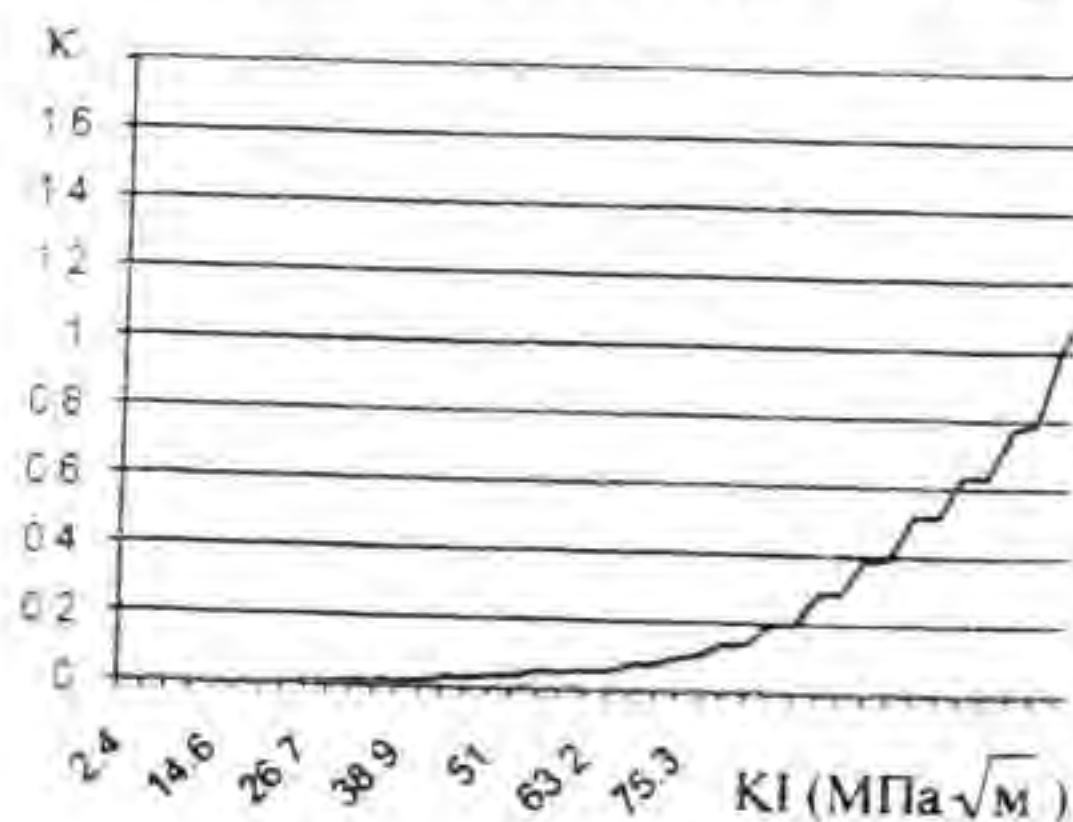


Рис.3. Параметр Одквіста

На наступних рисунках наведено результати в момент, коли величина параметра навантаження зразка $K_I = 57.1 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$.

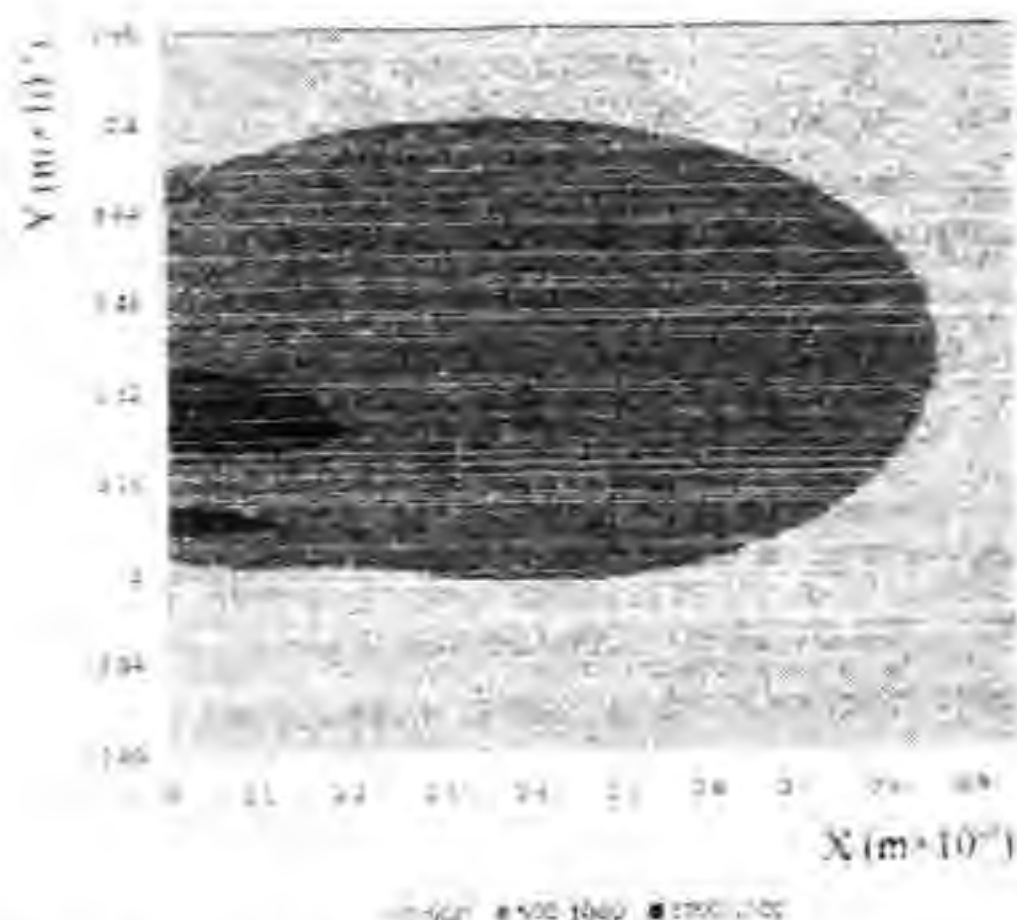


Рис.4. Нормальні напруження σ_1

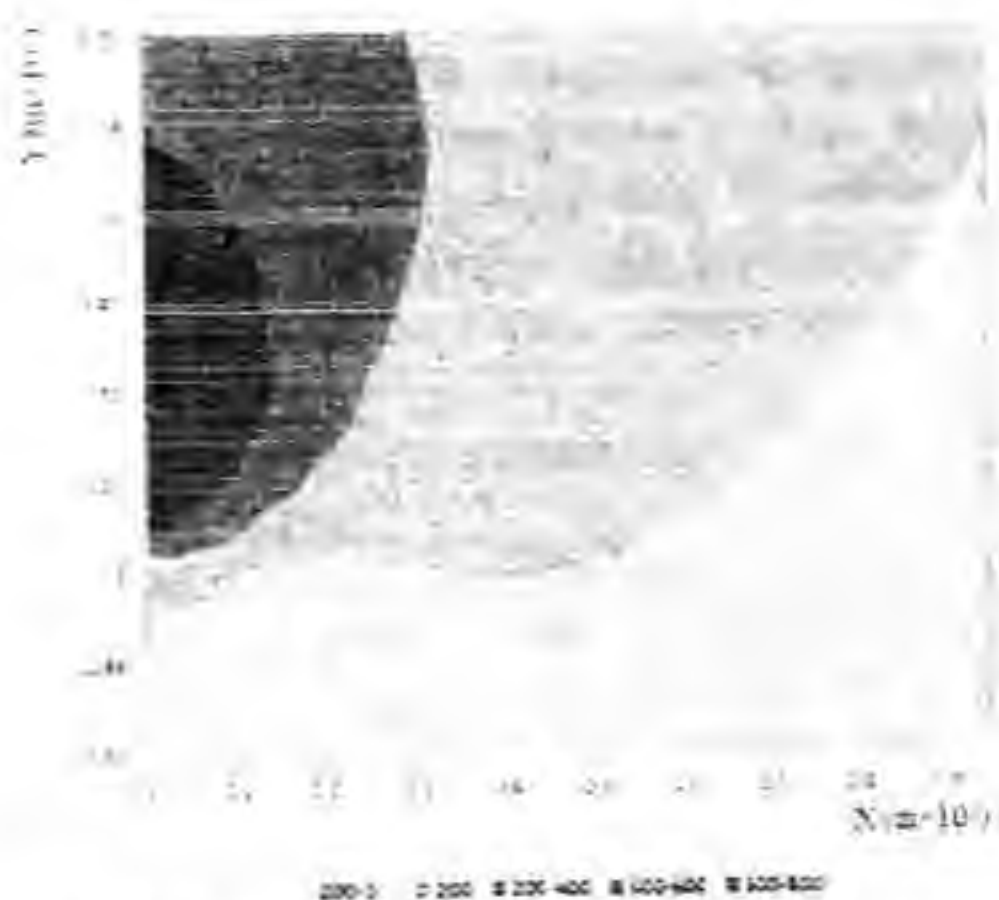


Рис.5. Тангенціальні напруження τ_1

На рисунках 4 і 5 наведено поля головних нормальних і тангенціальних напружень σ_1 і τ_1 відповідно. Зона найбільших пластичних деформацій знаходиться в радіусі приблизно $1 \text{ м} \cdot 10^{-3}$ від вершини тріщини. Найбільші пластичні деформації виникають в області максимальних головних напружень.

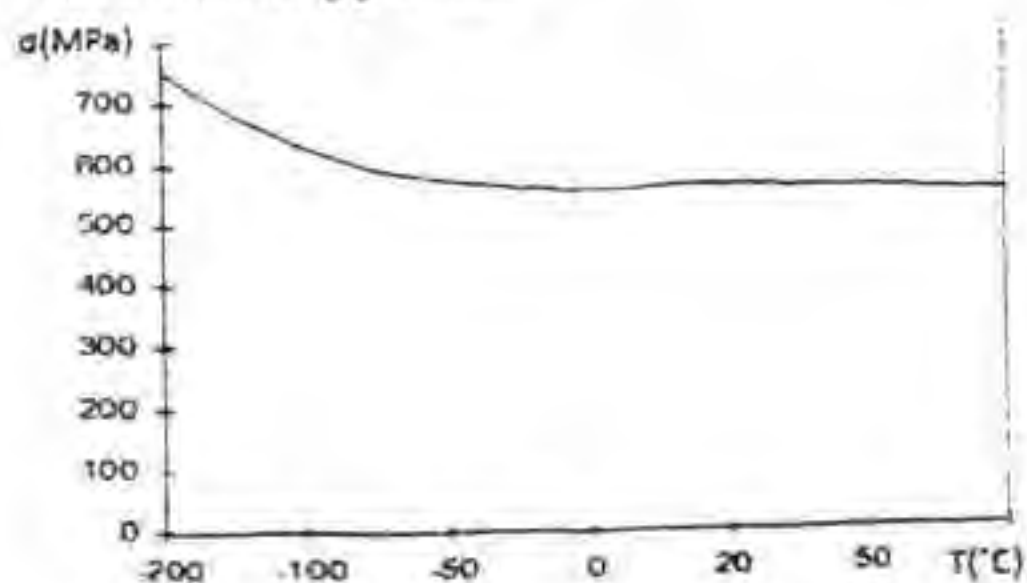


Рис.6. Середнє напруження σ

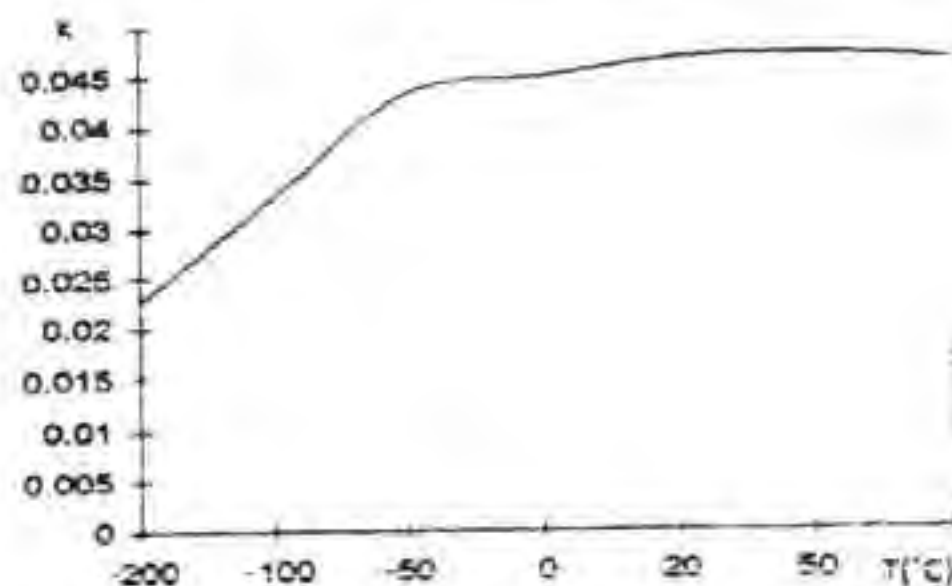


Рис.7. Параметр Одквіста.

На рисунках 6 і 7 наведено залежності середнього напруження σ і параметру Одквіста від температури відповідно в області вершини тріщини. Зі збільшенням температури спостерігається зріст пластичних деформацій. При розрахунках імовірнісних кривих параметр m_T брали в такому виді [10]:

$$m_T = \sigma_{02}(T_0) - \sigma_{02}(T = 350^\circ\text{C})$$

Імовірнісні криві будувалися для опромінених зразків сталі 15Х2НМФА, що знаходяться в окрихченому стані. В температурній залежності границі текучості (1) для сталі в окрихченому стані [10] параметри бралися рівними $a = 867 \text{ МПа}$, $b = 975 \text{ МПа}$, $c = 0.0305 \text{ МПа} \cdot \text{K}^{-1}$, $h = 1.04 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$. При визначенні значень параметрів Вейбулла, використовувалися із [10] значення критичного коефіцієнта інтенсивності напружень

$$K_{K'}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0.05} = 53,$$

$$K_{K'}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0.5} = 88 \text{ і } K_{K'}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0.95} = 123,$$

котрі є точки штрихових ліній при температурі 50°C , наведених на рисунку 8. Визначив мінімум функції середньоквадратичного відхилення:

$$\min \left(\left(P_f(K_f = 53)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0.05 \right)^2 + \left(P_f(K_f = 88)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0.5 \right)^2 + \left(P_f(K_f = 123)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0.95 \right)^2 \right)^{1/2}, \text{ було отримано}$$

розраховані значення параметрів Вейбулла: $\tilde{\sigma}_0 = 25450 \text{ МПа}$, $\eta = 6.1$, $\sigma_{d0} = 1395 \text{ МПа}$. На рисунку 8 наведено криві коефіцієнту $K_K(T)$ для окрихченої сталі для зразків товщиною 0.05 м , для порівняння наведено значення параметрів Вейбулла, що використовувалися в [10], колам відповідають експериментальні результати. Для розрахунків значень функцій

$P_f(K_f)$ в (24) розв'язувалися задачі для різних значень температур. Температура T_0 приймала значення в діапазоні від -200°C до 200°C з кроком 50 градусів. Вибиралися значення інтенсивності напружень K_f при значеннях імовірності крихкого руйнування 0.05 , 0.5 і 0.95 і по отриманим точкам на площині $ТОК_f$ будувалися шукані залежності критичного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{fc}(T)$.

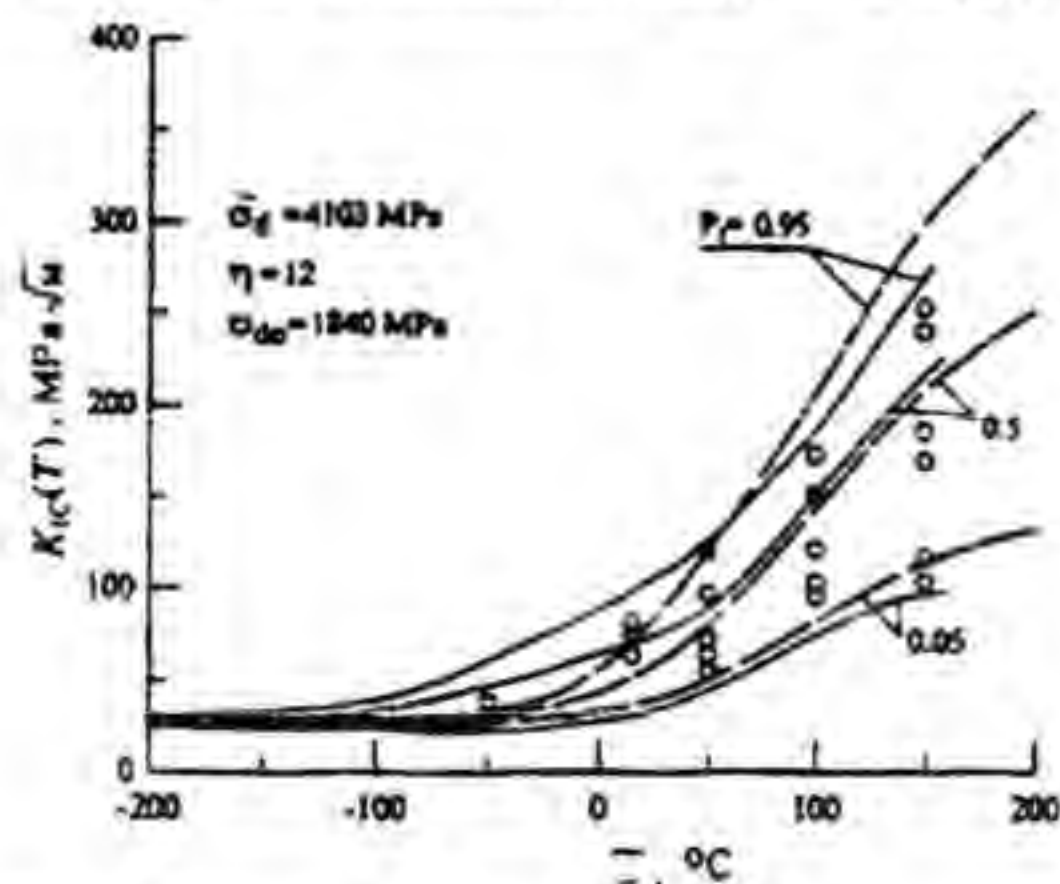


Рис.8. В'язкості руйнування $K_{fc}(T)$

Пунктирна лінія на рисунку 8 відповідає результатам в [10], суцільними лініями відображені криві коефіцієнту в'язкості руйнування $K_{fc}(T)$ для окрихченої сталі, при цьому використовувався для визначення ефективних напружень вираз (5). Отримані криві краще описують експериментальні результати. Методика неруйнівного контролю границі міцності і в'язкості руйнування, що оснований на розробленому автором методі розрахунку задачі плоского пружного стану в динамічній пружно-пластичній моделі, дозволяє поліпшити запропоновані в [1-3, 4-6, 10] методики.

Список використаних джерел

1. Богданов В.Р. Определение вязкости разрушения материала с использованием образцов небольших сечений // Сучасні проблеми зварювання та ресурсу конструкцій: Тез. докл. междунар. конф. (Київ, 24-27 листопада 2003). – Київ, 2003. – С. 93.

2. Богданов В.Р. Построение распределения Вейбула при использовании образцов небольших сечений для определения вязкости разрушения материала // Зварювання та суміжні технології: Тез. докл. II Всеукраїн. наук.-техн. конф. Молодих вчених та спеціалістів. (Київ, 25-27 червня 2003). – Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона, 2003. – С.26.
3. Богданов В.Р. Оценка вязкости разрушения материала на основе численного моделирования // Прикл. механика. – 2008. – 36. №12. – С.80 – 86.
4. Марголин Б.З., Швецова В.А. Критерий хрупкого разрушения: структурно-механический подход // Пробл. прочности. – 1992. – №2. – С.3 – 16.
5. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: "Наукова думка", 1976. – 320с.
6. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации // Автоматическая сварка, – 2003. – № 10-11, – С. 112-121.
7. Саверук М.П., Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: "Наукова думка", 1988. – 620с.
8. Хемминг Р.В. Численные методы. – Москва: "Наука", 1972. – 399с.
9. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space // Int. Appl. Mech. Vol. 31, No. 6, 1995, pp. 483-490.
10. Margolin B.Z., Shvetsova V.A., Gulenko A.G., Ilyin A.V., Nikolaev V.A., Smirnov V.I. Fracture toughness predictions for a reactor pressure vessel steel in the initial and highly embrittled states with the Master Curve approach and a probabilistic model // Pressure Vessels and Piping. – 2002. – Jan. – P. 219-231.
11. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials. // Roy. Swed Inst. Eng. Res. – 1939. – 151. – P. 5-45.

Надійшла до редколегії 29.09.2008

УДК 539.3

Олександр В. Борисейко, к.ф.-м.н., доцент,
Віктор М. Нікітенко, пров. інженер,
Альона О. Павлик, магістр,
Ігор А. Улітко, к.ф.-м.н

Згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня

Розглянуто задачу про поперечні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня. Визначені частоти резонансу та антирезонансу. Отримані значення КЕМЗ за формулою Мезона та за енергетичним критерієм. Приведені результати експериментальних досліджень.

Ключові слова: Біморф, стержень, КЕМЗ, енергетичний критерій.

*E-mail: b123@voliacable.com, nivini@univ.kiev.ua, carrot7@yandex.ru, ulitko@univ.kiev.ua
Статтю представив проф. Мелешко В.В.

Вступ

П'єзокерамічні елементи широко застосовуються як перетворювачі електричної енергії в енергію механічної деформації і навпаки. Однією з важливих задач є оцінка ефективності перетворення енергії даними елементами. Перетворення енергії на деформаціях згину можна дослідити на прикладі коливань елементів біморфної структури. Ступінь ефективності перетворення енергії – коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) для найпростіших п'єзоелементів визначають за емпіричною формулою Мезона [3]. У випадку біморфних елементів використання цієї формули може призвести до похибок у порівнянні з точними результатами, отриманими за так званим енергетичним критерієм [2, 5]. В даній роботі названа проблема досліджувалась на прикладі згинних коливань біморфного стержня.

Постановка задачі.

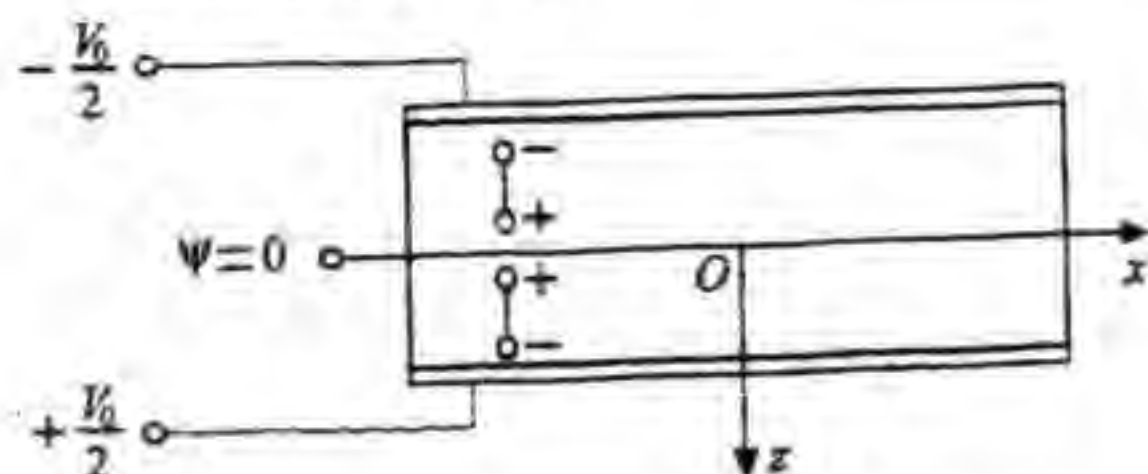


Рис. 1. Структура біморфного п'єзостержня.

O.V. Boryseiko, Cand.Sci (Phys.-Math.),
Associate Professor,
V. M. Nikitenko, Principal engineer
A. O. Pavlik, MS
I. A. Ulitko, Cand.Sci (Phys.-Math.)

Bending vibrations of bimorph piezoceramic rod

The bending vibrations of bimorph piezoceramic rod are considered. The resonance and antiresonance frequencies are defined. The values of EMCF are obtained by Mason's formula and by energy criterion. The experimental results are presented.

Key Word: bimorph, rod, ECF, energy criterion.

Розглядаються усталені згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня розмірами $2l \times 2b \times h$ (рис.1) під дією змінного у часі електричного навантаження. Змінна різниця електричних потенціалів з круговою частотою ω підводиться до електродованих поверхонь стержня $z = \pm h/2$. Електрод у серединній поверхні стержня $z = 0$ не навантажений. Усі поверхні стержня вільні від механічних навантажень.

Рівняння коливань для функції прогину серединної поверхні w біморфа у рамках теорії Кірхгофа буде співпадати з аналогічним рівнянням для випадку одношарового стержня [6]:

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} - \beta^4 \hat{w} = 0, \quad (1)$$

де

$$\beta^4 = \frac{\rho h}{D^*}.$$

Тут через D^* позначено згинну жорсткість п'єзокерамічного стержня

$$D^* = \frac{h^3}{12 s_{11}^E (1 - k_{31}^2)}. \quad (2)$$

Аналогічний вигляд також матимуть і механічні граничні умови (випадок вільного від механічних навантажень краю):

$$M_x|_{x=\pm l} = 0; \quad Q_x|_{x=\pm l} = 0. \quad (3)$$

Відмінність задачі для стержня біморфної структури полягає у зміні розподілу товщинних компонентів напруженості електричного поля та електричної індукції. У процесі деформування одна частина буде знаходитись у стані комбінованого розтягу-згину, а інша стиску-згину. Математично ця відмінність враховується зміною знаку сталої п'єзоефекту d_{31} у рівняннях стану.

Згідно [2] вираз для товщинної компоненти напруженості електричного поля внаслідок відмінності у напрямку поляризації кераміки буде мати наступний вигляд:

$$E_z = E_0 \pm z E_1. \quad (4)$$

У формулі (4) верхній знак відповідає нижній частині стержня ($z \geq 0$), а нижній знак відповідає верхній частині ($z \leq 0$).

Товщинний розподіл компонентів зв'язаного електричного поля визначимо використавши рівняння вимушеної електростатики.

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \text{div } \vec{D} = 0. \quad (5)$$

Величина E_0 визначається з електричних граничних умов:

$$\psi|_{x=\pm h} = \pm \frac{V_0(t)}{2}. \quad (6)$$

Тоді вираз для E_z (4) набуде вигляду:

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \left(\frac{h}{4} \mp z \right) E_1. \quad (7)$$

З другого рівняння (5) отримаємо:

$$D_z = \text{const}. \quad (8)$$

Тоді з рівнянь п'єзоефекту [2], з врахуванням гіпотез про лінійність розподілу механічних деформацій за товщиною стержня отримуємо остаточний вираз для товщинної компоненти вектора напруженості електричного поля:

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left(\frac{h}{4} \mp z \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9)$$

тут k_{31}^2 – поздовжній статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Вираз для товщинної компоненти електричної індукції D_z матиме вигляд

$$D_z = -\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left(\frac{V_0}{h} + \frac{h}{4d_{31}} \frac{k_{31}^2}{(1 - k_{31}^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (10)$$

Деформація ϵ_x визначається з співвідношень Коші:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (11)$$

та кінематичної гіпотези Кіргхофа, яка встановлює зв'язок між поздовжньою компонентою вектора переміщень та поперечними переміщеннями точок серединної поверхні стержня [4]:

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (12)$$

Накінець отримаємо:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Компонента напружень σ_z визначається з рівняння п'єзоефекту

$$\sigma_z = \frac{1}{s_{11}^E} (\epsilon_x \mp d_{31} (1 + \nu) E_z), \quad (14)$$

Вираз інтегральної характеристики напруження σ_x по товщині елемента – згинаючий момент M_z отримаємо провівши інтегрування [4]:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z dz = \\ &= -D^* \left[1 - \frac{3}{4} k_{31}^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{V_0}{h} \end{aligned} \quad (15)$$

2. Побудова розв'язку задачі.

Загальний розв'язок рівняння (1), (3) зважаючи на симетрію задачі, буде містити лише парні функції

$$\tilde{w} = A \cos \beta x + C \text{ch } \beta x. \quad (16)$$

Для визначення сталих інтегрування A і C з граничних умов (3) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} -A\beta^2 \cos \beta l + C\beta^2 \text{ch } \beta l &= P^* \\ A\beta^3 \sin \beta l + C\beta^3 \text{sh } \beta l &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{де } P^* = \frac{h}{4} \frac{d_{31} V_0}{s_{11}^L D^* \left(1 - \frac{3}{4} k_{31}^2\right)},$$

Звідси отримаємо вирази для сталих інтегрування A та C :

$$A = \frac{P^* \operatorname{sh} \beta l}{\beta^2 \Delta}, \quad C = -\frac{P^* \sin \beta l}{\beta \Delta}, \quad (18)$$

де

$$\Delta = -\beta (\cos \beta l \operatorname{sh} \beta l + \operatorname{ch} \beta l \sin \beta l) \quad (19)$$

визначник системи алгебраїчних рівнянь (17).

Резонансні частоти коливань біморфного стержня визначаються з умов нескінченного зростання амплітуди струму зміщення, антирезонансні частоти – з умови рівності нулю вказаної величини:

$$\tilde{I} = \infty, \quad \tilde{I} = 0. \quad (20)$$

Струм зміщення визначається за формулою [2]:

$$I = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^*} D_z dS, \quad (21)$$

де S_1^* – площа електродного покриття стержня при $z = \frac{h}{2}$.

Тоді з (16), (18) та (21) отримаємо для амплітуди струму зміщення вираз:

$$\tilde{I} = i\omega C_0 V_0 \left(1 - \frac{1}{\Delta} \frac{\beta}{2l} \frac{3k_{31}^2}{1 - \frac{3}{4} k_{31}^2} \sin \beta l \operatorname{sh} \beta l\right), \quad (22)$$

де

$$C_0 = \varepsilon_{33}^L (1 - k_{31}^2) 4bl/h \quad (23)$$

– статична електрична ємність біморфного п'єзокерамічного стержня при нульових деформаціях.

Отже, значення резонансних частот визначаємо прирівнявши до нуля визначник (19), а антирезонансні частоти визначаються нулями виразу (22).

Отримані значення частот наведені у таблиці 1. Ці значення дозволяють оцінити ефективність збудження відповідних цим частотам форм коливань. Значення відповідних ефективних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку розраховані за емпіричною формулою Мезона [3], в основу якої було покладено відношення різниці квадратів антирезонансної та

резонансної частот до квадрату антирезонансної частоти

$$k_J^2 = \frac{((\beta l)_r)^2 - ((\beta l)_a)^2}{((\beta l)_r)^2} \quad (23)$$

Для оцінки отриманих результатів КЕМЗ також були розраховані за допомогою енергетичного критерію [2, 5], а саме за формулою:

$$k_J^2 = \frac{U_p - U_k}{U_p} \quad (24)$$

Тут U_p – повна енергія у стержні з розімкненими електродами, а саме за виконання умови:

$$\iint_{S^*} D_z ds = 0 \quad (25)$$

на отриманому полі деформацій.

U_k – повна енергія у тому ж стержні для випадку коротко замкнених електродів на тому ж самому полі деформацій, за умови:

$$\frac{V_0}{h} = 0. \quad (26)$$

Для визначення повної енергії у випадку стержня з коротко замкненими електродами отримано наступну формулу:

$$U_k = \frac{h^3 b}{8s_{11}^L (1 - k_{31}^2)} \frac{P^{*2} \beta^3}{\Delta^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{3k_{31}^2}{4} \right) \times \\ \times \{ \operatorname{sh}^2 \beta l (2\beta l + \sin 2\beta l) + \sin^2 \beta l (2\beta l + \operatorname{sh} 2\beta l) + \\ + 2 \operatorname{sh} \beta l \sin \beta l (\operatorname{ch} \beta l \sin \beta l + \cos \beta l \operatorname{sh} \beta l) \}. \quad (27)$$

Різниця енергій у чисельнику виразу (24) визначається за наступною формулою:

$$U_p - U_k = \frac{bh^3}{32ls_{11}^L} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left[\int_{-l}^l \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \right]^2 \quad (28)$$

Результати отримані за енергетичним критерієм також наведені у таблиці 1.

У цій же таблиці наведені значення резонансних та антирезонансних частот, значення КЕМЗ, отриманих експериментальним шляхом. В експерименті було досліджено зразок довжини $2l = 63$ мм, ширини $2b = 10$ мм, та товщини $h = 5$ мм, виготовлений з кераміки цирконату титанату свинцю PZT-4 [2,3].

Таблиця 1

Резонансні частоти та КЕМЗ

№	Аналітичні розрахунки				Експеримент		
	$(\beta l)_r$	$(\beta l)_a$	k_d^2 (Мезон)	k_d^2 енерг. Критерій	Резонанс, кГц	Антирезонанс, кГц	k_d^2 (Мезон)
1	2,365	2,4	0,0289	0,0365	6,25	6,2	0,0243
2	5,5	5,51	0,0058	0,0072	37,33	37,52	0,004
3	8,639	8,650	0,0024	0,003	—	—	—

Висновки

Значення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку, отримані для випадку згинних коливань біморфного п'єзокерамічного стержня з товщиною поляризацією, приблизно у чотири рази нижчі, ніж для випадку поздовжніх коливань одношарового стержня з п'єзокераміки, поляризованої в товщинному напрямку.

Зауважимо, що у випадку статичної деформації п'єзокерамічних стержнів біморфної та одношарової структури КЕМЗ для біморфного стержня поляризацією складає 75 відсотків КЕМЗ k_{31}^2 для випадку чистого розтягу одношарового п'єзокерамічного стержня з товщиною поляризацією.

Причому на першій робочій частоті в останньому випадку динамічний та статичний коефіцієнти електромеханічного зв'язку, у тому числі й отриманий за енергетичним критерієм, мають практично рівні значення [6]. На відміну від попереднього, у розглянутій задачі про згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня відмінності у значеннях КЕМЗ на першій резонансній частоті більш істотні і складають близько 30%.

Застосування формули Мезона [3], отриманої емпіричним шляхом, призводить до отримання дещо занижених результатів. Вказаний ефект пояснюється неоднорідністю поля деформацій (комбінований розтяг-стиск) за товщиною стержня.

Якісно аналогічний результат отримано і у роботі [1], в якій було розглянуто задачу про згинні коливання біморфного п'єзокерамічного диска тієї ж самої поляризаційної структури матеріалу.

Отримані аналітичні результати підтверджуються результатами отриманими експериментальними дослідженнями згинних коливань біморфного стержня.

Список використаних джерел

1. Борисейко О. В., Остапчук В. В., Улітко І. А. Про визначення динамічних КЕМЗ на згинних коливаннях круглої біморфної платівки // Вісник Київського університету. Сер.: Математика і механіка. – 2006. – № 17. – С. 45 – 48.
2. Гринченко В. Т., Улітко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость // Механика связанных полей в элементах конструкций. 5 / Отв. ред. А. Н. Гузь, АН УССР, Ин-т механики. – Киев: Наук. Думка, 1989. – 280 с.
3. Мезон У. П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447 с.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
5. Улітко А. Ф. К теории электро-механического преобразования энергии в неравномерно деформируемых телах // Прикл. механика. – 1977. – 12, №10. – С. 115 – 123.
6. Улітко А. Ф., Борисейко О. В., Улітко І. А. Прикладні методи в задачах електропружності. К.: ВПЦ "Київський університет", 2007. – 127 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2008 р.

УДК 519.9

Булана* М.О., аспірант,
Маципура** В.Т., док. фіз.-мат. наук, професор

Поширення звукового імпульсного сигналу з багатомодовою просторовою структурою у плоскопаралельному хвилеводі

Проведено аналіз особливостей поширення звукового імпульсного сигналу у плоскому регулярному хвилеводі з ідеальними межами. В якості вихідного сигналу вибрана модель сигналу у вигляді періодичної у часі послідовності відрізків синусоїди. Розглянуто варіант багатомодової просторової структури вихідного сигналу. При поширенні імпульсного сигналу у хвилеводі його просторово-часова структура, в наслідок дисперсії і властивості хвилеводу як фільтра, зазнає змін. В роботі проведено дослідження характерних змін структури вихідного сигналу.

Ключові слова: хвилевід, імпульс, мода.

M.O. Bulana*, postgraduate student
V.T. Matcipura**, Doctor of Science, professor

Propagation of a sound pulse signal with multimode spatial structure in a flat regular waveguide

The analysis of features of propagation of a sound pulse signal in a flat regular waveguide is carried out. As an initial model of a signal a periodic in time sequence of pieces of a sinusoid is chosen. Multimode spatial structure of an initial signal are considered. At propagation of the pulse signal into the waveguide its space-time structure undergoes changes being affected by dispersion and low-pass filtering as specific feature of the waveguide. The results of research of characteristic changes of structure of an initial signal are presented.

Key Words: waveguide, pulse signal, mode.

*E-mail: marichka.84@gmail.com

**E-mail: mniv@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

Вступ

Як відомо, поширення звуку у хвилеводних структурах спостерігається як в природних умовах, так і в різноманітних технічних пристроях. До природних хвилеводів належать різні середовища, обмежені поверхнями, що добре відбивають звукові хвилі. Наприклад, моря й океани, для котрих верхньою межею є повітря, а нижньою – донні ґрунти [1].

Також хвилеводні системи як для пружних, так і електромагнітних хвиль мають дуже широке застосування в інженерній практиці. Саме тому багато праць присвячено проблемі поширення у хвилеводі збурень різної фізичної природи [2-4].

Сам характер хвилеводного поширення доволі складний: він визначається геометричною конфігурацією хвилеводу, властивостями межових поверхонь і засобом збудження коливань. Це призводить до виникнення ряду специфічних ефектів. Слід підкреслити, що в значній більшості праць, ці ефекти вивчалися для гармонічного у часі сигналу. Проте реальний сигнал завжди має кінцеву у часі тривалість, тобто, іншими словами, являє собою деякий імпульсний процес. Це викликає великий інтерес

до вивчення саме нестационарних процесів у хвилеводах [5].

В даній статті розглянемо проходження імпульсного сигналу у хвилеводах з найбільш простою геометрією меж, а саме у плоскопаралельному регулярному хвилеводі.

1. Математична модель вихідного імпульсного сигналу

Розглянемо плоскопаралельний хвилевід (рис. 1), в перерізі $x=0$ якого маємо рівномірний розподіл амплітуди тиску на деякому відрізку $[z_1, z_2]$, тобто

$$p(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_1, z_2] \\ 0, & z \notin [z_1, z_2] \end{cases} \quad (1)$$

За часову залежність тиску у вихідному сигналі візьмемо нескінченну періодичну послідовність імпульсів у вигляді відрізка синусоїди, тобто часова залежність тиску визначається формулою:

$$p(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & , 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & , \tau_1 \leq t \leq T_1 \end{cases} \quad (2)$$

де $T_0 = 2\pi/\Omega_0$, Ω_0 й T_0 – частота і період
спідування імпульсів. Частота носійної ω_0 на
часовому проміжку тривалості імпульсу τ_i є
сталю величиною.

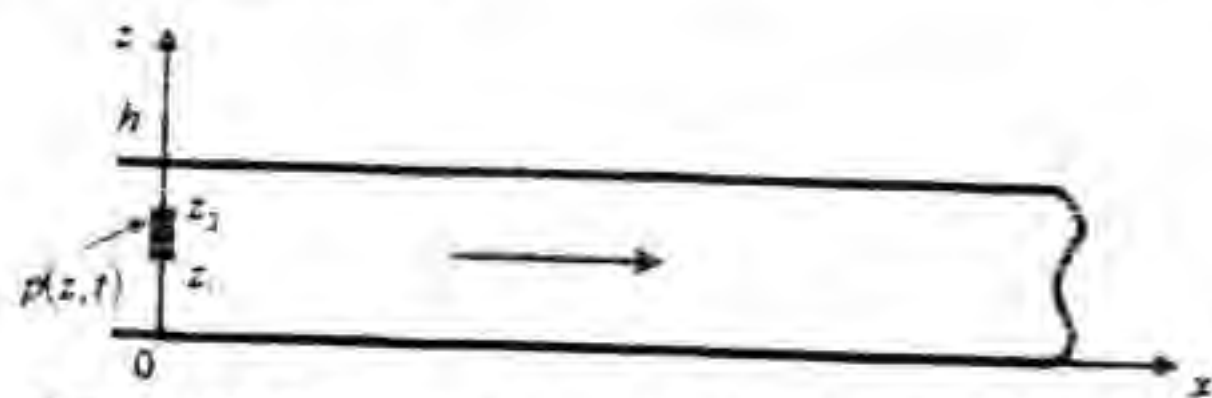


Рис. 1. Плоскопаралельний хвильовід

Представимо вихідний розподіл тиску (1) у
вигляді ряду Фур'є по власним формам $g_m(z)$
мод плоскопаралельного хвильоводу:

$$p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m(z), \quad (3)$$

де для хвильоводу з акустично м'якими межами

$$g_m(z) = \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right), \quad \text{а для хвильоводу з}$$

акустичними жорсткими межами

$$g_m(z) = \cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right); \quad \text{коефіцієнти } d_m$$

визначаються за відомими формулами з
використанням властивості ортогональності
власних форм $g_m(z)$ на відрізку $z = [0, h]$.

Будемо вважати, що функція (1) є
симетричною відносно площини $z = h/2$
хвильоводу, а саме покладемо $z_1 = 0,45h$ і
 $z_2 = 0,55h$. Наслідком акустичних властивостей
меж хвильоводу і симетричного, відносно
площини $z = h/2$, визначення функції (1) є те,
що для хвильоводу з акустично м'якими межами
дорівнюють нулю амплітудні коефіцієнти d_m з
парними номерами, тобто $d_m = 0$, $m = 0, 2, 4, \dots$,
а для хвильоводу з акустично жорсткими межами
– з непарними, $d_m = 0$ при $m = 1, 3, 5, \dots$

Тепер представимо вихідний сигнал (2) також
у вигляді ряду Фур'є

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)], \quad (4)$$

де коефіцієнти a_k та b_k визначаються за
відомими формулами, величина

$p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ матиме зміст амплітуди
окремих гармонічних складових. Згідно з
формулою (2) стала складова ($k=0$) в ряді
(4) відсутня. Кожна складова цієї суми
утворює у хвильоводі моду з частотою
 $\omega_k = 2\pi f_k = k\omega_0 = k\Omega_0$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Тоді поле тиску у хвильоводі матиме вигляд
подвійної суми

$$p(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{d_m (a_k + ib_k) \cdot$$

$$\cdot g_m(z) \exp[-i(\omega_k t - \gamma_{mk} x)]\} \quad (5)$$

$$\text{де } \gamma_{mk} = \sqrt{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} = \frac{\omega_k}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{kpm}}{\omega_k}\right)^2} -$$

стала поширення, $\omega_{kpm} = \frac{m\pi c}{h}$ – критична

частота m -ої моди. Отже кожна m -та власна
форма хвильоводу $g_m(z)$ визначає створення m -
ої моди з частотами ω_k , $k = 1, 2, \dots$ і
відповідними амплітудними множниками

$$d_m p_k = d_m \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

При проведенні чисельних розрахунків
зручно оперувати такими безрозмірними
величинами як щільність q , кількість N
періодів T_0 носійної з незмінною частотою
 $\omega_0 = 2\pi/T_0$, котрі утворюють імпульс
тривалістю τ_i : $q = \frac{\tau_i}{T_0}$, $N = \frac{\tau_i}{T_0}$; тоді $Nq = \frac{\tau_i}{T_0}$.

Безрозмірний час, визначений як нормований до
тривалості імпульсу $\tau_i = NT_0$, тобто $t' = \frac{t}{\tau_i}$, та

просторові величини, нормовані до довжини
звукової хвилі $\lambda_0 = cT_0$ на частоті носійної ω_0 :

$$x' = \frac{x}{\lambda_0}, \quad z' = \frac{z}{\lambda_0}, \quad h' = \frac{h}{\lambda_0}.$$

Використовуючи зазначені безрозмірні
параметри, перепишемо вираз $(\omega_k t - \gamma_{mk} x)$ у
формулі (5) у вигляді:

$$\omega_k t - \gamma_{mk} x = k \frac{2\pi}{q} t' - k \frac{2\pi}{Nq} x' \sqrt{1 - \left(\frac{m}{k} \frac{Nq}{2h'}\right)^2}. \quad (6)$$

Згідно співвідношення (6) умова про те, що m -та
нормальна хвиля на частоті ω_k буде така, що
поширюється, матиме вигляд

$$\frac{m}{k} \cdot \frac{Nq}{2h'} < 1. \quad (7)$$

Отже, буде нормальна хвиля однорідною або неоднорідною залежить, при фіксованій величині Nq , від номера моди m , числа k , що визначає частоту хвилі $\omega_k = k\Omega$, і хвильової ширини хвильоводу $h' = h/\lambda_0$, де $\lambda_0 = cT_0$ – довжина хвилі на частоті ω_0 .

2. Аналіз чисельних результатів

Спробуємо розібратися в особливостях хвильовідного поширення заданого сигналу, послідовно збільшуючи величину хвильової ширини хвильоводу h' . Нехай $N = 10$ та $q = 10$. За таких параметрів вихідного сигналу, 90% енергії сигналу зосереджено в гармоніках з номерами $k = 90, 91, \dots, 110$, тобто маємо, так званий, вузькосмугасти́й сигнал. Введемо допоміжну функцію $G_m(k) = \frac{m}{k} \cdot \frac{Nq}{2h'}$, яка при заданих величинах m і h' визначає належність m -ої моди до однорідної чи неоднорідної. На рис. 2 показані графіки функції $G_m(k)$, $m = 1, 2, 3, 4$ від аргументу $k = \omega_k / \omega_1$ для ширини хвильоводу $h' = 0,7$. Нагадаємо, що непарні моди ($m = 1, 3, \dots$) визначають поле у хвильоводі з акустично м'якими межами, а парні ($m = 0, 2, 4, \dots$) – в хвильоводі з акустично жорсткими межами. Для нульової моди ($m = 0$) дисперсія відсутня, тому що вона є звичайною однорідною плоскою хвилею на будь-якій частоті. Точка перетину кривої з прямою на рівні одиниці визначає число $\xi_m = \omega_{\text{крт}} / \omega_1$ і відповідно критичну частоту m -ої моди $\omega_{\text{крт}}$. Таким чином хвилі для котрих $k > \xi_m$, а отже $\omega_k > \omega_{\text{крт}}$, будуть однорідними.

Дивлячись на рис. 2, робимо висновок, що у випадку хвильоводу з акустично м'якими межами енергоносіями будуть перші моди з частотами ω_k , $k \geq 72$, (тут $\xi_1 \approx 71,4$), а для хвильоводу з акустично жорсткими межами фактично вся енергія зосереджена в нульовій моді ($\xi_0 = 0$), адже друга мода буде однорідною тільки на частотах ω_k , $k \geq 143$, (тут $\xi_2 \approx 142,9$). Як наслідок, поля у цих хвильоводах будуть суттєво

відмінні, рис. 3. Дійсно, якщо в акустично жорсткому хвильоводі дисперсійні явища практично відсутні (рис. 3б), то для акустично м'якого хвильоводу (рис. 3а) вони проявляються у повній мірі.

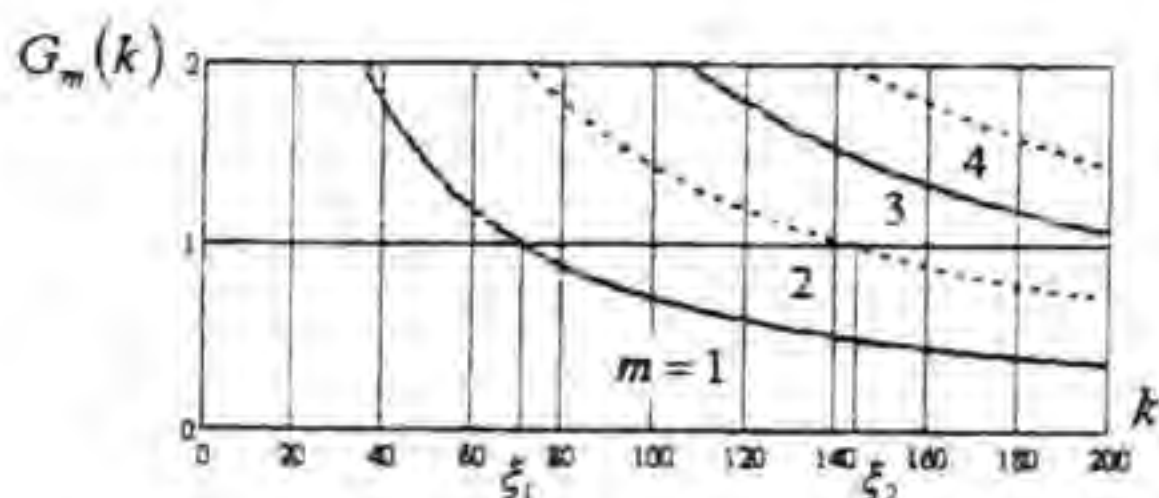


Рис. 2. Графік функції $G_m(k)$ при величині $h' = 0,7$; $m = 1, 2, 3, 4$

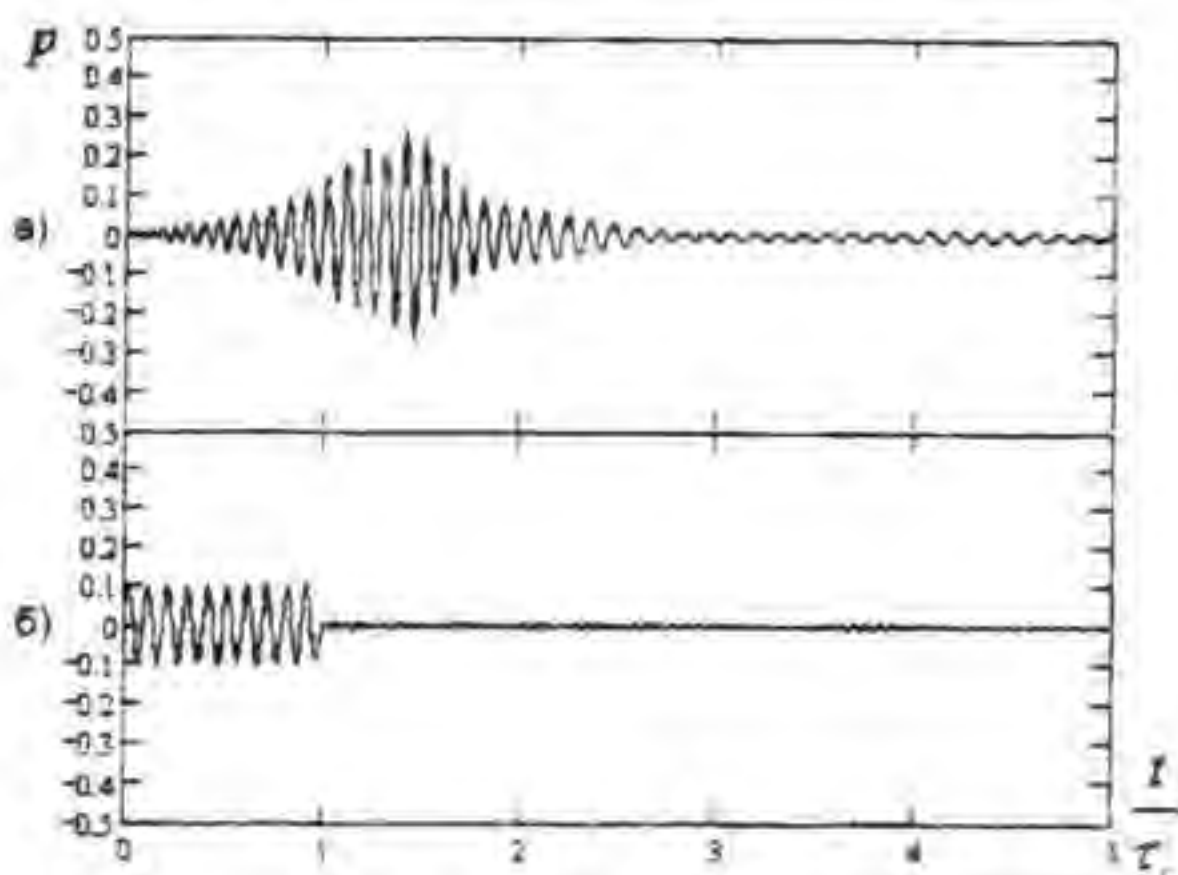


Рис. 3. Часова залежність тиску при поширенні вихідного сигналу, $h' = 0,7$, $x' = 20$:

а – акустично м'який хвильовід; б – акустично жорсткий хвильовід

Збільшимо розмір хвильоводу $h' = 1,7$. Тепер хвильовий процес подалі від джерела збурення ($x = 0$) практично формують дві моди: для акустично м'якого хвильоводу перша ($\xi_1 \approx 29,4$) і третя ($\xi_3 \approx 88,2$), а для акустично жорсткою – нульова ($\xi_0 = 0$) і друга ($\xi_2 \approx 58,8$), оскільки $\xi_4, \xi_5 > 110$ (рис. 4). Тому, поряд з ефектом “розмивання” сигналу, можливі більш суттєві зміни форми імпульсного збурення. Ілюстрацією до зазначеного є графіки на рис. 5. Для акустично м'якого хвильоводу на відстані усього $x' = 1$ (рис. 5а) маємо деструктивну інтерференцію хвиль різних частот першої і третьої моди, а на відстані $x' = 7$ (рис. 5б) інтерференція тих же хвиль утворює своєрідний “подвійний” імпульс. В той же час в акустично жорсткому хвильоводі

на зазначених відстанях (рис. 5б,г) вдається втримати форму вихідного сигналу за рахунок домінування нульової моди.

Отже, зберегти форму вихідного сигналу в процесі його поширення в багатомодовому хвилеводі практично неможливо.

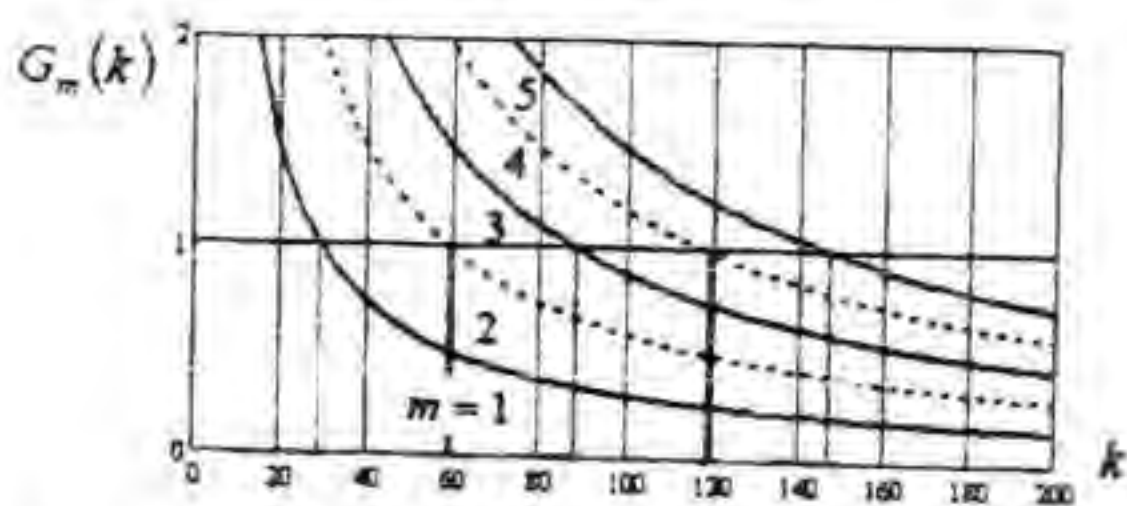


Рис. 4. Графік функції $G_m(k)$ при $h' = 1,7$; $m = 1, 2, 3, 4, 5$

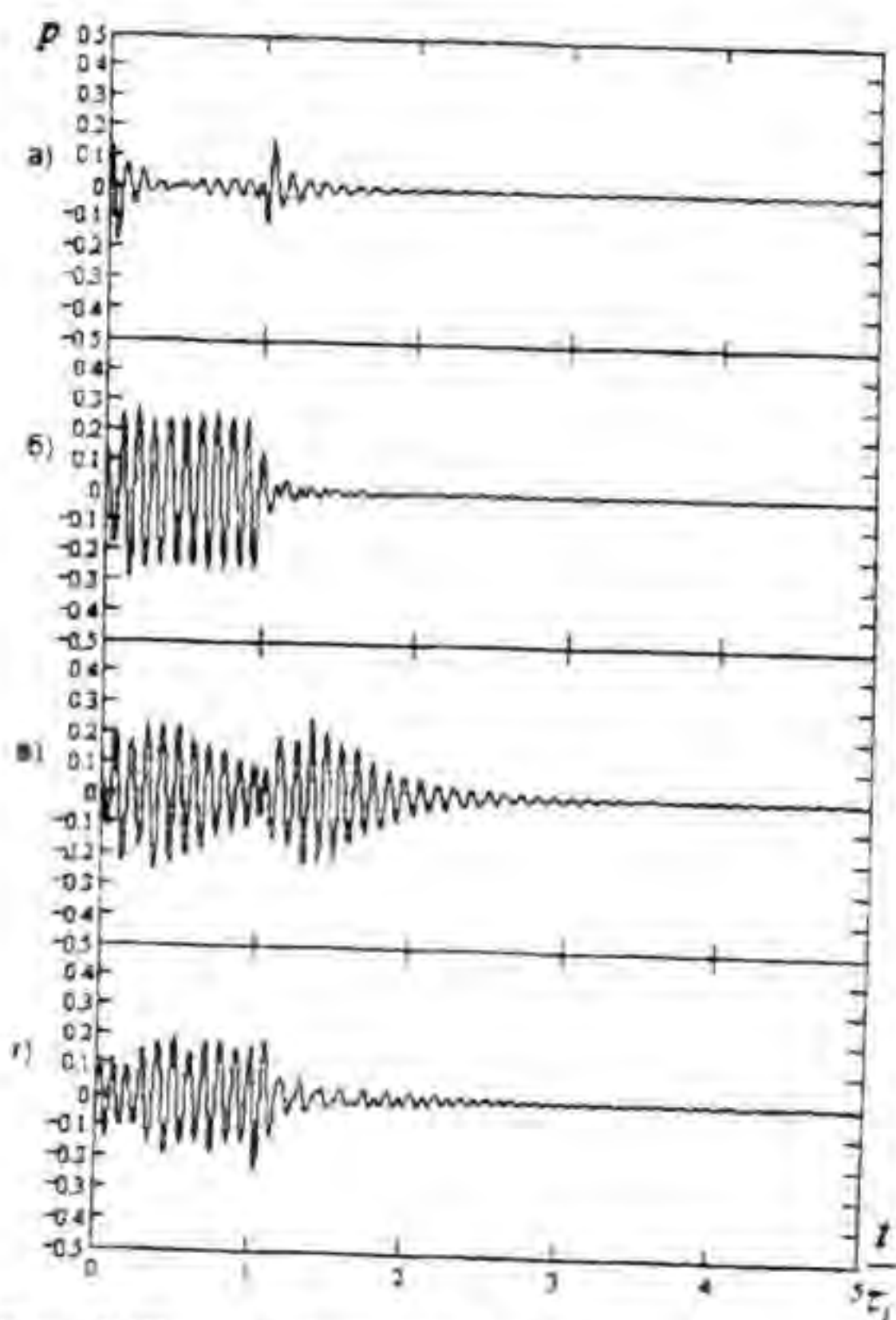


Рис. 5. Часові залежності тиску при поширенні сигналу 1, $h' = 1,7$: а, в – акустично м'який хвилевід; б, г – акустично жорсткий хвилевід: а, б – $x' = 1$; в, г – $x' = 7$

Подальше збільшення хвильової величини h' ще більш ускладнює хвильовий процес поширення імпульсного збурення. Наприклад, вже при $h' = 2,7$ на відстані $x' = 5,5$ "активну" роль відіграють хвилі трьох мод хвилеводу (для акустично м'якого – перша, третя і п'ята, для акустично жорсткого – нульова, друга і четверта) і явище деструктивної інтерференції можна спостерігати і в акустично жорсткому хвилеводі.

Висновки

1. Для проведення дослідження поширення імпульсного сигналу у плоскому регулярному хвилеводі з ідеальними межами вибрана модель вихідного сигналу у вигляді періодичної послідовності часових відрізків. Подальший розклад вихідного сигналу в ряд Фур'є дозволив записати поле у хвилеводі у вигляді суперпозиції нормальних хвиль на дискретній сукупності частот. Такий підхід дозволяє досить просто провести необхідні чисельні розрахунки на ЕОМ, а також отримати зручні для фізичного тлумачення результати.

2. При поширенні імпульсного сигналу у хвилеводі його просторово-часова структура, внаслідок дисперсії та особливостей хвилеводу як фільтра, зазнає змін.

3. У хвилеводі з кількома біжучими модами спотворення мають складний, часом з різкими змінами, характер. Наприклад, в деякій точці спостереження, внаслідок інтерференції гармонічних складових імпульсного сигналу, він може практично згаснути. Взагалі, зберегти форму вихідного сигналу в процесі його поширення в багатомодовому хвилеводі практично неможливо.

Список використаних джерел

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Акустика океана // Физика океана. – 2: Гидродинамика океана. – М.: Наука, 1978. – с. 49-145.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
4. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн. 2. Волноводные неоднородности. – К.: Наукова думка, 1986. – 214 с.
5. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. – Харьков: ЭДЭНА, 2003. – 363 с.

Надійшла до редколегії 29.09.2008

УДК 517.9

Григорій П. Головач, к.ф.-м.н., доцент,
Олексій Ф. Калайда, к.ф.-м.н., доцент

Аналітичний та чисельні методи інтегрування системи рівнянь інерціальної навігації

Розглядається система диференціальних рівнянь інерціальної навігації і для її нелінійної частини методом Ляпунова - Пуанкаре побудовано наближений розв'язок в квадратурах, а для системи в цілому - два чисельні екстраполяційні методи третього порядку.

Ключові слова: інерціальна, параметр, квадратура.

E-mail: akalayda@i.com.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор
Приказчиков В.Г.

Вступ.

Інтегрування диференціальних рівнянь інерціальної системи навігації (ІСН), пов'язане з своєрідністю інформації, що надходить від датчиків кутових швидкостей або ж направляючих косинусів. Ця своєрідність полягає в наступному: отримавши інформацію від датчиків у момент часу $t-h$, за допомогою відомих систем диференціальних рівнянь знайти місцезнаходження об'єкту (координати і орієнтацію) у момент часу t . Отже, для інтегрування цих рівнянь придатними є або методи, що дають наближення розв'язку у вигляді квадратур (аналітичні методи), або чисельні методи екстраполяційного типу. Тут побудовано один з методів першого типу та два методи другого типу.

1. Аналітичний метод.

Рух матеріальної точки, що знаходиться в геоцентричній системі координат, в припущенні, що Земля є куля, описується задачею Коші для явної [1] системи диференціальних рівнянь (у векторній формі запису)

$$\ddot{r} = A(t) - k^2 M r / |r|^3, \quad r(0) = r_{00}, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_{00}, \quad (1)$$

де $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ - відстань від центра Землі до рухомої точки, X, Y, Z - координати цієї точки, $A(t) = (a_x(t) \ a_y(t) \ a_z(t))^T$ - вектор прискорення, значення якого точка одержує ззовні (від двигунів).

G.P. Golovatsh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor.

O.F. Kalaida, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

Analytical and numerical methods of integration of the system of equations inertial to navigations

The system is considered differential equations of inertial to navigations and for its nonlinear part by the method of Lapunova - Pouankare is built close decision in quadraturah. and for the system on the whole - two numerical extrapolation methods of the third order.

Key Words: inertial, parameter, quadrature.

$$r_{00} = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}, \quad \dot{r}_{00} = \sqrt{\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2}$$

- вектори початкових значень в умовах задачі (1), k - гравітаційна стала, M - маса Землі, t - поточний час.

Ідея аналітичного методу розв'язування задачі (1) ґрунтується на малізні зміни відстані $|r|$ в порівнянні з радіусом Землі R_0 .

Введемо до розгляду функцію E

$$E(|r|) = (|r| - R_0) / \varepsilon R_0, \quad (2)$$

де

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 (R_{\max} - R_0)} \int_{R_0}^{R_{\max}} (|r| - R_0) d|r| = \frac{R_{\max} - R_0}{2 R_0}, \quad (3)$$

$R_{\max}$ - максимальна відстань точки від центра Землі. Значення параметра ε в залежності від R_0 досить малі. Так, якщо $R_{\max} - R_0$ набуває значень 50 км., 80 км.; то ε матимемо, відповідно, значення 0.003, 0.006.

Підставивши (3) в (2), дістаємо

$$E(|r|) = 2(|r| - R_0) / (R_{\max} - R_0). \quad (4)$$

Звідси випливає, що

$$0 \leq E(|r|) \leq 2. \quad (5)$$

Оскільки ж

$$|r| = R_0 (1 + E(|r|)),$$

то з врахуванням (4) маємо

$$|r| = R_0 (1 + \varepsilon E(|r|)). \quad (6)$$

З врахуванням нерівностей (5) з (6) дістаємо нерівності

$$R_0 \leq |r| \leq R_0 (1 + 2\varepsilon).$$

Рівність (6) цінна тим, що вона дає можливість «схопити» навколоземні рухи точки. А саме, підставивши (6) в праву частину рівняння в задачі (1), одержуємо рівняння

$$\ddot{r} = A(t) - kMr^2 / R_0^3 (1 + \varepsilon E)^3. \quad (7)$$

Йому можна також надати вигляду

$$\ddot{r} = A(t) - \omega^2 r / (1 + \varepsilon E)^3, \quad k^2 M / R_0^3 = \omega^2 \quad (7')$$

Оскільки ж $1 + \varepsilon E \neq 0$, то обидві частини рівняння (7') можна помножити на $(1 + \varepsilon E)^3$. Тоді матимемо квазілінійне рівняння

$$(1 + \varepsilon E)^3 \ddot{r} = A(t) - \omega^2 r$$

або в розгорненому вигляді – рівняння

$$(1 + 3\varepsilon E + 3\varepsilon^2 E^2 + \varepsilon^3 E^3) \ddot{r} = A(t)(1 + 3\varepsilon E + 3\varepsilon^2 E^2 + \varepsilon^3 E^3) - \omega^2 r. \quad (7'')$$

При $\varepsilon = 0$ з цього рівняння випливає рівняння (рівняння руху по поверхні Землі)

$$\ddot{r} + \omega^2 r = A(t), \quad (8)$$

звідки слідує, що при $A(t) \equiv 0$ (рух з вимкненими двигунами) точка рухається по поверхні Землі.

Повернемося до рівняння (7). При малих значеннях параметра ε траєкторія руху матеріальної точки мало відрізнятиметься від супутникової. Отже, з'являється можливість представити радіус-вектор руху точки у вигляді ряду

$$r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i r_i(t),$$

з невідомими функціями r_i , тобто до рівняння (7'') застосовний метод малого параметра (метод Ляпунова - Пуанкаре). Оскільки параметр ε на практиці досить малий, то розв'язок $r(t)$ рівняння (7'') доцільно шукати в урізаному вигляді, тобто, наприклад,

$$r(t) \approx r_0(t) + \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t). \quad (9)$$

Підставляючи (9) в (7''), отримаємо наближену тотожність

$$(1 + 3\varepsilon E + 3\varepsilon^2 E^2 + \varepsilon^3 E^3)(\ddot{r}_0(t) + \varepsilon \ddot{r}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{r}_2(t)) \approx A(t)(1 + 3\varepsilon E + 3\varepsilon^2 E^2 + \varepsilon^3 E^3) - \omega^2(r_0(t) + \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t)). \quad (10)$$

Далі потрібно мати подання функції відстані E (див. (2)) за цілими степенями параметра ε . Підставляючи (9) в (4) і вводячи позначення

$$\gamma = 2/(R_{\max} - R_0) \neq 0,$$

матимемо рівність

$$E(|r|) = \gamma |r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2| - \varepsilon^{-1} = \\ = E(\sqrt{(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2, r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2)}),$$

звідки дістаємо

$$E = E(|r_0|^2 + \varepsilon^2 |r_1|^2 + \varepsilon^4 |r_2|^2 + 2\varepsilon(r_0, r_1) + 2\varepsilon^2(r_0, r_2))^{1/2}.$$

Звідси для малих значень параметра ε наближено матимемо

$$E(|r_0|)(1 + 2\varepsilon \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}) + \varepsilon^2 \frac{|r_1|^2}{|r_0|^2} + 2\varepsilon^2 \frac{(r_0, r_2)}{|r_0|^2} + \varepsilon^4 \frac{(r_0, r_2)}{|r_0|^2} \approx E(|r_0|)(1 + \varepsilon \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}) + o(\varepsilon)).$$

Таким чином, з точністю до ε^2 функція відстані представляється у вигляді

$$E(|r|) = \gamma(|r_0| + \varepsilon \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}), \quad |r_0| \geq R_0$$

або - в розгорненому вигляді -

$$E(|r|) = \gamma(|r_0| - R_0) + \varepsilon \gamma \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}. \quad (11)$$

Тут немає потреби знаходити функцію E більш точно, оскільки в рівнянні (7'') вона входить з множником ε , а саме рівняння еквівалентне трьом лінійним диференціальним рівнянням, утворених в результаті прирівнювання коефіцієнтів при ε^i і тому з врахуванням (11) тотожність (10) набуває вигляду

$$(1 + 3\varepsilon(\gamma(|r_0| - R_0) + \varepsilon \gamma \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}) + 3\varepsilon^2(\gamma(|r_0| - R_0) + \varepsilon \gamma \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2})^2 + \varepsilon^3 E^3)(\ddot{r}_0 + \varepsilon \ddot{r}_1 + \varepsilon^2 \ddot{r}_2) \approx A(t)(1 + 3\varepsilon(\gamma(|r_0| - R_0) + \varepsilon \gamma \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2}) + 3\varepsilon^2(\gamma(|r_0| - R_0) + \varepsilon \gamma \frac{(r_0, r_1)}{|r_0|^2})^2 + \varepsilon^3 E^3) - \omega^2(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2). \quad (12)$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при ε^i , $i = 0, 1, 2$, - дістаємо задачі Коші

$$\ddot{r}_0 + \omega^2 r_0 = A_0(t) = A(t), \quad (13)$$

$$r_0(0) = r_{00}, \quad \dot{r}_0(0) = \dot{r}_{00},$$

$$\ddot{r}_1 + \omega^2 r_1 = A_1(t) = 3\gamma(|r_0| - R_0)\omega^2 r_0, \quad (14)$$

$$r_1(0) = 0, \quad \dot{r}_1(0) = 0.$$

$$\ddot{r}_2 + \omega^2 r_2 = A_2(t), \quad r_2(0) = 0, \quad \dot{r}_2(0) = 0. \quad (15)$$

$$A_2(t) = 3(\gamma \frac{(r, r)}{|r_0|^2} - 2E^2)\omega^2 r_0 + 3\omega^2 E r_1.$$

Розв'язками задач Коші (13) - (15) є (побудовані за допомогою функції Коші)

$$r_0(t) = r_{00} \cos \omega t + \dot{r}_{00} \omega^{-1} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t A_0(s) \sin \omega(t-s) ds. \quad (16)$$

$$r_i(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t A_i(s) \sin \omega(t-s) ds. \quad (17)$$

Таким чином, наближений розв'язок нелінійної задачі ІСН добуто в квадратурах, обчислення яких можна здійснювати за допомогою відповідних квадратурних формул для інтегралів зі змінною верхньою межею. Відзначимо при цьому, що через рівність нулю підінтегральних функцій у формулах (16), (17), при $t=s$ інформація від датчиків у цей момент часу не використовується. Отже, шукані величини можуть бути знайдені за інформацією в попередніх точках, що особливо істотно через згадану вище специфіку розглядуваної задачі, навіть при застосуванні квадратурних формул інтерполяційного типу, що мають більш високий порядок.

Перейдемо до побудови чисельних методів розв'язування задачі ІСН.

2. Чисельні методи.

Оскільки в системі диференціальних рівнянь ІСН інформація надходить від датчиків, при чисельному її інтегруванні придатні лише ті чисельні методи, які не використовують інформацію у тій точці, в якій шукається розв'язок. Отже, для чисельного інтегрування таких систем придатні або екстраполяційні методи, або відповідним чином пристосовані інтерполяційні методи. Побудуємо такі методи.

В задачі Коші (1) вектор $A(t)$ може мати вигляд

$$A(t) = N(t)a(t),$$

де $a(t)$ – вектор прискорення в системі координат, зв'язаної з об'єктом,

$$N(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & l_{xz} \\ x_3 & x_4 & l_{yz} \\ x_5 & x_6 & l_z \end{pmatrix}$$

– матриця напрямних косинусів, елементи якої задають датчики або визначаються як розв'язок двох лінійних нормальних однорідних систем трьох диференціальних рівнянь з однією і тією ж (кососиметричною і виродженою) матрицею коефіцієнтів

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_x(t) & -\omega_y(t) \\ -\omega_z & 0 & \omega_x(t) \\ \omega_y & -\omega_z(t) & 0 \end{pmatrix},$$

розв'язуваних при відповідних початкових умовах, $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ – координати вектора кутової швидкості в рухомій системі координат (задаються датчиками) та зв'язаних системами рівностей

$$l_{xz} = x_3 x_6 - x_2 x_5, l_{yz} = x_5 x_2 - x_1 x_6, l_{zx} = x_1 x_4 - x_3 x_2,$$

$$l_{yx} = x_1, l_{xy} = x_2, l_{yz} = x_3, l_{zy} = x_4, l_{zx} = x_5, l_{xz} = x_6.$$

У векторній формі запису ці лінійні системи мають вигляд

$$\dot{X}_N = Q(t)X_N, X_N = (x_1 \ x_3 \ x_5)^T,$$

$$\dot{X}_P = Q(t)X_P, X_P = (x_2 \ x_4 \ x_6)^T$$

Перейдемо до побудови чисельних методів для задачі ІСН.

Перший метод стосуватиметься випадку, коли, замість вектора кутової швидкості

$$\Omega(t) = (\omega_x(t) \ \omega_y(t) \ \omega_z(t))^T,$$

датчиками задається його усереднення на відтинку Δ , довжини h , часу t , тобто величини

$$\hat{\Omega}_i = \frac{1}{h_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Omega(t) dt.$$

Для цього випадку можна побудувати чисельний метод другого порядку розв'язування задачі Коші для лінійних систем. Для цього використаємо наближену квадратурну формулу [2] для інтегралів від добутку функцій

$$J_{fg} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)g(t)dt = \frac{1}{h_i} J_f J_g + O(h_i^3) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t)dt + O(h_i^3), \quad h_i = t_i - t_{i-1}, \quad (18)$$

а для наближення решти інтегралів в процесі побудови методу – формулу трапецій (похибка $O(h_i^3)$). В результаті для наближеного інтегрування лінійних задач Коші матимемо дві рекурентні системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (у векторній формі запису: для простоти наближені значення розв'язку позначатимемо тими ж літерами, що й точні)

$$X_{N,i} = X_{N,i-1} + 0.5\hat{Q}_i X_{N,i-1} + 0.5\hat{Q}_i X_{N,i+1}$$

$$X_{P,i} = X_{P,i-1} + 0.5\hat{Q}_i X_{P,i-1} + 0.5\hat{Q}_i X_{P,i+1} \quad (19)$$

$$\hat{Q}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(t) dt$$

Отже, на усьому відрізку інтегрування матимемо значення розв'язку лінійних задач Коші з похибкою $O(h_i^2)$, тобто маємо метод другого порядку.

Побудуємо екстраполяційний метод у другому із згаданих вище випадків (датчики видають значення вектора кутової швидкості в окремі моменти часу). Для цього на першому кроці використаємо метод Ейлера. В результаті матимемо рівності (крок сталий, похибка на усьому відрізку $O(h)$)

$$X_{N,1} = X_{N,0} + hQ(t_0)X_{N,0}, X_{P,1} = X_{P,0} + hQ(t_0)X_{P,0}.$$

На наступних кроках після цього використовуємо формулу середніх точок (похибка на усьому відрізку інтегрування $O(h^2)$). В результаті дістанемо рекурентні формули

$$X_{N,i+1} = X_{N,i} + 2hQ(t_i)X_{N,i}, X_{P,i+1} = X_{P,i} + 2hQ(t_i)X_{P,i}, i = 1, 2, \dots$$

Отже, і у цьому випадку маємо метод другого порядку.

Зауважимо, що у випадку, коли датчики видають і значення вектора кутової швидкості, і його усереднення, можна побудувати й метод третього порядку. Для цього досить скористатись уточненням формули (18)

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)g(t)dt &= f_{i-1}g_{i-1} + \\ &+ f_{i-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t)dt + g_{i-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt + \\ &+ \frac{4}{3h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - f_{i-1})dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g(t) - g_{i-1})dt + O(h_i^4) \end{aligned}$$

[2] та системами (19) на першому кроці.

Для розв'язування нелінійної задачі Коші (1) залишемо в ній рівняння у вигляді

$\ddot{r} + \omega^2 r = A(t) + \omega^2 r(1 - (R_0/|r|)^3)$, $\omega^2 = k^2 M / R_0^3$
і зведемо її за допомогою функції Коші оператора лівої частини рівняння та її похідної до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольєрра

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{i-1} \cos \omega(t - t_{i-1}) + \dot{r}_{i-1} \omega^{-1} \sin \omega(t - t_{i-1}) + \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{t_{i-1}}^t \sin \omega(t-s) (A(s) + \omega^2 r(s)(1 - (R_0/|r(s)|)^3)) ds, \\ \dot{r}(t) &= -r_{i-1} \sin \omega(t - t_{i-1}) + \dot{r}_{i-1} \cos \omega(t - t_{i-1}) + \\ &+ \int_{t_{i-1}}^t \cos \omega(t-s) (A(s) + \omega^2 r(s)(1 - (R_0/|r(s)|)^3)) ds. \end{aligned}$$

З цієї системи за допомогою квадратурного методу з використанням формули трапецій дістанемо рекурентні формули для наближеного розв'язку задачі (1) ($h_i = t_i - t_{i-1}$, при $i = 1$, згідно (1), $r_{i-1} = r_{00}$, $\dot{r}_{i-1} = \dot{r}_{00}$)

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-1} \cos \omega h_i + \dot{r}_{i-1} \omega^{-1} \sin \omega h_i + \\ &+ 0.5 h_i \omega^{-1} \sin \omega h_i (A(t_{i-1}) + \omega^2 r_{i-1} (1 - (R_0/|r_{i-1}|)^3)), \\ \dot{r}_i &= -r_{i-1} \sin \omega h_i + \dot{r}_{i-1} \cos \omega h_i + \\ &+ 0.5 h_i (\cos \omega h_i (A(t_{i-1}) + \omega^2 r_{i-1} (1 - (R_0/|r_{i-1}|)^3) + \\ &+ A(t_i) + \omega^2 r_i (1 - (R_0/|r_i|)^3))) \end{aligned}$$

з похибкою $O(h_i^2)$ на усьому відрізку інтегрування, тобто маємо метод другого порядку. Аналогічно, використавши ці формули лише на першому кроці, а систему інтегральних рівнянь – на відрізках $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ довжини $h_i + h_{i+1}$ та застосувавши квадратурний метод з використанням формули парабол [2], дістанемо відповідні формули методу третього порядку (у випадку сталого кроку інтегрування – методу четвертого порядку).

Аналогічні методи другого та третього (четвертого) порядку можна побудувати також з системи інтегральних рівнянь, добутих за допомогою функції Коші та її похідної і оператора лівої частини рівняння в задачі (1).

Висновки.

1. Для системи рівнянь ІСН завдяки вдалому вибору "малого" параметра методом Ляпунова – Пуанкаре побудовано аналітичне наближення її розв'язку.

2. За допомогою інтегральних квадратурних формул побудовано чисельні методи розв'язування лінійної частини системи рівнянь ІСН у випадку, коли вхідна інформація датчиками видається в усередненому вигляді, а також, крім того, і в окремі моменти часу. Досить використати ці методи, щоб для усієї задачі ІСН з врахуванням того, що наближення функції A в нелінійній задачі ІСН інтегрується, мати метод третього порядку.

Список використаних джерел

1. Ляшко І.І., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ (в 3-х частях). Ч. 3. – Киев: "Вища школа", 1987. – 344 с.
2. Калайда О.Ф. Чисельні методи. – Київ: РВЦ "Київський університет", 2000. – 250 с.

Ндійшла до редколегії 17.10.2008

УДК 517.9

Олексій В. Капустян, д.ф.-м.н.,
Олена А. Капустян, к. ф.-м.н.

Глобальний аттрактор для імпульсно-збуреного хвильового рівняння

Розглядається неавтономне хвильове рівняння, що зазнає в фіксовані моменти часу імпульсних збурень затухаючого характеру. Нелінійний доданок є трансляційно-компактним за часовою змінною та неперервним (але не Ліпшицевим) по фазовій змінній. В роботі на множині слабких розв'язків побудовано неавтономну многозначну динамічну систему, для якої в фазовому просторі доведено існування глобального аттрактору.

Ключові слова: глобальний аттрактор, хвильове рівняння, неавтономна динамічна система.

O.V. Kapustyan, D.Sci (Phys-Math.),
O.A. Kapustian, C.Sci (Phys-Math.)

Global attractor for impulsive-perturbed wave equation

The non-autonomous wave equation with damped impulse effect at fixed moments of time is considered. The non-linear term is supposed to be translation-compact on time variable and continuous (but not Lipschitz) on phase variable. In the paper we construct multi-valued non-autonomous dynamical system on the set of all weak solutions and prove for it the existence of global attractor in the natural phase space.

Key words: global attractor, wave equation, non-autonomous dynamical system.

*E-mail: alexkap@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кореспондент НАН України, професор М.О. Перестюк

Вступ

Одним із сучасних методів дослідження якісної поведінки розв'язків нелінійних еволюційних систем є теорія глобальних аттракторів. Класичне викладення цієї теорії в застосуванні до автономних однозначнорозв'язних дисипативних рівнянь в частинних похідних міститься в [1]. Узагальнення на неавтономний випадок проведено в [2]. Випадку можливої неєдиності розв'язку присвячені роботи [3-5]. Імпульсні системи з точки зору теорії глобальних аттракторів неавтономних динамічних систем вперше були розглянуті в [6]. В даній роботі, ґрунтуючись на загальній схемі досліджень, запропонованій в [6], а також на результатах [7], що стосуються автономного випадку, доводиться існування глобального аттрактору у неавтономній динамічній системі, що породжується хвильовим рівнянням з імпульсними збуреннями затухаючого характеру лише за умов глобальної розв'язності і трансляційної компактності [8] правої частини.

Постановка задачі. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + f(t, u) = 0, (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\gamma > 0$ стала, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обмежена область з

гладкою границею, $n \geq 3$, а нелінійний член $f: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступним умовам:

$$\begin{aligned} f, f_t &\in C([0, +\infty) \times \mathbb{R}), \\ |f(t, u)| + |f_t(t, u)| &\leq C_1(1 + |u|^{\frac{n}{n-2}}) \\ F(t, u) &:= \int_0^u f(t, s) ds, \quad F(t, u) \geq -\frac{\lambda}{2} u^2 - C_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$f(t, u)u \geq \beta F(t, u) + \frac{1}{\alpha} F_t(t, u) - C_3,$$

де $C_i > 0, i = 1, 2, 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ сталі, $\lambda_1 > 0$ - перше власне число оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$, $\alpha \in (0, \frac{\gamma}{1+\beta}]$, $\alpha(\gamma - \alpha) \leq \lambda_1(2 - \beta)$.

Позначимо через $|\cdot|, (\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|, ((\cdot, \cdot))$ норму і скалярний добуток у просторах $L^2(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$, $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ - фазовий простір.

Означення 1. Функція $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_t(\cdot) \end{pmatrix}$

називається розв'язком задачі (1) на (τ, T) , якщо $\varphi \in L^\infty(\tau, T; E)$ та $\forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ виконується рівність

$$\begin{aligned} - \int (u_t, \psi) \eta_t + \int (\gamma(u_t, \psi) + ((u, \psi)) + \\ + (f(t, u), \psi)) \eta = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де u_t означає узагальнену похідну від u по t .

Оскільки $H_0^1(\Omega) \in$ неперервно вкладеним у $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, то з (2) для $u \in L^\infty(\tau, T; H_0^1(\Omega))$ маємо, що $f(t, u) \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$. Тоді для кожного розв'язку $\varphi(\cdot)$ задачі (1) з [1] одержимо $\varphi(\cdot) \in C([\tau, T]; E)$, $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$ $(u, (\cdot), \psi) \in C^1(\tau, T)$ і $\forall t \in (\tau, T)$

$$\frac{d}{dt}(u, \psi) + \gamma(u, \psi) + ((u, \psi)) + (f(t, u), \psi) = 0. \quad (4)$$

З леми 2, приведеної нижче, маємо, що $\forall \tau \geq 0 \quad \forall T > \tau \quad \forall \varphi_\tau = \begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} \in E$ існує хоча б один розв'язок $\varphi(\cdot)$ задачі (1) на (τ, T) такий, що $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$.

Цей результат дозволяє нам поставити наступну імпульсну задачу: у фіксовані моменти часу $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ кожний розв'язок $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_1(\cdot) \end{pmatrix}$ задачі (1) у фазовому просторі E зазнає імпульсного збурення

$$\varphi(\tau_i + 0) - \varphi(\tau_i) \in \Psi_i(\varphi(\tau_i)), \quad i \geq 1 \quad (5)$$

де $\tau_i > 0$, $\tau_{i+1} - \tau_i \geq \delta > 0 \quad \forall i \geq 1$, $\Psi_i: E \mapsto 2^E$ задані відображення, причому

$$\forall R > 0 \quad \sup_{\|\varphi\|_E \leq R} \|\Psi_i(\varphi)\|_E \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \quad (6)$$

де $\|A\|_E = \sup_{a \in A} \|a\|_E$ для $A \subset E$.

Покладемо $\tau_0 = 0$, $\psi_0 \equiv 0$. Тоді $\forall \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad \forall \varphi_\tau \in E$ задача Коші для задачі (1),(5) є глобально розв'язною в наступному сенсі: існує хоча б одна функція $\varphi(\cdot)$ така, що $\forall T > \tau \quad \varphi(\cdot) \in L^\infty(\tau, T; E)$, $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$, $\varphi(\cdot)$ є розв'язком задачі (1) на (τ, τ_{i+1}) , (τ_{i+1}, τ_{i+2}) , ... і у точках $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ функція $\varphi(\cdot)$ задовольняє (5).

Основний результат статті полягає в наступному: якщо $\forall R > 0$ функції $f, f_i \in$ рівномірно неперервними на множині $Q_+(R) = \{t \geq 0, |u| \leq R\} \subset \mathbb{R}^2$, то за умов (2),(6) і додаткової умови дисипативності задача (1),(5) породжує багатозначну неавтономну напівдинамічну систему (або сімейство багатозначних напівпроцесів), для якої існує напівінваріантний компактний глобальний аттрактор у фазовому просторі E .

Сімейство багатозначних напівпроцесів, породжених задачею (1),(5). Нам знадобляться деякі позначення і результати з [4]. Нехай $P(E) (\beta(E))$ - множина всіх непорожніх (непорожніх, обмежених) підмножин E , $\forall A, B \in E$

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_E,$$

$$B_r = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq r\}, \quad \mathbb{R}_{+,d} = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 \mid t \geq \tau\}.$$

Означення 2. Сімейство багатозначних відображень $\{U_\sigma: \mathbb{R}_{+,d} \times E \mapsto P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$ називається сімейством багатозначних напівпроцесів (БНП), якщо Σ є повним метричним простором, $\{T(h): \Sigma \mapsto \Sigma\}_{h \geq 0}$ є неперервною напівгрупою і $\forall \sigma \in \Sigma \quad \forall x \in E$

$$1) \quad U_\sigma(\tau, \tau, x) = x;$$

$$2) \quad U_\sigma(t, \tau, x) \subset U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, x)) \quad \forall (t, s), (s, \tau) \in \mathbb{R}_{+,d};$$

$$3) \quad U_\sigma(t+h, \tau+h, x) \subset U_{T(h)\sigma}(t, \tau, x) \quad \forall (t, \tau) \in \mathbb{R}_{+,d}, \forall h \geq 0.$$

Сімейство БНП називається строгим, якщо в умовах 2), 3) має місце рівність.

$$\text{Покладемо } U_\Sigma(t, \tau, x) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, \tau, x).$$

Означення 3. Множина $A_\Sigma \subset E$ називається глобальним аттрактором сімейства БНП $\{U_\sigma: \mathbb{R}_{+,d} \times E \mapsto P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$, якщо $A_\Sigma \neq E$ і

1) A_Σ є рівномірно притягуючою множиною, тобто $\forall B \in \beta(E) \quad \forall \tau \geq 0$

$$\text{dist}(U_\Sigma(t, \tau, B), A_\Sigma) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty;$$

2) A_Σ є мінімальною рівномірно притягуючою множиною, тобто для довільної рівномірно притягуючої множини Y маємо $A_\Sigma \subset cl_E Y$.

Лема 1. [4] Якщо сімейство БНП $\{U_\sigma: \mathbb{R}_{+,d} \times E \mapsto P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$ задовольняє наступним умовам:

$$\forall B \in \beta(E) \exists T = T(B) \bigcup_{t \geq T} U_\Sigma(t, 0, B) \in \beta(E), \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \beta(E) \quad \forall \{t_n \mid t_n \rightarrow \infty\} \\ \forall \{\xi_n \mid \xi_n \in U_\Sigma(t_n, 0, B)\} \text{ є предкомпактною в } E, \end{array} \right. \quad (8)$$

тоді існує глобальний аттрактор $A_\Sigma \subset E$.

Якщо мають місце (7),(8) і

$$\exists \tilde{B} \in \beta(E) \quad \forall B \in \beta(E) \quad (9)$$

$$U_\Sigma(t, 0, B), \tilde{B} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

то A_Σ є компактною в E .

Якщо БНП $\{U_n\}$ є строгим, мають місце умови (7),(8) і $\exists t_1 > 0 \quad \forall t \in (0, t_1) \quad \forall \tau \geq 0$ виконується наступна властивість:

$$\begin{cases} \text{якщо } \xi_n \in U_{t_1(t_n)} \Sigma(t+\tau, \tau, \eta_n), t_n \rightarrow \infty, \xi_n \rightarrow \xi, \\ \eta_n \rightarrow \eta \in E, \text{ тоді } \xi \in U_{\Sigma}(t+\tau, \tau, \eta). \end{cases} \quad (10)$$

тоді A_{Σ} є напівинваріантним, тобто $\forall (t, \tau) \in \mathbb{R}_{+0} \quad A_{\Sigma} \subset U_{\Sigma}(t, \tau, A_{\Sigma})$.

Для застосування цих абстрактних результатів потрібно отримати деякі висновки про існування та властивості розв'язків задачі (1),(5).

Враховуючи (2), $F, F' \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ і $\exists C_4 > 0$ така, що $\forall (t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$|F(t, u)| + |F'(t, u)| \leq C_4(1 + |u|^{2n-2}). \quad (11)$$

Отже, для кожної функції $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_1(\cdot) \end{pmatrix} \in C([t, T], E)$ ми можемо коректно означити наступні функціонали:

$$V(t, \varphi(t)) = \frac{1}{2}|u_1(t)|^2 + \frac{1}{2}|u(t)|^2 + (F(t, u(t)), 1),$$

$$I(t, \varphi(t)) = V(t, \varphi(t)) + \frac{\gamma}{2}(u_1(t), u(t)),$$

$$H(t, \varphi(t)) = (F_1(t, u(t)), 1) + \gamma(F(t, u(t)), 1) - \frac{\gamma}{2}(f(t, u(t)), u(t)).$$

Наступна лема є безпосереднім узагальненням на неавтономний випадок результатів з [7].

Лема 2. За умовою (2) $\forall \tau \geq 0 \quad \forall T > \tau$

$\forall \varphi_{\tau} = \begin{pmatrix} u_{\tau} \\ v_{\tau} \end{pmatrix} \in E$ задача (1) має принаймні один розв'язок $\varphi(\cdot)$ на (τ, T) такий, що $\varphi(\tau) = \varphi_{\tau}$.

Для кожного розв'язку $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_1(\cdot) \end{pmatrix}$ задачі

(1) на (τ, T) функції $V(\cdot, \varphi(\cdot)), I(\cdot, \varphi(\cdot)), H(\cdot, \varphi(\cdot))$ належать $C^1(\tau, T)$ і $\forall t \in (\tau, T)$

$$\frac{d}{dt} V(t, \varphi(t)) = -\gamma|u_1(t)|^2 + (F_1(t, u(t)), 1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_1(t), u(t)) &= |u_1(t)|^2 - \gamma(u_1(t), u(t)) - \\ &- \|u(t)\|^2 - (f(t, u(t)), u(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} I(t, \varphi(t)) = -\mathcal{H}(t, \varphi(t)) + H(t, \varphi(t)). \quad (14)$$

Більше того, кожний розв'язок

$\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_1(\cdot) \end{pmatrix}$ задачі (1) на (τ, T) задовольняє

$$\forall t \geq s \geq \tau \quad \|\varphi(t)\|_E \leq C_5 \|\varphi(s)\|_E^{\frac{n-1}{n-2}} e^{-\frac{\alpha \beta}{2}(t-s)} + C_6, \quad (15)$$

де константи $C_5, C_6 > 0$ залежать лише від констант з умов (2).

Розглянемо простори $M = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ і $C(\mathbb{R}_+, M)$ з топологією рівномірної збіжності на компактах. Відомо, що з такою топологією $C(\mathbb{R}_+, M)$ є повним метричним простором.

Означення 4. Функція $g \in C(\mathbb{R}_+, M)$ називається трансляційно-компактною (тр.-к.) в $C(\mathbb{R}_+, M)$ якщо множина

$$H(g) = \text{cl}_{C(\mathbb{R}_+, M)} \{g(t+h) | h \geq 0\}$$

компактна в $C(\mathbb{R}_+, M)$

Для f зробимо додаткове припущення:

$$\begin{pmatrix} f \\ f_1 \end{pmatrix} \in \text{тр.-к. в } C(\mathbb{R}_+, M). \quad (16)$$

Позначимо $\Sigma^1 = H\left(\begin{pmatrix} f \\ f_1 \end{pmatrix}\right)$. Тоді кожний

елемент $\sigma \in \Sigma^1$ має вигляд $\sigma = \begin{pmatrix} g \\ g_1 \end{pmatrix}$, а функції

g, g_1 задовольняють (2) з тими ж константами, що і f, f_1 . З [8] робимо висновок, що якщо f, f_1 задовольняють (2), то (16) виконується $\Leftrightarrow \forall R > 0 \quad f, f_1$ рівномірно неперервні на $Q_+(R)$ (17)

Крім того, неперервна напівгрупа зсувів $\{T^1(s) : \Sigma^1 \mapsto \Sigma^1\}_{s \geq 0}$, $T^1(s)\sigma(t) = \sigma(t+s)$ діє на Σ^1 .

Тепер для кожного $h \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ позначимо через σ_h задачу (1) з імпульсними збуреннями

$$\varphi(\tau_j - h + 0) - \varphi(\tau_j - h) \in \Psi_j(\varphi(\tau_j - h)), j \geq i. \quad (18)$$

Через σ_0 позначимо задачу (1),(5), через σ_{∞} - задачу (1) без імпульсних ефектів.

Зрозуміло, що $\forall \tau \geq 0 \quad \forall h \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ імпульсна задача, визначена (18), є глобально розв'язною у тому ж сенсі, що і задача (1),(5).

Простір $\Sigma^2 = \{\sigma_h\}_{h \geq 0} \cup \{\sigma_\infty\}$ є компактним метричним простором з метрикою

$$\rho(\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}) = \left| \frac{1}{h_1 + 1} - \frac{1}{h_2 + 1} \right|, \quad \rho(\sigma_h, \sigma_\infty) = \frac{1}{h + 1}.$$

Крім того, сімейство відображень $T^2(s): \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$, $T^2(s)\sigma_h = \sigma_{h+s}$, $T^2(s)\sigma_\infty = \sigma_\infty$ породжує неперервну напівгрупу, що діє на Σ^2 .

Покладемо $\Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2$, $T(s) = (T^1(s), T^2(s))$, $\forall \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \Sigma \quad \forall s \geq 0 \quad T(s)\sigma = (T^1(s)\sigma^1, T^2(s)\sigma^2)$. Тоді одержимо неперервну напівгрупу $\{T(s): \Sigma \rightarrow \Sigma\}_{s \geq 0}$, що діє на компактi Σ .

Розглянемо сім'ю задач

$$\begin{cases} u_n + \gamma u_t - \Delta u + g(t, u) = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\varphi(\tau, -h+0) - \varphi(\tau, -h) \in \Psi_j(\varphi(\tau, -h)), \quad j \geq i, \quad (20)$$

$$\text{де } \begin{pmatrix} g \\ g_i \end{pmatrix} = \sigma^1 \in \Sigma^1, \quad \sigma_h \in \Sigma^2, \quad h \in (\tau_{i-1}, \tau_i].$$

Основним об'єктом дослідження є відображення

$$U_\sigma(t, \tau, \varphi_\tau) = \{\varphi(t) | \varphi(\cdot) \in \text{розв'язком задачі (19), (20), } \varphi(\tau) = \varphi_\tau\}. \quad (21)$$

Легко показати, аналогічно до [6], що сім'я відображень $\{U_\sigma: \mathbb{R}_{+d} \times E \rightarrow P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$, визначених (21), є строгим сімейством БНП.

Основний результат.

Для якісного дослідження сімейства імпульсних задач (19), (20) основним інструментом є наступна лема, доведення якої з незначними змінами повторює відповідний результат з [8].

Лема 3. Нехай $\varphi_n(\cdot)$ є розв'язком задачі

$$(1), \text{ де } f \text{ замінено на } g_n, \quad \begin{pmatrix} g_n \\ g_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix} \text{ в } \Sigma^1,$$

$\varphi_n(\tau) \rightarrow \varphi_\tau$ слабо в E . Тоді $\forall t_n \geq \tau$, $t_n \rightarrow t_0$ на деякій підпослідовності $\varphi_n(t_n) \rightarrow \varphi(t_0)$ слабо в E , де $\varphi(\cdot)$ - розв'язок задачі (1) при заміні f на g і $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$.

Припустимо, що для розглянутої задачі виконується наступна умова дисипативності:

$$\begin{aligned} \exists R_1 > 0 \quad \forall r \geq 0 \quad \exists T_1 = T_1(r) \quad \forall \tau \geq 0 \quad h \geq 0 \\ \forall t \geq T_1 \quad U_{(\tau^1, \sigma_h)}(t + \tau, \tau, B_r) \subset B_{R_1} \end{aligned} \quad (22)$$

Зауважимо, що оскільки кожний розв'язок задачі (19) задовольняє оцінку (15) при тих самих

константах C_5, C_6, α, β , то умова (22) накладає додаткові обмеження лише на величини $\{\Psi_i\}$, $\{\tau_i\}$. Зокрема, якщо імпульсне збурення (5) має вигляд

$$u(\tau_i + 0) = u(\tau_i), \quad u_i(\tau_i + 0) - u_i(\tau_i) \in \Psi_i(u(\tau_i)),$$

і виконані умови $|\Psi_i(u)| \leq a|u| + b$,

$$-\alpha + \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{2(\gamma - \alpha)}{\gamma} - 2\alpha \left(\frac{(a+1)^2}{2} + a\alpha \right) \right) < 0$$

то має місце умова (22).

Теорема. Нехай виконуються умови (2), (6), (16), (22). Тоді сімейство БНП $\{U_\sigma: \mathbb{R}_{+d} \times E \rightarrow P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$, визначене у (21), має напівінваріантний компактний глобальний аттрактор у фазовому просторі E .

Доведення. Перевіримо виконання умов леми 1. Спочатку проаналізуємо умову (22). З (15), (16) маємо: для довільних

$$\tau \geq 0, \varphi_\tau \in E, \sigma^1 = \begin{pmatrix} g \\ g_i \end{pmatrix} \in \Sigma^1 \quad \text{і для кожного}$$

розв'язку $\varphi(\cdot)$ задачі (19) з $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$

$$\forall t \geq 0 \quad \|\varphi(t + \tau)\|_E \leq C_5 \|\varphi(\tau)\|_E^{\frac{n-1}{n-2}} e^{\frac{\alpha\beta}{2}t} + C_6.$$

Тоді $\forall r \geq 0 \quad \exists T_2 = T_2(r) \quad \forall \tau \geq 0$

$$\forall t \geq T_2 \quad U_{(\tau^1, \sigma_h)}(t + \tau, \tau, B_r) \subset B_{\sqrt{C_6 + 1}}. \quad (23)$$

З (22), (23) зразу одержимо, що $\forall t \geq \max\{T_1(r), T_2(r)\} \quad U_\Sigma(t + \tau, \tau, B_r) \subset \tilde{B}$, де $\tilde{B} = B_{R_0}$, $R_0 = \max\{\sqrt{C_6 + 1}, R_1\}$. Отже, умови (7), (9) леми 1 виконуються.

Нехай $\forall \tau \geq 0 \quad \forall t \in (0, \delta)$

$$\xi_n \in U_{T(t_n)} \Sigma(t + \tau, \tau, x_n), \quad t_n \rightarrow \infty, \quad \xi_n \rightarrow \xi,$$

$$x_n \rightarrow x. \quad \text{Тоді } \xi_n \in U_{T(t_n)}(\sigma_n^1, \sigma_{h_n})(t + \tau, \tau, x_n).$$

$$\text{Оскільки } t_n \rightarrow \infty, \quad \text{то } T(t_n)(\sigma_n^1, \sigma_{h_n}) = (\tilde{\sigma}_n^1, \sigma_{h_n + t_n}) \rightarrow (\sigma^1, \sigma_\infty) \quad \text{для деякого}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} g \\ g_i \end{pmatrix} \in \Sigma^1. \quad \text{Зауважимо, що для кожного}$$

$n \geq 1$ нам відомі елементи $\{\tau_i - h_n - t_n\}_{i \geq 1}$. Тоді

$$\forall n \geq 1 \quad \exists m(n) \geq 1 \quad \text{такий, що}$$

$$\lambda_n := \tau_{m(n)} - h_n - t_n < \tau, \quad \theta_n := \tau_{m(n)+1} - h_n - t_n \geq \tau.$$

Крім того, $m(n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$ і $\forall n \geq 1$

$$\theta_n - \lambda_n \geq \delta > 0. \quad \text{Отже, якщо } \xi_n = \varphi_n(t + \tau), \quad \text{то}$$

$\varphi_n(\cdot)$ є розв'язком задачі (1) (де f замінено на

g_n). $\varphi_n(\tau) = x_n$ і $\varphi_n(\cdot)$ на $[\tau, \tau + 1]$ має не більше ніж один імпульсний ефект у момент θ_n .

Якщо $\forall n \geq 1$ $\theta_n \geq t + \tau$, то $\varphi_n(\cdot)$ на $[\tau, t + \tau)$ не має імпульсного ефекту, отже, за лемою 3 $\xi_n = \varphi_n(t + \tau) \rightarrow \varphi(t + \tau)$ слабко в E , і дякуючи сильній збіжності $\xi_n \rightarrow \xi$ можна отримати

$$\xi = \varphi(t + \tau) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \tau, x) \subset U_\Sigma(t + \tau, \tau, x).$$

Нехай $\theta_n \in [\tau, t + \tau)$. З (15) $\exists r > 0 \quad \forall n \geq 1$ $\|\varphi_n(\theta_n)\|_E \leq r$ тоді

$$\|\varphi_n(\theta_n + 0) - \varphi_n(\theta_n)\|_E \leq \|\Psi_{m(n)}(\varphi_n(\theta_n))\|_E \leq \sup_{|x| \leq r} \|\Psi_{m(n)}(x)\|_E \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Розглянемо всі можливі варіанти поведінки θ_n .

Якщо $\theta_n \rightarrow t + \tau$ (або $\theta_n = \tau$), то $\varphi_n(\theta_n) \rightarrow x$ слабко в E . Тоді $\varphi_n(\theta_n + 0) \rightarrow x$ слабко в E . Отже, $\xi_n = \varphi_n(t + \tau) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \theta_n, \varphi_n(\theta_n + 0)) =$

$$U_{(\tau^1(\theta_n - \tau)\sigma_n^1, \sigma_\infty)}(t + 2\tau - \theta_n, \tau, \varphi_n(\theta_n + 0)).$$

Тоді з леми 3 $\xi_n \rightarrow \xi \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \tau, x) \subset U_\Sigma(t + \tau, \tau, x)$.

Якщо $\theta_n \rightarrow t + \tau$, то $\xi_n = \varphi_n(t + \tau) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \theta_n, \varphi_n(\theta_n + 0)) = U_{(\tau^1(\theta_n - \tau)\sigma_n^1, \sigma_\infty)}(t + 2\tau - \theta_n, \tau, \varphi_n(\theta_n + 0))$. У цьому випадку з леми 3 $\varphi_n(\theta_n) \rightarrow \varphi(t + \tau) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \tau, x)$ слабко в E , отже $\xi_n \rightarrow \varphi(t + \tau) \in U_\Sigma(t + \tau, \tau, x)$.

Якщо $\theta_n \rightarrow \theta \in (\tau, t + \tau)$, то $\xi_n \in U_{(\tau^1(\theta_n - \tau)\sigma_n^1, \sigma_\infty)}(t + 2\tau - \theta_n, \tau, \varphi_n(\theta_n + 0))$. Отже $\varphi_n(\theta_n + 0) \rightarrow \varphi(\theta) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(\theta, \tau, x)$ слабко в E . Проте $\xi_n = \tilde{\varphi}_n(t + 2\tau - \theta_n)$, де $\tilde{\varphi}_n(\cdot)$ - розв'язок задачі (1) з нелінійністю

$$\left(\begin{array}{l} g_n(\cdot + \theta_n - \tau) \\ g_n(\cdot + \theta_n - \tau) \end{array} \right), \quad \tilde{\varphi}_n(\tau) = \varphi_n(\theta_n + 0).$$

Звідси з леми 3 $\tilde{\varphi}_n(t + 2\tau - \theta_n) \rightarrow \varphi(t + 2\tau - \theta) \in U_{(\tau^1(\theta - \tau)\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + 2\tau - \theta, \tau, \varphi(\theta)) \subset$

$$\subset U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \theta, U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(\theta, \tau, x)) =$$

$= U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(t + \tau, \tau, x) \subset U_\Sigma(t + \tau, \tau, x)$ і властивість (10) доведена.

Ключовим моментом доведення є перевірка умови (8). Нехай $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, \eta_n)$, де $\{\eta_n\}$ обмежена, $t_n \rightarrow \infty$, $\sigma_n \rightarrow \sigma$. Використовуючи (9), отримаємо, що $\{\xi_n = \varphi_n(t_n)\}$ обмежена в E , тому на деякій підпослідовності $\xi_n = \varphi_n(t_n) \rightarrow \theta$ слабко в E . У той же спосіб $\forall \geq 0$ $\varphi_n(t_n - M) \rightarrow \theta_M$ слабко в E . Крім того, $\forall t \geq 0$ $\varphi_n(t_n - M + t) = \tilde{\varphi}_n(t) \in U_{\tilde{\sigma}_n}(t, 0, \varphi_n(t_n - M))$, де $\tilde{\sigma}_n = T(t_n - M)\sigma_n \rightarrow \tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}^1, \sigma_\infty)$ в Σ . Зауважимо, що $\tilde{\varphi}_n(M) = \varphi_n(t_n) = \xi_n \rightarrow \theta$ слабко в E .

Нехай $\{s_n^k\}_{1 \leq k \leq [\frac{M}{\delta}]}$ - точки імпульсних ефектів, які відповідають $\tilde{\sigma}_n$ на $[0, M)$, $s_n^{k+1} - s_n^k \geq \delta > 0$. Тоді, застосовуючи (14) на інтервалах $(0, s_n^1)$, $(s_n^1, s_n^2), \dots, (s_n^{k-1}, M)$, отримаємо $\forall t \in (s_n^k, s_n^{k+1})$:

$$I_{\tilde{\sigma}_n}(t, \tilde{\varphi}_n(t)) = I_{\tilde{\sigma}_n}(s_n^k, \tilde{\varphi}_n(s_n^k + 0))e^{-\tau(t - s_n^k)} + \int_{s_n^k}^t e^{\tau(p - t)} H_{\tilde{\sigma}_n}(p, \tilde{\varphi}_n(p)) dp. \quad (24)$$

Крім того, оскільки $t_n \rightarrow \infty$, з попередніх міркувань отримаємо: $\tilde{\varphi}_n(s_n^1) \rightarrow \tilde{\varphi}(s^1) =$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(s^1) \\ \tilde{u}_t(s^1) \end{pmatrix} \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(s^1, 0, \theta_M) \text{ слабко в } E,$$

$\tilde{\varphi}_n(s_n^1 + 0) - \tilde{\varphi}_n(s_n^1) \rightarrow 0$ в E . Тому $\tilde{\varphi}_n(s_n^2) \rightarrow \tilde{\varphi}(s^2) \in U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(s^2, s^1, \tilde{\varphi}(s^1)) \subset$

$$\subset U_{(\sigma^1, \sigma_\infty)}(s^2, 0, \theta_M) \text{ слабко в } E. \text{ Діючи таким}$$

чином, отримаємо, що $\forall t \in [0, M]$

$\tilde{\varphi}_n(t) \rightarrow \tilde{\varphi}(t) \in U_{\tilde{\sigma}}(t, 0, \theta_M)$ слабко в E . Зокрема, $\tilde{\varphi}_n(M) = \xi_n \rightarrow \tilde{\varphi}(M) = \theta \in U_{\tilde{\sigma}}(M, 0, \theta_M)$ слабко в E . Використовуючи (24), робимо висновок

$$I_{\tilde{\sigma}_n}(M, \tilde{\varphi}_n(M)) - I_{\tilde{\sigma}_n}(0, \tilde{\varphi}_n(0)) = \sum_{k=1}^{[\frac{M}{\delta}]} (I_{\tilde{\sigma}_n}(s_n^k, \tilde{\varphi}_n(s_n^k + 0)) - I_{\tilde{\sigma}_n}(s_n^k, \tilde{\varphi}_n(s_n^k))) e^{\tau s_n^k} + \int_0^M e^{\tau p} H_{\tilde{\sigma}_n}(p, \tilde{\varphi}_n(p)) dp. \quad (25)$$

Доведемо, що $\forall k = 1, \left[\frac{M}{\delta} \right]$ при $n \rightarrow \infty$

$$(I_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{\varphi}_n(s_n^k + 0)) - I_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{\varphi}_n(s_n^k)))e^{ks_n^k} \rightarrow 0.$$

Оскільки $\|\tilde{\varphi}_n(s_n^k + 0) - \tilde{\varphi}_n(s_n^k)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то

достатньо довести, що

$$\begin{aligned} F_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{u}_n(s_n^k)) &\rightarrow F_{\sigma}(s^k, \tilde{u}(s^k)) \text{ в } L^1(\Omega), \\ F_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{u}_n(s_n^k + 0)) &\rightarrow F_{\sigma}(s^k, \tilde{u}(s^k)) \text{ в } L^1(\Omega) \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки $\tilde{u}_n(s_n^k) \rightarrow \tilde{u}(s^k)$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, то $\tilde{u}_n(s_n^k, x) \rightarrow \tilde{u}(s^k, x)$ для майже всіх $x \in \Omega$. В силу рівномірної збіжності $F_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{u}_n(s_n^k, x)) \rightarrow F_{\sigma}(s^k, \tilde{u}(s^k, x))$ м.с. з (11)

$$|F_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{u}_n(s_n^k, x))| \leq$$

$$|F_{\sigma_n}(s_n^k, \tilde{u}_n(s_n^k, x))| \leq C_4(1 + |\tilde{u}_n(s_n^k, x)|^{\frac{2n-2}{n-2}}).$$

Компактне вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Omega)$

гарантує збіжність $|\tilde{u}_n(s_n^k)|^{\frac{2n-2}{n-2}}$ до $|\tilde{u}(s^k)|^{\frac{2n-2}{n-2}}$ в $L^1(\Omega)$. Тоді за теоремою Лебега маємо (26).

Оскільки $\tilde{\varphi}_n(0) = \varphi_n(t_n - M)$ і в силу (9) $\exists n_0 = n_0(M) \forall n \geq n_0 \quad \varphi_n(t_n - M) \in \tilde{B} \in \beta(E)$, тому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_{\sigma_n}(0, \tilde{\varphi}_n(0))| + |I_{\sigma}(0, \tilde{\varphi}(0))| \leq C_7,$$

де константа $C_7 > 0$ не залежить від M .

Далі, повторюючи міркування з (26) для функцій $(F_{\sigma_n})'_i(t, \tilde{u}_n(t))$, $f_{\sigma_n}(t, \tilde{u}_n(t))\tilde{u}_n(t)$, з теореми Лебега і оцінки (22) одержимо, що

$$\int_0^M e^{ps} H_{\sigma_n}(p, \tilde{\varphi}_n(p)) dp \rightarrow \int_0^M e^{ps} H_{\sigma}(p, \tilde{\varphi}(p)) dp.$$

Оскільки $\tilde{\varphi}(t) \in U_{(\tilde{\varphi}, \sigma_{\infty})}(t, 0, \theta_M)$, то можемо застосувати (14) до $\tilde{\varphi}(\cdot)$ на всьому інтервалі $[0, M]$ і одержимо:

$$\begin{aligned} I_{\sigma}(M, \tilde{\varphi}(M)) &= I_{\sigma}(0, \tilde{\varphi}(0))e^{-\lambda M} + \\ &+ \int_0^M e^{\lambda(p-M)} H_{\sigma}(p, \tilde{\varphi}(p)) dp. \end{aligned} \quad (27)$$

Для $\tilde{\varphi}(\cdot)$ з означення I_{σ} і з рівностей $\tilde{\varphi}_n(M) = \xi_n$, $\tilde{\varphi}(M) = \theta$ будемо мати:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\sigma_n}(M, \xi_n) \geq \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_E^2 +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} (\tilde{u}_n(M), \tilde{u}(M)) + (F_{\sigma}(M, \tilde{u}(M)), 1) \quad (28)$$

Отже, з (26) - (28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_E^2 + \frac{\gamma}{2} (\tilde{u}_n(M), \tilde{u}(M)) + \\ + (F_{\sigma}(M, \tilde{u}(M)), 1) \leq \\ \leq C_8 e^{-\lambda M} - I_{\sigma}(0, \tilde{\varphi}(0))e^{-\lambda M} + \frac{1}{2} \|\theta\|_E^2 + \end{aligned} \quad (29)$$

$$+ \frac{\gamma}{2} (\tilde{u}_n(M), \tilde{u}(M)) + (F_{\sigma}(M, \tilde{u}(M)), 1).$$

Отже,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_E^2 \leq C_9 e^{-\lambda M} + \|\theta\|_E^2 \quad (30)$$

і, переходячи до границі при $M \rightarrow \infty$, разом із слабкою збіжністю ξ_n до θ маємо $\xi_n \rightarrow \theta$ сильно в E . Теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. - New-York: Springer, 1997. - 645 p.
2. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. - 1994. - 73, 3. - P. 279-333.
3. Мельник В.С. Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем // Препринт Института кибернетики НАН Украины, № 94-17, 1994 - 41 с.
4. Капустян О.В. Атрактори многозначных нелинейных процессов та їх залежність від параметра // Доповіді НАН України. - 2002. - 6. - P. 20-23
5. Капустян А.В. Глобальный аттрактор неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. - 2002. - 38, 10. - С. 1378-1382
6. Капустян О.В., Перестюк М.О. Глобальный аттрактор эволюционного включения с импульсными возмущениями в фиксированные моменты времени // Украинский математический журнал. - 2003. - 55, 8. - С. 1283-1294
7. Ball J.M. Global attractors for damped semilinear wave equation // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2004. - 10, 1. - P. 31-52
8. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. - 1997. - 76, 10. - P. 913-964

Надійшла до редколегії 30.09.2008

УДК 539.3

Карнаухова Т.В., к.ф.-м.н.

Активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань шарнірно обпертої в'язкопружної ортотропної циліндричної оболонки при дії на неї невідомого механічного навантаження

В роботі методом Бубнова-Гальоркіна розв'язано задачу про активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань ортотропної циліндричної оболонки з шарнірним обпиранням торців за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів для випадку, коли механічне навантаження невідоме. Досліджено вплив температури, розміщення і розмірів п'єзовключень на ефективність активного демпфування коливань оболонки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, осесиметричні коливання, демпфування, сенсори, актуатори.

E-mail: kam@inmech.kiev.ua

Статтю представив докт. фіз.-м. наук, проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

Циліндричні композитні оболонки знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Дуже часто на них діють нестационарні та гармонічні за часом осесиметричні навантаження. Особливо небезпечними є резонансні коливання, коли частота гармонічної за часом сили близька до власної частоти осесиметричних коливань оболонки. Не менш небезпечними є й інтенсивні нестационарні коливання. В зв'язку з цим виникає задача демпфування стаціонарних і нестационарних осесиметричних коливань циліндричних оболонок. Для цієї мети широко використовуються пасивні методи демпфування, коли в структуру оболонки включаються компоненти з високим гістерезисними втратами. В останні роки для цієї мети почали застосовувати активні методи, коли демпфування коливань досягається за рахунок підведення до п'єзоактивного включення різниці

Karnaukhova T. V., C.Sci. (Phys.-Math.).

Active damping of the forced axisymmetric vibrations of a simply supported viscoelastic orthotropic cylindrical shell under an unknown mechanical loading

In the paper a problem of an active damping forced resonant axisymmetric vibrations of a simply supported orthotropic cylindrical shell under an unknown mechanical loading is solved by Bubnov – Galerkin method. The influence of a temperature, a disposition, the sizes of the piezoelectric inclusions on an active damping of the vibrations of the shell is investigated.

Key words: cylindrical shell, axisymmetric vibrations, damping, sensors, actuators.

потенціалів, яка компенсує дію механічного навантаження [1, 2]. При використанні такого підходу вважається, що механічне навантаження відоме.

В даній статті розглянуто нову задачу про активне демпфування вимушених резонансних осесиметричних коливань тонкої в'язко-пружної ортотропної циліндричної оболонки з шарнірним обпиранням торців, на яку діє заздалегідь невідоме механічне навантаження. Для його визначення використовуються експериментальні показники сенсора – заряд або різниця потенціалів. Досліджено вплив температури, розміщення сенсорів та актуаторів і їх розмірів на ефективність активного демпфування вказаних коливань.

2. Постановка задачі

Розглянемо циліндричну оболонку довжиною a з ортотропного пасивного (без п'єзо-ефекту) в'язкопружного матеріалу. На зовнішніх поверхнях оболонки розміщено п'єзо-активні шари, які виконують функції сенсора та

актуатора. Вважається, що вказані сенсори та актуатори протилежно поляризовані, мають однакову товщину та однакові властивості, за виключенням того, що п'єзоконстанти активних шарів мають протилежні знаки:

$d_{31}^2 = -d_{31}^1$. На оболонку діє заздалегідь невідомий осесиметричний тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [2]. Якщо знехтувати позовжніми силами інерції, рівняння руху циліндричної оболонки приймають такий вигляд [3]:

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0, \quad Q_1 = \frac{dM_1}{d\alpha}, \quad (1)$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{dQ_1}{d\alpha} = -\rho\omega^2 w - q(\alpha). \quad (2)$$

Тут використано позначення роботи [3]. На основі механічних гіпотез Кірхгофа-Лява [3], доповнених адекватними їм гіпотезами відносно

електричних польових величин [4], для вказаної вказаної вище тришарової оболонки одержимо такі визначальні рівняння стану для зусиль і моментів:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11} \frac{du}{d\alpha} + C_{12} \frac{w}{R}, \quad T_2 = C_{12} \frac{du}{d\alpha} + C_{22} \frac{w}{R}, \\ M_1 &= -D_{11} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0, \quad M_2 = -D_{12} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут жорсткісні характеристики і вирази для M_0 для різних варіантів розміщення електродів визначаються за формулами, наведеними, наприклад, в [2].

Всі величини в наведених формулах є комплексними: $w = w' + iw''$, ..., а V_A – шукана різниця потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження.

Нехай оболонка може вільно зміщуватись в позовжньому напрямку. Тоді з (1), (3) матимемо:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = -\frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{w}{R}, \quad T_2 = \tilde{C}_{22} \frac{w}{R}, \\ \tilde{C}_{22} &= C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи (3), (4) в (1), (2), одержимо рівняння руху відносно комплексного прогину w :

$$D_{11} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \tilde{C}_{22} \frac{w}{R^2} - \rho\omega^2 w - q(\alpha) - \frac{d^2 M_0}{d\alpha^2} = 0. \quad (5)$$

Для випадку шарнірного обпирання торців оболонки

$$w = 0, \quad D_{11} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} = M_0 \text{ при } x = 0; a. \quad (6)$$

3. Аналітичний розв'язок задачі і його аналіз

Введемо безрозмірну координату $\alpha = ax$. Для шарнірного обпирання торців (6) матимемо:

$$\begin{aligned} w &= \sum_m w_m \sin k_m x, \quad q = \sum_m q_m \sin k_m x, \\ M_0 &= \sum_m M_m \sin k_m x, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$k_m = m\pi. \quad (8)$$

Для рівномірного тиску

$$q_m = \frac{4q_0}{k_m}, \quad m = 1, 3, \dots \quad (9)$$

Якщо центр п'єзоелектричного шару розміщено в точці $x = \xi$, а його безрозмірна довжина дорівнює d , то для M_m матимемо формулу:

$$M_m = \frac{4M_0}{k_m} \sin(k_m \xi) \sin(k_m \frac{d}{2}), \quad m = 1, 3, \dots \quad (10)$$

Підставляючи вирази (7) в рівняння руху (5), одержимо такий розв'язок:

$$w_{mn} = p_m / \Delta_m, \quad (11)$$

де

$$p_m = (q_m - k_m^2 M_m / a^2), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \Delta_m' + i\Delta_m'', \quad \Delta_m' = [D_{11}' k_m^4 / a^4 + \tilde{C}_{22}' / R^2 - \rho\omega_m^2], \\ \Delta_m'' &= [D_{11}'' k_m^4 / a^4 + \tilde{C}_{22}'' / R^2] \end{aligned} \quad (13)$$

Як видно з (12), амплітуда резонансних коливань оболонки дорівнюватиме нулеві при умові:

$$M_m = a^2 q_m / k_m^2. \quad (14)$$

З наведених у [2] виразів для M_0 і формули (14) знаходимо ту різницю потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора, щоб прогин оболонки дорівнював нулю:

$$V_A = \frac{2a^2 q_m}{(h_0 + h_1) \gamma_{31} k_m} \sin k_m \xi \sin k_m \frac{d}{2}. \quad (15)$$

Використовуючи одержані вище аналітичні розв'язки, дослідимо вплив розміщення центра актуатора, його розмірів і температури на ефективність активного демпфування коливань оболонки по найбільш енергоємній першій моді. Ця ефективність оцінюється по величині різниці потенціалів (15). При цьому вважається, що той актуатор більш ефективний, до якого потрібно підвести меншу різницю потенціалів при фіксованому тиску. З (15) видно, що для першої моди коливань $m=1$ різниця потенціалів буде

мінімальною при $\xi = \frac{1}{2}$, тобто центр

актуатора повинен співпадати з серединою оболонки. Максимум знаменника виразу (15) досягається при $d=1$, тобто при повному покритті актуатором циліндричної оболонки. Для другої моди, яка відповідає $m=3$, оптимальне розміщення актуатора відповідає

$\xi = \frac{1}{6}$, $\xi = \frac{3}{6}$, $\xi = \frac{5}{6}$. При цьому довжина

оболонки розбивається на три області з центром актуатора в цих точках. Оптимальною довжиною актуатора буде довжина будь-якої з цих трьох областей. Аналогічно можна вибрати центр розміщення актуатора та його довжину і для інших мод коливань оболонки. Крім того, вказана різниця потенціалів не залежить від механічних властивостей пасивного матеріалу. Тому при розрахунку цієї величини можна обмежитись найбільш простою моделлю поведінки пасивного матеріалу, яка не враховує залежність його властивостей від температури. З цієї ж формули видно, що залежність властивостей

п'єзоелектричного матеріалу від температури може суттєво вплинути на згадану різницю потенціалів. Це випливає з того, що навіть в найпростішому випадку роботи актуатора при різних постійних температурах, вказана різниця потенціалів буде різною, якщо характеристики матеріалів залежать від температури.

Основні недоліки підходу з використанням формули (15) полягають у тому, що 1) вільні коливання не демпфуються і 2) необхідно знати зовнішнє механічне навантаження. Перший недолік усувається гістерезисними втратами в матеріалах. Для усунення другого недоліку резонансну складову механічного навантаження знайдемо за експериментальними показниками сенсора, який покриває площу S_1 . Для коротко-замкнутих електродів заряд визначається інтегралом по площі сенсора:

$$Q = \gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} (\kappa_1 + \kappa_2) dS, \quad (16)$$

$$\kappa_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \kappa_2 = 0.$$

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів сенсора знаходиться за формулою:

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1 \gamma_{33}}. \quad (17)$$

Якщо центр п'єзоелектричного сенсора розміщено в точці $x = \xi$, а його безрозмірна довжина дорівнює d , то для визначення показників сенсора при коливаннях по моді (m) матимемо таку формулу для визначення заряду:

$$Q_m = -2B_m \sin(k_m \xi) \sin(k_m d), \quad (18)$$

$$B_m = 2\pi k_m R (h_0 + h_1) \gamma_{31} w_m / a.$$

Вважатимемо, що той сенсор більш ефективний, який має більші за модулем показники при фіксованому механічному навантаженні або при фіксованій амплітуді механічних коливань. З формули (18) видно, що розміщення і розміри сенсора з цієї точки зору будуть такими ж, як і геометричні параметри актуатора. Для основної моди $m=1$ найбільш ефективним є повне покриття пластини сенсором. В подальшому обмежимося дослідженням демпфування саме цієї моди. Для неї з (17), (18) маємо наступні вирази для показників сенсора:

$$Q_1 = 4\pi R \gamma_{31} (h_0 + h_1) (k_1 / a) w_1, \quad (19)$$

$$V_{11S} = \frac{4\pi R h_1 (h_0 + h_1) \gamma_{31}}{S_1 \gamma_{33}} (k_1 / a) w_1. \quad (20)$$

Розв'язок задачі про резонансні механічні осесиметричні коливання циліндричної оболонки з шарнірним обпирання торців по першій моді має такий вигляд:

$$w_1 = \frac{q_1}{\Delta_1}, \Delta_1 = [(D_{11} / a^2) k_1^4 + (\tilde{C}_{22} / R^2) - \rho \omega_1^2]. \quad (21)$$

З формул (19)-(21) видно, що у випадку, коли механічні характеристики пасивних матеріалів залежать від температури, а електромеханічні - не залежать, температура може суттєво вплинути на показники сенсора. Навпаки, якщо властивості пасивного матеріалу (наприклад, металу) в певному діапазоні не залежать від температури, а властивості активного - залежать, температура теж може суттєво вплинути на ці показники.

