



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

2008

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13372JB

45-ий рік видання та друку 2008

ВИПУСК №2 2008

Вісник Київського університету, випуск №2, 2008

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки".

У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики. Для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів.

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Редакційна колегія:

- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- **Хусаїнов Денис Ях'євич**, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор;
- **Анісімов Ігор Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Буй Дмитро Борисович**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- **Булавін Леонід Анатолійович**, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Гаращенко Федір Георгійович**, доктор технічних наук, професор;
- **Данилов Вадим Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Макара Володимир Арсенійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Мелешко В'ячеслав Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Перестюк Микола Олексійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Скришевський Валерій Антонович**, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- **Анісімова Тетяна Харитонівна**, **відповідальний секретар**;
- **Безущак Оксана Омелянівна**, bezusch@univ.kiev.ua;
- **Мороз Костянтин Олександрович**, morozko@univ.kiev.ua;
- **Родіонова Тетяна Василівна**, rodtv@univ.kiev.ua;
- **Хмельок Надія Кузьмівна**, khmeluk@univ.kiev.ua;
- **Шипацька Олена Володимирівна**, **технічний редактор**, shyshatskaja@unicyb.kiev.ua.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142-40-2

З М І С Т

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Верьовкіна Г.В., Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення одного класу випадкових процесів	7
Коновенко Н.Г. Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на афінній прямій	9
Лукова Н.В., Пришляк О.О. Пошарова еквівалентність функцій Морса на тривимірних многовидах	16
Лучко В.М. Задача Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку	19
Сливка-Тилишак Г.І., Вереш К.Й. Умови існування узагальненого розв'язку задачі про коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами	26
Сугакова О.В. Асимптотика порогового класифікатора, побудованого на основі "сумарного індексу"	31
Шрамко О.С., Ямненко Р.Є. Про одне застосування узагальненого ϕ -субгауссового дробового броунівського руху	40

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Гріник Ю.М. Абсолютно неперервний спектр одного класу сингулярних матричних диференціальних операторів	47
Данілов В.Я., Могильова В.В., Ткачук А.М. Про усереднення систем різницевих рівнянь на осі	49
Лебедева І.В., Вашіліна О.В., Заєць Ю.О. Перетворення фронтів розривних хвиль у неоднорідних трансверсально-ізотропних середовищах	54

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Григор'єва Л.В. Динамічна модель вільного тіла в центральних або нецентральних фізичних полях та її Maple-аналіз	61
Верейкіна М.Б., Хусаїнов Д.Я. Зображення розв'язків одного класу крайових задач для систем рівнянь з частинними похідними другого порядку із запізнюванням	67
Вишневський О.А., Давидов О.С. Визначення середнього навантаження та тиску на поверхню тертя – основа моделювання процесу випробовування матеріалів на абразивну зносостійкість	73
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву	77
Івохін Є.В., Косинський К.О. Про підхід до реалізації нечітких баз даних	83
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Рутицька В.В. Математична задача про керування водними ресурсами екосистеми	88
Лебедев Є. О., Пономарьов В.Д. Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог	91
Лялецький О.О. Про типи неперервності функцій та їх властивості відносно частково упорядкованих множин	98
Машенко С.О. Індивідуально-оптимальні рівноваги в некооперативних опуклих іграх	105
Москальков М.М., Утебаєв Д., Завіша В.В. Дослідження збіжності методу скінченних елементів для рівняння із сильною дисперсією в слабкій метриці	111
Процик П.П. Композиційно-номінативний підхід до побудови семантики мови специфікацій Z-Notation	116
Рубльов Б.В., Галковський Т.О. Обчислення інваріантної сигнатури багатокутника	121
Фломбойм О.В., Черній Д.І. Обчислювальні особливості моделювання струменевих ефектів та	124

вихрових структур	
Швець Д.В. Про задачу двох тіл з магнітною взаємодією та інструментарій для її чисельного аналізу	130
Ямборак В.В., Касьянюк В.С. Інструментарій для моделювання біологічних нейронних мереж. Експериментування з моделлю нюховою цибулини	135
Яременко Д.О., Рубльов Б.В., Шаманська В.Б. Алгоритм обчислення метрики дотичних	141

РАДІОФІЗИКА

Ананьїна О. Ю., Бутрімов П. О., Ткаченко А. В., Бабко С. В. Адсорбція атомів фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$	147
Білоусов І.В., Кузнєцов Г.В., Циганова Г.І. Метод виявлення структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі кремнію	152
Іванісік А.І., Конопатський А.В. Залежність ефективності генерації стоксової компоненти вимушеного комбінаційного розсіяння від поглинання та спектрального складу випромінювання накачування	155
Ільченко О.О., Обухівський В.В. Вплив модульованого магнітного поля на структуроутворення у слабких розчинах	159
Коротков П.А., Фелінський Г.С. Дослідження області від'ємної діелектричної проникності середовищ без центру інверсії	162
Мисник А.В., Кононов М.В. Прогнозування втрат пакетів у телекомунікаційних каналах за флуктуацією затримки для різних методів регулювання трафіку	172
Находкін М.Г., Куліш М.П., Родіонова Т.В. Фасетування границь зерен в полікремнієвих плівках	176
Сохацький В.П., Шулімов Ю.Г. Магнітна взаємодія в шаруватих феромагнітних тонкоплівкових структурах	181

СУЧАСНА ФІЗИКА

Адаменко І.І., Єрмоленко І.С., Королович В.Ф., Мороз К.О. Вплив тиску на теплофізичні властивості розчину полідисперсних вуглецевих нанотрубок у воді	189
Білокриницька Л.М., Гречко Л.Г., Покровський В.О., Снегір С.В. Підсилення локального поля поблизу еліпсоїдальних графітових наночастинок	193
Булавін Л. А., Шамайко Д. О., Алексєєв О.М., Перепелиця С. М. Час життя протиіонів натрію в іон-гідратному шарі молекули ДНК	198
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Деформація аморфних сплавів і наношаруватих композицій шліфуванням	204
Кравець В.Г., Поперенко Л.В., Манько Д.Ю. Посилення магнітомпедансного ефекту в нанокрісталічному сплаві $\text{Co}_{40}\text{Fe}_{5}\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$.	209
Паньків В.В. Смуги прозорості в пиловій магнітоактивній плазмі з феромагнітними гранулами	215
Погорелов В.Є., Жовтобрюх Ю.М., Березовчук Л.М. Спектр комбінаційного розсіяння 4-(н-октилокси)феніл-4'-(н-гексилокси)бензоат в кристалічній фазі	222
Селіщев П.О., Алексєєнко В.В. Флуктуації потоків точкових дефектів і їх вплив на повзучість матеріалу	225

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Ганна В.Верьовкіна, к.ф.-м.н., доцент,
Володимир Н.Нагорний, к.ф.-м.н., доцент

Інтерполяційні зображення одного класу випадкових процесів

Досліджуються інтерполяційні зображення певного класу випадкових процесів з нерівновіддаленими вузлами інтерполяції.

E-mail: avv@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Побудуємо інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів за нерівновіддаленими вузлами інтерполяції виду $n\frac{5\pi}{\alpha}, n\frac{5\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}, n \in Z$, причому в вузлах інтерполяції розглядатимемо значення процесу та його похідних до другого порядку включно. Сформулюємо необхідні, доведені нами, результати з теорії цілих функцій.

Лема. Нехай $f(z)$ - ціла, обмежена на дійсній вісі функція експоненціального типу з показником σ . Тоді для будь-якого $\alpha, \alpha > \sigma$ має місце зображення

$$\begin{aligned} f(z) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(t_n)}{\frac{\alpha}{5}(z-t_n)} \times \frac{1}{2\sin^2 \frac{\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{f'(t_n)}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_n)\right)^2} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5}\sin^2 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{f''(t_n)}{\frac{\alpha}{5}(z-t_n)} \times \frac{1}{2\left(\frac{\alpha}{5}\sin \frac{\pi}{5}\right)^2} + \\ & + \frac{f(t_n + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(z-t_n - \frac{\pi}{\alpha})\right)^2} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & \left. + \frac{f'(t_n + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(z-t_n - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5}\sin^3 \frac{\pi}{5}} \right) \times \end{aligned}$$

G.V.Verovkina, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor,
V.N.Nagorniy, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor

The interpolation representation one kinds of random processes

Paper deals with some interpolation representations of random processes with no equidistance knots interpolations.

$$\times \sin^3 \frac{\alpha}{5}(z-t_n) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(z-t_n - \frac{\pi}{\alpha}), \quad (1)$$

де $t_n = n\frac{5\pi}{\alpha}, n \in Z$, причому інтерполяційний ряд (1) збігається рівномірно в довільній обмеженій області комплексної площини.

При доведенні леми отримана оцінка залишку інтерполяційного ряду (1), яка має вигляд

$$|R_n(z)| \leq LG(z)C_f \frac{\alpha}{\alpha - \sigma} \frac{1}{n}, \quad (2)$$

де L - стала, $C_f = \sup_{t \in R} |f(t)|$,

$G(z) = \left| \sin^3 \frac{\alpha}{5} z \times \sin^2 \frac{\alpha}{5} (z - \frac{\pi}{\alpha}) \right|$ - функція обмежена в довільній обмеженій області комплексної площини.

Розглянемо випадковий процес $\xi(t), t \in R, M\xi(t) = 0$ і коваріаційною функцією вигляду

$$B(t, s) = \int_{\Lambda \times \Lambda} f(t, \lambda) \overline{f(s, \mu)} F(d\lambda, d\mu), \quad (3)$$

де Λ - деяка множина параметрів, $F(.,.)$ - комплексна функція множин, адитивна за двома аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < +\infty. \quad (4)$$

Відносно функції $f(t, \lambda)$ будемо припускати, що її можна доозначити в комплексній площині відносно t до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma(\lambda)$ таким чином, що

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t, \lambda)| = C_f < +\infty, \quad (5)$$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\lambda) = \sigma < +\infty. \quad (6)$$

Сформулюємо основну теорему.

Теорема. Нехай $\xi(t)$ – випадковий процес, що задовольняє умовам (1)-(3). Тоді для будь-якого α , $\alpha > \sigma$ з ймовірністю одиниця має місце формула

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\xi(t_n)}{\frac{\alpha}{5}(t-t_n)} \times \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{\xi'(t_n)}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_n) \right)^2} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{\xi''(t_n)}{\frac{\alpha}{5}(t-t_n)} \times \frac{1}{2 \left(\frac{\alpha}{5} \sin \frac{\pi}{5} \right)^2} + \\ & + \frac{\xi(t_n + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_n - \frac{\pi}{\alpha}) \right)^2} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & \left. + \frac{\xi'(t_n + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_n - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} \right) \times \\ & \times \sin^3 \frac{\alpha}{5}(t-t_n) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t-t_n - \frac{\pi}{\alpha}). \end{aligned} \quad (7)$$

де $t_n = n \frac{5\pi}{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Згідно з теоремою про спектральне зображення випадкових процесів [1], процес $\xi(t)$ подамо у вигляді

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad (8)$$

де $Z(d\lambda)$ – випадкова міра на Λ , така, що $MZ(A_1) \cdot \overline{Z(A_2)} = F(A_1, A_2)$. Для довільного натурального n розглянемо процес $\xi_n(t)$, який визначимо як часткову суму з номером n ряду (7). Використовуючи зображення вигляду (8) та лему, подамо $\xi_n(t)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \sum_{k=-n}^n \int_{\Lambda} \left(\frac{f(t_k)}{\frac{\alpha}{5}(t-t_k)} \times \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{5}} + \right. \\ & + \frac{f'(t_k)}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_k) \right)^2} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}} + \\ & + \frac{f''(t_k)}{\frac{\alpha}{5}(t-t_k)} \times \frac{1}{2 \left(\frac{\alpha}{5} \sin \frac{\pi}{5} \right)^2} + \\ & + \frac{f(t_k + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}(t-t_k - \frac{\pi}{\alpha}) \right)^2} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{5}} + \\ & \left. + \frac{f'(t_k + \frac{\pi}{\alpha})}{\frac{\alpha}{5}(t-t_k - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\frac{\alpha}{5} \sin^3 \frac{\pi}{5}} \right) \times \\ & \times \sin^3 \frac{\alpha}{5}(t-t_k) \sin^2 \frac{\alpha}{5}(t-t_k - \frac{\pi}{\alpha}) Z(d\lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді на підставі зображень (1), (8), (9) та оцінки (2) маємо

$$\begin{aligned} M|\xi(t) - \xi_n(t)|^2 & \leq \\ & \leq R_n^2(t) \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| = \\ & = L^2 G^2(t) C_f^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha - \sigma} \right)^2 \frac{1}{n^2} \times \\ & \times \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)|, \end{aligned} \quad (10)$$

із нерівності (10), враховуючи умову (4), отримаємо, що ряд (7) збігається до $\xi(t)$ в середньому квадратичному. Далі, враховуючи сепарабельність процесу $\xi(t)$ та збіжність ряду

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2$, отримаємо, що інтерполяційний ряд (7) збігається до $\xi(t)$ з ймовірністю одиниця в довільній обмеженій області зміни t .

Список використаних джерел

1. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций // Труды IV Всесоюз. мат. съезда, - Л., - Изд-во Ленинград. ун-та, -1963, -т. 1.-С. 132-148.

Надійшла до редколегії 10.02.2008 р.

УДК 519.9

Надія Г. Коновенко

Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на афінній прямій

У цій роботі ми описуємо одновимірні геометричні величини на афінній прямій і знаходимо алгебри диференціальних інваріантів. Ми знаходимо нормальні форми афінній алгебри Лі й класифікуємо геометричні об'єкти. Ми отримуємо результати інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і нові класи диференціальних рівнянь, які ми інтегруємо у квадратурах.

Ключові слова: диференціальні інваріанти, афінна пряма, алгебра.

E-mail: Konovenko@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.наук, професор Петравчук А.П.

1. Вступ

У цій роботі ми описуємо одновимірні геометричні величини на афінній прямій і знаходимо алгебри диференціальних інваріантів. Афінна геометрія прямої визначається групою Лі " $ax + b$ ", $a > 0$, або, у термінах алгебри Лі поданням 2-мірної розв'язної алгебри Лі A у векторних полях на прямій: $\langle \partial_x, z\partial_x \rangle$.

Геометричні величини на афінній прямій [1], [2] – це переріз розшарування $\pi: E \rightarrow R$, у яке піднята дія афінної групи (або алгебри) Лі A . Інваріанти цього підняття й визначають афінну геометрію, згідно Ерлангенської програми Ф. Клейна [4]. Ми специфікуємо цю задачу й вивчаємо диференціальні інваріанти підняття.

Із цієї метою ми описуємо всі підняття афінної алгебри Лі A в одновимірні розшарування (Теорема 1) [5]. Цей опис дозволяє нам класифікувати геометричні величини. Відзначимо, що лінійні геометричні величини в основному вичерпуються тензорами, але існують і нелінійні геометричні величини, закони перетворень яких наведені в Теоремі 4.

Ми наводимо також повний опис алгебр диференціальних інваріантів для одновимірних геометричних величин. Цей опис, окрім геометричного значення, має також важливі додатки в теорії диференціальних рівнянь.

Відзначимо, що афінна алгебра Лі A , це розв'язна 2-мірна алгебра, і тому, у силу теореми Лі-Біанкі, кожне звичайне диференціальне рівняння порядку ≤ 2 , що допускає цю алгебру

Nadiya G. Konovenko

Algebras of differential invariants for geometrical quantities on affine line

In this paper we describe 1-dimensional bundles of the affine line and find algebras of their differential invariants. We find normal forms of the affine Lie algebra actions and classify the geometrical quantities. We apply these results to integration of ordinary differential equations and new classes of differential equations which are integrable in quadratures.

Key Words: differential invariants, affine line, algebra.

як алгебра симетрій, може бути проінтегровано у квадратурах [8]. Наш опис алгебр диференціальних інваріантів, дозволяє записати рівняння з алгеброю симетрій A , як диференціальні рівняння відносно похідних Трессе (або інваріантного диференціювання), і тим самим розбити інтегрування початкового диференціального рівняння на покрокове інтегрування. Ми обговорюємо цей "пороковий" метод у п.4. Відзначимо, що в цьому методі ми використовуємо як класичні, точкові симетрії [9], [10], [6] так і нелокальні симетрії (симетрії типу перетворень Беквунда).

Декілька зауважень щодо позначень. Ми позначаємо через $\frac{d}{dx}$ оператор взяття повної похідної. Похідну Трессе [1], [11] ми позначаємо через $\frac{Df}{Dg}$, а через $X^{(n)}$ ми позначаємо продовження точкового векторного поля X в простір k -джетів $J^k(\pi)$.

2. Розшарування геометричних величин над афінною прямою

Для того, щоб описати одновимірні геометричні величини над афінною прямою ми розглядаємо розшарування

$\pi: R^2 \rightarrow R$, $\pi: (x, u) \rightarrow x$ разом з дією афінної алгебри, що накриває дію цієї алгебри на прямій. Інакше кажучи, ми шукаємо підняття векторних полів $X = \partial_x$ і $Y = x\partial_x$, що дають базис в алгебрі Лі A , до векторних полів на R^2 :

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \partial_x + A(x, u) \partial_u, \\ \bar{Y} &= x \partial_x + B(x, u) \partial_u,\end{aligned}$$

так щоб ці поля задавали подання афінної алгебри, тобто

$$[\bar{X}, \bar{Y}] - \bar{X} = 0.$$

Це співвідношення приводить до диференціального рівняння на функції $A(x, u)$ й $B(x, u)$

$$-A - xA_x - BA_u + B_x + AB_u = 0,$$

а підстановка $B(x, u) = b(x, u) + xA(x, u)$ приводить до рівняння:

$$-A_u b + b_x + Ab_u = 0 \quad (1)$$

Помітимо, що це рівняння має розв'язок $b \equiv 0$ при довільній функції $A(x, u)$. У випадку, коли $b \neq 0$, ми одержуємо

$$\left(\frac{A}{b}\right)_x + \left(\frac{1}{b}\right)_u = 0.$$

Розв'язок останнього рівняння (в однозв'язній області R^2) має вигляд:

$$\frac{A}{b} = -\phi_x, \quad \frac{1}{b} = \phi_u,$$

для деякої гладкої функції $\phi(x, u)$. Звідси

$$A = -\frac{\phi_x}{\phi_u}, \quad B = \frac{1}{\phi_u} - x \frac{\phi_x}{\phi_u}.$$

Підсумовуючи ці обчислення ми приходимо до наступного результату.

Теорема 1. *Одномірні геометричні величини на афінній прямій діляться на два класи, що відповідають наступним поданням алгебри $\mathfrak{A}$:*

Клас 1,

$$\bar{X} = \partial_x - \frac{\phi_x}{\phi_u} \partial_u,$$

$$\bar{Y} = x \partial_x - x \frac{\phi_x}{\phi_u} \partial_u.$$

Клас 2,

$$\bar{X} = \partial_x - \frac{\phi_x}{\phi_u} \partial_u,$$

$$\bar{Y} = x \partial_x + \left(\frac{1 - x\phi_x}{\phi_u}\right) \partial_u,$$

де $\phi(x, u)$ – довільна гладка функція, $\phi_u \neq 0$.

П р и к л а д 1. Коваріантним k -тензорам ($k > 0$) відповідає клас (2), де $\phi_u = -\frac{1}{k} \ln |u|$.

2. Функціям відповідає клас (1) з $\phi_x = 0$.

3. Контраваріантним k -тензорам ($k > 0$) відповідає клас (2), де $\phi_u = \frac{1}{k} \ln |u|$.

З а у в а ж е н н я 1. Подання класу (1) відповідають підняттю векторних полів X і Y за допомогою зв'язності в розшаруванні π (загалом кажучи нелінійної).

3. Алгебра диференціальних інваріантів на афінній прямій

Нагадаємо [1], [7], [11] що диференціальним інваріантом порядку $\leq k$ називається функція f на просторі k -джетів $J^k(\pi)$ розшарування геометричних величин $\pi: R^2 \rightarrow R$, така що $\bar{X}^k(f) = \bar{Y}^k(f) = 0$, де $\bar{X}^k$ і $\bar{Y}^k$ k -ті продовження векторних полів $\bar{X}$, $\bar{Y}$.

Опишемо спочатку диференціальні інваріанти нижчих порядків. При $k=0$ ми отримуємо, що функція $\phi(x, u)$ є диференціальним інваріантом для величин класу (1). Для геометричних величин класу (2) нетривіальних диференціальних інваріантів нульового порядку немає.

3.1 Інваріанти геометричних величин класу (1)

Розглянемо спочатку випадок, коли $\phi(x, u) = u$. Тоді $\bar{X} = \partial_x$, $\bar{Y} = x \partial_x$. Неважко бачити, що диференціальні інваріанти такої дії афінної алгебри мають вигляд:

$$u, \frac{u_2}{u_1^2}, \frac{u_3}{u_1^3}, \dots, \frac{u_k}{u_1^k}, \dots \quad (2)$$

У цьому ж випадку є інваріантне диференціювання, а саме похідна Трессе

$$\nabla = \frac{D}{Du} = \frac{1}{u} \frac{d}{dx}.$$

Тим самим, алгебра диференціальних інваріантів породжена двома базисними

інваріантами $I = u$, $J = \frac{u_x}{u_t}$ і всіма похідними

Трессе $\frac{D^k J}{DI^k}$.

У випадку довільної функції ϕ (за умови, що $\phi_u \neq 0$), точкове перетворення $(x, u) \mapsto (x, \phi(x, u))$ є локальним пошаровим дифеоморфізмом і переводить векторні поля ∂_x й $x\partial_x$ в

$$\bar{X} = \partial_x - \frac{\phi_x}{\phi_u} \partial_u,$$

$$\bar{Y} = x\bar{X}.$$

Отже, це перетворення переводить диференціальні інваріанти (2) в диференціальні інваріанти геометричних величин класу (1), що відповідають функціям ϕ . У підсумку, ми маємо наступний результат.

Теорема 2. Диференціальні інваріанти для геометричних величин класу (1) мають два базисних інваріанти:

– нульового порядку
 $I = \phi(x, u),$

– другого порядку

$$J = \frac{\left(\frac{d^2 \phi}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2},$$

а всі інші інваріанти породжуються базисними і їхніми похідними

Трессе $\frac{D^k J}{DI^k}$. Інакше кажучи, кожний диференціальний інваріант порядку $(k+2)$ (локально) має вигляд

$$F(I, J, \frac{DJ}{DI}, \dots, \frac{D^k J}{DI^k}),$$

де F – гладка функція.

3.2 Інваріанти геометричних величин класу (2)

Як неважко бачити, у цьому випадку немає нетривіальних диференціальних інваріантів нульового порядку. Для того, щоб знайти диференціальні інваріанти першого порядку ми інтегруємо систему диференціальних рівнянь

$$\bar{X}^{(1)}(F) = \bar{Y}^{(1)}(F) = 0,$$

де $F = F(x, u, u_x)$ – функція на $J^1(\pi)$, а

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(1)} &= \partial_x - \frac{\phi_x}{\phi_u} \partial_u + \\ &+ \left(\frac{-\phi_{xx}\phi_u + \phi_x\phi_{ux} - u_1\phi_{ux}\phi_u + u_1\phi_x\phi_{uu}}{\phi_u^2} \right) \partial_{u_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{(1)} &= x\bar{X}^{(1)} + \frac{1}{\phi_u} \partial_u + \\ &+ \left(\frac{-\phi_u\phi_x - \phi_{ux} - u_1\phi_{uu} - u_1^2\phi_u^2}{\phi_u^2} \right) \partial_{u_1} \end{aligned}$$

перші продовження векторних полів $\bar{X}$ і $\bar{Y}$.

Розв'язуючи дану систему ми знаходимо, що розв'язки мають вигляд:

$$F = f(J),$$

де

$$J = e^{\int \frac{d\phi}{dx}}.$$

Для знаходження інваріантів вищих порядків, ми опишемо інваріантні диференціювання.

Лема 1. Диференціювання

$$\nabla = \lambda \frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty \pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty \pi),$$

де $\lambda \in C^\infty(J^k(\pi))$, комутує із продовженнями векторних полів $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ (тобто є інваріантним, відносно афінної алгебри), тоді й тільки тоді, коли функція λ задовольняє системі диференціальних рівнянь:

$$\bar{X}^k(\lambda) = 0, \quad \bar{Y}^k(\lambda) = \lambda. \quad (3)$$

Доведення.

Нехай V векторне поле на R^2 , $V = A\partial_x + B\partial_u$ і $\psi = B - Au$, його створювана функція, тоді його k -те продовження має вигляд [6], [10]:

$$\begin{aligned} V^{(k)} &= \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx} \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k \psi}{dx^k} \frac{\partial}{\partial u_k} + \\ &+ A \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Ми розглянемо нескінченне продовження векторного поля V , як формальне диференціювання виду

$$V^* = \Theta_\psi + A \frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty \pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty \pi),$$

де $\Theta_\psi = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx} \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k \psi}{dx^k} \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots$ – еволюційне диференціювання [6].

Тоді $V^*(F) = V^k(F)$, якщо $F \in C^\infty(J^k)$.

Пряме обчислення показує, що

$$[\lambda \frac{d}{dx}, V^*] = (V^*(\lambda) - \lambda \frac{dA}{dx}) \frac{d}{dx}.$$

Інакше кажучи, диференціювання $\lambda \frac{dA}{dx}$ комутує зі нескінченним продовженням V^* тоді і тільки тоді, коли $V^*(\lambda) = \lambda \frac{dA}{dx}$. Вибравши як векторне поле V наші поля $\bar{X}$ й $\bar{Y}$ ми отримаємо твердження леми.

Застосовуючи цю лему і розв'язуючи систему рівнянь (3) при $k=0$, знаходимо інваріантне диференціювання у вигляді

$$\nabla = e^\phi \frac{d}{dx}.$$

Зауважимо, що афінна алгебра $\mathfrak{a}$ ефективно діє в просторах k -джетів $J^k(\pi)$, якщо $k \geq 1$, тому справедливий наступний результат.

Теорема 3. Алгебра диференціальних інваріантів геометричних величин класу (2) породжена базисним інваріантом першого порядку $J = e^\phi \frac{d\phi}{dx}$ та інваріантними похідними $\nabla^k(J)$. Тобто кожний диференціальний інваріант порядку $(k+1)$ (локально) має вигляд

$$F(J, \nabla J, \nabla^2 J, \dots, \nabla^k J),$$

де F – гладка функція.

П р и к л а д 2. Інваріанти порядку ≤ 2 породжені наступним диференціальним інваріантом

$$e^\phi \frac{d\phi}{dx}, \quad e^{2\phi} \left(\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{d^2\phi}{dx^2} \right).$$

П р и к л а д 3. Знайдемо диференціальні інваріанти тензорів на афінній прямій. Для них $\phi = -\frac{\ln|u|}{k}$, де $k > 0$ для контраваріантних і $k < 0$ для коваріантних тензорів. Отже,

$$\nabla = \frac{1}{u^{\frac{1}{k}}} \frac{d}{dx}, \quad J = -\frac{u_1}{ku^{\frac{1}{k}+1}}.$$

3.3 Нормальні форми дій афінної групи

У цьому розділі ми опишемо локальну класифікацію геометричних афінних величин відносно псевдогрупи локальних точкових перетворень, що зберігають розшарування геометричних величин $\pi: R^2 \rightarrow R$, тобто пошарових перетворень виду

$$(x, u) \mapsto (x, F(x, u)).$$

Насамперед помітимо, що векторне поле $\bar{X}$ трансверсальне шарам розшарування π , і отже (локально) має перший інтеграл $h(x, u)$, де $h_u \neq 0$. Вибравши локальний дифеоморфізм $(x, u) \mapsto (x, h(x, u))$ ми переведемо поле $\bar{X}$ у векторне поле ∂_x . Отже, нехай $\bar{X} = \partial_x$, тоді рівняння (1) показує, що $b_x = 0$, і тим самим подання афінної алгебри має вигляд:

$$\bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x + b(u)\partial_u. \quad (4)$$

Відзначимо також, що пошарові перетворення, що переводять перші інтеграли $\bar{X}$ в перші інтеграли $\bar{X}$, мають вигляд: $(x, u) \mapsto (x, F(x, u))$. Тому локальний опис подань виду (4) еквівалентно локальній класифікації векторних полів $b(u)\partial_u$ щодо локальних дифеоморфізмів $u \mapsto F(u)$. Як добре відомо, кожне таке ненульове поле локально (наприклад в околі точки $u=0$) може бути зведено до однієї з наступних нормальних форм:

$$1) \partial_u,$$

$$\text{якщо } b(0) \neq 0.$$

$$2) \lambda u \partial_u,$$

$$\text{якщо } b(0) = 0, \quad b'(0) = \lambda \neq 0.$$

$$3) u^{2k} \partial_u,$$

$$\text{якщо } b(0) = b'(0) = \dots = b^{(2k-1)}(0) = 0, \text{ але } b^{(2k)}(0) \neq 0.$$

$$4) u^{2k+1} \partial_u \text{ або } -u^{2k+1} \partial_u,$$

$$\text{якщо } b(0) = b'(0) = \dots = b^{(2k)}(0) = 0, \text{ але } b^{(2k+1)}(0) \neq 0.$$

$$5) \lambda(u) \partial_u,$$

$$\text{де } \lambda(u) - \text{гладка в нулі функція,}$$

$$\text{тобто } \lambda^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

В термінах функції ϕ , що входить в опис геометричних величин класу (2), це означає, що $\phi = \phi(u)$ й відповідно,

$$1) \phi = u,$$

$$2) \phi = \frac{1}{\lambda} \ln |u|,$$

$$3-4) \phi = \frac{\varepsilon}{1-k} u^{1-k}, \quad k \geq 2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Підсумовуючи, ми отримаємо наступний результат.

Теорема 4. Афіні геометричні величини в околі точки $(0,0)$ локально еквівалентні, відносно пошарових точкових перетворень, геометричним величинам, що відповідають перетворенням афінної алгебри $\mathcal{L}_1$ а з наступного списку:

Клас 1

$$\bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x.$$

Клас 2

$$2.1. \quad \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x + \partial_y.$$

$$2.2. \quad \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x + \lambda u\partial_y.$$

$$2.3. \quad \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x + u^2\partial_y.$$

$$2.4. \quad \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x \pm u^{2-k}\partial_y.$$

$$2.5. \quad \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x\partial_x + \lambda(u)\partial_y,$$

де $\lambda(u)$ – плоска в нулі функція.

Подання з даного списку ми називаємо нормальними формами.

З а у в а ж е н н я 2. Нормальна форма для класу 1 відповідає функціям на афінній прямій. А підняття $\bar{X}$ та $\bar{Y}$ суть підняття базисних полів X і Y за допомогою тривіальної зв'язності.

З а у в а ж е н н я 3. Нормальна форма 2.2 для класу 2 відповідає тензорам на афінній прямій, якщо $\frac{1}{k} \in \mathbb{Z}$.

Інтегруючи зазначені вище нормальні форми подань афінної алгебри $\mathcal{L}_1$ а, ми отримаємо відповідну дію афінної групи $\mathcal{L}_1$ "ax+b" на геометричних величинах, що відповідають нормальним формам подань.

А саме, елемент $x \rightarrow ax+b$, $a > 0$, афінної групи діє в такий спосіб:

Клас 1.

$$f(x) \mapsto f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Клас 2. Для всіх реалізацій афінної алгебри,

що відповідають функції $\phi(u)$, ми отримаємо наступну дію:

$$f(x) \mapsto \phi\left(\phi\left(f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) + \ln a\right).$$

Тому, для випадку (1), коли $\phi = u$,

$$f(x) \mapsto f\left(\frac{x-b}{a}\right) + \ln a;$$

для випадку (2), коли $\phi = \frac{1}{\lambda} \ln |u|$,

$$f(x) \mapsto a^\lambda f\left(\frac{x-b}{a}\right);$$

а для випадку (3), коли $\phi = \frac{\varepsilon}{n} u^n$, $n = 1-k$

$$f(x) \mapsto \left[f^n\left(\frac{x-b}{a}\right) + \frac{n \ln a}{\varepsilon} \right].$$

4 Прикладання до диференціальних рівнянь

Афінна алгебра $\mathcal{a}$ є двовимірною розв'язною алгеброю $\mathcal{L}_1$ і в силу теореми Лі-Біанкі [8], кожне звичайне диференціальне рівняння порядку ≤ 2 , що допускає $\mathcal{a}$ як алгебру симетрій, може бути проінтегровано у квадратурах. Зауважимо, що для геометричних величин немає нетривіальних $\mathcal{a}$ -інваріантних диференціальних рівнянь порядку ≤ 2 . З іншого боку, кожне $\mathcal{a}$ -інваріантне диференціальне рівняння, будучи записаним через базисний інваріант і інваріантні похідні, може допускати більш широку алгебру (уже не локальних) симетрій, і тим самим може бути проінтегровано у квадратурах. Ми проілюструємо цей метод на геометричних величинах 1-ого і 2-ого класів.

4.1 Геометричні величини класу (1)

У цьому випадку кожний диференціальний інваріант виду $F(I, J, \frac{DI}{DI}, \dots, \frac{D^k J}{D^k I})$ порядку $2+k$ визначає звичайне диференціальне рівняння

$$F\left(I, J, \frac{DI}{DI}, \dots, \frac{D^k J}{D^k I}\right) = \text{const.} \quad (5)$$

для якого елементи афінної алгебри $\mathcal{a}$ є симетріями.

Афінна алгебра – це розв'язна алгебра, розмірності 2, тому при $k=0$, рівняння виду

$$F(I, J) = 0 \quad (6)$$

може бути явно проінтегровано у квадратурах [8]. Крім того, якщо рівняння (5) може бути

проінтегровано, як рівняння в похідних Трессе, то інтеграли такого рівняння є, у свою чергу, рівняннями виду (6) й тим самим інтегруються у квадратурах.

Розглянемо спочатку випадок, коли (5) є лінійним диференціальним рівнянням 1-ого порядку відносно похідній Трессе, тобто,

$$\frac{DJ}{DI} + A(I)J = B(I). \quad (7)$$

Відзначимо, що у звичайних похідних (7) відповідає рівнянню 3-го порядку.

Розв'язуючи (7), ми знаходимо 1-параметричне сімейство розв'язків

$$J = F(C, I), \quad (8)$$

або

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = F(C, \phi)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$$

де C – деяка постійна.

Рівняння (8) вже є диференціальними 2-ого порядку, що допускають 2-мірну розв'язну алгебру симетрій, і відповідно інтегрованими у квадратурах.

Як інший приклад розглянемо диференціальні рівняння 4-ого порядку, що відповідають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Наприклад:

$$\frac{D^2J}{DI^2} + p\frac{DJ}{DI} + qJ = H(I),$$

де p, q – деякі постійні.

Загальний розв'язок цього рівняння у випадку різних характеристичних коренів, як добре відомо, має вигляд

$$J = K_1(I, C_1, C_2)e^{\lambda_1 I} + K_2(I, C_1, C_2)e^{\lambda_2 I}, \quad (9)$$

де функції K_1 і K_2 явно обчислюються. Так для гармонійного осцилятора,

$$\frac{D^2J}{DI^2} + \omega^2 J = 0,$$

$$J = C_1 \cos(\omega I) + C_2 \sin(\omega I), \quad (10)$$

Рівняння (9) і (10), як і вище інтегруються у квадратурах.

П р и к л а д 4. Диференціальні рівняння виду:

$$u_4 - 7u_1 u_2 u_3 + 8u_2^2 + W(u)u_2 = A(u)u_1^2 \quad (11)$$

допускають афінну алгебру симетрій a з $\phi = u$.

Якщо їх записати в диференціальних інваріантах, то вони приводять до лінійних

диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{D^2J}{DI^2} + W(I)J = A(I).$$

Якщо потенціал $W(I)$ інтегруємо [8], то рівняння (11) інтегроване у квадратурах при довільному виборі функції A , наприклад, коли

$$W(u) = Cu^{-2},$$

$$W(u) = C(u^2 + pu + q)^2,$$

або $W(u)$ є розв'язком стаціонарного рівняння Кортвега-де Вриза, або його вищих аналогів [8].

П р и к л а д 5. Диференціальні рівняння виду:

$$\begin{aligned} u_1^2 u_4 - 7u_1 u_2 u_3 + 8u_2^2 - u_1^3 u_3 + 2u_1^2 u_2^2 = \\ = a \frac{u_2^k}{u_1^{2k-6}} - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} u_1^4 u_2 \end{aligned} \quad (12)$$

допускають афінну алгебру симетрій a з $\phi = u$.

Записавши (12) в диференціальних інваріантах, ми приходимо до диференціального рівняння:

$$\frac{D^2J}{DI^2} = \frac{DJ}{DI} + aJ^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} J,$$

яке інтегрується у квадратурах [3], [8], і тим самим (12) також інтегрується у квадратурах.

Прикладами рівнянь виду (12) є наступні рівняння:

$$k = a = 2:$$

$$u_1^2 u_4 - 7u_1 u_2 u_3 + 8u_2^2 - u_1^3 u_3 + \frac{6}{25} u_1^4 u_2 = 0,$$

$$k = 3, a = 8:$$

$$u_1 u_4 - 7u_2 u_3 - u_1^2 u_3 + 2u_1 u_2^2 + \frac{2}{9} u_1^2 u_2 = 0.$$

4.2 Геометричні величини класу (2)

Кожний диференціальний інваріант $F(J, \nabla J, \nabla^2 J, \dots, \nabla^k J)$ порядку $k+1$ породжує диференціальні рівняння порядку $k+1$

$$F(J, \nabla J, \nabla^2 J, \dots, \nabla^k J) = \text{const}, \quad (13)$$

для якої афінна алгебра a є алгеброю симетрій. Тому ці рівняння мають розв'язну групу симетрій, а отже, як і вище, рівняння 2-ого порядку

$$F(J, \nabla J) = 0 \quad (14)$$

інтегруються у квадратурах.

Метод інтегрування рівняння (13) складається до зведення цього рівняння до рівнянь виду (14), використовуючи перші інтеграли (13), щодо інваріантного диференціювання ∇ . Наприклад, рівняння гармонійного осцилятора, відносно ∇ (яке є звичайним диференціальним рівнянням 3-його порядку)

$$\nabla^2 J + J = 0, \quad (15)$$

має перший інтеграл

$$\frac{(\nabla J)^2}{2} + \frac{J^2}{2} = C_1 \quad (16)$$

і, тим самим, інтегрування рівняння (15) зводиться до інтегрування 1-параметричного сімейства рівнянь другого порядку (16), які можуть бути проінтегровані у квадратурах.

Загальна схема інтегрування рівнянь типу (13) виглядає таким чином: введемо формальну змінну s , котру ми будемо називати афінним параметром, так щоб $\nabla = \frac{d}{ds}$, або $s' = e^{-\phi}$, тоді ми можемо розглядати рівняння (13), як рівняння відносно $J = J(s)$. Тоді розв'язок цього рівняння $J = f(s)$, після застосування оператора ∇ дає два рівняння:

$$\begin{aligned} J &= f(s) \\ \nabla J &= f'(s). \end{aligned}$$

Виключаючи s , коли це можливо, із цієї системи, ми приходимо до співвідношення виду:

$$G(J, \nabla J) = 0,$$

тобто до рівняння другого порядку, що, як ми бачили, інтегрується у квадратурах.

Приклад 6. Розглянемо диференціальні рівняння для диференціальних 1-форм на афінній прямій. Тут $\phi = \ln |u|$, $\nabla = u \frac{d}{dx}$, $J = u_1$. Диференціальне рівняння 3-го порядку

$$u^2 u_3 + u u_1 u_2 - u u_2 = a u_1^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} u_1 \quad (17)$$

допускає афінну алгебру (с $\phi = \ln |u|$) симетрій, і, записавши його в диференціальних інваріантах, зводимо до рівняння виду:

$$\nabla^2 J = \nabla J + a J^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} J.$$

Останнє рівняння має перший інтеграл [3], [8], і тим самим рівняння (17) інтегровано у квадратурах.

Список літератури

1. Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Геометрия-1, Т.28. – Москва, (1988).
2. О. Веблен, Дж. Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, М., ИЛ, (1949).
3. S. V. Dushin, V. V. Lychagin, Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equations *Asta Appl. Math.* 24:1 (1991), 29–57.
4. Ф. Клейн, Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований, В кн.: Об основаниях геометрии, 399–434.
5. Н. Г. Кововенко, Алгебры дифференциальных инвариантов на проективной прямой, Геометрия в Астрахани – 2007, Тезисы докладов II Международного семинара "Симметрии: теоретический и методический аспекты", Изд. дом "Астраханский университет" (2007), 33–35.
6. И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, А. В. Виноградов, Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений, – Москва, "Наука", (1986).
7. A. Kumpera, Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie. I-II. *J. Differential Geometry* (1975), no. 2, 289–345; (1975), no. 3, 347–416.
8. A. Kushner, V. Lychagin, V. Roubtsov, Contact geometry and non-linear differential equations, Cambridge University Press (2007).
9. L.V. Ovsiannikov Group analysis of differential equations, Russian: Nauka, Moscow (1978); Engl. transl.: Academic Press, New York (1982).
10. P. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1986).
11. A. Tresse, Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, *Acta Math.* (1894), 1–88.

Надійшла до редколегії 21.08.2007

УДК 517.91

Наталія В.Лукова, Олександр О. Пришляк
Пошарова еквівалентність функцій Морса на тривимірних многовидах

Досліджується питання про існування пошарової еквівалентності функцій Морса, а також функцій Морса-Смейла, на замкнених тривимірних многовидах.

Ключові слова: функція Морса, еквівалентність.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Шарко

Вступ. Нехай M – гладкий многовид. Гладка функція, всі критичні точки якої не вироджені, називається функцією Морса. Функція Морса на рімановому многовиді M називається функцією Морса-Смейла, якщо її поле градієнта є векторним полем Морса-Смейла, тобто коли стійкі та нестійкі многовиди особливих точок поля градієнта перетинаються трансверсально.

Дві функції $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h: M \rightarrow M$ і $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких виконується рівність $f \circ h = h' \circ g$. Два векторні поля називаються топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h: M \rightarrow M$, який відображає траєкторії одного поля в траєкторії іншого поля, зберігаючи їх орієнтацію.

Топологічна класифікація функцій Морса на тривимірних многовидах отримана в [1], а градієнтноподібних векторних полів Морса-Смейла в [2-4].

Постановка задачі: дати пошарову класифікацію функцій Морса на замкнених тривимірних многовидах.

Для вирішення поставленої задачі будемо застосовувати метод діаграм Хегора.

Узагальнені діаграми Хегора. Нехай $H \cup H' = M$ – розбиття Хегора тривимірного многовида M , $F = \partial H = \partial H'$ – загальна поверхня кренделів H і H' .

Набір $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ замкнутих кривих, які не перетинаються, на поверхні F називається узагальненою системою меридіанів кренделя H , якщо вони обмежують диски $D_i \subset H$, після розрізування кренделя за якими вийде незв'язне об'єднання тривимірних дисків.

Трійка (F, u, v) , що складається з замкненої поверхні і двох узагальнених систем меридіанів, називається узагальненою діаграмою Хегора (УДХ) многовида M .

Діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм

Nataliya V.Lukova, Alexander O.Prishlyak
Fiber equivalence of Morse functions on 3-manifolds

We investigate the problem of the existence of the fiber equivalence of Morse functions and Morse-Smale functions on closed 3-manifolds

Key Words: Morse function, equivalence.

$h: F \rightarrow F$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$. Діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують ізотопії $\varphi_t, \psi_t: F \rightarrow F$, $t \in [0, 1]$, що $\varphi_0 = \psi_0 = 1$, $\varphi_1(u) = u'$, $\psi_1(v) = v'$.

Визначимо операцію додавання меридіанів: сумою $u_1 \# u_2$ двох меридіанів u_1 і u_2 уздовж простої кривої γ , що з'єднує u_1 і u_2 , називається та компонента краю околу об'єднання $\partial U(u_1 \cup u_2 \cup \gamma)$, яка не ізотопна ні u_1 , ні u_2 в U .

Позначимо через $U_1, U_2, \dots, U_k$ ті області, на які меридіани $u_1, u_2, \dots, u_n$ розбивають поверхню F , а через $V_1, V_2, \dots, V_l$ – відповідні області для меридіанів $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Діаграма називається упорядкованою, якщо задано таке сюр'єктивне відображення (порядок)

$$\sigma: \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}.$$

Тобто кожному меридіану приписане ціле число.

Упорядковані узагальнені діаграми Хегора (УУДХ) називаються гомеоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм як діаграм Хегора, який зберігає порядок меридіанів.

Упорядковані узагальнені діаграми Хегора (УУДХ) називаються еквівалентними, якщо одну з іншої можна одержати за допомогою послідовності гомеоморфізмів та таких операцій:

1) напівізотопій діаграм (пальчикових рухів та їх обернених) між u_i і v_j , якщо $\sigma(u_i) > \sigma(v_j)$;

2) заміни u_i на $u_i \# u_j$, якщо $\sigma(u_i) < \sigma(u_j)$;

3) заміни v_i на $v_i \# v_j$, якщо $\sigma(v_i) > \sigma(v_j)$.

При виконанні другої операції $\sigma(u_i \# u_j) = \sigma(u_i)$.

При виконанні третьої операції $\sigma(v_i \# v_j) = \sigma(v_i)$.

За функцією Морса побудуємо розбиття многовида на ручки (неоднозначно). Як і для звичайних діаграм Хегора поверхня F є межею об'єднання ручок індексу 0 і 1. Меридіанами будуть косередні сфери 1-ручок та середні сфери 2-ручок.

Для задання порядку на множині меридіанів, побудуємо граф Ріба функції Морса. Це орієнтований граф, що отриманий з многовида,

стягненням кожної компоненти рівня в точку. При цьому, якщо компонента містить критичну точку функції, то їй відповідає вершина графа, інакше точка на ребрі. Орієнтація ребер задається напрямком зростання функції. Порядок меридіана визначається як довжина максимального орієнтованого шляху, що закінчується у вершині, яка відповідає цьому меридіану. Наприклад, якщо ручка індексу 1 або 2 приклеюється до об'єднання тільки ручок індексу 0, то порядок відповідного меридіана і цієї ручки рівний 1. Якщо вона приклеюється до об'єднання ручок, у яких максимальний порядок n , то приклеєна ручка і відповідний меридіан мають порядок $n+1$.

Таким чином, кожна функція Морса задає (неоднозначно) УУДХ. Так побудовану за функцією Морса УУДХ будемо називати УУДХ, що породжена цією функцією.

Геометрична пошарова еквівалентність. Дві функції $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *геометрично пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізми $h: M \rightarrow M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g , а траєкторії поля $\text{grad } f$ в траєкторії поля $\text{grad } g$, зберігаючи напрямки руху за ними.

Теорема 1. *Дві функції Морса-Смейла на тривимірних многовидах геометрично пошарово еквівалентні тоді і тільки тоді, коли побудовані за ними упорядковані узагальнені діаграми Хегора гомеоморфні.*

Доведення. Необхідність. За побудовою УУДХ на рімановому многовиді вона за функцією Морса-Смейла визначається однозначно, з точністю до гомеоморфізма.

Достатність. Гомеоморфізм діаграм задає взаємно-однозначну відповідність між траєкторіями полів градієнтів згідно їх перетинів з поверхнею Хегора. Рівність упорядкування меридіанів забезпечує однаковий порядок приклейки ручок, а отже, і гомеоморфність відповідних компонент критичних рівнів. Якщо викинути компоненти рівнів, що містять критичні точки, то отримаємо незв'язне об'єднання циліндрів. При цьому кожному циліндру однієї функції відповідає циліндр іншої. Задамо гомеоморфізм між відповідними областями значень на прямій і такий, що зберігає орієнтацію прямої. Тоді цей гомеоморфізм у сукупності з відповідністю між траєкторіями задає гомеоморфізм між циліндрами. Тоді гомеоморфізми циліндрів, разом з побудованими раніше гомеоморфізмами компонент критичних

рівней задають шуканий гомеоморфізм тривимірних многовидів.

Топологічна пошарова еквівалентність. Дві функції $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *(топологічно) пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізми $h: M \rightarrow M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g .

Теорема 2. *Дві функції Морса на тривимірних многовидах будуть топологічно пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли побудовані за ними упорядковані узагальнені діаграми Хегора будуть еквівалентні.*

Доведення. За функцією Морса побудуємо нову функцію Морса, у якій критичні значення сідлових точок збігаються з порядком, а всі локальні мінімуми, так само, як і всі локальні максимуми, мають однакове критичне значення. Таку функцію назовемо зведеною.

Нехай $y_0 = \min f$. Для кожного локального мінімуму x_i і досить малого $\varepsilon > 0$ і околу U точки x_i змінимо функцію в цьому околі, взявши композицію функції f з дифеоморфізмом прямої, що тотожний при $y > f(x_i) + \varepsilon$ і відображає $f(x_i)$ в y_0 . Тоді значення функції будуть однаковими для всіх локальних мінімумів і нова функція буде пошарово еквівалентна початковій. Аналогічно можна змінювати значення функції в сідлових точках використовуючи дифеоморфізми проміжків значень на компонентах рівнів функції, які на графі Ріба утворюють ребра суміжні з вершиною x_i . Отже, за допомогою такої процедури отримаємо зведену функцію, що пошарово еквівалентна функції f .

Покажемо, що топологічна пошарова еквівалентність функцій Морса рівносильна топологічній еквівалентності зведених функцій. З означення топологічної еквівалентності випливає пошарова. Навпаки, нехай пошарова еквівалентність задана. Тоді відображення шарів, в композиції з відображенням зсуву вздовж поля градієнта до шару з тим же значенням, задає відображення шарів з однаковими значеннями, а отже, і топологічну еквівалентність.

Використання теореми з [5] до зведених функцій завершує доведення.

Реалізація інваріанта функцією. Функція порядку σ має такі властивості:

1) порядок $\sigma(w_i)$ кожного меридіану w_i є цілим числом і $\sigma(w_i) > 0$;

2) якщо $u_i \cap v_j \neq \emptyset$, то $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$.

Для доведення цієї властивості досить помітити, що через точку перетину меридіанів проходить траєкторія поля градієнта, яка починається в критичній точці, яка відповідає u_i , і закінчується в точці, яка відповідає v_j . Оскільки функція зростає вздовж цієї траєкторії і траєкторія проектується на граф Ріба в ребро або орієнтований маршрут, то $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$.

3) якщо порядок $\sigma(w_i) > 1$, то існує меридіан w_j такий, що $\sigma(w_i) = \sigma(w_j) + 1$ і меридіани w_i та w_j можна з'єднати шляхом, який не перетинає інших меридіанів u_k , порядок яких $\sigma(u_k) > \sigma(w_i)$ і меридіанів v_k , порядок яких $\sigma(v_k) < \sigma(w_j)$. Тут w_i та w_j можуть бути меридіанами як одного типу, так і різних типів. Наприклад, $w_i = u_i$, $w_j = v_j$.

Доведення цієї властивості прямо впливає з процесу побудови порядку.

Функцію порядку σ , яка задовольняє властивостям 1)-3), будемо називати допустимою, а УУДХ з допустимою функцією порядку – допустимою УУДХ.

Теорема 3. Для кожної допустимої УУДХ існує функція Морса, яка породжує цю УУДХ.

Доведення. Побудова функції Морса за УУДХ аналогічна до побудови МС-функції в [5]: УДХ задає розклад многовида на ручки. Функція σ визначає порядок приклеювання ручок. Після приклеювання кожної ручки будемо приклеювати комір. В результаті отримаємо розклад на ручки з комірами. Стискаючи кожну ручку в (критичну) точку, отримаємо многовид з функцією на ньому, що задається за допомогою проєкцій комірів на відрізок в сумі з константами, такими щоб ці функції були узгоджені на краях комірів. Будь-яка функція Морса, що топологічно еквівалентна побудованій функції, буде шуканою, оскільки обернена побудова приведе до заданої УУДХ.

Приклади та обчислення. Позначимо через $N(M, g, I_0, I_1, I_2, I_3)$ число топологічно пошарово нееквівалентних функцій Морса на многовиді M , для яких g – рід поверхні F , а I_k – число критичних точок індексу k , $k=0, 1, 2, 3$. (При цьому $g = I_1 - I_0 + 1 = I_2 - I_3 + 1$, $\chi(M) = I_0 - I_1 + I_2 - I_3 = 0$.)

Оскільки існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, функція на тривимірній сфері з двома критичними точками, то $N(S^3, 0, 1, 0, 0, 1) = 1$ (сфера без меридіанів).

$N(S^3, 0, 2, 1, 0, 1) = 1$ (один меридіан на сфері).

$N(S^3, 1, 1, 1, 1, 1) = 1$ (паралель та меридіан на торі).

$N(S^3, 1, 2, 2, 1, 1) = 6$ (дві діаграми з однією та з двома точками перетину між меридіанами).

Для геометричної пошарової еквівалентності слід також фіксувати число m точок перетину між меридіанами. Число геометрично пошарово нееквівалентних функцій Морса-Смейла будемо позначимо через $n(M, g, I_0, I_1, I_2, I_3, m)$. Якщо у діаграми по одному меридіану кожного типу, які перетинаються, то порядок єдиний.

$n(S^3, 0, 1, 0, 0, 1, 0) = 1$ (одна діаграма).

$n(S^3, 0, 2, 1, 0, 1, 0) = 1$ (одна діаграма).

$n(S^3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = 1$ (одна діаграма).

$n(S^3, 1, 1, 1, 1, 1, 3) = 1$ (одна діаграма).

$n(S^3, 1, 1, 1, 1, 1, 5) = 4$ (4 діаграми).

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 1) = 5$ (одна діаграма і 5 можливих порядків на ній)

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 2) = 2$ (2 порядки на одній діаграмі)

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 3) = 13$ (одна діаграма з 3 порядками і дві по п'ять)

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 4) = 3$ (одна діаграма)

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 5) = 69$ (12 діаграм, у яких по п'ять порядків і три діаграми з трьома порядками)

$n(S^3, 1, 2, 2, 1, 6) = 11$ (одна діаграма з двома порядками і три з трьома).

Висновки. Отримана геометрична та топологічна пошарові класифікації функцій Морса на замкнених ріманових орієнтованих тривимірних многовидах. Доведена теорема реалізації. На поверхні Хегора роду 1 обчислено число геометрично нееквівалентних функцій у яких не більше ніж 3 меридіани та не більше 6 точок перетину між ними.

Список використаних джерел

1. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Т.25 – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С.319-325.

2. Fleitas G. Classification of Gradient like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. - 1975. – Vol.6. - P. 155-183.

3. Уманский Я.Л. Схема трехмерной динамической системы Морса-Смейла без замкнутых траекторий // ДАН СССР. – 1976. – Т.230, №6. С. 1286-1295

4. Пришляк А.О. Топологическая эквивалентность векторных полей Морса-Смейла с $ben\ 2$ на трехмерных многообразиях // Укр. мат. журнал. – 2002. – Т.54, №4 – С. 492-500..

5. Лукова Н.В., Пришляк А.О. Геометричні властивості МС-функцій на тривимірних многовидах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, Т.2, №3, 2005. – 10с.

Надійшла до редколегії 28.08.2007

УДК 517.956.4

В. М. Лучко*

Задача Коші для параболічного
псевдодиференціального рівняння
вищого порядку

Серія: фізико-математичні науки

Доведено існування та встановлено оцінки
розв'язку задачі Коші параболічного псевдодифе-
ренціального рівняння вищого порядку по t .

Ключові слова: задача Коші, псевдодиферен-
ціальне рівняння параболічного типу, функція
Гріна.

*E-mail: vmluchko@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.наук, професор Петравчук А.П.

Дослідження параболічного псевдодифе-
ренціального рівняння з сталим однорідним
символом було розпочато С.Д. Ейдельманом і
Я.М. Дрінем в [7]. Для такого символу фунда-
ментальний розв'язок задачі Коші вираховує-
ться за допомогою перетворення Фур'є. М.В.
Федорюком у праці [5] була знайдена точна
асимптотика фундаментального розв'язку при
 $|x| \rightarrow \infty$, яка виявилася не експоненціальною,
як для диференціальних рівнянь параболічно-
го типу [6], а степеневою. Також для рівняння з
сталім символом, більш загального типу, Я.М.
Дрінь отримав шаудерівські оцінки і дослідив
коректність задачі Коші в класах гельдерових
функцій [2]. Для побудови фундаментального
розв'язку задачі Коші у загальному випадку
змінного символу були зроблені спроби викори-
стати класичний метод Леві. Перші результа-
ти в цьому напрямку отримані в працях С.Д.
Ейдельмана і Я.М. Дріня [8], де побудований
параметрикс – фундаментальний розв'язок за-
дачі Коші для рівняння з "замороженими" ко-
ефіцієнтами і доведена розв'язність інтеграль-
ного рівняння, яке визначає фундаментальний
розв'язок. У 1988 році вийшла праця А.Н. Ко-
чубея [3], яка присвячена побудові і досліджен-
ню фундаментального розв'язку задачі Коші,
де псевдодиференціальні оператори трактую-
ться як гіперсингулярні інтеграли. У роботі [1]
доведена теорема про коректну розв'язність за-
дачі Коші для параболічного псевдодиферен-
ціального рівняння з розривними початковими

V. M. Luchko*

The Cauchy problem for parabolic
pseudodifferential equation of higher
order

Series: Physics & Mathematics Sciences

The was proved and estimated the solution of the
solution of the Cauchy problem of parabolic pseudod-
ifferential equation of higher order according t .

Key words: The Cauchy problem, pseudodiffer-
ential equation of parabolic type, the Green function.

умовами.

Основним предметом дослідження даної
роботи є задача Коші для псевдодиференціаль-
ного рівняння вищого порядку по t . Для да-
ної задачі побудовано та проведено досліджен-
ня фундаментального розв'язку, доведені лемми
про перетворення Фур'є нормальної фундамен-
тальної системи розв'язку.

У шарі $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T]\}$ розглянемо
рівняння довільного порядку

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = Au + f(t, x), \quad (1)$$

з початковими умовами

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де

$$Au(t, x) = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left(\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{\partial^{k_0} V}{\partial t^{k_0}} \right),$$

$$V = F_{\sigma \rightarrow x} u(t, x),$$

$$F_{\sigma \rightarrow x} V = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i_0 x \sigma} u(t, x) dx,$$

$$F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0 x \sigma} V(t, \sigma) d\sigma.$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^n, \gamma \geq 1, k_0 < m, i_0^2 = -1, \varphi_j(x), f(t, x)$$

відомі функції, які апіорі допускають перетво-
рення Фур'є, $P_{\nu k_0}(\sigma)$ – однорідна функція сте-
пеня ν .

Застосуємо до задачі (1), (2) перетворення Фур'є, після чого отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння, в якому σ на правах параметра

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{d^{k_0} V}{dt^{k_0}} + \bar{f}(t, \sigma), \quad (3)$$

$$\left. \frac{d^{j-1} V}{dt^{j-1}} \right|_{t=0} = \bar{\varphi}_j(\sigma). \quad (4)$$

Розглянемо характеристичне рівняння для (3)

$$c(\lambda, \sigma) \equiv \lambda^m - \sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \lambda^{k_0} = 0, \quad (5)$$

корені якого, є однорідними функціями по аргументу σ степеня $\gamma \geq 1$.

Означення. Рівняння (1) будемо називати параболічним, якщо корені характеристичного рівняння (5) задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\sigma) \leq -a_0 < 0, \quad |\sigma| = 1, \quad a_0 > 0, \\ |\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}. \quad (6)$$

Будемо припускати, що $P_{\nu k_0}(\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, причому

$$|D_\sigma^l P_{\nu k_0}(\sigma)| \leq c_N |\sigma|^{\nu - |l|},$$

$$|l| \leq N, \quad k_0 \gamma + \nu = m \gamma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Позначимо через

$$\{K_i(t, \sigma)\}_{i=1}^m$$

нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (3), тобто

$$\frac{d^m K_i}{dt^m} = \sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{d^{k_0} K_i}{dt^{k_0}}, \quad (7)$$

$$\left. \frac{d^{j-1} K_i(t, \sigma)}{dt^{j-1}} \right|_{t=0} = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

а через $K(t - \tau, \sigma)$ - функцію Гріна задачі Коші.

Розв'язок задачі (7), (8) набуває вигляду

$$K_i(t, \sigma) = \frac{W_i^*(t, \sigma)}{W(\sigma)}, \quad (9)$$

де

$$W_i^*(t, \sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(\sigma) & \lambda_2(\sigma) & \dots & \lambda_m(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{i-2}(\sigma) & \lambda_2^{i-2}(\sigma) & \dots & \lambda_m^{i-2}(\sigma) \\ e^{\lambda_1(\sigma)t} & e^{\lambda_2(\sigma)t} & \dots & e^{\lambda_m(\sigma)t} \\ \lambda_1^i(\sigma) & \lambda_2^i(\sigma) & \dots & \lambda_m^i(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1}(\sigma) & \lambda_2^{m-1}(\sigma) & \dots & \lambda_m^{m-1}(\sigma) \end{vmatrix},$$

$$W(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(\sigma) & \lambda_2(\sigma) & \dots & \lambda_m(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{i-1}(\sigma) & \lambda_2^{i-1}(\sigma) & \dots & \lambda_m^{i-1}(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1}(\sigma) & \lambda_2^{m-1}(\sigma) & \dots & \lambda_m^{m-1}(\sigma) \end{vmatrix}.$$

Загальний розв'язок задачі (3), (4) подається у вигляді

$$V(t, \sigma) = \sum_{i=1}^m K_i(t, \sigma) \bar{\varphi}_i(\sigma) +$$

$$\int_0^t K(t - \tau, \sigma) \bar{f}(\tau, \sigma) d\tau. \quad (10)$$

Застосовуючи до (10) обернене перетворення Фур'є, тоді зображення розв'язку задачі (1), (2) можна подати у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} G_i(t, x - \xi) \varphi_i(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (11)$$

де введено такі позначення

$$G_i(t, x - \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma(x - \xi)} K_i(t, \sigma) d\sigma,$$

$$G(t, \tau, x - \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma(x - \xi)} K(t - \tau, \sigma) d\sigma.$$

Лема 1. Якщо $P_{\nu k_0}(\sigma) \in C^N$, $i = \overline{1, m}$, $N \geq 2n + [\gamma] + 1$, то для функцій $\{G_i(t, x)\}_{i=1}^m$ та $G(t, \tau, x)$ справедливі оцінки

$$|G_i(t, x)| \leq c \frac{t^i}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma}}, \quad (12)$$

$$|G(t, \tau, x)| \leq c \frac{(t - \tau)^m}{((t - \tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma}}, \quad (13)$$

$[\gamma]$ - ціла частина γ .

Доведення. При доведенні леми 1 скористаємося методом, який запропонований у праці [3].

Позначимо через

$$\Phi_i(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma x} K_i(t, \sigma) d\sigma.$$

Виконаємо заміну $t^{\frac{1}{\gamma}} \sigma = \zeta$, $x t^{-\frac{1}{\gamma}} = z$, тоді

$$\Phi_i(t, z) = t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\zeta z} \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta.$$

Нехай $\eta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_0(\zeta) = 1$, при $|\zeta| \leq 1$, де $\eta_0(\zeta) = 0$, при $|\zeta| \geq 2$. Позначимо через $\eta_1(\zeta) = 1 - \eta_0(\zeta)$. Тоді $\Phi_i(t, z)$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, z) &= t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta + \\ &+ t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) e^{i\zeta z} \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta \equiv \\ &\equiv \Phi_i^0(t, z) + \Phi_i^1(t, z). \end{aligned}$$

Скористаємося розкладом

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i(\zeta)} &= 1 + \lambda_i(\zeta) + \frac{\lambda_i^2(\zeta)}{2!} + \dots + \frac{\lambda_i^{j-1}(\zeta)}{(j-1)!} + \\ &+ \frac{\lambda_i^j(\zeta)}{j!} h_{ij}(\lambda_i(\zeta)), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} h_{ij}(\lambda_i(\zeta)) &= j! (\lambda_i^j(\zeta))^{-1} \left(e^{\lambda_i(\zeta)} - 1 - \right. \\ &\left. - \lambda_i(\zeta) - \frac{\lambda_i^2(\zeta)}{2!} - \dots - \frac{\lambda_i^{j-1}(\zeta)}{(j-1)!} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи зображення експоненти в $W_i^*(\zeta)$ і використовуючи властивості визначників, у випадку $i < m$, отримаємо зображення функції $\Phi_i^0(t, z)$

$$\begin{aligned} \Phi_i^0(t, z) &= \frac{t^{i-1-\frac{n}{\gamma}}}{(i-1)!} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} d\zeta + \\ &+ t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} \frac{\widetilde{W}_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta \equiv \\ &\equiv \Phi_i^{0,1}(t, z) + \Phi_i^{0,3}(t, z), \end{aligned}$$

для $i = m$

$$\begin{aligned} \Phi_m^0(t, z) &= \frac{t^{i-1-\frac{n}{\gamma}}}{(i-1)!} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} d\zeta + \\ &+ t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} \frac{\widetilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta + \\ &+ t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} \frac{\widetilde{W}_m^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta \equiv \\ &\equiv \Phi_i^{0,1}(t, z) + \Phi_i^{0,2}(t, z) + \Phi_i^{0,3}(t, z), \end{aligned}$$

$$\widetilde{W}_i^*(\zeta) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(\zeta) & \dots & \lambda_m(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{i-2}(\zeta) & \dots & \lambda_m^{i-2}(\zeta) \\ \frac{\lambda_1^{i+1}(\zeta)}{(i+1)!} h_{1,i+1}(\lambda_1(\zeta)) & \dots & \frac{\lambda_m^{i+1}(\zeta)}{(i+1)!} h_{m,i+1}(\lambda_m(\zeta)) \\ \lambda_1^i(\zeta) & \dots & \lambda_m^i(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1}(\zeta) & \dots & \lambda_m^{m-1}(\zeta) \end{vmatrix},$$

$$i = \overline{1, m},$$

$$\widetilde{W}_m(\zeta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(\zeta) & \lambda_2(\zeta) & \dots & \lambda_m(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{i-1}(\zeta) & \lambda_2^{i-1}(\zeta) & \dots & \lambda_m^{i-1}(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-2}(\zeta) & \lambda_2^{m-2}(\zeta) & \dots & \lambda_m^{m-2}(\zeta) \\ \lambda_1^m(\zeta) & \lambda_2^m(\zeta) & \dots & \lambda_m^m(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Оскільки $\eta_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, то $\Phi_i^{0,1} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Легко перевірити, що функція $\omega(\zeta) = \frac{\widetilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)}$ є однорідною степеня γ . Нехай $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z) = 0$ для $|z| \leq 1$, $\psi(z) = \varphi(-z)$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle \Phi_m^{0,2}(t, \cdot), \varphi \rangle &= t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i\zeta z} \omega(\zeta) \times \\ &\times \varphi(z) d\zeta dz = t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) \omega(\zeta) \bar{\psi}(\zeta) d\zeta = \\ &= t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\zeta) \bar{\psi}(\zeta) d\zeta - \right. \\ &\left. - \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) \omega(\zeta) \bar{\psi}(\zeta) d\zeta \right) = t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} (\langle \bar{\omega}(\cdot), \psi \rangle - \end{aligned}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \int_{\mathbb{R}^n} (L^N e^{i_0 \zeta z}) \varphi(z) dz \Bigg),$$

де $\tilde{\omega}$ – перетворення Фур'є ω у сенсі узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$, $L = -i_0 |z|^{-2} \sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, $L e^{i_0 \zeta z} = e^{i_0 \zeta z}$ [5].

Розкладемо функцію $\omega(\zeta)$, $|\zeta| = 1$, в ряд за сферичними гармоніками

$$\omega(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_l} Y_{l\mu}(\zeta).$$

Тоді для всіх $|\zeta| \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \neq 0$

$$\omega(\zeta) = |\zeta|^\gamma \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_l} Y_{l\mu} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|} \right),$$

де δ_l визначена в [3].

Із [4] відомо, що перетворення Фур'є функції $|\zeta|^\gamma Y_{l\mu} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|} \right)$ рівне

$$(-i_0)^l 2^{n+\gamma} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma \left(\frac{n+l+\gamma}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{l-\gamma}{2} \right)} \frac{Y_{l\mu} \left(\frac{z}{|z|} \right)}{|z|^{n+\gamma}},$$

$l - \gamma \neq 0, -2, -4, \dots$

Отже, для $|z| \geq 1$

$$|\tilde{\omega}(z)| \leq c |z|^{-n-\gamma}.$$

Оскільки $\eta_1(\zeta) = 0$, для $|\zeta| \leq 1$, то після інтегрування частинами отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \int_{\mathbb{R}^n} (L^N e^{i_0 \zeta z}) \varphi(z) dz = i_0^N \times \\ & \times \sum_{|s|=N} \int_{\mathbb{R}^n} D_\zeta^s [\eta_1(\zeta) \omega(\zeta)] d\zeta \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{-2N} z^s e^{i_0 \zeta z} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що

$$D_\zeta^s [\eta_1(\zeta) \omega(\zeta)] = \eta_1(\zeta) D_\zeta^s \omega(\zeta) + R(\zeta),$$

де

$$R(\zeta) = 0$$

для

$$|\zeta| \leq 1$$

і

$$|\zeta| \geq 2.$$

Функція $D_\zeta^s \omega(\zeta)$ є однорідною функцією степеня $\gamma - N < -n$, тоді за теоремою Фубіні

$$\langle \Phi_m^{0,2}(t, \cdot), \varphi \rangle = t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\omega}(-z) \varphi(z) dz -$$

$$\begin{aligned} & - t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} i_0^N \sum_{|s|=N} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [\eta_1(\zeta) D_\zeta^s \omega(\zeta) + \right. \\ & \left. + R(\zeta)] e^{i_0 \zeta z} d\zeta \right\} |z|^{-2N} z^s \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Отже, для $|z| \geq 1$

$$\Phi_m^{0,2}(t, z) = t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} \tilde{\omega}(-z) - t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} i_0^N |z|^{-2N} \times$$

$$\times \sum_{|s|=N} z^s \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [\eta_1(\zeta) D_\zeta^s \omega(\zeta) + R(\zeta)] e^{i_0 \zeta z} d\zeta \right\}.$$

Враховуючи оцінку для $\tilde{\omega}(z)$ отримаємо

$$|\Phi_m^{0,2}(t, z)| \leq c \cdot t^{m-1-\frac{n}{\gamma}} |z|^{-n-\gamma}, |z| \geq 1.$$

Оцінимо $\Phi_i^{0,3}(t, z)$, $|z| \geq 1$, $i = \overline{1, m}$. Розкладемо $\tilde{W}_i^*(\zeta)$ за елементами $(i-1)$ рядка

$$\Phi_i^{0,3}(t, z) = t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i_0 \zeta z} \times$$

$$\times \frac{\tilde{W}_{ij}^*(\zeta) \lambda_j^{i+1}(\zeta)}{W(\zeta) (i+1)!} h_{j,i+1}(\lambda_j(\zeta)) d\zeta,$$

де $\tilde{W}_{ij}^*(\zeta)$ алгебраїчне доповнення елемента $\frac{\lambda_j^{i+1}(\zeta)}{(i+1)!} h_{j,i}(\lambda_j(\zeta))$ визначника $\tilde{W}_i^*(\zeta)$. Функція $\frac{\tilde{W}_{ij}^*(\zeta)}{W(\zeta)} \lambda_j^{i+1}(\zeta)$ є однорідною степеня 2γ .

Нехай $z = (z_1, \dots, z_n)$, розглянемо номер p такий, що $|z_p| \geq |z_k|$, $k = \overline{1, n}$. Тоді $|z| \leq \sqrt{n} |z_p|$. В інтегралі функції $\Phi_i^{0,3}(t, z)$ проінтегруємо $N = n + [\gamma] + 1$ раз частинами по змінній ζ_p

$$\Phi_i^{0,3}(t, z) = t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^N}{(i_0 z_p)^N} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0 \zeta z} \times$$

$$\times \frac{\partial^N}{\partial \zeta_p^N} \left\{ \eta_0(\zeta) \frac{\tilde{W}_{ij}^*(\zeta) \lambda_j^{i+1}(\zeta)}{W(\zeta) (i+1)!} h_{j,i+1}(\lambda_j(\zeta)) \right\} d\zeta.$$

Оскільки $\eta_0(\zeta)$ при $|\zeta| \geq 2$ фінітна, то всі доданки які виникають при диференціюванні, що містять похідні від $\eta_0(\zeta)$, фінітні і неперервні.

Далі шукаємо похідну

$$\frac{\partial^N}{\partial \zeta_p^N} \left\{ \frac{\widetilde{W}_{ij}^*(\zeta)}{W(\zeta)} \frac{\lambda_j^{i+1}(\zeta)}{(i+1)!} h_{j,i+1}(\lambda_j(\zeta)) \right\}.$$

За допомогою формул Лейбніца і Фаа де Бруно, можна порахувати, що максимальний порядок особливості в точці $\zeta = 0$ рівний $n + [\gamma] + 1 - 2\gamma$. Отже, отримуємо, що при $|z| \geq 1$

$$|\Phi_i^{0,3}(t, z)| \leq c \cdot t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} |z_p|^{-N} \leq c \cdot t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} |z|^{-n-\gamma}.$$

Функція $\Phi_i^1(t, z)$ оцінюється аналогічно, як і функція $\Phi_i^0(t, z)$. Оскільки $\eta_1(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \leq 1$, то

$$|\Phi_i^1(t, z)| \leq c \cdot t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} |z|^{-n-\gamma}, \quad |z| \geq 1.$$

Для знаходження оцінок функції $\Phi_i(t, z)$, при $|z| \leq 1$, скористаємося зображенням $K_i(t, \zeta)$

$$K_i(t, \zeta) = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} +$$

$$\sum_{j=1}^m t^{i-1} \frac{\widetilde{W}_{ij}^*(\zeta)}{W(\zeta)} \frac{\lambda_j^i(\zeta)}{i!} h_{j,i}(\lambda_j(\zeta)).$$

Тоді при

$$|\zeta| \rightarrow 0, K_i(t, \zeta) \rightarrow c \cdot t^{i-1}.$$

Функцію $\Phi_i(t, z)$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, z) &= t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{|\zeta| \leq 1} e^{i_0 \zeta z} \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta + \\ &+ t^{i-1-\frac{n}{\gamma}} \int_{|\zeta| \geq 1} e^{i_0 \zeta z} \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta \equiv \\ &\equiv \Phi_{1i}(t, z) + \Phi_{2i}(t, z). \end{aligned}$$

Отже, отримуємо при $|z| \leq 1$

$$|\Phi_{ki}(t, z)| \leq c_k \cdot \frac{t^{i-1-\frac{n}{\gamma}}}{(1+|z|)^N}, \quad k = 1, 2,$$

де

$$c_1 = c \cdot 2^N \int_{|\zeta| \leq 1} \left| \frac{W_i^*(\zeta)}{W(\zeta)} \right| d\zeta, \quad c_2 = c \cdot 2^N \int_{|\zeta| \geq 1} e^{-|\zeta|^\gamma} d\zeta.$$

Враховуючи знайдені оцінки для функції $\Phi_i(t, z)$ та заміну

$$z = zt^{-\frac{1}{\gamma}} E$$

отримуємо (12). Аналогічно доводимо оцінку (13). $\triangle$

Лема 2. При $N \geq 2n + [\gamma] + 1$, для похідних функцій

$$\{G_i(t, x)\}_{i=1}^m$$

та

$$G(t, \tau, x)$$

вірними є оцінки

$$|D_t^{k_0} G_i(t, x - \xi)| \leq c \frac{t^{i-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x - \xi|)^{n+\gamma k_0}}, \quad (14)$$

$$|D_t^{k_0} G(t, \tau, x - \xi)| \leq c \frac{(t - \tau)^{m-1}}{((t - \tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x - \xi|)^{n+\gamma k_0}}, \quad k_0 \geq 1. \quad (15)$$

Доведення. Продиференціювавши (9) k_0 разів по t та повторюючи міркування леми 1, отримуємо оцінки (14) та (15). $\triangle$

У випадку кратних коренів рівняння (5) функції $K_i(t, \sigma)$ треба шукати у вигляді

$$K_i(t, \sigma) = \sum_{j=1}^m c_{ij} t^{r_j-1} e^{\lambda_j(\sigma)t},$$

де r_j - кратність кореня $\lambda_j(\sigma)$, $\sum_{j=1}^m r_j = m$.

Позначимо

$$u_1(t, x) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} G_i(t, x - \xi) \varphi_i(\xi) d\xi,$$

$$u_2(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$

Використовуючи (12), (14) отримаємо оцінки похідних функцій $u_1(t, x)$ ($k_0 \geq 1$)

$$|D_t^{k_0} u_1(t, x)| \leq c \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(\xi)| \frac{t^{i-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x - \xi|)^{n+\gamma k_0}} d\xi. \quad (16)$$

В інтегралі формули (16) зробимо заміну

$$z = \frac{x - \xi}{t^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (*)$$

та припустимо, що функції $\varphi_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ (неперервні і обмежені), тоді оцінка (16) набуде вигляду

$$|D_t^{k_0} u_1(t, x)| \leq c \cdot \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_C.$$

Аналогічно, оцінимо похідні функції $u_2(t, x)$

$$|D_t^{k_0} u_2(t, x)| \leq c \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau, \xi)| \times \\ \times \frac{(t - \tau)^{m-1}}{((t - \tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x - \xi|)^{n+\gamma k_0}} d\xi.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну (*) та будемо припускати, що $f(t, x) \in C(\Pi)$, тоді отримуємо

$$|D_t^{k_0} u_2(t, x)| \leq c \|f\|_C \int_0^t (t - \tau)^{m-k_0-1} d\tau \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |z|)^{n+\gamma k_0}} dz.$$

З останньої нерівності можна побачити, що інтеграл по τ збіжний тільки при $k_0 < m$, а це означає, що похідна по t до порядку $m - 1$ одержуються безпосереднім диференціюванням. Покажемо, що при підвищенні гладкості до умови Гельдера на функцію

$$f(t, x) \in C_x^{(\alpha)}(\Pi),$$

існує старша похідна, яка буде обчислюватися за допомогою спеціальної формули, тобто проведемо регуляризацию розбіжного інтеграла. Припустимо, що $f(t, x)$ задовольняє умову Гельдера по змінній x , тоді старша похідна обчислюється за формулою

$$D_t^m u_2(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} [f(\tau, \xi) - f(\tau, x)] \times \\ \times D_t^m G(t, \tau, x - \xi) d\xi + \int_0^t f(\tau, x) d\tau \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G(t, \tau, x - \xi) d\xi + f(t, x) \equiv I_1 + I_2 + f(t, x),$$

$$F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left(\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \frac{\partial^{k_0} F_{x \rightarrow \sigma} [u_2(t, x)]}{\partial t^{k_0}} \right) = \\ = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial^{k_0} F_{x \rightarrow \sigma} G(t, \tau, x - \xi)}{\partial t^{k_0}} \right] [f(\tau, \xi) - f(\tau, x)] d\xi + \\ + \int_0^t f(\tau, x) d\tau \int_{\mathbb{R}^n} F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial^{k_0} F_{x \rightarrow \sigma} G(t, \tau, x - \xi)}{\partial t^{k_0}} \right] d\xi \equiv I_3 + I_4.$$

Проведемо оцінку інтегралів I_1 та I_2

$$|I_1| \leq c \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |x - \xi|^\alpha \frac{(t - \tau)^{-1}}{\left(1 + \frac{|x - \xi|}{(t - \tau)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{n+\gamma m}} d\xi \leq \\ \leq c \int_0^t (t - \tau)^{-1+\frac{\alpha}{\gamma}} d\tau = c_1 t^{\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (17)$$

Для оцінки I_2 скористаємося рівністю

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(t, \tau, x - \xi) d\xi = 1. \quad (18)$$

Доведення (18) випливає з однозначної розв'язності псевдодиференціального рівняння (1) з початковими умовами

$$\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=\tau} = \delta_{m-1, j}.$$

Залишається показати, що функція

$$u(t, x) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

задовольняє рівняння (1). Доведення даного факту проводиться аналогічно, як і в [8].

З оцінки (15) випливає, що оператор

$$\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}$$

при $t > \tau$ можна застосовувати під знаком інтеграла при $k_0 \geq 1$. Продиференціювавши рівність (18) отримаємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G(t, \tau, x - \xi) d\xi = 0.$$

З останньої рівності випливає, що I_2 дорівнює нулю.

Для оцінки інтегралів I_3 та I_4 , скористаємося рівністю

$$\frac{\partial^m G(t, \tau, x - \xi)}{\partial t^m} = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left(\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{k_0} G(t, \tau, x - \xi)}{\partial t^{k_0}} \right). \quad (19)$$

Проінтегрувавши (19) в $\mathbb{R}^n$ по x при $t > \tau$, отримаємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left(\sum_{k_0 \gamma + \nu = m \gamma} P_{\nu k_0}(\sigma) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{k_0} G(t, \tau, x - \xi)}{\partial t^{k_0}} \right) dx = 0. \quad (20)$$

Отже, I_4 дорівнює нулю. Скориставшись рівністю (18) та оцінкою (17) отримаємо

$$|I_3| \leq c \int_0^t (t - \tau)^{-1 + \frac{\alpha}{\gamma}} d\tau = c_1 t^{\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (21)$$

Оцінка (21) гарантує збіжність I_3 .

Отже, вірною є така теорема.

Теорема. Нехай $N \geq 2n + [\gamma] + 1$, рівняння (1) є параболічним, тоді для довільних функцій $\varphi_i \in C(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1, m}$, $f(t, x) \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$, розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою (11) і для його похідних справедливі нерівності

$$|D_t^{k_0} u(t, x)| \leq c \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_C + \|f\|_{C^{(\alpha)}} \right), \\ k_0 \leq m.$$

Список використаних джерел

1. Дринь Р.Я., Дринь Я.М., Лучко В.М. Коректна розв'язність задачі Коші для одного параболічного псевдодиференціального рівняння з розривними початковими умовами // Вісник НУ "Львівська політехніка"-2000, №411.- С.131-134.
2. Дринь Я.М. Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1974. № 1.
3. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т.52, № 5. С. 909-934.
4. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1984. 208 с.
5. Федорюк М.В. Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифф. уравнения. 1978. Т. 14, № 7. С.1296-1301.
6. Эйдельман С.Д. Параболические системы. - М.: Наука, 1964. - 444 с.
7. Эйдельман С.Д., Дринь Я.М. Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. Киев, 1974. С. 60-69.
8. Эйдельман С.Д., Дринь Я.М. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Матем. исслед. 1981. Вып. 63. С. 18-33.

Надійшла до редколегії 10.01.2008

УДК 519.21

Ганна І. Сливка-Тилишак, к.ф.-м.н., доцент,
Каталін Й. Вереш, аспірант

**Умови існування узагальненого розв'язку
задачі про коливання однорідної струни з
випадковими початковими умовами**

В роботі розглядається перша крайова задача для рівняння математичної фізики з випадковими початковими умовами, зокрема задача про коливання однорідної струни. Досліджено умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку. Знайдено оцінку для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Ключові слова: (рівняння коливання однорідної струни, узагальнений розв'язок, випадкові процеси).

E-mail: aslyvka@tn.uz.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

У роботі розглядається перша крайова задача математичної фізики для гіперболічного рівняння в частинних похідних, а саме задача про коливання однорідної струни, з сумісно строгого $Sub_p(\Omega)$ випадковими початковими умовами.

Основною метою роботи є знаходження умов існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку задачі про коливання однорідної струни. Знайдені оцінки для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Подібні задачі для рівняння коливання однорідної струни, прямокутної мембрани та круглої мембрани, прямокутного паралелепіпеда з строго субгауссовими та сумісно строгого $Sub_p(\Omega)$ випадковими початковими умовами розглядались в [2] – [4], [6] – [10], де були знайдені умови існування з ймовірністю одиниця класичного розв'язку таких задач.

У книзі [1] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

2 Умови існування узагальненого розв'язку рівняння коливання струни в загальному випадку

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного гіперболічного рівняння [5]. Ставиться питання про існування узагальненого розв'язку $u(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ задачі про коливання

A. I. Slyvka-Tylychak, (Phys.-Math), Cand.Sci.,
K. Yu. Veresh, PhD student

**The conditions of existence of generalized
solution of the problems of heterogeneous
string vibration with random initial condi-
tions**

The first boundary problem for the hyperbolic type equation of the mathematics physics under random initial conditions is analyzed in the work, specifically the equation of heterogeneous string vibration. The conditions of existence with probability one of generalized solution are investigated. For such a problem has been got the estimation for the distribution of supremum solving.

Key Words: (equations of heterogeneous string vibration, generalized solution, random processes).

однорідної струни, що задовольняє наступні умови:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T], \quad T > 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \eta(x), \quad x \in [0, \pi]. \quad (3)$$

Функції $p = (p(x), x \in [0, \pi])$, $q = (q(x), x \in [0, \pi])$, $\rho = (\rho(x), x \in [0, \pi])$ задовольняють наступним умовам:

- 1) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $x \in [0, \pi]$;
- 2) $p(x)$, $\rho(x)$ – двічі неперервно диференційовні функції на $[0, \pi]$;
- 3) $q(x)$ – неперервно диференційована на $[0, \pi]$.

Припустимо, що $(\xi(x), x \in [0, \pi])$ і $(\eta(x), x \in [0, \pi])$ – сумісно строгого $Sub_p(\Omega)$ випадкові процеси і такі, що майже напевно

$$\xi(0) = \xi(\pi) = \eta(0) = \eta(\pi) = 0. \quad (4)$$

При використанні методу Фур'є [5] розв'язок задачі шукається у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right], \quad (5)$$
$$x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T], \quad T > 0,$$

де

$$A_k = \int_0^\pi \xi(x) X_k(x) \rho(x) dx, \quad k \geq 1,$$

$$B_k = \int_0^\pi \eta(x) X_k(x) \rho(x) dx, \quad k \geq 1,$$

$\lambda_k, k \geq 1$ – власні значення, $X_k(x), x \in [0, \pi]$, $k \geq 1$ – відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) - q(x) X(x) + \lambda \rho(x) X(x) = 0, \quad (6)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (7)$$

Завдяки обмеженням, що накладені на функції $p(x)$, $q(x)$ і $\rho(x)$, всі власні значення $\lambda_k, k \geq 1$ додатні [5], при цьому можемо вважати, що $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$.

Нехай $D = [0, \pi] \times [0, T]$, а $C(D)$ – простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним банаховим простором.

Лема 1. [5] Нехай $\lambda_k, k \geq 1$ і $X_k(x), k \geq 1$ – власні значення і відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля (6) – (7), де функції $p(x)$, $q(x)$ і $\rho(x)$ задовольняють умовам 1) – 3).

Тоді при $k \rightarrow \infty$ $\sqrt{\lambda_k} = k + O\left(\frac{1}{k}\right)$ і для всіх $x \in [0, \pi]$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k \left(\int_0^x \left(\frac{\rho(u)}{p(u)} \right)^{\frac{1}{2}} du \right) + \frac{\beta_k(x)}{k},$$

де $\sup_{k \geq 1} \sup_{x \in [0, \pi]} |\beta_k(x)| < \infty$.

Лема 2. [5] Нехай функції $p(x)$, $q(x)$ і $\rho(x)$ задовольняють умовам 1) – 3). Тоді власні значення $\lambda_k, k \geq 1$ і відповідні їм власні функції $X_k(x), k \geq 1$ задачі Штурма-Ліувілля (6) – (7) є власними значеннями і відповідними їм власними функціями інтегрального рівняння

$$X(x) = \lambda \int_0^\pi G(x, s) \rho(s) X(s) ds, \quad (8)$$

де $G(x, s), x, s \in [0, \pi]$ – функція впливу крайової задачі (6) – (8), яка визначається рівністю

$$G(x, s) = \begin{cases} u(x)v(s), & x \leq s, \\ u(s)v(x), & x > s, \end{cases}$$

а $u(x)$ і $v(x)$, $x \in [0, \pi]$ – деякі двічі неперервно диференційовні на $[0, \pi]$ функції.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) в області D називається ряд, що зображується у вигляді (5) і який для всіх $0 \leq x \leq \pi$,

$0 \leq t \leq T$ збігається рівномірно за ймовірністю.

Розглянемо умови, що забезпечують рівномірну збіжність за ймовірністю ряду (5), якщо початкові умови $(\xi(x), x \in [0, \pi])$, $(\eta(x), x \in [0, \pi])$ – сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси.

Позначимо для $n \geq 1$

$$S_n(x, t) = \sum_{k=1}^n X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right].$$

Теорема 1. Нехай $\xi(x), \eta(x)$ – сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) в області D , що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо щоб виконувалися умови:

1) для всіх $(x, t) \in D$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} X_k(x) X_l(x) \left[E A_k A_l \cos \sqrt{\lambda_k} t \cos \sqrt{\lambda_l} t + \frac{E B_k B_l}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \sin \sqrt{\lambda_l} t \right]$$

збігався рівномірно за ймовірністю;

2) для всіх $n \geq 1$

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} \left(E |S_n(x, t) - S_n(x, s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ – неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ і виконується умова

$$\int_0^+ \psi \left(\ln \frac{1}{\sigma^{-1}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty,$$

де $\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ – обернена функція до $\sigma(\varepsilon)$.

Доведення. Теорема випливає з теореми 4.2. роботи [3].

Використовуючи асимптотичне представлення із леми 1 зробимо позначення

$$Z_n = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\gamma(x)) \cos kt + \frac{B_k}{k} \sin(k\gamma(x)) \sin kt,$$

де

$$\gamma(x) = \int_0^x \left(\frac{\rho(u)}{p(u)} \right)^{\frac{1}{2}} du, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T].$$

Теорема 2. Нехай $\xi(x), \eta(x)$ – строго випадкові $Sub_\varphi(\Omega)$ процеси. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі

(1) – (3) в області D , що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо щоб виконувалися умови:

1) для всіх $(x, t) \in D$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[EA_k A_l \sin(k\gamma(x)) \cos kt \sin(l\gamma(x)) \cos lt + \frac{EB_k B_l}{kl} \sin(k\gamma(x)) \sin kt \sin(l\gamma(x)) \sin lt + \frac{2EA_k B_l}{l} \sin(k\gamma(x)) \cos kt \sin(l\gamma(x)) \sin lt \right] < \infty$$

збігався рівномірно за ймовірністю;

2) для всіх $n \geq 1$

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-t_1| \leq h}} \left(E |Z_n(x, t) - Z_n(x_1, t_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ – неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ і виконується умова

$$\int_0^{\infty} \psi \left(\ln \frac{1}{\sigma^{-1}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty,$$

де $\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ – обернена функція до $\sigma(\varepsilon)$.

Доведення. Для доведення достатньо показати, що збіжність ряду з умови 1) забезпечує збіжність ряду з умови 1) теореми 1. А також те, що виконання умов з умови 2) забезпечують виконання умов 2) з теореми 1. Це легко показати, використавши леми 1 і 2.

3 Умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку рівняння коливання струни в частковому випадку

Теорема 3. Нехай випадкові процеси $\xi(x)$, $\eta(x)$ – сумісно строго $Sub_p(\Omega)$, де $\varphi(x)$ – така функція, що $\varphi(x) = |x|^p$ при $|x| > 1$, $p > 1$. Для того щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) в області D , що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо щоб виконувалися умови:

1) збігався наступний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[EA_k A_l + \frac{|EB_k B_l|}{kl} + \frac{2|EA_k B_l|}{l} \right] < \infty;$$

2) для довільного $\delta > 1 - \frac{1}{p}$ виконується наступна умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((EA_k^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(EB_k^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \right) (\ln k)^{\delta} < \infty.$$

Доведення. Очевидно, що збіжність ряду з умови 1) забезпечує збіжність ряду з умови 1) теореми 2.

Використовуючи приклад 4.1 роботи [3] легко довести, що з умови 2) даної теореми випливає виконання умови 2) теореми 2.

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \left(E |Z_n(x, t) - Z_n(x_1, t_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \left(E \left| \sum_{k=1}^n \left(A_k \sin(k\gamma(x)) \cos kt + \frac{B_k}{k} \sin(k\gamma(x)) \cos kt \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{k=1}^n \left(A_k \sin(k\gamma(x_1)) \cos kt_1 + \frac{B_k}{k} \sin(k\gamma(x_1)) \cos kt_1 \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[EA_k A_l \left| \sin(k\gamma(x)) \cos kt - \sin k\gamma(x_1) \cos kt_1 \right| \times \right. \right. \\ & \quad \left| \sin(l\gamma(x)) \cos lt - \sin l\gamma(x_1) \cos lt_1 \right| + \\ & \quad + \left| \frac{EB_k B_l}{kl} \left| \sin(k\gamma(x)) \sin kt - \sin k\gamma(x_1) \sin kt_1 \right| \times \right. \\ & \quad \left. \times \left| \sin(l\gamma(x)) \sin lt - \sin l\gamma(x_1) \sin lt_1 \right| + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left| \frac{EA_k B_l}{l} \left| \sin(k\gamma(x)) \cos kt - \sin k\gamma(x_1) \cos kt_1 \right| \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left| \sin(l\gamma(x)) \sin lt - \sin l\gamma(x_1) \sin lt_1 \right| \right] \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(EA_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin k\gamma(x) \cos kt - \sin k\gamma(x_1) \cos kt_1 \right| + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(EB_k^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \left| \sin(k\gamma(x)) \sin kt - \sin k\gamma(x_1) \sin kt_1 \right| \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \left| \sin(k\gamma(x)) \cos kt - \sin k\gamma(x_1) \cos kt_1 \right| \leq \\ & \leq \left| \sin(k\gamma(x)) - \sin(k\gamma(x_1)) \right| + \left| \cos kt - \cos kt_1 \right| \leq \\ & \leq 2 \left(\left| \sin \frac{k(\gamma(x) - \gamma(x_1))}{2} \right| + \left| \sin \frac{k(t - t_1)}{2} \right| \right). \end{aligned}$$

В силу обмежень на функції $p(x)$ і $\rho(x)$ можна зробити оцінку

$$\gamma(x+h) - \gamma(x) = \int_x^{x+h} \left(\frac{\rho(u)}{p(u)} \right)^{\frac{1}{2}} du \geq ch,$$

$$c = \min_{u \in [0, \pi]} \left(\frac{\rho(u)}{p(u)} \right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Використаємо нерівність [3]

$$|\sin uv| \leq \frac{(\ln(|v| + e^\delta))^\delta}{(\ln|u|)^\delta}, \quad \delta > 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & |\sin(k\gamma(x)) \cos kt - \sin k\gamma(x_1) \cos kt_1| \leq \\ & \leq 2 \left[\frac{\left(\ln \left(\frac{k}{2} + e^\delta \right) \right)^\delta}{|\ln|\gamma(x) - \gamma(x_1)||^\delta} + \frac{\left(\ln \left(\frac{k}{2} + e^\delta \right) \right)^\delta}{|\ln|t - t_1||^\delta} \right] \leq \\ & \leq 4 \frac{\left(\ln \left(\frac{k}{2} + e^\delta \right) \right)^\delta}{|\ln|h||^\delta} \leq 4 \frac{(\ln k)^\delta}{|\ln|h||^\delta}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$|\sin(k\gamma(x)) \sin kt - \sin k\gamma(x_1) \sin kt_1| \leq 4 \frac{(\ln k)^\delta}{|\ln|h||^\delta}.$$

Отже,

$$\left(E|Z_n(x, t) - Z_n(x_1, t_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{|\ln|h||^\delta},$$

де

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left((EA_k^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(EB_k^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \right) (\ln k)^\delta.$$

4. Оцінка розподілу супремуму узагальненого розв'язку рівняння коливання струни з випадковими початковими умовами.

Розглянемо ряд (5)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right],$$

$$x \in [0, \pi], t \in [0, T], T > 0,$$

для якого виконуються умови теореми 2, а саме

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} \left(E|Z_n(x, t) - Z_n(y, s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ – неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ і виконується умова

$$\int_0^\infty \psi \left(\ln \frac{1}{\sigma^{-1}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty,$$

де $\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ – обернена функція до $\sigma(\varepsilon)$.

Розглянемо

$$u_n(x, t) = \sum_{k=n}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right],$$

$$x \in [0, \pi], t \in [0, T], T > 0,$$

Використовуючи результати роботи [3], отримаємо

$$P \left\{ \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} |u_n(x, t)| > u \right\} \leq 2\tilde{A}(u, \theta),$$

де

$$\tilde{A}(u, \theta) = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{1}{\varepsilon} u(1 - \theta) - \frac{2}{\theta} I_\varphi(\theta \varepsilon) \right) \right\},$$

де $\varepsilon_0 = \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|u_n(x, t)|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\varphi^*(x)$ – перетворення Юнга-Фенхеля функції $\varphi(x)$.

$$\begin{aligned} I_\varphi(\theta \varepsilon_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta \varepsilon_0} \psi \left(\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(x)} + 1 \right) + \right. \\ & \left. + \ln \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(x)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\varepsilon_0 = \sup_{\substack{x \in [0, \pi] \\ t \in [0, T]}} (E|u_n(x, t)|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(E \left[\sum_{k=n}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right] \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \left[EA_k A_l \sin(k\gamma(x)) \sin(l\gamma(x)) \cos kt \cos lt + \right. \\ &+ \frac{EB_k B_l}{kl} \sin(k\gamma(x)) \sin(l\gamma(x)) \sin kt \sin lt + \\ &+ 2 \frac{EA_k B_l}{l} \sin(k\gamma(x)) \sin(l\gamma(x)) \cos kt \sin lt \left. \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} |EA_k A_l| + \left| \frac{EB_k B_l}{kl} \right| + 2 \frac{EA_k B_l}{l} \right]^{\frac{1}{2}} = \tilde{\varepsilon}, \end{aligned}$$

то можемо записати

$$\tilde{A}(u, \theta) = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{1}{\varepsilon} u(1 - \theta) - \frac{2}{\theta} I_\varphi(\theta \varepsilon) \right) \right\}.$$

$$I_{\varphi}(\theta\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta\varepsilon_0} \psi \left(\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}x} + 1 \right) + \ln \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(x)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

5 Висновки

В роботі досліджено умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку для задачі коливання однорідної струни, коли початкові умови є сумісно строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові процеси. Знайдено умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку такої задачі в частковому випадку. Отримано оцінку для розподілу супремуму узагальненого розв'язку задачі про коливання однорідної струни.

Список використаних джерел

1. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko Metric Characterization of Random Variables and Random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000 – 289p.
2. Yuriy Kozachenko, Anna Slivka Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random initial conditions // Theory of Stochastic Processes. – 2004. – № 1–2. – P. 60 – 71.
3. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. – 2003. – Вип. 69. – С. 63–78.

4. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Про моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. – 2006. – Вип. 74. – С. 52–67.
5. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – Москва, Высшая школа, 1964. – 559 с.
6. Сливка Г.І. Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. №4. – С. 31–37.
7. Сливка Г.І. Крайова задача математичної фізики з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. №5. – С. 172–178.
8. Сливка Г.І. Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. №4. – С. 132–140.
9. Коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2004. – Вип. №9. С. 65–76.
10. Сливка Г.І. Властивості розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. №4. – С. 52–57.

Надійшла до редколегії 03.04.2008

УДК 519.21

Олена В. Сугакова, к.ф.-м.н., доцент

**Асимптотика порогового класифікатора,
побудованого на основі «сумарного індексу»**

Розглядається пороговий класифікатор,
обудований на основі «сумарного індексу» для
ласифікації об'єктів, вибраних із суміші двох
омпонент зі змінними концентраціями.

Ключові слова: суміш компонент зі
змінними концентраціями, пороговий
класифікатор, сумарний індекс.

E-mail: sugak@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1. Вступ

Існує ціла низка прикладних задач
статистики, що приводять до моделі суміші [7,
розд.1]. Розглянемо задачу класифікації об'єктів
на основі навчаючої вибірки, вибраної із суміші
компонент з різними ймовірнісними розподілами.

Нехай ми маємо вибірку з N об'єктів, кожен з
яких може належати одному з двох класів.
Спостерігається векторна характерис-тика
 $\xi_j^N = (\xi_j^{N,1}, \xi_j^{N,2}) \in R^2$ j -го об'єкту; ξ_j^N незалежні
між собою. Концентрації k -ї компоненти суміші
під час j -го спостереження, тобто безумовні
ймовірності того, що j -й об'єкт відноситься до
класу k , вважаються відомими і рівними
 $w_{j,N}^k$; $k = 1, 2$. Щільності розподілу елементів з
одного класу позначаємо $h_k(x_1, x_2)$; $k = 1, 2$ і
вважаємо їх невідомими.

Наша мета - маючи в розпорядженні
навчаючу вибірку $\{\xi_j^N, j = \overline{1, N}\}$, побудувати
класифікатор $g: R^2 \rightarrow \{1, 2\}$, який за
спостережуваними характеристиками об'єкту
оцінював би номер класу, якому цей об'єкт
належить.

В роботі [5] розглянуто порогові класифі-
катори для випадку, коли спостерігається однови-
мірна характеристика об'єкту. Ми будемо вико-
ристовувати техніку «сумарного індексу» [9].

Проектуємо вектор спостережуваних
характеристик (ξ^1, ξ^2) на деякий не випадковий
напрямок $\bar{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$; отримуємо так
званий «сумарний індекс»:

$$S^N(\alpha) = \xi^1 \cos \alpha + \xi^2 \sin \alpha.$$

O.V.Sugakova, Cand.Sci.(Phys.-Math.),
Associate Professor

**Asimptotic of threshold classifier, based on
the "linear index"**

We consider the threshold classifier, based on
the "linear index" for classification of individuals
sampled from a mixture of two components with
different probability distributions.

Key Words: mixture of components with
different probability distributions, threshold
classifier, "linear index".

і на його основі будемо пороговий класифікатор

$$g_{t,\alpha}(\xi^1, \xi^2) = \begin{cases} 1, & S^N(\alpha) \leq t; \\ 2, & S^N(\alpha) > t \end{cases} \quad (1)$$

2. Постановка задачі.

При баєсівському підході [3] найкращим
вважається класифікатор, який мінімізує
ймовірність помилки

$$L^*(t) = p_1(1 - H_1(t)) + p_2 H_2(t),$$

де p_1, p_2 - апіорно відомі концентрації
компонентів суміші, $H_i(t)$, $i = 1, 2$ - функція роз-
поділу спостережуваних характеристик об'єкту,
що належить i -му класу. Оскільки розподіли
 $H_1(t), H_2(t)$ невідомі, то за навчаючою вибіркою
будуємо $\hat{H}_1(t), \hat{H}_2(t)$ - оцінки для них, і, підста-
вивши в формулу для баєсівського класифікатора
(1), отримуємо емпірично-баєсів класифікатор. За
оцінку помилкової класифікації беруть

$$\hat{L}^N(t) = p_1(1 - \hat{H}_1(t)) + p_2 \hat{H}_2(t).$$

Оптимальний напрямок α^* і порог
баєсівського класифікатора t^* обираються з
умови

$$(\alpha^*, t^*) = \arg \min_{(\alpha, t)} L^*(\alpha, t).$$

Оцінка напрямку $\hat{\alpha}$ та порогу $\hat{t}$ визначається
як їх вибіркового аналогу:

$$(\hat{\alpha}, \hat{t}) = \arg \min_{(\alpha, t)} \hat{L}^N(\alpha, t).$$

За оцінку $H_i(t)$ беремо інтеграл від ядерної
оцінки щільності [8], [7, п.2.2]: для $i = 1, 2$

$$\hat{u}_i^N(\alpha, t) = \frac{1}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i K\left(\frac{t - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right); \quad (2)$$

$$a_{j,N}^1 = \frac{1}{\Delta_N} \left((1 - s_N^1) w_{j,N}^1 + (s_N^2 - s_N^1) \right);$$

$$a_{j,N}^2 = \frac{1}{\Delta_N} (s_N^2 - s_N^1 w_{j,N}^1);$$

$$s_N^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (w_{j,N}^k)^k; \quad k=1,2; \quad \Delta = s_N^2 - (s_N^1)^2;$$

σ_N - параметр згладжування; K - ядро (щільність деякого ймовірнісного розподілу).

Таким чином,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i^\alpha(t) &= \frac{1}{N\sigma_N} \int \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i K\left(\frac{x - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right) dx = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i F\left(\frac{t - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right), \end{aligned}$$

де $F(t) = \int_{-\infty}^t K(x) dx$. При цьому вагові коефіцієнти

$a_{j,N}^i$ задовольняють умову

$$\langle a^i, w^k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i w_{j,N}^k = \chi\{k=i\}, \quad (3)$$

Щільності компонент суміші «сумарного індексу» $S_j^N(\alpha)$ позначимо як $u_i(\alpha, t)$ і помітимо, що $u_i(\alpha, t) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi\{x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha < t\} h_i(x_1, x_2) dx_1 \right)_i = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t \cos \alpha - u \sin \alpha, t \sin \alpha + u \cos \alpha) du; \quad i=1,2. \end{aligned}$$

(Тут $\chi(A)$ - індикатор події A .)

3. Основні результати

Припустимо, що виконуються наступні умови:

(a₁) для всіх $\delta > 0$ виконується:

$$\inf_{\alpha, t: (a - \alpha^*)^2 + (t - t^B)^2 > \delta^2} L^*(\alpha, t) > L^*(\alpha^*, t^B);$$

(a₂) вагові коефіцієнти $a_{j,N}^i$ обмежені:

$$\bar{a} = \sup_{j,N} |a_{j,N}^i| < \infty;$$

(a₃) щільності компонент «сумарного індексу» $S_j^N(\alpha)$ є обмеженими по t і α :

$$\max_{i=1,2} \sup_{(t,\alpha)} |u_i(\alpha, t)| < \infty;$$

$$(a_4) \int_{-\infty}^{\infty} |x| K(x) dx < \infty.$$

Лема 1. В умовах (a₁)-(a₄) $\hat{t} \rightarrow t^B; \hat{\alpha} \rightarrow \alpha^*$ за

ймовірністю при $N \rightarrow \infty$.

Доведення леми 1. Спершу доведемо, що $L^*(\hat{\alpha}, \hat{t}) \rightarrow L^*(\alpha^*, t^B)$ за ймовірністю. Оскільки $0 \leq L^*(\hat{\alpha}, \hat{t}) - L^*(\alpha^*, t^B) = L^*(\hat{\alpha}, \hat{t}) - \hat{L}(\hat{\alpha}, \hat{t}) + \hat{L}(\hat{\alpha}, \hat{t}) - \hat{L}(\alpha^*, t^B) + \hat{L}(\alpha^*, t^B) - L^*(\alpha^*, t^B) \leq$

$$\leq 2 \sup_{(\alpha,t)} |\hat{L}(\alpha, t) - L^*(\alpha, t)|,$$

то для цього достатньо довести, що $\sup_{(\alpha,t)} |\hat{L}(\alpha, t) - L^*(\alpha, t)| \xrightarrow{P} 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Зробимо наступні оцінки

$$\begin{aligned} \hat{L}(\alpha, t) - L^*(\alpha, t) &= p_1 (H_1^\alpha(t) - \tilde{H}_1^\alpha(t)) + \\ &+ p_2 (\tilde{H}_2^\alpha(t) - H_2^\alpha(t)). \end{aligned}$$

$$\sup_{(\alpha,t)} |\hat{H}_i^\alpha(t) - H_i^\alpha(t)| \leq$$

$$\sup_{(\alpha,t)} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i F\left(\frac{t - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i E F\left(\frac{t - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right) \right| +$$

$$\begin{aligned} &+ \sup_{(\alpha,t)} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i E F\left(\frac{t - S_j^N(\alpha)}{\sigma_N}\right) - H_i^\alpha(t) \right| = \\ &= V_1^N + V_2^N \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо V_1^N . Визначимо зважену емпіричну міру співвідношенням

$$\hat{\mu}_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N}^i \chi\{S_j^N \in A\};$$

$$\bar{\mu}_N(A) = E \hat{\mu}_N(A) = \Pr(A) = H_i(A);$$

$\Pr(dy)$ - ймовірнісна міра.

Тоді, згідно з [1, с.287]:

$$\begin{aligned} V_1^N &= \sup_{(\alpha,t)} \left| \int_{R^2} F\left(\frac{t - \cos \alpha y_1 - \sin \alpha y_2}{\sigma_N}\right) \Pr(dy) - \right. \\ &- \left. \int_{R^2} F\left(\frac{t - \cos \alpha y_1 - \sin \alpha y_2}{\sigma_N}\right) \hat{\mu}_N(dy) \right| \leq \\ &\leq \sup_{A \in S} |\Pr(A) - \hat{\mu}_N(A)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут S - сукупність множин для всіх α, t, C :

$$S = \left\{ (y_1, y_2): F\left(\frac{t - \cos \alpha y_1 - \sin \alpha y_2}{\sigma_N}\right) \geq C \right\}.$$

Позначимо

$$C_N^i = \sup_{1 \leq j \leq N} |a_{j,N}^i| + \sup_{1 \leq j \leq N} a_{j,N}^i - \inf_{1 \leq j \leq N} a_{j,N}^i$$

і відмітимо, що $\sup_{N,j} C_N^j < 2\tilde{a}$. Застосуємо наступну теорему.

Теорема 1. [7, с.60] Нехай $a_{j,N}$ - довільний масив вагових коефіцієнтів; $S \in VC$ -класом, функцію росту якого позначимо $g^G(N)$. Тоді для усіх $\lambda > 4/N$

$$\Pr\left\{\sup \frac{|\hat{\mu}_N(A) - \bar{\mu}(A)|}{C_N^j} \geq \lambda\right\} \leq \\ \leq 4\left(3Ng^G(2N)\exp\left(-\frac{\lambda^2 N}{128}\right) + \exp\left(-\frac{\lambda^2 N}{32}\right)\right).$$

Функція $F \in$ монотонною, отже, S являє собою VC -клас [2, с.232,233], тобто $g^G(N) \leq 3(N-1)^2/2$. Згідно з теоремою 1 маємо для довільної сталої $\lambda > 4/N$:

$$\Pr\left\{\sup_{A \in S} |\hat{\mu}_N(A) - \Pr(A)| \geq \lambda\right\} \leq \\ \leq \Pr\left\{\sup_{A \in S} \frac{|\hat{\mu}_N(A) - \Pr(A)|}{C_N^j} \geq \frac{\lambda}{\sup C_N^j}\right\} \leq \\ \leq 12Ng^G(2N)\exp\left(-\frac{\lambda^2 N}{(2\tilde{a})^2 128}\right) + \\ + 4\exp\left(-\frac{\lambda^2 N}{(2\tilde{a})^2 32}\right). \quad (6)$$

Права частина (6) при $N \rightarrow \infty$ прямує до 0, бо $g^G(2N)$ зростає як степенева функція, а експоненціальний множник прямує до нуля швидше. Отже, через (5), (6) маємо

$$V_1^N \xrightarrow{P} 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Тепер оцінимо V_2^N , застосувавши співвідношення (3).

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{j,N} EF\left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N}\right) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{t - x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha}{\sigma_N}\right) h_1(x_1, x_2) dx_2.$$

Отже, позначивши за (η_1', η_2') в.в. зі щільністю $h_1(x_1, x_2)$, маємо:

$$V_2^N = \sup_{(\alpha, t)} \left| EF\left(\frac{t - \eta_1' \cos \alpha - \eta_2' \sin \alpha}{\sigma_N}\right) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\alpha, x) dx \right| = \sup_{(\alpha, t)} \left| \sigma_N \int_{-\infty}^{\infty} F(v) u_1(\alpha, t - \right. \\ \left. - v\sigma_N) dv - \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\alpha, x) dx \right| = \\ = \sup_{(\alpha, t)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\alpha, x) dx K(v) dv \right| \leq \\ \leq \sigma_N \sup_{(\alpha, t)} |u_1(\alpha, t)| \int_{-\infty}^{\infty} |v| K(v) dv. \quad (8)$$

Зі співвідношень (4), (7), (8) робимо висновок, що

$$\sup_{(\alpha, t)} |\hat{H}_t^\alpha(t) - H_t^\alpha(t)| \xrightarrow{P} 0; N \rightarrow \infty, \text{ а, отже, і } \\ \sup_{[\alpha, t]} |\hat{L}(\alpha, t) - L^*(\alpha, t)| \xrightarrow{P} 0. \text{ Звідси випливає, } \\ \text{що } L^*(\hat{\alpha}, \hat{t}) \rightarrow L^*(\alpha^*, t^*) \text{ за ймовірністю.}$$

Далі. Згідно з умовою (a₁) для довільного $\delta > 0$ існує таке $c > 0$, що

$$L^*(\alpha^*, t^*) < -c + \inf_{(\alpha - \alpha^*)^2 + (t - t^*)^2 > \delta^2} L^*(\alpha, t).$$

Задамо довільне $\delta > 0$, припустимо, що виконується нерівність $(\bar{\alpha} - \alpha^*)^2 + (\bar{t} - t^*)^2 > \delta$. Тоді існує таке $c > 0$, що $L^*(\alpha^*, t^*) < -c + L^*(\bar{\alpha}, \bar{t})$. А ймовірність такої події за вищедоведеним збігається до 0 при $N \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що $\Pr\left\{(\bar{\alpha} - \alpha^*)^2 + (\bar{t} - t^*)^2 > \delta\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. А отже, для довільних сталих $c_1, c_2 > 0$

$$\Pr\left\{|\bar{\alpha} - \alpha^*| > c_1; |\bar{t} - t^*| > c_2\right\} < \\ < \Pr\left\{(\bar{\alpha} - \alpha^*)^2 + (\bar{t} - t^*)^2 > c_1^2 + c_2^2\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Лема 1 доведена.

Тепер спробуємо оцінити порядок цієї збіжності.

Теорема 2. Нехай на додачу до умов (a₁)-(a₄) виконуються наступні умови (k=1,2):

(a₅) функції $\hat{L}(\alpha, t)$, $L^*(\alpha, t)$ двічі неперервно диференційовні;

$$u_k(t) < c < \infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_1^4 + x_2^4) h_k(x_1, x_2) < \infty;$$

$$h_k(x_1, x_2) \rightarrow 0, x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty;$$

функції $h_k(x_1, x_2)$ тричі неп.-диференційовні і мають обмежені похідні до третього порядку включно;

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^s \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_1^2} (t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha) dv < \infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^s \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_1 \partial x_2} (t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha) dv < \infty;$$

для всіх $t, \alpha; s = 1, 2; k = 1, 2$;

(a₆)

$$\sigma_k^2(\alpha, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^2 \left\langle (a^k)^2, (w^r) \right\rangle_N u_r(\alpha, t) < \infty;$$

$$\sigma^2(\alpha, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^2 \left\langle (-p_1 a^1 + p_2 a^2)^2, (w^r) \right\rangle_N u_r(\alpha, t) < \infty;$$

$$\Delta^2(\alpha, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^2 \left\langle (-p_1 a^1 + p_2 a^2)^2, (w^r) \right\rangle_N \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} v^2 h_k(t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha) dv < \infty;$$

$$\omega^2(\alpha, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^2 \left\langle (-p_1 a^1 + p_2 a^2)^2, (w^r) \right\rangle_N \times$$

$$\times a_r(\alpha, t) < \infty;$$

$$\sigma^2(\alpha^*, t^B) \Delta^2(\alpha^*, t^B) - \omega^2(\alpha^*, t^B) > 0;$$

$$(a_7) \quad \exists \frac{\partial u_k(t)}{\partial t} < \bar{c} < \infty;$$

існують і обмежені рівномірно по p, q інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial h_k}{\partial x_1} (p - v \sin \alpha, q - v \cos \alpha) dv;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial h_k}{\partial x_2} (p - v \sin \alpha, q - v \cos \alpha) dv,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^s h_k(t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha) dv < \infty;$$

$k = 1, 2; s = 1, 2$.

(a₈) умови (та позначення), що накладаються на ядро:

$$d_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (K'(z))^2 dz < \infty; |K'(z)| < \infty;$$

$$K(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \pm\infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z K(z) dz = 0; D^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 K(z) dz < \infty;$$

$$d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz < \infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z|^3 K(z) dz < \infty; \int_{-\infty}^{\infty} z^2 K^2(z) dz < \infty;$$

(a₉)

$$\sigma_N = cN^{-1/5}$$

$$\text{Тоді при } N \rightarrow \infty \quad N^{\frac{2}{5}} \left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha^*}{\hat{t} - t^B} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

розподіленого $N(A, S)$, де допоміжні функції $T_i(\alpha, t)$ задаються в формулюванні леми 3;

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{(\alpha^*, t^B)}; \quad \gamma = \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(\alpha^*, t^B)}; \quad \mu = \frac{\partial r}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha^*, t^B)},$$

а A та S задаються співвідношеннями

$$A = D^2 B \left(\frac{\partial S}{\partial t} (-p_1 T_1 + p_2 T_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial t} \left(p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - p_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) \right) \Big|_{(\alpha^*, t^B)}$$

$$B = \frac{1}{\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \alpha}} \Big|_{(\alpha^*, t^B)};$$

$$S = d^2 B^2 \begin{pmatrix} \beta^2 \sigma^2 - 2\beta\gamma\omega^2 + \gamma^2 \Delta^2 & \beta\mu\sigma^2 + \gamma^2 \Delta^2 - \gamma(\mu + \beta)\omega^2 \\ \beta\mu\sigma^2 + \gamma^2 \Delta^2 - \gamma(\mu + \beta)\omega^2 & \mu^2 \sigma^2 - 2\mu\gamma\omega^2 + \gamma^2 \Delta^2 \end{pmatrix} \Big|_{(\alpha^*, t^B)};$$

Доведення теореми 2. Запишемо необхідні умови екстремуму для $\hat{L}^*$ та $\hat{L}$ відповідно.

$$\begin{cases} \frac{\partial L^*}{\partial t}(\alpha^*, t^B) = 0; \\ \frac{\partial L^*}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{L}}{\partial t}(\hat{\alpha}, \hat{t}) = 0; \\ \frac{\partial \hat{L}}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{t}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Беручи похідні, об'єднуючи перші і другі рівності формул (9), (10) відповідно і вводячи нові позначення, маємо

$$S(\alpha^*, t^B) = -p_1 u_1(\alpha^*, t^B) + p_2 u_2(\alpha^*, t^B) = 0; \quad (11)$$

$$\hat{S}_N(\hat{\alpha}, \hat{t}) = -p_1 \hat{u}_1(\hat{\alpha}, \hat{t}) + p_2 \hat{u}_2(\hat{\alpha}, \hat{t}) = 0.$$

$$r(\alpha^*, t^B) = -p_1 a_1(\alpha^*, t^B) + p_2 a_2(\alpha^*, t^B) = 0; \quad (12)$$

$$\hat{r}_N(\hat{\alpha}, \hat{t}) = -p_1 \hat{a}_1(\hat{\alpha}, \hat{t}) + p_2 \hat{a}_2(\hat{\alpha}, \hat{t}) = 0.$$

Тут $\hat{u}_i(\alpha, t)$ задається формулою (2);

$$a_i(\alpha, t) = \frac{\partial H_i^{\sigma}(t)}{\partial \alpha} =$$

$$= \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_i}{\partial x_2} (s \cos \alpha - v \sin \alpha, s \sin \alpha + v \cos \alpha) \times \\ \times (s \cos \alpha - v \sin \alpha) dv =$$

$$- \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_i}{\partial x_1} (s \cos \alpha - v \sin \alpha, s \sin \alpha + v \cos \alpha) \times \\ \times (s \sin \alpha + v \cos \alpha) dv =$$

$$= - \int_{-\infty}^t v h_i(t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha) dv.$$

(Якщо врахувати, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_2} - \sin \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_1} \right) dv = 0;$$

$$\int_{-\infty}^t \left(\cos \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_2} \right) ds =$$

$$= h_i(t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha)).$$

$$\hat{a}_i(\alpha, t) = \frac{\partial \hat{H}_i^{\sigma}(t)}{\partial \alpha} =$$

$$= \frac{1}{N \sigma_N} \sum_{j=1}^N a_{j,N} K \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha).$$

Далі, позначимо $\delta_N = \hat{\alpha} - \alpha^*$; $\Delta_N = \hat{t} - t^B$ і розкладемо за формулою Тейлора ліву частину другої рівності (11):

$$0 = \hat{S}_N(\hat{\alpha}, \hat{t}) = \hat{S}_N(\alpha^* + \delta_N, t^B + \Delta_N) \approx \hat{S}_N(\alpha^*, t^B) +$$

$$+ \delta_N \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B) + \Delta_N \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial t}(\alpha^*, t^B).$$

Ліву частину другої рівності (12) розкладаємо аналогічно, отримуємо систему наближених рівностей

$$\begin{cases} \delta_N \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B) + \Delta_N \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial t}(\alpha^*, t^B) = \\ = S(\alpha^*, t^B) - \hat{S}_N(\alpha^*, t^B) \\ \delta_N \frac{\partial \hat{r}_N}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B) + \Delta_N \frac{\partial \hat{r}_N}{\partial t}(\alpha^*, t^B) = \\ = r(\alpha^*, t^B) - \hat{r}_N(\alpha^*, t^B) \end{cases} \quad (13)$$

(Справа до першої рівності ми додали $S(\alpha^*, t^B)$, до другої $r(\alpha^*, t^B)$, бо вони рівні 0). Розв'язуємо лінійну систему (13), спростуємо позначення і помічаємо, що $\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{r}_N}{\partial t}$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \delta_N &= \frac{(S - \hat{S}) \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} - (r - \hat{r}) \frac{\partial \hat{S}}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \alpha}}, \\ \Delta_N &= \frac{(r - \hat{r}) \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} - (S - \hat{S}) \frac{\partial \hat{S}}{\partial \alpha}}{\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \alpha}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер треба знайти порядок спадання правих частин (14). В роботі [4] одержаний наступний результат.

Теорема 3 [4, с.32]. За припущень (a₅)-(a₈) справедливе зображення

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t}(t) = \bar{u}^{(1)}_k(t) + \frac{1}{\sqrt{N \sigma_N^3}} \zeta_N^k,$$

$$\text{де } \bar{u}^{(1)}_k(t) = E \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t}(t) \rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial t}(t), \quad \sigma_N \rightarrow \infty \in$$

невипадковою функцією, а в.в. ζ_N^k є асимптотично нормальними з параметрами $N(0, d_1^2 \sigma_k^2(t))$.

Згідно з цією теоремою

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} &= -p_1 \left(\bar{u}^{(1)}_1(t) - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - p_2 \left(\bar{u}^{(1)}_2(t) - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N \sigma_N^3}} (p_2 \zeta_N^2 - p_1 \zeta_N^1) = o(1), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial t}(\alpha^*, t^B) \xrightarrow{P} \frac{\partial S}{\partial t}(\alpha^*, t^B), \quad N \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Тепер впевнімося, що

$$\frac{\partial \hat{r}_N}{\partial t}(\alpha^*, t^B) \xrightarrow{P} \frac{\partial r}{\partial t}(\alpha^*, t^B), \quad N \rightarrow \infty \quad (16)$$

Для цього достатньо довести, що

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t}(\alpha^*, t^B) \xrightarrow{P} \frac{\partial a_i}{\partial t}(\alpha^*, t^B), \quad N \rightarrow \infty; i = 1, 2$$

Зробимо такі перетворення

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t} - \frac{\partial a_i}{\partial t} = B_N^1 + B_N^2, \quad \text{де} \quad (17)$$

$$B_N^1 = \frac{1}{N\sigma_N^2} \sum_{j=1}^N a'_{j,N} K' \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha) -$$

$$- \frac{1}{N\sigma_N^2} \sum_{j=1}^N a'_{j,N} E K' \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha) - \frac{1}{N\sigma_N^2} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N a'_{j,N} E K' \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right);$$

$$B_N^2 = \frac{1}{N\sigma_N^2} \sum_{j=1}^N a'_{j,N} E K' \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha) - \frac{\partial a_i}{\partial t};$$

Звернемося до посиленого ЗВЧ в наступній формі

Теорема 4 [6, с.47]. Якщо послідовність незалежних в.в. $\{X_N, N \geq 1\}$ така, що DX_N існує і $DX_N / N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N EX_k \xrightarrow{P} 0; \quad N \rightarrow \infty.$$

Застосуємо теорему 4 до аналізу B_N^1 .

Нехай

$$X_N = \frac{a'_{j,N}}{\sigma_N^2} K' \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha)$$

$$EX_N^2 = \frac{(a'_{j,N})^2}{\sigma_N^4} \sum_{j=1}^2 w'_{j,N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 h_j(x_1, x_2) \times$$

$$\times K'^2 \left(\frac{t - x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha}{\sigma_N} \right) (x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha)^2$$

Цей інтеграл існує завдяки умовам (a₅), (a₈) і, як ми бачимо, $EX_N^2 = O(1/\sigma_N^4)$. Згідно з умовою

(a₉) $\frac{DX_N}{N} \rightarrow 0; \quad N \rightarrow \infty$. Отже,

$$B_N^1 \xrightarrow{P} 0; \quad N \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Тепер розглянемо $B_N^2 = E \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t} - \frac{\partial a_i}{\partial t}$. Після заміни змінної і інтегрування частинами (завдяки

$$(a_8)) \text{ маємо: } E \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t} =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \int_{-\infty}^{\infty} v \left(\cos \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_2} \right) dv dz, \quad (19)$$

де частинні похідні беруться в точці

$$(t \cos \alpha - v \sin \alpha - z \sigma_N \cos \alpha, \\ t \sin \alpha + v \cos \alpha - z \sigma_N \sin \alpha).$$

Відповідно

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} v \left(\cos \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial h_i}{\partial x_2} \right) dv, \quad (20)$$

де похідні беруться в точці $(t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha)$.

Згідно з умовою (a₇) підінтегральна функція в інтегралі (19) має інтегровні мажоранти і, очевидно, прямує до підінтегральної функції (20) при $\sigma_N \rightarrow \infty$. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність $B_N^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, і в сукупності з (17), (18) це дає твердження (16).

Збіжність

$$\frac{\partial \hat{r}_N}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B) \xrightarrow{P} \frac{\partial r}{\partial \alpha}(\alpha^*, t^B), \quad N \rightarrow \infty \quad (21)$$

можна довести за тією ж схемою.

З (15), (16) та (21) випливає, що знаменник формул (14) задовольняє:

$$\left(\frac{\partial \hat{r}_N}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial t} \frac{\partial \hat{r}_N}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha^*, t^B)} \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha^*, t^B)}; \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Тепер розглянемо чисельники формул (14).

Лема 2. В умовах (a₁)-(a₈) справедливе граничне твердження $N^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hat{S}_N - S}{\hat{r}_N - r} \right) \Big|_{(\alpha^*, t^B)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{D^2}{2} \left(-p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + p_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) + \zeta_1 \right) \Big|_{(\alpha^*, t^B)}, \text{ де}$$

$$\frac{D^2}{2} (-p_1 T_1 + p_2 T_2) + \zeta_2$$

$$T_i(\alpha^*, t^B) = \int_{-\infty}^{\infty} (-v) \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_2^2} \right) \times (v(\alpha^*, t^B)) dv,$$

$x(v) = x(v(\alpha, t)) = (t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha)$, $i = 1, 2$.

При цьому випадковий вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ розподілений нормально $N(0, B^2)$, де

$$B^2 = d^2 \begin{pmatrix} \sigma^2(\alpha^*, t^B) & \omega^2(\alpha^*, t^B) \\ \omega^2(\alpha^*, t^B) & \Delta^2(\alpha^*, t^B) \end{pmatrix}.$$

Доведення лема 2. Спершу доведемо, що

$$\hat{a}_i(\alpha, t) = \bar{a}_i^N(\alpha, t) + \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} v_N', \quad i = 1, 2,$$

де $\bar{a}_i^N(\alpha, t) = E\hat{a}_i(\alpha, t)$ - не випадкова функція;

$$\bar{a}_i^N(\alpha, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_i(\alpha, t); \quad E v_N' = 0.$$

Після застосування (3) і заміни змінної маємо

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^N(\alpha, t) &= E\hat{a}_i(\alpha, t) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) v h_i(x(v) - z\sigma_N(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv. \end{aligned}$$

Розкладемо за формулою Тейлора функцію h_i в точці

$x = x(v) = (t \cos \alpha - v \sin \alpha, t \sin \alpha + v \cos \alpha)$, також врахуємо (а₈).

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^N(\alpha, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) (-v) \left(h_i - z\sigma_N \frac{\partial h_i}{\partial x_1} - \right. \\ &\quad \left. - z\sigma_N \frac{\partial h_i}{\partial x_2} \right)_{x(v)} + \frac{1}{2} z^2 \sigma_N^2 (-v) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_2^2} \right)_{x(v) - z\sigma_N(\theta, \eta)} dv, \\ &\quad \text{де } \theta, \eta \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^N(\alpha, t) - a_i(\alpha, t) &= \frac{\sigma_N^2}{2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) z^2 (-v) \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_2^2} \right)_{x(v) - z\sigma_N(\theta, \eta)} dv \end{aligned} \quad (23)$$

Оскільки ми припускаємо існування цих інтегралів, то нескладно переконатися, що пр.ч.

(23) являє собою вираз $\sigma_N^2 D^2 / 2 \times$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (-v) \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_2^2} \right)_{x(v)} dv + o(\sigma_N^2).$$

Справді,

$$R(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_2^2} \quad \text{і оберемо таку}$$

послідовність C_N : при $N \rightarrow \infty$ $C_N \rightarrow \infty$, але

$C_N^2 \sigma_N \rightarrow 0$. Тоді

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} K(z) z^2 dz \int_{-\infty}^{\infty} (-v) (R|_{x(v) - z\sigma_N(\theta, \eta)} - R|_{x(v)}) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(z) z^2 dz \int_{|v| < C_N} (-v) (R|_{x(v) - z\sigma_N(\theta, \eta)} - R|_{x(v)}) dv + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K(z) z^2 dz \int_{|v| > C_N} (-v) (R|_{x(v) - z\sigma_N(\theta, \eta)}) dv - \\ &\quad - \int_{|v| > C_N} (-v) (R|_{x(v)}) dv. \end{aligned}$$

Другий і третій інтеграли як «хвости» збіжних інтегралів прямують до 0 при $N \rightarrow \infty$, перший інтеграл не перевищує

$$L \int_{-\infty}^{\infty} |z|^3 K(z) dz 2C_N^2 \sigma_N \rightarrow 0. \quad \text{Тут величина}$$

$$L = 3 \max \left\{ \sup_{x_1, x_2} \left| \frac{\partial R}{\partial x_1} \right|, \sup_{x_1, x_2} \left| \frac{\partial R}{\partial x_2} \right| \right\} - \text{стала через}$$

(а₅).

Далі, з вищедоведеного витікає, що $\hat{r} - r =$

$$= -p_1(\hat{a}_1 - a_1) + p_2(\hat{a}_2 - a_2) =$$

$$= \frac{D^2 \sigma_N^2}{2} (-p_1 T_1 + p_2 T_2) + \frac{\xi_2^N}{\sqrt{N\sigma_N}} + o(\sigma_N^2), \quad \text{де}$$

$$\xi_2^N = -p_1 v_N^1 + p_2 v_N^2 = \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N (-p_1 a_{j,N}^1 +$$

$$p_2 a_{j,N}^2) \left(K \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times \right.$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha) -$$

$$- EK \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) \times$$

$$\left. (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha) \right) = \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N Y_j^N.$$

В роботі [4, с. 31] доведено, що

$$N^{\frac{2}{5}} (\hat{S}_N - S)_{(\alpha, t)} = \varphi^N(\alpha, t) + \xi_1^N, \quad \text{де}$$

$$\varphi^N(\alpha, t) \rightarrow \frac{D^2}{2} \left(-p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + p_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\xi_1^N = \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N (-p_1 a_{j,N}^1 + p_2 a_{j,N}^2) \times$$

$$\times \left(K \left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N} \right) - \right.$$

$$EK\left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N}\right) = \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N X_j^N.$$

Для завершення доведення леми 2 достатньо довести асимптотичну нормальність випадкового вектора $\begin{pmatrix} \zeta_1^N \\ \zeta_2^N \end{pmatrix}$.

Для цього скористаємося ЦТТ в схемі серій.
Теорема 5 [1, с.201]. Нехай

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^N \\ \zeta_2^N \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} X_j^N \\ Y_j^N \end{pmatrix}; E \begin{pmatrix} X_j^N \\ Y_j^N \end{pmatrix} = 0;$$

$$B_N^2 = \begin{pmatrix} D\zeta_1^N & Cov(\zeta_1^N, \zeta_2^N) \\ Cov(\zeta_1^N, \zeta_2^N) & D\zeta_2^N \end{pmatrix} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} B^2,$$

де B^2 - додатньовизначена матриця і виконується умова Ліндеберга $\forall \tau > 0$:

$$\sum_{j=1}^N E\left((X_j^N)^2 + (Y_j^N)^2\right) \chi\left\{(X_j^N)^2 + (Y_j^N)^2 > \tau^2\right\} \rightarrow 0.$$

Тоді $\begin{pmatrix} \zeta_1^N \\ \zeta_2^N \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$, що розподілений $N(0, B^2)$.

