

03 К.У.Н.
Рісн



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

КИЇВ - 2007

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13360JB

45 - чит. зал періодики та дисерт. 20.00

ВИПУСК №4 2007

Вісник Київського університету, випуск №4, 2007

Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки".

У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики. Для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів.

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Редакційна колегія:

- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- **Хусаїнов Денис Ях'євич**, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор;
- **Анісімов Ігор Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Буй Дмитро Борисович**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- **Булавін Леонід Анатолійович**, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Гаращенко Фелір Георгійович**, доктор технічних наук, професор;
- **Данилов Вадим Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Макара Володимир Арсенійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Мелешко В'ячеслав Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Перестюк Микола Олексійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Скришевський Валерій Антонович**, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- **Анісімова Тетяна Харитонівна**, **відповідальний секретар**;
- **Безущак Оксана Омелянівна**;
- **Мороз Костянтин Олександрович**;
- **Родіонова Тетяна Василівна**;
- **Хмелюк Надія Кузьмівна**;
- **Шишацька Олена Володимирівна**, **технічний редактор**.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 966-76-52-00-9

З М І С Т

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Верьовкіна Г.В., Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів	9
Головащук Н.С. Інваріантні підалгебри в деякій зкрученій груповій алгебрі	12
Гончарова С.Я. Стохастична стійкість напівмарковського процесу	18
Горбачук О.Л., Матурін Ю.П. Про деякі системи підмодулів модуля	21
Єна О.Г. Про диференціювання кільця многочленів від двох змінних у простій характеристиці	23
Журавльов В.М. Ідеали черепичних порядків з квазіфробеніусовими факторкільцями	28
Зельдіч М.В. Про маятникову еквівалентність біграфів і мінімальні незначовизначені цілі квадратичні форми	33
Курдаченко Л.А., Турбай Н.А. FC-групи, в яких умова S-переставності транзитивна	43
Лавренюк Я.В. Централізатори фінітарних елементів групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора	48
Морозов Д.І. Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності p	52
Одінцова О.О. Про групи з сепаруючими підгрупами відносно систем нерозкладних циклічних підгруп	55
Полякова Л.Ю. О 0-гомологіях полугруп	59
Шуренков Г.В. Довжина інтервалу невизначеності при використанні алгоритму динамічного програмування для оцінки моментів зміни	65

ДИФЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Андрущенко В.О., Нікітенко В.М., Якименко М.С. Дослідження особливостей частотного спектру та модового складу резонансних коливань товстого п'єзокерамічного диску	71
Каліон В.А., Бровченко І.О., Кушан А.О. Використання методу гідромеханіки згладжених частинок для розв'язання задач гідродинаміки довкілля	77
Козлов В.І., Карнаухова Т.В., Пересунько М.В. Демпфірування вимушених осесиметричних коливань шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів	84
Моїсеєнко В.О. Дослідження кінематики хвильових полів у анізотропних хвилеводах	88
Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Рівняння руху обертового тіла із маятниковими автобалансирами	94
Шрамко Л.В. Однорідні розв'язки задачі електропружності для шару з вільними гранями	101
Яремченко Н.П. Дослідження впливу геометричних параметрів пологих	107

ортотропних оболонок змінної товщини на характер напружено-деформованого стану на основі уточненої моделі

Ян Фуцзян Вимушені коливання двошарової анізотропної циліндричної оболонки при швидкому обертovому русі 112

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

- Акіменко В.В., Трофимчук О.Ю. Чисельний метод розв'язку задачі оптимального керування для системи локально-одновимірних інтегро-диференційних параболічних рівнянь 121
- Антосяк П.П. До правил голосування Кондорсе і Борда 125
- Власюк А.П., Остапчук О.П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини 130
- Завіша В.В., Москальков М.М. Алгоритм чисельного розв'язання задачі про генерацію акустичних коливань в кристалі CdS 135
- Бойко Т.М., Гаращенко Ф.Г. Аналіз чутливості параметрів моделі фінансово-промислової корпоративної структури 139
- Грищенко О.Ю., Оноцький В.В. Двокроковий різницевий алгоритм для рівняння Бюргерса 145
- Загородний Ю.В. Трьохрівнева модель розвитку систем на прикладі рослинних організмів 149
- Іванов І.Ю. Виконання криптографічних операцій за схемою RSA в умовах обмеженості обчислювальних ресурсів 154
- Івохін Є.В. Про деякі спектральні властивості додатніх і позитивних матриць 158
- Касьянюк В.С., Польша М.В. Про один підхід до моделювання нечітких множин Л.Заде методами теорії можливостей 161
- Кахута Н.Д. Відношення сумісності, узагальнене з'єднання та узагальнений прямий добуток 167
- Колянова Т.В. Моделювання взаємодії інфекції та природженого імунітету 174
- Мартинюк П.М. Метод радикальних базисних функцій в крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами спряження 178
- Омардибірова В.Н. Система підтримки прийняття рішень керуючого інвестиційними фондами 182
- Панченко Т.В. Доведення коректності паралельного додавання до спільної змінної в IPCL 187
- Семенов В.В. Типовість розв'язності деяких неопуклих екстремальних задач 191
- Сидоров М.В., Ляшко В.І., Александрович І.М. Обернення деяких інтегральних рівнянь з ядром Бесселя 196
- Сільвейструк Л.М. Модель "сутність-зв'язок" – популярна семантична модель: історія формалізація, бібліографія 201
- Терещенко Л.М., Хомицький В.В., Абрамова Л.П. Фізичне моделювання динаміки наносів, стійкості захисних споруд та території для будівництва і експлуатації місць збереження та відстою плавзасобів 209

Хусаїнов Д.Я., Вереїкіна М.Б. Зображення розв'язків задачі Коші одного класу систем рівнянь з частинними похідними із запізнюванням	213
Хусаїнов Д.Я., Діблік Й., Лукачова Я. Керування системою рівнянь коливань	217
Чечельницький О.А., Кучеренко О.В. Властивості мережевої моделі паралельної структури в стаціонарному режимі	223
Швець О.Ф. Про один адаптивний підхід апроксимації дискретних сигналів	227
Шишацька О.В. Трьохзначні логіки Кліні та трьохелементні ланцюги	230

РАДІОФІЗИКА

Анісімов І.О., Літошенко Т.Є. Резонансна взаємодія тонкого модульованого електронного пучка з неоднорідною неізотермічною плазмою	239
Барановська І.М., Дудченко Н.О. Типи магнітного упорядкування феритину в біологічних зразках	244
Бунак С.В., Ільченко В.В., Окоронко О.М., Шкавро А.Г. Проста реалізація методу підрахунку фотонів для дослідження спектрів поверхневобар'єрних наногетероструктур	249
Коваль І.П., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Початкові стадії взаємодії молекулярного кисню з поверхнею Si(001), вкритою субмоношаром хрому	255
Короновський В.Є. Магнітоелектричний ефект в структурах, які містять феримагнітну та п'єзоелектричну компоненти	259
Мельник П.В., Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) при адсорбції Sb на аморфізовану поверхню α -Ge(111) та відпалі системи до упорядкування	261
Можировський М., Олійник В. Особливості розрахунку характеристик шаруватих діелектричних структур у хвилеводі	267
Скрипка С.Л., Данилов В.В., Осіюк Р.В., Нечипорук О.Ю. Планарний TE ближньопольовий зонд	271
Ткаченко А.В., Ананьїна О.Ю., Яновський О.С. Теоретичне дослідження корозійної дії атомарного водню на моногідридній поверхні Ge(100)-(2×1)	275

СУЧАСНА ФІЗИКА

Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г., Мироненко О.К. Чутливість теплофізичних властивостей рідин до потенціалу сил відштовхування	283
Альохін О.Д., Абдікарімов Б.Ж., Рудніков Є.Г., Наконечний Є.П. Температурні залежності теплоємності неоднорідних рідин у гравітаційному полі поблизу критичної точки	287
Барабаш Ю.М., Заболотний М.А., Куліш М.П., Галяс О.В., Дмитренко О.П., Комаревська Т.В., Мартинчук Е.Л. Повільні фотоіндуковані зміни об'єму комплексів бактеріальних реакційних центрів	290
Безшийко О.А., Голінка-Безшийко Л.О., Каденко І.М., Кулаков І.С., Водін О.М., Довбня А.Н., Кушнір В.А., Мітроченко В.В., Олійник С.М., Туллер Г.Е. Ізотермічні відношення продуктів реакції	296

Біляєв С.В., Велешук В.П., Ляшенко О.В., Гнатюк В.А. Вплив рівня фонового забруднення на електричні неоднорідності в розплавних монокристалах CdTe та $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$	301
Булавін Л.А., Маломуж М.М. Властивості квадрупольної фази двовимірного кулонівського газу	306
Гічан О.І., Гречко Л.Г. Змішані режими моделі ФітцХ'ю – Нагумо: взаємодія та конкуренція біфуркацій Хопфа та Тюрінга	311
Гречко Л.Г., Грищук О.Ю., Клименко В.Є., Лерман Л.Б. Розрахунок енергії взаємодії малих частинок в розчинах електролітів	316
Держипольський А.Г., Поперенко Л.А., Фазовий дифузор як стабілізатор розподілу інтенсивності, відновлюваного з Фур'є-голлорами	322
Захаренко М.І., Носенко А.В., Семенко М.П., Вплив температурно-часових режимів обробки розплаву на транспортні властивості швидкозагартованого сплаву $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$	327
Кизима О.А., Булавін Л.А., Авдєєв М.В., Снегір С.В., Аксьонов В.Л. Ефект додавання води в систему C_{60}/N -метил-2-пірролідон	331
Кодомієць О.В., Мельник О.Б. Використання моделей випадкового щільного пакування твердих сфер для прогнозування термічної стабільності та склюєтворюючої здатності аморфних сплавів	334
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Деформація аморфних сплавів і нанопаруватих композицій шліфуванням	338
Корнієнко М.Є. Зв'язок температурного максимуму швидкості звуку в воді з колективними коливальними модами	343
Кравець О.Л., Лисенко О.Б., Борисова Г.В., Рево С.Л. Умови формування та структура метастабільної модифікації неодиму	353
Онанко А.П. Вказівна поверхня непружно-пружного тіла сплаву $\text{Ti}_{0.5}\text{Al}_{0.5}$	359
Петренко В.І., Булавін Л.А., Авдєєв М.В., Аксьонов В.Л., Векаш Л., Рошта Л. Аналіз структури магнітних рідинних систем методом нейтронного розсіяння	362
Пророк В.В. Механізми надходження калію та цезію до рослин	365
Семко Л.С., Кручек О.І., Горбик П.П., Рево С.Л., Іваненко К.О., Оранська О.І. Одержання, структура та магнітні властивості порошків нанокристалічного нікелю та нанокомпозиційних матеріалів нікель/декстран	369
Усеєнко К.В., Черкашина Н.О. Електромагнітне поле пари когерентних електронів	375

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Ганна В.Верьовкіна, к.ф.-м.н., доцент,
Володимир Н.Нагорний, к.ф.-м.н., доцент

Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів

Досліджуються інтерполяційні зображення певного класу випадкових полів з рівномірною сіткою вузлів інтерполяції.

E-mail: avv@mail.univ.kiev.ua

Нехай $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ – сепарабельне випадкове поле з $M\xi(\vec{t}) = 0$, яке має зображення вигляду

$$\xi(\vec{t}) = \int_{\Lambda^2} \prod_{i=1}^2 f_i(t_i, \lambda_i) Z(d\vec{\lambda}), \quad (1)$$

де Λ – деяка множина параметрів, $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, $Z(d\vec{\lambda})$ – випадкова функція множин на $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$ така, що

$$MZ(d\vec{\lambda}) = 0, \quad (2)$$

$$MZ(A_1, A_2) \cdot \overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2),$$

де F – комплексна функція множин, адитивна за всіма аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\vec{\lambda}, d\vec{\mu})| < +\infty \quad (3)$$

Нехай функції $f_i(t_i, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$ такі, що кожен з них можна довизначити у комплексній площині відносно t_i до цілої функції експоненціального типу з показником $c_i(\lambda_i)$ і такої, що

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} c_i(\lambda_i) = \sigma_i < +\infty, \quad (4)$$

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sup_{t_i \in \mathbb{R}} |f_i(t_i, \lambda_i)| = L_{f_i} < \infty \quad (5)$$

Властивості випадкових полів вказаного вигляду досліджені Ядренко М.Й. у роботі [1]. Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ – сепарабельне випадкове поле вигляду (1), що задовольняє умо-

G.V.Verovkina, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor,
V.N.Nagorniy, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor

The interpolation representation one kinds of random fields

Paper deals with some interpolation representations of random fields with let pass knots interpolations.

вам (2) – (5). Тоді з ймовірністю одиниця має місце зображення

$$\xi(\vec{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) \omega_{k_1, k_2}(\vec{t}). \quad (6)$$

У формулі (6) $\xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) = \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$ та $\omega_{k_1, k_2}(\vec{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2)$ визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \xi_{k_1, k_2}(\vec{t}) &= \xi_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\ &= \xi(t_{k_1}, t_{k_2}) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_i}{4} \right)^3 (t_i - t_{k_i})^2 \right) - \\ &\quad - \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2}) \frac{2 \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 \right) - \\ &\quad - \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2}) \frac{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2}{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}} \times \\ &\quad \times 2 \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 + \\ &\quad + \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2}) \prod_{i=1}^2 \frac{2 \left(\frac{\alpha_i}{4} \right)^3 (t_i - t_{k_i})^2}{t_i - t_{k_i} - \frac{2\pi}{\alpha_i}} + \\ &\quad + \frac{\partial \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1} \frac{\alpha_1}{2} (t_1 - t_{k_1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_2} \frac{\alpha_2}{2} (t_2 - t_{k_2}) \times \\
 & \times \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2 \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2} \frac{\alpha_1}{4} (t_1 - t_{k_1})^2 \times \\
 & \times \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_2^2} \frac{\alpha_2}{4} (t_2 - t_{k_2})^2 = \\
 & \times \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{14}{3} \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2 \right) - \\
 & - \frac{\partial \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1} \frac{\alpha_1}{2} (t_1 - t_{k_1}) \times \\
 & \times \frac{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} \times \\
 & \times 2 \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 - \\
 & - \frac{\partial \xi(t_{k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, t_{k_2})}{\partial t_2} \frac{\alpha_2}{2} (t_2 - t_{k_2}) \times \\
 & \times \frac{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} 2 \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2 - \\
 & - \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2} + \frac{2\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1^2} \frac{\alpha_1}{4} (t_1 - t_{k_1})^2 \times \\
 & \times \frac{t_2 - t_{k_2} - \frac{2\pi}{\alpha_2}}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} \times \\
 & \times 2 \left(\frac{\alpha_2}{4} \right)^3 (t_2 - t_{k_2})^2 - \\
 & - \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_2^2} \frac{\alpha_2}{4} (t_2 - t_{k_2})^2 \times \\
 & \times \frac{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}}{t_1 - t_{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1}} 2 \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^3 (t_1 - t_{k_1})^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \right) (t_1 - t_{k_1}) (t_2 - t_{k_2}) + \\
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1 \partial t_2^2} \frac{\alpha_1}{2} (t_1 - t_{k_1}) \frac{\alpha_2}{4} (t_2 - t_{k_2})^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2 \partial t_2} \frac{\alpha_2}{2} (t_2 - t_{k_2}) \frac{\alpha_1}{4} (t_1 - t_{k_1})^2 + \\
 & + \frac{\partial^4 \xi(t_{k_1}, t_{k_2})}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{16} \right) (t_1 - t_{k_1})^2 (t_2 - t_{k_2})^2, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1, k_2}(t_1, t_2) = \\
 = \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\sin \frac{\alpha_i}{4} (t_i - t_{k_i})}{\frac{\alpha_i}{4} (t_i - t_{k_i})} \right)^3 \frac{\sin \frac{\alpha_i}{4} \left(t_i - t_{k_i} - \frac{2\pi}{\alpha_i} \right)}{\frac{\alpha_i}{2}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

У формулах (7), (8) $\bar{t}_{k_1, k_2} = (t_{k_1}, t_{k_2})$ – вузли інтерполяції на площині вигляду

$$(t_{k_1}, t_{k_2}) = \left(k_1 \frac{4\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right), k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

де α_1, α_2 – довільні дійсні числа такі, що $\alpha_1 > \sigma_1, \alpha_2 > \sigma_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо результат з теорії цілих функцій.

Нехай $f_1(t_1, \lambda_1)$ та $f_2(t_2, \lambda_2)$ задовольняють умовам (4), (5). Тоді

$$\begin{aligned}
 f(\bar{t}, \bar{\lambda}) = \prod_{i=1}^2 f(t_i, \lambda_i) = \\
 = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}), \quad (10)
 \end{aligned}$$

де функція $f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda})$ визначається аналогічно (7). Використовуючи лему 2 роботи [2], отримаємо оцінку залишку інтерполяційного ряду (10), а саме

$$\begin{aligned}
 |R_n(\bar{t})| = \\
 = \sup_{\bar{\lambda} \in \Lambda^2} \left| f(\bar{t}, \bar{\lambda}) - \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right| \leq \\
 \leq G(\bar{t}) \frac{1}{n}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

де $G(\bar{t})$ – функція обмежена в довільній обмеженій області комплексної площини, а функція $f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda})$ визначається подібно до (7).

Розглянемо випадкове поле

$$\xi_n(\bar{t}) = \sum_{k_1=-m}^m \sum_{k_2=-m}^m \xi_{k_1, k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}). \quad (12)$$

Згідно із зображенням (1) випадкове поле (12) можна записати у вигляді

$$\xi_n(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \left(\sum_{k_1=-m}^m \sum_{k_2=-m}^m f_{k_1, k_2}(\bar{t}, \bar{\lambda}) \omega_{k_1, k_2}(\bar{t}) \right) Z(d\bar{\lambda}) \quad (13)$$

Використовуючи зображення (1) та (13) отримаємо

$$M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2 \leq R_n^2(\bar{t}) \int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} |F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu})| \quad (14)$$

З нерівності (14), враховуючи умову (3) та оцінку (11), маємо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до випадкового поля $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^2$ в середньому квадратичному. Використовуючи сепарабельність поля $\xi(\bar{t})$ та збіжність ряду

$M |\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})|^2$, одержимо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до випадкового поля $\xi(\bar{t})$ з ймовірністю одиниця рівномірно відносно t в кожній обмеженій області зміни t .

Список використаних джерел

1. Ядренко М.О. Аналітичні випадкові поля // Вісник Київського університету. Математика та механіка. 1969.-Вип. 1.-С. 56-60.
2. Нагорний В.Н. Інтерполяційне зображення випадкових процесів за рівновіддаленими вузлами інтерполяції // Вісник Київського університету. Математика та механіка. 1990.-Вип. 32.-С. 82-85.

Надійшла до редколегії 10.09.2007 р.

УДК 512.6

Наталія С. Головащук*

Інваріантні підалгебри в деякій зкрученій груповій алгебрі

В роботі будуються деякі перетворення базисів скінченно вимірних зображень комплексної ортогональної алгебри Лі для зведення формул Гельфанда-Цетліна до вільного від квадратів вигляду. Наводяться явні формули канонічної дії груп Вейля, що зберігає одержані формули Гельфанда-Цетліна.

Ключові слова: формули Гельфанда-Цетліна, зкручена групова алгебра, група Вейля.

golova@univ.kiev.ua

1 Introduction

The famous Gelfand-Tsetlin formulae ([1], [2]) gives both basics (GT-basics) of the finite dimensional representations of complex full linear Lie algebra gl_n and orthogonal Lie algebras o_n and the matrices of actions of standard generators of these algebras. Originally these formulas include square roots from some rational functions depending on some parameters (see formulae (9), (10)). Later (see the book [6], chapter 70) in the case of gl_n was found a diagonal change of GT-basis, which allows to exclude the square roots from GT-formulae. An attempt to find analogous change of basis for the Lie algebras o_n was done in the paper [5], where obtained "almost square-roots free" version of GT-formulae for the orthogonal Lie algebra o_n . Another important property of GZ formulae is their invariance with respect to the action of some finite groups, which are the products of Weyl groups. This property allows to interpret the universal enveloping algebra $U(gl_n)$ as a subalgebra in a skew group algebra (so called Galois subalgebra), which made a strong impact both on the structure and representations theory of this algebra ([3]-[5]).

In this paper we give some variant of base change, which allows to transform GT-formulae in square-roots free form. We propose two variants of such change, one of which is very close to the form, obtained in [5]. Besides in both cases we give the explicit formulae of action of Weyl group, which kept obtained formulae ([3], [4], [5], [6]).

Nataliya S. Golovashchuk*

Invariants Subalgebras in some Skew Group Algebra

We construct some base changes to transform Gelfand-Tsetlin formulae for finite dimensional representations of complex orthogonal Lie algebra in a square-roots free form. We give explicit formulas of the canonical action of Weyl groups, which kept the obtained Gelfand-Tsetlin formulae.

Key words: Gelfand-Tsetlin formulae, skew group algebra, Weyl group.

We should make a remark about the proofs. They are quite analogous to the proof used in [5], [6]. We note that the technique of the changes of the basis in finite dimensional representations can be reinterpreted in terms of an automorphism of some extension $Sh_\infty^{1/2}$ of the algebra Sh_∞ , introduced below. Though the existence this automorphism is not proved yet, we use it in our the notations as it exists. It gives a technical advantages and one could rewrite the calculation in the proofs in [6], [5] in the terms of such automorphism, so without loss of correctness we use corresponding notations.

2 The skew group algebra Sh_∞

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0, $\Lambda = \mathbb{K}(\lambda_{ij})$ denotes the ring of rational functions over $\mathbb{K}$ on the double indexed family of variables λ_{ij} with $i \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, \dots, [\frac{i+1}{2}]$. Denote by $\Delta = \langle \delta_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}^+, j = 1, \dots, [\frac{i+1}{2}] \rangle$ the free abelian group, generated by δ_{ij} . The shift algebra $Sh_\infty = \Lambda * \Delta$ as a left Λ -module has a basis Δ , and a multiplication for all indexes $i \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq j \leq [\frac{i+1}{2}]$, and $i' \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq j' \leq [\frac{i'+1}{2}]$, is given by:

$$\lambda_{ij} \delta_{i'j'}^{\pm 1} = \delta_{i'j'}^{\pm 1} \lambda_{ij} \text{ if } \{i, j\} \neq \{i', j'\}; \quad (1)$$

$$\lambda_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ij} (\lambda_{ij} - 1); \quad (2)$$

$$\lambda_{ij} \delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}^{-1} (\lambda_{ij} + 1); \quad (3)$$

$$\delta_{ij}^{\pm 1} \delta_{i'j'}^{\pm 1} = \delta_{i'j'}^{\pm 1} \delta_{ij}^{\pm 1} \text{ if } \{i, j\} \neq \{i', j'\}. \quad (4)$$

For $i \in \mathbb{Z}^+$, denote by Sh_i the shift subalgebra of Sh_∞ , generated by $\delta_{ij}, \lambda_{ij}, j = 1, \dots, [\frac{i+1}{2}]$.

3 The Weyl group action

For $p \in \mathbb{Z}^+$ and $1 \leq j \leq p$ denote by $\varepsilon_{2p-1j}, \varepsilon_{2pj} : Sh_\infty \rightarrow Sh_\infty$ the involutions given by:

$$\varepsilon_{2p-1j} : \begin{cases} \delta_{2p-1j}^{\pm 1} \mapsto -\delta_{2p-1j}^{\mp 1} \\ \lambda_{2p-1j} \mapsto -\lambda_{2p-1j} \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{2pj} : \begin{cases} \delta_{2pj}^{\pm 1} \mapsto -\delta_{2pj}^{\mp 1} \\ \lambda_{2pj} \mapsto 1 - \lambda_{2pj} \end{cases} \quad (6)$$

and all another mappings are identities. Denote by $\mathcal{E}$ group generated by the involutions

$$\{\varepsilon_{2pj} \mid p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq j \leq p\} \cup$$

$$\{\varepsilon_{2p-1jk} \mid p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq j, k \leq p, j \neq k\}$$

where $\varepsilon_{2p-1jk} = \varepsilon_{2p-1j} \varepsilon_{2p-1k}$.

Define the Weyl group as a group $W = \mathcal{E} \rtimes S$, $S = S_1 \times S_2^{(1)} \times S_2^{(2)} \times \dots \times S_p^{(1)} \times S_p^{(2)} \times \dots$ with $S_p^{(1)} \simeq S_p^{(2)} \simeq S_p$ being the symmetric group on p variables. The formulae (5), (6) gives the standard action of $\mathcal{E}$ on Sh_∞ , and the standard action S on the generators from Δ, Λ is given for all $k \in \mathbb{Z}$ by the following way:

$$\sigma : \begin{cases} \delta_{2p-1j}^k \mapsto \delta_{2p-1\sigma(j)}^k \\ \lambda_{2p-1j} \mapsto \lambda_{2p-1\sigma(j)} \end{cases}, \sigma \in S_p^{(1)}; \quad (7)$$

$$\sigma : \begin{cases} \delta_{2pj}^k \mapsto \delta_{2p\sigma(j)}^k \\ \lambda_{2pj} \mapsto \lambda_{2p\sigma(j)} \end{cases}, \sigma \in S_p^{(2)}, \quad (8)$$

the action is identical otherwise.

Let we denote $\bar{\lambda}_{ij} = \varepsilon_{ij}(\lambda_{ij})$ for all $i \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, \dots, [\frac{i+1}{2}]$.

4 Gelfand-Zetlin formulae

Denote by $\Lambda^{1/2}$ the square root closure of Λ , and by $Sh_\infty^{1/2} = \Lambda^{1/2} * \Delta$ the shift algebra. The following fact is good known (see [5]). The classical Gelfand-Zetlin formulae for the standard generators $X_{2p-1}, X_{2p}, p \in \mathbb{Z}^+$ rewritten as

elements of $Sh_\infty^{1/2}$, for the Lie algebra $\mathfrak{o}$ are given, using our notations, as follows:

$$\begin{aligned} X_{2p-1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2p-1j}^{-1} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j})^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j})^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{-1/2} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - (\lambda_{2p-1j} + 1)^2)^{-1/2} - \quad (9) \\ &-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2pj}^{-1} \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \bar{\lambda}_{2p-1j} - 1)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} + \bar{\lambda}_{2p-1j})^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2p-1j} - 1)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2p-1j})^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \bar{\lambda}_{2p-1j}^2)^{-1/2} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - (\bar{\lambda}_{2p-1j} + 1)^2)^{-1/2} \\ X_{2p} &= \sum_{j=1}^p \delta_{2pj}^{-1} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ &\times \lambda_{2pj} (4\lambda_{2pj}^2 - 1)^{1/2} \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr}^2 - \lambda_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} ((\lambda_{2pr} - 1)^2 - \lambda_{2pj}^2)^{-1/2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^p \delta_{2pj} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ & \quad \times \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ & \quad \times \bar{\lambda}_{2pj} (4\bar{\lambda}_{2pj}^2 - 1)^{1/2} \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{1/2} \times \\ & \quad \times ((\lambda_{2pr} - 1)^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Lemma 1 ([2]). The formulae $X_{2p-1}, X_{2p} \in Sh_{\infty}^{1/2}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ are the invariants with respect to the Weyl group action (5) - (8).

5 The skew group automorphism Φ

Lemma 2. The transformation $\Phi : Sh_{\infty} \rightarrow Sh_{\infty}$ such that $\Phi(\lambda_{ij}) = \lambda_{ij}$ and

$$\begin{aligned} & \delta_{2p-1j} \mapsto \delta_{2p-1j} \times \\ & \times \prod_{r=1}^{p-1} \frac{(\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}}{(\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j})^{1/2}} \times \\ & \times \prod_{r=1}^p \frac{(\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j})^{1/2}}{(\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}} \times \\ & \times \prod_{r \neq j} \frac{(\lambda_{2p-1r}^2 - (\lambda_{2p-1j} - 1)^2)^{1/2}}{(\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{2p-1j}^{-1} \mapsto \delta_{2p-1j}^{-1} \times \\ & \times \prod_{r=1}^{p-1} \frac{(\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}}{(\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j})^{1/2}} \times \\ & \times \prod_{r=1}^p \frac{(\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j})^{1/2}}{(\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}} \times \\ & \times \prod_{r \neq j} \frac{(\lambda_{2p-1r}^2 - (\lambda_{2p-1j} + 1)^2)^{1/2}}{(\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{2pj} \mapsto \delta_{2pj} \times \\ & \times \frac{(2\bar{\lambda}_{2pj} + 1)^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{1/2}}{(2\bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)^{1/2}} \times \\ & \times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{2pj}^{-1} \mapsto \delta_{2pj}^{-1} \times \\ & \times \frac{(2\lambda_{2pj} + 1)^{1/2} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)^{1/2}}{(2\lambda_{2pj} - 1)^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)^{1/2}} \times \\ & \times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} + \lambda_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj} - 1)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} + \lambda_{2pj} - 1)^{1/2}} \end{aligned}$$

is an automorphism of $Sh_{\infty}^{1/2}$.

Доведення. To prove this statement, there is enough to check that Φ keeps the relations (1) - (4) from the definition of skew group algebra. The statement is obvious for the cases (1) - (3). $\square$

The equalities $\Phi(\delta_{ij}) \Phi(\delta_{ij}^{-1}) = 1$, $\Phi(\delta_{ij}) \Phi(\delta_{i'j'}^{-1}) = \Phi(\delta_{i'j'}^{-1}) \Phi(\delta_{ij})$, $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ are checking by the immediate calculation.

6 The induced Weyl group action

The induced Weyl group action $W \times Sh_{\infty} \rightarrow Sh_{\infty}$ on the generators $\delta_{ij}, \lambda_{ij}$ is given by the general rule

$$g \circ x = x^g = x^{\Phi g \Phi^{-1}}, \quad x \in Sh_{\infty}, \quad g \in W. \quad (11)$$

Then the action of the involution group $\mathcal{E}$ on λ_{ij} is the same as in the formulae (5), (6).

Lemma 3. 1) The induced and standard Weyl group actions on Sh_{∞} of the symmetrical groups coincide.

2) The induced by Φ and standard Weyl group actions of the elements ε_{2p-1i} coincide on the Sh_{∞} , $p \in \mathbb{Z}^+$.

3) The non identical induced by Φ action of ε_{2pj} , $p \in \mathbb{Z}^+$, is the following:

$$\varepsilon_{2pj} \circ (\delta_{2pj}) = -\delta_{2pj}^{-1} \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)}{\prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \lambda_{2pj}^2)};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2pj}^{\Phi}(\delta_{2pj}^{-1}) &= -\delta_{2pj} \frac{\prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2)}; \\ \varepsilon_{2pj}^{\Phi}(\delta_{2pk}^{\pm 1}) &= \delta_{2pk}^{\pm 1}; \\ \varepsilon_{2pj}^{\Phi}(\delta_{2p-1k}^{\pm 1}) &= -\delta_{2p-1k}^{\pm 1} \frac{(\lambda_{2pj} \mp \lambda_{2p-1k})}{(\lambda_{2pj} \pm \lambda_{2p-1k} - 1)}; \\ \varepsilon_{2pj}^{\Phi}(\delta_{2p+1k}^{\pm 1}) &= -\delta_{2p+1k}^{\pm 1} \frac{(\lambda_{2pj} \pm \lambda_{2p+1k} - 1)}{(\lambda_{2pj} \mp \lambda_{2p+1k})};\end{aligned}$$

This formulae are obtained by the immediate calculation by the formula (11).

Applying Φ to the formulae from the lemma 1 we obtain

Theorem 1. The expressions $Y_{2p-1} = \Phi(X_{2p-1})$, $Y_{2p} = \Phi(X_{2p}) \in Sh_{\infty}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ given by the formulae

$$\begin{aligned}Y_{2p-1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2p-1j}^{-1} \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j} - 1) \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j}) \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{1/2} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2p-1j} \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \bar{\lambda}_{2p-1j} - 1) \times \\ &\times \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2p-1j}) \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \bar{\lambda}_{2p-1j}^2)^{-1}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}Y_{2p} &= \sum_{j=1}^p \delta_{2pj}^{-1} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2pj}^2) \lambda_{2pj}^{-1} (2\lambda_{2pj} - 1)^{-1} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{-1} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{-1} - \\ &- \sum_{j=1}^p \delta_{2pj} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r}^2 - \bar{\lambda}_{2pj}^2) \bar{\lambda}_{2pj}^{-1} (2\bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{-1} \times \\ &\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{-1} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{-1}\end{aligned}\quad (13)$$

are the Weyl invariants under the action Φ .

Moreover, $Y_{2p-1} \in Sh_{2p}$ is the Weyl invariant in Sh_{∞} under the standard action.

The Weyl group invariance follows from the invariance of original GT formulae and the formula (11).

7 The skew group automorphism Ψ

Lemma 4. The transformation $\Psi : Sh_{\infty} \rightarrow Sh_{\infty}$ such that $\Psi(\lambda_{ij}) = \lambda_{ij}$ and

$$\begin{aligned}\delta_{2p-1j} &\mapsto \delta_{2p-1j} \times \\ &\times \frac{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j})^{1/2}}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j})^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - (\lambda_{2p-1j} - 1)^2)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{2p-1j}^{-1} &\mapsto \delta_{2p-1j}^{-1} \times \\ &\times \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j})^{1/2}}{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j})^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}}{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j} - 1)^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - (\lambda_{2p-1j} + 1)^2)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{2pj} &\mapsto \delta_{2pj} \frac{(2\bar{\lambda}_{2pj} + 1)^{1/2}}{(2\bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} + \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} - \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2}}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} - \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} + \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2}} \times \\ &\times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} + \bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{1/2}}\end{aligned}$$

$$\delta_{2pj}^{-1} \mapsto \delta_{2pj}^{-1} \frac{(2\lambda_{2pj} + 1)^{1/2}}{(2\lambda_{2pj} - 1)^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} + \lambda_{2pj})^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} - \lambda_{2pj})^{1/2}}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} - \lambda_{2pj})^{1/2} \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} + \lambda_{2pj})^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} + \lambda_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj} - 1)^{1/2}}{\prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{1/2} (\lambda_{2pr} + \lambda_{2pj} - 1)^{1/2}}$$

is an automorphism of Sh_∞ .

The induced Weyl group action $W \times Sh_\infty \rightarrow Sh_\infty$ on the generators δ_{ij} , λ_{ij} is given by the equation (11). Then the action of W on λ_{ij} does not change.

Lemma 5. 1) The induced and standard Weyl group actions on Sh_∞ of the symmetrical groups coincide.

2) The induced by Ψ and standard Weyl group actions of the elements ε_{2pj} coincide on the Sh_∞ , $p \in \mathbb{Z}^+$.

3) The non identical induced by Ψ action of ε_{2p-1j} , $p \in \mathbb{Z}^+$, is the following:

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2p-1j}) = -\delta_{2p-1j}^{-1} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j} - 1) (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j})}{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j} - 1) (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j})};$$

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2p-1j})^{-1} = -\delta_{2p-1j} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j} - 1) (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j})}{\prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j} - 1) (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j})};$$

$$\varepsilon_{2pj} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2pk}^{\pm 1}) = \delta_{2pk}^{\pm 1};$$

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2pk}) = \delta_{2pk} \frac{(\lambda_{2p-1j} + \bar{\lambda}_{2pk})}{(\lambda_{2p-1j} - \bar{\lambda}_{2pk})}$$

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2pk}^{-1}) = \delta_{2pk}^{-1} \frac{(\lambda_{2p-1j} + \lambda_{2pk})}{(\lambda_{2p-1j} - \lambda_{2pk})}$$

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2p-2k}) =$$

$$= \delta_{2p-2k} \frac{(\lambda_{2p-1j} - \lambda_{2p-2k} - 1)}{(\lambda_{2p-1j} + \lambda_{2p-2k} + 1)}$$

$$\varepsilon_{2p-1j} \stackrel{\Psi}{*} (\delta_{2p-2k}^{-1}) =$$

$$= \delta_{2p-2k}^{-1} \frac{(\lambda_{2p-1j} + \lambda_{2p-2k} + 2)}{(\lambda_{2p-1j} - \lambda_{2p-2k} - 2)}$$

Theorem 2. The expressions $Z_{2p-1} = \Psi(X_{2p-1})$, $Z_{2p} = \Psi(X_{2p}) \in Sh_\infty$, $p \in \mathbb{Z}^+$ given by the formulae

$$Z_{2p-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2p-1j}^{-1} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2pr} - \lambda_{2p-1j} - 1) \times$$

$$\times (\lambda_{2pr} + \lambda_{2p-1j}) \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{-1} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \delta_{2p-1j} \prod_{r=1}^{p-1} (\lambda_{2p-2r} - \lambda_{2p-1j}) \times$$

$$\times (\lambda_{2p-2r} + \lambda_{2p-1j} - 1) \prod_{r \neq j} (\lambda_{2p-1r}^2 - \lambda_{2p-1j}^2)^{-1} \quad (14)$$

$$Z_{2p} = \sum_{j=1}^p \delta_{2pj}^{-1} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} + \lambda_{2pj}) \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} - \lambda_{2pj}) \lambda_{2pj}^{-1} (2\lambda_{2pj} - 1)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{-1} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{-1} -$$

$$- \sum_{j=1}^p \delta_{2pj} \prod_{r=1}^p (\lambda_{2p-1r} - \lambda_{2pj} + 1) \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{p+1} (\lambda_{2p+1r} + \lambda_{2pj} - 1) \bar{\lambda}_{2pj}^{-1} (2\bar{\lambda}_{2pj} - 1)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{r \neq j} (\lambda_{2pr} - \lambda_{2pj})^{-1} (\lambda_{2pr} - \bar{\lambda}_{2pj})^{-1} \quad (15)$$

are the Weyl invariants under the action $\stackrel{\Psi}{*}$.

Moreover, $Z_{2p} \in Sh_{2p}$ is the Weyl invariant in Sh_∞ under the standard action.

Висновки

Побудовано деякі перетворення базису для запису формул Гельфанда-Цетліна для скінченно

вимірних зображень комплексної ортогональної алгебри Лі у вільному від квадратів вигляді. Наведено явні формули канонічної дії групи Вейля, що зберігає одержані формули Гельфанда-Цетліна.

Список використаних джерел

1. Gelfand I. M., Tsetlin M. L. Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices // Dokl. Akad. Nauk SSSR. - 1950. - Vol.71. - P. 825-828. English transl. in: I. M. Gelfand, "Collected papers", Vol II, Springer-Verlag. - 1988. - P. 653-656.
2. Gelfand I. M., Tsetlin M. L. Finite-dimensional representations of groups of orthogonal matrices // Dokl. Akad. Nauk SSSR. - 1950. - Vol.71. - P. 1017-1020. English transl. in: I. M. Gelfand, "Collected papers". Vol II, Berlin: Springer-Verlag 1988. - P. 657-661.
3. Futorny V., Ovsienko S., *Galois orders in skew semigroup rings*, to appear.
4. Futorny V., Ovsienko S., *Galois algebras II: Representation theory*, preprint RT-MAT 2006-14, 28p.
5. Mazorchuk V., *On Gelfand-Zetlin modules over orthogonal Lie algebras*, Algebra Colloq. 8 (2001), no 3, 345-360.
6. Zhelobenko D.P. *Compact Lie groups and their representations*, Nauka, Moscow, 1970 (Translations of mathematical monographs, 40, AMS, Providence, Rhode Island, 1973).

Надійшла до редколегії 11.05.2007

УДК 519.21

Світлана Я. Гончарова, к.ф.-м.н.

Стохастична стійкість напівмарковського процесу

Досліджується стохастична стійкість напівмарковського процесу.

Ключові слова: напівмарковський процес, стохастична стійкість.

*E-mail: goncharov@kw.ukrtel.net

Вступ

Провідною метою даної роботи є подальший розвиток теорії напівмарковських випадкових еволюцій.

Об'єктом дослідження роботи є модель імпульсного процесу переносу в напівмарковському випадковому середовищі, що має інтерпретацію напівмарковської випадкової еволюції. Предмет дослідження – стохастична стійкість напівмарковського процесу.

Методами дослідження даної роботи є методи напівмарковських випадкових еволюцій [1].

Проблеми стохастичної стійкості розглядались лише для марковських систем [2], [4].

Основна частина

Нехай (Ω, F, P) імовірнісний простір, на якому розглядатимемо випадкові величини із значеннями у вимірному просторі (X, X) .

Означення 1. Напівмарковським процесом називається процес $x(t)$, що задається співвідношеннями:

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \quad (1)$$

$$\nu(t) = \max \{n: \tau_n \leq t\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0, \quad (2)$$

де τ_n – моменти відновлення,

θ_k – невід'ємні випадкові величини, що задають інтервали між моментами відновлення.

Моменти відновлення τ_n , $n \geq 0$, є марковськими моментами для напівмарковського процесу $x(t)$.

Надалі розглядатимемо регулярний напівмарковський процес, тобто такий, для якого з імовірністю 1 відбувається скінченне число відновлень за скінченний час:

$$P\{\nu(t) < +\infty\} = 1, \quad \forall t \in R_+$$

Означення 2. Напівмарковським процесом

S. Ya. Goncharova, Cand.Sci. (Phys.-Math.)

Stochastic stability of semi-Markov process

The stochastic stability of semi-Markov process is investigated.

Key Words: semi-Markov process, stochastic stability.

ризик називається розв'язок рівняння:

$$z(t) = z + \int_T^t \nu(z(s), x(s)) ds - \sum_{k=\nu(T)}^{\nu(t)} a(x_k), \quad (3)$$

де $t \geq T > 0$,

$0 < z < \infty$ – числовий параметр;

$\nu(z, x)$ – функція неперервна, невід'ємна, неперервно диференційовна по z , обмежена по x при кожному $z \in R$ і така, що

$\nu(0, x) = 0$, $\forall x \in X$, та $0 \leq \nu'_z(z, x) \leq K$, $K > 0$;

$a(x)$ – невід'ємна, вимірна, обмежена функція на X .

Означення 3. Нульовий стан напівмарковського процесу ризику $z(t)$, визначеного в (3), є стійким з імовірністю 1, якщо

$$\forall x(T) = x \quad \forall \rho > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon, x) > 0 : 0 < z < \delta :$$

$$P_{z, x, T} \left\{ \sup_{T \leq t < +\infty} |z(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \rho,$$

де $P_{z, x, T}$ – умовна ймовірність при початковому стані (z, x, T) .

Теорема. [3]. Нехай для деякого фіксованого $\mu > 0$ виконуються умови:

A1) функція $V(z, x, t)$ є невід'ємною та неперервною на відкритій множині

$$A_\mu = \{(z, x, t) : V(z, x, t) < \mu\}$$

для деякого фіксованого $\mu > 0$;

A2) оператор L_μ є інфінітезимальним оператором зупиненого процесу

$$(z(t \wedge \tau_\mu), x(t \wedge \tau_\mu), \gamma(t \wedge \tau_\mu)),$$

де $\gamma(t) = t - \tau_{\nu(t)}$, $t \geq 0 > 0$;

$$\tau_\mu = \inf\{t : (z(t), x(t), \gamma(t)) \in A_\mu\};$$

A3) $V(z, x, t) \in \text{Dom}(L_\mu)$ та $\frac{d}{dz} V$ є неперервною та обмеженою по z функцією в множині

A_μ та

$$L_\mu V(z, x, t) \leq 0 \quad \text{в } A_\mu, \quad (4)$$

де оператор L_μ визначений в умові A2),

множина A_μ – в A1),

та $V(0, x, t) = 0, \quad \forall x \in X, \quad t \geq T > 0;$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 : z > \varepsilon_1 : V(z, x, t) \geq \varepsilon_2,$$

$$(z, x, t) \in A_\mu.$$

Тоді нульове положення напівмарковського процесу ризику $z(t)$, визначеного в рівнянні (3), є стійким з імовірністю 1.

Нехай $z(t)$ є розв'язком рівняння (3), що залежить від параметра $z, \quad 0 < z < \infty$.

Обмежимося випадком, коли в рівнянні (3) функція

$$v(z, x) = v(x) \cdot z,$$

де $0 < v(x) < \infty, \quad \forall x \in X$, неперервна функція.

В якості допоміжної стохастичної функції Ляпунова візьмемо функцію

$$V(z, x, t) = e^{-t} \cdot b(x) \cdot z^2,$$

де $b(x) \geq b > 0$, обмежена, неперервна на X функція.

Покажемо, що функція $V(z, x, t)$ задовольняє умовам теореми на деякій відкритій множині A_μ та побудуємо цю множину:

1) $V(z, x, t) = e^{-t} b(x) z^2$ – невід'ємна та неперервна на відкритій множині

$$A_\mu = \{(z, x, t) : V(z, x, t) = e^{-t} b(x) z^2 < \mu\}.$$

Звідси випливає, що для деякого фіксованого $\mu > 0$:

$$0 < z < \sqrt{\frac{\mu e^t}{b(x)}}.$$

2) Оператор L_μ є інфінітезимальним оператором трьохкомпонентного зупиненого процесу $(z(t \wedge \tau_\mu), x(t \wedge \tau_\mu), \gamma(t \wedge \tau_\mu))$ і

$$L_\mu f(z, x, t) = v(x) z \frac{df}{dz} + \int_X P(x, dy) f(z -$$

$$-a(y), y, t) - f(z, x, t) + \frac{df}{dt} +$$

$$+ \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} \left[\int_X P(x, dy) f(y, T) - f(x, t) \right],$$

де $P(x, A) = P\{x_{n+1} \in A / x_n = x\}$,

$$\bar{G}_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t / x_n = x\}, \quad x_n \in X, A \in X, \quad t \geq 0;$$

$$Pa(x) = \int_X P(x, dy) a(y);$$

$$g_x(t) = \frac{dG_x(t)}{dt},$$

$$\bar{G}_x(t) = 1 - G_x(t),$$

$$\forall f \in C^1(R_+ \times X \times R_+), \quad \forall t \geq T > 0.$$

$$3) V(z, x, t) \in \text{Dom}(L_\mu)$$

та

$$\frac{dV(z, x, t)}{dz} = 2ze^{-t}b(x)$$

є неперервною та обмеженою по z функцією на множині A_μ .

4) Умова (4) для функції $V(z, x, t)$ набуде вигляду

$$L_\mu V(z, x, t) = e^{-t} \left\{ 2z^2 v(x) b(x) + Pb(x)(z - a(x))^2 - \right. \\ \left. - 2b(x)z^2 + \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} [Pe^{-T+t}b(x)z^2 - b(x)z^2] \right\} \leq 0$$

та рівносильна нерівності

$$\left[2b(x)(v(x) - 1) + Pb(x) + \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} e^{-T+t} Pb(x) - \right. \\ \left. - \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} b(x) \right] z^2 - 2zPb(x)a(x) + Pb(x)a^2(x) \leq 0.$$

Знайдемо умови, при яких виконується остання нерівність:

а) функція $g_x(t)$, що характеризує інтенсивність моментів відновлення, повинна бути такою,

$$\text{що } g_x(t) < \infty \quad \text{і} \quad \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} < \frac{e^{-t}}{1+t},$$

тоді

$$\forall d_1 > 0 \quad \exists t = t_0 \geq T > 0 : \forall t > t_0$$

$$\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} e^{-T+t} < d_1;$$

$$\text{б) так як } \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)} > 0, \text{ то}$$

$$[2b(x)(v(x) - 1) + (1 + d_1)Pb(x)]z^2 - \\ - 2zPb(x)a(x) + Pb(x)a^2(x) \leq 0; \quad (5)$$

$$\text{в) } 0 < 2b(x)(v(x) - 1) + (1 + d_1)Pb(x) < d_2$$

і константу d_2 вибираємо так, щоб дискримінант квадратного рівняння, відповідного нерівності (5), був додатним для всіх $(z, x, t) \in A_\mu$ (це завжди можна зробити підбором вихідних функцій $v(x)$ та $b(x)$);

г) очевидно, що нерівність (5) за виконання умови в) справедлива для

$$z_1 \leq z \leq z_2,$$

$$\text{де } z_{1,2} = \frac{Pb(x)a(x) \mp \sqrt{D(x)}}{2b(x)[\nu(x)-1] + (1+d_1)Pb(x)},$$

$$D(x) = [Pb(x)a(x)]^2 - \{2b(x)[\nu(x)-1] + (1+d_1)Pb(x)\} \cdot Pb(x)a^2(x).$$

Так як $(z, x, t) \in A_\mu$, то для початкового параметра z повинна виконуватися нерівність

$$z_1 \leq z \leq z_2 < \sqrt{\frac{\mu e^t}{b(x)}}.$$

В останній нерівності параметр $\mu > 0$ фіксований, але довільний.

Зауважимо, що при умові в) корені z_1, z_2 квадратного рівняння, відповідного нерівності (5), завжди додатні.

Функція $V(z, x, t)$ задовольняє умовам:

$$5) V(0, x, t) = e^{-t} b(x) \cdot 0 = 0, \quad \forall x \in X, \quad t \geq T > 0.$$

$$6) \forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ таке, що якщо } z > \varepsilon_1, \text{ то}$$

$$V(z, x, t) = e^{-t} b(x) \cdot z^2 \geq e^{-t} b(x) \cdot \varepsilon_1^2 \geq e^{-t} b \varepsilon_1^2 > 0, \\ (z, x, t) \in A_\mu.$$

$$\text{Вибираємо } \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 e^t}{b}}.$$

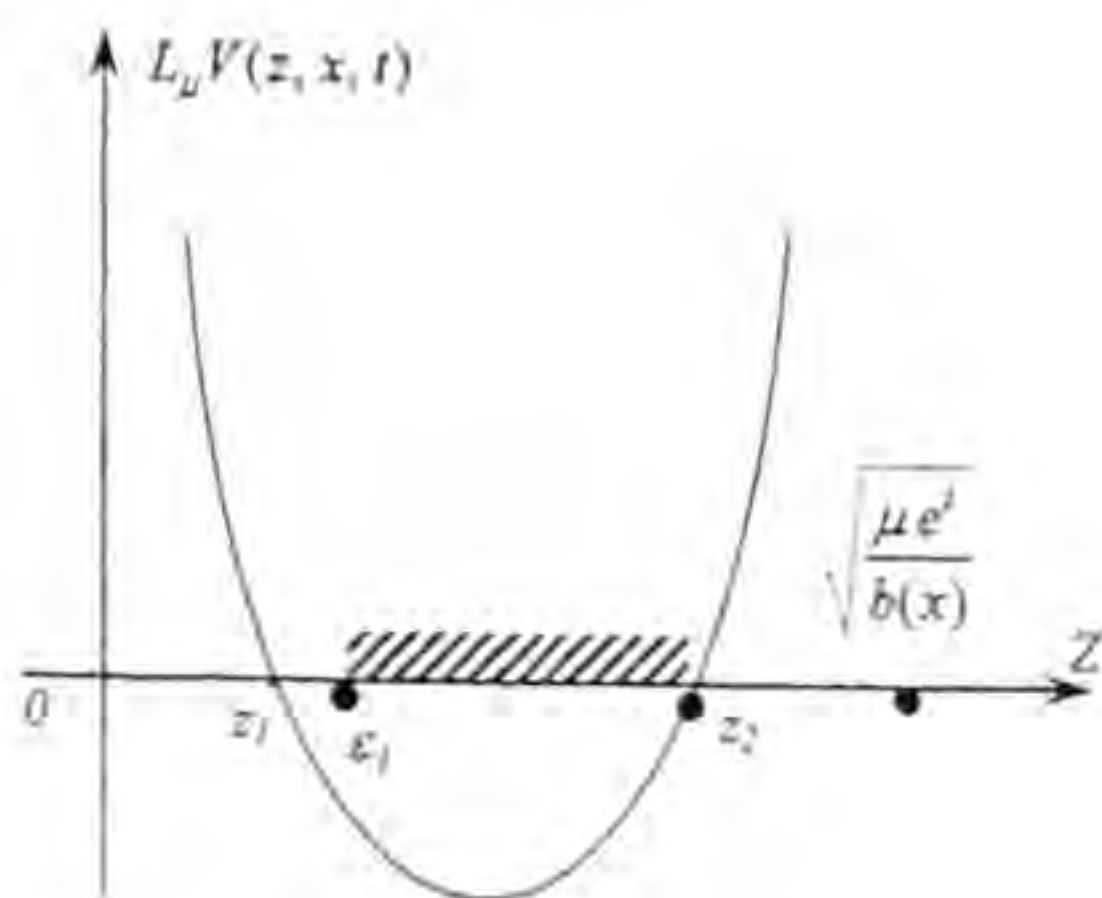


Рис. 1

Отже, якщо вибрати в якості допоміжної стохастичної функції Ляпунова функцію

$$V(z, x, t) = e^{-t} \cdot b(x) \cdot z^2,$$

то завжди існує множина A_μ , що визначена в A_1 , де виконуються умови теореми, і нульове положення напівмарковського процесу ризику $z(t)$, визначеного в рівнянні (3), є стійким з імовірністю 1. При цьому початкове значення параметра z треба вибрати з проміжку $(\max(\varepsilon_1, z_1); z_2]$ (див. рис. 1).

Зауваження. Функція $b(x)$ вважається відомою.

Елементи фазового вимірного простору (X, X) можуть бути довільної природи. Зокрема, якщо фазовий простір є евклідовим, то в якості функції $b(x)$ можна вибрати, наприклад, функції

$$b(x) = \arctg x + \pi;$$

$$b(x) = \frac{1}{1 + e^{-x^2}}.$$

Висновок

Отримані результати доповнюють та підтверджують дослідження стохастичної стійкості напівмарковських процесів ризику, які були проведені в роботі [4].

Список використаних джерел

1. Korolyuk V.S., Swishchuk A.V. Evolution of systems in random media // CRC Press. USA. – 1995. – 356 p.
2. Королюк В.С. Устойчивость автономных динамических систем с быстрыми марковскими переключениями // УМЖ – 1991. – т. 33, № 12. – С. 1176–1181.
3. Кушнер Г. Стохастическая устойчивость и управление. – Москва, Мир. – 1969. – 200 с.
4. Свіщук А.В., Гончарова С.Я. Стійкість напівмарковських процесів ризику // Доп. НАН України – 1999. – № 7. – С. 30–34.
5. Хасьминский Р. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Надійшла до редколегії 10.03.2006

УДК 512.4

Омелян Л. Горбачук, к.ф.-м.н., доцент,
Юрій П. Матурін, к.ф.-м.н., доцент

Про деякі системи підмодулів модуля

Вивчаються деякі системи підмодулів модуля, визначені спадковим преадикалом.

Ключові слова: кільце, модуль, преадикал.

E-mail: yum7676@mail.ru

Throughout the whole text, all rings are considered to be associative with unit $1 \neq 0$ and all modules are left unitary.

Let R be a ring. The category of left R -modules will be denoted by $R\text{-Mod}$.

We shall write $N \leq M$ if N is a submodule of M .

Let $\text{End}(M)$ be the set of all endomorphisms of an R -module M .

Let M be an R -module.

A submodule N of M is said to be fully invariant in case $\forall f \in \text{End}(M) : f(N) \leq N$.

Let $N \leq M$ and $f \in \text{End}(M)$.

Put $(N : f)_M = \{x \in M \mid f(x) \in N\}$.

It is clear that $(N : f)_M \leq M$.

Put $\text{End}(M)_N = \{f \in \text{End}(M) \mid f(M) \leq N\}$.

Let $F(M)$ be some system of submodules of a left R -module M .

We shall consider the following conditions:

C1. $(L \in F(M), L \leq N \leq M) \Rightarrow N \in F(M)$;

C2. $(L \in F(M), f \in \text{End}(M)) \Rightarrow (L : f)_M \in F(M)$;

C3. $(N, L \in F(M)) \Rightarrow N \cap L \in F(M)$;

C4. $(N \in F(M), N \in \text{Gen}(M), L \leq N \leq M \wedge$

$\wedge \forall g \in \text{End}(M)_N : (L : g)_M \in F(M)) \Rightarrow$

$\Rightarrow L \in F(M)$;

C5. $(N, K \in F(M), N \in \text{Gen}(M)) \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{(K \subseteq M)}(N) \in F(M)$.

Proposition 1. If $F(M)$ satisfies C1, C2, C4 then it satisfies C5.

Proof. Let $N, K \in F(M), N \in \text{Gen}(M)$. Then

$$t_{(K \subseteq M)}(N) = \sum_{g \in \text{End}(M)_N} g(K)$$

(see [p.40, 3]).

It is easy to see that

Omelian L. Horbachuk, PhD, Associate Professor
Yuriy P. Maturin, PhD, Associate Professor

On some systems of submodules of a module

Some systems of submodules of a module defined by a hereditary preradical are studied.

Key Words: ring, module, preradical.

$$\forall h \in \text{End}(M)_N : K \leq (t_{(K \subseteq M)}(N) : h)_M.$$

By C1, it follows from this that

$$\forall h \in \text{End}(M)_N : (t_{(K \subseteq M)}(N) : h) \in F(M).$$

It is obvious that $t_{(K \subseteq M)}(N) \leq N$. Therefore

$$N \in F(M), N \in \text{Gen}(M), t_{(K \subseteq M)}(N) \leq N \leq M \wedge$$

$$\wedge \forall h \in \text{End}(M)_N : (t_{(K \subseteq M)}(N) : h)_M \in F(M).$$

Taking into consideration C4, it follows from this that $t_{(K \subseteq M)}(N) \in F(M)$. $\square$

Put

$$\ker F(M) := \bigcap_{L \in F(M)} L.$$

Proposition 2. If $F(M)$ satisfies C2 then $\ker F(M)$ is a fully invariant submodule of M .

Proof.

Let $f \in \text{End}(M), m \in \ker F(M)$. By C2,

$$\bigcap_{L \in F(M)} L \subseteq \bigcap_{L \in F(M)} (L : f)_M.$$

Then $m \in \bigcap_{L \in F(M)} (L : f)_M$. Hence $f(m) \in \bigcap_{L \in F(M)} L$.

Thus $f(\ker F(M)) \subseteq \ker F(M)$. $\square$

Let M be a left R -module. Let r be a preradical in $R\text{-Mod}$.

Put

$$F_r(M) = \{L \leq M \mid M/L \in T(r)\},$$

where $T(r) = \{M \in R\text{-Mod} \mid r(M) = M\}$ (see [1],[3]).

Lemma 3. Let $N \leq M$ and $f \in \text{End}(M)$. Then $f(M) \cap N = f((N : f)_M)$ and $f(M)/(f(M) \cap N) \cong M/(N : f)_M$.

Proof.

It is obvious that $f(M) \cap N = f((N : f)_M)$.

Let

$$g : \begin{cases} M/(N : f)_M \rightarrow f(M)/(f(M) \cap N), \\ m + (N : f)_M \mapsto f(m) + f(M) \cap N. \end{cases}$$

Since

$$m_1 + (N : f)_M = m_2 + (N : f)_M \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m_1 - m_2 \in (N : f)_M \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(m_1 - m_2) \in f(M) \cap N \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(m_1) + f(M) \cap N = f(m_2) + f(M) \cap N, \end{aligned}$$

the correspondence g is a mapping.

It is easy to see that g is an epimorphism.

Let $f(m_1) + f(M) \cap N = f(m_2) + f(M) \cap N$.

Then

$$m_1 - m_2 \in (N : f)_M.$$

Hence $m_1 + (N : f)_M = m_2 + (N : f)_M$.

Therefore g is a monomorphism.

Thus g is an isomorphism. $\square$

Theorem 4. Let τ be a hereditary preradical in $R - \text{Mod}$ and M be a left R -module. Then the system $F_\tau(M)$ satisfies C1, C2, C3.

Proof.

C1. Let $L \in F_\tau(M), L \leq N \leq M$.

Since $M/N \cong (M/L)/(N/L)$ [2],

$$N \in F_\tau(M)$$

because the class $T(\tau)$ is closed under epimorphic images [3] (see also [p.36, 1]).

C2. Let $L \in F_\tau(M), f \in \text{End}(M)$.

Then $M/L \in T(\tau)$. Since the class $T(\tau)$ is closed under submodules, $(f(M) + L)/L \in T(\tau)$.

But

$$(f(M) + L)/L \cong f(M)/(f(M) \cap L) \quad [2].$$

Hence $f(M)/(f(M) \cap L) \in T(\tau)$.

Since $f(M)/(f(M) \cap L) \cong M/(L : f)_M$ (by Lemma 3), $(L : f)_M \in F_\tau(M)$.

C3. Let $N, L \in F_\tau(M)$. Then $M/N, M/L \in T(\tau)$. Hence $M/N \oplus M/L \in T(\tau)$ because the class $T(\tau)$ is closed under direct sums [1], [3].

Consider the homomorphism

$$w : \begin{cases} M \rightarrow M/N \oplus M/L, \\ m \mapsto (m + N, m + L). \end{cases}$$

Then $\text{im}(w) \in T(\tau)$ because $T(\tau)$ is closed under submodules [1], [3].

It is clear that $\ker(w) = N \cap L$. But $\text{im}(w) \cong M/\ker(w)$ [2]. Therefore $N \cap L \in F_\tau(M)$ (see also [p.36, 1]). $\square$

Theorem 5. Let τ be a hereditary radical in $R - \text{Mod}$ and M be a left R -module. Then the system $F_\tau(M)$ satisfies C1, C2, C3, C4.

Proof.

Taking into account Theorem 4, we shall prove only C4.

Let

$$\begin{aligned} &N \in F_\tau(M), N \in \text{Gen}(M), L \leq N \leq M \wedge \\ &\wedge \forall g \in \text{End}(M)_N : (L : g)_M \in F_\tau(M). \end{aligned}$$

By Lemma 3,

$$\forall g \in \text{End}(M)_N : (g(M) + L)/L \cong M/(L : g)_M.$$

It follows from

$$\forall g \in \text{End}(M)_N : (L : g)_M \in F_\tau(M)$$

that

$$\forall g \in \text{End}(M)_N : M/(L : g)_M \in T(\tau).$$

Therefore

$$\forall g \in \text{End}(M)_N : (g(M) + L)/L \in T(\tau).$$

Since the class $T(\tau)$ is closed under direct sums and factor modules [1], [3],

$$\sum_{g \in \text{End}(M)_N} (g(M) + L)/L \in T(\tau).$$

Since $N \in \text{Gen}(M)$,

$$\sum_{g \in \text{End}(M)_N} g(M) = N$$

(see [2]).

Hence

$$\begin{aligned} N/L &= (N + L)/L = \\ &= \sum_{g \in \text{End}(M)_N} (g(M) + L)/L \in T(\tau). \end{aligned}$$

Since the class $T(\tau)$ is closed under extensions [1], [3], taking into account that

$$N/L \in T(\tau), (R/L)/(N/L) \cong R/N \in T(\tau),$$

we have that $R/L \in T(\tau)$.

Thus $L \in F_\tau(M)$. $\square$

Corollary 6. Let τ be a hereditary radical in $R - \text{Mod}$ and M be a left R -module. Then the system $F_\tau(M)$ satisfies C5.

Proof. By Theorem 5, Proposition 1. $\square$

Corollary 7. Let τ be a hereditary preradical in $R - \text{Mod}$ and M be a left R -module. Then $\ker F_\tau(M)$ is a fully invariant submodule of M .

Proof. By Theorem 4, Proposition 2. $\square$

References

1. *Kashu, A.I.* Radicals and torsions in modules, Chisinau: Stiintsa, 1983. 154p. (in Russian)
2. *Anderson, F.W., Fuller, K.R.* Rings and categories of modules, Berlin-Heidelberg New York: Springer, 1973. 340p.
3. *Bican, L., Kepka, T., Nemec, P.* Rings, modules, and preradicals. Lect. Notes Appl. Math. 75, New York, 1982.

Надійшла до редколегії 19.10.2007

УДК 512.745

О. Г. Єна*

Про диференціювання кільця
многочленів від двох змінних у простій
характеристиці

Серія: фізико-математичні науки

Описано централізатори елементів і максимальні абелеві підалгебри в алгебрах Лі $P_2(k)$ та $\widetilde{P}_2(k)$ в випадку простої характеристики основного поля k . Досліджується структура підалгебр в алгебрах Лі $sa_2(k)$ та $\widetilde{sa}_2(k)$ в простій характеристиці.

Ключові слова: кільце многочленів, диференціювання, централізатор, максимальна абелева підалгебра.

*E-mail: yena@univ.kiev.ua

Вступ

Диференціювання кільця многочленів від кількох змінних $k[x_1, \dots, x_n]$ над полем k є важливим об'єктом дослідження в сучасній алгебрі і їх вивченню присвячено багато робіт різних авторів (див., наприклад, [3]). На векторному просторі всіх таких диференціювань природним чином вводиться структура алгебри Лі (з операцією комутування) і вивчення цієї алгебри Лі а також її підалгебр є важливою і цікавою задачею, яка тісно пов'язана з багатьма питаннями з різних розділів алгебри. У випадку алгебри Лі $sa_2(k)$, $\text{char}(k) = 0$ всіх диференціювань кільця многочленів $k[x, y]$ з нульовою дивергенцією в роботі [5] було отримано опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр. Цей опис базувався на властивостях алгебри Лі $P_2(k)$, яка отримана із векторного простору $k[x, y]$ введенням операції множення $[f, g] = \det J(f, g)$, $f, g \in k[x, y]$. Аналогічно можна ввести структуру алгебри Лі на полі $k(x, y)$ раціональних функцій від двох змінних. Отриману алгебру Лі будемо позначати через $\widetilde{P}_2(k)$. Метою даної роботи є опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр алгебр Лі $P_2(k)$ і $\widetilde{P}_2(k)$ у випадку простої характеристики поля k .

На противагу нульовій характеристиці, алгебра Лі $sa_2(k)$, $\text{char}(k) > 0$, вже не є гомоморфним образом алгебри Лі $P_2(k)$ і центра-

O. G. Iena*

About derivations of the polynomial ring
in two variables in prime characteristic

Series: Physics & Mathematics Sciences

We give a description of centralizers of elements and of maximal abelian Lie subalgebras in the Lie algebras $P_2(k)$ and $\widetilde{P}_2(k)$ in the case of prime characteristic of the ground field k . We investigate the structure of Lie subalgebras in Lie algebras $sa_2(k)$ and $\widetilde{sa}_2(k)$ in prime characteristic.

Key words: polynomial ring, derivation, centralizer, maximal abelian subalgebra.

лізатори елементів в ній мають складнішу будову. В роботі вказано структуру алгебри Лі $sa_2(k)$, $\text{char}(k) > 0$, а також наведено теореми, які дають опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $sa_2^{\text{pow}}(k)$ диференціювань кільця формальних степеневих рядів $k[[x, y]]$ над полем k характеристики 0.

Позначення в роботі стандартні, через $Z(L)$ позначається центр алгебри Лі L . Для алгебри Лі L через $L^{(i)}$ позначається i -тий член похідного ряду алгебри L , через L^i позначається відповідний член нижнього центрального ряду алгебри L . Для многочлена $f \in k[x, y]$ через $k[f]$ позначається підкільце, породжене f . Аналогічно через $k(\varphi)$ позначається підполе із поля раціональних функцій $k(x, y)$, породжене раціональною функцією φ .

1 Алгебри $P_2(k)$ та $\widetilde{P}_2(k)$

Лема 1. 1) Центр $Z(P_2(k))$ алгебри Лі $P_2(k)$ збігається з $k[x^p, y^p]$.

2) Центр $Z(\widetilde{P}_2(k))$ збігається з $k(x^p, y^p)$.

Доведення. 1) Зрозуміло, що f міститься у центрі $P_2(k)$ тоді і лише тоді якщо $[f, x] = 0$ та $[f, y] = 0$. Оскільки $[f, x] = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $[f, y] = \frac{\partial f}{\partial x}$, то, очевидно, f належить центру алгебри $P_2(k)$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Останнє виконується тоді й лише тоді, коли $f \in k[x^p, y^p]$.

2) Нехай $f_1, f_2 \in k[x, y]$, $f_2 \neq 0$. Легко бачити, що раціональна функція f_1/f_2 міститься у центрі $\widetilde{P}_2(k)$ тоді й лише тоді, коли многочлен $f_2^p(f_1/f_2) = f_1 f_2^{p-1}$ належить $Z(P_2(k)) = k[x^p, y^p]$. Це випливає з рівності $[f_1/f_2, g_1/g_2] = (f_2 g_2)^{-p} [f_1 f_2^{p-1}, g_1 g_2^{p-1}]$. Отже, $Z(\widetilde{P}_2(k)) = k(x^p, y^p)$. $\square$

Лема 2. Нехай $\varphi \in \widetilde{P}_2(k) \setminus k(x^p, y^p)$. Тоді $C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi) = k(x^p, y^p, \varphi)$. Якщо φ многочлен, то тоді $C_{P_2(k)}(\varphi) = k(x^p, y^p, \varphi) \cap k[x, y]$.

Доведення. Легко бачити, що централізатор $C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi)$ є підполем поля $k(x, y)$. Оскільки $\varphi \notin k(x^p, y^p)$ і $\varphi \in C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi)$ то маємо башту полів

$$k(x^p, y^p) \subsetneq k(x^p, y^p, \varphi) \subseteq C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi) \subseteq k(x, y).$$

Оскільки $[k(x, y) : k(x^p, y^p)] = p^2$, то звідси отримуємо $[C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi) : k(x^p, y^p)] = p$. Аналогічно можна показати, що $[k(x^p, y^p, \varphi) : k(x^p, y^p)] = p$. Звідси, очевидно, випливає рівність $C_{\widetilde{P}_2(k)}(\varphi) = k(x^p, y^p, \varphi)$.

Нехай тепер $\varphi = f$ - многочлен. Очевидно, що $k(x^p, y^p, f) \cap k[x, y] \subseteq C_{P_2(k)}(f)$. Доведемо зворотнє включення. Нехай $g \in C_{P_2(k)}(f)$. Тоді $g \in C_{\widetilde{P}_2(k)}(f)$ і $C_{\widetilde{P}_2(k)}(f) = k(x^p, y^p, f)$ за доведеним вище. Звідси випливає, що $g \in k(x^p, y^p, f) \cap k[x, y]$. $\square$

Наслідок 1. Нехай φ та ψ раціональні функції з $k(x, y) \setminus k(x^p, y^p)$. Тоді $[\varphi, \psi] = 0$ тоді й лише тоді, коли $k(x^p, y^p, \varphi) = k(x^p, y^p, \psi)$.

Теорема 1. Нехай $f \in k[x, y] \setminus k[x^p, y^p]$. Тоді $C_{P_2(k)}(f)$ є вільним модулем рангу p над кільцем $k[x^p, y^p]$. Вільні твірні h_i мають вигляд

$$h_i = g_i^{-1}(a_{0,i} + a_{1,i}f + \dots + a_{p-1,i}f^{p-1}),$$

де $g_i, a_{0,i}, a_{1,i}, \dots, a_{p-1,i} \in k[x^p, y^p]$.

Доведення. Оскільки $C_{P_2(k)}(f)$ є ядром диференціювання ад f кільця многочленів $k[x, y]$, то з огляду на теорему 4.4 з [4], $C_{P_2(k)}(f)$ є вільним $k[x^p, y^p]$ -модулем. Покажемо, що ранг цього модуля дорівнює p . Нехай $u_1, \dots, u_r$ - базис $k[x^p, y^p]$ -модуля $C_{P_2(k)}(f)$, тобто r - ранг цього модуля. Покажемо спочатку, що $r \geq p$. Дійсно, візьмемо базис $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ розширення полів $(C_{\widetilde{P}_2(k)}(f) : k(x^p, y^p))$, яке має степінь p з огляду на доведення лемми 2. Нехай $\varphi_1 = f_1/g_1, \dots, \varphi_p = f_p/g_p$, де $f_i, g_i \in k[x^p, y^p, f]$.

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $g_1 = \dots = g_p (= g)$. Покажемо, що многочлени $g\varphi_1, \dots, g\varphi_p$ лінійно незалежні як елементи модуля $C_{P_2(k)}(f)$ над кільцем $k[x^p, y^p]$. Дійсно, якщо це не так, то існує лінійна комбінація $\lambda_1 g\varphi_1 + \dots + \lambda_p g\varphi_p = 0$ для деяких $\lambda_i \in k[x^p, y^p]$. Але тоді $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p = 0$, що неможливо з огляду на лінійну незалежність $\varphi_1, \dots, \varphi_p$. Таким чином, $r \geq p$. Далі, якщо многочлени $f_1, \dots, f_r$ лінійно незалежні як елементи модуля $C_{P_2(k)}(f)$ над кільцем $k[x^p, y^p]$, то вони, як легко бачити, лінійно незалежні як елементи розширення $(C_{\widetilde{P}_2(k)}(f) : k(x^p, y^p))$ і тому $r \leq p$. Таким чином, $r = p$.

Якщо h_i - довільний вільний твірний модуля $C_{P_2(k)}(f)$ над кільцем $k[x^p, y^p]$, то оскільки за лемою 2 виконується рівність $C_{P_2(k)}(f) = C_{\widetilde{P}_2(k)}(f) \cap k[x, y]$, отримаємо $h_i = b_{0,i} + b_{1,i}f + \dots + b_{p-1,i}f^{p-1}$, $b_{j,i} \in k(x^p, y^p)$. Позначаючи для фіксованого i через g_i добуток усіх знаменників $b_{j,i}$, отримаємо $g_i h_i = a_{0,i} + a_{1,i}f + \dots + a_{p-1,i}f^{p-1}$, або, що те ж саме, $h_i = g_i^{-1}(a_{0,i} + a_{1,i}f + \dots + a_{p-1,i}f^{p-1})$, для деяких многочленів $a_{j,i} \in k[x^p, y^p]$. $\square$

Теорема 2. 1) Нехай A максимальна абелева підалгебра в алгебрі Лі $P_2(k)$. Тоді A збігається з централізатором $C_{P_2(k)}(f)$ для деякого $f \in A \setminus k[x^p, y^p]$. Навпаки, для довільного $f \in P_2(k) \setminus k[x^p, y^p]$ підалгебра $C_{P_2(k)}(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю із $P_2(k)$.

2) Максимальними абелевими алгебрами алгебри Лі $\widetilde{P}_2(k)$ є підполя $k(x^p, y^p, f)$, $f \in \widetilde{P}_2(k) \setminus k(x^p, y^p)$ і тільки вони.

Доведення. 1) Нехай A - максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $P_2(k)$. Очевидно, $A \supseteq k[x^p, y^p]$. Візьмемо довільний елемент $f \in A \setminus k[x^p, y^p]$ (він, очевидно, існує). Тоді $A \subseteq C_{P_2(k)}(f)$. З Теорема 1 випливає, що підалгебра $C_{P_2(k)}(f)$ абелева. Оскільки A максимальна абелева, то звідси отримаємо, що $A = C_{P_2(k)}(f)$. Далі, для довільного $f \in P_2(k) \setminus k[x^p, y^p]$ підалгебра $C_{P_2(k)}(f)$ абелева за відзначеним вище. Крім того, довільний елемент, що комутує з f міститься у $C_{P_2(k)}(f)$. Отже $C_{P_2(k)}(f)$ - максимальна абелева підалгебра.

2) Доведення цього пункту аналогічне доведенню п. 1) (з використанням Теорема 1). $\square$

2 Алгебри Лі $sa_2(k)$ і $\widetilde{sa}_2(k)$

У роботі [5] опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в $P_2(k)$ було використано для опису цих же об'єктів в алгебрі Лі $sa_2(k)$ у випадку поля нульової характеристики k . Цей опис суттєво використовував сюр'єктивність гомоморфізму алгебр Лі $\text{ad} : P_2(k) \rightarrow sa_2(k)$. На жаль, у випадку простої характеристики основного поля k , гомоморфізм $\text{ad} : P_2(k) \rightarrow sa_2(k)$ не є сюр'єктивним, а централізатори елементів із $sa_2(k)$ влаштовані досить складно і їх опис навіть у простих випадках дуже громіздкий. Тому в даному розділі ми вказуємо лише загальну будову алгебр Лі $sa_2(k)$ і $\widetilde{sa}_2(k)$. Зауважимо, що коли розглянути скінченновимірну фактор-алгебру алгебри Лі $sa_2(k)$ за її ідеалом $I = \{P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} | P, Q \in R\}$, де R - ідеал кільця $k[x, y]$, породжений елементами x^p, y^p , то ми отримаємо алгебру Лі картанівського типу. Вивченню таких алгебр Лі присвячено багато робіт (див., наприклад, [1]).

Вкажемо тепер в загальних рисах будову алгебр Лі $sa_2(k)$ і $\widetilde{sa}_2(k)$.

Лема 3. Нехай $D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in \text{Der}(k[x, y])$. Тоді потенціал для D , тобто $f \in k[x, y]$ такий, що $D = \text{ad } f$, існує тоді і лише тоді, коли $\text{div } D = 0$, P не містить мономів типу $\alpha x^i y^{jp-1}$ і Q не містить мономів типу $\beta x^{ip-1} y^j$, $\alpha, \beta \in k^*$.

Доведення. Якщо $D = \text{ad } f$, то $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ і $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$. Оскільки $\frac{\partial x^p y^j}{\partial x} = \frac{\partial x^i y^{pj}}{\partial y} = 0$, звідси випливає, що P і Q не містять мономів типу $\alpha x^i y^{jp-1}$ і $\beta x^{ip-1} y^j$ відповідно. Також маємо $\text{div } D = P_x + Q_y = -f_{yx} + f_{xy} = 0$. Нехай тепер $\text{div } D = 0$ і многочлени P та Q не містять мономів типу $\alpha x^i y^{jp-1}$ і $\beta x^{ip-1} y^j$ відповідно. Очевидно, що тоді існує многочлен $\varphi \in k[x, y]$, такий що $\varphi_y = -P$. Тому $P_x = -\varphi_{xy} = -Q_y$, $(\varphi_x - Q)_y = 0$, і тому, як неважко переконатися, $\varphi_x - Q = \xi$, для деякого многочлена $\xi \in k[x, y^p]$. Оскільки φ_x і Q не містять мономів $x^{ip-1} y^j$, то ξ також не містить мономів цього типу. Тому існує $\psi \in k[x, y^p]$ з $\psi_x = \xi$. Для $f = \varphi - \psi$ одержуємо $f_x = \varphi_x - \psi_x = \varphi_x - \xi = Q$ і $f_y = \varphi_y - \psi_y = \varphi_y = -P$, тобто $\text{ad } f = D$, що доводить необхідне твердження. □

Лема 4. Нехай $D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in sa_2(k)$. Тоді P не містить мономів типу $x^i y^{jp-1}$, де $i \neq 0$

по модулю p , і Q не містить мономів типу $x^{ip-1} y^j$, де $j \neq 0$ по модулю p .

Доведення. Запишемо P і Q як

$$P = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{i,j} x^i y^j, \quad a_{i,j} \in k[x^p, y^p],$$

$$Q = \sum_{i,j=0}^{p-1} b_{i,j} x^i y^j, \quad b_{i,j} \in k[x^p, y^p].$$

Тоді $P_x + Q_y =$

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} i x^{i-1} y^j + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-1} j b_{i,j} x^i y^{j-1} =$$

$$\sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{p-2} ((1+i)a_{i+1,j} + (j+1)b_{i,j+1}) x^i y^j +$$

$$\sum_{i=0}^{p-2} (i+1)a_{i+1,p-1} x^i y^{p-1} +$$

$$\sum_{j=0}^{p-2} (j+1)b_{p-1,j+1} x^{p-1} y^j = 0.$$

Зокрема, звідси ми отримаємо $a_{i+1,p-1} = 0$ і $b_{p-1,j+1}$ для $i, j = \overline{0, p-2}$, що доводить лему. □

Твердження 1. $sa_2(k) = \text{ad}(P_2(k)) + k[x^p, y^p] y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} + k[x^p, y^p] x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}$.

Доведення. Очевидно права частина міститься в $sa_2(k)$. Розглянемо $D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in sa_2(k)$. Тоді за попередньою лемою $P = \bar{P} + a y^{p-1}$, $Q = \bar{Q} + b x^{p-1}$, $a, b \in k[x^p, y^p]$, де $\bar{P}$ і $\bar{Q}$ не містять мономів $x^i y^{jp-1}$ і $x^{ip-1} y^j$ відповідно. За лемою 3 отримуємо $\bar{D} = \bar{P} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{Q} \frac{\partial}{\partial y} \in \text{ad}(P_2(k))$. Таким чином, $sa_2(k) \subset \text{ad}(P_2(k)) + k[x^p, y^p] y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} + k[x^p, y^p] x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}$. □

Для зручності введемо наступне позначення: $\delta_{i,j} := -j x^i y^{j-1} \frac{\partial}{\partial x} + i x^{i-1} y^j \frac{\partial}{\partial y} = \text{ad}(x^i y^j)$. З рівностей $P_2(k) = \sum_{i,j=0}^{p-1} k[x^p, y^p] x^i y^j$ та $\widetilde{P}_2(k) = \sum_{i,j=0}^{p-1} k(x^p, y^p) x^i y^j$, переходячи до гомоморфних образів при гомоморфізмі ad , отримуємо рівності $\text{ad}(P_2(k)) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} k[x^p, y^p] \delta_{i,j}$ та

$\text{ad}(\widetilde{P}_2(k)) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} k(x^p, y^p) \delta_{i,j}$. Комбінуючи ці результати із Твердженням 1, отримуємо наступне твердження.

Твердження 2. $sa_2(k) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} k[x^p, y^p] \delta_{i,j} + k[x^p, y^p] y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} + k[x^p, y^p] x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y},$

$$\widetilde{sa}_2(k) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} k(x^p, y^p) \delta_{i,j} + k(x^p, y^p) y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} + k(x^p, y^p) x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Лема 5. 1) $\delta_{kp+i, lp+j} = x^{kp} y^{lp} \delta_{i,j};$
2) $[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = (il - jk) \delta_{k+i-1, l+j-1};$
3) $[y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = i \delta_{i-1, j+p-1}, [x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}, \delta_{i,j}] = j \delta_{i+p-1, j-1}.$

Доведення. Всі ці співвідношення випливають з того, що комутатор диференціювань $D_1 = P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y}$ і $D_2 = P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y}$ має вигляд

$$[D_1, D_2] = (P_1 \frac{\partial P_2}{\partial x} - P_2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} - Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial x} + (P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial y} - Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial y}. \quad \square$$

Твердження 3. 1) $\text{ad}(P_2(k)) = [sa_2(k), sa_2(k)].$
2) $\text{ad}(\widetilde{P}_2(k)) = [\widetilde{sa}_2(k), \widetilde{sa}_2(k)].$

Доведення. 1) Оскільки має місце рівність $[x^i \frac{\partial}{\partial y}, y^j \frac{\partial}{\partial x}] = -j x^i y^{j-1} \frac{\partial}{\partial x} + i x^{i-1} y^j \frac{\partial}{\partial y} = -\delta_{i,j}$, ми отримуємо включення $\text{ad}(P_2(k)) \subset [sa_2(k), sa_2(k)].$

Для того, щоб довести інше включення $[sa_2(k), sa_2(k)] \subset \text{ad}(P_2(k))$, достатньо довести, що $[y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x}, \text{ad}(P_2(k))] \subset \text{ad}(P_2(k))$ і $[x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}, \text{ad}(P_2(k))] \subset \text{ad}(P_2(k))$. Але за лемою вище ми маємо $[y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x}, \delta_{i,j}] = i \delta_{i-1, j+p-1}$ і $[x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}, \delta_{i,j}] = j \delta_{i+p-1, j-1}$. Оскільки за тією ж лемою $\delta_{k,l} \in \text{ad}(P_2(k))$ для усіх k і l , ми отримуємо $[y^{p-1} \frac{\partial}{\partial x}, \text{ad}(P_2(k))] \subset \text{ad}(P_2(k))$ та $[x^{p-1} \frac{\partial}{\partial y}, \text{ad}(P_2(k))] \subset \text{ad}(P_2(k))$.

2) Випливає з пункту 1), бо, як неважко перековатися, мають місце ізоморфізми $\widetilde{P}_2(k) \simeq k(x^p, y^p) \otimes P_2(k)$ і $\widetilde{sa}_2(k) \simeq k(x^p, y^p) \otimes sa_2(k)$. $\square$

Твердження 4. $sa_2(k)^{(1)} = \text{ad}(P_2(k)) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>0}}^{p-1} k[x^p, y^p] \delta_{i,j},$

$$sa_2(k)^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} k[x^p, y^p] \delta_{i,j},$$

для $n = 2$ маємо $sa_2(k)^{(n)} = sa_2(k)^{(2)}$, якщо $p > 2$, та $sa_2(k)^{(n)} = 0$, якщо $p = 2$.

Доведення. Оскільки $sa_2(k)^{(1)} = \text{ad}(P_2(k))$, то $sa_2(k)^{(2)} = [\text{ad}(P_2(k)), \text{ad}(P_2(k))].$

Зауважмо, що $\delta_{p-1, p-1}$ не міститься в $[\text{ad}(P_2(k)), \text{ad}(P_2(k))]$. Дійсно, припустимо протилежне. Тоді для деяких $i, j, k, l \leq p-1$ маємо $[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = (il - jk) \delta_{k+i-1, l+j-1}$, де $k+i-1 = p-1+ap$ і $l+j-1 = p-1+bp$. Це означає, що $\delta_{k+i-1, l+j-1}$ є множителем $\delta_{p-1, p-1}$. Тоді $k = p+ap-i$ і $l = p+bp-j$, звідки випливає, що $(il - jk) = (-ij + ji) = 0$, і тому $[\delta_{i,j}, \delta_{k,l}] = 0$.

З іншого боку із співвідношень $[\delta_{1,0}, \delta_{k,l}] = l \delta_{k,l-1}$, $[\delta_{0,1}, \delta_{k,l}] = -k \delta_{k-1, l}$ випливає, що $\delta_{k,l} \in [\text{ad}(P_2(k)), \text{ad}(P_2(k))]$ для усіх (k, l) , $0 \leq k, l \leq p-1$, $(k, l) \neq (0, 0)$, $(k, l) \neq (p-1, p-1)$. Тому отримуємо

$$sa_2(k)^{(2)} = [\text{ad}(P_2(k)), \text{ad}(P_2(k))] = \sum_{\substack{i,j=0 \\ 0<i+j<2p-2}}^{p-1} k[x^p, y^p] \delta_{i,j}.$$

Якщо $p > 2$, то $\delta_{0,1}$, $\delta_{1,0}$ і $\delta_{1,1}$ належать $sa_2(k)^{(2)}$. Використовуючи співвідношення $[\delta_{1,0}, \delta_{k,l}] = l \delta_{k,l-1}$, $[\delta_{0,1}, \delta_{k,l}] = -k \delta_{k-1, l}$ та $[\delta_{1,1}, \delta_{k,l}] = (l - k) \delta_{k,l}$, ми отримуємо, що $[sa_2(k)^{(2)}, sa_2(k)^{(2)}] = sa_2(k)^{(2)}$ і $sa_2(k)^{(n)} = sa_2(k)^{(2)}$ для $n > 2$. Якщо $p = 2$ то $sa_2(k)^{(2)} = k[x^2, y^2] \frac{\partial}{\partial x} + k[x^2, y^2] \frac{\partial}{\partial y}$ абелева. Тому в цьому випадку $sa_2(k)^{(n)} = 0$ для $n > 2$. $\square$

Теорема 3. Нехай $A = \text{ad}(P_2(k))$, $B = \sum_{j=0}^{p-1} k[x^p, y^p] y^j \frac{\partial}{\partial x}$, $C = \sum_{i=0}^{p-1} k[x^p, y^p] x^i \frac{\partial}{\partial y}$.

Тоді A - підалгебра, B і C - абелеві підалгебри із $sa_2(k)$ такі, що $sa_2(k) = A + B + C$. Крім того, виконуються співвідношення $[B, C] = A$, $[A, B] \subset A$ і $[A, C] \subset A$.

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що A, B і C є підалгебрами в $sa_2(k)$, а B і C - абелевими підалгебрами. З Твердження 3 випливає $[B, C] \subset A$, $[A, B] \subset A$ і $[A, C] \subset A$. Оскільки

$$[x^i \frac{\partial}{\partial y}, y^j \frac{\partial}{\partial x}] = -j x^i y^{j-1} \frac{\partial}{\partial x} + i x^{i-1} y^j \frac{\partial}{\partial y} = -\delta_{i,j},$$

то звідси отримуємо $[B, C] = A$. $\square$

3 Диференціювання формальних степеневих рядів

Легко бачити, що кільце формальних степеневих рядів $k[[x, y]]$ від двох змінних над полем k , разом з операцією взяття якобіану

$$[f, g] := \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

є алгеброю Лі. В цій алгебрі можна також визначити підалгебру $sa_2^{\text{pow}}(k)$, яка складається з диференціювань із нульовою дивергенцією, тобто таких диференціювань $D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in \text{Der}(k[[x, y]])$, що $\text{div} D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$.

Використовуючи аналог результатів з роботи [4] для рядів (див. [2], Theorem 4.1 та [6], Theorem 1.1) і підходи з роботи [5] можна описати централізатори елементів і максимальні абелеві підалгебри в алгебрі $sa_2^{\text{pow}}(k)$, $\text{char}(k) = 0$. Ряд $f \in k[[x, y]] \setminus k$, $\text{ord} f \geq 1$, будемо називати максимальним, якщо підалгебра $k[[f]]$ є максимальним елементом у частково впорядкованій за включенням множині $\{k[[h]] \mid h \in k[[x, y]] \setminus k, \text{ord}(h) \geq 1\}$. Ряд h будемо називати породжуючим рядом для ряду f , якщо h максимальний і $f \in k[[h]]$. Можна показати, що породжуючий ряд завжди існує. Замінюючи многочлени на ряди і повторюючи доведення з [5], можна дати наступний опис централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в $sa_2^{\text{pow}}(k)$.

Теорема 4. Нехай $D = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ довільний відмінний від нуля елемент алгебри Лі $sa_2^{\text{pow}}(k)$, $\text{char}(k) = 0$. Нехай $f(x, y) \in k[[x, y]]$ такий ряд, що $D = \text{ad} f$ і нехай $\tilde{f}$ породжуючий ряд для f . Тоді

1) якщо $f(x, y)$ не ряд Якобі, то

$$C_{sa_2^{\text{pow}}(k)}(D) = k[[\tilde{f}]] \text{ad}(\tilde{f});$$

2) якщо $f(x, y)$ ряд Якобі і $g(x, y)$ такий ряд, що $\det(J(f, g)) \in k^*$, то

$$C_{sa_2^{\text{pow}}(k)}(D) = k[[f]] \text{ad}(f) + k \text{ad}(g)$$

Теорема 5. Нехай A максимальна абелева підалгебра в $sa_2^{\text{pow}}(k)$, $\text{char}(k) = 0$. Тоді

1) якщо $\dim A = \infty$, то $A = k[[f]] \text{ad}(f)$, де $f(x, y)$ максимальний ряд. Навпаки, для довільного максимального ряду f , підалгебра $k[[f]] \text{ad}(f)$ є максимальною абелевою підалгеброю в $sa_2^{\text{pow}}(k)$;

2) якщо $\dim A < \infty$, то $A = kD_1 + kD_2$, де $D_1 = \text{ad}(f)$, $D_2 = \text{ad}(g)$ для деяких f та g , таких що $\det(J(f, g)) \in k^*$. Навпаки, для довільних f і g , таких що $[f, g] \in k^*$, підалгебра $kD_1 + kD_2$, де D_1 і D_2 визначені як вище, є максимальною абелевою підалгеброю алгебри $sa_2^{\text{pow}}(k)$.

Список використаних джерел

1. Кострикин А.И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли простой характеристики // Известия АН СССР, Сер. мат. – 33 (1969), 251-322
2. Makar-Limanov, L., and A. Nowicki. On the ring of constants for derivations of power series rings in two variables // Colloq. Math. – 87 (2001), 195-200.
3. A. Nowicki, Polynomial derivations and their rings of constants. N.Copernicus University Press, Torun, 1994.
4. A. Nowicki, M. Nagata. Rings of constants for k -derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$ // J. Math. Kyoto Univ. – 28(1988), 111-118.
5. Petruvchuk, A. P., and O. G. Iena. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(k)$ // Journal of Lie Theory – 16(2006), 561-567
6. Płoski, A., On the Jacobian dependence of power series // Bull. Acad. Pol. Sci. – 23(1975), 407-410.

Надійшла до редколегії 25.12.07

УДК 512.552

Віктор М. Журавльов*

Ідеали черепичних порядків з
квазіфробеніусовими факторкільцями
Серія: фізико-математичні науки

В роботі доводиться, що кожен ідеал I черепичного порядку Λ , факторкільце за яким Λ/I є квазіфробеніусовим, ізоморфний як правий модуль і як лівий модуль модулю Λ^* .

Ключові слова: черепичний порядок, ідеал, квазіфробеніусове кільце, ґратка, підстановка.

*E-mail: vshur@univ.kiev.ua

У роботі [2] охарактеризовано ідеали зведених горенштейнових черепичних порядків, факторкільця за якими є квазіфробеніусовими. Такі ідеали задаються підстановками [3].

Мета цієї роботи — узагальнити результати роботи [3] для більш широкого класу кілець — зведених черепичних порядків. А саме: довести, що ідеал I зведеного черепичного порядку Λ , факторкільце за яким Λ/I квазіфробеніусове, ізоморфний як правий модуль, і як лівий модуль модулю Λ^* ; описати підстановки, які задають такі ідеали.

1 Черепичні порядки

Означення 1. Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим справа кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [1].

Теорема 1 ([1]). Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Viktor N. Zhuravlev*

Ideals of tiled orders with
quasi-Frobenius quotient rings
Series: Physics & Mathematics Sciences

We prove that any ideal I of tiled order Λ with quasi-Frobenius quotient ring Λ/I is isomorphic to Λ^* as right and left module.

Key words: tiled order, ideal, quasi-Frobenius ring, lattice, permutation.

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком. Ми будемо використовувати наступне позначення: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A , т.б. $A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є зведеним, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, т.б., $\mathcal{E}(A)$ є зведеною.

Означення 2. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A -ґраткою називається правий (лівий) A -модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$ -модулем (див. [7]).

Позначимо через $\text{Lat}_r(A)$ (відп. $\text{Lat}_l(A)$) категорію правих (відп. лівих) A -ґраток.

Між категоріями $\text{Lat}_r(A)$ та $\text{Lat}_l(A)$ є дуальність (див. [8]). Нехай $M \in \text{Lat}_r(A)$. Позначимо $M^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$. Для довільного $f \in M^*$ і $a \in A$ визначимо af за формулою $(af)(m) = f(ma)$, де $m \in M$. Тоді легко перевірити, що M^* є лівим A -модулем.

Нехай $\varphi: M \rightarrow N$ — гомоморфізм модулів $M, N \in \text{Lat}_r(A)$, тобто $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N)$. Тоді $\varphi^*: N^* \rightarrow M^*$ можна визначити за формулою $(\varphi^*f)(m) = f\varphi(m)$, де $f \in N^*$. Це гомоморфізм з N^* у M^* , тобто $\varphi^* \in \text{Hom}_A(N^*, M^*)$.

Серед всіх A -ґраток виділяються так звані незвідні A -ґратки, тобто A -ґратки, які містяться у простому правому (лівому) $\mathcal{O}$ -модулі U (відп. V). Ці ґратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [1] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A -ґратка M (відп.

N), яка лежить в U (відп. в V), є A -модулем з $\mathcal{O}$ -базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, \text{ якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A); \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i, \text{ якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A), \end{cases} \quad (2)$$

де буква T означає операцію транспонування.

Нехай A — зведений черепичний порядок. Тоді елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з цілочисельними рядками векторів $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\bar{a}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$), де $\bar{a}$ і $\bar{a}^T$ задовольняють вищезазначеним умовам. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Просто встановити дуальність незвідних та цілком розкладних A -граток.

Нехай $M \in S_r(A)$ та $M = \sum_{i=1}^n e_i \pi^{\alpha_i} \mathcal{O}$. Якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$ -базис для $e_1, \dots, e_n$ (див. [8]), то $\pi^{-\alpha_1}\varphi_1, \dots, \pi^{-\alpha_n}\varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$ -базис для $\mathcal{O}$ -базису $e_1\pi^{\alpha_1}, \dots, e_n\pi^{\alpha_n}$. Отже, якщо $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то $M^* = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T$. Використовуючи запис $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, маємо $N^* = (-\beta_1, \dots, -\beta_n)$.

Означення 3. A -гратка M називається відносно ін'єктивною, якщо $M \simeq {}_A P^*$, де ${}_A P$ — скінченнопороджений проективний лівий A -модуль.

Означення 4. A -гратка M називається цілком розкладною, якщо вона є прямою сумою нерозкладних A -граток.

Теорема 2 ([6]). Нехай A_A — нетеровий.

(a) Наступні умови еквівалентні:

- (1) A_A ін'єктивний;
- (2) A_A — котвірний;
- (3) ${}_A A$ ін'єктивний;
- (4) ${}_A A$ — котвірний;
- (5) $\forall M \subset A_A [\tau l(M) = M]$,
 $\forall N \subset {}_A A [l \tau(N) = N]$.

(b) Якщо виконані умови з (a), то A артинове з двох сторін.

Через $l(M)$ і $\tau(N)$ позначено аннулятори модулів M і N , тобто $l(M) = \{a \in A | aM = 0\}$, $\tau(N) = \{b \in A | Nb = 0\}$.

Означення 5. Кільце, яке задовольняє умовам попередньої теореми називається квазіфробеніусовим (QF -кільцем).

Теорема 3 ([6]). Для артинового з двох сторін кільця наведені нижче умови еквівалентні:

- (a) A квазіфробеніусове;
- (б) для кожного примітивного ідемпотента e цокли $\text{soc}(eA)$ і $\text{soc}(Ae)$ прості і в $\text{soc}(A_A)$, відповідно в $\text{soc}({}_A A)$, містяться з точністю до ізоморфізму всі прості праві, відповідно ліві, A -модулі;
- (в) для кожного примітивного ідемпотента e цокли $\text{soc}(eA)$ і $\text{soc}(Ae)$ прості і $\text{soc}(A_A) = \text{soc}({}_A A)$;
- (г) (означення Накаями) існує перестановка ν множини $\{1, \dots, k\}$, така, що для кожного $i = 1, \dots, k$

$$\text{soc}(e_i A)_A \simeq (\bar{e}_{\nu(i)} \bar{A})_A, {}_A \text{soc}(Ae_{\nu(i)}) \simeq {}_A (\bar{A} \bar{e}_i)$$

2 Ідеали черепичних порядків, факторкільця за якими є квазіфробеніусовими

Теорема 4. Нехай Λ — зведений черепичний порядок, I — ідеал цього порядку. Факторкільце Λ/I є квазіфробеніусовим тоді і тільки тоді, коли $I_\Lambda \simeq (\Lambda^*)_\Lambda$, ${}_A I \simeq {}_A (\Lambda^*)$.

Доведення. Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)$, $1 = e_1 + \dots + e_n$ — розклад $1 \in \Lambda$ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів. Тоді для довільного правого (лівого) ідеалу I має розклад в пряму суму: $I = e_1 I \oplus \dots \oplus e_n I$ ($I = e_1 I e_1 \oplus \dots \oplus I e_n$). Оскільки $e_i I$ ($I e_i$) є підмодулем незвідного модуля $e_i \Lambda$ (Λe_i), то модуль $e_i I$ також є незвідним. Тому ідеал I є цілком розкладним правим (лівим) ідеалом.

Нехай I — ідеал порядку Λ такий, що факторкільце Λ/I є квазіфробеніусовим. Тоді I є цілком розкладним правим та лівим Λ -модулем: $I = e_1 I \oplus \dots \oplus e_n I$, $I = e_1 I e_1 \oplus \dots \oplus I e_n$. Тому

$$\Lambda/I \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n e_i \Lambda \right) / \left(\bigoplus_{i=1}^n e_i I \right) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (e_i \Lambda / e_i I).$$

Позаяк факторкільце Λ/I квазіфробеніусове, то цокль модуля $e_i \Lambda / e_i I$ є простим. Це означає, що підмодуль $e_i I$ має єдиний мінімальний надмодуль.

Лема 1. Нехай M — незвідний правий (лівий) Λ -модуль. Модуль M має єдиний мінімальний надмодуль тоді і тільки тоді, коли

дуальний модуль M^* ізоморфний нерозкладному проективному лівому (правому) Λ -модулю.