З (19)-(21) знайдемо зв'язок між показниками сенсора і навантаженням:

$$q_1 = \frac{a Q_1 \Delta_1}{4\pi R \gamma_{31} (h_0 + h_1) k_1}, \quad (22)$$

$$q_1 = \frac{V_{11S} S_1 \gamma_{33} \Delta_1}{4\pi R \gamma_{31} h_1 (h_0 + h_1) k_1}.$$

Підставимо знайдене з виразу (22) навантаження у формулу (15) для різниці потенціалів, яка компенсує дане навантаження при коливаннях по першій моді. В результаті одержимо вирази для цього потенціалу:

$$V_1 = - \frac{a^3 Q_1 \Delta_1}{2\pi R \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 k_1^3}, \quad (23)$$

$$V_1 = \frac{V_{11S} S_1 \gamma_{33} \Delta_1}{2\pi R \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 k_1^3 h_1}.$$

З формули (15) видно, що при досягненні температурою точки Кюрі $\theta = \theta_K$ величина γ_{31} прямує до нуля, а різниця потенціалів - до безмежності. При цьому втрачається можливість керувати процесом коливань. Аналогічні висновки можна зробити і з формул (19),(20) для показників сенсора.

При досягненні температурою точки Кюрі показники сенсора прямують до нуля, так що зняти інформацію з сенсора стає неможливим.

4. Висновки

В статті запропоновано підхід до активного демпфування вимушених осесиметричних резонансних коливань ортотропної циліндричної оболонки з шарнірно обпертими торцями для випадку, коли механічне навантаження заздалегідь невідоме. Воно визначається з експериментальних показників сенсора. Задача розв'язується методом Бубнова-Гальоркіна. Одержана формула для різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для демпфування коливань по першій моді і в яку входять лише експериментальні показники сенсора. На основі аналізу виведених формул проаналізовано вплив розміщення п'єзoelementів, їх розмірів і температури на ефективність роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування коливань за їх допомогою.

Список використаних джерел

1. Gubbert U. and Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. - Kluwer Academic Pub. Dordrecht/Boston/London. - 2001. - 384p.
2. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖІТУ, 2005. - 428с.
3. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. - К.: Вища школа, 1989. - 208с.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. - Киев: Наук. думка, 1989. - 5. - 279с.

Надійшла до редколегії 28.08.2008р.

УДК. 517.938

Оксана І. Ковтун
Олег В. Перегуда
Юлія А. Паламарчук

**Про застосування нестационарного
проекційно-ітеративного методу для
інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю
та додатковими умовами**

*Встановлено умови сумісності задачі з
обмеженнями для нелінійних інтегральних
рівнянь зі слабкою нелінійністю. Запропоновано
та обґрунтовано нестационарний проекційно-
ітеративний метод для нелінійних інтегральних
рівнянь зі слабкою нелінійністю та
додатковими умовами*

Ключові слова: інтегральне рівняння,
нелінійність, нестационарний проекційно-
ітеративний метод.

E-mail: Perol@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.наук, професор Лучка А.Ю.

1. Вступ

Математичними моделями різноманітних
задач природознавства та техніки, як відомо, є
диференціальні, інтегральні чи інтегро-
диференціальні рівняння та їх системи. В наш
час привертають до себе увагу дослідження
систем диференціальних рівнянь з параметром
чи з імпульсним впливом, узагальнені крайові
задачі, інтегральні рівняння з обмеженнями.

Задачі з додатковими умовами на шукану
функцію є перевизначені, відносяться до класу
нетерових задач. Зокрема до інтегральних
рівнянь з додатковими умовами зводяться
перевизначені задачі для диференціальних,
інтегро-диференціальних рівнянь та більш
складних класів функціонально-
диференціальних рівнянь з параметрами.
Дослідження задач з обмеженнями можна
проводити за допомогою задач з параметрами.

Побудова розв'язків задач з параметрами
в явному вигляді можлива в дуже рідких
випадках. Тому побудова та обґрунтування
ефективних методів наближеного розв'язку задач
з параметрами є актуальною задачею, яка має
теоретичний та практичний інтерес.

Розглянутий [3] модифікований
проекційно-ітеративний метод для інтегральних
рівнянь зі слабкою нелінійністю та додатковими
умовами значно поширив область застосування
та прискорив швидкість збіжності порівнянно з
ітераційним методом. Але іноді для інтегральних
рівнянь зі слабкою нелінійністю та

Oksana I. Kovtun.
Oleg V. Pereguda
Ulia A. Palamarchuk

**About of the appliance of nonstationary
projection-iteration method for nonlinear
integral equations with weak nonlinearity and
conditions imposed.**

*We find condition of consistency of a problem with
constraints for the nonlinear integral equations. We
propose and substantiate a nonstationary
projection-iteration method for the nonlinear
integral equations with conditions imposed on the
unknown function.*

Key words: integral equation, nonlinearity,
nonstationary projection-iteration method.

додатковими умовами практично краще
застосовувати нестационарний модифікований
проекційно-ітеративний метод. Нестационарний
модифікований проекційно-ітеративний метод
можна трактувати як об'єднання проекційного і
нестационарного ітераційного методів.

В даній роботі до задачі (1), (2)
запропоновано новий підхід до дослідження
сумісності цієї задачі та розроблено і
обґрунтовано нестационарний модифікований
проекційно-ітеративний метод. Розглянемо
інтегральне рівняння зі слабкою нелінійністю

$$y(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t) y(t) dt + \varepsilon \int_{\Omega} T(x, t) F(t, y(t)) dt, (1)$$

і додатковими умовами

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t) y(t) dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1, m}, (2)$$

ε - малий параметр $K: (\Omega \times \Omega) \rightarrow R$, $T: (\Omega \times \Omega) \rightarrow R$,
причому $\iint_{\Omega} |K(x, t)|^2 dx dt < \infty$, $\iint_{\Omega} |T(x, t)|^2 dx dt < \infty$.

$F(t, u)$, $t \in \Omega$, $u \in R$ - неперервна функція своїх
аргументів і за другою змінною задовольняє
умову Ліпшиця, $f(x)$ і $\Phi_s(x)$ належать класу
 $L_2(\Omega)$ і є відомими функціями, α_s , $s = \overline{1, m}$ -
відома множина чисел, $y(x)$ - невідома функція.
Задачу (1), (2) вважають сумісною, якщо існує
функція $y \in L_2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1)
та умови (2).

1. Задача з керуванням.

Розглянемо задачу з керуванням

$$y(x) = f(x) + u(x) + \int_{\Omega} K(x,t)y(t)dt + \varepsilon \int_{\Omega} T(x,t)F(t,y(t))dt, \\ \int_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)dt = \alpha_s, s = \overline{1,m}, \quad (3)$$

де $y \in L_2(\Omega)$, $u \in U_m(\Omega)$ – шукані елементи ($U_m \subset L_2$), причому $u(x)$ шукається в вигляді

$$u(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s \xi_s(x), \quad (4)$$

$\{\xi_s(x)\}_{s=1}^m \subset L_2(\Omega)$ – система лінійно незалежних функцій.

Зведемо задачу (3) до еквівалентного інтегрального рівняння без обмежень. Для цього ядро K подамо у вигляді

$$K(x,t) = H(x,t) + B(x,t)$$

і позначимо

$$z(x) := f(x) + \int_{\Omega} B(x,t)y(t)dt + \varepsilon \int_{\Omega} T(x,t)F(t,y(t))dt. \quad (5)$$

Тоді задача (3), врахувавши заміну (5), набуде вигляду

$$y(x) = u(x) + z(x) + \int_{\Omega} H(x,t)y(t)dt, \\ \int_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)dt = \alpha_s, s = \overline{1,m}. \quad (6)$$

Задачу (6) будемо трактувати як допоміжну задачу, де $z \in L_2(\Omega)$, $H(x,t) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ – задані функції, $y(x)$ та $u(x)$ треба визначити.

Тут і в подальшому припускаємо, що задача (3), з урахуванням [3], має єдиний розв'язок, тобто існують такі функції $G(x,t)$, $N(x,t)$, що розв'язок цієї задачі зображається формулами

$$u(x) = r(x) - \int_{\Omega} N(x,t)z(t)dt, \\ v(x) = k(x) + z(x) + \int_{\Omega} G(x,t)z(t)dt. \quad (7)$$

Підставивши вираз (7) в співвідношення (5) та позначивши $g(x) := f(x) + \int_{\Omega} B(x,t)k(t)dt$,

$$M(x,t) := \int_{\Omega} B(x,\eta)G(\eta,t)d\eta, \quad (9)$$

$$C(t,z(t)) := F(t,k(t) + z(t) + \int_{\Omega} G(t,\eta)z(\eta)d\eta), \quad (10)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$z(x) = g(x) + \int_{\Omega} (B(x,t) + M(x,t))z(t)dt + \\ + \varepsilon \int_{\Omega} T(x,t)C(t,z(t))dt. \quad (11)$$

Таким чином, дослідження задачі (3) звелось до дослідження інтегрального рівняння (11).

2. Суть методу.

До розв'язання задачі (1)-(2) застосуємо нестационарний модифікований проекційно-ітеративний метод.

Нехай задано координатні системи лінійно незалежних функцій

$$\{\xi_j(x)\}_{j=1}^m, \{\eta_j(x)\}_{j=1}^n, \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n_k} \subset L_2(\Omega), \text{ та неспадну}$$

послідовність натуральних чисел n_k , причому $n_k \geq n, k = 0, 1, 2, 3, \dots$, де $n \in \mathbb{N}$ – деяке фіксоване число, і наближення $y_{k-1}(x)$ вже побудоване.

Побудуємо функцію

$$z_k(x) = f(x) + \int_{\Omega} B(x,t)(y_{k-1}(t) + \omega_k(t))dt + \\ + \varepsilon \int_{\Omega} T(x,t)F(t, y_{k-1}(t))dt, H(x,t) = K(x,t) - B(x,t) \quad (12)$$

в якій

$$\omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), \quad (13)$$

а невідомі коефіцієнти $a_j^k, j = \overline{1,n}$, визначаються з умови

$$\int_{\Omega} (z_k(x) - l_{k-1}(x) - \beta_k(x))\varphi_i(x)dx = 0, i = \overline{1,n_k}, \quad (14)$$

де

$$\beta_k(x) = \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k \varphi_j(x). \quad (15)$$

Після цього знаходимо функцію

$$l_k(x) = \sum_{j=1}^{n_k} c_j^k \varphi_j(x). \quad (16)$$

Коефіцієнти c_j^k якої визначаємо з умови

$$\int_{\Omega} (z_k(x) - l_k(x))\varphi_i(x)dx = 0, i = \overline{1,n_k}. \quad (17)$$

Тоді наближений розв'язок знаходиться із задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + l_k(x) + \int_{\Omega} H(x,t)y_k(t)dt, \\ \int_{\Omega} \Phi_s(t)y_k(t)dt = \alpha_s, s = \overline{1,m} \quad (18)$$

а $u_k(x)$ шукається у вигляді

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s^k \xi_s(x)$$

3. Обґрунтування методу.

За умови, що системи функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^n, \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n_k}$ пов'язані співвідношеннями

$$\eta_j(x) = \sigma_j(x) + \varphi_j(x) + \int_{\Omega} H(x, t) \eta_j(t) dt,$$

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t) \eta_j(t) dt = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

алгоритм (12)–(18) можна звести до нестационарного проекційно-ітеративного методу [2] розв'язання інтегрального рівняння

$$z_k(x) = g(x) + \int_{\Omega} (B(x, t) + M(x, t))(l_{k-1}(t) + \beta_k(t)) dt + \varepsilon \int_{\Omega} T(x, t) C(t, l_{k-1}(t)) dt, \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} (z_k(x) - l_{k-1}(x) - \beta_k(x)) \varphi_i(x) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (z_k(x) - l_k(x)) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n_{k-1}}.$$

Дійсно, за припущенням п.1, існує єдиний розв'язок задачі (18), який визначається формулою

$$y_k(x) = k(x) + l_k(x) + \int_{\Omega} G(x, t) l_k(t) dt, \quad (21)$$

Враховавши формулу (19) та

$$\omega_k(x) = \beta_k(x) + \int_{\Omega} G(x, t) \beta_k(t) dt,$$

маємо

$$y_{k+1}(x) + \omega_k(x) = k(x) + l_{k+1}(x) + \beta_k(x) + \varepsilon \int_{\Omega} G(x, t) (l_{k+1}(t) + \beta_k(t)) dt.$$

Підставивши вирази (18), (19) в співвідношення (12) і враховавши позначення (9)–(10) отримаємо рівняння (20).

Достатні умови збіжності розглянутого методу встановлюються аналогічно [2].

4. Обчислювальна схема.

З точки зору реалізації нестационарного проекційно-ітеративного методу (12)–(18) зручно користуватися наступною обчислювальною схемою.

Припустимо, що послідовність $\{n_k\}$, початкове наближення $y_0(x)$ і система лінійно незалежних

функцій $\{\varphi_i(x)\}$ та ядро $H(x, t) = \sum_{i=1}^r a_i(x) \psi_i(t)$ задані.

Обчислюємо допоміжні величини і функції:

- утворюємо матрицю B , яка має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \beta_{11} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{1r} \\ -\beta_{21} & 1 - \beta_{22} & \dots & -\beta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{r1} & -\beta_{r2} & \dots & 1 - \beta_{rr} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\text{де } \beta_{ij} = \int_{\Omega} a_i(t) b_j(t) dt, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, r};$$

- знаходимо матрицю B^{-1} , обернену до матриці B ;

- формуємо вектор $d_j = (d_j^1, \dots, d_j^r)$, координати якого обчислюємо за формулою

$$d_j^i = \int_{\Omega} b_i(t) \xi_j(t) dt, \quad i = \overline{1, r}; \quad (23)$$

- будуємо вектор $c_j = (c_j^1, \dots, c_j^r)$ за

формулою $c_j = B^{-1} d_j$;

- будуємо нову систему функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^n$ за формулою

$$\eta_j(x) = \varphi_j(x) + \sum_{i=1}^r a_i(x) c_i, \quad j = \overline{1, n}; \quad (24)$$

- обчислюємо функції $\theta_j(x)$

$$\theta_j(x) = \int_{\Omega} B(x, t) \eta_j(t) dt, \quad j = \overline{1, n}; \quad (25)$$

- утворюємо матрицю Λ , елементи якої β_{ij} ,

$i, j = \overline{1, n}$ обчислюємо за формулою

$$\beta_{ij} = \int_{\Omega} (\varphi_j(x) - \theta_j(x)) \varphi_i(x) dx; \quad (26)$$

- знаходимо матрицю Λ^{-1} , обернену до матриці Λ ;

Будемо вважати, що $y_{k-1}(x)$ - відоме наближення, тоді виконуємо ітерацію

$$v_k(x) = f(x) +$$

$$+ \int_{\Omega} B(x, t) y_{k-1}(t) dt + \varepsilon \int_{\Omega} T(x, t) F(t, y_{k-1}(t)) dt; \quad (27)$$

- знаходимо нев'язку $\varepsilon_k(x) = v_k(x) - l_{k-1}(x)$;

- формуємо вектор $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^r)$, координати якого обчислюємо за формулою

$$b_j^i = \int_{\Omega} \varepsilon_k(x) \varphi_j(x) dx; \quad (28)$$

- знаходимо вектор $a_k = (a_k^1, \dots, a_k^r)$, $a_k = \Lambda^{-1} b_k$;

- будуємо функцію

$$\delta_k(x) = \sum_{j=1}^r a_j^k \theta_j(x); \quad (29)$$

- обчислюємо

$$z_k(x) = v_k(x) - \delta_k(x); \quad (30)$$

- будуємо функцію $l_k(x) = \sum_{j=1}^n c_j^k \varphi_j(x)$, де

невідомі c_j^k знаходяться з системи рівнянь

$$\int_{\Omega} z_k(x) \varphi_j(x) dx = \sum_{i=1}^{n_k} c_i^k \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad i, j = \overline{1, n_k};$$

- визначаємо k -те наближення із задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + l_k(x) + \int_{\Omega} H(x, t) y_k(t) dt,$$

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t) y_k(t) dt = \alpha_s, s = \overline{1, m}, u_k(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \xi_i(x). (31)$$

5. Приклад.

Реалізуємо побудовану обчислювальну схему для задачі

$$y(x) = \frac{97}{54}x - \frac{3}{4}x^2 - \int_0^1 K(x, t) y(t) dt + \int_0^1 T(x, t) y^2(t) dt,$$

$$\int_0^1 y(t) dt = \frac{1}{3},$$

де
$$K(x, t) = \begin{cases} 3x, & x \leq t, \\ 3t, & x \geq t, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$T(x, t) = \frac{1}{2} K(x, t).$$

Застосуємо до даної задачі нестационарний проекційно-ітеративний метод (12)-(18), причому для зручності обчислень, нехай $H(x, t) = 0$.

Покладемо $n = 1, n_1 = n_2 = 3, \xi_i(x) = 1$.

За координатну систему візьмемо ортогональні функції на відрізку $[0, 1]$ - поліноми Лежандра

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 2x - 1, \varphi_3(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Використавши формулу (22)-(26), маємо

$$\eta_0(x) = 2x - 1; \quad \theta_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2,$$

$$\Lambda = 0,4333, \quad \Lambda^{-1} = 2,3078$$

Взявши за початкове наближення $l_0 = 0$, із задачі

$$y_0(x) = \lambda_0, \quad \int_0^1 y_0(t) dt = \frac{1}{3},$$

маємо $y_0(x) = \frac{1}{3}$.

Маючи $y_0(x)$ і використавши рекурентні

формули (27)-(31), знаходимо перше наближення

$$z_1(x) = -0,9629x - 0,6952x^2 + 0,2413x^3$$

$$l_1(x) = 0,0121 + 0,8178x - 0,333x^2,$$

$$y_1(x) = 0,0354 + 0,8178x - 0,333x^2.$$

Використовуючи формули (27)-(31) і отримане $y_1(x)$, знаходимо друге наближення

$$z_1(x) = 0,9931x - 0,6987x^2 + 0,3945x^3 - 0,1638x^4 +$$

$$+ 0,0408x^5 - 0,0055x^6,$$

$$l_2(x) = 0,0097 + 0,8676x - 0,324x^2$$

$$y_2(x) = 0,0075 + 0,8676x - 0,3240x^2.$$

Продовжуючи цей процес далі, можна отримати наближення з заданою точністю.

Наведена таблиця характеризує відхилення знайдених наближень від точного розв'язку $y^*(x) = 1 - 4(2 + x)^{-2}$.

x	$y^*(x)$	$y^*(x) - y_1(x)$	$y^*(x) - y_2(x)$
0	0	-0,0354	-0,007
0,25	0,2098	-0,0092	0,005
0,5	0,3600	-0,0010	-0,0003
0,75	0,4710	0,0096	-0,0049
1	0,5555	0,0353	0,0044

6. Висновки.

В даній роботі знайдено умови сумісності нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю з обмеженнями. Побудовано та обґрунтовано модифікований нестационарний проекційно - ітеративний метод. Встановлено достатні умови збіжності та оцінки похибки запропонованого методу. До вихідної задачі наближені методи не могли бути застосовані або збігалися повільно, то новий метод, побудований з використанням узагальненої допоміжної задачі, має більш широкую область застосування і набагато швидше збігається.

Список використаних джерел

1. Лучка А.Ю. Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика системный анализ. 1996. №3. С.82-96.
2. Лучка А.Ю. Проекционно - итеративные методы. - Киев: Наук. думка. 1993. - 288с.
3. Ковтун О.І. Нелінійні інтегральні рівняння зі слабкою нелінійністю та обмеженнями на шукану функцію // Вісник національного університету "Львівська політехніка". 2000. №411. С.174 - 177.

Надійшла до редколегії 30.10.2008

УДК 571.986

Кухарчук М.М. д.фіз.-мат.н., Яременко М.І. студ.

Про аналог теореми Лакса

В роботі розглядаються дві теореми про простори Соболева.

Ключові слова: простір Соболева, простір Банаха.

Статтю представив д.ф.-м.н. професор М.О.Перестюк

M.M. Kukcharchuk, Professor, M.I. Yaremenko, st.

On analog Lax's theorem

The paper is presented two theorems about Sobolev spaces over R^1 .

Key words: the Sobolev space, the Banach space.

1. Вступ

Наша робота присвячена новому погляду на простори Соболева, опису просторів Соболева з від'ємними показниками та доведенню теорем про представлення функціоналів на цих просторах.

2. Основні визначення

Нехай на просторі $C_0^\infty(\Omega)$ задана функція $\|\cdot\|_{W_k^p} : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow R_+$ за визначенням $\|f\|_{W_k^p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D_\alpha f\|_p$, очевидно, що так введена функція є нормою, де через $\|\cdot\|_p$ - позначена норма в просторі $L_p(\Omega)$ (для спрощення далі скрізь вважатимемо, що $\Omega \equiv R^1$). Визначимо простір W_k^p , як поповнення простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W_k^p}$. Визначимо форми $\langle f, \varphi \rangle_k \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} \langle (D_\alpha f), (D_\alpha \varphi) \rangle$ де форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : L_p \times L_q \rightarrow R$ і на елементах-функціях з $C_0^\infty(\Omega)$ має вигляд $\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \{f, \varphi\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ за

визначенням $W_0^q(\Omega) \equiv L_q(\Omega)$ тоді кожний елемент $\varphi \in L_q(\Omega) = W_0^q(\Omega)$ визначає на просторі $W_k^p(\Omega)$ неперервний лінійний функціонал $F_\varphi(f) = \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in L_q(\Omega)$, $f \in W_k^p(\Omega)$ (далі множину, на якій визначені елементи вказувати не будемо $L_q(\Omega) = L_q$ і т. д.).

Використовуючи нерівність Гельдера одержуємо

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q \leq \|f\|_{W_k^p} \|\varphi\|_q, \quad (\text{очевидно,}$$

що $\|f\|_p \leq \|f\|_{W_k^p}, \forall f \in W_k^p$). Для елементів, що належать простору L_q покладемо за визначенням

$$\|\varphi\|_{W_k^q} \equiv \sup_{f \in W_k^p} \frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|f\|_{W_k^p}}, \quad \text{тобто легко бачити, що}$$

задана функція є нормою на просторі L_q і

$$\|\varphi\|_{W_k^q} \leq \|\varphi\|_q, \quad \text{і} \quad \text{також}$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{W_k^p} \|\varphi\|_{W_k^q}, \quad \forall f \in W_k^p, \forall \varphi \in L_q, \text{ тобто:}$$

$$\|\varphi\|_{W_k^q} = \|F_\varphi\|_{W_k^q}, \quad \forall \varphi \in L_q.$$

3. Теорема 1

Спряжений до W_k^p простір можна ототожнити з поповненням простору $W_0^q = L_q$ за нормою $\|\cdot\|_{W_k^q}$.

Доведення. Множина Q всіх неперервних лінійних функціоналів вигляду F_φ , визначених на $W_0^p = L_p$ щільна в просторі $(W_k^p)'$ спряженому до простору W_k^p . Множина Q тотальна на W_k^p в наступному сенсі: якщо для довільного фіксованого елементу $f \in W_k^p$ виконується $F_\varphi(f) = 0$ для всіх $\varphi \in L_q$ тоді маємо, що $f = 0$ в W_k^p . Це є наслідком того, що довільний елемент f з W_k^p є також елементом з $L_p(W_k^p \subset L_p, \forall k \in Z_+)$. Нехай множина Q не є щільною в просторі $(W_k^p)'$ - спряженому до простору W_k^p , тоді в просторі $(W_k^p)''$ - спряженому до простору $(W_k^p)'$ існує елемент $\psi \neq 0$ такий, що $\psi(F_\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = 0$ при всіх

$\psi \neq 0$ такий, що $\psi(F_\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = 0$ при всіх $F_\varphi \in Q$ внаслідок рефлексивності простору W_k^p в ньому існує елемент $\mu \in W_k^p$ такий, що $\psi(F) = F(\mu)$ при всіх $F \in (W_k^p)'$, а отже $\psi(F_\varphi) = F_\varphi(\mu) = \langle \mu, \varphi \rangle = 0$ при всіх $\varphi \in L_q$, внаслідок тотальності множини Q , одержуємо $\mu = 0$ в W_k^p , але це суперечить тому, що $\psi \neq 0$ в $(W_k^p)'$. Множина Q щільна в спряженому просторі $(W_k^p)'$ і відображення

$Q \ni F_\varphi \leftrightarrow \varphi \in W_0^q = L_q, \|F_\varphi\|_{W_k^p} = \|\varphi\|_{W_0^q}$ є ін'єкцією, що зберігає норму.

4. Теорема 2.

Будь-який неперервний лінійний функціонал $q(\varphi)$ на W_{-k}^q може бути представленим за допомогою деякого фіксованого елементу $f \in W_k^p$ у вигляді $q(\varphi) = q_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$.

Доведення.

Якщо $f \in L_p = W_0^p$, тоді $\langle f, \varphi \rangle = F_\varphi(f) = \langle f, \varphi \rangle_0$. Внаслідок щільності множини $Q = \{F_\varphi : \varphi \in W_0^q = L_q\}$ в просторі $(W_k^p)'$ впливає, із $|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{W_k^p} \|\varphi\|_{W_{-k}^q}$, що вираз $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_0$ при всіх фіксованих $f \in W_k^p$ визначає лінійний функціонал q_f неперервний на щільній множині Q простору $(W_k^p)'$, норму цього функціоналу на множині Q позначимо як

$$\|q_f\|_{W_k^p} = \sup_{\varphi \in L_q} \frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_{-k}^q}} = \|f\|_{W_k^p}. \quad \text{Внаслідок}$$

неперервності ми можемо продовжити функціонал q_f , визначений на Q , до неперервного лінійного функціоналу на поповненні множини Q (по нормі $\|\cdot\|_{W_{-k}^q}$), тобто функціонал q_f може бути продовженим до неперервного лінійного функціоналу на просторі $(W_k^p)' = W_{-k}^q$, і $\|q_f\|_{W_k^p} = \sup_{\varphi \in W_{-k}^q} \frac{|q_f(\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_{-k}^q}} = \|f\|_{W_k^p}$.

Внаслідок повноти W_k^p , ми можемо розглядати сукупність G всіх неперервних лінійних

функціоналів q_f на W_{-k}^q як замкнений лінійний підпростір із $(W_{-k}^q)'$, маючи на увазі бієкцію $q_f \leftrightarrow f$. Якщо б цей простір не був щільним в $(W_{-k}^q)'$ тоді існував би неперервний лінійний функціонал $F \neq 0$ на $(W_{-k}^q)'$, такий, що $F(q_f) = 0$ для всіх $q_f \in G$. Але оскільки простір W_{-k}^q рефлексивний то цей функціонал визначався б за формулою $F(q_f) = q_f(\mu)$, для $\mu \in W_{-k}^q$, але маємо $\|\mu\|_{W_{-k}^q} = \|F\|_{W_{-k}^q} = 0$, тобто $\mu = 0$, але це суперечить тому що $F \neq 0$. Отже $(W_{-k}^q)' = W_k^p$.

Зауваження: із доведених теорем випливає, що $(W_k^p)' = W_{-k}^q$, $(W_{-k}^q)' = W_k^p$.

Наслідок 1. Нехай визначена форма $h: W_k^p \times W_{-k}^q \rightarrow R$ така, що

- 1) $h(u, \alpha v + \gamma w) = \alpha h(u, v) + \gamma h(u, w)$
 $\forall u \in W_k^p \forall \{v, w\} \subset W_{-k}^q \forall \{\alpha, \gamma\} \subset R$
- 2) $|h(u, v)| \leq k \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_q} \exists k > 0$
- 3) $h(u, u | u|^{p-2}) \geq \varepsilon \|u\|_{W_k^p}^p \exists \varepsilon > 0$
- 4) $\lim_{\sigma \rightarrow 0} h(u + \sigma w, v) = h(u, v)$
- 5) $|h(u, (u-v) | u-v|^{p-2}) - h(v, (u-v) | u-v|^{p-2})| > 0, u \neq v$

Тоді існує відображення $A: W_k^p \rightarrow W_k^p$ таке, що $h(u, v) = \langle A(u), v \rangle_0 = \langle A(u), v \rangle$, причому це відображення є бієкцією.

Наслідок 2. Якщо оператор $A: W_k^p \rightarrow W_k^p$ такі, як у наслідку 1, тоді існує єдина максимальна нелінійна напівгрупа стиску така, що оператор $-A$ є її локальним генератором.

Список використаних джерел

1. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
Надійшла до редколегії 25.06.08

УДК 539.3

Меньшиков В.О., к. т. н., с. н. с.

Дискообразна тріщина в площині поділу пружних матеріалів при дії хвилі зсуву

Рішення просторової задачі теорії пружності для біматеріального тіла із круговою міжфазною тріщиною при навантаженні хвилею зсуву зведено до розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь. Задача вирішена за допомогою методу граничних елементів. Проведено аналіз отриманого чисельного рішення.

Ключові слова: міжфазна тріщина, хвиля зсуву, метод граничних елементів.

V.O. Menshykov, Ph. D., Senior Research Fellow

Discoid crack between dissimilar elastic materials under shear wave

The solution of the three-dimensional elasticity problem for the bimaterial body with a penny-shaped interface crack under shear wave was reduced to the solution of the system of boundary integral equations. The problem was solved by the boundary elements method. The obtained numerical solution was analyzed.

Key Words: interface crack, shear wave, boundary elements method.

*E-mail: itl1132@online.kharkov.ua

Статтю представив д.ф.-м. н., проф. Мелешко В.В.

Вступ. У науковій літературі є велика кількість робіт, присвячених статичним задачам для біматеріальних тіл із тріщинами на границі поділу середовищ, наприклад, [1-4], а також рішенням задач для однорідних тіл із тріщинами при гармонійному навантаженні хвилею зсуву [5,6].

Стаття присвячена рішення й аналізу просторової задачі теорії пружності для складеного тіла із круговою тріщиною на поверхні поділу середовищ при гармонійному навантаженні хвилею зсуву. Задача зведена до системи граничних сингулярних інтегральних рівнянь і вирішується чисельно прямим методом граничних елементів.

Постановка задачі. Розглянемо лінійно-пружне тіло в тривимірному просторі, що складається із двох однорідних ізотропних півпросторів із пружними характеристиками $E^{(1)}, \nu^{(1)}, E^{(2)}, \nu^{(2)}$ і із густиною $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$. Границі тіла складаються з нескінченної ділянки $\Gamma^{(*)}$, що є площиною зчеплення $x_3 = 0$ в декартової системі координат $Ox_1x_2x_3$, і скінчених ділянок $\Gamma^{(1)}$ і $\Gamma^{(2)}$ поверхні берегів тріщини. Тріщина має вигляд дискообразної порожнини, де протилежні береги переходять один в іншій на фронті без кутових крапок і крапок повернення. Діаметральний перетин такої тріщини являє собою еліптичний розріз із малим, але кінцевим радіусом кривизни у вершинах великої осі. Фронт тріщини нерухливий і

описується окружністю на поверхні поділу середовищ.

У складеному тілі поширюється поляризована в площині $x_2 = 0$ гармонійна хвиля зсуву із круговою частотою $\omega = 2\pi/T$. Напрямок її поширення перпендикулярно площини зчеплення матеріалів $x_3 = 0$. Припустимо, що в процесі навантаження деформації берегів не перевищують початкового розкриття тріщини й не приводять до їхнього зіткнення.

Метод рішення. Напружено-деформований стан кожного з півпросторів під час відсутності об'ємних сил описується рівняннями лінійної динамічної теорії пружності в переміщеннях (рівняння Ламе) з відповідними крайовими умовами. Перейдемо від рівнянь Ламе до граничних інтегральних рівнянь динамічної задачі теорії пружності про тріщину на поверхні поділу півпросторів [7], використовуючи для її побудови співвідношення Сомільяни й, що впливають з них граничні рівності.

В [7] показано, що параметри напружено-деформованого стану біматеріального тіла із тріщиною на границі поділу середовищ в умовах гармонійного навантаження визначаються із рішення системи граничних інтегральних рівнянь щодо компонентів комплексних амплітуд перемішень $u_i^{(*)}(\bar{x})$, $u_i^{(*)}(\bar{x})$ і зусиль $p_i^{(*)}(\bar{x})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_i^{(1)}(\bar{y}) - \int_{\Gamma^{(1)}} g_i^{(1)}(\bar{x}) K_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} &= - \int_{\Gamma^{(1)}} u_i^{(1)}(\bar{x}) F_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \\ &- \int_{\Gamma^{(*)}} p_i^{(*)}(\bar{x}) K_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} + \int_{\Gamma^{(*)}} u_i^{(*)}(\bar{x}) F_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x}, \quad \bar{y} \in \Gamma^{(1)}, \\ \frac{1}{2} g_i^{(2)}(\bar{y}) - \int_{\Gamma^{(2)}} g_i^{(2)}(\bar{x}) K_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} &= - \int_{\Gamma^{(2)}} u_i^{(2)}(\bar{x}) F_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} + \\ &+ \int_{\Gamma^{(*)}} p_i^{(*)}(\bar{x}) K_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \int_{\Gamma^{(*)}} u_i^{(*)}(\bar{x}) F_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x}, \quad \bar{y} \in \Gamma^{(2)}, \\ \int_{\Gamma^{(1)}} g_i^{(1)}(\bar{x}) K_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \int_{\Gamma^{(2)}} g_i^{(2)}(\bar{x}) K_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} &= \int_{\Gamma^{(1)}} u_i^{(1)}(\bar{x}) F_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \\ &- \int_{\Gamma^{(2)}} u_i^{(2)}(\bar{x}) F_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} + \int_{\Gamma^{(*)}} p_i^{(*)}(\bar{x}) (K_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) + K_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)) d\bar{x} - \\ &- \int_{\Gamma^{(*)}} u_i^{(*)}(\bar{x}) (F_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) + F_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)) d\bar{x}, \quad \bar{y} \in \Gamma^{(*)}, \\ \int_{\Gamma^{(1)}} g_i^{(1)}(\bar{x}) U_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \int_{\Gamma^{(2)}} g_i^{(2)}(\bar{x}) U_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} &= \int_{\Gamma^{(1)}} u_i^{(1)}(\bar{x}) W_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} - \\ &- \int_{\Gamma^{(2)}} u_i^{(2)}(\bar{x}) W_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\bar{x} + \int_{\Gamma^{(*)}} p_i^{(*)}(\bar{x}) (U_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) + U_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)) d\bar{x} - \\ &- \int_{\Gamma^{(*)}} u_i^{(*)}(\bar{x}) (W_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) + W_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)) d\bar{x}, \quad \bar{y} \in \Gamma^{(*)}. \end{aligned}$$

При записі інтегральних рівнянь використані наступні позначення: $g_i^{(m)}(\bar{x})$ – задані компоненти комплексних амплітуд поверхневих сил на берегах тріщини; $U_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, $W_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, $K_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, $F_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$ – фундаментальні рішення динамічної теорії пружності у випадку гармонійного навантаження; $\bar{x}$, $\bar{y}$ – точки спостереження й навантаження; верхні індекси 1, 2, * відповідають ділянкам границь, нижні індекси $i, j = 1, 2, 3$.

У системі граничних рівнянь невідомими є компоненти комплексних амплітуд переміщень на берегах тріщини, переміщень і поверхневих сил на поверхні зчеплення.

Після деяких перетворень, пов'язаних з поділом комплексних змінних у системі рівнянь на дійсні й мнімі частини [8], реалізуємо прямий метод граничних елементів на основі колокацій з постійною апроксимацією параметрів задачі на кожному елементі.

Числовий приклад. Розрахунки виконані для кругової тріщини радіуса R у площині з'єднання матеріалів сталь – алюміній. Матеріали характеризуються наступними параметрами: для сталі – модуль пружності $E = 207$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,288$, густина $\rho = 7860$

кг/м³; для алюмінію – модуль пружності $E = 70$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,347$, густина $\rho = 2700$ кг/м³.

Верхня й нижня поверхні берегів тріщини й площа зчеплення матеріалів апроксимовані двовимірними граничними елементами, які згущалися при підході до фронту як з боку тріщини, так і ззовні. Мінімальний розмір елементів у напрямку радіуса окружності, що примикають безпосередньо до вершини тріщини із двох сторін, становив $r/R = 0,002$. У межах граничного елемента параметри задачі покладалися незмінними.

Навантаження на берегах тріщини задавалися за законом плоскої гармонійної хвилі зсуву з наведеним хвильовим числом $k_2 R = \omega/c_2 R$, що змінюється в інтервалі $[0, 3]$ (тут c_2 – швидкість поперечних хвиль в алюмінії). Таке навантаження виключає центральну симетрію параметрів напружено деформованого стану на відміну від навантаження хвилею розтягу-стиску [7] і роблять задачу симетричною щодо площини поляризації хвилі зсуву.

На рис. 1, 2 представлений розподіл нормальних і дотичних компонентів переміщень протилежних берегів тріщини (тут і далі 1 – сталь, 2 – алюміній) протягом періоду

навантаження на діаметральному перетині уздовж дії навантаження (уздовж осі Ox_1) при $k_2 R = 1,0$.

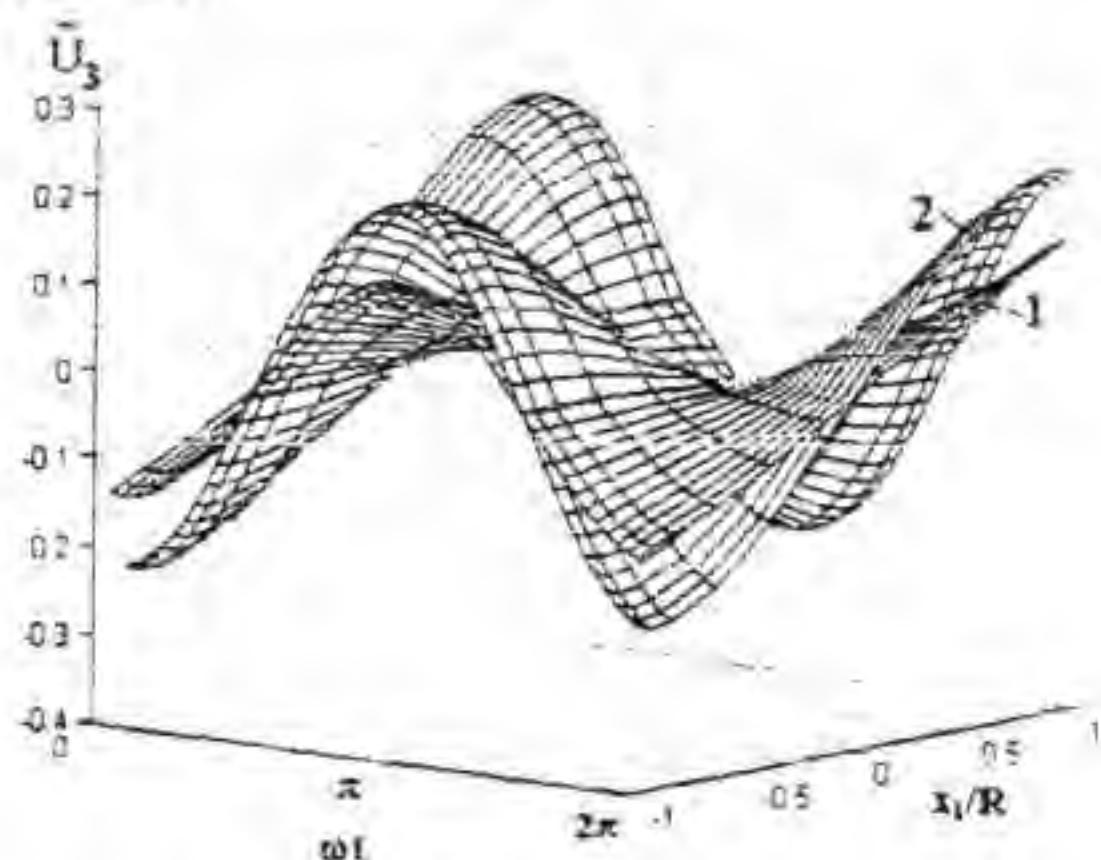


Рис. 1 Розподіл нормальних переміщень

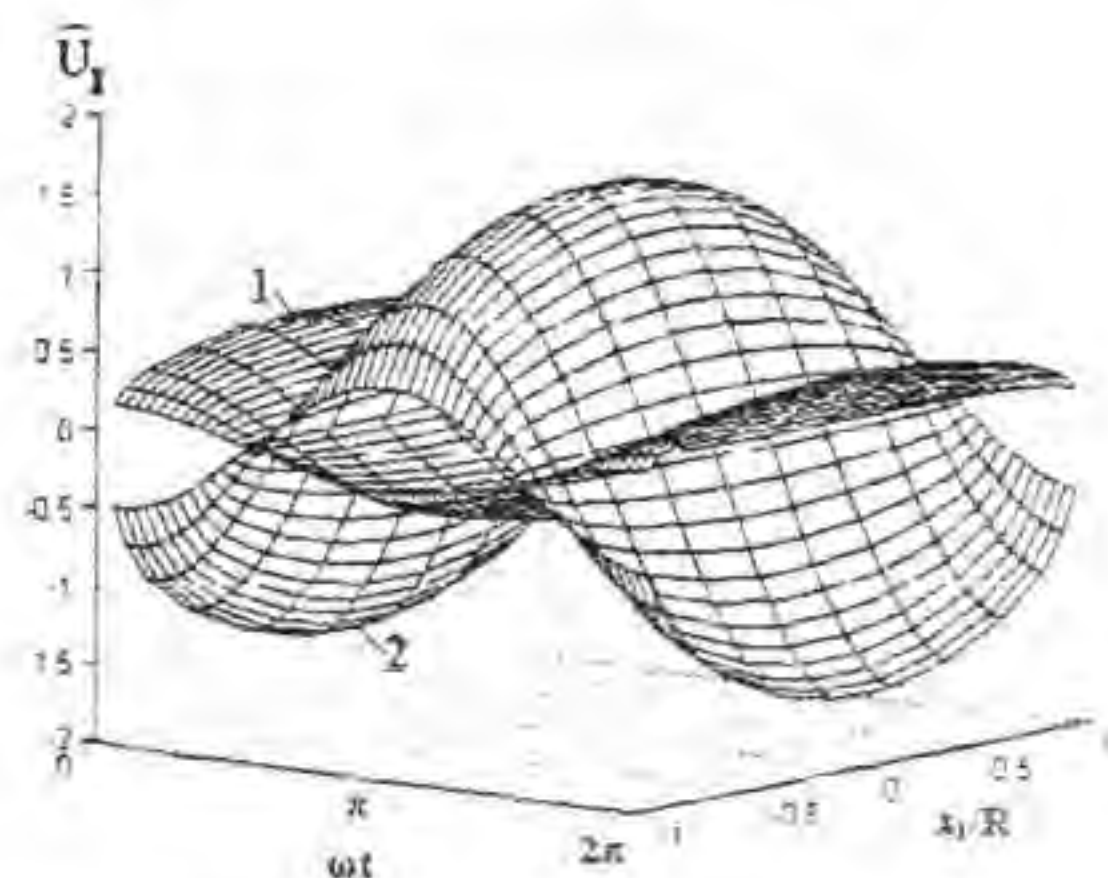


Рис. 2 Розподіл дотичних переміщень

Тут $\bar{U}_i = u_i \frac{E\pi}{4(1-\nu^2)p_0 R}$ – відносні нормальні

компоненти зсувів берегів, де $i=1,3$; E , ν – механічні параметри алюмінію, p_0 – максимальне зусилля на берегах протягом періоду навантаження.

Характерними рисами розглянутого процесу є: наявність нормальних зсувів протилежних берегів тріщини (рис. 1) і різна амплітуда коливань верхнього й нижнього берегів (рис. 1, 2), що принципово відрізняє розглянуту задачу від аналогічної в однорідному матеріалі [6].

При навантаженні міжфазної тріщини нормальної хвилі розтягу-стиску [7] протилежні береги здійснюють по-різному спрямовані нормальні переміщення, у розглянутій же задачі

верхня й нижня поверхні берегів мають односпрямовані нормальні зсуви. На рис. 1 видно, що в момент навантаження $\omega t = 2\pi$ на інтервалі $[-1, 0]$ верхній і нижній береги зміщуються в напрямку нижнього півпростору зі збільшенням зазору між берегами, а на інтервалі $[0, 1]$ – у бік верхнього півпростору зі зменшенням зазору. При зміні напрямку зусиль ($\omega t = \pi$) положення берегів міняється на протилежне.

Помітимо, що оскільки в постановці задачі зроблене припущення про наявність попереднього розкриття тріщини більшого, ніж відносний нормальний зсув протилежних берегів, то немає необхідності враховувати їхню взаємодію на етапі взаємного зближення.

Розподіл дотичних компонентів переміщень протилежних берегів тріщини протягом періоду навантаження на діаметральному перетині поперек дії навантаження близькі до представленого на рис. 2 і відрізняються чисельно безпосередньо у фронті тріщини.

Розподіл нормальних і дотичних зусиль, що виникають на поверхні зчеплення, протягом періоду навантаження на продовженні діаметральних перетинів тріщини уздовж і поперек дії зсуву представлені на рис. 3-5 (де $\bar{p}_i = p_i/p_0$). Видно, що біля фронту максимальні значення компонент зусиль суттєво відрізняються. Хоча вже на малому видаленні від тріщини компоненти зусиль прагнуть до нуля протягом періоду навантаження.

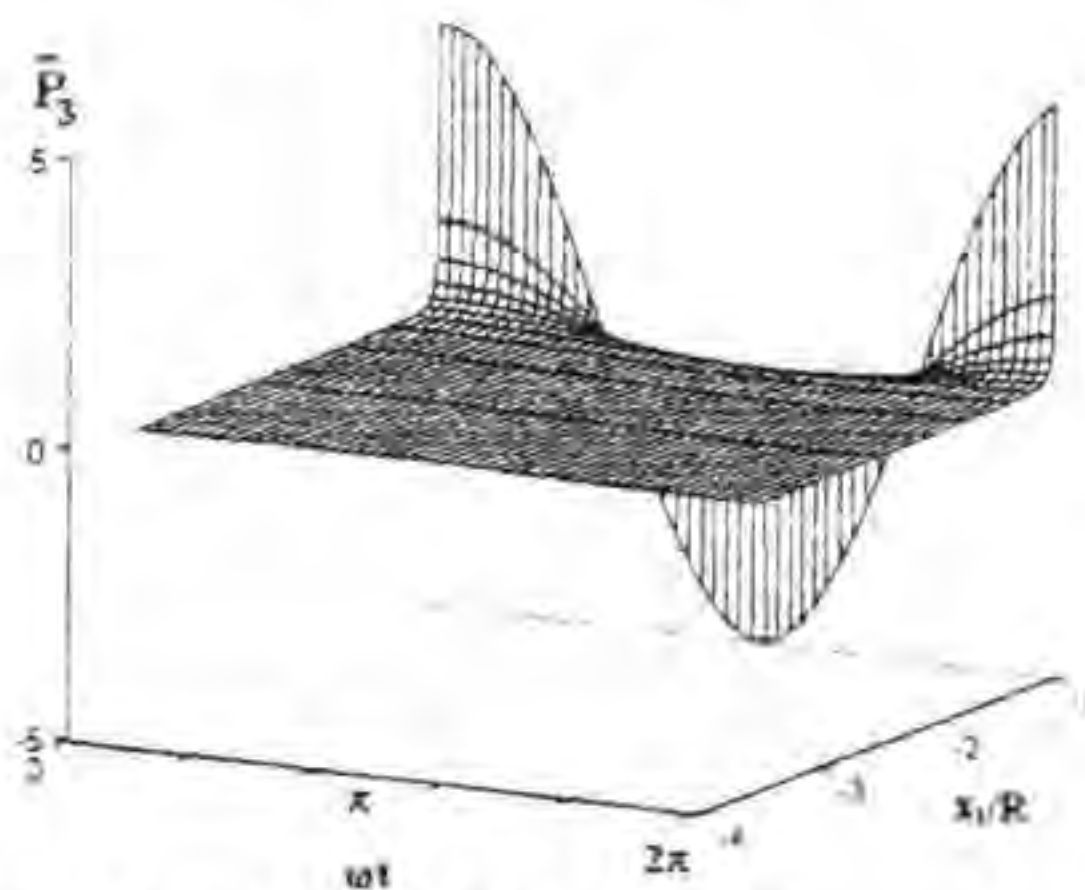


Рис. 3 Розподіл нормальних зусиль

Особливо підкреслимо, що виникнення нормальних компонентів зусиль на продовженні тріщини (рис. 3) при дії зсуву властиво тільки задачі про міжфазну тріщину. В аналогічній задачі для однорідного матеріалу нормальні

компоненти зусиль на продовженні тріщини відсутні [6].

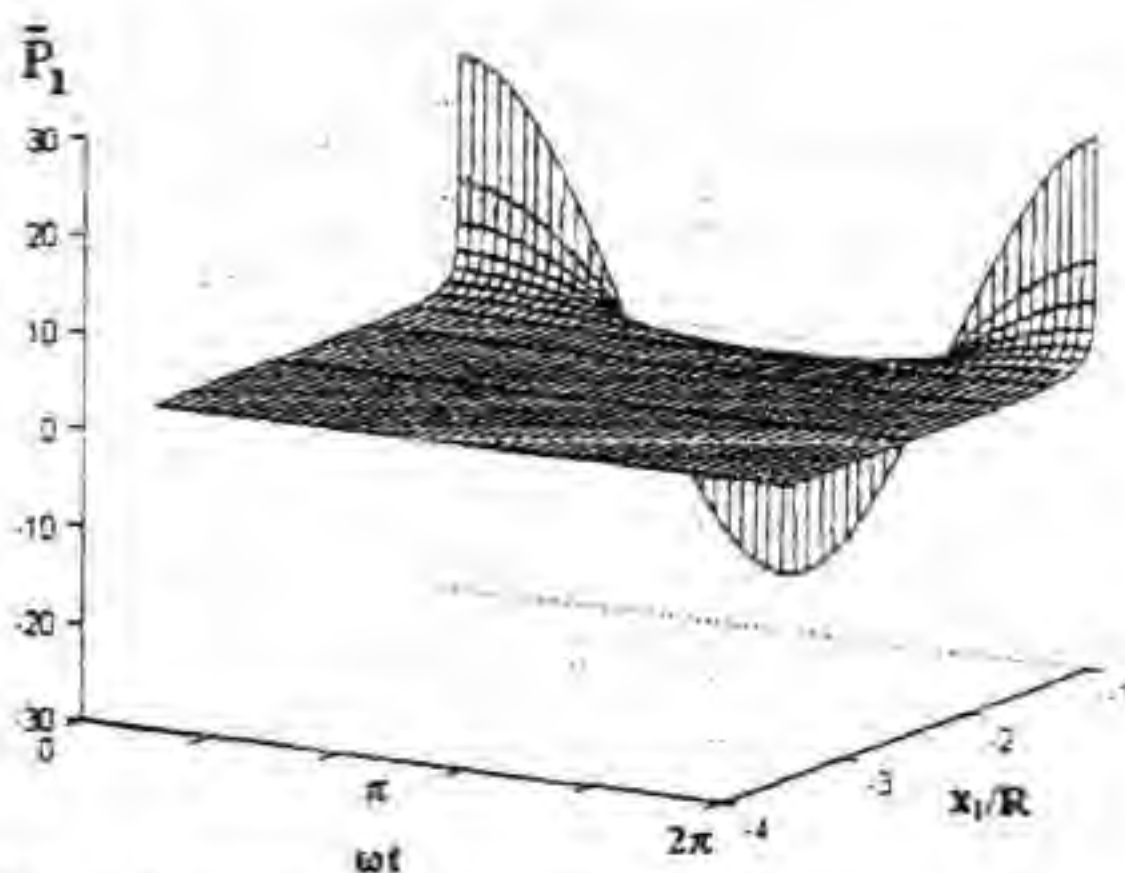


Рис. 4 Розподіл дотичних зусиль

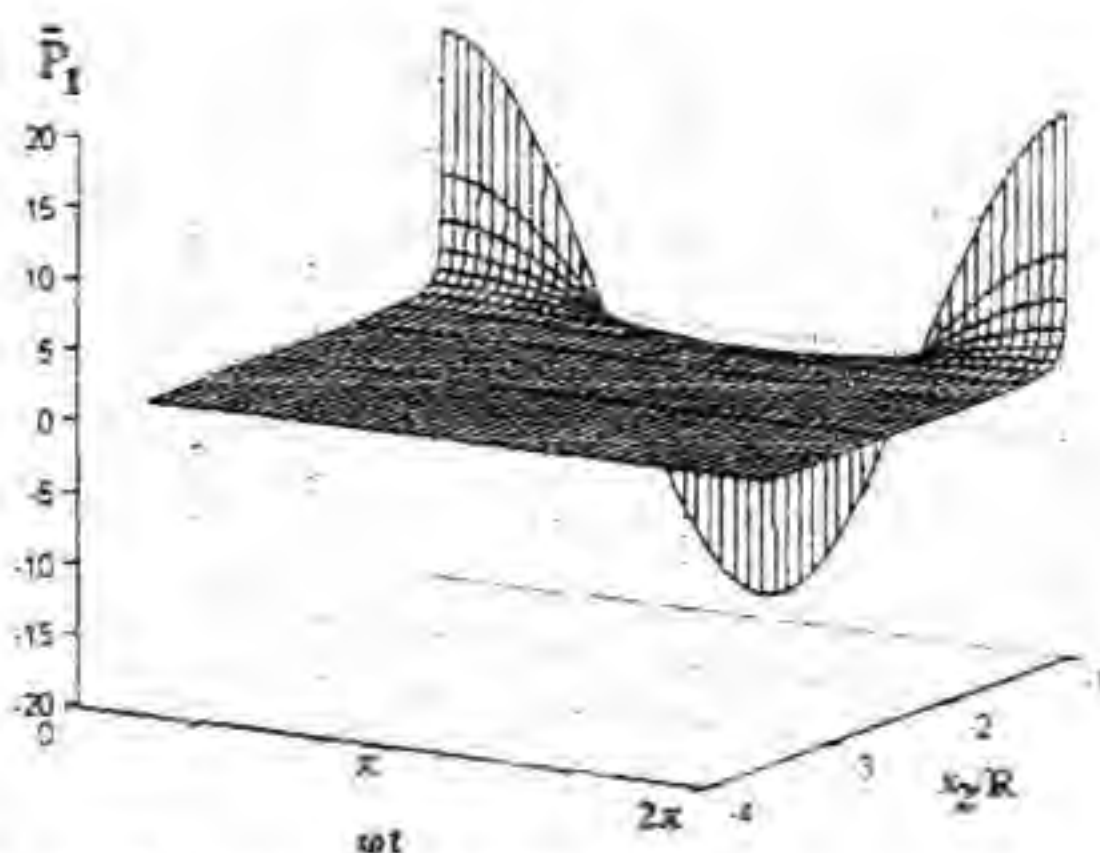


Рис. 5 Розподіл дотичних зусиль

Нормальні компоненти зусиль на поверхні зчеплення у фронті на продовженні діаметрального перетину тріщини поперек дії зсуву дорівнюють нулю.

Висновки. Отже, аналіз наведених результатів показує, що напружено деформований стан складеного тіла із тріщиною в границі поділу середовищ при навантаженні хвилею зсуву істотно відрізняється від стану однорідного матеріалу із тріщиною. У цих умовах для міжфазної тріщини характерна поява нормальних зусиль на зчеплених поверхнях у фронті тріщини й нормальних компонентів зсувів нижньої й верхньої поверхонь тріщини. Останнє може приводити до взаємодії протилежних берегів з утворенням зони контакту при недостатнім попереднім розкритті тріщини.

Список використаних джерел

1. Улитко А.Ф., Острик В.І. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів. // Вісник Київського університету. Сер. Фізико-математичні науки. – 2002. – №2 – С. 133–141.
2. Лобода В.В., Шевелева А.Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами. // Прикл. механика. – 2003. 39, №5 – С. 76–82.
3. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – 46. – P. 345–348.
4. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнес Л.А. О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред. // Прикл. механика. – 2006. – 42, №2. – С. 14–23.
5. Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меньшиков А.В. Общая пространственная динамическая задача для эллиптической трещины под воздействием нормальной волны сдвига с учетом контакта берегов трещины. // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 156–159.
6. Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меньшиков А.В. Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической загрузки. // Сборник научных трудов "Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород" / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова, Москва: Физматлит. – 2006. – С. 204–220.
7. Меньшиков В.А., Меньшиков А.В., Гузь И.А. Трещина на поверхности раздела упругих полупространств в условиях гармонического нагружения. // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 8. – P. 47 – 56.
8. Меньшиков В.А. Уравнения метода граничных элементов в динамической пространственной задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред // Докл. НАН Украины. – 2007. – №8. – С. 59–65.

Надійшла до редколегії 01.07.08

УДК 531.36:534.1:62-755

Володимир В. Пирогов*, асистент

Стійкість основного руху статично незрівноваженого обертового тіла із двома маятниками (кулями)

Досліджується стійкість основного руху ізольованої матеріальної системи, складеної з абсолютно твердого обертового тіла-носія, нерухомої щодо тіла матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість та двох маятників (куль), які можуть обертатися навколо поздовжньої осі тіла-носія.

Ключові слова: основний рух, ізольована система, маятник, куля.

*E-mail: pirogovvv@rambler.ru.

Представлено кафедрою теоретичної і прикладної механіки

Вступ

Дослідження стійкості ustalених рухів систем зв'язаних абсолютно твердих тіл є актуальною задачею механіки [1-10]. Такими системами можуть бути штучні супутники Землі або космічні апарати, положення яких в просторі стабілізується обертанням [1-9], ротори, що зрівноважуються автобалансирами [10] тощо. В роботі [11], в рамках моделі, в якій статично або динамічно незрівноважене тіло-носії (надалі просто тіло) здійснює просторовий рух і зрівноважується двома парами маятників (куль) у двох різних площинах зрівноваження, за допомогою енергетичного підходу були виділені всі ustalені рухи системи – основні і побічні, оцінена їх стійкість та встановлено, що основні рухи нестійкі. Необхідно зауважити, що в основних рухах система обертається навколо поздовжньої осі тіла, а в побічних – ні.

В роботі [12] за допомогою емпіричного та енергетичного підходів було встановлено, що основні рухи стійкі тільки у випадку статичного зрівноваження одним автобалансиrom сплюснутого тіла, коли площина зрівноваження знаходиться поблизу центра мас системи. В роботі [13] були одержані рівняння руху ізольованої системи, складеної з обертового тіла, матеріальних точок, жорстко з ним зв'язаних і маятників (куль), що можуть повертатися навколо поздовжньої осі тіла. В даній роботі вивчається подібна система у випадку статичного

V.V. Pirogov, assistant professor

Stability of the main motion of the statically unstable spin body with two pendulums (balls)

Is studied the stability of the main motion of the isolated material system which consist of rotated absolutely rigid body, immobile material points that create its statically unbalance and two pendulums (balls) which can revolve around of the longitudinal axis of body.

Key words: main motion, isolated system, pendulum, ball.

зрівноваження тіла двома маятниками (кулями). При цьому досліджується вплив різних параметрів системи на стійкість основного руху і визначається характер перехідних процесів. Для цього використовується перший метод Ляпунова, який знайшов широке застосування при розв'язанні подібних задач [3-6, 10].

§1. Рівняння руху системи

Статичну незрівноваженість тіла створює нерухома матеріальна точка, жорстко з ним зв'язана. Навколо поздовжньої осі тіла можуть обертатися два математичних маятника (дві кулі). Їх маси рухаються у площині незрівноваженості. Використаємо рівняння руху, отримані в [13]. Враховуючи, що

$$H_j = H, m_j = m, l_j = l, h_j = d, = h, \quad / j = 1, 2 / , \quad (1)$$

одержуємо рівняння руху системи у вигляді:

$$\begin{aligned} b_j = & H\ddot{\varphi}_j + ml[\ddot{\varphi}_j l + \ddot{y} \cos \varphi_j - \ddot{x} \sin \varphi_j + \\ & + \dot{\Omega}_z(l + x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j) - (z + h) \times \\ & \times (\dot{\Omega}_y \sin \varphi_j + \dot{\Omega}_x \cos \varphi_j) + 2\dot{\Omega}_z(\dot{x} \cos \varphi_j + \\ & + \dot{y} \sin \varphi_j) - \Omega_z^2(y + l \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \\ & + \Omega_z^2(x + l \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \Omega_z^2(y \cos \varphi_j - \\ & - x \sin \varphi_j) - \Omega_x \Omega_y(y \sin \varphi_j - x \cos \varphi_j - l \cos 2\varphi_j) - \\ & - \Omega_z(z + h)(\Omega_x \sin \varphi_j - \Omega_y \cos \varphi_j)] = 0, \end{aligned}$$

$$/ j = 1, 2 / ;$$

$$\begin{aligned}
 M_z x + \mu e \cos \gamma + ml \sum_{j=1}^2 \cos \varphi_j &= 0, \\
 M_z y + \mu e \sin \gamma + ml \sum_{j=1}^2 \sin \varphi_j &= 0, \\
 M_z z + h(\mu + 2m) &= 0; \\
 [J_x - M_z(y^2 + z^2)]\Omega_x - (J_{xy} - M_z xy)\Omega_y - \\
 - (J_{xz} - M_z xz)\Omega_z - ml(z + h) \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j &= \\
 = -K \cos \alpha \sin \beta; \\
 - (J_{xy} - M_z xy)\Omega_x + [J_y - M_z(x^2 + z^2)]\Omega_y - \\
 - (J_{yz} - M_z yz)\Omega_z - ml(z + h) \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j &= K \sin \alpha; \\
 - (J_{xz} - M_z xz)\Omega_x - (J_{yz} - M_z yz)\Omega_y + \\
 + [J_z - M_z(x^2 + y^2)]\Omega_z + ml^2 \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j + \\
 + ml \left(x \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j + y \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j \right) &= \\
 = K \cos \alpha \cos \beta,
 \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta \\ \beta + \omega \sin \alpha \\ \alpha \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}; \\
 J_x &= A + \mu(h^2 + e^2 \sin^2 \gamma) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \sin^2 \varphi_j \right); \\
 J_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\mu e^2 \sin 2\gamma + ml^2 \sum_{j=1}^2 \sin 2\varphi_j \right); \\
 J_{xz} &= h \left(\mu e \cos \gamma + ml \sum_{j=1}^2 \cos \varphi_j \right); \\
 J_y &= B + \mu(h^2 + e^2 \cos^2 \gamma) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \cos^2 \varphi_j \right); \\
 J_{yz} &= h \left(\mu e \sin \gamma + ml \sum_{j=1}^2 \sin \varphi_j \right); \\
 J_z &= C + \mu e^2 + 2ml^2; \quad M_z = M + \mu + 2m.
 \end{aligned} \quad (3)$$

§2. Рівняння першого наближення, характеристичне рівняння

На основному (незбуреному) русі:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} = 0, \quad \tilde{y} = 0, \quad \tilde{z} = z, \quad \tilde{\alpha} = 0, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = \omega_0, \\
 \tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma,
 \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\varphi_0 = \pi - \arccos \left(\frac{\mu e}{2ml} \right). \quad (5)$$

Вводимо у розглядання збурений рух:

$$x = u, \quad y = v, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta, \quad \omega = \omega_0 + p,$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma + \alpha_1, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma + \alpha_2, \quad (6)$$

де $u, v, \alpha, \beta, p, \alpha_1, \alpha_2$ - відхилення від незбуреного руху ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p|, |\alpha_1|, |\alpha_2| \ll 1$).

Лінеаризовані рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= (b_1 + b_2)/2 = ml^2(\ddot{\gamma}_1 + \dot{p}) + H\dot{\gamma}_1 - ml \cos \varphi_0 \times \\
 &\times \{h_z[(\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta}\omega_0 + \alpha\omega_0^2)\cos \gamma + \\
 &+ (\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\omega_0 - \beta\omega_0^2)\sin \gamma] - \\
 &- (\ddot{v} + 2\omega_0\dot{u} - \omega_0^2 v)\cos \gamma + \\
 &+ (\ddot{u} - 2\omega_0\dot{v} - \omega_0^2 u)\sin \gamma\} = 0; \\
 L_2 &= (b_1 - b_2)/2 = ml^2\ddot{\gamma}_2 + H\dot{\gamma}_2 - ml \sin \varphi_0 \times \\
 &\times \{h_z[(\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\omega_0 - \beta\omega_0^2)\cos \gamma - \\
 &- (\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta}\omega_0 - \alpha\omega_0^2)\sin \gamma] + \\
 &+ (\ddot{u} - 2\omega_0\dot{v} - \omega_0^2 u)\cos \gamma + \\
 &+ (\ddot{v} + 2\omega_0\dot{u} - \omega_0^2 v)\sin \gamma\} = 0; \\
 (J_x^{(0)} - M_z z^2)(\ddot{\alpha} - \omega_0\dot{\beta}) - J_{xy}^{(0)}(\ddot{\beta} + \omega_0\dot{\alpha}) - \\
 - (J_{xz}^{(0)} - M_z uz)\omega_0 - 2mlh_z(\dot{\gamma}_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma - \\
 - \dot{\gamma}_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma) &= -K\beta; \\
 - J_{xy}^{(0)}(\ddot{\alpha} - \omega_0\dot{\beta}) + (J_y^{(0)} - M_z z^2)(\ddot{\beta} + \omega_0\dot{\alpha}) - \\
 - (J_{yz}^{(0)} - M_z vz)\omega_0 - 2mlh_z(\dot{\gamma}_1 \sin \varphi_0 \cos \gamma - \\
 + \dot{\gamma}_2 \cos \varphi_0 \sin \gamma) &= K\alpha; \\
 u &= \frac{2ml}{M_z}(\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma); \\
 v &= -\frac{2ml}{M_z}(\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma); \\
 p &= -(2ml^2\dot{\gamma}_1)/J_z^{(0)}, \\
 \text{де:} \quad \gamma_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2 \quad (8) \\
 - \text{нові змінні;} \\
 J_x^{(0)} &= A + \mu(h^2 + e^2 \sin^2 \gamma) + \\
 &+ 2m[h^2 + l^2(\sin^2 \varphi_0 \cos^2 \gamma + \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \gamma)], \\
 J_{xy}^{(0)} &= 2mlh(\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma), \\
 J_{xz}^{(0)} &= -2mlh(\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma), \\
 J_y^{(0)} &= B + \mu(h^2 + e^2 \cos^2 \gamma) + \\
 &+ 2m[h^2 + l^2(\cos^2 \varphi_0 \cos^2 \gamma + \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \gamma)], \\
 J_{yz}^{(0)} &= \frac{1}{2} \sin 2\gamma(\mu e^2 + 2ml^2 \cos 2\varphi_0),
 \end{aligned}$$

$$J_z^{(0)} = C + \mu e^2 + 2ml^2, \quad h_z = z + h, \quad K = J_z^{(0)} \omega_0. \quad (9)$$

Виключаючи параметри u , v та p з перших чотирьох рівнянь (7), матимемо наступні рівняння руху системи у безрозмірному виді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_A} \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) \dot{\alpha} - \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) \ddot{\beta} - \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_C} \right) \dot{\beta} - \\ & - 2h' [(\dot{\gamma}_1 \cos \gamma - \gamma_1 \sin \gamma) \cos \varphi_0 - \\ & - (\dot{\gamma}_2 \sin \gamma + \gamma_2 \cos \gamma) \sin \varphi_0] = 0; \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_C} \right) \dot{\alpha} + \\ & + \frac{1}{R_B} \dot{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) \dot{\beta} - \\ & - 2h' [(\dot{\gamma}_1 \sin \gamma + \gamma_1 \cos \gamma) \cos \varphi_0 + \\ & + (\dot{\gamma}_2 \cos \gamma - \gamma_2 \sin \gamma) \sin \varphi_0] = 0; \\ L_1 = & -h' \cos \varphi_0 (\ddot{\alpha} \cos \gamma + 2\dot{\alpha} \sin \gamma - \alpha \cos \gamma + \\ & + \ddot{\beta} \sin \gamma - 2\dot{\beta} \cos \gamma - \beta \sin \gamma) + \\ & + (1 - 2R_C - 2R_m \cos^2 \varphi_0) \ddot{\gamma}_1 + H' \gamma_1 + \\ & + 2R_m \cos^2 \varphi_0 \dot{\gamma}_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \dot{\gamma}_2 = 0; \\ L_2 = & h' \sin \varphi_0 (\ddot{\alpha} \sin \gamma - 2\dot{\alpha} \cos \gamma - \alpha \sin \gamma - \\ & - \ddot{\beta} \cos \gamma - 2\dot{\beta} \sin \gamma + \beta \cos \gamma) - \\ & - 2R_m \sin 2\varphi_0 \dot{\gamma}_1 + (1 - 2R_m \sin^2 \varphi_0) \ddot{\gamma}_2 + \\ & + H' \gamma_2 + 2R_m \sin^2 \varphi_0 \dot{\gamma}_2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$R_A = \frac{ml^2}{J_z^{(0)} - M_z z^2}, \quad R_B = \frac{ml^2}{J_y^{(0)} - M_z z^2}, \quad R_C = \frac{ml^2}{J_z^{(0)}},$$

$$R_\mu = \frac{\mu e^2}{ml^2}, \quad h' = \frac{h_z}{l}, \quad R_m = \frac{m}{M_z}, \quad H' = \frac{H}{ml^2 \omega_0}. \quad (11)$$

Знайдемо характеристичне рівняння. Позначимо:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\lambda}{R_A} - \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0); \\ a_{12} &= -\frac{\lambda}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) - \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_C} \right); \\ a_{13} &= -2h' \cos \varphi_0 (\lambda \cos \gamma - \sin \gamma); \\ a_{14} &= 2h' \sin \varphi_0 (\lambda \sin \gamma + \cos \gamma); \\ a_{21} &= -\frac{\lambda}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0) + \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_C} \right); \\ a_{22} &= \frac{\lambda}{R_B} + \frac{1}{2} \sin 2\gamma (R_\mu + 2 \cos 2\varphi_0); \\ a_{23} &= -2h' \cos \varphi_0 (\lambda \sin \gamma + \cos \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{24} &= -2h' \sin \varphi_0 (\lambda \cos \gamma - \sin \gamma); \\ a_{31} &= -h' \cos \varphi_0 (\lambda^2 \cos \gamma + 2\lambda \sin \gamma - \cos \gamma); \\ a_{32} &= -h' \cos \varphi_0 (\lambda^2 \sin \gamma - 2\lambda \cos \gamma - \sin \gamma); \\ a_{33} &= (1 - 2R_C - 2R_m \cos^2 \varphi_0) \lambda^2 + H' \lambda + 2R_m \cos^2 \varphi_0; \\ a_{34} &= 2R_m \sin 2\varphi_0 \lambda; \quad a_{43} = -a_{34}; \\ a_{41} &= h' \sin \varphi_0 (\lambda^2 \sin \gamma - 2\lambda \cos \gamma - \sin \gamma); \\ a_{42} &= -h' \sin \varphi_0 (\lambda^2 \cos \gamma + 2\lambda \sin \gamma - \cos \gamma); \\ a_{44} &= (1 - 2R_m \sin^2 \varphi_0) \lambda^2 + H' \lambda + 2R_m \sin^2 \varphi_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (10) можна подати у вигляді визначника

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

або поліному

$$\Delta(\lambda) = a_6 \lambda^6 + a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0. \quad (14)$$

Критерій Рауса-Гурвіца дає наступні умови асимптотичної стійкості:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = a_1 &> 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \\ \Delta_n &= a_n \Delta_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

У загальному випадку коефіцієнти поліному (14) мають неоглядний вид, аналіз його коренів у аналітичному вигляді неможливий, а критерій Рауса-Гурвіца дає умови, що також не піддаються аналізу. Тому подальші дослідження доцільно проводити наближеними, чи числовими методами.

§3. Наближене визначення коренів характеристичного рівняння

Розглянемо випадок осесиметричного тіла, у якого поперечні осьові моменти інерції рівні $A = B$. Тоді, не обмежуючи загальності, положення нерухомої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, задається ексцентриситетом e та кутом $\gamma = 0$. В цьому випадку осі X_G , Y_G , Z_G – головні центральні осі інерції системи на основному русі, і відповідні головні центральні осьові моменти інерції мають вигляд:

$$\begin{aligned} A_G &= J_z^{(0)} - M_z z^2, \quad B_G = J_y^{(0)} - M_z z^2, \\ C_G &= J_z^{(0)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді

$$R_A = \frac{ml^2}{A_G}, \quad R_B = \frac{ml^2}{B_G}, \quad R_C = \frac{ml^2}{C_G}, \quad (16)$$

Розглядатимемо випадок, коли маса маятників та точки, що створює незрівноваженість набагато менша маси тіла - $m, \mu \ll M$. Тоді співвідношення малості задаються таким чином

$$\begin{aligned} R_A &= R_{A1}\varepsilon, \quad R_B = R_{A1}\varepsilon + R_{B2}\varepsilon^2, \\ R_C &= R_{C1}\varepsilon, \quad R_m = R_{m1}\varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1, \end{aligned} \quad (17)$$

де ε деякий малий параметр.

Шукаємо корені характеристичного рівняння (14) такими розкладаннями:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}\varepsilon + \lambda^{(2)}\varepsilon^2 + \dots \quad (18)$$

Тоді:

$$\lambda_{1,2} \approx -H^*,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{3,4} \approx & \frac{H^* h^2 R_A^4}{(R_C - R_A)[(R_C - R_A)^2 + H^2 R_C^2]} \pm \\ & \pm \frac{i}{R_C} \left\{ (R_C - R_A) + \right. \\ & \left. + \frac{2h^2 R_A^4 + (R_B - R_A)[(R_C - R_A)^2 + H^2 R_C^2]}{2[(R_C - R_A)^2 + H^2 R_C^2]} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{5,6} \approx & - \left[\frac{R_m(R_C - R_A) + h^2 R_A R_C}{H^*(R_C - R_A)} \right] \times \\ & \times (1 \mp \cos 2\varphi_0), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\pi/2 < \varphi_0 < \pi. \quad (20)$$

Дійсна частина коренів $\lambda_{3,4}$ буде від'ємною, коли

$$R_A > R_C. \quad (21)$$

Після перетворень, з врахуванням рівностей (16), ця умова прийме вигляд

$$C_G > A_G. \quad (22)$$

Дійсна частина коренів $\lambda_{5,6}$, від'ємна за умови

$$R_m(R_C - R_A) + h^2 R_A R_C < 0. \quad (23)$$

Після перетворень, з врахуванням виразів (11), (16), ця умова прийме вигляд

$$C_G - A_G - M_\Sigma h_\Sigma^2 > 0. \quad (24)$$

При виконанні умови (24) умова (22) виконується автоматично.

Умова стійкості основного руху (24) була одержана в роботі [12] для автобалансира будь-якого типу. Відповідно до цієї умови для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло (утворене тілом, точкою і маятниками (кулями)) було на основному русі сплюснутим, і відстань від центра мас системи до площини зрівноваження (h_Σ) не перевищувала певне граничне значення.

За виглядом коренів встановлюємо, що за виконанням умови (24) основний рух стійкий, а перехідні процеси – коливально-затухаючі.

§4. Результати числових розрахунків

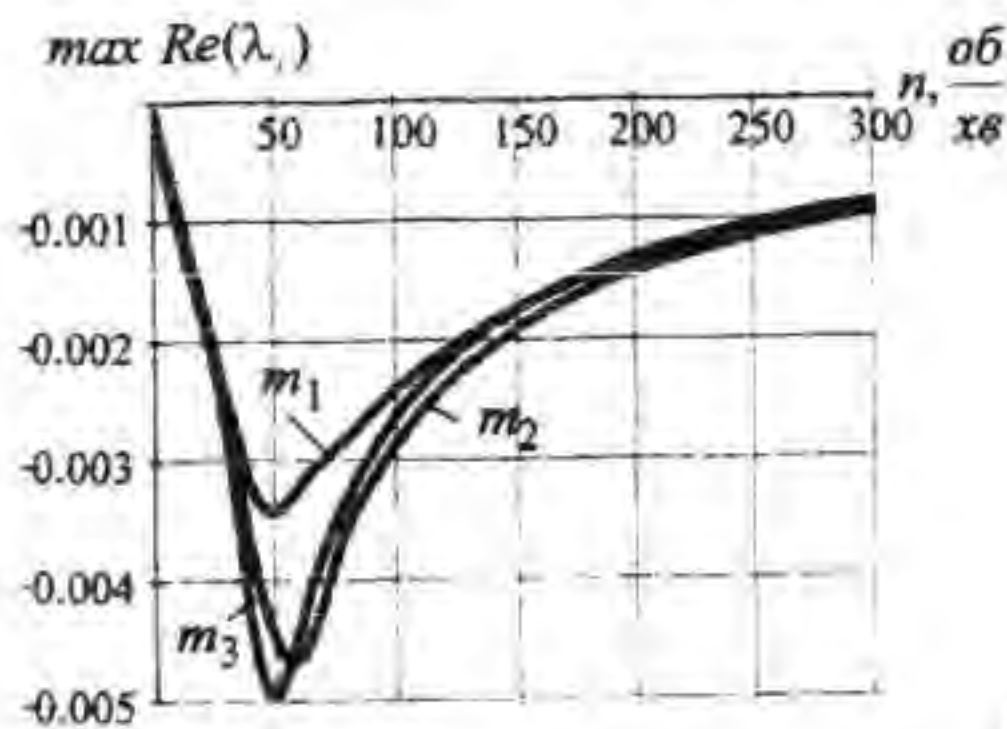
За допомогою числових розрахунків дослідимо стійкість основного руху та вплив параметрів системи на характер перехідних процесів. Параметри розрахунків підбрано за параметрами штучного супутника IMAGE [9], стабілізованого обертанням. Корпус супутника виконано у формі прямого колового циліндра, а його маса, кількість обертів відносно поздовжньої осі, відносно якої осьовий момент інерції максимальний, радіус бічної поверхні та висота циліндричного корпусу відповідно становлять $M = 490$ кг, $n = 3-5$ об/хв., $R = 1,1$ м, $H_C = 1,5$ м. Для зменшення кута нутації на супутник встановлений рідинний демпфер, маса рідини якого складає $m/M = 0,0024$ частки від маси супутника ($m = 1,2$ кг). Маса маятників беремо рівною масі рідини демпфера. Інші параметри мають значення: $\mu = 1,2$ кг, $e = 0,9$ м, $\gamma = 0$. Нижче в табл. наведені межі зміни параметрів, крок їх зміни і оптимальне значення в моделі.

Табл.

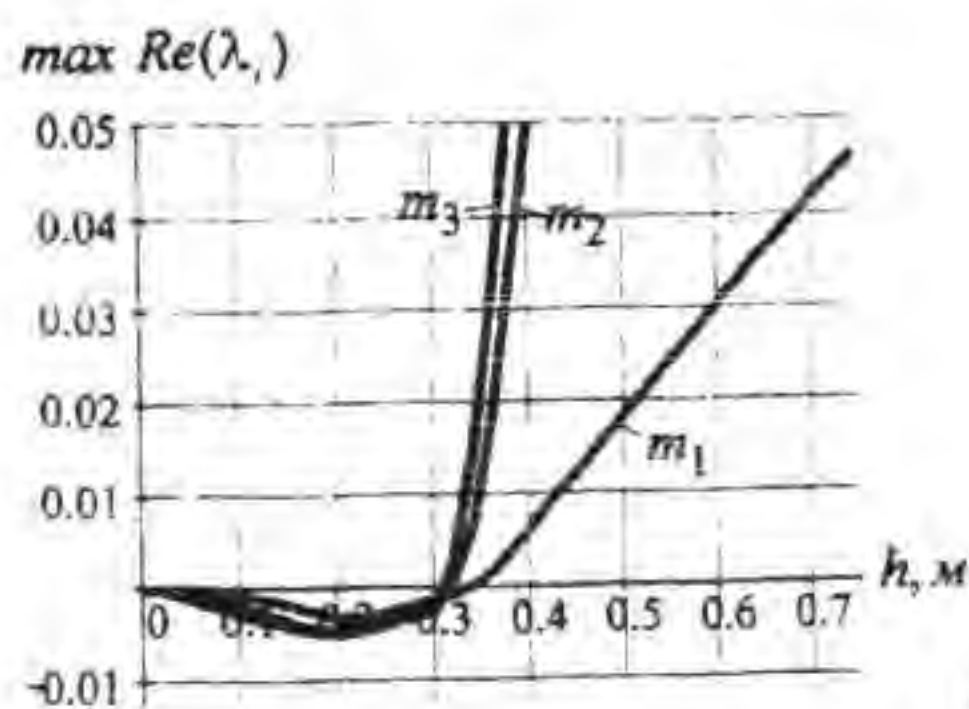
Параметр	Значення по замовленню	Межі зміни параметра	Крок зміни параметра	Оптимальне значення
n , об/хв	50	1 – 301	10	50 (m_1)
				60 (m_2)
				50 (m_3)
h , м	0,2	0 – 0,75	0,05	0,2 ($m_{1,2,3}$)
H , кг·м ² ·с ⁻¹	1	0 – 5	0,25	1 (m_1)
				1 (m_2)
				0,25 (m_3)
H_C , м	1,5	0,5 – 4	0,25	1,5 ($m_{1,2,3}$)
m , кг	–	0,6 – 9,6	0,6	9,6 (n_1)
				8,5 (n_2)
				4 (n_3)
l , м	0,9	0,45 – 1,1	0,05	0,8 (m_1)
				0,95 (m_2)
				0,85 (m_3)

Результати числових розрахунків у вигляді графіків, представлені на рис. По вертикальній осі графіків відкладається максимальне значення

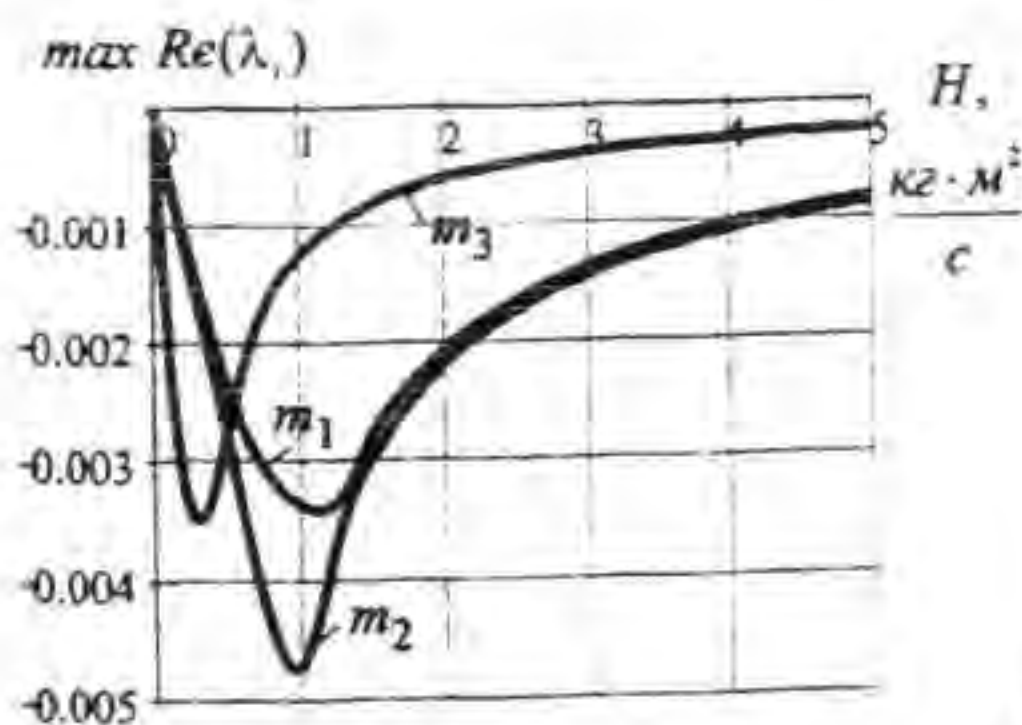
дійсних частин коренів характеристичного рівняння (13), а по горизонтальній – досліджуваний параметр, при цьому решта досліджуваних параметрів мають фіксоване значення.



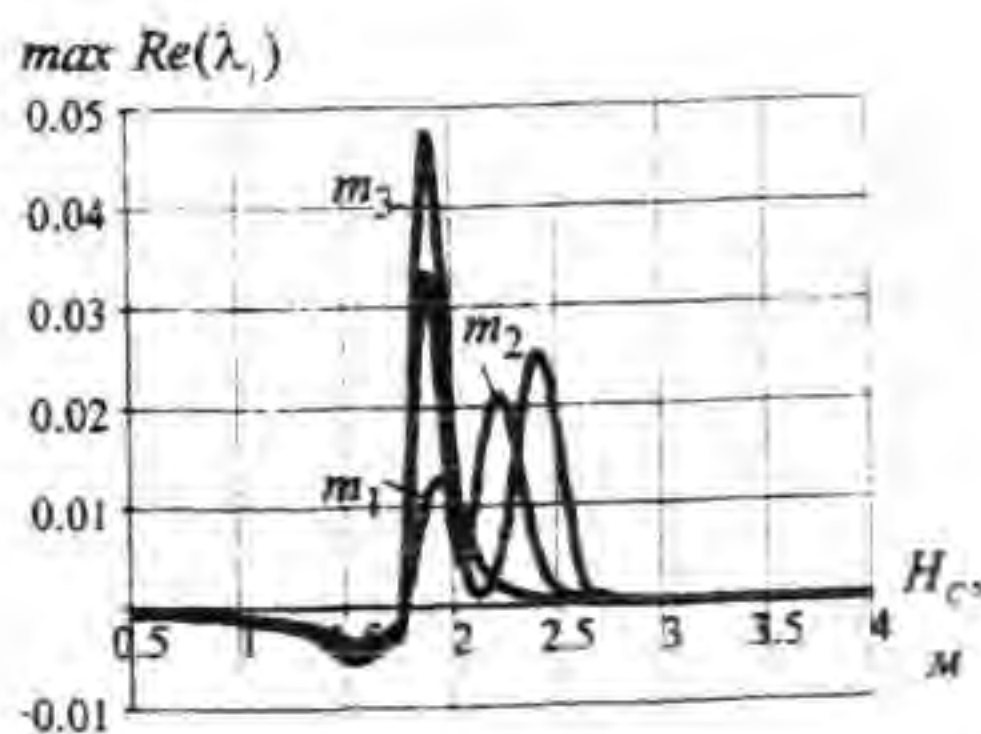
а



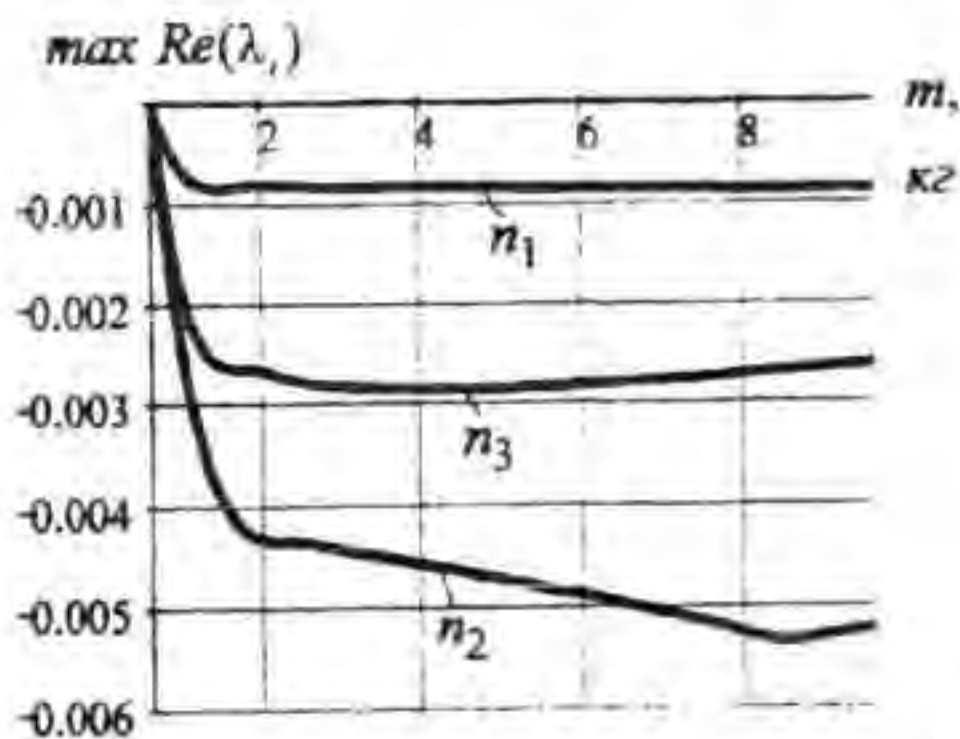
б



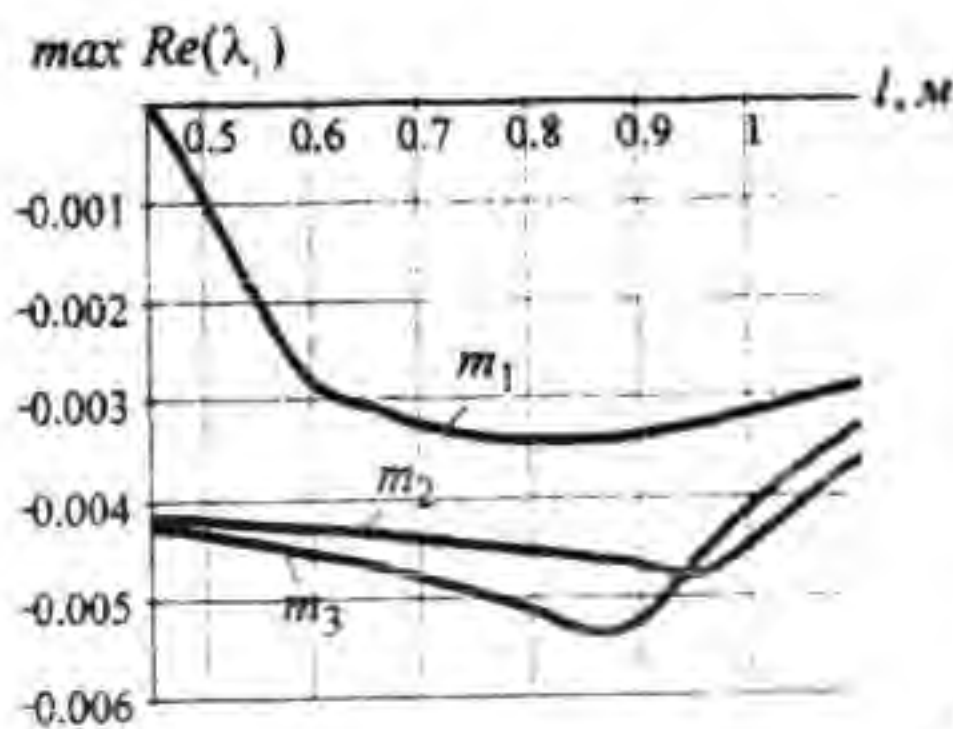
в



г



д



е

Рис. Вплив параметрів системи на стійкість основного руху

Графіки на рис., а-г, е отримані при значеннях мас маятників (куль) $m_1 = 1,2$ кг, $m_2 = 4m_1$, $m_3 = 8m_1$. На рис., д графіки побудовані при кількості обертів $n_1 = 10$ об/хв, $n_2 = 5n_1$, $n_3 = 10n_1$, при побудові інших графіків кількість обертів складає n_2 .

По рис., а-е були підібрані оптимальні значення досліджуваних параметрів, які забезпечують як стійкість основного руху системи, так і найбільшу швидкість приходу системи до основного руху.

З рис., б видно, що при перевищенні параметром h значення $0,31$ м основний рух стає нестійким (для $m = 1,2$ кг – $h > 0,34$ м). У супутника IMAGE – $h = 0,625$ м, тому рідинний демпфер, який одночасно є автобалансиром Леблана [14], встановлений із порушенням умови стійкості і тому основний рух – нестійкий. Це пояснює великі залишкові кути нутації, що залишає цей демпфер при роботі на супутнику. При перевищенні параметром H_c значення $1,75$ м, що відповідає співвідношенню осьових моментів інерції тіла $A/C > 0,92$ (рис., г), основний рух стає нестійким. Це пояснюється тим, що порушується умова (24).

Висновки.

У результаті проведених досліджень отримані наступні результати.

1. Для випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша маси системи, аналітично підтверджено, що основний рух – стійкий за умови, що складене тіло сплюснуте і відстань від центра мас системи до площини зрівноваження не перевищує певного граничного значення. Також встановлено, що при стійкому основному русі характер перехідних процесів коливально-затухаючий.

2. Для супутника IMAGE знайдені оптимальні параметри двохмаяткового (двокульового) автобалансира (демпфера).

3. Показано, що рідинний демпфер встановлений на супутнику IMAGE із порушенням умов стійкості основного руху, що пояснює великі залишкові кути нутації.

Список використаних джерел

1. *Alper J.R.* Analysis of pendulum damper for satellite wobble damping // AIAA Aerospace Sciences Meeting, New York, Jan. 20-22, 1964.
2. *Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И.* Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 83, -М.: ИПМ, 2004. – 28 с.
3. *Мирер С.А., Сарычев В.А.* Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
4. *Сарычев В.А., Сазонов В.В.* Некоторые вопросы динамики вращательного движения спутников. 1. Нутационные демпферы спутников, стабилизируемых вращением. // Препринт ИПМ АН СССР; №45- М.: ИПМ, 1974. – 56 с.
5. *Васильев В.Г., Ковтуненко В.М.* Об устойчивости вращения космического аппарата с шарнирно присоединенными стержнями // Космические исследования. – 1969. – т. 7, вып. 5. - С. 627-636.
6. *Васильев В.Г., Семенюк М.В.* Динамика равновесных конфигураций вращающегося космического аппарата с длинными стержнями // Техническая механика - 2001. - № 1. - С. 110-118.
7. *Гробов В.А.* К теории вращательных движений свободного твердого тела, несущего маятники // Укр. матем. журнал. 1969. - 21, № 6. -С. 818—823.
8. *Chinnery A.E., Hall C.D.* The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18, No. 6, 1995, pp. 1404-1409.
9. *Hubert C., Swanson D.* Surface Tension Lockup in the IMAGE Nutation Damper — Anomaly and Recovery // NASA GSFC Flight Mechanics Symposium, 2001.
10. *Філімоніхін Г.Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
11. *Филимоных Г.Б., Пирогов В.В., Филимоных И.И.* Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела // Прикладная механика. – 2007. – 43, №10. – С. 122 – 128.
12. *Филимоных И.И., Филимоных Г.Б.* Условия уравнивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика, - 43, №11, 2007. – С.113-120.
13. *Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І.* Рівняння руху ізольованої системи, яка здійснює просторовий рух // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №4. -С. 94-100.
14. *Leblanc M.* Patent 1,159,052. Automatic balancer for rotating bodies: patent 1,159,052 // Serial No. -803,970. Field 01.12.1913, Patented 02.11.1815.

Надійшла до редколегії

06.10.08

УДК 517.9

Алла М. Ткачук, к.ф.-м.н., доцент,

Тетяна Добродзій, аспірант.

Дослідження інваріантних множин різницевих рівнянь за допомогою функцій Ляпунова

В даній роботі отримано результат про зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова.

Ключові слова: різницеві рівняння, функція Ляпунова, інваріантна множина, стійкість.

*E-mail: tkachukam@ukr.net

Статтю представив член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

В монографії А.М. Самойленка [1] отримано результати про існування інваріантних множин систем диференціальних рівнянь в термінах нулів невід'ємно визначених функцій Ляпунова. В подальшому дані результати узагальнювалися на системи неавтономних диференціальних рівнянь та рівнянь з випадковими збуреннями [2 - 4]. В них доведено, що нулі деякої невід'ємно визначеної функції Ляпунова $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset R^m$ є інваріантною множиною, при умові, що їх проекція на R^n компактна в D , а похідна $V(t, x)$ в силу системи недодатно визначена.

В [5] досліджено наскільки наявність невід'ємно визначеної функції Ляпунова, похідна якої в силу системи недодатно визначена, є необхідною для існування та стійкості інваріантних множин. Тобто фактично отримано обернення теорем А.М.Самойленка аналогічно оберненим теоремам Ляпунова в теорії стійкості (див., наприклад, теорема Персидського [6, с. 254]).

A. M. Tkachuk, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Associate Professor,
T. Dobrodziy, PhD student.

Research of invariant sets of difference equations with the help of functions of Lyapunov's

In this work the result about the relation between invariant sets of the systems of differential and corresponding difference equation in terms of the Lyapunov functions of constant signs is investigated it is received.

Key Words: difference equations, Lyapunov's function, invariant set, stability.

2 Основні результати

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (1)$$

та відповідна їй система різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + X_n(x_n), \quad (2)$$

де $n \geq 0$, $x \in D \subset R^m$. $h=1$ - крок різницевого рівняння.

$$x_n = x_n(t_0 + n), \quad x_0(t_0) = x_0.$$

Функція $X_n(x) = X(n, x)$ визначена при $x \in D$, $n \geq 0$, неперервна та ліпшицева по x .

Нехай $M \subset Z^+ \times R^m$, M_{n_0} – переріз M гіперплощиною $n = n_0$, $n_0 \in Z^+$.

Означення 1 Множину $M \subset D$ назовемо додатно інваріантною множиною системи (2), якщо розв'язок $x_n(x)$ системи (2) такий, що

$$x_n(x_0) \in M_{n_0},$$

має властивість:

$$x_n(x) \in M_n \text{ для } n \in Z^+.$$

Означення 2 Додатно інваріантну множину M системи (2) назовемо стійкою при $n \geq n_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, що якщо

$$\rho(x_{n_0}, M_{n_0}) < \delta,$$

то

$$\rho(x_n(x), M_n) < \varepsilon \text{ для } n \in Z^+.$$

Нехай D_1 – обмежена область, що міститься в D з деяким своїм околom, $\overline{D_1}$ – замикання D_1 .

Означення 3 Функцію $V(x)$, визначену в $\overline{D_1}$, будемо називати знакосталою в D_1 , якщо для всіх $x \in D_1$ ненульові значення функції $V(x)$ мають один і той же знак. Знакосталу в D_1 функцію $V(x)$ назовемо знаковизначеною в D_1 , якщо множина її нулів є непорожньою і компактною в D_1 .

Позначимо через $x_n(n_0, x)$ розв'язок системи (2) такий, що $x_{n_0}(n_0, x) = x$, $x_n(n_0, x) \in D$ для довільного $n \in Z^+$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 Нехай система (2) має при $n \geq 0$, $x \in D$ додатно інваріантний рівномірно стійкий многовид M такий, що $\text{Pr}_{R^m} M$ компактна в D .

Тоді в деякому околі D_1 множини M існує послідовність функцій $V_n(x)$ з властивостями:

1) $V_n(x)$ – додатно визначена рівномірно по $n \geq 0$:

$$\inf_{k \geq 0, x \in M_k} V_k(x) = V_\varepsilon > 0 \quad (3)$$

при довільному $\varepsilon > 0$;

2) $\Delta V_n(x)$ – недодатно визначена:

$$\Delta V_n(x) = V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) \leq 0,$$

при $n \geq 0$, $x \in D_1$;

3) множина нулів функції $V_n(x)$ співпадає з M , тобто

$$M = \{(n, x_n) : V_n(x) = 0, n \geq 0, x \in D\}.$$

Доведення. Для доведення розглянемо наступну послідовність функцій

$$V_n(x) = \sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k),$$

$$\text{де } \rho(x_k(n, x), M_k) = \min_{y \in M_k} \|x_k(n, x) - y\|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq 0, x \in M_k} V_k(x) &= \\ &= \inf_{k \geq 0, x \in M_k} \sup_{n \geq k} \rho^2(x_n(k, x), M_n) \geq \\ &\geq \inf_{k \geq 0, x \in M_k} \rho^2(x, M_k) > \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\inf_{k \geq 0, x \in M_k} V_k(x) = V_\varepsilon > 0,$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Далі

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x) &= V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) = \\ &= \sup_{k \geq n+1} \rho^2(x_k(n+1, x_{n+1}), M_k) - \\ &- \sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k) \leq 0, \end{aligned}$$

оскільки друга множина містить більше елементів.

Для доведення пункту 3) скористаємося тим, що M – додатно стійкий многовид. Тоді для довільного $k \geq 0$ маємо

$$\rho(x_k(n, x), M_k) = 0.$$

Звідси отримаємо, що

$$V_n(x) = 0.$$

Якщо ж $V_n(x) = 0$, то

$$\sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k) = 0.$$

а тому

$$\sup_{k \geq n} \rho(x_k(n, x), M_k) = 0.$$

Тоді $x_k(n, x) \in M_k$ для довільного $k \geq 0$, а отже M – додатно стійка множина.

Теорему доведено.

Наступні дослідження присвячені вивченню зв'язку між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевого рівнянь. В [5] приведено умови існування та стійкості інваріантної множини системи диференціальних рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова $V_h(x)$ системи різницевого рівнянь.

А саме отримано наступний результат.

Теорема 2 Нехай $V_h(x)$ знаковизначена в D_1 функція, для якої $\Delta V_h(x)$, де

$$\Delta V_h(x) = V_{h+1}(x_{h+1}) - V_h(x_h) \leq 0$$

знакостала в D_1 , сім'я функцій $V_h(x)$ рівномірно збігається по x (при $h \rightarrow 0$) до $V(x) \in C^1(D_1)$ та множина нулів $N_0(h)$:

$$V_h(x) = 0, \quad x \in D_1$$

рівномірно відділена по h від границі області ∂D_1 , тобто існують такий крок $h_0 > 0$ та числове значення $\gamma > 0$, що $\rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma, \forall h \leq h_0$.

Тоді система диференціальних рівнянь має інваріантну множину, якщо знаки $V_h(x)$ та $\Delta V_h(x)$ різні.

В даній роботі розглянемо обернену задачу, тобто отримаємо умови існування та стійкості інваріантної множини системи різницевого рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова системи диференціальних рівнянь.

Отже, нехай маємо автономну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (4)$$

та відповідну їй систему різницевого рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + hX(x_n), \quad (5)$$

де $n \geq 0, x \in D \subset R^m, h > 0$ – крок різницевого рівняння, функція $X(x)$ – обмежена, ліпшицева в D .

Тоді має місце теорема.

Теорема 3 Нехай існує додатно визначена гладка функція $V = V(x)$ така, що $\frac{\partial V}{\partial x}$ – ліпшицева та

$$V = V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} X(x)$$

– недодатно визначена в D функція.

Тоді система (5) має додатно інваріантну стійку множину, якщо знаки функцій $V(x)$ та $V_h(x)$ різні.

Доведення. Нехай маємо, що $V(x) \geq 0$ та

$V(x) \leq 0$ для $x \in \overline{D_1}$. Із [1, с.68] випливає, що множина

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1$$

є додатно інваріантною множиною системи (4).

Оскільки $V(x)$ – додатно визначена, то множина її нулів непорожня та компактна.

Множина нулів функції $V(x)$ є також

непорожньою та компактною, оскільки $V(x)$ – недодатно визначена в D .

Розглянемо наступну функцію

$$V_h(x) = \begin{cases} V(x), & V(x) < 0; \\ 0, & V(x) = 0. \end{cases}$$

Множину нулів функції $V_h(x)$ позначимо через

$$N_0^h = \{x : V_h(x) = 0\}.$$

Враховуючи вигляд функції $V_h(x)$ маємо, що множина N_0^h виглядає наступним чином:

$$N_0^h = \{x : V(x) = 0\} \cup \left\{x : V(x) = 0\right\}.$$

За наслідком [1, с.66] маємо, що

$$N_0^h = \{x : V_h(x) = 0\} = \left\{x : V(x) = 0\right\}.$$

Оскільки $V(x) \in C^1(D_1)$, то для неї існує похідна за довільним напрямом у будь-якій точці:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \leq 0.$$

для будь-якого $x \in D_1$.

Це означає, що існує такий крок $h_0 > 0$, що для довільного $h < h_0$ виконується нерівність

$$\Delta V(x) = V(x + hX(x)) - V(x) \leq 0.$$

Відмітимо також, що справедлива поточкова збіжність, а саме

$$\frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \rightarrow V(x),$$

при $h \rightarrow 0$.

Покажемо, що крок h_0 не залежить від x .
Позначимо через

$$f_h(x) = \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h}.$$

Враховуючи, що функція $V(x)$ – ліпшицева, а $X(x)$ – обмежена, отримаємо оцінку для $|f_h(x)|$, а саме

$$\begin{aligned} |f_h(x)| &= \left| \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \right| = \\ &= \frac{1}{h} |V(x + hX(x)) - V(x)| \leq |X(x)| \leq C. \end{aligned}$$

Далі, із того, що $\frac{\partial V}{\partial x}$ – ліпшицева, а $X(x)$ – обмежена, матимемо оцінку

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left[\frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} \left(E + h \frac{\partial X}{\partial x} \right) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + h \frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \right] \leq C_1. \end{aligned}$$

За рахунок малості h можемо стверджувати, що $x + hX(x) \in D$ для $x \in D$.

Будемо розглядати функцію $f_h(x)$, для якої виконуються умови Ліпшиця, поточкова збіжність та рівностепенна неперервність. Тоді можемо стверджувати, що буде справедливою рівномірна збіжність функції $f_h(x)$:

$$f_h(x) \rightarrow f(x), \text{ при } h \rightarrow 0,$$

тобто буде виконуватися

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D:$$

$$|f_{h_n}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Припустимо, що це не вірно. Це означає, що існує $\varepsilon > 0$ та послідовність x_n така, що $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, що буде виконуватися

$$|f_{h_n}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

З іншої сторони маємо:

$$\begin{aligned} |f_{h_n}(x_n) - f(x_n)| &= \\ &= |f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0) + f_{h_n}(x_0) - f(x_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ f(x_0) - f(x_n)| \leq |f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0)| + \\ &+ |f_{h_n}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_n) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Оцінимо доданки в останній нерівності. Оскільки $f_{h_n}(x)$ – ліпшицева, а $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, то

$$|f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0)| \leq L|x_n - x_0| \rightarrow 0.$$

Аналогічно отримаємо, що

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq L|x_n - x_0|.$$

Із поточної збіжності випливає, що другий доданок прямує до нуля. Прийшли до протиріччя.

Отже із [7] випливає, що система (5) має додатно інваріантну стійку множину
Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. 1987. – 304 с.
2. *Игнатъев А. О.* О существовании функции Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств // Укр. мат. журн. т. 45, № 7 (1993), с. 932 – 941.
3. *Станжицький О. М.* Дослідження інваріантних множин систем з випадковими збуреннями за допомогою функцій Ляпунова // Укр. мат. журн. т. 50, № 2 (1998), с. 309 – 312.
4. *Aterwi A. M.* To the problem on periodic solutions of one class of systems of difference equations // Укр. мат. журн. т. 49, № 2 (1997), с. 309 – 314.
5. *Ткачук А. М.* Зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. т. 9, № 2 (2006), с. 280 – 285.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. – 472 с.
7. *Ткачук А. М.* Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість // Нелінійні коливання. т. 8, № 2 (2005), с. 258 – 264.

Надійшла до редколегії 29.09.2008

УДК 531.36+629.78.001+62-755

Ірина І. Філімоніхіна*, асистент
Олег О. Горошко, д.ф.-м.н., професор

Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем

За допомогою методики, заснованої на теоремі Рауса, одержані достатні умови стійкості, які із точністю до меж співпадають із необхідними, основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем, складених із обертового несучого тіла і приєднаних до нього тіл.

Ключові слова: обертове тіло, демпфер, автобалансир, усталений рух, стійкість.

*E-mail: fii@online.ua

Статтю представила кафедра теоретичної і прикладної механіки

Вступ.

В роботах [1-4] визначалися умови, за яких пасивні автобалансири (АБ) зможуть усунути кут нутації незрівноваженого обертового несучого тіла, що входить до складу ізольованої системи. Ця задача актуальна для штучних супутників Землі, космічних апаратів, положення яких у просторі стабілізується обертанням [5-7]. В роботах [1-3] із застосуванням енергетичного підходу і емпіричного методу були знайдені узагальнені необхідні умови усунення АБ кута нутації, придатні для АБ будь-якого типу. В роботі [4], із застосуванням теореми Рауса, були одержані аналогічні достатні умови, які із точністю до меж співпадають із необхідними. Також були одержані узагальнені рівняння усталених рухів вказаних вище систем, зокрема для випадку, коли система має елементи, здатні накопичувати потенціальну енергію, обґрунтована методика оцінки стійкості різних усталених рухів. В цій роботі методика, розвинута у роботі [4], застосовується до визначення умов стійкості так званих основних рухів чотирьох ізольованих обертових систем, складених із несучого обертового тіла і приєднаних до нього тіл. В цих рухах система обертається як одне жорстке ціле навколо повздовжньої осі несучого тіла. В розглянутих системах приєднані тіла утворюють двохмаятниковий демпфер, чи АБ Кларка [8,9], рідинний АБ „Дункан” [8], рідинний демпфер, чи АБ Леблана [5-9], і невагомий стержень із зосередженою масою на кінці, який моделює штиркову антену [7].

I.I. Filimonikhina, assistant professor
O.O. Goroshko, Dr. Sci (Phys.-Math.), professor

Conditions of stability of the main motions of fore rotating isolated systems

By means of method based on the Routh theorem are received the sufficient conditions which coincide with necessary conditions within borders, of stability of the main motions of fore rotating isolated systems built from a rotating bearing body and added to him bodies.

Key Words: rotating body, damper, autobalancer, steady-state motion, stability.

§1. Опис системи, основні допущення, необхідні умови стійкості

Ізольовані механічні системи, що розглядаються, складені із обертового несучого тіла (тіла), масою M і приєднаних до нього тіл, загальною масою m . Тіло має центр мас у точці O , та осьові моменти інерції A, B, C відносно власних головних центральних осей інерції $O\xi\eta\zeta$. Форми приєднаних тіл для кожної задачі оговорюється окремо. Відносному руху приєднаних тіл перешкоджають сили в'язкого опору. Для ізольованих систем мають місце закони збереження руху центра мас і кінетичного момента системи. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що центр мас системи нерухомий. Тоді при усталених рухах система обертається як одне жорстке ціле навколо нерухомої у просторі осі z_G , що проходить через центр мас системи – точку G і спрямована вздовж вектора кінетичного момента системи. На основному русі вісь ζ співпадає із віссю z_G . На основному русі система має головні центральні осьові моменти інерції A_G, B_G, C_G ($C_G = J_{z_G}$).

Відповідно до результатів робіт [3,4] для стійкості основного руху системи, у якій немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію, необхідно і достатньо, щоб на ньому осьовий момент інерції системи J_{z_G} мав максимум. Якщо система має такі елементи, то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб на ньому потенціальна енергія приведеної системи W мала мінімум.

Нижче J_{z_G} і W визначаються як функції позиційних координат. При цьому враховується особливість кожної з розглянутих систем, робляться припущення щодо механізму втрати стійкості основним рухом і визначається найменша кількість координат, що впливають на втрату стійкості.

§2. Приєднані тіла утворюють двохмаятниковий демпфер або АБ Кларка

Модель двухмаятникового демпфера або АБ Кларка показана на рис. 1. На дві осі, паралельні осі ζ , розташовані на відстані a від неї, насаджені два математичних маятника довжиною l і масою $m/2$. Маятники рухаються у площині $O_1\xi_1\eta_1$, паралельній площині $O\xi\eta$, розташованій на відстані b від неї.

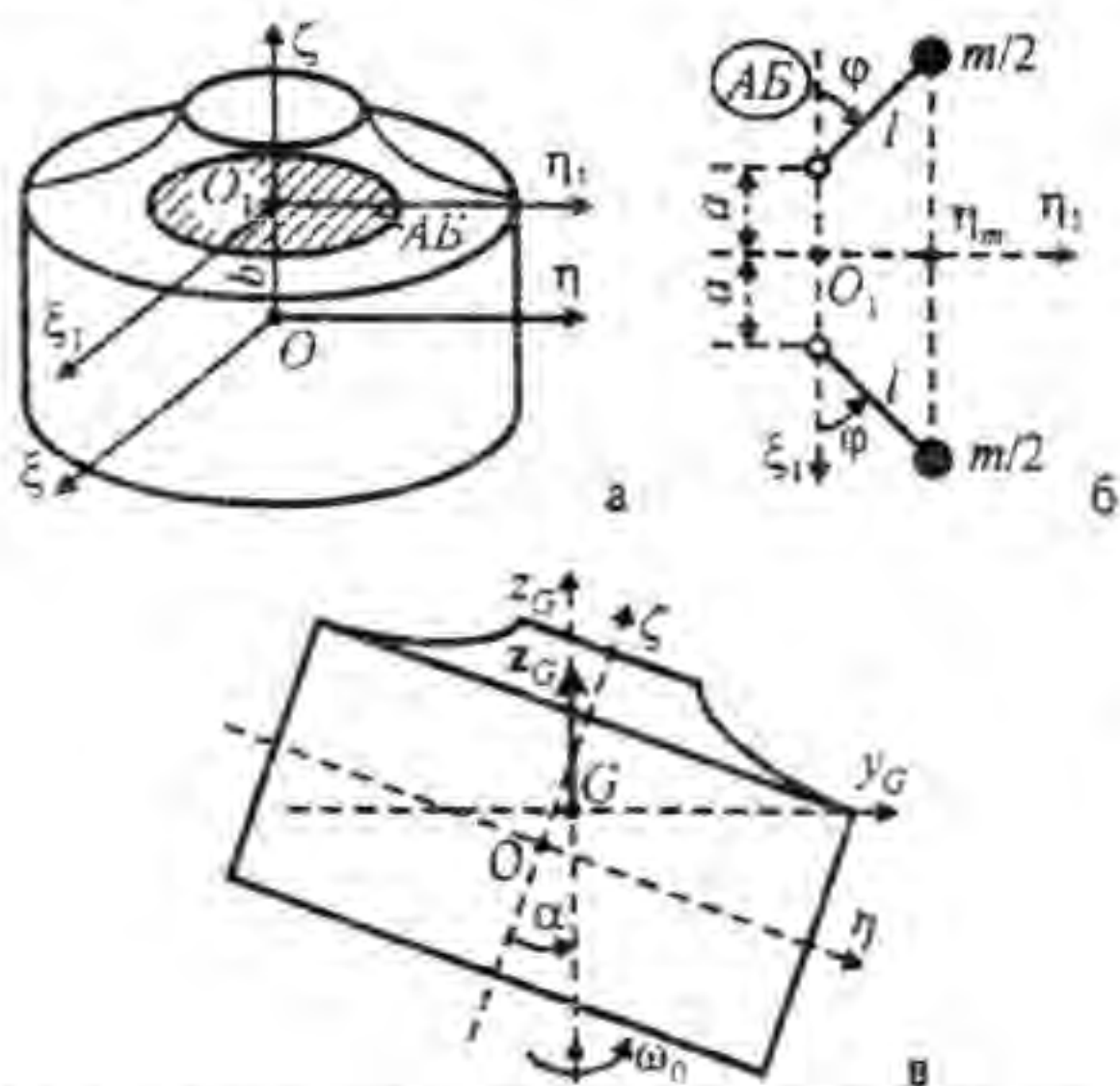


Рис. 1 Модель обертового тіла із двухмаятниковим демпфером або АБ Кларка

Приймаємо такий механізм втрати стійкості. В основному русі маятники лежать на осі ξ_1 і система обертається як одне жорстке ціле навколо повздовжньої осі тіла ζ . На побічному русі, який стає стійким, коли основний рух втрачає стійкість, маятники утворюють з віссю ξ_1 рівні кути φ і система обертається як одне жорстке ціле навколо осі z_G , з якою вісь ζ утворює кут α (рис. 1, в). Отже, на основному русі $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, а на побічному $\varphi \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Надалі вважаємо, що $B_G > A_G$. Тільки в цьому разі при втраті стійкості основним рухом система почне повертатися навколо осі x_G , що відповідає побудованій схемі втрати стійкості. Таке

співвідношення має місце, наприклад, у випадку осесиметричного несучого тіла ($A = B$).

У системі немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію. Тому оцінюємо стійкість по J_{z_G} . Шукаємо J_{z_G} як функцію координат φ , α . З рис. 1, а знаходимо координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{ml \sin \varphi}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{mb}{M_\Sigma}. \quad (2.1)$$

Осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} J_\xi &= A + m(l^2 \sin^2 \varphi + b^2), \\ J_\eta &= B + m[(a + l \cos \varphi)^2 + b^2], \\ J_\zeta &= C + m[l^2 \sin^2 \varphi + (a + l \cos \varphi)^2], \\ J_{\xi\eta} &= J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m = mlb \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} J_{\xi_G} &= A_G + \frac{mMl^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi, \\ J_{\eta_G} &= B_G - ml[2a(1 - \cos \varphi) + l \sin^2 \varphi], \\ J_{\zeta_G} &= C_G - 2mla(1 - \cos \varphi) - \frac{m^2l^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi, \\ J_{\xi_G\eta_G} &= J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMlb}{M_\Sigma} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned} A_G &= A + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad B_G = B + m(a + l)^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \\ C_G &= C + m(a + l)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Одиничний вектор z_G , спрямований по осі z_G , має в проєкціях на осі $O\xi_G\eta_G\zeta_G$ такі складові (рис. 1, в)

$$z_G = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)^T. \quad (2.6)$$

Тоді

$$\begin{aligned} J_{z_G} &= z_G^T \mathbf{J}_G z_G = \frac{mMlb}{M_\Sigma} \sin \varphi \sin 2\alpha + \\ &+ \{B_G - ml[2a(1 - \cos \varphi) + l \sin^2 \varphi]\} \sin^2 \alpha + \end{aligned}$$

$$+ \left[C_G - 2mla(1 - \cos \varphi) - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi \right] \cos^2 \alpha. \quad (2.7)$$

В околі основного руху $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ із точністю до величин другого порядку малості включно

$$J_{z_G} \approx k[a_0 - (a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2)], \quad (2.8)$$

де

$$k = ml^2, \quad a_0 = \frac{C_G}{ml^2}, \quad a_{11} = \frac{a}{l} + \frac{m}{M_\Sigma},$$

$$a_{22} = \frac{C_G - B_G}{ml^2}, \quad a_{12} = -\frac{b}{l} \cdot \frac{M}{M_\Sigma}. \quad (2.9)$$

Для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб квадратична форма $a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2$ мала мінімум. Критерій Сильвестра дає такі умови стійкості

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (2.10)$$

З цих умов знаходимо

$$C_G > B_G,$$

$$(C_G - B_G) \frac{a}{l} + \left[(C_G - B_G) - M_\Sigma b'^2 \right] \frac{m}{M_\Sigma} > 0, \quad (2.11)$$

де

$$b' = Mb / M_\Sigma \quad (2.12)$$

- відстань від центра мас системи до площини маятників. З (2.11) видно, що навіть у випадку сплюснутого складеного тіла ($C_G > A_G, B_G$) стійкість основного руху втрачається із зростанням b' .

§3. Пряєднані тіла утворюють рідинний АБ „Дункан”

Модель АБ „Дункан” показана на рис. 2.

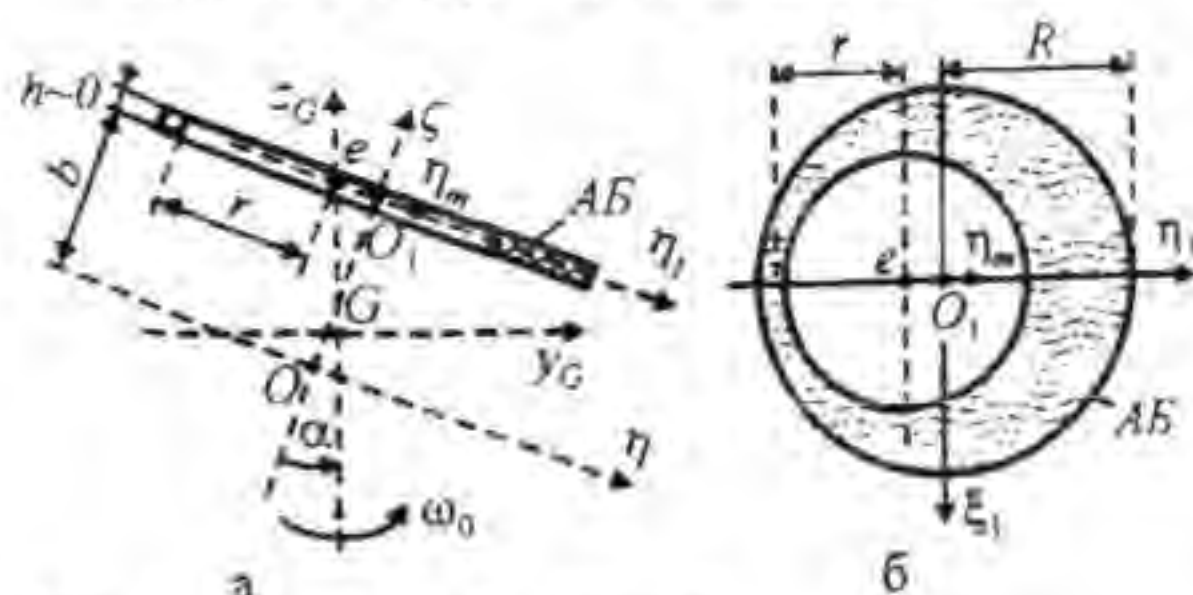


Рис. 2 Рідинний АБ „Дункан”

Загальна маса рідини - m , її товщина h незначна ($h \ll R$) і тому вважаємо, що рідина рухається у площині $O_1 \zeta_1 \eta_1$. Рідину зовні обмежує циліндрична ємність радіуса R . Всередині рідини плаває порожній циліндр радіуса r . Його масою нехтуємо. Вважаємо, що на усталених рухах

центр циліндра знаходиться на відстані e від осі ζ_1 , але на осі z_G . На рис. 2 показаний механізм втрати стійкості основним рухом для випадку, коли $B \geq A$.

З рис. 2 знаходимо координати центра мас рідини відносно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = b. \quad (3.1)$$

Тоді координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma} \quad (3.2)$$

Введемо позначення

$$a = r/R. \quad (3.3)$$

Враховуючи розташування мас системи, можна знайти, що

$$e = \eta_m(1 - a^2)/a^2. \quad (3.4)$$

Тоді осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд:

$$J_\xi = A + \frac{mR^2}{4}(1 + a^2) + mb^2 - m\eta_m^2 \frac{1 - a^2}{a^2},$$

$$J_\eta = B + \frac{mR^2}{4}(1 + a^2) + mb^2,$$

$$J_\zeta = C + \frac{mR^2}{2}(1 + a^2) - m\eta_m^2 \frac{1 - a^2}{a^2},$$

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = mb\eta_m. \quad (3.5)$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$ - паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд (2.3), або у розгорнутому вигляді

$$J_{\xi_G} = A_G - m^2\eta_m^2 / M_\Sigma, \quad J_{\eta_G} = B_G,$$

$$J_{\zeta_G} = C_G - m \left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma} \right) \eta_m^2,$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = mMb\eta_m / M_\Sigma, \quad (3.6)$$

де

$$A_G = A + mR^2(1 + a^2)/4 + mMb^2 / M_\Sigma,$$

$$B_G = B + mR^2(1 + a^2)/4 + mMb^2 / M_\Sigma,$$

$$C_G = C + mR^2(1 + a^2)/2. \quad (3.7)$$

Зауважимо, що $B_G \geq A_G$.

Осьовий момент інерції J_{z_G} системи

$$J_{z_G} = B_G \sin^2 \alpha + \frac{2mMb}{M_\Sigma} \eta_m \sin \alpha \cos \alpha +$$

$$+ \left[C_G - m \left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma} \right) \eta_m^2 \right] \cos^2 \alpha. \quad (3.8)$$

102

На основному русі $x=0$ і осьовий момент інерції J_{z_0} буде мати максимум за умови (3.13), з чого випливає, що умови стійкості основних рухів у випадках АБ Леблана і АБ „Дункан” – співпадають.

§5. Прислані тіла утворюють стержень, спрямований по повздовжній осі несучого тіла

Модель обертового тіла із стержнем, спрямованим по повздовжній осі, тіла показана на рис. 4. Стержень – невагомий, несе зосереджену масу m на кінці. У першому випадку стержень абсолютно жорсткий, прикріплений в'язко-пружним сферичним шарніром до несучого тіла (рис. 4, а). В другому випадку стержень – пружний (рис. 4, б).