Отже, з леми 2 випливає, що $\lim_{N \rightarrow \infty} D\zeta_1^N = d^2 \sigma^2(\alpha, t)$. Побачимо, що

$$D\zeta_2^N = \frac{1}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N \left(-p_1 a_{j,N}^1 + p_2 a_{j,N}^2\right)^2 \times \\ \times \left(EK^2\left(\frac{t - S_j(\alpha)}{\sigma_N}\right) \left(S_j(\alpha)'_\alpha\right)^2 - \right. \\ \left. - EK\left(\frac{t - S_j(\alpha)}{\sigma_N}\right) \left(S_j(\alpha)'_\alpha\right)\right) = A_N^1 + A_N^2.$$

Розглянемо спершу A_N^2 .

$$\frac{1}{\sigma_N} \left(EK\left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N}\right) \times \right. \\ \left. \times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha)\right)^2 = \sigma_N \times \\ \times \left(\sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) v h_k(x(v) - z\sigma(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv\right)^2$$

Як ми це вже дослідили, інтеграл під квадратом прямує до $a_k(\alpha, t) < \infty$, і оскільки $w_{j,N}^k, a_{j,N}^1$ обмежені, то зрозуміло, що $A_N^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Тепер розглянемо A_N^1 .

$$\frac{1}{\sigma_N} EK^2\left(\frac{t - \xi_j^{N,1} \cos \alpha - \xi_j^{N,2} \sin \alpha}{\sigma_N}\right) \times$$

$$\times (\xi_j^{N,1} \sin \alpha - \xi_j^{N,2} \cos \alpha)^2 = \\ \sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) v^2 h_k(x(v) - z\sigma(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv.$$

Завдяки умовам (a₅)-(a₈) можна скористатися методом доведення формули (23) і нескладно отримати, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N^1 = d^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^2 \left\langle (-p_1 a^1 + p_2 a^2)^2, (w^r) \right\rangle \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} v^2 h_r(x(v)) dv = d^2 \Delta^2(\alpha, t).$$

Отже, $\lim_{N \rightarrow \infty} D\zeta_2^N = d^2 \Delta^2(\alpha, t)$. Знайдемо граничне значення $Cov(\zeta_1^N, \zeta_2^N)$.

$$Cov(\zeta_1^N, \zeta_2^N) = Cov\left(\frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N X_j^N, \frac{1}{\sqrt{N\sigma_N}} \sum_{j=1}^N Y_j^N\right) = \\ = \frac{1}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N Cov(X_j^N, Y_j^N) = \frac{1}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N (-p_1 a_{j,N}^1 + \\ + p_2 a_{j,N}^2) \left(EK^2\left(\frac{t - S_j(\alpha)}{\sigma_N}\right) (S_j(\alpha)'_\alpha) - \right. \\ \left. - EK\left(\frac{t - S_j(\alpha)}{\sigma_N}\right) (S_j(\alpha)'_\alpha) EK\left(\frac{t - S_j(\alpha)}{\sigma_N}\right)\right) = \\ = C_1^N + C_2^N. \text{ При цьому}$$

$$C_2^N = \sigma_N \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-p_1 a_{j,N}^1 + p_2 a_{j,N}^2)^2 \left(\sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) (-v) h_k(x(v) - z\sigma(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv \times \\ \times \left(\sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K(z) h_k(x(v) - z\sigma(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv\right) = \\ = O(\sigma_N), N \rightarrow \infty.$$

Далі, аналогічно формулі (23) доводиться, що

$$C_1^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-p_1 a_{j,N}^1 + p_2 a_{j,N}^2)^2 \times \sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) (-v) h_k(x(v) - z\sigma(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv \\ \xrightarrow{N \rightarrow \infty} d^2 \omega^2(\alpha, t).$$

Тепер залишається перевірити виконання умови Ліндеберга. Використовуючи нерівність $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ і позначаючи

$$l_j^N = (-p_1 a_{j,N}^1 + p_2 a_{j,N}^2)^2 \quad \text{бачимо, що} \\ \frac{1}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N E\left((X_j^N)^2 + (Y_j^N)^2\right) \chi\left\{(X_j^N)^2 + (Y_j^N)^2 > \tau^2\right\}$$

$$\leq \frac{2}{N\sigma_N} \sum_{j=1}^N I_j^N E(K^2 \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right)) +$$

$$+ K^2 \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha')^2 + \left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \right)^2 +$$

$$\left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha')^2 \right)^2 \chi \{X_j^N\}^2 + (Y_j^N)^2 > \tau^2 \}$$

(24)

Як ми це вже встановили вище,

$$\left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \right)^2 = O(\sigma_N^2)$$

$$\left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha')^2 \right)^2 = O(\sigma_N^2).$$

Отже, двома відповідними доданками в правій частині (24) можна знехтувати – відповідні суми прямують до нуля при $N \rightarrow \infty \quad \forall \tau > 0$. Нам залишається розглянути

$$EK^2 \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \left(1 + (S_j(\alpha)_\alpha')^2 \right) \times$$

$$\times \chi \left\{ \left(K \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) - EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(K \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha') - \right. \right.$$

$$\left. - EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha') \right)^2 > \tau^2 N \sigma_N \} \leq$$

$$\leq EK^2 \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \left(1 + (S_j(\alpha)_\alpha')^2 \right) \times$$

$$\times \chi \left\{ K^2 \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \left(1 + (S_j(\alpha)_\alpha')^2 \right) > \frac{\tau^2 N \sigma_N}{2} - \right.$$

$$\left. - \left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \right)^2 - \left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha') \right)^2 \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \int_{B_N} K^2(z) (1+v^2) h_k(x(v) - z\sigma_N(\cos \alpha, \sin \alpha)) dv,$$

$$\text{де } B_N = \left\{ (z, v) : K^2(z) (1+v^2) > \frac{\tau^2 N \sigma_N}{2} - \right.$$

$$\left. - \left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) \right)^2 - \left(EK \left(\frac{t-S_j(\alpha)}{\sigma_N} \right) (S_j(\alpha)_\alpha') \right)^2 \right\}.$$

Завдяки виконанню умови (a₇) цей вираз не перевищує

$$\sum_{k=1}^2 w_{j,N}^k \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz \times$$

$$\sup_{p,q} \int_{\bar{B}_N} (1+v^2) h_k(p - v \sin \alpha, q + v \cos \alpha) dv, \quad (25)$$

$$\text{де } \bar{B}_N = \left\{ (z, v) : (1+v^2) > \frac{\tau^2 N \sigma_N}{2 \sup_z K^2(z)} + O(\sigma_N^2) \right\}.$$

Другий інтеграл в правій частині прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$ як залишок збіжного інтегралу. Отже, права частина (24) теж прямує до нуля і умова Ліндеберга виконується.

Лема 2 доведена. Підставляючи формулу (22) і результати леми 2 у праві частини (14) і підсумовуючи всі результати, завершуємо доведення теореми 2.

Список використаних джерел

1. Боровков А.А. Теория вероятностей - М.:Наука, 1986. – 432 с.
2. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов – М.:Мир, 1974. – 416 с.
3. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. – М.:Мир, 1988. – 407 с.
4. Іванько Ю.О. Асимптотика ядерних оцінок щільностей та їх похідних, побудованих за спостереженнями із суміші зі змінними концентраціями// Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2003. - №9 – С.29-35.
5. Іванько Ю., Майборода Р. Асимптотика порогових класифікаторів, побудованих за вибіркою з суміші зі змінними концентраціями// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006 – 74. – С. 34-43.
6. Корольок В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике – М.:Наука, 1985. – 640 с.
7. Майборода Р.Є. Статистичний аналіз сумішей: Навчальний посібник – К., ВПЦ «Київ. ун-т», 2003 – 176 с.
8. Майборода Р.Є. Непараметрична статистика неоднорідних спостережень. Докт. дис. – К., 1994. – 190 с.
9. Сугакова О.В. Розпізнавання компонентів суміші//Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2000. – 62. – С. 145-150.

Надійшла до редколегії 05.06.2007

УДК 519.21

О.С. Шрамко, студент,
Р.Є. Ямненко, к.ф.-м.н., асистент

Про одне застосування узагальненого
 φ -субгауссового дробового
броунівського руху.

У статті досліджуються деякі властивості узагальненого φ -субгауссового дробового броунівського руху – φ -субгауссового випадкового процесу, властивості якого подібні до дробового броунівського руху, але розподіл якого не обов'язково є гауссовим. Зокрема, отримано оцінку ймовірності перевищення траєкторіями такого процесу рівня, заданого функцією $f(t) = L - qe^{\gamma t}$, яка має застосування у фінансовій математиці, наприклад, при дослідженні поведінки таких цінних паперів, як CPPI.

Ключові слова: φ -субгауссовий випадковий процес, узагальнений дробовий броунівський рух.

E-mail: shes21@ukr.net, yamnenko@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Задача знаходження оцінок ймовірності виходу траєкторій випадкового процесу узагальненого φ -субгауссового дробового броунівського руху за рівень, заданий деякою кривою, є актуальними, оскільки можуть бути застосовані у різноманітних задачах фінансової математики, теорії черг тощо.

Численні дослідження показують, що більшість випадкових процесів фінансової математики ефективно описуються дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста більшим або рівним $\frac{1}{2}$ внаслідок таких властивостей цього процесу, як довготривала залежність і автономність. Але ці процеси, взагалі кажучи, не є гауссовими, а лише близькі до них, і тому відповідно виникає питання про розв'язок задач для класів φ -субгауссових та строго φ -субгауссових процесів, які є ширшими, ніж клас гауссових процесів (див. книги [1, 2].)

У статті конкретизовано результати, отримані у роботах [3, 4].

O.S. Shramko, Student,
R.E. Yamnenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Assistant Professor

On an application of generalized
 φ -sub-Gaussian fractional Brownian
motion.

Some properties of a generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion are studied. This process has similar properties to fractional Brownian motion except it is not necessary Gaussian. In particular, an estimate of the probability that trajectories of the process exceed a level given by function $f(t) = L - qe^{\gamma t}$ is obtained. As an example, such estimates can be applied in financial mathematics during studying of such derivatives as CPPI.

Key Words: φ -sub-Gaussian random process, generalized fractional Brownian motion.

2 φ -субгауссові випадкові величини і процеси

Нагадаємо необхідні в подальшому означення і властивості випадкових величин і процесів із просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0, x \neq 0$, та мають місце такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. Будемо казати, що для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \quad (1)$$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір, (T, ρ) – псевдометричний (метричний) простір.

Означення 2.2. [2] Нехай φ – N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$,

$E \exp\{\lambda \xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \quad (2)$$

Теорема 2.1. [2] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}(x)$ – функція, обернена до функції φ при $x > 0$.

Означення 2.3. Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ .

Теорема 2.2. [2] Нехай Δ – строго φ -субгауссова сім'я. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (або $L_2(\Omega)$) є також строго φ -субгауссовою сім'єю з тою ж визначальною сталою.

Означення 2.4. [2] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 2.5. [1] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X .

Означення 2.6. Будемо казати, що φ -субгауссовий процес належить класу $\Psi_{x_0}^q$, якщо

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^q}{x_0^q}, & x > x_0, \\ \frac{x^2}{x_0^2}, & x \leq x_0, \end{cases}$$

де $x_0 > 0$, $q \geq 2$ – деякі сталі.

Розглянемо сепарабельний φ -субгауссовий випадковий процес $Y = (Y(t), t \in T)$. Припустимо, що існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \rightarrow 0$, коли $h \rightarrow 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(Y(t) - Y(s)) \leq \sigma(h). \quad (4)$$

Зокрема, таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(Y(t) - Y(s)),$$

якщо процес $Y(t)$ неперервний у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B – компактна множина, $B \subset T$. Введемо такі позначення:

$$\gamma(u) = \tau_\varphi(Y(u)), \quad \beta \leq \sigma\left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t, s)\right),$$

де β – деяке додатне число.

Теорема 2.3. [3] Нехай для випадкового φ -субгауссового процесу $Y(t) = \{Y(t), t \in B\}$ виконується умова (4) і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, де функція $\delta = \{\delta(t), t \geq 0\}$ – невід'ємна монотонно зростаюча, а $\tau = \{\tau(t), t \geq 1\}$ – така неперервна функція, що $\tau(t) > 0$ при $t > 1$, а функція $s(t) = \tau(\exp\{t\})$, $t \geq 0$, – опукла. Тоді при виконанні умови

$$\int_0^\beta \tau(N_B(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty,$$

процес $X(t) = Y(t) - f(t)$ є обмеженим з ймовірністю одиниця, та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ справджуються такі нерівності:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in B} (Y(t) - f(t)) > x\right\} \leq W_r(p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t \in B} (Y(t) - f(t)) < -x\right\} \leq W_r(p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in B} |Y(t) - f(t)| > x\right\} \leq 2W_r(p, \beta, x),$$

де

$$W_r(p, \beta, x) = \inf_{\lambda > 0} \exp\left\{\theta_\varphi(\lambda, p) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x\right)\right\} \times r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} \tau(N_B(\sigma^{(-1)}(u))) du\right),$$

$$\theta_\varphi(\lambda, p) = \sup_{u \in B} \left((1-p)\varphi\left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p}\right) - \lambda f(u)\right).$$

Тут $N_B(\epsilon)$, $\epsilon > 0$, – метрична масивність множини B (кількість елементів в найменшому ϵ -покритті цієї множини), $H_B(\epsilon) = \ln N_B(\epsilon)$.

3 Основні результати

Означення 3.1. [4] Будемо називати випадковий процес $Z^H = \{Z^H(t), t \in T\}$ строго φ -субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ -УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, якщо Z^H – строго φ -субгауссовий процес зі стаціонарними приростами і коваріаційною функцією

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |s - t|^{2H}), \quad t, s \in T.$$

Теорема 3.1. Нехай $Z^H = \{Z^H(t), t \in [a, b]\}$, – випадковий процес строго φ -УДБР з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, $0 \leq a, b < \infty$, $c > 0$, $\gamma > 0$, $q > 0$, $L > 0$ – деякі сталі. Тоді для всіх $p \in (0, 1)$, $\beta \in (0, (\frac{b-a}{2})^H]$ виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} (Z^H(t) - L + qe^{\gamma t}) > x \right\} \\ & \leq (b-a) \left(\frac{e}{\beta p} \right)^{\frac{1}{H}} \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ p \varphi \left(\frac{\lambda \beta}{1-p} \right) + \theta(\lambda, p) \right. \\ & \quad \left. + \lambda \left(\frac{-q(\beta p)^{\frac{1}{H}} e^{\gamma b}}{C_\Delta (1-p^{\frac{1}{H}})} - \frac{L+x}{C_\Delta} \right) \right\}, \end{aligned}$$

де $\theta(\lambda, p) = \sup_{a \leq u \leq b} \left((1-p) \varphi \left(\frac{\lambda u^H}{1-p} \right) + \frac{\lambda q e^{\gamma u}}{C_\Delta} \right)$, C_Δ – стала з означення простору строго φ -субгауссових випадкових величин.

Доведення. Застосуємо теорему 2.3 до процесу $Y(t) = \frac{1}{C_\Delta} Z^H(t)$ при $f(t) = -qe^{\gamma t} + L$, $B = [a, b]$. Нехай $\epsilon = \frac{x+L}{C_\Delta}$, $C = -\frac{q}{C_\Delta}$, тоді

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} (Z^H(t) - L + qe^{\gamma t}) > x \right\} \\ & = \mathbf{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} (Y(t) + Ce^{\gamma t}) > \epsilon \right\}, \\ & \tau_\varphi(Y(t) - Y(s)) \leq \left(\mathbf{E}(Z^H(t) - Z^H(s))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = |t - s|^H. \end{aligned}$$

Отже, покладемо $\gamma(u) = u^H$, $\sigma(u) = u^H$, тоді $\beta \in (0, (\frac{b-a}{2})^H)$. З того, що $|f(u) - f(v)| =$

$C|e^{\gamma u} - e^{\gamma v}| \leq C\gamma e^{\gamma b}|u - v|$, маємо $\delta(u) = du$, де $d = C\gamma e^{\gamma b}$. Виберемо $\tau(u) = u^\alpha$, $u \geq 1$, $0 < \alpha < H$. Тоді

$$\begin{aligned} \theta_\varphi(\lambda, p) &= \sup_{a \leq u \leq b} \left((1-p) \varphi \left(\frac{\lambda u^H}{1-p} \right) + \lambda C e^{\gamma u} \right), \\ \sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}) \right) &= \frac{d(\beta p)^{\frac{1}{H}}}{1-p^{\frac{1}{H}}}. \end{aligned}$$

Оскільки $N_B \leq (\frac{b-a}{2u} + 1)$, то для $u \leq (\frac{b-a}{2})^H$ виконується така оцінка:

$$\tau \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) \leq \left(\frac{b-a}{2u^{\frac{1}{H}}} + 1 \right)^\alpha \leq \frac{(b-a)^\alpha}{u^{\frac{\alpha}{H}}}.$$

З попередньої нерівності випливає, що

$$\begin{aligned} & \tau^{(-1)} \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} \tau \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du \right) \\ & \leq \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} \frac{(b-a)^\alpha}{u^{\frac{\alpha}{H}}} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = (b-a) \beta^{-\frac{1}{H}} p^{-\frac{1}{H}} \left(1 - \frac{\alpha}{H} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Інфімум по α правої частини оцінки (5) дорівнює

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (b-a) \beta^{-\frac{1}{H}} p^{-\frac{1}{H}} \left(1 - \frac{\alpha}{H} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} = (b-a) \left(\frac{e}{\beta p} \right)^{\frac{1}{H}}.$$

Отже, маємо твердження теореми. $\square$

Результат попередньої теореми можемо конкретизувати для строго φ -УДБР процесів з класу $\Psi_{x_0}^\alpha$, тобто коли

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{x_0^\alpha}, & x > x_0, \\ \frac{x^2}{x_0^2}, & x \leq x_0, \end{cases}$$

де $x_0 > 0$, $\alpha \geq 2$ – деякі сталі. Зокрема, коли $\alpha = 2$, клас $\Psi_{x_0}^2$ є класом субгауссових процесів, тобто містить і гауссові випадкові процеси.

Теорема 3.2. Нехай $Z^H = (Z^H(t), t \in [a, b], 0 \leq a < b < \infty)$ – процес строго φ -УДБР з класу $\Psi_{x_0}^\alpha$ та індексом Хюрста $H \in [0, 1]$ з визначальною сталою $C_\Delta > 0$. Нехай також $\gamma > 0$, $L > 0$, $q > 0$ – деякі сталі. Припустимо, що

якщо $\alpha > 2$, то виконується умова

$$L+x \geq \frac{\alpha}{x_0} \max \left\{ v^{-H(\alpha-1)}; \frac{2^{H(\alpha-1)}}{(b-a)^{H(\alpha-1)}} \right\} \times \left(\frac{p(b-a)^{H\alpha}}{2^{H\alpha}} + (1-p)a^{\alpha H} \right) + \frac{qe^{\gamma a}}{C_\Delta} - \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})}, \quad (6)$$

де $v = a$, якщо $a > 0$, або $v = b$, якщо $a = 0$.

Тоді для всіх $x \geq \max \left\{ 0, \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(1-p^{\frac{1}{H}})} + qe^{\gamma b} - L \right\}$ виконується нерівність

$$P \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} (Z(t) - L + qe^{\gamma t}) > x \right\} \leq 2\Gamma(x) \inf_{p \in (0,1)} \left(\frac{e}{p} \right)^{\frac{1}{H}} K(p, x), \quad (7)$$

де

$$\Gamma(x) = \exp \left\{ - \frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b} + L + x}{C_\Delta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \right\},$$

$$K(p, x) = \exp \left\{ \frac{px_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \times \left((\alpha-1) \left(\frac{L+x}{C_\Delta} + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{(b-a)^{H\alpha}}{(1-p)b^{\alpha H} 2^{H\alpha}} x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{-qe^{\gamma b} + L + x}{C_\Delta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \times \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b} + L + x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right) \right) \right\}.$$

Доведення. Застосуємо теорему 3.1. Для простоти виберемо $\beta = \frac{(b-a)^H}{2^H}$. Розглянемо такі

$$\lambda \geq \lambda_0 = (1-p)x_0 \max \left\{ v^{-H}; \frac{2^H}{(b-a)^H} \right\},$$

де $v = a$ при $a > 0$ або $v = b$, якщо $a = 0$. Тоді $\frac{\lambda_0(b-a)^H}{2^H(1-p)} \geq x_0$ і $\frac{\lambda_0 v^H}{1-p} \geq x_0$, тобто функцію $\varphi(x)$ можна визначити однозначно: $\varphi(x) = \frac{x_0^\alpha}{x_0^\alpha}$. Тоді

$$\theta_\varphi(\lambda, p) = (1-p) \frac{1}{x_0^\alpha} \left(\frac{\lambda b^H}{1-p} \right)^\alpha + \frac{\lambda q e^{\gamma b}}{C_\Delta}.$$

Розглянемо експоненціальну частину оцінки з теореми 3.1 для $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda, p, x) &= \exp \left\{ p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \theta(\lambda, p) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left(\frac{-q(\beta p)^{\frac{1}{H}} e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})} - \frac{L+x}{C_\Delta} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{p}{x_0^\alpha} \left(\frac{\lambda(b-a)^H}{2^H(1-p)} \right)^\alpha + \frac{1-p}{x_0^\alpha} \left(\frac{\lambda b^H}{1-p} \right)^\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda q e^{\gamma b}}{C_\Delta} + \lambda \left(\frac{-q(\beta p)^{\frac{1}{H}} e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})} - \frac{L+x}{C_\Delta} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda^\alpha}{x_0^\alpha(1-p)^\alpha} \left(\frac{p(b-a)^{H\alpha}}{2^{H\alpha}} + (1-p)b^{\alpha H} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left(-\frac{qe^{\gamma b}}{C_\Delta} + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})} + \frac{L+x}{C_\Delta} \right) \right\} \\ &:= \exp \{ \lambda^\alpha A - \lambda B \} \end{aligned}$$

Очевидно, мінімальне її значення досягається в точці $\lambda_{\text{ext}} = \left(\frac{B}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Перетворюючи нерівність $\lambda_{\text{ext}} \geq \lambda_0$, отримаємо умову (6).

Отже,

$$\begin{aligned} \min_{\lambda > 0} \Gamma(\lambda, p, x) &\leq \min_{\lambda \geq \lambda_0} \Gamma(\lambda, p, x) \\ &= \exp \left\{ - \frac{(\alpha-1)B_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} A_0^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (1-p)(\alpha-1)}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{p(b-a)^{H\alpha}}{(1-p)2^{H\alpha}} + b^{\alpha H} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{-qe^{\gamma b}}{C_\Delta} + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_\Delta(1-p^{\frac{1}{H}})} + \frac{L+x}{C_\Delta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b} + L + x}{C_\Delta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{p(b-a)^{H\alpha}}{(1-p)b^{\alpha H} 2^{H\alpha}} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b} + L + x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{px_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b} + L + x}{C_\Delta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{p(b-a)^{H\alpha}}{(1-p)b^{\alpha H} 2^{H\alpha}} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b} + L + x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Використаємо такі відомі нерівності для першої експоненти:

$$(1+x')^{\alpha'} < 1 + \alpha' x', \quad 0 < \alpha' < 1, \quad x' \geq 0;$$

$$(1-x'')^{\alpha''} \geq 1 - \alpha'' x'', \quad \alpha'' \geq 1, \quad 0 \leq x'' \leq 1.$$

Виберемо $x' = \frac{p(b-a)H\alpha}{(1-p)b^{\alpha H}2^{H\alpha}}$, $\alpha' = \frac{1}{\alpha-1}$, $x'' = \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b}+L+x)(1-p^{\frac{1}{H}})}$, $\alpha'' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Для того, щоб можна було використовувати другу нерівність необхідно, щоб $\frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(1-p^{\frac{1}{H}})} + qe^{\gamma b} \leq L+x$. Тоді, використовуючи рівність $-\frac{z_1}{z_2(1+z_3)} = -\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1 z_3}{z_2(1+z_3)}$, $z_1, z_2, z_3 > 0$, матимемо:

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda > 0} \Gamma(\lambda, p, x) \\ & \leq \exp \left\{ -\frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b}+L+x}{C_{\Delta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{\alpha-1} \frac{p(b-a)H\alpha}{(1-p)b^{\alpha H}2^{H\alpha}} + 1 \right)} \right. \\ & \quad \times \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b}+L+x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right) \Bigg\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{px_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1)}{(\alpha C_{\Delta})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \left(L+x + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} \\ & = \exp \left\{ \frac{px_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1) \left(\frac{L+x}{C_{\Delta}} + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_{\Delta}(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b}+L+x}{C_{\Delta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \times \right. \\ & \quad \times \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b}+L+x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right) \Bigg\} \\ & \quad \times \exp \left\{ \frac{p(b-a)H\alpha}{(1-p)b^{\alpha H}2^{H\alpha}} x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{-qe^{\gamma b}+L+x}{C_{\Delta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right. \\ & \quad \times \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{\alpha-1} \frac{p(b-a)H\alpha}{(1-p)b^{\alpha H}2^{H\alpha}} + 1 \right)} \times \\ & \quad \times \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b}+L+x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right) \Bigg\} \\ & \leq \exp \left\{ \frac{px_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1) \left(\frac{L+x}{C_{\Delta}} + \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{C_{\Delta}(1-p^{\frac{1}{H}})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ -\frac{x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\alpha-1) \left(\frac{-qe^{\gamma b}+L+x}{C_{\Delta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \right\} \\ & \exp \left\{ \frac{p(b-a)H\alpha}{(1-p)b^{\alpha H}2^{H\alpha}} x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{-qe^{\gamma b}+L+x}{C_{\Delta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right. \\ & \quad \times \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} b^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}} \times \\ & \quad \times \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{qp^{\frac{1}{H}}e^{\gamma b}}{(-qe^{\gamma b}+L+x)(1-p^{\frac{1}{H}})} \right) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Таким чином одержуємо твердження теореми. $\square$

Наслідок 1. Якщо Z^H - процес строго φ -УДБР з класу $\Psi_{x_0}^2$ (тобто $\alpha = 2$), то умова (6) є надлишковою.

4 Висновки

У роботі отримано оцінки ймовірності перевищення траєкторіями процесу узагальненого φ -субгауссового дробового броунівського руху з класу $\Psi_{x_0}^{\alpha}$ рівня, заданого функцією $f(t) = L - qe^{\gamma t}$, а тому, відповідно, мають місце і для гауссових процесів дробового броунівського руху.

Список використаних джерел

1. Васирик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є. φ -субгауссові випадкові процеси. - К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. - 232 с.
2. Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000.
3. Kozachenko Yu., Vasylyk O. and Yamnenko R. Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ random process the level specified by continuous function // Random Operators and Stochastic Equations. - 2005. - Vol. 13, No. 2. - P. 111-128.
4. Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion // Theory of Stochastic Processes. - 2006. - Vol. 12 (28), no.1-2. - P. 261-275.

Надійшла до редколегії 20.05.2008

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**



УДК 517.9

Грінюк Ю.М

Абсолютно неперервний спектр одного класу сингулярних матричних диференціальних операторів

Досліджується абсолютно неперервний спектр одного класу сингулярних матричних диференціальних операторів

Ключові слова: абсолютно неперервний спектр, сингулярний диференціальний оператор.

E-mail: yura_grinyk@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

У роботі вивчається абсолютно неперервний спектр оператора (див. [1,2,3])

$$L_{\min} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dx} \rho(x) \frac{d}{dx} + q(x) & \frac{d}{dx} \frac{\beta(x)}{x} \\ -\frac{\beta(x)}{x} \frac{d}{dx} & \frac{m(x)}{x^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

що розглядається у просторі $(L^2[0,1])^2$, з областю визначення

$$D(L_{\min}) = \left\{ U = (u_1, u_2)' \in (C_0^\infty(0,1))^2 \mid \omega_{l_1}(1) = h_1 u_1(1) \right\},$$

де $\omega_{l_1}(x) = -\rho(x)u_1'(x) + \frac{\beta(x)}{x}u_2(x)$, $h_1 \in \mathbb{R} \cup \infty$.

Будемо припускати, що функції $\rho, \beta, q, m \in C^2[0,1]$, а також $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ і $\rho m - \beta^2|_{x=0} > 0$. В [3] було показано, що $L_{\min}$ є напівобмеженим знизу симетричним оператором з індексами дефекта (1,1). При цьому довільне самоспряжене розширення $L_{\min}$ описується граничною умовою вигляду $w_{l_1}(0) = h_0 u_1(0)$, де $h_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Головним результатом цієї статті є наступна теорема:

Теорема 1. За наведених вище умов абсолютно неперервний спектр довільного самоспряженого розширення L оператора $L_{\min}$ визначається формулою

Yu. M. Grinyk

On the absolutely continuous spectrum of a class of matrix singular differential operators

We study the absolutely continuous spectrum of a class of matrix singular differential operators

Key Words: absolutely continuous spectrum, singular differential operator

$$\sigma_{ac}(L) = \text{Range} \left[\frac{m - \frac{\beta^2}{x^2}}{\frac{\rho}{x^2}} \right], \quad (2)$$

Зауважимо, що дана теорема продовжує та уточнює результати роботи [3], у якій було обчислено істотний спектр оператора L . Крім того, зауважимо, що істотний спектр оператора L також визначається правою частиною формули (2).

Коротко пояснимо основні етапи доведення теореми 1.

Позначимо

$$K_{\min} = \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & D \end{pmatrix},$$

де $K_{\min}$ – диференціальний оператор у який перейде оператор $L_{\min}$ після заміни $x = e^{-y}$. При цьому відрізок $[0,1]$ перейде у $[0, \infty)$. Відповідні компоненти визначаються диференціальними виразами $C = \frac{\beta}{x^2} \frac{d}{dy} + \frac{\beta}{2x^2}$, $C^* = -\frac{d}{dy} \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta}{2x^2}$,

$$D = \frac{m}{x^2}.$$

Резольвента розширення по Фрідріхсу оператора $K_{\min}$ для достатньо малих від'ємних μ , менших деякого μ_0 , визначається матрицею (див. [4, 5])

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} G_{11}(\mu) & G_{12}(\mu) \\ G_{21}(\mu) & G_{22}(\mu) \end{pmatrix},$$

де $G_{11}(\mu) = T^{-1}(\mu)$, $G_{12}(\mu) = -T^{-1}(\mu)C^*(D-\mu)^{-1}$,
 $G_{21}(\mu) = -(D-\mu)^{-1}CT^{-1}(\mu)$,
 $G_{22}(\mu) = (D-\mu)^{-1} + (D-\mu)^{-1}CT^{-1}(\mu)C^*(D-\mu)^{-1}$.
Тут $T(\mu)$ є розширенням по Фрідріхсу оператора

$$T_{\min}(\mu) = e^y \left(-\frac{d}{dy} v_\mu \frac{d}{dy} + w_\mu \right) e^y, \text{ визначеного на}$$

$$C_0^\infty(0, \infty). \quad \text{Також} \quad v_\mu = \frac{\rho t - \beta^2 - \rho \mu x^2}{t - \mu x^2},$$

$$w_\mu = \frac{1}{4} v_\mu - \frac{1}{2} x(v_\mu)'_x + (q - \mu)x^2.$$

Відзначимо, що для спрощення обчислень оператор $M(\mu)$ можна парним чином продовжити на всю дійсну вісь. Більш того, для доведення теореми 1 достатньо знайти абсолютно неперервний спектр оператора $M(\mu)$ для певного значення μ меншого μ_0 . Центральну роль в доведенні відіграє наступний результат.

Лема 1. Оператор $G_{11}(\mu)$ є компактним, а оператори $G_{12}(\mu)$, $G_{21}(\mu)$ є операторами Гільберта-Шмідта.

Лема 1 дозволяє застосувати недавні результати С. Альбеверіо та О.Ю. Константінова [6] та отримати, що $\sigma_{ac}(M(\mu)) = \sigma_{ac}(G_{22}(\mu))$.

Список використаних джерел

1. *Hardt V., Mennicken R., Naboko S.* System of singular differential operators of mixed order and applications to 1-dimensional MHD problems // *Math Nachr.* – 1999. – 205. – P. 19-68.
2. *Kurasov P., Naboko S.* On the essential spectrum of a class of singular matrix differential operators. I. Quasiregularity conditions and essential self-adjointness // *Math. Physics, Analysis and Geometry* – 2002. – 5. – P. 243 – 286.
3. *Kurasov P., Lelyavin I., Naboko S.* On the essential spectrum of a class of singular matrix differential operators. II. Weyl's limit circles for Hain-Lüst operator whenever quasiregularity conditions are not satisfied // *Proceedings of the royal society of Edinburg.* – 2008. – 1 (138). – P. 109-138.

Як відомо з теореми Като-Розенблума [7] абсолютно неперервний спектр самоспряжених операторів не змінюється при ядерних збуреннях. Це дозволяє обчислити абсолютно неперервний спектр $G_{22}(\mu)$ шляхом послідовного спрощення цього оператора за допомогою відкидання ядерних доданків. Нехай $p = \frac{1}{i} \frac{d}{dy}$ – оператор імпульсу в просторі $L_2(R)$. Для знаходження $\sigma_{ac}(G_{22}(\mu))$ ми використовуємо наступне твердження.

Лема 2. Оператори, що задані виразами $e^{-|y|}(p(pv_\mu p + w_\mu)^{-1} - (pv_\mu p + w_\mu)^{-1}p)e^{-|y|}$ та $\frac{1}{pv_\mu p + w_\mu}e^{-|y|}$ є ядерними в просторі $L_2(R)$.

Зауважимо, що доведення леми 2 стандартне і спирається на [7, теорема XI.21]. Тепер вже неважко довести наступний результат.

Лема 3. Оператор $G_{22}(\mu)$ з точністю до ядерного оператора рівний $\frac{1}{\frac{m}{x^2} - \frac{\beta}{\rho x^2} - \mu}$.

Враховуючи що $M(\mu)$ є резольвентою оператора $K_{\min}$ отримаємо теорему 1.

4. *Konstantinov A., Mennicken R.* On the Friedrichs extension of some block operator matrices // *Integral Equations Operator Theory.* – 2002. – 42. P. 472-481.
5. *Kusche, T., Mennicken R., Moller M.* Friedrichs extension and the essential spectrum of system of differential operators of mixed order // *Math Nachr.* – 2005. – 278. – P. 1591-1606.
6. *Albeverio S., Konstantinov A.* Absolutely continuous spectrum of block operator matrices // *Math Nachr.* – 2008. – 281. – P. 1201-1209.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том 3 – Москва: Мир, 1982. – 443 с.

Надійшла до редколегії 25.04.08

УДК 517.9

Володимир Я. Данілов, доцент,
Вікторія В. Могильова, доцент,
Алла М. Ткачук, доцент.

Про усереднення систем різницевих рівнянь на осі

В даній роботі, використовуючи метод усереднення, отримано результати про відповідність між точним та усередненим розв'язками системи різницевих рівнянь на осі.

Ключові слова: різницеві рівняння, метод усереднення, положення рівноваги.

*E-mail: tkachukam@ukr.net

Статтю представив член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

В теорії диференціальних рівнянь добре відомий метод усереднення [1] для диференціальних рівнянь з малим параметром, який дозволяє звести дослідження вихідної системи до більш простої усередненої. В подальшому метод усереднення узагальнювався на різні класи систем диференціальних рівнянь, на системи інтегродиференціальних рівнянь, різницевих рівнянь в частинних похідних, рівнянь в банахових просторах, стохастичних рівнянь. Досить повну бібліографію з цього приводу приведено в [2].

Зауважимо, що узагальнення першої теореми М.М. Боголюбова, в основному, отримані на скінченному інтервалі часу. Щодо обґрунтування методу усереднення на півосі, то М.М. Боголюбовим доведена відповідна теорема для випадку, коли усереднена система має „квазістатичне” положення рівноваги та близькість встановлюється саме для цього розв'язку.

Друга теорема М.М.Боголюбова для систем різницевих рівнянь у випадку існування ізольованого положення рівноваги в усередненої системи доведена у роботі [3]. В ній досліджено питання поведінки розв'язків різницевих рівнянь на нескінченному інтервалі.

В роботі [4] для звичайних диференціальних рівнянь розглянуто варіант

V. J. Danilov, associate professor,
V.V. Mogylova, associate professor,
A. M. Tkachuk, associate professor.

About averaging of systems of difference equation on the axis

In present article the results about accordance between accurate and average solutions of systems of difference equation on the axis are obtained.

Key Words: difference equations, averaging method, equilibrium position.

другої теореми М.М. Боголюбова у випадку, коли розв'язок усередненої системи не обов'язково положення рівноваги, більше того, він є лише рівномірно асимптотично стійким.

Основною метою даної роботи є отримання аналогічного результату для різницевих рівнянь.

Спочатку ми доведемо аналог другої теореми М.М. Боголюбова для різницевих рівнянь у випадку, коли положення рівноваги усередненої системи лише асимптотично стійке. Далі буде побудовано обмежений розв'язок вихідної системи на осі, що близький до розв'язку усередненої системи.

2 Основні результати

Розглядається система різницевих рівнянь вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon f_n(x_n), \quad (1)$$

де $f_n(x)$ визначена при $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in D$ (D - деяка область простору R^d), ε - малий параметр. Припустимо, що існує середнє значення послідовності f_n :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x) = f(x). \quad (2)$$

Тоді системі (1) ставиться у відповідність усереднена система

$$y_{n+1} = y_n + \varepsilon f(y_n). \quad (3)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 Нехай $f_n(x)$ визначена при $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in D$ і виконуються умови:

1) $f_n(x)$ – обмежена та задовольняє умові Ліпшиця по x із сталою L :

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leq L|x - x'| \quad (4)$$

$\forall x, x' \in D$;

2) рівномірно по $k = 0, 1, 2, \dots$ і $x \in D$ існує границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{k+N} f_n(x) = f(x); \quad (5)$$

3) розв'язок $y_n(x_0)$ ($y_0(x_0) = x_0(x_0)$) усередненої системи визначений $\forall n \in \mathbb{N}$ і лежить в області D разом із деяким β - околom;

4) розв'язок $y_n(x_0)$ – рівномірно асимптотично стійкий.

Тоді для довільного $\eta > 0$ ($\eta < \beta$) можна вказати таке ε_0 , що для $\varepsilon < \varepsilon_0$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \eta, \quad (6)$$

де $x_n(x_0)$ – розв'язок точної системи (1) такий, що $y_0(x_0) = x_0(x_0) = x_0$.

Доведення. Оскільки розв'язок $y_n(x_0)$ усередненої системи (3) рівномірно асимптотично стійкий, то для довільних $\eta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ знайдеться $\rho > 0$, що для довільного іншого розв'язку системи (3) $\bar{y}_n$ такого, що

$$|y_{n_0} - \bar{y}_{n_0}| < \rho \quad (7)$$

впливає як виконання нерівності

$$|y_n - \bar{y}_n| < \frac{\eta}{2}, \quad \text{при } n \geq n_0 \quad (8)$$

так і виконання граничного співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \bar{y}_n| = 0, \quad (9)$$

причому ρ не залежить від n_0 . При цьому можна вважати, що $0 < \rho < \eta$.

Позначимо через $U_\rho(n_0)$ – ρ - окіл точки $y_{n_0}(x_0)$. Покажемо, що співвідношення (9) рівномірне по $x_0 \in U_\rho(n_0)$. Нехай це не так. Тоді $\exists \mu > 0$, що в $U_\rho(0)$ можна вказати збіжну

послідовність точок $x^{(k)}$ і послідовність чисел n_k таких, що

$$\begin{aligned} |x^{(k)} - x_0| &< \rho, \\ |y_{n_k}(x^{(k)}) - y_{n_k}| &\geq \mu, \quad n_k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

де $y_{n_k}(x^{(k)})$ – розв'язок (3) такий, що $y_0(x^{(k)}) = x^{(k)}$. Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^0$. Тоді

$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n(x^0) - y_n| = 0$ і можна вказати $\bar{N} > 0$, щоб виконувалась нерівність

$$|y_n(x^0) - y_n| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \quad (11)$$

для всіх $n \geq \bar{N} + n_0$, де $\sigma(\mu)$ – стала, що гарантує включення розв'язків $y_n(x)$ ($y_0(x) = x$) системи (3), які починаються в $U_{\sigma(\mu)}(0)$ – околі точки

$y_0(0)$, в $\frac{\mu}{2}$ - окіл розв'язку y_n для всіх $n \geq 0$.

В силу неперервної залежності від початкових даних можна вказати таке $N_1 > 0$, щоб виконувалась нерівність

$$|y_n(x^{(k)}) - y_n(x^0)| < \frac{\sigma(\mu)}{2}, \quad (12)$$

$n \in [n_0, n_0 + \bar{N}]$, $k > N_1$. При цьому можна вважати, що $n_k \geq n_0 + \bar{N}$ для $k > N_1$. Із (11), (12) випливає

$$|y_n(n_0 + \bar{N}, x^{(k)}) - y_n(n_0 + \bar{N})| < \sigma(\mu).$$

Тому

$$|y_n(x^{(k)}) - y_n| < \frac{\mu}{2}, \quad n \geq n_0 + \bar{N}.$$

А отже, при $n = n_k$ маємо, що

$$|y_{n_k}(x^{(k)}) - y_{n_k}| < \frac{\mu}{2},$$

що суперечить (10).

Покажемо тепер, що функція $f(x)$, із умови теореми, ліпшицева. Нехай x, x' – довільні точки із D . Тоді для довільного $\mu > 0$ можна вказати числа N', N'' , що при $N > \max\{N', N''\}$ мають місце нерівності

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\mu}{2}; \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x') - f(x') \right| < \frac{\mu}{2}.$$

Тоді

$$|f(x) - f(x')| = \left| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x') - f(x') \right|$$

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x') + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x) - f(x') \right| \leq \\ & \leq \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |f_n(x) - f_n(x')| \leq \mu + L|x - x'|. \end{aligned}$$

Звідки, в силу довільності μ , отримаємо:

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|.$$

Таким чином, виконані умови теореми про усереднення на скінченному проміжку [5]. Отже, для довільних $\rho > 0$, $L > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для розв'язків x_n і y_n – точної та усередненої систем таких, що $x_{n_0} = y_{n_0}$, буде справедливою нерівність

$$|x_n - y_n| < \frac{\rho}{2} \quad (13)$$

при $n \in \mathbb{N}$ таких, що $n_0 \leq n \leq n_0 + \frac{L}{\varepsilon}$.

В силу рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$ можна вказати таке $\bar{L} > 0$ (вибір $\bar{L}$ не залежить від n_0), що при $n \geq n_0 + \bar{L}$ буде виконуватися нерівність

$$|y_n - \bar{y}_n| < \frac{\rho}{2}. \quad (14)$$

За даними η , ρ , $\bar{L}$ виберемо ε_0 так, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на інтервалах довжини $\left[\frac{\bar{L}}{\varepsilon} \right]$ ($[*]$ – ціла частина числа) для відповідних розв'язків точної та усередненої систем виконувалась нерівність (13). Враховуючи те, що ρ можна вибрати меншим η , можемо стверджувати, що нерівність (6) справедлива при $n \leq \left[\frac{\bar{L}}{\varepsilon} \right]$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Розіб'ємо піввісь точками виду $n\bar{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Нехай точка $\bar{n}\bar{L}$ – найбільша із цілих точок, що належать відріzkу $\left[0; \left[\frac{\bar{L}}{\varepsilon} \right] \right]$.

Розглянемо розв'язок $\bar{y}_n$ усередненої системи такий, що $\bar{y}_{\bar{n}\bar{L}} = x_{\bar{n}\bar{L}}$. Із нерівностей (8), (13), (14) отримаємо, що при $n \in [\bar{n}\bar{L}, (\bar{n} + 1)\bar{L}]$ справедливі оцінки:

$$|x_n(x_0) - \bar{y}_n| < \frac{\rho}{2}, \quad (15)$$

$$|y_n(x_0) - \bar{y}_n| < \frac{\eta}{2}, \quad (16)$$

$$|y_{(\bar{n}+1)\bar{L}}(x_0) - \bar{y}_{(\bar{n}+1)\bar{L}}| < \frac{\rho}{2}. \quad (17)$$

Тому при $n \in [\bar{n}\bar{L}, (\bar{n} + 1)\bar{L}]$ маємо

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - \bar{y}_n| + |\bar{y}_n - y_n| < \frac{\rho}{2} + \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Отже, нерівність (6) справедлива. Крім того, при $n = (\bar{n} + 1)\bar{L}$ маємо $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| \leq$

$\leq |x_n(x_0) - \bar{y}_n| + |\bar{y}_n - y_n(x_0)| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$, тобто точка $x_{(\bar{n}+1)\bar{L}}$ потрапляє в „зону” асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$ усередненої системи.

Далі розглянемо розв'язок $\bar{y}_n$ усередненої системи такий, що $\bar{y}_{(\bar{n}+1)\bar{L}} = x_{(\bar{n}+1)\bar{L}}$. Проводячи для нього аналогічні дослідження, отримаємо, що на інтервалі $[(\bar{n} + 1)\bar{L}, (\bar{n} + 2)\bar{L}]$ справедлива нерівність $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \eta$, а при $n = (\bar{n} + 2)\bar{L}$ нерівність $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \rho$. Останні дві нерівності означають, що нерівність (6), яку потрібно було довести, справедлива для $n \in [(\bar{n} + 1)\bar{L}, (\bar{n} + 2)\bar{L}]$, а при $n = (\bar{n} + 2)\bar{L}$ точка $x_n(x_0)$ потрапляє в „зону” асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$.

Продовжуючи даний процес отримаємо, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ на інтервалі $[(\bar{n} + m)\bar{L}, (\bar{n} + m + 1)\bar{L}]$ справедлива нерівність (6), а при $n = (\bar{n} + m + 1)\bar{L}$ нерівність

$$|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \rho.$$

В силу того, що $m \in \mathbb{N}$ – довільне, теорему доведено.

Для подальших досліджень нам потрібна буде лема. Розглянемо автономну систему різницьових рівнянь виду

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon f(x_n), \quad (18)$$

де $f(x)$ – визначена та ліпшицева із сталою L функція в деякій області $D \subset \mathbb{R}^d$. Нехай $x_0 \in D$ – положення рівноваги системи (18), тобто $f(x_0) = 0$. Позначимо через $\Pi(x_0)$ – область протягування x_0 , тобто множину точок $y_0 \in D$ таких, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(y_0) = x_0, \quad (19)$$

де $x_n(y_0)$ – розв'язок (18) такий, що $x_0(y_0) = y_0$.

Лема Якщо x_0 – асимптотично стійке положення рівноваги системи (18), то довільний

її розв'язок $x_n(y_0)$, де $y_0 \in \Pi(x_0)$, є рівномірно асимптотично стійким.

Доведення. Покажемо спочатку стійкість $x_n(y_0)$.

Оскільки x_0 - асимптотично стійке положення рівноваги, то, в силу автономності системи (18), x_0 - рівномірно асимптотично стійке. Тому

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, що якщо для деякого n_1 розв'язок $x_n(x_1)$ системи (18) задовольняє

умову $|x_n(x_1) - x_0| < \frac{\delta}{2}$, то справедлива

нерівність

$$|x_n(x_1) - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ при } n \geq n_1. \quad (20)$$

Крім того існує $\delta_1 > 0$, що якщо

$$\begin{aligned} |x_{n_1}(x_1) - x_0| < \delta_1, \quad \text{то} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_1) = x_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Із того, що $y_0 \in \Pi(x_0)$ випливає існування моменту $n(y_0)$, що

$$|x_{n(y_0)}(y_0) - x_0| < \frac{\delta}{2}, \quad (22)$$

а тому

$$|x_n(y_0) - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ при } n \geq n(y_0). \quad (23)$$

Аналогічно існує момент $n_1(y_0)$, що

$$|x_{n_1(y_0)}(y_0) - x_0| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Із сумарних зображень розв'язків $x_n(y_0)$ та $x_n(y_1)$ системи (18) отримаємо оцінку для їх різниці:

$$\begin{aligned} |x_n(y_0) - x_n(y_1)| &\leq |y_0 - y_1| + \varepsilon \left| \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p(y_0)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p(y_1)) \right| \leq |y_0 - y_1| + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{p=0}^{n-1} |f(x_p(y_0)) - f(x_p(y_1))| \leq \\ &\leq |y_0 - y_1| + L\varepsilon \sum_{p=0}^{n-1} |x_p(y_0) - x_p(y_1)|. \end{aligned}$$

Звідси та з [5] маємо:

$$|x_n(y_0) - x_n(y_1)| \leq |y_0 - y_1|(1 + L\varepsilon)^n. \quad (24)$$

Вибором досить малого μ , із врахуванням (24), для кожного $\bar{n} \in [0, n(y_0)]$ можна отримати оцінку

$$|x_n(y_0) - x_n(y_1)| \leq \frac{\delta}{2},$$

для $n \in [\bar{n}, n(y_0)]$, якщо $|x_{\bar{n}}(y_0) - y_{\bar{n}}(y_1)| \leq \mu$.

Із (20), (22) та (23) отримаємо стійкість $x_n(y_0)$.

Рівномірна стійкість розв'язку $x_n(y_0)$ випливає із рівномірної оцінки (24) для $n \in [0, n(y_0)]$ та рівномірної стійкості x_0 .

Аналогічно, вибором малого μ_1 , для кожного $\bar{n} \in [0, n_1(y_0)]$ можна отримати оцінку

$$|x_n(y_0) - x_n(y_1)| \leq \frac{\delta_1}{2},$$

при $n \in [\bar{n}, n_1(y_0)]$, якщо $|x_{\bar{n}}(y_0) - x_{\bar{n}}(y_1)| \leq \mu_1$,

причому μ_1 не залежить від $\bar{n}$. Із (21) отримаємо асимптотичну стійкість розв'язку $x_n(y_0)$. Лему доведено.

Має місце теорема.

Теорема 2 Нехай усереднена система (3) має асимптотично стійке положення рівноваги $x_0 \in D$ та виконуються умови 1) і 2) теореми 1. Тоді справедливий висновок теореми 1 для розв'язків $x_n(y_0)$ та $y_n(y_0)$ систем (1) та (3) відповідно таких, що $y_0(y_0) = x_0(y_0) = y_0$, а $y_0 \in \Pi(x_0)$.

Доведення даної теореми безпосередньо випливає із леми 1 та теореми 1.

Теорема 3 Нехай $f_n(x)$ визначена при $n \in \mathbb{Z}$, $x \in D$ і виконуються умови:

- 1) $f_n(x)$ - обмежена та задовольняє умові Ліпшиця по x із сталою L ;
- 2) рівномірно по $k \in \mathbb{Z}$, $x \in D$ існує границя (5);
- 3) усереднена система (3) має асимптотично стійке положення рівноваги x^0 .

Тоді для довільного $\eta > 0$ можна вказати таке ε_0 , що для $\varepsilon < \varepsilon_0$ точна система (1) має розв'язок x_n , для якого справедлива нерівність

$$|x_n - x^0| < \eta, \text{ при } n \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $\eta > 0$ та побудуємо розв'язок x_n точної системи, який задовольняє умову (25).

Оскільки x^0 - асимптотично стійке положення рівноваги, то для даного $\eta > 0$ можна вказати $\delta > 0$ та $\bar{n} \in \mathbb{N}$, що для довільного розв'язку $\tilde{y}_n$ системи (3) такого, що $|\tilde{y}_{\bar{n}} - x^0| < \delta$ будуть справедливими нерівності

$$|\tilde{y}_n - x^0| < \frac{\eta}{2}, \text{ при } n \geq n_0 \quad (26)$$

$$|\tilde{y}_n - x^0| < \frac{\delta}{4}, \text{ при } n \geq n_0 + \tilde{n}, \quad (27)$$

причому δ та $\tilde{n}$ не залежать від n_0 .

Нехай ξ_0 - довільна точка із δ -околу x^0 . Розглянемо розв'язок x_n точної системи, який при $n = -\tilde{n}$ виходить із точки ξ_0 . В силу теореми про усереднення на скінченному проміжку [5] за даними δ та $\tilde{n}$ можна вибрати ε_0 , щоб при $\varepsilon < \varepsilon_0$ виконувалась нерівність

$$|x_n - \tilde{y}_n| < \frac{\delta}{4}, \quad n \in [-\tilde{n}; 0], \quad (28)$$

де $\tilde{y}_n$ - розв'язок усередненої системи такий, що $\tilde{y}_{-\tilde{n}} = \xi_0$.

Із (26), (27) та (28) випливає, що

$$|x_n - x^0| < \eta, \quad \text{при } n \in [-\tilde{n}; 0] \quad (29)$$

та $|x_0 - x^0| < \frac{\delta}{2}$.

Тому при $\varepsilon < \varepsilon_0$ всі розв'язки точної системи, які починаються при $n = -\tilde{n}$ в δ -околі x^0 , не виходячи із її η -околу, потрапляють при $n = 0$ в $\frac{\delta}{2}$ -оکیل цієї точки.

Аналогічно, в силу умови 2) даної теореми, можна показати, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ розв'язок точної системи, який починається при $n = -k\tilde{n}$ в δ -околі x^0 , не виходить при $n \in [-k\tilde{n}; -(k-1)\tilde{n}]$ із її η -околу, а при $n = -(k-1)\tilde{n}$ потрапляє в $\frac{\delta}{2}$ -оکیل точки x^0 для $k \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $S_k(\varepsilon)$ - множину значень розв'язків точної системи при $n = 0$, які при $n = -k\tilde{n}$ знаходяться в δ -околі x^0 . На підставі викладеного вище, ця множина не є порожньою

для довільного натурального k та $\varepsilon < \varepsilon_0$ і при цьому справедливе включення $S_k(\varepsilon) \subset S_{k-1}(\varepsilon)$.

Нехай $\xi_0(\varepsilon)$ - спільна для всіх $S_k(\varepsilon)$ точка. Розглянемо тепер розв'язок x_n точної системи, який при $n = 0$ виходить із точки $\xi_0(\varepsilon)$. Даний розв'язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і в точках виду $-k\tilde{n}$ належить δ -околу точки x^0 для довільного натурального k . Тому він необмежено продовжуваний вліво і для довільного $n \leq 0$ справедлива оцінка (25) при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Його продовжуваність вправо і справедливості оцінки (25) для $n \in \mathbb{N}$ є очевидними. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука. 1974. - 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. - К.: Наукова думка. 1971. - 440 с.
3. Мартынюк Д.И., Данилов В.Я., Паньков В.Г. Вторая теорема Н.Н.Боголюбова для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. т. 48, № 4 (1996), с. 464-475.
4. Самойленко А. М., Станжицкий А. М. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале // Диф. уравн. т.42, № 4 (2006), с. 1-7.
5. Белан Е. П. О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Укр. мат. журн. т. 19, № 3 (1967), с. 85-90.
6. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. - Наукова думка. 1972. - 246 с.

Надійшла до редколегії 19.05.08

УДК 539.3

Ірина В. Лебедєва*, к.ф.-м.н., доцент,
Олена В. Ващіліна, к.ф.-м.н., доцент
Юлія О. Заєць, асистент

Перетворення фронтів розривних хвиль у неоднорідних трансверсально-ізотропних середовищах

Розглядаються випадки перебудови плоскої розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному пружному середовищі, параметри анізотропії якого змінюються неперервно. Досліджується залежність форми променів і фронтів від параметрів неоднорідності.

Ключові слова: слабка ударна хвиля, неоднорідне пружне середовище, променевий метод, каустика

*E-mail: Lebedevai@ukr.net

Статтю представив проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

При поширенні розривних (слабких ударних) хвиль у пружних середовищах можливі ефекти їх суперпозиції та виникнення каустик, на яких хвилі фокусуються, і їх інтенсивність прямує до нескінченності (в рамках ідеальної лінійної теорії пружності) [1]. У задачах сейсмології, сейсморозвідки, при аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень актуальними є задачі математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід з різними механічними властивостями.

Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках, пов'язана з короткочасністю високоінтенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області, пов'язаного з вільною граничною поверхнею середовища, і перебудовою поверхні фронту ударної хвилі з її поширенням. Оскільки при цьому межа виділеної для розрахунку області еволюціонує з просуванням хвильового фронту, для аналізу таких процесів виявляються неприйнятними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням

I.V. Lebedyeva, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,

O.V. Vashchilina, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

Yu. O. Zaets, Assistant Professor

Transformation of discontinuous waves fronts in nonhomogeneous transversally isotropic elastic medium

The cases of transformation of a plane unstationary discontinuous wave in the nonhomogeneous transversally isotropic elastic medium with continuous parameters of anisotropy are examined. The dependence of rays and fronts shapes on heterogeneity parameters is investigated.

Key Words: weak shock wave, nonhomogeneous elastic medium, ray method, caustic.

геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають найбільш повну інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності імпульсу, що переноситься нею, в кожній точці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, яке забезпечує хороший кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи [2, 3].

Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі, чи ейконала, і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача досить просто розв'язується для ізотропних середовищ, однак і там виникають деякі ускладнення, коли доводиться досліджувати взаємодію хвилі з поверхнею розділу середовищ з різними механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища тощо), в результаті чого утворюються каустики, пов'язані з фокусуванням енергії і необмеженим зростанням інтенсивності поля.

Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних

анізотропних середовищах, оскільки в цих випадках полюва функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; в загальному випадку промені не ортогональні до поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових, і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. Крім того промені викривляються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості.

2. Постановка задачі

В теорії поширення хвиль у неоднорідних пружних середовищах зазвичай розглядаються два типи неоднорідностей – розривні та неперервні. Неоднорідності першого типу зазвичай реалізуються за рахунок з'єднання двох однорідних середовищ на загальній поверхні контакту. Поширення хвиль у таких середовищах поза поверхнею контакту відбувається вздовж прямолінійних променів. Однак під час взаємодії падаючої пружної хвилі з поверхнею розділу утворюються додаткові відбиті та заломлені квазіпоздовжні та квазіпоперечні хвилі. Процеси формування таких хвиль досліджені у роботах [4-8]. У середовищах другого типу хвильові збурення розповсюджуються лише вздовж криволінійних променів. За рахунок криволінійності променів відбувається суттєва перебудова хвильових фронтів, що часто супроводжується виникненням на них геометричних особливостей (каустик). У даній роботі розглядаються неоднорідності 2-го типу. Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень, t – час.

У зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів, будемо розрізняти вектори фазової v і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею сталої фази $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$, кожна елементарна площадка якого рухається вздовж місцевої одиничної нормалі $\mathbf{n}$ зі швидкістю v .

Тут $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації $\mathbf{A}$ хвилі і її фазової швидкості v для вибраного напрямку $\mathbf{n}$ можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи випливає рівняння третього ступеня відносно квадрата фазової швидкості v^2

$$\left| \sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{ii} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі $\mathbf{n}$ можна визначити і розташувати в порядку спадання три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне із знайдених значень $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1, 2, 3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями $v_r(\mathbf{n})$.

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ має задовольняти диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

що узагальнює рівняння ейконала в геометричній оптиці для пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k ($k=1, 2, 3$), що входять у (5), є компонентами вектора рефракції

$$p_k \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v_r(\mathbf{n})} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (5), яке за методом характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{d\tau} &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \\ dp_k d\tau &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення

хвилі вздовж променя з променевою швидкістю $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$. Друга група рівнянь вказує на прямолінійність променів в однорідному середовищі $\lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}$

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (6) замінюються більш складними співвідношеннями [6-8].

$$\frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (m=1,2,3),$$

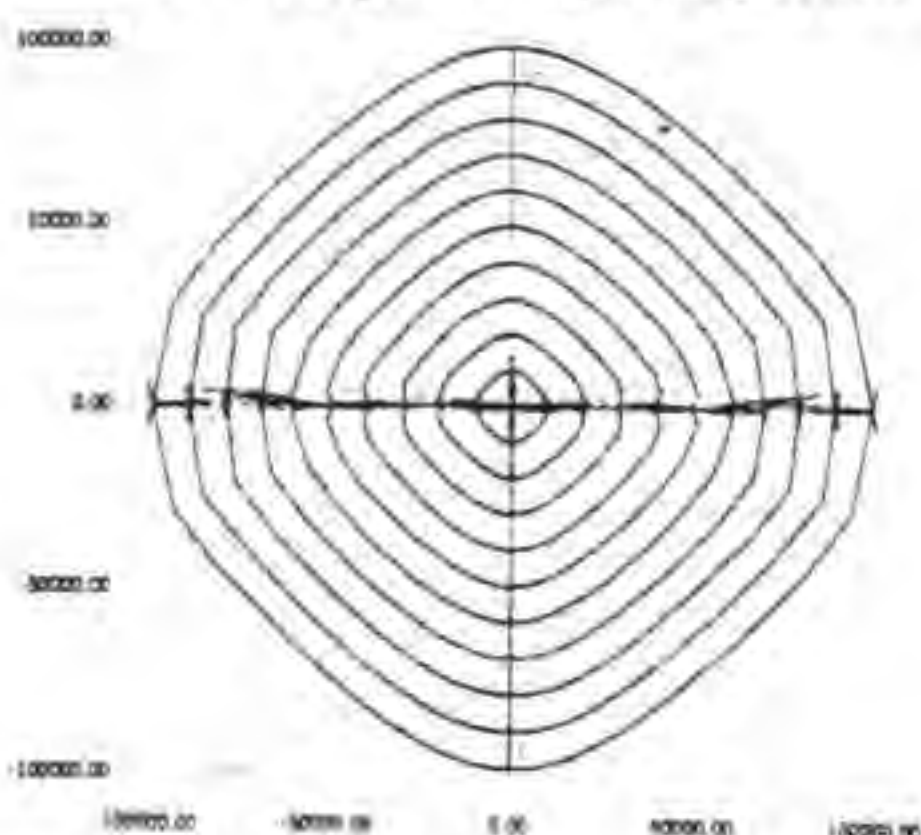
$$\frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \quad (7)$$

Наведені залежності дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку

промені стають криволінійними.

Розглянемо трансверсально-ізотропне

3. Результати дослідження

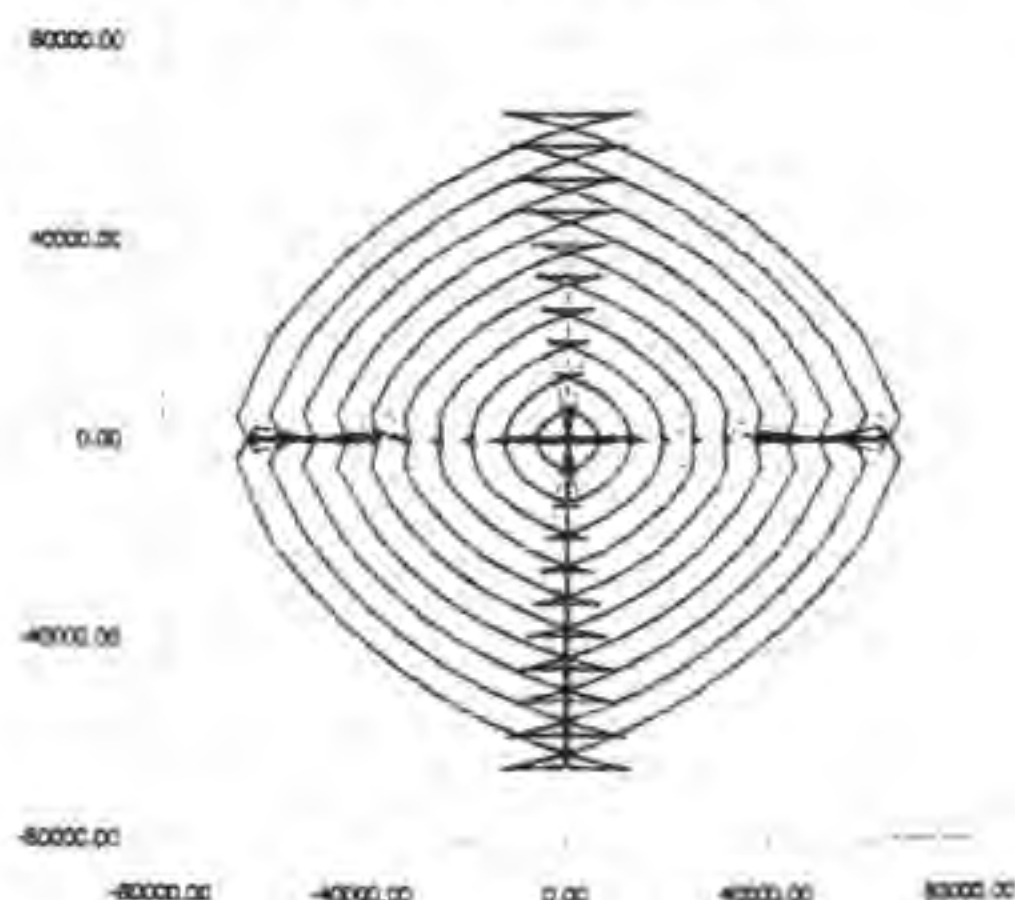


а) квазіповздовжньої qP-хвилі

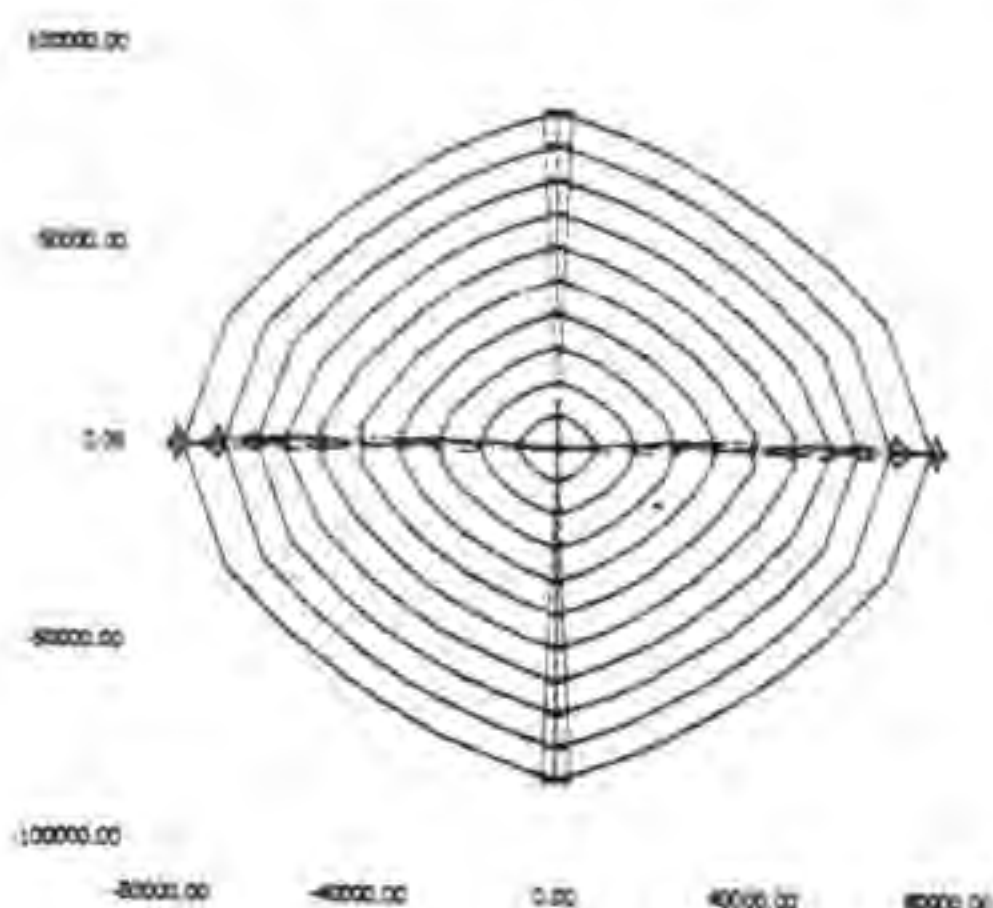
середовище, вісь симетрії якого збігається з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії, компоненти $C_{ik,pq}$ тензора пружних сталих кожного середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці..

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

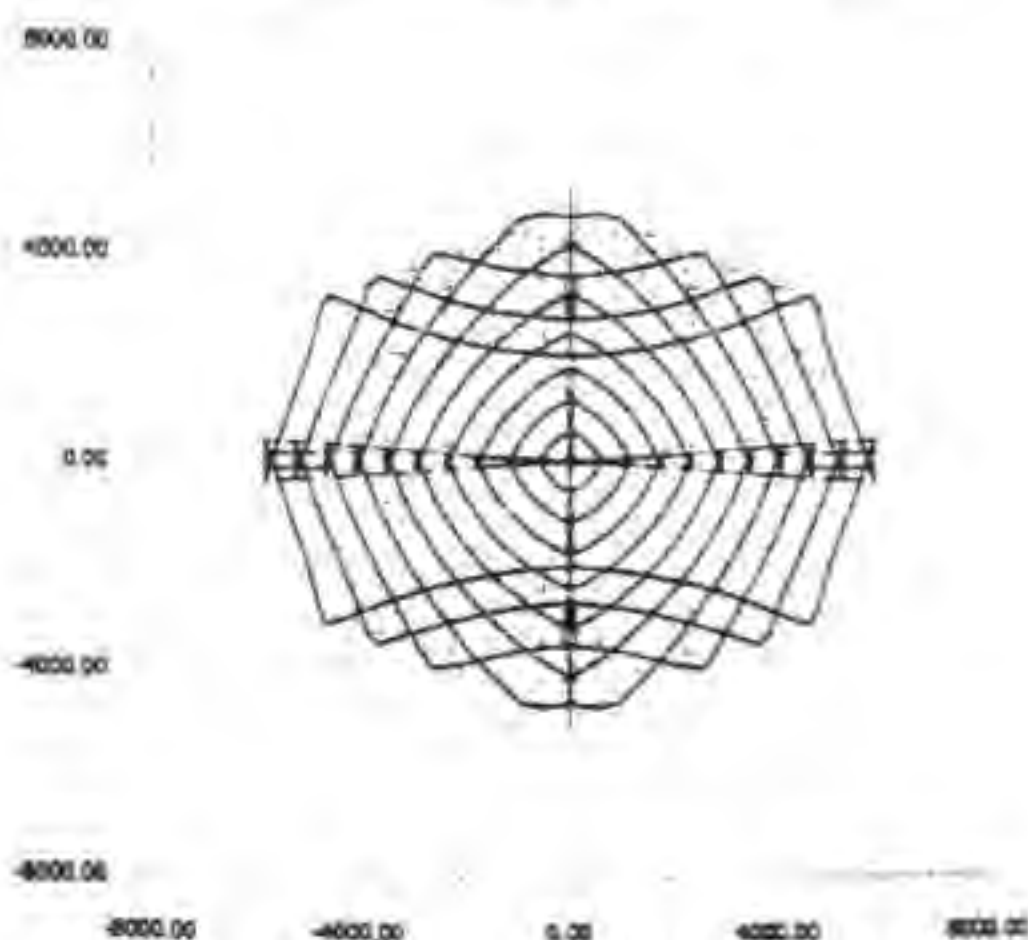
де λ і μ – параметри Ламе, l, m, p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного. В загальному випадку на відміну від однорідного, для неоднорідного середовища густина ρ та параметри l, m, p є функціями координат x_1, x_2, x_3 . У даній роботі розглядаються середовища, у яких змінною є тільки величина ρ .



б) квазіпоперечної qS-хвилі



а) квазіповздовжньої qP-хвилі



б) квазіпоперечної qS-хвилі

Рис. 2. Еволюція фронтів хвиль в середовищі 2

На основі запропонованої методики проведено комп'ютерне моделювання задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізотропного пружного середовища, густина ρ якого змінюється по вертикальній змінній за косинусоїдальним законом.

Рис.1 ілюструє систему променів і фронтів розривної хвилі зі зміною часу для середовища 1 з параметрами: $\rho = \rho_0 [1 + 0.1 \cos(\alpha x_3)]$, $\rho_0 = 6650 \text{ кг/м}^3$, $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.28$. Параметри анізотропії $l = -0.5\lambda$, $m = 0.3\mu$, $p = -0.1(\lambda + 2\mu)$.

Рис.2 відповідає випадку поширення хвилі у середовищі 2 де $\rho = \rho_0 [1 + \cos(\alpha x_3)]$, $\rho_0 = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$. Параметри анізотропії $l = 0.1\lambda$, $m = 0.3\mu$, $p = 0.5(\lambda + 2\mu)$.

4. Висновки

Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів навіть квазіпоздовжніх qP хвиль утворюються геометричні особливості – каустики, де промені фокусуються, внаслідок чого інтенсивність поля необмежено зростає. Зауважимо, що в однорідному трансверсально-ізотропному середовищі промені є прямими, а особливості спостерігаються лише на фронтах квазіпоперечних qS -хвиль [2].

Список використаних джерел

1. Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М: Наука, 1980. – 304 с.
2. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 280 с.
3. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К.: Наукова думка, 1988. – 220 с.
4. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3. – С. 394–402.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – 27, №3. – С. 418–426.
6. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40, – P. 237–247.
7. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43, – P. 74–90.
8. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Focusing and dispersion of a plane wave by transversally isotropic elastic lenses // Acoustical Physics – 2004. – 50, – 2. – P. 140–145.

Надійшла до редколегії 05.03.2008

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 531.37; 538.31

Григор'єва Л.В., аспірантка

Динамічна модель вільного тіла в центральних або нецентральних фізичних полях та її Maple-аналіз

Розроблено інструментарій для нелінійної динамічної системи 12-го порядку, що узагальнює рух вільного тіла в гравітаційному, електричному або магнітному полях.

Ключові слова: вільне тіло, нелінійні динамічні моделі, система Maple.

¹E-mail: l.v.grigoryeva@gmail.com

Статтю представив член-кореспондент НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор Ляшко С.І.

Нехай точкові джерела силового фізичного поля (заряди) q_1, q_2 закріплені на осі Oz інерціального тригранника $Oxyz$ на відстанях l_1, l_2 від його начала O , а q_3, q_4 – на осі O_1z_1 тригранника $O_1x_1y_1z_1$ на відстанях l_3, l_4 від начала O_1 , розташованого у центрі мас вільного тіла (рис. 1).

Законом потенціальної енергії парної взаємодії кожного нерухомого джерела з кожним джерелом на вільному тілі вважатимемо закон оберненої відстані між ними ($R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24}$ на рис.1). Йому відповідають закони Ньютона і Кулона. Довільність величин і знаків зарядів q_i та відстаней l_i ($i=1, \dots, 4$) дозволяє моделювати як центральні силові поля, (ними можуть бути гравітаційне або електричне поле), так і нецентральні, яким є поле магнітне. Для магнітної взаємодії необхідно виконати умову нульових сум нерухомих зарядів і зарядів вільного тіла.

Тоді система точкових зарядів на рис. 1 відповідатиме або віддаленим магнітам або довгим намагніченим циліндрам [1,2].

Дипольна взаємодія визначатиметься нульовою відстанню між нерухомими зарядами і зарядами вільного тіла, але обмеженою величиною добутків зарядів на відстань між ними. У випадку довгих намагнічених циліндрів відстані між відповідними парами зарядів є ненульові і обмежені зверху величини.

Grigoryeva L.V., postgraduate student

Dynamic Model of a Free Body in Central or Non-Central Physical Fields and Its Maple-Simulation Tools

Maple simulation tools for the 12th-order nonlinear dynamic system model generalizing a free body motion in gravitational, electric or magnetic fields is developed.

Key words: free body, nonlinear dynamic models, software Maple.

Let the point sources (charges) q_1, q_2 of a physical force field fixed on Oz -axis of the inertial trihedron $Oxyz$ be l_1, l_2 -distant from the origin O , and let the sources q_3, q_4 fixed on O_1z_1 -axis of the trihedron $O_1x_1y_1z_1$ be l_3, l_4 -distant from the origin O_1 coincided with the free body mass center (Fig. 1).

The inverse distance ($R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24}$ in fig.1) law of interaction between any immobile source and a source fixed on the free body is considered as the potential energy law of any pairwise interaction. This is in agreement with Newton's law of gravity and Coulomb's law in electricity. Arbitrary values and signs of charges q_i and distances l_i ($i=1, \dots, 4$) allow modeling both central force fields (e.g. gravity or electrical field) and non-central ones e.g. magnetic fields. In the last case the condition of zero sums of the immobile charges pair and free body's charges pair must be satisfied.

Then the point charges system represented in Fig.1 can be corresponded with two arbitrary removed magnets or two long cylindrical magnets [1,2].

At that the dipole interaction is determined by zero distance between the pair of immobile charges and the body's pair of charges and along with that the product values of charges and corresponding distances must be bounded above. The distances between immobile charges pair and body's charges pair are non-zero and bounded above in a case of long cylinders.

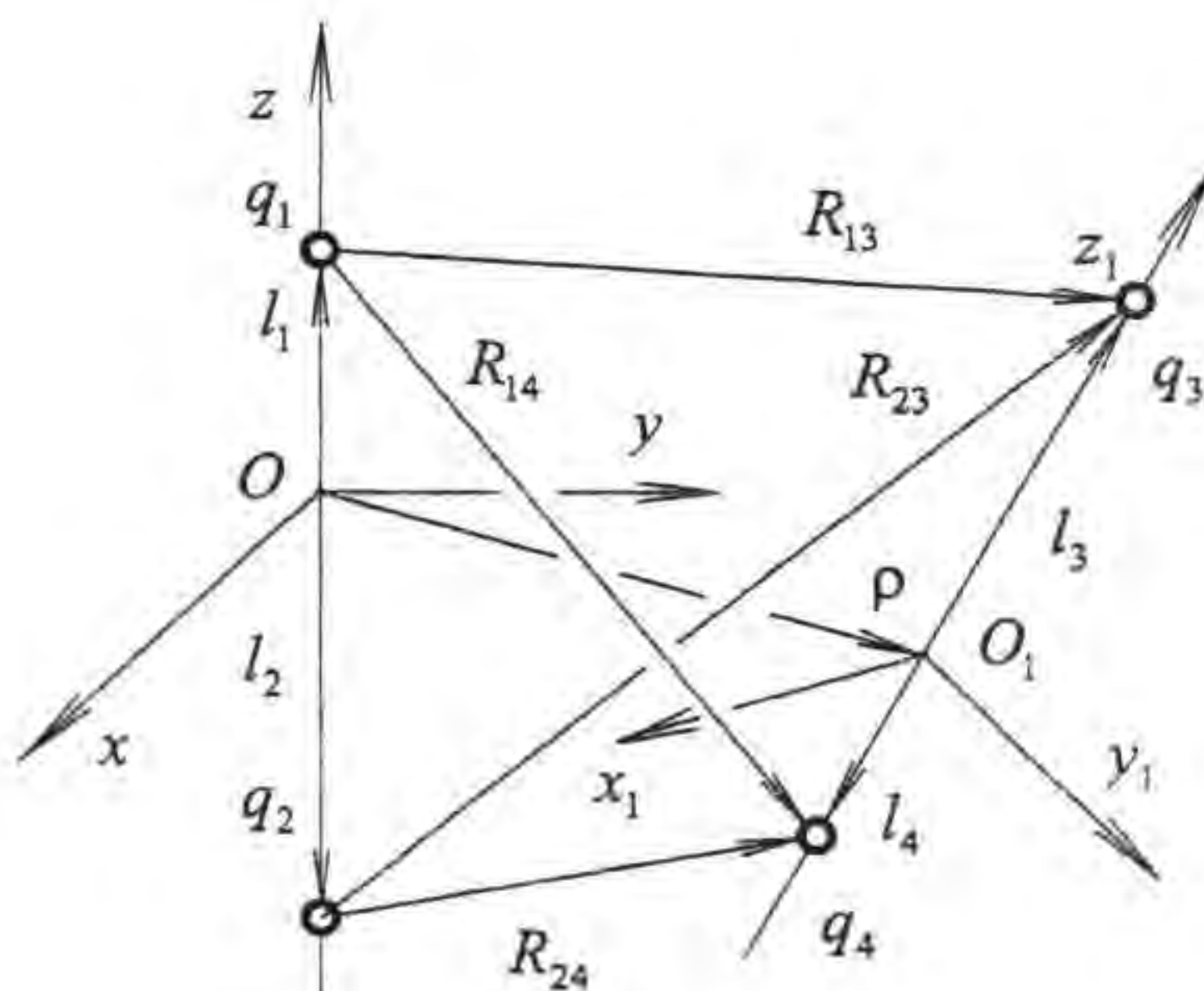


Рис. 1. Fig. 1.

Нехай степенями свободи вільного тіла є декартові координати x, y, z точки O_1 та кути Ейлера-Крилова α, β, γ , що визначають просторову орієнтацію тригранника $O_1x_1y_1z_1$ відносно $Oxyz$. Тоді, використовуючи матрицю направляючих косинусів (див., наприклад, [3]) та закон оберненої відстані взаємодії введених зарядів, для потенціальної енергії вільного тіла можна отримати вираз:

$$U = q_1 q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z - l_1 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_1 q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z - l_1 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_2 q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z + l_3 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_2 q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z + l_3 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} \quad (1)$$

Формула (1) та закони класичної механіки [3,4] дозволяють отримати рівняння руху вільного тіла. Якщо динамічними змінними є узагальнені координати (степені свободи) і узагальнені швидкості, зручно використати рівняння Лагранжа та відомі формули кінетичної енергії вільного тіла. В методі Ньютона-Ейлера замість частини швидкостей

Let the Cartesian coordinates x, y, z of point O_1 and Euler-Krylov angles α, β, γ determining space orientation of $O_1x_1y_1z_1$ trihedron connected with free body relatively to the inertial $Oxyz$ trihedron be chosen as six degrees of freedom of the free body. By applying the matrix of direction cosines (see e.g. [3]) and the said inverse potential energy law of pairwise interaction introduced above, for the potential energy of the free body we can obtain:

$$U = q_1 q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z - l_1 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_1 q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z - l_1 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_2 q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z + l_3 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} +$$

$$+ q_2 q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z + l_3 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{-1/2} \quad (1)$$

Formula (1) and laws of classical mechanics [3,4] allow deriving the free body motion differential equations. If generalized coordinates (degrees of freedom) and generalized velocities are chosen as dynamic variables, it is proper to use the Lagrange's equations and known formulae for kinetic energy of a free body. To apply the Newton-Euler method angular velocity vector projections onto free body's

використовують проекції вектора кутової швидкості вільного тіла на зв'язані з ним осі.

Скориставшись методом Ньютона-Ейлера і формулою (1), можна отримати таку консервативну динамічну модель вільного тіла:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dn_1}{dt} + k_1 n_3 n_2 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_4}, \\ \frac{dn_2}{dt} - k_1 n_1 n_3 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_5}, \\ \frac{dn_3}{dt} &= 0, \\ n_1 &= \cos x_5 \cos x_6 \frac{dx_4}{dt} + \sin x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_2 &= -\cos x_5 \sin x_6 \frac{dx_4}{dt} + \cos x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_3 &= \sin x_5 \frac{dx_4}{dt} + \frac{dx_6}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

де $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$, $A = q^2 (ml^3 w^2)^{-1}$ – параметр, що позначає відношення характерної енергії поля до характерної кінетичної енергії поступального руху $ml^2 w^2$ ($l = \max_{i=1,\dots,4} l_i$ – характерна довжина, $q = \max_{i=1,\dots,4} |q_i|$ – характерна абсолютна величина заряду, m – маса вільного тіла), $k_1 = (I_3 - I_1)I_1^{-1}$ – відношення головних центральних моментів інерції вільного тіла (взято випадок динамічної симетрії $I_1 = I_2$), I_1, I_3 – два головні центральні моменти інерції вільного тіла; $A_1 = q^2 (I_1 l w^2)^{-1}$ – відношення характерних енергії поля та кінетичної енергії обертання з моментом інерції I_1 . Рівняння (2) стосуються випадку розміщення зарядів вільного тіла на осі його динамічної симетрії.

Система (2) досить складна для аналізу відомими аналітичними методами. Більш зручно скористатись CAS Maple11 [5], що дозволяє отримати чисельні розв'язки задачі Коші і будувати фазові портрети. Не приводячи текст відповідної програми для економії місця, приведемо деякі результати Maple-аналізу.

axes are commonly used instead of part of generalized velocities.

The following conservative dynamic model for a free body is derived from the Newton-Euler method and formula (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dn_1}{dt} + k_1 n_3 n_2 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_4}, \\ \frac{dn_2}{dt} - k_1 n_1 n_3 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_5}, \\ \frac{dn_3}{dt} &= 0, \\ n_1 &= \cos x_5 \cos x_6 \frac{dx_4}{dt} + \sin x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_2 &= -\cos x_5 \sin x_6 \frac{dx_4}{dt} + \cos x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_3 &= \sin x_5 \frac{dx_4}{dt} + \frac{dx_6}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

here $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$, $A = q^2 (ml^3 w^2)^{-1}$ is the ratio between the characteristic force field energy and characteristic kinetic energy $ml^2 w^2$ of the free body forward motion ($l = \max_{i=1,\dots,4} l_i$ is the characteristic length, $q = \max_{i=1,\dots,4} |q_i|$ is the characteristic modulus quantity of charge, m is the free body mass), $k_1 = (I_3 - I_1)I_1^{-1}$ is the ratio between main central moments of free body inertia (the case of dynamic symmetry $I_1 = I_2$), parameters I_1, I_3 are two main center moments of free body inertia; $A_1 = q^2 (I_1 l w^2)^{-1}$ is the ratio between the characteristic force field energy and characteristic kinetic energy of free body rotation with I_1 as moment of inertia. Equations (2) are proper when the free-body pair of charges is placed on a body's dynamic symmetry axis.

System (2) is too complicated to be analyzed by the known analytical methods. It is more convenient to use CAS Maple 11 [5] capable of deriving numerical solutions for the Cauchy problem and to plot phase portraits. Omitting Maple-script source, we present some results of the Maple-analysis only.

Спочатку про задачу двох тіл. У цьому випадку q_i є або точковим електричним зарядом, або точковою масою. Якщо $l_1 = 0, l_2 = 0, q_1 = m_1, q_2 = 0, q_3 = m_2, q_4 = 0, m = m_2$, формула (1) матиме вигляд:

$$U = -\frac{m_1 m_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3)$$

і для відповідних початкових умов залежність відстані до центру притягання як функція часу матиме вигляд, показаний на рис. 2.

The first to discuss is the classical two-body problem. In this case q_i is either point electrical charge or point mass. If $l_1 = 0, l_2 = 0, q_1 = m_1, q_2 = 0, q_3 = m_2, q_4 = 0, m = m_2$, (1) can be reduced to expression:

$$U = -\frac{m_1 m_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3)$$

and for corresponding initial conditions dependence of free point distance to the attractive center versus the time will be plotted as shown in Fig.2

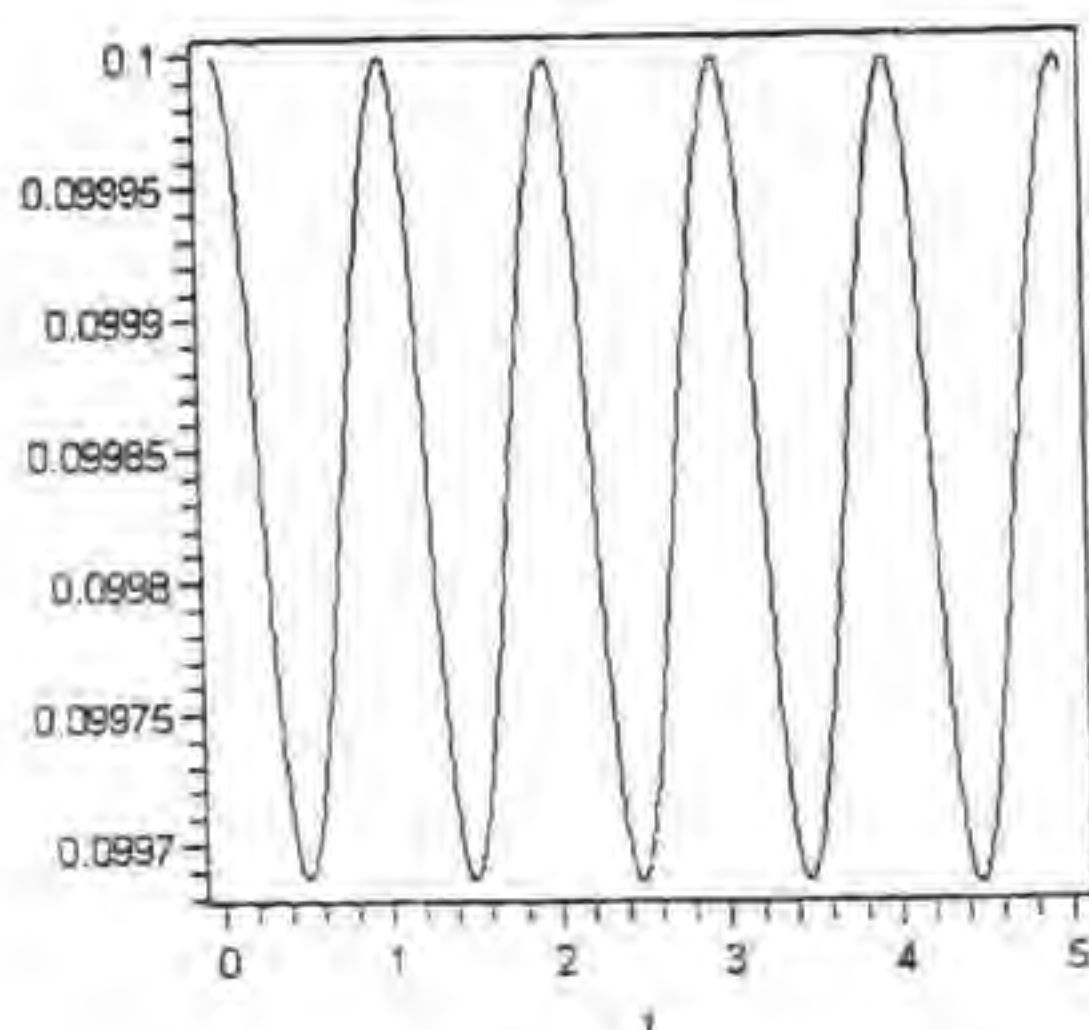


Рис. 2. Fig. 2.

Протилежні знаки зарядів у формулі (3) відповідають відомій задачі розсіювання. У випадку «гравілета» Белецького В.В. [6] маємо вільну жорстку зв'язку двох тіл мас m_1, m_2 , що рухається навколо нерухомої маси m_3 . Іншим варіантом є рух вільної маси m_3 в полі нерухомої зв'язки мас m_1 та m_2 . Всі ці варіанти також охоплюються отриманою моделлю (2) з можливістю її Maple-аналізу. Для руху вільного тіла з магнітною взаємодією довгих циліндрів (задача «двох магнітів» [1]) необхідно задовольнити умовам нульової суми зарядів і у формулі (1) покласти $l_i = l, q_i = \sigma_i \chi, i = \overline{1,4}, \sigma_i = 1$ для $i = 2,3$ і $\sigma_i = -1$ для $i = 1,4$. Деякі результати чисельного Maple-аналізу цієї задачі наведені на рис.3,4.

Opposite signs of charges in expression (3) correspond to the classic scattering problem. In the case of Beletskiy's "gravity flyer" problem of [6] two strictly connected masses m_1 and m_2 move in the immobile mass m_3 gravity field. Another version is a free point mass m_3 motion in the gravity field of two strictly connected masses m_1 and m_2 . All these variants are also enveloped by the obtained free body dynamic model (2) that can be analyzed by CAS Maple. In order to consider the problem of free body motion with magnetic interaction of long cylindrical magnets (the "two-magnet" problem [1]), one can give conditions: $l_i = l, q_i = \sigma_i \chi, i = \overline{1,4}, \sigma_i = 1$ for $i = 2,3$ and $\sigma_i = -1$ for $i = 1,4$. Some results of numerical Maple-analysis for this problem are plotted on Fig. 3 and Fig. 4.

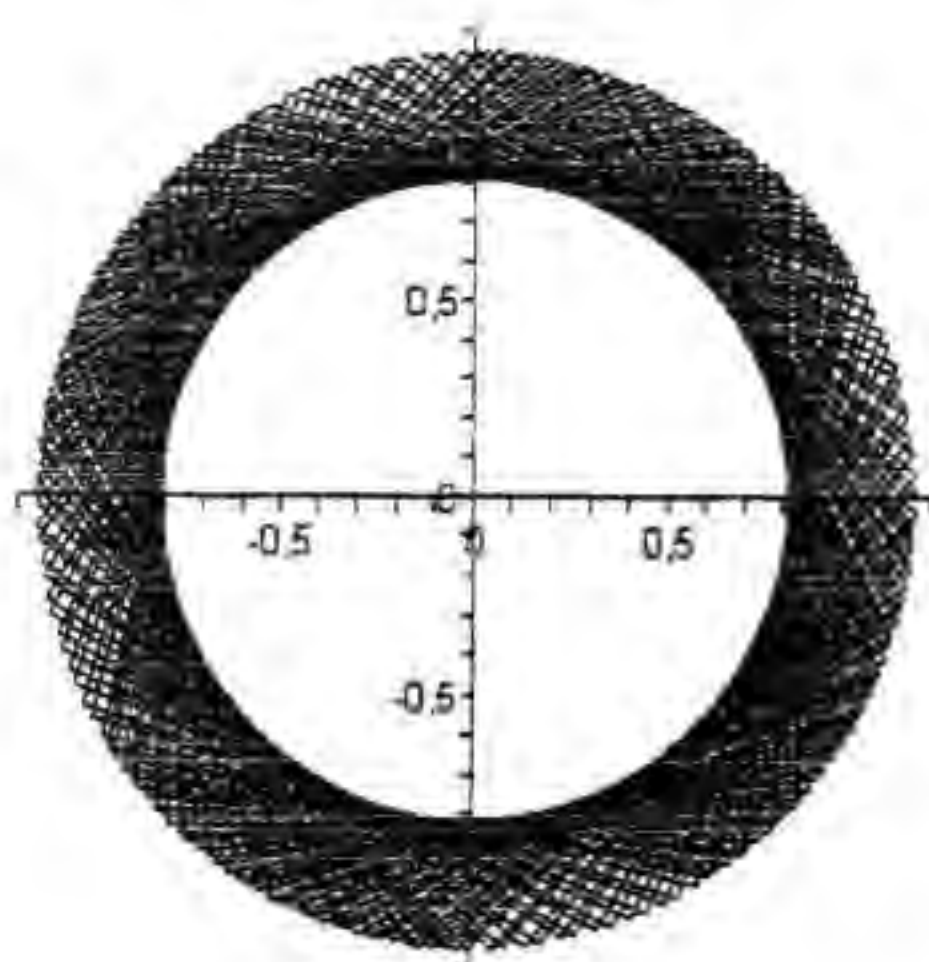


Рис. 3. Траєкторія центра мас вільного тіла в полярних координатах.
Fig. 3. Free body mass centre trajectory polar plot.

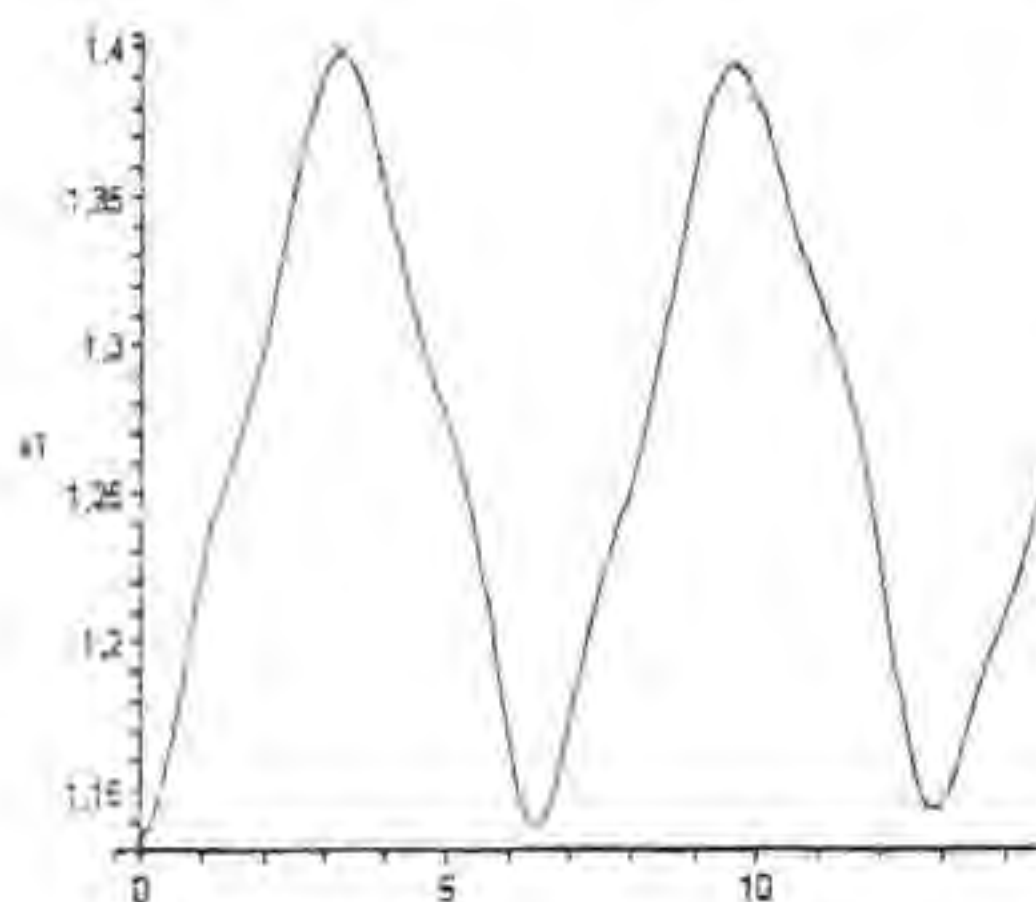


Рис. 4. Відстань центра мас до центра притягання як функція часу.
Fig. 4. The centre mass distance to the attractive centre versus time.

Частинним випадком задачі двох магнітів є дипольна взаємодія, яка досліджувалась у роботах Тамма [7] і Гінзбурга [8]. Для цього необхідно покласти $l \rightarrow 0$, $2l\chi \rightarrow p$, де p - магнітний момент диполя, що приводить до такого виразу для знерозміреної потенціальної енергії:

$$u = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (3yz \sin \alpha \cos \beta + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos \alpha \cos \beta - 3xz \sin \beta) \quad (4)$$

Дипольний закон взаємодії та його Maple-розв'язки задачі Коші показані на рис. 5, 6.

The partial case of the "two magnets" problem is dipole interaction investigated by Tamm [7] and Ginsburg [8]. In this case one must assume $l \rightarrow 0$, $2l\chi \rightarrow p$, where p is the dipole magnetic moment and this allows derivation of the non-dimensional expression for the free body potential energy:

$$u = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (3yz \sin \alpha \cos \beta + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos \alpha \cos \beta - 3xz \sin \beta) \quad (4)$$

The dipole law and its Maple-analysis by some plots of the Cauchy problem are shown on Fig. 5, 6.

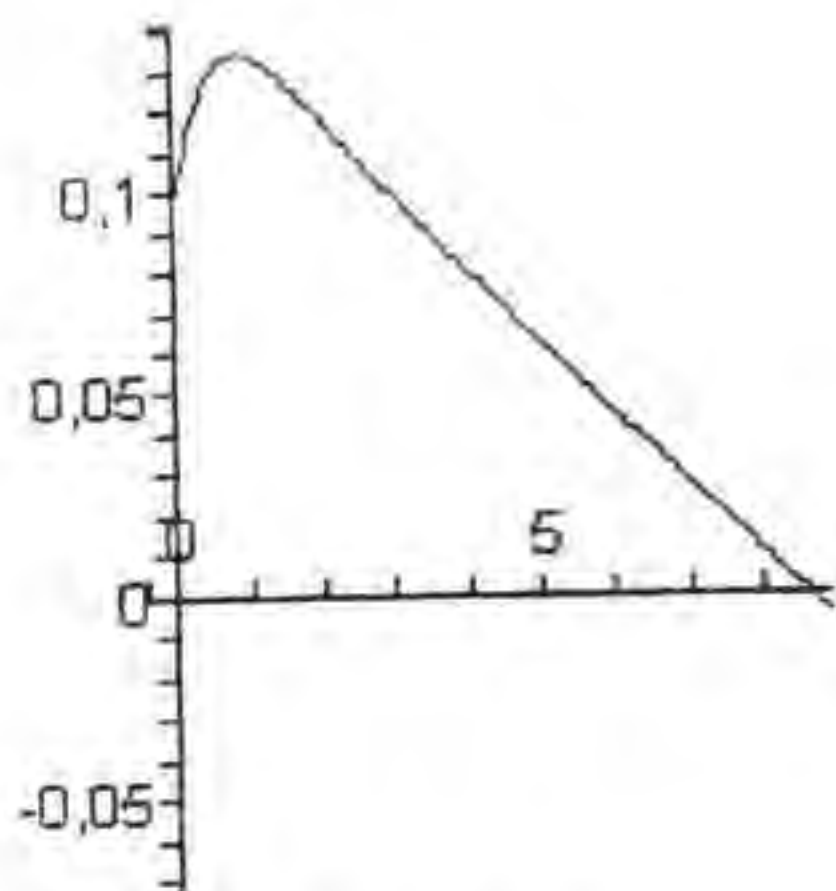


Рис. 5. Fig. 5.

Рис.5 відповідає падінню на центр притягання, а рис. 6 – розлітання у випадку відштовхування.

Таким чином, модель (1)-(2) та Maple-інструментарій дозволяють аналізувати складні задачі динаміки вільного тіла в гравітаційному, електричному або магнітному полях.

Автор висловлює подяку професору Козорізу В.В. за постановку задачі і корисні поради.

Список використаних джерел

1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. - К.: Наукова думка, 1981. - 140 с.
2. Смайт Р. Электростатика и электродинамика. - М.: Изд-во иностр. лит., 1959. - 604 с.
3. Парс Л. Аналитическая динамика. - М.: Наука, 1976. - 634 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Механика. - 3-е изд. - М.: Наука, 1973. - 208 с.
5. www.maplesoft.com
6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: Наука, 1972. - 360 с.
7. Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях. - Докл. АН СССР, 1940, 8/9, с.551-554.
8. Гинзбург В.Л. Теория мезона и ядерные силы. В кн.: Мезон / Под. ред. Тамма И.Е. М.: Гостехиздат, 1947, с. 227-270.

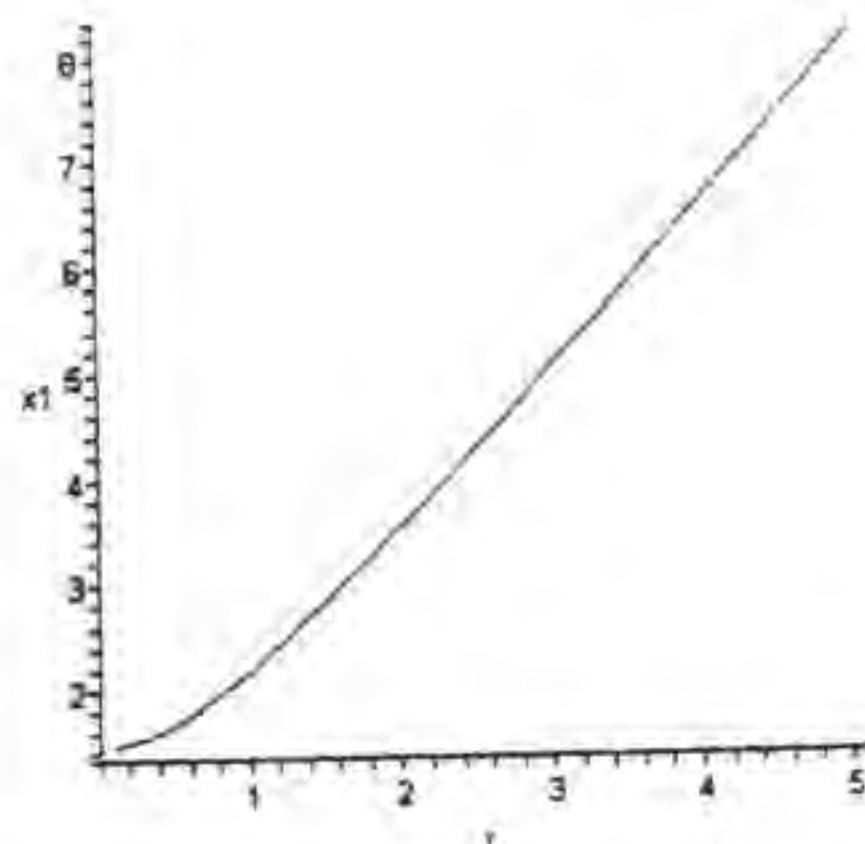


Рис. 6. Fig. 6.

Fig. 5 demonstrates falling on the attractive centre and Fig. 6 shows solution resulting into dispersion in a case of repulsive forces.

Therefore, the obtained dynamic model and developed Maple-simulation tools allow analyzing complex nonlinear problems of the free body dynamics in gravitational, electric or magnetic fields.

The author acknowledge professor Kozoriz Vasyl' for the statement of the problem and useful discussions related to the two-body problem.

References

1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. - К.: Наукова думка, 1981. - 140 с.
2. Smythe W.R. Static And Dynamic Electricity. McGraw-Hill, New York, 1950. - 616 p.
3. Pars L. A. A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London, 1965. - 634 p.
4. Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics, Course of Theor. Physics. Addison-Wesley, 1959. - 208 p.
5. www.maplesoft.com
6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: Наука, 1972. - 360 с.
7. Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях. - Докл. АН СССР, 1940, 8/9, с.551-554.
8. Гинзбург В.Л. Теория мезона и ядерные силы. В кн.: Мезон / Под. ред. Тамма И.Е. М.: Гостехиздат, 1947, с. 227-270.

Надійшла до редколегії 03.04.08

УДК 517.929

М.Б. Вереїкіна, к.ф.-м.н.,
Д.Я. Хусаїнов, д.ф.-м.н., проф.

Зображення розв'язків одного класу крайових задач для систем рівнянь з частинними похідними другого порядку із запізнюванням

Для систем двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з чистим запізненням отримано зображення розв'язку у випадку дійсних коренів характеристичного рівняння, коли власні числа різні. Проведено порівняльний аналіз зображення розв'язків для такого класу систем із запізнюванням та без запізнювання.

Ключові слова: диференціальні рівняння, розв'язок, крайова задача, запізнення.

Представлено проф., д.ф.-м.н. Беловим Ю.А.

E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua, vereik@mail.kar.net

Вступ

У роботі [1] досліджувалася система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами і сталим запізнюванням

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial x}, \end{cases} \quad (0.1)$$

визначених на прямій $x \in (-\infty, +\infty)$ при $t \geq 0$. Розв'язувалась задача Коші частинного вигляду $u(x,t) = e^{\mu t} \theta_1(t)$, $v(x,t) = e^{\mu t} \theta_2(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, $-\infty < x < +\infty$, (0.2)

де $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ - неперервно диференційовані функції, μ - стала величина. Передбачувалося, що матриця, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ системи (0.1) має дійсні власні числа.

Система розщеплювалася на два рівняння першого ступеня. За допомогою методу Фур'є отримано розв'язок поставленої задачі Коші. При цьому використовувалася спеціальна функція, названа запізненим експоненціалом [2].

У запропонованій роботі розглянуті системи диференціальних рівнянь другого порядку

M.B. Vereykina, Ph.D.,
D.Ya. Khusainov, Doctor of Science, Professor.

Representation of the solutions of one class of the boundary value problems for the systems partial differential equations of two orders with delay

For system of two of the partial differential equations of two orders with delay the representation of solutions for real distinct root of a characteristic equation is represented. Compared analysis of the representation of the solutions for such class systems with delay and without one is develop.

Key Words: differential equations, solution, boundary value problem, delay.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u^2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial v^2(x,t-\tau)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u^2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial v^2(x,t-\tau)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (0.3)$$

Припускається, що функції $u(x,t)$, $v(x,t)$ визначені у півсмузі $0 \leq x \leq l$, $t \geq -\tau$ і задовольняють початковим і крайовим умовам

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad v(0,t) = \theta_1(t), \\ v(l,t) &= \theta_2(t), \quad t \geq -\tau, \\ u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad v(x,t) = \psi(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, \\ &\quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (0.4)$$

а також виконані «умови узгодження»

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \varphi(0,t), \quad \mu_2(t) = \varphi(l,t), \quad \theta_1(t) = \psi(0,t), \\ \theta_2(t) &= \psi(l,t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Система без запізнювання

Спочатку розглянемо системи другого порядку без запізнювання

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Функції $u(x,t)$, $v(x,t)$ визначені в півсмугі $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ задовольняють початковим та крайовим умовам

$$\begin{aligned} u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad v(0,t) = \theta_1(t), \\ v(l,t) = \theta_2(t), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (1.2)$$

і виконанні «умови узгодження»

$$\begin{aligned} \mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(l), \quad \theta_1(0) = \psi(0), \\ \theta_2(0) = \psi(l). \end{aligned}$$

Як відомо [3, стор.84-86], завжди існує неособлива матриця S , що приводить матрицю A до жорданової форми Λ

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \Lambda.$$

Тому перетворенням

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi(x,t) \\ \eta(x,t) \end{pmatrix}$$

систему (1.1) можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

де Λ – жорданова форма матриці A . Початкові і крайові умови при цьому матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \xi(0,t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t), \\ \eta(0,t) = \bar{\theta}_1(t), \quad \eta(l,t) = \bar{\theta}_2(t), \quad t \geq 0, \\ \xi(x) = \bar{\varphi}(x), \quad \eta(x) = \bar{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де

$$\begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(t) \\ \bar{\theta}_1(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \theta_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Розглянемо зображення розв'язку крайової задачі системи (1.3), (1.4), якщо власні числа матриці, тобто корені λ_1 , λ_2 характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

дійсні та різні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді матриця Жордана Λ має діагональний вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

і система (1.3) розщеплюється на два незалежні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} &= \lambda_2 \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Розглянемо перше рівняння

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

з ненульовими крайовими умовами $\xi(0,t) = \bar{\mu}_1(t)$, $\xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t)$ і ненульовою початковою умовою $\xi(x,0) = \bar{\varphi}(x)$. Проведемо заміну

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \bar{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)], \quad (1.8)$$

де $\xi_1(x,t)$ нова невідома функція, і отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1(x,t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi_1(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t), \\ F(x,t) &= -\dot{\bar{\mu}}_1(t) - \frac{x}{l} [\dot{\bar{\mu}}_2(t) - \dot{\bar{\mu}}_1(t)] \end{aligned} \quad (1.9)$$

з нульовими граничними умовами $\xi_1(0,t) = 0$, $\xi_1(l,t) = 0$ і ненульовою початковою умовою

$$\xi_1(x,0) = \bar{\varphi}(x) - \bar{\mu}_1(0) - \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(0) - \bar{\mu}_1(0)]. \quad (1.10)$$

Розв'язок рівняння (1.9) шукатимемо у вигляді суми розв'язків $\xi_{1,n}(x,t)$ однорідного рівняння з ненульовою початковою і нульовими крайовими умовами і $\xi_{1,nh}(x,t)$ неоднорідного рівняння з нульовими крайовими і нульовою початковими умовами.

Перший розв'язок $\xi_{1,n}(x,t)$ шукаємо методом розділення змінних (методом Фур'є) у вигляді добутку двох функцій $\xi_{1,n}(x,t) = X(x)T(t)$. Після підстановки в рівняння, отримуємо

$$X(x)T'(t) = \lambda_1 X''(x)T(t).$$

Розділивши змінні, маємо

$$\frac{T'(t)}{\lambda_1 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu,$$

де μ деяка стала. Розділимо отриманий вираз на два рівняння

$$T'(t) = \lambda_1 \mu T(t), \quad X''(x) = \mu X(x). \quad (1.11)$$

Розв'язки другого рівняння (1.11), які не є тотожним нулем та задовольняють нульовим крайовим умовам $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, мають

$$\text{вигляд} \quad \mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$n = 1, 2, \dots$. Розв'язки першого мають вигляд

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 t}, \text{ а загальний розв'язок}$$

$$\xi_{1,NH}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Сталі C_n , $n = 1, 2, \dots$ є коефіцієнтами розкладу в ряд Фур'є початкової функції $\xi_1(x,0)$ і мають вигляд

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_0^l \xi_1(s,0) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \\ = \frac{1}{2l} \left\{ \int_0^l \bar{\varphi}(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds - \bar{\mu}_1(0) + (-1)^n \bar{\mu}_2(0) \right\}.$$

Розв'язок $\xi_{1,NH}(x,t)$ неоднорідного рівняння з нульовими крайовими і початковими умовами шукаємо у вигляді розкладу по функціях $\sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\xi_{1,NH}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Підставивши в рівняння

$$\frac{\partial \xi_{1,NH}(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi_{1,NH}(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t),$$

і прирівнявши коефіцієнти при $\sin \frac{\pi n}{l} x$,

отримаємо систему рівнянь

$$T'_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 T_n(t) = f_n(t),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l F(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds. \quad (1.12)$$

Розв'язки рівнянь (1.10), що задовольняють нульовим початковим умовам, мають вигляд

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 (t-s)} f_n(s) ds.$$

Об'єднуючи $\xi_{1,H}(x,t)$ і $\xi_{1,NH}(x,t)$, отримуємо

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2l} \left[\int_0^l \bar{\varphi}(s) ds - \bar{\mu}_1(0) + (-1)^n \bar{\mu}_2(0) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 s} f_n(s) ds \right\} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Таким чином, розв'язки системи рівнянь (1.6) мають вигляд

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2l} \left[\int_0^l \bar{\varphi}(s) ds - \bar{\mu}_1(0) + (-1)^n \bar{\mu}_2(0) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 s} f_n(s) ds \right\} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_1 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (1.13)$$

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2l} \left[\int_0^l \bar{\psi}(s) ds - \bar{\theta}_1(0) + (-1)^n \bar{\theta}_2(0) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_2 s} g_n(s) ds \right\} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \lambda_2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (1.14)$$

Нехай матриця S і обернена до неї S^{-1} мають вигляд

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \beta_2 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \\ \Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Тоді розв'язок крайової задачі вихідної системи (1.1), що задовольняє умовам (1.2), остаточно має вигляд

$$u(x,t) = \alpha_1 \xi(x,t) + \alpha_2 \eta(x,t),$$

$$v(x,t) = \beta_1 \xi(x,t) + \beta_2 \eta(x,t),$$

де розв'язки $\xi(x,t)$, $\eta(x,t)$ перетвореної системи (1.3) визначені в (1.13) - (1.14), а функції $\bar{\mu}_1(t)$, $\bar{\mu}_2(t)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\theta}_1(t)$, $\bar{\theta}_2(t)$, $\bar{\psi}(x)$, які задають початкові і краєві умови, визначені в (1.5).

Система із запізнюванням

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з сталими коефіцієнтами і сталим запізнюванням вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u^2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial v^2(x,t-\tau)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u^2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial v^2(x,t-\tau)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

визначених при $t \geq 0$. На відміну від системи без запізнювання, початкові умови задані на проміжку $-\tau \leq t \leq 0$. Нехай вони мають вигляд

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \\ v(0,t) &= \theta_1(t), \quad v(l,t) = \theta_2(t), \quad t \geq -\tau, \\ u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad v(x,t) = \psi(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, \\ &-\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

та нехай виконані «умови узгодження»

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \varphi(0,t), \quad \mu_2(t) = \varphi(l,t), \quad \theta_1(t) = \psi(0,t), \\ \theta_2(t) &= \psi(l,t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Як і у попередньому випадку, існує неособлива матриця S , що приводить матрицю A до жорданової форми. Тому систему (2.1) можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta(x,t-\tau)}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Розглянемо отримання загального розв'язку системи (2.1), якщо корені характеристичного рівняння матриці A дійсні та різні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$, і матриця Жордана Λ має діагональний вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Тоді система (2.2) знов розщеплюється на два рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} &= \lambda_2 \frac{\partial^2 \eta(x,t-\tau)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Початкові і крайові умови при цьому матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \xi(0,t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \eta(0,t) = \bar{\theta}_1(t), \\ \eta(l,t) &= \bar{\theta}_2(t), \quad t \geq -\tau, \\ \xi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t), \quad \eta(x,t) = \bar{\psi}(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, \\ &-\tau \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

де (аналогічно (1.5))

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(t) \\ \bar{\theta}_1(t) \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \theta_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mu}_2(t) \\ \bar{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_2(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(t) \\ \bar{\psi}(t) \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Розглянемо перше рівняння з системи (2.3)

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi(x,t-\tau)}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

з початковими і крайовими умовами вигляду

$$\begin{aligned} \xi(0,t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \xi(l,t) = \bar{\mu}_2(t), \quad t \geq -\tau, \\ \xi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Провівши заміну (аналогічно (1.8))

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \bar{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)],$$

де $\xi_1(x,t)$ - нова невідома функція, отримаємо неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1(x,t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 \xi_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + F(x,t), \\ F(x,t) &= -\dot{\bar{\mu}}_1(t) - \frac{x}{l} \left[\dot{\bar{\mu}}_2(t) - \dot{\bar{\mu}}_1(t) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

з ненульовими початковими і нульовими крайовими умовами

Розв'язок рівняння (2.6) шукатимемо у вигляді суми розв'язків $\xi_{1,n}(x,t)$ однорідного рівняння з ненульовим початковим і нульовими крайовими умовами і розв'язку $\xi_{1,nh}(x,t)$ неоднорідного рівняння з нульовими крайовими і нульовими початковим умовами. Для знаходження розв'язку $\xi_{1,n}(x,t)$ знов використовуватимемо метод розділення змінних, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді добутку двох функцій $\xi_{1,n}(x,t) = X(x)T(t)$. Після підстановки в рівняння отримуємо

$$X(x)T'(t) = \lambda_1 X''(x)T(t-\tau).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\frac{T'(t)}{\lambda_1 T(t-\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu.$$

Розділимо отриманий вираз на два рівняння

$$T'(t) = \lambda_1 \mu T(t-\tau), \quad X''(x) = \mu X(x). \quad (2.7)$$

Ненульові розв'язки другого рівняння, що задовольняють нульовим початковим умовам,

мають, як і раніше, вигляд $\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$,

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Розглянемо перше з рівнянь (2.7)

$$T'(t) = \lambda_1 \mu T(t - \tau) \quad (2.8)$$

з отриманим параметром $\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ і

початковими умовами $\mu(t) = \zeta(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Воно є диференціальним рівнянням з чистим запізнюванням. Отримаємо його розв'язок в аналітичному вигляді. Заздалегідь приведемо декілька допоміжних відомостей.

Визначення [2]. Запізнілим експоненціалом $E^{\lambda \mu}(t, \tau)$ рівняння (2.8) назовемо функцію, яка має вигляд

$$E^{\lambda \mu}(t, \tau) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \leq t < 0, \\ 1 + \lambda_1 \mu \frac{t}{1!} + \dots \\ + (\lambda_1 \mu)^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, \\ & (k-1)\tau \leq t \leq k\tau, \end{cases} \quad (2.9)$$

полінома ступеня k на проміжках, «склеєного» у вузлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Лема. При довільній величині $\lambda_1 \mu$ слушне наступне правило диференціювання

$$\frac{d}{dt} E^{\lambda \mu}(t, \tau) = (\lambda_1 \mu) E^{\lambda \mu}(t - \tau, \tau).$$

Це означає, що запізнілий експоненціал є розв'язком рівняння (2.8), яке задовольняє одиничним початковим умовам $T(t) = 1$, $-\tau \leq t \leq 0$.

За допомогою таким чином впровадженої функції розв'язок задачі Коші для рівняння (2.8) можна зобразити в компактному вигляді [2].

Теорема [2]. Розв'язок $T(t)$ рівняння (2.8), що задовольняє початковим умовам $T(t) = \zeta(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, де $\zeta(t)$ довільна неперервно диференційована функція, має вигляд

$$T(t) = E^{\lambda \mu}(t, \tau) \zeta(-\tau) + \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - \tau - s, \tau) \zeta'(s) ds \quad (2.10)$$

Зауваження. У початкових умовах теореми потрібна неперервна диференційованість функції $\zeta(t)$. Якщо узяти інтеграл по частинах, то отримаємо

$$T(t) = E^{\lambda \mu}(t - \tau, \tau) \zeta(0) + (\lambda_1 \mu) \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - 2\tau - s, \tau) \zeta(s) ds \quad (2.11)$$

інтегральне зображення розв'язку в припущенні лише неперервності функції $\zeta(t)$.

Отримаємо початкові умови $T_n(t) = \zeta_n(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ для кожного з рівнянь (2.6).

Початкові умови для $\xi_{1,n}(x, t)$ мали вигляд

$$\xi_{1,n}(x, t) = \bar{\varphi}(x, t) - \bar{\mu}_1(t) - \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)],$$

$$0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Розклавши їх в ряд Фур'є по власних функціях другого рівняння, отримаємо

$$\xi_{1,n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \bar{\varphi}(s, t) ds - \frac{1}{2\pi n} [\bar{\mu}_1(t) - (-1)^n \bar{\mu}_2(t)].$$

Таким чином, розв'язок $\xi_{1,n}(x, t)$ однорідного рівняння, що задовольняє ненульовим початковим і нульовим крайовим умовам, має вигляд

$$\xi_{1,n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ E^{-\lambda \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}(t, \tau) \zeta_n(-\tau) + \int_{-\tau}^0 E^{-\lambda \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}(t - \tau - s, \tau) \zeta'_n(s) ds \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Розглянемо неоднорідне рівняння (2.6) з нульовими початковими і нульовими крайовими умовами. Розв'язок його шукаємо у вигляді розкладу в ряд

$$\xi_{1,nh}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Підставивши це зображення в рівняння (2.6), для змінних $T_n(t)$ отримаємо послідовність неоднорідних рівнянь

$$T'_n(t) + \lambda_1 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) = f_n(t),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l F(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

з нульовими початковими умовами. Як впливає з [4, стор.63], [5, стор.33-34] розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$T_n(t) = \int_0^t E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) f_n(s) ds.$$

Звідси

$$\xi_{1,nH}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) f_n(s) ds \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

А розв'язок $\xi(x,t)$ рівняння (2.6) має вигляд

$$\begin{aligned} \xi(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t,\tau) \zeta_n(-\tau) + \right. \\ & + \int_{-\tau}^0 E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) \zeta'_n(s) ds + \\ & + \left. \int_0^t E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) f_n(s) ds \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \bar{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_1(t)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \varphi(s,t) ds - \frac{1}{2\pi n} [\bar{\mu}_1(t) - (-1)^n \bar{\mu}_2(t)].$$

Аналогічно друге рівняння (2.4) має розв'язок вигляду

$$\begin{aligned} \eta(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t,\tau) \rho_n(-\tau) + \\ & + \int_{-\tau}^0 E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) \rho'_n(s) ds + \\ & + \left. \int_0^t E^{-\lambda_2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} (t-\tau-s, \tau) g_n(s) ds \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \bar{\theta}_1(t) + \frac{x}{l} [\bar{\theta}_2(t) - \bar{\theta}_1(t)], \\ \rho_n(t) = & \frac{1}{2l} \int_0^l \psi(s,t) ds - \frac{1}{2\pi n} [\bar{\theta}_1(t) - (-1)^n \bar{\theta}_2(t)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Нехай матриця S і зворотна до неї S^{-1} мають вигляд

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \beta_2 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Тоді розв'язок крайової задачі вихідної системи (2.1), що задовольняє умовам (2.2) остаточно має вигляд

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \alpha_1 \xi(x,t) + \alpha_2 \eta(x,t), \\ v(x,t) &= \beta_1 \xi(x,t) + \beta_2 \eta(x,t), \end{aligned}$$

де розв'язки $\xi(x,t)$, $\eta(x,t)$ перетвореної системи (2.3), визначені в (2.12), (2.13), а функції $\bar{\mu}_1(t)$, $\bar{\mu}_2(t)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\theta}_1(t)$, $\bar{\theta}_2(t)$, $\bar{\psi}(x)$, які задають початкові і крайові умови, визначені, як і для системи без запізнювання.

Зауваження. Для систем з чистим запізнюванням коректною є не крайова задача, а задача Коші [6]. Це означає, що крайові умови, тобто функції $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, є не довільними функціями, а функціоналами від початкових умов, тобто

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \Psi[\varphi(0,t)], \quad \mu_2(t) = \Psi[l,t], \\ \theta_1(t) &= \Omega[\psi(0,t)], \quad \theta_2(t) = \Omega[l,t]. \end{aligned}$$

Література

1. Хусаїнов Д.Я., Верейкіна М.Б. Зображення розв'язків задачі Коші одного класу систем рівнянь з частинними похідними із запізнюванням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2007. - С.213-216.
2. Хусаїнов Д.Я., Шуклин Г.В. Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием // Прикладная механика, Т.41, в.2, 2005. - С.118-130.
3. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. - М., Наука, 1966. - 276 с.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М., Наука, 1970. - 270 с.
5. Хейл Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений. - М., Мир, 1984. - 420 с.
6. Коварж І.В., Іванов А.Ф., Хусаїнов Д.Я. Зв'язок між крайовою задачею та задачею Коші для рівнянь в частинних похідних із чистим запізнюванням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.8, 2007. - С.37-42.

Надійшла до редколегії 12.05.08

УДК 519.876.5:620.178.16(045)

Вишневецький О.А., асистент
Давидов О.С., к.ф.-м.н., доцент

Визначення середнього навантаження та тиску на поверхню тертя – основа моделювання процесу випробування матеріалів на абразивну зносостійкість

Визначено середнє навантаження та тиск на поверхню тертя під час проведення всього експерименту по визначенню абразивної зносостійкості матеріалів. Нерівномірний процес зношування поверхонь матеріалів замінений рівномірним.

Ключові слова: зношування, абразив, інтенсивність, тиск.

E-mail: eco@nau.edu.ua; www.nau.edu.ua.

Статтю представив член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н. Ляшко С.І.

General formulation of problem and its connection with the science-practical tasks.

Using the method of step-by-step simulating the non-uniform process of materials test on abrasive wearing quality at non-rigidity fixed particles gives the possibility to order the experiments, indicate the main research directions, and determine the parameters which effect on the materials and coatings wear resistance. To construct such model of average loading on the friction surface with perspective creating the generalized model of the materials surface abrasive wear it is necessary to replace the non-uniform process by the uniform one in correct way that significantly simplifies the form and content of mathematical expressions.

After such replacement the test results will be more predicted, and the experiments organization will be simpler.

The abrasive wear model construction issues were always very essential due to importance of defined problem and at the same time difficulty of its solution. The problem importance takes place due to possibility to predict the wearing results according to pre-defined parameters that actually means the possibility to design the materials and coatings with pre-specified properties. The problem complexity occurs due to fact that there is no the model covering all variety of parameters influencing on wear.

O.A. Vyshnevskiy, Assistant Professor
A.S. Davydov, PhD, Associate Professor

Determination of average loading and pressure on the friction surface – the base of simulating the process of materials test for abrasive wearing resistance

Average loading and average pressure on the friction surface during running the complete experiment for determination of materials abrasive wearing resistance have been defined. Non-uniform materials surfaces wear process is replaced with uniform one.

Key Words: wear, abrasive, intensity, press.

Overview of publications and analysis of unsolved problems

Problems of abrasive wear model construction are very frequently considered in science publications.

The base of one of existing models is the probabilistic-statistical approach [1]; in other existing models of abrasive wear there are not reflected all different components of physical processes occurring during the abrasive wear with non-rigidly fixed abrasive material [2]. These models disadvantage consists in its cumbersome form and inconvenience in use in combination with limited set of parameters effecting the wear quality. Connection of abrasive wear value (mass) with the experimental plant working part size, linear wear, and friction area is shown in [3]. Work [4] contains the abrasive granularity and loading except for specified above parameters, but the average loading is considered for current time instance, i.e. at given value of linear wear h . Important parameter – deformation degree – is considered in the works [5,6]. Work [7] contains the basic principles of constructing the model of the materials test on abrasive wear resistance.

Research objective

Theoretical justification and derivation of model of average loading and pressure on friction surface upon the material test on abrasive wear

resistance is the main purpose of this work. Having the model of wear due to presence of non-rigidly fixed abrasive particles it is possible to predict the wear value (mass) depending on the parameters which influence on the wear quality: linear wear, surface area of contact between rubber roller and specimen, loading P , abrasive and specimen hardness, size of rubber roller used in research equipment for testing the materials on abrasive resistance.

Research results.

Process of standard test of materials on abrasive wear resistance at non-rigidly fixed particles is the integral component of predicting the friction assemblies' operation life. Consideration of test installation operating part geometrical shape and dimensions influence on test results makes this approach of simulation different from the similar models.

Mathematical simulation of materials surface wearing process allows specifying the greater number of initial parameters affecting the materials wear resistance enhancement.

Mathematical simulation gives the possibility to determine the mutual influence of these parameters on final result of wear and on the materials wear resistance level.

Diagram of installation for experimental study of materials abrasive wear resistance at non-rigidly fixed particles is shown in Figure 1.

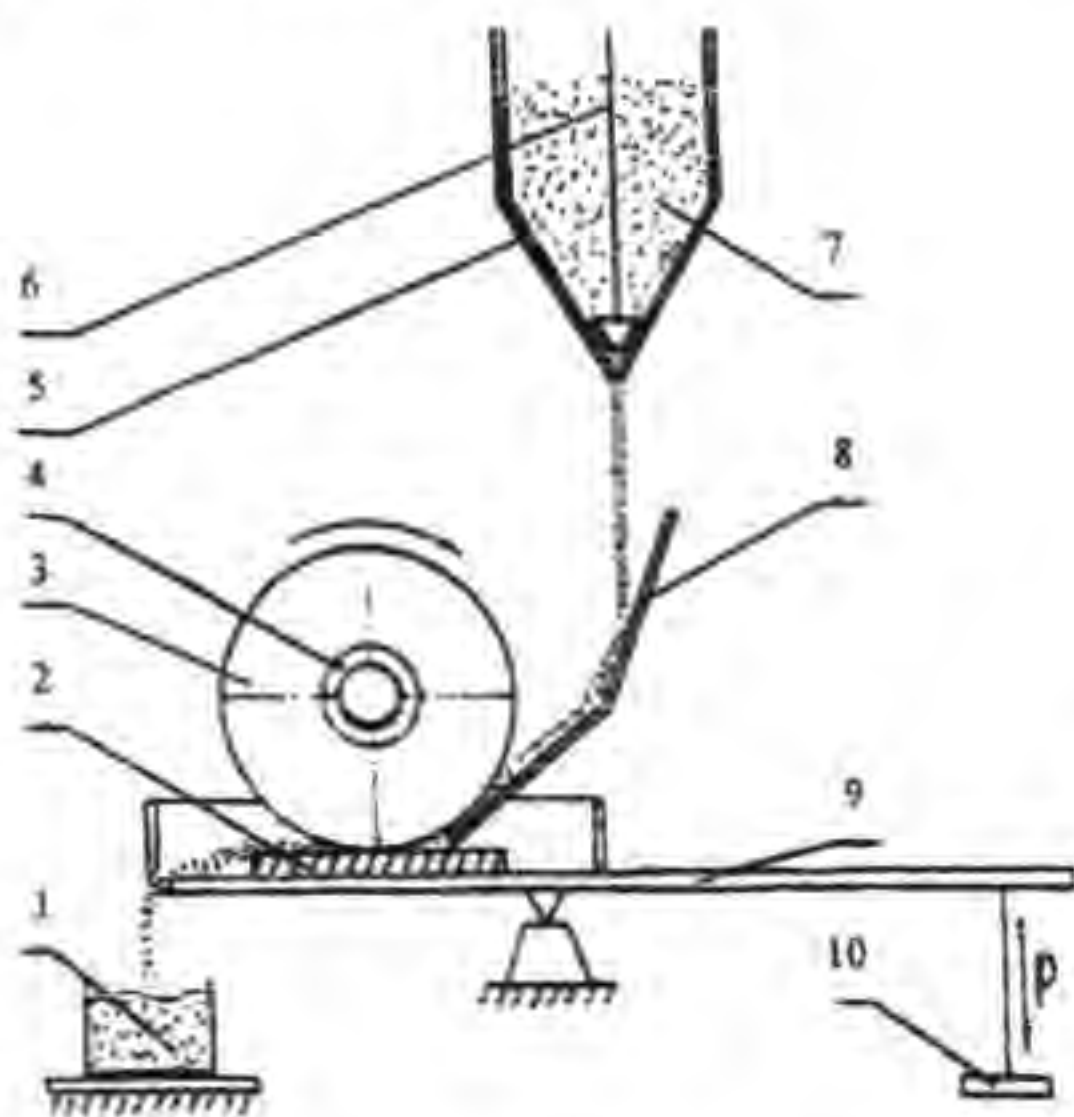


Fig.1. Diagram of installation for experimental study of materials abrasive wear resistance:

- 1 – container for collecting used abrasive material;
- 2 – specimen of studied material;
- 3 – rubber roller;

- 4 – roller bushing;
- 5 – container for free abrasive material;
- 6 – lever for governing the abrasive material supply speed;
- 7 – free abrasive material;
- 8 – tray for abrasive supply;
- 9 – lever for governing the pressure force of roller to specimen surface;
- 10 – loading P .

Let's link the section of experimental installation working part for material surface abrasive wear resistance determination to rectangular coordinate system (Fig. 2).

If the experimental roller sinks into specimen at depth h then from right triangle $\triangle AOK$ (right angle AKO), shown in Figure 2,

$$AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}. \quad (1)$$

Upon the roller and specimen interaction the projections sum $\bar{P}_1(y)$ of function distributed along the Oy axis of loading should be equal to $|\bar{P}_0|$.

Loading function $\bar{P}_1(y)$ can be obtained as solution of integral equation (2) with boundary conditions (3).