Доведення. Нехай $\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — звідений черепичний порядок і $M = (m_1, \dots, m_n)$ — незвідний правий Λ -модуль. Тоді за (2) виконуються умови

$$m_i + \alpha_{ij} \geq m_j \quad \text{для всіх } i, j.$$

Нехай $(m_1, \dots, m_{k-1}, m_k - 1, m_{k+1}, \dots, m_n)$ також є правим Λ -модулем. Будемо позначати його через $M - f_k$, де $f_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Для модуля $M - f_k$ умови (2) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} m_i + \alpha_{ij} &\geq m_j && \text{для всіх } i, j \neq k; \\ m_k + \alpha_{kk} &\geq m_k; \\ m_i + \alpha_{ik} &\geq m_k - 1 && \text{для всіх } i \neq k; \\ (m_k - 1) + \alpha_{kj} &\geq m_k && \text{для всіх } j \neq k. \end{aligned} \quad (3)$$

Припустимо, що модуль M має єдиний мінімальний надмодуль $M - f_k$. Тоді $M - f_l$ при $l \neq k$ не є правим Λ -модулем і тому

$$\begin{aligned} m_i + \alpha_{ij} &\geq m_j && \text{для всіх } i, j \neq l; \\ m_l + \alpha_{ll} &\geq m_l; \\ m_i + \alpha_{il} &\geq m_l - 1 && \text{для всіх } i \neq l; \\ (m_l - 1) + \alpha_{lj} &< m_j && \text{для деякого } j \neq k. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки за (2) $m_l + \alpha_{lj} \geq m_j$, то з (4) випливає, що $m_l + \alpha_{lj} = m_j$.

Отже, якщо незвідний Λ -модуль M має єдиний мінімальний надмодуль $M - f_k$, то виконуються умови

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad m_i + \alpha_{ij} &\geq m_j; \\ \forall j \neq k \quad m_k + \alpha_{kj} &\geq m_j + 1; \\ \forall l \neq k \quad \exists j = j(l) \mid m_l + \alpha_{lj} &= m_j. \end{aligned} \quad (5)$$

Розглянемо два випадки:

- (1) для кожного $l \neq k \quad j(l) \neq k$;
- (2) існує $l \neq k$ таке, що $j(l) = k$.

(1) Нехай для кожного $l \neq k$ має місце $j(l) \neq k$. Позаяк $j(l)$ може приймати лише скінченну множину значень, то отримуємо

$$\begin{aligned} m_l + \alpha_{lj} &= m_j, && j \neq k; \\ m_j + \alpha_{jr} &= m_r, && r \neq k; \\ &\dots\dots\dots \\ m_q + \alpha_{ql} &= m_l, && l \neq k. \end{aligned} \quad (6)$$

Звідси отримуємо

$$(m_l + m_j + \dots + m_q) + (\alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{ql}) = m_j + m_r + \dots + m_l.$$

Отримали протиріччя, бо $\alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{ql} > 0$ за кільцевими нерівностями. Отже, випадок (1) неможливий.

(2) У цьому випадку система (6) замінюється системою

$$\begin{aligned} m_l + \alpha_{lj} &= m_j, && j \neq k; \\ m_j + \alpha_{jr} &= m_r, && r \neq k; \\ &\dots\dots\dots \\ m_p + \alpha_{pq} &= m_q, && q \neq k \\ m_q + \alpha_{qk} &= m_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Звідси

$$(m_l + m_j + \dots + m_p + m_q) + (\alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{pq} + \alpha_{qk}) = m_j + m_r + \dots + m_q + m_k.$$

або

$$m_l + (\alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{pq} + \alpha_{qk}) = m_k. \quad (8)$$

Враховуючи, що

$$\alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{pq} + \alpha_{qk} \geq \alpha_{lk} \quad \text{і} \quad m_l + \alpha_{lk} \geq m_k,$$

з (8) отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha_{lj} + \alpha_{jr} + \dots + \alpha_{pq} + \alpha_{qk} &= \alpha_{lk}; \\ m_l + \alpha_{lk} &= m_k. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо незвідний правий Λ -модуль M має єдиний мінімальний надмодуль $M - f_k$, то виконуються умови:

$$\begin{aligned} (a) \quad m_k + \alpha_{kj} &\geq m_j + 1 && \text{для всіх } j \neq k; \\ (b) \quad m_l + \alpha_{lk} &= m_k && \text{для всіх } l. \end{aligned} \quad (9)$$

З умови (9) отримуємо $m_l = m_k - \alpha_{lk}$ і тоді

$$M = (m_k - \alpha_{1k}, \dots, m_k - \alpha_{nk}).$$

Очевидно, що $M \simeq (-\alpha_{1k}, \dots, -\alpha_{nk}) \simeq (\Lambda e_k)^*$.

Припустимо тепер, що незвідні праві Λ -модулі M_1 та M_2 мають по одному мінімальному надмодулю $M_1 - f_k$ та $M_2 - f_k$. Тоді $M_1 \simeq (\Lambda e_k)^*$ та $M_2 \simeq (\Lambda e_k)^*$. Отже, модулі M_1 та M_2 ізоморфні.

Цілком аналогічно отримуємо, що якщо незвідний лівий Λ -модуль $T = (t_1, \dots, t_n)^T$ має єдиний мінімальний надмодуль $T - f_k^T$, то виконуються умови

$$\begin{aligned} (a) \quad \forall i \neq k \quad \alpha_{ik} + t_k &\geq t_i + 1; \\ (b) \quad \forall l \neq k \quad \exists i = i(l) \mid \alpha_{il} + t_l &= t_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} (a) \quad \alpha_{ik} + t_k &\geq t_i + 1 \quad \text{для всіх } i \neq k; \\ (b) \quad \alpha_{kl} + t_l &= t_k \quad \text{для всіх } l. \end{aligned} \quad (11)$$

Тому

$$T = (t_k - \alpha_{1k}, \dots, t_k - \alpha_{nk})$$

i

$$T \simeq (-\alpha_{1k}, -\alpha_{2k}, \dots, -\alpha_{nk}) \simeq (\Lambda e_k)^*.$$

Таким чином, кожен такий модуль ізоморфний модулю $(e_k \Lambda)^*$.

Навпаки, відносно ін'єктивний правий Λ -модуль $(\Lambda e_k)^*$ має єдиний мінімальний надмодуль, бо проективний лівий Λ -модуль (Λe_k) має єдиний максимальний підмодуль. Лема доведена. $\square$

Факторкільце Λ/I є зведеним, бо Λ — зведене кільце. З означення Накаями квазіфробеніусового кільця випливає, що $\text{soc}(e_i \Lambda / e_i I) \simeq \text{soc}(e_j \Lambda / e_j I)$ лише при $i = j$. Тому існують підстановки $\alpha, \beta \in S_n$ такі, що $e_i I \simeq (\Lambda e_{\alpha(i)})^*$, $I e_i \simeq (e_{\beta(i)} \Lambda)^*$.

Тоді

$$\begin{aligned} I_\Lambda &= \bigoplus_{i=1}^n (e_i I)_\Lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^n (\Lambda \Lambda e_{\alpha(i)})^* \simeq \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda \Lambda e_{\alpha(i)} \right)^* \simeq (\Lambda \Lambda)^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda I &= \bigoplus_{i=1}^n \Lambda (I e_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (e_{\beta(i)} \Lambda)_\Lambda^* \simeq \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n e_{\beta(i)} \Lambda_\Lambda \right)^* \simeq (\Lambda_\Lambda)^*. \end{aligned}$$

Навпаки, нехай $I_\Lambda \simeq (\Lambda \Lambda)^*$, $\Lambda I \simeq (\Lambda_\Lambda)^*$. Тоді $e_i I \simeq (\Lambda e_{\alpha(i)})^*$, $I e_i \simeq (e_{\beta(i)} \Lambda)^*$, де α, β — деякі підстановки.

Проективні модулі $\Lambda e_{\alpha(i)}$, $e_{\beta(i)} \Lambda$ мають по одному максимальному підмодулю $\Lambda e_{\alpha(i)} + f_{\alpha(i)}^T$, $e_{\beta(i)} \Lambda + f_{\beta(i)}^T$. Тому дуальні модулі $(\Lambda e_{\alpha(i)})^*$, $(e_{\beta(i)} \Lambda)^*$ мають по одному мініимальному надмодулю $(\Lambda e_{\alpha(i)})^* - f_{\alpha(i)}^T$, $(e_{\beta(i)} \Lambda)^* - f_{\beta(i)}^T$.

Отже, незвідні модулі $e_i I$, $I e_i$ мають по одному мініимальному надмодулю $e_i I - f_{\alpha(i)}^T$, $I e_i - f_{\beta(i)}^T$ і тоді цоколі $\text{soc}(e_i \Lambda / e_i I)$ та $\text{soc}(\Lambda e_i / I e_i)$ є простими:

$$\text{soc}(e_i \Lambda / e_i I) \simeq U_{\alpha(i)}, \quad \text{soc}(\Lambda e_i / I e_i) \simeq V_{\beta(i)}.$$

Звідси за теоремою 3 отримуємо, що кільце Λ/I є квазіфробеніусовим. Теорема доведена. $\square$

Означення 6. Черепичний порядок Λ називається горенштейновим черепичним порядком, якщо Λ є біективною Λ -граткою, тобто Λ^* є проективною лівою Λ -граткою.

Надалі горенштейновий черепичний порядок ми будемо часто називати просто горенштейновим порядком.

Теорема 5 ([4]). Наступні умови для зведеного черепичного порядку

$\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{pq})\}$ еквівалентні:

(a) Λ є горенштейновим;

(b) існує підстановка $\sigma: i \rightarrow \sigma(i)$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, n$.

Підстановка σ називається підстановкою Кириченка.

Наступна теорема дає можливість з горенштейнового черепичного порядку отримувати квазіфробеніусові кільця.

Теорема 6 ([2]). Нехай Λ — первинний зведений горенштейновий черепичний порядок з радикалом Джекобсона R і J — двосторонній ідеал Λ такий, що $\Lambda \supset R^2 \supset J \supset R^n$ ($n \geq 2$). Факторкільце Λ/J квазіфробеніусове тоді та тільки тоді, коли існує $p \in R^2$ таке, що $J = p\Lambda = \Lambda p$.

В роботі [3] показано, що кожний ідеал I горенштейнового черепичного порядку Λ такий, що факторкільце Λ/I є квазіфробеніусовим, задається деякою підстановкою $\tau: e_i I \simeq e_{\tau(i)} \Lambda$. Елементи матриці показників ідеалу $\mathcal{E}(I) = (\kappa_{ij})$ обчислюються за формулою $\kappa_{ij} = \alpha_{\tau(i)j} + \alpha_{\tau(1)\tau(i)} - \alpha_{1i} + a$, де a — ціле число.

З теореми 4 випливає, що довільний ідеал I зведеного черепичного порядку Λ такий, що факторкільце Λ/I є квазіфробеніусовим, також задається підстановками $\tau, \nu: e_i I \simeq e_{\tau(i)} \Lambda^*$, $I e_i \simeq \Lambda^* e_{\nu(i)}$.

Аналогічно доведенню леми 1 з [3] отримуємо наступну лему.

Лема 2. Нехай Λ — зведений черепичний порядок, I — двосторонній ідеал порядку Λ такий, що $e_i I \simeq e_{\tau(i)} \Lambda^*$, $I e_i \simeq \Lambda^* e_{\nu(i)}$ для деяких підстановок τ, ν . Тоді $\nu = \tau^{-1}$.

За теоремою 4 два ідеали I та J зведеного черепичного порядку Λ такі, що Λ/I та Λ/J є квазіфробеніусовими, ізоморфні і як праві модулі, і як ліві модулі. Ідеали, які відповідають різним підстановкам, називаються суттєво різними [3].

Теорема 7. Існує взаємно однозначна відповідність між суттєво різними двосторонніми ідеалами I зведеного черепичного порядку Λ такими, що фактор-кільця Λ/I є квазіфробеніусовими, та підстановками τ , які задовольняють рівність

$$\alpha_{\tau(i)\tau(j)} + \alpha_{\tau(j)\tau(k)} - \alpha_{\tau(i)\tau(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 3 з [3].

Елементи матриці показників $\mathcal{E}(I) = (\kappa_{ij})$ обчислюються за формулою $\kappa_{ij} = -\alpha_{j\tau(i)} - \alpha_{\tau(i)\tau(1)} + \alpha_{11} + a$, де a — ціле число.

Множина всіх підстановок τ , що задовольняє рівність

$$\alpha_{\tau(i)\tau(j)} + \alpha_{\tau(j)\tau(k)} - \alpha_{\tau(i)\tau(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik},$$

утворює групу $T(\Lambda)$.

В [9] вивчається зв'язок трьох підстановок: підстановки Кириченка σ горенштейнового черепичного порядку Λ , підстановки τ , що задає ідеал I цього порядку та підстановки Накаями ν квазіфробеніусового факторкільця Λ/I .

Наслідок 1. Нехай σ — підстановка Кириченка горенштейнового черепичного порядку Λ , τ — підстановка, що задає ідеал I цього порядку, ν — підстановки Накаями квазіфробеніусового факторкільця Λ/I . Тоді $\nu = \sigma\tau$.

Доведення. Нехай I — ідеал горенштейнового черепичного порядку Λ такий, що факторкільце Λ/I квазіфробеніусове. Тоді $e_i I \simeq e_{\tau(i)} \Lambda$. З умови горенштейновості $\alpha_{\tau(i)j} + \alpha_{j\sigma\tau(i)} = \alpha_{\tau(i)\sigma\tau(i)}$ випливає, що $e_{\tau(i)} \Lambda \simeq (\Lambda e_{\sigma\tau(i)})^*$. Оскільки незвідний модуль $(\Lambda e_j)^*$ має єдиний мінімальний надмодуль $(\Lambda e_j)^* - f_j$, то незвідний модуль $e_i I$, який ізоморфний модулю $e_{\tau(i)} \Lambda$, має єдиний мінімальний надмодуль $e_i I - f_{\sigma\tau(i)}$. Тому $\text{soc}(e_i \Lambda / e_i I) \simeq U_{\sigma\tau(i)}$. За теоремою 3 підстановка Накаями ν квазіфробеніусового кільця Λ/I дорівнює $\sigma\tau$. Отже, $\nu = \sigma\tau$. Наслідок доведено. $\square$

Висновок: результати, отримані в роботі, дозволяють отримувати ідеали черепичних порядків з квазіфробеніусовими факторкільцями за допомогою комп'ютерних обчислень. В подальшому цікаво розглянути частково впорядковану множину, елементами якої є такі ідеали.

Список використаних джерел

1. Завадский, А.Г., Кириченко, В.В., Модули без кручения над первичными кольцами, Зап. науч. семинар. Ленинград. отд. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ) - 1976. - т. 57. - с. 100-116.
2. Кириченко В.В. О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках // Труды Ин-та математики им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1978. — Т. 148. — С. 168-174.
3. Журавльов В.М., Підстановки, що задають ідеали горенштейнового порядку. Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки, N 3, 2002, р. 23-27.
4. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004, v. 1, 380 p.
5. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007, v. 2, 400 p.
6. Кам Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981. — 368 с.
7. Roggenkamp, K.W., Kirichenko, V.V., Khlebnikova, M.A. and Zhuravlev, V. N., Gorenstein tiled orders, Comm. in Algebra, 29(9), 2001, 4231-4247.
8. Kirichenko, V.V., On semiperfect rings of injective dimension one, preprint, Trabalhos do departamento de matemática, Universidade de São Paulo, Instituto de matemática e estatística, Brasil, 2006, 25 p.
9. Журавльов В.М., Про горенштейнові порядки, квазіфробеніусові кільця та підстановки // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. N 2, 2005 р. с. 21-23.

Надійшла до редколегії 25.10.2007

УДК 512.53

М.В. Зельдіч, к. ф.-м. н.

Про маятникову еквівалентність біграфів і мінімальні незначені цілі квадратичні форми.

Введено поняття маяткової еквівалентності біграфів цілих квадратичних форм, зокрема, $(+, -)$ - еквівалентності біграфів і відповідних їм цілих форм та $(0, 1)$ - еквівалентності для переривчастих біграфів та відповідних їм антисиметричних відношень і графічних форм (форм Тітса таких відношень). Доведено, що за допомогою вищезазначених еквівалентностей мінімальні незначені (додатні, невід'ємні) цілі квадратичні форми з відповідних вищевказаних класів редукуються до мінімальних не слабо визначених (слабо додатних, слабо невід'ємних), тобто до, відповідно, критичних (надкритичних) цілих квадратичних форм, опис яких більш-менш відомий. Це дозволяє встановити структуру та явно побудувати всі мінімальні незначені форми з відповідних класів.

Ключові слова: ціла квадратична форма, слабо додатна, слабо невід'ємна, слабо критична, слабо надкритична, біграф, маяткова еквівалентність

E-mail: zeldich@mail.ru

Наведемо основні означення. Квадратична форма з дійсними коефіцієнтами називається:

-цілою, якщо всі її коефіцієнти є цілими числами, коефіцієнти при квадратах змінних є одиничними;

-слабододатною (слабо невід'ємною), якщо вона приймає додатні (відповідно, невід'ємні) значення на ненульових векторах з невід'ємними координатами;

-критичною (надкритичною), якщо вона не є слабододатною (відповідно, слабо невід'ємною), але всі її власні підформи (тобто форми, які отримуються з вихідної форми шляхом прирівнювання нулю деяких змінних) такими являються.

-слабо критичною (відповідно, слабо надкритичною), якщо вона не є додатною (відповідно, невід'ємною) визначеною, але всі її власні підформи такими являються.

Вищезазначені класи форм природним

M.V. Zeldich, PhD in Physics & Mathematics

On pendulum equivalence of bigraphes and minimal non-sign defined integral quadratic forms.

It has been introduced the conception of the pendulum equivalence of bigraphes of integral quadratic forms, in particular $(+, -)$ - equivalence of bigraphes and their corresponding integral forms, and $(0, 1)$ - equivalence for the dotted bigraphes and their corresponding anti-symmetric ratios and graphical forms (Tits forms of those ratios). It has been proved that by means of the above-mentioned equivalences the minimal non-sign defined (positive, non-negative) integral quadratic forms from the corresponding above-mentioned classes are reduced to minimal non-weakly defined forms (weakly positive, weakly non-negative), i.e. to the corresponding critical (hyper-critical) integral quadratic forms, the description of which is more or less known. It permits to determine the structure and to construct explicitly all the minimal non-sign defined integral quadratic forms of the corresponding classes.

Key Words: integral quadratic form, weakly positive, weakly nonnegative, weakly critical, weakly hypercritical, bigraph, pendulum equivalence

чином виникають в теорії зображень асоціативних скінченновимірних алгебр, сагайдаків із співвідношеннями, частково впорядкованих множин, в теорії матричних задач (зображень боксів) тощо, та цікаві самі по собі з точки зору теорії цілочисельних квадратичних форм і вивчались в роботах багатьох авторів за останні 30 років (див., наприклад, монографію [1]). Зокрема, критичні та надкритичні цілі квадратичні форми вивчались в роботах С. Овсієнка [4] та автора [5], які довели, що ці класи форм можуть бути отримані за допомогою спеціальних цілочисельних перетворень (так званих малих приведень, або перетворень Габрієлова) виходячи з відомих класичних цілих критичних (відповідно, надкритичних) форм, які відповідають славно відомим розширенням (відповідно, надрозширенням, або гіперболічним) схемам Динкіна з однократними ребрами. Нагадаємо, що кожній цілій квадратичній формі однозначно відповідає деякий біграф, точніше,

неорієнтований граф без петель з ребрами двох типів – суцільних та переривчастих, і навпаки, кожному такому біграфу відповідає деяка ціла квадратична форма (причому, ці відповідності є оберненими одна до іншої, тобто взаємнооднозначними). А саме, кожній змінній ставиться у відповідність вершина біграфа і дві вершини сполучаються стількими ребрами, якою є абсолютна величина сукупного коефіцієнта при добутку відповідних цим вершинам змінних, при цьому всі ці ребра будуть переривчастими (відповідно, суцільними) якщо відповідний коефіцієнт є додатнім (відповідно, від'ємним); вершини не сполучаються ребрами, якщо відповідний коефіцієнт нульовий. Отже, надалі ми не будемо розрізняти цілу квадратичну форму та відповідний їй біграф. В разі, якщо біграф є звичайним графом у якого всі ребра – суцільні, наприклад, є однією з класичних схем (розширених або надрозширених схем) Динкіна, всі коефіцієнти відповідної квадратичної форми окрім одиничних коефіцієнтів при квадратах змінних будуть не додатними.

Спираючись на ці результати С. Овсієнка та М. Зельдіча фон Хьоне в своїх працях [2,3] отримав більш-менш явний опис всіх критичних та надкритичних цілих квадратичних форм, хоча їх загальна кількість виявилась дуже великою.

З іншого боку, в деяких важливих випадках, наприклад, форм Тітса частково впорядкованих множин (чвм) списки критичних та надкритичних чвм (які допускають визначення як такі, форма Тітса яких не є слабододатньою (відповідно, слабо від'ємною), але форми Тітса всіх їх власних підмножин вже такими будуть) – ці списки складаються з декількох (не більше десятка) відомих чвм, отриманих в роботах М. Клейнера [6], Ю. Дрозда [7] та відповідно, Назарової [8] і Завадського [9]. Щодо слабокритичних та, відповідно, слабонадкритичних чвм, які можуть бути аналогічним чином визначені як мінімальні не знакоозначені чвм, тобто такі чвм, форми Тітса яких не є додатньо (відповідно, невід'ємно) визначені на відміну від усіх їхніх власних ч.в. підмножин, то у першому випадку (слабо критичних чвм) такі чвм під назвою «Р-критичних» були вичені та явно описані в роботі [11] за допомогою методу (min, max) еквівалентності чвм ([10]), оскільки, як було доведено в [11], за допомогою таких еквівалентностей слабо критичні (Р-критичні) чвм зводяться до звичайних критич-

них чвм. Але доведення цього факту є достатньо складним і не достатньо прозорим (це пов'язане з перебором багатьох випадків) і до того ж, не узагальнюється на випадок слабонадкритичних чвм.

Нагадаємо, що формою Тітса частково впорядкованої множини $(M, \leq)$, де $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ – скінченна множина, називається форма

$$f(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - x_0(x_1 + \dots + x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

де φ – форма відношення часткового порядку (у сенсі А.В. Ройтера), на множині M , т.т.

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

де $a_{ij} = 1$, якщо $m_i \leq m_j$ і $a_{ij} = 0$ в протилежному випадку.

Аналогічним чином форму Тітса можна ввести для будь-якого відношення на скінченній множині M з характеристичною матрицею $(a_{ij})_{n \times n}$, $a_{ij} = 1$ або 0 відповідно до того, чи знаходиться m_i у відношенні з m_j .

Подібно до випадку відношення часткового порядку, можна ввести поняття критичної (відповідно, надкритичної) та слабокритичної (відповідно, слабонадкритичної) множини (M, w) з певним відношенням w на скінченній множині M .

З іншого боку, К.Рінгель в [1] ввів поняття графічної форми f_Γ переривчастого біграфа Γ , яка за визначенням є формою виду

$$f_\Gamma(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - x_0(x_1 + \dots + x_n) + \varphi_\Gamma(x_1, \dots, x_n),$$

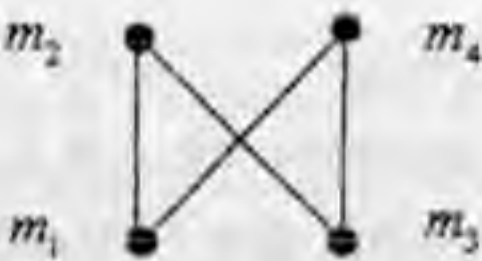
де φ_Γ – ціла форма, яка відповідає деякому переривчастому біграфу Γ , тобто біграфу на множині вершин $\{1, \dots, n\}$ без петель і кратних ребер, усі ребра якого – переривчасті (зауважимо, що переривчастий біграф насправді є графом).

Легко бачити, що квадратична форма f є графічною тоді і тільки тоді, коли вона є формою Тітса деякої скінченної множини M з антисиметричним відношенням (наприклад, відношенням часткового порядку). При цьому

власним підмножинам цієї множини (з індукованим з усієї множини M антисиметричним відношенням) відповідають лише такі власні підформи (графічної) форми Тітса $f = f_M$, в яких змінна x_0 , що відповідає центральній вершині відповідного f біграфа $\Gamma = \Gamma_f$ (яка з'єднана з усіма іншими вершинами суцільними ребрами) не прирівнюється нулю (надалі такі підформи графічної форми f ми будемо називати центральними). Відповідно, критичним (надкритичним) або слабокритичним (слабонадкритичним) множинам M з антисиметричним відношенням відповідають такі графічні форми $f_M = f_\Gamma$, які не є слабододатними (слабоневід'ємними) або додатньо визначеними (невід'ємно визначеними), але всі їх власні підформи, які не отримуються з f шляхом прирівнювання нулю «центральної» змінної x_0 вже такими будуть. Такі графічні форми ми будемо далі називати центрокритичними (центронадкритичними) або, відповідно, центрослабокритичними (центрослабонадкритичними). Очевидно, критичні (надкритичні) або слабокритичні (слабонадкритичні) графічні форми є, відповідно, центрокритичними (центронадкритичними) або центрослабокритичними (центрослабонадкритичними). Оскільки будь-яка підформа, що отримується з графічної форми шляхом прирівнювання нулю центральної змінної x_0 відповідає переривчастому біграфу, а отже, вона буде завжди слабододатньою, то у випадку звичайної критичності (надкритичності) вірне й обернене твердження, тобто будь-яка центрокритична (центронадкритична) графічна форма є просто критичною (відповідно, надкритичною) квадратичною формою.

Звідси випливає, що скінчена множина M з антисиметричним відношенням w є критичною (відповідно, надкритичною) тоді і лише тоді, коли відповідна графічна форма є критичною (відповідно надкритичною). Щодо питання слабкої критичності (слабої надкритичності) скінченої множини M з антисиметричним відношенням w , то умова слабкої критичності (відповідно, слабкої надкритичності) відповідної графічної форми є, взагалі кажучи, лише достатньою, але не необхідною ((наприклад, для чвм $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ з відношенням порядку: $m_1 < m_2, m_3 < m_4, m_1 < m_4, m_3 < m_2$, а інші пари (m_i, m_j) , де $i \neq j$ – не порівнювані: ця чвм є слабокритичною, але відповідна гра-

фічна форма не є такою: вона буде лише центрослабокритичною, але не слабокритичною формою.



К.Рінгель в роботі [1] отримав повний список критичних графічних форм та відповідних їм переривчастих біграфів (див. [1], table 2, p.13), який з точністю до ізоморфізму складається з шести форм (біграфів), п'ять з яких співпадають з біграфами критичних чвм з відомого списку М.Клейнера, а шоста форма, що відповідає переривчастому біграфу $c(4)$:



є критичною формою антисиметричного відношення (відношень), що не допускають часткового впорядкування.

Звідси легко отримати повний опис всіх критичних множин з антисиметричним відношенням (орієнтуючи всіма можливими способами переривчасті ребра біграфів Рінгеля).

Основна мета даної роботи – це дослідження будови та опис слабо критичних (слабонадкритичних) цілих квадратичних форм та скінчених множин з антисиметричним відношенням та їх редукування до відомих списків критичних (надкритичних) форм та множин.

Основним засобом цього є розроблений автором метод маятниковоподібної (або, скорочено, просто маятникової) еквівалентності біграфів цілих форм.

Нехай Λ – підкатегорія категорії біграфів цілих квадратичних форм, замкнена відносно операції переходу до повного підбіграфа. Перетворення $F: \Gamma \rightarrow \Gamma_A$ біграфа $\Gamma \in \Lambda$ у біграф $F(\Gamma) = \Gamma_A \in \Lambda$, де A – деяка підмножина множини Γ_0 вершин біграфа Γ (з множиною ребер Γ_1) назовемо маятниковоподібним (або, простіше маятниковим), якщо виконані наступні умови.

1. Перетворення біфункторіально залежить від Γ та A тобто погоджено з відповідними морфізмами біграфів (в категорії

1. Λ) та множин (в категорії множин).
2. Якщо A – порожня множина, то $\Gamma_{\bar{A}} = \Gamma$.
3. Якщо $B = \bar{A} = \Gamma_0 \setminus A$ – доповнення A в Γ_0 , то $\Gamma_{\bar{B}} = \Gamma_{\bar{A}}$.
4. Якщо для підмножини $M \subset \Gamma_0$ вершин будь-якого біграфа $\Gamma \in \Lambda$ позначити через $\Gamma(M) \in \Lambda$ повний підбіграф з вершинами з множини M , то $\Gamma_{\bar{A}}(A) = \Gamma(A)$, $\Gamma_{\bar{A}}(B) = \Gamma(B)$ (де $B = \bar{A} = \Gamma_0 \setminus A$).
5. Якщо $A \subset \Gamma_0$ та $B \subset \Gamma_0$ – будь-які дві множини вершин біграфа Γ , то $(\Gamma_{\bar{A}})_{\bar{B}} = \Gamma_C$, де $C = A \Delta B$ – симетрична різниця множин A та B (доповнення їх перетину в їх об'єднанні).
6. Перетворення $F: \Gamma \rightarrow \Gamma_{\bar{A}}$ є інволютивним (маятниковим), тобто $(\Gamma_{\bar{A}})_{\bar{A}} = \Gamma$.

При цьому множина вершин $A \subset \Gamma_0$ та розбиття $\Gamma_0 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ ($B = \bar{A} = \Gamma_0 \setminus A$) множини вершин Γ_0 біграфа Γ для даної маятникової еквівалентності називаються визначальними.

Наведемо два важливих випадки маятникового перетворення. Очевидно, нам достатньо лише вказати як змінюються зв'язки між вершинами з множини $A \subset \Gamma_0$ та її доповнення $B = \bar{A} = \Gamma_0 \setminus A$.

1. $(+, -)$ - перетворення біграфів:

$F^{(+,-)}: \Gamma \rightarrow \Gamma_{\bar{A}^{(+,-)}}$. В цьому випадку $\Gamma_{\bar{A}^{(+,-)}}$ одержується з Γ шляхом заміни всіх ребер, що сполучають вершини з A з вершинами з $B = \bar{A}$ на протилежні (суцільні – на переривчасті і навпаки, переривчасті – на суцільні), а інші зв'язки між вершинами (в середині A та B) не змінюються.

2. $(0, 1)$ - перетворення біграфів в категорії біграфів множин з антисиметричним відношенням (тобто переривчастих біграфів).

$$F^{(0,1)}: \Gamma \rightarrow \Gamma_{\bar{A}^{(0,1)}}$$

В цьому випадку $\Gamma_{\bar{A}^{(0,1)}}$ одержується з Γ шляхом наступної зміни зв'язків між вершинами A та $B = \bar{A}$: вершини $P \in A$ та $Q \in B$ сполучаються в $\Gamma_{\bar{A}^{(0,1)}}$ (переривчастим) ребром тоді і лише тоді, коли вони несполучені в Γ (інші зв'язки, т.т. зв'язки в середині A та B звичайно лишаються без змін). Наприклад, $(\min, \max)$ - еквівалентність частково впорядкованих множин в сенсі роботи В.М.Бондаренка [10] задає $(0, 1)$ - еквівалентність відповідних переривчастих біграфів (в якості підмножини A вершин біграфа треба взяти одноелементну множину, що складається з однієї вершини біграфа, яка відповідає мінімальному чи максимальному елементу чвм).

Легко бачити, що маятникові перетворення, зокрема $(+, -)$ - та $(0, 1)$ - перетворення задають відношення еквівалентності. Тому можна говорити про маятникову еквівалентність і, зокрема, про $(+, -)$ - та $(0, 1)$ - еквівалентність на відповідних множинах біграфів.

Теорема 1. $(+, -)$ - перетворення біграфів Γ відповідає певному лінійному цілочисельному перетворенню відповідних цілих квадратичних форм, а $(0, 1)$ - перетворення переривчастих біграфів Γ відповідає певному лінійному цілочисельному перетворенню відповідних графічних форм f_{Γ} (ці перетворення та пов'язані з ними еквівалентності ми далі будемо називати $(+, -)$ - та, відповідно, $(0, 1)$ - перетвореннями і еквівалентностями цілих та, відповідно, графічних форм).

Доведення. Нехай $A \subset \Gamma_0$ - визначальна підмножина множини Γ_0 вершин біграфа Γ цілої квадратичної форми $f = f_{\Gamma}$. Тоді легко бачити, що біграф $\Gamma' = \Gamma_{\bar{A}^{(+,-)}}$ є біграфом відповідної йому цілої квадратичної форми

$$f' = f_{\Gamma'}(x_1, \dots, x_n),$$

де $f'(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(T_{\bar{A}^{(+,-)}}^{-1}(\bar{x}))$ одержується з f за допомогою наступного невідродженого цілочисельного лінійного перетворення простору R^n :

$$T_{\bar{A}^{(+,-)}}(\bar{x}) = \bar{x}' = (x'_1, \dots, x'_n), x'_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_i, & i \in A, \\ -x_i, & i \in \bar{A}. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, $T_{\bar{A}^{(+,-)}}^2 = 1_{R^n}$ - є тотожне перетво-

рення, тобто $T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}$ є інволюцією, а отже $T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}^{-1} = T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}$, тому фактично

$$f'(\bar{x}) = f(T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}^{-1}(\bar{x})) = f(T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}(\bar{x})) = f(\bar{x}'),$$

тобто f' одержується з f за допомогою цілочисельної лінійної заміни змінних (згідно формул (1)).

В разі, якщо Γ - переривчастий біграф, а $f = f_{\Gamma}$ - відповідна йому графічна форма, то нескладно перевірити, що відповідною біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}$ графічною формою

$$f' = f_{\Gamma'}(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

є форма

$$f'(x_0, x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f(\bar{x}) = f(T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}^{-1}(\bar{x})),$$

яка отримується з форми f шляхом наступного лінійного цілочисельного невід'ємного перетворення (далі для зручності ми вважаємо $x_0' \stackrel{\text{def}}{=} x_0$):

$$T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}(\bar{x}) = \bar{x}' = (x_0', x_1', \dots, x_n'),$$

де

$$x_0' = x_0 + \sum_{i \in A} x_i' \quad \text{та} \quad x_i' = x_i' \quad (\text{при } 1 \leq i \leq n) \quad (2)$$

(де x_i' визначаються згідно (1)), тобто, остаточно,

$$x_0' = x_0 - \sum_{i \in A} x_i, \quad x_i' = \begin{cases} -x_i, & i \in A \subset \{1, \dots, n\} \\ x_i, & i \notin A, 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3).$$

Зауважимо, що перетворення (2) є суперпозицією (добутком) (додатніх) малих приведення (перетворень Габрієлова) тобто таких приведення T_{0i} переривчастих ребер біграфа, відповідного цілій формі $f' = f(x_0', x_1', \dots, x_n')$, які сполучають вершину, відповідну x_0' з вершинами, відповідними тим x_i' , для яких $i \in A$ в напрямку від x_0' до x_i' . Таким чином, (0,1) перетворення $T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}$ графічної форми є суперпозицією (+,-) перетворення $T_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}$, тобто заміни знаків змінних, що відповідають вершинам з визначальної множини A (згідно формули (1)) та приведення переривчастих ребер від центральної вершини (відповідної змінній x_0') в на-

прямку до вершин відповідних змінним x_i' з визначальної множини вершин A (згідно формул (2)). Таким чином, перетворення $T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}$ є суперпозицією інволютивних перетворень ((+,-) перетворення та перетворень Габрієлова), а отже само є інволютивним, тобто $T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}^2 = 1_{\mathcal{R}}$, звідки $T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}^{-1} = T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}$. Тому фактично

$$\begin{aligned} f'(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= f'(\bar{x}) = f(T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}^{-1}(\bar{x})) = f(T_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}(\bar{x})) = \\ &= f(\bar{x}') = f(x_0', \dots, x_n') \end{aligned}$$

тобто f' одержується з f за допомогою цілочисельної лінійної заміни змінних згідно формул (1) і (2), або в остаточному вигляді, згідно формул (3).

Наслідок. (+,-) та (0,1) - еквівалентності зберігають властивості додатної та відповідно, невід'ємної визначеності відповідних біграфам цілих та, відповідно, графічних форм.

Лема 1. Нехай f - ціла квадратична форма, Γ - відповідний їй біграф. Тоді

1. Якщо форма $f' = f_{\Gamma'}$ одержується з f , шляхом (+,-) перетворення (тобто f' відповідає біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\tilde{\lambda}^{(+,-)}}$ для деякої визначальної множини вершин $A \subset \Gamma_0$ біграфа Γ), то f' є слабо критичною (відповідно, слабонадкритичною) тоді і тільки тоді, коли такою ж є і вихідна форма f .
2. Якщо $f = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ - графічна форма (в якій центральній вершині біграфа Γ відповідає змінна x_0), а форма $f' = f_{\Gamma'}$ одержується з f шляхом (0,1) перетворення (тобто f' відповідає біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\tilde{\lambda}^{(0,1)}}$ для деякої визначальної множини вершин $A \subset \Gamma_0$ біграфа Γ), то f' є центрослабокритичною (відповідно, центрослабонадкритичною) тоді і тільки тоді, коли такою ж є і вихідна форма f .

Доведення. З наслідку теореми 1 випливає, що форма f не є додатньо (відповідно, невід'ємно) визначеною тоді і тільки тоді, коли

такими ж будуть форми f' та f'' .

Що ж до збереження знаковизначеності (або її відсутності) власних підформ (відповідно, власних центральних підформ) в разі (0,1) перетворення графічної форми f згідно п.2 леми, то зауважимо наступне. Позначимо $U' = R^n|_{x_i=0}$ - власні підпростори простору R^n корозмірності 1 та $f' = f|_{U'} = f|_{x_i=0}$ відповідні їм власні підформи форми f . Тоді з явного вигляду формул (1) та відповідно, (3) для $T_{\lambda^{(i-1)}}$ та, відповідно, для $T_{\lambda^{(i)}}$ випливає, що всі підпростори U_i (відповідно, всі підпростори U_i окрім, можливо, U_0), є інваріантними підпросторами лінійних перетворень $T_{\lambda^{(i-1)}}$ та, відповідно, $T_{\lambda^{(i)}}$, тобто $T_{\lambda^{(i-1)}}U' \subset U'$ та, відповідно $T_{\lambda^{(i)}}U' \subset U'$ (останнє включення виконане при умові, що $i \neq 0$). Але оскільки $T_{\lambda^{(i-1)}}$ та $T_{\lambda^{(i)}}$ - невироджені, а усі підпростори U' - скінченновимірні, то, насправді, $T_{\lambda^{(i-1)}}U' = U'$ та $T_{\lambda^{(i)}}U' = U'$ (останнє при $i \neq 0$). Звідси випливає, що якщо ми позначимо $f(U_i), f'(U_i)$ та $f''(U_i)$ відповідно, множини всіх значень відповідних власних підформ f', f'', f''' на ненульових векторах, то одержимо:

$$\begin{aligned} f'(U_i) &= \{f(T_{\lambda^{(i-1)}}\bar{x} | \bar{x} \neq 0, \bar{x} \in U_i) = \\ &= \{f(\bar{x}) | \bar{x} \neq 0, \bar{x} \in U_i\} = \\ &= f(U_i) \end{aligned}$$

а також при $i \neq 0$ ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} f''(U_i) &= \{f(T_{\lambda^{(i)}}\bar{x} | \bar{x} \neq 0, \bar{x} \in U_i) = \\ &= \{f(\bar{x}'') | \bar{x}'' \neq 0, \bar{x}'' \in U_i\} = \\ &= f(U_i) \end{aligned}$$

Отже, знаковизначеність (додатня, невід'ємна) або її відсутність власних підформ (відповідно, власних центральних підформ) форми f зберігається при переході від f до f' (відповідно, від f до f''), що завершує доведення леми!

Теорема 2. Ціла квадратична форма є слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною) тоді і тільки тоді коли відповідний їй біг-

граф $\Gamma \in (+, -)$ - еквівалентним біграфу Γ_{λ} деякої цілої критичної (відповідно, надкритичної) квадратичної форми (для деякої множини A вершин біграфа Γ).

Доведення. Нехай f - ціла квадратична форма, Γ - відповідний їй біграф з множиною вершин Γ_0 . Якщо f - слабокритична (відповідно, слабонадкритична), то $f(\bar{a}) \leq 0$ (відповідно, $f(\bar{a}) < 0$) для деякого ненульового вектора $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ (такі вектори ми будемо надалі називати слабокритичними (відповідно, слабонадкритичними) для даної форми f). Позначимо через A - множину вершин біграфа Γ , які відповідають від'ємним координатам вектора $\bar{a}$ (якщо таких немає, то A буде порожньою). Тоді, якщо позначити через $\bar{a}' = (a'_1, \dots, a'_n)$ вектор з координатами, отриманими згідно лінійному перетворенню (1), тобто вектор з координатами:

$$a'_i = \begin{cases} a_i, i \in A \\ -a_i, i \in A^c \end{cases}$$

то $\bar{a}'$ буде ненульовим вектором з невід'ємними координатами, для якого

$$\begin{aligned} f'(\bar{a}') &= f(T_{\lambda^{(i-1)}}^{-1}\bar{a}') = \\ &= f(T_{\lambda^{(i-1)}}^{-1}(T_{\lambda^{(i-1)}}\bar{a})) = f(\bar{a}) \leq 0 \end{aligned}$$

(відповідно, $f'(\bar{a}') < 0$), де $f' = f'_{\Gamma'}$ - ціла форма, відповідна біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\lambda^{(i-1)}}$ (вектори з такими властивостями будемо в подальшому називати критичними (відповідно, надкритичними) для даної квадратичної форми f'). Отже, форма f' не є слабо додатною (відповідно слабо невід'ємною). При цьому згідно леми 1 власні підформи форми f' , очевидно, лишаються додатньо (відповідно, невід'ємно) визначеними, як і власні підформи форми f . Тим більше, ці власні підформи форми f' будуть слабо додатними (відповідно, слабо невід'ємними). Отже, форма $f' = f'_{\Gamma'}$, що відповідає біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\lambda^{(i-1)}}$, буде критичною (відповідно, надкритичною) цілою формою.

Щоб довести теорему 2 у зворотній бік знадобиться наступна лема, яка пояснює походження введеного в цій статті терміну слабокритична (слабонадкритична) для квадратичної форми.

Лема 2. Будь-яка критична (відповідно, надкритична) форма f є одночасно і слабо-критичною (відповідно, слабонадкритичною) квадратичною формою.

Ця обставина і пояснює термін слабокритична (відповідно, слабонадкритична).

Доведення. Якщо f - критична (відповідно, надкритична), то вона не є слабододатньою (слабоневід'ємною), і тому тим більше не є додатньо (відповідно, невід'ємно) визначеною. Таким чином залишається довести, що всі власні підформи форми f є не лише слабододатніми (відповідно, слабоневід'ємними), а й насправді додатньо (відповідно, невід'ємно) визначеними. Але цей факт добре відомий і був доведений автором в роботі [5], а також безпосередньо впливає з леми роботи автора [12, с. 135] про те, що для будь-якої квадратичної форми $F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_n)$ з дійсними коефіцієнтами з того, що $F(\vec{a}) \leq 0$ (відповідно, $F(\vec{a}) < 0$) для деякого точного додатного вектора $\vec{a}$ (тобто вектора з додатними координатами) та $F(\vec{b}) \leq 0$ для деякого вектора $\vec{b}$ з координатами b_1, b_2 різних знаків ($b_1 \cdot b_2 < 0$) впливає, що також $F(\vec{c}) \leq 0$ (відповідно, $F(\vec{c}) < 0$) для деякого неточного додатного вектора $\vec{c}$ (тобто ненульового вектора з невід'ємними координатами, серед яких не всі додатні, тобто є хоча б одна нульова координата). Іншими словами, ця лема з [12, с.135] стверджує, що критична (відповідно надкритична) квадратична форма F на векторах $\vec{b}$ з координатами різних знаків приймає лише додатні значення. Дійсно, ми можемо вважати (без обмеження загальності), що $(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$, де $(\cdot, \cdot)$ - симетрична білінійна форма, асоційована з F (інакше замінимо $\vec{b}$ на $-\vec{b}$). Тоді, для $\lambda = \min\{a_i b_i^{-1} | b_i > 0\}$ очевидно маємо: $\lambda > 0$, вектор $\vec{c} = \vec{a} - \lambda \vec{b}$ - додатний і неточний, причому

$$f(\vec{c}) = f(\vec{a}) - 2(a, b)\lambda + F(b)\lambda^2 \leq f(\vec{a}),$$

звідки $f(\vec{c}) \leq 0$ (відповідно, $f(\vec{c}) < 0$).

Таким чином, лема 2 доведена.

Доведемо тепер теорему 2 у зворотний бік.

Навпаки, нехай для деякої множини $A \subset \Gamma_0$ вершин біграфа Γ цілої форми f форма $f' = f_{\Gamma'}$, що відповідає біграфу $\Gamma' = \Gamma_{\bar{A} \cup \{i\}}$ є критичною (відповідно, надкритичною). Тоді згідно леми 2 f' є слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною).

Тому згідно леми 1 такою ж буде і форма f , що й вимагалось.

Теорема 3. Скінчена множина M з антисиметричним відношенням w є слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною) тоді і лише тоді, коли відповідний їй біграф $\Gamma \in (0, 1)$ - еквівалентним (переривчастому) біграфу деякої критичної (відповідно, надкритичної) множини з деяким антисиметричним відношенням (зокрема, у випадку критичності $\Gamma \in (0, 1)$ - еквівалентним одному з шести вищевказаних переривчастих біграфів Рінгеля).

Доведення. Нехай $f = f_w = f(x_0, \dots, x_n)$ - форма Тітса антисиметричного відношення w на множині M , тобто графічна форма переривчастого біграфа Γ , що відповідає відношенню w на множині $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ (i з'єднано з j переривчастим ребром т. і т.т., коли $m_i w m_j$ або $m_j w m_i$, $1 \leq i, j \leq n$). Якщо f - слабокритична (відповідно, слабонадкритична), то для неї існує слабокритичний /відповідно, слабонадкритичний/ вектор, тобто для деякого ненульового вектора $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $f(\vec{a}) \leq 0$ (відповідно, $f(\vec{a}) < 0$). Очевидно, можна без втрати загальності вважати, що $a_0 \geq 0$ (інакше замінимо $\vec{a}$ на $-\vec{a}$). Позначимо через A множину тих вершин переривчастого біграфа Γ , відповідні яким координати вектора $\vec{a}$ є від'ємними (якщо таких нема, то A буде порожньою множиною). Покладемо $\vec{a}^* = (a_0^*, \dots, a_n^*)$, де координати a_i^* визначаються за допомогою лінійного перетворення (3), тобто

$$a_0^* = a_0 - \sum_{i \in A} a_i,$$

$$a_i^* = \begin{cases} -a_i, & i \in A \subset \{1, \dots, n\} \\ a_i, & i \in A, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Тоді, очевидно, вектор $\vec{a}^*$ є ненульовим і має лише невід'ємні координати. При цьому

для переривчастого біграфа $\Gamma = \Gamma_{\lambda^{(0,1)}}$ і відповідної йому графічної форми $f = f_{\Gamma}$ маємо:

$$\begin{aligned} f^*(\vec{a}^*) &= f(T_{\lambda^{(0,1)}}^{-1} \vec{a}^*) = \\ &= f(T_{\lambda^{(0,1)}}^{-1} (T_{\lambda^{(0,1)}} \vec{a})) = f(\vec{a}), \end{aligned}$$

звідки $f^*(\vec{a}^*) \leq 0$ (відповідно, $f^*(\vec{a}^*) < 0$). Отже, вектор $\vec{a}^*$ буде критичним (відповідно, надкритичним) для форми f^* , а значить, форма f^* не є слабо додатною (відповідно слабо невід'ємною). З іншого боку, всі власні центральні підформи форми f^* , які відповідають власним підмножинам множини M з антисиметричним відношенням w (тобто підформи $f^*|_{x_i=0}$ для $1 \leq i \leq n$), залишаються додатньо (відповідно, невід'ємно) визначеними, як і власні центральні підформи форми f (що випливає з леми 1). Тим більше, ці власні центральні підформи форми f^* будуть слабо додатними (відповідно, слабо невід'ємними). Отже, графічна форма f^* буде центрокритичною /відповідно, центронадкритичною/, а, значить, множина M з будь-яким відношенням w^* , що відповідає Γ^* , буде критичною (відповідно, надкритичною).

Навпаки, нехай для деякої множини $A \subset \Gamma_0$ вершин біграфа Γ_0 біграф $\Gamma^* = \Gamma_{\lambda^{(0,1)}}$ відповідає критичній (відповідно, надкритичній) множині з деяким антисиметричним відношенням w^* . Тоді відповідна w^* форма Тітса

$$f^* = f_{\Gamma^*}(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

яка є графічною формою переривчастого біграфа Γ^* , є центрокритичною (відповідно, центронадкритичною) а тому, вона насправді, як вже зазначалося, буде критичною (відповідно, надкритичною) цілою формою, а отже, згідно леми 2 f^* є слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною) цілою формою. Тому f^* є тим більше центрослабокритичною (відповідно, центрослабонадкритичною) графічною формою. Але ж тоді такою ж (тобто центрослабокритичною (відповідно, центрослабонадкритичною)) згідно леми 1 буде і вихідна форма $f = f_w$, тобто (M, w) є слабокритичною.

Теорема 4. Будь-яка слабокритична (слабонадкритична) графічна форма $f = f_{\Gamma}$ з відповідним їй біграфом $\Gamma \in (0,1)$ - еквівалент-

ною деякій графічній критичній (відповідно, надкритичній) цілій квадратичній формі $f^* = f_{\Gamma^*}$, $\Gamma^* = \Gamma_{\lambda^{(0,1)}}$ для деякої визначальної множини вершин $A \subset \Gamma_0$ біграфа Γ .

Навпаки, для будь-якої критичної (надкритичної) графічної форми $f^* = f_{\Gamma^*}$ $(0,1)$ - еквівалентна їй графічна форма $f = f_{\Gamma}$, $\Gamma = \Gamma_{\lambda^{(0,1)}}$ з визначальною множиною вершин A буде слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною) тоді і лише тоді, коли у f^* не існує критичного (відповідно, надкритичного) вектора $\vec{a}^* = (a_0^*, \dots, a_n^*)$, для якого б

$$a_0^* = \sum_{i \in A} a_i^* \quad (4).$$

У випадку критичності форми f^* ця умова рівносильна тому, що суми координат мінімального додатного цілочисельного радикального вектора, які відповідають визначаючим $(0,1)$ еквівалентності підмножинам вершин $A \subset \Gamma_0 = \Gamma_0^*$ та $B = \bar{A} = \Gamma_0^* \setminus A$, що утворюють розбиття множини вершин $\Gamma_0^* = \Gamma_0$ переривчастого біграфа Γ^* форми f^* (який належить списку Рінгеля ([1], table 2, p. 13) з вказаним під кожним біграфом відповідним йому таким вектором) - не дорівнюють між собою.

Доведення. Якщо графічна форма f є слабокритичною (слабонадкритичною), то вона тим більше є центрослабокритичною (відповідно, центрослабонадкритичною), а тому згідно теореми 3 $f \in (0,1)$ еквівалентною деякій центрокритичній (відповідно, центронадкритичній) графічній формі f^* . Але ж, як вже зазначалося вище, будь-яка центрокритична (центронадкритична) графічна форма автоматично буде насправді критичною (відповідно, надкритичною). Отже, f^* насправді буде критичною (відповідно, надкритичною) і теорема 4 в один бік доведена.

Навпаки, нехай деяка графічна форма f^* , що є $(0,1)$ еквівалентною вихідній графічній формі f , є критичною (відповідно, надкритичною). Тоді тим більше f^* буде центрокритичною (відповідно, центронадкритичною), а отже згідно теореми 3 вихідна графічна форма f буде центрослабокритичною (відповідно, центрослабонадкритичною). Отже, питання зводиться до наступного: при яких умовах

центрослабокритична (відповідно, центрослабонадкритична) графічна форма f буде слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною)? Очевидно, що центрослабокритична (центрослабонадкритична) графічна форма f буде, насправді, слабокритичною (відповідно, слабонадкритичною) тоді і лише тоді, коли для неї не існує слабокритичного (відповідно, слабонадкритичного) вектора $\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)$, причому такого, який би задовольняв умові: $\vec{a} \in U^0$, тобто $a_0 = 0$. Але ця умова рівносильна тому, що у критичної (відповідно, надкритичної) форми $f'' = f(T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}} \vec{x})$ (де A – деяка визначальна для $(0,1)$ -еквівалентності підмножина множини Γ_0 вершин переривчастого біграфа $\Gamma = \Gamma_f$) не існує вектора

$$\vec{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n) = T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}} \vec{a},$$

причому такого, для якого б $T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}}^{-1} \vec{b} \in U^0$, або, що те ж саме (в силу інволютивності $T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}}$), для котрого б $T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}} \vec{b} \in U^0$, тобто

$$a_0 = b_0 - \sum_{i \in A} b_i = 0.$$

Але ж

$$f''(\vec{b}) = f(T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}}^{-1} \vec{b}) = f(T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}}^{-1} (T_{\vec{\lambda}^{(0,1)}} \vec{a})) = f(\vec{a}),$$

звідки $f''(\vec{b}) \leq 0$ (відповідно $f''(\vec{b}) < 0$). Тому, згідно вищенаведеної леми з [12, с.135] для критичної (відповідно надкритичної) форми f'' вектор $\vec{b}$ не може мати координати різних знаків. Отже, з точністю до знаку, $\vec{b} \in U^0$ є точним додатним вектором, тобто $\vec{b} = \pm \vec{a}''$ для деякого критичного (відповідно надкритичного) для f'' вектора $\vec{a}'' = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, звідки й випливає умова (4) теореми 4.

У випадку критичності f' ми без обмеження загальності міркувань можемо вважати, що число змінних $n+1$ форми f' більше двох (інакше, очевидно, графічна форма f' не може бути критичною). Але тоді згідно теореми С. Овсієнка ([4]) f' є невід'ємно визначеною з одновимірним радикалом (ядром) породженим деяким мінімальним радикальним цілочисельним вектором з додатними координатами $\vec{r} = (r_0, \dots, r_n)$, звідки випливає, що будь-який критичний для f' вектор $\vec{a}'' \in \text{Ker } f'$ є радикальним

($\vec{a}'' \in \text{Ker } f'$) і є пропорційним вектору $\vec{r}$: $\vec{a}'' = \lambda \vec{r}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$. З радикальності вектора $\vec{a}''$ зокрема, випливає, що $(\vec{a}'', \vec{e}_0) = 0$ (де $(\cdot, \cdot)$ позначає симетричну білінійну форму, асоційовану з квадратичною формою f' , а $\vec{e}_0$ – базовий вектор канонічної бази R^n , який відповідає змінній x_0 форми f'). Як легко перевірити, остання рівність для графічної форми f' еквівалентна наступному співвідношенню для координат вектора $\vec{a}''$:

$$a_0'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i'' \quad (5)$$

Але ж тоді умова (4), очевидно, рівносильна тому, що

$$\sum_{i \in A} a_i'' = \sum_{j \in B} a_j'' \quad (6)$$

(де $B = \{1, \dots, n\} \setminus A = \bar{A}$, тобто B є доповненням A в множині вершин Γ_0 переривчастого біграфа, відповідного графічній формі f'').

Враховуючи, що $\vec{a}'' = \lambda \vec{r}$, умову (6) достатньо перевірити лише для випадку, коли $\vec{a}'' = \vec{r} = (r_0, \dots, r_n)$, тобто перевірити, що

$$\sum_{i \in A} r_i = \sum_{j \in B} r_j \quad (7),$$

що й завершує доведення теореми 4.

Наведені результати узагальнюють та прояснюють результати Бондаренка та Стюпочкіної [10,11]. До того ж, розроблені методи дозволяють одночасно вивчити будову та отримати опис не тільки слабокритичних, а й слабонадкритичних цілих форм (зокрема, графічних) та множин з антисиметричним відношенням (зокрема, чвм).

Список використаних джерел

1. C.M. Ringel, Tame algebras and integral quadratic forms. Lecture Notes in Mathematics 1099, Springer, Berlin.
2. H.J. v. Hohnе, "On weakly positive unit forms", comment. Math. Helv. 63 (1988), 312-336.

3. H. J. v. Hohnе, "On weakly non-negative unit forms and tame algebras", Proc. London Math. Soc. 73 (1996), 47-67.
4. С.А. Овсиенко «Целые слабоположительные формы». Сборник трудов института математики «Шуровские матричные задачи и квадратичные формы» Киев, 1978, с.3-17.
5. M.V. Zeldich "Integral critical and hypercritical quadratic forms" Communications in algebra, vol. 22 № 9, 1994, pp. 3629-3634.
6. Клейнер М.М. Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. Научн. Семинаров ЛОМИ АН СССР, 1972, 28.-с. 32-42.
7. Дрозд Ю.А. Преобразование Коксетера и представления частично упорядоченных множеств. Функциональный анализ и его приложения, 1972, 8 № 3 с.34-42.
8. Назарова Л.А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. ИАН СССР, сер. Матем.-1977, 39 № 5 с. 963-991.
9. Завадский А.Г., Назарова Л.А. «Частично упорядоченные множества ручного типа».-В кн.. Матричные задачи, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977.-с. 122-143.
10. В.М. Бондаренко «Про (min, max) - еквівалентність ч.в. множин та її застосування до форм Тітса» Вісник Київського Університету (серія: фізико-математичні науки), 2005 № 1 с. 11-13.
11. В.М. Бондаренко, М.В. Стёпочкина, «(min, max) – эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса». Труды института математики НАН Украины, 2005 том 2, № 3 с. 18-58.
12. М.В. Зельдич «Критерий слабой положительности квадратичных форм». Сборник трудов института математики «Линейная алгебра и теория представлений», Киев, 1983 г., с. 135-137

Надійшла до редакції 20.10.2007

УДК 512.544

Леонід А. Курдаченко, проф.
Надія А. Турбай, асп.

FC-групи, в яких умова S-переставності транзитивна.

Вивчаються деякі важливі властивості S-переставності в нескінчених періодичних FC-групах.

Ключові слова: S-переставність, періодичні FC-групи, PST-група, локально нільпотентний резидуал групи.

E-mail: nadezhda.turbay@gmail.com

Нехай G – періодична група і π – підмножина $\Pi(G)$. Відповідно О. Кегелю [1], підгрупу H групи G будемо називати π -переставною (або π -квазінормальною) в G , якщо для кожного $p \in \pi$ і кожної силовської p -підгрупи S групи G має місце наступна рівність $HS = SH$ (при цьому, якщо $\pi = \emptyset$, тоді $\langle 1 \rangle$ – єдина π -підгрупа G і кожна підгрупа G буде π -переставною).

Підгрупа H групи G називається S -переставною (або S -квазінормальною) в G , якщо H – π -переставна для $\pi = \Pi(G)$.

S -квазінормальність є достатньо широким узагальненням звичайної квазінормальності. О.Кегель показав [1, теорема 1], що будь-яка S -переставна підгрупа скінченої групи є субнормальною. Звідси випливає, що скінчена група тоді і тільки тоді нільпотентна, коли будь-яка її підгрупа S -переставна. Цей результат показує, що S -переставні підгрупи істотно впливають на будову скінченої групи. В теорії скінчених груп цей вплив вивчався багатьма авторами з різних точок зору. Щодо нескінчених груп, то досі S -переставні підгрупи в них не вивчалися. Це зумовлено наступними обставинами. По-перше, саме означення показує, що S -переставні підгрупи має сенс вивчати тільки в періодичних групах. По-друге, вивчення S -переставних підгруп може бути ефективне лише за умови існування в групі розвинутої силовської структури. Одним з таких класів нескінчених груп є періодичні FC-групи (локально нормальні групи). На цей клас груп розширені всі основні результати теорії скінчених груп, зокрема, для нього мають місце аналоги силовських і холловських теорем. В цій роботі починається вивчення деяких важливих властивостей S -переставності в нескінчених періодичних FC-групах.

Leonid A. Kurdachenko, Prof.
Nadia A. Turbay, PhD student

FC-groups in which the S-permutation condition is transitive.

Some important properties of S-permutation in periodic FC-groups are studied.

Key words: S-permutation, periodic FC-groups, PCT-group, local nilpotent residual of a group.

Група G називається PST-групою, якщо S -переставність є транзитивним відношенням в G , тобто з того факту, що H – S -переставна в G і K – S -переставна в H , завжди випливає, що K буде S -переставною підгрупою в G . З самого означення випливає, що будь-яка S -переставна підгрупа PST-групи сама буде PST-групою, зокрема, такою буде будь-яка нормальна підгрупа G .

Будова скінчених розв'язних PST-груп була досліджена в роботі Р.К. Агравала [2]. Різні важливі властивості скінчених розв'язних PST-груп були отримані в наступних цікавих роботах іспанських математиків [3, 4, 5]. В цій роботі починається вивчення нескінчених PST-груп. А саме, головний результат роботи [2] розширений в ній на клас нескінчених періодичних локально розв'язних FC-груп.

Наступна лема була доведена в статі [1, лема 3] для випадку скінчених груп. Однак без будь-яких змін її доведення переноситься і на випадок довільних груп.

Лема 1. Нехай G – група і H – її підгрупа. Якщо H містить в собі підгрупу L , яка π -переставна в G , тоді L буде і π -переставною в H .

Лема 2. Нехай G – періодична FC-група і L – її нормальна підгрупа. Якщо H – π -переставна підгрупа G , тоді HL/L буде π -переставною в G/L .

Доведення. Насправді, нехай p – довільне просте число з множини π і нехай S/L – довільна силовська p -підгрупа фактор-групи G/L . Тоді існує силовська p -підгрупа P групи G для якої $PL/L = S/L$ (наприклад, [6, теорема 5.4]). З умови отримуємо, що $HP = PH$, а тому маємо $(HL/L)S/L = (HL/L)(PL/L) = ((HP)L/L) = ((PH)L/L) = (PL/L)(HL/L) = (S/L)(H/L)$. Це і означає, що HL/L буде π -переставною в G/L .

Наслідок 1. Нехай G – періодична FC-група і L – її нормальна підгрупа. Якщо H – S -пере-

ставна підгрупа G , тоді HL/L – S -переставна в G/L .

Наслідок 2. Нехай G – періодична FC -група, L – її нормальна підгрупа і H -підгрупа, що містить L . Підгрупа H тоді і тільки тоді буде S -переставною в G , коли H/L – S -переставна в G/L .

Доведення. Якщо H – S -переставна в G , тоді H/L буде S -переставною в G/L згідно наслідку 1. Навпаки, нехай H/L – S -переставна в G/L . Виберемо довільне просте число p і нехай P – силовська p -підгрупа G . Тоді PL/L – силовська p -підгрупа G/L (наприклад, [6, теорема 5.4]). Для будь-яких елементів $h \in H$, $x \in P$ відповідно умов наслідку будемо мати $hxL = hL xL = yL uL = yuL$, для деяких елементів $y \in P$, $u \in H$. Звідси $hx = yu$ для деякого $y \in L$. Включення $L \leq H$ показує, що $uv \in H$. Таким чином, $HP = PH$. Це і означає, що H – S -переставна в G .

Лема 3. Нехай G – періодична FC -група і L – її скінчена нормальна підгрупа. Якщо H – π -переставна підгрупа G , тоді $H \cap L$ буде π -переставною підгрупою в L .

Доведення. Так як L – скінчена, індекс $|HL : H|$ також скінчений. Тому H містить в собі HL -інваріантну підгрупу K скінченного індексу. Згідно леми 1 H буде π -переставною підгрупою в HL . Лема 2 показує, що H/K є π -переставною підгрупою в HL/K . З леми 4 роботи [1] отримуємо, що $(H/K) \cap (LK/K) = (H \cap LK)/K = (H \cap L)K/K$ буде π -переставною підгрупою в LK/K . Але тоді $(H \cap L)/(K \cap L) = (H \cap L)/(H \cap L \cap K) \cong (H \cap L)K/K$ буде π -переставною підгрупою в $L/(K \cap L) \cong LK/K$. Так як підгрупа $L \cap K$ нормальна в L , то звідси випливає, що $H \cap L$ – π -переставна підгрупа в L .

Твердження 1. Нехай G – періодична FC -група и $\mathcal{L}$ – її локальна родина скінчених нормальних підгруп. Підгрупа H тоді і тільки тоді є π -переставною в G , коли $H \cap L$ буде π -переставною підгрупою в L для кожної $L \in \mathcal{L}$.

Доведення. Якщо H – π -переставна підгрупа в HL , тоді з леми 3 отримуємо, що $H \cap L$ є π -переставною підгрупою в L для кожної скінченої нормальної підгрупи L , і зокрема, для кожної підгрупи $L \in \mathcal{L}$. Доведемо достатність. Нехай S – силовська p -підгрупа G , $p \in \pi$, $h \in H$, $g \in S$. Існує підгрупа $L \in \mathcal{L}$, для якої $h, g \in L$. Зокрема, $h \in H \cap L$, $g \in S \cap L$. Перетин $S \cap L$ буде силовською p -підгрупою в L (наприклад, [6, теорема 5.4]). З умови отримуємо, що $(H \cap L)(S \cap L) = (S \cap L)(H \cap L)$, а значить, $hg = uh$ для деяких елементів $u \in S \cap L$, $v \in H \cap L$. Отже $hg = uv$, де $u \in S$, $v \in H$, звідки

випливає включення $HS \subseteq SH$. Зворотне включення доводиться аналогічно, так що маємо рівність $HS = SH$. Це і значить, що H буде π -переставною підгрупою в G .

Наслідок 1. Нехай G – періодична FC -група і $\mathcal{L}$ – її локальна родина скінчених нормальних підгруп. Підгрупа H тоді і тільки тоді буде S -переставною в G , коли $H \cap L$ буде S -переставною підгрупою в L для будь-якої $L \in \mathcal{L}$.

Наслідок 2. Нехай G – періодична FC -група. Якщо підгрупа H – S -переставна в G , тоді H буде висхідною підгрупою в G .

Доведення. Нехай $\mathcal{L}$ – локальна родина скінчених нормальних підгруп групи G . З наслідку 1 отримуємо, що $H \cap L$ є S -переставною підгрупою в L для будь-якої підгрупи $L \in \mathcal{L}$. З теореми 1 роботи [1] випливає, що $H \cap L$ субнормальна в L . Але тоді H – висхідна підгрупа G (наприклад, [6, теорема 1.12]).

Наслідок 3. Нехай G – періодична FC -група. В групі G будь-яка підгрупа буде S -переставною тоді і тільки тоді, коли G – гіперцентральна.

Доведення. Якщо в G кожна підгрупа S -переставна, то з наслідку 2 отримуємо, що кожна підгрупа G буде висхідною. Нехай L – довільна скінчена нормальна підгрупа G . Тоді кожна підгрупа L є субнормальною (в L). Це значить, що L – нільпотентна, а значить, G – локально нільпотентна. Залишається звернути увагу на те, що локально нільпотентна FC -група гіперцентральна (наприклад, [6, наслідок 1.15]). Навпаки, нехай група G – гіперцентральна. Тоді кожна її силовська p -підгрупа нормальна, зокрема, вона переставна з будь-якою підгрупою G .

Лема 4. Якщо група G є PST -групою, тоді кожна її субнормальна підгрупа буде S -переставною в G .

Доведення. Нехай H – субнормальна підгрупа групи G і $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$ – субнормальний ряд, що з'єднує H і G . Підгрупа H_{n-1} нормальна в G , зокрема, вона S -переставна в G . Також підгрупа H_{n-2} буде S -переставною в H_{n-1} , а потім вона S -переставна в G . Користуючись аналогічними міркуваннями, через скінчену кількість кроків отримуємо, що S -переставною в G буде і підгрупа $H_0 = H$.

Твердження 2. Нехай G – періодична FC -група. Група G тоді і тільки тоді буде PST -групою, коли кожна її висхідна підгрупа буде S -переставною в G .

Доведення. Нехай G – PST -група і H її висхідна підгрупа. Оберемо в G локальну родину $\mathcal{L}$ скінчених нормальних в G підгруп. Для

кожної підгрупи $L \in \mathcal{L}$ перетин $H \cap L$ буде субнормальною підгрупою в L , а тому і в G . З леми 4 маємо: $H \cap L \in S$ -переставною підгрупою в G . Згідно леми 1 $H \cap L$ буде S -переставною підгрупою в L . З наслідку 1 твердження 1 випливає, що H – S -переставна в G .

Доведемо тепер достатність. Нехай підгрупа H – S -переставна в G , а K – S -переставна підгрупа H . З наслідку 2 твердження 1 отримуємо, що H – висхідна підгрупа G , а K – висхідна підгрупа H . Але тоді K – висхідна підгрупа G , і з умов випливає, що K – S -переставна підгрупа G .

Наслідок 1. Нехай G – періодична FC -група. Якщо $G \in PST$ -групою, то кожна її висхідна підгрупа буде PST -групою.

Наслідок 2. Нехай G – періодична локально розв'язна PST -група і L – її локально нільпотентний радикал. Якщо G – FC -група, то кожна підгрупа L буде S -переставною в G .

Доведення. Так як підгрупа L – локально нільпотентна, то будучи FC – групою, вона гіперцентральна (наприклад, [6, наслідок 1.15]). Тому кожна її підгрупа буде висхідною. Тепер залишається застосувати твердження 2.

Наслідок 3. Нехай G – періодична FC -група, H – її скінчена розв'язна висхідна підгрупа. Якщо $G \in PST$ -групою, то H – надрозв'язна.

Доведення. З наслідку 1 отримуємо, що H буде PST -групою. З теореми 2.2 роботи [2] отримуємо, що H – надрозв'язна.

Наслідок 4. Нехай G – періодична локально розв'язна FC -група. Якщо G – PST -група, то вона локально надрозв'язна. Зокрема, G містить спадний ряд нормальних підгруп

$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n \geq G_{n+1} \geq \dots \cap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \langle 1 \rangle$,
що задовольняють таким властивостям:

- (i) $G_n = G_{n+1} S_n$ где S_n – силовська p_n -підгрупа G для деякого простого числа p_n , $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ – попарно різні прості числа, доречі $p_0 < p_1 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$.

Доведення. Нехай q – найменше просте число множини $\Pi(G)$ і R – силовська q' -підгрупа G . Виберемо в G локальну родину $\mathcal{L}$ скінчених нормальних в G підгруп. Для кожної підгрупи $L \in \mathcal{L}$ перетин $R \cap L$ буде силовською q' -підгрупою в L (наприклад, [6, теорема 5.4]). Так як L – надрозв'язна згідно наслідку 3, то $R \cap L$ – нормальна в L . Звідси випливає, що R – нормальна в G . Згідно теореми С.Н. Чернікова [7]) $G = RS_0$, де S_0 – силовська q -підгрупа G . Покладемо $G_1 = R$, $p_1 = q$. Використовуючи тепер аналогічні міркування і звичайну індукцію, побудуємо в групі G спадний силовський ряд.

Якщо G – група, то перетин $G_{L\bullet}$ всіх

нормальних підгруп H , для яких G/H – локально нільпотентна, називається локально нільпотентним резидуалом групи G . Якщо G – FC -група, то легко показати, що фактор-група $G/G_{L\bullet}$ буде гіперцентальною.

Наслідок 5. Нехай G – періодична локально розв'язна FC -група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – PST -група, то $2 \notin \Pi(L)$.

Наслідок 6. Нехай G – періодична локально розв'язна PST -група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – FC -група, то L – гіперцентральна підгрупа.

Доведення. Дійсно, з наслідку 3 випливає, що G – локально надрозв'язна, а тому її комутант локально нільпотентний. Будучи FC -групою, підгрупа $[G, G]$ – гіперцентральна (наприклад, [6, наслідок 1.15]). З очевидного включення $L \leq [G, G]$ отримуємо тепер, що і підгрупа L – гіперцентральна.

Наслідок 7. Нехай G – періодична локально розв'язна PST -група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – FC -група, то кожна підгрупа L буде S -переставною в G .

Доведення. Згідно наслідку 6 підгрупа L – гіперцентральна. Тому вона міститься в локально нільпотентному радикалі групи G , і можемо тепер використати наслідок 2.

Лема 5. Нехай G – періодична FC -група і L – її нормальна підгрупа. Якщо G – PST -група, то і фактор-група G/L буде PST -групою.

Доведення. Насправді, нехай для довільної підгрупи H/L і довільної її силовської p -підгрупи S/L в підгрупі H існує силовська p -підгрупа P , для якої $PL/L = S/L$ (наприклад, [6, теорема 5.4]). Звідси вже не важко отримати, що фактор-група G/L буде PST -групою.

Наслідок. Нехай G – періодична FC -група і H – її субнормальна підгрупа. Якщо G – PST -група, то і H/L буде PST -групою для довільної підгрупи L , яка нормальна в H .

Лема 6. Нехай G – PST -група і H – її нормальна періодична гіперцентральна підгрупа. Припустимо, що G – FC -група і h – довільний елемент H . Якщо g – такий елемент групи G , що $(|g|, |h|) = 1$, то $\langle h \rangle^{<g>} = \langle h \rangle$.

Доведення. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що h – p -елемент для деякого простого числа p . Також, твердження достатньо довести для випадку, коли g – q -елемент для деякого простого числа q . Нехай Q – довільна силовська q -підгрупа групи G . Так як підгрупа H – гіперцентральна, то згідно наслідку 2 твердження 2 кожна її підгрупа буде S -переставною в G , зокрема, такою буде $\langle h \rangle$. Таким чином, $\langle h \rangle Q$

$= Q < h >$. Оскільки H – нормальна в G , то $g^{-1} h g = u$, де $u \in H$. Звідси отримуємо рівність $hg = gu$. Далі, згідно рівності $< h > Q = Q < h >$ маємо $hg = x(h^k)$ для деякого елемента $x \in Q$ і $k \in \mathbb{N}$. В свою чергу, звідси маємо рівність $gu = x(h^k)$, а разом з тим і $x^{-1}g = (h^k)u^{-1}$. Так як H – гіперцентральна, то $K = < h >^G$ є p -підгрупою, і відповідно, $K \cap Q = < 1 >$. Оскільки $x^{-1}g \in Q$, $(h^k)u^{-1} \in K$, то $x^{-1}g = (h^k)u^{-1} = 1$, тобто $x = g$, $u = h^k$. Тому $g^{-1}hg = h^k$, що і доводить лему.

Наслідок 1. Нехай G – періодична PST-група і H – її нормальна скінчена p -підгрупа, p – просте число. Припустимо, що G – FC-група і g – такий елемент, що $g \in C_G(H)$, але $g^n \in C_G(H)$ для деякого p' – числа n . Тоді H – абелева підгрупа і $[H, g] = H$, $C_H(g) = < 1 >$.

Доведення. Згідно леми 6, g індукує на H неодиначний ступеневий автоморфізм. Звідси впливає той факт, що H – абелева [8, лема 5]. З теореми 5.2.5 книги [9] отримуємо розкладання $H = C_H(g) \oplus [H, < g >] = C_H(g) \oplus [H, g]$. З вибору елемента g будемо мати $H \neq C_H(g)$, так що і $[H, g] \neq < 1 >$. Припустимо, що $C_H(g) \neq < 1 >$ і виберемо в $C_H(g)$ елемент c , що має простий порядок p . Нехай тепер a – елемент підгрупи $[H, g]$, порядок якого також дорівнює p . Оскільки $a \in C_H(g)$, $a^p = a^d$, де $d = p' - \text{число, більше того } d \not\equiv 1 \pmod{p}$. Маємо тепер $(ac)^p = a^p c^p = a^d c$. З іншого боку, так як $ac \in C_H(g)$, то $(ac)^p = (ac)^t$, де t – також таке p' – число, що $t \not\equiv 1 \pmod{p}$. Таким чином, $a^d c = (ac)^t = a^t c^t$, тому $d \equiv t \pmod{p}$ і $t \equiv 1 \pmod{p}$. Це протиріччя показує, що $C_H(g) = < 1 >$ і відповідно $[H, g] = H$.

Наслідок 2. Нехай G – періодична PST-група і H – її нормальна скінчена p -підгрупа, p – просте число. Припустимо також, що G – FC-група. Якщо група G має такий p' – елемент g , що $g \in C_G(H)$, то H – скінчена абелева підгрупа і $[H, g] = H$, $C_H(g) = < 1 >$.

Доведення. Припустимо, що H – нескінчена. Так як G – FC-група, то $C_G(g)$ має в G скінчений індекс, зокрема, і індекс $|H : C_H(g)|$ скінчений. Це значить, що підгрупа $C_H(g)$ нескінчена, а тому $C_H(g) \neq < 1 >$. Виберемо в H таку скінчену підгрупу F , що $F \cap C_H(g) = < 1 >$ і $C_H(g)$ не вміщує в себе F . Покладемо $K = F^{< g >}$, тоді підгрупа K – скінчена і $< g >$ – інваріантна, при цьому $g \in C_G(K)$. Згідно наслідку 1 $C_K(g) = < 1 >$. Однак, з вибору підгрупи K видно, що $C_K(g) \neq < 1 >$. Отримане протиріччя і доводить лему.

Наслідок 3. Нехай G – періодична PST-група і H – її нормальна скінчена p -підгрупа, p – просте число. Припустимо також, що G – FC-

група. Якщо $HC_G(H) \neq G$ то H – скінчена абелева підгрупа і локально нільпотентний резидуал групи G містить в собі H .

Доведення. Нехай L – локально нільпотентний резидуал групи G . Оскільки $HC_G(H) \neq G$, то існує такий p' – елемент g , що $g \notin C_G(H)$. Той факт, що H – скінчена абелева підгрупа, впливає тепер із наслідку 2. Припустимо, що $H \cap L = D \neq H$. Так як G/L – гіперцентральна група, то з ізоморфізму $HL/L \cong_G H/(H \cap L) = H/D$ отримуємо, що HL/L – скінчена нормальна p -підгрупа. Але тоді деякий гіперцентр з скінченим номером містить в собі HL/L . Звідси впливає, що $[HL/L, G/L] \neq HL/L$, а тому і $[H/D, G/D] \neq H/D$. З останньої нерівності маємо нерівність $[H, G] \neq H$. Зокрема, і $[H, g] \neq H$. Однак із наслідку 2 маємо $[H, g] = H$. Отримане протиріччя і доводить наше твердження.

Лема 7. Нехай G – періодична локально розв'язна PST-група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – FC-група, то силовська p -підгрупа R підгрупи L буде силовською p -підгрупою всієї групи G для будь-якого простого числа p . Більш того, $RC_G(R) \neq G$, R – скінчена і абелева.

Доведення. Фактор-група G/L – гіперцентральна, а тому її силовські p -підгрупи нормальні для будь-якого простого числа p . Наслідок 6 твердження 2 показують, що L – гіперцентральна. Тоді $L = \times_{p \in \pi(L)} L_p$, де L_p – силовська p -підгрупа L . Нехай $p \in \pi(L)$ і покладемо $Q = \text{Dr}_{q \neq p} L_q$. Як ми вже відзначали вище, G/L також гіперцентральна. Тому G/L має єдину силовську p -підгрупу P/Q . Звідси впливає, що P/Q – єдина силовська p -підгрупа G/Q . За теоремою С.Н. Чернікова [7], $G/Q = P/Q \times S/Q$ для деякої підгрупи S/Q . З вибору P отримуємо, що S/Q – гіперцентральна. З нерівності $Q \neq L$ отримуємо, що G/Q не може бути гіперцентральною. Лема 5 показує, що G/Q – PST-група. Якщо тепер припустити, що $(P/Q)C_{G/Q}(P/Q) = G/Q$, то $G/Q = P/Q \times S/Q$, а це означає, що G/Q – гіперцентральна. Таким чином, $(P/Q)C_{G/Q}(P/Q) \neq G/Q$. З наслідку 3 леми 6 отримуємо, що P/Q – скінчена і абелева, локально нільпотентний резидуал G/Q містить в собі P/Q . В свою чергу, з вибору Q впливає, що локально нільпотентний резидуал G/Q співпадає з L/Q . Отже, $P/Q \leq L/Q$, тобто $P \leq L$. Нарешті, якщо R – силовська p -підгрупа G то очевидно, $R \leq P$ і $P = R \times Q$, оскільки L – гіперцентральна. Зокрема, $RQ/Q \cong P/Q$, а це означає, що $RC_G(R) \neq G$ і R – скінчена і абелева.

Наслідок. Нехай G – періодична локально

розв'язна PST-група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – FC-група, то L – абелева підгрупа, кожна її силовська p -підгрупа скінчена і є силовською p -підгрупою всієї групи G для будь-якого простого числа p .

Лема 8. Нехай G – група і H – періодична підгрупа G . Якщо H – висхідна підгрупа G то $H \leq O_\pi(G)$, де $\pi = \Pi(H)$.

Доведення. Нехай $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1} \triangleleft \dots \triangleleft H_\gamma = G$ – висхідний ряд, що з'єднує H і G . Використовуючи трансфінітну індукцію, доведемо для будь-якого порядкового числа α , що $H \leq O_\pi(H_\alpha)$. Якщо $\alpha = 1$, то таке включення очевидне. Припустимо, що вже доведене включення $H \leq O_\pi(H_\beta)$ для всіх $\beta < \alpha$. Якщо α – граничне порядкове число, то $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ і тому $H \leq \bigcup_{\beta < \alpha} O_\pi(H_\beta) = O_\pi(H_\alpha)$. Припустимо тепер, що $\alpha - 1$ існує. Так як $H_{\alpha-1}$ – нормальна в H_α і $O_\pi(H_{\alpha-1})$ – характеристична підгрупа $H_{\alpha-1}$, то $O_\pi(H_{\alpha-1})$ нормальна в H_α і тому $O_\pi(H_{\alpha-1}) \leq O_\pi(H_\alpha)$. Отже, $H \leq O_\pi(H_{\alpha-1}) \leq O_\pi(H_\alpha)$.

Теорема. Нехай G – періодична локально розв'язна PST-група і L – її локально нільпотентний резидуал. Якщо G – FC-група, то G задовольняє наступним умовам:

- (i) $G = L \rtimes D$, де D – гіперцентральна підгрупа;
- (ii) $2 \in \Pi(L)$ і кожна силовська p – підгрупа L скінчена і є силовською p – підгрупою всієї групи G для будь-якого $p \in \Pi(L)$;
- (iii) підгрупа L – абелева;
- (iv) кожна підгрупа $L \in G$ – інваріантною.

Навпаки, якщо G – періодична FC-група, що задовольняє умовам (i) – (iv), то G – PST-група.

Доведення. Згідно наслідку леми 7 L – нормальна силовська π -підгрупа G де $\pi = \Pi(L)$. За теоремою С.Н. Чернікова [7], $G = G = L \rtimes D$ для деякої підгрупи D . З вибору L і ізоморфізму $D \cong G/L$ отримуємо, що D – гіперцентральна підгрупа. Твердження (ii) впливає з наслідку леми 7 і наслідку 5 твердження 2. Нарешті, з леми 6 впливає, що кожна підгрупа $L \in D$ – інваріантна, так як L – абелева, то і G – інваріантна.

Для доведення того факту, що умови (i) – (iv) будуть і достатніми, згідно твердження 2 достатньо показати, що кожна висхідна підгрупа U групи G буде S -переставна в G . Нехай $W = L \cap U$. Згідно (iii) W – нормальна в G . Наслідок 2 леми 2 показує, що достатньо довести S -переставність в G/W підгрупи U/W . Інакше кажучи, не обмежуючи загальності, можна припустити, що $W = \langle 1 \rangle$, тобто $U \cap L = \langle 1 \rangle$.

Згідно леми 8 $U \leq O_\pi(G)$, де $\pi = \Pi(U)$. Нехай $\sigma = \Pi(L)$, тоді $[U, L] \leq O_\pi(G) \cap O_\sigma(G)$. З умови (ii) отримуємо рівність $\pi \cap \sigma = \emptyset$, так що $O_\pi(G) \cap O_\sigma(G) = \langle 1 \rangle$, а значить $[U, L] = \langle 1 \rangle$. Факторгрупа G/L – гіперцентральна, тому і $UL/L \cong U$ – гіперцентральна. Маємо $U = \times_{q \in \pi} U_q$, де U_q – силовська q -підгрупа U . Рівність $O_\pi(G) \cap L = \langle 1 \rangle$ показує, що $O_\pi(G)$ – гіперцентральна. З включення $U \leq O_\pi(G)$ впливає той факт, що $(U_q)^G$ – нормальна в G q -підгрупа. Нехай p – довільне просте число, P – силовська p -підгрупа G . Якщо $p = q$, то $U_p \leq (U_p)^G \leq P$, зокрема, $U_p P = P$. Нехай тепер $p \neq q$. З гіперцентральності факторгрупи G/L отримуємо включення $[(U_q)^G, P] \leq L$. З іншого боку, підгрупа $(U_q)^G$ – нормальна в G , так що $[(U_q)^G, P] \leq (U_q)^G$, а тому $[(U_q)^G, P] \leq L \cap (U_q)^G \leq L \cap O_\pi(G) = \langle 1 \rangle$. Отже, в цьому випадку $U_q P = U_q P$. Оскільки ця рівність має місце для кожного $q \in \pi$, то $UP = PU$. Таким чином, підгрупа U – S -переставна в G , що і треба було довести.

Наслідок. Нехай G – періодична локально розв'язна PST-група. Якщо G – FC-група, то кожна підгрупа G буде PST-групою.

Список використаних джерел

1. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen// Math. Z. – 1962. – 78. – с. 205 – 221.
2. Agrawal R.K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups// Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – 47. – с. 77 – 83.
3. Alejandro V.J., Ballester – Bolinches A., Pedraza – Aguilera M.C. Finite soluble groups with permutable subnormal subgroups// Journal Algebra. – 2001. – 240. – с. 705 – 722.
4. Ballester – Bolinches A., Esteban – Romero R. Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups// Bull. Austral Math. Soc. – 2001. – 64. – no. 3. – с. 479 – 486.
5. Ballester – Bolinches A., Esteban – Romero R. Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups// Journal Algebra. – 2002. – 251. – no. 2. – с. 727 – 738.
6. Tomkinson M.J. FC – groups. – Boston: PITMAN, 1984.
7. Huppert B. Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen // Archiv Math. – 1961. – 12. – с. 161 – 169.
8. Gorenstein D. Finite groups. – New York: HARPER & ROW, 1968.

Надійшла до редколегії 26.04.2007

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Централізатори фінитарних елементів групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора

В роботі описані централізатори фінитарних елементів груп, зберігаючих міру Бернуллі гомеоморфізмів на себе границь сферично однорідних дерев.

Ключові слова: централізатор, група гомеоморфізмів, міра Бернуллі, сферично однорідне дерево.

1. Нагадаємо необхідні нам поняття, пов'язані з кореневими деревами та їхніми границями. Більш докладно про це можна прочитати в [1, 2]. Кореневе дерево (T, v_0) – це дерево T з виділеною вершиною v_0 , яка називається коренем дерева. Ми розглядатимемо лише локально скінченні дерева.

Вершина v дерева T лежить під вершиною w , якщо шлях, що з'єднує вершину v з коренем, містить вершину w . Ми позначатимемо T_v повне піддерево дерева T , що складається з усіх вершин, що лежать нижче від v , з коренем v .

Рівнем n (сферою радіусу n) називається множина V_n , що складається з усіх вершин, які лежать на відстані n від кореня. Кореневе дерево T називається сферично однорідним, якщо в кожному рівні дерева T всі вершини мають однакову валентність. Сферичний індекс сферично однорідного дерева T – це послідовність $\Theta = (l_0, l_1, \dots)$, де l_0 – валентність кореневої вершини, а $l_n + 1$ – валентність довільної вершини з рівня n .

Нехай (T, v_0) є сферично однорідним деревом і сферичним індексом Θ . Всі такі дерева ізоморфні дереву T_Θ , множина вершин якого – це множина всіх скінченних послідовностей $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ (слів $i_0 i_1 \dots i_{n-1}$), де $i_k \in X_k = \{1, 2, \dots, l_k\}$ і $n \geq 0$ – ціле. Ми також включаємо порожню послідовність, що відповідає випадку $n = 0$. Дві вершини будуть з'єднані ребром тоді і лише тоді, коли вони мають такий вигляд: $(i_0, \dots, i_{n-1}), (i_0, \dots, i_{n-1}, i_n)$.

Кінець кореневого дерева – це нескінченний шлях без повторень з початком в корені. Кожному кінцю дерева T відповідає єдине нескін-

Y. Lavrenyuk

Centralizers of finitary elements of the groups of measure-preserving self-homeomorphisms of Cantor Set

We describe centralizers of finitary elements of the measure-preserving groups of self-homeomorphisms of spherically homogeneous trees.

Key Words: centralizer, homeomorphism group, Bernulli measure, spherically homogeneous tree.

ченне слово $i_0 i_1 i_2 \dots$ ($i_k \in X_k = \{1, 2, \dots, l_k\}$) дерева T_Θ . В подальшому ми отождествлюватимемо ці дерева. Будемо позначати ∂T множину всіх кінців (границю) дерева T . Множина границь піддерев ∂T_v є базисом топології на ∂T . Топологічний простір ∂T є компактним і цілком незв'язним (множина Кантора). Групу всіх гомеоморфізмів на себе простору ∂T позначатимемо $\text{Homeo } \partial T$.

Можна ввести природну ультраметрику на ∂T , поклавши $\rho(x_1, x_2) = 2^{-n}$, де n – довжина найбільшої спільної частини кінців x_1 і x_2 . В результаті дістаємо компактний ультраметричний простір, який позначатимемо $(\partial T, \rho)$, чи просто ∂T .

Якщо дерево T сферично однорідне, то на ∂T природно вводиться Борелева ймовірнісна міра m_T (міра Бернуллі). Ця міра визначається умовою, що $m_T(\partial T_v) = 1/|V_n|$, де V_n рівень вершини v . Міра m_T є єдиною ймовірнісною мірою на ∂T , яка інваріантна щодо дії групи ізометрій простору $(\partial T, \rho)$. Множина M_T всіх гомеоморфізмів ∂T , що зберігають міру m_T , є підгрупою $\text{Homeo } \partial T$.

Також визначається група $S(\partial T, n)$ тих гомеоморфізмів ∂T , які лише жорстко переставляють кулі ∂T_v ($v \in V_n(T)$). Очевидно, що $S(\partial T, n)$ збігається з симетричною групою $\text{Sym}(V_n(T))$ і $S(\partial T, n) \leq S(\partial T, k)$ для $n \leq k$. Однорідна симетрична група $S(\partial T) < \text{Homeo } \partial T$ визначається як об'єднання підгруп $S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Надалі ми розглядатимемо лише сферично однорідні дерева, у сферичних індексах яких немає одиниць.

2. Опис централізаторів елементів групи є класичною задачею теорії груп. Централізатори елементів групи M_T можуть мати дуже різну будову. І задача опису централізаторів всіх елементів видається нам важкою. В цій замітці ми зупинимося на опису централізаторів фінітарних елементів, тобто елементів підгрупи $S(\partial T)$. Наш вибір зумовлений двома причинами: по-перше, $S(\partial T)$ є щільною підгрупою в M_T , а по-друге, при опису природно з'являється новий тип вінцевого добутку, який на наш погляд представляє і самостійний інтерес.

Нехай (X, d_1) та (Y, d_2) є метричними просторами. Визначимо на декартовому добутку множин X та Y метрику $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2))$, для всіх $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.

Визначимо у вінцевому добутку груп підстановок $W = (G, X) \wr (H, Y)$ підмножину W_u , "узгоджену" з метрикою на $X \times Y$. Елемент $g \in W$ міститиметься у W_u тоді і лише тоді, коли g є гомеоморфізмом простору $(X \times Y, d)$ на себе. Підмножина W_u є підгрупою W , бо є перетином підгруп W та $\text{Homeo}(X \times Y, d)$ в групі $\text{Sym}(X \times Y)$.

Підгрупу W_u групи W називатимемо рівномірним вінцевим добутком груп (G, X) та (H, Y) і позначатимемо $(G, X) \wr_u (H, Y)$.

Для кожного елементу g з M_T простір ∂T розкладається на диз'юнктне об'єднання двох множин $\text{supp } g$ та $\text{fix } g = \partial T - \text{supp } g$, де $\text{fix } g$ множина всіх точок з ∂T , які не рухаються під дією g .

Зафіксуємо елемент a з $S(\partial T, n)$. Гомеоморфізм a визначає підстановку $\bar{a}$ з $\text{Sym}(V_n)$. Підстановка $\bar{a}$ розкладається в добуток підстановок, що діють нетривіально на неперетинаючихся множинах:

$$\prod_{i=1}^{r(a)} \bar{a}_i,$$

де кожна $\bar{a}_i$ — добуток s_i неперетинаючихся нетривіальних циклів довжини t_i , причому для різних i довжини циклів різні. Такий розклад однозначно (з точністю до перестановки множинок) визначається цикловим типом підстановки $\bar{a}$. Кожна з підстановок $\bar{a}_i$ природним чином визначає зберігаючий міру гомеоморфізм a_i простору ∂T .

Дерево T можна розкласти на об'єднання двох піддерев $T(a)$ та $T(\bar{a})$, які не мають спіль-

них ребер і мають лише одну спільну вершину — корінь. Ці піддерева цілком визначаються будь-якою з рівностей $\partial T(a) = \text{supp } a$ та $\partial T(\bar{a}) = \text{fix } a$, і, з точністю до видалення перших $n-1$ рівнів, є сферично-однорідними. Аналогічним чином, дерево $T(a)$ розкладається на об'єднання $r(a)$ піддерев $T(a_1), \dots, T(a_{r(a)})$.

Лема 1. *Мають місце рівності:*

$$(C_{M_T}(a), \partial T) = (C_{M_{T(a)}}(a), \partial T(a)) \oplus (M_{T(\bar{a})}, \partial T(\bar{a})), \quad (1)$$

$$(C_{M_{T(a)}}(a), \partial T(a)) = \bigoplus_{i=1}^{r(a)} (C_{M_{T(a_i)}}(a_i), \partial T(a_i)). \quad (2)$$

Доведення. Цілком зрозуміло, що пряма сума в (1) є підгрупою $(C_{M_T}(a), \partial T)$. Також зрозуміло, що якщо $g \in C_{M_T}(a)$ і $g: \partial T(a) \rightarrow \partial T(a)$, то на $\partial T(a)$ дія g збігається з дією деякого елемента з $C_{M_{T(a)}}(a)$. Тому достатньо довести, що не існує такого $g \in C_{M_T}(a)$ і такої точки $x \in \text{fix } a$, щоб $g(x) \in \text{supp } a$. Припустимо, що це не так. Тоді x під дією $ga g^{-1}$ перейде в точку з ∂T , відмінну від x . Одержали суперечність. Таким чином, рівність (1) є правильною.

Аналогічно, пряма сума в (2) є підгрупою $(C_{M_{T(a)}}(a), \partial T(a))$. Нехай a_j має найменший порядок серед усіх a_i , $1 \leq i \leq r(a)$. Тоді $\text{supp } a_j = \text{fix } a^{t_j}$ в $\partial T(a)$. Припустимо, що існує такий $g \in C_{M_{T(a)}}(a)$ і така точка $x \in \text{supp } a_j$, що $g(x) \in \text{supp } a - \text{supp } a_j = \text{supp } a^{t_j}$. Тоді x під дією $ga^{t_j} g^{-1}$ перейде в точку з ∂T , відмінну від x . Одержали суперечність. Таким чином,

$$(C_{M_{T(a)}}(a), \partial T(a)) = (C_{M_{T(a_j)}}(a_j), \partial T(a_j)) \oplus (C_{M_{T(a a_j^{-1})}}(a a_j^{-1}), \partial T(a a_j^{-1})). \quad (3)$$

Замінімо тепер останній доданок у (3) на пряму суму, скориставшись рівністю такого ж вигляду. Застосовуючи цю процедуру $r-1$ разів, одержимо рівність (2). $\square$

Для формулювання наступної леми нам знадобиться конструкція кореневого сферично-однорідного дерева $T(n, a_i)$, що будується за деревом T , де t та n — натуральні числа. Дерево $T(n, a_i)$ будується так: $V_1(T(n, a_i))$ містить t_i вершин, кожна з яких суміжна з s_i вершинами з $V_2(T(n, a_i))$, а кожне з вершинних піддерев другого рівня ізоморфне довільному вершинному

піддереву T_u , де $u \in V_n(T)$. Розглянемо також гомеоморфізм $c_i \in S(\partial T(n, a_i), 1)$, що визначає циклічну підстановку порядку t_i на $V_1(T(n, a_i))$.

Лема 2. Централізатор елемента a_i в групі $M_{T(a_i)}$ ізоморфний централізатору елемента c_i в групі $M_{T(n, a_i)}$.

Доведення. Оскільки $\partial T(a_i) = \bigcup_{u \in V_n(T(a_i))} \partial T_u$, а $\partial T(n, a_i) = \bigcup_{u \in V_2(T(n, a_i))} \partial T_u(n, a_i)$, то природний гомеоморфізм $\alpha: \partial T(a) \rightarrow \partial T(n, a_i)$ індукує ізоморфізм $\alpha_m: M_{T(a_i)} \rightarrow M_{T(n, a_i)}$. При цьому $\alpha_m(a_i) = c_i$, звідки й випливає твердження леми. $\square$

Нехай $V_n(T(a)) = \{u_1, \dots, u_k\}$. Також позначатимемо через X множину нескінченних слів $\prod_{j \geq n} X_j$, яку будемо ототожнювати з ∂T_{u_i} , $1 \leq i \leq k$.

Лема 3. Нехай $a \in S(\partial T, n)$ визначає на $V_n(T(a))$ циклічну підстановку. Тоді централізатор елемента a в групі $M_{T(a)}$ ізоморфний рівномірному вінцевому добутку $(M_{T_{u_1}}, \partial T_{u_1})|_u((\bar{a}), V_n(T(a)))$, де $V_n(T(a))$ розглядається як дискретний метричний простір.

Доведення. Розглянемо діагональ D_a прямої суми $\bigoplus_{i=1}^k (M_{T_{u_i}}, \partial T_{u_i})$. Зрозуміло, що D_a міститься у централізаторі C_{M_T} , і вона ізоморфна $M_{T_{u_1}}$.

Розглянемо також множину H_a всіх таких елементів з $M_{T(a)}$, які задовольняють такій умові: якщо $u_i w$ — нескінченний шлях (слово) з $\partial T(a)$, то $h(u_i w) = u_{\pi_{h,w}(i)} w$, де $\pi_{h,w} \in C_{\text{Sym}(V_n(T(a)))}(\bar{a}) = \langle \bar{a} \rangle$, для всіх $h \in H_a$, $w \in X$, $1 \leq i \leq k$. Цілком очевидно, що H_a є підгрупою M_T і міститься в централізаторі елемента a . Нехай $Y_w = \{u_1 w, u_2 w, \dots, u_k w\}$ для кожного $w \in X$. Тоді $\bigsqcup_{w \in X} Y_w = \partial T(a)$. Елементи з D_a діють на декартовій сумі $\bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$ перестановками на множині індексів X . Тому в групі $\text{Sym } \partial T$ підгрупа породжена D_a та декартовою сумою $\bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$ є напівпрямим добутком цих підгруп і ізоморфна вінцевому добутку $(M_{T_{u_1}}, \partial T_{u_1})|_u((\langle a \rangle, V_n(T(a))))$.

Неважко помітити, що H_a є піддекартовою сумою в $\bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$, причому за побудовою, H_a є найбільшою підгрупою $\bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$, елементи якої є гомеоморфізмами $\partial T(a)$, що зберігають міру Бернулі m_T . Елемент $h \in \bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$ є гомеоморфізмом $\partial T(a)$ тоді і лише тоді, коли для довільних $w_0 \in \partial T_{u_1}$ та

$i_{w_0}, j_{w_0} \in Y_{w_0}$, з того що $h(i_{w_0}) = j_{w_0}$ випливає, що така ж рівність виконується для всіх w з деякого околу w_0 . Звідси випливає, що кожен гомеоморфізм $\partial T(a)$ з групи $\bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w)$ зберігає міру Бернулі. Таким чином,

$$\partial T(a) \cap \bigoplus_{w \in X} (\langle a \rangle, Y_w) = H_a.$$

Тому в групі $M_{T(a)}$ підгрупа породжена H_a та D_a є напівпрямим добутком $D_a \ltimes H_a$, і цей добуток ізоморфний рівномірному вінцевому добутку $(M_{T_{u_1}}, \partial T_{u_1})|_u((\langle a \rangle, V_n(T(a))))$ (вважаємо, що на $V_n(T(a))$ введена дискретна метрика), причому H_a є його базою.

Зрозуміло, що добуток $D_a \ltimes H_a$ є підгрупою $C_{M_{T(a)}}(a)$. Тому нам потрібно довести, що централізатор елемента a збігається з добутком підгруп D_a та H_a групи $M_{T(a)}$.