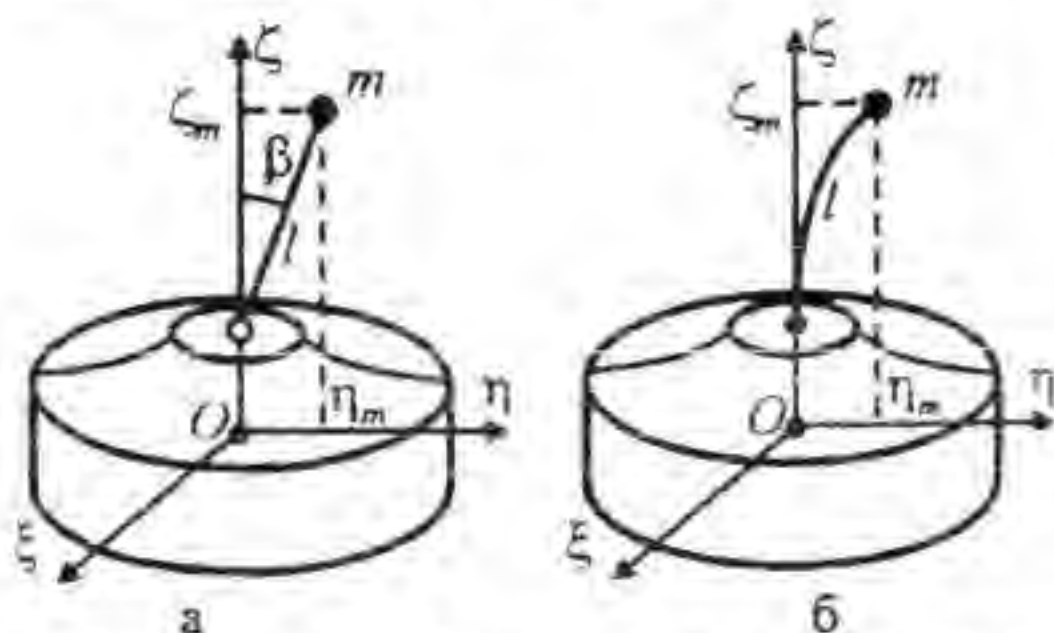


Рис. 4 Модель обертового тіла із стержнем, спрямованим по повздовжній осі тіла

В основному русі маятник лежить на осі ζ , маса знаходиться на відстані b від точки O , і система обертається навколо осі ζ . На побічному русі, який стає стійким, коли основний рух втрачає стійкість, маса маятника має координати

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = \zeta_m, \quad (5.1)$$

причому це у випадку, коли $B_G \geq A_G$. Тоді координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma}, \quad (5.2)$$

Осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$J_\xi = A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2), \quad J_\eta = B + m\zeta_m^2, \quad J_\zeta = C + m\eta_m^2, \quad (5.3)$$

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m.$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд (2.3), або у розгорнутому вигляді

$$J_{\xi_G} = A_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\eta_m^2 + \zeta_m^2 - b^2),$$

$$J_{\eta_G} = B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2), \quad J_{\zeta_G} = C + \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m^2,$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m\zeta_m, \quad (5.4)$$

де

$$A_G = A + mMb^2/M_\Sigma, \quad B_G = B + mMb^2/M_\Sigma, \quad (5.5)$$

Осьовий момент інерції J_{z_0} системи

$$J_{z_0} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = \left[B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2) \right] \sin^2 \alpha - \frac{mM}{M_\Sigma} \eta_m \zeta_m \sin 2\alpha + \left[C + \frac{mM}{M_\Sigma} \eta_m^2 \right] \cos^2 \alpha, \quad (5.6)$$

Кінетична енергія системи на усталеному русі

$$T_0 = K^2 / (2J_{z_0}) = \omega_0^2 C^2 / 2J_{z_0}, \quad (5.7)$$

де K – модуль вектора кінетичного моменту системи, ω_0 – швидкість обертання системи на основному русі.

З точністю до величин другого порядку малості включно потенціальна енергія системи має вигляд

$$P \approx c\eta_m^2 / 2, \quad (5.8)$$

де c – коефіцієнт жорсткості шарніра чи стержня.

Потенціальна енергія приведеної системи

$$W = T_0 + P, \quad (5.9)$$

Оскільки система має елементи, здатні накопичувати потенціальну енергію, то стійкість основного руху будемо досліджувати по W .

Для гнучкого чи жорсткого стержня координату ζ_m , із точністю до величин другого порядку малості щодо η_m , можна подати у вигляді

$$\zeta_m \approx b - b_2 \eta_m^2, \quad (5.10)$$

де b_2 – деяка стала величина. Введемо у розглядання нову безрозмірну координату

$$\varphi = \eta_m / b, \quad (5.11)$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості щодо φ, α включно

$$2W \approx k(a_0 + a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2), \quad (5.12)$$

де

$$k = mb^2\omega_0^2, \quad a_0 = \frac{C}{mb^2}, \quad a_{11} = \frac{cM_\Sigma - mM\omega_0^2}{mM_\Sigma\omega_0^2},$$

$$a_{12} = -\frac{M}{M_\Sigma}, \quad a_{22} = \frac{C - B_G}{mb^2}, \quad (5.13)$$

З першої групи умов критерію Сильвестра знаходимо такі необхідні умови стійкості основного руху

$$\omega_0 < \omega_1, \quad C > B_G, \quad (5.14)$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{cM_\Sigma / (mM)}. \quad (5.15)$$

Друга група умов після перетворень дає

$$\Delta_2 = \frac{M}{mb^2 M_\Sigma \omega_0^2} [(C - B_G) \omega_1^2 - (C - B) \omega_0^2] > 0,$$

звідки знаходимо таку необхідну умову стійкості

$$\omega_0 < \omega_2. \quad (5.16)$$

де

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \sqrt{\frac{C - B_G}{C - B}} = \sqrt{\frac{c_0 M_\Sigma}{mM}} \cdot \sqrt{\frac{C - B_G}{C - B}}. \quad (5.17)$$

Разом умови (5.14) і (5.16) дають такі необхідні і достатні умови стійкості основного руху

$$C > B_G, \quad \omega_0 < \omega_2. \quad (5.18)$$

З одержаних умов випливає, що навіть у випадку сплюсненого складеного тіла ($C > A_G, B_G$) існує критична швидкість ω_2 , при перевищенні якої основний рух втрачає стійкість.

Висновки. Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки.

1. Умова стійкості усталеного руху обертової ізольованої системи, відповідно до якої на цьому русі складене тіло повинно обертатися навколо осі найбільшого момента інерції, є необхідною, але не є достатньою умовою стійкості.

2. Якщо приєднані тіла утворюють демпфери, що проявляють автобалансувальні властивості (маятникові, рідинні), то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло було сплюснутим і щоб відстань від центра мас системи до площини зрівноваження (b') не перевищувала певного граничного значення.

3. Якщо приєднане тіло – пружно закріплений стержень, орієнтований по повздовжній осі несучого тіла, то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло було сплюснутим і система

оберталася з кутовими швидкостями, що не перевищують певне граничне значення.

Список використаних джерел

1. Філімоніхіна І.І. Умови зменшення автобалансирами кута нутації обертового супутника Землі // Всеукраїнський н.-т. журнал „Вібрації у техніці та технологіях”. – 2007. №1 (46), – С. 34–37.
2. Філімоніхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2007. №3, – С. 103–109.
3. Филимоных И.И., Филимоных Г.Б. Условия уравновешивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика. – 2007. – 43, №11. – С. 113–120.
4. Горошко О.О., Філімоніхіна І.І. Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. №1. – С. 53–58.
5. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И. Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизируемых вращением. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
6. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
7. Докучаев Л.В., Рабинович Б.И. Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта Интербол // Космические исследования. – 1999. – 37, №6. – С. 589–597.
8. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
9. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

Надійшла до редколегії 19.09.08

УДК 629.7.015

Олексій М. Харитонов, к. ф.-м. н., доцент,

Олександр Т. Дехтяр, магістр

Оптимізація виведення космічного апарату з ядерним ракетним двигуном на сферу впливу Землі

Запропоновано новий підхід до побудови оптимальної траєкторії виведення космічного апарату на сферу впливу Землі, що враховує обмеженість тяги двигуна. Визначено ефективність оптимального керування та проведено порівняльний аналіз вказаного підходу з класичним підходом імпульсної апроксимації

Ключові слова: ядерний ракетний двигун, модель центрального однорідного гравітаційного поля, двигун великої тяги, оптимізація активної ділянки.

*E-mail: kharytonov@univ.kiev.ua, dekhtyar.alexander@gmail.com

Представила кафедра механіки суцільних середовищ

1 Вступ

Здійснення пілотованих експедицій до планет Сонячної системи, зокрема, до Марсу та Місяця, є однією з актуальних задач сучасної космонавтики. Як очікується [1-3], такі експедиції будуть виконуватися з широким застосуванням космічних апаратів (КА), споряджених ядерними ракетними двигунами (ЯРД) великої тяги. Питома швидкість витікання у ЯРД є більш ніж в два рази вищою, ніж у традиційних хімічних ракетних двигунів [4,5]. Забезпечуючи вдвічі більшу економічність, ЯРД, проте, мають на порядок меншу тягоозброєність (порядку одиниці).

Задача оптимізації міжпланетних траєкторій КА з двигунами великої тяги досліджена достатньо повно (див., наприклад, [6, 7]). Методи її розв'язання ґрунтуються на імпульсній апроксимації активних ділянок траєкторії – моделі, що припускає необмеженість тяги. Витрати палива на кожному імпульсі є мінімальними для режиму з максимальною ефективною швидкістю витікання. Такий підхід не дозволяє побудувати оптимальний закон керування вектором тяги, що залежить від умов виконання маневру та специфіки процесу керування тягою для конкретної рушійної системи.

O. M. Kharytonov, Cand. Sci (Phys.-Math.), Associate Professor,

A. T. Dekhtyar, graduate student

Optimal Transfer of Spacecraft with Nuclear Thermal Propulsion to the Earth's Sphere of Influence

A new approach to the optimization of high-thrust transfers to the Earth's sphere of influence has been suggested. The finiteness of engine thrust has been taken into account. The efficiency of optimal control has been analyzed. Comparative analysis of the suggested approach and the traditional burn approximation approach has been carried out.

Key Words: nuclear thermal propulsion, central uniform gravitational field model, high thrust propulsion, optimization of active arc.

В останні роки все більше уваги приділяється урахуванню обмеженості тяги при оптимізації траєкторій КА з двигунами великої тяги. Порівняння імпульсних оптимальних траєкторій, та траєкторій, отриманих з урахуванням обмеженості тяги, дозволило в ряді випадків встановити якісні відмінності навіть для двигунів з тягоозброєністю 20 [8]. У випадку розрахунку оптимальних траєкторій КА з ЯРД модель імпульсної апроксимації може давати неадекватні результати, з огляду на порівняно невисоку тягоозброєність двигунів цього класу. Таким чином, в сучасній механіці космічного польоту є актуальним питання щодо віднесення ЯРД до класу двигунів великої тяги і можливостей застосування для розрахунку оптимальних траєкторій руху КА з ЯРД класичних підходів, ґрунтованих на імпульсній апроксимації активних ділянок. Вказана проблема сформульована у роботі [9], де було запропоновано нову математичну модель керування рухом центру мас КА з ЯРД і досліджено загальні властивості оптимального керування з урахуванням специфіки рушійної системи та гравітаційних впливів на активних ділянках.

Дана стаття присвячена подальшому розвитку методів оптимізації міжпланетних

траєкторій КА з двигунами великої тяги, оснований на урахуванні обмеженості тяги та скінченності тривалості активних ділянок.

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимізації міжпланетного перельоту, сформульовану за допомогою плоскої кругової моделі руху планет. В якості функціоналу оберемо масу корисного навантаження. Для розв'язання задачі будемо використовувати модифікований метод сфер впливу (ММСВ) [7]. Припустимо, що зовнішня задача ММСВ, пов'язана з оптимізацією руху на геліоцентричній ділянці, розв'язана. Зазначеним розв'язком може бути, наприклад, гоманівський переліт.

Для постановки внутрішньої задачі введемо нерухому систему координат з початком в центрі Землі (рис. 1). Тоді в цій системі на сфері впливу буде заданий вільний вектор швидкості, яку повинен здобути КА для руху по геліоцентричній орбіті $\vec{v}_{\text{вп}} = \vec{v} - \vec{u}$, де $\vec{v}$ – вектор швидкості КА на сфері впливу Землі, а $\vec{u}$ – вектор швидкості Землі в геліоцентричній системі координат. При відльоті від Землі внутрішня задача ММСВ зводиться до побудови оптимальної траєкторії КА в полі тяжіння Землі, що забезпечує перехід КА з заданої орбіти штучного супутника (ШС) на сферу впливу, радіус якої вважається нескінченним. Тоді величину швидкості $v_{\text{вп}}$ можна вважати гіперболічним надлишком швидкості для геоцентричної гіперболічної орбіти, по якій відбувається рух КА на пасивній ділянці. Таким чином, внутрішня задача ММСВ зводиться до оптимізації траєкторії виведення КА на гіперболічну орбіту, оптимальну серед орбіт, що мають заданий гіперболічний надлишок швидкості $v_{\text{вп}}$. Положення КА на орбіті ШС в початковий момент визначається кутовою координатою ω_0 (рис. 1), а положення на орбіті призначення в момент завершення маневру – істинною аномалією ϑ_1 . Вибір оптимальних значень параметрів ω_0 і ϑ_1 , а також радіусу перицентру R_p гіперболічної орбіти повинен здійснюватися при розв'язанні загальної варіаційної задачі.

Припускаючи, що активна ділянка траєкторії знаходиться у тонкому сферичному шарі, для якого $\Delta R/R_0 \ll 1$, де R_0 – внутрішній радіус, ΔR – різниця зовнішнього та внутрішнього радіусів шару, для опису гравітаційного впливу на цій ділянці застосуємо модель центрального

однорідного гравітаційного поля (ЦОГП) [7]. Згідно цієї моделі гравітаційне прискорення визначається формулою $\vec{G} = \mu \vec{R}/R_{\text{ср}}^3$, де $R_{\text{ср}}$ – деяке проміжне значення між внутрішнім та зовнішнім радіусами сферичного шару. В даній роботі прийнято $R_{\text{ср}} = (R_0 + R_p)/2$.

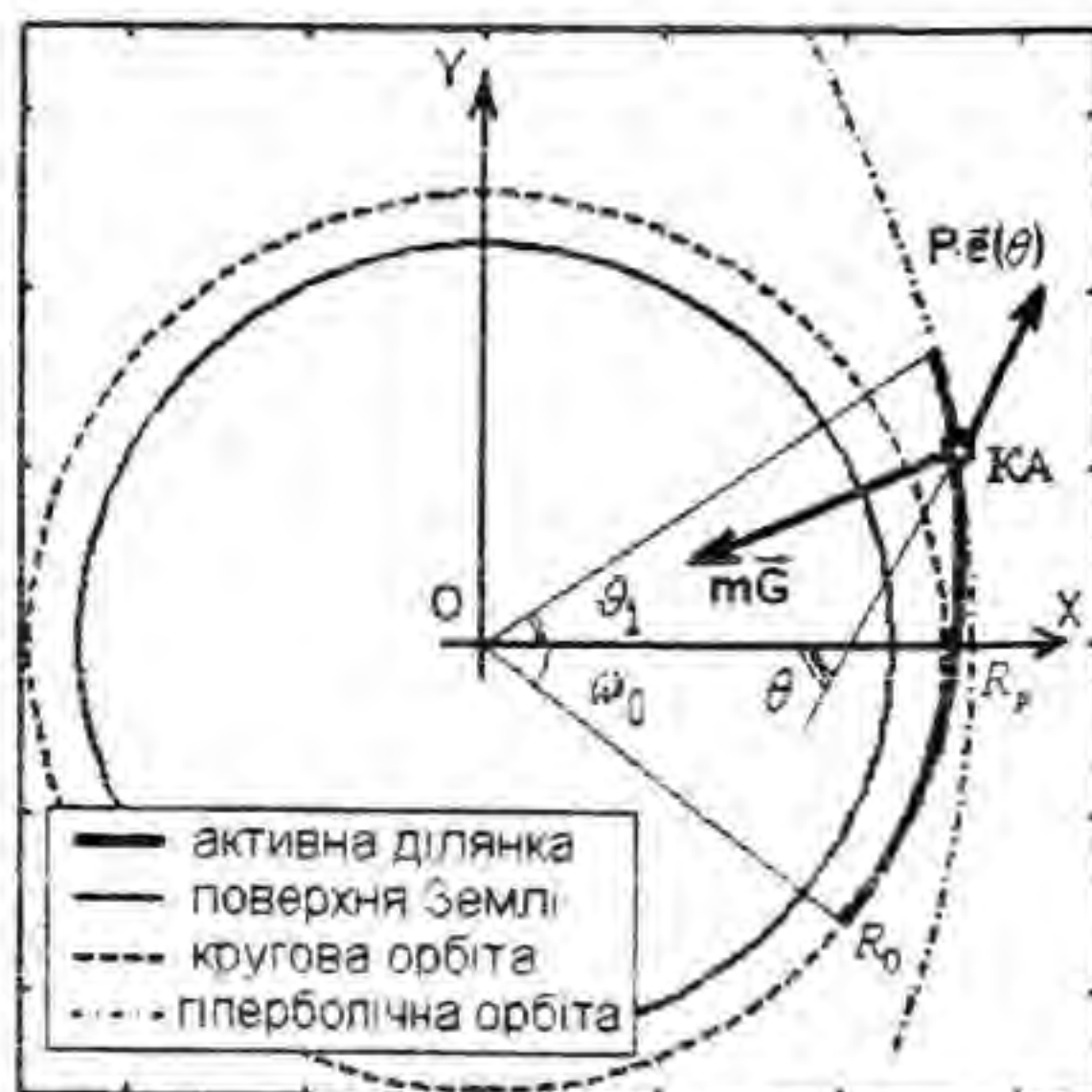


Рис. 1 Схема перельоту космічного апарату на гіперболічну орбіту виведення на сферу впливу

Тяга ЯРД $\bar{P}$ визначається через секундну масову витрату робочого тіла Q і теплову потужність ядерного реактора $\bar{N}$ [9]:

$$\bar{P} = \gamma \cdot \sqrt{\bar{N}Q} / \sqrt{C_p} \quad (1)$$

$$\bar{N} \in [\bar{N}_{\text{min}}, \bar{N}_{\text{max}}] \quad Q \in [Q_{\text{min}}, Q_{\text{max}}]$$

де γ – постійний коефіцієнт пропорційності, що визначається характеристиками рушійної системи, C_p – середня теплоємність палива.

Якщо величина тяги є фіксованою, керування відбувається лише за рахунок зміни напрямку вектора тяги $\vec{e}(t)$. В такому випадку задача максимізації корисного навантаження еквівалентна задачі мінімізації паливних витрат.

Постановка задачі оптимізації виведення КА з ЯРД на сферу впливу має вигляд (2), де x, y, v_x, v_y – координати та компоненти вектору швидкості центру мас КА, m_μ – маса використаного палива, $N = \bar{N}/N_*$, $q = \bar{Q}/Q_*$, $r_{\text{ср}} = R_{\text{ср}}/R_*$. Кут між напрямком вектора тяги та віссю абсцис $\theta = \theta(t)$ являє собою функцію керування напрямком вектора тяги.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & x(t_0) = r_0 \cdot \cos \omega_0, & x(t_1) = \frac{p(r_p) \cdot \cos \vartheta_1}{1 + e(r_p) \cdot \cos \vartheta_1}, \\ \dot{y} = v_y, & y(t_0) = r_0 \cdot \sin \omega_0, & y(t_1) = \frac{p(r_p) \cdot \sin \vartheta_1}{1 + e(r_p) \cdot \cos \vartheta_1}, \\ \dot{v}_x = a_0 \frac{\sqrt{N \cdot q} \cdot \cos \theta}{1 - m_\mu} - c \cdot \frac{x}{r_{cp}^3}, & v_x(t_0) = -v_0 \cdot \sin \omega_0, & v_x(t_1) = -K \sqrt{\frac{1}{p(r_p)}} \sin \vartheta_1, \\ \dot{v}_y = a_0 \frac{\sqrt{N \cdot q} \cdot \sin \theta}{1 - m_\mu} - c \cdot \frac{y}{r_{cp}^3}, & v_y(t_0) = v_0 \cdot \cos \omega_0, & v_y(t_1) = K \sqrt{\frac{1}{p(r_p)}} (e(r_p) + \cos \vartheta_1), \\ \dot{m}_\mu = a_0 \cdot q, & m_\mu(t_0) = 0, & m_\mu(t_1) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2)$$

$$\omega_0 \rightarrow \text{opt}, \vartheta_1 \rightarrow \text{opt}, r_p \rightarrow \text{opt}, q = \text{const}, N = \text{const}.$$

Вирази для масштабів лінійних величин R_* , швидкостей V_* , потужності N_* , витрати Q_* , маси M_* та часу t_* мають вигляд (3). При переході до безрозмірних змінних виникають безрозмірні комплекси (4).

$$\begin{aligned} R_* &= \frac{\gamma^2}{g \cdot C_p} \frac{\bar{N}_{\max}}{Q_{\max}}, & V_* &= \frac{\gamma}{\sqrt{C_p}} \sqrt{\frac{\bar{N}_{\max}}{Q_{\max}}}, \\ t_* &= \frac{\gamma}{g \cdot \sqrt{C_p}} \sqrt{\frac{\bar{N}_{\max}}{Q_{\max}}}, & M_* &= M(t_0), \\ N_* &= \bar{N}_{\max}, & Q_* &= Q_{\max}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\bar{P}_{\max}}{g \cdot M_*}, & c &= \frac{\mu \cdot R}{V_*^4}, \\ K &= \frac{\sqrt{\mu}}{V_* \cdot \sqrt{R}}, & L &= \frac{h \cdot R_*}{\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

В виразах (3),(4) $\bar{P}_{\max} = \gamma \sqrt{\bar{N}_{\max} \cdot Q_{\max}} / \sqrt{C_p}$ – максимальна тяга двигуна, g та μ – прискорення вільного падіння і гравітаційний параметр Землі, $r_0 = R_0 / R_*$, $v_0 = K \cdot \sqrt{1/r_0}$ – радіус та швидкість руху КА на початковій орбіті, r_p , $h = (v_{cp})^2$, $p(r_p) = L \cdot r_p^2 + 2 \cdot r_p$, $e(r_p) = L \cdot r_p + 1$ – радіус перицентру, гіперболічний надлишок швидкості, параметр та ексцентриситет гіперболічної орбіти призначення.

Таким чином, постановка варіаційної задачі Майєра (2) полягає у відшуванні оптимальної програми керування напрямком вектора тяги $\theta(t)$ і оптимальних значень параметрів ω_0 , ϑ_1 та r_p , що забезпечують переведення КА з початкової кругової орбіти на оптимальну

гіперболічну орбіту виведення на сферу впливу при мінімумі витрат палива.

3 Розв'язання задачі

Аналіз необхідних умов оптимальності керування проведемо використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [10]. Для цього запишемо функцію Гамільтона H :

$$\begin{aligned} H &= \psi_x \cdot v_x + \psi_y \cdot v_y + \psi_{m_\mu} (a_0 \cdot q) + \\ &+ \psi_{v_x} \left(\frac{a_0 \sqrt{Nq} \cos \theta}{1 - m_\mu} - \frac{cx}{r_{cp}^3} \right) + \psi_{v_y} \left(\frac{a_0 \sqrt{Nq} \sin \theta}{1 - m_\mu} - \frac{cy}{r_{cp}^3} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_{v_x}, \psi_{v_y}, \psi_{m_\mu}$ – спряжені функції.

Вираз для оптимального керування θ_{opt} дістанемо з умов максимуму гамільтоніана по θ :

$$\cos \theta = \frac{\psi_{v_x}}{\sqrt{\psi_{v_x}^2 + \psi_{v_y}^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\psi_{v_y}}{\sqrt{\psi_{v_x}^2 + \psi_{v_y}^2}}. \quad (6)$$

Виходячи з результатів [9], будемо припускати $N = N_{\max} = 1$ та $q \in [q_0, q_{\max}]$.

Спряжена система $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ має інтеграли:

$$\begin{aligned} \psi_x &= C_2 \sin \sqrt{C} t + C_1 \cos \sqrt{C} t, \\ \psi_y &= C_4 \sin \sqrt{C} t + C_3 \cos \sqrt{C} t, \\ \psi_{v_x} &= \frac{1}{\sqrt{C}} (C_2 \cos \sqrt{C} t - C_1 \sin \sqrt{C} t), \\ \psi_{v_y} &= \frac{1}{\sqrt{C}} (C_4 \cos \sqrt{C} t - C_3 \sin \sqrt{C} t), \end{aligned} \quad (7)$$

де $C = c/r_{cp}^3$, а C_1, C_2, C_3, C_4 – сталі інтегрування.

В даному випадку система матиме перший інтеграл [10]:

$$H = 0. \quad (8)$$

Умови трансверсальності запишемо у формі:

$$[\delta m_\mu - H \delta t + \bar{\psi} \delta \bar{x}]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (9)$$

Виражаючи варіації фазових координат та швидкостей на лівому кінці траєкторії через одну незалежну варіацію $\delta \omega_0$, на правому – через дві $\delta \vartheta_1$, δr_p , збираючи коефіцієнти при незалежних варіаціях та прирівнюючи їх до нуля, дістанемо співвідношення для відшукування оптимальних значень параметрів ω_0 , ϑ_1 та r_p :

$$\begin{cases} a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 = 0, \\ b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 + b_4 C_4 = 0, \\ d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3 + d_4 C_4 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= -r_0 \sin \omega_0, & a_2 &= -\frac{v_{0x}}{\sqrt{C}} \cos \omega_0, \\ a_3 &= r_0 \cos \omega_0, & a_4 &= -\frac{v_{0y}}{\sqrt{C}} \sin \omega_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \left. \frac{\partial x}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \cos \sqrt{C} t_1 - \left. \frac{\partial v_x}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ b_2 &= \left. \frac{\partial x}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \sin \sqrt{C} t_1 + \left. \frac{\partial v_x}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \frac{\cos \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ b_3 &= \left. \frac{\partial y}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \cos \sqrt{C} t_1 - \left. \frac{\partial v_y}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ b_4 &= \left. \frac{\partial y}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \sin \sqrt{C} t_1 + \left. \frac{\partial v_y}{\partial r_p} \right|_{t_1} \cdot \frac{\cos \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \left. \frac{\partial x}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \cos \sqrt{C} t_1 - \left. \frac{\partial v_x}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ d_2 &= \left. \frac{\partial x}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \sin \sqrt{C} t_1 + \left. \frac{\partial v_x}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \frac{\cos \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ d_3 &= \left. \frac{\partial y}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \cos \sqrt{C} t_1 - \left. \frac{\partial v_y}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}, \\ d_4 &= \left. \frac{\partial y}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \sin \sqrt{C} t_1 + \left. \frac{\partial v_y}{\partial \vartheta_1} \right|_{t_1} \cdot \frac{\cos \sqrt{C} t_1}{\sqrt{C}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Частинні похідні, що входять до (12)-(13), обчислюються за допомогою крайових умов (2).

З системи (10) можна виразити три константи C_1 , C_2 й C_3 через C_4 , ω_0 , ϑ_1 , r_p .

Таким чином, застосування принципу максимуму дозволяє звести задачу (2) до двоточкової крайової задачі, яка може розв'язуватися методом пристрілки. Задача зводиться до відшукування п'яти констант C_4 , ω_0 , ϑ_1 , r_p , t_1 , для чого використовуються чотири умови на правому кінці траєкторії (2) та перший інтеграл (8). Система рівнянь руху інтегрується чисельно.

4 Аналіз розв'язку

Ефективність запропонованого у роботі підходу проілюстровано низкою розрахунків, виконаних для таких значень параметрів задачі: початкова маса КА $M_0 = 100$ т, $T_{\max} = 2900$ К, $\gamma = 168,7924$ м/с $\sqrt{K}$, $C_p = 15595$ Дж/кгК, $Q_{\max} = 1.5 \bar{N}_{\max} / C_p T_{\max}$, $v_{сф} = 3.6$ км/с. Розрахунки проведені для послідовності фіксованих значень теплової потужності з діапазону $\bar{N} = 900 + 2100$ МВт та значень висоти початкової кругової орбіти старту з діапазону $H = 400 + 2400$ км.

Оптимізація секундної масової витрати робочого тіла.

З метою визначення оптимального значення постійної секундної масової витрати q , для двох значень теплової потужності $N = 1200$ МВт і $N = 1800$ МВт побудовані залежності маси корисного навантаження m_{π} від q , $q \in [q_0, q_{\max}]$ (рис.2).

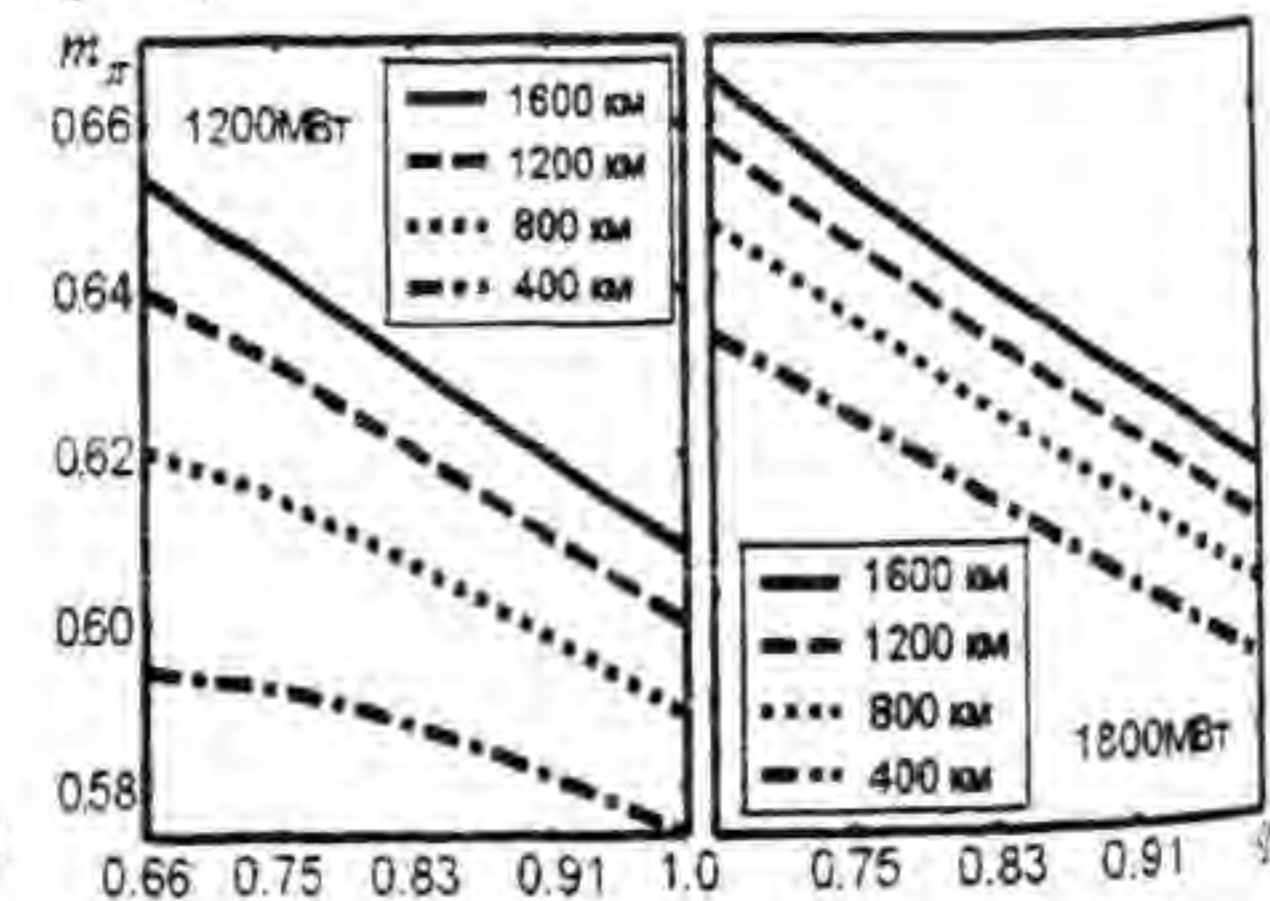


Рис. 2 Величина корисного навантаження в залежності від витрати палива

Як впливає з рис.2, оптимальним є значення $q = q_0$, що відповідає максимуму ефективної швидкості витікання.

Необхідно відзначити, що для малої теплової потужності ЯРД та низьких орбіт старту залежність $m_{\pi}(q)$ є опуклою угору і має точку максимуму. Проте застосування моделі ЦОГП в цьому діапазоні параметрів приводить до неадекватних результатів і тому недоцільне (див. рис. 4).

Оптимізація радіуса перицентру перехідної гіперболічної орбіти

При врахуванні обмеженості тяги і скінченної тривалості активної ділянки, втрачає силу класичний результат про оптимальність перехідної гіперболічної орбіти, дотичної в перицентрі до початкової кругової [7]. Радіус перицентру оптимальної перехідної гіперболічної орбіти буде залежати від параметрів задачі. На рис. 3 проілюстровано ефективність оптимізації радіусу перицентру шляхом порівняння значень корисного навантаження $m_{\pi}^{opt}(r_p)$, оптимальних для даного фіксованого значення r_p , зі значеннями $m_{\pi}^{opt}(r_0)$, оптимальними при застосуванні класичного підходу, при якому перехідна гіперболічна орбіта дотикається у перицентрі до початкової кругової $r_p = r_0$.

Ефективність обчислювалася за формулою:

$$eff = \frac{m_{\pi}^{opt}(r_p) - m_{\pi}^{opt}(r_0)}{m_{\pi}^{opt}(r_0)} \cdot 100\%. \quad (14)$$

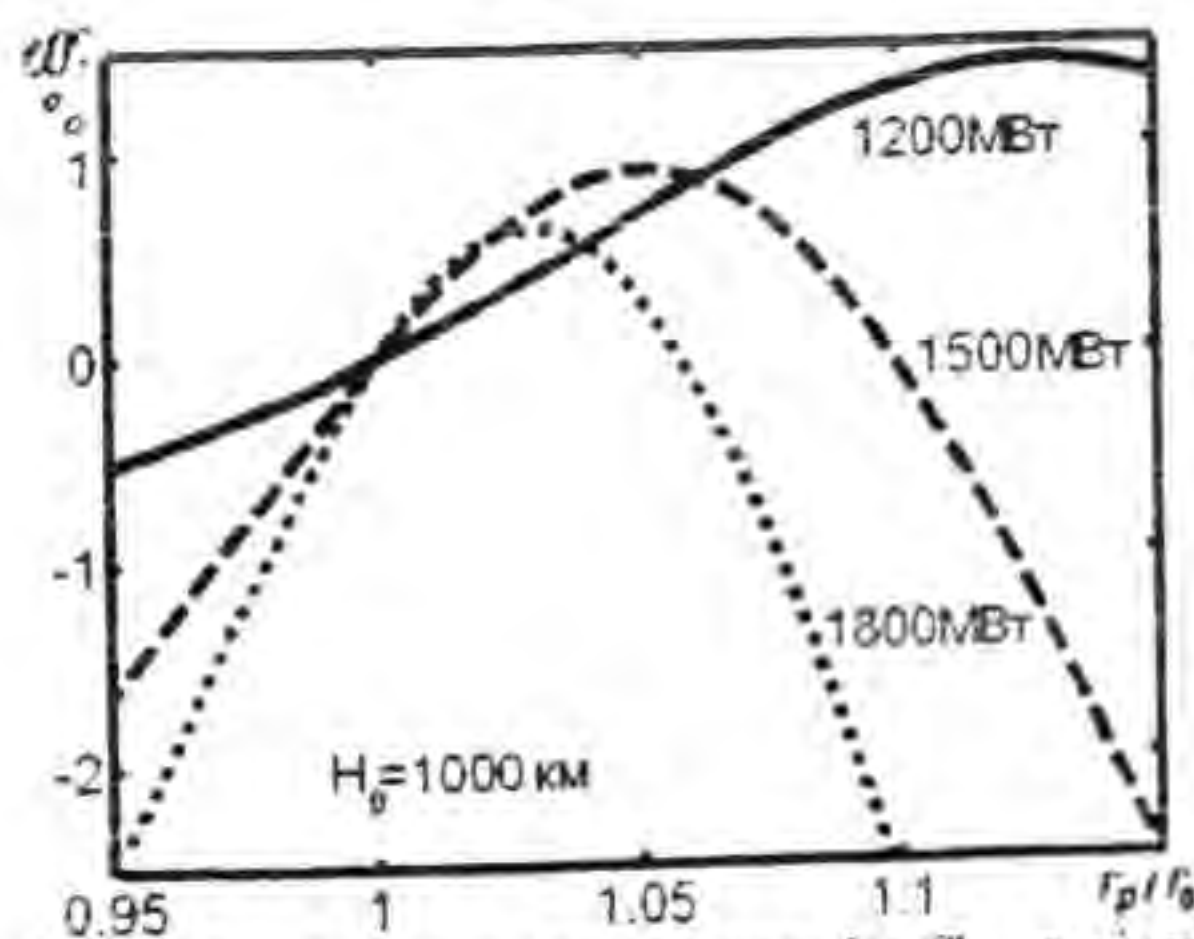


Рис. 3 Ефективність оптимізації радіусу перицентру гіперболічної орбіти призначення

З рис. 3 видно, що ефективність оптимізації зростає зі збільшенням тривалості активної ділянки, що має місце при зменшенні максимальної теплової потужності ЯРД. Відзначимо, що визначені за допомогою параметричної оптимізації оптимальні значення радіусу перицентру з великою точністю співпали

зі значеннями, отриманими при розв'язанні загальної варіаційної задачі (2) за допомогою умов трансверсальності (10), що підтверджує точність отриманих розв'язків.

Оцінка точності запропонованого підходу до урахування обмеженості тяги у порівнянні з імпульсним підходом (тяги необмежена).

Визначимо область зміни параметрів задачі N і H_0 , для якої застосування запропонованого підходу дає достатню для практичного застосування точність. З цією метою для різних значень зазначених параметрів визначимо різницю між заданим на сфері впливу вектором швидкості $\vec{v}_{сфн}$ і отриманим при реалізації побудованого оптимального закону керування $\vec{v}_{сфн}^N$. Похибка пов'язана, в першу чергу, з неточністю опису реального гравітаційного поля за допомогою моделі ЦОГП. Вектор $\vec{v}_{сфн}^N$ визначається шляхом підстановки побудованого за допомогою моделі ЦОГП оптимального закону керування у рівняння руху, записані за допомогою більш точної моделі центрального ньютонівського гравітаційного поля. Відносна величина похибки у швидкості r обчислюється як:

$$r = \frac{\sqrt{(v_{x,сфн} - v_{x,сфн}^N)^2 + (v_{y,сфн} - v_{y,сфн}^N)^2}}{\sqrt{v_{x,сфн}^2 + v_{y,сфн}^2}} \cdot 100\%. \quad (15)$$

де $v_{x,сфн}, v_{y,сфн}$ – компоненти вектора швидкості КА, що необхідно забезпечити на сфері впливу, а $v_{x,сфн}^N, v_{y,сфн}^N$ – компоненти вектора швидкості, отриманого при застосуванні закону керування, оптимального для моделі ЦОГП.

Припустимо, що максимально допустимою похибкою є 20%. На рис. 4 позначено область зміни значень параметрів N і H_0 , в якій відхилення реальної швидкості від розрахункової менше допустимого. Очевидно, що похибка буде збільшуватися зі збільшенням тривалості активної ділянки, що спостерігається зі зменшенням потужності та висоти орбіти старту. При цьому збільшується радіус перицентру оптимальної перехідної орбіти, що приводить до збільшення похибки, з огляду на збільшення товщини перехідного шару. Як видно з рис. 4, область значень параметрів задачі, при яких похибка запропонованого підходу є допустимою, набагато ширша за аналогічну область, побудовану при застосуванні підходу імпульсної апроксимації. В останньому випадку вектор

напрямку тяги вважається постійним і дотичним до кругової орбіти $\bar{e} = \{0,1\}$, перехідна орбіта дотична до початкової ($r_p = r_0$). тривалість активної ділянки визначається як $t_1 = (1 - m_1)/(a_0 - g_D)$, кінцева маса КА $m_1 = \exp((v_0 - v_1)/V_{\max})$, де v_0 – швидкість руху по круговій орбіті старту, $v_1 = \sqrt{h + 2 \cdot \mu/R_0}/V_*$ – необхідна швидкість в перицентрі, $V_{\max} = \gamma \sqrt{T_{\max}}$.

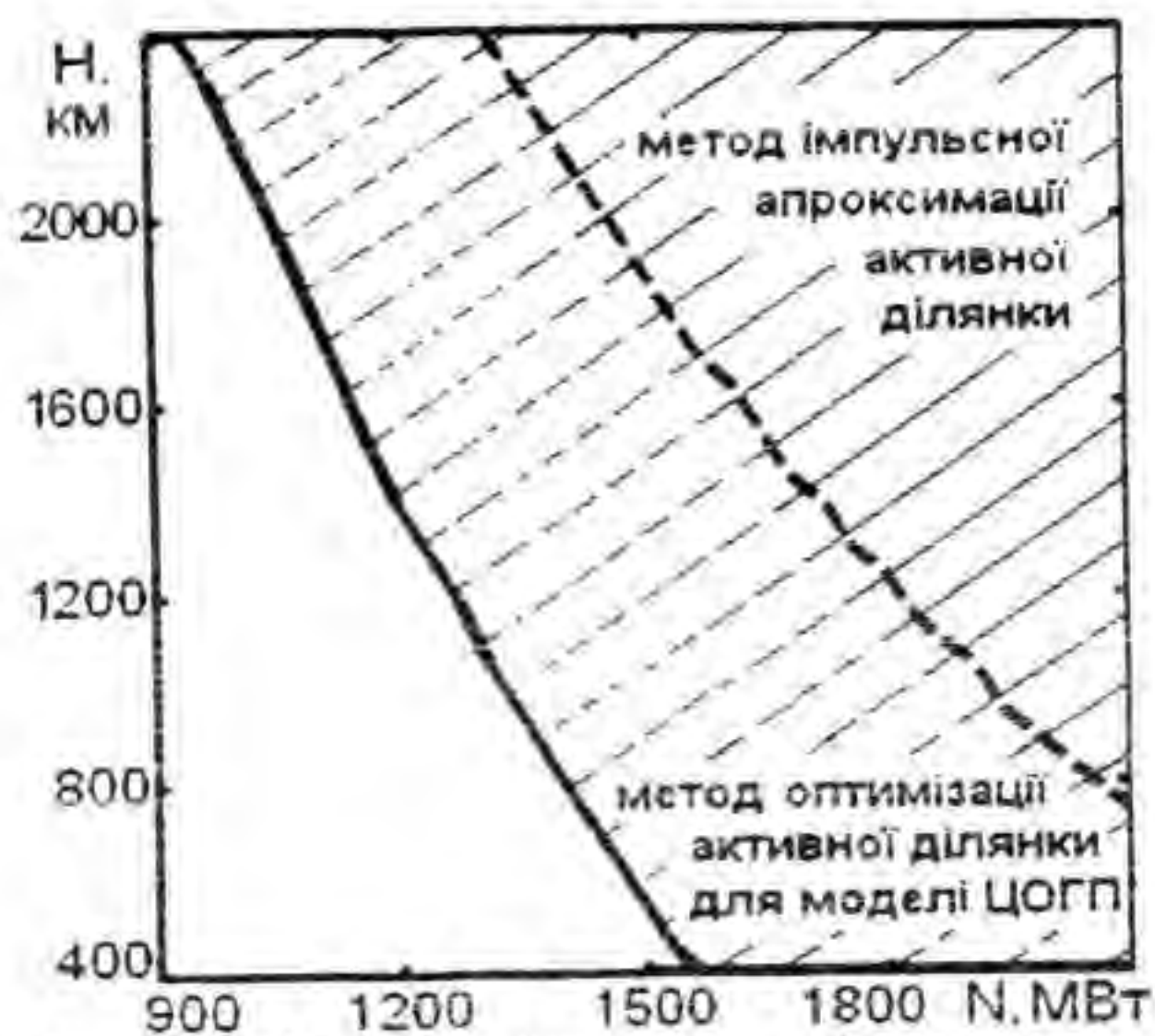


Рис. 4 Області зміни параметрів, для яких задовольняється похибка $\epsilon < 20\%$ у визначенні вектора швидкості на сфері впливу

5 Висновки

В роботі запропоновано новий підхід до оптимізації активних ділянок міжпланетних траєкторій руху КА з двигунами великої тяги, що розраховуються за ММСВ, з урахуванням обмеженості тяги двигуна.

Вказаний підхід дає можливості для сукупної оптимізації закону керування рухом центру мас КА та параметрів активної ділянки траєкторії з урахуванням гравітаційного впливу центру тяжіння й специфіки керування рушійною системою під час розв'язання загальної варіаційної задачі.

Ефективність запропонованого підходу досліджено при розв'язанні внутрішньої задачі ММСВ для КА з ЯРД. У випадку застосування моделі ЦОГП побудовані прості алгоритми визначення оптимальних значень параметрів активної ділянки траєкторії, що базуються на аналітичних умовах, отриманих з умов трансверсальності принципу максимуму.

Показано, що запропонований підхід може застосовуватися для області зміни параметрів

задачі, значно ширшої за допустиму для класичного підходу, оснований на імпульсній апроксимації активних ділянок.

Список використаних джерел

1. Borowski S.K., Corban R.R., McGuire M.I., Beke E.G. Nuclear thermal rocket/vehicle design options for future NASA missions to the Moon and Mars // AIAA Pap. - 1993. - № 4170. - P. 36.
2. Howe St. D. Nuclear rocket to Mars // Aerospace America. - 2000. - 38. - № 8. - P. 39-43.
3. James Powell, George Maise, John Paniagua. Is NTP the key to exploring space?: Nuclear thermal propulsion may open up the solar system to far broader and faster exploration than is now possible with chemical rocket technology // Aerospace America. - 2004. - 79. - № 1. - P. 36-42.
4. Бассард Б., Делавер Р. Ядерные двигатели для самолетов и ракет: Пер. с англ. - М.: Воениздат, 1967. - 398 с.
5. Космические двигатели: состояние и перспективы: Пер. с англ. / Под ред. Л.Кейви - М.: Мир, 1988. - 454 с.
6. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации: Пер. с англ. - М.: Мир, 1966. - 152 с.
7. Ильин В.А., Кузник Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. - М.: Наука, 1976. - 744 с.
8. Григорьев И.С. Сравнение решений задач об оптимизации траекторий мягкой посадки КА на поверхность Луны в импульсной постановке и с двигателем большой ограниченной тяги // XXVI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева. М., 2002.
9. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. - 2005. - № 5. - С. 120-135.
10. Летов А.М. Динамика полета и управление. - М.: Наука, 1969. - 359 с.

Надійшла до редколегії 26.06.2008

УДК 539.3

Микола С. Якименко, аспірант

Моди Крі-Лемба для скінченного пружного циліндра

В задачі про усталені коливання пружного кругового циліндра методом суперпозиції отримано моди Крі-Лемба як частинний розв'язок рівнянь. Досліджено швидкість прямування змінних нескінченної алгебраїчної системи до асимптотичних значень. Наведено основні властивості мод Крі-Лемба та перші значення частот та розмірів циліндра.

Ключові слова: пружний циліндр, коливання, моди Крі-Лемба, метод суперпозиції.

E-mail: yanko@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Відомо, що в загальному випадку задачі теорії пружності про усталені коливання тіл скінчених розмірів (прямокутник або циліндр) не мають аналітичних розв'язків. Проте, відомі деякі частинні розв'язки досить простої будови для окремих випадків частот та геометрій для прямокутника (моди Ламе) та циліндра (моди Крі-Лемба). Ці розв'язки мають такі властивості, як відсутність дотичних напружень, нульове об'ємне розширення, незалежність від коефіцієнта Пуассона. В роботах [2, 6] частоти мод Крі-Лемба отримуються із дисперсійних співвідношень для нескінченного циліндричного хвилеводу. Цим частотам відповідає нормальна хвиля, що не залежить від коефіцієнта Пуассона. Відповідна точка на дисперсійних спектрах носить назву універсальної. Цій хвилі відповідають нульові дотичні напруження у хвилеводі, що дає змогу задовольнити однорідні граничні умови на торцях циліндра, який вирізано із цього хвилеводу якщо тільки довжина циліндра складає цілу кількість півхвиль. Поширення хвиль такого типу аналогічне поширенню хвиль Ламе і пов'язане із розповсюдженням лише SV-хвиль, які відбиваються від граничних поверхонь без перетворення на інші типи.

Точні розв'язки для скінчених циліндрів використовуються як тестові для оцінки різноманітних наближених методів, в експериментальних дослідженнях для визначення модуля зсуву одним тестом [7, 8], та інших

M.S. Yakymenko, postgraduate student

Chree-Lamb modes for a finite elastic cylinder

Chree-Lamb modes for elastic finite cylinder are derived as a particular solution for the superposition method. A convergence speed for unknowns of infinite system to its asymptotic values is studied. Basic properties for Chree-Lamb modes and numerical data of frequencies and cylinder dimensions are given.

Keywords: elastic cylinder, vibrations, Chree-Lamb modes, the method of superposition.

застосуваннях [9], де необхідне знання власних частот коливань циліндра із високою точністю.

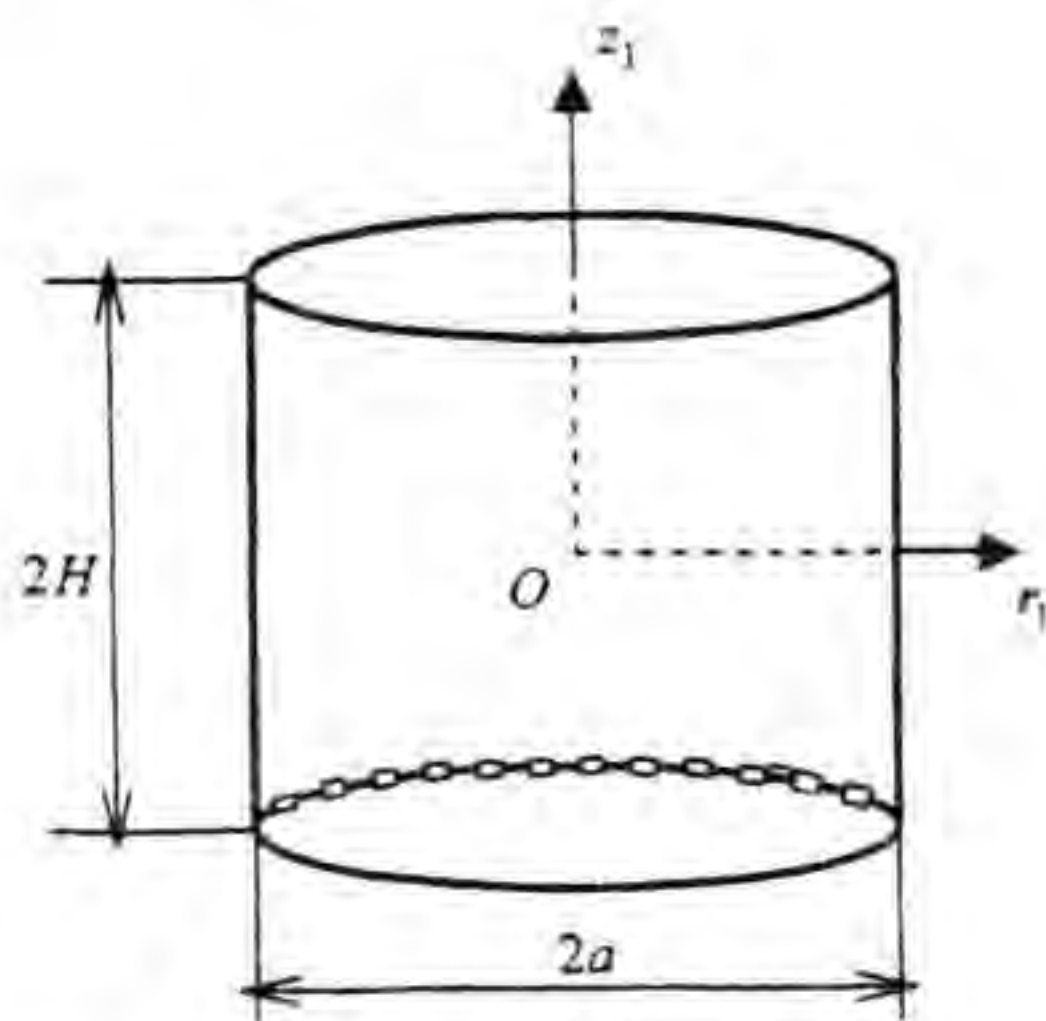
В даній роботі вивчається точний розв'язок для скінченного пружного циліндра, який вперше зустрічається в роботах Крі [4] та Лемба [5]. Дослідження проводяться методом суперпозиції [1]. Частоти і розміри скінченного циліндра отримуються із нескінченної системи, до якої зводиться гранична задача про усталені коливання циліндра із силовими граничними умовами, за допомогою особливого вибору розв'язку системи. Використання цього розв'язку для перемішень дозволяє знайти форму мод Крі-Лемба для симетричного та антисиметричного випадків. Знання точного розв'язку системи, що відповідає модам Крі-Лемба, дає змогу оцінити швидкість прямування змінних системи до свого асимптотичного значення при зростанні порядку системи.

2. Основні рівняння методу суперпозиції.

Вкажемо основні рівняння методу суперпозиції для осесиметричної задачі при силових граничних умовах згідно роботи [1], необхідні для визначення власних частот та власних форм скінченного циліндра.

Розглянемо усталені гармонічні в часі коливання кругового ізотропного циліндра із круговою частотою ω . Всі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі є пропорційними $\exp(-i\omega t)$; надалі цей множник опускається і всі польові характеристики задаються їх амплітудними величинами.

Циліндр характеризується наступними параметрами: G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, ρ – густина матеріалу; H – півдовжина циліндра, a – його радіус.



Початок O циліндричної системи координат r, z розташовано в центрі циліндра

Вводяться безрозмірні змінні: координати $r = r_1 / a$, $z = z_1 / a$, а також $h = H / a$ – довжина, $\gamma_i = \omega a / c_i$ – частотні параметри, ($i = 1, 2$), $c_1 = k \sqrt{G / \rho}$, $c_2 = \sqrt{G / \rho}$, – швидкості хвиль розтягу-стиску та зсуву відповідно; при цьому $k = \sqrt{2(1 - \nu) / (1 - 2\nu)}$.

Для осесиметричної задачі вектор безрозмірних переміщень (віднесених до радіуса a) $\vec{u}(r, z) = \vec{e}_r u_r(r, z) + \vec{e}_z u_z(r, z)$ має задовольняти рівняння Ламе:

$$2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} + \frac{\rho \omega^2}{G} u_r = 0, \quad (1)$$

$$2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] + \frac{\rho \omega^2}{G} u_z = 0 \quad (2)$$

при однорідних силових граничних умовах:

$$\sigma_r(l, z) = 0, \quad \tau_{rz}(l, z) = 0 \quad \text{при } -h \leq z \leq h, \\ \sigma_z(r, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq 1. \quad (3)$$

Напруження задаються законом Гука:

$$\sigma_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \operatorname{div} \vec{u}, \quad \sigma_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \operatorname{div} \vec{u}, \\ \tau_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

З метою спрощення викладок задача розбивається за типом симетрії на дві: симетричну (для якої u_r – парна по z функція, u_z – непарна) та антисиметричну відносно площини $z = 0$.

Розв'язок рівнянь Ламе (1), (2) для граничних умов виду (3) представляється у вигляді суми двох рядів по повним системам тригонометричних та бesselових функцій. Для симетричної задачі маємо наступний вигляд переміщень

$$u_r(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n U_1^{(n)}(r) \cos k_n z + \\ + x_0 \frac{J_1(\gamma_1 r)}{\gamma_1} + h \sum_{j=1}^{\infty} y_j U_2^{(j)}(z) \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}, \quad (4)$$

$$u_z(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n W_1^{(n)}(r) \sin k_n z + \\ + h \sum_{j=1}^{\infty} y_j W_2^{(j)}(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)} + y_0 \frac{\sin \gamma_1 z}{\gamma_1}. \quad (5)$$

В (4), (5) позначено

$$U_1^{(n)}(r) = \frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2)} - \frac{k_n^2 + q_2^2}{2k_n^2} \frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1)}, \\ U_2^{(j)}(z) = \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} - \frac{p_2}{\lambda_j} \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h}, \\ W_1^{(n)}(r) = \frac{k_n^2 + q_2^2}{2k_n q_1} \frac{I_0(q_1 r)}{I_1(q_1)} - \frac{q_2}{k_n} \frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2)}, \\ W_2^{(j)}(z) = \frac{\operatorname{sh} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h},$$

а також

$$q_i^2 = k_n^2 - \gamma_i^2, \quad p_i^2 = \lambda_j^2 - \gamma_i^2, \quad (i = 1, 2); \\ k_n = \pi n / h, \quad \lambda_j - \text{корені рівняння } J_1(\lambda) = 0.$$

Невідомі x_0 , x_n , y_0 , y_j визначаються із нескінченної лінійної алгебраїчної системи, яка отримується при задоволенні однорідних граничних умов (3), використовуючи подання (4), (5) і закон Гука для напружень σ_r , σ_z , τ_{rz} :

$$\begin{cases} x_0 \left[\frac{1-v}{1-2v} J_0(\gamma_1) - \frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} \right] + y_0 \frac{v}{1-2v} \frac{\sin \gamma_1 h}{\gamma_1 h} - \frac{v}{2(1-2v)} \gamma_1^2 \gamma_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 p_1^2} = 0, \\ x_0 \frac{2v}{1-2v} \frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} + y_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \gamma_1 h - \frac{v}{1-2v} \gamma_1^2 \gamma_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 q_1^2} = 0, \\ -y_0 \frac{2v}{1-2v} \frac{\gamma_1 \sin \gamma_1 h}{h q_1^2} + x_n P_n(q) - \frac{\gamma_1^2}{1-2v} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{v \gamma_2^2}{\lambda_j^2} - \frac{2k_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right] = 0, n=1, 2, \dots \\ -x_0 \frac{2v}{1-2v} \frac{\gamma_1 J_1(\gamma_1)}{p_1^2} + y_j Q_j(p) - \frac{\gamma_1^2}{1-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^2 + p_1^2} \left[\frac{v \gamma_2^2}{k_n^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_n^2 + p_2^2} \right] = 0, j=1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

в якій позначено

$$P_n(q) = q_1 \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} \frac{(k_n^2 + q_2^2)^2}{4k_n^2 q_1} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{\gamma_2^2}{2k_n^2},$$

$$Q_j(p) = h \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 h \right].$$

Змінні системи (6) підкорюються асимптотичному закону [1]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a_0 = \text{const} \quad (7)$$

Знання закону асимптотичної поведінки необхідне для ефективної редукції системи (6) до скінченної при чисельних дослідженнях і визначення характеру напружено-деформованого стану в околі кутових точок циліндра.

Для антисиметричної задачі переміщення можна записати у формі

$$u_r(r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} x_l \tilde{U}_1^{(l)}(r) \sin k_l z + h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \tilde{U}_2^{(j)}(z) \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}, \quad (8)$$

$$u_z(r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} x_l \tilde{W}_1^{(l)}(r) \sin k_l z + h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \tilde{W}_2^{(j)}(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)} + y_0 \frac{\cos \gamma_1 z}{\gamma_1} \quad (9)$$

В (8), (9) позначено

$$\tilde{U}_1^{(l)}(r) = \frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2)} - \frac{k_l^2 + q_2^2}{2k_l^2} \frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1)},$$

$$\tilde{U}_2^{(j)}(z) = \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{ch} p_1 h} - \frac{p_2}{\lambda_j} \frac{\operatorname{sh} p_2 z}{\operatorname{ch} p_2 h},$$

$$\tilde{W}_1^{(l)}(r) = \frac{k_l^2 + q_2^2}{2k_l q_1} \frac{I_0(q_1 r)}{I_1(q_1)} - \frac{q_2}{k_l} \frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2)},$$

$$\tilde{W}_2^{(j)}(z) = \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{ch} p_2 h} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{ch} p_1 h}.$$

Всі позначення мають той же вигляд, що і для симетричної задачі, за виключенням k_l :

$$k_l = \frac{(2l-1)\pi}{2h}, l=1, 2, 3, \dots$$

Після задоволення граничних умов (3), використовуючи подання (8), (9) отримуємо нескінченну систему антисиметричної задачі:

$$\begin{cases} -y_0 \frac{1-v}{1-2v} \sin \gamma_1 h - \frac{v}{1-2v} \gamma_1^2 \gamma_2^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l}{k_l^2 q_1^2} = 0, \\ -y_0 \frac{2v}{1-2v} \frac{\gamma_1 \cos \gamma_1 h}{h p_1^2} + x_l P_l(q) - \frac{\gamma_1^2}{1-2v} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{v \gamma_2^2}{\lambda_j^2} - \frac{2k_l^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right] = 0, l=1, 2, \dots \\ y_j Q_j(p) - \frac{\gamma_1^2}{1-2v} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l}{k_l^2 + p_1^2} \left[\frac{v \gamma_2^2}{k_l^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_l^2 + p_2^2} \right] = 0, j=1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

з позначеннями

$$P_1(q) = q_2 \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} - \frac{(k_1^2 + p_2^2)^2}{4k_1^2 q_1} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{\gamma_2^2}{2k_1^2},$$

$$Q_1(p) = h \left[p_2 \operatorname{th} p_2 h - \frac{(\lambda_1^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_1^2 p_1} \operatorname{th} p_1 h \right].$$

Асимптотичний закон для змінних k_1, y_1 залишається в силі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \tilde{a}_0 = \text{const}. \quad (11)$$

3. Частоти мод Крі-Лемба. Розміри циліндра

Отримаємо моди Крі-Лемба як частинний розв'язок в методі суперпозиції. Зіставлення виразів для переміщень мод Крі-Лемба із відповідними виразами методу суперпозиції у формі рядів на границі (враховуючи значення деяких точних сум, що використовувались при отриманні системи (6)) приводить до наступного можливого вигляду [3] змінних x_0, y_0, x_n, y_n :

$$x_0 = -\frac{a_0 \gamma_1}{2J_1(\gamma_1)}, \quad x_n = a_0 \frac{2k_n^2}{k_n^2 + q_2^2},$$

$$y_0 = \frac{a_0 \gamma_1 h}{\sin \gamma_1 h}, \quad y_n = -a_0 \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + p_2^2}. \quad (12)$$

Знайдемо при яких значеннях параметрів h, γ_2 представлення (12) може бути розв'язком системи (6). Для цього знадобляться деякі значення точних сум:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 - \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{2}{\gamma} - \frac{J_0(\gamma)}{J_1(\gamma)} \right],$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 + q^2} = \frac{1}{2q} \left[\frac{2}{q} - \frac{I_0(q)}{I_1(q)} \right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2 - \gamma^2} = \frac{h}{2\gamma^2} - \frac{1}{2\gamma} \operatorname{ctg} \gamma h, \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2 + p^2} = \frac{1}{2p} \operatorname{cth} ph - \frac{h}{2p^2}.$$

Ряди в рівняннях (6) перетворюємо, замінюючи дробі, що в них містяться, на елементарні виду (13).

За таких допомогою перетворень на основі припущень (12) перше рівняння системи (6) зводиться до наступної рівності:

$$\frac{a_0}{J_0(\gamma_2/\sqrt{2})} \left\{ J_1\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}} J_0\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\right) \right\} = 0.$$

Вимога рівності нулю виразу у фігурних дужках надає умову для визначення частоти γ_2 , на якій можливий розв'язок:

$$J_1(\beta) - \beta J_0(\beta) = 0, \quad \gamma_2 = \sqrt{2}\beta.$$

Друге рівняння системи (6) після перетворень матиме вигляд:

$$a_0 \frac{\gamma_2 h}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_2 h}{\sqrt{2}} = 0.$$

Умова $\cos(\gamma_2 h/\sqrt{2}) = 0$ накладає обмеження на частоти, при яких можливий розв'язок (12).

Підстановка (12) в третє та четверте рівняння підтверджує правильність обраного вигляду змінних системи:

$$a_0 \frac{\gamma_2^2}{k_n^2 + q_2^2} \left\{ \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}} J_0\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\right) - J_1\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\right) \right\} J_1^{-1}\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

– третє рівняння;

$$-a_0 \frac{\gamma_2^2}{\lambda_1^2 + p_2^2} \frac{\gamma_2 h}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_2 h}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{– четверте рівняння.}$$

Отже, маємо наступні умови на частоти та довжини циліндра, на яких можливий розв'язок виду (12):

$$\begin{cases} J_1(\beta) - \beta J_0(\beta) = 0, \\ \cos \beta h = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\gamma_2 = \sqrt{2}\beta.$$

Для антисиметричної по z задачі викладки проводяться аналогічним чином. Вигляд нескінченної системи антисиметричної задачі та переміщень можна знайти в [1]. Розв'язок системи розглядається у вигляді:

$$y_0 = a_0 \frac{h \gamma_1}{\cos \gamma_1 h}, \quad y_n = -a_0 \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + p_2^2},$$

$$x_n = a_0 \frac{2k_n^2}{k_n^2 + q_2^2}. \quad (15)$$

При перетвореннях відмінними від симетричного випадку будуть лише наступні значення сум:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k_l^2 - \gamma^2} = \frac{h}{2\gamma} \operatorname{tg} \gamma h, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k_l^2 + p^2} = \frac{h}{2p} \operatorname{th} ph. \quad (16)$$

Нескінченна система (10) задовольняється тотожно при виконанні умов

$$\begin{cases} J_1(\beta) - \beta J_0(\beta) = 0, \\ \sin \beta h = 0, \\ \gamma_2 = \sqrt{2}\beta. \end{cases} \quad (17)$$

4. Форми мод Крі-Лемба

Для отримання форм коливань, що відповідають розглядуваному розв'язку системи (12), після підстановки розв'язку у вирази для компонент переміщень (4), (5) слід перерозкласти вирази для гіперболічного косінуса та модифікованої функції Бесселя в ряди Фур'є та Фур'є-Бесселя за формулами:

$$\operatorname{ch} pz = \frac{\operatorname{sh} ph}{ph} - \frac{2p \operatorname{sh} ph}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n^2 + p^2} \cos k_n z,$$

$$I_1(qr) = -2I_1(q) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q^2} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}.$$

Далі слід змінити порядок сумування в подвійних рядах та використати для згортання рядів наступні наступні розклади:

$$\cos \gamma z = \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} - \frac{2\gamma \sin \gamma h}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n^2 - \gamma^2} \cos k_n z,$$

$$J_1(\gamma r) = -2J_1(\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 - \gamma^2} \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}.$$

Після таких перетворень отримуємо:

$$u_r(r, z) = -B J_1(\beta r) \cos \beta z, \quad (18)$$

$$B = \frac{a_0 \beta h}{2 J_1(\beta) \sin \beta h}, \quad \beta = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}.$$

Використовуючи для нормальних переміщень $u_z(r, z)$ розклади синуса по $\sin k_n z$ і функцій Бесселя – по $J_0(\lambda_j r)$, отримуємо:

$$u_z(r, z) = B J_0(\beta r) \sin \beta z. \quad (19)$$

Антисиметрична задача розглядається аналогічним чином із відповідними змінами в розкладах тригонометричних, показникових та

бесселевих функцій. Переміщення, які отримуються після перетворень:

$$u_r(r, z) = C J_1(\beta r) \sin \beta z, \quad (20)$$

$$u_z(r, z) = C J_0(\beta r) \cos \beta z, \quad (21)$$

$$C = \frac{\tilde{a}_0 \beta h}{2 J_1(\beta) \cos \beta h}, \quad \beta = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}.$$

5. Властивості та використання мод

В пунктах 3 та 4 отримано вигляд форм (18)-(21) та частот (14), (17) Крі-Лемба, що збігається із класичним.

Частоти мод Крі-Лемба γ_k^{C-L} отримуються із рівняння

$$\gamma_2 = \gamma_k^{C-L} = \sqrt{2}\beta_k, \quad (22)$$

де β_k – k -й корінь рівняння $J_1(\beta) - \beta J_0(\beta) = 0$.

Довжини, для яких можливий такий розв'язок:

$$h_{k,m}^{C-L} = \frac{m\pi}{2\beta_k}, \quad (23)$$

$m = 2p - 1$, $p = 1, 2, 3, \dots$ – симетричні моди;

$m = 2s$, $s = 1, 2, 3, \dots$ – антисиметричні моди.

В Таблицях 1 та 2 наведено чисельні значення перших частот Крі-Лемба та відповідних розмірів циліндра.

Таблиця 1

Симетричні моди Крі-Лемба. Частоти та довжини

k	γ_k^{C-L}	$h_{k,1}^{C-L}$	$h_{k,3}^{C-L}$	$h_{k,5}^{C-L}$
1	2.603827	0.853145	2.559434	4.265724
2	7.539799	0.294629	0.883886	1.473143
3	12.07217	0.184013	0.552040	0.920067

Таблиця 2

Антисиметричні моди Крі-Лемба. Частоти та довжини

k	γ_k^{C-L}	$h_{k,2}^{C-L}$	$h_{k,4}^{C-L}$	$h_{k,6}^{C-L}$
1	2.603827	1.706290	3.412579	5.118869
2	7.539799	0.589258	1.178515	1.767773
3	12.07217	0.368027	0.736053	1.104080

Безпосередньою підстановкою в закон Гука перевіряється тотожна рівність нулю дотичних напружень в усьому об'ємі циліндра $\tau_{rz} \equiv 0$, а також нульове об'ємне розширення.

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \equiv 0. \quad \text{Даний факт}$$

пов'язаний із поширенням лише SV-хвиль в циліндрі без перетворення на інші типи.

Незалежність частот та розмірів від коефіцієнта Пуассона ν використовується в роботах [7, 8] для визначення пружних характеристик циліндричних зразків. Якщо для досліджень обрано циліндричний зразок довжини $h_{cyl}^{C-L} \approx 0.853145$, то можна визначити його модуль зсуву G лише використовуючи першу власну частоту та густину матеріалу.

Вкажемо на інше застосування мод Крі-Лемба, що використовує факт існування точного розв'язку і виправдовує більш складний спосіб їх отримання, що наводився в пп. 3 та 4. Відомо [1], що асимптотичний закон (7), (11) для змінних системи справедливий для довільних h , γ_2 . Важливим питанням для ефективної редукції системи (6), (10) є питання про швидкість прямування змінних до свого граничного значення. Для частот і геометрій мод Крі-Лемба можна зробити наступну оцінку (справедливу із відповідними змінами і для антисиметричного випадку):

$$x_n = a_0 \frac{2k_n^2}{2k_n^2 - \gamma_2^2} = a_0 + O\left(\frac{1}{k_n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty;$$

$$y_j = a_0 \frac{2\lambda_j^2}{2\lambda_j^2 - \gamma_2^2} = -a_0 + O\left(\frac{1}{\lambda_j^2}\right), \quad j \rightarrow \infty.$$

Такий характер поведінки справедливий принаймні в околі частот γ_k^{C-L} і підтверджується чисельно для інших частот. Відомості такого роду є важливими [1, 3] для ефективної редукції нескінченних систем (6), (10) для покращення збіжності переміщень та напружень на границі та для знаходження розподілу польових характеристик напружено-деформованого стану в околі граничних кіл циліндра.

6. Висновки

В роботі частоти мод Крі-Лемба та відповідні розміри отримано як частинний розв'язок системи рівнянь методу суперпозиції для

симетричної та антисиметричної задач. Форми мод отримуються також на основі вигляду переміщень методу суперпозиції. Форма точного розв'язку дає змогу оцінити швидкість прямування змінних методу суперпозиції до свого граничного значення. Відомості такого роду є важливими для оцінки ефективності редукції системи в методі суперпозиції.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика / под ред. У. Мэзона – М.: Мир, 1966. – Т.1, Ч.А: Методы и приборы ультразвуковых исследований. – С. 140-203.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков // Прикл. мех. – 1976. – 12, №12. – С. 60-68.
4. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1886, 21. – P. 287-298.
5. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1917, – A93, – P. 114-128.
6. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Am. – 1972. – 51, P. 265-283.
7. Nieves F.J., Gascón F., Bayón A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – 115(6), P. 2928-2936.
8. Nieves F.J., Gascón F., Bayón A. An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder // J. Sound. Vibr. – 2008. – 313, P. 617-630.
9. Strigin S.E., Blair D.G., Gras S., Vyatchanin S.P. Numerical calculations of elastic modes frequencies for parametric oscillatory instability in Advanced LIGO interferometer // Phys. Letters. – 2008. – A372. – P. 5727-5731.

Надійшла до редколегії 03.11.2008

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.977

Андрій В. Анікушин¹, аспірант
Дмитро А. Номіровський², професор

Траєкторно-фінальна керованість гіпер-
болічними системами в різних класах
узагальнених функцій³

Доведено траєкторно-фінальну керованість гіперболічних систем в різних класах узагальнених функцій.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, розв'язок, єдиність, керованість, оптимізація.

¹E-mail: anik_andrii@ukr.net

²E-mail: vm214@dcp.kiev.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

³Робота частково підтримана ДФФД – грант Президента України для молодих учених №GP/F13/0038

В циліндричній області $(t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо задачу оптимізації гіперболічної системи

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(u) = f(t, x; h), \quad (1)$$

$$\|u(h) - u^*\|_S \xrightarrow{h} \min, \quad (2)$$

де $u(t, x)$ – функція стану, h – керування системою, S – банахів простір розв'язків рівняння (1), $u^* \in S$, f – керуюче відображення, можливо сингулярного характеру ($f(h)$ належить простору узагальнених функцій).

Оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом другого порядку

$$A(u) \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u \quad (3)$$

Існує багато робіт, де розглядалася така задача [1-5]. Але в наведених роботах встановлюється лише одне співвідношення між гладкостями правої частини $f(h)$ і розв'язку $u(h)$ рівняння (1); крім цього, у цитованих роботах присутні певні обмеження на оператор A .

В даній роботі розглядається питання керованості гіперболічною системою для основних

Andrii V. Anikushin¹, postgraduate student
Dmitro A. Nomirovskii², professor

Trajectory and final controllability of hyperbolic systems for some classes of distributions³

Trajectory and final controllability of hyperbolic systems for some classes of distributions is studied.

Key Words: hyperbolic equation, solution, unicity, controllability, optimization.

крайових задач. Для коректного вивчення оптимізаційної задачі доведені теореми єдиної розв'язності в залежності від порядку сингулярності правої частини $f(h)$. Одержані результати дозволяють ефективно досліджувати питання керованості системи, а також розв'язувати інші оптимізаційні задачі.

1 Позначення та простори

Будемо вважати, що $a_{ij} = a_{ji}$ і оператор A є рівномірно еліптичним в області $\bar{\Omega}$, тобто

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (4)$$

для довільних дійсних λ_i , де α – додатна стала, що не залежить від $x \in \bar{\Omega}$ і λ_i .

Межа $\partial\Omega$ складається з трьох регулярних частин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Покладемо $\Gamma_1 = (0, T) \times \gamma_1$, $\Gamma = (0, T) \times \partial\Omega$. Шукана функція $u(t, x)$ задовольняє початкові

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

та крайові умови

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \bar{\mu}_A}|_{\Gamma_1} = \left(a_0(x)u + \frac{\partial u}{\partial \bar{\mu}_A} \right)|_{\Gamma_3} = 0, \quad (6)$$

де $\bar{\mu}_A = A\bar{n}$ – вектор конормалі, $A = \{a_{ij}\}$, $\bar{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Позначимо L_0 — множину функцій $u(t, x) \in C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняють умови (6) і

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \dots = 0,$$

L_T — множина функцій $v(t, x) \in C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняють умови

$$v|_{\Gamma_1} = 0, \quad v|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=T} = \dots = 0. \quad (7)$$

Нехай $H_0^k, V_0^k, S_0^k, k \in \mathbb{N}$ — поповнення множини L_0 за нормами

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^k}^2 &= \int_Q (u^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{(k-1)})^2 dQ, \\ \|u\|_{V_0^k}^2 &= \|u\|_{H_0^k}^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_{x_i}^{(k-1)})^2|_{t=T} d\Omega, \\ \|u\|_{S_0^k}^2 &= \|u\|_{V_0^k}^2 + \int_\Omega (u^{(k)})^2|_{t=T} d\Omega, \end{aligned}$$

відповідно, $H_T^k, V_T^k, S_T^k, k \in \mathbb{N}$ — поповнення множини L_T за нормами

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_T^k}^2 &= \int_Q (v^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n (v_{x_i}^{(k-1)})^2 dQ, \\ \|v\|_{V_T^k}^2 &= \|v\|_{H_T^k}^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (v_{x_i}^{(k-1)})^2|_{t=0} d\Omega, \\ \|v\|_{S_T^k}^2 &= \|v\|_{V_T^k}^2 + \int_\Omega (v^{(k)})^2|_{t=0} d\Omega, \end{aligned}$$

відповідно.

Верхній індекс в $u^{(k)}$, тут і далі, означає k -ту похідну функції $u(t, x)$ за змінною t .

Трактуючи похідну від'ємного порядку як інтеграл, легко розповсюдити означення просторів H^k, V^k, S^k для всіх цілих k . Наприклад, H_0^0 — поповнення L_0 за нормою

$$\|u\|_{H_0^0}^2 = \int_Q u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t u_{x_i} d\tau \right)^2 dQ.$$

Для просторів H_T^k, V_T^k, S_T^k треба використовувати інтегральний оператор $\int_T^t v d\tau$.

Незважаючи на наявність нерівностей $\|u\|_{V_0^k} \leq \|u\|_{S_0^k}$ для всіх $u \in L_0$, вкладення $S_0^k \subset V_0^k$ відсутнє (ситуація подібна до [4, 5]), бо для цієї пари не виконується умова π) [7]. Простір S_0^k слід розглядати (з точністю до ізометрії) як множину функцій $u(t, x)$ простору V_0^k у кожній з яких має сенс слід $u^{(k)}(T, x) \in L_2(\Omega)$. Аналогічне зауваження має місце і відносно просторів S_T^k .

Лема 1. Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ мають місце щільні неперервні вкладення

1. $H_0^{k+1} \subset V_0^k \subset H_0^k \subset S_0^{k-1}$;
2. $H_T^{k+1} \subset V_T^k \subset H_T^k \subset S_T^{k-1}$.

Крім цього $H_0^0 \subset L_2(Q), H_T^0 \subset L_2(Q)$.

Доведення. Для доведення кожного з вкладень необхідно порівняти норми відповідних просторів на L_0 (або L_T , відповідно) і перевірити умову π). $\square$

Позначимо $(H_0^k)^*, (V_0^k)^*, (S_0^k)^*, (H_T^k)^*, (V_T^k)^*, (S_T^k)^*$ — відповідні спряжені простори. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^k}$ — природна білінійна форма на $(H_0^k)^* \times H_0^k$. На інших парах просторів також задані відповідні білінійні форми.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами і переходячи до поверхневих інтегралів, неважко впевнитися, що для довільних гладких в $\bar{Q}$ функцій $u(t, x) \in L_0, v(t, x) \in L_T, f(t, x; h)$, що задовольняють рівність (1), має місце рівність

$$\begin{aligned} & -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \\ & + \sum_{i=1}^n (a_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (au, v)_{L_2(Q)} + \\ & + (a_0 u, v)_{L_2(\Gamma_3)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Будемо вважати, що коефіцієнти a_{ij}, a_i, a — неперервні в $\bar{\Omega}$ функції, а $a_0 \geq 0$ неперервна в $\bar{\Gamma}_3$. Ліва частина рівності (8) визначена для довільних $u \in H_0^1, v \in H_T^1$. Це дає можливість розглядати ліву частину (8) як означення оператора $\tilde{L} : H_0^1 \rightarrow (H_T^1)^*$, що визначений для всіх $u \in H_0^1$. Легко впевнитися, що $\tilde{L}$ — лінійний оператор. Та сама ліва частина (8) визначає і лінійний спряжений оператор $\tilde{L}^* : H_T^1 \rightarrow (H_0^1)^*$.

2 Априорні нерівності

Для дослідження оптимізаційної задачі (1),(2) необхідно забезпечити певні властивості оператора $\tilde{L}$. Дійсно, для обчислення $\|u(h) - u^*\|_S$ необхідно гарантувати існування та єдиність розв'язку (1), що належить простору S для всіх керуючих функцій $f(h)$, коли h пробігає множину допустимих керувань U_θ . Для цього необхідно знати характерні риси оператора $\tilde{L}$, які далі встановимо шляхом доведення априорних нерівностей (див., наприклад, [1, 2, 5, 6]).

Теорема 1. Для довільної функції $u \in H_0^1$ має місце нерівність

$$\|\tilde{L}u\|_{(H_T^1)^*} \leq c\|u\|_{H_0^1},$$

де c — тут і далі, деяка додатна стала, що не залежить від функції $u(t, x)$.

Доведення. Якщо до (8) застосувати нерівність Коші-Буняковського в інтегральній формі і нерівність Фрідрікса, то дістанемо доведення необхідної нерівності. $\square$

Теорема 2. Для довільної функції $u \in H_0^1$ має місце нерівність

$$c^{-1}\|u\|_{S_0^0} \leq \|\tilde{L}u\|_{(V_T^1)^*}. \quad (9)$$

Доведення. Для доведення нерівності (9) розглянемо значення функціоналу $\tilde{L}u \in (H_T^1)^* \subset (V_T^1)^*$ на елементі $v(t, x)$, де $v(t, x)$ — розв'язок задачі Коші

$$e^{Mt}(-v_t + v) = u(t, x), \quad v|_{t=T} = 0.$$

Значення додатної сталої $M > 10$ виберемо пізніше. Відзначимо, що функція $v(t, x)$ належить простору V_T^1 .

Перетворимо та оцінимо $\langle \tilde{L}u, v \rangle_{V_T^1}$. Для цього в означення оператора $\tilde{L}$ (рівність (8)) підставимо $u(t, x) = e^{Mt}(-v_t + v)$ і розглянемо кожний з доданків окремо.

Маємо

$$\begin{aligned} I_1 &= -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} = \\ &= M(e^{Mt}v_t, v_t)_{L_2(Q)} - M(e^{Mt}v, v_t)_{L_2(Q)} + \\ &+ (e^{Mt}v_u, v_t)_{L_2(Q)} - (e^{Mt}v_t, v_t)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, дістаємо

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{M-2}{2} \int_Q e^{Mt}v_t^2 dQ + \frac{M}{2} \int_\Omega v^2|_{t=0} d\Omega + \\ &+ \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt}v^2 dQ + \frac{1}{2} \int_\Omega e^{MT}v_t^2|_{t=T} d\Omega - \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega v_t^2|_{t=0} d\Omega. \end{aligned}$$

Оскільки мають місце рівності $v_t(T, x) = -e^{-MT}u(T, x)$, $v_t(0, x) = v(0, x)$ та наступна очевидна нерівність

$$2e^{2Mt}(v_t^2 + v^2) \geq (e^{Mt}(-v_t + v))^2 = u^2.$$

то одержуємо

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{M}{10} \int_Q e^{Mt}v_t^2 dQ + \frac{M^2}{10} \int_Q e^{Mt}v^2 dQ + \\ &+ \frac{M}{10} \int_Q e^{-Mt}u^2 dQ + \frac{M}{10} \int_\Omega v_t^2|_{t=0} d\Omega + \\ &+ \frac{1}{4} \int_\Omega e^{MT}v_t^2|_{t=T} d\Omega + \frac{1}{4} \int_\Omega e^{-MT}u^2|_{t=T} d\Omega. \end{aligned}$$

Розглянемо другий доданок. Зважаючи на симетричність матриці $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, дістаємо

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} (-v_{tx} + v_x) v_x dQ \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha M}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

Позначимо $\bar{u} = \int_0^t u(\tau, x) d\tau$. Інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} \bar{u}_{tx} v_{x_j} dQ = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} \bar{u}_x v_{tx_j} dQ = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{-Mt} \bar{u}_{x_i} \bar{u}_{tx_j} dQ - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} \bar{u}_{x_i} v_{x_j} dQ. \end{aligned}$$

Нехай c^* — додатна стала, що мажорус в області $\bar{\Omega}$ всі коефіцієнти a_{ij} , a_i , a , а a_0 в $\bar{\gamma}_3$. Застосовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$\begin{aligned} I_3 &\geq \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n \int_\Omega e^{-MT} \bar{u}_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega + \\ &+ \frac{\alpha M}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} \bar{u}_{x_i}^2 dQ - \\ &- \frac{c^* n}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} \bar{u}_{x_i}^2 + e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

Подібним чином оцінемо і наступний доданок. Маємо

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i v_{x_i} v|_{t=0} d\Omega + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_Q a_i e^{Mt} v_{x_i} v_t dQ + \\ &+ M \sum_{i=1}^n \int_Q a_i e^{Mt} v_{x_i} v dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q a_i e^{Mt} v_{x_i} v dQ. \end{aligned}$$

Остаточно одержуємо, що

$$I_4 \geq -c^* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\alpha}{8c^*} v_{x_i}^2|_{t=0} + \frac{2c^*}{\alpha} v^2|_{t=0} d\Omega - \\ - \frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 + e^{Mt} v_t^2 dQ - \\ - c^* M \sum_{i=1}^n \int_Q \frac{\alpha}{8c^*} e^{Mt} v_{x_i}^2 + \\ + \frac{2c^*}{\alpha} e^{Mt} v^2 dQ - \frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 + e^{Mt} v^2 dQ.$$

Для доданка I_5 маємо оцінку

$$I_5 = \int_Q a u v dQ \geq -\frac{c^*}{2} \int_Q e^{-Mt} u^2 + e^{Mt} v^2 dQ.$$

Залишилося розглянути останній доданок. Інтегруючи частинами, неважко показати, що

$$I_6 = \int_{\Gamma_3} a_0 u v d\Gamma_3 \geq 0.$$

З одержаних оцінок легко підбираємо таке досить велике $M > 0$, щоб

$$\langle \tilde{L}u, v \rangle_{V_T^1} \geq c^{-1} \|u\|_{S_0^0}^2 + c^{-1} \|v\|_{V_T^1}^2.$$

Застосовуючи до лівої частини нерівність Шварца, а до правої нерівність Коші, дістаємо

$$\|\tilde{L}u\|_{(V_T^1)^*} \|v\|_{V_T^1} \geq \langle \tilde{L}u, v \rangle_{V_T^1} \geq 2c^{-1} \|u\|_{S_0^0} \|v\|_{V_T^1}.$$

Звідки і випливає твердження теореми. $\square$

Наслідок 1 Таким чином, доведено, що для всіх $u \in H_0^1$ мають місце нерівності

$$\|u\|_{S_0^0} \leq c_1 \|\tilde{L}u\|_{(V_T^1)^*} \leq c_2 \|\tilde{L}u\|_{(H_T^1)^*} \leq c_3 \|u\|_{H_0^1}. \quad (10)$$

З а у в а ж е н н я 1. Легко зрозуміти, що теорема залишається вірною і у тому випадку, коли коефіцієнти рівняння a_{ij} , a_t , а належать простору $L_\infty(\Omega)$, а $a_0 \in L_\infty(\Gamma_3)$.

Теорема 3. Для всіх $v \in H_T^1$ мають місце нерівності

$$\|v\|_{S_T^0} \leq c_1 \|\tilde{L}^*v\|_{(V_0^1)^*} \leq c_2 \|\tilde{L}^*v\|_{(H_0^1)^*} \leq c_3 \|v\|_{H_T^1}. \quad (11)$$

Доведення. Аналогічно теоремі 2 для доведення оцінки знизу необхідно розглянути значення функціоналу $\tilde{L}^*v \in (V_0^1)^*$ на елементі $u(t, x)$, де $u(t, x)$ — розв'язок задачі Коші

$$e^{-Mt} (u_t + u) = v(t, x), \quad u|_{t=0} = 0.$$

$\square$

Наслідок 2. Оператори $\tilde{L} : H_0^1 \rightarrow (H_T^1)^*$, $\tilde{L}^* : H_T^1 \rightarrow (H_0^1)^*$ ін'єктивні.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, рівність (8) можна переписати у вигляді

$$(u, v_t)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \bar{u}_{x_i}, v_{tx_j})_{L_2(Q)} - \\ - \sum_{i=1}^n (a_i \bar{u}_{x_i}, v_t)_{L_2(Q)} - (a_0 \bar{u}, v_t)_{L_2(Q)} - \\ - (a_0 \bar{u}, v_t)_{L_2(\Gamma_3)} = (f, v)_{L_2(Q)}$$

для всіх $u \in L_0$, $v \in L_T$, де $\bar{u} = \int_0^t u d\tau$. Ця рівність задає розширення оператора $\tilde{L}$ до лінійного неперервного оператора, що діє в просторах $H_0^0 \ni u \rightarrow \tilde{L}u \in (H_T^2)^*$. Абсолютно аналогічно можна задати оператор $\tilde{L}$ в просторах $H_0^k \ni u \rightarrow \tilde{L}u \in (H_T^{2-k})^*$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4. Для всіх $u \in H_0^k$, $v \in H_T^k$ мають місце нерівності

$$\|u\|_{S_0^{k-1}} \leq c_1 \|\tilde{L}u\|_{(V_T^{2-k})^*} \leq \\ \leq c_2 \|\tilde{L}u\|_{(H_T^{2-k})^*} \leq c_3 \|u\|_{H_0^k}, \quad (12)$$

$$\|v\|_{S_T^{k-1}} \leq c_1 \|\tilde{L}^*v\|_{(V_0^{2-k})^*} \leq \\ \leq c_2 \|\tilde{L}^*v\|_{(H_0^{2-k})^*} \leq c_3 \|v\|_{H_T^k}. \quad (13)$$

Доведення. Нехай $u \in L_0$. Тоді $u^{(k-1)} \in L_0 \subset H_0^1$ і зважаючи на (10), маємо

$$\|u^{(k-1)}\|_{S_0^0} \leq c_1 \|\tilde{L}u^{(k-1)}\|_{(V_T^1)^*} \leq \\ \leq c_2 \|\tilde{L}u^{(k-1)}\|_{(H_T^1)^*} \leq c_3 \|u^{(k-1)}\|_{H_0^1}$$

або

$$\|u\|_{S_0^{k-1}} \leq c_1 \|(\tilde{L}u)^{(k-1)}\|_{(V_T^1)^*} \leq \\ \leq c_2 \|(\tilde{L}u)^{(k-1)}\|_{(H_T^1)^*} \leq c_3 \|u\|_{H_0^k}.$$

Зауважимо також, що легко встановити рівність $\|(\tilde{L}u)^{(k-1)}\|_{(H_T^1)^*} = \|\tilde{L}u\|_{(H_T^{2-k})^*}$. Дійсно, оскільки $(\tilde{L}u)^{(l)}|_{t=0} = 0$, $l \in \mathbb{Z}$, то

$$\|(\tilde{L}u)^{(k-1)}\|_{(H_T^1)^*} = \sup_{v \in H_T^1} \frac{|((\tilde{L}u)^{(k-1)}, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{H_T^1}} = \\ = \sup_{v \in L_T} \frac{|((\tilde{L}u)^{(k-1)}, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{H_T^1}} = \\ = \sup_{v \in L_T} \frac{|(\tilde{L}u, v^{[k-1]})_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{H_T^1}} = \\ = \sup_{v^{[k-1]} \in L_T} \frac{|(\tilde{L}u, v^{[k-1]})_{L_2(Q)}|}{\|v^{[k-1]}\|_{H_T^{2-k}}} = \|\tilde{L}u\|_{(H_T^{2-k})^*}.$$

Аналогічно перевіряємо, що $\|(\tilde{L}u)^{(k-1)}\|_{(V_T^1)^*} = \|\tilde{L}u\|_{(V_T^{2-k})^*}$ де $\tilde{u} = \int_0^t u \, d\tau$.

Оскільки, множина L_0 щільна в H_0^k , то дістаємо доведення (12). Нерівності (13) доводяться аналогічно. $\square$

Наслідок 3. Оператори $\tilde{L} : H_0^k \rightarrow (H_T^{2-k})^*$, $\tilde{L}^* : H_T^k \rightarrow (H_0^{2-k})^*$ ін'єктивні.

Аналогічно до робіт [1, 2, 3, 4, 5] доводиться теорема.

Теорема 5. Для довільних $f \in (V_T^{k-1})^* \subset (H_T^k)^*$ існує єдиний розв'язок $u \in V_0^{2-k}$ рівняння $\tilde{L}u = f$.

Означення 1. Узагальненим розв'язком рівняння $\tilde{L}u = f$ будемо називати елемент $u \in S_0^{k-1}$ для якого існує послідовність $u_i \in L_0$, що

$$\|u_i - u\|_{S_0^{k-1}} \rightarrow 0, \quad \|\tilde{L}u_i - f\|_{(V_T^{2-k})^*} \rightarrow 0$$

при $i \rightarrow \infty$.

Теорема 6. Для всіх $f \in (V_T^{2-k})^*$ існує єдиний узагальнений розв'язок $u \in S_0^{k-1}$ рівняння $\tilde{L}u = f$.

Доведення. Твердження теореми випливає з щільності множини $\tilde{L}(L_0)$ в $(V_T^{2-k})^*$ і нерівностей (12). $\square$

Наслідок 4. Існує $c_1 > 0$, що для всіх $f \in (V_T^{2-k})^*$ має місце нерівність $\|u\|_{S_0^{k-1}} \leq c_1 \|f\|_{(V_T^{2-k})^*}$, де $u \in S_0^{k-1}$ — узагальнений розв'язок рівняння $\tilde{L}u = f$.

З а у в а ж е н н я 2. Нехай $\tilde{H}_T^2$ — поповнення множини функцій $v \in C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняють умови $v|_{\Gamma_1} = 0$, $v|_{t=T} = 0$ за нормою

$$\|v\|_{\tilde{H}_T^2}^2 = \int_Q v_t^2 + v_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n v_{ix}^2 \, dQ.$$

Зрозуміло, що H_T^2 — власний підпростір $\tilde{H}_T^2$. Крім цього, має місце щільне неперервне вкладення $\tilde{H}_T^2 \subset H_T^1$.

Тоді для всіх $u \in L_0$, $v \in \tilde{H}_T^2$ рівність (8) може бути переписана у вигляді

$$\begin{aligned} & -(u(T, x), v_t(T, x))_{L_2(\Omega)} + (u, v u)_{L_2(Q)} - \\ & - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \bar{u}_{x_i}, v_{ix_j})_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n (a_i \bar{u}_{x_i}, v_i)_{L_2(Q)} - \\ & - (a \bar{u}, v_t)_{L_2(Q)} - (a_0 \bar{u}, v_t)_{L_2(\Gamma_3)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

де $\tilde{u} = \int_0^t u \, d\tau$.

Ця рівність задає неперервне розширення оператора $\tilde{L} : H_0^1 \rightarrow (H_T^1)^*$ до $\tilde{L}_1 : S_0^0 \rightarrow (\tilde{H}_T^2)^*$. Зрозуміло, що узагальнений розв'язок $u \in S_0^0$ задовольняє рівність $\tilde{L}_1 u = f$, тобто в теоремі 6 доведено, що $(V_T^1)^* \subset R(\tilde{L}_1)$ і для всіх $u \in S_0^0$, $\tilde{L}_1 u \in (V_T^1)^*$ має місце нерівність $\|u\|_{S_0^0} \leq c_1 \|\tilde{L}_1 u\|_{(V_T^1)^*}$.

Доведемо важливу при розв'язанні задач оптимізації системи властивість ін'єктивності оператора $\tilde{L}_1$.

Лема 2. Оператор $\tilde{L}_1$ ін'єктивний.

Доведення. Нехай $u \in S_0^0$ такий елемент, що $\tilde{L}_1 u = 0$. Тоді існує послідовність $u_n \in L_0$, що $u_n \rightarrow u$ в S_0^0 та

$$\begin{aligned} & -(u_n(T, x), v_t(T, x))_{L_2(\Omega)} + (u_n, v u_n)_{L_2(Q)} - \\ & - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} (\bar{u}_n)_{x_i}, v_{ix_j})_{L_2(Q)} - \\ & - \sum_{i=1}^n (a_i (\bar{u}_n)_{x_i}, v_i)_{L_2(Q)} - \\ & - (a \bar{u}_n, v_t)_{L_2(Q)} - (a_0 \bar{u}_n, v_t)_{L_2(\Gamma_3)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (14)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Нехай $v \in H_T^2$, тоді остання рівність переписється у вигляді

$$(\tilde{L}^* v, u_n)_{H_0^0} \rightarrow 0,$$

де $\tilde{L}^* : H_T^2 \rightarrow (H_0^0)^*$. Оскільки $u_n \in L_0$ — фундаментальна послідовність в S_0^0 , то $u_n \in L_0$ — фундаментальна послідовність і в H_0^0 . Тому $u_n \rightarrow u^* \in H_0^0$ і

$$(\tilde{L}^* v, u^*)_{H_0^0} = 0,$$

З аналога теореми 5 для спряженого оператора маємо, що $\tilde{L}^*(H_T^2)$ — щільна множина в просторі $(H_0^0)^*$. Тому $u^* = 0$, отже $u_n \rightarrow 0$ в H_0^0 . Оскільки u_n — фундаментальна послідовність в просторі V_0^0 , бо норма S_0^0 сильніша за V_0^0 , і u_n збігається до нуля в H_0^0 , то з умови π) випливає, що u_n збігається до нуля і в просторі V_0^0 .

Тоді співвідношення (14) набуває вигляду

$$-(u_n(T, x), v_t(T, x))_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \forall v \in \tilde{H}_T^2.$$

Але $u_n \rightarrow u^{**}$ в $L_2(\Omega)$. Звідки, зважаючи на теорему про сліди, маємо, що $u^{**} = 0$, отже $u_n \rightarrow 0$ в S_0^0 , що і треба було довести. $\square$

Аналогічні зауваження мають місце і відносно узагальненого розв'язку $u \in S_0^{k-1}$ рівняння $\tilde{L}u = f$.

Означення 2. Систему $\tilde{L}u = f(h)$ називають керованою в банаховім просторі H_0^k множиною керуючих впливів U_∂ , $(h \in U_\partial)$, коли для довільного елемента $u^* \in H_0^k$ існує таке керування $h^* \in U_\partial$, що u^* — розв'язок рівняння $\tilde{L}u = f(h^*)$.

Означення 3. Систему $\tilde{L}u = f(h)$ називають асимптотично керованою в банаховім просторі S_0^{k-1} множиною керуючих впливів U_∂ , якщо для довільного елемента $u^* \in S_0^{k-1}$ існує така послідовність керувань $h_i \in U_\partial$, що $\|u(h_i) - u^*\|_{S_0^{k-1}} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, де $u(h_i)$ — узагальнений розв'язок рівняння $\tilde{L}u = f(h_i)$.

Теорема 7. Якщо $f(U_\partial) = (H_T^{2-k})^*$, то система $\tilde{L}u = f$ керована в H_0^k множиною керуючих впливів U_∂ .

Доведення. Нехай u^* — довільний елемент простору H_0^k . Тоді маємо, що $f^* = \tilde{L}u^* \in (H_T^{2-k})^*$. Тому існує керування $h^* \in U_\partial$, що $f(h^*) = f^*$. З властивості ін'єктивності оператора $\tilde{L}$ (наслідок 3) випливає, що u^* — розв'язок рівняння $\tilde{L}u = f(h^*)$, що і треба було довести. $\square$

Теорема 8. Нехай множина $f(U_\partial) \subset (V_T^{2-k})^*$ щільна в просторі $(V_T^{2-k})^*$, то система (1) асимптотично керована в S_0^{k-1} множиною керуючих впливів U_∂ .

Доведення. Нехай u^* — довільний елемент простору S_0^{k-1} . Оскільки L_0 — щільна множина в S_0^{k-1} , то існує послідовність $u_i \in L_0$, що є збіжною до u^* в просторі S_0^{k-1} . Оскільки множина $f(U_\partial)$ щільна в $(V_T^{2-k})^*$, то при фіксованому $i \in \mathbb{N}$ існує така послідовність $h_{i,k} \in U_\partial$, що

$$\|\tilde{L}u_i - f(h_{i,k})\|_{(V_T^{2-k})^*} \leq \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = o(1).$$

Зважаючи на наслідок 4, маємо

$$\begin{aligned} \|u^* - u(h_{i,k})\|_{S_0^{k-1}} &\leq \|u^* - u_i\|_{S_0^{k-1}} + \\ &+ \|u_i - u(h_{i,k})\|_{S_0^{k-1}} \leq \|u^* - u_i\|_{S_0^{k-1}} + \\ &+ c_1 \|\tilde{L}u_i - f(h_{i,k})\|_{(V_T^{2-k})^*} \leq \\ &\leq \|u^* - u_i\|_{V_0^0} + c\varepsilon_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$. $\square$

Зауваження 3. З доведеної теореми випливає фінальна (при $t = T$) асимптотична керованість гіперболічної системи.

Зауваження 4. Відомо, що множина

$$\left\{ \sum_{i=1}^s \delta(t - t_i) \varphi_i(x), \quad t_i \in [0, T], \varphi_i \in L_2(\Omega) \right\}$$

є щільною в просторах узагальнених функцій скінченного порядку [8].

Література

- [1] Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. — Киев: Наукова думка, 1998. — 472с.
- [2] Lyashko S.I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters. — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
- [3] Грищенко О.Ю., Ляшко С.И., Молодцов О.І. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки. — Киев: ВиПол, 1997. — 222с.
- [4] Ляшко И.И., Ляшко С.И., Номировский Д.А. Управляемость в гиперболических и псевдогиперболических системах с сингулярными воздействиями // Доповіді НАН України. — 2000. — № 11. — С. 131-134.
- [5] Ляшко С.И., Номировский Д.А., Сергиенко Г.И. Траекторно-финальная управляемость в гиперболических и псевдогиперболических системах с обобщенными воздействиями // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 5. — С. 157-166.
- [6] Номировский Д.А. До питань розв'язності та керованості систем С.Л. Соболева // Вісник КУ. Серія: фіз.-мат. науки. — 2005. — № 1. — С. 194-198.
- [7] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- [8] Ляшко С.И., Редько С.Е. Об управляемости распределенных систем в классе обобщенных воздействий // Кибернетика. — 1988. — № 6. — С. 120-121.

Надійшла до редакції 20.09.2007

УДК 004.4'2

Анісімов А.В. проф. доктор ф.м., Глибовець
А.М. ст.викл., Жаб'юк В.Я.

Основні архітектурні принципи побудови програмних систем реалізації мобільних агентів

В статті розглянуто основні архітектурні принципи побудови програмних систем реалізації мобільних агентів. Проведено порівняльний аналіз найбільш відомих платформ підтримки обчислювальних мобільних агентів. Визначено базові вимоги до архітектури програмних систем такого типу.

Ключові слова: архітектурні принципи, мобільні агенти, платформи мобільних агентів.

E-mail: ava@unicyb.kiev.ua

A.V. Anisimov professor, A.M. Glybovets
senior lecturer, V.Y. Zhabyuk

Main Architectural Principles for Mobile Agents

Major architectural principles of mobile agents design are investigated. Comparative analysis of popular mobility support platforms is performed. Basic requirements to such architectures are defined.

Key Words: Architectural principles, mobile agents, Mobile agents platforms.

Вступ

Існують певні причини зацікавленості мобільними агентами (МА) за останні роки. Ранні дослідження МА були важливими, але не оцінені адекватно, поки ставилися в один ряд із дослідженнями складних програмних комплексів реального часу. МА можуть працювати над вирішенням проблеми латентності, пропускнуої спроможності програм клієнт-сервер та зменшення вразливості мережного з'єднання. WWW та Інтернет використовують МА для підвищення інтелектуальності та доступності своїх сервісів для непрофесійних користувачів. МА також можуть забезпечувати єдину загальну структуру, у якій інформаційно-орієнтовані прикладні програми можуть ефективно застосовуватися та легко поширюватися.

Класифікація агентів на основному рівні поділяє агентів на три категорії: біологічні, автоматизовані (роботи) та обчислювальні агенти [1].

Ми зосереджуємо свою увагу на обчислювальних агентах. Існує декілька загальних характеристик, які входять до визначення такого МА. Як мінімум МА є

автономною, самостійною й визначеною комп'ютерною програмою, яка здатна рухатися в мережі, взаємодіяти в середовищі та діяти від імені користувача чи іншої особи. Можна виділити багато прикладних задач, для розв'язку яких ефективним є використання МА. Серед них виділяють: управління та супровід; електронна комерція; мобільні пристрої; мобільні користувачі та мобільне обчислювання; пошук інформації та повернення; безпечне посередництво; послуги телекомунікаційних мереж; прикладні програми технологічного процесу й програмне забезпечення для спільної роботи групи людей (groupware); одночасна (паралельна) обробка.

Наприклад, у великих мережах моніторинг, виявлення помилок та дистанційне інсталивання програмних компонентів є досить складним та включає в себе велику кількість реєстраційних даних. Неможливо створити вбудовану діагностичну програму для кожної окремої цілі, але можна використовувати МА для моніторингу системи (Perpetuum Mobile Procura [2]) та звертати увагу адміністратора системи на проблемні місця. Агенти можуть бути досвідченими асистентами для демонстрації інформаційних систем, перемішуватися в місця збереження даних замість переміщення

всієї інформації через мережу та пошуку необхідної інформації, даючи людям можливість використовувати інформацію опосередковано й ефективно (система Stormcast [3]). МА здатні клонувати себе в мережі; це робить їх придатними для завдань одночасної обробки.

Саме, через різноманітні підходи до дослідження технології агента виникла необхідність створення єдиної організації стандартизації цих досліджень. Фонд інтелектуальних фізичних агентів (FIPA) був створений у 1996 році з метою заповнення цієї прогалини. Пізніше з'явилася група управління об'єктами (OMG), яка є особливо активною в поданні ініціатив та стандартів функціональної сумісності й безпеки. Окрім FIPA і OMG існує ще декілька організацій зі стандартизації, які працюють у напрямку створення ініціатив і стандартів. Так, IETF (Інтернет-група особливого призначення) приділяє особливу увагу технологіям Інтернет-агентів. W3C займається веб-мовами та онтологією мобільних агентів. Серед інших дослідницьких груп та офіційних форумів, які поширюють (промотують) технології мобільних агентів виділяють Agent Society, NIST та Agent Interop Working Group.

Усе це зумовило розглянути та проаналізувати існуючі базові архітектурні принципи побудови програмних систем реалізації мобільних агентів.

Системи підтримки МА

Сьогодні, існує багато систем створення спеціалізованих МА, деякі з них усе ще знаходяться у фазі дослідження, деякі є комерційними системами. Серед них можна виділити: Bee-agent [4], Aglets [5], Hive [6], AgentTcl [7] та Telescript [8]. Розглянемо далі системи, які демонструють певні особливості архітектурних підходів до програмної реалізації і є типовими для свого класу.

ARA. Система Агента віддаленої дії (ARA) [9] є платформою для мобільних агентів, що створюється в університеті Кайзерслаутерн (Kaiserslautern). Мобільні агенти Ага програмуються в Tcl, Java і C/C++. Для всіх трьох мов Ага забезпечує команду *руху (go)*, яка автоматично фіксує повністю стан агента, переносить його до потрібної машини, і відновлює виконання агента саме в точці *руху*

(*go*). Ага також дозволяє агенту робити контрольну перевірку (checkpoint) його поточного внутрішнього стану в будь-який час.

На відміну від інших подібних систем, Ага має багато потоків (ниток, відгалужень) і сервер агента та інтерпретатори алгоритмічної мови працюють у середовищі єдиного процесу Unix. Хоча цей підхід ускладнює виконання, він має істотні комунікаційні переваги, за рахунок використання невеликого інтерпретатора. Коли з'являється новий агент, він просто починає виконання в новому потоці. У випадку потреби зв'язатися з іншим, він просто переміщує структуру повідомлення до потрібного агента, замінюючи використання міжкомунікаційних процесів.

Група Ага завершує імплементацію початкових механізмів безпеки. Кодування агента проводить програміст, а його параметри та загальний дозвіл на користування ресурсами визначаються його власником (користувачем). Кожна машина має один або більше віртуальних просторів, створених агентами. Мігруючий агент повинен переміститись в певне місце. Коли він прибуває на це місце, функція прийняття відмовляє агенту в доступі, або ж надає набір дозволів, ґрунтуючись на його криптографічних посвідченнях (даних).

D'Agents. D'Agents, колись відомий як Agent Tcl [10], є системою мобільного агента, створеною в Дартмутському коледжі в Ганновері. Він базується на скриптовій мові Tcl для керування агентами, а Safe Tcl використовується для гарантування безпеки. Подібно до Ага, D'Agents забезпечує команду *руху (go)*, автоматично фіксує й відновлює повний стан мігруючого агента. На відміну від Ага, тільки сервер D'Agent має багато потоків (ниток), а кожен агент виконується в окремому процесі, який значно спрощує імплементацію, але ускладнює внутрішню комунікацію.

Сервер D'Agent використовує криптографію (шифр) публічного ключа, щоб засвідчити (ідентифікувати) власника агента, що прибув. Стаціонарні агенти ресурсного менеджера призначають права доступу агентам, що базувалися на автентифікації й перевагах адміністратора. Модулі зі специфічними мовами встановлюють права доступу та запобігають виникненню

порушення (до прикладу, доступ до файлової системи) чи знищення агента при настанні порушення (наприклад, коли загальний час CPU закінчується). Кожен менеджер ресурсів асоціюється зі специфічним (певним) ресурсом, до прикладу, файловою системою. Менеджери ресурсів можуть бути як завгодно складні, але за замовчанням менеджери просто асоціюють список прав доступу з кожним власником.

На відміну від Aja, з більшістю менеджерів ресурсів не консультуються при появі агента. Звернення до них виникає тільки коли агент (1) намагається отримати доступ до відповідного ресурсу або (2) явно вимагає право специфічного доступу. У цьому випадку менеджер ресурсу пересилає всі відповідні права доступу до примусового модуля, і D'Agents поводить так само як Aja, надаючи права доступу in short wrapper functions навколо функцій доступу до ресурсу. D'Agents використовується в деяких прикладних програмах пошуку інформації.

Aglet. Aglets створений в IBM (Японія). Агенти в Aglets є об'єктами Java, які можуть рухатися від одного інтернетівського хоста до іншого. Тобто агент, який виконується на одному хості, може раптово призупинити виконання, переміститись на віддалений хост та продовжити виконання вже там на ньому. Коли агент рухається, він переносить із собою свій програмний код і свої дані.

Замість надання прототипу (простого) go Aja і D'Agents, Aglets використовує варіант моделі Tahoma, у якій виконання агента розпочинається знову з початкової точки після кожної міграції. Зокрема, Aglets використовує модель, орієнтовану на події. Коли агент хоче мігрувати (переміститись), він застосовує метод *відправки*. Система Aglets застосовує *onDispatching* метод агента, який виконує специфічну чистку, знищує потоки (нитки) агента, упорядковує код агента й стан об'єкта, і відправляє код та стан об'єкта до нової машини. На новій машині система застосовує *onArrival* метод агента, який виконує специфічну ініціалізацію, а потім застосовує метод запуску агента для його повторного виконання. Aglets містить: простий засіб постійного зв'язку, який дозволяє агенту записувати його код і стан об'єкта до зовнішньої пам'яті, і тимчасово "вимикати" себе; програми-посередники (*proxies*), які діють як представники Aglets та забезпечують

прозорість розташування; обслуговування пошуку для знаходження мобільних (тих, що рухаються) Aglets, та низку засобів для комунікації між агентами шляхом передачі повідомлень.

Telescript. Telescript [11], створений General Magic на початку 1990-их років як перша система, спроектована спеціально для підтримки мобільних агентів у комерційних прикладних програмах, включає, орієнтовану на об'єкт безпечного типу, мову для програмування агента. Сервери Telescript, яких ще називають *місцями*, надають послуги, зазвичай, інсталювання стаціонарних агентів для спілкування з гостьовими агентами. Агенти використовують примітивну команду *руху (go)* для абсолютної міграції до місць, указаних при використанні імен хостів, базованих на DNS. Система фіксує режим виконання на рівні потоку, таким чином, агент відновлює операцію негайно після *руху (go)*. Відносна міграція також можлива при використанні простої команди *зустрічі*. Співвіднесені агенти можуть використовувати методи один одного для комунікації. Засіб, що повідомляє про подію, також є доступним. Telescript не був комерційно успішним тому, що використання його вимагало вивчення програмістами цілком нової мови. У 1997 році підтримуюча компанія, General Magic Inc відклала проект Telescript і почала роботу над новою системою, що базується на Java мові, під назвою Odyssey [12], яка використовує ту ж саму архітектуру.

Ajanta. Ajanta (Проект дослідження мобільних агентів) – система програмування мобільного агента, створена в університеті Міннесоти. Перша пробна версія Ajanta була представлена 1999 році, а в 2003 була випущена друга комерційна версія Ajanta. Агентська система Ajanta побудована на базі Java, та створена на основі агентських платформ мобільних серверів та мобільних агентів.

У Ajanta агент виконується в ізольованій захищеній області для запобігання несанкціонованого втручання з боку інших агентів. Сервер захищає свої ресурси, розміщуючи їх у проксі об'єкти, які створені динамічними й налаштовані (адаптовані) під кожного окремого клієнта агентів.

Аналогічний механізм може дозволити безпечну комунікацію посередника через застосування методу активізації. Комунікація через мережу є також можливою при застосуванні віддаленого методу активізації. Аутентифіковані контрольні функції дозволяють прикладним програмам повторно викликати або закінчувати (зупиняти) своїх віддалених агентів у будь-який час. Ajanta також працює над проблемою захисту стану (статичної інформації) агента від небажаних (злоскисних) серверів. Вона надає криптографічні механізми, які дозволяють власнику агента захистити частину стану агента та виявляти будь-яке подальше втручання.

Voyager. Агентська система Voyager, що базується на мові Java, створена Object Space, забезпечує зручний частково прозорий спосіб взаємодії з віддаленими об'єктами (через проксі об'єкт із «віртуальним» посиланням) і спосіб для об'єктів переміщуватися від одного до іншого хоста [13]. Коли об'єкт переміщується, він залишає за собою «форвардний» об'єкт, який пересилає будь-які повідомлення на нове місце. Об'єкти «агенти», на відміну від інших об'єктів, можуть самостійно переміщувати самих себе, застосовуючи метод *moveTo()*. Voyager переміщає код і дані агента, але не сам потік, до нового розташування, і застосовує там бажаний метод. Voyager також дозволяє об'єктам і агентам стати постійними за допомогою точного *saveNow()*, підтримує групову комунікацію (мульти) і надає послугу федеративної директорії. Voyager забезпечує ті ж основні механізми безпеки, як і інші Java-системи.

Tasoma. Tasoma – спільний проект норвезького Університету Тромсо та Університету Корнелл [14]. Проект зосереджується на підтримці операційних систем для МА і на тому, як МА може допомогти у вирішенні проблем, які традиційно стосуються операційних систем. Tasoma пропонує абстракції, наприклад, брифкейс, папку та файл, для розширення операційних систем із метою забезпечення механізмів передачі даних агенту-посереднику та агентам, що складають розклад. Це підтримує й синхронну, і несинхронну комунікацію. Механізм альтернативної

комунікації – використання файлів, які є статичними архівами для загальної інформації. Агенти можуть зберігати специфічні програмні дані у файлах, до яких інші агенти потім можуть отримати доступ. На відміну від Aga і D'Agents, Tasoma не надає автоматичних пристроїв збору даних. Натомість, коли агент хоче переміститися на нову машину, він створює папку, у яку вміщує свій код та будь-яку необхідну статичну інформацію. Папка надсилається до нової машини, де запускається необхідне для виконання програми середовище, а потім звертається до відомої точки входу в межах коду агента для відновлення виконання агента. Для стійкості до помилок Tasoma використовує систему перевірки та використовує захисних агентів для простеження міграції мобільних агентів.

Concordia. Concordia була створена компанією Mitsubishi Electric [15]. Вона написана на Java і зосереджує основну увагу на безпеці та надійності. Вона переміщує код та дані агента, але не стан потоку інформації від однієї машини до іншої. Подібно до інших систем, агенти Concordia прив'язані до маршруту відвідування, який може бути модифікований агентом під час виконання маршруту. Агенти, події та повідомлення можуть бути поставлені в чергу, якщо віддалений вузол зараз недоступний. Агенти ретельно зберігаються в постійній пам'яті перед переміщенням із сайту та після прибуття на новий сайт для того, щоб запобігти втраті агента при руйнації машини. Агенти захищені від втручання шляхом кодування, поки вони перебувають у процесі передачі чи зберігаються на диску; хости агентів захищені від злісних злоскисних агентів шляхом криптографічної автентифікації власника агента та списків контролю доступу, які охороняють кожний ресурс.

Jumping Beans. Комп'ютери, які хочуть прийняти мобільних агентів, використовують Jumping Beans [16] агенцію, яка асоціюється з доменом Jumping Beans. Кожен домен має центральний сервер, який проводить перевірку агенцій, що приєднуються до домена. Мобільні агенти рухаються від агенції до агенції в межах домена, і агенти можуть відправити повідомлення іншим агентам у домені. Обидва

механізми застосовуються шляхом проходження через сервер домена. Таким чином, сервер стає центральним пунктом для дослідження, управління та перевірки агентів. Він також стає центральним місцем помилок чи складних ситуацій/тупиків у виконанні, хоча й компанія планує створити великомасштабні сервери, які б функціонували на паралельних машинах. Інший підхід до універсальності (розширення масштабів) – створити багато маленьких доменів, кожен з яких мав би свій власний сервер. В існуючій версії агенти не можуть мігрувати між доменами, але компанія планує вможливити міграцію між доменами в майбутніх версіях. Безпека й надійність – ключові аспекти Jumping Beans. Криптографія публічного ключа використовується для перевірки відповідності агенцій та серверів, а списки контролю доступу використовуються для контролю доступу агента до ресурсів, базованому на дозволах, наданих власнику агента.

Obliq. Завданням Obliq є збір названих матеріалів, які містять методи, псевдоніми та цінності [17]. Об'єкт може бути створений на дистанційному вузлі, клонований на дистанційному вузлі чи переміщений у комбінації із клонуванням та перенаправленням. Застосування мобільних агентів тут є дуже простим. Агент складається із процедури визначення користувача, яка сприймає брифкейс як аргумент. Брифкейс містить завдання Obliq, які необхідно виконати під час цієї процедури. Агент переміщується шляхом надсилання своєї процедури та наявного брифкейсу до цільової машини, яка розпочинає процедуру завершення виконання агента.

Агент Вее. Бджолиний агент [18], створений Центром лабораторних корпоративних досліджень та розвитку комп'ютерних та мережених систем корпорації TOSHIBA у 1999 році, є ще одним типом архітектури агентської системи. На відміну від інших систем, які лише частково використовують мобільних агентів, Агент Вее повністю "Agentifies" комунікації, які відбуваються між прикладними програмами. Прикладні програми стають агентами; усі повідомлення передаються агентами. Агент Вее дозволяє розробникам створювати гнучкі відкриті дистрибутивні системи, які оптимально використовують існуючі прикладні програми,

з також здатний працювати в Java 2 середовищі.

Hive. Система *Hive* є децентралізованою системою для створення прикладних програм за допомогою системних ресурсів локальної мережі. Вона застосовується в роботі мережі "Things that Think" (Речі, що думають) [19], яка включає обчислення та комунікацію щоденних об'єктів та утилітів (appliances). Система *Hive* складається із трьох компонентів: щільникові вузли в децентралізованій мережі, приховані локальні ресурси й обчислення, що здійснюється агентами. Її мобільність є в багатьох випадках повторним застосуванням таких систем як Telescript, AgentTcl, Aglets, та Mole. Проте планується здійснити дослідження для створення простої версії мобільності для складних проблем.

Висновки

Сучасний стан використання агентних підходів до оптимального розв'язку прикладних задач засвідчує існування проблеми побудови програмної архітектури, яка дозволяє ефективно існувати й переміщуватись агентам у розподіленому й гетерогенному середовищі. Ця проблема вирішується за допомогою виділення спеціалізованої *агентної платформи (АП)*, яка контролює та управляє агентною спільнотою [20].

Для вирішення проблем інтероперабельності пропонується дотримуватися таких стандартів при розробці АП. Платформа має бути динамічною структурою, що забезпечує інтеграцію систем, які базуються на різних апаратних і програмних архітектурах. Вона повинна включати в себе різні протоколи зв'язку, для забезпечення спілкування різним агентам, які належать до різних платформ. Звісно, для реалізації можливості незалежної роботи АП має бути автономною [21].

FIPA рекомендує включення наступних фундаментальних модулів у агентну платформу:

- Agent Communication Channel (ACC) - канал спілкування агентів. цей модуль є унікальним і обов'язковим для кожної агентної платформи. Цей модуль відіграє роль маршрутизатора повідомлень.

- Agent Management System (AMS) — система керування агентами. Цей модуль контролює й керує агентною платформою й активністю агентів. Він керує процесом створення, реєстрацією й знищенням реєстрації кожного агента платформи. Також AMS містить список усіх існуючих агентів, що є ідентифікуються по їх Global Unique Identifier (GUID — глобальний унікальний ідентифікатор). Цей список надається у виді сервісу, кожному агенту платформи.

- Directory Facilitator (DF). Цей модуль на відміну від списку, що надається ANS містить список агентів домену. Усі агенти, що є зареєстрованими в ньому формують домен агентів. Кожний DF сервіс керує відповідним агентним доменом.

Розробка АП, що задовольняє зазначеним вимогам є актуальною задачею, яка чекає свого розв'язку.

1. Література

1. Гороховський С.С. Агентні технології: спроба критичного огляду. // Наукові записки. Національний університет "Києво-Могилянська Академія". - Т. 18: Спеціальний випуск; НАУКМА. - К., 2000. - с.391-395.
2. Perpetuum, "Perpetuum Mobile Procura Project," <http://www.sce.carleton.ca/netmanage/perpetuum.shtml>, 2002.
3. Stormcast 5.0. <http://www.cs.uit.no/DOS.StormCast/>, 2002.
4. Toshiba, "Multi-Agent Framework for 100% Pure Agent System," <http://www2.toshiba.co.jp/rdc/beegent/index.htm>, 2005.
5. IBM, "Aglets," <http://www.trl.ibm.co.jp/aglets/>, 2001.
6. N. Minar, M. Gray, O. Roup, R. Krikorian, and P. Maes, "Hive: distributed Agents for Networking Things," IEEE concurrency, Vol. 8, No. 2, pp. 24-33, 2000.
7. R. Gray, "AgentTCL: A Flexible and Secure Mobile-agent System," PhD Thesis, Dartmouth College, 1997.
8. J.E. White, "Telescript Technology: Mobile Agents," Software Agents, J. Bradshaw, ed., pp. 437-472, 1996.
9. H. Peine and T. Stolpmann, "The Architecture of the Ara Platform for Mobile Agents," Proceedings of the 1st International Workshop on Mobile Agents (MA'97), pp. 50-61, 1997.
10. R. Gray, D. Kotz, G. Cybenko, and D. Rus, "D'Agents: Security in a Multiple-Language, Mobile-Agent System," Mobile Agents and Security, G. Vigna, editor, pp. 154-187, 1998.
11. J.E. White, "Mobile Agents," General Magic White Paper., <http://www.genmagic.com/agents>, 1996.
12. Odyssey, <http://www.genmagic.com/>, 2001.
13. ObjectSpace, Inc. "ObjectSpace Voyager Core Package Technical Overview," Technical Report, ObjectSpace, Inc., 1997, <http://www.objectspace.com/>.
14. D. Johansen, R. Renesse, and F. Schneider, "Operating System Support for Mobile Agents," Proceedings of the 5th IEEE Workshop on Hot Topics in Operating Systems, pp. 42-45, 1995.
15. T. Walsh, N. Pacioret, and D. Wong, "Security and Reliability in Concordia," Mobility: processes, computers, and agents, pp. 524 - 534, 1999.
16. "Jumping Beans White Paper," Ad Astra Engineering, Inc., 1998, <http://www.JumpingBeans.com>.
17. M. Brown and M. Najork, "Distributed Active Objects," Dr. Dobbs's Journal, Vol. 22, No. 3, pp. 34-41, 1997.
18. "FIPA Interaction Protocol Library Specifications," <http://www.fipa.org/specs/fipa00025/PC00025C.html>, 2002.
19. Things That Think, <http://www.media.mit.edu/mtt/>, 2002.
20. Н. Глибовец Использование агентных технологий в системах дистанционного образования, Журнал "Управляющие системы и машины", - 2002, - №6, - С. 69-76.
21. Глибовець М.М. Інтелектуалізація навчання в телекомунікаційних системах дистанційної освіти // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. -2002. - Випуск №3. - С. 203-211.

Надійшла до друку 01.09.2008 р.

УДК 517.929

Ірада Агаєвна Джалладова*, кандидат фіз.-мат.
наук, доцент

Існування та побудова асимптотичних систем для рівнянь із запізнюванням

У роботі досліджено можливість побудови системи асимптотичних рівнянь до рівнянь із запізненням, тобто системи звичайних диференціальних рівнянь, до розв'язків яких прямують розв'язки рівнянь із запізненням. Окремо розглянуто системи лінійних рівнянь з сталим запізненням.

Ключові слова: диференціальні рівняння, асимптотична система, інтегральні криві, матричний експоненціал, система із запізнюванням.

*E-mail: irada-05@mail.ru

Статтю представив д.ф.-н., проф. Хусайнов Д.Я.

Вступ

Значна частина процесів в біології, медицині, економіці описується динамічними системами з післядією. Цей факт обумовлений суттєвою залежністю поточного стану системи від його передісторії. Тобто математичні моделі являють собою системи диференціальних рівнянь з запізнюванням. В той же час наявність запізнювання суттєво ускладнює процес дослідження систем. В роботах [1,2] було показано, що при певних умовах для кожної системи з запізнюванням існує система звичайних диференціальних рівнянь, яка є асимптотичною для вихідної системи з запізнюванням. Тобто множина її траєкторій являє собою стійкий многовид, до якого прямує множина розв'язків системи із запізнюванням. Таким чином асимптотична система досить непогано апроксимує систему із запізнюванням. В роботі будуть розглянуті лінійні системи з запізнюванням. Для них отримані умови існування асимптотичних систем. Для систем із чистим запізнюванням запропоновано алгоритм отримання асимптотичних систем.

1. Умови існування асимптотичних систем для лінійних рівнянь з запізнюванням

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із запізнюванням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (1.1)$$

I. A. Dzhalladova, PhD.

Existence and constructing asymptotic systems for equations with delay

In paper investigating the problem of constructing the system asymptotic equations for equations with delay or the system usual differential equations which have solutions that attraction solutions of equations with delay. In particular consider the system of linear equations with constant delay.

Key Words: differential equations, asymptotic systems, integral equations, matrix exponentia, system with delay.

Як відомо, розв'язок задачі Коші для системи (1.1) полягає в знаходженні неперервно диференційованої векторної функції, що тотожно задовольняє системі (1.1) і початковим умовам $x(t) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Або, потрібно знайти криву, що починається з деякого відрізка заданої кривої і є розв'язком системи (1.1). Оскільки множина початкових функцій $\{\varphi(t)\}$ утворює нескінченновимірний простір, то й простір розв'язків системи із запізнюванням (1.1) є нескінченновимірним простором.

Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{y}(t) = Cy(t) \quad (1.2)$$

до розв'язків якої, при виконанні певних умов, прямують всі розв'язки вихідної системи із запізнюванням, тобто систему, що володіє асимптотичними властивостями щодо системи (1.1). Слід зазначити, що розв'язок задачі Коші для системи без запізнювання (1.2) полягає в знаходженні неперервно диференційованої векторної функції, $y = y(t)$, $t \geq 0$, що задовольняє систему (1.2) і початкові умови $y(0) = y_0$, тобто потрібно знайти інтегральну криву, що починається в заданій точці (t_0, y_0) . Таким чином простір розв'язків системи без запізнювання (1.2) є скінченновимірним. Таким

чином задача полягає в знаходженні скінченновимірного асимптотично стійкого многовиду, що є множиною розв'язків системи (1.2), який знаходиться усередині множини розв'язків системи із запізнюванням (1.1) [1-3].