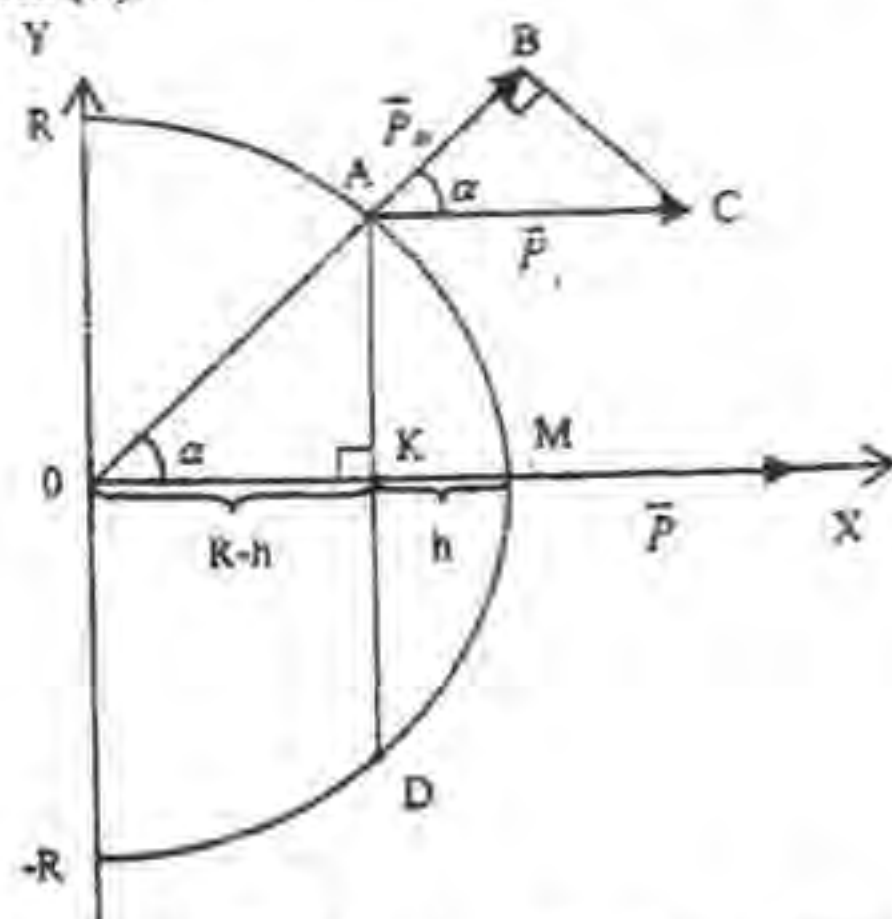


Fig.2. Linking the abrasive wear experimental installation roller and specimen surface to rectangular coordinate system:

straight line AD is the specimen surface level; point O is projection of roller axis to plane XOY

$$\frac{1}{\sqrt{2Rh - h^2}} \int_0^{\sqrt{2Rh - h^2}} P_1(y) dy = \frac{P_0}{2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} P_1(0) = P_0 \\ P_1(\sqrt{2Rh - h^2}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Let's show the integral equation (2) core as in (4).

$$P_1(y) = ay + b \quad (4)$$

a and b coefficients can be found from the equations set (5).

$$\begin{cases} 0 \cdot y + b = P_0 \\ a\sqrt{2Rh - h^2} + b = 0 \end{cases} \quad (5)$$

After algebraic transformations we get:

$$\begin{cases} b = P_0 \\ a = -\frac{P_0}{\sqrt{2Rh - h^2}} \end{cases} \quad (6)$$

Function of loading $\bar{P}_1(y)$ distributed along the Oy axis has the form (7).

$$P_1(y) = P_0 \frac{\sqrt{2Rh - h^2} - y}{\sqrt{2Rh - h^2}} \quad (7)$$

For check purpose let's determine the sum of projections of loading distributed along the Oy axis

$$\frac{1}{\sqrt{2Rh - h^2}} \int_0^{\sqrt{2Rh - h^2}} P_0 \frac{\sqrt{2Rh - h^2} - y}{\sqrt{2Rh - h^2}} dy = \frac{P_0}{2} \quad (8)$$

Note that for $-\sqrt{2Rh - h^2} \leq y < 0$ the distributed loading function $\bar{P}_1(y)$ will have the form (9).

$$P_1(y) = P_0 \frac{\sqrt{2Rh - h^2} + y}{\sqrt{2Rh - h^2}} \quad (9)$$

Sum of all projections of distributed loading $\bar{P}(y)$ onto Ox axis, while $-\sqrt{2Rh - h^2} \leq y \leq \sqrt{2Rh - h^2}$, equals P_0 . Loading function $\bar{P}(y)$ along section arc being normal to plane of roller axis and plane of roller and specimen contact can be written in a form of $\bar{P}(\alpha)$

$$\bar{P}(y) = P_0 \frac{\sqrt{2Rh - h^2} - y}{\sqrt{2Rh - h^2}} = P_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} = \bar{P}(\alpha) \quad (10)$$

Normal component of loading $\bar{P}_n(\alpha)$ can be determined from the right triangle $\triangle ABC$, shown in Figure 2.

$$P_n(\alpha) = P \cos \alpha = P_0 \cdot \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} \cos \alpha \quad (11)$$

The average loading value we'll determine taking into account [3] and using the following formula

$$P_{\text{cep}} = \frac{\int P_n(l) dl}{l} \quad (12)$$

where l is AD arc length.

To calculate the average loading it is necessary to make changes

$$\begin{aligned} x &= R - h = R \cos \alpha \\ y &= R \sin \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Here (x, y) are the point A co-ordinates.

Using (11) and change (13) in formula (12) we'll get the formula below on base of [3]

$$P_{\text{cep}} = \frac{\int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} P_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} \cos \alpha R d\alpha}{\alpha R} \quad (14)$$

After algebraic transformations the following expression will be obtained:

$$P_{\text{cep}} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{2 \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \quad (15)$$

The average loading to surface of entire indentation equals

$$P_c = 2 \cdot P_{\text{cep}} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \quad (16)$$

Let's check the model operation under the boundary conditions:

- a) at $h \rightarrow 0$ (wearing initial moment);
- b) at $h \rightarrow R$ (one half of rubber roller contacts with the specimen surface).

For case (a) we get

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} = P_0,$$

that is wholly logical as at the initial moment of wear the loading P_0 is applied to contact point of roller and specimen and equals P_0 .

For case (b) we get

$$\lim_{h \rightarrow R} P_c = \lim_{h \rightarrow R} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} = \frac{2P_0}{\pi}$$

Ley's determine the average loadings and the area along the linear wear direction.

The average distributed loading $P_{\text{cep}}(l)$ along the circle being the trajectory of abrasive particles motion and which is determined by expression (10) can be distributed along the linear wear h direction.

The average distributed loading $P_{cep}(l, h)$ can be represented in the following form

$$P_{cep}(l, h) = \frac{P_0 R}{h} \int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt \quad (17)$$

Average value of area with respect to linear wear h can be represented as

$$Q_{cep}(h) = \frac{\int_0^h 2bR \arcsin \sqrt{2\frac{z}{R} - \left(\frac{z}{R}\right)^2} dz}{h} = \frac{2bR}{h} \int_0^h \arcsin \sqrt{2\frac{z}{R} - \left(\frac{z}{R}\right)^2} dz \quad (18)$$

To determine the average pressure we'll use equation (19)

$$N_c = \frac{P_c}{Q_{cep}} \quad (19)$$

After substituting the respective values we'll get

$$N_c = \frac{P_0 \int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{2b \int_0^h \arcsin \sqrt{2\frac{z}{R} - \left(\frac{z}{R}\right)^2} dz} \quad (20)$$

During carrying out the experimental test to determine the wear resistance there was found dependence of the linear wear intensity upon the average pressure on the specimen surface. Note that the average pressure is considered during the entire experiment duration.

Dependence of linear wear intensity for steel 30ХГСА at $P_0 = 57,8H$ and abrasive grit 200-250 μm has the linear character as Table 1.

Table 1

Distance m	Linear wear, m	Linear wear intensity	Average pressure, Pa
30	$8,80 \cdot 10^{-6}$	$2,933 \cdot 10^{-7}$	$4,341 \cdot 10^6$
60	$1,40 \cdot 10^{-5}$	$2,333 \cdot 10^{-7}$	$3,442 \cdot 10^6$
90	$1,85 \cdot 10^{-5}$	$2,056 \cdot 10^{-7}$	$2,994 \cdot 10^6$
120	$2,20 \cdot 10^{-5}$	$1,833 \cdot 10^{-7}$	$2,745 \cdot 10^6$
150	$2,58 \cdot 10^{-5}$	$1,720 \cdot 10^{-7}$	$2,535 \cdot 10^6$

Thus, dependence of linear wear intensity upon average pressure on friction surface can be written in form of formula (21).

$$I_h = \alpha N_c + \beta \quad (21)$$

After using the linear regression of „MathCAD” system equation (22) can be obtained (22)

$$I_h = 6,8 \cdot 10^{-14} \cdot N_c + 5,64068 \cdot 10^{-10} \quad (22)$$

Taking account the abrasive particles grit the radius equals $R+2r$ in relationships containing R .

Conclusion:

Mathematical model of materials surface abrasive wear at non-rigidly fixed particles was significantly simplified as the result of step-by-step simulation. Non-uniform process of testing the materials on abrasive wear resistance was replaced by the uniform process with specified average loading and pressure. Such simulation significantly simplifies the mathematical equations and calculation of experiment results.

Experimental test carried out to determine the wear resistance shows the linear character of dependence of linear wear intensity upon the average pressure on friction surface during the entire time of experiment.

References:

1. Сорокатый Р.В. Моделирование поведения трибосистем методом трибоэлементов // Трение и износ. – 2002. – Т.23, №1. – С.16 – 22.
2. Федоров С.В. Обобщенная модель трения // Трение и износ. – 1993. – Т.14, №3. – С.460 – 470.
3. Вишневський О.А. Модель залежності величини абразивного зносу від лінійного // Вісн. НАУ, 2004 №1 – С.125 – 129.
4. Вишневський О.А. Модель залежності оцінки абразивної зносостійкості матеріалів від навантаження та густини. // Вісн. НАУ, – 2004. – №2. – С.86 – 90.
5. Вишневський О.А., Давидов О.С. Нелінійне математичне моделювання процесу абразивного зносу поверхонь матеріалів // Вісн. НАУ, 2005 №1 – С.101 – 104.
6. Вишневський О.А., Давидов О.С. Математичне моделювання процесів абразивного зносу поверхонь матеріалів з урахуванням деформації // Вісн. НАУ, 2005 №3 – С.99 – 103.
7. Вишневський О.А. Узагальнена модель абразивного зносу поверхонь матеріалів. // Вісн. НАУ, – 2005. – №4. – С.112 – 116.

Надійшла до друку 11.03.08

УДК 519.876.5:624.131.542

Власюк А.П., д. т. н., проф., Мартинюк* П.М.,
к.ф.-м.н., доц.

Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву

Побудовано математичну модель
фільтраційної консолідації ґрунту під плоским
флютбетом з урахуванням контактного
розмиву фільтраційним потоком. Наближений
числовий розв'язок відповідної двовимірної
крайової задачі знайдено методом радіальних
базисних функцій. Проведено ряд чисельних
експериментів, які засвідчили ефективність
запропонованого підходу і можливість
фільтраційного руйнування масиву ґрунту
шляхом контактного розмиву.

Ключові слова: контактний розмив,
фільтраційна консолідація, гранична швидкість
фільтрації, метод радіальних базисних функцій.

*E-mail: Martinyuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Процес фільтраційної консолідації
насичених ґрунтів полягає в розсіюванні
надлишкових напорів, які виникли під впливом
власної ваги ґрунту або від прикладеного
зовнішнього навантаження. При розсіюванні
надлишкових напорів тверді частинки ґрунту
ущільнюються. Класичні математичні моделі
процесів консолідації ґрунтів досить повно
вивчені в [1-4]. В роботах [5-7] дані процеси
вивчені в умовах впливу техногенних факторів.

Надлишкові напори в порах ґрунту, якими
характеризується фільтраційна консолідація
можуть спричинити фільтраційне руйнування
ґрунтових гідротехнічних споруд, а також
ґрунтових основ цивільних та промислових
споруд, що знаходяться в стані фільтраційної
консолідації. Зважаючи на роботу [8], одним із
видів фільтраційного руйнування може бути
контактний розмив масиву ґрунту в області
прилягання плоского бетонного флютбету
гідротехнічної споруди.

Процес фільтраційної консолідації масиву
ґрунту під флютбетом з урахуванням впливу
техногенних факторів досліджено в роботах [5,
6].

A.P.Vlasyuk, Doctor of technical sciences,
P. M. Martinyuk*, Candidate of physics and
mathematics sciences

The mathematical modeling of soil filtration consolidation under flat weir with taking into account soil wash-out

The mathematical model of soil filtration
consolidation under flat weir with taking into
account soil wash-out has been formulated. The
numerical solution of the correspondent two-
dimensional boundary-value problem has been
found by the radial basis function method with
discontinuous radial basis function. The numerical
experiments have been lead. There has been shown
that proposed method can be effective one.

Key Words: filtration erosion; filtration
consolidation; critical filtration speed; radial basis
function method

Тому метою даної роботи є дослідження
взаємопов'язаних процесів фільтраційної
консолідації та контактного розмиву ґрунту під
плоским флютбетом.

В роботі [9] побудована та досліджена
математична модель контактного розмиву
неоднорідного масиву ґрунту фільтраційним
потоком. Однак, в області розмиву для описання
процесів руху рідини використовувалось
рівняння стаціонарної фільтрації в ґрунті при
великому коефіцієнті фільтрації. В роботі [10]
для описання цих же процесів в зоні розмиву
використано рівняння Нав'є-Стокса для
нестискуваної рідини. Тому в цій роботі ми
використаємо саме такий підхід.

Потрібно відмітити, що вивчення питань
фільтраційного руйнування ґрунтів взагалі і,
зокрема, питань контактного розмиву ґрунтів
фільтраційним потоком мають важливе значення
для безпеки людей та збереження матеріальних
ресурсів. В роботі [11] відмічається, що з 9248
гідротехнічних споруд, зареєстрованих в 1965
році Міжнародною комісією по великих греблях,
на 535 греблях мали місце аварії та інциденти. В
результаті аварій на 10 греблях загинуло близько
10 тисяч людей і матеріальні збитки склали
кілька мільярдів доларів.

Питанням математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтів присвячено роботи [10], [12-15].

Питанням експериментального дослідження контактного розмиву ґрунтів присвячено роботи [16-19].

В роботі [9] при розв'язуванні задач контактного розмиву добре зарекомендував себе метод радіальних базисних функцій (РБФ) [20]. Тому в даній роботі для відшукування наближеного числового розв'язку крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі, використаємо саме цей метод.

2. Постановка задачі та її математична модель. Нехай в області Ω_1 міститься ґрунт, який під впливом прикладеного зовнішнього навантаження у вигляді плоского флютбету знаходиться в процесі фільтраційної консолідації [1-3] (див. рис.1). Область Ω_2 утворюється в результаті контактної розмиву ґрунту вздовж бетонної основи E_1E_2 флютбету в області Ω_1 і її займає порова рідина [8, 10, 16-18].

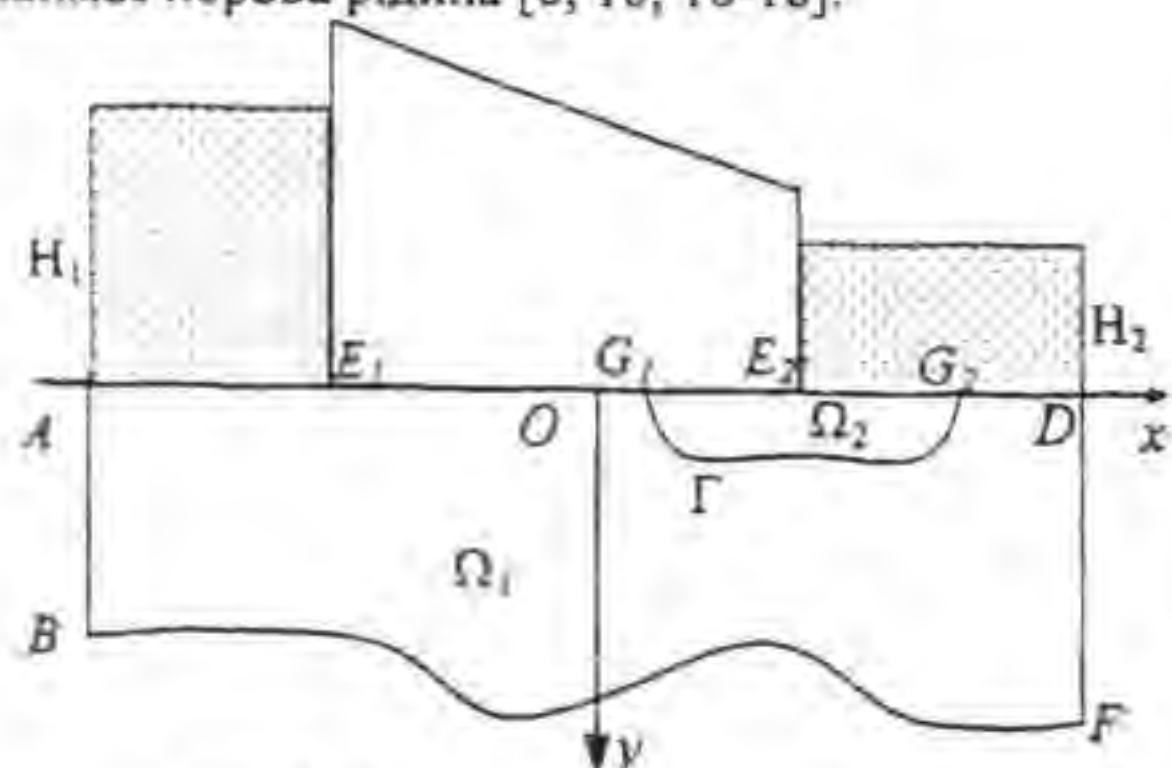


Рис.1. Фільтраційна консолідація та контактний розмив ґрунту

Математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації з урахуванням контактної розмиву можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h), (x, y) \in \Omega_1, t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\nu}{g} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right), (x, y) \in \Omega_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\nu}{g} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right), (x, y) \in \Omega_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, (x, y) \in \Omega_2, \quad (4)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{AB} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DE} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BF} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{E_1G_1} = 0, \quad (5)$$

$$h|_{AE_1} = H_1, h|_{G_2D} = H_2, \quad (6)$$

$$u_1|_{G_1E_2} = u_2|_{G_1E_2} = 0, u_1|_{E_2G_2} = 0, h|_{E_2G_2} = H_2, \quad (7)$$

$$[h]|_{\Gamma} = 0, [\mathbf{u}]|_{\Gamma} = 0, (x, y) \in \Gamma, \quad (8)$$

$$c(x, y, t)((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -m\rho_T \frac{d\Gamma}{dt}, (x, y) \in \Gamma, \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla h, (x, y) \in \Omega_1, \quad (10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(x, y, t, \mathbf{u}), (x, y) \in \Gamma, \quad (11)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), (x, y) \in \Omega_1. \quad (12)$$

Рівняння (1) описує процес фільтраційної консолідації масиву ґрунту Ω_1 . Рівняння (2)-(4) є системою рівнянь Нав'є-Стокса і описують процес руху рідини в зоні розмиву Ω_2 [10]. Припускається, що на межі контакту Γ областей Ω_1 та Ω_2 виконуються умови спряження ідеального контакту (8) [21]. Функція $\mathbf{v} = \mathbf{F}(x, y, t, \mathbf{u})$ пов'язує вектор швидкості фільтрації $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту $\mathbf{v}$ на рухомій межі Γ . Тут: $h(x, y, t)$ - напір; e - коефіцієнт пористості ґрунту; ρ_T - густина твердих частинок ґрунту; m - відносний об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту; γ - питома вага порової рідини; α - коефіцієнт стискуваності ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; ν - кінематична в'язкість порової рідини; g - прискорення вільного падіння; $c(x, y, t)$ - концентрація твердих частинок ґрунту; $\mathbf{K}$ - тензор коефіцієнта фільтрації; $\mathbf{n}$ - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; $\mathbf{d}$ - вектор напрямних косинусів дотичної. Вектор дотичної вважається додатньо направленим, якщо його поворот до вектора зовнішньої нормалі здійснюється проти руху годинникової стрілки. Умова (9) задає кінематичну граничну умову на межі Γ можливого контактної розмиву [9].

Зауважимо, що друга з умов спряження (8) пов'язує між собою швидкості руху рідини на межі Γ . Тому замість вектора $\mathbf{u}$ з боку області Ω_1 потрібно брати вектор $\frac{1}{1-m} \mathbf{u}$ [1].

3. Числове розв'язання крайової задачі (1)-(12) методом РБФ. Введемо позначення $X = (x, y)$. Покриємо замикання області $\overline{\Omega_1}$ вузловими точками $X_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N_1}$, а замикання області $\overline{\Omega_2}$ - вузловими точками $X_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N_2}$. На межі спряження Γ координати відповідних вузлів в обох областях мають співпадати. Нехай ω_1 - множина номерів вузлів, які належать області Ω_1 , а ω_2 - множина

номерів вузлів, які належать області Ω_2 . Замикання $\overline{\omega_1}$ буде містити рівно N_1 вузол і складатися із самої множини ω_1 та наступних множин: $\omega_1^{AE_1}$ - множина номерів вузлів, які належать межі AE_1 ; $\omega_1^{G_2D}$ - множина номерів вузлів, які належать межі G_2D ; ω_1^u - множина номерів вузлів, які належать межі $E_1G_1 \cup AB \cup BF \cup FD$; ω_1^r - множина номерів вузлів, які належать межі Γ . Аналогічно, замикання $\overline{\omega_2}$ буде містити рівно N_2 вузли і складатися із самої множини ω_2 та наступних множин: $\omega_2^{G_1E_2}$ - множина номерів вузлів, які належать межі G_1E_2 ; $\omega_2^{E_2G_2}$ - множина номерів вузлів, які належать межі E_2G_2 ; ω_2^r - множина номерів вузлів, які належать межі Γ .

Наближений розв'язок задачі (1)-(12) шукаємо у вигляді

$$h(X, t) \approx \sum_{i=1}^{N_1} a_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_1},$$

$$h(X) \approx \sum_{i=1}^{N_2} a_{i+N_1} \cdot \varphi_i(r_i, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

$$u_1(X) \approx \sum_{i=1}^{N_2} a_{i+N_1+N_2} \cdot \varphi_i(r_i, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

$$u_2(X) \approx \sum_{i=1}^{N_2} a_{i+N_1+2N_2} \cdot \varphi_i(r_i, \varepsilon), \quad X \in \overline{\Omega_2},$$

де $a_i(t)$, $i = 1, N_1 + 3N_2$, - деякі невідомі коефіцієнти, які при $i = 1, N_1$ залежать від часу; $\varphi(r_i, \varepsilon)$ - деякі розривні РБФ [22], причому $r_i = |X - X_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$.

Тоді з рівнянь (1)-(4), умов (5)-(8), (12) отримаємо наступну задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно вектора невідомих $A(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^{N_1+3N_2}$:

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + L \cdot A(t) = F(t), \quad (13)$$

$$M^{(1)} \cdot A^{(0)} = F^{(1)}, \quad (14)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^{N_1}, \quad M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{N_1+3N_2},$$

$$L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^{N_1+3N_2}, \quad F = \{f_i\}_{i=1}^{N_1+3N_2}, \quad M^{(1)} = \{m_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^{N_1},$$

$$F^{(1)} = \{f_i^{(1)}\}_{i=1}^{N_1}, \quad m_{ij} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad i \in \omega_1, \quad j \in \overline{\omega_1};$$

$$m_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad f_i^{(1)} = h_0(X_i), \quad i \in \overline{\omega_1}, \quad j \in \overline{\omega_1};$$

$$r_{ij} = |X_j - X_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

Спеціального визначення потребують елементи матриці L та вектор-стовпця F . Так,

$$l_{ij} = -\frac{(1+\varepsilon)(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \nabla \cdot (K \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)) \quad \text{при } i \in \omega_1,$$

$$j \in \overline{\omega_1}. \quad \text{Якщо } i \in \omega_1^{AE_1} \cup \omega_1^{G_2D}, \text{ то } l_{ij} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$j \in \overline{\omega_1}. \quad \text{У випадку } i \in \omega_1^u \text{ маємо}$$

$$l_{ij} = (-K \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), n), \quad j \in \overline{\omega_1}. \quad \text{При } i \in \omega_2$$

можливі наступні випадки:

$$l_{i+N_1, j+N_1} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial x}, \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{i+N_1, j+N_1+N_2} = -\frac{\nu}{g} \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{i+N_1+N_2, j+N_1} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{i+N_1+N_2, j+N_1+2N_2} = -\frac{\nu}{g} \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{i+N_1+2N_2, j+N_1+N_2} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial x}, \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{i+N_1+2N_2, j+N_1+2N_2} = \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega_2}.$$

$$\text{Якщо } i \in \omega_2^{G_1E_2} \text{ то } l_{i+N_1+N_2, j+N_1+N_2} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$l_{i+N_1+2N_2, j+N_1+2N_2} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2}. \quad \text{Якщо } i \in \omega_2^{E_2G_2}$$

$$\text{то } l_{i+N_1, j+N_1} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), \quad l_{i+N_1+N_2, j+N_1+N_2} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon),$$

$$j \in \overline{\omega_2}. \quad \text{Для елементів вектор-стовпця } F \text{ маємо наступні значення:}$$

$$f_i = H_1, \quad i \in \omega_1^{AE_1}; \quad f_i = H_2, \quad i \in \omega_1^{G_2D}; \quad f_{i+N_1} = H_2, \\ i \in \omega_2^{E_2G_2}.$$

Якщо $s \in \omega_1^r$, $k \in \omega_2^r$ є номерами двох вузлів на межі Γ , координати яких співпадають, то

$$l_{k+N_1, j} = -\varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_1};$$

$$l_{k+N_1, j+N_1} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{k+N_1+N_2, j} = -k_1 \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial x}, \quad j \in \overline{\omega_1};$$

$$l_{k+N_1+N_2, j+N_1+N_2} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2};$$

$$l_{k+N_1+2N_2, j} = -k_2 \frac{\partial \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon)}{\partial y}, \quad j \in \overline{\omega_1};$$

$$l_{k+N_1+2N_2, j+N_1+2N_2} = \varphi_j(r_{sj}, \varepsilon), \quad j \in \overline{\omega_2};$$

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор-стовпця задачі Коші (13), (14) згідно вищевказаних формул не визначений, то він приймається рівним нулю.

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (13), (14) поділимо часовий відрізок $[0; t_0]$ на M однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{M}$.

Наближений розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (13) можна знайти за допомогою чисто неявної різницевої схеми або схеми Кранка-Ніколсона [21].

Кінематична гранична умова (9) використовується для апроксимації положення межі спряження $\Gamma(x, y, t)$ [9]. Якщо на часовому шарі під номером (s) крайова задача (1)-(12) розв'язана, то, наприклад, у випадку розмиву масиву ґрунту $c(x, y, t) = m\rho_T$ і положення $\Gamma^{(s+1)}$ межі $\Gamma(x, y, t)$ на часовому шарі $(s+1)$ визначається з умови

$$\frac{\Gamma^{(s+1)}(x, y) - \Gamma^{(s)}(x, y)}{\tau} = (\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{d})|, \quad s = \overline{0, M-1}.$$

При $t = 0$ межа $\Gamma(x, y, t)$ складається з одного вузла, який розміщений в точці E_2 .

4. Результати числових експериментів. Вияснення можливості та ступеня контактного розмиву ґрунту у випадку його фільтраційної консолідації під плоским флютбетом проведено на тестовому прикладі. В зв'язку з цим розглянуто задачу, де межа BF (див. рис.1) є прямою і паралельною до осі ox . При цьому координати точок області Ω_1 наступні: $A(-10; 0)$, $B(-10; 10)$, $E_1(-5; 0)$, $E_2(5; 0)$, $D(10; 0)$, $F(10; 10)$. Розмірність визначається у метрах.

Для конкретизації співвідношення (11), між швидкістю фільтрації та швидкістю руху твердих частинок приймалась лінійна залежність

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha^+}{1-m} \mathbf{u}, \quad \text{де} \quad \alpha^+ = \begin{cases} \alpha, & u \geq u_{kr}; \\ 0, & u < u_{kr}. \end{cases} \quad \text{Причому}$$

покладалось $\alpha = 1$ і припускалось, що частинка, яка відірвалася від масиву ґрунту миттєво виноситься фільтраційним потоком. Тут u_{kr} - критичне (або розмиваюче) значення швидкості фільтрації.

Ґрунт вважався ізотропним за своїми характеристиками і коефіцієнт фільтрації покладалась рівним $k_1 = k_2 = 0,005 \text{ м/с}$.

Значення інших числових характеристик приймалися наступні: $\bar{e} = 0,70$, $\xi = 0,75$, $\nu = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $H_1 = 32 \text{ м}$, $H_2 = 2 \text{ м}$, $a = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$, $\gamma = 10^4 \text{ Н/м}^3$.

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h_0(x, y)) &= 0, (x, y) \in \Omega_1, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{AB} &= (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DF} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BF} = 0, \\ h_0|_{AE_1} &= H_1, \quad h_0|_{G_2D} = H_2, \quad h_0|_{E_1G_2} = q, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K} \nabla h_0, (x, y) \in \Omega_1, \end{aligned}$$

де q - величина напору на межі ґрунту, яка еквівалентна величині прикладеного зовнішнього навантаження.

Числові експерименти проводились при початковій кількості вузлів 861 (див. рис. 2). Для дискретизації в часі використовувалась чисто неявна різницева схема з кроком $\tau = 10 \text{ с}$.

Для проведення числових експериментів та побудови розривних РБФ [22] використовувались наступні неперервні РБФ [20]:

мультиквадратична РБФ $\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$;
обернена мультиквадратична РБФ $\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}}$;
обернена квадратична РБФ $\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + (r\varepsilon)^2}$;

гаусівська РБФ $\phi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}$. У вищенаведених функцій $\varepsilon > 0$ - так званий параметр форми.

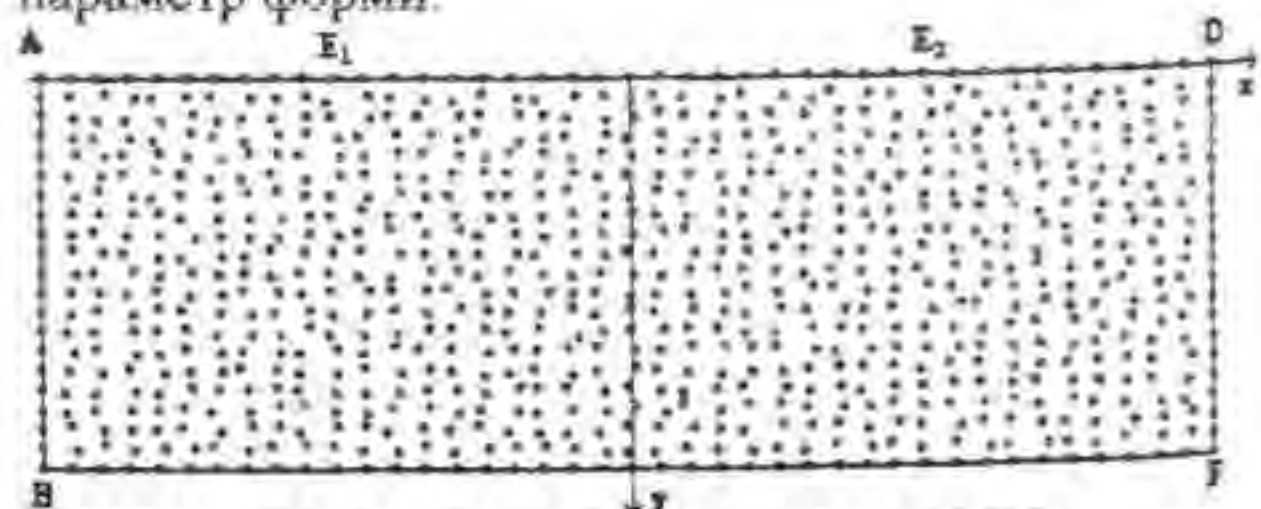


Рис.2. Вузлова сітка методу РБФ

Якщо критична швидкість фільтрації покладалась рівною $u_{kr} = 0,1 \text{ м/с}$, то область розмиву являла собою лише тріщину на верхній межі AD , з кінцями в точках з координатами $(1,4; 0)$ та $(6,1; 0)$. Дана тріщина являла собою зосереджений шлях фільтрації, який утворився в процесі розмиву. Однак, визначити товщину тріщини, виходячи з даної математичної моделі, неможливо.

Якщо критична швидкість фільтрації покладалась рівною $u_{kr} = 0,05 \text{ м/с}$, то процеси розмиву набували катастрофічного характеру. На рис. 3 зображено область розмиву лише через хвилину від початку процесу розмиву. Координати точок межі розмиву наступні:

$G_1(-1,30; 0)$, $G_2(8,80; 0)$, $S(3,20; 3,55)$. Якщо не враховувати надлишкові напори від прикладеного навантаження і досліджувати можливість розмиву ґрунту лише враховуючи фільтрацію із верхнього б'єфа у нижній, то зона розмиву взагалі не утворюється. Це вказує на те, що, як логічно випливає із фізичних передумов постановки задачі, небезпека утворення розмиву набагато вища, якщо ґрунт знаходиться в стані фільтраційної консолідації.

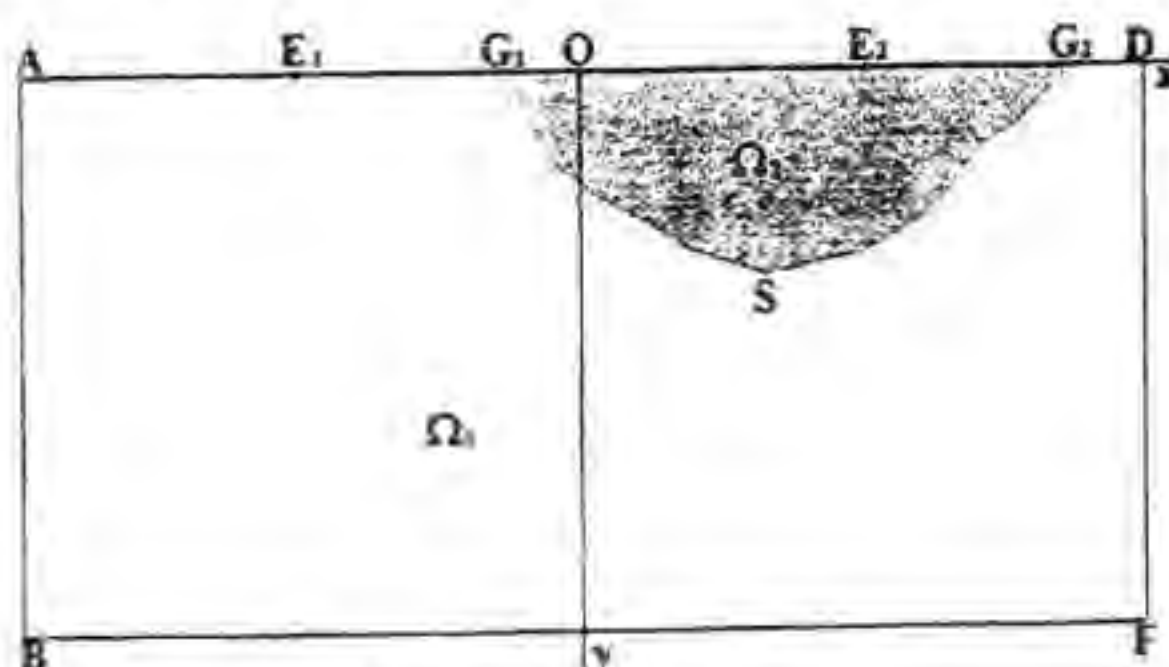


Рис. 3. Зона розмиву

Окремого розгляду вимагає питання розмиваючої швидкості руху (або швидкості фільтрації) рідини u_{kr} . Як свідчать наявні експериментальні дані, загальної залежності цієї швидкості від характеристик та фізичного стану ґрунту та самої рідини на даний час вивести поки що неможливо. Тому теоретичні та числові дослідження розмиву ґрунтів з використанням математичного моделювання повинні доповнюватись експериментальними дослідженнями для цих ґрунтів щодо можливості їх розмиву фільтраційним потоком.

Одним із ключових питань задачі (1)-(12) є прогноз зони розмиву Ω_2 і динаміки зміни межі розмиву Γ в часі. В наявних розрізнених і частково систематизованих експериментальних дослідженнях деякі автори хоча і встановлюють величину критичної швидкості u_{kr} , але не встановлюють величину інтенсивності розмиву. Під інтенсивністю розмиву будемо розуміти масу твердих частинок ґрунту, винесену з одиниці площі поверхні розмиву за одиницю часу. Якщо буде відома залежність інтенсивності розмиву від швидкості руху рідини в зоні розмиву, тоді ми: 1) будемо мати передумови для конкретизації залежності (11); 2) зможемо точніше записати кінематичну граничну умову (9) на поверхні розмиву Γ ; 3) зможемо дати точніші прогнози щодо величини зони розмиву.

5. Висновки. Отже, в даній роботі поставлена і чисельно розв'язана нестационарна задача про

контактний розмив ґрунтів фільтраційним потоком під плоским флютбетом з урахуванням процесів фільтраційної консолідації. Аналіз результатів проведених числових експериментів дозволив зробити наступні висновки:

- 1) величина зони розмиву залежить від співвідношення швидкості фільтрації та критичної швидкості фільтрації в досліджуваному ґрунті;
- 2) величина зони розмиву може досягати великих розмірів.

Варто відмітити, що дана робота ставить і проблемні питання. По-перше, дослідження руху рідини в зоні розмиву вимагає розв'язання відповідної нестационарної крайової задачі Нав'є-Стокса в даній області. По-друге, при застосуванні методу РБФ до розв'язання крайової задачі Нав'є-Стокса в зоні розмиву в шуканих функцій при деяких покриттях області вузлами виникають осциляції. Це вимагає застосування стабілізаційних або адаптивних схем відповідного методу. По-третє, в математичній моделі потрібно врахувати фактор, що в зоні розмиву рухається не сама рідина, а суспензія. По-четверте, потрібно знати інтенсивність розмиву поверхні ґрунту фільтраційним потоком, що встановлюється експериментальним шляхом (вирішення даного питання допоможе удосконалити математичну модель). Ці питання будуть предметом наших подальших досліджень та публікацій.

Список використаних джерел

1. Флорин В.А. Основы механики грунтов. - Москва: Госстройиздат. - Т.2, 1961. - 544 с.
2. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - Москва: Наука, 1967. - 270с.
3. Прогноз скорости осадок оснований сооружений /Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартirosян З.Г.-Москва: Стройиздат, 1967.-308с.
4. Костерин А.В., Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В. Численное исследование фильтрационной консолидации //Математическое моделирование. - 2001. - Т. 13, №9. - С.63-70.
5. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. - Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. - 211 с.
6. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в

4. Костерин А.В., Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В. Численное исследование фильтрационной консолидации // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, №9. – С.63-70.
5. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
6. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
7. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – Київ: Наук. думка, 2005. – 282 с.
8. Тартаковский Д.М., Васильев И.М. О неравномерных деформациях земляных плотин в областях примыкания грунтов к жестким неровным поверхностям // Вопросы проектирования высоких плотин: Труды ЛПИ. – 1968. – №292. – С.81-88.
9. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання контактної розмиви неоднорідного масиву ґрунту фільтраційним потоком // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2008. – Вип.1. – С. 86-91.
10. Sellmeijer J.B. On the mechanism of piping under impervious structures (Thesis). // LGM-Mededelingen. – 1988. – №96. – 112 p.
11. Гогоберидзе М.И., Какауридзе Р.Г., Микашвили Ю.Н., Мирцхулава Д.Ц. Обобщение данных статистического анализа аварий и инцидентов в аспекте надежности плотин // Сообщения Акад. наук Груз. ССР. – 1977. – 86, №3. – С.681-684.
12. Sellmeijer J.B., Koenders M. A mathematical model for erosion under a dam // Appl. Math Model. – 1991. – 15. – Pp. 646-651.
13. Sellmeijer J.B. Numerical computation of seepage erosion below dams (piping) // Proc. 3rd Int. Conf. Scour and Erosion, Amsterdam, Nov. 2006.
14. Власюк А.П., Мартинюк П.М. До питання про утворення зосереджених фільтраційних потоків в неоднорідному масиві ґрунту // Abstracts of International Workshop "Problems of decision making under uncertainties", Skhidnytsia, Ukraine, May 21-25, 2006. – С. 81-83.
15. Tawatchai Tingsanchali, Chaiyuth Chinnarasri. Numerical modeling of dam failure due to flow overtopping // J. Hydrological Sciences. – 2001. – 46(1). – Pp. 113-130.
16. Истомина В.С. Исследование контактного размыва песчаных и гравелистых грунтов // Вопросы фильтрационных расчётов гидротехнических сооружений. – 1956. – Вып. 2. – С. 190-216.
17. Жиленков В.Н. О контактном размыве глинистых грунтов фильтрационным потоком // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. – Вып. 72. – С. 48-61.
18. Жиленков В.Н., Шевченко Н.И. Гидродинамические условия контактного размыва глинистых грунтов фильтрационным потоком // Изв. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева. – 1980. – 144. – С. 11-19.
19. Ojha C.S.P., Singh V.P., Adrian D.D. Determination of critical head in soil piping // J. Hydraulic Engn. – 2003. – Vol. 129, №7. – Pp. 511-518.
20. Iske A. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. – 2003. – Vol. 61, 3. – Pp. 247-284.
21. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.
22. Мартинюк П.М. Метод радіальних базисних функцій в крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами спряження // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2007. – Вип.4. – С.178-181.

Надійшла до редколегії 20.03.2008

УДК 517.9

Івохін Є.В., канд.фіз.-мат.наук, доцент,
Косинський К.О., аспірант

Про підхід до реалізації нечітких баз даних

Для обробки неточно заданої та нечітко формалізованої інформації запропоновано підхід до формування, накопичення та актуалізації нечітких баз даних. Степінь нечіткості атрибутів таблиць розраховується на основі чітких даних у вигляді спеціального представлення, яке створюється за допомогою операції розширення.

Ключові слова: реляційні бази даних, нечіткі множини, динамічні представлення, відношення переваги

E-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Хусаїнов Д.Я.

Сучасну інформаційну систему важко представити без використання баз або сховищ даних. Під цими поняттями, як правило, розуміють «набір структурованих даних, що підтримуються системою управління баз даних (СУБД), яка забезпечує різним додаткам потрібні дані у заданому вигляді» [1].

Однак, дане визначення є недостатньо конструктивним і слабо формалізованим. З іншого боку, зауважимо, що кожна програмна система, яка призначається для накопичення та обробки (актуалізації) даних, використовує інформаційну модель предметної області. В загальному випадку характерними категоріями, що формують таку модель, є об'єкти та відношення між ними. Такий підхід дозволяє визначити базу даних (БД) як об'єктно-орієнтований опис моделі, що базується на поняттях об'єктів та відношень, з повним або частковим фізичним розташуванням змістовних даних предметної області на комп'ютерних носіях [2].

Використання моделі даних при роботі з БД дає можливість відображати особливості предметної області. За час існування розробок інформаційних систем запропоновано багато різних моделей, кожна з яких має свої переваги та недоліки.

Найбільш популярною є реляційна модель предметної області. В реляційній моделі вважається, що всі дані БД інформаційної системи представлені у вигляді таблиць [3].

Ivohin E.V., Ph.D., associate professor,
Kosinsky K.O., post-graduate

About realization of fuzzy databases

For treatment unexactly set and the unexpressly formalized information offered approach to forming, accumulation and actualization of fuzzy databases. The degree of fuzzyness of tables attributes accounts on the basis of clear information as the special presentation which is created by the operation of expansion.

Key words: relational databases, fuzzy dataset, dynamic view representations, relations of preference

Рядок кожної таблиці представляє собою кортеж неструктурованих одиниць даних або атрибутів. Набір кортежів, що складає таблицю, задає відношення: таким чином, модель даних визначається множиною таблиць-відношень (R -таблиць) або «реляцій».

Значення атрибутів кортежів і таблиць-відношень визначаються заданими разом з таблицями областями визначення (доменами). Множини значень різних стовбців в одній і тій самій таблиці або в різних таблицях можуть задаватися одним доменом, а можуть – і різними. При чому, значення атрибутів в таблиці-відношенні мають лише один конкретний вигляд функціональної залежності один від іншого. Іншими словами, всі значення в довільному кортежі повинні окремо залежати лише від значення стовпця або групи стовбців – одних для всього відношення. Такий стовбець або група стовбців називається ключовими, а значення атрибутів в них – ключами.

В рамках реляційної теорії визначений список операцій, які можна здійснювати над R -таблицями, отримуючи результат у вигляді R -таблиці. Це означає, що при виконанні операцій на реляційною базою даних отримуємо нову реляційну БД. До таких операцій над базою даних відносять:

1) базові операції: обмеження (виключення з таблиць деяких кортежів); проєкція (виключення з таблиці деяких стовбців); декартовий добуток двох таблиць (за правилом декартового добутку

двох множин рядків R -таблиць); об'єднання (об'єднання множин рядків двох таблиць); різниця (різниця множин рядків); присвоювання (іменованій таблиці присвоюється значення виразу над R -таблицями).

2) похідні операції: з'єднання таблиць за деяким правилом; перетин таблиць; розширення таблиць новими стовбцями; сумування (зменшення рядків в таблиці за рахунок агрегування вихідних даних).

Крім постійних таблиць, що визначені в моделі інформаційної системи, операції на R -таблицями дозволяють отримувати таблиці-представлення, що дає можливість динамічно формувати набори кортежів з додатково заданими правилами їх формування.

Таким чином, констатуємо, що будь-яка прикладна проблемна область описується в термінах таблиць достатньо просто, що дозволяє суттєво спростити розробку інформаційних систем. Крім цього, реляційна концепція баз даних може бути легко формалізована, базуючись на математичній моделі відношень. Припустимо, що задані n множин $D_1, D_2, \dots, D_n$. Тоді реляція R є відношення над цими множинами, якщо R є множина впорядкованих наборів виду $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, де d_1 - елемент з D_1 , d_2 - елемент з D_2 , ..., d_n - елемент з D_n . При цьому набори вигляду $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ визначають кортежі, а множини $D_1, D_2, \dots, D_n$ - домени.

Ідея реляційних баз даних стала популярною і серед розробників СУБД. Виходячи з того, що більша частина даних, які обробляються в інформаційних системах, носять кількісний характер, зросла зацікавленість в створенні способів та механізмів отримання конкретних даних. Універсальним засобом пошуку та доступу до сховищ даних є мова запитів SQL [4], яка однаково зручно дозволяє маніпулювання інформацією в різних реалізаціях моделей баз даних.

Мова SQL добре відома. Вона використовується для опису запитів до БД в спеціальних термінах. Наприклад, можна отримати відомості про молодих менеджерів з заданого регіону, які ефективно працювали впродовж року. Вік молодих людей можна виміряти 25 роками, а величину ефективності визначити у вигляді суми укладених договорів, наприклад, 200000 гривень. Тоді перелік ефективно працюючих молодих менеджерів можна отримати за допомогою наступного запиту мовою SQL:

Select FIO from managers

*Where (Managers.Age <= 25 and
Managers.Sum > 200000 and
Managers.Region = 1).*

Запити до БД формуються у вигляді чітких вимог до шуканих даних. Чіткі вимоги дозволяють отримувати конкретні результати пошуку в БД. Однак в запитах, що формулює користувач, досить часто присутні неточності та невизначеності. Якщо повернутися до наведеного прикладу, то менеджери віком 26 років з річною сумою договорів 250000 гривень або віком 20 років з сумою 198000 гривень не попадають в результат виконання запиту, хоча їх характеристики є дуже близькими до вимог пошуку. Для забезпечення включення таких менеджерів в результат у запиті потрібно змінювати величини віку менеджерів та обсягів укладених ними договорів.

Зрозуміло, що в загальному випадку, коли з бази даних необхідно вибрати інформацію про молодих співробітників з високими показниками праці, реалізація такого запиту можлива лише за умов формалізації понять «молодий» та «висока ефективність роботи», які відносяться до категорії неточних, невизначених даних. Такі запити неможливо виконати стандартними засобами SQL.

Розробники інформаційних систем останнім часом приділяють багато уваги реалізації нечітких запитів. При цьому, сховища чітких даних та підтримкою чітких запитів були виділені в групу так званих Crisp DataBases. З іншого боку, в реляційних базах даних з підтримкою нечітких запитів широко вживаються терміни «нечіткі бази даних», Fuzzy DataBases (FDB), Fuzzy Queries for DataBases. В БД з підтримкою механізмів нечітких запитів використовується підхід, що базується на використанні нечітких множин Заде [5] і нечітких відносин з підтримкою формул нечіткої логіки. Підхід запропоновано в 1984 році і надалі отримав розвиток в роботах Ягера Р. [6], Дюбуа Д. та Прада Г. [7].

Визначення 1. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ в універсальному просторі X називається сукупність пар виду $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Звичайна множина A з X може бути представлена у вигляді нечіткої множини, яка визначається характеристичною функцією $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} \quad (1)$$

Визначення 2. Нечітким відношенням $\bar{F}$ на універсальному просторі $X \times Y$ називається нечітка множина декартового добутку $X \times Y$, що характеризується функцією належності $\mu_{\bar{F}}(x, y): X \times Y \rightarrow [0, 1]$.

Виходячи з традиційних понять, представлень та операцій з нечіткими множинами, в існуючих варіантах нечітких баз даних реалізується підтримка виконання нечітких запитів до чітких даних сховища.

Аналогічний підхід спостерігається і в нечітких базах знань. Продукційні правила нечіткої бази знань формулюються на основі реалізації відомих формул нечіткої логіки (найбільш популярний підхід, запропонований Такагі-Сугено [8]), а база даних про проблемну область подається у вигляді типового чіткого сховища інформації.

Покажемо, що поняття нечітких баз даних може бути розширено і узагальнено. В багатьох сучасних інформаційних системах, окрім нечітких запитів, приходить мати справу з неточною, нечіткою інформацією. Це можуть бути дані про результати експериментальних досліджень на основі вимірювань з різними величинами точності (похибками); такими є дані для систем підтримки прийняття рішень, в яких зберігається і ведеться інформація, наприклад, про рівні компетентності експертів, важливість критеріїв, тощо. Нарешті, це можуть бути дані з чітких таблиць БД, що оформлюються у вигляді представлення, яке доповнюється полями величин відповідності значень кожного поля усіх кортежів деяким динамічним критерієм. Наприклад, для запиту про менеджерів можна сформувати таблицю-представлення з полем «вік» (A) та новим полем «молодий» (Y), до якого занести значення міри відповідності віку менеджерів категорії «молодий». В термінах нечітких множин, ці значення є величинами міри належності конкретних вікових даних $x, x \in A$ до нечіткої множини $\tilde{Y} = \{(x, \mu_{\tilde{Y}}(x))\}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{Y}}(x) \in [0, 1]$ для конкретно заданого числового значення, яке відповідає поняттю «молодий» (припустимо, 25 років). Формування нового представлення в даному випадку можна записати у вигляді наступної послідовності операторів мовою Linq [10], які потім транлюються у відповідну послідовність SQL-запитів:

```
int k = 25;
//Обираємо усіх співробітників і показуємо їх
//повне ім'я і дату народження
var q1 = from e in db.Employees
select new {e.FirstName, e.LastName, e.Age};
//Використовуємо функцію розширення таблиці
var q2 = from e in db.Employees.Fuzzy (e => 1 -
(double)Math.Abs(e.Age - k)/k)
select new {e.Data.FirstName,
e.Data.LastName, e.Data.Age, e.Fuzzy};
//Використовуючи функцію для додавання
//стовбця, здійснимо фільтрацію за рівнем
//відповідності категорії «молодий»
var q3 = from e in db.Employees.Fuzzy(e => 1 -
(double)Math.Abs(e.Age - k)/k) where e.Fuzzy > 0.5
select new {e.Data.FirstName, e.Data.LastName,
e.Data.Age, e.Fuzzy};
```

Іншими словами, для довільної чіткої бази даних може бути побудоване нечітке представлення (нечітка БД, НБД), в якому інформація про характеристики (поля) об'єктів проблемної області подаються парою стовбців: в першому – конкретні значення показника з таблиці чіткої бази даних (вік, показання вимірювального приладу, номер зайнятого місця, значення критерія якості і т.і.), в другому – значення відповідності даних першого стовбця деякому правилу (нечіткому поняттю). Ця процедура має назву фаззифікації чітко визначених даних [9].

Зрозуміло, що результат процесу фаззифікації чіткого відношення $R = \{ \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle, \text{де } d_1 - \text{елемент з } D_1, d_2 - \text{елемент з } D_2, \dots, d_n - \text{елемент з } D_n \}$ за i -тим атрибутом, $i = \overline{1, n}$, можна виразити у вигляді R -таблиці. Це нове нечітке відношення

$$\bar{R} = \{ \langle d_1, d_2, \dots, d_i, \mu_{\bar{A}_i}(d_i), \dots, d_n \rangle \}, \quad (2)$$

що формується як множина кортежів з $n+1$ елемента, в яких величини $\mu_{\bar{A}_i}(d_i)$ задають міру належності значень елементів d_i деякій нечіткій множині $\tilde{A}_i = \{ (d, \mu_{\tilde{A}_i}(d)), d \in D_i \}$. Таким чином, список базових та похідних операцій над R -таблицями може бути розширений операцією фаззифікації як різновидом операції розширення.

Потрібно зауважити, що відношення $\bar{R}$, сформоване за i -тим атрибутом, $i = \overline{1, n}$, буде представлятися у вигляді таблиці з p додатковими стовбцями, якщо на i -тий атрибут накладено p нечітких понять. Наприклад, для наведеного вище випадку, крім нечіткої формалізації поняття «молодий» аналогічно

будується представлення нечіткого поняття «менеджер середнього віку» і т.і. Таким чином, відношення $\bar{R}$ за i -тим атрибутом можна представити у вигляді таблиці з $n+p$ стовбцями

$$\bar{R} = \{ \langle d_1, d_2, \dots, d_i | \mu_{\bar{A}_1}(d_i) | \mu_{\bar{A}_2}(d_i) | \dots | \mu_{\bar{A}_p}(d_i), \dots, d_n \rangle \}.$$

Якщо частина доменів не потребує фаззифікації, тобто є чіткими множинами з функцією належності у вигляді характеристичної функції (1), то відношення $\bar{R}$ можна представити у вигляді

$$\bar{R} = \{ \langle d_1 | 1, d_2 | 1, \dots, d_i | \mu_{\bar{A}_1}(d_i) | \mu_{\bar{A}_2}(d_i) | \dots | \mu_{\bar{A}_p}(d_i), \dots, d_n | 1 \rangle \}.$$

Нарешті, нечітке відношення $\bar{R}$ може бути побудоване для випадку чітко заданих доменів $D_1, D_2, \dots, D_n$: $\bar{R} = \{ \langle d_1 | 1, d_2 | 1, \dots, d_i | 1, \dots, d_n | 1 \rangle \}$, тобто у вигляді таблиці з $2n$ стовбцями, в якій $\mu_{\bar{A}_i}(d_i) \equiv 1, i = \overline{1, n}$.

Визначення 3. Нечітку множину $\bar{R}$, яка визначає нечітке табличне відношення

$$\begin{aligned} \bar{R} = \{ \langle d_1 | \mu_{\bar{A}_1}(d_1) | \dots | \mu_{\bar{A}_n}(d_1), \\ d_2 | \mu_{\bar{A}_1}(d_2) | \dots | \mu_{\bar{A}_n}(d_2), \dots, \\ d_i | \mu_{\bar{A}_1}(d_i) | \dots | \mu_{\bar{A}_n}(d_i), \dots, \\ d_n | \mu_{\bar{A}_1}(d_n) | \dots | \mu_{\bar{A}_n}(d_n) \rangle \}, \end{aligned} \quad (3)$$

назвемо складеною нечіткою множиною в універсальному просторі $D_1 \cup \dots \cup D_i \cup \dots \cup D_n$.

Визначення 4. Базу даних інформаційної системи будемо називати нечіткою (НБД), якщо для представлення даних предметної області використовується хоча б одне нечітке відношення $\bar{R}$ (6) у вигляді R -таблиці або R -представлення.

Розглянемо НБД деякої інформаційної системи. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що нечітке відношення $\bar{R}$ представлено як сукупність кортежів

$$\begin{aligned} \bar{R} = \{ \langle d_1 | \mu_{\bar{A}_1}(d_1), d_2 | \mu_{\bar{A}_2}(d_2), \\ \dots, d_i | \mu_{\bar{A}_i}(d_i), \dots, d_n | \mu_{\bar{A}_n}(d_n) \rangle \}, \end{aligned}$$

$d_i \in D_i \subset R_i^1, i = \overline{1, n}$. З практичної точки зору постає важливе питання про формування запитів та реалізацію механізмів отримання даних з НБД. Для його вирішення розглянемо підхід на основі

порівняння відстаней між нечіткими множинами за допомогою нечіткого відношення переваги.

Нечітке відношення переваги для традиційних нечітких множин [11] визначається на основі порівняння відстаней нечітких множин до деякої наперед заданої чіткої множини і знаходженні компромісного значення в процесі вибору найменшої з них. Розширимо цей підхід на випадок складених нечітких множин.

Як було з'ясовано вище, довільний запис нечіткого відношення $\bar{R}$ НБД описується складеною нечіткою множиною $\bar{A} = \{ \langle d_1, \mu(d_1) \rangle, \dots, \langle d_n, \mu(d_n) \rangle \}$ в просторі $D_1 \cup \dots \cup D_i \cup \dots \cup D_n$, де множина значень $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ визначає чіткий кортеж таблиці бази даних, $\mu(d_i), i = \overline{1, n}$ - величини мір відповідності значень атрибутів деяким базовим показникам, $0 \leq \mu(x_i) \leq 1, i = \overline{1, n}$, які можна розглядати як рівні належності елементів $d_i, i = \overline{1, n}$ нечіткій множині $\bar{A}$.

Позначимо h - вектор одиничних значень з простору R_+^m , $K(A) = \{ \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_I \}$ - сукупність складених нечітких множин $\bar{A}_k, k = \overline{1, I}$ в R_+^n , які представляють записи нечіткого відношення $\bar{R}$ нечіткої БД, I - потужність множини записів $\bar{R}$ -таблиці або $\bar{R}$ -представлення. Визначимо складену нечітку множину з $K(A)$, яка є найближчою до h у розумінні нечіткого відношення переваги " $<$ ". Формально будемо його позначати G .

Для кожної множини $\bar{A}_i, i = \overline{1, I}, \bar{A}_i \in K(A)$ обчислимо нечітку відстань $\rho_i = \rho(h, \bar{A}_i), i = \overline{1, I}$, між чітким елементом h та множиною $\bar{A}_i, i = \overline{1, I}$:

$$\rho_i = \rho(h, \bar{A}_i) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \rho_\alpha(h, \bar{A}_i), \quad (4)$$

$\rho_\alpha(h, \bar{A}_i)$ - евклідова відстань між двома звичайними векторами h та $\{ \bar{A}_i \}_\alpha, i = \overline{1, I}$ на рівні належності $\alpha, \alpha \in (0,1]$.

Для визначення «найменшої» відстані, як правило, користуються технікою обробки нечітких відношень переваги, введеною Орловським [5]. В рамках даного підходу вважається, що нечітке відношення переваги $g(a, b)$ для довільних нечітких елементів $a, b \in R_+^m$ за умов $\mu_z(a, b) > 0$ визначає

співвідношення у вигляді $a < b$ із степенем $g(a, b) = \mu_g(a, b)$.

Нехай $\bar{A}, \bar{B}$ - довільні складені нечітки множини з $K(A)$. Тоді $G(\bar{A}, \bar{B}) = \mu_G(\bar{A}, \bar{B})$ розраховується за формулою

$$G(\bar{A}, \bar{B}) = \sup_{p, q \in R^n} \min \{ \mu_{\bar{A}}(p), \mu_{\bar{B}}(q), \mu_g(p, q) \},$$

і, як було відмічено вище, нечітка множина $\bar{A}$ "менше" нечіткої множини $\bar{B}$ із степенем $G(\bar{A}, \bar{B})$, якщо $G(\bar{A}, \bar{B}) > 0$.

Таким чином, за допомогою нечіткого відношення переваги $G(\bar{A}, \bar{B})$ можна порівняти відстань між h і $\bar{A}_k$ та між h і $\bar{A}_j$, $\bar{A}_k, \bar{A}_j \in K(A)$. Це надає можливість визначити "найближчий" до h елемент A^* з $K(A)$, де A^* - нечітка множина невідомованих наборів з $K(A)$, функція належності якої описується виразом:

$$\mu_{A^*}(A_k) = \min_{w=1, I} (1 - \mu_T(A_k, A_w)) = \\ = 1 - \max_{w=1, I} \mu_T(A_k, A_w), k = \overline{1, I},$$

де через T позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає G

$$\mu_T(\bar{A}, \bar{B}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_G(\bar{A}, \bar{B}) < \mu_G(\bar{B}, \bar{A}) \\ \mu_G(\bar{A}, \bar{B}) - \mu_G(\bar{B}, \bar{A}), & \text{в інш. випадку} \end{cases}$$

$\bar{A}, \bar{B} \in K(A)$.

Наведений підхід до використання нечітко визначених даних на основі формування нечітких представлень і введеного нечіткого відношення переваги, забезпечує можливість створення та обробки слабоформалізованої інформації, визначає спосіб отримання кортежів нечіткого відношення нечіткої бази даних, які формують результати реалізації SQL-запитів до нечітких даних.

Список використаних джерел

1. *Pascal F.* Understanding Relational Databases with Examples in SQL-92. John Wiley & Sons, 1993.
2. *Вон К.* Технология объектно-ориентированных баз данных // Открытые системы, 1994. Вып. 4 (8). Р. 14.
3. *Codd E. F.* An Evaluation Scheme for Database Management Systems that are Claimed to be Relational // Proc. IEEE CS International Conference, № 2 on Data Engineering, Los Angeles, February, 1986.
4. *Дадли К.* Соответствие стандарту SQL // Мир Oracle, 1996. № 1 (39). С. 7-16.
5. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. -М.: Наука, 1981. 206с.
6. *Yager R.R.* Fuzzy sets, probabilities and decision. "J.of Cybern.", №10, 1980, p.1-18.
7. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. - М.: Радио и связь, 1990. 287с.
8. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Vol. 15, № 1. - 1985. - P. 116 - 132.
9. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. -М.: Финансы и статистика, 2002. - 344с.
10. *Fabrice Marguerie, Steve Eichert, Jim Wooley.* LINQ in Action. Manning Publ., 2008. 600 с.
11. *Івохін Є.В., Косинський К.О.* Про оцінку подібності прецедентів на основі нечіткого відношення переваги // Межведомственный научный сборник «Динамические системы», 2007. Вып.22. С.145-149.

Надійшла до редколегії 19.02.2008

УДК 681.5:621.384.5

Кулян В.Р., к.т.н, доц., Юнькова О.О., к.ф.-м.н.,
доц., Рутицька В.В., к.т.н.

Математична задача про керування водними ресурсами екосистеми

Розглядається математична постановка та
будується алгоритм розв'язання задачі
оптимального керування водними ресурсами
екосистеми при обмеженнях на концентрацію
забруднень.

Ключові слова: математична модель,
керування, екосистема.

*E-mail: kulyan@unicyb.kiev.ua

Статтю представлено д.т.н., професором
Гаращенко Ф.Г.

Екологічну систему можна розглядати як
сукупність деяких множин [3], перша з яких
являє собою набір об'єктів; друга – структуру
множини об'єктів і описує їх кількісний
розподіл по групах; третя – організацію
системи і є набором зв'язків в системі;
четверта множина включає в себе інтенсивності
зв'язків між елементами, які входять в систему.
Звідси, екологічну систему можна визначити як
множину об'єктів з їх структурою та заданими
між об'єктами зв'язками і інтенсивностями та
розглядати як відображення можливих станів
середовища в описану вище сукупність множин.

Досвід показує, що застосування методів
математичного моделювання гідроекологічних
систем є ефективним для побудови кількісної та
якісної оцінки, а також прогнозування стану в
результаті реакцій на численні антропогенні
впливи. Цей метод грає особливу роль коли
кінцевою метою є не тільки опис та оцінка стану
природного середовища, а також її регулювання
(керування) з урахуванням екологічного
резерву [3], що в результаті повинно
підпорядковуватись оптимізації взаємодії
людини з природою. Під екологічним резервом
(екологічною ємністю) розуміють максимальну
кількість енергії і речовини, яка може бути
введена екосистемою в кругообіг без суттєвих
порушень її структури та функціональних
можливостей. Побудуємо математичну модель
масопереносу у водному середовищі, умовно
поділеному на n – ділянок. Згідно теорії
«камерних моделей» [3] водоймище, або деяка
його ділянка, відповідно до морфологічних,

V.R. Kulyan, c.t.n., O.O. Yun'kova, c.f.-m.n.,
V.V. Rutytska, c.t.n

Mathematical problem of water resources of ecology system control

The problem of construct of mathematical model
and mathematical optimization method for decision
of ecology control problem is investigated.

Key Words: mathematical model, optimal
control, ecological system.

кліматичних, географічних та інших
особливостей може бути поділене на ділянки
(камери), процеси поширення забруднень в усіх
точках яких протікають однаково. Символами
 $M_1, M_2, \dots, M_n$ позначимо споживачів водних
ресурсів на ділянках 1, 2, ..., n відповідно. Не
обмежуючи загальності постановки задачі,
припустимо, що для споживача M_1
вирішальним фактором, що впливає на кількість
води, яка може бути відібрана, є концентрація
забруднюючих речовин $C = (C_1, C_2, \dots, C_k)$.
Припустимо також, що на гранично – допустимі
норми концентрацій забруднюючих речовин
діють обмеження $C_i \leq C_i^{\max}, i = 1, 2, \dots, k$.
Побудована на основі методів імітаційного
моделювання, у найбільш простому вигляді, така
модель може мати вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dt} &= v_{1p}(t) - v_{1m}(t, c) - u_{12}(t), \\ \frac{dQ_2}{dt} &= u_{12}(t) - v_{2m}(t) - u_{23}(t), \\ &\dots\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{n-1}}{dt} &= u_{n-2n-1}(t) - v_{n-1m}(t) - u_{n-1n}(t), \\ \frac{dQ_n}{dt} &= u_{n-1n}(t) - v_{nm}(t),\end{aligned}$$

де $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – баланс води у водоймищі на 1,
2, ..., n -тій ділянці, (m^3); $v_{1p}(t)$ –
швидкість надходження води, ($\frac{m^3}{c}$);
 $v_{1m}(t, c), v_{2m}(t), v_{3m}(t), \dots, v_{nm}(t)$ – величини, які
характеризують швидкість відбору води 1,
2, ..., n – тим споживачем відповідно, ($\frac{m^3}{c}$);

$u_{12}(t), u_{23}(t), \dots, u_{n-1n}(t)$ – керуючі впливи, які регулюють масоперенос із першої на другу, із другої на третю і т.д., із $n-1$ на n – ділянку водоймища відповідно. Зважимо також на те, що $u(t) \in U$, де U – обмежена замкнута множина. На кількість води, яка може бути спожита, діють обмеження

$$Q_{im}^{\max} \geq \int_{t_0}^{t_1} v_{im}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $Q_{1m}^{\max}, Q_{2m}^{\max}, \dots, Q_{nm}^{\max}$ – об'єм води, який виділено для споживання 1, 2, ... n -тому споживачу відповідно.

До приведених вище обмежень можна додати

$$v_{im}^{\max}(t) \leq v_{im}(t) \leq v_{im}^{\min}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Враховуючи те, що $v_{1m}(t, c)$ є лінійною функцією від концентрації забруднюючої речовини [3], покладемо $v_{1m}(t, c) = \alpha v_{1m}(t)$,

де $\alpha = 1$ при $c_i \leq c_i^{\text{доп}}$, $i = 1, 2, \dots, k$ і $0 \leq \alpha < 1$ при $c_i > c_i^{\text{доп}}$, де $c_i^{\text{доп}}$ – допустиме значення концентрації c_i .

Систему рівнянь (1) запишемо у векторному вигляді

$$\frac{dQ}{dt} = g(u(t), v(t), t), \quad (3)$$

а концентрацію c забруднюючої речовини опишемо векторним рівнянням

$$\frac{dc}{dt} = q(c, v(t), t), \quad (4)$$

де функції $g(u(t), v(t), t)$ та $q(c, v(t), t)$ – задані і $Q(t_0) = Q_0$, $c(t_0) = c_0$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Системи (3), (4) та початкові умови (5) запишемо у більш загальному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Для математичної моделі (6) сформулюємо наступну оптимізаційну задачу

$$\min_u \left(\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(t_1)) \right), \quad (7)$$

при цьому вважаємо, що функція $\Phi(x(t_1))$ – відома. При цьому

$$\nabla_u \left(\Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt \right) = \left[\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u(t)} \right]^* \varphi(t) - \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u(t)},$$

де функція $\varphi(t)$ така, що

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\nabla_x f(x(t), u(t), t)^* \varphi(t) + \nabla_x f_0(x(t), u(t), t)$$

Для визначення $\varphi(t_1)$ скористаємось умовою

$$\varphi(t_1) = -\nabla_x \Phi(x(t_1), u(t_1))$$

і для деякого крокового множника h та довільного моменту часу t такого, що $t_0 \leq t \leq t_1$, можемо визначити

$$\varphi(t-h) = \varphi(t) + h \nabla_x f(x(t), u(t), t)^* \varphi(t) - h \nabla_x f_0(x(t), u(t), t).$$

Повторюючи наведену вище процедуру визначимо $\varphi(t_0)$. Таким чином, маємо можливість сформулювати задачу Коші для $\varphi(t)$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\nabla_x f(x(t), u(t), t)^* \varphi(t) + \nabla_x f_0(x(t), u(t), t) \\ \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

і, підставивши знайдене значення функції $\varphi(t)$ в рівняння моделі (6), можемо знайти

оптимальний розв'язок $\bar{u}(t)$, скориставшись яким, перейдемо до розв'язання наступної траєкторної задачі

$$x(t) = f(x(t), \bar{u}(t), t) \\ x(t_0) = x_0$$

Визначивши траєкторію системи, маємо можливість перевірити умову виходу із процедури пошуку оптимальних значень параметрів моделі

$$\|\varphi(t_1) - \nabla_x \Phi(x(t_1))\| < \varepsilon, \quad (8)$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке наперед задане число, яке є ознакою закінчення процедури і задається в залежності від реальних умов функціонування системи.

За умови справедливості нерівності (8) завершимо пошук оптимальних значень параметрів математичної моделі (6), інакше – визначимо

$$\varphi''(t_1) = [\nabla_x \Phi(\bar{x}(t_1), \bar{u}) - \varphi(t_1)]h + \varphi(t_1),$$

і повторимо цикл операцій з формування нового керування $u^*(t)$ та траєкторії фазових змінних $x^*(t)$.

В контексті сформульованого вище алгоритму відкритим залишається питання формулювання динаміки розповсюдження забруднень у водоймищі та самоочищувальної

здатності водоймища. Ця модель дозволяє описувати процес самоочищення природних вод через концентрації c забруднюючих речовин і якість водної екосистеми оцінювати з точки зору її здатності нейтралізувати різноманітні забруднення. Відповідно до закону про збереження маси речовини, концентрацію c^j j -інгредієнта на i -ділянці (або в i -водосховищі) описується за допомогою диференціального рівняння:

$$\frac{dc^j}{dt} = \frac{1}{W^i} [q^{i-1} c^{i-1,j} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k c_k^j + q_{\phi}^i c_{\phi}^j + q_{oc}^i c_{oc}^j - (q^i + q_{\phi}^i + \frac{dW^i}{dt}) c^j] - (\alpha^j + \lambda^j) c^j - F^j(c^j, c_{\phi}^j, c_{oc}^j, c_{\phi}^i, c_{oc}^i, \beta^j, \gamma^j, t), \quad (9)$$

$$\text{де } W^i(t) = W_0^i + (q^{i-1} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i - q^i - q_{\phi}^i - q_{oc}^i)t, \quad (10)$$

де q^i та c^j - відповідно загальна витрата води в річці на i -ділянці та концентрація в ній j -інгредієнта; q^{i-1} та $c^{i-1,j}$ - витрата води та концентрація в ній j -інгредієнта на $i-1$ -ділянці; q_k^i та c_k^j - витрата води k -водотоку та концентрація в ньому j -інгредієнта; q_{ϕ}^i, c_{ϕ}^j - підземний сток (фільтрація) та концентрація в ньому j -інгредієнта; q_{oc}^i, c_{oc}^j - кількість опадів та концентрація в них j -інгредієнта; q_{ϕ}^i, c_{ϕ}^j - величини безповоротного водоспоживання та випаровування; α^j, λ^j - постійні швидкості седиментації та радіоактивного розкладу для радіоактивних речовин); $W^i(t), W_0^i$ - об'єм води на i -ділянці річки в момент часу t та в початковий момент часу t_0 ; c_{ϕ}^j, c_{oc}^j - концентрація j -речовини в донних відкладеннях та в гідробіонтах; c_{ϕ}^i, c_{oc}^i - концентрація розчиненого кисню в БПК; β^j, γ^j - сталі самоочищення; F^j - функція, яка описує самоочищувальну здатність за рахунок гідробіологічних, гідрохімічних та біологічних процесів. Згідно з [3] останній член в рівнянні (9) має вигляд

$$F^j = \gamma^j K_{cm}^j (K_{max}^j + (1 - K_{max}^j) e^{-\beta^j c^j}) c^j, \quad (11)$$

де параметр γ^j характеризує відношення часу добігу частинки підвищеної або розчиненої речовини до періоду окислення (піврозкладу) даної речовини. Параметром математичної моделі є також β^j , що враховує шлях руху частинки речовини в залежності від морфометричних особливостей водотоку або водоймища, а також час повного розкладу (окислення) забруднюючої речовини. Таким чином, математичну модель (9) можемо записати у вигляді

$$\frac{dc^j}{dt} = \frac{1}{W^i} [q^{i-1} c^{i-1,j} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k c_k^j + q_{\phi}^i c_{\phi}^j + q_{oc}^i c_{oc}^j - (q^i + q_{\phi}^i + \frac{dW^i}{dt}) c^j] - (\alpha^j + \lambda^j) c^j - \gamma_0^j \frac{g_0^i}{g^i} K_{cm}^i (29.7 - 28.7 e^{-\beta^j c^j}) c^j.$$

Із сказаного зрозуміло, що дана система диференціальних рівнянь містить невідомі параметри, які мають практичний зміст. Ідентифікувати ці параметри будемо, використовуючи результати натурних спостережень за системою та, застосовуючи методи параметричної ідентифікації математичної моделі і оптимізації функцій. При цьому слід відзначити, що задача параметричної ідентифікації динамічної системи тісно пов'язана із задачею про побудову адекватної (δ -адекватної) математичної моделі [3].

Пошук екстремальних значень параметрів $p = (\beta^j, \gamma^j)$ математичної моделі (9) можна реалізувати за допомогою математичних методів оптимізації, частково описаних в [1].

Література

1. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления. - М.: Наука, 1971. - 258с.
2. Воронин А.Н. и др. Векторная оптимизация динамических систем. - Київ: Техніка, 1999. - 284с.
3. Лаврик В.И. Экологическая емкость и ее количественная оценка. // Гидробиологический журнал. 1991. Т.27. № 3. С.14-20.

Надійшла до редакції 23.04.2008

УДК 519.9

Лебедев Є.О., докт. ф.-м. н.,
Пономарьов В.Д.

Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог

В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю обслуговування в системі $M/M/1$ з повторними викликами і обмеженим числом джерел первинних вимог. Вводяться два типи стратегій керування роботою системи: порогові та гістерезисні стратегії. Для кожного типу керування знайдено явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі, що дає алгоритм розв'язку відповідної оптимізаційної задачі. Також розглядаються деякі чисельні приклади.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, стаціонарний режим, оптимізація.

e-mail: vponomarov@gmail.com

Статтю представив – доктор фіз.-мат. наук О.М. Іксанов

1. Вступ

В класичній теорії масового обслуговування, зазвичай, припускається, що вимога на обслуговування, яка не може бути виконана одразу, або стає у чергу (і обслуговується потім у відповідності з деякими правилами), або втрачається назавжди. Іноді, нетерплячі вимоги залишають чергу, але такі вимоги розглядаються, як втрачені. Насправді, припущення про втрату вимог є лише першою апроксимацією реальної ситуації. Клієнт, який не отримав обслуговування, через деякий випадковий проміжок часу повертається до системи і знову намагається отримати обслуговування. Наприклад, в мережах мобільного зв'язку внесок користувачів, які не отримали обслуговування і повторно звертаються до системи, в загальну кількість вимог на обслуговування є досить вагомим і нехтування ним призводить до втрати точності моделі. Використання систем з повторними викликами та обмеженим числом джерел для моделювання мереж мобільного зв'язку та дослідження впливу повторних вимог на обслуговування викладено в [1]. Більш детальний порівняльний аналіз стандартних систем і систем масового обслуговування з повторними викликами проведено в [2].

Lebedev E.O.,
Ponomarov V.D.

Optimization of retrial queue with finite source of calls

In the paper an optimal control problem of service rate for the $M/M/1$ retrial queue with a finite source of primary calls is considered. Two control policies are introduced: threshold and hysteresis policies. For each type of control policy an explicit form of quality functional is found. These forms give an algorithm for solving the corresponding optimization problem. Some numerical results are also given.

Key words: queue, repeated calls, stationary regime, optimization.

Розглянемо систему, яка складається з n обслуговуючих пристроїв. Вимоги на обслуговування надходять від m користувачів. Кожен користувач через випадкові проміжки часу, які мають показниковий розподіл з параметром λ , звертається до системи і обслуговується негайно, якщо є хоча б один вільний прилад. Час обслуговування – показниково розподілена випадкова величина з параметром ν . Якщо усі прилади зайняті, то вимога залишає систему і повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром μ . Припускається, що періоди між надходженнями вимог, часи обслуговування і моменти надходження повторних викликів взаємно незалежні.

Загальну схему функціонування системи з повторними викликами і обмеженим числом джерел подано нижче на рисунку 1.

Надалі, в даній роботі розглядається система з одним обслуговуючим пристроєм. Стан такої системи в будь-який момент часу t будемо описувати двовимірним процесом $X(t) = (C(t); N(t))$, де $C(t) \in \{0, 1\}$ – кількість зайнятих приладів, $N(t) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ – кількість джерел повторних викликів.

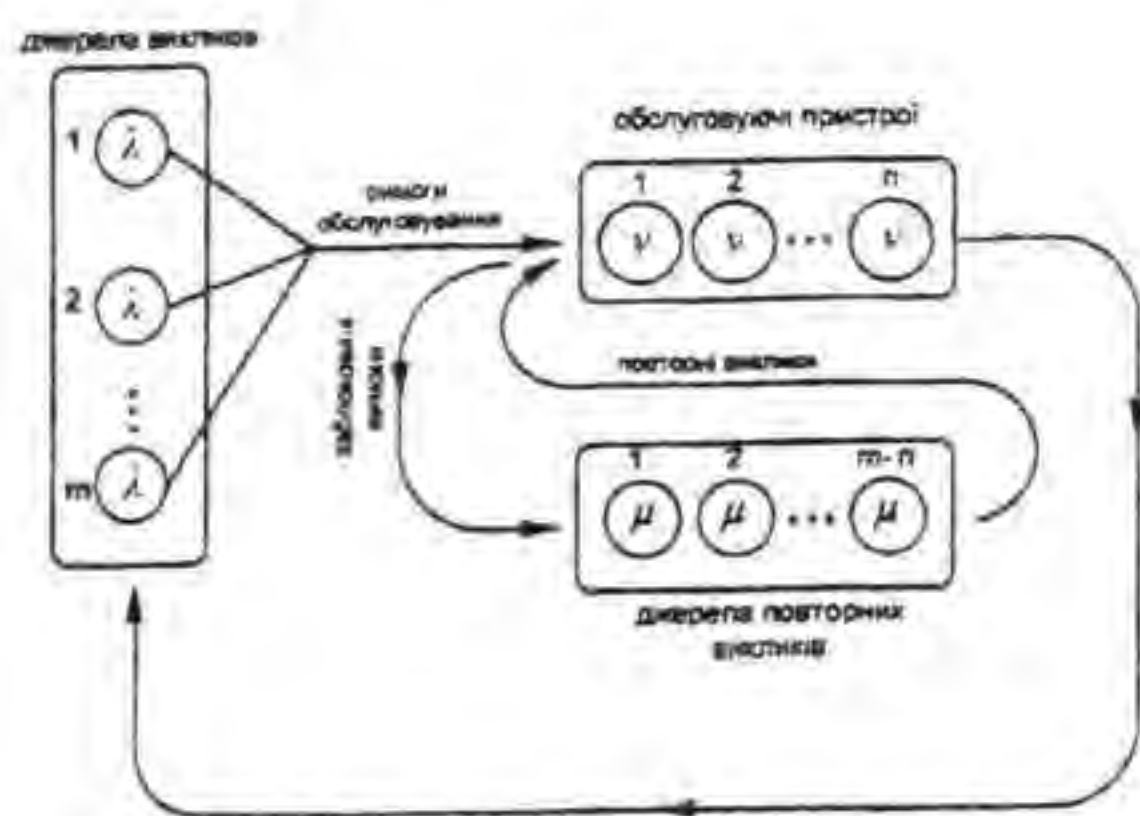


Рисунок 1. Загальна схема функціонування системи

В рамках зроблених припущень процес $X(t)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S(X) = \{0, 1\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Його інфінітезимальні характеристики визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0, j=\{0, 1, \dots, m-1\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j); \\ j\mu, & \text{при } (i', j') = (1, j-1); \\ -[(m-j)\lambda + j\mu], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \quad (1.1)$$

2) якщо $i=1, j=\{0, 1, \dots, m-1\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j+1); \\ \nu, & \text{при } (i', j') = (0, j); \\ -[(m-1-j)\lambda + \nu], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \quad (1.2)$$

Графічно стохастичну поведінку процесу $X(t)$ можна подати за допомогою діаграми переходів, яка представлена на рисунку 2.

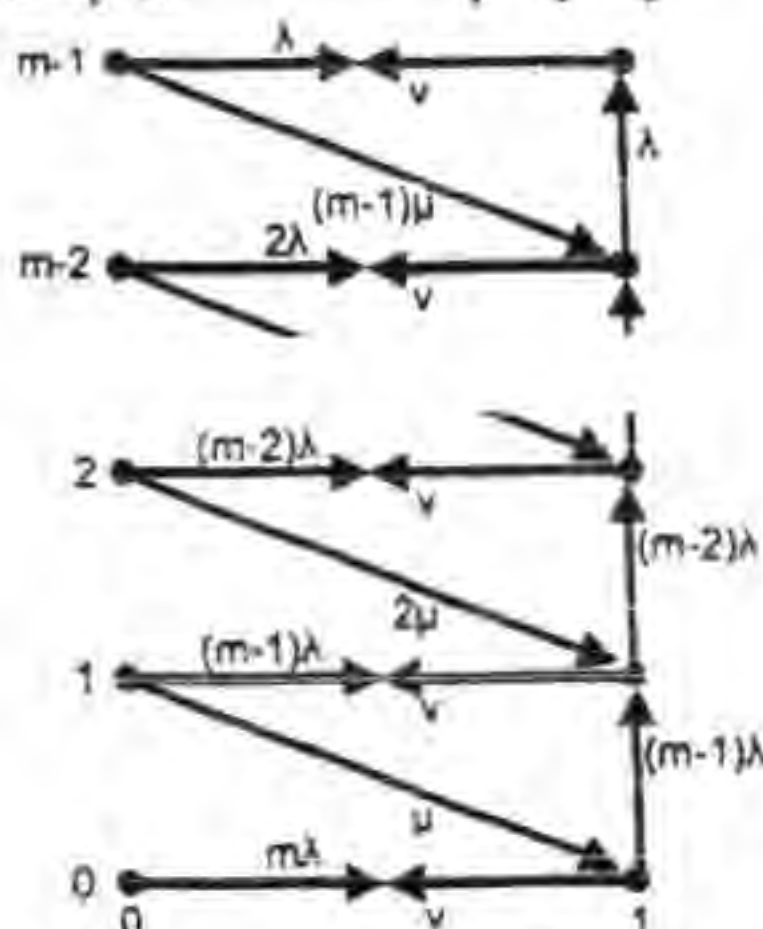


Рисунок 2. Діаграма переходів ланцюга Маркова $X(t)$

2. Процес обслуговування при заданій пороговій стратегії

Розглянемо спочатку порогові стратегії керування інтенсивністю обслуговування. В цьому випадку, якщо кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H , то система функціонує в першому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $\nu^{(1)}$. Якщо кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить у другий режим з інтенсивністю обслуговування $\nu^{(2)}$. Поріг H приймає значення $-1, 0, \dots, m-1$. При $H=-1$ система весь час функціонує у другому режимі, $\nu = \nu^{(2)}$. Якщо $H=m-1$, то при будь-якому значенні $N(t)$ система знаходиться в першому режимі, $\nu = \nu^{(1)}$.

Формально керування $X(t)$ на основі порогової стратегії означає, що інтенсивності (1.1) не змінюються, а (1.2) замінюються на наступні:

2.1) якщо $i=1, j=\{0, 1, \dots, H\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j+1); \\ \nu^{(1)}, & \text{при } (i', j') = (0, j); \\ -[(m-1-j)\lambda + \nu^{(1)}], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

2.2) якщо $i=1, j=\{H+1, \dots, m-1\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} (m-1-j)\lambda, & \text{при } (i', j') = (1, j+1); \\ \nu^{(2)}, & \text{при } (i', j') = (0, j); \\ -[(m-1-j)\lambda + \nu^{(2)}], & \text{при } (i', j') = (i, j); \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

При фіксованій пороговій стратегії до позначень процесу $X(t)$ і його характеристик будемо додавати індекс H , $X(t) = X(H, t)$, $C(t) = C(H, t)$, $N(t) = N(H, t)$, ...

Нехай $\pi_{0,j}(H)$, $\pi_{1,j}(H)$, $j = 0, \dots, m-1$, стаціонарні ймовірності системи:

$$\pi_{0,j}(H) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = 0, N(H, t) = j\}, \quad (2.1)$$

$$\pi_{1,j}(H) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(H, t) = 1, N(H, t) = j\}.$$

Ймовірності $\pi_{ij}(H)$, $(i, j) \in S(X)$ можна подати через параметри системи в явному вигляді.

Теорема 1. Стаціонарні ймовірності (2.1) мають наступний вигляд:

$$\pi_{\infty}(H) = \frac{\nu_0}{m\lambda} \pi_{10}(H),$$

$$\pi_{0,j}(H) = \left(\frac{m}{j} - 1\right) \frac{\lambda}{\mu} \alpha_{j-1} \pi_{10}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\pi_{1,j}(H) = \alpha_j \pi_{10}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\text{де } \pi_{10}^{-1}(H) = 1 + \frac{\nu_0}{m\lambda} + \sum_{j=1}^{m-1} \left[\alpha_j + \left(\frac{m}{j} - 1\right) \frac{\lambda}{\mu} \alpha_{j-1} \right],$$

$$\alpha_j = \frac{1}{j! \mu^j} \prod_{i=1}^j (m-i) \lambda \nu_i^{-1} [(m-i)\lambda + i\mu],$$

$$\nu_j = \begin{cases} \nu^{(1)}, & j \leq H, \\ \nu^{(2)}, & j > H. \end{cases}$$

Доведення:

Для пошуку $\pi_{0,j}(H)$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі ([3] ст.49). Для кожного $j=0,1,\dots,m-1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(1)}(X) \cup \bar{S}_j^{(1)}(X)$, $S_j^{(1)}(X) = \{(p,q) \in S(X) : q \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(X)$, знаходимо

$$j\mu\pi_{0,j}(H) = (m-j)\lambda\pi_{1,j-1}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.2)$$

Тепер для $j=0,1,\dots,m-1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X) = S_j^{(2)}(X) \cup \bar{S}_j^{(2)}(X)$, $S_j^{(2)}(X) = \{(0,j)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}(X)$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0,j}(H) = \nu_j \pi_{1,j}(H), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.3)$$

Останнє рівняння - це запис умови нормування.

З (2.3) подамо $\pi_{0,j}(H)$ через $\pi_{1,j}(H)$. Підставляючи результат у (2.2), будемо мати рекурентне рівняння першого порядку відносно $\pi_{1,j}(H)$:

$$\pi_{1,j}(H) = \frac{(m-j)\lambda[(m-j)\lambda + j\mu]}{j\mu\nu_j} \alpha_j \pi_{1,1}(H),$$

$$j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.4)$$

Розв'язком (2.4) буде

$$\pi_{1,j}(H) = \alpha_j \pi_{10}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

З (2.3) маємо наступне подання для $\pi_{2,j}(H)$:

$$\pi_{00}(H) = \frac{\nu_0}{m\lambda} \pi_{10}(H),$$

$$\pi_{0,j}(H) = \left(\frac{m}{j} - 1\right) \frac{\lambda}{\mu} \alpha_{j-1} \pi_{10}(H), \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

Імовірність $\pi_{10}(H)$ знаходимо з умови нормування

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\pi_{0,j}(H) + \pi_{1,j}(H)) = 1.$$

Теорему доведено.

Зауваження: для обчислення коефіцієнтів α_j можна використовувати наступну рекурентну формулу:

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} \frac{(m-j)\lambda[(m-j)\lambda + j\mu]}{j\mu\nu_j}$$

Застосовуємо доведену теорему до оптимізації прибутку в системі з повторними викликами, коли вибір порогу H знаходиться у нашому розпорядженні.

Нехай

$S_1(t,H)$ - число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у першому режимі;

$S_2(t,H)$ - число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у другому режимі;

$S_3(t,H)$ - число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_4(t,H)$ - число перемикань інтенсивності обслуговування.

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t,H)$ позначимо через $S_i(H)$, $i=1,\dots,4$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$C_1 S_1(H) + C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) - C_4 S_4(H) \rightarrow \max,$$

$$H = \{-1, 0, \dots, m-1\}, \quad (2.5)$$

де C_i , $i=1,2$ - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику при роботі системи у i -ому режимі;

C_3 - штраф за відмову в обслуговуванні;

C_4 - штраф за перемикання інтенсивності обслуговування.

Розв'язком задачі (2.5) є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для класичних моделей одноканальних систем з повторними викликами розглядалися в роботах [4], [5].

Граничні функціонали $S_i(H)$, $i=1, \dots, 4$ можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H) = v^{(1)} \sum_{j=0}^H \pi_{1j}(H), S_2(H) = v^{(2)} \sum_{j=H+1}^{m-1} \pi_{1j}(H),$$

$$S_3(H) = \lambda \sum_{j=0}^{m-2} (m-j-1) \pi_{1j}(H),$$

$$S_4(H) = \lambda(m-1-H) \pi_{1H}(H) + (H+1) \mu \pi_{0H+1}(H),$$

що разом з результатом теореми 1 дає алгоритм розв'язку задачі (2.5).

3. Гістерезисні стратегії керування процесом обслуговування

Процес керування на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2 , які називаються порогами, $H_1 \leq H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1 , то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $v^{(1)}$. Якщо кількість повторних викликів більше за H_2 , то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю обслуговування $v^{(2)}$. Якщо кількість повторних викликів лежить у проміжку $(H_1, H_2]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу.

При фіксованій гістерезисній стратегії $(H_1, H_2]$ стан системи в будь-який момент часу t може бути описаний тривимірним процесом $Y(H_1, H_2, t) = \{(C(H_1, H_2, t); N(H_1, H_2, t); R(H_1, H_2, t)); t \geq 0\}$, де $C(H_1, H_2, t)$ – кількість зайнятих приладів, $N(H_1, H_2, t)$ – кількість джерел повторних викликів, $R(H_1, H_2, t)$ – режим роботи системи. Якщо $R(H_1, H_2, t) = 1$, то система працює у першому режимі з інтенсивністю обслуговування $v^{(1)}$. Якщо $R(H_1, H_2, t) = 2$, то система працює у другому режимі і інтенсивність обслуговування дорівнює $v^{(2)}$. Процес $Y(H_1, H_2, t)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S(Y) = \{0, 1\} \times \{0, \dots, m-1\} \times \{1, 2\}$. Його

інфінітезимальні характеристики b_{ij} , $i=(i_1, i_2, i_3)$, $j=(j_1, j_2, j_3)$, $(i, j) \in S(X)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $[(i_1 = 0) \wedge (i_2 \in \{0, 1, \dots, H_2\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee [(i_1 = 0) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 1, \dots, m-1\}) \wedge (i_3 = 2)]$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m-i_2)\lambda, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2, i_3); \\ i_2\mu, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2 - 1, i_3); \\ -[(m-i_2)\lambda + i_2\mu], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $[(i_1 = 1) \wedge (i_2 \in \{0, 1, \dots, H_2 - 1\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee$

$[(i_1 = 1) \wedge (i_2 \in \{H_1, \dots, m-1\}) \wedge (i_3 = 2)]$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m-1-i_2)\lambda, & \text{при } j = (i_1, i_2 + 1, i_3); \\ v^{(1)}, & \text{при } j = (i_1 - 1, i_2, i_3); \\ -[(m-1-i_2)\lambda + v^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

3) якщо $i = (1, H_2, 1)$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m-1-H_2)\lambda, & \text{при } j = (1, H_2 + 1, 2); \\ v^{(1)}, & \text{при } j = (0, H_2, 1); \\ -[(m-1-H_2)\lambda + v^{(1)}], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

4) якщо $i = (0, H_1 + 1, 2)$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (m-H_1-1)\lambda, & \text{при } j = (1, H_1 + 1, 2); \\ (H_1 + 1)\mu, & \text{при } j = (1, H_1, 1); \\ -[(m-H_1-1)\lambda + (H_1 + 1)\mu], & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

Позначимо

$\pi_{0j}^{(r)}(H_1, H_2)$, $\pi_{1j}^{(r)}(H_1, H_2)$, $r=1, 2$, $j=0, 1, \dots, m-1$ стаціонарні ймовірності системи:

$$\pi_{0j}^{(r)}(H_1, H_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(\bullet) = 0, N(\bullet) = j, R(\bullet) = r\}, \quad (3.1)$$

$$\pi_{1j}^{(r)}(H_1, H_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(\bullet) = 1, N(\bullet) = j, R(\bullet) = r\}.$$

У подальшому для скорочення викладок в позначеннях стаціонарних ймовірностей індекси H_1 , H_2 будемо опускати. Для $\pi_{ij}^{(r)}(H_1, H_2) = \pi_{ij}^{(r)}$ справедливий результат, аналогічний теоремі 1.

Теорема 2. Стаціонарні ймовірності (3.1) мають наступний вигляд:

$$\pi_{00}^{(1)} = \frac{v^{(1)}}{m\lambda} \pi_{10}^{(1)}, \pi_{0j}^{(1)} = \frac{v^{(1)} \phi_j^{(1)}}{(m-j)\lambda + j\mu} \pi_{10}^{(1)}, \quad j=1, 2, \dots, H_1,$$

$$\pi_{1j}^{(1)} = \phi_j^{(1)} \pi_{10}^{(1)}, \quad j=1, 2, \dots, H_2,$$

$$\pi_{ij}^{(1)} = 0, \quad i=0, 1, j=H_2 + 1, \dots, m-1,$$

$$\pi_{ij}^{(2)} = 0, \quad i=0, 1, j=0, \dots, H_1,$$

$$\pi_{0j}^{(2)} = \frac{v^{(2)} \phi_j^{(2)}}{(m-j)\lambda + j\mu} \pi_{10}^{(2)}, \quad j=H_1 + 1, \dots, m-1,$$

$$\pi_{1j}^{(2)} = \phi_j^{(2)} \pi_{10}^{(2)}, \quad j=H_1 + 1, \dots, m-1,$$

де

$$\pi_{10}^{(0)} = 1 + \frac{\nu^{(1)}}{m\lambda} + \sum_{j=1}^{H_1} \left(1 + \frac{\nu^{(1)}}{(m-j)\lambda + j\mu} \right) \phi_j^{(1)} +$$

$$+ \frac{(m-H_2-1)\lambda\gamma_{H_2}^{(1)}}{(H_1+1)\mu + (m-H_2-1)\lambda\beta_{H_2, H_1+1}^{(1)}} \sum_{j=H_1+1}^{m-1} \left(1 + \frac{\nu^{(2)}}{(m-j)\lambda + j\mu} \right) \phi_j^{(2)}$$

$$\beta_{j,r}^{(r)} = \frac{n}{\nu^{(r)}} \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{\mu\nu^{(i)}} \right)^i \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(m-j+k)[(m-j+k)\lambda + (j-k)\mu]}{m-j+1}$$

$$\gamma_j^{(r)} = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu\nu^{(r)}} \right)^j \prod_{i=1}^j (m-i)[(m-i)\lambda + i\mu], \quad r=1,2,$$

$$\phi_j^{(1)} = \gamma_j^{(1)} - \gamma_{H_2}^{(1)} \frac{(m-H_2-1)\lambda\beta_{j, H_1+1}^{(1)}}{(H_1+1)\mu + (m-H_2-1)\lambda\beta_{H_2, H_1+1}^{(1)}},$$

$$\phi_j^{(2)} = \frac{(m-H_2-1)\lambda\gamma_{H_2}^{(1)}}{(H_1+1)\mu + (m-H_2-1)\lambda\beta_{H_2, H_1+1}^{(1)}} \times$$

$$\times \left[\frac{[(m-H_1-1)\lambda + (H_1+1)\mu]\gamma_j^{(2)}}{\nu^{(2)}\gamma_{H_1+1}^{(2)}} + \frac{H_1+1}{H_1+2} \frac{\gamma_{\max\{j, H_2+1\}}^{(2)}}{\gamma_{H_2+1}^{(2)}} \times \right.$$

$$\left. \times \beta_{\max\{j, H_2+1\}, H_1+2}^{(2)} \right].$$

Доведення:

Для пошуку $\pi_j^{(r)}$ знову використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі. Для кожного $j=0,1,\dots,m-1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(Y) = S_j^{(1)}(Y) \cup \bar{S}_j^{(1)}(Y)$, $S_j^{(1)}(Y) = \{(0, j, i_3) \in S(Y)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(Y)$, знаходимо

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0j}^{(1)} = \nu^{(1)}\pi_{1j}^{(1)}, \quad j=0,1,\dots,H_2. \quad (3.2)$$

$$((m-j)\lambda + j\mu)\pi_{0j}^{(2)} = \nu^{(2)}\pi_{1j}^{(2)}, \quad j=H_1,\dots,m-1. \quad (3.3)$$

Тепер для $j=0,1,\dots,m-1$ побудуємо розбиття фазового простору

$$S(Y) = S_j^{(2)}(Y) \cup \bar{S}_j^{(2)}(Y),$$

$S_j^{(2)}(Y) = \{(i_1, i_2, i_3) \in S(Y) : i_2 \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}(Y)$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$j\mu\pi_{0j}^{(1)} = (m-j)\lambda\pi_{1j-1}^{(1)}, \quad j=1,2,\dots,H_1, \quad (3.4)$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(1)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)} = (m-j)\lambda\pi_{1j-1}^{(1)}, \quad (3.5)$$

$$j=H_1+1,\dots,H_2,$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(2)} = (m-j)\lambda\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)}, \quad (3.6)$$

$$j=H_1+2,\dots,H_2+1,$$

$$j\mu\pi_{0j}^{(2)} + (m-H_2-1)\lambda\pi_{1H_2}^{(1)} = (m-j)\lambda\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)},$$

$$j=H_2+2,\dots,m-1, \quad (3.7)$$

$$(m-H_2-1)\lambda\pi_{1H_2}^{(1)} = (H_1+1)\mu\pi_{0H_1+1}^{(2)}. \quad (3.8)$$

З рівняння (3.2) подаємо $\pi_{0j}^{(1)}$ через $\pi_{1j-1}^{(1)}$, підставляючи у (3.4), отримаємо рекурентне рівняння першого порядку відносно $\pi_{1j}^{(1)}$, $j=1,2,\dots,H_1-1$, розв'язуючи яке отримаємо вирази для $\pi_{0j}^{(1)}$ та $\pi_{1j}^{(1)}$ через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \gamma_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)}, \quad j=1,2,\dots,H_1,$$

$$\pi_{00}^{(1)} = \frac{\nu^{(1)}}{m\lambda}\pi_{10}^{(1)}, \quad \pi_{0j}^{(1)} = \frac{\gamma_j^{(1)}\nu^{(1)}}{\alpha_j}\pi_{10}^{(1)}, \quad j=1,2,\dots,H_1$$

Підставляючи отримані результати у (3.5), отримуємо рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(1)}$, $j=H_1+1,\dots,H_2$, розв'язуючи яке маємо вираз для $\pi_{1j}^{(1)}$ через $\pi_{10}^{(1)}$ та $\pi_{0H_1+1}^{(2)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \gamma_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)} - \pi_{0H_1+1}^{(2)}\beta_{j, H_1+1}^{(1)}, \quad j=H_1+1,\dots,H_2. \quad (3.9)$$

Підставляючи у (3.8) значення $\pi_{1H_2}^{(1)}$, знаходимо вираз для $\pi_{0H_1+1}^{(2)}$ через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{0H_1+1}^{(2)} = \pi_{10}^{(1)}\gamma_{H_2}^{(1)} \frac{(m-H_2-1)\lambda}{(H_1+1)\mu + (m-H_2-1)\lambda\beta_{H_2, H_1+1}^{(1)}}. \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.10) у (3.9), отримуємо вираз для $\pi_{1j}^{(1)}$ через $\pi_{10}^{(1)}$. На основі $\pi_{0H_1+1}^{(2)}$ та $\pi_{1H_2}^{(1)}$ з рівнянь (3.6), (3.7) маємо рекурентні співвідношення для $\pi_{1j}^{(2)}$, $j=H_1+2,\dots,H_2-1$ та $j=H_2+2,\dots,m-1$ відповідно. Розв'язуючи ці рекурентні співвідношення, ми будемо мати подання $\pi_{1j}^{(2)}$ через $\pi_{10}^{(1)}$.

Вираз для $\pi_n^{(1)}$ знаходимо з умови нормування

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\pi_{1j}^{(1)} + \pi_{1j}^{(2)} + \pi_{0j}^{(1)} + \pi_{0j}^{(2)}) = 1.$$

Теорему доведено.

Зауваження: для обчислення коефіцієнтів $\gamma_j^{(r)}$ та $\beta_{j,r}^{(r)}$ можна використовувати наступні рекурентні співвідношення:

$$\gamma_j^{(r)} = \gamma_{j-1}^{(r)} \frac{(m-j)\lambda[(m-j)\lambda + j\mu]}{j\mu\nu^{(r)}}$$

$$\beta_{j,r}^{(r)} = \frac{[(m-j)\lambda + j\mu][\mu + (m-j)\beta_{j-1,r}^{(r)}]}{j\mu\nu^{(r)}}$$

Застосуємо доведену теорему для розв'язку наступної оптимізаційної задачі.

Нехай

$S_1(t, H_1, H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у першому режимі;

$S_2(t, H_1, H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено до моменту t при роботі системи у другому режимі;

$S_3(t, H_1, H_2)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_4(t, H_1, H_2)$ – число перемикань інтенсивності обслуговування.

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H_1, H_2)$ позначимо через $S_i(H_1, H_2)$, $i=1, \dots, 4$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$C_1 S_1(H_1, H_2) + C_2 S_2(H_1, H_2) - C_3 S_3(H_1, H_2) - C_4 S_4(H_1, H_2) \rightarrow \max, \quad (3.11)$$

$$H_1 = \{-1, 0, 1, \dots, m-1\}, H_2 = \{0, 1, \dots, m-1\},$$

$$H_1 \leq H_2.$$

де C_i , $i=1, 2$ – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику при роботі системи у i -ому режимі;

C_3 – штраф за відмову в обслуговуванні;

C_4 – штраф за перемикання інтенсивності обслуговування.

Розв'язком задачі (3.11) є такі пороги H_1 та H_2 , які максимізують середній прибуток від роботи системи.

Граничні функціонали $S_i(H_1, H_2)$, $i=1, \dots, 4$ можуть бути виписані через стаціонарні імовірності:

$$S_1(H_1, H_2) = \nu^{(1)} \sum_{j=0}^{H_2} \pi_{0j}^{(1)},$$

$$S_2(H_1, H_2) = \nu^{(2)} \sum_{j=H_1}^{m-1} \pi_{0j}^{(2)},$$

$$S_3(H_1, H_2) = \lambda \sum_{j=0}^{m-2} (m-j-1) (\pi_{0j}^{(1)} + \pi_{0j}^{(2)}),$$

$$S_4(H_1, H_2) = \lambda(m-1-H_2) \pi_{0H_2}^{(1)} + (H_1+1) \mu \pi_{0H_1+1}^{(2)},$$

що разом із результатом теореми 2 дає алгоритм розв'язку задачі (3.11).

4. Приклад

В якості прикладу розв'язано задачу оптимізації систем масового обслуговування з наступними характеристиками: $m=100$, $\lambda=0.13$, $\nu^{(1)}=3$, $\nu^{(2)}=6$, $\mu=0.1666$. Вартісні коефіцієнти

функціоналу якості: $C_1=3596$, $C_2=2102$, $C_3=1$, $C_4=1$.

На рисунку 3 представлено графік залежності функціоналу якості (2.6) від порогової стратегії управління H для заданої системи. На рисунку 4 представлено графік залежності функціоналу (3.11) від гістерезисної стратегії (H_1, H_2) .

Як видно з рисунку 3, максимальне значення функціоналу якості у випадку порогової стратегії управління досягається при $H=72$ і дорівнює 9084.4395. Якщо ж при керуванні роботою системи обрати гістерезисну стратегію, то максимальне значення функціоналу якості досягається при $H_1=76$ та $H_2=98$ і дорівнює 9196.3174.

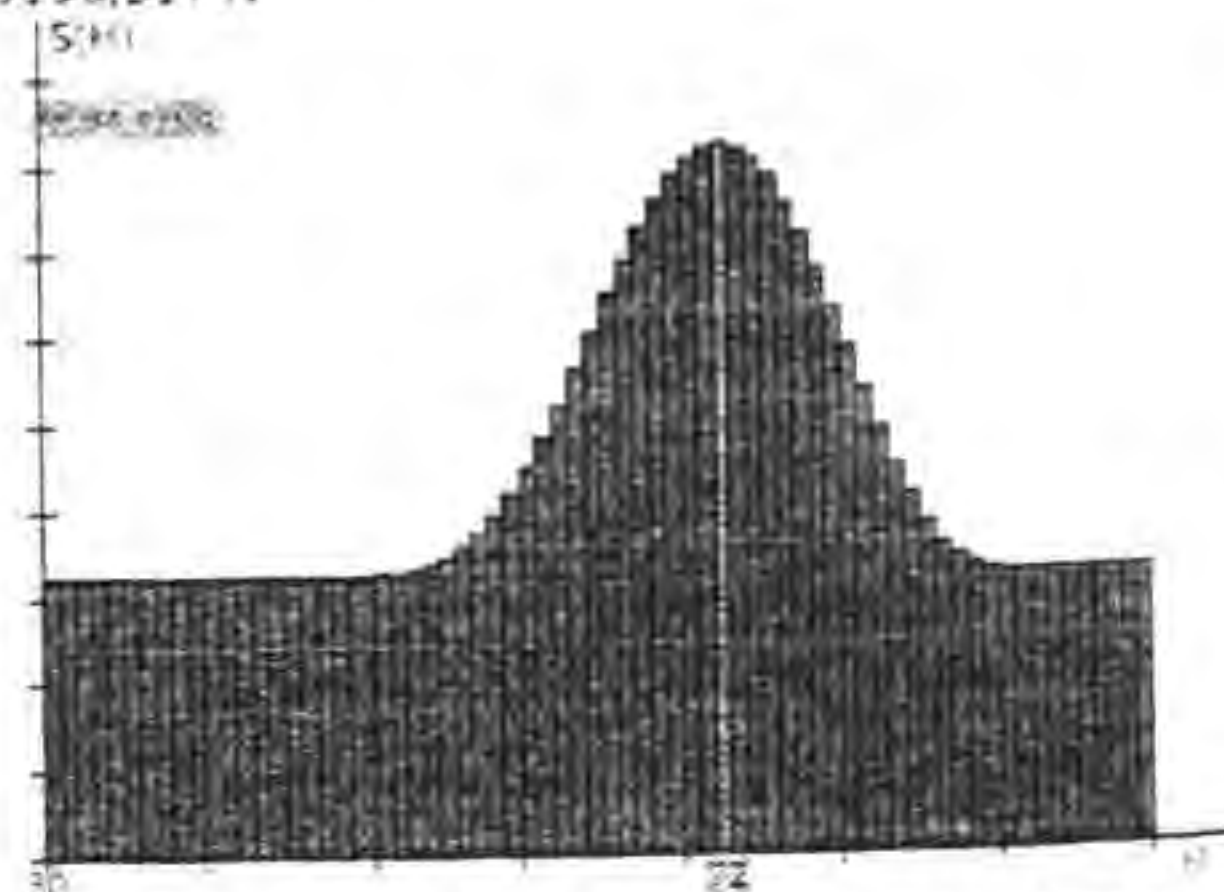


Рисунок 3. Графік залежності функціоналу якості 2.6 від стратегії управління

Робота виконана за фінансової підтримки ДФФД України (проект №Ф25.1/094).

Список використаних джерел

1. P. Tran-Gia and M. Mandjes, Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks, University of Wurzburg, Institute of Computer Science, Report No. 142, 1996.
2. J.R. Artalejo and G.I. Falin. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. REVISTA MATEMATICA COMPLUTENSE (2002) vol. XV, num. 1, pp. 101-129.
3. Уоллэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. – М.: Мир. 1993.
4. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – №2. – с.25-31.
5. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными

вызовами // Автоматика и вычислительная
техника. — 1990. — №1. — с.25-30.

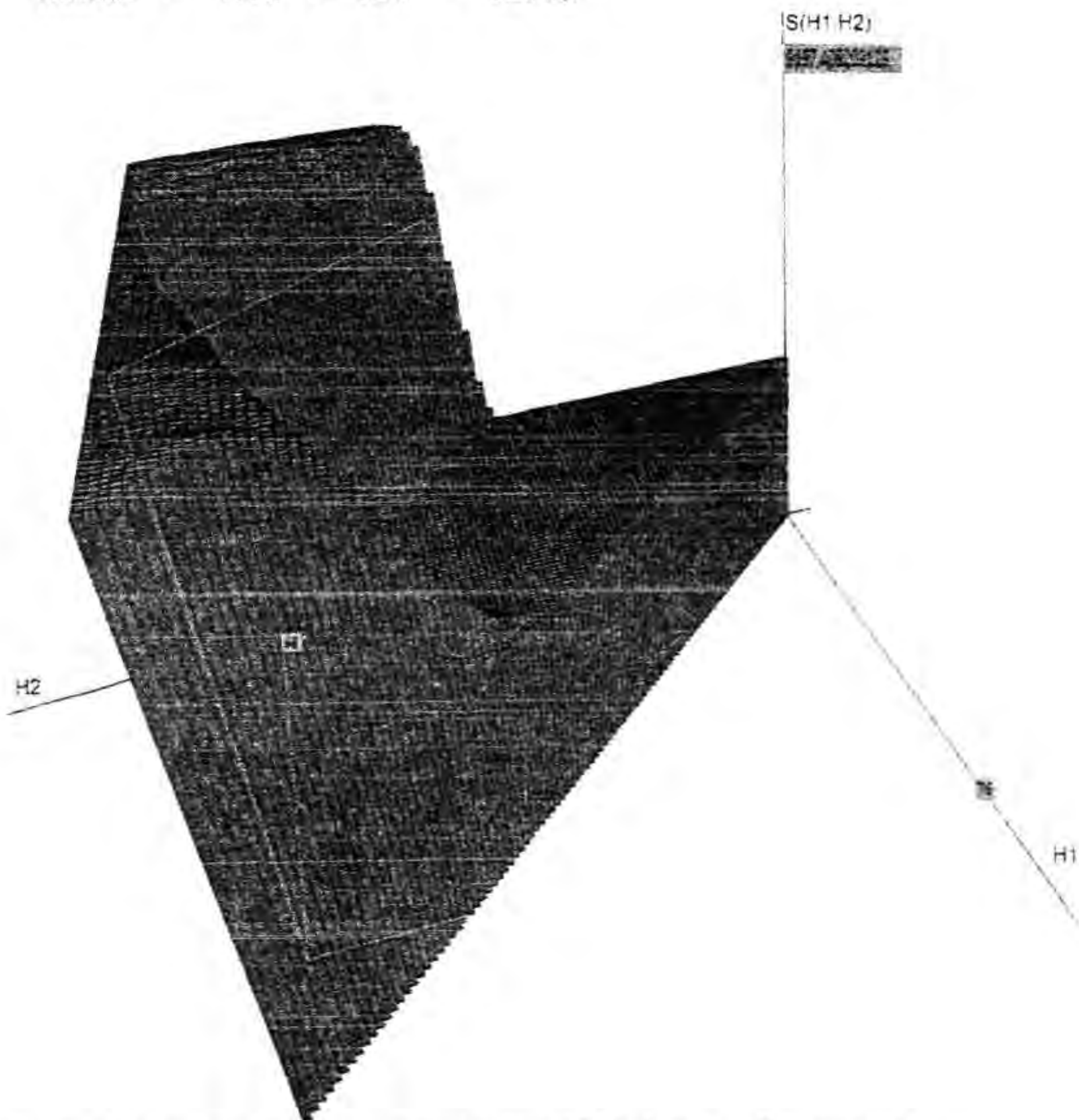


Рисунок 4. Графік залежності функціоналу якості 3.11 від стратегії управління

Надійшла до редакції 12 червня 2008 року

УДК 510.65:510.67:515.126

Лялецький О.О., аспірант

Про типи неперервності функцій та їх властивості відносно частково упорядкованих множин

У роботі досліджуються деякі властивості неперервних функцій з погляду вивчення можливостей, що дає нове визначення неперервності, яке нерівносильне відомим топологічним аналогам. Показується, що в загальному випадку класи неперервних функцій, у розумінні роботи, не є топологізованими, що веде до прикладу "неперервної", але нетопологізованої моделі лямбда-числення.

Ключові слова: неперервність функцій, лямбда-числення, топологічна модель.

E-mail: foraal@mail.ru,

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Прагматичні міркування щодо теорії програмування вказують на необхідність дослідження функцій, що допускають самозастосування. Абстрактні синтактико-аплікативні властивості таких функцій допускають простий і елегантний опис - це так зване лямбда-числення, тобто спеціальну формальну систему, що була запропонованою на початку 1930-х років логіком А. Чорчем [1] (див., також [2]). Однак, одночасно зі створенням лямбда-числення, постала проблема побудови, у рамках традиційних теорій множин, семантичних моделей таких формальних систем та вивчення їх властивостей.

Розв'язок цієї проблеми нашоюхнувся спочатку на значні труднощі, що пов'язані з наступною причиною. Якщо терми лямбда-числення ототожнювати з деякими правилами обчислення значень термів і інтерпретувати ці терми як звичайні (можливо, часткові) теоретико-множинні функції, природно індукованими заданими правилами, то маємо протиріччя, по-перше, з теоремою Кантора і, по-друге, з відомим теоретико-множинним принципом фундування. Наприкінці 1960-х роках Д. Скотт[3] вирішив цю проблему за допомогою побудови так званої топологічної моделі, де терми лямбда-числення інтерпретуються як неперервні функції в деякій спеціальній топології. Пізніше були побудовані інші, наприклад, теоретико-категорні моделі

О. О. Lyaletsky, a PhD student

On types of function continuity and their properties with respect to partial ordered sets

Certain properties of function continuity are investigated from the point of view of the research of possibilities of a new notion of continuity, which is not equivalent to known topological analogues. Classes of continuous functions in the sense of the paper are not topologized ones in general, which leads to an example of a "continuous", but not non-topologized model of the lambda-calculus.

Key Words: function continuity, lambda-calculus, topological model.

лямбда-числення, однак топологічні моделі продовжують займати одне з центральних місць у дослідженні семантики лямбда-числення.

У даній роботі саме і проводиться дослідження властивостей таких топологічних моделей з погляду вивчення можливостей, що дає нове визначення неперервності, яке нерівносильне відомим топологічним аналогам. Показується, що в загальному випадку класи неперервних функцій, у розумінні роботи, не є топологізованими, що веде до прикладу "неперервної", але нетопологізованої моделі лямбда-числення.

Поняття неперервних функцій вводиться в роботі як функції, що зберігають границю певних послідовностей, вивчення яких було виконаним в роботі автора [4], де введено три різних поняття збіжності послідовності, що веде до трьох різних понять неперервності функцій.

Для того, щоб викладання матеріалу статті несло замкнутий характер, нижче даються усі необхідні поняття та результати з [4].

Попередні відомості

Введемо поняття зв'язаності елементів частково упорядкованої множини (чум надалі).

Припустимо, що в нас мається чум $(A, \leq)$ і нехай $A = \{a_i: i < \alpha\}$ є повним упорядкуванням A за ординалами. Для кожної підмножини B

множини A і кожного ординалу β , що не є строго меншим α , ми таким чином вводимо множину B^β :

(i) $B^0 = B$; (ii) $B^\beta = \{x \in A \mid \exists \text{ ординал } \gamma < \beta, \text{ такий, що } \exists y \in B^\gamma \text{ і або } x \leq y, \text{ або } y \leq x\}$.

Елементи x і y чум $\langle A, \leq \rangle$ називаються зв'язаними тоді і тільки тоді, коли $y \in \{x\}^\alpha$ для деякого α .

Легко бачити, що введені відношення зв'язаності є відношенням еквівалентності. Його класи еквівалентності називаються класами зв'язаності. Отже, кожне чум є об'єднання диз'юнктивного сімейства його класів зв'язаності.

Чум, що має єдиний клас зв'язаності, називається зв'язаним.

Частково упорядкована множина $\langle A, \leq \rangle$ називається (ко-)повною тоді і тільки тоді, коли кожна (ко-)спрямована непорожня множина має $\sup$ ($\inf$) (тобто супремум (інфімум)).

Чум, що є одночасно повною і ко-повною, називається дуальне повною частково упорядкованою множиною (д-п-чум).

Нехай $\langle A, \leq \rangle$ є чум, і B_1 і B_2 - його підмножини. Тоді говориться, що B_1 мажорирує B_2 (відносно $\leq$) тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента b_1 з B_1 існує елемент b_2 з B_2 , такий, що має місце $b_1 \leq b_2$.

Нижче будуть використовуватися наступні пропозиції.

Лема 1. Для кожної спрямованої підмножини деякого частково упорядкованої множини $\langle A, \leq \rangle$ з того, що існує супремум її підмножини B , випливає, що існує підмножина C , мажоруюча B , що є максимальним ланцюгом у B і рівним $\sup B$.

Наслідок. Довільна частково упорядкована множина містить супремуми усіх своїх непорожніх спрямованих підмножин тоді і тільки тоді, коли воно містить супремуми всіх своїх непорожніх ланцюгів.

При розгляді своїх моделей Д. Скотт побудував деякі спеціальні топології на повних решітках. Пізніше, ці топології були поширені на випадок повних частково упорядкованих множин. Далі буде розглядатися ще більш загальний випадок.

Для кожен повної чум $\langle A, \leq \rangle$ розглянемо сімейство підмножин O множини A , щодо якого виконуються такі умови:

1. Ко-спадковість (що означає, що якщо елемент x належить A , то всі елементи з $A, \leq$ більші, ніж x , також належать A).

2. Для кожної спрямованої підмножини $B \subseteq A$, з того, що $\sup B \in O$, випливає, що перетинання $B \cap O$ є непорожньою множиною.

Легко переконатися в тому, що множини з будь-якого сімейства, що задовольняє перерахованим вище умовам для чум $\langle A, \leq \rangle$, задовольняють всім аксіомам відкритих множин. Тому ми можемо ввести топологію $S_\leq$, які звичайно називаються топологіями Скотта.

Головною властивістю топологій Скотта є те, що умова функціональної неперервності відносно топологій Скотта може бути виражене в термінах збереження супремума множин, для яких він існує. Сформулюємо явно цей результат.

Теорема (Д. Скотт). Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є повними частково упорядкованими множинами. Тоді функція $f: A_1 \rightarrow A_2$ є неперервною відносно топологій $S_{\leq_1}$ і $S_{\leq_2}$ тоді і тільки тоді, коли для кожної непорожньої $S_{\leq_1}$ -спрямованої підмножини B_1 множини A_1 має місце рівність $f(\sup B_1) = \sup f(B_1)$, де другий супремум береться відносно $S_{\leq_2}$.

Збіжність послідовностей та неперервність функцій

Тепер, використовуючи відношення часткового порядку, ми введемо наше поняття неперервної функції, яке базується на понятті збіжності послідовності з [4] та означається як функція, що "зберігає" усі послідовності, що сходяться у сенсі роботи [4], де понятті збіжності послідовності є узагальненням стандартного поняття з математичного аналізу, що оперує тільки з послідовностями дійсних чисел, індексованих натуральними числами: (1) Послідовність збігається до точки b (у звичайній топології) тоді і тільки тоді, коли всі її монотонні (зростаючі чи спадні) підпослідовності сходяться до b . (2) Кожна (нескінченна) підпослідовність послідовності є конфінальною.

Границя будь-якої зростаючої (спадної) послідовності, у свою чергу, визначається як супремум (інфімум) множини її елементів.

Таке визначення границі послідовності має наслідком те, що послідовність збігається до точки b тоді і тільки тоді, коли всі її монотонні конфінальні підпослідовності сходяться до b .

У зв'язку з цим, в [4] було виконаним переформулювання звичайних (узагальнених) послідовностей, розглянутих у рамках загальної топології, головних образом, у теорії збіжності Морли-Сміта, наступним чином.

Під послідовністю S розуміється трійка $\langle A, I, D \rangle$, у якій A є множиною (звичайно званим носієм послідовності S), I, D є спрямованою чум (називаною множиною індексів послідовності S), і $s: I \rightarrow A$ є функція.

У випадку, коли множина індексів є фіксованою, послідовність S зазвичай ідентифікується з функцією s . Тому S ідентифікується з $\langle s: I \rightarrow A, D \rangle$, а елементи множини $s(I)$ називаються елементами S .

Потужність послідовності дорівнює, за визначенням, потужності множини її індексів.

Послідовності, індексовані початковим сегментом натуральних чисел, називаються простими й позначаються, як правило, $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, де $a_0, a_1, \dots, a_n$ є елементи послідовності.

Нехай $S_1 = \langle s_1: I_1 \rightarrow A, D_1 \rangle$ і $\langle s_2: I_2 \rightarrow A, D_2 \rangle$ є послідовності над одним носієм A . S_1 називається підпослідовністю послідовності S_2 тоді і тільки тоді, існує функція $\pi: S_1 \rightarrow S_2$, що є ін'єктивною, монотонною (відносно D_1 і D_2) функцією, яка зберігає елементи (тобто для кожного i_1 з I_1 має рівність $s_1(i_1) = s_2(i_1\pi)$). Якщо існує функція $\pi: S_1 \rightarrow S_2$, що задовольняє цим умовам і така, що для кожного i_1 з I_1 і індексу i_2 з I_2 , що задовольняє $i_2 = S_2(i_1\pi)$, тоді S_1 зветься конфінальною підпослідовністю послідовності S_2 .

Для границі послідовності з [4] дуже важливим є поняття часткового порядку над носієм, що тій додатковій умові для супремума і інфімуму, яка вимагає, щоб носій послідовності був дуальне повною чум (д-п-чум).

Поняття зростаючої (спадної) послідовності вводиться в [4] стандартним образом. При цьому, послідовність називається монотонною тоді і тільки тоді, коли вона є зростаючої чи спадною. При цьому легко перевіряється, що всі елементи кожної зростаючої (спадної) послідовності утворюють (ко-)спрямовану множину.

Нехай $S = \langle s: I \rightarrow A, D \rangle$ є послідовністю над д-п-чум $\langle A, D \rangle$. Якщо S є зростаюча послідовність, то вважаємо, що за визначенням її границя ($\lim$) дорівнює супремуму множини $s(I)$ його елементів (він повинний існувати). Якщо S є спадною послідовністю, то її границя ($\lim$) дорівнює інфімуму множини $s(I)$ його елементів.

Остаточно маємо наступне: якщо S є довільна послідовність (включаючи випадок, коли S є монотонна послідовність), то говориться, що S слабо збігається до границі ($\lim$) b тоді і тільки тоді, коли множина монотонних конфінальних підпослідовностей послідовності S не є порожньою, і кожна така підпослідовність збігається до b . У цьому випадку b називається слабою границею (weak limit) послідовності S , і ця ситуація позначається $\lim_w S = b$.

Послідовність S називається слабо збіжною (відносно $\leq$) тоді і тільки тоді, коли вона слабо збігається до деякої слабкої границі; у

протилежному випадку S називається слабо розбіжною.

Слабка збіжність послідовностей над д-п-чум має наступні основні властивості:

- для кожного д-п-чум $\langle A, \leq \rangle$ будь-яка послідовність над нею збігається не більш, ніж до однієї границі;

- для кожного індексу i послідовності $S = \langle s: I \rightarrow A, D \rangle$ і $\langle s \upharpoonright J, D \cap (J)^2 \rangle$, де J позначає множину $\{j \in I \mid \langle i, j \rangle \in D\}$ і $s \upharpoonright J$ є звуження функції s на множину $s \upharpoonright J$, або одночасно слабо сходяться до той же самою границі, або одночасно розходяться;

- якщо множина індексів послідовності S має найбільший елемент i , то вона слабо збігається до точки $s(i)$ (зокрема, кожна скінчена позитивна послідовність слабо збігається до елемента, що відповідає найбільшому індексу послідовності);

- якщо послідовність S_1 (над д-п-чум) слабо збігається до b , то будь-яка її підпослідовність S_2 є слабо збіжною тоді і тільки тоді, коли множина всіх монотонних підпослідовностей послідовності S_2 є непорожньою, причому, S_2 також слабо збігається до b .

Помітимо, що завдяки лемі 1, дослідження слабкої збіжності послідовностей ми може бути зведеним до дослідження слабкої збіжності тільки послідовностей з лінійно упорядкованими множинами індексів.

У випадках, коли частково упорядкована множина $\langle A, \leq \rangle$ не є лінійною, існують послідовності S , що містять елементи, що не беруть участь у визначенні слабкої границі, тобто послідовності, що не містять елементи, які не належать деякої конфінальної підпослідовності послідовності S . Такі елементи будуть називатися нейтральними.

Оскільки звичайний порядок на дійсних числах є лінійним і така ситуація не виникає як в [4], так і в цій статті, то в [4] вводиться ще два інших поняті збіжності послідовностей.

Говориться, що послідовність $S = \langle s: I \rightarrow A, D \rangle$ над д-п-чум $\langle A, \leq \rangle$ середньо збігається до точки $b \in A$ тоді і тільки тоді, коли S слабо збігається до b і існує такий її індекс i , що кожен індекс j , який задовольняє $\langle i, j \rangle \in D$, не є нейтральним. У цьому випадку ми пишемо $\lim_s S = b$. Якщо послідовність S слабо збігається до точки b і взагалі не містить нейтральних елементів, то S називається сильно збігається (відносно $\leq$) до b , і цей факт записується як $\lim_s S = b$.

Очевидно, що сильна збіжність послідовності до деякої точки b імплікує її збіжність у

середньому до тієї ж точки b , а середня збіжність імплікує слабку збіжність до b .

Типи неперервності функцій та їх властивості

Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є д-п-чум. Тоді функція $f: A_1 \rightarrow A_2$ є слабо, середньо чи сильно ($\leq$)неперервною (відносно д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$) тоді і тільки тоді, коли вона зберігає слабкі, середні чи сильні границі послідовностей, що збігаються, тобто для кожної послідовності S над A_1 , якщо S слабо, середньо чи сильно збігається, те також збігається і послідовність $f(S)$ і має місце рівність $\lim f(S) = f(\lim S)$, у якій в лівій і правій частинах $\lim$ позначає слабку, середню чи сильну збіжність щодо відношень $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ відповідно.

Помітимо, що всі ці три визначення збіжності послідовності (неперервної функції) співпадають у випадку природного порядку на дійсних числах, і кожне з них визначає звичайну збіжність, що використовується в стандартному аналізі. Таке положення речей роз'яснюється тим, що порядок на дійсних числах є лінійним. У випадку, коли д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ не є лінійними порядками, ми одержуємо три попарно різних поняття.

Перелічимо деякі з основних властивостей $\leq$ неперервних функцій.

По-перше, може показатися, що сильна неперервність має наслідком слабку. Також, може показатися, що, оскільки середня збіжність визначається через сильну збіжність, то сильна неперервність імплікує середню неперервність. Але, насправді, усі ці три неперервності є логічно нееквівалентними в загальному випадку. І це буде показано нижче.

Функція $f: A_1 \rightarrow A_2$ називається тривіальною тоді і тільки тоді, коли її образ є одноелементна множина. Інакше, f називається нетривіальною.

Очевидно, що всяка тривіальна функція є як слабою, так середньо і сильно неперервною для будь-яких д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$.

Твердження 1. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є дві довільні д-п-чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ - деяка нетривіальна слабо (середньо, сильно) неперервна функція (відносно $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$). Тоді виконується наступна властивість:

(C) Для кожного нескінченного ланцюга C_1 у A_1 існує скінчений ординал n і сукупність $c_1, \dots, c_n$ з C_1 , такі, що множина $f(C_1 \setminus \{c_1, \dots, c_n\})$ є ланцюгом.

Доведення. Припустимо, що це твердження не є вірним. Тобто для деякого д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$

$\leq_2$ існує нескінченний ланцюг C_1 , що порушує властивість (C). Тоді існує проста монотонна послідовність S з C_1 , така, що образ (відносно f) множини S містить елементи, що є попарно непорівнянними. Для визначеності припустимо, що послідовність S є слабо (середньо, сильно) збіжною. Тоді послідовність $f(S)$ (у всіх трьох випадках) розходиться, оскільки вона не має монотонних конфінальних послідовностей. Q.E.D.

Твердження 2. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є довільні д-п-чум і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є будь-яка нетривіальна слабо неперервна функція (відносно $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$). Тоді виконуються наступна властивість:

(WC) Не існує жодного нескінченного антиланцюга B_1 у A_1 , такого, що всі елементи множини-образа $f(B_1)$ є попарно порівнянними відносно $\leq_2$ (тобто $f(B_1)$ є ланцюгом).

Доведення. Припустимо, що A_1 містить у собі антиланцюг B_1 , такий, що множина-образ $f(B_1)$ є ланцюгом. Тоді має місце один із двох випадків:

(1) У $f(B_1)$ існує точка y , така, що ко-образ $f^{-1}(y)$ точки y відносно f є нескінченною множиною.

У цьому випадку побудуємо злічене сімейство попарно різних елементів $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ з множини B_1 , таких, що

$$f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = \dots = y.$$

У A_1 виберемо елемент x , такий, що має місце $f(x) \neq y$ і розглянемо просту послідовність $S = x, a_0, x, a_1, x, \dots, a_n, x, \dots$. Очевидно, що вона слабо збігається до x . У той же самий час, послідовність $f(S)$ є слабо розбіжною, оскільки вона має дві конфінальні монотонні підпослідовності $f(x), f(x), \dots, f(x), \dots$ і $y, y, \dots, y, \dots$ зі слабкими границями $f(x)$ і y відповідно, а $f(x)$ не дорівнює y .

(2) $f(B_1)$ містить у собі монотонний злічений ланцюг C одного з двох видів:

$$c_0 > c_1 > \dots > c_n > \dots \text{ чи } c_0 < c_1 < \dots < c_n < \dots$$

У цьому випадку для кожного натурального числа i у B_1 виберемо елемент b_i , такий, що $f(b_i) = c_i$. Візьмемо ланцюг C , що є простою монотонною послідовністю, а у A_1 виберемо елемент x , образ якого $f(x)$ не дорівнює $\lim C$. Очевидно, що проста послідовність $S = x, b_0, x, b_1, \dots, x, b_n, x, \dots$ слабо збігається до x . У той же самий час, послідовність-образ $f(S)$ слабо розбігається, оскільки вона містить дві конфінальні монотонні підпослідовності $f(x), f(x), \dots, f(x), \dots$ і $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, а слабка границя $\lim f(x)$ першої не дорівнює слабкій границі другої за вибором x .

Таким чином, в обох випадках ми приходимо до протиріччя. Q.E.D.

Твердження 3. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є д-п-чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є нетривіальна середньо неперервна (відносно $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$) функція. Тоді виконуються наступна властивість:

(CA) Для кожної спрямованої чи ко-спрямованої підмножини D множини A_1 існує скінчене (можливо, порожнє) число елементів $d_1, \dots, d_n$, таких, що множина-образ $f(D \setminus \{d_1, \dots, d_n\})$ є або спрямованою, або ко-спрямованою.

Доведення. Припустимо, що функція $f: A_1 \rightarrow A_2$ є середньо неперервною. Для визначеності розглянемо випадок, коли множина D є спрямованою. Ідентифікуємо множину D з послідовністю $S_D = \langle id_D: D \rightarrow D, \leq_1 \cup D^2 \rangle$, у якій id_D є тотожною функцією на D . Оскільки S_D спадає, вона повинна збігатися. Виходить, її послідовність-образ $f(D)$ повинна збігатися до елемента $f(\sup S_D)$.

Нехай N є множина всіх елементів $f(D)$, що є порівнянними з $f(\sup S_D)$. Тоді для кожної пари елементів d_1, d_2 з D існує елемент d_3 , такий, що мають місце $d_1 \leq_1 d_3$, $d_2 \leq_1 d_3$ і $f(d_3) \notin N$. (У протилежному випадку, послідовність $f(S_D)$ не мала б бути конфінальною підпослідовністю, елементи якої були б $f(S_D)$ -нейтральними. Такий елемент d_3 ми тимчасово будемо називати досить великим у порівнянні з d_1 і d_2 (відносно f, S_D і $\leq_1$).