Нехай $g \in C_{M_{T(a)}}(a)$. Нехай також $g(u_i w_1) = u_j w_2$, де $u_i w$ та $u_j w$ — нескінченні шляхи (слова) з $\partial T(a)$. Припустимо, що $g(u_i w_3) = u_l w_2$, для деякого нескінченного слова $u_l w_3$ та деякої вершини $u_l \in V_n(T(a)) - \{u_j\}$. Тоді існує така степінь s елемента a , що $a^s(u_j w_2) = u_l w_2$. Тоді

$$\begin{aligned} u_i w_3 &= a^s g^{-1}(u_j w_2) = g^{-1} a^s(u_j w_2) = \\ &= a^s(u_i w_1) = u_d w_1, \end{aligned}$$

для деякої вершини $u_d \in V_n(T(a))$. Що неможливо, бо $d \neq i$, оскільки $\bar{a}$ — циклічна підстановка. Отже, ми можемо коректно визначити елемент g' з $\text{Sym}(\partial T)$ таким чином: $g'(u_j w_2) = u_i w_2$, як тільки $g(u_i w_1) = u_j w_2$ для всіх $u_i w_1$ з $\partial T(a)$. Покажемо, що так визначений g' є гомеоморфізмом ∂T і зберігає міру m_T . Перше легко випливає з гомеоморфності g та ультраметричності ∂T . Далі, оскільки g' є гомеоморфізмом, то існує такий початок w слова w_2 , що куля $B(u_j w)$ під дією g' переходить у кулю $B(u_i w)$ того ж діаметру, а тому g' зберігає міру m_T . Очевидно також, що як і g елемент g' комутує з a . Тепер потрібно показати, що g' міститься в H_a . За доведеним вище, для всіх i виконується рівність $g'(u_i w) = u_{\eta_{g',w}(i)} w$, де $\eta_{g',w}$ — деяка підстановка з $\text{Sym}(V_n(T(a)))$. Оскільки g' комутує з a , то $\eta_{g',w}$ комутує з $\bar{a}$ для довільного w . Звідси, $g' \in H_a$.

Розглянемо тепер добуток gg' . Ми довели, що gg' міститься в $C_{M_{T(a)}}(a)$. З іншого боку, gg' міститься в прямій сумі $M_{T_{u_1}} \oplus \dots \oplus M_{T_{u_k}}$. Перетином цих двох груп є діагональ останньої прямої суми — група D_a .

Таким чином, ми довели, що $g' \in H_a$, $gg' \in D_a$. Звідки g міститься в добутку $D_a H_a$. Отже, централізатор елемента a збігається з добутком $D_a H_a$ і є ізоморфним рівномірному вінцевому добутку $(\mathcal{M}_{T_{u_1}}, \partial T_{u_1}) \wr_u (\langle a \rangle, V_n(T(a)))$. $\square$

З лем 1-3 випливає

Теорема 1. Нехай T — сферично однорідне дерево, $a \in S(\partial T, n)$. Мають місце рівності:

$$(C_{\mathcal{M}_T}(a), \partial T) =$$

$$(\mathcal{M}_{T(\bar{a})}, \partial T(\bar{a})) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r(a)} (C_{\mathcal{M}_{T(a_i)}}(a_i), \partial T(a_i)),$$

$$C_{\mathcal{M}_T}(a) \simeq \mathcal{M}_{T(\bar{a})} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r(a)} (\mathcal{M}_{T_u(n, a_i)}, \partial T_u(n, a_i)) \wr_u (\langle c_i \rangle, V_1(T(n, a_i))),$$

де u — довільна вершина з $V_2(T(n, a_i))$, а $V_1(T(n, a_i))$ розглядається як дискретний метричний простір для $1 \leq i \leq r(a)$.

Висновки

Розглянуто групи зберігаючих міру Бернуллі гомеоморфізмів на себе границь сферично однорідних дерев. Описано централізатори фінітарних елементів у цих групах.

Список використаних джерел

1. R.I.Grigorchuk, V.V.Nekrashevych, V.I.Sushchansky Automata, dynamical systems and groups. Proc. V.A. Steklov Inst. Math., Vol. 231 (2000), 134-215.
2. V.Nekrashevych Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs, Vol.117, 231 pp., 2005.

Надійшла до редколегії 27.09.2007

УДК 512.53

Денис І. Морозов

**Централізатори шарово-однорідних
автоморфізмів однорідного дерева
валентності p .**

Дано опис централізаторів шарово-однорідних автоморфізмів кореневого однорідного дерева.

Ключові слова: кореневе дерево, автоморфізм кореневого дерева.

E-mail: ortmath@gmail.com

1 Вступ

Групи автоморфізмів корневих дерев вже давно є об'єктом ретельного дослідження (роботи В.Суцанського, С. Сідкі). Зокрема, багато робіт присвячено дослідженню групи скінчено-автоматних підстановок $FAutT_p$ яка є підгрупою групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева $AutT_p$ (роботи Р.Григорчука, В.Некрашевича).

Особливе місце займає проблема спряженості в $FAutT_p$, де питання щодо спряженості двох елементів цієї групи є, взагалі кажучи, не вирішеним, на відміну від $AutT_p$, де проблема спряженості є повністю розв'язаною. Важливе місце в розв'язку задачі про спряженість в деякій групі двох елементів займає знаходження в цій групі централізатора одного з цих елементів.

Дана робота присвячена опису техніки піднесення автоморфізму з $AutT_p$ в деякий цілий p -адичний степінь. Ця техніка використовується для знаходження централізатору автоморфізма з $AutT_p$. Також наводиться приклад перенесення цієї техніки на $FAutT_p$, а саме знаходиться централізатор конкретних елементів з $FAutT_2$.

2 Опис централізатора шарово-однорідного автоморфізму з $AutT_p$

Розглянемо множину нескінчених послідовностей $x_1x_2x_3\ldots (x_k \in 0,1,2,\ldots,(p-1))$. Зробимо цю множину метричним простором за допомогою метрики Бера $\rho(x_1x_2x_3\ldots, y_1y_2y_3\ldots) = (1/2)^k$, де k – довжина спільного початку $x_1x_2x_3\ldots$ та $y_1y_2y_3\ldots$. Група ізометрій такого простору ізоморфна $AutT_p$, де $AutT_p$ – це група ізоморфізмів кореневого p -валентного однорідного дерева. Кореневим деревом назвемо зв'язний граф без циклів з відміченою вершиною. Автоморфізм

Denis I. Morozov

Centralizers of the spherical-homogeneous automorphisms of the homogeneous regular rooted p -tree.

Characterization of the centralizers of the spherical-homogeneous automorphisms of the homogeneous regular rooted p -tree is given.

Key Words: rooted tree, automorphism of rooted tree.

кореневого дерева переводить відмічену вершину в себе.

Означимо підгрупу $FAutT_p$ групи $AutT_p$. Розглянемо піддерево кореневого однорідного дерева T_p з коренем в деякій вершині, що ізоморфно T_p . Автоморфізм $a \in AutT_p$ індукує автоморфізми на всіх таких піддеревах. Якщо маємо скінченну кількість отриманих таким чином автоморфізмів, то назвемо a скінченостановим. Множина всіх скінченостанових автоморфізмів утворює групу $FAutT_p$.

Назвемо вершиною n -го рівня таку вершину, яка з'єднана з коренем n ребрами. Автоморфізм $a \in AutT_p$ не змінює рівень вершини.

Кінцем назвемо нескінчену послідовність вершин, яка починається з кореня, кожна вершині з'єднана ребром з наступною вершиною послідовності і жодна вершина не входить в послідовність більше одного разу. Легко бачити, що метричний простір на кінцях T_p з метрикою $\rho(x, y) = (1/2)^n$, де x, y – кінці T_2 , n – довжина спільного початку ізоморфне простору Бера. Цей ізоморфізм індукує ізоморфізм групи ізометрій простору Бера на $AutT_p$.

З іншого боку $AutT_p$ ізоморфна вінцевому добутку груп $S_p \wr S_p \wr S_p \ldots$. Дійсно, $AutT_p$ переставляє вершини першого рівня. Групою цих підстановок є S_p . Для другого рівня $AutT_p$ переставляє вершини, які виходять зі спільної вершини першого рівня і т.д.

Для $a \in AutT_p$ циклами n -того рівня c_n^a назвемо орбіти дії a на n -тий рівень T_p .

Шарово-однорідними автоморфізмами в $AutT_p$ назвемо автоморфізми, для яких

циклом n -того рівня s_a^n є в точності n -тий рівень. Множину таких елементів позначимо як M . M не є підгрупою в $\text{Aut} T_p$.

Для $a \in M$, x, y – кінці з T_p . x_n, y_n – вершини n -го рівня, такі, що $x_n \in x, y_n \in y$. Означимо $\rho_{a,n}(x, y) = \min_{x_n * a^k = y_n, k \in \mathbb{N}} (k)$. Так як для $a \in M$ s_a^n складається з p^n вершин, то $0 \leq \rho_{a,n}(x, y) < p^n$.

Нехай x_{n1} та x_{n2} вершини $(n+1)$ -го рівня з'єднані ребром з вершиною x_n n -го рівня, y_{n1} та y_{n2} вершини $(n+1)$ -го рівня з'єднані ребром з вершиною y_n n -го рівня.

Позначимо нескінчену послідовність $(\rho_{a,1}(x, y), \rho_{a,2}(x, y), \dots)$, як $\rho_a(x, y)$.

Лема 1. Для $a \in M$ $\rho_a(x, y)$ відповідає деякому цілому p -адичному числу.

Доведення. Дійсно $\rho_{a,n}(x_n, x_n) = p^n$, так як s_a^n складається з p^n вершин, де вершина n -го рівня. Позначимо як x_{n1} та x_{n2} вершини $(n+1)$ -го рівня, суміжні з x_n . Так як $x_n * a^{p^n} = x_{n1}$, то $x_{n1} * a^{p^n}$ дорівнює або x_{n1} або x_{n2} . Але $\rho_{a,n}(x_{n1}, x_{n1}) = p^{n+1}$, звідси $x_{n1} * a^{p^n} = x_{n2}$, тобто $\rho_{a,(n+1)}(x_{n1}, x_{n2}) = p^n$.

З цього випливає, що $\rho_{a,n}(x_{n1}, y_{n1}) \equiv \rho_{a,n}(x_n, y_n) \pmod{p^n}$, тобто послідовність $\rho_a(x, y)$ визначає деяке ціле p -адичне число. $\square$

Для того, щоб визначити автоморфізм $a \in \text{Aut} T_p$, достатньо для кожного $x \in T_p$ вказати такий $y \in T_p$, що $\rho_a(x, y) = 1$.

Означення. Означимо автоморфізм a^k , де k деякий елемент кільця цілих p -адичних чисел, як $b \in \text{Aut} T_p$, для якого $\rho_b(x, y) = 1$, якщо $\rho_a(x, y) = k$.

*) Якщо s, q – p -адичні числа, $a \in \text{Aut} T_p$, то $a^s * a^q = a^{s+q}$, $(a^s)^q = a^{s \cdot q}$. Звуження дії піднесення у степінь a^k до кільця цілих чисел відповідає звичайному означенню степеня. Наприклад, $a^{(1,3,3,\dots,3)} = a^3$, $a^{(1,3,7,15,\dots,2^k-1)} = a^{-1}$ для $a \in \text{Aut} T_2$.

Нехай $a, c \in \text{Aut} T_p$, x, y – кінці з T_p .

$\rho_a(x, y) = \rho_{c*a*c^{-1}}(x*c^{-1}, y*c^{-1})$. Дійсно, якщо $x*a=y$, то $(x*(\beta^{-1}*\beta)*a)*\beta^{-1}=y*\beta^{-1}$.

Лема 2. Нехай $a, b \in M$, кінці $x, y \in T_p$. Тоді $\exists ! c \in \text{Aut} T_p$, такий, що

$$x*c^{-1}=y \text{ і } c*a*c^{-1}=b.$$

Доведення. Введемо наступні позначення: $x_a(0) \equiv x$, $x_a(k) \equiv a^k$, $x_b(0) \equiv y$, $x_b(k)$

$\equiv x_b(0) * b^k$. Якщо знайдеться c , що задовольняє умовам леми, то обов'язково

$$(1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_p, \rho_{c^{-1}}(x_a(k), x_b(k)) = 1$$

так як

$$(2) \quad x_a(0) * a^k = x_a(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_a(0) * c^{-1}) * (c * a^k * c^{-1}) = x_a(k) * c^{-1}.$$

Далі, $x_a(0) * c^{-1} = x_b(0)$, $c * a^k * c^{-1} = b^k$, і з (2)

отримаємо $x_b(0) * b^k = x_a(k) * c^{-1}$, тобто $x_a(k) * c^{-1} = x_b(k)$. Відображення T_p на себе, визначене умовами (1) по-перше дійсно є автоморфізмом, так як довжина спільного початку $x_a(s)$ та $x_a(q)$ і довжина спільного початку $x_b(s)$ та $x_b(q)$ однакові – вони дорівнюють довжині спільного початку s і q , по-друге є повністю визначеним, так як для всіх кінців x' з T_p знайдеться ціле p -адичне k з $\mathbb{Z}_p$ таке, що $x_a(k) = x'$ оскільки $\forall n \in \mathbb{N}$ s_a^n накриває весь n -тий рівень. Тобто c існує і єдиний, як автоморфізм, визначений умовами (1). $\square$

Теорема 1. Централізатор автоморфізму $a \in M$ складається з елементів вигляду a^k ($k \in \mathbb{Z}_p$).

Доведення. Дійсно $a^k \in C_{\text{Aut} T_p}(a)$, так як для всіх цілих p -адичних k з $\mathbb{Z}_p$ $a^k * a * (a^k)^{-1} = a^{k+1-k} = a$. Далі, нехай $c \in C_{\text{Aut} T_p}(a)$, q – деякий елемент $\mathbb{Z}_p$ і, в позначеннях леми 2, $x_a(q) * c^{-1} = x_a(0)$. Згідно з лемою 2 автоморфізм c визначається наступним чином: $\forall k \in \mathbb{Z}_p$ $\rho_{c^{-1}}(x_a(q+k), x_a(k)) = 1$. Так як $\forall k \in \mathbb{Z}_p$ $\rho_a(x_a(q+k), x_a(k)) = -q$, то, згідно з означенням p -адичного степеня, $c^{-1} = a^{-q}$, звідки $c = a^q$. $\square$

Означимо дію $\mathbb{Z}_p$ на $C_{\text{Aut} T_p}(a)$ наступним чином: $k * c = c^k$ ($k \in \mathbb{Z}_p, c \in C_{\text{Aut} T_p}(a)$). Згідно з теоремою 1 $C_{\text{Aut} T_p}(a)$ з дією $k * c \equiv c^k \in \mathbb{Z}_p$ є модулем.

Теорема 2. Має місце ізоморфізм модулів $C_{\text{Aut} T_p}(a) \approx \mathbb{Z}_p$.

Нехай $c \in C_{\text{Aut} T_p}(a)$, $c = a$. Покажемо, що відображення $\log_a c = k$ є ізоморфізмом модулів. Дійсно

$$\log_a(c_1 * c_2) = \log_a(a^{k_1} * a^{k_2}) = \log_a(a^{(k_1+k_2)}) = k_1 + k_2,$$

$$\log_a(k_1 * c_2) = \log_a(c_2^{k_1}) = \log_a(a^{k_2 * k_1}) = k_2 * k_1 = k_1 * \log_a c_2.$$

Далі $\forall c \in C_{\text{Aut} T_p}(a)$, c має рівно один образ $\log_a c$, $\forall p \in \mathbb{Z}_p$, k має рівно один

прообраз a^k . Тобто відображення $\log_a : C_{AutT_2}(a) \rightarrow Z_p$ є ізоморфізмом модулів.

Приклад. Розглянемо рівняння $x^n = a$ в $AutT_2$, де $x, a \in M, n \in Z_2$. Для кожного $n \in Z$ розв'язки цього рівняння є елементами $C_{AutT_2}(a)$. Дійсно, $x * a * x^{-1} = x * x^n * x^{-1} = x^n = a$. Тобто $x = a^p$, де $p \in Z_2$ таке, що $(a^p)^n = a$, або іншими словами $p * n = 1$. З того, що у кільця цілих 2-адичних чисел оборотними є тільки елементи вигляду $2k + 1$, випливає, що рівняння $x^n = a$ має єдиний розв'язок для $n = 2k + 1$, і не має розв'язків для $n = 2k$. Наприклад, розв'яжемо рівняння $x^{-3} = \varepsilon$, де ε визначається співвідношенням: $\varepsilon = (e, e) * \sigma$, де σ - автоморфізм простору Бера, який на множині двійкових послідовностей змінює першу координату послідовності, всі інші залишаючи незмінними $((0011010...) * \sigma = 1011010...)$, а запис (a, b) визначає автоморфізм, який першу координату залишає незмінною, а на двійкову послідовність, починаючи з другої координати, діє автоморфізмом a , якщо перший елемент послідовності є 0, і діє автоморфізмом b , якщо перший елемент $1((x_1x_2x_3...) * (a, b) = x_1(x_2x_3...) * a$, якщо $x_1 = 0$, і $(x_1x_2x_3...) * (a, b) = \bar{x}_1(x_2x_3...) * a$, якщо $x_1 = 1$). Автоморфізм ε є цілком визначеним. Автоморфізм ε визначений таким чином, будемо називати додавальною машиною.

Оберненим до -3 в Z_2 є 2-адичне число $...010101$, тобто єдиним розв'язком рівняння $x^{-3} = \varepsilon$ є $x = \varepsilon^{-010101}$. Легко перевірити, що $\varepsilon^{2k} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)$, $\varepsilon^{2k+1} = (\varepsilon^k, \varepsilon^{k+1}) * \sigma$. Далі $\varepsilon^{-10101} = (\varepsilon^{-1010}, \varepsilon^{-01011}) * \sigma$, $\varepsilon^{-01010} = (\varepsilon^{-10101}, \varepsilon^{-10101})$, $\varepsilon^{-101011} = (\varepsilon^{-10101}, \varepsilon^{-010110}) * \sigma$, $\varepsilon^{-010110} = (\varepsilon^{-01011}, \varepsilon^{-01011})$. Звідси отримаємо, що єдиним розв'язком рівняння $x^{-3} = \varepsilon$ є автоморфізм a , заданий співвідношеннями: $a = (b, c) * \sigma$, $b = (a, a)$, $c = (a, d) * \sigma$, $d = (c, c)$. Автоморфізм a є цілком визначеним. Автоморфізм ε належить групі скінчено-станових автоморфізмів $FAutT_2$, яка є підгрупою $AutT_2$.

Теорема 3. Якщо для скінчено-станового автоморфізму ε максимального про-порядку в степені ε^q q є квазіперіодичним 2-адичним числом, то ε^q теж є скінчено-становим автоморфізмом.

Доведення. Дійсно, оскільки $\varepsilon^{2k} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)$, $\varepsilon^{2k+1} = (\varepsilon^k, \varepsilon^{k+1}) * \sigma$, а q з певного місця має період, то ε^q має скінчену кількість станів. $\square$

Теорема 4. Для автоморфізму ε , $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$

складається зі степенів вигляду ε^q , де q є квазіперіодичним 2-адичним числом, тобто раціональним числом вигляду m/n , де m - ціле число, а n - натуральне число вигляду $2 * k + 1$.

Звідси для довільного автоморфізму a , спряженого с ε в $FAutT_2$, $C_{FAutT_2}(a)$

складається зі степенів вигляду a^q , де q має вигляд, визначений вище. Дійсно, якщо $a = b * \varepsilon * b^{-1}$ ($b \in FAutT_2$), то $a^q = b * \varepsilon^q * b^{-1}$ також є скінчено-становим, оскільки за теоремою 3 ε^q є скінчено становим.

3 Висновки

У роботі розглянуто групу $AutT_2$ автоморфізмів кореневого однорідного дерева. Доведено, що централізатор шарово-однорідного елемента в цій групі складається з цілих p -адичних степенів цього елемента, а також пораховано централізатори елементів, які спряжені з додавальною машиною в $FAutT_2$.

Список використаних джерел

1. Суцанский В.И. Сплетения по последовательности групп подстановок и финитно-аппроксимируемые группы // Докл. АН УССР.-1984.-№2.-С.19-22
2. Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І. Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева.// Наукові записки НаУКМА.- Т.39. Фізико-математичні науки. - 2005. -С.25-27.

Надійшла до редколегії 08.05.2007

УДК 512.54

Оксана О.Одінцова, к. ф.-м.н.

Про групи з сепаруючими підгрупами відносно систем нерозкладних циклічних підгруп

Розглянуто властивості груп, в яких нормальною є кожна нерозкладна циклічна підгрупа, що не належить деякій власній підгрупі групи.

Ключові слова: сепаруюча підгрупа, сепаратор, нерозкладна циклічна підгрупа, характеристика груп.

E-mail: oincube@yahoo.com

1 Вступ

Вивчення груп з сепаруючими підгрупами є одним із напрямків досліджень груп, у яких ті чи інші системи підгруп задовольняють заздалегідь задані умови. Започатковано його було у 70-х роках ХХ століття роботами Д.Кеппіта [7], С.М.Чернікова [4], А.Ф.Баранніка [1].

Група G називається групою з сепаруючими підгрупами відносно системи підгруп Σ , якщо в G існує така підгрупа S (сепаруюча підгрупа), що кожна підгрупа з системи підгруп Σ є нормальною в G при умові, що вона не належить до S . Систему підгруп Σ складають ті підгрупи групи G , які мають певну теоретико-групову властивість. Будь-яка підгрупа S_1 групи G , яка містить сепаруючу підгрупу S , буде теж сепаруючою підгрупою у групі G відносно системи підгруп Σ . Перетин M сепаруючих підгруп групи G називається сепаратором цієї групи. Означення сепаруючої підгрупи, сепаратора групи було дане С.М.Черніковим у роботі [4]. Там же встановлено, що сепаратор M збігається з підгрупою, породженою всіма ненормальними підгрупами системи Σ , у разі відсутності таких $M=1$. С.М.Черніков ([4]) поставив загальну задачу опису груп з сепаруючими підгрупами.

У даній роботі розглянуто властивості груп з сепаруючими підгрупами відносно системи нерозкладних циклічних підгруп. Для них введено позначення $H(\text{Indec}C\backslash S)$ -груп. Оскільки клас досліджуваних груп є перетином таких класів груп з сепаруючими підгрупами:

– відносно систем примарних циклічних підгруп (їх позначено $H(PC\backslash S)$ -групи);

Oksana A. Odintsova, Cand.Sci(Phys.-Math.)

On groups with separating subgroups relativity systems of indecomposable cyclic subgroups

There are properties and description of the groups in which all indecomposable cyclic subgroups are normal in group when they don't belong to some proper subgroup of the group in this article.

Key words: separating subgroup, separator, indecomposable cyclic subgroup, description of group.

– та відносно систем нескінченних циклічних підгруп (їх позначено $H(IC\backslash S)$ -групи), і характеристика $H(PC\backslash S)$ -груп виконано у роботі [3]. Тому нижче наведено також характеристика класу $H(IC\backslash S)$ -груп.

$H(S)$ -групами позначено групи з сепаруючими підгрупами, у яких система підгруп Σ складається з власних підгруп групи ([2]). Вони вивчалися в роботах [1], [7], а повний опис цих груп дано в роботі М.Ф.Кузенного та М.М.Семка [2].

2 Характеризація груп з сепаруючими підгрупами відносно систем нерозкладних циклічних підгруп

Розглянемо спочатку групи з сепаруючими підгрупами відносно систем нескінченних циклічних підгруп.

Теорема 1. Група $G \in H(IC\backslash S)$ -групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з типів:

- 1) G – дедекіндова група;
- 2) $G = A \cdot \langle b \rangle$, де A – неперіодична квазіцентральна абелева підгрупа групи G , $|b| \in \{2, 4\}$, $A \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$;
- 4) G – неперіодична група, всі ненормальні нескінченні циклічні підгрупи якої породжують власну неединичну нормальну підгрупу K , що містить будь-який елемент нескінченного порядку групи G .

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група.

Припустимо, що G – група з одиничним сепаратором, тобто група, в якій нормальні всі нескінченні циклічні підгрупи, та X – її

неперіодична абелева підгрупа. Тоді, зрозуміло, що X породжується всіма своїми нескінченними циклічними підгрупами. Значить, $X \triangleleft G$ тобто G група, в якій нормальними є неперіодичні абелеві підгрупи. Нехай G – група, в якій нормальними є неперіодичні абелеві підгрупи. Тоді в ній нормальна будь-яка нескінченна циклічна підгрупа.

Покажемо, що G є групою одного з типів 1-2.

Справді, нехай у групі G існують нескінченні циклічні підгрупи. Тоді вона є або дедекіндовою групою (і відповідно групою типу 1), або вона є групою, в якій нормальними є всі неперіодичні абелеві підгрупи, і G за теоремою 4.6 з роботи [5] є групою виду $G = A \langle b \rangle$, де $|b| \in \{2, 4\}$, $A \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$, A – квазіцентральна в G неперіодична підгрупа, для довільного елемента $a \in A$ виконується рівність $b^{-1}ab = a^{-1}$ (тобто групою типу 2 теорему).

Нехай далі G – $H(IC \setminus S)$ -група з неединичним сепаратором. Тоді група G містить ненормальну нескінченну циклічну підгрупу, а значить, G – неперіодична група, в якій всі ненормальні нескінченні циклічні підгрупи групи G породжують власну неединичну підгрупу K групи G . Якщо всі елементи нескінченного порядку належать K , то G – група типу 3 теорему.

Припустимо, що $G \setminus K$ містить елемент нескінченного порядку g . Тоді за означенням $\langle g \rangle \triangleleft G$. Покажемо, що у цьому випадку $\langle x \rangle \triangleleft G$ для довільного елемента x нескінченного порядку групи G .

Якщо $x \notin K$, то за означенням $\langle x \rangle \triangleleft G$. Нехай $x \in K$, тоді $gx = y \notin K$ і в групі G існує підгрупа $X = \langle x \rangle \langle g \rangle = \langle y \rangle \langle g \rangle$, $X \not\subseteq K$. Якщо X – циклічна група, то $\langle x \rangle$ – характеристична підгрупа нормальної в G підгрупи X , а значить, $\langle x \rangle \triangleleft G$. Нехай X – нециклічна група. Тоді зрозуміло, що $gx^{-1} \notin K$ та $X = \langle g \rangle \langle gx^{-1} \rangle$. Припустимо, що $X \neq 1$. Тоді $x^{-1}gx = g^{-1}$ і X містить підгрупу $\langle g^2 \rangle$ та порядок X нескінченний. Очевидно, що $y^2 = gxgx = gx^2(x^{-1}gx) = gx^2g^{-1} = x^2$. Оскільки x – елемент нескінченного порядку, то елемент y має такий самий порядок. Звідси $\langle y \rangle \triangleleft G$. Зрозуміло також, що

$$X' \in \langle y \rangle \cap \langle g \rangle \leq Z(X) \text{ і } \langle y \rangle \cap \langle g \rangle = \langle g^n \rangle.$$

для деякого натурального n . Покажемо, що $[y, g]^n = [y, g^n]$. Оскільки $X' \subseteq Z(G)$, то враховуючи означення комутатора та відоме комутаторне співвідношення $[x, y]^n = [y, x]$ ([6], с.171) будемо мати

$$[y, g^n] = y^{-1}g^n y g^n = (y^{-1}gy)^n g^n = (g(g^{-1}y^{-1}gy))^n g^n = (g[g, y])^n g^n = [g, y]^n g^n g^n = [g, y]^n = [y, g]^n.$$

Крім того $g^f \in Z(X)$, то $[y, g]^n = [y, g^n] = 1$, що неможливо. Отже, $X' = 1$.

Припустимо, що $y' = 1$ для деякого натурального l . Тоді $y' = (gx)^l = g^l x^l = 1$, звідси випливає, що $g^l = x^{-l}$, тобто $(gx^{-1})^l = g^{2l} \neq 1$, а значить, елемент gx^{-1} має нескінченний порядок. Заміняючи x на x^{-1} , без порушення загальності, одержимо, що y – елемент нескінченного порядку і за умовою теореми $\langle y \rangle \triangleleft G$. Звідси $X \triangleleft G$.

Нехай d – довільний елемент групи G . Тоді $d'gd = g^{\epsilon}$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$,

$$y^{\alpha} = d' y d = d' g x d = g^{\epsilon} d' x d = g^{\alpha} x^{\alpha}, \alpha \in \{\pm 1\}.$$

Тепер при $\alpha = \epsilon$ маємо, що $d' x d = x^{\epsilon}$. Нехай $\alpha \neq \epsilon$. Тоді $\alpha = -\epsilon$. За попереднім $C_G(\langle g \rangle)$, $C_G(\langle y \rangle)$ містять всі елементи нескінченного порядку в групі G , але тоді з умови $\alpha = -\epsilon$ випливає, що d має нескінченний порядок. Тепер коли $\langle g \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1$ підгрупи $\langle y \rangle \lambda \langle d \rangle$ та $\langle g \rangle \lambda \langle d \rangle$ містять нескінченну центральну підгрупу $\langle y \rangle \cap \langle g \rangle$, що можливо лише у випадку $\epsilon = \alpha = 1$. А це в свою чергу неможливо.

Нехай $\langle y \rangle \cap \langle g \rangle = 1$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\epsilon = 1$ і в групі G існує підгрупа $V = \langle g \rangle \times \langle d \rangle$ з періодичною частиною $T(V) = \langle d \rangle$. Тоді як і для X можна встановити, що $V \triangleleft G$, $V' = 1$ і $\langle d \rangle \triangleleft G$. З цього випливає, що $\epsilon = \alpha = 1$, а це суперечить припущенню. Ця суперечність завершує доведення необхідності.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1–3 розглядуваної теореми. Покажемо, що G – $H(IC \setminus S)$ -група.

У групі G кожного з типів 1, 2 покладемо, що сепаруюча підгрупа $S = 1$, а у групі типу 3 – $S = K$, де K – неединична підгрупа, породжена всіма ненормальні нескінченні циклічними підгрупами групи G .

У групі G типу 1 нормальною є будь-яка нескінченна циклічна підгрупа. А у групі типу 2 за встановленим у теоремі 4.6 роботи [5] нормальними є всі неперіодичні абелеві підгрупи, та за доведенням вище у групі G нормальними є всі нескінченні циклічні підгрупи. Тобто у групах типів 1, 2 будь-яка нескінченна циклічна підгрупа, що не міститься в $S = 1$, є нормальною в самій групі. Звідси, G – $H(IC \setminus S)$ -група.

Нехай G – група типу 3. Оскільки у групі G даного типу всі ненормальні нескінченні циклічні підгрупи породжують власну неединичну підгрупу $K = S \leq G$, то за означенням G – $H(IC \setminus S)$ -група. Достатність доведено.

Теорему доведено повністю.

Перейдемо до характеристики $H(Indec C \setminus S)$ -груп.

Лема 1. Кожна $H(\text{IndecC}\backslash S)$ -група G , яка не є $H(S)$ -групою – періодична.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді вона містить власну нормальну в G підгрупу K , породжену всіма ненормальними в G нерозкладними циклічними підгрупами.

Якщо $\langle g \rangle \triangleleft G$ для будь-якого елемента $g \in G \setminus K$, то вона буде групою з сепаруючими підгрупами відносно систем циклічних підгруп, яка за лемою 1.4.1 роботи [2] буде $H(S)$ -групою, що за умовою леми неможливо. Отже, $G \setminus K$ містить такий елемент g , що підгрупа $\langle g \rangle$ є ненормальною в G . Зрозуміло, що G – недедекіндова група.

Припустимо, що G – неперіодична група. Можливі випадки:

1. Елемент g має нескінченний порядок;
2. $|g| < \infty$.

У випадку 1 група $G \in H(\text{IC}\backslash S)$ -групою, що задовольняє умову теореми 1 і може бути лише групою типу 2 цієї теореми. Група G згаданого типу має вигляд $A \cdot \langle b \rangle$, де A містить всі елементи нескінченного порядку, а $|b| \in \{2, 2^2\}$, $A \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$. Зрозуміло, що $g \in A$, тоді $b^{-1}gb = g^{-1}$. З цього випливає, що $b \in S$. Оскільки $g \notin S$, то $gb \notin S$. Зрозуміло також, що $(gb)^2 = gb \cdot gb = b^2$, а значить, $\langle gb \rangle \triangleleft G$. З цього випливає, що $\langle g \rangle \times \langle gb \rangle = \langle g \rangle \lambda \langle b \rangle$ – абелева група, а це неможливо. І випадок 1 не можливий.

У випадку 2 всі нескінченні циклічні підгрупи належать S , $|g| < \infty$, $\langle g \rangle = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, де $\langle a \rangle$ – максимальна холлівська підгрупа з $\langle g \rangle$, а $\langle b \rangle$ – її неединичне холлівське доповнення. Оскільки $\langle g \rangle$ ненормальна підгрупа в G , то і підгрупа $\langle b \rangle$ також ненормальна в G .

Припустимо, що $\langle b \rangle$ містить неединичну силовську підгрупу $\langle b_1 \rangle$, яка не міститься в K . Тоді за умовою $\langle b_1 \rangle$ нормальна підгрупа в G та $(\langle b_1 \rangle \times \langle a \rangle)$ – холлівська підгрупа групи G , яка нормальна у групі G , а це суперечить вибору a . З цього випливає, що $b \in K$. Оскільки $g \notin K$, то і $a \notin K$. У зробленому припущенні G містить такий елемент f нескінченного порядку, що $G \geq \langle a \rangle \lambda \langle f \rangle = U$.

Нехай $af = c$. Тоді елемент c має нескінченний порядок. Оскільки $a \notin K$, то хоча б один з елементів c чи f не міститься в K . Тому без порушення загальності можна вважати, що $f \in K$, значить, $\langle f \rangle \triangleleft G$, що неможливо. Випадок 2 розглянуто.

Одержані суперечності показують, що G – періодична група.

Лему доведено.

Лема 2. Нехай G – недедекіндова $H(\text{IndecC}\backslash S)$ -група. Тоді G – періодична група, яку можна подати у вигляді $G = A \cdot B$, де A – прямий добуток неединичних силовських p_i -підгруп P_i групи G , $i \in I$, $|I| \neq 0$, кожна з яких містить власну нормальну в G підгрупу S_i , для якої в G нормальні всі підгрупи з P_i , що не містяться в S_i (тобто $P_i \in H(S)$ -групою з сепаратором S_i) а B – холлівська підгрупа групи G , що не є $H(S)$ -групою, $B \triangleleft G$, $[A, B] = 1$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Якщо G – $H(S)$ -група, то за теоремою 1.4.2 роботи [2] вона є періодичною групою.

Нехай G – не $H(S)$ -група. Тоді вона задовольняє умову леми 1, за якою G – періодична група.

Отже, завжди G – періодична група, яка задовольняє умову теореми 1 роботи [3] і може бути тільки групою типу 2 цієї теореми. Для груп цього типу маємо, що $G = A \cdot B$ де A – прямий добуток неединичних силовських p_i -підгруп P_i групи G , $i \in I$, $|I| \neq 0$, кожна з яких містить власну нормальну в G підгрупу S_i , для якої в G нормальні всі підгрупи з P_i , що не містяться в S_i (тобто $P_i \in H(S)$ -групою з сепаратором S_i) а B – холлівська підгрупа групи G , що не є $H(S)$ -групою, $B \triangleleft G$, $[A, B] = 1$ і група G – це група з твердження леми.

Лему доведено.

Теорема 2. Група $G \in H(\text{IndecC}\backslash S)$ -групою тоді і тільки тоді, коли $G \in$ групою одного з типів:

- 1) G – неединична дедекіндова група;
- 2) G – недедекіндова група, що є прямим добутком своїх силовських p_i -підгруп P_i , $i \in I$, кожна з яких є $H(S)$ -групою;
- 3) $G = A \cdot B$, де A та B – холлівські підгрупи групи G , A – підгрупа типу 1 або 2, B не може бути ні групою типу 1, ні групою типу 2, $[A, B] = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – досліджувана група. Якщо G – дедекіндова група, то вона є групою типу 1 теореми.

Нехай G – недедекіндова група. Якщо G – $H(S)$ -група, то вона за теоремою 1.4.2 роботи [2] є групою виду $G = P \times D$, де D – холлівська періодична дедекіндова підгрупа групи G , P – силовська p -підгрупа групи G , $P = C \cdot B$, де C – нормальна в групі G локально циклічна підгрупа, що містить таку підгрупу $\langle a \rangle$, для якої

$$|a| = p^a, P' = \langle a^{p^k} \rangle = \langle a \rangle \cap B \triangleleft (G), \\ \alpha > k \geq \alpha - k > 0.$$

$$S = (\langle a^{p^m} \rangle \cdot B) \times D, k \geq m > 0$$

B – група, що породжується своїми підгрупами $B_i = P' \times \langle b_i \rangle$, $|b_i| = p^{b_i}$, $i \in I$, $|I| > 0$, $P' \triangleleft B$, фактор-

група B/P' розкладається в прямий добуток підгруп B/P' , $k-m+1 \geq \beta_i > 0$, якщо $p^{k-m-1} = 2$, то $B' = 1$, $\alpha > 2$, а значить, G – група типу 2 теореми.

Покладемо далі, що G – не $H(S)$ -група. Тоді за лемою 1 вона є періодичною групою, яка задовольняє умову леми 2, за твердженням якої $G = A \cdot B$, де A – холлівська підгрупа групи G , $B < G$, $[A, B] = 1$.

Якщо $B = 1$, то $G = A$ і є групою типу 2 теореми.

Нехай $B \neq 1$. Зрозуміло, що A – група типу 1 або 2 теореми. Якщо B – група типу 1 або 2 теореми, то і сама група G є групою типу 1 або 2 теореми.

Якщо B не є групою ні типу 1, ні типу 2, то група G буде групою типу 3 теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Для групи G типу 1 достатність очевидна.

Нехай G – група типу 2 або типу 3 розглядуваної теореми. Тоді $G = A \cdot B$ – недедекіндова група, де A та B задовольняють умови теореми і у групі типу 2 підгрупа $B = 1$.

Покладемо, що сепаратор $M = B \cdot \prod_{i \in I} M_i$, де

M_i – сепаратор силовської p_i -підгрупи P_i групи A . Тоді M є підгрупою групи G . Нехай $G \setminus M$ містить підгрупу $\langle g \rangle$, яка є нерозкладною циклічною підгрупою групи G . Тоді $|g| = p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$. За умовою $\langle g \rangle \triangleleft P_i$, а тому $\langle g \rangle \triangleleft G$. За означенням G – $H(\text{IndecC} \setminus S)$ -група.

Достатність доведено.

Теорему доведено повністю.

3 Висновки

З доведення теореми 1 випливає, що клас $H(IC \setminus S)$ -груп ширший за клас груп з нескінченними циклічними підгрупами. Це розширення відбувається за рахунок груп типу 3 теореми 1. Зрозуміло, що клас $H(IC \setminus S)$ -груп також ширший за клас $H(S)$ -груп, який збігається з класом $H(C \setminus S)$ -груп (тобто груп з сепаруючими підгрупами відносно систем циклічних підгруп, лема 1.4.1 роботи [2]). Зокрема, група $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle d \rangle$, де $|a| = |b| = \infty$, $|d| = 3$, $d'ad = b$ і $d'bd = a^{-1}b^{-1}$ є групою типу 3 теореми 1.

У свою чергу теорема 2 показує, що клас $H(C \setminus S)$ -груп (який збігається з класом $H(S)$ -груп) є вужчим за клас $H(\text{IndecC} \setminus S)$ -груп.

Список використаних джерел

1. Баранник А.Ф. Обобщение метамильтоновых групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп: Сб. научн. тр. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1974. – С. 167-198.
2. Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метамильтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
3. Одінцова О.О. Про групи з сепаруючими підгрупами відносно систем примарних циклічних підгруп // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – К.: КНУ імені Тараса Шевченка. – 2007, 1. – С. 21-25.
4. Черников С.Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп: Сб. научн. тр. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1973. – С. 6-14.
5. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. Холл М. Теория групп. – М.: Из-во научн. лит-ры, 1962. – 469 с.
7. Cappel D. Generalized Dedekind groups // J. Algebra. – 1971. – 17, #3. – P. 310-316.

Надійшла до редколегії 26.10.2007

УДК 519.4

Людмила Ю. Полякова, аспирант

О 0-гомологиях полугрупп

Введено понятие 0-гомологий полугрупп. Установлена связь 0-гомологий с обычными гомологиями полугрупп, а также даны некоторые применения 0-гомологий.

Ключевые слова: 0-гомологии, гомологии полугрупп.

E-mail: tyutryumova@univer.kharkov.ua

Если полугруппа S содержит нуль, то ее ко-гомологии и гомологии тривиальны. Б. В. Новиков в [3] (см. также [6]) построил так называемые 0-когомологии полугрупп, которые, вообще говоря, оказываются нетривиальными для полугрупп с нулем. Более того, если S содержит 0, то можно построить полугруппу $\bar{S}$, называемую 0-рефлексором полугруппы S (см. определение ниже), обычные группы когомологий которой связаны с 0-когомологиями S следующим образом: первые группы когомологий изоморфны; существует мономорфизм второй группы когомологий $\bar{S}$ во вторую группу 0-когомологий S . В частности, 0-когомологии позволяют вычислять обычные группы когомологий полугрупп.

Гомологии полугрупп и задача их нахождения возникают, например, в работах К. Сквиря [9] и Ю. Кобаяши [6] в связи с решением проблемы тождества слов для полугрупп и моноидов, А. Хусаинова [5] в связи с построением групп гомологий асинхронных систем переходов. Поэтому естественно рассмотреть 0-гомологии полугрупп. В настоящей работе мы строим 0-гомологии полугрупп и показываем, что для них справедливы свойства, аналогичные свойствам 0-когомологий. В разделе 1 излагаются необходимые предварительные сведения, и вводится понятие 0-гомологий. Раздел 2 посвящен установлению изоморфизма между первыми группами гомологий 0-рефлексора $\bar{S}$ и 0-гомологий полугруппы S . В разделе 3 приведены некоторые применения 0-гомологий.

1. Предварительные сведения и основные определения

Все рассматриваемые модули будут правыми. Обозначение $\underline{Sem}$ используется для категории полугрупп.

Рассмотрим $\underline{Sem}_0$ – категорию, объектами

Lyudmyla Yu. Polyakova, PhD Student

On 0-homology of semigroups

The notion of the semigroup 0-homology groups is introduced. The connection of 0-homology with usual semigroup homology groups is established and some applications of the 0-homology groups are given.

Key Words: 0-homology, semigroup homology.

которой являются полугруппы с нулем, а морфизмами – такие отображения $\varphi: S \setminus 0 \rightarrow T$, что $\varphi^{-1}(0) = \emptyset$ и $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, если $xy \neq 0$ (0-гомоморфизмы). Подкатегория $\underline{Sem}^0$ категории $\underline{Sem}_0$, объектами которой являются полугруппы с внешне присоединенным нулем, очевидно, изоморфна категории $\underline{Sem}$. Поэтому будем рассматривать $\underline{Sem}$ как подкатегорию в $\underline{Sem}_0$.

Напомним определение рефлексивной подкатегории.

Определение 1.1. [7, Ch. IV, § 3] Подкатегория $\underline{D}$ категории $\underline{C}$ называется рефлексивной, если каждому объекту $C \in \underline{C}$ сопоставлен объект $R_{\underline{D}}(C) \in \underline{D}$ (называемый $\underline{D}$ -рефлексором объекта C) и морфизм $\varepsilon_{\underline{D}}(C): C \rightarrow R_{\underline{D}}(C)$, такие, что для любого $D \in \underline{D}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varepsilon_{\underline{D}}(C)} & R_{\underline{D}}(C) \\ \downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

однозначно дополняется до коммутативной морфизмом из $\text{Hom}_{\underline{D}}(R_{\underline{D}}(C), D)$.

Покажем, что категория $\underline{Sem}$ рефлексивна в $\underline{Sem}_0$. Достаточно для каждой полугруппы с нулем S построить ее $\underline{Sem}$ -рефлексор, который мы будем обозначать через $\bar{S}$ и называть просто 0-рефлексором.

Если S – полугруппа с внешне присоединенным нулем, то, очевидно, что $\bar{S} = S$ и отображение $\varepsilon_{\underline{Sem}}(S)$, являющееся тождественным морфизмом полугруппы S , удовлетворяют требованиям определения 1.1.

Пусть S – полугруппа из $\underline{Sem}_0 \setminus \underline{Sem}$. Тогда

она может быть задана некоторыми отличными от 0 образующими и определяющими соотношениями:

$$S = \langle a_1, \dots, a_k \mid P_i = Q_i, 1 \leq i \leq n \rangle. \quad (1)$$

Назовем соотношение $P_i = Q_i$ нулевым, если значение слова P_i в полугруппе S равно 0.

Предложение 1.2. Если в (1) отбросить все нулевые определяющие соотношения, то полученная полугруппа будет 0-рефлектором полугруппы S .

Доказательство. Через A обозначим свободную полугруппу, порожденную элементами $a_1, \dots, a_k$, через ρ_0 (соответственно ρ) – наименьшую конгруэнцию, содержащую все пары $(P_i, Q_i), 1 \leq i \leq n$ (соответственно все пары (P_i, Q_i) для ненулевых соотношений $P_i = Q_i$). Тогда $S \cong A/\rho_0$ и $\bar{S} \cong A/\rho$. Элементы полугруппы S будем записывать как классы эквивалентности $[x]_{\rho_0}$ некоторого элемента $x \in A$ по конгруэнции ρ_0 . Аналогично для элементов $\bar{S}$.

Для всякого класса $[x]_{\rho_0} \in S$, отличного от класса нуля, положим $\varepsilon_{sem}(S)([x]_{\rho_0}) = [x]_{\rho}$. Это отображение корректно, поскольку если класс $[x]_{\rho_0}$ совпадает с некоторым классом $[y]_{\rho_0}$ и не содержит нуля, то y получается из x посредством ненулевых соотношений, следовательно, $[x]_{\rho} = [y]_{\rho}$. Нетрудно убедиться, что $\varepsilon_{sem}(S)$ удовлетворяет свойствам 0-гомоморфизма.

Рассмотрим произвольный 0-гомоморфизм полугрупп $f: S \rightarrow T$. Если существует гомоморфизм $h: \bar{S} \rightarrow T$, дополняющий до коммутативной диаграммы из определения 1.1, то для каждого класса $[x]_{\rho_0} \in S$, отличного от класса нуля, должно быть справедливым равенство $h \circ \varepsilon_{sem}(S)([x]_{\rho_0}) = f([x]_{\rho_0})$, то есть

$$h([x]_{\rho}) = f([x]_{\rho_0}). \quad (2)$$

В частности, условие (2) выполнено для всех образующих $a_1, \dots, a_k$ полугруппы $\bar{S}$, значит, оно однозначно задает гомоморфизм h на элементах полугруппы $\bar{S}$. Можно непосредственно убедиться, что h корректно определен и является требуемым гомоморфизмом. $\square$

Полугруппа $\bar{S}$ может быть построена следующим образом ([3]).

Через (S) обозначим множество всех последовательностей $(s_1, s_2, \dots, s_n), n \geq 1$, для которых

выполнены такие условия:

$$s_i \in S \setminus 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq n;$$

$$s_i s_{i+1} = 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq n-1.$$

На множестве (S) определим такое бинарное отношение v , что $(s_1, \dots, s_m) v (t_1, \dots, t_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $m = n$ и существует такое i ($1 \leq i \leq m$), что $s_i = t_i u$, $t_{i+1} = u s_{i+1}$ для некоторого $u \in S$ и $s_j = t_j$ при $j \neq i, j \neq i+1$.

2) $m = n+1$ и существует такое i ($2 \leq i \leq m-1$), что $s_i = uv$, $t_{i-1} = s_{i-1} u$, $t_i = v s_{i+1}$ для некоторых $u, v \in S$, и $s_j = t_j$ при $1 \leq j \leq i-2$, и $s_j = t_{j-1}$ при $i+2 \leq j \leq m$.

Пусть $\bar{v}$ – наименьшая эквивалентность, содержащая v , а $\bar{S}$ – фактормножество $(S)/\bar{v}$. Обозначим образ элемента $(s_1, \dots, s_n) \in S$ при факторотображении через $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$. Тогда $\bar{S}$ превращается в полугруппу, на которой умножение элементов задается по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \langle s_1, \dots, s_m \rangle \langle t_1, \dots, t_n \rangle &= \\ &= \begin{cases} \langle s_1, \dots, s_{m-1}, s_m t_1, \dots, t_n \rangle, & \text{если } s_m t_1 \neq 0; \\ \langle s_1, \dots, s_{m-1}, s_m, t_1, \dots, t_n \rangle, & \text{если } s_m t_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что в [3; 4] такая конструкция берется в качестве определения полугруппы $\bar{S}$, и в [4] доказывается ее эквивалентность конструкции, приведенной в предложении 1.2.

Определение 1.3. [3] 0-модулем над полугруппой S (с нулем 0) называется абелева группа A (в аддитивной записи) такая, что для $s \in S \setminus 0$, $a \in A$ определено произведение $as \in A$, удовлетворяющее при любых $s, t \in S \setminus 0$, $a, b \in A$ условиям

$$(a+b)s = as + bs;$$

$$\text{если } st \neq 0, \text{ то } (as)t = a(st).$$

Гомоморфизмом 0-модуля A в 0-модуль B (над полугруппой S) называется такой гомоморфизм абелевых групп $\varphi: A \rightarrow B$, что $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для всех $s \in S \setminus 0$, $a \in A$.

Как показано в [3], 0-модули над полугруппой S образуют категорию $\underline{C}_0(S)$, которая изоморфна категории $\underline{C}(\bar{S})$ обычных модулей над полугруппой $\bar{S}$. При этом соответствие между объектами этих категорий задается так: если $A \in \underline{C}_0(S)$, то A можно превратить в $\bar{S}$ -модуль, положив $a \langle s_1, \dots, s_n \rangle = (\dots (as_1)s_2 \dots)s_n$ для $a \in A$.

Если же $\bar{A} \in \underline{C}(\bar{S})$, то превратим $\bar{A}$ в 0-модуль над S , положив $\bar{a}s = \bar{a}\langle s \rangle$ для $\bar{a} \in \bar{A}$ и $s \in S \setminus 0$.

Теперь построим 0-гомологии для полугруппы S с нулем 0. Пусть A — 0-модуль над S . Через D_n обозначим множество всех таких наборов $[s_1, \dots, s_n]$ элементов S , что $s_1 s_2 \dots s_n \neq 0$.

Через $C_n^0(S, A)$ ($n \geq 1$) обозначим множество (конечных) линейных комбинаций наборов $[s_1, \dots, s_n]$ из D_n с коэффициентами в 0-модуле A . Каждую такую линейную комбинацию будем записывать как $\sum a_{s_1, \dots, s_n} [s_1, \dots, s_n]$ и называть n -мерной 0-цепью. В качестве множества 0-мерных 0-цепей возьмем $C_0^0(S, A) = A$.

Множества $C_n^0(S, A)$ ($n \geq 0$) являются абелевыми группами по сложению. Определим граничные гомоморфизмы $\partial_n : C_n^0(S, A) \rightarrow C_{n-1}^0(S, A)$ на образующих групп 0-цепей обычным образом:

$$\begin{aligned} \partial_n(a[s_1, \dots, s_n]) &= \\ &= as_1[s_2, \dots, s_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a[s_1, \dots, s_i s_{i+1}, \dots, s_n] + \\ &+ (-1)^n a[s_1, \dots, s_{n-1}], \text{ если } n \geq 2; \\ \partial_1(a[s]) &= as - a. \end{aligned}$$

Гомоморфизм ∂_n определен корректно, то есть результатом его действия является $(n-1)$ -мерная 0-цепь, и является граничным гомоморфизмом, то есть $\partial_{n-1} \partial_n = 0$.

Определение 1.4. Группы $H_n^0(S, A) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$, $n \geq 1$ назовем группами n -мерных 0-гомологий полугруппы S с коэффициентами в 0-модуле A .

Другими словами, группы 0-гомологий $H_n^0(S, A)$ определяются как группы гомологий комплекса $C_\bullet^0$:

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} C_2^0(S, A) \xrightarrow{\partial_2} C_1^0(S, A) \xrightarrow{\partial_1} A.$$

Вместе с 0-гомологиями полугруппы S рассмотрим группы гомологий $H_n(\bar{S}, A)$ 0-рефлектора $\bar{S}$ с коэффициентами в модуле A . Согласно одному из определений [1] они являются группами гомологий комплекса $C_\bullet$:

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} C_2(\bar{S}, A) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\bar{S}, A) \xrightarrow{\partial_1} A.$$

Здесь $C_j(\bar{S}, A)$ — это группы цепей, то есть множества линейных комбинаций вида $\sum a_{x_1, \dots, x_n} [x_1, \dots, x_n]$, в которых $a_{x_1, \dots, x_n} \in A$, а

$[x_1, \dots, x_n]$ — всевозможные наборы элементов из $\bar{S}$, и лишь конечное число слагаемых в сумме отлично от 0.

Граничные гомоморфизмы ∂_n устроены аналогично гомоморфизмам ∂_n для 0-цепей.

Если модуль A рассматривать как 0-модуль над полугруппой S и обычный модуль над $\bar{S}$, то между группами 0-цепей $C_n^0(S, A)$ и группами цепей $C_n(\bar{S}, A)$ естественным образом возникает отображение $\varepsilon_n : C_n^0(S, A) \rightarrow C_n(\bar{S}, A)$ ($n \geq 1$), определенное как

$$\varepsilon_n(a[s_1, \dots, s_n]) = a[\langle s_1 \rangle, \dots, \langle s_n \rangle]$$

и являющееся гомоморфизмом групп. Положим также $\varepsilon_0 = \text{id}_A$. Семейство гомоморфизмов $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ мы можем представить как отображение комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_3} & C_2^0(S, A) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1^0(S, A) & \xrightarrow{\partial_1} & A \\ & & \downarrow \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_0 \\ \dots & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(\bar{S}, A) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\bar{S}, A) & \xrightarrow{\partial_1} & A \end{array}$$

Исходя из определений граничных гомоморфизмов, нетрудно убедиться, что для $i \geq 1$ выполнены равенства $\varepsilon_{i-1} \partial_i = \partial_i \varepsilon_i$, следовательно, отображение $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ является цепным отображением комплексов.

Таким образом, гомоморфизмы ε_n индуцируют гомоморфизмы групп гомологий соответствующих комплексов: $\varepsilon_n^* : H_n^0(S, A) \rightarrow H_n(\bar{S}, A)$.

2. Свойства 0-гомологий

В дальнейшем, если не указано другое, A — произвольный фиксированный 0-модуль над полугруппой S . Наша следующая цель — доказать такую теорему:

Теорема 2.1. $\varepsilon_1^* : H_1^0(S, A) \rightarrow H_1(\bar{S}, A)$ — изоморфизм групп.

Для доказательства мы покажем, что отображение ε есть "частичная" гомотопическая эквивалентность, в том смысле, что отображение в обратную сторону $\zeta : C_\bullet \rightarrow C_\bullet^0$, для которого $\varepsilon \zeta$ гомотопно $\text{id}_{C_\bullet}$, и $\zeta \varepsilon$ гомотопно $\text{id}_{C_\bullet^0}$, существует не для всех размерностей, а лишь для некоторых. Точная формулировка содержится в следующей лемме:

Лемма 2.2. Пусть заданы комплексы модулей M и N и цепное отображение комплексов $\alpha : M \rightarrow N$:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & M_{k+1} & \xrightarrow{\varepsilon_{k+1}} & M_k & \xrightarrow{\varepsilon_k} & M_{k-1} & \longrightarrow \dots \\ & \alpha_{k+1} \downarrow \uparrow \beta_{k+1} & & \alpha_k \downarrow \uparrow \beta_k & & \alpha_{k-1} \downarrow \uparrow \beta_{k-1} & \\ \longrightarrow & N_{k+1} & \xrightarrow{\delta_{k+1}} & N_k & \xrightarrow{\delta_k} & N_{k-1} & \longrightarrow \dots \end{array}$$

1. Если для некоторого $k \geq 1$ существуют такие модульные гомоморфизмы $\beta_j: N_j \rightarrow M_j$ ($j = k, k+1$), что

$$\beta_k \alpha_k - \text{id}_{M_k} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_{k+1} \beta_{k+1} = \beta_k \delta_{k+1}, \quad (4)$$

то индуцированный гомоморфизм групп гомологий $\alpha_k^*: H_k(M) \rightarrow H_k(N)$ является мономорфизмом.

2. Если для некоторого $k \geq 1$ существуют такие модульные гомоморфизмы $\beta_j: N_j \rightarrow M_j$ и $h_j: N_j \rightarrow N_{j+1}$ ($j = k-1, k$), что

$$\alpha_k \beta_k - \text{id}_{N_k} = h_{k-1} \delta_k + \delta_{k+1} h_k, \quad (5)$$

$$\partial_k \beta_k = \beta_{k-1} \delta_k, \quad (6)$$

то $\alpha_k^*: H_k(M) \rightarrow H_k(N)$ является эпиморфизмом.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $u_k \in M_k$ такой элемент, что $\alpha_k u_k$ гомологичен 0 в N_k , то есть для некоторого $v_{k+1} \in N_{k+1}$ выполняется равенство $\alpha_k u_k = \delta_{k+1} v_{k+1}$. Положим $u_{k+1} = \beta_{k+1} v_{k+1}$. Тогда, учитывая условия (3) и (4), имеем:

$\partial_{k+1} u_{k+1} = \partial_{k+1} \beta_{k+1} v_{k+1} = \beta_k \delta_{k+1} v_{k+1} = \beta_k \alpha_k u_k = u_k$, значит, u_k гомологичен 0 в M_k , что доказывает мономорфность α_k^* .

Докажем второе утверждение леммы. Достаточно показать, что для произвольного цикла $v_k \in N_k$ найдется такой цикл $u_k \in M_k$, что элементы $\alpha_k u_k$ и v_k гомологичны в N_k . Положим $u_k = \beta_k v_k$. Тогда в силу условия (6) $\partial_k u_k = \partial_k \beta_k v_k = \beta_{k-1} \delta_k v_k = 0$ поскольку v_k — цикл, а значит, u_k тоже цикл. В силу условия (5) $\alpha_k u_k - v_k = \alpha_k \beta_k v_k - v_k = h_{k-1} \delta_k v_k + \delta_{k+1} h_k v_k = \delta_{k+1} h_k v_k$, поэтому, $\alpha_k u_k - v_k \in \text{Im } \delta_{k+1}$, а это значит, что элементы $\alpha_k u_k$ и v_k гомологичны в N_k . $\square$

Положив $M_k = C_k^0$, $N_k = C_k$, $\alpha_k = \varepsilon_k$, построим подходящие гомоморфизмы β_k и h_k .

Нам потребуются такие обозначения. Элемент $(x_1, \dots, x_l) \in \bar{S}$ ($(x'_1, \dots, x'_l) \in \bar{S}$ соответственно) будем обозначать через X_l (X'_l соответственно). Далее для двумерной цепи $a[X'_1, X'_2] \in C_2(\bar{S}, A)$ обозначим $x^1 = x'_1$, $x^2 = x'_2$.

Положим

$$\beta_0 = \text{id}_{C_0(\bar{S}, A)} = \text{id}_A.$$

Гомоморфизмы β_1, β_2 определим на образующих абелевых групп $C_1(\bar{S}, A)$ и $C_2(\bar{S}, A)$, а затем продолжим по линейности:

$$\beta_1(a[X_l]) = \sum_{i=1}^l aX_{l-1}[x_i] = \sum_{i=1}^l (\dots(ax_1)x_2\dots)x_{l-1}[x_i];$$

$$\beta_2(a[X'_1, X'_2]) = \begin{cases} aX'_{l-1}[x^1, x^2], & \text{если } x^1 x^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^1 x^2 = 0. \end{cases}$$

Далее положим

$$h_0 = 0; \quad h_l(a[X_l]) = \begin{cases} \sum_{i=2}^l a[X_{l-1}, \langle x_i \rangle], & \text{если } l \geq 2; \\ 0, & \text{если } l = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые свойства гомоморфизмов β_n и h_n . В доказательствах следующих лемм достаточно проверять тождества на образующих соответствующих групп, чем мы и будем пользоваться.

Лемма 2.3. Для $n = 0, 1, 2$ выполнено $\beta_n \varepsilon_n = \text{id}_{C_n^0}$.

Доказательство. Для $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Для $n = 2$ и $a[s_1, s_2] \in C_2^0(S, A)$ имеем:

$$\beta_2 \varepsilon_2(a[s_1, s_2]) = \beta_2(a[\langle s_1 \rangle, \langle s_2 \rangle]) = a[s_1, s_2],$$

так как $s_1 s_2 \neq 0$. $\square$

Лемма 2.4. Имеет место равенство $\varepsilon_1 \beta_1 - \text{id}_{C_1} = \delta_2 h_1$.

Доказательство. Рассмотрим одномерную цепь $a[X_l] \in C_1(\bar{S}, A)$. Если $l = 1$, то есть $X_l = \langle x \rangle$ для некоторого $x \in S \setminus 0$, то $\delta_2 h_1(a[\langle x \rangle]) = 0$ и $(\varepsilon_1 \beta_1 - \text{id}_{C_1})(a[\langle x \rangle]) = \varepsilon_1(a[x] - a[\langle x \rangle]) = 0$.

Если $l > 1$, то имеем

$$\begin{aligned} \delta_2 h_1(a[X_l]) &= \delta_2 \left(\sum_{i=2}^l a[X_{l-1}, \langle x_i \rangle] \right) = \\ &= \sum_{i=2}^l aX_{l-1}[\langle x_i \rangle] - \sum_{i=2}^l a[X_l] + \sum_{i=2}^l a[X_{l-1}] = \\ &= \sum_{i=2}^l aX_{l-1}[\langle x_i \rangle] - a[X_l] + a[X_1] = \\ &= \sum_{i=1}^l aX_{l-1}[\langle x_i \rangle] - a[X_l] = \\ &= \varepsilon_1 \beta_1(a[X_l]) - \text{id}_{C_1}(a[X_l]). \end{aligned}$$

Лемма 2.5. При $n = 1, 2$ выполнено $\partial_n \beta_n = \beta_{n-1} \delta_n$. $\square$

Доказательство. При $n=1$ в силу того, что $\beta_0 = \text{id}_A$, имеем:

$$\partial_1 \beta_1(a[X_1]) = \partial_1 \left(\sum_{i=1}^1 aX_{i-1}[x_i] \right) = \sum_{i=1}^1 (aX_i - aX_{i-1}) = aX_1 - a = \delta_1(a[X_1]) = \beta_0 \delta_1(a[X_1]).$$

При $n=2$ для $c = a[X_1^1, X_2^2] \in C_2(S, A)$ рассмотрим два случая.

1. Если $x^1 x^2 \neq 0$, то имеем

$$\begin{aligned} \partial_2 \beta_2(c) &= \partial_2(aX_{1-1}^1[x^1, x^2]) = \\ &= aX_{1-1}^1[x^2] - aX_{1-1}^1[x^1 x^2] + aX_{1-1}^1[x^1]. \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \beta_1 \delta_2(c) &= \\ \beta_1(aX_{1-1}^1[X_2^2] - a[x_1^1, \dots, x_{1-1}^1, x^1 x^2, x_2^2, \dots, x_{1-1}^1] + a[X_1^1]) &= \\ = aX_{1-1}^1[x^2] + \sum_{i=2}^2 (\dots (aX_{i-1}^1)(x^1 x^2) \dots) x_{i-1}^1[x_i^2] - \\ - \sum_{i=1}^{1-1} aX_{i-1}^1[x_i^1] - aX_{1-1}^1[x^1 x^2] - \\ - \sum_{i=2}^2 (\dots (aX_{i-1}^1)(x^1 x^2) \dots) x_{i-1}^1[x_i^2] + \\ + \sum_{i=1}^1 aX_{i-1}^1[x_i^1] &= aX_{1-1}^1[x^2] - aX_{1-1}^1[x^1 x^2] + aX_{1-1}^1[x^1], \end{aligned}$$

что и требовалось.

2. Если $x^1 x^2 = 0$, то имеем $\partial_2 \beta_2(c) = 0$ и

$$\begin{aligned} \beta_1 \delta_2(c) &= \\ \beta_1(aX_{1-1}^1[X_2^2] - a[x_1^1, \dots, x_{1-1}^1, x^1, x^2, x_2^2, \dots, x_{1-1}^1] + a[X_1^1]) &= \\ = \sum_{i=1}^2 (aX_{i-1}^1) X_{i-1}^2[x_i^2] - \sum_{i=1}^1 aX_{i-1}^1[x_i^1] - \\ - \sum_{i=1}^2 (aX_{i-1}^1) X_{i-1}^2[x_i^2] + \sum_{i=1}^1 aX_{i-1}^1[x_i^1] &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.1. В силу лемм 2.3 (при $n=1$), 2.4, 2.5 для $k=1$ и рассмотренных выше комплексов выполнены условия (3)-(6) леммы 2.2. Поэтому $\epsilon_1^*: H_1^0(S, A) \rightarrow H_1(\bar{S}, A)$ является изоморфизмом. $\square$

Отметим также справедливость следующего предложения:

Предложение 2.6. $\epsilon_2^*: H_2^0(S, A) \rightarrow H_2(\bar{S}, A)$ – эпиморфизм.

Доказательство. Рассмотрим $\bar{S}$ -модуль A как фактормодуль некоторого свободного $\bar{S}$ -модуля F по подмодулю B . Последовательность

$$0 \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$$

точна. Следовательно, мы имеем коммутативную

диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \rightarrow & H_2^0(S, F) & \rightarrow & H_2^0(S, A) & \rightarrow & H_1^0(S, B) & \rightarrow & H_1^0(S, F) & \rightarrow & H_1^0(S, A) & \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \epsilon_2^* & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \epsilon_1^* & \\ \cdots & \rightarrow & H_2(\bar{S}, F) & \rightarrow & H_2(\bar{S}, A) & \rightarrow & H_1(\bar{S}, B) & \rightarrow & H_1(\bar{S}, F) & \rightarrow & H_1(\bar{S}, A) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

Поскольку F – свободный модуль, то $H_1(\bar{S}, F) = H_2(\bar{S}, F) = 0$, поэтому $H_1(\bar{S}, B) \cong H_2(\bar{S}, A)$. По теореме 2.1 $H_1^0(S, B) \cong H_1(\bar{S}, B)$ и $H_1^0(S, F) \cong H_1(\bar{S}, F) = 0$, откуда получаем, что отображение $H_2^0(S, A) \rightarrow H_1^0(S, B)$ – эпиморфизм, и в силу коммутативности диаграммы отображение $\epsilon_2^*: H_2^0(S, A) \rightarrow H_2(\bar{S}, A)$ тоже является эпиморфизмом. $\square$

Следующий пример показывает, что изоморфизмом отображение ϵ_2^* , вообще говоря, не является.

Пример. Пусть задана коммутативная полугруппа $S = \{0, u, v, w\}$, элементы которой умножаются по следующим правилам: $u^2 = v^2 = uv = w$, $uw = vw = w^2 = 0$. Покажем, что для всякого ненулевого 0-модуля A группа гомологий $H_2^0(S, A) \neq 0$. В то же время для свободного $\bar{S}$ -модуля F группа гомологий $H_2(\bar{S}, F)$ нулевая и, значит, не будет изоморфна $H_2^0(S, F)$.

Поскольку в полугруппе S не существует трех элементов s_1, s_2, s_3 для которых $s_1 s_2 s_3 \neq 0$, то $C_3^0(S, A) = 0$ и $H_2^0(S, A) = \text{Ker } \partial_2$.

Возьмем ненулевые элементы $\alpha, \gamma \in A$, положим $\beta = -(\alpha u + \alpha + \gamma v)$, $\delta = \alpha u + \gamma v - \gamma$ и рассмотрим 0-цепь

$$c = \alpha[u, u] + \beta[u, v] + \gamma[v, u] + \delta[v, v] \in C_2^0(S, A).$$

Заметим, что $(\alpha u)u = (\alpha u)v = \alpha w$ и $(\gamma v)u = (\gamma v)v = \gamma w$. Тогда непосредственное вычисление дает $\partial_2 c = 0$. То есть c является ненулевым циклом и $H_2^0(S, A) \neq 0$.

3. Некоторые применения 0-гомологий

Получим в некотором смысле обращение предложения 1.2. Пусть полугруппа T (с нулем или без него) порождается элементами $a_1, \dots, a_m$ и определяется множеством ненулевых соотношений $P = \{P_i = Q_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Множество $I(P)$ элементов $x \in T$, таких, что $P_i \notin TxT$ для всех i , очевидно, является идеалом, если оно не пусто. Предположим, что $I(P) \neq \emptyset$ и кроме того,

$a_j \in I(P)$ для всех $1 \leq j \leq m$. Тогда факторполугруппа $S = T/I(P)$ порождается элементами $a_1, \dots, a_m$ и определяется множеством соотношений P и множеством нулевых соотношений $\{X = Y | X, Y \in I(P)\}$.

По предложению 1.2 T является 0-рефлектором полугруппы S , и мы получаем

Следствие 3.1. $H_1(T, A) \cong H_1^0(S, A)$ и $\varepsilon_2: H_2^0(S, A) \rightarrow H_2(T, A)$ – эпиморфизм.

Пример. Пусть $T = \langle a, b, c | ab = ca \rangle$. Тогда $T \setminus I(P) = \{a, b, c, ab\}$, так что $S^3 = 0$ и, следовательно, $H_2^0(S, A) = \text{Ker } \partial_2$ для любого 0-модуля A над S . Пусть $f = \alpha[a, b] + \beta[c, a]$ – произвольный двумерный 0-цикл ($\alpha, \beta \in A$). Из равенства $\partial_2 f = 0$ получаем $\alpha = \beta = 0$. Значит, $H_2^0(S, A) = 0$, откуда $H_2(T, A) = 0$ для любого модуля A над T .

В качестве еще одного примера применения 0-гомологий опишем первую группу гомологий свободного произведения $S * T$ полугрупп S и T . Напомним определение 0-прямого объединения полугрупп.

Определение 3.2. [2, гл. 6, §3] Полугруппа U является 0-прямым объединением полугрупп S_1 и S_2 , если $U = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = 0$ и $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$.

Пусть S и T полугруппы без 0 и U – 0-прямое объединение полугрупп $S \cup 0$ и $T \cup 0$. Тогда [3] $\bar{U} = S * T$ и, следовательно, $H_1(S * T, A) \cong H_1^0(U, A)$ для произвольного $S * T$ -модуля A .

Для вычисления $H_1^0(U, A)$ обозначим через $A(S-1)$ (соответственно через $A(T-1)$) подгруппу в модуле A , порожденную элементами вида $as - a$, где $a \in A$, $s \in S$ ($at - a$ соответственно, где $a \in A$, $t \in T$). Положим $A_1 = A(S-1) \cap A(T-1)$.

Гомоморфизм групп $\varphi: C_1^0(U, A) \rightarrow A_1$ определим, сопоставив произвольному 0-циклу $f = \sum_{s \in S} a_s[s] + \sum_{t \in T} a_t[t]$ элемент $\sum_{s \in S} a_s s - a_s \in A_1$. В силу того, что $\varphi(g) = 0$ для любой границы $g \in \text{Im } \partial_2$, получаем, что φ индуцирует гомоморфизм групп $\Phi: H_1^0(U, A) \rightarrow A_1$.

Каждый элемент $x \in A_1$, представимый в виде $x = \sum_{s \in S} a_s s - a_s = \sum_{t \in T} b_t t - b_t$, имеет 0-цикл

$\sum_{s \in S} a_s[s] - \sum_{t \in T} b_t[t]$ прообразом под действием φ . Поэтому гомоморфизм φ , а значит, и Φ являются эпиморфизмами. Ядро φ образуют такие 0-циклы $\sum_{s \in S} a_s[s] + \sum_{t \in T} b_t[t] \in C_1^0(U, A)$, что $\sum_{s \in S} (a_s s - a_s) = -\sum_{t \in T} (b_t t - b_t) = 0$. Следовательно, ядром эпиморфизма Φ является прямая сумма $H_1(S, A) \oplus H_1(T, A)$, рассматриваемая как подгруппа в $H_1^0(U, A)$. Таким образом, $H_1^0(U, A)$ является расширением $H_1(S, A) \oplus H_1(T, A)$ с помощью A_1 и мы доказали следующее предложение:

Предложение 3.3. $H_1(S * T, A)$ является расширением $H_1(S, A) \oplus H_1(T, A)$ с помощью A_1 . В частности,

Следствие 3.4. Если A – тривиальный $S * T$ -модуль, то $H_1(S * T, A) \cong H_1(S, A) \oplus H_1(T, A)$.

Список использованных источников

1. Карпан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. – М., 1960.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т.2. – М., 1972.
3. Новиков Б.В. О 0-гомологиях полугрупп // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – К., 1978.
4. Новиков Б.В. Определяющие соотношения и 0-модули над полугруппой // Теория полугрупп и ее приложения. Полиадические полугруппы. Полугруппы преобразований. – Саратов, 1983.
5. Хусаинов А.А., Ткаченко В.В. Группы гомологий и асинхронных систем переходов // Математическое моделирование и близкие вопросы математики. – Хабаровск. – 2003.
6. Kobayashi Yu. Complete rewriting systems and homology of monoid algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. – 1990. – Vol. 65. – P. 263-275.
7. MacLane S. Categories for the working mathematician. – New York – Heidelberg – Berlin, 1972.
8. Novikov B.V. Semigroup cohomology and applications // Algebra-Representation theory. – Kluwer, 2001.
9. Squier C.C. Word problems and a homological finiteness condition for monoids // Journal of Pure and Applied Algebra. – 1987. – Vol. 49. – P. 201-217.

Надійшла до редколегії 02.10.2007

УДК 519.21

Г.В.Шуренков, аспірант

Довжина інтервалу невизначеності при використанні алгоритму динамічного програмування для оцінки моментів зміни

В статті розглянуто задачу знаходження довжини інтервалу невизначеності при використанні алгоритму динамічного програмування для оцінки моментів зміни. Доведено, що математичне сподівання довжини інтервалу еквівалентне штрафу за зміну розподілу при кількості спостережень, що прямує до нескінченності. Задача розв'язна для випадку декількох моментів зміни та двох розподілів.

Ключові слова: оцінка моментів зміни; алгоритм динамічного програмування.

E-mail: tskorohod@voliacable.com.ua

1 Вступ

Задача оцінювання моментів зміни виникає при аналізі геологічних, економічних даних та телеметричної інформації. Існує декілька підходів до пошуку моментів зміни. Один з них розглядає апостеріорні оцінки моментів зміни [1,2]. Інший полягає у якнайшвидшому відшукуванні зміни в послідовності спостережень, що надходять [1,5-7].

В даній статті розглядається задача пошуку багатьох моментів зміни з використанням алгоритму динамічного програмування. Вперше цей алгоритм описано в [3]. В [4] на його основі запропоновано швидкий алгоритм пошуку багатьох моментів зміни, в якому задача зводиться до відшукування оптимальної послідовності номерів розподілів ("траєкторії"). При використанні цього алгоритму ми шукаємо аргумент мінімуму деякого функціоналу від траєкторії, який складається з лінійної частини та штрафів за зміну в траєкторії. Зміни в оціненій траєкторії будуть оцінками моментів зміни. Оскільки цей алгоритм передбачає поступове відшукування такої траєкторії, постають питання, чи зміниться траєкторія отримана на даному етапі обчислень при надходженні нових даних, яка довжина інтервалу між останнім спостереженням та спостереженням, до якого траєкторія визначена остаточно.

В роботі показано, що довжина інтервалу невизначеності еквівалентна штрафу за зміну траєкторії при кількості спостережень, що пря-

Grigoriy V. Shurenkov, PhD student

Length of interval of indeterminacy in change-points estimation using dynamic programming algorithm

There was considered the problem of finding length of indeterminacy in change-points estimation using dynamic programming algorithm in the article.

It was proved that mathematical expectation of length of the interval is equivalent to a penalty for change of distribution when number of estimations tends to infinity. The problem was solved for the case of several changes and two distributions

Key Words: change-point estimation; dynamic programming algorithm.

мує до нескінченності та двох можливих розподілах.

2 Постановка задачі

Розглядається послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, які, взагалі кажучи, не є однаково розподіленими, а можуть мати один з двох розподілів: $F = F_1, G = F_2$. $P(\xi_j \in A) = F_{h_j^0}(A)$, де $h^0 = \{h_j^0, j = 1, \dots, N\}$ – не випадкова послідовність номерів $h_j^0 \in \{1, 2\}$, яка має вигляд $h_j^0 = \text{const}$ при $k_i = [\theta_i N] < j \leq [\theta_{i+1} N]$, де $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_R < \theta_{R+1} = 1$ – фіксовані не випадкові числа, які називають моментами зміни, k_i називають точками зміни. Вектор з точок зміни позначимо через k . Послідовності номерів розподілів h будемо називати траєкторіями, h^0 істинною траєкторією послідовності $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. Введемо функціонал:

$$J(h) = \sum_{i=1}^N (\varphi(\xi_i, h_i) - \pi_N(h_i, h_{i-1})), \quad \pi_N(g, l) = \pi_N 1_{g \neq l},$$

де $\pi_N > 0$ – не випадкова величина. Як оцінку для h^0 розглянемо

$$\hat{h} = \arg \max_h \sum_{i=1}^N J(h).$$

Оцінки для моментів зміни будуються за трає-

кторією $\hat{h}$ таким чином

$$\begin{cases} \hat{k}_i = \hat{k}_i(\hat{h}) = \min \{j | \hat{h}_j \neq \hat{h}_{j+1}, 1 \leq j \leq N\} \\ \hat{k}_i = \hat{k}_i(\hat{h}) = \min \{j | \hat{h}_{k_{i-1}} \neq \hat{h}_j, \hat{k}_{i-1} \leq j \leq N\} \end{cases}$$

— i -та точка зміни у траєкторії $\hat{h}$, $\hat{R} = R(\hat{h})$ — кількість точок зміни у $\hat{h}$. Траєкторію $\hat{h}$ можна шукати послідовно. Позначимо

$$h^j(i) = \arg \max_{h \in \{h_0, \dots, h_{j-1}, h_j\}, h_j = i} J(h), i = 1, 2.$$

Тоді

$$h_j^{j+1}(l) = \arg \max_{i=1,2} (J(h^j(i)) + \varphi(\xi_{j+1}, l) + \pi_N(i, l)),$$

$$\hat{h} = \arg \max_{h \in h^N(l), l=1,2} J(h).$$

До якогось моменту траєкторії $h^j(l)$ можуть співпадати для $l=1,2$, це означає, що до цього моменту оптимальна траєкторія вже відома. Виникає питання, про довжину інтервалу невизначеності, тобто скільки спостережень пройшло з моменту, до якого оптимальна траєкторія визначена.

3. Основні результати.

Позначимо τ_j — точка (номер спостереження) в якій траєкторії $h^{\tau_j+1}(l)$ співпадут в j -тий раз. Тоді нам треба оцінити величину $\Delta \tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \bar{l} &= 3-l, \\ l(j) &= \max_{i \leq j} \{h_i^j(l) = h_i^j(\bar{l})\}, \\ r(j) &= \max_{i \geq j} \{h_i^{i+1}(l) = h_i^{i+1}(\bar{l})\}, \\ l(j) &\leq j < r(j). \end{aligned}$$

$l(j)$ дорівнює якомусь τ_i , а $r(j) = \tau_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x) &= \varphi(x, 1) - \varphi(x, 2), \\ \Delta \Phi \xi &= E(\varphi(\xi, 1) - \varphi(\xi, 2)), \\ \bar{\theta} &= \min_{i,j} |\theta_i - \theta_j|. \end{aligned}$$

Сформулюємо умови:

1. $\Delta \Phi \xi > 0, \Delta \Phi \eta < 0, \kappa = \min(\Delta \Phi \xi, -\Delta \Phi \eta)$.
2. $C = \max(|\varphi(\eta, h)|, |\varphi(\xi, h)|) < \infty, h=1,2$, де ξ — випадкова величина з розподілом F , η — з розподілом G .
3. $D \Delta \varphi(\xi, h) < \sigma^2, D \Delta \varphi(\eta, h) < \sigma^2, h=1,2$.
4. $N > \frac{4\pi_N}{\kappa \bar{\theta}}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1)-5) тоді

$$\begin{aligned} \tau_j &= \min \left\{ t > \tau_{j-1} \left| \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^t \varphi(\xi_i, h_{i-1}^j) - \varphi(\xi_i, \bar{h}_{i-1}^j) + \pi_N \right| > \pi_N \right\}, \\ E \Delta \tau_j &\leq \frac{6\pi_N + 2C + 2\sigma^2 \bar{\theta}^{-1}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Лема 1. Точки зміни траєкторій $h^j(1)$ та $h^j(2)$ співпадають, крім точки $l(j)+1$ — точки розгалуження траєкторій. Кількість змін в цих траєкторіях відрізняється на 1.

Доведення. Точки зміни співпадають до $l(j)$ оскільки там співпадають траєкторії $(h_1^j(1), \dots, h_{l(j)}^j(1)) = (h_1^j(2), \dots, h_{l(j)}^j(2))$. Точки співпадають після розгалуження в $l(j)+1$, оскільки інакше після точки зміни k_j була б рівність $h_{k_j+1}^1(j) = h_{k_j+1}^2(j)$, а тоді $k_j \leq l(j)$. В $l(j)+1$ в одній з траєкторій відбувається зміна, а в іншій ні. Лема доведена.

Лема 2. В траєкторіях $h^j(1)$ та $h^j(2)$ від $l(j)$ до j точок зміни не має.

Доведення. Доведемо, що неможлива ситуація, коли $h_{i+1}^j(1) = \bar{h}_i^j(1)$ та $h_{i+1}^j(2) = \bar{h}_i^j(2)$. Нехай існує така точка i . Розглянемо дві траєкторії

$$\begin{aligned} \tilde{h}^j(1) &= (h_1^j(2), \dots, h_i^j(2), h_{i+1}^j(1), \dots, h_j^j(1)), \\ \tilde{h}^j(2) &= (h_1^j(1), \dots, h_i^j(1), h_{i+1}^j(2), \dots, h_j^j(2)). \end{aligned}$$

Будемо вважати що в $h^j(2)$ змін більше ніж в $h^j(1)$. Тоді кількість змін в $\tilde{h}^j(1)$ та $h^j(1)$ однакова, а в $\tilde{h}^j(2)$ на дві зміни менше ніж в $h^j(2)$, оскільки $h_i^j(1) = h_{i+1}^j(2)$ та $h_i^j(2) = h_{i+1}^j(1)$. Звідси

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^l (\varphi(\xi_i, h_i^j(1)) - \varphi(\xi_i, h_i^j(2))), \\ 0 &\leq -2\pi_N + \sum_{i=1}^l (\varphi(\xi_i, h_i^j(2)) - \varphi(\xi_i, h_i^j(1))), \\ 2\pi_N &\leq \sum_{i=1}^j (\varphi(\xi_i, h_i^j(2)) - \varphi(\xi_i, h_i^j(1))) \leq 0. \end{aligned}$$

Отже, ми прийшли до протиріччя.

Лема 3. Виконуються співвідношення

1. $|J(h^j(1)) - J(h^j(2))| < \pi_N$
2. $\left| \sum_{i=l(j)+1}^{\tau(j)} (\varphi(\xi_i, h_{i-1}^j) - \varphi(\xi_i, \bar{h}_{i-1}^j)) + \pi_N \right| > \pi_N$.

Доведення. 1) За попередньою лемою для $h^j(1)$ виконується $h_i^j(1) = 1, l(j) < i \leq j$. Відповідно для $h^j(2)$ $h_i^j(2) = 2, l(j) < i \leq j$.

Введемо допоміжні траєкторії

$$\tilde{h}^j(1) = (h_1^j(1), \dots, h_{l(j)}^j(1), 2, \dots, 2, 1),$$

$$\tilde{h}^j(2) = (h_1^j(2), \dots, h_{r(j)}^j(2), 1, \dots, 1, 2).$$

Розглянемо два випадки:

а) $h_{r(j)}^j = 1$. Тоді в $\tilde{h}^j(1)$ на дві зміни більше ніж в $h^j(1)$, а в $\tilde{h}^j(2)$ та $h^j(2)$ кількість змін однакова. Отже $2\pi_N + \sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \geq 0$,

$$\sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 2) - \varphi(\xi_i, 1)) \geq 0. \text{ Таким чином,}$$

$$0 \leq \sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \leq -2\pi_N.$$

б) $h_{r(j)}^j = 2$.

Тоді в $\tilde{h}^j(1)$ та $h^j(1)$ кількість змін однакова, а в $\tilde{h}^j(2)$ на дві зміни більше ніж в $h^j(2)$. Отже

$$\sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \leq 0,$$

$$2\pi_N + \sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 2) - \varphi(\xi_i, 1)) \geq 0.$$

Таким чином,

$$0 \leq \sum_{i=l(j)+1}^j (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \leq 2\pi_N.$$

Отже перша рівність доведена.

2) Можливі два випадки.

а) $h_{r(j)+1}^{r(j)} = h_{l(j)}^{r(j)}$. Будемо вважати, що $h_{l(j)}^{r(j)} = 1$.

Тоді траєкторія $h^{r(j)+1}(2)$ на проміжку $[1, r(j)]$ співпадає з $h^{r(j)+1}(1)$.

$$h^{r(j)+1}(2) = (h_1^{r(j)}(1), \dots, h_{r(j)}^{r(j)}(1), 2).$$

Введемо допоміжну траєкторію

$$\tilde{h}^{r(j)+1}(2) = (h_1^{r(j)}(2), \dots, h_{r(j)}^{r(j)}(2), 2).$$

Тоді $\sum_{i=l(j)+1}^{r(j)} (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \leq 0$.

б) $h_{r(j)+1}^{r(j)} = \tilde{h}_{l(j)}^{r(j)}$. Будемо вважати, що $h_{l(j)}^{r(j)} = 1$.

Траєкторія $h^{r(j)+1}(1)$ на проміжку $[1, r(j)]$ співпадає з $h^{r(j)}(2)$. Введемо допоміжну траєкторію

$$\tilde{h}^{r(j)+1}(1) = (h_1^{r(j)}(1), \dots, h_{r(j)}^{r(j)}(1), 1). \text{ Тоді}$$

$$\sum_{i=l(j)+1}^{r(j)} (\varphi(\xi_i, 2) - \varphi(\xi_i, 1)) - 2\pi_N \leq 0.$$

Звідси випливає друга нерівність.

Лема 4.

$$E\Delta\tau_j \leq \frac{6\pi_N + 2C + 2\sigma^2\bar{\theta}^{-1}}{\kappa}.$$

Доведення. За лемою 3

$$E\Delta\tau_j \leq E \min \left\{ t > 0 \mid \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} |\Delta\varphi(\xi_i)| > 2\pi_N \right\} - E\tau_{j-1}.$$

Оскільки ξ_{l+i} та $1_{\tau_{j-1}=l}$ незалежні при $i > 0$ то

$$E \left(\min \left\{ t > \tau_{j-1} \mid \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \Delta\varphi(\xi_i) > 2\pi_N \right\} \mid \tau_{j-1} = l \right) =$$

$$= E\tau'_l,$$

де $\tau'_l = \min \left\{ t > l \mid \left| \sum_{i=l+1}^t \Delta\varphi(\xi_i) \right| > 2\pi_N \right\}$. Оцінимо $E\tau'_l$. Позначимо $\Delta\tau'_l = \tau'_l - l$, через k' перший момент зміни після l : $l < k'$, $\rho(\tau'_l)$ – кількість змін, які відбуваються між моментами l та τ'_l .

$$E\Delta\tau'_l = E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=0} + E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=1} + E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l) \geq 1}.$$

$$E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=1} = E(\tau'_l - k') 1_{\rho(\tau'_l)=1} + E(k' - l) 1_{\rho(\tau'_l)=1}$$

1) Оцінимо $E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=0} + E(k' - l) 1_{\rho(\tau'_l)=1}$. Нехай $\xi'_i, i > l$ – незалежні однаково розподілені величини, що до k , співпадають з ξ_i .

$$E(\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=0} + (k' - l) 1_{\rho(\tau'_l)=1}) \leq$$

$$E \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\xi'_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\}.$$

Позначимо через n_F – множину номерів j , таких що ξ_j має розподіл F . Тоді

$$\min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\xi'_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\} =$$

$$= \begin{cases} \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\zeta_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\}, & l+1 \in n_F, \\ \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\eta_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\}, & l+1 \in n_G. \end{cases}$$

де $\zeta_i, i > l$ – незалежні випадкові величини, що мають розподіл F , $\eta_i, i > l$ – розподіл G .

$$E \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\zeta_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\} \leq$$

$$\leq E \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\zeta_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\}$$

$$E \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\eta_{i+l}) \right| > 2\pi_N \right\} \leq$$

$$\leq E \min \left\{ t \mid \left| \sum_{i=l}^t \Delta\varphi(\eta_{i+l}) \right| < -2\pi_N \right\}.$$

Застосуємо правих частин двох останніх нерівностей тотожність Вальда, оцінивши

$$E \sum_{i=l}^{\tau'} \Delta\varphi(\zeta_{i+l}) \leq 2\pi_N + C \quad \text{та}$$

$$-E \sum_{i=l}^{\tau'} \Delta\varphi(\eta_{i+l}) \leq 2\pi_N + C, \text{ отримуємо, що}$$

$$E\Delta\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l)=0} + E(k' - l) 1_{\rho(\tau'_l)=1} \leq \frac{2\pi_N + C}{\kappa}.$$

2) Оцінимо $E(\tau'_l - k') 1_{\rho(\tau'_l)=1}$. Нехай $\xi''_j, j > k'$ незалежні величини, що співпадають з ξ_j до наступного моменту зміни після k' .

$$E(\tau'_l - k') 1_{\rho(\tau'_l)=1} \leq$$

$$E \min \left\{ t \left| \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i^*) + \sum_{i=l+1}^{k'} \Delta \varphi(\xi_i) \right| > 2\pi_N \right\} \cdot$$

$$\cdot 1_{\left\{ \sum_{i=l+1}^{k'} \Delta \varphi(\xi_i) \leq 2\pi_N \right\}} =$$

$$\int_{-2\pi_N}^{2\pi_N} E \left(\min \left\{ t \left| x + \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i^*) > 2\pi_N \right| \right\} 1_{\left\{ \sum_{i=l+1}^{k'} \Delta \varphi(\xi_i) = x \right\}} \right) \cdot$$

$$P \left(\sum_{i=l+1}^{k'} \Delta \varphi(\xi_i) \in dx \right) =$$

$$\int_{-2\pi_N}^{2\pi_N} E \left(\min \left\{ t \left| x + \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i^*) > 2\pi_N \right| \right\} \right) \cdot$$

$$P \left(\sum_{i=l+1}^{k'} \Delta \varphi(\xi_i) \in dx \right)$$

$$E \min \left\{ t \left| x + \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i^*) > 2\pi_N \right| \right\} =$$

$$= \begin{cases} E \min \left\{ t \left| \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i) + x > 2\pi_N \right| \right\}, & k' + 1 \in n_F, \\ E \min \left\{ t \left| \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\eta_i) + x > 2\pi_N \right| \right\}, & k' + 1 \in n_G. \end{cases}$$

Застосувавши тотожність Вальда отримуємо:

$$E \min \left\{ t \left| \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\xi_i) + x > 2\pi_N \right| \right\} \leq \frac{2\pi_N - x + C}{\kappa},$$

$$E \min \left\{ t \left| \sum_{i=k_l+1}^l \Delta \varphi(\eta_i) + x > 2\pi_N \right| \right\} \leq \frac{2\pi_N + x + C}{\kappa}$$

Оскільки $|x| < 2\pi_N$, $E(\tau'_l - k_l) 1_{\rho(\tau'_l) > 1} \leq \frac{4\pi_N + C}{\kappa}$.

3) Оцінимо $E\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l) > 1}$

$E\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l) > 1} \leq NP(\rho(\tau'_l) > 1)$. З того що між l та τ'_l відбулись що найменше дві зміни, впливає за попередньою лемою

$$\left| \sum_{i=k_u+1}^{k_{u+1}} (\varphi(\xi_i, 1) - \varphi(\xi_i, 2)) \right| \leq 2\pi_N.$$

де $l < k_u < k_{u+1} < \tau'_l$. Під знаком суми стоять незалежні однаково розподілені величини з $E\Delta\varphi(\xi_i) > \kappa$. Будемо вважати, що

$E\Delta\varphi(\xi_i) > \kappa$. Тоді, коли $2\pi_N / (k_{u+1} - k_u) < \kappa/2$,

$$P \left\{ \sum_{i=k_u+1}^{k_{u+1}} \Delta \varphi(\xi_i) \leq 2\pi_N (k_{u+1} - k_u) \right\} \leq$$

$$P \left\{ \sum_{i=k_u+1}^{k_{u+1}} (\Delta \varphi(\xi_i) - \Delta \Phi(\xi_i)) > 2\pi_N (k_{u+1} - k_u) \kappa / 2 \right\}$$

За нерівністю Чебишева

$$P \left\{ \sum_{i=k_u+1}^{k_{u+1}} (\Delta \varphi(\xi_i) - \Delta \Phi(\xi_i)) > \kappa / 2 \right\} \leq$$

$$\frac{2D\Delta\varphi(\xi_i)(k_{u+1} - k_u)}{\kappa} \leq \frac{2\sigma^2}{\bar{\theta}N\kappa}.$$

Таким чином, $E\tau'_l 1_{\rho(\tau'_l) > 1} \leq \frac{2\sigma^2}{\bar{\theta}\kappa}$. Отже,

$$E\tau'_l \leq \frac{6\pi_N + 2C + 2\sigma^2 \bar{\theta}^{-1}}{\kappa}.$$

Звідси випливає твердження леми. Лема доведена. Остання лема доводить теорему.

4. Висновки

В статті доведено, що математичне сподівання відстані між точками розгалуження траєкторій, що отримуються при побудові оцінки багатьох моментів зміни, еквівалентне штрафу за зміну розподілу при кількості спостережень, що прямує до нескінченності.

Список використаних джерел

1. Боровков А.А. Асимптотически оптимальные решения в задаче о разладке. // Теория вероятностей и ее применения — 1998 — Т.43, вып. 4, с.625-654
2. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Граничний розподіл ДП-оцінок багатьох моментів зміни. // Теор. ймов. та мат. статист. — 2004 — вип.70, с.94-105.
3. Моттль В.В., Мучник И.Б., Яковлев В.Г. Оптимальная сегментация экспериментальных кривых // Автоматика и телемеханика — 1983 — вып. 8, с.84-95.
4. Сугакова О.В. Пошук моментів зміни в потоці незалежних спостережень // Теор. ймов. та мат. статист. — 1996 — вип.55, с.181-186.
5. Loader C.R. Change point estimation using nonparametric regression // The Annals of Statistics — 1996 — vol.24, No.4, p.1667-1678
6. Poor V.H. Quickest detection with exponential penalty for delay // The Annals of Statistics — 1998 — vol.26, No.6, p.2179-2205.
7. Yakir B., Krieger A.M., Pollak M. Detecting change in regression: first order optimality // The Annals of Statistics — 1999 — vol.27, No.6, p.1896-1913.

Надійшла до редколегії 09.02.2007.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 519.9

В.О. Андрущенко,
В.М. Нікітенко,
М.С. Якименко, аспірант

Дослідження особливостей частотного спектру та модового складу резонансних коливань товстого п'єзокерамічного диску

В статті наведено результати експериментальних досліджень резонансних властивостей товстих дисків з п'єзокераміки із суцільними електродами та поляризованих по товщині. Інтерпретовано частотний спектр і модовий склад, виходячи із одновимірного наближення, використовуючи при цьому два характерних параметри – радіус і товщину. Співставлено одержані результати з опублікованими. Виявлено спотворення деяких основних форм коливань за рахунок зв'язаності з неосесиметричними типами коливань.

Ключові слова: п'єзокераміка, резонансні коливання, спектр, аналіз мод.

V.O.Andrushchenko,
V.M.Nikitenko,
M.S.Yakymenko, post-graduate student

Examination of singularities of frequency mode distributions and a mode composition of resonance oscillations thick piezoceramic disk

The results of In paper outcomes of experimental researches of resonant properties of thick disks from a piezoelectric ceramics with continuous electrodes and polarized on thickness are presented. The radius and thickness of disks are proportionate. Interpretation of a distribution of frequency modes and a mode composition coming from the one-dimensional approximation is carried out thus two reference parameters - radius and thickness are used. Comparison of the obtained data with published is lead. Contortions of some basic oscillation shapes are detected due to a connectedness with not rotationally symmetric oscillation modes.

Key Words: piezoceramics, resonance oscillations, spektrum, mode analysis.

E-mail: andron@univ.kiev.ua, nivini@univ.kiev.ua, vanko@univ.kiev.ua

Представлено професором В.В.Мелешком

1 Вступ

Практичні потреби іноді змушують застосовувати круглі пластини з п'єзокераміки, в яких діаметр та висота співвимірні або відрізняються тільки в декілька разів. До них, наприклад, відноситься конструювання високовольтних генераторів, випромінювачів ультразвуку або п'єзодвигунів. Розуміння механізму деформування та кінематики руху точок поверхні дозволяє більш ефективно використовувати потенційні можливості п'єзокерамічних матеріалів. Знання характерних особливостей коливань товстих дисків також важливо і з точки зору діагностики (визначення ступеня їх дефектності) і розрахунку пружних сталей при використанні таких дисків у високо надійних системах ініціювання.

В даній статті наведено результати експериментальних досліджень резонансних коливань п'єзоелектричних дисків діаметром 30мм та товщиною 13 мм, виготовлених із п'єзокераміки типу ЦТС-19 та поляризованих по товщині (рис. 1).

© В.О. Андрущенко, В.М. Нікітенко, 2007

2 Результати і їх обговорення

Методика проведення досліджень полягала в отриманні амплітудно-частотних характеристик та візуалізації форм коливань методом порошкових фігур Хладні.

Експериментальний стенд для досліджень був зібраний із набору серійної апаратури і детально



Рис. 1 Фото досліджуваних п'єзодисків. описаний в роботі [1]. Типова амплітудно-частотна характеристика, наприклад, п'єзодиску №1, наведена на рис. 2а, при цьому реєструвався струм, що протікає через п'єзоелемент у смузі частот до 200 кГц та дещо вище. В цій області частот для тонкого диску (в наших дослідях –

товщиною 1 мм) можна спостерігати лише два резонанси які відповідають першим двом модам

виготовлений на відміну від товстих дисків з п'єзокераміки складу НБС-3, а не ЦТС-19, але це не впливає на якісний характер розташування частот – область частот між цими двома радіальними резонансами є чистою; інші типи коливань відсутні, оскільки вони не збуджуються системою двох суцільних електродів (за умови симетричності геометрії та характеристик матеріалу диска).

Як видно з рис. 2а, у товстого диску в цій області частот можна виділити принаймні 5 резонансних піків замість двох. Поява нових мод пов'язана з існуванням коливань змішаного типу, при яких виникають механічні напруження стиску та зсуву.

Проведемо аналіз резонансного спектру з точки зору фізичних особливостей коливальних процесів в пружному тілі. Для першого, найінтенсивнішого, резонансу на частоті 63,31 кГц (назвемо його псевдорадіальним), його другий обертоном також ефективно збуджується і ми знаходимо його на частоті 151,70 кГц.