Визначення 1.1. Система звичайних диференціальних рівнянь (1.2) називається асимптотичною для системи рівнянь із запізнюванням (1.1), якщо довільний розв'язок системи (1.2) є розв'язком системи (1.1) і довільний розв'язок системи із запізнюванням (1.1) при $t \rightarrow +\infty$ прямує до деякого розв'язку системи без запізнювання.

Таким чином, система із запізнюванням (1.1) є асимптотичною, якщо простір її розв'язків при $t \rightarrow +\infty$ прямує до деякого скінченновимірного многовиду.

Теорема 1.1. Щоб система із запізнюванням (1.1) мала асимптотичною систему без запізнювання (1.2), необхідно і достатньо, щоб всі корені $\mu_j(C)$, $j=1,2,\dots,n$ характеристичного рівняння системи без запізнювання (1.2) містилися в множині коренів $\lambda_i(A,B)$, $i=1,2,\dots$ характеристичного рівняння системи із запізнюванням (1.1), а відповідні власні вектори співпадали. Інші корені характеристичного рівняння системи із запізнюванням повинні мати лише від'ємну дійсну частину.

Доведення. Як відомо, характеристичне рівняння системи із запізнюванням (1.1) має вигляд

$$\det\{\lambda I - A - e^{-\lambda\tau} B\} = 0.$$

Після розкриття визначника отримуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + (p_{10} + p_{11}e^{-\lambda\tau})\lambda^{n-1} + (p_{20} + p_{21}e^{-\lambda\tau} + p_{22}e^{-2\lambda\tau})\lambda^{n-2} + \dots + (p_{n0} + p_{n1}e^{-\lambda\tau} + p_{n2}e^{-2\lambda\tau} + \dots + p_{nn}) = 0. \quad (1.3)$$

Воно має злічену кількість коренів. Причому кількість коренів, що знаходиться в півплощині $\operatorname{Re} \lambda > 0$ не більше розмірності системи [4]. Крім того існує число N таке, що всі корені $\lambda_i(A,B)$, $i=1,2,\dots$ рівняння (1.3) розташовані зліва від $\operatorname{Re} \lambda = N$ і

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \lambda_i = -\infty, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} |\operatorname{Im} \lambda_i| = \infty.$$

Таким чином довільний розв'язок $x(t)$ системи (1.1) можна представити у вигляді розкладу в ряд по власних функціях, що відповідають власним числам характеристичного рівняння (1.3)

$$x(t) = c_1 P_1(t) e^{\lambda_1 t} + c_2 P_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots, \quad (1.4)$$

де $P_i(t)$, $i=1,2,\dots$ - векторні многочлени, степеня не вищі за кратність кореня $\lambda_i(A,B)$, c_i - довільні сталі, $i=1,2,\dots$.

Відповідно характеристичне рівняння системи без запізнювання (1.2) має вигляд

$$\det\{\mu I - C\} = 0.$$

Після розкриття визначника отримуємо

$$\mu^n + q_1 \mu^{n-1} + q_2 \mu^{n-2} + \dots + q_n = 0. \quad (1.5)$$

Алгебраїчне рівняння n -го степеня має n -коренів $\mu_j(C)$ $j=1,2,\dots,n$. Тоді довільний розв'язок системи (1.2) також можна представити у вигляді розкладу по базису, що є фундаментальною системою розв'язків, тобто у вигляді

$$y(t) = c_1 Q_1(t) e^{\mu_1 t} + c_2 Q_2(t) e^{\mu_2 t} + \dots + c_n Q_n(t) e^{\mu_n t} \quad (1.6)$$

Тому, щоб довільний розв'язок $y(t)$ системи без запізнювання (1.2) одночасно був і розв'язком системи із запізнюванням (1.1) необхідно і достатньо, щоб всі корені $\mu_j(C)$, $j=1,2,\dots,n$ характеристичного рівняння (1.5) містилися в множині коренів $\lambda_i(A,B)$, $i=1,\dots$ рівняння (1.3), а відповідні власні вектори співпадали. При цьому корені рівняння (1.3), що залишились, повинні мати від'ємну дійсну частину. В цьому випадку для будь-якого розв'язку системи (1.1)

$$x^*(t) = c_1^* P_1^*(t) e^{\lambda_1 t} + c_2^* P_2^*(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n^* P_n^*(t) e^{\lambda_n t} + c_{n+1}^* P_{n+1}^*(t) e^{\lambda_{n+1} t} + \dots \quad (1.7)$$

як «граничний» розв'язок слід вибирати

$$y^*(t) = c_1^* P_1^*(t) e^{\mu_1 t} + c_2^* P_2^*(t) e^{\mu_2 t} + \dots + c_n^* P_n^*(t) e^{\mu_n t} \quad (1.8)$$

де $\lambda_i(A,B) = \mu_i(C)$, $i=1,\dots,n$.

Оскільки корені, що залишились, мають від'ємну дійсну частину, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) - y^*(t) = 0,$$

що і потрібно було показати.

Зауваження 1.1. Асимптотичну систему для системи із запізнюванням (1.1) можна побудувати неоднозначно.

Зауваження 1.2. Окремий випадок систем із запізнюванням, коли характеристичне рівняння системи із запізнюванням співпадає з характеристичним рівнянням матриці A в роботі [5] був названий системами «зі слабким

запізнюванням». В цьому випадку всі розв'язки систем із запізнюванням через скінченне число кроків «склеюються» і нескінченновимірний простір розв'язків трансформується в скінченномірний.

2. Реконструкція лінійних систем

Відновлення математичних моделей, описуваних системами неавтономних диференціальних рівнянь по їх розв'язках проводиться таким чином. Нехай фундаментальна матриця розв'язків відома і має вигляд $X(t)$. Тоді

$$\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t)$$

Звідси матриця $A(t)$ дорівнює

$$A(t) = \dot{X}(t)[X(t)]^{-1}$$

Для лінійних стаціонарних систем

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1}$$

має місце наступне. Нехай всі власні числа матриці A дійсні, різні. Тоді фундаментальна матриця розв'язків має вигляд

$$X(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^1 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^1 e^{\lambda_n t} \\ \alpha_1^2 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^2 e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^n e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

де $\lambda_i, i=1, n$ - власні числа матриці, $\alpha_i^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_n^j)$ - власні вектори, що відповідають цим власним числам.

Таким чином фундаментальна матриця розв'язків повністю визначається набором власних чисел і відповідних власних векторів і задача відновлення є задачею побудови матриці A по набору власних чисел і власних векторів.

Розглянемо обчислення матриці A детальніше. Загальний розв'язок системи лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь (2.1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \vdots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Підставивши записаний розв'язок в систему (2.1), одержимо

$$\begin{aligned} c_1 \lambda_1 \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \lambda_n \alpha_1^n e^{\lambda_n t} &= \\ = a_{11} [c_1 \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_1^n e^{\lambda_n t}] + \\ + a_{12} [c_1 \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_2^n e^{\lambda_n t}] + \dots \\ + a_{1n} [c_1 \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_n^n e^{\lambda_n t}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 \lambda_1 \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \lambda_n \alpha_2^n e^{\lambda_n t} &= \\ = a_{21} [c_1 \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_1^n e^{\lambda_n t}] + \\ + a_{22} [c_1 \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_2^n e^{\lambda_n t}] + \dots \\ + a_{2n} [c_1 \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_n^n e^{\lambda_n t}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots c_1 \lambda_n \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_n \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \lambda_n \alpha_n^n e^{\lambda_n t} &= \\ = a_{n1} [c_1 \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_1^n e^{\lambda_n t}] + \\ + a_{n2} [c_1 \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_2^n e^{\lambda_n t}] + \dots \\ + a_{nn} [c_1 \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_n^n e^{\lambda_n t}]. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових сталих $c_i, i=1, n$, з першого рівняння одержуємо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1^1 = a_{11} \alpha_1^1 + a_{12} \alpha_2^1 + \dots + a_{1n} \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_1^2 = a_{11} \alpha_1^2 + a_{12} \alpha_2^2 + \dots + a_{1n} \alpha_n^2 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_n \alpha_1^n = a_{11} \alpha_1^n + a_{12} \alpha_2^n + \dots + a_{1n} \alpha_n^n \end{cases}$$

з другого рівняння також систему n рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_2^1 = a_{21} \alpha_1^1 + a_{22} \alpha_2^1 + \dots + a_{2n} \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_2^2 = a_{21} \alpha_1^2 + a_{22} \alpha_2^2 + \dots + a_{2n} \alpha_n^2 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_n \alpha_2^n = a_{21} \alpha_1^n + a_{22} \alpha_2^n + \dots + a_{2n} \alpha_n^n \end{cases}$$

Продовжуючи процес далі, з останнього рівняння одержуємо систему

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_n^1 = a_{n1} \alpha_1^1 + a_{n2} \alpha_2^1 + \dots + a_{nn} \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_n^2 = a_{n1} \alpha_1^2 + a_{n2} \alpha_2^2 + \dots + a_{nn} \alpha_n^2 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_n \alpha_n^n = a_{n1} \alpha_1^n + a_{n2} \alpha_2^n + \dots + a_{nn} \alpha_n^n \end{cases}$$

Оскільки власні вектори лінійно незалежні, то кожна з систем має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, a_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \dots, a_{1n} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}; \\ a_{21} &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta}, a_{2n} = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta}, \dots, a_{ni} = \frac{\Delta_{ni}}{\Delta}, \\ a_{n2} &= \frac{\Delta_{n2}}{\Delta}, \dots, a_{nn} = \frac{\Delta_{nn}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\Delta_{i1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_n \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{1n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \lambda_1 \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \lambda_2 \alpha_1^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \lambda_n \alpha_1^n \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha_2^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_2^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_n \alpha_2^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \lambda_1 \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \lambda_2 \alpha_2^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \lambda_n \alpha_2^n \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{ni} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha_n^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 \alpha_n^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_n \alpha_n^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{nn} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_n^1 & \dots & \lambda_1 \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_n^2 & \dots & \lambda_2 \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_n^n & \dots & \lambda_n \alpha_n^n \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

3. Побудова асимптотичної системи для системи з чистим запізнюванням

Розглянемо систему виду (1.1) частинного вигляду, що є системою лінійних однорідних рівнянь з чистим запізнюванням

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau). \quad (3.1)$$

Для системи такого вигляду справедливо наступне твердження.

Теорема 3.1. Нехай матриця B має лише дійсні власні числа $z_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Тоді асимптотичною для неї буде система

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (3.2)$$

коефіцієнти a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ якої визначаються згідно залежностей (2.3), в яких Δ визначено залежністю (2.4), а Δ_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ дорівнюють

$$\Delta_{i1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}, \dots$$

$$\Delta_{1n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_1^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_1^n \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_2^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_2^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_2^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_2^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_2^n \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{n1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_n^1 & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_n^2 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_n^n & \alpha_n^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{n2} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_n^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{nn} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_n^1 & \dots & \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_n^2 & \dots & \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_n^n & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n \tau} \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

Доведення. Характеристичне рівняння

$$\det\{\lambda I - e^{-\lambda \tau} B\} = 0$$

системи диференціальних рівнянь з чистим запізнюванням (3.1) має вигляд

$$\begin{vmatrix} e^{-\lambda \tau} b_{11} - \lambda & e^{-\lambda \tau} b_{12} & \dots & e^{-\lambda \tau} b_{1n} \\ e^{-\lambda \tau} b_{21} & e^{-\lambda \tau} b_{22} - \lambda & \dots & e^{-\lambda \tau} b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda \tau} b_{n1} & e^{-\lambda \tau} b_{n2} & \dots & e^{-\lambda \tau} b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття визначника отримуємо

$$(\lambda e^{\lambda \tau})^n + p_1 (\lambda e^{\lambda \tau})^{n-1} + p_2 (\lambda e^{\lambda \tau})^{n-2} + \dots + p_{n-1} (\lambda e^{\lambda \tau}) + p_n = 0,$$

де p_i , $i = 1, n$ - коефіцієнти характеристичного рівняння матриці B . Алгебраїчне рівняння n -го ступеня

$$z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0 \quad (3.3)$$

має n коренів $z_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Як відомо [6], трансцендентне рівняння

$$\lambda e^{\lambda \tau} = b$$

має злічену кількість коренів $\lambda_k(b)$, $k = 1, 2, \dots$, при чому при $k \rightarrow +\infty$ буде $\operatorname{Re} \lambda_k(b) \rightarrow -\infty$. Можливі наступні випадки.

1. Якщо $b > 0$, то рівняння має один дійсний корень $\lambda_1 > 0$.

2. Якщо $b = 0$, то рівняння має корень $\lambda = 0$.

3. Якщо $-\frac{\pi}{2\tau} < b < 0$, то є два дійсні корені з

від'ємною дійсною частиною, а решта коренів комплексні і також мають від'ємну дійсну частину.

4. Якщо $b \leq -\frac{\pi}{2\tau}$, то характеристичне

рівняння має тільки комплексний корень з від'ємною дійсною частиною.

Нехай $z_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$ дійсні корені матриці B і $\alpha_i^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_n^j)$ відповідні власні вектори. Як випливає з висловленого вище, кожне з рівнянь

$\lambda e^{\lambda \tau} = b_i$, $i = \overline{1, n}$ може мати не більше одного кореня $\bar{\lambda}_i$ з додатною дійсною частиною.

Будемо матрицю $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ за алгоритмом, запропонованим в попередньому розділі з врахуванням запізнення.

Список використаної літератури

1. Валеев К.Г., Кулеско Н.А. О конечнопараметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Украинский математический журнал, Т.20, №6, 1968. – С.739-749.
2. Рябов Ю.А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени. – Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Т.3, М., 1965. С.153-167.
3. Джалладова І.А. Умови існування асимптотичних систем для рівнянь із запізненням // Вісник Київського університету. Кібернетика, в.7, 2007. – С.53-55.
4. Эльсгольц Л.Э., Неркин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1970. – 240 с.
5. Khusainov D Ya., Benditkis D.D., Diblik J. Weak Delay in Systems with an Aftereffect // Functional Differential Equations, V.9, No.3-4, 2002. – pp.385-404.

Надійшла до редакції 16 червня 2008 р

УДК 628.16

Донадзе М.В., Джигладзе Н., Дидманидзе И.Ш.

Диалоговая система оптимального проектирования электронных схем

В статье рассмотрена архитектура программного обеспечения оптимального проектирования электронных схем, которая выработана на основе общесистемных принципов создания систем автоматизированного проектирования. Выше указанная диалоговая система оптимального проектирования электронных схем одна из составляющих подсистем автоматизированного проектирования устройств электронной техники.

Ключевые слова: Схемы. Оптимальное. Проектирование.

E-mail:ibraimd@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. А.В.Анісімов.

The improvement of function quality of projected electronic schemes, raise of technical level, reduction of projection and preparation terms are all directly connected with the implementation of automatic projection system in engineering, particularly the implementation of the automatic system of scheme-technical projection, with its subsystem of optimization as one of the main constituent parts.

Owing to a number of peculiarities in the process of scheme-technical projection of electronic schemes (the existence of numerous criteria of optimization, great number of optimization variables, uni-modality and multi-modality of optimization operatives and functions, consideration of contradictory requirements and technological limitations on scheme parameters and indices, etc.) the problem of optimal projection is understood not as a calculation problem but as a creative one too. Together with optimization methods it is necessary to use the knowledge and experience of an engineer-projector in order to solve such type of problems.

In this connection, the effective solution of this type of problems is possible only by merging methods of formal analysis and informal means of making

Donadze M.B., Djibladze N., Didmanidze I.Sh.

Dialogic System of Optimal Projection of Electronic Schemes

The article deals with the architecture of the the software of the dialogic system of the optimal projection of the electric schemes elaborated on the basis of general-systematic principles of creating automatic projection system. The dialogic system of the optimal projection of the electrical schemes is one of the constituent sub-systems of the automatic projection system of electric appliances.

Key Words: Projection, Schemes, Optimal

optimal decisions. On this basis, in the regime of dialogic interrelations between engineer-projector and computer, the utilization of electronic scheme parameters and the "best" formal methods of indices optimization will be provided.

For the practical realization of the problem of optimal projection of electronic schemes in the dialogic regime the technical means are necessary which provide active interrelations between the engineer-projector and computer. But technical means are not enough. The solution of this problem envisages the creation of a human-computer system with its mathematical, programming, linguistic, informational, methodological and organizational supply.

The efficiency of utilizing means of optimal projecting of electronic schemes mainly depends on the architecture of the software of the dialogic optimal system. The architecture was accomplished on the basis of general systematic principles of automatic projecting system. This can be expressed in the following:

- maximum supply of functional means;
- universality of utilization;
- possibility of system expansion and adaptation.

© Донадзе М.В., Джигладзе Н., Дидманидзе И.Ш., 2008

- hierarchical and modular features of program provider;

The of the above mentioned dialogic system has got the following functions:

- management of dialogic process;
- loading, translation and editing of the initial data needed for the projection;
- monitoring the accomplishment and authenticity of the task;
- management of calculation process according to the task;
- printing the efficient information on conducting the calculation process;
- provision of the active participation of an engineer-projector in the calculation process;
- recording the calculation process;
- printing the results of optimal projecting.

The above enumerated functions determine the structure of the software of the dialogic system of the optimal projection of the electric schemes. The general block-scheme is represented in Fig. 1.

The software consists of the following blocks:

I. Scheme Loading Block. It consists of four main programs:

"Scheme Loading" – provides loading of projected scheme configuration in the dialogic regime as well as loading of its electronic parameters into the computer memory.

"Editor" – with its help the projected scheme is edited, in particular the configuration changes, the initial value of the scheme parameters changes, etc.

"Translator" – monitors the veracity of the loaded information and transfers the information recorded in the special language of projection into the acceptable form of calculation complex;

"Documenting" – provides printing or displaying of the loaded information, as well as, in case of need, of the dialog protocol.

II. Task Block. It consists of the following main programs:

"Analysis 1" – provides the analysis of static and dynamic regimes while the parametric optimization of the projected scheme;

"Analysis 2" – is used for calculating static and dynamic regimes during the optimal values of scheme parameters;

"Sensitivity" – determines the sensitivity matrix of the scheme outlet values against the changes of optimal values;

"Optimization" – provides the determination of the optimum criteria selected by the engineer-projector

and the optimal parameters of the projected scheme according to the optimization method;

"Results" – its function is to print or display tables and charts as a result of optimal projecting.

III. Management System of the Database. It is used for creating the database or the joint utilization of various customers. Two types of databases function in the system:

- the database of scheme elements mathematical models and their parameters;
- the database of the optimal versions of the projected schemes and fragments.

IV. Administrator. It is beyond the reach of individual users and is used by the system administrator during the exploitation process.

Apart from the enumerated blocks some subsidiary programs are also used.

"Dialogue" – to provide interactive regime of work with the help of display;

"Direct Link" – for the work of direct link files on the external memory facilities.

The complex management of dialogic system is accomplished by the monitoring system or the management program. Together with its main function it provides the protection of the users' files from non-sanctioned directives and the distribution of the functions among users.

Work with dialogic system is accomplished through directives. Two types of directives are mainly used: accomplishable and informational. Through the accomplishable directives the system conducts certain operations, e.g. applies to a certain block, reads the description of a selected scheme from the database or the user's private archive, etc. And on the basis of the informational directives the system gives the directory information about the electric scheme, state of archive, capacities of users in the given regime, etc.

The dialogic system of optimal projecting of electronic schemes works in four regimes with the help of the corresponding program blocks:

- regime of scheme loading;
- regime of working with database;
- regime of task accomplishment;
- regime of administrator.

The user has an access only to the first three regimes which he conducts through directives.

The projected electronic scheme the optimal parameters of which should be determined, is loaded into the personal archive of the user either in the regime of working with database or regime of scheme loading (in case of absence of the scheme description

in the database). At the next stage, in the regime of task accomplishment, the accomplishable directives are realized, namely, scheme analysis, determination of optimal parameters according to the selected criteria.

The software of the above analyzed dialogic system of the optimal projection of the electric schemes is practically accomplished in the automatic system of the integral micro-scheme projection.

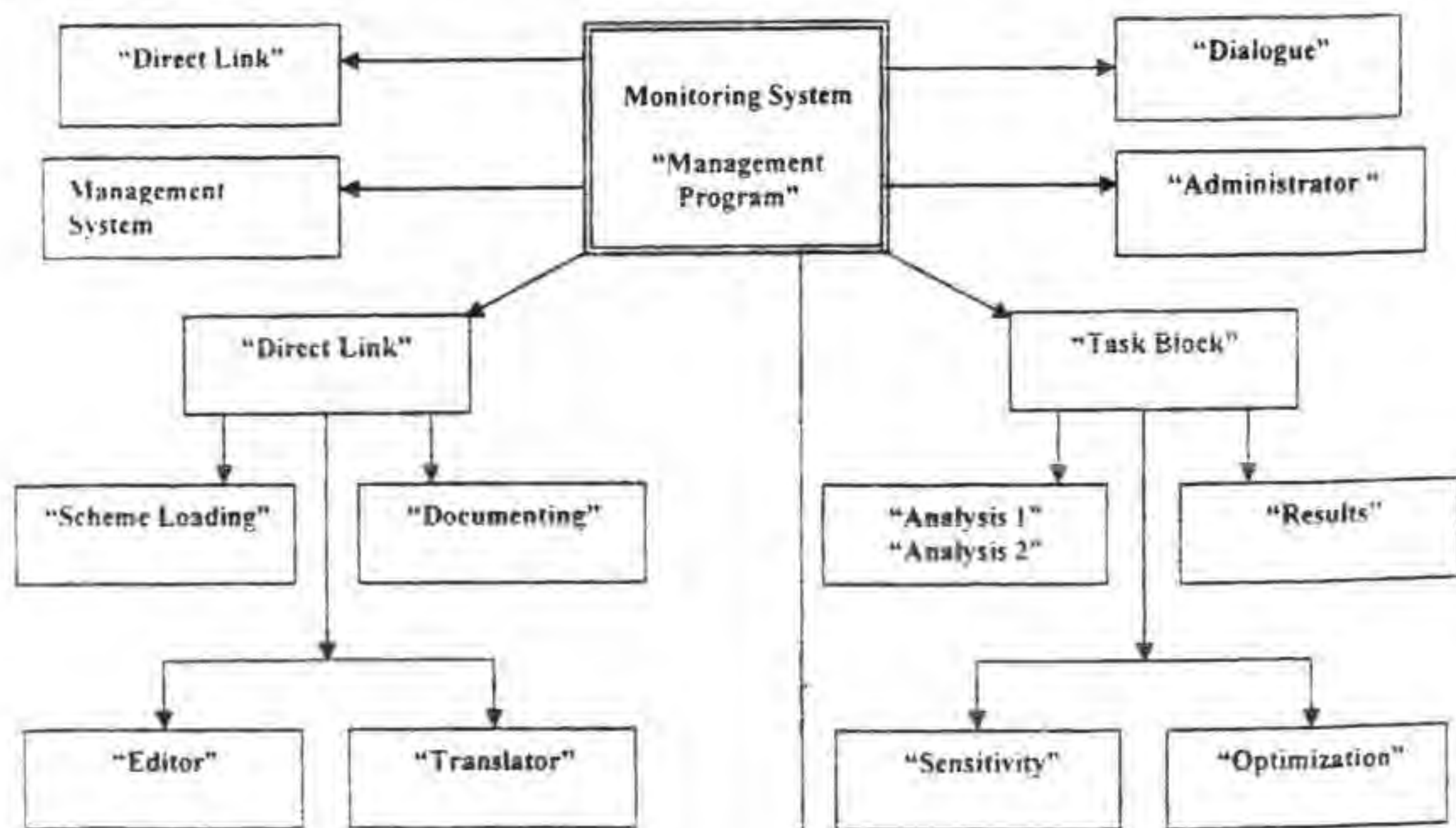


Fig. 1 General block-scheme of the structure of the software of the dialogic system of the optimal projection of the electric schemes.

Literature:

1. Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. - М.: Высшая школа. - 1986.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. - М.: Радио и связь. - 1988. - 128с.
3. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. - М.: Радио и связь. - 1984. - 248с.
4. Гельфанд И.М., Цейтлин М.Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации // ДАН СССР. - Т. 137, № 2. - 1961. - С. 295-298.
5. Джобладзе Н.И. О нахождении координат экстремума функции многих переменных при использовании Ψ -преобразования // Сообщения АН ГССР. - Т. 59. № 3. - 1970. - С. 665-668.

6. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. - М.: Наука. - 1969. - 368с.

Надійшла до редколегії 28.12.2007.

УДК 628.16

Куршубадзе Ц.В., Дидманидзе И.Ш.

**Роль и назначение проекционного
черчения в обучении инженерной
Графики**

Обучение инженерной графики способствует развитию пространственного мышления, формирует способность видения, суждения, наблюдения, анализа и синтеза.

Одной из основных тем в обучении инженерной графики является проекционное черчение. Указанную тему можно разделить по следующим подглавам: геометрические построения, методы проецирования, построение плоских фигур с указанием размеров, которое должно содержать основные виды геометрических сопряжений.

В ортогональной проекции фигуры, имеющие сквозные отверстия, по данным двух видов, найти третий и аксонометрическое построение, знание основных стандартов для оформления чертежа.

Ключевые слова: Инженерная графика, проецирование, черчение.

E-mail: ibraimd@mail.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. А.В.Анісімов.

The constructive scheme of the new program of engineering graphics takes into account the teaching of the subject depending on its theoretical basis. The successful salvation of the teaching programs is one of the important questions; it requires preparing new, modern, intelligent and qualified specialists.

We can't deny the changes of characters, interests, objects and skills of the young generation, according to the processes taking place in life. That is why, the pedagogical science, which studies the educational problems of the adult generation, should feel the changes and development according to the changes of the issues to be studied.

© Куршубадзе Ц.В., Дидманидзе И.Ш., 2008

Khurshubadze Ts.V., Didmanidze I.Sh.

**The role and peculiarities of projectional
drawing in studying engineering graphics**

Studying the engineering graphics supports developing special thinking, forming the capacity of viewing, comparing, observing, analyzing and synthesizing. One of the major topics in teaching engineering graphics, is projectional drawing. The given topic can be subdivided like the following: drawing the geometric bodies, methods of projections, drawing the plain figures showing their sizes, which should contain the major kinds of geometric junctions, constructing the third view according to two views given in the orthogonal projections having through holes and constructing an axonometry, knowing all the necessary standards for putting into shape all sections and drawings.

Key words: Engineering graphics, projection drawing.

The entire academic disciplines and among them engineering graphics as well have some kind of peculiarities, difficulties and specific methods of cognition. It studies the practical usage of geometrical constructions, the basic conditionality of two methods of reflecting special figures on the flat surface: technical drawing and the Monge system and the bases of axonometry. Studying of the above mentioned will support to develop special thinking, it forms the capacity of viewing, comparing, observing, analyzing and synthesizing.

Engineering graphics includes the elements of drawing geometry, geometric constructions, projection, machine building drawing, (coupling and non coupling connections, wireless sets).

construction drawings and the peculiarities of their construction, drawing sketches, building drawing etc.

So, we are speaking about some already specialized forms: an adult exposes the habits of a constructor, creates different kinds of interrelationship in his mind and the tendency of making constructions of his own takes place among his interests. One of the present problems we are exposed to now, is to display the already thought figures on the paper applying the graphical methods, and later, to construct according to the already received image. If we take into the consideration that the technique and therefore its basic documents and drawings have penetrated into our lives quite independently from the sphere of our activities, we will easily conclude that the engineering graphics, as an educational discipline has an important role in our lives.

In studying the engineering graphics, a good working record belongs to the projectional drawing, machine building drawing, construction drawing and making drafts and reading. In this work we have presented some peculiarities of the projectional drawing.

The given work represents one of the important issues in the academic course of engineering graphics. It is necessary for students to know the theoretical course on this question, they should be able to analyze all the details, things that are made, as well as their special imagination and picture. The main problem of the given work is to imagine the size of the object and display it on the plain according to the given views.

The represented work can be subdivided according to the following: drawing the views of the thing, drawing the geometric bodies, the intercross of the surfaces, finding the third view according to two given views, axonometric projections, sketches, cuts and crosses.

Students study the drawing the views of the things from school course, that is why, a great attention should be paid to rectangular projection, to the systematization of the knowledge received as well as the separation of those basic issues from the theoretical materials which have the practical importance and provides its profound studying.

While studying projectional drawing, one of the important questions is to project the basic

geometric bodies. After analyzing detailed drawings as a unity of different geometric bodies, the students become accustomed to the certain system of getting an object logically with its size, that is why, it is important to pay a special attention to the analysis of projecting geometric bodies.

After several methods of the projection and their analysis, it is necessary to determine the technical significance of views of the detail and to pay attention to everyday systematic practice, because the special imagination develops as a result of drawing reading.

While teaching engineering graphics, the close relationship of axonometric and rectangular projections are noticeable. At first, some imagination on the axonometric projection starts to appear, then on the methods of rectangular projections and at last, applying the theoretical materials and some visual methods the drawings of the given detail will be made in the rectangular projection. The fact when axonometric projection acts like a determiner of the means of rectangular projections, provides the condition. The guide-book also introduces the same; at first it considers the basic concepts, then the means of constructing frontal and isometric projections. Then it explains us the essence of the methods of rectangular projections and at last the perfect ness of knowledge for studying the axonometric projection. The analysis of frontal and isometric projections shows us that they have a lot in common. The frontal and isometric projections of the thing are made the same way, first the axes are constructed up, then the views are located on proper sites.

On the basis of studying the axonometric projections, it is desirable to make a technical drawing of the of the detail in order to make it possible to draw out the whole item in the rectangular projections in a very short time, to analyze the system of the views for right decision.

In order to further develop the special imagination, an important role in the engineering graphics belongs to constructing the third view with two views. This kind of work needs a great deal of deliberation and time in order to imagine and draw the form of the image in the right way. The graphical salvation of the given problem or constructing the third view occurs mechanically,

with the support of connection lines and not with the imagination of the detail forms. In order to study the given problem better it is necessary to use proper visual methods and means of techniques and they should provide the studying of the program topics of the engineering graphics.

One of these topics is making the detail sketches. The sketch is a technical document, which holds an important role in the enterprise. Because of the lack of programmatically foreseen hours we cannot stop on this issue for long but while studying the topic on the given stage it is desirable to study the order of making sketches and the drawings, as well as drawing necessary views, defining the quality of the purity of the surface, drawing cuts and crosses. While studying the projective drawing a great deal of attention is paid to the appliance of cuts and crosses, like it happens while constructing views according to the given detail, as well as while constructing the third view with the given two views when drawing axonometric projections and sketches. The analysis made by using cut and cross enables us to determine the necessity of its usage and importance.

While testing or evaluating the engineering graphics, at the certain stage it is possible to use the drawings made with the help of sketches because its fulfillment does not need a lot of time, instrumental tools are not needed, however, we should also note here that, in order to draw completely all the necessary views are to be drawn, all the necessary cut and cross to be used, the natural sizes on the drawings to be put, the quality of purity of surface to be determined. But the student should get the final evaluation according to the learnt topics. They are: drawing the plain figure indicating its sizes, for instance, it should contain the basic kinds of geometric junctions; searching

the third view according to two views given in the orthogonal projections of figures having transparent holes and constructing the visual image in the axonometry.

According to with these and other problems and the specifications of the given presentation, in the conditions of little work and high consciousness, in the little period of time it is possible to answer all the questions around the topic deeply and constructively. The most significant factor of getting through the course, deepening the knowledge and fixing it in the memory, is the control and the self-control of the material to be taught, which is desirable to be timely, permanent and courageous. The aim of the education is to prepare the students for the active and positive roles in life. When evaluating the results of studying, a special attention is paid to the knowledge, critical thinking, habits, learning the results of the definite educational program and module with competence.

References:

1. Shavgulidze A. Tests for pedagogical attestation. Drawing. Tbilisi, 1997.
2. Shavgulidze A. Technical Drawing. Ganatleba. Tbilisi, 1995.
3. Koiava J. Engineering Graphics, Tests. Tbilisi, 1997.
4. Khurshbadze Ts. Special Course of Engineering Graphics. Babumi State University, 2000.
5. Vishnepolsky I.S. Technical Drawing with Teaching the Elements of Programming. Moscow, 1984.

Надійшла до редколегії 28.12.2007.

УДК 518.9

Машченко С.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг

Розглядаються основні властивості слабких індивідуально-оптимальних рівноваг та необхідні й достатні умови їх існування в іграх з диференційованими функціями виграшу гравців.

Ключові слова: рівновага за Нешем, оптимальність за Парето, індивідуально-оптимальна рівновага.

¹E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Розглянемо гру G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n гравців; X_i - множина стратегій i -го гравця; $u_i(x)$ - функція виграшу i -го гравця, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, і

приймає дійсні значення. Кожен із гравців прагне одержати по можливості більше значення своєї функції виграшу.

Для визначення рівноважних ситуацій та дослідження їх стабільності у цій роботі пропонується використовувати принцип індивідуальної оптимальності [5], відповідно до якого кожен гравець вибирає свої стратегії індивідуально, але враховує функції виграшу всіх інших (взаємне не спричинення шкоди).

Принцип індивідуальної оптимальності базується на спеціальному відношенні домінування за Нешем. Будемо казати, що ситуація y у гри G з вектором виграшу $U_N(y) = (u_i(y))_{i \in N}$ сильно домінує за Нешем [5] ситуацію x з вектором виграшу $U_N(x)$ і

позначимо це через $y \gg^{\text{NE}} x$, якщо ситуація y виходить із ситуації x зміною якимсь одним гравцем $i \in N$ своєї власної стратегії, тобто $y = (y_i, x_{-i})$ та $U_N(y) \gg U_N(x)$. Ситуація x^* називається слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою, а множина цих рівноваг позначається через $WIOE(G)$, якщо не існує іншої ситуації, яка б сильно домінувала за Нешем x^* , тобто

$$x^* \in WIOE(G) \Leftrightarrow \neg \exists x \in X : x \gg^{\text{NE}} x^*.$$

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

Local conditions of a weak individually-optimum equilibria

Basic properties of individual-optimum equilibria and necessary and sufficient conditions of their existence in the differentiated games are considered.

Key words: the Nash's equilibria, the Pareto optimum, the individually-optimum equilibria.

Можна сказати, що в індивідуально-оптимальній рівновазі кожен гравець знаходить такий компроміс з іншими гравцями, що жодному не вигідно його порушувати.

Серед основних властивостей індивідуально-оптимальних рівноваг слід відмітити наступні [5]:

- якщо множина X ситуацій гри є не порожнім компактом, а функції виграшу гравців - неперервні (або у випадку скінченної гри), то завжди існують індивідуально-раціональні [1] індивідуально-оптимальні рівноваги;

- множина індивідуально-оптимальних рівноваг містить у собі множини рівноваг за Нешем $NE(G)$, коаліційних рівноваг $KNE_Q(G)$, рівноваг за Бержем $BE(G)$ та слабо оптимальних за Парето $SO(G)$ (оптимальних за Слейтером) ситуацій гри, тобто $NE(G), WKNE_Q(G), SO(G), BE(G) \subseteq WIOE(G)$.

Необхідні й достатні умови індивідуальної оптимальності у загальному випадку при достатньо слабких припущеннях щодо умов гри були розглянуті в [5]. В цій роботі будуть досліджуватися локальні умови індивідуальної оптимальності, засновані на припущенні неперервної диференційованості функцій виграшу гравців.

Будемо вважати множини стратегій гравців заданими у вигляді $X_i = \{x_i | g_i^k(x_i) \geq 0, k \in K_i\}$, де g_i^k - функції обмежень, $k \in K_i$, які є неперервно-диференційованими, $K_i = \{1, \dots, k_i\}$ - множина індексів обмежень на стратегії гравця i , а k_i - їх кількість, $i \in N$.

Позначимо через $LG(x^*) = \{X_i(x^*), v_i; i \in N\}$

гру G , лінеаризовану в околі $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$, де
 $X_i(x^*) = \{x_i \mid (\nabla g_i^*(x_i^*), x_i - x_i^*) > 0, k \in K_i(x_i^*)\}, i \in N$,

- множини стратегій гравців,
 $K_i(x_i^*) = \{k \in K_i \mid g_i^k(x_i^*) = 0\}, i \in N$, - множини

активних у ситуації $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ обмежень на
 стратегії, $v_i(x) = u_i(x^*) + (\nabla u_i(x^*), x - x^*), i \in N$ -
 лінеаризовані функції виграшу гравців.

Лема. Нехай функції виграшу та функції
 обмежень на стратегії гравців є неперервно-
 диференційованими в околі ситуації x^* . Для того,
 щоб ситуація $x^* \in WIOE(G)$ необхідно, щоб
 $x^* \in WIOE(LG(x^*))$.

Доведення. Нехай $x^* \in WIOE(G)$. Припустимо
 супротивне, що $x^* \notin WIOE(LG(x^*))$, тобто для
 деякого гравця $i \in N$ існує така стратегія
 $\bar{x}_i \in X_i(x^*)$, що $v_j(\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*) > v_j(x^*), j \in N$. З умови
 $\bar{x}_i \in X_i(x^*)$ одержимо: $(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), \bar{x}_i - x_i^*) > 0$,
 $k \in K_i(x_i^*)$. З нерівностей для функцій виграшу
 гравців одержимо:

$$v_j(\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*) = u_j(x^*) + (\nabla_{x_j} u_j(x^*), \bar{x}_i - x_i^*) >$$

$$> v_j(x^*) = u_j(x^*) + (\nabla_{x_j} u_j(x^*), x_i^* - x_i^*), j \in N.$$

Звідки виходить $(\nabla_{x_j} u_j(x^*), \bar{x}_i - x_i^*) > 0, j \in N$.

Таким чином, можна зробити висновок, про
 сумісність системи нерівностей:

$$(\nabla_{x_j} u_j(x^*), x_i) > 0, j \in N, \quad (1)$$

$$(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), x_i) > 0, k \in K_i(x_i^*). \quad (2)$$

Розглянемо вихідну гру G . За припущенням
 неперервної диференційованості функцій
 виграшу та функцій обмежень на стратегії гравців
 у ситуації x^* вихідної гри G запишемо лінійні
 частини їх розкладів за стратегіями кожного
 гравця $i \in N$ окремо в $\varepsilon > 0$ околі ситуації x^* у
 ряд Тейлора, відповідно одержимо для $\forall j \in N$:

$$u_j(x_i^* + \varepsilon x_i, x_{N \setminus i}^*) = u_j(x^*) + \varepsilon (\nabla_{x_j} u_j(x^*), x_i) + o(\varepsilon) \text{ та}$$

$$g_i^k(x_i^* + \varepsilon x_i) = g_i^k(x_i^*) + \varepsilon (\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), x_i) + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon (\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), x_i) + o(\varepsilon), k \in K_i(x_i^*).$$

Остання рівність отримується з того, що активні
 обмеження $g_i^k(x_i^*) = 0, k \in K_i(x_i^*)$.

Оскільки, як ми з'ясували вище, система
 нерівностей (1), (2) є сумісною для деякого гравця
 $i \in N$, то для будь-якого її розв'язку x_i із
 одержаних нами рівностей для цього ж гравця
 очевидно слідують нерівності:

$$u_j(x_i^* + \varepsilon x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_j(x^*), j \in N, \quad (3)$$

$$g_i^k(x_i^* + \varepsilon x_i) > 0, k \in K_i(x_i^*). \quad (4)$$

Що стосується неактивних обмежень $g_i^k(x_i^*) > 0$,
 то в силу неперервності цих функцій зрозуміло,
 що $g_i^k(x_i^* + \varepsilon x_i) > 0, k \in K_i \setminus K_i(x_i^*)$. (5)

Таким чином, з нерівностей (4), (5) слідує, що
 існує такий гравець $i \in N$, для якого вектор
 $(x_i^* + \varepsilon x_i) \in X_i$, а з нерівностей (3) слідує, що

$$(x_i^* + \varepsilon x_i, x_{N \setminus i}^*) \gg x^*.$$

Тому $x^* \notin WIOE(G)$.

Одержана суперечність і доводить лему. ♦
 Спробуємо описати множину індивідуально-
 оптимальних рівноваг. Уведемо до розгляду
 наступні множини параметрів:

$$M_i = \left\{ (\mu_i^j)_{j \in N} \mid \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1; \mu_i^j \geq 0, j \in N \right\}, i \in N.$$

Теорема 1. Нехай функції виграшу та функції
 обмежень на стратегії гравців гри G є неперервно-
 диференційованими у ситуації x^* , а множини
 стратегій гравців лінеаризованої гри $LG(x^*)$
 задовольняють умові регулярності Слейтера (для
 кожного гравця $i \in N$ існує така стратегія
 $\bar{x}_i \in X_i(x^*)$: $(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), \bar{x}_i - x_i^*) > 0, k \in K_i(x_i^*)$).
 Тоді для того, щоб ситуація x^* гри G була
 слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою,
 необхідно існування для кожного гравця $i \in N$
 таких векторів параметрів $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \in M_i$ та

$$\eta_i = (\eta_i^k)_{k \in K_i(x_i^*)} \geq 0, \text{ що}$$

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j \nabla_{x_j} u_j(x^*) + \sum_{k \in K_i(x_i^*)} \eta_i^k \nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*) = 0. \quad (6)$$

Доведення. За доведено вище лемою
 $x^* \in WIOE(LG(x^*))$. Тому не існує такої ситуації x
 $x \gg x^*$ у грі
 лінеаризованої гри $LG(x^*)$, що $x \gg x^*$ у грі
 $LG(x^*)$. Звідси виходить, що для кожного гравця
 $i \in N$ система нерівностей

$$(\nabla_{x_j} u_j(x^*), x_i - x_i^*) > 0, j \in N,$$

$$(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), x_i - x_i^*) > 0, k \in K_i(x_i^*)$$

є несумісною. Тоді за теоремою Моцкіна [2]
 завжди існують вектори параметрів
 $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \geq 0$ та $\eta_i = (\eta_i^k)_{k \in K_i(x_i^*)} \geq 0$ (причому
 вектор $(\mu_i, \eta_i) \neq 0$), для яких виконується
 рівність (6). Доведемо, що з цих двох векторів
 лише вектор $\mu_i \neq 0$. Припустимо супротивне, що

обмежень на стратегії гравців у ситуації x^* запишемо лінійну частину розкладу у ряд Тейлора функції $g_i^k(x_i)$ в околі стратегії x_i^* при $x_i = x_i^* + \varepsilon(\bar{x}_i - x_i^*)$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$. Тоді оскільки обмеження, яке розглядається є активним і $g_i^k(x^*) = 0$, відповідно одержимо: $g_i^k(x_i^* + \varepsilon(\bar{x}_i - x_i^*)) = g_i^k(x_i^*) + \varepsilon(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), \bar{x}_i - x_i^*) + o(\varepsilon) = \varepsilon(\nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*), \bar{x}_i - x_i^*) + o(\varepsilon) < 0$. Одержали

суперечність із (8). Таким чином, (10) доведено.

По-друге, $u_j(\bar{x}_j, x_{N \setminus j}^*) - u_j(x^*) > 0, \forall j \in N$.

$$\text{Звідси } (\nabla_{x_j} u_j(x^*), \bar{x}_j - x_j^*) > 0, \forall j \in N. \quad (11)$$

оскільки у протилежному випадку, якщо $\exists k \in N: (\nabla_{x_k} u_k(x^*), \bar{x}_k - x_k^*) \leq 0$, то в силу псевдоопуклості вгору функцій виграшу гравців за стратегіями кожного гравця окремо, одержимо суперечність $u_k(\bar{x}_k, x_{N \setminus k}^*) - u_k(x^*) \leq 0$.

Узявши зважену суму нерівностей (11) з вектором вагових коефіцієнтів $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \in M_i$ та нерівностей (10) з вектором вагових коефіцієнтів $\eta_i = (\eta_i^k)_{k \in K_i(x^*)} \geq 0$, одержимо нерівності $\sum_{j \in N} \mu_i^j \nabla_{x_j} u_j(x^*) + \sum_{k \in K_i(x^*)} \eta_i^k \nabla_{x_i} g_i^k(x_i^*) > 0$,

які суперечать (6). ♦

Наслідок. Нехай функції виграшу $u_i, i \in N$ є неперервно-диференційованими та псевдоопуклими вгору за стратегіями кожного гравця окремо. Тоді для того, щоб внутрішня точка x^* множини ситуацій гри була слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою необхідно й достатньо існування для кожного гравця $i \in N$ хоча б пари функцій виграшу гравців $j, k \in N; j \neq k$ для яких виконується (7).

Доведення. Необхідність обґрунтовується наслідком із теореми 1.

Для доведення достатності спираючись на теорему 2 треба лише показати, що для внутрішніх точок множини ситуацій гри з нерівностей (7) слідує рівності (8). Дійсно оскільки множини стратегій гравців є скалярними, то в рівностях (8) градієнти функцій виграшу гравців є скалярами і записуються як частинні похідні. Припустимо супротивне, що для деякого гравця $i \in N$ для $\forall \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \in M_i$

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j \partial u_j(x^*) / \partial x_i \neq 0. \text{ Тоді } \sum_{j \in N} \mu_i^j \partial u_j(x^*) / \partial x_i > 0 \text{ і}$$

звідси очевидно $(\partial u_j(x^*) / \partial x_i) > 0, \forall j \in N$ або

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j \partial u_j(x^*) / \partial x_i < 0 \quad \text{і} \quad \text{тоді} \quad \text{очевидно} \\ (\partial u_j(x^*) / \partial x_i) < 0, \forall j \in N. \text{ Як у одному, так і в} \\ \text{іншому випадку } (\partial u_j(x^*) / \partial x_i) \cdot (\partial u_k(x^*) / \partial x_i) > 0 \\ \text{для } \forall j, k \in N, \text{ що суперечить (7). ♦}$$

Зауваження. Параметрам μ_i^j в умовах (6) природно можна надати наступний зміст. Незавжди побачити, що умови (6) є умовами локального максимуму функцій

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*), i \in N. \text{ Таким чином, для}$$

диференційованих функцій, так саме як і для псевдоопуклих вгору [5], лінійна згортка функцій виграшу гравців з векторами коефіцієнтів $\mu_i \in M_i, i \in N$, характеризує будь-яку індивідуально-оптимальну рівновагу. У цій згортці величина μ_i^j характеризує відносну вагу виграшу гравця $j \in N$ у перевазі гравця $i \in N$ на множині функцій виграшу усіх гравців.

Оскільки за теоремами 1 або 2 існує відповідність між індивідуально-оптимальними рівновагами та параметрами μ_i^j , далі будемо казати, що індивідуально-оптимальна рівновага x^* характеризується вектором параметрів $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_i)_{i \in N}, \bar{\mu}_i \in M_i, i \in N$ якщо вона задовольняє системі нерівностей (6) при $\mu = \bar{\mu}$.

Таким чином, теореми 1,2 дають можливість конструктивно описати системою нерівностей (6) множину слабких індивідуально-оптимальних рівноваг $WIOE(G)$, а тому, відповідно до досліджень проведених у [5], також й множини $\{NE(G), WKNE_G(G), SO(G), BE(G)\} \subseteq WIOE(G)$.

Особливу роль грають параметри μ_i^j , які характеризують відносну вагу власної функції виграшу гравця $i \in N$ по відношенню до функцій виграшу інших гравців.

Теорема 3. Нехай функції виграшу гравців $u_i, i \in N$ є диференційованими та псевдоопуклими вгору за власними стратегіями гравців. Тоді, якщо $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ деяке розбиття множини гравців N на коаліції, що не перетинаються, то внутрішня точка x^* множини ситуацій гри буде коаліційною рівновагою, тобто $x^* \in WKNE_G(G)$, тоді й лише тоді, коли вона буде слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою ($x^* \in WIOE(G)$), яка характеризується вектором параметрів $\mu = (\mu_i)_{i \in M}$, що задовольняє умовам:

$$\mu_i^j = \mu_i^k, j \in N(k), i \in N(k), \forall k \in K; \quad (12)$$

$$\sum_{i \in N} \mu_i = |K|, \quad (13)$$

Доведення. Необхідність умов (12), (13) у припущенні опуклості множин стратегій гравців та опуклості вгору їх функцій виграшу $u_i, i \in N$ за їх власними стратегіями, доведена у [5].

Доведемо достатність. Нехай $x^* \in WIOE(G)$ і характеризується вектором параметрів $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_i)_{i \in N}, \bar{\mu}_i \in M_i$, який задовольняє умовам (12), (13), відповідним до деякого розбиття $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ множини гравців N на коаліції, що не перетинаються. Тобто

$$\sum_{j \in N} \bar{\mu}_j^i \nabla_{x_i} u_j(x^*) = 0, i \in N,$$

$$\bar{\mu}_i^j = \bar{\mu}_j^i, i, j \in N(k), \forall k \in K,$$

$$\sum_{i \in N} \bar{\mu}_i^j = |K|, \bar{\mu}_i^j = (\bar{\mu}_i^j)_{j \in N}, \bar{\mu}_i^j \in M_i, i \in N.$$

Перепозначимо та перегрупуємо ці умови за коаліціями гравців наступним чином. В коаліції гравців $N(k), k \in K$ для кожного гравця $i \in N(k)$ позначимо через $\bar{\mu}_j(k) = \bar{\mu}_j^i, j \in N(k)$. Тоді після перегрупування для $\forall k \in K$ одержимо:

$$\sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) \nabla_{x_i} u_j(x^*) = 0, i \in N(k),$$

$$\sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) = 1, \bar{\mu}_j(k) \geq 0, j \in N(k). \quad (14)$$

За припущеннями теореми неважко помітити, що ці умови є достатніми для безумовного максимуму лінійної згортки функцій виграшу членів $i \in N(k)$ коаліції $k \in K$, тобто

$$\sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) u_j(x^*) = \max_{x_{N(k)}} \sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) u_j(x_i, x_{N \setminus N(k)}^*).$$

Нарешті покажемо, що $x^* \in WKNE_Q(G)$, тобто за визначенням [3] $\forall k \in K, \neg \exists x_{N(k)} \in X_{N(k)}$:

$$U_{N(k)}(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) \gg U_{N(k)}(x_{N(k)}^*, x_{N \setminus N(k)}^*).$$

Припустимо супротивне, що в деякій коаліції $k \in K, \exists \bar{x}_{N(k)} \in X_{N(k)}$:

$$u_j(\bar{x}_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) > u_j(x_{N(k)}^*, x_{N \setminus N(k)}^*), j \in N(k).$$

Узявши суму цих нерівностей з ваговими коефіцієнтами $\bar{\mu}_j(k), j \in N(k)$, які задовольняють (14), одержимо суперечність

$$\sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) u_j(\bar{x}_i, x_{N \setminus N(k)}^*) > \max_{x_{N(k)}} \sum_{j \in N(k)} \bar{\mu}_j(k) u_j(x_i, x_{N \setminus N(k)}^*). \spadesuit$$

На підставі цієї теореми можна зробити наступні висновки. Ситуація x^* є рівновагою Неша тоді й лише тоді, коли вона є індивідуально-оптимально рівновагою з оцінкою

$\sum_{i \in N} \mu_i^i = n$. Ситуація x^* є коаліційною рівновагою тоді й лише тоді, коли вона є індивідуально-оптимально рівновагою з меншою оцінкою $\sum_{i \in N} \mu_i^i = |K|$. Оптимальною за

Парето ситуація є тоді й лише тоді, коли вона є індивідуально-оптимально рівновагою з оцінкою $\sum_{i \in N} \mu_i^i = 1$, а рівновага Бержа буде мати найменшу оцінку $\sum_{i \in N} \mu_i^i = 0$. Інші індивідуально-оптимальні рівноваги мають проміжні значення величини $\sum_{i \in N} \mu_i^i$ на інтервалі $[0, n]$ залежно від рівня толерантності гравців.

На підставі приведених вище висновків можна висунути гіпотезу, що бажання кожного гравця збільшити відносну вагу свого виграшу характеризує стабільність індивідуально-оптимальної рівноваги, яка може бути оцінена величиною $\sum_{i \in N} \mu_i^i$.

Оскільки індивідуально-оптимальна рівновага може бути одночасно і рівновагою Неша і коаліційною рівновагою і оптимальною за Парето ситуацією і т.д., то оцінимо максимальний рівень її стабільності. Для $\forall x \in X$ сформулюємо оптимізаційну задачу відносно $\mu_i^j, i, j \in N$, в якій ситуація $x \in X$ виступає як параметр:

$$\mu^{\max}(x) = \max \sum_{i \in N} \mu_i^i \quad (15)$$

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i \nabla_{x_i} u_j(x^*) = 0, i \in N \quad (16)$$

$$\mu_i^j \geq 0, i, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_j^i = 1, i \in N. \quad (17)$$

Обмеження (16), (17) описують за теоремами 2,3 умови слабкої індивідуальної оптимальності ситуації $x \in X$. Величина $\mu^{\max}(x)$ буде оцінкою стабільності ситуації $x \in X$.

Слід відмітити, що при фіксованому $x \in X$ задача (15)-(17) природно декомпонується на n незалежних задач лінійного програмування:

$$\mu_i^{\max}(x) = \max \left\{ \mu_i^i \mid \sum_{j \in N} \mu_j^i \nabla_{x_i} u_j(x) = 0, \mu_i^j \in M_i \right\} \quad (18)$$

і тоді $\mu^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \mu_i^{\max}(x)$. Величина $\mu_i^{\max}(x)$ зі

змісту задачі (15)-(17) може інтерпретуватися як оцінка стабільності $x \in X$ окремо гравцем $i \in N$.

Звернемо увагу на задачі лінійного програмування (18) у випадку, коли множини

стратегій гравців належать скалярному простору дійсних чисел, тобто $X_i \subseteq R^1$, $i \in N$. Позначимо через $v_i^j(x) = \partial u_i^j(x) / \partial x_i$, $i, j \in N$. Тоді (18) набуває вигляду задачі лінійного програмування з двома обмеженнями – рівностями:

$$\mu_i^{\max}(x) = \max \left\{ \mu_i^j \left| \begin{array}{l} \sum_{j \in N} \mu_i^j v_i^j(x) = 0, \\ \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1, \mu_i^j \geq 0, j \in N \end{array} \right. \right\}. \quad (19)$$

Твердження. Задача (19) не має розв'язків тоді й лише тоді, коли виконуються нерівності:

$$v_i^j(x) \cdot v_i^k(x) > 0, \forall j, k \in N. \quad (20)$$

Оптимальний розв'язок задач (19) представляється у наступному вигляді: $\mu_i^{\max}(x) = \max_{j \in N} \{ v_i^j(x) / (v_i^j(x) - v_i^k(x)) \mid v_i^j(x) v_i^k(x) \leq 0 \}$. (21)

Доведення. Запишемо матрицю обмежень задачі (19):

$$V_i(x) = \begin{pmatrix} v_i^1(x) & \dots & v_i^k(x) & \dots & v_i^j(x) & \dots & v_i^n(x) \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо її вектори – рядки є лінійно залежними, то, очевидно, задача (19) не має розв'язків і виконується умова (20).

Нехай вектори – рядки матриці $V_i(x)$ є лінійно незалежними. Тоді задача (19) має $n \cdot (n-1)$ базисних розв'язків $(0, \dots, 0, \mu_i^k, 0, \dots, \mu_i^j, 0, \dots, 0)$, де $\mu_i^k = \mu_i^j / (\mu_i^j - \mu_i^k)$, $\mu_i^j = -\mu_i^k / (\mu_i^j - \mu_i^k)$. Умова їх невід'ємності, очевидно, еквівалентна умові $v_i^k(x) \cdot v_i^j(x) \leq 0$. Звідси випливає, що задача (19) не має розв'язків тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$v_i^k(x) \cdot v_i^j(x) > 0, \forall k, j \in N. \quad (22)$$

У свою чергу ця умова еквівалентна (20). Дійсно, (20) впливає з (22). Навпаки, з (20) випливає $v_i^j(x) \cdot v_i^k(x) > 0, v_i^j(x) \cdot v_i^l(x) > 0, \forall k, j \in N$, а тому має місце (22).

Нехай умова (20) не виконується. У $(n-1)^2$ -му базисному розв'язку змінна μ_i^j є небазисною і тому $\mu_i^j = 0$. В інших $(n-1)$ -му базисному розв'язку змінна μ_i^j є базисною і одержимо $\mu_i^j = \mu_i^k / (\mu_i^k - \mu_i^l)$, $\mu_i^k = -\mu_i^l / (\mu_i^k - \mu_i^l)$. За умовою їх невід'ємності $v_i^k(x) \cdot v_i^l(x) \leq 0$

одержимо оптимальний розв'язок (21). ♦

Зауваження. У формулі (21) якщо $v_i^j(x) \rightarrow 0, v_i^k(x) \rightarrow 0$, то невизначеність слід розуміти як $\mu_i^{\max}(x) = 1$.

Таким чином, у випадку, коли множини стратегій гравців належать простору дійсних чисел оцінка стабільності $x \in X$ окремо гравцем $i \in N$ знаходиться в аналітичному вигляді (21).

Відображення $\mu^{\max} : X \rightarrow [0, 1]$ назовемо критерієм стабільності ситуацій гри G . Ситуація x^* гри G , яка забезпечує $\max_{x \in X} \mu^{\max}(x)$ може бути рекомендована гравцям як основа для найбільш стабільної угоди.

Використання оцінок стабільності $\mu_i^{\max}(x), i \in N$ кожним гравцем окремо дає можливість побудувати окрім сумарної оцінки стабільності $\mu^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \mu_i^{\max}(x)$ оцінки стабільності іншого типу. Наприклад, гарантована оцінка стабільності буде мати вигляд $\mu^{\min}(x) = \min_{i \in N} \mu_i^{\max}(x)$. Окремий інтерес представляє собою ігрова оцінка стабільності, яка описується грою у нормальній формі $\langle X_i, \mu_i^{\max}; i \in N \rangle$. У цій грі множини стратегій гравців такі самі, як і у вихідній грі, а функції виграшу – оцінки стабільності ситуацій гри кожним гравцем окремо. Кожен гравець прагне їх максимізувати.

Список використаних джерел

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
2. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1986.
5. Мащенко С.О. Слабкі індивідуально-оптимальні рівноваги // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – 2.-с.216-223.

Надійшла до редколегії 12.09.08

УДК 519.21

Нікітін А.В., к.ф.-м.н., доц.

Знаходження оптимального розв'язку узагальненого матричного рівняння Сільвестра з векторними вінеровим процесом та пуассоновою мірою

Побудовано оптимізаційну процедуру розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра для векторних систем диференціальних рівнянь Іто-Скорохода.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, оптимальний розв'язок матричного узагальненого рівняння Сільвестра.

*E-mail: nik_tol@rambler.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ.

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_{i=1}^r [B_i x(t) dW_i(t) +$$

$$+ \int_U C_i(u) x(t) \tilde{\nu}_i(du, dt)], t \geq t_0,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

де $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in [0, T], \omega \in \Omega\} \subset R^n$ – n -вимірний випадковий процес, $\{W_1(t)\}, \{W_2(t)\}, \dots, \{W_r(t)\}$ – стандартні вінерові процеси, $\tilde{\nu}_1(dt, du), \tilde{\nu}_2(dt, du), \dots, \tilde{\nu}_r(dt, du)$ – центровані пуассонові міри, $A, B_i, i=1, \dots, r$ – дійснозначні сталі матриці розмірності $n \times n$, $C_i(u), i=1, \dots, r$ – матриці-функції такі, що

$$\sum_{i=1}^r \int_U |C_i(u)|^2 \Pi_i(u) du < +\infty,$$

де $\Pi_i(du) \equiv M\{\tilde{\nu}_i(dt, du)\}, i=1, \dots, r$.

При аналізі асимптотичної поведінки розв'язків задачі (1), (2), виникає узагальнене матричне рівняння Сільвестра

$$A^T H + HA + \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)] = -G, \quad (3)$$

де матриця $G = G^T > 0_{n \times n}$ – довільна.

©Нікітін А.В.2008

Nikitin A.V., Ph.D., docent

Finding of optimum decision of the generalized matrix Sylvester equation with vectorial by a Viner process and Poisson measure

Optimization procedure of decision of the generalized matrix equation of Sylvester is built for the vectorial systems of differential equations of Ito-Skorohod.

Keywords: stochastic differential equation, optimum decision of the matrix generalized equation of Sylvester.

Якщо вдається знайти розв'язок рівняння (3) – додатно визначену симетричну матрицю H , то розв'язок задачі (1), (2) буде асимптотично стійкий у середньому квадратичному..

Мета.

Метою роботи є побудова оптимізаційної процедури розв'язання матричного узагальненого рівняння Сільвестра з векторними вінеровим процесом і пуассоновою мірою.

Основний результат.

Будемо використовувати підхід, заснований на методах опуклого програмування, який полягає в заміні задачі розв'язання узагальненого матричного рівняння (3) розв'язанням оптимізаційної задачі.

Визначимо цільову функцію

$$\varphi_0(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - HA - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]),$$

$$H \in \bar{L},$$

де

$$\bar{L} = \{H : \lambda_{\min}(H) \geq 0, \lambda_{\max}(H) \leq 1\}.$$

Розглянемо оптимізаційну задачу: знайти

$$\arg \min_{H \in \bar{L}} \varphi_0(H). \quad (4)$$

Якщо область визначення є компактною множиною, цільова функція неперервна, то існування розв'язку оптимізаційної задачі впливає з теореми Вейерштрасса; якщо область визначення є опуклою множиною, а цільова функція строго опукла, то розв'язок єдиний, тобто локальний і глобальний екстремуми співпадають.

Тепер ми можемо переформулювати критерій асимптотичної стійкості у середньому квадратичному [3] у термінах оптимізаційної задачі:

Теорема 1. Для того, щоб система СДР (1) була асимптотично стійкою у середньому квадратичному, необхідно і досить, щоб для задачі (4) існував розв'язок $H_0 = H_0^T > 0_{n \times n}$ з умовою $\varphi_0(H_0) < 0$.

Очевидно, що задача (4) має розв'язок (теорема Вейерштрасса), а функція $\varphi_0(H)$ та множина $\bar{L}$ є опуклими.

Означення 1. Скалярним добутком матриць $\{H_1, H_2\} \subset \bar{L}$ називається вираз

$$\langle H_1, H_2 \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}^1 h_{ij}^2,$$

де $H_1 = \{h_{ij}^1\}, H_2 = \{h_{ij}^2\}, i, j = 1, \dots, n$.

Означення 2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\varphi(H)$ у внутрішній точці $H_0 \in \bar{L}$ називається матриця H , для якої виконується нерівність

$$\varphi(H) - \varphi(H_0) \geq \langle \Phi(\varphi(H_0)), H - H_0 \rangle.$$

Означення 3. Множина матриць H , які є узагальненим градієнтом функції $\varphi(H)$ у точці $H_0 \in \bar{L}$ називається градієнтною множиною і позначається $G_0[H]$.

Теорема 2. Узагальнений градієнт функції

$$\varphi_0(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]),$$
$$H \in \bar{L}.$$

у точці $H_0 \in \bar{L}$ задається матрицею

$$\Phi = \{\varphi_0\},$$

де

$$\varphi_0 = -y_{\min}^T (-A^T \Delta_y - \Delta_y A - \sum_{i=1}^r (B_i^T \Delta_y B_i -$$

$$- \int_U C_i^T(u) \Delta_y C_i(u) \Pi_i(du)) y_{\min}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

Тут Δ_y - матриця, у якій на перетині i -го рядка та j -го стовпця одиниця, а решта нулі. $y_{\min}$ - одиничний вектор, на якому квадратична форма

$$y^T (-A^T H_0 - H_0 A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H_0 B_i - \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)]) y$$

набуває мінімального значення.

Доведення. Для симетричних додатно визначених матриць виконується рівність

$$\lambda_{\min}(-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]) =$$
$$\min_{\|y\|=1} \{y^T (-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]) y\}.$$

Тому

$$\varphi_0(H) - \varphi_0(H_0) = -\lambda_{\min}(-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]) +$$
$$+ \lambda_{\min}(-A^T H_0 - H_0 A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H_0 B_i - \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)]) =$$
$$= \min_{\|y\|=1} \{y^T (-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]) y\} +$$
$$+ \min_{\|y\|=1} \{y^T (-A^T H_0 - H_0 A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H_0 B_i - \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)]) y\}.$$

Нехай мінімальне значення на одиничній сфері першим доданком одержується при $y=y_1$, а другим при $y=y_{\min}$. Отже,

$$\varphi_0(H) - \varphi_0(H_0) = -y_1^T (-A^T H - H A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H B_i - \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]) y_1 +$$
$$+ y_{\min}^T (-A^T H_0 - H_0 A - \sum_{i=1}^r [B_i^T H_0 B_i - \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)]) y_{\min} =$$
$$= y_1^T (-A^T H_2 - H_0 A -$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^r [B_l^T H_0 B_l - \int_U C_l^T(u) H_0 C_l(u) \Pi_l(du)] y_l \} + \\ & + y_{\min}^T (-A^T H - HA - \\ & - \sum_{l=1}^r [B_l^T H B_l - \int_U C_l^T(u) H C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min} \} = \\ & = y_{\min}^T (-A^T (H - H_0) - (H - H_0) A - \\ & - \sum_{l=1}^r [B_l^T (H - H_0) B_l - \\ & - \int_U C_l^T(u) (H - H_0) C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min} \}. \end{aligned}$$

Оскільки квадратична форма

$$y^T (-A^T H - HA -$$

$$-\sum_{l=1}^r [B_l^T H B_l - \int_U C_l^T(u) H C_l(u) \Pi_l(du)] y$$

досягає мінімального значення на векторі y_l , то

$$-y_l^T (-A^T H - HA -$$

$$-\sum_{l=1}^r [B_l^T H B_l - \int_U C_l^T(u) H C_l(u) \Pi_l(du)] y_l +$$

$$+ y_{\min}^T (-A^T H - HA -$$

$$-\sum_{l=1}^r [B_l^T H B_l - \int_U C_l^T(u) H C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min} \geq 0.$$

Тому

$$\varphi_0(H) - \varphi_0(H_0) \geq y_{\min}^T (-A^T (H - H_0) -$$

$$-(H - H_0) A - \sum_{l=1}^r [B_l^T (H - H_0) B_l -$$

$$-\int_U C_l^T(u) (H - H_0) C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min}. \quad (5)$$

Довільну матрицю $H - H_0$ можна зобразити

у вигляді

$$H - H_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij}.$$

Отже,

$$-y_{\min}^T (-A^T (H - H_0) - (H - H_0) A -$$

$$-\sum_{l=1}^r [B_l^T (H - H_0) B_l -$$

$$-\int_U C_l^T(u) \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min} =$$

$$= -y_{\min}^T (-A^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} -$$

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} A -$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^r [B_l^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} B_l - \\ & - \int_U C_l^T(u) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij} C_l(u) \Pi_l(du)] y_{\min} = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{ -y_{\min}^T (-A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^r [B_l^T \Delta_{ij} B_l - \int_U C_l^T(u) \Delta_{ij} C_l(u) \Pi_l(du)] \} (h_{ij} - h_{ij}^0) = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} (h_{ij} - h_{ij}^0) \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Згідно з означенням 2, з нерівності (5) отримаємо нерівність

$$\varphi_0(H) - \varphi_0(H_0) \geq \langle \Phi, H - H_0 \rangle.$$

Тут

$$\Phi = \{ \varphi_{ij} \},$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} = & -y_{\min}^T (-A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A - \sum_{l=1}^r (B_l^T \Delta_{ij} B_l - \\ & - \int_U C_l^T(u) \Delta_{ij} C_l(u) \Pi_l(du)) y_{\min}; i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Цим доведення теореми 2 завершено.

Замінімо задачу (4) задачею безумовної мінімізації. Для цього визначимо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned} L(H, \beta) = & \varphi_0(H) + \beta_1 \varphi_1(H) + \beta_2 \varphi_2(H), \\ & \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\varphi_1(H) = -\lambda_{\min}(H)$, $\varphi_2(H) = \lambda_{\max}(H) - 1$.

Оскільки функції $\varphi_0(H)$, $\varphi_1(H)$, $\varphi_2(H)$ опуклі, то маємо задачу опуклого програмування.

Теорема 3. Щоб точка $H_0 \in \bar{L}$ була розв'язком задачі (4), необхідно і досить, щоб існував вектор (β_1^0, β_2^0) , в якому трійка $(H_0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ була б сідловою точкою функції Лагранжа (6) на множині

$$\bar{L} \times \{ \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0 \}.$$

Доведення є наслідком теореми Куна-Такера [1].

Позначимо $G_{\varphi_1}[H]$ - градієнтну множину функції $\varphi_1(H)$ в точці H_0 . Це буде множина матриць $\Phi = \{ \varphi_{ij}^1 \} i, j = 1, \dots, n$ з елементами $\varphi_{ij}^1 = -x_{\min}^T \Delta_{ij} x_{\min}$. Через $G_{\varphi_2}[H]$ позначимо градієнтну множину функції $\varphi_2(H)$ в точці H_0 .

Тут

$$\Phi = \{ \varphi_{ij}^2 \}, i, j = 1, \dots, n, \varphi_{ij}^2 = -x_{\max}^T \Delta_{ij} x_{\max}.$$

а $x_{\min}, x_{\max}$ – одиничні вектори, на яких квадратична форма $x^T H x$ набуває відповідно мінімального і максимального значення.

Лінійна комбінація

$$G_L[H] = G_{\alpha_0}[H] + \beta_1 G_{\alpha_1}[H] + \beta_2 G_{\alpha_2}[H]$$

є градієнтною множиною функції функції Лагранжа $L(H, \beta)$. Тоді теорему 3 можна переформулювати у термінах узагальнених градієнтів.

Теорема 4. Щоб точка $H_0 \in \bar{L}$ була розв'язком задачі (4), необхідно і досить, щоб існував вектор (β_1^0, β_2^0) , при якому градієнтна множина

$$G_L[H] = G_{\alpha_0}[H] + \beta_1 G_{\alpha_1}[H] + \beta_2 G_{\alpha_2}[H]$$

містила нульову матрицю, тобто $0 \in G_L(H)$.

Висновки.

Таким чином, при розв'язанні задачі оптимізації (4) необхідно побудувати градієнтну множину і перевірити наявність у ній нульового вектора. Матриця, при якій узагальнений градієнт перетворюється в нуль, дає розв'язок задачі (4).

Отже, будемо користуватись оптимізаційною процедурою розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра. Знайдений розв'язок гарантує стійкість для розв'язків системи диференціальних рівнянь Іто-Скорохода вигляду (1), (2).

Список використаних джерел

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 518 с.
2. Хусаинов Д.Я., Бычков А.С., Нечаева И.Г. Построение оптимальных в классе квадратических функций Ляпунова оценок устойчивости динамических систем // Тез. докл. "Научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям", Минск. 10.05 – 15.05.1990. – С. 29-30.
3. Нікітін А.В. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з векторним вінерівським процесом та пуассонівськими перемиканнями // Вісник Київського університету. Серія:

Фізико-математичні науки, В.3, 2001. – С. 312 – 319.

4. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения – Киев: Наук. думка, 1979 – 200 с.
5. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник. – Львів: "Магнолія плюс", 2004. – 549 с.
6. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій : Підручник. – Київ: ЗАТ "ВІПОЛ", 2000. – 688 с.
7. Кутковецький В.Я. Математичні методи розв'язання задач штучного інтелекту та дослідження операцій: Монографія. – Миколаїв: Європейський університет, Миколаївська філія, 2005. – 108 с.
8. Кутковецький В.Я. Методи задач штучного інтелекту та дослідження операцій: Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2006. – 92 с.

Надійшла до редакції 10.09.2008

УДК 681.3

Панченко Т.В., к.ф.-м.н.*

Формалізація видів паралелізму у IPCL

Обґрунтовано універсальність класу мов IPCL та методології доведення властивостей програм відносно двох типів міжпроцесної взаємодії, відносно режимів виконання незалежних частин програм та відносно розширеної систематики Флінна.

Ключові слова: композиційне програмування, верифікація програм, модель виконання програм, паралельне програмування, спільна пам'ять, передача повідомлень, види паралелізму, систематика Флінна.

*E-mail: tranchenko@issystems.com.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н. Нікітченко М.С.

Актуальність паралелізму та пов'язана з цим проблематика

Явище паралелізму стає все більш актуальним для програмування – як для практичних цілей, так і для теоретичних досліджень. Оскільки кількість процесорів у комп'ютерах, навіть «настільних», зростає, а всі сучасні операційні середовища підтримують паралелізм у тому чи іншому вигляді [1–3] – необхідність у його практичному застосуванні в процесі розробки програмного забезпечення постійно зростає. Звідси, важливість теоретичних досліджень різних видів паралелізму та побудови відповідних моделей, методів та теорій (зокрема, для доведення коректності програмного забезпечення) стає все більш нагальною.

Що стосується паралельних програм (або програм, що використовують паралелізм чи працюють в середовищі, яке підтримує паралелізм – *concurrent programs*), то слід зауважити, що доведення коректності є складнішим, ніж у випадку послідовних програм: простота правил для суджень про послідовні процеси впливає виключно з того факту, що кожна змінна змінюється максимум одним процесом, але ці правила не враховують багато небезпек, які викликані випадковістю присвоєвань різними процесами в паралельному середовищі, – зазначає Хоар в [4].

Щодо ускладнень, пов'язаних з розглядом паралельних програм, по відношенню до послідовних, то слід усвідомлювати важливість

Panchenko T.V., PhD*

Formalization of parallelism forms in IPCL

Generality of IPCL class and the Method for Program Properties Proof in relation to two interprocess communication types, to execution of independent program parts modes, and to the extended Flynn's classification was proven.

Key Words: compositional programming, program verification, program execution model, parallel programming, shared memory concurrency, message passing, parallelism forms, concurrency, Flynn's classification.

переходу від функціональних систем (які перетворюють вхідні дані у вихідні, а дані розглядаються як стани – див. методи Флойда, Хоара) до реактивних (які взаємодіють з середовищем і характеризуються множиною можливих поведінок або трас виконання) [5]. На таке зміщення акценту вперше вказали Харел (Harel) і Пнуелі (Pnueli) в роботі [6]. Лемпорт же узагальнив твердження про стани до акцій (actions) – тверджень про пари станів, або переходу (transitions).

Види паралелізму

Існує багато видів паралелізму [2,3], а також ряд аспектів, по яких паралелізм як явище розділяють на різні класи.

По-перше, визначимось з термінологією.

Процес – це послідовність кроків (операцій або подій), які займають певні просторово-часові та інші ресурси, що призводить до деякого результату [7].

Паралельні системи (*concurrent or parallel systems*) – на противагу послідовним системам (*sequential systems*) – такі системи, які можуть виконувати різні дії одночасно. Іноді додають – для вирішення деякої задачі, тобто систематизовано.

Паралельне програмування (*parallel programming*) – техніка програмування, яка дозволяє виконання операцій кількох процесів паралельно (тобто одночасно в певному сенсі) на одному комп'ютері або на кількох системах (в

цьому випадку кажуть про розподілені обчислення) [7]. Відповідно, паралельна система – система, яка використовує паралелізм.

Існують різні типи паралелізму та способи його організації:

- програми, що впливають на виконання одна одної (interfering programs [8]) – очевидно, нас буде цікавити саме такий паралелізм – та незалежні від впливу (які в такому випадку можуть бути легко розпаралелені і виконані у будь-якому паралельному середовищі, навіть одночасно),
- синхронний та асинхронний (одночасне виконання чи поперемінне або з пріоритетами),
- конкурентний з почерговим переключенням (або “конкуренцією” між процесами, concurrent interleaving – виконання кількох задач в режимі переключення між ними, тобто почергової передачі управління кожній з них) або симетричний (режим одночасного – на протигагу почерговому – виконання),
- паралелізм з розподілом часу (time sharing, time-slicing) та розподілом ресурсів (resource sharing),
- багатопотоковий (multithreading, тобто кілька ланцюжків виконання в рамках однієї програми) та багатозадачний (multitasking, тобто виконання одночасно кількох задач в певному режимі) тощо.

Відповідно, існує ряд середовищ з паралелізмом, серед них (зокрема, згідно класифікації Флінна [9,10], детальніше про яку – див. далі по тексті):

- SIMD (Single Instruction Multiple Data) – “векторний процесор”, або середовище, в якому одна інструкція виконується одночасно над кількома даними,
- MIMD (Multiple Instruction Multiple Data) – середовище, в якому декілька інструкцій виконуються над різними даними (синхронні або розподілені архітектури),
- середовище з конкурентним (concurrent, ще кажуть “витискаючим”) або синхронним (симетричні мультипроцесори) паралелізмом,
- середовище з розподілом (спільних) ресурсів (наприклад, пам’яті – shared memory) та з можливістю комунікації процесів (наприклад, шляхом передачі повідомлень – message passing – по

спеціальних призначених для цього каналах – channels, ports, pipes, pipelines),

- кластерні архітектури та інші.

(З усіма наведеними термінами можна детальніше ознайомитися в багатьох джерелах, але найбільш повним та регулярно оновлюваним (up-to-date), ймовірно, є [7].)

Розрізняють як мінімум наступні архітектури паралелізму:

- асинхронні розподілені (asynchronous distributed architecture з механізмом комунікації шляхом передачі повідомлень – message passing),
- синхронна паралельна (synchronous parallel architecture, SIMD, – архітектура з єдиним синхронізуючим тактовим генератором),
- асинхронна паралельна (asynchronous parallel architecture using memory sharing, MIMD, архітектура, в якій паралельні програми взаємодіють через спільну ділянку пам’яті).

Але, незважаючи на таке різноманіття підходів, середовищ та архітектур, виділяють дві парадигми паралелізму – точніше, два підходи до міжпроцесового зв’язку або міжпроцесових комунікацій, адже саме взаємодія між процесами є найбільш цікавою з точки зору паралелізму і, власне, привносить в звичайні, послідовні, програми введення паралелізму. Це – взаємодія через спільну пам’ять (shared memory або shared variables) та взаємодія шляхом передачі повідомлень (message passing, communication) [7,4,11]. Різниця між ними полягає у механізмі, який надається середовищем для міжпроцесової взаємодії (inter-process, inter-thread communication). В першому випадку – це спільна область пам’яті, доступна кільком (частіше – всім) процесам для читання та/або запису в почерговому режимі (черга не фіксована – interleaving concurrency, task switching). В другому – це механізм для передачі та отримання повідомлень. Тут можливі наступні варіанти: синхронна (безбуферна) або асинхронна (буферизована) передача. Всі перераховані раніше варіанти підпадають під одну з парадигм.

IPCL та паралелізм шляхом обміну повідомленнями і через спільну пам’ять

Розглянемо докладніше різницю між двома зазначеними підходами. Методи з передачею повідомлень (message passing) оперують такими поняттями (або примітивами) як процес (часто –

послідовний), канал (або порт) вводу та виводу, канал зв'язку (можливі варіанти: синхронний, асинхронний, буферизований). Натомість методи роботи зі спільною пам'яттю (shared memory concurrency) – оперують процесами та комірками пам'яті (або змінними) відповідно.

Одна з принципових різниць між двома підходами полягає в тому, що у випадку обміну повідомленнями в розподіленому середовищі треба власноруч запрограмувати поведінку (зокрема, обмін повідомленнями) процесів, а у випадку взаємодії через спільну пам'ять – взаємодія між процесами є опосередкованою і з'являється (тобто – проявляється) автоматично і більш-менш непередбачувано через доступ до спільної пам'яті. Тому в першому випадку досліджувати системи простіше, адже взаємодія між процесами (розподіл даних та обчислень між вузлами розподіленої системи) явно запрограмована. Натомість у другому варіанті взаємодія проявляється сама – явно не програмується, більш того, при кількох запусках системи взаємодія може проявитись по-різному завдяки випадковості переключень (передачі управління) між її процесами – а отже її складніше виявити, специфікувати та проаналізувати. Слід зауважити, що у наведеній вище ієрархії архітектур паралелізму відповідна архітектура з паралелізмом зі спільною пам'яттю – MIMD – є найзагальнішою та вважається найскладнішою.

Так склалося, що теоретично досліджуються переважно системи з міжпроцесовою комунікацією шляхом передачі повідомлень (message passing) [3]. Слід визнати, що цей підхід добре масштабується і легше програмується та досліджується – ймовірно, тому він є більш розвиненим. Але системи, з якими ми постійно працюємо (операційні системи та їх служби, системи управління базами даних, взагалі системи з централізованими сховищами даних, які набувають останнім часом поширення та є одним з пріоритетних напрямків, зокрема IBM та Microsoft) є паралельними та використовують в першу чергу механізм комунікації через спільну пам'ять, адже вони функціонують в рамках одного комп'ютера (на одному процесорі або принаймні з єдиною пам'яттю) чи в середовищі з централізованим управлінням (і, відповідно, з централізованим сховищем даних).

Зважаючи на базовість та важливість механізму міжпроцесової комунікації через спільну пам'ять, методологія доведення в *IPCL* (і, власне, *IPCL* – Interleaving Parallel Composition Languages [1, 12]) зосереджена на його

дослідженні. Тобто, розглядаються паралельні програми із взаємодією через спільні змінні – concurrent parallel programs with shared variable interaction – або паралельні програми зі спільною пам'яттю, які працюють в режимі переключення (або чергування) між програмами (ще кажуть – задачами) – shared memory concurrent (interleaving parallel) programs.

**Звідність паралелізму
через передачу повідомлень до
взаємодії через спільну пам'ять.
Універсальність *IPCL*
відносно видів
міжпроцесної взаємодії**

Існує теза, що два підходи взаємно виражаються один в термінах іншого, але питання адекватності такого вираження не піднімається, хоча, очевидно, воно є важливим і один метод не враховує нюансів, пов'язаних з іншим (час доставки повідомлень, буферизація, читання однієї змінної кількома процесами тощо). Тим не менше, на екстенціональному рівні (абстрагуючись від можливих інтенціональних невідповідностей) можна промодельовувати передачу повідомлень на спільній пам'яті. Так, основні дві функції

$send(channel, message)$ та
 $message := receive(channel)$ – відповідно
надіслати та прийняти повідомлення $message$ з
каналу $channel$ – можна подати наступним чином
в *IPCL* відповідно:

$(sent, messages[sent]) := (sent+1, message);$
та

$while (read \geq sent) do skip; (read, message) :=$
 $(read+1, messages[read]);$

де $(a, b) := (c, d)$ – звичайне одночасне
присвоєння, $skip \equiv \emptyset$, $messages$ – сховище
повідомлень (структура типу масив), $channel$ –
ідентифікатор каналу, $sent$ – змінна, що містить
кількість надісланих повідомлень, $read$ – змінна,
що містить кількість прочитаних повідомлень з
каналу. Нотація вигляду $a[b]$ використана для
позначення компонента з іменем b у складі
структури з іменем a , а саме: для
 $messages[sent] := message$ (у лівій частині
присвоєння) в термінах *ACON* [13] це означає
 $(messages \Rightarrow \nabla (sent \mapsto message)) \circ \Rightarrow messages$, а
для $message := messages[read]$ (у правій частині
присвоєння) – $getvalue(read, messages) \circ$
 $\Rightarrow message$. При цьому вважається, що один канал
встановлюється між двома процесами – для

одного з доступом на запис в канал, для іншого – з доступом на читання з каналу (класично). В цьому випадку не виникатиме конфліктів з приводу "хто перший" зчитає повідомлення з каналу. Ініціалізація каналу повинна виконуватись очевидним чином: $(sent, read) := (0, 0)$.

Ми змоделювали роботу з буферизованим каналом необмеженої місткості. Також, аналогічно можна промодельовувати більш прості випадки: небуферизований канал, тобто канал з пропускну здатністю одне повідомлення (як випадок з неможливістю надсилання нового повідомлення до зчитування попереднього, так і випадок перекривання новим повідомленням старого незчитаного). Отже, клас мов *IPCL* і методологія доведення властивостей є універсальною в сенсі покриття підходів до міжпроцесної взаємодії.

Універсальність *IPCL* відносно режимів виконання незалежних частин програми

Організація паралельних обчислень може спиратись на різні способи виконання незалежних частин програми [2].

- багатозадачний режим (режим розподілу часу),
- паралельне виконання (одночасне виконання декількох команд обробки даних),
- розподілені обчислення (паралельна обробка даних на різних пристроях, як правило, віддалених друг від друга, наприклад, у багатомашинних обчислювальних комплексах).

Перший режим є варіантом *MIMD* згідно класифікації Флінна; другий потребує уточнення терміну "одночасно", але в будь-якому разі або являє собою паралельне одночасне присвоєння в сенсі *ACON* та *IPCL*, або може бути змоделюваний послідовним (;) або "псевдо-паралельним" (||) виконанням; третій режим, як було показано вище, також зводиться до моделі зі спільною пам'яттю і почерговим виконанням (може бути промодельований в термінах спільних змінних). Таким чином, *IPCL* є універсальною відносно різних режимів паралельного виконання.

Підкреслимо, що універсальність в даній роботі розуміється як «відносна», тобто як звідність однієї сутності до іншої шляхом моделювання.

Універсальність відносно розширеної систематики Флінна

Згідно відомої класифікації Флінна, аналіз архітектури обчислювальних систем проводиться через способи взаємодії потоків виконуваних команд та даних, що обробляються. Таким чином розрізняють такі основні типи систем:

- *SIMD* (Single Instruction, Single Data) – звичайні послідовні EOM,
- *SIMD* (Single Instruction, Multiple Data) – системи, де в кожному момент часу може виконуватись одна і та сама команда для обробки декількох інформаційних елементів,
- *MISD* (Multiple Instruction, Single Data) – конкретних прикладів не існує, введено для повноти системи класифікації,
- *MIMD* (Multiple Instruction, Multiple Data) – найширший клас, куди відносяться більшість паралельних систем.

Щодо систем *SIMD*, то паралелізм в даному випадку зводиться до паралельного присвоєння в сенсі *IPCL* та *ACON*. Щодо *MIMD*, то цей клас включає практично всі паралельні системи, тому багато дослідників деталізували систематику Флінна. Найбільш загально визнаною [2] структурною схемою класу *MIMD*, де подальший розподіл типів багатопроцесорних систем спирається на спосіб організації оперативної пам'яті, є наступне уточнення:

- мультипроцесори зі спільною пам'яттю (*UMA*),
- мультипроцесори з розподіленою пам'яттю (*NUMA*),
- мультикомп'ютери, кластери (*NORMA*).

Підхід *UMA* – це класичний паралелізм зі спільною пам'яттю. *NUMA* дозволяє працювати з "локальною" і "спільною" частинами пам'яті для кожного процесора, що теж укладається в метод *IPCL*, оскільки в моделі присутні локальна та глобальна пам'ять для кожного процесу. *NORMA* передбачає взаємодію через передачу повідомлень і відсутність спільної пам'яті, але вище нами було показано звідність цієї моделі до моделі спільної пам'яті.

Також, у моделі *IPCL* ми абстрагуємось від поняття "одночасно", тобто будь-яку одночасність ми розуміємо як "безпосередньо одне за одним" – адже на моделі для нас не важливо, що доступ до комірки пам'яті буде здійснено одночасно двома процесами. По-перше, це потенційний конфлікт суперництва

перегонів (race condition), тобто некоректна ситуація і потенційна проблема з точки зору коректності роботи програми. По-друге, більшість пристроїв не може одночасно виконати кілька операцій на одній фізичній базі (над однією коміркою пам'яті), адже це так само потенційно конфліктна ситуація. І по-третє, якщо навіть ми допускаємо виконання двох суперечливих операцій як програмою, так і апаратурою, то за інших речей припущень ми можемо змодельовувати їх все одно як послідовне виконання у непередбачуваному заздалегідь порядку (тобто, як "операція 1" || "операція 2", де || – композиція паралельного виконання в режимі чергування (переривання, interleaving, shared time) в термінах *IPCL* [1]).

Звідси, клас мов *IPCL* та відповідна методологія доведення [1] є універсальною відносно різних архітектур (типів) паралельних систем за розширеною систематикою Флінна.

Висновки

Доведення коректності програм є актуальною темою для багатьох галузей [14]. Слід при цьому зауважити, що доведення коректності паралельних програм є складнішим, ніж у випадку послідовних програм: простота правил для суджень про послідовні процеси впливає виключно з того факту, що кожна змінна змінюється максимум одним процесом, але ці правила не враховують багато небезпек, які викликані випадковістю присвоєвань різними процесами в паралельному середовищі [4].

Оскільки паралелізм як явище все частіше використовується на практиці як за необхідності (наприклад, для складних обчислень), так і під впливом сучасних тенденцій (багатоядерні процесори, паралельні операційні та програмні середовища), а іноді (і все частіше) навіть без явного наміру (завдяки зануренню розроблюваних програм у ці самі паралельні середовища) – нагальна потреба у формалізмах, які дозволяють доводити коректність паралельного програмного забезпечення постійно зростає [14]. Необхідні методи для перевірки властивостей програм у різних паралельних середовищах, що підтримують різні види паралелізму.

Ключовим висновком роботи є покриття класом мов *IPCL* різних підходів до міжпроцесної взаємодії, що показано шляхом формалізації останніх у *IPCL*. Засади класу мов *IPCL* викладено в [1], даний клас вводиться і

досліджується в рамках композиційного підходу до програмування [15-17], започаткованого акад. Редьком В.Н., а точніше – в рамках композиційно-номінативного програмування [13, 18-26] як його логічного розвитку.

Так, одним з важливих аспектів паралелізму є спосіб взаємодії паралельних частин програмного комплексу – а саме, через механізм обміну повідомленнями (передача повідомлень, message passing) або через спільну пам'ять (розподілену пам'ять, shared memory) [2,3]. Клас мов *IPCL* використовує механізм взаємодії через спільну пам'ять [1,12] для організації паралельних обчислень. Але при цьому шляхом зведення першого підходу до другого було показано, що в *IPCL* формалізуються обидва способи взаємодії, і методологія доведення властивостей є універсальною в сенсі покриття підходів до міжпроцесної взаємодії.

Також було показано універсальність класу мов *IPCL* та відповідної методології доведення властивостей програм ([1]) відносно різних способів виконання незалежних частин програм, а також відносно різних архітектур паралельних систем за розширеною систематикою Флінна.

Варто також зауважити, що дані результати отримано на екстенціональному рівні, тобто абстрагуючись від інтенціональних особливостей тих чи інших формалізмів та підходів. Так зроблено навмисно, адже кожен з розглянутих підходів та класифікацій містить певні особливості (наприклад, пропускна спроможність каналу та його буферизація, характерні для передачі повідомлень, ігноруються при моделюванні через спільну пам'ять), втягнувши які до розгляду ми позбавилися б можливості моделювання (продемонстрованої звідності), за рахунок втрати певною мірою адекватності у моделі.

Список використаних джерел

1. Панченко Т.В. Метод доведення властивостей програм в композиційно-номінативних мовах *IPCL* // Проблеми програмування. – 2008. – №1. – С. 3–16.
2. Гергель В.П., Стронгин Р.Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2003. – 184 с.
3. Панченко Т.В. Композиційні методи специфікації та верифікації програмних

- систем. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. – Київ, 2006. – 177 с.
4. Hoare C.A.R. Communicating Sequential Processes. – Prentice Hall International, 1985. – 238 p.
 5. Lamport L. Verification and Specification of Concurrent Programs // deBakker J., deRoever W., Rozenberg G. (eds.) A Decade of Concurrency, Vol. 803. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 347–374.
 6. Harel D., Pnueli A. On the development of reactive systems // Apt K.R. (ed.) Logics and models of concurrent systems, NATO ASI Series, Vol. F13. – Springer-Verlag, 1985. – P. 477–498.
 7. Wikipedia. Internet-енциклопедія (www.wikipedia.org).
 8. Jones C.B. Tentative Steps Toward a Development Method for Interfering Programs // ACM Transactions on Programming Languages and Systems. – 1983. – Vol. 5, № 4. – P. 596–619.
 9. Flynn M. Very high-speed computing system // Proc. IEEE. – 1966. – N 54. – P. 1901–1909.
 10. Flynn M. Some Computer Organisations and Their Effectiveness // IEEE Trans. Computers. – 1972. – Vol. 21, N 9. – P. 948–960.
 11. Hoare C.A.R., He J. Unifying Theories of Programming – London: Prentice Hall Europe, 1998. – 298 p.
 12. Панченко Т.В. Методологія доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL // Тези доповідей Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (ТАAPSD’2004). Київ. – 2004. – С. 62–67.
 13. Нікітченко М.С., Панченко Т.В. Структури даних в композиційних мовах програмування // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 2. – С. 316–325.
 14. Dijkstra E.W. Why Correctness must be a Mathematical Concern // Boyer R.S., Moore J.S., (eds.), The Correctness Problem in Computer Science. – London: Academic Press, 1981. – P. 1–8.
 15. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – № 5. – С. 3–24.
 16. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – № 3. – С. 3–13.
 17. Редько В.Н. Семантические структуры программ // Программирование. – 1981. – № 1. – С. 3–19.
 18. Нікітченко Н.С. Композиционная семантика языков программирования // Программирование. – 1982. – № 6. – С. 9–18.
 19. Басараб И.А., Нікітченко Н.С., Редько В.Н. Композиционные базы данных. – К.: Либідь, 1992. – 191 с.
 20. Редько В.Н. Композиционная структура программологии // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 47–66.
 21. Nikitchenko N. A Composition Nominative Approach to Program Semantics. – Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
 22. Нікітченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
 23. Редько В.Н. Основания программологии // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 1. – С. 3–27.
 24. Нікітченко Н.С., Омельчук Л.Л., Шкільняк С.С., Янченко О.И. Аксиоматические системы спецификаций программ над номинативными данными // Проблемы программирования. Специальный выпуск: Материалы второй международной научно-практической конференции по программированию – 2000. – № 1–2. – С. 259–272.
 25. Нікітченко Н.С. Интенциональные аспекты понятия программы // Проблемы программирования. – 2001. – № 3–4. – С. 5–13.
 26. Панченко Т. В. Використання формальних специфікацій для розробки програмних систем // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – вип. 2. – С. 245–256.

Надійшла до редколегії 8.09.2008

УДК 519.8

Юрій К. Подлипенко, Микола Ю. Горбатенко

**Оцінювання узагальнених розв'язків
лінійних еліптичних рівнянь, що до-
пускають змішане варіаційне форму-
лювання**

Одержано новий клас систем варіаційних
рівнянь, через розв'язки яких виражаються
мінімаксні оцінки функціоналів від невідомих
розв'язків крайових задач для лінійних еліптич-
них рівнянь другого порядку.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостере-
ження, функціонали від розв'язків.

E-mail: yougir@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.

Вступ. Більшість результатів в галузі міні-
максного оцінювання була одержана з вико-
ристанням традиційної постановки відповідних
варіаційних крайових задач, доведення існуван-
ня і єдиності розв'язків яких істотно спирається
на відому лему Лакса-Мільграма (див. [1] і вка-
зану там літературу).

Такий підхід дозволяє, наприклад, в стаціо-
нарних задачах теплопровідності оцінювати неві-
домий розподіл температури за її спостереження-
ми. Однак не менший, а часто навіть більший ін-
терес являє собою також задача оцінювання теп-
лового потоку. Відмітемо, що відомі на цей час
методи оцінювання не дозволяють розв'язувати
подібні задачі.

В роботі запропоновано новий метод, який дає
змогу оцінювати поряд з розподілом температури
і тепловий потік.

Розроблений метод спирається на змішані
варіаційні постановки, започатковані в роботах І.
Бабушки і Ф. Бреції (див. [2]).

Названі задачі оцінювання мають важливе
прикладне значення в багатьох галузях, тому їх
теоретичний аналіз є актуальним.

Допоміжні факти. Далі в роботі використо-
вуються наступні позначення:

H – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ із скалярним
добутком $(\cdot, \cdot)_H$ і нормою $\|\cdot\|_H$;

$J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ – оператор, що називається ізо-
метричним ізоморфізмом, який діє з H на його
спряжений простір H' та визначається рів-
ністю $(v, u)_H = \langle v, J_H u \rangle_{H \times H'} \forall u, v \in H$, де
 $\langle x, f \rangle_{H \times H'} := f(x)$ для $x \in H, f \in H'$;

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – просторова змінна, що змі-
няється в обмеженій відкритій множині $D \subset \mathbb{R}^n$,

Yuri K. Podlipenko, Mykola Yu. Gorbatenko

**Estimation of generalized solutions to
linear elliptic equations which admit the
mixed variational statement**

We obtain a new class of systems of variational
equations via whose solutions the minimal
estimates of functionals from unknown solutions
to the boundary value problem for the second order
linear elliptic equations are expressed.

Key Words: minimal estimates, observations
functionals from solutions.

з гладкою границею Γ ;

$dx = dx_1 \cdots dx_n$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$;

$H^k(D)$ і $H_0^k(D)$ – стандартні простори Соболева
цілого порядку $k > 0$ в області D з відповідною
нормою;

$\text{grad } p := (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n})^T$; $\text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$;

$H(\text{div}; D) := \{v \in L^2(D)^n, \text{div } v \in L^2(D)\}$ –
гільбертів простір з нормою

$\|v\|_{H(\text{div}; D)} := \{\|v\|_{L^2(D)^n}^2 + \|\text{div } v\|_{L^2(D)}^2\}^{1/2}$.

Позначимо через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера,
що складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$
визначених на деякому ймовірнісному просторі
 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H таких, що

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, H)}^2 = \int_{\Omega} \|\xi(\omega)\|_H^2 dP(\omega) < \infty. \quad (1)$$

В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $E\xi =$
 $\int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega) \in H$, що називається математич-
ним сподіванням або середнім випадкового еле-
мента $\xi(\omega)$, що задовольняє умову

$$(h, E\xi)_H = \int_{\Omega} (h, \xi(\omega))_H dP(\omega) \quad \forall h \in H. \quad (2)$$

Застосовуючи до випадкової величини ξ це визна-
чення приводить до традиційного означення
її математичного сподівання, оскільки інтеграл
Бохнера (1) переходить у звичайний інтеграл Ле-
бега по ймовірнісній мірі $dP(\omega)$. $\forall L^2(\Omega, H)$ мож-
на ввести скалярний добуток:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega, H)} := \int_{\Omega} (\xi(\omega), \eta(\omega))_H dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \quad (3)$$

Простір $L^2(\Omega, H)$ з нормою (1) і скалярним до-
бутком (3) є гільбертовим.

Постановка задачі оцінювання. Нехай стан системи характеризується функцією $\varphi(x)$, яка визначається як узагальнений розв'язок крайової задачі Діріхле:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi) = f \quad \text{в } D, \quad (4)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

яку, увівши змінну $\mathbf{j} = -\mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi$, можна записати у вигляді еквівалентної системи першого порядку:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{j} = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{в } D, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = f \quad \text{в } D, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (7)$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ симетрична $n \times n$ -матриця з елементами $a_{ij} \in L^\infty(D)$, для якої існують такі додатні числа μ_1 і μ_2 , що виконується нерівність $\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ $\forall x \in D, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, через $\mathbf{A}^{-1}$ позначена, обернена до $\mathbf{A}$.

У відповідності з [2], під узагальненим розв'язком задачі (6)–(7) будемо розуміти пару функцій $(\mathbf{j}, \varphi) \in H(\operatorname{div}, D) \times L^2(\Omega)$, що задовольняє співвідношенням

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{j}(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \varphi(x) \operatorname{div} \mathbf{q}(x) dx = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, D) \quad (8)$$

$$\int_D v \operatorname{div} \mathbf{j}(x) dx = \int_D f(x) v(x) dx \quad \forall v \in L^2(D), \quad (9)$$

Зауважимо, що із (8) і (9) випливає $\varphi \in H_0^1(D)$.

З фізичної точки зору, крайова задача (4)–(5), або еквівалентна до неї задача (6)–(7), моделює установлений процес розігрівування тіла в області D , при цьому функції $\varphi(x)$, $\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{j}(x)$ і $f(x)$ відповідно мають смисл температури, теплового потоку і об'ємної щільності теплових джерел в точці x .

Відзначимо ще, що для знаходження узагальненого розв'язку в [2] на базі так званого змішаного методу скінчених елементів, розроблені ефективні чисельні алгоритми.

Далі вважається, що функція $f(x)$ у рівняннях (7) і (9) – невідома і належить множині

$$G_0 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(D) : \left(Q(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0 \right)_{L^2(D)} \leq 1 \right\}, \quad (10)$$

де $f_0 \in L^2(D)$ – задана функція, $Q : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ – неперервний додатньо визначений самоспрямований оператор, обернений для якого обмежений. Задача, що досліджується в даній роботі, полягає в тому, щоб за спостереженням випадкових елементів вигляду

$$y_1(\mathbf{j}; \eta_1) = C_1 \mathbf{j} + \eta_1, \quad y_2(\varphi; \eta_2) = C_2 \varphi + \eta_2, \quad (11)$$

що належать сепарабельним гільбертовим просторам H_1 і H_2 над $\mathbb{R}$ відповідно, оцінити значення лінійного функціоналу

$$l(\mathbf{j}, \varphi) := \int_D (l_1(x), \mathbf{j}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D l_2(x) \varphi(x) dx \quad (12)$$

в класі оцінок виду

$$\widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)} := (y_1(\mathbf{j}; \eta_1), u_1)_{H_1} + (y_2(\varphi; \eta_2), u_2)_{H_2} + r, \quad (13)$$

де $(\mathbf{j}, \varphi)$ – невідомий узагальнений розв'язок задачі (6)–(7), l_1 і l_2 – задані елементи із $L^2(D)^n$ і $L^2(D)$, $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$, $r \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_1)$ і $C_2 \in \mathcal{L}(L^2(D), H_2)$ – лінійні неперервні оператори, $(\eta_1, \eta_2) \in G_1$, а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta}_1 \in L^2(\Omega, H_1)$ і $\tilde{\eta}_2 \in L^2(\Omega, H_2)$ з нульовими середніми, що задовольняють умову

$$\mathbb{E}(\tilde{Q}_1 \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + \mathbb{E}(\tilde{Q}_2 \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} < 1, \quad (14)$$

в якій $\tilde{Q}_1$ і $\tilde{Q}_2$ – задані в H_1 і H_2 обмежені самоспряжені додатньо визначені оператори, що мають обмежені обернені.

Означення 1. Оцінку вигляду

$$\widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)} = (y_1(\mathbf{j}; \eta_1), \tilde{u}_1)_{H_1} + (y_2(\varphi; \eta_2), \tilde{u}_2)_{H_2} + \tilde{r} \quad (15)$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(\mathbf{j}, \varphi)$, якщо елементи $\tilde{u}_1 \in H_1$, $\tilde{u}_2 \in H_2$ і число $\tilde{r}$ визначаються із умови

$$\sup_{\tilde{f} \in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E} |l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)}|^2 = \inf_{u_1 \in H_1, u_2 \in H_2, r \in \mathbb{R}} \quad (16)$$

де $(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})$ – розв'язок задачі (6)–(7) при $f(x) = \tilde{f}(x)$. Величину

$$\varrho := \{ \mathbb{E} |l(\mathbf{j}, \varphi) - \widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)}|^2 \}^{1/2} \quad (17)$$

будемо називати потім мінімаксною потімнімання виразу $l(\mathbf{j}, \varphi)$.

Представлення для мінімакських оцінок і похибок оцінювання. Введемо до розгляду при фіксованому $u := (u_1, u_2) \in H := H_1 \times H_2$ пару функцій $(\mathbf{z}_1(\cdot; u), z_2(\cdot; u)) \in H(\operatorname{div}, D) \times L^2(D)$, як єдиний розв'язок наступної крайової задачі

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{z}(\cdot; u) = \operatorname{grad} z_2(\cdot; u) + l_1 - C_1^t J_{H_1} u_1 \quad \text{в } D, \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_1(\cdot; u) = l_2 - C_2^t J_{H_2} u_2 \quad \text{в } D, \quad (19)$$

$$z_2(\cdot; u) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (20)$$

під яким слід розуміти розв'язок наступної варіаційної задачі

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{z}_1(x; u), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \mathbf{q}(x) dx = \int_D (l_1(x) - (C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}; D), \quad (21)$$

$$\int_D v(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u) dx = \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) v(x) dx \quad \forall v \in L^2(D), \quad D. \quad (22)$$

де $C_1^t : H_1' \rightarrow L^2(D)^n$ і $C_2^t : H_2' \rightarrow L^2(D)$ – оператори, транспоновані до C_1 і C_2 , що визначаються співвідношеннями $\int_D (v(x), C_1^t w(x))_{\mathbb{R}^n} dx = \langle Cv, w \rangle_{H_1 \times H_1'}$ для всіх $v \in L^2(D)^n$, $w \in H_1'$ і $\int_D v(x) C_2^t w(x) dx = \langle Cv, w \rangle_{H_2 \times H_2'}$ для всіх $v \in L^2(D)$, $w \in H_2'$. Із (21) і (22) маємо $z_2 \in H_0^1(D)$.

З теорії варіаційних задач, які допускають змінне формулювання (див., наприклад, [2]), випливає, що функції $\mathbf{z}_1(x; u_1, u_2)$, $z_2(x; u_1, u_2)$ визначаються із рівнянь (21) – (22) єдиним чином.

Лема 1. Задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(v, p)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, що описується варіаційною задачею (21) – (22) з функцією вартості вигляду

$$I(u) = (Q^{-1} z_2(\cdot; u), z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1} u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} u_2, u_2)_{H_2} \rightarrow \inf_{u \in H} \quad (23)$$

Доведення Внаслідок (11)–(13) маємо при $(u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$

$$l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})} = (l_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} + (l_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$-(y_1(\tilde{\mathbf{j}}; \eta_1), u_1)_{H_1} - (y_2(\tilde{\varphi}; \eta_2), u_2)_{H_2} - c$$

$$= (l_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} + (l_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$-(u_1, C_1 \tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, C_2 \tilde{\varphi} + \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c$$

$$= (l_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} + (l_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$= \langle J_{H_1} u_1, C_1 \tilde{\mathbf{j}} \rangle_{H_1' \times H_1} - \langle J_{H_2} u_2, C_2 \tilde{\varphi} \rangle_{H_2' \times H_2}$$

$$-(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c$$

$$= (l_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} + (l_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$-(C_1^t J_{H_1} u_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} - (C_2^t J_{H_2} u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$-(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c$$

$$= (l_1 - C_1^t J_{H_1} u_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} + (l_2 - C_2^t J_{H_2} u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$

$$-(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c. \quad (24)$$

Далі враховуючи, що операторні рівняння (18) (20) і (6)–(7) при $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}$, в силу (21)–(22) і (8)–(9) еквівалентні відповідно наступним системам варіаційних рівнянь:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \chi_1(x), \mathbf{z}_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \chi_1(x) dx = \int_D (l_1(x) - (C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \chi_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \chi_1 \in H(\operatorname{div}; D), \quad (25)$$

$$\int_D \chi_2(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u) dx = \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) \chi_2(x) dx \quad \forall \chi_2 \in L^2(D). \quad (26)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \tilde{\mathbf{j}}(x), \psi_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} \psi_1(x) dx = 0 \quad \forall \psi_1 \in H(\operatorname{div}; D). \quad (27)$$

$$\int_D \psi_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x) dx = \int_D \tilde{f}(x) \psi_2(x) dx \quad \forall \psi_2 \in L^2(D). \quad (28)$$

перетворемо третій і четвертий доданок в (24). Тоді дістанемо Для цього покладемо в (25) і (26) $\chi_1 = \tilde{\mathbf{j}}$ і $\chi_2 = \tilde{\varphi}$.

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \tilde{\mathbf{j}}(x), \mathbf{z}_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x) dx = \int_D (l_1(x) - (C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \tilde{\mathbf{j}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx. \quad (29)$$

$$\int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u) dx = \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) \tilde{\varphi}(x) dx. \quad (30)$$

З іншого боку, покладаючи в (27) і (28) $\psi_1 = z_1(\cdot; u)$ і $\psi_2 = z_2(\cdot; u)$, знаходимо

$$\int_D (A^{-1}(x)\tilde{j}(x), z_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} z_1(x; u) dx = 0, \quad (31)$$

$$\int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \tilde{j}(x) dx = \int_D \tilde{f}(x) z_2(x; u) dx \quad (32)$$

Із (29)–(32) дістаємо

$$\begin{aligned} & (l_1 - C_1^t J_{H_1} u_1, \tilde{j})_{L^2(D)^n} + (l_2 - C_2^t J_{H_2} u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)} \\ &= \int_D (A^{-1}(x)\tilde{j}(x), z_1(x; u_1, u_2))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x; u_1, u_2) \operatorname{div} \tilde{j}(x) dx \\ &+ \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} z_1(x; u_1, u_2) dx = \int_D (A^{-1}(x)\tilde{j}(x), z_1(x; u_1, u_2))_{\mathbb{R}^n} dx \\ &+ \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} z_1(x; u_1, u_2) dx + \int_D z_2(x; u_1, u_2) \operatorname{div} \tilde{j}(x) dx \\ &= 0 + (\tilde{f}, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} = (\tilde{f}, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Звідси і із (24) випливає, що

$$\begin{aligned} l(\tilde{j}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{j}, \tilde{\varphi})} &= (\tilde{f}, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} \\ &- (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c \\ &= (\tilde{f} - f_0, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} + (f_0, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} \\ &- (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c =: \xi, \end{aligned}$$

де через ξ позначена випадкова величина, що визначається правою частиною останньої рівності. Очевидно, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= (\tilde{f} - f_0, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} \\ &+ (f_0, z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} - c, \end{aligned}$$

$$\xi - \mathbb{E}\xi = -(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}.$$

Звідки, приймаючи до уваги відоме співвідношення

$$D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$$

між дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ і її математичним сподіванням $\mathbb{E}\xi$, знаходимо

$$\mathbb{E} \left| l(\tilde{j}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{j}, \tilde{\varphi})} \right|^2 = \left| (\tilde{f}_2 - f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} \right|^2$$

$$+ (f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} - c|^2 + \mathbb{E}[(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]^2.$$

З останньої рівності дістаємо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f} \in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}) \in G_1} \mathbb{E} |l(\tilde{j}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{j}, \tilde{\varphi})}|^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\tilde{f} - f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} \right. \\ &\quad \left. + (f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} - c \right]^2 \\ &\quad + \sup_{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2 \\ &= \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\tilde{f}_2 - f_2^{(0)}, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} \right]^2 \\ &\quad + \sup_{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2, \quad (33) \end{aligned}$$

де інфімум по c досягається при

$$c = (f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}.$$

Далі, застосовуючи нерівність Коші-Буняківського, із (10) отримаємо

$$\begin{aligned} & \left| (\tilde{f} - f_0, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} \right|^2 \\ & \leq (Q^{-1} z_2(\cdot; u), z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} (Q(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0)_{L^2(D)} \\ & \leq (Q^{-1} z_2(\cdot; u), z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}, \end{aligned}$$

причому рівність досягається при

$$\tilde{f} = f_0 + \frac{Q^{-1} z_2(\cdot; u)}{(Q^{-1} z_2(\cdot; u), z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}^{1/2}}.$$

Звідси, дістаємо

$$\begin{aligned} & \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\tilde{f}_2 - f_2^{(0)}, z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} \right]^2 \\ &= (Q^{-1} z_2(\cdot; u), z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Аналогічно, в силу (14), знаходимо

$$\sup_{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2 \\ = (\tilde{Q}_1^{-1} u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} u_2, u_2)_{H_2}.$$

Із останніх двох рівностей і із (33) знаходимо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f} \in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})}|^2 \\ = I(u),$$

при $c = (z_2(\cdot; u), f_0)_{L^2(D)}$, а $I(u)$ визначається формулою (23). Цим лема доведена.

В результаті розв'язування задачі оптимального керування (21) – (23) приходимо до наступного результату.

Теорема 1 Існує єдиний мінімаксна оцінка значення $l(\mathbf{j}, \varphi)$, яка має вигляд

$$\widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)} = (y_1(\mathbf{j}, \eta_1), \hat{u}_1)_{H_1} + (y_2(\varphi, \eta_2), \hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c}$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_2(x) f_0(x) dx, \quad \hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2$$

а функції $\hat{\mathbf{z}}_1, \mathbf{p}_1 \in H(\text{div}, D)$ і $\hat{z}_2, p_2 \in L^2(D)$ на-
ходяться з розв'язку наступної системи варіаційних рівнянь:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x) \text{div } \mathbf{q}_1(x) dx \\ = \int_D (l_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \mathbf{q}_1 \in H(\text{div}, D), \quad (34)$$

$$\int_D v_1(x) \text{div } \hat{\mathbf{z}}_1(x) dx = \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2(x)) v_1(x) dx \quad \forall v_1 \in L^2(D), \quad (35)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D p_2(x) \text{div } \mathbf{q}_2(x) dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(\text{div}, D), \quad (36)$$

$$\int_D v_2(x) \text{div } \hat{\mathbf{p}}_1(x) dx = \int_D v_2(x) Q^{-1} \hat{z}_2(x) dx \quad \forall v_2 \in L^2(D). \quad (37)$$

Задача (34) – (37) однозначно розв'язна. По-
тибка мінімаксного оцінювання ρ визначається
формулою

$$\rho = l(\mathbf{p}_1, p_2)^{1/2}. \quad (38)$$

Доведення Покажемо, що розв'язок задачі оп-
тимального керування (21)–(23) зводиться до
розв'язку системи рівнянь (34)–(37). Для цього
спочатку зауважимо, що із вигляду функціоналу
 $I(u) := I(u_1, u_2)$, де $u := (u_1, u_2) \in H_0 := H_1 \times H_2$,
існує єдиний елемент $\hat{u} := (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in H_0$, на яко-
му досягається мінімум цього функціоналу, тобто
 $I(\hat{u}) = \inf_{u \in H_0} I(u)$. Тому, для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$ і
 $w = (w_1, w_2) \in H_0$ виконується співвідношення

$$\left. \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau w) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (39)$$

Позначимо через $(\hat{\mathbf{z}}_1(\cdot; w), \hat{z}_2(\cdot; w))$ єдиний
розв'язок системи рівнянь (21), (22) при $l_1 = 0$,
 $l_2 = 0$ і $u = w$. Тоді для похідної в лівій частині
(39) дістанемо вираз

$$\left. \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau w) \right|_{\tau=0} \\ = (Q^{-1} z_2(\cdot; \hat{u}), \hat{z}_2(\cdot; w))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1} \hat{u}_1, w_1)_{H_1}$$

$$+ (\tilde{Q}_2^{-1} \hat{u}_2, w_2)_{H_2} = 0. \quad (40)$$

Далі, введемо функції $\mathbf{p}_1 \in H(\text{div}, D)$ і $p_2 \in L^2(D)$
як єдиний розв'язок задачі

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx \\ + \int_D p_2(x) \text{div } \mathbf{q}_2(x) dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(\text{div}, D). \quad (41)$$

$$\int_D v_2(x) \text{div } \hat{\mathbf{p}}_1(x) dx \\ = \int_D v_2(x) Q^{-1} z_2(x; \hat{u}) dx \quad \forall v_2 \in L^2(D). \quad (42)$$

Тоді покладаючи в (41) $\mathbf{q}_2 = \hat{\mathbf{z}}_1(\cdot; w)$, а в (42)
 $v_2 = \hat{z}_2(\cdot; w)$, отримаємо

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \hat{\mathbf{z}}_1(x; w))_{\mathbb{R}^n} dx \\ + \int_D p_2(x) \text{div } \hat{\mathbf{z}}_1(x; w) dx = 0. \quad (43)$$

$$\int_D \tilde{z}_2(x; w) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx = \int_D \tilde{z}_2(x; w) Q^{-1} \hat{z}_2(x; \hat{u}) dx. \quad (44)$$

Із (43) і (44) знаходимо

$$\begin{aligned} (Q^{-1} z_2(\cdot; \hat{u}), \tilde{z}_2(\cdot; w))_{L^2(D)} &= \int_D \tilde{z}_2(x; w) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx \\ &+ \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \tilde{\mathbf{z}}_1(x; w))_{\mathbb{R}^n} dx \\ &+ \int_D p_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_1(x; w) dx \\ &= \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \tilde{\mathbf{z}}_1(x; w), \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \\ &+ \int_D \tilde{z}_2(x; w) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx \\ &+ \int_D p_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_1(x; w) dx \\ &= - \int_D (C_1^t J_{H_1} w_1, \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx - \int_D (C_2^t J_{H_2} w_2) p_2 dx \\ &= -(w_1, C_1 \mathbf{p}_1)_{H_1} - (w_2, C_2 p_2)_{H_2} \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги рівність (40), маємо

$$\begin{aligned} (w_1, C_1 \mathbf{p}_1)_{H_1} + (w_2, C_2 p_2)_{H_2} \\ = (\tilde{Q}_1^{-1} \hat{u}_1, \hat{u}_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} \hat{u}_2, \hat{u}_2)_{H_2} \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2. \quad (45)$$

Заміняючи в правих частинах рівностей (2), (22) u_1 і u_2 на $\hat{u}_1$ і $\hat{u}_2$, котрі визначаються виразами (45), і, вводячи позначення $\mathbf{z}_1(x; \hat{u}_1, \hat{u}_2) =: \tilde{\mathbf{z}}_1(x)$, $z_2(x; \hat{u}_1, \hat{u}_2) =: \tilde{z}_2(x)$, отримуємо, що функції $(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{z}_2)$ і $\mathbf{p}_1, p_2$ задовольняють системи рівнянь (34) – (37), однозначна розв'язність якої випливає з єдиності елементу $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$.

Знайдемо далі похибку оцінювання. Враховуючи (17) і (45), отримуємо

$$\begin{aligned} \varrho &= I(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \\ &= (Q^{-1} z_2(\cdot; \hat{u}_1, \hat{u}_2), z_2(\cdot; \hat{u}_1, \hat{u}_2))_{L^2(D)} \\ &\quad + (\tilde{Q}_1^{-1} \hat{u}_1, \hat{u}_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} \hat{u}_2, \hat{u}_2)_{H_2} \\ &= (Q^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{L^2(D)} \\ &\quad + (C_1 \mathbf{p}_1, \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1)_{H_1} + (C_2 p_2, \tilde{Q}_2 C_2 p_2)_{H_2}. \quad (46) \end{aligned}$$

Покладаючи в (36) і (37) $\mathbf{q}_1 = \tilde{\mathbf{z}}_1$ і $q_2 = \tilde{z}_2$, знаходимо

$$\begin{aligned} \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \tilde{\mathbf{z}}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \\ + \int_D p_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_1(x) dx = 0, \end{aligned}$$

$$\int_D \tilde{z}_2(x) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx = \int_D \tilde{z}_2(x) Q^{-1} \tilde{z}_2(x) dx.$$

З останніх двох співвідношень і з системою варіаційних рівнянь (34) і (45), в яких покладемо $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1$ і $v_1 = p_2$ матимемо

$$\begin{aligned} (Q^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{L^2(D)} &= \int_D \tilde{z}_2(x) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx \\ &+ \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}_1(x), \tilde{\mathbf{z}}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D p_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_1(x) dx \\ &= \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x) \tilde{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x) dx \\ &\quad + \int_D p_2(x) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_1(x) dx \\ &= \int_D (l_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2(x)) p_2(x) dx \\ &= \int_D (l_1(x), \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D l_2(x) p_2(x) dx \\ &\quad - (C_1 \mathbf{p}_1, \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1)_{H_1} - (C_2 p_2, \tilde{Q}_2 C_2 p_2)_{H_2}. \quad (47) \end{aligned}$$

З (45) і (47) випливає співвідношення (38) для виразу похибки оцінювання. Теорема доведена. Використовуючи теорему 1, отримано представлення для мінімаксної оцінки виразу (12), що не залежить від конкретного вигляду функціоналу l .

Теорема 2. Мінімаксна оцінка виразу $l(\hat{j}, \varphi)$ має

$$\widehat{l(\hat{j}, \varphi)} = l(\hat{j}, \hat{\varphi}),$$

де випадкові поля $\hat{j} \in L^2(\Omega, H(\operatorname{div}, D))$ і $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega, L^2(D))$, а також допоміжні випадкові поля $\hat{p}_1 \in L^2(\Omega, H(\operatorname{div}, D))$ і $\hat{p}_2 \in L^2(\Omega, L^2(D))$ походять з розв'язку наступної системи стохастичних рівнянь:

$$\int_D (A^{-1}(x) \hat{p}_1(x, \omega) \cdot q_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{p}_2(x, \omega) \operatorname{div} q_1(x) dx = \int_D (C_1^t J_{H_1} \bar{Q}_1(y_1(\hat{j}, \eta_1(\omega))) - C_1 \hat{j}(\cdot, \omega))(x) \cdot q_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall q_1 \in H(\operatorname{div}, D). \quad (48)$$

$$\int_D v_1(x) \operatorname{div} \hat{p}_1(x, \omega) dx = \int_D (C_2^t J_{H_2} \bar{Q}_2(y_2(\varphi, \eta_2(\omega))) - C_2 \hat{\varphi}(\cdot, \omega))(x) v_1(x) dx \quad \forall v_1 \in L^2(D). \quad (49)$$

$$\int_D (A^{-1}(x) \hat{j}(x, \omega) \cdot q_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{\varphi}(x, \omega) \operatorname{div} q_2(x) dx = 0 \quad \forall q_2 \in H(\operatorname{div}, D). \quad (50)$$

$$\int_D v_2(x) \operatorname{div} \hat{j}(x, \omega) dx = \int_D v_2(x) (Q_2^{-1} \hat{p}_2(x, \omega) + f_0(x)) dx \quad \forall v_2 \in V_2. \quad (51)$$

в яких рівності (48) – (51) виконуються з ймовірністю 1. Задача (48) – (51) має єдиний розв'язок.

На останок зауважимо, що користуючись запропонованими в [2] змішаними методами скінченних елементів, для знаходження розв'язків задач (34) – (37) і (48) – (51) можна розробити наближені методи їх розв'язання.

Висновки. В даній роботі досліджені задачі мінімаксного середньоквадратичного оцінювання параметрів крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь з частинними похідними при заданих квадратичних обмеженнях на невідомі статистичні характеристики шумів в спостереженнях та при умові, що невідомі дані (праві частини еліптичних рівнянь, а також крайових умов, що входять до постановки цих крайових задач) задовольняють аналогічним квадратичним обмеженням.

Використовуючи змішані варіаційні постановки, отримані:

Нові твердження про зведення задач міні-

максного оцінювання до спеціальних задач оптимального керування систем, які описуються еліптичними рівняннями з квадратичними критеріями якості;

Системи еліптичних рівнянь, через розв'язки яких виражаються відповідні мінімаксні оцінки і похибки оцінювання.

Список використаних джерел

- [1] Наконечний О.Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. – Київський університет. Київ 2004. – 103 с.
- [2] F. Brezzi, M. Fortin Mixed and hybrid finite element methods. – Springer-Verlag, New York, 1991 – 350 p.

Надійшла до редколегії 29.08.08

УДК 517.5

Савкіна М.Ю., к. ф.-м. н.

Уточнення меж для зсунення оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплайнової регресії

За допомогою формули Бонфероні звужено межі для зсунення оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплайнової регресії, де функція регресії - лінійний сплайн на відрізку $[0, 1]$ з одним вузлом. Розташування вузла невідоме та підлягає оцінюванню.

Ключові слова: модель нелінійної сплайнової регресії, оцінка параметрів, лінійний сплайн

E-mail: marta@imath.kiev.ua

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

В деяких застосуваннях теорії обробки спостережень бажаний такий вибір регресійної моделі [11, 12]

$$y_i = g(\tau_i) + \xi_i, i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

де функція регресії $g(\tau)$ має вигляд

$$g(\tau) = \begin{cases} g_1(\tau, \tilde{\beta}_1), & 0 \leq \tau \leq \tau_1^*, \\ g_2(\tau, \tilde{\beta}_2), & \tau_1^* \leq \tau \leq \tau_2^*, \\ \vdots & \vdots \\ g_{r+1}(\tau, \tilde{\beta}_{r+1}), & \tau_r^* \leq \tau \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

$\tilde{\beta}_j = (\beta_{0,j}, \beta_{1,j}, \dots, \beta_{l,j})$, $j = 1, 2, \dots, r+1$, а $\{\xi_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ - послідовність незалежних у сукупності нормально розподілених випадкових величин з $E\xi_i = 0$ та $D\xi_i = \sigma^2$.

Бажаною властивістю функції $g(\tau)$ є її неперервність та неперервність її першої похідної, а також те, щоб функції $g_1(\tau, \tilde{\beta}_1)$, $g_2(\tau, \tilde{\beta}_2)$, $\dots$, $g_{r+1}(\tau, \tilde{\beta}_{r+1})$ були поліномами: $g_i(\tau, \tilde{\beta}_i) = \sum_{j=1}^{q_i} b_{ij} \tau^j$.

Якщо вектор точок з'єднання $\vec{\tau} = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_r^*)$ відомий, то модель (1), (2) є лінійною по параметрах $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{r+1}$, і знайти їх оцінки можна, використовуючи методи множинної лінійної регресії. Якщо ж вектор $\vec{\tau}$ невідомий, то модель (1), (2) стає нелінійною, й оцінювання параметрів є більш скрутним.

M.Yu.Savkina, cand. ph.-math. science

The refinement of the boundaries for bias of knot point in spline regression model

The boundaries for bias of knot point are narrowed using formula of Bonferroni in spline regression model, where function of regression is linear spline on segment $[0, 1]$ with one knot point. The location of knot points isn't known and to be estimated.

Key Words: nonlinear spline regression model, estimate of parameters, linear spline

Розглянемо випадок, коли $g(\tau)$ - лінійний сплайн з єдиним вузлом у точці τ^* , тобто маємо таку модель нелінійної регресії

$$x(\tau_i) = (a\tau_i + b) + c_1(\tau_i - \tau^*)_+ + \xi_i, i = 0, 1, \dots, n,$$

де $c_1 = c - a$, а $(\tau - \tau_i)_+$ - усічена степенева функція [1]. В цих позначеннях a, b, c_1, τ^* - невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

Запропоновано такий алгоритм отримання оцінки τ^* на підставі траєкторії $x(\tau_0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_n)$, який можна вважати модифікацією метода найменших квадратів. Спочатку припускається, що точка переходу τ^* розташована в точці τ_k . Для отримання оцінки вектора (a, b, c_1) скористаємося методом найменших квадратів, який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{i=0}^n (x(\tau_i) - (a\tau_i + b) - c_1(\tau_i - \tau_k)_+)^2$$

по відношенню до вектора (a, b, c_1) . Найменше значення цієї суми, яке називається залишковою сумою квадратів, позначимо через s_k^2 . Покладаючи послідовно $k = 1, 2, \dots, n-1$, отримаємо $n-1$ значень $s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n-1}^2$, серед яких вибираємо найменше $s_{k_0}^2$, а за оцінку точки переходу τ^* приймається точка τ_{k_0} : $\hat{\tau}^* = \tau_{k_0}$.