Припустимо, що функція f є середньо неперервною, але властивість (CA) не має місця. Тоді виконується одна з двох умов:

- (1) множина N містить елемент b , такий, що його множина-прообраз $f^{-1}(b)$ є нескінченною;
- (2) множина N є нескінченною.

Розглянемо випадок (1). Візьмемо довільне злічене сімейство $\{a_1, a_2, \dots\}$ елементів з множини-прообразу $f^{-1}(b)$. Побудуємо злічене сімейство $\{c_1, c_2, \dots\}$ у такий спосіб: нехай c_1 є будь-який елемент, що є досить великим у порівнянні з a_1 і a_2 , а для кожного натурального числа i , строго більшого за 1, кладемо c_i рівним деякому елементу, що є досить великим порівняно з $c_{(i-1)}$ і a_i . Без утрати загальності, ми додатково можемо припустити, що границя середньо збіжною простої послідовності $f(c_1), f(c_2), \dots$ не дорівнює b .

Розглянемо просту послідовність $S = a_1, c_1, a_2, c_2, \dots$. Очевидно, що вона, середньо збігається. Однак, її послідовність-образ $f(S)$ середньо розбігається, оскільки вона має конфінальні підпослідовності $b, b, \dots$ і $f(c_1), f(c_2), \dots$, такі, що границя останньої послідовності не дорівнює b . Протиріччя.

Розглянемо випадок (2). Візьмемо довільну злічену підмножину $N' = \{b_1, b_2, \dots\}$ з N і виберемо елементи $a_1, a_2, \dots$, такі, що для кожного натурального числа i має місце $f(a_i) = b_i$.

Помітимо, що у випадку, коли проста послідовність $b_1, b_2, \dots$ є середньо збіжною, її границя не може бути рівною $f(\sup S_D)$. Це імплікує, що ми можемо побудувати ту ж послідовність $S = a_1, c_1, a_2, c_2, \dots$, що й у випадку (1) і додатково припустити, що її границя не дорівнює границі послідовності $b_1, b_2, \dots$ (при середній збіжності). Отже, конфінальна підпослідовність $b_1, b_2, \dots$, що середньо збігається до послідовності-образу $f(S)$ не може середньо збігатися. Отже, послідовність $b_1, b_2, \dots$ середньо збігається до деякої границі b . З іншого боку, $f(S)$ має іншу конфінальну підпослідовність $f(c_1), f(c_2), \dots$, середня границя якої не дорівнює b . Протиріччя. Q.E.D.

Твердження 4. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є два д-п-чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є нетривіальною сильно неперервною функцією (відносно $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$). Тоді виконується наступна властивість:

(CS) Якщо пари a_1, a_2 елементів з A_1 є порівнянними, те їхні образи $f(a_1)$ і $f(a_2)$ також є порівнянними.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай існує пара елементів a_1 і a_2 , така, що образи $f(a_1)$ і $f(a_2)$ не є порівнянними. Розглянемо просту послідовність $S = a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, \dots$.

Очевидно, що вона сильно збігається до a_1 . У той же самий час, послідовність-образ $f(S)$ сильно розбігається, оскільки вона містить нейтральний елемент $f(a_2)$. Q.E.D.

Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є функція. Тоді підмножина B_1 множини A_1 називається областю зростання (спадання) тоді і тільки тоді, коли обмеження f на B_1 є зростаючим (спадуючим).

Твердження 5. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є два д-п-чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є нетривіальною слабко (у середньому) сильно неперервною функцією (відносно $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$). Тоді виконуються наступні властивості:

(Scott) Якщо R є областю зростання функції f , те R^+ також є областю зростання функції f , і для кожної непорожньої спрямованої підмножини D множини R , має місце рівність $f(\sup D) = \sup f(D)$. Якщо R є областю спадання функції f , то R^+ також є областю спадання функції f , і для кожної непорожньої ко-спрямованої підмножини D , має місце рівність $f(\inf D) = \inf f(D)$.

Доведення (схема). Для того, щоб довести перше твердження, ми проводимо покрокове повторення конструкції побудови "алгебраїчного

замикання" множини R^+ . Такий підхід дає можливість використовувати для доказу першого твердження трансфінітну індукцію.

Друге твердження випливає з того, що образи (ко-)спрямованих множин щодо зростаючої неперервної функції є також (ко-)спрямованими, а образи (ко-)спрямованих множин щодо спадаючої неперервної функції є (ко-)спрямованими множинами. Q.E.D.

Наслідок. Для кожної непорожньої спрямованої множини D області зростання слабко (середньо, сильно) неперервної функції f має місце рівність $f(\inf D) = \inf f(D)$. Для кожної непорожньої спрямованої підмножини множини S області спадання слабко (середньо, сильно) неперервної функції f має місце рівність $f(\inf D) = \sup f(D)$.

Доведення. Властивість функції "бути слабко (середньо, сильно) неперервною" зберігається при звертанні д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$. Q.E.D.

Головні результати

Тепер є усе необхідне для доведення головних результатів роботи.

Теорема. Нехай $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ є два д-п-чум, і $f: A_1 \rightarrow A_2$ є нетривіальна функція. Тоді:

(а) Функція f є слабко неперервною тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умовам (C), (CW) і (Scott).

(б) Функція f є середньо неперервною тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умовам (CA) і (Scott).

(с) Функція f є сильно неперервною тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умовам (CS) і (Scott).

Доведення. Вище ми вже довели необхідність умов теореми для всіх пунктів (а), (б) і (с).

Отже, нам залишилося довести достатність.

(а) Припустимо, що функція f задовольняє умовам (C), (CW) і (Scott), але не є слабко неперервною щодо відношень $\leq_1$ і $\leq_2$. Тоді існує така нескінченна послідовність S над A_1 , що або (1) S є слабко збіжною послідовністю і функція $f(S)$ слабко розходиться, або (2) обидві послідовності S і $f(S)$ слабко збігаються і виконується $f(\lim_\omega S) \neq \lim_\omega f(S)$.

Розглянемо випадок (1). Оскільки S слабко розбігається, ця послідовність має деяку монотонну конфінальну слабко розбіжну послідовність S' . По (C) всі елементи послідовності $f(S')$, за винятком тільки їх скінченного (можливо, порожнього) числа є попарно порівнянними. Але тоді послідовність $f(S')$ має монотонну конфінальну

підпослідовність. Отже, множина усіх конфінальних монотонних підпослідовностей не є порожньою, і послідовність $f(S)$ розбігається. Тому існують дві монотонні підпослідовності Q_1 і Q_2 послідовності $f(S')$, такі, що $\lim Q_1 \neq \lim Q_2$.

Нехай S_1 і S_2 є будь-які такі підпослідовності послідовності S , що $f(S_1) = Q_1$ і $f(S_2) = Q_2$. По (CW) множини елементів кожної з цих послідовностей S_1 і S_2 не містять у собі жодної нескінченної підмножини, елементи якої були б попарно непорівнянними. Отже, S_1 і S_2 мають монотонні конфінальні підпослідовності S'_1 і S'_2 , що можуть бути отримані з S_1 і S_2 за допомогою елімінації скінченного числа елементів. Але S'_1 і S'_2 представляють собою монотонні конфінальні підпослідовності ініціальної послідовності S . Тому S'_1 і S'_2 повинні збігатися до тієї ж самої границі. Але це неможливо, оскільки в цьому випадку підпослідовності S_1 і S_2 повинні були б збігатися до тієї самої слабкої границі, що суперечить припущенню.

Тепер розглянемо випадок (2). Оскільки послідовність $f(S)$ слабко збігається, то вона має деяку монотонну конфінальну підпослідовність Q_1 .

Нехай S_1 є деякою підпослідовністю послідовності S , такою, що $f(S_1) = Q_1$. Згідно з властивістю (CW), всі елементи підпослідовності S_1 , крім, можливо, їхнього скінченного числа, є попарно порівнянними. Виходить, S_1 має конфінальну монотонну підпослідовність S'_1 . Легко бачити, що S'_1 і $f(S'_1)$ представляють собою монотонні конфінальні підпослідовності послідовностей S і $f(S)$ відповідно. Виходить, що має місце $\lim_\omega S'_1 = \lim_\omega S$ і $\lim_\omega f(S'_1) = \lim_\omega f(S)$. Тому $f(\lim_\omega S'_1) \neq \lim_\omega f(S'_1)$. У відповідності з наслідком до твердження 5 одержуємо протиріччя умові (Scott).

(б) Припустимо, що функція f задовольняє умовам (CA) і (Scott). Нехай S є довільна середньо збіжна послідовність над A_1 . Ми повинні довести, що S середньо збігається до $f(\lim_\omega S)$. Випадок, коли послідовність S є скінченною, не представляє складності. Тому далі ми вважаємо, що S є нескінченною послідовністю.

Умова (C) є більш слабким випадком умови (CA). Отже, послідовність-образ $f(S)$ має принаймні одну монотонну підпослідовність Q_1 . Нехай S_1 є деяка така послідовність, що $f(S_1) = Q_1$. Очевидно, що вона є конфінальною підпослідовністю послідовності $f(S)$. Виходить, вона середньо збігається. За лемою 1, S_1 має монотонну конфінальну підпослідовність S'_1 . Тому її послідовність-образ $f(S'_1)$ є монотонною, і

умова (Scott) визначає границю $\lim_\alpha f(S'_i)$ (і границю $\lim_\alpha Q_i$) єдиним образом через рівність $f(\lim_\alpha S'_i) = f(\lim_\alpha S)$. У цьому зв'язку кожна монотонна підпослідовність послідовності $f(S)$ збігається до $f(\lim_\alpha S)$.

Тому єдина можливість послідовності $f(S)$ розбігатися складається в існуванні середньо розбіжної конфінальної підпослідовності. Приймаючи до уваги припущення про нескінченність S , приходимо до протиріччя з (CA).

(с) Доведення цього пункту проводиться аналогічно доказу пункту (b).

Дійсно, припустимо, що функція f задовольняє умовам (CS) і (Scott). Нехай S є довільна сильно збіжна послідовність над A_1 . Ми повинні довести, що послідовність-образ $f(S)$ сильно збігається до $f(\lim_\alpha S)$. Оскільки властивість (CS) імплікує властивість (C), ми одержуємо, що множина усіх конфінальних монотонних підпослідовностей з $f(S)$, яка не містить нейтральних елементів, не є порожньою.

Нехай Q_i є деяка монотонна конфінальна підпослідовність послідовності $f(S)$. Тоді кожна послідовність S'_i така, що $f(S'_i) = Q_i$, є конфінальною підпослідовністю образу $f(S)$. Отже, S'_i сильно збігається до $\lim_\alpha S$. За лемою 1, послідовність S'_i має монотонну конфінальну підпослідовність S''_i . Отже, послідовність $f(S''_i)$ є монотонною, і умова (Scott) визначає границю $\lim_\alpha f(S''_i)$ і $\lim_\alpha Q_i$ єдиним чином за допомогою $f(\lim_\alpha S)$. Остаточно маємо, що кожна монотонна конфінальна підпослідовність послідовності $f(S)$ сильно збігається до $f(\lim_\alpha S)$. Тому $f(S)$ також збігається до цієї точки. Q.E.D.

Наслідок. Існують д-п-чум $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ і $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ і функція $f: A_1 \rightarrow A_2$, що є неперервною відносно $S_{\leq_1}$ і $S_{\leq_2}$, але не є ні слабко, ні середньо, ні сильно неперервною.

Доведення. Візьмемо $\langle N \cup \{\infty\}, \leq \rangle$, де N є множиною натуральних чисел з природним порядком, у якості першого д-п-чум, і візьмемо довільну злічену неупорядковану множину $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ у якості другого д-п-чум. Тоді функція $f: N \cup \{\infty\} \rightarrow B$ є неперервною, але не є ні слабко, ні середньо, ні сильно неперервною, оскільки вона не задовольняє властивості (C). Q.E.D.

Висновок

У роботі неперервні функції були введені як функції, що зберігають границю певних послідовностей. Ці поняття збіжності послідовності і неперервності функції складають

конкуренцію відповідно відомому поняттю (o)-збіжності і (o)-неперервності [7], від яких вони, з погляду автора, відрізняються в позитивний бік своєю більшою природністю. Наприклад, легко перевірити, що в кожній булевій алгебрі будь-яка послідовність, складена з її атомів, (o)-збігається до нуля булевої алгебри, що не відповідає інтуїції. У той же час, будь-яка така послідовність над булевою алгеброю розбігається в кожному із трьох запропонованих смислах. Докладне вивчення функцій та їх теоретико-порядкова характеристика, показує, що в загальному випадку класи неперервних функцій, у розумінні роботи, не є топологізованими, що веде до прикладу "неперервної", але нетопологізовної моделі лямбда-числення.

Проведені дослідження мають самостійний інтерес, а також вони можуть мати цікаві застосування як для лямбда-числення (аж до побудови нових моделей), так і для інших галузей математики, таких, як теорія функціональних мов програмування, теоретико-множинна топологія, функціональний аналіз упорядкованих лінійних просторів та ін.

Список використаних джерел

1. Church A. A set of postulates for the foundation of logic // Annals of Mathematics. – 1932. – 33. – P.346-366.
2. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. – М.: Мир, 1985. – 606 с.
3. Scott D. S. Data types as lattices // SIAM J. of Comp. – 1976. – 5(3). – P.522-587.
4. Лялецький О.О. Про типи збіжності послідовностей та топологічні властивості частково упорядкованих множин // Вісник Київського університету (Серія: фіз.-мат. науки). – 2008. – № 1.
5. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982 – 454 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
7. Kutateladze S.S. (Ed.). Nonstandard Analysis and Vector Lattices. – 525. – Springer, 2000, 320 p.

Надійшла до редколегії 11.02.2008

УДК 518.9

Машенко С.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Індивідуально-оптимальні рівноваги в некооперативних опуклих іграх

Розглядаються основні властивості індивідуально-оптимальних рівноваг та необхідні й достатні умови їх існування у некооперативних опуклих іграх.

Ключові слова: рівновага за Нешем, оптимальність за Парето, індивідуально-оптимальна рівновага.

¹E-mail: msomail@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Наконечний О.Г.

Порівняльний аналіз основних принципів оптимальності у некооперативних іграх, а саме: рівноважності за Нешем [1], коаліційної рівноважності, оптимальності за Парето [2], рівноважності за Бержем [3], - приводить до наступних висновків.

1. Чим вище толерантність гравців і більш коаліційні стратегії, тим:

- погіршується стабільність рівноваги щодо відхилень гравців (у сенсі Неша);

- погіршується «індивідуальна раціональність» рівноваги;

- поліпшується «колективна раціональність» рівноваги.

2. Функції виграшу адекватно відображають інтереси гравців тільки в умовах їх повної не інформованості. В інших випадках на їх інтереси впливають виграші інших гравців. Форма і величина впливу залежать від предметної області та специфіки гравців. Наприклад, альтруїстам цікаві тільки функції виграшу інших гравців, коаліціонерам – інтереси коаліції.

3. Не досліджений випадок, коли гравці вибирають свої стратегії індивідуально, але враховують при цьому виграші всіх гравців.

Для визначення рівноважних ситуацій та дослідження їх стабільності у цій роботі пропонується використовувати принцип індивідуальної оптимальності, відповідно до якого кожен гравець вибирає свої стратегії індивідуально, але враховує функції виграшу всіх інших (взаємне не спричинення шкоди).

Для формалізації цього принципу вводиться спеціальне відношення домінування. Будемо казати, що ситуація у гри G з вектором виграшу $U_N(y) = (u_i(y))_{i \in N}$ домінує (сильно домінує) за

Mashchenko S.O., C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

Individually-optimum equilibriums in the non-cooperative convex games

Basic properties of individual-optimum equilibriums and necessary and sufficient conditions of their existence in the non-cooperative convex games are considered.

Key words: the Nesh's equilibrium, the Pareto optimum, the individually-optimum equilibrium.

Нешем [6] ситуацію x з вектором виграшу $U_N(x)$ і позначимо це через $y \succ^{\text{NE}} x$ ($y \succ x$), якщо ситуація y виходить із ситуації x зміною якимсь одним гравцем $i \in N$ своєї власної стратегії, тобто $y = (y_i, x_{N \setminus i})$ та $U_N(y) \succ U_N(x)$ ($U_N(y) \succ U_N(x)$). Ситуацію x^* будемо називати сильною (слабкою) індивідуально-оптимальною рівновагою, а множину цих рівноваг будемо позначати через $SIOE(G)$ ($WIOE(G)$), якщо не існує іншої ситуації, яка б домінувала (сильно домінувала) за Нешем x^* , тобто

$$x^* \in SIOE(G) \Leftrightarrow \neg \exists x \in X : x \succ^{\text{NE}} x^*$$

$$(x^* \in WIOE(G) \Leftrightarrow \neg \exists x \in X : x \succ x^*).$$

Застосування індивідуально-оптимальних рівноваг мотивується наступним сценарієм гри. До початку гри гравці складають необов'язкову угоду (за порушення угоди не передбачені штрафні санкції) про те, що гравці дотримуватимуться ситуації $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$. Потім гравці незалежно один від іншого ухвалюють рішення про вибір своїх стратегій. В тому і лише тому випадку, якщо основою угоди буде сильна (слабка) індивідуально-оптимальна рівновага, i -му гравцю, окремо, буде не вигідно вибирати стратегію, відмінну від x_i^* , $i \in N$. Це пояснюється тим, що його особистий виграш і виграш інших гравців, чий інтереси він враховує, не покращає (сильно не покращає).

Розглянемо основні властивості індивідуально оптимальних рівноваг.

Позначимо через $IR(G)$ множину

індивідуально-раціональних ситуацій гри G , нагадаємо, що $\hat{x} \in IR(G) \Leftrightarrow \Leftrightarrow u_i(\hat{x}) \geq \max_{x_j \in X_j, x_{N \setminus \{i\}} \in X_{N \setminus \{i\}}} \min_{i \in N} u_i(x_j, x_{N \setminus \{i\}}), i \in N$.

Теорема 1. Якщо множина X ситуацій гри є не порожнім компактом, а функції виграшу гравців $u_i, i \in N$ - неперервні, то $SIOE(G) \cap IR(G) \neq \emptyset$.

Доведення. За відомою теоремою [1] про не порожність множини індивідуально-раціональних ситуацій за умовами теореми слідує, що множина $IR(G) \neq \emptyset$ є не порожнім компактом. Розглянемо функцію $f(x) = \sum_{j \in N} u_j(x)$, для якої за умов

теореми завжди існує $x^* \in \text{Arg max}_{x \in IR(G)} f(x) \neq \emptyset$ (за

відомою з аналізу теоремою Вейєрштраса). Припустимо супротивне, що $x^* \notin SIOE(G)$. Тоді

$\exists x \in X: x \succ x^*$. Звідси слідує

$\exists i \in N: u_i(x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*) \geq u_i(x^*), \forall j \in N$ та

$\exists k \in N: u_k(x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*) > u_k(x^*)$. Узявши суму цих нерівностей одержимо суперечність

$f(x) = \sum_{j \in N} u_j(x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*) > \sum_{j \in N} u_j(x^*) = f(x^*)$. ♦

Зауваження. Теорема залишається вірною також у разі скінчених множин стратегій гравців.

Позначимо: через $NE(G)$ ($SNE(G)$) множину рівноваг (строгих рівноваг) Неша гри G [1]; через $WKNE_Q(G)$ ($SKNE_Q(G)$) множину коаліційних рівноваг (строгих коаліційних рівноваг), відповідних розбиттю $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$,

$N(i) \cap N(j) = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{k \in K} N(k) = N$ множини

гравців на коаліції [6]; через $PO(G)$ ($SO(G)$) множину оптимальних за Парето (оптимальних за Слейтером) ситуацій гри [2]; через $BE(G)$ ($SBE(G)$) множину рівноваг (строгих рівноваг) за Бержем [3].

Теорема 2. Мають місце включення:

$WIOE(G) \supseteq SIOE(G), WIOE(G) \supseteq NE(G) \cup \cup WKNE_Q(G) \cup SO(G) \cup BE(G), SIOE(G) \supseteq \supseteq SNE(G) \cup SKNE_Q(G) \cup PO(G) \cup SBE(G)$.

Доведення. Включення $SIOE(G) \subseteq WIOE(G)$,

$PO(G) \subseteq SO(G), SBE(G) \subseteq BE(G),$

$SKNE_Q(G) \subseteq WKNE_Q(G), SNE(G) \subseteq NE(G)$

елементарно виводяться з визначень, окрім того,

очевидно, $WKNE_Q(G) = NE(G)$ при $Q = \{i\}_{i \in N}$ та

$WKNE_Q(G) = SO(G)$ при $Q = N$. Тому для

доведення теореми достатньо показати, що

$WIOE(G) \supseteq WKNE_Q(G) \cup BE(G)$.

Нехай $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ деяке розбиття множини гравців на коаліції: $N(i) \cap N(j) = \emptyset, i \neq j$;

$\bigcup_{k \in K} N(k) = N$. Доведемо включення

$WKNE_Q(G) \subseteq WIOE(G)$. Нехай $x^* \in WKNE_Q(G)$.

За визначенням [6] коаліційної рівноваги

$x^* \in WKNE_Q(G) \Leftrightarrow \forall k \in K, \neg \exists x_{N(k)} \in X_{N(k)}:$

$U_{N(k)}(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) \gg U_{N(k)}(x_{N(k)}^*, x_{N \setminus N(k)}^*)$.

Припустимо супротивне, що $x^* \notin WIOE(G)$. Тоді

$\exists i \in N, \exists x_i \in X_i: U_N(x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*) \gg U_N(x_i^*, x_{N \setminus \{i\}}^*)$.

Візьмемо коаліцію $N(k)$, до якої належить i -й

гравець. Позначимо через $y_{N(k)} = (x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*)$.

Звідси слідує, що

$u_j(y_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) > u_j(x^*), \forall j \in N(k)$. Одержали

суперечність $x^* \notin WKNE_Q(G)$.

Нехай $x^* \in BE(G)$. Тоді за визначенням

$u_j(x_j^*, x_{N \setminus \{j\}}^*) \geq u_j(x_j^*, y_{N \setminus \{j\}}), \forall y_{N \setminus \{j\}} \in X_{N \setminus \{j\}}, \forall j \in N$.

Припустимо супротивне, що $x^* \notin WIOE(G)$. Тоді

$\exists i \in N, \exists x_i \in X_i: u_j(x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*) > u_j(x_i^*, x_{N \setminus \{i\}}^*),$

$\forall j \in N$. Позначимо через $y_{N \setminus \{i\}} = (x_i, x_{N \setminus \{i\}}^*)$,

звідси одержимо суперечність

$u_j(x_j^*, y_{N \setminus \{i\}}) > u_j(x_j^*, x_{N \setminus \{j\}}^*)$. ♦

З теорем 1, 2 випливає наступний наслідок.

Наслідок. Якщо множина X ситуацій гри є не порожнім компактом, а функції виграшу гравців $u_i, i \in N$ - неперервні, то $WIOE(G) \cap IR(G) \neq \emptyset$.

Необхідні й достатні умови індивідуальної оптимальності у загальному випадку при достатньо слабких припущеннях щодо умов гри були розглянуті в [6]. В цій роботі будуть досліджуватися інші критерії, засновані на більш сильних припущеннях, які дадуть можливість одержати більш конструктивні умови індивідуальної оптимальності.

Позначимо через

$$M_i = \left\{ (\mu_j^i)_{j \in N} \left| \sum_{j \in N} \mu_j^i = 1; \mu_j^i \geq 0, j \in N \right. \right\}, i \in N$$

множини параметрів за допомогою яких ми спробуємо описати множину індивідуально-оптимальних рівноваг.

Теорема 3. Нехай множини стратегій гравців

$X_i, i \in N$ є опуклими, а функції їх виграшу

$u_i, i \in N$ є опуклими до гори за стратегіями

кожного гравця окремо. Ситуація x^* буде

слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою тоді й лише тоді, коли існують вектори параметрів $\mu_i \in M_i, i \in N$ такі, що ситуація x^* буде задовольняти наступній системі нерівностей:

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*)) \geq 0, \forall x_i \in X_i, i \in N. \quad (1)$$

Доведення. Доведемо достатність умов теореми. Нехай виконуються нерівності (1). Припустимо супротивне, що $x^* \notin WIOE(G)$. Тоді

$$\exists x \in X : x \succ^{NE} x^*. \quad \text{Звідси} \quad \text{слідуеться}$$

$$\exists i \in N : u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_j(x^*), \forall j \in N. \quad \text{Узявши}$$

зважену за вектором $\mu_i \in M_i$ суму цих нерівностей, одержимо суперечність

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*)) < 0.$$

Доведемо необхідність. Нехай $x^* \in WIOE(G)$. Тоді для $\forall i \in N$ система нерівностей $u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_j(x^*), j \in N$ буде не сумісною на множині X_i . Побудуємо образи множини допустимих розв'язків цієї системи нерівностей та множини стратегій X_i при відображенні $y_j^i = u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*)$. Одержимо відповідно:

$$V_i = \{v_j^i\}_{j \in N} | v_j^i = u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_j(x^*), j \in N\},$$

$$Y_i = \{y_j^i\}_{j \in N} | y_j^i = u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*), x_i \in X_i, j \in N\}.$$

Очевидно, що $V_i \cap Y_i = \emptyset$. Позначимо

$$\bar{V}_i = \{v_j^i\}_{j \in N} | v_j^i = u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_j(x^*), j \in N\}.$$

замикання множини V_i . Очевидно, множина $\bar{V}_i$ є опуклою. Покажемо опуклість множини Y_i .

Дійсно, нехай $\bar{y}_i = (u_j(\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*))_{j \in N}$,

$$\bar{y}_i = (u_j(\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*))_{j \in N} \in Y_i. \quad \text{Розглянемо стратегію}$$

$$\tilde{x}_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i, \lambda \in [0, 1]. \quad \text{Тоді в силу опуклості}$$

$$u_j(\tilde{x}_i, x_{N \setminus i}^*) = u_j(\lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*) \geq$$

$$\geq \lambda \bar{y}_i + (1 - \lambda) \bar{y}_i \geq u_j(x^*), \forall j \in N. \quad \text{Тому}$$

$$\lambda \bar{y}_i + (1 - \lambda) \bar{y}_i \in \bar{V}_i \text{ і множина } Y_i \text{ є опуклою.}$$

Таким чином маємо опуклі множини $\bar{V}_i$ та Y_i , перетин множини Y_i з внутрішністю V_i множини $\bar{V}_i$ є порожнім. Звідси за теоремою про відділяючу гіперплощину [4] завжди існує такий вектор $\mu_i = (\mu_j^i)_{j \in N} \neq 0$, що

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i (v_j^i - y_j^i) \geq 0, \forall v_j^i \in V_i, \forall y_j^i \in Y_i. \quad \text{Ця нерівність}$$

буде вірною зокрема і для $v_j^i = (u_j(x^*))_{j \in N}$. Тому оскільки $y_j^i = (u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*))_{j \in N}$, то одержимо (1). ♦

Зауваження. Параметрам μ_j^i природно можна надати наступний зміст. Величина μ_j^i характеризує відносну вагу виграшу гравця $j \in N$ у перевазі гравця $i \in N$ на множині функцій виграшу усіх гравців.

Оскільки за теоремою 1 існує відповідність між індивідуально-оптимальними рівновагами та параметрами, тому далі будемо казати, що індивідуально-оптимальна рівновага x^* характеризується вектором параметрів $\mu^* = (\mu_i^*)_{i \in N}, \mu_i^* \in M_i, i \in N$ якщо вона задовольняє системі нерівностей (1) при $\mu = \mu^*$.

Таким чином теорема 3 дає можливість конструктивно описати множину слабких індивідуально-оптимальних рівноваг $WIOE(G)$ і відповідно за теоремою 2 множини $NE(G), WKNE_Q(G), SO(G), BE(G)$ системою нерівностей (1).

Теорема 3 дає також можливість обґрунтувати стабільність індивідуально-оптимальних рівноваг з інших міркувань ніж були наведені вище. Якщо переписати нерівності (1) у вигляді $\sum_{j \in N} \mu_j^i u_j(x^*) \geq \sum_{j \in N} \mu_j^i u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*), \forall x_i \in X_i, i \in N$, то легко побачити, що ситуація x^* є рівновагою Неша у грі $\langle X_i, E_i; i \in N \rangle$, де $E_i(x) = \sum_{j \in N} \mu_j^i u_j(x)$

буде функцією виграшу гравця $i \in N$. Якщо функцію $E_i(x)$ вважати функцією корисності виграшів усіх гравців для гравця $i \in N$, то теорема 3 стверджує існування такої функції корисності для кожного гравця, що відхилення кожного гравця окремо від індивідуально-оптимальної рівноваги буде йому не вигідним з точки зору цієї корисності.

Розглянемо критерій сильної індивідуально-оптимальності.

Теорема 4. Для того, щоб ситуація $x^* \in X$ була сильною індивідуально-оптимальною рівновагою достатньо того, щоб вона характеризувалася параметрами $\mu_j^i > 0, \forall i, j \in N$.

Доведення. Нехай виконуються нерівності (1). Припустимо супротивне, що $x^* \notin SIOE(G)$. Тоді

$$\exists x \in X : x \succ^{NE} x^*. \quad \text{Звідси} \quad \text{слідуеться}$$

$$\exists i \in N : u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_j(x^*), \forall j \in N \quad \text{та}$$

$\exists k \in N: u_k(x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_k(x^*)$. Узявши зважену за вектором $\mu_i \in M_i, \mu_i > 0$ суму цих нерівностей, одержимо

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N \setminus i}^*)) < 0. \spadesuit$$

Теорема 5. Нехай множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими, а функції їх виграшу $u_i, i \in N$ є строго опуклими до гори за стратегіями кожного гравця окремо. Тоді множини слабких та сильних індивідуально-оптимальних рівноваг будуть співпадати, тобто $WIOE(G) = SIOE(G)$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 2 $WIOE(G) \supseteq SIOE(G)$. Покажемо включення $WIOE(G) \subseteq SIOE(G)$. Нехай $x^* \in WIOE(G)$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SIOE(G)$, тобто

$$\exists x \in X: x \succ^{NE} x^*. \quad \text{Звідси} \quad \text{слідuje}$$

$$\exists i \in N: u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i(x^*), \forall j \in N \quad \text{та}$$

$\exists k \in N: u_k(x_i, x_{N \setminus i}^*) > u_k(x^*)$. Оскільки $u_i, i \in N$ є строго опуклими до гори за власними стратегіями гравців, то для стратегії $\tilde{x}_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_i^*, \lambda \in [0, 1]$ будуть виконуватись нерівності $u_j(\tilde{x}_i, x_{N \setminus i}^*) > u_j(x^*), \forall j \in N$. Звідси

$$\tilde{x} \succ^{NE} x^* \quad \text{і тому} \quad x^* \notin WIOE(G). \quad \text{Одержана суперечність і доводить теорему. \spadesuit}$$

Зауваження. Аналогічно можна показати, що за умовами теореми $SO(G) = PO(G)$, $WKNE_Q(G) = SKNE_Q(G)$, $NE(G) = SNE(G)$, $BE(G) = SBE(G)$. Таким чином для строго опуклих до гори за стратегіями кожного гравця окремо функцій виграшу потреби у теоремі 4 немає і теорема 3 буде критерієм як слабкої, так і сильної індивідуальної оптимальності.

Особливу роль грають параметри μ_i^j , які характеризують відносну вагу власної функції виграшу гравця $i \in N$ по відношенню до функцій виграшу інших гравців.

Лема 1. Нехай $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ деяке розбиття множини гравців N на множину коаліцій, що не перетинаються. Тоді, якщо для кожного гравця $i \in N$ вектор параметрів $\mu_i \in M_i$ і виконуються умови:

$$\mu_i^j = \mu_j^i, j \in N(k), i \in N(k), \forall k \in K; \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} \mu_i^i = |K|, \quad (3)$$

то для $\forall k \in K$:

$$\sum_{j \in N} \mu_j^i u_j(x) = \sum_{j \in N(k)} \mu_j^i u_j(x), \forall x \in X, \forall i \in N(k). \quad (4)$$

Доведення. Із $\sum_{j \in N} \mu_j^i = \sum_{j \in N(k)} \mu_j^i + \sum_{j \in N \setminus N(k)} \mu_j^i = 1$ випливає рівність $\sum_{k \in K} \sum_{j \in N(k)} \mu_j^i + \sum_{k \in K} \sum_{j \in N \setminus N(k)} \mu_j^i = |K|$.

$\forall i \in N(k), \forall k \in K$. На підставі умов (2), оскільки

$$\sum_{j \in N(k)} \mu_j^i = \sum_{j \in N(k)} \mu_j^j, \forall i \in N(k), \forall k \in K, \quad \text{слідuje}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N(k)} \mu_j^i = \sum_{k \in K} \sum_{j \in N(k)} \mu_j^j = \sum_{j \in N} \mu_j^j = |K| \quad \text{для}$$

$$\forall i \in N(k), \forall k \in K. \quad \text{Таким чином} \quad \sum_{k \in K} \sum_{j \in N \setminus N(k)} \mu_j^i = 0,$$

$\forall i \in N(k), \forall k \in K$. Звідси, через умови

$$\mu_i^j \geq 0, i, j \in N, \quad \text{отримаємо}$$

$$\mu_i^j = 0, i \in N(k), j \in N \setminus N(k), \forall k \in K. \quad \text{Таким}$$

чином має місце (4). Лема доведена. $\spadesuit$

Слід зазначити, що рівності (2) описують умови узгодженості побажань гравців щодо ваги своїх функцій виграшу усередині кожної коаліції.

Лема 2. Нехай $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ деяке розбиття множини гравців N на коаліції, що не перетинаються, множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими, а функції їх виграшу $u_i, i \in N$ є опуклими до гори. Ситуація x^* буде слабкою коаліційною рівновагою, тобто $x^* \in WKNE_Q$, тоді й лише тоді, коли для кожної коаліції гравців $k \in K$ існує вектор параметрів $\mu(k) = (\mu_i(k))_{i \in N(k)} \in M(k)$,

$$M(k) = \left\{ \mu(k) \left| \sum_{i \in N(k)} \mu_i(k) = 1; \mu_i(k) \geq 0, i \in N \right. \right\} \quad \text{такий,}$$

що ситуація x^* буде задовольняти наступній системі нерівностей $\forall x_{N(k)} \in X_{N(k)}, k \in K$:

$$\sum_{i \in N(k)} \mu_i(k) (u_i(x^*) - u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*)) \geq 0. \quad (5)$$

Доведення. Доведемо достатність умов теореми. Нехай виконуються нерівності (5). Припустимо супротивне, що $x^* \notin WKNE_Q(G)$.

Тоді існує коаліція гравців $k \in K, \exists x_{N(k)} \in X_{N(k)}$:

$$U_{N(k)}(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) \succ x_{N(k)}^* U_{N(k)}(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*).$$

Звідси слідує $u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) > u_i(x^*), \forall i \in N(k)$.

Узявши зважену за вектором $\mu(k) \in M(k)$ суму цих нерівностей, одержимо суперечність

$$\sum_{i \in N(k)} \mu_i(k) (u_i(x^*) - u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*)) < 0.$$

Доведемо необхідність. Нехай

$x^* \in WKNE_Q(G)$. Тоді для $\forall k \in K$ система нерівностей $u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) > u_i(x^*), i \in N(k)$ буде не сумісною на множині $X_{N(k)}$. Побудуємо образи множини допустимих розв'язків цієї системи нерівностей та множини стратегій $X_{N(k)}$ при відображенні $y_i = u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*)$. Одержимо відповідно

$$V(k) = \{v(k) = (v_i)_{i \in N(k)} \mid v_i = u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) > u_i(x^*), i \in N(k)\}, \\ Y(k) = \{y(k) = (y_i)_{i \in N(k)} \mid y_i = u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*), x_{N(k)} \in X_{N(k)}, i \in N(k)\}.$$

Очевидно, що $V(k) \cap Y(k) = \emptyset$. Позначимо через $\bar{V}(k) = \{v(k) = (v_i)_{i \in N(k)} \mid v_i = u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) \geq u_i(x^*), i \in N(k)\}$ замикання множини $V(k)$. Очевидно, множина $\bar{V}(k)$ є опуклою. Покажемо опуклість множини $Y(k)$. Дійсно, нехай $\bar{y}(k) = (u_i(\bar{x}_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*))_{i \in N(k)} \in Y(k)$,

$\bar{\bar{y}}(k) = (u_i(\bar{\bar{x}}_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*))_{i \in N(k)} \in Y(k)$. Розглянемо стратегію $\bar{x}_{N(k)} = \lambda \bar{x}_{N(k)} + (1 - \lambda) \bar{\bar{x}}_{N(k)}, \lambda \in [0, 1]$. Тоді в силу опуклості у гору функцій виграшу за їх власними стратегіями $u_i(\bar{x}_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) =$

$$= u_i(\lambda \bar{x}_{N(k)} + (1 - \lambda) \bar{\bar{x}}_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*) \geq \lambda \bar{y}(k) + (1 - \lambda) \bar{\bar{y}}(k) \geq u_i(x^*), \forall i \in N(k).$$

Тому $\lambda \bar{y}(k) + (1 - \lambda) \bar{\bar{y}}(k) \in \bar{Y}_i$ і множина $Y(k)$ є опуклою. Таким чином маємо опуклі множини $\bar{V}(k)$ та $Y(k)$, перетин множини $Y(k)$ з внутрішністю $V(k)$ множини $\bar{V}(k)$ є порожнім. Звідси за теоремою про відділяючу гіперплощину [4] завжди існує такий вектор $\mu(k) = (\mu_i)_{i \in N(k)} \neq 0$, що

$$\sum_{i \in N(k)} \mu_i (v_i - y_i) \geq 0, \forall v_i \in V(k), \forall y_i \in Y(k).$$

Ця нерівність буде вірною зокрема і для $v(k) = (u_i(x^*))_{i \in N(k)}$. Тому оскільки

$$y(k) = (u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*))_{i \in N(k)}, \text{ остаточно одержимо (5). } \spadesuit$$

Припустимо, що множини $NE(G), WKNE_Q(G), SO(G), BE(G)$ є не порожніми.

Теорема 6. Нехай $Q = \{N(k)\}_{k \in K}$ деяке розбиття множини гравців N на коаліції, що не перетинаються. Для $x^* \in WKNE_Q(G)$ необхідно, що б ситуація x^* характеризувалася вектором

параметрів $\mu = (\mu_i)_{i \in M}$, який задовольняє (2)-(3).

Доведення. Нехай $x^* \in WKNE_Q(G)$. В коаліції гравців $N(k), k \in K$ для кожного гравця $i \in N(k)$ виберемо однакові вектори параметрів $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N}$ з компонентами $\mu_i^j = \mu_i(k), j \in N(k)$, які відповідають коаліційній рівновазі x^* за лемою 2, також нехай $\mu_i^j = 0, \forall j \in N \setminus N(k)$. Нескладно переконатися, що такі вектори задовольняють умовам (2), (3) і $\mu_i \in M_i, i \in N$. Із того, що за лемою 2 виконуються нерівності

$$\sum_{i \in N(k)} \mu_i(k) (u_i(x^*) - u_i(x_{N(k)}, x_{N \setminus N(k)}^*)) \geq 0,$$

$\forall x_{N(k)} \in X_{N(k)}, k \in K$ та з переходу до індивідуальних стратегій гравців випливає, що

$$\sum_{j \in N(k)} \mu_i^j(k) (u_i(x^*) - u_i(x_j, x_{N \setminus N(k)}^*)) \geq 0, \forall x_j \in X_j,$$

$\forall i \in N(k), \forall k \in K$. Тому, оскільки для кожної коаліції гравців виконуються умови (4), то на підставі леми 1 одержимо нерівності

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N \setminus N(k)}^*)) \geq 0, \forall x_i \in X_i, i \in N.$$

Таким чином, ситуація x^* характеризується вектором параметрів $\mu = (\mu_i)_{i \in M}$, який задовольняє умовам (4). $\spadesuit$

На підставі теорем 3, 6 можна зробити наступні висновки. Якщо x^* - рівновага Неша, то вона є індивідуально-оптимально рівновагою з оцінкою $\sum_{i \in N} \mu_i^i = n$. Коаліційна рівновага має

меншу оцінку $\sum_{i \in N} \mu_i^i = |K|$ (причому, чим менше коаліцій, тим буде меншою величина $\sum_{i \in N} \mu_i^i$).

Оптимальна за Парето ситуація є індивідуально-оптимальною рівновагою з оцінкою $\sum_{i \in N} \mu_i^i = 1$, а

рівновага Бержа буде мати найменшу оцінку $\sum_{i \in N} \mu_i^i = 0$. Інші індивідуально-оптимальні

рівноваги мають проміжні значення величини $\sum_{i \in N} \mu_i^i$ на інтервалі $[0, n]$ залежно від рівня

толерантності гравців.

На підставі приведених вище висновків можна висунути гіпотезу, що бажання кожного гравця збільшити свій індивідуальний виграш характеризує стабільність індивідуально-

оптимальної рівноваги, яка може бути оцінена величиною $\sum_{i \in N} \mu_i'$.

Оскільки індивідуально-оптимальна рівновага може бути одночасно і рівновагою Неша і коаліційною рівновагою і оптимальною за Парето ситуацією і т.д., то оцінимо максимальний рівень її стабільності. Для $\forall x \in X$ сформулюємо оптимізаційну задачу відносно μ_i' , $i, j \in N$, в якій ситуація $x \in X$ виступає як параметр:

$$\mu^{\max}(x) = \max \sum_{i \in N} \mu_i' \quad (6)$$

$$\sum_{j \in N} \mu_j'(u_j(x) - u_j(y_j, x_{-j})) \geq 0, \forall y_j \in X_j, i \in N \quad (7)$$

$$\mu_i' \geq 0, i, j \in N; \sum_{j \in N} \mu_j' = 1, i \in N. \quad (8)$$

Обмеження (7), (8) описують за теоремою 3 умови слабкої індивідуальної оптимальності ситуації $x \in X$. Величина $\mu^{\max}(x)$ буде оцінкою стабільності ситуації $x \in X$. Чи буде слабка індивідуально-оптимальна рівновага сильною, здійснюється перевіркою умов теорем 4, 5.

Відображення $\mu^{\max}: X \rightarrow [0, n]$ назвемо критерієм стабільності ситуацій гри G . Ситуація x^* гри G , яка забезпечує $\max_{x \in X} \mu^{\max}(x)$ (9) може бути рекомендована гравцям як основа для найбільш стабільної угоди.

Розглянемо умови існування розв'язку задачі (6)-(9).

Теорема 7. Нехай множини стратегій гравців $X_i, i \in N$ є опуклими не порожніми компактами, а функції їх виграшу $u_i, i \in N$ є напів-неперервними зверху та опуклими до гори за стратегіями кожного гравця окремо. Тоді множина розв'язків задачі (6)-(9) є не порожньою.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \sum_{j \in N} u_j(x)$, для якої за умов теореми завжди існує $x^* \in \text{Arg max}_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$ (за відомим з аналізу узагальненням теореми Вейєрштраса [5]). Покажемо спочатку, що $x^* \in WIOE(G)$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin WIOE(G)$. Тоді

$$\exists x \in X: x \succ x^*, \quad \text{Звідси} \quad \text{слідuje} \quad \exists i \in N: u_i(x, x_{-i}^*) > u_i(x^*), \forall j \in N. \text{ Узявши суму цих нерівностей одержимо суперечність } f(x) = \sum_{j \in N} u_j(x, x_{-j}^*) > \sum_{j \in N} u_j(x^*) = f(x^*). \text{ Тепер за теоремою 3 одержимо, що для ситуації існують вектори параметрів } \mu_i, i \in N, \text{ які задовольняють}$$

умовам (8) та системі нерівностей (7).*

Розглянемо можливі модифікації критерію стабільності ситуацій гри.

Слід відмітити, що при фіксованому $x \in X$ задача (6)-(8) природно декомпонується на n незалежних задач лінійного програмування і тоді

$$\mu^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \mu_i^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \max \left\{ \mu_i' \left| \sum_{j \in N} \mu_j'(u_j(x) - u_j(y_j, x_{-j})) \geq 0, \forall y_j \in X_j, \mu_i \in M_i \right. \right\}.$$

Звернемо увагу на величину $\mu_i^{\max}(x)$, яка зі змісту задачі (6)-(8) може інтерпретуватися як оцінка стабільності ситуації $x \in X$ окремо для гравця $i \in N$. Використання величин $\mu_i^{\max}(x), i \in N$ дає можливість побудувати окрім сумарної оцінки стабільності $\mu^{\max}(x) = \sum_{i \in N} \mu_i^{\max}(x)$ також оцінки стабільності іншого типу. Наприклад, гарантована оцінка стабільності $\mu^{\min}(x) = \min_{i \in N} \mu_i^{\max}(x)$. Окремий інтерес представляє собою ігрова оцінка стабільності, яка описується грою у нормальній формі $\langle X_i, \mu_i^{\max}; i \in N \rangle$. У цій грі множини стратегій гравців такі самі, як і у вихідній грі, а функції виграшу – оцінки стабільності ситуацій гри. Кожен гравець прагне їх максимізувати.

Список використаних джерел

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
3. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наукова думка, 1994. – 320 с.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1986.
6. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – 4. – С. 162-169.

Надійшла до редколегії 12.12.07

УДК 519.6

Москальков М.М., к.ф.-м.н., доцент,
Утебаєв Д., к.ф.-м.н., доцент,
Завіша В.В.

Дослідження збіжності методу скінченних елементів для рівняння із сильною дисперсією в слабкій метриці

У роботі отримані оцінки точності схем методу скінченних елементів по часовій змінній і просторовим змінним для рівняння руху в пружному середовищі із сильною дисперсією. Похибка методу оцінюється в інтегральній (слабкій) нормі, що дозволило знизити вимоги гладкості до розв'язку диференціальної задачі в порівнянні зі звичайною енергетичною нормою.

Ключові слова: метод скінченних елементів, сильна дисперсія, оцінки точності.

M.N. Moskal'kov, Ph.D., Ass.Prof.,
D. Utebaev*, Ph.D., Ass.Prof.,
V.V. Zavysa

Study on convergence of finite element method for equation with strong dispersion in weak metric

In the study an estimated accuracy is obtained for schemes of finite element method by time variable and space variables for equation of motion in elastic medium with strong dispersion. Error of the method is estimated in integral (weak) norm that allows to reduce smoothness requirements to solution of differential problem in comparison with ordinary energy norm.

Key Words: finite element method, strong dispersion, estimated accuracy.

*E-mail: dutebaev_56@mail.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., професор Приказчиков В.Г.

Розглянемо задачу [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Lu) &= Lu + f(x, t), (x, t) \in Q_T = \\ &= \{x \in \Omega, t \in (0, T)\}, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут L – еліптичний оператор

$$Lu = \sum_{m=1}^p \frac{\partial}{\partial x_m} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right), \quad 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1, \\ x \in \Omega \subset R^p, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$\lambda > 0$ – числовий параметр, що характеризує дисперсію.

Назвемо узагальненим розв'язком задачі (1) функцію $u(x, t)$, що при кожному $t \in [0, T]$

належить $u(x, t) \in H = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, має

похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in W_2^2(\Omega)$ і майже всюди на $(0, T)$

задовольняє співвідношенням $\forall \vartheta(x) \in H$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \vartheta \right) + \lambda a \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \vartheta \right) + a(u(t), \vartheta) &= \\ = (f(t), \vartheta), \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Тут } a(u(t), \vartheta) = -(Lu, \vartheta) = \sum_{m=1}^p \int_{\Omega} k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} dx.$$

Дискретизуємо задачу по просторовим змінним за допомогою методу скінченних елементів. Нехай $H_h \subset H$ множина елементів вигляду $\vartheta_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x)$. Тут $\{\varphi_i = \varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ базис із кусково-поліноміальних функцій, що є багаточленом ступеня k на кожному скінченному елементі.

Поставимо у відповідність (2) напівдискретну задачу для $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 u_h}{dt^2}, \vartheta_h \right) + \lambda \left(\frac{d^2 u_h}{dt^2}, \vartheta_h \right) + a(u_h(t), \vartheta_h) &= \\ = (f(t), \vartheta_h), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $u_{0,h} = u_1(0)$, $u_{0,h}(0) = P_h u_0(x)$, $u_{1,h}(0) = P_h u_1(x)$, P_h – оператор проєктування $P_h: H \rightarrow H_h$ [2].

Задачі (3) відповідає диференціальна задача Коші за часом для наближеного розв'язку

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_i \in H_h;$$

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A u_h(t) = f_h(t), \quad (4)$$

$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}.$$

Оператори D, A діють із H_h в H_h :

$$D = M + \lambda G, \quad A = G; \quad M = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N - \text{матриця}$$

$$\text{маси}; \quad G = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N - \text{матриця жорсткості.}$$

Очевидно, що $D > 0, A > 0$.

У роботі [3] для розв'язку задачі (4) на основі методу скінченних елементів по часовій змінній t була побудована векторна схема

$$D_\tau \hat{y}_i + A \frac{\hat{y}_i + y_i}{2} = \varphi_1, \quad D_\alpha y_i - D_\beta \frac{\hat{y}_i + y_i}{2} = \varphi_2, \quad (5)$$

$$y^0 = u_0, \quad \hat{y}^0 = u_1.$$

$$\text{Тут } y = y^n = y(t_n), \quad \hat{y} = \hat{y}^{n+1}, \quad D_\tau = D - \gamma \tau^2 A,$$

$$D_\alpha = D - \alpha \tau^2 A, \quad D_\beta = D - \beta \tau^2 A,$$

$$\varphi_1 = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) \mathcal{G}_1(\xi) d\xi, \quad \varphi_2 = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) \mathcal{G}_2(\xi) d\xi,$$

$$\mathcal{G}_1(\xi) = p_1 \mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) + p_2 \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi),$$

$$\mathcal{G}_2(\xi) = s_1 \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}(\xi), \quad \xi = (t - t_n)/\tau,$$

$$\mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) = \tau \left(\xi - \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathcal{G}_2^{(2)}(\xi) = \tau \left(\xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi \right),$$

$$p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma,$$

$$s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$$

α, β, γ — параметри, які підпорядковуються умові четвертого порядку апроксимації: $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$.

На кожному з інтервалів (t_n, t_{n+1}) наближений розв'язок $y(t)$ є ермітовим кубічним сплайном [3]:

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \quad (6)$$

$$\text{де } \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$\varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2).$$

Інтегруючи тотожність (2) по t від t_n до $t_{n+1} = t_n + \tau$, отримаємо:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [-(\dot{u}(t), \mathcal{G}) - \lambda a(\dot{u}(t), \mathcal{G}) + a(u(t), \mathcal{G})] dt +$$

$$+ [(\dot{u}(t), \mathcal{G}) + \lambda a(\dot{u}(t), \mathcal{G})]_{t_n}^{t_{n+1}} =$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t), \mathcal{G}) dt, \quad \forall \mathcal{G}(x) \in H. \quad (7)$$

Зробивши аналогічні перетворення тотожності (3), отримаємо в підсумку для похибки $z_h = u - u_h$ тотожність, що є вірною $\forall \mathcal{G}_h(x) \in H_h$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [-(\dot{z}_h, \mathcal{G}_h) - \lambda a(\dot{z}_h, \mathcal{G}_h) + a(z_h, \mathcal{G}_h)] dt +$$

$$+ [(\dot{z}_h, \mathcal{G}_h) + \lambda a(\dot{z}_h, \mathcal{G}_h)]_{t_n}^{t_{n+1}} = 0. \quad (8)$$

Позначимо $e_h = u - u_1$, $\xi_h = u_1 - u_h$, де $u_1 = u_1(x, t)$ — інтерполант $u(x, t)$, тобто $z_h = e_h + \xi_h$. Виберемо пробну функцію

$$\mathcal{G}_h(t) = - \int_0^t \xi_h(t') dt' \in H_h, \quad t < s; \quad \mathcal{G}_h(t) = 0,$$

$$t \geq s, \quad \dot{\mathcal{G}}_h(t) = \xi_h(t), \quad \mathcal{G}_h(s) = 0.$$

З огляду на введені позначення, з урахуванням $(\xi_h, \xi_h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\xi_h, \xi_h)$, $a(\dot{\mathcal{G}}_h, \mathcal{G}_h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)$, тотожність (8) можна записати у вигляді:

$$-\frac{1}{2} (\xi_h, \xi_h)(t_{n+1}) - \frac{\lambda}{2} a(\xi_h, \xi_h)(t_{n+1}) +$$

$$+ \frac{1}{2} a(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)(t_{n+1}) + [(\dot{\xi}_h, \mathcal{G}_h) + \lambda a(\dot{\xi}_h, \mathcal{G}_h)]_{t_n}^{t_{n+1}} =$$

$$= -[(\dot{e}_h, \mathcal{G}_h) + \lambda a(\dot{e}_h, \mathcal{G}_h)]_{t_n}^{t_{n+1}} - \frac{1}{2} (\xi_h, \xi_h)(t_n) -$$

$$- \frac{\lambda}{2} a(\xi_h, \xi_h)(t_n) + \frac{1}{2} a(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)(t_n) +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} [(\dot{e}_h, \xi_h) + \lambda a(\dot{e}_h, \xi_h) - a(e_h, \mathcal{G}_h)] dt.$$

Просумуємо цю тотожність по $n = \overline{1, m-1}$, де номер m відповідає моменту часу $s = \pi\tau$, і введемо функцію

$$w_h(t) = \int_0^t \xi_h(t') dt' \in H_h, \quad t < s; \quad w_h(t) = 0, \quad t \geq s,$$

так що $\mathcal{G}_h(t) = w_h(t) - w_h(s)$.

З огляду на властивості функції $\mathcal{G}_h(t)$, початкові умови $\xi_h(0) = 0, \dot{\xi}_h(0) = 0$, з останньої тотожності маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\xi_h, \xi_h)(s) + \frac{\lambda}{2}a(\xi_h, \xi_h)(s) + \frac{1}{2}a(w_h, w_h)(s) = \\ = (\dot{e}_h(0), w_h(s)) + \lambda a(\dot{e}_h(0), w_h(s)) - \\ - \int_0^s [(\dot{e}_h, \xi_h) + \lambda a(\dot{e}_h, \xi_h) - a(e_h, w_h(t) - w_h(s))] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Доданки в правій частині (9) оцінюються так:

$$\begin{aligned} (\dot{e}_h(0), w_h(s)) &\leq \frac{\varepsilon_1}{2}(w_h(s), w_h(s)) + \frac{1}{2\varepsilon_1}(\dot{e}_h(0), \dot{e}_h(0)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2k_0\gamma}a(w_h(s), w_h(s)) + \frac{1}{2\varepsilon_1}(\dot{e}_h(0), \dot{e}_h(0)), \\ a(\dot{e}_h(0), w_h(s)) &\leq \frac{\varepsilon_2}{2}a(w_h(s), w_h(s)) + \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_2}a(\dot{e}_h(0), \dot{e}_h(0)), \\ \int_0^s (\dot{e}_h, \xi_h) dt &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^s (\xi_h, \xi_h) dt + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int_0^s (\dot{e}_h, \dot{e}_h) dt, \\ \int_0^s a(e_h, w_h(t) - w_h(s)) dt &\leq \varepsilon_4 \int_0^s a(w_h(t), w_h(t)) dt + \\ &+ \varepsilon_4 a(w_h(s), w_h(s)) + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^s a(e_h, e_h) dt. \end{aligned}$$

Вибираючи $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{4}, \varepsilon_3 = 2$, а ε_4 з умови

$\frac{\varepsilon_1}{2} + \varepsilon_4 T \leq \frac{1}{4}$, і застосовуючи лему Гронуола, з

урахуванням оцінок $k_0 \|w_h(s)\|_1^2 \leq a(w_h, w_h)(s) \leq k_1 \|w_h(s)\|_1^2$, $(\xi_h, \xi_h)(s) = \|\xi_h(s)\|_0^2$, $a(\xi_h, \xi_h)(s) = \|\xi_h(s)\|_1^2$, отримуємо оцінку похибки:

$$\begin{aligned} \|\xi_h(s)\|_0^2 + \lambda \|\xi_h(s)\|_1^2 + \left\| \int_0^s \xi_h(t) dt \right\|_1^2 \leq \\ \leq M \left(\|\dot{e}_h(0)\|_0^2 + \lambda \|\dot{e}_h(0)\|_1^2 + \int_0^s \|\dot{e}_h(t)\|_0^2 dt + \right. \\ \left. + \lambda \int_0^s \|\dot{e}_h(t)\|_1^2 dt + \int_0^s \|e_h(t)\|_1^2 dt \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для розв'язку $u(x, t)$, $\dot{u}(x, t) \in W_2^{k+1}(\Omega)$, $\forall t \in [0, T]$ мають місце оцінки [2]: $\|\dot{e}_h(t)\|_0 \leq Mh^k \|\dot{u}(t)\|_k$, $\|\dot{e}_h(t)\|_1 \leq Mh^k \|\dot{u}(t)\|_{k+1}$, $\|e_h(t)\|_1 \leq Mh^k \|u(t)\|_{k+1}$. Отже, на підставі (10) і нерівності трикутника $\|z\| \leq \|e_h\| + \|\xi_h\|$ має місце твердження:

Теорема 1. Нехай, $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in C([0, T];$

$W_2^{k+1}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$. Якщо звуження простору H_h на окремий скінченний елемент є багаточленом ступеня k , то для розв'язку задачі (4) має місце оцінка точності

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - u_h(x, t)\|_0 + \lambda \|u(x, t) - u_h(x, t)\|_1 + \\ + \left\| \int_0^t [u(x, t') - u_h(x, t')] dt' \right\|_1 \leq \\ \leq Mh^k \max_t \{ \|u(x, t)\|_k + \lambda \|\dot{u}(x, t)\|_{k+1} + \|u(x, t)\|_{k+1} \}, \\ \forall t \in [0, T], M = M(k_0, k_1, T). \end{aligned}$$

Перейдемо тепер до оцінки похибки дискретизації задачі (3) за часом. Нагадаємо, що розв'язок $u_h(t)$ напівдискретної задачі (4) для кожного t є елементом дискретного підпростору $u_h(t) \in H_h$.

Позначимо H_τ підпростір функцій аргументу t , що є кубічним ермітовим сплайном вигляду (6) на інтервалі $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Розв'язок схеми (5), (6) $y(t) \in H_\tau$. Одночасно для кожного $t \in [0, T]$ $y(t)$ є елементом підпростору H_h . Фактично $y(x, t) \in H_h^\tau = H_h \otimes H^\tau$.

Апроксимуємо задачу (4) схемою (5). Її відповідає слабка постановка

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [-(\dot{y}(t), \dot{\mathcal{G}}_t) - \lambda a(\dot{y}(t), \dot{\mathcal{G}}_t) + a(y(t), \dot{\mathcal{G}}_t)] dt + \\ + [(\dot{y}(t), \dot{\mathcal{G}}_t) + \lambda a(\dot{y}(t), \dot{\mathcal{G}}_t)]|_{t_n}^{t_{n+1}} = \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t), \dot{\mathcal{G}}_t) dt, \forall \dot{\mathcal{G}}_t(x, t) \in H_h^\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Віднімаючи від (7) з $\mathcal{G} = \dot{\mathcal{G}}$ тотожність (11), маємо для похибки $\zeta_\tau(t) = u_h(t) - y(t)$ тотожність

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [-(\zeta_\tau(t), \vartheta_\tau) - \lambda a(\zeta_\tau(t), \vartheta_\tau) + a(\zeta_\tau(t), \vartheta_\tau)] dt + \\ + [(\zeta_\tau(t), \vartheta_\tau) + \lambda a(\zeta_\tau(t), \vartheta_\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} = 0, \quad (12)$$

$$\forall \vartheta_\tau(x, t) \in H_h^\tau.$$

Представимо $\zeta_\tau(t)$ у вигляді $\zeta_\tau(t) = u_h(t) - y(t) = u_h(t) - u_l^\tau(t) + u_l^\tau(t) - y(t)$, де $u_l^\tau(t) \in H^\tau$ інтерполянт $u_h(t)$ за часом.

$$\text{Позначимо } e_\tau = u_h - u_l^\tau, \quad \xi_\tau = u_l^\tau - y. \quad \text{Тоді}$$

Виберемо $\vartheta_\tau(t) = -\int_t^s \xi_\tau(t') dt', t < s; \quad \vartheta_\tau(t) = 0, t \geq s$. З тотожністю (12) проведемо ті ж перетворення, що при оцінці z_h . З урахуванням $e_\tau(0) = u_h(0) - u_l^\tau(0) = u_{1,h} - u_{1,h} = 0$, отримаємо таку енергетичну нерівність

$$\|\zeta_\tau(s)\|_0^2 + \lambda \|\zeta_\tau(s)\|_1^2 + \left\| \int_0^s \zeta_\tau(t) dt \right\|_1^2 \leq \\ \leq M \left(\|e_\tau(s)\|_0^2 + \lambda \|e_\tau(s)\|_1^2 + \right. \\ \left. + \int_0^s [\| \dot{e}_\tau(t) \|_0^2 + \lambda \| \dot{e}_\tau(t) \|_1^2 + \| e_\tau(t) \|_1^2] dt \right). \quad (13)$$

Розглянемо лінійний функціонал $e_\tau(u_h) = u_h - u_l^\tau$. Уведемо заміну змінної $t = t_n + \eta\tau$. Тоді

$$e_\tau(u_h) = \tilde{e}_\tau(\tilde{u}_h(\eta)) = \\ = u_h(t_n + \eta\tau) - u_l^\tau(t_n + \eta\tau) = \tilde{u}_h(\eta) - \tilde{u}_l^\tau(\eta).$$

Він обмежений для неперервних функцій $\tilde{u}_h(\eta) \in C[0,1]$. Тим більше він обмежений для $\tilde{u}_h(\eta) \in W_2^4[0,1]$. Значить

$$|\tilde{e}_\tau(\tilde{u}_h)| = |\tilde{u}_h(\eta) - \tilde{u}_l^\tau| \leq M \sum_{m=0}^4 \left(\int_0^1 \left(\frac{d^m \tilde{u}_h}{d\eta^m} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Цей функціонал обертається в нуль на багаточленах до третього ступеня по змінній η , тому що на відріжку $[0,1]$ $\tilde{u}_l^\tau$ багаточлен 3-го ступеня, що інтерполює $\tilde{u}_h$. На підставі леми Брембла-Гільберта [4] з останньої оцінки можна отримати

$$|\tilde{e}_\tau(\tilde{u}_h)| = |\tilde{u}_h(\eta) - \tilde{u}_l^\tau| \leq \bar{M} \left(\int_0^1 \left(\frac{d^4 \tilde{u}_h}{d\eta^4} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Повертаючись до старим змінних, маємо оцінку:

$$|e_\tau(u_h(t))| = |u_h(t) - u_l^\tau(t)| \leq \\ \leq \bar{M} \tau^{7/2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{d^4 u_h}{dt^4} \right)^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (14)$$

Тоді

$$\int_0^s \|e_\tau(t')\|_1^2 dt' = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|e_\tau(t')\|_1^2 dt' \leq \\ \leq \bar{M}^2 \tau^7 \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{d^4 u_h}{dt^4} \right)^2 dt \right\| dt' = \\ = \bar{M}^2 \tau^8 \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2 dt = \bar{M}^2 \tau^8 \int_0^s \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2 dt.$$

Аналогічно маємо

$$\int_0^s \| \dot{e}_\tau(t) \|_0^2 dt \leq \bar{M}^2 \tau^8 \int_0^s \left\| \frac{d^5 u_h}{dt^5}(t) \right\|_0^2 dt, \\ \int_0^s \| \dot{e}_\tau(t) \|_1^2 dt \leq \bar{M}^2 \tau^8 \int_0^s \left\| \frac{d^5 u_h}{dt^5}(t) \right\|_1^2 dt. \quad (16)$$

Оцінимо тепер за допомогою (14)

$$\|e_\tau(s)\|_0^2 \leq \bar{M}^2 \tau^7 \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_0^2 dt, \\ \|e_\tau(s)\|_1^2 \leq \bar{M}^2 \tau^7 \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2 dt. \quad (17)$$

$$\text{Якщо ж обмежені } \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_0, \quad \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1,$$

для будь-якого t , тоді,

$$\|e_\tau(s)\|_0^2 \leq \bar{M}^2 \tau^8 \max_t \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_0^2, \\ \|e_\tau(s)\|_1^2 \leq \bar{M}^2 \tau^8 \max_t \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1^2.$$

Отже, з оцінок (13)-(17) має місце твердження.

Теорема 2. Нехай $D^* = D > 0$, $A^* = A > 0$ і виконана умова стійкості $D - m\tau^2 A \geq \varepsilon D$, $0 < \varepsilon < 1$, $m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$. Тоді для розв'язку схеми (5), що апроксимує розв'язок задачі (4), такого, що

$$u_h(t) \in W_2^5 \left\{ [0, T]; \dot{W}_2^1(\Omega) \right\},$$

$$\frac{d^4 u_h}{dt^4}(x, t) \in C \left\{ [0, T]; \dot{W}_2^1(\Omega) \right\},$$

є вірною оцінка точності

$$\begin{aligned} & \|u_h(t) - y(t)\|_0 + \lambda \|u_h(t) - y(t)\|_1 + \left\| \int_0^t [u_h(t') - y(t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & \leq M\tau^4 \left(\max_i \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_0 + \lambda \max_i \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4}(t) \right\|_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \left\| \frac{d^5 u_h}{dt^5}(t) \right\|_0 dt + \lambda \int_0^t \left\| \frac{d^5 u_h}{dt^5}(t) \right\|_1 dt \right). \end{aligned}$$

Помітимо, що в останніх оцінках помилка залежить від розв'язку $u_h(t)$ напівдискретної задачі (4), тоді як бажано мати вимоги гладкості для розв'язку вихідної задачі (1). Для цього скористаємося оцінкою (див. [5, с. 97])

$$\begin{aligned} \|u_h\|_k &= \|u - u + u_h\|_k \leq \|u\|_k + \|u - u_h\|_k \leq \\ & \leq \|u\|_k + Ch\|u\|_{k+1} \leq \bar{C}\|u\|_{k+1}, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Отже, остання оцінка буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & \|u(t) - y(t)\|_0 + \lambda \|u(t) - y(t)\|_1 + \left\| \int_0^t [u(t') - y(t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & \leq M\tau^4 \left\{ \max_i \left\| \frac{d^4 u}{dt^4}(t) \right\|_1^2 + \max_i \left\| \frac{d^4 u}{dt^4}(t) \right\|_2 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \left\| \frac{d^5 u}{dt^5}(t) \right\|_1 dt + \lambda \int_0^t \left\| \frac{d^5 u}{dt^5}(t) \right\|_2 dt + \int_0^t \left\| \frac{d^4 u}{dt^4}(t) \right\|_2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Сформулюємо тепер твердження про збіжність розв'язку векторної схеми (5) до розв'язку вихідної задачі (1).

Теорема 3. Нехай $D^* = D > 0$, $A^* = A > 0$. і виконана умова стійкості $D - m\tau^2 A \geq \varepsilon D$, $0 < \varepsilon < 1$, $m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$.

Тоді розв'язок схеми (5) $y(x, t)$, що апроксимує розв'язок задачі (1) $u(x, t)$ такого, що

$$u(x, t) \in W_2^5 \left\{ [0, T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \in C \left\{ [0, T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

$$u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in C \left\{ [0, T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) \right\},$$

має місце наступна оцінка точності

$$\begin{aligned} & \|u(x, t) - y(x, t)\|_0 + \lambda \|u(x, t) - y(x, t)\|_1 + \\ & + \left\| \int_0^t [u(x, t') - y(x, t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & M \left\{ \tau^4 \left[\max_i \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \right\|_1 + \lambda \max_i \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \right\|_2 + \right. \right. \\ & \left. + \int_0^t \left\| \frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x, t) \right\|_1 dt + \lambda \int_0^t \left\| \frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x, t) \right\|_2 dt + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \right\|_2 dt \right] + h^k \max_i \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|_k + \|u(x, t)\|_{k+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Габов С.А., Свейшников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука, 1990. – 344 с.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
3. Moskalov M.N., Utebaev D. Investigation of difference schemes of finite element method for second-order unsteady-state equations // J. Comput. Appl. Math. – 2005. – No. 92. – P. 70-76.
4. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
5. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 544 p.

Надійшла до редколегії 27.12.07

УДК 681.3.06

Процик П.П., аспірант.

Композиційно-номінативний підхід до побудови семантики мови специфікації Z-Notation

Пропонується підхід до побудови семантики для широко розповсюдженого методу Z-Notation на базі композиційно-номінативного підходу.

Синтаксичною одиницею специфікації системи у Z є схеми. В роботі проаналізовано різні типи схем та задано їх семантику. Показано, як за допомогою схем можна побудувати транзитивну модель програмної системи.

Ключові слова: Z-Notation, композиційно-номінативна, семантика.

*E-mail: piter.protsyk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Нікітченко Н.С.

Все більш очевидним стає те, що формальне моделювання програмних систем перетворюється на окрему дисципліну в галузі комп'ютерних наук. Проте вивчення даної тематики показує, що формальне моделювання поки що перебуває у стадії становлення, оскільки не існує єдиного послідовного викладу дисципліни та проблематики, достатньої чіткої класифікації методів, досліджуваних систем, та усталених понять. Більш того, для деяких широко розповсюджених методів навіть не існує чіткої, усталеної математичної семантики. Не завжди зрозуміло, який математичний апарат краще застосовувати при моделюванні тих чи інших типів систем.

У роботі пропонується підхід до побудови семантики для широко розповсюдженого методу Z на базі композиційно-номінативного підходу [1,2]. Z-Notation [3-6] – це формальна мова специфікації програмних систем. Вона використовується для опису, моделювання та доведення властивостей функціональних аспектів послідовних систем.

Мова «Z-Notation» була розроблена колективом науковців з Programming Research Group в Оксфордському університеті наприкінці 70 років. Заснована на математичній нотації, яка використовується в аксіоматичній теорії множин, лямбда-численні і логіці предикатів першого порядку. Існує стандартизований каталог

P.P. Protsyk, Ph.D. student.

Composition-Nominative approach for Z-Notation language semantics construction

Composition-Nominative approach for Z-Notation language semantics construction is proposed.

Schemes are syntactical units of system specification in Z. In the article different types of schemes are analyzed and their semantics is described. It was shown how schemes may be used to generate transitional model of a program system.

Key Words: Z-Notation, composition-nominative, semantics.

(математичний інструментарій) часто вживаних функцій і предикатів. Всі вирази в Z-Notation є типізованими. Це дозволяє уникати деяких парадоксів наївної теорії множин.

Організацією стандартизації ISO (International Organization for Standardization) у 2002 році був розроблений стандарт Z-Notation. Він має назву – «Z Formal Specification Notation – Syntax, Type System and Semantics».

Під специфікацією програмної системи у Z-Notation розуміється набір схем, які описують її поведінку та властивості. Схема у Z-Notation – це засіб структурування специфікації. Схема складається з двох частин – декларативної та предикативної. У декларативній частині проводиться опис змінних, а у предикативній на змінні накладаються обмеження. Існує три типи змінних – вхідні, вихідні та змінні стану системи. Синтаксично схема має такий вигляд:

[Declaration | Predicates].

У специфікаціях схеми можна використовувати в наступних випадках:

1) для завдання типів даних:

$Scheme \equiv [P : TypeScheme, \dots, | Predicates]$

Наприклад:

$$\begin{aligned} Month & == jan \mid feb \mid mar \mid apr \mid may \mid jun \\ & \quad \mid jul \mid aug \mid sep \mid oct \mid nov \mid dec \\ Date & == [month : Month, \\ & \quad day : 1..31, \\ & \quad year : 1900..2100 \\ & \quad | \\ & \quad month \in \{sep, apr, jun, nov\} \\ & \quad \Rightarrow day \leq 30 \\ & \quad month = feb \Rightarrow day \leq 29 \\ & \quad] \end{aligned}$$

Тут схема з іменем *Date* задає множину календарних дат з певного проміжку часу. У предикатній частині накладаються обмеження на кількість днів у місяці;

2) у визначеннях:

Схема: $[Date \mid day = 31 \bullet month]$ задає множину: $\{jan, mar, may, jul, aug, oct, dec\}$, місяців у яких кількість днів дорівнює 31;

3) у предикатах:

$\forall month : Month; day : Z; year : 1900..2100 \bullet Date \Rightarrow day \in 1..31$.

У загальному випадку схема має таку структуру:

$$\begin{aligned} Scheme & = [\\ & \quad x_1 : S_1; \dots; x_n : S_n \\ & \quad x'_1 : S_1; \dots; x'_n : S_n \\ & \quad i_1? : T_1; \dots; i_m? : T_m \\ & \quad o_1! : U_1; \dots; o_p! : U_p \\ & \quad | \\ & \quad Pre_k(i_1, \dots, i_m, x_1, \dots, x_n) \\ & \quad Inv_l(x_1, \dots, x_n) \\ & \quad Inv_o(x'_1, \dots, x'_n) \\ & \quad Op_j(i_1, \dots, i_m, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, o_1, \dots, o_p) \\ & \quad] \end{aligned}$$

де

$x_1 : S_1; \dots; x_n : S_n$ – змінні стану до виконання операції,

$x'_1 : S_1; \dots; x'_n : S_n$ – змінні стану після виконання операції,

$i_1? : T_1; \dots; i_m? : T_m$ – вхідні змінні,

$o_1! : U_1; \dots; o_p! : U_p$ – вихідні змінні,

Pre_k – предикати, які задають передумови операції,

Inv_l, Inv_o – інваріантні відношення, які накладаються на змінні,

Op_j – предикати, які задають операцію, тобто пов'язують поточний та наступний стан системи.

Найбільш широко мова *Z* використовується для специфікації систем, заснованих на транзиційних моделях. В межах цієї моделі системи описуються в термінах станів та переходів з одного стану в інший. Функціонування системи починається з деякого початкового стану та продовжується (можливо, нескінченно довго) поки існує можливість переходу в інший стан. За допомогою схем можна описувати простір станів системи, початкові умови та переходи. Переходи задаються декларативно у формі передумова-постумова. При такому тлумаченні системи можна досліджувати різні типи властивостей її моделі: циклювання, фінітність, детермінованість, тощо.

При використанні засобів мови *Z* існує можливість специфікувати такі складові моделей транзиційних систем:

- 1) простір станів (множини станів) – *StateSpace*,
- 2) початковий стан – *InitialState*,
- 3) множину переходів – $\{Op_i \mid i \in I\}$.

Розглянемо, наприклад, завдання лічильника, обмеженого значенням 100:

Простір станів:

$Counter == [value : N \mid value < 100]$.

Початковий стан

$InitCounter == [Counter \mid value = 0]$.

Операція

$Increment == [Counter; Counter' \mid value < 99 \Rightarrow value' = value + 1]$;

$ResetCounter == [Counter; Counter' \mid value = 100 \Rightarrow value' = 0]$.

Кожна програмна система повинна мати хоча б один початковий стан. Тому, для кожної специфікації повинна виконуватись наступна формула (теорема в *Z*):

$\exists StateSpace \bullet InitialState$

Для наведеного прикладу вона буде наступний вигляд:

$\exists value \in N : value < 100 \wedge value = 0$

Як підсумок вкажемо наступні властивості мови *Z*:

1) стани – множина строго типізованих змінних, задається схемами вигляду:

$[v_1 : Type_1, \dots, v_n : Type_n \mid Constraint_i(v_1, \dots, v_n)]$

$st = \{v_i \mapsto y_i \mid y_i \in Type_i\}$,

Стани будуть задаватись за допомогою номінативних даних,

2) переходи – задаються схемами операцій:
 $[st, st' \mid Pre(st), Op(st, st')]$,

3) мова опису процесів відсутня,

4) формули на станах задаються схемами вигляду: $[st \mid P(st)]$,

5) транзитивні формули мають вигляд: $Pre(st) \rightarrow op(st, st')$, та задаються схемами переходів,

6) оператори для специфікації темпоральних властивостей відсутні.

Зауважимо, що хоча схеми є інтегральною частиною мови, їх семантика не достатньо повно вивчена [2]. Один з підходів до завдання семантики схем оперує поняттям підстановки (зв'язування). Підстановка задається наступним чином. Якщо $v_1, \dots, v_n$ – імена, та $u_1, \dots, u_n$ – об'єкти типів $t_1, \dots, t_n$ відповідно, тоді існує

підстановка $z = \langle v_1 \Rightarrow u_1, \dots, v_n \Rightarrow u_n \rangle$ з компонентами $z.v_i$ рівними u_i відповідно. Тоді тип підстановки індукуюється таким чином:

$$[z] = [v_1 : t_1, \dots, v_n : t_n]$$

У роботі пропонується застосування композиційно-номінативного підходу для побудови семантики мови схем. Використання підходу дозволяє будувати семантику формальної мови на підставі єдиної методологічної платформи. У такій семантиці стани системи описуються номінативними даними, переходи тлумачаться як номінативні операції (операції над номінативними даними), які відображають один стан системи у інший. Операції будуються за допомогою чітко визначених композицій з базових відображень. Простір станів, множину початкових станів та операції визначають відповідні схеми: схеми станів, схеми ініціалізації та схеми операцій.

Побудова семантики мови Z схем повинна складатись з ряду етапів. Згідно принципу розвитку композиційно-номінативного підходу розглядається ієрархія мов від більш абстрактної до конкретної. На кожному рівні будується відповідна семантика.

Розпочнемо з побудови семантики спрощеної абстрактної мови AZ (Abstract Z). На відміну від мови Z , AZ – буде безтиповою мовою. Усі змінні будуть приймати значення з деякого загального універсуму значень. Операції діють над усім станом системи. У визначенні схем відсутні вхідні та вихідні параметри, а також локальні змінні. Змінні поточного стану позначаються звичайним чином – x, y, z . Змінні стану після виконання операції позначаються символом $'$: x', y', z' . Тоді, схема у мові AZ буде мати наступний загальний вигляд:

$$SchemaText = StateSchemaText \mid InitSchemaText \mid OpSchemaText;$$

На змінні стану обмеження не накладаються:

$$StateSchemaText = [x_1, \dots, x_n];$$

$$InitSchemaText = [\mid Init(st)];$$

$$OpSchemaText = [\mid Pre(st); Op(st, st'); Post(st')];$$

Специфікація системи у мові AZ буде складатись:

1) із схеми $StateSchemaText$ – яка задає простір станів,

2) схеми $InitSchemaText$ – яка визначає початковий стан,

3) та довільної скінченної кількості схем $OpSchemaText$ – які задають переходи з одного стану в інший.

Кожна синтаксично правильна специфікація задає певну транзитивну систему, тобто модель програмної системи. Дослідження властивостей цієї моделі дає можливість виявляти помилки у специфікації на семантичному рівні.

Нехай V – множина імен, U – множина значень, D – множина номінативних даних, Op – множина всіх операцій $D \rightarrow D$.

Тоді схема вигляду $StateSchemeText$ задає простір станів системи. Нехай $StateSchemeText = [x_1, \dots, x_n]$. Тоді простір станів системи задається множиною номінативних даних, кожна з яких містить змінні з іменами $x_1, \dots, x_n$:

$$SEM_{st} : SchemaText \rightarrow D.$$

$$SEM_{st}(StateSchemaText) = SEM_{st}([x_1, \dots, x_n]) = \{st \mid st \in D \wedge \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \eta[st]\} = StateSpace,$$

де $\eta[st]$ – множина імен даного st .

Схема $InitSchemaText$ задає множину початкових станів системи:

$$SEM_{st}(InitSchemaText) = SEM_{st}([\mid Init(st)]) = \{st \mid st \in StateSpace \wedge init(st)\} = INITIAL,$$

де $init(st)$ – значення предикату $Init$ на стані st .

Кожна схема вигляду $OpSchemaText$ задає операцію переходу одного стану системи в інший:

$$SEM_{op} : SchemaText \rightarrow (D \times D).$$

$$SEM_{op}(OpSchemaText) =$$

$$SEM_{op}([\mid Pre(st); Op(st, st'); Post(st')]) = \{(st, st') \mid st \in StateSpace \wedge st' \in StateSpace \wedge pre(st) \wedge op(st, st') \wedge post(st')\}.$$

Задамо тепер семантику специфікації:

$$SEM_{TS}(SpecificationText) =$$

$$SEM_{TS}(StateSchemaText, InitSchemaText, OpSchemaText_1, \dots, OpSchemaText_k) = (SEM_{st}(StateSchemaText),$$

$$st \in SEM_{st}(InitSchemaText), \\ \{(st, st') \in SEM_{op}(OpSchemaText) \mid i \in \{1, \dots, k\}\} \\ = (StateSpace, P(st), \{Op_i(st, st') \mid i \in \{1, \dots, k\}\}) = TS.$$

Таким чином, за допомогою такого підходу за формальним описом специфікації програмної системи можна побудувати її транзитивну модель.

На наступному рівні будемо розглядати типізовану мову Typed AZ. Це мова більш конкретного рівня. В ній на значення кожної змінної будуть накладені додаткові обмеження. Обмеження будуть мати загальний вигляд: $x \in T$. Тут x – це значення змінної з іменем x , а T – деяка множина. Можна вважати, що T – це носій деякого типу з іменем T .

Синтаксичні зміни у мові незначні:

$$StateSchemaText = [x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n];$$

На семантичному рівні зміни будуть більш суттєвими. Вони накладуть обмеження на простір станів системи:

$$SEM_{st} : SchemaText \rightarrow D.$$

$$SEM_{st}(StateSchemaText) = SEM_{st}([x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n]) \\ = \{st \mid st \in D \wedge \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \eta[st] \wedge$$

$$\forall i \in \{1..n\} : st(x_i) \in T_i\} = StateSpace.$$

Обмежений таким чином простір станів системи буде мати ряд переваг щодо важливих властивостей. Головною з цих властивостей буде можливість здійснювати безпосередній контроль за значеннями змінних у стані системи.

У більш загальному випадку маємо:

$$SEM_{st} : SchemaText \rightarrow D.$$

$$SEM_{st}(SchSp) =$$

$$= SEM_{st}([Declaration \mid Predicates]) =$$

$$= SEM_{st}([x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x), i \in I]) =$$

$$= \{[x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n] \mid u_i \in S_i, i \in \{1..n\}, P_i(u_1, \dots, u_n) = True, j \in I\} \Leftrightarrow$$

$$\{[x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n] \mid$$

$$u_i \in S_i, i \in \{1..n\},$$

$$P_1(u_1, \dots, u_n) \wedge \dots \wedge P_k(u_1, \dots, u_n), I = \{1, \dots, k\}\}.$$

Схеми вигляду $[x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x), i \in I]$ надалі будемо називати схемами-визначеннями. Схеми-визначення у композиційно-номінативній семантиці визначають номінативну множину. Вони використовуються для опису простору станів та складних типів даних.

Перейдемо до розгляду наступного типу схем:

$$SEM_{ini} : SchemaText \rightarrow D.$$

$$SEM_{ini}(SchIni) =$$

$$= SEM_{ini}([Declaration \mid Predicates]) =$$

$$= SEM_{ini}([x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x_1, \dots, x_n), i \in I]) =$$

$$= \{st \mid st \in \Gamma \wedge P_i(st(x_1), \dots, st(x_n)), i \in I\}.$$

Схеми вигляду $([x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x_1, \dots, x_n), i \in I])$ називаються схемами-ініціалізаторами.

Схеми-ініціалізатори задають множину початкових станів системи.

Залишається ще один тип схем. Це схеми-операції вигляду:

$$[x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n, x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid$$

$$P_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n), i \in I].$$

Схеми-операції визначають множину станів у які може перейти система з поточного стану наступним чином:

$$SEM_{op} : SchemaText \rightarrow (D \rightarrow D).$$

$$SEM_{op}(SchOper) =$$

$$= SEM_{op}([Declaration \mid Predicates]) =$$

$$= SEM_{op}([x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n, x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid$$

$$P_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n), i \in I]) =$$

$$= \{P_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \wedge \dots \wedge$$

$$P_k(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) =$$

$$= Q(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) =$$

$$= Q_1(x_1, \dots, x_n) \wedge Q_2(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \wedge$$

$$Q_3(x'_1, \dots, x'_n) \mid =$$

$$= \{st \mid st \in st' \wedge Q(st(x_1), \dots, st(x_n), st(x'_1), \dots, st(x'_n))\} =$$

$$= Op(st).$$

У загальному випадку семантика схем задається наступним чином:

$$SEM_{sh}(Schema) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SEM_{st}(Schema), \text{ якщо } Schema \\ \text{має вигляд:} \\ [x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x_1, \dots, x_n), i \in I], \\ SEM_{ini}(Schema), \text{ якщо } Schema \\ \text{має вигляд:} \\ [x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid P_i(x'_1, \dots, x'_n), i \in I] \\ SEM_{op}(Schema), \text{ якщо } Schema \\ \text{має вигляд:} \\ [x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n, x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid \\ P_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n), i \in I] \end{array} \right.$$

має вигляд:

$$[x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n \mid P_i(x_1, \dots, x_n), i \in I],$$

$$SEM_{ini}(Schema), \text{ якщо } Schema$$

має вигляд:

$$[x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid P_i(x'_1, \dots, x'_n), i \in I]$$

$$SEM_{op}(Schema), \text{ якщо } Schema$$

має вигляд:

$$[x_1 : S_1, \dots, x_n : S_n, x'_1 : S'_1, \dots, x'_n : S'_n \mid$$

$$P_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n), i \in I]$$

Специфікація системи складається з чотирьох типів об'єктів – схем-станів, схем-операцій, схем-ініціалізаторів та аксіоматичних визначень. Аксіоматичні визначення подібні до схем станів – вони вводять нові змінні та накладають на них обмеження. Значення цих змінних не можуть змінюватись в процесі роботи системи. Аксіоматичні визначення задають константи.

Як уже було сказано специфікація системи складається з набору параграфів Z , параграф – це або декларування нового типу, або аксіоматичне визначення, або схема, або коментарі. Коментарі не мають формального семантичного значення, тому вони не будуть прийматись до уваги.

Після створення специфікації та побудови математичної моделі системи постає задача її аналізу та доведення властивостей. Властивості формулюються у вигляді теорем деякої аксіоматичної теорії. У класичному варіанті – це теорія множин Цермело-Френкеля. Подальші доведення відбувається у рамках цієї теорії, тобто на рівні множин. Недоліком такого підходу є те, що він слабо враховує специфіку предметної області, а саме програмування. Проблеми, які при цьому виникають аналізуються в роботі [7].

Список використаних джерел

1. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы. // Проблемы программирования. – 1999. – №1. С. 16–31.
2. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1973. – №3, С. 3–13.
3. Jim Woodcock, Jim Davies: Using Z. Specification, Refinement, and Proof – New York: Prentice Hall, 1996. – 523 p.

У наступних роботах буде проводитись дослідження властивостей предикатів, що задають операції, а також будуть побудовані відповідні логіки різних рівнів абстракції та досліджені семантичні зв'язки між різними рівнями мови. На побудованому семантичному базисі планується розробити засоби доведення властивостей Z-специфікацій.

4. Brien S.M., Martin A.P. A Calculus for Schemas in Z // Symbolic Computation, Academic Press — 1999. – Volume 11. – P. 1–29.
5. Spivey J.M. The Z Notation: A Reference Manual – London: Prentice-Hall International, 1992. – 168 p.
6. Bowen Jonathan Formal Specification and Documentation using Z: A case study approach, London: International Thomson Computer Press, 1996. – 315 p.
7. Martin Andrew Relating Z and First-Order Logic // Journal of Formal Methods. – 1999. – Volume II. – P. 1266–1280.

УДК 515.2

Рубльов¹ Б.В., д. ф.-м. н., проф.,
Галковський Т.О., студ.

Обчислення інваріантної сигнатури багатокутника

Описаний алгоритм побудови сигнатури довільного багатокутника з використанням базису Хаара. Основною властивістю запропонованої сигнатури є її інваріантність відносно афінних перетворень багатокутника. Запропонована сигнатура дозволяє зручно переходити від грубого до найточнішого представлення багатокутника.

Ключові слова: сигнатура багатокутника, порівняння фігур, вейвлети.

¹E-mail: b_v@mail.univ.kiev.ua, taras.galkovskyi@gmail.com

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Ляшко С.І.

Стрімке зростання кількості зображень у інтернеті легко пояснити: легкодоступними та розповсюдженими є кольорові сканери, фотокамери, камерофони та інша техніка для створення цифрових зображень. Для ефективного використання таких обсягів інформації необхідний ефективний, швидкий та автоматизований механізм пошуку потрібних зображень. В цьому дослідженні будемо розглядати зображення, що містять лише одну фігуру.

Обробка запитів до великої бази даних фігур по знаходженню записів схожих на дану фігуру вимагає швидких і ефективних методів порівняння та індексування фігур. Це є складною задачею бо уявлення людини про схожість фігур важко формалізувати.

Довільний багатокутник A може бути представлений списком своїх вершин у порядку обходу за годинниковою стрілкою, чи проти. Таке представлення є найбільш розповсюдженим, однак існують альтернативні: функція повороту $\Theta_A(s)$. Значення цієї функції в точці x дорівнює куту нахилу вектора нормалі до границі багатокутника в деякій точці. Визначена $\Theta_A(s)$ повторює згини границі багатокутника. Така функція зростає при лівих поворотах та спадає при правих (дивись рисунок 1).

Для порівняння двох багатокутників ми будемо використовувати метрику з дослідження [1]. Це, однак, жодним чином нас не обмежує і в майбутньому планується застосувати інші, більш спеціалізовані, новіші метрики для простору багатокутників.

B.V. Rublyov, D.Sci.(Phys.-Math.), professor,
Galkovskyi T.O., student

Calculation of invariant signature of polygon

An algorithm for signature construction of any polygon using Haar's basis is proposed. The main property of new signature is that it is invariant with respect to affine transformations of the polygon. New signature allows to easily switch between fine and coarse polygon's representation.

Key words: signature of polygon, shape comparison, wavelets.

There is ongoing notable increase of number of images in the Internet. Many people own a scanner, camera, mobile phone with camera etc. All these produce huge databases of images, that need to be managed effectively to allow users to find exact images they want based on image content. Thus effective, fast and fully automated methods for image indexing and search are needed. In this research we consider that primary characteristic of image is figure (we assume that there is only one figure per image) that is shown on the image.

Serving queries for big figures' database to find figures similar to query requires effective and fast methods of figures comparison and indexing. That is a challenging task because human's perception of geometric figures similarity is hard to formalize.

Some arbitrary polygon A can be represented by list of it's vertexes in clockwise or counter clockwise order. This representation is used frequently because it suites well for most algorithms where polygons are involved. However, interesting alternative representation of A exists: turning function $\Theta_A(s)$. Values of this function at given point x is equal to inclination angle of normal vector to polygon contour at some point. Defined $\Theta_A(s)$ replicates turns of contour of polygon, that occurs while traversing it's perimeter. It's rising as a result of left turns and is descending as a result of right turns (as demonstrated on figure 1).

We will use the metrics that was presented in research [1]. However, a number of other similar researches were done that satisfy our metrics' criteria. So we are not strongly connected to some specific metrics and it can change in future.

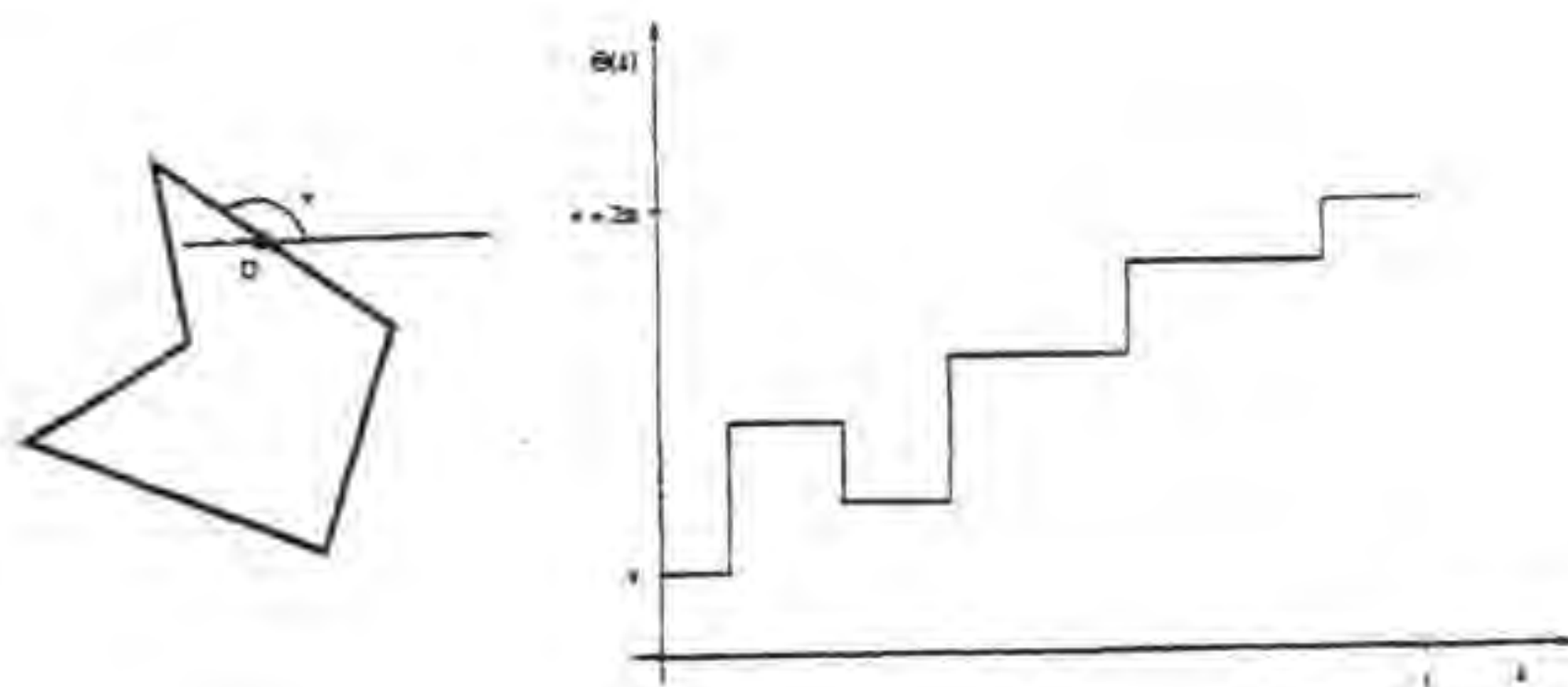


Рис. 1. Представлення багатокутника у вигляді функції повороту
Fig. 1. Turning function polygon representation

Визначимо функцію відстані між двома багатокутниками A та B, як значення метрики L_p від двох функцій повороту $\Theta_A(s)$ та $\Theta_B(s)$, мінімізоване відносно горизонтальних та вертикальних зсувів функцій повороту (тобто, ми мінімізуємо значення відстані, повертаючи багатокутники). Отже, числове значення схожості двох багатокутників A та B вимірюється як значення метрики від відповідних функцій повороту:

$$\delta_p(A, B) = \|\Theta_A - \Theta_B\|, \quad (1)$$

де $\|\cdot\|_p$ означає норму L_p .

Для $p = 2$ існує алгоритм обчислення відповідного значення, час роботи якого складає $O(n^2 \log n)$ для багатокутників з n вершинами. Він докладно описаний та обґрунтований у роботі [5], та був реалізований та використаний у цьому дослідженні.

Під слідом фігури будемо розуміти деякий набір параметрів, який характеризує фігуру, не вдаючись до мілких деталей. Фактично, це є інструментом великомасштабного аналізу. Маючи такі сліди декількох багатокутників, ми можемо порівнювати їх з обмеженою похибкою через порівняння їх слідів. Назвемо слід ієрархічним, якщо без зміни порядку параметрів, ми можемо вибрати лише деякі, а результуючий слід все одно буде характеризувати той самий початковий багатокутник, але ще з меншим ступенем деталізації.

Інтуїтивно цей процес можна порівняти зі зменшенням розподільної здатності для растрових зображень. Це і є основним інструментом для масштабного аналізу в даному

Для двох полігонів A та B давайте визначимо значення метрики як значення L_p для двох функцій повороту $\Theta_A(s)$ та $\Theta_B(s)$, мінімізоване горизонтальними та вертикальними зсувами функцій повороту (тобто, ми мінімізуємо значення метрики, повертаючи один з полігонів). Таким чином, значення метрики між A та B дорівнює значенню метрики між відповідними функціями повороту:

$$\delta_p(A, B) = \|\Theta_A - \Theta_B\|, \quad (1)$$

де $\|\cdot\|_p$ означає норму в просторі L_p .

Для $p = 2$ існує алгоритм обчислення значення метрики з часом виконання $O(n^2 \log n)$ для полігонів з n вершинами. Він представлений та доведений у дослідженні [5], та був реалізований та використаний у нашому розв'язку.

Давайте визначимо слід фігури як послідовність чисел, що ідентифікують фігуру, можливо, пропускаючи деякі найменші деталі. Ми можемо порівнювати набір полігонів з певною передбаченою точністю, порівнюючи лише сліди полігонів. Маючи такі сліди, обчислені для набору полігонів, ми можемо порівнювати полігони парами, порівнюючи їх сліди. Загалом, ми маємо ще одну метрику для порівняння полігонів.

На основі попереднього визначення давайте визначимо ієрархічний слід фігури як слід фігури, який має додаткову властивість: будь-яка неперервна підпослідовність початкової послідовності чисел (звичайний слід) з збереженим початковим пунктом також є слідом деякої фігури, і ця фігура є копією оригінальної фігури, але з меншою деталізацією.

У природній мові це можна виразити як зменшення роздільної здатності для растрових зображень. Це є основним інструментом для масштабного аналізу, згаданого вище. Введене визначення також є метрикою, але те, що ми повинні пам'ятати, це значення

дослідженні. Введене означення також є метрикою, але ми маємо пам'ятати, що значення метрики на різних рівнях деталізації відрізняються.

У статті був запропонований новий ефективний метод індексування фігур на площині. Це стало можливим, завдяки застосуванню базису Хаара для створення ієрархічних слідів фігур. Властивості базису дозволили вказати ефективний алгоритм ранжування, який відсікає сильно несхожі з запитом фігури. Невелика кількість фігур, що залишилася ранжується традиційним методом – обчисленням значення метрики в просторі фігур. Коли множина зображень для порівняння зменшується алгоритмом індексування, ми використовуємо алгоритм ранжування (сортування), що має складність $O(n \log n)$. Критерієм для алгоритму ранжування є описана метрика для фігур, що використовує представлення у вигляді функції повороту.

В цьому дослідженні ми поєднали два добре відомих методи для обробки специфічної задачі. Отриманий метод ще не використовувався для розв'язання проблеми пошуку схожих фігур. Експерименти показали, що результати роботи алгоритму є релевантними, однак схема ранжування потребує покращення.

this metric are different at different scales (different resolutions) of hierarchical trace.

A new algorithm for figures indexing in database and searching is proposed. Paper is based on (and uses) algorithms for figures' comparison invariant under affine transformations and special figure representation that is called turning function polygon representation. Use of Haar function basis in indexing process is a feature of current research and probably was not used before. That allowed to easily switch between fine and coarse figure's representation. Practical realization shows that ideas simplify the process of indexation and increase it's effectiveness in comparison with existing methods. When set of images was cut off by indexing layer, we use ranking algorithm (sorting) that has time complexity of $O(n \log n)$. Criteria for ranking algorithm is custom polygon metric studied for turning function polygon representation.

In this research we have connected two well known methods to work together on specific problem. Resulting method probably was not used before for problem of efficient figures' search. Experiments show that the method is practically usable. However we suppose that more research is needed to build a successful system.

Список використаних джерел

1. E.Arkin, L.Chew, D.Huttenlocher, K. Kedem and J.Mitchell Efficiently Computable Metric for Comparing Polygonal Shapes. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 13, no 3., 1991. – pp.209-216.
2. A.Bimbo and P.Pala Shape Indexing by Multi-Scale Representation. Image and vision computing, vol. 17 – 1999, pp.245-261.
3. J.O'Rourke and R.Washington Curve Similarity via Signatures. North-Holland : New York – 1985, pp.295-317.
4. E.Stollnitz, T.DeRose and D.Salesin Wavelets for Computer Graphics. Theory and Applications - Morgan Kaufmann Publishers - San Francisco. - 1996, pp.54-91.
5. R.Veltkamp Shape Matching Similarity Measures and Algorithms. Proceedings of Shape Modelling and Applications, SMI 2001, pp.188-197.

References

1. E.Arkin, L.Chew, D.Huttenlocher, K. Kedem and J.Mitchell Efficiently Computable Metric for Comparing Polygonal Shapes. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 13, no 3., 1991. – pp.209-216.
2. A.Bimbo and P.Pala Shape Indexing by Multi-Scale Representation. Image and vision computing, vol. 17 – 1999, pp.245-261.
3. J.O'Rourke and R.Washington Curve Similarity via Signatures. North-Holland : New York – 1985, pp.295-317.
4. E.Stollnitz, T.DeRose and D.Salesin Wavelets for Computer Graphics Theory and Applications - Morgan Kaufmann Publishers - San Francisco. - 1996, pp.54-91.
5. R.Veltkamp Shape Matching Similarity Measures and Algorithms. Proceedings of Shape Modelling and Applications, SMI 2001, pp.188-197.

Надійшла до редколегії 11.02.08

УДК 519.9: 517:532.5

Фломбойм О.В., аспірант,
Черній Д.І., к.ф.-м.н., доцент

Обчислювальні особливості моделювання струменевих ефектів та вихрових структур.

Розглянуті обчислювальні аспекти моделювання тривимірних процесів формування та еволюції вихрових структур за несучими поверхнями з урахуванням впливу струменів. Представлені результати обчислювального експерименту деяких режимів польоту реальних конструкцій. Описані обчислювальні схеми для виявлення стабілізуючих струменевих ефектів.

Ключові слова: математична модель, метод дискретних особливостей, струмінь, вихрова структура.

E-mail: flom@ukr.net, D_Cherniy@ukr.net

Статтю представив д.т.н, проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

Створення програмно-моделюючих систем для проектувальних комплексів дозволяє прискорити розробку перспективних літаючих апаратів. Ядром моделюючих систем та комплексів є програмна реалізація коректних математичних моделей аеродинамічних процесів, що супроводжуються тривимірними струменевими та вихровими ефектами. Це призводить до необхідності постановки та розв'язку нелінійних нестационарних задач безпосередньо для просторового випадку. При розробці алгоритмів функціонування моделюючих систем слід приділяти увагу не тільки коректному вибору та обчисленню квадратурно-різницевої схем, а й побудові сітки дискретизації з урахуванням масштабів фізичних процесів, що досліджуються.

Опис фізичного процесу

Розглядається обтікання тіла зі струменевими двигунами з дозвуковими швидкостями. Для опису течії поза тілом використовується припущення ідеальної нестисливої рідини, оскільки в'язкий пограничний шар на поверхні тіла є тонким. Враховуючи те, що вихровий слід за обтічним тілом, у багатьох випадках, формується з джгутів та складок достатньо тонких вихрових шарів, що виникають при відриві потоку з поверхні та гострих кромek тіла,

Flomboim O.V., post-graduate student,
Cherniy D.I., Ph.D., associated professor

The calculational features of jet effects and vortical structures of simulation.

The computing aspects of design of three-dimensional processes of forming and evolution of vortical structures are considered in distant and near track after the bearings surfaces of difficult form in a plane taking into account the influencing of streams from working motions. The results of calculable experiment of some modes of flight of the real constructions are presented. Calculable charts are described for the exposure of the stabilizing modes of stream effects.

Key Words: mathematical model, discrete singularities method, jet, vortex structure.

припускається, що слід можливо представити у вигляді еволюціонуючих джгутів та складок нескінченно тонких поверхонь розриву дотичної складової швидкості (вихрових поверхонь). Такі припущення дозволяють вважати, що течія поза тілом та слідом — потенційна, апроксимувати вихрову течію циркуляційною, врахувати струменеві ефекти, сформулювати початково-крайову задачу для потенціалу в області з непроникними рухомими границями, що деформуються.

Математична постановка задачі

Вважається, що для поверхні зі струменевими двигунами, яка рухається із заданою швидкістю W^* , закон переміщення всіх її точок заданий. Об'ємна секундна витрата у струмені на перерізі j -го сопла дорівнює Q_j . Для потенційної течії ідеальної нестисливої рідини всередині області D^* поза границями σ_d (поверхні, що рухаються детерміновано) та σ_v (вихрові структури в сліді та струмені) ставиться наступна задача для знаходження потенціалу φ , для якого

$$\vec{W} = \nabla \varphi:$$

$$t \geq t_0: \Delta \varphi = 0 \text{ в } D^* \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = W_n^* \text{ на } \sigma_d \quad (2)$$

$$\int_{s_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = Q_j \quad (3)$$

витрата на перерізі j -го сопла.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^-, p^+ = p^- \text{ на } \sigma_v \quad (4)$$

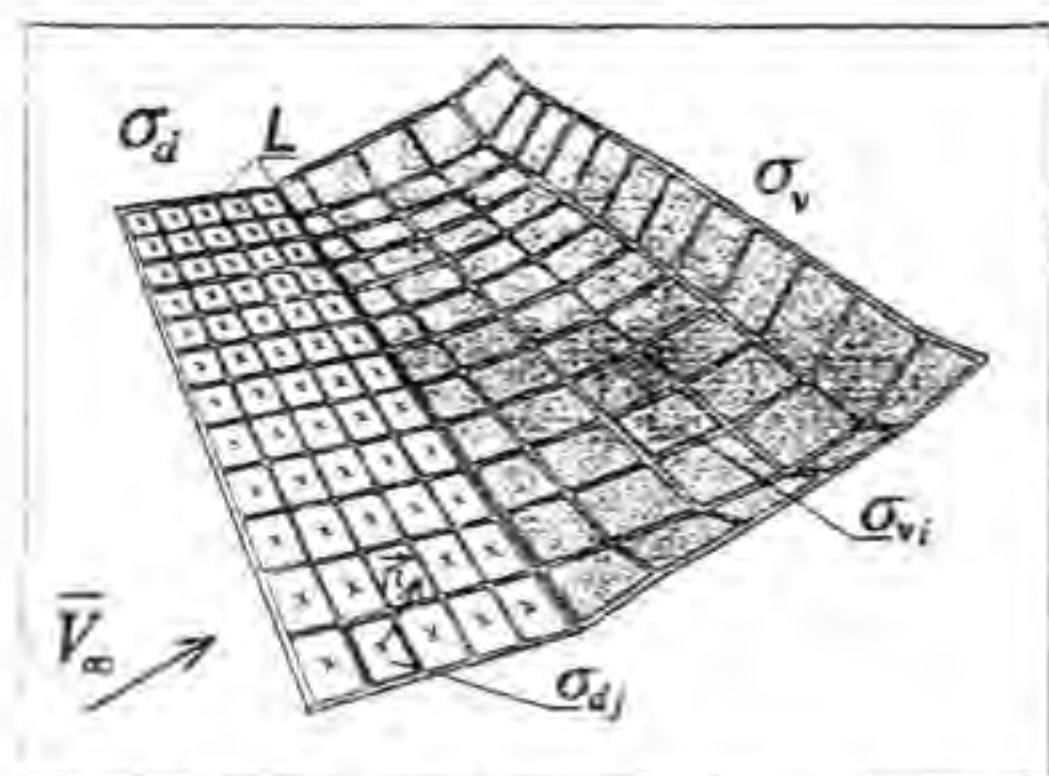
$$|\nabla \varphi| < \infty \text{ на } L \quad (5)$$

(на гострих кромках та краях поверхонь)

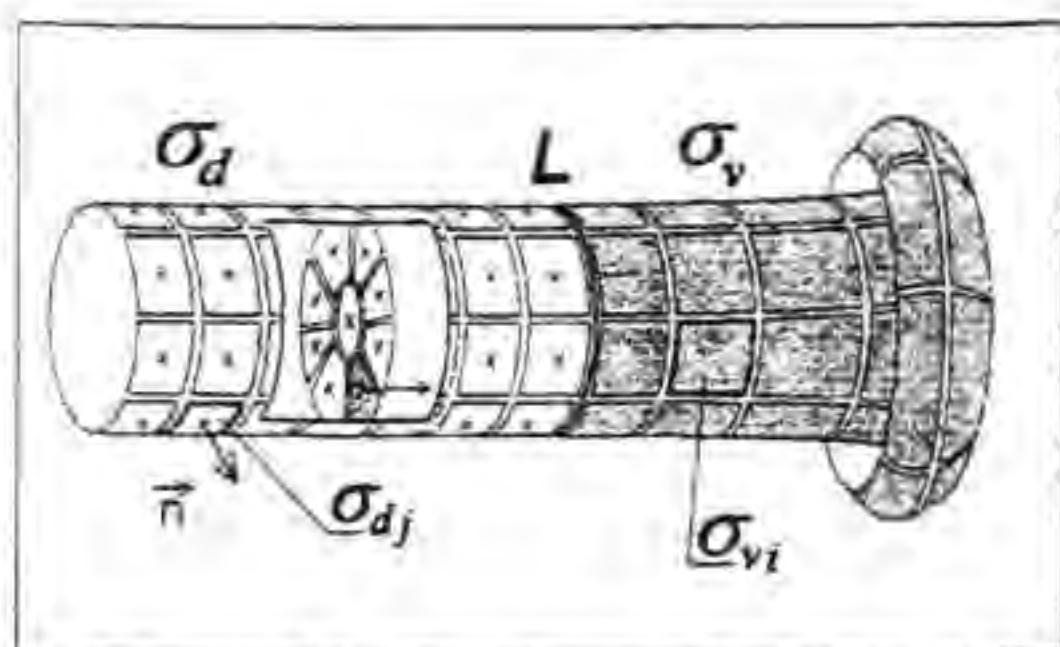
$$\lim_{r \rightarrow r_\infty} \nabla \varphi = V_\infty \text{ на } \infty \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 \quad (7)$$

$$t = t_0: \sigma_d(t_0), \varphi|_{t=t_0} = \varphi_0^* \quad (8)$$



Мал. 1 Схема дискретизації несучої поверхні



Мал. 2 Схема дискретизації двигуна та струменя

Математична модель

Розв'язок задачі (1)–(4) для потенціалу та швидкості має інтегральне представлення:

$$\varphi(x, y, z, t) = u_\infty x + v_\infty y + w_\infty z + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma \quad (9)$$

$$W(x, y, z, t) = V_\infty +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma \quad (10)$$

Де $\bar{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty, w_\infty)$, а поверхнею інтегрування є поверхня тіла, що обтікається, σ_d та поверхня розриву дотичної складової швидкості σ_v . Поверхня σ_v ніби «вирастає» з поверхні σ_d (Мал.1.-Мал.2), тобто в точках $(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d}) = (x_{\sigma_v}, y_{\sigma_v}, z_{\sigma_v})$ вздовж L -ліній гладкого спряження поверхонь σ_d та σ_v значення підінтегральних функцій співпадають:

$$g_d(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d}, t) = g_v(x_{\sigma_v}, y_{\sigma_v}, z_{\sigma_v}, t)$$

Розв'язок для потенціалу та вектора швидкості в будь-який момент часу t залежить від значення підінтегральних виразів та еволюціонуючих форм поверхонь інтегрування. Для отримання розв'язку початково-крайової задачі (1)–(8) в формі (9), (10) запропонована математична модель, яка складається з одночасного розв'язку інтегрального рівняння, що визначає функцію $g_d(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d}, t)$ на детермінованій поверхні σ_d , яка обтікається, та розв'язку задачі Коші для визначення еволюції поверхні σ_v . Інтегральне рівняння є наслідком умови непроникності $(\bar{W}, \bar{n}_0) = 0$ у всіх точках $(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d})$ поверхні σ_d (2):

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma =$$

$$= -(\bar{V}_\infty \cdot \bar{n}_0) -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma \quad (11)$$

Задача Коші для визначення еволюції поверхні σ_v .

$$\frac{d\vec{R}_{\sigma_i}}{dt} = \vec{W}(\vec{R}_{\sigma_i}(t), t), \quad \vec{R}_{\sigma_i}(t_0) = \vec{R}_0, \quad (12)$$

де для правої частини (12) вираз для швидкості задається формулою (10).

Чисельна модель

Для чисельного розв'язку задачі (11) виконується дискретизація поверхонь σ_d та σ_v , що являє собою процедуру розбиття поверхонь на граничні елементи (Мал.1.-Мал.2). Для розв'язку інтегрального рівняння (11) використовується один із різновидів метода граничних елементів. Чисельно задача (11) розв'язується методом дискретних вихрових рамок, які є наслідком дискретизації інтегральних представлень (9), (10) на поверхнях σ_d та σ_v (Мал.1.-Мал.2) та виразу для потенціалу подвійного шару на кожному рухомому елементі поверхні $\sigma_j(t)$, $j = 1, \dots, M$ через інтеграл по контуру, що її обмежує, (закон Біо-Савара):

$$\begin{aligned} V_j(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_j} \nabla \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_\sigma} \right) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma_j} \frac{d\vec{r}_\sigma \times \vec{r}_\sigma}{r_\sigma^3} \end{aligned} \quad (13)$$

Отримане при такій дискретизації представлення для вектора швидкості

$$\begin{aligned} \vec{W}(x, y, z, t) = \\ = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^{M_d} \Gamma_j(t) \vec{V}_j(x, y, z, t) + \\ + \sum_{i=1}^{M_v(t)} \Gamma_i \vec{V}_i(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (14)$$

дозволяє замінити інтегральне представлення (11) для будь-якого моменту часу t на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих інтенсивностей Γ_j вихрових трубок, що охоплює j -тий граничний елемент σ_{dj} :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M_d} \Gamma_j(t) (\vec{n}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, z_k, t)) = \\ = -(\vec{n}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \\ - \sum_{i=1}^{M_v(t)} \Gamma_i (\vec{n}(x_k, y_k, z_k) \cdot \vec{V}_i(x_k, y_k, z_k, t)), \\ k = \overline{1, M_d} \end{aligned} \quad (15)$$

Для визначення переміщення та деформації поверхні σ_v методом предиктор-коректор розв'язується задача Коші (12), що визначає переміщення кутових точок кожного i -того граничного елемента σ_{vi} :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{s\sigma_i}(t_n) &= \vec{R}_{\sigma_i}(t_n) + 0.5 \vec{W}(\vec{R}_{\sigma_i}(t_n), t_n) \Delta t, \\ \vec{R}_{\sigma_i}(t_{n+1}) &= \vec{R}_{\sigma_i}(t_n) + \vec{W}(\vec{R}_{s\sigma_i}(t_n), t_n + 0.5 \Delta t) \Delta t \\ \vec{R}_{\sigma_v}(t_0) &= \vec{R}_{0\sigma_v} \end{aligned} \quad (16)$$

В процесі еволюції поверхня σ_v росте та суттєво деформується. Деформації граничних елементів призводить до нерівномірності розбиття σ_v в дальньому сліді за поверхнею, що обтікається, σ_d . Важливим фактором є коректне початкове розбиття поверхні σ_d , що визначає побудову чисельного розв'язку задач (15), (16) для адекватного моделювання аерогідродинамічних процесів.

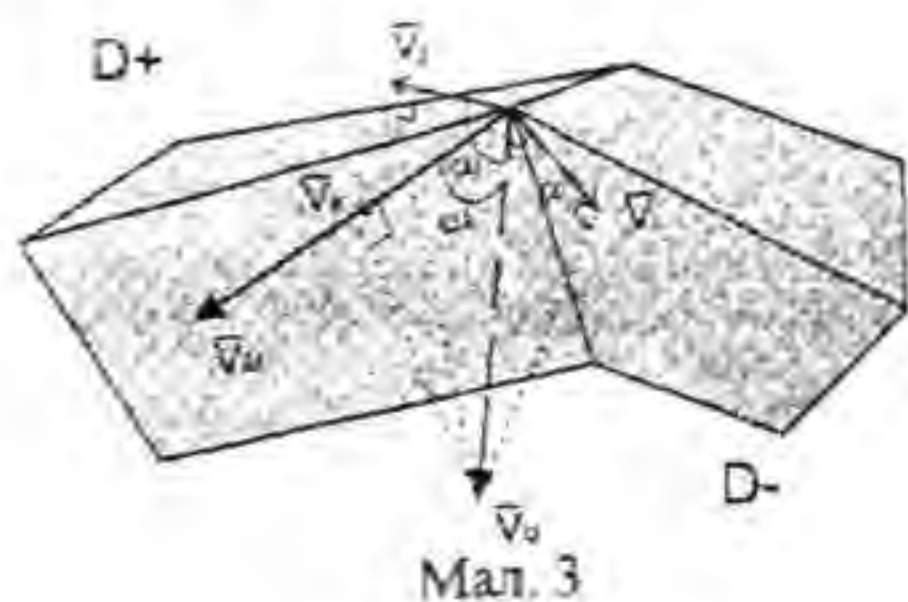
Обчислювальні особливості

Під коректністю розбиття слід розуміти побудову адаптивної сітки, що враховує локальні геометричні розміри конструктивно важливих елементів поверхні, що обтікається, тобто розмір граничного елемента повинен бути меншим від розміру конструктивного елемента поверхні, що впливає на процес обтікання. Неврахування даної вимоги призводить до внесення значної похибки в чисельну модель, що відображається не тільки на кількісних значеннях динамічних характеристик, а й призводить до якісної невідповідності модельних ефектів реальним фізичним. Алгоритм попередньої дискретизації поверхонь, що обтікаються, повинен забезпечити виконання умови того, що максимальний розмір граничних елементів має бути меншим від геометричного масштабу деталізації фізичного явища, яке реалізується (локальної вихрової структури, області локального зародження нестійкості, локального струменевого ефекту).

Коректна побудова чисельних схем дозволяє не плутати обчислювальні ефекти з проявом фізичних. Для стабілізації розрахунку вихрового сліду та контролю локальних осциляцій в розподілі швидкостей були використані обчислювальні процедури [1, 5] по видаленню довгих вихрових відрізків та нормуванню вихрових рамок. Перша процедура полягає у видаленні вихрових

відрізків, довжина яких з плином часу перевищує початкову довжину в задану кількість разів [5]. Процедура перенормування вихрових рамок (зміна інтенсивності циркуляції відрізка) використовується для попередження розривів вихрових рамок та недопущення порушення потенційності вихрового поля. Алгоритм полягає у зменшенні інтенсивності циркуляції відрізка обернено-пропорційно до його довжини. На відміну від алгоритму «видалення відрізків», даний підхід враховує всі вихрові відрізки рамок, що зійшли в потік, на всьому розрахунковому інтервалі часу.

Важливий контроль умови не проникнення. У випадку «проникнення» через поверхню вузла вільної вихрової рамки, яка не лежить на самій поверхні обтікання, були використані стандартні підходи [1, 3], що базуються на принципі «пружного відбиття» точки від поверхні. Для випадку направленості швидкості в точці відриву всередину тіла (при обтіканні тілесних об'єктів) був використаний принцип «ковзання» точки (Рис. 3). Для рамок, в які входить вузол, визначаються кути α між напрямком місцевої швидкості $\vec{V}_0$ і площиною рамки (у випадку коли рамка не є плоскою, вона триангулюється і враховуються всі трикутники) та обирається рамка, для якої такий кут буде найменшим. Вектор місцевої швидкості проєктується на обрану рамку (трикутник). Визначений таким чином напрямок будемо вважати напрямком зриву вузла (вектор модифікованої місцевої швидкості $\vec{V}_M$). Модуль модифікованої місцевої швидкості дорівнює модулю оригінальної місцевої швидкості. В результаті вузол «ковзає» по поверхні в напрямку максимуму швидкості.



Мал. 3

Результати тестових обчислень

Якісний вплив обчислювальних похибок на результати чисельного моделювання в порівнянні з експериментальними

результатами представлено на Мал.4-Мал.7. Досліджується процес формування вихрових джгутів над поверхнею трикутної пластинки та поверхнею складної форми в плані.

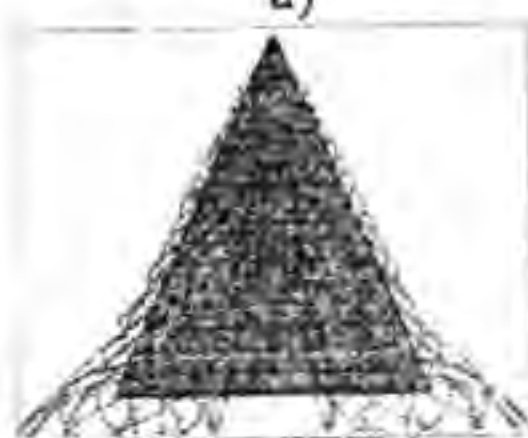
Порівняння експериментальних результатів [1, 3, 8, 9] обтікання трикутної пластинки та поверхні складної форми в плані (Мал. 4а, 5а, 6а, 7а) з результатами тестового чисельного моделювання (Рис. 4б, 5б, 6б, 7б) демонструє вплив обчислювальних похибок, що вносяться некоректним розбиттям поверхонь обтікання (і, відповідно, некоректних обчислень за допомогою квадратурно-різницевої схем), на прояв якісних аеродинамічних ефектів (Рис. 4в, 5в, 6в, 7в).



а)



а)



б)



б)



в)

Мал. 4



в)

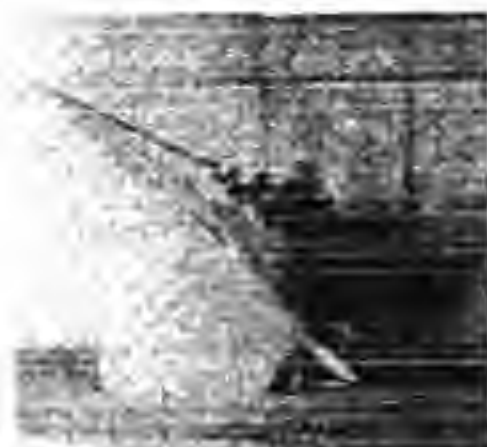
Мал. 5

Зокрема видно (Мал. 4в, Мал.5в), що некоректно побудована сітка просторової дискретизації не дозволяє моделювати вихрові структури, які були виявлені в лабораторному експерименті. Причиною тому є те, що характерний розмір області розвитку нестійкості вихрових структур (вихрових джгутів) порівнюваний з геометричними розмірами граничних елементів. Слід відмітити, що важлива не стільки форма граничного елемента, скільки геометричні розміри граничних елементів, що вносять початкову похибку. В даному випадку

початкова похибка вноситься носовими граничними елементами (у вершині трикутника) на поверхнях обтікання.



а)



а)



б)



б)



в)

Мал. 6



в)

Мал. 7

Чисельне моделювання

Дослідження формування ближнього та дальнього сліду за літаючими апаратами є актуальною проблемою [6, 7] як для теорії - дослідження когерентних вихрових структур, так і для практики - забезпечення безпеки польотів та злітно-посадочних режимів (Мал. 8 із Internet). Розроблена програмно-моделююча система дозволяє моделювати аеродинамічні ефекти при різних компоновках «двигун—крило». Налагоджені обчислювальні схеми дозволили змоделювати ефекти формування сліду за плануючим крилом літака АН-124 в режимі посадки. В структурі сліду (в усіх перерізах) спостерігається формування інтенсивного кінцевого вихору (Мал. 9 – Мал.11).



Мал. 8



Мал.10



Мал. 11

Структура вихрового сліду з типовою схемою розміщення на крилах чотирьох двигунів демонструє значну чутливість у прояві аеродинамічних ефектів до змін параметрів розміщення (Мал.12.Мал.13).



а)



а)



б)

Мал. 12



б)

Мал. 13

двигунів та змін кута атаки (Мал.14-Мал.15), що проявляється в зміні інтенсивності вихору на кінцівці крила. На Мал.16 представлено розподіл тиску в кореновому перерізі крила АН-124, що обтікається під кутом атаки 20 градусів.



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

Слід відмітити високе розрідження поблизу передньої кромки, яке суттєво впливає на опір крила за рахунок підсмоктуючої сили.

При модельному дослідженні формування вихрового сліду за крилом з напливом виявлено, що під впливом відриву потоку з носової частини несучої поверхні виникає

формування вихрових джгутів з різним ступенем стійкості. Спостерігається достатньо швидке руйнування вихрової завіси не тільки в дальньому, але і ближньому сліді (Мал.6, Мал.7, Мал.17). За допомогою обчислювального експерименту підібрані варіанти розміщення струменевих двигунів, які сприяють стійкому згортанню вихрових джгутів над несучою поверхнею, підвищуючи її несучі властивості. Вихрові джгути за рахунок ежектуючого впливу струменів від двигунів притискаються до профілю та зберігають свою форму над всією площиною несучої поверхні (Мал.17). Можливо побачити, що формування стійкого вихрового сліду може порушуватися під впливом струменевих та вихрових ефектів.

Висновки

Розробка коректних тривимірних математичних моделей, які б дозволили досліджувати нестационарні ефекти інтерференції струменів та вихрових структур, побудова ефективних обчислювальних методів та алгоритмів, є актуальною проблемою, як в практичному, так і в теоретичному плані.

Отримані результати демонструють можливість використання вищевказаних математичних та чисельних моделей для створення автоматизованих програмно-моделюючих комплексів та систем. До проблем, що можуть бути розв'язані за допомогою таких систем, можна віднести:

- створення «віртуальної аеродинамічної труби», яка б дозволила моделювати та досліджувати процеси обтікання літаючих апаратів в широких діапазонах умов польоту, зльоту й посадки з урахуванням можливих аварійних ситуацій;
- створення «віртуальної аеродинамічної лабораторії», яка б дозволила оптимізувати конструкції, схеми розміщення та режими роботи двигунів;
- розробку тренажерів керування віртуальними літаючими апаратами в широких діапазонах умов польоту, зльоту та посадки.

Список використаних джерел

1. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ниязт М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. – Алматы: Гылым, 1997. – 448 с.

2. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. – М.: Наука, 1989. – 220 с.
3. Довгий С.О., Ліфанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. – К.: Наукова думка, 2004. – 510 с.
4. Довгий С.А., Флабойм А.В., Черний Д.И. Численное моделирование взаимодействия струйных движителей и несущих поверхностей. // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Харьков-Херсон, 2007, С. 295-298.
5. Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О моделировании вихревых следов за плохобтекаемыми телами методом дискретных вихрей. // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» – Харьков-Херсон, 2005, С. 173-176.
6. Желанников А.И., Ушаков С.А. Методика и результаты расчета характеристик дальнего вихревого следа за самолетами с воздушным винтом. // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Харьков-Херсон, 2007, С. 151-153.
7. Труды ВВИА имени профессора Н.Е.Жуковского. Выпуск 1313. – М.: Издание академии, 1986. – 504с.
8. J.Fluid Mech., 1998, vol.369, pp.49-89.
9. Annu.Rev.Fluid Mech., 2001, vol.33, pp.129-154.
10. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. //Современное машиностроение. Серия А. №10,1989г. с. 1-60.

Надійшла до редколегії 28.05.2008

УДК 531.37; 538.31; 519.6

Швець Д.В., аспірант.

Про задачу двох тіл з магнітною взаємодією та інструментарій для її чисельного аналізу

На основі аналітичної електромеханіки побудована знерозмірена модель динаміки вільного тіла з магнітною взаємодією двох надпровідних кілець. Чисельними методами отримані частинні розв'язки задачі Коші побудованої нелінійної консервативної системи диференціальних рівнянь та представлена їх графічна інтерпретація.

Ключові слова: магнітна левітація, надпровідність, динамічна система.

*E-mail: dmitrysv@univ.kiev.ua

Робота представлена проф. Гарашенком Ф.Г.

Вступ

Один з підходів до побудови динамічних моделей з магнітною взаємодією між тілами ґрунтується на застосуванні теорії Д. Уайта та Г. Вудсона [8]. Вона базується на використанні лагранжевого підходу до систем різної фізичної природи, зокрема, до систем із взаємним перетворенням магнітної та механічної енергій. Результатом цієї теорії, який буде використано нижче, є факт, що у випадку представлення енергії магнітного поля динамічної системи з магнітною взаємодією через магнітні потікозчеплення та механічні координати вона являється потенціальною енергією.

Динамічна модель.

Розглянемо частинний випадок задачі двох тіл з магнітною взаємодією двох надпровідних кілець, одне з яких нерухоме, а друге жорстко зв'язане з вільним немагнітним тілом, що центр мас вільного тіла співпадає з центром кільця, а вісь кільця – одна з головних осей інерції тіла. Крім магнітних сил в системі діє постійна сила тяжіння, направлена вздовж осі нерухомого кільця. Подібні задачі в частинному випадку квазіспіввісності кілець розглядались в роботах [2, 5]. Особливістю моделі, що розглядається, є довільність просторового розміщення і орієнтації вільного тіла, що суттєво ускладнює аналіз динамічних процесів.

Для координатного опису вільного тіла
© Швець Д.В., 2008

D.V. Shvets, postgraduate student.

About the task of two bodies with magnetic interaction and tool for its numerical analysis

On the basis of analytical electromechanics the dimensionless dynamic model of free body with magnetic interaction of two superconducting rings is built. With help of numerical methods are get the partial solutions of Cauchy problem the built nonlinear conservative system of differential equations and their graphic interpretation is presented.

Key Words: magnetic levitation, superconductivity, dynamical system.

введемо три системи координат, показані на рисунку 1. Перша система координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ жорстко зв'язана з нерухомим кільцем так, що її початок O співпадає з центром нерухомого кільця, а вісь $O\xi_0$ направлена по осі кільця. Початок O_1 другої системи координат $O_1\xi'_0\eta'_0\zeta'_0$ лежить у центрі мас вільного кільця O_1 , а її осі паралельні відповідним осям системи $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. Третя система координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ розміщена початком в точці O_1 і жорстко зв'язана з вільним кільцем так, що вісь $O_1\xi_1$ направлена по осі надпровідного кільця, що належить вільному тілу.

Рівняння Лагранжа для консервативної динамічної системи мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad \mathcal{L} = T - U, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де $\mathcal{L}$ – функція Лагранжа, T – кінетична енергія системи, U – потенціальна енергія, n – число степенів свободи, q_i – узагальнені координати, $\dot{q}_i$ – узагальнені швидкості.

Добре відомо, що вільне тіло має шість степенів свободи, три з яких відповідають за поступальний рух, а інші три за його орієнтацію. У якості поступальних степенів свободи виберемо циліндричні координати $\rho_1, \alpha_1, \zeta_1$ (ρ_1 – радіус, α_1 – кут, ζ_1 – апліката) центру мас

вільного кільця O_1 в системі координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. В якості орієнтаційних степенів свободи використаємо кути Ейлера [3] $\varphi_1, \psi_1, \theta_1$ (φ_1 – кут власного обертання, ψ_1 – кут прецесії, θ_1 – кут нутації), що визначають відносну просторову орієнтацію системи $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, жорстко зв'язаної з вільним кільцем, та системи $O_1\xi'_0\eta'_0\zeta'_0$.

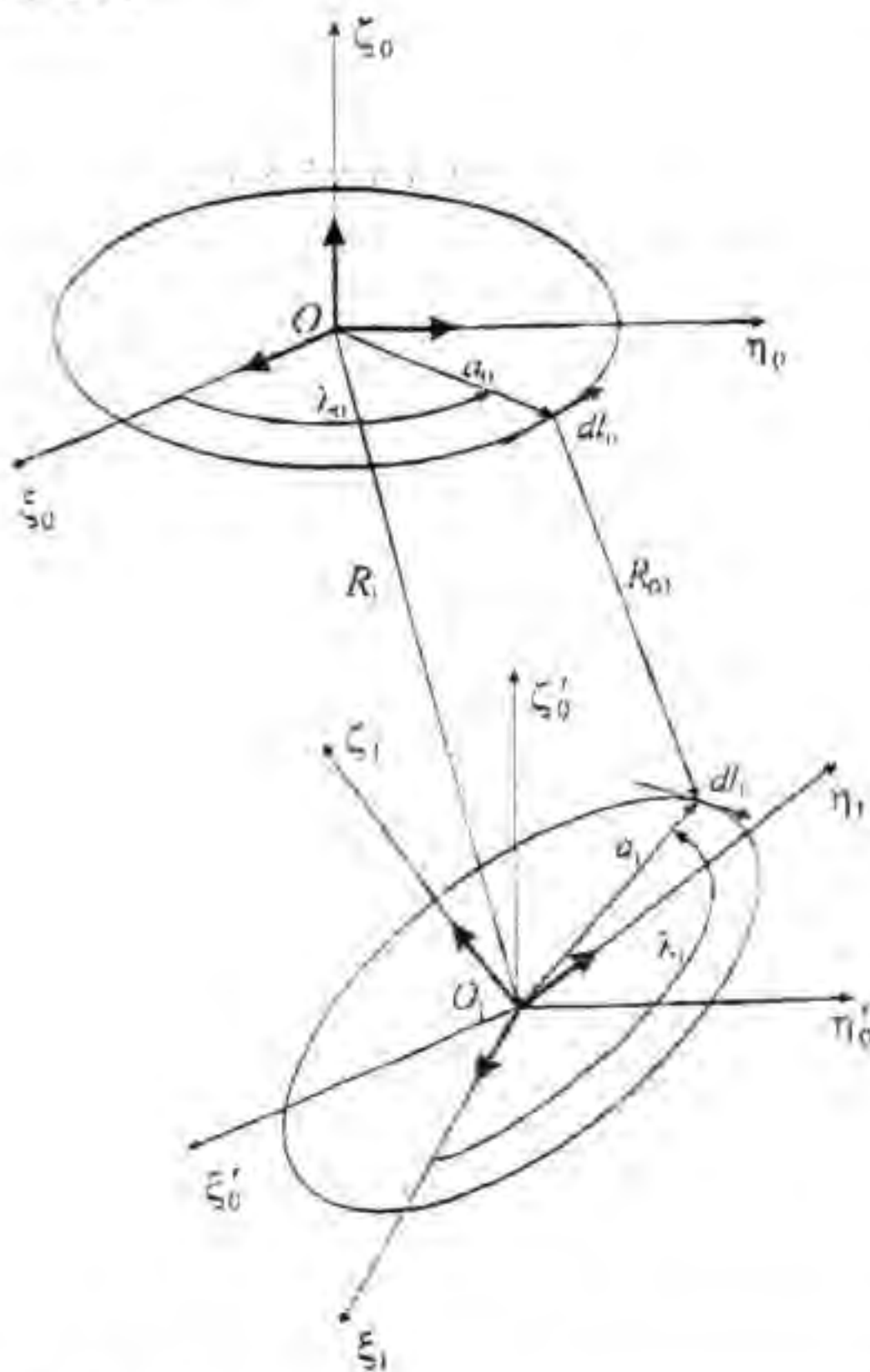


Рис 1. Взаємне розміщення двох надпровідних кілець.