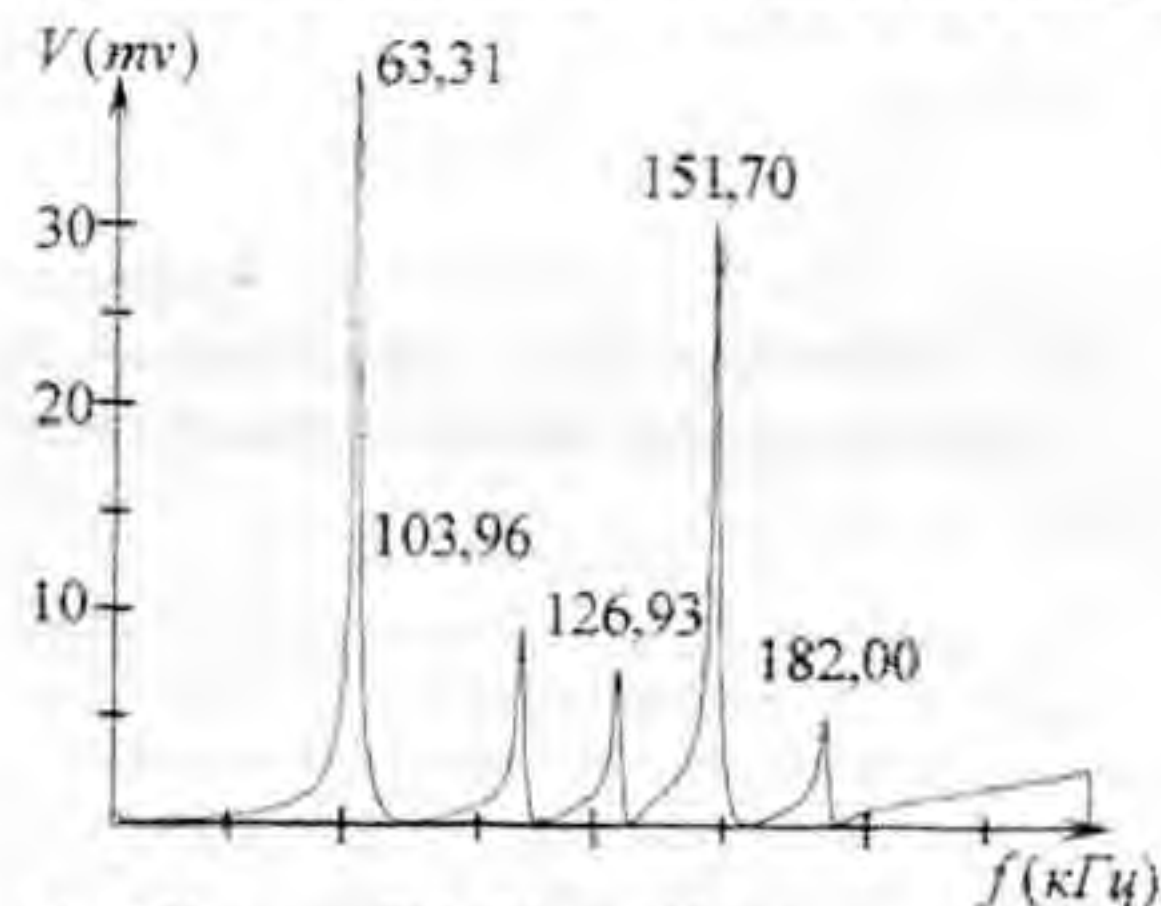
Відношення цих двох частот дорівнює 2,4. Теоретичне відношення [2] частот для тонкого диску дорівнює відношенню коренів характеристичного рівняння, тобто $5,39/2,0488=2,63$. Різниця складає близько 9% і отримане пониження частоти порівняно з теоретичним значенням пов'язане із суттєво просторовим характером деформування п'єзокерамічного диску.

Товщина п'єзодиску є характерним розміром за яким можна орієнтовно (в першому наближенні) визначити значення частоти першої товщинної (точніше, псевдотовщинної) моди коливань:

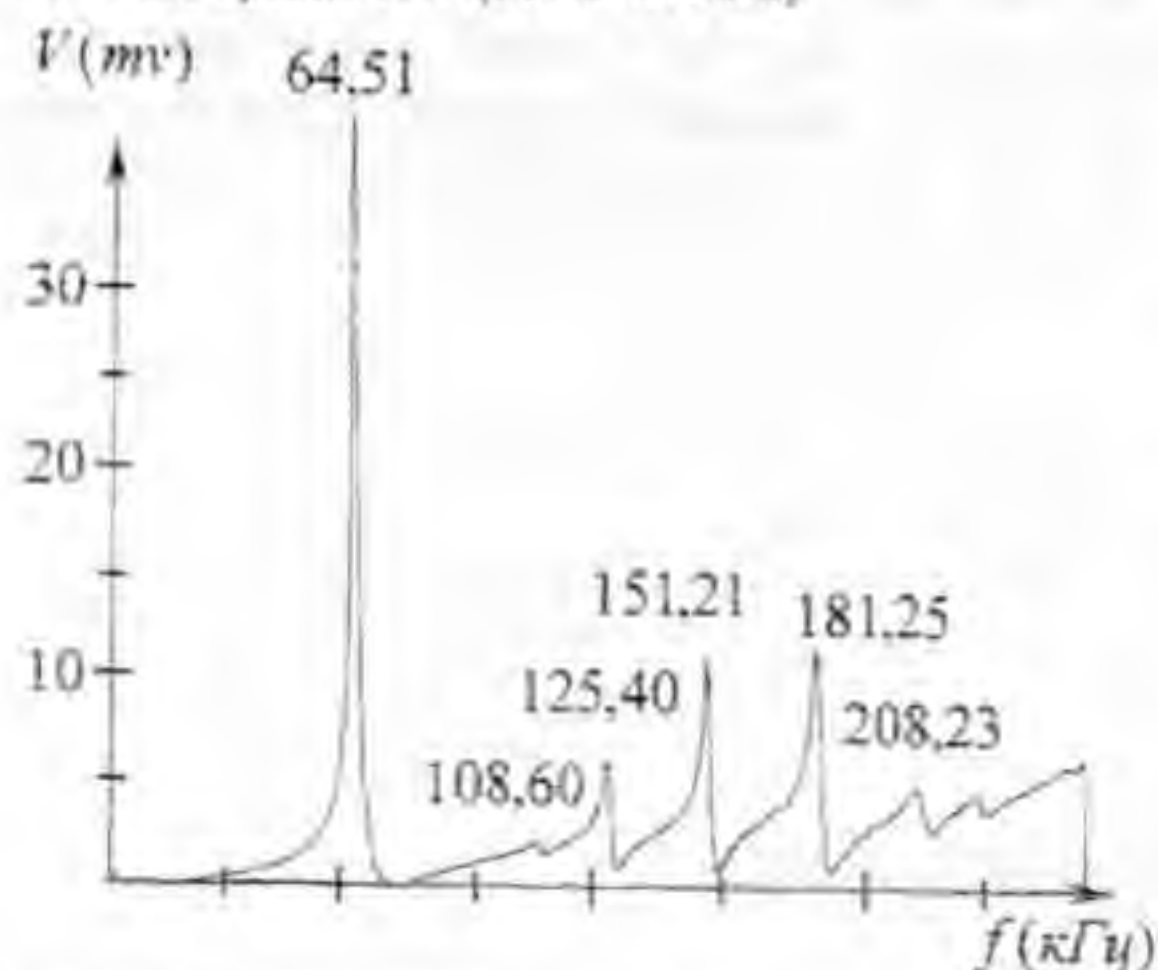
$$f_T = \frac{c_m}{2h} = \frac{3000 \text{ м/сек}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 115,38 \text{ кГц};$$

де $c_m = 3000 \text{ м/сек}$ для кераміки складу ЦТС-19 [3]. Цей резонанс є третім за ефективністю після перших двох псевдорадіальних на частотах 63,31 кГц та 151,70 кГц. Порівняно низька ефективність збудження товщинної моди вказує на те, що характер руху верхнього та нижнього торців є далеким від поршневого. Іншими словами, при коливаннях на цьому резонансі присутні області з протифазним до збуджуючого поля рухом.

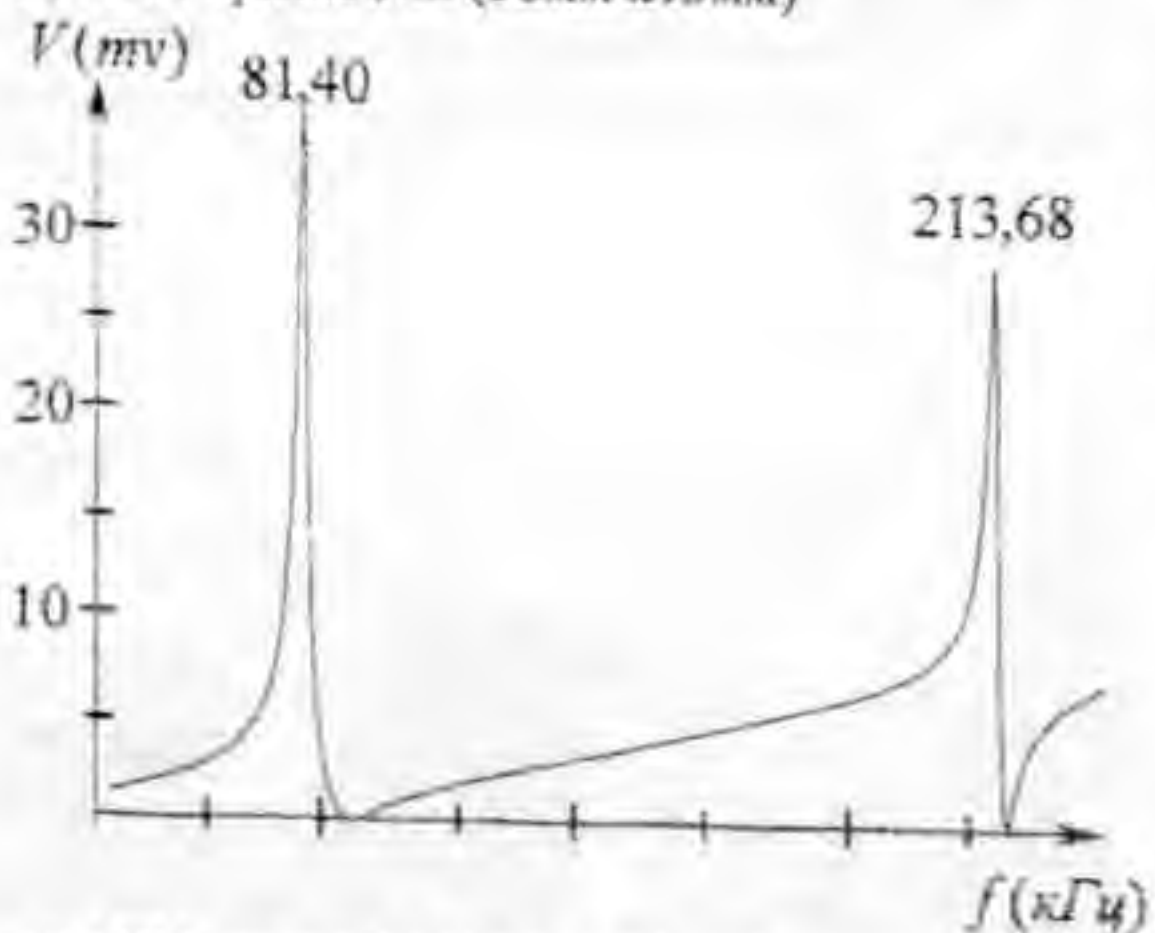
На цьому і закінчується процес загальнофізичного аналізу по дешифруванню резонансного спектра досліджуваного п'єзокерамічного диска по типах коливань виходячи з одномірних наближень. Поява резонансів на частотах 126,93 кГц и 182 кГц (і



а) АЧХ зразка №1 (30мм x 13мм)



б) АЧХ зразка №2 (30мм x 13мм)



в) АЧХ зразка №3 (30мм x 1мм)

Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики досліджуваних п'єзокерамічних дисків. радіальних коливань тонкої круглої платівки (рис. 2в). Зразок тонкого диску, який використовувався для порівняння, був

звісно, вище) — є результатом виникнення суто тривимірних типів коливань.

Слід відмітити, що аналіз такого типу коливань для суцільних циліндрів із титанату барію (BaTiO_3) подано в роботі [2], в котрій також можна знайти посилання на роботи Оное та Шоу, з яких на рис. 3 ми наводимо експериментальні залежності між добутком резонансної частоти на товщину ($f \cdot t$) та відношенням діаметра до частоти (d/t). З поданого рисунку для нашого диску (відношення діаметра до товщини $30 \text{ мм} / 13 \text{ мм} = 2,3$) видно, що взаємне розташування частот добре співпадає із отриманими нами.

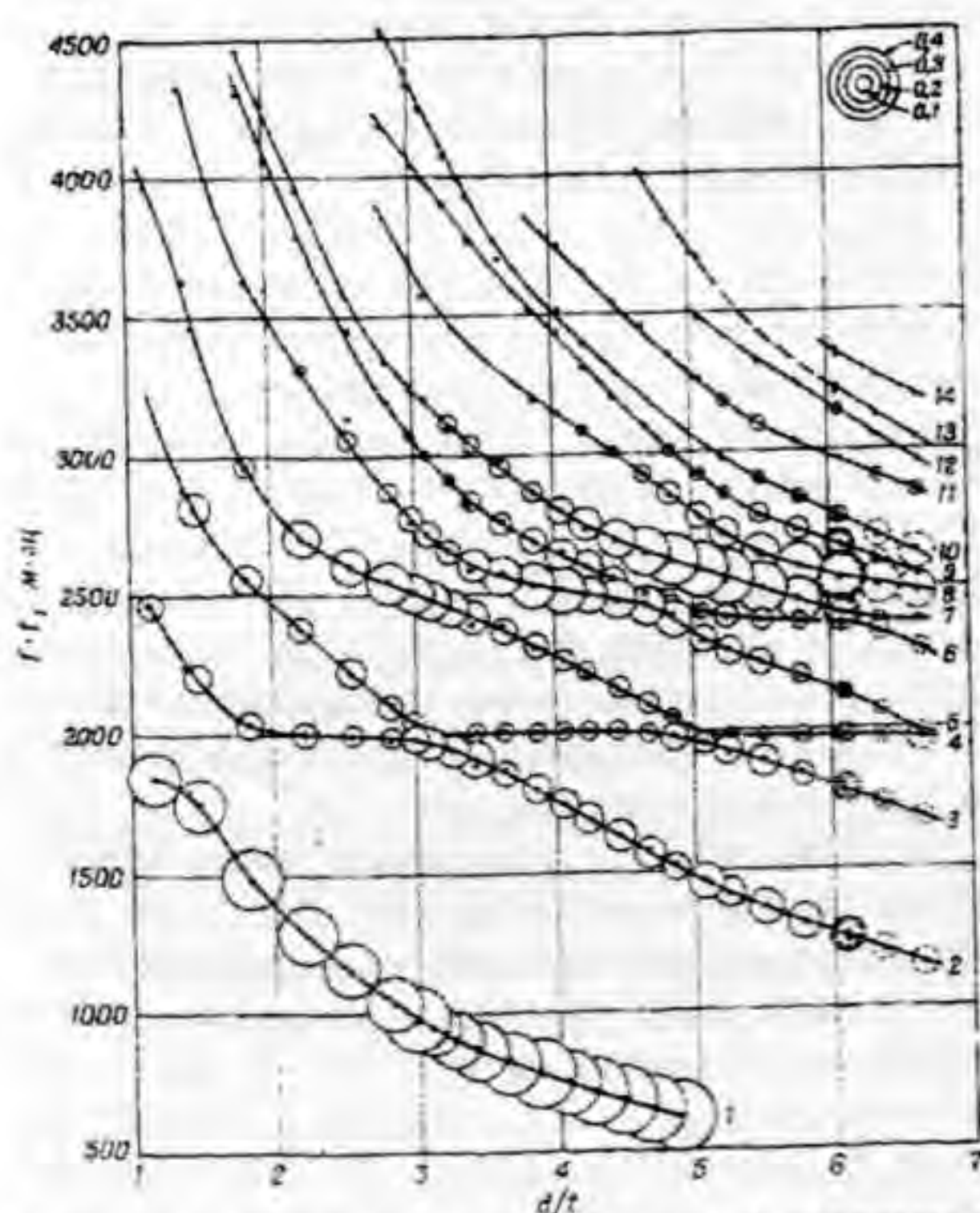
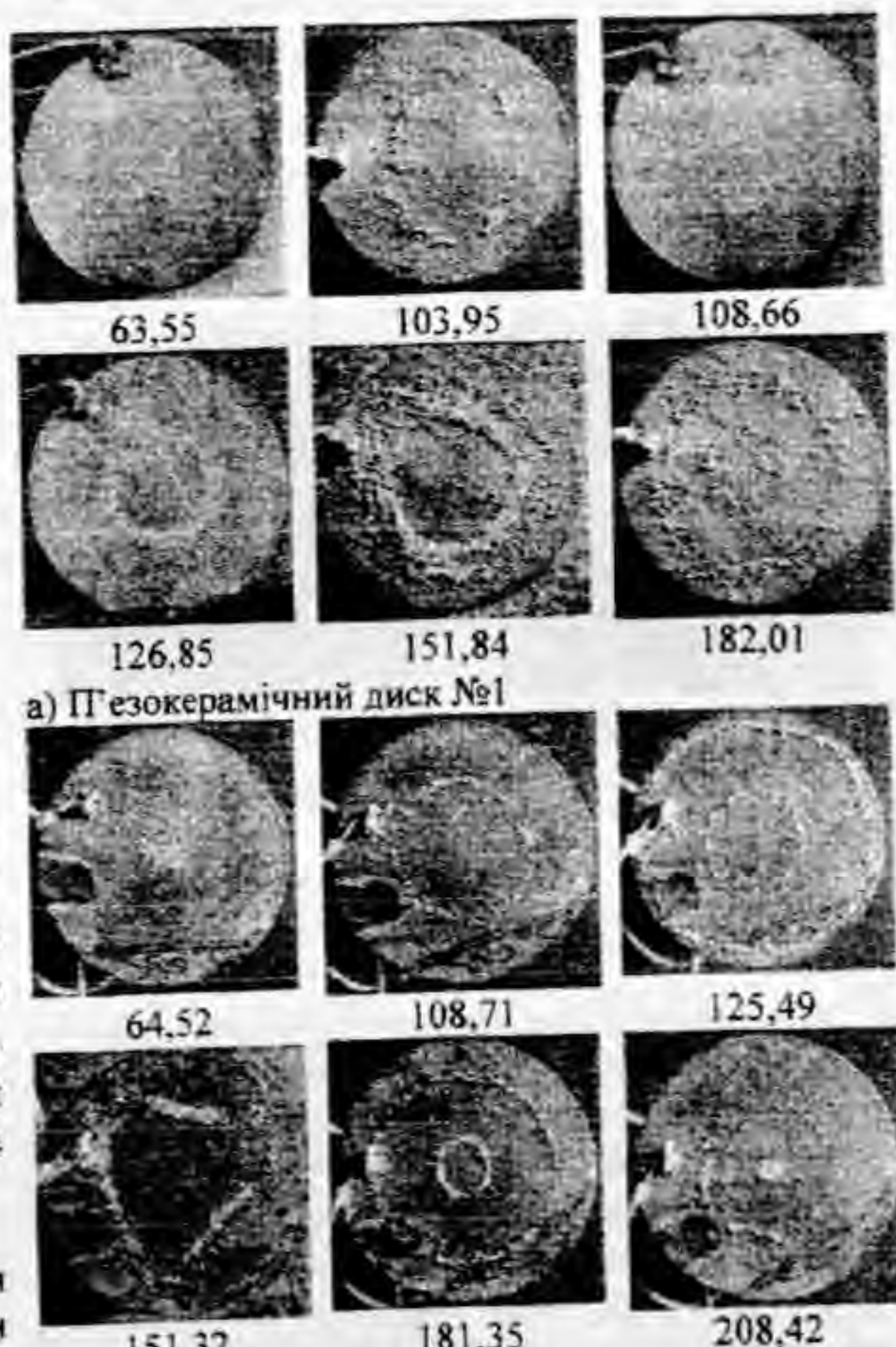


Рис. 3. Експериментально отримані залежності добутку резонансної частоти на товщину $f \cdot t$ від відношення діаметра до товщини d/t (по Шоу [2]). Круги мають діаметр, пропорційний обмірюваній величині коефіцієнта електромеханічного зв'язку.

Якщо по осі "х" взяти значення 2,3 і провести вертикальну лінію через дисперсійні криві, то ми побачимо взаємне розташування резонансних частот. З приведеного малюнка також можна зробити висновок про інтенсивність збудження резонансних частот (мод коливань), оскільки на ньому кружечками різного діаметра позначена величина коефіцієнта електромеханічного зв'язку. Найбільш інтенсивний резонанс —

перший (у нашому випадку $63,31 \text{ кГц}$), за ним йде четвертий ($151,70 \text{ кГц}$), трохи менш інтенсивний, а між ними знаходяться два резонанси, із ще меншою інтенсивністю ($103,96 \text{ кГц}$ і $126,93 \text{ кГц}$). Те ж саме можна сказати і про п'ятий резонанс ($182,00 \text{ кГц}$), як найбільш слабкого в розглянутій смузі частот. Щодо частотної постійної $f \cdot t$ (вісь "у") можна ввести поправку, наприклад, по першому резонансу. З приведеного на мал. 3 графіка можна орієнтовно визначити її значення — $1200 \text{ Гц} \cdot \text{м}$, а в нашому випадку вона обмірювана і дорівнює $63,31 \cdot 10^3 \text{ Гц} \cdot 13 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 823 \text{ Гц} \cdot \text{м}$. Значне розходження між цими значеннями будемо зв'язувати з розходженнями характеристик п'езоматеріалів, тобто титанату барію (рис. 3) і ЦТС-19 (рис. 2а).



а) П'езокерамічний диск №1

б) П'езокерамічний диск №2

Рис. 5. Зовнішній вигляд порошкових фігур Хладні на поверхні дисків.

Після аналізу частотного спектра перейдемо до проблеми візуалізації форм коливань.

Серед всього розмаїття експериментального обладнання та методів візуалізації форм коливань (див., наприклад, [4]) найбільш простим та оперативним, а іноді й найбільш точним та інформативним є метод порошкових фігур Хладні. Отримані нами фігури наведено на рис. 5.

За характером руху частинок (дрібнодисперсного піску) та місць його скупчення можна зробити висновок про наявність вузлових ліній та визначити їх просторове розташування і характерні розміри.

Як видно з фото, в п'єзодиску №1 на частоті $63,55 \text{ кГц}$ частинки збираються в центрі точно так само, як і в тонкому диску на першій радіальній моді коливань (рис. 6а, диск $D=30 \text{ мм}$, $h=1 \text{ мм}$, $f_p^1=81,40 \text{ кГц}$).

Друга псевдорадіальна мода коливань визначена нами на частоті $151,70 \text{ кГц}$ і схожа мода візуалізується на частоті $151,84 \text{ кГц}$, однак в центрі диску пісок не збирається, як це зазвичай спостерігається в тонких дисках (рис. 6б, $f_p^2=213,68 \text{ кГц}$).

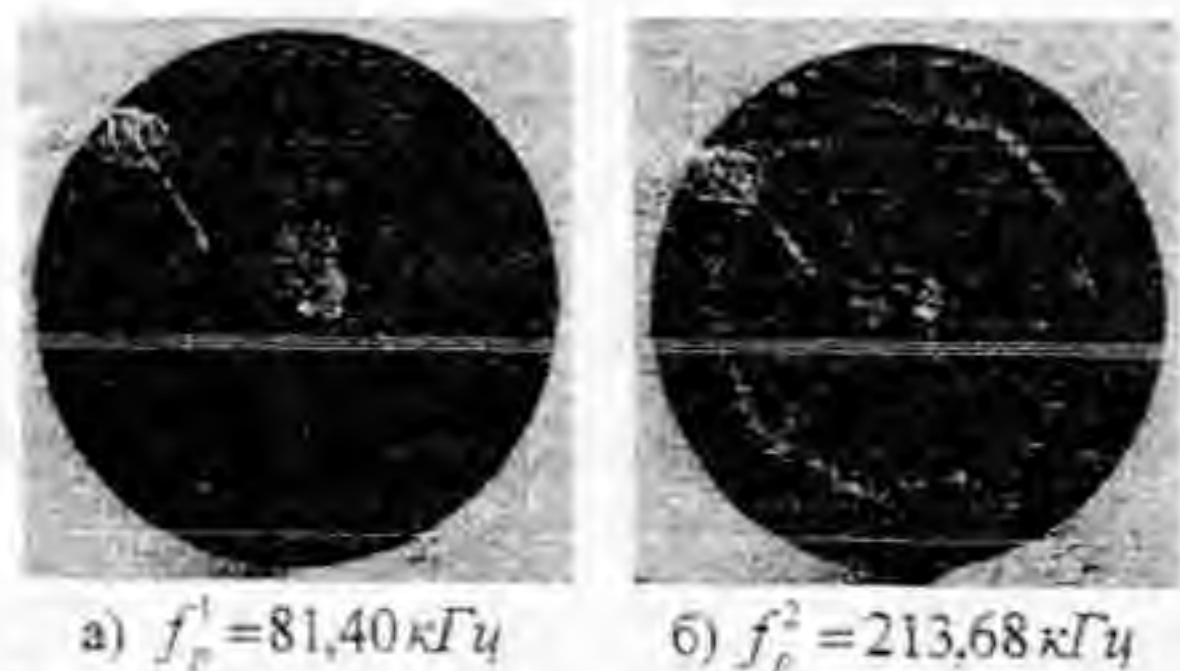


Рис. 6. Фото перших двох радіальних форм коливань п'єзокерамічного диска із п'єзокераміки ТБС-3, діаметром 30 мм, товщиною 1 мм.

Нам вдалося візуалізувати форми коливань на двох резонансних частотах, що знаходяться всередині між резонансного проміжку перших двох псевдо-радіальних мод коливань. Мода коливань на частоті $103,95 \text{ кГц}$ ідентифікована нами як перша псевдо товщинна. За рахунок деформацій диску як по товщині, так і по радіусу, стає помітним відхилення руху плоскої поверхні від поршневого і внаслідок цього утворюється одна вузлова лінія (деформація плоскої поверхні нагадує першу згину форму коливань тонкого диску), хоча, в цілому, синхронні переміщення поверхні диску по товщині зберігаються.

Мода коливань, збуджувана на частоті $126,85 \text{ кГц}$, має свої характерні особливості. Кільцева вузлова лінія в центральній частині вказує на переважно радіальні коливання, однак замість другої кільцевої моди ми маємо шість рівновіддалених один від одного сегментів. Це характерно для неосесиметричних форм коливань, які для даної системи із суцільними електродами спостерігатися не повинні. З'ясування причин виникнення таких форм потребує проведення додаткових досліджень. Можливими причинами є недосконалість характеристик матеріалу кераміки, геометрії або наявність підпайки дротів.

Моду, що візуалізується на частоті $182,01 \text{ кГц}$, можна віднести до вищих псевдорадіальних. Таке твердження є дещо наближеним, зважаючи на те, що відстані між вузловими лініями в декілька разів менше товщини п'єзодиску.

Збудження не осесиметричних форм та помітна не концентричність вузлових ліній викликали сумніви в достатній однорідності як пружних властивостей матеріалу диска №1 (наприклад, через наявність залишкових механічних напружень), так і його п'єзовластивостей (наявності областей із нерівномірною поляризацією). Для перевірки один із п'єзодисків був нагрітий до температури на декілька градусів нижче точки Кюрі (переходу з п'єзоелектричної фази в сегнетоелектричну) і витриманий протягом години.

Очікувалось, що властивості диску стануть більш рівномірними по об'єму. Для цього диск №2 витримали при температурі, як вказано вище, потім зняли амплітудно-частотні характеристики і форми коливань (рис. 2б і рис. 5б). П'єзоактивність диску, природно, зменшилась, якщо робити висновок з інтенсивності резонансних відгуків. Але, що саме головне, змінився і характер резонансного спектру. Значно зменшилась амплітуда резонансного відгуку на частоті $151,21 \text{ кГц}$ (ідентифікованого нами як друга псевдо радіальна мода). Перша псевдо товщинна форма коливань на частоті $108,60 \text{ кГц}$ значно втратила інтенсивність збудження. Натомість з'явилися ще два високочастотних резонанси №6 та №7 на частотах $208,23 \text{ кГц}$ і $227,50 \text{ кГц}$, які раніше не збуджувались.

Аналіз форм коливань цього диску виявляє, що вузлові лінії стали набагато більш симетричними та чіткими. Моду коливань на частоті $125,49 \text{ кГц}$ можна ідентифікувати як псевдо крайову за характером руху твірної

бокової поверхні диску. Мода коливань на частоті $181,35 \text{ кГц}$ характерна тим, що крім двох концентричних вузлових ліній виявлена третя, яка розташована в безпосередній близькості від краю. Класифікувати моду коливань, візуалізовану на частоті $208,42 \text{ кГц}$ використовуючи ідеологію коливань тонких пластин має деякі труднощі.

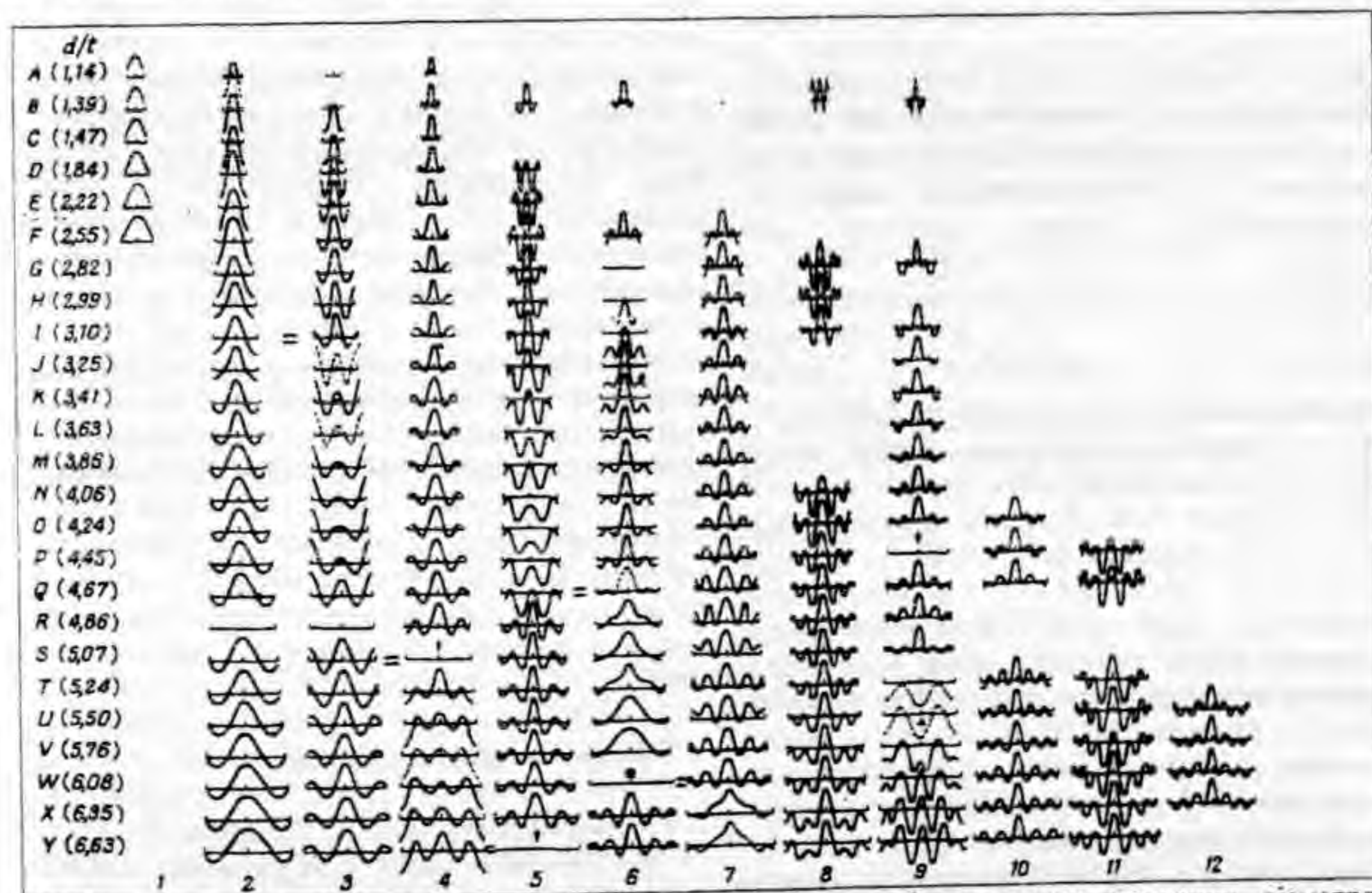


Рис. 7. Експериментально отримані розподіли переміщень для різних значень відносини діаметра до товщини d/t . Нумерація нормальних хвиль також, що і на рис.3 [2].

Отримані нами дані по формам коливань порівнювались також із наведеними в роботах Шоу (цитуюмо по [2]), в якій наведено графік експериментально отриманих даних розподілу зміщень для різних значень відношення діаметра до товщини. Найближче до нашого значення в роботі Шоу дорівнює 2,22 і для нього в більш детальному вигляді приводимо графіки перших п'яти нормальних мод коливань диска із титанату барія (рис. 8).

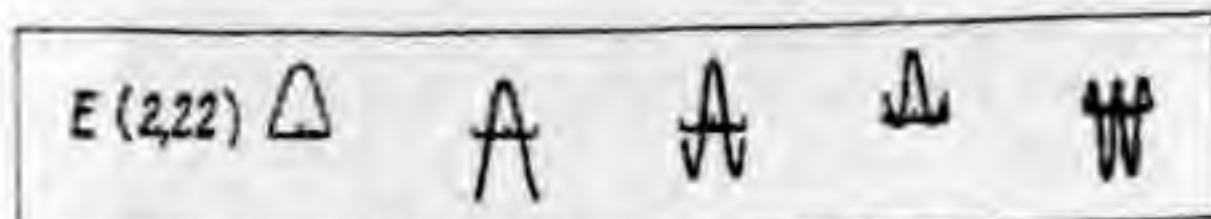


Рис. 8. Перші п'ять форм коливань

Такі диски використовувались для збудження поздовжніх хвиль в дрових ультразвукових лініях затримки.

Як видно з мал. 8 на першій моді максимальне переміщення по товщині (вісь Z) знаходяться в

середині диска. Це відбувається за рахунок коефіцієнта Пуассона, оскільки при цьому переміщення по радіусу повинні бути значно більшої величини (тому що це перша радіальна мода в інтерпретації тонких пластин). В наших експериментах по візуалізації форм коливань такий розподіл підтверджується і спостерігається для наших дисків на першій резонансній частоті ($63,55 \text{ кГц}$ або $64,52 \text{ кГц}$ на рис.5). Також підтверджується вигляд форми і на другому резонансі ($103,95 \text{ кГц}$ або $108,71 \text{ кГц}$), де спостерігається одна вузлова лінія, розташована на відстані $0,54R$ від центру диска. Те саме справедливе і для третьої форми коливань, на якій спостерігаються дві вузлові лінії на відстані $0,38R$ та $0,9R$ ($126,85 \text{ кГц}$ або $125,49 \text{ кГц}$), хоча на цю форму можуть накладатися паразитні коливання із спектра неосесиметричних форм.

Форма коливань, що збуджується на 4-му резонансі ($151,84 \text{ кГц}$ и $151,32 \text{ кГц}$) в цілому також підтверджується, як і на рис. 8. В ній наявне тільки одне коло, розташоване на відстані

0,5R від центру диска, але щодо цього кола необхідно зробити одне зауваження.

Його форма і в диску №1 (151,84 кГц) і в диску №2 (151,32 кГц) не є строго круговою і швидше за все може бути апроксимована як така, що складається із рівнобедрених трикутників. Це вказує на наявність поблизу неосесиметричної форми коливань і, таким чином, дві форми збуджуються одночасно. Слід відмітити, що за допомогою розрізних електродів можна цю неосесиметричну форму підсилити або послабити, якщо тільки знати положення вузлових ліній та кінематику руху п'єзоелемента.

Підтверджується і п'ята форма коливань (182,01 кГц та 181,35 кГц) з двома концентричними колами з радіусами 0,5R і 0,7R. По цій візуалізованій формі можна також помітити не концентричність першої вузлової лінії з радіусом 0,2R. Її можна апроксимувати еліпсом з відношенням осей 1:0,85. За якимись параметрами п'єзодиск є несиметричним (щільності, пружності, поляризованості, жорсткості підпаяних дрітків тощо) і ця навіть незначна несиметричність стає помітною вже на п'ятому резонансі. Таким чином можна проводити вибраковування п'єзодисків для застосування їх в якості збуджувачів саме «чистих» поздовжніх коливань.

Нам вдалося також візуалізувати форму коливань, що збуджується на шостому резонансі (208,42 кГц), але для ідентифікації цієї форми необхідні або повніші експериментальні дані або результати теоретичних розрахунків.

3 Висновки

Підсумовуючи викладені вище результати дослідження для п'єзодисків із співвідношенням діаметра до товщини 2,3 й поляризованого по товщині можна сказати, що перші п'ять резонансів доступні для цілей дослідження характерних ознак кінематики руху диска як об'ємного тривимірного тіла. При цьому виявлені вузлові лінії, розташовані на відстані $R=0$ для першої моди коливань, $R=0$ та $R=0,54$ для другої, $R=0,38$ та $R=0,9$ для третьої, $R=0,5$ для четвертої, $R=0,2$ та $R=0,7$ для п'ятої. Показано, що при знаходженні вузлових ліній та опису характеру

коливань на вищих формах виникають труднощі, пов'язані з виникненням не симетричних форм, які виникають також і при незначній інтенсивності збудження. Особливо важливо це є при конструюванні прецизійних актуаторів різного призначення, зокрема, п'єзодвигунів та модулюючих дзеркал адаптивної оптики. Проте отримані нами знання є далеко не вичерпними. Практична цінність результатів таких досліджень була би набагато вищою, якби вони виконувались та зіставлялися із результатами теоретичних розрахунків та математичного моделювання напружено-деформованого стану, як на поверхні, так і всередині п'єзодиска (основи викладені, наприклад, в роботі [5]). За допомогою вивіреної математичної моделі можна було б більш швидко і більш точно знаходити необхідні співвідношення геометричних розмірів для п'єзокерамічних дисків при розв'язанні конкретних задач, особливо, з розрізними електродами. Існування комп'ютерної програми, що дозволяє це робити коректно на сьогоднішній день нам невідомо і її створення є актуальною задачею.

Список використаних джерел

1. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Мелешко В.В., Никитенко В.Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом // Акуст. вісник. – 2006. — т.9 – № 4. – С. 3-11.
2. Физическая акустика /под ред У.Мезона. Т.1, ч.А.: Методы и приборы ультразвуковых исследований. – М.: 1966. – 502 с. с ил.
3. Г.К.Скребнев Комбинированные гидроакустические приемники, ЭЛМОР, Санкт-Петербург, – 1977, 200с.
4. Экспериментальная механика, т.1, т.2 /под ред А.Кобаяси, пер. с англ. – М., Мир: 1990.
5. Грінченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. . – Киев, Наукова думка: 1981.— 284 с.

Надійшла до редколегії 09.12.2007

УДК 519.6

Віталій А. Каліон, к.ф.-м.н., доцент, КНУ,
Ігор О. Бровченко, к.ф.-м.н., н.с., ПІММС,
Національна академія наук України (НАНУ),
Анатолій О. Кушан, н.с., ПІММС НАНУ.

**Використання методу гідромеханіки
згладжених частинок для розв'язання за-
дач гідродинаміки довкілля.**

I. Основні поняття та алгоритми

Розглядаються основні поняття й алгорит-
ми лагранжевого методу SPH, який з успіхом
можна використовувати для чисельного
розв'язання низки складних задач течії рідин.

Ключові слова: Гідродинаміка згладжених
частинок, підхід Лагранжа, основні алгоритми.

E-mail: kalion@univ.kiev.ua, brovchik@env.com.ua, ka@env.com.ua.
(представлено проф. Мелешко В.В.)

Вступ

У статті розглядаються математичні моделі
руху рідини із вільною поверхнею та їх застосу-
вання до чисельного розв'язання складних задач,
що описують вплив моря на берегові споруди.
Найбільші успіхи тут були досягнуті із викорис-
танням сіткових алгоритмів відслідковування
об'ємів – методів маркерів в клітинці (MAC), час-
тинок в клітинці (PIC) та об'ємів рідини (VOF)
[4,5,9]. Але всі ці алгоритми мають дуже суттєві
недоліки, що характерні також для усіх алгорит-
мів, які використовують сітки – це числова дифу-
зія та числова дисперсія. Числова дифузія спо-
ворює одержаний чисельний розв'язок. А загаль-
ним наслідком числової дисперсії є проблема
дефекту маси. При цьому крок за часом стає

Vitaliy A. Kalion, PhD, docent, KNU,
Igor O. Brovchenko, PhD, researcher, IMMSP,
Ukraine National Academy of Science (UNAS),
Anatoli O. Kuschak, researcher, IMMSP, UNAS.

**Applications of Smoothed Particle Hydro-
dynamics (SPH) method to the problems of
environmental fluid dynamics.**

I. Theory and main algorithms

The base theory and main algorithms of the SPH
method as a Lagrangian numerical technique which
proved its ability to reproduce a large variety of
flows were discussed.

Key Words: Smoothed Particle Hydrodynamics,
Lagrangian technique, main algorithms.

дуже малим й розв'язок розбігається. Досі відомо
єдиний сітковий алгоритм, який за рахунок вдалої
комбінації методу VOF й оригінального методу
PIC, не має проблеми дефекту маси. Але його
реалізація досить складна й для тривимірного
випадку є секретом авторів [3].

Безсіткові методи (явний метод гідродинаміки
згладжених частинок (SPH) [1,6-8,12] та неявний
метод рухливих частинок (MPS) [2]) опираються
на модель Лагранжа й не використовують обчис-
лювальні сітки. Тому вони вільні й від числової
дифузії, й від дефекту маси. Зараз тільки почало-
ся використання безсіткових методів у всіх сфе-
рах гідродинаміки, де має місце швидка зміна
напрямку течії. Ці методи з успіхом використо-
вуються при моделюванні складного руху рідини
із вільною поверхнею, при моделюванні турбуле-
нтності із використанням моделі вихрової
в'язкості (SPS), при моделюванні поведінки бага-
тофазних сумішей, при моделюванні пересування
річкового русла, при моделюванні плавання тіл,
при моделюванні тривимірних течій й т.і.

В методі SPH потік вважається злегка стисли-
вим, а в методі MPS нестисливість потоку гаран-
тується шляхом розв'язання додаткового рівнян-
ня (подібного до рівняння вільної поверхні для
VOF алгоритму). Ми вибрали метод SPH тому,
що його простіше реалізувати, ніж метод MPS.
Крім того реалізації методу SPH для двовимір-
ного (2D) й тривимірного (3D) випадків майже не
відрізняються.

У першій частині статті стисло пояснено осо-
бливості методу SPH. У тому числі: введення

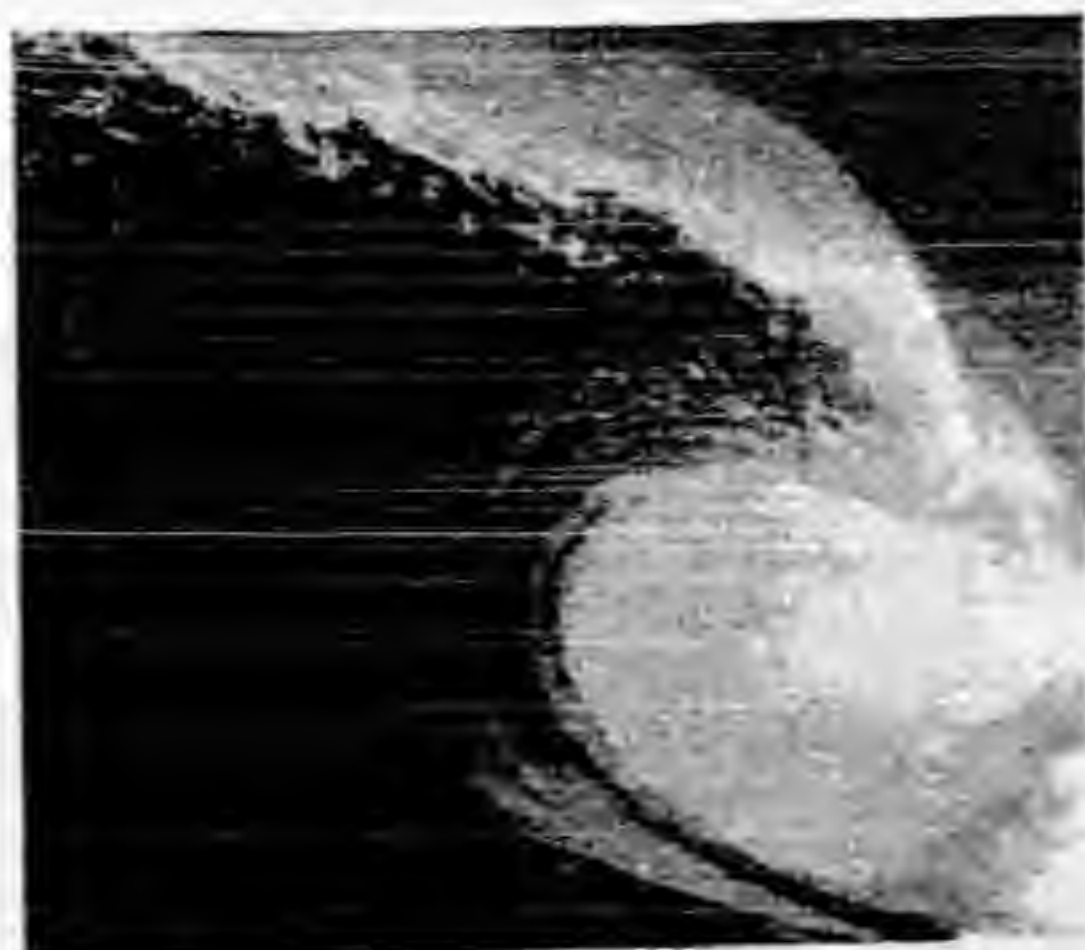


Рис.1. Перекидання хвилі.

вагових функцій, дискретизація основних рівнянь, вибір граничних умов й інтегрування отриманих рівнянь за часом. Також наведені швидкий алгоритм сортування й пошуку сусідніх частинок й основний алгоритм методу SPH.

1. Основні рівняння

Рух в'язкої ілюотонівської рідини в деякій області Ω описується рівняннями Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{dv^a}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^b} (\mu \varepsilon_{ab}) + \rho F^a, \quad (1)$$

рівнянням нерозривності

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

та рівнянням стану

$$p = p(\rho). \quad (3)$$

Тут верхні та нижні індекси $a, b = 1, 2$ (2D) або $a, b = 1, 2, 3$ (3D) пов'язані із координатними напрямками x, y, z , відповідно; $\vec{v} = \{v^a\}$ – компоненти вектора швидкості; p, μ, ρ – тиск, коефіцієнт динамічної в'язкості та густина рідини, відповідно; F^a – компоненти вектора зовнішніх масових сил; $\varepsilon_{ab} = \frac{\partial v^a}{\partial x^b} + \frac{\partial v^b}{\partial x^a} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \cdot \delta_{ab}$ – компоненти тензора швидкостей деформації; δ_{ab} – де-та Кронекера.

2. Метод SPH

Розглянемо коротко особливості методу SPH [1,6-9]. Рідину будемо моделювати ансамблем взаємодіючих "рідких" частинок. Введемо довжину згладжування $h = \{1.2 \div 1.4\} \Delta r$, де Δr – початкова відстань між частинками. Обмежимося спочатку двовимірним рухом рідини. Якщо навколо кожної індивідуальної частинки описати коло радіусом $2h$, тоді тільки в середині цього кола заходяться частинки, які можуть взаємодіяти із центральною частинкою (див. Рис.2).

Нехай A деяка скалярна функція. За методом SPH дискретизація основних рівнянь за просторовими змінними заснована на наступній інтегральній інтерполяції

$$\langle A(\vec{r}) \rangle = \int_{\Omega} A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h') \cdot d\vec{r}'. \quad (4)$$

Тут $W(\vec{r} - \vec{r}', h')$ – інтерполяційне ядро; h' – масштаб згладжування для довільної частинки із області σ . Представляючи інтеграл в (4) у вигляді інтегральної суми, маємо

$$A(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^n A_j \frac{M_j}{\rho_j} W_{ij}. \quad (5)$$

Тут $\vec{r}_i, M_i, \rho_i$ – радіус-вектор, маса та густина i -частинки, відповідно; n – число "рідких" частинок; $A_j = A(\vec{r}_j)$; $W_{ij} = W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h_i)$ – неперервна або кусково-неперервна вагова функція особливого вигляду (див.Рис.2). Також називається інтерполяційним ядром [6,7].

Використовуючи властивості ядра, запишемо частинні похідні за просторовими змінними:

$$\nabla A_i = \sum_j \frac{M_j}{\rho_j} A_j \nabla_j W_{ij}. \quad (6)$$

Отже, інтерполяція за методом SPH полягає у тому, що за рахунок взаємодії тільки сусідніх частинок, всі члени у рівняннях (1)–(3) представляються у вигляді (5) або (6). Тобто основні рівняння набувають вигляду:

Рівняння неперервності

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j M_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_j W_{ij}; \quad (7)$$

рівняння Нав'є-Стокса

$$\frac{dv_i^a}{dt} = - \sum_j M_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^a} + \Pi_{ij}^{ab} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \right) + F_i^a; \quad (8)$$

рівняння стану

$$p(\rho) = P_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right] \quad (9)$$

та рівняння Лагранжа для визначення нового положення частинки

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i + \omega \sum_j M_j \left(\frac{\vec{v}_j}{\rho_j} \right) W_{ij}. \quad (10)$$

В'язкий член для рівняння (8) у загальному випадку має вигляд:

$$\Pi_{ij}^{ab} = \frac{\mu_i \varepsilon_i^{ab} + \mu_j \varepsilon_j^{ab}}{\rho_i \rho_j}, \quad (11a)$$

$$\varepsilon_i^{ab} = \sum_j \frac{M_j}{\rho_j} v_j^b \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^a} + \sum_j \frac{M_j}{\rho_j} v_j^a \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} - \left(\frac{2}{3} \sum_j \frac{M_j}{\rho_j} v_j^a \cdot \nabla_j W_{ij} \right) \delta_{ab} \quad (11b)$$

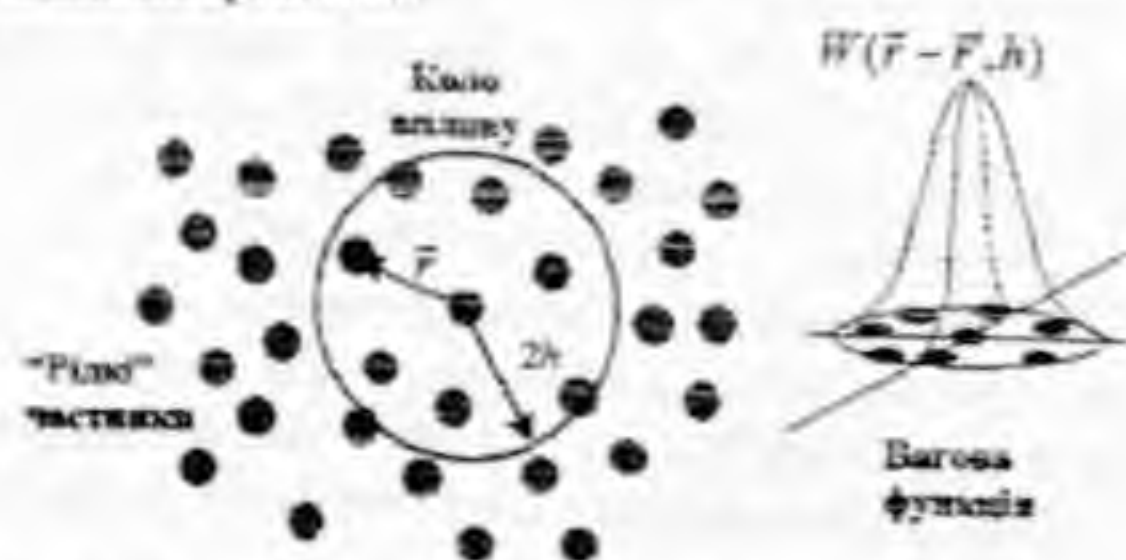


Рис.2. Коло впливу частинки й вигляд інтерполяційного ядра (вагова функція) [6].

Тут ω – це параметр релаксації ($0 \leq \omega \leq 1$); $v_{ji}^a = v_j^a - v_i^a$, $\bar{\rho}_y = (\rho_i + \rho_j)/2$. Нехай ρ_0 – це деяка початкова густина рідини¹; γ – політропний індекс в рівнянні стану: $\gamma = \gamma_a = 1.4$ для повітря та $\gamma = \gamma_w = 7$ для води. Якщо вважати рідину трішки стисливою, тоді початковий тиск P_0 буде пов'язаний із швидкістю звуку в рідині (c_s):

$$c_s = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}. \quad (12)$$

Рівняння стану (9) для "рідкої" частинки набуває вигляду:

$$p_i = B \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right]^{1/\gamma}, \quad (13)$$

де $B = c_s^2 \rho_0 / \gamma$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$. Для моделі SPH, що розглядається, будемо вважати $c_s \approx 10 u_{\max}$, де $u_{\max}$ – це максимальна швидкість "рідкої" частинки [7,8]. Якщо при цьому у модель входить гідростатичний тиск, тоді початковий розподіл густини знаходять із рівняння стану (13) у вигляді:

$$\rho_i = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0 g (d - x_2^i)}{B} \right)^{\gamma}. \quad (14)$$

Тут d – початковий рівень рідини, x_2^i – вертикальна координата частинки. Інші параметри в рівнянні (14) ті ж самі, що й в рівнянні (13).

Оскільки, зрозуміло, що довжина згладжування h має ключову роль для моделі SPH, зробимо деякі попередні зауваження відносно її перевизначення в процесі розрахунків:

- якщо h стає дуже малою, n також мала, а, отже, результат стає неточним;
- якщо h стає дуже велика, локальна інформація згладжується.

Звернемо увагу, що довжину згладжування h можна вважати постійною при повільній зміні густини (тобто для крапельних рідин) й не можна вважати постійною при суттєвих змінах густини (тобто для газів). Для останнього випадку маємо:

- на початку обчислення ($t = 0$, $m = 0$):

$$\sum_{j=1}^{N_i^0} M_j = \frac{4}{3} \pi (h_i^0)^3 \rho_i^0 \quad (15)$$

- перевизначення в процесі обчислення ($t > 0$, $m > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dh_i^m}{dt} &= - \frac{h_i^m}{n_{\text{dim}} \rho_i^m} \frac{d\rho_i^m}{dt} = \\ &= - \frac{h_i^m}{n_{\text{dim}} \rho_i^m} \sum_{j=1}^{N_i^m} M_j (v_i^m - v_j^m) \cdot \nabla_i^m W_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

¹ Індекс "0" тут і надалі вказує, що параметр знаходиться у стані спокою або на нескінченності.

Тут n_{dim} – розмірність задачі; N_i^m – число пар взаємодіючих частинок у процесі розрахунків; N_i^0 – початкове число пар взаємодіючих частинок.

В'язкий член в (8) може мати три форми:

- В'язкий член із уявною в'язкістю:

$$\Pi_y = \begin{cases} - \frac{\alpha h_y c_y}{\bar{\rho}_y} \frac{(\bar{v}_y, \bar{r}_y)}{\bar{r}_y^2 + \phi^2}, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) < 0, \\ 0, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

де α – константа ($0.01 \leq \alpha \leq 2$); $\bar{v}_y = \bar{v}_i - \bar{v}_j$ – вектор різниці швидкостей й $\bar{r}_y = \bar{r}_i - \bar{r}_j$ – вектор різниці радіусів-векторів двох частинок; член з $\phi = 0.1 \cdot h_y$ додано, щоб запобігти утворенню сингулярності, коли відстань між частинками прямує до нуля ($h_y \rightarrow 0$); $\bar{\rho}_y = (\rho_i + \rho_j)/2$, $c_y = ((c_s)_i + (c_s)_j)/2$; $h_y = (h_i + h_j)/2$; $(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_i a_i b_i$. Вираз $\alpha h_y c_y$

тут називають уявною в'язкістю. Отже, α – коефіцієнт уявної в'язкості.

- В'язкий член із ламінарною в'язкістю:

$$\Pi_y = \begin{cases} - \frac{\beta \cdot v_0}{\bar{\rho}_y} \frac{(\bar{v}_y, \bar{r}_y)}{\bar{r}_y^2 + \phi^2}, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) < 0, \\ 0, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) \geq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Якщо член із уявною в'язкістю в (17) підставити у повне рівняння Нав'є-Стокса (8) коефіцієнт кінематичної в'язкості ν_0 виявляється пропорційним $\alpha h c_s$, тобто $\nu_0 = \alpha h c_s / \beta$. Згідно різних джерел $\beta \approx 2$ [1] або $\beta \approx 8$ [6]. Але авторами цієї роботи показано, що в дійсності тут $\beta \approx 16$ або навіть $\beta \approx 17$.

- В'язкий член із турбулентною в'язкістю:

$$\Pi_y = \begin{cases} - \frac{\beta \cdot (v_0 + \{\bar{v}_i\}_y)}{\bar{\rho}_y} \frac{(\bar{v}_y, \bar{r}_y)}{\bar{r}_y^2 + \phi^2}, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) < 0, \\ 0, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) \geq 0. \end{cases} \quad (19a)$$

або

$$\Pi_y = \begin{cases} - \left(\frac{|I_{2r}|}{\rho_i^2} + \frac{|I_{2r}|}{\rho_j^2} \right), & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) < 0, \\ 0, & (\bar{v}_y, \bar{r}_y) \geq 0. \end{cases} \quad (19b)$$

Тут $|I_{2r}| = (2 \tau_{ab} \tau_{ab})^{1/2}$ – другий інваріант тензора напруг.

В'язкий член із турбулентною в'язкістю дозволяє розглядати рівняння Нав'є-Стокса, як рівняння Рейнольдса для осереднених швидкостей,

для яких згідно моделі вихрової в'язкості (SPS) досить просто знайти компоненти тензора напруг Рейнольдса $\tau = \{\tau_{ab}\}$ [1]:

$$\frac{\tau_{ab}}{\rho} = 2\nu_t \varepsilon^{ab} - \frac{2}{3}k \cdot \delta_{ab} \quad (20)$$

Тут коефіцієнт кінематичної турбулентної в'язкості ν_t має вигляд

$$\{\nu_t\}_{ij} = (C_{sm} \cdot h_{ij})^2 |I_{2\varepsilon}|, \quad (21)$$

де $C_{sm} = 0.12 \div 0.15$ – константа Смагорінського [10]; $|I_{2\varepsilon}| = (2\varepsilon^{ab}\varepsilon^{ab})^{1/2}$ – другий інваріант тензора швидкостей деформації.

Турбулентна кінетична енергія (k) у виразі (20) також може бути розрахована за моделлю SPS:

$$k = \nu_t^2 / (C_v h)^2, \quad (22)$$

де константа $C_v = 0.08$.

Відмітимо, що в'язкий член Π_{ij} є інваріантним відносно повороту системи координат.

Постановка граничних умов для моделі SPH ускладнена, за рахунок того, що:

- Границі визначаються наближено;
- Інтерполяційне ядро на границі невизначене.

Розглянемо використання декількох типів граничних умов:

I. Граничні умови на поверхні тіла:

- 1) Вводяться примарні (або віртуальні) частинки Такеди [1,6,8], тиск (p_s), координати (x_s) й швидкість ($\vec{v}_s$) яких визначається із співвідношень:

$$\begin{aligned} x_s &= x_b + x_g; & x_g &= x_i - x_j; \\ \vec{v}_s &= 2 \cdot \vec{v}_b + \vec{v}_{ij}; & \vec{v}_{ij} &= \vec{v}_i - \vec{v}_j; \\ p_s &= p_j \end{aligned} \quad (23)$$

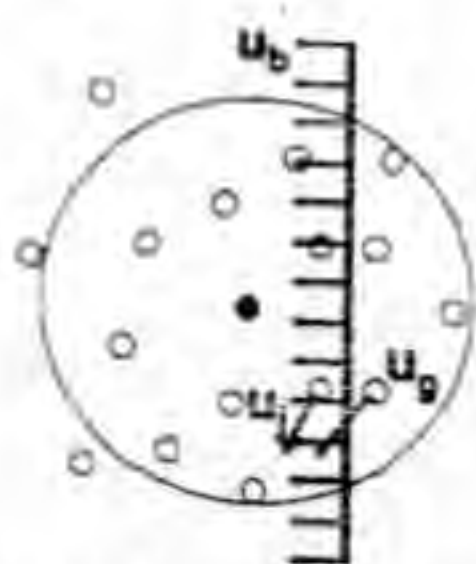


Рис.3а. До постановки граничних умов із використанням примарних частинок [1].

- 2) Вводиться ланцюжок нерухомих граничних частинок, що взаємодіють із оточуючими "рі-

дкими" частинками через репульсивні сили [6-8]:

$$f(r_g) = \begin{cases} D_c \left[\left(\frac{r_0}{r_g} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r_g} \right)^6 \right] \frac{x_g}{r_g^2}, & r_g \leq r_0; \\ 0, & r_g > r_0, \end{cases} \quad (24)$$



Рис.3б. До постановки граничних умов із використанням репульсивних сил [6].

Тут $r_g = |\vec{r}_g|$ – відстань між "рідкою" (а) й граничною (б) частинками. Лінійний масштаб r_0 дорівнює початковій відстані між частинками (Δr). Параметр D_c має розмірність m^2/s^2 , а, отже, має той же самий масштаб, що й gd . Тут d – це початковий рівень рідини.

- 3) Вводиться подвійний ланцюжок нерухомих "псевдо-рідких" частинок, що взаємодіють із оточуючими "рідкими" частинками за звичайними законами [1,6,8].



Рис.3с. До постановки граничних умов із використанням подвійного ланцюжка "псевдо-рідких" частинок.

II. Граничні умови на вільній поверхні:

Положення вільної поверхні визначається із співвідношення $\rho(x) > 1/2 \rho_{water}$, де

$$\rho(x) = \sum_i \rho_i W(x - x_i) V_i = \sum_i \rho_i \quad (25)$$

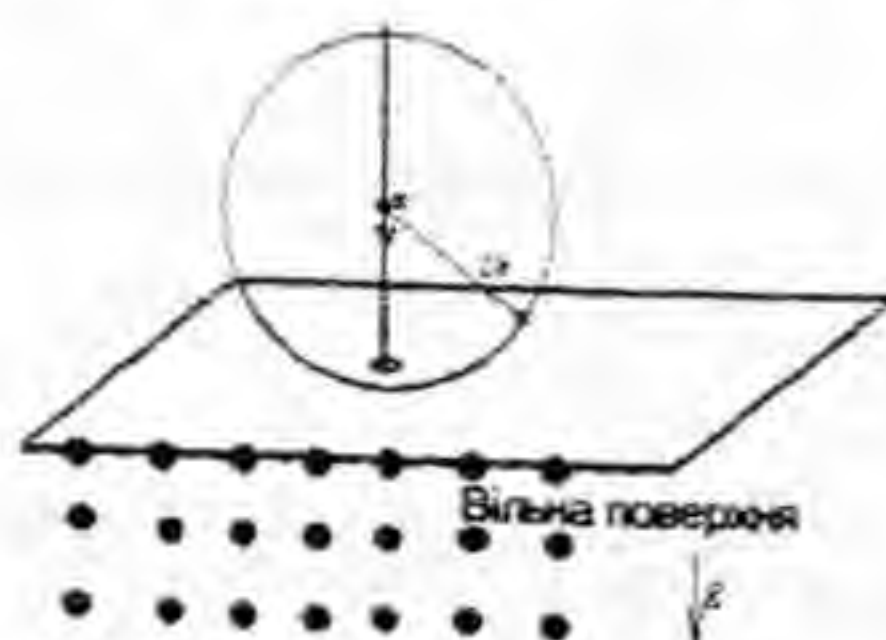


Рис.4. До визначення положення вільної поверхні [8].

Граничні умови, як такі, виконуються на вільній поверхні автоматично [8].

III. Періодичні граничні умови:

На Рис.5 маємо приклад задання періодичних граничних умов у вертикальному напрямку.



Рис.5. Реалізація періодичних граничних умов [1].

Розглянемо спочатку частинки, які заходять на відстані $2h$ від верхньої поверхні, на якій задано періодичні граничні умови. Згідно Рис.5 кожену частинку (i) й частину її кола впливу, що виходить за межі верхньої поверхні області обчислень, потрібно періодично перенести на нижню поверхню області обчислень. Практично це задається шляхом введення додаткової примарної частинки біля нижньої поверхні, параметри якої повністю співпадають із параметрами частинки (i) , а положення по вертикалі переноситься періодично з верхньої поверхні. Аналогічно біля верхньої поверхні будуються примарні частинки для тих частинок, що знаходяться на відстані $2h$ від нижньої поверхні області обчислень.

3. Приклад алгоритму швидкого сортування частинок

Нехай N_p загальне число частинок (сума "рідких", "псевдо-рідких", граничних й примарних частинок). У загальному випадку, для того щоб підрахувати всі взаємодії між частинками необхідно виконати приблизно N_p^2 операцій. Нехай ефективний радіус взаємодії окремої частинки дорівнює $D = 2h$. Тоді у двовимірному випадку реальну розрахункову область накриваємо прямокутною областю, яка поділена на квадратні чарунки розміром $D \times D$ (клітинкова сітка). Нехай N_c – максимальне число частинок в чарунці клітинкової сітки. Введемо новий сортувальний масив $CELL(0 : N_c, 1 : N_x, 1 : N_y)$. Тут N_x, N_y – число чарунок у клітинковій сітці в напрямках Ox та Oy ,

відповідно. Тоді маємо:

$$N_x = \text{int}((X_{\max} - X_{\min}) / D) + 1;$$

$$N_y = \text{int}((Y_{\max} - Y_{\min}) / D) + 1;$$

$$N_c = \max(20, N_x * N_y).$$

Для кожного кроку за часом маємо двокроковий сортувальний алгоритм:

I. Попереднє сортування. Спочатку покладемо $CELL = 0$. Далі для кожної pos -частинки із N_p необхідно виконати:

1. Знайти індекси (i, j) такі, для яких кожна pos -частинка попадає в клітинку (i, j) .

$$i = \text{int}((X(pos) - X_{\min}) / D) + 1;$$

$$j = \text{int}((Y(pos) - Y_{\min}) / D) + 1.$$

2. Записати позицію pos -частинки до масиву $CELL$ й, відповідно, збільшити на одиницю значення першого індексу в масиві $CELL$:

$$k = CELL(0, i, j); \quad k = k + 1;$$

$$CELL(k, i, j) = pos; \quad CELL(0, i, j) = k;$$

II. Основне сортування. Запускаємо основний цикл:

Для кожної pos -частинки із N_p виконати:

1. Визначити позицію "основної" клітинки (i_c, j_c) :

$$i_c = \text{int}((X(pos) - X_{\min}) / D) + 1;$$

$$j_c = \text{int}((Y(pos) - Y_{\min}) / D) + 1;$$

2. Визначити сусідні клітинки:

$$i = i_c + \{-1, 0, +1\}; \quad j = j_c + \{-1, 0, +1\};$$

3. Якщо індекси (i, j) не виходять за межі клітинкової сітки $[N_x, N_y]$, для кожної k -частинки із масиву $CELL(k, i, j)$ виконати переприсвоєння $pos_{\text{new}} = CELL(k, i, j)$;

4. Якщо $(pos_{\text{new}} > pos)$ й відстань між pos_{new} -частинкою й pos -частинкою менше ніж D , виконати процедуру SPH.

Згідно запропонованому алгоритму для перебору усіх пар взаємодіючих частинок необхідно $Z_p = 9 N_p / (N_x N_y)$ операцій. До того ж, якщо D достатньо мале, а добуток $N_x * N_y$ достатньо великий, величина Z_p суттєво менша ніж N_p^2 .

4. Інтегрування за часом

Алгоритм SPH дозволяє звести вихідну систему рівнянь в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь, які можуть бути проінтегровані за часом за стандартною процедурою, наприклад, за схемами Рунге-Кутта (RK), предиктор-коректор (PC), "чехарда" Дюфорта-Франкела (LF) й т.і. Для розрахунків за часом в даній статті використовується метод "чехарда". Вибір методу пов'язаний із тим, що для нього

² Тут й далі функція $\text{int}()$ вказує на виділення цілої частини числа.

умова Куранта-Фрідрікса-Леві (CFL) виконується автоматично. В той же час при використанні інших методів необхідно задовольнити CFL-умову, яка згідно зауваженню Монахана у цьому випадку має вигляд [6, 7]:

$$\Delta t \leq \min \left(\min \left(0.4 \frac{h_i}{c_s (1 + 0.6\alpha)} \right), \min \left(0.25 \left(\frac{h_i}{G_i} \right)^{1/2} \right) \right). \quad (24)$$

Тут c_s – швидкість звуку, що використовується в даній моделі, α – коефіцієнт ефективної (або уявної) в'язкості й G_i – максимальна величина зовнішньої сили для частинки віднесена до її маси.

В двовимірній моделі SPH ми маємо лише п'ять незалежних змінних: густина ρ , швидкість $\vec{v}$ й положення $\vec{r}$ частинки, відповідно. Тиск p не є незалежною змінною, бо визначається із рівняння стану (13) через густину. Отже, як показано в розділі 2, на кожному кроці за часом необхідно інтегрувати тільки п'ять звичайних диференціальних рівнянь. Маємо:

$$\frac{d\rho}{dt} = f_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2, x_1, x_2), \quad (25)$$

$$\frac{dv_a}{dt} = f_2^a(\rho, v_1, v_2, x_1, x_2), \quad (26)$$

$$\frac{dx_a}{dt} = \vec{u}_a, \quad a = 1, 2. \quad (27)$$

Тут $\vec{u}_a$ – a -компонента вектора швидкості частинки, підправлена згідно процедури XSPH [6], v_a – a -компонента вектора швидкості частинки із рівняння (8). Функції f_i ($i = 1, 2$) представляють праву частину рівнянь (7) й (8), відповідно.

При інтегруванні системи рівнянь (25)-(27) використаємо модифіковану схему "чехарда" (LF), яка тут складається із двох кроків. Спочатку на кроці предиктор визначається попереднє значення густини ρ^{*n} й компонентів швидкості v_a^{*n} :

$$\rho^{*n} = \rho^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_1(\vec{u}_1^{*n-1}, \vec{u}_2^{*n-1}, x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) \quad (28)$$

$$v_a^{*n} = v_a^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_2^a(\rho^{*n-1}, v_1^{*n-1}, v_2^{*n-1}, x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$$

$$a = 1, 2 \quad (29)$$

Тут $\vec{u}_a$ права частина рівняння (10) із розділу 2. Потім для густини, компонентів швидкості й координат нового положення частинки виконується крок коректор:

$$\rho^{n+1/2} = \rho^{*n} + \Delta t \cdot f_1(\vec{u}_1^n, \vec{u}_2^n, x_1^n, x_2^n) \quad (30)$$

$$v_a^{n+1/2} = v_a^{*n} + \Delta t \cdot f_2^a(\rho^{*n}, v_1^{*n}, v_2^{*n}, x_1^n, x_2^n) \quad (31)$$

$$x_a^{n+1} = x_a^n + \Delta t \cdot \vec{u}_a^{n+1/2}, \quad a = 1, 2 \quad (32)$$

Запропонована модифікація схеми "чехарда" (LF) дозволяє отримати розв'язок за часом із другим порядком точності, тобто $\sim O(\Delta t^2)$.

Оскільки компоненти вектор-функції f_2^a представляють собою компоненти прискорення "рідкої" частинки у кожний момент часу, тоді a -компоненти головного вектора сили $\vec{F}_a$, що діє на берегову споруду (перешкоду) у даний момент часу, просто знаходяться із узагальненого II закону Ньютона

$$F_a = \sum_k^{N^a(t)} M_k \{f_2^a\}_k \quad (33)$$

Тут M_k – маса "рідкої" частинки, $N^a(t)$ – число "рідких" частинок, що взаємодіють із a -поверхнею перешкоди у даний момент часу.

5. Алгоритм головної процедури

Типова процедура методу SPH включає:

1. Модуль ініціалізації читає із зовнішнього файлу інформацію про початковий розподіл "рідких" й псевдо-рідких частинок всередині обчислювальної області та граничних й псевдо-рідких частинок на границях обчислювальної області, про властивості цих частинок, про величину початкового кроку за часом та іншу інформацію, що необхідна для розв'язання задачі. Для побудови початкового розподілу частинок, як правило, використовується зовнішня програма.
2. Основний модуль включає основні модулі SPH, у тому числі, якщо це потрібно, модуль обчислення нового кроку за часом. Оскільки для знаходження значень основних невідомих на новому кроці за часом у даному випадку використовується схема "чехарда" Дюфорта-Франкела (LF) (див. розділ 4), яка є абсолютно збіжною, немає необхідності обчислення нового кроку за часом. Модуль інтегрування за часом включає наступні процедури:
 - 2.1 Генерації граничних (віртуальних або примарних) частинок.
 - 2.2 Попереднього сортування частинок (див. розділ 3).
 - 2.3 Знаходження усіх пар взаємодіючих частинок. Вона може включати також процедуру обчислення нових значень довжини згладжування для кожної частинки (якщо це потрібно).
 - 2.4 Корекції значень густини.
 - 2.5 Обчислення в'язкого члену, що враховує вплив реальної або уявної в'язкості. Тут також може знаходитися процедура обчислення тур-

булентної в'язкості.

2.6. Обчислення парних сил взаємодії між частинками різного типу. У цьому місці із рівняння стану можна знайти тиск.

2.7. Обчислення впливу зовнішніх сил на частинки, якщо це необхідно.

2.8. Знаходження значень моментів й густини частинок на новому кроці за часом.

2.9. Корекції довжини згладжування, якщо це необхідно.

2.10. Корекції моментів й густини частинок; процедуру корекції позицій частинок та їх швидкості; якщо необхідно, процедуру перевірки законів збереження маси й моментів.

2.11. Корекції граничних умов.

2.12. Обчислення сили, що діє на перешкоду.

3. Модуль виводу. Коли час інтегрування закінчується, а також у відповідні моменти часу під час виконання інтегрування, отримані результати записуються у зовнішні файли для подальшої обробки.

6. Висновки

У статті розглянуті основні положення й алгоритми методу гідродинаміки згладжених частинок (SPH). Метод SPH може бути з успіхом використано для моделювання складних задач руху рідини із вільною поверхнею. У тому числі для розв'язання задач, що моделюють вплив моря на гідротехнічні прибережні споруди. Зробимо деякі висновки й рекомендації на майбутнє:

- 1) Для безсіткового методу SPH не існує проблеми числової дифузії й дефекту маси, оскільки це лагранжевий метод.
- 2) Метод SPH дозволяє замінити розв'язання системи складних нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними за простором й часом на розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь за часом. Остання розв'язується стандартними методами із якою завгодно точністю.
- 3) При використанні методу SPH досить просто моделювати рух рідин із вільною поверхнею, турбулентність, рух багатокomпонентних середовищ й т.і.
- 4) Для методу SPH найбільшій складності мають місце при заданні граничних умов.
- 5) Процедура сортування частинок із використанням клітинкової сітки може суттєво зменшити час розв'язання задачі.

Список використаних джерел.

1. Cuomo, G., Panizzo, Andrea, Dalrymple, R. SPH-LES two-phase simulation of wave breaking and wave-structure interaction / Proc. 30-th International Conference on Coastal Engineering (ICCE).- 2006.- P.1732.
2. Gotoh, H., Sakai, T. Key issues in the particle method for computation of wave breaking // Coastal Engineering.- 2006.- 53.- P.171-179.
3. Griebel, M., Dornseifer, T. and Neunhoffer, T. Numerical Simulation in Fluid Dynamics, a Practical Introduction.- Philadelphia : SIAM.- 1998.- 230p.
4. Hirt, C. and Nichols, B. VOF method for the dynamics of free boundaries. // Journal of computational physics.- 1981.- 39.- P.201.
5. Kothe, D.B., Mjolsness, R.C. and Torrey, M.D. RIPPLE: A computer program for incompressible flows with free surfaces / Los Alamos National Laboratory.- Report LA-12007.- 1991.
6. Lynyrd de Wit. Smoothed Particle Hydrodynamics. A Study of the possibilities of SPH in hydraulic engineering. Delft University of Technology. Faculty of Civil Engineering and Geosciences Environmental. Fluid Mechanics Section.- MSc Thesis.- April 2006.- 96p.
7. Monaghan, J. Simulating free surface flows with SPH // Journal of computational physics.- 1994.- 110.- P.399-406.
8. Monaghan, J. Smoothed particle hydrodynamics. // Reports on progress in physics.- 2005.- 68, P.1703-1759.
9. Shi, F., Zhao, Q., Kirby, J.T., Lee, D.S. and Seo, S.N. Modeling wave interaction with complex coastal structures using an enhanced VOF model / Proc. 30-th International Conference on Coastal Engineering (ICCE).- 2006.- sep. 2006.
10. Smagorinsky J. General circulation experiment with the primitive equations. I. The basic experiment // Mon. Weath. Rev.- 1963.- 91.- P.99-164.
11. Tulin M.P., Landrini M. Breaking waves in the ocean and ships // Proc. 23. Symp. Naval Hydrodynamics. Val de Reuil. France.- 2000.- 4.- P.1-32.
12. Violeau D., Issa R. Numerical modeling of complex turbulent free surface flows with the SPH Lagrangian method: an overview // Int. J. Num. Meth. Fluids.- 2007.- 53 (2).- P.277-304.

Надійшла до редакції 01.12.2007 р.

УДК 529.3

Володимир І. Козлов, д.ф.-м.н.,
Тетяна В. Карнаухова, к.ф.-м.н.,
Микола В. Пересунько

Демпфірування вимушених осесиметричних коливань шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів

В роботі досліджено вплив розміщення актуатора, його розмірів і температури дисипативного розігріву на демпфірування осесиметричних коливань циліндричної оболонки з шарнірним опиранням торців за допомогою п'єзоелектричних включень.

Ключові слова: циліндрична оболонка, осесиметричні коливання, демпфірування, актуатори

E-mail: karn@mmech.kiev.ua

Представлено професором В.В.Мелешком

1. Вступ

В даній статті розглянуто задачу про активне демпфірування вимушених термомеханічних резонансних осесиметричних коливань тонкої в'язкопружної циліндричної оболонки з шарнірним опиранням торців. Досліджено вплив температури дисипативного розігріву, розміщення актуатора і його розмірів на ефективність активного демпфірування вимушених осесиметричних коливань циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів.

2. Постановка задачі

Розглянемо циліндричну оболонку з пасивного (без п'єзоефекту) в'язкопружного матеріалу. На зовнішніх поверхнях оболонки розміщено п'єзоактивні шари, які покривають її неповністю. Характеристики пасивних і п'єзоактивних (актуаторів) шарів не залежать від температури. Непружні властивості п'єзоматеріалу не враховуються. Вважається, що вказані актуатори протилежно поляризовані, мають однакову товщину та однакові властивості, за виключенням того, що п'єзоконстанти активних шарів мають протилежні знаки:

Volodymyr I. Kozlov, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Prof.
Tetyana V. Karnaukhova, C. Sci (Phys.-Math.),
Ass. Prof. Mykola V. Peresun'ko

Damping of the forced axisymmetric vibrations of simply supported viscoelastic cylindrical shell by piezoelectric actuators

The influence of disposition, size actuators and temperature of dissipative heating on damping of the forced axisymmetric vibrations of simply supported viscoelastic cylindrical shell by piezoelectric inclusions is investigated.

Key words: cylindrical shell, axisymmetric vibrations, damping, actuators

$\bar{d}_{31} = -\bar{d}_{31}$. На оболонку діє осесиметричний тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом. Для моделювання механічної поведінки пасивного шару використовується концепція комплексних характеристик [2]. Якщо знехтувати поздовжніми силами інерції, рівняння руху циліндричної оболонки приймають такий вигляд [3]:

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0, \quad Q_1 = \frac{dM_1}{d\alpha}, \quad (1)$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{dQ_1}{dr} = -\rho h \omega^2 w - q(\alpha). \quad (2)$$

Тут використано позначення роботи [3]. На основі механічних гіпотез Кірхгофа-Лява [3], доповнених адекватними їм гіпотезами відносно електричних польових величин [4] для вказаної вище тришарової оболонки одержимо такі визначальні рівняння стану для зусиль і моментів:

$$T_1 = D_A \left(\frac{du}{d\alpha} + \frac{\nu}{R} w \right),$$
$$T_2 = D_A \left(\nu \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{R} w \right),$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_M \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0, \\ M_2 &= -\nu D_M \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + M_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} D_N &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ M_0 &= (h_0 + h_1)\gamma_{31}V_a/2, \\ \gamma_{31} &= d_{31}/[S_{11}(1-\nu)]. \end{aligned}$$

Тут використано позначення [4] і всі величини є комплексними: $w = w' + iw''$, $E = E' + iE''$, ... ; V_a – шукана різниця потенціалів, яку необхідно прикласти до актуатора для компенсації механічного навантаження.

Нехай оболонка може вільно зміщуватись в поздовжньому напрямку. Тоді з (1),(3) матимемо

$$T_1 = 0, \quad \frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{\nu}{R} w, \quad T_2 = \frac{Eh}{R} w. \quad (4)$$

Підставляючи (3),(4) в (1),(2), одержимо рівняння руху відносно комплексного прогину w :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(G \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)G}{R^2 h^2} w - \\ - \frac{6(1-\nu)}{h^3} (\rho h \omega^2 w + q + \frac{d^2 M_0}{d\alpha^2}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $G = G' + iG''$ – комплексний модуль зсуву. При врахуванні гістерезисних втрат в середньому пасивному шарі, матимемо таке рівняння енергії:

$$\frac{d^2 \theta}{d\alpha^2} - \frac{2\delta}{\lambda h} \theta + \hat{D} = 0. \quad (6)$$

Тут θ – температура дисипативного розігріву, δ – коефіцієнт теплообміну, $\hat{D}$ – дисипативна функція, яка визначається формулою

$$\begin{aligned} \hat{D} = \frac{\omega h^2}{12\lambda h(1-\nu)} G'' \left[\left(\frac{d^2 w'}{d\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w''}{d\alpha^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} (w'^2 + w''^2) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Введемо безрозмірну координату $\alpha = ax$ (a – довжина оболонки). Тоді з (5)-(7) одержимо таку систему диференціальних рівнянь відносно

комплексного поперечного зміщення і температури:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(G \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)a^4 G}{R^2 h^2} w - \\ - \frac{6(1-\nu)a^4}{h^3} (\rho h \omega^2 w + q + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 M_0}{dx^2}) = 0, \\ \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \delta_1 \theta + \frac{\omega h^2}{12\lambda h a^2 (1-\nu)} G'' \left[\left(\frac{d^2 w'}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 w''}{dx^2} \right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{R^2 h^2} (w'^2 + w''^2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\delta_1 = 2\delta a^2 / (\lambda h)$.

До цих рівнянь потрібно додати механічні та теплові граничні умови. Для випадку шарнірного опирання торців оболонки

$$w = 0, \quad D_M \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 \quad \text{при } x = 0; 1. \quad (9)$$

Для теплоізольованих торців

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0; 1. \quad (10)$$

Для постійної на торцях температури

$$\theta = 0 \quad \text{при } x = 0; 1. \quad (11)$$

Якщо властивості матеріалів оболонки не залежать від температури, задача розпадається на дві окремі задачі: 1) задачу електромеханіки для оболонки з в'язкопружного матеріалу при дії на неї механічного та електричного навантаження; 2) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією $\hat{D}$.

3. Метод розв'язування. Для шарнірного опирання торців (9) представимо прогин, механічне та електричне навантаження у вигляді рядів Фур'є

$$\begin{aligned} w = \sum_m w_m \sin k_m x, \quad q = \sum_m q_m \sin k_m x, \\ M_0 = \sum_m M_m \sin k_m x, \end{aligned} \quad (12)$$

де $k_m = m\pi$.

Для рівномірного тиску

$$q_m = \frac{4q_0}{k_m}, \quad m = 1, 3, \dots \quad (13)$$

Якщо центр п'єзоелектричного шару розміщено в точці $x = \xi$, а його безрозмірна довжина дорівнює d , то для M_m матимемо формулу

$$M_m = \frac{4M_0}{k_m} \sin k_m \xi \sin k_m \frac{d}{2}, \quad m=1,3,\dots \quad (14)$$

Підставляючи вирази (12) в рівняння руху (8), одержимо розв'язок першої із вказаних вище задач:

$$w_{mn} = p_m / \Delta_m, \quad (15)$$

де

$$p_m = 6(1-\nu)(q_m - k_m^2 M_m) / h^3, \quad (16)$$

а

$$\Delta_m = \Delta'_m + i\Delta''_m,$$

$$\Delta'_m = G' \left[k_m^4 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{h^2 R^2} \right] - \frac{6(1-\nu)\rho\omega^2 a^4}{h^2}, \quad (17)$$

$$\Delta''_m = G'' \left[k_m^4 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{h^2 R^2} \right]$$

Використовуючи вирази (7), (12), знайдемо дисипативну функцію

$$D = \frac{\omega h^3 A_m^2}{24\lambda(1-\nu)} G'' \left[k_m^4 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{R^2 h^2} \right] (1 - \cos 2k_m x). \quad (18)$$

Тут $A_m^2 = w_{mn}^2 + w_{m0}^2$, а w_{mn} і w_{m0} знаходяться з виразів (15)–(17) шляхом розділення їх на дійсну та уявну частини, що дає:

$$A_m^2 = \frac{p_m^2}{\Delta_m'^2 + \Delta_m''^2} \quad (19)$$

Для теплоізовованого контуру оболонки, коли мають місце граничні умови (10), одержимо точний розв'язок другої із вказаних вище задач:

$$\theta = A_1 - A_2 \cos 2k_1 x, \quad (20)$$

де

$$A_1 = BW_0 / \delta_1, \quad A_2 = BW_0 / (\delta_1 + 4k_1^2),$$

$$B = \frac{\omega h^2 G'' A^2}{12(1-\nu)\lambda a^3}, \quad W_0 = \frac{k_m^4}{2} + \frac{6(1-\nu^2)a^4}{h^2 R^2} \quad (21)$$

Для першої моди коливань $m=1$ і теплових граничних умов (11) розв'язок рівняння енергії знайдемо методом Бубнова-Гальоркіна, представляючи його у вигляді:

$$\theta = \theta_0 (1 - \cos 2k_1 x). \quad (22)$$

В результаті матимемо

$$\theta_0 = 3BW_0 / (3\delta_1 + 4k_1^2). \quad (23)$$

Для цих граничних умов і кожної з мод коливань, яка відповідає номеру n , можна

одержати і точний розв'язок рівняння енергії, який має вигляд:

$$\theta = \sum_{m=1,3,\dots} \theta_m \sin k_m x,$$

$$\text{де } \theta_m = -\frac{16}{k_m(k_m^2 - 4k_n^2)(k_m^2 + \delta_1)}.$$

4. Аналіз результатів. Як видно з розв'язку (15), (16), амплітуда резонансних коливань оболонки дорівнюватиме нулеві при умові

$$M_m = q_m / k_m^2. \quad (24)$$

З (24) знаходимо ту різницю потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора, щоб прогин оболонки дорівнював нулю:

$$V_v = \frac{2q_0}{(h_0 + h_1)\gamma_{31}k_m^2} \sin k_m \xi \sin k_m \frac{d}{2}. \quad (25)$$

Використовуючи одержані вище аналітичні розв'язки, дослідимо вплив розміщення центра актуатора, його розмірів і температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфірування коливань оболонки по найбільш енергоємній першій моді. Ця ефективність оцінюється по величині різниці потенціалів (25). При цьому вважається, що той актуатор більш ефективний, до якого потрібно підвести меншу різницю потенціалів при фіксованому тиску. З (25) видно, що для першої моди коливань $m=1$ різниця потенціалів буде

мінімальною при $\xi = \frac{1}{2}$, тобто центр актуатора

повинен співпадати з серединою оболонки. Також легко показати, що максимум знаменника досягається при $d=1$, тобто при повному

покрітті актуатором циліндричної оболонки. Для другої моди, яка відповідає $m=3$, оптимальне розміщення актуатора відповідає

$\xi = \frac{1}{6}$, $\xi = \frac{3}{6}$, $\xi = \frac{5}{6}$. При цьому довжина

оболонки розбивається на три області з центром актуатора в цих точках. Оптимальною довжиною актуатора буде довжина кожної з цих трьох областей. Аналогічно можна вибрати центр розміщення актуатора та його довжину і для інших мод коливань оболонки. Крім того, вказана різниця потенціалів не залежить від механічних властивостей пасивного матеріалу. Тому при розрахунку цієї величини можна обмежитись найбільш простою моделлю поведінки пасивного матеріалу, яка не враховує залежність його властивостей від температури. З

цієї ж формули видно, що залежність властивостей п'єзоелектричного матеріалу може суттєво вплинути на згадану різницю потенціалів. Це впливає з того, що навіть в найпростішому випадку роботи актуатора при різних постійних температурах, вказана різниця потенціалів буде різною.

З одержаних вище виразів для температури дисипативного розігріву можна знайти те критичне значення параметра навантаження, після досягнення якого максимальна температура розігріву дорівнюватиме точці Кюрі. Це критичне значення знайдемо, прирівнявши температуру точки Кюрі θ_K . При цьому $\gamma_{31}(\theta_K) = 0$ і різниця потенціалів стає нескінченною, тобто актуатор перестає виконувати своє функціональне призначення і за його допомогою керувати процесом коливань неможливо.

Для випадку заданої на контурі температури критичне навантаження визначається з формули (22):

$$\frac{6BW_0}{3\delta_1 + 4k_1^2} = \theta_K. \quad (26)$$

З (26) маємо

$$q^2_{cr} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}, \quad (27)$$

де

$$\Omega_1 = a^2 \lambda h^4 k_1^2 (\Delta_1^2 + \Delta_1'^2) (3\delta_1 + 4k_1^2) \theta_K, \quad (28)$$

$$\Omega_2 = 144(1-\nu)\omega G'' \left[k_1^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{h^2 R^2} \right].$$

Якщо амплітуда механічного навантаження перевищує критичне значення ($q \geq q_{cr}$), впливати на процес резонансних коливань за допомогою актуаторів неможливо.

Аналогічні вирази для критичного механічного навантаження можна одержати і при використанні точних аналітичних розв'язків для постійної на контурі пластини. Для цього потрібно максимальну температуру дисипативного розігріву прирівняти точці Кюрі і з одержаного виразу знайти критичне механічне навантаження. Так, наприклад, для теплоізовованого контуру максимальна температура знаходиться з (20), (21) і досягається в точці $x = 1/2$. Прирівнюючи її θ_K , знайдемо критичне значення параметра навантаження. Воно розраховується за формулою (27), в якій

$$\Omega_1 = a^2 \lambda h^4 k_1^2 (\Delta_1^2 + \Delta_1'^2) \theta_K,$$

$$\Omega_2 = 24(1-\nu)\omega G'' \left[k_1^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{h^2 R^2} \right] \times \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_1 + 4k_1^2} \right). \quad (29)$$

З виразів (28), (29) видно, що при умові $\delta_1 \gg 4k_1^2$ критичні значення параметра навантаження для обох випадків граничних умов співпадають. При цій умові рівняння енергії (8) значно спрощується і приймає вигляд:

$$\delta_1 \theta = \hat{D}, \quad (30)$$

де дисипативна функція $\hat{D}$ розраховується по формулі (18). При цьому граничні умови на торцях не впливають на температуру, а її величина повністю визначається теплообміном на поверхнях оболонки. Цим і пояснюється співпадіння критичних значень механічного навантаження для вказаних типів теплових граничних умов.

Список використаних джерел

1. Gubbert U. and Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. – Kluwer Academic Pub. Dordrecht/Boston/London. – 2001. – 384p.
2. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖЖТТУ, 2005. – 428с.
3. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища школа, 1989. – 208с.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989, 5. – 279с.

Надійшла до редколегії 11.02.2008р.

УДК 539.3.534.1

Віктор О. Моїсєєнко, к.ф.-м.н., доцент, докторант

Дослідження кінематики хвильових полів у анізотропних хвилеводах

У роботі в тривимірній постановці досліджується вплив анізотропії пружних властивостей матеріалу на кінематику хвильових полів у просторових хвилеводах. Розглядаються різні форми зображення загального розв'язку повної системи рівнянь руху довільного пружного однорідного просторового хвилевода з анізотропного матеріалу гексагональної, кубічної та орторомбічної структури через хвильові потенціали, здійснюється порівняння з відомими розв'язками для ізотропного та трансверсально-ізотропного випадків пружної симетрії.

Ключові слова: хвильові поля, анізотропні матеріали, просторові хвилеводи, кінематична структура хвильових полів.

Представлено професором В.В.Мелешко

E-mail: vamvamv@ukr.net

1 Вступ

Однією з важливих теоретичних та практичних задач акустики хвилеводів є дослідження кінематики хвильових полів шляхом аналізу зображень компонент вектора зміщень через хвильові потенціали при побудові загального розв'язку повної системи основних рівнянь руху. У цій роботі запропонований новий підхід до цієї задачі для анізотропних матеріалів гексагональної, кубічної та орторомбічної структури на основі зображень, одержаних у роботі [3]. Основу такого підходу складає зведення початкової задачі до розв'язку незалежних визначальних рівнянь шляхом представлення компонент зміщень через незалежні хвильові потенціали. Такий підхід дозволяє робити загальні висновки про кінематику хвильових полів за допомогою аналізу структури визначальних рівнянь для хвильових потенціалів, та поглиблювати ці висновки аналізом структури

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) = & L_1^{(4)} \Psi_1(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{12} + G_{12}) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_2(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{13} + G_{13}) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_3(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

V.A. Moiseenko, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor

Kinematics of wave fields in anisotropic waveguides

This paper deals with the influence of materials elastic properties anisotropy on kinematics of wave fields in spatial waveguide is analyzed in three-dimensional formulation. Various ways of general solution of equations of motion of an arbitrary elastic homogeneous spatial waveguide object of an anisotropic material with hexagonal, cubic and orthorhombic structure by means of the waveguide potentials are considered. The comparison with existing solutions for isotropic and transversal isotropic cases of elastic symmetry is given.

Keywords: waving fields, anisotropic materials, spatial waveguides, kinematics structure of wave fields.

кінематичної матриці у зображеннях зміщень через хвильові потенціали.

2 Постановка задачі

У роботі [3] побудована тривимірна математична модель просторового хвилевода з анізотропного орторомбічного матеріалу. При цьому, як наслідок, одержані аналогічні тривимірні моделі просторових хвилеводів з анізотропних матеріалів кубічної та гексагональної структури.

Згідно з цією моделлю в довільній точці з заданим радіусом-вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і в довільний момент часу t кінематична структура хвильових полів у просторових хвилеводах для кожного випадку пружної симетрії визначається конкретним видом та структурою зображень компонент вектора зміщень $U_1(\vec{x}, t)$, $U_2(\vec{x}, t)$, $U_3(\vec{x}, t)$ через хвильові потенціали $\Psi_1(\vec{x}, t)$, $\Psi_2(\vec{x}, t)$, $\Psi_3(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} U_2(\vec{x}, t) = & -(C_{12} + G_{12}) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_1(\vec{x}, t) + \\ & + L_2^{(4)} \Psi_2(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23}) \partial_2 \partial_3 L_{23}^{(2)} \Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) = & -(C_{13} + G_{13}) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_1(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{23} + G_{23}) \partial_2 \partial_3 L_{23}^{(2)} \Psi_2(\vec{x}, t) + L_3^{(4)} \Psi_3(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

і конкретним виглядом та структурою самих хвильових потенціалів і визначальних рівнянь для них. Невідомий хвильовий векторний потенціал

$$\Psi(\vec{x}, t) = (\Psi_1(\vec{x}, t), \Psi_2(\vec{x}, t), \Psi_3(\vec{x}, t))$$

визначається з векторного хвильового рівняння шостого порядку

$$L\Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (2)$$

з визначеною раніше [3] структурою диференціального оператора L .

3 Ізотропний хвилевод

У роботі [3], як наслідок, з зображень (1), (2) одержано відомий класичний розв'язок основної системи рівнянь руху у зміщеннях для ізотропного випадку пружної симетрії у формі Яковаке:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= (L_p^{(2)} - (\lambda + G)\partial_1^2)L_s^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &- (\lambda + G)\partial_1\partial_2L_s^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &- (\lambda + G)\partial_1\partial_3L_s^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)\partial_1\partial_2L_s^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) + \\ &+ (L_p^{(2)} - (\lambda + G)\partial_2^2)L_s^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &- (\lambda + G)\partial_2\partial_3L_s^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)\partial_1\partial_3L_s^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &- (\lambda + G)\partial_2\partial_3L_s^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) + \\ &+ (L_p^{(2)} - (\lambda + G)\partial_3^2)L_s^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ L\Psi(\vec{x}, t) &= L_p^{(2)}L_s^{(2)}L_s^{(2)}\Psi(\vec{x}, t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

згідно з яким кінематика хвильового поля після внесення в хвильові потенціали спільного операторного множника $L_s^{(2)}$ має дві незалежні хвильові складові у хвильовому векторному потенціалі і, як наслідок, у структурі хвильового поля тобто:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &= \Psi^{(p)}(\vec{x}, t) + \Psi^{(s)}(\vec{x}, t), \\ U(\vec{x}, t) &= U^{(p)}(\vec{x}, t) + U^{(s)}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Перша складова в (4) є чисто подовжньою і визначається з хвильового рівняння

$$\begin{aligned} \left((\lambda + 2G)\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 \right) \Psi^{(p)}(\vec{x}, t) = \\ = L_p^{(2)}\Psi^{(p)}(\vec{x}, t) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а друга є чисто зсувною, яка знаходиться з хвильового рівняння

$$\begin{aligned} \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 \right) \Psi^{(s)}(\vec{x}, t) = \\ = L_s^{(2)}\Psi^{(s)}(\vec{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Після розділення складових кінематична структура хвильового поля в ізотропному просторовому хвилеводному об'єкті для подовжньої складової набуває вигляду:

$$\begin{aligned} U_1^{(p)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(\partial_1^2\Psi_1^{(p)}(\vec{x}, t) + \\ &+ \partial_1\partial_2\Psi_2^{(p)}(\vec{x}, t) + \partial_1\partial_3\Psi_3^{(p)}(\vec{x}, t)), \\ U_2^{(p)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(\partial_1\partial_2\Psi_1^{(p)}(\vec{x}, t) + \\ &+ \partial_2^2\Psi_2^{(p)}(\vec{x}, t) + \partial_2\partial_3\Psi_3^{(p)}(\vec{x}, t)), \\ U_3^{(p)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(\partial_1\partial_3\Psi_1^{(p)}(\vec{x}, t) + \\ &+ \partial_2\partial_3\Psi_2^{(p)}(\vec{x}, t) + \partial_3^2\Psi_3^{(p)}(\vec{x}, t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Для зсувної складової з урахуванням рівності $L_p^{(2)}\Psi_m^{(s)}(\vec{x}, t) = (\lambda + G)\nabla^2\Psi_m^{(s)}(\vec{x}, t)$ кінематична структура буде такою:

$$\begin{aligned} U_1^{(s)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(-(\partial_2^2 + \partial_3^2)\Psi_1^{(s)}(\vec{x}, t) + \\ &+ \partial_1\partial_2\Psi_2^{(s)}(\vec{x}, t) + \partial_1\partial_3\Psi_3^{(s)}(\vec{x}, t)), \\ U_2^{(s)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(\partial_1\partial_2\Psi_1^{(s)}(\vec{x}, t) - \\ &- (\partial_1^2 + \partial_3^2)\Psi_2^{(s)}(\vec{x}, t) + \partial_2\partial_3\Psi_3^{(s)}(\vec{x}, t)), \\ U_3^{(s)}(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)(\partial_1\partial_3\Psi_1^{(s)}(\vec{x}, t) + \\ &+ \partial_2\partial_3\Psi_2^{(s)}(\vec{x}, t) - (\partial_1^2 + \partial_2^2)\Psi_3^{(s)}(\vec{x}, t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо в (7) і (8) внести в хвильові потенціали спільний множник $-(\lambda + G)$ і згорнути їх за допомогою відомих сполучень із теорії поля, то остаточно для вектора зміщень отримаємо що

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{x}, t) &= \vec{U}^{(p)}(\vec{x}, t) + \vec{U}^{(s)}(\vec{x}, t) = \\ &= \text{grad}(\text{div}(\vec{\Psi}^{(p)}(\vec{x}, t))) + \text{rot}(\text{rot}(\vec{\Psi}^{(s)}(\vec{x}, t))). \end{aligned} \quad (9)$$

При цьому $\text{rot}(\vec{U}^{(p)}(\vec{x}, t)) = 0$ і $\text{div}(\vec{U}^{(s)}(\vec{x}, t)) = 0$ тобто перша складова дійсно чисто подовжня (безвихрова), а друга - чисто зсувна (вихрова).