Оцінка $\hat{\tau}^*$ є випадковою величиною; її ма-

тематичне сподівання можна подати у вигляді

$$E\hat{\tau}^* = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{n} p(s_1^2 > s_l^2, \dots, s_{l-1}^2 > s_l^2,$$

$$s_{l+1}^2 > s_l^2, \dots, s_{n-1}^2 > s_l^2).$$

Позначимо через $\bar{U}, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{l-1}, \bar{U}_{l+1}, \dots, \bar{U}_n$ такі події

$$\bar{U} = \{s_1^2 > s_l^2, \dots, s_{l-1}^2 > s_l^2,$$

$$s_{l+1}^2 > s_l^2, \dots, s_{n-1}^2 > s_l^2\},$$

$$\bar{U}_i = \{s_i^2 > s_l^2\}, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n.$$

Маємо

$$p(\bar{U}) = 1 - p(U) = 1 - p\left(\bigcup_{i=1, i \neq l}^n \bar{U}_i\right), \quad (3)$$

В роботі [13] ймовірність $p(\bar{U})$ оцінювалась за допомогою нерівностей

$$p_1 \leq p(\bar{U}) \leq p_2, \text{ де}$$

$$p_1 = \min\{0, 1 - \sum p(\bar{U}_i)\}, \quad p_2 = \min\{p(\bar{U}_i)\}.$$

Застосуємо тепер до $p(\bigcup \bar{U}_i)$ принцип включення виключення; отримаємо добре відому булевську формулу

$$p\left(\bigcup_{i=1, i \neq l}^n \bar{U}_i\right) = \sum_{i=1, i \neq l}^n p(\bar{U}_i) - \sum_{i < j, i, j \neq l} p(\bar{U}_i \bar{U}_j) +$$

$$+ \dots + (-1)^n p(\bar{U}_0 \dots \bar{U}_{l-1} \bar{U}_{l+1} \dots \bar{U}_n).$$

Доведено [2], що в цій формулі сума непарного числа членів правої частини є верхньою границею лівої частини, а сума парного числа членів - нижньою границею лівої частини, причому точність границь росте з ростом числа врахованих членів. Таким чином, маємо послідовність нерівностей (іноді приписуваних Бонфероні), перше з яких має вигляд

$$p_3 < p\left(\bigcup_{i=1, i \neq l}^n \bar{U}_i\right) < p_4, \text{ де} \quad (4)$$

$$p_3 = \sum_{i=1, i \neq l}^n p(\bar{U}_i) - \sum_{i < j, i, j \neq l} p(\bar{U}_i \bar{U}_j),$$

$$p_4 = \sum_{i=1, i \neq l}^n p(\bar{U}_i) - \max_j \sum_{i=1, i \neq j, i \neq l}^n p(\bar{U}_i \bar{U}_j).$$

Враховуючи, що

$$0 < p(U) < \min_{i,j} p(\bar{U}_i \bar{U}_j),$$

з (3) та (4) маємо такі границі для $p(U)$:

$$\min\{0, 1 - p_4\} < p(U) <$$

$$< \min\{1 - p_3, \min_{i,j} p(\bar{U}_i \bar{U}_j)\}.$$

Зауважимо, що верхню границю в формулі (4) отримав Куніас.

Розглянемо залишкову суму квадратів s_k^2 . Маємо [3]

$$s_k^2 = \bar{x}'(I - P_k)\bar{x}, \quad (5)$$

де

$$\bar{x} = (x(\tau_0), \dots, x(\tau_n))',$$

$$P_k = T_k(T_k' T_k)^{-1} T_k',$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{k}{n} & 1 & 0 \\ \frac{k+1}{n} & 1 & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \frac{n-k}{n} \end{pmatrix} \quad (6)$$

З рівності (5) випливає, що $s_k^2 - s_l^2 = \bar{x}'(P_l - P_k)\bar{x}$, тобто $s_k^2 - s_l^2$ є квадратичною формою від нормально розподілених випадкових величин $x_0, x_1, \dots, x_n$ з $Ex_i = \mu_i$, де $\mu_i = a\tau_i + b + c_1(\tau_i - \tau^*)_+$ та $Dx_i = \sigma^2$. Позначимо $\bar{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)'$.

Лема 1. Нехай $\varphi(t)$ - характеристична функція випадкової величини $y = \bar{x}' A \bar{x}$, де $A = P_l - P_k$.

Тоді

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} e^{-\frac{2t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} * e^{-\frac{it \lambda \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 - b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}}, \quad (7)$$

де λ - найбільше власне число матриці A ; $b_{\mu, \lambda} = \bar{b}'_{\lambda} * \bar{\mu}$, $b_{\mu, -\lambda} = \bar{b}'_{-\lambda} * \bar{\mu}$, $\bar{b}_{\lambda}, \bar{b}_{-\lambda}$ - власні вектори, які відповідають най-

більшому та найменшому власному числу матриці A відповідно.

Доведення. Будемо шукати $\varphi(t)$ за формулою [4]

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} * \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\vec{v}-\vec{\mu})'(\vec{v}-\vec{\mu})} d\vec{v}_0 \dots d\vec{v}_n = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \vec{v}'(I-2itA)\vec{v}} * \\ & * e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \vec{v}'\vec{\mu} - \frac{1}{2\sigma^2} \vec{\mu}'\vec{v}} d\vec{v}_0 \dots d\vec{v}_n, \\ & \text{де } \vec{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Оскільки матриця A симетрична, її можна подати у вигляді [5]

$$A = B'DB,$$

де B – ортогональна матриця; $D = (d_0, d_1, \dots, d_n)I$ – діагональна матриця, тому

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} * \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \vec{v}'B'(I-2it\sigma^2 D)B\vec{v}} * \\ & * e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (-2i\vec{v}'B'\vec{\mu} + \vec{\mu}'\vec{v})} d\vec{v}_0 \dots d\vec{v}_n. \end{aligned}$$

де $\vec{b}_\mu = (b_{\mu,0}, b_{\mu,1}, \dots, b_{\mu,n})' = B\vec{\mu}$.

Зробимо заміну змінних $\vec{z} = B\vec{v}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \vec{b}_\mu' \vec{b}_\mu} * \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\vec{z}'(I-2itD)\vec{z} - 2\vec{z}'\vec{b}_\mu)} |B'| dz_0 \dots dz_n. \end{aligned}$$

де $|B'|$ – якобіан переходу від змінних $v_0, \dots, v_n$ до змінних $z_0, \dots, z_n$. Відомо, що $|B'| = 1$.

Зробимо ще одну заміну змінних

$$u_j = \sqrt{1 - 2itd_j\sigma^2} z_j - \frac{b_{\mu,j}}{\sqrt{1 - 2itd_j\sigma^2}}$$

Маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} e^{\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n b_{\mu,j}^2} * \\ & * \frac{2itd_j\sigma^2}{1 - 2itd_j\sigma^2} \frac{1}{\prod_{j=0}^n \sqrt{1 - 2itd_j\sigma^2}} * \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^n u_j^2} du_0 \dots du_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \sqrt{2\pi}\sigma$, з (8) отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} e^{\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n b_{\mu,j}^2} \frac{2itd_j\sigma^2}{1 - 2itd_j\sigma^2} * \\ & * \frac{\sigma^{n+1}}{\prod_{j=0}^n \sqrt{1 - 2itd_j\sigma^2}} (\sqrt{2\pi})^{n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В роботі [13] доведено, що матриця A має тільки два власних числа, які не дорівнюють нулю: λ та $-\lambda$, тобто серед чисел $d_0, d_1, \dots, d_n$ є тільки два, які не дорівнюють нулю. Таким чином, з (9) отримаємо (7).

Лему 1 доведено.

Оскільки $\text{rang} A = 2$, матриця A має два лінійно незалежні рядки, а решту рядків можна записати як їх лінійну комбінацію. Не обмежуючи загальності можна вважати, що лінійно незалежними будуть перший та останній рядки. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_s a_{00} + \beta_s a_{n0} & \dots & \alpha_s a_{0n} + \beta_s a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти α_s та β_s знаходимо як розв'язок системи з двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_s a_{00} + \beta_s a_{n0} = a_{s0} \\ \alpha_s a_{0n} + \beta_s a_{nn} = a_{sn} \end{cases}, s = 1, \dots, n-1.$$

Лема 2. Має місце рівність

$$\begin{aligned} \lambda &= \left((a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i})^2 - \right. \\ & \left. - (a_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{0i}) (a_{n0} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{ni}) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доведення. Використовуючи властивості визначників, маємо

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^{n-1} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i} & a_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{0i} \\ a_{n0} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{ni} & a_{nn} - \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{ni} \end{vmatrix}$$

Знайдемо суму

$$\begin{aligned} & (a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i}) + (a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{ni}) = \\ & = a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i a_{0i} + \beta_i a_{ni}) + a_{nn} = \\ & = a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} + a_{nn} = 0, \text{ оскільки } \text{tr} A = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Значить, } a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i} = -(a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{ni}).$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (-\lambda)^{n-1} * \left(\lambda^2 - (a_{00} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i})^2 - \right. \\ & \left. - (a_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{0i})(a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{ni}) \right) = 0, \end{aligned}$$

звідки отримаємо (10).

Лему 2 доведено.

Н а с л і д о к. Власні вектори $\vec{b}_\lambda, \vec{b}_{-\lambda}$ можна обчислити за формулами

$$\begin{aligned} \vec{b}_\lambda &= \left(\frac{\Delta}{\Delta_\lambda} \gamma_1, -\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \frac{\Delta}{\Delta_\lambda} \gamma_1, \dots, \right. \\ & \left. -\beta_{n-1} \gamma_1 - \alpha_{n-1} \frac{\Delta}{\Delta_\lambda} \gamma_1, \gamma_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_{-\lambda} &= \left(\frac{\Delta}{\Delta_{-\lambda}} \gamma_2, -\beta_1 \gamma_2 - \alpha_1 \frac{\Delta}{\Delta_{-\lambda}} \gamma_2, \dots, \right. \\ & \left. -\beta_{n-1} \gamma_2 - \alpha_{n-1} \frac{\Delta}{\Delta_{-\lambda}} \gamma_2, \gamma_2 \right), \end{aligned}$$

де

$$\Delta_\lambda = (-1)^{n-1} (a_{00} - \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i}),$$

$$\Delta_{-\lambda} = (-1)^{n-1} (a_{00} + \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{0i}),$$

$$\Delta = (-1)^n (a_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_{0i}).$$

γ_1, γ_2 – вільні параметри, завдяки яким вектори $\vec{b}_\lambda, \vec{b}_{-\lambda}$ стають ортонормованими.

Лема 3. Характеристична функція $\varphi(t)$ випадкової величини $y = \vec{x}' A \vec{x}$ є інтегрованою з квадратом, тобто $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Доведення. Згідно леми 1 маємо

$$|\varphi(t)|^2 = \frac{1}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4} e^{-\frac{4t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}}.$$

Оскільки $e^{-\frac{4t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} \leq 1$ при будь-якому $t \in (-\infty, \infty)$, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt &< \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4} = \\ &= 2 * \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4} = \frac{\pi}{2\lambda\sigma^2}, \end{aligned}$$

з якої випливає, що $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Лему 3 доведено.

Подамо характеристичну функцію $\varphi(t)$ у вигляді

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} e^{-\frac{2t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} * \\ & * \cos \frac{t\lambda\sigma^2 (b_{\mu, \lambda}^2 - b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} e^{-\frac{2t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} * \\ & * \sin \frac{t\lambda\sigma^2 (b_{\mu, \lambda}^2 - b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4} \end{aligned}$$

функції дійсної змінної.

Теорема 1. Має місце рівність

$$p(U_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_2(t) \sin tu \, dt \, du. \quad (12)$$

Доведення. Згідно леми 3 $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, а оператор Фур'є

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} \varphi(t) dt$$

є унітарним лінійним оператором в просторі $L_2(-\infty, \infty)$ [6], то $g(u) \in L_2(-\infty, \infty)$. Такий оператор має обернений, тобто

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} g(u) du. \quad (13)$$

Нехай $p(u)$ – щільність розподілу випадкової величини y . Згідно з означенням характеристичної функції маємо

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} p(u) du. \quad (14)$$

Оскільки функція розподілу випадкової величини однозначно визначається своєю характеристичною функцією (теорема єдиності [7]), з (13) і (14) маємо $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(u)$ майже всюди, тобто

$$p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} \varphi(t) dt \text{ майже всюди.} \quad (15)$$

Підставимо (11) в (15). Отримаємо

$$\begin{aligned} p(u) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tu - i \sin tu) (\varphi_1(t) + i \varphi_2(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(t) \cos tu + \varphi_2(t) \sin tu) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\varphi_1(t) \cos tu + \varphi_2(t) \sin tu) dt \end{aligned}$$

Інтеграли

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(t) \cos tu dt, \quad \int_0^{\infty} \varphi_2(t) \sin tu dt$$

згідно з ознакою Дирихле для невластивих інтегралів збігаються, якщо $u \neq 0$:

$\int_0^C \cos t dt, \int_0^C \sin t dt$ – обмежені функції від C ;

$\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ монотонні функції, причому $\varphi_1(t) \rightarrow 0, \varphi_2(t) \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow \infty$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \cos tu dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_2(t) \sin tu dt. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned} p(u) &= \int_0^{\infty} p(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \cos tu dt du + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_2(t) \sin tu dt du. \quad (16)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) du &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\varphi_1(t) \cos tu + \varphi_2(t) \sin tu) dt du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} (\varphi_1(t) \cos tu + \varphi_2(t) \sin tu) dt du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\varphi_1(t) \cos tu + \varphi_2(t) \sin tu) dt du = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \cos tu dt du = 1, \end{aligned}$$

тобто

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \cos tu dt du = \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Підставимо (17) в (16); отримаємо (12).

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер двовимірну випадкову величину (y_0, y_1) , де $y_0 = s_k^2 - s_{l_0}^2, y_1 = s_k^2 - s_{l_1}^2$ – квадратичні форми від нормально розподілених випадкових величин $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Маємо

$$y_0 = \vec{x} A_0 \vec{x}, \quad y_1 = \vec{x} A_1 \vec{x},$$

де $A_0 = P_k - P_{l_0}, A_1 = P_k - P_{l_1}$.

Позначимо $A(t_0, t_1) = t_0 A_0 + t_1 A_1$. Цю матрицю можна подати у вигляді

$$A(t_0, t_1) = B'(t_0, t_1) D(t_0, t_1) B(t_0, t_1),$$

де $B(t_0, t_1)$ – ортогональна матриця; $D(t_0, t_1) = (d_0(t_0, t_1), d_1(t_0, t_1), \dots, d_n(t_0, t_1)) I$ – діагональна матриця.

Лема 4. Нехай $\varphi(t_0, t_1)$ – характеристична функція випадкової величини (y_0, y_1) . Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, t_1) &= e^{-\sum_{j=1}^3 2b_{n, \lambda_j}^2(t_0, t_1) \frac{\lambda_j(t_0, t_1)^2}{1+4\lambda_j(t_0, t_1)^2}} \cdot \\ &\cdot e^{i \sum_{j=1}^3 2b_{n, \lambda_j}^2(t_0, t_1) \frac{\lambda_j(t_0, t_1)^2}{1+4\lambda_j(t_0, t_1)^2}} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^3 \sqrt{1-2i\lambda_j(t_0, t_1)}}. \end{aligned} \quad (18)$$

де $\lambda_j(t_0, t_1), j = 1, 2, 3$ – власні числа матриці $A(t_0, t_1)$, які не дорівнюють нулю;

$b_{\mu, \lambda_j}(t_0, t_1) = \bar{b}'_{\lambda_j}(t_0, t_1) * \bar{\mu}$,
 $\bar{b}_{\lambda_j}(t_0, t_1), j = 1, 2, 3$ – власні вектори, які від-
повідають $\lambda_j(t_0, t_1), j = 1, 2, 3$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, t_1) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} * \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_0 y_0 + t_1 y_1)} * \\ &* e^{-\frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{\mu})'(\bar{v} - \bar{\mu})} dv_0 \dots dv_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\bar{v}'(I - 2iA(t_0, t_1))\bar{v}} * \\ &* e^{\bar{v}'\bar{\mu} - \frac{1}{2}\bar{\mu}'\bar{\mu}} dv_0 \dots dv_n. \end{aligned}$$

Виконуючи перетворення, аналогічні перетво-
ренням в лемі 1, отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, t_1) &= e^{\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n b_{\mu, j}^2(t_0, t_1) \frac{2id_j(t_0, t_1)}{1-2id_j(t_0, t_1)}} * \\ &* \frac{1}{\prod_{j=0}^n \sqrt{1-2id_j(t_0, t_1)}}, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\bar{b}_{\mu, j}(t_0, t_1) = B(t_0, t_1) * \bar{\mu}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{2id_j(t_0, t_1)}{1-2id_j(t_0, t_1)} &= \\ &= \frac{2d_j(t_0, t_1)}{1+4d_j(t_0, t_1)^2} i - \frac{4d_j(t_0, t_1)^2}{1+4d_j(t_0, t_1)^2}, \end{aligned}$$

з (18) маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, t_1) &= e^{-\sum_{j=0}^n 2b_{\mu, j}^2(t_0, t_1) \frac{d_j(t_0, t_1)^2}{1+4d_j(t_0, t_1)^2}} * \\ &* e^{i \sum_{j=0}^n 2b_{\mu, j}^2(t_0, t_1) \frac{d_j(t_0, t_1)^2}{1+4d_j(t_0, t_1)^2}} * \\ &* \frac{1}{\prod_{j=0}^n \sqrt{1-2id_j(t_0, t_1)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Доведемо, що матриця $A(t_0, t_1)$ має тільки
три власних числа, які не дорівнюють нулю.
Позначимо через V_k, V_{l_0}, V_{l_1}, V підпро-
стори простору R^{n+1} , породжені вектор-
стовпчиками матриць T_k, T_{l_0}, T_{l_1}, T відповід-
но, де T_k, T_{l_0}, T_{l_1} визначаються за формулою
(6), а

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k}{n} & 1 \\ \frac{k+1}{n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $V = V_k \cap V_{l_0} = V_k \cap V_{l_1}$. За-
уважимо, що $\dim V_k = \dim V_{l_0} = \dim V_{l_1} =$
 $= 3, \dim V = 2$.

Відомо [3], що оператори P_k, P_{l_0} та P_{l_1}
є операторами ортогонального проектування
на підпростори V_k, V_{l_0} та V_{l_1} . Нехай $V_{\perp, k}, V_{\perp, l_0}$
та $V_{\perp, l_1}$ – ортогональні доповнення підпростору
 V до підпросторів V_k, V_{l_0} та V_{l_1} відповідно,
тоді

$$P_k \bar{x} = \bar{y}_1 + \bar{y}_k, \text{ де } \bar{y}_1 \in V, \bar{y}_k \in V_{\perp, k},$$

$$P_{l_0} \bar{x} = \bar{y}_2^{(0)} + \bar{y}_{l_0}, \text{ де } \bar{y}_2^{(0)} \in V, \bar{y}_{l_0} \in V_{\perp, l_0},$$

$$P_{l_1} \bar{x} = \bar{y}_2^{(1)} + \bar{y}_{l_1}, \text{ де } \bar{y}_2^{(1)} \in V, \bar{y}_{l_1} \in V_{\perp, l_1}.$$

Позначимо через P оператор ортогонально-
го проектування на підпростір V в просторі
 R^{n+1} . Оскільки $V \subset V_k, V \subset V_{l_0}, V \subset V_{l_1}$ ма-
ємо [3] $\bar{y}_1 = PP_k \bar{x} = P\bar{x}, \bar{y}_2^{(0)} = PP_{l_0} \bar{x} = P\bar{x}$,
 $\bar{y}_2^{(1)} = PP_{l_1} \bar{x} = P\bar{x}$, тобто $\bar{y}_1 = \bar{y}_2^{(0)} = \bar{y}_2^{(1)}$.

З цього випливає, що

$$\begin{aligned} A(t_0, t_1) \bar{x} &= (A_0 t_0 + A_1 t_1) \bar{x} = \\ &= ((P_k - P_{l_0})t_0 + (P_k - P_{l_1})t_1) \bar{x} = \\ &= (P_k \bar{x} - P_{l_0} \bar{x})t_0 + (P_k \bar{x} - P_{l_1} \bar{x})t_1 = \\ &= (\bar{y}_2^{(0)} + \bar{y}_{l_0} - \bar{y}_1 - \bar{y}_k)t_0 + (\bar{y}_2^{(1)} + \bar{y}_{l_1} - \bar{y}_1 - \bar{y}_k)t_1 = \\ &= -(t_0 + t_1)\bar{y}_k + t_0\bar{y}_{l_0} + t_1\bar{y}_{l_1}, \end{aligned}$$

тобто

$$A(t_0, t_1) \bar{x} \in V_{\perp, k} \oplus V_{\perp, l_0} \oplus V_{\perp, l_1}.$$

Оскільки $\dim(V_{\perp, k} \oplus V_{\perp, l_0} \oplus V_{\perp, l_1}) = 3$,
 $\text{rang} A(t_0, t_1) = 3$.

Таким чином, серед чисел
 $d_0(t_0, t_1), d_1(t_0, t_1), \dots, d_n(t_0, t_1)$ тільки три
не дорівнюють нулю. З (20) отримаємо (18).
Лему 4 доведено.

З а у в а ж е н н я. Має місце рівність

$$\lambda_3(t_0, t_1) = -(\lambda_1(t_0, t_1) + \lambda_2(t_0, t_1)). \quad (21)$$

Справді, оскільки матриця $A(t_0, t_1)$ симетрична,

$$\text{tr} A(t_0, t_1) = \lambda_1(t_0, t_1) + \lambda_2(t_0, t_1) + \lambda_3(t_0, t_1). \quad (22)$$

З іншого боку,

$$\text{tr} A(t_0, t_1) = \text{tr}(t_1(P_{l_1} - P_k) + t_2(P_{l_2} - P_k)) = 0. \quad (23)$$

Отже, з (22) та (23) маємо (21).

Лема 5. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (y_0, y_1) існує.

Доведення. Нехай $x_0, x_1, \dots, x_n$ — випадкові величини, які мають нормальний розподіл з сумісною щільністю $f(u_0, u_1, \dots, u_n)$ та $g_0(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} u_i u_j$, $g_1(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} u_i u_j$ — дві квадратичні форми від $u_0, u_1, \dots, u_n$.

Розглянемо випадкові величини

$$y_0 = g_0(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j \text{ та } y_1 = g_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x_i x_j \text{ і пока-$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{j \neq 0} a_{0j} x_j + 2a_{00} x_0 & \sum_{j \neq 1} a_{1j} x_j + 2a_{11} x_1 & \dots & \sum_{j \neq n} a_{nj} x_j + 2a_{nn} x_n \\ \sum_{j \neq 0} b_{0j} x_j + 2b_{00} x_0 & \sum_{j \neq 1} b_{1j} x_j + 2b_{11} x_1 & \dots & \sum_{j \neq n} b_{nj} x_j + 2b_{nn} x_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

жемо, що вони мають сумісну щільність розподілу $h(u_0, u_1)$. З цією метою покладемо перетворення

$$y_0 = g_0(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j,$$

$$y_1 = g_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x_i x_j,$$

$$y_2 = g_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_2,$$

$$y_n = g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_n,$$

яке позначимо $G = \{g_i(x_0, x_1, \dots, x_n), i = 0, 1, \dots, n\}$. Це перетворення діє в деякій відкритій області $\tilde{U}$ простору R^{n+1} ; покажемо, що область $\tilde{U}$ можна означити таким чином, що рівняння $y_i = g_i(x_0, x_1, \dots, x_n), i = 0, 1, \dots, n$, будуть однозначно розрешимі відносно $x_0, x_1, \dots, x_n$: $x_i = g_i^{-1}(y_0, y_1, \dots, y_n), i = 0, 1, \dots, n$, де $g_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — має неперервні перші частинні похідні, причому якобіан $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right| \neq 0$ в $\tilde{U}$. В лівій частині останньої

рівності стоїть якобіан оберненого перетворення $x_i = g_i^{-1}(y_0, y_1, \dots, y_n)$ так що $J = \left| \frac{\partial g_i^{-1}}{\partial y_j} \right|$.

Як відомо[8], якобіан $J_1 = \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|$ прямого перетворення $y_i = g_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$ пов'язаний з якобіаном оберненого перетворення за допомогою рівності

$$J \cdot J_1 = \left| \frac{\partial g_i^{-1}}{\partial y_j} \right| \cdot \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| = 1,$$

якщо жоден з якобіанов не дорівнює нулю. Таким чином, згідно результатам математичного аналізу, за область $\tilde{U}$ можна прийняти область з R^n , де якобіан J_1 не дорівнює нулю, тобто, згідно формули J також не дорівнює нулю в усіх точках області $\tilde{U}$. Знайдемо явний вигляд області $\tilde{U}$. Маємо

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_0} & \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \frac{\partial g_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_0} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Згідно відомої теореми Лапласа про обчислення визначників маємо

$$J_1 =$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{j \neq 0} a_{0j} x_j + 2a_{00} x_0 & \sum_{j \neq 1} a_{1j} x_j + 2a_{11} x_1 \\ \sum_{j \neq 0} b_{0j} x_j + 2b_{00} x_0 & \sum_{j \neq 1} b_{1j} x_j + 2b_{11} x_1 \end{vmatrix} -$$

$$= \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j.$$

тому $B = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j = 0\}$ визначає в просторі R^{n+1} гіперповерхню другого порядку H , оскільки $\phi(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j$, є квадратичною формою. Визначимо $\tilde{U}$ як доповнення B в просторі $(x_0, \dots, x_n)$ і позначимо через U образ $\tilde{U}$ в просторі $(y_0, \dots, y_n)$ відносно відображення G . Згідно відомим результатам математичної ста-

тистики багатовимірної випадкової величини $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ буде неперервною випадковою величиною, що має сумісну щільність розподілу [9], яка у точці $(y_0, \dots, y_n) \in U$ дорівнює

$$h(y_0, y_1, \dots, y_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) |J|.$$

Далі, на підставі результатів [9] для характеристичної функції $\phi(t_0, t_1, \dots, t_n)$ випадкової величини $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ має місце формула

$$\phi(t_0, t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_0 y_0 + \dots + t_n y_n)} * h(y_0, \dots, y_n) dy_0 \dots dy_n,$$

оскільки щільність розподілу $h(y_0, \dots, y_n)$ існує та неперервна, за винятком, може бути, деяких точок, які належать скінченній кількості гіперповерхні в R^{n+1} .

Позначимо через $F(y_0, y_1, \dots, y_n)$ сумісну функцію розподілу випадкових величин $y_0, y_1, \dots, y_n$; її щільність розподілу $h(y_0, y_1, \dots, y_n)$ існує в усіх точках простору R^{n+1} , окрім точок гіперповерхні H , яке є образом B в просторі $(y_0, \dots, y_n)$. Маємо

$$F(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \infty, \dots, \infty) =$$

$$= p(y_0 < \bar{y}_0, y_1 < \bar{y}_1, y_2 < \infty, \dots, y_n < \infty) =$$

$$= p(y_0 < \bar{y}_0, y_1 < \bar{y}_1) = \bar{F}(\bar{y}_0, \bar{y}_1),$$

де $\bar{F}(\bar{y}_0, \bar{y}_1)$ – сумісна функція розподілу випадкових величин тоді

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(\bar{y}_0, \bar{y}_1)}{\partial \bar{y}_0 \partial \bar{y}_1} = \frac{\partial^2 F(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \infty, \dots, \infty)}{\partial \bar{y}_0 \partial \bar{y}_1} = h(\bar{y}_0, \bar{y}_1)$$

існує в усіх точках, окрім точок гіперповерхні H , оскільки в цих точках існує мішана частинна похідна у функції $F(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Таким чином, випадкові величини y_0, y_1 мають сумісну щільність розподілу в усіх точках, окрім точок гіперповерхні H .

Лему 5 доведено.

Теорема 2. Має місце рівність

$$p(\bar{U}_k, \bar{U}_{l_1}) = \frac{1}{(2\pi)^2} * \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \frac{e^{-it_1 y} - 1}{it_1} \frac{e^{-it_2 y} - 1}{it_2} * \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (24)$$

Доведення. З існування щільності розподілу $p(u_0, u_1)$ двовимірної випадкової величини (y_0, y_1) випливає, що її функція розподілу $F(u_0, u_1)$ є неперервною в R^2 . Оскільки $p(\bar{U}_k, \bar{U}_{l_1}) = F(0, 0)$, згідно формули обернення для багатовимірних випадкових величин [10] маємо (24).

Теорему 2 доведено.

Список використаних джерел

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 С.
2. Дэвид Г. Порядковые статистики. – Москва: Наука, 1979. – 336 С.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – Москва: Мир, 1980. – 336 С.
4. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений. – Москва: Наука, 1966. – 588 С.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Москва: Наука, 1971. – 432 С.
6. Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 С.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – Москва: Наука, 1965. – 400 С.
8. Фиттенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука, 1966. – т.1 – 608 С.
9. Уилкс С. Математическая статистика. – Москва: Наука, 1987. – 632 С.
10. Дюге С. Теоретическая и прикладная статистика. – Москва: Наука, 1972. – 384 С.
11. Fuller W.A. Grafted polinomials as approximating function. // The Australian journal of agricultural economics. – 1969. – 13. – С.35-46.
12. Яценко В.О., Семенов О.В., Кашипровський О.І. Моделювання спектральних кривих та оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності. // Вісник Київського університету. – 2007. – 2. – С.200-203.
13. Савжика М.Ю. Межі для зсунення оцінки точки переходу в моделі сплайнової регресії. // Вісник Київського університету. – 2004. – 3. – С.300-304.

Надійшла до редколегії 08.08.08.

УДК 510.67

Сахно Н.В.,
Каденко І.М., д. ф.-м. н., проф.

Оцінка впливу людського фактору на надійність результатів неруйнівного контролю обладнання АЕС України

Розглянуто два підходи для числової оцінки впливу людського фактору на результати неруйнівного контролю обладнання АЕС.

В роботі вперше оцінено вплив людського фактору на надійність результатів вихрострумового контролю (ВСК) за методами ASEP та дерева рішень.

Методи дозволили провести кількісну оцінку людського фактору, враховуючи специфіку як самої методики проведення ВСК теплообмінних труб парогенератора, так і можливостей та особливостей кожного експерта окремо.

Ключові слова: неруйнівний контроль, АЕС, надійність результатів, аналіз надійності персоналу, ймовірність помилки персоналу.

E-mail: n.ved@univ.kiev.ua

Статтю представив: д.т.н., доц. Заславський В.А.

1. ВСТУП

Проблема безпеки та зменшення ризиків при експлуатації ядерних енергетичних установок, що представлені в Україні чотирма атомними електростанціями (АЕС) з 15 працюючими ядерними енергоблоками, є однією з найбільш актуальних і стає все більш гострішою по мірі того, як АЕС відпрацьовують свій плановий проектний ресурс [1].

До складу основного обладнання АЕС, що є критичним з точки зору безпеки, відноситься парогенератор (ПГ), що, окрім інших підсистем, містить у собі 5,5 тис. (для реактору ВВЕР-440 з 6 ПГ на один блок), або 11 тис. (для реактору ВВЕР-1000 з 4 ПГ на один блок) теплообмінних труб (ТОТ). Цілісність ТОТ ПГ має дуже велике значення для безпечної та ефективної роботи енергоблоку, тому що стінки ТОТ із заданою проектною товщиною є єдиною межею між першим та другим контуром АЕС. Для контролю цілісності ТОТ ПГ АЕС звично

N.V.Sakhno,
I.M.Kadenko, Prof. Doctor

The human factor influence assessment on reliability of Ukrainian NPPs equipment nondestructive testing results

The paper deals with two theoretical approaches for quantitative human factor estimation of NPP equipment nondestructive testing results.

Estimation of human factor influence on Eddy Current (ET) testing results according to ASEP and Decision Tree methodologies are applied at first.

The methods considered do allow to making quantitative assessment of human factor taking into account both ET procedure features of steam generator heat exchanging tubes and specific aspects of each expert separately.

Key Words: Nondestructive testing, NPP, results reliability, Human Reliability Analysis, Human Error Probability.

застосовують методи неруйнівного контролю (НК) [2]. Одним з цих методів є вихрострумовий метод контролю (ВСК) - найбільш ефективний, надійний та безпечний для персоналу та металу обладнання АЕС.

В той же час, не зважаючи на те, що застосування саме ВСК для контролю стану ТОТ ПГ є найбільш поширеним у світі, ВСК, як і кожен метод НК, має як свої переваги, так і недоліки. Так, час від часу, отримані результати ВСК можуть бути неоднозначними та, навіть, недостовірними. Однак враховуючи, що рішення щодо виведення дефектної (що втратила цілісність) труби з експлуатації робиться саме на підставі результатів ВСК, надійність цих результатів має дуже велике значення.

Як відомо, загальний вираз для оцінки надійності результатів, отриманих при проведенні НК, має вигляд функціоналу [3-5]:

$$R = F(f(IC), g(AP), h(HF))$$

де R - надійність системи НК, а у випадку застосування методу ВСК - загальна надійність системи ВСК; $f(IC)$ -

характеристики ідеальної системи НК, тобто системи ВСК, що задаються фізичними основами методу та особливостями його технічної реалізації для ідеальних умов контролю; $g(AP)$ - вплив основних параметрів та специфічних умов місця проведення НК, щодо методу ВСК - це доступність зон контролю, вологість, якість обробки внутрішньої поверхні ТОТ, чутливість ВСК перетворювачів, тощо; $h(HF)$ - вплив людського фактору, тобто, особливості збору та обробки даних персоналом АЕС. У деяких випадках $h(HF)$ не може бути відокремленим від $g(AP)$ і має частково трактуватися як вплив інших основних параметрів.

Предметом дослідження даної роботи є аналіз впливу людського фактору на надійність результатів ВСК ТОТ ПГ та його числова оцінка. За результатами огляду літератури, присвяченої оцінці надійності результатів НК, можна відмітити, що раніше було зроблено лише одиничні спроби кількісно оцінити надійність людського фактору взагалі [6], та персоналу при виконанні НК [4].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нами розглянуто два варіанти числової оцінки впливу людського фактору при виконанні ВСК ТОТ ПГ, що засновані на застосуванні двох методологій аналізу надійності персоналу [7, 8] в ядерній енергетиці.

Автори зробили спробу теоретично оцінити вплив людського фактору на надійність ВСК, використавши методологію аналізу надійності персоналу (АНП), метою якої є кількісна оцінка ймовірності помилок персоналу. Звично ця методологія використовується для оцінки надійності оперативного персоналу АЕС. Типовим є включення аналізу надійності персоналу до моделі ймовірнісного аналізу безпеки ядерного енергоблоку. Основною вимогою при виконанні оцінки АНП є повторюваність результатів, що забезпечується в т.ч. розробкою відповідної документації з усіма встановленими припущеннями.

АНП, або аналіз людського фактору, є характеристикою взаємодії між персоналом (у нашому випадку – технічним персоналом, що виконує ВСК ТОТ ПГ під час ППР) та системами енергоблоку з подальшим аналізом

впливу таких взаємодій на надійність систем у цілому.

Дії персоналу включають до себе діяльність щодо безпосереднього виконання операцій, прийняття рішень чи самого процесу мислення, що виконується як індивідуально, так і колективно персоналом АЕС, та впливає на експлуатаційний стан АЕС. Результат виконання дій персоналом може бути як успішним, так і неуспішним (помилка персоналу), а помилка персоналу є тією базовою подією, що зумовлює відмови систем в цілому, її окремих елементів чи обладнання.

Методологія АНП [9] має наступні загальні припущення та обмеження у випадку застосування її до НК:

1) розглядаються тільки ті помилки персоналу, що виникають при виконанні визначених дій;

2) покладається, що персонал, який виконує НК, діє в інтересах АЕС;

3) задачі виконуються компетентним, кваліфікованим персоналом АЕС, що має досвід роботи на посаді не менше 6 місяців.

У наших дослідженнях об'єктом контролю був технічний персонал, що виконує ВСК ТОТ ПГ. Згідно [7, 8], для цього типу персоналу більш характерними є помилки, пов'язані з виконанням дій, але і процес прийняття рішення також має бути врахованим.

3. ТЕОРЕТИЧНА ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ПЕРСОНАЛУ ПРИ ВИКОНАННІ ВСК ТОТ ПГ

3.1 Опис методу

АНП включає виконання декількох задач [10]. Приймаючи до уваги нашу область досліджень, це такі задачі [11] (рис. 1):

1) ознайомлення з АЕС, збір даних та визначення набору дій персоналу;

2) відбір найбільш важливих (суттєвих) подій, помилок, дій;

3) виконання детального аналізу дій, відібраних для цього аналізу. На даному кроці дія (помилка) визначається більш детально; вибирається методологія для кількісної оцінки; виконується якісний аналіз (тобто, збираються дані для виконання кількісної оцінки);

4) проведення кількісного аналізу (розрахунок ймовірності помилки);



Рис. 1. Схема системного аналізу помилок персоналу, який проводить ВСК ТОТ ПГ

5) складання документації щодо процедури виконання АНП та її результатів.

3.2 Застосування методу

Після ознайомлення з діями, що виконуються фахівцями з НК при проведенні ВСК ТОТ ПГ [12], було складено їх перелік. З переліку було відібрано лише ті дії, що виконуються виключно персоналом, без залучення системи ВСК. На наступному кроці було відібрано найбільш важливі та суттєві події, помилки та дії. Після аналізу було прийнято рішення, що всі дії підлягають детальному аналізу. Перелік дій наведено нижче у табл. 1.

Далі було обрано методологію для виконання кількісної оцінки.

На даний момент не існує ані моделей поведінки персоналу, що можуть представити поведінку людини детально та послідовно, ані інших підходів, що можуть надати однозначне визначення параметрів надійності. Таким чином, методи кількісної оцінки АНП дозволяють врахувати тільки обмежену

кількість аспектів поведінки персоналу, на підставі чого було зроблено припущення, що саме ці аспекти мають найбільш вагомий вплив на оцінку надійності персоналу.

В даній роботі для виконання кількісної оцінки АНП було обрано дві методики:

- 1) методологія ASEP [8];
- 2) метод „дерева рішень” [13].

З вказаних двох методологій саме ASEP - *Accident Sequence Evaluation Program Human Reliability Analysis Procedure* (Процедура аналізу надійності персоналу програми оцінки послідовностей аварій) – є більш консервативною. Використання цієї методології вимагає менше часу для виконання робіт та включає процедури відбору, що дозволяє сфокусувати більше уваги на детальному аналізі найбільш важливих помилок персоналу.

Метод „дерева рішень” є більш детальним та дозволяє використовувати дані, специфічні для конкретного випадку, що базуються на судженні експертів.

Таблиця 1. Перелік дій, що виконує персонал, який збирає та інтерпретує дані ВСК

Перелік дій, що виконують оператори, які збирають дані ВСК	Перелік дій, що виконують оператори, які інтерпретують дані ВСК
Центрування ВС перетворювача	Копіювання даних на окремий сервер
Встановлення координати ТОТ (позиціювання маніпулятора)	Контроль якості фалів, автоматична обробка файлу
Балансування ВС перетворювача	Обробка файлу вручну: перегляд файлу, вимірювання параметрів індикації, перегляд даних на інших частотах
Пробний запуск ВС перетворювача в ТОТ	Підтвердження даних: запис параметрів індикації (фаза, амплітуда, сигнал/шум, відстань до індикації); додавання даних в БД до даних ТОТ, що аналізуються
Контроль якості даних ВСК	Контроль якості, прийняття рішення щодо ТОТ
Формування лотів (файлів по 50 ТОТ)	Перехід до файлу з наступною ТОТ
Записування файлу на сервер	

3.3 Методологія ASEP

Згідно [8] помилка персоналу складається з помилки виконання дії (тобто, дія виконується, але невірно) та помилки невиконання дії (дія не виконується взагалі). Отже, згідно [8], базисна ймовірність помилки персоналу (БЙПП) для i критичних дій має вигляд:

$$\sum_i \text{БЙПП} = \sum_i \text{БЙПП}_{\text{вик}} + \sum_i \text{БЙПП}_{\text{невик}}$$

Базуючись на [8], приймаємо, що $\text{БЙПП}_{\text{невик}}$ для кожної помилки невиконання дорівнює 0,02, а $\text{БЙПП}_{\text{вик}}$ для кожної помилки виконання дорівнює 0,01. Тобто, для кожної критичної дії повна БЙПП дорівнює 0,03. Це значення є консервативним. Покладається, що помилка невиконання та помилка виконання розглядаються як єдина величина з $\text{БЙПП} = 0,03$. Згідно методології ASEP прикінцеве значення ЙПП можна отримати при помноженні БЙПП на фактори відновлення за наявності оптимальних умов.

Після проведення аналізу виконання контролю фахівцями-аналітиками, які інтерпретують результати ВСК, було виявлено чотири критичні дії. При проведенні наших досліджень згідно процедури виконання ВСК ТОТ ПГ на АЕС України було застосовано дві оптимальні умови до кожної з критичних дій.

Ці умови та пов'язані з ними фактори відновлення є наступними:

- безпосереднє виконання аналізу результатів ВСК іншим оператором з метою перевірки коректності аналізу, виконаного першим оператором. ЙПП для цього фактору відновлення складає 0,1;

- виконання контролю методом, що базується на іншому фізичному принципі, після проведення ВСК. ЙПП для цього фактору відновлення дорівнює 0,01 [8].

Ці фактори відновлення зменшують ЙПП всього процесу виконання аналізу результатів ВСК. Отже, кількісна оцінка надійності персоналу має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^4 \text{ЙПП}_{\text{аналітик}} = 0,03 \cdot 0,1 \cdot 0,01 \cdot 4 = 0,00012$$

Таким чином, найбільш консервативна оцінка ЙПП при інтерпретації результатів ВСК дорівнює $1,2 \times 10^{-4}$.

Враховуючи, що ВСК ТОТ ПГ виконують два типи персоналу, а саме: персонал, який збирає ВСК дані, та персонал, який інтерпретує результати ВСК, методологію

ASEP також було застосовано для підрахунку ЙПП персоналу, що збирає дані ВСК. Було проаналізовано, що оператори НК при зборі даних також виконують чотири критичні дії. При цьому до кожної з цих критичних дій може бути застосованим один фактор відновлення з $\text{ЙПП} = 0,01$. Кількісна оцінка аналізу надійності персоналу, який виконує збір даних ВСК, має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^4 \text{ЙПП}_{\text{збір даних}} = 0,03 \cdot 0,01 \cdot 4 = 0,0012$$

Тоді загальна ЙПП персоналу, який виконує ВСК теплообмінних труб ПГ, дорівнює:

$$\text{ЙПП}_{\text{ВСК}} = 0,00012 + 0,0012 = 0,00132$$

3.4 Методологія „дерева рішень”

Методологія „дерева рішень” при проведенні аналізу помилок персоналу вимагає виконання досліджень усіх факторів (в тому числі обмеження за часом, рівень стресу, рівень знань, досвідченість тощо), що мають вплив на дії оператора. При цьому розробляється графічна форма (у вигляді дерева), на підставі аналізу результатів заповнення якої можна зробити обґрунтований висновок стосовно найбільш значущого фактору ризику та, як наслідок, отримати кількісне значення ймовірності помилки персоналу (тобто, отримати „рішення”).

Для вирішенні задач з АНП було залучено досвідчених експертів - фахівців АЕС [14]. По-перше, ВСК фахівців було проінтерв'ювано, і, базуючись на отриманих результатах, складено перелік факторів, що впливають на поведінку (ФВП). Цей перелік включає 14 факторів для операторів, які інтерпретують результати ВСК, та 9 факторів для операторів, які збирають дані ВСК. Спираючись на результати цього інтерв'ю, було складено два різних переліки питань для цих двох типів персоналу, що виконують ВСК. Ці переліки питань включають усі ФВП.

На другому кроці, базуючись на експертному судженні найбільш досвідченого оператора, було розроблено попереднє дерево рішень, а також логічну структуру з двома-трьома відгалуженнями для кожного ФВП з визначеними кількісними оцінками. При виконанні даної роботи було прийнято рішення розробляти дерево рішень із порядком зменшення значущості факторів.

На наступному кроці приймалися до уваги результати персональних інтерв'ю, проведених згідно переліку питань з кожним із учасників цих двох груп. Усього було проведено інтерв'ю з вісьмома операторами-аналітиками та дев'ятьма операторами, які збирають дані ВСК.

Далі було розроблено прикінцеве дерево рішень. Спочатку всі заголовки (ФВП) дерева рішень було ранжовано згідно суджень експертів. Остаточного було розроблено два різних дерева рішень для операторів-аналітиків та одне дерево рішень для фахівців, які збирають дані ВСК.

У першому випадку при побудові дерева рішень для операторів-аналітиків порядок ФВП, визначений одним основним експертом, було прийнято як порядок заголовків у дереві рішень. Заключні значення ймовірностей для кожної гілки ФВП було підраховано як середнє значення відповідних величин, визначених основним експертом, та середніми значеннями всіх інших експертів групи.

У другому випадку при побудові дерева рішень для операторів-аналітиків було відібрано трьох найбільш досвідчених фахівців з усієї групи опитаних операторів. У

даному випадку порядок заголовків дерева рішень було визначено як середнє значення між порядками, визначеними основними експертами. Ймовірності для кожної гілки ФВП було підраховано як середнє між відповідними середніми значеннями основних експертів та середніми значеннями всіх інших експертів, що залишилися в групі.

При побудові дерева рішень для операторів, які виконують збір даних ВСК, порядок заголовків дерев рішень було визначено як середнє значення порядків ФВП, визначених усіма операторами групи. Ймовірності ФВП було підраховано також як середнє від значень усієї групи експертів.

Якірне значення ймовірності (ЯЗЙ) дерева рішень було вибрано рівним 0,03 – це консервативна величина, прийнята всіма експертами, які виконують АНП в ядерній галузі.

Як результат, було розроблено три дерева рішень з необхідною кількістю гілок. З причини великого розміру дерев рішень, у роботі представлено лише фрагмент дерева рішень, розробленого згідно першого способу, зазначеного вище (рис. 2).

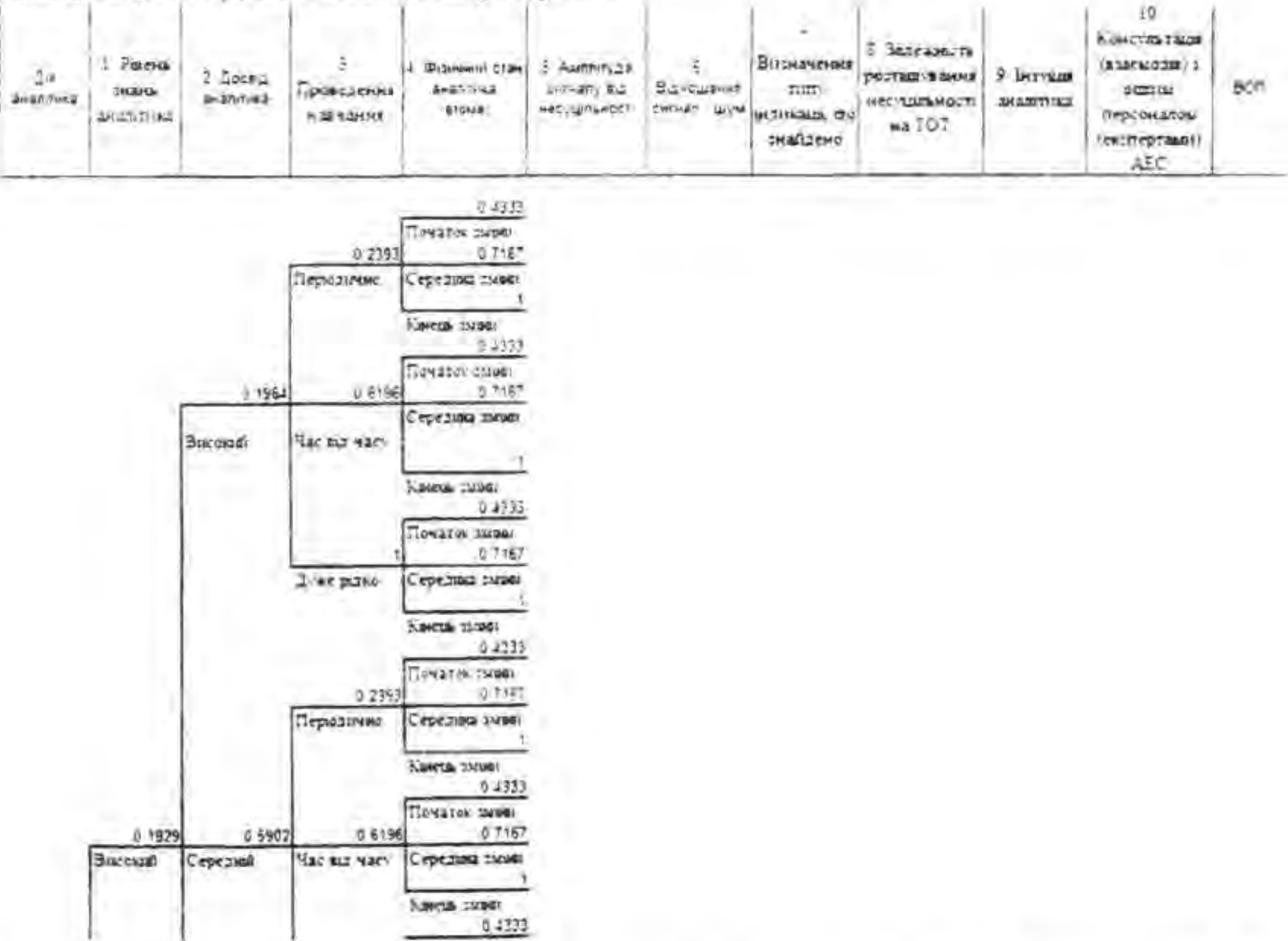


Рис. 2 – Фрагмент дерева рішень для операторів-аналітиків при АНП (дерево рішень було розроблено, базуючись на судженні основного експерта)

В нашому випадку було підготовлено ймовірності помилки людини, приймаючи до спрощену модель дерева рішень, в якому уваги всі фактори, що мають вплив на приймалося, що всі ФВП мають однакову вагу. Таблиця 2 розроблена для більш поглибленого аналізу надійності для дерева рішень, наведеного на рис. 2. ЙПП персоналу зазвичай визначають вагові розраховано як добуток значення якірної коефіцієнти для кожного заголовку згідно ймовірності та кількісних оцінок для кожного суджень експертів. ФВП. Для прикладу розглянуто п'ять різних

На останньому етапі застосування випадків для розрахунку ймовірностей для методології дерева рішень було підготовлено п'яти операторів. результуючі таблиці для підрахунку

Таблиця 2. Результати розрахунку ЙПП операторів-аналітиків (дерево рішень було розроблено, спираючись на судження одного основного експерта)

Дія аналітика	Код	1. Рівень знань аналітика	2. Досвід аналітика	3. Проведення навчання	4. Фізичний стан аналітика (кг/м)	5. Амплітуда сигналу від носу-шальності	6. Відношення сигнал / шум	7. Визначення типу індивідуальності, що знайдено	8. Залежність розташування носу-шальності на ТОТ	9. Інтуїтивна аналітика	10. Консультація (взаємодія) з іншим персоналом (експертами) АЕС	ЙПП
Помилка у дії аналітика № 1	HFE_1 AN1	0,1929	0,1964	0,2393	1	0,625	0,6464	0,1971	0,2214	0,1836	1	8,8035E-07
Помилка у дії аналітика № 2	HFE_1 AN2	0,5964	1	0,6196	0,4333	0,25	0,2929	0,5986	1	0,1836	0,2007	7,7585E-06
Помилка у дії аналітика № 3	HFE_1 AN3	0,1929	0,1964	0,2393	0,7167	0,625	0,6464	0,1971	0,2214	0,5918	0,6004	1,2211E-06
Помилка у дії аналітика № 4	HFE_1 AN4	0,1929	0,5902	1	0,4333	0,25	0,6464	1	0,6107	1	0,2007	2,9313E-05
Помилка у дії аналітика № 5	HFE_1 AN5	0,5964	0,5902	0,6196	0,7167	0,625	1	0,5986	0,6107	0,1836	0,2007	3,9479E-05

Проаналізувавши результати кількісної оцінки ймовірності помилки персоналу при застосуванні методу дерева рішень, що наведено в останньому стовпчику таблиць, нами зроблено пропозицію змінити ЯЗЙ, тому що величина 0,03 вибирається при проведенні АНП експлуатаційного персоналу, в той час як об'єктом дослідження даної роботи є технічний персонал, що виконує ВСК ТОТ ПГ. Тому пропонується для випадку, що розглядається, використовувати величину ЯЗЙ, що дорівнює 0,2. Це значення

відповідає максимальній ймовірності зробити помилку фахівцями НК при складанні іспитів на вищий рівень кваліфікації, і отримати цей рівень згідно американських стандартів ASNT [15] та європейських стандартів EN473 [16]. Треба зазначити, що останній стандарт є чинним і на Україні.

В результаті при застосуванні значення 0,2 як ЯЗЙ, було підраховано ЙПП для дерева рішень, представленого на рис. 2, а результати розрахунків наведено у табл. 3.

Таблиця 3. Результати розрахунку ЙПП операторів-аналітиків (для дерева рішень, що базується на судженні одного основного експерта), якірне значення ймовірності дорівнює 0,2

Дія аналітика	Код	1. Рівень знань аналітика	2. Досвід аналітика	3. Проведення навчання	4. Фізичний стан аналітика (кг/м)	5. Амплітуда сигналу від носу-шальності	6. Відношення сигнал / шум	7. Визначення типу індивідуальності, що знайдено	8. Залежність розташування носу-шальності на ТОТ	9. Інтуїтивна аналітика	10. Консультація (взаємодія) з іншим персоналом (експертами) АЕС	ЙПП
Помилка у дії аналітика № 1	HFE_1 AN1	0,1929	0,1964	0,2393	1	0,625	0,6464	0,1971	0,2214	0,1836	1	5,869E-06
Помилка у дії аналітика № 2	HFE_1 AN2	0,5964	1	0,6196	0,4333	0,25	0,2929	0,5986	1	0,1836	0,2007	5,1723E-05
Помилка у дії аналітика № 3	HFE_1 AN3	0,1929	0,1964	0,2393	0,7167	0,625	0,6464	0,1971	0,2214	0,5918	0,6004	8,1404E-06
Помилка у дії аналітика № 4	HFE_1 AN4	0,1929	0,5902	1	0,4333	0,25	0,6464	1	0,6107	1	0,2007	1,9542E-04
Помилка у дії аналітика № 5	HFE_1 AN5	0,5964	0,5902	0,6196	0,7167	0,625	1	0,5986	0,6107	0,1836	0,2007	2,632E-04

Нами застосовано два підходи для оцінок ЙПП. У випадку застосування методології ASEP була отримана консервативна оцінка ЙПП. Ця методологія не включає специфіку проведення ВСК. У випадку застосування методології „дерева рішень” було отримано суттєво менше значення. Цей підхід включає не тільки особливості та складові фактори методу ВСК, але й всієї системи ВСК (згідно визначення, що система ВСК складається з обладнання та персоналу, який виконує контроль на цьому обладнанні). При

застосуванні розробленого дерева рішень можна виконати розрахунок ЙПП для кожного оператора окремо, приймаючи до уваги його особисті можливості.

Після аналізу значень ЙПП автори пропонують вибирати значення базисного ЙПП для методології ASEP та ЯЗЙ для методології дерева рішень вищим за 0,03, а саме: вибирати це значення рівним 0,2, як таке, що відповідає максимальній ймовірності зробити помилку фахівцями НК при складанні іспитів на вищий, третій, рівень кваліфікації з НК, та отримати цей рівень згідно американських та європейських стандартів.

4. ЛІТЕРАТУРА

1. Енергетична стратегія України на період до 2030 р.–НАЕК«Енергоатом».–2007 – 132 с.
2. Типовая программа периодического контроля за состоянием основного металла, сварных соединений и наплавов оборудования и трубопроводов атомных электростанций с реакторами ВВЭР-1000. (АИЭУ-9-04). ПМ-Т.0.03.061-04. – Минтопэнерго Украины. ГП „НАЭК „Енергоатом”. – 2004 г. – 135 с.
3. T.Taylor, S.Doctor. What is NDE Reliability Anyway? A Proposed Definition and Review of Workshop Relationship. // Proceedings of 2nd American-European Workshop on NDE Reliability. - Boulder, USA.-1999.-9 p.-CD.
4. C.Muller, U.Ewert, M. Scharmach, J.Volker, L.Schaefer, P.-T. Wilrich. Concepts in Reliability Measurements// Proceedings of 3rd European-American Workshop on Reliability of NDE and Demining. - Berlin - September 13, 2002. – CD.
5. H. Stephens. Long Term Experience With Evaluation and Improvement of the Human factor in NDE Reliability//Proceedings of 3rd European-American Workshop on Reliability of NDE and Demining.–Berlin.–September 13,2002. –CD.
6. С.Адамчук. Адиптивне виявлення особливостей середовища та знаходження оптимальної поведінки інтелектуального агента в цьому середовищі//Вісник Київського університету. Сер.:фіз.-мат.н.-№1.–2004.–С.153-161.
7. A.D. Swain and H.E. Guttman. Handbook of Human Reliability Analysis with Emphasis on Nuclear Power Plant Application, Final Report, NUREG/CR-1278. - 1983. – 554 p.
8. A.D.Swain. Accident Sequence Evaluation Program: Human Reliability Analysis Procedure, NUREG/CR-4772. – SNL, USA. - 1987. - 170 p.
9. PRA Procedures Guide: A Guide to the Performance of Probabilistic Risk Assessments for Nuclear Power Plants. NUREG/CR-2300. – 2 vols. - 1983. – 600 p.
10. В.В.Бегун, О.В.Горбунов, И.Н.Каденко, Е.Н.Письменный, А.Ю.Зенюк, Л.Л.Литвинский. Вероятностный анализ безопасности атомных станций: Учебн. пос.–К.,2000.–568с.
11. Human Reliability Analysis in Probabilistic Safety Assessment for Nuclear Power Plants: A safety practice // IAEA Safety Series; ISSN 0074-1892.–No.50-P-10.-Vienna.–1995.–99p.
12. I.Kadenko, N.Sakhno, I.Sergeev. Human Factor Estimation for ET results Reliability of SG Tubes of NPPs with VVER// Proceedings of 6th International Conference on NDE in Relation to Structural Integrity for Nuclear and Pressurised Components – Budapest, Hungary.–8–10October,2007.–JRC Scientific and Technical Reports.–2008.–P.843 –849.
13. Hall R.E., Fragola J. and Wreathall J. Post Event Human Decision Errors: Operator Action Tree/ Time Reliability Correlations. NUREG/CR-3010. - 1982. – 41 p.
14. Сахно Н.В., Каденко І.М. Оцінка впливу людського фактору на прийняття рішень при проведенні неруйнівного контролю обладнання АЕС//Books of abstracts of International Conference “Problems of Decision making under uncertainties”– Kyiv-Rivne, Ukraine.-12–17 May,2008.-P. 192– 193.
15. ANSI/ASNT CP-189-2006. ASNT Standard for Qualification and Certification of Nondestructive Testing Personnel and ANSI/ASNT CP-105-2006. ASNT Standard Topical Outlines for Qualification of Nondestructive Testing Personnel. - American Society for Nondestructive Testing. - ISBN:9781571171429.–2007–177p.
16. Европейский стандарт EN 473. Неразрушающий контроль. Квалификация и сертификация персонала в области неразрушающего контроля.–CEN, Европейский комитет по стандартизации. - 2000. – 34 с.

Надійшла до друку 01.09.2008 р.

УДК 681.51, 651.012 7, 004 658

Терещенко В.М., к. ф. - м. н., доц.,
Волошин С.Г., аспірант

Розподіл прав доступу в облікових системах

Робота присвячена розгляду та пошуку розв'язку проблеми розподілу прав в облікових системах.

Ключові слова: облікові системи, розподіл прав, рольова модель, генерація SQL.

*E-mail: v_ter@ukr.net, volser@apex.com.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми. Облікові системи, останнім часом, набувають широкої популярності, охоплюючи різноманітні сфери застосувань. Кількість користувачів та інформації зростає і одним із ключових питань таких систем постає питання розподілу прав доступу. Більшість систем дозволяють регулювати права на рівні типів об'єктів системи, або безпосередньо вказувати права для пари користувач та запис, що створює певні незручності розподілу. Тому необхідно розробити конкретний механізм для надання прав на множини об'єктів, який би задовольняв певним умовам. Такого роду механізми реалізуються безпосереднім втручанням в код програми та вимагають досить великого рівня класифікації користувача.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Ряд робіт деяких розробників облікових систем [3, 4] саме і присвячено розглядуваній тематиці. Найбільш поширеним підходом що до розв'язання зазначеної проблеми є підхід на основі використання ролей. Але такий підхід є не дуже гнучким. В даній роботі пропонується підхід, який використовує досить простий та гнучкий механізм, який реалізуються за допомогою динамічної генерації специфічних SQL-запитів в залежності від заданих параметрів. Така реалізація дозволяє перекласти частину рутинною роботи на СУБД в тому числі і питання складності алгоритмів.

Метою даної статті є визначення основних вимог щодо системи розподілу прав в облікових системах та побудова моделі, що відповідає цим вимогам.

V.M. Tereschenko k.pf.-m.n., S. G. Voloshin,
graduate student

Distributing of rights for access in the registration systems

This article is devoted to problems of implementation access control in accounting systems.

Key Words: Accounting systems, access control, role-based model, SQL Generation.

1. Постановка задачі та аналіз існуючих підходів її розв'язання

Постановка задачі. Дані множини: об'єктів O , користувачів U та прав R . Необхідно розробити модель опису функції розподілу прав F та алгоритм її обчислення, яка трійці $O, u \in U, r \in R$ ставить у відповідність $O \subset O$:

$$O = F(O, u, r)$$

Права доступу (до інформації) – сукупність правил, що регламентують порядок і умови доступу суб'єкта до інформації та її носіїв, що встановлені правовими документами чи власниками інформації [1]. Права доступу визначають набір прав (наприклад читання, запис, виконання), що дозволені для виконання суб'єктам (наприклад, користувачам системи) над об'єктами даних. Необхідна деяка система для надання суб'єктам різноманітних прав доступу до об'єктів. На даний момент використовуються 2 принципи щодо контролю доступу: дискреційний та мандатний [2].

Перейдемо до розгляду об'єктів облікових систем. Об'єкти в облікових системах поділяються на 2 групи: довідники (наприклад контрагенти, склади, товари тощо.) та документи.

В свою чергу довідники та документи поділяються за типами. Типами є контрагенти, склади, рахунки-фактури, договори і т.д. А самими об'єктами є безпосередньо конкретний запис: *ООО «Контрагент 1», Склад №1, Договір №5 від 01.01.00* тощо.

Як правило, список документів постійно і досить швидко поповнюється, в той час як довідники є різні. Такі довідники як *контрагенти* є досить об'ємними і постійно розширюються, а такі довідники як *склади товарів*, у більшості випадків, не великі і дуже рідко змінюється. Ці обставини значною мірою впливають на систему розподілу прав. Тобто для не великих довідників, які рідко змінюються можна було б використати дискреційну модель і для кожного запису перерахувати список користувачів, що мають доступ. А для документів, які можуть щодня поповнюватися сотнями чи тисячами записів така система не підходить. Для розв'язку задачі має бути механізм для опису множин об'єктів. Наприклад суб'єкт має право не на *Об'єкт 1*, *Об'єкт 2*, *Об'єкт 3*... А суб'єкт має права на всі об'єкти що мають певний колір, чи входять в групу...

Суб'єктами ж облікових систем є користувачі та групи користувачів.

Пропонуються такі основні вимоги до систем розподілу прав в облікових системах:

- гнучкість та універсальність;
- швидкодія;
- простота налаштування кінцевим користувачем.

Гнучкість та універсальність – система повинна дозволяти однаково ефективно описати права як для невеликих, рідко змінюваних об'єктів, так і для динамічних.

Швидкодія – так як в облікових системах працюють зі списками об'єктів, іноді досить великими, то процес перевірки прав і вибору доступних об'єктів повинен виконуватися якомога швидше.

Простота налаштування кінцевим користувачем – налаштовувати права повинні мати змогу користувачі без спеціальних навиків в програмуванні. Під налаштуванням розуміється надавати чи забороняти доступ до інформації.

Нажаль жодна з розглянутих моделей не задовольняє цим важливим вимогам.

2. Побудова інформаційної моделі розподілу прав доступу та алгоритм її реалізації

Так як основою облікової системи є база даних, а, як правило реляційна база даних, то природно було використати SQL для цілей розподілу прав. Це допомогло б ефективно задовольнити 1 та 2 вимоги. Зрозуміло що вказувати SQL запит для кожного типу об'єктів, користувача та права є дуже рутинною задачею і зрозуміло не задовольняє останню вимогу – простоту налаштування кінцевим користувачем.

Для того, щоб задовольнити 3 вимогу розділимо налаштування на 2 складові: опис прав та обмежень і саме надання цих прав користувачам. З першою складовою мають справу розробники спеціалізованої конфігурації, а другою безпосередні адміністратори системи та в певній мірі користувачі.

Основною ідеєю підходу є динамічна генерація SQL запитів – опис правил генерації яких здійснюється розробниками спеціалізованої конфігурації, а вхідні параметри для процедури генерації вказують адміністратори системи. Розглянемо більш детально даний підхід. Для кожного типу об'єктів є свій набір прав. Серед множини прав (перегляд, редагування, вилучення, друк і т.д.) можна виділити:

1. Права для яких потрібно для кожного користувача вибрати доступну для нього множину об'єктів (Наприклад, перегляд списку записів).
2. Права для яких потрібно для кожного користувача і для кожного об'єкту вказати булеве значення (вилучення, редагування запису): має право на виконання операції чи ні.

Але другий тип прав можна легко звести до першого шляхом використання процедури належності цього об'єкту до дозволеної для користувача множини об'єктів.

Нехай A_i - множина об'єктів типу i . $\hat{A}_{ijk}$ - оператор доступних об'єктів типу i права j для суб'єкта k . $A_{ijk} = \hat{A}_{ijk}(A_i)$ - множина об'єктів типу i доступних суб'єкту (користувачу чи групі) k для права j . Для визначення права типу 1 і

використовується дана множина. Для визначення права типу 2 перевіряємо умову $a \in A_{ijk}$, де $a \in A_i$. Якщо ця умова виконується, то суб'єкт k має право виконати операцію j на цим об'єктом.

В облікових системах для опису множини A_i використовують мову запитів SQL. Отже для того що оператор λ_{ijk} виконував умову швидкодії та гнучкості, необхідно щоб він трансліювався в частину умови WHERE в SQL запиті. Наприклад:

SELECT <FIELDS> FROM <TABLES>

[<JOINS>]

WHERE

<CONDITIONS> AND <RIGHT_CONDITIONS>

....

Де <RIGHT_CONDITIONS> частина умови, що відповідає оператору λ_{ijk} .

Даний SQL запит повертає бажану множину.

Щоб спростити процедуру опису <RIGHT_CONDITIONS>, можна використати графічний редактор в вигляді дерева для опису логічного виразу. Такий редактор може мати такий вигляд, рис.1:

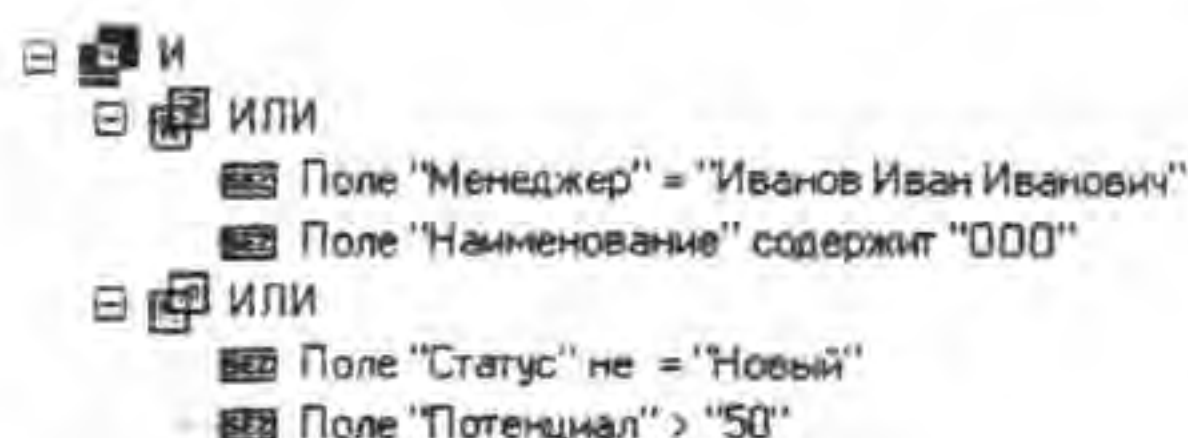


Рис.1

Звісно, що таким чином не опишеш всі можливі логічні вирази, але за допомогою такого редактору можна охопити значну частину подібних обмежень.

Для перевірки права типу 2, можна використати такий запит:

SELECT COUNT(*) FROM <TABLES>
[<JOINS>]

WHERE

<CONDITIONS> AND <RIGHT_CONDITIONS>
AND ID = <КОД>

....

Та перевіряти чи дорівнює результат нулю чи ні.

Або

SELECT EXISTS(*) FROM <TABLES>
[<JOINS>]

WHERE

<CONDITIONS> AND <RIGHT_CONDITIONS>
AND ID = <КОД>

3. Механізм опису обмежень

<RIGHT_CONDITIONS>.

Для трійки (T_i, R_j, U_k) : тип об'єктів, право та користувач вказується булеве значення. По замовчуванню при наданні права, то користувачу доступна вся множина, тобто $A_{ijk} = A_i$. Далі для трійки можна вказати перелік обмежень (Наприклад бачити лише ті записи, що створив тощо). В цьому випадку $A_{ijk} = \lambda_{ijk}(A_i) = A_i \cap \lambda_{ijk}^1(A_i) \cap \dots \cap \lambda_{ijk}^n(A_i)$, де $\lambda_{ijk}^n(A_i)$ - вказані обмеження для трійки. В SQL це трансліюється так:

<RIGHT_CONDITIONS>:=

(<RIGHT_CONDITION1> AND

<RIGHT_CONDITION2> AND ... AND

<RIGHT_CONDITIONn>)

Безпосередньо саме обмеження $\lambda_{ijk}^n(A_i)$ описується розробником конфігурації і являє собою частиною умови WHERE SQL запиту. Користувач (адміністратор системи) же зі своєї сторони для трійки (T_i, R_j, U_k) лише вказує має право чи ні, та відмічає обмеження що накладаються.

На рівні користувацького інтерфейсу це може виглядати так, рис.2:

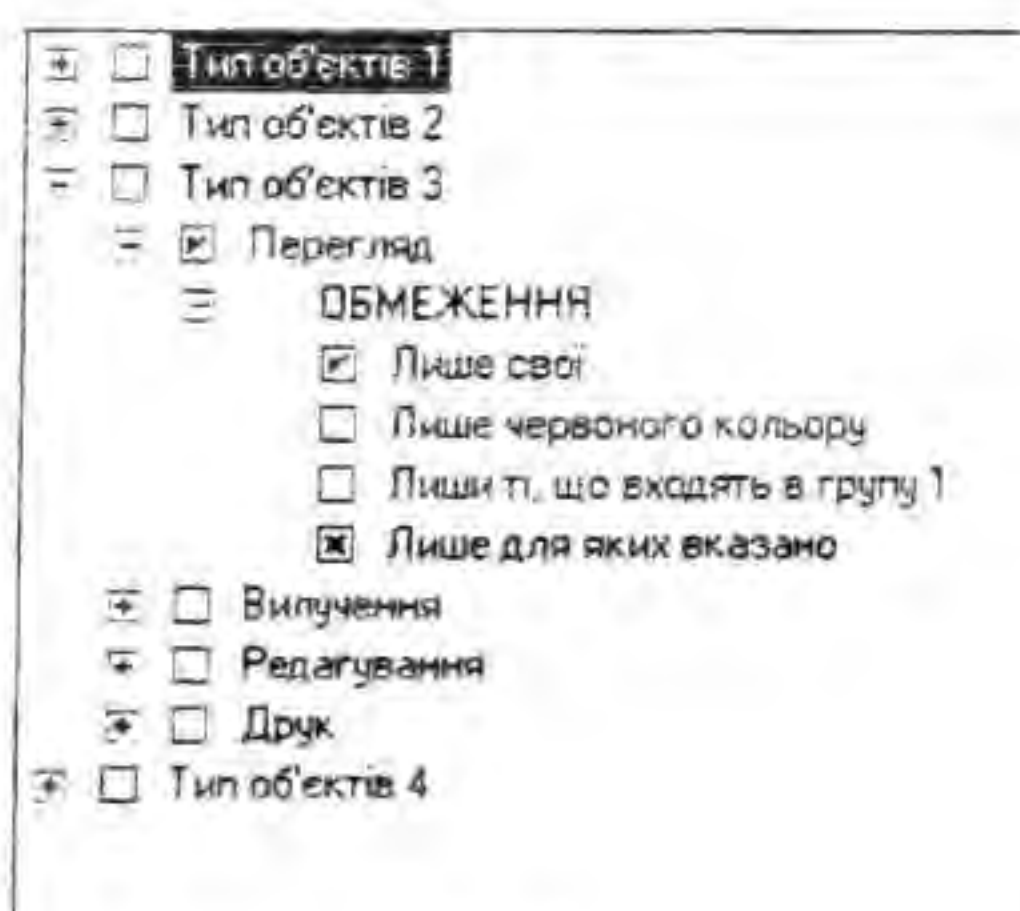


Рис.2

☒ - дозволено

☒ - заборонено

☐ - не визначено, визначається за допомогою перевірки відповідного права в групі, в яку входить користувач.

4. Розширення моделі для використання груп об'єктів

Все наведене вище справедливе лише, якщо в ролі суб'єктів виступають користувачі. Але при налаштуванні прав дуже зручно використовувати групи користувачів. Користувач чи група може входити до декількох груп. Накладається лише обмеження циклічності груп! Тобто щоб групи, які входять до інших груп цим самим не створювали кілець.

Далі наведемо розширення моделі для використання груп користувачів. Для цього замість 2-х значної логіки для прав та обмежень, введемо 3-х значну. Тобто крім **TRUE** та **FALSE**, ще будемо використовувати значення **INHERIT**. Дане значення буде означати що суб'єкту ні вказується дане обмеження, ні не вказується. А значення береться з груп, до яких входить суб'єкт. Якщо суб'єкту на певне право чи обмеження вказано значення **INHERIT**, то щоб отримати булеве значення, необхідно звернутися до груп, в які входить суб'єкт. Для цього обирається максимальне значення для обмеження (мінімальне для права) для груп з урахуванням такого порядку: $F < I < T$. Якщо і в цьому випадку отримаємо значення **I** то продовжуємо цю операцію рекурсивно до тих пір поки не отримаємо значення **T** або **F**. У випадку коли

маємо значення **I** і немає груп, до яких входить суб'єкт, то беремо значення **F**. Дану операція трансляції 3-х значної логіки в 2-х значну потрібно виконували лише при запуску системи і на швидкість самої системи це не вплине.

Висновки

В даній роботі запропонована ідея реалізації моделі розподілу прав в облікових системах. Описана модель, окрім того, що задовольняє запропоновані вимоги, ще й є досить простою в реалізації. Запропонований підхід дозволяє перекласти велику частину рутинної роботи на СУБД. Питання швидкості зводиться до вибору СУБД та написання оптимальних правил для формування SQL запитів.

Також важливо зазначити, що даний підхід є універсальним і за його допомогою можна змодельовувати як дискреційну так і мандатну модель доступу, що об'єднує переваги цих двох підходів.

Список літератури

- ГОСТ Р50922-96 «Защита информации. Основные термины и определения»; Приложение А – 10 с.
- Ravi S. Sandhu, Pierangela Samarati //Access Control: Principles and Practice, IEEE Communication Magazine, 1994 – 21 с.
- Osborn, S., Sandhu, R., and Nunawer, Q. // Configuring Role-Based Access Control To Enforce Mandatory And Discretionary Access Control Policies, ACM Trans. Info Syst. Security, 3, 2, 2000. – 21 с.
- Steve Demurjian / Implementation of Mandatory Access Control in Role-based Security System. 2001 – 20 с.
- I. Mohammed and D.M. Diltz "Design for Dynamic User-Role-Based Security", Computers&Security, 1994, Vol.13, No.8, с. 661-671
- Ravi Sandhu, "Relational database access controls using SQL", Handbook of Information Security Management 1994 - 45 с.

Надійшла до редколегії 17.11.08

УДК 004.7

Холод Д.В., к.т.н.,
Шевченко В.П.*, к.ф.-м.н., доц.

Аналіз алгоритмів функціонування систем автоматизації навчального процесу

В статті описуються новий алгоритм стабілізації системи, що має переваги серед відомих на даний час алгоритмів. Обмеження, що накладаються на випадки застосування алгоритму стосуються швидких темпів зростання кількості експериментальних випробувань при зростанні кількості груп складностей сценаріїв.

Ключові слова: орієнтований граф, сценарій, запит, ресурс, блокування, тупик, стабілізація системи.

*E-mail: Denys.Kholod@microsoft.com, vpsh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив проф., д.т.н. Ф.Г.Гарашенко

Вступ

Дослідження систем автоматизації навчальних процесів (САНП) здавна привертала увагу освітян, науковців та спеціалістів в галузі інформаційних технологій [1]. Нажаль, на практиці, в навчальних установах сьогодні використовується далеко не весь потенціал можливостей інформаційних технологій. Не достатньо високий відсоток вдалих впроваджень САНП та їх подальшого ефективного використання вказує на необхідність продовження досліджень та пошуку оптимальних моделей систем.

Складність чіткого визначення всіх аспектів САНП вимагає багаторівневого аналізу предметної області, починаючи від побудови глобальних архітектурних рішень і закінчуючи побудовою механізмів вирішення локальних задач.

В роботі [2] визначено ряд основних технічних проблем, які є важливими для подальших досліджень і впровадження тих або інших систем автоматизації.

Одна з таких проблем полягає у тому, що при роботі САНП постійно виконуються асинхронні виклики компонентів та паралельна обробка даних. Дослідженню критичних ситуацій, що виникають при цьому в системі та розробці ефективних алгоритмів їх вирішення для застосування в організації навчального процесу і присвячена дана стаття.

Kholod D.V., c.t.s.,
Shevchenko V.P., c.ph.-m.s., as.prof.

Algorithm analysis for automation of learning

The article describes new algorithm for system stabilization. This algorithm has some advantages against today known algorithms. The limitations for this algorithm implementation deal with high speed enlargement of experimental tests number due to enlargement of scenario complexity group number.

Key Words: oriented graph, scenario, enquiry, resource, locking, deadlock, system stabilization.

Побудова дискретної моделі системи

Стан програми може бути представлене у вигляді орієнтованого графа (V, E) з наступною інтерпретацією й умовами:

множина V розділена на дві взаємно непересічні підмножини P і R , що представляють сценарії

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

та компоненти

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$$

системи.

Граф є "двостороннім" стосовно підмножин вершин P і R , тобто кожне ребро $e \in E$ з'єднує вершину P з вершиною R . Якщо ребро має вигляд $e = (p_i, R_j)$, то e представляє ребро запиту на виконання сценарію й інтерпретується як запит від сценарію p_i до компоненту R_j . Якщо ребро e має вигляд $e = (R_j, p_i)$, то e є ребро призначення й відображає виконання компонентом R_j завдання отриманого від сценарію p_i .

Для кожного ресурсу $R_j \in R$ існує деякий параметр $k_j > 0$, що позначає кількість одиниць ресурсу компоненту R_j . В реалізації системи це означає, що можливе існування k_j екземплярів компоненту R_j .

Тоді нехай через $|(a, b)|$ - позначається число ребер, спрямованих від вершини a до вершини b . Тоді при прийнятих позначеннях для ребер графа повинні виконуватися умови:

- може бути зроблено не більше k_j призначень (розподілів) для компоненту R_j , тобто

$$\sum |(R_j, p_i)| \leq k_j \quad \text{де } j \in [1, m];$$

- сума запитів і розподілів щодо будь-якого сценарію для конкретного ресурсу не може перевищувати кількості доступних одиниць компоненту, тобто

$$|(R_j, p_i)| + |(p_i, R_j)| \leq k_j$$

де $j \in [1, n]$, $i \in [1, m]$;

Графи, побудовані з дотриманням всіх перерахованих правил, відомі під назвою

"процес-ресурс". В інтерпретації розробленої архітектури схема носить назву "граф сценаріїв та компонентів".

З схеми випливає, що компонент навчального розкладу призначений (тобто виконує завдання) сценарію 1, який в свою чергу видав запит на використання компоненту аутентифікації. Сценарій 2 очікує на завершення роботи компоненту аутентифікації, та повинен зробити запит й отримати данні від компоненту навчального розкладу, для свого успішного завершення.



Стан програми S , представлений у вигляді графу сценаріїв та компонентів, змінюється тільки в результаті запитів, звільнень або придбань ресурсів компонентів яким-небудь сценарієм системи програми.

Означення 1. Якщо програма перебуває в стані S , та процес p_i не має невиконаних запитів, то p_i може запустити на виконання будь-яку кількість завдань в розподілених компонентах системи. Після цього система переходить в стан T .

Позначимо зміну стану програми сценарієм p_i як $S \xrightarrow{p_i} T$.

Стан T відрізняється від S тільки додатковими ребрами запиту сценарію p_i до викликаних ресурсів.

Означення 2. Введемо в модель системи операцію придбання. Програмна система може змінити свій стан з S на стан T у результаті операції придбання ресурсів сценарієм p_i , тоді й тільки тоді, коли p_i має запити на виділення ресурсів і всі такі запити можуть бути задоволені, тобто якщо:

$$\forall R_j : (p_i, R_j) \in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(p_i, R_j)| + \sum |(R_j, p_i)| \leq k_j$$

Граф T ідентичний графу S за винятком того, що всі ребра запиту (p_i, R_j) для p_i обернені ребрам (R_j, p_i) , що відбиває виконаний розподіл ресурсів.

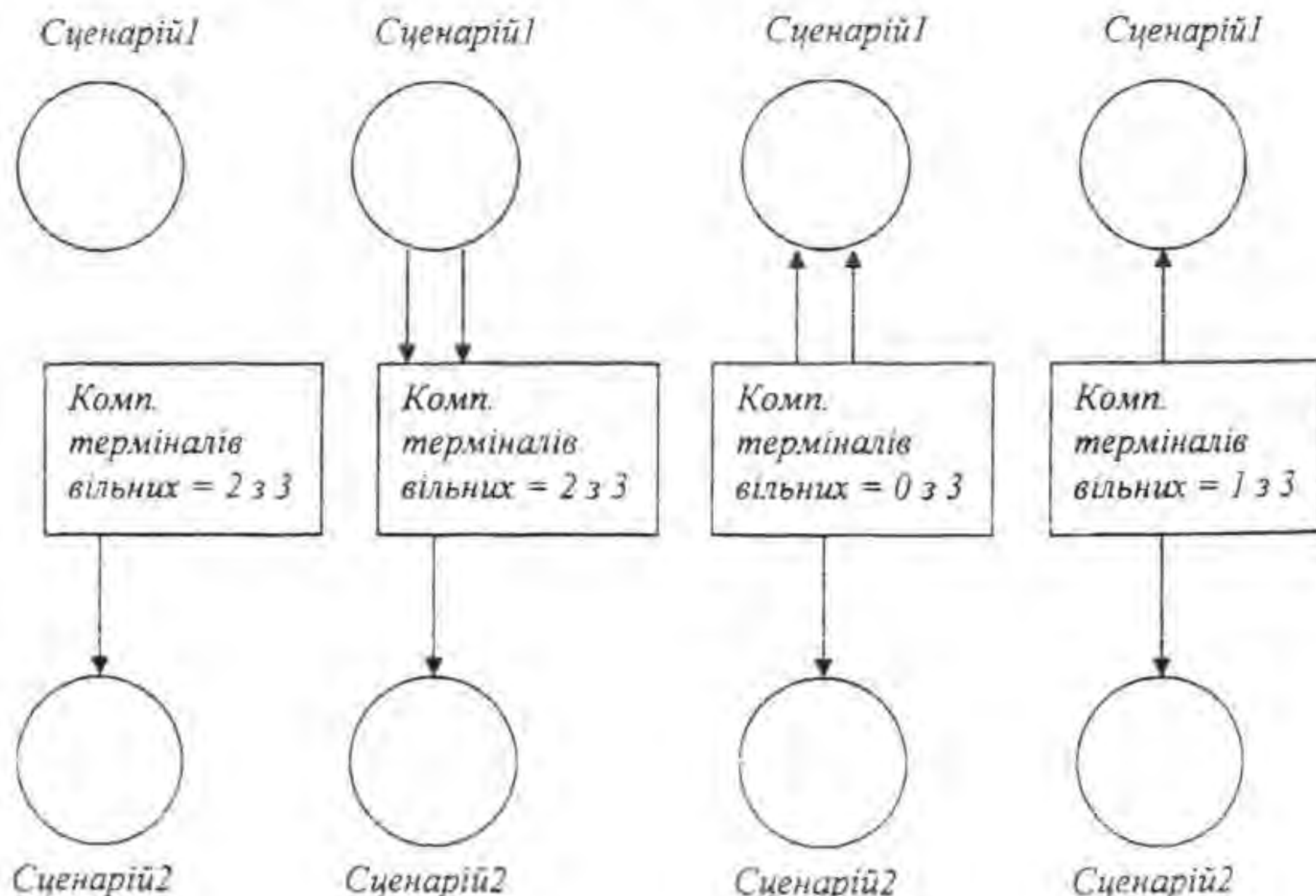
Означення 3. Аналогічно введемо в модель системи операцію звільнення. Сценарій p_i може викликати перехід зі стану S у стан T за допомогою звільнення ресурсів тоді й тільки тоді, коли p_i не має запитів, а має деякі розподілені ресурси, тобто:

$$\forall R_j : (p_i, R_j) \notin E \exists R_j : (R_j, p_i) \in E$$

В цій операції сценарій p_i може звільнити будь-яку не порожню підмножину своїх ресурсів. Результуючий стан T ідентичний вихідному стану S за винятком того, що в T відсутні деякі ребра придбання з S , у якій знищуються ребра (R_j, p_i) кожної звільненої одиниці ресурсу R_j .

В наступному прикладі зображено компонент, кількість ресурсів якого в розробленій моделі САНП легко визначається, та

двома сценаріями використання ресурсів компоненту.



Ситуацію зображену схемою можна записати наступним чином:

$S \xrightarrow{1} T \xrightarrow{1} U \xrightarrow{1} V$, перехід станів відбувається:

- з S в T : операція запиту ресурсу сценарієм 1;
- з T в U : придбання ресурсів (2 термінали) сценарієм 1;
- з U в V : звільнення ресурсу (1-го терміналу) сценарієм 1;

При розгляді переходів системи зі стану в стан важливо відзначити, що процес запуску сценаріїв є не детермінованим - при дотриманні наведених вище обмежень виконання будь-якої операції будь-якого процесу можливо в будь-який час, тому, що сценарії можуть ініціюватися на запуск як користувачами системи так і іншими сценаріями, що вданий момент виконуються.

Означення 4. В якості моделі САНП будемо розуміти систему (Σ, P) де

Σ є множина станів системи $(S, T, U, \dots)$,

P - представляє множину сценаріїв системи $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Сценарій виконання $p_i \in P$ є часткова функція, що відображає стани програми в непорожні підмножини станів

$$p_i: \Sigma \rightarrow \{\Sigma\}$$

де $\{\Sigma\}$ є множина всіх підмножин Σ .

Позначимо множину станів, у які може перейти програма за допомогою сценарію p_i (область значень процесу p_i) при знаходженні програми в стані S - через $p_i(S)$.

Можливість переходу програми зі стану S у стан T у результаті деякої операції над ресурсами в сценарії p_i (тобто $T \in p_i(S)$) будемо позначати за допомогою запису

$$S \xrightarrow{i} T$$

Зробимо узагальнення даного позначення для можливості вказувати досяжність стану T зі стану S у результаті виконання деякої довільної кількості переходів у програмі:

$$\begin{aligned} S \xrightarrow{*} T &\Leftrightarrow (S = T) \vee \\ &\vee (\exists p_i \in P: S \xrightarrow{i} T) \vee \\ &\vee (\exists p_i \in P: S \xrightarrow{i} U, S \xrightarrow{*} T) \end{aligned}$$

В роботі сценаріїв системи були виявлені та проаналізовані ситуації які створюють відому проблему паралельних обчислювань - проблему тупиків. Проблема тупиків є значною при організації паралельних обчислень тому, що:

- тупик, та ситуації, що привели до нього складно ідентифікувати;

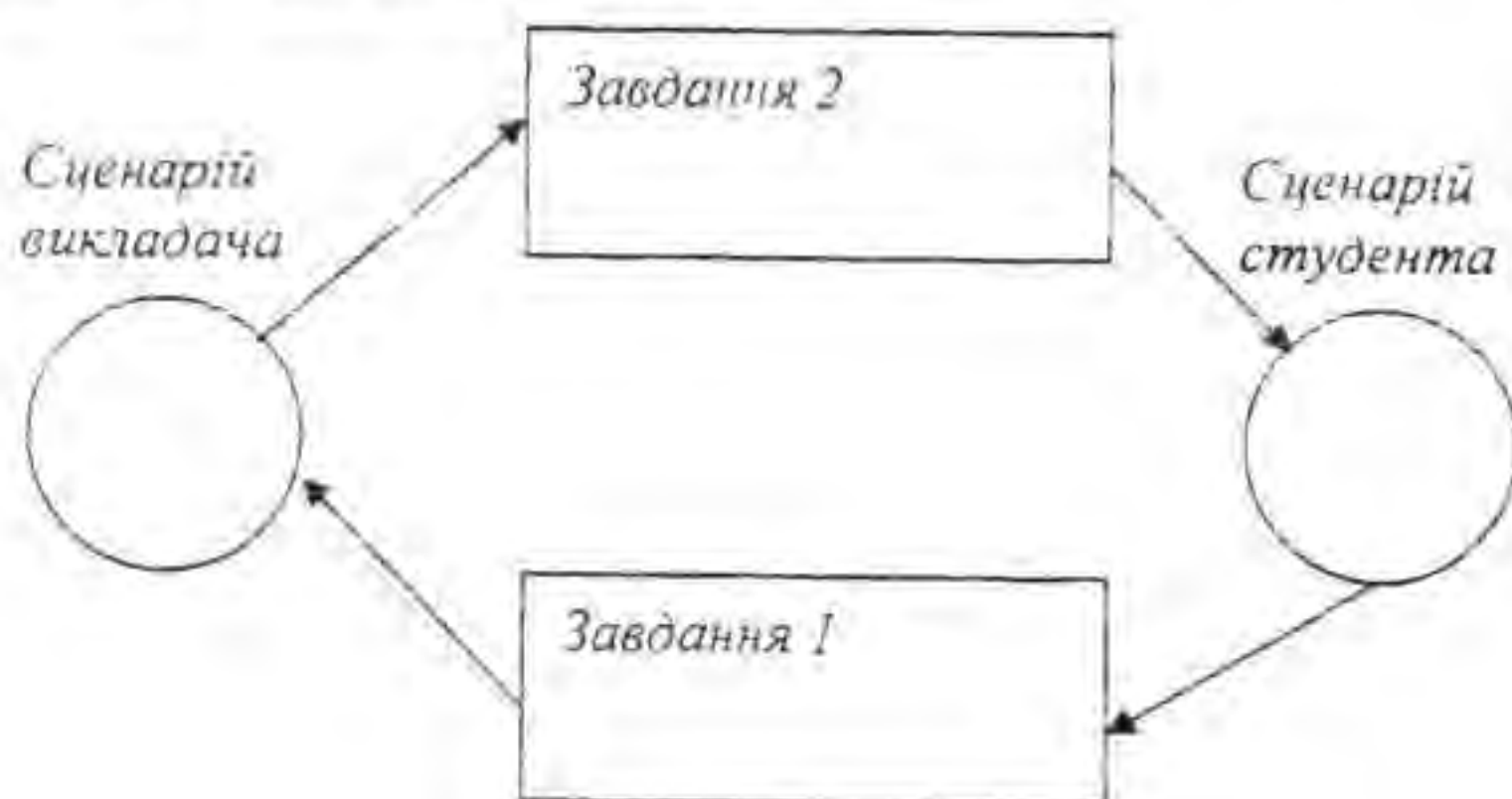
- складно діагностувати стани тупика (система виконує тривалі розрахунки або "зависла" через тупик);
- необхідність певних спеціальних дій для виходу з тупика;
- можливі втрати даних при відновленні системи при усуненні тупика

У самому загальному виді тупик (клінч, дедлок, взаємне блокування, смертельні обійми) можуть бути визначені як ситуація, у якій один або кілька процесів очікують якої-небудь події, що ніколи не відбудеться.

Наприклад в програмній моделі САНП можлива ситуація коли викладач блокує ресурс завдання (умова неперерозподільності ресурсу) для внесення в нього змін. В той самий час студент запустив на виконання сценарій

завантаження завдань, що послідовно завантажує деяку кількість завдань. Сценарій редагування викладача робить запит на отримання доступу до суміжного завдання, але воно виявляється заблоковане, тому, що сценарій студента блокує їх поки не завантажить всі завдання зі списку. В результаті ані сценарій студента, ані сценарій викладача не можуть завершитися і звільнити зайняті їм ресурси.

Крім того стан тупика може наступити не тільки внаслідок логічних помилок, допущених при розробці паралельних програм, але й у результаті виникнення тих або інших подій в обчислювальній системі (вихід з ладу окремих пристроїв, нестача ресурсів і т.п.).



Розглянемо один з аспектів проблеми тупика - аналіз причин виникнення тупикових ситуацій при використанні розподілених ресурсів.

Можуть бути виділені наступні умови тупика:

1. сценарії вимагають надання їм права монопольного керування ресурсами, які їм виділяються (умова взаємовиключення);
2. процеси втримують за собою ресурси, уже виділені їм, очікуючи в той же час виділення додаткових ресурсів (умова очікування ресурсів);
3. ресурси не можна відібрати в процесів, що втримують їх, поки ці ресурси не будуть використані для завершення роботи (умова неперерозподільності);
4. існує кільцевий ланцюг процесів, у якій кожний процес утримує за собою один або більше ресурсів, що вимагаються наступному процесу ланцюга (умова кругового очікування).

Як результат, для забезпечення відсутності тупиків необхідно виключити виникнення, принаймні, однієї з розглянутих умов.

Модель системи у вигляді графа сценаріїв та компонентів може бути використана для запобігання ситуації кругового очікування.

З урахуванням побудованої моделі й уведених позначень можна виділити ряд ситуацій, що виникають при виконанні програми й становлять інтерес при розгляді ситуації тупика.

Означення 5. Сценарій p_i заблокований у стані S , якщо програма не може змінити свій стан за допомогою цього сценарію, тобто якщо $p_i(S) = \emptyset$;

Означення 6. Сценарій p_i перебуває в тупику в стані S , якщо цей сценарій є заблокованим у будь-якому стані T , досяжному зі стану S , тобто

$$\forall T: S \xrightarrow{*} T \Rightarrow p_i(T) = \emptyset$$

Означення 7. Стан S називається тупиковим, якщо існує сценарій p_i , що перебуває в тупику в цьому стані;

Означення 8. стан S є безпечний стан, якщо будь-який стан T , досяжний з S , не є тупиковим.

Розроблена модель системи може бути використана для визначення можливих станів програми, виявлення й недопущення тупиків. Для дослідженої програмної моделі САНП [3] було побудовано граф сценаріїв та компонентів і реалізовано механізми модифікації графу (тобто переходу з одного стану в інший) в залежності від виконуваних сценаріїв.

Дискретна модель надає можливість реалізації в програмній моделі САНП описаних методів аналізу паралельної роботи сценаріїв для запобігання критичних системних станів, виявлення та уникнення тупиків, а також відновлення системи після їх виникнення. Однак ціна подібних дій в контексті обчислювальних ресурсів системи дуже висока, тому необхідна розробка нових, більш ефективних алгоритмів функціонування системи.

Методи стабілізації системи.

Виникнення тупиків є потенційною проблемою виявленою в процесі тестування розробленої моделі САНП. Вони виникають, коли є група сценаріїв, кожний з яких намагається одержати винятковий доступ до ресурсів деяких компонентів і претендує на ресурси, що належать іншому сценарію. В результаті такі сценарії виявляються в стані нескінченного очікування, а вся система виявляється нестабільною.

Далі пропонується рішення задачі пошуку й попередження тупиків та побудови алгоритмів ефективного функціонування паралельних сценаріїв системи шляхом експериментального дослідження.

Оскільки високорівневі сценарії системи складаються з послідовності виконання низькорівневих, то необхідно розглядати лише їх декомпозицію тобто, множину низькорівневих сценаріїв.

Введемо позначення:

S – множина всіх низькорівневих сценаріїв (описані в діаграмах use case та послідовності дій моделі)

$|S|$ – кількість елементів в множині S (кількість всіх низькорівневих сценаріїв)

s_i – i -й сценарій виконання; $s_i \in S$

Означення 9. Станом перевірки будемо називати множину S_k , таку що

$$S_k = \bigcup_{i \in \text{Rand}(S, k)} s_i$$

Функція $\text{Rand}(S, k)$ повертає k довільних номерів з множини S .

Введемо поняття множини T_n адекватних критеріїв функціонування системи.

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

де t_n деяка характеристика роботи системи (наприклад: час відгуку системи, відсоток середнього або пікового навантаження CPU, об'єм використаної пам'яті, т.д.).

Означення 10. Стан перевірки S_k будемо вважати погодженим коли виконується рівність $L(S_k, T_n) = 1$:

Функція L реалізується інструментальними засобами. Для даної реалізації програмної моделі на базі .Net Framework функцію L було реалізовано шляхом виконання тестів на навантаження (можливості пакету Microsoft Visual Studio Team Suit), S_k будуються як сценарії тестування, множина T_n задається відповідними критеріями оцінки на базі системних об'єктів performance counters. Вікно відповідного інтерфейсу зображено на рис.1.

Функція L визначається наступним чином:

$$L(S_k, T_n) = \begin{cases} 1, & \text{коли одночасне виконання} \\ & \text{всіх сценаріїв з } S_k \text{ задовольняє} \\ & \text{всім характеристикам} \\ & \text{множини } T_n \text{ і сценарії} \\ & \text{завершилися без помилок;} \\ 0, & \text{характеристики } T_n \text{ не} \\ & \text{задоволені або принаймні 1} \\ & \text{сценарій завершився з} \\ & \text{помилкою.} \end{cases}$$

Означення 11. Система вважається стабілізованою коли знайдено множину всіх погоджених станів перевірки, тобто таку S'' для якої виконується умова: $\forall S_k \in S''$ виконується рівність $L(S_k, T_n) = 1$. Тоді множина S'' називається стабілізуючою множиною.

Зауваження: систему важливо стабілізувати тому, що нові запуски сценаріїв можуть генерувати ситуації тупиків, викликати помилки в інших сценаріях або не відповідати критеріям T_n .

З основних формул комбінаторики маємо, що максимальна кількість елементів в S'' дорівнює:

$$|S''| = \sum_{k=1}^{K_{\max}} C_{|S|+k-1}^k$$

$K_{\max}$ – експериментально визначена максимально допустима кількість сценаріїв в S_k . Алгоритм пошуку $K_{\max}$ буде наведено далі.



Рис. 1. Параметри відображення критеріїв оцінки

Очевидно, що при достатньо великій величині $|S|$ визначити множину S' експериментально не вдасться. При $|S|=100$ $K_{\max}=10$, $|S|=5 \cdot 10^{13}$, що дорівнює числу викликів функції L .

Введемо поняття сценаріїв рівної складності. Візьмемо деякий сценарій s_i з множини S . Нехай функція $M(s_i)$ повертає множину характеристик $R_i = \{r^1_i, r^2_i, \dots, r^n_i\}$.

Характеристики $r^1_i, r^2_i, \dots, r^n_i$ — отримуються як результати виконання відповідних тестів для окремих сценаріїв (code coverage tests, load tests, profiling), і фізично відображають час виконання, завантаженість CPU, використання ресурсів пам'яті, кількість збуджених компонентів та методів і т.д.

Означення 12. Групою складності будемо називати множину $GR_m = \{r^1_m \pm \Delta r^1, r^2_m \pm \Delta r^2, \dots, r^n_m \pm \Delta r^n\}$, де $\Delta r^1, \dots, \Delta r^n$ — відхилення характеристик. Зафіксувавши значення $\Delta r^1, \dots, \Delta r^n$, можна сформувати M груп.

Введемо функцію $GV(GR_m, M(s_i))$, що повертає 1 у випадку коли множина характеристик s_i входить в групу GR_m , тобто їх відповідні характеристики відрізняються лише на величину Δr^i .

Очевидно, що треба не більше $M \cdot |S|$ операцій для сортування всіх сценаріїв по групам. Чим більше відхилення характеристик Δr^n тим менше буде кількість груп складності.

Означення 13. Сценарії s_i та s_j будемо вважати сценаріями однакової складності коли вони входять в одну групу складності.

Пронумерувавши групи від 1 до M отримаємо числову характеристику m яка визначає складність сценарію. На практиці це означає, що в стані перевірки S_k всі сценарії з складністю m є взаємозамінними.

Таким чином множину всіх сценаріїв S можна замінити на множину S' яка містить по одному сценарію різної складності. Тоді $|S'| = M$,

$$|S^n| = \sum_{k=1}^{K_{\max}} C_{M+k-1}^k$$

і відповідно

Випробувавши теоретичні викладки на діючій реалізації моделі отримали наступні характеристики:

$|S| = 100$; (загальна кількість низькорівневих сценаріїв біля 100)

$M = 4$;

$M \cdot |S| = 400$;

$K_{\max} = 20$;

максимальне значення $|S^n| = 10625$.

Множина S' буде стабілізуючою множиною лише тоді коли з кількості $|S^n|$ станів перевірки вилучити всі не погоджені стани перевірки. Для отриманої кількості це можна зробити експериментально.

$|S^n| = 6033$ — результат отриманий експериментально.

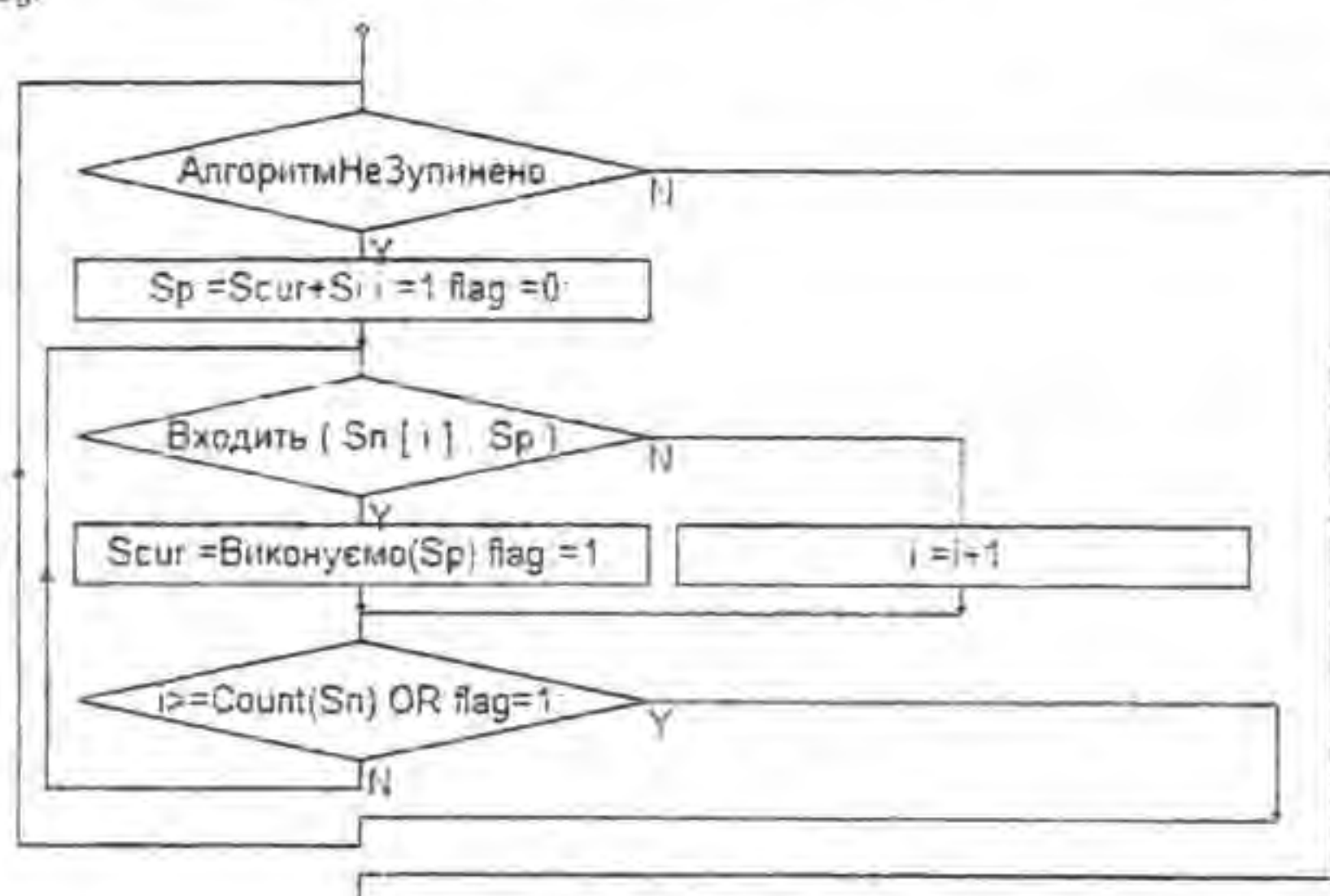
Множина S^* складається з послідовностей $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ різної довжини. Практично послідовність $S_3 = \{s_1, s_2, \dots, s_4\}$, і $S_3 \in S^*$ означає, що в системі можуть одночасно працювати будь-які три сценарії складності яких відповідно дорівнює складностям сценаріїв s_1, s_2 та s_4 , і навпаки якщо $S_2 = \{s_1, s_3\}$, і $S_2 \notin S^*$, означає, що будь-які два сценарії з складності s_1 та s_3 не можуть працювати разом задовольняючи критерії T_n .

Означення 14. Будемо вважати, що стан перевірки S_a входить в S_b , при умові $a \leq b$, коли множина сценаріїв S_a є підмножиною сценаріїв S_b .

Означення 15. $S_c = S_a + S_b$ будемо вважати сумою станів коли множина сценаріїв S_c є об'єднанням множин сценаріїв S_a та S_b . $c = a + b$.

Твердження 1. Якщо обчислювальні потужності системи та критерії T_n є незмінними і стан перевірки S_b є погодженим то з довільної підмножини його сценаріїв можна сформулювати інший стан перевірки S_a , $a \leq b$ і він також буде погодженим.

Наслідок з твердження 1. Всі стани S_a , які входять в деякий стан S_b можна виключити з множини S^* і при цьому система залишиться стабілізованою у випадку, якщо діяти за алгоритмом підтримки стабільності (рис.2).



S_i – стан перевірки, що ініціюється на виконання;
 S_{cur} – поточний стан перевірки, що виконується в системі.

Рис.2. Алгоритм підтримки стабільності

Алгоритм пошуку K_{max} (рис.3) зводиться до пошуку наближення максимальної довжини стану перевірки S_k , який є погодженим.

З алгоритму видно, що K_{max} шукається серією експериментів, в яких запускається максимальна можлива кількість “легких” сценаріїв в рамках критеріїв T_n .

Якщо K_{max} прийняти необґрунтовано великим, то значення числа $|S^*|$ буде занадто великим, щоб експериментально знайти стабілізуючу множину S^* . Якщо K_{max} прийняти необґрунтовано малим то зменшиться здатність системи одночасно обслуговувати придатну кількість, сценаріїв, що побічно вплине і на одночасну кількість користувачів, які працюють з системою.

Описане рішення було випробуване на програмній реалізації системи, при цьому було отримане значення $|S^*| = 1011$, тому алгоритм підтримки стабільності працює достатньо швидко.

Як додатковий результат, з множини $|S^*|$ можна отримати данні про кількісні характеристики ресурсів компонентів для яких останні є не очевидними.

Для дослідження роботи системи алгоритм підтримки стабільності можна вимкнути відредагувавши файл конфігурації системи. При цьому система одразу переходить в новий режим роботи без перезапуску та перекомпіляції.

Уривок файлу конфігурації:

```

<config>
<System.Stabilization>
...
<allowstabilization run="off" />
<!--! run="off" or run="on" -->
<algorithm name = "optimized" />
...
</System.Stabilization>
</config>
  
```


УДК 621.391 : 519.24

Швець О.Ф., к.ф.-м.н., Дегтяр О.С., студентка
**Про один адаптивний алгоритм
апроксимації кусково-неперервних
сигналів**

Приведено алгоритм апроксимації кусково-неперервних сигналів за допомогою системи базисних функцій. На основі мінімізації динамічних нев'язок виписуються системи диференціальних рівнянь для параметрів, які апроксимують експериментальні дані.

Ключові слова: адаптивна апроксимація, динамічна система, кусково-неперервна функція.

*E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Роботу представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ.

Існує багато прикладних задач, які пов'язані з обробкою даних, що надходять в режимі реального часу. Використання адаптивних алгоритмів для задач апроксимації даних дає можливість налаштовувати параметри системи та класифікувати дані по мірі їх надходження. Такі алгоритми ефективно використовуються для задач прогнозування [1,2,8].

У зв'язку з нестабільним розвитком економіки в Україні виникають значні труднощі при прогнозуванні параметрів економічних систем. Тому все більш актуальними стають задачі побудови адаптивних рекурентних моделей, які здатні відображати динамічні властивості часового ряду, а також брати до уваги інформаційну цінність його членів. Такі моделі допомагають не лише моделювати та прогнозувати ринкові ситуації, але й формувати оптимальну стратегію і тактику діяльності. З огляду на нестабільність в економіці України, мають місце так звані «скачки» зміни економічних параметрів. Тому при прогнозуванні параметрів таких процесів доцільним є розгляд питань апроксимації кусково-неперервних функцій.

Запропонований алгоритм, оснований на методі градієнтного спуску, відповідає поставленим умовам [3-8]. Його було апробовано на конкретних задачах. Для демонстрації ефективності такого підходу наводяться модельні приклади.

© Швець О.Ф., Дегтяр О.С., 2008

O.F. Shvets c. pf. - m. n., O.S. Degtyar, student

**About one adaptive approach of piecewise
continuous signals approximation**

The approximation approaches piecewise continuous signals by basis functions system develop. On the basis of minimization dynamic discrepancy it is systems difference equations for parameters which are approximated by the experimental data are written out.

Key Words: approximating, dynamical system, piecewise continuous function.

Апроксимація кусково-неперервних експериментальних даних.

Нехай маємо кусково-неперервний, для простоти скалярний, сигнал $x = \varphi(t), t_0 \leq t \leq T$. Даний інтервал розбивається на підінтервали точками $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$, де $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ – невідомі точки розриву функції $\varphi(t)$. Надалі ставиться задача апроксимації сигналу на інтервалах $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{N-1}, T)$, на кожному з яких функція є неперервною.

Припустимо, що ми маємо систему базисних функцій [2-6,9]

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

яка буде використовуватися для апроксимації сигналу на всьому проміжку $[t_0, T]$.

Розглянемо один з підінтервалів (t_{i-1}, t_i) . На ньому апроксимацію будемо шукати у вигляді $x(t) \approx \psi_i(t, \alpha^{(i)}) = \psi_i(t, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$, де $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Функцію $\psi_i(t, \alpha^{(i)})$ будемо вибирати у вигляді лінійної комбінації

$$\psi_i(t, \alpha^{(i)}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(i)} \varphi_j(t). \quad (3)$$

Для знаходження вектора невідомих параметрів $\alpha^{(i)}$ запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь [5-7,9]

$$\frac{d\alpha_k^{(i)}}{dt} = -2 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(i)} \varphi_j(t) - \varphi(t) \right) \varphi_k(t), \quad (4)$$

де $k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N$.

Модель (4) є лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\alpha_k^{(i)}}{dt} = -2\varphi_k(t) \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \alpha_j^{(i)} + 2\varphi(t) \varphi_k(t), \quad (5)$$

де $k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N$, або у векторно-матричній формі

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\varphi_1^2(t) & -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \dots & -2\varphi_1(t)\varphi_n(t) \\ -2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & -2\varphi_2^2(t) & \dots & -2\varphi_2(t)\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\varphi_1(t)\varphi_n(t) & -2\varphi_2(t)\varphi_n(t) & \dots & -2\varphi_n^2(t) \end{pmatrix}$$

– симетрична матриця розмірності $n \times n$, T – знак транспонування.

Згідно формули Коші розв'язок системи (6) можна записати у вигляді

$$\alpha^{(i)}(t) = W(t, t_{i-1}) \alpha_0^{(i)} + \int_{t_{i-1}}^t W(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (7)$$

де $\alpha^{(i)}(t_{i-1}) = \alpha_0^{(i)}$, $W(t, \tau)$ – нормована за моментом τ фундаментальна матриця однорідної системи, яка відповідає (6), тобто

$$\frac{dW}{dt} = A(t)W, \quad W(\tau, \tau) = E_n.$$

Для переходу на наступний крок алгоритму має виконуватися умова: обчислюється відхилення сигналу $\varphi(t)$ від знайденої апроксимації $\varphi_i(t, \alpha^{(i)})$. Як тільки різниця між значеннями цих функцій в поточний момент часу перевищуватиме задане ε , переходимо на $i+1$ крок алгоритму і шукаємо нову апроксимацію.

Розглянемо вказаний алгоритм для важливого з точки зору застосування випадку, коли процес $\varphi(t)$ розвивається по одному зі сценаріїв (1).

Розпишемо запропоновану ітераційну процедуру для цього випадку.

При $i=1$ на (t_0, t_1) апроксимацію шукатимемо у вигляді

$$x(t) \approx \psi_1(t, \alpha^{(1)}) = \psi_1(t, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}), \quad (8)$$

де $t \in [t_0, t_1]$,

$$\psi_1(t, \alpha^{(1)}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(1)} \varphi_j(t). \quad (9)$$

Записуємо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь відносно елементів вектора $\alpha^{(1)}$, яка матиме вигляд

$$\frac{d\alpha^{(i)}}{dt} = A(t)\alpha^{(i)} + f(t), \quad (6)$$

при $t \geq t_0, i = 1, 2, \dots, N$.

Тут $\alpha^{(i)T} = (\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, $f^T(t) = 2\varphi(t)(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$,

$$\frac{d\alpha_k^{(i)}}{dt} = -2\varphi_k(t) \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \alpha_j^{(i)} + 2\varphi(t) \varphi_k(t), \quad (10)$$

де $k = 1, 2, \dots, n$.

Цю систему можемо записати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha^{(i)}}{dt} = A(t)\alpha^{(i)} + f(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (11)$$

Згідно формули Коші розв'язок системи (11) матиме вигляд

$$\alpha^{(i)}(t) = W(t, t_0) \alpha_0^{(i)} + \int_{t_0}^t W(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (12)$$

де $\alpha^{(i)}(t_0) = \alpha_0^{(i)}$. (13)

Розв'язок задачі Коші (12), (13) можна використати для запису критеріїв збіжності запропонованої ітераційної процедури [5, 6].

Якщо існує стаціонарний розв'язок задачі (12), (13), тобто $\alpha^{(i)}(t) \rightarrow \bar{\alpha}^{(i)}$ із збільшенням значення t , то $\bar{\alpha}^{(i)}$ можна взяти за розв'язок поставленої задачі. У знайденому векторі параметрів $\bar{\alpha}^{(i)}$ одна з компонент k_i задовольняє умові $\bar{\alpha}_{k_i}^{(i)} \rightarrow 1$ при збільшенні t . Це означає, що на першому кроці найкращою апроксимацією буде функція $\varphi_{k_i}(t)$. Розглядаємо різницю між сигналом $\varphi(t)$ та базисною функцією $\varphi_{k_i}(t)$. Момент, в який вона порушує досягнуту точність апроксимації і є шуканою точкою t_1 . Далі переходимо на наступну ітерацію при $i = p$.

Розглянемо інтервал (t_{p-1}, t_p) . Апроксимацію сигналу $x(t)$ будемо шукати у вигляді

$$x(t) \approx \psi_p(t, \alpha^{(p)}) = \psi_p(t, \alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}), \quad (14)$$

де $t \in (t_{p-1}, t_p)$.

$$\psi_p(t, \alpha^{(p)}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(p)} \varphi_j(t). \quad (15)$$

По аналогії запишемо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь відносно компонент вектора $\alpha^{(p)}$

$$\frac{d\alpha_k^{(p)}}{dt} = -2\varphi_k(t) \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \alpha_j^{(p)} + 2\varphi(t) \varphi_k(t), \quad (16)$$

при $k = 1, 2, \dots, n$.

Перепишемо систему у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha^{(p)}}{dt} = A(t)\alpha^{(p)} + f(t), \quad t \in (t_{p-1}, t_p). \quad (17)$$

Запишемо розв'язок системи (17) згідно формули Коші

$$\alpha^{(p)}(t) = W(t, t_{p-1})\alpha_0^{(p)} + \int_{t_{p-1}}^t W(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (18)$$

де

$$\alpha^{(p)}(t_{p-1}) = \alpha_0^{(p)}. \quad (19)$$

Якщо існує стаціонарний розв'язок задачі (18), (19), тобто $\alpha^{(p)}(t) \rightarrow \bar{\alpha}^{(p)}$ із збільшенням значення t , то $\bar{\alpha}^{(p)}$ можна взяти за розв'язок поставленої задачі.

У знайденому векторі параметрів $\bar{\alpha}^{(p)}$ знайдеться компонента k_p , що $\alpha_{k_p}^{(p)} = 1$. Отже, найкращою апроксимацією буде функція $\varphi_{k_p}(t)$. Момент, в який різниця між сигналом $\varphi(t)$ та базисною функцією $\varphi_{k_p}(t)$ перевищить задану наперед точність апроксимації ε , і є шуканою точкою розриву t_p . В подальшому переходимо на наступну ітерацію $i = p + 1$.

Деякі модельні приклади та обчислювальний експеримент.

Продемонструємо ефективність даного алгоритму, перевіривши його на простих модельних прикладах.

При невеликій кількості базисних функцій можна отримати аналітичний розв'язок. Якщо ж базисних функцій взяти більше, то і розмірність системи звичайних диференціальних рівнянь зросте. Розв'язати такі системи звичайних диференціальних рівнянь в аналітичному вигляді важко. В таких випадках розв'язок задачі Коші знаходимо чисельно. Інтегрування будемо проводити методом Рунге-Кутта 4-го порядку

точності. Для цього було розроблено відповідне програмне забезпечення.

Приклад 1. Візьмемо вимірюваний сигнал у вигляді

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 10 \\ -2, & 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

а кількість базисних функцій $n=1$, причому $\varphi_1(t)=1$. Функція є кусково-неперервною з розривом в точці $t=10$. Початкові дані задамо $\alpha^{(1)}(t_0)=3$.

На першому інтервалі $[0, t_1)$ диференціальне рівняння, згідно (4), матиме вигляд

$$\frac{d\alpha^{(1)}(t)}{dt} = -2(\alpha^{(1)}(t) - 2) \cdot 1, \quad \alpha^{(1)}(0) = 3.$$

Використовуючи загальний розв'язок та початкові дані, отримаємо

$$\alpha^{(1)}(t) = 2 + (\alpha^{(1)}(0) - 2)e^{-2t}.$$

З поведінки отриманого розв'язку $\alpha^{(1)}(t)$ видно, що $t_1 = 10$.

На другому інтервалі $(t_1, 20]$ диференціальне рівняння, згідно (4), матиме вигляд

$$\frac{d\alpha^{(2)}(t)}{dt} = -2(\alpha^{(2)}(t) + 2) \cdot 1,$$

$$\alpha^{(2)}(t_1) = \alpha^{(1)}(t_1 - 0).$$

Отже, $\alpha^{(2)}(t) = -2 + (\alpha^{(2)}(t_1) + 2)e^{-2(t-t_1)}$.

Результуючим значенням $\bar{\alpha}^{(1)} = 2, \bar{\alpha}^{(2)} = -2$. На рис. 1, 2 показано графіки зміни параметра і сигналу та його апроксимації. У програмі також визначаються значення точок розриву. В даному прикладі точкою розриву є $t_1 = 10.1$ з точністю до $\varepsilon = 0.1$.

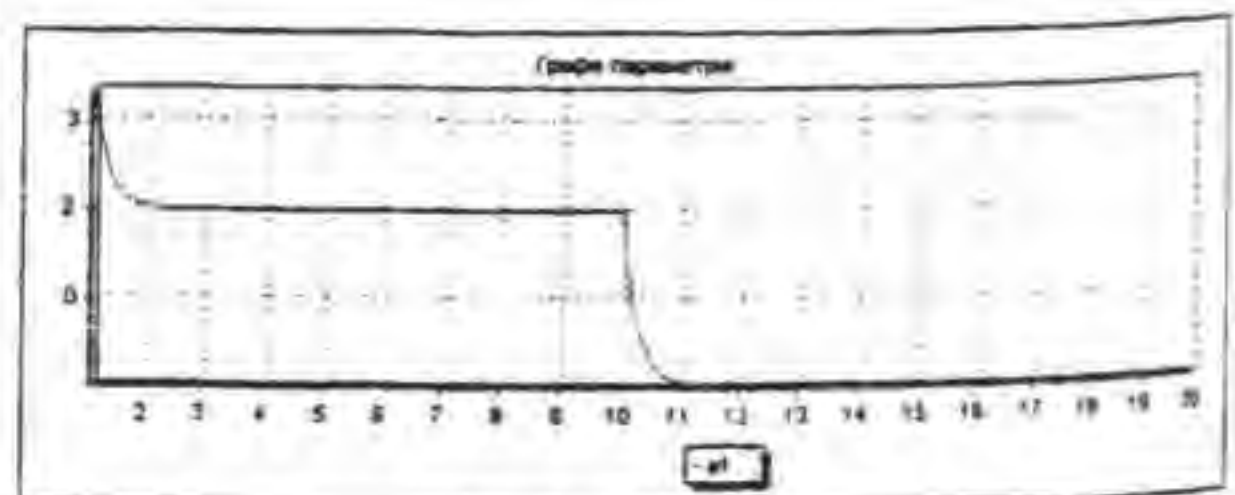


Рис.1

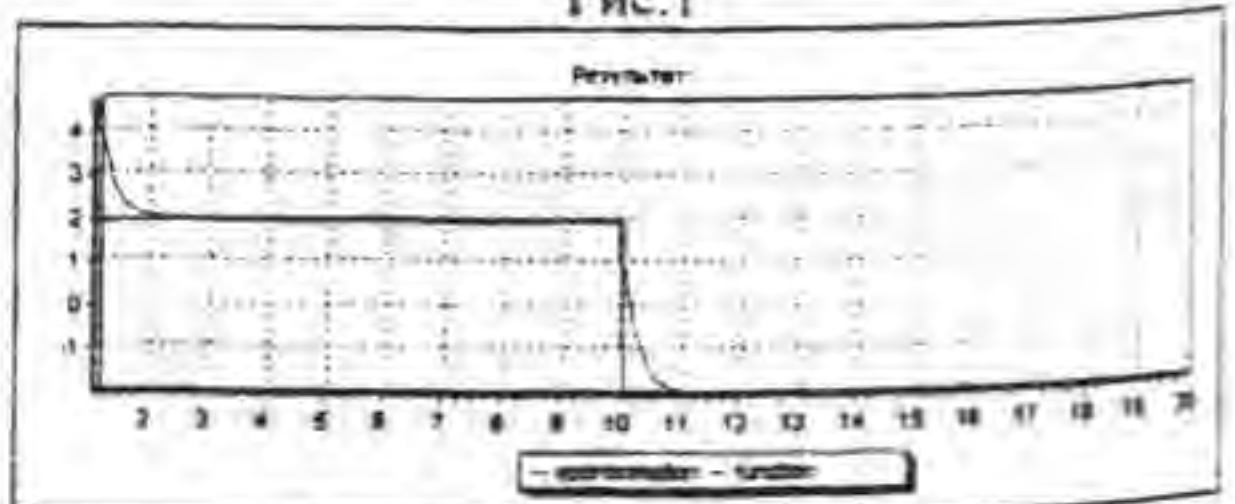


Рис.2

Приклад 2. Візьмемо вимірювані сигнали гармонічними наприклад

$$\varphi(t) = \begin{cases} \cos t, 0 \leq t < 16 \\ \sin 2t, t \geq 16 \end{cases}$$

а кількість базисних функцій $n=2$, причому $\varphi_1(t) = \cos t, \varphi_2(t) = \sin 2t$. Початкові дані задамо $\alpha_1^{(1)}(0) = 1, \alpha_2^{(1)}(0) = 5$.

Розглянемо роботу нашого алгоритму. На першому інтервалі $[0, t_1)$ система диференціальних рівнянь відносно $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$, згідно (4), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1^{(1)}}{dt} &= -2\alpha_1^{(1)} \cos^2 t - 2\alpha_2^{(1)} \cos t \sin 2t + \\ &+ 2 \cos^2 t, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{dt} &= -2\alpha_1^{(1)} \cos t \sin 2t - 2\alpha_2^{(1)} \sin^2 2t + \\ &+ 2 \cos t \sin 2t. \end{aligned}$$

При $t \geq 16$ система диференціальних рівнянь відносно $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$, згідно (4), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1^{(1)}}{dt} &= -2\alpha_1^{(1)} \cos^2 t - 2\alpha_2^{(1)} \cos t \sin 2t + \\ &+ 2 \cos^2 t + 2 \sin 2t \cos t, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{dt} &= -2\alpha_1^{(1)} \cos t \sin 2t - 2\alpha_2^{(1)} \sin^2 2t + \\ &+ 2 \sin 2t \cos t + 2 \sin^2 2t. \end{aligned}$$

Наведемо результат обчислювального експерименту. На рис.3, 4 показано графіки параметрів сигналу та його апроксимації. Результуючим значенням для цього випадку є: на першому інтервалі $\alpha_1^{(1)}$ прямує до 1, $\alpha_2^{(1)}$ прямує до 0; на другому – $\alpha_1^{(2)}$ прямує до 0, $\alpha_2^{(2)}$ прямує до 1. Точкою розриву є $t_1 = 16$.