Для вибраного набору узагальнених координат

$$q_1 = \{\rho_1, \alpha_1, \zeta_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1\} \quad (2)$$

кінетична енергія T вільного тіла на основі теореми Кеніга [7] обчислюється як сума кінетичної енергії поступального та обертального рухів тіла та має вигляд:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\zeta}_1^2) + \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\psi}_1^2 \sin^2(\theta_1)) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1 \cos(\theta_1))^2 \quad (3)$$

де m_1 – маса вільного кільця, I_1 та I_3 – центральні моменти інерції (I_1 навколо осі $O_1\xi_1$ або $O_1\eta_1$, а I_3 навколо осі $O_1\zeta_1$).

Для визначення потенціальної енергії U динамічної системи з магнітною взаємодією двох надпровідних кілець крім магнітної взаємодії струмів кілець необхідно врахувати гравітаційну силу, яка постійна за величиною і паралельна осі $O\xi_0$. Таким чином, потенціальна енергія системи може бути записана у вигляді:

$$U = \frac{1}{2} \frac{L_1 \Psi_0^2 - 2L_{01}(q_1) \Psi_0 \Psi_1 + L_0 \Psi_1^2}{L_0 L_1 - L_{01}^2(q_1)} \pm m_1 g \zeta_1, \quad (4)$$

де L_0, L_1 – власні індуктивності нерухомого та вільного кілець, Ψ_0, Ψ_1 – повні магнітні потокозчеплення зв'язані з відповідними кільцями, $L_{01}(q_1)$ – взаємна індуктивність кілець.

Величини L_0 та L_1 у рівнянні (4) є константами, що визначають «магнітну» геометричну конфігурацію системи. Магнітні потокозчеплення Ψ_0, Ψ_1 , які є узагальненими «магнітними» координатами динамічної системи з потенціальною енергією (4), у випадку нульового електричного опору кілець, також константи [4], що з формальної точки зору може розглядатися як наявність додаткових інтегралів руху $\Psi_0, \Psi_1 = const$. Тому потенціальна енергія U залежить лише від узагальнених механічних координат, функцією яких є взаємна індуктивність $L_{01}(q_1)$.

Формула для визначення $L_{01}(q_1)$ задається наступним чином [6]

$$L_{01} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_0 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{R}_{01}|}, \quad (5)$$

де μ_0 – магнітна проникність вакууму, $d\vec{l}_0$ та $d\vec{l}_1$ – показані на рисунку 1 векторні елементи дуг кільцевих струмів, а $\vec{R}_{01}$ – вектор відстані між ними. Необхідно виразити скалярний добуток векторів $d\vec{l}_0 \cdot d\vec{l}_1$ та довжину вектора $\vec{R}_{01}$ через узагальнені координати (2). Введемо радіус-вектор $\vec{R}_1$ точки O_1 у просторі $O\xi_0\eta_0\zeta_0$

$$\vec{R}_1 = \rho_1 \cos(\alpha_1) \vec{i}_1^0 + \rho_1 \sin(\alpha_1) \vec{i}_2^0 + \zeta_1 \vec{i}_3^0. \quad (6)$$

Згідно рисунку 1 для визначення $\bar{R}_{01}$ можна побудувати наступну векторну рівність

$$\bar{R}_{01} = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 - \bar{R}_1, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= a_0 \cos(\lambda_0) \bar{i}_1^0 + a_0 \sin(\lambda_0) \bar{i}_2^0, \\ \bar{a}_1 &= a_1 \cos(\lambda_1) \bar{i}_1^1 + a_1 \sin(\lambda_1) \bar{i}_2^1. \end{aligned} \quad (8)$$

Векторні елементи дуг $d\bar{l}_0$ та $d\bar{l}_1$ мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} L_{01} = \frac{\mu_0 a_0 a_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} & [\cos(\lambda_0) \cos(\lambda_1) \cos(\varphi_1) \cos(\psi_1) \cos(\theta_1) - \cos(\lambda_0) \cos(\lambda_1) \sin(\varphi_1) \sin(\psi_1) - \\ & - \cos(\lambda_0) \sin(\lambda_1) \cos(\varphi_1) \sin(\psi_1) - \cos(\lambda_0) \sin(\lambda_1) \sin(\varphi_1) \cos(\psi_1) \cos(\theta_1) + \\ & + \sin(\lambda_0) \cos(\lambda_1) \sin(\varphi_1) \cos(\psi_1) + \sin(\lambda_0) \cos(\lambda_1) \cos(\varphi_1) \sin(\psi_1) \cos(\theta_1) + \\ & + \sin(\lambda_0) \sin(\lambda_1) \cos(\varphi_1) \cos(\psi_1) - \sin(\lambda_0) \sin(\lambda_1) \sin(\varphi_1) \sin(\psi_1) \cos(\theta_1)] \times \\ & \times \{ (a_0 \cos(\lambda_0) - a_1 (\cos(\lambda_1) (\cos(\varphi_1) \cos(\psi_1) - \sin(\varphi_1) \sin(\psi_1) \cos(\theta_1)) - \\ & - \sin(\lambda_1) (\sin(\varphi_1) \cos(\psi_1) + \cos(\varphi_1) \sin(\psi_1) \cos(\theta_1))) - \rho_1 \cos(\alpha_1) \}^2 + \\ & + (a_0 \sin(\lambda_0) - a_1 (\cos(\lambda_1) (\cos(\varphi_1) \sin(\psi_1) + \sin(\varphi_1) \cos(\psi_1) \cos(\theta_1)) + \\ & + \sin(\lambda_1) (\cos(\varphi_1) \cos(\psi_1) \cos(\theta_1) - \sin(\varphi_1) \sin(\psi_1))) - \rho_1 \sin(\alpha_1) \}^2 + \\ & + (-a_1 (\cos(\lambda_1) \sin(\varphi_1) \sin(\theta_1) + \sin(\lambda_1) \cos(\varphi_1) \sin(\theta_1)) - \zeta_1)^2 \}^{-1/2} d\lambda_0 d\lambda_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Щоб отримати рівняння руху вільного тіла необхідно підставити отримані вирази кінетичної T та потенціальної U енергій в рівняння Лагранжа (1).

Для зручності чисельного інтегрування та обробки отриманих результатів запишемо

знайдені формули кінетичної та потенціальної енергій описаної системи у знерозміреному вигляді, переходячи до відносних величин. З врахуванням усіх заміन і перетворень рівняння динаміки системи матимуть наступний вигляд

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\rho}_1}{d\tau^2} = \bar{\rho}_1 \left(\frac{d\alpha_1}{d\tau} \right)^2 + n_2 \left(\frac{p}{1-y^2(q_1)} - \frac{y(q_1)(p^2 - 2py(q_1) + 1)}{(1-y^2(q_1))^2} \right) \frac{\partial y(q_1)}{\partial \bar{\rho}_1} \\ \frac{d^2 \alpha_1}{d\tau^2} = -\frac{2}{\bar{\rho}_1} \frac{d\bar{\rho}_1}{d\tau} \frac{d\alpha_1}{d\tau} + \frac{n_2}{\bar{\rho}_1^2} \left(\frac{p}{1-y^2(q_1)} - \frac{y(q_1)(p^2 - 2py(q_1) + 1)}{(1-y^2(q_1))^2} \right) \frac{\partial y(q_1)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{d^2 \bar{\zeta}_1}{d\tau^2} = n_2 \left(\frac{p}{1-y^2(q_1)} - \frac{y(q_1)(p^2 - 2py(q_1) + 1)}{(1-y^2(q_1))^2} \right) \frac{\partial y(q_1)}{\partial \bar{\zeta}_1} - n_3 \\ \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{d^2 \psi_1}{d\tau^2} = \frac{n_1}{\sin(\theta_1)} \frac{d\theta_1}{d\tau} - 2 \frac{d\psi_1}{d\tau} \frac{d\theta_1}{d\tau} \frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)} + \frac{n_4}{\sin^2(\theta_1)} \left(\frac{p}{1-y^2(q_1)} - \frac{y(q_1)(p^2 - 2py(q_1) + 1)}{(1-y^2(q_1))^2} \right) \frac{\partial y(q_1)}{\partial \psi_1} \\ \frac{d^2 \theta_1}{d\tau^2} = \left(\frac{d\psi_1}{d\tau} \right)^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) - n_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} \sin(\theta_1) + n_4 \left(\frac{p}{1-y^2(q_1)} - \frac{y(q_1)(p^2 - 2py(q_1) + 1)}{(1-y^2(q_1))^2} \right) \frac{\partial y(q_1)}{\partial \theta_1} \end{cases} \quad (11)$$

де $\Psi_0 \sqrt{L_1} (\Psi_1 \sqrt{L_0})^{-1}$ – параметр, що характеризується відношенням магнітних потокозчеплень та власних індуктивностей, $y(q_i) = L_{01}(q_i) (\sqrt{L_0} \sqrt{L_1})^{-1}$ – безрозмірна взаємна індуктивність, $n_1 = M_1 (I_1 \omega)^{-1}$ – відношення інтегралу руху власного обертання до головного моменту інерції, що лежить в площині його кільця, $n_2 = \Psi_1^2 (L_1 m_1 a_1^2 \omega^2)^{-1}$ – відношення характерної магнітної енергії до характерної кінетичної енергії, $n_3 = g(a_1 \omega^2)^{-1}$ – відношення прискорення вільного падіння до прискорення відцентрової сили, $n_4 = \Psi_1^2 (L_1 I_1 \omega^2)^{-1}$ – відношення характерної магнітної енергії до характерної кінетичної енергії за моментом інерції I_1 , $\bar{\rho}_1 = \rho_1 a_1^{-1}$ – знерозмірений радіус, $\bar{\zeta}_1 = \zeta_1 a_1^{-1}$ – знерозмірена апліката, $\tau = \omega t$ – знерозмірений час, ω – характерна частота.

У зв'язку з тим, що вирази частинних похідних безрозмірної взаємної індуктивності по узагальненим координатам мають громіздке аналітичне представлення, в явному вигляді вони не приводяться.

Таким чином, отримано консервативну нелінійну динамічну систему дванадцятого порядку, що характеризується сімома знерозміреними незалежними параметрами, які разом з початковими умовами однозначно визначають динаміку вільного тіла відносно нерухомого кільця.

Основна складність у дослідженні властивостей розв'язків системи (11) полягає у тому, що фазові координати в правих частинах входять під знаки інтегралів еліптичного типу (10), які не можуть бути «взяті» відомими аналітичними методами.

Проведення обчислювального експерименту.

Для чисельного дослідження отриманої системи диференціальних рівнянь (11) розроблено програмне забезпечення, що складається з двох блоків: блоку чисельного інтегрування диференціальних рівнянь та блоку візуалізації результатів. Блок чисельного інтегрування побудований на основі методу Рунге-Куты 4-го порядку. У ньому також реалізовано функцію чисельного обчислення подвійних інтегралів за допомогою кубатурних формул [1]. У блоці візуалізації представлення результатів інтегрування можливе у дво- та тривимірному просторі. Для тривимірного відображення використовується бібліотека функцій OpenGL, що дозволяє забезпечити анімаційну візуалізацію руху вільного тіла відносно нерухомого кільця.

Для демонстрації роботи створеного програмного комплексу виберемо такі параметри побудованої моделі

$$a = 1.5094, \quad p = 1.1852, \quad n_1 = 0.5, \quad n_2 = 4.2236,$$

$$n_3 = 1.8867, \quad n_4 = 0.0029, \quad n_5 = 0.0140$$

та початкові фазові координати і швидкості в задачі Коші при $\tau = 0$

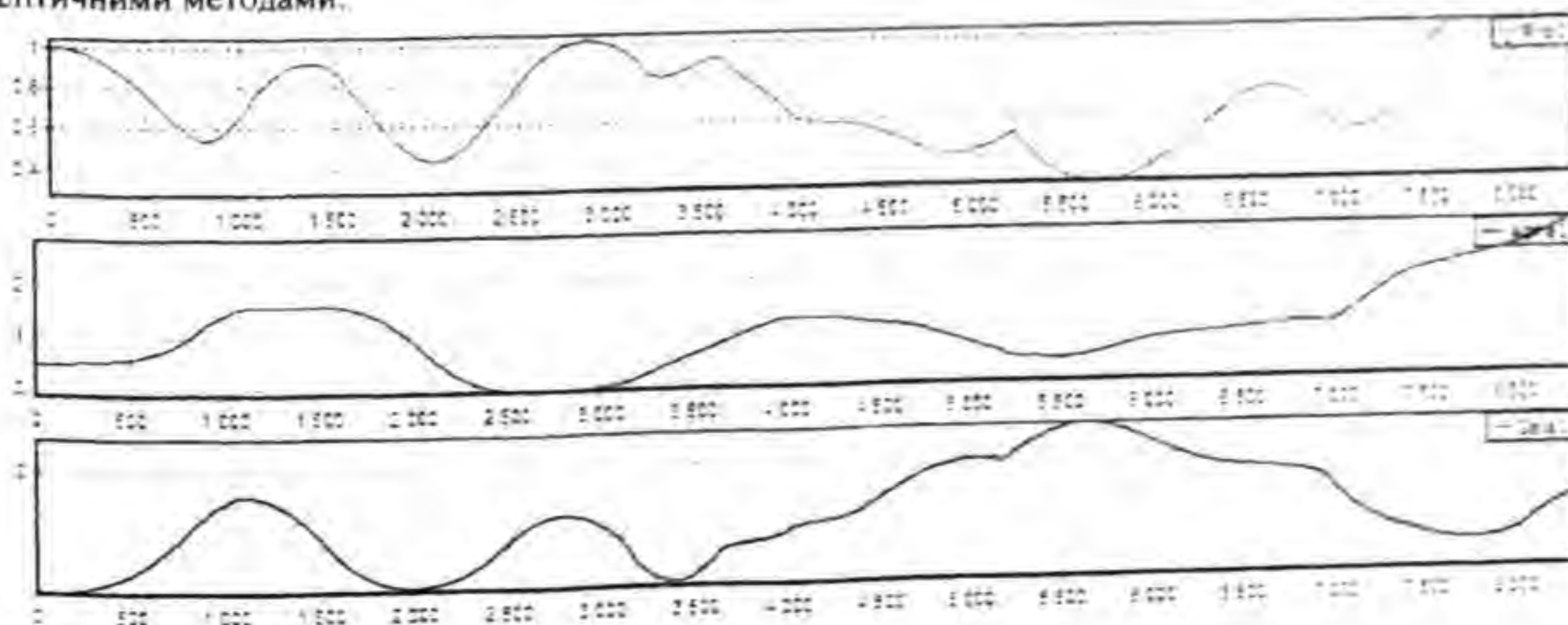
$$\bar{\rho}_1 = 1, \quad \frac{d\bar{\rho}_1}{d\tau} = 0, \quad \alpha_1 = 0.5, \quad \frac{d\alpha_1}{d\tau} = 0,$$

$$\bar{\zeta}_1 = -0.9, \quad \frac{d\bar{\zeta}_1}{d\tau} = 0,$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{d\tau} = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \frac{d\psi_1}{d\tau} = 0,$$

$$\theta_1 = 0.5, \quad \frac{d\theta_1}{d\tau} = 0.$$

Результати чисельного інтегрування представлені на рисунку 2.



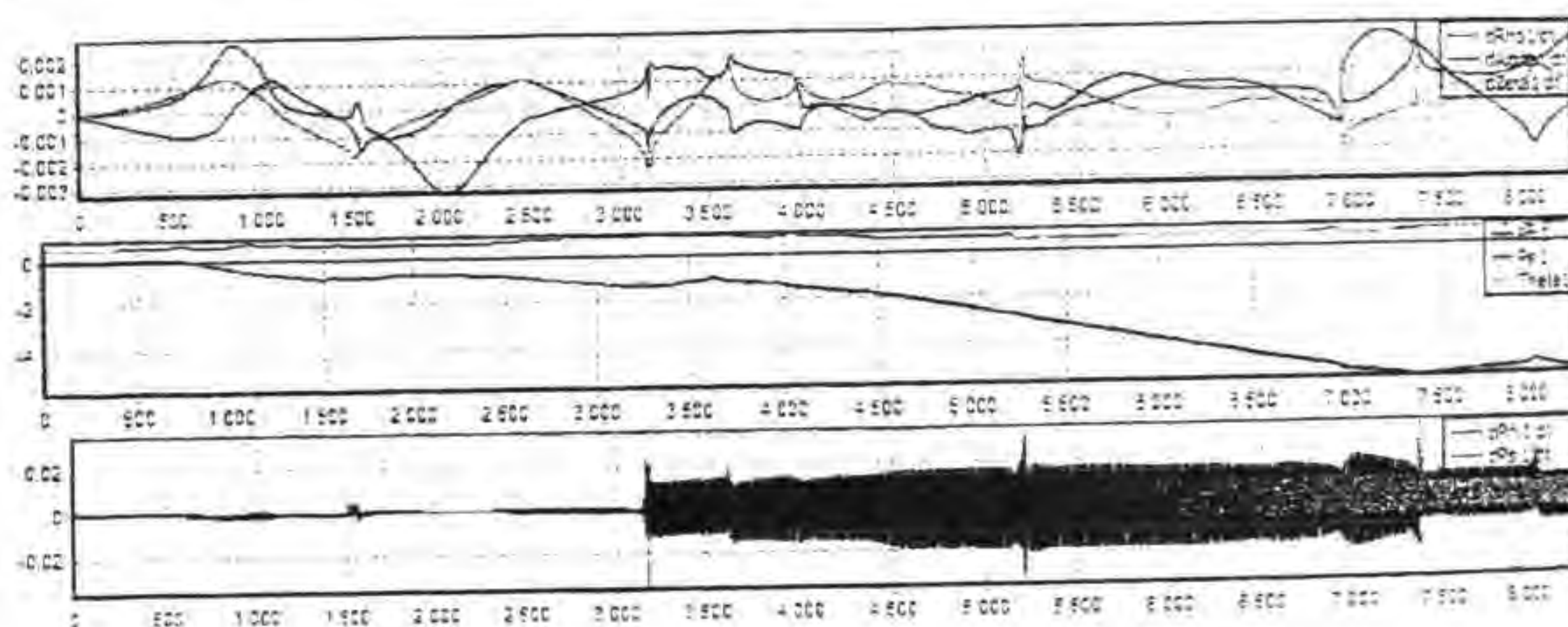


Рис 2. Двовимірне представлення частинних розв'язків.

Висновки

У роботі отримано знерозмірену нелінійну динамічну модель вільного тіла з магнітної взаємодією двох струмонесучих надпровідних кілець та наявністю сили ваги у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь 12-го порядку. Оскільки розв'язки такої системи рівнянь не можуть бути отримані відомими аналітичними методами, був розроблений відповідний програмний комплекс для її чисельного дослідження. Можливості створеного програмного забезпечення дозволяють відображати рух вільного тіла відносно нерухомого кільця у тривимірному просторі та спостерігати за поведінкою системи у реальному часі. Даний програмний комплекс може бути використаний для дослідження просторових моделей магнітної левітації для більш складних геометричних конфігурацій надпровідних струмонесучих елементів.

Список використаних джерел

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

2. Козоріз В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. – К.: Наук. думка, 1981. – 131 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 215 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматгиз, 1959. – 532 с.
5. Михалевич В.С., Козоріз В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г. «Магнитная потенциальная яма» – эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. – К.: Наук. думка, 1991. – 336 с.
6. Пановский В. Филипп М. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
7. Парс Д. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1976. – 634 с.
8. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М.; Л.: Энергия, 1964. – 528 с.

Надійшла до редколегії 06.06.08

УДК 519.9

Ямборак В.В., Касьянюк В.С., к.ф.-м.н.
E-mail: Vitaly.Yamborak@gmail.com

Інструментарій для моделювання біологічних нейронних мереж. Експериментування з моделлю нюхової цибулини

Розглядається інструментарій для моделювання біологічних нейронних мереж. Наведені сценарії його роботи та отримані результати, що підтверджуються експериментальними фізіологічними даними.

Ключові слова: синапс, нейрон, сенсоріум, модель, синаптичний рівень.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Ю.А.Белов

На сьогоднішній день тема штучних нейронних мереж досить добре досліджена. Розроблено і досліджено безліч різних типів таких мереж, які знайшли своє застосування в різних прикладних сферах. Також досить добре відомі їхні недоліки, які підтверджують, що для моделювання нейромережових процесів, що відбуваються в мозку людини, їхнє використання вже не є правомірним. Дійсно, штучні нейронні мережі являють собою сильне спрощення тих нейронних мереж, які присутні в живих організмах і які називаються біологічними нейронними мережами.

Основні відмінності біологічних мереж – їхня безперервна сутність (штучні мережі в основному дискретні), часткова недетермінованість, нечіткість і складність [1].

При комп'ютерному моделюванні природних нейронних мереж основними складнощами є великий обсяг обчислень, використання неперервних або неперервно-дискретних сигналів. Також, для задання параметрів біологічних нейронних мереж потрібні більші обсяги різномірних даних, що створює додаткові труднощі при моделюванні.

Інструментарій

Для проведення дослідів з нейронними моделями розроблена комп'ютерна програма, що моделює проходження сигналів по нейронній мережі. Сама мережа є входним параметром програми і являє собою XML документ. Також задаються входні сигнали (стимули) моделі в кожен момент часу, час є дискретним. Програма дозволяє простежити динаміку зміни рівня сигналу в різних заданих точках (тобто в

Vitaly V. Yamborak, Veda S. Kasyanyuk, PhD

Computer simulator for the biological neural network's modeling. Experimentation on the model of olfactory bulb

Considered a computer simulator for the biological neural network's modeling. Represented some scenarios of the simulator's work. And received a results that is confirmed by experimental and physiological information.

Key Words: synapse, neuron, sensorium, model, synaptic layer.

нейронах і синапсах) в будь-який момент часу. Також програма дозволяє переглянути сумарну активність як окремих нейронів, так і всієї мережі в кожен момент часу.

Вхідна модель фактично являє собою граф, що задає сукупність нейронів і синапсів. У нейронах і синапсах виділяються «кособливі» точки (вершини). У вершинах відбуваються певні події (наприклад генерація потенціалу дії, зміна потенціалу в пост- і пресинаптичній мембрані [2]), також в них є можливість виміру рівня сигналу (потенціалу) в будь-який момент часу (фактично у вершинах зберігається графік сигналу, який проходив через неї від 0 моменту до поточного). В моделі нейрони задаються сукупністю вершин і направлених ребер, які з'єднують ці вершини. Ребра визначають напрямок поширення сигналу. Вони мають набір властивостей – довжина, коефіцієнт передачі та ін. Синапси задаються подібним чином – набором вершин, які зазвичай являють собою пре- і постсинаптичні мембрани відповідних нейронів. На Рис. 1 наведений приклад моделювання:



Рис.1 Модель нейрона та синапсів

На схемі сірі вершини – пре- і постсинаптичні мембрани, чорні – аксонні горбки [2] (місця генерації потенціалів дії).

XML документ, яким задається вхідна модель складається із трьох елементів:

1. *ports* – задає список вершин. Кожна вершина задається координатами, типом, набором інших параметрів, що залежить від типу. Також, кожна вершина може мати список рівнів сигналу у вигляді пар (момент часу, рівень сигналу у вершині в момент часу), наприклад, для задання вхідної активності.

2. *synapses* – задає список синапсів. Синапс задається своїм типом, типом передачі сигналу і списком зв'язків. Кожен зв'язок задається парою номерів вершин, коефіцієнтом довжини і ваги, а також іншими параметрами, які залежать від типу передачі сигналу в синапсі.

3. *neurons* – задає список нейронів. Кожен нейрон задається типом і класом до якого він відноситься (наприклад, для нюхової цибулини це – мітральні, кісточкові, рецепторні та ін.). Як і синапс, нейрон має список зв'язків, які задаються аналогічно зв'язкам в синапсах.

У вершинах відбувається підсумовування сигналів (якщо в неї входять кілька ребер). Вершини бувають різних видів. В розробленій програмі реалізовано два типи вершин:

1. *прості* («один до одного» з уточненням): на вході задаються значення сигналу в конкретні моменти часу; по цих точках будується лінійний сплайн, значення якого використовуються на виході.

2. *генератори потенціалів дії*: аналогічно до попереднього на вході задаються значення сигналу в конкретних моментах часу, а на виході за певних умов – достатній рівень сигналу (вище граничного, критичного рівня деполяризації), закінчення рефракторного періоду після попередньої генерації – генерується потенціал дії із заданими параметрами (амплітуда, довжина, і ін.)

Звичайно, нейрони складаються з множини входів, сумарний сигнал з яких «збирається» в аксонному горбку, в якому генерується потенціал дії і який з'єднаний з множиною виходів. В простому нейроні зв'язки (ребра) мають такі характеристики як довжина і коефіцієнт зменшення сигналу. При надходженні сигналу на вхід нейрона сигнал передається на сусідні вершини з врахуванням вище наведених коефіцієнтів.

У найбільш простих моделях синапсів, які реалізовані в моделі, сигнали передаються подібним чином за винятком тих місць, де

реалізуються механізми пластичності [2]. Пластичність реалізується шляхом збільшення коефіцієнта передачі при досить високому сумарному рівні сигналу і зменшення цього коефіцієнта при відсутності (або при негативному значенні) сигналу протягом деякого заданого проміжку часу.

У моделі також використовуються більш складні синапси, в яких сигнал передається за допомогою інтегрального подання:

$$s_{out}(t + t_l) = v \int_{t - \Delta t}^t s_{in}(\tau) e^{-\lambda(t - \tau)} d\tau, \quad (1)$$

де $s_{in}(t), s_{out}(t)$ – рівень вхідного й вихідного сигналу в момент часу t , t_l – час проходження сигналу по ребру, задане в деяких умовних одиницях, v – коефіцієнт зменшення сигналу, Δt – інтервал часу в минулому, що впливає на вихідний сигнал, λ – параметр.

Опис моделі

Розроблена комп'ютерна модель повністю вкладається в концепцію сенсоріуму, що представлена в [3]. Прикладом для моделювання роботи нейронної мережі за допомогою розробленого інструментарію була обрана модель нюхової цибулини [4].

Нюхова цибулина складається з модулів, кожен з яких містить в собі 3 рівні (Рис.2):

Перший рівень – це рівень рецепторних нейронів, складається з рецепторів, на входи яких подаються стимули. Рецепторні нейрони розділені на групи за спектром чутливості до простих входів. Досліди проводилися на моделі з 26 елементарними входами.

Рецептори розрізняються за вибірковістю реагування на певні вхідні стимули. Нюхові рецепторні нейрони (НРН) посилають сигнали по своїх аксонах в синаптичні утворення – нюхові зони, які утворюють другий рівень моделі.

Третій рівень моделі утворюють основні нейрони – мітральні клітини (МК) та кісточкові клітини (КК). Мітральні клітини відповідають квазісимвольним нейронам першого синаптичного рівня сенсоріуму [3]. Кісточкові клітини посилають свої дендрити в кілька нюхових зон (НЗ) і відповідають символьним нейронам. Набір кісточкових клітин формуються в онтогенезі. В експериментальній моделі були представлені вже сформованими всі можливі КК для 4 типів входів.

Кісточкова клітина фактично реалізує логічну функцію «і» для входів. При достатньому входньому стимулі на кожному вході і сумарному сигналі кісточкова клітина генерує потенціал дії. Варто зауважити, що вона також може згенерувати потенціали дії при достатньому впливі з боку зернистих клітин з врахуванням гальмування через короткоаксонні клітини (КАК) і самі зернисті клітини (ЗК).

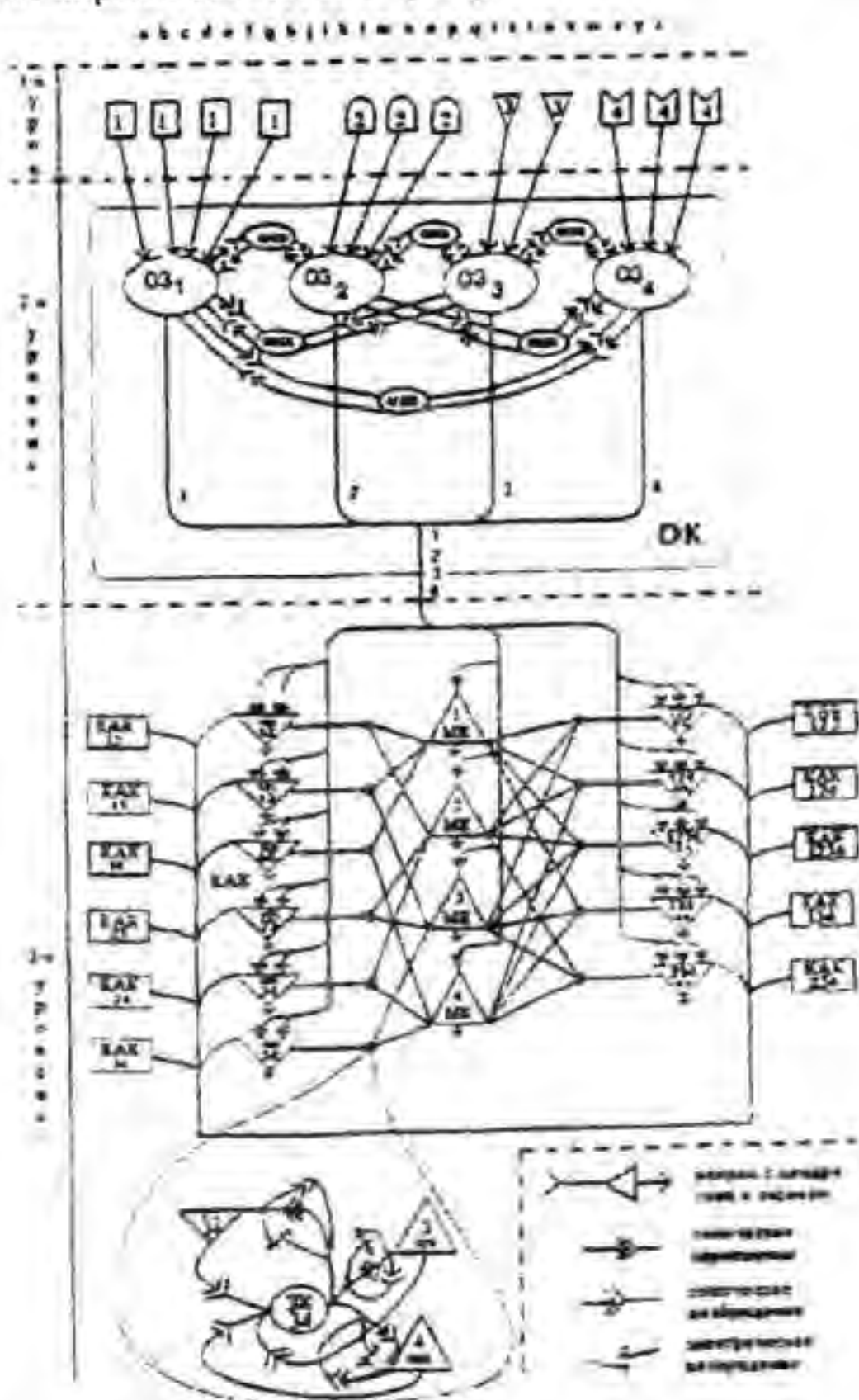


Рис.2 Схема нейронної мережі

Сценарій роботи

Вхідними параметрами для комп'ютерної моделі є концентрації кожного з 26 (в даному конкретному випадку) елементарних входів в моменти досліджуваного проміжку часу, задані з певним кроком. Якщо вхідний стимул достатній для збудження нюхового рецепторного нейрона, останній генерує потенціал дії. Сигнал з рецепторних нейронів попадає в нюхові зони. Через міжклубочкові клітини нюхові зони гальмують одна одну, тобто сигнал з однієї зони через міжклубочкові клітини спричиняє гальмівну дію на опонента, також нюхові зони пресинаптично гальмують самі себе.

Далі сигнал досягає основних нейронів: під його впливом збуджуються ті мітральні і кісточкові клітини, чутливість яких виявилася достатньою. Збуджені кісточкові і мітральні

клітини по своїх аксонах і дендритах збуджують відповідні зернисті клітини. Стимули від збуджених нейронів через дендрити зернистих клітин досягають мітральних клітин, проходячи через електричні синапси. Далі подається збудливий сигнал через хімічні синапси на входи зернистих клітин і зворотний гальмівний сигнал на основні нейрони. Потім зерниста клітина відсоми по дендритах посиляє збудливі і гальмівні сигнали через електричні та хімічні синапси відповідно на всі, пов'язані з нею основні нейрони. Останні в свою чергу при достатньому сумарному рівні вхідних сигналів знову посиляють імпульси на зернисті клітини і так далі. Сигнал циркулює по колу МК-ЗК-КК поки не нагромадиться такий рівень хімічного гальмування, що перевершить збудливі вхідні стимули нейронів.

Також кісточкові клітини через горизонтальні і вертикальні короткоаксонні клітини посиляють гальмівні сигнали на інші кісточкові клітини. За допомогою цього досягається контрастування вихідного сигналу кісточкових клітин, при якому найбільш збуджена клітина загальмовує менш збуджені.

В остаточному підсумку ми одержуємо збуджений на якийсь час цикл МК-ЗК-КК ритмічної активності, що слабшає в міру нагромадження хімічного гальмування. Така ситуація відповідає стану розпізнавання входу, якому відповідає дана кісточкова клітина.

Варто сказати кілька слів і про ріст нейронів. Як було сказано вище, в моделі представлені всі можливі кісточкові клітини. Насправді кісточкові клітини формуються в процесі навчання при достатньому впливі на сукупність входів, яким вони відповідають.

Задання моделі

Для моделювання нюхової цибулини використовувався розроблений інструментарій, описаний вище. Параметри моделі нюхової цибулини (нейрони, синапси, зв'язки всередині них) представлені мовою XML. Входи представлені 26 (по кількості елементарних входів) вершинами. В цих вершинах задається концентрація відповідного одоранту в кожен момент часу. Вершини-входи зв'язуються з рецепторними нейронами (точніше з кінцями їхніх дендритів) фіктивними зв'язками з ваговими і тимчасовими коефіцієнтами, які відповідали просторовому взаємному розміщенню джерел сигналів і чутливості нейрона до елементарного входу. При використанні такої конструкції вхідні параметри моделі задавати досить зручно.

Модель представлена в програмі як показано на Рис.3.

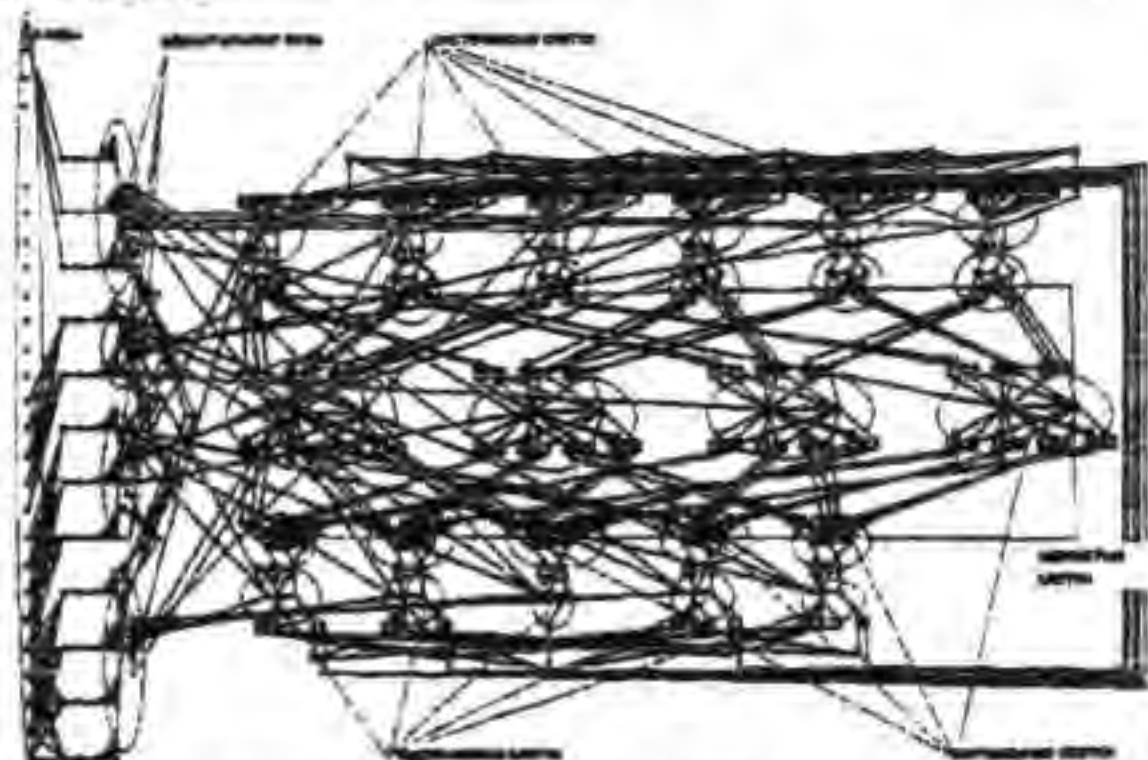


Рис.3 Зображення моделі нейронної мережі в програмі

Результати моделювання

З точки зору модельного підходу, описаного в [3], представлена модель є моделлю умовного нюхового середовища. В моделі реалізовані функції розпізнавання та короткочасного запам'ятовування входів. Стимулами для моделі є увесь спектр елементарних входів. Тут поки не реалізується функція навчання новим входам, передбачається, що модель вже «знайома» з усіма можливими комбінаціями вхідних стимулів, тобто в моделі вже сформовані всі можливі кісточкові клітини.

Для мітральних клітин знайомими є ті стимули, які збуджують відповідну групу рецепторних нейронів, оскільки мітральні клітини ставляться в пряме співвідношення (1:1) до нюхової зони і відповідно до групи нюхових рецепторних нейронів. Кісточкові клітини ставляться у відповідність певній комбінації із груп рецепторних нейронів (в даній моделі розглядаються 4 групи).

Розглянута модель нюхової цибулини безпосередньо є довгостроковою пам'яттю. Що стосується короткочасної пам'яті, то з однієї сторони вона визначається пластичністю синапсів, тобто при частому проходженні сигналу через синапс його вага збільшується і навпаки, при тривалій відсутності сигналу, вага синапсу зменшується. Це призводить до підвищення чутливості системи в процесі розпізнавання, а також полегшує розпізнавання при повторній подачі стимулу. Завдяки механізмам пластичності модель «настроюється» на краще розпізнавання певних входів. Короткочасну пам'ять також визначає циклічна циркуляція нейронної активності по МК-ЗК-КК циклам. Це призводить до того, що система деякий час «пам'ятає» про вхідний стимул навіть після припинення його подачі на входи.

Основні результати

Основним питанням моделювання нюхової цибулини було розпізнавання складних входів, тобто входів, які складаються з елементарних складових, до яких чутливі нюхові рецепторні нейрони різних груп. Як було сказано вище, одна із чотирьох груп рецепторів являє собою механорецептори, які реагують тільки на швидкість потоку повітря. Швидкість підбиралася оптимальним чином.

Виходами моделі є виходи мітральних та кісточкових клітин. Після кожного досліду при правильному розпізнаванні входу, кісточкова клітина, що відповідає вхідному набору стимулів продукує потенціали дії, які виникають все рідше і рідше та повністю перестають з'являтися в зв'язку з нагромадженням хімічного гальмування. Всі інші кісточкові клітини через деякий невеликий інтервал (в порівнянні з періодом активності домінуючої кісточкової клітини) загальмовуються і не генерують потенціал дії. Також, при правильному розпізнаванні входу, збуджується набір мітральних клітин, що відповідає групам вхідних стимулів.

Розглянемо результати деяких обчислювальних експериментів. На малюнках нижче вісь X позначає час, а Y – різницю потенціалів. Нульовий рівень – потенціал спокою клітини. 26 елементарних стимулів позначаються буквами латинського алфавіту від a до z. Вхід z відповідає повітрю.

На Рис. 4 наведений рівень чутливості груп рецепторних нейронів до елементарних входів.

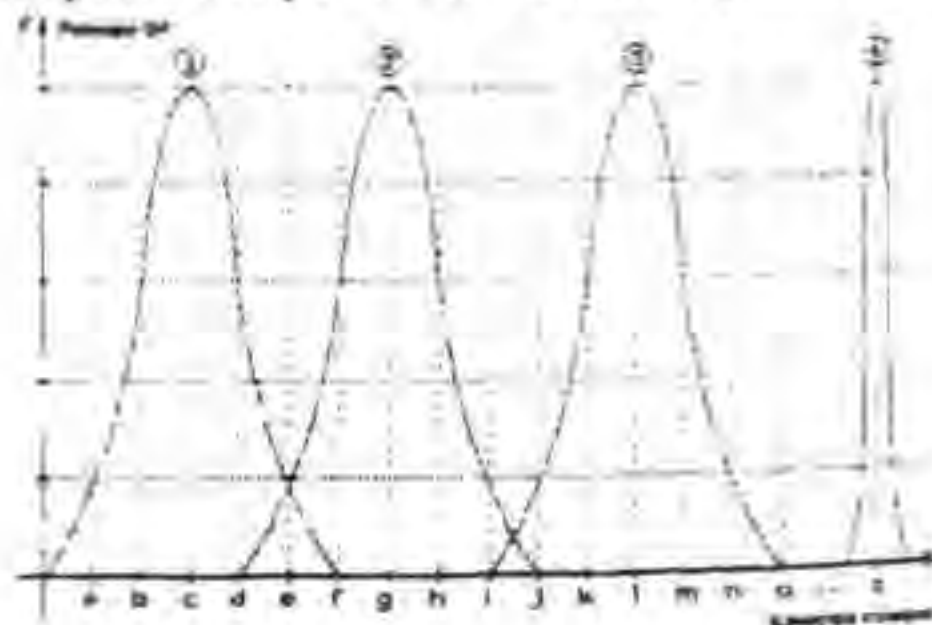


Рис.4 Рівень чутливості груп рецепторних нейронів до елементарних входів

Сигнали на входи груп 1-3 в дослідах 2-3 подавалися в умовні моменти часу 0-5 і 10-15, на вхід z сигнал подавався завжди.

Далі наведені власне результати:

1. На вхід подається тільки повітря: збуджується тільки одна мітральна клітина, всі інші основні нейрони не генерують потенціали дії.

а) На Рис.5 представлено вихід мітральної клітини, що відповідає механорецепторам:

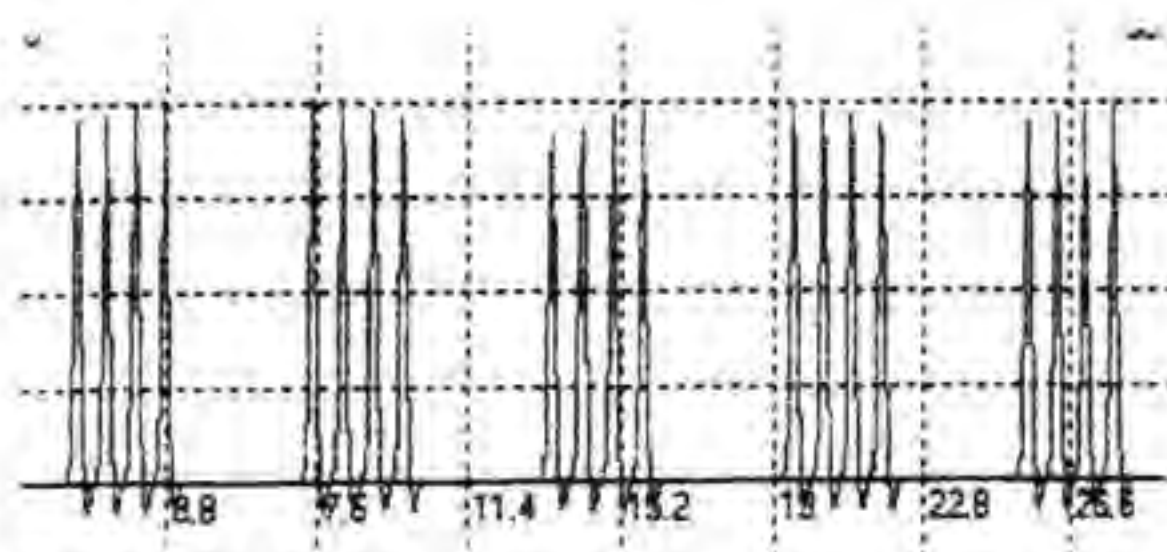


Рис.5 Вихід МК

2. На вхід подаються стимули a, b, c, d в деякій достатній для збудження концентрації:

а) На Рис.6 представлено вихід мітральної клітини (МК1), що відповідає першій групі елементарних входів:

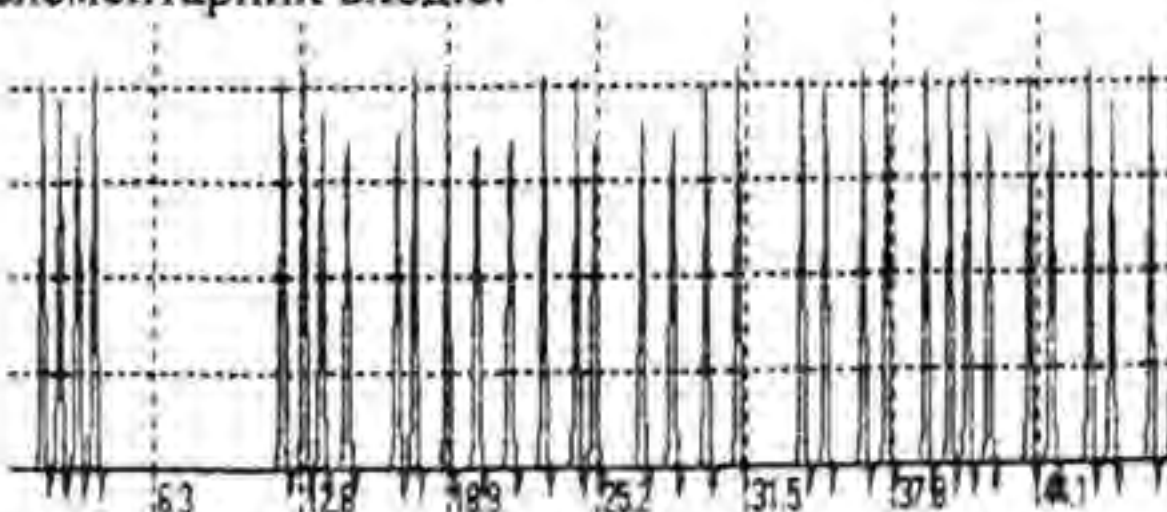


Рис.6 Вихід МК1

б) На Рис.7 представлено вихід кісточкової клітини яка відповідає вхідним стимулам (КК14):

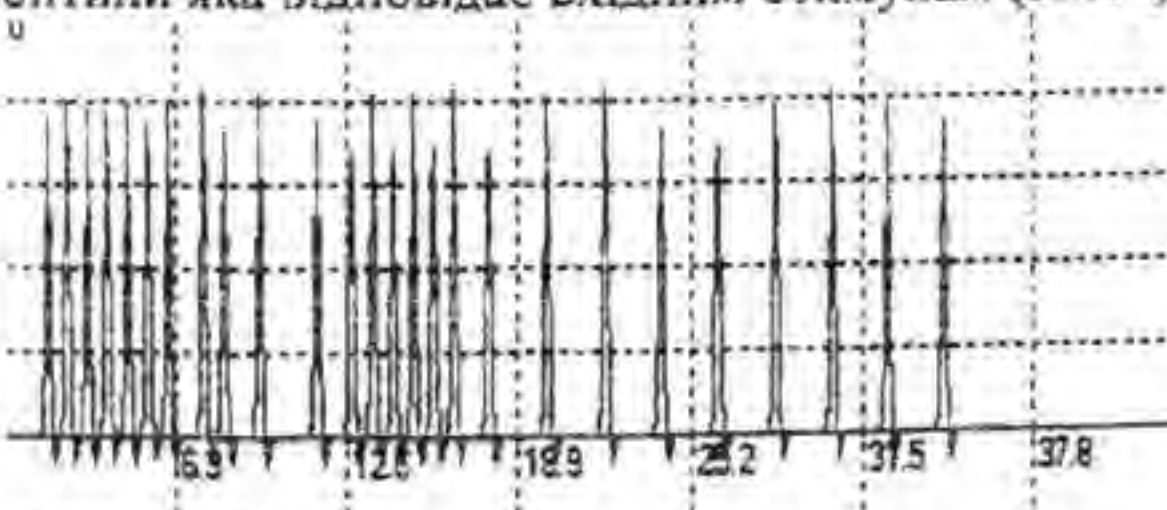


Рис.7 Вихід КК14

Інші кісточкові клітини не збуджувалися за винятком КК124, що давала слабку реакцію в процесі розпізнавання:

3. На входи подається увесь спектр стимулів. Збуджуються всі мітральні клітини, а також майже всі кісточкові, але згодом всі вони гальмуються КК1234:

а) На Рис.8 представлено вихід кісточкової клітини, що відповідає всім стимулам:

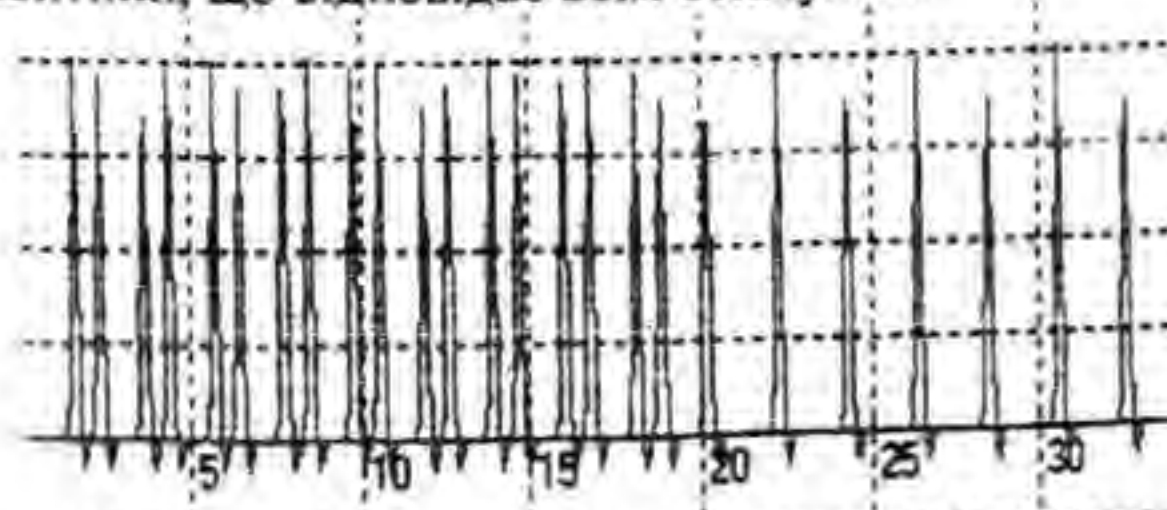


Рис.8 Вихід КК

б) На Рис.9 представлено вихід однієї з інших кісточкових клітин:

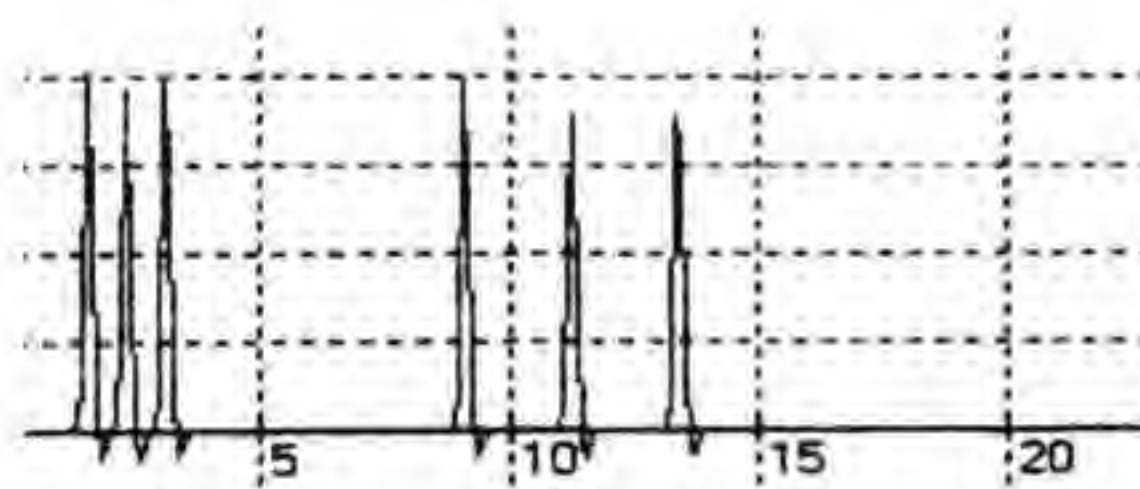


Рис.9 Вихід КК

Закономірності, що виникають при експериментуванні з комп'ютерною моделлю

При малих швидкостях повітря можуть розпізнаватися входи КК12, КК1, КК123, КК2, у яких не присутня компонента, зв'язана зі швидкістю потоку повітря. Така ситуація відбувається тільки при малих швидкостях потоку повітря (слабкий рівень сигналу на вході з порівняно з іншими типами входів):

а) На Рис.10 представлено вихід КК12 при входах $a-i$ і слабкому вході z :

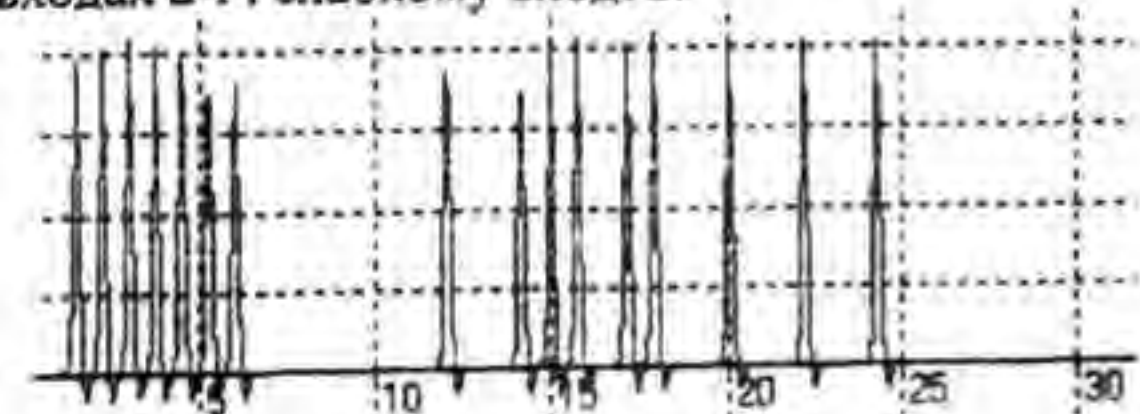


Рис.10 Вихід КК12

Проведені обчислювальні експерименти показують, що розпізнавання складного входу – динамічний процес. Частина нейронів відразу після збудження гальмуються іншими нейронами, що зменшує їхню активність, інші – спочатку збільшують активність, потім знижують її. Деякі мітральні клітини починають продукувати потенціали дії тільки через кілька циклів ритмічної активності інших нейронів. В процесі роботи моделі відбувається виділення певної групи мітральних і кісточкових клітин, які і відповідають поданому на вхід запаху.

Також слід зазначити, що існують більш високі рівні об'єднання і обробки нюхової інформації в мозку. В даній статті представлені обчислювальні експерименти, що проводилися на моделі одного модуля в нюховій цибуліні. В реальній нюховій цибуліні таких модулів тисячі і виходи їхніх основних нейронів поєднуються символічними та квазісимвольними нейронами вищих синаптичних рівнів (кісточкові клітини – символічні нейрони I рівня, мітральні клітини – квазісимвольні нейрони I рівня) [3].

Пластичність. Викликані хвилі

Пластичність є цікавим феноменом, який відомий з нейрофізіологічних експериментів і являє собою полегшення реакції нейронів на

повторюване адекватне подразнення. В моделі змодельована пластичність синапсів, пов'язаних з основними нейронами.

Протягом експерименту аналізується рівень сигналу на вході синапса, і якщо він по модулю перевищує граничний рівень (наприклад, при проходженні потенціалу дії, або іншого сигналу достатнього рівня), то синапс полегшується шляхом збільшення коефіцієнта провідності і навпаки, при відсутності сигналу, зменшується провідність синапсу. Для модифікації коефіцієнта провідності використовується наступна формула:

$$c_{\text{new}} = c_{\text{old}} + k \cdot (|v| - \Delta), \quad (2)$$

де k - заданий коефіцієнт (позитивний для збудливих синапсів і негативний для гальмівних), v - поточний рівень вхідного сигналу, Δ - поріг.

На підставі комп'ютерного експерименту можна сказати, що зазначена вище модифікація синапсів призводить до того, що при повторній активації рецепторів реакція відповідних мітральних і кісточкових клітин збільшується як по частоті потенціалу дії, так і по тривалості ритмічної активності. Таким чином система "запам'ятовує" реакцію на перший вплив і на наступні подразнення відповідає сильнішою активністю.

Ритмічна активність при деяких умовах може відбуватися набагато довше дії вхідних стимулів (високий коефіцієнт пластичності та досить потужний і тривалий вплив на входи) в порівнянні з базовою моделлю.

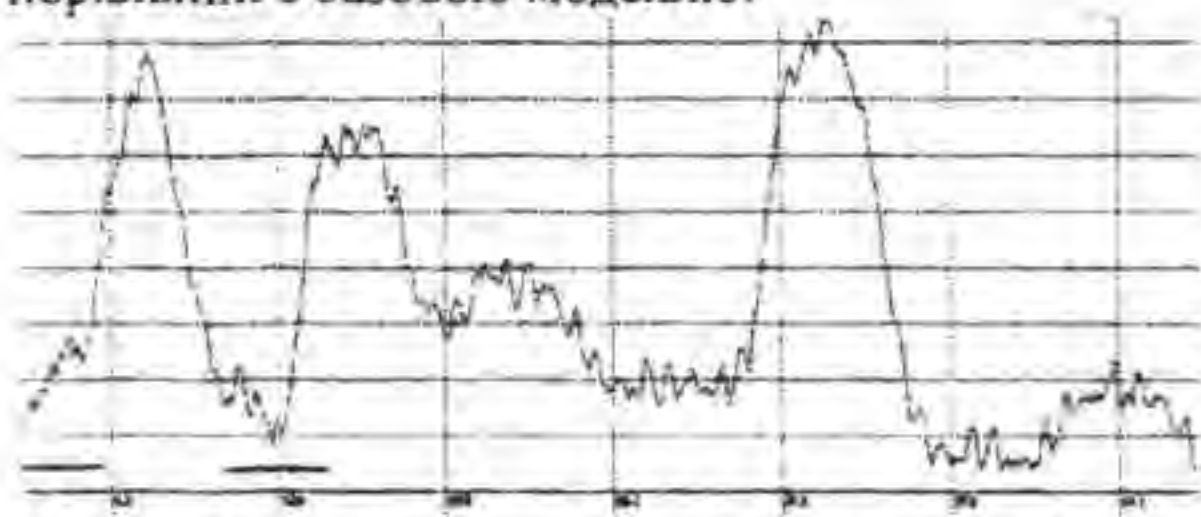


Рис.11 Сумарна активність нюхової цибулини протягом експерименту (чорними лініями відзначені періоди подачі стимулів на рецептори)

На Рис.11 видно, що при повторній подачі вхідних стимулів на рецептори, активність нейронів набагато довша.

Також вдалось одержати як результат моделювання феномен, виявлений експериментальним шляхом у нюховій цибулині - «викликані хвилі» (Рис.11-13). На графіку сумарної активності нюхової цибулини чітко проглядаються хвилі (періоди високої і низької активності, що чергуються). Ці хвилі виникають

навіть після припинення подачі вхідних стимулів (зазвичай кілька піків високої активності). Якщо подивитися на графіки вихідних сигналів кісточкових клітин (Рис.12, Рис.13), то можна помітити що потенціали дії генеруються в періоди високого рівня сумарного сигналу нюхової цибулини (Рис.11) - на піках «викликаних хвиль».

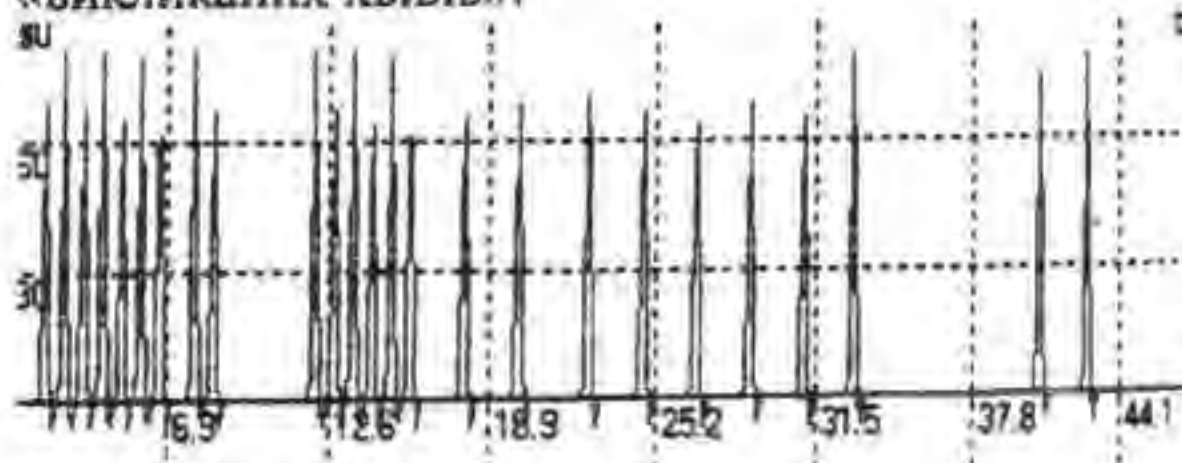


Рис.12 Активність КК14

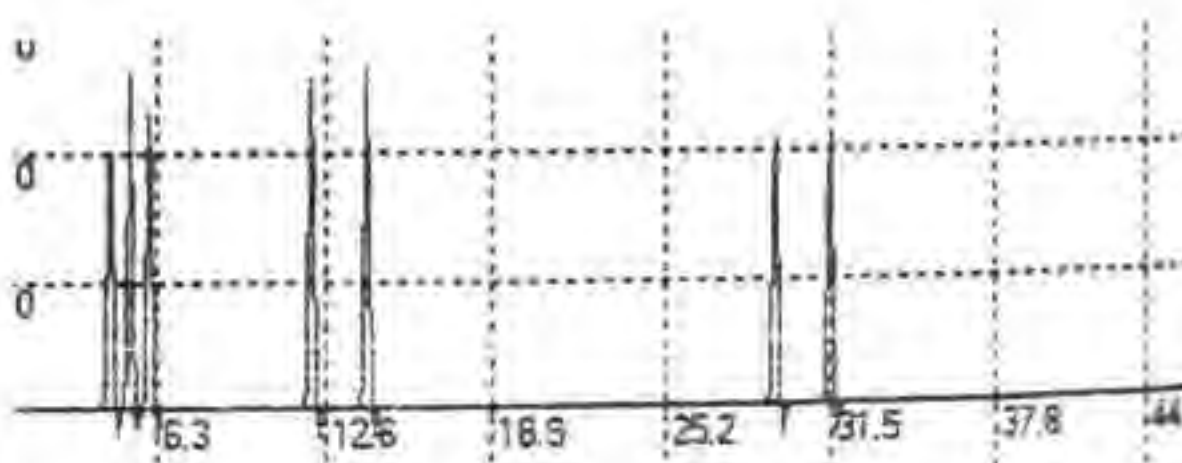


Рис.13 Активність КК124

Висновки

Розроблений комп'ютерний інструментарій, що представлений в даній статті, надає можливість імітації роботи нейронних мереж, в тому числі ієрархічних, а також візуалізації та побудови графіків активності нейронів та їхніх ансамблів.

Проведені комп'ютерні експерименти підтверджують правильність нейронних механізмів, що покладені в основу реалізованої моделі.

Список використаних джерел

1. Рамбиди Н.Г. и др. Биомолекулярные нейросетевые устройства. - М. ИПРЖР, 2002.
2. Физиология человека: в 3-х томах. Т.1. Пер. с англ./Под Ф50 ред. Р.Шмидта и Г.Тевса. - М. Мир, 1996.-323с.,ил.
3. Воронков Г.С. Информация и мозг: взгляд нейрофизиолога // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, - 2002, - № 1-2, - С. 79-88.
4. Воронков Г.С., Изотов В.А. Компьютерное моделирование механизмов обработки информации в обонятельной системе. I. Модель структурно-функциональной организации нейронных элементов обонятельной луковицы и рецепторного эпителия. // Биофизика. 2001, том 46. вып.4, С.696-703.

Надійшла до редакції 26.02.2008

УДК 531.37; 538.31

Яременко¹ Д.О., студ.,
Рубльов Б.В., д. ф.-м. н., проф.,
Шарманська В.Б., студ.

Алгоритм обчислення метрики дотичних

В статті подається алгоритм порівняння фігур у метриці дотичних.

Ключові слова: узагальнена дотична, метрика Хаусдорфа, метрика дотичних.

¹E-mail: yarema@ukr.net, b_v@mail.univ.kiev.ua, vsharmanska@unicyb.kiev.ua

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Ляшко С.І.

В наш час бурхливого розвинення набула обчислювальна геометрія – наука, що займається саме аналізом та обробкою геометричної інформації [1,2]. При розв'язанні задач розпізнавання образів актуальною є проблема порівняння двох геометричних фігур на площині. Для цього в залежності від області застосування розроблені різні метрики, міри близькості тощо, кожна з яких має свої переваги та недоліки. Класичним підходом тут є застосування метрики Хаусдорфа, але навіть для її реалізації [3] не знайдено оптимального алгоритму. Метрика Хаусдорфа перевіряє поточкову близькість фігур, а в цій статті ми наведемо алгоритм порівняння фігур у метриці дотичних [4], яка перевіряє близькість фігур разом з дотичними.

Визначення метрики дотичних

Розглянемо клас фігур на площині $S^{(1)}$ усіх плоских однозв'язних областей, що обмежені замкнутою спрямованою жордановою кривою. На межі довільної фігури $\Phi \in S^{(1)}$ визначимо орієнтацію ω , що відповідає руху за годинниковою стрілкою, тобто при русі вздовж межі цієї фігури вона залишається праворуч.

Нехай на межі деякої фігури $\Phi \in S^{(1)}$ можна вибрати скінчену кількість точок $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ ($M_n = M_0$, $M_{n+1} = M_1$ при цьому), які слідує у вказаному порядку в напрямі орієнтації ω , та задовольняють такі умови:

- 1) $\cup M_i M_{i+1} \neq [M_i M_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$;
- 2) Фігури F_i , що обмежені $\cup M_i M_{i+1}$ та відрізком $[M_i M_{i+1}]$ є опуклими, $i = \overline{0, n-1}$;
- 3) Фігури G_i , що обмежені $\cup M_i M_{i+2}$ та відрізком $[M_i M_{i+2}]$ не опуклі, $i = \overline{0, n-1}$.

Тоді таку фігуру Φ будемо називати фігурою з опукло-угнутою межею (ФОУМ). Сукупність усіх таких фігур на площині позначимо $S^{(0)}$.

D.O. Jaremenko, student,
B.V. Rublyov, D.Sci.(Phys.-Math.), professor,
V.B. Sharmanska, student

Algorithm of computation the tangent metric

In this paper the algorithm of figure comparison in the tangent metric is described.

Key words: general tangent, Hausdorff metric, tangent metric.

Nowadays computational geometry - science, that is engaged exactly in the analysis and geometrical data processing [1,2], is stormy developed.

At solving the problem of pattern recognition is actual the problem of comparison two geometrical figures on the plane.

Depend on field of application there were developed different metrics, affinity measures and so forth, each of them has its own advantages and disadvantages. The classical approach is using the Hausdorff metric here, but even for its realization [3] the optimum algorithm is not found. Hausdorff metric checks on the pointwise adjacency of figures, and in this article we describe the algorithm of figure comparison in the tangent metric [4], which checks on the adjacency of figures and of tangents.

Definition of tangent metric

Let's consider a class of figures on the plane $S^{(1)}$ - all simply connected flat regions limited by closed rectified Jordan curve.

On the boundary of random figure $\Phi \in S^{(1)}$ let's define orientation ω , that corresponds to clockwise motion, it means that by motion along the boundary of this figure it remains on the right.

On the boundary of some figure $\Phi \in S^{(1)}$ let choose finite number of points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ (therewith let put $M_n = M_0$, $M_{n+1} = M_1$), which follow in stated order an orientation ω , and satisfy such conditions:

- 1) $\cup M_i M_{i+1} \neq [M_i M_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$;
- 2) Figures F_i limited by $\cup M_i M_{i+1}$ and also by line segment $[M_i M_{i+1}]$ are convex $i = \overline{0, n-1}$;
- 3) Figures G_i limited by $\cup M_i M_{i+2}$ and by line segment $[M_i M_{i+2}]$ are not convex $i = \overline{0, n-1}$.

Then such figure Φ we designate as a figure with convexo-concave border (FCCB). The set of all such figures on the plane we designate as $S^{(0)}$, points

точки $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ назовемо канонічним розбиттям межі фігури класу $S^{(0)}$. Дугу $\cup M_i M_{i+1} \subset \Gamma(\Phi)$ назовемо опуклою, якщо існує відрізок CD з кінцями на $\cup M_i M_{i+1}$, що повністю розташований всередині фігури Φ ; інакше цю дугу, що з'єднує сусідні точки канонічного розбиття, назовемо угнутою. Назвемо узагальненою дотичною (УД) до фігури $\hat{O} \in S^{(0)}$ будь-яку опорну пряму до однієї з фігур F_i , $i = \overline{0, n-1}$, за виключенням точок канонічного розбиття. Для цих точок приймається дещо інша процедура знаходження УД до усієї фігури $\hat{O} \in S^{(0)}$ [4].

Нехай $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$; виберемо довільну точку $M_1 \in \hat{O}_1$, знайдемо для неї таку точку $M_2^{(1)} \in \hat{O}_2$, що задовольняє умову: $M_1 M_2^{(1)} = \min_{M_2 \in \hat{O}_2} M_1 M_2$.

Покладемо $r_1 = \max_{M_1 \in \hat{O}_1} M_1 M_2^{(1)}$, аналогічно визначається й $r_2 = \max_{M_2 \in \hat{O}_2} M_2 M_1^{(2)}$. Визначимо метрику за допомогою формули $\rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$. Легко зрозуміти, що $\rho^{(0)}$ є метрикою Хаусдорфа [3]. Тепер проведемо узагальнення цієї загальновідомої метрики.

Нехай $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$ – довільні фігури, $M_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)$, l_1 – деяка УД до Φ_1 в точці M_1 , $l_2^{(1)}, l_2^{(2)}, \dots, l_2^{(m)}$ – скінченна кількість УД до фігури $\hat{O}_2$, паралельних l_1 , нехай $l_2^{(j)}$ – найближча з них до l_1 . Покладемо послідовно – $r_1(M_1, l_1) = \rho(l_1, l_2^{(j)})$; $r_1(M_1) = \max_{l_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)} r_1(M_1, l_1)$, $r_1 = \max_{M_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)} r_1(M_1)$. Аналогічно, визначимо величину r_2 . Гладкою метрикою в класі $S^{(0)}$ називається відстань між фігурами $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$, яка задається рівністю:

$$\rho^{(1)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) + \rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2),$$

де $\rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2)$ – відстань Хаусдорфа, а $\rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$ – метрика дотичних.

Алгоритм обчислення метрики дотичних для багатокутників

Нехай нам задані два багатокутники $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$, будемо вважати, що вони подані у такому вигляді (без обмежень загальності розглянемо це подання для $\hat{O}_1 \in S^{(0)}$) –

$M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ we define as boundary canonical dissection of the figure from class $S^{(0)}$. Let's designate an arc $\cup M_i M_{i+1} \subset \Gamma(\Phi)$ as convex, if there is a line segment CD with the endpoints on $\cup M_i M_{i+1}$, which is fully located inside the figure Φ ; otherwise let's designate this arc, which connects neighbouring points of canonical dissection, as concave. As general tangent (GT) to the figure $\hat{O} \in S^{(0)}$ let's designate any supporting line to one of figures F_i , $i = \overline{0, n-1}$, except for points of canonical dissection. For these points there is a little bit other procedure of finding GT to the figure $\hat{O} \in S^{(0)}$ [4].

Let's be $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$; let choose arbitrary point $M_1 \in \hat{O}_1$, and find for it such point $M_2^{(1)} \in \hat{O}_2$, that satisfies condition: $M_1 M_2^{(1)} = \min_{M_2 \in \hat{O}_2} M_1 M_2$.

Let put $r_1 = \max_{M_1 \in \hat{O}_1} M_1 M_2^{(1)}$, similarly define $r_2 = \max_{M_2 \in \hat{O}_2} M_2 M_1^{(2)}$. Let define the metric through the formula $\rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$. It is easy to see, that $\rho^{(0)}$ is Hausdorff metric [3]. Now we make generalization of this well-known metric.

Let's be $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$ – arbitrary figures, $M_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)$, l_1 – some GT to Φ_1 at the point M_1 , $l_2^{(1)}, l_2^{(2)}, \dots, l_2^{(m)}$ – finite number of GT to the figure $\hat{O}_2$, which are parallel to l_1 , let $l_2^{(j)}$ be the nearest of them to l_1 . Let put in consecutive order – $r_1(M_1, l_1) = \rho(l_1, l_2^{(j)})$; $r_1(M_1) = \max_{l_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)} r_1(M_1, l_1)$, $r_1 = \max_{M_1 \in \Gamma(\hat{O}_1)} r_1(M_1)$. Similarly, put r_2 .

The smooth metric in the class $S^{(0)}$ is called the distance between figures $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$, which satisfies the equality:

$$\rho^{(1)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2) + \rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2),$$

here $\rho^{(0)}(\hat{O}_1, \hat{O}_2)$ – Hausdorff distance, and $\rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$ – the tangent metric.

Algorithm of computation the tangent metric for polygons

Let we have two polygons $\hat{O}_1, \hat{O}_2 \in S^{(0)}$, let's assume, they are represented in the following way (without general restrictions let's consider this representation for $\hat{O}_1 \in S^{(0)}$) –

$$\Gamma(\Phi_1) = A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{k_0}^{(0)} A_1^{(1)} \dots A_{k_1}^{(1)} \dots A_1^{(n-1)} \dots A_{k_{n-1}}^{(n-1)}.$$

Тут для зручності будемо вважати, що $A_{k_i}^{(i)} = A_0^{(i+1)}$, $F_0 = F_n$. Це означає, що кінець чергової ламаної на межі багатокутника є початком наступної (Рис.1).

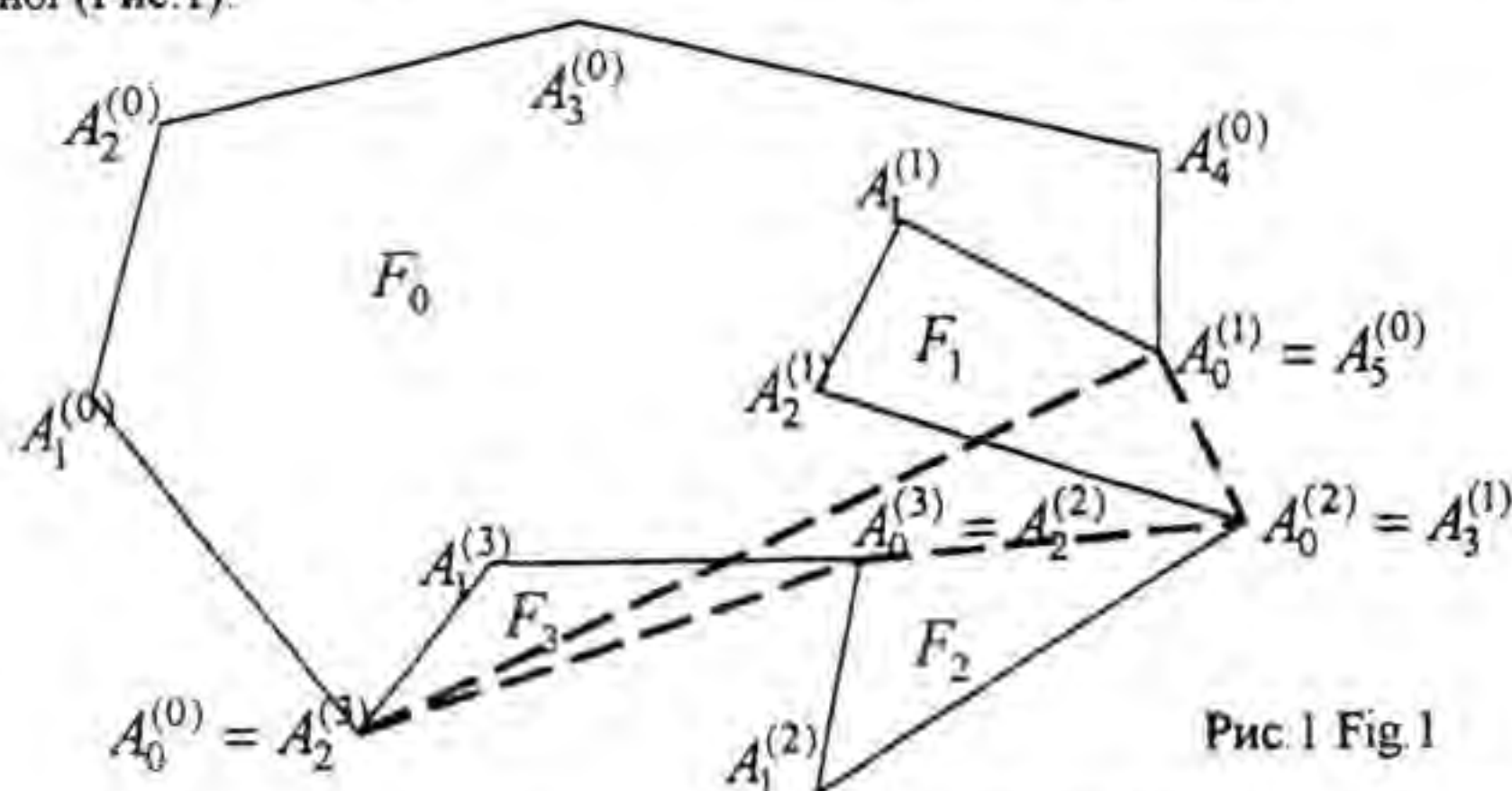


Рис.1 Fig.1

Зазначимо в сенсі попереднього розділу, що точки, які мають нижній індекс (0) є точками канонічного розбиття.

Сам засіб подання ФОУМ у потрібному вигляді ми залишимо читачам для самостійного опрацювання.

Так само, нехай

$$\Gamma(\Phi_2) = B_0^{(0)} B_1^{(0)} \dots B_{l_0}^{(0)} B_1^{(1)} \dots B_{l_1}^{(1)} \dots B_1^{(m-1)} \dots B_{l_{m-1}}^{(m-1)}.$$

У виразі $\rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$ обчислимо спочатку величину r_2 . За побудовою метрики дотичних у багатокутниках відіграють роль при обчисленні метрики лише вершини.

Розглянемо деяку з опуклих фігур F_j , які виникли при розбитті Φ_1 . Для кожної її вершини $A_s^{(j)}$ задамо проміжок $[\alpha_s^{(j)}, \beta_s^{(j)}]$ – кути, в яких межах проходять УД до фігури Φ_1 (Рис.2).

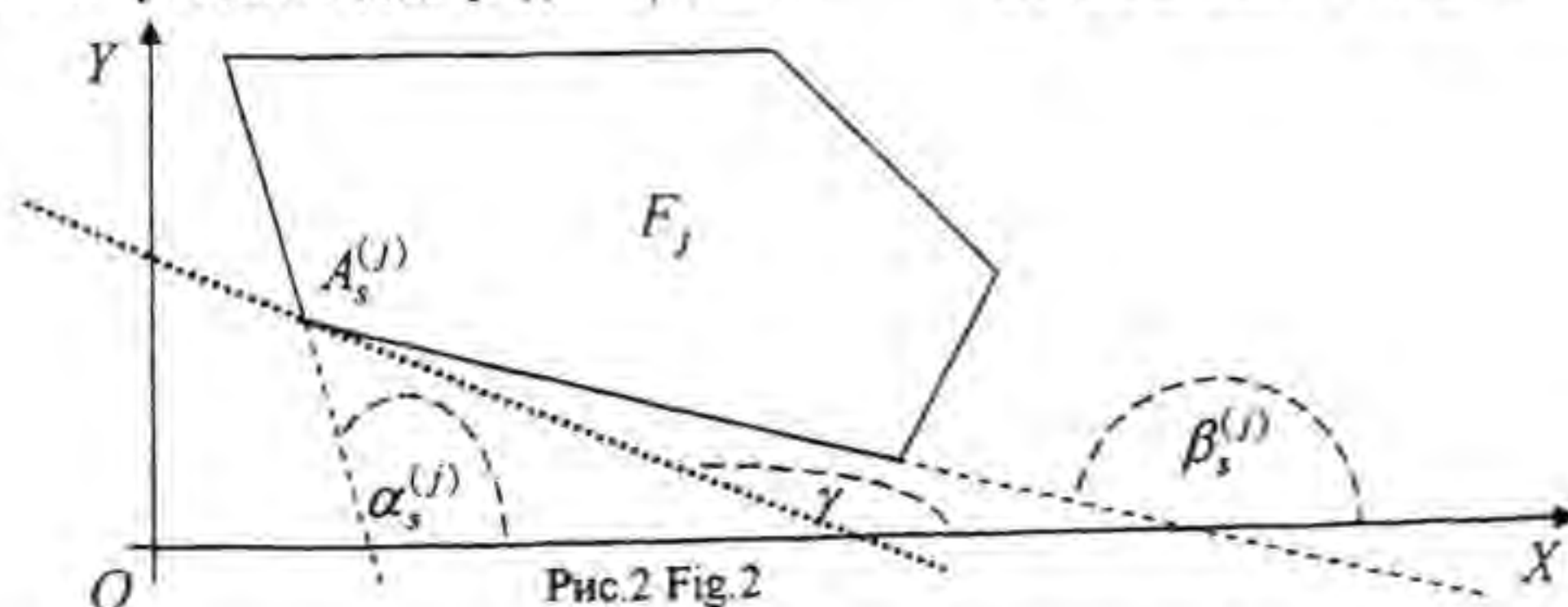


Рис.2 Fig.2

Для точок канонічного розбиття подібний кут визначається з урахуванням сусідніх відрізків. Таким чином, ми маємо скінченний масив, в якому зберігаються можливі значення кутів.

$$\Gamma(\Phi_1) = A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{k_0}^{(0)} A_1^{(1)} \dots A_{k_1}^{(1)} \dots A_1^{(n-1)} \dots A_{k_{n-1}}^{(n-1)}.$$

Let assume for convenience $A_{k_i}^{(i)} = A_0^{(i+1)}$, $F_0 = F_n$. It means, that the end of polygonal line on the polygon's boundary is the beginning of the next one (Fig. 1).

Notice, according to the previous chapter, the points, which have the bottom index (0), are the points of canonical dissection.

We reserve the method of necessary representation FCCB for readers as self-study training.

Similarly:

$$\Gamma(\Phi_2) = B_0^{(0)} B_1^{(0)} \dots B_{l_0}^{(0)} B_1^{(1)} \dots B_{l_1}^{(1)} \dots B_1^{(m-1)} \dots B_{l_{m-1}}^{(m-1)}.$$

In expression $\rho_1(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = \max\{r_1, r_2\}$ we compute at first r_2 . At computation the metric for polygons are important only vertexes, according to construction the tangent metric.

Let's consider one of convex figures F_j , which appear by partitioning Φ_1 . For each of its vertexes $A_s^{(j)}$ let assume the line segment $[\alpha_s^{(j)}, \beta_s^{(j)}]$ – angles GT pass to figure Φ_1 (Fig. 2)

For points of canonical dissection the similar corner is defined with regard to the neighbor line segments. Thus, we have finite array, which keeps possible values of angles.

Аналогічну процедуру ми робимо і для іншої фігури Φ_2 . На одному проміжку $[0, 2\pi]$ нанесемо усі точки, які виникли при розгляді УД до фігури Φ_1 , нехай їх N_1 , на іншому проміжку $[0, 2\pi]$ нанесемо усі точки, які виникли при розгляді УД до фігури Φ_2 , нехай їх N_2 . Далі шляхом замітання проміжку $[0, 2\pi]$ ми одержимо функцію відстані між відповідними паралельними УД, а тому за лінійний час (один прохід) знайдемо шукану величину.

Висновки

Зараз найкращі алгоритми побудови метрики Хаусдорфа використовують діаграми Вороного, але оптимальний засіб її обчислення ще не знайдений. Для нас це є важливим питанням, оскільки при обчисленні метрики дотичних першим доданком виступає саме метрика Хаусдорфа. Але процес обчислення гладкого доданку показує, що підхід, який використовує розбиття фігури на опуклі частини, є дуже продуктивним. Будь-яку метрику доволі просто можна знайти між опуклими фігурами, кількість опуклих фігур скінченна, тому це стає ідеєю, для пошуку ефективного алгоритму обчислення метрики Хаусдорфа. Це стане напрямом наших подальших досліджень. Окрім цього, ми плануємо застосувати наші алгоритми до дискретизованих зображень для знаходження точності наближення фігур на площині.

Список використаних джерел

1. Gallier, Jean H. Curves and surfaces in geometric modeling: theory and algorithms. – San Fr.: Morgan Kaufmann Publishers, 2000 – 464p.
2. Computational geometry: algorithms and application / Marc de Berg, Marc van Kreveld ... - Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer, 2000 – 367p.
3. Daniel P. Huttenlocher, Gregory A. Klanderman, William j. Rucklidge Comparing Image Using the Hausdorff Distance // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence – 1993. – Vol. 15, № 9. – с.850–854.
4. Рублев Б.В., Петунин Ю.И. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. // Кибернетика и системный анализ, ч.1 – 1999. – № 1. – с.125–135; ч.2 – 1999. – № 2. – с. 111–120.

The similar procedure we make also with other figure Φ_2 . On one interval $[0, 2\pi]$ we put all points, which appear by consideration GT to the figure Φ_1 , let N_1 be a number of them, on other interval $[0, 2\pi]$ we put all points which appear by consideration GT to a figure Φ_2 , let N_2 be a number of them. After that by "sweeping" the segment $[0, 2\pi]$ we receive function of the distance between corresponding parallel GT, and that's why linear (for one pass) we find required quantity.

Conclusions

Nowadays the best algorithms for construction the Hausdorff metric use Voronoi diagrams, but optimal algorithm for its computation is not found yet. This problem is impotent for us, because by computation the tangent metric the first summand is Hausdorff metric. But process of computation the smooth summand shows, that the approach, which uses figure partitioning into convex parts, is very productive. It is simple to find any metric between convex figures, the quantity of convex figures is finite, and that's why it is an idea for searching an effective algorithm for computation the Hausdorff metric. It is area of our next researches. Besides, we plan to apply our algorithms to discrete images to find the accuracy of approximation the figures on the plane.

References

1. Gallier, Jean H. Curves and surfaces in geometric modeling: theory and algorithms. – San Fr.: Morgan Kaufmann Publishers, 2000 – 464p.
2. Computational geometry: algorithms and application / Marc de Berg, Marc van Kreveld ... - Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer, 2000 – 367p.
3. Daniel P. Huttenlocher, Gregory A. Klanderman, William j. Rucklidge Comparing Image Using the Hausdorff Distance // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence – 1993. – Vol. 15, № 9. – с.850–854.
4. Рублев Б.В., Петунин Ю.И. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. // Кибернетика и системный анализ, ч.1 – 1999. – № 1. – с.125–135; ч.2 – 1999. – № 2. – с. 111–120.

Надійшла до редколегії 30.01.08

РАДІОФІЗИКА

УДК 541.183.23:(546.18:546.28)

Ананьїна О. Ю., к. ф.-м. н. доц., Бутримов П. О., асп., Ткаченко А. В., ас., Бабко С. В., ст. викл.

Адсорбція атомів фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$

У роботі представлені результати квантово-хімічних розрахунків процесів адсорбції атомів фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$. Оцінюються енергетичні характеристики адсорбції, обчислені геометричні та електронні характеристики структур, що утворюють атоми фосфору при адсорбції на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$.

Ключові слова: поверхня $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$, адсорбція, фосфор, моделювання.

E-mail: ananyina@zsu.zp.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

У теперішній час багато наукових робіт присвячено дослідженню властивостей поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$, природі фізико-хімічних процесів, що протікають на ній.

Структури SiO_2/Si та створювані на її основі структури метал – діелектрик – напівпровідник (МДП) є основою елементної бази сучасної твердотільної електроніки. У зв'язку з тенденцією до зменшення мінімального топологічного розміру базових конструкційних елементів та чипів різних виробів напівпровідникової електроніки велика увага приділяється саме поверхні SiO_2/Si товщиною в декілька атомних шарів. Ця поверхня відіграє важливу роль при виготовленні та роботі багатьох напівпровідникових приладів (насамперед, польових транзисторів), а фосфор є одним з основних легуючих домішок, що використовуються у кремнієвій технології. Адсорбція атомів фосфору на поверхню $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ становить інтерес, як перша стадія дифузії в приповерхневі шари і як спосіб зміни властивостей цієї поверхні.

На сьогоднішній день невідомі конкретні атомні конфігурації, в яких можуть знаходитися атоми фосфору, невідомі їхні енергетичні характеристики. Стан проблеми ускладнюється тим, що оксид кремнію, який використовується в кремнієвій технології, не є кристалом, тому поверхня SiO_2/Si характеризується великою

О. Ananina, associate professor, P. Butrimov, post-graduate, A. Tkachenko, assistant, S. Babko, assistant.

Phosphorus atoms adsorption at the $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ surface

Results of quantum-chemical calculations of phosphorus atoms adsorption at the $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ surface are presented in the work. The power characteristics of adsorption process were estimated. Geometrical and electronic characteristics of structures which phosphorus atoms form during adsorption at the $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ surface were calculated.

Key words: $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ surface, adsorption, phosphorus, modeling.

різноманітністю своєї морфології. Орієнтація кремнію (100) вибрана тому, що вона найбільш часто використовується в технології напівпровідникових приладів.

В роботі досліджувалася поверхня розділу напівпровідник-оксид $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ та її взаємодія з атомами фосфору на початковому етапі росту оксиду.

Метою роботи є дослідження геометричних характеристик та електронних станів конфігурацій, що утворює фосфор при адсорбції на поверхні розділу $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$.

Об'єкт дослідження - електронна структура, характер зв'язків атомів, вид гібридизації атомних орбіталей та геометрія поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ з адсорбованими атомами фосфору.

Метод дослідження та кластерні моделі

Моделювання процесів взаємодії виконувалось за допомогою методу MNDO – модифіковане нехтування диференціальним перекриттям, та пакету прикладних програм MOPAC. Цей метод дозволяє уникнути систематичних помилок більш ранніх методів (MINDO, CNDO, INDO). Він орієнтований на коректне відтворення електронних, енергетичних характеристик і геометричних параметрів молекул (кластерів) [1, 2]. Моделювання адсорбції у програмній середі MOPAC

виконувалось методом розрахунку координати реакції [3].

У роботах [4-8] запропоновано декілька моделей, що описують будову межі $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$. З різноманітних структурних модифікацій міжфазної межі $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ нами були виділені дві структурні моделі, які авторами [4] названі *stripe phase* („смугастий” порядок) і *check phase* („шаховий” порядок). Саме такі впорядковані структури, на думку авторів, утворюються в тонких плівках оксиду (товщина плівки 7-20 Å).

Для опису електронної структури, характеру зв'язку атомів, виду гібридизації атомних орбіталей та геометрії поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ були побудовані кластери, $\text{Si}_{49}\text{O}_{15}$ та $\text{Si}_{40}\text{O}_{13}$, що відтворюють можливі структури оксидної плівки – „шаховий” та „смугастий” порядок розташування місткових атомів кисню на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ [4-8]. Всі розрахунки велися на кластерах $\text{Si}_{40}\text{O}_{13}$ та $\text{Si}_{49}\text{O}_{15}$ (рис. 1).

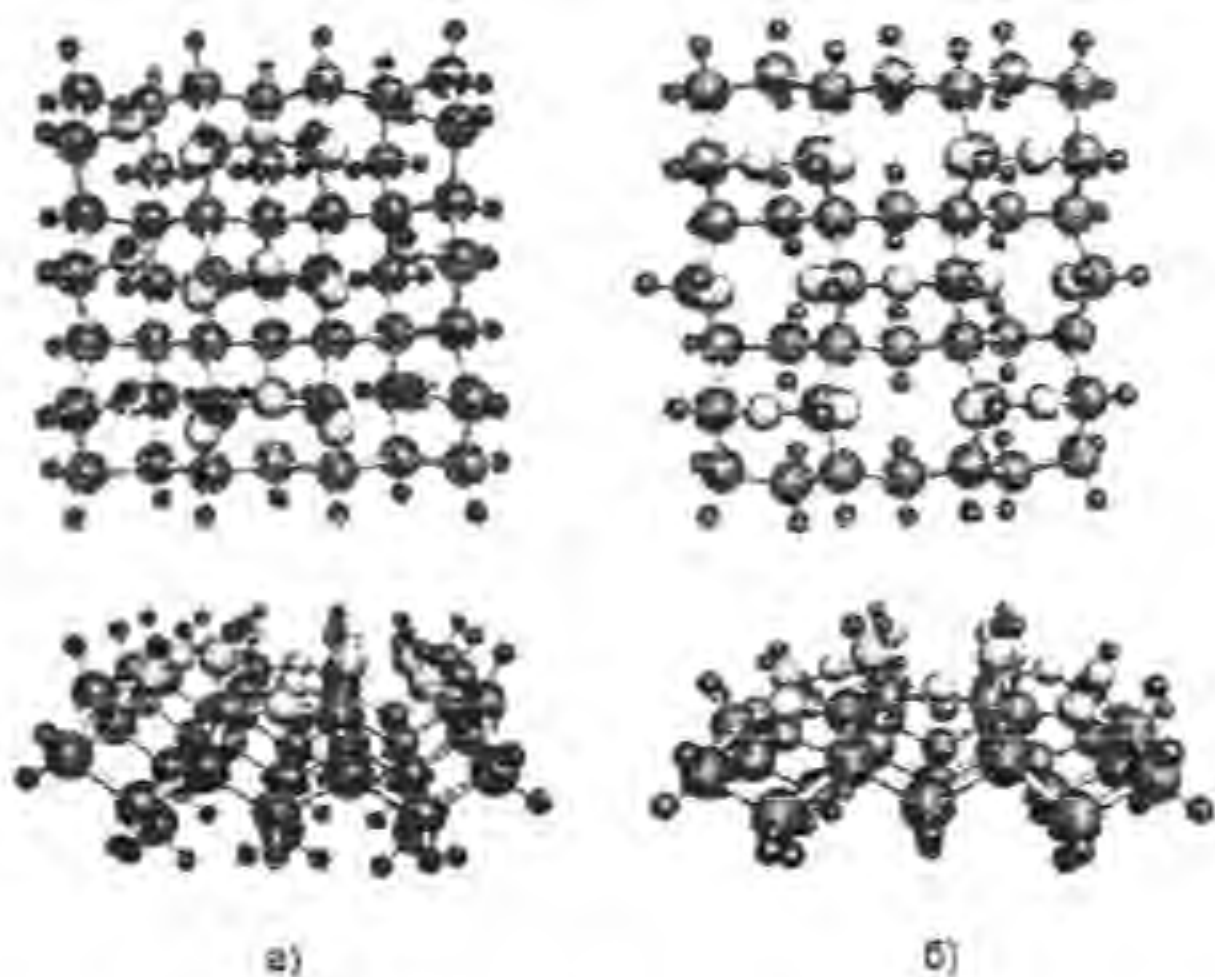


Рис. 1 Кластери, що моделюють поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$: а) кластер $\text{Si}_{49}\text{O}_{15}$; б) кластер $\text{Si}_{40}\text{O}_{13}$. Чорними кружками позначені атоми водню, темними кружками – атоми кремнію, світлими – атоми кисню

Результати досліджень та їх обговорення

Для того, щоб виявити можливі адсорбційні центри поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ на початковому етапі росту оксидної плівки, розглянемо структуру $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$ зв'язків (рис. 2).

Атом O1 утворює два зв'язки з атомами Si4 і Si5 , у яких беруть участь дві його низькоенергетичні sp^2 -орбіталі (33% s-складова), що утворюють σ -зв'язки внаслідок перекривання з sp^3 -орбіталями атомів Si4 і Si5 . Крім цього практично повністю на атомі кисню O1 локалізовані дві високоенергетичні p -орбіталі,

зайняті не беручими участь у валентних зв'язках (неподіленими) парами електронів кисню, які в результаті часткового перекривання з $3d$ -орбіталями кремнію забезпечують додаткове зв'язування атомів O1 і Si4 , Si5 – донорно-акцепторна $d\pi-p\pi$ – взаємодія, що підвищує порядок зв'язку й зменшує міжатомну відстань $\text{Si}-\text{O}$ (1,63 Å). $d\pi-p\pi$ – зв'язки легко розриваються, тому атом кисню O1 (як і всі атоми кисню цього шару) є активним адсорбційним центром. Атоми кисню першого шару (O2) так само, як і атоми кисню другого шару (O1), є центрами адсорбції. На атомі O2 локалізовані одна низькоенергетична орбіталь, близька до sp -типу, і одна високоенергетична p -орбіталь, орієнтована перпендикулярно площині, утвореній атомами O1 , Si4 і Si5 .

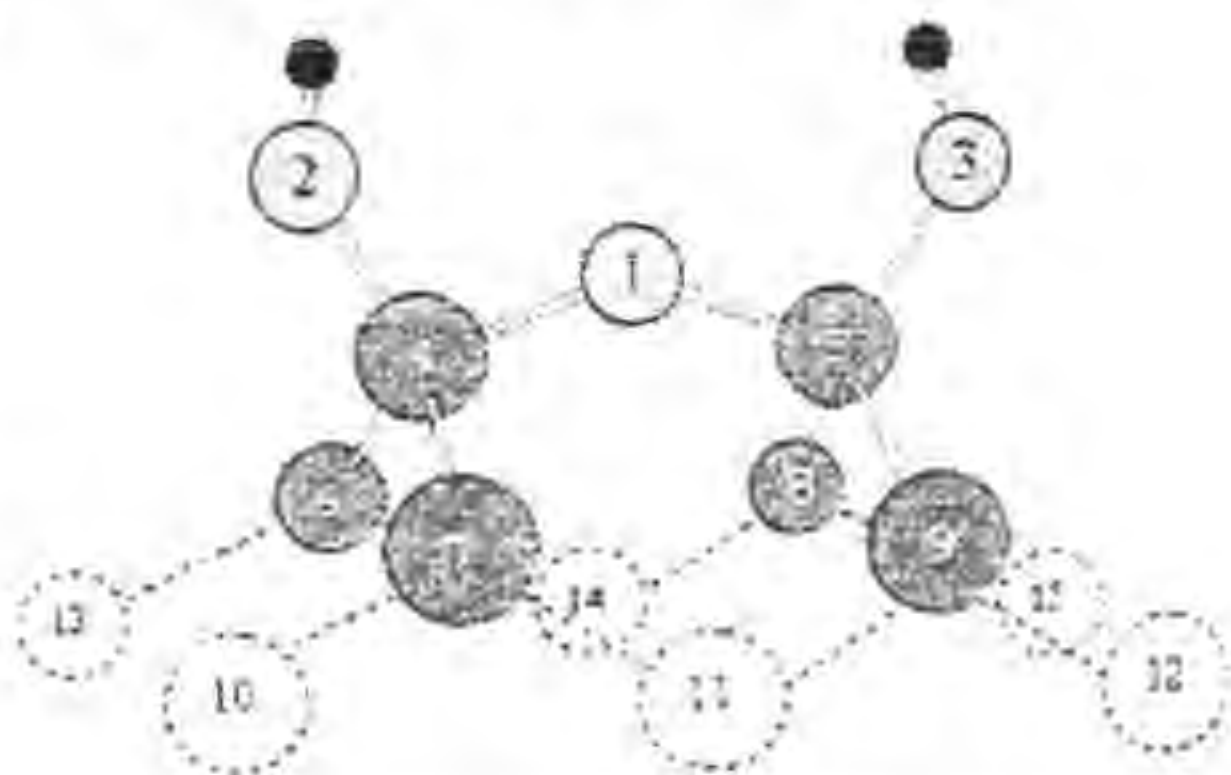


Рис. 2 Фрагмент кластера $\text{Si}_{49}\text{O}_{15}$ з моношаром оксиду. Чорними кружками позначені атоми водню, темними кружками – атоми кремнію, світлими – атоми кисню

Кут $\text{Si4}-\text{O1}-\text{Si5}$ становить 136° , а кут $\text{O2}-\text{Si4}-\text{O1}$ дорівнює 103° , що близько до величини валентних кутів чистого кремнію (109°).

Через велику різницю в електровід'ємностях атомів кремнію й кисню (1,9 і 83,4 за Полінгом) зв'язки $\text{Si}-\text{O}$ є полярними й мають частково іонний характер. Накладення в SiO_2 електростатичної взаємодії на ковалентну збільшує міцність зв'язку $\text{Si}-\text{O}$.

Характер зв'язків атомів кремнію другого шару з атомами третього шару на границі $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ відрізняється від характеру зв'язків атомів у підкладці. Іонність зв'язків $\text{Si4}-\text{O1}-\text{Si5}$ викликає перерозподіл електронної щільності в σ -зв'язках $\text{Si5}-\text{Si8}$ і $\text{Si5}-\text{Si9}$ і приводить до зменшення міжатомної відстані (2,099 і 2,1 Å відповідно). Гібридизація двох низькоенергетичних орбіталей Si5 , відповідальних за зв'язки з атомами третього

шару Si8 і Si9, близька до sp-типу з великим відсотком S-складової (67%). Вид орбіталей атомів Si8 і Si9, які беруть участь у зв'язку з Si5, є проміжним між s- і sp-типом (S-складова 80%).

У цілому весь розглянутий кластер є іонним, про що свідчать заряди на атомах кремнію кожного шару. Це обумовлено присутністю атомів кисню, кожний з яких «перетягає» електронну хмару від найближчих атомів кремнію. У такий спосіб моношар атомів кисню

поляризує весь кластер. Однак, порівнюючи заряди на атомах кремнію другого й четвертого шарів ($\approx 2e$ й $1,7e$ відповідно), можна припустити, що вплив атомів кисню на зарядову щільність і гібридизацію орбіталей атомів кремнію зменшується в міру просування від оксиду в глиб підкладки.

Геометричні характеристики та електронний стан поверхні розділу SiO₂/Si (100) наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Геометричні та електронні характеристики поверхні SiO₂/Si(100).

N	Q _N , e	P _{NN}	M	P _{MM}	Q _M , e	P _{NM}	R _{NM} , Å	ЕЛО, eВ	s-склад. ЛО _N , %	s-склад. ЛО _M , %
Si4	+2.099	2.753	Si7	2.175	-2.536	0.502	2.109	-20.085	67	84
			Si6	2.183	-2.529	0.522	2.088	-19.82	67	80
			O1	1.655	-0.951	0.776	1.627	-25.016	25.5	33.8
			O2	1.778	-0.686	0.796	1.64	-25.142	27	33.5
Si5	+2.096	2.756	Si8	2.183	-2.529	0.52	2.099	-19.839	67	80
			Si9	2.164	-2.543	0.503	2.105	-20.108	66.7	84
			O1	1.655	-0.951	0.776	1.63	-24.96	33.6	25
			O3	1.78	-0.685	0.798	1.638	-25.14	27	33
Si8	-2.529	2.183	Si14	2.8	1.698	0.48	2.123	-19.84	80	39
			Si15	2.81	1.876	0.48	2.079	-19.84	80	48
			Si5	2.756	2.096	0.52	2.099	-19.84	80	67.3
Si9	-2.543	2.164	Si5	2.756	2.096	0.503	2.105	-20.108	84	66.8
			Si11	2.808	1.71	0.49	2.081	-12.12	3.4	38.7
			Si12	2.773	1.91	0.475	2.092	-12.23	3.9	46.6
Si7	-2.536	2.175	Si4	2.753	2.099	0.502	2.109	-20.085	84	66.6
			Si10	2.77	1.91	0.479	2.084	-12.245	4	46.8
			Si11	2.808	1.71	0.478	2.104	-12.006	3.2	28
Si6	-2.529	2.183	Si4	2.753	2.099	0.522	2.088	-19.81	67.4	80
			Si13	2.8	1.88	0.472	2.097	-12.24	4.6	45.8
			Si14	2.8	1.698	0.481	2.117	-12.14	4.4	37.5
O1	-0.951	1.655	Si5	2.756	2.096	0.776	1.63	-24.96	33.6	25.6
			Si4	2.753	2.099	0.776	1.627	-25.016	33.8	25.5
			O1					-20.64	38.1	
			O1					-13.56	0	
O2	-0.686	1.778	Si4	2.753	2.099	0.796	1.64	-25.142	27	33.5
			H	0.952	0.22	0.926	0.929	-24.13	16	100
			O2					-22.81	53	
			O2					-12.87	0	

Позначення в таблиці: N, M – номер атома в кластері; Q_N, Q_M – заряд на атомі; P_{NN}, P_{MM} – валентність; R_{NM} – міжатомна відстань; P_{NM} – порядок зв'язку, ЕЛО – енергія локалізованої орбіталі.

На рисунку 3 показаний один із станів поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$, при якому адсорбований атом фосфору зв'язується з містковим атомом кисню O1. Положення атома P, показане на рисунку 3 а), практично не впливає на порядок зв'язків $\text{Si4} - \text{O1} - \text{Si5}$. Присутність електровід'ємного атому фосфора (62,2 за Полінгом) зменшує заряд на атомі кисню O1 до $-0,6$ e, що призводить до збільшення міжатомних відстаней $\text{Si4} - \text{O1}$ та $\text{O1} - \text{Si5}$ на величину порядку $0,1 \text{ \AA}$. Орбіталі атома O1 регібридизуються. Атоми P та O1 створюють низькоенергетичний σ -зв'язок в результаті перекриття p-орбіталі фосфора та гібридної (S-складова 20%) орбіталі кисню та високоенергетичний π -зв'язок, виникаючий внаслідок перекривання p-орбіталей обох атомів. Орбіталі O1, які беруть участь у зв'язках з атомами кремнію Si4 та Si5, перетворюються практично до sp-типу. Помітних змін у характері зв'язків та гібридизації орбіталей атомів кремнію другого, третього та четвертого шарів, як і атомів кисню першого шару, не помічається.

Повністю на атомі фосфора локалізовані s-орбіталь та високоенергетична p_y-орбіталь, що свідчить про високу хімічну активність адсорбованого атома.

Такий стан для атома P є квазірівноважним, тобто проміжним станом при адсорбції фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$.

Адсорбовані атоми фосфору можуть утворювати зв'язки не тільки з містковими атомами кисню. На рисунку 3 б), в) представлені стани поверхні, в яких атом фосфору зв'язується з атомами кисню першого шару кластера (O2 чи O3). При цьому більш енергетично вигідним є такий стан, в якому атом P міняється місцями з атомом кисню першого шару O2. Конфігурація б) в порівнянні з конфігурацією а) на рисунку 3 дає вигоду в енергії близько 0,65 eV, однак енергетичний бар'єр такого переходу (стан б $\rightarrow$ стан в) становить приблизно 3,8 eV.

Атом фосфору P створює низькоенергетичний ковалентний σ -зв'язок з атомом O2 при перекритті атомної p-орбіталі фосфору та sp³-гібридизованої атомної орбіталі кисню (рис. 3 б). Міжатомна відстань P - Si4 складає $2,094 \text{ \AA}$. На цих атомах локалізована високоенергетична зв'язуюча молекулярна орбіталь, створена усупільненням електронів p-орбіталі фосфора та sp-гібридизованої (S-складова 45 %) орбіталі кремнію.

На рисунку 4 приведені стани, які утворюють два атоми фосфору при зв'язуванні з містковими атомами кисню.

Енергія стану С на 5,1 eV менша за енергію стану В, тобто для системи „кластер-атомі фосфору“ при зв'язуванні атомів P з містковими атомами O більш енергетично вигідною є конфігурація, за якої атоми фосфору зв'язуються також між собою, утворюючи таким чином димери P-P.

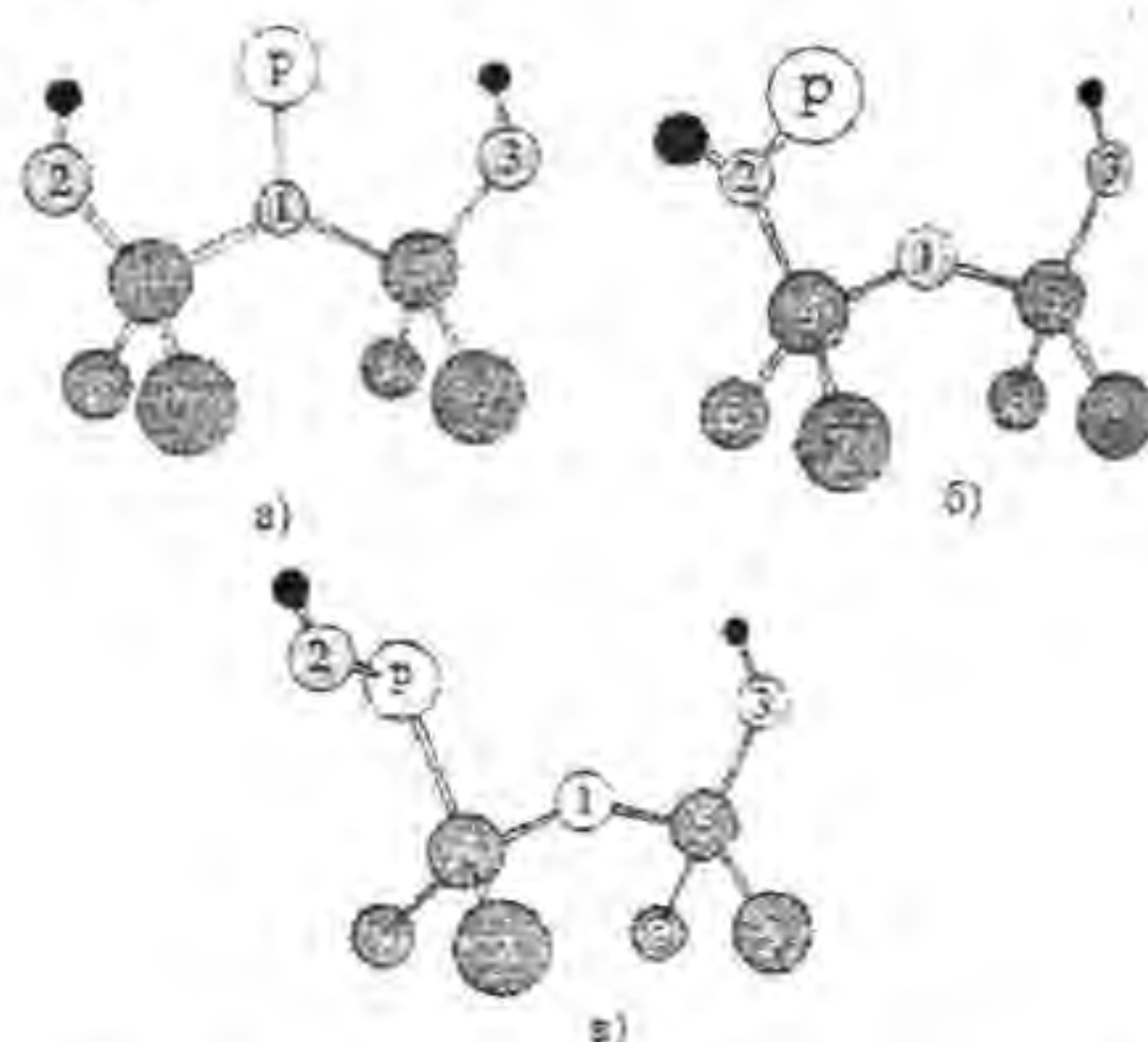


Рис. 3 – Стани, що утворює атом P при адсорбції на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$: а) ;б) ; в).

Довжина димерного зв'язку P-P складає $1,96 \text{ \AA}$. Атоми фосфору утворюють між собою високоенергетичний σ -зв'язок при перекриванні p_x-орбіталей (S-складова 8,7 %) кожного з атомів та розташований на 5,3 eV вгору за енергією слабкий високоенергетичний π -зв'язок за рахунок перекриття p_y-орбіталей. Крім того, на кожному з двох атомів фосфору локалізовані високоенергетичні орбіталі s-типу (S-складова 87 %, 3s-оболонка). Заряди на атомах фосфору та місткових атомах кисню майже не змінюються.



а – стан В, б – стан С.

Рис. 4 – Розташування двох атомів фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$ при утворенні зв'язків з містковими атомами кисню

як і довжина місткових зв'язків $\text{Si} - \text{O} - \text{Si}$. Незначно збільшується міжатомна відстань $\text{P} - \text{O}$ (на $0,04 \text{ \AA}$). Атом P1 насичує обірваний π -зв'язок атома P2 і навпаки, тому стан В є більш рівноважним, ніж стан С. Можна зробити висновок, що при адсорбції атомів фосфору (з утворенням зв'язків з містковими атомами кисню) на поверхні будуть утворюватись переважно димери P-P.

Якщо атом фосфору має достатньо велику кінетичну енергію, він може створювати стани під поверхнею, займаючи місце у вузлі або в міжвузлі. Такі конфігурації показані на рисунку 5.

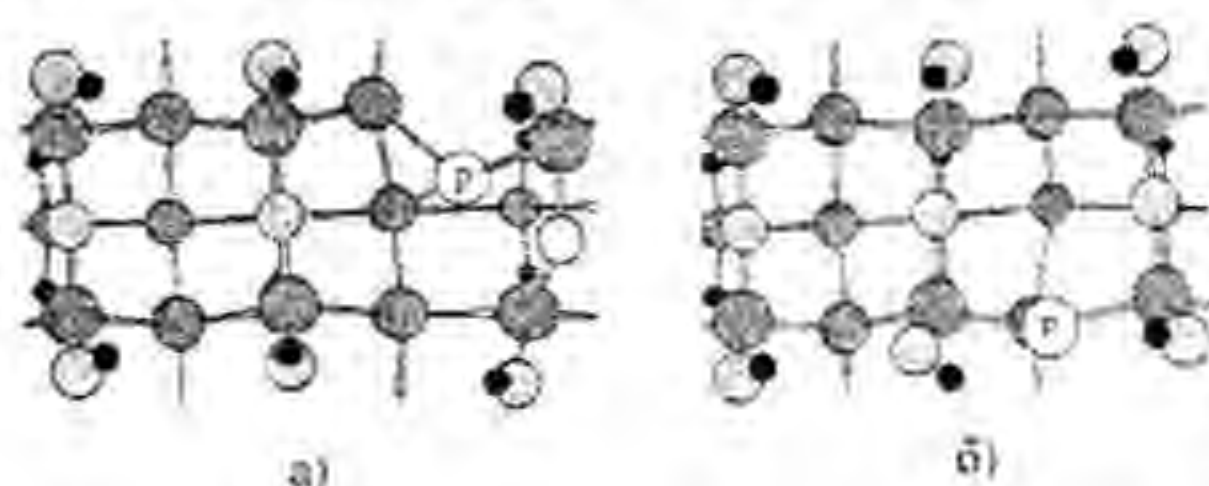


Рис. 5 – Атом фосфора у міжвузлі (а); атом P заміщує атом Si, здвигаючи його у міжвузля (б). Вид зверху

Заміщуючи атом кремнію, фосфор розташовується між другим та третім шаром кластеру. Атом фосфору практично не змінює електронного стану та гібридизації орбіталей атомів кремнію другого шару. Між цими атомами виникають σ -зв'язки, обумовлені перекриттям sp^2 -орбіталей фосфору та sp -гібридизованих орбіталей атомів кремнію. Фосфор змінює заряд на атомі кремнію третього шару майже на 4 е (атом кремнію стає зарядженим позитивно). σ -зв'язок $\text{P} - \text{O}_7$ виникає внаслідок перекриття sp^3 -орбіталі фосфору та sp^2 -орбіталі кисню (s-складова 33 %).

У положенні заміщення повністю на атомі фосфору локалізована високоенергетична р-орбіталь. За такої конфігурації атом фосфору при достатній температурі буде донором вільних носіїв заряду – електронів.

Повна енергія кластера за конфігурації б) рисунку 5 на $8,3 \text{ eV}$ менша за енергію кластера у випадку, коли атом фосфору займає положення у міжвузлі (конфігурація а).

Загальні висновки

Таким чином встановлено, що на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si} (100)$ на початковому етапі росту оксиду потенційними адсорбційними центрами є атоми кисню, на яких локалізовані високоенергетичні

незв'язуючі р-орбіталі. Показано, що адсорбція атомів фосфору на поверхні $\text{SiO}_2/\text{Si} (100)$ може призводити до утворення квазірівноважних станів, що відрізняються адсорбційною активністю, енергетичними та електронними характеристиками. З усіх отриманих станів з одним адсорбованим атомом найбільш низькоенергетичним є стан, при якому атом фосфору відокремлює атом кисню від поверхні. Енергія активації адсорбції для цього стану складає $3,8 \text{ eV}$. Ця енергія потрібна для розриву хімічного зв'язку $\text{O}_2 - \text{Si}_4$. Теплота адсорбції складає $3,54 \text{ eV}$. В роботі виявлено, що станом, який відповідає мінімуму повної енергії системи з двома адсорбованими атомами фосфору, є стан з димером P-P на поверхні оксиду. Встановлено, що при проникненні атомів фосфору під поверхню $\text{SiO}_2/\text{Si} (100)$ більш енергетично вигідним є положення їх у вузлах кристалічної ґратки підкладки. Різниця між положенням атома фосфора у вузлі та у міжвузлі становить $8,3 \text{ eV}$.

Список використаних джерел

1. Кларк Т. Компьютерная химия. – М.: Мир, 1990. – 231 с.
2. Stewart J.J. MOPAC 2000 Manual. – Fujitsu Limited, 1999. – 534 p.
3. Dewar M.J., Friedheim J., Grady G.L., Healy E.F., Stewart J.J. Revised MNDO Parameters for Silicon // Organometallics. – 1986. – Vol.5, p.375-379.
4. Angelo Bongiorno Simulation of atomistic processes during silicon oxidation, Thesis of PhD degree, Lausanne, EPFL 2003.
5. Masayuki F., Tetsuya H., Hiroshi T. Atomic configuration of boron pile-up at the Si/SiO_2 interface, Department of Electronics and Information Systems, Osaka University, ELEX 2004.
6. Taft E., Cordes L. Optical evidence for a silicon – oxide interlayer // J. Electrochem. Soc. – 1979. – Vol.126, N 1.
7. Helms C., Johnson M., Schwarz S. e.a. Auger sputter profiling studies of the SiO_2/Si interface // In ref. 581.
8. Krivanec S., Tsui D., Sheng T. e.a. A high resolution electron microscopy study of the SiO_2/Si interface // In ref. 581.

Надійшла до редколегії 13.06.2008

УДК 382.2

Білоусов І.В., к.т.н., Кузнецов Г.В., д.ф.-м.н.,
Циганова Г.І., пров. інж.

Метод виявлення структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі кремнію

Запропонована методика контролю типу і розподілу структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі кремнію методом декорування. Концентрація поверхневих дефектів суттєво залежить від кристалічної орієнтації кремнію, що визначає відмінності в умовах формування реакційних шарів.

Ключові слова: поверхня, дефект, межа розділу.

Вступ.

Наявність структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі напівпровідника є одним з визначальних факторів надійності та стабільності функціональних елементів кремнієвих інтегральних схем [1-2]. Жорсткість вимог до контролю процесів дефектоутворення на поверхні кремнію посилюється в умовах подальшої мініатюризації та підвищення ступеня інтеграції елементів. Розробка нових і оптимізація традиційних процесів кремнієвої технології потребує детального дослідження впливу технологічних факторів на природу і розподіл дефектів. Зокрема актуальною є проблема розробки неруйнуючих методів виявлення структурно-домішкових дефектів, виникаючих при різних способах фінішної обробки поверхні напівпровідника: рідинній хімічній обробці, плазмово-хімічній обробці, термічному відпалі [1].

Зазвичай для визначення типу і концентрації дефектів в поверхневому шарі кремнію застосовуються хімічні методи. Більшість з них базується на обробці поверхні кремнію в водних розчинах на основі плавикової кислоти і сильного окислювача (травники Сіртла, Деша та ін.) [2]. Загальним недоліком цих методів є незворотне розтравлювання пластин кремнію при визначенні макрорельєфу поверхні.

В роботі запропонована основана на методі декорування паладієм методика неруйного контролю параметрів структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі кремнію.

Результати експерименту та обговорення.

Вихідні зразки. Для визначення типу і

Belousov I.V., Ph.D., Kuznetsov G.V., Dr. Sci.,
Tsyganova A.I., engineer.

Formation of layer silicide in two-dimensional defects of surface silicon

The technique of the control such as and distribution structurally - impurity defects in surface layer of silicon by a method of dressing is offered. The concentration of surface defects essentially depends on crystalline orientation of silicon, that determines differences in conditions of formation of reactionary layers.

Key words: surface, defects, interface.

концентрації структурно-домішкових дефектів використовували кремнієві пластини (КЕФ-4,5) з кристалічною орієнтацією Si(100) та Si(111). Досліджувався вплив попередньої плазмово-хімічної обробки на природу і розподіл дефектів в поверхневому шарі кремнію. Поверхню пластин обробляли стандартним методом реактивно-іонного височастотного травлення в установці з діодною системою підтримки плазми [3]. Обробку здійснювали спочатку в плазмі C_2F_4 а потім в атмосфері кисню.

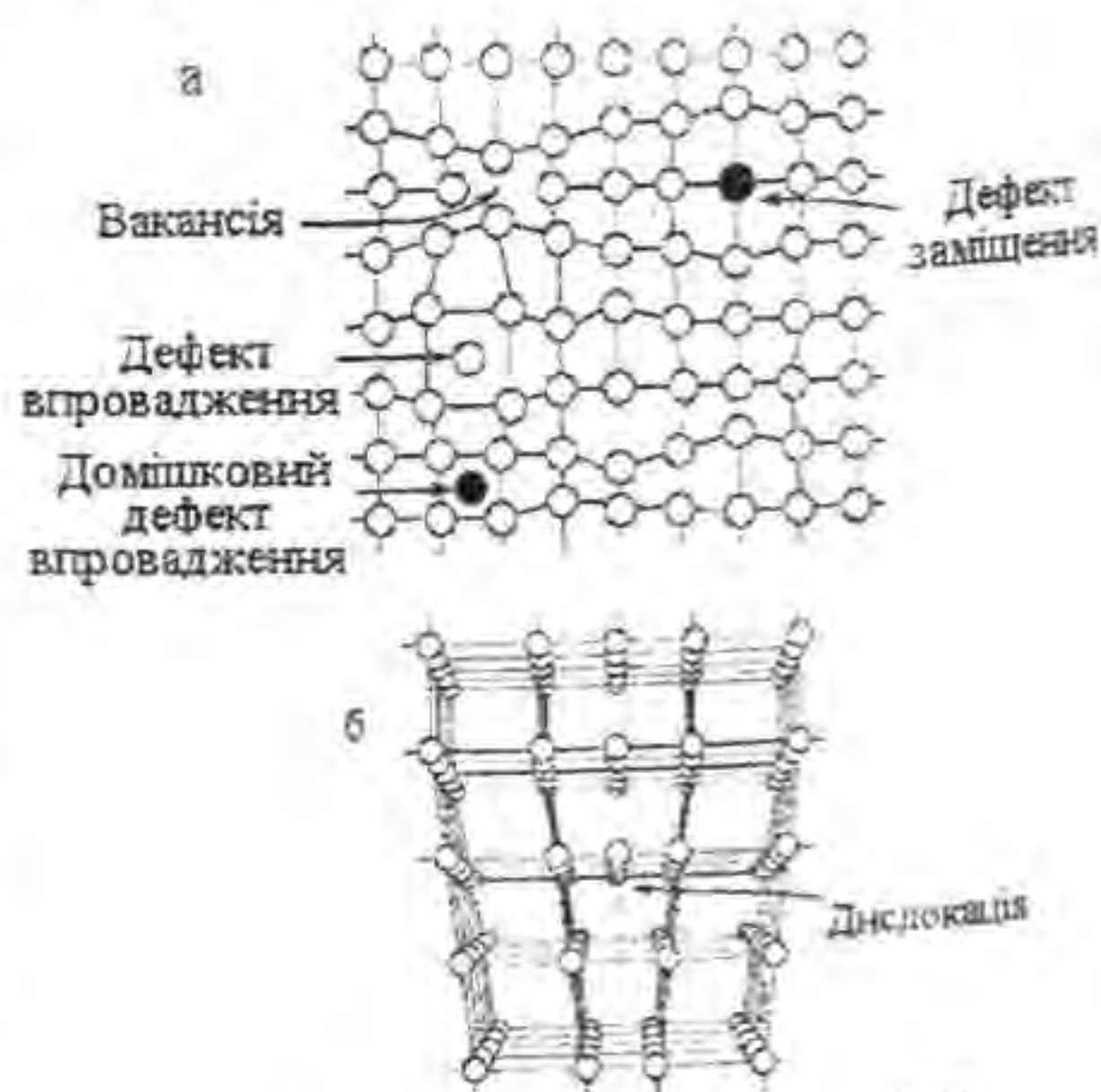


Рис.1. Типи дефектів в кремнії.
а - точкові дефекти; б - лінійні дефекти.

Відомі різноманітні типи структурно-домішкових дефектів в кремнії (точкові дефекти, кластери, дефекти упаковки, виходи дислокацій, лінії ковзання), виникнення яких обумовлено

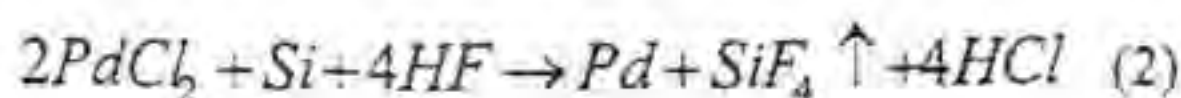
тепловими, хімічними, механічними та іншими факторами (рис.1) [2].

Дефекти присутні в будь-якому кристалі і їх концентрацію можна оцінити із співвідношення:

$$\frac{N_d}{N_{Tot}} = k_d \exp \left(-\frac{E_d}{k_B T} \right) \quad (1)$$

де N_d - концентрація дефектів, N_{Tot} - концентрація атомів в кристалі, E - енергія утворення дефекту, k_d - безрозмірний параметр зі значеннями в межах від 1 до 10, T - температура кристалу. Для кремнію енергія утворення ізольованого дефекту не перевищує одиниць еВ. Точкові дефекти можуть включати кілька позицій, формуючи дефектний комплекс. На відміну від точкових дефектів (рис.1а) лінійні дефекти (дислокації) включають велику кількість атомних позицій. Дислокації формуються, наприклад, при вставці долаткової напівплощини атомів кристала (рис.1б). Такі крайові дислокації можуть бути серйозною проблемою, особливо для росту деформацій в гетероструктурах.

Виявлення структурно-домішкових дефектів на поверхні кремнію. Для запобігання розтравлення нами застосовувалась обробка поверхні кремнію в розчині, до складу якого входить слабкий окислювач - PdCl_2 , що може легко відновлюватися, комплексоутворювач - $\text{K}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]$, що має порівняно з окислювачем більш від'ємний окислювально-відновлювальний потенціал та розбавлена в воді плавикова кислота HF . Реакція здійснюється в місцях знаходження структурних дефектів, що характеризуються високою хімічною активністю атомів кремнію:



Результатом окислювально-відновної реакції є осадження металічного паладію, який декорує структурні дефекти, спрощуючи їх спостереження. Осаджений Pd легко видаляється при нагріві в суміші азотної та соляної кислот і після стандартного технологічного циклу очистки поверхні кремнієві пластини є повністю придатними для подальшого використання.

На рис.2 наведені зображення поверхні кремнієвих підкладок після попередньої плазово-хімічної обробки з виявленими запропонованим методом дефектами. В залежності від типу дефектів вони проявляються в вигляді окремих крапок або скупчень, утворюють лінійні і кільцеві дефекти.

Густина розподілу дефектів в стандартних кремнієвих пластинах змінюється в межах 0,01-

0,1 мм^{-2} . Типовим є зростання концентрації дефектів в периферійній області пластини, хоча закон розподілу може змінюватися навіть в межах одного технологічного процесу. При високій потужності розряду в плазмі ($P=2-3$ кВт) зростання тривалості і швидкості плазово-хімічного травлення призводить до більших порушень структури поверхневого шару кремнію і росту концентрації дефектів.

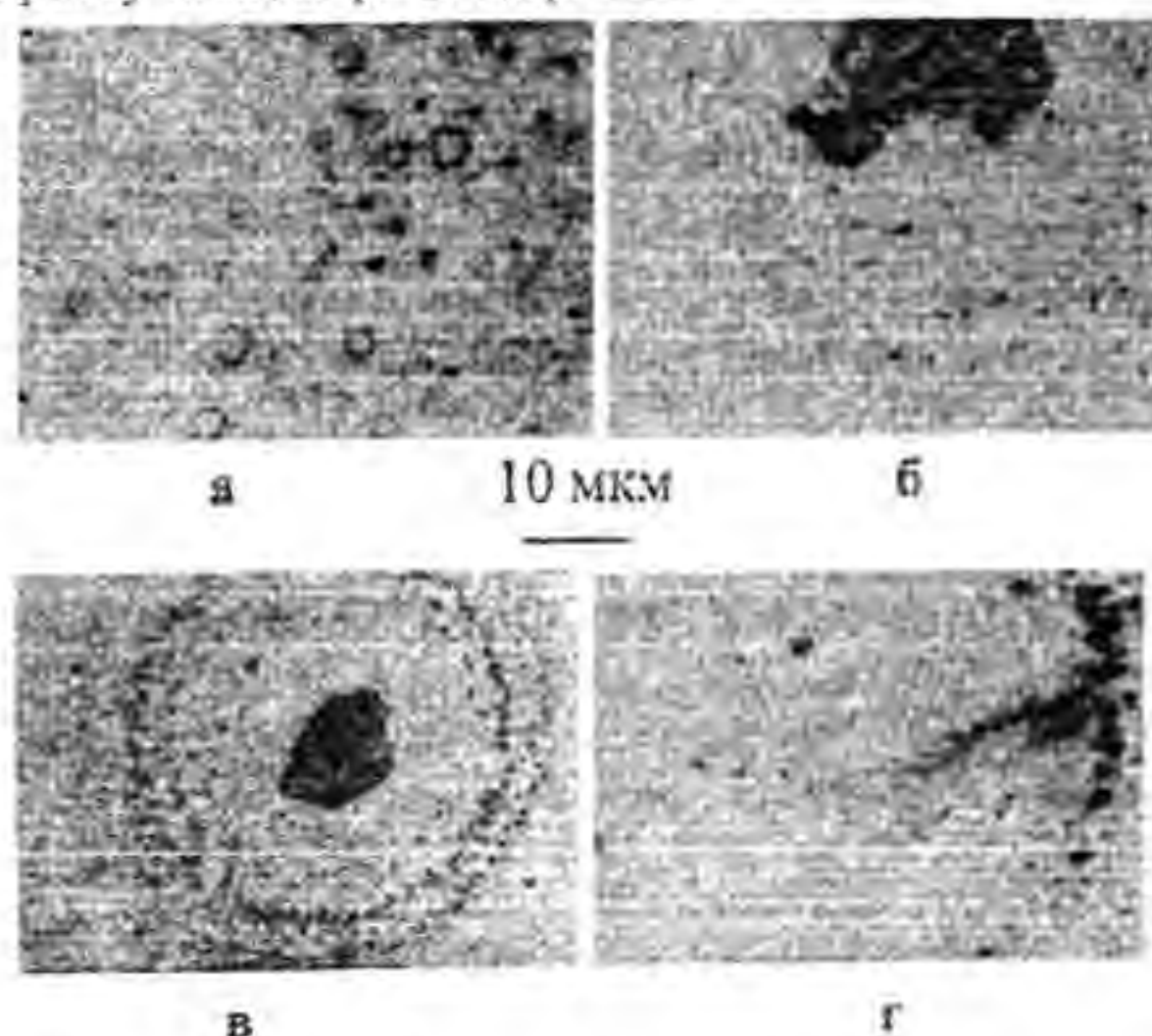


Рис.2. Типи виявлених структурно-домішкових дефектів на поверхні кремнієвих пластин.