Зображення (9) за допомогою замін

$$\Phi_0^{(p)}(\vec{x}, t) = \text{div}(\vec{\Psi}^{(p)}(\vec{x}, t))$$

і

$$\Phi^{(s)}(\vec{x}, t) = \text{rot}(\vec{\Psi}^{(s)}(\vec{x}, t))$$

перетворюється в інше відоме класичне зображення загального розв'язку у формі Ламе через скалярний та векторний хвильові потенціали:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, t) &= U^{(P)}(\vec{x}, t) + U^{(S)}(\vec{x}, t) = \\ &= \text{grad}(\Phi_0^{(P)}(\vec{x}, t)) + \text{rot}(\Phi^{(S)}(\vec{x}, t)), \\ \text{div}(\Phi^{(S)}(\vec{x}, t)) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

яке ефективно використовується при вивченні ізотропних просторових хвильоводних об'єктів [1].

Скалярний потенціал $\Phi_0^{(P)}(\vec{x}, t)$ і векторний потенціал $\Phi^{(S)}(\vec{x}, t)$ задовольняють відповідно скалярному та векторному хвильовим рівнянням вигляду $L_0^{(2)}\Phi_0^{(P)}(\vec{x}, t) = 0$ і $L_0^{(2)}\Phi^{(S)}(\vec{x}, t) = 0$.

Якщо у зображеннях (7) і (8) покласти $\Psi_1^{(P)}(\vec{x}, t) = \Psi_2^{(P)}(\vec{x}, t) = \Psi_3^{(S)}(\vec{x}, t) = 0$, то приходимо до зображення

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, t) &= U^{(P)}(\vec{x}, t) + U^{(S)}(\vec{x}, t) = \\ &= \text{grad}(\text{div}(\vec{e}_3 \Psi^{(P)}(\vec{x}, t))) + \\ &+ \text{rot}(\vec{e}_3 \text{rot}(\Psi^{(S)}(\vec{x}, t))), \end{aligned} \quad (11)$$

яке після заміни

$$\chi_{12}^{(S)}(\vec{x}, t) = \partial_1 \Psi_2^{(S)}(\vec{x}, t) - \partial_2 \Psi_1^{(S)}(\vec{x}, t)$$

зводиться до ще одного відомого зображення розв'язку основної системи рівнянь руху в формі Лур'є-Воровича через дві скалярні хвильові функції. Ця форма зображення становить основу побудови однорідних розв'язків у вигляді суперпозиції потенціального та вихрового [2].

Очевидно, що за аналогією до зображення (11) можна отримати ще два:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, t) &= U^{(P)}(\vec{x}, t) + U^{(2)}(\vec{x}, t) = \\ &= \text{grad}(\text{div}(\vec{e}_1 \Psi^{(P)}(\vec{x}, t))) + \\ &+ \text{rot}(\vec{e}_1 \text{rot}(\Psi^{(2)}(\vec{x}, t))), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, t) &= U^{(P)}(\vec{x}, t) + U^{(3)}(\vec{x}, t) = \\ &= \text{grad}(\text{div}(\vec{e}_2 \Psi^{(P)}(\vec{x}, t))) + \\ &+ \text{rot}(\vec{e}_2 \text{rot}(\Psi^{(3)}(\vec{x}, t))), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - орти координатних осей.

Таким чином, кінематична структура хвильового поля в ізотропному просторовому хвильоводному об'єкті незалежно від форми зображення є суперпозицією двох незалежних складових чисто подовжньої(безвихрової,

потенціальної) та чисто зсувної(вихрової, соленоїдальної).

4 Просторовий хвильовод гексагональної структури.

Для даного випадку пружної симетрії [3] характерною є наявність біхвильового та хвильового операторних множників у диференціальному операторі L , тобто основні кінематичні співвідношення (1) і (2) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= L_1^{(4)}\Psi_1(\vec{x}, t) - (C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2 L_{12}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &- (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3 L_{13}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2 L_{12}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) + L_2^{(4)}\Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &- (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3 L_{13}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3 L_{13}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &- (C_{12} + G_{12})\partial_2\partial_3 L_{13}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ L_{PS}^{(4)}L_{S2}^{(2)}\Psi(\vec{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Це означає, що хвильовий векторний потенціал розпадається на суму двох незалежних складових $\Psi(\vec{x}, t) = \Psi^{(PS)}(\vec{x}, t) + \Psi^{(S2)}(\vec{x}, t)$, але, на відміну від ізотропного хвильоводного об'єкту, перша складова є біхвильовою, тобто пов'язаною комбінацією квазіподовжньої та квазіпоперечної(квазізсувної) хвильових складових. Отже біхвильовий векторний потенціал $\Psi^{(PS)}(\vec{x}, t)$ визначає змішну подовжньо-зсувну біхвильову складову, а хвильовий векторний потенціал $\Psi^{(S2)}(\vec{x}, t)$ - чисто зсувну хвильову складову, які одержуються з таких визначальних диференціальних рівнянь четвертого і другого порядків відповідно:

$$\begin{aligned} L_{PS}^{(4)}\Psi^{(PS)}(\vec{x}, t) &= \{C_{11}G_{11}D^4 + \\ &+ (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})D^2\partial_1^2 + C_{33}G_{13}\partial_3^4 - \\ &- [(C_{11} + G_{13})D^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2]\frac{\rho}{C_0}\partial_1^2 + \\ &+ \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_1^4\}\Psi^{(PS)}(\vec{x}, t) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L_{S2}^{(2)}\Psi^{(S2)}(\vec{x}, t) &= (G_{12}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \\ &- \frac{\rho}{C_0}\partial_1^2)\Psi^{(S2)}(\vec{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для визначення кінематичної структури біхвильової складової в рівнянні (15)

перетворимо оператор $L_{PS}^{(4)}$ з виділенням характерних додатків:

$$\begin{aligned} L_{PS}^{(4)} = & (C_{11}D^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2)(G_{13}D^2 + \\ & + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_1^2) + [C_{11}(C_{33} - G_{12}) - \\ & - G_{13}(C_{33} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2]D^2\partial_3^2 + \\ & + C_{33}(G_{13} - G_{12})\partial_3^4 + (G_{12} - G_{13})\partial_3^2\rho C_0^{-1}\partial_1^2 = \quad (17) \\ = & L_{P1}^{(2)}L_{S1}^{(2)} + [C_{11}(C_{33} - G_{12}) - G_{13}(C_{33} - G_{13}) - \\ & - (C_{13} + G_{13})^2]D^2\partial_3^2 + (G_{13} - G_{12})\partial_3^2(C_{33}\partial_3^2 - \\ & - \rho C_0^{-1}\partial_1^2). \end{aligned}$$

Особливістю зображення (17) є те, що при переході від матеріалу гексагональної структури до ізотропного матеріалу перший доданок переходить у добуток чисто подовжньої та чисто зсувної складових, а другий і третій доданки тотожно дорівнюють нулю. Отже кінематика біхвильової складової для матеріалу гексагональної структури є складним пов'язаним сполученням квазіповздовжньої та квазізсувної хвильових складових.

Кінематична матриця в зображенні вектора зміщень (1) для матеріалу гексагональної структури також розпадається на дві відповідні складові: біхвильову та хвильову. Для визначення структури цих матриць відокремимо ці складові у кожному елементі кінематичної матриці:

$$\begin{aligned} L_1^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1^2, \\ L_2^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1^2, \\ L_3^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{33} - G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3^2 - \\ & - (G_{13} - G_{12})D^2L_{S2}^{(2)} - \\ & - (C_{11} - G_{13})(L_2^{(2)} - L_{S2}^{(2)})D^2, \\ L_{12}^{(2)} &= L_2^{(2)}, \quad L_{13}^{(2)} = L_{S2}^{(2)}, \\ L_2^{(2)} &= L_{S2}^{(2)} + (G_{13} - G_{12})D^2 + \\ & + (C_{33} - G_{13} - \frac{(C_{13} + G_{13})^2}{(C_{11} - G_{12})})\partial_3^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Після відокремлення для біхвильової складової кінематична структура буде трьохкомпонентною:

$$\begin{aligned} U_1^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \\ & + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \\ & + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) - (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U_3^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \\ & + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) + (L_{P1}^{(2)} - (C_{33} - G_{13})\partial_3^2)L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Кінематична структура для хвильової складової після відокремлення виходить двокомпонентною:

$$\begin{aligned} U_1^{(S2)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2(\partial_1\Psi_2^{(S2)}(\vec{x}, t) - \\ & - \partial_2\Psi_1^{(S2)}(\vec{x}, t)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_2^{(S2)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1(\partial_2\Psi_1^{(S2)}(\vec{x}, t) - \\ & - \partial_1\Psi_2^{(S2)}(\vec{x}, t)). \end{aligned}$$

і при цьому хвильова складова буде чисто зсувною, оскільки $\partial_1U_1^{(S2)} + \partial_2U_2^{(S2)} = 0$.

Якщо в (19) покласти $\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) = \partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)$ і $\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) = L_{(S2)}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t)$, а в (20) покласти $\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t) = (\partial_1\Psi_2^{(S)}(\vec{x}, t) - \partial_2\Psi_1^{(S)}(\vec{x}, t))L_{S2}^{(2)}$, то для кінематичної структури хвильового поля гексагонального просторового хвилеводного об'єкту остаточно отримаємо загальне зображення вектора зміщень через три скалярні хвильові потенціали: два біхвильових та один хвильовий:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{11} - G_{12})\partial_2\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) - \\ & - (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) + \\ & + (C_{11} - G_{12})\partial_1\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) + \\ & + (L_{P1}^{(2)} - (C_{33} - G_{13})\partial_3^2)\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (21)$$

З зображень (21), як наслідок при переході до ізотропного матеріалу, одержуємо зображення (9), а при $\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) = 0$ - кінематичну структуру однорідних розв'язків для матеріалу гексагональної структури [4].

5 Просторовий хвелевод кубічної структури.

Цей випадок пружної симетрії характеризується усього трьома незалежними пружними константами, але на відзнаку від хвелеводних об'єктів ізотропної та гексагональної структури у визначальному векторному хвильовому рівнянні (2) диференціальний оператор не розпадається на операторні множники [3], бо у загальному випадку після необхідних перетворень з виділенням характерних додатків він має такий вигляд

$$L = L_{KR}^{(2)} L_{KN}^{(2)} L_{KN}^{(2)} + (C + \lambda) [(C - (\lambda + 2G)) \{ (D^2 \partial_3^2 + \partial_1^2 \partial_2^2) L_{KN}^{(2)} + [(C - G) - 2 \frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda}] \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^2 \},$$

(22)

де

$$L_{KR}^{(2)} = C \nabla^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_1^2, \quad L_{KN}^{(2)} = G \nabla^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_1^2.$$

Особливістю зображення (22) є те, що при переході від матеріалу кубічної структури до ізотропного матеріалу маємо $C = \lambda + 2G$ і перший доданок переходить у добуток чисто подовжньої та двох чисто зсувних складових, а другий доданок тотожно дорівнює нулю. Це означає, що у хвелеводних об'єктах із матеріалу кубічної структури на відзнаку від попередніх випадків кінематична структура хвелевого поля у загальному випадку є складним пов'язаним сполученням однієї квазіповдовжньої та двох квазіпоперечних хвильових складових. Заслуговує уваги окремий випадок коли $C \neq \lambda + 2G$, а $(C - G) - 2 \frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda} = 0$. Таке не є можливим, бо тоді потрібно щоб $C = -(2\lambda + G)$ що суперечить фізичній суті пружної константи.

Вирази для диференціальних операторів у зображенні вектора зміщень (1) для цього випадку пружної симетрії після відокремлення характерних додатків набувають вигляду:

$$\begin{aligned} L_1^{(4)} &= (L_{KR}^{(2)} - (C - G) \partial_1^2) L_{KN}^{(2)} + \\ &+ (C + \lambda) [C - (\lambda + 2G)] \partial_2^2 \partial_3^2, \\ L_2^{(4)} &= (L_{KR}^{(2)} - (C - G) \partial_2^2) L_{KN}^{(2)} + \\ &+ (C + \lambda) [C - (\lambda + 2G)] \partial_1^2 \partial_3^2, \\ L_3^{(4)} &= (L_{KR}^{(2)} - (C - G) \partial_3^2) L_{KN}^{(2)} + \\ &+ (C + \lambda) [C - (\lambda + 2G)] \partial_1^2 \partial_2^2. \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned} L_{12}^{(2)} &= L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G) [(C - (\lambda + 2G))] \partial_3^2, \\ L_{13}^{(2)} &= L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G) [(C - (\lambda + 2G))] \partial_2^2, \\ L_{23}^{(2)} &= L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G) [(C - (\lambda + 2G))] \partial_1^2. \end{aligned}$$

Із виразів (23) виходить що кінематична матриця у зображенні вектора зміщень (1) для матеріалу кубічної структури також не розпадається на незалежні складові і у даному випадку остаточно зображення (1) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= L_1^{(4)} \Psi_1(x, t) - (\lambda + G) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_2(x, t) - \\ &- (\lambda + G) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_3(x, t), \\ U_2(x, t) &= -(\lambda + G) \partial_1 \partial_2 L_{12}^{(2)} \Psi_1(x, t) + \\ &+ L_2^{(4)} \Psi_2(x, t) - (\lambda + G) \partial_2 \partial_3 L_{23}^{(2)} \Psi_3(x, t), \\ U_3(x, t) &= -(\lambda + G) \partial_1 \partial_3 L_{13}^{(2)} \Psi_1(x, t) - \\ &- (\lambda + G) \partial_2 \partial_3 L_{23}^{(2)} \Psi_2(x, t) + L_3^{(4)} \Psi_3(x, t). \end{aligned}$$

(24)

Структура диференціальних операторів (23) має характерну особливість явного переходу до ізотропного матеріалу, бо коли $C = \lambda + 2G$ другий доданок у зображенні кожного з цих операторів тотожно дорівнює нулю а перший доданок після підстановки у зображення (24) співпадає з зображеннями (3).

6 Висновки

Співвідношення (1), (2) визначають кінематику хвильового поля в довільному просторовому хвелеводі з матеріалу орторомбічної і кубічної структури через один векторний хвильовий потенціал у вигляді суперпозиції трьох незалежних хвильових полів як трьохкомпонентну і трьохскладову, оскільки основне визначальне векторне хвильове рівняння (2) для цих випадків пружної симетрії не допускає поділу оператора L на операторні множники. Для цих випадків пружної симетрії структура хвильового поля визначається складним взаємопов'язаним поєднанням у кожній компоненті хвильового векторного потенціалу однієї квазіповдовжньої та двох квазіпоперечних хвильових складових, але по структурі для кожного з цих випадків пружної симетрії вони відрізняються. Для просторового хвелеводного об'єкту із матеріалу гексагональної структури в кінематичній структурі хвильового поля виділяються дві незалежні векторні хвильові складові: одна біхвильова, інша - хвильова. При цьому число незалежних

скалярних хвильових потенціалів може бути скорочено до трьох, як і у разі матеріалів орторомбічної та кубічної структури, але структура самих хвильових потенціалів для цього випадку пружної симетрії буде іншою. Для ізотропного матеріалу число незалежних скалярних хвильових потенціалів скорочується до мінімуму і стає рівним двом, оскільки дві квазіпоперечних хвильових складових співпадають і переходять у одну чисто зсувну. Однак для отримання повного уявлення про кінематику хвильових полів треба ще визначитися зі структурою самих хвильових потенціалів. Цей аспект є предметом подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.

2. Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шалдырван В.А. Вынужденные колебания многосвязных транстропных толстых пластин // Доклады АН УССР. Сер.: Физико-математические и технические науки. – 1976. – № 12. – С.1088-1092.
3. Моїсєєнко В.О. Хвильові потенціали для просторових хвилеводних об'єктів із анізотропних матеріалів // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 3. – С.94-98.
4. Мысовский Ю.В., Сторожев В.И., Шалдырван В.А. Однородные решения пространственных задач о вынужденных колебаниях транстропных пластин // Теоретическая и прикладная механика. – 1977. – Вып.8. – С.66-73.

Надійшла до редколегії 30.09.2007

УДК 531.36:534.1:62-755

Геннадій Б. Філімоніхін*, д-р техн. наук,
професор,
Володимир В. Пирогов**, асистент,
Ірина І. Філімоніхіна***, асистент

Рівняння руху обертового тіла з маятниковими автобалансирами

Виведені рівняння руху ізольованої системи, що здійснює просторовий рух і складається з абсолютно твердого обертового несучого тіла, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість та маятників, які можуть обертатися навколо поздовжньої осі несучого тіла.

Ключові слова: ізольована система, кут нутації, демпфер, автобалансир, маятник.

H.B. Filimonikhin, doctor engineering science,
professor,

V.V. Pirogov, assistant professor,

I.I. Filimonikhina, assistant professor

Equations of motion of the rotated body with pendulum autobalancers

Is obtained the equations of motion of the isolated system which makes space motion and consists of rotated absolutely rigid body, material points that create its misbalance and pendulums which can revolve around of the longitudinal axis of body.

Keywords: isolated system, corner of notation, damper, autobalanser, pendulum.

*E-mail: fgb@online.ua, **E-mail: pirogovvv@rambler.ru, ***E-mail: fii@online.ua.

Представлено д.ф.-м.н., проф. Горошком О.О.

Вступ

Положення у просторі переважної більшості супутників зв'язку і наносупутників стабілізується обертанням [1-4, 7, 12-14]. Через неточне надання початкового обертання супутнику і через його незрівноваженість виникають нутаційні коливання поздовжньої осі супутника. Це, зокрема, призводить до пульсації сигналу зв'язку, чим значно погіршується його якість. Для зменшення кута нутації використовуються демпфери. В роботах [1, 2, 5, 14], з використанням енергетичного підходу було встановлено, що у разі сплюсненого обертового тіла демпфери зменшують кут нутації, а у разі витягнутого – збільшують. Недоліком демпферів є те, що вони не усувають кут нутації від незрівноваженості обертового тіла. В роботі [8], із використанням енергетичного підходу, досліджувалася можливість повного усунення кута нутації незрівноваженого обертового тіла (надалі – просто тіла) за рахунок його динамічного зрівноваження двома двохмаятниковими автобалансирами (АБ). При цьому виділялися основні (в яких кут нутації усунутий) і побічні (в яких кут нутації не усунутий) рухи системи, і оцінювалася їх стійкість. В результаті було встановлено, що сплюснуті тіла зрівноважити маятниками динамічно неможливо, а випадок витягнутого тіла потребує додаткових досліджень. В роботах [9, 10], із використанням,

відповідно, емпіричного [11] і енергетичного підходів було встановлено, що:

- у разі сплюсненого тіла АБ будь-якого типу завжди працюватимуть демпферами кута нутації, але тільки у випадку статичної незрівноваженості, коли площина зрівноваження АБ знаходиться поблизу центра мас тіла, один АБ працюватиме і як АБ, і як демпфер, чим буде повністю усувати кут нутації;
- у разі витягнутого статично або динамічно незрівноваженого тіла АБ можуть зменшувати кут нутації від незрівноваженості тіла за рахунок приходу тіл АБ в окіл положення, в якому вони зрівноважують тіло, але чи зможуть АБ повністю усунути кут нутації – не з'ясовано.

У даній роботі виводяться диференціальні рівняння руху ізольованої системи, складеної із незрівноваженого обертового несучого тіла і маятників, насаджених на його поздовжню вісь. Одержання цих рівнянь потрібно для подальшого дослідження стійкості основного руху системи і для оптимального вибору її параметрів, наприклад, методами застосованими для подібних задач у роботах [3, 4, 7, 12, 13].

§1. Модель системи

Нехай тіло має масу M . Його головні осьові моменти інерції відносно головних центральних осей X, Y, Z , які виходять з центра мас тіла –

точки O (рис. 1, а), відповідно рівні A, B, C . Незрівноваженість тіла відносно осі Z створюється k матеріальними точками M_i , розташованими в площинах $X_i D_i Y_i$, паралельних площині XOY (рис. 1, б). Положення цих площин задають координати d_i , які відраховуються по осі Z . Матеріальні точки мають масу μ_i , і їх положення задається ексцентриситетом e_i , та кутом γ_i , $i = \overline{1, k}$.

На вісь Z насаджено n математичних маятників довжини l_j і маси m_j . Будемо вважати, що маятники не заважають руху один одного. Маятник j насаджений на вісь Z на відстані h_j від точки O . Положення маятника визначає кут повороту φ_j , який відраховується від осі X_j , паралельної осі X , причому вісь X_j виходить із точки O_j , навколо якої обертається

маятник (рис. 1, б). При русі маятника відносно тіла на нього діє момент сил в'язкого опору $-H_j \dot{\varphi}_j$, де H_j – коефіцієнт сил в'язкого опору, $\dot{\varphi}_j$ – відносна кутова швидкість обертання маятника.

Так як система ізольована, то центр мас системи – точка G рухається рівномірно, прямолінійно. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що точка G нерухома. За законом збереження моменту кількості руху системи $K_G = \text{const}$.

Рух системи будемо розглядати наступним чином [9, 10]. Введемо у розглядання нерухомі осі $G\xi\eta\zeta$, причому вісь ζ направимо вздовж вектора K_G (на схемі осі $G\xi\eta\zeta$ – не показані). Рух тіла – осей $OXYZ$ відносно нерухомих осей $G\xi\eta\zeta$ будемо уявляти наступним чином (рис. 2).

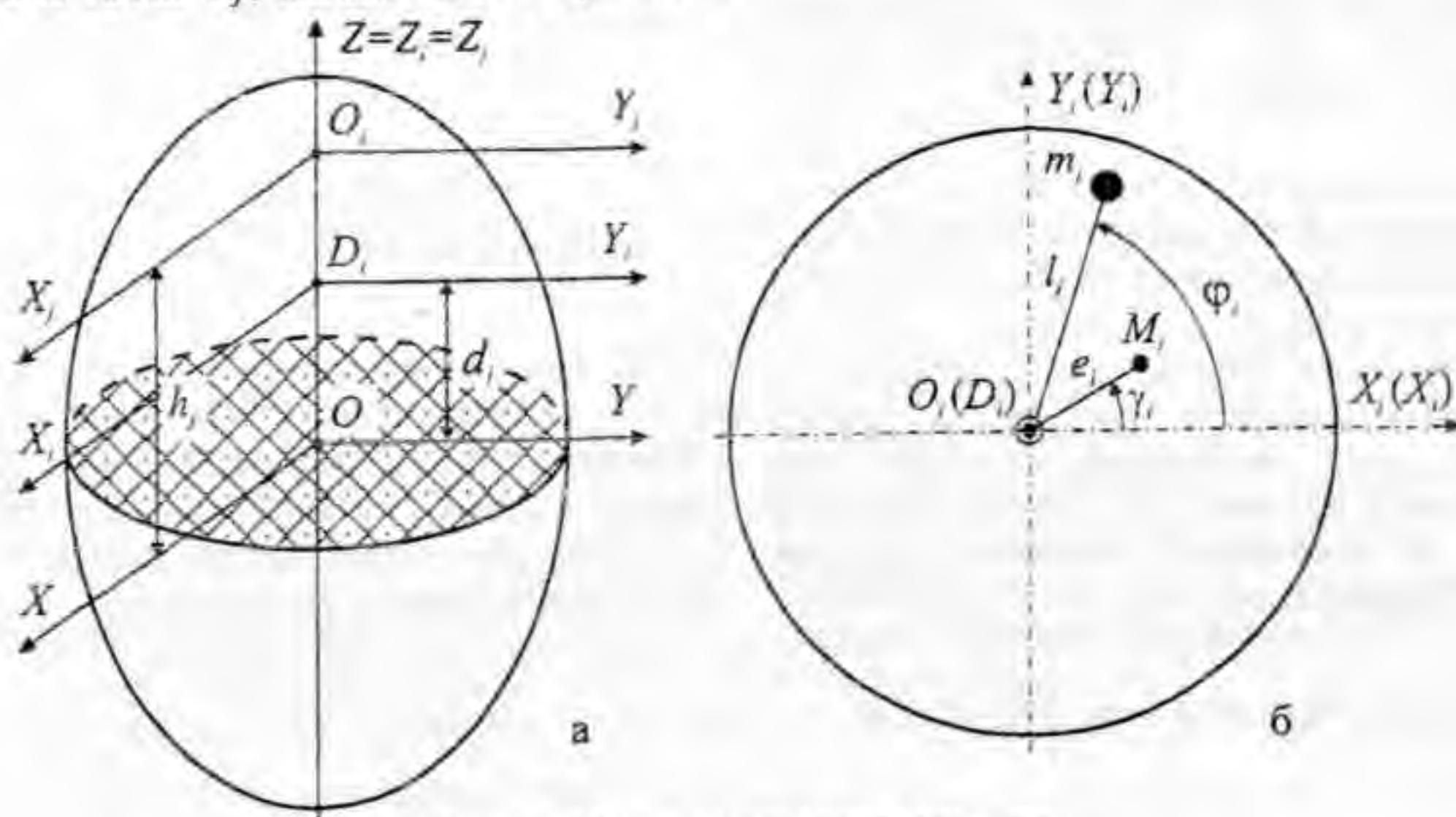


Рис. 1. Модель ізольованої системи

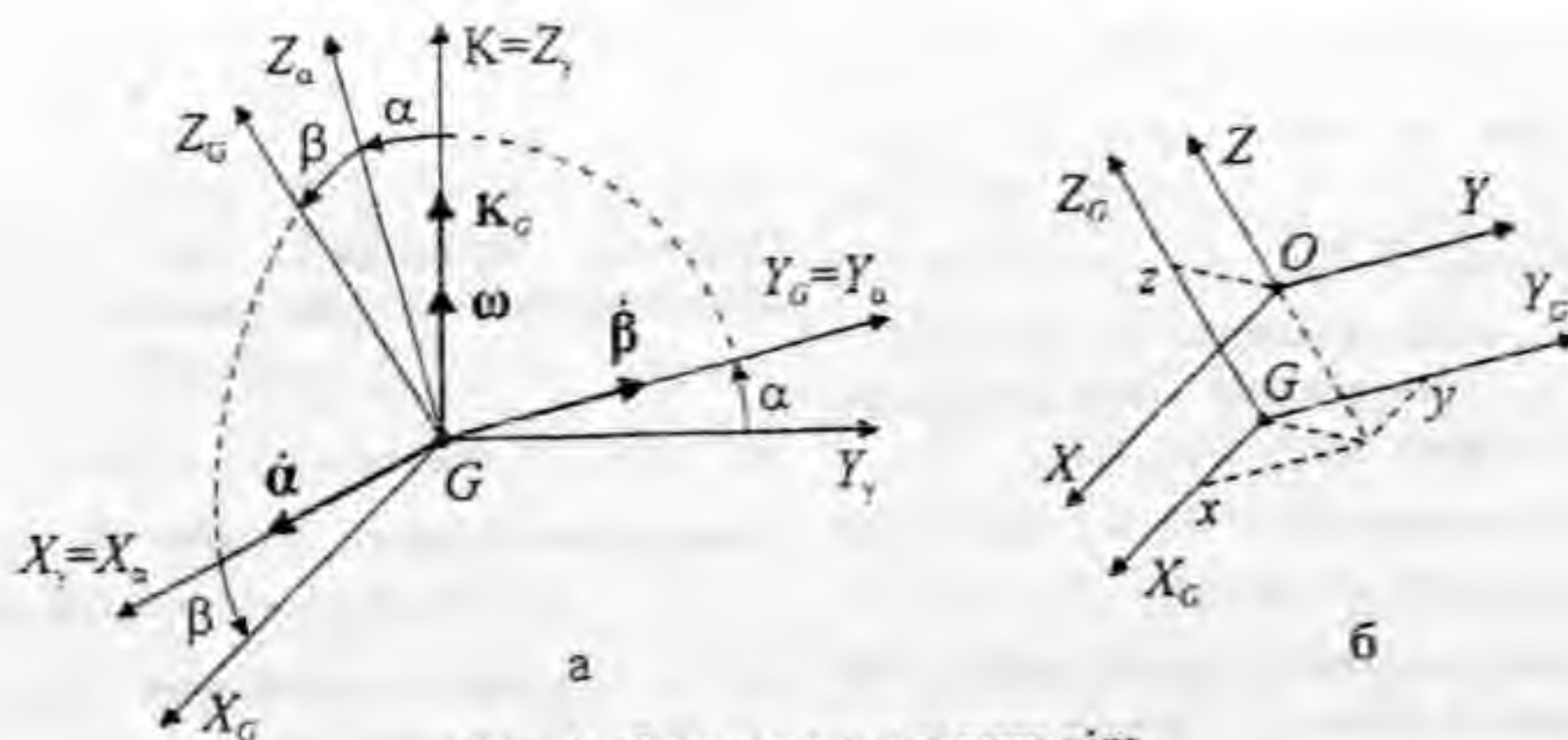


Рис. 2. Схема руху несучого тіла

При першому повороті осей $G\xi\eta\zeta$ навколо осі ζ на кут γ , що відповідає першому куту повороту Ейлера-Крилова, осі $G\xi\eta\zeta$ переходять в осі $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$, $Z_\gamma = \zeta$. Зауважимо, що кут γ – циклічна координата. Після другого повороту на кут α навколо осі X_γ осі $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$ переходять у осі $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, $X_\alpha = X_\gamma$. Після третього повороту на кут β навколо осі Y_α осі $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ переходять у осі $GX_G Y_G Z_G$, $Y_G = Y_\alpha$, які визначають кінцеву кутову орієнтацію АТТ, бо паралельні осям $OXYZ$. Осі $GX_G Y_G Z_G$ переходять в осі $OXYZ$ після поступальних переміщень на x, y, z вздовж відповідних координатних осей. Координати x, y, z задають положення точки O відносно осей $GX_G Y_G Z_G$, а координати $-x, -y, -z$ – положення центра мас системи відносно осей $OXYZ$.

Параметри $\varphi_j, j = \overline{1, n}, \gamma, \alpha, \beta, x, y, z$ повністю визначають рух системи. Для їх визначення треба скласти $n+6$ алгебро-диференціальних рівнянь руху системи.

§2. Вивід рівнянь руху системи з

використанням загальних теорем динаміки

1. Перша група – диференціальні рівняння руху маятників. Першу групу n диференціальних рівнянь руху знайдемо з використанням теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної системи при застосуванні її до маятників. Для j -го маятника теорема в обертальній системі координат $O_j X_j Y_j Z_j$ має вигляд [6, 11]:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}_{O_j}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_{O_j} + m_j \boldsymbol{\rho}_j \times \mathbf{a}_{O_j} \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_{O_j}^e \cdot \mathbf{k}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

де: $\mathbf{K}_{O_j}$ – момент кількості руху j -го маятника, знайдений відносно точки O_j ; $d\mathbf{K}_{O_j}/dt$ – його локальна похідна за часом в рухомій системі координат $O_j X_j Y_j Z_j$; $\boldsymbol{\Omega}$ – кутова швидкість обертання осей $O_j X_j Y_j Z_j$; $\boldsymbol{\rho}_j$ – радіус вектор j -го маятника, який виходить з точки O_j і закінчується у зосередженій масі маятника, визначений відносно осей $O_j X_j Y_j Z_j$; $\mathbf{a}_{O_j}$ – абсолютне прискорення точки O_j ; $\mathbf{k}$ – одиничний вектор, спрямований вздовж осі Z_j ; $\mathbf{M}_{O_j}^e$ – головний момент зовнішніх сил, діючих на j -ий маятник, знайдений відносно точки O_j .

У свою чергу

$$\mathbf{K}_{O_j} = \mathbf{J}_j \boldsymbol{\Omega}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

де: $\boldsymbol{\Omega}_j$ – абсолютна кутова швидкість обертання j -го маятника; $\mathbf{J}_j$ – тензор інерції маятника, знайдений відносно точки O_j .

З рис. 1, 2, та за формулою (2.2) визначаємо:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \omega \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Omega}_j = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_j = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_j & -\cos \varphi_j \sin \varphi_j & 0 \\ -\cos \varphi_j \sin \varphi_j & \cos^2 \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{O_j}^e = \begin{bmatrix} M_{x_j}^e \\ M_{y_j}^e \\ -H_j \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\rho}_j = l_j \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{O_j} = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \Omega_x \sin^2 \varphi_j - \Omega_y \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ \Omega_y \cos^2 \varphi_j - \Omega_x \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Шукаємо абсолютне прискорення точки O_j , як при складному русі. За переносний рух візьмемо її обертальний рух з осями $GX_G Y_G Z_G$ навколо точки G , за відносний – рух відносно осей $GX_G Y_G Z_G$. Тоді за теоремою Коріоліса прискорення точки O_j має вигляд [6]:

$$\mathbf{a}_{O_j} = \mathbf{a}_{O_j}^r + \mathbf{a}_{O_j}^e + \mathbf{a}_{O_j}^c, \quad (2.4)$$

де: $\mathbf{a}_{O_j}^r$ – відносне, $\mathbf{a}_{O_j}^e$ – переносне, $\mathbf{a}_{O_j}^c$ – Коріолісове прискорення точки O_j . З рис. 1 визначаємо в проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$ радіус-вектор точки O_j , її відносні швидкість і прискорення:

$$\mathbf{r}_{O_j} = (x, y, z + h_j)^T, \quad \mathbf{v}_{O_j}^r = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T, \quad \mathbf{a}_{O_j}^r = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0)^T. \quad (2.5)$$

Оскільки переносний рух точки O_j є обертальним, то її прискорення дорівнює:

$$\mathbf{a}_{O_j}^e = \mathbf{a}_{O_j}^{ob} + \mathbf{a}_{O_j}^{oc}, \quad (2.6)$$

де $\mathbf{a}_{O_j}^{ob}$ – обертальне, $\mathbf{a}_{O_j}^{oc}$ – доцентрове прискорення точки O_j . У свою чергу

$$\mathbf{a}_{O_j}^{ob} = \varepsilon \times \mathbf{r}_{O_j}, \quad \mathbf{a}_{O_j}^{oc} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O_j}), \quad (2.7)$$

де ε – кутове прискорення обертання осей $GX_G Y_G Z_G$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \Omega \times \Omega = \\ &= \frac{d^2\Omega}{dt^2} = (\ddot{\Omega}_x, \ddot{\Omega}_y, \ddot{\Omega}_z)^T.\end{aligned}\quad (2.8)$$

З врахуванням виразів (2.5) та (2.8) прискорення $\mathbf{a}_{O_j}^{\text{об}}$, $\mathbf{a}_{O_j}^{\text{деп}}$ та $\mathbf{a}_{O_j}^{\text{с}}$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{O_j}^{\text{об}} &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y \\ \dot{\Omega}_z x - \dot{\Omega}_x(z+h_j) \\ \dot{\Omega}_x y - \dot{\Omega}_y x \end{bmatrix}; \\ \mathbf{a}_{O_j}^{\text{деп}} &= \begin{bmatrix} -(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)x + \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)y + \Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)(z+h_j) + \Omega_z(\Omega_x x + \Omega_y y) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{a}_{O_j}^{\text{с}} &= 2\Omega \times \mathbf{v}_{O_j} = \\ &= 2(-y\dot{\Omega}_z, x\dot{\Omega}_z, y\dot{\Omega}_x - x\dot{\Omega}_y)^T.\end{aligned}\quad (2.9)$$

З врахуванням виразів (2.9), проєкції абсолютного прискорення точки O_j на осі X_j та Y_j мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}a_{O_j, x} &= \ddot{x} + \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y - (\Omega_y^2 + \Omega_z^2)x + \\ &+ \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] - 2\Omega_z \dot{y}; \\ a_{O_j, y} &= \ddot{y} + \dot{\Omega}_x x - \dot{\Omega}_z(z+h_j) - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2)y + \\ &+ \Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] + 2\Omega_z \dot{x}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Остаточно, з врахуванням виразів (2.3) та (2.10), диференціальне рівняння руху маятника j має вигляд:

$$\begin{aligned}H_j \ddot{\phi}_j + m_j l_j [\ddot{\phi}_j l_j + \ddot{y} \cos \phi_j - \ddot{x} \sin \phi_j + \\ + \dot{\Omega}_z(l_j + x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) - (z+h_j) \times \\ \times (\dot{\Omega}_y \sin \phi_j + \dot{\Omega}_x \cos \phi_j) + 2\Omega_z(\dot{x} \cos \phi_j + \\ + \dot{y} \sin \phi_j) - \Omega_x^2(y + l_j \sin \phi_j) \cos \phi_j + \\ + \Omega_y^2(x + l_j \cos \phi_j) \sin \phi_j - \Omega_z^2(y \cos \phi_j - \\ - x \sin \phi_j) - \Omega_x \Omega_y(y \sin \phi_j - x \cos \phi_j - l_j \cos 2\phi_j) - \\ - \Omega_z(z+h_j)(\Omega_x \sin \phi_j - \Omega_y \cos \phi_j)] = 0,\end{aligned}\quad (2.11)$$

$j = \overline{1, n}.$

У явному вигляді рівняння (2.11) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} m_j l_j \{l_j \sin \beta + y \sin \beta \sin \phi_j + [x \sin \beta - (z+h_j) \times \\ \times \cos \beta] \cos \phi_j\} - \ddot{\beta} m_j l_j (z+h_j) \sin \phi_j + \\ + \dot{\omega} m_j l_j \{l_j \cos \alpha \cos \beta + [y \cos \alpha \cos \beta - (z+h_j) \times \\ \times \sin \alpha] \sin \phi_j + [x \cos \beta + (z+h_j) \sin \beta] \times \\ \times \cos \alpha \cos \phi_j\} - m_j l_j (\ddot{x} \sin \phi_j - \ddot{y} \cos \phi_j) + \\ + \ddot{\phi}_j m l_j^2 + H_j \ddot{\phi}_j + m_j l_j \{ \dot{\alpha} \dot{\beta} \{ 2 l_j \cos \beta \cos^2 \phi_j + \\ + 2 [x \cos \beta + (z+h_j) \sin \beta] \cos \phi_j \} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+ 2 \dot{\alpha} \dot{\omega} \{ x \cos \alpha \sin \beta - y \sin \alpha - (z+h_j) \cos \alpha \cos \beta - \\ - l_j \sin \alpha \sin \phi_j + l_j \cos \alpha \sin \beta \cos \phi_j \} \cos \beta \sin \phi_j + \\ + 2 \dot{\beta} \dot{\omega} \{ x \sin \alpha \sin \phi_j + [(z+h_j) \cos \beta - x \sin \beta] \times \\ \times \cos \alpha \cos \phi_j + l_j (\sin \alpha \sin \phi_j - \cos \alpha \sin \beta \cos \phi_j) \times \\ \times \cos \phi_j \} + \dot{\alpha}^2 \{ [x \sin \beta - (z+h_j) \cos \beta] \sin \beta \sin \phi_j - \\ - y \cos \phi_j - l_j \cos^2 \beta \cos \phi_j \sin \phi_j \} + \\ + \dot{\beta}^2 (x + l_j \cos \phi_j) \sin \phi_j + \omega^2 \{ [(z+h_j) \sin \alpha \cos \beta - \\ - y \cos \alpha - x \sin \alpha \sin \beta] \cos \phi_j - l_j \sin \alpha \sin \beta \times \\ \times \cos 2\phi_j \} \cos \alpha + \omega^2 \{ x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) + \\ + [y \sin \alpha + (z+h_j) \cos \alpha \cos \beta] \cos \alpha \sin \beta + \\ + l_j (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos 2\alpha) \cos \phi_j \} \sin \phi_j + \\ + 2 \dot{\alpha} \sin \beta (\dot{x} \cos \phi_j + \dot{y} \sin \phi_j) + 2 \omega \cos \alpha \cos \beta \times \\ \times (\dot{x} \cos \phi_j + \dot{y} \sin \phi_j) \} = 0, \quad j = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

2. Друга група – рівняння поступального руху системи. Другу групу рівнянь руху отримаємо з закону збереження руху центра мас ізольованої системи. У векторному вигляді він має вигляд

$$M_{\Sigma} \mathbf{r}_G = M \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathbf{r}_{\mu} + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j = 0, \quad (2.13)$$

де: $M_{\Sigma} = M + \sum_{i=1}^2 \mu_i + \sum_{j=1}^n m_j$ – сумарна маса системи; $\mathbf{r}_G$ – радіус-вектор точки G відносно самої точки G ; $\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_{\mu}, \mathbf{r}_j$ – відповідно радіус-вектори точки O, i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та j -ої зосередженої маси маятника, знайдені відносно точки G .

У свою чергу

$$\mathbf{r}_{\mu} = \mathbf{r}_O + \mathbf{p}_{\mu}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_O + \mathbf{p}_j, \quad (2.14)$$

де $\mathbf{p}_{\mu}, \mathbf{p}_j$ – відповідно радіус-вектор i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та j -го маятника, які проведені з точки O . Підставляючи (2.14) в (2.13), одержуємо закон збереження (2.13) у такому вигляді

$$M_{\Sigma} \mathbf{r}_G = M_{\Sigma} \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathbf{p}_{\mu} + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{p}_j = 0. \quad (2.15)$$

В проєкціях на осі $GX_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{\mu} = \begin{bmatrix} e_i \cos \gamma_i \\ d_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} l_j \cos \phi_j \\ l_j \sin \phi_j \\ h_j \end{bmatrix},$$

$i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n}.$ (2.16)

Підставляючи (2.16) в (2.15), одержимо такі три алгебраїчні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} M_z x + \sum_{i=1}^k \mu_i e_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j \cos \varphi_j &= 0, \\ M_z y + \sum_{i=1}^k \mu_i e_i \sin \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j \sin \varphi_j &= 0, \\ M_z z + \sum_{i=1}^k \mu_i d_i + \sum_{j=1}^n m_j h_j &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

З рівнянь (2.17) видно, що $z = \text{const}$.

3. Третя група – рівняння обертального руху системи. Третю групу рівнянь руху отримаємо за допомогою закону збереження моменту кількості руху ізольованої системи

$$\mathbf{K}_G = \text{const} = \mathbf{K}. \quad (2.18)$$

Прийнявши за переносний рух обертання системи навколо центра мас системи – точки G разом з осями $GX_G Y_G Z_G$, а за відносний – рух системи відносно осей $GX_G Y_G Z_G$, момент кількості руху системи в довільний момент часу можна подати так:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_G^r, \quad (2.19)$$

де $\mathbf{K}_G^e$ – момент кількості переносного руху системи; $\mathbf{K}_G^r$ – момент кількості відносного руху системи.

Момент кількості переносного руху системи має вигляд:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{J}_G \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.20)$$

де $\mathbf{J}_G$ – тензор інерції системи відносно точки G в осях $GX_G Y_G Z_G$. Тоді

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_z \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

де $\mathbf{J}_O$ – тензор інерції системи відносно точки O в осях $OXYZ$. З рис. 1, 2 знаходимо

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

де:

$$J_x = A + \sum_{i=1}^k \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \sin^2 \gamma_i) + \sum_{j=1}^n m_j (h_j^2 + l_j^2 \sin^2 \varphi_j);$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \mu_i e_i^2 \sin 2\gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \sin 2\varphi_j \right);$$

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^k \mu_i e_i d_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j h_j \cos \varphi_j;$$

$$\begin{aligned} J_y = B + \sum_{i=1}^k \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \cos^2 \gamma_i) + \\ + \sum_{j=1}^n m_j (h_j^2 + l_j^2 \cos^2 \varphi_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \sum_{i=1}^k \mu_i e_i d_i \sin \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j h_j \sin \varphi_j; \\ J_z &= \sum_{i=1}^k \mu_i e_i^2 + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Враховуючи вирази (2.20-2.23), момент кількості переносного руху системи в проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$ матиме вигляд:

$$\mathbf{K}_G^e = (K_{x_G}^e, K_{y_G}^e, K_{z_G}^e)^T, \quad (2.24)$$

де:

$$\begin{aligned} K_{x_G}^e &= [J_x - M_z(y^2 + z^2)]\Omega_x - \\ &\quad - (J_{xy} - M_z xy)\Omega_y - (J_{xz} - M_z xz)\Omega_z; \\ K_{y_G}^e &= -(J_{xy} - M_z xy)\Omega_x + \\ &\quad + [J_y - M_z(x^2 + z^2)]\Omega_y - (J_{yz} - M_z xz)\Omega_z; \\ K_{z_G}^e &= -(J_{xz} - M_z xz)\Omega_x - (J_{yz} - M_z xy)\Omega_y + \\ &\quad + [J_z - M_z(x^2 + y^2)]\Omega_z. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Момент кількості відносного руху системи має вигляд:

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M \mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_{\omega} \times \mu_i \mathbf{v}_{\omega}^r + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j^r, \quad (2.26)$$

де: $\mathbf{v}_O^r, \mathbf{v}_{\omega}^r, \mathbf{v}_j^r$ – відповідно відносні швидкості точки O , i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та зосередженої маси j -го маятника. З рис. 1, 2 знаходимо

$$\mathbf{v}_{\omega}^r = \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_j^r = \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j, \quad / i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n} / , \quad (2.27)$$

де $\mathbf{u}_j$ – складова відносної швидкості j -го маятника, викликана зміною відповідного кута повороту маятника. Підставляючи (2.27) в (2.26) і перетворюючи, враховуючи рівність (2.13), одержимо

$$\mathbf{K}_G^r = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j. \quad (2.28)$$

В проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{u}_j = \dot{\varphi}_j l_j \begin{bmatrix} -\sin \varphi_j \\ \cos \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (2.29)$$

Підставивши рівності (2.29) у (2.28), отримаємо момент кількості відносного руху системи у вигляді:

$$\mathbf{K}_G^r = (K_{x_G}^r, K_{y_G}^r, K_{z_G}^r)^T, \quad (2.30)$$

де:

$$K_{x_G}^r = -\sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j;$$

$$K_{y_G}^r = -\sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j;$$

$$K_{z_G}^r = \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\varphi}_j + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j +$$

$$+ y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j. \quad (2.31)$$

З іншого боку, вектор $\mathbf{K}_G$ спрямований вздовж осі Z_G і має модуль K . Тому в проекціях на осі $GX_GY_GZ_G$:

$$\mathbf{K}_G = K(-\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha, \cos \alpha \cos \beta)^T. \quad (2.32)$$

З врахуванням рівностей (2.25), (2.31), (2.32) закон збереження (2.18) в проекціях на осі $GX_GY_GZ_G$ прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & [J_x - M_\Sigma(y^2 + z^2)]\Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_y - \\ & - (J_{xz} - M_\Sigma xz)\Omega_z - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j = \\ & = -K \cos \alpha \sin \beta; \\ & - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_x + [J_y - M_\Sigma(x^2 + z^2)]\Omega_y - \\ & - (J_{yz} - M_\Sigma yz)\Omega_z - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j = \\ & = K \sin \alpha; \\ & - (J_{xz} - M_\Sigma xz)\Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_y + \\ & + [J_z - M_\Sigma(x^2 + y^2)]\Omega_z + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\varphi}_j + \\ & + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j + y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j = \\ & = K \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.33)$$

У явному вигляді рівняння (2.33) мають вигляд:

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}(J_x \cos \beta - J_{xz} \sin \beta) - \dot{\beta} J_{xy} - \omega(J_x \cos \alpha \sin \beta + \\ & + J_{xy} \sin \alpha + J_{xz} \cos \alpha \cos \beta) - \dot{\alpha} M_\Sigma[(y^2 + z^2) \cos \beta - \\ & - xz \sin \beta] + \dot{\beta} M_\Sigma xy + \omega M_\Sigma[(y^2 + z^2) \cos \alpha \cos \beta + \\ & + xy \sin \alpha + xz \cos \alpha \cos \beta] - \\ & - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j = -K \cos \alpha \sin \beta; \\ & - \dot{\alpha}(J_{xy} \cos \beta + J_{yz} \sin \beta) + \dot{\beta} J_y + \\ & + \omega(J_{xy} \cos \alpha \sin \beta + J_y \sin \alpha - J_{yz} \cos \alpha \cos \beta) + \\ & + \dot{\alpha} M_\Sigma(xy \cos \beta + yz \sin \beta) - \dot{\beta} M_\Sigma(x^2 + z^2) - \\ & - \omega M_\Sigma[xy \cos \alpha \sin \beta + (x^2 + z^2) \sin \alpha - yz \cos \alpha \cos \beta] - \\ & - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j = K \sin \alpha; \\ & \dot{\alpha}(-J_{xz} \cos \beta + J_z \sin \beta) - \dot{\beta} J_{yz} + \\ & + \omega(J_{xz} \cos \alpha \sin \beta - J_{yz} \sin \alpha + J_z \cos \alpha \cos \beta) + \\ & + \dot{\alpha} M_\Sigma[xz \cos \beta - (x^2 + y^2) \sin \beta] + \dot{\beta} M_\Sigma yz - \\ & - \omega M_\Sigma[xz \cos \alpha \sin \beta - yz \sin \alpha + (x^2 + y^2) \cos \alpha \cos \beta] + \\ & + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\varphi}_j + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j + \\ & + y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j = K \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

§3. Кінетична енергія системи

Кінетична енергія системи може бути використана як для складання диференціальних рівнянь руху системи із застосуванням рівнянь Лагранжа II-го роду, так і для оцінки стійкості різних усталених рухів системи. Вона є сумою кінетичних енергій окремих елементів, які входять до її складу:

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} \Omega^T J_{ATT_O} \Omega + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \mu_i v_{\mu_i}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j v_j^2, \quad (3.1)$$

де J_{ATT_O} - тензор інерції тіла відносно власних головних центральних осей інерції $OXYZ$, і зміст решти позначень розкритий вище.

Будемо розглядати рух системи як складний. За переносний рух - візьмемо її обертальний рух навколо точки G разом з осями $GX_GY_GZ_G$, а за відносний - рух відносно осей $GX_GY_GZ_G$. Тоді швидкості можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O &= \mathbf{v}_O^e + \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_\mu^e + \mathbf{v}_\mu^r, \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_j^e + \mathbf{v}_j^r, \quad / i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n} / \end{aligned} \quad (3.2)$$

де з верхнім індексом „e” - переносні, а „r” - відносні швидкості відповідно центра мас тіла, точок, що створюють незрівноваженість, та зосереджених мас маятників. У свою чергу

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mu^r &= \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_O^r = \Omega \times \mathbf{r}_O, \quad \mathbf{v}_\mu^e = \Omega \times \mathbf{r}_\mu, \\ \mathbf{v}_j^e &= \Omega \times \mathbf{r}_j, \quad / i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n} / \end{aligned} \quad (3.3)$$

Підставивши вирази (3.2), (3.3) у вираз (3.1), після перетворень, враховуючи рівність (2.13), отримаємо наступний вигляд кінетичної енергії системи:

$$T = T^e + T^{re} + T^r, \quad (3.4)$$

де

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2} \Omega^T J_G \Omega, \quad T^{re} = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{u}_j, \\ T^r &= \frac{1}{2} \left[M_\Sigma (\mathbf{v}_O^r)^2 + \sum_{i=1}^k m_i (\mathbf{u}_i^2 + 2 \mathbf{v}_O^r \cdot \mathbf{u}_i) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

Підставляючи в (3.5) відповідні швидкості, після перетворень, одержимо:

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2} \{ M_\Sigma (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\ & + \sum_{j=1}^n m_j l_j [l_j^2 \dot{\varphi}_j^2 - 2 \dot{\varphi}_j (\dot{x} \sin \varphi_j - \dot{y} \cos \varphi_j)] \}; \\ T^{re} &= \sum_{j=1}^n m_j l_j \{ \dot{\varphi}_j [\Omega_z l_j + [\Omega_z x - \Omega_y (z + h_j)] \cos \varphi_j + \\ & + [\Omega_z y - \Omega_x (z + h_j)] \sin \varphi_j \}; \\ T^r &= \frac{1}{2} [J_{x_G} \Omega_x^2 + J_{y_G} \Omega_y^2 + J_{z_G} \Omega_z^2 - \\ & - J_{x_G y_G} \Omega_x \Omega_y - J_{x_G z_G} \Omega_x \Omega_z - J_{y_G z_G} \Omega_y \Omega_z] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Можна перевірити, що рівняння Лагранжа II-го роду, складені щодо кутів φ_j , дають першу групу диференціальних рівнянь – (2.11).

Висновки. Рух ізольованої системи, складеної з незрівноваженого обертового несучого тіла і маятників, насаджених на його повздовжню вісь описує система нелінійних автономних диференціальних рівнянь (2.12), і (2.34), та кінематичними співвідношеннями (2.17). Рівняння (2.12) це – звичайні диференціальні рівняння другого порядку.

Отримані рівняння дозволяють визначити усталені рухи системи, досліджувати їх стійкість методами теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем, чисельно інтегрувати рівняння руху системи для моделювання її руху тощо.

Список використаних джерел

1. Алтер Дж. Р. Теория маятникового демпфера нутационных колебаний спутника // Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 3, – С. 170-176.
2. Докучаев Л.В. Влияние диссипативных моментов, обусловленных вязкостью жидкого тела, на устойчивость вращения космического объекта // Космические исследования, 2002, том 40, № 1, С. 42-53.
3. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 83, -М.: ИПМ, 2004. – 28 с.
4. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
5. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963, – С. 16-26.
6. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Сарычев В.А., Мирер С.А., Исаков А.В. Оптимальное демпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизированного вращением. Маятниковый демпфер // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 88, -М.: ИПМ, 1988. – 28 с.
8. Филимоныхин Г.Б., Пирогов В.В., Филимоныхина И.И. Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела // Прикладная механика. – 2007. – 43, №10. – С. 122 – 128.
9. Филимоныхина И.И., Филимоныхин Г.Б. Условия уравнивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика, т.43, №11, 2007. – С.113-120.
10. Філімоныхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №3. - С.
11. Філімоныхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
12. Chang, C. O., Liu, L. Z., Alfrend, K. T. Dynamics and Stability of a Freely Precessing Spacecraft Containing a Nutation Damper, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 297-305.
13. Chinnery A.E., Hall C.D. The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18, No. 6, 1995, pp. 1404-1409.
14. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft // Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, p. 70.

Надійшла до редколегії 19.12.07

УДК 531.39 + 517.977

Лада В. Шрамко

Однорідні розв'язки задачі електропружності для шару з вільними гранями

На основі модифікації схеми однорідних розв'язків, що спростила схему А.І. Лур'є, побудовані однорідні розв'язки для п'єзокерамічного шару. Розглянуто кососиметричний відносно серединної площини шару електропружний стан для випадку, коли грані шару вільні від навантажень та заземлені. Досліджено розподіл характеристичних чисел відповідної спектральної задачі. Показано, що вихрова та потенціальна частини однорідних розв'язків містять бігармонічну частину як складову.

Ключові слова: електропружність; п'єзокераміка; метабармонічна функція; однорідні розв'язки; спектральна задача.

E-mail: ladka1@yandex.ru

Представлено професором В.В. Мелешком

1. Вступ

При розгляді граничних задач теорії пружності та електропружності для короткого циліндру або шару з циліндричною порожниною зазвичай використовують метод однорідних розв'язків. Цей метод базується на побудові системи частицих розв'язків просторових рівнянь теорії пружності, які задовільняють однорідним умовам на плоских поверхнях плити або на циліндричних поверхнях циліндра. Принципова ідея методу належить П.А.Шиффу [14] та Дугаллу [13]. Так, П.А.Шифф [14] застосував метод Фур'є до дослідження вісесиметричного напруженого стану суцільного кругового пружного циліндру та отримав розв'язок, який не давав напружень на його боковій поверхні. При цьому було показано, що однорідні розв'язки залежать від параметра, який в свою чергу знаходиться з деякого трансцендентного рівняння. Дугалл [13] довів, що у більшості випадків цей параметр буде комплексним.

Фундаментальна стаття А.І.Лур'є [10] (де, окрім усього, був введений термін „однорідні розв'язки“) містила загальний метод інтегрування просторових рівнянь рівноваги Ламе для пружного шару з нульовими граничними умовами на його сторонах. Він показав, що загальний розв'язок рівнянь Ламе є сумою бігармонічного, вихрового та потенціального розв'язків. І.І.Ворович [4] запропонував узагальнення цього

L.V. Shramko

Homogeneous solutions of the electroelasticity problem for a layer with free sides

The homogeneous solutions for a piezoceramic layer are built on the base of modification of homogeneous solutions scheme, which simplify the scheme of A.I. Lourie. The skew-symmetrical electroelastic condition relatively the middle plane of the piezoceramic layer when its sides are free from forces and electrically grounded. The distribution of characteristic numbers of the relevant spectral problems is investigated. It is shown that vortex and potential parts of homogeneous solutions contains biharmonic part as an ingredient.

Key words: electroelasticity; piezoceramic; metaharmonic function; homogeneous solutions; spectral problem.

методу. Розв'язок містив у собі деякі довільні функції, які визначалися з відповідних спектральних задач. І.І.Воровичем та його учнями було досліджено напружений стан тонкої та товстої плит [1,2], сформульована проблема базису однорідних розв'язків. А.С.Космодамианським [8] та його учнями було проведено дослідження статичного напруженого стану плит. Дослідження статичних граничних задач електропружності для п'єзокерамічних плит та циліндрів методом однорідних розв'язків проводили Ю.А.Устинов та його учні [6,7].

У даній роботі на основі однієї з модифікацій [12] схеми однорідних розв'язків побудовані однорідні розв'язки для п'єзокерамічного шару, грані якого вільні від навантажень та заземлені.

2. Побудова операторних зображень розв'язків

В декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ розглянемо п'єзокерамічний шар (кристал гексагональної системи $6mm$) $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$. Вісь Ox_3 направлена вздовж лінії електричного поля попередньої товщині поляризації кераміки.

Система рівнянь рівноваги п'єзокерамічний шару для переміщень та електричного потенціала $u = (u_1, u_2, u_3)$, φ має вигляд [5]

$$\begin{aligned} V\nabla^2 u_1 + c_{44}\partial_3^2 u_1 + \partial_1 \theta &= 0, \\ V\nabla^2 u_2 + c_{44}\partial_3^2 u_2 + \partial_2 \theta &= 0, \\ c_{44}\nabla^2 u_3 + c_{33}\partial_3^2 u_3 + c\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \\ &+ e_{15}\nabla^2 \varphi + e_{33}\partial_3^2 \varphi = 0 \\ \varepsilon_{11}\nabla^2 \varphi + \varepsilon_{33}\partial_3^2 \varphi - e\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) - \\ &- e_{15}\nabla^2 u_3 - e_{33}\partial_3^2 u_3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \theta &= U(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + c\partial_3 u_3 + e\partial_3 \varphi, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ U &= (c_{11} + c_{12})/2, \quad V = (c_{11} - c_{12})/2, \\ c &= c_{13} + c_{44}, \quad e = e_{15} + e_{31}. \end{aligned}$$

Тут u - вектор пружного переміщення; φ - електричний потенціал; c_{ij} , e_{ij} , ε_{ij} - модулі пружності при постійному електричному полі, п'єзомодулі та діелектричні проникності при постійній деформації, відповідно.

Для розв'язку цієї системи скористаємося представленням вектора u у вигляді [8]

$$u_1 = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi, \quad u_2 = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi, \quad u_3 = \Omega.$$

Тоді рівняння системи (1) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \partial_1(V\nabla^2 \Phi + c_{44}\partial_3^2 \Phi + \theta) + \partial_2(V\nabla^2 \Psi + c_{44}\partial_3^2 \Psi) &= 0, \\ \partial_2(V\nabla^2 \Phi + c_{44}\partial_3^2 \Phi + \theta) - \partial_1(V\nabla^2 \Psi + c_{44}\partial_3^2 \Psi) &= 0, \\ c_{44}\nabla^2 \Omega + c_{33}\partial_3^2 \Omega + c\nabla^2 \partial_3 \Phi + e_{15}\nabla^2 \varphi + e_{33}\partial_3^2 \varphi &= 0, \\ \varepsilon_{11}\nabla^2 \varphi + \varepsilon_{33}\partial_3^2 \varphi - e\nabla^2 \partial_3 \Phi - e_{15}\nabla^2 \Omega - e_{33}\partial_3^2 \Omega &= 0, \\ \theta &= U\nabla^2 \Phi + c\partial_3 \Omega + e\partial_3 \varphi. \end{aligned}$$

Перші два рівняння цієї системи будуть умовами Коші-Римана [9] аналітичності деякої функції $F(z, x_3)$ комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$:

$$V\nabla^2 \Psi + c_{44}\Psi^* = \operatorname{Re} F(z, x_3),$$

$$c_{11}\nabla^2 \Phi + c_{44}\Phi^* + c\Omega' + e\varphi' = \operatorname{Im} F(z, x_3).$$

Звідси приходимо до диференціального рівняння відносно функції Ψ

$$V\nabla^2 \Psi + c_{44}\Psi^* = \operatorname{Re} F(z, x_3) \quad (2)$$

та системи диференціальних рівнянь відносно функцій Φ , Ω , φ

$$\begin{aligned} c_{11}\nabla^2 \Phi + c_{44}\Phi^* + c\Omega' + e\varphi' &= \operatorname{Im} F(z, x_3), \\ c_{44}\nabla^2 \Omega + c_{33}\Omega^* + c\nabla^2 \Phi' + e_{15}\nabla^2 \varphi + e_{33}\partial_3^2 \varphi &= 0, \quad (3) \\ \varepsilon_{11}\nabla^2 \varphi + \varepsilon_{33}\partial_3^2 \varphi - e\nabla^2 \Phi' - e_{15}\nabla^2 \Omega - e_{33}\partial_3^2 \Omega &= 0, \end{aligned}$$

де штрихом позначено похідну за координатою

x_3 .

Розглянемо кососиметричний відносно серединної площини шару електропружний стан. Розв'язки рівняння (2) та системи (3) будемо шукати у вигляді

$$\Phi = \nabla^{-1} \operatorname{sh}(\lambda x_3) A_1, \quad \Omega = \operatorname{ch}(\lambda x_3) A_2,$$

$$\varphi = \operatorname{ch}(\lambda x_3) A_3, \quad \Psi = \nabla^{-1} \sin(\lambda x_3 / \mu_4) A_4, \quad (4)$$

де $\mu_4^2 = c_{44}/V$, $A_i = A_i(x_1, x_2)$, λ - невідомий поки що оператор.

З урахуванням зображень (4) система (3) зводиться до системи рівнянь, коефіцієнти якої залежать від оператора λ . Прирівнюючи до нуля детермінант цієї системи

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \nabla^{-1} \operatorname{ch}^2(\lambda x_3) \operatorname{sh}(\lambda x_3) \cdot \\ &\cdot (c_1 \lambda^6 + c_2 \nabla^2 \lambda^4 + c_3 \nabla^4 \lambda^2 + c_4 \nabla^6) = 0, \end{aligned}$$

приходимо до характеристичного рівняння [11] відносно $\mu = iV\lambda^{-1}$.

Кожному власному значенню λ_k відповідає власний вектор $A^{(k)} = \{A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, A_3^{(k)}\}$, координати якого пов'язані співвідношеннями

$$A_2^{(k)} = \gamma_1^{(k)}(\mu) A_1^{(k)}, \quad A_3^{(k)} = \gamma_2^{(k)}(\mu) A_1^{(k)},$$

де

$$p(\mu_k) \gamma_1^{(k)} = -ip_1(\mu_k), \quad p(\mu_k) \gamma_2^{(k)} = ip_2(\mu_k)$$

$$p_1(\mu) = e_{15}c_{11}\mu^4 - (e_{33}c_{11} + e_{15}c_{44} - ec)\mu^2 + e_{33}c_{44},$$

$$p_2(\mu) = c_{11}c_{44}\mu^4 - (c_{44}^2 + c_{11}c_{33} - c^2)\mu^2 + c_{33}c_{44},$$

$$p(\mu) = (ec_{44} - e_{15}c)\mu^3 - (ec_{33} - e_{33}c)\mu.$$

Операторне зображення (4) розв'язків запишеться через власні вектори у вигляді

$$\Psi = \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3 / \mu_4) A_4,$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -2\nabla^{-1} \sin(\nabla x_3 / \mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} - \\ &- 4 \operatorname{Im} \{ \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3 / \mu_2) A_1^{(2)} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= -2\alpha_{11} \cos(\nabla x_3 / \mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\ &+ 4 \operatorname{Re} \{ \gamma_1^{(2)} \cos(\nabla x_3 / \mu_2) A_1^{(2)} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= -2\alpha_{21} \cos(\nabla x_3 / \mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\ &+ 4 \operatorname{Re} \{ \gamma_2^{(2)} \cos(\nabla x_3 / \mu_2) A_1^{(2)} \}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо загальне для кососимет-

ричного напруженого стану п'єзокерамічного шару зображення компонент електропружного поля:

$$\begin{aligned}
 u_1 = & -2\nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_1) \partial_1 \operatorname{Im} A_1^{(1)} - \\
 & -4 \operatorname{Im} \left\{ \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_2) \partial_1 A_1^{(2)} \right\} + \\
 & + \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_4) \partial_2 A_4 \\
 u_2 = & -2\nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_1) \partial_2 \operatorname{Im} A_1^{(1)} - \\
 & -4 \operatorname{Im} \left\{ \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_2) \partial_2 A_1^{(2)} \right\} - \\
 & - \nabla^{-1} \sin(\nabla x_3/\mu_4) \partial_1 A_4, \\
 u_3 = & -2\alpha_{11} \cos(\nabla x_3/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\
 & + 4 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_1^{(2)} \cos(\nabla x_3/\mu_2) A_1^{(2)} \right\}, \\
 \varphi = & -2\alpha_{21} \cos(\nabla x_3/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\
 & + 4 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_2^{(2)} \cos(\nabla x_3/\mu_2) A_1^{(2)} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

де $\alpha_{11} = \operatorname{Im} \left\{ \gamma_1^{(1)} \right\}$, $\alpha_{21} = \operatorname{Im} \left\{ \gamma_2^{(1)} \right\}$.

3. Однорідні розв'язки

Розглянемо рівновагу п'єзокерамічного шару, грані якого вільні від навантажень та заземлені. Рівновага шару є мішаними крайовими умовами на його гранях вже розглядалася раніше [12]. З граничних умов

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{22}(x_1, x_2, \pm h) = \\
 = \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = \varphi(x_1, x_2, \pm h) = 0
 \end{aligned}$$

з урахуванням операторних зображень (5) та матеріальних співвідношень [5] приходимо до системи диференціальних рівнянь нескінченного порядку

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \left\{ 2C_3 \cos(\nabla h/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + 4 \operatorname{Im} \left[C_6 \cos(\nabla h/\mu_2) A_1^{(2)} \right] \right\} - \\
 - \partial_2 \left\{ c_{44} \mu_4^{-1} \cos(\nabla h/\mu_4) A_4 \right\} = 0, \\
 \partial_2 \left\{ 2C_3 \cos(\nabla h/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + 4 \operatorname{Im} \left[C_6 \cos(\nabla h/\mu_2) A_1^{(2)} \right] \right\} + \\
 + \partial_1 \left\{ c_{44} \mu_4^{-1} \cos(\nabla h/\mu_4) A_4 \right\} = 0, \\
 2C_3 \nabla \sin(\nabla h/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\
 + 4 \operatorname{Im} \left\{ C_4 \nabla \sin(\nabla h/\mu_2) A_1^{(2)} \right\} = 0, \\
 2\alpha_{21} \cos(\nabla h/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + \\
 + 4 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_2^{(2)} \cos(\nabla h/\mu_2) A_1^{(2)} \right\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

де

$$C_3 = c_{13} - \frac{c_{33} \gamma_1^{(1)} + e_{33} \gamma_2^{(1)}}{i \mu_1},$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = c_{13} - \frac{c_{33} \gamma_1^{(2)} + e_{33} \gamma_2^{(2)}}{i \mu_2}, \\
 C_5 = \frac{c_{44}}{\mu_1} + \frac{c_{44} \gamma_1^{(1)} + e_{15} \gamma_2^{(1)}}{i}, \\
 C_6 = \frac{c_{44}}{\mu_2} + \frac{c_{44} \gamma_1^{(2)} + e_{15} \gamma_2^{(2)}}{i}.
 \end{aligned}$$

Перші два рівняння системи (6) – це умови Коші-Римана [9] аналітичності деякої функції $f_0(z)$ комплексного змінного $z = x_1 + ix_2$. Для зручності подальших перетворень функцію $f_0(z)$ представимо як $f_0(z) = C_5 f^*(z)$, де $f(z)$ – також аналітична функція. Тоді мають місце співвідношення

$$\begin{aligned}
 c_{44} \mu_4^{-1} \cos(\nabla h/\mu_4) A_4 = C_5 \operatorname{Im} f^*(z), \\
 2C_3 \cos(\nabla h/\mu_1) \operatorname{Im} A_1^{(1)} + 4 \operatorname{Im} \left[C_6 \cos(\nabla h/\mu_2) A_1^{(2)} \right] = \\
 = C_5 \operatorname{Re} f^*(z)
 \end{aligned}$$

Якщо ввести у розгляд бігармонічну функцію Φ_0 [9]

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \bar{z} f'(z) + f_1(z) \right\},$$

де $f_1(z)$ – аналітична функція комплексного змінного $z = x_1 + ix_2$, тоді система (6) запишеться у вигляді рівняння

$$c_{44} \mu_4^{-1} \cos(\nabla h/\mu_4) A_4 = C_5 \operatorname{Im} f^*(z), \tag{7}$$

та системи диференціальних рівнянь нескінченного порядку

$$\begin{aligned}
 l_{11} \operatorname{Im} A_1^{(1)} + l_{12} \operatorname{Re} A_1^{(2)} + l_{13} \operatorname{Im} A_1^{(2)} = \nabla^2 \Phi_0, \\
 l_{21} \operatorname{Im} A_1^{(1)} + l_{22} \operatorname{Re} A_1^{(2)} + l_{23} \operatorname{Im} A_1^{(2)} = 0, \\
 l_{31} \operatorname{Im} A_1^{(1)} + l_{32} \operatorname{Re} A_1^{(2)} + l_{33} \operatorname{Im} A_1^{(2)} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}
 l_{11} = 2 \cos(\nabla h/\mu_1), \quad l_{21} = h^{-1} \nabla \sin(\nabla h/\mu_1), \\
 l_{12} - i l_{13} = -4 i b \cos(\nabla h/\mu_2), \\
 l_{22} - i l_{23} = -2 i h^{-1} a \nabla \sin(\nabla h/\mu_2), \\
 l_{31} = \cos(\nabla h/\mu_1), \quad l_{32} - i l_{33} = -2 i d \cos(\nabla h/\mu_2), \\
 a = C_4/C_3, \quad b = C_6/C_5, \quad d = \gamma_2^{(2)}/\gamma_2^{(1)}
 \end{aligned}$$

У рівнянні (7) оператор $\cos(\nabla h/\mu_4)$ є цілою функцією ∇^2 і, відповідно, розв'язком однорід-

ного рівняння буде набір метатармонічних функцій ψ_n , що задовольняють рівнянню Гельмгольца $(\nabla^2 - \delta_n^2)\psi_n = 0$. Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$A_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_1, x_2) + C_5 c_{44}^{-1} \mu_3 \operatorname{Im} f''(z),$$

$$(\nabla^2 - \delta_n^2)\psi_n = 0, \quad 2h\delta_n = \pi(2n-1)\mu_4.$$

Введемо розв'язувальну функцію Ω для системи (8) за формулами

$$\operatorname{Im} A_1^{(1)} = \nabla^{-2} L_{11} \Omega, \quad \operatorname{Re} A_1^{(2)} = \nabla^{-2} L_{12} \Omega,$$

$$\operatorname{Im} A_1^{(2)} = \nabla^{-2} L_{13} \Omega,$$

де L_{11}, L_{12}, L_{13} - алгебраїчні доповнення елементів l_{11}, l_{12}, l_{13} . Тоді два останніх рівняння системи задовольняються тотожно, а перше приймає вигляд

$$L(\nabla^2)\Omega = \nabla^2 \Phi_0, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} L(\nabla^2) = & 8h^{-1} \nabla^{-1} \{ \cos(\nabla h / \mu_1) \cdot \\ & \operatorname{Im} \{ \bar{a} d \sin(\nabla h / \mu_2) \cos(\nabla h / \bar{\mu}_2) \} + \\ & + \cos(\nabla h / \mu_1) \operatorname{Im} \{ \bar{a} b \cos(\nabla h / \mu_2) \sin(\nabla h / \bar{\mu}_2) \} - \\ & - \sin(\nabla h / \mu_1) \operatorname{Im} \{ \bar{b} d \cos(\nabla h / \mu_2) \cos(\nabla h / \bar{\mu}_2) \} \}. \end{aligned}$$

У рівнянні (9) оператор $L(\nabla^2)$ є цілою функцією ∇^2 і, відповідно, розв'язком однорідного рівняння буде набір метатармонічних функцій φ_n : $(\nabla^2 - \alpha_n^2)\varphi_n = 0$. Таким чином приходимо до задачі знаходження коренів $\{\alpha_n h\}$ комплексного трансцендентного рівняння

$$\begin{aligned} (\alpha h)^{-1} (2 \operatorname{Im} \{ \bar{b} d \} \sin(\alpha h / \mu_1) \cos(\alpha h / \mu_2) \cos(\alpha h / \bar{\mu}_2) + \\ + i a (\bar{d} - \bar{b}) \cos(\alpha h / \mu_1) \sin(\alpha h / \mu_2) \cos(\alpha h / \bar{\mu}_2) - \\ - i \bar{a} (d - b) \cos(\alpha h / \mu_1) \cos(\alpha h / \mu_2) \sin(\alpha h / \bar{\mu}_2)) = 0. \end{aligned}$$

Чисельні дослідження, проведені для п'єзокерамік PZT-4, PHE-5, PZT-5H [3] показали, що корені $\{\alpha_n h\}$ цього характеристичного рівняння, на відміну від пружного випадку [10], залежать від властивостей матеріалу. Для всіх розглянутих п'єзокерамік спектр $\{\alpha_n h\}$ дискретний та симетрично розташований на комплексній площині. Для комплексних коренів і дві симетричних похилих асимптоти розподілу $\{\alpha_n h\}$. Кут нахилу визначається електропружними властивостями матеріалу.

В табл. 1, 2 наведені значення коренів $\{\alpha_n h\}$ у першому квадранті комплексної площини для п'єзокераміки PZT-4. Розподіл коренів співпадає з отриманим раніше іншими авторами [6].

Таблиця 1

Значення дійсних коренів $\{\alpha_n h\}$

n	$\alpha_n h$
1	1,3944
2	4,1310
3	6,7844
4	9,3967
5	12,0012
6	14,6077
7	17,2163
8	19,8259
9	22,4356
10	25,0454

Таблиця 2

Значення комплексних коренів $\{\alpha_n h\}$

n	$\operatorname{Re} \alpha_n h$	$\operatorname{Im} \alpha_n h$
1	3,2942	1,3484
2	6,1248	1,8765
3	8,9584	2,3993
4	11,7965	2,9280
5	14,6355	3,4592
6	17,4744	3,9912
7	20,3131	4,5233
8	23,1518	5,0555
9	25,9905	5,5876
10	28,8292	6,1198

(2.23)

З табл. 1, 2 бачимо, що при великих значеннях n різниця між коренями стає постійною. Для $\alpha_n h$ при великих n отримані рекурентні співвідношення:

для дійсних коренів

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)h = \pi \mu_1,$$

для комплексних коренів

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)h = \pi \mu_2.$$

Розв'язувальна функція рівняння (9) запишеться у вигляді

$$\Omega = 2 \operatorname{Re} \sum_n \varphi_n + A h^{-2} \Phi_0,$$

де

$$A = \frac{-\mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_2}{4 \operatorname{Im} \{a(\bar{d} - b) - b \bar{d} \tau(\mu_2, \mu_1, \mu_3)\}},$$

$$\tau(\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_2) = \mu_1 \bar{\mu}_2 \left(\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{3\mu_2^2} + \frac{1}{\bar{\mu}_2^2} \right),$$

$$(\nabla^2 - \alpha_n^2) \varphi_n = 0.$$

Шукані однорідні розв'язки мають вигляд:
вихрова частина розв'язку

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \sin(\delta_n x_3 / \mu_4) \partial_2 \psi_n +$$

$$+ C_5 c_{44}^{-1} x_3 \partial_2 \operatorname{Im} f^*(z),$$

$$u_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \sin(\delta_n x_3 / \mu_4) \partial_1 \psi_n -$$

$$- C_5 c_{44}^{-1} x_3 \partial_1 \operatorname{Im} f^*(z),$$

$$u_3 = 0, \quad \varphi = 0,$$

потенціальна частина розв'язку

$$u_1 = -B_1 A h^{-2} x_3 \partial_1 \Phi_0 + B_2 A h^{-2} x_3^3 \partial_1 \nabla^2 \Phi_0 +$$

$$+ B_3 A x_3 \partial_1 \nabla^2 \Phi_0 - h^{-1} \operatorname{Im} \sum_n \alpha_n^{-2} \{a_{1n} \sin(\alpha_n x_3 / \mu_1) +$$

$$+ a_{2n} \sin(\alpha_n x_3 / \mu_2) - a_{3n} \sin(\alpha_n x_3 / \bar{\mu}_2)\} \partial_1 \varphi_n,$$

$$u_2 = -B_1 A h^{-2} x_3 \partial_2 \Phi_0 + B_2 A h^{-2} x_3^3 \partial_2 \nabla^2 \Phi_0 +$$

$$+ B_3 A x_3 \partial_2 \nabla^2 \Phi_0 - h^{-1} \operatorname{Im} \sum_n \alpha_n^{-2} \{a_{1n} \sin(\alpha_n x_3 / \mu_1) +$$

$$+ a_{2n} \sin(\alpha_n x_3 / \mu_2) - a_{3n} \sin(\alpha_n x_3 / \bar{\mu}_2)\} \partial_2 \varphi_n,$$

$$u_3 = A \alpha_{11} B_4 h^{-2} \Phi_0 - A \alpha_{11} B_5 h^{-2} x_3^2 \nabla^2 \Phi_0 -$$

$$- A \alpha_{11} B_6 \nabla^2 \Phi_0 + h^{-1} \operatorname{Re} \sum_n \gamma_1^{(1)} a_{1n} \cos(\alpha_n x_3 / \mu_1) +$$

$$+ \gamma_1^{(2)} a_{2n} \cos(\alpha_n x_3 / \mu_2) + \gamma_1^{(2)} a_{3n} \cos(\alpha_n x_3 / \bar{\mu}_2) \alpha_n^{-1} \varphi_n,$$

$$\varphi = -A \alpha_{21} B_7 h^{-2} x_3^2 \nabla^2 \Phi_0 - A \alpha_{21} B_8 \nabla^2 \Phi_0 +$$

$$+ h^{-1} \operatorname{Re} \sum_n \gamma_1^{(1)} a_{1n} \cos(\alpha_n x_3 / \mu_1) + \gamma_1^{(2)} a_{2n} \cos(\alpha_n x_3 / \mu_2) +$$

$$+ \gamma_1^{(2)} a_{3n} \cos(\alpha_n x_3 / \bar{\mu}_2) \alpha_n^{-1} \varphi_n.$$

Тут $a_{kn} = a_{kn}(\alpha_n, \mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_2)$, $B_i = B_i(\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_2)$.

З структури однорідних розв'язків бачимо, що і у потенціальній, і у вихровій частинах розв'язку присутня бігармонічна складова. Це відповідає

фізичним уявленням про розподіл напруженого стану всередині шару, а саме: при вільних від навантажень гранях ненульові напруження спостерігаються не лише поблизу граней, а й глибоко всередині шару.

4. Висновки

На основі запропонованої модифікації схеми однорідних розв'язків, що спростила схему А.І. Лур'є, було уточнено структуру однорідних розв'язків для п'єзокерамічного шару, грані якого вільні від навантажень і показано що для даного типу граничних умов бігармонічна частина присутня як складова у потенціальній та вихровій частинах розв'язку. Дослідження розподілу характеристичних чисел відповідної спектральної задачі виявило прості рекурентні співвідношення між цими числами.

Список використаних джерел

1. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // Прикл. матем. мех. – 1963. – 27, № 6. – С. 1057-1074.
2. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. матем. мех. – 1962. – 26, № 4. – С. 687-696.
3. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в пьезопреобразователях // Физическая акустика. Том 1А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. – М.: Мир, 1966. – С. 204-326.
4. Ворович И.И. Постановка краевых задач теории упругости при бесконечном интеграле энергии и базисные свойства однородных решений // Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 112-128.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. Жиров В.Е. Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты // Прикл. матем. мех. – 1977. – 41, № 6. – С. 1114-1121.
7. Жиров В.Е., Устинов Ю.А. Некоторые задачи теории плит из электроупругого материала // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1977. – 17. – С. 62-67.
8. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – К: Наук. думка, 1978. – 240 с.

9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
10. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. матем. мех. – 1942. – 6, № 2/3. – С. 151-169.
11. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в R^3 // Теор. прикл. мех. – 1990. – 21. – С. 13-20.
12. Фильштинский Л.А., Шрамко Л.В. Однорідні рішення для п'єзокерамічного шару в R^3 (кососиметричний випадок, мішані крайові умови) // ФХММ. – 2003. – 39, № 1. – С. 35-40.
13. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. R. Soc. Edinburgh. – 1904. – 41. – P. 129-228.
14. Schiff P.A. Sur l'équilibre d'un cylindre élastique // J. Math. Pures Appl. (ser. 3) – 1883. – 9 – P. 407-421.

Надійшла до редколегії 05.10.2007

УДК 539.3

Наталія П. Яремченко, провідний інженер.

Дослідження впливу геометричних параметрів пологих ортотропних оболонок змінної товщини на характер напружено-деформованого стану на основі уточненої моделі

Проведено дослідження напружено-деформованого стану пологої прямокутної в плані ортотропної оболонки зі змінною товщиною при різних граничних умовах на краях в уточненій постановці. Розвинуто чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: полого оболонка, ортотропний, некласична модель, сплайн-апроксимація, змінна товщина.

E-mail: yaremch@gmail.com

Представив професор В.В. Мелешко

1. Вступ

В даній статті розглядається напружено-деформований стан ортотропних пологих прямокутних в плані оболонок змінної товщини під дією рівномірного нормального тиску. Дослідження проводяться в рамках некласичної теорії оболонок на основі уточненої моделі прямолінійного елемента [1, 2]. Для розв'язання поставленої задачі було запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на зведенні двовимірної крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з допомогою застосування методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації.

2. Постановка задачі

Розглянемо прямокутні в плані пологі оболонки змінної товщини в уточненій постановці, яка базується на гіпотезі прямолінійного елемента. У відповідності з прийнятою гіпотезою переміщення оболонки представимо у вигляді

$$\begin{aligned} u_s(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_s(x, y), \\ u_n(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_n(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

де x, y, z – координати точок оболонки; u_s, u_n, u_z – відповідні переміщення; u, v, w –

N. P. Yaremtchenko, senior engineer

Investigation of variable thickness orthotropic shallow shells geometrical parameters influence on stress-strain state character basing on refined formulation

The problem on the stress-strain state of the orthotropic shallow rectangular in the plan shell of variable thickness in two dimensions is carried out in the refined statement for different boundary conditions. The numerically-analytical method is developed based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods.

Key Words: shallow shell, orthotropic, non-classical model, spline-approximation, variable thickness.

переміщення точок координатної поверхні в напрямках x, y, z ; ψ_s, ψ_n – повні кути повороту прямолінійного елемента.

В відповідності з (1) вирази для деформацій запишемо у вигляді

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y);$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_y(x, y) + z\kappa_y(x, y);$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \varepsilon_{zz}(x, y) + z2\kappa_{zz}(x, y);$$

$$e_{xz}(x, y, z) = \gamma_x(x, y), e_{yz}(x, y, z) = \gamma_y(x, y), \quad (2)$$

де

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \psi_s}{\partial x} - k_1^s w, \quad \kappa_y = \frac{\partial \psi_n}{\partial y} - k_2^s w,$$

$$2\kappa_{zz} = \frac{\partial \psi_s}{\partial y} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x}; \quad \gamma_x = \psi_s - \vartheta_s, \quad \gamma_y = \psi_n - \vartheta_y,$$

$$\vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u, \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v. \quad (3)$$

В (3) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{zz}$ – тангенціальні, а $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{zz}$ – згинні деформації координатної поверхні; k_1, k_2 – кривизни; ϑ_s, ϑ_y – кути повороту нормалі без врахування поперечних зсувів; γ_x, γ_y – кути

повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + q &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \\ N_{xy} - k_2 M_{yx} - N_{yx} - k_1 M_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – тангенціальні зусилля; Q_x, Q_y – перерізуючі зусилля; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} – згинні і скручуючі моменти.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно вибраної координатної поверхні запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y; \quad N_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y; \\ N_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2 D_{66}\kappa_{xy}; \quad N_{yx} = C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1 D_{66}\kappa_{xy}; \\ M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \quad M_y = D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \\ M_{yx} &= M_{xy} = 2D_{66}\kappa_{xy}; \quad Q_x = K_1\gamma; \quad Q_y = K_2\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad C_{12} = \nu_x C_{11}; \quad C_{22} = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}; \\ C_{66} &= G_{xy} h; \quad D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \quad D_{12} = \nu_x D_{11}; \\ D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}; \quad K_1 = \frac{5}{6} h G_{xz}; \\ K_2 &= \frac{5}{6} h G_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) E_x, E_y, ν_x, ν_y – модулі пружності і коефіцієнти Пуасона в напрямках x і y ; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модулі зсуву; $h = h(x, y)$ – товщина оболонки.

Вибравши за невідомі функції компоненти вектора переміщення серединної поверхні оболонки u, v, w та повні кути повороту ψ_x, ψ_y , розв'язувальну систему рівнянь у частинних похідних можна записати у вигляді [1]

$$L\bar{g} = 0, \quad (7)$$

де L – лінійний диференціальний оператор другого порядку, а $\bar{g} = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}$.

Будемо розглядати такі граничні умови:

- 1) жорстке закріплення двох країв оболонки ($y=0, y=b$) і два інші края вільні ($x=0, x=a$);
- 2) жорстке закріплення трьох країв оболонки ($x=0, y=0, y=b$) і один край вільний ($x=a$).

Оскільки края оболонки $y=0$ та $y=b$ жорстко закріплені, то на них задається умова $\bar{g} = 0$.

Система рівнянь (7) разом з граничними умовами утворюють двовимірну крайову задачу.

3. Метод розв'язання

Розв'язок задачі подаємо у вигляді

$$\bar{g} = \sum_{i=0}^N \bar{g}_i(x) \varphi_i(y). \quad (8)$$

У виразі (8) $\bar{g}_i(x) = \{u_i(x), v_i(x), w_i(x), \psi_{xi}(x), \psi_{yi}(x)\}$ – невідомі функції, а $\varphi_i(y)$ – лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці, що задовольняють задані граничні умови. Підставляючи вирази (8) у розв'язувальні рівняння (7) і відповідні граничні умови вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно виконувались в $N+1$ точці колокації y_i . Як результат отримаємо одновимірну крайову задачу, яку можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{dx} &= A\bar{z} + \bar{f}; \\ B_1 \bar{z} &= \bar{b}_1 \quad (x=x_1); \quad B_2 \bar{z} = \bar{b}_2 \quad (x=x_2), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\bar{z} = \{\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_N, \bar{g}'_0, \dots, \bar{g}'_N\}$ – вектор-функція від x ; $\bar{f}$ – вектор правих частин; A – квадратна матриця, елементи якої залежать від x ; B_1 та B_2 – матриці граничних умов, $\bar{b}_1$ і $\bar{b}_2$ – відповідні вектори. Одновимірну крайову задачу (9) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [3]. Після підстановки значень $\bar{g}_i$ в (8) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

4. Результати розрахунків

Для оцінки достовірності результатів розрахунків по запропонованій методиці розв'язувалась задача для пологої оболонки сталої товщини, у якій сторони $x = \text{const}$ закріплені жорстко, а $y = \text{const}$ – шарнірно оперті. Розглядалась ортотропна оболонка з

такими механічними і геометричними параметрами:

$$\nu_y = 0.277; E_z = E; E_y = \mu E; \nu_x = \nu_y E_z/E_y;$$

$$G_{xy} = G_{xz} = \lambda E; G_{yz} = 0.357E,$$

$$E = 1.4 \cdot 10^5 = 1.373 \cdot 10^8 \text{ МПа}, \mu = 4.07; \lambda = 0.407;$$

$$a = b = 10, k_1 = k_2 = 0.1, h = 1, q = q_0 = \text{const.}$$

В цьому випадку розв'язок можна отримати, якщо використати відокремлення змінних з допомогою рядів Фур'є [1] в напрямку y . Таким чином будемо мати значення прогинів методом сплайн-колокації і розділенням змінних при інтегруванні вздовж осі x . Результати, отримані різними методами, відрізняються неістотно вже при 10 точках колокації. При збільшенні кількості точок колокації розв'язок наближається до точного. Також проводився аналіз достовірності результатів розрахунків для оболонок змінної товщини.

На основі запропонованого в статті підходу була розв'язана задача про напружено-деформований стан квадратної в плані ортотропної пологої оболонки двоякої кривизни і змінної товщини під дією рівномірного нормального тиску $q = q_0 = \text{const.}$ Розрахунки проводились для двох типів вище названих граничних умов. Товщина оболонки змінюється в одному з координатних напрямків по наступному закону:

$$h = h_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \right), \quad (10)$$

де $h_0 = \text{const.}$

Задача розв'язувалась при наступних значеннях параметрів плану оболонки:

$$1) a = 10; b = 10; 2) a = 15; b = 10; 3) a = 20; b = 10; \\ 4) a = 25; b = 10. \quad (11)$$

Також розглядалися наступні значення кривизни:

$$1) k_1 = 0.05; k_2 = 0.05; 2) k_1 = 0.05; k_2 = 0.075; \\ 3) k_1 = 0.05; k_2 = 0.1; 4) k_1 = 0.05; k_2 = 0.125. \quad (12)$$

Механічні характеристики оболонки вибираємо такими, як і в попередньому прикладі.

На рис. 1 – 4 представлені результати розрахунків прогинів w оболонки, що розглядається, в перерізі $y = b/2$ в залежності від характеру зміни її довжини. На рис. 1, 2 наведено результати розрахунків в випадку, коли в оболонки два протилежні края жорстко закріплені, а інші два края вільні; на рис. 3, 4 – в оболонки три края жорстко закріплені і один край вільний. На рис. 1, 3 наведено результати розрахунків в випадку, коли параметр товщини α дорівнює 0,2, а на рис. 2, 4 – -0,2.

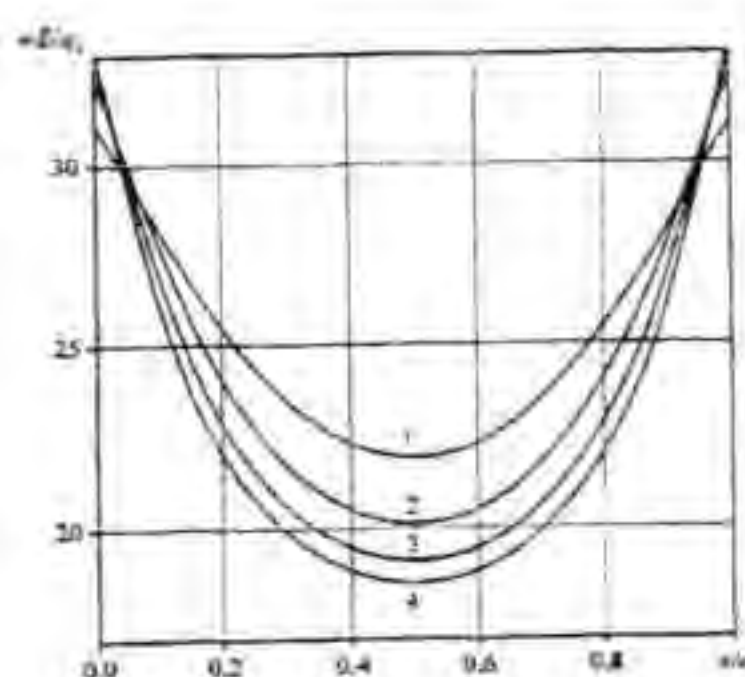


Рис. 1. Прогини w при зміні довжини оболонки; $\alpha = 0,2$; сторони $y = 0, y = b$ жорстко закріплені, а $x = 0, x = a$ – вільні

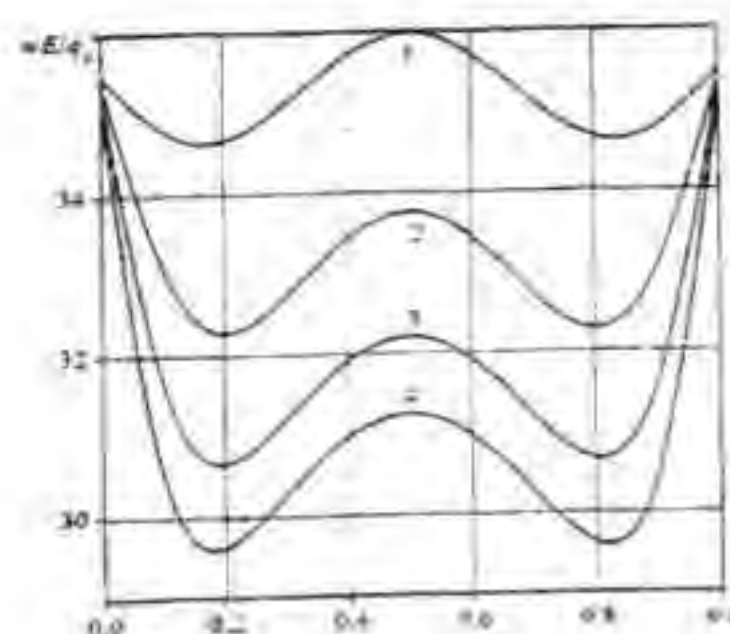


Рис. 2. Прогини w при зміні параметру довжини; $\alpha = -0,2$; сторони $y = 0, y = b$ жорстко закріплені, а $x = 0, x = a$ – вільні

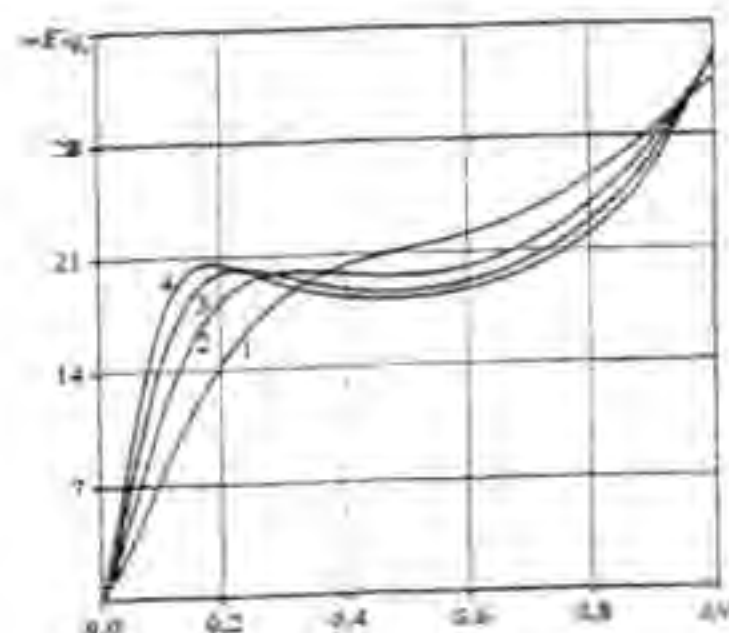


Рис. 3. Прогини w при зміні параметру довжини; $\alpha = 0,2$; сторони $x = 0, y = 0, y = b$ жорстко закріплені, а $x = a$ – вільний

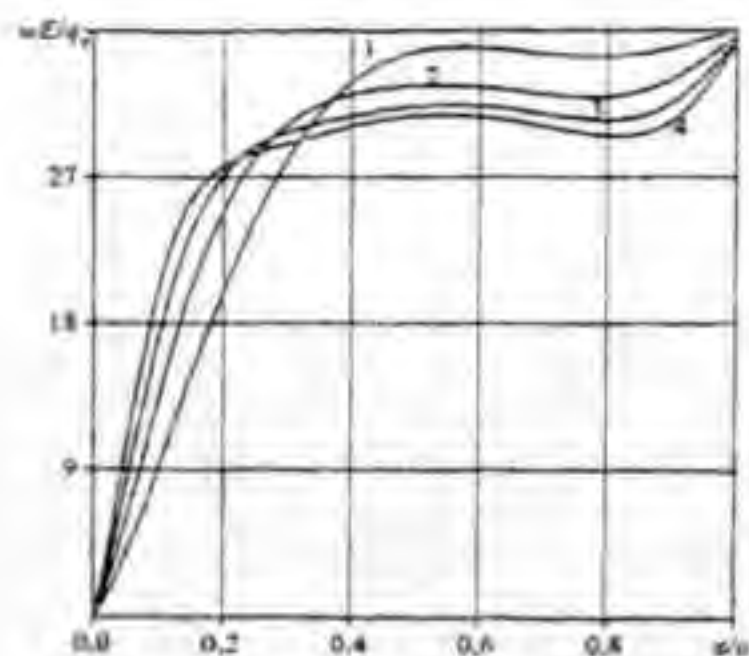


Рис. 4. Прогини w при зміні параметру довжини; $\alpha = -0,2$; сторони $x=0$, $y=0$, $y=b$ жорстко закріплені, а $x=a$ – вільний

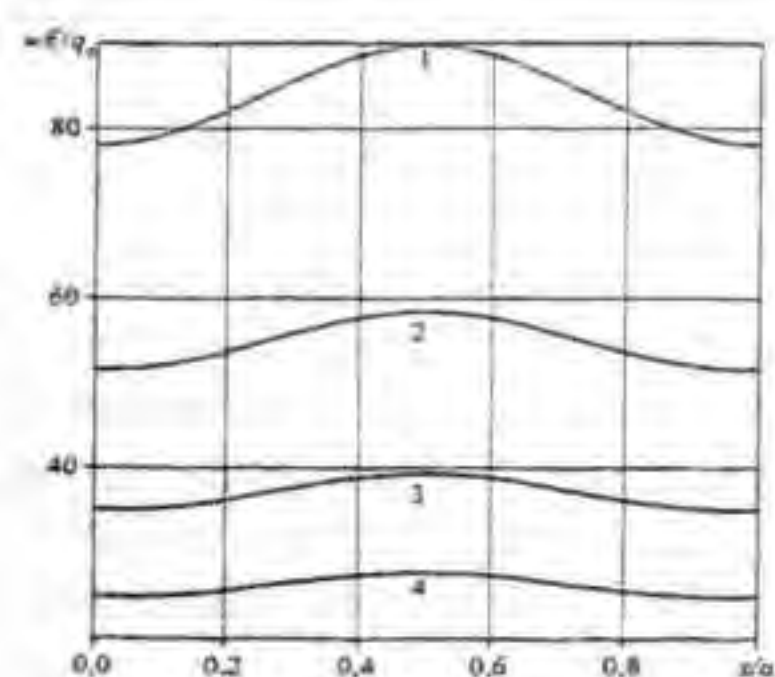


Рис. 6. Прогини w при зміні параметру кривизни; $\alpha = -0,2$; сторони $y=0$, $y=b$ жорстко закріплені, а $x=0$, $x=a$ – вільні

На рис. 5 – 8 представлені результати розрахунків прогинів w оболонки, що розглядається, в перерізі $y = b/2$ в залежності від характеру зміни її кривизни. На рис. 5, 6 наведено результати розрахунків в випадку, коли в оболонки два протилежні края жорстко закріплені, а інші два края вільні; на рис. 7, 8 – в оболонки три края жорстко закріплені і один край вільний. На рис. 5, 7 наведено результати розрахунків в випадку, коли параметр товщини α дорівнює 0,2, а на рис. 6, 8 – -0,2.

Після аналізу результатів, які наведені на рис. 5 – 8 відмітимо, що при збільшенні кривизни, прогин оболонки зменшується.