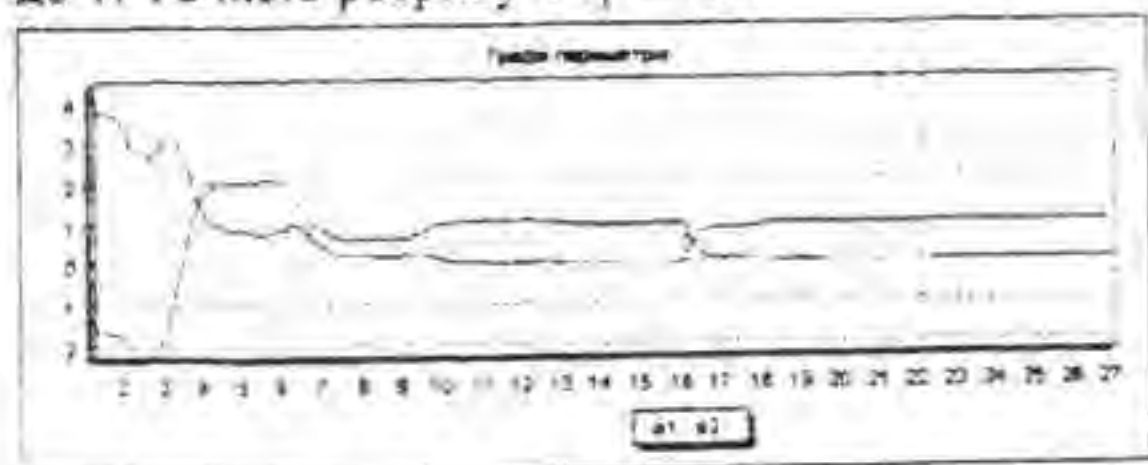


Рис.3.

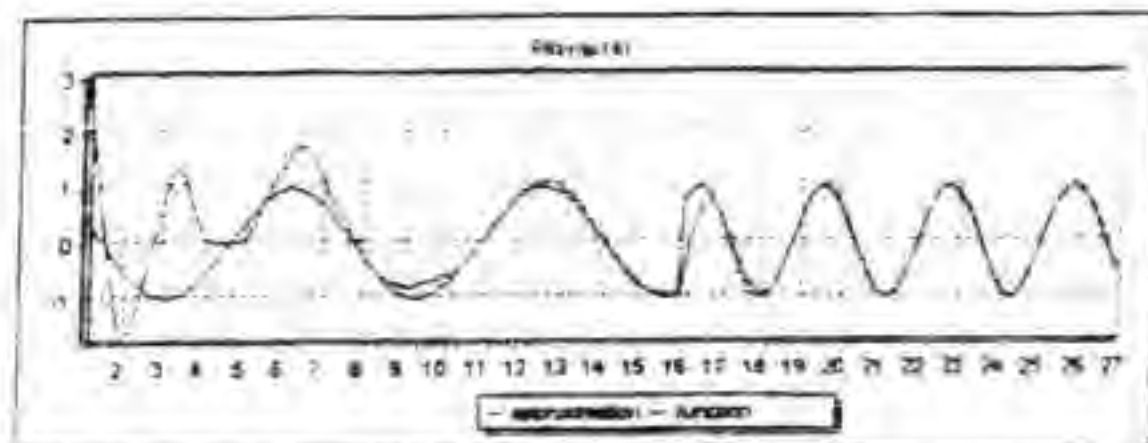


Рис.4.

Приклад 3. В цьому прикладі візьмемо вимірюваним сигналом такий, який представлений комбінацією гармонічних функцій

$$\varphi(t) = \begin{cases} 3 \sin t - 4 \cos 2t, 0 \leq t < 31, t \geq 50 \\ 2 \sin 2t + 3 \cos t, 31 \leq t < 50 \end{cases} \quad (22)$$

а для його апроксимації виберемо чотири базисні функції

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \cos t, \varphi_2(t) = \sin t, \\ \varphi_3(t) &= \cos 2t, \varphi_4(t) = \sin 2t. \end{aligned} \quad (23)$$

Початкові дані задамо

$$\alpha_1^{(1)}(0) = 10, \alpha_2^{(1)}(0) = -5, \alpha_3^{(1)}(0) = 6, \alpha_4^{(1)}(0) = 3.$$

Роботу алгоритму можна описати наступним чином:

а) на інтервалах $0 \leq t < 31, t \geq 50$ система диференціальних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, згідно (4), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= -2\alpha_1 \cos^2 t - 2\alpha_2 \sin t \cos t - 2\alpha_3 \cos 2t \cos t - \\ &- 2\alpha_4 \sin 2t \cos t + 6 \sin t \cos t - 8 \cos 2t \cos t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_2}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \sin t - 2\alpha_2 \sin^2 t - 2\alpha_3 \cos 2t \sin t - \\ &- 2\alpha_4 \sin 2t \sin t + 6 \sin^2 t - 8 \cos 2t \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_3}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \cos 2t - 2\alpha_2 \sin t \cos 2t - \\ &- 2\alpha_3 \cos^2 2t - 2\alpha_4 \sin 2t \cos 2t + 6 \sin t \cos 2t - \\ &- 8 \cos^2 2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_4}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \sin 2t - 2\alpha_2 \sin t \sin 2t - \\ &- 2\alpha_3 \cos 2t \sin 2t - 2\alpha_4 \sin^2 2t + 6 \sin t \sin 2t - \\ &- 8 \cos 2t \sin 2t; \end{aligned} \quad (24)$$

б) на інтервалі $31 \leq t < 50$ систему диференціальних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ можна записати в такій формі

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -2\alpha_1 \cos^2 t - 2\alpha_2 \sin t \cos t - 2\alpha_3 \cos 2t \cos t - \\ &- 2\alpha_4 \sin 2t \cos t + 4 \sin 2t \cos t + 6 \cos^2 t, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \sin t - 2\alpha_2 \sin^2 t - 2\alpha_3 \cos 2t \sin t - \\ &- 2\alpha_4 \sin 2t \sin t + 4 \sin 2t \sin t + 6 \cos t \sin t, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \cos 2t - 2\alpha_2 \sin t \cos 2t - \\ &- 2\alpha_3 \cos^2 2t - 2\alpha_4 \sin 2t \cos 2t + 4 \sin 2t \cos 2t + \\ &+ 6 \cos t \cos 2t, \\ \frac{d\alpha_4}{dt} &= -2\alpha_1 \cos t \sin 2t - 2\alpha_2 \sin t \sin 2t - \\ &- 2\alpha_3 \cos 2t \sin 2t - 2\alpha_4 \sin^2 2t + 4 \sin^2 2t + \\ &+ 6 \cos t \sin 2t.\end{aligned}\quad (25)$$

Проведення обчислювального експерименту показало, що:

а) на $[0, t_1)$ $\alpha_1^{(1)}$ прямує до 0, $\alpha_2^{(1)}$ прямує до 3, $\alpha_3^{(1)}$ прямує до 4, $\alpha_4^{(1)}$ прямує до 0; на $[t_1, t_2)$ – $\alpha_1^{(2)}$ прямує до 3, $\alpha_2^{(2)}$ прямує до 0, $\alpha_3^{(2)}$ прямує до 0, $\alpha_4^{(2)}$ прямує до 2; на $[t_2, 50]$ – $\alpha_1^{(3)}$ прямує до 0, $\alpha_2^{(3)}$ прямує до 3, $\alpha_3^{(3)}$ прямує до 4, $\alpha_4^{(3)}$ прямує до 0.

На рис.5, 6 показано графіки параметрів і сигналу та його апроксимації. З аналізу випливає, що точками розриву є: $t_1 = 31$, $t_2 = 50$.

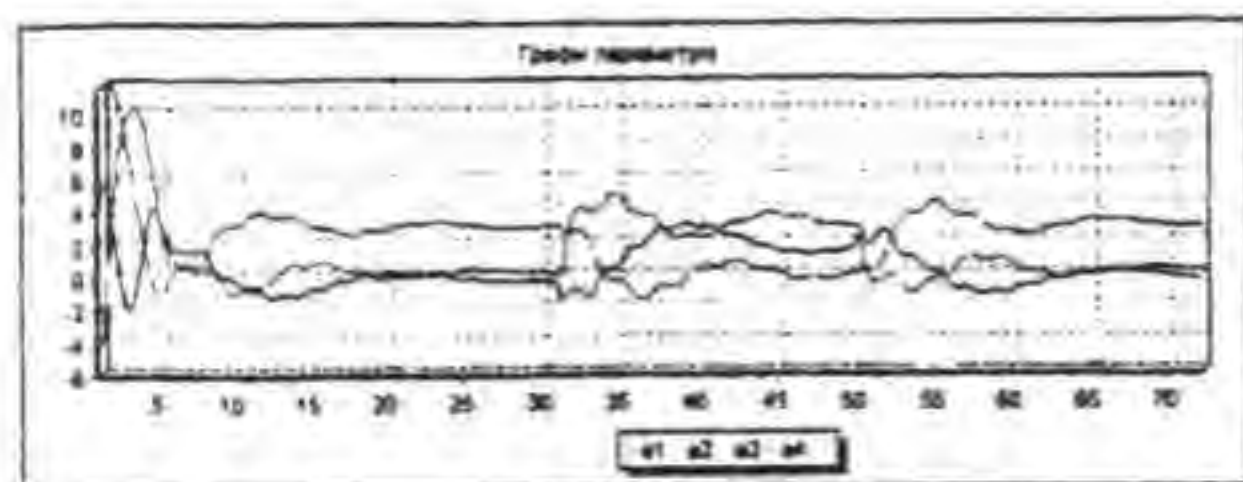


Рис.5

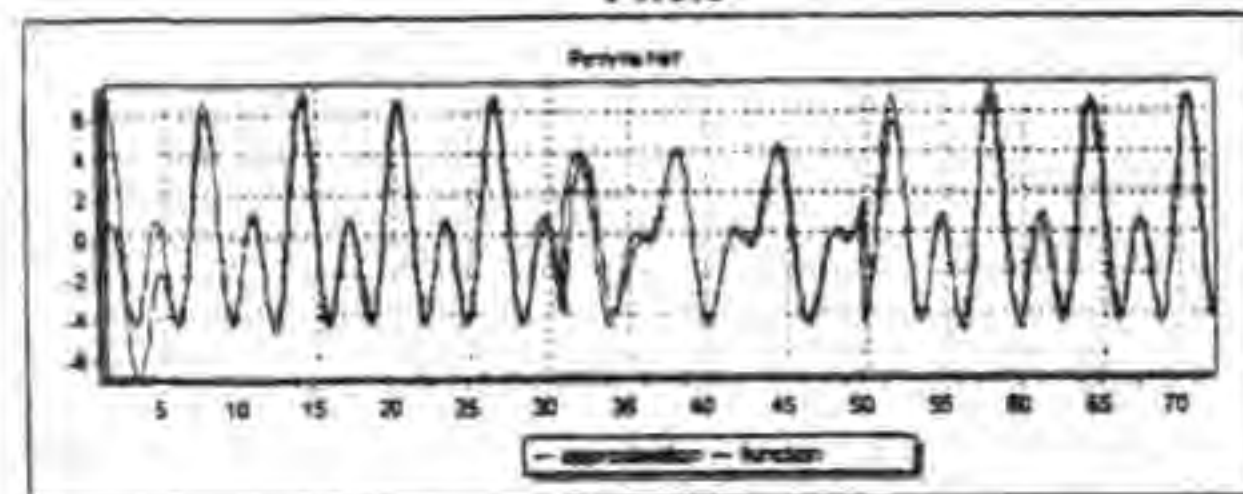


Рис.6

Висновки.

В роботі запропоновано алгоритм апроксимації кусково-неперервних сигналів, який базується на мінімізації динамічних невязок. Проведений обчислювальний експеримент показує ефективність розробленої ітераційної процедури.

Список використаних джерел.

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
2. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
3. Гаращенко О.Ф. Оптимальний вибір частотно-фазових характеристик в задачах гармонічної апроксимації функцій // Вісник КУ. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – №1 – С.145-149.
4. Гаращенко О.Ф. Метод структурно-параметричної оптимізації в задачах цифрової обробки інформації // Матеріали 11-ої Міжнародної конференції по автоматичному управлінню «Автоматика – 2004» (27–30 вересня 2004 р.). – Т.4. – К.: НУХТ, 2004. – С. 28.
5. Гаращенко Ф.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В. та ін. Сучасні методи та інформаційні технології математичного моделювання, аналізу і оптимізації складних систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 200 с.
6. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. К задаче адаптивной аппроксимации сигналов с минимальной среднеквадратической невязкой заданной глубины // Компьютерная математика. – 2006. – №3. – С. 96–102.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
8. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИАКАП, 1991. – 432 с.
9. Швець О.Ф. Використання методу структурно-параметричної оптимізації в задачах цифрової обробки інформації // Вісник Київського університету. – Сер. фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – С. 249 – 255.

Надійшла до редколегії 16.10.2008

РАДІОФІЗИКА

УДК 519.9

Короновський В.Є., канд. фіз.-мат. наук,
Каленіченко О.О., студент

Оптичні явища у вісмут-замішених плівках ферит-гранатів у поперечному електричному полі

Магнітоелектричні властивості
епітаксійних плівок вісмут-замішених
феритових гранатів досліджувались в
поперечному електричному полі з
використанням методу оптичної
поляриметрії (електромагнітооптичний
(ЕМО) ефект). ЕМО ефект на
багатодомених ділянках досліджуваної
плівки зареєстровано при трьох значеннях
кута між напрямком хвильового вектора та
вектором нормалі до поверхні плівки.
Величина ЕМО сигналу залежала від
зовнішнього магнітного поля.

Ключові слова: ЕМО ефект, плівки
вісмут-замішених феритових гранатів,
електричне поле.

*E-mail: koron@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Дослідженню механізмів взаємодії магнітної
та електричної підсистем в магнітоелектричних
матеріалах в останній час присвячено чимало
публікацій за результатами як теоретичних так і
експериментальних досліджень, зокрема [1,2].

Такий інтерес зумовлений як потребою у
створенні єдиної теорії магнітоелектричної
взаємодії в твердому тілі, так і широкими
прикладними можливостями по використанню
магнітоелектричних монокристалів та тонких
плівок у сучасній електроніці.

Виникнення в діелектричному кристалі
поляризації P , індукованої магнітним полем H ,
або ж намагніченості M , індукованої
електричним полем E відноситься до проявів
магнітоелектричного (МЕ) ефекту (МЕЕ).
Вперше експериментально МЕЕ був виявлений в
антиферромагнетик Cr_2O_3 , при цьому
реєструвався змінний магнітний момент, який
виникав у кристалі під дією зовнішнього
електричного поля [3].

Зовнішнє електричне поле, підведене до
кристала, викликає в ньому прояви індукованих
оптичних явищ, причому E -поле може
індукувати оптичні явища (лінійні збо

Koronovskyy V.E., Ph.D.,
Kalenichenko A. A., student

Optical phenomena in bismuth- substituted ferrite garnet films in transverse electric field

The magneto-electric properties of bismuth-
substituted ferrite garnet films are investigated
in transverse electric field with using optical
polarimetry method (electromagneto-optical
(EMO) effect). The EMO effect on multidomain
sites of an investigated film is registered for
three values of an angle between a direction of a
wave vector and a vector of a normal to a film
surface. A value of EMO signal depends on
external magnetic field.

Key Words: EMO effect, YIG films, electric
field.

квадратичні за електричним полем) лише в
кристалах з певною магнітною симетрією. Одне з
таких явищ - ефект повороту площини
поляризації світла в кристалі, індукований
електричним полем, назване авторами [4] як
електромагнітооптичний (ЕМО) ефект (ЕМОЕ).
Лінійний за E -полем ЕМОЕ може спостерігатись
лише в кристалах, група магнітної симетрії яких
не містить просторової інверсії, а в
центросиметричних кристалах вказаний ефект
квадратичний за електричним полем.

Одним з матеріалів, в яких вдалось
експериментально спостерігати ЕМО ефект, є
залізоітрісвий гранат (ЗІГ). При цьому для
центросиметричної кубічної кристалічної
структури ЗІГ лінійний за E -полем ЕМОЕ
заборонений. Лише квадратичний за
електричним полем ЕМО ефект, про
спостереження якого повідомлялось в [4],
можливий в монокристалах ЗІГ. Однак, в [5]
повідомлялось про експериментальне виявлення
в одній з плівок ЗІГ гігантського ЕМОЕ на
основній частоті змінного електричного поля
(лінійного ЕМОЕ).

В наших попередніх дослідженнях вказаного ефекту в повздовжній геометрії експерименту, тобто при $E \parallel k$, $H \parallel k$, де k – хвильовий вектор, лише квадратичний за E -полем ЕМОЕ вдалось виявити в епітаксійних плівках ЗІГ [6,7]. Лінійний за E -полем ЕМО ефект був нами зареєстрований як результат впливу зовнішнього механічного тиску на структуру досліджуваних плівок [8].

В даній роботі повідомляється про результати експериментальних досліджень оптичних явищ у вісмут-заміщених плівках ферит-гранатів в поперечній за E -полем геометрії експерименту (E -поле паралельне поверхні плівки). Досліджувались магнітопольові та електропольові залежності ЕМО ефекту при порушенні звичної геометрії експерименту $k \parallel n$, де n – вектор нормалі до поверхні плівки. Наскільки відомо авторам, подібних експериментів у вказаній геометрії раніш не проводилось. Такі дослідження можуть бути корисними для більш глибокого розуміння природи магнітоелектричних проявів у феритових гранатах.

Експериментальна установка складається з лазерного поляриметра, детально описаного в [7] (без складових поляризаційного мікроскопа), який модифіковано під задачі даного експерименту. Суть експериментального методу – реєстрація змін кута повороту площини поляризації світла під впливом E -поля, підведеного до зразка – $\alpha_{\text{ЕМО}}$ (ЕМОЕ). Досліджуваний зразок плівки вісмут-заміщеного ферит-гранату був вирощений на $\text{Gd}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ підкладинці, товщиною біля 600 мкм. Попереднє магнітооптичне дослідження зразка з проведенням візуалізації доменної структури показало, що товщина плівки біля 8 мкм. Намагніченість доменів – перпендикулярна до поверхні плівки. Змінну електричну напругу U частотою (ω) 900 Гц і амплітудою до 4 кВ було підведено до досліджуваного зразка, який представляв собою пластину (шириною біля 2,5 мм), яка була розміщена між електродами. Експериментальна установка дозволяла проводити дослідження лінійної $\alpha_{\text{ЕМО}}^{\omega}$ та нелінійної $\alpha_{\text{ЕМО}}^{2\omega}$ компонент індукованих електричним полем змін кута повороту площини поляризації світла. Вимірювання проводились на малих ділянках зразків (діаметр ділянки лазерного зондування не перевищував 1 мм). Компоненти ω та 2ω змін кута повороту площини поляризації характеризували лінійний

та квадратичний за E -полем ЕМОЕ відповідно. Така схема дозволяла нам проводити дослідження як кута повороту площини поляризації світла під дією магнітного поля H , так і його зміни, $\alpha_{\text{ЕМО}}$, викликані впливом на зразок електричного поля E . В експерименті використовувався He-Ne лазер ($\lambda=0.63 \mu\text{m}$). Експерименти проводились при кімнатній температурі.

На Рис. 1 представлено магнітопольові

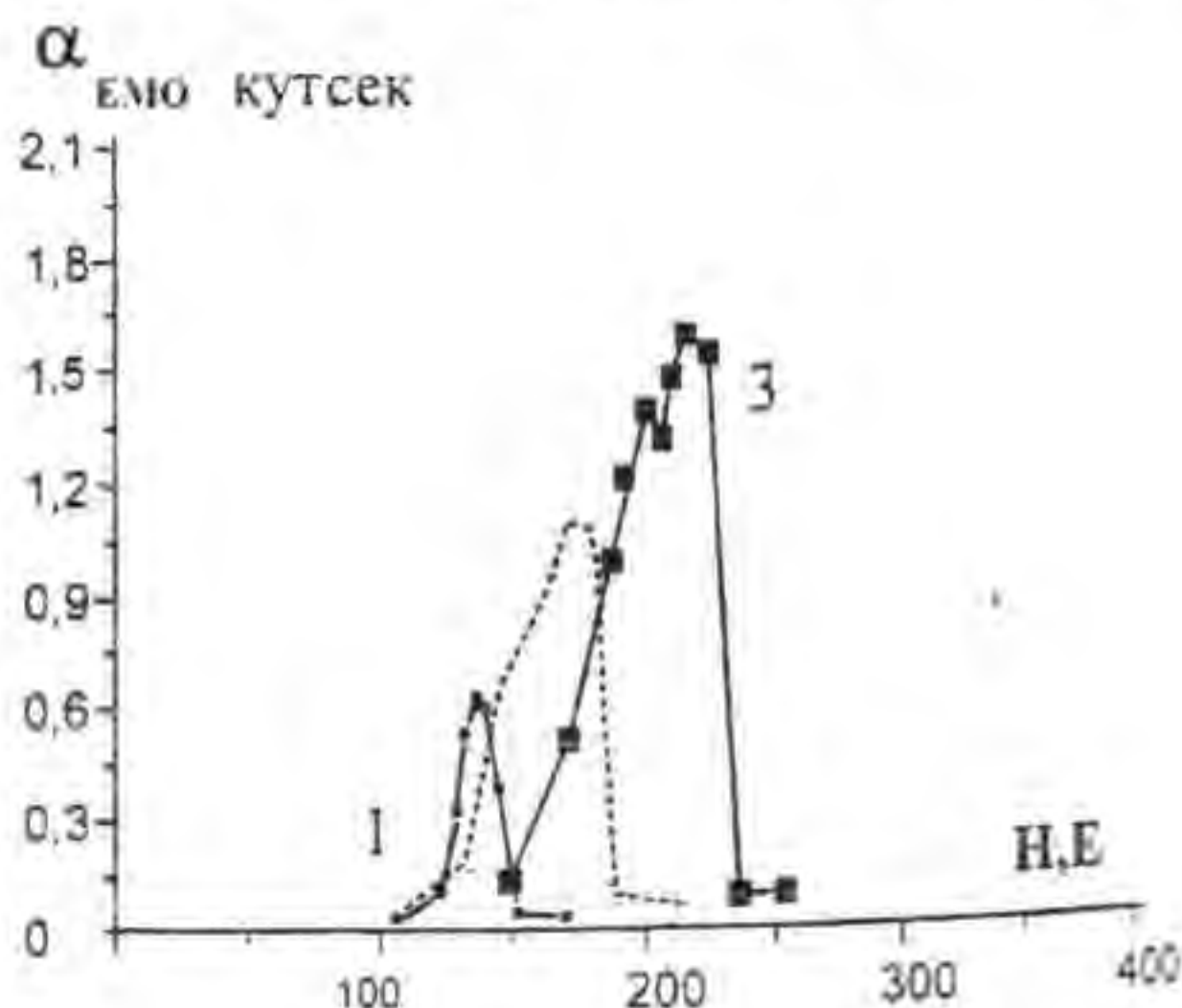


Рис.1 Магнітопольові залежності ЕМОЕ: 1 - $\angle kn = 0^\circ$, 2 - $\angle kn = 5^\circ$, 3 - $\angle kn = 11^\circ$

залежності ЕМОЕ, при різних значеннях кута між вектором нормалі до поверхні плівки n і напрямком хвильового вектора k . Дослідження

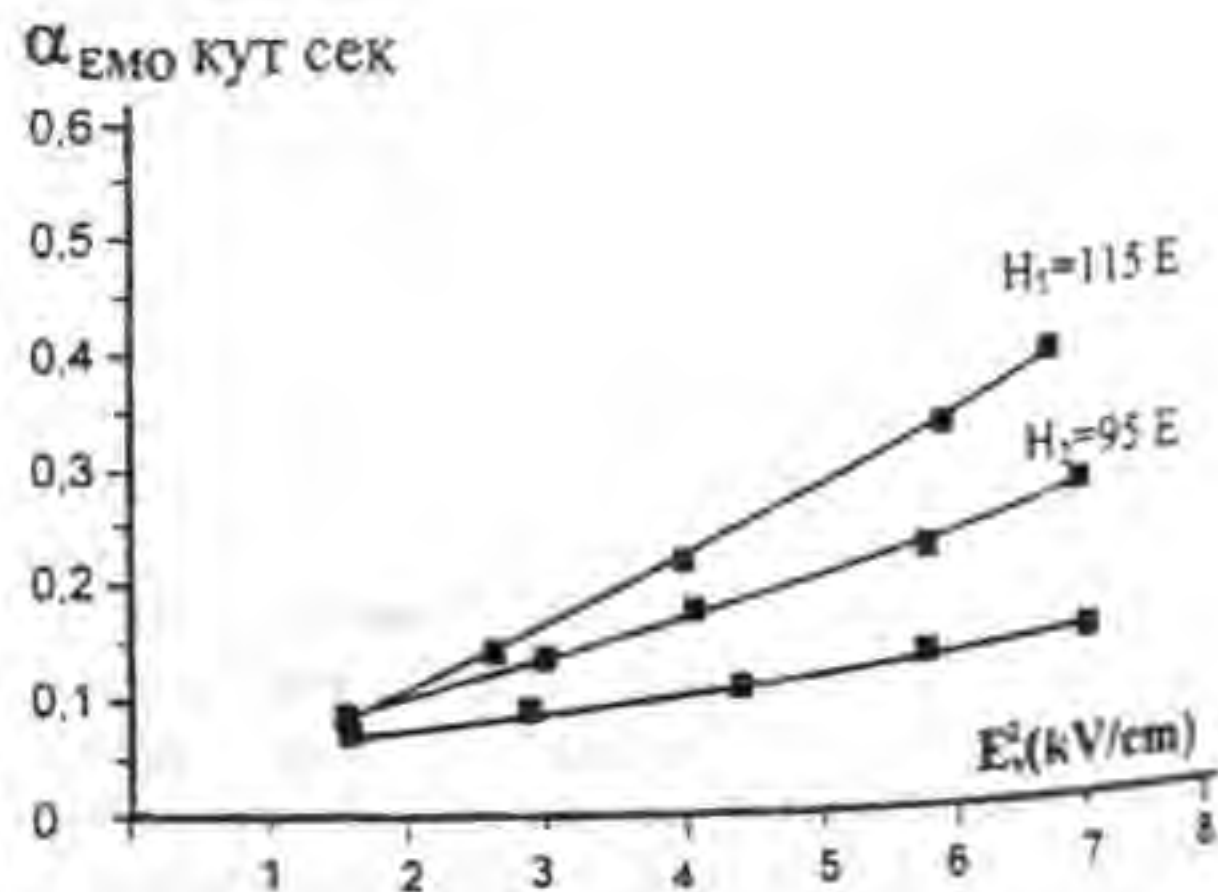


Рис. 2 Електропольові залежності величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$, виміряні для трьох значень магнітного поля: $H_1=80 \text{ E}$, $H_2=95 \text{ E}$ та $H_3=115 \text{ E}$, $\angle kn = 0^\circ$

проводились в геометрії: $\angle kn = 0^\circ$, $\angle kn = 5^\circ$ та $\angle kn = 11^\circ$. На Рис. 2 представлено електропольові залежності (в геометрії $\angle kn = 0^\circ$) ЕМО ефекту при значеннях магнітного поля: $H_1=80$ Е, $H_2=95$ Е та $H_3=115$ Е які показують, що досліджуваний ефект є квадратичним за електричним полем (ЕМО сигнал зареєстровано на подвійній частоті зовнішнього електричного поля $E_{\perp}$). Аналізуючи Рис. 1 видно, що змінюючи положення зразка в полі (повертаючи в бік геометрії $\angle kn \rightarrow 90^\circ$), суттєво змінюється (зростає) величина ЕМО сигналу в максимумі магнітопольової залежності. Характер отриманих залежностей (форма кривої) фактично не змінюється. Таким чином, експериментально виявлено анізотропні властивості ЕМОЕ - величина ЕМО сигналу (в максимумі) суттєво залежить від орієнтації досліджуваного зразка відносно напрямку хвильового вектора k . Так, зокрема, з магнітопольових залежностей на Рис. 1 видно, що при $\angle kn = 11^\circ$, максимальна величина ефекту $\alpha_{\text{ЕМО}} \approx 1,7$ кут. сек., що більше ніж вдвічі перевищує максимум ефекту, зареєстрованого при $\angle kn = 0^\circ$ ($\alpha_{\text{ЕМО}} \approx 0,6$ кут. сек.).

Таким чином, результати досліджень показали, що величина ЕМО ефекту в поперечній геометрії експерименту залежить від величини напруженості зовнішнього магнітного поля H , та суттєво залежить від орієнтації досліджуваної плівки відносно напрямку хвильового вектора зондуєного лазерного променя.

Список використаних джерел

1. Aubert G. A novel approach of the magnetoelectric effects in ferrimagnets // JMMM.- 1983.- 31.- P.767-768.
2. Логгинов А.С., Мешков Г.А., Николаев А.В., Пятаков А.П. Магнитоэлектрическое управление доменными границами в пленке феррита-граната // Письма в ЖЭТФ - 2007. - Т.86, № 2. - С. 124-127.
3. Астров Д.Н. // ЖЭТФ.- 1960.- Т.38, № 3.- С.984-990.
4. Кричевцов Б.Б., Писарев Р.В., Селицкий А.Г. Электромагнитооптический эффект в феррите-гранате иттрия // Письма в ЖЭТФ.- 1985.- Т.41, №6.- С.259-261.
5. Кричевцов Б.Б., Павлов В.В., Писарев Р.В. Гигантский линейный магнитоэлектрический эффект в пленках ферритов-гранатов // Письма в ЖЭТФ.- 1989.- Т.49, №8.- С.466-469.
6. Коваленко В.Ф., Короновський В.Є. Особливості електромагнітооптичного ефекту в епітаксialних плівках феритів-гранатів // УФЖ.- 2002.- 47, №10.- С.960-965.
7. Koronovskyy V. E., Ryabchenko S. M., and Kovalenko V. F. Electromagneto-optical effects on local areas of a ferrite-garnet film // Phys. Rev. B.- 2005.- 71.- P.172402(1)-172402(4).
8. Koronovskyy V. E. Influence of an external mechanical strain on the character of the magneto-electric effect in epitaxial films of yttrium iron garnet // Phys. Stat. Sol. (a).- 2006.- 203, № 8.- P.2007-2011.

Надійшла до редакції 10.11.2008

УДК 535.362;577.395

Мамілов С.О., к.ф.-м.н.

Фотодисоціація оксигемоглобіну в артеріальній крові під дією лазера *in vivo*.

В роботі розглянуто взаємодію
низькоінтенсивного лазерного випромінювання з
біологічною тканиною. Показано, що це
випромінювання викликає фотодисоціацію
оксигемоглобіну в артеріальній крові.
Досліджено залежність величини зменшення
відносної концентрації оксигемоглобіну в
артеріальній крові від довжини хвилі
випромінювання, потужності лазера, відстані
від точки опромінювання до точки
вимірювання, температури біологічної тканини,
початкової величини відносної концентрації
оксигемоглобіну в артеріальній крові.

Ключові слова: лазерне випромінювання,
фотодисоціація, оксигемоглобін, сатурація.

*E-mail: mamilov@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Данілов В.В.

На сьогоднішній день, не зважаючи на
багаторічні дослідження впливу лазерного
випромінювання на біологічну тканину та
накопичений величезний експериментальний
матеріал по реакції організму людини на
низькоінтенсивне лазерне випромінювання,
механізми цього впливу ще до кінця не вивчені
[1-3]. Складність цих досліджень полягає в тому,
що біологічна тканина є середовищем, що сильно
розсіює світло і являє собою шарувату структуру,
кожен з шарів якої має свої коефіцієнти
розсіювання та поглинання. Крім того, найбільшу
достовірність можуть мати лише дослідження *in vivo*,
оскільки виділений зразок за своїми
властивостями буде відрізнятися від живої
тканини.

В 1998 році групою білоруських авторів була
висловлена думка, що одним з первинних
механізмів взаємодії лазерного випромінювання з
біологічною тканиною є фотодисоціація
оксигемоглобіну в артеріальній крові [4] з
виділенням вільного кисню, який переходить в
синглетний стан.

Нами було експериментально підтверджено
цю теорію [5] та проведено цикл досліджень
залежності квантового виходу фотодисоціації
HbO₂ в живій тканині від характеристик
лазерного випромінювання та стану тканини.
Експерименти проводилися шляхом реєстрації

S.O. Mamilov, PhD.

Laser-induced photodissociation of oxyhemoglobin in arterial blood *in vivo*.

This article is about the interaction of low-intensive
laser irradiation with biological tissues. It is shown
that this radiation induces photodissociation of
oxyhemoglobin in arterial blood. It is also studied
dependence of oxyhemoglobin concentration
reduction in arterial blood on the irradiation
wavelength, the power of laser, the distance
between points of irradiation and measuring, the
temperature of the biological tissue, the initial value
oxyhemoglobin concentration reduction in arterial
blood.

Key Words: laser irradiation, photodissociation,
oxyhemoglobin, saturation.

зміни величини відносної концентрації
оксигемоглобіну в артеріальній крові (величини
сатурації артеріальної крові киснем – SaO₂) за
допомогою високочутливого пульсоксиметра-
спектрофотометра [6]. Він складається з
пульсоксиметричного датчика, блоку збору і
первинної обробки інформації та персонального
комп'ютера, в якому проводилася остаточна
обробка інформації. Створений пульсоксиметр-
спектрофотометр дозволяє отримувати значення
величини сатурації артеріальної крові киснем з
похибкою, яка не перевищує 0,3%.

Пульсоксиметричний датчик складається з
двох світлодіодів (довжини хвиль 660 нм та 900
нм) та фотодіода між якими розташовано палець
руки. У більшості експериментів датчик
розташовувався на першій фаланзі пальця, а
лазерне випромінювання спрямовувалося на
внутрішню сторону третьої фаланги. Діаметр
лазерної плями на шкірі складав 7-8 мм.

Було досліджено залежність величини
відносної концентрації оксигемоглобіну в
артеріальній крові від довжини хвилі та
потужності випромінювання. На рис.1 наведено
данні про зменшення концентрації
оксигемоглобіну при дії випромінюванням різної
довжини хвилі.

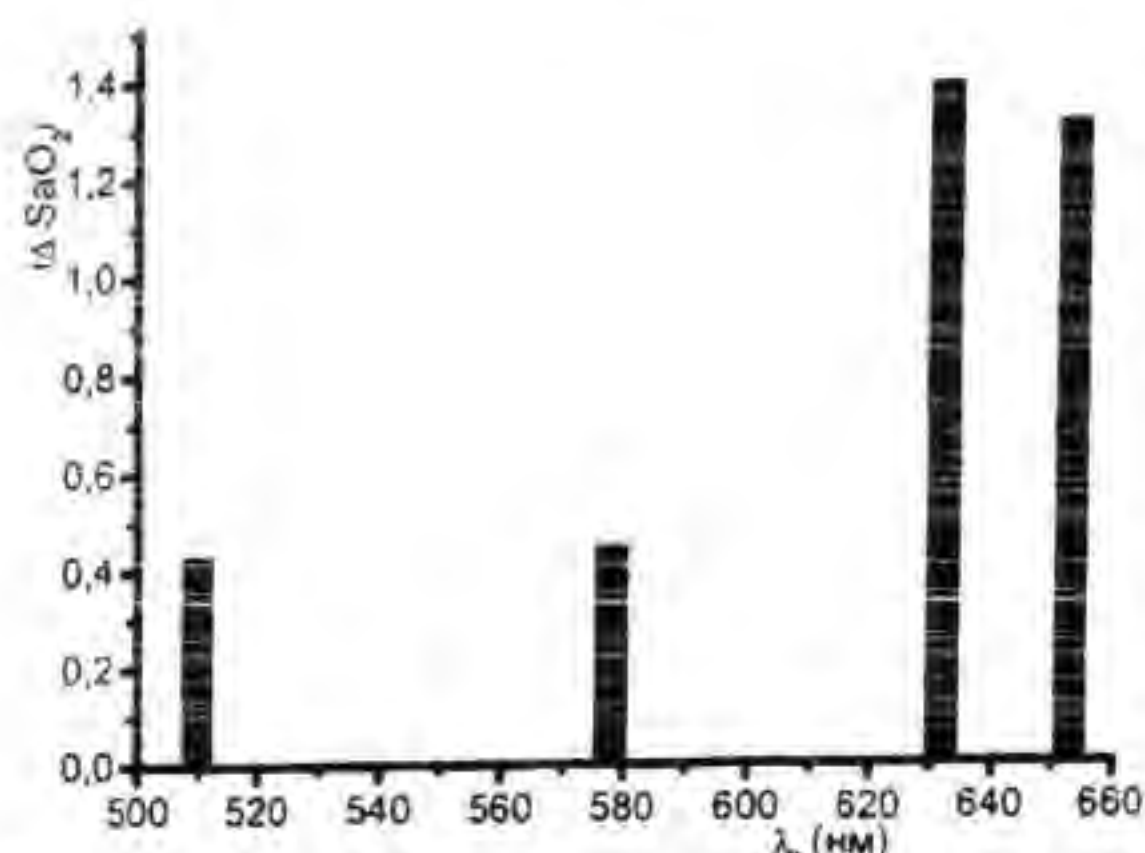


Рис. 1. Зменшення величини сатурації артеріальної крові киснем при різних довжинах хвиль опромінювання

Видно, що максимальне зменшення величини сатурації артеріальної крові киснем спостерігається при опроміненні біологічної тканини червоним світлом. При потужності 15 мВт на довжині хвилі 632 нм зміна відносної концентрації оксигемоглобіну складала ~ 1,4%. В жовтому та зеленому діапазонах квантовий вихід фотодисоціації зменшується в півтора рази, а в ближній ультрафіолетовій та інфрачервоній ділянках спектру процес не реєструється. Ці результати добре узгоджуються з спектральними характеристиками оксигемоглобіну та шкіри.

Величина ефекту залежить від потужності випромінювання, при зміні її для гелій-неонового лазера від 5 до 15 мВт зменшення відносної концентрації оксигемоглобіну змінювалося від 0,6% до 1,4% (рис. 2).

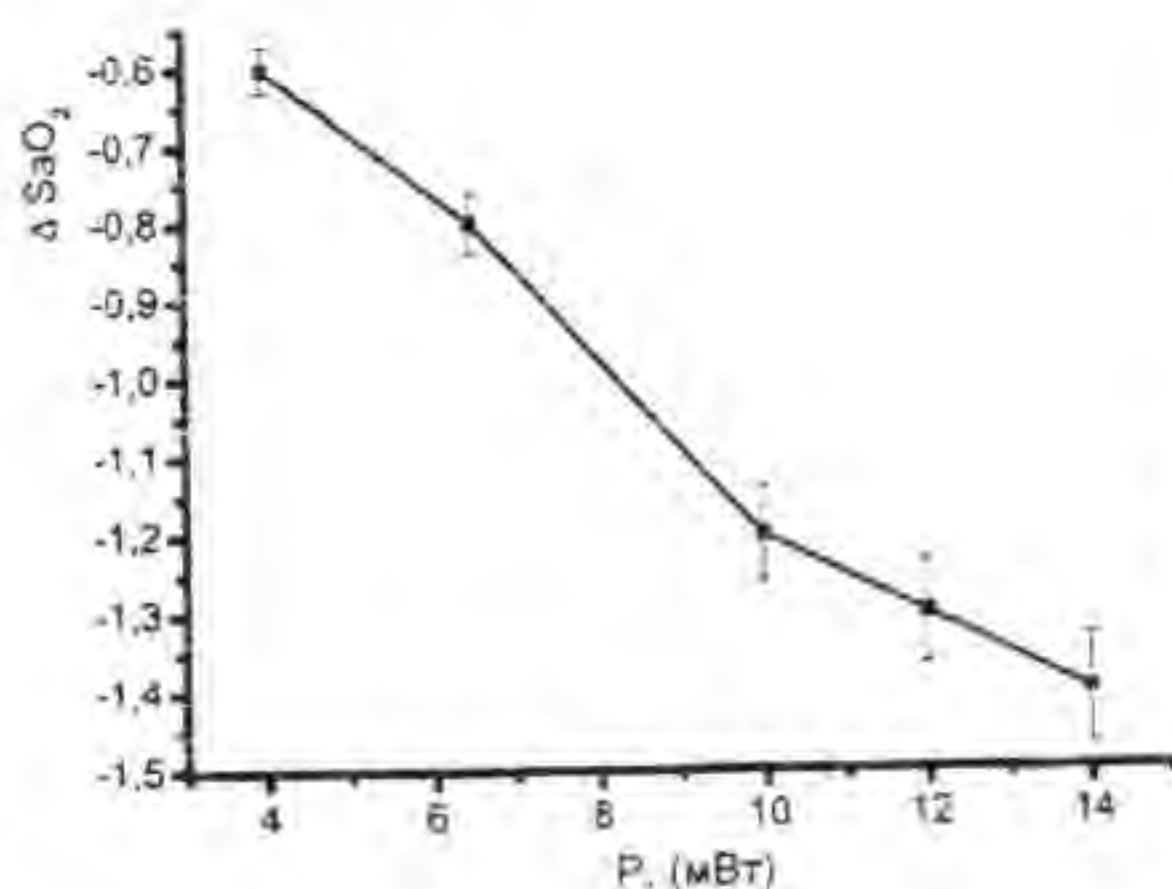


Рис. 2. Залежність величини сатурації артеріальної крові киснем від потужності гелій-неонового лазера

Ефект, що спостерігається має досить локальний характер і існує залежність ступеня зменшення відносної концентрації оксигемоглобіну в артеріальній крові від відстані між точками опромінення та вимірювання. При опроміненні другої фаланги пальця гелій-неоновим лазером ($P=14$ мВт) зміна величини сатурації артеріальної крові киснем складає 1,8-2%, у той час як опромінення третьої фаланги приводить до зменшення величини сатурації артеріальної крові киснем на 1,4%. При опроміненні віддалених ділянок, по яких проходить артерія, яка живить палець (область зап'ястку, низ долоні, основа пальця), ефект не спостерігався.

Процес зменшення величини сатурації артеріальної крові киснем триває протягом декількох секунд після початку опромінювання. Сталій рівень відносної концентрації оксигемоглобіну не залежить від часу опромінення. Після припинення опромінення відбувається, також протягом декількох секунд, збільшення відносної концентрації оксигемоглобіну до початкового рівня.

На рис. 3 наведена діаграма зміни відносної концентрації оксигемоглобіну в артеріальній крові до, під час і після закінчення опромінення лазером.

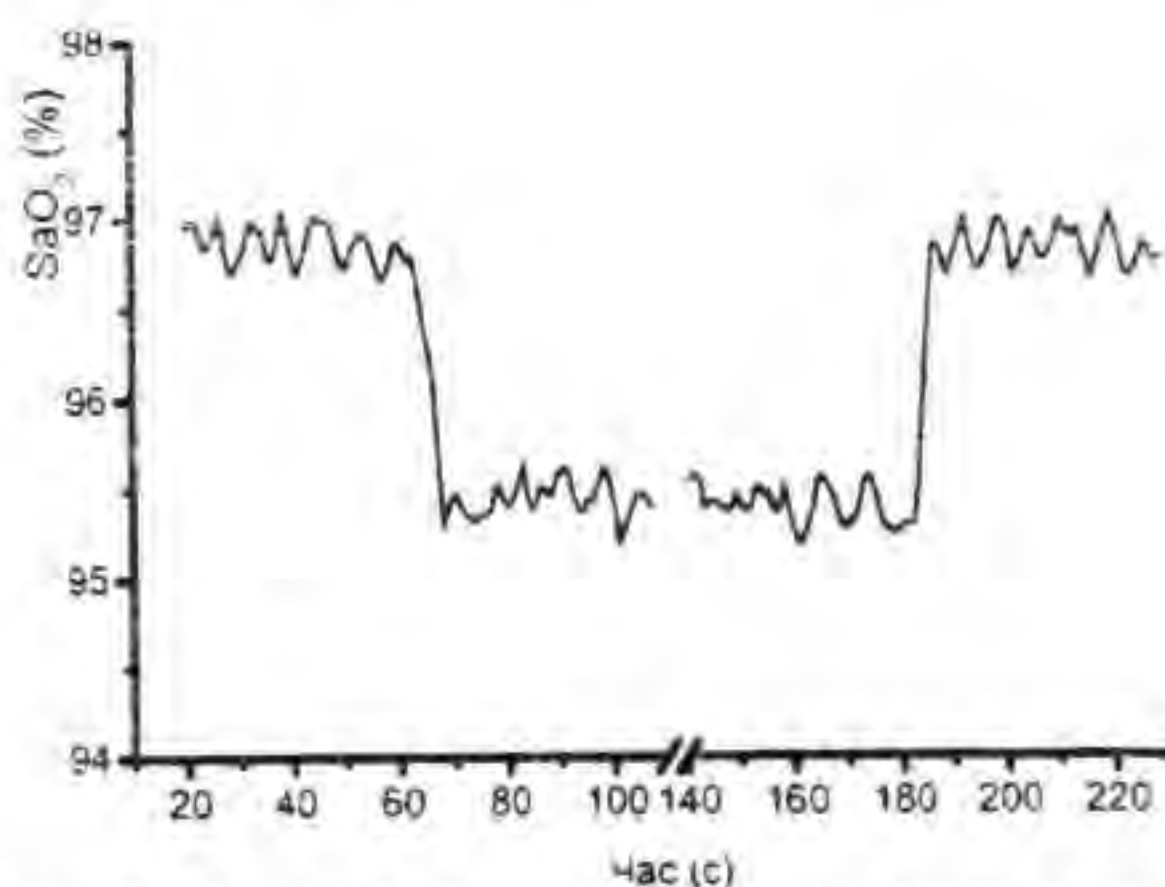


Рис.3. Зміна величини сатурації артеріальної крові киснем при початку та закінченні опромінення

Слід відзначити, що ефект лазерно-індукованої фотодисоціації оксигемоглобіну спостерігається при вихідному значенні відносної концентрації оксигемоглобіну вище 96%. Якщо ця величина складає 93-95%, то зменшення відносної концентрації оксигемоглобіну в артеріальній крові не спостерігається.

Досліджено вплив температури біологічної тканини на лазерно-індуковану фотодисоціацію оксигемоглобіну. Вимірювання проводилися в інтервалі температур від 29 до 43°C з кроком 3°C. Величина зменшення відносної концентрації оксигемоглобіну в артеріальній крові змінювалась в цьому діапазоні від 0 до 2,2% і складала 1,5% при нормальній температурі (Рис. 4).

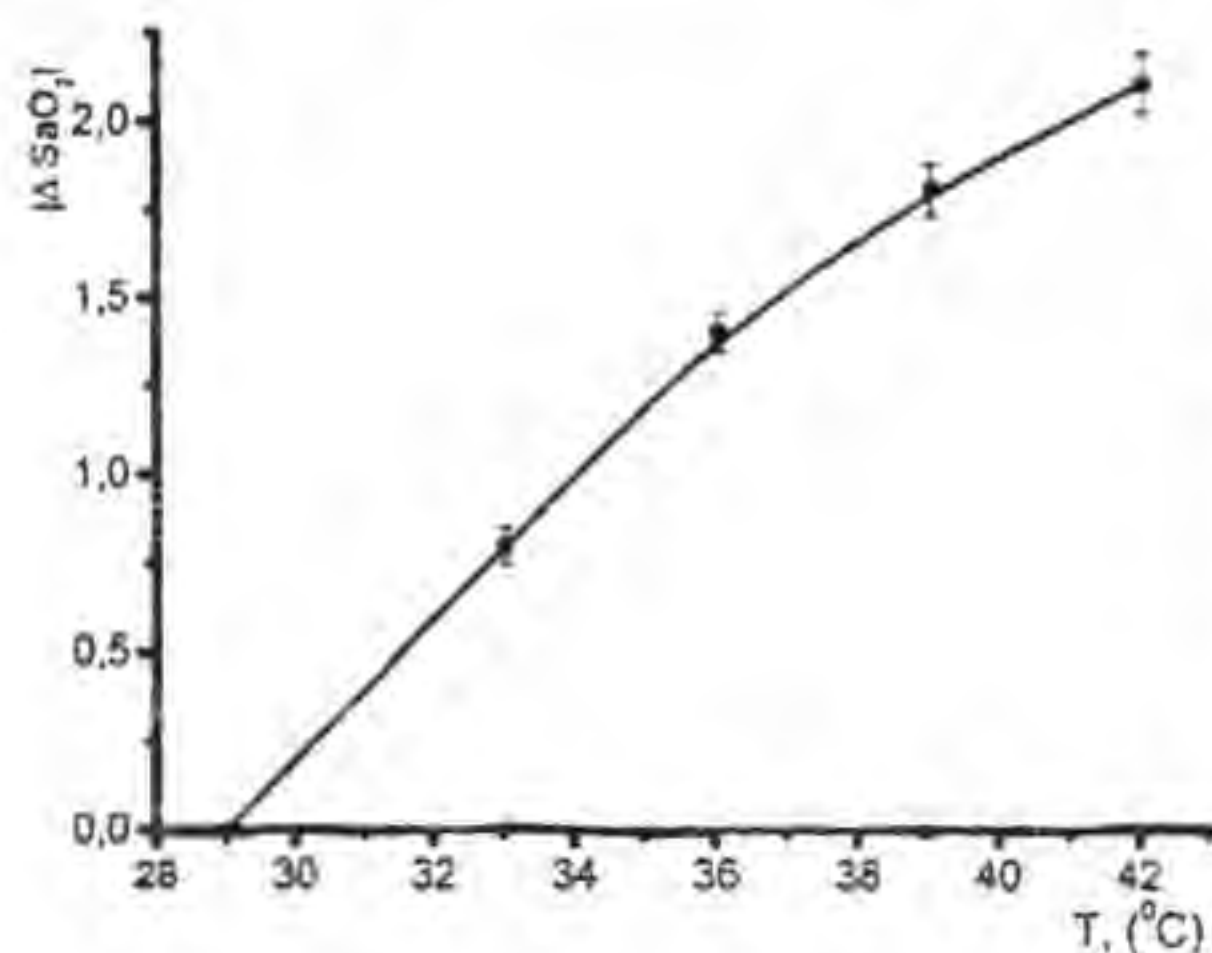


Рис. 4. Зменшення відносної концентрації оксигемоглобіну в залежності від температури біологічної тканини

В експериментах *in vitro* [7] було показано, що при підвищенні температури від 0°C до 40°C квантовий вихід фотодисоціації оксигемоглобіну зростає в 2,7 рази. Отримані нами дані *in vivo* у цілому непогано погоджуються з результатами роботи [7]. Однак в експериментах *in vivo* ми показали, що при локальній температурі тканини 29°C та нижче ніяких змін у величині сатурації артеріальної крові киснем не спостерігається, тобто при цих температурах фотодисоціація оксигемоглобіну не відбувається.

Висновки

Ефект лазерно-індукованої фотодисоціації оксигемоглобіну в артеріальній крові та залежність зменшення величини сатурації артеріальної крові киснем від температури відкриває можливість істотного підвищення локальної концентрації кисню в тканинах *in vivo*. Підвищення локальної температури тканини в зоні впливу лазерним випромінюванням на 5-6°C відносно нормальної температури тіла, приводить до росту виходу вільного молекулярного кисню приблизно в 1,8 рази. Отримані результати відкривають унікальні можливості використання лазерно-індукованої фотодисоціації оксигемоглобіну у біомедичній практиці, зокрема, для збільшення ефективності фотодинамічної терапії.

Список використаних джерел

1. Крюк А.С., Мостовников В.А., Хохлов И.В., Сердюченко Н.С. Терапевтическая эффективность низкоинтенсивного лазерного излучения. – Минск: Наука и техника, 1986. – 253 с.
2. Tuner J., Hode L. Low Level Laser Therapy. - Stockholm: Prima Books, 1999. – 352 p.
3. Baxter G.D., Diamantopoulos C. Therapeutic lasers: Theory and Practice. - Edinburgh; New-York, Churchill Livingstone, 1994. – 259 p.
4. Asimov M.M., Asimov R.M., Rubinov A.N. Efficiency of laser action on hemoglobin and oxyhemoglobin in skin blood vessels // SPIE Proceedings. – 1998. – 3254. – P. 407 - 412.
5. Mamilov S.A., Plaksiy Y.S., Virko Y.V. Changes of arterial blood saturation during a laser biostimulation // SPIE Proceedings. – 2001. – 4241. – P. 499-503.
6. Asimov M.M., Asimov R.M., Rubinov A.N., Mamilov S.A., Plaksiy Yu.S. High sensitive pulseoximeter-spectrophotometer for laser optical dosimetry in biology and medicine // SPIE Proceedings. – 2006. – 6251. – P.147-154.
7. Saffran W. A., Gibson Q. H. Photodissociation of Ligands from Hem and Hem Proteins: Effect of Temperature and Organic Phosphate // J of Biol. Chem. – 1977. – 252(22). – P.7955 -7958.

Надійшла до редколегії 14.10.08

УДК 621.385.833

Мельник П.В., канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Находкін М.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
академік НАН,
Федорченко М.І., канд. фіз.-мат. наук

Формування інтерфейсу Sn/Ge(111)-c(2x8)

За допомогою методів дифракції повільних електронів, фото- та оже-електронної спектроскопії досліджені зміни структури та електронних властивостей інтерфейсів Sn/Ge(111)-c(2x8). Встановлено металічний характер поверхонь зі структурами Ge(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ Sn та Ge(111)-7x7Sn імовірно обумовлений напруженнями в їх приповерхневій області.

Ключові слова: Sn, Ge(111)-c(2x8), інтерфейс, поверхневі стани, робота виходу, загин зон

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Дослідження структур нанометрових розмірів на поверхнях Ge та Si при адсорбції чужорідних атомів викликає значний фундаментальний та прикладний інтерес [2-7], обумовлений пошуком рушійних сил перебудови поверхонь. Знання таких сил необхідно для ціленаправленої модифікації структури та електронних властивостей поверхонь напівпровідників для використання їх з метою розвитку нанотехнологій. Попередньо нами [2,3,16] були досліджені структурні фазові стани інтерфейсу Sb/Ge(111) та їх взаємозв'язок з електронними властивостями цієї системи. Було встановлено, що відпал поверхонь Sb/Ge(111) призводить до утворення структур з дальнім порядком раніш відомої 2x1 при $\theta_{Sb}=1$ моношар (МШ) і (7x7) при $0,4 \text{ МШ} \leq \theta_{Sb} \leq 0,8 \text{ МШ}$, що вперше спостерігалась нами на поверхні Sb/Ge(111) [16]. В розподілі густини електронних станів біля самого рівня Фермі (E_F) були виявлені максимуми, природа яких залишається дискусійною. Нами була висунута гіпотеза, що ці максимуми обумовлені поверхневими станами, які утворюються внаслідок значних напружень в приповерхневій області, таких, наприклад, як у гетеропереході Ge/Si(111) [4], або у системі Si(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ R30°-B [5]. Значні латеральні

Melnik P.V., Ph.D., prof.,
Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of
Ukraine,
Fedorchenko M.I., Ph.D.

Formation of the Sn/Ge(111)-c(2x8) interface

The modification of the structure and electronic properties of the Sn/Ge(111)-c(2x8) interfaces have been investigated using Auger electron spectroscopy, ultraviolet photoelectron spectroscopy and low energy electron diffraction. It is established a metallic character the Ge(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ Sn and Ge(111)-7x7Sn surfaces probably related with strais in subsurface area.

Keywords: Sn, Ge(111)-c(2x8), interface, surface states, work function, band-bending

напруження виникають через різницю міжатомних відстаней у шарах Sb і Ge, внаслідок чого утворюються надструктури, і має місце обмін зарядами між об'ємом та поверхнею.

Дослідження адсорбції атомів Sn на Ge(111)-c(2x8) [6-9] теж показали утворення структури 7x7 при $\theta_{Sn} = 0,3-0,5 \text{ МШ}$. Автори пояснювали появу такої структури латеральними напруженнями в приповерхневій області.

Гіпотеза про роль латеральних напружень також успішно використовувалась для пояснення появи реконструкцій в тонких шарах Ge на підкладинці Si(111)-(7x7) [10], де було показано, що плівки Ge, починаючи з самих тонких товщин до товщин приблизно 1000 Å, мають досить великі латеральні напруження і мають структуру поверхні 7x7. Автори [10] прямо зв'язують появу структури 7x7 на поверхнях Ge(111) з латеральними напруженнями. Але на жаль в роботах [6-10] не було показано, як зміни, що виникають на поверхні Ge(111) при напыленні атомів Sn, або при зміні товщини напыленої плівки Ge впливають на густину поверхневих станів поблизу рівня Фермі. Наші експерименти повинні були ліквідувати цей пробіл. Вибір атомів олова як адсорбата в досліджуваних системах також обумовлений тим, що при адсорбції атомів Sn на поверхні Ge(111)-c(2x8) при зміні концентрації атомів адсорбата та

температури формування інтерфейсів виникає велика кількість структур. Найбільш відтворюваними з них в працях різних дослідників є $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, 3×3 , 7×7 , 5×5 , 1×1 . В той же час, спеціального порівняльного дослідження електронних властивостей утворених надструктур ще не проводилось.

Метою цієї роботи було проведення експериментальних досліджень формування інтерфейсів Sn з кристалічними поверхнями, Ge(111)-c(2x8), дослідження електронної структури валентної зони інтерфейсів, величин роботи виходу та загины зон поблизу поверхні в залежності від товщини адсорбату та температури прогріву інтерфейсів для прояснення можливого впливу латеральних напружень на електронні властивості наноструктурованих поверхонь.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакумній камері з базовим тиском $\sim 2\cdot 10^{-10}$ тор з використанням методик Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС) з енергією квантів у діапазоні 6.0 – 10,8 еВ. В камері містилась іонна гармата для очищення досліджуваної поверхні Ge іонами Ag та система для контрольованого нанесення шарів Sn заданої товщини *in situ*. Дані ОЕС, ДПЕ та ФЕС дозволяли визначати елементний склад поверхні, її кристалографічну структуру, електронну структуру валентної зони, роботу виходу та величини загины зон.

Зразки Ge вирізались із (111) пластин нічим спеціально не легованих. Після попередньої обробки (промивка в перекисі водню та в деіонізованій воді) зразок очищався у вакуумі за допомогою декількох циклів бомбардування іонами Ag ($E_p=600$ еВ) та наступного прогріву при 500 – 600 С. Вибраний стандартний метод очистки дозволяв отримувати кристалічні поверхні зразків Ge(111) без ознак домішок в спектрах ОЕС та з контрастними картинками ДПЕ, що відповідали надструктурі c(2x8).

Потік парів Sn отримувався за допомогою джерела Кнудсена, а ступінь покриття поверхні атомами Sn (θ_{Sn}) визначався за допомогою спеціально проградуєованих кварцових терезів. Швидкість нанесення Sn була рівною 0,05 МШ за хвилину. Робота виходу (ϕ) визначалась, як і в статтях [2,11], за допомогою співвідношення

Ейнштейна при $h\nu = 7,7$ еВ. Зміна загины зон (ΔY) при зміні θ_{Sn} та температури оцінювалась за зміною положення максимумів sp^3 гібридизованих електронів ФЕС Ge, вимірюваних при $h\nu = 10,2$ еВ. Похибка при вимірюванні ϕ та ΔY становила $\pm 0,01$ еВ.

Результати експериментів та їх інтерпретація

Формування інтерфейсів атомів Sn з поверхнею Ge(111) c(2x8) відбувалось при кімнатній температурі. Після кожного етапу напilenня Sn описувались, або фотографувались картини ДПЕ, вимірювались спектри ФЕС і ОЕС.



Рис.1. Фотографії картин ДПЕ від поверхні Ge(111)-c(2x8) при адсорбції на ній атомів Sn та відпалюванні системи: а- Ge(111)-c(2x8) ($\theta_{Sn}=0$ МШ); б- Ge(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ ($\theta_{Sn}=0.2$ МШ, $T_{прогр}=130$ С); в- Ge(111) 7×7 ($\theta_{Sn}=0.4$ МШ, $T_{прогр}=360$ С)

Незважаючи на те, що спостереження ДПЕ вимушено робилися під кутом $\approx 48^\circ$ і деякі рефлекси картин ДПЕ випадали з поля зору об'єктива фотокамери, у всіх випадках можливо було легко ідентифікувати симетрію розташування рефлексів. Очищена та відпалена атомарно чиста поверхня Ge(111) завжди мала чітку картину рефлексів $c(2 \times 8)$ (рис. 1а). При поетапному напыленні атомів Sn на таку поверхню при кімнатній температурі з ростом Θ_{Sn} рефлекси $c(2 \times 8)$ втрачали свою інтенсивність і контрастність. При $\Theta_{Sn} \approx 1$ МШ на картині ДПЕ спостерігались лише ослаблені рефлекси структури 1×1 , а при $\Theta_{Sn} \geq 3$ МШ рефлексів взагалі не спостерігалось. Це може свідчити, що при адсорбції атомів Sn на Ge(111) $c(2 \times 8)$ має місце аморфізація приповерхневого шару.

Було встановлено, що якщо після напылення атомів Sn при кімнатній температурі поверхня Ge(111) прогрівалась до температур $\geq 130^\circ\text{C}$, досліджувана система упорядковувалась. Після адсорбції атомів Sn до $\Theta_{Sn} = 0.2$ МШ та прогріві системи до температури $\approx 130^\circ\text{C}$ спостерігається поява досить чіткої і контрастної картини рефлексів ДПЕ, яка свідчить про формування на поверхні структури $\sqrt{3} \times \sqrt{3} R30^\circ$ (рис. 1 б). При збільшенні Θ_{Sn} до значень $\approx 0.4-0.6$ МШ та прогріві системи до температури $\geq 360^\circ\text{C}$ на поверхні формується структура 7×7 (рис. 1в). Подальше збільшення Θ_{Sn} до значень $\approx 0.7-0.8$ МШ та прогрів системи до температур $\geq 360^\circ\text{C}$ приводить до появи картини ДПЕ з дифузними та неконтрастними рефлексам $\sqrt{3} \times \sqrt{3} R30^\circ$ і вже при $\Theta_{Sn} \approx 1$ МШ з'являється картина ДПЕ з рефлексам від структури 1×1 .

На рисунках 2 зображені ФЕС ($h\nu = 7.7$ еВ) верхнього краю валентної зони інтерфейсу Sn/Ge(111) $c(2 \times 8)$ при різних Θ_{Sn} . Для атомарно чистої поверхні Ge(111) $c(2 \times 8)$ ФЕС (крива а) спектри ФЕС є подібними до літературних [12, 13]. При напыленні 0.2 МШ Sn при кімнатній температурі видно, що низькоенергетичний край ФЕС зміщується в сторону від рівня Фермі (крива б рисунка 2). Це свідчить про те, що робота виходу (ϕ) поверхні зменшується. Утворення поблизу рівня Фермі нових особливостей електронної структури помітити не вдається. Різке збільшення густини станів біля E_F спостерігається лише після прогріву інтерфейсу при температурі $\approx 130^\circ\text{C}$ і утворенні на поверхні надструктури $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (крива в рисунка 2). При прогріві цієї ж системи до температури $\approx 360^\circ\text{C}$ та утворенні надструктури 7×7 густина станів біля самого рівня Фермі

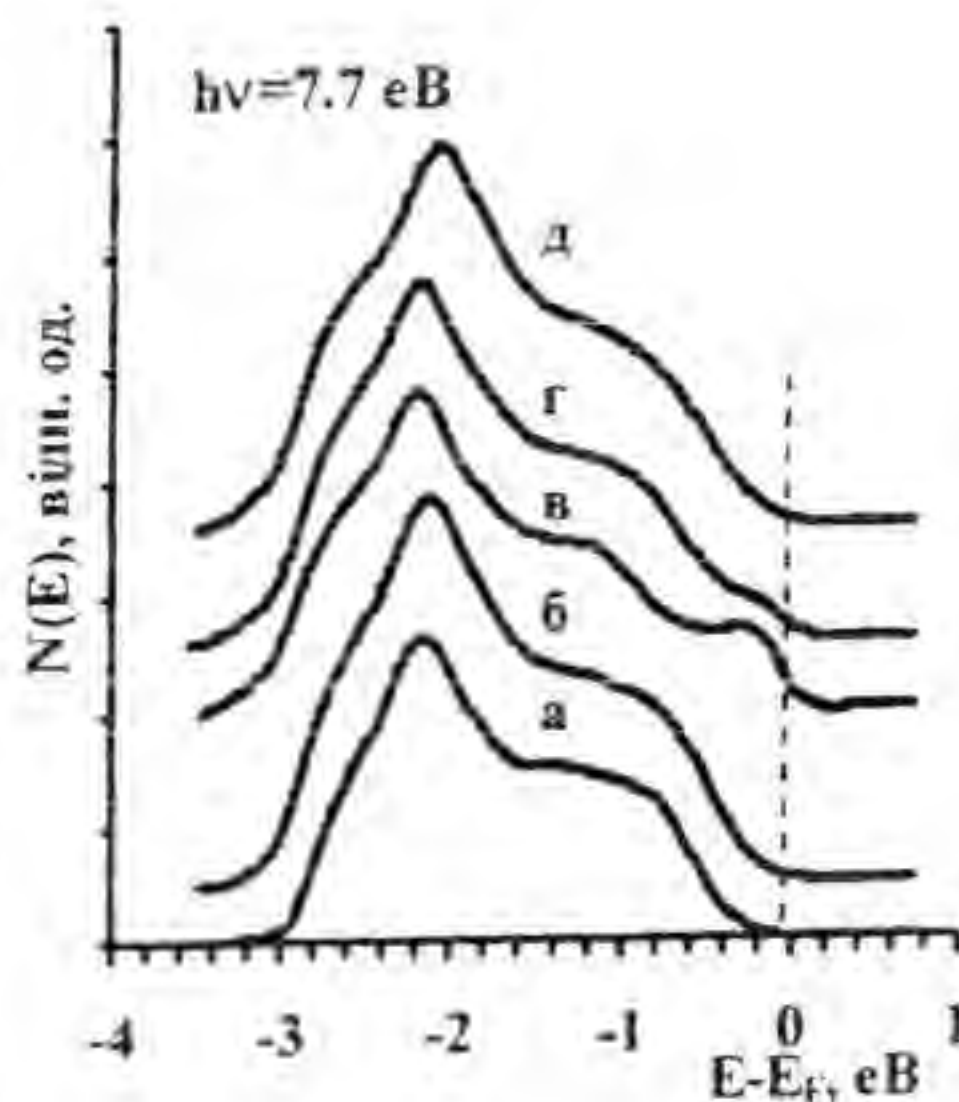


Рис. 2 ФЕС ($h\nu = 7.7$ еВ) валентної зони інтерфейсу Sn/Ge(111): а– Ge(111) 2×8 ; б– Ge(111) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn} = 0.2$ МШ, без прогріву); в– Ge(111) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn} = 0.2$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 130^\circ\text{C}$); г– Ge(111) 7×7 ($\Theta_{Sn} = 0.4$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 360^\circ\text{C}$); д – Ge(111) 1×1 ($\Theta_{Sn} = 1$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 500^\circ\text{C}$)

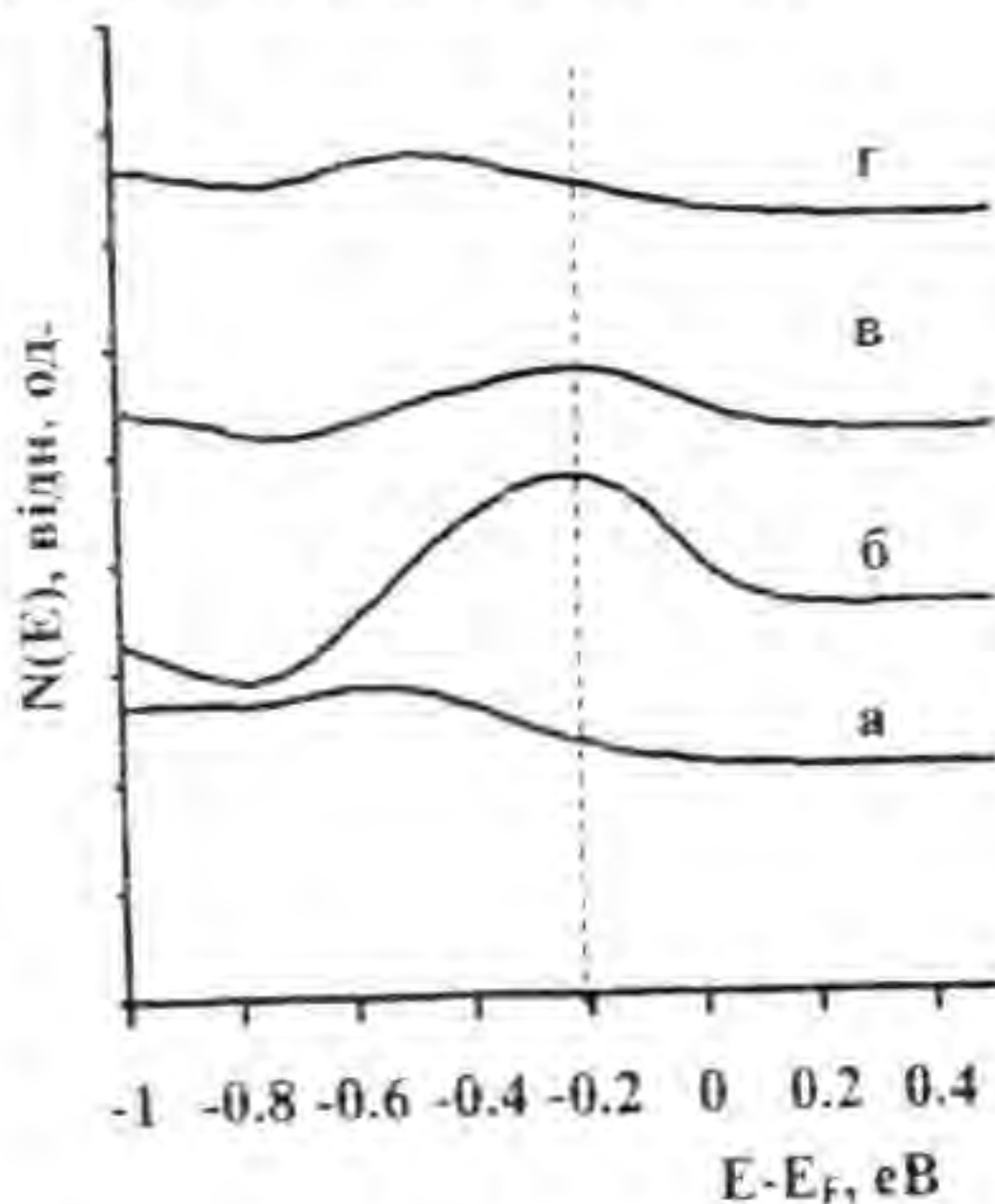


Рис. 3. Різницеві спектри між ФЕС спектрами від поверхонь з певним Θ_{Sn} (спектри б, в, г, д рис. 2) і спектром від атомарно чистої поверхні Ge(111) $c(2 \times 8)$ (спектр а рис. 2): а– $\Theta_{Sn} = 0.2$ МШ без прогріву; б– Ge(111) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ($\Theta_{Sn} = 0.2$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 130^\circ\text{C}$); в– Ge(111) 7×7 ($\Theta_{Sn} = 0.4$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 360^\circ\text{C}$); г– Ge(111) 1×1 ($\Theta_{Sn} = 1$ МШ, $T_{\text{прогр}} = 500^\circ\text{C}$)

зменшується (крива г рис.2), але залишається значно більшою ніж для непрогрітої поверхні інтерфейсу. При подальшому збільшенні Θ_{Sn} до значень $\approx 0.7-1.0$ МШ та прогріві системи до температур ≥ 360 густина станів біля рівня Фермі різко зменшується (крива д рисунка 2). Набагато краще збільшення густини станів біля рівня Фермі видно з рисунка 3, де представлені різницеві спектри між ФЕС спектрами від поверхонь з певним Θ_{Sn} і спектром від атомарно чистої поверхні Ge(111) c(2x8).

Представлені результати можна пояснити наступним чином. При кімнатній температурі адсорбовані атоми Sn потрапляють на поверхню Ge(111)-c(2x8) у випадкові місця і поверхня стає розупорядкованою, що спостерігається на картинах ДПЕ. Прогрів системи до 130С призводить до того, що ізовалентні по відношенню до атомів підкладки атоми Sn вбудовуються в поверхню Ge(111) і виконують роль адатомів. При цьому поверхня реконструюється до фази $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, яка може мати досить великі латеральні напруження в приповерхневій області. Ці напруження можуть призвести до появи, чи значного збільшення густини електронних станів біля самого рівня Фермі. При підвищенні температури прогріву латеральна напруженість зменшується, поверхня перебудовується. При прогрівах до температур більших 360С поверхня перебудовується до структури 7x7, яка є менш напруженою, але яка ще має достатньо помітну густину поверхневих станів біля рівня Фермі. При збільшенні покриття до 0.7-1.0 МШ та прогріві системи утворюються надструктури $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ (картина ДПЕ має дифузний малоконтрастний характер) та 1x1, які мають значно менші латеральні напруження в приповерхневій області і, відповідно, значно меншу густину поверхневих станів біля рівня Фермі.

В результаті проведених досліджень було встановлено, що на відміну від раніш вивченої нами системи Sb/Ge(111) поведінка роботи виходу ϕ та загибу зон ΔY залежить тільки від товщини напиленого шару Sn і мало змінюється при прогріві та формуванні надструктур. Результати вимірювань змін роботи виходу $\Delta\phi$ поверхні досліджуваної системи та величини загибу зон ΔY поблизу поверхні представлені на рис.4. З рисунка видно, що з ростом покриття Θ_{Sn} робота виходу поверхні монотонно зменшується максимально на 0.26 eV вже при $\Theta_{Sn} \approx 1$ МШ, а зони при цьому загинаються вниз на 0.06 eV. Такий характер зміни ϕ та ΔY

обумовлений перерозподілом заряду поблизу поверхні. Адсорбція атомів Sn на поверхні Ge змінює перерозподіл зарядів поблизу поверхні. Це відбувається унаслідок перерозподілу заряду

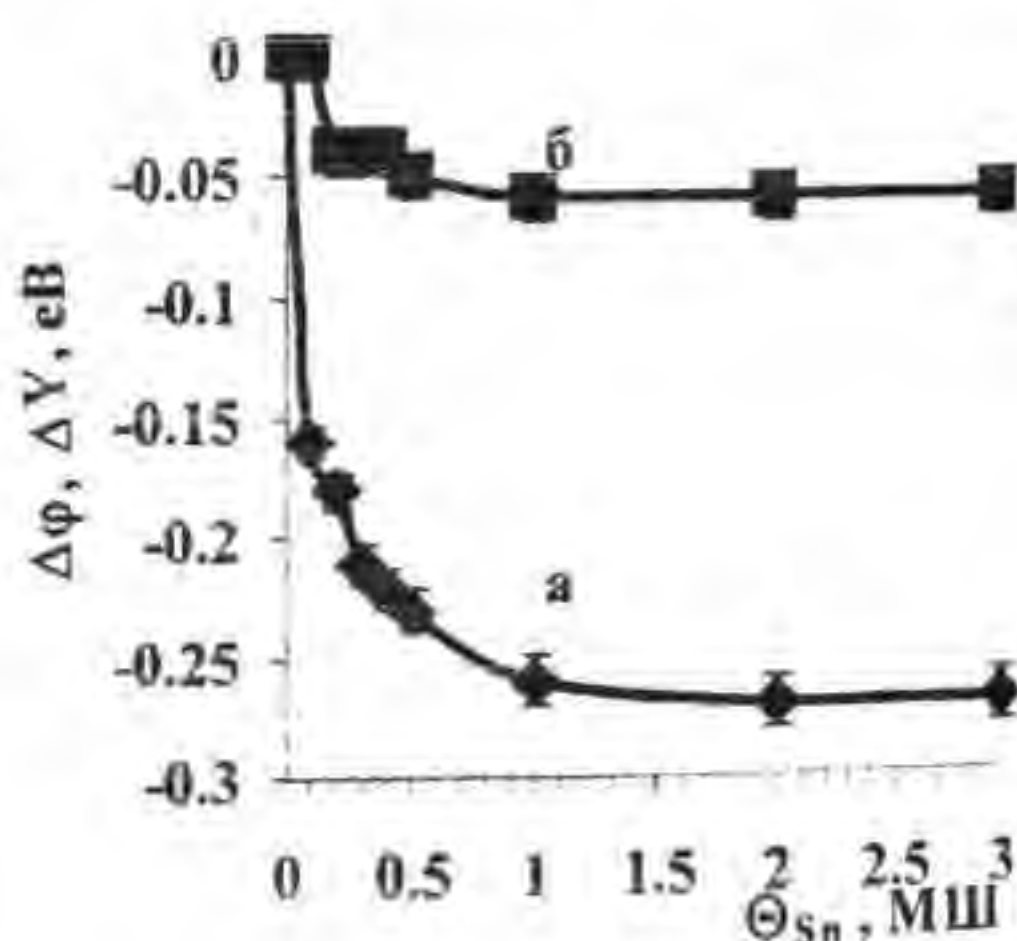


Рис.4 Зміна роботи виходу $\Delta\phi$ (а) та загибу зон ΔY (б) системи Sn/Ge(111) в залежності від Θ_{Sn}

між атомами Sn і Ge у відповідності зі значеннями їх електровід'ємності згідно зі шкалою Оллреда-Рохова (2.02- Ge, 1.72- Sn, [14]), і внаслідок перерозподілу заряду між поверхневими станами і об'ємом. Внаслідок переходу електронної густини від атомів Sn до атомів Ge зменшується ефективна електронна спорідненість досліджуваної поверхні, а внаслідок відтоку електронів із поверхневих станів в об'єм загиб зон змінюється до низу. Це і обумовлює зменшення ϕ системи. При $\Theta_{Sn} \geq 1$ МШ величина ϕ дорівнює ≈ 4.44 eV і це є досить близьким значенням до $\phi_{Sn} = 4.38$ eV приведенного в [1] для зразків полікристалічного олова.

Той факт, що величина ϕ практично не змінюється при переході від неупорядкованої системи Sn/Ge(111), утвореної, наприклад, при напиленні Sn при кімнатній температурі ($\Theta_{Sn} \approx 0.2$ МШ), до упорядкованої при відпалі системи та утворенні надструктури $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ протирічить нашим уявленням про зміну ϕ при зміні поверхневої фази (дослідження проведені в [2] для системи Sb/Ge(111)) і очевидно потребує додаткового вивчення.

Висновки

Дослідження особливостей формування інтерфейсів Sn з кристалічними поверхнями, $\text{Ge}(111)\text{-c}(2\times 8)$ дозволило встановити, що поверхні $\text{Ge}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}R30^\circ\text{:Sn}$, $\text{Ge}(111)\text{-}7\times 7\text{:Sn}$, мають достатньо високу густину зайнятих поверхневих станів впритул до рівня Фермі. Ці поверхні можуть кваліфікуватись, як поверхні металічного типу. Найбільш імовірною причиною металізації цих поверхонь є латеральні напруження, які виникають при формуванні відповідних інтерфейсів. Найбільша густина металічних поверхневих станів, а відповідно і найбільші механічні напруження в приповерхневому шарі спостерігаються на поверхні $\text{Ge}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}R30^\circ\text{:Sn}$.

Робота виконувалась за бюджетного фінансування та часткового фінансування Міносвіти та науки України, грант М/175-2007

Список використаних джерел

1. Ю.С. Протасов, С.Н.Чувашев *Электроника*// 2003.-479С.-Москва, издательство МГТУ имени Баумана.
2. М.Г. Находкін, М.І. Федорченко. Формування інтерфейсу $\text{Sb/Ge}(111)$ // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2006.- вип. 4. -С.323-332.
3. П.В. Мельник, М.Г. Находкін, М.І. Федорченко. Формування інтерфейсу $\text{Sb/Ge}(111)$ при адсорбції Sb на аморфізовану поверхню $\alpha\text{-Ge}(111)$ та відпалі системи до упорядкування // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.- 2007.- вип. 4. -С.261-266.
4. T.Miller, T.C. Hsieh, P. John, A.P. Shapiro, A.L. Wachs, T.C. Chiang Strain- induced metal-insulator transition of the $\text{Ge}(111)$ surface // *Phys.Rev.B*—1985.—33, N6.—P.4421-4423
5. H.Q. Shi, M.W. Radny, P.V. Smith Electronic structure of the $\text{Si}(111)\sqrt{3}\times\sqrt{3}R30^\circ\text{-B}$ surface // *Phys. Rev.B*.-2002.-V.66.- P.-085329.
6. S.B. DiCenzo, P.A. Bennet, D.Tribula, P.Thiry, G.K.Whertheim, J.E. Rowe Structure of $\text{Sn/Ge}(111)$ from low-energy electron-diffraction and photoemission studies// *Phys.Rev B*.-1985.- 31,N4.-P.2330-2337.
7. T. E. Kidd, T. Miller, M.Y. Chou, and T.-C. Chiang $\text{Sn-Ge}(111)$ Surface Charge-Density-Wave Phase Transition // *Phys. Rev. Lett.*—2000.—85.—P. 3684-3687.
8. Tien-Lin Lee, Samantha Warren, Bruce C. C. Cowie, and Jorg Zegenhagen Chemically Resolved Structure of the $\text{Sn/Ge}(111)$ // *Phys. Rev. Lett.*—2006.—96.—P. 46103-46107.
9. M. Gothelid, T.M. Grehk, M. Hammar, U.O. Karlsson, S.A. Flodstrom. Adsorption of tin on the $\text{Ge}(111)\text{-c}(2\times 8)$ surface studies with scanning tunneling microscopy and photoelectron spectroscopy // *Surf.Sci.*1995.- 328.— P.80-94
10. H. J. Gossmann, J. C. Bean, L. C. Feldman, E. G. McRae, and I. K. Robinson. 7×7 Reconstruction of $\text{Ge}(111)$ Surface under Compressive Strain. // *Phys. Rev. Lett.* — 1985 55. —p. 1106-1110.
11. М.Г. Находкін, М.І. Федорченко. Залежність роботи виходу поверхні $\text{Si}(001)$ від ступені покриття її вісмутом //Вісник Київського університету. серія фіз., мат. Наук 2004.-вип. 4.-С.373-378.
12. D.E. Eastman, W.D. Grobman Photoemission densities of Intrinsic Surface States for Si, Ge and GaAs. // *Phys.Rev.Lett.*—1972.—28, N21.— P.1378-1381.
13. T. Murotani, K.Fujiwara and M. Nishijima Photoemission measurements of surface states for cleaved and annealed $\text{Ge}(111)$ surfaces // *Phys.Rev.B*—1975.—12, N6.—P.2424-2426
14. R. S. Becker, J. A. Golovchenko, D. R. Hamann, and B. S. Swartzentruber Real-Space Observation of Surface States on $\text{Si}(111) 7\times 7$ with the Tunneling Microscope", // *Phys. Rev. Lett.* 1985.-55,—P.2032-2037
15. А. Оллед, Е.В. Рохов. Взаимосвязь электроотрицательности и строения элементов // *Ж.Неорганической Химии*.- 1958.— 5, №6.—С.264-272.
16. М. І. Федорченко and М. Г. Nakhodkin. Formation and properties of the antimony germanium (111) interfaces // Праці II Міжнародної конференції "Електроніка та прикладна фізика", 11-14 жовтня 2006 року, Київ, Україна С.54.

Надійшла до редколегії 10.10.2008р.

УДК 621.385.111, 615.014.075

Прокопенко О. В.^{*}, канд. фіз.-мат. наук,
Верба Р. В., студент,
Борисенко М. О., студентка

Вузькосмуговий режим фазової синхронізації наноконтактів

Розглянуто динаміку вектора намагніченості в магнітному наноконтакті (МНК). Записано рівняння, що описує процес синхронізації декількох магнітних наноконтактів. Проаналізовано залежність нормованої амплітуди вимушених коливань намагніченості у МНК, що знаходиться у надкритичному режимі, від кута намагнічування та величини зовнішнього НВЧ магнітного поля.

Ключові слова: магнітний нанокontakt, синхронізація контактів, вимушені коливання, кут намагнічування.

^{*}E-mail: mga@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Данилов В. В.

Однією з найперспективніших тенденцій використання магнітовпорядкованих речовин є створення нелінійних надвисокочастотних (НВЧ) електронних приладів, що мають нанорозміри.

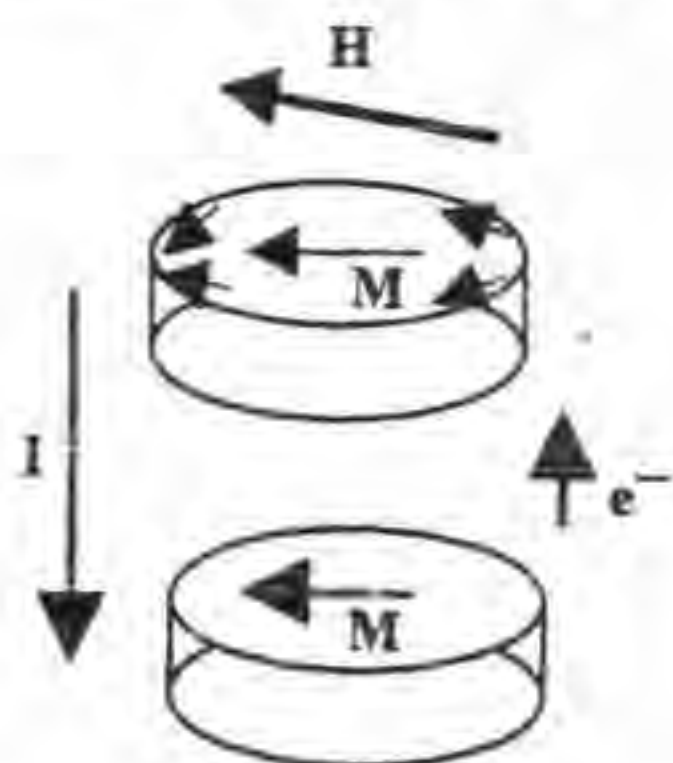


Рис. 1 Типовий магнітний нанокontakt, що складається з шару магнітожорсткої речовини (нижній шар, в якому магнітний момент є «закріпленим») та шару магнітом'якої речовини (верхній шар, в якому магнітний момент є «вільним»). Обидва шари розділені тонким прошарком, крізь який можливе тунелювання носіїв заряду.

Prokopenko O. V.^{*}, Ph.D.,
Verba R. V., Student,
Borisenko M. O., Student

Narrow-band regime of mutual phase- locking of spin-torque nanooscillators

The dynamics of magnetization's vector in spin-torque nanooscillator (STNO) is discussed. The phase-locking equation for synchronously working several STNOs is obtained. The dependence of forced oscillations normalized amplitude on magnetization angle and on value of external microwave magnetic field is examined in above-critical regime of STNO's working.

Key words: spin-torque nanooscillator, phase-locking, forced oscillations, magnetization angle.

Таким приладом, наприклад, може бути система зв'язаних магнітних наноконтактів (МНК), розташованих у середині шару з магнітної речовини [1–2].

Типовий МНК представляє собою трьохшарову структуру, зображену на рис. 1 [3–4]. Її типові розміри: діаметр $\sim 2-20$ нм, повздовжній розмір (вздовж напрямку протікання струму) $\sim 5-20$ нм [3–4]. Один з шарів наноконтакту (нижній на рис. 1) зроблено з магнітожорсткої речовини, тобто в цьому шарі вектор намагніченості M має цілком визначену орієнтацію. Напрямок цього вектора визначається напрямком зовнішнього магнітного поля H . Верхній шар у МНК зроблено з магнітом'якої речовини. Там вектор M може мати різні напрямки в різних точках шару.

Було показано теоретично [5, 6] і потім підтверджено експериментально [3, 7], що спін-поляризований струм (СПС), що протікає крізь «вільний» магнітний шар, може збуджувати надвисокочастотні коливання намагніченості. Відомо, що це явище відбувається тільки при струмах I , більших деякого порогового значення I_c [3–7].

В даній роботі теоретично розглянуто процес вимушеної генерації в МНК під час протікання крізь нього слабого надкритичного СПС (параметр надкритичності $\zeta = I/I_c < 2$). Проаналізовано залежність нормованої амплітуди вимушених коливань намагніченості у МНК від кута намагнічування та величини зовнішнього НВЧ сигналу.

В попередніх роботах (наприклад, див. [1, 8]) було показано, що динаміка вимушених коливань вектора намагніченості в МНК може бути описана рівнянням:

$$\frac{db}{dt} = -i(\omega_0 + N|b|^2)b - \Gamma b + \sigma I(1 - |b|^2)b + \Lambda e^{-i\omega t},$$

де $b(t) = \frac{m_x(t) - im_y(t)}{\sqrt{2}M_0}$ – нормована амплітуда

вимушеної генерації; M_0 – довжина вектора намагніченості у «вільному» магнітному шарі;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M \cos^2(\theta))}$ – власна частота

генерації; $N = \frac{\omega_H \omega_M}{2\omega_0} \left(\frac{3\omega_H^2 \sin^2(\theta)}{\omega_0^2} - 1 \right)$ –

коефіцієнт нелінійного зсуву частоти; Γ – коефіцієнт, що визначає втрати в системі;

$\sigma = \sigma_0 \cos(\gamma_p)$; $\sigma_0 = \frac{e\hbar\mu_B}{2eM_0LS}$; e – спин-

поляризаційна ефективність; e – модуль заряду електрона; L – товщина магнітного шару; S –

площа наноконтакта, крізь який протікає струм; $\omega_H = \gamma H$; $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ (рис. 2). Амплітуда

зовнішнього НВЧ сигналу Λ в (1) залежить від типу сигналу. В тому випадку, коли на МНК діє зовнішнє НВЧ магнітне поле іншого МНК, Λ



Рис. 2 Границя «вільного» магнітного шару (ліворуч) та «закріпленого» магнітного шару (праворуч). Вектор $\vec{p}$ визначає напрямок протікання спин-поляризованого струму.

має вигляд:

$$\Lambda = \gamma \frac{h_y + ih_x}{2\sqrt{2}}. \quad (2)$$

При малих значеннях надкритичності ζ рівняння (1) може бути лінеаризоване і приведене до безрозмірного кубічного рівняння:

$$(x-1)^2 x + [\xi - \eta(x-1)]^2 x = \lambda^2, \quad (3)$$

де $x \equiv \frac{P}{P_0}$ – нормалізована потужність вимушеної

генерації, $\lambda^2 \equiv \left(\frac{|\Lambda|}{\zeta\Gamma} \right)^2 \frac{1}{P_0^2}$ – нормалізована

потужність зовнішнього сигналу, $\eta \equiv \frac{N}{\zeta\Gamma}$ –

нормалізований нелінійний зсув частоти,

$\xi \equiv \frac{\Omega}{\zeta\Gamma} \frac{1}{P_0}$ – розстройка частоти зовнішнього

сигналу; $\Omega \equiv \omega - \omega_0 - NP_0$; P – потужність вимушеної генерації; P_0 – потужність власної генерації.

Рівняння (3) описує будь-які вимушені коливання намагніченості в МНК, у тому числі і коливання, які є нестійкими. В той же час у експерименті спостерігаються, в першу чергу, стійкі вимушені коливання намагніченості. Саме вони можуть бути практично використані при створенні різноманітних наноелектронних пристроїв НВЧ. Враховуючи цю обставину, було проведено дослідження стійкості розв'язків рівняння (3).

Було показано, що розв'язок $x(\lambda; \eta, \xi)$ буде стійким до малих збурень при виконанні наступних умов:

$$\begin{cases} (\zeta-1)(1-2x) < 0 \\ (2x-1)^2 + (\eta(2x-1)-\xi)^2 > x^2(1+\eta^2) \end{cases} \quad (4)$$

Якщо припустити, що $|\zeta-1| \ll 1$, $|\eta| \ll 1$, $|\xi| \ll 1$, умови (4) спрощуються і набувають простого вигляду:

$$x > 1. \quad (5)$$

Розглянемо стійкі коливання малої амплітуди, коли $x-1 \ll 1$. В цьому випадку наближений розв'язок (3) має вигляд:

$$x = 1 + \frac{\xi\eta + \sqrt{(1+\eta^2)\lambda^2 - \xi^2}}{1+\eta^2}. \quad (6)$$

Очевидно, що вимушені коливання можливі тільки коли підкореневий вираз є не від'ємним. Отже, процес синхронізації вимушених коливань у МНК із зовнішнім генератором (яким є інший

МНК) можливий тільки якщо частотна розстройка $|\xi| < \sqrt{1 + \eta^2 \lambda}$. Звідси можна одержати вираз для смуги затягування частоти:

$$\Delta = 2 \frac{|\Lambda|}{\sqrt{P_0}} \sqrt{1 + \left(\frac{N}{\zeta \Gamma} \right)^2}. \quad (7)$$

Враховуючи, що нелінійний зсув частоти N є трансцендентною функцією кута намагнічування θ , смуга затягування частоти також є функцією кута θ . Графік цієї функції при різних параметрах надкритичності ζ показано на рис. 3. З рис. 3 випливає, що існує два випадки, коли

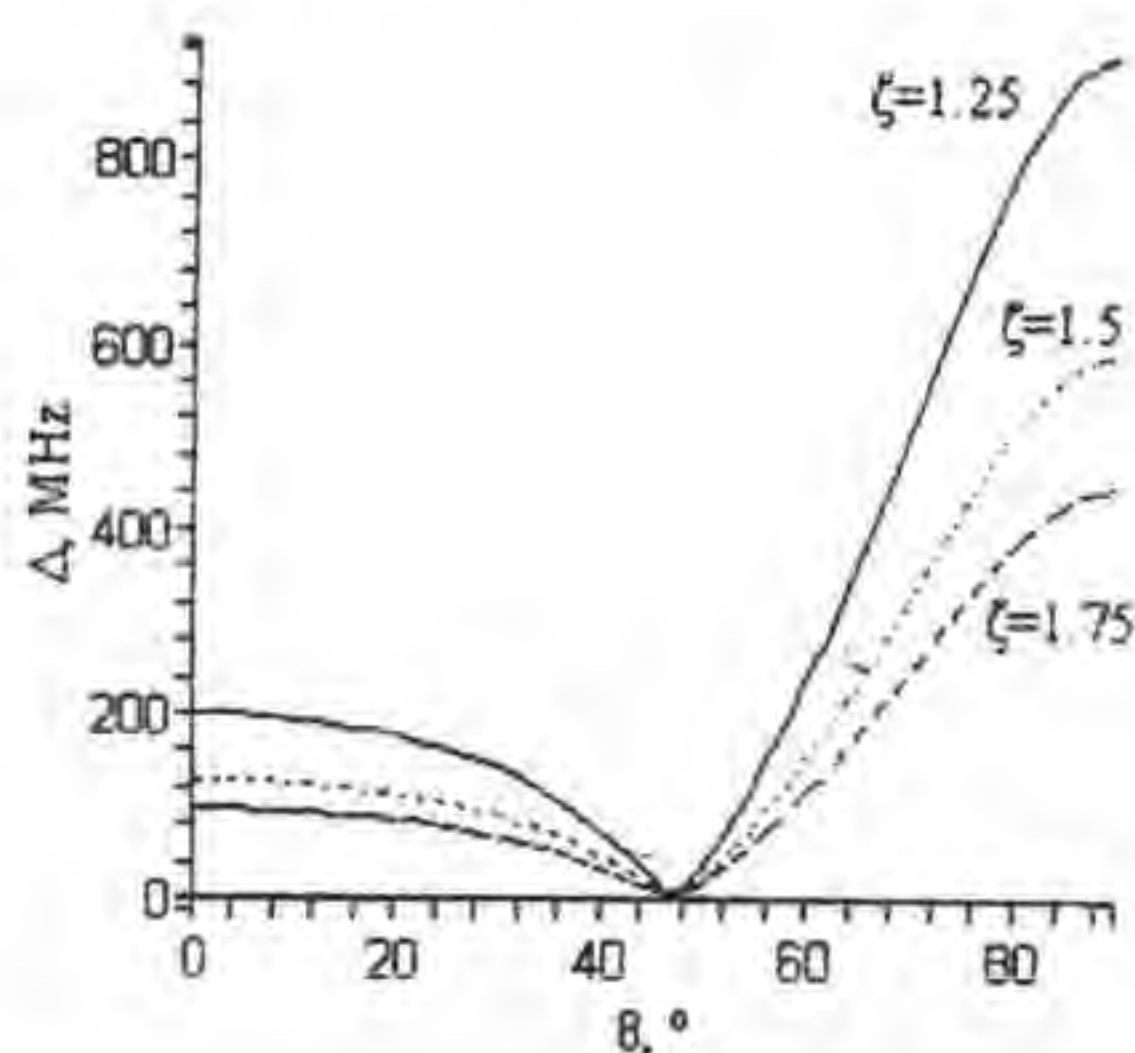


Рис. 3 Залежність смуги затягування частоти Δ від кута намагнічування θ при різних значеннях надкритичності ζ . $H_0 = 7 \text{ кЕ}$, $4\pi M_0 = 9 \text{ кГс}$, $|h_0| = 2 \text{ Е}$, $\Gamma = 0,01\omega_0$, $g = 2$.

частотна смуга коливань намагніченості є достатньо великою. Це випадки тангенціального ($\theta = 0$) та нормального ($\theta = \pi/2$) намагнічування МНК.

У випадку тангенціально намагніченого МНК $N = 0$, що призводить до значно меншої величини частотної смуги, ніж у випадку нормально намагніченого контакту, для якого $N > 0$. Такий режим роботи МНК природно назвати вузькосмуговим. Він реалізується за умови, що кут θ_0 визначається з рівняння [8–9]:

$$\cos^2 \theta_0 = \frac{2\omega_H}{3\omega_H + \omega_M}. \quad (8)$$

З (8) випливає, що вузькосмуговий режим роботи МНК можна реалізувати за будь-яких значень намагніченості та зовнішнього поля.

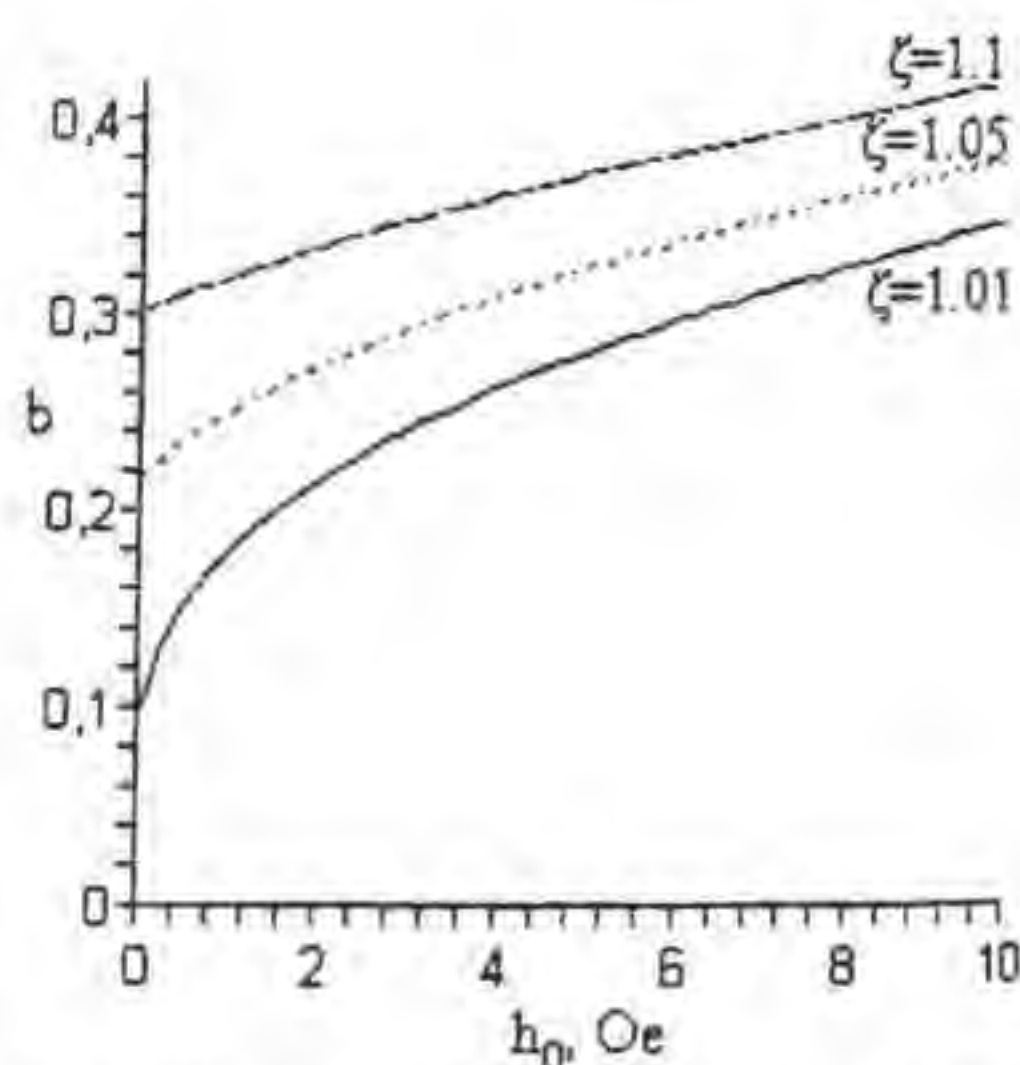


Рис. 4 Залежність вихідного сигналу МНК на центральній частоті від амплітуди зовнішнього сигналу.

$H_0 = 7 \text{ кОе}$, $4\pi M_0 = 9 \text{ кОе}$, $\Gamma = 0,01\omega_0$, $g = 2$.

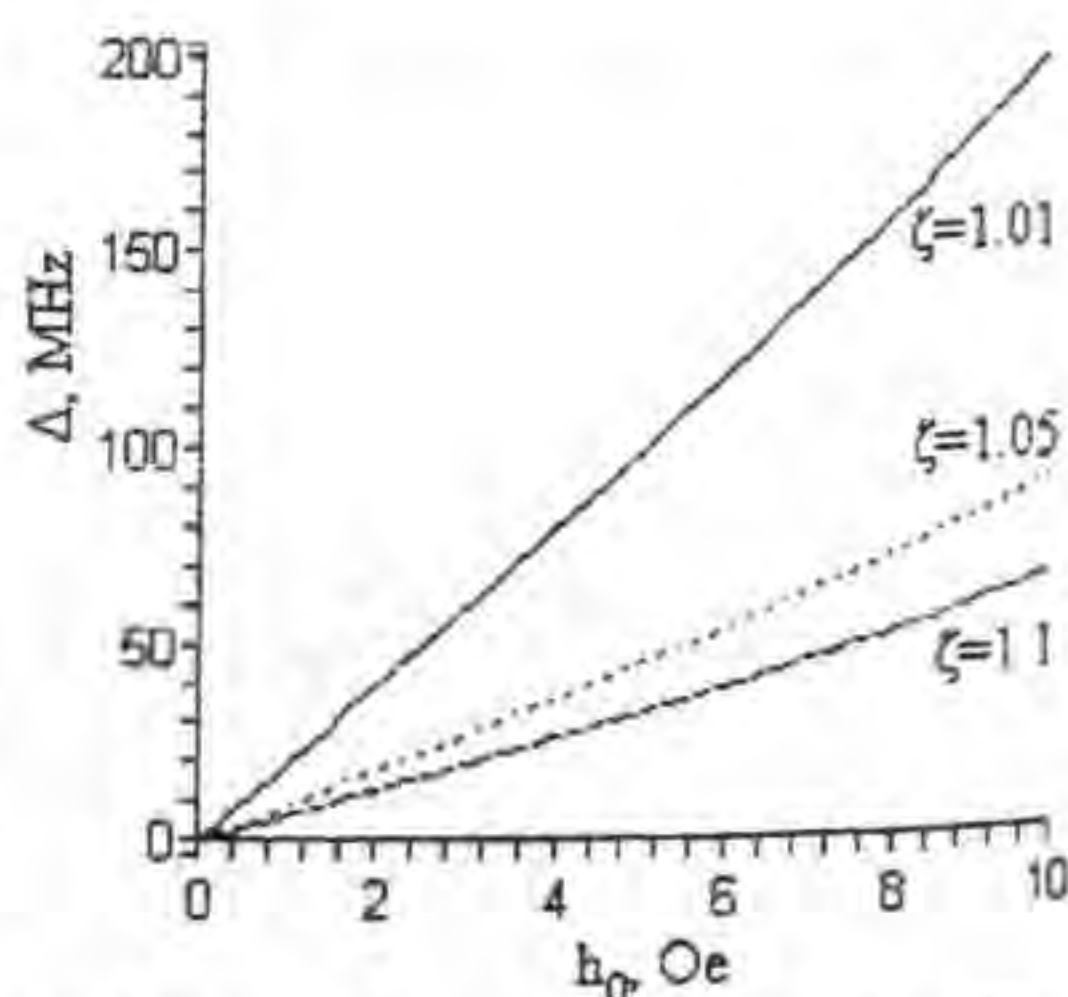


Рис. 5 Залежність смуги затягування МНК від амплітуди зовнішнього сигналу.

$H_0 = 7 \text{ кОе}$, $4\pi M_0 = 9 \text{ кОе}$, $\Gamma = 0,01\omega_0$, $g = 2$.

На рис. 4 показано залежність нормованої амплітуди вимушеної синхронізації МНК на центральній частоті від амплітуди зовнішнього НВЧ сигналу (сигналу іншого МНК). Поруч на рис. 5 показано залежність частотної смуги генерації від амплітуди зовнішнього НВЧ сигналу.

Перевагою систем з МНК у вузькосмуговому режимі роботи є можливість перебудови в достатньо великих межах центральної частоти смуги генерації шляхом зміни зовнішнього постійного магнітного поля (це випливає з (8)). У

цьому режимі також можливе керування смутою фазової синхронізації за допомогою зміни амплітуди зовнішнього магнітного поля НВЧ (див. рис. 5). В деяких практичних випадках це може виявитись не дуже зручним. Альтернативним варіантом може бути керування смутою фазової синхронізації шляхом зміни амплітуди постійного спін-поляризованого струму. В роботах [1, 9] показано, що вплив цих факторів є еквівалентним. Іншою перевагою вищевказаного режиму є те, що при малих струмах I , близьких до критичного I_c , коли $\zeta \rightarrow I$, частотна смуга фазової синхронізації МНК суттєво розширюється.

Недоліком вузькосмутового режиму є те, що при зростанні амплітуди зовнішнього НВЧ сигналу передаточна характеристика МНК стає більш лінійною. При цьому зменшується співвідношення сигнал/шум (сигналу шуму відповідають коливання за відсутності зовнішнього сигналу). Отже, як підсилювач, МНК у вузькосмутовому режимі має незадовільні характеристики. У той же час такі властивості системи зв'язаних МНК як висока ефективність власної генерації, достатньо широка смуга затягування, незалежність частоти генерації від її амплітуди можуть бути використані для побудови НВЧ генераторів з перебудовою частоти.

Автори вдячні д.ф.-м.н., проф. Мелкову Г.А. за корисні поради і зауваження при обговоренні результатів, що увійшли в публікацію.

Робота була підтримана грантом М/175-2007 Міністерства освіти і науки України.

Список використаних джерел

1. Мелков Г., Прокопенко О. Умови надвисокочастотної синхронізації для магнітних наноконтактів, розташованих у шарі магнітовпорядкованої речовини // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Радіофізика та електроніка. – 2007. – Вип. 10. – С. 43-45.
2. Прокопенко О.В., Мелков Г.А. Нелінійні властивості систем з магнітними наноконтактами // Тези конференції "Нанорозмірні системи: будова-властивості-технології" (НАНСИС 2007, 21-23 листопада, 2007). – Київ (Україна). – С. 501.
3. Kiselev S.I., Sankey J.C., Krivorotov I.N., Emley N.C., Schoelkopf R.J., Buhrman R.A., Ralph D.C., Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current // Nature. – 2003. – 425. – P. 380-383.
4. Rippard W.H., Pufall M.R., Silva T.J., Quantitative studies of spin-momentum-transfer-induced excitations in Co/Cu multilayer films using point-contact spectroscopy // Applied Physics Letter. – 2003. – 82, № 8. – P. 1260-1262.
5. Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers // J. Magn. Magn. Mat. – 1996. – 159. – P. L1-L7.
6. Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current // Phys. Rev. B. – 1996. – 54. – P. 9353-9358.
7. Zheng H., Wang J., Lofland S.E., Ma Z., Mohaddes-Ardabili L., Zhao T., Salamanca-Riba L., Shinde S.R., Ogale S.B., Bai F., Viehland D., Jia Y., Schlom D.G., Wuttig M., Roytburd A., Ramesh R. Multiferroic $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ nanostructures // Science. – 2004. – 303. – P. 661-663.
8. Прокопенко А.В., Мелков Г.А. Угловая зависимость порогового тока генерации в магнитном наноконтакте // Сборник тезисов VIII Международного украинско-российского семинара "Нанофизика и Нанoeлектроника" (7-8 декабря, 2007). – Киев (Украина). – С. 80-81.
9. Verba R.V., Prokopenko O.V. Angular dependence of phase-locking bandwidth of spin-torque nanooscillator // Proceedings of the Eight International Young Scientists' Conference on Applied Physics (ICAP 2008, June 11-13, 2008). – Kyiv (Ukraine). – 2008. – P. 52-53.

Надійшла до редколегії 20.09.2008

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Атамась Н.О., канд.фіз.-мат.-наук

Вплив будови введеної у воду молекули спирту на зміну сітки водневих зв'язків між молекулами води

Метод Монте Карло використаний для вивчення зміни сітки водневих зв'язків між молекулами води у нескінченно розведених водних розчинах одноатомних спиртів. На основі РФР проаналізовано вплив будови молекули спирту у на зміну локальної структури води.

Ключові слова: Монте Карло, водний розчин, одноатомний спирт, енергія міжмолекулярної взаємодії

*E-mail: atamasphys@mail.univ.kiev.ua

Інформація про локальну структуру рідини та енергетичні властивості розчину може бути одержана як експериментальним так і теоретичним шляхом. Комп'ютерне моделювання дає можливість проводити детальний аналіз локальної структури складних багатокомпонентних систем. За допомогою метода Монте Карло можуть бути розраховані радіальні функції розподілу молекул у рідині, які в свою чергу дають інформацію про довжини міжатомних зв'язків та про число найближчих сусідів. Цей метод було використано для досліджень зміни сітки водневих зв'язків між молекулами води при нескінченному розведенні при $T=300\text{K}$ у системах вода-молекула одноатомного спирту.

Модель

Для молекул води та молекули спирту при розрахунках нами було використано модель трьох силових центрів, в якій атоми кисню О, водню Н та алкільна група молекули спирту представлені окремими силовими центрами [2]. Вважалось, що міжатомні зв'язки в молекулах є жорсткими, а міжмолекулярна взаємодія є парною та адитивною. При проведенні розрахунків взаємодія між силовими центрами описувалась оптимізованим потенціалом для рідких систем OPLS. Міжмолекулярна взаємодія в системі може бути представлена в вигляді суми Леннарда-Джонсової U_L та кулонівської U_{COUL} складових [3]:

N.A.Atamas,

Influence of the structure of the alcohol molecule dissolved in water on the hydrogen bond nets between water molecules.

Monte Carlo method was used for study of the hydrogen bond nets between water molecules in extremely dissolved water solutions of primary alcohols. Influence of the structure of the alcohol molecule on the change of the local water structure on the basis of RDF was analyzed.

Key words: Monte Carlo, water solution, primary alcohol, energy of intermolecular interaction.

$$U = U_L + U_{COUL} = \sum_i 4\epsilon_{ij} \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^6 \right] + \sum_i \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (1)$$

де $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ – параметри потенціала Леннарда-Джонса, r_{ij} – відстань між взаємодіючими атомами, q_i – заряд на атомі. Використанні в наших розрахунках геометричні параметри молекул, а також заряди та параметри σ та ϵ а також значення заряду на силових центрах були представлені групою Йоргенсена у роботах [3,4]. Параметри σ і ϵ для взаємодії між атомами води та пропанолу розраховувались з використанням комбінаційного правила Лоренца-Бертло [5].

Деталі комп'ютерного експерименту.

При проведенні комп'ютерного експерименту система вода-молекула спирту була представлена 125 молекулами води та однією молекулою спирту, густини яких відповідали експериментальним при даній температурі [6]. Для генерації нової конфігурації ансамблю, нами довільним чином обиралась молекула, яку ми обертали навколо однієї з її осей в межах ± 0.15 град, а потім зміщували центр координат молекули в межах $\pm 0.15\text{\AA}$. Використання такого методу генерації нових конфігурацій дозволяє одержати біля 50% вдалих змін конфігурацій. Всі розрахунки проводились на наступною схемою: $2 \cdot 10^6$ кроків для врівноваження системи в NVT ансамблі, наступні 10^6 кроків – для одержання структурних даних і наступні $3 \cdot 10^6$ кроків для одержання

енергетичних властивостей досліджуваної системи.

РФР у нескінченно розведених водних спиртових розчинах

Проаналізуємо вплив дипольного моменту та довжини алкільного ланцюжка внесеної у воду молекули спирту на зміну сітки водневих зв'язків між молекулами води. Положення першого піку РФР для взаємодії між атомом кисню молекули води та атомами кисню, внесених у воду, молекул спирту (рис.5) може бути асоційовано з відстанню між молекулами води та молекулою спирту. Найкоротша відстань фіксується у випадку системи вода-молекула пропильового спирту, яка знаходиться на відстані 2.6Å від оточуючих її молекул води. Найбільша відстань між молекулами води та спирту фіксується у випадку систем вода-метиловий та вода-бутиловий спирт, для яких відстань між молекулами води та спирту однакова та дорівнює 3.8Å. В випадку внесення молекули етилового спирту у воду молекули води знаходяться на відстані 3.1Å від молекул води.

РФР для взаємодії між молекулами води та спирту, які можуть приводити до утворення водневого зв'язку надано на рис.1).

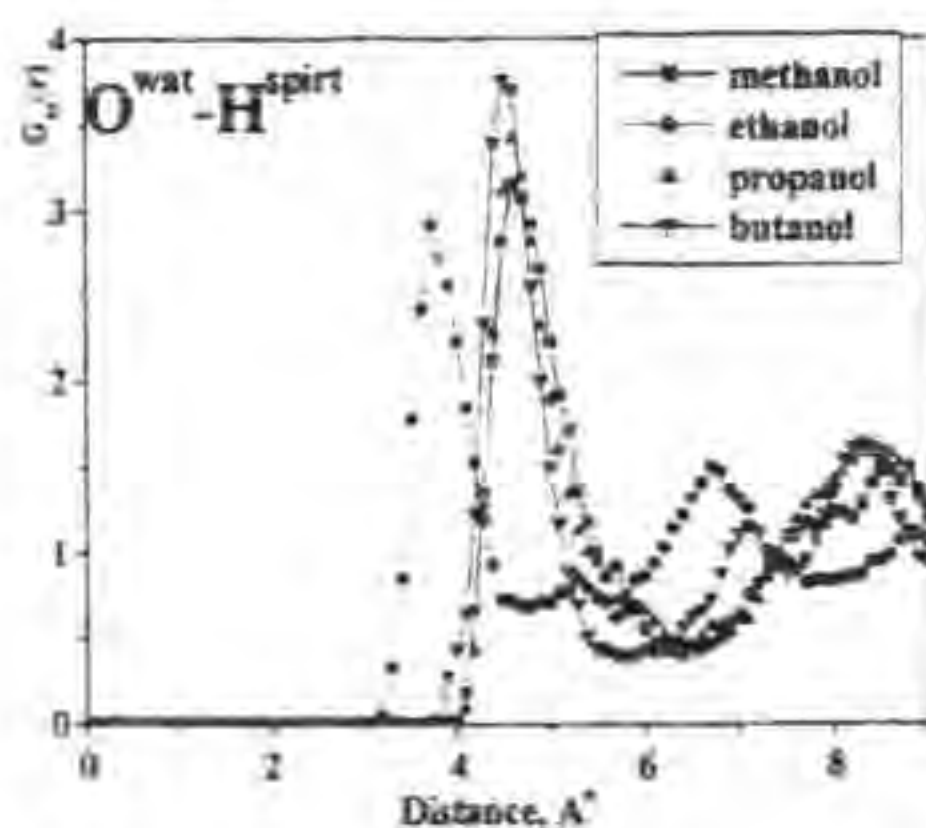


Рис.1 РФР для взаємодій між атомами $H^{spirit}-O^w$ в системі вода-молекула спирту в нескінченно розведеному водному розчині при $T=300$ K

В випадку взаємодії рис.1 не відбувається утворення водневого зв'язку між атомами кисню молекули води та атомом водню гідроксильної групи молекули спирту. Молекули води розташовуються в околі гідроксильної групи молекули метилового, пропильового або бутилового спирту на відстані, яка перевищує 4.5Å, що у двічі більше розміру молекули води. В випадку молекули етилового спирту, внесеної у воду, відстань, на якій знаходяться молекули

води в околі гідроксильної групи молекули спирту зменшується до 3.7Å. Водневі зв'язки в системі вода-молекула спирту встановлюються лише за рахунок взаємодії між атомом кисню молекул води та «одиничним» атомом алкільного ланцюжка молекули спирту $C^{spirit}-O^w$ та взаємодії між атомом кисню молекули спирту рис.2.

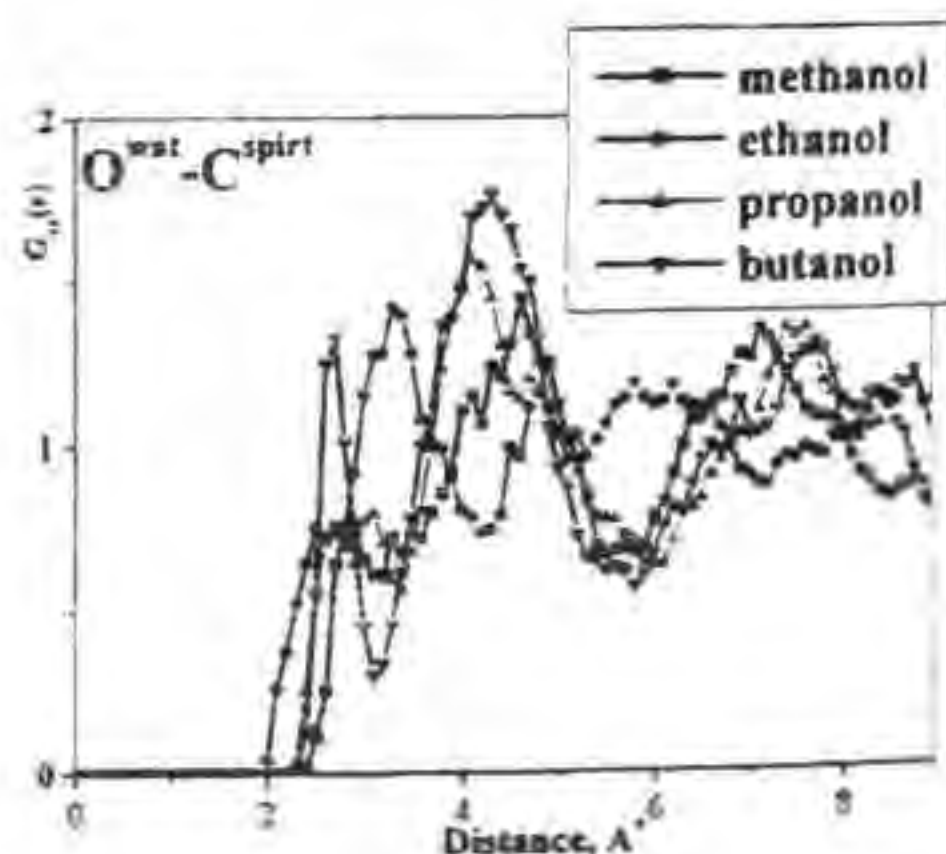


Рис.2 РФР для взаємодій між атомами $C^{spirit}-O^w$ в системі вода-молекула спирту в нескінченно розведеному водному розчині при $T=300$ K

В випадку взаємодії на довжину водневого зв'язку, який дорівнює 2.8Å, не впливає кількість метильних груп у молекулі спирту та дипольний момент молекули. Зазначимо, що в випадку системи вода-бутиловий спирт, значення РФР майже вдвічі перевищують значення РФР для відповідного максимуму у випадку введення у воду молекул метилового, етилового або пропильового спиртів.

Одержаний результат дозволяє припустити, що «середня» структура оточення введеної у воду молекули спирту не сильно відрізняється від структури чистої води в околі гідроксильної групи молекули спирту. Також зафіксовано тенденцію до стабілізації структури води в околі алкільного ланцюжка молекули спирту. З іншого боку, ці зміни є досить незначним чином змінюють структуру системи, як було встановлено авторами роботи [1], яким не вдалося використовуючи метод нейтронної спектроскопії чітко визначити зміну структуру оточення навколо введеної у воду полярної молекули. Відповідь на це питання можна одержати з наших розрахунків, а саме з аналізу числа найближчих сусідів навколо введеної у воду полярної та неполярної молекули.

Кількісною характеристикою структури досліджуваних систем є середня кількість найближчих сусідів, що чисельно дорівнює

площі під першим піком РФР. Встановлено (рис.3), що у випадку систем вода-молекула спирту число найближчих сусідів має найбільші значення для взаємодії між атомом кисню молекули води та «одичним» атомом, який ототожнено з алільним ланцюжком молекули спирту. Число молекул води, які знаходяться в околі алільного ланцюжка зростає з збільшенням числа метильних груп у молекулі спирту.

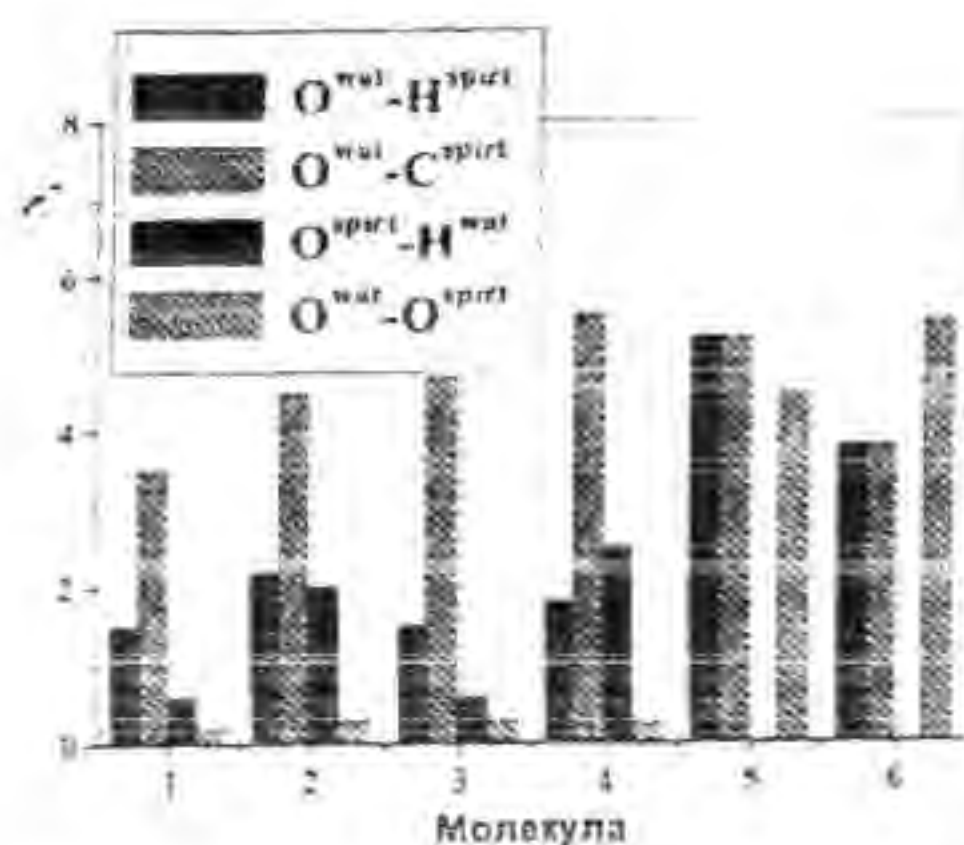


Рис.3. Число найближчих сусідів для взаємодій, які можуть приводити до утворення водневих зв'язків при розчиненні у воді різних молекул: 1-метанол, 2-етанол, 3-пропанол, 4-бутанол, 5-діметилловий ефір, 6-пропан.

В околі гідроксильної групи молекули спирту число найближчих сусідів не перевищує двійку, тобто кисень молекули води не повністю використовує можливість утворення водневих зв'язків з воднем гідроксильної групи молекули спирту.

Розташування молекул води навколо молекул метанолу та пропанолу має однакові тенденції, а саме, в околі атомів водню гідроксильних груп цих молекул розташовується майже вдвічі більше молекул води ніж у околі атому кисню. В випадку системи вода-молекула бутилового спирту число молекул води в околі атому кисню спиртової молекули перевищує число молекул води в околі атому водню гідроксильної групи молекули спирту. Зазначимо, що у випадку системи вода-молекула етилового спирту число молекул води в околі атому водню гідроксильної групи молекули спирту майже співпадає з числом молекул води в околі атому кисню молекули спирту.

Висновки

На основі аналізу РФР для нескінченно розведених систем вода-молекула спирту встановлено:

Із зменшенням дипольного моменту молекули спирту локальна структура води навколо введеної молекули спирту стає більш упорядкованою в межах першої й другої гідратаційних оболонок.

Довжина алільного ланцюжка молекули спирту не впливає довжину водневого зв'язку, який утворюється за рахунок взаємодії між атомами алільного ланцюжка молекули спирту та атомами молекул води.

Між атомом водню гідроксильної групи молекул спирту та, оточуючих молекулу спирту, молекул води утворюється вільний простір, розмір якого не залежить від дипольного моменту молекули спирту. Зазначимо, що розмір вільного простору в околі атому гідроксильної групи молекули спирту співпадає з розміром вільного простору в околі атому кисню молекули спирту.

Встановлено особливості зміни сітки водневих зв'язків між молекулами у випадку системи вода-етиловий спирт. У цьому випадку спостерігається найбільше ущільнення локальної структури розчину в околі молекули спирту за рахунок існування відносно великого дипольного моменту молекули етилового спирту та незначної довжини алільного ланцюжка.

Список використаних джерел

1. Stubbs J., Bin Chen, Potoff J. // Fluid Phase Equilibria. – 2001. – № 183. – С.301-309.
2. Yoshida K., Yamasuchi T. // J. Phys. Chem. – 2002. – № 106. – С.5024-5049.
3. Jorgansen W. // J. Am. Chem. Soc. – 1981. – № 103. – С. 335-340.
4. Jorgansen W. // J. Phys. Chem. – 1986. – № 90. – С. 1276-1281.
5. Allen M.P., Tildesley D.Y. Computer Simulation of Liquids. – Oxford: Clarenton Press, 1995, – 620с.
6. Timmermans J. Physical-Chemical Constants of Binary Systems. – London: Inter-science Publishers LTD, 1978, –1320с.

Надійшла до редколегії 29.10.08.

УДК 577.353: 577.324

Актан О.Ю., к.ф.-м.н., н.с.