- а – виходи дислокацій і дефектів упаковки;
- б – скупчення точкових дефектів;
- в – кільцеві дефекти;
- г – скупчення домішкових дефектів.

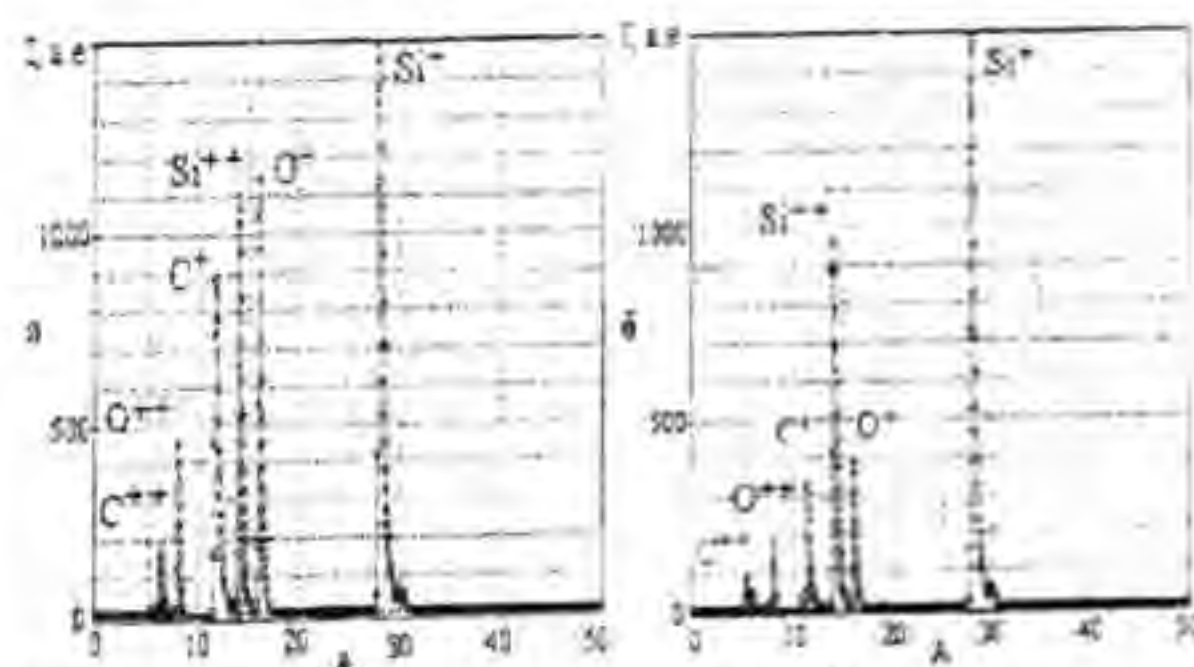


Рис.3. Вплив плазово-хімічної обробки на елементний склад поверхневого шару кремнію.
а – $T=20^\circ\text{C}$; б – $T=450^\circ\text{C}$.

Дослідження хімічного складу поверхневого шару кремнію методами лазерної мас-спектроскопії свідчать про наявність на поверхні домішок кисню та вуглецю (рис.3). Можливою причиною накопичення кисню та вуглецю на поверхні кремнію є їх попадання із газового середовища плазми і процеси адсорбції С і О при попередній плазмохімічній обробці та відпалі кремнієвих пластин. При підвищенні

температури нагріву ($T \sim 450-550^\circ\text{C}$) на поверхні кремнієвих пластин спостерігається зменшення вмісту вуглецю та кисню в результаті їх десорбції (рис.3б). Концентрація домішок кисню та вуглецю корелює з концентрацією структурно-домішкових дефектів, виявлених в поверхневому шарі кремнію (рис.2). Відомо, що присутність домішок кисню та вуглецю стимулює утворення дефектів упаковки в кремнії [2].

Зростання концентрації дефектів при збільшенні потужності розряду і тривалості плазово-хімічного травлення пояснюється наступними причинами. По-перше, стимулюються процеси гетерування дефектів із об'єму напівпровідника і порушення структури поверхневого шару кремнію. По-друге, плазово-хімічна обробка супроводжується процесами дисоціації та іонізації і бомбардування іонами поверхні кремнію призводить до генерації дефектів, що включають С та О. Крім того, після плазово-хімічної обробки при зниженні температури концентрація домішок в поверхневому шарі стає нижчою межі розчинності, що ініціює появу дефектів внаслідок виникаючих внутрішніх напружень.

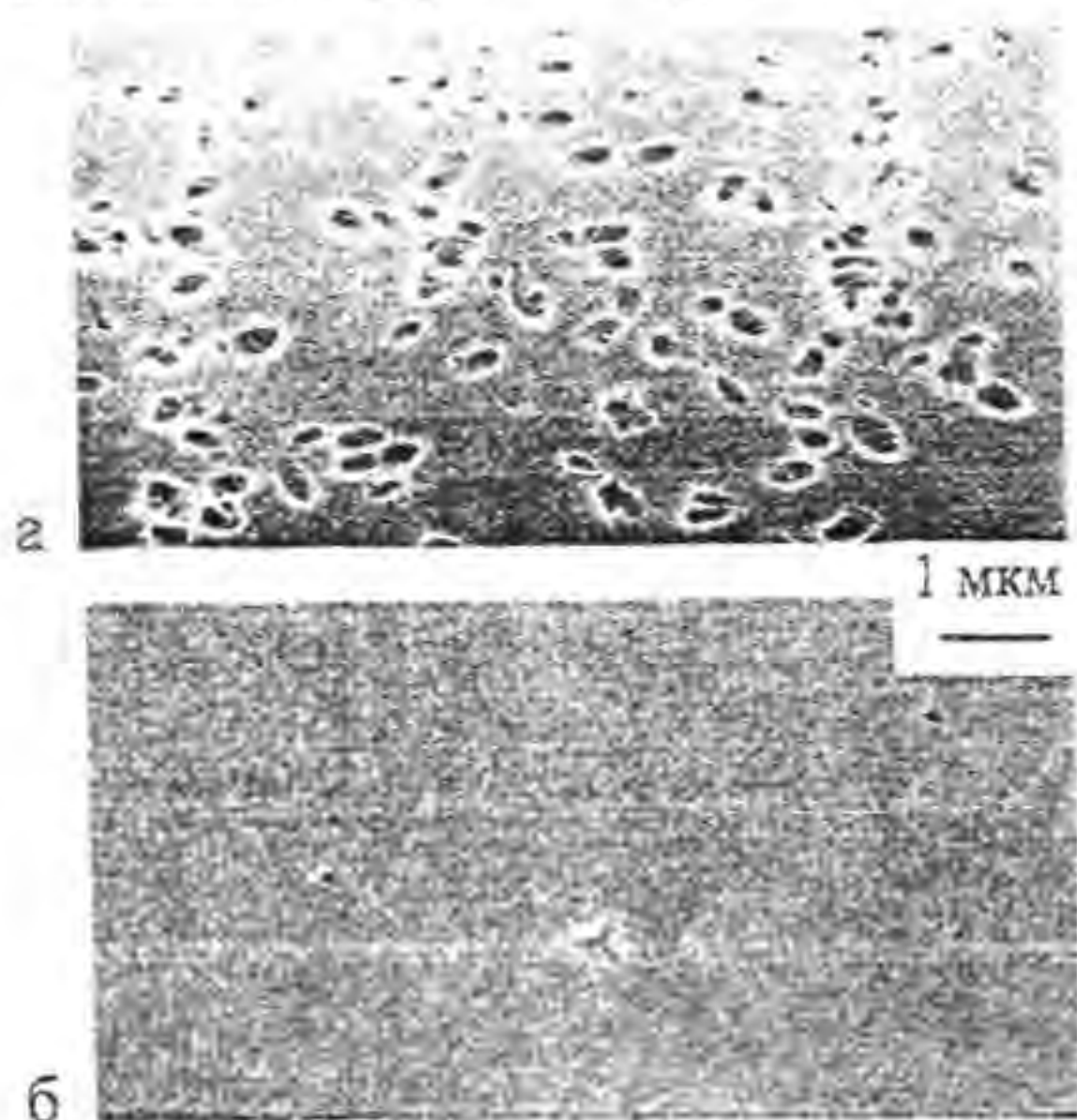


Рис.4. Мікрофотографії поверхні кремнію для різних кристалографічних орієнтацій: (а)-Si(100), (б)-Si(111);

Концентрація дефектів на поверхні суттєво залежить від кристалічної орієнтації кремнію. На рис. 4 показано типові зображення поверхні вихідних пластин кремнію з кристалографічними орієнтаціями Si(100) та Si(111). Поверхня з орієнтацією Si(100) (рис.3а) характеризується значно більшою концентрацією дефектів

порівняно з орієнтацією Si(111) (рис.3б), що суттєво впливає на процеси міжфазної взаємодії.

Поверхневі дефекти є локальними центрами міжфазної взаємодії в реакційних системах метал - кремній, зокрема, в структурах силіцид металу - кремній [4]. Для процесу росту силіцидної плівки характерною є кореляція концентрації силіцидних зародків з концентрацією структурно-домішкових дефектів на поверхні кремнію. Для поверхні Si(100) з більш високою густиною дефектів процес силіцидоутворення активується на більшій площі, а силіцидна фаза формується при менших температурах і тривалості відпалу. Підвищена концентрація дефектів сприяє зростанню швидкості не орієнтованого гетерогенного зародкоутворення і формуванню аморфної або дрібнокристалічної силіцидної плівки. Поверхня з орієнтацією Si(111) характеризується значно меншою концентрацією дефектів, що дає їй переваги для формування якісних монокристалічних силіцидних шарів.

Висновки

Запропоновано неруйнуючий метод виявлення структурно-домішкових дефектів в поверхневому шарі кремнію.

Утворення поверхневих структурно-домішкових дефектів при плазово-хімічній обробці кремнію визначають як процеси їх гетерування із об'єму напівпровідника, так і процеси накопичення домішок (кисню, вуглецю).

Список використаних джерел

1. Schroder D.K. Semiconductor material and device characterization. New Jersey. Wiley-Interscience Publication. -2006. -790 p.
2. Рейви К. Дефекты и примеси в полупроводниковом кремнии. -М.: Мир. -1984. -472 с.
3. Бузанева Е.В., Вдовенков А.А., Исаев С.А., Кошелева Н.А., Шевчук П.П. Физико-химические свойства плазмохимически травленной поверхности эпитаксиального p-кремния. //Электронная техника. Сер.7. Материалы. -1985. №2. - С.13-18.
4. Belousov I., Grib A., Linzen S., Seidei P. Cobalt silicide formation inside surface defects of a silicon substrate. //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. -2002. -В 186. - P.61-65.

Надійшла до редколегії 01.03.08.

УДК 535.2:621.373.8

Іванісік А. І.^{*}, канд. ф.-м. наук, доцент
Конопатський А. В.^{*}, аспірант

**Залежність ефективності генерації
стоксової компоненти вимушеного
комбінаційного розсіяння від поглинання
та спектрально складу випромінювання
накачування**

Розглядається можливість підвищення ефективності генерації першої стоксової компоненти вимушеного комбінаційного розсіяння світла внаслідок селективного поглинання та комбінованого накачування. Пропонується одночасно з лазерним випромінюванням подавати на вхід підсилюючого середовища третю стоксову компоненту або вводити в середовище селективно поглинаючі речовини.

Ключові слова. вимушене комбінаційне розсіяння, стоксова компонента, лазер.

Ivanisik A. I.^{*}, Ph. D., As. Prof.
Konopatskiy A. V.^{*}, post-graduate student

**Dependence of effectiveness of generation of
Stokes component of Raman light scattering
on absorption and spectral distribution of
pumping radiation**

It is examined a possibility to increase the effectiveness of generation of the first Stokes component of stimulated Raman light scattering as a result of the differential absorption and the combined pumping. It is proposed simultaneously with the laser radiation to input on entrance of the amplified media the third Stokes component or to introduce differential absorbent substances in the media.

Key Words: stimulated Raman scattering, Stokes component, laser

^{*}E-mail: aivan@univ.kiev.ua, konopatskiy@univ.kiev.ua

Вступ

Вимушене комбінаційне розсіяння (ВКР) світла використовується у перетворювачах лазерного випромінювання для зміни частоти, компресії імпульсів, поліпшення оптичної якості пучків [3]. Проте перелік ВКР-активних середовищ, що набули практичного застосування, є досить обмеженим (водень та метан під тиском у десятки атмосфер, деякі кристали). Такі оптично стійкі та зручні у користуванні середовища, як самофокусуючі рідини (толуол, бензол, ксиліл тощо), в яких історично вперше спостерігалось ВКР [4], унаслідок неефективності перетворення виявилися малозастосовними. Це обмежує набір частот випромінювання, що можна одержати від одного лазера накачування.

З цього приводу зазначимо, що у самофокусуючих рідинах експериментальний поріг ВКР визначається порогом самофокусування [5] і досягається досить легко. Теоретично можна було б очікувати експоненціального або лінійного зростання виходу ВКР-компонент залежно від потужності збуджуючого випромінювання. Проте на практиці потужність стоксової хвилі, в яку перетворюється лазерне випромінювання, перестає зростати або навіть дещо зменшується після досягнення незначного рівня, незважаючи

на подальше збільшення потужності накачування. Здебільшого в самофокусуючих рідинах ефективність перетворення у першу стоксову компоненту ВКР не перевищує ~10%, а в цілому, в усі стоксові компоненти – ~20%. Це стало приводом до того, що таку ситуацію класифікували, як ефект "абсолютного насичення вимушеного розсіяння" [6]. Встановлено, що цей ефект пов'язаний зі зривом перетворення лазерного випромінювання у стоксову компоненту при миттєвих потужностях накачування, які перевищують при заданих параметрах деяку фіксовану величину, і немає нічого спільного з виснаженням накачування. Зрив обумовлений надмірно жорстким самофокусуванням, що веде до скорочення довжини фокальної області [7].

Високої ефективності перетворення на основі ВКР в самофокусуючих рідинах можна очікувати у двокюветній схемі за генерації імпульсу низькопорогового побіжного ВКР у кюветі з перевищенням порогу самофокусування та підсилення цього імпульсу в іншій кюветі, але нижче порогу самофокусування. Метою роботи є з'ясування причин, що можуть обмежувати ефективність перетворення лазерного випромінювання у двокюветній схемі, та теоретичне дослідження впливу на ефективність перетворення селективного поглинання другої

Представлено Даніловим В. В., проф., д. ф.-м. н.

стоксової компоненти, комбінованого накачування за участю третьої стоксової компоненти тощо.

Теоретична модель

Розглядається випадок, коли в першій кюветі досягається поріг самофокусування і генеруються мінімум три стоксові компоненти, а на виході з неї потужність лазерного випромінювання є ще достатньою для інтенсивного ВКР у режимі підсилення в другій кюветі. Випромінювання з першої кювети надходить у другу, заповнену тією ж ВКР-активною рідиною.

Передбачається, що перед другою кюветою встановлюється спектральний фільтр або прилад, який пропускає лазерне випромінювання та дає змогу змінювати розподіл потужностей стоксових компонент до заданого вигляду. В другу кювету можуть вводитися барвники, які селективно поглинають певні стоксові компоненти. Поріг самофокусування в другій кюветі не досягається внаслідок однієї або декількох таких обставин: недостатня вхідна потужність лазерного випромінювання, відстань між кюветами є значною, друга кювета складається із секцій, між якими існують несамофокусуючі або дефокусуючі ділянки, ВКР-активною в обох кюветах є несамофокусуюча рідина, але в першу додана речовина з великою сталою Кера, зміна між кюветами поляризації випромінювання з лінійної на циркулярну.

Не враховується фазова саомодуляція, хвильова нестационарність, часова зміна потужності, дифракційні ефекти, розбіжність пучків, параметричний механізм генерації антистоксових і стоксових компонент. Останнє виправдано незначною інтенсивністю антистоксових компонент та невиконанням умов фазового синхронізму для осьових пучків.

Числовими методами розв'язувалася система семи нелінійних зв'язаних рівнянь для інтенсивностей I_i лазерної хвилі ($i=0$) та шести перших стоксових компонент ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, відповідно) у другій кюветі, розташованій на відрізку осі $z=0 \div L$:

$$\begin{cases} dI_0/dz = -G_0' I_0 I_1 - \alpha_0 I_0; \\ dI_1/dz = G_1 I_1 I_0 - G_1' I_1 I_2 - \alpha_1 I_1; \\ dI_5/dz = G_5 I_5 I_4 - G_5' I_5 I_6 - \alpha_5 I_5; \\ dI_6/dz = G_6 I_6 I_5 - \alpha_6 I_6. \end{cases} \quad (1)$$

В (1) α_i – коефіцієнти поглинання, а G_i та G_i' – коефіцієнти комбінаційного підсилення та ослаблення на відповідних частотах, що в системі СІ визначаються виразами:

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{2\omega_i}{n_i n_{i-1} c^2 \epsilon_0} \left| \text{Im} \left[\chi^{(3)}(\omega_i; \omega_{i-1}, -\omega_{i-1}, \omega_i) \right] \right|, \\ G_i' &= \frac{2\omega_i}{n_i n_{i+1} c^2 \epsilon_0} \left| \text{Im} \left[\chi^{(3)}(\omega_i; \omega_{i+1}, -\omega_{i+1}, \omega_i) \right] \right|, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\chi^{(3)}$ – кубічні сприйнятливості (поляризованості) середовища, ω_i – циклічні частоти хвиль, n_i – показники заломлення, c – швидкість світла у вакуумі, ϵ_0 – електрична стала. Величини G_i та G_i' за віддаленості частот хвиль від електронних резонансів можна вважати однаковими: $G_i = G_i'$. Крім цього, внаслідок співвідношення симетрії для комбінаційних сприйнятливостей маємо рівність [1]:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\chi^{(3)}(\omega_i; \omega_{i-1}, -\omega_{i-1}, \omega_i) \right] &= \\ &= -\text{Im} \left[\chi^{(3)}(\omega_{i-1}; \omega_i, -\omega_i, \omega_{i-1}) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

яка разом з (2) дає $G_i/\omega_i = G_{i-1}'/\omega_{i-1}$. Тому в (1) вважалось, що для $i=0 \div 5$

$$G_i/\omega_i = G_i'/\omega_i = G_{i+1}/\omega_{i+1} = G_{i+1}'/\omega_{i+1} = \text{const}(i). \quad (4)$$

Отже, для здійснення розрахунків достатньо задати відоме значення, наприклад, G_1 , та врахувати комбінаційний зсув частоти $\Delta\omega = \omega_i - \omega_{i+1}$. Для конкретності розрахунків були вибрані значення $G_1 = 5 \cdot 10^{-11}$ м/Вт, $\Delta\omega/(2\pi c) = 1000$ см⁻¹ (для порівняння: у бензолі – $G_1 = 2,8 \cdot 10^{-11}$ м/Вт, $\Delta\omega/(2\pi c) = 992$ см⁻¹, у сірко-вуглеці – $G_1 = 24 \cdot 10^{-11}$ м/Вт, $\Delta\omega/(2\pi c) = 656$ см⁻¹ [2]), довжина хвилі лазерного випромінювання $\lambda_0 = 694,3$ мкм (рубіновий лазер).

Початкові умови у точці $z=0$ для системи (1) змінювалися відповідно до можливих змін спектрального складу випромінювання, яке надходить з першої кювети. У перерізі пучків розподіл інтенсивності за радіусом r у точці $z=0$ вважався гаусовим:

$$I_i(r, z=0) = I_i(r=0, z=0) \exp(-r^2/r_0^2) \quad (5)$$

з радіусом $r_0 = 4$ мм.

Для переходу до потужностей $P_i(z)$ пучків розв'язки системи (1) інтегрувалися за радіусом

$$P_i(z) = 2\pi \int_0^\infty r I_i(r, z) dr. \quad (6)$$

Результати розрахунків

У межах вибраної теоретичної моделі основною причиною обмеженої ефективності перетворення лазерного випромінювання у першу стоксову компоненту в режимі підсилення у другій кюветі є неоднорідний розподіл інтенсивності в перетині пучків. На це вказує порівняльний аналіз рис. 1 і рис. 2.

На рис. 1 подано залежність від z нормованої інтенсивності випромінювання лазера та стоксових компонент на осі пучків ($r=0$). Вхідна інтенсивність лазерного пучка на осі становила $I_0(r=0, z=0) = 56 \text{ МВт/см}^2$ (що для пучка з радіусом $r_0 = 4 \text{ мм}$ відповідає максимальній інтенсивності імпульсу з енергією $0,5 \text{ Дж}$ і тривалістю 20 нс на рівні e^{-1}), а для усіх стоксових компонент $I_i(r=0, z=0) = 10 \text{ Вт/см}^2$. Спостерігається стовідсоткова квантова ефективність k_{kv} перетворення густини потоку фотонів, послідовно від лазера до першої стоксової компоненти і далі. Важливо, що збільшення $I_i(r=0, z=0)$ стоксових компонент до 1 МВт/см^2 призводить до зменшення вказаної ефективності k_{kv} до $0,8$.

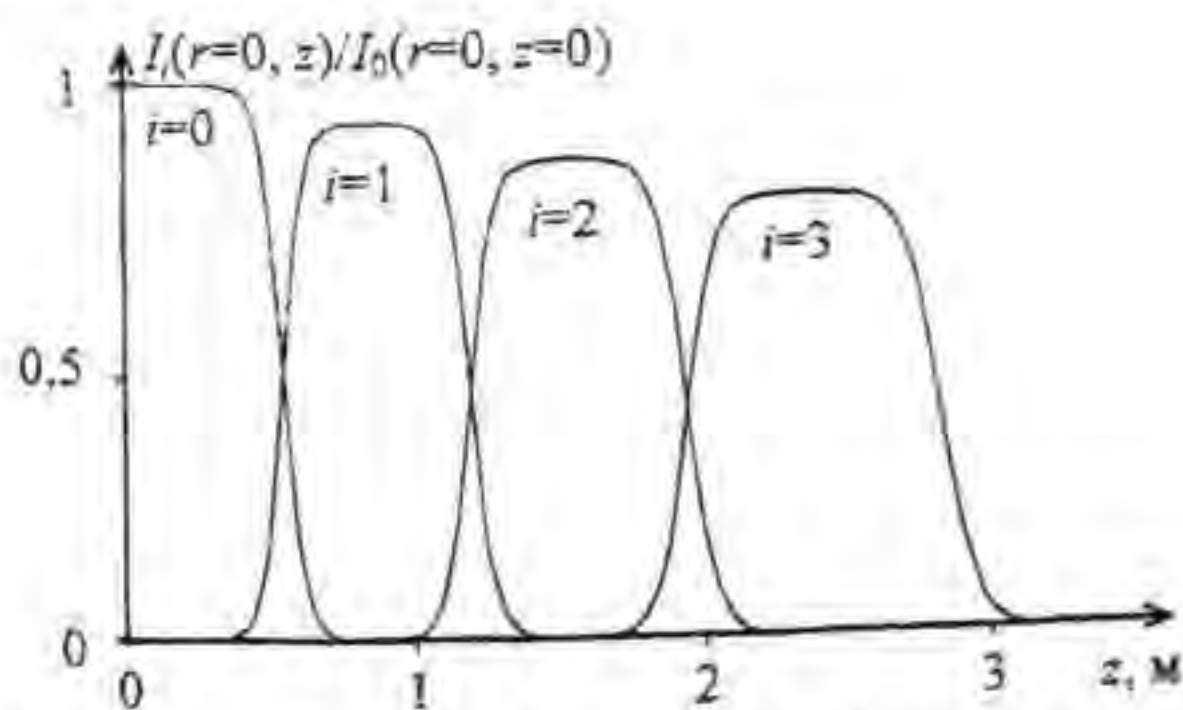


Рис. 1 Перетворення інтенсивності випромінювання на осі пучків

На рис. 2 відображено залежність від z нормованої потужності компонент з урахуванням гаусового радіального розподілу інтенсивності пучків. Інтенсивність лазерного випромінювання $I_0(r=0, z=0)$ теж становила 56 МВт/см^2 , що у випадку $r_0 = 4 \text{ мм}$ відповідає потужності $P_0(z=0) = 28 \text{ ГВт}$. Для всіх стоксових компонент $I_i(r=0, z=0) = 1 \text{ МВт/см}^2$. У цьому випадку для потоку фотонів $k_{kv} = 0,43$ для першої стоксової компоненти. Зменшення інтенсивності всіх стоксових компонент веде до збільшення k_{kv} .

Для $I_i(r=0, z=0) = 10 \text{ Вт/см}^2$ отримано $k_{kv} = 0,55$ для першої стоксової компоненти. Тож очевидно, що негативну роль відіграє і наявність у вхідному випромінюванні, зокрема, другої стоксової компоненти зі значною потужністю та підсилення цієї компоненти у другій кюветі.

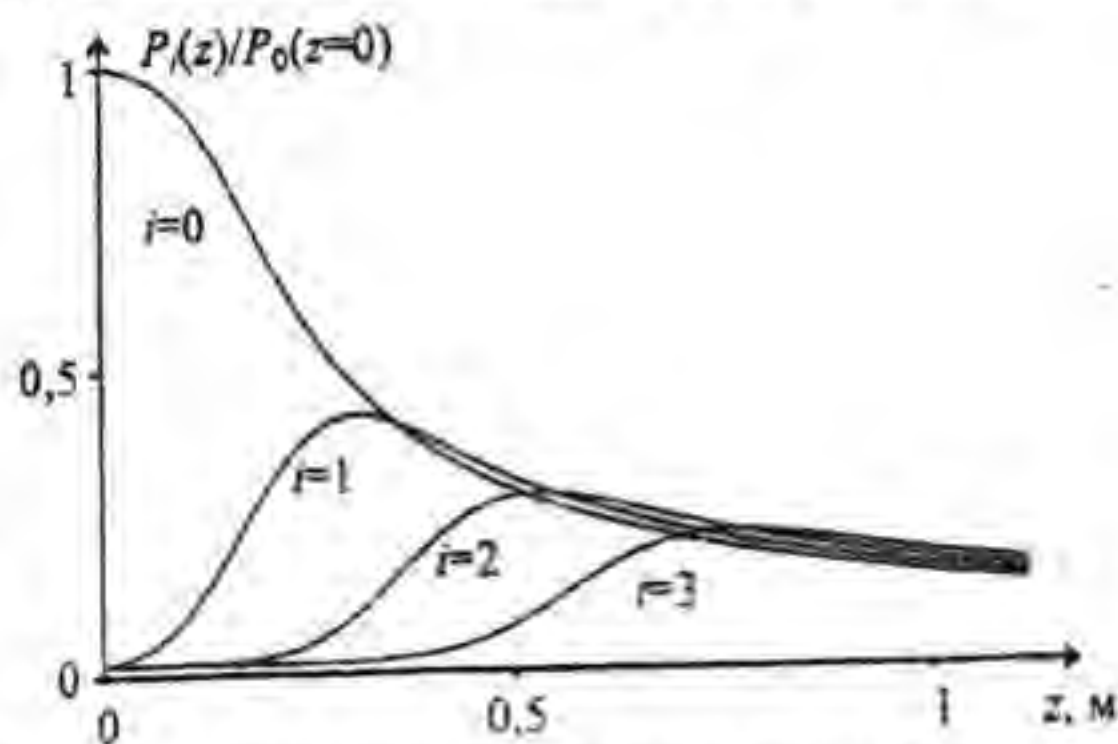


Рис. 2 Перетворення потужності випромінювання

Пригнічення генерації другої стоксової компоненти можна досягти введенням селективно поглинаючої речовини. На рис. 3 подано залежності від z потужностей компонент для коефіцієнта $\alpha_2 = 5 \text{ м}^{-1}$, а на рис. 4 – залежність k_{kv} для потоку фотонів першої компоненти від α_2 (за вхідних інтенсивностей, що і на рис. 2). Принципово змінюється як $P_i(z)$, так і k_{kv} .

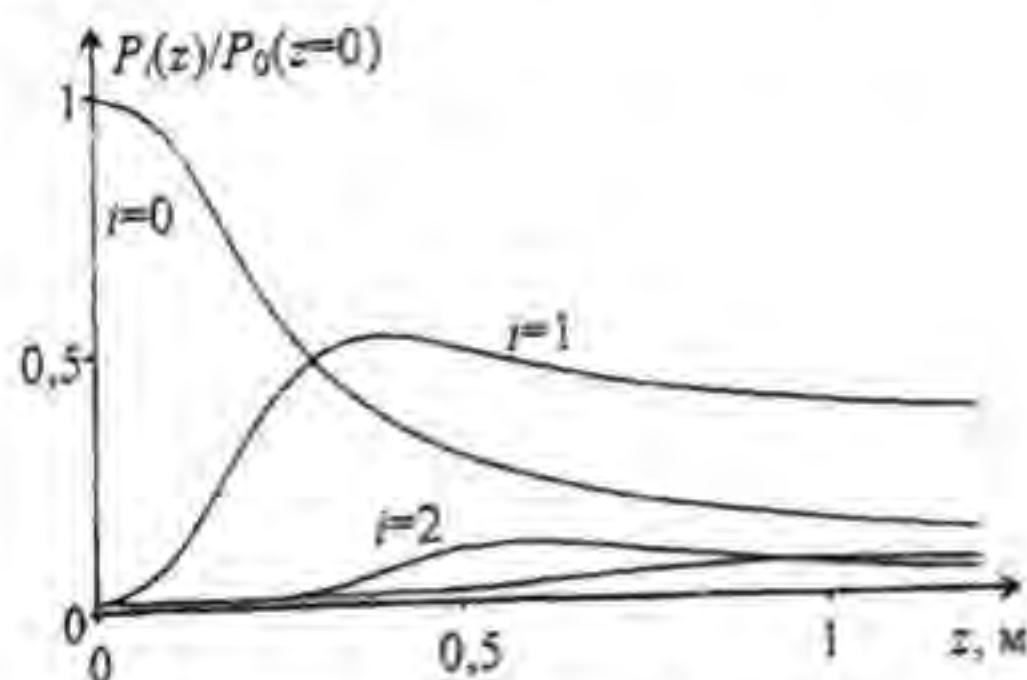


Рис. 3 Залежність потужності $P_i(z)$ в умовах поглинання другої стоксової компоненти ($\alpha_2 = 5 \text{ м}^{-1}$)

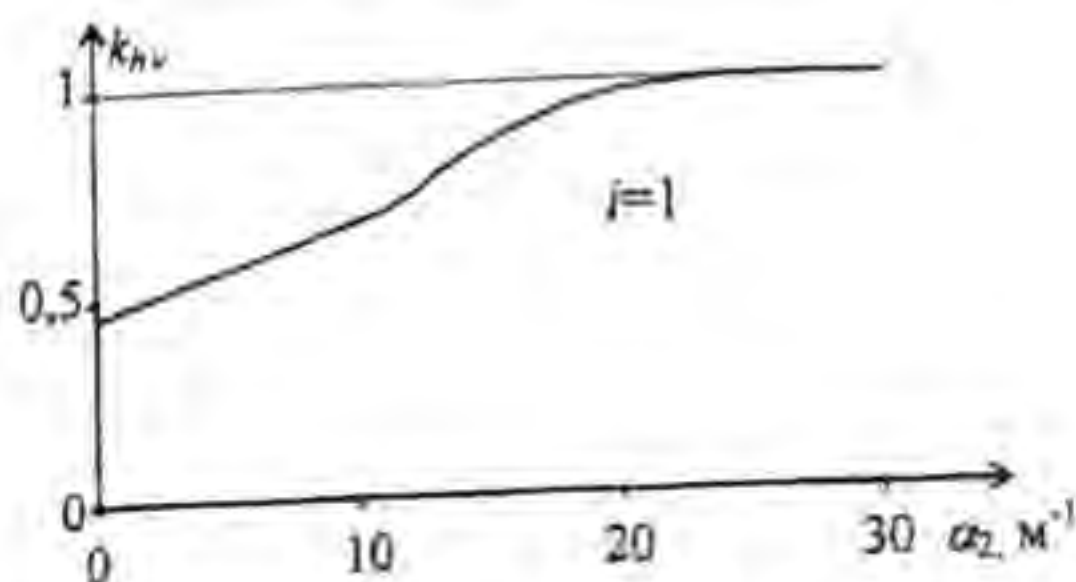


Рис. 4 Залежність ефективності k_{kv} перетворення в першу стоксову компоненту від α_2

За використаних початкових умов для коефіцієнтів $\alpha_2 \geq 25 \text{ м}^{-1}$ досягається $k_{hv} \approx 1$ (рис. 4). У випадку $\alpha_2 > 15 \text{ м}^{-1}$ потужність стоксової компоненти наростає монотонно, асимптотично наближаючись до максимального значення, коли $z \rightarrow \infty$. Для $\alpha_2 < 12 \text{ м}^{-1}$, досягнувши максимального значення, потужність першої стоксової компоненти спадає (рис. 3).

Ефекту, подібного до поглинання другої стоксової компоненти, можна досягти з використанням комбінованого накачування за участю третьої стоксової компоненти. На рис. 5 подано залежність $P_i(z)/P_0(z=0)$ для $\alpha_i = 0$, $I_0(r=0, z=0) = I_3(r=0, z=0) = 56 \text{ МВт/см}^2$, $I_{1,2,4,5,6}(r=0, z=0) = 1 \text{ МВт/см}^2$, а на рис. 6 – залежність k_{hv} для $i=1$ від відношення $I_3(z=0)/I_0(z=0)$ в межах $0,02 \div 1$. У цих межах і умовах k_{hv} зростає від 0,43 до 0,63. Основною причиною обмеження k_{hv} на рівні 0,63 у таких умовах є перехід фотонів з третьої в четверту стоксову компоненту.

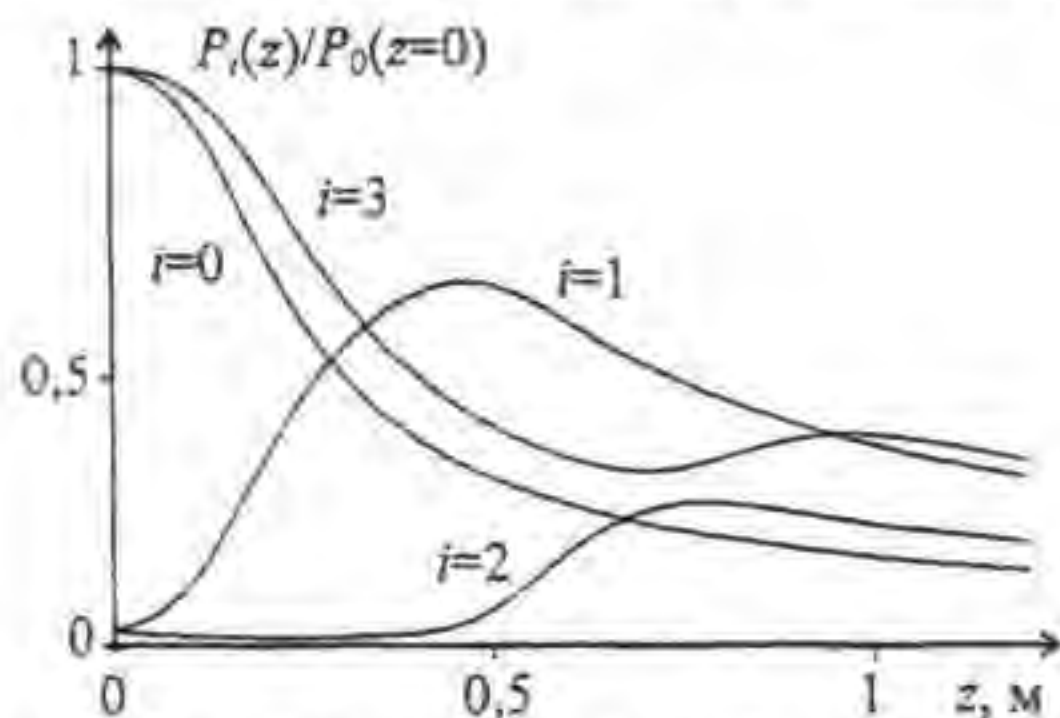


Рис. 5 Перетворення потужності випромінювання в умовах комбінованого накачування: $I_3(z=0) = I_0(z=0)$

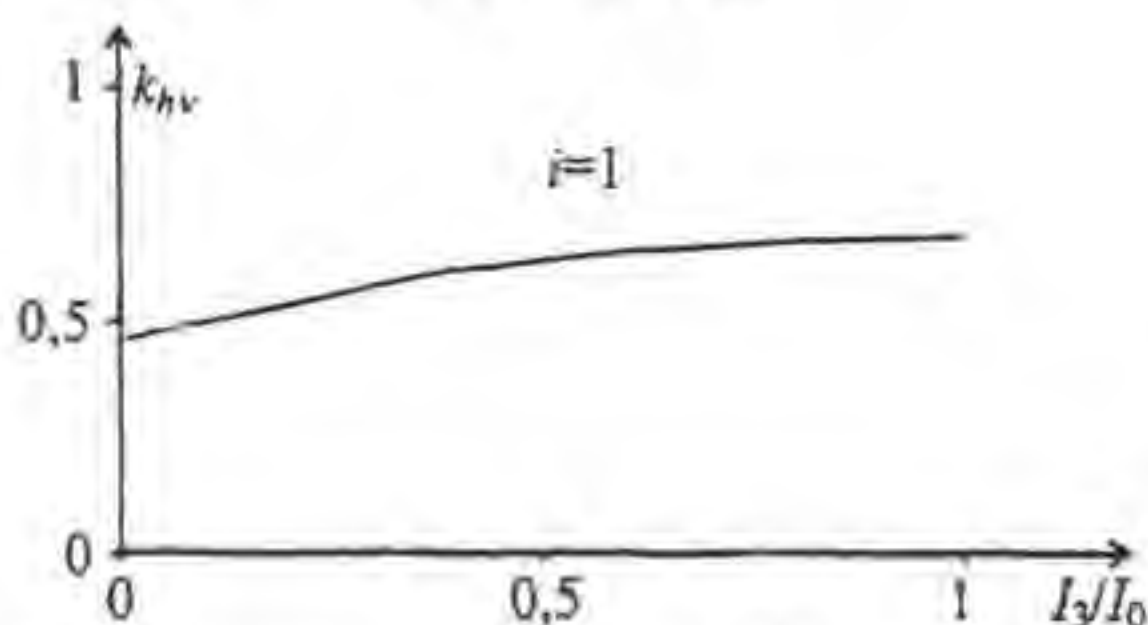


Рис. 6 Залежність ефективності k_{hv} перетворення в першу стоксову компоненту від відношення $I_3(z=0)/I_0(z=0)$

Рекомендації

Для досягнення близької до 1 ефективності k_{hv} для першої стоксової компоненти у двокюветній схемі необхідно направляти в другу

кювету випромінювання з максимально можливими значеннями інтенсивностей $I_0, I_1, I_3, I_5, \dots$ та мінімальними $I_2, I_4, I_6, \dots$, вводити поглинаючі добавки для компонент з парним індексом i . Для прикладу, на рис. 7 показано залежність $P_i(z)/P_0(z=0)$ у випадку $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 15 \text{ м}^{-1}$, $I_0(r=0, z=0) = 56 \text{ МВт/см}^2$, $I_2 = I_4 = I_6 = 5 \cdot 10^{-5} I_0$, $I_1 = 0,2 I_0$, $I_3 = 0,15 I_0$, $I_5 = 0,1 I_0$. Досягається $k_{hv} = 0,92$.

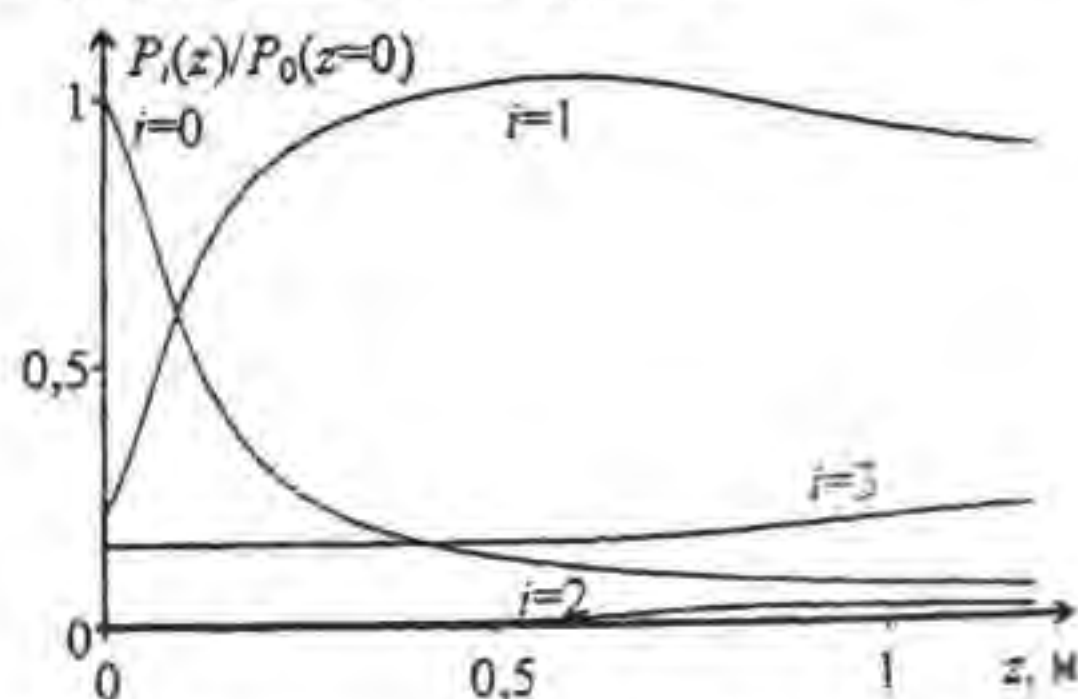


Рис. 7 Перетворення потужності випромінювання в умовах, близьких до оптимальних

Список використаних джерел

1. Григорук В. І. Іванісік А. І., Коротков П. А. Експериментальна лазерна оптика: Підручник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2007. – 383 с.
2. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989. – 560 с.
3. Смирнов В. Г. Нетрадиционные принципы построения мощных лазеров с нелинейными преобразователями // Квант. электр. – 1993. – 20, №5. – С. 421 - 440.
4. Woodbury E. J., Ng W. K. Ruby laser operation near IR // Proc. IRE. – 1962. – 50. – P 2367.
5. Иванисик А. И., Малый В. И., Понезжа Г. В. Пространственно-угловая структура анти-стоксового излучения при вынужденном комбинационном рассеянии света в керровской жидкости // Оптика и спектроскопия. – 1996. – 80, №2. – С. 212 - 217.
6. Соколовская А. И., Кудрявцева А. Д., Бреховских Г. Л. Новые оптические явления при комбинационном рассеянии света в конденсированных средах // Труды ФИАН. – 1991. – 212. – С. 16 - 37.
7. Іванісік А. І., Конопатський А. В. Ефект абсолютного насичення вимушеного раманівського розсіяння // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2004. – вип. 2. – С. 402-406.

Надійшла до редколегії 27.03.2008

УДК 519.9

Ільченко О. О., студент,
Обуховський В. В., доктор фіз.-мат. наук,
професор

Вплив модульованого магнітного поля на структурування у слабких розчинах

Робота присвячена вивченню дії змінного магнітного поля, що генерується приладом CleanSymag, на властивості технічної води. В CleanSymag генеруються магнітні поля складної структури з частотами 10-5000 Гц. Технічна вода розглядається як слабкий розчин, в якому головну роль відіграють іони Ca^{++} , Mg^{++} , K^+ , Na^+ та інші. Вивчається вплив магнітного поля на фазові переходи типу «рідкий стан – тверде тіло». Показано, що морфологічні ознаки кристалів осаду, що утворилися із розчинів, які пройшли магнітну обробку, суттєво відрізняються від таких, що випадають із води, яка не піддавалася дії магнітного поля.

Ключові слова: слабкі розчини, кристалізація, омагнічення

E-mail: rada@univ.kiev.ua, vvo@univ.kiev.ua

Магнітна обробка води успішно застосовується в різних галузях техніки протягом тривалого часу. Так, наприклад, розроблено апарати омагнічування води для застосування в теплоенергетичних установках [1-3]. Головна мета такої обробки – зменшення утворення накипу на стінках теплопередаючих поверхонь котлів, радіаторів і т.д. Відомі застосування магнітної активації розчинів для поліпшення технології забарвлення тканин чи шкіри (рівномірність забарвлення, підвищення стійкості кольорів) [4]. Великий інтерес являють дослідження структурної пам'яті води (див., наприклад, [5-7]). Вважається, що на цю «пам'ять» можуть впливати зовнішні фактори (температура, електричний струм, магнітне поле). Як приклад практичного застосування структурованої води, звичайно, називають гомеопатію [8]. Проте треба мати на увазі, що ця галузь медицини не є класичною і містить багато незрозумілого і суперечливого.

Звичайно, для подальшого вдосконалення технічних застосувань велике значення має розв'язок наукового питання – з'ясування головного механізму впливу магнітного поля на структуру води. Цій проблемі присвячено

Ilchenko O. O., student,
Obukhovsky V. V., Dr. Sci., Professor

Influence of the modulated magnetic field on structurization in weak solutions

The work is devoted to studying of variable magnetic field action (which is generated by device CleanSymag), on properties technical water. Magnetic fields of complex structure with frequencies of 10-5000 Hz are generated in CleanSymag. Technical water is considered as a weak solution in which the leading role belong to ions Ca^{++} , Mg^{++} , K^+ , Na^+ and others. Influence of a magnetic field on the phase transitions of type "liquid - solid" is studied. It is shown, that morphological attributes of crystals of deposits which were formed in solutions which have passed magnetic processing, essentially differ from what do not drop out of water not given in to action of a magnetic field.

Key Words: weak solutions, crystallization, magnetization.

декілька сотень публікацій (див. посилання в [1-6]), але загально визначеного розв'язку поки нема. На наш погляд найбільш імовірним є кластерний механізм, запропонований авторами роботи [7].

Одним із висновків опублікованих робіт (див. посилання в [1-2]) є твердження про великий вплив домішок розчиненої речовини на властивості води. Тому більш правильно розглядати технічну (тобто спеціально неочищену) воду як слабкий розчин, в якому головну роль відіграють іони Ca^{++} , Mg^{++} , K^+ , Na^+ та інші.

У зв'язку з тим, що методи неруйнуючого контролю структурного стану розчинів є складними для широкого застосування, на практиці про вплив зовнішніх факторів (наприклад, магнітного поля) судять за непрямыми проявами. Особливо чутливими до структурних змін є фазові переходи типу «рідкий стан – тверде тіло». Зважаючи на їх відносну простоту, такі дослідження є перспективними для пошуку макроскопічних умов реалізації різних типів структуроутворення.

В більшій частині технічних пристроїв з магнітної обробки води використовуються поля

постійних магнітів різної конфігурації чи змінні магнітні поля технічної частоти (50Гц). Одним із виключень є прилад CleanSymag, в якому генеруються магнітні поля з частотами 10÷5000Гц.

Метою виконаної роботи є дослідження впливу змінного магнітного поля, що генерується приладом CleanSymag, на властивості технічної води. Наявність у воді домішок Ca^{++} , Mg^{++} характеризується таким показником як «жорсткість». У дослідженнях використовувалась вода одного походження, що мала жорсткість 14–16°d (за німецькою шкалою жорсткості). Величина жорсткості контролювалась тестами TetraGH і TetraKH.

Прилад CleanSymag являє собою генератор хитної частоти (див. далі), що наводить усередині соленоїду магнітне поле. Усереджена сила струму на виході генератора в усіх дослідах була сталою і складала $\langle i(t) \rangle = 250mA$. Часову розгортку сигналу генератора показано на рис.1. Спектральний склад змінного струму складається із низькочастотної компоненти і високочастотної складової. Остання утворюється генератором змінної в часі частоти (пилкоподібної форми), яка протягом кожного циклу плавно змінюється з $f_1(min) = 1000Гц$ до $f_1(max) = 5000Гц$. Частота

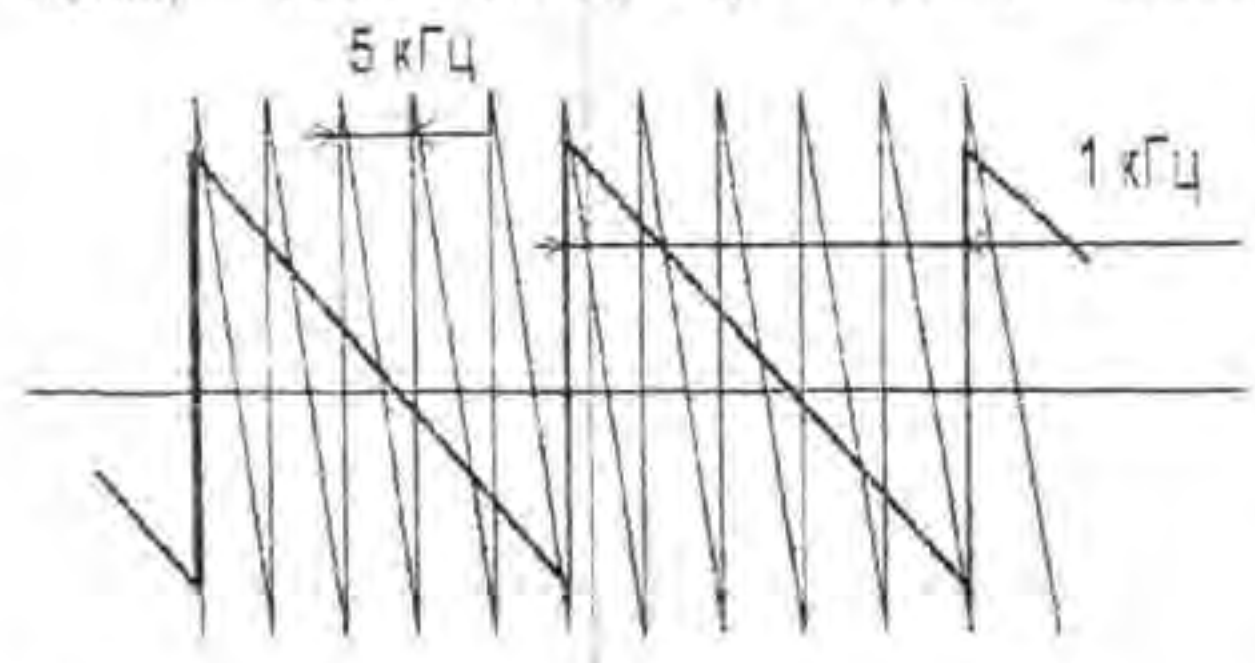


Рис. 1 Часова розгортка сигналу генератора CleanSymag

повторення кожного циклу є сталою $f_2 = 10Гц$. При цьому типове значення амплітуди магнітного поля всередині соленоїда складає $\langle H_z(t) \rangle \sim 10^4 Tл$.

Всередині соленоїда розміщувався посуд циліндричної форми, що вміщував $V_1 = 100мл$ рідини (зовнішній діаметр котушки соленоїда $D_{зовн.} = 32мм$, внутрішній $D_{вн.} = 30мм$). Експериментально вивчалось осадоутворення слабого розчину (технічної води) після кип'ятіння. Час кип'ятіння T_0 дорівнював 5 хвилин. За рахунок випаровування легких фракцій протягом цього часу об'єм розчину

зменшився до $V_2 = 20мл$, що підвищувало концентрацію солей кальцію та магнію приблизно в 5 разів. Останній фактор є сприйнятливим для кристалоутворення (швидше випадає осад, тверді фракції мають більший розмір). Порівнювалось осадоутворення зразків води, що пройшла магнітну обробку з аналогічними зразками, які не проходили магнітної обробки. Осад збирався після остигання води, розміщався на предметному склі оптичного мікроскопа і реєструвався цифровою фотокамерою. Аналізувалися такі дані: кількість осаду, типова форма твердих фракцій (кристалів), середні розміри кристалів.

Результати експериментів проілюстровано на рис. 2,3. На рис. 2 показано типове зернятко осаду, що утворився із зразків води, які до кип'ятіння пройшли магнітну обробку тривалістю $\Delta t_0 = 120 хв$. На рис. 3 показано типове зображення твердих фракцій осаду аналогічних зразків води, яка, однак, не проходила попередньої магнітної обробки. Як

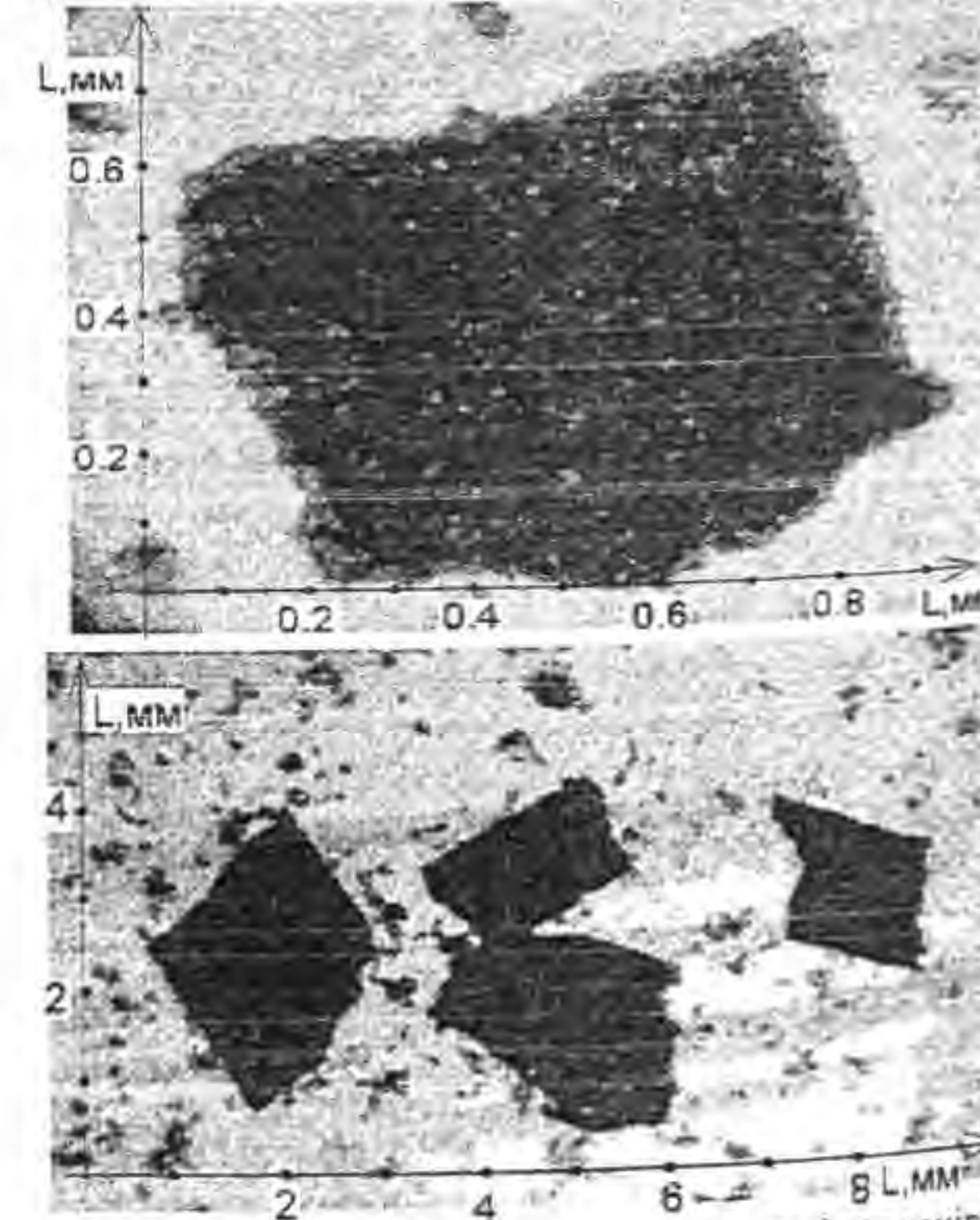


Рис. 2 Зернятка осаду, що утворилися із зразків води, які до кип'ятіння пройшли магнітну обробку тривалістю $\Delta t_0 = 120 хв$

бачимо, морфологічні ознаки кристалів осаду, що утворилися із розчинів, які пройшли магнітну обробку суттєво відрізняються від таких, що не піддавалися дії магнітного поля.

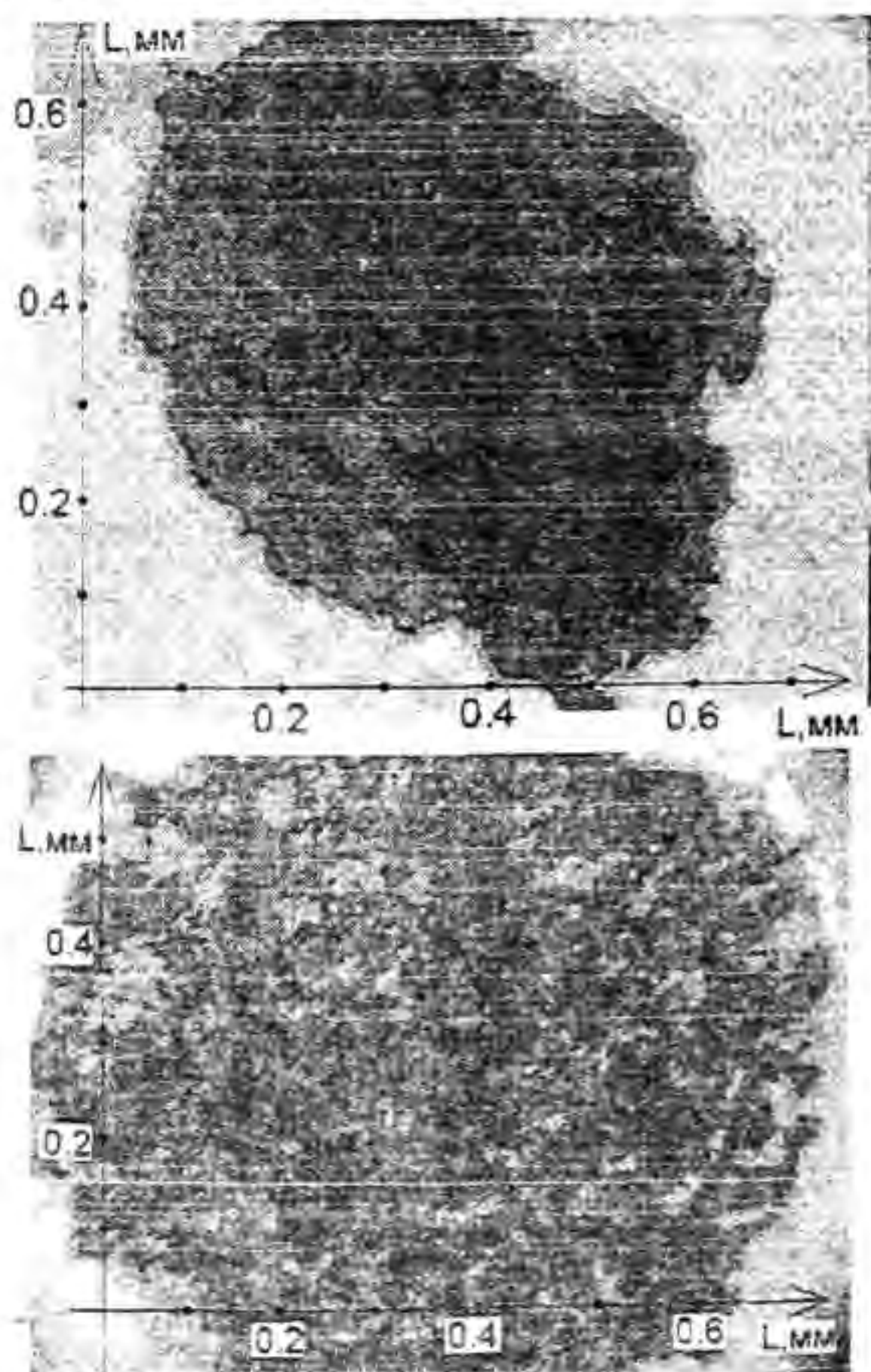


Рис. 3 Зернятка осаду, що утворилися із зразків води, які до кип'ятіння не проходили магнітної

Якщо осад формується із попередньо неомагніченої води, то його складові частини неупорядковані і утворюють конденсат із хаотичною забудовою і округлими краями (рис.3). Зовсім інші ознаки проявляються в осаді, що випадає із попередньо омагніченої води (рис.2). Кристаліти розташовуються більш щільно, упорядковано. Зернятка осаду мають тенденцію кристалізуватися у вигляді прямокутних пластинок. Оскільки зовнішня форма жорстко визначається будовою елементарної комірки, можна дійти висновку: кристалізація домішок в омагніченому та неомагніченому розчинах відбувається в різних сингоніях. Узагальнюючи цей висновок, можна передбачити, що явище кристалізації і в інших випадках може проявляти чутливість до впливу зовнішнього магнітного поля (наприклад, за рахунок спин-залежних ефектів).

Список використаних джерел

1. Миненко В. И. Магнитная обработка водно-дисперсных систем.- Киев: Техника, 1970.

2. Стукалов П. С. Магнитная обработка воды.- Ленинград: Судостроение, 1969.
3. Тебеняхин Е. Ф., Гусев Б. Т. Обработка воды магнитным полем в теплоэнергетике.- М.: Энергия, 1970.
4. Антонченко В. Я., Давыдов А. С., Ильин В. В. Основы физики воды. Киев. Наукова думка, 1991, -668стр.
5. Кокшаров С. А. Магнитно-химическая активация процессов красильно-отделочного производства // Текстильная химия.- 1998.- №1 (13).- С. 64-74.
6. Антонченко В. Я., Давыдов А. С., Ильин В. В. Вода – важнейший носитель информации памяти // Нетрадиционные методы диагностики и терапии.- Киев, 1994.
7. Высоцкий В. И., Корнилова А. А. Физические основы долговременной памяти воды // Вестник московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия.- 2004.- №3 - С. 58-62.
8. Зенин С. В. Структурированное состояние воды как основа управления поведением и безопасностью живых систем. /Автореферат на соиск. учен. степ. док. биол. наук.- М.- 1999.- 42 с.

Надійшла до редколегії 22.04.08

УДК 519.9

Коротков П.А., д. ф.-м. н., професор, Фелінський Г. С., к. ф.-м. н.

Дослідження області від'ємної діелектричної проникності середовищ без центру інверсії

В роботі наведені результати досліджень трьох кристалів без центру інверсії, в яких утворюються області з від'ємними значеннями діелектричної проникності (ДП). Викладена методика обчислень дисперсійної залежності тензора ДП за даними КР вимірювань. Проведена апробація методики шляхом співставлення обчислених спектрів ІЧ відбиття з даними прямих вимірювань. Показано, що кожний з досліджених кристалів має кілька областей з від'ємним значенням діелектричної проникності, що робить їх кандидатами до використання для синтезу мета матеріалів для терагерцового діапазону частот.

Ключові слова: метаматеріали, комбінаційне розсіювання, діелектрична проникність.

*E-mail: felinskiy@yahoo.com

Статтю представив д. ф.-м. н. Данілов В.В.

1. Вступ

Особливості розповсюдження електромагнітних хвиль в умовах високої дисперсії матеріалів, зокрема в області частот, де діелектрична та магнітна проникності набувають від'ємних значень, привертала увагу дослідників протягом майже всього минулого сторіччя. Ще у 1967 р. В. Веселаго передбачив існування матеріалу з від'ємним показником заломлення, який він назвав «лівостороннім» [4]. Він прийшов до висновку, що у такому матеріалі майже всі відомі оптичні явища при розповсюдженні хвиль суттєво змінюються. Зокрема властивості збиральної та розсіювальної лінз стають оберненими, а плоскопаралельна пластинка працює як лінза.

Незважаючи на відсутність відомих природних матеріалів, які одночасно мають від'ємні діелектричну та магнітну проникності, що утворює від'ємний показник заломлення, зараз розгорнуто широкий фронт досліджень зі штучного створення таких середовищ, які отримали назву метаматеріалів. Великі надії на створення метаматеріалів у оптичному діапазоні дослідники покладають на технологію фотонних кристалів [5], яка дозволяє розділити електричну та магнітну сис-

P. A. Korotkov, Doct. Sci., Professor,
G. S. Felinskiy, Ph. D.

Research of negative dielectric permeability area in the media without inversion center

Research results on areas with negative values of dielectric permittivity which being formed in three crystals without the inversion center are discussed in this work. The design procedure to determine the dispersive dependence of dielectric permittivity tensor using the measured Raman data is stated. The technique approbation is carried out by comparison of calculated IR reflection spectra with the data of direct measurements. It is shown, that each of studied crystals has several areas with negative values of dielectric permittivity and such crystals may be the candidates at metamaterials synthesis for use in the terahertz frequency range.

Key Words: Metamaterials, Raman scattering, dielectric permittivity.

теми середовища шляхом періодичного чергування макромолекул з відповідними властивостями. Результати останніх досягнень зі створення метаматеріалів для НВЧ [12] та оптичного діапазонів [13] свідчать про перспективи їх широкого застосування.

В даній роботі викладена методика та результати досліджень областей від'ємної діелектричної проникності кількох модельних кристалів без центру інверсії, молекули яких можуть стати будівельним матеріалом для створення діелектричної підсистеми у метаматеріалі для інфрачервоної області оптичного діапазону.

2. Властивості полярних фононів у багатоатомних кристалах.

Взаємодія світла з полярними коливаннями ґратки описується в рамках напівкласичного підходу, в якому квантово-механічне середнє нормальної коливальної координати $\hat{W}$ знаходиться як $\bar{W} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{W})$, де $\hat{\rho}$ – оператор густини, $\hat{W}$ – оператор координати, а електромагнітні поля підкоряються класичним рівнянням. Рівняння руху для $\hat{W}$ мають вигляд:

$$\ddot{W} + \frac{2}{T_2}\dot{W} + \frac{1}{T_2^2}W = \frac{1}{\hbar^2} \langle [[\hat{W}, \hat{H}], \hat{H}] \rangle, \quad (1)$$

де T_2 – час поперечної релаксації, квадратними дужками позначений комутатор операторів, а трикутними – квантово-механічне усереднення. Для дипольно-активного коливання повний гамільтоніан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ розділяється на незбурену частину квантового осцилятора $\hat{H}_0 = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2)$ та гамільтоніан електричної дипольної взаємодії $\hat{H}'$, який дорівнює:

$$\hat{H}' = -\dot{p}E = -ZE\dot{W} = -ZE \left(\frac{\hbar}{2M\omega} \right)^{1/2} (a + a^\dagger). \quad (2)$$

Тут M – зведена маса двох підґраток, ω – власна частота коливання, p – дипольний момент, який виникає як результат відносного зсуву W двох підґраток, Z – ефективний заряд, E – макроскопічне електричне поле; $a^\dagger$, a – оператори народження та знищення фононів. Прямі обчислення комутатора у правій частині (1) дають [1]: $\langle [[\hat{W}, \hat{H}], \hat{H}] \rangle = \hbar^2 \omega^2 W - \hbar^2 ZE / M$ і для випадку слабого загасання $\omega^2 \gg 1/T_2^2$, визначивши сталу загасання як $\Gamma = 2/T_2$, загальний вигляд квантового рівняння (1) повністю співпадає з класичним рівнянням для вимушених коливань осцилятора під дією зовнішнього електричного поля.

У анізотропних кристалах без центру симетрії картина фононного спектра має досить складний характер. За рахунок анізотропії силових сталих частоти коливань атомів у різних напрямках стають суттєво різними. У кристалах ромбічної симетрії і вище можна вибрати систему головних осей, що співпадає з кристалографічними осями. Для кристалів, які мають N_k коливальних мод вводять набір нормальних координат W_i^k , ($i=1-N_k$). Тоді:

$$\ddot{W}_i^k + \Gamma_i \dot{W}_i^k + \omega_{ik}^2 W_i^k = \frac{Z_i}{M_i} E_k \quad (3)$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{N_k} Z_i W_i^k + \frac{\epsilon_k^\infty - 1}{4\pi} E_k, \quad (4)$$

де P_k – компонента поляризації, а ϵ_k^∞ – головне значення діелектричного тензора на оптичних частотах. Дисперсійну залежність $\epsilon_k(\omega)$ знаходять з матеріального рівняння:

$$\epsilon_k E_k = E_k + 4\pi P_k \quad (5)$$

шляхом спільного розв'язку (3) та (4).

$$\epsilon_k(\omega) = \epsilon_k^\infty + \sum_{i=1}^{N_k} \frac{S_{ik} \omega_{ik}^2}{\omega_{ik}^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_i}, \quad (6)$$

де $S_{ik} = 4\pi Z_i^2 / \omega_{ik}^2$ – сила осцилятора i -ого коливання ґратки, що виявляється з поляризацією вздовж k -ої осі.

Параметри дисперсійної формули (6) – сили осциляторів S_{ik} , частоти поперечних коливань ω_{ik} та сталі загасання Γ_i можна виміряти безпосередньо за спектрами КР для полярних коливань. Компоненти тензора діелектричної проникності (6) можна виразити у загальному вигляді через частоти подовжніх ω_{ik}^L та поперечних ω_{ik}^T коливань у вигляді співвідношення Куросави [6]:

$$\epsilon_k(\omega) = \epsilon_k^\infty \prod_{i=1}^{N_k} \frac{(\omega_{ik}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{ik}^T)^2 - \omega^2}, \quad (7)$$

яке, власне кажучи, є справедливим у наближенні відсутності загасання фононів $\Gamma_i=0$. Саме у цьому наближенні

$$S_k = \epsilon_k^\infty \left[\left(\frac{\omega_{ik}^L}{\omega_{ik}^T} \right)^2 - 1 \right] \prod_{j \neq i} \frac{(\omega_{jk}^L)^2 - (\omega_{jk}^T)^2}{(\omega_{jk}^T)^2 - (\omega_{ik}^T)^2}, \quad (8)$$

де для спрощення запису опущено індекс k для позначення поляризації.

2.1. Дисперсія полярних фононів

Послідовний підхід до спонтанних полярних коливань у кристалі, які виявляються у КР, проводиться шляхом розгляду зсувів ґратки $\bar{W}'$ на базі флуктуаційно-дисипативної теореми (ФДТ) [2], тобто як величини, що має флуктуації. В кристалах без центру симетрії такі зсуви ґратки, взагалі кажучи, супроводжуються електричним полем, $\bar{E}$, яке також є величиною, що має флуктуації, а його середнє значення $\langle |\bar{E}|^2 \rangle_\omega$ має вигляд [2,3,7]:

$$\langle |\bar{E}|^2 \rangle_\omega = \frac{\hbar}{\pi} [n(\omega) + 1] \text{Im}[\alpha^{\text{res}}(\omega)], \quad (9)$$

де $n(\omega)$ – фактор Бозе-Ейнштейна; $\text{Im}[\alpha^{\text{res}}(\omega)]$ – уявна частина узагальненої сприйнятливості.

Відповідно до ФДТ, можна формально ввести поляризацію $\bar{P}_{\text{res}}$ як узагальнену силу, відгуком на яку служать розглянуті флуктуації електричного поля [7]. Для знаходження узагальненої сприйнятливості скористаємося рівняннями Максвелла, які приводять до співвідношення:

$$\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \bar{P}' = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \bar{E} - \bar{k}(\bar{k}\bar{E}), \quad (10)$$

де поляризація $\bar{P}' = \bar{P} + \bar{P}_{\text{res}}$ є векторною сумою поляризації $\bar{P}$ та $\bar{P}_{\text{res}}$, які виникають у середовищі, причому $\bar{P}$ задовольняє співвідношенню (5).

Враховуючи (5), отримуємо вираз для компонент $P_j^{\text{зовн}}$:

$$\frac{4\pi\omega^2}{c^2} P_j^{\text{зовн}} = \left(k^2 - \varepsilon_j \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_j - k_j (\vec{k} \vec{E}), \quad (11)$$

з якого випливає, що:

$$\alpha_{jj}^{\text{зовн}} = \frac{c^2}{4\pi\omega^2} \left[\left(k^2 - \varepsilon_j \frac{\omega^2}{c^2} \right) \delta_{jj} - k_j k_j \right]. \quad (12)$$

Якщо (10) представити у тензорному вигляді – $E_j = T_{jj} P_j^{\text{зовн}}$, то тензор $T_{jj} = (\alpha_{jj}^{\text{зовн}})^{-1}$ є оберненим до тензора узагальненої сприйнятливості (12) і має наступні компоненти:

$$T_{11} = -\frac{4\pi}{D} \left\{ k^2 k_1^2 - [\varepsilon_2 (k_1^2 + k_3^2) + \varepsilon_3 (k_1^2 + k_2^2)] \frac{\omega^2}{c^2} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\omega^4}{c^4} \right\}, \quad (13)$$

$$T_{12} = -\frac{4\pi}{D} k_1^2 k_2^2 \left(k^2 - \varepsilon_3 \frac{\omega^2}{c^2} \right) = T_{21},$$

$$D = k^2 (\varepsilon_1 k_1^2 + \varepsilon_2 k_2^2 + \varepsilon_3 k_3^2) - [\varepsilon_1 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) k_1^2 + \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) k_2^2 + \varepsilon_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) k_3^2] \frac{\omega^2}{c^2} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\omega^4}{c^4}. \quad (14)$$

Чотири компоненти T_{jj} , що залишилися, можна отримати шляхом простої циклічної перестановки індексів.

Дисперсійні співвідношення для фононів, власне кажучи, знаходяться у максимумах функції $1/D(\omega)$. Однак, якщо знехтувати загасанням фононів $\Gamma_i=0$, то ця умова значно спрощується і набуває вигляду найпростішого виразу – $D=0$.

Зокрема для кубічних кристалів, у яких $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon$, дисперсія фононів визначається добре відомими коренями рівняння $\varepsilon(k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2)^2 = 0$, яке має не вироджений корінь $\varepsilon=0$ для подовжнього фонона та подвійно вироджений корінь $k^2 c^2/\omega^2 = \varepsilon$ для поперечного фонона. Якщо скористатися (7) для випадку одного полярного коливання, коли $\omega_{jk}^T = \omega_0$, то ці дисперсійні співвідношення матимуть вигляд:

$$\omega = \omega_L = \omega_0 (\varepsilon_0 / \varepsilon^\pi)^{1/2}, \quad (15)$$

та

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0 - \omega^2 \varepsilon^\pi}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (16)$$

У випадку одноосьових кристалів, для яких $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp$ та $\varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel$, враховуючи (14) умова $D=0$ дає наступне рівняння:

$$D = (k^2 - \varepsilon_\perp \omega^2 / c^2) [\varepsilon_\perp (k_1^2 + k_2^2) + \varepsilon_\parallel k_3^2 - \varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp \omega^2 / c^2] \quad (17)$$

Відповідно, за наявності у кристалі одного полярного коливання (тобто $i=1$), в (7) сприйнятливості матиме полюси при:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega_{\perp}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{\perp}^T)^2 - \omega^2}, \quad (18)$$

що є дисперсійним співвідношенням для звичайного фонона та при

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\left[\frac{(\omega_{\parallel}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{\parallel}^T)^2 - \omega^2} \right] \left[\frac{(\omega_{\perp}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{\perp}^T)^2 - \omega^2} \right]}{\left[\frac{(\omega_{\parallel}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{\parallel}^T)^2 - \omega^2} \right] \cos^2 \theta + \left[\frac{(\omega_{\perp}^L)^2 - \omega^2}{(\omega_{\perp}^T)^2 - \omega^2} \right] \sin^2 \theta}, \quad (19)$$

яке описує дисперсію незвичайного фонона. У рівностях (18) та (19) прийняті позначення:

$$\omega_{\parallel,\perp}^L = \omega_{\parallel,\perp}^T (\varepsilon_{\parallel,\perp}^0 / \varepsilon_{\parallel,\perp}^\pi)^{1/2}, \quad (20)$$

$$k_1^2 + k_2^2 = k_\perp^2 = k^2 \sin^2 \theta; \quad k_3^2 = k_\parallel^2 = k^2 \cos^2 \theta, \quad (21)$$

де θ кут між хвильовим вектором $\vec{k}$ та оптичною віссю кристалу.

Таким чином, застосування ФДТ дозволяє у випадку відсутності загасання отримати аналітичні залежності для дисперсійних співвідношень полярних коливань кристалічної ґратки як у фононній, так і в поляритонній області для кристалів довільної симетрії, а також описати поведінку фононів у загальному випадку наявності загасання. Дійсно, поблизу від резонансу, тобто в районі власних збуджень кристалу, флуктуації коливань ґратки та електричного поля $E(t)$ стають максимальними. Тому реальні поляритонні криві знаходяться як максимуми за $\vec{k}$ функції $\text{Im}(\alpha^{\text{зовн}})$, яка фігурує у формулі ФДТ. Ця умова є еквівалентною до знаходження максимуму функції $\text{Im}[1/D(\omega)]$.

Наслідком співвідношень (18) та (19) є те, що в одноосьовому кристалі існують звичайний та незвичайний фонони, причому вони розщеплюються на чисто подовжнє та поперечне коливання тільки при $\theta=0$ або $\theta=90^\circ$. Частоти поперечних довгохвильових фононних коливань визначаються з (16) або (18). На частоті подовжнього коливання, що знаходиться з (20), відповідні компоненти внесків до діелектричної проникності кристалу обертаються на нуль. З чисто подовжнім коливанням зв'язане макроскопічне електричне поле, тоді як для чисто поперечного фонона воно відсутнє. Криві фононної дисперсії мають по-

двійно вироджене поперечне коливання при $\theta=0$, яке розщеплюється на два при 90° .

2.2. Особливості КР на полярних фононах у кристалах без центру інверсії

Поляризацію на стоксовій частоті ω_s , як відомо [3,7], можна записати так:

$$P_i = \alpha_{ijk}^m E_j W_k^m + \xi_{ijk} E_j E_k^*, \quad (22)$$

де за індексами, що повторюються (тобто m, j та k), береться сума. Коефіцієнти α_{ijk}^m та ξ_{ijk} є незалежними і для даного кристалу визначаються експериментально шляхом вимірювань перерізу КР та ефективності генерації другої гармоніки (ГДГ). За означенням, тензор КР – це $\alpha_{ijk}^m = (\partial \alpha_{ij} / \partial W_k^m) |_{W_k^m=0}$. Якщо представити (22) у вигляді:

$$P_i = [\alpha_{ijk}^m \beta_k^m + \xi_{ijk}] E_j E_k^*, \quad (23)$$

то у квадратних дужках фігурує тензор нелінійної сприйнятливості другого порядку. Резонансна поведінка нелінійної сприйнятливості за цих умов явно проявляється у множниках β_k^m .

Інтенсивність спонтанного комбінаційного розсіяння (СКР) світла на стоксовій частоті визначається наведенням у середовищі нелінійної поляризації $P_{NL}(\omega_s)$. Ця поляризація збуджується полем лазерної хвилі з частотою ω_p в результаті взаємодії зі спонтанними коливаннями ґратки з частотою ω . Поперечний переріз розсіяння отримуємо, враховуючи випромінювання від осцилюючого диполя $P_{NL}(\omega_s)$, і він має вигляд:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega_s} = \frac{n_s \omega_s^3 \omega_p V^2 \langle |P_{NL}|^2 \rangle_{\omega_s}}{n_p c^4 |E_p|^2}, \quad (24)$$

де V – об'єм, що розсіює, n_s та n_p – показники заломлення на частотах ω_s та ω_p .

На практиці безпосередньо вимірюється ефективність КР:

$$I = \frac{\omega_p}{A\omega_s} \left[\int \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega_s} \right) d\omega_s \right] \Delta\Omega, \quad (25)$$

де $\Delta\Omega$ – тілесний кут, який обмежений спектрометром, A – освітлена площа кристала. Величина A разом з об'ємом розсіяння V визначає довжину розсіяння $L=V/A$.

Оскільки розсіяння світла відбувається при змішуванні його з флуктуаціями зсувів у кристалі, то поперечний переріз розсіяння, відповідно до (24), зв'язаний із середньоквадратичними флуктуаціями нелінійного осцилятора P_{NL} . Ці флуктуації можна визначити на основі ФДТ, якщо відомою є узагальнена сприятливість або фу-

нкція відгуку на зовнішню силу. Тоді, з урахуванням співвідношення (23), (24) набуде вигляду:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega_s} = \frac{n_s V^2 \omega_s^3 \omega_p}{n_p c^4} \langle |e_i^s e_j^p (\alpha_{ijk}^m W_k^m + \xi_{ijk} E_k^*)|^2 \rangle_{\omega_s}, \quad (26)$$

де $\bar{e}^p, \bar{e}^s$ – вектори поляризації лазерного та розсіяного світла.

Колівні амплітуди W_{mk} збуджуються спонтанно. Тому їх розглядають як ті, що виникають під дією фіктивної сили F_{mj}^{anom} й вводять функцію механічного відгуку [7]:

$$W_i^m = T_{ij}^{nm} F_{mj}^{anom}. \quad (27)$$

Тензор T_{ij}^{nm} визначають з рівнянь руху (7)-(9) у вигляді:

$$T_{ij}^{nm} = \beta_n^m \beta_j^m T_{ij} + (\beta_n^m / Z_n) \delta_{nm} \delta_{ij}, \quad (28)$$

де β_n є лінійним відгуком зсуву W_n на макроскопічне поле E_n , тобто:

$$W_i^n = \beta_i^n E_i, \quad (29)$$

причому, згідно до лінійних рівнянь руху, для W_n отримуємо:

$$\beta_i^n = \frac{Z_n}{M_n (\omega_{jn}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j)}. \quad (30)$$

Таким чином, диференціальний переріз КР для поперечних коливань набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega_s} = & \frac{4\hbar n_s V \omega_s^3 \omega_p}{n_p c^4} [n(\omega) + 1] \times \\ & \times \text{Im} \left\{ \frac{(\alpha_{ijk}^m \beta_k^m + \xi_{ijk}) (\alpha_{ijk}^{m*} \beta_k^{m*} + \xi_{ijk}^*)}{k^2 c^2 / \omega^2 - \epsilon_j} + |\alpha_{ijk}^m|^2 \frac{\beta_k^m}{Z_n} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

Оскільки у 90° розсіянні бере участь чисто фононне коливання, для якого $k^2 c^2 / \omega^2 \gg \sqrt{\epsilon_j}$, то

(31) матиме вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega_s} = & \frac{4\hbar n_s V \omega_s^3 \omega_p}{n_p c^4} [n(\omega) + 1] \times \\ & \times |\alpha_{ijk}^m|^2 \text{Im}(\beta_n^m / Z_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Форма лінії КР на поперечних фононах кристала, як бачимо, визначається частотною залежністю уявної частини β_n^m / Z_n . Наслідком (32) є те, що для досить вузьких ліній, які характерні для багатьох кристалів, зокрема для ніобату літію, коли можна вважати, що $\Gamma_m / \omega_m \ll 1$, форма лінії є близькою до лорентцевої. Суттєвим для нашого розгляду є той факт, що напівширина лінії КР на поперечному фононі безпосередньо зв'язана зі сталою загасання, яка входить до дисперсійної формули (6).

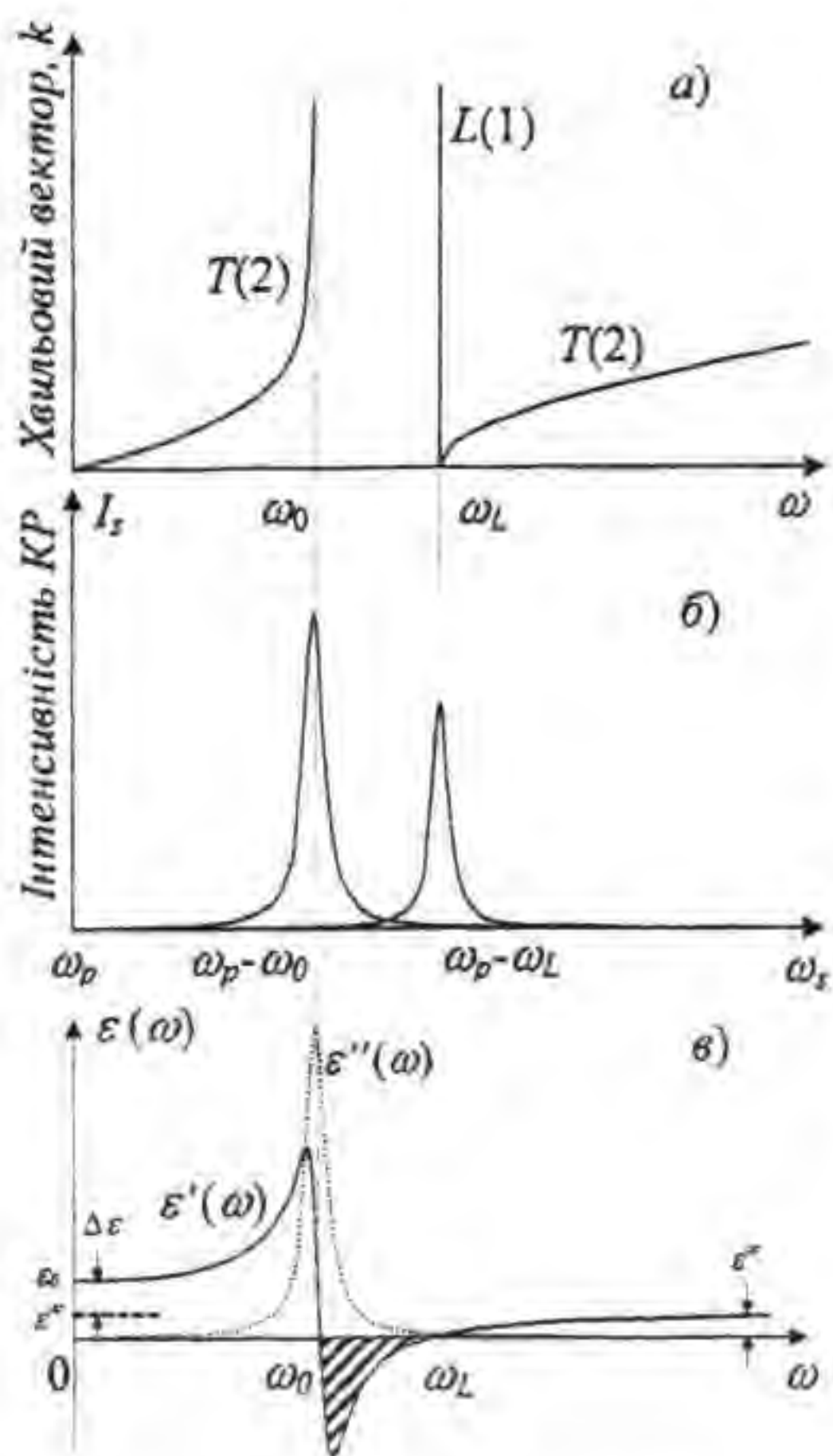


Рис.1. Динамічні властивості кристалічної ґратки двохатомного кубічного кристала

а) дисперсійні криві; б) стоксів спектр КР; в) залежність $\epsilon = \epsilon(\omega)$

Дисперсійну залежність $\omega = \omega(k)$ показано на рис. 1а. Буквами L і T позначено поздовжню та поперечні фононні гілки, відповідно. Цифри у дужках дають виродження гілок. Далеко від дисперсійної частоти ω_0 ($\omega \ll \omega_0$ або $\omega \gg \omega_0$), поперечна гілка на рис. 1а є прямою лінією, яка відповідає закону дисперсії для чистого фотона у кристалі. Асимптота поблизу вертикальної лінії з $\omega = \omega_0$ для поперечної гілки – це чисто механічні збудження ґратки (поперечний фонон), які не мають фотонної складової. Змішане фотон-фононне збудження є поляритоном.

Обидва L і T фонони у кристалі без центру інверсії можуть бути активними у КР. Це призводить до існування двох стоксових (s) та двох антистоксових (as) ліній у КР, які мають зміщені частоти від частоти ω_p лазерної лінії помпування на величини ω_0 та ω_L (рис. 1б). Для випадку відсутності загасання частоти ω_0 та ω_L зв'язані між

собою співвідношенням (15), яке є досить загальним та допускає узагальнення (7) на будь-яке число ІЧ-активних гілок у кристалах з довільною симетрією. Область від'ємного значення дійсної частини діелектричної проникності, яка заштрихована на рис. 1в, розташована між ω_0 та ω_L і відома у спектроскопії кристалів, як смуга залишкових променів.

Одночасно фонони поперечної гілки є активними в інфрачервоному (ІЧ) поглинанні та проявляються в спектрах ІЧ відбиття. Для дисперсійного аналізу, як правило, використовуються спектри ІЧ відбиття, оскільки велике загасання потребує використання в експериментах монокристалічних плівок субмікронної товщини, що пов'язане зі значними труднощами. За спектрами ІЧ відбиття, як і в КР, можна визначити дисперсійну частоту ω_0 , сталу загасання Γ , а також внесок $\Delta\epsilon$ смуги, що досліджується, у низькочастотну діелектричну проникність (рис. 1в). Слід зауважити, що КР дослідження, мають певні переваги [3,8] щодо зручності та точності вимірювань.

В межах осциляторної моделі для одного коливання дисперсійну залежність $\epsilon(\omega)$ (б) та комплексний показник заломлення $\tilde{n} = n - i\kappa$ записують як:

$$\tilde{n}^2 = \epsilon(\omega) = \epsilon^\infty + \frac{\Delta\epsilon \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}, \quad (33)$$

де $\Delta\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon^\infty$ - внесок смуги поглинання у низькочастотну діелектричну проникність ϵ_0 .

Виміряне значення коефіцієнта відбиття R за нормального падіння зв'язане з показником заломлення n та коефіцієнтом екстинції κ :

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}, \quad (34)$$

Параметри дисперсійної формули $\Delta\epsilon$, ω_0 та Γ вимірюються безпосередньо із спектрів КР або знаходяться числовими методами з умови найкращої апроксимації кривої відбиття. В наближенні, коли нехтують поглинанням, частоти подовжніх фононів знаходять з умови нульового внеску смуги до низькочастотної діелектричної проникності. У експериментах параметри дисперсії діелектричної проникності вимірювались за спектрами КР, а криві ІЧ відбиття використовувались для контролю наступних обчислень.

На завершення викладу теорії відмітимо, що у резонансній області, коли $\kappa \neq 0$, амплітуда $\vec{E}$ світлової хвилі у кристалі матиме поглинання за законом $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z}$. Коефіцієнт поглинання до-

рівнює $\alpha = 2\pi/\lambda$, де ν – хвильове число для оптичної хвилі у вільному просторі, яка розповсюджується у кристалі. Ефективну довжину поглинання

характеризують величиною $l_{ef} = 1/\alpha$, яка дорівнює довжині кристала, на якій амплітуда хвилі зменшується у e разів.

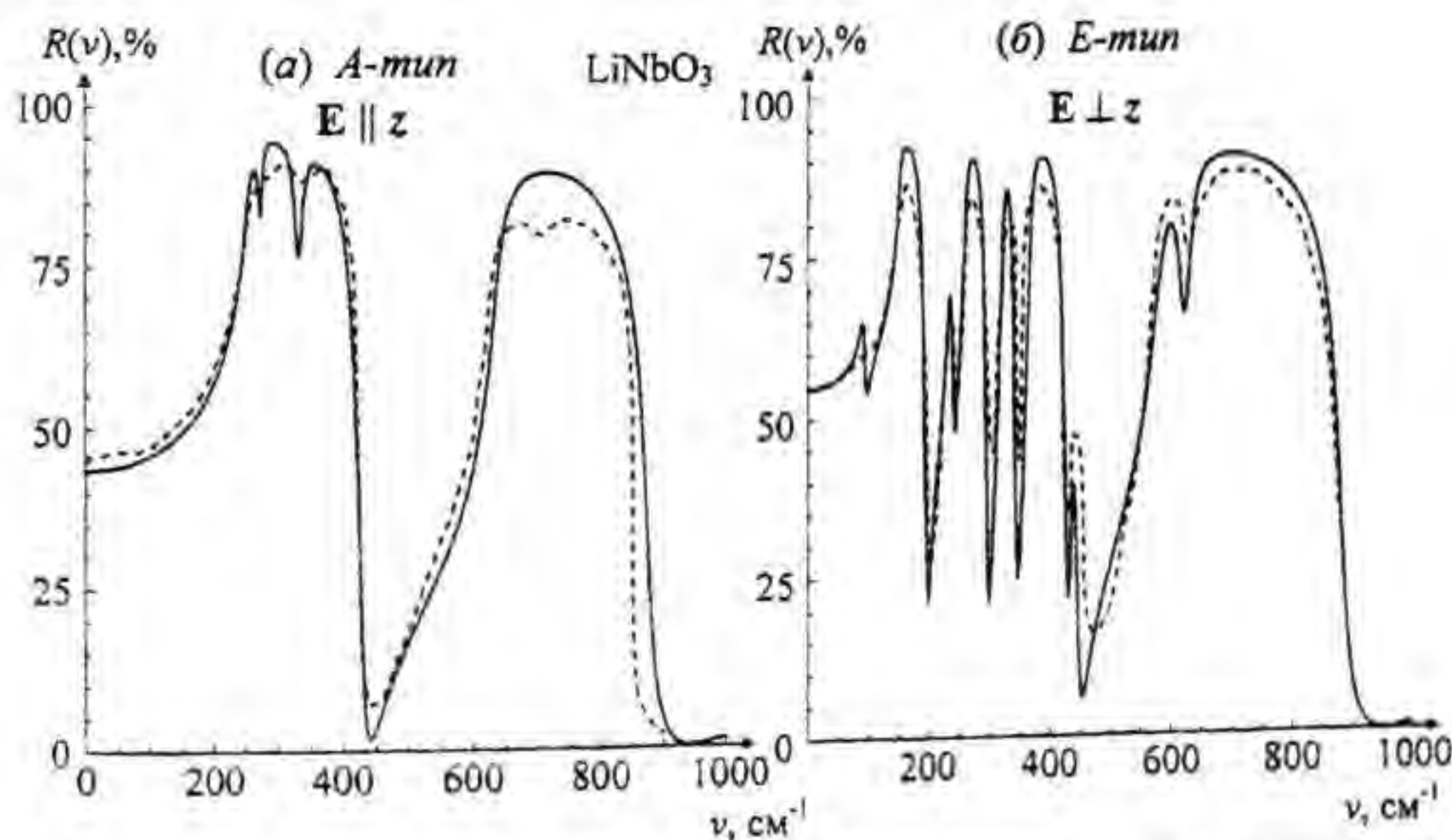


Рис.2. Виміряні (пунктир) та обчислені за даними КР (суцільна лінія) спектри ІЧ відбиття у кристалі ніобату літію для паралельної (а) та перпендикулярної (б) поляризації по відношенню до оптичної осі кристала.

3. Експериментальні дослідження областей від'ємної діелектричної проникності

Існує широке коло нецентросиметричних кристалів, полярні коливання яких проявляються у спектрах КР і є добре дослідженими, зокрема у попередніх роботах [9-11]. До них відносяться ніобат, танталат та йодат літію. Ці кристали є діелектриками з $\mu=1$, але мають широкі смуги залишкових променів, і у проміжку між ТО та LO частотами коливань їх діелектрична проникність може досягати значних від'ємних значень. Саме ця обставина може слугувати підставою для включення перерахованих кристалів до списку можливих кандидатів для побудови діелектричної підсистеми майбутнього метаматеріалу для ІЧ області оптичного спектра.

Для апробації методики дисперсійного аналізу діелектричної проникності (ДП) за даними КР вимірювань на основі теорії, викладеної в розділі 2, обчислено спектри ІЧ відбиття для модельного кристалу ніобату літію. На рис.2 наведено порівняння обчислень, зображених суцільною кривою, з даними прямих вимірювань, нанесених пунктиром та взятим з роботи [12]. За визначеними частотами та півширина-

ми ліній КР для всіх поперечних та подовжніх полярних коливань у ніобаті літію визначалися всі параметри дисперсії ДП за формулою (6) та дійсна і уявна частина комплексного показника заломлення, а спектр ІЧ відбиття визначався відповідно підставкою цих даних у (34).

Найбільші відмінності обчисленого спектра від експериментального спостерігаються для поляризації $E \parallel z$ в області $\sim 700 \text{ cm}^{-1}$, де провал на експериментальному спектрі зв'язаний з двофотонним поглинанням полярним коливанням A_1 з $\omega_T = 334 \text{ cm}^{-1}$. Зважаючи на те, що в основі моделювання лежала теорія однофотонних процесів, то узгодження між розрахунковими та виміряними спектрами можна вважати цілком задовільним.

Слід звернути увагу на те, що спектри відбиття в обох напрямках поляризації поділяються на дві частини, низькочастотну область $100-450 \text{ cm}^{-1}$ традиційно відносять до граткових коливань, а високочастотну $450-1000 \text{ cm}^{-1}$ – до молекулярних коливань у середині елементарної комірки кристала. Саме в таких областях, як ми побачимо далі, ДП досліджуваних кристалів, зокрема ніобату літію, досягає від'ємних значень.

3.1. Области від’ємної ДП у LiNbO₃

Кристал ніобату літію завдяки широкому застосуванню та пов’язаним з цим інтенсивним дослідженням став модельним середовищем, зокрема у спектроскопії КР. Кристал має загалом 13 полярних коливань: 4A₁(z) та

9E(x,y), де в дужках вказаний напрямок дипольного моменту, зв’язаного з даним коливанням. Спектроскопічні параметри вібраційних мод представлені у таблиці 1, а області з $\epsilon'(\omega)<0$ – на рис.3.

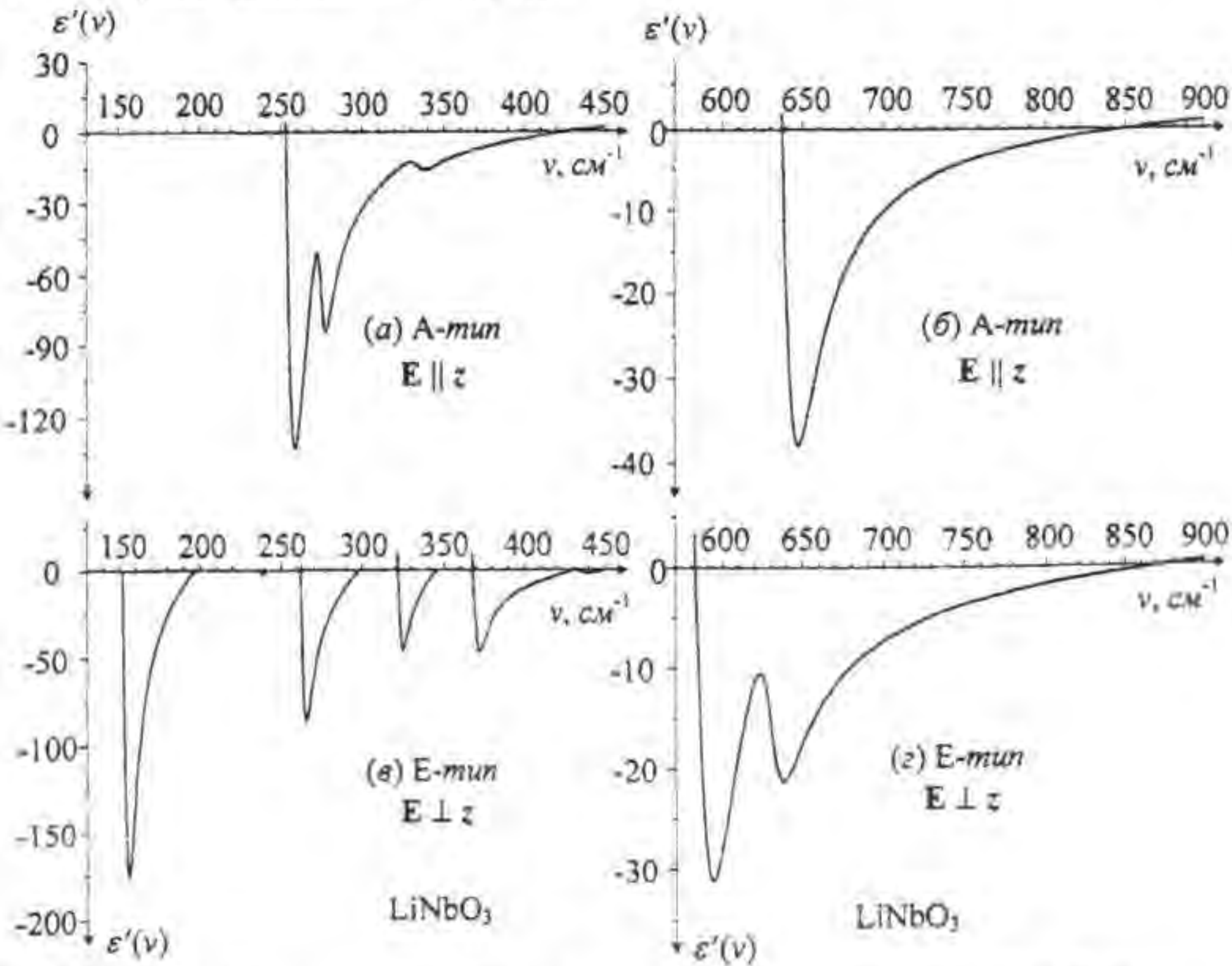


Рис.3. Области від’ємних значень ДП у кристалі LiNbO₃ для паралельної (а, б) та перпендикулярної (в, г) поляризації.

Таблиця 1.
Параметри дисперсії ДП у ніобаті літію.

№	ω^T (cm ⁻¹)	ω^L (cm ⁻¹)	Γ (cm ⁻¹)	S	α , cm ⁻¹	$l_{\text{эф}}$, мкм
A ₁	253	273	12	15,1	21800	0,46
A ₂	275	331	7	1,20	15700	0,63
A ₃	334	428	14	0,28	8600	1,16
A ₄	637	874	21	2,6	27300	0,37
$\epsilon^\infty_{ }=4,56$		$\epsilon^0_{ }=23,8$				
E ₁	92	95	8	3,68	1300	7,58
E ₂	152	197	8	21,3	15000	0,67
E ₃	236	243	8	2,17	6600	1,52
E ₄	262	298	7	4,7	17500	0,57
E ₅	322	345	6	1,78	15400	0,65
E ₆	368	428	8	1,85	17600	0,57
E ₇	436	448	10	0,08	4070	2,45
E ₈	582	621	24	2,9	24300	0,41
E ₉	630	881	21	0,59	19700	0,51
$\epsilon^\infty_{\perp}=4,91$		$\epsilon^0_{\perp}=44,1$				

Кристал має значну анізотропію як у видимій області ($n_o=2,2967$, $n_e=2,2082$ для $\lambda=0,63$ мкм), так і на нульовій частоті ($\epsilon_{||}=23,0$; $\epsilon_{\perp}=44,1$), яка добре виражена і в резонансній області дипольних коливань, що безпосередньо видно на рис.3.

Для хвилі з поляризацією E || z існує 2 суцільні смуги частот, по одній в кожній із областей коливань ґратки та молекулярних коливань, для яких $\epsilon'<0$. Для поляризації хвилі з E ⊥ z фононні коливання ґратки розривають область $\epsilon'<0$ на щонайменше чотири окремі смуги, в той час як в області молекулярних коливань смуга залишається безперервною, хоча і має 2 яскраво виражені мінімуми. Мінімальні значення ϵ' є досить значними і можуть перевищувати сотню одиниць за абсолютною величиною. В кожній із областей з $\epsilon'<0$ диспе-

рсія є досить значною і вона щонайменше один раз змінює свій знак в межах цієї області.

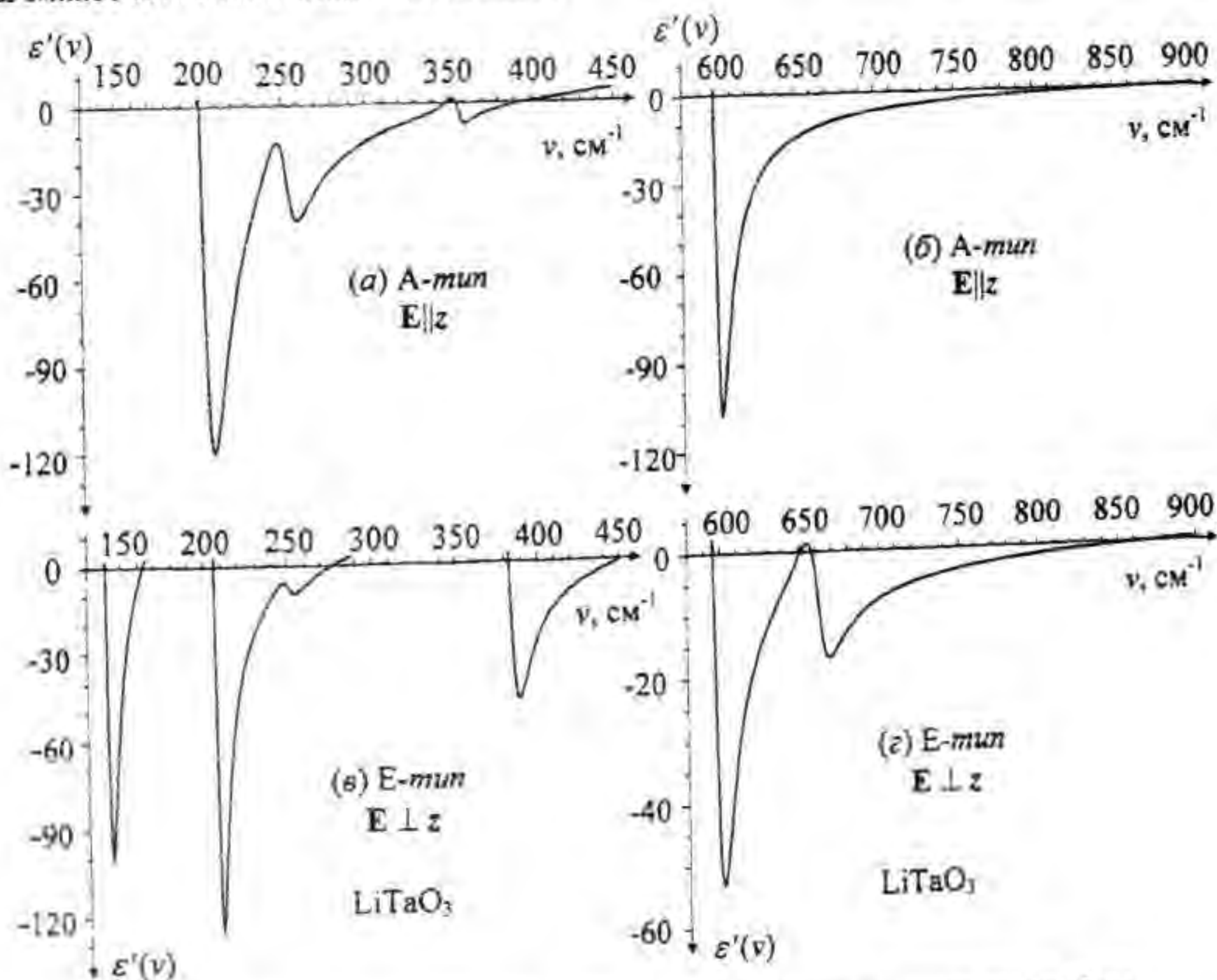


Рис.4. Области від'ємних значень ДП у кристалі LiTaO_3 для паралельної (а, б) та перпендикулярної (в, г) поляризації.

Таким чином, кристал LiNbO_3 , за нашими даними, має дві області хвильових чисел приблизно $250\text{--}450\text{ cm}^{-1}$ та $650\text{--}850\text{ cm}^{-1}$, в яких $\epsilon' < 0$ незалежно від поляризації випромінювання. Це означає, що ІЧ випромінювання в діапазонах частот $7,5\text{--}13,5\text{ ТГц}$ та $19,5\text{--}25,5\text{ ТГц}$ має розповсюджуватися в умовах, коли $\epsilon' < 0$.

3.2. Области від'ємної ДП у LiTaO_3

Кристал танталату літію завдяки ізоморфності з розглянутим кристалом ніобату літію має близькі з ним параметри коливних мод. Ці параметри представлені у таблиці 2, а про області існування від'ємних значень ДП у цьому кристалі дає уявлення рис.4.

Танталат літію, як і ніобіт літію, має загалом 13 полярних коливань: $4A_1(z)$ та $9E(x,y)$. Для обох напрямків поляризації області з $\epsilon' < 0$ утворюють як граткові, так і молекулярні коливання, але для поляризації $E \perp z$ смуги, що утворені коливаннями E_3 ($\omega_3=206\text{ cm}^{-1}$) та E_4 ($\omega_4=251\text{ cm}^{-1}$), об'єднуються в одну смугу.

Таблиця 2.

Параметри дисперсії ДП у танталаті літію.

№	ω^r (cm^{-1})	ω^l (cm^{-1})	Γ (cm^{-1})	S	α , cm^{-1}	l_{eff} мкм
A_1	201	245	15	20,8	16650	0,6
A_2	253	347	15	2,16	10500	0,95
A_3	356	399	8	0,22	6600	1,52
A_4	600	864	8	2,92	41700	0,24
$\epsilon_{\parallel}^{\infty}=4,15$ $\epsilon_{\parallel}^0=30,2$						
E_1	74	80	19	6,1	930	10,8
E_2	140	163	6	11,0	9550	1,05
E_3	206	248	6	7,9	15600	0,64
E_4	251	278	10	0,24	5060	1,97
E_5	316	318	6	0,12	1950	5,13
E_6	383	452	12	3,2	19000	0,53
E_7	462	474	6	0,08	5670	1,76
E_8	596	648	11	2,1	31800	0,31
E_9	662	870	15	0,45	18100	0,55
$\epsilon_{\perp}^{\infty}=4,14$ $\epsilon_{\perp}^0=35,3$						

В результаті для цієї поляризації $\epsilon' < 0$ реалізується в трьох окремих смугах замість чотирьох смуг, які спостерігалися у ніобаті літію. В області молекулярних коливань, навпаки, суцільна смуга, яка спостерігалася у ніобаті літію, розділяється на дві окремі смуги.

Найбільш помітною відмінністю танталату літію від ніобату літію є зсув частотного положення смуг з $\epsilon' < 0$ приблизно на 50 см^{-1} для граткових коливань, а для молекулярних коливань область з $\epsilon' < 0$ розширюється приблизно на 50 см^{-1} за рахунок відповідного зсуву нижньої границі області.

3.2. Області від'ємної ДП у йодаті літію

Симетрія кристала LiIO_3 суттєво відрізняється від розглянутих вище танталату та ніобату літію, що радикально змінює його оптичні та діелектричні властивості. У α модифікації кристал LiIO_3 належить до гексагональної сингонії і має значно меншу анізотропію оптичних ($n_o = 1,860$, $n_e = 1,982$ для $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$) та діелектричних параметрів ($\epsilon_{\parallel} = 8,25$, $\epsilon_{\perp} = 6,53$ на частотах мегагерцового діапазону).

Значно біднішими виявляються і спектри КР на полярних коливаннях у йодаті літію. Із загальної кількості у 30 коливних ступенів свободи одночасно КР та ІЧ активними виявляються лише 4А та 4Е фонона. ТО та LO частоти цих фононів наведено у таблиці 3 разом з іншими дисперсійними параметрами.

Таблиця 3.

Параметри дисперсії ДП у йодаті літію.

№	ω^T (см^{-1})	ω^L (см^{-1})	Γ (см^{-1})	S	α , см^{-1}	l_{eff} мкм
1	2	3	4	5	6	7
A_1	148	149	9	0,08	225	44,4
A_2	238	239	36	0,06	137	73,2
A_3	358	468	7	2,2	18900	0,53
A_4	795	817	8	0,13	11800	0,85
$\epsilon_{\parallel}^{\infty} = 2,91$		$\epsilon_{\parallel}^0 = 5,38$				
E_1	180	181	14	0,09	249	40,2
E_2	330	340	10	0,97	7040	1,42
E_3	371	460	21	1,80	10400	0,96
E_4	769	348	12	0,61	22400	0,45
$\epsilon_{\perp}^{\infty} = 3,4$		$\epsilon_{\perp}^0 = 6,82$				

Хоча значення ТО–ЛО розщеплення у йодаті літію, як видно з таблиці 3, суттєво менші, ніж для обох попередніх кристалів, все ж цей

матеріал також має області від'ємних значень діелектричної проникності, які зображені на рис.5. Області формуються окремими коливаннями, є значно вузькими за попередні і не мають внутрішньої структури. Разом з цим обидві смуги мають спільні частотні інтервали, в середині яких значення $\epsilon' < 0$ забезпечується для всіх напрямів поляризації, але абсолютне значення ДП змінюється більше, ніж у 3 рази.

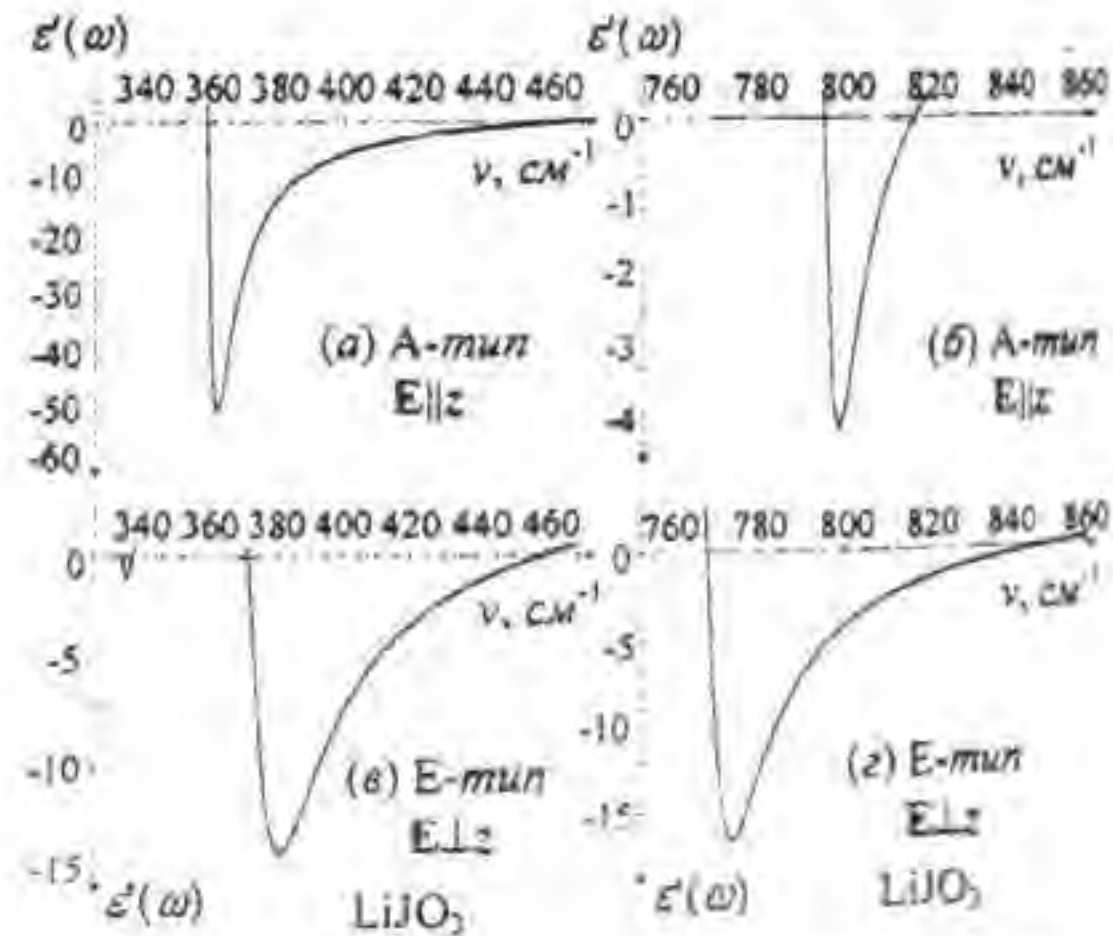


Рис.5. Області від'ємних значень ДП у кристалі LiIO_3 для паралельної (а, б) та перпендикулярної (в, г) поляризації.

Наприкінці слід зауважити, що всі досліджувані кристали в області $\epsilon' < 0$ створюють велике загасання для електромагнітної хвилі, яка проходить крізь матеріал. Про це свідчать числові дані, наведені в двох останніх колонках таблиць 1–3 для коефіцієнта загасання α та ефективної довжини l_{eff} на якій амплітуда хвилі зменшується у e разів.

Висновки

Таким чином у всіх трьох кристалах без центру інверсії, які досліджувалися у нашій роботі, мають місце області з від'ємними значеннями діелектричної проникності. Застосована методика обчислень дисперсійної залежності тензора ДП побудована на використанні ФДТ, що дозволяє за даними КР вимірювань послідовно врахувати такий важливий параметр як фононне загасання. Апробація цієї методики шляхом співставлення обчислених спектрів ІЧ відбиття з даними прямих вимірювань виявляє достатню точність для проведення кількісних оцінок як частотної смуги з $\epsilon' < 0$, так і абсолютних значень діелектричної проникності.

Наведені дані показують, що кожний з досліджених кристалів має кілька областей, у яких $\epsilon' < 0$, причому ці області мають спільні інтервали для двох взаємно перпендикулярних напрямів поляризації, що робить їх кандидатами до використання для синтезу метаматеріалів у терагерцовому діапазоні частот. Головною завадою для застосування розглянутих кристалів та ізоморфних до них речовин може стати, на наш погляд, велике загасання електромагнітних хвиль.

Список використаних джерел

1. Пантелл Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники. - М.: Мир, 1972. - 384 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.V, Статистическая физика. - 5-е. изд., стереот. - Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 616 с.
3. Фелинский Г.С. Исследование природы диэлектрических и электрооптических свойств кристаллов и Ti-диффузного микроволновода света: Канд. диссерт. - Киев, КНУ имени Тараса Шевченко, 1984. - 195 с.
4. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. - 1967. - 92, №3. - С.517.
5. Горелик В.С. Оптика глобулярных фотонных кристаллов // Квантовая электроника. - 2007. - 37, № 5. - С. 409-432.
6. Kurosawa T. Polarization waves in solids // J. Phys. Soc. Jap. - 1961 - 16, №9 - P.1288-1308.
7. Barker A.S., Loudon R. Response function in the theory of Raman scattering by vibrational and polariton modes in dielectric crystals // Rev. Mod. Phys. - 1972 - 44, № 1 - P.18-47.
8. Кондиленко И.И., Коротков П.А., Фелинский Г.С. Дисперсионный анализ диэлектрической проницаемости нецентросимметричных кристаллов по спектрам КР // Оптика и спектроскопия - 1982 - 52, № 3 - С.564-567.
9. Кондиленко И.И., Коротков П.А., Фелинский Г.С. Диэлектрические свойства нецентросимметричных кристаллов и их связь с комбинационным рассеяния света. // Квантовая электроника - 1981 - 21 - С.49-64.
10. Клименко В.А., Кондиленко И.И., Коротков П.А., Фелинский Г.С. Угловая дисперсия оптических фононов кристаллах LiNbO_3 // УФЖ - 1981. - 26, № 9 - с.1557-1559.
11. Клименко В.А., Коротков П.А., Фелинский Г.С. Исследование угловой дисперсии частот оптических фононов в спектре КР ниобата лития // Оптика и спектроскопия - 1983 - 54, № 3 - С.476-481.
12. Barker A.S., Loudon R. Directional dispersion, and assignment of optical phonons in LiNbO_3 // Phys. Rev - 1967 - 158, №2 - P.433-437.
13. Eleftheriades G. V. Microwave metamaterials and applications: current status of the experimental and theoretical developments // Proc. I Int. Congr. "Adv. Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics" (Metamaterials'2007), Rome, Italy, Oct. 22-26, 2007. (<http://www.metamorphose-vi.org/>).
14. Shalaev V M. Optical metamaterials and applications: current status of the experimental and theoretical developments // Proc. I Int. Congr. "Adv. Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics" (Metamaterials'2007), Rome, Italy, Oct. 22-26, 2007. (<http://www.metamorphose-vi.org/>).

Надійшла до редколегії 16.06.08

УДК 621.39

Мисник А.В., к.ф.-м.н., м.н.с., Кононов* М.В.,
к.ф.-м.н., доц.

Прогнозування втрат пакетів у телекомунікаційних каналах за флуктуацією затримки для різних методів регулювання трафіку

Запропонована раніше модель аналізу характеристик телекомунікаційних каналів досліджується з використанням різних механізмів регулювання потоків даних і перевіряється кореляція головних параметрів якості обслуговування в цих механізмах. Показано, що смуга пропускання, затримка і коефіцієнт втрат корелюють між собою в різних варіантах черг трафіку, а також доведено, що вони можуть бути описані та передбачені за допомогою представленої функціональної моделі. В статті наведено результати експериментальної перевірки кореляційної моделі для різних методів регулювання і пріоритизації потоків даних.

Ключові слова: затримка, коефіцієнт втрат, кореляційна функція, якість обслуговування.

*E-mail: amysnyk@univ.kiev.ua, mvk@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н. проф., Скришевський В.А.

Вступ

Сучасні телекомунікаційні канали передачі даних є досить надійними, а завдяки різноманітним технологіям резервування ймовірність повної відмови є дуже незначною. Надійність нових систем зв'язку досягає 99,999 (т.зв. характеристика "п'ять дев'яток"), що відповідає вимогам до стандартних телефонних систем зв'язку і сьогодні інфраструктура для передачі даних також використовується для передачі голосу і іншої інтерактивної інформації. Тому важливим є як оптимальне розподілення ресурсів, забезпечення характеристик якості обслуговування (QoS, Quality of Service) в телекомунікаційних структурах [1], так і прогнозування зміни параметрів втрат і затримки з метою вчасної зміни маршрутів для забезпечення гарантованих параметрів обслуговування. Більшість втрат пакетів у телекомунікаційних мережах пов'язана з переповненням деяких каналів потоками даних. Для прогнозування заторів трафіку та параметрів затримки потоку даних в телекомунікаційній мережі і втрат пакетів в каналах можна ввести

A.V. Mysnyk, Ph.D., M.V. Kononov*, Ph.D.

Delay variation packet loss prediction model application for different queuing mechanisms

Described earlier analysis model of telecommunication links quality characteristics and robustness estimation parameters was tested with different interface queuing algorithms and link quality parameters correlation was investigated. It is shown, that telecommunication link characteristics, bandwidth, delay and loss ratio correlate when different queuing techniques are used and they can be described and their behavior can be rather effectively predicted with proposed model. Experimental results on proposed model for different queuing and traffic prioritization algorithms and methods, as well as probability of right prediction results are given.

Key Words: delay, loss, correlation function, quality of service.

функцію, яка пов'язує між собою основні характеристики каналів і використати її для передбачення проблем у каналі з деякою ймовірністю.

Раніше було показано [2,5], що між затримкою і втратами в телекомунікаційних мережах є кореляція, яку можна приблизно оцінити за допомогою коефіцієнту дисперсії пакетів [3] з урахуванням ємності каналу.

Формальний підхід для прогнозування якості телекомунікаційного каналу, якій базується на відстеженні трендів затримки передачі пакету в одному напрямку і дає змогу встановити ймовірність відкидання пакету залежно від наявної смуги пропускання каналів і переповнення каналу, було запропоновано в [2].

Для відстеження трендів затримки була введена характеристична функція, яка за допомогою флуктуації затримки дозволяє визначити шаблони трендів, порогові значення і дозволяє більш точно, ніж прості характеристики, прогнозувати якість телекомунікаційної інфраструктури. За допомогою запропонованого методу було

досліджено стандартну спрощену чергу FIFO (First In First Out) без додаткових механізмів відкидання пакетів, але такий метод передачі пакетів не гарантує пріоритизації високоемних та інтерактивних потоків даних. В даній статті пропонується використання розробленої раніше методики для більш складних алгоритмів регулювання трафіку в каналах.

Модель кореляції параметрів затримки і втрат

За допомогою флуктуації затримки можна описати завантаженість маршруту в телекомунікаційній мережі, а також передбачити кількість втрат пакетів і прогнозувати рівень загальної якості обслуговування (QoS) для критичних потоків трафіку.

Для маршруту, що містить n з'єднань ($i=1, 2, \dots, n$), пропускна спроможність кожного з яких дорівнює c_i , а доступна смуга пропускання – a_i , завантаження каналу дорівнюватиме $u_i = (c_i - a_i)/c_i$. Потенційно, джерело періодично відправляє p пакетів розміром l байт зі швидкістю r , тобто кожний пакет передається за час $t = l/r$. Таким чином крізь з'єднання $i+1$ за час t проходить потік даних, який дорівнює сумі потоків від каналів, що йому передують і власного трафіку – $r_i t + u_i c_i t$. Значення затримки дорівнюватиме [3,4]:

$$D_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{l}{c_i} + \frac{q_i^k}{c_i} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{l}{c_i} + d_i^k \right), \quad (1)$$

різниця затримки між двома послідовними пакетами дорівнює [2,4]:

$$\Delta D_i = D_i - D_{i-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta q_i^k}{c_i} \right) = \sum_{k=1}^n \Delta d_i^k, \quad (2)$$

Таким чином, ймовірність втрати k -го пакету в j -му каналі може бути описана за допомогою комбінації наступних параметрів, які пов'язані з затримкою – співвідношення поточної загальної затримки в черзі до найгіршої затримки в черзі (2).

$$P = \frac{D_k - D_0}{D_l - D_0} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^k}{\sum_{i=1, i \neq j}^n d_i^k + \frac{J}{c_j}}, \quad (3)$$

P приймає значення в діапазоні від 0 до 1. Швидкість зростання затримки можна записати як:

$$v = \frac{\partial D_k}{\partial t} = \frac{r_0 - a_j}{c_j}, \quad (4)$$

Параметри (3) і (4), або метрики, було використано для оцінки ймовірності втрат у

певному каналі. Відстань затримки (3) є коефіцієнтом співвідношення затримки до порогового значення втрат в каналі, тренд у вигляді (4), як похідна, описує нахил і гладкість кривої зростання швидкості затримки.

Як було показано в [2] метрики затримки і втрат пов'язані між собою і мають корелювати. Для реалізації описаної моделі і оцінювання ймовірності втрат була введена характеристична функція, яка об'єднує необхідні для аналізу параметри. Для цього з (9) введено нормовані усереднені характеристичні метрики:

$$L = \frac{D_N - D_1}{\sum_{i=2}^N |D_i - D_{i-1}|}, \quad (5)$$

$$S = \max(-1, \min(1, \frac{D_i - D_{i-1}}{t_i - t_{i-1}})), \quad (6)$$

де N – довжина стійкого потоку пакетів, яку експериментально визначено, а t_i – часова мітка i -го пакету. Метрика L описує довготривалі характеристики потоку, тобто є довгочасовим трендом для послідовностей із 20-50 пакетів, а метрика S відображає короточасові тенденції для послідовностей із 5-10 пакетів. Метрики L і S , фактично, описують флуктуацію затримки в телекомунікаційному каналі, оскільки вони є усередненням. Параметри P (4) і L, S – (5), (6) – було внесено в характеристичну функцію у вигляді [2]:

$$R(P, L, S) = w_1 P + w_2 L + w_3 S, \quad (7)$$

де $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. Функція-предиктор (7) набуває значення у діапазоні $[0, 1]$, тому виміряні значення затримки та коефіцієнту втрат також мають бути нормованими на максимальне отримане під час експерименту значення.

Результат досліджень та їх обговорення

Для експериментального дослідження запропонованого методу оцінювання втрат і затримки в мережі була створена телекомунікаційна структура, яка наведена на рис. 1. В лабораторній мережі було використано чотири джерела трафіку, тобто чотири робочі станції, які одночасно працювали і як джерело і як приймач потоку даних (групи по два вузли h_{11} і h_{22} на рис. 1). В якості програмного забезпечення генератору трафіку була використана програма з відкритим програмним кодом `iperf` [2], яка дозволяє генерувати TCP- і UDP-сегменти із заданими характеристиками.

Генератори трафіку підключені до високопродуктивних комутаторів локальної мережі (sw_1, sw_2) Cisco Catalyst 2960 які дозволяють комутувати до 6,6 млн. пакетів

розміром 64 байти в секунду і мають матрицю комутації зі швидкістю 8,8 Гбіт/с, тобто вони можуть без втрат передати декілька повних потоків даних 100 Мбіт/с.

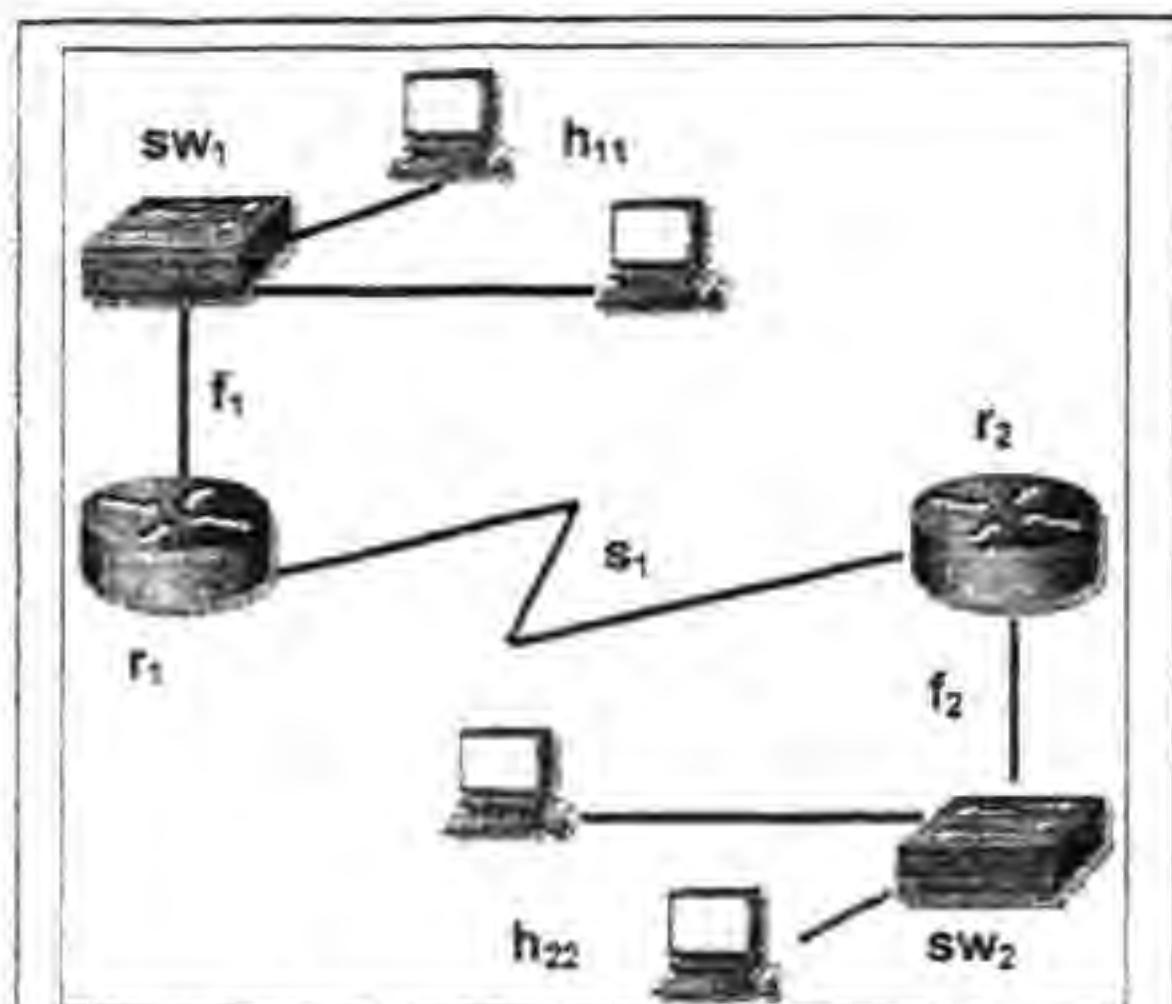


Рис. 1. Лабораторна модель телекомунікаційної інфраструктури

Комутатори за допомогою каналів f_1 , f_2 підключені до FastEthernet-інтерфейсів (100 Мбіт/с) маршрутизаторів r_1 , r_2 . В лабораторній мережі використовувались апаратні маршрутизатори Cisco серії 2621, які дозволяють обробити до 25000 пакетів розміром 64 байта в секунду, або трафік 12,8 Мбіт/с, які з'єднані через послідовні інтерфейси (WIC2T), щоб отримати канал з обмеженою смугою пропускання 128 Кбіт/с. Така схема і апаратні можливості пристроїв дозволяють емулювати мережу, в якій є повільний канал, що може бути перевантажений трафіком. Для тестування кожне джерело генерує два потоки даних зі збільшенням швидкості від 1 Кбіт/с до 32 Кбіт/с: сегменти розміром 64, 256, 512 і 1024 байтів протоколу UDP; а також сегменти з тими ж самими розмірами для протоколу TCP. Тобто максимальний загальний трафік у два рази перевищує можливості каналу: два вузли джерела генерують по два потоки даних по 32 Кбіт/с кожне і приймають також по два потоки від двох віддалених джерел, $4 \times 32 + 4 \times 32$ Кбіт/с.

Вказана схема генерації потоків даних була створена для забезпечення рівномірного завантаження каналу з малою смугою пропускання.

Для порівняння було обрано три механізми обробки потоків даних, які найчастіше зустрічаються в каналах передачі даних: FIFO (First in First Out, першим прибув, першого обробили), WFQ (Weighted Fair Queuing,

справедлива зважена черга), CB-WFQ (Class Based Weighted Fair Queuing, справедлива зважена черга, що базується на класах).