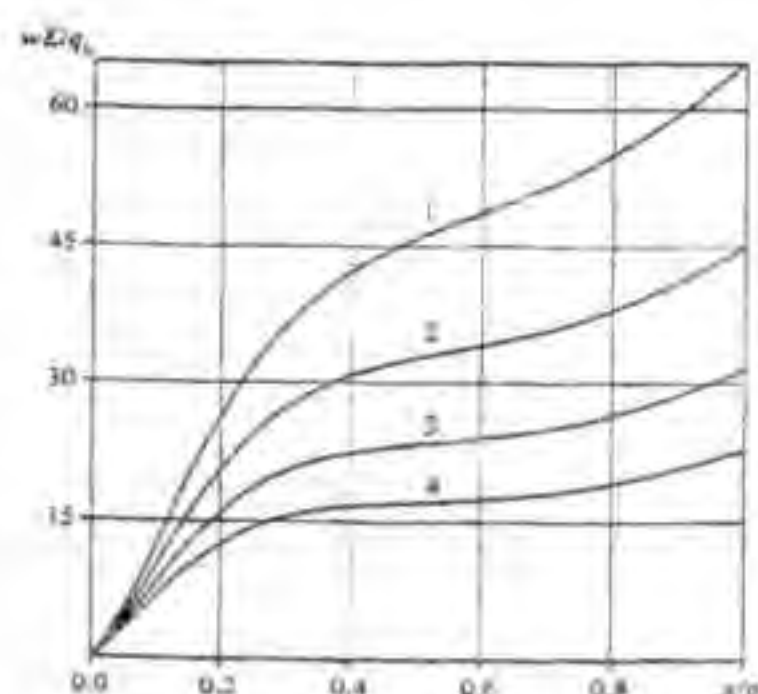


Рис. 7. Прогини w при зміні параметру кривизни; $\alpha = 0,2$; сторони $x=0$, $y=0$, $y=b$ жорстко закріплені, а $x=a$ – вільний

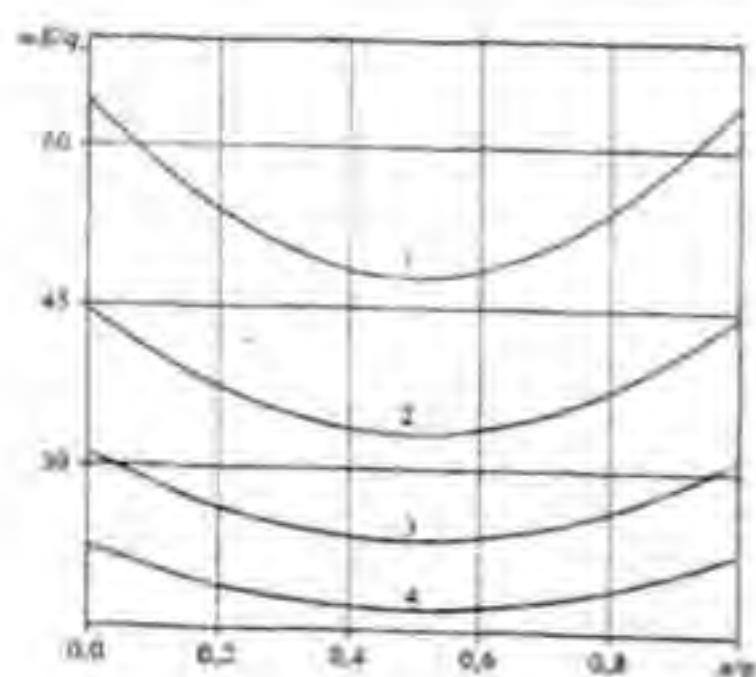


Рис. 5. Прогини w при зміні параметру кривизни; $\alpha = 0,2$; сторони $y=0$, $y=b$ жорстко закріплені, а $x=0$, $x=a$ – вільні

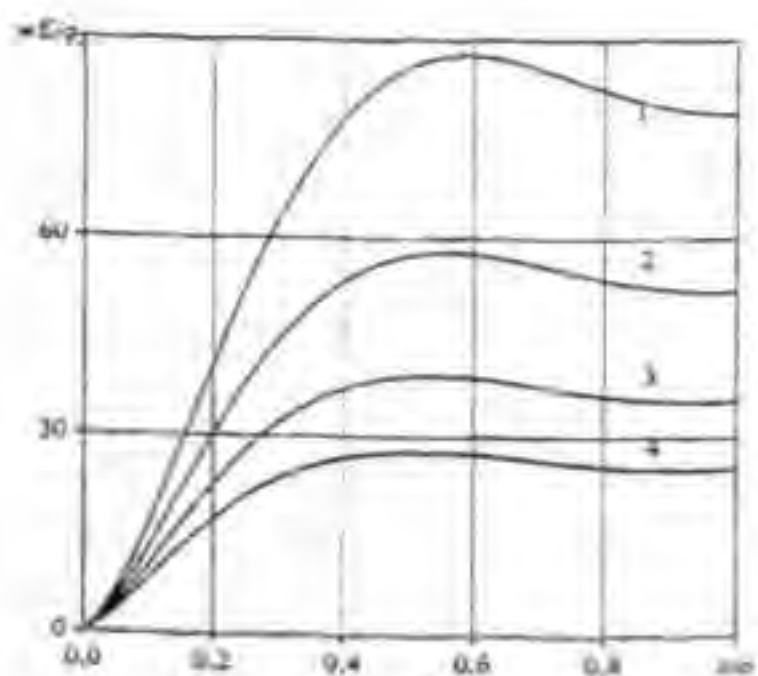


Рис. 8. Прогини w при зміні параметру кривизни; $\alpha = -0,2$; сторони $x=0$, $y=0$, $y=b$ жорстко закріплені, а $x=a$ – вільний

Застосована чисельно-аналітична методика дозволяє проводити визначення напружено-деформованого стану пологої оболонки змінної товщини в широкому діапазоні зміни механічних і геометричних параметрів.

Список використаних джерел

1. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P. On Stress-Strain State of Rectangular in the Plan Shallow Shells of Variable Thickness in a Refined Statement // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 10. – P. 1121-1130.
2. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariyenko L.I. Solving the Problems on the Stress-Strain State of Cylindrical Shells with a Corrugated Elliptical Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 9. – P. 1021 – 1028.
3. Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Analysis of an Effect of Orthotropy Parameters on Displacements and Stresses in Non-Thin Cylindrical Shells with an Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 654 – 661.

Надійшла до редколегії 15.11.2007

УДК 539.3

Ян Фуцзян, аспірант

Вимушені коливання двошарової анізотропної циліндричної оболонки при швидкому обертотому русі

Наводяться рівняння динаміки двошарової анізотропної циліндричної оболонки з невідомою серединною поверхнею та з врахуванням впливу розтягу серединної поверхні на згин. Досліджено випадок вимушених радіально-кругових коливань при швидкому обертанні. Для другої нормальної моди встановлені кількісні дані про розщеплення частот коливань та про зменшення їх амплітуд в порівнянні з нерухомою оболонкою.

Ключові слова: анізотропні оболонки, нормальні моди, резонансні частоти.

*E-mail: fujiang@univ.kiev.ua

Представлено проф. А.Ф. Улітко

Вступ

В роботі [1] досліджено вимушені коливання довгої одношарової п'єзокерамічної циліндричної оболонки, яка перебуває у швидкому обертотому русі навколо своєї осі. Розглядалася плоска деформація згину-розтягу у перерізі, перпендикулярному до вісі оболонки. Було встановлено, що біжучі в круговому напрямку прямі та обернені хвилі деформації за рахунок обертання оболонки з великою кутовою швидкістю зазнають суттєвого спотворення, що характеризується розщепленням резонансних частот в межах десятків відсотків від частоти нерухомої оболонки та зменшенням у декілька разів амплітуд переміщень у порівнянні з амплітудами нерухомої оболонки.

Цей результат може бути використаний на практиці при розрахунках швидкісних трубчастих центрифуг [2] для оцінки можливої втрати стійкості руху, коли найнижчі частоти коливань ротора та кутова швидкість є співвимірними величинами. Такі центрифуги застосовуються, наприклад, в сучасній медичній техніці [2]. Слід мати на увазі, що для виготовлення роторів зазвичай використовуються шаруваті оболонки, утворені однорідною ізотропною металічною основою та анізотропними армуючими волокнистими матеріалами. Тому рівняння теорії анізотропних оболонок в даному випадку є досить складними, оскільки положення "серединної" поверхні є невідомим наперед. Крім того, для вірного розрахунку резонансних частот коливань, при виведенні цих рівнянь слід враховувати

Yang Fujiang, postgraduate student

Forced vibrations of two-layer anisotropic cylindrical shell under the fast rotation

Equations of dynamics of two-layer anisotropic cylindrical shell with the unknown middle surface are given with the account of influence of stretching of middle plane on the flexure deformation. Forced vibrations of radial-circular type under the fast rotation are examined for the second normal mode. Splitting of resonance frequencies of vibrations and wave amplitudes suppression are derived and compared with those data for non-moving shell.

Key Words: anisotropic shell, normal modes, resonance frequencies.

складові, що описують вплив деформації розтягу на згин оболонки [3], якими зазвичай нехтують в технічних теоріях оболонок [4].

Властивості коріолісової дисперсії стаціонарних коливань і хвиль в пружних тілах при обертотому русі також враховуються при постановці задачі. Рівняння коливань оболонки в рухомій системі відліку виявляються зв'язаними за коріолісовими прискореннями, а їх розв'язок, як і в теорії хвильових гіроскопів [5], будується у формі біжучих хвиль деформації. Врахування втрат енергії на резонансних коливаннях (обмежуємося моногармонічними коливаннями) проводиться за моделлю в'язкого тертя з введенням добротності матеріалу оболонки Q . Це дозволяє подати розрахунок розщеплення резонансної частоти та зробити оцінки "пригнічення" амплітуд переміщень прямої та оберненої хвиль деформації анізотропної оболонки ротора центрифуги.

1. Рівняння коливань двошарової анізотропної оболонки

При виведенні рівнянь коливань армованої циліндричної оболонки вважаємо, що її елемент, показаний на рис. 1 складається шарів скловолокна (товщина h_1) та алюмінію (товщина h_2).

При цьому для алюмінію та скловолокна використовуються різні співвідношення пружної деформації (індекс 1 – скловолокно, індекс 2 – алюміній)

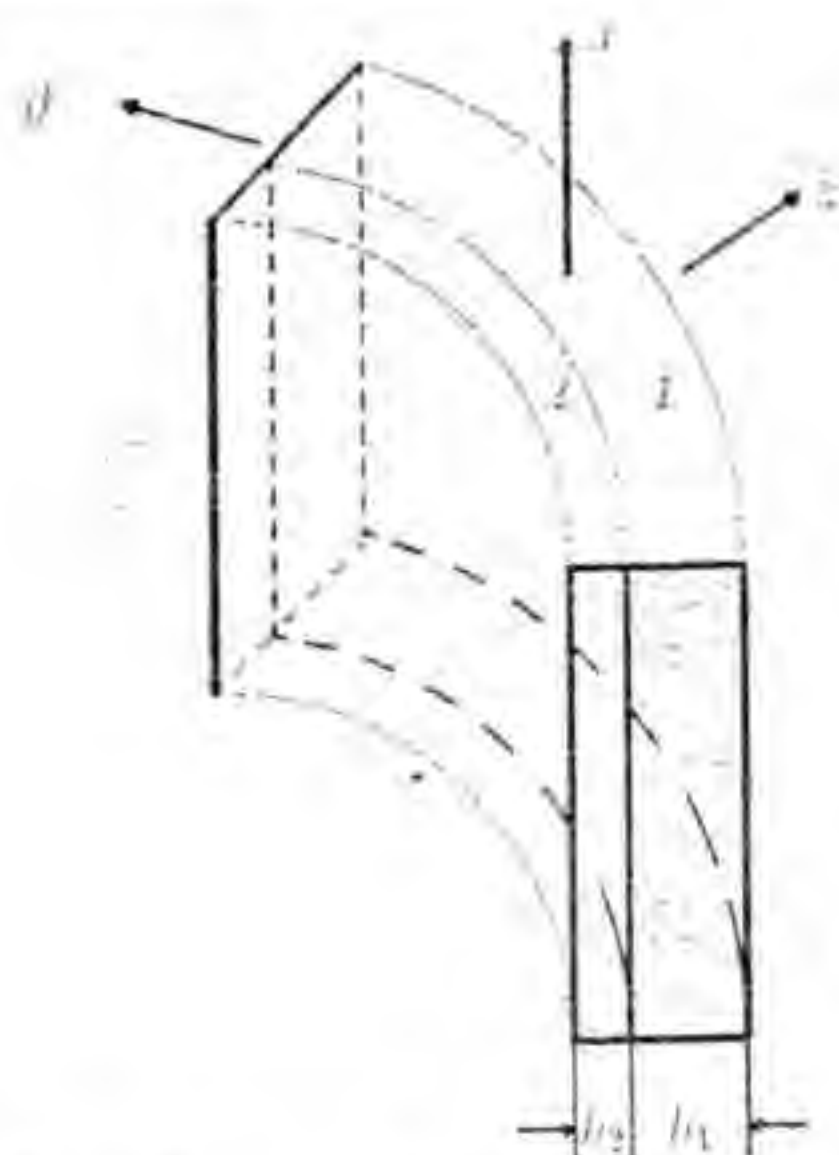


Рис. 1 Елемент двохарової оболонки

$$\begin{aligned}\sigma_0^{(1)} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}[(\varepsilon_1 + \nu_1\varepsilon_2) - (z-z_0)(\chi_0 + \nu_1\chi_x)], \\ \sigma_0^{(2)} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}[(\varepsilon_2 + \nu_2\varepsilon_1) - (z-z_0)(\chi_x + \nu_2\chi_0)], \\ \tau_{\theta\theta}^{(1)} &= G_{1,2}[\gamma_{12} - (z-z_0)2\chi_{\theta r}], \\ \sigma_0^{(2)} &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - (z-z_0)(\chi_0 + \nu\chi_x)], \\ \sigma_x^{(1)} &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) - (z-z_0)(\chi_x + \nu\chi_0)], \\ \tau_{\theta\theta}^{(2)} &= G[\gamma_{12} - (z-z_0)2\chi_{\theta r}],\end{aligned}\quad (1)$$

а положення серединної поверхні двохарового елемента визначається так [6]:

$$z_0 = \frac{1}{2}h_1 \frac{1 - \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2^2}{h_1^2}}{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}}. \quad (2)$$

де E_1, ν_1 – поздовжні, а E_2, ν_2 – поперечні модулі пружності та коефіцієнти Пуасона скловолкна, E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуасона алюмінію, G – модуль зсуву алюмінію, $G_{1,2}$ – круговий модуль зсуву скловолкна.

Використовуючи відомі з літератури [7] рівняння рівноваги (руху) оболонки в зусиллях і моментах, розрахованих за формулами (1)-(2) двохарового елемента оболонки, з подальшою заміною деформацій $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ та кривизн $\chi_0, \chi_x, \chi_{\theta r}$ через похідні від прогинів u, v, w , отримуємо

систему трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді

$$\begin{aligned}& \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \\& + \left(\nu \nu^* + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} + \frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \\& - \nu \nu^* \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \theta^2} = \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2}, \\& \left(\frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \\& + \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\& + \left(\nu \nu^* + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \\& + \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\& + \left(\frac{\nu}{b^2} \frac{D_M^{(0)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{D_N^{(1)}} + \frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} = \\& = \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2}, \\& - \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(0)}}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - w - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \\& - \left(\frac{2\nu}{b^2} \frac{D_M^{(0)}}{D_N^{(1)}} + \frac{2}{b^2} \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \\& + \nu \nu^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta^2} + \\& + \left(\frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(1)}} - \frac{2}{b^2} \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{D_N^{(1)}} - \frac{\nu}{b^2} \frac{D_M^{(0)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} - \\& - \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} = \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

В цих рівняннях b – радіус оболонки, $\xi = x/b$ – безвимірний осьова координата, P – сила внутрішнього тиску,

$$\begin{aligned}c_1^2 &= \frac{E_1}{\rho_1(1-\nu_1\nu_2)} \frac{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_1} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}}, \\c_2^2 &= \frac{E_2}{\rho_1(1-\nu_1\nu_2)} \frac{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}}.\end{aligned}\quad (4)$$

– розрахункові швидкості пружних хвиль в круговому і осьовому напрямках, $D_N^{(1)}$, $D_N^{(0)}$, $D_M^{(1)}$, $D_M^{(0)}$, $d_N^{(1)}$ – циліндричні жорсткості на згин, G^* , $\tilde{G}$, g^* , – приведені модулі зсуву ν^* – приведений коефіцієнт Пуасона, які є лінійними величинами, розрахованими за координатою серединної поверхні z_0 (2), товщинами шарів h_1 , h_2 , матеріальними константами алюмінію й скловолокна і мають вирази аналогічні до формул (4).

2. Побудова загального розв'язку для радіально-кругових коливань оболонки, яка рівномірно обертається.

Ретельне дослідження загальної системи рівнянь коливань двошарової оболонки (3) було виконане у доповіді [8]. Зокрема встановлено, що найбільший вплив швидкого обертового руху на зміну динамічних характеристик коливань оболонки спостерігається для прецесуючих мод згинних коливань в перерізах $\xi = \text{const}$, тобто в площині, перпендикулярній до вісі оболонки. При належному підборі граничних умов на торцях оболонки можна домогтися реалізації випадку плоскої деформації, однорідної по координаті ξ .

У цьому випадку, в системі координат, яка обертається разом з оболонкою з кутовою швидкістю Ω_0 , зв'язані за коріолісовими прискореннями рівняння коливань записуються у вигляді

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \left(\frac{b\Omega_0}{c_1}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial \theta} = \\ & = \frac{b^2}{c_1^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Omega_0^2 v - 2\Omega_0 \frac{\partial w}{\partial t}\right) - \\ & - \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w + \\ & + \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \\ & + \left(\frac{b\Omega_0}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) - \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} = \\ & = \frac{b^2}{c_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Omega_0^2 w + 2\Omega_0 \frac{\partial v}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Побудова загального розв'язку системи рівнянь (5) ґрунтується на тому, що резонансні стани в оболонці, яка обертається, здійснюються на біжучих хвилях [5]. В теорії хвильових гіроскопів це важливе положення породжує так звану прецесійну модель коливань резонатора. В нашому випадку слід припустити, що розподіл функції внутрішнього тиску P від сепарованої субстанції в рідинному середовищі є гармонічним у часі. Тоді розв'язок рівнянь (5) можна вибрати у вигляді прямих і обернених біжучих хвиль деформації в напрямку кругової координати θ

$$\begin{aligned} v &= B^- e^{-i(n\theta - \omega t)} + B^+ e^{i(n\theta + \omega t)}, \\ w &= C^- e^{-i(n\theta - \omega t)} + C^+ e^{i(n\theta + \omega t)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Після підстановки виразів (6) в рівняння (5) отримуємо однотипні системи алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних констант $B^\pm$, $C^\pm$. Їх значення обчислюються у вигляді

$$\begin{aligned} B^- &= -\frac{i}{\Delta^-(kb)} \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + \right. \\ & \quad \left. + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + 2(kb)\epsilon + n\epsilon^2 \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \\ C^- &= \frac{1}{\Delta^-(kb)} \left[(kb)^2 + \epsilon^2 - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta^-(kb) &= (kb)^4 + \left\{ \left[\frac{4n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - (n^2 + 1) \left(\frac{n^2}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - (n^2 + 2)\epsilon^2 \right\} (kb)^2 - 4\epsilon \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right] + n\epsilon^2 (kb) + \left[\epsilon^2 - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) \right] \cdot \left[\frac{2n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{n^4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 1 - (n^2 - 1)\epsilon^2 \right] - \\ & \quad - \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + n\epsilon^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

резонансний визначник прямих хвиль, та

$$B^+ = \frac{i}{\Delta^+(kb)} \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \right. \\ \left. + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) - 2(kb)\varepsilon + n\varepsilon^2 \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \\ C^+ = \frac{1}{\Delta^+(kb)} \left[(kb)^2 + \varepsilon^2 - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \quad (9)$$

де

$$\Delta^+(kb) = (kb)^4 + \left\{ \left[\frac{4n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - (n^2 + 1) \left(\frac{n^2}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) \right] - \right. \\ \left. - (n^2 + 2)\varepsilon^2 \right\} (kb)^2 + 4\varepsilon \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \right. \\ \left. + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + n\varepsilon^2 \right] (kb) + \\ + \left[\varepsilon^2 - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{2n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{n^4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 1 - (n^2 - 1)\varepsilon^2 \right] - \\ - \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + n\varepsilon^2 \right]^2 \quad (10)$$

резонансний визначник обернених хвиль. В записаних формулах

$$\varepsilon = \frac{\Omega_0 b}{c_1}, \quad (kb)^2 = \left(\frac{\omega b}{c_1} \right)^2, \quad (11)$$

відповідно, нормовані кутова швидкість обертання та хвильове число.

3. Розв'язок для резонансних коливань з врахуванням скінченної механічної добротності матеріалу

Спочатку проаналізуємо розв'язок задачі про вимушені коливання оболонки без обертання. Для цього слід в записаних вище формулах покласти $\varepsilon = 0$. Тоді виявиться, що амплітуди прямих і обернених хвиль та резонансні визначники є рівними за абсолютною величиною

$$-B^- = B^+ = \frac{i}{\Delta(kb)} \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \right. \\ \left. + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \\ C^- = C^+ = \frac{1}{\Delta(kb)} \left[(kb)^2 - \right. \\ \left. - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \frac{Pb^2}{D_N^{(1)}} \quad (12)$$

а резонансний визначник $\Delta(kb)$ має вигляд

$$\Delta(kb) = (kb)^4 + \left[\frac{4n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - (n^2 + 1) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{n^2}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) \right] (kb)^2 - \\ - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \left(\frac{2n^2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{n^4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 1 \right) - \\ - \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right]^2 \quad (13)$$

Підставляючи (12) та (13) в формули для переміщень (6) і утримуючи лише дійсні частини комплексних виразів, маємо

$$\frac{v(\theta, b)}{b} = -\frac{2}{\Delta(kb)} \left[n \left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \right. \\ \left. + n^3 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \frac{Pb}{D_N^{(1)}} \sin n\theta \cos \omega t \quad (14)$$

$$\frac{w(\theta, b)}{b} = \frac{2}{\Delta(kb)} \left[(kb)^2 - \right. \\ \left. - n^2 \left(1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right] \frac{Pb}{D_N^{(1)}} \cos n\theta \cos \omega t. \quad (15)$$

Обмежимося надалі випадком другої нормальної моди коливань, покладаючи $n = 2$. Для аналізу переміщень (14) – (15) на монорезонансних коливаннях скористаємося загальноновживаною характеристикою затухання коливань – добротністю оболонки Q для даного типу деформації. При малих значеннях механічних напружень Q не залежить від їхньої величини. Якщо найменший додатній корінь резонансного визначника (13) позначити через $k_0 b$, то з врахуванням добротності Q на другому резонансі замість

квадрата хвильового числа $(kb)^2$ слід підставити у формули (12)–(13) вираз

$$(kb)^2 \approx (k_0 b)^2 \left(1 - \frac{i}{Q}\right). \quad (17)$$

Вважаючи Q великим числом порядку декількох сотень одиниць, слід асимптотично перетворити визначник (13), утримуючи в ньому величини порядку Q^{-1} і нехтуючи Q^{-2} , Q^{-3} ... і т.д. В результаті отримаємо

$$\Delta(k_0 b) = -\frac{i}{Q} (k_0 b)^2 \left[\frac{16}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 5 \left(\frac{4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) + 2(k_0 b)^2 \right] \quad (18)$$

При перетворенні амплітуд переміщень (14)–(15) враховуємо лише величини порядку Q в чисельниках

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta, b)}{b} &= 4Q \frac{Pb}{D_N^{(1)}} \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + 4 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) \right]}{(k_0 b)^2 \left[\frac{16}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 5 \left(\frac{4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) + 2(k_0 b)^2 \right]} \sin 2\theta \cos \omega t \\ \frac{w(\theta, b)}{b} &= 8Q \frac{Pb}{D_N^{(1)}} \frac{\left[1 - \frac{2}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} + \frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right] - (k_0 b)^2}{(k_0 b)^2 \left[\frac{16}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 5 \left(\frac{4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) + 2(k_0 b)^2 \right]} \cos 2\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (19)$$

При розрахунках амплітуд переміщень було вибрано наступні значення параметрів: $\nu = 0.33$, $\nu_2 = 0.33$, $\rho = 2.85 \times 10^3$ кг/м³, $\rho_1 = 1.55 \times 10^3$ кг/м³, $h_1 = 3$ мм, $h_2 = 3$ мм, $E = 70$ ГПа, $E_1 = 240$ ГПа, $E_2 = 18$ ГПа, $G_{1,2} = 16$ ГПа, $b = 70$ мм, $P = 10000$ Па, тоді значення найнижчої резонансної частоти нерухомої оболонки, визначене за другою формулою (11) виявилось рівним

$$\omega_0 = 6263.78 \text{ рад/с}, \quad (20)$$

а величини амплітуд переміщень (19), розраховані для добротності оболонки $Q = 1000$ одиниць є такими:

$$\begin{aligned} \frac{v}{b} &\approx 0.39 \sin 2\theta \cos \omega_0 t \\ \frac{w}{b} &\approx 0.81 \cos 2\theta \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (21)$$

Під час обертання оболонки $\varepsilon \neq 0$ розрахунок визначників прямих (8) і обернених (10) хвиль проводимо за тим же правилом, що й для нерухомої оболонки (18). Маємо:

$$\Delta^-(kb) = -\frac{i}{Q} \left\{ 2(kb)_-^4 + \left[\frac{16}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 5 \left(\frac{4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) - 6\varepsilon^2 \right] (kb)_-^2 - 4\varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + 4 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \varepsilon^2 \right] (kb)_- \right\} \quad (22)$$

та

$$\begin{aligned} \Delta^+(kb) &= -\frac{i}{Q} \left\{ 2(kb)_+^4 + \left[\frac{16}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} - 5 \left(\frac{4}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} + 1 \right) - 6\varepsilon^2 \right] (kb)_+^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4\varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}}\right) + 4 \left(\frac{1}{b^2} \frac{D_M^{(1)}}{D_N^{(1)}} - \frac{1}{b} \frac{d_N^{(1)}}{D_N^{(1)}} \right) + \varepsilon^2 \right] (kb)_+ \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

де $(kb)_-$ та $(kb)_+$ – найменші з дійсних додатних коренів відповідних рівнянь. При розрахунках для великої кутової швидкості обертання оболонки $\Omega_0 = (\pi/3) \times 10^3$ рад/с, отримуємо такі значення найнижчих резонансних частот прямої та оберненої хвиль

$$\omega_- = 5577.37 \text{ рад/с}, \quad \omega_+ = 7208.30 \text{ рад/с}, \quad (24)$$

Після громіздких перетворень виразів для амплітудних констант $B^\pm$, $C^\pm$ (7) та (9) на основі за-

гального розв'язку (6) при врахуванні лише дійсних значень були отримані такі вирази для амплітуд прямої хвилі деформації

$$\begin{aligned}\frac{v}{b} &\approx 0.22 \cos(2\theta - \omega_+ t) \\ \frac{w}{b} &\approx 0.45 \sin(2\theta - \omega_+ t)\end{aligned}\quad (25)$$

та амплітуд оберненої хвилі деформації

$$\begin{aligned}\frac{v}{b} &\approx 0.17 Q \cos(2\theta + \omega_- t) \\ \frac{w}{b} &\approx 0.35 Q \sin(2\theta + \omega_- t)\end{aligned}\quad (26)$$

В обох випадках покладалося $Q = 1000$ одиниць. Отже виявляється, що при обертанні з великою кутовою швидкістю для прямої біжучої хвилі амплітуди переміщень зменшуються приблизно в 1.81 рази як для кругової v , так і для радіальної w компонентів переміщень. Для оберненої хвилі обидві компоненти переміщень зменшуються ще більше — приблизно в 2.34 рази.

Висновки

Проведені розрахунки розщеплення резонансних частот коливань (24) вказують на те, що області небезпечних з точки зору динамічної стійкості резонансів цього типу знижується приблизно на десять відсотків (частота прямої хвилі $\omega_+ = 5577.37$ рад/с проти $\omega_0 = 6263.78$ рад/с нерухомої оболонки). В той же час спостерігається ефект "пригнічення" амплітуд коливань за рахунок обертання з великою кутовою швидкістю: амплітуди переміщень (25), (26) є суттєво меншими за амплітуди коливань нерухомої оболонки (21). Ці дві обставини мають враховуватись в розрахунках конструкції трубчастої центрифуги. Зокрема дані про амплітуди коливань дозволять уточнити формулювання умов спраження обо-

лонки ротора з іншими елементами конструкції, а дані про частоти коливань будуть використані при формулюванні задачі стійкості руху центрифуги.

Список використаних джерел

1. Улитко И.А., Никитенко В.Н. Вынужденные колебания тонкой пьезокерамической цилиндрической оболочки при быстром вращательном движении // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 2004. — 47, — № 3. — С. 7
2. Лукьяненко В.М., Таранец А.В. Центрифуги: Справ. изд. — М.: Химия, 1988. — 384 с
3. Улитко А.Ф., Куценко А.Г. К теории стационарных колебаний цилиндрической оболочки. // Доповіді НАН України. — 1998. — № 5. — С. 66-69.
4. Markus S. The mechanics of vibrations of cylindrical shell. — Amsterdam: Elsevier. 1988. — 160 p.
5. Улитко А.Ф. Колебания тонкой пьезокерамической цилиндрической оболочки, що знаходиться в обертотому русі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 1996. — 39, — № 1. — С. 7-18.
6. Ян Фуцзян Про визначення нейтральної "серединної" площини двошарового пружного елемента. // Вісник Київського університету, Серія фіз.-мат. науки. — 2006. — № 3 — С. 125-129.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 635с.
8. Улитко А.Ф., Ян Фуцзян К динамике сложной роторной конструкции на базе двухслойной цилиндрической оболочки // Тез. докл. симп. "Консонанс-2007", Київ, 25-27 сентября 2007, ИГМ НАНУ. — С. 42.

Надійшла до редколегії 29.10.07

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Акіменко В.В., д.т.н., професор, Трофимчук О.Ю.*

Чисельний метод розв'язку задачі оптимального керування для системи локально-одновимірних інтегро-диференціальних параболічних рівнянь.

Для системи локально-одновимірних інтегро-диференціальних рівнянь параболічного типу з виродженням побудовано стійкий чисельний алгоритм оптимального керування на класі кусково-гладких функцій.

Ключові слова: система інтегро-диференціальних рівнянь, початково-крайова задача, параболічні рівняння, виродження, оптимальне керування, чисельний алгоритм.

*E-mail: ok_trof@meta.ua

Для побудови фізично коректних чисельних розв'язків систем інтегро-диференціальних рівнянь параболічного типу з виродженням з [1], [2] в статті використовується метод розщеплення [3] та спеціальні методи нелінійного монотонного згладжування для параболічних операторів [4], [5]. Використання стійких чисельних методів розв'язку систем інтегро-диференціальних рівнянь дозволяє побудувати стійкий чисельний алгоритм оптимального керування для даної системи на класі кусково-гладких функцій з [1], [6].

1. Розглянемо систему початково-крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь параболічного типу в області $Q_T = \Omega \times (0, T)$:

$$y_t^{(p)} = (k^{(p)}(x, t) y_x^{(p)})_x - v^{(p)}(x, t, u^{(p)}) y_x^{(p)} + f^{(p)}(x, t, u^{(p)}) \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} g^{(i)}(\xi, t, u^{(i)}) y^{(i)} d\xi + f^{(p)}(x, t, u^{(p)}) \quad (1)$$

де $p = \overline{1, m}$, $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq \bar{x}\}$, $\bar{u} = (u^{(1)}(x, t), \dots, u^{(m)}(x, t)) \in U$ – множина функцій керувань. Визначимо підобласть $\tilde{\Omega} = \{x | \delta^{(p)} \leq x \leq \bar{x}^{(p)} - \delta\}$, $0 < \delta^{(p)}, \bar{\delta}^{(p)} < 0.5\bar{x}$. Коефіцієнти $k^{(p)}(x, t)$ задовольняють умовам:

$$1) k^{(p)}(x, t) = 0, x \in \Omega^{(p)} \subset \Omega, t \in (0, T); \quad (2)$$

$$2) 0 < v \leq k^{(p)}(x, t) \leq \mu_0, x \in \tilde{\Omega}^{(p)} = \Omega \setminus \Omega^{(p)}, \quad (3)$$

де $v, \mu_0 > 0$ – константи, $\tilde{\Omega}^{(p)}$ – обмежені замкнені області. Визначимо області $\tilde{Q}_T^{(p)} = \tilde{\Omega}^{(p)} \times (0, T)$, $Q_T^{(p)} = \Omega^{(p)} \times (0, T)$. Початкові та граничні умови:

Akimemko V.V., professor, Trofimchuk O.Yr.*

Numerical method for problem of optimum control for the system of 1-dimentional integro-differential parabolic equations.

For the system of 1-dimentional integro-differential parabolic equations with degeneration the stable numerical algorithm of optimum control is built on the class of piecewise-smooth functions.

Keywords: system of integro - differential equations, initial-boundary problem, parabolic equations, degeneration, optimum control, numerical algorithm.

$$y^{(p)}|_{t=0} = \phi^{(p)}(x), \left(\frac{\partial y^{(p)}}{\partial n} + q^{(p)} y^{(p)} \right)_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

де Γ – границя Ω ; n – зовнішня по відношенню до Γ нормаль, $q^{(p)}$ – потоковий коефіцієнт. Коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умовам:

$$f^{(p)} \in L_2(Q_T), \phi^{(p)} \in L_2(\Omega), (v^{(p)})^2 \leq \mu_1, |v^{(p)}| \leq \mu_1, \quad (5)$$

$$\left(\max_{0 \leq t \leq T} \|r^{(p)}\|_{L_2(\Omega)}, \max_{0 \leq t \leq T} \|g^{(p)}\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq \mu_2, 0 \leq q^{(p)} \leq Q_0, \quad (6)$$

де $\mu_1, \mu_2, Q_0 > 0$ – константи. Згідно теореми 1 із [2] узагальнений розв'язок задачі (1)-(4) за умови (5)-(6) існує та єдиний на класі функцій

$$y^{(p)}(x, t) \in L_2(Q_T^{(p)}) \cup V_2^1(\tilde{Q}_T^{(p)}). \text{ На просторі } \Sigma_j = \left\{ L_2(\tilde{Q}_T^{(1)}) \times V_2^1(\tilde{Q}_T^{(1)}) \times \dots \times L_2(\tilde{Q}_T^{(m)}) \times V_2^1(\tilde{Q}_T^{(m)}) \times U \right\}$$

визначимо критерій якості керування – функціонал $J(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, \bar{u})$. Задача оптимального керування для системи (1)-(4) має вигляд:

$$\bar{u}^*(x, t) = \arg \inf_{\bar{u} \in U} J(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, \bar{u}) \quad (7)$$

2. Для області Q_T визначимо рівномірну сітку $\bar{\omega}_{ht} = \{(x_i, t_j) | x_i = ih, i = \overline{0, N}, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}\}$. Позначимо сіточну функцію $y_i^{(p)} = y^{(p)}(x_i, t_j)$. А-різницевий оператор, що апроксимує еліптичний оператор в (1). Для апроксимації інтегрального оператора в (1) використовуємо формулу Сімпсона із [7] з порядком апроксимації $\psi_0 = O(h^4)$.

Розглянемо неявну лінійну немонотонну двошарову схему Кранка – Николсона порядку $O(\tau^2 + h^2)$ для (1) на часовому інтервалі $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ і різницеві рівняння для граничних умов порядку $O(h)$:

$$B^{(p)} y^{(p)(j+1)} = (E + \tau A^{(p)}) y^{(p)(j+1)} = (E - \tau A^{(p)}) \times$$

$$\times y^{(p)(j-1)} + \tau r^{(p)} \sum_{s=1}^m (w^{(s)} y^{(s)(j+1)} + y^{(s)(j-1)}) + 2\tau F^{(p)} \quad (8)$$

$$y_1^0 = \Phi(\phi_j), l_1^{(p)} y^{(p)(j+1)} = 0, l_2^{(p)} y^{(p)(j+1)} = 0, \quad (9)$$

де $l_1^{(p)}, l_2^{(p)}$ – граничні оператори, що діють на шаблонах $i=0, i=1$, та $i=N-1, i=N$; $w^{(s)}$ – вектор коефіцієнтів для функції $g^{(s)}(x, t)$ відповідно численому методу квадратур. Різницеві оператори $A^{(k)}$ та граничні умови записуються за допомогою індексних позначень:

$$(A^{(p)} y^{(p)}) = z_{i+1}^{(p)} (y_{i+1}^{(p)} - y_{i-1}^{(p)}) - (G_{i+1}^{(p)} (y_{i+1}^{(p)} - y_i^{(p)}) -$$

$$- G_i^{(p)} (y_i^{(p)} - y_{i-1}^{(p)})),$$

$$(l_1^{(p)} \tilde{y}^{(p)})_{i=0} = \tilde{y}_1^{(p)} - (1 + h q_0^{(p)}) \tilde{y}_0^{(p)}, \quad (11)$$

$$(l_2^{(p)} \tilde{y}^{(p)})_{i=N} = (1 + h q_N^{(p)}) \tilde{y}_N^{(p)} - \tilde{y}_{N-1}^{(p)}, \quad (12)$$

$$G_{i+1}^{(p)} = U[K^{(p)}(x_i + sh, t_j)] / h^2, \quad (13)$$

$$z_i^{(p)} = Y[v^{(p)}(x_i, t_j)] / (2h), \quad (14)$$

де Φ, U, Y – функціонали із [8], що визначені на шаблонах сітки та забезпечують порядок апроксимації $O(h^2)$ у випадку розривних коефіцієнтів рівняння. Застосуємо до схеми (8) двох циклічний метод компонентного розщеплення [3]

$$(E + 0.5\tau A^{(p)}) y^{(p)(j-1)} = (E - 0.5\tau A^{(p)}) y^{(p)(j-1)}, \quad (15)$$

$$y^{(p)(j+1)} = y^{(p)(j-1)} + \tau r^{(p)} \times \quad (16)$$

$$\times \sum_{s=1}^m (w^{(s)} y^{(s)(j+1)} + y^{(s)(j-1)}) + 2\tau F^{(p)},$$

$$(E + 0.5\tau A^{(p)}) y^{(p)(j+1)} = (E - 0.5\tau A^{(p)}) y^{(p)(j+1)} \quad (17)$$

де $p = \overline{1, m}$. Метод розщеплення вилучає з локально – одновимірних різницевих рівнянь інтегральний член і функцію F^j , що дозволяє застосовувати надалі нелінійне монотонне згладжу-

вання до локально – одновимірних рівнянь розщепленої системи і окремо розв'язувати інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду [7].

Розв'язком m різницевих рівнянь (15) є набір функцій $\{y^{(p)(j-1)}\}$. Сформуємо вектори $\bar{y}^{(j+1)} = \{y^{(1)(j+1)}, \dots, y^{(m)(j+1)}\}$, $\bar{y}^{(j-1)} = \{y^{(1)(j-1)}, \dots, y^{(m)(j-1)}\}$, $\bar{w} = \{w^{(1)}, \dots, w^{(m)}\}$, $\bar{r} = \{r^{(1)}, \dots, r^{(m)}\}$, $\bar{F} = \{F^{(1)(j)}, \dots, F^{(m)(j)}\}$. Тоді, розв'язок підсистеми рівнянь (16) має вигляд

$$\bar{y}^{(j+1)} = \bar{y}^{(j-1)} + 2\tau \bar{r}(\bar{w}, \bar{y}^{(j-1)}) / (1 - \tau(\bar{w}, \bar{r})) +$$

$$+ 2\tau \bar{F} + 2\tau^2 \bar{r}(\bar{w}, \bar{F}) / (1 - \tau(\bar{w}, \bar{r}))$$

при умові $|1 - \tau(\bar{w}, \bar{r})| \geq C_1$, де $C_1 > 0$ – константа. Визначимо сумарний порядок апроксимації схеми (15) – (17). За умови

$$0.5 \| (Y[v^{(p)}(x_i, t_j)])_x \|_C \leq L_0, \quad L_0 > 0 \quad (19)$$

$$(Y[v^{(p)}(x_i, t_j)])_x < 0, \quad \forall (x_i, t_j) \in \bar{\omega}_{ht}, \quad \text{або} \quad (20)$$

$$0.25\tau \| (U[v^{(p)}(x_i, t_j)])_x \|_C \leq (1 - L_1), \quad 0 < L_1 < 1, \quad (21)$$

оператори $B^{(p)} \geq L_1 E > 0$, та існують обернені оператори $(B^{(p)})^{-1}$: $\|(B^{(p)})^{-1}\| \leq 1/L_1$. Використовуючи тотожність:

$$(B^{(p)})^{-1} = E - 0.5\tau A^{(p)} + 0.25\tau^2 (A^{(p)})^2 -$$

$$- 0.125\tau^3 (A^{(p)})^3 (B^{(p)})^{-1}$$

для (15)–(17), для функцій $\{y^{(p)(j+1)}\}$ одержуємо:

$$y^{(p)(j+1)} = (E - 2\tau A^{(p)} + 2\tau^2 (A^{(p)})^2) y^{(p)(j-1)} +$$

$$+ 2\tau (E - \tau A^{(p)}) r^{(p)} \sum_{s=1}^m (w^{(s)} y^{(s)(j)} +$$

$$+ 2\tau (E - \tau A^{(p)}) F^{(p)(j)} + O(\tau^3),$$

Підставимо сюди різницевий вираз:

$$(E - \tau A^{(p)}) y^{(p)(j-1)} = y^{(p)(j)} - \tau F^{(p)(j)} -$$

$$- \tau r^{(p)} \sum_{s=1}^m (w^{(s)} y^{(s)(j)} + O(\tau^2 + h^2))$$

Остаточно одержуємо систему рівнянь:

$$(y^{(P,j+1)} - y^{(P,j-1)}) / (2\tau) + 0.5A^{(P)}(y^{(P,j)}) + (22) \\ + y^{(P,j-1)}) = 0.5r^{(P)} \sum_{s=1}^m (w^{(s)}, y^{(s,j+1)} + y^{(s,j-1)}) + \\ + F^{(P)} + \psi_1^{(P)}, \quad \psi_1^{(P)} = O(\tau^2 + h^2).$$

Схема (15)-(17) апроксимує систему (1) з сумарним порядком $\psi_1^{(P)} = O(\tau^2 + h^2)$, що співпадає з порядком апроксимації нерозщепленої схеми (8).

3. Для доведення стійкості схеми (15)-(17) скористаємось теорією ρ -стійкості двошарових різницевих схем для несамопряжених операторів $A^{(P)}$ із [8]. З (19) – (21) та (15) маємо оцінку:

$$\|y^{(P,j+1-3)}\| \leq \exp(\tau \tilde{L}) \|y^{(P,j-1)}\|, \quad (23) \\ \tilde{L} = \begin{cases} 0, & \text{якщо виконано (20),} \\ L_0 / L_1^2, & \text{якщо виконано (21).} \end{cases}$$

Із (18), (23) випливає оцінка

$$\|y^{(P,j+1-3)}\| \leq \|y^{(P,j-1-3)}\| + (2\tau / C_1) \|r^{(P)}\| \times \\ \times \sum_{s=1}^m \|w^{(s)}\| \|y^{(s,j-1-3)}\| + 2\tau \left(\|F^{(P)}\| + (\tau / C_1) \|r^{(P)}\| \times \right. \\ \times \sum_{s=1}^m \|w^{(s)}\| \|F^{(s)}\| \left. \right) \leq \exp(\tilde{L}\tau) \|y^{(P,j-1)}\| + 2\tau C_2 \times \\ \times \exp(\tilde{L}\tau) \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j-1)}\| + 2\tau \left(\|F^{(P)}\| + \tau C_2 \sum_{s=1}^m \|F^{(s)}\| \right)$$

де $C_2 = \max_{P,s} \|w^{(P)}\| \|r^{(s)}\| / C_1$. Звідси одержуємо:

$$\sum_{s=1}^m \|y^{(s,j+1-3)}\| \leq \exp(\tau(\tilde{L} + 2mC_2)) \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j-1)}\| + \\ + 2\tau \exp(\tau mC_2) \sum_{s=1}^m \|F^{(s)}\|, \\ \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j+1)}\| \leq \exp(2\tau(\tilde{L} + mC_2)) \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j-1)}\| + \\ + 2\tau \exp(\tau(\tilde{L} + mC_2)) \sum_{s=1}^m \|F^{(s)}\|.$$

Остаточна оцінка для $y^{(s,j+1)}$ при непарнім j :

$$\sum_{s=1}^m \|y^{(s,j+1)}\| \leq \exp(\tau(j+1)(\tilde{L} + mC_2)) \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j+0)}\| + \\ + 2\tau \sum_{k=1}^{(j+1)/2} \sum_{s=1}^m \|F^{(s,k(2k-1))}\| \exp(\tau(\tilde{L} + mC_2)(j+2-2k)) =$$

$$= \rho^{(j+1)} \sum_{s=1}^m \|y^{(s,j+0)}\| + 2\tau \sum_{k=1}^{(j+1)/2} \sum_{s=1}^m \|F^{(s,k(2k-1))}\| \rho^{(j+2-2k)}$$

де $\rho = \exp(\tau(\tilde{C}_1 + \rho\tilde{L}))$; верхній індекс без скобок означає возведення в ступень. Тоді справедлива

Теорема 1. Різницева схема розщеплення (15) – (17), (18) апроксимує систему (1) з порядком $O(\tau^2 + h^2)$ у внутрішніх точках області Q_T і з порядком $O(h)$ на границі області за умови (19) – (21) та є ρ -стійкою. Для різницевого розв'язку схеми справедлива оцінка (24).

4. Для побудови нелінійних монотонних схем для системи (1) будемо застосовувати нелінійні різницеві оператори із [5]. Для рівнянь (15), (17):

$$y_{i+1}^{(P)} = a_i^{(P)} y_i^{(P)} + b_i^{(P)} + (\Omega^{(P)} y^{(P)})_i, \quad (25)$$

$$y_0^{(P)} = b_0^{(P)} / (1 - a_0^{(P)} + q_0^{(P)} h), \quad (26)$$

$$(\Omega^{(P)} y^{(P)})_i = (\tilde{c}_i^{(P)} - a_i^{(P)} y_i^{(P)} - b_i^{(P)}) \chi_1 + \\ + (\tilde{c}_i^{(P)} - a_i^{(P)} y_i^{(P)} - b_i^{(P)}) \chi_2, \quad (27)$$

$$\chi_1 = \chi(\tilde{c}_i^{(P)} - a_i^{(P)} y_i^{(P)} - b_i^{(P)}), \quad \chi_2 = \chi(a_i^{(P)} \tilde{y}_i^{(P)} + b_i^{(P)} - \tilde{c}_i^{(P)}),$$

$$\tilde{c}_i^{(P)} = \max(\tilde{c}_{i-1}^{(P)}, y_{i-1}^{(P)}), \quad \tilde{c}_i^{(P)} = \min(\tilde{c}_{i-1}^{(P)}, y_{i-1}^{(P)}), \quad (i=1, N-1),$$

$$\tilde{c}_0^{(P)} = \max(y_0^{(P)}, \tilde{y}_0^{(P)}, \tilde{y}_1^{(P)}), \quad \tilde{c}_0^{(P)} = \min(y_0^{(P)}, \tilde{y}_0^{(P)}, \tilde{y}_1^{(P)}),$$

$$b_{i-1}^{(P)} = [(1 - C_i^{(P)} - E_i^{(P)}) y_i^{(P)} + E_i^{(P)} y_{i+1}^{(P)} + C_i^{(P)} y_{i-1}^{(P)} + \\ + E_i^{(P)} b_i^{(P)}] / (1 + C_i^{(P)} + (1 - a_i^{(P)}) E_i^{(P)}),$$

$$a_{i+1}^{(P)} = C_i^{(P)} / (1 + C_i^{(P)} + (1 - a_i^{(P)}) E_i^{(P)}),$$

$$a_{N-1}^{(P)} = 1 / (1 + h q_1^{(P)}), \quad b_{N-1}^{(P)} = 0,$$

$$C_i^{(P)} = 0.5\tau(z_i^{(P)} + G_i^{(P)}), \quad E_i^{(P)} = 0.5\tau(-z_i^{(P)} + G_{i+1}^{(P)}),$$

де $\chi(x)$ - функція Хевісайда; $a_i^{(P)}$, $b_i^{(P)}$ - коефіцієнти прогонки; $C_i^{(P)}$, $E_i^{(P)}$ - допоміжні коефіцієнти. Метод прогонки є стійким за умови:

$$\tau \|z_i^{(P)}\|_C \leq \tilde{C}_0 < 1, \quad C_i^{(P)} \neq 0, \quad E_i^{(P)} \neq 0. \quad (28)$$

де $\tilde{C}_0 = \text{const} > 0$. Будемо накладати обмеження на коефіцієнти різницевих рівнянь (15), (17):

$$z_i^{(P)} > 0 \quad (29)$$

За умови (29), аналогічно [5] одержуємо оцінку:

$$|(\Omega^{(p)} y^{(p)})_i| \leq |\psi_2^{(p)}| \leq O((\tau + h)^2). \quad (30)$$

Аналогічно оцінці (24), для похибок різнице-
вих розв'язків схеми (15)-(17), (18), (25)-(27)
 $\delta_i^{(p,j)} = y_i^{(p,j)} - u_i^{(p,j)}$ одержуємо оцінку

$$\sum_{s=1}^m \|\delta^{(s,j,j+1)}\| \leq \bar{C}_1 \sum_{s=1}^m \|\delta^{(s,j,j-1)}\| + \bar{C}_2 \sum_{s=1}^m \|\Omega^{(s,j,j)} y\| +$$

$$+ 2\tau \sum_{s=1}^m \|\psi_3^{(s,j,j)}\|, \quad \bar{C}_1 = (1 + 2mC_2) \exp(2\tau \bar{L}),$$

$$\bar{C}_2 = (1 - \bar{C}_0)(1 + \exp(\tau \bar{L})(1 + 2\tau mC_2))$$

де $\psi_3^{(s,j,j)} = O(\tau^2 + h^2)$ із (30) остаточна оцінка:

$$\sum_{s=1}^m \|\delta^{(s,j,j+1)}\| \leq \bar{C}_2 \sum_{k=1}^{j^*} \bar{C}_1^{j^*-k} \sum_{s=1}^m \|\psi_2^{(s,j/2k)}\| +$$

$$+ 2\tau \sum_{k=1}^{j^*} \bar{C}_1^{j^*-k} \sum_{s=1}^m \|\psi_3^{(s,j/2k)}\|, \quad j^* = (j+1)/2.$$

Оскільки $\psi_2^{(s,j)} = O((\tau + h)^2)$, а $\bar{C}_1 = O(1 + \tau)$,
 $\bar{C}_2 = O(1 + \tau)$, то із (31) слід умовна збіжність по-
хибки $\sum_{s=1}^m \|\delta^{(s,j,j+1)}\| \rightarrow 0$ при $(h^2/\tau) \rightarrow 0$,
 $(h, \tau) \rightarrow 0$. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 1. Різ-
ницева схема розщеплення (15)-(17), (18) із згла-
джуючими операторами із (25)-(27) є стійкою, моно-
тонною та збігається умовно при $(h^2/\tau) \rightarrow 0$,
 $(h, \tau) \rightarrow 0$. Для сумарної похибки різницевої систе-
ми $\sum_{s=1}^m \|\delta^{(s,j,j+1)}\|$ справедлива апріорна оцінка (31).

5. На основі стійкого чисельного алгоритму
розв'язку задачі (1)-(6) розглянемо чисельний алго-
ритм розв'язку задачі (7) на множині кусково-
гладких обмежених функцій керування U із [1]:

$$J = \left\{ \bar{u} | \bar{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}), u^{(p)} = \sum_{j=0}^K \xi_j^{(p)}(x) \chi(t - t_{j-1}) \chi(t_j - t) \right\}$$

$$(32)$$

$$\xi_j^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^K \lambda_{jk}^{(p)} x^k, \quad |\lambda_{jk}^{(p)}| \leq \bar{\lambda}, \quad (p = \overline{1, m}). \quad (33)$$

де $\bar{\lambda} > 0$ - константа, K - ступень поліноміаль-
ної функції. Тоді множина керувань U є обме-
женою та замкнутою: $\|u^{(p)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \bar{u}$, компактно
вкладеною у простір $L_2(\Omega)$ та компактною в со-

бі множиною функцій. Тоді мінімізуюча послідо-
вність функцій $\{u_i^{(p)}\}$ збігається до оптимально-
го керування $\{\hat{u}^{(p)}\} \in U$. Якщо виконані умови
теорем 1-2, та існує стійкий розв'язок задачі (1)-
(6), то розв'язок (7) полягає у мінімізації функції
 J по сукупності $M \times K \times m$ змінних $\{\lambda_{jk}^{(p)}\}$ на
компактній множині $|\lambda_{jk}^{(p)}| \leq \bar{\lambda}$ завдяки методам
дискретної оптимізації. Звідси витікає теорема.

Теорема 3. Нехай виконані умови теорем 1-2 для
задачі (1)-(7), функції керувань $\{u^n(x, t)\}$ нале-
жать множині кусково-гладких обмежених функцій
 U (32), (33), функціонал $J(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, \bar{u})$ слабо
напівнеперервний знизу на множині Σ_j , тоді існує
принаймні одне стійке керування $\hat{u}$ - розв'язок за-
дачі (7), що виражається через сукупність елемен-
тів $\{\hat{\lambda}_{jk}^{(p)}\}$ - границю чисельної послідовності
 $\{\lambda_{jk}^{(p)}\}$, що мінімізує функціонал $J(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, \bar{u})$
на $\Lambda = \left\{ \lambda_{jk}^{(p)} | |\lambda_{jk}^{(p)}| \leq \bar{\lambda}, k = \overline{0, K}; j = \overline{0, M}; p = \overline{1, m} \right\}$.

Визначений за допомогою теорем 1-3 чисельний
алгоритм розв'язку задачі оптимального керування
(1)-(7) можна використовувати в прикладних сис-
темах для моделювання процесів різної природи.

Література

1. Акименко В.В., Наконечный А.Г., Трофимчук О.Ю. Модель оптимального управления для систе-
мы интегро-дифференциальных уравнений. // Ки-
бернетика и системный анализ. - 2007. - №6. - с.
2. Трофимчук О.Ю. Узагальнений розв'язок задачі
Коші для інтегро - диференційного рівняння пара-
болічного типу. // Вісник Київського університету.
Сер.фіз.-мат. науки. - 2007. - №3, с.
3. Марчук Г.И. Методы расщепления. - М.: Наука. -
1988. - 264 с.
4. Акименко В.В. Нелинейное монотонное сглажи-
вание неявной разностной схемы. // Проблемы управ-
ления и информатики. - 2000. - №3, с.98-106.
5. Акименко В.В., Наконечный А.Г. Модели опти-
мального управления демографическими процессами. // Ки-
бернетика и системный анализ. - 2006. - №3, с.107-122.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные урав-
нения. К.: Наукова думка. - 1986. - 544с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: На-
ука, 1989. - 616с.

Надійшло до редколегії 15.11.07

УДК 519.9

Антос'як* П.П.

До правил голосування Кондорсе і Борда

У роботі розглядається одна з можливих постановок задачі знаходження медіани Кемени-Снелла. Дасться пояснення факту „несумісності“ правил Кондорсе та Борда. Наводиться достатня умова одночасного існування переможця Кондорсе і Борда та достатня умова того, щоб переможцем Кемени-Снелла був переможцем Борда.

Ключові слова: ранжування, медіана Кемени-Снелла, колективний порядок Кондорсе, переможець Кондорсе, переможець Борда.

*E-mail: AntosP@ukr.net

Вступ

Задача колективного вибору відноситься до однієї з основних задач експертного оцінювання. Серед задач прийняття рішень ця проблема виділяється великою кількістю конкретних застосувань. До цієї задачі так чи інакше зводиться велика кількість практичних задач (зокрема, соціально-значимих [1]), які виникають в проектуванні технічних приладів, діагностиці захворювань, усередненні індивідуальних думок в соціології, розробці колективних рішень в політиці тощо.

Як правило, в цих задачах процес отримання експертних даних такий: об'єкти або безпосередньо ранжуються експертом, або проводяться попарні порівняння об'єктів один з одним. В залежності від поставленої задачі знаходиться або найкращий об'єкт (задача колективного вибору в формі прямої демократії або ж постановка Гіббарта-Сатертвайта), або результуюче ранжування (задача колективного вибору в формі представницької демократії чи постановка Ерроу) [2].

Для отримання результуючого ранжування (упорядкування множини об'єктів за ступенем проявлення деякої властивості) розроблені різноманітні методи [3 – 5]: метод рядкових сум (спосіб Борда), правило більшості, обчислення медіан, побудова і звуження множини Парето та інші. Однак застосування цих методів на практиці часто дають різні результати чи навіть повністю протилежні. З іншого боку, існують профілі, для яких результуючі ранжування (чи

P. P. Antosjak*

The voting rules of Kondorse and Bord

This work deals with one of the possible ways of finding the Kemeni-Snell's median. The explanation of incompatibility fact of Kondors and Bord's rules is given. A sufficient condition of the simultaneous existence of the winner Kondorse and Bord is given and sufficient condition of Kemeni-Snell being a winner of Bord is given also.

Key Words: ranking, Kemeni-Snell's median, collective order of Kondorse, winner of Kondorse, winner of Bord.

переможці, у випадку голосування) за деякими правилами співпадають.

Постановка задачі

Отже, нехай на фіксованій множині об'єктів $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ експертами, нормовані коефіцієнти компетентності α_l , $l \in L = \{1, \dots, m\}$, яких відомі, задані матриці попарних порівнянь P^l , $l \in L$. Елементи $p_{ij}^l \in \{-1, 1\}$ матриць P^l являють собою результат порівняння l -им експертом об'єктів o_i та o_j , $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

$$p_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{якщо об'єкт } o_i \text{ кращий за } o_j, \\ -1, & \text{якщо } o_i \text{ гірший за } o_j. \end{cases}$$

Одним з методів знаходження результуючого ранжування є обчислення медіани Кемени-Снелла:

$$R^* \in \operatorname{Arg\,min}_{R \in \mathfrak{R}} \sum_{l \in L} \alpha_l d(R, P^l), \quad (1)$$

де $\mathfrak{R}$ – множина всіх матриць, що відповідають строгим ранжуванням n об'єктів (ранжування та матриці, що їм відповідають, будемо позначати однаковими символами),

$$d(R, P^l) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n |r_{ij} - p_{ij}^l| \text{ – відстань Хемінга між}$$

R та P^l .

Теоретичні результати

Оскільки шукана матриця $R \in \mathfrak{R}$, тобто відповідає деякому строгому ранжуванню, то в ній існує єдиний рядок з індексом i_1 , який

Представлено до друку д.т.н. проф. Волошином О.Ф.

містить $n-1$ одиницю, існує єдиний рядок з індексом i_2 , котрий містить $n-2$ одиниці і т.д.

Враховуючи цей факт, зробимо перетворення цільової функції задачі (1):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in L} \alpha_i d(R, P^i) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in L} \alpha_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |r_{ij} - p_{ik}^j| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{k-1} |1 + p_{ik}^j| + \sum_{j=k+1}^n |1 - p_{ik}^j| \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \left[k-1 + \sum_{j=1}^{k-1} p_{ik}^j + n-k - \sum_{j=k+1}^n p_{ik}^j \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \left[n-1 + \sum_{j=1}^{k-1} p_{ik}^j - \sum_{j=k+1}^n p_{ik}^j \right] = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \left[- \sum_{j=1}^{k-1} p_{ik}^j - \sum_{j=k+1}^n p_{ik}^j \right] = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{k-1} p_{ik}^j + \sum_{j=k+1}^n p_{ik}^j \right] = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{k=1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i \sum_{j=k+1}^n p_{ik}^j = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \sum_{i \in L} \alpha_i p_{ik}^j. \end{aligned} \quad (2)$$

Введемо позначення: $a_{ik}^j = \sum_{i \in L} \alpha_i p_{ik}^j$; через Ω позначимо множину всіх можливих перестановок множини індексів $\{1, \dots, n\}$; елемент множини Ω будемо записувати як $(i_1, \dots, i_n)$ і називати варіантом задачі (3).

Твердження 1. Задача (1) еквівалентна наступній задачі:

$$(i_1^*, \dots, i_n^*) \in \text{Arg max}_{(i_1, \dots, i_n) \in \Omega} \{ F(i_1, \dots, i_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n a_{ik}^j \}. \quad (3)$$

Доведення цього твердження випливає із еквівалентних перетворень (2).

У теорії голосування сильним переможцем Кондорсе оголошується той кандидат, котрий „перемагає” всіх інших у попарних порівняннях. Якщо деякий кандидат „не програє” жодному іншому у попарних порівняннях, то за визначенням він оголошується слабким переможцем Кондорсе [5].

Зауваження 1. Слід зауважити, що термін „перемагає” („не програє”) еквівалентний виразу „в індивідуальних перевагах більшості виборців (експертів) кращий (не гірший)”.

Лема 1. Для індивідуальних переваг задачі (3) сильного переможця Кондорсе (для деякого індексу i^*) описує умова:

$$a_{i^*j} > a_{ji^*}, \quad i^* \neq j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

А для слабого переможця Кондорсе виконується:

$$a_{i^*j} \geq a_{ji^*}, \quad i^* \neq j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

і в (5) присутній хоча б один знак рівності.

Доведення. Дійсно, нехай $L_{i^*j}^+ = \{\text{індекси експертів в індивідуальних ранжуваннях котрих об'єкт } o_{i^*} \text{ кращий за об'єкт } o_j\}$, $L_{i^*j}^- = \{\text{індекси експертів в індивідуальних ранжуваннях котрих } o_{i^*} \text{ гірший за } o_j\}$. Маємо: $L = L_{i^*j}^+ \cup L_{i^*j}^-$ і $L_{i^*j}^+ \cap L_{i^*j}^- = \emptyset$ для $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $i^* \neq j$. З урахуванням цього зробимо перетворення величини a_{i^*j} :

$$\begin{aligned} a_{i^*j} &= \sum_{i \in L} \alpha_i p_{i^*j}^i = \sum_{i \in L_{i^*j}^+ \cup L_{i^*j}^-} \alpha_i p_{i^*j}^i = \\ &= \sum_{i \in L_{i^*j}^+} \alpha_i p_{i^*j}^i + \sum_{i \in L_{i^*j}^-} \alpha_i p_{i^*j}^i = \\ &= \sum_{i \in L_{i^*j}^+} \alpha_i - \sum_{i \in L_{i^*j}^-} \alpha_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина $\sum_{i \in L_{i^*j}^+} \alpha_i$ виражає „сумарну”

компетентність групи експертів, в індивідуальних ранжуваннях яких $o_{i^*} > o_j$. Тоді із зауваження 1, формули (6) та властивості асиметричності індивідуальних матриць попарних порівнянь випливає, що умови (4), (5) описують відповідно сильного та слабого переможця Кондорсе для індивідуальних переваг задачі (3).

Під колективним порядком (сильним) Кондорсе розуміють колективну перевагу, побудовану за наступним принципом [5]: сильний переможець Кондорсе виключається з розгляду, для кандидатів (об'єктів), що залишилися знову знаходиться переможець, який займає друге місце в колективній перевазі і т.д. Аналогічним чином можна визначити колективний порядок для слабких переможців Кондорсе (у випадку відсутності сильних).

Позначимо через K колективний порядок Кондорсе (як сильний, так і слабкий) для індивідуальних переваг задачі (3).

Нехай KS – всі оптимальні розв'язки задачі (3).

Кандидата (об'єкт) з номером i^{KS} назовемо переможцем Кемені-Снелла, якщо існує оптимальний варіант $(i_1^*, \dots, i_n^*) \in KS$ такий, що $i^{KS} = i_1^*$.

$$F(i_1^*, \dots, i_{k-1}^*, i^*, i_{k+1}^*, \dots, i_{n-1}^*) - F(i_1^*, \dots, i_{k-2}^*, i^*, i_{k-1}^*, \dots, i_{n-1}^*) = 0.$$

Зауваження 2. Відомо [4], що медіана Кемені-Снелла співпадає, якщо вона існує, з альтернативою (колективним порядком) Кондорсе. Ця медіана співпадає також з впорядкуванням за правилом Слейтера.

Враховуючи зауваження 2 та принцип побудови того чи іншого колективного порядку, в термінах нашої постановки є справедливими наступні твердження.

Твердження 2. Якщо для індексу i^* виконується умова (4), то кандидат (об'єкт) з номером i^* – єдиний переможець Кемені-Снелла.

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай кандидат з номером $i \neq i^*$ теж переможець Кемені-Снелла. Тоді, за означенням, для нього існує оптимальний варіант такий, що $(i = i_1^*, \dots, i_{k-1}^*, i^*, i_{k+1}^*, \dots, i_{n-1}^*)$, $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Але розглянувши різницю:

$$\begin{aligned} & F(i_1^*, \dots, i_{k-1}^*, i^*, i_{k+1}^*, \dots, i_{n-1}^*) - F(i_1^*, \dots, i_{k-2}^*, i^*, i_{k-1}^*, \dots, i_{n-1}^*) = \\ &= \sum_{p=1}^{k-2} \left(\sum_{j=p+1}^{n-1} a_{i^* j} + a_{i^* i} \right) + a_{i^* i_{k-1}} + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{i^* j} + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{i j} + \sum_{p=k+1}^{n-2} \sum_{j=p+1}^{n-1} a_{i j} - \\ &= \sum_{p=1}^{k-2} \left(\sum_{j=p+1}^{n-1} a_{i^* j} + a_{i^* i} \right) - a_{i^* i_{k-1}} - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{i^* j} - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{i j} - \sum_{p=k+1}^{n-2} \sum_{j=p+1}^{n-1} a_{i j} = \\ &= a_{i^* i} - a_{i i_{k-1}} < 0 \end{aligned}$$

отримуємо протиріччя. Твердження доведено.

Твердження 3. Якщо для деякого індексу i^* виконується умова (5), то існує оптимальний розв'язок задачі (3) такий, що $(i^*, i_1^*, \dots, i_{n-1}^*)$.

Доведення.

Нехай $(i_1^*, \dots, i_{k-1}^*, i^*, i_{k+1}^*, \dots, i_{n-1}^*)$, $k \in \{2, \dots, n\}$, деякий (але довільний) оптимальний варіант задачі (3). Розглянемо різницю:

$$F(i_1^*, \dots, i_{k-1}^*, i^*, i_{k+1}^*, \dots, i_{n-1}^*) - F(i_1^*, \dots, i_{k-2}^*, i^*, i_{k-1}^*, \dots, i_{n-1}^*) = a_{i^* i_{k-1}} - a_{i i_{k-1}} \quad (7)$$

Із оптимальності варіанта та вигляду різниці (7) випливає виконання нерівності:

$$a_{i^* i_{k-1}} \geq a_{i i_{k-1}} \quad (8)$$

Згідно з умовою (5) справедливо:

$$a_{i^* i_{k-1}} \leq a_{i i_{k-1}} \quad (9)$$

Враховуючи (8) і (9), маємо, що

$$a_{i^* i_{k-1}} = a_{i i_{k-1}}.$$

Отже,

Цей факт означає, що варіант $(i_1^*, \dots, i_{k-2}^*, i^*, i_{k-1}^*, \dots, i_{n-1}^*)$ також є оптимальним розв'язком задачі (3). Продовжуючи аналогічні міркування через $k-1$ крок отримаємо оптимальність варіанта $(i^*, i_1^*, \dots, i_{n-1}^*)$. Твердження доведено.

Твердження 4. Якщо $K \neq \emptyset$, то $K = KS$.

Як відомо [5], правила Кондорсе й узагальнене правило Борда (надалі просто правило Борда) у певному сенсі є „несумісними“ – існують профілі, при яких переможець Кондорсе не може бути переможцем Борда ні при якій системі балів.

Чим це зумовлено? Які ж умови повинні виконуватись, щоб існували одночасно переможці Кондорсе та Борда?

Зауваження 3. У цьому випадку переможця Борда слід шукати на множині KS .

Дійсно, якщо припустити, що переможець Борда не є переможцем Кемені-Снелла, то тоді він не може бути і переможцем Кондорсе, так як останній завжди є переможцем Кемені-Снелла.

Лема 2 (Достатня умова того, щоб переможець Кемені-Снелла був переможцем Борда). Нехай $(i^*, i_1^*, \dots, i_{n-1}^*)$ – оптимальний варіант задачі (3), для якого виконується наступна умова:

$$i^* \in \underset{i \in \{1, \dots, n-1\}}{\text{Arg max}} \{S(o_i) = \sum_{j \in \{1, \dots, n-1\}} a_{ij}\} \quad (10)$$

Тоді кандидат з номером i^* – переможець Борда для відповідних індивідуальних переваг задачі (3).

Доведення.

Нехай $L_k = \{\text{індекси експертів, що поставили кандидата (об'єкт) з номером } i^* \text{ на } k\text{-те місце}\}$.

Очевидно, що $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$ та $L_i \cap L_j = \emptyset$ при

$i \neq j, i, j = \overline{1, n}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} a_{i^* j} &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l \in L_k} \alpha_l p_{i^* j}^l = \sum_{l \in \bigcup_{k=1}^n L_k} \alpha_l \sum_{j=1}^{n-1} p_{i^* j}^l = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l \in L_k} \alpha_l \sum_{j=1}^{n-1} p_{i^* j}^l \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l \in L_k} \alpha_l \cdot (n-k) \right) = \sum_{k=1}^n ((n-k) \cdot \sum_{l \in L_k} \alpha_l). \end{aligned} \quad (11)$$

Із вигляду (11) стає очевидним, що (11) є правилом підрахунку очок (балів) Борда, тобто:

$$S(o_{i^*}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{i^* j} \cong n_{i^*}.$$

Отже, якщо для індексу i^* виконується умова (10), то кандидат (об'єкт) з номером i^* є переможцем за правилом Борда. Лемі доведено.

Як наслідок із лем 1 та 2 маємо.

Твердження 5 (Достатня умова одночасного існування сильного (слабкого) переможця Кондорсе і Борда). Якщо для деякого індексу i^* виконуються одночасно умови (4) (умова (5) для слабкого) і (10), то кандидат (об'єкт) з номером i^* є одночасно переможцем Кемені-Снелла, Борда та сильним (слабким) переможцем Кондорсе для відповідних індивідуальних переваг задачі (3).

Позначимо через B всі колективні порядки Борда для індивідуальних переваг задачі (3).

Зауваження 4. Колективний порядок Борда визначається за тим самим принципом, що й колективний порядок Кондорсе.

Лема 1, 2 та зауваження 4 забезпечують справедливості наступного твердження.

Твердження 6 (Достатня умова того, щоб медіана Кемені-Снелла співпала з колективним порядком Борда). Нехай для деякого оптимального варіанта $(i_1^*, i_2^*, \dots, i_n^*) \in KS$ виконується умова:

$$i_k^* \in \text{Arg max}_{i \in \{i_k^*, \dots, i_n^*\}} \{S(o_i) = \sum_{j \in \{i_k^*, \dots, i_n^*\}} a_{ij}\}, k = \overline{1, n-1}. \quad (12)$$

Тоді $(i_1^*, i_2^*, \dots, i_n^*) \in B$.

Отже, умова (12) забезпечує, що $KS \cap B \neq \emptyset$.

І як підсумок можна сформулювати наступний результат.

Твердження 7 (Про колективний порядок Кондорсе, Борда та медіану Кемені-Снелла). Якщо $K \neq \emptyset$ і виконується умова (12), то $(K = KS) \cap B \neq \emptyset$.

Приклади

Для ілюстрації розглянемо наведені в [6] приклади, а також покажемо існування профілів, для яких виконується твердження 5.

Приклад 1 (Одночасне існування сильного переможця Кондорсе і Борда).

2	2	3	2
c	a	a	b
a	b	c	c
b	c	b	a

Профіль 1

Цей профіль містить інформацію про те, що 2 виборці (експерти) поставили на перше місце кандидата c , на друге a , на третє b . Аналогічно, наступні 2 виборці задають ранжування $a > b > c$ і т.д.

Для цього профілю 5 виборців поставило кандидата a вище за c , 4 виборці поставили a нижче за c (позначимо це як $a:c=5:4$). Аналогічним чином порівнюємо кандидатів a і b : $a:b=7:2$. Отже, кандидат a – сильний переможець Кондорсе. Також, a єдиний переможець Кемені-Снелла (в цьому можна легко переконатись). Відповідні суми (10) для кандидатів становлять: $S(a)=6$, $S(b)=-6$, $S(c)=0$. Таким чином, a є також переможцем Борда.

Приклад 2 (Одночасне існування слабкого переможця Кондорсе і Борда).

3	2	1	2
c	a	a	b
a	b	c	c
b	c	b	a

Профіль 2

Як і в першому прикладі, єдиним переможцем Кемені-Снелла для профілю 2 є кандидат c . Із $c:a=5:3$, $c:b=4:4$ випливає, що кандидат c є слабким переможцем Кондорсе. Також маємо відповідні суми (10): $S(a)=2$, $S(b)=-4$, $S(c)=2$. Отже, кандидат c – переможець Борда.

Приклад 3 (Фішберн, 1973 р.).

3	2	1	1
c	a	a	B
a	b	c	C
b	c	b	A

Профіль 3

Єдиним переможцем Кемені-Снелла для профілю 3 є кандидат c . Єдиним переможцем Кондорсе також є кандидат c . Але кандидат c не може бути переможцем Борда, оскільки відповідна сума (10) для нього дорівнює 2 (в той час як для кандидата a відповідна йому сума (10) становить 4).

Аналогічно показується факт „несумісності“ для наступного профілю.

Приклад 4

4	2	2	3
c	c	b	b
b	a	a	c
c	b	c	a

Профіль 4

Список використаних джерел

1. Антосяк П.П., Волошин О.Ф. Проблеми прийняття колективних соціально-значимих рішень // Proceeding of the XII-th International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution", June 20-25, 2006, Varna (Bulgaria). – Sofia, FOI-COMMERCE-2006. – P.153-157.
2. Fudenberg, Drew and Jean Tirol. Game theory. – MIT Press. Cambridge, Massachusetts.
3. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. – Москва: Радио и связь, 1982. – 255 с.

Для цього профілю маємо:

$a:b=6:5$, $a:c=6:5$, отже a – переможець

Кондорсе.

Можна пересвідчитись і в тому, що a також переможець Кемені-Снелла.

$S(a)=2$, $S(b)=6$, $S(c)=-8$ і a – не є переможцем Борда.

Висновки.

- Умову (5) можна використовувати як додаткову процедуру скорочення розмірності вихідної задачі (а в деяких випадках для виключення з розгляду на кожному кроці переможця Кондорсе (при наявності такого)) в покомпонентному алгоритмі аналізу та відсіювання варіантів (алгоритм W [7]).
- Наведено достатню умову одночасного існування переможця Кондорсе і Борда та достатню умову того, щоб переможець Кемені-Снелла був переможцем Борда.
- Твердження 7 показує взаємне „розташування“ колективних порядків Кондорсе, Кемені-Снелла та Борда, що пояснює „несумісність“ правил Кондорсе й узагальненого правила Борда.

4. Жилин Б.Б. Экспертные оценки в социологических исследованиях. – Киев: Наукова думка, 1990. – 320 с.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – Москва: Мир, 1991. – 464 с.
6. Волошин О.Ф., Машенко С.О. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
7. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика, 1978, №4 – С. 98-105.

Надійшла до редколегії 30.10.2007

УДК 627.324.2/3:532.72

Власюк А.П.^{*}, д.т.н., професор, Остапчук О.П.

Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини

Побудовано математичну модель задачі масопереносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини з врахуванням залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації солей. Числовий розв'язок відповідної оберненої нелінійної крайової задачі отримано методом скінченних різниць з використанням конформних відображень. На основі аналізу проведених числових експериментів показано суттєву відмінність у проходженні процесу масопереносу для випадку фільтрації сольового розчину в порівнянні з масопереносом на фоні фільтрації чистої води.

Ключові слова: фільтрація сольових розчинів, масоперенос, крайова задача, математична модель, конформні відображення, монотонна різницева схема.

^{*}E-mail: A.P.Vlasyuk@rstu.rv.ua

1. Вступ. При добуванні корисних копалин із надр, як один із способів використовують метод розчинення і перенесення їх фільтраційним потоком з подальшим вловлюванням достатньо густою системою свердловин, що знаходиться на контурі впливу даної свердловини [1].

2. Постановка задачі. Розглядається процес нагнітання деякого фільтрату в досконалу свердловину радіуса r_1 при плановій напірній або безнапірній фільтрації в круговому пласті з радіусом впливу свердловини r_2 і потужністю пласта T , в результаті чого відбувається перенесення сольових розчинів в круговому пласті (рис.1). Нехай задано напір в свердловині дорівнює H_1 , а на контурі її впливу – H_2 . Крім того, відомо розподіл концентрації сольових розчинів в свердловині $\bar{C}_1(t)$, а також розподіл концентрації солей в області фільтрації кругового пласта $\bar{C}_0(x, y)$. На контурі впливу свердловини гранична умова для концентрації сольових розчинів задається диференціальним оператором I_2 . Ґрунтового середовища вважається ізотропним відносно проникності сольового розчину з коефіцієнтом фільтрації $k(c)$, залежним від концентрації сольового розчину [2].

A. P. Vlasyuk^{*}, Doctor of engineering sciences, O.P.Ostapchuk

Mathematical modeling of salt solution transfer at hole filtration

Here is a mathematical model of a problem of salt solution mass transfer during hole filtration. Dependencies of filtration parameters and mass transfer upon salt concentration are taken into account. Numerical solution of such reverse nonlinear boundary problem was obtained by finite differences method with conformal reflections. Analysis of results of conducted numerical experiments gives an opportunity to show that mass transfer in case of salt solution substantially differs from mass transfer at pure water filtration.

Key Words: filtration salt solution, mass transfer, boundary-value problem, mathematical model, conformal mapping, monotonic finite difference scheme.

Необхідно дослідити розподіл солей в круговому пласті з плином часу та відмінність між процесом поширення солей на фоні фільтрації чистої води ($k=const$) та у випадку фільтрації сольових розчинів ($k=k(x, c)$).

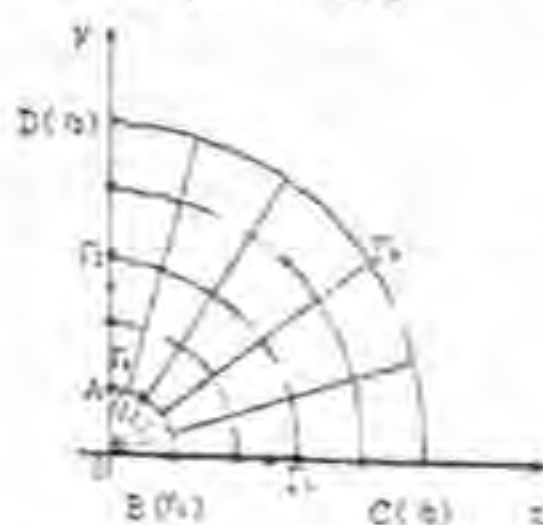


Рис.1. Фрагмент області фільтрації в плані

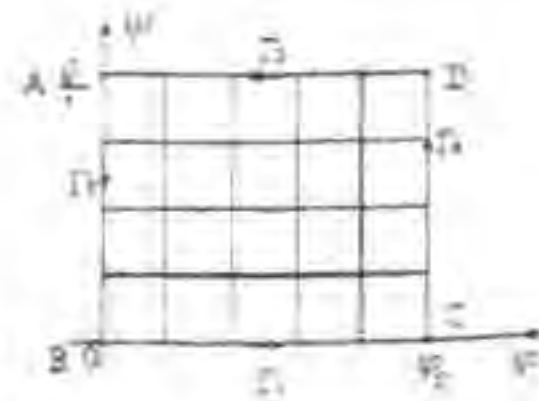


Рис.2. Область комплексного потенціалу

3. Математична модель задачі в фізичній площині (x, y). Математична модель поширення сольових розчинів в ізотропному пласті при напірній фільтрації їх із свердловини на основі робіт [1-7] прийме вигляд

$$\frac{\partial \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_x(c) \frac{\partial c}{\partial x} - V_y(c) \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

Тут: $c(x, y, t)$ – концентрація сольових

$$\bar{V} = -k(\varepsilon) \operatorname{grad} h, \quad \operatorname{div} (T \cdot \bar{V}) = 0, \quad (2) \text{ розчинів, } \bar{V} = (V_x, V_y) \text{ – вектор швидкості}$$

$$h|_{r=r_1} = H_1, \quad h|_{r=r_2} = H_2, \quad (3) \text{ фільтрації, } C_* \text{ – концентрація граничного}$$

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (4) \text{ насичення, } \gamma \text{ – константа швидкості масообміну;}$$

$$c|_{r=r_1} = \tilde{C}_1(t), \quad (5) \text{ } \sigma \text{ – пористість ґрунту, } l_2 \text{ – диференціальний}$$

$$l_2 c = \begin{cases} c|_{r=r_2} = \tilde{C}_2(t), \\ \frac{\partial c}{\partial n}|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \quad (6) \text{ оператор, що задає граничну умову для}$$

$$D(c) = D_\infty + \lambda \cdot |V(c)| \text{ – коефіцієнт,}$$

Після перетворень (1), отримаємо

$$D(c) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - \left(V_x - \frac{\partial D(c)}{\partial x} \right) \frac{\partial c}{\partial x} - \left(V_y - \frac{\partial D(c)}{\partial y} \right) \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (7)$$

4. Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу. Згідно розробленого підходу [4], перейдемо в задачі (1) – (6) до нових змінних φ, ψ області комплексного потенціалу, де φ потенціал фільтрації: $\varphi = -\bar{k}Th$, $\bar{k}$ – усереднений коефіцієнт фільтрації по області фільтрації, ψ – функція течії. Тоді компоненти усередненої швидкості фільтрації для середовища з усередненим коефіцієнтом фільтрації $\bar{k}$ визначаються як:

$$\bar{V}_x = -\bar{k} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{V}_y = -\bar{k} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (8)$$

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, на основі (2), отримаємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (9)$$

Тоді, після переходу в (7) до змінних φ, ψ , отримаємо

$$D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) - \bar{V}^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} \frac{1}{T} + \\ + \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial D(c)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) - \frac{\gamma}{T^2} (c - C_*) = \frac{\sigma}{T^2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (10)$$

де $\bar{V}^2(\varphi, \psi) = \bar{V}_x^2(\varphi, \psi) + \bar{V}_y^2(\varphi, \psi)$ – квадрат усередненої швидкості по області фільтрації. Математична модель крайової задачі (1) – (6)

з урахуванням осесиметричності випадку та (10) в нових змінних φ, ψ прийме вигляд

$$D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left(\frac{1}{T} - \frac{\partial D(c)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{T^2} (c - C_*) = \frac{\sigma}{T^2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (x, y) \in G_*, \quad (12)$$

$$x^2(0, \psi) + y^2(0, \psi) = r_1^2, \quad (13)$$

$$x^2(\varphi_0, \psi) + y^2(\varphi_0, \psi) = r_2^2, \quad (14)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi), \quad (15)$$

$$c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(t), \quad (16)$$

$$l_2 c = \begin{cases} c(\varphi_0, \psi, t) = \tilde{C}_2(t), \\ \frac{\partial c}{\partial \varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

де φ_0 – значення потенціалу фільтрації, що знаходиться нижче, ψ – параметр.

Перетворимо (11) наступним чином: (оскільки $\bar{V}^2(\varphi, \psi) \neq 0$ для $(\varphi, \psi) \in G_*$)

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{D(c)} \left(\frac{1}{T} - \frac{\partial D(c)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma(c - C_*)}{D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) T^2} = \frac{\sigma}{D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) T^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} \quad (18)$$

5. Обчислювальний алгоритм. Для розв'язання поставленої задачі масопереносу сольових розчинів, знайдемо спочатку поле швидкості фільтрації $\bar{V} = (\bar{V}_x, \bar{V}_y)$ із розв'язку задачі фільтрації (12)-(14) в оберненій постановці. Після чого, отримаємо розв'язок задачі масопереносу (11), (15) – (17). Для її розв'язання застосуємо різницевий метод з використанням монотонної різницевої схеми [8, 9] та конформних відображень.

В результаті конформного відображення областей (рис.1,2), знаходимо характеристичну функцію течії

$$z = e^{\frac{2\pi}{Q}(w_1 + w_0)} \quad (19)$$

де фільтраційна витрата Q знаходиться як

$$x + iy = e^{\frac{2\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \cdot e^{i \frac{2\pi\psi}{Q}} = e^{\frac{2\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \cdot \left(\cos \frac{2\pi\psi}{Q} + i \sin \frac{2\pi\psi}{Q} \right) \quad (21)$$

Звідси, відокремлюючи дійсну і уявну частини, отримаємо

$$\begin{cases} x = e^{\frac{2\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \cdot \cos \frac{2\pi\psi}{Q} \\ y = e^{\frac{2\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \cdot \sin \frac{2\pi\psi}{Q} \end{cases} \quad (22)$$

Тоді координати різницевої гідродинамічної сітки фільтрації знаходяться як

$$\begin{cases} x_h = e^{\frac{2\pi(h_1 + \varphi_0)}{Q}} \cdot \cos \frac{2\pi(jh_2)}{Q} \\ y_h = e^{\frac{2\pi(h_1 + \varphi_0)}{Q}} \cdot \sin \frac{2\pi(jh_2)}{Q} \end{cases} \quad (23)$$

$$|\bar{V}_c| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{\left| \frac{dz}{dw} \right|} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{|x + iy|} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то

$$V_c^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} e^{-\frac{4\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \quad (25)$$

Тоді, значення швидкості у вузлах сітки наступні

$$Q = \frac{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$w_0 = \varphi_0 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (20)$$

$\varphi_1 = -\bar{k}TH_1$, $\varphi_2 = -\bar{k}TH_2$ – потенціали фільтрації відповідно на контурі свердловини та на контурі її впливу у випадку планової напірної фільтрації;

$\varphi_1 = 0,5 \bar{k}H_1^2$, $\varphi_2 = 0,5 \bar{k}H_2^2$ – у випадку планової фільтрації з вільною поверхнею.

З (19) маємо

$$x + iy = e^{\frac{2\pi}{Q}(\varphi + \varphi_0 + i\psi)}$$

або

де $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$, h_1, h_2 – кроки різницевої сітки на параметричному прямокутнику області комплексного потенціалу.

Комплексна швидкість фільтрації усередненого фільтраційного потоку, як відомо з [4], знаходиться за формулою

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} \quad (24)$$

і в даному випадку дорівнює

$$\bar{V}_c = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}$$

Знайдемо квадрат модуля усередненої швидкості фільтрації. Оскільки

$$V_{ci}^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} e^{-\frac{4\pi(h_1 + \varphi_0)}{Q}}, \quad i = \overline{0, n}$$

або, у вузлах різницевої сітки

$$V_i^2 = \frac{k^2}{\bar{k}^2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi^2} \cdot e^{-\frac{4\pi(\varphi + \varphi_0)}{Q}} \quad (26)$$

Квадрат істинної швидкості фільтрації знаходиться як

$$V^2(\varphi, c) = V_z^2 + V_y^2 = \frac{k^2(c)}{\bar{k}^2} V_c^2(\varphi). \quad (27)$$

$$\mu_i \frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h_i^2} + r_+ \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_i} + r_- \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_i} + F_i^{k+1} = \sigma' \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \quad (28)$$

де

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 0.5h_i|r_i|} = \frac{1}{1 + \frac{0.5h_i}{D_i} \left(\frac{1}{T} - \frac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{2h_i} \right)},$$

$$r_i = r_{i+} + r_{i-}, \quad r_{i+} \equiv 0, \quad r_{i-} \equiv r_i < 0, \quad (29)$$

$$r_{i-} = -\frac{1}{D_i} \left(\frac{1}{T} - \frac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{2h_i} \right),$$

$$D_i = D_m + \lambda \cdot |\bar{V}_i|,$$

$$F_i^{k+1} = -\frac{\gamma(C_i^{k+1} - C_*)}{D_i(C_i^k) \cdot \bar{V}_i^2 \cdot T^2}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{D_i \cdot \bar{V}_i^2 \cdot T^2}$$

Запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_i \cdot C_{i-1}^{k+1} - \bar{c}_i \cdot C_i^{k+1} + b_i \cdot C_{i+1}^{k+1} = -f_i, \quad (30)$$

де

$$a_i = \frac{\mu_i}{h_i^2} - \frac{r_-}{h_i}, \quad b_i = \frac{\mu_i}{h_i^2} + \frac{r_-}{h_i},$$

$$\bar{c}_i = \frac{2\mu_i}{h_i^2} + \frac{r_-}{h_i} - \frac{r_-}{h_i} + \frac{\gamma}{D_i \cdot \bar{V}_i^2 \cdot T^2} + \frac{\sigma}{D_i \cdot \bar{V}_i^2 \cdot \tau \cdot T^2},$$

$$f_i = \frac{\gamma}{D_i \cdot \bar{V}_i^2 \cdot T^2} C_* + \frac{\sigma}{D_i \cdot \bar{V}_i^2 \cdot \tau \cdot T^2} C_i^k.$$

Розв'язок даної різницевої схеми знаходимо методом прогонки

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1} \cdot C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad (31)$$

де прогоночні коефіцієнти відповідно рівні

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{\bar{c}_i - \alpha_i \cdot a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i - f_i}{\bar{c}_i - \alpha_i \cdot a_i}, \quad (32)$$

причому $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \bar{C}_1^{k+1}$.

У випадку задання на контурі впливу свердловини граничної умови першого роду, матимемо $C_n^{k+1} = \bar{C}_2^k$, а у випадку задання граничної умови другого роду - $C_n^{k+1} = \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}$.

7. Програмна реалізація задачі. Для реалізації різницевої схеми даної задачі розроблена комплексна програма в

6. Різницева схема задачі. Для крайової задачі (11), (15) – (17) запишемо монотонну різницеву схему. В результаті матимемо

інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0. В ній реалізовано: діалоговий режим задання параметрів моделі, задання крайових та початкової умов з можливістю візуального контролю відповідних параметрів. Значна увага приділена сервісному оформленню програми у вигляді систем меню та наглядному графічному представленню отриманих результатів з візуалізацією змодельованих фізичних процесів. Зокрема, передбачено: візуалізацію поширення розчинених речовин у ґрунті при перенесенні їх фільтраційним потоком із свердловини; візуалізацію динаміки поширення фронту забруднень; графічне зображення напорів, числові розрахунки та графічне представлення поля швидкості фільтрації, поля концентрації мігруючих речовин та маси винесених речовин із області фільтрації.

8. Результати числових експериментів. Проаналізувавши отримані результати для різних вхідних даних задачі детально досліджено процес масопереносу розчинених солей при залежності параметрів фільтраційного потоку та масопереносу від фізико-хімічних властивостей фільтруючого розчину. У результаті проведення числових експериментів та аналізу результатів зроблено їх порівняння для коефіцієнтів фільтрації $k = const$ і $k = k(x, c)$. Нижче наведено результати числового експерименту із наступними вихідними даними: $T = 10$ м; $l = 100$ м; $\sigma = 0.5$; $\gamma = 0.00065$; $D_w = 0.02$ м²/добу; $\lambda = 5$ м; $H_1 = 15$ м; $H_2 = 1$ м; $r1 = 0.3$; $r2 = 100.3$ м; $n = 10$ м; $m = 5$; $c_* = 350$ г/літр; $\bar{C}_0 = 5$ г/літр; $\bar{C}_1 = 350$ г/літр; $\bar{C}_2 = 5$ г/літр, $k = 1$ м/добу.

9. Аналіз отриманих результатів. При аналізі отриманих результатів числового розв'язку задачі для коефіцієнтів фільтрації $k = const$ і $k = k(x, c)$ виявлено їх суттєву відмінність. Так, наприклад, при заданні деяких крайових умов, швидкість фільтрації, розподіл полів напорів та концентрацій сольових розчинів, час поширення фронту сольових розчинів та кількість винесених солей в басейн стічних вод можуть значно відрізнятися.

Зокрема, розподіл концентрації розчинених солей з плином часу інтенсивніше прямує до насичення при врахуванні залежності $k=k(x,c)$, ніж в порівнянні з випадком $k=const$. Аналогічне спостерігається у випадку дослідження розподілу концентрації по області фільтрації (рис.3).

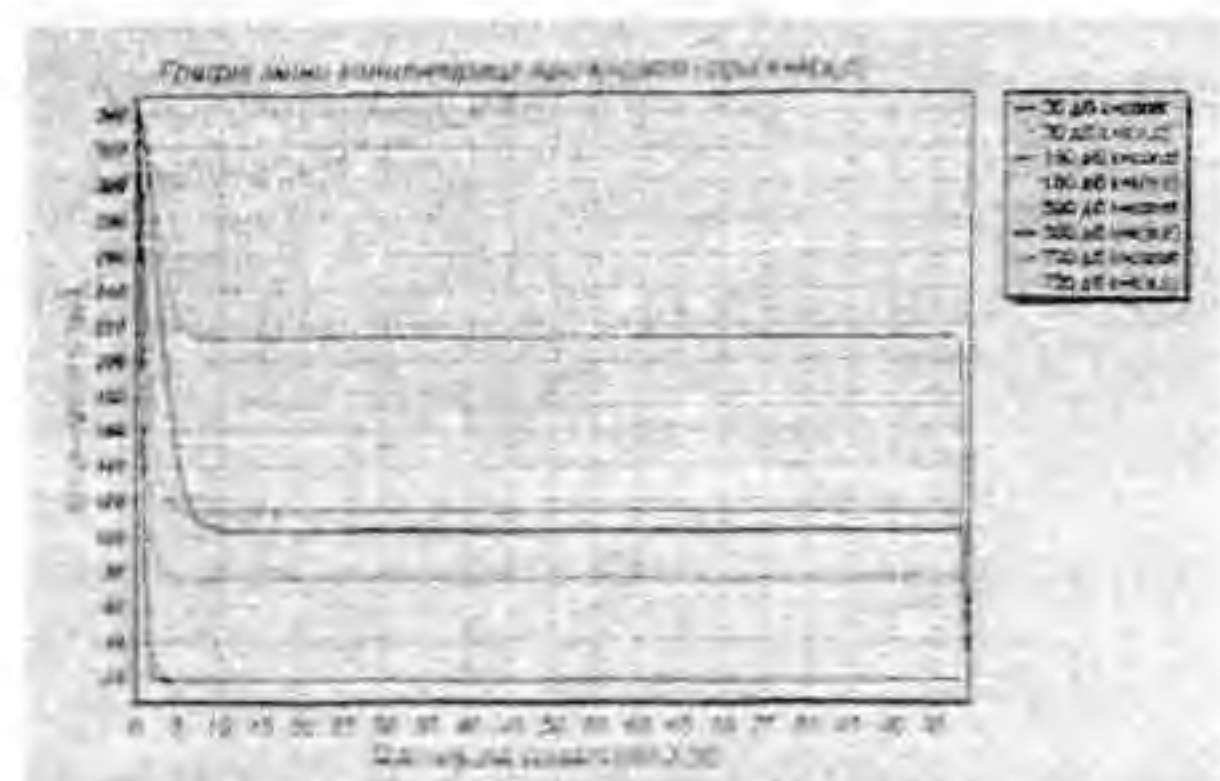


Рис 3. Графіки залежності концентрації по області фільтрації для різних проміжків часу при $k=const$ і $k=k(x,c)$

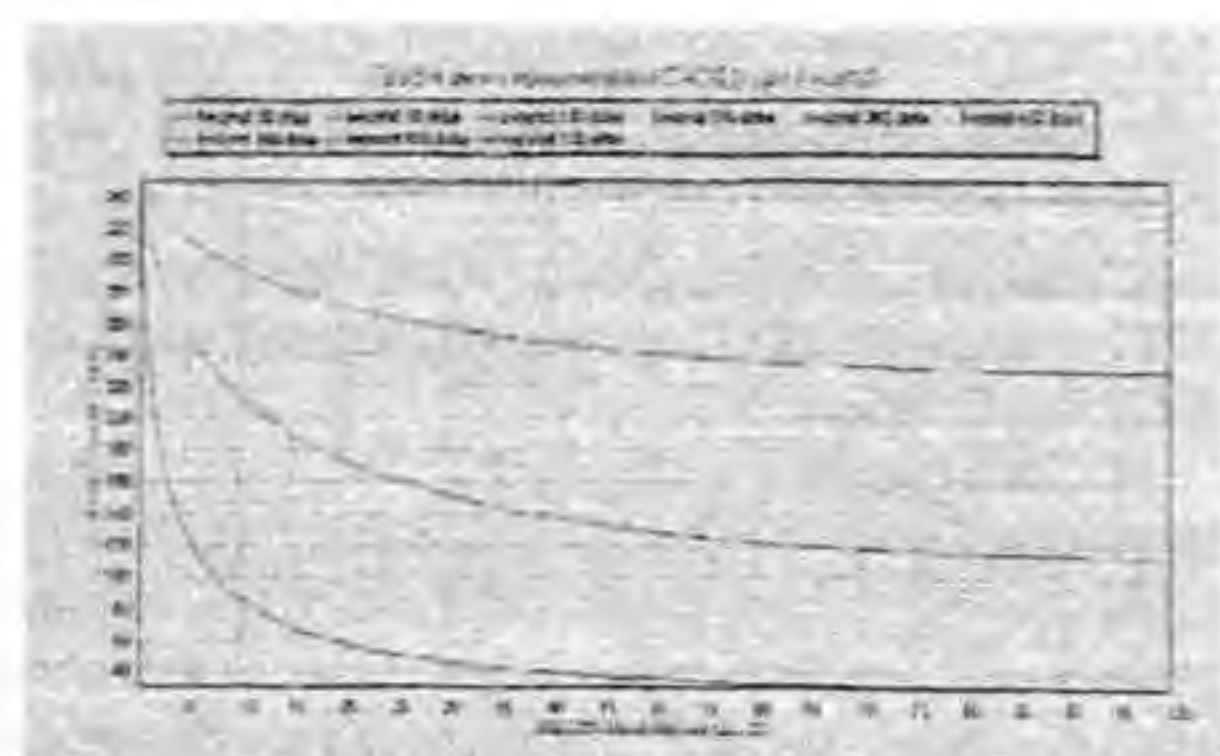


Рис 4. Графіки залежності концентрації по області фільтрації для різних проміжків часу при $k=const$ для граничної умови 2-го роду

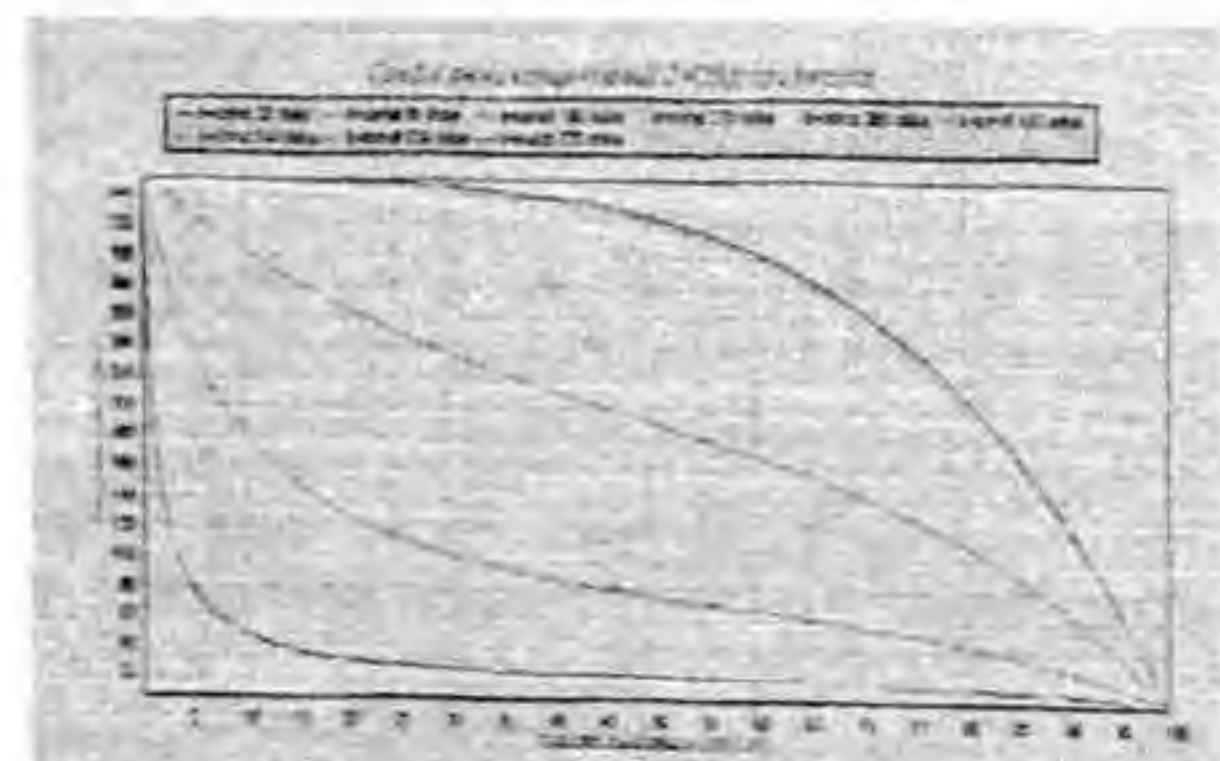


Рис 5. Графіки залежності концентрації по області фільтрації для різних проміжків часу при $k=const$ для граничної умови 2-го роду

В зв'язку з цим, можна стверджувати, що при математичному моделюванні процесу

масопереносу розчинених в фільтраційному потоці солей потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища.