Вплив медичних препаратів, що містять фермент «Гіалуронідаза» на формування колагенових структур

Встановлено, що медичні препарати, які містять фермент «Гіалуронідаза», впливають на формування колагенових структур при регенерації сполучної тканини. Ця дія зводиться до збільшення ступеня неупорядкованості колагенових волокон. Наслідком цього є збільшення здатності зазначених волокон до скорочення, що призводить до прискорення стягування країв ушкодженої області.

Ключові слова: колагенові структури, гіалуронідаза, модуль зсуву.

*E-mail: aktanl@univ.kiev.ua

Вступ

Як відомо [1], колаген відіграє домінуючу роль у підтримці біологічної і структурної цілісності різних тканин і органів, включаючи кістки, шкіру, сухожилля, кровоносні судини, та хрящі.

В роботах [2] зазначено, що колаген складається з пептидних ланцюгів. Його особливістю є здатність до миттєвої зборки з окремих ланцюгів у волокна. Цей процес являє собою послідовність декількох етапів. Спочатку, окремі пептидні ланцюги здобувають спіральну конформацію. Потім, ці спіралі агрегують по три, утворюючи молекули тропоколагену. В результаті торцевої агрегації останніх виникають протофібрили, що потім поєднуються у фібрили. І, нарешті, в результаті об'єднання фібрил, виникають колагенові волокна.

Протофібрила складається з впорядкованих і неупорядкованих ділянок, які чергуються між собою. У впорядкованих ділянках ланцюги мають спіральну конформацію, в неупорядкованих ділянках – клубкоподібну форму. Наявність клубкоподібних ділянок обумовлює здатність колагенових волокон до скорочення, а саме: скорочення відбувається внаслідок прагнення ланцюгів неупорядкованих ділянок приймати згорнуту форму, що відповідає мінімумові вільної енергії цих ланцюгів [3]. Таким чином, скорочуваність колагенових волокон

O.Yu.Aktan, PhD, Sci. Res.

Direct influence of the medical enzymatic drugs comprising "Hyaluronidase" on the formation of the collagenous structures

The medical drugs comprising the basic active principle "Hyaluronidase" exert direct influence on the formation of the collagenous structures with the regeneration of connective tissue is established. This influence is reduced to an increase in the degree of the disorder of the collagenous fibers. Consequently is the increase of contractibility of these fibers. This process leads to the acceleration of constringency of boundaries of the damaged region is assumed.

Key Words: collagenous fibers, hyaluronidase, shear modulus.

знаходиться в прямій залежності від ступеня неупорядкованості: чим більше останній тим більше скорочуваність.

Як відомо [4], медичні препарати, що містять активну діючу речовину фермент «Гіалуронідаза» застосовуються при лікуванні захворювань сполучної тканини. В результаті дії зазначених препаратів на ушкоджені ділянки сполучної тканини відбувається їх регенерація – відновлення початкової структури цих ділянок.

Сполучна тканина, як і інша будь-яка біологічна тканина, складається з клітин та міжклітинної речовини. Відомо [5], що головними компонентами останньої є основна аморфна речовина, колагенові та еластичні волокна. Домінуючим компонентом основної аморфної речовини є гіалуронова кислота.

Процес регенерації сполучної тканини, складається з декількох фаз. Закінчується цей процес фазою диференціювання і перебудови. На протязі цієї фази відбувається формування колагенових волокон та стягування країв ушкодженої області. Це відбувається за рахунок наближення одна до одної незруйнованих ділянок тканини. За стягування відповідають декілька факторів, одним з яких є скорочення колагенових волокон.

З літературних даних [6] відомо, що механізм дії медичних препаратів на основі ферменту «Гіалуронідаза» полягає в

наступному. Під впливом гіалуронідази відбувається гідроліз глікозидних в'язей гіалуронової кислоти. При цьому зменшується в'язкість міжклітинної речовини, що полегшує проникнення різних мікроелементів до ушкоджених ділянок сполучної тканини. Така дія ферменту «Гіалуронідаза» сприяє регенерації сполучної тканини. В результаті цього процесу відновлюється структура всіх складових тканини, включаючи колагенові волокна. Отже, згідно літературним даним препарати, що містять фермент «Гіалуронідаза» опосередковано впливають на формування колагенових волокон – через гіалуронову кислоту.

Мета даної роботи полягає в тому, щоб встановити прямий вплив медичних препаратів з ферментом «Гіалуронідаза» на колагенові волокна.

Методи та результати експерименту

Встановлено [7], що при нагріванні водного розчину колагену, його структура розпадається на окремі пептидні ланцюги "первинної желатини", утворюючи дисперсну систему "вода + желатина". В охолодженій до кімнатної температури такій системі відбувається миттєве формування колагеноподібних структур [8]. Виходячи з цього, зазначена система є зручним об'єктом для дослідження процесу формування колагенової структури.

З літературних даних також відомо, що формування колагенових волокон в процесі регенерації сполучної тканини (in vivo) підкоряється тим же закономірностям, що спостерігаються в експериментах in vitro [8]. Ця обставина дозволяє вважати, що дія медичних препаратів, що містять фермент "Гіалуронідаза" в експерименті in vitro буде мати той же характер, що й в експерименті in vivo.

Препарат "Лідаза", вироблений українською фармацевтичною компанією "BIOLEK" (м.Харків), був відібраний як приклад медичних препаратів, що містять фермент «Гіалуронідаза». Даний медичний препарат виготовляється у вигляді ампул з порошком для ін'єкцій. Кожна ампула містить 64 одиниці гіалуронідазної активності.

Проводилися два типи експериментів. Перший експеримент складався з двох стадій. Під час першої стадії були досліджені в'язко-пружні властивості дисперсної системи, що складається з двох компонентів: вода і

желатина. Концентрація останньої у воді складала 12,5 %. На другій стадії були досліджені в'язко-пружні властивості дисперсної системи, що складалась з трьох компонентів: вода, желатина та препарат "Лідаза". Концентрація желатини у воді складала 12,5 %. Кількість медичного препарату "Лідаза" відповідала 64 одиницям гіалуронідазної активності. Дослідження проводилися на крутильному маятнику при температурі 293 К.

На кожній із цих стадій визначався модуль зсуву, як параметр, що характеризує в'язко-пружні властивості досліджуваних дисперсних систем. Визначення цієї величини провадилось відповідно до методу, описаному в [9]. Результати експерименту представлені на рис.1.

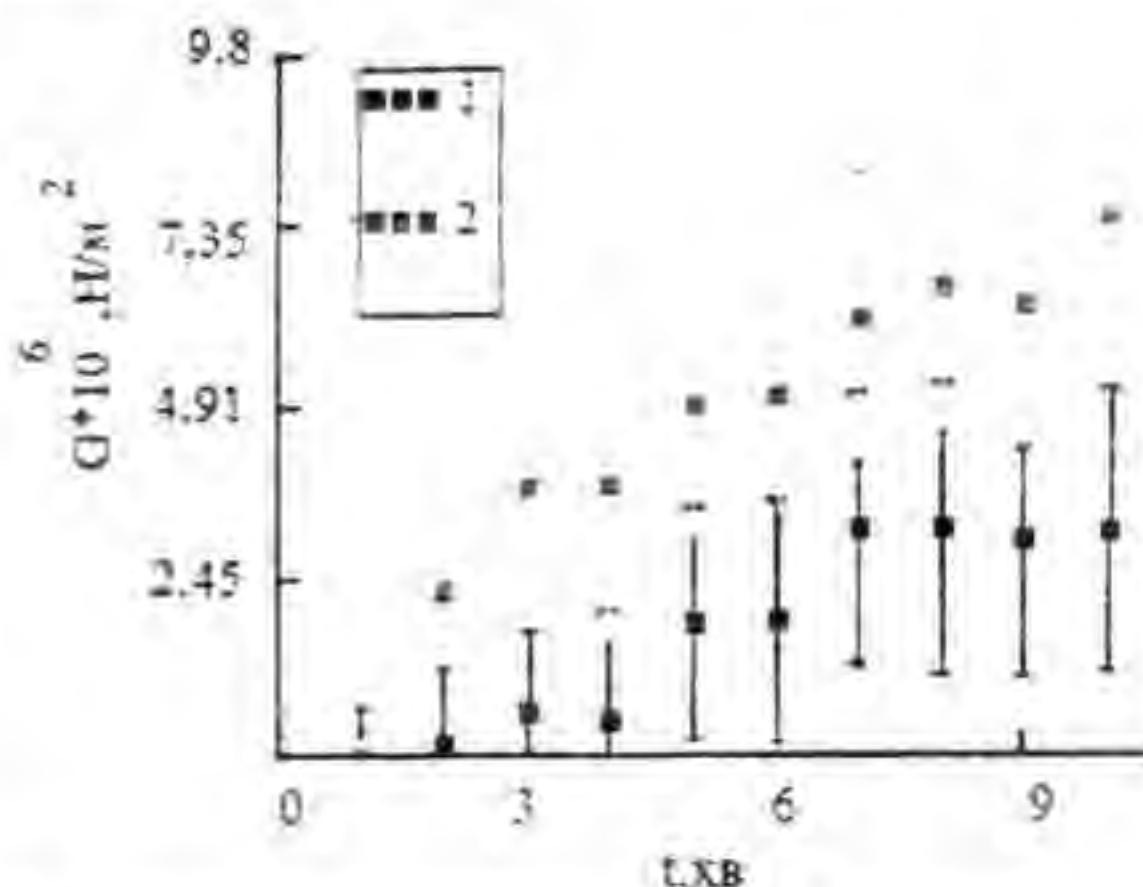


Рис.1. Залежність $G(t)$ для дисперсних систем: 1-«вода+желатина+препарат «Лідаза»», 2-«вода+желатина».

Другий експеримент виконувався за допомогою традиційного рефрактометричного методу. Цей метод, як відомо, базується на експериментальному визначенні коефіцієнта заломлення об'єктів досліджень. Аналіз його поведінки дає можливість визначити існування взаємодії між речовинами або формування нових структур [10].

Цей експеримент також складався з двох стадій. На першій стадії визначалась часова залежність коефіцієнту заломлення дисперсної системи «вода+желатина». Концентрація желатини у воді складала 12,5 %. На другій стадії визначалась часова залежність дисперсної системи «вода+желатина+ препарат «Лідаза». Концентрація желатини у воді складала 12,5 %.

Кількість медичного препарату "Лідаза" відповідала 64 одиницям гіалуронідазної активності. Результати експерименту представлені на рис.2.

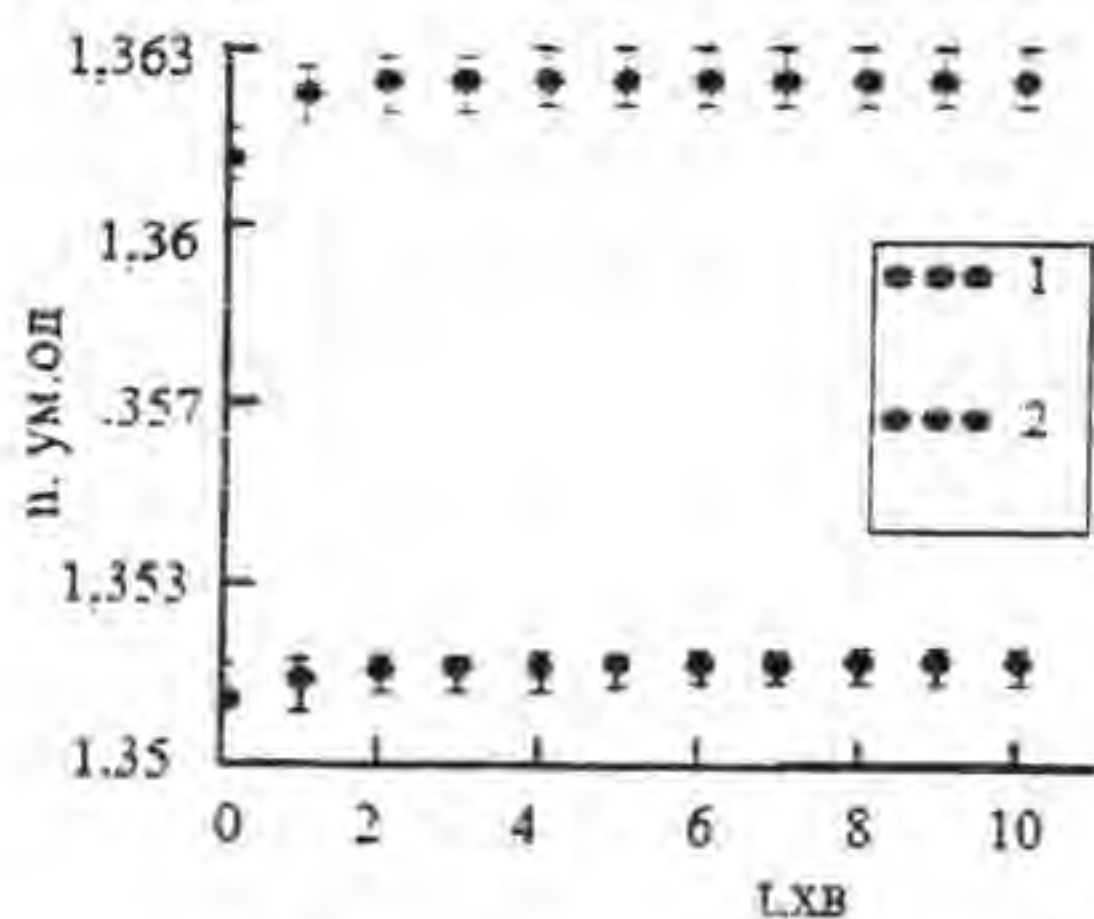


Рис.2.Часова залежність коефіцієнту заломлення n для дисперсних систем:
1-«вода+желатина+препарат «Лідаза»»,
2-«вода+желатина»

Основним результатом проведених експериментів є виявлення двох фактів: 1) в дисперсній системі «вода+желатина» досить швидко формується жорстка структура, жорсткість якої зростає з часом; 2) введення медичного препарату «Лідаза» зменшує жорсткість структури, що виникає в дисперсній системі «вода +желатина».

Обговорення результатів експерименту

Як вже згадувалось при руйнуванні сполучної тканини відбувається регенерація (відновлення) колагенових волокон. Оскільки процес формування колагеноподібних структур в досліджуваній дисперсній системі «вода + желатина» та зруйнованій сполучній тканині можна вважати ідентичними, то отриманий результат означає, що медичний препарат «Лідаза» виявляє прямий вплив на формування колагенових волокон.

В чому ж полягає лікувальний аспект такого впливу?

Жорсткість волокна безпосередньо зв'язана зі ступенем впорядкованості: чим більша впорядкованість тим вища жорсткість.

При введенні медичного препарату «Лідаза» волокна стають менш жорсткими. Це означає, що у волокнах з'являється більша кількість неупорядкованих ділянок. В результаті

волокна отримують можливість більше скорочуватись. Раніше було зазначено, що здатність колагенових волокон до скорочення є одним з факторів, який сприяє зближенню кінців пошкодженої ділянки сполучної тканини. Таким чином, лікувальний аспект медичних препаратів на основі ферменту «Гіалуронідаза» на колагенові волокна полягає в прискоренні процесу зближення кінців пошкодженої області.

Список використаних джерел

1. Kolacna I., Bakesova J., Varga F. and all. Biochemical and biophysical aspects of collagen nanostructure in the extracellular matrix// *Physiol. Res.*-2007.- 56, № 1.-P.51-60.
2. Brodsky B., Ramshaw J. The collagen triple-helix structure// *Matrix Biol.*- 1997.-15.- P.545-549.
3. Grosberg A.Yu., Khokhlov A.R. Statistical Physics of Macromolecules: Amer Inst of Physics, 1994.-p.290.
4. Price R., Myers S. and all. The role of hyaluronic acid in wound healing: assessment of clinical evidence// *American Journal of Clinical Dermatology.*- 2005.- 6,№6.-P.393-402.
5. Royce, Peter M. Connective tissue and its heritable disorders: molecular, genetic, and medical aspects: 2nd ed. John Wiley & Sons, 2002.-p.298.
6. Dixon M., Webb E. Enzymes: London, Longman Group Ltd,1979.-p.400.
7. Veis A. The macromolecular chemistry of gelatin.- New York: Academic Press, 1964.- 313p.
8. Kozlov P.V., Burdygina G.I. The structure and properties of solid gelatin and the principles of their modification// *Polymer.*-1983.-24.-P.651-655.
9. Aktan O.Yu., Svechnikova O.S., Nikolayenko T.Yu. The method of determination of material shear elasticity in the course of its solidification// *Functional Materials.* - 2007.- 14,№1-146.
10. Ioffe B. V. Refractometric methods in chemistry. 3rd ed.- Leningrad: Khimiya.- 1983.-p.373.

Надійшла до редколегії 29.10.08

УДК 538.22

Беженар А.А., асп.,
Копань В.С., д.ф.-м. н., проф.
Хуторянська Н.В. пров. інж.

Термо – е.р.с. фторопласту відносно міді

Доведено, що в плівках фторопласту можливе виникнення термо – е.р.с., що становить відносно міді $E \approx 0,005 \text{ мВ/град}$. Показано, що E залежить від освітленості.

Ключові слова: термо – е.р.с., фторопласт, освітленість.

*E-mail: R10@univ.kiev.ua, **E-mail: kopa@pulsary.com.ua

Доведено [1], що струм впоперек поверхні фторопластової плівки (ФПП) проходить по локальним областям, як це відбувається в газах. За аналогією з газами, ці області названі нами треками. Питомий електроопір трека в $2 \cdot 10^{16}$ разів менший за питомий електроопір об'єму, розташованого між треками [2]. Електроопір поверхні ФПП теж малий, але він переважно спричинений наявністю на поверхні адсорбованих з повітря молекул води. Електропровідність треків обумовлена наявністю рухливих електронів. В об'ємі між треками зовнішні електрони атомів є валентними, не беруть участі в електропровідності. В треках міжатомні зв'язки порушені, наприклад, механічно (локальні великі деформації). Тому валентні електрони розпарені, частково рухливі і можуть дрейфувати вздовж трека, забезпечуючи електропровідність.

Густина треків в досліджуваних нами ФПП становить $160\,000 \text{ см}^{-2}$ [3]. Їх густину можна збільшити вальцюванням ФПП.

Якщо електропровідність трека дійсно обумовлена розпареними валентними електронами, то в трековій має генеруватись термо – е.р.с.

Мета роботи – дослідження наявності термо – е.р.с. в ФПП.

Експериментальні результати та їх обговорення

На рис.1 наведено схему установки для вимірювання термо – е.р.с.

ФПП 1 (товщина 25 мкм) з треками 2 покладена на мідну пластину 3, що лежить на скляній 4. Штбка 5 з мідних дрітків (діаметр

A.A. Bezhenar, post-graduate stud.,
V.S. Kopa, Dr of Sci, Prof,
N.V. Hutoryanska, eng.

Thermoelectric power of fluoroplastic relative to copper

It is proved that origin of thermoelectric power in fluoroplastic films is possibly, that relative to copper is equal $E \approx 0,005 \text{ mV/grad}$. It is shown that E depends from illumination.

Key Words: thermoelectric power, fluoroplastic, illumination.

кожного 20 мкм) укріплена на мідній пластині 6. Правий кінець пластини 6 закріплений нерухомо в стояку 7, лівий – підігрівається нагрівником 8 до $100 - 110^\circ \text{C}$. Пластини 3 і 6 під'єднані до осцилографу 9 (найменша ціна поділки 50 мкВ/см).

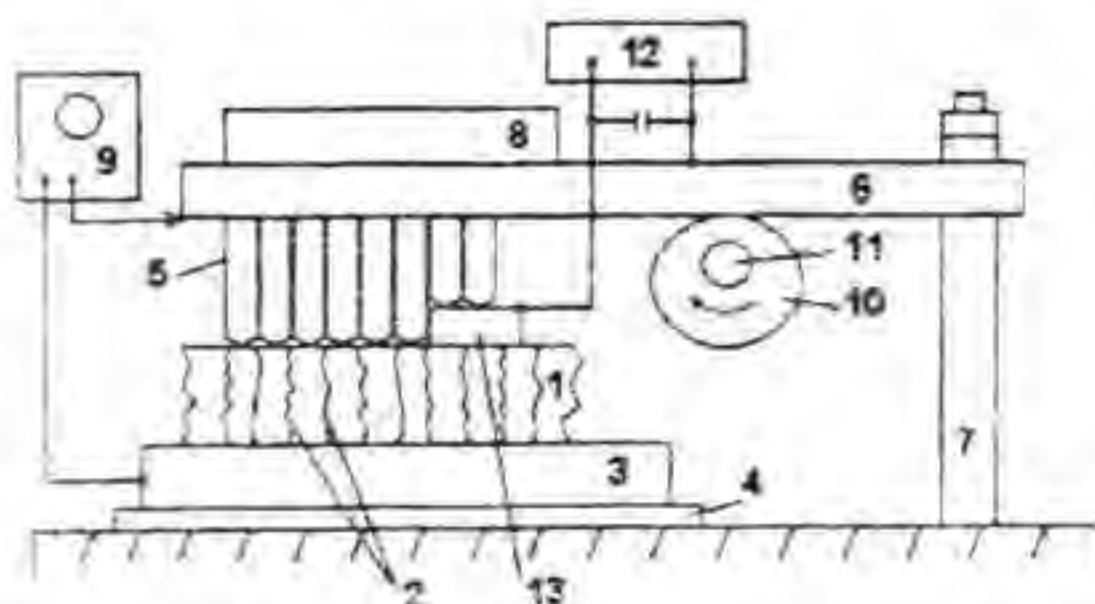


Рис.1. Схема установки для вимірювання термо – е.р.с. ФПП.

Ексцентрик 10 укріплений на валу електромотора 11 так, що при його обертанні пластинка 6 коливається. Потенціометр 12 підключений до термопари мідь – константан, в склад якої входить пластинка 6, кільця дротин штбки 5, константанова фольга 13 (товщиною 5 – 6 мкм), що покладена на ФПП 1.

Термопари метал – метал і метал – напівпровідник, які широко використовуються понад століття для вимірювання температури і генерування електрики, мають малий вихідний опір (0,1 – 10 Ом) [4]. Тому для вимірювання термо – е.р.с. використовують низькоомні потенціометри. Електроопір одного трека, що розташований перпендикулярно до площини ФПП, становить близько 10^{11} Ом [1–3]. Штбка 5

містить 3100 – 3300 дротин. Середня відстань між треками природного походження становить 20 – 30 мкм [3]. Оскільки діаметр дротини 20 мкм, то можна вважати, що кінець кожної дротини щітки при коливанні дотикається принаймні до одного трека. Тому опір термопари мідь – фторопласт $R = 10^{11}$ Ом : 3000 $\approx 3 \cdot 10^7$ Ом.

При вібрації пластини 6 кінці дротин щітки 5 можуть наковувати ФПП 1, збільшуючи кількість треків в 10 – 100 разів, зменшуючи опір термопари мідь – фторопласт до (0,3 – 3) МОм. Тому для вимірювання термо – е.р.с. вибрана вібраційна схема з осцилографом, що має вхідний опір 1 МОм. Частота коливання пластини 6 задається частотою обертання валу 11 (12 – 14 Гц). Пластина 6 настраюється в резонанс зміною точки її закріплення в стояку 7, а амплітуда коливання щітки 5 – переміщенням по вертикалі точки закріплення пластини 6. Поверхня пластини 3, на яку кладуть ФПП 1, полірована.

До початку вимірювань замість ФПП 1 кладуть дрібнозернистий наждачний папір і коливають пластину 6 протягом 40 – 50 хвилин для того, щоб кінці дротин відполірувались. Після цього відрізок ФПП 1 площею 30x30 мм² приклеюють по одному краю авіаційним суперклеєм до пластини 3 і починають експеримент.

Температуру верхньої поверхні ФПП 1 вимірюють термопарою, що складається з елементів 6 – 5 – 13. Температура нижньої поверхні ФПП 1 задається температурою пластини 3.

На рис.2 наведено залежності термо – е.р.с. $E(t)$ від часу вимірювання при різних умовах впливу на ФПП 1.

Термо – е.р.с. не залежить від площі поперечного перерізу вітки термопари, на відміну від електроопору, поки довжина вільного пробігу електрона чи дірки не стає порівняною з діаметром дроту, з якого зроблена вітка [5].

В процесі вимірювання $E(t)$ кінці дротів щітки 5 (рис. 1) ударають по ФПП 1. При цьому відбувається пластична деформація ФПП 1, внаслідок чого виникають нові треки [2]. Це все-одно, якби до вітки термопари, що складається з пучка дротин, ми паралельно підключили ще якусь кількість дротин, збільшивши таким чином площу поперечного перерізу вітки. Очевидно, що термо – е.р.с. при цьому не змінилась би. Тому графіки $E(t)$ на рис.2 слабо залежать від часу.

Невелике зростання $E(t)$ можна пояснити зменшенням електроопору плівки за рахунок введення нових треків. Так, відомо, що найбільший к.к.д. системи джерело електроенергії (термopapa) – приймач (осцилограф) буде тоді, коли вихідний електроопір джерела порівняний з вхідним електроопором споживача. При збільшенні часу вимірювання зростає густина треків в ФПП, електроопір зменшується і наближається до вхідного електроопору осцилографа. Тому деяке зростання термо – е.р.с. з часом (рис.2) можна пояснити збільшенням к.к.д. системи термopapa – осцилограф.

При довготривалих ударах щітки об поверхню ФПП можливе проникнення атомів міді в треки. Якби це було істотним, то термо – е.р.с. $E(t) \rightarrow 0$, бо між нановолокнами міді, що виникли б внаслідок коагуляції атомів і наночастинок Cu в трекові, мідною пластинкою 3 (рис.1) і мідною щіткою 5 $E(t) = 0$. В експерименті одержуємо, що $E(t)$ зростає з часом (рис.2). Отже, дифузія атомів Cu в ФПП неістотна.

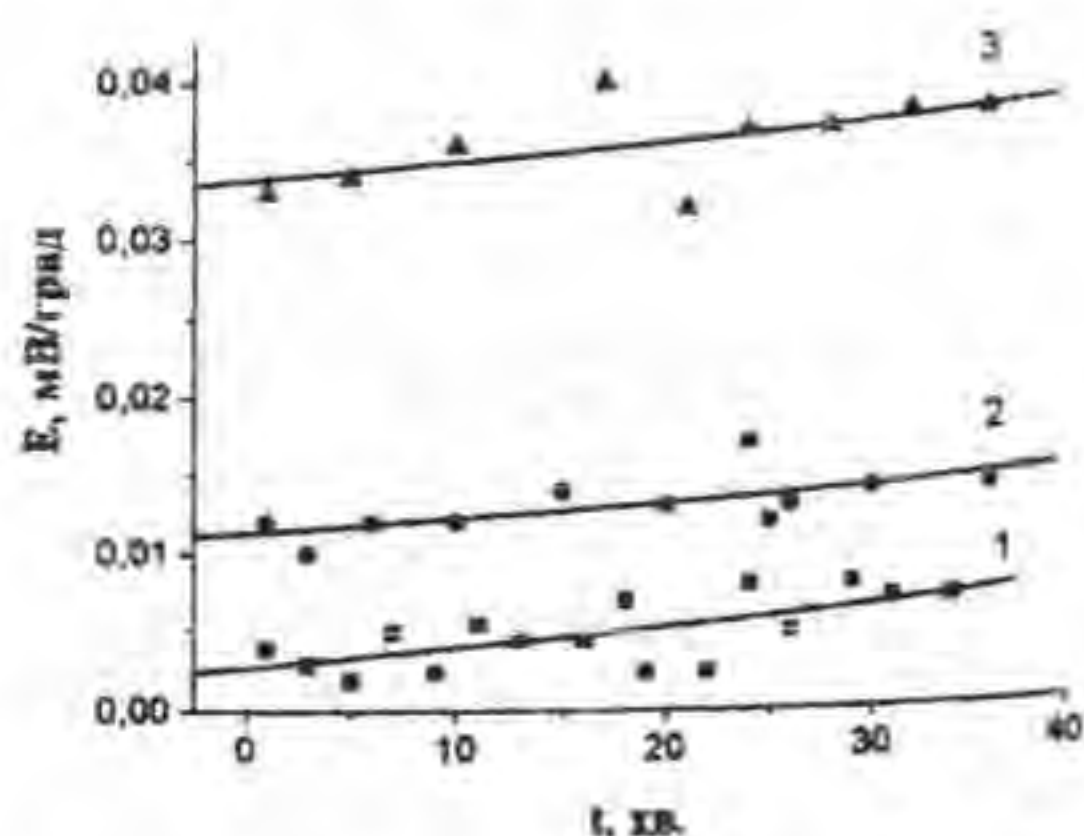


Рис.2. Залежність термо – е.р.с. E ФПП відносно міді від часу вимірювання: 1 – ФПП в темноті; 2 і 3 – освітленість плівки 100 – 120 Лк жовтим (595 – 565 нм) та голубим (510 – 490 нм) світлом відповідно.

Зростання $E(t)$ при освітленні плівки можна пояснити наступним чином. Електропровідність треків обумовлена наявністю рухомих електронів, що виникають внаслідок руйнування міжатомних зв'язків [1 – 3]. Зрозуміло, що ступінь руйнування зв'язків підкоряється статистичним закономірностям: одні зв'язки руйнуються повністю, інші – частково. Ступінь свободи електронів в трекові також повинен

підкоряється статистиці. Освітлення треку збільшує кількість рухливих електронів тим більше, чим більша енергія квантів. Тому графік 3 (рис.2), при одержанні якого було використано голубе світло, лежить вище графіка 2 (жовте світло).

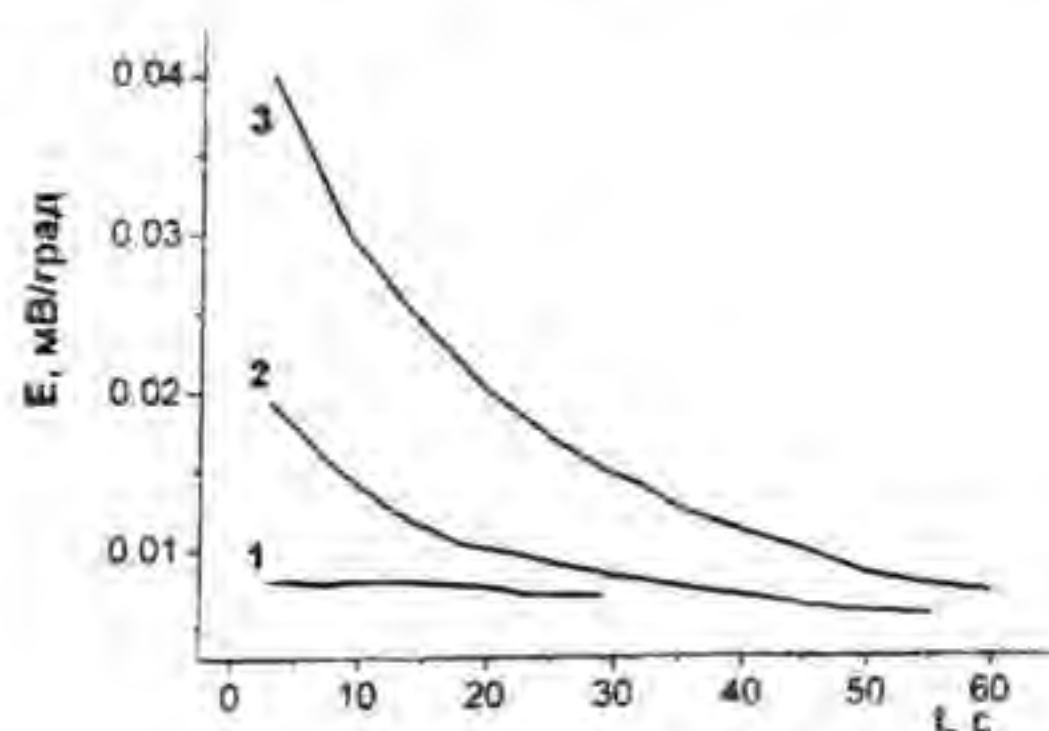


Рис.3. Зміна термо – е.р.с. E з часом після припинення освітлення ФПП жовтим (2) і голубим (3) світлом; 1 – рівень E , коли ФПП в темноті.

Підсилення термо – е.р.с. світлом зменшується з часом після припинення освітлення (рис.3), що додатково підтверджує гіпотезу про наявність в треках носіїв заряду з різною рухливістю.

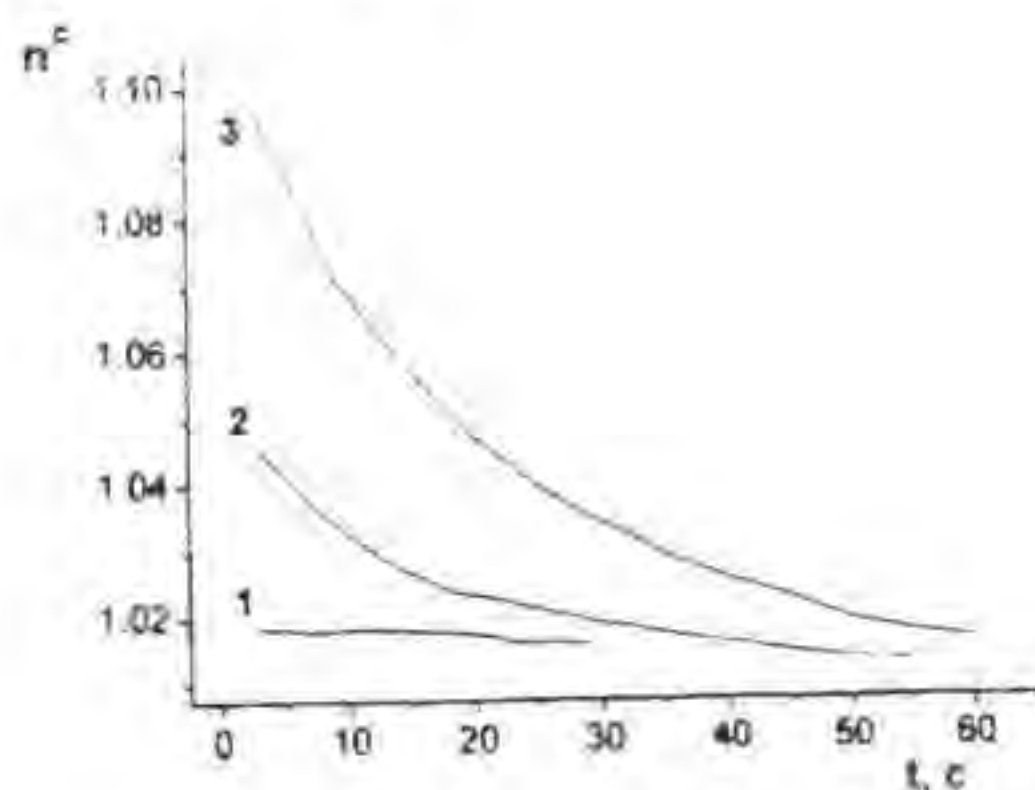


Рис.4. Зміна густини вільних електронів n з часом після припинення освітлення ФПП жовтим (2) і голубим (3) світлом; 1 – ФПП в темноті.

Термо – е.р.с. E залежить від концентрації вільних електронів n [3]:

$$E = c \cdot \lg n, \quad (1)$$

де c – стала величина.

Якщо густина вільних електронів з часом падає, то зменшується і термо – е.р.с.

З формули (1) маємо

$$n^e = 10^E, \quad (2)$$

Можна оцінити зміну n з часом, використавши дані рис.3. Після припинення освітлення ФПП n^e зменшується з часом (рис.4). Абсолютне значення n визначити не вдалось, тому що невідома константа c .

Висновки

1. Знайдено вперше, що в ФПП генерується термо – е.р.с., яка відносно міді становить $E \approx 0,005$ мВ/град.
2. Виникнення E пояснюється вільними електронами, що виникають в треках внаслідок руйнування міжатомних зв'язків.
3. Термо – е.р.с. зростає десятикратно до значень $E \approx 0,05$ мВ/град при освітленні плівки голубим світлом (100 – 120 Лк). Це пояснюється додатковим збільшенням кількості рухомих електронів в треках за рахунок фотозбудження.

Список використаних джерел

1. Беженар А.А., Копань В.С., Півень Н.І. Електроопір композиційного матеріалу фторопласт - вуглецеві нанотрубки // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №3. – с. 410-414.
2. Беженар А.А., Копань В.С. Вплив внутрішніх границь на електроопір порошкового фторопласту // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №1. – с. 4??-4??.
3. Беженар А.А., Копань В.С., Півень Н.І. Електроопір шаруватого композиційного матеріалу фторопласт - вуглецеві нанотрубки // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2008. – 6, №1. – с. 25-30.
4. Сосновский А.Г., Столярова Н.И. Измерение температур. – М., 1970. – 260 с.
5. Юренев В.Н. Теплотехнический справочник, т.2. – 1976. – 896 с.
6. Иоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы. Вид. АН СРСР М.-Л., 1960, 188 с.

Надійшла до редколегії 15.09.2008

УДК 535.3

Л.М. Білокриницька, канд. фіз.-мат. наук,
О.Ю. Гришук, аспірант,
В.Є. Клименко, канд. фіз.-мат. наук,
С.В. Шостак, канд. фіз.-мат. наук,
Л.Г. Гречко, докт. фіз.-мат. наук, проф.*

Поглинання електромагнітного випромінювання (ЕМВ) матричними дисперсними системами з багат шаровими кульовими включеннями

В електростатичному наближенні досліджено поглинання електромагнітного випромінювання (ЕМВ) кульовими багат шаровими малими частинками (БМЧ) та матричними дисперсними системами (МДС) на їх основі. Для БМЧ розроблено процедуру розрахунку її поляризованості та ефективності поглинання ЕМВ. Для МДС з включеннями типу БМЧ розвинуто теорію розрахунку її ефективної діелектричної проникності ($\bar{\epsilon}$) з врахуванням мультипольної взаємодії між включеннями. У випадку лише дипольної взаємодії між включеннями знайдено конкретні вирази для розрахунку ($\bar{\epsilon}$) МДС.

Ключові слова: електромагнітне випромінювання, малі частинки, діелектрична проникність, поглинання

*E-mail: lgrechko@isc.gov.ua

Вступ

При взаємодії електромагнітного випромінювання (ЕМВ) з матрично-дисперсними системами (МДС) із структурно-неоднорідними включеннями (багат шарові включення, включення з просторово-залежною діелектричною проникністю, включення, що несуть поверхневі заряди, тощо) має місце ускладнення структури спектрів поглинання ЕМВ поблизу частот поверхневих мод включень, число яких в порівнянні з однорідними включеннями зростає [1-3]. Одним з поширених методів розрахунку процесів взаємодії електромагнітного випромінювання з такими системами є метод ефективного середовища. Суть цього методу полягає у тому, що неоднорідна немагнітна МДС замінюється однорідним середовищем з деякою ефективною діелектричною проникністю (ДП) $\bar{\epsilon}$, величина

Bilokrynyts'ka L.M., Ph. D.,
Grischuk O.Yu., Post Gradient St.,
Klymenko V.Ye., Ph. D.,
Shostak S.V., Ph. D.,
Grechko L.G., Dr. Sc., prof.*

Absorption of electromagnetic irradiation (EMI) by matrix disperse systems with multilayer spheroid inclusions

Absorption of electromagnetic irradiation (EMI) by multilayer little particles (MLP) and matrix disperse systems (MDS) on this have were investigated in electrostatic approximation. The computation procedure was developed for MLP polarization and absorption efficiency of EMI. For MDS with inclusions of MLP type, the theory of calculation of its efficient dielectric permeability taking into account the multipole interaction between inclusions was developed. In the case of dipole interaction between inclusions the formulae were obtained for calculation of (ϵ) for MLP.

Key Words: electromagnetic irradiation, little particles, dielectric permeability, absorption

якої залежить від ДП включень та матриці, концентрації включень та їх форми [4-6]. Тоді після знаходження $\bar{\epsilon}$ коефіцієнт поглинання (κ) може бути обчислений за формулою [2]:

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\bar{\epsilon}} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{Im} \sqrt{\bar{\epsilon}} \quad (1)$$

де ω - частота, c - швидкість світла, λ - довжина хвилі.

Для окремої частинки ефективність поглинання виражається через поляризованість частинки α формулою [3]:

$$Q_{abs} = \frac{2\pi}{\lambda a^2} \operatorname{Im} \alpha, \quad (2)$$

де a - зовнішній радіус кулі.

Найбільш відомим і обгрунтованим наближенням для розрахунку $\bar{\epsilon}$ МДС з кульовими включеннями є співвідношення Максвелл-Гарнетта [3,9], яке має місце при ступенях заповнення $f = V_0/V < 0,1$, (V_0 -

об'єм, зайнятий включеннями, V - загальний об'єм системи) [3,4]. Наприклад, для суцільних кульових включень ця формула може бути записана у вигляді

$$\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_m}{\bar{\epsilon} + 2\epsilon_m} = f \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m}$$

або

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_m \left[1 + 3f \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m - f(\epsilon - \epsilon_m)} \right], \quad (3)$$

де ϵ , ϵ_m - діелектричні проникності включень і матриці відповідно.

Якщо в (3) ввести поляризованість α , то для кульових включень отримаємо формулу

$$\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_m}{\bar{\epsilon} + 2\epsilon_m} = f\alpha / a^3, \\ \bar{\epsilon} = \frac{1 + 2f\alpha^*}{1 - f\alpha^*} \epsilon_m, \quad \alpha^* = \alpha / a^3, \quad (4)$$

яка має назву формули Лоренц - Лорентца [3] чи Клаузіуса - Моссотті.

При одержанні цих співвідношень припускається, що ДП матриці залишається незмінною при збільшенні f . Але при $f > 0,1$ таке наближення дає результати, які погано узгоджуються з експериментом. Це, головним чином, зобумовлено тим, що відстань між включеннями у МДС зменшується, і стає суттєвою взаємодія між ними, яка може сильно змінити характер частотних залежностей спектрів розсіяння та поглинання ЕМВ такими МДС [4,6].

В роботі для визначення поглинання як для окремих структурно-неоднорідних включень, так і для МДС на їх основі, розраховано поляризованість БМЧ. Зокрема визначена ефективна діелектрична проникність МДС з двошаровими кульовими включеннями.

1. Поглинання ЕМВ багатошаровою кулею

Розглянемо кульову частинку (рис. 1), яка складається з n концентричних шарів з діелектричними комплексними проникностями ϵ_j і зовнішніми радіусами шарів r_j ($j = 1, 2, \dots, n$ - номер шару). Куля знаходиться у зовнішньому електричному полі E_0 . Для зовнішнього радіусу шару покладемо $r_n = a$. Нумерацію шарів починаємо з центру, тобто для

ядра кулі буде $j=1$, а для зовнішнього середовища - $j=n+1$. Діелектричну проникність зовнішнього середовища позначимо через $\epsilon_{n+1} = \epsilon_m$. Задачу будемо розв'язувати в сферичних координатах r, θ, φ , пов'язаних з центром кулі. Потенціали електростатичного поля в шарах позначимо через $\varphi_j = \varphi_j(r, \theta, \varphi)$, потенціал зовнішнього поля - через $\varphi_0 = \varphi_0(r, \theta, \varphi)$, а збурний потенціал, який вносить куля, через $\varphi_p = \varphi_p(r, \theta, \varphi)$.

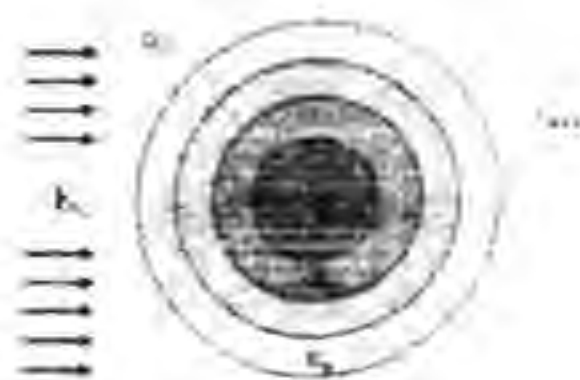


Рис. 1. Розрахункова схема багатошарової кулі

Всі потенціали є розв'язками рівняння Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right] + \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5)$$

а при $r = r_j$ повинні справджуватися умови спряження ($j = 1, 2, \dots, n-1$)

$$\varphi_j = \varphi_{j+1}, \quad \epsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} = \epsilon_{j+1} \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial r}. \quad (6)$$

На поверхні кулі, тобто у випадку $j = n$, буде

$$\varphi_{n+1} = \varphi_0 + \varphi_p, \quad \epsilon_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \epsilon_m \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial r} \right) \quad (7)$$

До умов (6), (7) додаються умови обмеженості розв'язків в початку координат і на нескінченності, тобто

$$\varphi_1 < \infty \text{ при } r \rightarrow 0 \text{ і } \varphi_p \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Деталі розв'язку крайової задачі (5) - (8) наведено в роботі [7]. В результаті цих розрахунків було отримано вираз для поляризованості α багатошарової кулі:

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_n [t_{11} + 2t_{21}] - \epsilon_m [t_{11} + t_{21}]}{2\epsilon_m [t_{11} + t_{21}] + \epsilon_n [t_{11} - 2t_{21}]} \quad (9)$$

У формулі (9) вирази для t_{ij} , ($i, j = 1, 2$) — елементи танслярної матриці переходу від першого шару кулі до n -того. Деталі розрахунку t_{ij} розглянуто в [7]. Також слід відмітити, що t_{ij} залежать від діелектричних функцій шарів ϵ_j ($j = 1, \dots, n$), їх товщин d_j ($j = 1, n$), діелектричної функції оточення та довжини хвилі падаючого випромінювання.

Для суцільної кулі ($n = 1$) з (9) випливає, що $t_{11} = 1$, $t_{21} = 0$, і тоді отримаємо відомий вираз [3] $\alpha = 4\pi a^3 (\epsilon_1 - \epsilon_m) / (\epsilon_1 + 2\epsilon_m)$. Для кулі в оболонці ($n = 2$) після деяких перетворень матимемо:

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_m)(\epsilon_1 + 2\epsilon_m) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_m + 2\epsilon_2)v}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_m)(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) + 2(\epsilon_2 - \epsilon_m)(\epsilon_1 - \epsilon_2)v}, \quad (10)$$

де параметр $v = r_2^3 / r_1^3$ визначає об'ємну долю ядра в суцільній кулі. Цей вираз співпадає з формулою, яка наведена в [3].

Після знаходження поляризованості частинки, поглинання та ефективна діелектрична проникність ($\tilde{\epsilon}$) МДС (в наближенні Максвелл-Гарнетта) з такими включеннями можуть бути розраховані за допомогою формул (1)–(4).

Наведемо деякі результати чисельних розрахунків. Розглянемо окрему біметалеву кульову частинку, яка складається із срібного ядра і золотої оболонки. Для опису діелектричної проникності срібла і золота використовуємо модель Друде

$$\epsilon = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_p)}, \quad (11)$$

де ω_p — плазмова частота для суцільного матеріалу, γ_p — частота поглинання. В розрахунках прийнято, що для срібла $\epsilon_\infty = 4,5$, $\gamma_p = 0,24 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, а для золота $\epsilon_\infty = 10,0$, $\gamma_p = 0,34 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ (i — уявна одиниця) [1–3]. На рис.2 показана спектральна залежність уявної частини безрозмірної поляризованості $\alpha^* = \alpha / (4\pi a^3)$ кульової частинки із срібним ядром та золотою оболонкою при деяких значеннях об'ємного заповнення $f = (r_1 / r_2)^3$ (зовнішній радіус частинки $a = r_2$ зберігався незмінним). Для оточуючого середовища

прийнято значення діелектричної проникності $\epsilon_m = 1,7$.

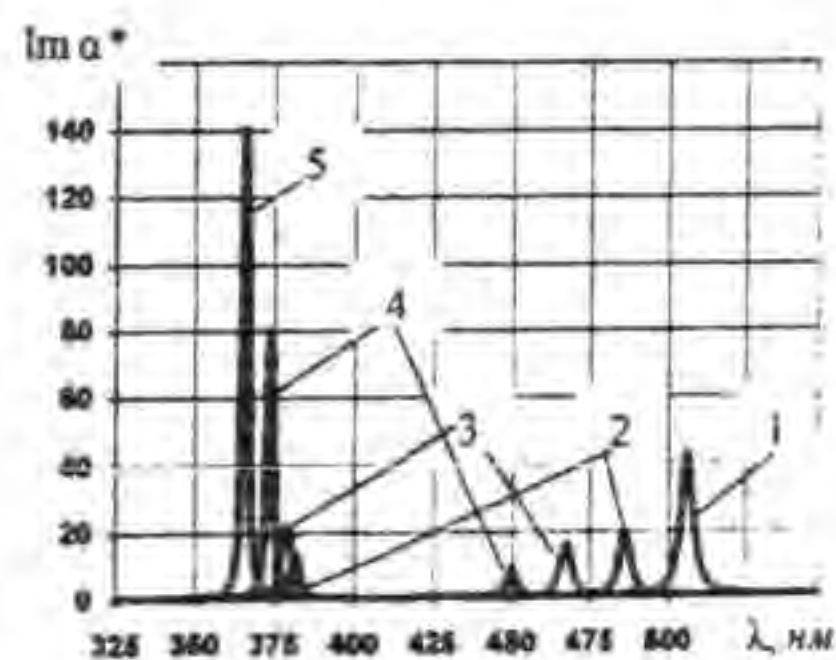


Рис.2. Спектральна залежність уявної частини безрозмірної поляризованості $\alpha^* = \alpha / (4\pi a^3)$ кульової частинки із срібним ядром та золотою оболонкою при різних значеннях об'ємного заповнення $v = (r_1 / r_2)^3$: 1 — $v = 0$ (суцільна золота частинка); 2 — $v = 0,25$; 3 — $v = 0,5$; 4 — $v = 0,75$; 5 — $v = 1$ (суцільна срібна частинка)

З наведеного графіку випливає, що наявність оболонки призводить до розщеплення величини довжин хвиль поверхневих плазмонів. Так в проміжку довжин хвиль між $\lambda_{Ag} = 366 \text{ нм}$ (довжина хвилі поверхневого плазмону суцільної срібної частинки) і $\lambda_{Au} = 506 \text{ нм}$ (довжина хвилі поверхневого плазмону суцільної золотої частинки) спостерігаються два максимума, розташованих між вказаними граничними значеннями. При цьому абсолютні значення максимумів суттєво зменшуються. Оскільки поглинання в електростатичному наближенні пропорційно $\text{Im } \alpha$, то максимуми поглинання на окремій частинці будуть повторювати залежності, які наведені на рис.2.

2. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з двошаровими кульовими включеннями

Розглянемо МДС, що складається з N -частинок, які розміщені в об'ємі V і знаходяться в зовнішньому однорідному електричному полі $E_0(r, t) = E_0(\omega) e^{-i\omega t}$ (рис. 3). В цьому розділі потенціали в шарах будемо позначати через ϕ і використовувати векторну символіку. В електростатичному наближенні поле $E(r)$ в довільній точці знаходиться із співвідношення $E(r) = -\text{grad} \phi(r)$, де $\phi(r)$ задовольняє

рівнянню Лапласа. Самі частинки системи є двошаровими кулями з наступними параметрами: зовнішній радіус кулі є b_i , ядра кулі - a_i , діелектрична проникність ядра кулі є $\epsilon_1^{(i)}(\omega)$, її оболонки - $\epsilon_2^{(i)}(\omega)$, а оточуючого середовища - ϵ_0 .

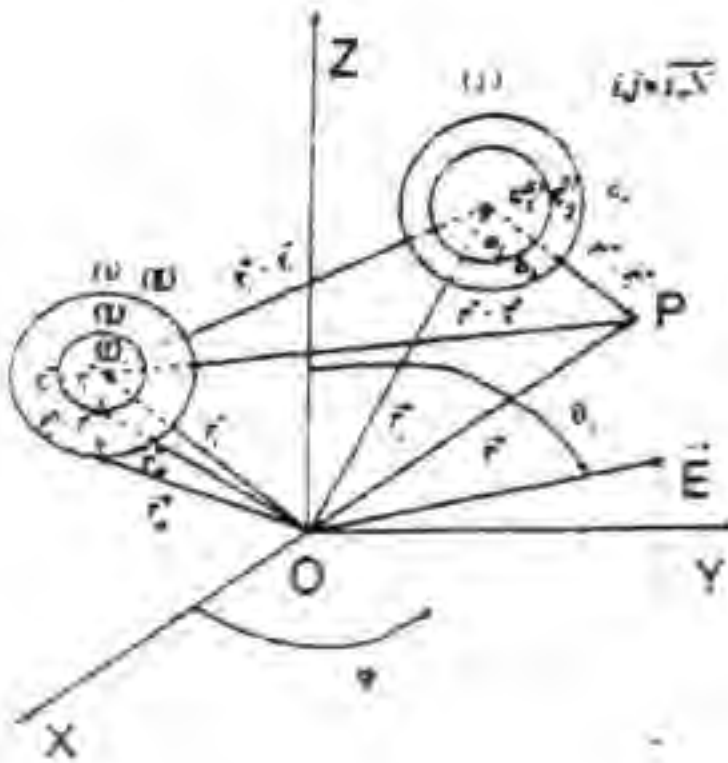


Рис. 3. Просторове розміщення двошарових куль

Виходячи із симетрії задачі, розв'язок рівняння Лапласа з центром на частинці з номером i можна записати у вигляді [5,6]:

для ядра частинки

$$\varphi_i^{(j)} = -E_0 \sum_{l,m} A_{lm}^{(i)} |\vec{r} - \vec{r}_i| Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i), \quad (12)$$

для оболонки частинки

$$\varphi_i^{(j)} = -E_0 \sum_{l,m} \left[C_{lm}^{(i)} |\vec{r} - \vec{r}_i| + \frac{D_{lm}^{(i)}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^{l+1}} \right] Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i), \quad (13)$$

для зовнішнього середовища

$$\varphi^{(j)}(\vec{r}) = -E_0 \sum_{l,m} d_{lm}^{(j)} |\vec{r} - \vec{r}_i|^l Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i) - E_0 \sum_{l,m} \frac{B_{lm}^{(i)}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i) - E_0 \sum_{l,m} \frac{B_{lm}^{(j)}}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_j), \quad (14)$$

де $Y_{lm}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i)$ сферичні функції,

$$\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

В рівнянні (14) перший член є потенціал зовнішнього поля (розкладений за сферичними гармоніками з центром $\vec{r}_i$) в точці спостереження P ; другий член є потенціал, який створює i -та частинка внаслідок її поляризації в точці P ; а третій - сума потенціалів, які створюють $N-1$ інших частинок в тій же точці. Відмітимо, що

при написанні (12) - (14) було враховано регулярність потенціалу $\varphi_i^{(j)}$ в центрі i -ї кулі та потенціалу $\varphi^{(j)}(\vec{r})$ на нескінченності. Для знаходження сталих $A_{lm}^{(i)}, B_{lm}^{(i)}, C_{lm}^{(i)}, D_{lm}^{(i)}$ розв'язки повинні задовольняти граничним умовами [3]:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(j)}|_{r \rightarrow \infty} &= \varphi_i^{(j)}|_{r \rightarrow \infty}; \quad \epsilon_1^{(i)}(\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi_i^{(j)})|_{r \rightarrow \infty} = \epsilon_2^{(i)}(\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi_i^{(j)})|_{r \rightarrow \infty} \\ \varphi_i^{(j)}|_{r \rightarrow \infty} &= \varphi_i^{(j)}|_{r \rightarrow \infty}; \quad \epsilon_2^{(i)}(\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi_i^{(j)})|_{r \rightarrow \infty} = \epsilon_0(\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi_i^{(j)})|_{r \rightarrow \infty} \end{aligned} \quad (15)$$

де вектори $\vec{r}_i$ і $\vec{r}_j$ показані на рис. 3, причому вектори $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ та $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ паралельні зовнішній нормалі $\vec{n}_i$; $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = a_i$, $|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = b_i$.

Оскільки сферичні гармоніки в третьому доданку (14) центровані на j -му центрі, то безпосередньо задовольнити умовам (15) неможливо - потрібно здійснити перехід на i -й центр. Для цього скористаємося теоремами додавання для сферичних гармонік, одна з яких при $|\vec{r} - \vec{r}_i| < |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ дає [6, 8]:

$$\frac{Y_{lm}(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^{l+1}} = \sum_{l',m'} d_{l'm'}^{lm}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-l-1} Y_{l'm'}(\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}_i), \quad (16)$$

де

$$d_{l'm'}^{lm}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \frac{Y_{l'm'}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^{l+1}} (-1)^{l-m} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{(2l+1)(2l+2l+1)} \right] K_{l'm'}^{lm}, \quad (17)$$

$$K_{l'm'}^{lm} = K_{l'm'}^{lm} = \left[\frac{(l+l+m-m)! (l+l+m-m)!}{(l+m)! (l-m)! (l+m)! (l-m)!} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Підставляючи розв'язки (12)-(14) в граничні умови (15) та використовуючи співвідношення (16), після деяких перетворень [8], отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів $B_{lm}^{(i)}$ (а з ними і $A_{lm}^{(i)}, C_{lm}^{(i)}, D_{lm}^{(i)}$):

$$\frac{B_{lm}^{(i)}}{\alpha_l^{(i)}} + \sum_{j \neq i} \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} B_{l'm'}^{(j)} d_{l'm'}^{lm}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -d_{lm}^{(i)}. \quad (19)$$

Тут $d_{lm}^{(i)}$ - коефіцієнти розкладу зовнішнього поля за сферичними функціями, центрованих на i -включенні, а

$$\alpha_l^{(i)} = \frac{b^{2l+1} \left[\left[\epsilon_2^{(i)}(l+1) + k_2^{(i)} \right] \left[\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_0 \right] + \left(\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_2^{(i)} \right) \left[(l+1)\epsilon_0 + k_2^{(i)} \right] q^{2l+1} \right]}{\left[\epsilon_2^{(i)}(l+1) + k_2^{(i)} \right] \left[(l+1)\epsilon_0 + k_2^{(i)} \right] + l(l+1) \left(\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_2^{(i)} \right) \left(\epsilon_1^{(i)} - \epsilon_0 \right) q^{2l+1}}, \quad (20)$$

де $q = \frac{a}{b}$, $d_{lm}^{(i)}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ дається формулою (17).

Відмітимо, що після знаходження $B_{lm}^{(i)}$, інші коефіцієнти $A_{lm}^{(i)}, C_{lm}^{(i)}, D_{lm}^{(i)}$ легко знаходяться із граничних умов.

У електростатичному наближенні співвідношення (12)-(14) та (19)-(20) повністю розв'язують задачу знаходження електричного поля в довільній точці простору системи N двошарових куль в зовнішньому полі E_0 з врахуванням прямої мультипольної взаємодії між частинками. Якщо обмежитись в (20) членами порядку $l = l' = 1$, то враховуємо лише дипольну взаємодію між ними, обмежуючись членами $l = l' = 2$ - квадрупольну і т.д.

Відмітимо, що $\alpha_i^{(l)}$ є поляризованість l -ї частинки порядку l в полі E_0 . При $l=1$ (дипольна поляризованість) формула (31) переходить в формулу (5.36) монографії [3] при $q_i = 0$. Порівнюючи співвідношення (19) та (20) з відповідними співвідношеннями робіт [5,6] можна помітити, що відмінність системи рівнянь (19) для знаходження $B_{lm}^{(i)}$ у випадку МДС з двошаровими включеннями відрізняються від подібних співвідношень для МДС з одношаровими кульовими включеннями лише значенням l -польної поляризованості ($\alpha_i^{(l)}$). Іншими словами, для знаходження $\tilde{\epsilon}$ такої МДС ми можемо відразу скористатися формулами робіт [5,6], замінивши в них $\alpha_i^{(l)}$ на вираз (20). Тоді можна відразу знайти $\tilde{\epsilon}$ для МДС з двошаровими сферичними включеннями з врахуванням лише парної диполь-дипольної взаємодії між ними та їх розподілу за розмірами (сумування по k, p)

$$\frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1}{\frac{4}{3} \sum_k n_k \alpha_k^{(1)}} - \frac{1}{\left(\sum_k n_k \alpha_k^{(1)} \right)^2} \quad (21)$$

$$\sum_{k,p} n_k n_p \int_0^\infty R_{kp}^2 \phi(R_{kp}) \cdot dR_{kp} \left[\beta_{kp}^{(1)}(R_{kp}) + 2\beta_{kp}^{(2)}(R_{kp}) \right]$$

В (21) $\alpha_i^{(l)}$ дається формулою (20) при $l=1$, $R_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, де $n_k = \frac{N_k}{V}$ - концентрація частинок k -сорту, $\phi(R_{kp})$ - двошарова функція розподілу включень в матриці, яка вибиралась у наступному вигляді [1,2]:

$$\phi(R_{kp}) = \begin{cases} 0, & \text{коли } R_{kp} < b_k + b_p, \\ 1, & \text{коли } R_{kp} \geq b_k + b_p. \end{cases} \quad (22)$$

При врахуванні лише парної дипольної взаємодії ($l = l' = 1$) між включеннями, $\beta_{ij}^{(1)}$ і $\beta_{ij}^{(2)}$ мають вигляд [5,6]:

$$\beta_{ij}^{(1)} = \chi_{10}^{(1)}(R_{ij}) - \alpha_i^{(1)} - 2 \frac{\alpha_i^{(1)} \alpha_j^{(1)}}{R_{ij}^3}; \quad (23)$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = \chi_{11}^{(1)}(R_{ij}) - \alpha_i^{(1)} + \frac{\alpha_i^{(1)} \alpha_j^{(1)}}{R_{ij}^3}, \quad (24)$$

де $\chi_{10}^{(1)}(R_{ij})$ та $\chi_{11}^{(1)}(R_{ij})$ (при $l = l' = 1$) легко знаходять із (19) [5,6]:

$$\chi_{10}^{(1)}(R_{ij}) = \frac{1}{2} b_i \left[\frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{\frac{1}{2}} + \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{\frac{1}{2}} - 2\Delta_{ij}^{\frac{1}{2}} \delta_i} + \frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{\frac{1}{2}} - \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{\frac{1}{2}} + 2\Delta_{ij}^{\frac{1}{2}} \delta_i} \right]; \quad (25)$$

$$\chi_{11}^{(1)}(R_{ij}) = \frac{1}{2} b_i \left[\frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{\frac{1}{2}} + \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{\frac{1}{2}} - \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}} \delta_i} + \frac{\left(\frac{B_i}{B_j} \right)^{\frac{1}{2}} - \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{B_i B_j} \right)^{\frac{1}{2}} + \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}} \delta_i} \right],$$

де $\Delta_{ij} = b_j / b_i$, $\delta_i = b_i / R_{ij}$ і $B_i = \alpha_i^{(1)} / b_i^3$.

З врахуванням вигляду функції $\phi(R_{ij})$ (22) та співвідношень (23)-(24), із (21) отримуємо формулу ефективної діелектричної проникності $\tilde{\epsilon}$ для МДС з двошаровими кульовими включеннями в наближенні парної дипольної взаємодії між ними:

$$\frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \sum_k n_k \alpha_k^{(1)}} - \frac{1}{3 \left(\sum_k n_k \alpha_k^{(1)} \right)^2} \sum_{k,p} n_k n_p \alpha_k^{(1)} \alpha_p^{(1)} \quad (26)$$

$$\times \left\{ \left[1 + \frac{b_k^3}{b_p^3} \left(\frac{\alpha_k^{(1)}}{\alpha_p^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \ln \frac{(b_k + b_p)^3 + (\alpha_k^{(1)} \alpha_p^{(1)})^{\frac{1}{2}}}{(b_k + b_p)^3 - 2(\alpha_k^{(1)} \alpha_p^{(1)})^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. \left[1 - \frac{b_k^3}{b_p^3} \left(\frac{\alpha_k^{(1)}}{\alpha_p^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \ln \frac{(b_k + b_p)^3 - (\alpha_k^{(1)} \alpha_p^{(1)})^{\frac{1}{2}}}{(b_k + b_p)^3 + 2(\alpha_k^{(1)} \alpha_p^{(1)})^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}$$

Якщо знехтувати в правій частині (26) другим доданком, то одержимо співвідношення Максвелл-Гарнетта для МДС з двошаровими включеннями, що складають собою суміш частинок з гістограмою розподілу як за розмірами, так і за різними електродинамічними характеристиками частинок (різні $\epsilon_{1,2}^{(i)}$). У випадку однакових частинок, із (26) маємо:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \left[1 + \frac{3fB}{1 - fB - \frac{2}{3} fB \ln \frac{8+B}{8-2B}} \right] \quad (27)$$

де $a_i = a_j = a$, $b_i = b_j = b$,
 $\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_1^{(j)} = \varepsilon_1$; $\varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_2^{(j)} = \varepsilon_2$, $q = \frac{a}{b}$,
 $B = \frac{\alpha_1}{b^3} = \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_0)q^3}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(2\varepsilon_0 - \varepsilon_2) + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_0)q^3}$
 $f = (4/3)\pi b^3 n$, n - концентрація включень.
 При $fB \ll 1$, з (27) випливає, що:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = 1 - 3fB - 2(fB)^2 \left[\ln \frac{8+B}{8-2B} - 3 \right] + \dots \quad (28)$$

або

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + 3fB + f^2 B^2 \left[3 + 2 \ln \frac{8+B}{8-2B} \right] + \dots \quad (29)$$

З одержаних результатів можна зробити ряд важливих висновків. З вигляду системи рівнянь (19) – (20) випливає, що задача знаходження коефіцієнтів $B_{cm}^{(i)}$, а потім $\tilde{\varepsilon}$ для МДС із складними кульовими включеннями (багатшарові кулі з неоднорідною діелектричною проникністю тощо) повністю еквівалентна задачі знаходження цих коефіцієнтів та $\tilde{\varepsilon}$ для МДС з суцільними кульовими включеннями, але із новим значенням мультипольної поляризованості окремого включення $\alpha_j^{(i)}$. Цей результат випливає з граничних умов (18), оскільки добавки внаслідок мультипольної взаємодії додаються до коефіцієнтів взаємодії включень із зовнішнім полем $d_{im}^{(i)}$. Аналогічна картина буде спостерігатись і для МДС з більш складною внутрішньою структурою включень. Так для МДС із багатшаровими включеннями для знаходження $\tilde{\varepsilon}$, слід в формулу (26) підставити поляризованість, знайдену в дипольному наближенні за формулою (9).

Слід також відмітити, що розвинений вище метод розрахунку $\tilde{\varepsilon}$ подібних МДС дозволяє враховувати і вищі члени мультипольної взаємодії між включеннями, але при цьому потрібно знати статистичні багаточастинкові (трьох, чотирьох, і т.д.) функції розподілу куль в матриці. На жаль, ці функції на сьогодні точно не відомі, на відміну від точного виразу для двохчастинкової функції [2].

Висновки

Проведено узагальнення теорії Максвелл-Гарнетта розрахунку $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ для МДС з двошаровими кульовими включеннями з врахуванням парної мультипольної взаємодії між включення-

ми та розподілу їх за розмірами. Показано, що формула для знаходження $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ у даному випадку має вигляд, аналогічний до випадку МДС з однорідними кульовими включеннями із заміною поляризованості суцільної кулі на поляризованість двошарової кулі. З урахуванням лише диполь-дипольної взаємодії цей висновок має місце і для МДС з багатшаровими кульовими включеннями. Показано, що для МДС з двошаровими включеннями з металевим ядром внаслідок міжчастинкової взаємодії частота поверхневого плазмону розщеплюється на два піки.

Слід відмітити, що ці висновки одержано при використанні електростатичного наближення та при величині ступеня заповнення $f < 0.1$.

Робота частково фінансувалася в рамках договорів: № 28 – спільного конкурсу НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень № 37/08н – програма НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали, нанотехнології»

Список використаних джерел

1. Kreibig U. and Vollmer M. Optical Properties of Metal Clusters.-Berlin: Springer, 1995.-532p.
2. Венгер У.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л. Оптика малих частинок дисперсних середовищ.-Київ: Наук.думка, 1999.-348с.
3. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.
4. Felderhof B.U., Ford G.W., Cohen E.G.D. Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant // J. Stat. Phys. – 1982. – 28, № 4. – P. 649-672.
5. Grechko L.G., Levandovskii V.G., Ogenko V.M., Pinchuk A.N. Effective dielectric function of metallic particles aggregates // Proc. SPIE.-1996.-3055.-P.111-117.
6. Grechko L.G., Pustovit V.N., Whites K.W. // Appl. Phys. Lett.-2000.-76, №14.-P.1854-1856.
7. Гречко Л.Г., Лірман Л.Б., Водоп'янов Д.Л., Шостак С.В. Поляризованість структурно-неоднорідних кульових частинок // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. – 2007. – № 1. – С. 416 - 425
8. Cruzan O.R. Translational addition theorems for spherical vector wave functions // Quart. Appl. Math.-1962.-Vol.20.-P.33-40.
9. Гречко Л.Г., Шкода Н.Г., Шостак С.В. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з двошаровими кульовими включеннями // Український фізичний журнал.-2002.-Т.47. №7.-С.694-698.

Надійшла до редколегії 15.09.08

УДК 535.33

Дегода В.Я., д.ф.м.н.,
Софієнко А.О., асп.

Фосфоресценція і релаксація струму в селеніді цинку після фото- та рентгенівського збудження

Наведено результати одночасних експериментальних досліджень фосфоресценції та релаксації струму провідності в монокристалічному селеніді цинку після фото- і рентгенівського збудження. Кінетика процесу фосфоресценції після зон-зонного фотозбудження ZnSe знаходить пояснення в рамках кінетичної теорії люмінесценції кристалофосфорів. Натомість, після рентгенівського збудження зразків кінетика фосфоресценції і релаксації струму може змінюватися суттєвим чином. Спостережено, що показник гіперболи релаксації струму більший за показник гіперболи затухання фосфоресценції. Цей експериментальний факт не можна пояснити в рамках класичної кінетичної теорії фотолюмінесценції та фотопровідності. Також проведено аналіз стрибків в інтенсивності люмінесценції та величині струму провідності після припинення опромінювання зразка, які свідчать, про визначальний вплив характеру збудження.

Ключові слова: фосфоресценція, релаксація провідності, рентгенівське випромінювання.

*E-mail: degoda@univ.kiev.ua

Вступ

При опромінюванні монокристалів селеніду цинку рентгенівськими або УФ - квантами спостерігається інтенсивна рентгенолюмінесценція (РЛ) чи фотолюмінесценція (ФЛ), а після прикладання до електродів кристалу різниці потенціалів з'являється помітна рентгенопровідність (РП) чи фотопровідність (ФП). Внаслідок локалізації частини згенерованих носіїв заряду на пастках після припинення збудження спостерігаються довготривалі (десятки хвилин) релаксаційні процеси – фосфоресценція (Ф) і релаксація струму провідності (РС). Класична кінетична теорія фотолюмінесценції (ФЛ) та фотопровідності (ФП) кристалофосфорів [2; 4] дозволяє встановити відповідність між процесами фосфоресценції та релаксації струму, прийнявши, що величина струму фото- та

V. Ya. Degoda, degree V. Ya.,
A. O. Sofienko, degree A. O.

Phosphorescence and relaxation of conductivity in ZnSe after photo- and x-ray excitation

The results of simultaneous experimental researches of phosphorescence and relaxation of conductivity are resulted in crystal ZnSe after photo- and x-ray excitation. Kinetics of phosphorescence after photoexcitation of ZnSe finds explanation within the framework of kinetic theory of luminescence. But, after x-ray excitation of standards kinetics of phosphorescence and the relaxation of current can change. Observed, that index of hyperbola of relaxation of current more then index of hyperbola of phosphorescence. This experimental fact can not be explained within the framework of classic kinetic theory of photoluminescence and photoconductivity. The analysis of jumps is also conducted and intensity of luminescence and size of conductivity after stopping irradiations shows about the determining influencing of character of excitation.

Key Words: phosphorescence, relaxation of conductivity, x-ray radiation.

рентгенопровідності є пропорційною до концентрації вільних носіїв заряду в кристалі у відповідності до теореми Рамо-Шоклі [10]. Якщо після фотозбудження зразка процеси фосфоресценції і релаксації струму знаходять теоретичне обґрунтування в рамках кінетичної теорії фотолюмінесценції, то порівняння фосфоресценції і релаксації струму після фото- та рентгенівського збудження дозволяє виділити вплив процесів генерації вільних носіїв заряду при поглинанні високоенергетичних квантів на кінетику їх подальшої рекомбінації та запасання на пастках. Необхідною умовою для проведення порівняльного аналізу є саме одночасна реєстрація в зразку Ф і РС, оскільки не завжди їх окремі вимірювання дозволяють проводити сумісний аналіз отриманих кривих для встановлення кінетики процесу. Передісторія в

реальних зразках ZnSe може призводити до незначних змін в характері затухання Φ і РС.

Основними особливостями процесів РЛ і РП є те, що при поглинанні в кристалі одного рентгенівського кванту відбувається створення високої концентрації електронно-діркових пар $\sim 10^{18} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$ [6], які в процесі релаксації рекомбінують і локалізуються на різних центрах неоднорідно по об'єму кристалу. Такі окремі області підвищеної концентрації заповнених пасток та іонізованих центрів свічення можуть виступати в якості окремих джерел фосфоресценції [9], сумарний вклад яких і визначає інтенсивність Φ кристалу в цілому. Очевидно, що при цьому кінетика затухання Φ і РС може значно ускладнюватися.

Основна мета даної роботи полягала в проведенні порівняльного аналізу процесів Φ та РС, що вимірювалися одночасно, в монокристалічних зразках селеніду цинку після фото- та рентгенівського збудження для встановлення основних відмінностей в кінетиці люмінесценції та провідності.

Методика експериментальних досліджень

В експериментальних дослідженнях використовувалися спеціально не леговані кристали ZnSe, які вирощували після попередньої очистки шихти для одержання кристалів з мінімальною концентрацією домішок та, відповідно, з максимальним питомим опором. Для вимірювання провідності на монокристали резистивним методом напильовали індієві електричні контакти (у вигляді паралельних смужок $5 \times 2 \text{ мм}$), до яких підпаювали провідники. Відстань між електродами становила 5 мм. На один електрод подавалася напруга до 1000 В, а інший через цифровий наноамперметр (чутливість на рівні 1 пА) був заземлений. Для всіх значень струму провідності виконувалася умова, що вхідний імпеданс наноамперметра ($\sim 100 \text{ Ом}$) є набагато меншим (на декілька порядків) за електричний опір зразка ZnSe. Для дослідження люмінесцентних і релаксаційних процесів в монокристалічних зразках ZnSe в якості джерел збудження використовувалися ультрафіолетові світлодіоди UF-301 ($3-30 \text{ мА} \times 7$) з максимумом випромінювання 395 нм та рентгенівська трубка БХВ-Re в режимі роботи 20 мА/20 кВ. Між окремими експериментами, що проводилися при температурах зразка 85 та 295 К його прогрівали до 500-600 К для гарантованого спустошення накопиченої в кристалі світлосуми. Спектри свічення при фото- та рентгенівському збудженні вимірювали за допомогою

світлосильного монохроматора МДР-2 з використанням в якості фотоприймачів ФЕП-106 та ФЕП-83 з охолодженням фотокатода останнього до -40°C . Це дозволило реєструвати свічення зразка в діапазоні довжин хвиль 400 – 1200 нм. Комплексні експериментальні дослідження проводилися при одночасній реєстрації люмінесценції та провідності в кристалі. В процесі досліджень при фото- та рентгенівському збудженні одержані спектри люмінесценції в області 400 – 1200 нм (температура зразка 85 К): фосфоресценція та релаксація струму, стрибки люмінесценції та провідності під час припинення збудження, термостимульована люмінесценція та провідність. Для перевірки того, як змінювалися параметри зразків на початку та в кінці досліджень вимірювалися температурні залежності темної провідності. Встановлено, що ці зміни не перевищують 5%.

Фосфоресценція і релаксація струму при кімнатній температурі (295 К)

Нагрівання селеніду цинку зумовлює швидкий спад інтенсивності стаціонарної ФЛ і РЛ за рахунок збільшення імовірності безвипромінювальної рекомбінації на центрах свічення [2; 4]. При переході від 85 К до 295 К стаціонарне значення інтенсивності свічення різних моно- та полікристалічних зразків зменшується на 1-2 порядки, а це в свою чергу ускладнює проведення експериментальних досліджень Φ при температурах $T > 200 \text{ К}$. Дослідження ТСЛ і ТСП показали, що монокристалічні зразки ZnSe характеризуються наявністю в них домінуючої концентрації неглибоких пасток, які практично повністю спустошуються при нагріванні кристалу до 200 К.

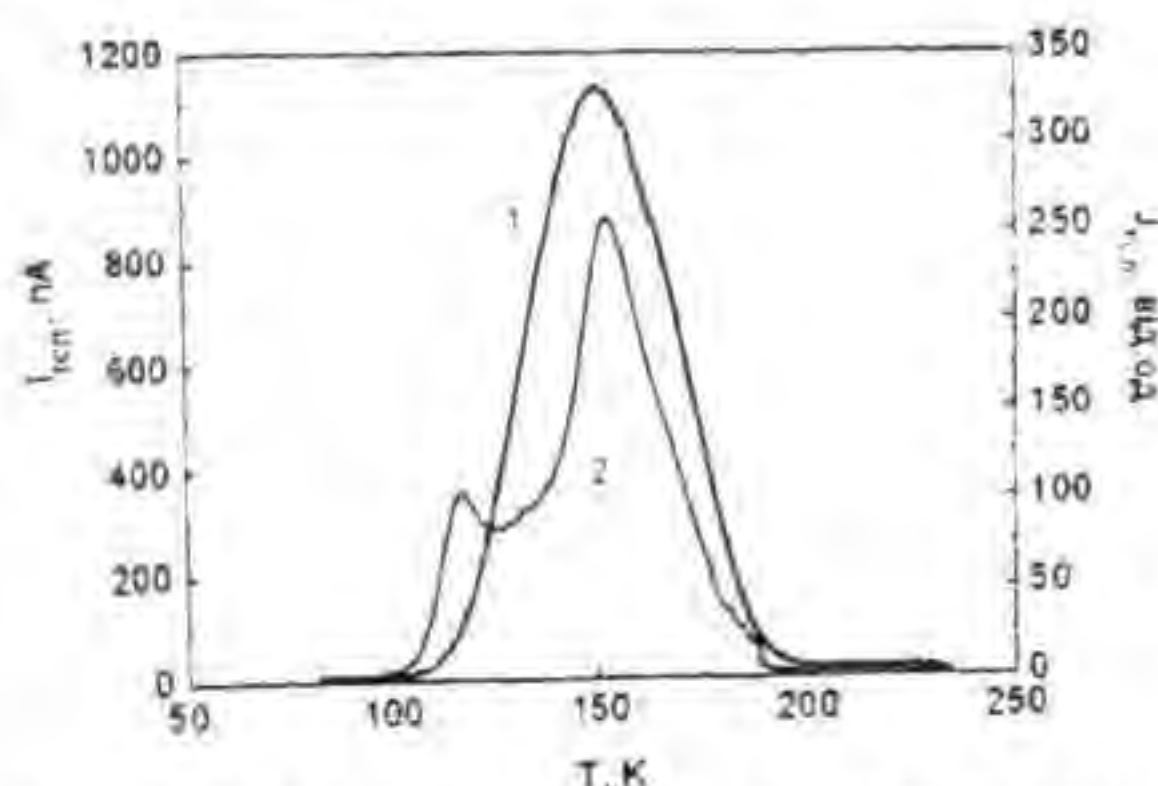


Рис. 1 ТСЛ (1) і ТСП (2) монокристалічного ZnSe після рентгенівського збудження ($T=85 \text{ К}$).

Тому інтенсивності Φ і РС при вищих температурах визначаються незначним залишком локалізованих носіїв на глибоких пастках і експериментально спостерігаються лише при значних дозах опромінення. На рис. 1 наведено характерні криві ТСЛ і ТСП монокристалічного ZnSe, отримані після збудження зразка рентгенівським випромінюванням протягом однієї години. Аналогічний вигляд мають і криві ТСЛ, ТСП після фотозбудження зразка, що підкреслює незалежність між типом збудження та перерозподілом носіїв заряду на пастках в кристалі, а також те, що в даному випадку рентгенівське випромінювання не створювало в зразку додаткових структурних дефектів.

РС при кімнатній температурі характеризується швидким спадом до темнових значень провідності за час ~ 1 с, що також обумовлено низькою концентрацією глибоких пасток в кристалі та сильною залежністю рухливості вільних носіїв заряду від температури.

Спектри свічення ZnSe

В спектрах РЛ та ФЛ монокристалів ZnSe (рис. 2) при температурі 85 К спостерігаються тільки широкі рекомбінаційні смуги свічення з максимумами при 626 нм та 963 нм. В короткохвильовій області спектра з енергіями фотонів близькими до ширини забороненої зони практично не спостерігається крайове свічення та свічення донорно-акцепторних пар (ДАП). Відсутність в спектрах свічення ДАП вказує на низьку концентрацію неконтрольованих домішок, а дуже слабке крайове свічення при 85 К вказує на помітну концентрацію власних дефектів. Домінуючою в спектрі є смуга самоактиваційної люмінесценції $\lambda_{\text{max}} = 626$ нм (1.98 eV), яка приписується авторами [3] комплексному центру, що складається з вакансії цинку та домішкового мілького донора ($V_{\text{Zn}} + D$). Інфрачервона (ІЧ) смуга свічення з $\lambda_{\text{max}} = 963$ нм (1.29 eV) також добре відома [3; 8] і обумовлена вакансіями селену (V_{Se}). З літератури [8] також відомі смуги свічення з $\lambda_{\text{max}} = 1300 - 1400$ нм, що в даному випадку спостерігалися лише частково.

Важливою особливістю спектрів РЛ та ФЛ є їх різна температурна поведінка. Якщо при кімнатній температурі підібрати інтенсивність збудження ФЛ таким чином, щоб інтенсивності ФЛ і РЛ були одного рівня, то при низьких температурах (85 К) їх інтенсивності відрізнятимуться в декілька разів на користь ФЛ. Це може свідчити про те, що температурне

згасання люмінесценції визначається в першу чергу зовнішнім, а не внутрішнім температурним згасанням центрів свічення.

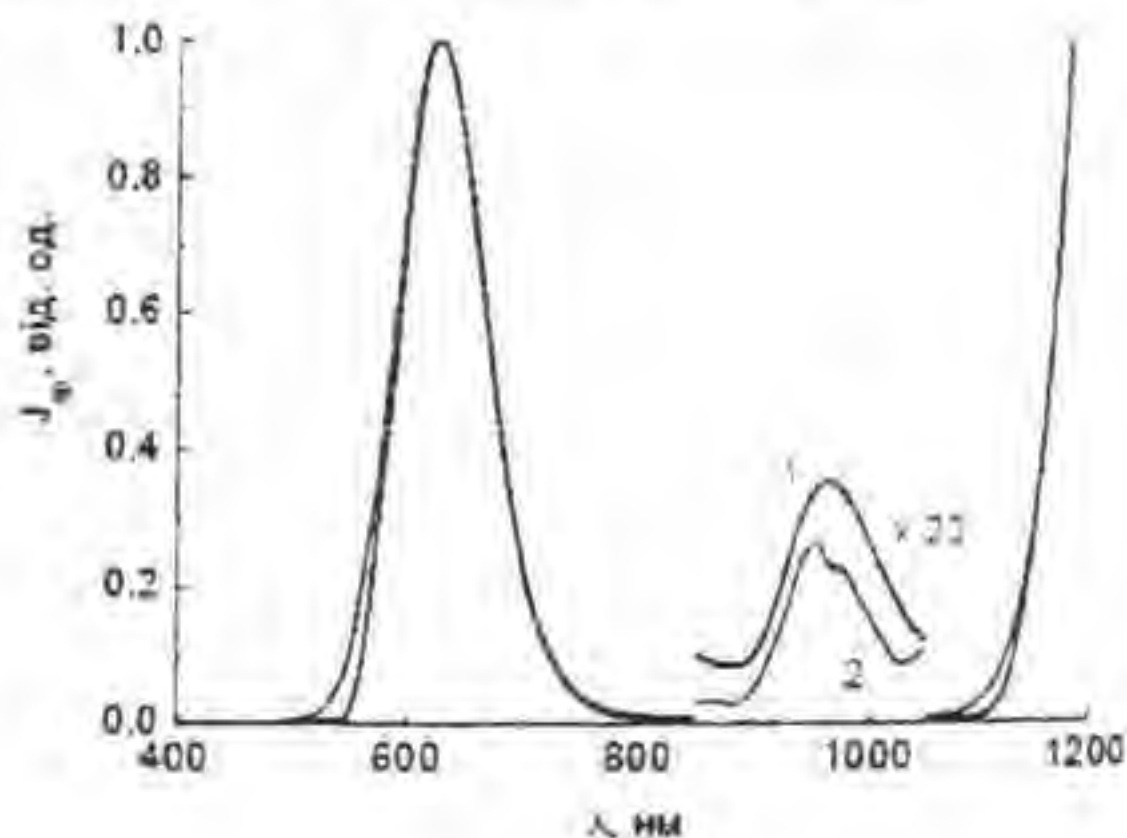


Рис. 2 Нормовані спектри фотолюмінесценції (1) та рентгенолюмінесценції (2) ZnSe при температурі 85 К.

Слід зазначити, що в кожному зразку селеніду цинку спостерігається своя температурна залежність для всіх смуг свічення. Спільним є тільки зменшення інтенсивностей смуг свічення ФЛ і РЛ при нагріванні від 85 К.

Фосфоресценція і релаксація струму після фотозбудження ZnSe

Кінетика затухання Φ і РС після фотозбудження монокристалічного ZnSe при температурі 85 К визначається гіперболічною залежністю, а характерні криві затухання наведено на рис. 3. Оскільки інтенсивність $\Phi \sim (1 + w \cdot t)^{-\alpha}$, де w - імовірність делокалізації з пасток в одиницю часу, то всі криві Φ і РС представлені нижче в шкалі безрозмірного часу $\theta = w \cdot t$. Це дозволяє, по-перше, лінеаризувати криві Φ в подвійному логарифмічному масштабі, а по-друге, спрощує їх апроксимацію, оскільки невідомим параметром залишається лише показник гіперболи. Показник гіперболи кривої Φ на рис. 3 становить 1.54, а для РС - 1.32. В загальному випадку інтенсивність Φ спадає за феноменологічним законом Бекереля, а співвідношення між показниками гіпербол кривих Φ і РС може бути пояснене, виходячи з основних принципів теорії люмінесценції кристалофосфорів при фотозбудженні. Дійсно, інтенсивність люмінесценції є пропорційною добутку концентрації вільних носіїв заряду (N), що поступово делокалізуються з пасток, на концентрацію іонізованих центрів свічення (n^+)

в зразку $J(t) = n^+(t) \cdot N(t)$ [4]. А величина струму провідності є пропорційною до концентрації вільних носіїв в зразку. Тому затухання Φ з часом повинно бути завжди швидше, ніж РС, що і спостерігається на практиці при фотозбудженні.

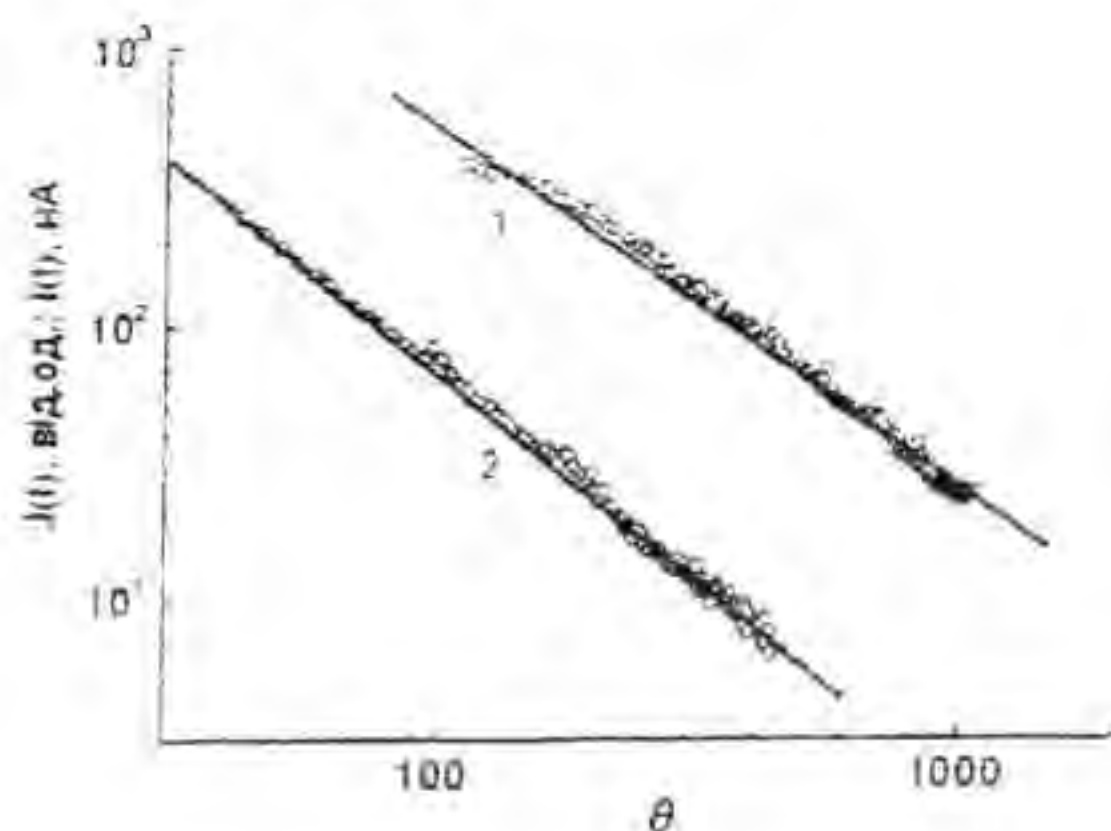


Рис. 3 Криві РС (1) і затухання Φ (2) після фотозбудження. Φ вимірювалася на довжині хвилі $\lambda=626$ нм.

Той факт, що криві Φ і РС лінеаризується в одному масштабі $\theta = w \cdot t$ свідчить про те, що ці процеси обумовлені делокалізацією з тих самих пасток.

Фосфоресценція і релаксація струму після рентгенівського збудження ZnSe

Кінетика затухання Φ і РС монокристалічного ZnSe після збудження рентгенівським випромінюванням при температурі 85 К також визначається гіперболічною залежністю.

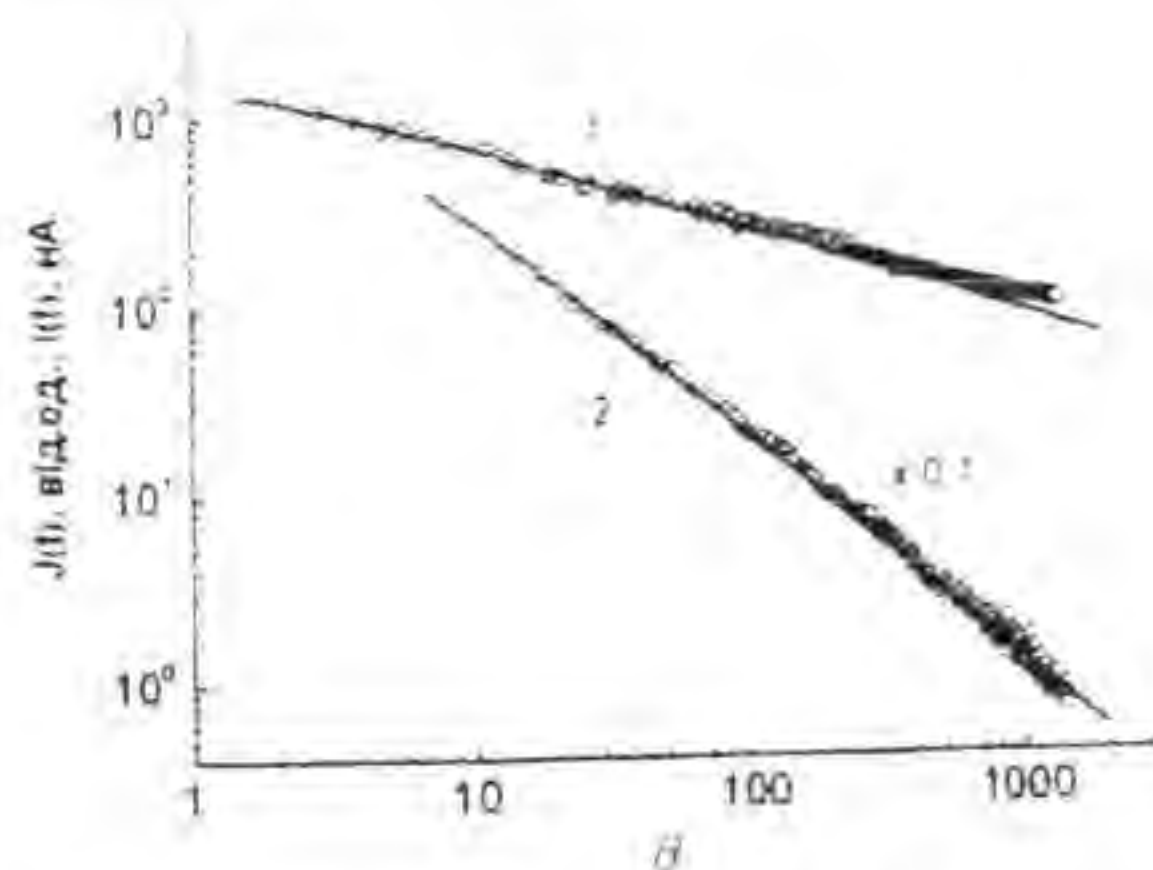


Рис. 4 Криві РС (1) і затухання Φ (2) після рентгенівського збудження.

Характерні криві затухання наведено на рис. 4. Лінеаризація кривих в подвійному логарифмічному масштабі спостерігається при таких же значеннях w , що і у випадку фотозбудження. Незалежно від характеру збудження запасання носіїв заряду відбувається на тих же центрах. Але на відміну від фотозбудження спостерігається досить повільний спад інтенсивності свічення, а показники гіпербол Φ практично завжди < 1 . Φ вимірювалася при інтегральній реєстрації по всьому спектру свічення зразка.

Отримані криві затухання Φ при рентгенівському збудженні не можуть бути пояснені в рамках класичних підходів кінетики фотолюмінесценції. Для пояснення такого повільного затухання Φ в роботах [9] розглядається вклад в загальну інтенсивність свічення зразка окремих локальних областей збудження, які виникають при поглинанні рентгенівських квантів. Ці локальні області характеризуються підвищеною концентрацією заповнених пасток та іонізованих центрів свічення. Якщо функція $F(t)$ описує зміну інтенсивності Φ з часом для однієї такої зони, то враховуючи, що протягом часу опромінення зразка (ΔT) такі зони створювалися послідовно і неперервно в часі можна отримати, що функція загальної Φ визначатиметься, як:

$$J(t) = w \int_0^{\Delta T} F(t + \zeta) d\zeta$$

Для більш детального розрахунку Φ необхідно знати кінетику процесів рекомбінації та перезапасаювання носіїв заряду в локальній області поблизу місця поглинання рентгенівського кванту, що є досить непростю задачею. Очевидно, що така макро- і мікро неоднорідність заповнення пасток зумовлює зміни і в кінетиці РС, зокрема, це призводить до тенденції більш повільного затухання струму провідності з часом. Те, що при рентгенівському збудженні в селеніді цинку експериментально спостерігається $\alpha_\Phi > \alpha_{РС}$ не тільки не можна пояснити в рамках класичної кінетичної теорії ФЛ і ФП, а цей факт протирічить основним підходам зонної теорії твердого тіла. Остання розглядає кінетику люмінесценції та провідності при рівномірній і однорідній в просторі генерації вільних носіїв заряду. Це кардинально протирічить природі рентгенівського збудження кристалофосфорів. Тому, необхідно розробити теорію люмінесценції та провідності напівпровідників для випадку рентгенівського збудження, яка повинна

базуватися на суттєво неоднорідній просторовій генерації вільних електронно-діркових пар. На даний момент стає очевидним, що саме початковий просторовий розподіл носіїв заряду визначає кінетику затухання Φ та РС. Можна висловити таке припущення, що співвідношення імовірностей рекомбінації до повторної локалізації залежить від просторової координати делокалізованого носія заряду на відміну від випадку фотозбудження, де це співвідношення однакове для усіх делокалізованих носіїв в даний момент часу.

Кінетика фосфоресценції в інтегральному світлі та на довжині хвилі 626 нм

Аналіз кривих Φ при реєстрації в інтегральному світлі та на довжині хвилі домінуючої смуги свічення $\lambda = 626$ нм після рентгенівського збудження ZnSe показує, що динаміка затухання цих кривих може помітно відрізнятися. На рис. 5 наведено експериментально отримані криві Φ після тривалого опромінення зразка при $T = 85$ К.

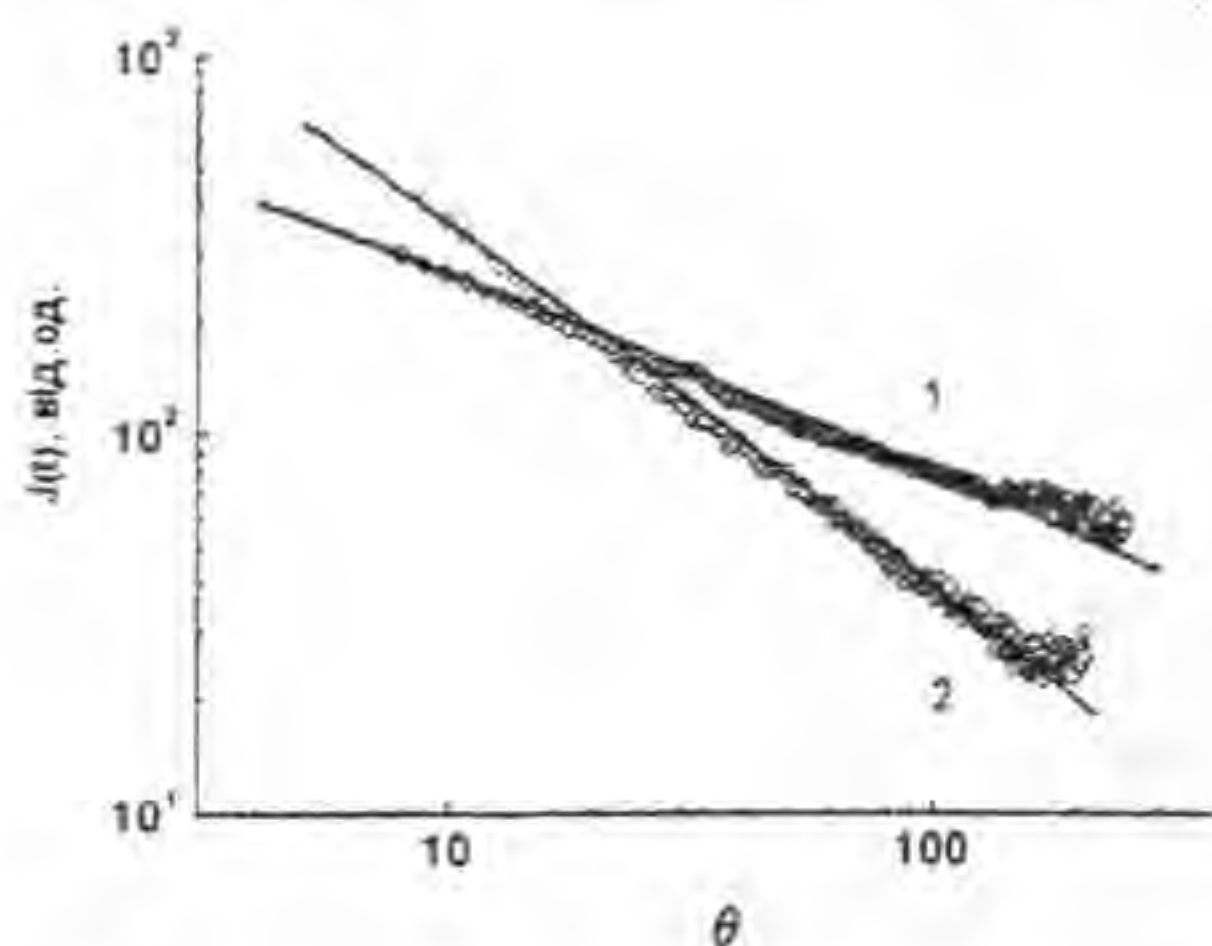


Рис. 5 Криві затухання Φ після рентгенівського збудження в інтегральному світлі (1) та на довжині хвилі $\lambda = 626$ нм (2).

Той експериментальний факт, що криві Φ при інтегральній реєстрації та в максимумі рекомбінаційної смуги свічення з $\lambda_{\max} = 626$ нм не співпадають і навіть мають різні показники гіпербол свідчить, що в процесі Φ приймають участь різні рекомбінаційні центри. Класична кінетична теорія ФЛ [2; 4] не вказує на зв'язок між кривими затухання на різних центрах. Схожі експериментальні результати спостерігали для затухання фосфоресценції при рентгенівському збудженні в спеціально нелегованих кристалах

ІАГ [5]. Тому необхідно розглянути кінетику затухання Φ при наявності двох каналів рекомбінації делокалізованих з пасток носіїв заряду. Для аналізу необхідно ввести поняття імовірності рекомбінації $A_p(t)$ та повторної локалізації $A_z(t)$ на пастках носіїв заряду, які термічно делокалізувалися, що зв'язані умовою $A_p + A_z = 1$.

Для класичної моделі кристалофосфору, коли термічна делокалізація носіїв заряду з пасток обумовлює фосфоресценцію, можна записати систему рівнянь вважаючи, що: 1) інтенсивність Φ є загальна кількість актів рекомбінації на центрах свічення за одиницю часу, які 2) обумовлені попаданням частини (A_p) делокалізованих носіїв на іонізовані центри свічення, а 3) інтенсивність фосфоресценції $I_\Phi(t)$ описується гіперболічною залежністю. Тоді будуть справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{cases} I(t) = -\frac{dn(t)}{dt} \\ I(t) = n(t) \cdot w \cdot A(t) \\ I(t) = \frac{I_0 w}{(1 + w \cdot t)} \end{cases} \quad (1)$$

В цих рівняннях $n(t)$ є концентрацією локалізованих носіїв, а I_0 – початкова інтенсивність Φ . Випадок, коли $A_p(t) = \text{Const}$ не задовольняє цю систему, оскільки з перших двох рівнянь маємо

$$I_\Phi(t) = I_0 \cdot w \exp(-A_p w \cdot t)$$

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-A_p w \cdot t)$$

$$I_0 = A_p n_0,$$

що відповідає мономолекулярному механізму рекомбінації і, відповідно, експоненційному згасанню. Система рівнянь (1) має цілком логічний розв'язок при $1 < \alpha \leq 2$. Отримані співвідношення повинні виконуватися при гіперболічному затуханні Φ . Значення показника гіперболи $\alpha = (1 + A)$ здобуває цілком фізичний зміст і дозволяє робити деякі прогнози. Те, що $A_p(t)$ описується гіперболою першого порядку при будь-якому значенні α , є наслідком гіперболічної залежності $I_\Phi(t)$ (ступінь

гіперболічної функції на одиницю відрізняється від показника її похідної).

$$\begin{aligned} -\frac{dn(t)}{dt} &= \frac{I_0 w}{(1+wt)^\alpha} \Rightarrow \\ n(t) &= \frac{I_0}{(\alpha-1) \cdot (1+wt)^{\alpha-1}}; \\ n(t) \cdot w \cdot A_p(t) &= \frac{I_0 w}{(1+wt)^\alpha} \Rightarrow \\ A_p(t) &= \frac{A_0}{1+wt}; \\ -\frac{dn(t)}{dt} &= n(t) \cdot w \cdot A_p(t) \Rightarrow \\ \alpha &= 1 + A_0; \quad A_0 n_0 = I_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Поява другого типу центрів рекомбінації (випромінювального чи безвипромінювального) з таким же механізмом рекомбінації повинна змінити кінетику Φ в першому каналі за рахунок конкуренції, але принципово не вплинути на кінетику локалізованих носіїв заряду на пастках і їх делокалізацію. Вплив другого каналу рекомбінації на люмінесценцію і згасання Φ при однакових перерізах рекомбінації ($\sigma_{p1} = \sigma_{p2}$) детально розглянуто в [7] з урахуванням їх рекомбінаційної взаємодії за рахунок зовнішнього згасання. Тому необхідно проаналізувати більш загальний випадок, коли вплив другого каналу рекомбінації обумовлює конкуренцією для рекомбінації делокалізованих носіїв, а не їх рекомбінаційну взаємодією. При низьких температурах реєстрації Φ , коли зовнішнє згасання практично відсутнє, імовірності рекомбінації на різних центрах (p_1, p_2) будуть визначатися:

$$\begin{aligned} A_{p1}(t) &= \frac{\sigma_{p1} p_1(t)}{\sigma_{p1} p_1 + \sigma_{p2} p_2 + \sigma_3 (v_3 - n)}, \\ A_{p2}(t) &= \frac{\sigma_{p2} p_2(t)}{\sigma_{p1} p_1 + \sigma_{p2} p_2 + \sigma_3 (v_3 - n)} \end{aligned}$$

а їх співвідношення буде залишатися постійним $A_{p1}(t)/A_{p2}(t) = \text{Const}(t)$ тільки у випадку, якщо $\sigma_{p1} = \sigma_{p2}$. При цьому криві затухання Φ в обох каналах рекомбінації будуть подібні, а кінетика Φ буде відповідати загальній концентрації центрів свічення ($v_p = v_{p1} + v_{p2}$). Тому, для аналізу можливих змін показника гіперболи Φ будемо вважати, що співвідношення $A_{p1}(t)/A_{p2}(t)$ поступово змінюється з часом. Оскільки темп

процесу Φ визначається функцією від $(1+wt)$, а загальна імовірність рекомбінації делокалізованих носіїв $A_0(t)$ повинна описуватися гіперболою першого порядку (2), то з урахуванням двох типів центрів рекомбінації, тому шукаємо $A_0(t)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \frac{A_{00}}{(1+wt)} = \\ &= \frac{A_{01}}{(1+wt)^{1-\Delta\alpha_1}} + \frac{A_{02}}{(1+wt)^{1+\Delta\alpha_2}} = \\ &= \frac{(A_{01} + A_{02}) + (A_{01}\Delta\alpha_1 - A_{02}\Delta\alpha_2) \cdot wt}{1+wt} = \\ &= \left(\frac{A_{01} + A_{02}}{1+wt} \right) \cdot \left(1 + wt \cdot \frac{A_{01}\Delta\alpha_1 - A_{02}\Delta\alpha_2}{A_{01} + A_{02}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

і повинні виконуватися дві умови: $A_{01} \cdot \Delta\alpha_1 = A_{02} \cdot \Delta\alpha_2$ та $A_{00} = A_{01} + A_{02}$ (які й так виконуються при $t=0$). Перша умова також означає, що якщо концентрація одного з центрів свічення значно більша за концентрацію іншого ($A_{p1} \gg p_{01} \gg v_i$), то відповідне йому $\Delta\alpha_i \rightarrow 0$. Для показників гіпербол маємо перше співвідношення

$$\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta\alpha_2} = \frac{A_{02}}{A_{01}} = \frac{\sigma_{p2} p_{02}}{\sigma_{p1} p_{01}} \quad (4)$$

З погляду фізики процесу затухання означає, що оскільки кількість локалізованих носіїв на пастках у кожен момент часу дорівнює загальній кількості перезаряджених центрів свічення, то це буде справедливо і в початковий момент часу Φ . Оскільки зовнішнє згасання відсутнє а імовірності рекомбінації відрізняються на різних типах центрів свічення для делокалізованих носіїв з пасток, то швидкості зменшення перезаряджених центрів свічення теж будуть різні, що й обумовлює зміну кривої Φ в смузі випромінювання обраного центра рекомбінації. У такому виді вибір залежностей (3) відповідає умові $\sigma_{p1} < \sigma_{p2}$ і дає

$$\frac{A_{p1}(t)}{A_{p2}(t)} = \frac{\sigma_{p1}}{\sigma_{p2}} \cdot \frac{p_{01}}{p_{02}} \cdot (1+wt)^{\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2} \quad (5)$$

Для одержання другого рівняння для значень $\Delta\alpha_1$ та $\Delta\alpha_2$ скористаємося основною умовою балансу для вільних носіїв заряду

$$dp_1 + dp_2 + dn = (A_{p1} + A_{p2} + A_3) w n(t) dt$$

з якої випливає

$$\begin{aligned} dp_1 &= A_{p1} w n(t) dt; & dp_2 &= A_{p2} \cdot w \cdot n(t) \cdot dt \\ \frac{dp_1}{A_{p1}} &= w \cdot n \cdot dt; & \frac{dp_2}{A_{p2}} &= w \cdot n \cdot dt \end{aligned} \quad (6)$$

Прирівнюючи ліві частини цих співвідношень, одержуємо

$$\frac{dp_1}{A_{p1}} = \frac{dp_2}{A_{p2}}; \text{ або } \frac{dp_1}{\sigma_{p1} p_1} = \frac{dp_2}{\sigma_{p2} p_2}$$

Після інтегрування за часом від 0 до t маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{p1}} \ln \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right) &= \frac{1}{\sigma_{p2}} \ln \left(\frac{p_2}{p_{02}} \right) \\ \frac{1 - \Delta\alpha_1}{\sigma_{p1}} \ln \left(\frac{1}{1 + w \cdot t} \right) &= \frac{1 + \Delta\alpha_2}{\sigma_{p2}} \ln \left(\frac{1}{1 + w \cdot t} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Одержали друге рівняння для $\Delta\alpha_1$ та $\Delta\alpha_2$. Розв'язуючи його разом з (4), маємо

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \frac{1 - \frac{\sigma_{p1}}{\sigma_{p2}}}{1 + \frac{p_{02}}{p_{01}}} = \frac{(\sigma_{p2} - \sigma_{p1})}{\sigma_{p2}} \cdot \frac{p_{01}}{(p_{01} + p_{02})} \\ \Delta\alpha_2 &= \frac{\frac{\sigma_{p2}}{\sigma_{p1}} - 1}{1 + \frac{p_{01}}{p_{02}}} = \frac{(\sigma_{p2} - \sigma_{p1})}{\sigma_{p1}} \cdot \frac{p_{02}}{(p_{01} + p_{02})} \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо врахувати, що: 1) зареєструвати вплив на рекомбінаційні процеси появи другого каналу рекомбінації можливо тільки якщо його концентрація стане порівняна з концентрацією першого; 2) для більшості кристалофосфорів практично завжди концентрації центрів свічення значно (на порядки) перевищують концентрації пасток ($v_{p1}, v_{p2} \gg v$), що приводить до того, що максимально можлива накопичена світлосума ($p_{01} + p_{02} = n_0 \leq v$) обмежується концентрацією пасток; 3) перерізи взаємодії різних перезаряджених центрів рекомбінації з вільними носіями є величинами одного порядку (тобто не сильно відрізняються між собою), то не слід очікувати значних величин для $\Delta\alpha_1$ та $\Delta\alpha_2$. Інтенсивність Φ , яка реєструється на кожному каналі рекомбінації буде визначатися співвідношеннями

$$\begin{aligned} I_{\Phi 1}(t) &= A_{p1} \cdot w \cdot n(t) = \frac{A_{01} \cdot n_0 \cdot w}{(1 + w t)^{1 + A_{00} - \Delta\alpha_1}} \\ I_{\Phi 2}(t) &= A_{p2} \cdot w \cdot n(t) = \frac{A_{02} \cdot n_0 \cdot w}{(1 + w t)^{1 + A_{00} - \Delta\alpha_2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином, наявність другого каналу рекомбінації приводить до зміни показників гіпербол затухання Φ в кожному каналі реєстрації. Помітне зменшення показника гіперболи в одному каналі та збільшення в другому каналі рекомбінації буде тільки у тому випадку, якщо помітно відрізняються їх перерізи взаємодії з вільними носіями заряду.

Необхідно відзначити, що якщо в процесі Φ беруть участь додаткові центри рекомбінації (випромінювальні чи безвипромінювальні) з великим перерізом захоплення (тобто з великою імовірністю рекомбінації), то ці перезаряджені центри швидко вичерпаються і крива інтенсивності фосфоресценції $I_{\Phi 1}(t)$ буде переходити в гіперболу з показником $\alpha = (1 + A_{00})$. Наявність другого каналу рекомбінації може змінювати гіперболічну залежність аж до $\alpha < 1$, але тільки на початковому етапі затухання, а на далеких стадіях крива Φ буде переходити в гіперболу з $\alpha > 1$. Ця особливість затухання дозволяє використовувати Φ для аналізу генерації нових центрів рекомбінації в люмінофорах, наприклад, після температурних відпалів чи опромінення їх γ -квантами, нейтронами, протонами.

Вплив величини електричного поля на фосфоресценцію та релаксацію струму

Оскільки криві Φ і РС реєструвалися одночасно, то в зразку створювалося додаткове електричне поле. Для дослідження впливу цього електричного поля на кінетику Φ були проведені вимірювання Φ після однакових інтервалів збудження при різних значеннях напруги на електродах зразка. Результати вимірювань наведено на рис. 6. Для РС спостерігається чітка залежність між показником гіперболи затухання величини струму і різницею потенціалів на електродах. Відносна зміна показника становить 0.36%/В. На затухання фосфоресценції величина електричного поля впливає менш помітно, але спостерігається незначна тенденція зменшення показника гіперболи (-0.11%/В).

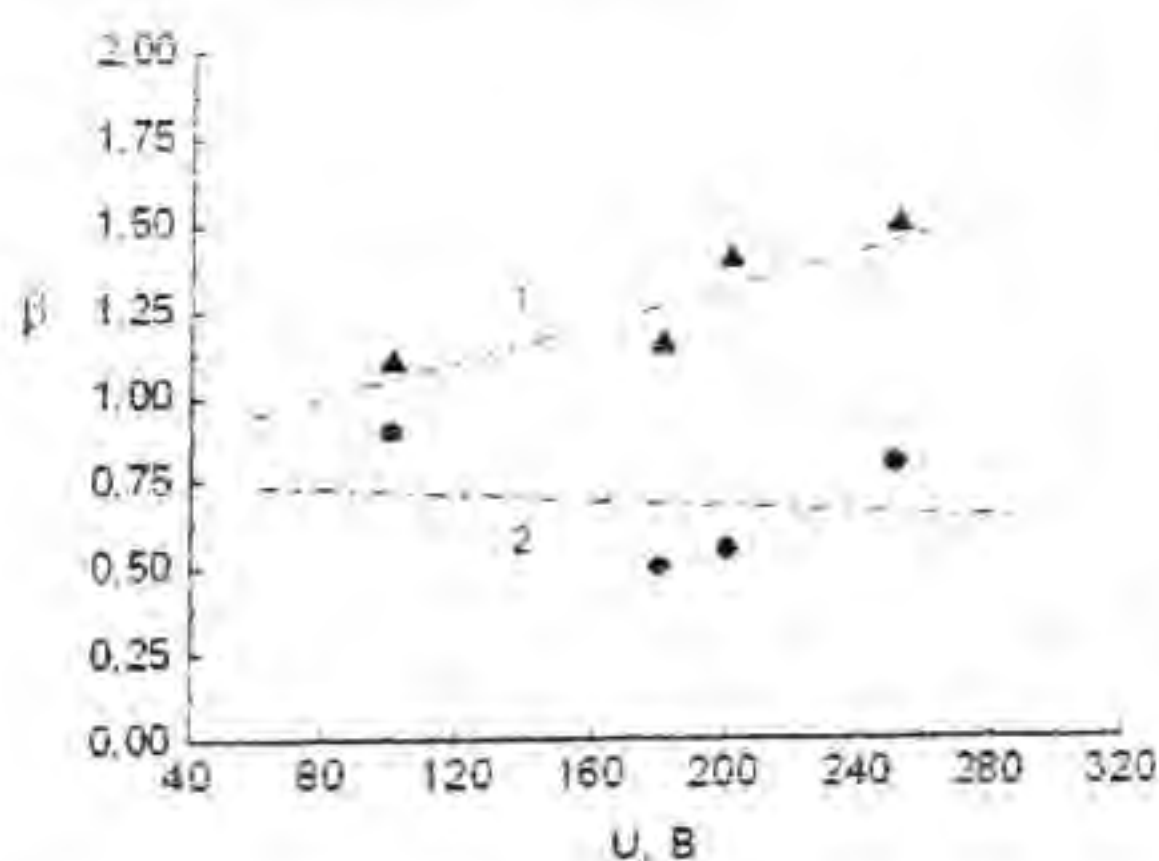


Рис. 6 Залежність показників гіпербол затухання PC (1) і Φ (2) від величини прикладеної напруги до електродів кристалу.

Стрибки люмінесценції та провідності в момент припинення збудження

При збудженні кристалофосфору інтенсивність його люмінесценції визначається концентрацією перезаряджених центрів свічення та вільних носіїв заряду, які рекомбінують на них. Оскільки більшу частину часу носії знаходяться в локалізованому стані, то через деякий проміжок часу після початку опромінення встановлюється баланс між процесами генерації, рекомбінації носіїв, запасання і делокалізації з пасток. Кінетичні рівняння дозволяють встановити рівноважну концентрацію вільних носіїв заряду в зоні провідності [2]:

$$N = \frac{k_0 I_0 + \sum w_i n_i}{\sum \sigma_{ok} n_k + \sum \sigma_i v_i}$$

де $k_0 I_0$ – інтенсивність генерації вільних носіїв заряду в кристалі, $w_i - n_i$ – інтенсивність делокалізації з пасток (добуток імовірності делокалізації в одиницю часу на концентрацію заповнених пасток), σ_{ok} – переріз рекомбінації на k -тому типі центра свічення, концентрація яких n_k , σ_i – переріз локалізації на пастках з концентрацією v_i . Відразу після припинення збудження концентрація центрів свічення залишається на рівні свого рівноважного значення, а концентрація вільних носіїв, що приймають безпосередню участь в рекомбінації, різко зменшується і визначається лише процесами делокалізації з пасток. Це призводить, по-перше, до значної величини стрибка (в 10-100

разів), а по-друге, виходячи з кінетичних рівнянь ФЛ величини стрибків в провідності та люмінесценції мають бути однаковими, або хоча б одного порядку. Таким чином, дослідження стрибків дозволяє провести порівняння вкладу згенерованої кількості носіїв при опроміненні та делокалізованої з пасток в провідність та люмінесценцію. На рис. 7 наведено результати розрахунку стрибків в люмінесценції та провідності при фото- та рентгенівському опроміненні монокристалічного ZnSe. У випадку фотозбудження спостерігається чітка кореляція між величиною стрибку в люмінесценції та провідності, а величини їх знаходяться в межах одного порядку. Такий результат не протирічить наведеним вище висновкам класичної кінетичної теорії ФЛ. Натомість, при рентгенівському збудженні величина стрибку в люмінесценції зменшується приблизно в 2 рази, а в провідності спостерігається стрибок, що є на декілька порядків меншим ніж при фотозбудженні і по величині становить 1.4-1.5 разів.

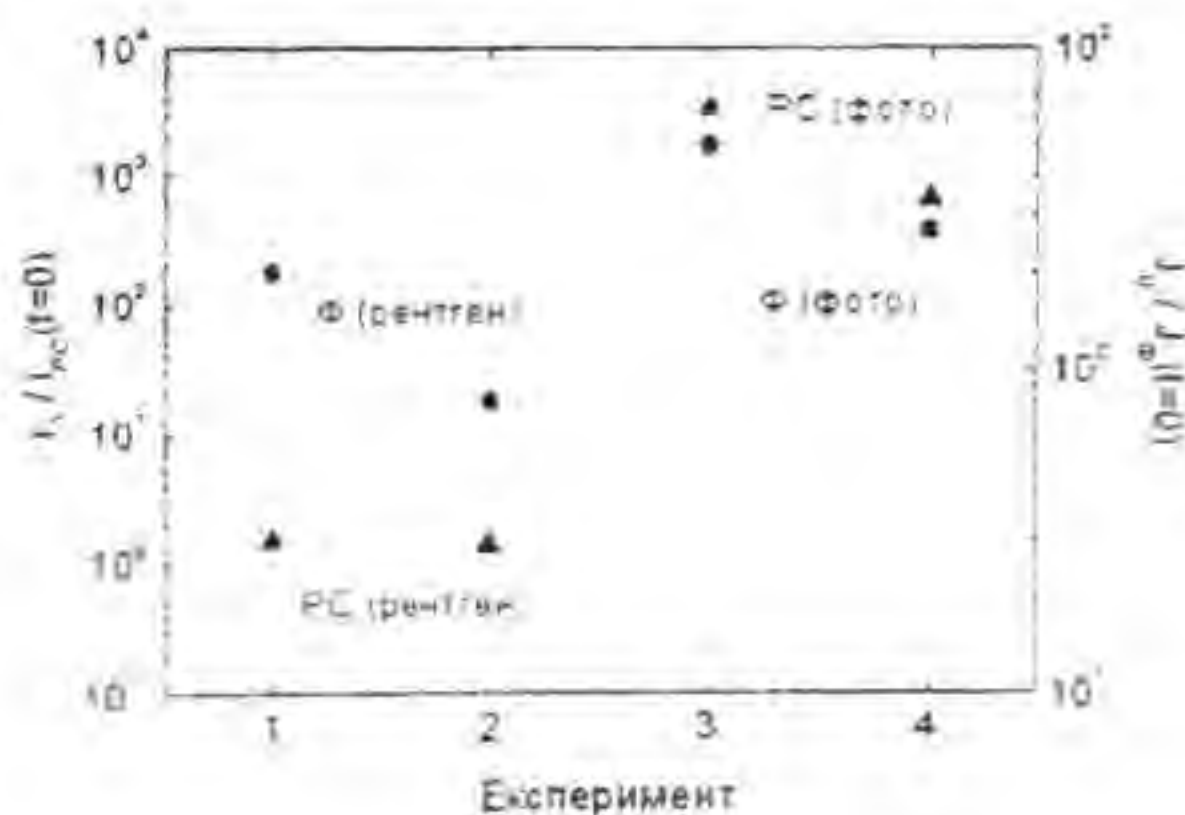


Рис. 7 Стрибки в люмінесценції та провідності при фото- та рентгенівському збудженні ZnSe в різних експериментах.

Такий результат неможливо пояснити виходячи лише з положень класичної кінетичної теорії, оскільки, це вказує на переважний вклад в провідність при рентгенівському збудженні саме тих носіїв заряду, що делокалізуються з пасток. При цьому основна частина згенерованих носіїв повинна досить швидко прорекомбінувати в області генерації, не встигаючи дати свій вклад в загальну РП кристалу. З іншої сторони, оскільки ми припустили, що основна частина згенерованих носіїв рекомбінує, а отже не встигає делокалізуватися на пастках, то після припинення збудження стрибок в люмінесценції має бути досить значним і переважати за

величиною стрибок після фотозбудження зразка, але експериментально це не виконується.

Одержані результати вказують на значну відмінність в кінетиці запасання на пастках в різних випадках збудження зразка, що може бути наслідком високої просторової концентрації електронних збуджень в кристалі при поглинанні рентгенівського кванту.

Висновки

Аналіз експериментальних кривих затухання фосфоресценції, релаксації струму, рентгенолюмінесценції і фотолюмінесценції дозволяє зробити деякі висновки стосовно кінетики люмінесценції та провідності в ZnSe при рентгенівському збудженні. Зменшення показника гіперболи кривих затухання фосфоресценції підтверджує той факт, що інтенсивність фосфоресценції в зразку є неелементарним процесом і може бути пояснена внеском в загальну інтенсивність свічення від окремих локальних областей поглинання рентгенівських квантів. В той же час в кінетиці РС при переході від фото- до рентгенівського збудження значних змін не спостерігається.

Неелементарність спектрів рекомбінаційного свічення та результати вимірювання фосфоресценції при реєстрації в інтегральному світлі та в максимумі домінуючої смуги свічення (626 нм) показують, що кінетика затухання люмінесценції в першому і другому випадку можуть відрізнятися. Пояснити це можна, розглядаючи кінетику затухання фосфоресценції при наявності декількох каналів рекомбінації на різних центрах свічення. Крім того, імовірності рекомбінації та повторної локалізації вільних носіїв змінюються в часі, що є наслідком затухання фосфоресценції по закону Бекереля.

Слід відзначити експериментальний факт, який абсолютно протирічить класичній кінетиці фотолюмінесценції і фотопровідності – після рентгенівського збудження релаксація струму відбувається швидше за затухання фосфоресценції. Аналіз стрибків в люмінесценції та провідності в момент припинення збудження зразка показує, що у випадку фотозбудження зберігається пропорційність між стрибками в люмінесценції та провідності, а самі стрибки є величинами одного порядку, що не суперечить висновкам класичної теорії фотолюмінесценції кристалофосфорів. Після рентгенівського збудження відмічаються значні зміни в співвідношенні стрибків в провідності та

люмінесценції – на декілька порядків. Незначні зміни струму провідності в момент припинення рентгенівського збудження є свідченням домінування внеску в провідність саме тих носіїв заряду, що делокалізуються з пасток. Відповідно, при генерації електронних збуджень в кристалі більша їх частина практично відразу рекомбінує. Те, що після припинення збудження стрибок люмінесценції у випадку опромінення рентгенівськими квантами не переважає за величиною стрибок в люмінесценції при фотозбудженні може також свідчити на користь більшого вкладу безвипромінювальної рекомбінації в першому випадку.

Список використаних джерел

1. Алукер Э.Д., Лусис Д.Ю., Чернов С.А. Электронные возбуждения и радиолюминесценция щелочно-галогидных кристаллов. - Рига: «Зинатне». - 1979. - 252 с.
2. Антонов-Романовский В. В. Кинетика люминесценции кристаллофосфоров. - М.: "Наука". 1966. - 324 с.
3. Недеогло Д.Д., Симашкевич А.В. Электрические и люминесцентные свойства селенида цинка. - К., 1984. - 274 с.
4. Фок М.В. Введение в кинетику люминесценции кристаллофосфоров. - М.: 1964. - 325 с.
5. Горбань И. С., Гуменюк А. Ф., Дегода В. Я., Сизонтова Е. И. О механизме рентгенолюминесценции $Y_3Al_5O_{12}$ // Оптика и спектр. - 1987. - т. 62, № 3. - с.596-600.
6. Дегода В.Я., Софієнко А.О. Просторова генерація електронних збуджень при поглинанні рентгенівського кванта // УФЖ. - 2007. - т.52, №3. - с. 256-263.
7. Элиашберг Г. М. О законе затухания для зонных моделей кристаллофосфоров // Оптика и спектр. - 1956. - т. 1, № 2. - с.230-239.
8. Морозова Н.К., Каретников И.А., Блинов В.В., Гавришук Е.М., Исследование спектров инфракрасной люминесценции ZnSe, содержащего медь и кислород // ФТП. - 2001. - т. 35, в.5. - с. 134-139.
9. Degoda V. Phosphorescence of Crystallophosphors under X-Ray Excitation // Ukrainian Journal of Physics. - 2001. - vol. 46, No. 1. - pp.105-112.
10. S. Ramo, Currents induced by electron motion // Proc. of the I.R.E. - 1939. - vol. 27. - p.584.