FIFO [1]. В цьому методі обробки потоків даних всі потоки є рівнопріоритетними і пакети обробляються в той самій послідовності, як вони були отримані мережевим пристроєм. В даному разі програмна черга використовується переважно в якості буфера, в тому сенсі, що порядок передачі пакетів крізь інтерфейс пристрою не змінюється. В цій технології, фактично, немає пріоритизації потоків даних.

WFQ [1,3]. В цьому механізмі побудови черг на інтерфейсі різним потокам даних присвоюються різні вагові коефіцієнти, що залежать від розміру пакетів, інтенсивності потоку даних, пріоритету обслуговування і типу трафіку. Найбільшого пріоритету набувають потоки даних від інтерактивних служб і протоколів. Черга WFQ не дозволяє керувати розподіленням трафіку і параметрами пріоритетів, а тільки передбачає встановлення порогового значення т.зв. глибини черги, тобто кількості пакетів в черзі.

CB-WFQ [1]. Цей механізм регулювання потоків даних відрізняється тим, що в ньому можна створити класи трафіка, які дозволяють, наприклад, розділити смугу пропускання між різними групами потоків, прикладних протоколів, групами адрес. Всередині класу використовується механізм WFQ, а також можуть бути застосовані різні механізми відкидання пакетів і додаткові механізми класифікації і пріоритизації.



Рис. 2. Ефективність прогнозування втрат в навантаженому (нк) і ненавантаженому (ннк) каналах

Для експериментальної перевірки запропонованого методу потоки UDP- та TCP-даних було пропущено крізь сконфігуровані черги, що вказані вище. Для черги CB-WFQ UDP- та TCP-сегменти були віднесені до різних класів, яким було виділено по 50% смуги



Рис. 3. Ефективність прогнозування втрат для гарантованої (TCP) і негарантованої (UDP) доставки пакетів

пропускання, щоб відстежити кореляцію між втратами пакетів і затримками для двох методів передачі даних: гарантованого і негарантованого. Щоб отримати результат, який не залежить від неточностей вимірювання часових інтервалів, вимірювання і запис результату виконувались протягом 5 хвилин через 5 хвилин після запуску генератора потоків даних. Отримані результати щодо втрат пакетів потім були нормовані на час вимірювання. Вимірювання затримки передачі даних вимірювались кожні 10 секунд, а отримані значення для всієї вибірки потім були усереднені за 5 хвилин. Дані вимірювань знімалися за допомогою протоколу SNMP крізь окремий інтерфейс, який був підключений до окремого сегменту локальної мережі, щоб уникнути втрат SNMP-повідомлень і впливу на результат вимірювань цього протоколу.

Результат вимірювань в комбінованому вигляді представлено на рис. 2 і рис. 3, як "кпк" позначено кількість втрат. Світла частина стовпчика відображає прогнозоване за допомогою функції-предиктора значення втрат, затінена частина — вимірюване реальне значення. З результату на рис. 2 видно, що для завантажених каналів характерна більша кількість втрат, що очевидно, а також менше різниця між прогнозованим і реальним значенням. Крім того така різниця зменшується при використанні більш складних методів регулювання трафіку, тому що поведінка характеристик каналу, наприклад на відміну від черги FIFO стає більш прогнозованою. На ненавантажених каналах картина очікувано протилежна — девіація прогнозовано і реального значення є значно більшою. На рис. 3 представлено результат для гарантованого і негарантованого методів передачі даних (TCP і UDP, відповідно). В цьому випадку черга CB-WFQ дає меншу відносну

кількість втрат, порівняно з попереднім вимірюванням, а при використанні більш складних алгоритмів точність прогнозування значно зростає, що пов'язано з її алгоритмом роботи.

Висновки

Запропонована функція предиктора дозволяє передбачити і відстежити моменти перевантаження телекомунікаційного з'єднання з використанням різних черг і може бути використана для регулювання трафіку, значення затримки і коефіцієнт втрат корелюють між собою для різних методів регулювання трафіку. Більшу ймовірність вірного прогнозування втрат в каналах було отримано для гарантованих методів передачі даних, що пов'язано з їх детермінованістю і вбудованим механізмом контролю потоку і корекції помилок. Також метод дає змогу більш ефективно прогнозувати втрати в навантажених телекомунікаційних каналах аніж в ненавантажених, тому в останніх втрати мають стохастичний характер і пов'язані з зовнішніми факторами.

Список використаних джерел

1. Вегешна Ш. Качество обслуживания в сетях IP. — М.: Вильямс, 2003. — 368 с.
2. Мисник А., Кононов М., Прогнозування втрат пакетів у телекомунікаційній інфраструктурі за флуктуацією затримки // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. - 2007. - Вип. №2. - С.277-280.
3. Roychoudhuri L., Al-Shaer E., Hamed H., Brewster G.B. Audio Transmission over the Internet: Experiments and Observations. // IEEE International Conference on Communications, Anchorage, Sept. 2003. — P. 208-221.
4. Roychoudhuri L., Al-Shaer E., Hame H., Brewster G.B. On Studying the Impact of the Internet Delays on Audio Transmission // IEEE IP Operations and Management (IPOM), Dallas, June 2002. — P. 129-136.
5. Padhye C., Christensen K., Moreno W. A New Adaptive FEC Loss Control Algorithm for Voice Over IP Applications // Proceedings of the 19th IEEE International Performance, Computing, and Communication Conference, Apr. 2000. — P. 307-313.

Надійшла до редколегії 15.06.08

УДК 620.18:546.28

Находкін М.Г., акад. НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, Куліш М.П., доктор фіз.-мат. наук, Родіонова Т.В., канд. фіз.-мат. наук

Фасетування границь зерен в полікремнієвих плівках

Методом просвічуючої електронної мікроскопії досліджено вплив температури відпалювання на фасетування спеціальних границь зерен в легованих фосфором полікремнієвих плівках, що отримані методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску. Встановлено температурні інтервали існування фасеток, кути між якими дорівнюють 90° , 109° , 124° та 140° . Показано, що фасетування має місце як при нормальному, так і при аномальному рості зерен. Проаналізовано роль двійникування в процесах фасетування границь зерен.

Ключові слова: фасетування, границі зерен, полікремнієві плівки.

Nakhodkin N.G., Acad. Of NAS of Ukraine, Dr.Sci., Kulish N.P., Dr.Sci., Rodionova T.V., Ph.D.

Grain boundary faceting in polysilicon films

Influence of annealing temperature on the faceting of special grain boundaries in phosphorus-doped polysilicon films, produced by low-pressure chemical vapor deposition, is investigated by transmission electron microscopy. Temperature intervals of existence of 90° , 109° , 124° and 140° facets are established. It is shown that faceting takes place both for anomalous and normal grain growth. It is detected that is cause of faceting under normal grain growth in film. Twinning influence on grain boundary faceting was analyzed.

Key Words: faceting, grain boundaries, polysilicon films.

*E-mail: rodtyv@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В.А.

Вступ

Полікремнієві плівки широко використовуються в мікроелектроніці як високоомний матеріал затворів транзисторів, низькоомні з'єднання та ін.[4]. В процесі виробництва прилади з полікремнієвими шарами витримують термообробки, в результаті яких змінюється структура плівок, зокрема зерногранична структура, що обумовлює зміну властивостей приладів [4]. Тому значний інтерес викликає дослідження границь зерен та явищ, що мають місце на границях зерен, зокрема, фасетування границь зерен.

Відомо, що зовнішня поверхня кристала кремнію може розбиватися на систему фасеток, якщо сумарна енергія цих фасеток виявляється меншою за енергію вихідної поверхні кристалу, не дивлячись на те, що при цьому збільшується площа поверхні зразка. Таке перетворення називається фазовим переходом фасетування [1,3]. Фазові переходи фасетування зовнішньої поверхні кремнію привертають все більшу увагу в зв'язку з тим,

що фасетовані поверхні мають регулярний набір сходинок або двовимірних пірамід [1,5]. Такі поверхні можна використовувати як підкладки для виготовлення квантових ліній та квантових точок, що є актуальним для розвитку сучасної наноелектроніки. Останнім часом було показано, що фазові переходи на зовнішніх поверхнях кристалів мають аналоги на границях зерен полікристалічних матеріалів. Особливе значення зернограничні явища мають для наноматеріалів, в яких границі зерен можуть складати до 50% об'єму матеріала [6]. Зернограничні фазові переходи приводять до змін таких властивостей зерен, як вільна енергія, дифузійна проникливість, сегрегацію домішок та зв'язаних із ними механічних, електричних і оптичних властивостей полікристалічних зразків. Принципова відмінність границь зерен полягає в тому, що їх структура формується під впливом кристалічних ґраток двох сусідніх кристалів, а не одного, як у випадку зовнішньої поверхні. Тому кристалографія цих утворень більш різноманітна. Оскільки структурні реконструкції поверхні монокристалів вивчені краще, ніж перебудови на границях зерен, виявлення аналогій в цих різновидах фазових

переходів буде сприяти розвитку уявлень про зміни на границях зерен при відпалюванні.

Існує значна кількість досліджень процесів фасетування границь зерен в металах і сплавах [2,3,7-9]. Встановлено зв'язок між фасетуванням і аномальним ростом зерен [9]. Для напівпровідників, зокрема, для полікристалічного кремнію такі дослідження нам не відомі. Між тим відомо, що зміна зернограничної структури полікремнієвих плівок суттєво впливає на їх властивості. Так, наприклад, у роботі [10] показано, що висота міжзеренного бар'єра для границь зерен загального типу вдвічі більша, ніж для низькоенергетичної границі. Відомо також [2], що границі зерен в напівпровідниках більш схильні до фасетування, що обумовлено ковалентними зв'язками.

У даній роботі методом просвічуючої електронної мікроскопії досліджено вплив температури відпалювання на фасетування спеціальних границь зерен у легованих фосфором плівках полікристалічного кремнію. Проаналізовано зв'язок процесів фасетування границь зерен з рушійними силами та механізмами росту зерен в плівках полікристалічного кремнію при різних температурах відпалювання.

Методика

Плівки полікристалічного кремнію отримували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску. В якості підкладки використовувались пластини Si(100) з шаром окислу SiO_2 товщиною $\sim 0,1$ мкм. Товщина плівок складала 0,5 мкм. Температура осадження 630°C . Плівки легували фосфором шляхом термодифузії. Рівень легування $\sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$. Зразки відпалювали в атмосфері N_2 в інтервалі температур $1040\text{--}1200^\circ\text{C}$ на протязі 30 хвилин. Інтервал температур відпалювання був вибраний на основі попередніх досліджень [11,12], оскільки саме при цих температурах мають місце зміни переважних рушійних сил росту зерен, що приводить до перебудови зернограничної структури плівок. При вимірюванні температури термопарою похибка вимірювань складала 0,75%. Густина фасеток визначалась з похибкою 5%. Похибка визначення кутів – 1%.

Для електронно-мікроскопічних та електроннографічних досліджень на просвіт зразки стоншували в площині підкладки

шляхом хімічного травлення в суміші $\text{HF}:\text{HNO}_3$ (1:5). Орієнтаційні співвідношення між ділянками, а також відповідні кристалографічні напрямки були встановлені за допомогою електроннографії. Окрім того, взаємну розорієнтацію суміжних зерен визначали по електронно-мікроскопічним знімкам шляхом вимірювання кутів між слідами $\langle 112 \rangle$ мікродвійників, які присутні в більшості зерен.

Результати та обговорення

Електронно-мікроскопічні дослідження показали, що в усьому інтервалі температур від температури осадження 630°C до максимальної температури відпалювання 1200°C в плівках полікристалічного кремнію має місце фасетування границь зерен (Табл. 1).

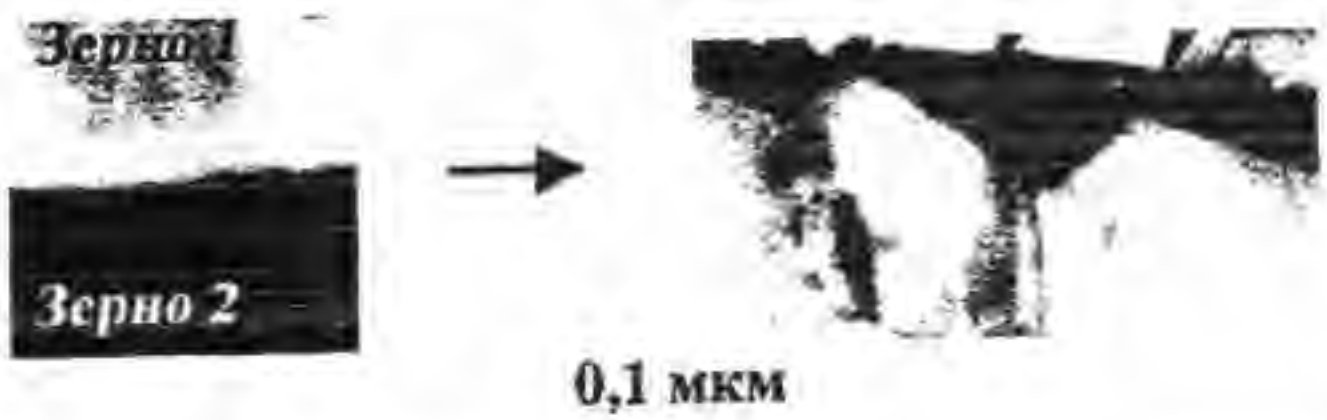
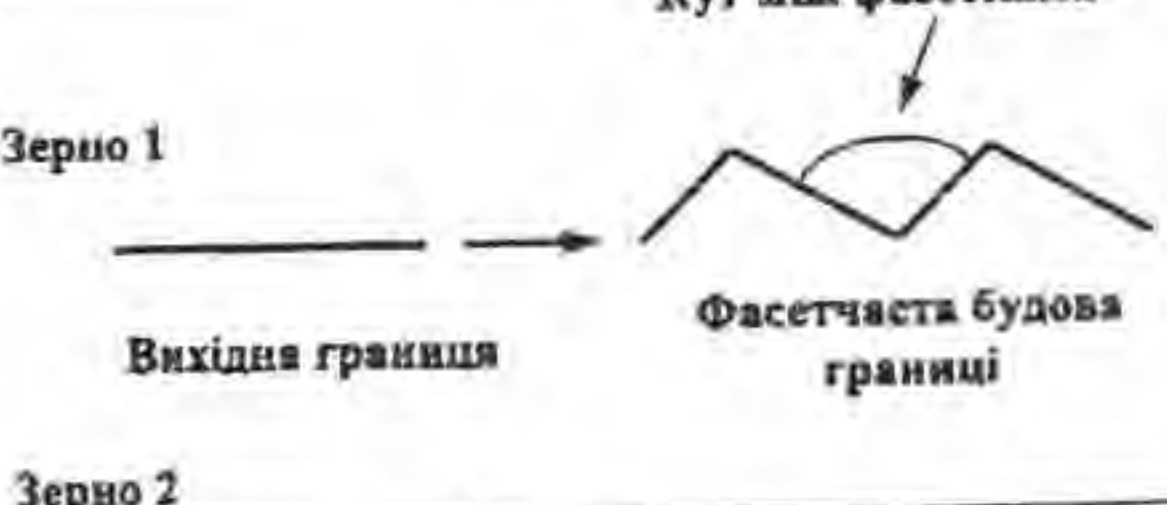
Детальний аналіз електронно-мікроскопічних зображень дозволив виділити чотири основних типи зернограничних фасеток, які відрізняються орієнтацією суміжних граней і кутом між ними. Зокрема, спостерігались зернограничні фасетки з кутами 90° , 109° , 124° та 140° .

Фасетки, кут між якими дорівнює 90° , утворюються двійниковими границями $\{111\}_1/\{111\}_2$ і $\{211\}_1/\{211\}_2$. Індеси 1 і 2 відповідають двом сусіднім зернам 1 і 2. Симетрична двійникова границя $\{111\}_1/\{111\}_2$ має дуже малу вільну енергію [2,3]. Вона відповідає площині $(100)_{\Sigma 3}$ ґратки вузлів, що збігаються ($\Sigma 3$) і позначається $\Sigma 3$ (Σ – обернена густина вузлів, що збігаються). Ця площина є найбільш щільнопакованою площиною $\Sigma 3$. Другою за щільністю упаковки є площина $\{211\}_1/\{211\}_2$ (або $(010)_{\Sigma 3\bar{2}}$), яка називається асиметричною двійниковою границею [3].

Наступний різновид фасеток характеризується кутом 124° . Ці фасетки утворюються між зернами, одне з яких (або обидва) складається з двійникових прошарків різних орієнтацій, що розташовані по черзі вздовж міжзеренної границі. Міжзеренна границя складається з періодично розташованих ділянок: $\Sigma 3\{111\}_1/\{111\}_2$ і $\Sigma 9\{122\}_1/\{122\}_2$.

Фасетки, кути між якими дорівнюють 109° і 140° притаманні двійниковим границям третього порядку $\Sigma 27$. Така границя є термічно нестійкою. Вона розщеплюється на дві границі $\Sigma 27 \rightarrow \Sigma 3 + \Sigma 9$ [2]. Перед розщепленням границя фасетує й утворюються фасетки $\{111\}_1/\{111\}_2$ і $\Sigma 3\{111\}_1/\{111\}_2$, кут між якими становить 109° . Крім того, для границь $\Sigma 27$ характерне фасетування по кристалографічним площинами, які паралельні площинам $\{111\}$ зерен-сусідів [2], внаслідок чого утворюються фасетки 140° -ні фасетки.

Таблиця 1

Фасетування границі зерен	
ПЕМ-зображення	 Зерно 1 Зерно 2 0,1 мкм
Схематичне зображення	 Зерно 1 Вихідна границя Зерно 2 Кут між фасетками Фасетчаста будова границі

Всі фасетки, що спостерігаються у полікремнієвих плівках, як правило, паралельні щільнопакованим площинам ГЗВ й мають вісь повороту $\langle 110 \rangle$, вздовж якої щільність вузлів, що збігаються, максимальна.

Аналіз електронно-мікроскопічних зображень показав, що різні типи фасеток існують в різних температурних інтервалах. Крім того, залежно від температури відпалювання, змінюється не тільки число різновидів фасеток, але й кількість фасеток одного типу. Як видно з рис. 1, можна виділити три області температур: 1 – $630^\circ\text{C} \leq T < 1120^\circ\text{C}$, в якій спостерігаються 124° -ні фасетки; 2 – $T \geq 1120^\circ\text{C} - 1150^\circ\text{C}$, де співіснують декілька різновидів фасеток, зокрема 90° , 109° , 124° та 140° -ні фасетки; 3 – $T > 1150^\circ\text{C}$, в якій спостерігаються, переважно, 140° -ні фасетки. Наведена залежність являє собою фазову діаграму для різних типів фасеток в полікремнієвих плівках. Вона відрізняється від аналогічних діаграм для металів і сплавів, відомих із літератури [3], в яких кількість різновидів фасеток зменшується при збільшенні температури. Це пов'язано із зменшенням кількості спеціальних границь зерен при збільшенні температури [2,3]. В полікремнієвих плівках кількість типів фасеток при температурах $< 1120^\circ\text{C}$ практично не змінюється, а при зростанні температури до 1200°C число типів фасеток зменшується.

Як видно з рис. 1, 124° -ні фасетки спостерігаються в широкому інтервалі

температур відпалювання, але їх густина при різних температурах неоднакова. В інтервалі температур $630^\circ\text{C} - 950^\circ\text{C}$ спостерігається незначне зменшення густини 124° -них фасеток. При температурах $950^\circ\text{C} - 1080^\circ\text{C}$ має місце різке зменшення їх кількості, а після цього деяке зростання спостерігається при збільшенні температури відпалювання до 1150°C . 140° -ні фасетки спостерігаються в досить вузькому інтервалі температур $1120^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}$, а їх кількість трохи зростає при 1200°C .

Можна вважати, що такі зміни фасетчастої будови границь зерен обумовлені особливостями зернограничної структури полікремнієвих плівок при різних температурах відпалювання, а також процесами, що мають місце в плівках при осадженні та відпалюванні, зокрема, ростом зерен. Крім того, потрібно враховувати процеси, які мають місце на кристалічних поверхнях зерен при зміні температури [1,5], оскільки характерні температури зміни фасетчастої структури границь зерен, що нами визначені, практично співпадають з відомими з літератури температурами змін сходинкової структури поверхні кремнію.

Відомо, що при формуванні структури полікремнієвих плівок суттєва роль належить процесам двійникування [11,12]. Тому, навіть після осадження в плівках спостерігаються зерна, які утворені за рахунок множинного двійникування і складаються із двійникових прошарків. На границях таких зерен формуються, як вже зазначалось, 124° -ні фасетки. При температурах відпалювання в інтервалі $630 < T < 950^\circ$ ріст зерен в плівках здійснюється шляхом коалесценції [11].

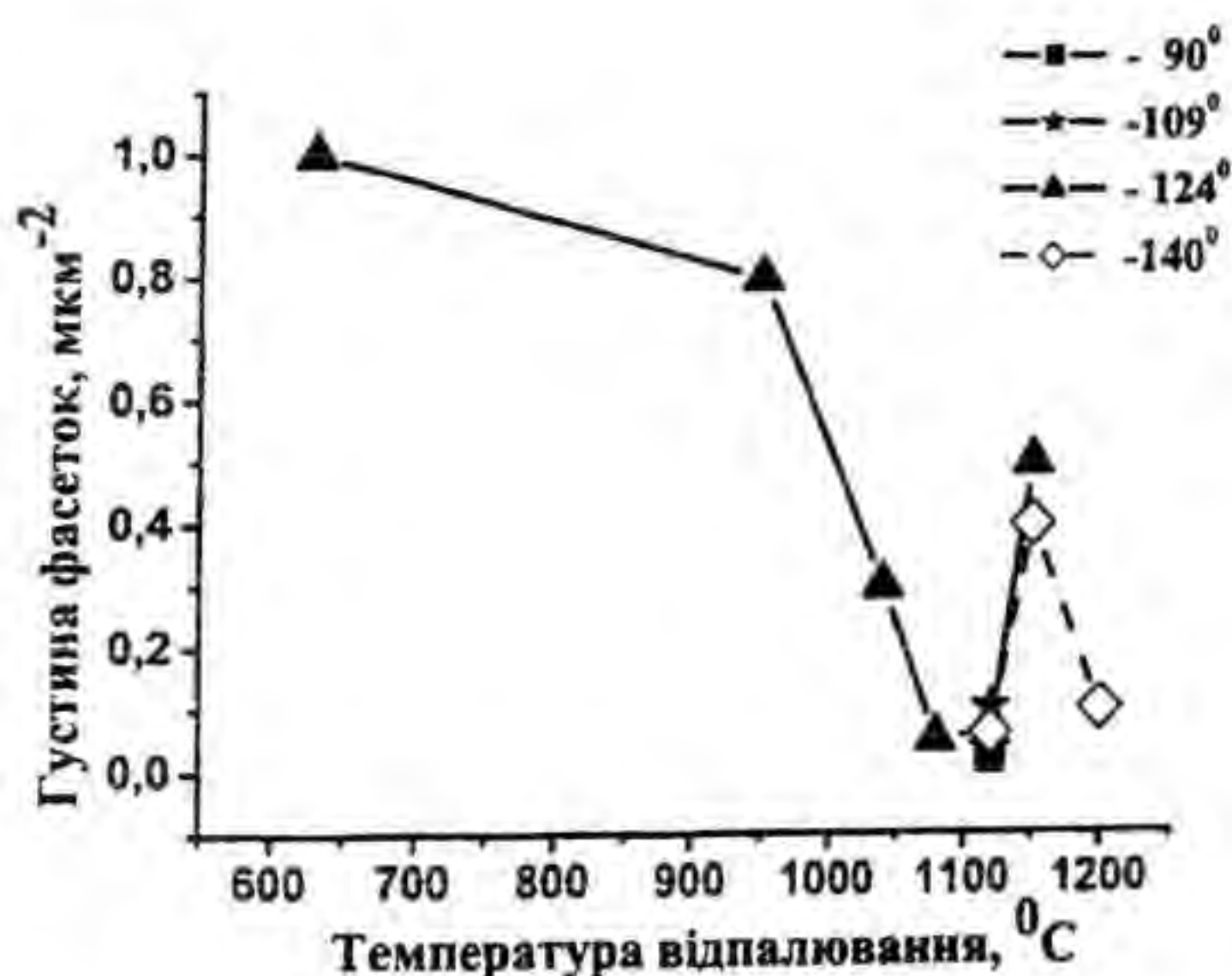


Рис. 1 Залежності густини зернограничних фасеток від температури відпалювання

Рушійною силою росту зерен є різниця густини дислокацій в різних зернах. Границі більшості зерен криволінійні, спеціальні границі практично відсутні. Проте, як і у вихідних плівках, спостерігаються зерна з двійниковими прошарками та, відповідно, фасетками 124° . Оскільки в даному інтервалі температур відпалювання в плівках має місце нормальний ріст зерен [11] (за нормальні вважаються зерна, розміри яких не перевищують подвійної товщини плівки), можна стверджувати, що, на відміну від металів, в полікремнієвих плівках фасетування границь зерен має місце при нормальному рості зерен. При температурі $> 950^\circ\text{C}$ має місце зміна механізму росту зерен від коалесценції до міграції границь. Рушійною силою росту зерен стає перевага розмірів одних зерен над розмірами інших [11]. Механізмом міграції границь зерен є рух зернограничних сходинок [2] (аналогічно росту сходинок на вільних поверхнях монокристалів [1,5]). В плівках починається вторинний ріст зерен. З'являються зерна, розміри яких перевищують подвійну товщину плівки, так звані вторинні або аномальні зерна [11]. Зерногранична структура плівок змінюється, з'являються спеціальні границі зерен. Можна вважати, що при зростанні температури понад 950°C в полікремнієвих плівках має місце фазовий зернограничний перехід, при якому границі загального типу перетворюються в спеціальні границі. При

цьому одна періодична структура границі перетворюється в іншу. Можливість подібних перебудов є наслідком того, що границя з певними кристалографічними параметрами може мати декілька структурних модифікацій, які відрізняються симетрією та періодом ідентичності. Такий перехід подібне структурним перебудовам вільної поверхні. Наприклад, відомо, що до 830°C на поверхні монокристалу кремнію (111) існує надструктура 7×7 , яка при більш високих температурах переходить в структуру 1×1 [5]. Тип структурного переходу та температура, при якій він має місце, визначаються кристалографічними параметрами границі. Як показано в роботі [12], зі зростанням температури відпалювання зменшується кількість двійникових прошарків в зернах полікремнієвих плівок. Це обумовлює суттєве зменшення відповідних міжзеренних границь та, відповідно, до зменшення кількості 124° -них фасеток (рис. 1). Проте нових різновидів фасеток не спостерігається. Подальше збільшення температури відпалювання супроводжується процесами розщеплення границь та їх фасетуванням. При цьому змінюється спектр спеціальних границь зерен, що приводить до появи фасеток інших орієнтацій, зокрема, 90° , 109° и 140° . Утворення нових типів фасеток може бути обумовлено зміною характеру сходинокової структури поверхонь зерен при даних температурах [5]. При температурах відпалювання $\geq 1120^\circ\text{C}$ переважний вплив на ріст зерен має рушійна сила, що пов'язана з анізотропією вільної енергії [11]. Це обумовлює зростання кількості вторинних зерен [11]. В плівках

формується велика кількість площин $\{111\}$, які характеризуються найбільшою густиною вузлів, що збігаються та, відповідно, мають дуже низьку вільну енергію. Як видно з рис. 1, це веде до збільшення кількості 124° -них фасеток при температурі 1150°C та до деякого зростання числа 140° -них фасеток при збільшенні температури відпалювання до 1200°C .

Слід відзначити, що, на відміну від 124° -них фасеток, які спостерігаються при нормальному рості зерен, фасетки з кутами 90° , 109° та 140° притаманні вторинним (аномальним) зернам.

Висновки

1. В результаті проведених електронно-мікроскопічних досліджень показано, що в кремнієвих плівках має місце фасетування границь зерен. Спостерігались наступні чотири різновиди зернограничних фасеток: 1 - фасетки, кут між якими 90° , що утворені площинами $\Sigma 3\{111\}_1/\{111\}_2$ (або площиною $(100)_{\Sigma 3\text{гзк}}$) та $\{211\}_1/\{211\}_2$ (або площиною $(010)_{\Sigma 3\text{гзк}}$); 2 - 124° -ні фасетки з орієнтаційними співвідношеннями $\Sigma 3\{111\}_1/\{111\}_2$, $\Sigma 9\{122\}_1/\{122\}_3$ та $\Sigma 3\{111\}_2/\{115\}_3$; 3 - 109° ні фасетки: $\Sigma 3\{111\}_1/\{111\}_2$ та $\Sigma 3\{111\}_1/\{115\}_3$; 4 - фасетки з кутом 140° по площинам $\{111\}$.
2. Показано, що фасетки з кутами 90° та 109° мають місце при температурі 1120°C ; 124° -ні фасетки спостерігаються в інтервалі температур $630^\circ\text{C} - 1150^\circ\text{C}$; 140° -ні фасетки формуються при температурах $1120^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}$.
3. Проаналізовано вплив процесів двійникування на фасетування границь зерен. Можна вважати, що 124° -ні фасетки притаманні зернам, що утворені за рахунок множинного двійникування, оскільки вони існують в одному й тому ж температурному інтервалі.
4. Встановлено, що фасетки з кутом 124° характерні для границь нормальних зерен, в той час як фасетки 90° , 109° та 140° пов'язані з аномальним ростом зерен.
5. Кореляція отриманих фазових діаграм для зернограничних фасеток з відомими з літератури фазовими діаграмами сходинок структур для поверхонь кремнію [5] дозволяє припустити, що характер поверхневих сходинок впливає на формування типів зернограничних фасеток.

Список використаних джерел

1. Harald Ibach, Physics of Surfaces and Interfaces. - Springer, 2006.
2. Конечный Ч.В., Орлов А.Н., Фионова Л. К. Границы зерен в чистых материалах. - М. 1987.
3. Страумал Б.Б. Фазовые переходы на границах зерен. Фасетирование, специальные и неспециальные границы, потеря огранки. Учебное пособие. - М.: МИСиС, 2004. - 65 с.
4. Rath J.K. Low temperature polycrystalline silicon; a review on deposition, physical properties and solar cell applications // Solar Energy Materials and Solar Cells. - 2003. - 76, № 4. - P. 431-487.
5. Yagi K., Minoda H., Degawa M. Step bunching, step wandering and faceting: self-organization at Si surfaces // Surface Science Reports. - 2001. - 43. P. 45-126.
6. Андриевский Р.А. Наноматериалы: концепция и современные проблемы // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И.Менделеева). - 2002. - XLVI, №5. - С. 50-56.
7. Straumal B.B., Polyakov S.A., Bischoff E., Mittemeijer E.J. Grain boundary faceting cljst to the $\Sigma 3$ coincidence misorientation in copper // Z. Metallkd. - 2004. - 95 10. - P. 939 - 944.
8. Lee S.B., Sigle W., Kurtz W., Rühle M. Temperature dependence of faceting in $\Sigma 5(310)[001]$ grain boundary of SrTiO_3 // Acta Materialia. - 2003. - 51. - P. 975-981.
9. Lee S.B., Yoon D.Y., Henry M. F. Abnormal grain growth and grain boundary faceting in a model Ni-base superalloy // Acta Materialia. - 2000. - 48. - P. 3071-3080.
10. Tsurekawa S., Kido K., Watanabe T. Measurements of potential barrier height of grain boundaries in polycrystalline silicon by Kelvin probe force microscopy // Philosophical Magazine Letters. - 2005. - 85, № 1. - P.41 - 49.
11. Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. The mechanism of secondary grain growth in polysilicon films // J. Cryst. Growth. - 1997. - 171, № 1-2. - P. 50-55.
12. Находкин Н.Г., Кулиш Н.П., Родіонова Т.В. Вплив відпалювання на двійникові границі в рівноосьових полікремнієвих плівках // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2006. - Вип. № 1. - С. 291-296

Надійшла до редколегії 15.05.08.

УДК 537.6

Сохацький В. П., канд. ф.-м. наук,
Шулімов Ю. Г., інж.

Магнітна взаємодія в шаруватих феро- магнітних тонкоплівкових структурах

Магнітооптичними та електричними методами досліджувались характеристики тонкоплівкових сендвіч-структур, утворених з тонких шарів феромагнітного заліза, розділених немагнітним мідним прошарком, осаджених на діелектричних чи напівпровідникових підкладках. Показано, що характеристики таких плівок можна визначити по параметрах кривих перемагнічування верхнього шару, форма яких обумовлена міжшаровою взаємодією.

Ключові слова: феромагнетизм, магнітооптика, намагнічування.

E-mail: vso@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Данилов В.В.

Вступ

Тонкоплівкові структури, що складаються з металевих феромагнітних (ФМ) шарів, розділених немагнітним металевим (Ф/М/Ф) або діелектричним прошарком – так звані спінові клапани (СК) – виділяються складною міжшаровою взаємодією, яку не вдається описати теоретично в рамках універсальної моделі, особливо в умовах малих діючих полів. В той же час, широке застосування таких систем, в першу чергу в системах магнітної пам'яті, обумовлює необхідність постійного покращення технічних характеристик, що, в свою чергу, вимагає поглиблення досліджень процесів перемагнічування цих структур. Такі характеристики зчитуючих магнітних головок на основі СК, як просторова роздільна здатність та частотний діапазон мають надалі поліпшуватися через постійне зростання густини магнітного запису. Деяким прогресом на цьому шляху було, наприклад, збільшення магнітоопору СК при створенні в них додаткового буферного прошарку, розраховане теоретично [1] та спостережене експериментально [2].

Багато теоретичних робіт, що використовували розрахунки методом Монте-Карло на основі Ізінговської моделі кристалічної ґратки, або модель континуума чи феноменологічну, основану на розширеннях класичної моделі Нееля-Брауна, не дають

V. P. Sohatsky, Ph. D.,
Y. G. Shulimov, Engineer

Magnetic interaction in layered ferromagnetic thin film structures

Magnetic characteristics of the spin-valves were calculated taken into consideration the domain structure; the equilibrium distributions of magnetization were studied by means of experimental magneto-optical, conductive and spin resonance methods. The minima lateral sizes of the separated cells, frequency threshold of remagnetization, optima parameters for application of the spin-valves as sensors of inhomogeneous magnetic fields were determined from thus obtained data.

Key words: ferromagnetism, magneto-optics, magnetization.

повного опису поведінки намагніченості в шарах СК із ДС. Складнощі виникають при спробах пояснення ролі інтерфейсів, опису динамічних властивостей клапанів у пікосекундному діапазоні, тощо. Оцінка оптимальних параметрів СК і кореляції розрахункових і експериментальних характеристик є досі невирішеною проблемою. Тому в даній роботі робилася спроба пов'язати експериментальні результати спостереження перемагнічування під різними кутами до осей анізотропії шарів СК з оцінками рівноважного розподілу намагніченості [5], зробленими на основі розв'язку рівняння Ландау-Ліфшиця для динаміки вектора намагніченості.

Методика експерименту

Досліджені структури типу Fe/Cu/Fe напильовались термічно на різні типи підкладок: скляні, полікарбонатні та монокристалічні силіконові (Si 100) у вакуумі (10^{-5} Pa) і варіювались по товщині від одиниць до кількох десятків нанометрів. Товщини шарів могли оцінюватись в процесі напильовання по масі випарованої речовини та зміні частоти кварцевого резонатора, а після напильовання - по величині оптичного поглинання. Магнітна анізотропія в площині шарів формувалась внаслідок похилого осадження металу.

Магнітооптична установка, реєстрація квазістатичних кривих перемагнічування верхнього (магнітом'якого) шару на якій відбувалась по меридіональному ефекту Керра, мала чутливість до одиниць кутових секунд, залежно від шумових характеристик електронного тракту, що застосовувався. Прозорість підкладок дозволяла також реєструвати характеристики променя, відбитого від нижнього (магнітожорсткого) шару структури, що знаходився безпосередньо на підкладці, визначаючи, таким чином, характеристики його перемагнічування в площині плівки.

Експериментальна частина

1. На рис.1. показані осцилограми петель перемагнічування верхнього шару 3-шарової

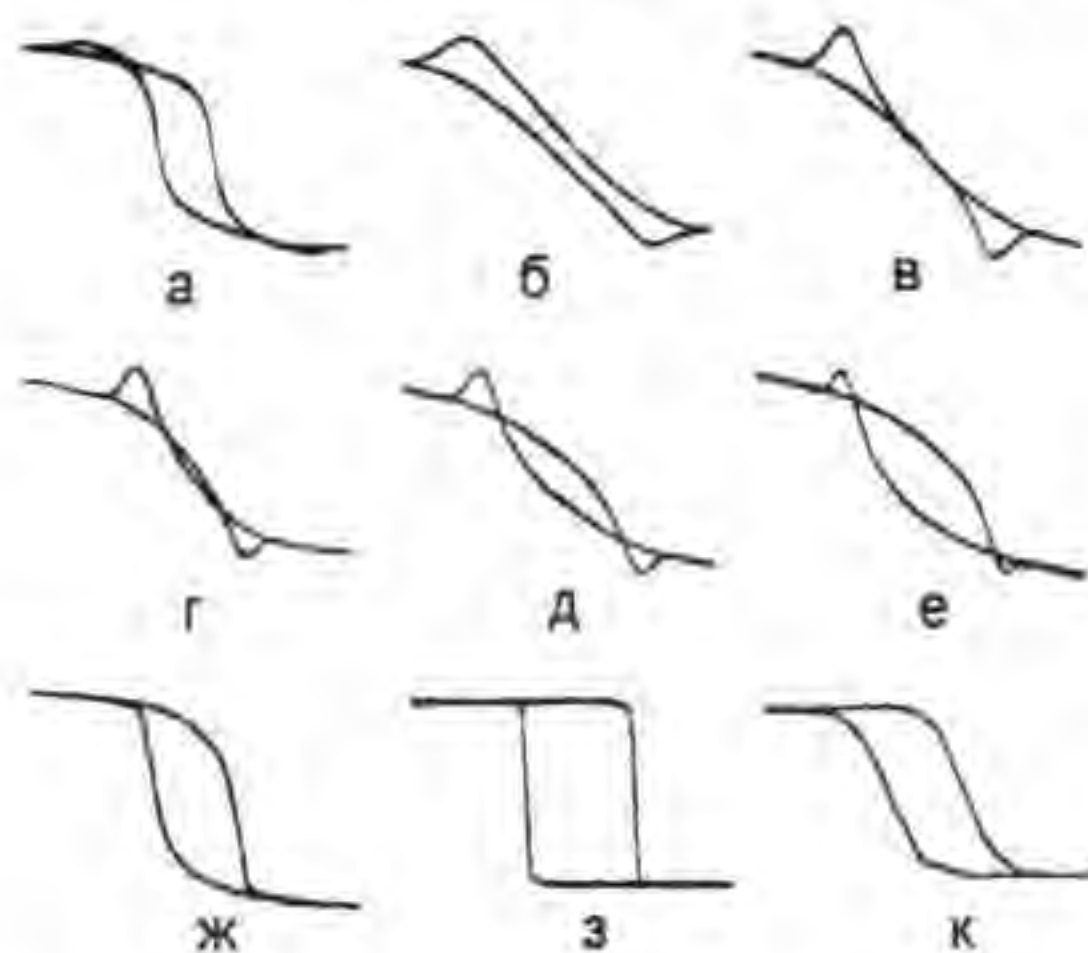


Рис.1. Зміна форми квазістатичних петель гистерезиса при різних кутах поля підмагнічування з вибраною віссю в площині плівки θ : а) -30° ; б) -25° ; в) -20° ; г) -17° ; д) -15° ; е) -10° ; ж) 0° ; з) 20° ; к) 110° .

структури $\text{Fe}(20\text{ нм})/\text{Cu}(20\text{ нм})/\text{Fe}(20\text{ нм})$. Розгортка поля, відкладена по горизонталі складала ± 200 Ерст. Крім петель гистерезису звичайної форми, спостерігались характерні для систем типу СК "перетягнені" петлі (рис.1 4-6). При цьому коерцитивність в діапазоні малих полів може виявитися від'ємною (на рис.1 при куті $\theta = -25^\circ$) чи близькою до нуля ($\theta = -20^\circ$).

При наявності різнонаправленої анізотропії в шарах може проявлятися аномальний хід залежності намагніченості від зовнішнього поля, коли при спаді останнього намагніченість верхнього шару не зменшується, а навпаки, зростає (рис.1б, 2б).

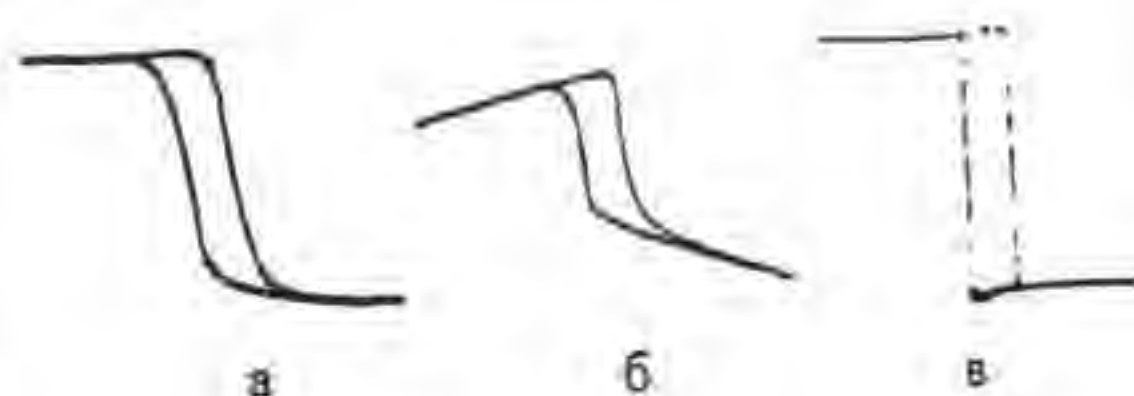


Рис.2. Відображення нормальної (а) та аномальної (б) залежностей намагніченості ФМ шару від зовнішнього поля та стрибків Баркгаузена на кривій магнітного гистерезиса (в).

Вертикальна частина кривої магнітного гистерезису може мати розриви (рис.2в), що відображають різкі зміни намагніченості - стрибки Баркгаузена, що стають тим більше помітними, чим менше розміри сфокусованого на поверхні плівки променя. Вони відображають різку зміну намагніченості поверхні при стрибкоподібному пересуванні доменних границь (ДГ) в опромінюваній області плівки. По кількості і амплітуді стрибків Баркгаузена можна непрямо судити про характер руху ДГ і, зокрема, про вплив на нього електричного струму, що протікає через структуру. Цей струм створює магнітне поле і розігріває плівку. Оскільки до того ж вона знаходиться у зовнішньому магнітному полі, то ці фактори призводять до зміни локального розподілу намагніченості, що знаходить макроскопічний прояв, зокрема, у зсуві слабо закріплених ДГ. Граничні значення струмів, що викликають зсув ДГ, можуть варіюватися в межах декількох порядків, залежно від наближеності стінки до нестабільного положення.

При порівнянні плівок із різною шорсткістю поверхні кількість стрибків має тенденцію до збільшення, а їх амплітуда зменшується при збільшенні шорсткості і навпаки. Тому картина розподілу стрибків на кривій намагнічування може використовуватись для оцінки якості плівок на додаток до описаної раніше в [5] магнітооптичної методики оцінки швидкості руху ДГ в плівці.

При сильному збільшенні шорсткості поверхні методами травлення форма петлі стає більш похилою без різких вертикальних ділянок, і при зростанні кількості стрибків та зменшенні їх амплітуди петля набуває традиційного для феромагнетиків вигляду (рис.3).

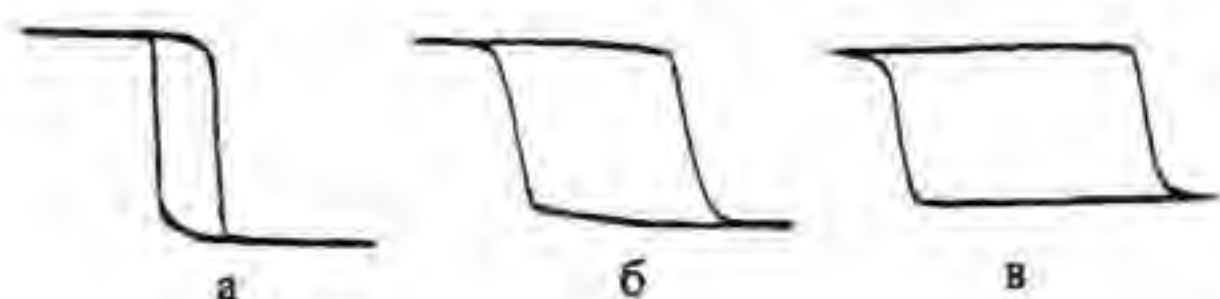


Рис.3. Залежність форми петлі гистерезису тришарової плівки Fe-Cu-Fe від товщини h немагнітного прошарку: а) 30 нм; б) 27 нм; в) 20 нм.

Зміни форми петлі відбуваються не тільки через анізотропію, але і при зміні товщини шарів і прошарку між ними. Ці зміни (при незмінній орієнтації поля намагнічування) можуть відбуватись монотонно, коли товщина прошарку h змінюється в діапазоні від $h=30$ нм (в цьому випадку спостерігається найбільш вузька петля гистерезису – рис.3а) і до $h=20$ нм, при цьому петля значно розширюється (рис.3в).

При товщинах прошарку менше за 20 нм починає все сильніше проявлятися осцилюючий характер обмінної взаємодії між ФМ шарами [7], що, відповідно, призводить до немонотонності зміни форми петлі при подальшому зменшенні товщини.

Плівки різних типів порівнювались між собою по інтенсивності НВЧ поглинання для оцінки характеристик феромагнітних шарів. Зокрема, при вимірюванні полів ФМР при різних напрямках поля намагнічування, зміни резонансного поля в структурах так званих антиферомагнітних СК (параметри яких наведені у [8]) спостерігались на порядок більші (рис.4а) ніж у звичайних тришарових структурах типу Co/Cu/Co (рис.4б) при зміні напрямку магнітного поля від паралельного до перпендикулярного до площини плівки.

Метод ФМР використовувався для вимірів ефективного поля $H_{\text{eff}} = H_M + H_0 + H_S$, включаючи поле намагнічування H_M , викликане взаємним впливом шарів і магнітостатичного поля H_S , що виникає через обмежені бічні розміри окремих елементів. Резонансне поле H_0 одного окремого шару може бути розраховане з формул Кіттеля для частоти резонансу в намагніченій тонкій пластині.

Різниця величин електропровідності виготовлених плівок складала близько 4 порядків – від чисто залізного опору $\rho=10^{-7}$ Ом·м до напівпровідникового $\rho=10^{-3}$ Ом·м – залежно від товщин шарів, наявності оксидних прошарків, неконтрольованих домішок та ін.

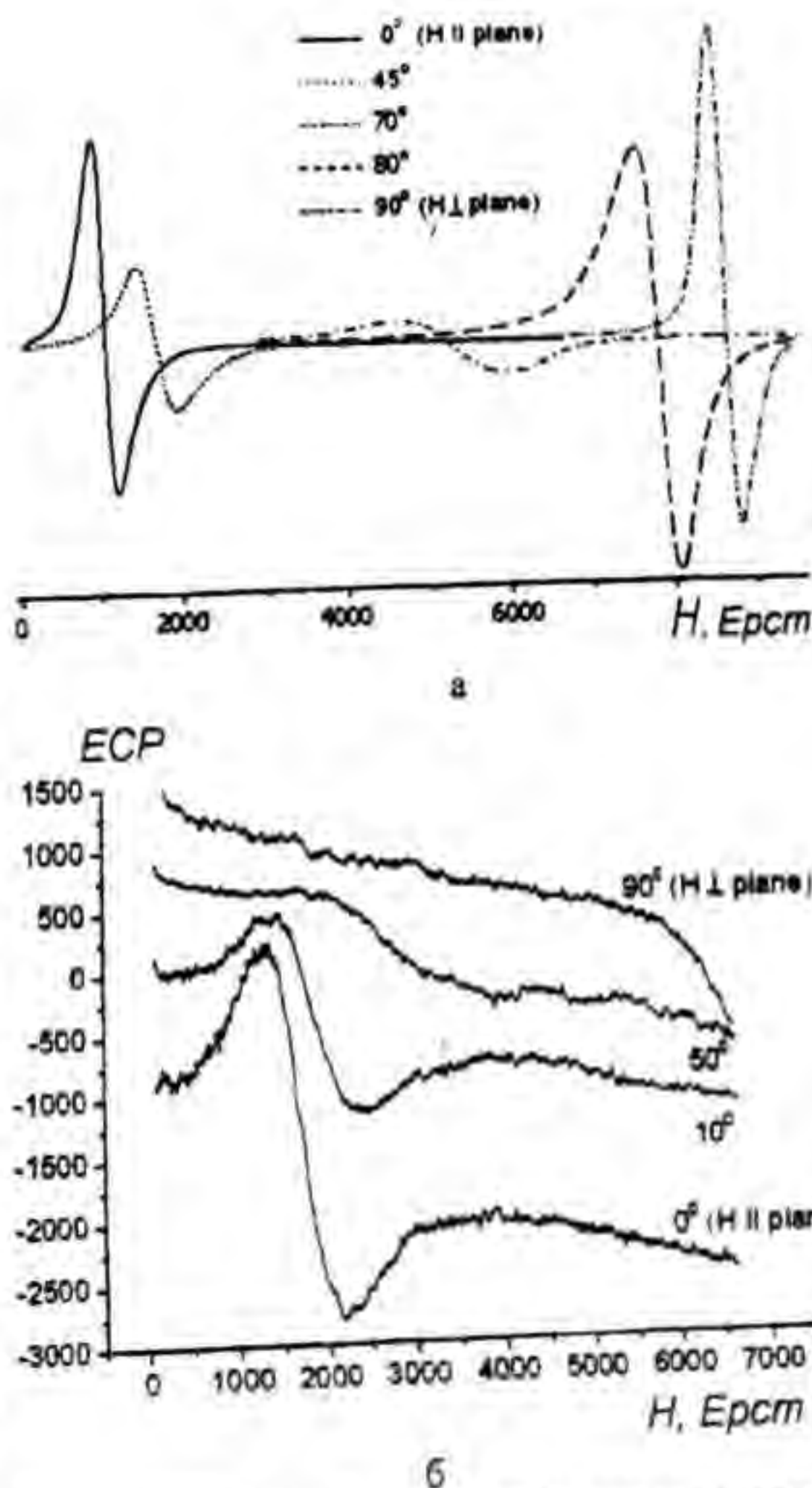


Рис.4. Зміна кривих феромагнітного резонансу в багатошаровій структурі антиферомагнітного СК (а), та в тришаровій структурі Co-Cu-Co (б).

Метою вимірювання провідності було встановлення можливості впливу струму, що протікає через зразок, на процеси перемагнічування при знаходженні магнітної підсистеми у метастабільному стані. Такий стан відображається вертикальними ділянками кривої намагнічування (петлі гистерезису) з різкими стрибками Баркгаузена (рис.2в).

Застосуємо розрахунки на основі рівняння Ландау-Ліфшиця [5]

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}]$$

для оцінки порогового струму перемагнічування магнітом'якого шару. Залежність струму від таких параметрів, як обмінний інтеграл A ,

$$A = \frac{m}{4\pi\hbar^2} [(E_i^2 N - \Sigma)_{\uparrow\downarrow} - (E_i^2 N - \Sigma)_{\downarrow\uparrow}],$$

напрямок орієнтації намагніченості у магнітному шарі, що характеризується кутом θ ,

$M(H) = \sum M_i \cos(\theta_i^0)$ може бути отримана з наступної послідовності перетворень: $A \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) = H_{ex} \cdot M_1 \sim j$. З цього рівняння очевидно, що пороговий струм прямо пропорційний до обмінного інтегралу та залежить від параметрів структури та зовнішнього магнітного поля H_{ex} . Воно має бути доповнене доданками, що враховували б поляризаційну та теплову дію струму, але в будь-якому випадку зменшення величини цього струму можливе вибором параметрів шарів та величини і напрямку поля.

При протіканні струму по плівці в різній геометрії величиною від одиниць міліампер виникає магнітне поле, характеристична напруженість якого досягає 0.1 Е, що є вже достатнім для зрушення ДГ, які знаходяться у стані, близькому до нестабільного. Характерні розміри доменів плівки у десятки мікрометрів є співрозмірними із відстанями, на яких магнітні поля струмів мають згадану вище напруженість. Тому короткі імпульси струму призводять до появи стрибків, що реєструються при кімнатних температурах зразків із прямокутною петлею гистерезису. Але на даному етапі досліджень виявилось неможливим розділити внесок різних механізмів впливу на ДГ, оскільки вплив струмів не обмежується створенням магнітного поля. Часткова поляризація зарядів в ФМ шарах також впливає на ДГ і, відповідно, на намагніченість. До того ж, протікання струму через зразок призводить до термічних ефектів, а також механічної деформації, обумовленої дією як струму, так і зовнішнього магнітного поля, що додатково ускладнює реєстрацію магнітооптичного сигналу.

Кількість стрибків зменшується зі зменшенням просторових розмірів елементів СК нижче декількох мікронів (залежно від товщини) і особливо в діапазоні субмікронів. Зростаюча роль обертового механізму перемагнічування в низькорозмірних елементах призводить до зміни форми петлі на більш овальну. Збільшення амплітуди змінного поля, також як і зменшення освітленої області поступово зменшують кількість стрибків і збільшують їхню висоту. Зменшення розміру елементів також зменшує магнітооптичний сигнал і ускладнює застосування методу.

Обговорення результатів

Як відомо, обмінна взаємодія між ФМ шарами помітно виявляється при товщинах прошарку до 20-25 атомних шарів, тобто приблизно до 10-12 нм. При великих товщинах і

помітній до того ж шорсткості поверхонь розділу між шарами, основним фактором взаємного впливу шарів є магнітостатична взаємодія. При малих товщинах осциляція обмінної взаємодії при зміні товщини проміжного прошарку спричиняє відповідні періодичні зміни форми петлі магнітного гистерезису. Але в даній роботі значні зміни петель гистерезису спостерігались при проміжних товщинах шарів, коли перемагнічування в значній мірі обумовлювалося магнітостатичною взаємодією. Особливий інтерес становлять "перетягнені" петлі рис.1г-е, що виникають внаслідок взаємодії магнітних шарів із різною коерцитивністю. Зокрема, при зростанні магнітного поля в діапазоні до 20-30 Е відбувається монотонне зростання намагніченості. Але при перевищенні цього поля спостерігається спад, частково обумовлений обмінною взаємодією між шарами – магнітом'яким та магнітожорстким. Навіть при невеликій різниці товщин та/або кількості домішок в феромагнітних шарах, вони можуть мати помітно різну коерцитивність через як різну механічну напруженість шарів, так і внаслідок наявності різної анізотропії в площині плівки. Діапазон полів, при яких відбувається переорієнтація намагніченості магнітом'якого шару, складає приблизно 15÷20 Е.

Таким чином, технологічно варіюючи товщини шарів, або просто змінюючи напрямок намагнічування, можна регулювати чутливість структури до магнітного поля як для дискретного її перемагнічування в режимі СК, так і лінійного в режимі аналогового датчика поля амплітудою до 150 Е. При збільшенні загальної кількості шарів структури до 5 і 7 типові значення магнітоопору збільшувались на 1-2%.

На рисунку наведені петлі гистерезису тришарової структури для різних кутів азимутального поля підмагнічування. Зміна форми петлі на «перетягнену» при кутах від -20° до -10° характерно для структур типу спінового клапана, у яких один із шарів більш магнітотвердий, ніж інший. У структурах з однаковим складом шарів більш твердим звичайно є шар, що контактує з підкладкою через механічні напруги в ньому внаслідок розходження розмірних параметрів кристалічних ґраток плівки і підкладки.

При переважно магнітостатичній взаємодії шарів їхні намагніченості орієнтуються протилежно. При прикладанні поля, що не збігається по напрямку з намагніченістю в жодному із шарів, відбувається неодночасна переорієнтація намагніченості, що на петлі

гистерезису відображається у вигляді перекрученості. Додатково картину перемагнічування ускладнює наявність анізотропії в шарах. Тоді у вихідному стані намагніченість орієнтується переважно вздовж осей легкого намагнічування, що ще більше ускладнює форму петлі гистерезису.

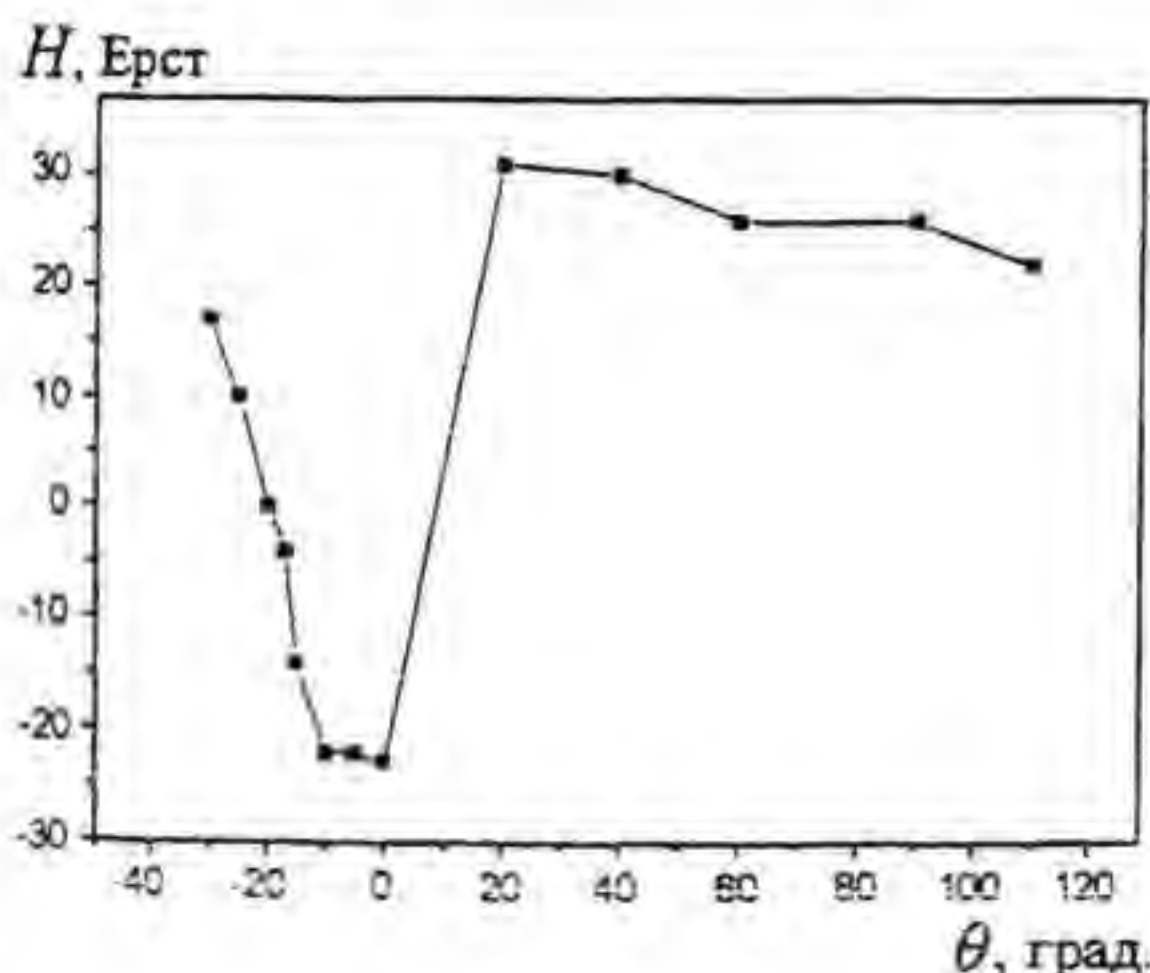


Рис. 4. Коерцитивність як функція напрямку зовнішнього магнітного поля

Порівняння помірних значень струмів з оцінками, зробленими за допомогою рівняння Ландау-Ліфшиця для динаміки намагніченості показали можливість використання цього методу для розрахунків лише при врахуванні достатнього числа факторів, що впливають на ДС.

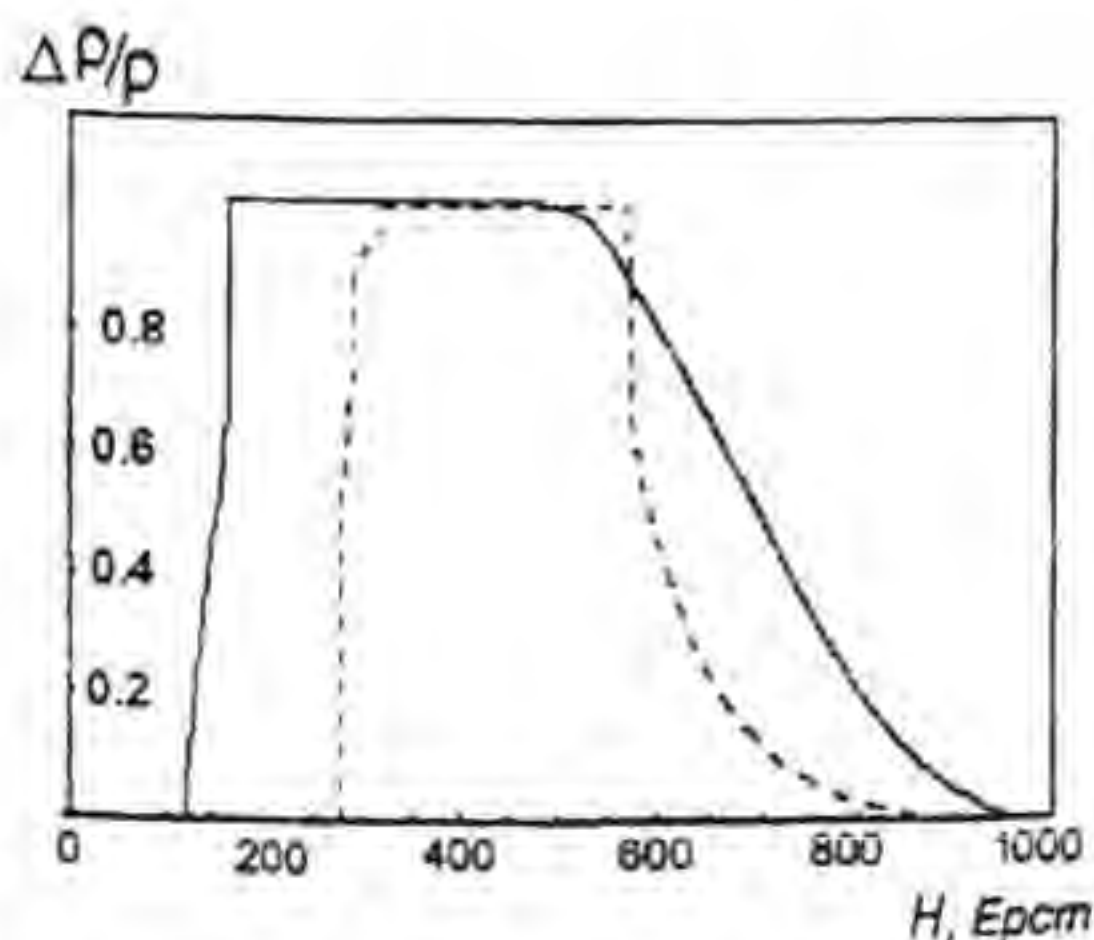


Рис. 5. Криві магнітоопору, розраховані для значень M_2 та K_2^U відповідно: $0,005 \text{ emu/cm}^2$ і $0,07 \text{ erg/cm}^3$ (пунктир) та $0,002 \text{ emu/cm}^2$ і $0,05 \text{ erg/cm}^3$ (суцільна).

Висновки

Магнітооптичний метод - ефективний інструмент для дослідження перемагнічування як плівкових СК, так і їх окремих елементів з мінімальними просторовими розмірами до 100 нм, а масивів з елементами менше 50 нм. Він дозволяє оцінювати стан поверхневої намагніченості як інтегрально, так і в локальній суцільній ферромагнітній області розмірами до одиниць мікрметрів. Кількість стрибків при відомому діаметрі променя, поряд із вимірами швидкості руху ДГ [5], дозволяє непрямо оцінити розміри поверхневих областей магнітної неоднорідності (доменів).

Список використаних джерел

1. Suen J.-S., Lee M.H., Teeter G., J.L.Erskine. Magnetic hysteresis dynamics of thin Co films on Cu(001) // Phys. Rev. B. - 1999. - **B59**, №6 - P.4249-4259.
2. V.P.Sohatsky, V.F.Kovalenko, O.I.Lysko, *та ін.* Fundamental properties of ferromagnetic micro- and nanostructured semiconductors for optoelectronic application. // Mater. Sc. and Engineering B. - 2003. - **B101**. - P.246-248.
3. Y.M.Chang, Minn-Tsong Lin, W.Pan, *та ін.* Magnetic domain imaging of exchange bias system Ni/Cu/NiFe by Kerr microscopy // J. Magn. and Magn. Mater. - 2002. - **239**. - P.375-377.
4. E.Haq, H.Gokcan, T.Banerjee, F.Postma, M.H.Siekman, R.Jansen, J.C.Lodder. Nanoscale magnetic hysteresis of $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}/\text{Au}/\text{Co}$ trilayers using ballistic electron magnetic microscopy // J. Appl. Phys. - 2004. - **95**, №11 - P.6930-6932.
5. В.П.Сохацький, Д.Г.Макаров. Неоднорідне перемагнічування спінових клапанів // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. - 2005. - №3 - с.445-450.
6. В.П.Сохацький, В.Ф.Коваленко, В.К.Скляр, Т.С.Веблая, Ю.Г.Шулімов. Магнітооптика спінових клапанів // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. - 2002. - №2 - с.377-380.
7. J. Mathon, M. Villeret, R.B. Muniz, J.d'Albuquerque e Castro, D.M. Edwards. Quantum well theory of the exchange coupling in Co/Cu/Co(001) // Phys.Rev.Lett. - 1995. - **74**, №18. - P.3696-3699.

Надійшла до редколегії 14.06.08

СУЧАСНА ФІЗИКА

Адаменко І.І., проф., д.ф.-м.н., Ермоленко І.С.,
студ., Королович В.Ф., студ.,
Мороз К.О., к.ф.-м.н.

Вплив тиску на теплофізичні властивості розчину полідисперсних вуглецевих нанотрубок у воді

Експериментально досліджені термодинамічні властивості розчину полідисперсних одностійних нанотрубок у воді та співставлені з термодинамічними властивостями води і розчину C_{60} у воді. Побудоване рівняння стану для розчину та проаналізована температурна залежність його параметрів.

Ключові слова: нанотрубки, термодинамічні властивості

E-mail: morozko@univ.kiev.ua

Об'єктом дослідження був розчин полідисперсних вуглецевих нанотрубок у воді з концентрацією 0,05 мг/мл.

Нашою метою було дослідження рівняння стану та термодинамічних властивостей розчину полідисперсних вуглецевих нанотрубок (ВНТ) у воді вказаної концентрації.

Експериментальні P — V — T вимірювання проводились методом сільфонного п'єзометра в інтервалі тисків 0,1—103,2 МПа та температур

I.I. Adamenko, Prof., Dr. Phys.-Math. Sci.,
I. S. Ermolenko, stud., V.F. Korolovich, stud.,
K. O. Moroz, Ph.D.

Thermodynamic properties of polydisperse SWNT solution in water

It is investigated thermodynamic properties of polydisperse SWNT solution in water experimentally and compared to thermodynamic properties of pure water and liquid system C_{60} —water. It is obtained the equation of state of the solution and analyzed temperature dependences of it's parameters.

Keywords: nanotubes, thermodynamic properties

293,8—352,8 К. Отримані результати порівнювались з відомими експериментальними даними для води та розчину фулерену C_{60} у воді з концентрацією 0,05 мг/мл [1—3].

На основі отриманих P — V — T даних ми розраховували ізотермічний модуль пружності K_T (1), ізотермічний приріст ентропії $T\Delta S$ (2), повної внутрішньої енергії ΔU (3).

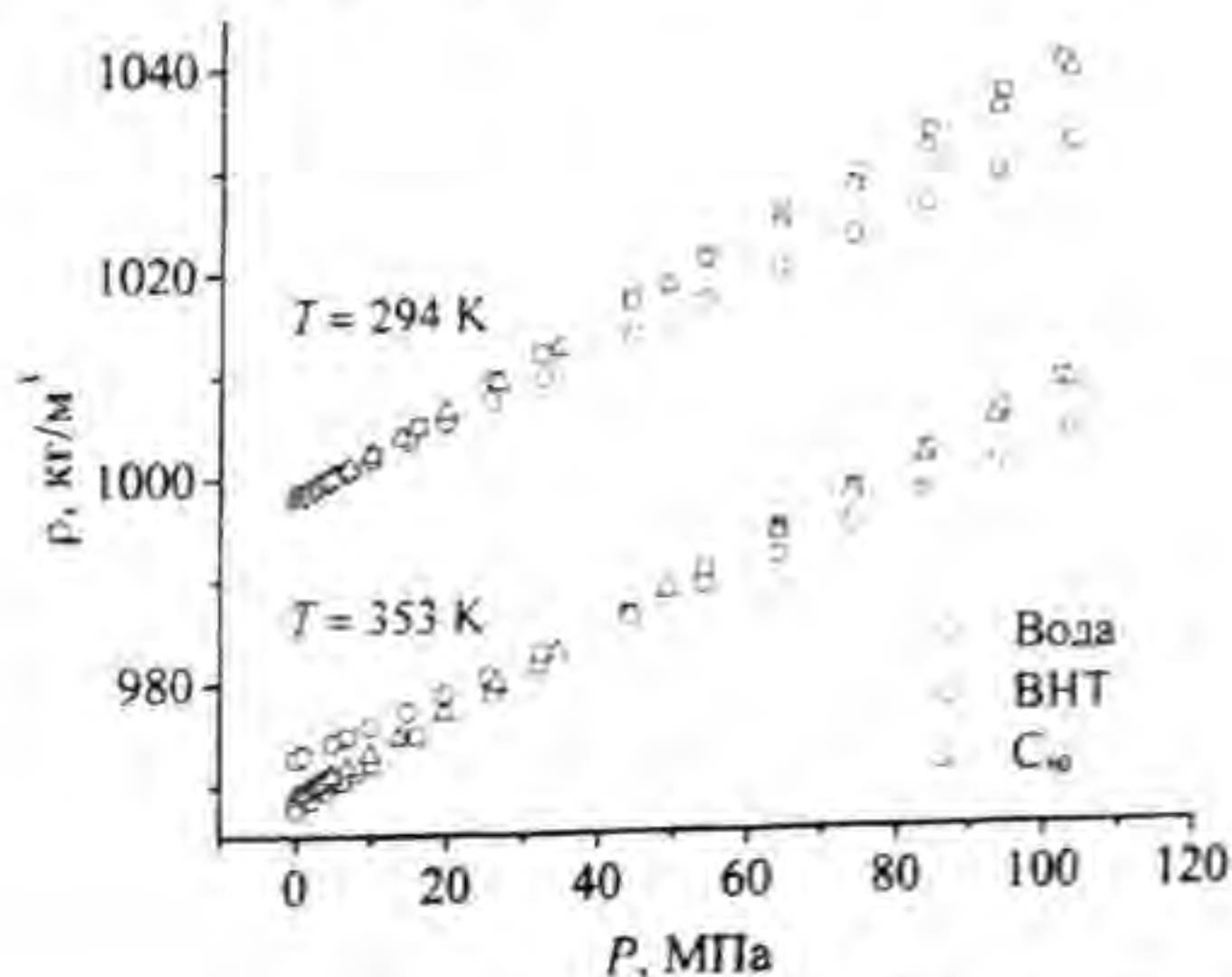


Рис. 1 Барична залежність густини розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води при температурах 294 К та 353 К.

На рис. 1 проведено співставлення ізотерм 294 К та 353 К для води, розчину C_{60} у воді та розчину ВНТ у воді від тиску по ізотермам. Ці залежності є нелінійними. Із збільшенням температури густина досліджуваних розчинів зменшуються.

Додавання малих домішок фулерену C_{60} та вуглецевих нанотрубок при тискові 0,1 МПа та температурі 353 К зменшуює густину води в області високих тисків. Крутизна баричної залежності густини при цьому є найменшою для розчину ВНТ у воді порівняно з водою.

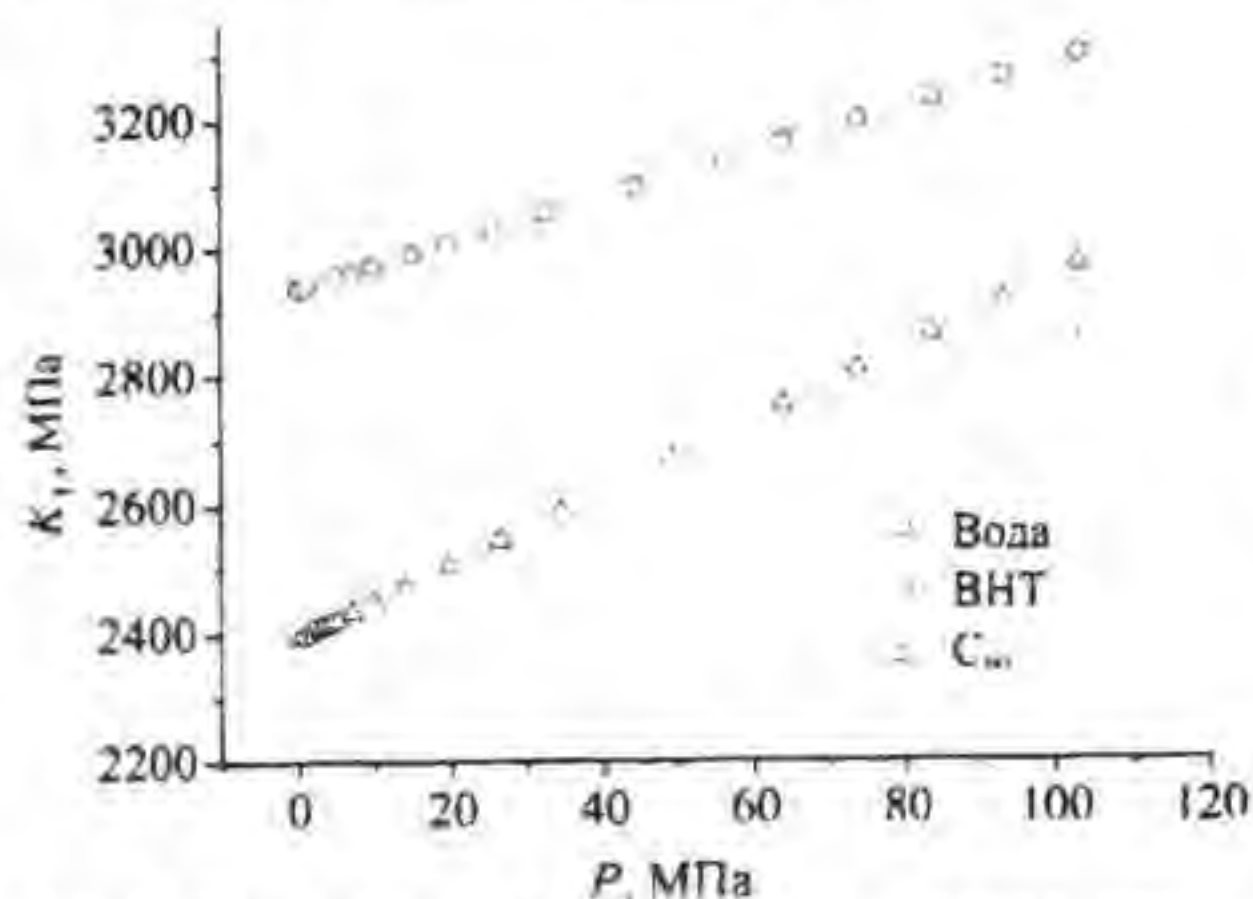


Рис 2 Порівняння ізотермічного модуля пружності K_T від тиску розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води при температурі 312 К.

Співставлення баричної та температурної залежності ізотермічного модуля пружності K_T розчину 0,05 мг/мл ВНТ у воді, розчину 0,05 мг/мл фулерену у воді та чистої води представлена на рис. 2—3 відповідно.

Проведене співставлення показує що значення модуля пружності розчинів ВНТ (на 30%) та C_{60} (на 5%) у воді більші за відповідні величини чистої води.

Як видно з рисунка 3, температурна залежність ізотермічного модуля пружності K_T води має особливість — максимум в

Додавання ВНТ у воду викликає зростання густини системи. Стисливість розчину ВНТ менша за стисливість води, тому при зростанні тиску густина розчину збільшується менш істотно.

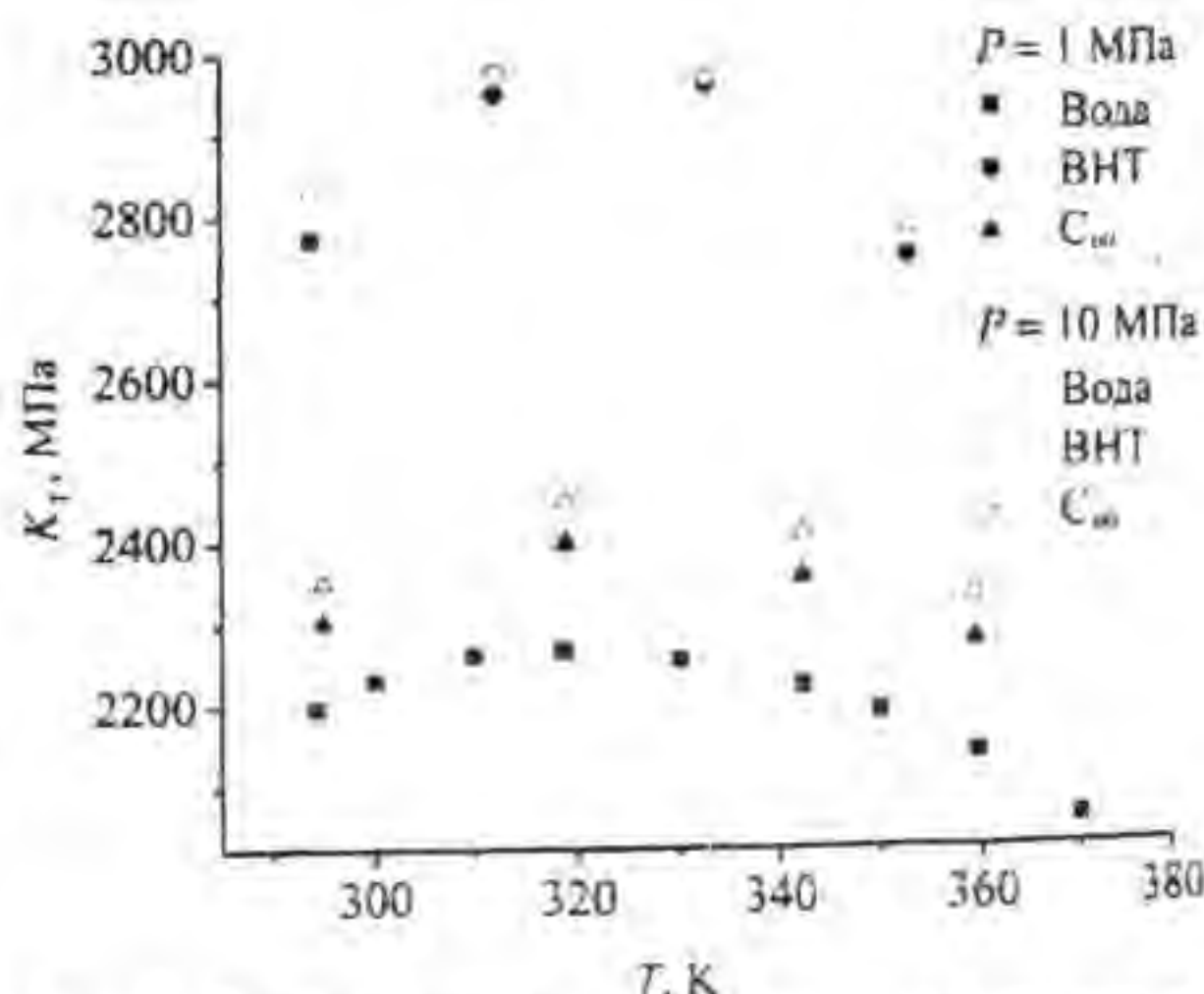


Рис. 3 Порівняння ізотермічного модуля пружності K_T від температури розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води при тисках 1 та 10 МПа.

області температур 320 К. Ця особливість температурної залежності K_T зберігається в розчинах фулерену C_{60} і ВНТ. Додавання вуглецевих нанотрубок суттєво збільшує значення модуля пружності K_T .

Отримані результати свідчать, що при зростанні тиску цей максимум стає менш вираженим і у воді майже повністю зникає при тисках 150 МПа. При додаванні ВНТ у воду, цей максимум стає більш вираженим у системі C_{60} —вода та чистій воді.

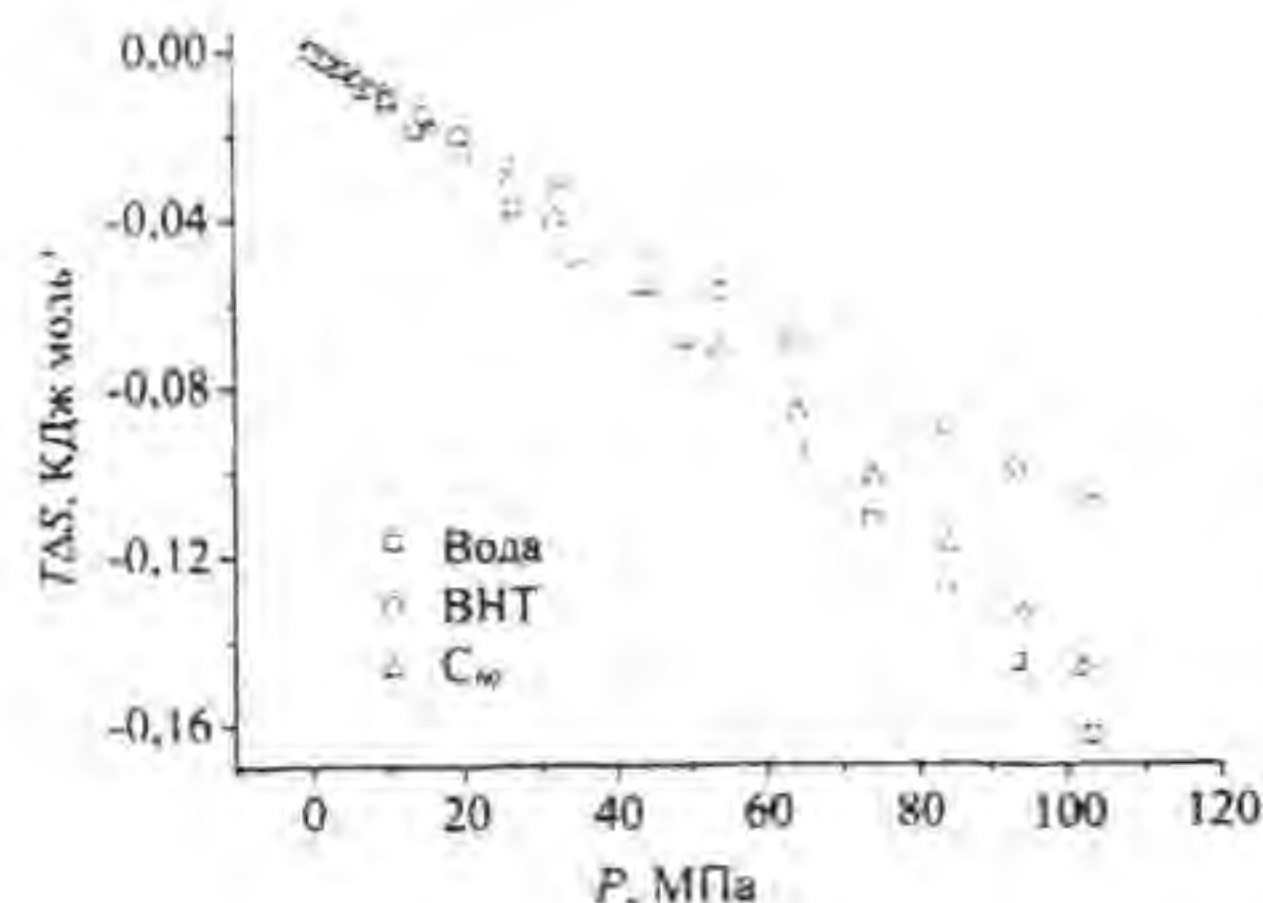


Рис. 4 Порівняння ізотермічного приросту ентропії $T\Delta S$ від тиску розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води при температурі 294 К.

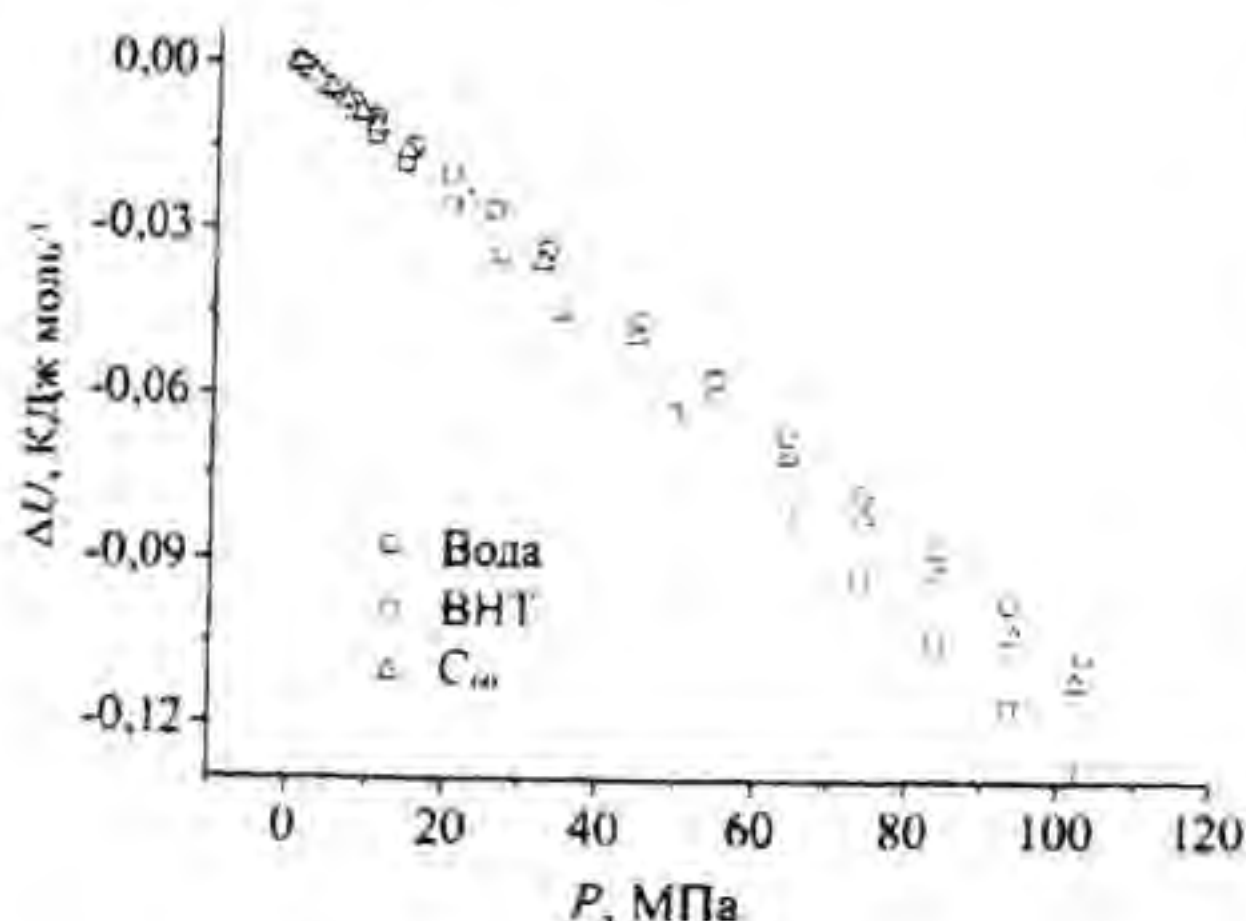


Рис. 5 Порівняння ізотермічного приросту повної внутрішньої енергії ΔU від тиску розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води при температурі 294 К.

Це свідчить про те, що додавання малих домішок фулерену C_{60} та ВНТ до води збільшує енергію міжмолекулярної взаємодії у воді. При цьому вплив на величину міжмолекулярної взаємодії домішок ВНТ до води виявляється суттєво більшим ніж домішок фулерену C_{60} до води.

На рис. 4—5 представлено співставлення ізотерм ізотермічного приросту ентропії $T\Delta S$ та ізотермічного приросту повної внутрішньої енергії ΔU від тиску при температурі 294 К для води, розчину ВНТ у воді та розчину C_{60} у воді відповідно.

Залежності ізотермічного приросту ентропії $T\Delta S$ та повної внутрішньої енергії ΔU від тиску мають подібний характер: для розчинів спостерігаються більші значення приросту, чим для чистої води. При підвищенні тиску значення ізотермічних приростів $T\Delta S$ та ΔU спадають.

Можна зробити припущення, що розчини ВНТ та C_{60} мають більшу просторову впорядкованість, ніж чиста вода. Зростання енергії міжмолекулярної взаємодії в рідинній системі при малих домішках вуглецевих нанотрубок можна пояснити вищою упорядкованістю молекулярної структури досліджуваного розчину у порівнянні з водою. Це можна пояснити зростанням упорядкованості молекул води, що потрапляють всередину нанотрубок.

Для побудови рівняння стану, яке адекватно описувало б $P-V-T$ дані досліджуваного розчину 0,05 мг/мл ВНТ у воді, були використані напівемпіричні рівняння стану, що допускають статистичне обґрунтування.

Для аналізу, якому з цих рівнянь віддати перевагу, був проведений аналіз залежності ізотермічної похідної $(dP/dV)_T$ від тиску. Експериментально визначена залежність $(dP/dV)_T$ від P для досліджуваного розчину виявилась лінійною із середньоквадратичним відхиленням меншим за 1%.

З найбільш відомих напівемпіричних рівнянь лише рівняння Тейта дає лінійну залежність похідної $(dP/dV)_T$ від тиску. Тому зроблений висновок, що для опису $P-V-T$ даних досліджуваного нами розчину найкраще підходить напівемпіричне рівняння стану Тейта.

$$V = V_0 \left(1 - A \ln \frac{B+P}{B+P_0} \right) \quad (1)$$

Ми розрахували сталі A та B рівняння стану Тейта для розчину 0,05 мг/мл ВНТ у воді та порівняли їх з даними для розчину фулерену 0,05 мг/мл C_{60} у воді та чистої води [1, 2]. Результати цих розрахунків подано в табл. 1

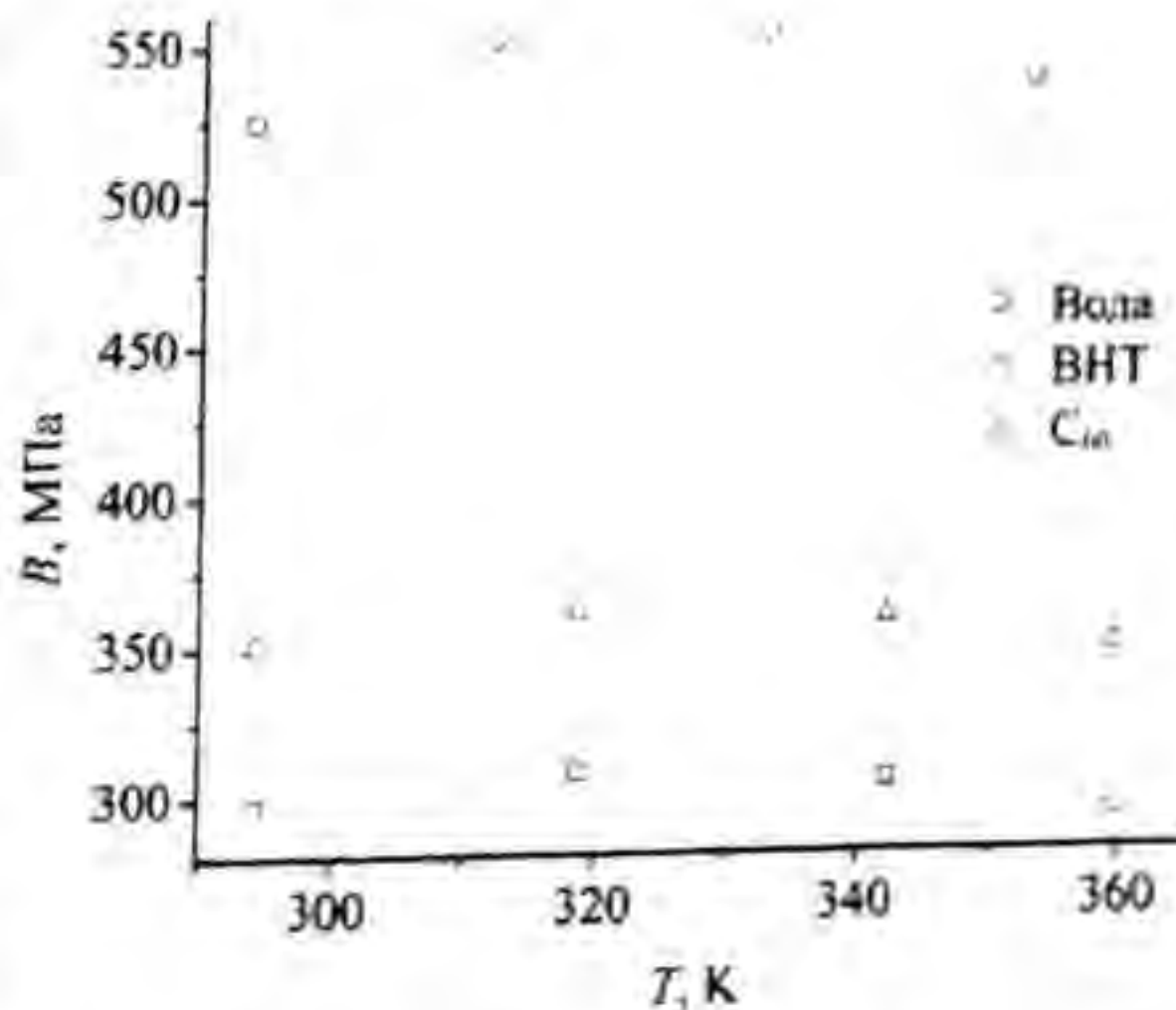


Рис. 6 Порівняння параметру B рівняння стану Тейта від температури розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0,05$ мг/мл) у воді та чистої води.

Таблиця 1

Параметри A і B рівняння стану Тейта для розчинів 0,05 мг/мл ВНТ та C_{60} у воді та води.

0,05 мг/мл ВНТ у воді				
T, K	294,8	312,0	332,6	352,8
A	0,170			
B, MPa	483	512	507	490

0,05 мг/мл C_{60} у воді				
T, K	294,3	318,7	342,3	359,6
A	0,146			
B, MPa	351	361	358	348

Вода				
T, K	294,3	318,7	342,3	359,6
A	0,137			
B, MPa	297	308	304	293

З табл. 1. видно, що значення параметра A для розчину ВНТ у воді складає $A_{ВНТ} = 0,170$, тобто він більший, ніж для чистої води, де він становить $A_{Води} = 0,137$, параметр B цього рівняння має максимум в області температур 320 К.

Зростання енергії міжмолекулярної взаємодії в рідинній системі при малих домішках вуглецевих нанотрубок можна пояснити вищою упорядкованістю молекулярної структури досліджуваного розчину у порівнянні з водою, а саме у зміні упорядкованості молекул води, що потрапляють всередину нанотрубок.

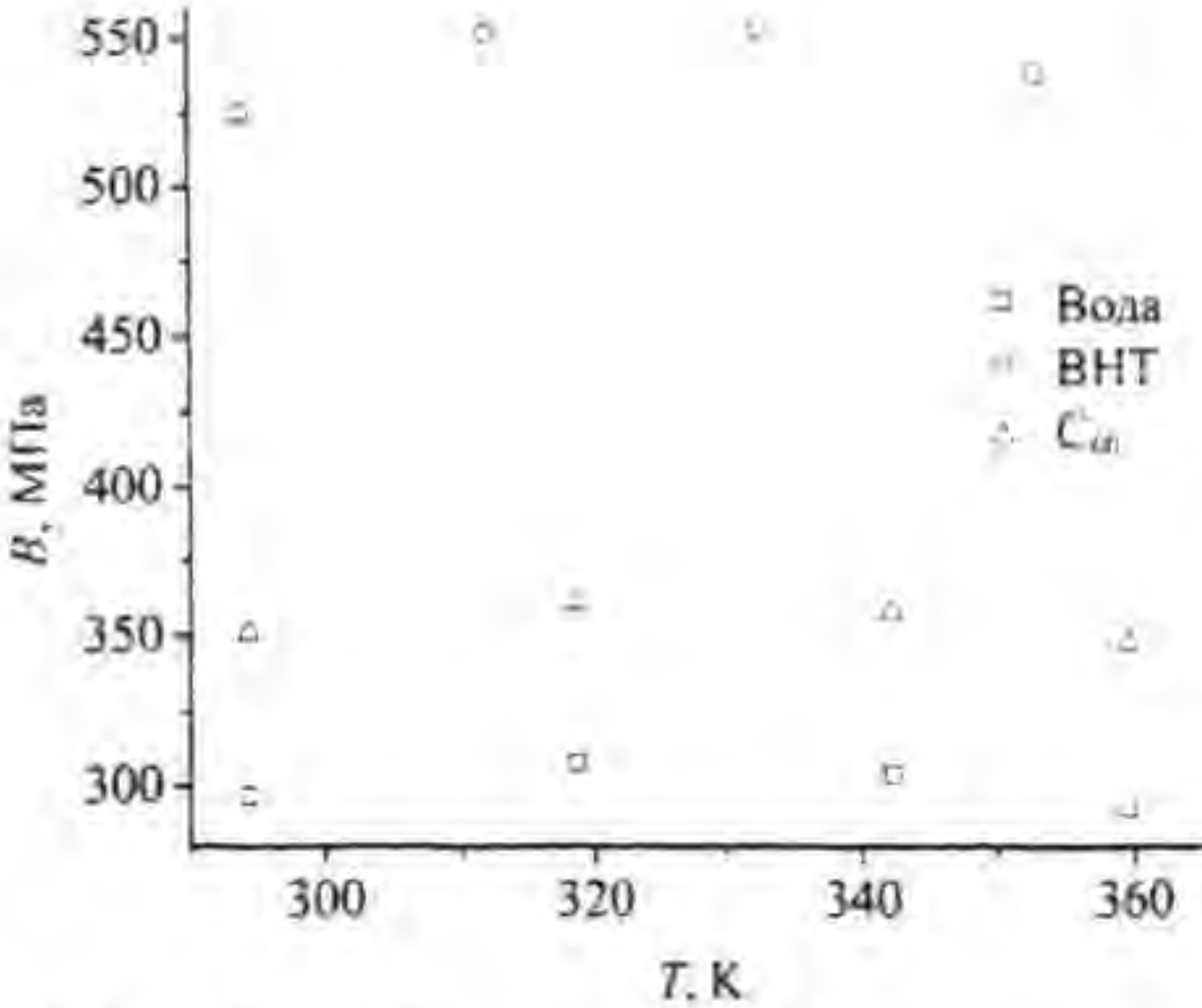


Рис. 6 Порівняння параметру B рівняння стану Тейта від температури розчинів C_{60} та ВНТ ($C = 0.05$ мг/мл) у воді та чистої води

Література

1. Мороз К. О., Влияние тиску на термодинамические свойства полициклических углеводородов (дис... канд. физ.-мат. н., Київ, 2006), 213 с.
2. Adamenko I. I., Moroz K. O., Prylutskyu Yu. I., et al., Equation of state for C_{60} Fullerene Aqueous Solutions. *International Journal of Thermophysics*, **26**, No 3: 795 (2005).
3. Адаменко І. І., Мороз К. О., Дорошенко І. Ю. та ін., Влияние тиску на равновесные свойства раствора фуллерена C_{60} , *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, вип. № 1: (2001).

Надійшла до редколегії 24.01.2008р

УДК 535.3

Білокриницька Л.М., к. ф.-м. н., Гречко Л.Г.*, д. ф.-м. н., проф., Покровський В.О., д. ф.-м. н., проф., Снегір С.В., асп.

Підсилення локального поля поблизу еліпсоїдальних графітових наночастинок

В роботі розглядаються ефекти, пов'язані із взаємодією електромагнітного випромінювання з поверхнею графіту, що має на собі адсорбовані молекули певних речовин. Показано, що при дії імпульсного лазерного випромінювання поблизу окремої чешуйки графіту виникає (в певному частотному діапазоні) значне підсилення локального поля, яке і приводить до інтенсивного переходу адсорбованих молекул у газовий стан. Наводяться деякі результати чисельних розрахунків, які пояснюють вказаний ефект.

Ключові слова: графіт, маспектроскопія, нелінійні діелектрики, наночастинок

Bilokrynyzka L.M., Ph. D., Grechko L.G.*, Dr. Sc., Prof., Pokrovskiy V.A., Dr. Sc., Prof., Snegir S.V., PhD stud.

Amplification of local field near ellipsoidal graphite nanoparticles

Effects caused by interaction of electromagnetic irradiation with graphite surface modified by adsorbed molecules are studied in the paper. It is shown that near of separate graphite flakes significant increase of local field is observed (in certain frequency range) which results in intense transfer of adsorbed molecules to gaseous state. Some results of numeric calculations, which explain the obtained effects, are presented.

Key Words: graphite, mass spectrometry, non-line dielectric, nanoparticles

*E-mail: Hertman@yandex.ru

Вступ

Дослідження нелінійних оптичних властивостей композитів на основі нелінійних діелектриків та металів (КНДМ) пов'язано, в першу чергу, з бажанням керувати їх властивостями за допомогою зміни як параметрів КНДМ, так і параметрів зовнішнього електричного поля. Так, наприклад, змінюючи об'ємну частку фракцій нелінійного діелектрика або металу, ми можемо змінювати в значних межах ефективну діелектричну проникність ϵ таких композитів, а з нею і їх оптичні характеристики, які мають в КНДМ деякі особливості.

В цій роботі розглядаються деякі аспекти цих особливостей КНДМ при взаємодії з ними електромагнітного випромінювання. Наявність в таких композитах просторово-обмежених включень приводить до того, що в системі існує поглинання випромінювання в оптичному діапазоні і навіть в області близького ультрафіолету, тобто зовсім не там, де найбільш активно поглинає матеріал частинок. Особливо цікавим є той факт, що спектральне положення максимуму поглинання малих частинок суттєвим

чином залежить як від їхньої форми, так і від діелектричної проникності матриці, в якій розташовані частинки. Все це нашою думку, що важливу роль у такому поглинанні відіграє поверхня частинок, тобто поглинання здійснюється деякими колективними поверхневими модами коливань просторово-обмежених систем (локальні моди або обмежені резонанси). В залежності від фізичної природи відповідних об'ємних мод поверхневі моди в частинках називають поверхневими плазмонами, фононами або екситонами.

Для ізольованої кульової частинки з друдівською діелектричною функцією частота поверхневого плазмону дорівнює

$$\omega_s = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\epsilon_m + \epsilon_\infty}}$$

де ϵ_m – діелектрична стала оточення. Якщо знехтувати втратами, то на частоті ω_s величина $\Delta = 2\epsilon_m + \epsilon_\infty$ стає нульовою. Оскільки локальне поле E_s в частинці пов'язане із зовнішнім електричним полем E_0 співвідношенням $E_s = E_0 / \Delta$, то при наближенні частоти зовнішнього поля до частоти поверхневого

плазмону відбувається значне зростання локального поля. Це зростання приводить до посилення різноманітних лінійних і нелінійних оптичних процесів, таких, як комбінаційне розсіяння світла, поглинання його адсорбованими молекулами, люмінесценція молекул на частинках, генерація другої гармоніки на шорсткій поверхні металу та ін.

1. Особливості взаємодії адсорбційного шару терморозширеного вуглецю та ультрафіолетового (УФ) випромінювання

Відкриття методу мас-спектрометрії із матрично-активованою лазерною десорбцією/іонізацією (МАЛДІ) [1] надало нові можливості у дослідженні широкого класу сполук у масовому діапазоні понад 500 000 а.о.м. Головним успіхом методу стало застосування органічних низькомолекулярних кислот (матриць), які поглинаючи УФ опромінення лазера «моментально» сублімували, переводячи в газову фазу молекули досліджуваних зразків, що попередньо були скристалізовані з відповідною матрицею [2].

Але застосування матриці, значно ускладнило використання МАЛДІ при дослідженнях сполук із масами до 1000 а.о.м., через значний «хімічний шум», що проявлявся в мас-спектрах присутністю великої кількості фонових піків іонів матриці, її фрагментів, кластерів та асоціатів, тощо. Тому для усунення такого ефекту, що унеможлиблював достовірну інтерпретації мас-спектрів в фоновому діапазоні, були розпочаті пошуки безматричних методів, що базувалися б на впливі поверхні на процеси переведення досліджуваних молекул без деструкції із адсорбованого шару в газовий стан.

Одним із таких методів став метод мас-спектрометрії із лазерною десорбцією/іонізацією, що передбачає використання наноматеріалів для формування адсорбційних поверхонь на основі вуглець похідних матеріалів таких як графіт, нанотрубки, фулерени, тощо [3–7]. Використання таких матеріалів та їх модифікованих форм дало можливість безперешкодно досліджувати пептиди, протеїни [8], амінокислот та гідрокарбонати [9], олігосахариди та синтетичні полімери [10–15], вирішувати деякі задачі з контролю забруднювання довкілля. Застосування очищеного терморозширеного (ТРГ) графіту продемонструвало можливість отримання інформації не тільки про структуру поліядерних координаційних сполук міді (II), але і про стан

системи. В нашій роботі [16] показано можливість отримання мас-спектрів іонів асоціатів координаційних сполук із молекулами води методом мас-спектрометрії із лазерною десорбцією/іонізацією при застосуванні поверхні ТРГ.

Підсумовуючи розглянуті приклади успішного застосування графітовмісних матеріалів як носіїв зразка в методах мас-спектрометрії із лазерною десорбцією/іонізацією, залишається незрозумілим ефект, який сприяє переведенню досліджуваних сполук у газову фазу. Одним лише припущенням може бути взаємодія лазерного опромінення і нанорозмірних дефектів адсорбційного шару поверхні. Розглядаючи роботи [17,18], в яких застосовано злам стрижня олівця, в якості емітера в польовій десорбції та польовій іонізації, автори також роблять припущення про можливий вплив поля, яке викликане нано нерівностями (шершавістю) графітовмісної поверхні, на процеси десорбції та іоноформування досліджуваних сполук [10]. Теоретичні розрахунки величини поля в польовій десорбції при якій відбувається польова іонізація органічних молекул складає близько 1 В/Å [19]. Тому на поверхні зламу графітового стрижня, де присутні «загострені» графітові шпилі, цілком можливо, створюються електричні поля величиною понад 1 В/Å [10].

Чи можуть існувати такі ж поля, що активують процеси десорбції нелетких сполук та їх іонізацію в умовах лазерної десорбції/іонізації? Це питання потребує додаткових теоретичних методів дослідження взаємодії падаючого когерентного опромінення ($\lambda = 337$ нм) та ТРГ поверхнею із розмірами дефектів 0,7 – 100 нм.

Найбільш загальною формою частинки в теоретичних дослідженнях вважається еліпсоїд. В залежності від співвідношення його осей з'являється можливість моделювати і плоскі і стержньові частинки. Порівняння теоретичних розрахунків та отриманих експериментальних даними розширить розуміння процесів взаємодії адсорбційного шару та когерентного опромінення та їх вплив на десорбцію біомолекул.

2. Розрахункові співвідношення

Якщо амплітуду падаючої світлової хвилі позначити через $E_0(\omega)$, а повне електричне поле поблизу поверхні частинки – через $\vec{E}(\omega, \vec{r})$, то коефіцієнт підсилення в рамках класичної

електродинаміки у першому наближенні матиме вигляд

$$F = \left| \frac{\bar{E}(\omega, \vec{r})}{E_0(\omega)} \right| \quad (1)$$

Для з'ясування картини розглянемо задачу про поведінку еліпсоїдальної частинки, розміщеної в електричному полі $\bar{E}_m(t) = \bar{E}_m e^{-i\omega t}$ за умови $(2\pi c/\omega) \gg a$, яке паралельне великій піввісі еліпсоїда a .

В даній роботі обмежимося випадком, коли діелектричні функції (ДФ) частинки і середовища мають вигляд

$$\begin{aligned} \epsilon_s(\omega, \bar{E}_s) &= \epsilon'_s(\omega) + i\epsilon''_s(\omega) + \chi(\omega) |\bar{E}_s|^2 \\ \epsilon_m(\omega) &= \epsilon'_m(\omega) + i\epsilon''_m(\omega) \end{aligned} \quad (2)$$

де $\epsilon_s(\omega, \bar{E}_s)$ – нелінійна ДФ матеріалу частинки, $\epsilon_m(\omega)$ – ДФ оточення, $\chi(\omega) = \chi(\omega, -\omega_1, \omega_1, \omega)$ – комплексний нелінійний коефіцієнт оптичного ефекту Керра. Якщо $(2\pi c/\omega) \gg a$ (електростатичне наближення) поле всередині частинки $\bar{E}_s$ при довільній залежності $\epsilon_s(E_s)$ однорідне і паралельне $\bar{E}_m$. Тоді $\bar{E}_s = \Gamma \cdot \bar{E}_m$ де

$$F = \frac{\epsilon_h}{\epsilon_h(1-L) + L[\epsilon_s(\omega) + \chi |\bar{E}_s|^2]} \quad (3)$$

де L – фактор деполаризації вздовж вісі Ox [20].

Позначимо через ϵ' і χ' – відповідно дійсні частини функції $\epsilon = [\epsilon_m(\omega)(1-L) + L\epsilon_s(\omega)]/L$ і $\chi(\omega)$, а через ϵ'' і χ'' – їх уявні частини. Тоді з урахуванням (2) для фактора підсилення поля $\bar{E}_s$ отримаємо вираз

$$F = \frac{\epsilon_m}{L} \frac{1}{\left(\epsilon' + \chi' |\bar{E}_s|^2 \right) + i \left(\epsilon'' + \chi'' |\bar{E}_s|^2 \right)} \quad (4)$$

У випадку, коли $\chi = 0$ лінійний коефіцієнт підсилення можна представити у вигляді

$$F = \frac{\epsilon_m}{L} \frac{1}{\left(\frac{1}{z_s^2} - \frac{1}{z^2 + \gamma^2} \right) + i \left(\frac{1}{\bar{z}_s^2} + \frac{\gamma}{z(z^2 + \gamma^2)} \right)} \quad (5)$$

При отриманні (5) ми припустили, що матеріал ДФ $\epsilon_s(\omega)$ частинки є [20]

$$\epsilon_s(\omega) = \epsilon_{s\infty} - \frac{1}{z(z + i\gamma)}, \quad z = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \gamma = \frac{\nu}{\omega_p},$$

де $\epsilon_{s\infty} = \epsilon'_{s\infty} + i\epsilon''_{s\infty}$ – вклад в $\epsilon_s(\omega)$ від міжзонних переходів, ω_p – плазмова частота електронів металу, γ – частота їх загасання. В (5) прийнято наступні позначення

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{z}_s^2} &= \frac{\epsilon'_m(1-L) + \epsilon''_{s\infty}L}{L}, \quad z_s = \frac{\omega_s}{\omega_p}, \\ \omega_s &= \omega_p \sqrt{\frac{L}{\epsilon'_m(1-L) + \epsilon''_{s\infty}L}} \end{aligned}$$

Відмітимо, що ω_s є частота плазмового резонансу для еліпсоїда, яка відповідає направленню зовнішнього поля вздовж вісі Ox . Із (5) знаходимо

$$|F_0|^2 = \left| \frac{\epsilon_m}{L} \right|^2 \frac{z_s^4(z^2 + \gamma^2)^2}{(z^2 + \gamma^2 - z_s^2)^2 + \Gamma^2(\omega, L) z_s^4(z^2 + \gamma^2)^2} \quad (5)$$

де

$$\Gamma(z, L) = \frac{\epsilon'_m(1-L) + \epsilon''_{s\infty}L}{L} + \frac{\gamma}{z(z^2 + \gamma^2)}$$

Відомо [20], що модель Друде не завжди добре описує діелектричну функцію провідників, тому в практичних розрахунках для завдання діелектричної функції матеріалу графітових частинок більш доцільним є використання експериментальних залежностей діелектричної проникності від частоти. Звичайно такі залежності в оптичному, інфрачервоному і ультрафіолетовому діапазонах знаходяться за результатами вимірювання коефіцієнтів відбиття електромагнітного випромінювання при неперевній зміні енергії падаючого світла. Для графіту такі залежності дійсної та уявної частин діелектричної проникності графіту отримані в [21], а їх частина, яка відповідає оптичному діапазону показана на рис. 1. З цих даних випливає, що залежність діелектричної проникності графіту від енергії випромінювання має достатньо складний характер. Максимум уявної частини ДФ спостерігається близько 4,5 еВ, тобто при довжині хвилі ≈ 250 нм. Тому в моделі Друде для графіта можна прийняти, що $\epsilon_{s\infty} \approx 2$, $\omega_p \approx 4,5$ еВ (енергія випромінювання в 1 еВ відповідає довжині хвилі $\lambda = 1243$ нм).

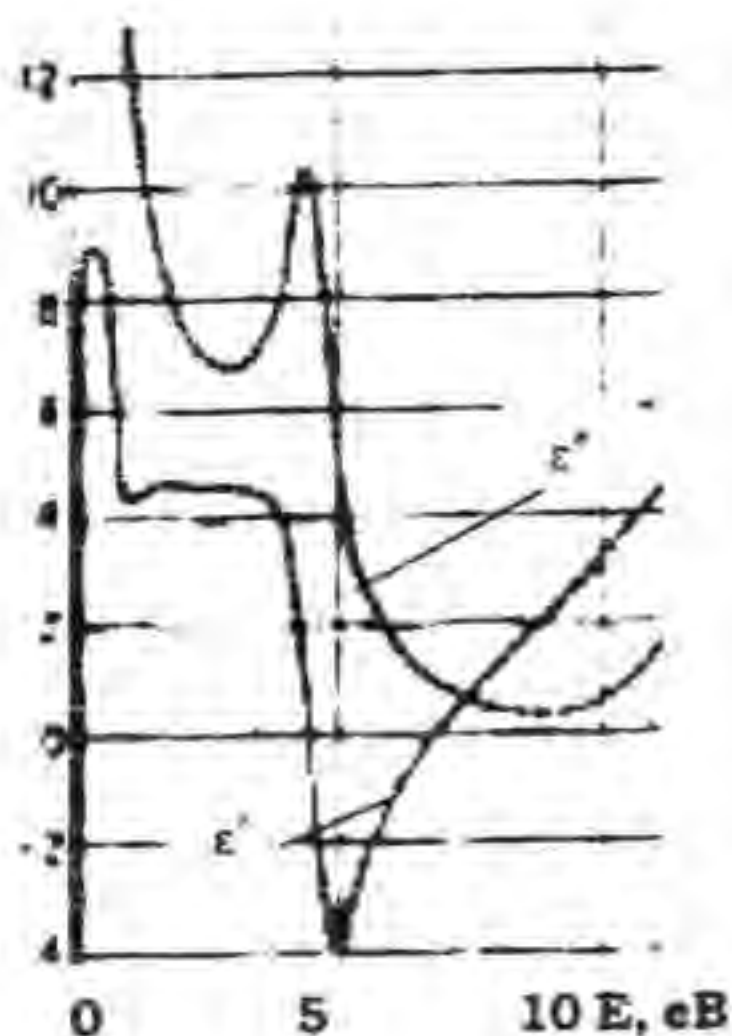


Рис. 1. Спектральна залежність дійсної і уявної частини діелектричної проникності графіту

Слід зауважити, що експериментальні залежності дійсної та уявної частини ДФ графіту можуть суттєво відрізнятися для різних типів матеріалу [21], в той час як модель Друде має достатньо універсальний характер. Тому при розрахунках нами були використані обидві залежності.

3. Результати розрахунків

Наведемо деякі результати виконаних розрахунків.

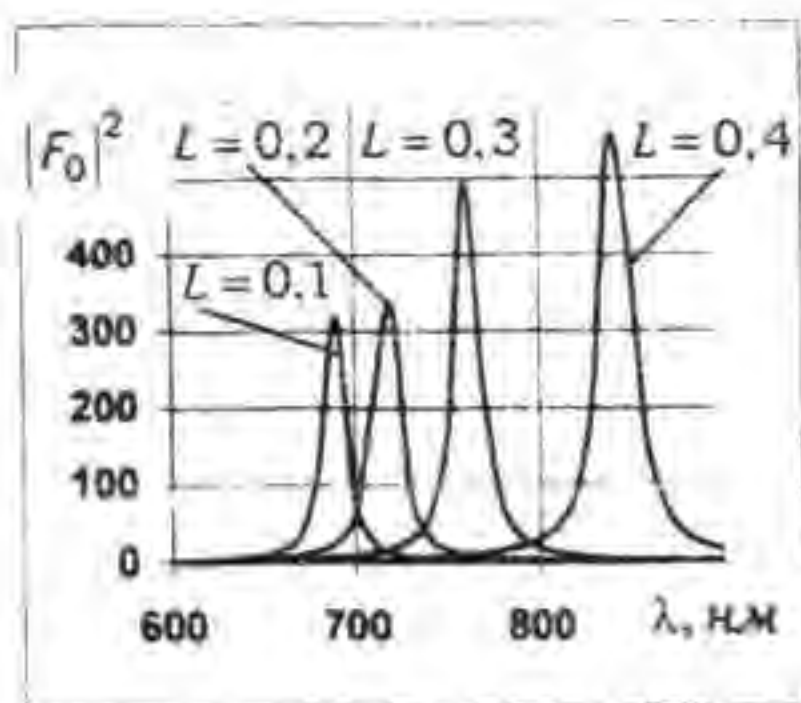


Рис. 2. Спектральна залежність підсилення локального поля для різних значень фактора деполаризації L (для опису діелектричної функції графіту використана модель Друде)

На рис. 2 показані спектри підсилення інтенсивності локального поля поблизу еліпсоїдальної частинки для різних значень фактора деполаризації, а при розрахунках для ДФ графіту була використана модель Друде. На рис.

3 показана аналогічна залежність при використанні експериментальної ДФ функції графіту, яка неведена на рис. 1. При цьому в розрахункових формулах експериментальні дані були апроксимовані за допомогою сплайн-інтерполяції.

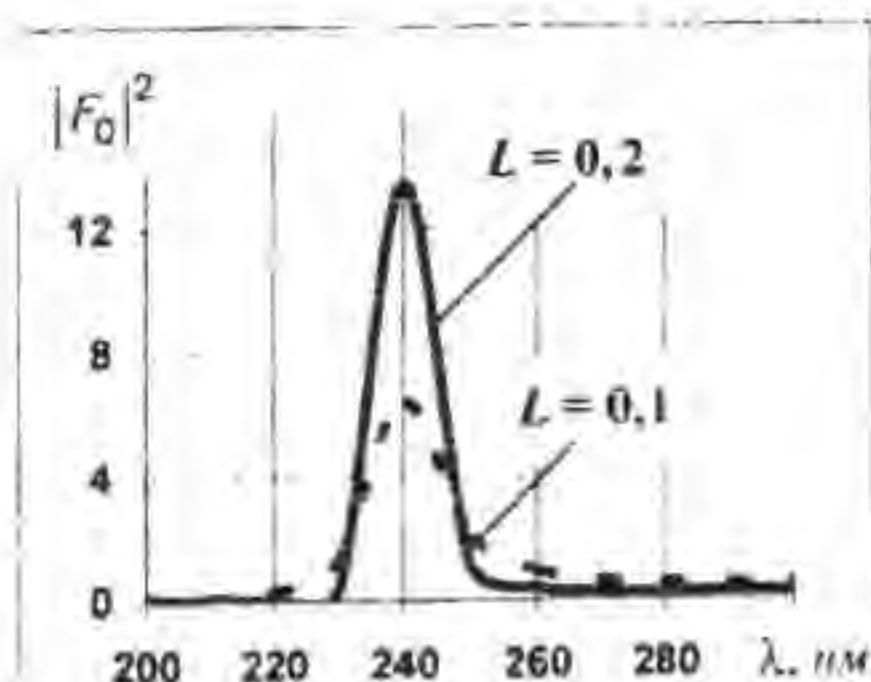


Рис. 3. Спектральна залежність підсилення локального поля для різних значень фактора деполаризації L (для опису діелектричної функції графіту використані експериментальні дані [21])

Обидві моделі опису діелектричної функції показують наявність сплесків, які і спостерігаються в експериментах. Разом з тим, резонансні частоти, які відповідають максимумам суттєво відрізняються одна від іншої. Це пояснюється тим, що модель Друде не може врахувати складну структуру графіту, а експериментальна залежність ДФ суттєво залежить від типу графіту. Але якісно наведені графіки підсилення локального поля відповідають один одному.

Висновки

На основі проведених теоретичних розрахунків та сукупності одержаних раніше експериментальних даних можна зробити висновок про основоположну роль електричних полів в процесах лазерної десорбції/іонізації, що за своїм характером схожі до традиційних електростатичних механізмів польової іонізації та польової десорбції адсорбованих молекул на поверхні вуглець-вмісних підкладок. Існування полів величиною $(20-300) \cdot E_0$, де напруженість зовнішнього поля $E_0 = 1 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ виділяє метод ЛДІ із ТРГ серед існуючих безматричних методів ЛДІ, так як дає можливість отримувати супрамолекулярні іони, наприклад іони комплексів міді(II) та однієї, або двох молекул

води. Тобто ЛДІ із ТРГ поверхні дає інформацію не тільки про структуру досліджуваної сполуки, але і про її взаємодії із оточуючим середовищем (розчинником).

Список використаних джерел

1. K.Tanaka, H.Waki, Y.Ido, S.Akita, Y.Yoshida, T. Yoshida, "Priteine and polimer analyses up to m/z 100000 by laser ionization time of flight mass spectrometry", *Rapid Commun.Mass Spectrom.* 1988, 2, 151-153.
2. А.Т.Лебедев Масспектрометрия в органической химии, Москва, 2003.
3. Chen Y.C., "Surface assisted laser desorption/ionization (SALDI) mas spectrometry" Montana State University, PhD-thesis, 1997.
4. Han M., Sunner J., "Activated carbon substrate surface for laser desorption mass spectrometry". *J.Am.Soc.Mass Spectrom.*, V 11, p 644-649.
5. Chen Y.C., Shiea J., Sunner J., "Thin-layer chromatography mass spectrometry using activated carbon, surface-assisted laser desorption/ionization", *J.Chom.A.*, 1998, 826, p.77-86.
6. Xu S.Y., Li, Y.F., Zou H.F., Qiu J.S., Guo Z., Guo B.C., "Carbon Nanotubes as Assisted Matrix for Laser Desorption/Ionization Time-of-Flight Mass Spectrometry", *Anal. Chemistry*, vol. 75, 2003, pp. 6191-6195
7. Ren S.F., GuoY.L., "Oxidized carbon nanotubes as matrix for matrix-assisted laser desorption/ionization time-of-flight mass spectrometric analysis of biomolecules", *Rapid Commune.Mass Spectrom.* 2005, vol. 19, p.255-260.
8. SEDO Ondrej ; ALBERTI Milan; JANCA Jan; HAVEL Josef "Laser desorption-ionization time of flight mass spectrometry of various carbon materials" // *Carbon* 2006, vol. 44, №5, pp. 840-847
9. Rainer M. Vallant, Zoltan Szabo, Lukas Trojer, Muhammad Najam-ul-Haq, Matthias Rainer, Christian W. Huck, Rania Bakry, and Günther K. Bonn "New Analy
10. Sunner, J.; Dratz, E.; Chen, Y.-C. *Anal. Chem.* "Graphite surface assiated laser desorption/ionization time of flight mass spectrometry of peptide and protein from liquid solutions", 1995, 67, 4335-4342.
11. Dale, M. J.; Knochenmuss, R.; Zenobi, R. Graphite/Liquid Mixed Matrices for Laser Desorption/Ionization Mass Spectrometry // *Anal. Chem.* 1996, 68, 3321-3329
12. Crecelius, A.; Clench, M. R.; Richards, D. S.; Parr, V. Thin-layer chromatography-matrix-assisted laser desorption ionisation-time-of-flight mass spectrometry using particle suspension matrices // *J. Chromatogr. A* 2002, 958, 249.
13. Dietemann, P. Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, 2003.
14. Zumbuhl, S.; Knochenmuss, R.; Wulfert, S.; Dubois, F.; Dale, M. J.; Zenobi, R. A graphite-assisted laser desorption/ionization study of light-induced aging in triterpene dammar and mastic varnishes // *Anal. Chem.* 1998, 70, 707.
15. Dietemann, P.; Edelmann, M. J.; Meisterhans, C.; Pfeiffer, C.; Zumbuhl, S.; Knochenmuss, R.; Zenobi, R. Artificial Photoaging of Triterpenes Studied by Graphite-Assisted Laser Desorption/Ionization Mass Spectrometry // *Helv. Chim. Acta* 2000, 83, 1766.
16. Лазерная десорбция с поверхности терморасширенного графита / С.В.Снегир, Г.П. Приходько, Ю.И. Семенов, В.А.Покровский, И.О.Фрицкий // *Химия, физика и технология поверхности*. – 2007. – Вып.13. – С. 201 – 216.
17. M. V. Kosevich, V. S. Shelkovsky // A New Type of Graphite Emitter for Field Ionization/Field Desorption Mass Spectrometry // *Rapid Comm. Mass spectr.* vol.7, 805-811 (1993).
18. M. V. Kosevich, V. A. Pashinskaya and V. S. Shelkovsky // Direct Identification of Organic Inclusions in Graphite on the Basis of Field Desorption Mass Spectrometry./ *Organic mass spectrometry*, vol. 29, 458-462 (1994)
19. Э.Н. Король В.В. Лобанов, В.А. Назаренко, В.А. Покровский «Физические основы полевой масс-спектрометрии» Киев, Наукова думка, 1978. С.191.
20. Bohren C.F., Huffman D.R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. – Wiley-Interscience, New York, 1983. (Русский перевод: Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир. 1986. – 664 с.)
21. Taft E.A., Philipp H.R. Optical properties of graphite // *Physical Rewiew.* – 1965. -V. 138, Number 1A. – P. A197- A202.

Надійшла до редакції 10.03.2008.

УДК 519.9

Булавін Л. А., д. ф.-м. н., акад. НАН України,
проф., Шамайко* Д. О., асп., Алексеев О.М., к.
ф.-м. н., Перепелиця С. М., к. ф.-м. н.

Час життя протиіонів натрію в іон-гідратному шарі молекули ДНК

Час життя протиіонів ДНК було визначено за допомогою феноменологічної моделі, яка розроблена в данній роботі. Число протиіонів ДНК розглядалося в пропорції один іон на кожний нуклеотид. Зв'язані з молекулою ДНК протиіони характеризуються часом життя, і не роблять внеску в електропровідність системи. Суттєвий внесок у значення електропровідності роблять вільні протиіони, які рухаються навколо подвійної спіралі. Користуючись теорією провідності електроліту, була отримана формула, що поєднує час життя протиіонів з провідністю. Електропровідність водних розчинів ДНК була експериментально визначена для різних концентрацій ДНК (0.001-0.2% маси) в частотному діапазоні 0.1 – 100 кГц. Результати показали, що в розбавленому водному розчині ДНК (0.001%) час життя становить 1 мкс, а в концентрованому розчині (0.15%) ця величина складає 1 мс.

Ключові слова: макромолекула ДНК, протиіон, електропровідність.

L. A. Bulavin, Acad. NASU, D. O. Shamayko,
stud., O. M. Alekseyev, PhD. S. M. Perepelytsya,
PhD

Lifetime of sodium counterions in the DNA ion-hydrate shell

The lifetime of DNA counterions was determined using the phenomenological model, developed in this work. The number of DNA counterions was considered in the proportion of one ion per nucleotide. The counterions bonded to DNA are characterized by the lifetime and do not make contribution to the conductivity of the system. Free counterions, moving around the double helix make the main contribution to the conductivity. Using the theory of electrolyte conductivity, the formula connecting the counterion lifetime and conductivity was obtained. The conductivity of DNA aqueous solutions was determined for different concentrations of DNA (0.001-0.2% by mass) at frequencies 0.1 – 100 kHz. The results show that in dilute DNA aqueous solutions (0.001%) the lifetime is about 1 μ s, and in the concentrated aqueous solutions (0.15%) it is about 1 ms.

Key Words: DNA macromolecule, counterion, conductivity.

*E-mail: dima_dnepr@ukr.net

Вступ

В природних умовах молекула ДНК знаходиться у вигляді подвійної спіралі, в середині якої знаходяться пари азотистих основ, а назовні цукро-фосфатний остов [1]. Остов подвійної спіралі складається з від'ємнозаряджених фосфатних груп ($\sim e$). Для забезпечення стабільності структури макромолекули заряди фосфатних груп нейтралізуються протиіонами, як правило Na^+ . Тому у висушеному стані молекула ДНК є сіллю протиіонів натрію, яка у водному розчині дисоціює на аніонний поліелектроліт і протиіони [2-3]. Протиіони разом з молекулами води формують навколо ДНК іон-гідратний шар, стабілізуючи структуру подвійної спіралі. Протиіони визначають здатність макромолекули до значних конформаційних трансформацій

таких як згин, кручення, привідкриття пар азотистих основ, що відіграють провідну роль у біологічному функціонуванні молекули ДНК в живому організмі [4-6].

Останні дослідження структури металокомплексів нуклеїнових кислот показали, що протиіони натрію локалізуються переважно біля фосфатних груп остова макромолекули [7]. Як показують дані малокутового розсіювання рентгенівських променів на водних розчинах ДНК [8], протиіони не мають певного положення біля ДНК і знаходяться в стані динамічної рівноваги в шарі товщиною $\sim (5 \div 7) \text{ \AA}$. Існування такого іонного шару для ДНК було передбачено раніше теоретично за допомогою рівнянь Пуассона-Больцмана та Дебая-Хюкеля [9-11] і визначено розподіл протиіонів навколо подвійної спіралі. Проте розподіл протиіонів

навколо молекули ДНК є статичною характеристикою і не дає інформації про динамічний стан системи.

В стані динамічної рівноваги протиіони безперервно приєднуються і від'єднуються від атомних груп ДНК. Дані молекулярної динаміки показують, що протиіони Na^+ знаходяться в комплексі з молекулою ДНК протягом 1 нс і приблизно такий самий час знаходяться у вільному стані [12]. Тому усі протиіони іон-гідратного шару ДНК можна розподілити на протиіони, що безпосередньо зв'язані з макромолекулою та вільні протиіони. Для описання динаміки протиіонів ДНК необхідно визначити траєкторії руху протиіонів цих двох груп.

Динаміка зв'язаних протиіонів ДНК описується в рамках теорії конформаційних коливань ДНК [13]. Протиіони, що зв'язані з фосфатними групами остова молекули ДНК коливаються відносно положення рівноваги. Розрахунки частот коливальних мод молекули ДНК з протиіонами лужних металів показали, що частота іон-фосфатних коливань знаходиться у низькочастотному діапазоні спектру ($< 250 \text{ см}^{-1}$) і зменшується при збільшенні маси протиіонів [9-14]. Значення розрахованих частот узгоджуються з експериментальними даними по комбінаційному розсіянню світла на водних розчинах Na - та Cs -ДНК [14] та з інфрачервоними спектрами полінуклеотидів [15-16]. Експериментальні та теоретичні дослідження частот коливань також узгоджуються з частотами коливань іонів в іонних кристалах, що вказує на те, що протиіони разом з ДНК утворюють динамічну іонну ґратку.

Вільні протиіони рухаються деякий час в іон-гідратному шарі макромолекули і можуть виходити з нього, або приєднуватися до ДНК. Для описання динаміки вільних протиіонів можуть використовуватися методи теорії електролітів та теорії плазми [2], а також метод молекулярної динаміки [14]. Серед експериментальних методів одним з найбільш інформативних у дослідженні динаміки протиіонів є метод визначення електропровідності розчинів ДНК на різних частотах.

Як відомо, електропровідність водних розчинів ДНК обумовлена протиіонами та протонами води. Визначаючи електропровідність водних розчинів на різних частотах, можна визначити характерні часи релаксації макромолекули та часи життя протиіонів поблизу

поверхні макромолекули. Так в роботі [17] показано, що на частотах 10 кГц та 10 МГц спостерігаються максимуми уявної частини діелектричної проникності, а отже електропровідності. Автори роботи вважають, що це пов'язано з конформаційними трансформаціями макромолекули. Смуг, пов'язаних з рухами протиіонів не виявлено.

В даній роботі пов'язується час життя протиіонів біля поверхні молекули ДНК з електропровідністю в частотному діапазоні від 20 до 100 кГц . Ґрунтуючись на проведеному експерименті по електропровідності водних розчинів молекули ДНК, визначається час життя протиіонів.