Результати даної статті повністю підтверджують результати роботи [7] на випадок масопереносу сольових розчинів в ґрунтових масивах в одновимірному випадку.

Список використаних джерел

1. Веригин Н.Н., Шержуков Б.С. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). - М.: Наука, 1969. - С.237-313.
2. Власюк А.П., Кузю М.Т. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах. // Меліорація і водне господарство. Міжвідомчий темат. наук. зб. - Вип.87. - К.:2000. - С.43-46.
3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. - Киев: Наук. думка, 1991. - 432 с.
4. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. - К.: Наук. думка, 1990. 376 с.
5. Ляшко С.И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод. - К.: Наук. Думка, 1998. - 256 с.
6. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів: Монографія. - Рівне: В-цтво УДУВГП, 2004. - 211 с.
7. Власюк А.П., Остапчук О.П. Чисельне дослідження одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук.-2004. - Вип. 4 - С.228-237.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. - 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
9. Власюк А.П., Остапчук О.П., Степанченко О.М. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну.// Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук - 2005. - Вип. 2. - С. 188 - 197.

Надійшла до редколегії 26.11.2007

УДК 519.63

Завіша В.В., викладач

Москальков М.М., канд. фіз.-мат. наук, доц.

**Алгоритм чисельного розв'язання задачі
про генерацію акустичних коливань в
кристалі CdS**

В роботі проведено аналіз дисперсійних
властивостей різницевої схеми для системи
рівнянь коливань п'єзонапівпровідникового
кристалу.

Ключові слова: різницева система, сіткові
гармоніки, дисперсійне рівняння.

E-mail: moe@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. фіз.-м. н., професор Приказчиков В.Г.

В деяких п'єзонапівпровідникових кристалах
(наприклад, CdS), що знаходяться в сильному
електричному полі при певних умовах можлива
генерація звукових хвиль. Математична модель
цього процесу та умови генерації проаналізовані
в [1], [2] при сильних спрощеннях відносно
крайових умов та джерела живлення електричної
енергії. Цікаво промодельовати інші крайові
умови механічного та електричного
навантаження кристалів, що може дати
можливість управляти процесом генерації
необхідних коливань. Але можливості
аналітичних методів реалізації складної
математичної моделі цих процесів обмежені.
Тому в роботі пропонується застосувати для
цього моделювання чисельні методи на основі
різницевих схем.

В роботах [4] та [5] проаналізовані умови
генерації гармонік різницевою схемою для цієї
задачі, яка має відмінні від диференціальної
задачі дисперсійні та дисипативні властивості.

В даній роботі побудована різницева схема
для нелінійної моделі процесів генерації
звукових хвиль, розроблений алгоритм реалізації
схеми та проведено дисперсійний аналіз лінійної
моделі цієї схеми.

Диференційні рівняння для безрозмірних
змінних $0 < x < L$, $t > 0$ мають вигляд [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta n + \chi \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (1)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n = 0 \quad (2)$$

$$c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{c}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + w + n + nw = J(t) \quad (3)$$

Zavisha V.V.,

Moskalkov M.N., Ph.D., Ass.Prof.

**Algorithm of numeral solution of task about
the generation of acoustic vibrations in the
crystal CdS.**

In the paper for system of the equations of
fluctuations piezo-semi-conducting a crystal is
carried out the analysis of dispersive properties the
difference scheme.

Key words: the difference scheme, the difference
harmonics, the dispersive equation.

$$J(t) = -b \int_0^L w(x, t) dx \quad (4)$$

де $J(t)$ – відносне відхилення току; δ –
безрозмірний параметр (малий), що характеризує
зв'язність рівняння пружних коливань в кристалі
(1) з рівнянням зміну електричного току (3); v –
безрозмірна дрейфова швидкість електронів; c –
швидкість звуку з урахуванням п'єзоефекту; χ –
коефіцієнт в'язкості (малий параметр); $b = \frac{R}{R_1 L}$ –

де R – опір кристалу до постійного току; R_1 –
внутрішній опір джерела живлення; L –
безрозмірна довжина кристала.

Якщо розглянути кристал, що вільний від
деформацій на кінцях відрізка $x \in [0, L]$, то
маємо граничні умови [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (5)$$

Електрично нейтральному кристалу
відповідають крайові умови [1]:

$$w(0, t) = w(L, t), \quad (6)$$

$$\left(n - \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial x}\right) \Big|_{x=0} = \left(n - \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial x}\right) \Big|_{x=L} \quad (7)$$

З рівняння (3) та крайових умов (6), (7)
отримуємо

$$nw \Big|_{x=0} = nw \Big|_{x=L},$$

а звідси, через (6):

$$n(0, t) = n(L, t) \quad (8)$$

Беручи до уваги рівняння (7) та (8), маємо

$$\frac{\partial n}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial n}{\partial x}(L, t). \quad (9)$$

Таким чином, рівняння (8), (9) замінюють рівняння (6), (7).

І, нарешті, початкові умови задаємо у вигляді:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad (10)$$

$$n(x, 0) = n_0(x) \quad (11)$$

Кристалу, що знаходиться у стані спокою в початковий момент часу, відповідає умова: $u_0(x) = 0, u_1(x) = 0$.

Таким чином, остаточно, математична модель, що описує генерацію коливань п'єзонапівпровідникового кристалу складається з рівнянь (1)-(4), крайових умов (5), (6), (8), (9) та початкових (10), (11).

Введемо сітки

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, \tau > 0\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, N, h = L/N\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{\hat{x}_i = (i - 1/2)h, i = 1, N\}.$$

Апроксимуємо невідомі функції на відповідних сітках:

$$u \approx y, \quad n \approx m \quad x \in \bar{\omega}_h; \quad w \approx p, \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Тоді можна апроксимувати рівняння (1)-(4) схемою

$$y_n = y_{\bar{x}}^{(\sigma, \sigma)} - \delta m + \chi y_{0, \bar{x}}, \quad (12)$$

$$vp_x + y_{\bar{x}} - m = 0, \quad (13)$$

$$cp_t - \frac{1}{v} m_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \frac{c}{v} y_{\bar{x}} + p^{(\sigma)} + \left(\frac{m + m_{(-1)}}{2} \right)^{(\sigma)} + \left(p \frac{m + m_{(-1)}}{2} \right)^{(\sigma)} = j(\bar{t}) \quad (14)$$

$$j(\bar{t}) = -b \sum_{i=1}^N h p_i^{(\sigma)}, \quad (15)$$

де використані стандартні позначення [3].

Схема (12)-(13) нелінійна: єдиний нелінійний член входить в рівняння (14) (останній доданок в лівій частині). Лінеаризація цього рівняння дає

$$cp_t - \frac{1}{v} m_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \frac{c}{v} y_{\bar{x}} + p^{(\sigma)} + \left(\frac{m + m_{(-1)}}{2} \right)^{(\sigma)} = j(\bar{t}) \quad (14')$$

Виключаючи з (13), (14) p та $j(\bar{t})$ (диференціюванням (13) по t та (14) – по x), маємо лінійну схему для невідомих y, m :

$$y_n = y_{\bar{x}}^{(\sigma, \sigma)} - \delta m + \chi y_{0, \bar{x}}, \quad (16)$$

$$cm_t = (m_{\bar{x}} - vm_0 - m)^{(\sigma)} + y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \quad (17)$$

Аналогічними перетвореннями для нелінійного рівняння (14) замість (17), отримуємо

$$cm_t = m_{\bar{x}}^{(\sigma)} - vm_0^{(\sigma)} - m^{(\sigma)} + y_{\bar{x}}^{(\sigma)} - v \left(p \frac{m + m_{(-1)}}{2} \right)^{(\sigma)} \quad (18)$$

Для апроксимації крайових умов (5) введемо фіктивні точки $x_{-1} = -h$ та $x_{N+1} = L + h$. Апроксимуємо перші похідні в точках x_0 та x_N за допомогою центральної похідної:

$$y_{0, \bar{x}} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0, \quad y_{N, \bar{x}} = \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} = 0, \quad (19)$$

Звідси $y_{-1} = y_1, y_{N+1} = y_{N-1}$.

Тоді, наприклад,

$$y_{\bar{x}, 0} = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = \frac{2}{h} y_{\bar{x}, 0},$$

$$y_{\bar{x}, N} = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} = -\frac{2}{h} y_{\bar{x}, N},$$

Це приводить до такої апроксимації граничних умов (5) без використання фіктивних точок:

$$y_{\bar{x}, 0} = \frac{2}{h} y_{\bar{x}, 0}^{(\sigma, \sigma)} - \delta m_0 + \frac{2}{h} \chi y_{0, \bar{x}},$$

$$y_{\bar{x}, N} = -\frac{2}{h} y_{\bar{x}, N}^{(\sigma, \sigma)} - \delta m_N - \frac{2}{h} \chi y_{0, \bar{x}},$$

Останні рівняння за побудовою алгебраїчно еквівалентні (12) (з урахуванням (19)).

Тепер апроксимуємо крайові умови (8), (9). Перше має вигляд:

$$m_0 = m_N. \quad (20)$$

Заміняючи похідні в (9) центральними різницями, маємо

$$m_{0, \bar{x}} = m_{\bar{x}, N}$$

або

$$\frac{m_1 - m_{-1}}{2h} = \frac{m_{N+1} - m_{N-1}}{2h}. \quad (21)$$

Якщо покласти

$$m_{-1} = m_{N-1}, m_{N+1} = m_1 \quad (22)$$

то умови (21) виконуються автоматично.

Апроксимуємо початкові умови за стандартною схемою [3]:

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad m(x, 0) = n_0(x) \quad x \in \bar{\omega}_h \quad (23)$$

$$y_i(x, 0) = \frac{y(x, \tau) - y(x, 0)}{\tau} =$$

$$= u_i(x) + \frac{\tau^2}{2} (u_{0, \bar{x}} - \delta n_0 + \chi u_{1, \bar{x}}). \quad (24)$$

Спочатку розглянемо алгоритм реалізації лінійної схеми.

Використовуючи початкові умови (23), (24), знайдемо y^0 , y^1 та m^0 по явних формулах.

Далі на кожному кроці по часу спочатку знаходимо y^{n+1} по y^n, y^{n-1}, m^n . Для цього використовується рівняння (16) та крайові умови (19). Вони приводять до різницевої крайової задачі другого порядку

$$\begin{aligned} dy_0^{n+1} - 2ay_1^{n+1} &= F_0, \\ -ay_{i-1}^{n+1} + dy_i^{n+1} - ay_{i+1}^{n+1} &= F_i, i = \overline{1, N-1}, \\ -2ay_{N-1}^{n+1} + dy_N^{n+1} &= F_N, \end{aligned}$$

яка реалізується звичайним методом прогонки. Тут

$$a = \sigma \frac{\tau^2}{h^2} + \chi \frac{\tau}{2h^2}, \quad d = 1 + \sigma \frac{\tau^2}{h^2} + \chi \frac{\tau}{h^2},$$

а праві частини $F_i, i = \overline{0, N}$ залежать тільки від відомих значень $y_i^n, y_{i+1}^{n-1}, m_i^n$.

Наступний етап алгоритму – по y^n, y^{n+1}, m^n обчислюємо m^{n+1} . Для цього використовується рівняння (17) та крайові умови (20), (22), які також приводять до різницевої крайової задачі другого порядку

$$\begin{aligned} -Bm_2^{n+1} + Dm_1^{n+1} - Am_N^{n+1} &= \Phi_1, \\ -Am_{i-1}^{n+1} + Dm_i^{n+1} - Bm_{i+1}^{n+1} &= \Phi_i, i = \overline{2, N-1}, \\ -Bm_1^{n+1} + Dm_N^{n+1} - Am_{N-1}^{n+1} &= \Phi_N, \end{aligned}$$

але з крайовими умовами типу періодичних. Тому ця задача реалізується методом циклічної прогонки [3]. Тут

$$A = \alpha \left(\frac{\tau}{h^2} + \nu \frac{\tau}{2h} \right),$$

$$B = \alpha \left(\frac{\tau}{h^2} - \nu \frac{\tau}{2h} \right),$$

$$D = c + \alpha \left(\frac{\tau}{h^2} + \tau \right)$$

а праві частини залежать від відомих $y_i^n, y_{i+1}^{n+1}, m_i^n$.

Перейдемо до опису обчислення p та $j(t)$. З (13) маємо

$$p_i = -\frac{1}{\nu} y_{i,0} + \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{i-1} h m_k + g(t), \quad \forall i \in \omega, \quad (25)$$

де функція $g(t)$ – підлягає визначенню.

Позначимо $q(t) = \sum_{i=1}^N h p_i$. З (25) знаходимо

$$q(t) = -\frac{1}{\nu} (y_N - y_0) + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N h \sum_{k=1}^{i-1} h m_k + g(t) L \quad (26)$$

З іншого боку, взявши суму по i від (14), отримаємо

$$c q_i + (1 + Lb) q^{(\alpha)} = -\frac{c}{\nu} (y_{i,N} - y_{i,0}) - \sum_{i=1}^N h m_i^{(\alpha)}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} q(t_{n+1}) &= \frac{c - \tau(1 + Lb)}{c + \tau(1 + Lb)} q(t_n) - \frac{\tau}{c + \tau(1 + Lb)} \times \\ &\times \left(\frac{c}{\nu} (y_{1,N} - y_{1,0}) + \sum_{i=1}^N h m_i^{(\alpha)} \right) \end{aligned}$$

Через (26)

$$g(t_{n+1}) = \frac{q(t_{n+1})}{L} - \frac{1}{Lv} \left[\sum_{i=1}^N h \sum_{k=1}^{i-1} h m_k^{n+1} \right] \quad (27)$$

Знайдене значення $g(t_{n+1})$ дає змогу за формулою (5.1) обчислити всі $p_i^{n+1}, i = \overline{1, N}$. І, нарешті,

$$j(t_{n+1}) = -b q^{(\alpha)} = -b [\alpha q(t_{n+1}) + (1 - \alpha) q(t_n)] \quad (28)$$

Нелінійна схема реалізується ітераційним методом. Невідомі в лінійній частині схеми, яка співпадає зі рівнянням (17), беруться з $k+1$ -ої ітерації, а нелінійні доданки в (18) беруться з k -ітерації. Далі слідує реалізація на кожній ітерації відносно невідомих на $k+1$ -ій ітерації за алгоритмом лінійної схеми. Ітерації ведуться або до співпадання з заданою точністю ε розв'язків на сусідніх ітераціях, або кількість ітерацій фіксується. Початкове наближення для ітерацій береться з попереднього моменту часу.

Проведемо дисперсійний аналіз сіткових гармонік [4, 5] лінійної схеми (16), (17) при $\sigma = 0$. Для цього підставимо розв'язки у вигляді гармонік

$$y_i^n = A \bar{q}^n \xi^i, \quad m_i^n = B \bar{q}^n \xi^i, \quad \xi = e^{ikh}, j^2 = -1$$

в схему (3.6)(3.7). В результаті отримуємо дисперсійне рівняння для знаходження $\bar{q}$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\bar{q}^2 - 2\bar{q} + 1 + \tau^2 \mu_k \bar{q} + \frac{\chi}{2\tau} (\bar{q}^2 - 1) \right] \times \\ &\times [c(\bar{q} - 1) + \tau \{ \alpha \bar{q} + (1 - \alpha) \} \bar{\mu}_k] - \\ &- \tau^3 \delta \bar{q} \mu_k [\alpha \bar{q} + (1 - \alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Тут $\mu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$, $\bar{\mu}_k = \mu_k + 1 + jv v_k$,
 $v_k = \frac{\sin kh}{h}$.

При $\delta = 0$, $\chi = 0$ з (29) маємо два рівняння

$$\bar{q}^2 - 2\bar{q} + 1 + \tau^2 \mu_k = 0 \quad (30)$$

$$c(\bar{q} - 1) + \tau(\alpha \bar{q} + (1 - \alpha))\bar{\mu}_k = 0 \quad (31)$$

Якщо $\tau^2 \leq \frac{4}{\mu_k}$ (це умова стійкості схеми;

вона приводить до обмеження на кроки сітки $\tau < h$), то дискримінант рівняння (30) від'ємний, тому один з розв'язків

$$\bar{q}_2^0 = 1 - \frac{\tau^2 \mu_k}{2} - j\tau \sqrt{\mu_k \left(1 - \frac{\tau^2 \mu_k}{4}\right)} \quad (32)$$

Знайдемо перше наближення до кореня $\bar{q}_2$ рівняння (29) у вигляді

$$\bar{q}_2^1 = \bar{q}_2^0 + \theta_2^\delta + \theta_2^\chi$$

де θ_2^δ , θ_2^χ лінійні функції по малим параметрам δ та χ , відповідно. Для θ_2^δ маємо з (29) після утримання лінійних по δ членів вираз:

$$\theta_2^\delta = \frac{\tau^2 \delta \mu_k \bar{q}_2^0 (\alpha \bar{q}_2^0 + 1 - \alpha)}{[c(\bar{q}_2^0 - 1) + \tau(\alpha \bar{q}_2^0 + 1 - \alpha)\bar{\mu}_k][2(\bar{q}_2^0 - 1) + \tau^2 \mu_k]}$$

Для θ_2^χ аналогічно маємо

$$\theta_2^\chi = \frac{\chi \tau \mu_k (\bar{q}_2^{02} - 1)}{4 \left[(\bar{q}_2^0 - 1) + \frac{\tau^2 \mu_k}{4} \right]}$$

Проводимо розклад θ_2^δ та θ_2^χ по степенях τ , h та хвильового числа k підставимо їх в

коефіцієнт $\bar{\rho}_2^1 = |\bar{q}_2^1| = |\bar{q}_2^0 + \theta_2^\delta + \theta_2^\chi|$, що характеризує умови підсилення сіткових гармонік [4]:

$$\bar{\rho}_2^1 = 1 + \operatorname{Re} \bar{q}_2^0 \operatorname{Re} \theta_2 + \operatorname{Im} \bar{q}_2^0 \operatorname{Im} \theta_2 + O(\delta^2) =$$

$$= 1 + \frac{\delta \tau}{2} \frac{(v - c)k^2}{(k^2 + 1)^2 + (v - c)^2 k^2} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{\alpha \tau (k^2 + 1)}{v - c} + \tau \frac{k^2 (k^2 + 1)}{R} \right\} + \frac{\delta \tau (v - c)k^2}{2k} \times$$

$$\times \left\{ \alpha \delta \frac{k^2 + 1}{v - c} + O(\tau^2 + h^2) \right\} - \frac{\chi \tau}{2} (k^2 - O(h^2)) =$$

$$= 1 + \frac{\delta \tau}{2} \frac{(v - c)k^2}{(k^2 + 1)^2 + (v - c)^2 k^2} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \tau \frac{k^2 (k^2 + 1)}{R} (1 - 2\alpha)c + O(\tau^2 + h^2) \right\} -$$

$$- \frac{\chi \tau}{2} \left\{ k^2 + O(\delta^2 + \chi^2 + \tau^2 + h^2) \right\}.$$

Це означає, що відмінність $\bar{\rho}_2^1$ від першого наближення $\rho_2^1 = |q_2^1|$, де q_2^1 - множник переходу лінеаризації диференціальної задачі (1)-(4), така

$$\Delta \rho_2 = \rho_2^1 - \bar{\rho}_2^1 = \frac{\delta \tau}{2} \frac{(v - c)k^2}{(k^2 + 1)^2 + (v - c)^2 k^2} \times$$

$$\times \left[\tau \frac{k^2 (k^2 + 1)}{R} (1 - 2\alpha)c + O(\tau^2 + h^2 + \delta^2 + \chi^2) \right]$$

і при $\alpha = 1/2$ ця відмінність характеризується членом другого порядку малості по τ та h на відміну від схеми роботи [4], коли ця відмінність мала перший порядок по τ .

Це означає, що схема (1)-(4) краще буде передавати властивості автоколиваний, що виникають в п'єзонапівпровідниковому кристалі при електричному його навантаженні.

Список використаних джерел

1. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. - М.: Наука, 1983. - 456 с.
2. Бонч-Бруевич В.А., Калашников С.Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990. - 688 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. - 656 с.
4. Завиша В.В., Москальков М.М. Дослідження різницевої схеми для задачі генерації коливаний п'єзонапівпровідникового кристала. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2001. - №4. - С. 299-304.
5. Завиша В.В., Москальков М.Н. Оптимизация дисперсионных свойств разностной схемы для задачи о генерации колебаний пьезополупроводникового кристалла. // Штучний інтелект - 2002. - 3. - С. 528-532.

Надійшла до редколегії 17.12.2007

УДК 519.6 : 334.7

Бойко Т.М., аспірант,
Гарашенко Ф.Г., д.т.н., проф.

Аналіз чутливості параметрів моделі фінансово-промислової корпоративної структури

В роботі досліджується динамічна модель фінансово-промислової структури, проводиться її аналіз на основі методів теорії чутливості. Сформульовано постановку задачі аналізу чутливості, проведено обчислювальний експеримент по знаходженню функцій чутливості та досліджено поведінку моделі при різних значеннях параметрів.

Ключові слова: фінансово-промислова корпоративна структура, чутливість, аналіз.

*E-mail: tboyko@bigmir.net

Вступ.

Серед прикладних задач математичного моделювання важливе місце займають проблеми створення та дослідження соціально-економічних моделей.

В даній роботі досліджується чутливість динамічної моделі фінансово-промислової корпоративної структури до зміни параметрів [1]. Основним методом дослідження чутливості моделі є використання так званих функцій чутливості [2]. Наведені в роботі приклади показують важливість використання методів та ідей теорії чутливості в дослідженні соціально-економічних моделей. Необхідність таких досліджень пов'язана з використанням методів математичного моделювання на підприємствах та виробничих фірмах.

Постановка задачі.

Нехай до складу елементарної корпоративної групи входять: виробниче підприємство А - виробник основної продукції; виробниче підприємство В - споживач основної продукції у вертикально-інтегрованому ланцюзі; фінансово-інвестиційна структура (банк) Б. Розглянемо модель фінансово-промислової корпоративної структури [1], що описується скалярним диференціальним рівнянням з переключенням [3]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \text{де}$$

Tetiana M. Boyko, PhD student,
Fedir G. Garashchenko, Dr.Sci.Tech., prof.

Sensitivity analysis of parameters finance- production corporate structure model

The purpose of the work is to research dynamical model of finance-production structure and conduct analysis for main sensitivity methods. The tasks of sensitivity analysis were stated and computational experiments were conducted for calculating sensitivity functions. The behaviour of the model was investigated using different parameters values.

Key Words: finance-production corporate structure, sensitivity, analysis.

$$f = \begin{cases} (1 - \tau)(W + (1 - \xi)\alpha_0 g(x)) + \xi g(x), & t_0 \leq t < t_1, \\ \xi g(x), & t_1 \leq t < t_2, \\ W + (1 - \xi)\alpha_0 g(x), & t_2 \leq t < t_3, \\ 0, & t_3 \leq t \leq t_4, \end{cases} \quad (1)$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, де $x(t)$ - обсяг коштів, що використовується цільовим призначенням для зниження питомих витрат у момент t ; $\tau(t)$ - банківська процентна ставка; ξ - визначає ціну продажу продукту а підприємству В; $\xi g(x(t))$ - максимальний прибуток А; α_0 - частка власності підприємства В якою володіє банк в момент початку роботи в групі; $W(t)$ - вільний ресурс банку, яким він може розпоряджатися за своїм розсудом.

Задача полягає в аналізі залежності зміни обсягу коштів, що використовується для зниження питомих витрат, від зміни банківської процентної ставки, ціни продажу продукту та частки власності підприємства В якою володіє банк.

Загальний підхід до аналізу за допомогою функцій чутливості.

Основним методом аналізу збурених процесів є використання функцій чутливості.

Нехай $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ - вектор параметрів розмірності r , $x^T(t, \alpha) =$

$= (x_1(t, \alpha), x_2(t, \alpha), \dots, x_n(t, \alpha))$ – n -вимірний вектор стану системи, T – знак транспонування.

Означення 1. Частинні похідні

$$\frac{\partial x_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_k}, i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, r \quad (2)$$

будемо називати функціями чутливості першого порядку від компонент вектора стану.

За допомогою функцій чутливості можна досліджувати задачі аналізу та знаходження незбуреного руху. Нехай $\bar{\alpha}$ – фіксований вектор параметрів, якому відповідає n -вимірний вектор стану об'єкта $\bar{x}(t, \bar{\alpha})$. Вектор $\bar{x}(t, \bar{\alpha})$ будемо називати незбуреним рухом, якому відповідає розрахункове (номінальне) значення $\bar{\alpha}$. При збуренні параметрів $\alpha = \bar{\alpha} + \mu$ отримаємо збурений рух

$$x_i(t, \alpha) = x_i(t, \bar{\alpha}_1 + \mu_1, \bar{\alpha}_2 + \mu_2, \dots, \bar{\alpha}_r + \mu_r) = x_i(t, \bar{\alpha} + \mu), i=1, 2, \dots, n.$$

Означення 2. Вектор $\Delta x(t, \bar{\alpha}, \mu) = x(t, \bar{\alpha} + \mu) - x(t, \bar{\alpha})$ будемо називати відхиленням збуреного руху від незбуреного.

Основна задача теорії чутливості – це вивчення відхилень $\Delta x(t, \bar{\alpha}, \mu)$ та дослідження їх зв'язку з властивостями початкової системи.

Часто для аналізу відхилення збуреного руху від незбуреного беруть перше наближення $\Delta x(t, \bar{\alpha}, \mu) \approx \Delta^{(1)} x(t, \bar{\alpha}, \mu)$. Згідно [2,3] можна отримати перше наближення у наступному вигляді:

$$\Delta^{(1)} x(t, \bar{\alpha}, \mu) = u^{(1)}(t, \bar{\alpha})\mu_1 + u^{(2)}(t, \bar{\alpha})\mu_2 + \dots + u^{(r)}(t, \bar{\alpha})\mu_r, \quad (3)$$

де

$$u^{(i)}(t, \bar{\alpha}) = \left. \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} \quad (4)$$

– n -вимірний вектор функцій чутливості від вектора стану системи за i -м параметром.

Нехай рівняння руху об'єкта описується системою диференціальних рівнянь [2, 3]

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x, t), t_{i-1} < t < t_i, i=1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Тут $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f^{(i)}(x, t)$ – n -вимірні вектор-функції, які задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку.

Моменти t_i , які визначають зміну одного диференціального рівняння іншим, називають моментами перемикавання. Припускаємо, що вектор x в момент t_i має розрив, який визначається співвідношеннями

$$x^{(i)*} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_i), \quad (6)$$

де $x^{(i)*} = x(t_i + 0)$, $x^{(i)-} = x(t_i - 0)$, $\Phi^{(i)}$ – вектор-функції, диференційовані за всіма аргументами. Співвідношення (6) називають умовами скачка [3]. Моменти перемикавання в загальному випадку знаходяться з умов

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i) = 0, \quad (7)$$

які будемо називати умовами перемикавання. Тут $\psi_i(\cdot)$ – скалярні функції, неперервно-диференційовані за своїми аргументами. Вибираючи індекси i , можна знайти розривний розв'язок для (5)–(7) з початковими умовами

$$x(t_0 + 0) = x^{(0)} = x^{(0)*}.$$

Припустимо, що рівняння руху (5), умови перемикавання (7) і умови скачка (6) залежать від скалярного параметра α

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x, t, \alpha), t_{i-1} < t < t_i, \quad (8)$$

$$x(t_i + 0) = x^{(i)*} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \quad (9)$$

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i, \alpha) = 0, \quad (10)$$

а початкові умови теж залежать від α

$$t_0 = t_0(\alpha),$$

$$x(t_0) = x^*(t_0) = x^+(t_0, \alpha) = x^{(0)}(\alpha). \quad (11)$$

Також припустимо, що система додаткових співвідношень така, що для будь-яких α з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на інтервалі $t_0 \leq t < \bar{t}(\alpha)$. При цьому моменти перемикавання також залежать від α , тобто $t_i = t_i(\alpha)$. В результаті можна побудувати множину розривних розв'язків

$$x = x(t, \alpha), t_0(\alpha) \leq t < \bar{t}(\alpha). \quad (12)$$

Означення 3. Функцією чутливості однопараметричного сімейства (12) будемо називати похідну $u(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}$, в якій

оператор $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ означає звичайну похідну в точках диференційованості $x(t, \alpha)$ і не визначену в точках розриву чи злому.

Нехай (12) однопараметричне сімейство розв'язків. Тоді знайдеться $t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$ таке, що для будь-яких $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(x, t, \alpha), \quad t_0(\alpha) \leq t < t_1(\alpha). \quad (13)$$

Якщо $t_0(\alpha)$, $x^{(0)}(\alpha)$ – неперервно-диференційовані за α , а $f^{(1)}(x, t, \alpha)$ – неперервна за всіма аргументами і неперервно-диференційована за x , α , тоді початковими умовами (11) і системою (13) визначено на цьому інтервалі однопараметричне сімейство розв'язків, для яких існують функції чутливості першого порядку в класичному розумінні

$$\frac{du}{dt} = A^{(1)}(t)u + B^{(1)}(t), \quad t_0(\alpha) \leq t < t_1(\alpha) \quad (14)$$

з початковими умовами

$$u(t_0) = u^{(0)} = \frac{dx^{(0)}(\alpha)}{d\alpha} - \dot{x}^{(0)} \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}. \quad (15)$$

Тут

$$\begin{aligned} A^{(1)}(t) &= \left. \frac{\partial f^{(1)}(x, t, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \alpha)}, \\ B^{(1)}(t) &= \left. \frac{\partial f^{(1)}(x, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{x=x(t, \alpha)}. \end{aligned} \quad (16)$$

По аналогії для i -ої підсистеми

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x, t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha)$$

функція чутливості існує в класичному розумінні і визначається системою рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \left. \frac{\partial f^{(i)}(x, t, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \alpha)} u + \left. \frac{\partial f^{(i)}(x, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{x=x(t, \alpha)}. \quad (17)$$

Початкові умови, які необхідно отримати для обчислення функції чутливості, даються наступною теоремою.

Теорема 1. Нехай функції $\Phi^{(i)}$, ψ_i – неперервно-диференційовані за всіма аргументами, а $f^{(i)}$ неперервні за всіма аргументами та неперервно-диференційовані за x , α . Нехай для деякого α_0 ($\alpha_1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$) виконується співвідношення

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \neq 0 \quad (18)$$

(тут індекс “-” означає, що всі величини обчислюються при $t = t_i - 0$). Тоді функція чутливості існує і задовольняє рівняння (17) при початкових умовах (15). При цьому переходи від одного рівняння (17) до іншого відбуваються згідно умов скачка

$$\begin{aligned} \Delta u^{(i)} &= u(t_i + 0) - u(t_i - 0) = u^{(i)+} - u^{(i)-} = \\ &= \frac{d\Delta x^{(i)}}{d\alpha} - \Delta f^{(i)} \frac{dt_i}{d\alpha} = \left[-\Delta f^{(i)} + \left(\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x} - E \right) f^{(i)-} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial t} \right] \frac{dt_i}{d\alpha} + \left(\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x} - E \right) u^{(i)-} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta f^{(i)} &= f^{(i+1)+} - f^{(i)-} = \\ &= f^{(i+1)}(x^{(i)+}, t_i, \alpha) - f^{(i)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt_i}{d\alpha} &= - \frac{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} u^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t}}, \\ \Delta x^{(i)} &= x^{(i)+} - x^{(i)-}. \end{aligned} \quad (21)$$

Використання наведених методів теорії чутливості до аналізу моделі фінансово-промислової корпоративної структури.

Застосуємо описаний вище підхід для розв'язку поставленої задачі. Щоб проаналізувати залежність зміни обсягу коштів, що використовується для зниження питомих витрат, від зміни банківської процентної ставки, ціни продажу продукту та частки власності підприємства В якою володіє банк в моделі фінансово-промислової корпоративної структури, використаємо функції чутливості.

За вектор параметрів візьмемо $\bar{\alpha}^T = (\xi, \alpha_0, \tau)$. Позначимо інтервали $T_1 = \{t: t_0 \leq t < t_1\}$, $T_2 = \{t: t_1 \leq t < t_2\}$, $T_3 = \{t: t_2 \leq t < t_3\}$ та $T_4 = \{t: t_3 \leq t \leq t_4\}$. Задамо відхилення параметрів $\mu^T = (\Delta\xi, \Delta\alpha_0, \Delta\tau)$. Тоді згідно (3) та (4) маємо:

$$\Delta x(t, \bar{\alpha}, \mu) = u^{(1)}(t, \bar{\alpha}) \Delta\xi + u^{(2)}(t, \bar{\alpha}) \Delta\alpha_0 + u^{(3)}(t, \bar{\alpha}) \Delta\tau,$$

де вектор функцій чутливості

$$u^i = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) = \left(\frac{\partial x(t, \bar{\alpha})}{\partial \xi}, \frac{\partial x(t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial x(t, \bar{\alpha})}{\partial \tau} \right)$$

визначається системою рівнянь (14):

$$\frac{du}{dt} = A(t, \bar{\alpha})u + B(t, \bar{\alpha}), \quad t \in T_i, \quad i = \overline{1, 4}$$

з початковими умовами $u(t_0) = u^{(0)} = 0$.

Тут

$$A(t) = \frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial x} \Big|_{x=x(t, \bar{\alpha})} = \begin{cases} [(1-\tau)(1-\xi)\alpha_0 + \xi]g'(x), & t \in T_1, \\ \xi g'(x), & t \in T_2, \\ (1-\xi)\alpha_0 g'(x), & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4. \end{cases}$$

$$B(t) = \frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{x=x(t, \bar{\alpha})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, t, \bar{\alpha})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f(x, t, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial f(x, t, \bar{\alpha})}{\partial \tau} \end{pmatrix},$$

де

$$\frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial \xi} = \begin{cases} g(x)[1 - (1-\tau)\alpha_0], & t \in T_1, \\ g(x), & t \in T_2, \\ -\alpha_0 g(x), & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial \alpha_0} = \begin{cases} (1-\tau)(1-\xi)\alpha_0, & t \in T_1, \\ 0, & t \in T_2, \\ (1-\xi)g(x), & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial \tau} = \begin{cases} -(W + (1-\xi)\alpha_0 g(x)), & t \in T_1, \\ 0, & t \in T_2, \\ 0, & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4. \end{cases}$$

В подальшому будемо розглядати нашу модель (1) в більш конкретному вигляді. Нехай функція $\varphi(x(t)) = \frac{1}{x}$. Візьмемо $\beta = 1$. Тоді згідно [1]:

$$g(x(t)) = \beta [p_0 / (1 + \beta)]^{1/\beta} [\varphi(x(t))]^{-1/\beta} - P = \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 [\varphi(x(t))]^{-1} - P = \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 x - P,$$

$$g'(x(t)) = \left[\frac{p_0}{2} \right]^2.$$

Згідно сформульованої теореми функції чутливості в поставленій задачі будуть знаходитися з наступних рівнянь:

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = \begin{cases} \frac{df_1}{dx} u^{(1)} + \left(\left[\frac{p_0}{2} \right]^2 t - P \right) [1 - (1-\tau)\alpha_0], & t \in T_1, \\ \frac{df_2}{dx} u^{(1)} + \left(\left[\frac{p_0}{2} \right]^2 t - P \right), & t \in T_2, \\ \frac{df_3}{dx} u^{(1)} - \alpha_0 \left(\left[\frac{p_0}{2} \right]^2 t - P \right), & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4, \end{cases}$$

$$\frac{du^{(2)}}{dt} = \begin{cases} \frac{df_1}{dx} u^{(2)} + (1-\tau)(1-\xi)\alpha_0, & t \in T_1, \\ \frac{df_2}{dx} u^{(2)}, & t \in T_2, \\ \frac{df_3}{dx} u^{(2)} + (1-\xi) \left(\left[\frac{p_0}{2} \right]^2 t - P \right), & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4, \end{cases}$$

$$\frac{du^{(3)}}{dt} = \begin{cases} \frac{df_1}{dx} u^{(3)} - \left(W + \alpha_0(1-\xi) \left(\left[\frac{p_0}{2} \right]^2 t - P \right) \right), & t \in T_1, \\ \frac{df_2}{dx} u^{(3)}, & t \in T_2, \\ \frac{df_3}{dx} u^{(3)}, & t \in T_3, \\ 0, & t \in T_4. \end{cases}$$

$$\text{Позначимо } k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((1-\tau)(1-\xi)\alpha_0 + \xi) \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 \\ \xi \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 \\ (1-\xi)\alpha_0 \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо загальну формулу для знаходження функцій чутливості

$$u^{(i)}(t) = \left(e^{k_{(i)}(t-t_0)} - 1 \right) \left(\frac{k_2^{(i)}}{k_{(i)}} + \frac{k_1^{(i)}}{k_{(i)}} \right) + \frac{k_1^{(i)}}{k_{(i)}} \left(t_0 e^{-k_{(i)}(t-t_0)} - t \right), \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad t \in T_{(j)},$$

де значення $k_1^{(i)}$ та $k_2^{(i)}$ визначимо наступним чином.

$$\text{Для } u^{(1)}: k_1^{(1)} = \left[\frac{p_0}{2} \right]^2 [1 - (1-\tau)\alpha_0],$$

$$k_2^{(1)} = -P[1 - (1-\tau)\alpha_0], \quad t \in T_1;$$

$$k_1^{(1)} = \left[\frac{p_0}{2} \right]^2,$$

$$k_2^{(1)} = -P, \quad t \in T_2;$$

$$k_1^{(1)} = -\alpha_0 \left[\frac{p_0}{2} \right]^2,$$

$$k_2^{(1)} = \alpha_0 P, \quad t \in T_3;$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_4.$$

$$\text{Для } u^{(2)}: k_1^{(1)} = 0,$$

$$k_2^{(1)} = (1-\tau)(1-\xi)\alpha_0, \quad t \in T_1;$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_2;$$

$$k_1^{(1)} = (1-\xi) \left[\frac{p_0}{2} \right]^2,$$

$$k_2^{(1)} = -P(1-\xi), \quad t \in T_3;$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_4.$$

$$\text{Для } u^{(3)}: k_1^{(1)} = -\alpha_0(1-\xi) \left[\frac{p_0}{2} \right]^2,$$

$$k_2^{(1)} = P\alpha_0(1-\xi) - W, \quad t \in T_1;$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_2,$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_3,$$

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, \quad t \in T_4,$$

Проведення обчислювального експерименту.

В середовищі Delphi 7.0 було створене програмне забезпечення для розв'язання поставленої задачі.

Опишемо роботу програми на прикладі проведеного обчислювального експерименту. Розглянемо нашу модель фінансово-промислової корпоративної структури з конкретними значеннями сталих, що до неї входять. Нехай весь плановий період діяльності нашої структури $[t_0, T] = [1, 5]$ розбивається на інтервали моментами перемикання, що не залежать від параметрів: $t_1 = 2, t_2 = 3$ та $t_3 = 4$; ринкова ціна продукту a : $p_0 = 5$; константа $P = 6$; вільний ресурс, що знаходиться у розпорядженні банку $W = 1$.

Розрахункові значення вектора параметрів системи $\bar{a}^T = (\xi, \alpha_0, \tau)$ обиралися в залежності від того, для якої компоненти вектора параметрів будувалася функція чутливості.

За допомогою середовища Delphi 7.0 було розв'язано пряму задачу чутливості для моделі фінансово-промислової корпоративної структури. Побудовано функцію чутливості та досліджено відхилення збуреної траєкторії відносно незбуреної для параметрів ξ (рис.1), α_0 (рис.2) та τ (рис.3):

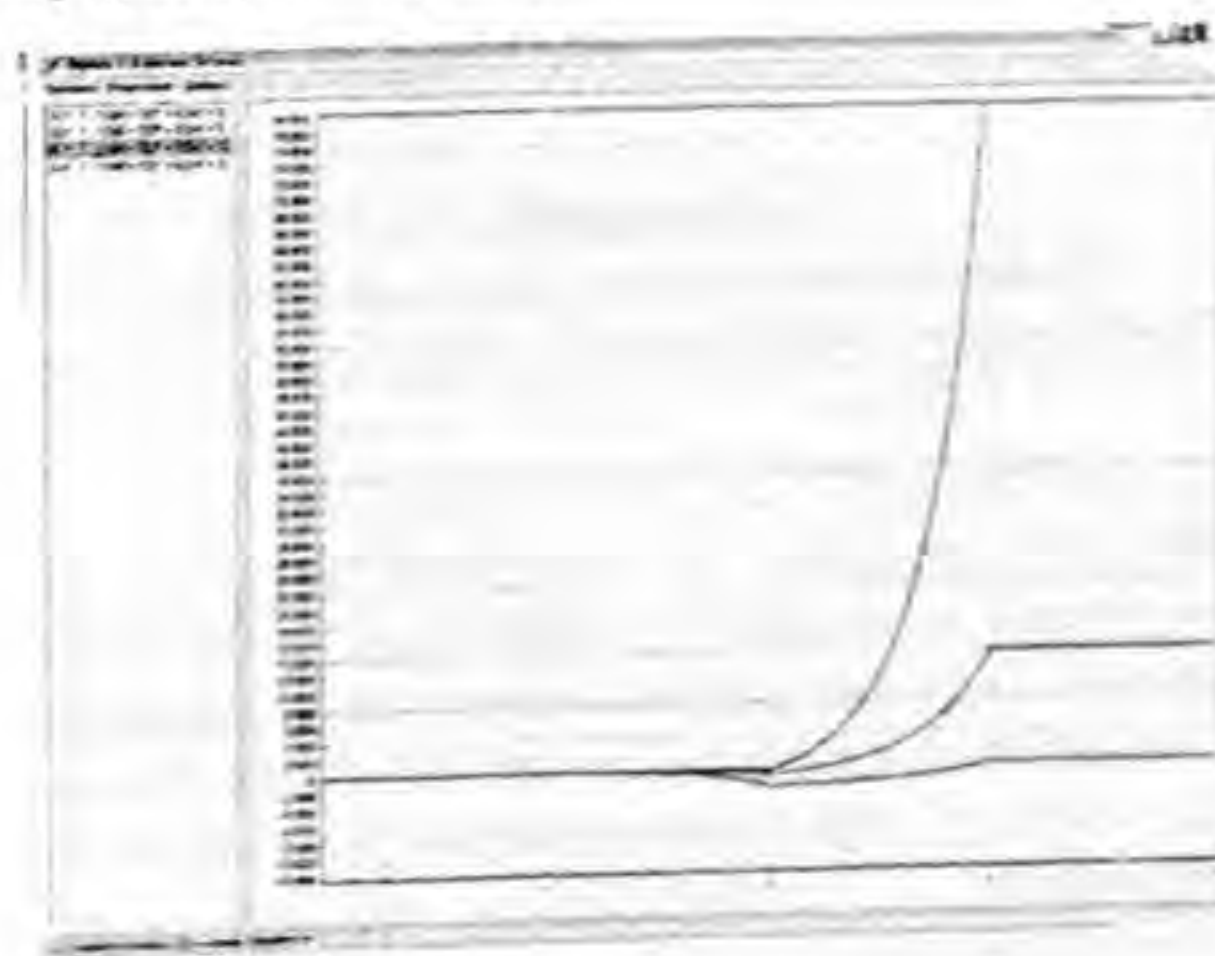


Рис. 1

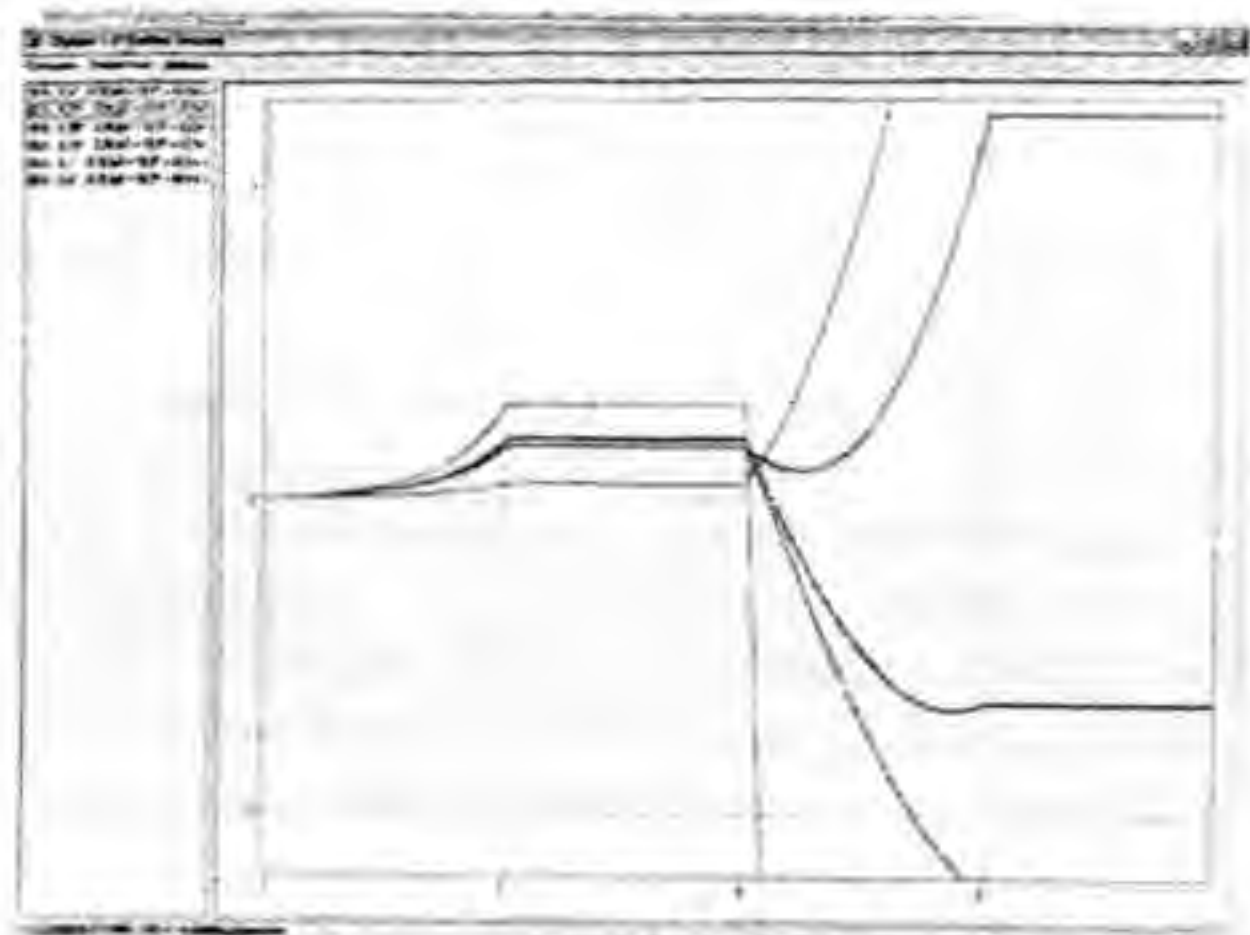


Рис. 2

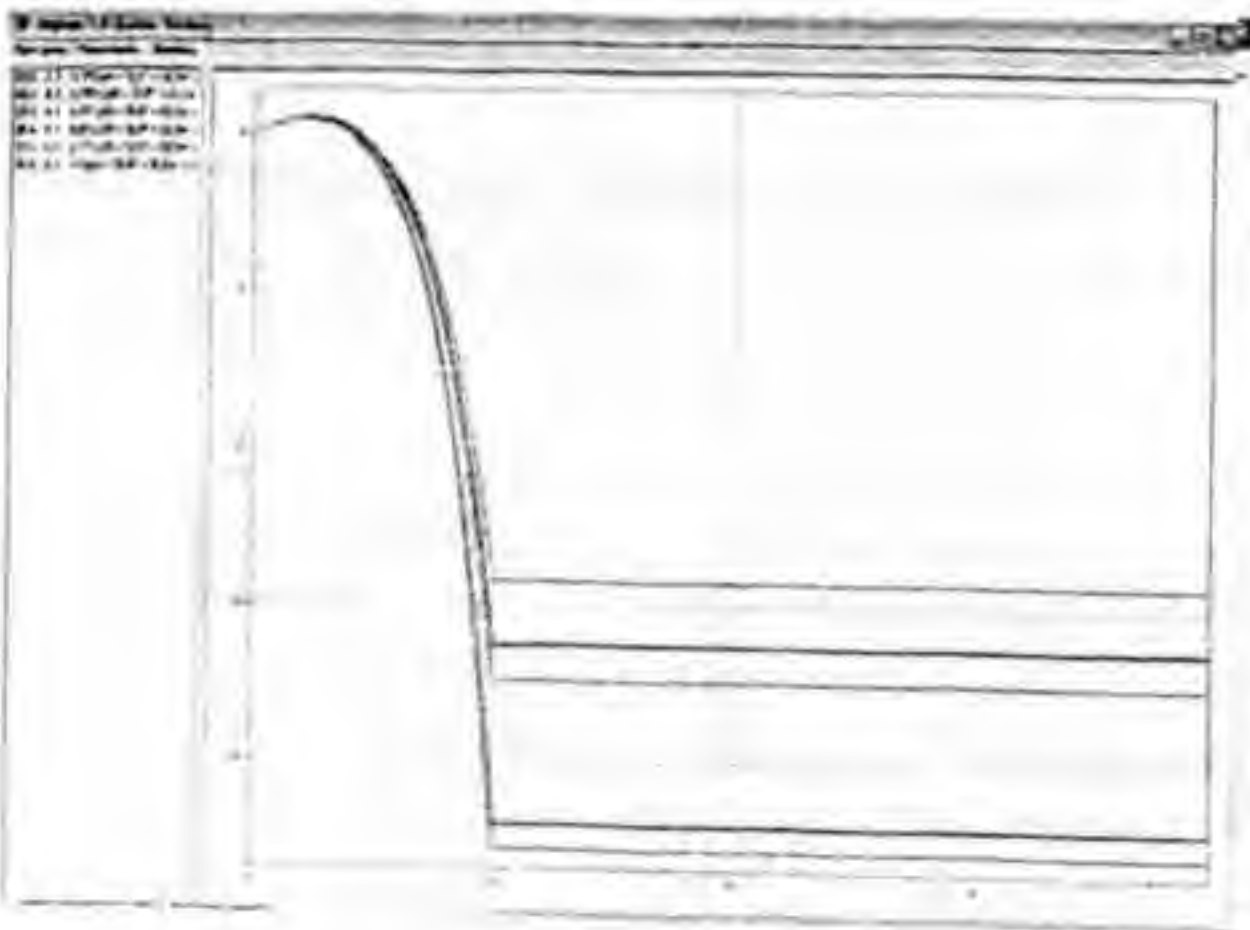


Рис. 3

Висновки.

На малюнках зображені функції чутливості з відповідними відхиленнями збуреної траєкторії відносно незбуреної. З поведінки графіків (рис.1) ми бачимо, що при зміні параметру ξ (ціни продажу продукту a підприємству B) наші траєкторії на початкових проміжках ($[1, 2]$ та на початку $[2,3]$) неперервно залежать від параметру і змінюються несуттєво. На наступних проміжках ($[3, 4]$ та $[4, 5]$) поведінка траєкторій функцій чутливості змінюється суттєво (з експоненціальною швидкістю). Цей факт говорить про те, що при невеликій зміні параметру ξ отримані збурені розв'язки суттєво відхиляються від незбурених, що свідчить про складність поведінки динаміки функції чутливості від параметру ξ , абсолютну непередбачуваність.

Модель (1) чутлива до зміни параметру α_0 , але такої непередбачуваності як у випадку

параметру ξ , немає (рис.2). Ми бачимо «розумну», обмежену чутливість. Розходження траєкторій, яке ми спостерігаємо, не досить суттєве. На проміжку $[4, 5]$ кожна з траєкторій є сталою.

Поведінка функції чутливості в залежності від зміни параметру τ показана на рис.3. Ми бачимо, що при зміні параметру збурений розв'язок незначно відхиляється від незбуреного. Тобто, якщо ми несуттєво змінимо кредитну ставку, то обсяг коштів теж зміниться несуттєво. Таким чином отримані розв'язки не є чутливими до зміни параметру τ .

Список використаних джерел

1. Экономика и математические методы, 2000, том 36, №1, с. 126-142
2. Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Аналіз та оцінка параметричних систем: Навч. посібник. – К.: 1995. – 140с.
3. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем: Навчальний посібник – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 115с.

Надійшла до редколегії 25.02.08

УДК 519

Грищенко О.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Оноцький В.В., ас.¹

Двокроковий різницевий алгоритм для рівняння Бюргерса

Побудовано економічний двокроковий симетризований скінчено-різницевий алгоритм (ДС-алгоритм) другого порядку апроксимації в застосуванні до початково-крайових задач для нелінійного рівняння Бюргерса. Обґрунтовано обчислювальну стійкість скінчено-різницевої схеми для нелінійних рівнянь методом заморожених коефіцієнтів.

Ключові слова: початково-крайові задачі, нелінійне рівняння, рівняння Бюргерса, різницеві схеми, двокрокові алгоритми, стійкість.

¹ E-mail: onotsky@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. академік АН ВШ України Гаращенко Ф.Г.

1. **Вступ.** Досить поширеною математичною моделлю, що описує рух хвилі постійного профілю з врахуванням в'язкості середовища є нелінійне рівняння

$$u_t + A(u)u_x = \gamma u_{xx} \quad (1)$$

Тут γu_{xx} - лінійна дифузія, $\gamma > 0$ - коефіцієнт дифузії, $A(u)u_x$ - може задавати адвекцію. Зокрема, у випадку $A(u) = \beta u$ (1) перетворюється у рівняння Бюргерса:

$$u_t + \beta u u_x = \gamma u_{xx} \quad (1')$$

Якщо, крім того, відсутня в'язкість, тобто $\gamma \rightarrow 0$, то (1') є нелінійним хвильовим рівнянням.

Побудова та дослідження нових ефективних різницевих алгоритмів для нелінійних рівнянь є актуальною проблемою сучасної математики. Математичні моделі, побудовані, зокрема, на основі рівняння Бюргера, достатньо адекватно описують реальні нелінійні процеси, і у ряді простіших випадків задача має аналітичні розв'язки. Це дозволяє проводити на основі цієї моделі тестування нових чисельних алгоритмів для нелінійних початково-крайових задач.

В даній роботі, розвиваючи ідею, запропоновану в [1], побудовано і обґрунтовано ефективні двокрокові різницеві алгоритми, які мають такі ж апроксимаційні параметри як і неявні схеми, є локально стійкими і дозволяють знайти розв'язки сіткових рівнянь, не розв'язуючи системи нелінійних рівнянь.

O. Yu. Grischenko,
V.V. Onotsky¹

Two-step finite-difference algorithm for Burgers equation

The efficient two-step symmetrized finite-difference algorithm (DS- algorithm) of second order of approximation is constructed as application to initial boundary problem for Burgers equations. Computational stability of finite-difference scheme for nonlinear equation is proved.

Key words: initial boundary problems, nonlinear equation, Burger's equation, finite difference schemes, two-step algorithm, stability.

2. **Постановка скінчено-різницевої задачі.** В циліндричній області $Q \equiv \{\Omega \times (0 \leq t \leq T)\}$, де $\Omega = \{0 \leq x \leq l\}$ знайдемо періодичний за просторовими змінними розв'язок початково-крайової задачі для рівняння (1) при заданих умовах

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t). \quad (3)$$

Тут $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ та обмежена при $x \rightarrow \infty$. При невеликих значеннях $|u(x, t)| \ll 1$ нелінійні доданки суттєво не впливають на розв'язок (1), тому він веде себе аналогічно розв'язку рівняння теплопровідності. Якщо ж $|u(x, t)| \gg 1$, то маємо випадок дуже близький до нелінійного хвильового рівняння.

Відомо [3], що при $\gamma > 0$ задача (1),(2) має єдиний розв'язок, який є гладкою функцією при $t > 0$.

Для чисельного розв'язання (1)-(3) скористаємось двокроковим симетризованим (ДС) скінчено-різницевим алгоритмом [2]. Область Q покриваємо рівномірною сіткою

$$\Omega_{ht} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih, t_n = n\tau, \tau > 0; i = \overline{1, M};$$

$$\tau > 0; h = l/M; n = 0, 1, 2, \dots\}$$

та вводимо на ній сіткові функції $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Область Ω_{ht} розщеплюємо на дві підобласті $\Omega_{ht}^{(1,n)}$ і $\Omega_{ht}^{(2,n)}$. До

першої віднесемо точки, в яких сума індексів $i + n$ непарна, а до другої – в яких вона парна. Для рівняння (1) запишемо двокроковий алгоритм:

в точках з $\Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L_1 u_i^{2n}, \quad (4)$$

в точках з $\Omega_{ht}^{(2,2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L_2 u_i^{2n+1}, \quad (5)$$

в вузлах $\Omega_{ht}^{(1,2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L_1 u_i^{2n+1}, \quad (6)$$

в вузлах $\Omega_{ht}^{(2,2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L_2 u_i^{2n+2}. \quad (7)$$

Тут

$$L_1 u_i^{2n} \equiv -A(u_i^{2n}) \frac{u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}}{2h} + \gamma \frac{u_{i+1}^{2n} - 2u_i^{2n} + u_{i-1}^{2n}}{h^2},$$

$$L_2 u_i^{2n+1} \equiv -A\left(\frac{u_i^{2n+1} + u_i^{2n+1}}{2}\right) \frac{u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}}{2h} +$$

$$+ \gamma \frac{u_{i+1}^{2n+1} - 2u_i^{2n+1} + u_{i-1}^{2n+1}}{h^2}$$

У внутрішніх вузлових точках сіткової області функцію u_i^n визначимо за такою схемою. На непарних часових кроках розв'язок знаходимо спочатку в усіх точках області $\Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$ за явною схемою. Потім, використовуючи вже знайдені значення розв'язку, визначаємо шукані значення з неявної схеми явно в решті просторових точках цього часового шару.

На наступному кроці процес повторюється. За розв'язок задачі приймаємо значення функції u_i^{2n+2} .

Для рівняння (1') ДС-алгоритм такий:

в точках з $\Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L u_i^{2n}, \quad (4')$$

в точках з $\Omega_{ht}^{(2,2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L u_i^{2n+1}, \quad (5')$$

в вузлах $\Omega_{ht}^{(1,2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L u_i^{2n+1}, \quad (6')$$

в вузлах $\Omega_{ht}^{(2,2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L u_i^{2n+2}, \text{ де } (7')$$

$$L u_i^{2n+k} \equiv -\beta u_i^{2n+k} \frac{u_{i+1}^{2n+k} - u_{i-1}^{2n+k}}{2h} + \gamma \frac{u_{i+1}^{2n+k} - 2u_i^{2n+k} + u_{i-1}^{2n+k}}{h^2},$$

$$k \in \{0, 1, 2\}. \quad (8')$$

3. Апроксимація початково – крайової задачі. Легко переконатися, що наведений вище алгоритм апроксимує диференціальну задачу з похибкою $O((h + \tau)^2)$.

Дійсно, склавши попарно рівняння (4') з (7') та (5') з (6') одержимо апроксимаційні формули:

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = \tau(L u_i^{2n} + L u_i^{2n+2}) \quad (9)$$

в точках множини $\Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$ та

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = 2\tau L u_i^{2n+1} \quad (10)$$

в точках $\Omega_{ht}^{(2,2n+1)}$.

Оскільки для довільної функції $f(t)$ з простору $C(\mathbb{R} \times [0, T])$ вірне розвинення

$$f(x + h, t + \tau) = f(x, t) + hf'_x(x, t) + \tau f'_t(x, t) + \frac{1}{2}(h^2 f''_{xx}(x, t) + 2h\tau f''_{xt}(x, t) + \tau^2 f''_{tt}(x, t)) + O((h + \tau)^3)$$

а отже

$$(u_i^{2n+2} - u_i^{2n}) / (2\tau) = u'_t|_{i=(2n+1)\tau} + O(\tau^2),$$

$$L u_i^{2n} = (u'_t + \beta u_{xx} - \gamma u_{xt})|_{i=(2n+1)\tau} - 2\tau u'_t|_{i=(2n+1)\tau} + O((h + \tau)^2)$$

Тоді з (9) одержимо

$$(u_i^{2n+2} - u_i^{2n}) / (2\tau) - (L u_i^{2n} + L u_i^{2n+2}) / 2 = (u'_t + \beta u_{xx} - \gamma u_{xt})|_{i=(2n+1)\tau} + O((h + \tau)^2).$$

Отже, різницьовий алгоритм (4')-(7') апроксимує диференціальне рівняння (1') з похибкою $O((h + \tau)^2)$.

4. Умови стійкості чисельного алгоритму.

Різницьову схему зі змінними коефіцієнтами називатимемо локально стійкою при заданій умові, якщо при виконанні цієї умови схеми з замороженими коефіцієнтами [4,5] стійкі в усіх точках сіткової області. Проведемо дослідження стійкості за початковими даними для лінеаризованої різницьової задачі (4')-(7'). У відповідності до ознаки стійкості Годунова-Рябенського, в довільній точці $(\bar{x}_i, t_n)$ з Ω_{ht} зафіксуємо значення коефіцієнтів рівнянь (4') і (7'): $c = \beta u_i^{2n+1}$ і підставимо їх у різницьові рівняння.

Має місце наступна

Теорема. Якщо функція початкового розподілу $u(x, 0) = \varphi(x)$ розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є, а параметр τ сталий або змінюється не частіше ніж через парне число кроків, то чисельний ДС-алгоритм з замороженими коефіцієнтами (4')-(7') стійкий за початковими даними.

Доведення. Припустимо, що має місце розвинення

$$u_1^{2n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \zeta^n(m) e^{i(lhm)}, \quad (11)$$

де B_m - коефіцієнти ряду Фур'є для функції $\varphi(x)$:

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi e^{-i(xm)} dx, \quad l = \sqrt{-1}.$$

Параметри $\zeta(m)$ визначимо так, щоб ряд (8) збігався і його гармоніки задовольняли відповідні різницеві рівняння.

Нехай $(x, t_{2n+1}) \in \Omega_{ht}^{(1,2n+1)}$. Гармоніки шуканого розв'язку (11) подамо відповідно у вигляді

$$\bar{u}_1^{2n+1} = B_m \cdot \zeta_1^{2n+1}(m) \cdot e^{i(lhm)}, \quad (12)$$

$$\bar{u}_1^{2n+2} = B_m \cdot \zeta_2^{2n+2}(m) \cdot e^{i(lhm)}, \quad (13)$$

Рівняння (4') та (7') дозволяють встановити, що

$$\zeta_1^{2n+1}(m) = g_1 \cdot \zeta_1^{2n}(m); \quad (14)$$

$$g_1 = (1 - c\tau l \sin(hm)/h + 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1)/h^2);$$

$$\zeta_1^{2n+2}(m) = g_2 \cdot \zeta_1^{2n+1}(m); \quad (15)$$

$$g_2 = (1 + c\tau l \sin(hm)/h - 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1)/h^2)^{-1}.$$

Якщо $(x, t_{2n+1}) \in \Omega_{ht}^{(2,2n+1)}$, то використавши скінчено-різницеві рівняння (5'), (6') одержимо:

$$\zeta_2^{2n+1}(m) = g_2 \zeta_1^{2n}(m); \quad (16)$$

$$\zeta_1^{2n+2}(m) = g_1 \cdot \zeta_2^{2n+1}(m). \quad (17)$$

Отже, в обох випадках при переході з кроку $2n$ на крок $2n+2$, маємо

$$\zeta_2^{2n+2}(m) = g(m) \zeta_2^{2n}(m), \quad (18)$$

де коефіцієнт переходу $g(m) = g_1 g_2$, тобто

$$g(m) = \frac{1 + 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1)/h^2 - c\tau l \sin(hm)/h}{1 - 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1)/h^2 + c\tau l \sin(hm)/h}. \quad (19)$$

При виконанні (12), (13) (або (16), (17)) скінчено-різницеві рівняння (4') і (7') (відповідно (5'), (6')) $\forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ перетворюються в тотожності. А з (19) слідує, що

$$q = \max_m |g(m)| \leq 1.$$

Для доведення збіжності ряду (11), множимо обидві частини рівності (18) на $B_m e^{i(lhm)}$, результат сумуємо за усіма $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ і встановлюємо оцінку

$$|u_1^{2n}| \leq q^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|.$$

Звідси випливає збіжність ряду (11) для будь-яких $n > 0$. Отже сіткова функція, подана у вигляді ряду (11) є точним розв'язком (4')-(7').

$$\text{Оскільки } \|u^n\|_{L_{2h}}^2 = \sum_{i=1}^M |u_i^n|^2 h \text{ є дискретним}$$

аналогом норми в просторі $L_2[0, l]$, то після нескладних оцінок з використанням рівності Парсеваля, для розв'язку різницевої задачі маємо

$$\begin{aligned} \|u^{2n}\|_{L_{2h}}^2 &\leq q^{2n} \sum_{i=1}^M \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \right)^2 h \\ &\leq q^{2n} \sum_{i=1}^M |u_i^0|^2 h = q^{2n} \|u^0\|_{L_{2h}}^2. \end{aligned}$$

Оскільки $\forall \tau > 0$ має місце оцінка

$$q = \max_m |g(m)| \leq 1,$$

то виконання нерівності

$$\|u^n\|_{L_{2h}}^2 \leq q^n \|u^0\|_{L_{2h}}^2$$

встановлює безумовну стійкість алгоритму (4')-(7') за початковими даними.

Тобто, вимога розвинення початкової функції в абсолютно збіжний ряд Фур'є в даному разі є достатньою умовою стійкості алгоритму (4')-(7') за початковими даними.

Теорему доведено.

5. Обчислювальний експеримент. Було проведено обчислювальний експеримент з параметрами: $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $T = 50$; $l = 100$; $h = 1$; $\tau = 1/3$; $u_1 = 3$; $u_2 = 1$. На рис. 1 представлені точний та наближений розв'язки задачі (1'), (2) з крайовими умовами 1-го роду на кінцях: $u(0, t) = u_1(t)$; $u(l, t) = u_2(t)$. Тут точний розв'язок $u^*(x, t) = f(x - ct)$ [6], де $f(x) = u_{02} + (u_{01} - u_{02}) / (1 + \exp((u_{01} - u_{02}) * x / 2 / \gamma))$, $u_{01} = 3$; $u_{02} = 1$; $c = (u_{01} + u_{02}) / 2$.

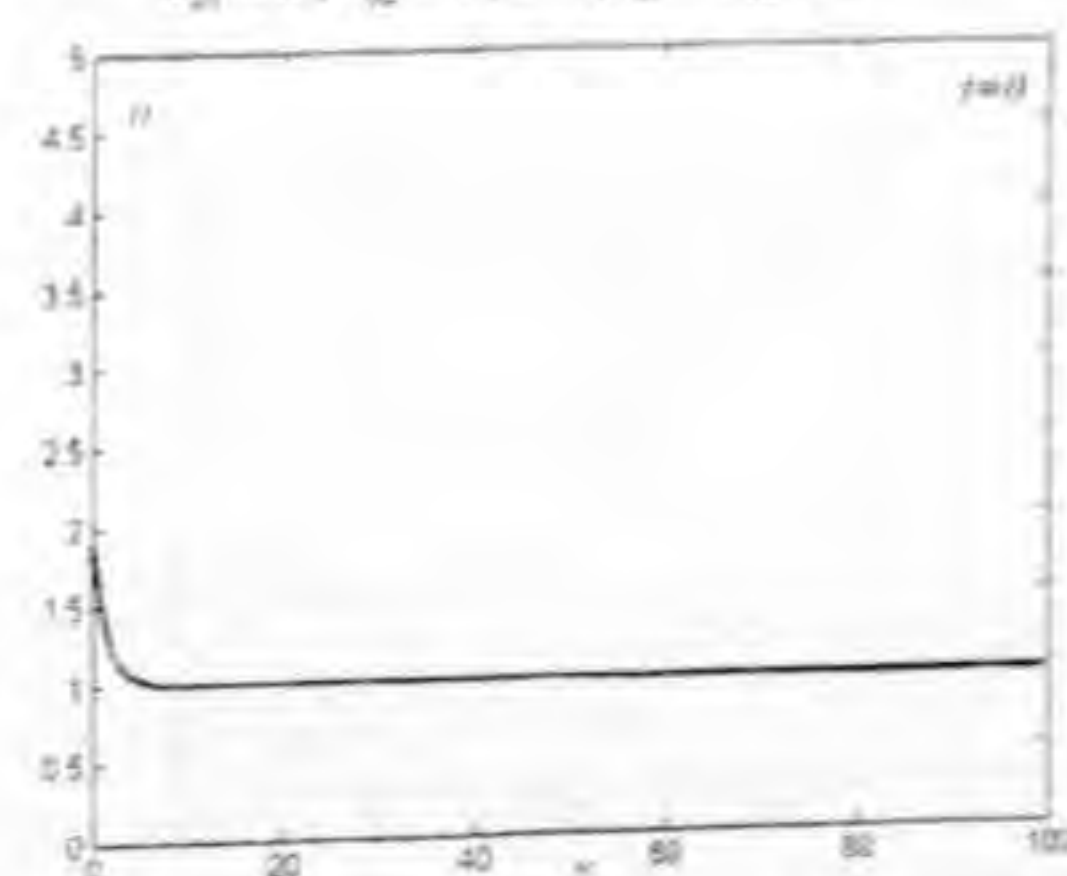


Рис. 1 Точний та наближений розв'язки в момент часу $t_0 = 0$.

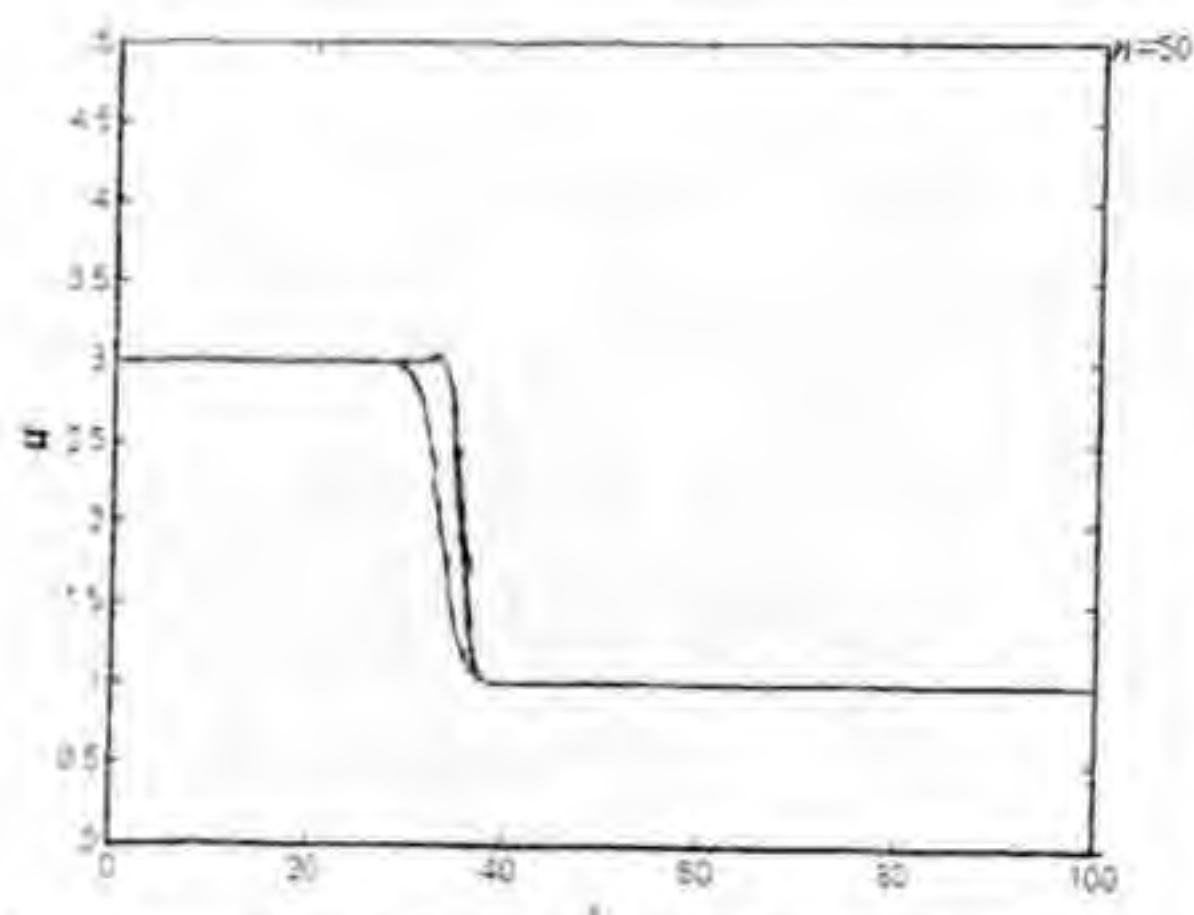


Рис.2 точний та наближений розв'язки в момент часу $t_{50} = 50/3$.

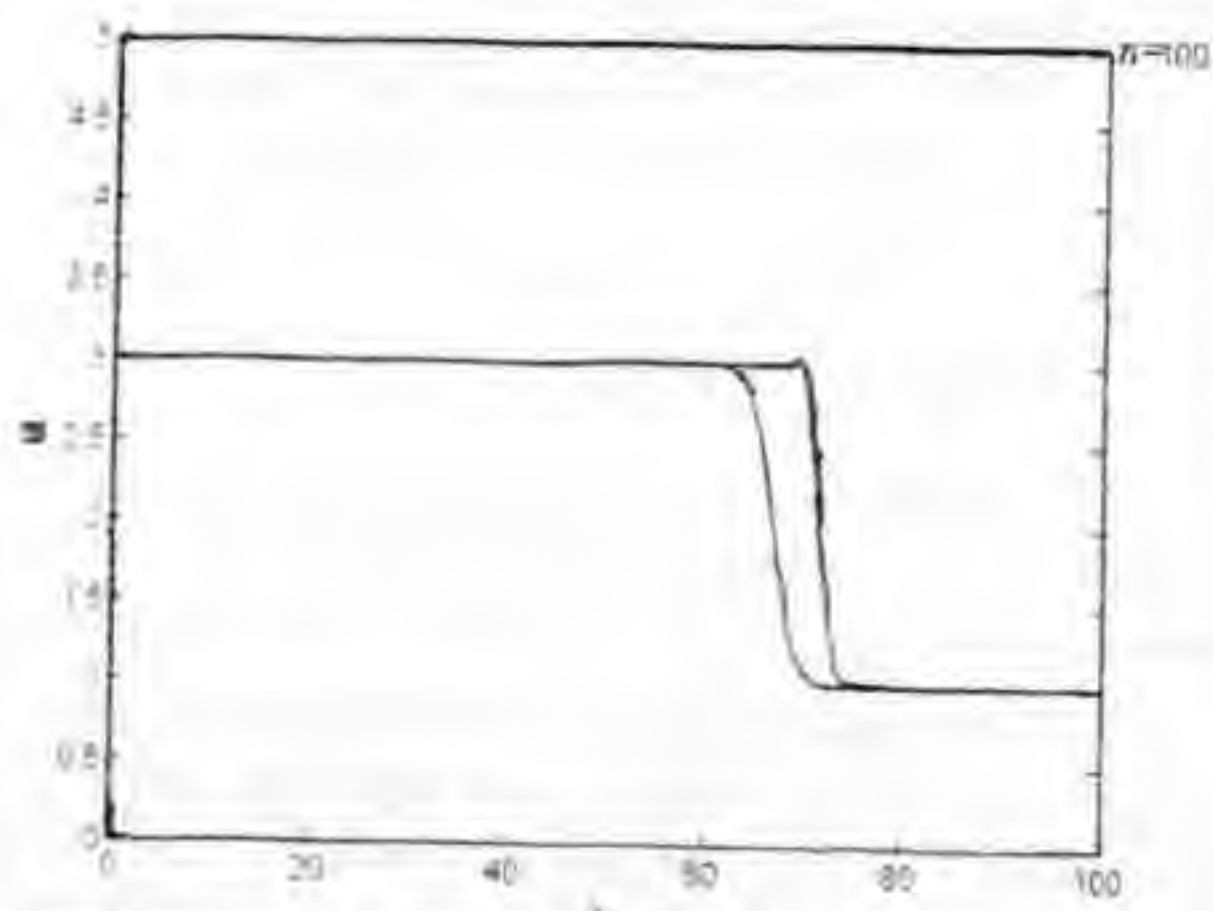


Рис.3 Точний та наближений розв'язки в момент часу $t_{100} = 100/3$.

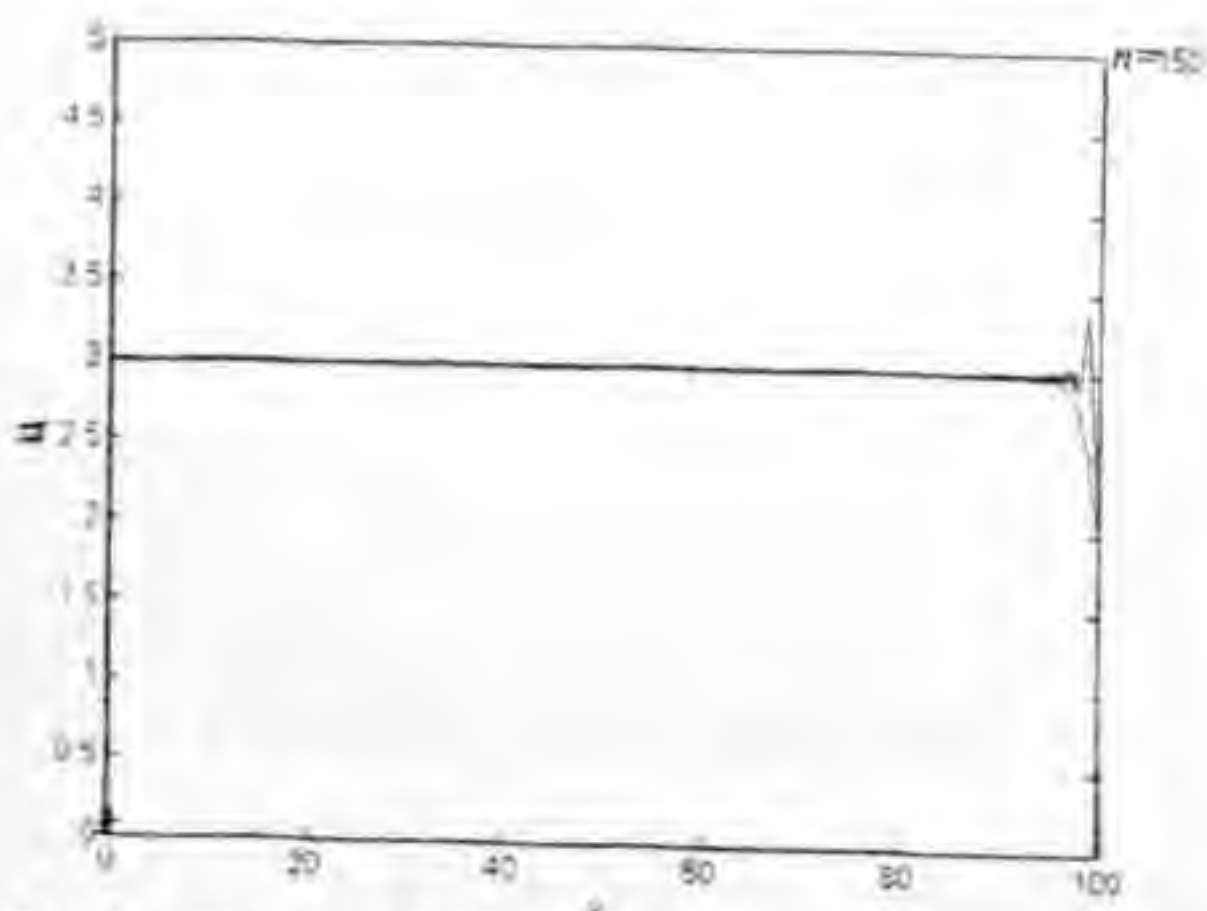


Рис.3 Точний та наближений розв'язки в момент часу $t_{50} = 50$.

6. Висновки.

В роботі побудовано та обґрунтовано локально стійкий різницеви алгоритм (4')–(7'), що апроксимує диференціальне рівняння (1') з похибкою $O((h+\tau)^2)$.

Одержані теоретичні результати та обчислювальні експерименти дозволяють стверджувати, що запропоновані двокрокові симетризовані алгоритми виду (4)–(7) мають такі ж апроксимативні властивості як і неявні схеми з вагою рівною 0.5 і ефективні для розв'язування нелінійного рівняння Бюргерса. Проте, на відміну від вказаних неявних однокрокових двошарових схем, в даному разі для знаходження розв'язку не потрібно на кожному часовому кроці розв'язувати систему нелінійних різницеви рівнянь.

Наведений в роботі двокроковий симетризований алгоритм може бути легко узагальнений на випадок $\Omega \in \mathbb{R}^n$, а також ефективно використовуватися для розв'язання інших нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, розв'язних відносно першої похідної по часовій змінній.

Література

1. Саульєв В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М. Физматгиз, 1960, - 324с.
2. Ляшко І.І, Грищенко О.Ю., Склеповий В.М., Оноцький В.В., Економічний чисельний алгоритм для одного класу нелінійних крайових задач // Доповіді НАН України. – вип. 3. – 2003. – С. 68-72.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.
4. Годунов С.К., Рябенський А.С. Разностные схемы. М.: "Наука" 1977. 440 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир, -1972. - 418 с.
6. Ronald E. Mickens. Mathematical methods for the natural and engineering sciences.//World Scientific. -2004, -538s.

Надійшла до редакції 11. 01. 2008

УДК 519.876

Загородній Ю.В., к.т.н., доц.

Трьохрівнева модель розвитку систем на прикладі рослинних організмів

В роботі запропонована і досліджується математична модель розвитку рослинного організму як трьохрівневої системи. Розвиток представлений як незворотне збільшення кількості підсистем на другому рівні. Наведені розв'язки рівнянь моделі.

Ключові слова: трьохрівнева модель, підсистеми, розвиток, диференціальні рівняння, аналітичні розв'язки.

Yu.V. Zagorodniy, cand. of techn. sciences, doc.

Three-level model of system development of plants' organisms

The attention is paid to one mathematical model of development of plants' organism as three-level system. The development is shown as unreturned increasing subsystems number. Presented solutions for given model equations.

Key words: three-level model, subsystems, development, differential equations, analytic solutions.

E-mail: vuzagor@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Акіменко В.В.

В роботі розглядається модель системи S , яка складається з підсистем, кількість яких $N_p \in N$ визначає стадію розвитку. Кожна підсистема $p = \overline{1, N_p}$ характеризується функцією $n_p(t, \tau)$, яка є кусково-диференційованою на множині $V = V_t * V_\tau = [0, T] * [0, \infty[$ і на інтервалах $t \in [t_i^-, t_i^{+1}[$, $t_i^- \in V_\tau \subset V_t$, $i = \overline{0, N_\tau}$, $N_\tau \in N$, відповідає наступній системі рівнянь [4]:

$$n_p(t, \tau) = h_p(t, \tau) + d_p(t, \tau),$$

$$\forall p = \overline{1, N_p}, (t, \tau) \in V$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_p^0(t, \tau)}{\partial \tau} = -l_p^0(t) \frac{\partial h_p^0(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p^0(t) h_p^0(t, \tau) - \\ - \mu_p(t) h_p^0(t, \tau), \tau < t_{dp}^v \\ h_p^0(t, 0) = \mu_n \theta_p^v(t) h_p^0(t, t_{dp}^v) \\ h_p^1(t, t_{dp}^v) = (1 - \theta_p^v(t)) h_p^0(t, t_{dp}^v) \\ \frac{\partial h_p^1(t, \tau)}{\partial \tau} = -l_p^1(t) \frac{\partial h_p^1(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p^1(t) h_p^1(t, \tau) - \\ - \mu_p(t) h_p^1(t, \tau), \tau \geq t_{dp}^v \end{cases} \quad (1)$$

$$h_p(t, \tau) = \begin{cases} h_p^0(t, \tau); \tau < t_{dp}^v \\ h_p^1(t, \tau); \tau \geq t_{dp}^v \end{cases}$$

$$H_p(0) = \int_0^\infty h_p(0, \tau) d\tau = H_p^0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial d_p^0(t, \tau)}{\partial \tau} = -l_p^v(t) \frac{\partial d_p^0(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p^{0v}(t) d_p^0(t, \tau) + \\ + \mu_p(t) h_p^0(t, \tau), \tau < t_{dp}^v \\ d_p^0(t, 0) = \mu_n \theta_p^v(t) d_p^0(t, t_{dp}^v) \\ d_p^1(t, t_{dp}^v) = (1 - \theta_p^v(t)) d_p^0(t, t_{dp}^v) \\ \frac{\partial d_p^1(t, \tau)}{\partial \tau} = -l_p^v(t) \frac{\partial d_p^1(t, \tau)}{\partial \tau} - s_p^{1v}(t) d_p^1(t, \tau) + \\ + \mu_p(t) h_p^1(t, \tau), \tau \geq t_{dp}^v \end{cases}$$

$$d_p(t, \tau) = \begin{cases} d_p^0(t, \tau); \tau < t_{dp}^v \\ d_p^1(t, \tau); \tau \geq t_{dp}^v \end{cases}$$

$$D_p(0) = \int_0^\infty d_p(0, \tau) d\tau = D_p^0,$$

При цьому

$$H_p(t) = \int_0^\infty h_p(t, \tau) d\tau < \infty$$

$$D_p(t) = \int_0^\infty d_p(t, \tau) d\tau < \infty$$

$$N_p(t) = H_p(t) + D_p(t) > 0 \quad (2)$$

$$W_{hp}(t) = \int_0^{\infty} h_p(t, \tau) w_{hp}(\tau) d\tau$$

$$W_{dp}(t) = \int_0^{\infty} d_p(t, \tau) w_{dp}(\tau) d\tau$$

$$W_p(t) = W_{hp}(t) + W_{dp}(t) > 0,$$

де

$$\begin{cases} \frac{dw_{hp}(\tau)}{d\tau} = \alpha_p(E(t))(w_p^m(E(t)) - w_{hp}(\tau)) \\ w_{hp}(0) = w_{hp}^0 > 0 \\ \frac{dw_{dp}(\tau)}{d\tau} = \alpha_{pv}(E(t))(w_p^{mv}(E(t)) - w_{dp}(\tau)) \\ w_{dp}(0) = w_{dp}^0 > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Пара $(t, \tau) \in V$ визначається, відповідно, як час функціонування підсистеми і час функціонування елементів, відносно кількість яких і виражає значення функції. Отже, функція $h_p(t, \tau)$ є диференційованою на множині $V_d = V/V_z$, де $V_z \in V$ - скінченна множина точок переходу, при яких кількість підсистем може змінитися [2]. В моменти часу $t_z^i \in V_z$, $i = \overline{1, N_z}$ функції $h_p^0(t, \tau)$ і $d_p^0(t, \tau)$ мають розрив:

$$\begin{aligned} h_p^0(t_z^i - 0, \tau) - \sum_{j=1}^{N_p} a_{jp} h_p(t_z^i - 0, \tau) + \\ + \sum_{j=1}^{N_p} a_{jp} h_j(t_z^i - 0, \tau) = h_p^0(t_z^i + 0, \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

$$d_p^0(t_z^i - 0, \tau) - \sum_{j=1}^{N_p} a_{jp}^v d_p(t_z^i - 0, \tau) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_p} a_{jp}^v d_j(t_z^i - 0, \tau) = d_p^0(t_z^i + 0, \tau)$$

де $a_{pj}, a_{jp}^v, p, j = \overline{1, N_p}$ - сталі коефіцієнти, які характеризують розрив і при цьому виконується умова:

$$\sum_{p=1}^{N_p} h_p(t_z^i - 0, \tau) = \sum_{p=1}^{N_p} h_p(t_z^i + 0, \tau)$$

$$\sum_{p=1}^{N_p} d_p(t_z^i - 0, \tau) = \sum_{p=1}^{N_p} d_p(t_z^i + 0, \tau)$$

Приклад 1.

В частковому випадку, розвив (4) може відбуватися тільки при $\tau = 0$. Нехай, $N_p = 2$

і при $t = t_z^1$ $\theta_1^1(t_z^1) > \theta_1(t_z^1)$. Тоді, при $\tau = t_{d1}$ для підсистеми з номером $p = 1$ маємо $h_p(t + 0, t_{d1}) = (1 - \theta_1^1(t))h_1^0(t, t_{d1})$
 $h_p(t - 0, t_{d1}) = (1 - \theta_1(t))h_1^0(t, t_{d1})$.

Інші елементи підсистеми у відповідній кількості $(\theta_1^1(t) - \theta_1(t))h_1^0(t, t_{d1})$ можуть втрачатися підсистемою, тобто переходити в іншу підсистему $p = 2$ (чи у зовнішнє середовище). При цьому маємо:

$$a_{21} = \frac{\theta_1^1(t) - \theta_1(t)}{1 - \theta_1(t)}$$

Розвиток в системі [3] визначається як цілеспрямована, направлена та закономірна зміна кількості підсистем $N_p \in N$ і динаміки їх основних числових характеристик - функцій визначених на множині V або окремо на множинах V_j і V_τ . Вводимо скінчену множину $X = \bigcup_{i=p}^{N_p} X_p$, де X_p - множина функцій-характеристик підсистеми p , $p = \overline{1, N_p}$. Набір фіксованих значень елементів $x \in X$ будемо називати станом системи S .

Модель системи складається з трьох рівнів, які представлені на рис. 1.

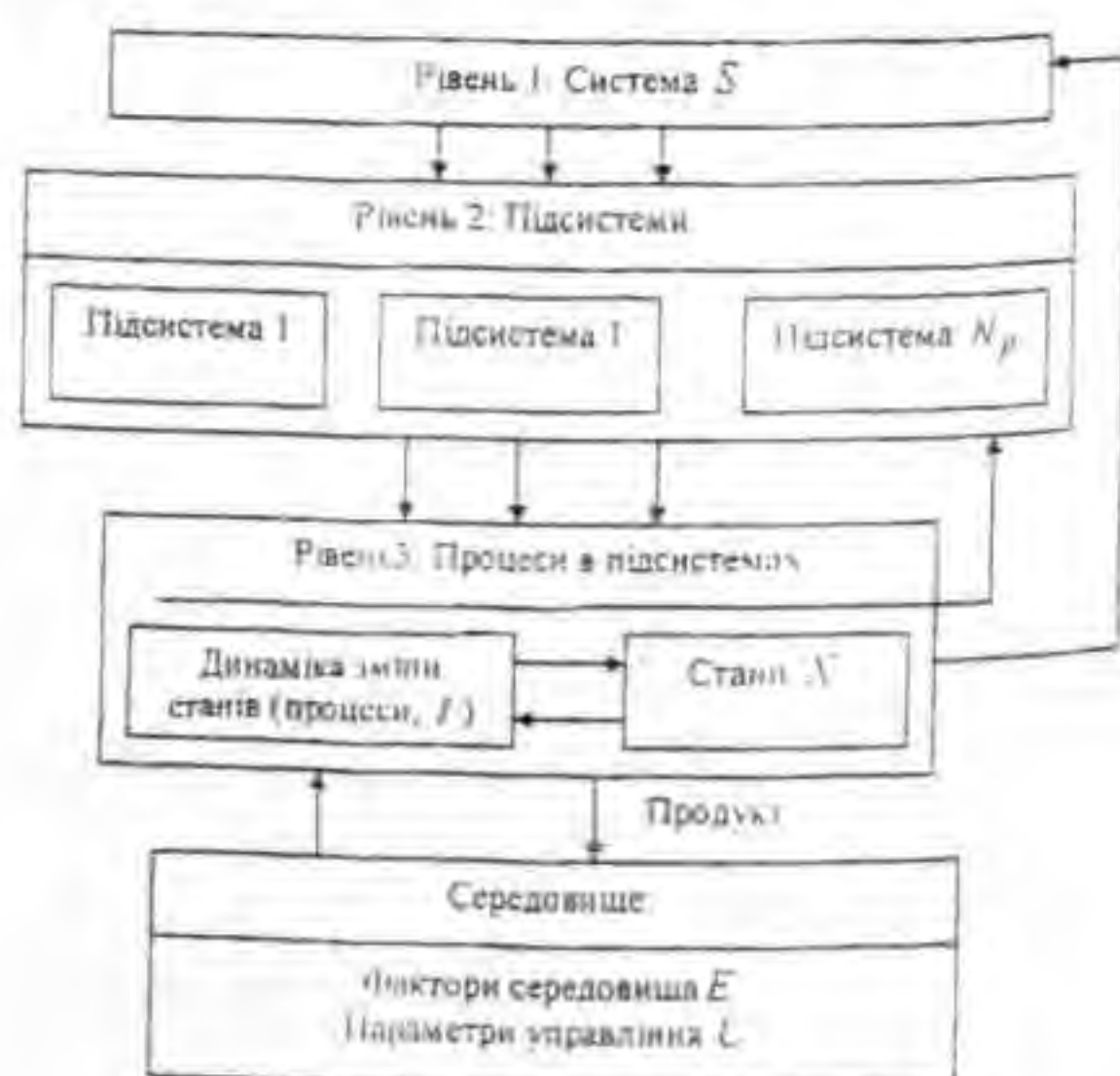


Рис. 1 Структура системи

Три рівні системи S представлені наступним чином:

1 – рівень цілісної системи, на якому визначається загальна ціль функціонування – досягнення стану з множини $Z_X^0 \subset X$ [1] (наприклад, стан гомеостазу [2], стан ефективного функціонування, максимізації концентрації продукту) та метод декомпозиції до сукупності підсистем однорідних елементів; 2 – рівень підсистем, на якому визначаються дві групи елементів, які утворюють підсистеми та закономірності їх функціонування (процеси); 3 – рівень елементів підсистем, основними характеристиками якого є елементи множини X та множина процесів I – функцій, які визначають швидкості зміни значень елементів X .

Рівняння (1) описують послідовну зміну станів системи ($x \in X$), яка має початковий стан з множини $X^0 \subset X$ і протягом всього життєвого циклу $t \in [0, T]$ не виходить за межі заданої області $Z_X^0 \subset X$. Кожна підсистема $j = \overline{1, N_p}$ має свою область станів Z_X^j .

Твердження 1. Наступні функції:

$$\begin{aligned} n_p^0(t, \tau) &= N_p^{0i} e^{-S_p^0(t)} F_p^0(L_p(t) - \tau) \\ n_p^1(t, \tau) &= N_p^{1i} e^{-S_p^1(t)} F_p^1(L_p(t) - \tau) \\ n_p^{0v}(t, \tau) &= N_p^{0iv} e^{-S_p^{0v}(t)} F_p^{0v}(L_p^v(t) - \tau) \\ n_p^{1v}(t, \tau) &= N_p^{1iv} e^{-S_p^{1v}(t)} F_p^{1v}(L_p^v(t) - \tau) \end{aligned} \quad (5)$$

є частинним розв'язком системи (1) на інтервалах $t \in [t_z^i, t_z^{i+1}]$, де $N_p^{0i}, N_p^{1i}, N_p^{0iv}, N_p^{1iv}$ – константи, які визначають кількість відповідних елементів в момент часу $t = t_z^i$; при цьому

$$\begin{aligned} S_p^0(t) &= \int_{t_z^i}^t (s_p^0(r) + \mu_p(r)) dr, \\ L_p(t) &= \int_{t_z^i}^t l_p(r) dr; L_p^v(t) = \int_{t_z^i}^t l_p^v(r) dr, \text{ а} \end{aligned}$$

функції $S_p^{0v}(t)$ та $S_p^{1v}(t)$ визначаються з рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dS_p^{0v}(t)}{dt} &= s_p^{0v}(t) - \\ &- \mu_p(t) \frac{F_p^0(L_p(t) - \tau)}{F_p^{0v}(L_p^v(t) - \tau)} \exp(S_p^{0v}(t) - S_p^0(t)) \\ \frac{dS_p^{1v}(t)}{dt} &= s_p^{1v}(t) - \\ &- \mu_p(t) \frac{F_p^1(L_p(t) - \tau)}{F_p^{1v}(L_p^v(t) - \tau)} \exp(S_p^{1v}(t) - S_p^1(t)) \end{aligned}$$

де $F_p^0(t), F_p^1(t)$ – будь-які неперервні і диференційовані функціонали на класі дійсних невід'ємних функцій $\varphi(t, \tau) = L_p(t) - \tau$, $\varphi^v(t, \tau) = L_p^v(t) - \tau$, для яких виконується наступна умова:

$$\begin{aligned} F_p^0(\varphi(t, 0)) &= \mu_n \theta_p(t) F_p^0(\varphi(t, t_d)) \\ F_p^1(\varphi(t, \tau)) &= (1 - \theta_p(L_p(t) - \tau + t_d)) e^{S_p^0(t) - S_p^1(t)} F_p^0(\varphi(t, \tau)) \\ F_p^{0v}(\varphi(t, 0)) &= \mu_n \theta_p^v(t) F_p^{0v}(\varphi^v(t, t_d)) \\ F_p^{1v}(\varphi(t, \tau)) &= (1 - \theta_p^v(L_p^v(t) - \tau + t_d^v)) e^{S_p^{0v}(t) - S_p^{1v}(t)} F_p^{0v}(\varphi^v(t, \tau)) \\ F_p^0(\varphi(t, 0)) &= \mu_n \theta_p(t) F_p^0(\varphi(t, t_d)) \\ F_p^1(\varphi(t, \tau)) &= (1 - \theta_p(L_p(t) - \tau + t_d)) e^{S_p^0(t) - S_p^1(t)} F_p^0(\varphi(t, \tau)) \\ F_p^{0v}(\varphi(t, 0)) &= \mu_n \theta_p^v(t) F_p^{0v}(\varphi^v(t, t_d)) \\ F_p^{1v}(\varphi(t, \tau)) &= (1 - \theta_p^v(L_p^v(t) - \tau + t_d^v)) e^{S_p^{0v}(t) - S_p^{1v}(t)} F_p^{0v}(\varphi^v(t, \tau)) \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} \theta_p(t) &= \frac{F_p^0(\varphi(t, 0))}{\mu_n F_p^0(\varphi(t, t_d))}, \\ \theta_p^v(t) &= \frac{F_p^{0v}(\varphi^v(t, 0))}{\mu_n F_p^{0v}(\varphi^v(t, t_d^v))} \end{aligned}$$

Приклад 2

Як приклад розв'язку системи (1) на інтервалах $t \in [t_z^i, t_z^{i+1}]$ при $\tau < t_d$

$$\begin{aligned} F_p^0(\varphi(t, \tau)) &= N_p^{0i} e^{\beta_p(L_p(t) - \tau)} \\ n_p^0(t, \tau) &= N_p^{0i} e^{-S_p^0(t)} e^{\beta_p(L_p(t) - \tau)} \\ F_p^{0v}(\varphi(t, \tau)) &= N_p^{0iv} e^{\beta_p^v(L_p^v(t) - \tau)} \\ n_p^{0v}(t, \tau) &= N_p^{0iv} e^{-S_p^{0v}(t)} e^{\beta_p^v(L_p^v(t) - \tau)} \\ F_p^1(\varphi(t, \tau)) &= N_p^{1i} e^{\beta_p(L_p(t) - \tau)} \\ n_p^1(t, \tau) &= N_p^{1i} e^{-S_p^1(t)} e^{\beta_p(L_p(t) - \tau)} \end{aligned}$$

$$F_p^{lv}(\varphi(t, \tau)) = N_p^{lv} e^{\beta_p^{lv}(L_p^v(t) - \tau)}$$

$$n_p^1(t, \tau) = N_p^{lv} e^{-s_p^{lv}(t)} e^{\beta_p^{lv}(L_p^v(t) - \tau)}$$

де $N_p^{0l}, N_p^{0vl}, N_p^{lv}, N_p^{lv}$ – константи, які відповідають необхідним умовам.