Надійшла до редколегії 12.09.08

УДК 512.643.2

Дмитрук І.М.¹, д. ф.-м.н., проф.,
Коренюк П.І.², н.с.

Геометричні пояснення до визначника

Вектори декартового базису упорядковуються в матрицю, яка означається як примітивний базис простору. Різні способи упорядкування визначаються симетрійними групами, проте, матеріал подано і адаптованим для сприйняття випускником середньої школи. Послідовно досліджуються примітивні базиси двовимірного і тривимірного просторів. В двовимірному просторі встановлено, що рядки матриці загального вигляду утворюють базис простору, якщо вони є сторонами паралелограма, а критерієм цього є деякий вираз, який визначає площу такого паралелограма. Також встановлено, що вказаний вираз є алгебраїчною сумою площ прямокутників в двох примітивних базисах. Ці висновки перевірені у тривимірному просторі, де вектори-рядки матриці утворюють ребра паралелепіпеда, а його об'єм є сумою об'ємів прямокутних паралелепіпедів в шести примітивних базисах. Перевірка зведена до пояснення отриманих виразів через їх відповідність поняттям і формулам математики середньої школи. При цих поясненнях природно з'являються операції векторного та скалярного множення, а також символ Леві-Чівіта. Вказано, як за допомогою символу Леві-Чівіта записується визначник матриці довільного розміру.

Ключові слова: базис, матриця, визначник.

¹ E-mail: igor_dmitruk@univ.kiev.ua

² E-mail: kubus@iop.kiev.ua

Викладання математики у вищій школі, в усякому разі для фізиків, викликає досаду від визначень, походження яких подається фрагментарно, або ж і зовсім як одкровення, чим порушується поступовість розвитку уявлень про предмет. На наш погляд, порушення такої поступовості негативно впливає на розвиток творчих задатків студента.

I. M. Dmitruk, Dr. Sci., Prof.,
P. I. Korenyuk, Sci. Res.

Geometrical explanations for determinant

Cartesian base vectors are ordered in a matrix, which is defined as primitive basis of space. Different methods of ordering are determined by symmetry groups, but in present paper it is adapted so that it becomes clear for secondary school graduate. Primitive bases of two-dimensional and three-dimensional space are studied gradually. In two-dimensional space it is established that rows of general type matrix form basis of space if they are sides of parallelogram, and the criterion is some expression, which determines area of such parallelogram. It is also established that mentioned expression is algebraic sum of areas of rectangles in two primitive bases. These conclusions are checked in three-dimensional space where vectors-rows of matrix form ribs of parallelepiped, and its volume is sum of volumes of rectangular parallelepipeds in six primitive bases. The check is performed by explanation of obtained expressions in compatibility with concepts and formulae of secondary school mathematics. Terms of cross production, scalar production and also Levi-Civita symbol naturally appear on the way of explanations. It is shown how the determinant of arbitrary size matrix is expressed with the help of Levi-Civita symbol.

Key Words: basis, matrix, determinant.

Одним з об'єктів, що потребує прозорого тлумачення є визначник – надзвичайно важливий інструмент лінійної алгебри. В усіх підручниках (наприклад, [1, 2]) та енциклопедіях він подається як квадратна таблиця чисел яка, за деякими правилами, зводиться до одного числа. Це число інтерпретується як об'єм. Далі подаються властивості визначника як то: лінійна незалежність рядків та стовпчиків, зміна знаку об'єму при перестановці двох рядків або стовпчиків в таблиці.

Авторам не вдалося знайти в літературі пояснення щодо походження вищезгаданих правил. Отож, мали задовольнитись власними міркуваннями, які, на наше переконання, стануть в нагоді і допитливому випускникові середньої школи. Саме такому читачеві, в першу чергу, адресовано цей допис. Для знайомства з історією питання можемо порекомендувати огляд [3].

Для пояснення будемо використовувати зримі образи в площині і тривимірному просторі та їх математичні зображення, іноді супроводжуючи це власним тлумаченням. Також будемо використовувати відомі операції з цими образами, подаючи визначення та пояснення для читача, який розпочинає вивчення лінійної алгебри.

Ми виходимо з того, що основні положення координатного методу Декарта читачеві відомі. Вектори¹ $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ та $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ ми називаємо примітивними і тлумачимо як перпендикулярні один до одного напрямлені відрізки одиничної довжини, які починаються в спільній точці. Індеси векторам ми приписуємо відповідно до місця, на якому розміщена одиниця в компонентах цих векторів. Очевидною і суттєвою особливістю цих векторів є те, що вони не можуть бути переведені один в одного множенням на число, тобто неможливо утворити лінійну залежність $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$. Кажуть, що такі вектори утворюють лінійно незалежну систему. Будь-якій точці площини можна поставити у відповідність лінійну комбінацію $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Тому кажуть, що $\mathbf{v}_1$ та $\mathbf{v}_2$ утворюють базис (лінійну оболонку) двовимірного простору. За допомогою одного вектора можна відтворити лише пряму.

Ми маємо намір розглядати базис як єдиний об'єкт, упорядкувавши в ньому примітивні вектори подібно до того, як упорядковані одиниці та нулі в самих векторах. Для цього занесемо базисні вектори до таблиці, яку називають матрицею, розмістивши їх у рядки

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Будемо нумерувати рядки і стовпчики матриці починаючи з верхнього лівого кута таблиці. Числа, які складають матрицю, називають компонентами матриці.

¹ Вектори ми позначаємо малими жирними латинськими літерами, а матриці – великими жирними літерами.

Ми хочемо формалізувати операцію упорядкування базисних векторів у матрицю, ввівши для такої операції позначення, яке назвемо оператором. Під цим позначенням ми розуміємо правило за яким одному елементу деякої множини ставиться у відповідність деякий елемент іншої множини або елемент тієї ж множини. Нижче подаємо позначення оператора упорядкування примітивних векторів в матрицю (1) і пояснення (правило) до нього²

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \quad (1')$$

Числа у верхньому рядку в (1') визначають номер рядка матриці, на якому слід розташувати примітивний вектор з номером, який вказаний в нижньому рядку під даною позицією. Для скорочення запису оператора будемо використовувати для (1') символ $\hat{\mathbf{e}}$. Для інших операторів упорядкування також будемо вживати короткі записи, зміст яких буде зрозумілий з контексту. Ми можемо застосувати оператор $\hat{\mathbf{e}}$ і до утвореної матриці $\mathbf{E}$. При цьому число j верхнього рядка оператора, вказує рядок матриці, на якому слід розмістити i -тий рядок матриці, де i – число, що стоїть під j -тою позицією верхнього рядка оператора. Символічно це записується наступним чином

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}\mathbf{E} = \mathbf{E}$$

Саме завдячуючи цій рівності, оператор, який ставить у відповідність елементу множини цей же елемент ($\mathbf{E}$ в попередній формулі), називають тотожним оператором. Оператор завжди ставиться ліворуч від об'єкта, на який він діє.

Базис можна упорядкувати і в інший спосіб, а саме, переставивши місцями рядки матриці (1). Ось оператор, який, за встановленим вище правилом, вказує на таку операцію

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \quad (2)$$

і результат його дії на матрицю $\mathbf{E}$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \quad (2')$$

² Оператори ми позначаємо літерою з шапочкою, або ж таблицею в фігурних дужках.

Він також має власне ім'я – транспозиція. Можна встановити однозначну відповідність (ізоморфізм) між матричним та операторним записом. Число верхнього рядка в операторі вказує на рядок матриці, а число під ним – стовпчик, на перехресті яких розміщується одиниця. Всі інші компоненти матриці нульові. Тільки в цьому дописі, посилаючись на ці матриці, ми будемо називати їх примітивними базисами.⁵

Очевидно, що застосування транспозиції до (2') відновлює попередній порядок векторів в базисі. Такий висновок дозволяє записати наступну рівність $\tilde{t}E = \tilde{e}E$. Оскільки в цій рівності елемент E , на який діють оператори той самий, то з необхідністю впливає рівність операторів правої і лівої частини рівності:

$$\tilde{t}\tilde{t} = \tilde{e} \quad (3)$$

Послідовне застосування операторів прийнято називати їх множенням, а оператор еквівалентний такому послідовному застосуванню – їх добутком. Остання рівність дозволяє встановити правило множення двох операторів перестановок, за яким знаходиться їх добуток: *в n-ту позицію добутку ставиться число з позиції правого оператора на яку вказує число під n-тою позицією лівого оператора*. Безпосередньо множенням можна встановити наступні співвідношення $\tilde{t}\tilde{e} = \tilde{e}\tilde{t} = \tilde{t}$. Таким чином, два оператори утворили замкнену відносно множення множину і отримали "самостійне життя" під назвою групи операторів перестановок.

Повернемося до наших базисів. Маємо два примітивні базиси які транспозицією переводяться один в одного. Але ми мали намір упорядкувати примітивні вектори в єдиному об'єкті, а прийшли до двох. Не полишаючи попереднього наміру і щоб зберегти особливості (якщо вони є) примітивних базисів, об'єднаємо їх в єдиній матриці. Для цього помножимо примітивні вектори кожен на деяке число, наприклад, a та d .

При таких векторах замість матриці E матимемо матрицю

$$E' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (4)$$

Помножимо ті ж примітивні вектори на числа b та c , розмістивши їх в тотожному базисі, і проведемо транспозицію. В результаті будемо мати матрицю у вигляді

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} = T \quad (5)$$

Тепер складемо однойменні (за індексами рядок/стовпчик) компоненти матриць E' та T' . Як результат отримаємо матрицю загального вигляду

$$A = E' + T' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (6)$$

Легко бачити, що рядки матриці A є лінійними комбінаціями $av_1 + cv_2 = (a, c)$ і $bv_1 + dv_2 = (b, d)$ примітивних векторів. Отже, операція додавання матриць є правомірною, оскільки складається з додавання векторів, які утворили ці матриці.

Поставимо запитання, чи можуть рядки матриці A утворити базис двовимірного простору? Легше відповісти на питання, при яких компонентах вони не можуть бути базисом. Відповідь проста – вони не можуть бути базисом, якщо є лінійно залежними, тобто, можуть бути переведені один в одного множенням на число. Дійсно, якщо $a/b = c/d = k$ тоді $k(b, d) = (a, c)$. Тобто, з допомогою цих векторів можна відтворити лише пряму на площині. В цьому випадку кажуть про виродження базису, а матрицю називають виродженою або сингулярною. Отже, ознакою лінійної незалежності є умова: $a/b \neq c/d$, або $ad - bc \neq 0$. Добуток ad є не що інше, як площа прямокутника, побудованого на векторах базису E , а добуток bc – площа прямокутника, побудованого на векторах базису T . Зауважимо, що площа в базисі T від'ємна. З огляду на це, природно припустити, що площа паралелограма, побудованого на векторах-рядках матриці A , як представників косокутного базису, якимось чином пов'язана з сумою площ прямокутників в примітивних базисах. Перевіримо наше припущення прямим розрахунком. Як відомо, площа паралелограма дорівнює добутку довжин прилеглих сторін, помноженому на синус кута між цими сторонами. Виразимо синус кута між векторами (a, c) та (b, d) через компоненти векторів. Ми не будемо тут розв'язувати цю шкільну задачу, а наведемо кінцевий результат у вигляді рівності, яку ми і очікували

⁵ Загально вживана назва – матриці перестановок.

$$\sqrt{b^2 + d^2} \sqrt{a^2 + c^2} \sin \varphi = ad - bc.$$

Звертаємо увагу, що в лівій частині рівності площа також може набувати від'ємних значень залежно від знаку кута між векторами, а точніше, від того, в якому напрямку відраховуємо менший з кутів між векторами.

Ми отримали критерій лінійної незалежності векторів (a, c) та (b, d) виражений числом. Це число $ad - bc$, однозначно пов'язане з множиною (a, d, b, c) компонент матриці A , називають *визначником* або *детермінантом* матриці. В цьому сенсі визначник треба вважати оператором, а число, про яке кажуть як про визначник, – це результат дії оператора на матрицю. Позначають визначник разом з позначенням матриці, на яку він діє, $\det(A)$. Іноді

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix} = ad - bc \quad (7)$$

Беручи до уваги (7), можемо дійти висновку, що дія транспозиції на визначник тотожного базису зводиться до зміни знаку визначника тотожного базису. Отже, визначник тотожного примітивного базису дорівнює одиниці і представляє площу квадрата з одиничною довжиною сторони. Добуток чисел, винесених за межі визначників примітивних базисів, будемо називати вагою цих визначників, а вираз (7) – розкладанням визначника матриці на зважені визначники примітивних базисів. З тією ж метою наведемо ще одну властивість визначника щодо транспозиції рядків матриці A .

$$\det(\hat{t}A) = ad\hat{t}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\hat{t}\hat{t}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -ad + bc \quad (8)$$

Тобто при транспозиції рядків матриці її визначник змінює знак.

Надалі, для легшого сприйняття тексту, будемо послуговуватись індексованими компонентами матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Перейдемо до тривимірного простору. Для цього розширимо розмірність базисних векторів двовимірного простору, дописавши в них по одній нульовій компоненті, та добавимо примітивний вектор $v_3 = (0, 0, 1)$. Будемо мати три лінійно незалежні примітивні вектори $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ та

вживають еквівалентне позначення: – взяті в прямі дужки компоненти матриці $\det(A) \equiv \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

З огляду на це, надалі будемо говорити про перестановку рядків визначника, маючи на увазі визначник матриці з переставленими рядками. Останнє можна подати формальним записом $\hat{t}\det(A) \equiv \det(\hat{t}A)$.

Проведемо невеличкий аналіз отриманого результату. Помножимо перший рядок матриці A на число k . Визначник матриці при цьому також збільшиться в k разів. Взявши це до уваги а також (6) та (2'), можемо розкласти визначник матриці A на суму визначників примітивних базисів

$v_3 = (0, 0, 1)$. Загально прийняте визначення лінійної незалежності векторів формулюється так. Якщо лінійна комбінація $av_1 + bv_2 + cv_3$ може обернутися в нуль-вектор лише за умови $a=b=c=0$, то такі вектори є лінійно незалежними. Для векторів v_1, v_2 та v_3 виконання цієї умови очевидне. Кожні два з них також лінійно незалежні і можуть служити лінійною оболонкою двовимірного простору, про який говорять як про підпростір. В свою чергу підпростором двовимірного простору є пряма.

Надалі в операторах перестановок будемо опускати верхній рядок, утримуючи в пам'яті, що він є відповідним рядом натуральних чисел. Впорядкуємо v_1, v_2 та v_3 в матрицю за допомогою тотожного оператора $\hat{e} = \{1 \ 2 \ 3\}$. Як відомо з шкільного курсу, три предмети можна переставити шістьма способами. Ми тут вкажемо дві транспозиції в двовимірних підпросторах $\hat{t}_1 = \{2 \ 1 \ 3\}$ та $\hat{t}_2 = \{1 \ 3 \ 2\}$, які за допомогою множення згенерують ще три оператори перестановок. Шість операторів утворюють замкнену відносно множення множину. Випишемо їх в наступному порядку:

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \{1 \ 2 \ 3\}; \hat{g}_1 = \hat{t}_1\hat{t}_2 = \{3 \ 1 \ 2\}; \\ \hat{g}_2 &= \hat{t}_2\hat{t}_1 = \{2 \ 3 \ 1\}; \\ \hat{t}_1 &= \{2 \ 1 \ 3\}; \hat{t}_2 = \{1 \ 3 \ 2\}; \\ \hat{t}_3 &= \hat{t}_1\hat{t}_2\hat{t}_1 = \{3 \ 2 \ 1\}. \end{aligned} \quad (9)$$

За сформульованим вище правилом однозначної відповідності (ізоморфізму) легко побудувати і відповідні примітивні базиси.

Побудуємо довільну тривимірну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Нас знову цікавить питання, чи є вектори-рядки матриці (10) лінійно незалежними. Користуючись досвідом, набутим в двовимірному випадку, можемо стверджувати, що вони лінійно незалежні, якщо є суміжними ребрами паралелепіпеда. Проте нас цікавить не зримий образ, але аналітичний вираз з компонент

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Тут тривимірні визначники розуміємо як об'єми одиничних кубів. Об'єм в тотожному базисі визначаємо як додатній. Транспозиція двох базисних векторів є транспозицією базису двовимірного підпростору, тому змінює знак площі основи куба і отже, знак об'єму. Тобто, визначник з одною транспозицією дорівнює від'ємній одиниці. Але транспозиція двох векторів одночасно призводить до транспозиції кожного з них з третім вектором, а це означає, що площа будь якої грані куба при транспозиції змінює знак. Отже, приходимо до висновку, що наступна (парна) транспозиція будь яких двох векторів базису відновить попередній знак визначника. Щоб відзначити ці міркування ми згрупували оператори (9) в два класи, парних та непарних кількостей послідовних транспозицій. Клас парних транспозицій називають правим, а непарних – лівим.

Перепишемо (11) ланцюжком рівностей, замінивши визначники їх значеннями

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}) - \\ & a_{3,2}(a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}) - a_{3,3}(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) = \end{aligned}$$

матриці. Підрахунок об'єму паралелепіпеда через компоненти векторів-ребер завдання досить складне для "шкільної" математики. Тому припустимо, подібно до двовимірного випадку, що об'єм косоного паралелепіпеда є сумою об'ємів шести прямих паралелепіпедів в примітивних базисах, і подивимось, чи можна результат звести до уже відомих понять і формул. Подібно до (7) розкладемо визначник матриці (10) на зважені визначники примітивних базисів, використавши для їх пошуку групу операторів (9). Для цього досить помножити компоненти матриці (A) на відповідні компоненти матриці бажаного примітивного базису.

$$= a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} - a_{3,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} - a_{3,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Представлення визначника сумою добутків компонент вектора a_3 і визначників з розмірністю на одиницю меншою (мінорів) називають розкладанням визначника за мінорами.

Перший і другий вектори визначають площину тривимірного простору, в якій вони лежать. Тому ми можемо повторити відносно їх лінійної залежності міркування, які були викладені в двовимірному просторі. Якщо вектори a_1 та a_2 лінійно залежні, то двовимірні визначники в (12) обертаються в нулі, а разом з ними і (12). Читач може легко перетворити вираз для об'єму так, щоб у мінори потрапили другий та третій вектори або перший та третій, і зробити відповідний висновок відносно лінійної залежності цих пар векторів. Отже, як тільки якісь два з трьох векторів лінійно залежні, то визначник матриці обертається в нуль.

Три двовимірні детермінанти можна розглядати як компоненти деякого вектора

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Його називають бівектором. Операцію побудови бівектора за визначенням (13) називають векторним добутком векторів $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ і позначають $\mathbf{m} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. З (13) легко випливає дистрибутивність векторного добутку відносно додавання векторів, тобто $\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{d} = [\mathbf{a}\mathbf{d}] + [\mathbf{b}\mathbf{d}]$.

Нас тепер цікавить напрямок бівектора. Щоб з'ясувати це ми вдамося до обертання паралелепіпеда як твердого тіла в нерухомому тотожному базисі. Зрозуміло, що при цьому компоненти всіх векторів якось зміняться, але довжини векторів та кути між ними залишаться незмінними. Повернемо паралелепіпед так, щоб вектори $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ лягли в площину векторів $\mathbf{v}_1$ та $\mathbf{v}_2$. При цьому координатний запис вектора $\mathbf{a}_1$ зміниться на $\mathbf{a}'_1 = (a'_{1,1}, a'_{1,2}, 0)$ і відповідно $\mathbf{a}_2$ – на $\mathbf{a}'_2 = (a'_{2,1}, a'_{2,2}, 0)$. Оскільки треті компоненти нульові, то фактично маємо двовимірний випадок. Підставивши ці компоненти в (13), отримаємо бівектор $\mathbf{m}' = (0, 0, a'_{1,1}a'_{2,2} - a'_{1,2}a'_{2,1})$. Як бачимо, він співпадає за напрямком з $\mathbf{v}_3$, тобто є перпендикулярним до грані паралелепіпеда, утвореної векторами $\mathbf{a}'_1$ та $\mathbf{a}'_2$. Крім того, його довжина дорівнює площі цієї грані паралелепіпеда, яку ми будемо вважати його основою. Зваживши на те, що обертання не змінює довжин і кутів, приходимо до висновку, що бівектор $\mathbf{m}$ перпендикулярний до векторів $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$, які його породили. Довжина бівектора чисельно дорівнює площі паралелограма, створеного векторами $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$, і розраховується за формулою $|\mathbf{m}'| = |\mathbf{m}| = |\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2| \sin \varphi$ ⁴.

Зрозуміло, що векторний добуток лінійно залежних векторів дорівнює нуль-вектору.

Ми пропонуємо читачеві самостійно знайти векторні добутки примітивних векторів $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ та $\mathbf{v}_3$ при їх різних перестановках і порівняти з векторами тотожного базису.

Випишемо визначник матриці $\mathbf{A}$ через компоненти вектора $\mathbf{m}$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{3,1}m_1 + a_{3,2}m_2 + a_{3,3}m_3 = V \quad (14)$$

Нам належить встановити, яким чином сума добутків однойменних компонент вектора $\mathbf{a}_3$ та бівектора $\mathbf{m}$ пов'язана з відомою формулою для

⁴ Надалі для короткого запису довжини вектора будемо використовувати позначення модуля, так що, $|\mathbf{m}| = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$.

об'єму паралелепіпеда. Відомо, що цей об'єм дорівнює добуткові площі основи на довжину висоти. В нашому випадку площа основи є довжина вектора $\mathbf{m}$, яка дорівнює $S = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = |\mathbf{m}|$, а висота h – це довжина проекції вектора $\mathbf{a}_3$ на напрямок вектора $\mathbf{m}$, яка визначається:

$$h = \sqrt{a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2} \cos \varphi = |\mathbf{a}_3| \cos \varphi, \text{ де } \varphi -$$

кут між векторами $\mathbf{a}_3$ та $\mathbf{m}$. Щоб підрахувати об'єм необхідно знайти $\cos \varphi$. Знайти його можна за встановленим нами співвідношенням для величини векторного добутку $|\mathbf{a}_3| |\mathbf{m}| \sin \varphi = |[\mathbf{a}_3, \mathbf{m}]|$. Ми не можемо тут відтворити відповідні прості але громіздкі перетворення, а наведемо лише кінцевий результат

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \sqrt{a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2} \cos \varphi = a_{3,1}m_1 + a_{3,2}m_2 + a_{3,3}m_3 \quad (15)$$

Права частина рівності співпадає з правою частиною (14) і встановлює ще одну операцію з двома векторами. Її називають скалярним добутком. Ліва частина рівності пояснює геометричний зміст скалярного добутку. Тепер можна сказати, що якщо вектор $\mathbf{a}_1$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$, то він перпендикулярний до бівектора і детермінант в цьому випадку дорівнює нулю ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$).

Отже наше припущення, щодо рівності об'єму косоного паралелепіпеда сумі зважених визначників примітивних базисів, зведено до встановлених раніше співвідношень, які і підтверджують справедливості цього припущення.

Встановимо тепер властивості ненульового визначника.

1. Перестановка векторів $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ призводить до зміни знаку площі основи, що впливає з висновків для двовимірного випадку. В тривимірному просторі це зміна напрямку вектора $\mathbf{m}$ на протилежний, тому будемо говорити, що перестановка векторів-рядків змінює орієнтацію площини і як наслідок – знак визначника.

2. Подіємо транспозицією $\hat{t}_1$ на визначник (11). Зауважимо, що вагові коефіцієнти – це числа і транспозиція на них не діє. Ось що відбувається з визначниками примітивних

базисів під дією транспозиції⁵. $\hat{t}_1 \hat{e} = \hat{t}_1$; $\hat{t}_1 \hat{g}_1 = \hat{t}_2$;
 $\hat{t}_1 \hat{g}_2 = \hat{t}_3$; $\hat{t}_1 \hat{t}_1 = \hat{e}$; $\hat{t}_1 \hat{t}_2 = \hat{g}_1$; $\hat{t}_1 \hat{t}_3 = \hat{g}_2$.

Транспозиція переводить правий клас операторів в лівий клас, а лівий – в правий, і отже, визначник змінить знак.

3. Очевидною властивістю визначника є те, що він збільшиться в n разів, якщо помножити якийсь з його рядків на n .

4. Розглянемо визначник матриці, в якій до третього вектора-рядка матриці A додано якийсь інший її рядок, помножений на деяке число α , і підрахуємо визначник отриманої матриці $\det(A') = (a_{3,1} + \alpha a_{1,1})m_1 + (a_{3,2} + \alpha a_{1,2})m_2 + (a_{3,3} + \alpha a_{1,3})m_3 = \det(A)$. Рівність справедлива для всіх $j \neq 3$ внаслідок того, що всі вектори крім третього перпендикулярні до бівектора. Отже, визначник матриці не зміниться, якщо до будь якого рядка матриці додати лінійну комбінацію інших рядків.

5. Є ще одна операція над матрицею, яка залишає її визначник незмінним. Це заміна рядків матриці однойменними за номером стовпчиків. Візуально це виглядає як обертання вмісту матриці відносно її головної діагоналі. Ця операція також має власне ім'я – транспонування матриці. Незмінність визначника при транспонуванні легко бачити з виразу (11). Дійсно, при транспонуванні визначники примітивних базисів не покидають свого класу, а отже залишають незмінним $\det(A)$. Така інваріантність до заміни рядків на стовпчики говорить про те, що всі властивості визначника мають місце і відносно стовпчиків.

Слід зауважити, що при операціях пунктів 4 та 5 сама матриця змінюється, не змінюється лише її детермінант. Про це кажуть, що визначник інваріантний до таких перетворень матриці.

Придивимось тепер уважніше до виразу (11). Визначники задають тільки знаки ваговим коефіцієнтам в залежності від того, якому операторові з (9) відповідають другі індекси в співмножниках вагових коефіцієнтів. Це дозволяє ввести індексований символ ϵ_{ijk} , чисельні значення якого визначаються співвідношенням

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1: \text{при } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1: \text{при } (i, j, k) = (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1) \end{cases} \quad (14)$$

Він носить ім'я символу Леві-Чівіта.⁶ З цим символом рівність (11) записується більш компактно

$$\det(A) = \sum_{i \neq j \neq k} \epsilon_{ijk} a_{1,i} a_{2,j} a_{3,k} \quad (15)$$

а компоненти бівектора (13)

$$m_i = \sum_{j \neq k} \epsilon_{ijk} a_{1,i} a_{2,k} \quad (16)$$

Формально ми тепер можемо перейти до чотиривимірного простору, розширивши розмірність базисних векторів тривимірного простору, дописавши в них нульову компоненту та добавивши вектор $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ і також ввівши оператор $\hat{t}_4$ транспозиції його з третім базисним вектором. Також, формально ввести символ Леві-Чівіта з чотирма індексами і з його допомогою знайти детермінант чотиривимірної матриці подібний до (12). Мінорами в ньому будуть чотири тривимірні визначники. Вони визначають направляючий вектор гіперплощини чотиривимірного простору. Його називають тривектором. В такий спосіб ми маємо можливість підраховувати визначник багатовимірної матриці.

Наведений аналіз та ілюстрації для дво- та тривимірного простору пояснюють походження і геометричний зміст загальновідомого поняття визначника та його зв'язок з базисами простору, операціями скалярного і векторного множення, символом Леві-Чівіта.

Список використаних джерел

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – Москва: Наука, Физматлит, 1999. – 296 с.
2. Белоусов И.В. Матрицы и определители. – Кишинев, 2006. – 101 с.
3. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. – London. Macmillan and Co., 1906. – 490 p.

Надійшла до редколегії 30.10.2008

⁵ Тут для скорочення письма ми використали ізоморфізм операторів і матриць примітивних базисів, а відтак і їх визначників, замінивши останні відповідними їм операторами.

⁶ Математично обізнаний читач звичайно зрозумів, що множина значень символу Леві-Чівіта подас антисиметричне незвідне представлення симетричної групи, яке реалізується на визначнику одиничної матриці.

УДК 535.375

Корнієнко М.Є., канд.фіз.-мат. наук, ст. наук. сп.

Ефекти сильної фонон-електронної взаємодії 2. Природа широкопasmового фону в спектрах комбінаційного розсіювання світла

Експериментально вивчені форма і інтенсивність широкопasmового фону в спектрах КР світла для ряду еталонних рідин: C_6H_6 , CS_2 , CCl_4 , $SiCl_4$, CH_2Cl_2 , $CHCl_3$, CH_3OH , CH_3CN , CH_3COOH і H_2SO_4 . Проведено огляд робіт по дослідженню фону і проаналізовані можливі механізми його виникнення. Показано, що неперервна частина спектра КР обумовлена новими коливально індукованими електронними станами, широкі смуги яких спостерігаються разом з більш вузькими коливальними смугами. Концепція, що розвивається, дозволяє пояснити багато властивостей фону КР, наприклад, положення максимумів і виникнення структури фону в CS_2 і H_2SO_4 , суттєві термічні залежності. На основі вивчення фону КР може бути заснований новий спектральний метод.

Ключові слова: спектр розсіювання світла, органічна рідина, коливальна мода, широкопasmовий фон, нова електронна смуга.

*E-mail: nikkorn@mail.univ.kiev.ua

Вступ

Відомо, що для багатьох речовин (рідин, стекол і кристалів) у спектрах комбінаційного розсіювання (КР) світла порівняно вузькі коливальні смуги розміщені на значно більш широкому неперервному спектрі (широкопasmовому фону). Існування такого фону відомо дуже давно і відзначається в усіх монографіях, багатьох оглядах по спектроскопії КР і довідниках [1-6]. Ще в 1928 р. у перших роботах з розсіювання світла Раман відзначав, що форма неперервного спектра залежить від природи речовини [7]. Він пов'язував фон з не повним очищенням рідин і переносом випромінювання неперервного спектра дуги, використовуваної як джерело світла. Можливі механізми виникнення неперервного фону в спектрах розсіювання світла широко обговорювалися в літературі, однак його природа до теперішнього часу остаточно не встановлена. Розглянуте явище виявилось досить складним і пов'язаним з фазовими переходами (ФП) і самими загальними властивостями конденсованого стану речовини. Слід відзначити

M. Ye. Korniyenko, senior res.

Effects of strong phonon-electronic interaction 2. The nature of a broadband background in spectra of Raman scattering

The form and intensity of a broadband background in Raman spectra for some reference liquids: C_6H_6 , CS_2 , CCl_4 , $SiCl_4$, CH_2Cl_2 , $CHCl_3$, CH_3OH , CH_3CN , CH_3COOH and H_2SO_4 are experimentally studied. The review of works on background research is lead and possible mechanisms of its appearance are analyzed. It is shown, that the continuous part of Raman spectrum is caused by new vibration induced electronic states which wide bands are observed together with narrower vibration bands. The concept that develops, allows to explain many properties of Raman background, for example, maxims position and appearance e of background structure in CS_2 and H_2SO_4 , and essential thermal dependences. On the basis of studying Raman background the new spectral method can be based.

Key Words: light scattering spectra, vibration mode, organic liquid, broadband background, new electron band.

незвичайну температурну поведінку фону КР. Його залежність від параметрів лазерного випромінювання, використовуваного для збудження спектрів КР, і тривалості лазерної дії. Широкопasmовий фон спостерігається також у спектрах гіперкомбінаційного розсіювання, а також активної спектроскопії КР світла [8].

Нові підходи до розв'язання обговорюваної актуальної проблеми пов'язані з вивченням колективних властивостей некристалічних середовищ і виявленням нелінійно-хвильових механізмів ФП. Насамперед слід відзначити розкриття природи аномальних спектральних розширень при дії інтенсивного лазерного випромінювання на речовину [9-11]. Спектральні розширення при вимушеному КР подібні до фону спонтанного розсіювання при малих інтенсивностях збудження. Вони виявилися пов'язаними з колективними властивостями коливальних мод у неупорядкованих середовищах, у тому числі в рідинах [12-14]. Процеси плавлення і кипіння, а також поліморфних перетворень структури твердих тіл пов'язані з нелінійно-хвильовими

взаємодіями коливальних мод і ефектами сильної фонон-електронної взаємодії [15-19]. Важливе значення в вивченні природи широкосмугового фону КР мав розвиток нами нелінійно-квантової концепції конденсованого стану речовини і нових поглядів на процеси структуроутворення [18]. Переломним моментом було відкриття існування нових електронних смуг поглинання в розупорядкованих середовищах (склі, активованих кристалах, капілярній і адсорбованій з повітря воді в дисперсних силікатних середовищах), які спостерігалися в спектрах поглинання одночасно з коливальними смугами [19]. В цій і наступній роботах ми розглядаємо прояви нових електронних смуг, пов'язаних з сильною коливально-електронною взаємодією, в спектрах розсіяння світла.

1. Основні властивості широкосмугового фону в спектрах КР

і можливі механізми його виникнення

Походження широкосмугового фону в спектрах КР тривалий час дискутувалось в літературі і уявлення про його природу змінювалось з часом по мірі накопичення експериментальних даних про його незвичайні властивості. Фон зосереджений в основному в стоксовій області спектра КР, але його крило простягається і в антистоксову область. Він не відноситься до теплового випромінювання, тому що збільшення інтенсивності збуджуючого випромінювання і відповідний розігрів середовища не приводить до зсуву свічення в короткохвильову область [20]. Ще в долазерний період розвитку спектроскопії КР була виявлена сильна залежність фону КР від інтенсивності збуджуючого випромінювання [21]. Пізніше була встановлена його сильна залежність від частоти й тривалості лазерних імпульсів. Зокрема, перехід від неперервного до імпульсного збудження при однакових середніх потужностях, що не змінює інтенсивності ліній КР, приводить до зменшення фону на 1-2 порядку [22]. Наприклад, при використанні частотного режиму рубінового лазера (50 Гц , тривалість імпульсу $\tau = 1 \text{ мс}$) фон в бензолі й нафталіні практично зникає [23]. Фон в більшості випадків зменшувався при витримюванні зразків в лазерному пучку [2-4].

Спочатку широкосмуговий фон пов'язували з флуоресценцією досліджуваної речовини, або із присутністю в ній флуоресціюючих домішок чи дефектів. Тому як способи, що дозволяють позбавитись від фону, різні дослідники пропонували використовувати перегонку і перекристалізацію [1]. Однак при цьому разом з

очищенням зразків відбувається його специфічна термічна обробка і зміна стану речовини, що, як буде показано нижче, може дуже сильно впливати на фон. При зміні довжини хвилі збуджуючого лазера λ_L широка смуга фону в багатьох випадках рухається слідом за збуджуючою лінією. Це, а також відсутність для багатьох речовин з фоном КР смуг поглинання у видимій області, показує, що фон не пов'язаний з люмінесценцією і являє собою більше складне явище. В результаті багаторічного досвіду дослідження КР спектрів автори роботи [24] прийшли до висновку, що для одержання мінімального фону необхідно піддати зразок перегонці або сублімації з мінімальним перепадом температур і обов'язковим переходом речовини через газову фазу. Фон КР спостерігався для рідких, кристалічних, рідкокристалічних, а також полімерних зразків [25,26]. Таким чином, експериментальні факти вказували на важливу роль конденсованого стану речовини у виникненні так званого фону КР.

Цікава температурна поведінка фону виявлена в роботах [24,27]. Фон КР істотно підвищується при різких перепадах температури речовин, наприклад, після кількаразового нагрівання твердих тіл вище температури плавлення з наступним швидким охолодженням. При охолодженні зразків із фоном до низьких температур плавний неперервний фон підсилюється й має виражену структуру, що для полікристалічного карборана ($n\text{-C}_2\text{B}_8\text{H}_{10}$) складається не менш ніж з трьох смуг [24]. Аналогічна структура фону з декількома вираженими максимумами спостерігалася для альбуміну в [26], а також нами для ряду речовин при кімнатних температурах, що буде розглянуто нижче. При підвищенні температури фон повільно послаблюється й за $20\text{-}30$ градусів до точки плавлення спостерігається його різке зменшення, що супроводжується своєрідними «биттями» з тимчасовим зникненням фону на характерних часах $\sim 1 \text{ хв}$ [27]. Перед плавленням фон повністю зникає, а в рідкій фазі з'являється знову. Тісний зв'язок широкосмугового фону з явищем плавлення, нелінійно-квантова природа якого розглянута в наших роботах [15,17], ясно вказує на важливість сильної фонон-електронної взаємодії в походженні і трансформації фону.

При більш глибокому дослідженні властивостей фону КР прийшло усвідомлення, що він представляє загальне явище і його нелюмінесцентне походження не викликало сумнівів [20,24,26,28-30]. Його природа залишалася незрозумілою і автори [26,28,29]

називають фон псевдокомбінаційним розсіянням (ПКР). Виявилося, що для багатьох речовин частота максимуму ПКР ν_F залежить від довжини хвилі збуджуючого лазерного випромінювання λ_L . Зі зменшенням λ_L існує тенденція зростання ν_F . Наприклад, для діетиленгліколю при зміні λ_L у видимому діапазоні ν_F змінюється від 800 до 3000 см^{-1} і далі різко зростає в УФ області [29]. Одночасно зростає його напівширина. Залежності $\nu_F(\lambda_L)$ були вивчені також для C_6H_6 і $\text{C}_6\text{H}_5\text{CF}_3$ [29].

Для довголанцюгових полімерів було виявлено зменшення ν_F з ростом довжини ланцюга молекул L [26]. Аналогічна залежність спостерігалася в ряді поліетиленгліколей при збудженні КР He-Ne лазером ($\lambda_L = 632.8 \text{ нм}$) [29]. Це дозволило розглядати аналогію зі стоячими хвилями в обмежених об'єктах, для яких $\nu_F = V/(2cL)$, де c – швидкість світла, а V – швидкість можливих хвиль електронної густини. В роботах [24, 28-30] вважається, що в результаті впорядкування структури рідин стоячі хвилі електронної густини встановлюються для впорядкованої системи молекул. Такий підхід подібний до розгляду низькочастотного бозонного піка в спектрах КР стекол і рідин [31]. В цьому випадку розглядаються стоячі акустичні хвилі в обмежених структурних утвореннях неупорядкованих середовищ з характерними розмірами L . В результаті меншої величини швидкостей акустичних хвиль в порівнянні з електронними, частоти максимумів бозонного піка істотно менші в порівнянні з ν_F для фону КР, які змінюються в межах 700-5000 см^{-1} [29].

Однак такий спрощений погляд на природу широкосмугового фону КР не узгоджується з немонотонною залежністю величини ν_F від довжини ланцюга молекул поліетиленгліколей у випадку $\lambda_L = 632.8 \text{ нм}$, що спостерігалася в роботі [29] одночасно з монотонною залежністю при $\lambda_L = 488 \text{ нм}$. Трохи інша точка зору пропонується авторами [32]. Вони фактично відмовляються від нелюмінесцентної природи фону [20] і пов'язують фон КР з люмінесценцією на «хвостах» електронних станів, що виникають у широкій забороненій зоні через локальні флуктуації ближнього порядку, викликаного мікродомішками.

Взаємозв'язок широкосмугових фонів у коливальних спектрах з низькочастотними колективними коливальними модами рідин [13, 14] розглядався в [33, 34 і ін.]. В [33] фон в ІЧ спектрах поглинання систем з водневими зв'язками пов'язується із сильною взаємодією коливальних протона з низькочастотними

коливаннями навколишнього середовища, а в [34] покладається, що фон КР виникає в результаті накладення крил коливальних смуг. Припускалося, що їх достатня інтенсивність може бути обумовлена взаємодією внутрішньо-молекулярних і міжмолекулярних (квазіграткових) мод у рідинах. Однак така точка зору, так само як і всі попередні, не могли пояснити складні температурні варіації фону, зміни частоти його максимуму і напівширини при зміні довжини хвилі накачки λ_L , а також інші його властивості, що буде розглянуто нижче.

Таким чином, незважаючи на тривалу історію, до теперішнього часу немає єдиної точки зору на природу широкосмугового фону КР, хоча стало ясно, що він має більше загальний характер, ніж передбачалося раніше. Це підтверджується зв'язком широкосмугового фону КР з явищами розшарування рідин, складними перетвореннями речовини, у тому числі переходом металів у надпровідний стан і ін. Зокрема, в системі гваякол-гліцерин додавання води приводить до сильного зростання фону [35], що пов'язане з розшаруванням рідин. При цьому смуги ОН $\nu_{\text{ОН}}$ можуть сильно зменшуватися по інтенсивності. Але при додаванні невеликої кількості $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ фон навпаки послаблюється. Дуже цікава подібність широкосмугового фону КР з електронним розсіянням у надпровідниках [36], де широка смуга КР дає густину надщілинних електронних збуджень, і максимум фону узгоджується з відомим співвідношенням з теорії БКШ $2\Delta = 3.5T_C$, де Δ – ширина енергетичної щілини, а T_C – критична температура переходу в надпровідний стан. В цьому випадку фон КР, що простягається в деяких випадках до 5000 см^{-1} , являє собою одночастинкове електронне розсіяння світла Фермі-рідиною. Неперервний фон в спектрах КР сильно зростає для фрактальних кластерів полікристалів у пористому склі [37]. В [38] поява фону при загартуванні напівпровідника пов'язується з частковою аморфізацією зразка й напругами в кристалічній решітці. І хоча при цьому структура фону приблизно корелює з максимумами щільності коливальних станів, всі розглянуті факти і особливо явище надпровідності вказують на сильну зміну електронних станів. Підбиваючи підсумок аналізу публікацій по даній проблемі, слід відзначити, що відповідно до думки більшості авторів фон КР пов'язаний як з електронними станами, так і з колективними коливальними модами конденсованих середовищ. Як розвиток ідей нашої роботи [19] широкі смуги в спектрах КР пов'язуються з

виникненням електронних смуг нового типу, індукованих сильним збудженням коливальних станів. Таким чином в новій концепції органічно поєднуються між собою здавалось би протилежні точки зору (колективно-коливальні і електронні механізми) на виникнення широкосмугового фону.

2. Спостереження широкосмугового фону в спектрах комбінаційного розсіяння органічних рідин

Спектри КР ряду органічних рідин досліджувалися з використанням автоматизованих подвійних монохроматорів ДФС-52 і ДФС-24. Збудження спектрів здійснювалося неперервним випромінюванням Ar^+ лазера з довжинами хвиль 514,5 нм і 488 нм, потужністю 50 і 540 мВт. Виділення необхідної довжини хвилі генерації здійснювалося інтерференційними фільтрами або з допомогою дисперсійної призми, розташованої зовні лазерного резонатора. Для дослідження використовувалися чисті еталонні рідини марки ЧДА в запаяних скляних ампулах об'ємом ~5 мл. Реєстрація КР спектрів здійснювалася з використанням охолоджуваного фотопомножувача і схеми, що працює в режимі лічби фотонів. Для підвищення рівня сигналу при реєстрації широкосмугового фону використовувалися відносно великі ширини щілин (1-2 мм) і накопичення сигналу, а також застосовувалося оптимальне згладжування спектрів зі спектральним вікном, величина якого спеціально підбиралася. В цьому випадку вдалося впевнено спостерігати широкосмуговий фон для CCl_4 і SiCl_4 .

Зразки спостережуваних широкосмугових фонів у спектрах КР для ряду рідин показані на рис. 1-3. Для такої еталонної рідини як C_6H_6 згідно рис. 1а інтенсивність фону значно менша пікових інтенсивностей найбільш інтенсивних коливальних ліній і наявність фону можна виявити при збільшенні масштабу. Але для C_6H_6 велика кількість спостережуваних коливальних смуг, включаючи смуги обертонів і сумарних тонів, ускладнює спостереження фону КР (див. рис. 1а). Щоб показати, що накладення крил спектральних смуг [34] не вносить основного внеску у фон КР, ми використали дейтеро- і фторзамещені рідини C_6D_6 і C_6F_6 , які мають ту ж систематику коливальних смуг як і C_6H_6 . Для гексазамішених бензолу частоти більшості коливальних мод зменшуються, що пов'язане з більшою масою дейтерію й фтору в порівнянні з воднем. У результаті цього згідно [34] фон також повинен був би зміщуватися в низькочастотну

область. Цього однак не відбувається, що видно з рис. 1б. Для C_6D_6 і C_6H_6 широкосмугові фони досить близькі за формою, а їх максимуми знаходяться в області бідній коливальними смугами. Істотно, що для C_6F_6 максимум фону

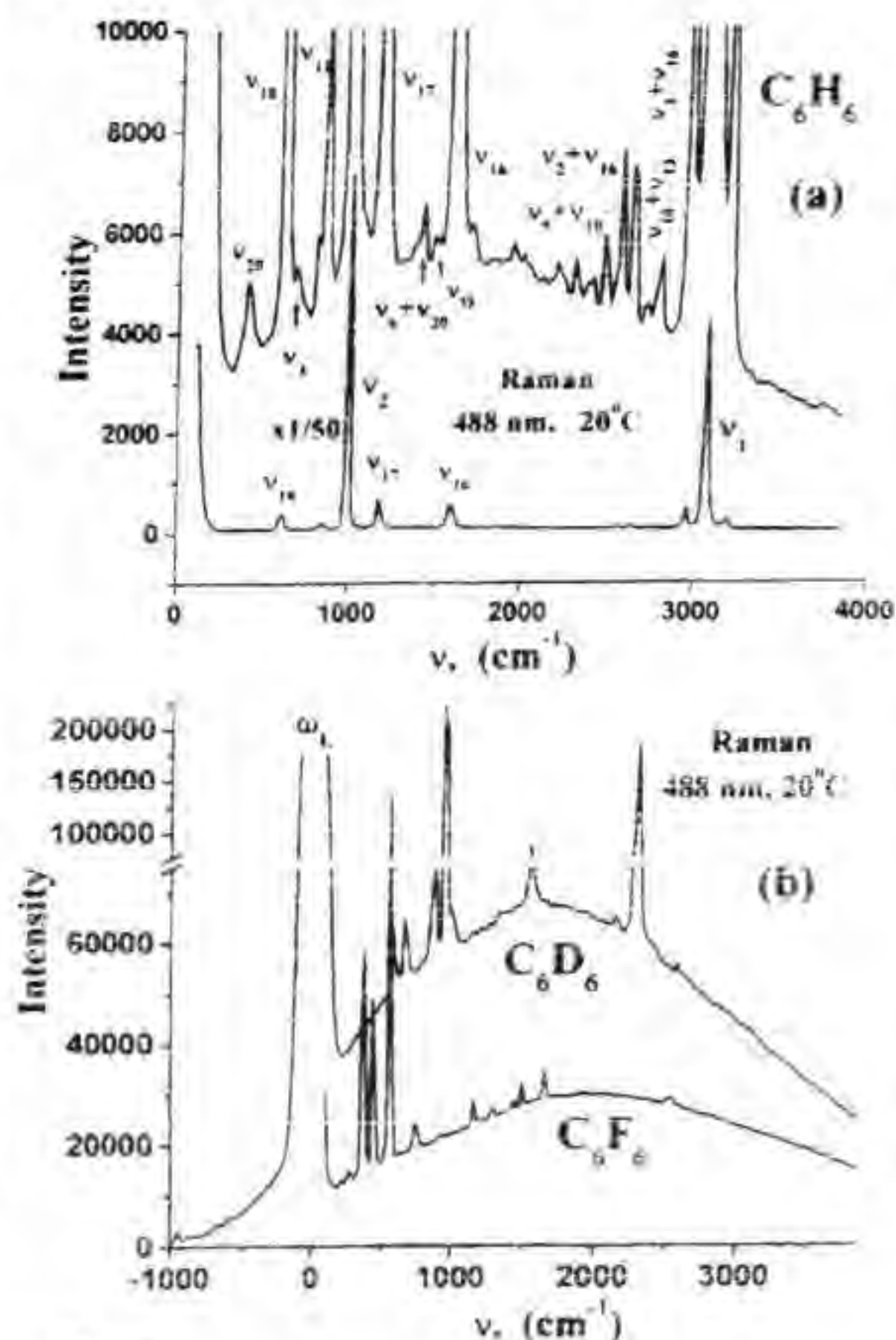


Рис. 1

Спостереження широкосмугового фону в бензолі (а), дейтеробензолі і гексафторбензолі (б).

навіть зміщується в протилежну високочастотну сторону й спостерігається в області, де немає ліній КР, що суперечить основним положенням роботи [34]. Крім того фон простягається в область високих частот на тисячі cm^{-1} , що значно перевищує частоти міжмолекулярних мод для всіх рідин. На прикладі C_6D_6 демонструється співвідношення стокової і антистокової частин широкосмугового фону і його одночасне спостереження з релєвською лінією і коливальними смугами. Як показано в багатьох роботах інтенсивності антистокових і стокових смуг КР, а також відповідних частин широкосмугового фону задовольняють відомому правилу $I_{AS}/I_S = \exp(-\hbar\omega/kT)$. Зокрема, при низьких температурах інтенсивність фону в антистоковій області сильно зменшується, хоча його

інтенсивність у стоксовій області зростає. Для використовуваних гексазаміщених бензолу інтенсивність фону відносно коливальних ліній істотно підвищується в порівнянні з бензолом, незважаючи на близькість їх температур плавлення, що спрощує спостереження фону.

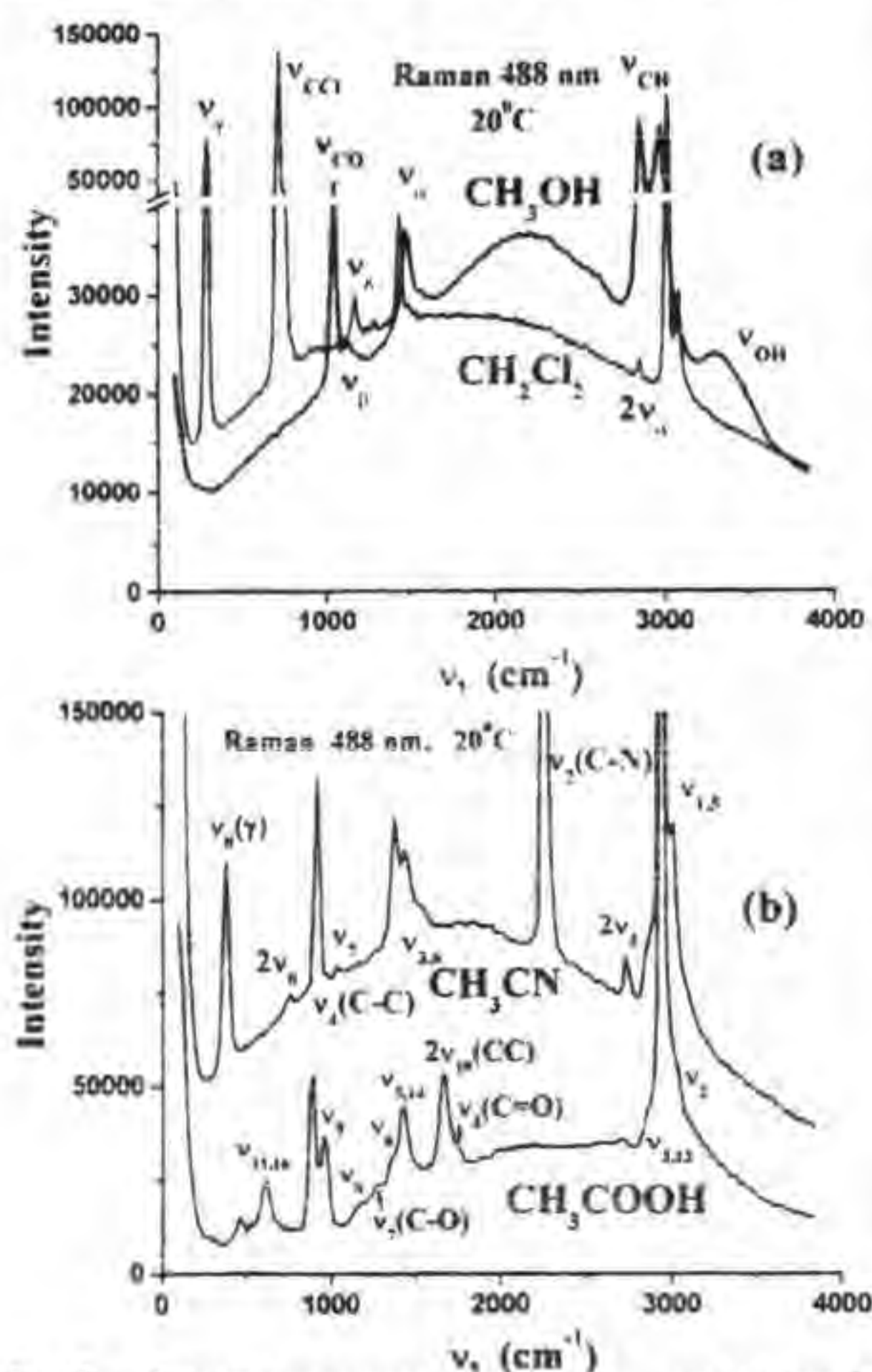


Рис.2 Спостереження максимумів широкосмугового фону в частотних областях, вільних від коливальних ліній у дихлорметані і метиловому спирті (а), ацетонітрилі і оцтовій кислоті (б).

Щоб коливальні лінії не перешкождали спостереженню широкосмугового фону ми використовували молекулярні рідини простої будови з мінімальним числом нормальних коливань: CH_2Cl_2 , CHCl_3 , CDCl_3 , CH_3OH , CH_3CN , CH_3COOH , CCl_4 , SiCl_4 , а також CS_2 і H_2SO_4 . Для багатьох розглядуваних рідин максимум фону спостерігається в областях, де відсутні коливальні смуги. Крім C_6F_6 це добре проявляється в дихлорметані і метиловому спирті (рис. 2а), а також ацетонітрилі (рис.2б). Для CH_3OH і CH_3CN максимум фону виражений більш чітко в порівнянні з CH_2Cl_2 і зміщений у

високочастотну сторону. Ще більш високочастотний фон спостерігається в оцтовій кислоті.

Для хлороформу (CHCl_3) і його дейтерозаміщеного аналогу максимуми розглядуваного фону знаходяться в області коливальних смуг 2-го порядку: обертонів $2\nu_{4,5}$ і сумарного тону $\nu_4 + \nu_5$, що показано на рис.3а. Для CCl_4 максимум фону КР спостерігається в області смуг 3-го порядку (рис. 3б), а у випадку SiCl_4 – в області ще більш високих частот (рис. 3с). Для двох останніх рідин інтенсивність фону істотно менша в порівнянні з іншими, що може бути пов'язане з відсутністю атомів водню в структурі молекул і низькими частотами їх нормальних коливань. В зв'язку з цим для наближення енергій вищих коливальних мод до електронних станів необхідна генерація більш високих порядків обертонів і сумарних тонів. Це природно пояснює більш низьку інтенсивність фону в CCl_4 і SiCl_4 , а також зміщення максимумів фону в область коливань більш високого порядку. В спектрах КР CCl_4 і SiCl_4 максимум фону спостерігається в високочастотній області від найбільш інтенсивних коливальних смуг. Така ж ситуація реалізується для сірководню й сірчаної кислоти, що показано на рис.4.

3. Коливальне індуквання електронних смуг у рідинах

Як було встановлено в нашій попередній роботі [19] виникаючі широкі смуги електронного поглинання в забороненій зоні діелектриків пов'язані з частотами коливань внутрішніх гідроксильних груп OH , що знаходяться всередині структури плавленого кварцу або скла. З ростом концентрації OH груп нові електронні смуги підсилюються й можуть зміщуватися в більш високочастотну область, де розташовані обертони валентної моди або сумарних тонів з участю колективних коливальних мод сітки водневих зв'язків. Таким чином, електронні смуги нового типу в забороненій зоні твердих діелектриків можуть індукуватися коливальними модами води. Такі ж проміжні електронні стани можуть індукуватися для систем капілярної або адсорбованої води в пористих і гранулярних силікатних середовищах [19]. Аналогічні широкі електронні смуги можуть виникати й у рідинах. Найбільш просто їх індуквання під впливом сильного збудження коливальних мод можна довести для рідких молекулярних середовищ з сильними високочастотними коливальними модами. В якості такої рідини ми вибрали CS_2 для якої раніше спостерігалися акустичні і лібра-

високочастотним фоном в цих рідинах (рис.2а,б). Таким чином, концепція індукування нових електронних смуг сильним збудженням коливальних мод дозволяє пояснити багато особливостей широкополосного фону. Зокрема вона дозволяє зрозуміти сильні температурні зміни фону. Це зумовлено тим, що збудження вищих коливальних мод і виникнення нерівноважних станів речовини розвивається шляхом генерації гармонік термічно збуджених низькочастотних мод, що підтверджується детальним кількісним аналізом процесів плавлення і кипіння [15-17]. При різких температурних змінах нерівноважні стани не встигають релаксувати, що й приводить до зростання фону КР.

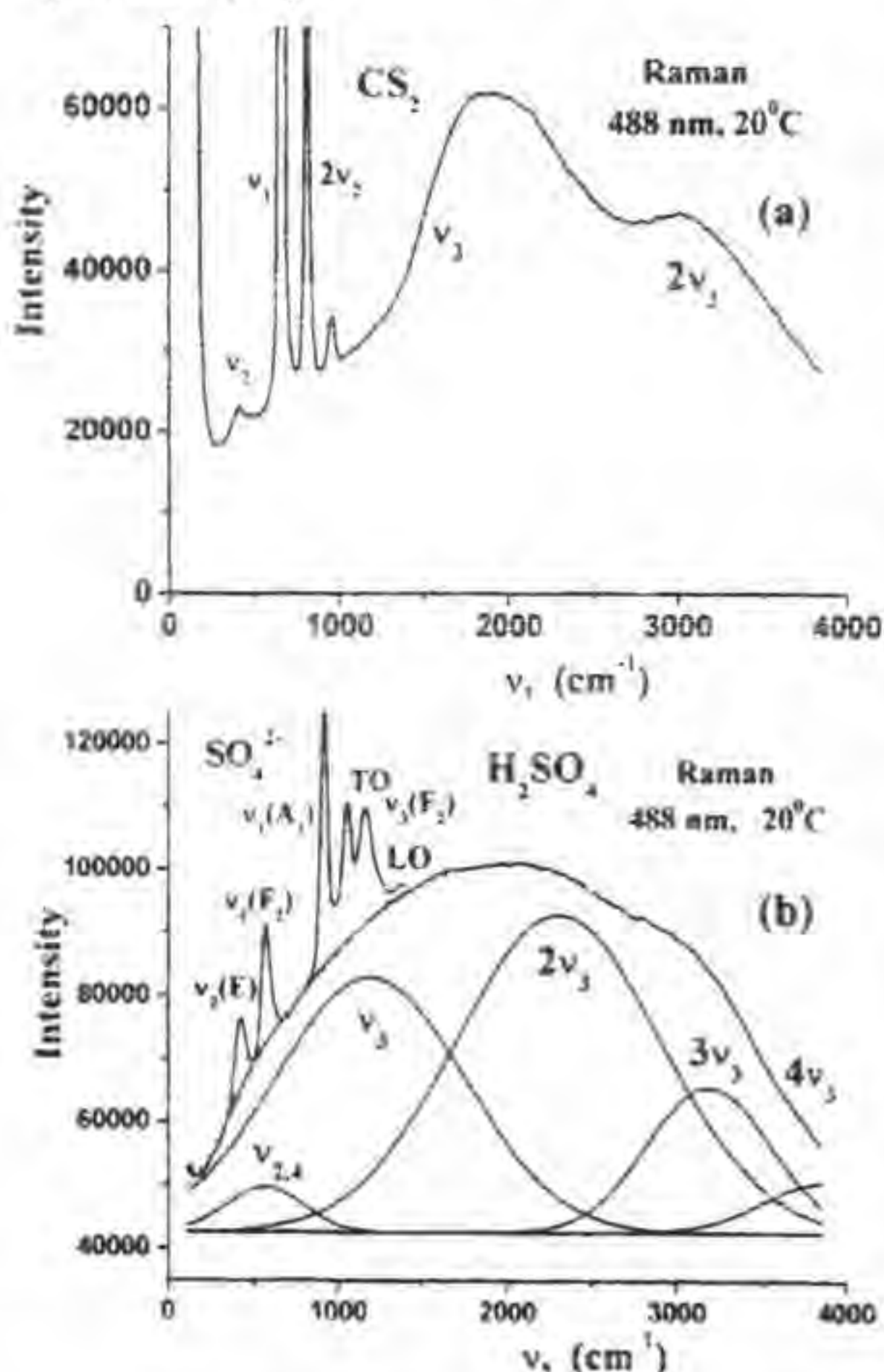


Рис.4. Спостереження структурованого фону для рідкого сірковуглецю (а) і сірчаної кислоти (б) при кімнатній температурі, обумовлене високими частотами їх найбільш дипольних коливань.

Для багатьох рідин, індуковані смуги яких показані на рис.1-3, найбільш інтенсивні смуги ІЧ поглинання мають менші частоти. В цьому випадку послідовність майже еквідистантних індукованих електронних смуг сильно перекривається й утворює досить гладкий

сумарний контур, що і спостерігається в реальності. Його структура проявляється іноді при низьких температурах, коли ширини кожної зі складових компонентів можуть зменшуватися, що й спостерігалось в роботі [24]. В зв'язку з цим коливальна структура широкополосного фону найкраще спостерігається для рідин з високочастотними найбільш сильними дипольними модами, які й розглядалися в цьому розділі. Таким чином, встановлено, що фон КР виникає в результаті індукування нових електронних станів в результаті порушення адіабатичного наближення при сильному збудженні найбільш дипольних мод і їх обертонів, і наступним розсіянням світла на цих електронних станах. В результаті в спектрах КР одночасно проявляються широкі смуги розсіяння на коливально індукованих електронних станах, а також істотно більше вузькі лінії розсіяння на коливальних модах, що природно пояснює спостережувану типову форму КР спектрів.

Висновки

1. Вивчено форми широкосмугових фонів у спектрах КР ряду молекулярних середовищ із малим числом атомів у молекулах і невеликому числі нормальних коливань, що дозволяє легше розділяти внески вузьких коливальних смуг і неперервного фону. Показано, що максимум фону в більшості випадків не пов'язаний з положенням найбільш інтенсивних ліній КР і може перебувати в області, де відсутні лінії КР. Отже він не може бути пов'язаний з накладанням широких крил коливальних смуг.

2. Для багатьох органічних рідин інтегральна інтенсивність фону може більш ніж на порядок перевищувати сумарну інтегральну інтенсивність ліній КР, що вказує на важливість розглянутого явища. При відсутності в молекулах високочастотних коливань ОН або СН груп інтенсивність фону зменшується, що наочно проявляється в спектрах CCl₄ і SiCl₄. У спектрах CS₂ і H₂SO₄ інтенсивність фону підвищується в результаті близькості довжини хвилі збуджуючого випромінювання λ_d до резонансних умов.

3. Встановлено, що окремі складові структурованого фону КР в CS₂ і H₂SO₄ пов'язані з частотами найбільш дипольних коливань молекул і майже еквідистантною послідовністю їх обертонів. Це аналогічно новим електронним смугам у спектрах ІЧ поглинання й доводить їх індукування коливальними модами в результаті сильного фонон-електронного взаємозв'язку. Якщо напівширини нових електронних смуг перевищують частоти найбільш сильних ІЧ смуг.

то окремі складові фону КР, пов'язані з послідовністю обертонів, сильно перекриваються між собою й утворюють єдину плавну смугу.

4. Найбільша інтенсивність фону спостерігається для рідин з найбільш високочастотними коливаннями груп OH і CH. При цьому до електронних станів наближаються обертони меншого порядку, які збуджуються більш ефективно в результаті нелінійної резонансної взаємодії коливальних мод. Це й спричиняє прояв ефектів сильної фонон-електронної взаємодії. Висока інтенсивність фону КР спостерігається також для CS_2 з досить високою частотою ІЧ активної антисиметричної моди $\nu_2 \sim 1500 \text{ cm}^{-1}$. Індукування нових електронних смуг утруднено в випадку низьких частот всіх коливальних мод, що пояснює низьку інтенсивність фону в CCl_4 і SiCl_4 .

5. Генерація вищих коливальних станів, ефекти сильної фонон-електронної взаємодії і індукування нових електронних станів дуже чутливі до структури речовини і відповідних нелінійних сприйнятливостей. Тому розсіяння на індукованих електронних станах і спостережувані широкосмугові фони в КР спектрах більше чутливі до зміни квантової структури речовини ніж звичайно використовувані для аналізу коливальні смуги. В зв'язку із цим розкриття природи широкосмугового фону повинно сприяти розвитку нового чутливого і високоефективного спектрального методу. Зокрема, розупорядкування надмолекулярної структури рідин при зовнішніх фізичних впливах веде до підвищення нелінійності й росту неперервної частини спектра. З ростом енергії збуджуючих лазерних фотонів підсилюється радіаційний вплив на досліджувану речовину, що аналогічно розглянутому в статті випадку H_2SO_4 , веде до індукування нових електронних смуг і зсуву максимуму фону в область більш високих порядків коливальних обертонів, що й спостерігається для ряду рідин [30].

Нові методи коливальної спектроскопії КР світла і ІЧ поглинання, що розвиваються нами, дуже чутливі до нелінійних хвильових явищ, які проявляються при термічному збудженні речовини і впливі малопотужного неперервного лазерного випромінювання. Спектроскопія індукованого електронного розсіювання перспективна для вивчення нових ще невідомих нелінійно-квантових властивостей речовини, в тому числі динамічної (коливальної) нестійкості конденсованого стану і трансформації структури атомарних і молекулярних систем, включаючи

фазові переходи і критичні явища. Її необхідно використовувати для вивчення на більше високому рівні широковідомих явищ молекулярної фізики, а також хімічних і біологічних явищ і контролю технологічних процесів.

Список використаних джерел

1. Кольрауш К. Спектры комбинационного рассеяния. М.: ИЛ, 1952, с.54.
2. Брандмюллер И., Мозер Г. Введение в спектроскопию КР. М.: Мир, 1964, с. 262, 334.
3. Loader J. Basic Laser Raman Spectroscopy. Heyden Son, 1970
4. Гилсон Т., Хендра П. Лазерная спектроскопия КР в химии. М.: Мир, 1973.
5. Сущинский М.М., Бажулин П.А. Применение комбинационного рассеяния света к исследованию состава и строения вещества // УФН. 1957.-т.63, вып.2.-С.301-321.
6. Атлас спектров растворителей (ИК-, УФ-, КР – и ПМР –спектры растворителей) Под ред. чл.-корр. АН СССР В.А. Коптюга. Новосибирск, СО АН СССР, 1987.
7. Raman C.V. A Change of wave-length in light scattering, Nature, 1928, v. 121, p. 619.
8. С.А.Ахманов, Н.И.Коротеев. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. Москва. Наука, 1981. 544 с.
9. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Природа частотно-угловой структуры излучения при ВКР в жидкостях // Доклады АН УССР, сер.А-1983.- № 4.- с.65-68.
10. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Антистоксово комбинационное рассеяние на поляритонах в жидкостях, индуцированное ВКР // Оптика и спектроскопия – 1986. - т. 60, № 6 - с. 1171-1174.
11. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Генерація возбуждених клепательних состояний при ВКР и поляритонный механизм релаксации в жидкостях // Оптика и спектроскопия – 1986. - т.61, № 1 - с.174-177.
12. Корніснко М.Є., Спостереження поздовжньо-поперечного розщеплення в спектрах комбінаційного розсіювання рідкого хлороформу //УФЖ – 2001.-Т.46, № 5-6, – с.546-552.
13. Корніснко М.Є., Низькочастотні колективні моди системи водневих зв'язків води // УФЖ – 2002.- Т.47, № 4. – с.361-364.
14. Корніснко М.Є., Круть О.В. Спостереження граткових мод рідкого CS_2 в області сумарних коливальних смуг ІЧ поглинання // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки - 2005 -№1- с.345-357
15. Корніснко М.Є., Про зв'язок теплот плавлення

кристалів з енергіями оптичних фононів // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2004.- № 4.- с.466-476.

16. Корнієнко М.Є., Про фонону дискретність теплот кипіння // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2005. -№3.- с.520-534.

17. Корниенко Н.Е., Фононная дискретность теплот плавления молекулярных, ковалентных и ионных кристаллов, Международная конференция ФТТ-2005, Актуальные проблемы физики твердого тела, 26-28.10.2005, Минск.

18. Korniyenko N.E., Conception of nonlinear wave's interaction in physics and spectroscopy of the condensed media, XVII Intern.Schol-Semin. "Spectroscopy of Molecules and Crystals", 20-26.09 2005, Beregove, Crimea, Ukraine, Abstracts, p.18.

19. Корнієнко М.Є., Ефекти сильної фонон-електронної взаємодії I. Відкриття електронних смуг нового типу// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2006.-№ 3.- с.489-500.

20. Ачилов М.Ф., Касымаджанов М.А., Криндач Д.П., Трунилина О.В., Хабибулаев Н.К., Ненаправленное свечение прозрачных диэлектриков под действием лазерного излучения// Квантовая электроника, 1977, т.4. № 9.- С.1992-1994.

21. Н.И.Резаев, П.А.Бажулин, Измерение контуров и ширины линий комбинационного рассеяния света методом фотоэлектрической регистрации, Оптика и спектроскопия, 1956, -т.1, вып.5.- с.715-718.

22. Hamauchi H., Tahara T., Tasumi M. Suppression of Luminescence Background in Raman Spectroscopy by Means of Transient Optical Depletion of Causal Impurity Molecules// Appl. Spectr., 1987, v.41/8,-p.1265-1268.

23. Brandmuller J., Burchardi K., Hacker H. und Schrotter H.W. Registrierung von Raman-spektren bei Erregung mit quasikontinuierlichen und kontinuierlichen Rubinlasern// Z.angew. Phys., 1967, Bd. 32. H.2.-S.112-117.

24. Букалов С.С., Лейтес Л.А., О так называемом «фоне» в спектрах КР// Оптика и спектроскопия, 1984, т.56, вып. 1. с. 10-12.

25. Жданова А.С., Морозова Л.Ф. и Сушинский М.М., Исследование жидких кристаллов методом комбинационного рассеяния света // Оптика и спектроскопия, 1969, т.26, вып.2. с. 209-213.

26. Biscar J.P., Kollias N. Resolved pseudo-Raman spectrum of ovalbumin// Chem., Phys. Lett.- 1974.-27, N 1.- P.100-102.

27. Букалов С.С., Лейтес Л.А. Новые результаты в области исследования так называемого «фона» в спектрах КР// Тезисы докладов III Всесоюзной конференции по спектроскопии комбинационного рассеяния света, Душанбе, 1986, Изд. ИФ им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1986 г. С.123-124. 28. Kollias N., Biscar J.P. Pseudo-Raman broad of stacked benzene molecules// Chem., Phys. Lett.- 1974.-26, N 1.- P.82-84.

29. Погорелов В.Е., Саливон Г.И. Исследование широкополосного фона в спектрах комбинационного рассеяния света, 1980.-Ч.2.- С.215-219.

30. Классен И.Ф., Погорелов В.Е., Саливон Г.И. Широкополосный фон в спектрах нерезонансного комбинационного рассеяния. УФЖ.-1987, т.32, № 9.- С. 1342-1345.

31. Баранов А.В., Петров В.И., Федоров А.В., Черняков Г.М. Влияние микропримесей NaCl на динамику кластерообразования в жидкой воде: спектроскопия низкочастотного комбинационного рассеяния, Письма в ЖЭТФ, 1993, т. 57, вып. 6, с. 356-359.

32. Ачилов М.Ф., Касымаджанов М.А., Трунилина О.В., Хабибулаев Н.К., О природе широкополосного свечения, возбуждаемого лазерным излучением в твердых и жидких веществах // Оптика и спектроскопия, 1985, - т.58, вып.4.-С.724-726.

33. Н.Б.Либрович, В.П.Сакун, Н.Д.Соколов, Колебательный спектр гидратированного протона ТЭХ, 1978, т.14, № 4,- с.435-446.

34. Говорун Д.М., Коротков П.А. Прояв взаємодії внутрішньо- та міжмолекулярних коливань в ІЧ- та КР- спектрах рідкого бензолу// Доповіді АН УРСР, сер. А. 1986, № 8.-с.52-53.

35. Кривохижа С.В., Фабелинский И.Л., Чайков Л.Л. О различии пектров комбинационного рассеяния света в растворе в области верхней и нижней критических точек, Письма в ЖЭТФ, 1993, -т.57, вып.1.- с.21-24.

36. Фальковский Л.А. Электронное рассеяние света в сверхпроводниках // УФН, 1990.-т.160, вып.4.-с.71-75.

37. А.В.Сечкарев, В.К.Бегер, Ю.А.Фадеев, Уширение полос межмолекулярного спектра комбинационного рассеяния фрактальных кластеров поликристаллов в пористом стекле. ЖФХ, 1992, -т.66, № 2. - с. 356-358.

38. В.Н.Денисов, Б.Н.Маврин, Г.Г.Скороцкая, Спектры КР полупроводника ZnSe, закаленного из расплава при высоком давлении, ЖПС, 1991, - т.54, №5.- с.839-841.

Надійшла до редколегії 7.03.2007

УДК 539.213

В.І. Лисов, д.ф.м.н., проф.,
Т.Л. Цареградська, к.ф.м.н., доц.,
О.В. Турков, інж.,
Г.В. Саєнко, інж.

Експериментальні дослідження температурно-часової стабільності багатокомпонентних аморфних сплавів

Досліджено вплив тривалої ізотермічної витримки на термодинамічну стабільність аморфних сплавів. За допомогою високочутливої дилатометричної методики для багатокомпонентних аморфних сплавів $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Mo}_2\text{Mn}_2\text{Nb}_1$, $\text{Fe}_{77}\text{B}_{12}\text{Si}_5\text{Ni}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2$ та $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Nb}_1\text{Mn}_2$ було проведено ряд експериментів по ізотермічній витримці при кімнатній температурі на протязі 6-7 років. Для всіх досліджуваних сплавів температура повної кристалізації після тривалої ізотермічної витримки зменшилась на (20-25)K.

Ключові слова: аморфні сплави, термодинамічна стабільність, кристалізація

* tsar_grd@univ.kiev.ua

1. Вступ

Аморфні сплави – це гетерогенні системи аморфна матриця-“вморожені” центри кристалізації, які знаходяться в метастабільному стані, тому їх властивості істотно залежать від впливу зовнішніх умов (температура, тиск, час ізотермічної витримки та ін.), особливо в області фазових переходів. При нагріванні до певної температури аморфні металеві сплави переходять в більш стабільний кристалічний стан, втрачаючи при цьому свої характерні, корисні для практичного використання властивості. Тому виникає необхідність в умінні заздалегідь передбачати як схильність сплавів до аморфізації, так і їх температурно-часову стабільність в аморфному стані. В роботі наведено результати експериментальних досліджень впливу тривалої ізотермічної

V. I. Lysov, Dr.Sc., Prof.,
T. L. Tsaregradskaya, PhD.,
O. V. Turkov, eng.,
G. V. Saenko, eng.

The experimental researches of temperature-temporal stabilities of the multicomponent amorphous alloys

The influence of protracted isothermal exposure on thermodynamics stability of amorphous alloys was investigated. For the multicomponent amorphous alloys of $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Mo}_2\text{Mn}_2\text{Nb}_1$, $\text{Fe}_{77}\text{B}_{12}\text{Si}_5\text{Ni}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2$ and $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Nb}_1\text{Mn}_2$ by highly sensitive dilatometric method the row of experiments on isothermal exposure at room temperature during 6-7 years was conducted. For all probed alloys the temperature of complete crystallization after protracted exposure diminished on (20-25) K.

Key Words: amorphous alloys, thermodynamics stability, crystallization

витримки на фазовий стан і термодинамічну стабільність аморфних сплавів.

2. Рівняння, що описує умову термодинамічної рівноваги аморфних сплавів

Постановка задачі впливає з розробленої теорії термодинамічної стабільності аморфних сплавів [1-4], відповідно до якої зовнішні впливи (ізотермічний відпал або тривала витримка при кімнатній температурі) може приводити до істотного зсуву фазової рівноваги в гетерогенній системі: аморфна матриця – “вморожені” центри кристалізації.

Рівновага в такій системі визначається різницею хімічних потенціалів компонентів сплаву в аморфній і кристалічній фазах, вираз для якої отримано в роботі [1]

$$\Delta\mu_i(T,P) = -\frac{\chi_\alpha \cdot V_\beta + \chi_\beta \cdot V_\alpha}{\chi_\alpha + \chi_\beta} \cdot \frac{2\sigma}{r_{02}} - \frac{(V_\beta - V_\alpha) \cdot (\bar{V}_\beta' - \bar{V}_\alpha') \cdot \left[1 - \left(\frac{r_{01}}{r_{02}}\right)^3\right]}{(\chi_\alpha + \chi_\beta) \bar{V}} + \Delta\mu_{0i}(T,P) \quad (1)$$

де V_α, V_β – молярні об'єми α – та β – фаз;
 $\bar{V}_\alpha', \bar{V}_\beta'$ – парціальні молярні об'єми i – го
компонента в α – та β – фазах; χ_α, χ_β –
ізотермічні стисливості α – та β – фаз; σ –
поверхневий натяг на границі α – та β – фаз;
 r_{01} – параметр розплаву, який враховує в'язкість
розплаву в переохолодженому стані; r_{02} – радіус
критичного зародка; $\mu_{0i}^\alpha, \mu_{0i}^\beta$ – хімічні потенціали
 i – го компоненту в α – та β – фазах;

$$\Delta\mu_i = \mu_{0i}^\alpha + \mu_{0i}^\beta$$

Умова термодинамічної рівноваги
“вморожених” центрів кристалізації” – аморфна
матриця по i – му компоненту описується
рівністю

$$\Delta\mu_i = 0 \quad (2)$$

Для критичного радіусу кристалічного
зародку є справедливим вираз [1]

$$r_{02} = \frac{2\sigma V_0}{\Delta G^{\alpha-\beta} - 2|\Delta G^{\alpha-\alpha}|} \quad (3)$$

де $\Delta G^{\alpha-\beta}$ та $\Delta G^{\alpha-\alpha}$ – зміна вільної енергії
Гіббса відповідно при переході з α – в β – фазу
та з α – в α – при флуктуації концентрації в
розплаві; V_0 – молярний об'єм сплаву.

3. Експериментальні дослідження впливу ізотермічної витримки на термічну стабільність аморфних сплавів

Дослідження процесу кристалізації
проводилася за допомогою високочутливої
дилатометричної методики. Методика
проведених дилатометричних досліджень
полягає в наступному. Молярний об'єм більшості
сплавів в аморфному і кристалічному станах
відрізняється на (1-3)%. При нагріванні
аморфного сплаву його об'єм монотонно зростає,
досягши певної температури (температури
кристалізації) відбувається різке зниження

об'єму, що свідчить про початок процесу
кристалізації. Таким чином, можна досліджувати
процес кристалізації аморфного сплаву,
фіксуючи зміну довжини зразка і перераховуючи
її в об'ємні зміни. На матеріал з відомим
коефіцієнтом теплового розширення
закріплюється відрізок аморфної фольги і
задається прогин. Вимір довжини досліджуваної
в процесі нагрівання фольги безперервно
фіксується по зміні стріли прогину, викликаній
розширенням фольги відносно матеріалу з
відомим коефіцієнтом теплового розширення.

Залежність об'ємної долі фази, що
закристалізовувалася від температури і часу
ізотермічного відпалу розраховується на основі
експериментальних досліджень відносних змін
об'єму. Об'ємна доля фази, що
закристалізовувалася, розраховується за
формулою

$$X(t) = \frac{(\Delta V/V)_k}{(\Delta V/V)_m}$$

де $(\Delta V/V)_k$ – відносна зміна об'єму аморфного
сплаву при кристалізації в процесі безперервного
нагріву при фіксованій температурі T або в
процесі ізотермічного відпалу при температурі
 T за час t ; $(\Delta V/V)_m$ – відносна зміна об'єму
аморфного сплаву при повній кристалізації
сплаву при даній температурі.

На рис. 1. представлено експериментальні
результати досліджень відносної зміни об'єму
 $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{77}\text{B}_{12}\text{Si}_5\text{Ni}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2$
до і після тривалої витримки при кімнатній
температурі на протязі 6 років. З аналізу даних,
що представлені на рис. 1, можна зробити
висновок про те, що температура повної
кристалізації після витримки протягом 6 років
зменшується з 750°C до 725°C .

На рис. 2. представлені температурні
залежності відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$
аморфного сплаву $\text{Fe}_{76}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Mo}_2\text{Mn}_2\text{Nb}_1$ до і
після тривалої витримки. Для цього сплаву також
є характерним зниження температури повної
кристалізації на 20°C після витримки при
кімнатній температурі протягом 6 років.

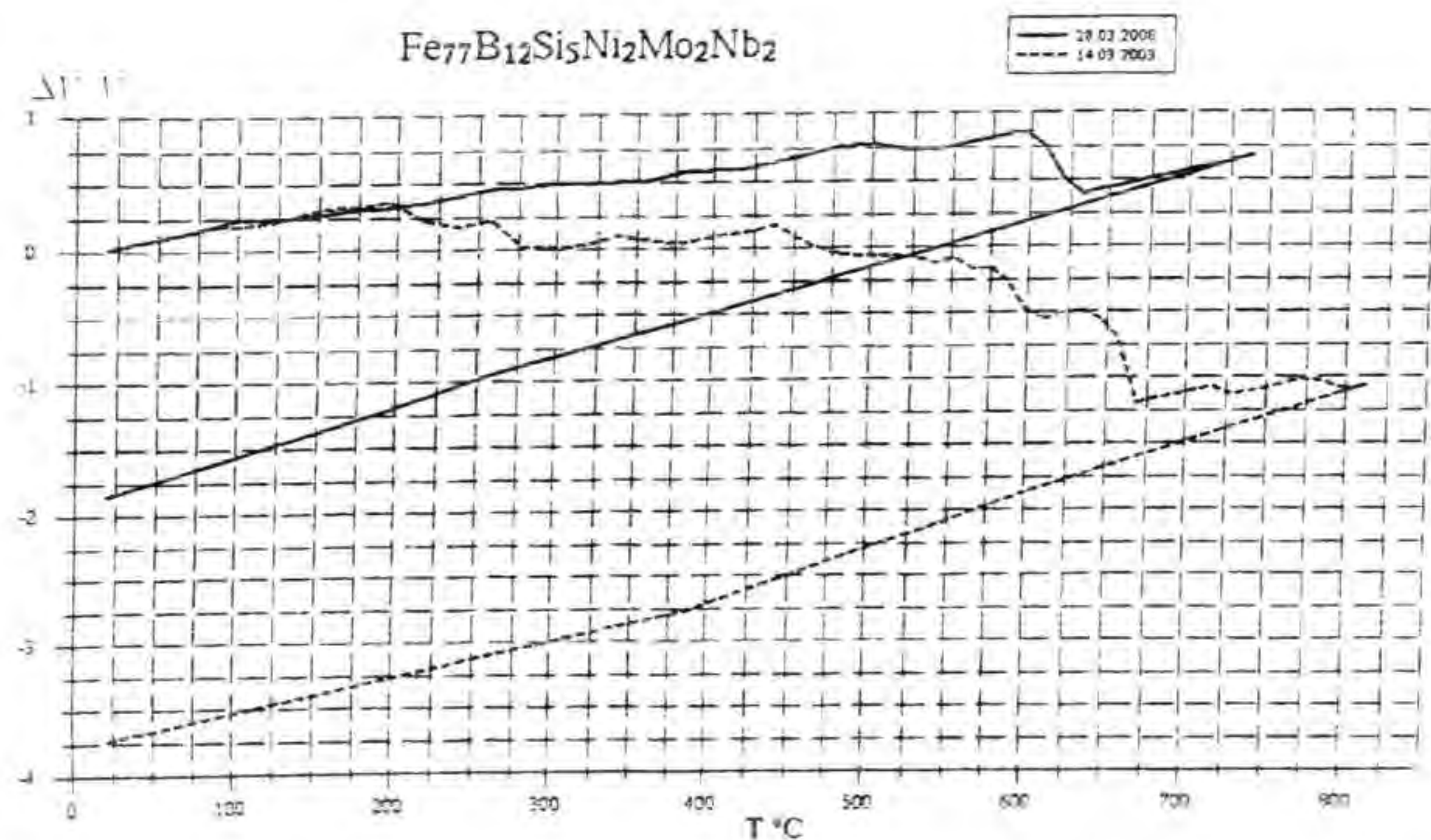


Рис.1 Температурна залежність відносної зміни об'єму аморфного сплаву $\text{Fe}_{77}\text{B}_{12}\text{Si}_5\text{Ni}_2\text{Mo}_2\text{Nb}_2$ при неперервному нагріванні і охолодженні: порівняння температури кристалізації зразка до та після тривалої (6 років) витримки при кімнатній температурі

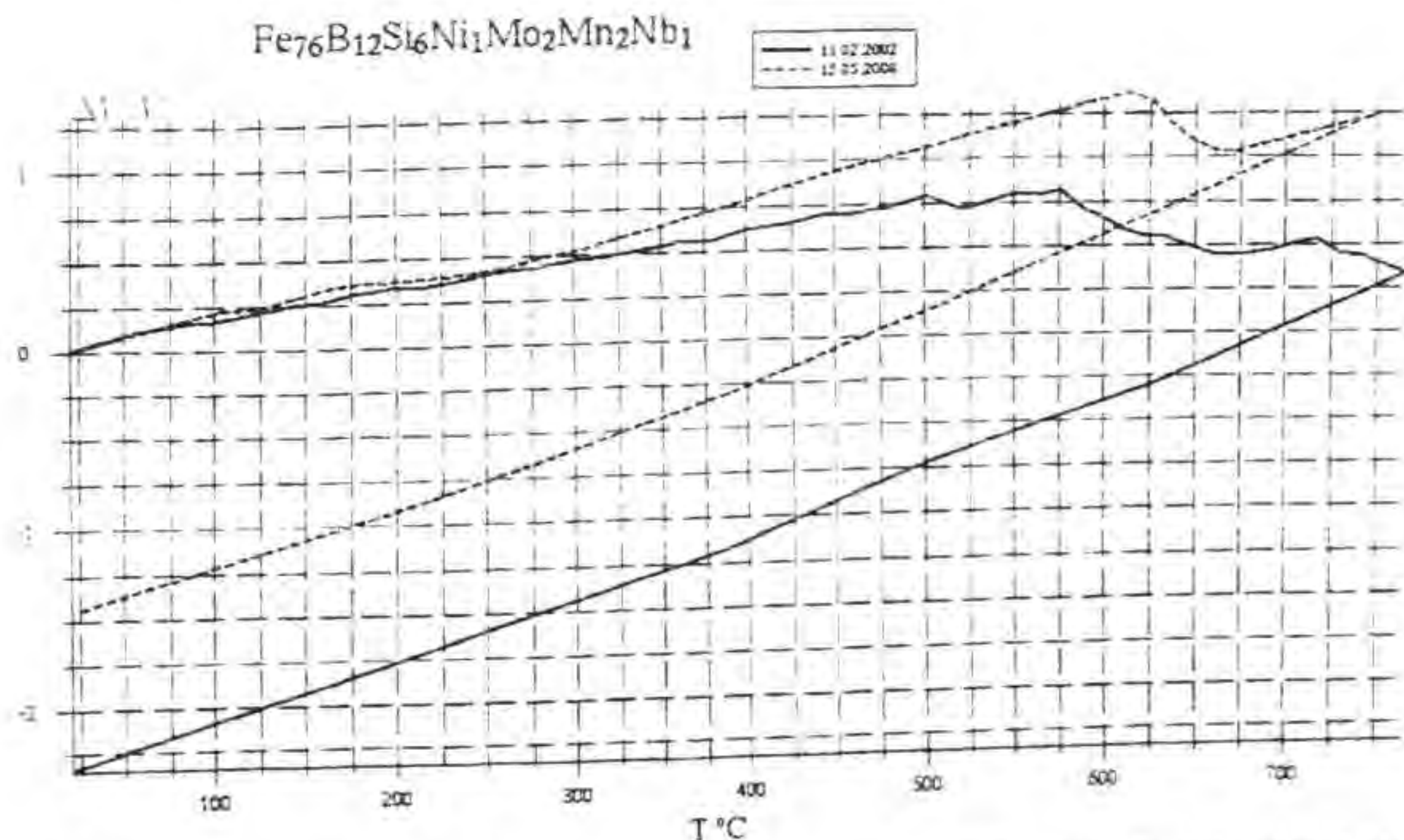


Рис.2 Температурна залежність відносної зміни об'єму аморфного сплаву $\text{Fe}_{76}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Mo}_2\text{Mn}_2\text{Nb}_1$ при неперервному нагріванні і охолодженні: порівняння температури кристалізації зразка до та після тривалої (6 років) витримки при кімнатній температурі

Для сплаву $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Nb}_1\text{Mn}_2$ (рис.3) отримано аналогічні результати: для нього зафіксовано зменшення температури повної кристалізації на 23°C після витримки на протязі 7 років при кімнатній температурі. Зменшення температури повної кристалізації свідчить про зниження термічної стабільності досліджених аморфних сплавів.

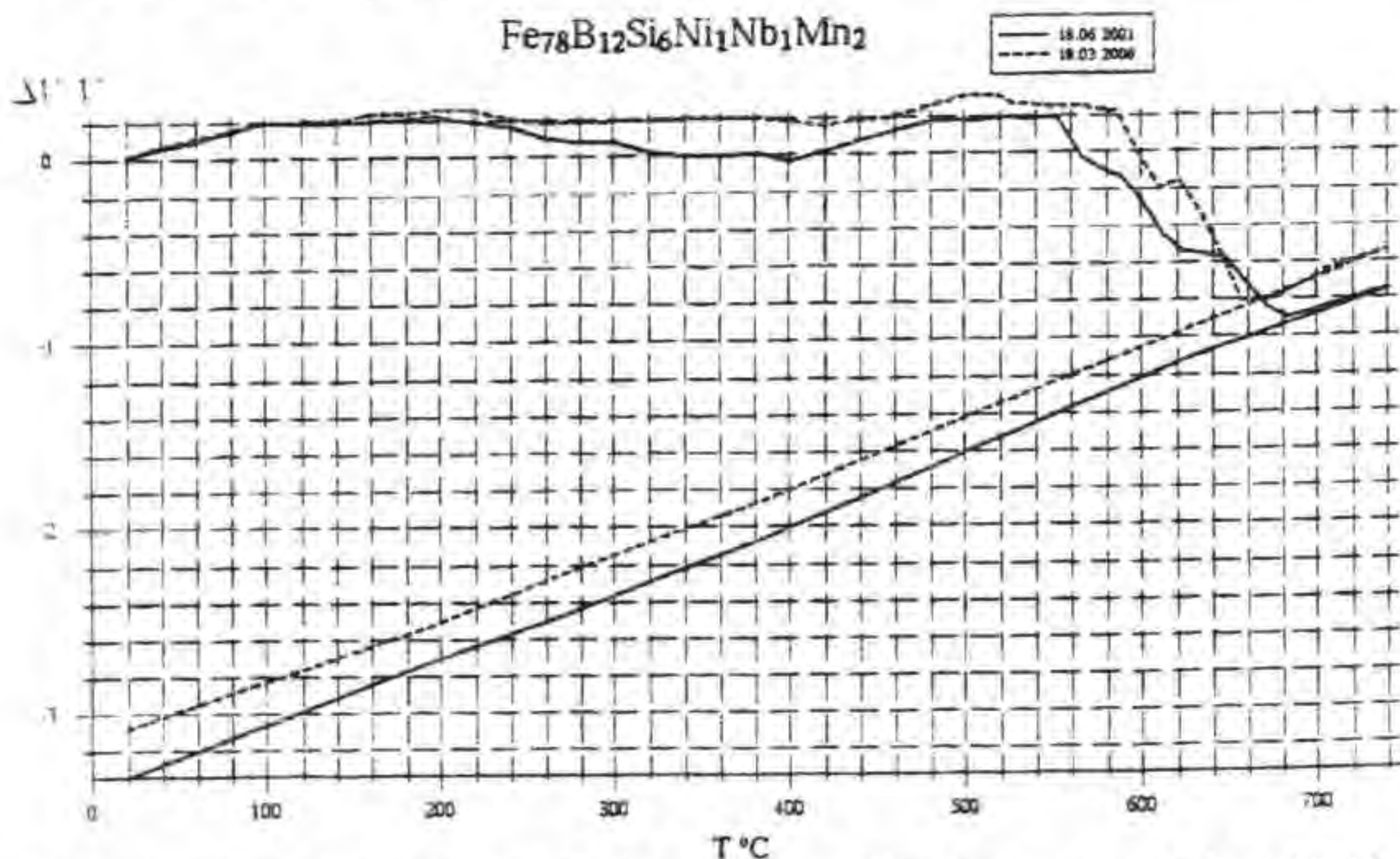


Рис.3 Температурна залежність відносної зміни об'єму аморфного сплаву $\text{Fe}_{78}\text{B}_{12}\text{Si}_6\text{Ni}_1\text{Nb}_1\text{Mn}_2$ при неперервному нагріванні і охолодженні: порівняння температури кристалізації зразка до та після тривалої (7 років) витримки при кімнатній температурі.

Висновки

Таким чином, проведені дослідження дозволяють зробити висновок про те, що тривала витримка багатокомпонентних аморфних сплавів при нормальних зовнішніх умовах призводить до зниження термічної стабільності аморфних сплавів. Це є наслідком значної перебудови структури аморфних сплавів, яка полягає в розшаруванні аморфної матриці, збільшенню середніх розмірів «вморожених» центрів кристалізації, що і призводить до зменшення термічної стабільності аморфних сплавів. Отже, результати експериментальних досліджень підтверджують висновки теорії термодинамічної стабільності аморфних сплавів, яка показує можливість зсуву фазової рівноваги в системі аморфна матриця-«вморожені» центри кристалізації за рахунок спрямованої зміни зовнішніх впливів та визначають способи розширення температурного інтервалу існування аморфного стану сплавів.

Список використаних джерел

1. Харьков Е.И., Лысов В.И. Термодинамическая теория высокотемпературной устойчивости аморфных сплавов // Расплавы, 1987, 1, вып.1, с.30.
2. Kharkov E.I., Lysov V.I., Tsaregralskaya T.L., Rudenko A.G., Turkov O.V. The thermal and plastic processing of some amorphous alloys.- Metalurgija, 1999, 38, 4.- P. 237-240.
3. Kharkov E.I., Lysov V.I., Tsaregralskaya T.L., Turkov O.V. The Regulaties of Crystallization of some Amorphous Alloys.- Metalurgija, 2000, 39, 1.- P. 29-32.
4. А.П. Шнак, В.І. Лисов, Ю.А. Куницький, Т.Л. Цареградська. «Кристалізація і аморфізація металевих систем» – К.: Академперіодика 2002. 208с.

Надійшла до редколегії 23.10.08

УДК 532.74

Погорелов В.С., проф., д.ф.-м.н.,
Дорошенко І.Ю., к.ф.-м.н., Чернотевська Є.А.

Прояв нанорозмірних особливостей структури рідких пропанолу та бутанолу в спектрах комбінаційного розсіяння

Зареєстровані спектри комбінаційного розсіяння рідких пропанолу та бутанолу, які належать до класу моногідричних спиртів. За допомогою програми Gaussian 03 виконано квантово-хімічні розрахунки просторової будови та количастих спектрів різних кластерів пропанолу та бутанолу. Порівняння експериментальних спектрів та спектрів, отриманих за допомогою комп'ютерного моделювання дозволило зробити висновки про молекулярну структуру досліджуваних рідких спиртів.

Ключові слова: пропанол, бутанол, кластери, комбінаційне розсіяння.

*E-mail: pogorelov@univ.kiev.ua

Актуальність даної роботи обумовлена зростанням інтересу до з'ясування надмолекулярної структури частково впорядкованих рідин, про що свідчить велика кількість публікацій, присвячених цій темі [1–6].

Сьогодні існує нагальна необхідність з'ясування структурних особливостей рідких спиртів, зокрема, досліджуваних нами пропанолу та бутанолу. Це зумовлено, з одного боку, відсутністю самоузгодженої теорії рідкого стану речовин, а з іншого – широким практичним застосуванням рідин з міжмолекулярним водневим зв'язком. Отримання нової інформації про структуру спиртів має практичне значення для промисловості, де ці спирти використовуються як сировина при виробництві багатьох речовин, зокрема полімерів, а також для біології та медицини, оскільки існування кластерів в біологічному середовищі вносить значні корективи в перебіг біологічних та фізіологічних процесів. Крім цього, результати, отримані при дослідженні цих речовин, можуть виявитись корисними для фундаментальної науки взагалі.

Експеримент

Раманівські спектри було отримано за допомогою вимірювального спектрального комплексу, побудованого на базі спектрометра ДФС-24. В ході експерименту були отримані

V. Ye. Pogorelov*, Prof., I. Yu. Doroshenko, PhD,
Ye. A. Chernotevska.

The development of nano-sized structure peculiarities of liquid propanol and butanol in Raman spectra

Raman spectra of liquid propanol and butanol, which belong to the class of monohydric alcohols were registered. Quantum-chemical calculations of the space structure and vibrational spectra of different propanol and butanol clusters were made using the program Gaussian 03. The comparison of the experimental spectra with the spectra obtained from the computer simulation allowed making the conclusions about the structure of the investigated liquids.

Key Words: propanol, butanol, clusters, Raman spectra.

поляризовані спектри розсіяння пропанолу і бутанолу. В експерименті використовувався аргонний лазер, довжина хвилі збуджуючого випромінювання становила 488 нм, потужність випромінювання – 100 мВт. Спектральна ширина щілин спектрометра не перевищувала 2.4 см⁻¹.

Спектри КР пропанолу та їх обробка

На рис. 1 та 2 зображено, відповідно, експериментально зареєстровані спектри ізотропного та анізотропного комбінаційного розсіяння рідкого пропанолу в областях 800-930 см⁻¹ та 2800-3000 см⁻¹.

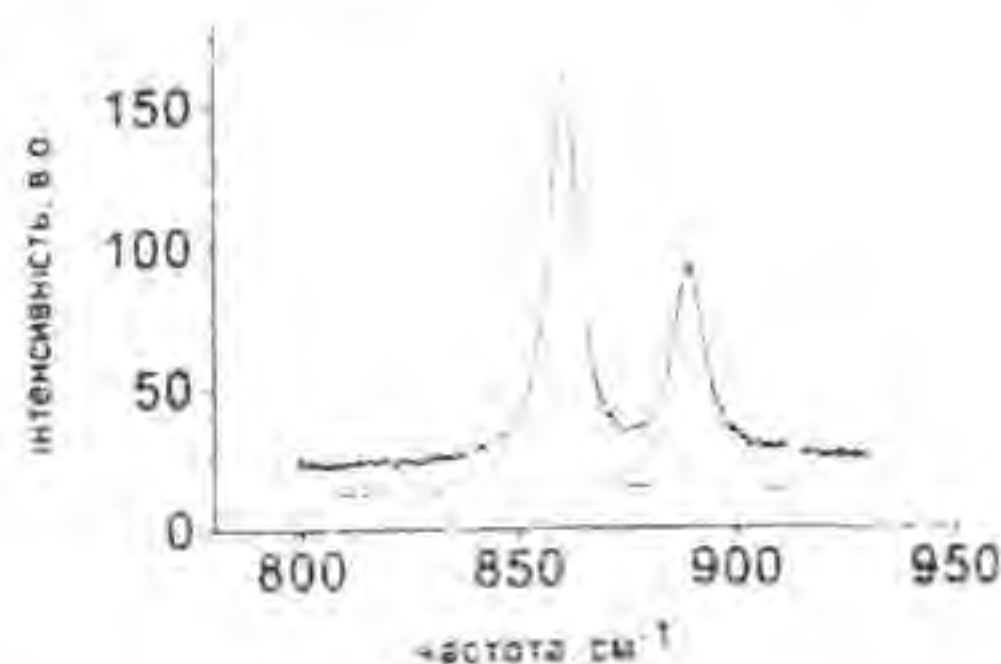


Рис. 1 Спектри комбінаційного розсіяння пропанолу в області 800-930 см⁻¹

Представлено: Представлено:
д.ф.-м.н., проф. Адаменко І.І.

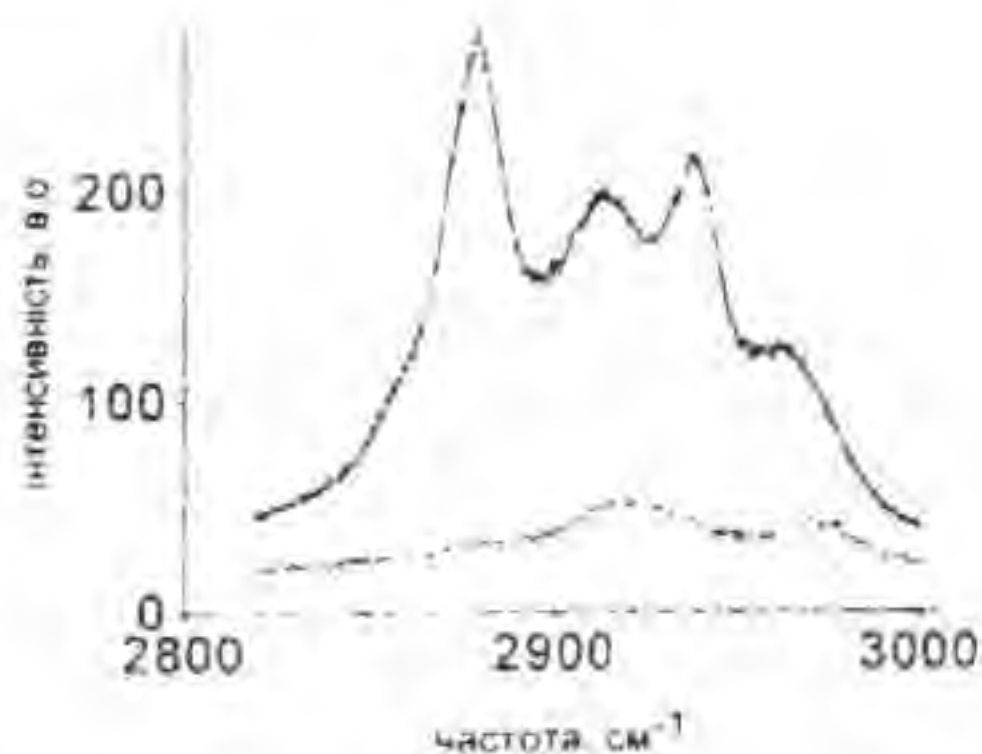


Рис. 2 Спектри комбінаційного розсіяння пропанолу в області 2800-3000 cm^{-1}

Помічено, що в зареєстрованих експериментальних спектрах комбінаційного розсіяння рідкого пропанолу відсутні коливальні смуги, що відповідають коливанням вільної OH групи. Ця обставина свідчить про утворення міжмолекулярних водневих зв'язків в рідкому пропанолі, які обумовлені водневими зв'язками між окремими молекулами.

Підтвердженням такої інтерпретації є і той факт, що в експериментальних спектрах пропанолу смуги коливань з частотами близькими до 3000 cm^{-1} , що відповідають коливанням груп CH_3 та CH_2 , є розщепленими. Цікаво, що таке розщеплення не фіксується в модельних спектрах, де не приймається до уваги утворення молекулярних Н-зв'язаних асоціатів.

Спектри КР бутанолу та їх обробка

На рис. 3 та 4 зображено, відповідно, експериментально зареєстровані спектри ізотропного та анізотропного комбінаційного розсіяння рідкого бутанолу в областях 730-930 cm^{-1} та 2800-3000 cm^{-1} .

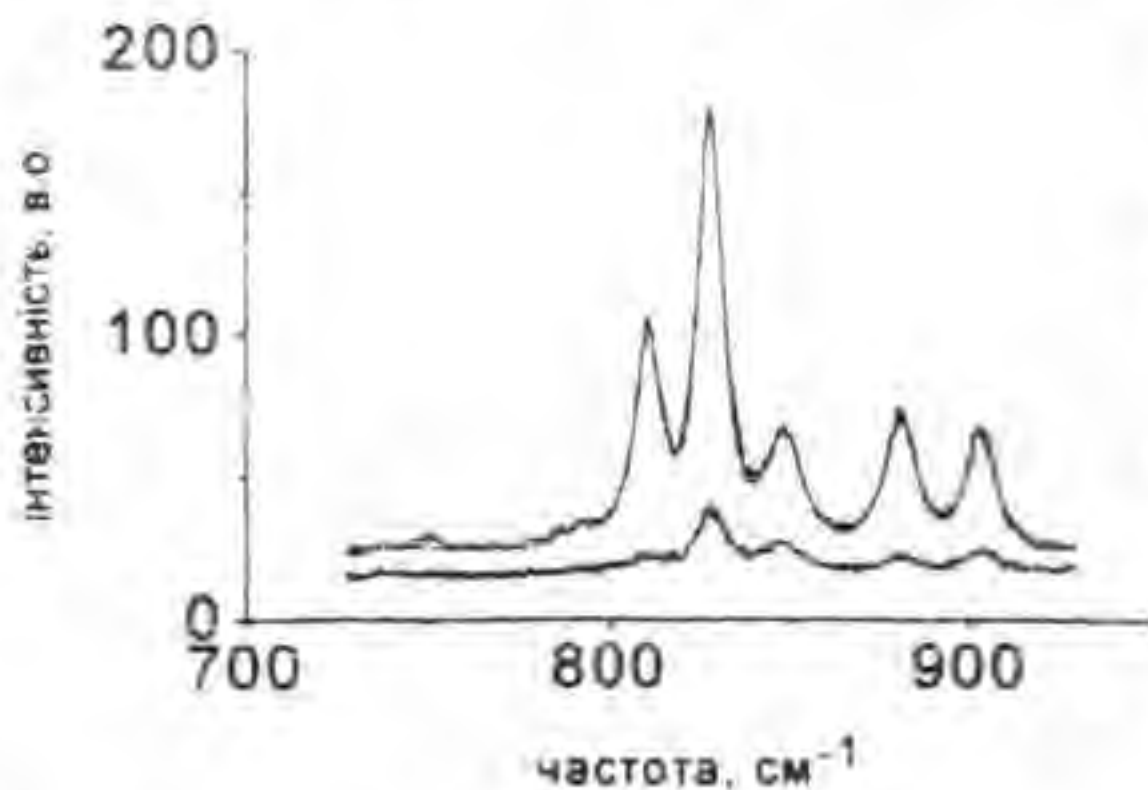


Рис. 3 Спектри комбінаційного розсіяння бутанолу в області 730-930 cm^{-1}

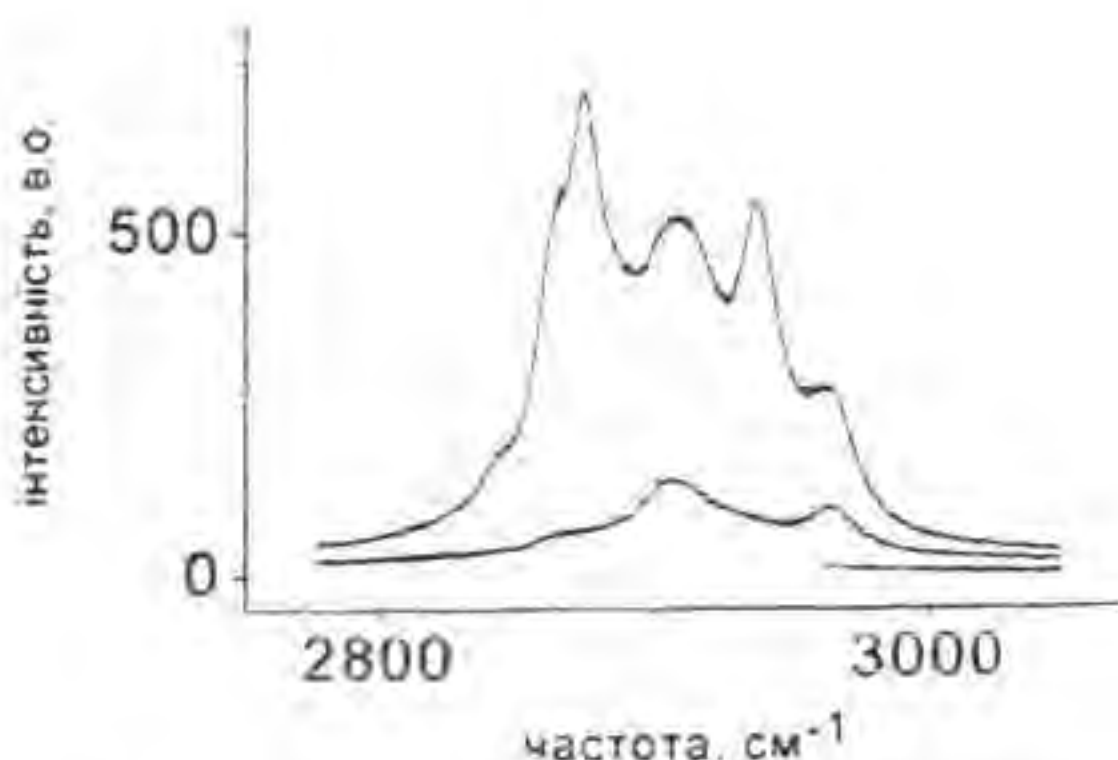


Рис. 4 Спектри комбінаційного розсіяння бутанолу в області 2800-3000 cm^{-1}

З отриманих шляхом деконволюції коливальних смуг було розраховано кореляційні функції коливальної та орієнтаційної релаксації, а з них було отримано значення часів релаксації. Ці значення для різних коливальних смуг пропанолу та бутанолу становлять близько 1 пс.

Отримані значення часів релаксації корелюють з часом дисоціації водневого зв'язку [3], виміряним за допомогою метода ультрашвидкої інфрачервоної спектроскопії. Отже, розширення коливальних смуг в спектрі рідких спиртів можна пояснити скінченням часом життя водневих зв'язків, що утворюють кластерну сітку.

Комп'ютерне моделювання

Отримані експериментальним шляхом спектри комбінаційного розсіяння порівнювались з теоретично розрахованими. Звичайно, ми не можемо безпосередньо порівнювати результати комп'ютерного моделювання та експериментальні дані, оскільки при розрахунках ігнорується багато важливих факторів. Але моделювання дає змогу передбачувати молекулярну структуру асоційованих рідин.

Для квантово-хімічних розрахунків методом теорії функціоналу густини використовувалась програма Gaussian 03. Ми обрали потенціал B3LYP та набір базисних функцій 6-31G(d,p).

Після оптимізації геометрії кластерних комплексів виконувались обрахунки енергій (кластера в цілому та енергії дисоціації на один водневий зв'язок). Геометрія кластера (з усіх можливих конформерів) вибиралася такою, щоб значення дипольного моменту системи було мінімальним. Розраховувались значення енергій для окремих молекул та для кластерів, що складаються з двох, трьох, чотирьох та п'яти молекул пропанолу і бутанолу. Розрахунки

показують, що енергія водневого зв'язку (в перерахунку на один зв'язок) зростає із збільшенням розміру кластера і досягає значення 10 ккал/моль для кластерів, що складаються з п'яти – шести молекул. Це значення виявилось однаковим і для пропанолу, і для бутанолу. Більше того, воно залишається практично незмінним і для інших спиртів, тобто молекулярна структура рідких спиртів повністю визначається кількістю водневих зв'язків у них і не залежить від форми остову молекули.

Квантово-хімічні розрахунки показують, що стійкими є кластери лише циклічної форми цей факт повністю узгоджується з експериментальними даними – відсутністю в коливальних спектрах смуг, що відповідають коливанням незв'язаної гідроксильної групи. Для дослідження процесу міжмолекулярної взаємодії було обрано довжини внутрішньо-молекулярних зв'язків C–O, O–H та міжмолекулярних зв'язків O–O та O–H. Розрахунки показують, що довжини внутрішньо-молекулярних зв'язків практично не залежать від кількості молекул в кластері а довжини міжмолекулярних водневих зв'язків зменшуються із збільшенням розмірів кластеру. Це корелює з фактом зміцнення водневого зв'язку із збільшенням кількості молекул, що формують кластер.

Також було розраховано коливальні спектри рідкого пропанолу і бутанолу. При співставленні цих модельних та експериментальних спектрів було помічено добре співпадіння частот коливань, що свідчить про адекватність покладених в основу моделювання квантово-хімічних алгоритмів.

Висновки

Зареєстровано спектри комбінаційного розсіяння рідких пропанолу та бутанолу. Помічено, що в зареєстрованих спектрах відсутні коливальні смуги, що відповідають коливанням вільної гідроксильної групи. Ця обставина свідчить про утворення міжмолекулярних водневих зв'язків в рідких спиртах, які обумовлені водневими зв'язками між окремими молекулами.

В результаті експериментального дослідження коливальних спектрів рідких пропанолу та бутанолу було визначено часи колиальної релаксації в цих асоційованих рідинах. Отримані значення часів релаксації корелюють з часом дисоціації водневого зв'язку [3], виміряним за допомогою метода ультрашвидкої інфрачервоної

спектроскопії. Отже, розширення коливальних смуг в спектрі рідких спиртів можна пояснити скінченним часом життя водневих зв'язків, що утворюють кластерну сітку.

Моделювались спектри ізольованих молекул пропанолу і бутанолу. При співставленні цих модельних та експериментальних спектрів було помічено добре співпадіння частот коливань, що свідчить про адекватність покладених в основу моделювання квантово-хімічних алгоритмів.

Підтвердженням існування кластерів, що складаються з трьох-чотирьох молекул спиртів, є і той факт, що в експериментальних спектрах смуги відповідних коливань з частотами близькими до 3000 см^{-1} , є розщепленими. Таке розщеплення не фіксується в модельних спектрах, де не приймається до уваги утворення молекулярних H-зв'язаних асоціатів.

Робота підтримана грантом МОН України.

Список використаних джерел

1. Huisken F., Slemmer M. Infrared spectroscopy of methanol clusters adsorbed on large Ar_n host clusters // *J.Chem.Phys.* – 1998. – **98**, N 10. – P.7680-7691.
2. Buck U., Huisken F. Infrared spectroscopy of size-selected water and methanol clusters // *Chem.Rev.* – 2000. – **V.100**, N 11. – P.3863-3890.
3. Laenen R., Gale G.M., Lascoux N. IR spectroscopy of hydrogen-bonded methanol: vibrational and structural relaxation on the femtosecond time scale. // *J.Phys.Chem. A.* – 1999. – **V.103**, N 50. – P.10708-10712.
4. Goffney K.J., Davis P.H., Piletic I.R., Levinger N.E., Fayer M.D. Hydrogen bond dissociation and reformation in methanol oligomers following hydroxyl stretch relaxation // *J.Phys.Chem. A.* – 2002. – **V.106**, N 50. – P.12012-12023.
5. I.Doroshenko, O.Lizengevych, V.Pogorelov, L.Savransky. Associates of methanol molecules: quantum-chemical calculations and vibrational spectra // *Ukr.J.Phys.* – 2004. – **49**. – P. 540-544.
6. Handgraaf J.-W., van Erp T.S., Meijer E.J. Ab initio molecular dynamics study of liquid methanol // *Chem.Phys.Lett.* – 2003. – **367**. – P.617-628.

Надійшла до редколегії

УДК 534.28

Хлопов* А.М., асп.,
Руденко О.П., д. ф.-м. н., проф.

Дослідження пружних властивостей фенілтрифторметилсульфіду вздовж кривої рівноваги

Досліджена швидкість поширення звуку і густина фенілтрифторметилсульфіду в інтервалі температур від 293 К до 363 К вздовж кривої рівноваги. Розраховано температурну залежність модуля пружності і теплоту пароутворення. Показано зменшення енергії міжмолекулярної взаємодії в фенілтрифторметилсульфіді в порівнянні з фенілметилсульфідом.

Ключові слова: пружні властивості, фенілтрифторметилсульфід, крива рівноваги, теплота пароутворення.

*E-mail: khlopov2007@rambler.ru

Метою даної роботи є з'ясування впливу заміни атомів водню на атоми фтору і введення атомів кисню в сульфідну групу фенілметилсульфіду на пружні властивості. Для цього було проведено вимірювання густини ρ і швидкості поширення звуку c в фенілтрифторметилсульфіді і фенілметилсульфіді в інтервалі температур від 293 К до 363 К вздовж кривої рівноваги. Особливий інтерес представляє вивчення взаємозв'язку термодинамічних властивостей рідин на лінії насичення, де вони є функцією всього однієї незалежної змінної – температури. Густина вимірювали пікнометричним методом з похибкою 0,05 %. Швидкість поширення звуку вимірювали на частоті 15 МГц імпульсно-фазовим методом з похибкою $\sim 0,1$ % [1].

A.M. Khlopov*, PhD stud.,
O.P. Rudenko, Dr. Sci., Prof.

Investigations of elastic properties of phenylthreelfluorinemethylsulfide along the curved equilibrium

This article deals with investigating the speed of spreading sound and density of phenylthreelfluorinemethylsulfide within the interval of temperatures from 293 to 360 K along the curved equilibrium. Temperature dependence of the module of resiliency and warmth of vaporization is estimated. Diminishing energy of intermolecular cooperation in phenylthreelfluorinemethylsulfide in comparison with phenylmethylsulfide is shown.

Key words: elastic properties, phenylthreelfluorinemethylsulfide, curved equilibrium, warmth of vaporization.

Фторорганічні сполуки знаходять широке використання, а саме: для синтезу пестицидів, лікарських препаратів, фарбників, мономерів для отримання полімерних матеріалів.

Отримані експериментальні дані приведено в таблиці 1. Використовуючи значення густини ρ і швидкості поширення звуку c , ми розрахували модулі пружності за формулою $K = \rho \cdot c^2$. Значення K наведено в таблиці 1.

Аналіз результатів [2, 3] показав, що швидкість поширення звуку, густина залежать від заміни атомів водню атомами фтору та від температури.

Отримані в результаті вимірювання та розрахунків дані (таблиця 1) свідчать про те, що

Таблиця 1.

T , К	ρ , кг·м ⁻³	c , м·с ⁻¹	$K \cdot 10^{-7}$, Н·м ⁻²	T , К	ρ , кг·м ⁻³	c , м·с ⁻¹	$K \cdot 10^{-7}$, Н·м ⁻²
Фенілтрифторметилсульфід (C ₆ H ₅ SCF ₃)				Фенілметилсульфід (C ₆ H ₅ SCH ₃)			
293	1263,2	1030	134,0	293	1058,0	1499	237,7
303	1249,5	997	124,2	303	1048,8	1461	223,8
313	1235,9	966	115,3	313	1039,5	1423	210,5
323	1222,2	936	107,0	323	1030,2	1385	197,6
333	1208,6	904	98,8	333	1020,9	1348	185,5
343	1194,9	874	91,3	343	1011,6	1310	173,6
353	1181,3	843	83,9	353	1001,2	1270	162,5
363	1167,5	816	77,7	363	992,5	1235	151,3

характер температурних залежностей ρ , ϵ і K для фторованих та нефторованих рідин однаковий і приведені на рис. 1, 2, 3.

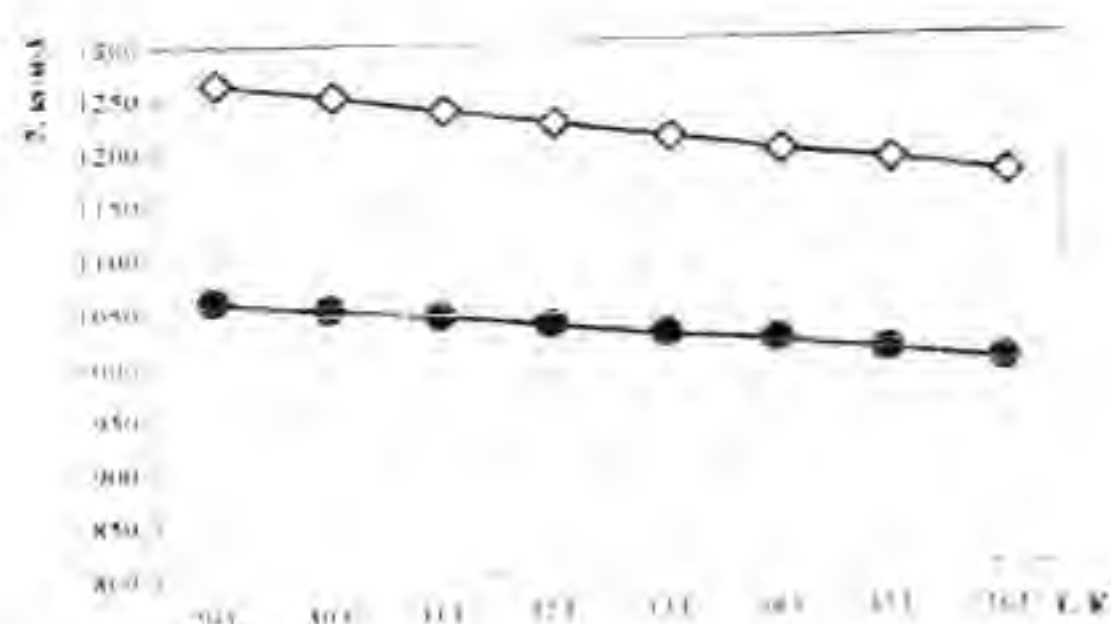


Рис. 1. Температурна залежність густини
—◇— фенілтрифторметилсульфіду $C_6H_5SCF_3$,
—●— фенілметилсульфіду $C_6H_5SCH_3$.



Рис. 2. Температурна залежність модуля пружності

—◇— фенілтрифторметилсульфіду $C_6H_5SCF_3$,
—●— фенілметилсульфіду $C_6H_5SCH_3$.

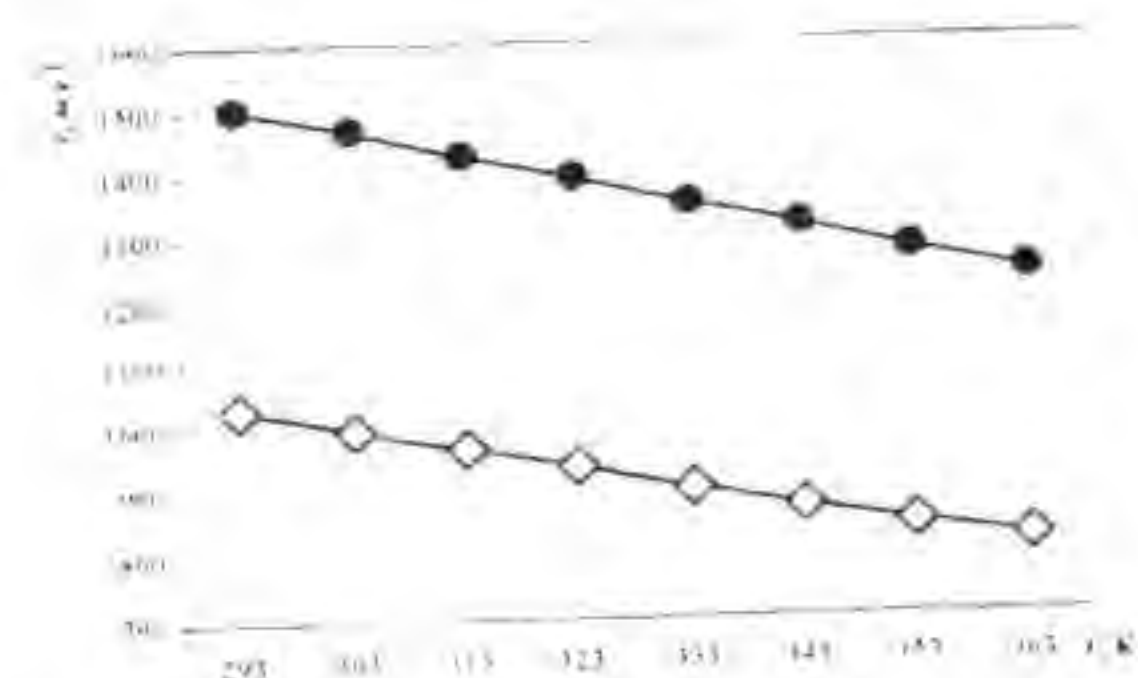


Рис. 3. Температурна залежність швидкості звуку
—◇— фенілтрифторметилсульфіду $C_6H_5SCF_3$,
—●— фенілметилсульфіду $C_6H_5SCH_3$.

Для підтвердження того, що енергія міжмолекулярної взаємодії менша в фенілтрифторметилсульфіді, ніж у фенілметилсульфіді, нами проведено розрахунки значень теплоти пароутворення при нормальній

температурі кипіння ΔH_f . Значення ΔH_f ми визначили за правилом Трутона при температурі кипіння [7]. Для фенілметилсульфіду воно дорівнювало 40,6 кДж/моль, а для фенілтрифторметилсульфіду – 37,3 кДж/моль.

На основі проведених досліджень і співставлення експериментально отриманих даних з ρ і ϵ та розрахованих значень K і ΔH_f для фенілтрифторметилсульфіду і фенілметилсульфіду можна робити висновок про те, що заміна атомів водню на атоми фтору приводить до збільшення густини і зменшення швидкості поширення звуку, модуля пружності та енергії міжмолекулярної взаємодії.

Список використаних джерел

1. Гаркуша Л.Н., Сперкач В.С., Чолпан П.Ф. Экспериментальные методы определения упругих свойств жидкостей акустическим методом / Методические рекомендации для студентов физических специальностей вузов. – К.: УМК при Минвузе Украины, 1989. – 82 с.
2. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. – М.: Наука, 1964. – 516 с.
3. Неручев Ю.А., Золотников М.Ф., Зотов В.В. Исследования скорости ультразвука в органических жидкостях на линии насыщения // Теплофизика высоких температур. – 2005 – Т. 43, – № 2. – С. 274-316.
4. Ягупольский Л.М. Ароматические и гетероциклические соединения с фторсодержащими заместителями. – К.: Наукова думка. – 1988. – 316 с.
5. Голик А.З. О связи сжимаемости и сдвиговой вязкости со структурой вещества в жидком состоянии / Укр. физич. журнал. – 1962, – Т. 7, – № 8. – С. 806-812.
6. Руренко А.П., Сперкач В.С., Заливчий В.Н. Применение ультразвука к исследованию вещества. – М.: ВЗМИ. – 1982. – С. 15-19.
7. Столяров Е.А., Орлова Н.Г. Расчет физико-химических свойств жидкостей. – Л.: Химия, 1976. – 111 с.

Надійшла до редколегії 12.09.08

Підп. до друку 20.11.2008 р.
Формат 70x100^{1/16}.
Ум. друк. арк. 21,45. Наклад 350.
Зам. 395.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