Модель динаміки протиіонів ДНК

Для визначення часу життя протиіонів в іон-гідратному шарі ДНК вважатимемо, що електропровідність зумовлюють протиіони, які знаходяться поза межами іон-гідратного шару ДНК (вільні протиіони). Енергія взаємодії протиіонів з макромолекулою, які знаходяться всередині іон-гідратного шару, значно більша, ніж взаємодія із зовнішнім полем, тому їх

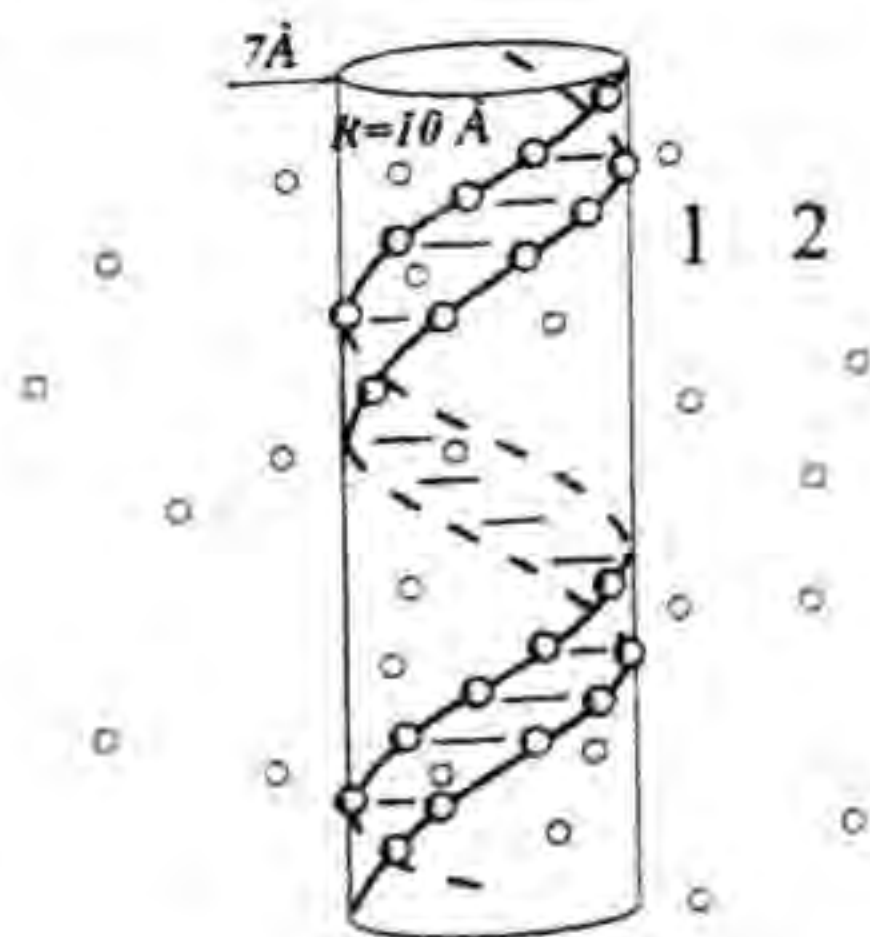


Рис. 1. Протиіони ДНК: 1-іон-гідратний шар ДНК; 2- розчин.

внеском в електропровідність системи знехтуємо. Знаходження протиіонів в іон-гідратному шарі ДНК та у вільному стані будемо описувати характерними часами життя у зв'язаному та вільному станах. Вважатимемо, що ці характерні часи однакові і дорівнюють τ (рис.1). Для визначення часу τ по даним електропровідності водних розчинів ДНК необхідно оцінити

кількість протиіонів, які знаходяться у вільному стані.

Нехай зовнішнє електричне поле діє на систему протягом часу t . За цей час один протиіон вийде і повернеться до іон-гідратного шару ДНК $\frac{t}{2\tau}$ разів. Загальна кількість місць зв'язування для протиіонів на молекулі ДНК приблизно дорівнює кількості фосфатних груп (N). Тоді загальна кількість протиіонів, які приймають участь в електропровідності системи визначатиметься наступним чином:

$$n = N \cdot \frac{t}{2\tau} \quad (1)$$

Враховуючи, що період зовнішнього поля з частотою ν дорівнює $T = \frac{1}{\nu} = 2\tau$ отримуємо вираз для часу життя протиіонів біля поверхні ДНК:

$$\tau = \frac{N \cdot T}{4n} = \frac{N}{4n\nu} \quad (2)$$

Величину n визначимо з експериментальних даних по електропровідності наступним чином:

$$n = \frac{\sigma - \sigma'}{e\mu} \quad (3)$$

де σ - електропровідність водного розчину молекули ДНК з надлишковими іонами Na^+ та Cl^- ; σ' - провідність розчину солі NaCl з концентрацією, яка відповідає концентрації надлишкової солі в зразку ДНК; μ - рухомість іонів; e - абсолютне значення заряду електрона. Коефіцієнт рухомості характеризує середню швидкість впорядкованого руху іону в зовнішньому полі.

Як відомо, електропровідність σ можна виразити з диференційного запису закону Ома [19]:

$$\sigma' = (\mu^+ + \mu^-) \cdot e \cdot C \cdot N_A \quad (4)$$

де μ^+ та μ^- - коефіцієнти рухомості відповідних іонів; C - молярна концентрація розчину; N_A - стала Авогадро. Добуток $C \cdot N_A$ визначає середню кількість носіїв струму в електроліті.

В наших розрахунках вважатимемо, що коефіцієнти рухомості іонів Na^+ та Cl^- однакові ($\mu^+ \approx \mu^-$). Підставляючи (4) в (3), а потім (3) в (2) отримуємо вираз для часу життя протиіонів натрію в іон-гідратному шарі молекули ДНК:

$$\tau = \frac{\sigma' \cdot N}{8 \cdot N_A \cdot C \cdot \nu \cdot (\sigma - \sigma')} \quad (5)$$

Параметри σ та σ' визначаються з експерименту по електропровідності на різних частотах ν . Загальну кількість фосфатних груп (N) можна обрахувати за концентрацією молекули ДНК у розчині (табл. №1).

Таблиця 1.

Середня кількість (N) та час життя (τ) протиіонів молекули ДНК в залежності від концентраційного режиму.

Режим розчину	N , іон/м ³	τ , с
Розбавлений (0,001%)	$3,2 \cdot 10^{22}$	10^{-7}
Напіврозбавлений (0,005%)	$1,6 \cdot 10^{23}$	10^{-6}
Концентрований (0,15 %)	$4,8 \cdot 10^{23}$	10^{-4}

Експериментальне визначення електропровідності водних розчинів ДНК

Вимірювання електропровідності розчинів проводилося за допомогою методу діелектричної спектроскопії. В ході роботи було приготовлено чотири серії зразків: А, В, С та D. Серія А складалася з семи розчинів NaCl з молярними концентраціями $C_{\text{NaCl}} = 0,1; 0,15; 0,3; 0,5; 0,7; 0,85; 1$ М кожен. Серії В, С та D склалися з семи розчинів, кожен з яких містить ДНК та NaCl . Концентрація ДНК складала 0,001%, 0,005% та 0,15% маси відповідно. Розчинником в усіх зразках була деіонізована вода. Молекула ДНК виділена з тимусу теляти і мала молекулярну масу 10^7 а.о.м. Усі вимірювання проводилися при сталій температурі 23 °С. Масові концентрації ДНК складають 0,001%, 0,005% та 0,15%, що були розраховані і відповідають трьом концентраційним режимам розчину: концентрованому, напіврозбавленому та розбавленому відповідно. При обчисленнях враховувався персистентний механізм гнучкості макромолекули [20].

Залежності питомої електропровідності розчинів NaCl (відповідної концентрації) від частоти змінного струму представлені на рис. 2, А). З підвищенням концентрації солі, електропровідність системи підвищується. В області частот 20 – 100 кГц значення питомої електропровідності системи виходить на

"полицю", що свідчить про зменшення дисперсії, обумовленої явищем приелектродної поляризації.

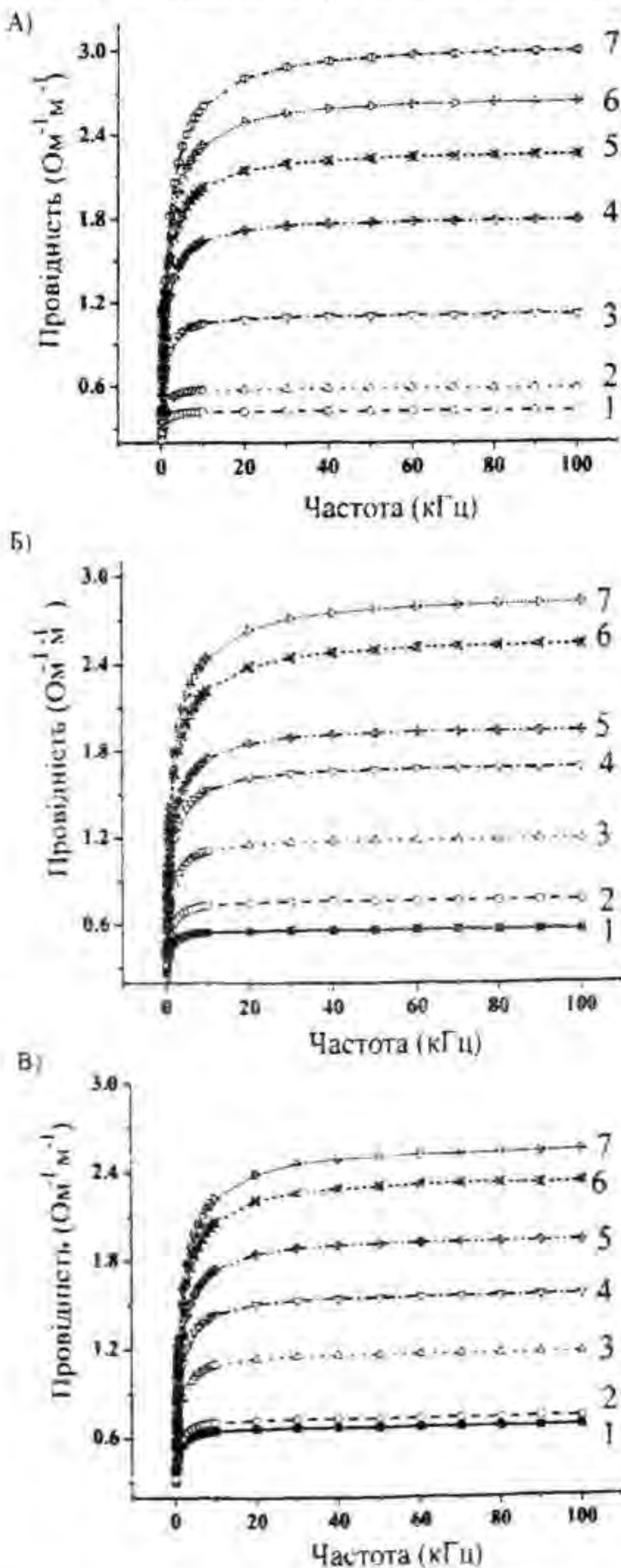


Рис. 2. Залежності питомої електропровідності електроліту та водних розчинів молекули ДНК від частоти змінного струму при різних концентраціях солі NaCl: 1-0,1М; 2-0,15М; 3-0,3М; 4-0,5М; 5-0,7М; 6-0,85М; 7-1М. А) Розчин без ДНК (NaCl+H₂O). Б) Розбавлений розчин ДНК (0,001% мас). В) концентрований розчин ДНК (0,15% мас).

Залежності питомої електропровідності водних розчинів молекули ДНК з різною концентрацією надлишкової солі від частоти змінного струму представлені на рис. 2. (Б) та В). Як бачимо, з підвищенням концентрації іонів у розчині електропровідність також підвищується, а в області частот 20 – 100 кГц значення питомої електропровідності системи також виходить на "полицю" (постійне значення – рис. 2. (Б) та (В)).

Для визначення внеску протиіонів ДНК в електропровідність розглянемо детальніше залежність електропровідності розчину ДНК від концентрації надлишкової солі ($\sigma(C)$) на частоті 50 кГц. На цій частоті дисперсія електропровідності, що зумовлена явищем приелектродної поляризації, є незначною. Залежність електропровідності від концентрації солі NaCl має лінійний характер для усіх зразків (рис. 3).

Експериментальні результати показують, що в області малих концентрацій солі (0 – 0,25 М) молекула ДНК збільшує загальну електропровідність системи за рахунок наявності вільних протиіонів. Коли іонна сила розчинів досягає значення 0,3 М, настає динамічна рівновага, при якій кількість протиіонів, що сконденсувалися на молекулі ДНК, дорівнює кількості протиіонів, що звільнилися. При концентраціях солі більших за 0,3 М, молекула ДНК зменшує загальну електропровідність системи за рахунок утворення густої протийонної шуби з оточуючих вільних іонів Na⁺. Така поведінка молекули ДНК пояснюється зменшенням власної іонної атмосфери зі збільшенням іонної сили розчину [3]. Поведінка протиіонів також змінюється, оскільки їхня рухомість зменшується за рахунок збільшення концентрації солі [19].

Різниця електропровідностей розчинів ДНК та розчину солі NaCl показує, що внесок протиіонів ДНК в електропровідність більший при малих концентраціях ДНК (0,001%).

Обговорення результатів

Як було вже з'ясовано на початку, молекула ДНК містить на собі додатньо заряджені протиіони, які локалізуються на негативно заряджених фосфатних групах. Виходячи з міркувань, що на одну фосфатну групу

приходиться один іон натрію, можемо обрахувати середню кількість власних протиіонів молекули ДНК відповідно до її концентрації у водному розчині (табл. №1). Користуючись результатами запропонованої феноменологічної

макромолекулою, або приймати участь в дифузному оточенні нуклеїнових кислот. В першому випадку, утворюється металокомплекс, час життя якого становить 10^{-7} с та вище. В другому випадку, навколо спіралі ДНК з'являється іонна атмосфера, яка може простягатися на сотні ангстрем навколо макромолекулярного ланцюга. Ці іони зберігають гідратну оболонку та в процесі динамічної рівноваги вступають в електростатичну взаємодію з полііоном.

Висновки

Заряджені атомні групи молекули ДНК і протиіони, що їх нейтралізують, взаємодіють з електричним полем. В зв'язку з цим в представленій роботі структура водного розчину молекули ДНК досліджувалася шляхом визначення електропровідності системи. Електропровідність водних розчинів ДНК в діапазоні частот від 0,2 до 100 кГц зумовлена наявністю власних протиіонів макромолекули. Час життя протиіонів біля поверхні ДНК розраховано за допомогою побудованої феноменологічної моделі, і, відповідно, складає в розбавленому розчині $\sim 10^{-7}$ с, в напіврозбавленому $\sim 10^{-6}$ с, та концентрованому $\sim 10^{-4}$ с. Час життя протиіонів Na^+ біля поверхні ДНК залежить від концентрації біомакромолекули у розчині, концентрації солі та частоти зовнішнього поля.

Список використаних джерел

1. Зенгер В. Принципы структурной организации нуклеиновых кислот. – М.: Мир, 1987. – 584 с.
2. Levin Y. Electrostatic correlations: from plasma to biology // Rep. Prog. Phys. – 2002. – 65. – P. 1577-1632.
3. Kornyshev A. A., Lee D.J., Leikin S., Wynveen A. Structure and interaction of biological helices // Rev. Mod. Phys. – 2007. – 79. – P. 943-966.
4. Ivanov V. I., Minchenkova L. E., Schyolkina A. K., Poletaev A. I. Different conformations of double-stranded nucleic

Рис. 3. Залежність електропровідності електроліту (1) та водних розчинів ДНК (2) від концентрації надлишкової солі NaCl на частоті 50 кГц: А) концентрація ДНК – 0,001% ; Б) концентрація ДНК – 0,15%.

моделі для опису динаміки протиіонів навколо молекули ДНК (формула (8)), можемо обрахувати час життя протиіонів (табл. №1).

Як видно з табл. №1, час життя протиіонів в іон-гідратному шарі молекули ДНК залежить від її концентрації. Сила іонного розчину (або концентрація солі в розчині) та характеристики зовнішнього поля також впливають на значення часу життя, про що свідчить формула (8).

Таким чином, протиіони можуть утворювати порівняно стійкі зв'язки з самою

- acid in solution as revealed by circular dichroism // *Biopolymers*. – 1973. – 12. – P. 89-110.
5. *Baumann C.G., Smith S. B., Bloomfield V. A., Bustamante C.* Ionic effects on the elasticity of single DNA molecules // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. – 1997. – 94. – P. 6185-6190.
6. *Williams L. D., Maher L. J.* Electrostatic mechanisms of DNA deformation // *Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct.* – 2000. – 29. – P. 497-521.
7. *Благой Ю.П., Галкин В.Л., Гладченко Г.О., Корнилова С.В., Сорокин В.А., Шкорбатов А.Г.* Комплексы нуклеиновых кислот в растворах. К.: Наукова думка, 1991. – 270 с.
8. *Tereshko V., Wilds C. J., Minasov G., Prakash T. P., Maier M. A., Howard A., Wawrzak Z., Manoharan M., Egli M.* Determination of alkali metal ions in DNA crystals using state of the X-ray diffraction experiments // *Nucleic Acids Res.* – 2001. – 29. – P. 1208-1220.
9. *Skuratovskii I. Ya, Volkova L. I., Kapitonova K. A., Bartenev V. N.* Position of cesium ions in crystalline B-form DNA determined by synchrotron radiation diffraction. Preliminary results // *J. Mol. Biol.* – 1979. – 134. – P. 369-374.
10. *Das R., Mills T., Kwok L. W., Maskell G. S., Millet I. S., Doniach S., Finkelstein K. D., Herschlag D., Pollack L.* Counterion distribution around DNA probed by solution X-ray scattering // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – 90. – P. 188103-1 - 188103-4.
11. *Manning G. S.* The molecular theory of polyelectrolyte solutions with applications to the electrostatic properties of polynucleotides // *Q. Rev. Biophys.* – 1978. – 11. – P. 179-246.
12. *Франк-Каменецкий М. Д., Аншенивич В. В., Лукашин А. В.* Полиэлектrolитная модель ДНК // *УФН*. – 1987. – 151. – С. 595-618.
13. *Young M. A., Jayaram B., Beveridge D. L.* Intrusion of counterions into the spine of hydration in the minor groove of B-DNA: Fractional occupancy of electronegative pockets // *J. Am. Chem. Soc.* – 1997. – 119. – P. 59-69.
14. *Varnai P., Zakrzewska K.* DNA and its counterions: a molecular dynamics study // *Nucl. Acids Res.* – 2004. – 32. – P. 4269-4280.
15. *Булавін Л.А., Волков С.Н., Кутовий С.Ю., Перепелиця С.Н.* Спостереження моди іон-фосфатних коливань макромолекули ДНК // *Доп. НАН України*. – 2007. – 10. – С. 69-73.
16. *Perepelytsya S. M., Volkov S. N.* Ion mode in the DNA low-frequency vibration spectra // *Ukr. J. Phys.* – 2004. – 49. – P. 1074-1080.
17. *Podgornik R.* Dielectric relaxation of DNA aqueous solutions // *Phys. Rev.* – 2007. – 75. – P. 021905-1 - 021905-13.
18. *Perepelytsya S. M., Volkov S. N.* Counterion vibrations in the DNA low-frequency spectra // *Eur. Phys. J. E.* – 2007. – 24. – P. 261-269.
19. *Измайлов Н. В.* Электрохимия растворов. – М.: Химия, 1976. – 488 с.
20. *Флори П.* Статистическая механика цепных молекул. – М.: Мир, 1971. – 440 с.

Надійшла до редакції 06.05.2008

УДК 537.32

Копань В.С., д.ф.м.н., проф. Хуторянська Н.В.,
н.с., Копань Ю.В., н.с.

Деформація аморфних сплавів і наношаруватих композицій шліфуванням

В процесі шліфування одної поверхні фольги вона згортається в циліндр. Радіус кривини $R > 0$ для аморфних сплавів, W, Mo, Ta, Ti; $R < 0$ для наношаруватих композиційних матеріалів Al-Cu, Al, Cu, Ni, Fe; $R = -(17-20)$ мм для слюди. Деформування шліфуванням може бути фізичною базою для розробки методів виготовлення виробів складної форми з крихких матеріалів.

Ключові слова: аморфний сплав, пластична деформація, шліфування.

V. Kopan,

E-mail: kopa@pulsary.com.ua

Недоліки аморфних металевих сплавів: вони нестійкі при нагріванні, не зварюються, з них важко виготовляти вироби штампуванням. Тому необхідно шукати методи деформації сплавів без нагрівання. В статтях [1, 2] повідомлялось, що при зворотньо-поступальному шліфуванні паралельно довільно вибраному напрямку ОХ стрічка аморфного сплаву згортається в циліндр з твірною, паралельною ОХ, причому шліфована поверхня розташовується на зовнішній поверхні циліндру. Стрічки аморфного металевих скла (АМС) виготовляються переважно методом швидкого охолодження розплаву на мідному диску [3]. З пластичних АМС штампують без нагрівання вироби складної форми. Крихкі стрічки не штампуються. Тому з них виготовляють магнітопроводи класичної форми намотуванням [3]. Методом шліфування АМС ми виготовили циліндри (діаметром до 2 мм), спіральні пружини, сегменти сфер, конуси, "сідла" тощо. АМС хімічно інертні, тому вироби складної форми з них можна використати в медицині, мікроелектроніці, аналітичній хімії, в образотворчому мистецтві. Вироби можна виготовити, деформуючи стрічки шліфуванням.

Метою роботи є дослідження явища деформування стрічок шліфуванням. АМС номінального складу $Fe_{73.6}Si_{15.8}B_{2.2}Cu_1Nb_{2.4}$ та ін.

Kopan V.S., Dt Sci, Prof, N. Hutoryanska, Res.,
U. Kopan, Res.

The deformation of amorphous alloy and nanolayered composite materials by grinding

In the process of grinding one surface of the foil roll up in an cylinder. The crookedness radius $R > 0$ for amorphous alloy. W, Mo, Ta, Ti; $R < 0$ for nanolayered composite materials Al-Cu, Al, Cu, Ni, Fe; $R = -(17-20)$ mm for mica. The deformation by grinding may be by physical basis for making method of manufactured articles of complicated form from frail materials.

Key Words: amorphous alloy, plastic deformation, grinding.

(див. табл.1) були виготовлені у формі стрічок шириною 9 мм і товщиною 0.023 мм методом спінінгування розплаву. Автори висловлюють вдячність Маслову В.В. і Носенку В.К. (ІМФ НАНУ) за надані нам зразки АМС Шаруваті композиції нами виготовлені методом вальцювання пакету, складеного з фольг двох металів, що чергуються. Цей метод дозволяє робити композиції з товщиною шару до 10 нм [4, 5].

Експериментальні результати та їх обговорення

Деформація шліфуванням здійснювалась наступним чином. Відрізок стрічки АМС, фольги багатошарової композиції (БШК) чи іншого металу прикріпляли на одному кінці механічним затискачем до латунної пластини товщиною 5 мм. Вона служила опорою і радіатором. Тому середня температура зразка при шліфуванні не перевершувала 80°C. Шліфування фетровим кругом, на який наносилась алмазна паста, чи інший абразив, здійснювалось впоперек поздовжньої вісі стрічки або напрямку вальцювання фольги. Внаслідок цього стрічка закручувалась у циліндр так, що мікроканавки шліфування були паралельні твірній циліндру. Якщо шліфована поверхня залишилась зовні циліндру, то деформацію згинання вважали

додатною (з додатнім радіусом кривини R). В роботі [2] було показано, що R зменшується при збільшенні часу шліфування t та зростанні погонної густини ρ канавок, що виникають на

як і слюда, слабо, а мікрошарувата ($h=2$ мкм) має деформацію, адитивну деформаціям компонент Al і Cu. На рис. 1 наведено залежність радіуса

Таблиця 1

Радіуси кривини фольг R товщиною 20-25 мкм при густині канавок шліфування ρ для різних речовин (БШК- багат шарова композиція, h – товщина шару в БШК).

№ пп	Матеріал	R , см	$\rho \cdot 10^3$ см ⁻¹	Товщина фольги, мкм
1	Fe ₇₃ Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb ₃ (аморфний)	1±0,2	1,8±0,1	23
2	Fe ₇₃ Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb ₃ (кристалічний)	1,6±0,2	1,7±0,1	23
3	Fe _{73,6} Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb _{2,4} (аморфний)	0,9±0,1	1,9±0,1	23
4	Fe _{73,6} Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb _{2,4} (кристалічний)	1,8	1,9	23
5	Fe ₇₅ Ni ₄ Mo ₃ Si ₂ B ₁₆	1,5	1,9	23
6	Ti	4	1,7	50
7	Ta	5	1,8	50
8	W	5	1,8	40
9	Mo	10	1,8	30
10	Слюда	-(17-20)	1,9	20
11	БШК Al-Cu, $h=2$ мкм	-(2-5)	1,9	30
12	БШК Al-Cu, $h=0,01$ мкм	-3	1,8	30
13	Cu	-5	1,7	12
14	Al	-2,5	1,9	12
15	Ni	-6	1,8	25
16	Fe	-10	1,8	25
17	X18H9 (нержавіюча сталь)	-10	1,8	25

поверхні під дією абразивних зерен. Тому в таблиці 1 наведені значення R для різних матеріалів, прошліфованих в однакових умовах: діаметр алмазних зерен $d=10\pm2$ мкм, частота обертання диску $\nu=5$ об/с, радіус диску $r=15$ мм, швидкість зміщення диску у напрямку, паралельному його вісі обертання, $v=10$ см/с, $t=60$ с.

Аналізуючи таблицю 1, робимо такі висновки:

1. Аморфні матеріали і тугоплавкі метали згортаються шліфуванням в циліндр так, що шліфована поверхня є зовнішньою поверхнею циліндру ($R>0$).
2. Деформація шліфуванням металевого скла зменшується після кристалізації.
3. Слюда слабо деформується шліфуванням $R=-(17-20)$ см.
4. Традиційні метали (Al Cu Fe) і нержавіюча сталь деформуються так, що шліфована поверхня є внутрішньою поверхнею циліндру ($R<0$).
5. Нанос шарувата композиція Cu-Al (товщина шару $h=0,01$ мкм) деформується

кривини R фольги багат шарової композиції Al-Cu від середньої товщини шару h . Відношення товщин алюмінієвих шарів до мідних в БШК $h_1/h_2=12/17$. Бачимо, що при $h<1$ мкм криві 2 і 3

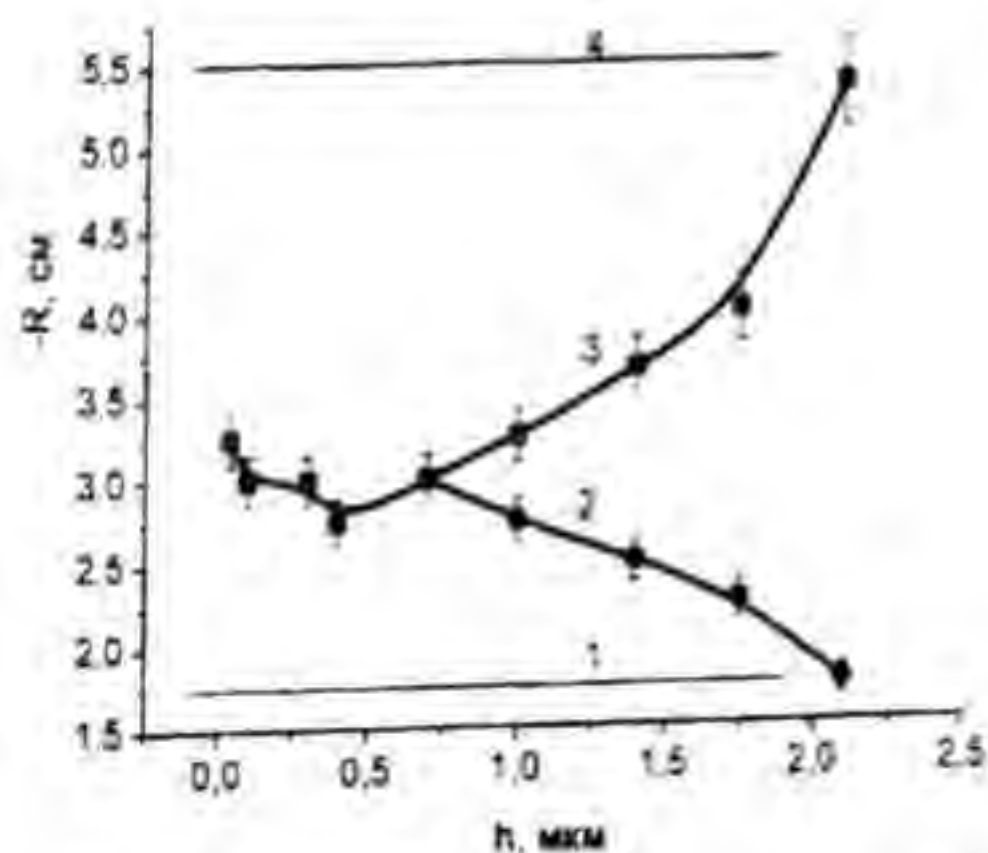


Рис. 1 Залежність радіуса кривини фольги багат шарової композиції Al-Cu від середньої товщини шару h , 1, 4 – рівень R для Al та Cu фольг відповідно.

сходяться. Коли $h>1$ мкм, то шліфується або

алюмінієвий шар (крива 2), або мідний (крива 3). Це залежить від того, який шар є зовнішнім в БШК. При $h < 1$ мкм фольга прошліфовується на глибину кількох шарів, тому R має значення, близьке до адитивного значення R , вираховане по кривим 2 і 3. Товщину пошкодженого шліфуванням шару Δh алюмінієвої або мідної фольги визначали, електролітично поліруючи прошліфовану поверхню. Товщину знятого шару визначали методом зважування. Кривина фольги круто зменшується (R зростає) при $\Delta h \sim 1$ мкм (рис.2).

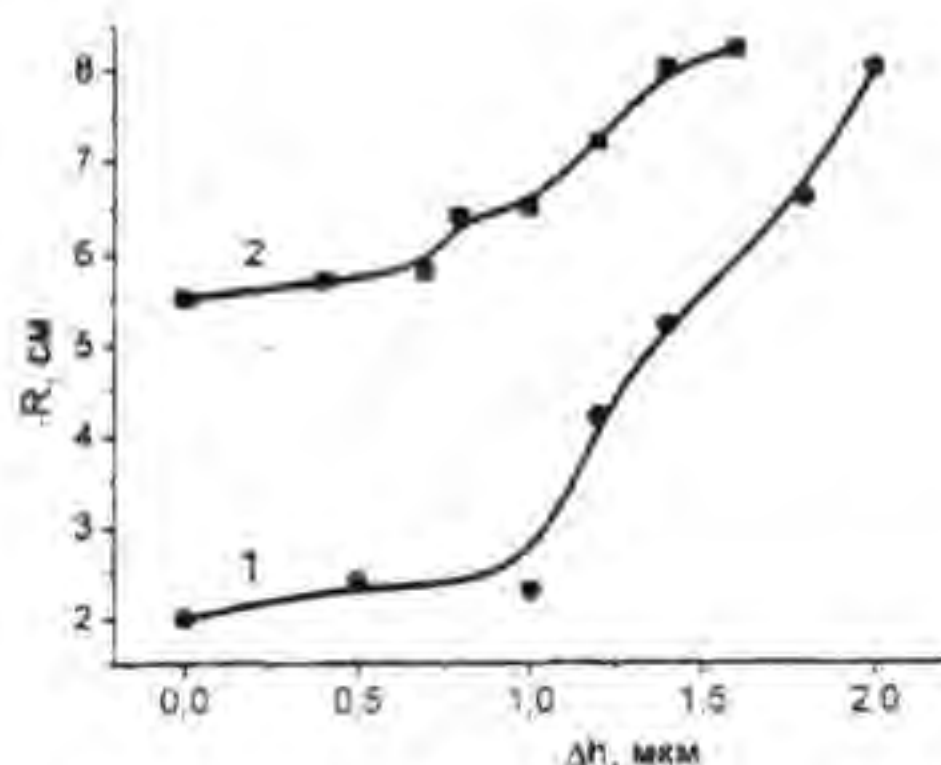


Рис. 2 Залежність радіуса кривини R фольг Al (1) та Cu (2) від товщини електрохімічно зполірованого шару Δh

Фольга стає плоскою при $\Delta h \sim 2$ мкм. Тому приходимо до висновку, що при нашому методі шліфування глибина пошкодженого шару $\Delta h \sim 1.5$ мкм. В роботі [2] доведено, що в аморфному сплаві $\Delta h = 4-5$ мкм. Полірування чистим фетром, алмазним абразивом з величиною зерна $d = 1-3$ мкм, полірування фольги металевим порошком того ж металу, з якого виготовлена фольга, не зумовлює викривлення фольги. Шліфування фольги порошком твердішого матеріалу (наприклад, з вольфрамового сплаву WC-Co) зумовлює вигинання фольги.

Профіль канавок шліфування досліджували за допомогою оптичного імерсійного мікроскопу, фокусуючи його послідовно на дно канавки і на її схили. На рис. 3 наведено типові поперечні перерізи канавок шліфування. Слюда шліфується шляхом утворення канавок рваного типу, коли порівняно великі ділянки верхніх шарів слюди відриваються від нижніх. Фольги з $R < 0$ мають канавки з напливами ("брустверами") вище поверхні фольги. Фольги з $R > 0$ мають канавки, характерні для крихких матеріалів. Слюда

"мусковіт", яку ми шліфували, є представником твердих тіл з іонним типом зв'язку і складається з шарів. В ній слабкою компонентою є прошарки металу [5].

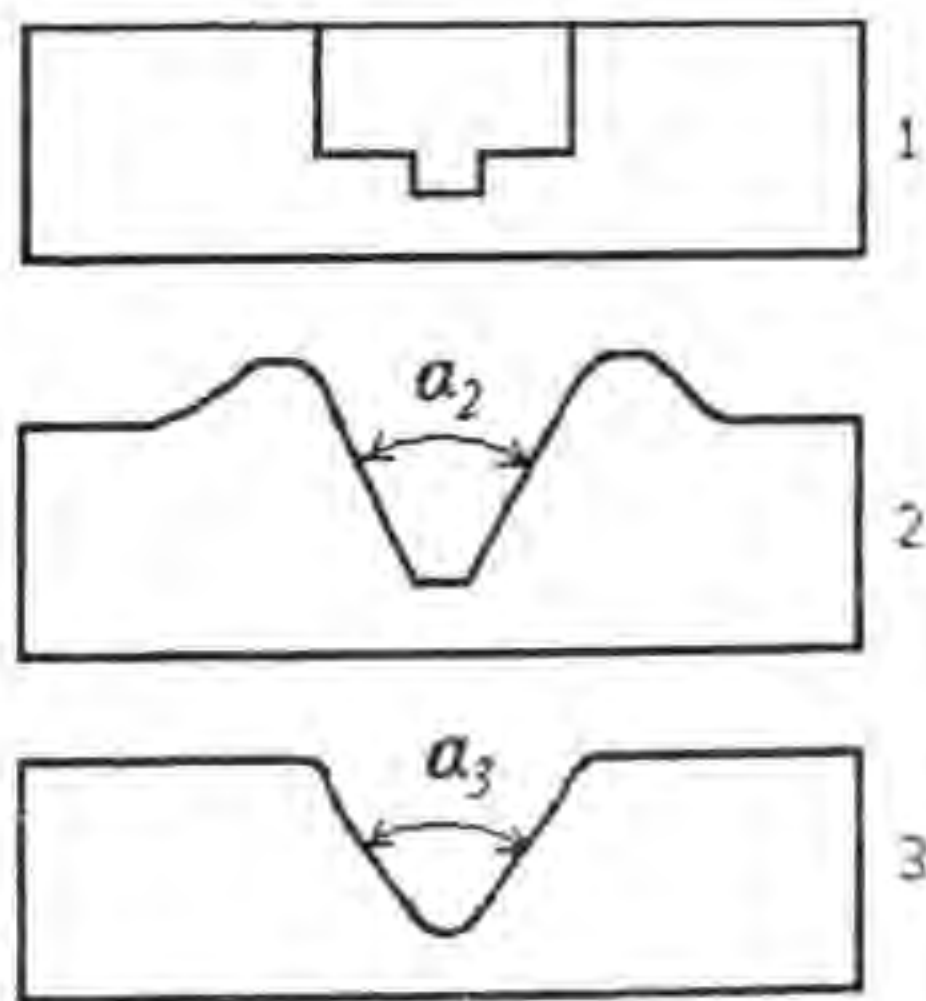


Рис. 3 Поперечні перерізи типових канавок шліфування слюди (1) та фольг з $R < 0$ (2) і $R > 0$ (3)

Вони блокують поширення мікротріщин шліфуванням всередину зразка. Тому мікротріщини затуплені. (рис.3.1), напруги в шарах відсутні, зразок, практично, плоский ($R = -17-20$ см, табл.1). В фольгах м'яких кристалічних матеріалів абразивне зерно частково видавлює речовину з канавки, у вершині канавки утворюються дислокації і мікротріщини, що є енергетично невигідними. Тому мікротріщини намагаються закритись. Цьому сприяє дифузія атомів.

При високих температурах коефіцієнт дифузії

$$D = D_0 e^{-\frac{U}{kT}} \quad (1)$$

де U – енергія активації. При температурі шліфування ($T \sim 350$ К) D незначне. Але при шліфуванні виникають напруги. Тому для дифузії понижується потенційний бар'єр U . І справедливим є рівняння

$$D = D_0 e^{-\frac{(U-\Delta U)}{kT}} \quad (2)$$

Поки напруги великі, доти мале $(U-\Delta U)$. Тому дислокації рухаються у вершині тріщини фольг з легкоплавких металів, тріщини частково закриваються і за рахунок дифузії (кут α зменшується). Фольга деформується по радіусу

кривини $R < 0$. В тугоплавких металах велика енергія активації дифузії U , крім того, високі бар'єри Пайєрлса для руху дислокацій. Тому важко зменшити $U - \Delta U$, щоб активізувати дифузію і рух дислокацій у вершинах канавок шліфування. Кут α_3 (рис.3.3) не зменшується, канавки не закриваються, фольга вигинається шліфуванням додатньо ($R > 0$). Відсутність «брустверів» на поверхні фольги засвідчує, що фольги з $R > 0$ шліфуються як крихкі матеріали.

В шаруватих композиціях адгезія між шарами значно більша за адгезію між шарами слюди «мусковіт» [6]. Тому композиційні фольги деформуються шліфуванням як метали. Незрозумілим є механізм деформації внаслідок шліфування металевих стекл. Які дефекти зникають при релаксації напруг в аморфному сплаві – сказати важко, бо немає єдиної теорії його деформації [7, 8]. Існує багато моделей

Щоб зменшити повзучість за рахунок гравітації, разок горизонтально встановлювали в печі на дві опори, розташовані на відстані $\frac{1}{4}$ від його кінців кожна. Радіус кривини R визначали за формулою

$$R = \frac{l^2 + 4H^2}{8H}, \quad (3)$$

де l і H – довжина і висота сегмента кола, форму якого має зразок. Висоту H вимірювали мікроскопом з похибкою $\Delta H = 3$ мкм, а l – компаратором мікроскопу з похибкою $\Delta l = 0,1$ мм. Енергію активації зміни R при відпалі зразка розраховували за формулою

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_1 / \left(\frac{dR}{dt}\right)_2 = \exp\left(\frac{\Delta U - U}{RT_1} - \frac{\Delta U - U}{RT_2}\right), \quad (4)$$

де t – час відпалу при температурах T_1 та T_2 , $\left(\frac{dR}{dt}\right)_1$ та $\left(\frac{dR}{dt}\right)_2$ – похідні на ізотермах $R(T_1)$ і

Таблиця 2

Залежність $U - \Delta U$ від R при відпалі прошліфованих стрічок сплавів $\text{Fe}_{73}\text{Si}_{15,8}\text{B}_{7,2}\text{Cu}_1\text{Nb}_1$ (колонки 1 і 2) та $\text{Fe}_{73,6}\text{Si}_{15,8}\text{B}_{7,2}\text{Cu}_1\text{Nb}_1$ (колонки 3 і 4), колонки 1 і 3 – аморфний стан, 2 і 4 – кристалічний

№ пп	R , см	$U - \Delta U$, КДж/моль			
		1	2	3	4
1	1-2	50±20	60±30	45±15	55±17
2	2-4	100±25	120±40	110±25	140±23
3	4-6	210±15	280±30	200±15	260±30
4	6-8	290±40	340±30	250±40	350±35
5	8-10	295±40	360±30	260±40	360±40

механізмів пластичності. Найбільшої уваги заслуговують наступні: моделі вільного об'єму, адіабатичної деформації, дислокаційні, дез'юнкції [7].

В аморфній фазі дислокація – це витягнутий прошарок між сусідніми групами атомів, що рухаються одна відносно одної як намагнічені зерна в купі сталюого порошку. В аморфній фазі товщина ядра дислокації, величина і напрямок вектора Бюргера змінюються вздовж дислокації. В такій структурі між двома групами атомів можуть зустрічатись і дефекти дез'юнкції, тобто, дефекти розриву міжатомних зв'язків. Як би то не було, аморфна фаза метастабільна, сама насичена надлишковою енергією. Це повинно впливати на енергію активації $U - \Delta U$. Величину $U - \Delta U$ визначали, вимірюючи зміну R в часі при відпалі фольг.

$R(T_2)$ в точці зміни температури. Зміну $U - \Delta U$ в залежності від зміни R в металевих стеклах при їх відпалі після шліфування відображає таблиця 2. Енергія активації $U - \Delta U$ на початку процесу відпалу мала, бо велике ΔU , а в кінці відпалу – велика, бо релаксовані напруги в зразку (фольга стала плоскою), отже і $\Delta U \rightarrow 0$. В кристалічному стані (колонки 2 і 4 в таблиці 2) значення $U - \Delta U$ більші, ніж в аморфному, бо для атомів у склі більше можливостей для перегрупування, адже в них багато розмірних пустот, аналогів скупчень вакансій в полікристалах.

Для кращого розуміння фізичного механізму деформації фольг шліфуванням необхідно враховувати і явище групового переміщення матеріалу при дії алмазного зерна на поверхню. В пластичних металах якась частка матеріалу видавлюється з канавки на поверхню.

утворюючи «бруствер» (рис.3.2); якась зрізається алмазним зерном і потрапляє в пил (при сухому шліфуванні), чи рідину. В крихких металах здійснити видавлювання матеріалу на поверхню важко; можна «впресувати» частину його алмазним зерном в стінки канавки, а частину – перевести в пил. Така дія призведе до згортання фольги в циліндр з $R>0$.

Ми розглянули явище деформації фольг шліфуванням, яке може бути покладено за основу розробки нових способів виготовлення деталей з крихких матеріалів. Принагідно нагадуємо, що явище деформації шліфуванням не завжди корисне. Наприклад, воно ускладнює виробництво мікросхем з тонких напівпровідникових кристалів [9].

Висновки

1. При шліфуванні фольги аморфного металевго скла (а також W, Mo, Ta, Ti) вздовж вісі OX вона згортається навколо вісі OX у циліндр, шліфована поверхня якого є зовнішньою (радіус кривини $R>0$).
2. Радіус кривини циліндру, утвореного шліфуванням фольг Al, Cu, Ni, Fe нержавіючої і наношаруватої композиції Al-Cu $R<0$.
3. Енергія активації $U-\Delta U$ процесу випрямлення фольг металевго скла на початкових етапах відпалу у 5 разів менша за $U-\Delta U$ в кінці відпалу. Це вказує на те, що випрямлення фольг здійснюється за рахунок релаксації механічних напруг.
4. Методом деформації шліфуванням крихких аморфних стрічок виготовлені циліндри діаметром до 2 мм і спіральні пружини, а також доведена принципова можливість виготовлення інших виробів складної форми.

Список використаних джерел

1. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Вплив магнітного поля і механічних наруг на термо-е.р.с. аморфного сплаву $Fe_{78.5}Ni_1Mo_{0.5}Si_6B_{14}$ // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2006. – № 3. – С. 484-488.
2. Копань Ю.В., Хуторянська Н.В., Копань В.С. Деформування металевго скла шліфуванням // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 374-377.
3. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. П'єзотермо-е.р.с. міді та алюмінію // Вісник Київського університету. Сер. Фізико-математичні науки. – 2005. – № 2. – С. 421-427.
4. Копань В.С. Жаропрочность волокнистой алюминиевой проволоки // УФЖ – 1965.- №10. – С.1147-1149.
5. Копань В.С. Композиційні матеріали. –К., університетське видавництво “Пулсари”, 2004. – 198 с.
6. Копань В.С. Микрослоистые композиционные материалы на основе алюминия, меди и железа. Автореферат докторської дисертації, Київ, 1988.
7. Судзуки К., Фуодзимори Х.Хасимото К. Аморфные металлы. М. Металлургия. - 1987. - 328 с.
8. Носенко В.К. Формування аморфних сплавів та наноструктурних станів на основі Fe і Al. Автореферат докторської дисертації. Київ. - 2005.
9. Макара В.А. Эволюция дислокационной структуры и механизмы деформации многослойных полупроводниковых систем. Автореферат докторської дисертації, Київ, 1986.

Надійшла до редколегії 14.12.07.

УДК 519.9

Кравець В.Г., к. ф.-м. н., с.н. с.
Поперенко Л.В., д. ф.-м. н., проф.
Манько Д.Ю., асп.

**Посилення магнітоімпедансного ефекту
в нанокристалічному сплаві
 $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$**

Досліджено посилення магнітоімпедансного ефекту шляхом термічної і лазерної обробок аморфного сплаву $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$. За допомогою магнітооптичних вимірів показано, що в результаті лазерної і термічної обробок аморфних металевих сплавів відбуваються незворотні зміни в структурі скін-шарів стрічки і її магнітних властивостей. Дані оже-електронної спектроскопії переконливо свідчать про збагачення поверхні аморфних сплавів кластерами метал-метал і метал-металоїд у результаті таких обробок. Результати електронної мікроскопії переконують в істотному розходженні розмірів наногранул в аморфних стрічках після лазерного і термічного відпалу.

Ключові слова: аморфні металеві сплави, магнітоімпеданс, лазерний і термічний відпал, магнітооптичні характеристики.

E-mail: plv@univ.kiev.ua, dmitriy.manko@univ.kiev.ua

Вступ.

Аморфні металеві сплави (АМС) характеризуються поліпшеними у порівнянні з їх кристалічними аналогами магнітними властивостями, завдяки яким знаходять своє застосування в пристроях магнітоелектроніки [1]. Незвичайна комбінація магнітних і механічних властивостей даного класу матеріалів може бути використана у голівках магнітних пристроїв зчитування, і у високочутливих сенсорах магнітних полів. У зв'язку з цим важливими є дослідження магнітоімпедансного ефекту (МІЕ), виявленого в середині 90 років в аморфних стрічках і дротах [2]. У наступні роки дослідники докладали зусиль для з'ясування фізичної сутності МІЕ і прагнули підвищити цей ефект у наведених вище матеріалах технологічним

V.G. Kravets, PhD, Sen. Staff Sci.
L.V. Poperenko, Dr Sci, Prof
D.Y. Manko, PhD stud.

**The enhancement of magnetoimpedance
effect in nanocrystalline alloy of
 $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$**

Magnetoimpedance effect enhancement via thermal and laser treatment in amorphous alloy of $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ was investigated. Magneto-optical measurements have shown irreversible changes in the ribbon skin-layer and its magnetic properties as a result of thermal and laser treatment. Auger spectroscopy data shows enrichment of amorphous alloy surface by metal-metal and metal-metaloid clusters due to such treatments. Electronic microscopy results have persuaded in nanogranules size essential distinguish in amorphous ribbons after laser and thermal annealing.

Keywords: amorphous metallic alloys, magnetoimpedance, laser and thermal annealing, magneto-optical characteristics.

шляхом. Так, у літературі можна знайти дані про вплив термічного і лазерного відпалу [3-5] або Джоулевого тепла при протіканні змінного струму через зразок [6], а також про вплив деформацій і ударних хвиль [7] на МІЕ. Аналіз накопичених даних показує, що ефект збільшення магнітоімпеданса (МІ) може бути досягнутий найбільш ефективно шляхом термічного відпалу при відповідному виборі сполуки зразка. У результаті даного відпалу аморфні матеріали стають наноструктурованими. Розміри отриманих у такий спосіб наногранул і їх структура істотно впливають на величину МІЕ.

У даній роботі проведений аналіз впливу термічного і лазерного відпалу на величину МІЕ. Для цього був обраний зразок стрічки АМС $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ зі значним ефектом МІ

у вихідному стані. Важливо, що цей сплав характеризується гранично малою величиною магнітострикції. Величина M_I залежить від глибини δ проникнення електромагнітної хвилі в стрічку (δ порядку 1-5 мкм). У цьому випадку модифікація поверхневого шару за допомогою лазерного відпалу сприяє істотному збільшенню M_I . Проведені магнітні і магнітооптичні дослідження дозволили з'ясувати роль феромагнітних гранул, що утворилися, у процесі еволюції магнітоімпедансного ефекту.

При дослідженні зазначених сплавів не ставилося завдання домогтися максимальної величини MIE у вихідному аморфному стані – його метою стало визначення складу поверхні АМС і характеру впливу термічної і лазерної обробок на величину MIE .

Методика експерименту.

Зразки АМС були отримані методом спіннінгування з розплаву у вигляді стрічок шириною 10-20 мм і товщиною 20-25 мкм. Структура стрічок була досліджена методами рентгенівської дифракції і електронної мікроскопії високої роздільної здатності. Зразки піддавалися термічній обробці – відпалу у вакуумі (10^{-6} мм. рт. ст) і лазерному відпалу, методика проведення якого детально описана в роботах [5]. Відпал проводився лазерним випромінюванням з довжиною хвилі 1064 нм і густиною енергії порядку 2,5-3,5 кВт/см² за умов прикладання зовнішнього магнітного поля ($H \approx 2300$ Е) уздовж вісі стрічки АМС. Температура нагрівання поверхневого шару стрічки в результаті лазерного відпалу була оцінена розрахунковим шляхом і становила близько 350°C. Такий відпал в технологічному аспекті є більш вигідним, тому що за його допомогою модифікуються тільки верхні шари поверхні стрічок АМС, що є відповідальними за MIE . Саме такому відпалу властиве швидке варіювання енергетичних параметрів і можливість здійснення його на повітрі або в атмосфері аргону, коли усувається окислювання поверхні. Порівняння результатів впливу лазерного відпалу без прикладання зовнішнього магнітного поля H і в його присутності на величину M_I свідчили про збільшення ефекту після відпалу у магнітному полі. Надалі експериментальні дані для MIE наведені для випадку лазерного відпалу в присутності зовнішнього поля H .

Ефект магнітоімпедансу досліджувався в

магнітних полях до 100 Е і частотах змінного струму, що протікає через зразок, від 10 до 220 кГц. У ході проведених вимірювань зовнішнє магнітне поле було орієнтовано в площині зразків. Вимірювання величини магнітоімпедансу здійснювалося за схемою, що складається з послідовно з'єднаного низькоомного резистору і досліджуваного зразка. Величина ефекту магнітоімпедансу $\Delta Z/Z$ визначалася як

$$\Delta Z/Z = (Z_{H=0} - Z_H) / Z_{H=0} \times 100\% \quad (1)$$

де $Z_{H=0}$ і Z_H – імпеданси зразка при $H=0$ і в магнітному полі величиною H відповідно.

Склад зразків визначався ваговим вмістом вихідних компонентів перед одержанням розплаву і контролювався за допомогою оже-спектроскопії. Вимірювання розподілу компонент (Co, Fe, Ni, Si, B) в АМС по напрямку від поверхні вглиб стрічок здійснювалося шляхом співставлення інтенсивності максимумів в оже-спектрах при травленні поверхні стрічок йонами Ar^+ . Ці спектри послідовно ресструвалися в процесі травлення стрічок із кроком 2 нм. Дослідження проводилися за умов, коли глибина травлення сягала порядку 10-15 нм.

Магнітний стан аморфних і відпалених зразків визначався за допомогою керрівського магнітометра, а також вібраційного магнітометра. Згідно з першою методикою вимірювалася величина зміни відбитого сигналу від поверхні зразка. Для цього магнітне поле прикладалося в геометрії поздовжнього ефекту Керра і вимірювання проводилися на довжині хвилі лазера $\lambda=632.8$ нм. При проведенні досліджень гістерезисних властивостей за допомогою магнітооптичного ефекту поверхня зразків піддавалася йонному травленню для зняття шарів окислу з поверхні стрічки.

Експериментальні результати і їх обговорення

На рис. 1 представлені залежності величин падіння напруги при проходженні змінного струму через стрічку АМС $Co_{59}Fe_5Ni_{10}Si_{11}B_{15}$, що була розташована у магнітному полі. Отримані залежності свідчать про вплив термічних обробок АМС на величину $Re(\Delta Z/Z)$. Для цієї аморфної стрічки M_I досягає свого максимуму при частоті змінного струму $f \approx 100$ кГц. При термічній обробці не

змінюється частотна локалізацію максимуму. Відносна величина падіння напруги у прикладеному зовнішньому магнітному полі H досягала рівня $\sim 8-9\%$. Термічна обробка стрічок AMC $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ при 350°C протягом 10 хвилин призводила до збільшення МІ ефекту більш ніж в 1,8 разів у порівнянні зі значеннями для вихідного стану зразка. Збільшення температури відпалу до 400°C призводить до зворотнього ефекту: величина $\text{Re}(\Delta Z/Z)$ падає практично до початкового рівня. Таке зменшення $\text{Re}(\Delta Z/Z)$ пов'язано, вочевидь, зі структурними змінами, що відбулися в стрічках. Після відпалу аморфна

матриця містить нанокристалічні включення, частина яких утворює провідну сітку. Внаслідок цього відбувається зменшення МІ ефекту, що властиво аморфним структурам на основі Co. Зсув максимуму $\text{Re}(\Delta Z/Z)$ в область низьких частот відбувається за рахунок внеску в МІ ефект магнітопору обумовленого наногранульованою структурою. Також свіжезагартований зразок піддавався лазерній обробці за допомогою Nd^{3+} лазеру з довжиною хвилі 1064 нм (2.5кВт/см^2). На рис. 1 видно, що лазерна обробка приводить до збільшення МІ ефекту приблизно в 1.7 рази.

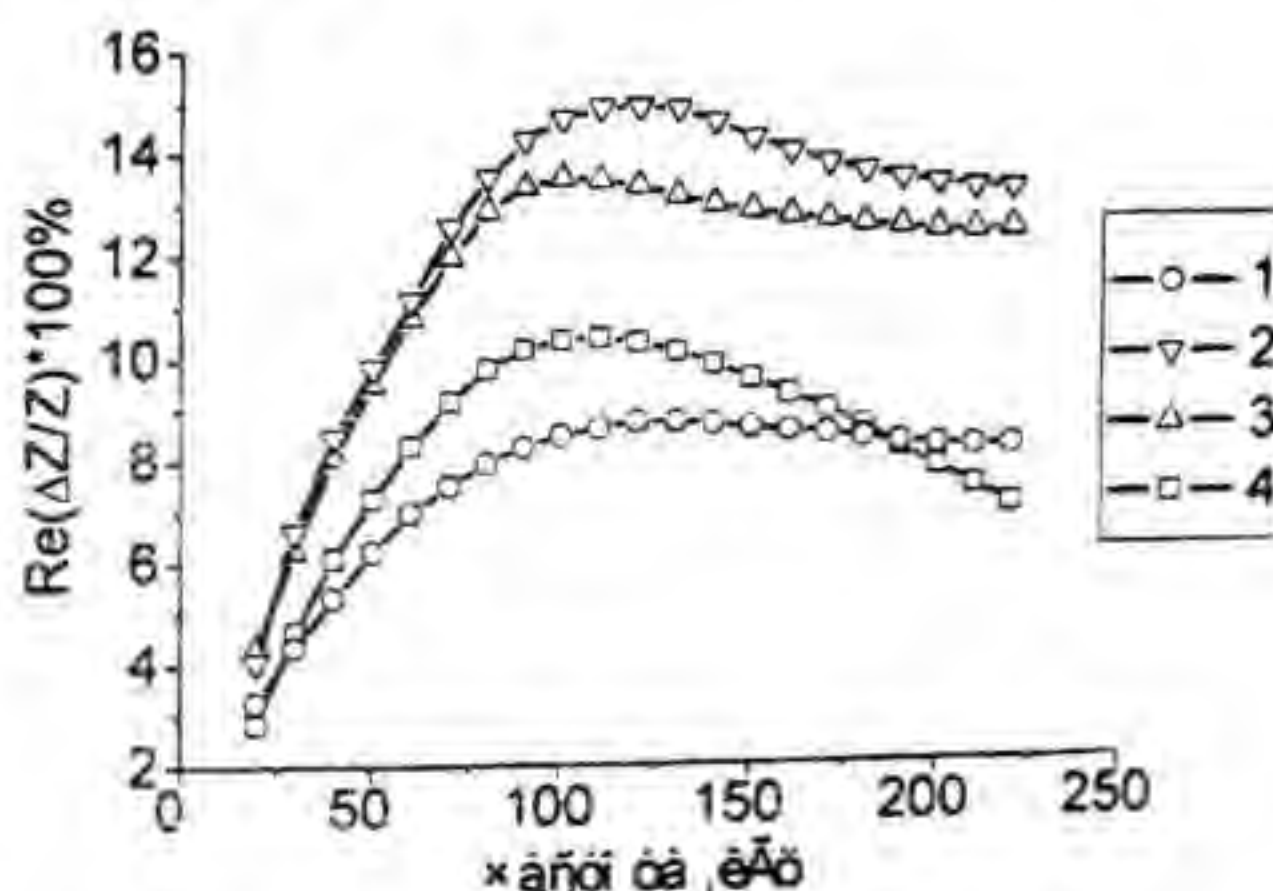


Рис. 1. Залежності магнітоїмпедансу $\text{Re}(\Delta Z/Z)$ для стрічки AMC $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$
1. свіжезагартований зразок, 2. термічний відпал при $T=350^\circ\text{C}$
3. лазерний відпал (Nd^{3+} лазер), 4. термічний відпал при $T=400^\circ\text{C}$

Про суттєву різницю характеру впливу термічного і лазерного відпалу на фізичні характеристики матеріалів, у першу чергу, свідчать результати дослідження структурного стану зразків. На рис. 2 (а,б) представлені результати дослідження структури зразка AMC $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ як після його термообробки при температурі 350°C , так і після лазерного відпалу, отримані за допомогою електронного мікроскопа. Можна помітити, що кластери, що випадають, у результаті термічного відпалу не мають характерного розміру, відрізняються за формою, і їх розкид по розмірах дуже істотний. Така структура виникає завдяки еволюційним процесам дифузії атомів до існуючих в аморфному стані мікрочастини зародків. Повільність цих процесів сприяє створенню неоднорідного структурного стану. Лазерний

відпал дає можливість атомам металу і металоїдів набути більшої енергії і переміщатися на значні відстані.

Такий відпал сприяє також випаданню кластерів, збагачених металевими компонентами (рис. 2), що підтверджують проведені мікрозондові дослідження. На рис.2 представлені результати мікроскопічних досліджень сплаву після лазерного відпалу із щільністю енергії $P_{\text{л}} \approx 3.5\text{кВт/см}^2$ (рис. 2б відповідає $P_{\text{л}} \approx 2.5\text{кВт/см}^2$). Відпал було проведено для створення більш впорядкованої структури в наногранулах з метою визначення кристалічних фаз. Видно, що лазерний відпал призводить до формування hcp α -Co фаз, про що свідчать кільця $\{01\bar{1}0\}_{\text{hcp}}$ й $\{1\bar{1}20\}_{\text{hcp}}$ (рис. 2с).



Рис. 2. Електронна мікроскопія структури стрічки AMC $\text{Co}_{50}\text{Fe}_3\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{13}$: а) термічний відпал при $T = 350^\circ\text{C}$, б) лазерний відпал (Nd^{++} лазер), в) дифрактограма нанокристалу, сформованого лазерним відпалом

Кількість нанокристалітів, впорядкованих в fcc Co структуру є незначним, про що свідчить мала інтенсивність розсіювання світла від $\{002\}_{\text{fcc}}$ площин Co. Експериментальні результати вказують також на формування впорядкованих фаз на основі α -Co + Co_2B , Co_2B , CoSi , CoFe , CoNi . Аналіз отриманих дифрактограм за допомогою дифракції лазерного випромінювання на окремих нанокристалах підтвердив більшу ступінь впорядкованості атомів B в hcp фази $\{01\bar{1}0\}_{\text{hcp}}$ з кутом між відповідними площинами, рівним 60° (вставка рис. 2 в).

Розміри кластерів (гранул) при лазерному відпалі слабо залежать від розмірів і розташування зародків, що існують в аморфній матриці. Отже, такі кластери мають близькі розміри, на відміну від кластерів, отриманих шляхом термообробки стрічки AMC. Варто

також підкреслити, що при термообробці відбувається випадіння фаз метал-метал і метал-металоїд, причому фази метал-металоїд рухаються в напрямку до поверхні, про це свідчать дані оже-електронної спектроскопії, отримані при послідовному травленні поверхні стрічок іонами Ar⁺. Ці дослідження вказують на збагачення поверхневого шару відпалених стрічок атомами B і Co. Розподіл компонентів сплаву $\text{Co}_{50}\text{Fe}_3\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{13}$ по його товщині в приповерхньому шарі після лазерного відпалу стає зрозумілим після проведення послідовного виміру оже-спектрів показане на рис. 3. Товщина стравленого шару d на рис. 3 відлічується від поверхні стрічок вихідного стану до моменту травлення. На рис. 3 не представлені дані для атомів O і C, якими збагачена тільки поверхня стрічок.

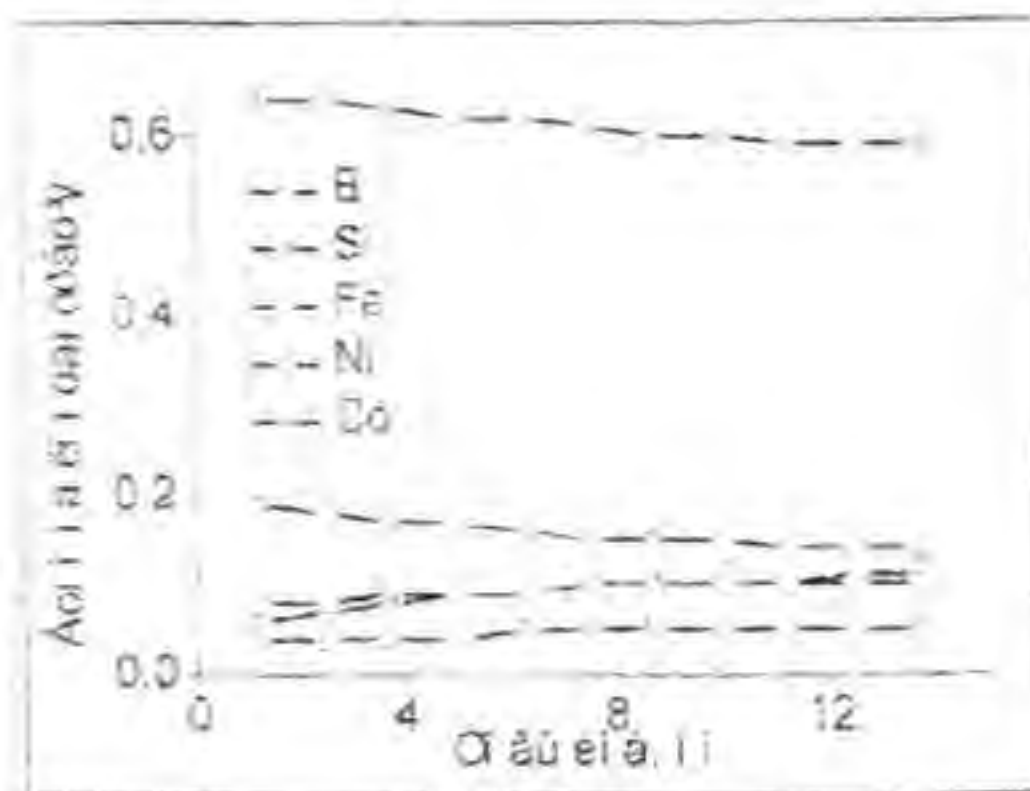


Рис. 3. Розподіл компонентів сплаву по його товщині в приповерхньому шарі за результатами Оже-Спектроскопії для сплаву $\text{Co}_{50}\text{Fe}_3\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{13}$.

У той же час слід зазначити, що у зразку сплаву $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$, а також після його термічної обробки частка атомів В коливається залежно від стравленої товщини d , але залишається близької до оптимальної концентрації (13-16 ат. %). МІЕ в значній мірі визначається залежністю магнітної проникності АМС від магнітного поля [8, 9]. Для АМС на основі Со зв'язок між прикладеним магнітним полем і магнітною індукцією є нелінійним. У свою же чергу, магнітна проникність залежить від рухливості $\mu_{\text{дм}}(\omega, H)$ доменних стінок і від повороту $\mu_{\text{рп}}(\omega, H)$ магнітних моментів [4]:

$$\mu_i(\omega, H) = \mu_{\text{дм}}(\omega, H) + \mu_{\text{рп}}(\omega, H) \quad (2)$$

Аналіз магнітних властивостей зазначених АМС показує, що для низьких частот ($f < 100$ кГц) магнітна проникність, обумовлена рухливістю доменних стінок, є основною ($\mu_{\text{дм}} > \mu_{\text{рп}}$). Поворот магнітних моментів феромагнітних атомів відіграє більшу роль при високих частотах ($\mu_{\text{дм}} < \mu_{\text{рп}}$).

Експериментальним шляхом встановлено, що МІ збільшується з ростом величини μ . У зв'язку з цим дослідження магнітних характеристик АМС може дати відповідь щодо залежності ролі доменів по формуванню залежності $\text{Re}(\Delta Z/Z)$ від магнітного поля. Проведені дослідження гістерезисних кривих намагніченості M від магнітного поля H показали, що АМС на основі Со в основному характеризуються S -подібною характеристичною кривою $M(H)$. Вісь легкого намагнічування розташовується в площині

стрічки, а величина коерцитивної сили становить близько 200 А/м. Після термічного й лазерного відпалу гістерезисні криві $M(H)$ здобувають форму, характерну для феромагнітних матеріалів (рис. 4). Форма кривих $M(H)$ у такому разі наближається до прямокутної й збільшується коерцитивна сила H_c – 5, 6-7,2 кА/м. Слід зазначити, що розходження магнітних станів сплаву $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ після термічного і лазерного відпалу незначне. Але після лазерного відпалу в зовнішньому магнітному полі приповерхнева область стрічки сплаву глибиною порядку скін-шару (30 нм) характеризується вже однорідною доменною структурою, про що може свідчити прямокутний характер кривої $M(H)$ (рис. 4). Таке поведіння залежності $M(H)$ для сплаву $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$ відпаленого за допомогою лазера в зовнішньому полі вказує на більшу величину доменної складової магнітної проникності $\mu_{\text{дм}}$ (див. співвідношення (2)) у ньому в порівнянні з термічно відпаленим. Слід також зазначити, що такий відпал призводить до зміщення гістерезисної петлі криві намагніченості $M(H)$ на величину $\Delta H_c \sim 0,80-0,96$ кА/м. Така поведінка може бути пояснена на основі існування додаткової обмінної взаємодії між верхнім шаром, збагаченим атомами Со і В, і більш глибокими шарами, що містять всі елементи сплаву, а саме: Со, Fe, Ni, Si і В (рис. 3).

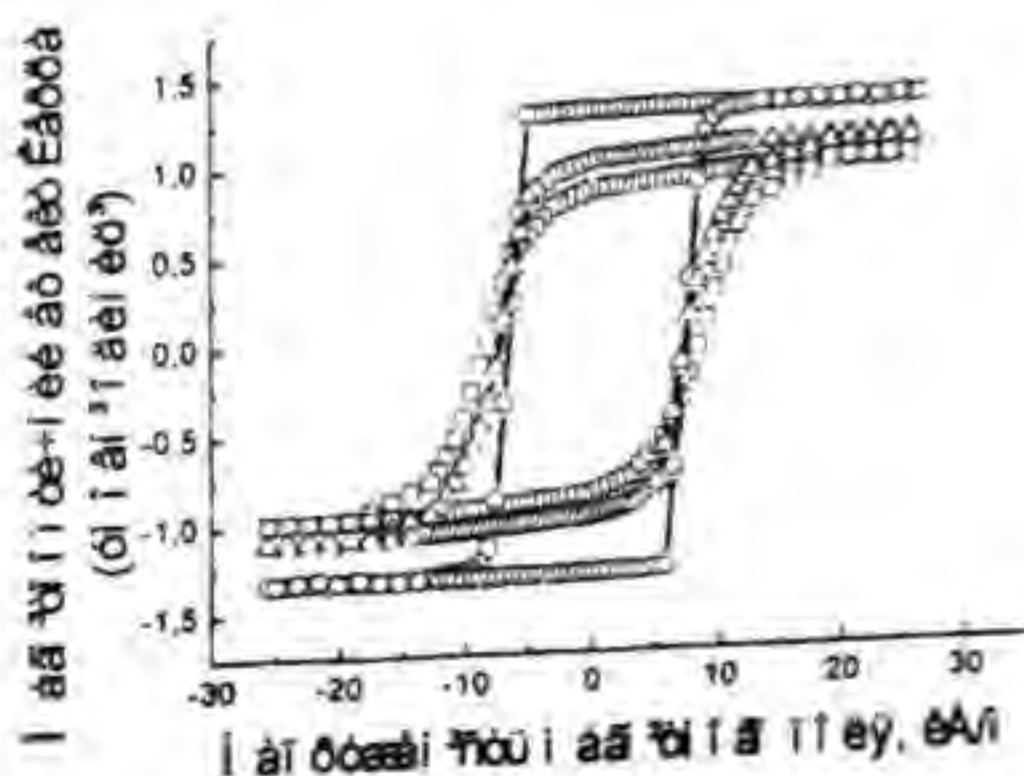


Рис. 4. Магнітооптичні гістерезисні криві $M(H)$ для стрічок АМС $\text{Co}_{59}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$

1. термічний відпал при $T = 350^\circ\text{C}$
2. лазерний відпал (Nd^{3+} лазер)
3. лазерний відпал (Nd^{3+} лазер) при додаванні зовнішнього магнітного поля 240 кА/м

Подібний зсув петлі гістерезису спостерігався і у роботах [10] для аморфних сплавів на основі Со після їх термічної обробки в постійному магнітному полі. Цей додатковий експериментальний факт пояснюється тим, що термомагнітний відпал призводить до виділення дисперсійних фаз α -Со із більше високою коерцитивною силою в порівнянні з аморфною матрицею. Напрямок намагніченості в цих кластерах (наймовірніше в α -Со-кластерах), визначається зовнішнім магнітним полем у процесі відпалу. Отже, у результаті обмінної взаємодії між магнітом'якою фазою, що перемагнічується і магнітожорсткими фазами, що не перемагнічуються [10] відбувається зсув петлі гістерезису $M(H)$ (рис. 4). Подібна фізична картина ймовірно, фіксується при дослідженні гістерезисних кривих $M(H)$ за допомогою магнітооптичного ефекту Керра, що має високу чутливість до поверхневих шарів металевих сплавів. Цей експериментальний факт також може свідчити про те, що лазерний відпал у магнітному полі сприяє формуванню у верхніх шарах стрічки, структурних утворень, що характеризуються відмінними від об'ємних шарів магнітними характеристиками. Різний характер дипольної взаємодії пари сусідніх атомів у сплаві, а саме розходження сил взаємодії пари атомів метал-метал типу Со у порівнянні з парами атомів Со-Fe (Ni) або метал-металоїд, призводять до виникнення орієнтаційного структурного впорядкування при лазерному відпалі в магнітному полі. Це обумовлює появу пов'язаної з таким упорядкуванням магнітної одноосової анізотропії.

Висновки

Виявлено вплив термічної і лазерної обробки на збільшення магнітоімпедансного ефекту в аморфному сплаві $\text{Co}_{39}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{15}$. Така поведінка може бути пояснена на підставі експериментальних фактів з доказом перерозподілу компонентів сплаву в приповерхневому шарі й зміни магнітного стану поверхні стрічки. Дані оже-електронної спектроскопії свідчать, що в приповерхневому шарі при лазерній обробці АМС без впливу магнітного поля випадають кластери метал-метал і метал-металоїд. При лазерній обробці в магнітному полі в кристалічних фазах α -Со виникає ще й магнітна анізотропія. Внаслідок цього відбувається зсув гістерезисних кривих намагнічування. Таким чином, ефект

викликаний такою обробкою стрічок сплаву, збагаченого Со та зміна магнітних властивостей у приповерхневих шарах сприяє як виникненню магнітної анізотропії, так і збільшенню магнітоімпедансного ефекту.

Список використаних джерел

1. *Marin P, Hernando A.* Applications of amorphous and nanocrystalline magnetic materials // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2000. – 215-216. – P. 729-734.
2. *Panina L.V., Mohri K, Bushida K and Noda M.* Giant magneto-impedance and magneto-inductive effects in amorphous alloys. // *J. Appl. Phys.* – 1994. – 76. – P. 6198-6203.
3. *Knobel M. and Pirota K.R.* Giant magnetoimpedance: Concepts and recent progress. // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2002. – 242 – P. 33-40.
4. *Ahn S. J., Jang K.J., Kim C.G.* The variation of giant magneto-impedance ratio in amorphous $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{NiB}_{14}\text{Si}_{15}$ ribbon annealed by pulsed Nd:YAG laser. // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2000. – 215-216. – P. 484-487.
5. *Л.А.Булавин, В.Г.Кравец, К.Л.Виниченко, Д.Ю.Манько.* Оптические свойства в ИК области спектра и магниторезистивные характеристики аморфных Со-содержащих сплавов. // *Журнал прикладной спектроскопии.* – 2001. – 68. – с.599-604.
6. *Brunetti L, Tiberto P, Vinai F. and Chiriac H.* High frequency giant magnetoimpedance in joule-heated Co-based amorphous ribbons and wires. // *Mater. Sci. Eng.* – 2000. – 304-306 – P. 961-964.
7. *Kurlyandskaya G.V., Barandiaran J.M., Vazquez M, Garcia D, Dmitrieva N.V.* Influence of geometrical parameters on the giant magnetoimpedance response in amorphous ribbons. // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2000. – 215-216. – P. 740-742.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М. Наука, 1982, 621 с.
9. *Кекало И. Б.* Нанокристаллические магнито-мягкие материалы. М. МИСИС. 2000, 225 с.
10. *Носкова Н.И., Шулика В.В., Лаврентьев А.Г., Потапов А.П., Корзунин Г.С.* Влияние условий нанокристаллизации на структуру и магнитные свойства аморфных сплавов на основе Fe и Со // *Физика Металлов и Металловедение*, 2005. – 100. – №6. – с.34-41.

УДК 519.9

Паньків В.В., асп.

Смуги прозорості в пиловій магнітоактивній плазмі з феромагнітними гранулами

В даній статті ми аналізуємо особливості смуг прозорості, які з'являються в запыошеній магнітоактивній плазмі з феромагнітними гранулами, завдяки дисперсії тензора магнітної проникності пилової підсистеми, та не існують у звичайній холодній магнітоактивній електрон-іонній плазмі. Дисперсія є суттєвою в області низьких частот біля резонансної частоти коливання магнітних диполів ω_0 , а також в області надвисоких частот поблизу частоти феромагнітного резонансу окремої гранули ω_M .

У цих смугах стає можливою ситуація, коли діелектрична сприйнятливість та магнітна проникність одночасно від'ємні, і таку плазму можна розглядати як можливий варіант реалізації лівого середовища.

Ключові слова: пилова плазма, електромагнітні хвилі, дисперсія.

*E-mail: pankiv_viktor@ukr.net

Пилова плазма є об'єктом активних теоретичних та експериментальних досліджень вже понад двадцять років. Такий різновид плазми є найпоширенішим у Всесвіті, оскільки у природних умовах майже завжди плазма містить пилову компоненту. Плазма в планетарних кільцях, міжзор'яних хмарах, навколоземному просторі, а також в промислових установках плазмового травлення є запыошеною - тобто такою, що містить пилові включення.

Багато праць присвячено дослідженню явища утворення впорядкованих рідиноподібних та кристалоподібних структур, оскільки пилова система має сильну здатність до самоорганізації. Поведінка таких структур є подібною до поведінки рідин та кристалічних ґраток в теорії твердого тіла, що дає можливість вивчати фазові переходи та коливальні процеси. Також пилові частинки за певних умов здатні злипатися та утворювати агломерати значних, в порівнянні з початковим розміром частинок, розмірів. Таке явище призводить до псування мікросхем у процесі їх виробництва [1].

V. V. Pan'kiv., PhD

Transparency bands in the magnetoactive dusty plasma with ferromagnetic grains

In this paper we analyzed peculiarities of the transparency bands in the magnetoactive dusty plasma with ferromagnetic grains, which appears due to the dispersion properties of the magnetic permeability tensor of the grain subsystem, and do not exist in the conventional electron-ion plasma. This dispersion can be taken into account in low frequency range near the frequency ω_0 , and also in super high frequency range near the ferromagnetic resonance frequency of an individual grain ω_M .

In this bands becomes possible situation, when magnetic permeability and dielectric permittivity are simultaneously negative, and one can consider such a plasma as a candidate for the left-handed medium.

Key Words: dusty plasma, electromagnetic waves, dispersion.

Пилова підсистема може також, за певних умов, значно впливати на дисперсійні властивості плазми. Це стає можливим завдяки специфічним дисперсійним властивостям магнітної та діелектричної проникностей пилових частинок, зумовлених їх складом та структурою.

В досліджуваній нами холодній магнітоактивній плазмі з феромагнітними гранулами така ситуація можлива за умови, що Теплова енергія пилових частинок значно менша за їх енергію в зовнішньому магнітному полі [2]. У такій плазмі підсистема феромагнітних гранул взаємодіє з власними коливаннями плазми, та значно впливає на їх поширення. Більше того, стає можливою ситуація коли магнітна проникність та діелектрична сприйнятливість такої плазми будуть одночасно від'ємними у вузьких частотних смугах, де має місце дисперсія тензора магнітної проникності. Таким чином, у вузьких частотних проміжках запыошена магнітоактивна плазма з феромагнітними гранулами може проявляти властивості так званого лівого середовища.

Тема лівих середовищ (з від'ємними діелектричною сприйнятливістю та магнітною проникністю) віднедавна привернула до себе значну увагу наукової спільноти. Такі середовища вперше були теоретично описані В.Г. Веселаго у 1968 році [3]. Одним з найбільш цікавих явищ, передбачених відомим ученим, є від'ємна рефракція.

Для звичайних середовищ $\varepsilon(\omega)$ та $\mu(\omega)$ є додатними величинами, більше того, для більшості речовин в оптичному діапазоні частот $\mu(\omega) = 1$ [4]. В таких середовищах поширення хвиль описується рівняннями Максвелла з $\eta = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} > 0$, вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ та $\vec{k}$ утворюють праву трійку. Як наслідок, напрямок потоку енергії, що визначається вектором Пойнтінга $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$, співпадає з напрямком поширення хвилі, або, іншими словами, співпадають напрямки фазової та групової швидкостей. Але необхідна умова поширення хвиль у середовищі $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) > 0$, може бути виконана також у випадку $\varepsilon(\omega) < 0$ та $\mu(\omega) < 0$. Основною складністю в реалізації лівих середовищ є суміщення частотних діапазонів, в яких мають місце дисперсії магнітної та діелектричної проникностей.

Зовсім недавно, у 1996 році в роботі J.V. Pendry [5], було описано систему, що складається з набору тонких дротів тарозімкнених кільцевих резонаторів, у якій вдалося в мегагерцовому діапазоні реалізувати ліве середовище. Після такої революційної роботи кількість досліджень в даному напрямку різко зросла. Структури подібні до описаних в [5] отримали назву метаматеріали.

Постановка задачі

В запорошеній холодній магнітоактивній плазмі з феромагнітними гранулами, за умови, що теплова енергія частинок значно менша за їх енергію в зовнішньому магнітному полі $d_m H_0 / T \gg 1$, дипольні моменти гранул орієнтуються вздовж напрямку зовнішнього поля $\vec{H}_0$, та здійснюють навколо нього коливання малої амплітуди.

Як було показано в [6], наявність підсистеми феромагнітних гранул спричиняє значний вплив на поширення електромагнітних хвиль, через наявність дисперсії тензора магнітної проникності в області низьких частот біля резонансної частоти

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{d_m H_0}{J}} \quad (1)$$

А також в області надвисоких частот, поблизу частоти феромагнітного резонансу

$$\omega_M = \gamma \beta M \quad (2)$$

Тут $\gamma = g|e|/2mc$, d_m та J це магнітний дипольний момент та момент інерції окремої гранули, g - гіромагнітне співвідношення, e та m заряд та маса електрона відповідно, c - швидкість світла у вакуумі, β - коефіцієнт анізотропії, M - намагніченість феромагнетика. Таким чином, завдяки підсистемі гранул, у плазмі з'являються дві нові характеристичні частоти. Перша лежить в діапазоні низьких, а друга - надвисоких частот.

Узагальнюючи результати отримані в [6], тензор магнітної проникності феромагнітної підсистеми можна записати у наступному вигляді:

$$\mu(\omega) = \mu^x(\omega) + \mu^r(\omega) - I \quad (3)$$

Де

$$\mu_{xx}^x = \mu_{yy}^x = 1 + \frac{\Omega_m^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \equiv \mu, \mu_{zz}^x = 1 \quad (4)$$

Та

$$\begin{aligned} \mu_{xx}^r = \mu_{yy}^r &= 1 - \xi \frac{\omega_M(\omega_M + \omega_H)}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} \equiv \mu_1 \\ \mu_{xz}^r = -\mu_{zx}^r &= \xi \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} \equiv \mu_2 \\ \mu_{zz}^r &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega_H = \gamma H_0 \quad (6)$$

Тут I - одиничний тензор, $\xi = 4\pi N_g / \beta$ - так званий газовий параметр, N_g - густина пилових частинок, v - об'єм гранули (ми вважаємо всі гранули сферичними, з радіусом a). Частота $\Omega_m = \sqrt{4\pi N_g d_m^2 / J}$ - аналог плазмової частоти для підсистеми гранул. Верхні індекси в формулі (3) вжито з наступних міркувань: g від англійського "grains", та r від "resonance". Оскільки перша частина пов'язана з резонансною частотою коливання гранул, а друга з частотою

феромагнітного резонансу. В області низьких частот ми можемо знехтувати μ^x , а в НВЧ

низьких частот, де існує значна дисперсія $\mu^x(\omega)$ біля ω_0 . Вираз для показника заломлення отримується шляхом розв'язання рівнянь Максвелла

діапазоні вплив μ^x є несуттєвим. Таким чином, стає можливим дослідження впливу феромагнітної підсистеми на поширення хвиль у плазмі окремо в низькочастотному та НВЧ діапазонах, беручи до уваги першу та другу частину тензора (3) окремо. Слід зазначити також, що ми використовуємо тензор діелектричної проникності холодної магнітоактивної плазми [7]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{yy}(\omega) &\equiv \varepsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2} \equiv \varepsilon_1, \\ \varepsilon_{xy}(\omega) = \varepsilon_{yx}(\omega) &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{H\alpha}}{\omega} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2} \equiv -i\varepsilon_2, \\ \varepsilon_{zz}(\omega) &\equiv \varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} \equiv \varepsilon_3.\end{aligned}\quad (7)$$

Де індекс α відповідає сортам частинок - електронам (e) та іонам (i), по ним, відповідно, відбувається підсумовування.

Випадок низьких частот

Розглянемо дисперсійні властивості холодної магнітоактивної пиллової плазми в діапазоні

$$\begin{aligned}A &= \mu(\cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta)(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta), \\ B &= -\mu^2[(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_3(1 + \cos^2 \theta + (\mu - 1) \sin^2 \theta)], \\ C &= \mu^3 \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2).\end{aligned}\quad (10)$$

Дані коефіцієнти є функціями частоти ω та кута θ між напрямком поширення хвилі та зовнішнім магнітним полем. Дані виразу випадку $\mu = 1$ зводяться до стандартних виразів для показника заломлення та коефіцієнтів A , B та C холодної магнітоактивної електрон-іонної плазми наведених в [7].

Очевидно, що в загальному випадку ми маємо складний вираз, який можна проаналізувати методами описаними в [7]. Спочатку, використавши умову

$$\mu(-\tilde{B} \pm \sqrt{\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C}}) = 0, \quad (11)$$

ми повинні знайти нулі $\eta_{\pm}^x$. Рівняння (11) зводиться до $\mu = 0$. В результаті отримаємо:

$$\omega_0^{(x)} = \sqrt{\Omega_m^2 + \omega_0^2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} k_z E_z(\omega, \vec{k}) &= -\frac{\omega}{c} \mu^x(\omega) H_z(\omega, \vec{k}) \\ \varepsilon_{zz} k_z H_z(\omega, \vec{k}) &= \frac{\omega}{c} \varepsilon_z(\omega) E_z(\omega, \vec{k})\end{aligned}\quad (8)$$

$$k_z \varepsilon_z(\omega) E_z(\omega, \vec{k}) = 0$$

$$k_z \mu_z(\omega) H_z(\omega, \vec{k}) = 0$$

з урахуванням тензорів $\varepsilon(\omega)$ та $\mu^x(\omega)$. В результаті одержимо [6]:

$$(\eta_{\pm}^x)^2 = \frac{-\tilde{B} \pm \sqrt{\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C}}}{2\tilde{A}} \quad (9)$$

Індекс " $\pm$ " відповідає так званим звичайним та незвичайним хвилям, що при однаковій частоті відрізняються лише поляризацією. Коефіцієнти $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ та $\tilde{C}$ описуються наступними виразами:

Умова $\tilde{C} = 0$, що також випливає з (11), є добре дослідженою. Резонансна частота, за якої $\eta_{\pm}^x \rightarrow \infty$, може бути знайдена з умови $\tilde{A}(\omega, \theta) = 0$ та $\mu(\omega) \rightarrow \infty$. Перша умова дає

$$\omega_{\pi}^{(x)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\Omega_m^2}{2\omega_0^2} \sin^2 \theta}, \quad (13)$$

друга -

$$\omega_{\pi}^{(x)} = \omega_0. \quad (14)$$

Оскільки за резонансних частот магнітогідродинамічне наближення незастосовне внаслідок значного впливу теплового руху на поширення хвиль, в рамках даного підходу ми можемо лише показати якісну поведінку $\eta_{\pm}^x(\omega, \theta)$ поблизу таких частот.

Показник заломлення при $\omega \approx \omega_{\infty}^{(k)}$ описується наступними виразами:

$$(\eta_+^k)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \varepsilon_3}{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \cos^2 \theta}, \quad (15)$$

$$(\eta_-^k)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \cos^2 \theta}{(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \mu \cos^2 \theta)}. \quad (16)$$

За умови, що частота $\omega_{\infty}^{(k)}$ менша за додаткову резонансну частоту $\omega_{\infty}^{(3)}$ (частоту, при якій прямує до нескінченності показник заломлення альфвенової хвилі), або в явному вигляді:

$$\omega_0 < (1 - \frac{m_e}{2m_i} \tan^2 \theta) \omega_{H_i} \quad (17)$$

дані вирази можна спростити:

$$(\eta_+^k)^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta}, \quad (18)$$

$$(\eta_-^k)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{\varepsilon_1}{\sin^2 \theta + \mu \cos^2 \theta}, \quad (19)$$

Таким чином, праворуч від $\omega_{\infty}^{(k)}$ квадрат показника заломлення Альфвенової хвилі $\eta_-^k(\omega, \theta)$ прямує до $-\infty$, а ліворуч до $+\infty$. Отже, між $\omega_{\infty}^{(k)}$ та $\omega_{\infty}^{(3)}$ виникає смуга непрозорості шириною $\Delta\omega_2 = \omega_0^{(k)} - \omega_{\infty}^{(k)}$. В загальному випадку між $\omega_{\infty}^{(g)}$ та $\omega_{\infty}^{(k)}$ $(\eta_{\pm}^k)^2 > 0$, але існує гранична частота, за якої радикал $\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C}$ стає меншим за нуль. Коли значення частоти прямує до $\omega_{\infty}^{(k)} = \omega_0$, вираз для $\eta_{\pm}^k(\omega, \theta)$ можна записати у вигляді:

$$(\eta_{\pm}^k)^2 = \mu \frac{\varepsilon_1}{2 \cos^2 \theta} \quad (20)$$

З виразу (20) слідує, що $(\eta_{\pm}^k(\omega, \theta))^2 \rightarrow \infty$ ліворуч від $\omega_{\infty}^{(k)}$.

Розглянемо тепер випадок, коли резонансна частота $\omega_{\infty}^{(k)} \approx \omega_{\infty}^{(3)}$. В даному випадку суттєвим є вплив іонів і квадрат показника заломлення матиме вигляд:

$$(\eta_{\pm}^k)^2 = \mu \frac{c^2}{V_A} \frac{\omega}{\omega - \omega_{H_i}} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \quad (21)$$

Оскільки при кутах поширення $\theta > 0$ існує $\omega_{\infty}^{(k)}$ можна сказати, що в проміжку між $\omega_{\infty}^{(k)}$ та

$\omega_0^{(k)}$ зможуть поширюватися повільні незвичайні хвилі, для

яких у звичайній холодній магнітоактивній електрон-іонній плазмі $\eta_{\pm}^2(\omega, \theta) < 0$ у проміжку між $\omega_{\infty}^{(3)}$ та $\omega_0^{(3)}$, де

$$\omega_0^{(3)} = \sqrt{\Omega_e^2 + \frac{1}{2} \omega_{H_i}^2} - \frac{1}{2} \omega_{H_i} \quad (22)$$

частота, при якій показник заломлення повільної незвичайної хвилі дорівнює нулю. Важливо відмітити, що в даному проміжку як магнітна проникність $\mu(\omega)$, так і ефективна діелектрична сприйнятливість, негативні одночасно. Це є характерною властивістю лівих середовищ, а отже виникає можливість створення останніх на основі запорошеної магнітоактивної плазми з феромагнітними гранулами. Слід зазначити, що подібна рівність частот можлива лише в порівняно сильних полях. Для оцінок скористаємося виразом знайденим в [6]

$$H_{eq} = \frac{d_m m_i^2 c^2}{e^2 J} \quad (23)$$

Для феромагнітних гранул розміром $a = 5 \times 10^{-4}$ см та густиною $N_g = 10^5 \text{ см}^{-3}$ в гелієвій однократно іонізованій плазмі матимемо $H_{eq} \approx 4,95 \times 10^2$ Гс, а $\omega_0 = \omega_{H_i} \approx 2,38$ МГц. Для прикладу, при значенні зовнішнього поля $H_0 = 800$ Гс матимемо $\omega_0 \approx 3,02$ МГц, $\omega_{H_i} \approx 3,84$ МГц, тобто в більш сильних полях виконується нерівність $\omega_{\infty}^{(k)} < \omega_{\infty}^{(3)}$.

Таким чином, завдяки феромагнітній підсистемі в магнітоактивній пиловій плазмі з'являються дві нові резонансні частоти $\omega_{\infty}^{(k)}$ та $\omega_{\infty}^{(3)}$, а також дві частотні смуги шириною $\Delta\omega_1^k = \omega_{\infty}^{(k)} - \omega_0$ та $\Delta\omega_2^k = \omega_0^{(k)} - \omega_{\infty}^{(k)}$, в яких

магнітоактивна пилова плазма є фактично непрозорою, оскільки показник заломлення швидко прямує до ∞ за резонансних частот, а самі проміжки досить вузькі (див. оцінки нижче). Вирази для $\Delta\omega_1$ та $\Delta\omega_2$, отримані за допомогою (12), (13) та (14), а також нерівності $\omega_0 \gg \Omega_m$, мають наступний вигляд:

$$\Delta\omega_1^k \cong \frac{\Omega_m^2}{2\omega_0} \sin^2 \theta \quad (24)$$

та

$$\Delta\omega_2^k \cong \frac{\Omega_m^2}{2\omega_0} \cos^2 \theta \quad (25)$$

Для хвилі, що поширюється у пиловій плазмі з гранулами розміром $a = 10^{-4}$ см в полі $H_0 = 800$ Гс під кутом $\theta = \pi/4$ за допомогою даних виразів отримаємо наступні оцінки: $\Delta\omega_1^k = \Delta\omega_2^k = 1,78$ Гц. Для кута поширення $\theta = 0$ очевидно $\Delta\omega_1^k = 0$, а $\Delta\omega_2^k = 3,5$ Гц.

$$\begin{aligned} A &= \tilde{\mu}^2 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) (\cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta), \\ B &= \tilde{\mu}^2 [\mu_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (2\mu_1 \cos^2 \theta - \tilde{\mu}^2 \sin^2 \theta)] + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_2 \cos^2 \theta (\tilde{\mu}^2 + 1), \\ C &= \tilde{\mu}^4 \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \\ \tilde{\mu}^2 &= \mu_1^2 - \mu_2^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Де

$$(\eta_+^r)^2 = \frac{-\tilde{B}_r \pm \sqrt{\tilde{B}_r^2 - 4\tilde{A}_r \tilde{C}_r}}{2\tilde{A}_r} \quad (26)$$

Проаналізуємо $\eta_+^r(\omega, \theta)$, як це було зроблено у попередньому випадку для низькочастотного діапазону. Спершу знайдемо нулі $\eta_+^r(\omega, \theta)$, використавши умову

$$-\tilde{B}_r \pm \sqrt{\tilde{B}_r^2 - 4\tilde{A}_r \tilde{C}_r} = 0, \quad (28)$$

що зводиться до

$$\tilde{C}_r = (\mu_1^2 - \mu_2^2) \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0 \quad (29)$$

Дана умова розбивається на три вирази:

$$\begin{aligned} (\mu_1^2 - \mu_2^2) &= 0, \\ (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) &= 0, \\ \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Перші дві умови добре описані в науковій літературі [7]. Третя умова $((\mu_1^2 - \mu_2^2) = 0)$ описує нуль показника заломлення, зумовлений впливом феромагнітної підсистеми. Використовуючи вирази μ_1 та μ_2 з (5), отримаємо

$$1 - 2\xi \frac{\omega_M (\omega_M + \omega_H)}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} - \xi^2 \frac{\omega_M^2 (\omega_M + \omega_H)^2}{(\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2)^2} - \xi^2 \frac{\omega^2 \omega_M^2}{(\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2)^2} = 0 \quad (31)$$

Звідси одержимо вираз для $\omega_0^{(r)}$, за якої $\eta_+^r(\omega_0^{(r)}, \theta) = 0$.

$$\omega_0^{(3)} = \omega_M + \omega_H + \xi \omega_M \quad (32)$$

незалежно від θ .

Тепер необхідно знайти резонансну частоту, за якої $\eta_+^r(\omega_0^{(r)}, \theta) \rightarrow \infty$.

або

$$\xi \frac{\omega_M (\omega_M + \omega_H)}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (34)$$

$$\cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta = 0 \quad (33)$$

Використовуючи вираз для μ_1 , можна отримати розв'язок рівняння (33).

$$\omega_{\pm}^{(3)} = (\omega_M + \omega_H) \sqrt{1 + \xi \frac{\omega_M}{(\omega_M + \omega_H)} \sin^2 \theta} \quad (35)$$

Таким чином, можливо обчислити ширину області прозорості в залежності від кута поширення хвилі.

$$\Delta\omega' = \omega_0^{(r)} - \omega_{\pm}^{(r)} \quad (36)$$

Використовуючи (34) та (35), а також врахувавши малість газового параметру, що для типових гранул розміром $a \sim 10^{-4}$ см та густиною $N_g \sim 10^6$ см $^{-3}$ має значення $\xi \approx 2 \times 10^{-5} \ll 1$, отримаємо:

$$\Delta\omega' = \xi\omega_M \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) \quad (37)$$

Наприклад, у випадку $\theta = 0, \pi/4$ та $\pi/2$, $\Delta\omega' = \xi\omega_M, 3\xi\omega_M/4$ та $\xi\omega_M/2$ відповідно.

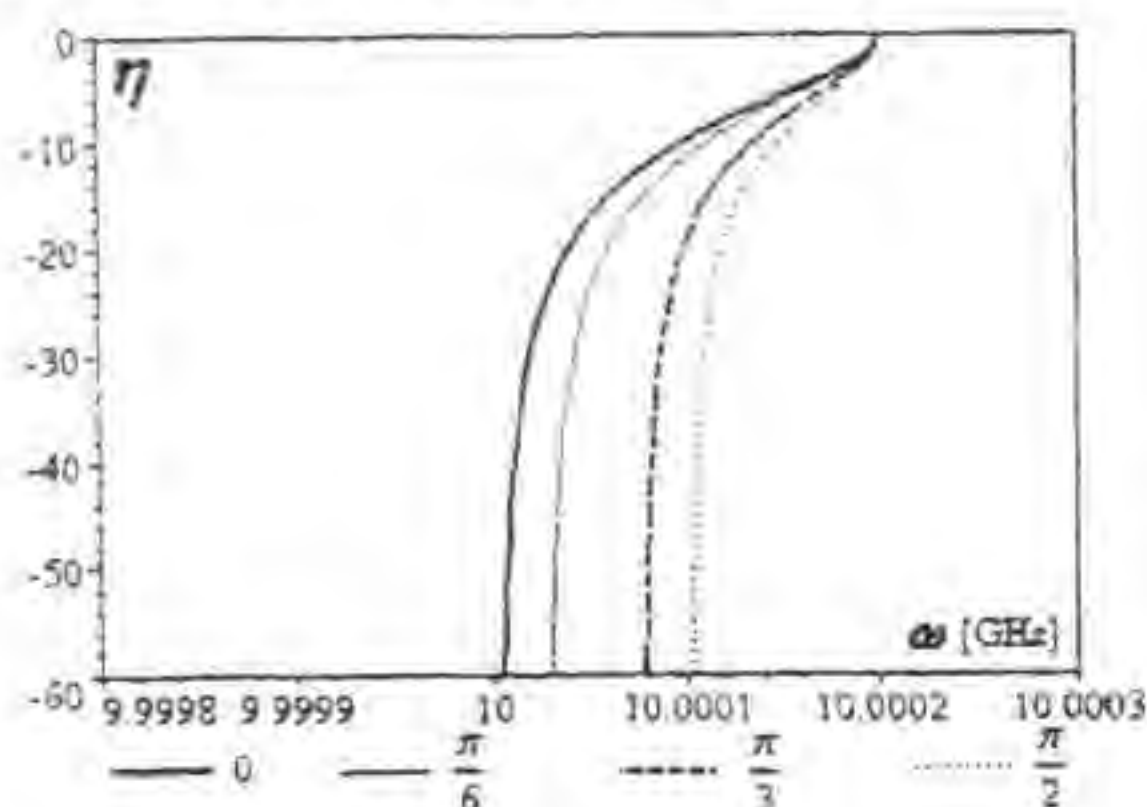


Рис.1. Показник заломлення при $\Omega_c = 100$ ГГц, $\omega_M = 10$ ГГц, $\xi = 2 \times 10^{-5}$.

Графік дисперсії показника заломлення для різних кутів поширення, побудованого за допомогою загального виразу (26) наведено на Рис.1. (значення кута вказане під основним графіком, як і на наступних рисунках). Можна бачити, що ширина смуги прозорості значно зменшується зі збільшенням кута θ .

В загальному випадку, з виразу для $\eta_{\pm}(\omega, \theta)$ неможливо виділити в аналітичному вигляді вирази для ефективних магнітної та діелектричної проникностей. Наслідком умови $\epsilon(\omega) < 0$ та $\mu(\omega) < 0$ є протилежні напрямки фазової та групової швидкостей. Компактні вирази для них мають вигляд:

$$v_{ph}(\omega, \theta) = \frac{c}{\eta'(\omega, \theta)} \quad (38)$$

$$v_{gr}(\omega, \theta) = \frac{c}{\eta'(\omega, \theta) + \omega \frac{d\eta'(\omega, \theta)}{d\omega}} \quad (39)$$

На Рис.2. та Рис.3. показано залежності $v_{ph}(\omega, \theta)$ та $v_{gr}(\omega, \theta)$ від частоти хвилі за різних кутів поширення.

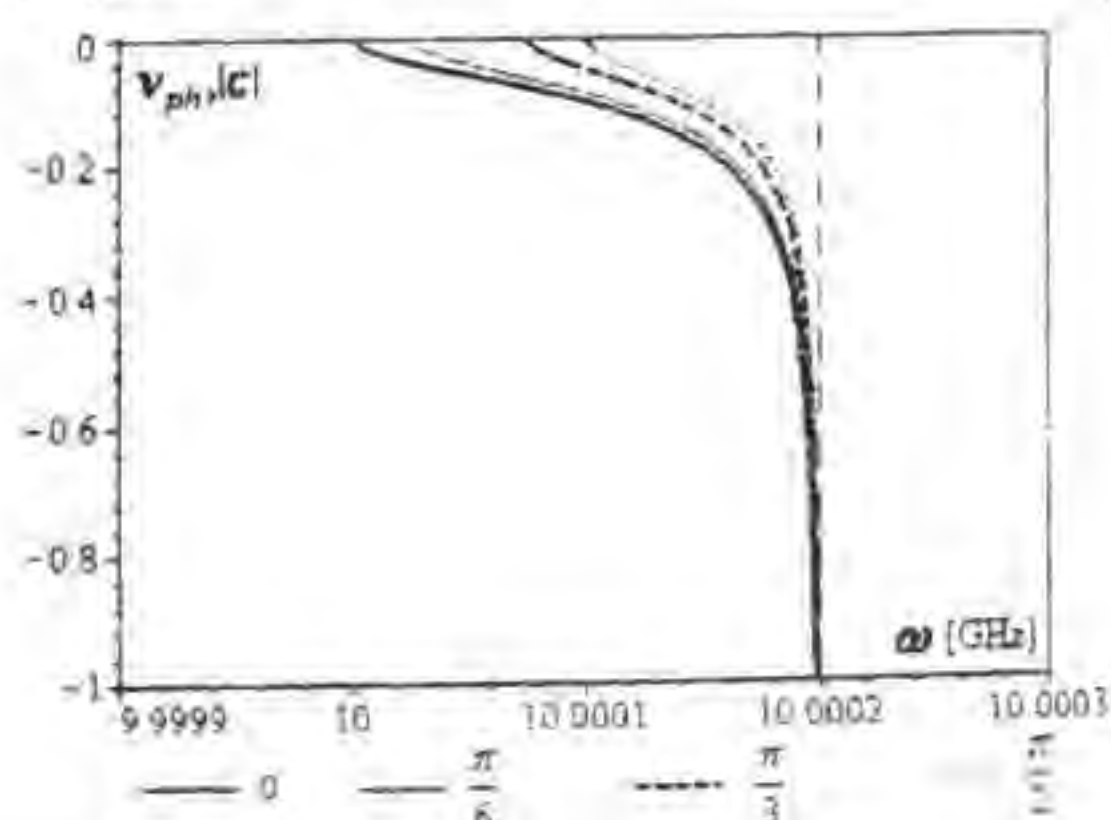


Рис.2. Фазова швидкість при $\Omega_c = 100$ ГГц, $\omega_M = 10$ ГГц, $\xi = 2 \times 10^{-5}$.

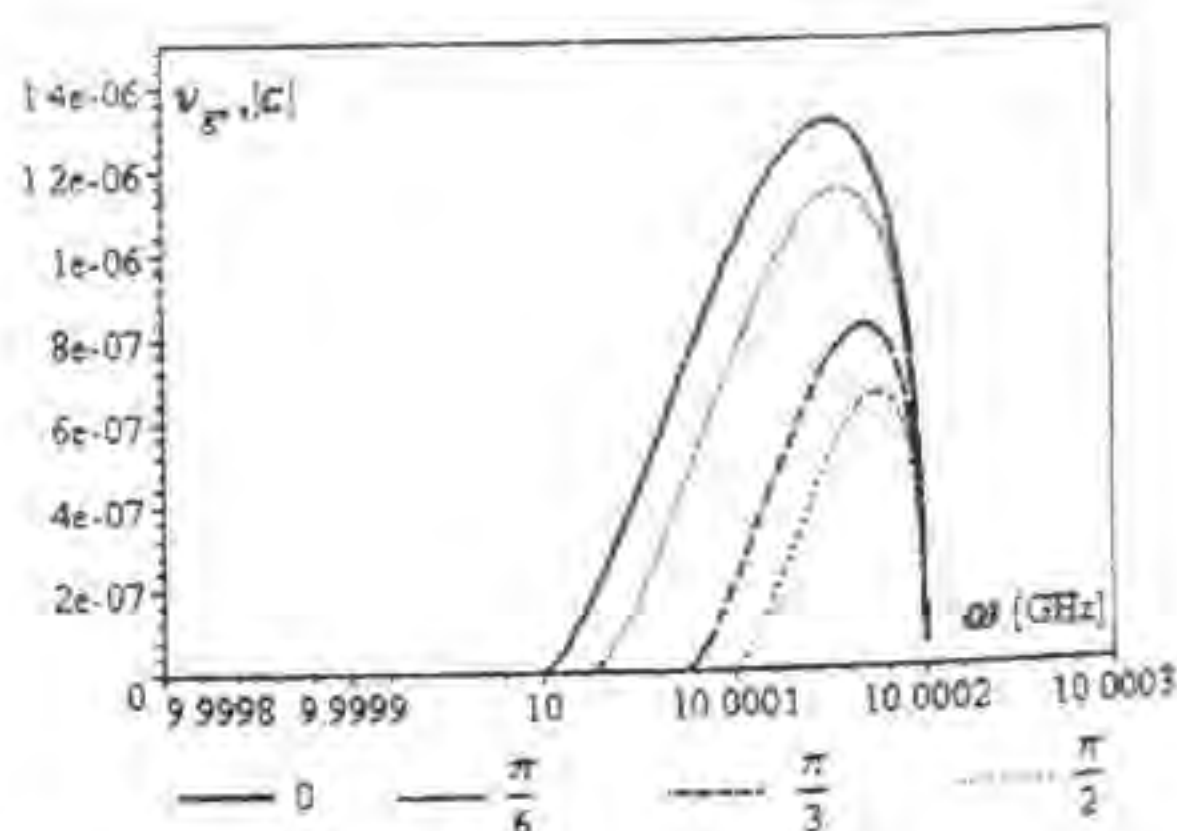


Рис.3. Групова швидкість швидкість при $\Omega_c = 100$ ГГц, $\omega_M = 10$ ГГц, $\xi = 2 \times 10^{-5}$.

Як можна бачити, фазова та групова швидкості мають різний знак у вузькій смузі частот поблизу ω_M . На базі цього факту можна зробити висновок, що в даній смузі магнітоактивна пилова плазма з феромагнітними гранулами демонструє одну з властивостей лівих середовищ.

Висновки

В даній роботі ми аналізуємо деякі особливості дисперсійних властивостей магнітоактивної пилової плазми з феромагнітними гранулами в діапазоні низьких та надвисоких частот.

Раніше ми показали, що завдяки дисперсійним властивостям феромагнітної компоненти така плазма отримує незвичайні властивості, а також у цьому середовищі з'являються нові параметричні частоти ω_0 та ω_M .

Тензор магнітної проникності підсистеми феромагнітних гранул може бути представлений у вигляді суми низькочастотного та високочастотного доданків. Один доданок важливий в діапазоні низьких частот, а інший в НВЧ діапазоні. Це робить можливим окремий розгляд впливу підсистеми феромагнітних гранул на властивості магнітоактивної плазми у діапазоні низьких та надвисоких частот.

Ми показали, що в області низьких частот пилова підсистема спричиняє появу двох нових резонансних частот: $\omega_{\infty}^{(K)}$ та $\omega_{\infty}^{(K')}$.

В НВЧ діапазоні з'являється нова смуга прозорості, відсутня у звичайній магнітоактивній електрон-іонній плазмі. Отримано також аналітичні вирази для ширини даної смуги прозорості та нової резонансної частоти $\omega_{\infty}^{(r)}$, що з'являється під впливом феромагнітної підсистеми. НВЧ смуга прозорості зменшується при зростанні кута θ . Її ширина мінімальна при $\theta = \pi/2$, та має величину $\xi\omega_M/2$. Також отримано графіки залежності фазової та групової швидкостей.

На базі отриманих даних можна зробити висновок, що феромагнітні гранули включені в холодну магнітоактивну плазму в якості додаткової компоненти, значно змінюють її дисперсійні властивості та призводять до появи ряду нових резонансних частот та смуг прозорості, що відсутні у звичайній магнітоактивній плазмі.

У вузькій смузі частот обмеженій $\omega_{\infty}^{(r)}$ та $\omega_0^{(r)}$, така плазма проявляє властивості лівого середовища.

Подяка

Автор висловлює вдячність проф. В.М. Мальневу та доц. Є.В. Мартишу за співпрацю в постановці задачі, а також за цінні зауваження та обговорення результатів, зроблені в процесі читання рукопису.

Список використаних джерел

1. В.Е.Фортнов, А.Г.Храпак и др.// УФН, v.174, N5, сс.495-544, 2004.
2. V.M.Mal'nev, Eu.V.Martysh, V.V.Pan'kiv, // Ukr.Jour.Phys. V.51, N9 pp. 858-862 (2006)
3. V.G.Veselago, // Sov.Phys.-Usp., v.10, N4, pp.509-514, 1968.
4. L.D.Landau, E.M.Lifshits, and L.P. Pitaevskii, Electrodynamics of Continuous media, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, ed. 2, 1984.
5. J.B.Pendry, et al // Phys.Rev.Lett. v.76, 4773 (1996)
6. V.M.Mal'nev, Eu.V.Martysh, V.V.Pan'kiv, // Ukr.Jour.Phys. V.52, N9 pp.848-854 (2007)
7. A.Sitenko and V.Malnev, Plasma Physics Theory, Chapman&Hall, London, 1995, p. 176

Надійшла до редколегії 03.06.08

УДК 519.9

Погорелов В.Є., д. ф.-м. н., проф., Жовтобрюх
Ю.М., студ., Березовчук Л.М., інж.

Спектр комбінаційного розсіяння 4- (н-октилокси)феніл-4'-(н- гексилокси)бензоат в кристалічній фазі

В роботі аналізується спектр комбінаційного розсіяння рідкокристалічного зразка, подається ототожнення коливальних частот, що проявляються в спектрі комбінаційного розсіяння, з коливаннями окремих атомів чи атомних груп.

Ключові слова: рідкий кристал, коливальні частоти, коливальний спектр.

Останнім часом рідкокристалічні дисплеї знайшли широке застосування в різноманітних інформаційних технологіях. Це монітори персональних комп'ютерів, телевізійних приймачів, різноманітних інших засобів відображення інформації. В свою чергу, це зумовило синтезування нових речовин, здатних утворювати рідкокристалічні структури з передбачуваними властивостями. До таких речовин відносяться два ізомери складних ефірів – 4-(н-гексилокси)феніл-4'-(н-октилокси)бензоат (далі – зразок X_1) та 4-(н-октилокси)феніл-4'-(н-гексилокси)бензоат (далі – зразок X_2).

Незважаючи на близькість хімічної структури цих двох зразків, вони відрізняються характером фазових перетворень. Так, в зразку X_1 перехід з стану ізотропної рідини до нематичної мезофази відбувається за температури 362.5 К. охолодження цього зразка до температури 338 К зумовлює мезофазний перехід нематик – смектик С, подальше охолодження за температури 328 К спричинює кристалізацію зразка X_1 . В зворотному напрямку усі ці фазові трансформації відбуваються за тих самих температур. В зразку X_2 в процесі охолодження перехід з стану ізотропної рідини до нематичної мезофази відбувається за температури 362 К, мезофазний перехід нематик – смектик С спостерігається за температури 319 К. Зразок X_2 переходить до кристалічного стану за температури 307 К. Нагрів зразка з кристалічного стану до температури 324 К зумовлює перехід до нематичного стану. При

V.Ye. Pogorelov, Dr. Sci., Prof.,
Yu.M. Zhovtobrukh, stud., L.N.
Berezovchuk., eng.

Raman spectra of 4-(n-oktyloxy)phenyl- 4'-(n-hexyloxy) benzoate in crystal phase

In this work authors analyse the Raman spectrum of liquid-crystalline sample. The identification vibrational frequencies, which can observe in Raman spectrum, with vibration of individual atoms or groups of atoms was made.

Key Words: liquid crystal, vibrational frequencies, vibrational spectrum.

цьому в процесі нагріву смектична фаза не утворюється (на відміну від зразка X_1).

Відомо, що коливальні спектри суттєво пов'язані з будовою молекул, з особливостями внутрішньомолекулярної динаміки. Тому доцільно дослідити особливості коливальних спектрів визначених вище двох ізомерів складного ефіру, трансформацію коливальних спектрів при фазових перетвореннях цих зразків. й, врешті решт, визначити зв'язок між специфікою фазових перетворень і особливостями структури цих двох ізомерів.

В цій публікації аналізується спектр комбінаційного розсіяння 4-(н-октилокси)феніл-4'-(н-гексилокси)бензоат (далі – зразок X_2).

Експеримент.

В роботі використовувався автоматизований спектрально-обчислювальний комплекс на базі подвійного монохроматора ДФС-24.

Джерело збуджуючого комбінаційне розсіяння (КР) світла – аргонний лазер з довжиною хвилі випромінювання 488 нм, потужність збуджуючого випромінювання 50–100 мВт. Така потужність не приводить до суттєвого нагрівання зразка під час реєстрації спектрів комбінаційного розсіяння (КР).

Розсіяне світло спостерігається під кутом 90° відносно напрямку падаючого лазерного променя. Всі спектри було записано при ширинах вхідної та вихідної щілин, що не перевищували 100 мкм. При таких щілинах ширина апаратної функції монохроматора не перевищує 5 см⁻¹.

бензольних кільця. Тому природно коливання в інтервалі $3000-3100\text{см}^{-1}$ пов'язати з коливаннями груп CH бензольних кілець.

Тепер розглянемо більш детально спектр КР зразка в інтервалі $1000-1800\text{см}^{-1}$ (рис. 5а, 5б).

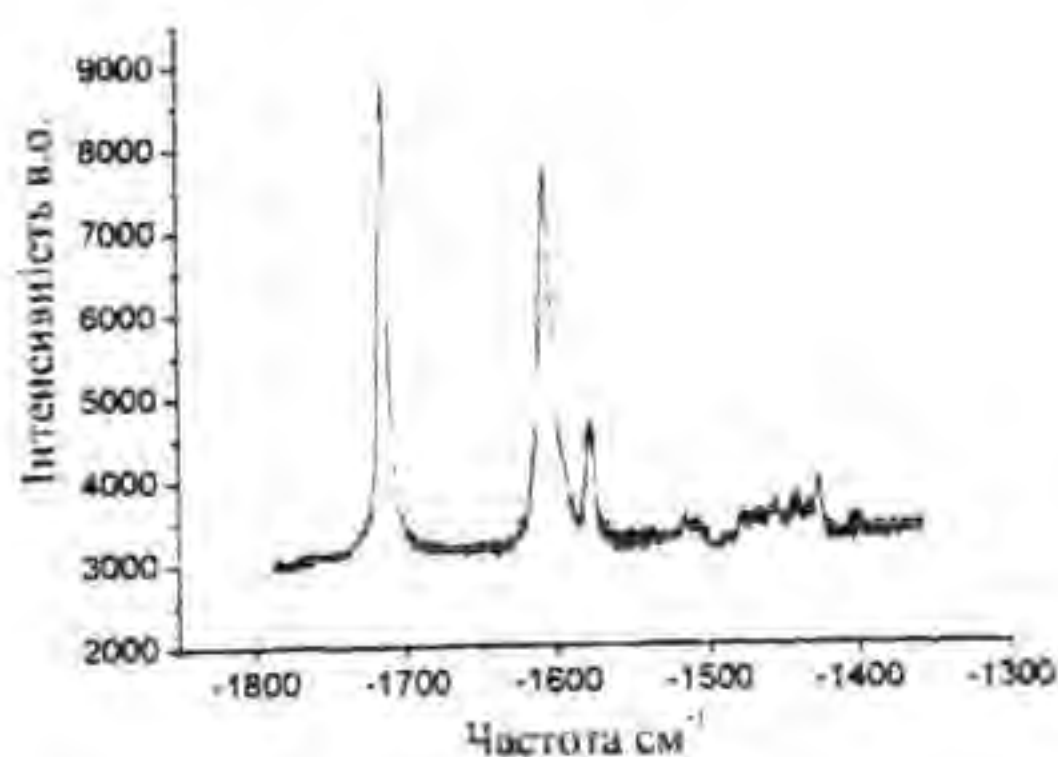


Рис. 5а. Коливальний спектр зразка та результати деконволюції в інтервалі $1350-1800\text{см}^{-1}$

Після застосування процедури деконволюції було отримано цілий набір коливальних частот. Нажаль, повна їх інтерпретація і однозначне віднесення до коливань певних груп атомів без застосування чисельних методів розрахунку коливальних частот є неможливим, тому зупинимось на найбільш інтенсивних частотах. Найбільшу інтенсивність в спектрі КР має лінія на частоті 1714см^{-1} . Зважаючи на те, що значення частоти практично співпадає зі

значенням 1710см^{-1} для комплексу $\text{R}-\text{C}=\text{O}$.

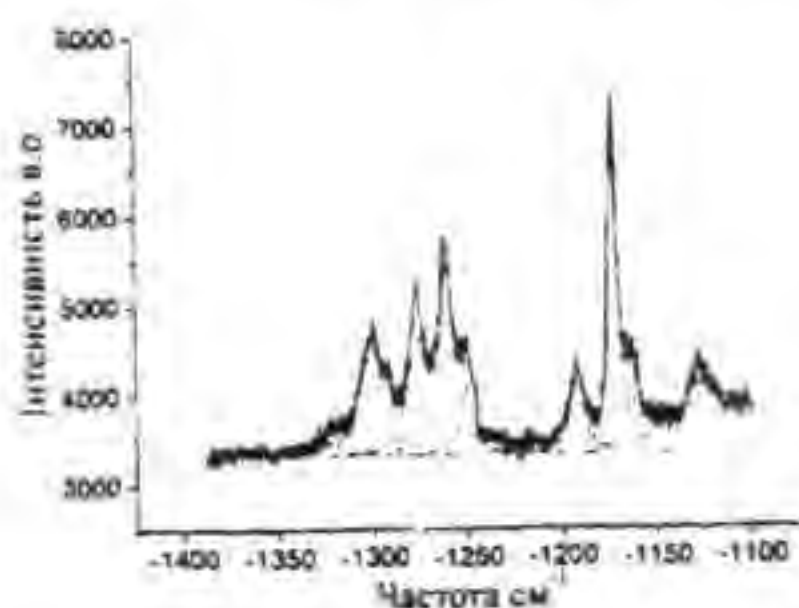


Рис. 5б. Коливальний спектр зразка та результати деконволюції в інтервалі $1100-1350\text{см}^{-1}$

де R - це будь-які хімічні радикали (тут і далі використовуються дані з робіт [2] і [3]), цю лінію

можна ототожнити з $\text{C}=\text{O}$ коливанням. Велику інтенсивність лінії можна пояснити тим, що атом кисню причеплений збоку до достатньо довгої молекули зразка, внаслідок чого він має можливість вільно коливатись з достатньо великою амплітудою, що значно змінює дипольний момент молекули. Також в спектрі даного об'єкта спостерігаються дві близькі смуги з частотами 1602 та 1608см^{-1} . Їх можна інтерпретувати як коливання двох бензольних кілець. На користь такої інтерпретації свідчить той факт, що у вільному бензолі спостерігається коливання E_{2g} на частоті 1606см^{-1} . Невелике розщеплення, що спостерігається, можна пояснити взаємодією коливань, що виникають у бензольних кільцях. Три близькі частоти (1163 , 1172 , 1192см^{-1}) також можна приписати коливанням бензольних кілець, які виникають з коливання E_{2g} 1178см^{-1} чистого бензолу. Дві лінії з частотами 1043 та 1056см^{-1} (показані

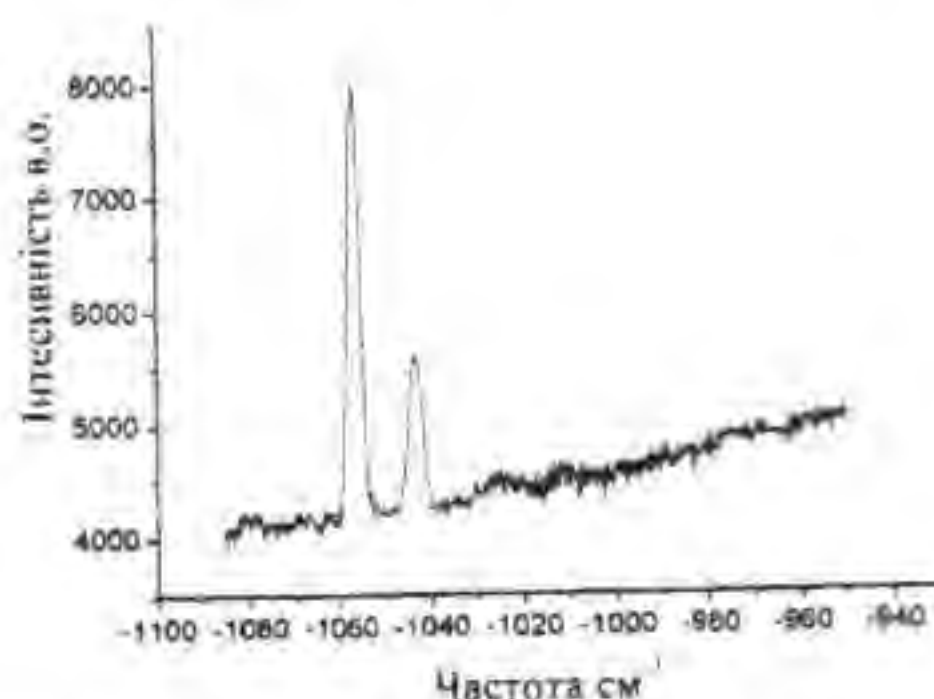


Рис. 6. Коливальні смуги зв'язку $\text{C}-\text{O}$

на рис. 6) можна проінтерпретувати як коливання зв'язку $\text{C}-\text{O}$ – по аналогії з коливальною смугою 1033см^{-1} зв'язку $\text{C}-\text{O}$ в молекулі метанолу.

Список використаних джерел

1. Волькенштейн М.В., Ельяшевич М.А., Степанов Б.И. «Колебания молекул». Т.1, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1949.-с.508-514.
2. Волькенштейн М.В., Ельяшевич М.А., Степанов Б.И. «Колебания молекул». Т.2, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1949.-с.359-430.
3. Свердлов Л.М., Ковнер М.А., Крайнов Е.П. «Колебательные спектры многоатомных молекул», Москва, «Наука», 1970. – с.294.

Надійшла до редколегії 20.04.2008р

УДК 519.9

Селіщев П.О., д.ф.-м. н., проф.,
Алексеев В.В., студ.

Флуктуації потоків точкових дефектів і їх вплив на повзучість матеріалу

Отримана асимптотична залежність середньої швидкості повзучості матеріалу, що опромінюється від параметрів, які описують стохастичний характер потоку точкових дефектів на дислокацію.

Ключові слова: повзучість, переповзання, потік дефектів, флуктуації.

E-mail: avv86@ukr.net

Безпека діючих електростанцій, збільшення терміну дії компонентів атомних електростанцій, проблема надійної герметизації відходів – все це вимагає ретельного дослідження деформацій під дією навантажень в умовах інтенсивного опромінення. Якісні теоретичні дослідження в цій галузі важливі через складність експериментально досліджувати цю проблему. Відомо що під опроміненням матеріалів їх швидкість повзучості суттєво зростає.

Використовувалась модель у якій повзучість зумовлена ковзанням крайових дислокацій і переповзанням стопорів, що складаються з домішкових атомів.

Вважаємо, що переповзання стопора відбувається лише зарахунок поглинання дислокацією точкових дефектів.

Нехай потік вакансій на одиницю довжини дислокації j_v , а потік міжвузлових атомів на одиницю довжини дислокації j_i . У випадку, коли j_i і j_v – детерміністичні величини, час переповзання стопора з поперечним перерізом $2a$ і повздовжнім перерізом λ :

$$t = \frac{a_0^2}{a \cdot |j_i - j_v|} \quad (1)$$

Таким чином в детерміністичному випадку час переповзання не залежить від λ ,

при $j_i \rightarrow j_v \Rightarrow t \rightarrow \infty$ (стопор не долається), при $j_i > j_v$ стопор долається завдяки нарощуванню екстраплощини,

P. A. Selyshchev, Prof., V. V. Alexeenko, stud.

Fluctuations of streams of dot flaws and their influence on creep of materials under an irradiation.

Asymptotic dependence of medial velocity of creep of a material under an irradiation from parametres which feature stochastic character of a stream of dot flaws on a dislocation is gained.

Key words: deformation, creep, fluctuation, stream of flaws.

при $j_i < j_v$ дислокація долає стопор за рахунок розчинення екстраплощини.

Зазвичай час ковзання суттєво менше за час переповзання і відстані між стопорами значно більші за їх лінійні розміри. Таким чином вираз для середньої швидкості повзучості можна записати у вигляді:

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = N \cdot \bar{L} \cdot \langle t^{-1} \rangle = N \cdot \bar{L} \cdot a_0^2 \cdot \langle a^{-1} \rangle \langle |\Delta j| \rangle \quad (2)$$

де N – кількість дислокацій у матеріалі, що досліджується, $\bar{L}$ – середня відстань між стопорами, $\Delta j = j_i - j_v$.

У стохастичному випадку, коли $j_i = j_i(t)$, $j_v = j_v(t)$ і $\Delta j = \Delta j(t)$ – випадкові процеси, врахувавши флуктуації цих величин, можна пояснити можливість подолання стопора при $\langle \Delta j(t) \rangle = 0$, що експериментально спостерігається, але не вдається пояснити в рамках детерміністичного розгляду.

Розрахуємо $\langle |\Delta j| \rangle$, вважаючи, що $\Delta j(t)$ – стаціонарний випадковий процес, в якому Δj має сталий розподіл в кожний момент часу.

Якщо вважати заданною густину ймовірності $\rho(\Delta j)$, де $\Delta j \in (-\infty, \infty)$, тоді середню швидкість повзучості можна записати у вигляді:

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = N \cdot a_0^2 \cdot \langle a^{-1} \rangle \cdot \bar{L} \cdot (j_+ + j_-) \quad (3)$$

$$\text{де } j_+ = \int_0^\infty x \cdot \rho(x) dx, \quad j_- = \int_0^\infty x \cdot \rho(-x) dx$$

Були розглянуті деякі випадки розподілів випадкової величини Δj :

1. Величина Δj - розподілена за Гаусом з нульовим середнім ($\Delta \bar{j} = 0$) і дисперсією σ^2 .

$$\Delta j: \rho(\Delta j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta j^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow |\Delta j|: \rho(|\Delta j|) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|\Delta j|^2}{2\sigma^2}}$$

Таким чином середня кількість надлишкових точкових дефектів, що проходять через одиницю довжини дислокації за одиницю часу:

$$\langle |\Delta j| \rangle = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

Середня швидкість повзучості в цьому випадку:

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = N \cdot a_0^2 \cdot \langle a^{-1} \rangle \cdot \bar{L} \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

Отже, врахувавши флуктуації випадкових процесів $j_1(t)$ і $j_2(t)$, була отримана залежність, що пояснює переповзання крайовими дислокаціями стопорів при умові, що середня кількість надлишкових точкових дефектів, які проходять через одиницю довжини вісі дислокації за одиницю часу рівна нулю.

2. Величина Δj - розподілена за Гаусом з ненульовим середнім $\Delta \bar{j}$ і дисперсією σ^2 .

Густину ймовірності розподілу стохастичної величини $|\Delta j|$ в цьому випадку можна отримати, додавши густини ймовірності двох розподілів Гауса на інтервалі $(0, \infty)$:

- 1) Розподіл Гауса $\rho_1(\Delta j)$ з параметрами $(\Delta \bar{j}, \sigma)$;
- 2) Розподіл Гауса $\rho_2(\Delta j)$ з параметрами $(-\Delta \bar{j}, \sigma)$;

Таким чином отримана залежність:

$$\rho(|\Delta j|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(|\Delta j| - \Delta \bar{j})^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(|\Delta j| + \Delta \bar{j})^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

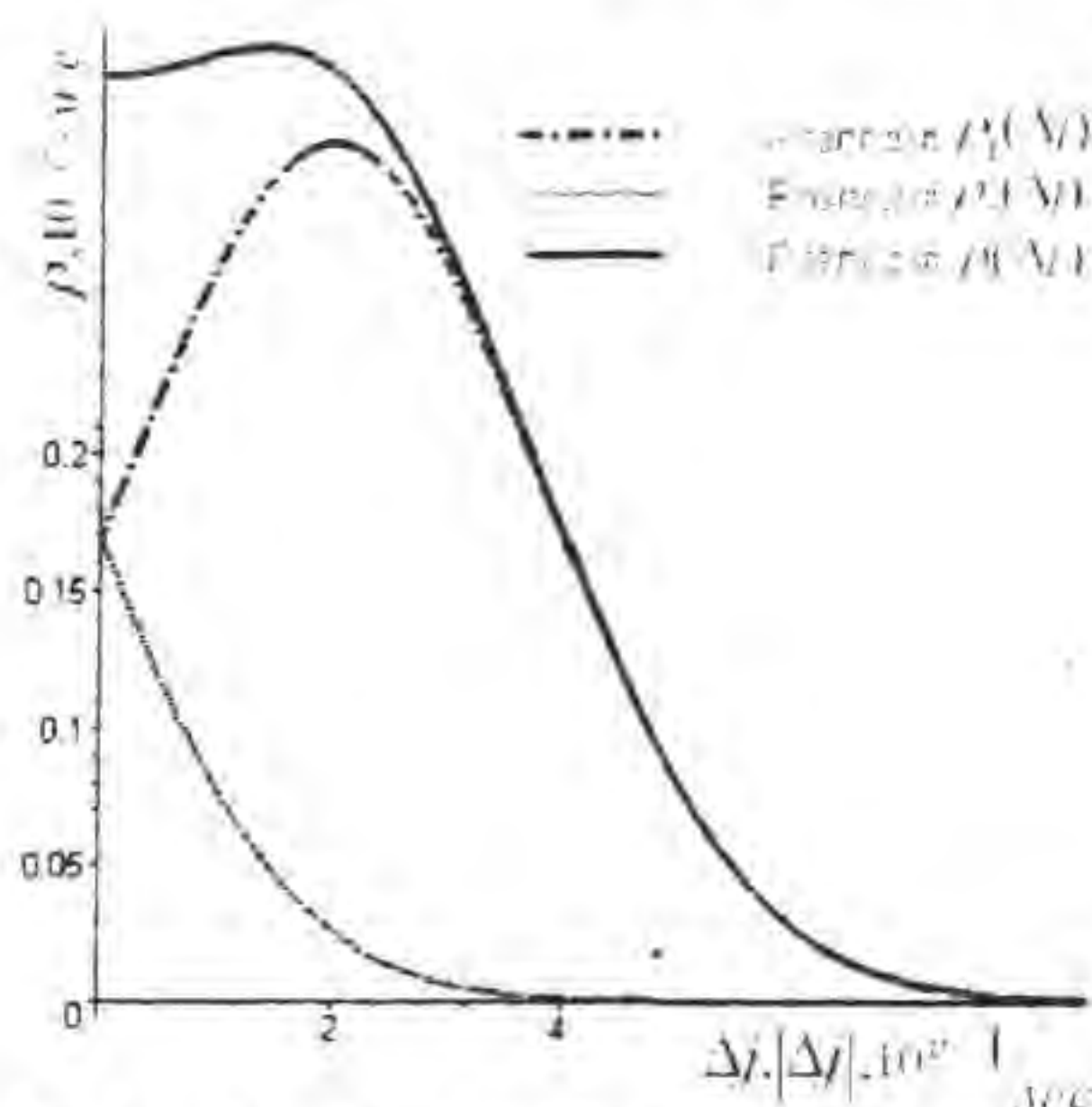


Рис.1 Густина ймовірності стаціонарного випадкового процесу $|\Delta j|$ за умови, що стохастична величина $\Delta j(t)$ розподілена за стаціонарним розподілом Гауса з заданим середнім $\Delta \bar{j} = 2 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{m \cdot c}$ та дисперсією $\sigma = 1.8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{m \cdot c}$, p - ціле число, параметр що визначається умовами опромінення.

Середня швидкість повзучості в цьому випадку:

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = N \cdot a_0^2 \cdot \langle a^{-1} \rangle \cdot \bar{L} \cdot \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta \bar{j}^2}{2\sigma^2}} + \Delta \bar{j} \cdot \text{Erfi} \left(\frac{\Delta \bar{j}}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)$$

За допомогою отриманої залежності можна більш точно описати повзучість. Розрахунки в рамках детерміністичної моделі дають занижені значення для швидкості повзучості, а врахування флуктуацій величин j_1 та j_2 дає можливість розрахувати значення $\langle \dot{\epsilon} \rangle$, що ближче до експериментально спостерігаемого.

Розглянемо вплив флуктуацій стохастичних величин j_1 та j_2 на середню швидкість повзучості в припущенні, що Δj - стаціонарний випадковий процес, що задовольняє розподілу Гауса з відомими характеристиками - середнім $\Delta \bar{j}$ та дисперсією σ^2 .

В цьому випадку середню кількість надлишкових точкових дефектів, що проходять

Підписано до друку 23.06.2008. Формат 70х100¹/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 18,38.
Наклад 350 прим. Зам. № 206.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича

КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13372JB

42-чоттєвий періодичний видання

25.00