Підставляючи ці функції в граничну умову системи (1), маємо

$$h_p(t, 0) = \mu_n \theta_p(t) h_p(t, t_{dp})$$

$$d_p(t, 0) = \mu_n \theta_p^v(t) d_p(t, t_{dp}^v)$$

і отримуємо наступні співвідношення:

$$\beta_p t_{dp} = \ln \mu_n \theta_p(t)$$

$$\beta_p^v t_{dp}^v = \ln \mu_n \theta_p^v(t)$$

звідки маємо, що функції $\theta_p(t) \equiv \theta_p$,

$\theta_p^v(t) \equiv \theta_p^v$ є константами, при чому

$$0,5 < \theta_p, \theta_p^v < 1.$$

Твердження 2. Динаміка інтегрованих показників стану підсистем системи (1) при умові $s_p^0(t) \equiv s_p^1(t) \equiv s_p(t)$ і

$s_p^{0v}(t) \equiv s_p^{lv}(t) \equiv s_p^v(t)$ підкоряється наступним рівнянням:

$$\frac{dH_p(t)}{dt} = l_p(t) \left(1 - \frac{1}{\mu_n \theta_p(t)}\right) h_p(t, 0) -$$

$$- s_p(t) H_p(t) - \mu_p(t) H_p(t)$$

$$\frac{dD_p(t)}{dt} = l_p^v(t) \left(1 - \frac{1}{\mu_n \theta_p^v(t)}\right) d_p(t, 0) -$$

$$- s_p^v(t) D_p(t) + \mu_p(t) H_p(t)$$

$$\frac{dW_{dp}(t)}{dt} = l_p^v(t) w_{dp}^{0v} \left(1 - \frac{\mu_c^v \theta_p^{lv}(t)}{\mu_n \theta_p^v(t)}\right) d_p(t, 0) +$$

$$+ l_p^v(t) \int_0^\infty d_p(t, \tau) \frac{dw_{dp}(\tau)}{d\tau} d\tau -$$

$$- s_p^v(t) W_{dp}(t) + \mu_p(t) W_{hp}(t)$$

При умові (3):

$$\begin{aligned} \frac{dW_{hp}(t)}{dt} = & l_p(t) h_p^0(t, t_d) w_{dp}^0 \left(1 - \frac{\mu_c \theta_p^l(t)}{\mu_n \theta_p(t)}\right) + \\ & + \alpha_p(E(t)) l_p(t) (w_p^m(E(t)) H_p(t) - \\ & - W_{hp}(t)) - (s_p(t) + \mu_p(t)) W_{hp}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{dW_{dp}(t)}{dt} = l_p^v(t) d_p^0(t, t_{dv}) w_{dp}^{0v} \left(1 - \frac{\mu_c^v \theta_p^{lv}(t)}{\mu_n \theta_p^v(t)}\right) +$$

$$+ \alpha_{pv}(E(t)) l_p^v(t) (w_p^{mv}(E(t)) D_p(t) - W_{dp}(t)) -$$

$$- s_p^v(t) W_{dp}(t) + \mu_p(t) W_{hp}(t)$$

Як приклад розглянемо модель рослини. Система складається з $N_p = 6$ підсистем (насіння, коріння, стебло, листя, квітка, плід), які характеризуються відносною концентрацією своїх елементів – клітин, плодів тощо. Для клітинних підсистем елементами першої групи є здорові клітини, а елементами другої – інфіковані вірусом клітини.

Тоді $h_p(t, \tau)$ інтерпретується як відносна кількість здорових клітин віку τ в час t в підсистемі p , а $d_p(t, \tau)$ – відносна кількість інфікованих вірусом (уражених, спотворених) клітин віку τ в час t .

Стани елементів підсистеми p характеризуються функціями біомаси $w_{hp}(\tau)$ і $w_{dp}(\tau)$, які підкоряються системі рівнянь (3).

В моменти часу $t_i^* \in V_i$, $i = \overline{1, N_i}$ відбуваються **перехідні процеси**, коли рослина міняє стадії свого розвитку (проростання насіння, цвітіння тощо).

Таким чином, функції, які ідентифікують модель рослини представлені в таблиці:

№	Функція	Змістова інтерпретація
1	$l_p(t)$	Темп росту концентрації здорових клітин
2	$l_p^v(t)$	Темп росту концентрації інфікованих клітин
3	$s_p(t)$	Темп деструкції здорових клітин
4	$s_p^v(t)$	Темп деструкції інфікованих клітин
5	$\mu_p(t)$	Темп ураження клітин
6	$\theta_p(t)$	Доля здорових клітин, які діляться
7	$\theta_p^l(t)$	Доля здорових вегетативних клітин
8	$\theta_p^v(t)$	Доля інфікованих клітин, які діляться

9	$\theta_p^{iv}(t)$	Доля вегетативних інфікованих клітин
10	$\alpha_p(E(t))$	Темп росту біомаси здорових клітин
11	$\alpha_p^v(E(t))$	Темп росту біомаси інфікованих клітин
12	$w^m(E(t))$	Максимальна біомаса здорових клітин
13	$w^{mv}(E(t))$	Максимальна біомаса інфікованих клітин

Сталі параметри, які ідентифікують систему:

№	Параметр	Змістова інтерпретація
1	μ_{np}	Кількість дочірніх здорових клітин
2	μ_{np}^v	Кількість дочірніх клітин інфікованих
3	μ_{cp}	Відношення біомаси клітини у віці $\tau = t_{dp}$ до біомаси у віці $\tau = 0$
4	μ_{cp}^v	Відношення біомаси інфікованих клітин у віці $\tau = t_{dp}^v$ до біомаси у віці $\tau = 0$
5	N_p^0	Початкова кількість здорових клітин віку $0 \leq \tau < t_d$ в підсистемі в час $t_p = 0$
6	N_p^{0v}	Початкова кількість уражених клітин віку $0 \leq \tau < t_d$ в підсистемі в час $t_p = 0$
7	N_p^1	Початкова кількість здорових клітин віку $\tau \geq t_d$ в підсистемі в час $t_p = 0$
9	β_p	Параметр, який характеризує темп збільшення числа здорових клітин в частинних розв'язках моделі

Невизначеність в моделі розвитку (1)-(6) породжується, в першу чергу, стохастичністю і нечіткістю значень вектор-функції стану середовища $E(t)$, який впливає на динаміку функцій моделі. Це веде до можливості описувати перехідні процеси (4) в розвитку систем. Таким чином, представлена модель системи S дає можливість досліджувати закономірності розвитку систем і динаміки її елементів.

Література

1. В.Н. Новосельцев Теория управления и биосистемы. —М.:Наука, 1978.-320с.
2. Л.Г Мельник Фундаментальне основи розвитку.—Сумы: Университетская книга, 2002.
3. Загородній Ю.В., Ковальчук О.Ф. Продин підхід до моделювання розвитку систем // Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. —2007. —№1.- С.149-152
4. Ю.В. Загородній Моделі імітації росту та розвитку рослин у сприятливих і небезпечних умовах інфекційних захворювань // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, „Кібернетика”.— №7. —2006. —С. 10-15

Надійшла до редколегії 22.10.07

УДК 681.3:004.056

Іванов І. Ю., аспірант

Виконання криптографічних операцій за схемою RSA в умовах обмеженості обчислювальних ресурсів

Розглядається проблема виконання операцій підписування та дешифрування за схемою RSA в умовах обмеженості обчислювальних ресурсів. Запропоновано модифікацію алгоритму RSA-CRT, що дозволяє "слабкому" пристрою доручити виконання ресурсоміких операцій іншому пристрою, що володіє необхідною потужністю, без розкриття таємного ключа.

Ключові слова: підписування, дешифрування, RSA, доручення, RSA-CRT

*E-mail: innokentiy@gmail.com

Статтю представив д.ф.м.н. проф. Анісімов А.В.

Останнім часом широкого розповсюдження набули мобільні обчислювальні пристрої. Характерними особливостями таких пристроїв є мала продуктивність процесору та невелика кількість оперативної пам'яті. У той самий час, більшість сучасних криптографічних алгоритмів з відкритим ключем вимагають досить великої кількості складних обчислень, що робить їх застосування на таких пристроях занадто неефективним. Тому актуальною є проблема адаптації існуючих криптографічних алгоритмів для забезпечення можливості їх ефективного виконання на мобільних пристроях.

Дуже важливим фактом, яким ми будемо керуватись при дослідженні проблеми, є те, що в переважній більшості випадків мобільні пристрої не є незалежними обчислювальними пристроями. В багатьох випадках вони працюють в середовищах, в яких, окрім них, також знаходяться інші, часто набагато більш обчислювально потужні пристрої. Тому є доцільним розглядати проблему з точки зору партнерства між мобільними пристроями та більш потужними комп'ютерами, до яких вони мають доступ в умовах середовища, в якому працюють. А саме, поставити питання таким чином: чи можливо перенести частину операцій, що мають бути виконані в рамках деякої криптографічної схеми, зі "слабкого" пристрою на потужний? При цьому природньою є вимога збереження таємності, тобто таке "доручення" не повинне розкривати таємні криптографічні параметри "слабкого" пристрою.

I. Y. Ivanov

Execution of cryptographic operations according to RSA scheme in resource-constrained environments

The paper considers the problem of execution of signing and decryption operations according to RSA scheme in resource-constrained environments. The modification of the RSA-CRT algorithm that allows delegating resource-expensive operations to powerful device without private key disclosure is proposed.

Key Words: signing, decryption, RSA, delegation, RSA-CRT

Однією з найбільш використовуваних в світі асиметричних криптографічних схем є схема RSA [1]. Як відомо, виконання базових операцій (підписування, шифрування, та обернених) відповідно до цієї схеми зводиться до виконання обчислювально складної операції модулярного піднесення до степеня. Навіть за умови використання оптимізованих алгоритмів (напр., алгоритму Монтгомері [2]), виконання цієї операції вимагає досить великої кількості обчислень. Це ускладнює застосування схеми RSA на мобільних пристроях, а тому адаптація цієї схеми для виконання в умовах обмеженості обчислювальних ресурсів є досить актуальною.

Розглянемо модифікацію схеми RSA, що наведена в [3] (її інколи називають RSA-CRT, від Chinese Remainder Theorem). Характерними особливостями цієї модифікації є використання порівняно малого числа в якості публічної експоненти та застосування китайської теореми про залишки для виконання операцій, що використовують закритий ключ (підписування, дешифрування). Невелике значення публічної експоненти (наприклад, одне з чисел 3, 17 чи 65537, рекомендованих до використання декількома сучасними стандартами RSA) дозволяє швидко виконувати операції шифрування та перевірки підпису, а китайська теорема про залишки дозволяє прискорити швидкість підписування та дешифрування приблизно у 4 рази. Завдяки цим перевагам, алгоритм RSA-CRT використовується майже в усіх сучасних реалізаціях RSA ([4], [5]).

Основну обчислювальну проблему при використанні алгоритму RSA-CRT складають саме операції дешифрування та підписування, виконання яких пов'язане з використанням таємного ключа. Тому сконцентруємо увагу саме на цих операціях, формулюючи задачу таким чином: мобільний пристрій (далі "Клієнт") бажає виконати обчислення за схемою RSA з використанням таємного ключа. Оскільки він не володіє необхідними обчислювальними ресурсами для виконання такого обчислення, він бажає доручити виконання частини операцій потужному пристрою, що знаходиться в одному з ним середовищі (далі "Сервер"), але за умови збереження в секреті таємного ключа.

Оскільки і підписування, і дешифрування по суті є однією і тією самою операцією піднесення до степеня d , достатньо розглянути лише одну з цих операцій. Для визначеності, нехай це буде операція підписування.

Нагадаємо оригінальний алгоритм RSA-CRT:

Алгоритм (RSA-CRT-sign)

Вхід: розширений закритий ключ схеми RSA

$\langle p, q, n, d_p, d_q, u \rangle$, де

p, q - великі прості числа,

$n = pq$,

$e d_p \equiv 1 \pmod{p-1}$,

$e d_q \equiv 1 \pmod{q-1}$,

$q u \equiv 1 \pmod{p}$,

m - дані, що мають бути підписані ($m < n$),

Вихід: s - підпис m .

1. Обчислити

$$m_p = m^{d_p} \pmod{p},$$

$$m_q = m^{d_q} \pmod{q}$$

2. Обчислити

$$h = (m_p - m_q) \cdot u \pmod{p}$$

$$s = m_q + q \cdot h$$

Нагадаємо, що для перевірки підпису потрібно показати, що $s^e \pmod{n} = m$.

Коректність цього алгоритму обґрунтована в [3]. Відмітимо, що на відміну від оригінального алгоритму RSA, за яким здійснення підписування вимагає виконання однієї операції модулярного піднесення до степеню над числами однакової з n довжини, операція підписування за алгоритмом RSA-CRT-sign вимагає виконання двох модулярних експоненціювань над числами вдвічі

меншої довжини.

Модифікуємо вищенаведений алгоритм відповідно до умови нашої задачі:

Алгоритм (RSA-CRT-sign-distrib)

Вхід: розширений закритий ключ схеми RSA

$\langle p, q, n, d_p, d_q, u \rangle, m$.

Вихід: s - підпис m .

1. Клієнт генерує число k_1 , взаємно просте з $(p-1)$, та k_2 , взаємно просте з $(q-1)$ та обчислює k_1^{-1} та k_2^{-1} такі, що

$$k_1 k_1^{-1} \equiv 1 \pmod{p-1},$$

$$k_2 k_2^{-1} \equiv 1 \pmod{q-1}$$

2. Клієнт обчислює:

$$d_p' = d_p k_1 \pmod{p-1},$$

$$d_q' = d_q k_2 \pmod{q-1}$$

3. Клієнт передає Серверу $d_p', d_q', k_1^{-1}, k_2^{-1}, n, m$.
4. Сервер обчислює

$$m_p' = (m^{d_p'})^{k_1^{-1}} \pmod{n}$$

$$m_q' = (m^{d_q'})^{k_2^{-1}} \pmod{n}$$

і передає m_p', m_q' Клієнту.

5. Клієнт обчислює

$$m_p = m_p' \pmod{p},$$

$$m_q = m_q' \pmod{q}$$

6. Клієнт обчислює

$$h = (m_p - m_q) \cdot u \pmod{p}$$

$$s = m_q + q \cdot h$$

Як можна побачити з викладеного вище, запропонований алгоритм складається з двох підалгоритмів – клієнтської та серверної частин, складність і час виконання яких можна розглядати незалежно.

Покажемо, що вищенаведений алгоритм є еквівалентним алгоритму RSA-CRT-sign. Для цього достатньо показати, що значення m_p та m_q , що обчислюються у другому алгоритмі, дорівнюють відповідним значенням m_p та m_q , що обчислюються у першому алгоритмі. Всі інші операції у обох алгоритмах співпадають.

$$\begin{aligned} m_p &= m_p' \pmod{p} = ((m^{d_p'})^{k_1^{-1}} \pmod{n}) \pmod{p} = \\ &= ((m^{d_p k_1})^{k_1^{-1}} \pmod{n}) \pmod{p} = (m^{d_p} \pmod{n}) \pmod{p} = \\ &= m^{d_p} \pmod{p} \end{aligned}$$

Аналогічно показується рівність значень m_q .

Покажемо, що алгоритм RSA-CRT-sign-distrib не надає Серверу ніяких даних для самостійного обчислення підписів від імені Клієнта в майбутньому. Сервер має доступ до наступних даних: d_p^{-1} , d_q^{-1} , k_1^{-1} , k_2^{-1} , n . Цих даних недостатньо для отримання чисел p та q , що є необхідними для відтворення всіх параметрів схеми RSA. Крім того, з обчислених значень m_p^{-1} та m_q^{-1} Сервер не зможе отримати m_p та m_q , оскільки йому невідомі p , q та u . Таким чином, Сервер не зможе ані отримати закритий ключ Клієнта, ані виконати підпис від імені Клієнта.

Алгоритм RSA-CRT-sign-distrib дозволяє перенести переважну кількість операцій з обчислювально "слабкого" Клієнта на обчислювально потужний Сервер. Обчислення, що має виконати Клієнт, обмежуються двома операціями знаходженням обернених за модулем чисел (за допомогою розширеного алгоритму Евкліда), чотирма операціями множення та операціями сумування та знаходження залишку від ділення. Найбільш обчислювально складні операції – піднесення до степеня за модулем – відсутні у клієнтській частині алгоритму і виконуються Сервером.

Проте, порівняно з оригінальним алгоритмом RSA-CRT-sign, кількість обчислень, що має виконати Сервер в рамках алгоритму RSA-CRT-sign-distrib, є суттєво більшою. Замість двох операцій піднесення до степеня за модулем

з довжиною модуля, що дорівнює половині довжини n (в алгоритмі RSA-CRT-sign), Сервер має виконати чотири операції піднесення до степеня за модулем з довжиною модуля, що дорівнює довжині n . Це вимагає набагато більшої кількості обчислень, але, оскільки за постановкою задачі, Сервер володіє дуже високою обчислювальною потужністю, ми вважаємо, що навіть таке збільшення кількості операцій не становить для нього проблеми. Слід також відмітити, що в умовах використання запропонованого алгоритму операції піднесення до степеня за модулем можуть бути розпаралелені між двома серверами. Ця властивість може бути використана для більш оптимального розподілу серверних ресурсів та для пришвидшення виконання цих операцій.

Для перевірки ефективності роботи наведеного алгоритму на практиці було створено відповідну комп'ютерну програму. Результати її виконання наведені на графіках (рис. 1 та 2). На першому графіку зображена залежність часу виконання "класичного" алгоритму (верхня крива) та клієнтської частини запропонованого алгоритму (нижня крива) від довжини модуля схеми RSA у бітах. На другому графіку додатково зображена крива залежності часу виконання серверної частини запропонованого алгоритму від довжини модуля схеми RSA у бітах (верхня крива).

З графіків можна побачити, що за великих



Рис. 1. Залежність часу виконання алгоритмів від довжини модуля схеми RSA

Час виконання алгоритмів

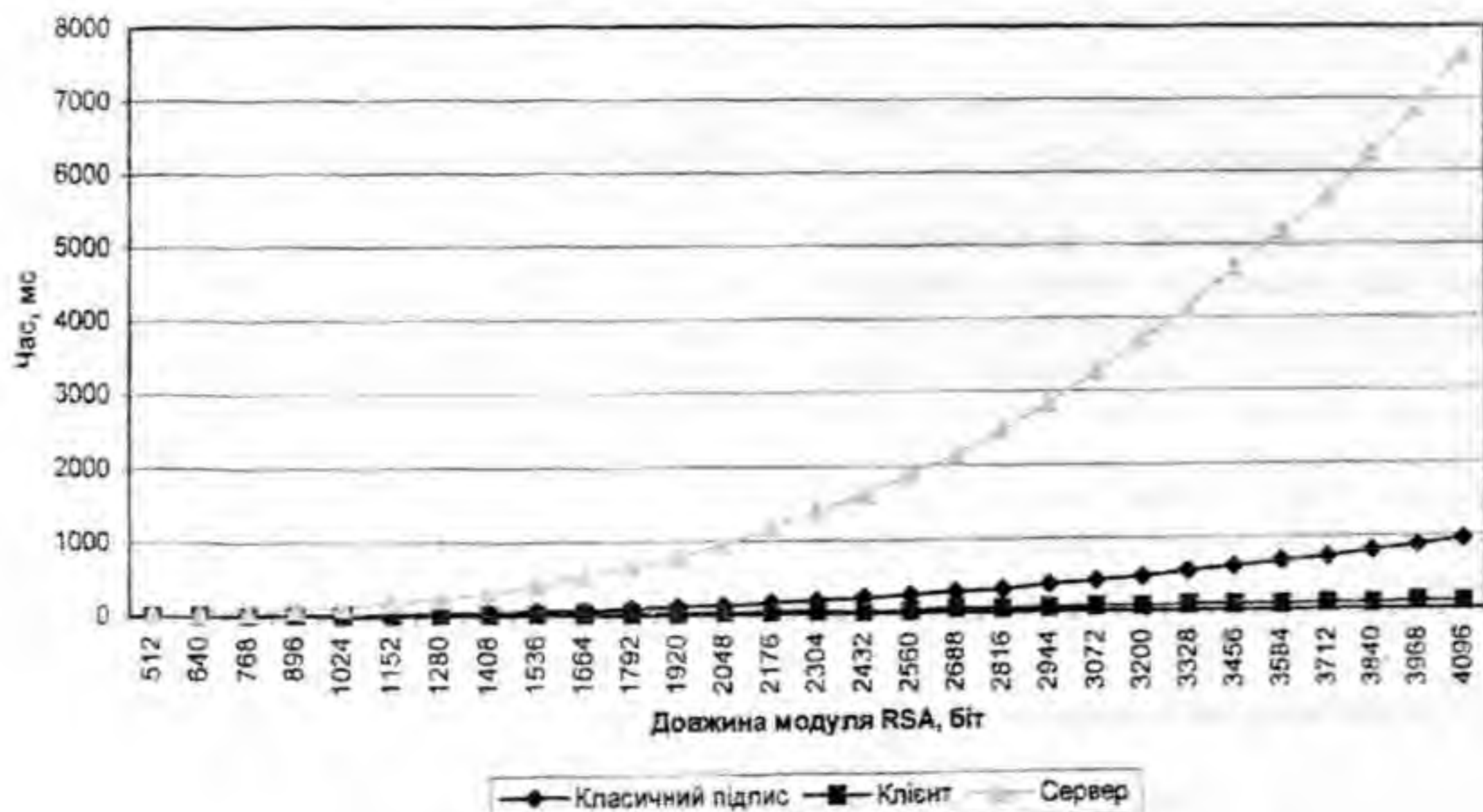


Рис. 2. Залежність часу виконання алгоритмів від довжини модуля схеми RSA

значень довжини модуля схеми RSA (2500–4096 біт) час виконання клієнтської частини запропонованого алгоритму в 8–12 разів менший за час виконання алгоритму RSA-CRT-sign; більш того, він зростає набагато повільніше за час виконання “класичного” підписування. Одночасно, виконання серверної частини алгоритму в 6–8 разів перевищує час виконання “класичного” алгоритму, але цим фактом можна знехтувати в рамках умови задачі (за якою сервер володіє набагато більшою потужністю, ніж клієнт).

Наведений розподілений алгоритм підписування RSA дозволяє перекласти переважну кількість обчислювальних операцій з обчислювально слабкого мобільного пристрою на потужний пристрій-сервер. Проте, зменшення часу виконання операцій, що виконує мобільний пристрій, викликає зростання часу виконання операцій, виконуваних сервером. За умовою задачі ми можемо знехтувати таким зростанням навантаження на сервер, проте задача оптимізації серверних обчислень залишається відкритою. Слід відмітити, що запропонований алгоритм може бути розпаралелений між двома серверами, а отже, загальний час виконання серверної частини може бути зменшений в два рази.

Наведений алгоритм може застосовуватися в усіх конфігураціях, що відповідають умовам поставленої задачі. В якості “слабких” клієнтів

можуть виступати такі пристрої, як мобільні телефони, кишенькові комп’ютери, смарт-карти, криптографічні токени тощо. Відсутність складних математичних операцій також дозволяє спростити та зробити більш дешевою реалізацію алгоритму на електронних мікросхемах.

Список використаних джерел

1. R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman. A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems // Communications of the ACM. – 1978. – 21, №2. – P.120-126.
2. P. L. Montgomery. Modular multiplication without trial division // Mathematics of Computation. – 1985. – 44. – P. 519-521.
3. J.-J. Quisquater, C. Couvreur. Fast Decipherment Algorithm for RSA Public-Key Cryptosystem // Electronics Letters. – 1982. – 18. – P. 905-907.
4. R. Housley, W. Ford, W. Polk. Internet X.509 Public Key Infrastructure (RFC2459) // Network Working Group. – 1999. – 129 p.
5. J. Callas, L. Donnerhake, H. Finney. OpenPGP Message Format (RFC2440) // Network Working Group. – 1998. – 65 p.

Надійшла до редколегії 01.11.2007

УДК 517.9

Івохін Є.В., канд.фіз.-мат.наук, доцент

Про деякі спектральні властивості додатніх і позитивних матриць

На основі коефіцієнтів характеристичного рівняння для позитивних матриць отримано критерій єдиності додатнього власного числа. Наведено необхідні та достатні умови від'ємності дійсних частин власних чисел позитивних матриць.

Ключові слова: власні числа, позитивні матриці, коефіцієнти характеристичного рівняння

E-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Статтю представив професор, доктор фізико-математичних наук Наконечний О.Г.

Для розв'язку багатьох задач прийняття управлінських рішень, задач оптимізації, економічних та екологічних задач, а також в процесі якісного дослідження динаміки складних систем виникає необхідність використовувати методи, що базуються на використанні спектральних особливостей матриць, які входять до відповідних математичних моделей.

Аналіз властивостей власних значень довільних квадратних матриць розмірності $n \geq 2$ є досить широким напрямом досліджень теорії матриць [1]. В роботі розглянуто результати дослідження спектральних властивостей додатніх (невід'ємних) і позитивних матриць.

Визначення 1. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,n}$ розмірності n називається додатньою (невід'ємною), якщо $p_{ij} > (\geq) 0, i, j = \overline{1, n}$.

Визначення 2. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,n}$ розмірності n називається позитивною, якщо $p_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Для додатніх (невід'ємних) і позитивних матриць будемо використовувати традиційні позначення $P > (\geq) 0$. Неважко помітити, що для довільної позитивної матриці $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,n}$

матриця $Q = P + \gamma E$, де $\gamma \geq \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} p_{ii} \\ p_{ii} < 0 \end{cases}$, E -

Ivohin E.V., Ph.D., associate professor

About some spectral properties of affirmative and positive matrices

On the basis of coefficients of characteristic equation for positive matrices the criterion of the uniqueness of positive eigenvalue is got. The necessary and sufficient terms of negative real parts of eigenvalues of positive matrices are resulted

Key words: eigenvalues, positive matrices, coefficients of characteristic equation

єдинична матриця, буде невід'ємною матрицею $Q \geq 0$, тобто $q_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}$.

Спектральні властивості додатніх (невід'ємних) матриць досить давно і активно вивчалися [2,3]. Найбільш відомі теореми Перрона-Фробеніуса [4]. Наведемо їх формулювання для викладення результатів дослідження.

Теорема I (Перрона-Фробеніуса) [4]. Нехай $Q \geq 0$ -нерозкладна матриця. Тоді:

- Q має додатнє власне число, що дорівнює її спектральному радіусу $\rho(Q)$;
- $\rho(Q)$ відповідає доданій власний вектор;
- $\rho(Q)$ зростає при зростанні будь-якого з елементів Q ;
- $\rho(Q)$ має кратність 1.

Теорема II [4]. Нехай $Q \geq 0$ -деяка квадратна матриця. Тоді:

- Q має невід'ємне власне число, що дорівнює її спектральному радіусу $\rho(Q)$;
- $\rho(Q)$ відповідає невід'ємний власний вектор;
- $\rho(Q)$ не спадає при зростанні будь-якого з елементів Q .

Тут і далі під спектральним радіусом $\rho(Q)$ матриці Q розуміють максимальний з модулів її власних значень $\lambda_i(Q), i = \overline{1, n}$.

Розглянемо позитивну матрицю P і невід'ємну матрицю $Q = P + \gamma E$. Як слідує з наведених теорем, максимальне власне число

невід'ємної матриці є дійсним числом. Тоді максимальне власне число позитивної матриці також буде дійсним числом, причому $\lambda_{\max}(P) = \lambda_{\max}(Q) - \gamma = \rho(Q) - \gamma$.

Для позитивних і додатних (невід'ємних) матриць можна отримати ряд тверджень відносно знаковизначеності власних чисел на основі коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Лема 1. Для того, щоб квадратна позитивна матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,n}$ мала власні числа $\lambda_i(A)$

такі, що $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, i = \overline{1, n}$, необхідно і достатньо, щоб всі коефіцієнти характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ матриці A

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (1)$$

були невід'ємними, тобто $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

Доведення. Достатність коефіцієнтів поліному (1) є необхідною умовою його стійкості [5]. Тому зупинемося лише на доведенні достатності.

Нехай всі коефіцієнти $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$. Максимальне число позитивної матриці A є дійсним числом. Для довільного невід'ємного дійсного числа $\alpha > 0$ справедливо:

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_n > 0. \quad (2)$$

Тоді, характеристичне рівняння (1) матриці A не може мати дійсних невід'ємних коренів, тобто $\lambda_{\max}(A) < 0$. ■

Зауваження. Очевидно, що аналогічно можна показати, що якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння (1) невід'ємні, тобто $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, то $\lambda_{\max}(A) \leq 0$, а у випадку, коли $a_n = 0$ - $\lambda_{\max}(A) = 0$.

Без обмеження загальності, вважатимемо, що власні числа матриці A $\lambda_i(A), i = \overline{1, n}$ впорядковані за неспаданням величини дійсної частини. Це означає, що у випадку невід'ємних та позитивних матриць $\lambda_{\max}(A) = \lambda_n(A)$.

Теорема 1. Для того, щоб квадратна додатня матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,n}$ мала єдине дійсне власне

значення $\lambda_{\max}(A) = p > 0$, : $p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)|$,

необхідно і достатньо, щоб характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$ мало вигляд

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n = 0, \quad (3)$$

$(a_i \geq 0, i = \overline{1, n}).$

Доведення. Достатність. Припустимо, що характеристичне рівняння для додатньої матриці A має вигляд (3). Як слідує з теорем I або II, матриця A має дійсне власне додатне число $\lambda_{\max}(A) = p > 0$, таке, що

$|\lambda_i(A)| < p, i = \overline{1, n-1}$. Покажемо, що дійсне число єдине і для нього справедливе співвідношення

$$p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)|.$$

Розділемо поліном

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n$$

на одночлен $\lambda - p$. В результаті отримаємо многочлен $\lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} + b_2 \lambda^{n-3} + \dots + b_{n-1}$, в якому $b_1 = p - a_1, b_2 = p^2 - a_1 p - a_2, \dots, b_{n-1} = p^{n-1} - a_1 p^{n-2} - a_2 p^{n-3} - \dots - a_{n-1}$.

Дійсне число p є коренем рівняння (3). Це означає, що

$$\begin{aligned} p^{n-1} - a_1 p^{n-2} - a_2 p^{n-3} - \dots - a_{n-1} &\geq 0, \dots, \\ p^{n-1} - a_1 p^{n-2} - a_2 p^{n-3} - \dots - a_{n-1} &\geq 0, \dots, \\ p - a_1 &\geq 0, \dots, \\ b_i &\geq 0, i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

З нерівності $p - a_1 \geq 0$ витікає, що $p \geq a_1 \geq 0$. З теорії матриць відомо, що

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A). \quad \text{Тоді отримаємо нерівність}$$

$$p \geq p + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(A) \geq 0, \text{ з якої маємо } \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(A) \geq -p,$$

$$\text{або } p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)|.$$

Для доведення єдиності дійсного власного числа припустимо, від противного, що існує $k, 1 \leq k \leq n-1$: $\lambda_k(A) = q \geq 0$. Покладемо $k = n-1$.

Аналогічно розглянутому вище, розділемо поліном $\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n$ на одночлен $\lambda - q$. Маємо $q - a_1 \geq 0$, звідки отримаємо

$$q \geq p + q + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(A) \geq 0 \text{ і } 0 \geq p + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(A) \geq 0. \quad \text{З}$$

подвійної нерівності витікає, що $p = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Re} \lambda_i(A)$. І за умов справедливості

$$\text{нерівності } p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)| \text{ остаточно маємо}$$

$q \leq 0$. Отримали протиріччя. Достатність доведено.

Далі зупинемося на доведенні необхідності. Нехай додатня матриця A має єдине додатнє власне число $\lambda_{\max}(A) = p > 0$, таке що $|\lambda_i(A)| < p, i = \overline{1, n-1}$ і $p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)|$.

Покажемо, що характеристичне рівняння для матриці A має вигляд (3).

Залишимо загальний вигляд характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n c_n = 0 \quad (4)$$

Порівнюючи коефіцієнти в рівняннях (3) і (4), помічаємо, що $c_1 = a_1$. При цьому, $c_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$.

Враховуючи нерівність $p \geq \sum_{i=1}^{n-1} |\operatorname{Re} \lambda_i(A)|$,

отримаємо $a_1 \geq 0$.

Для другого коефіцієнта маємо співвідношення $c_2 = -a_2$. Обчислити значення коефіцієнта c_2 можна за формулою

$$c_2 = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j(A), \text{ за якою легко пересвід-}$$

читись, що за умови $|\lambda_i(A)| < p, i = \overline{1, n-1}$ справедливо $c_2 \leq 0$. Тоді $a_2 \geq 0$.

Аналогічно доводиться, що всі коефіцієнти $a_i \geq 0, i = \overline{1, n-1}$. Для c_n розглянемо 2 випадки: $n = 2m$ та $n = 2m + 1$.

У першому випадку $c_n = -a_n$ і $c_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A) = p \prod_{i=1}^{2m-1} \lambda_i(A) \leq 0$, з чого отримаємо $a_n \geq 0$. У випадку $n = 2m + 1$ маємо $c_n = a_n$ і $c_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A) = p \prod_{i=1}^{2m} \lambda_i(A) \geq 0$, і, як наслідок, $a_n \geq 0$.

Таким чином, характеристичне рівняння для матриці A може бути записане у вигляді (3) з невід'ємними коефіцієнтами $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

Теорему доведено.

Отримані результати можуть бути ефективно використані у вирішенні питання оптимізації побудови систем порівняння при дослідженні стійкості багатомірних систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь методом векторних функцій Ляпунова. Відомо, що найбільш поширеним методом дослідження

таких систем є метод векторних функцій Ляпунова, основна ідея якого полягає в побудові системи порівняння (наприклад, за схемою Бейлі [6] або Фурасова [7]). Передбачається, що вихідна система може бути представлена у вигляді сукупності підсистем меншої розмірності, а система порівняння будується на основі оцінок похідної векторних функцій Ляпунова в силу повної системи.

Автором отримано необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості тривіального розв'язку лінійних систем порівняння Бейлі та Фурасова, матриці яких є позитивними а також ряд нерівностей, що характеризують співвідношення діагональних та позадіагональних елементів стійких систем порівняння.

Список використаних джерел

1. Котельянский И.Н. О некоторых свойствах матриц с положительными элементами / Математический сборник. - Т.31. - №3. - 1952.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.
3. Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1978.
4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984.
5. Постников М.М. Устойчивые многочлены. - М.: Наука, 1981.
6. Beile F.N. The application of Lyapunov second method to interconnected systems// Journ. SIAM Contr. -Ser.A. -Vol.3. - №3. - 1966. - P.443-462.
7. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. - М.: Наука, 1977.

Надійшла до редколегії 19.10.2007

Касьянюк В.С., кандидат фіз.-мат. наук,
Польща М.В., інженер

Про один підхід до моделювання нечітких множин Л. Заде методами теорії можливостей

Теоретико-можливісна модель нечіткої множини суттєво відрізняється від моделі нечіткої множини, що була запропонована Заде. Отже, виникає питання про взаємозв'язок цих теорій. Роботу присвячено аналізу питання зв'язку теорії можливостей і теорії нечітких множин Л. Заде.

Ключові слова: теорія можливостей, нечіткі множини

У 1965 році Л.Заде запропонував новий підхід до формалізації нечіткості, оснований на понятті нечіткої множини [1]. Як відомо, будь-яка підмножина A множини X може бути задана за допомогою її характеристичної функції $\chi_A(\cdot): X \rightarrow \{0, 1\}$, визначивши $\chi_A(x) = 1$ для $x \in A$ і $\chi_A(x) = 0$ для $x \in X \setminus A$, $x \in X$.

Нечітка множина A також визначається її характеристичною функцією $\mu_A(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$, значення якої $\mu_A(x) \in [0, 1]$ інтерпретується як «ступінь включення» $x \in X$ в A . Той факт, що довільний елемент $x \in X$ може належати нечіткій множині A лише «частково», дозволяє моделювати складні об'єкти в термінах характеристик, значення яких властиві їм лише «до якоїсь міри», «частково».

В роботі [2] нечіткі множини Заде пропонуються як основа для теорії можливостей. Але теоретико-можливісна модель нечіткої множини [3, 4, 5] суттєво відрізняється від нечіткої множини Заде. В зв'язку з цим виникають наступні питання:

1. Як в рамках теорії можливостей промодельовати нечіткі множини Заде?
2. Який підклас теоретико-можливісних нечітких множин можна промодельовати за допомогою нечітких множин Заде?
3. Чи можна теоретико-можливісну нечітку множину привести до вигляду, що задовільняв би теорії Заде?

Veda S. Kasyanyuk, Ph.D.(Physics and Mathematics), Maxim V. Polshcha, engineer

On approach to theory of possibilities modeling of Zadeh's fuzzy sets

Theory of possibilities model of fuzzy set is essentially different from L. Zadeh's fuzzy set model. And there is an problem about its correlation. This article is devoted to analysis of relations between these theories.

Keywords: theory of possibilities, fuzzy sets

Знайдемо відповіді на ці питання.

Нечіткі множини Заде

Згадаємо означення та властивості нечітких множин Заде.

Означення 1. Нечітка множина A за Заде це пара (μ, X) , де

$$\mu: X \rightarrow [0, 1].$$

Як було зазначено вище, змістовно це означає, що елементи X можуть належати нечіткій множині A не повністю, а лише «певною мірою», «частково». Ступінь належності елемента x до нечіткої множини A визначається значенням характеристичної функції $\mu(x)$.

В теорії нечітких множин операції над нечіткими множинами зазвичай визначаються згідно наступних правил, що були запропоновані Заде [1, 6]:

$$\begin{aligned} A = B: & \mu_A(x) = \mu_B(x); \\ A \subset B: & \mu_A(x) \leq \mu_B(x); \\ \mu_{X \setminus A}(x) &= 1 - \mu_A(x); \\ \mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)); \\ \mu_{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}(x) &= \sup_{\alpha} \mu_{A_{\alpha}}(x); \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)); \\ \mu_{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}}(x) &= \inf_{\alpha} \mu_{A_{\alpha}}(x), \\ & x \in X. \end{aligned} \quad (1)$$

Стаття представлена професором Ю.А. Беловим

Тут A, B — нечіткі підмножини X , а позначення теоретико-множинних операцій, введені в лівому стовбчику, розшифровуються в правому.

Замінивши у визначеннях (1) $\mu(\cdot)$ на «звичайну» характеристичну функцію $\chi(\cdot)$, отримаємо відповідні операції над «звичайними», «чіткими» множинами, згідно до яких $\max(\chi_A, \chi_B)(\cdot)$ і $\min(\chi_A, \chi_B)(\cdot)$ — характеристичні функції об'єднання $A \cup B$ та перетину $A \cap B$ відповідно, умова $\chi_A(\cdot) \leq \chi_B(\cdot)$ — еквівалентна включенню $A \subseteq B$ і т.д.

З а у в а ж е н н я 1. В теорії нечітких множин Заде приймаються наступні умови (нормування):

$$\begin{aligned}\mu_X(x) &= 1, \\ \mu_\emptyset(x) &= 0, x \in X.\end{aligned}$$

хоча, згідно до правил (1),

$$\begin{aligned}\mu_{(X \setminus A) \cup A}(x) &\leq 1, \\ \mu_{(X \setminus A) \cap A}(x) &\geq 0, x \in X, \\ \text{тобто } (X \setminus A) \cup A &\neq X, (X \setminus A) \cap A \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Нечіткі множини в теорії можливостей

Нагадаємо теоретико-можливісну модель нечіткої множини. Розглянемо можливісний простір $(Y, 2^Y, \mathbf{P})$ з канонічним нечітким елементом ξ [7, 8], що визначається розподілом $\phi^\xi(\cdot) : Y \rightarrow [0, 1]$.

Означення 2. Нечіткою множиною на X будемо називати відображення

$$A : Y \rightarrow 2^X.$$

Як відомо, основною характеристикою нечіткої множини (в розумінні означення 2) є характеристична функція, що визначається як:

$$\begin{aligned}\mu_A : X &\rightarrow [0, 1], \\ \mu_A(x) &= \mathbf{P}(\{y | x \in A(y)\}).\end{aligned}\quad (2)$$

Зазвичай можливість $\mu_A(x)$ інтерпретується як можливість події $x \in A$, тобто $x \in X$ «покривається» нечіткою множиною A .

Нечітку множину (в розумінні означення 2) можна також інтерпретувати як відображення $A(\xi)$, що залежить від канонічного нечіткого елемента ξ обраного можливісного простору. Тоді значення можливості $\mu_A(x)$

можна інтерпретувати як можливість події $\xi \in \{y | x \in A(y)\}$.

Визначимо теоретико-можливісні операції над нечіткими множинами.

Означення 3. Нехай $A : Y \rightarrow 2^X, B : Y \rightarrow 2^X$ — нечіткі множини, тоді

$$\begin{aligned}A \cup B : Y &\rightarrow 2^X, (A \cup B)(y) = A(y) \cup B(y), \\ A \cap B : Y &\rightarrow 2^X, (A \cap B)(y) = A(y) \cap B(y), \\ A \setminus B : Y &\rightarrow 2^X, (A \setminus B)(y) = A(y) \setminus B(y), \\ X \setminus B : Y &\rightarrow 2^X, (X \setminus B)(y) = X \setminus B(y), \\ A \subseteq B &\Leftrightarrow A(y) \subseteq B(y), y \in Y.\end{aligned}\quad (3)$$

суть нечіткі множини.

Розглянемо характеристичні функції отриманих нечітких множин.

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(x) &= \mathbf{P}(\xi \in \{y | x \in A(y) \cup B(y)\}) = \\ &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)); \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \mathbf{P}(\xi \in \{y | x \in A(y) \cap B(y)\}) \leq \\ &\leq \min(\mu_A(x), \mu_B(x)); \\ \mu_{X \setminus B}(x) &= \mathbf{P}(\xi \in \{y | x \notin B(y)\}) = \\ &= \sup_{\{y | x \notin B(y)\}} \phi^\xi(y) = \begin{cases} 1, & \mu_B(x) < 1, \\ < 1, & \mu_B(x) = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Операції над нечіткими множинами можна визначити дещо іншим способом, якщо ввести наступні припущення. Розглянемо можливісні простори $\mathcal{Y} = (Y, 2^Y, \mathbf{P}^Y)$ з канонічним нечітким елементом ξ та $\mathcal{Z} = (Z, 2^Z, \mathbf{P}^Z)$ з канонічним нечітким елементом η , розподіли яких визначаються як $\phi^\xi(\cdot) : Y \rightarrow [0, 1]$ та $\phi^\eta(\cdot) : Z \rightarrow [0, 1]$ відповідно.

Означення 4. Нехай $A : Y \rightarrow 2^X, B : Z \rightarrow 2^X$ — нечіткі множини, тоді $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ суть нечіткі множини (відображення) $Y \times Z \rightarrow 2^X$, що визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}(A \cup B)(y, z) &= A(y) \cup B(z), \\ (A \cap B)(y, z) &= A(y) \cap B(z), \\ (A \setminus B)(y, z) &= A(y) \setminus B(z), \\ A \subseteq B &\Leftrightarrow A(y) \subseteq B(z), y \in Y, z \in Z.\end{aligned}\quad (4)$$

З а у в а ж е н н я 2. Якщо нечіткі множини A і B задовільняють умовам означення 4, то із співвідношення $A \subseteq B$ безпосередньо не випливає співвідношення $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, оскільки в загальному випадку неможливо

порівняти за можливістю множини $A_x = \{y|y \in Y, A(y) = x\}$ та $B_x = \{z|z \in Z, B(z) = x\}$. Співвідношення $A \subseteq B \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ буде мати місце тоді, коли $Y = Z$:

$$A \subseteq B \Rightarrow A_x \subseteq B_x \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Означення 3 є частковим випадком означення 4, коли:

1. $Y = Z$, тобто обидва можливісні простори співпадають, а отже, співпадають їх канонічні нечіткі елементи $\xi = \eta$;
2. нечіткі множини $A(\xi)$, $B(\eta)$ з означення 4 залежать від одного й того ж самого екземпляра канонічного нечіткого елемента $\xi = \eta$.

Визначимо характеристичні функції нечітких множин, що були введені в означенні 4. Для цього розглянемо можливісний простір $(Y \times Z, 2^{Y \times Z}, \mathbb{P})$ з канонічним нечітким елементом $\tau = (\xi, \eta)$. Міра можливості $\mathbb{P}$ може бути виражена через сумісний розподіл нечітких величин ξ та η :

$$\phi^\tau(y, z) = \phi^{\xi, \eta}(y, z) = \min(\phi^\xi(y), \phi^\eta(z)),$$

або

$$\phi^\tau(y, z) = \phi^{\xi, \eta}(y, z) = \min(\phi^\eta(z), \phi^{\xi|\eta}(y|z)).$$

У випадку, коли нечіткі величини ξ та $\eta \in P$ -незалежними [7], має місце рівність:

$$\phi^\tau(y, z) = \phi^{\xi, \eta}(y, z) = \min(\phi^\xi(y), \phi^\eta(z)).$$

Припустимо, що нечіткі величини ξ та $\eta \in P$ -незалежними та розглянемо характеристичні функції отриманих в (4) нечітких множин:

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \mathbb{P}(\{(y, z)|x \in A(y) \vee x \in B(z)\}) = \\ &= \max(\mathbb{P}(\{(y, z)|x \in A(y)\}), \\ &\quad \mathbb{P}(\{(y, z)|x \in B(z)\})). \end{aligned}$$

В свою чергу

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(y, z)|x \in A(y)\}) &= \sup_{\{y|x \in A(y)\} \times Z} \phi^{\xi, \eta}(y, z) = \\ &= \sup_{\{y|x \in A(y)\} \times Z} \min(\phi^\xi(y), \phi^\eta(z)) = \\ &= \sup_{\{y|x \in A(y)\}} \phi^\xi(y) = \mu_A(x), \end{aligned}$$

а отже,

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Аналогічно отримаємо співвідношення для перетину нечітких множин

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap B}(x) &= \mathbb{P}(\{(y, z)|x \in A(y) \wedge x \in B(z)\}) \leq \\ &\leq \min(\mathbb{P}(\{(y, z)|x \in A(y)\}), \\ &\quad \mathbb{P}(\{(y, z)|x \in B(z)\})), \end{aligned}$$

а отже,

$$\mu_{A \cap B}(x) \leq \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

У випадку, коли події $x \in A(\xi)$ та $x \in B(\eta) \in P$ -незалежними, має місце рівність

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Порівняння нечітких множин в теорії Заде і в теорії можливостей

Зауважимо, що в загальному випадку для теоретико-можливісної моделі нечіткої множини з співвідношень (1) виконуються лише два, що стосуються об'єднання нечітких множин. Проілюструємо це контрприкладом (для простоти розглянемо операції над нечіткими множинами згідно означення 3).

Розглянемо можливісний простір $(Y, 2^Y, \mathbb{P})$, $Y = [0, 1]$ з канонічним нечітким елементом ξ , що визначається розподілом $\phi^\xi(y) = y$. А отже, $\mathbb{P}(A) = \sup_{y \in A} \phi^\xi(y) = \sup A$. В якості прикладів будемо розглядати нечіткі множини з класу відображень $Y \rightarrow 2^Y$.

П р и к л а д 1. Розглянемо нечіткі множини $A, B: Y \rightarrow 2^Y$:

$$\begin{aligned} A(y) &= \begin{cases} [0, 1], & y = 1, \\ \{0\}, & y \in [0, 1), \end{cases} \\ B(y) &= [0, 1], y \in Y. \end{aligned}$$

Очевидно, що $\mu_A(y) = \mu_B(y) = 1$, тим часом як $A \neq B$.

Те ж саме стосується і включення множин: $\mu_B(y) \leq \mu_A(y)$, але невірно, що $B \subseteq A$.

П р и к л а д 2. Розглянемо нечітку множину $X \setminus A$ (А з прикладу 1):

$$(X \setminus A)(y) = \begin{cases} \emptyset, & y = 1, \\ (0, 1], & y \in [0, 1). \end{cases}$$

Неважко переконатися, що

$$\mu_{X \setminus A}(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y \in (0, 1]. \end{cases}$$

А отже, $\mu_{X \setminus A}(y) \neq 1 - \mu_A(y)$.

П р и к л а д 3. Розглянемо нечіткі множини $A, B : Y \rightarrow 2^Y$:

$$A(y) = \begin{cases} [0, 1], & y = 1, \\ \emptyset, & y \in [0, 1). \end{cases}$$

$$B(y) = \begin{cases} \emptyset, & y = 1, \\ [0, 1], & y \in [0, 1). \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $\mu_A(y) = \mu_B(y) = 1$, тим часом як перетин $A \cap B = \emptyset$, а отже, $\mu_{A \cap B}(y) = 0$. Маємо $\mu_{A \cap B}(y) < \min(\mu_A(y), \mu_B(y))$ для характеристичної функції перетину множин.

Приклади 1, 3 базуються на тому, що в загальному випадку характеристична функція перетину нечітких множин A і B в теорії можливостей не може бути виражена через μ_A та μ_B , оскільки події $\xi \in A(y)$ та $\xi \in B(y)$ не завжди є P -незалежними. Дійсно, строга рівність

$$\mu_{A \cap B}(y) = \min(\mu_A(y), \mu_B(y)), y \in Y$$

має місце тоді і тільки тоді, коли події $\xi \in A(y)$ та $\xi \in B(y)$ є P -незалежними для всіх $y \in Y$, тобто нечіткі множини A і B є P -незалежними.

Узгодження підходів

Розглянемо спосіб, що дозволяє будь-які нечіткі множини перетворювати на P -незалежні, не змінюючи їх характеристичної функції [3]. Фактично, цей спосіб є перетворенням $A \rightarrow \bar{A}$, $B \rightarrow \bar{B}$, при якому

$$\begin{aligned} \mu_A(y) &= \mu_{\bar{A}}(y), \mu_B(y) = \mu_{\bar{B}}(y), \\ \mu_{A \cap B}(y) &\leq \min(\mu_A(y), \mu_B(y)) = \\ &= \min(\mu_{\bar{A}}(y), \mu_{\bar{B}}(y)) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(y), y \in Y. \end{aligned}$$

Нехай $(Y, 2^Y, P)$ — можливісний простір, в якому можливість P задана розподілом $\phi(\cdot)$, та $A : Y \rightarrow 2^X$ — нечітка множина. Тоді характеристична функція нечіткої множини A

$$\mu_A(x) = P(\{y | x \in A(y)\}) = \sup_{\{y | x \in A(y)\}} \phi(y).$$

Означення 5. Визначимо нечітку множину $\bar{A} : Y \rightarrow 2^X$ наступним чином:

$$\bar{A}_x = \{y | y \in Y, \phi(y) \leq \mu_A(x)\},$$

$$\bar{A}(y) = \{x | x \in X, y \in \bar{A}_x\}.$$

Нечітку множину $\bar{A}$ назвемо P -поповненням A .

Сформулюємо основні властивості P -поповнення для операцій, введених в означенні 4 по аналогії з [3], де вони вивчаються у випадку операцій, введених в означенні 3.

Теорема 1. Розглянемо можливісні простори $Y = (Y, 2^Y, P^Y)$ та $Z = (Z, 2^Z, P^Z)$. Нехай A і B — будь-які нечіткі множини $A : Y \rightarrow 2^X$, $B : Y \rightarrow 2^X$; $\mu_A(\cdot)$, $\mu_B(\cdot)$ — їх характеристичні функції, а операції $\cup$ та $\cap$ визначені згідно означення 4. Тоді P -поповнення нечітких множин $\bar{A} : Y \rightarrow 2^X$, $\bar{B} : Z \rightarrow 2^X$ мають наступні властивості:

1. $\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x)$, $\mu_B(x) = \mu_{\bar{B}}(x)$, $x \in X$;
2. $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{\bar{B}} = B$, $A \subseteq \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$, $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$, $A \cap B \subseteq \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$;

Доведення. 1. Згідно означення 5 $\bar{A}_x \supseteq A_x$, де $A_x = \{y | y \in Y, x \in A(y)\}$. А отже, $\mu_{\bar{A}}(x) = \sup_{\bar{A}_x} \phi^x(y) = \sup_{A_x} \phi^x(y) = \mu_A(x)$.

2. Співвідношення $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{\bar{B}} = B$, $A \subseteq \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$ очевидні.

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B}(y, z) &= \{x | x \in X, (y, z) \in \overline{(A \cup B)}_x\}, \\ \overline{(A \cup B)}_x &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{(y, z) | \phi^{\xi, \eta}(y, z) \leq \mu_{A \cup B}(x)\} = \\ &= \{(y, z) | \phi^{\xi, \eta}(y, z) \leq \mu_A(x)\} \cup \\ &\cup \{(y, z) | \phi^{\xi, \eta}(y, z) \leq \mu_B(x)\} = \\ &= (\{(y, z) | \phi^{\xi}(y) \leq \mu_A(x)\} \cap \\ &\cap \{(y, z) | \phi^{\eta}(z) \leq \mu_A(x)\}) \cup \\ &\cup (\{(y, z) | \phi^{\xi}(y) \leq \mu_B(x)\} \cap \\ &\cap \{(y, z) | \phi^{\eta}(z) \leq \mu_B(x)\}). \end{aligned}$$

$$\overline{A \cup B}(y, z) = \bar{A}(y) \cup \bar{B}(z),$$

$$\overline{A \cup B}_x =$$

$$\begin{aligned} &\{(y, z) | (y, z) \in Y \times Z, x \in \bar{A}(y) \cup \bar{B}(z)\} = \\ &= \{(y, z) | z \in Z, x \in \bar{A}(y)\} \cup \\ &\cup \{(y, z) | y \in Y, x \in \bar{B}(z)\} = \\ &= \{(y, z) | z \in Z, \phi^{\xi}(y) \leq \mu_A(x)\} \cup \\ &\cup \{(y, z) | y \in Y, \phi^{\xi}(z) \leq \mu_B(x)\}. \end{aligned}$$

З вищенаведеного маємо $(\overline{A \cup B})_x \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B})_x$, а отже, $(\overline{A \cup B}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Аналогічно доводиться твердження $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. $\square$

Більш сильні твердження можна довести у випадку, коли $Y = Z$.

Теорема 2. Нехай $Y = (Y, 2^Y, P^Y)$ — можливісний простір з канонічним нечітким елементом ξ , що визначається розподілом $\phi^\xi(\cdot)$; A і B — будь-які нечіткі множини $A, B : Y \rightarrow 2^X$, $\mu_A(\cdot)$, $\mu_B(\cdot)$ — їх характеристичні функції, а операції $\cup$ та $\cap$ визначені згідно означення 4, тоді

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) \leq \mu_{\overline{B}}(x).$$

Доведення. $A \subseteq B \Rightarrow A_x \subseteq B_x \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ (див. зауваження 2), а отже, $\overline{A}_x \subseteq \overline{B}_x \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Якщо $A \subseteq B$ та $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, то $\mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x) \leq \mu_{\overline{B}}(x) = \mu_B(x)$. І навпаки, якщо $\mu_{\overline{A}}(x) \leq \mu_{\overline{B}}(x)$, то $\overline{A}_x = \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x)\} \subseteq \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_B(x) = \mu_{\overline{B}}(x)\} = \overline{B}_x$, а отже, $\overline{A} \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) \leq \mu_{\overline{B}}(x)$. $\square$

Ще більш сильні твердження можна довести за умови залежності нечітких множин A і B від одного й того ж самого екземпляра канонічного нечіткого елемента ξ , а саме, коли:

$$\begin{aligned} (A \cup B)(y) &= (A \cup B)(y, y) = A(y) \cup B(y), \\ (A \cap B)(y) &= (A \cap B)(y, y) = A(y) \cap B(y). \end{aligned}$$

Теорема 3. Мають місце наступні властивості:

$$1. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$2. \overline{A} \text{ і } \overline{B} \in P\text{-незалежними відносно операції } \cap, \text{ тобто}$$

$$\mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)) = \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x);$$

Доведення. 1. Доведемо, що $(\overline{A \cup B})_x = (\overline{A} \cup \overline{B})_x$ та $(\overline{A \cap B})_x = (\overline{A} \cap \overline{B})_x$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cup B})_x &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_{A \cup B}(x)\} = \\ &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_A(x)\} \cup \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_B(x)\} = \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B})_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B})_x &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_{A \cap B}(x)\} = \\ &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_A(x)\} \cap \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_B(x)\} = \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B})_x. \end{aligned}$$

А отже, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ та $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$2. \text{ Доведемо, що } \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_{\overline{A}}(y), \mu_{\overline{B}}(y));$$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B})_x &= \\ &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_{A \cap B}(x)\} \cap \\ &\cap \{y | \phi^\xi(y) \leq \mu_{\overline{B}}(y)\} = \\ &= \{y | \phi^\xi(y) \leq \min(\mu_A(y), \mu_B(y))\}. \end{aligned}$$

Оскільки $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x)$, $\mu_{\overline{B}}(x) = \mu_B(x)$, то

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) &= \min(\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)) = \\ &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cap B}(x). \end{aligned}$$

$\square$

Перейдемо до доповнення нечіткої множини A в теорії Заде. Приклад 2 побудовано на тому факті, що характеристична функція доповнення в загальному випадку визначається як

$$\begin{aligned} \mu_{X \setminus A}(x) &= P(\{y | x \notin A(y)\}) = \\ &= \sup_{\{y | x \notin A(y)\}} \phi(y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) < 1, \\ < 1, & \mu_A(x) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

А отже, рівність $\mu_{X \setminus A}(x) = 1 - \mu_A(x)$ не може бути виконана навіть для P -поповнених множин.

Спробуємо розібратися, як можна інтерпретувати вираз $1 - \mu_A(x)$.

Розглянемо більш загальний випадок. Насправді в теорії нечітких множин Заде характеристична функція доповнення може бути визначена більш загально:

$$\mu_{X \setminus A}(\cdot) = \theta(\mu_A(\cdot)).$$

Тут $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — строгомонотонно спадна функція, причому $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$.

Повернемося до теоретико-можливісної моделі. Функцію $\theta(\mu_A(\cdot))$, взагалі кажучи, не можна інтерпретувати як характеристичну функцію $\mu_{X \setminus A}$ нечіткої множини, що є доповненням до A . Дійсно, якщо $\mu_A(x) = P(x \in A)$ — можливість включення $x \in X$ в нечітку множину A , а $\mu_{X \setminus A}(x) = P(x \in X \setminus A) \triangleq P(x \notin A)$ — можливість включення $x \in X$ в нечітку множину $X \setminus A$, то

$$\begin{aligned} \max(\mu_A(x), \mu_{X \setminus A}(x)) &= \\ &= \max(P(x \in A), P(x \in X \setminus A)) = \\ &= P(x \in X) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Умова (5) в загальному випадку не виконується для довільної пари функцій $\mu_A(\cdot)$, $\theta(\mu_A(\cdot))$. Наведемо приклад.

П р и к л а д 4. У випадку, коли $0 < \mu_A(x) < 1$, для деякого $x \in X$, за визначенням $\theta(\cdot)$ має місце нерівність $0 < \theta(\mu_A(x)) < 1$, а отже, $\max(\mu_A(x), \theta(\mu_A(x))) < 1$. Тоді при довільній $\theta(\cdot)$ характеристичні функції $\mu_A(\cdot)$ та $\theta(\mu_A(\cdot))$ не пов'язані між собою як характеристичні функції взаємодоповнюючих нечітких множин.

Якщо $\theta(\cdot)$ розглядати як «заперечення», то функцію $\theta(\mu_A(x))$ слід розглядати як характеристичну функцію множини $\bar{A}$, що є дуальною до A . Пояснимо останнє на прикладі.

П р и к л а д 5. Якщо A — нечітка множина «високих» людей, $\mu_A(\cdot)$ — її характеристична функція, значення $\mu_A(x)$ — можливість того, що людина зросту $x \in X$ буде названа «високою». Нечітка множина $X \setminus A$, що є доповненням до A , є множиною «невисоких» людей. А характеристична функція $\mu_{\bar{A}}(x) = \theta(\mu_A(x))$ визначає нечітку множину $\bar{A}$ «низьких» людей.

Нагадаємо, що характеристична функція неоднозначно визначає нечітку множину, тобто дві різні нечіткі множини можуть мати одну й ту ж саму характеристичну функцію. Зважаючи на це, запропонуємо спосіб побудови дуальної множини $\bar{A} : Y \rightarrow 2^X$ за значенням $\mu_{\bar{A}}(x) = \theta(\mu_A(x))$:

$$\bar{A}_x = \{y | y \in Y, \phi(y) \leq \theta(\mu_A(x))\}, \\ \bar{A}(y) = \{x | x \in X, y \in \bar{A}_x\}.$$

Нечітка множина $\bar{A}$ є P -поповненою за побудовою, і може бути розглянута як аналог операції доповнення в теорії нечітких множин Заде.

Висновки

У роботі запропоновано підхід до моделювання теорії нечітких множин Заде за допомогою теоретико-можливісних методів. Введені операції над нечіткими множинами в теорії можливостей, що відповідають операціям над нечіткими множинами Заде, та досліджені їх властивості. Виявлено суттєві відмінності двох теорій щодо моделювання нечіткості та шляхом наведення прикладів показано,

що теорія можливостей є більш загальним інструментом для такого моделювання.

Список використаних джерел

1. L. A. Zadeh. Fuzzy sets. // Information and Control — 1965. — №8.
2. L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. // Fuzzy Sets and Systems — 1978. — №1.
3. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. — М.: Едиториал УРСС, 2000.
4. А. Прад, Д. Дюбуа. Теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1990.
5. Пытьев Ю.П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. Мера необходимости: определение, свойства интегрирование по возможности и по необходимости. // Вестник московского университета, Серия 3, Физика. Астрономия. — 1997. — №4.
6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976.
7. Пытьев Ю.П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. нечёткие элементы, независимость, условные распределения. // Вестник московского университета, Серия 3, Физика. Астрономия. — 1998. — №2.
8. Пытьев Ю.П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. Мера возможности определение и свойства. // Вестник московского университета, Серия 3, Физика. Астрономия. — 1997. — №3.

Надійшла до редколегії 15.11.2007 р.

УДК 681.3.062

Надія Д. Кахута*

Відношення сумісності, узагальнене з'єднання та узагальнений прямий добуток

Розглядаються властивості відношення сумісності (стабільність відносно об'єднання), узагальненого з'єднання (комутативність, асоціативність, одиниця) та узагальненого прямого добутку (критерій порожності, монотонність, повний образ відносно селектора та обмеження).

Ключові слова: відношення сумісності, з'єднання, узагальнений прямий добуток.

*E-mail: v.kahuta@infoplus.com.ua

Статтю представив: д.ф.-м.н, с.н.с. Буй Д.Б.

Стаття присвячена властивостям (1) відношення сумісності, (2) узагальненого з'єднання множин функцій та (3) теоретико-множинного узагальненого прямого (декартового) добутку. Вибір саме цих об'єктів дослідження обумовлений, по-перше, їхньою загальнозначністю та, по-друге, природним застосуванням в теорії реляційних баз даних при дослідженні табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодла [1-3; 4, підрозд. 1.3].

Властивості відношення сумісності (узагальненого прямого добутку) використовувались при дослідженні такої сигнатурної операції табличних алгебр як з'єднання (відповідно насичення) [4, підрозд. 2.2 та 2.7]; узагальнене з'єднання (множин функцій) виступає природним узагальненням операції з'єднання таблиць; нарешті, узагальнений прямий добуток дуже близький до іменних множин, що відповідають індексуванню.

Робота продовжує цикл робіт [5-7], присвячених дослідженню загальнозначних теоретико-множинних конструкцій, які використовуються в теорії реляційних баз даних.

Всі не означувані тут поняття та позначення використовуються в смислі саме робіт [5-7].

Властивості відношення сумісності. Будемо розглядати множину відношень (зокрема функцій), частково впорядковану за включенням; верхній (нижній) конус множини відношень Γ позначимо через Γ^{Δ} (відповідно Γ^{∇}); для скорочення запису конуси одноелементних множин $\{f\}^{\Delta}$ та $\{f\}^{\nabla}$ позначимо відповідно як f^{Δ} та f^{∇} .

Nadiy D. Kakhuta*

Compatibility relation, generalized join and generalized direct product

The properties of compatibility relation (stability with respect to union), generalized join (commutativity, associativity, neutral element) and generalized direct product (emptiness criterion, monotonicity, whole image with respect to selector and restriction) are considered.

Key Words: compatibility relation, join, generalized direct product.

Лема 1 (властивості відношення сумісності). Виконуються імплікації

$$1. f \approx g \Rightarrow \forall f' \forall g' (f' \in f^{\nabla} \& g' \in g^{\nabla} \Rightarrow f' \approx g'),$$

зокрема, $\forall f' \forall f'' (f', f'' \in f^{\nabla} \Rightarrow f' \approx f'')$;

$$2. \neg(f \approx g) \Rightarrow \forall f' \forall g' (f' \in f^{\Delta} \& g' \in g^{\Delta} \Rightarrow \neg(f' \approx g'));$$

$$3. U_1 \approx V \& U_2 \approx V \Rightarrow U_1 \cup U_2 \approx V;$$

$$4. \neg(U_1 \cup U_2 \approx V) \Rightarrow \neg(U_1 \approx V) \vee \neg(U_2 \approx V). \square$$

Доведення. Почнемо з першого пункту та доведемо першу імплікацію. Нехай функції f, g сумісні, тобто $f|X = g|X$, де

$X = \text{def } \text{dom} f \cap \text{dom} g$, а f', g' такі довільні функції, що $f' \subseteq f$ та $g' \subseteq g$; треба довести, що $f' \approx g'$, тобто $f'|X' = g'|X'$, де $X' = \text{def } \text{dom} f' \cap \text{dom} g'$.

Оскільки проекція монотонна, то $\text{dom} f' \subseteq \text{dom} f$ і $\text{dom} g' \subseteq \text{dom} g$; звідси (та монотонності перетину) випливає включення $X' \subseteq X$. Застосуємо до обох частин рівності $f|X = g|X$, яка виконується за припущенням, обмеження за множиною X' ; враховуючи рівність щодо композиції обмежень ([5, твердження 6, п. 5]), приходимо до рівності $f|(X \cap X') = g|(X \cap X')$,

тобто $f|X' = g|X'$ (оскільки, нагадаймо, $X' \subseteq X$).

Так як згідно з [5, твердження 6, п. 9] $f'|X' = f|X'$ та $g'|X' = g|X'$, то з встановленої рівності $f|X' = g|X'$ випливає шукана рівність $f'|X' = g'|X'$.

Друге твердження першого пункту впливає з доведеного першого твердження: дійсно, треба першу імплікацію застосувати до сумісності $f \approx f$, яка завжди виконується з огляду на рефлексивність відношення сумісності.

Другий пункт впливає з першого та загальних властивостей конусів. Встановимо цей пункт від супротивного: нехай функції f, g несумісні (тобто $\neg(f \approx g)$), але знайшлися функції f', g' , такі, що $f \subseteq f', g \subseteq g'$ та $f' \approx g'$. Але тоді з першого пункту випливає, що $f \approx g$; прийшли до протиріччя.

Зауважимо, що насправді тут використовується загальна властивість конусів — $f \in f^{\Delta\Delta}$, яка в свою чергу, є частковим випадком загальнозначного включення $A \subseteq A^{\Delta\Delta} \cap A^{\nabla\Delta}$ (див., наприклад, [8, § 1, теорема 2, п. (ii), с. 11]).

Встановимо третій пункт. Покладемо $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2 U_1$, $X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2 U_2$ та $Y \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2 V$. З припущень випливає, що $U_1|(X_1 \cap Y) = V|(X_1 \cap Y)$ та $U_2|(X_2 \cap Y) = V|(X_2 \cap Y)$.

Оскільки $\pi_1^2(U_1 \cup U_2) \cap \pi_1^2 V = (\pi_1^2 U_1 \cup \pi_1^2 U_2) \cap \pi_1^2 V = (X_1 \cup X_2) \cap Y$, то треба довести рівність $(U_1 \cup U_2)|((X_1 \cup X_2) \cap Y) = V|((X_1 \cup X_2) \cap Y)$. Згідно з стандартними теоретико-множинними співвідношеннями (та стандартним пріоритетом операцій), використовуючи дистрибутивність обмеження ([5, твердження 11, п. 8]), маємо ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} (U_1 \cup U_2)|((X_1 \cup X_2) \cap Y) &= \\ &= (U_1 \cup U_2)|((X_1 \cap Y) \cup (X_2 \cap Y)) = \\ &= (U_1|X_1 \cap Y) \cup (U_1|X_2 \cap Y) \cup \\ &\cup (U_2|X_1 \cap Y) \cup (U_2|X_2 \cap Y) = \\ &= (U_1|X_1 \cap Y) \cup (U_2|X_2 \cap Y) = \\ &= (V|X_1 \cap Y) \cup (V|X_2 \cap Y) = V|((X_1 \cap Y) \cup (X_2 \cap Y)) = \\ &= V|((X_1 \cup X_2) \cap Y). \end{aligned}$$

В вищенаведених рівностях скористалися такими включеннями, які випливають з [5, твердження 6, пп. 4, 1] (властивості обмеження):

$$U_1|(X_2 \cap Y) = U_1|(\pi_1^2 U_1 \cap X_2 \cap Y) = \\ = U_1|(X_1 \cap X_2 \cap Y) \subseteq U_1|(X_1 \cap Y),$$

$$U_2|(X_1 \cap Y) = U_2|(\pi_1^2 U_2 \cap X_1 \cap Y) = \\ = U_2|(X_2 \cap X_1 \cap Y) \subseteq U_2|(X_2 \cap Y).$$

Останній пункт безпосередньо впливає з попереднього (більш того, останні пункти насправді еквівалентні). $\square$

Прості приклади показують, що пп. 1, 2 доведеної леми не виконуються, взагалі кажучи, для відношень, тобто функціональність тут суттєва (так само як функціональність відношень була суттєва для п. 9 твердження 6 з [5], який безпосередньо використовувався при доведенні п. 1 леми 1).

Пункт 3 доведеної леми можна інтерпретувати як "обмежену" стабільність відношення сумісності відносно операції об'єднання відношень (поняття стабільності використовується стандартно, див., наприклад, [9, гл. 1, § 2, п. 2.4, с. 61]).

Що ж до питання про стабільність в загальному випадку, то прості приклади дають негативну відповідь. Наведемо відповідний приклад (який дуже близький до прикладу, наведеного після доведення [7, твердження 3] — одного з критеріїв ін'єктивності відношень).

Розглянемо чотири відношення (навіть функції) $U_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_1, y_1 \rangle \}$, $U_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_2, y_2 \rangle \}$ та $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_2, y_1 \rangle \}$, $V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_1, y_2 \rangle \}$, де елементи x_1, y_1, x_2, y_2 попарно різні (див. рис. 1, на якому жирні стрілки відповідають відношенням V_1, V_2).

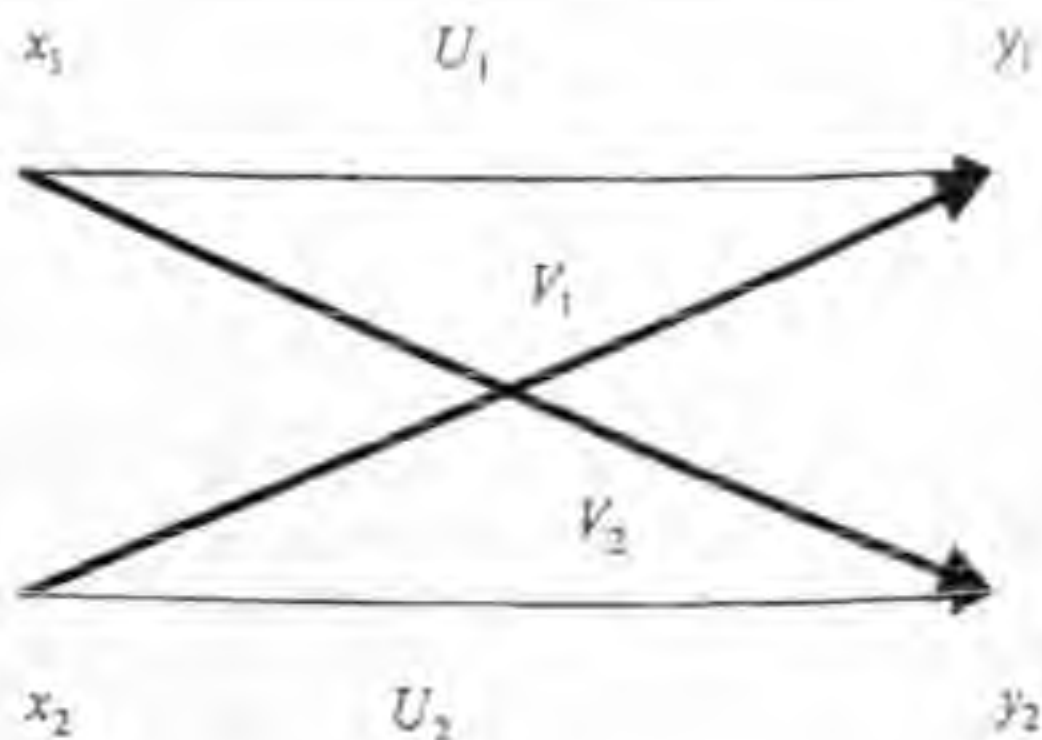


Рис. 1. Приклад, що ілюструє нестабільність відношення сумісності відносно операції об'єднання відношень

Очевидно, що $U_1 \approx V_1$ та $U_2 \approx V_2$ (їхні проекції за першою компонентою просто не перетинаються), але $\neg(U_1 \cup U_2 \approx V_1 \cup V_2)$. Причина згідно з п. 3 леми 1 полягає в тому, що відношення V_1, V_2 різні.

Оскільки в цьому прикладі всі відношення функціональні ($U_1, U_2, V_1, V_2, U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2$), то можна зробити висновок, що відношення сумісності функцій не є, взагалі кажучи, стабільним відносно часткової операції об'єднання сумісних функцій.

Оскільки п. 1 леми 1 для відношень в загальному випадку не виконується, то і імплікація п. 3 для відношень не обертається; але, як впливає з того самого п. 1 леми 1, імплікація обертається для функцій (в цьому випадку для того, щоб залишитися в класі функцій, треба додатково вимагати сумісності функціональних відношень U_1, U_2).

Операція узагальненого з'єднання. Множину всіх часткових функцій на універсумі позначимо F ; на ній розглянемо таку бінарну часткову операцію

$$\bar{\cup} : F \times F \rightarrow F, \text{ dom } \bar{\cup} = \{ \langle f, g \rangle \mid f \approx g \},$$

$$f \bar{\cup} g = f \cup g \text{ для всіх } \langle f, g \rangle \in \text{dom } \bar{\cup}.$$

З огляду на критерій функціональності об'єднання функцій ([6, лема 1]) функція $\bar{\cup}$ введена коректно (зауважимо, що саме про цю функцію йдеться при аналізі прикладу, що демонструє нестабільність відношення сумісності функцій відносно об'єднання в вищенаведеному прикладі).

Основні властивості введеної функції наведені в наступній лемі. Поняття комутативності та асоціативності для часткових бінарних функцій використовуються в розумінні [5], тобто вимагається виконання відповідних узагальнених рівностей.

Лема 2 (властивості функції $\bar{\cup}$). Часткова функція $\bar{\cup}$ комутативна та асоціативна. $\square$

Доведення. Комутативність операції випливає з симетричності відношення сумісності та комутативності теоретико-множинного об'єднання; спираючись на лему 1 про властивості відношення сумісності, встановимо асоціативність.

Отже, треба довести узагальнену рівність $(f_1 \bar{\cup} f_2) \bar{\cup} f_3 = f_1 \bar{\cup} (f_2 \bar{\cup} f_3)$; тобто показати, що обидві частини одночасно або невизначені,

або визначені і мають рівні значення. Розглянемо два можливих випадки.

Нехай значення лівої частини $(f_1 \bar{\cup} f_2) \bar{\cup} f_3$ визначено; тоді визначено і значення $f_1 \bar{\cup} f_2$, звідки випливає, що $f_1 \approx f_2$ та $f_1 \bar{\cup} f_2 = f_1 \cup f_2$. З визначення лівої частини також випливає, що

$$f_1 \cup f_2 \approx f_3 \text{ та}$$

$$(f_1 \bar{\cup} f_2) \bar{\cup} f_3 = (f_1 \cup f_2) \cup f_3 = f_1 \cup f_2 \cup f_3.$$

З сумісності $f_1 \cup f_2 \approx f_3$ та п. 1 леми 1 випливає, що $f_2 \approx f_3$, тобто значення $f_2 \bar{\cup} f_3$ визначено, більш точно $f_2 \bar{\cup} f_3 = f_2 \cup f_3$. Аналогічно маємо сумісність $f_1 \approx f_3$; звідси з врахуванням сумісності $f_1 \approx f_2$ та п. 3 леми 2 випливає, що $f_1 \approx f_2 \cup f_3$, тобто значення $f_1 \bar{\cup} (f_2 \bar{\cup} f_3)$ визначено і дорівнює об'єднанню всіх трьох функцій $f_1 \cup f_2 \cup f_3$.

Як бачимо, з визначення лівої частини випливає визначення правої частини та збіжність значень частин (узагальненої рівності, що доводиться).

Нехай тепер значення лівої частини $(f_1 \bar{\cup} f_2) \bar{\cup} f_3$ невизначено; тут свої два випадки. Нехай спочатку значення $f_1 \bar{\cup} f_2$ невизначено, тобто $\neg(f_1 \approx f_2)$. Якщо значення $f_2 \bar{\cup} f_3$ невизначено, то тим більше невизначено і значення правої частини $f_1 \bar{\cup} (f_2 \bar{\cup} f_3)$; якщо ж навпаки значення $f_2 \bar{\cup} f_3$ визначено, тобто $f_2 \approx f_3$, то значення правої частини $f_1 \bar{\cup} (f_2 \bar{\cup} f_3)$ знову ж невизначено оскільки $\neg(f_1 \approx f_2 \cup f_3)$ (що випливає з несумісності $\neg(f_1 \approx f_2)$ з застосуванням п. 2 леми 1).

Нарешті, нехай значення лівої частини $(f_1 \bar{\cup} f_2) \bar{\cup} f_3$ невизначено, а значення $f_1 \bar{\cup} f_2$ визначено. Тоді значення $(f_1 \cup f_2) \bar{\cup} f_3$ невизначено, тобто виконується несумісність $\neg(f_1 \cup f_2 \approx f_3)$; звідси, з огляду на п. 4 леми 1, випливає, що $\neg(f_1 \approx f_3)$ або $\neg(f_2 \approx f_3)$. Розглянемо ці два випадки.

Якщо $\neg(f_2 \approx f_3)$, то значення $f_2 \bar{\cup} f_3$ невизначено, тому значення правої частини $f_1 \bar{\cup} (f_2 \bar{\cup} f_3)$ тим більше невизначено.

Якщо ж навпаки $f_2 \approx f_3$, то тоді $\neg(f_1 \approx f_3)$; звідки згідно з п. 2 леми 1 випливає несумісність

$\rightarrow (f_1 \approx f_2 \cup f_3)$; отже і в цьому останньому випадку значення правої частини $f_1 \bar{\cup} (f_2 \cup f_3)$ невизначено. $\square$

Зауважимо, що твердження доведеної лемми 2 про комутативність та асоціативність часткової операції об'єднання сумісних функцій наведені у [4, розд. 2, підрозд. 2.7, лема 2.7.2, с. 51]; при цьому відповідні властивості відношення сумісності, наведені в лемі 1, по суті використовувались неявно.

Розповсюдимо бінарну операцію $\bar{\cup}$ з функцій на множини функцій в термінах повного образу за загальною схемою, наведеною в [5]; на цьому шляху отримаємо таку всюди визначену бінарну операцію, аргументами і значеннями якої є множини функцій:

$$\begin{aligned} [\bar{\cup}] : P(F) \times P(F) &\rightarrow P(F), \\ [\bar{\cup}](F_1, F_2) &= \bar{\cup}[F_1 \times F_2] = \\ &= \{f_1 \cup f_2 \mid f_1 \in F_1 \ \& \ f_2 \in F_2 \ \& \ f_1 \approx f_2\} \end{aligned}$$

для всіх множин функцій $F_1, F_2 \subseteq F$.

Позначимо $\otimes \stackrel{\text{def}}{=} [\bar{\cup}]$; саме так позначалася операція з'єднання в табличних алгебрах [1; 2; 4, підрозд. 2.1, с. 32]. Ми використовуємо саме це позначення тому, що на скінченних множинах, які складаються з скінченних функцій з однаковою областю означеності, операція $[\bar{\cup}]$ по суті співпадає з операцією з'єднання таблиць (за означенням таблицею є скінченна множина функцій з однаковою областю означеності, яка в цьому випадку називається схемою таблиці).

Для нашого випадку операцію $\otimes$ назовемо *узагальненим з'єднанням*.

Твердження 1 (властивості узагальненого з'єднання $\otimes$). Операція узагальненого з'єднання $\otimes : P(F) \times P(F) \rightarrow P(F)$ є комутативною та асоціативною; множина $\{f_\emptyset\}$ є правою та лівою одиницею для операції $\otimes$; операція $\otimes$ зберігає порожню множину¹. $\square$

Доведення. Комутативність та асоціативність випливають з таких самих властивостей операції $\bar{\cup}$, вказаних в лемі 2, та загального факту про успадкування цих властивостей при розповсюдженні операцій з елементів на множини елементів ([5, твердження 5]).

Твердження про одиницю перевіряється безпосередньо; воно випливає з того, що всюди не-

визначена функція $f_\emptyset$ є правою та лівою одиницею операції $\bar{\cup}$ (крім того, суттєво, що $f_\emptyset$ сумісна з довільною функцією). $\square$

Нарешті, збереження порожньої множини узагальненим з'єднанням випливає з збереження порожньої множини декартовим добутком та повним образом (п. 6 твердження 2 про властивості повного образу з [5]). $\square$

З доведеного твердження випливають аналогічні властивості операції з'єднання табличних алгебр (комутативність, асоціативність, існування та вигляд одиниці, збереження порожньої таблиці, наведені в [4]: відповідно пп. 2, 3, 4, 5 твердження 2.7.1 на с. 52).

Узагальнений прямий добуток. Нехай $i \mapsto D_i$, де $i \in I$, – деяке індексування з множиною індексів I . Узагальнений прямий добуток, що відповідає цьому індексуванню, позначимо через $\prod_{i \in I} D_i$. Згідно з стандартним означенням

$$\prod_{i \in I} D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \ \& \ \forall i (i \in I \Rightarrow f(i) \in D_i)\}$$

(див., наприклад [10, вступ, § 3, п. VIII, с. 30].)

Покладемо за означенням, що узагальнений прямий добуток, що відповідає всюди невизначеному індексуванню (іншими словами порожній множині індексів) містить єдиний елемент –

всюди невизначену функцію: $\prod_{i \in \emptyset} D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f_\emptyset\}$. Така

домовленість відповідає означенню та дуже зручна з технічної точки зору, що буде продемонстровано далі.

Твердження 2 (розклад прямого добутку).

Для довільного індексування з множиною індексів I та довільного покриття $\{I_1, I_2\}$ індексної множини I виконується рівність $\prod_{i \in I} D_i = \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i$,

де два індексування в правій частині рівності отримуються обмеженням індексування лівої частини на свої множини індексів. $\square$

Доведення. Покажемо спочатку, що права частина рівності включається в ліву. Отже, нехай $f \in \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i$, тоді існують такі сумісні функції f_1, f_2 , що $f_1 \in \prod_{i \in I_1} D_i$, $f_2 \in \prod_{i \in I_2} D_i$ та

$f = f_1 \cup f_2$. Оскільки $\{I_1, I_2\}$ покриття та проєкція дистрибутивна відносно об'єднання, маємо рівності

$$\begin{aligned} \text{dom} f &= \text{dom}(f_1 \cup f_2) = \text{dom} f_1 \cup \text{dom} f_2 = I_1 \cup I_2 = I. \end{aligned}$$

¹ Тобто, якщо хоча б один з аргументів дорівнює порожній множині, то і узагальнене з'єднання порожнє.

Належності $f(i) \in D_i$ для всіх $i \in I$ очевидні (вони випливають з аналогічних належностей для функцій f_1, f_2). Таким чином, функція f належить лівій частині. $\square$

Залишається показати, що ліва частини рівності, що доводиться, включається в праву. Нехай $f \in \prod_{i \in I} D_i$; очевидно, згідно з властивостями обмеження ([5, твердження 6, пп. 4, 8]) маємо такий розклад

$$f = f|_{\text{dom} f} = f|_I = f|(I_1 \cup I_2) = f|_{I_1} \cup f|_{I_2}$$

(суттєво, що $\{I_1, I_2\}$ є покриттям). Залишається врахувати сумісність $f|_{I_1} \approx f|_{I_2}$ (це випливає з спадності обмеження та п. 1 леми 1) та очевидні належності $f|_{I_1} \in \prod_{i \in I_1} D_i, f|_{I_2} \in \prod_{i \in I_2} D_i$. Отже,

$$f \in \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i. \square$$

Зробимо декілька зауважень. По-перше, покриття може містити і порожню множину, в цьому випадку, згідно з домовленістю про прямий добуток для порожнього індексування, один з прямих добутків приймає вигляд $\{f_\emptyset\}$, а ця множина є одиницею для з'єднання згідно з твердженням 1.

По-друге, при доведенні останнього твердження по суті була встановлена рівність $\prod_{i \in I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I} D_i]$, де $\uparrow I_1$ параметричний оператор обмеження за множиною I_1 (для множини I_2 повністю аналогічно), яка в наступному твердженні буде узагальнена.

Нижче покладемо за означенням $(X \rightarrow Y) = \{f | f: X \rightarrow Y\}$ – множина всіх всюди визначених відповідних функцій.

Наслідок 1 (розклад прямого добутку для скінченної індексної множини). Нехай для індексної множини виконується рівність $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, де $n \geq 1$. Тоді виконується рівність

$$\prod_{i \in I} D_i = (\{i_1\} \rightarrow D_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\{i_n\} \rightarrow D_{i_n}). \square$$

Доведення проводиться індукцією за n . Базис індукції ($n = 1$) тривіальний. $\square$

Індуктивний крок. Припустимо, що рівність виконується для всіх індексних множин, які містять n елементів, та покажемо, що ця ж рівність виконується і для індексних множин, що містять $n+1$ елементів. Отже, нехай $I = \{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}\}$. Сформуємо покриття індексної множини

$I_1 = \{i_1, \dots, i_n\}, I_2 = \{i_{n+1}\}$ та застосуємо твердження 2 про розклад прямого добутку, а також індуктивне припущення:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} D_i &= \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i = ((\{i_1\} \rightarrow D_{i_1}) \otimes \dots \\ &\dots \otimes (\{i_n\} \rightarrow D_{i_n})) \otimes (\{i_{n+1}\} \rightarrow D_{i_{n+1}}) = \\ &= (\{i_1\} \rightarrow D_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\{i_n\} \rightarrow D_{i_n}) \otimes (\{i_{n+1}\} \rightarrow D_{i_{n+1}}). \square \end{aligned}$$

Далі через I_j , де $j \in D$, позначимо таку часткову функцію $I_j: F \rightarrow D, I_j(f) = f(j)$. Ця функція є узагальненим селектором. Відмітимо, що індексні множини позначаються курсивом на відміну від селектора.

Твердження 3 (властивості узагальненого прямого добутку). Виконуються твердження

1. $\prod_{i \in I} D_i = \emptyset \Leftrightarrow \exists i(i \in I \& D_i = \emptyset)$ (критерій порожності, збереження порожньої множини, аксіома вибору у випадку нескінченної індексної множини);

2. $U = \bigcup_{x \in \prod_{i \in I} D_i} U[x]$, зокрема, для функцій $\{f\} = \prod_{i \in \text{dom} f} \{f(i)\}$;

3. $I_j[\prod_{i \in I} D_i] = D_j$ для всіх $j \in I$, таких, що виконується $\forall i(i \in I \& i \neq j \Rightarrow D_i \neq \emptyset)$ (повний образ прямого добутку відносно селектору);

4. $\forall i(i \in I \Rightarrow D_i \subseteq D'_i) \Rightarrow \prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$ (монотонність); якщо ж накласти додаткову умову непорожності всіх множин D_i для $i \in I$, то ця імплікація обертається – $\forall i(i \in I \Rightarrow D_i \subseteq D'_i) \Leftrightarrow \prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$;

5. $\forall i(I_2 \setminus I_1 \Rightarrow D_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$, де

індексування в лівій частині рівності отримується обмеженням індексування в правій частині рівності на відповідну індексну множину (повний образ прямого добутку відносно обмеження). $\square$

Доведення. Пункт 1 доводиться очевидним чином. Зауважимо тільки, що якщо необхідність доводити від супротивного, то у випадку нескінченної індексної множини треба спиратися на аксіому вибору.

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\emptyset\} = \emptyset$, а права частина очевидно також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

вигляд $\prod_{i \in I} D_i \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i (i \in I \Rightarrow D_i \neq \emptyset)$. Прийш-

ли до однієї з форм аксіоми вибору (див., наприклад, [8, § 2, теорема 4, п. (1), с. 22]).

Другий пункт. Цей пункт стверджує, що відношення, як множина пар, отримується об'єднанням всіх функцій, що складають вказаний прямий добуток. Пункт перевіряється безпосередньо з використанням рівності $U = \bigcup_{x \in \pi_1^2(U)} \{x\} \times U[x]$, яку неважко перевірити.

Зауважимо, що рівність пункту залишається вірною і для порожнього відношення (всюди невизначеної функції $f_\emptyset$).

Третій пункт. Покажемо спочатку, що ліва частина включається в праву. Нехай $x \in I_1[\prod_{i \in I} D_i]$, тоді згідно з означенням повного

образу існує функція f , така, що $f \in \prod_{i \in I} D_i$, $I_1(f) = x$; звідси $f(j) = x$. За означенням прямого добутку $f(j) \in D_j$, тобто $x \in D_j$.

Тепер покажемо навпаки, що права частина включається в ліву. Нехай спочатку $D_j = \emptyset$; оскільки прямий добуток зберігає порожню множину (доведений п. 1) і так само для повного образу ([5, твердження 2, п. 6]), то ліва частина також порожня.

Нехай тепер множина D_j не порожня, розглянемо довільний елемент $x \in D_j$. В кожній непорожній за припущенням множині D_i , $i \in I$, $i \neq j$, обираємо по елементу x_i (якщо треба, то, звісно, застосовуємо аксіому вибору) і формуємо функцію f , таку, що $f(j) = x$, $f(i) = x_i$ для всіх $i \in I$, таких, що $i \neq j$. Очевидно, що $f \in \prod_{i \in I} D_i$,

$I_1(f) = x$, тобто елемент x належить лівій частині.

Четвертий пункт. Імплікація пункту впливає безпосередньо з означення прямого добутку.

Покажемо, що за умови непорожності всіх множин D_i , де $i \in I$, ця імплікація обертається.

Отже, нехай $\prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$. Очевидно, що всі

множини D'_i , де $i \in I$, також непорожні. Дійсно, згідно з п. 1 прямий добуток $\prod_{i \in I} D_i$ непорожній,

тоді згідно з включенням прямий добуток $\prod_{i \in I} D'_i$

також непорожній, а звідси всі множини D'_i , де $i \in I$, непорожні (знову згідно з п. 1).

Зафіксуємо довільне $i \in I$ та візьмемо повний образ відносно селектора I_i від обох частин нашого включення $\prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$. Оскільки пов-

ний образ монотонний ([5, твердження 2, п. 1]), то включення збережеться

$I_i[\prod_{i \in I} D_i] \subseteq I_i[\prod_{i \in I} D'_i]$. Залишається застосувати

попередній п. 3 і отримати шукане включення $D_i \subseteq D'_i$.

Зауважимо, що в загальному випадку імплікація пункту не обертається; зрозуміло, що це пов'язано з збереженням порожньої множини прямим добутком.

П'ятий пункт. Нехай всі множини D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ непорожні, доведемо рівність

$\prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$; спочатку покажемо, що

ліва частина включається в праву.

Нехай $f \in \prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i$, у всіх непорожній мно-

жинах D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ обираємо по елементу x_i

і формуємо функцію $f^* = f \cup f'$, де

$f' = \bigcup_{i \in I_2 \setminus I_1} \{ \langle i, x_i \rangle \}$. Очевидно, що $f^* \in \prod_{i \in I_2} D_i$; то-

му, якщо покажемо рівність $f = f^*|I_1$, то цього буде досить для доведення включення. Дійсно, маємо ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} f^*|I_1 &= (f \cup f')|I_1 = f|I_1 \cup f'|I_1 = \\ &= f|(dom f \cap I_1) \cup f'|I_1 = \\ &= f|(I_1 \cap I_2 \cap I_1) \cup f'|I_1 = \\ &= f|(I_1 \cap I_2) \cup f'|\emptyset = f|dom f \cup f_\emptyset = f. \end{aligned}$$

Тут, як і раніше, скористалися відповідними властивостями обмеження.

Нарешті покажемо, що права частина включається в ліву. Нехай $f \in (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$, тоді існує

функція f' , така, що $f'|I_1 = f$ та $f' \in \prod_{i \in I_2} D_i$.

Очевидно, що функція f' має такий розклад

$f' = f^* \cup f''$, де $f^* = f'|I_1 \cap I_2$ та

$f'' = f'|(I_2 \setminus I_1)$; також очевидні належності

$f^* \in \prod_{i \in I_1 \cap I_2} D_i$ та $f'' \in \prod_{i \in I_2 \setminus I_1} D_i$.

Тепер маємо ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} f &= f' | I_1 = (f'' \cup f''') | I_1 = f'' | I_1 \cup f''' | I_1 = \\ &= f'' | (dom f'' \cap I_1) \cup f''' | (dom f''' \cap I_1) = \\ &= f'' | (I_1 \cap I_2 \cap I_1) \cup f''' | (I_2 \setminus I_1 \cap I_1) = \\ &= f'' | (I_1 \cap I_2) \cup f''' | \emptyset = f'' | dom f'' = f''. \end{aligned}$$

Обґрунтування переходів знову спираються на відповідні властивості обмеження. Отже, $f = f'' \in \prod_{i \in I_1 \cap I_2} D_i$, що і треба було довести. $\square$

Прокоментуємо останній п. 5. Прості приклади показують, що в загальному випадку рівність $\prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1) [\prod_{i \in I_2} D_i]$ не виконується, але виконується включення $(\uparrow I_1) [\prod_{i \in I_2} D_i] \subseteq \prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i$; таким чином, непорожність всіх множин D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ потрібна саме для виконання оберненого включення.

Що ж до перетину індексних множин I_1 та I_2 , то він може бути і порожнім, в цьому випадку рівність пункту виконується та приймає вигляд $\{f_\emptyset\} = \{f_\emptyset\}$.

Останнє твердження суттєво узагальнює [4, твердження 1.3.5, с. 26], присвячене властивостям іменних множин, що відповідають індексуванню.

Література

1. Редько В. Н., Буй Д. Б. К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №4. – С. 3-12.
2. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
3. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б. Реляционные алгебры: операции деления и переименования // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №5. – С. 3-15.
4. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б., Поляков С. А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академпериодика", 2001. – 198 с.
5. Кахута Н. Д., Буй Д. Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та об-

меження // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.

6. Кахута Н. Д., Буй Д. Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.

7. Кахута Н. Д. Критерії ін'єктивності бінарних відношень // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 3.

8. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.

9. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

10. Куратовский К. Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т.1. – 594 с.

Надійшла до редакції 12.12.07

Колянова Т.В.

Моделювання взаємодії інфекції та природженого імунітету

В статті описано основні поняття, функції та механізми роботи природженого та надбаного імунітетів. Розроблено дві математичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, перша з яких описує дію природженого імунітету поза організмом людини, а друга – всередині нього. Для кожної з систем знайдені стаціонарні розв'язки та проведено дослідження їх стійкості.

E-mail: kolvanova_t@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Ляшенко І.М.

Вступ.

Результуюча імунна відповідь на інфекцію частіше всього складається з різних взаємозв'язаних ефектів як природженого, так і надбаного імунітету. На ранніх стадіях інфекційного зараження домінують механізми природженого імунітету, але пізніше лімфоцити починають здійснювати специфічну відповідь, властиву лише надбаному імунітету [1]. При цьому лімфоцити ніби “запам'ятовують” збудника, і якщо згодом організм знову піддається зараженню цим мікробом, вони “згадують” його та здійснюють більш ефективну та швидку імунну відповідь.

І. У повсякденному житті людський організм піддається різним інфекційним впливам. В даному пункті розглядається випадок, коли людина не хворіє і на перешкоді так званій “зовнішній” інфекції постає природжений імунітет.

Такий “перший бар'єр”, що стає на заваді інфекції, можна представити у вигляді такої математичної моделі

$$\begin{cases} \dot{N} = N(\tilde{\mu}_N(\Phi) - \gamma_1 B), \\ \dot{B} = (B^* - B)(\tilde{\mu}_B(I, \Phi) - \gamma_2 N - \gamma_3 \Phi). \end{cases} \quad (1)$$

Kolianova T.V.

Modelling of interaction of an infection and congenital immunity

In the scientific article the basic concepts, functions and mechanisms of work of the congenital and got immunities are described. Two mathematical models in the form of systems of the ordinary differential equations are developed. First of systems describes action of congenital immunity outside of an organism, and the second - inside of it. For each of systems stationary decisions are found and are carried out research of their stability.

Тут N – кількість збудників хвороби (концентрація вірусів у навколишньому середовищі); B – бактеріальна флора організму людини (концентрація бактерій); B^* – рівень бактеріальної флори здорового організму (за відсутності впливу інфекційних збудників); Φ – фактори зовнішнього середовища (це можуть бути: забруднене повітря, вода, неякісне та недостатнє харчування, погані санітарно – гігієнічні умови і таке інше); I – стан імунітету людини; $\tilde{\mu}_N$ – коефіцієнт “росту” інфекції; $\tilde{\mu}_B$ – коефіцієнт “росту” бактеріальної флори організму; γ_i ($i=1,2,3$) – коефіцієнт, що враховує ймовірність взаємодії (впливу) інфекційного збудника або зовнішнього середовища на бактеріальну флору організму та силу їх взаємодії.

Тоді $\tilde{\mu}_N N$ – швидкість зростання кількості інфекції, при цьому $\tilde{\mu}_N$ має певну межу насичення, яка залежить від того, де знаходиться джерело інфекції (мається на увазі – чи був це одноразовий вплив, чи людський організм увесь час піддається зараженню, тобто доречно говорити про те, що залежність від Φ істотна); $\gamma_1 NB$ – швидкість знищення інфекції за рахунок її взаємодії із бактеріальною флорою людського

організму; $\tilde{\mu}_B B$ – швидкість зміни бактеріальної флори організму, що залежить від стану імунітету людини, а також від оточуючого середовища; $\gamma_2(B^* - B)N$ – швидкість зміни бактеріальної флори за рахунок взаємодії з інфекцією; $\gamma_3(B^* - B)\Phi$ – швидкість дезактивації бактеріальної флори організму факторами зовнішнього середовища Φ .

Система диференціальних рівнянь (1) допускає стаціонарні розв'язки, що знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} N(\tilde{\mu}_N - \gamma_1 B) = 0; \\ (B^* - B)(\tilde{\mu}_B - \gamma_2 N - \gamma_3 \Phi) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Одним із стаціонарних розв'язків є тривіальний, що описує стан здорового організму людини при здоровому навколишньому середовищі (тобто $\Phi = 0$):

$$N^* = 0, B^* = B^*. \quad (3)$$

Нетривіальний стаціонарний розв'язок системи (2), а саме

$$B' = \frac{\tilde{\mu}_N}{\gamma_1}, N' = \frac{\tilde{\mu}_B - \gamma_3 \Phi}{\gamma_2} \quad (4)$$

існує при умові, що $\tilde{\mu}_B > \gamma_3 \Phi$, тобто коли фактори зовнішнього середовища не є лімітуючими.

Дослідимо цей розв'язок на стійкість.

В околі стаціонарного розв'язку (N', B') маємо

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{N}(N', B')}{\partial N} & \frac{\partial \dot{N}(N', B')}{\partial B} \\ \frac{\partial \dot{B}(N', B')}{\partial N} & \frac{\partial \dot{B}(N', B')}{\partial B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 N' \\ -\gamma_2(B^* - B') & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\gamma_1 N' \\ -\gamma_2(B^* - B') & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто рівняння

$$\lambda^2 - \gamma_1 \gamma_2 N'(B^* - B') = 0.$$

Введемо позначення $\gamma_1 \gamma_2 N'(B^* - B') = A$ і розглянемо детально два різні випадки.

Нехай $A < 0$, що відповідає випадку $B' > B^*$ (у людини рівень бактеріальної флори перевищує рівень здорової людини при відсутності інфекції). Тоді корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-A}$ є чисто уявними і тому стаціонарний розв'язок (4) є стійким [2]. При умові, що фактори зовнішнього середовища Φ та стан імунітету людини I є сталими, у розглянутому випадку $A < 0$ фазові траєкторії (N, B) в околі нерухомої точки (N', B') утворюють сім'ю замкнутих кривих, що мають назву "еліпсів Вольтерра" [2]. Відповідна модель (1) в цьому випадку є моделлю типу "хижак-жертва".

Модель Вольтерра "хижак-жертва" володіє досить цікавими властивостями. При будь-яких, навіть досить малих, збуреннях фазових координат система переходить з одного замкнутого циклу на інший новий замкнутий цикл. З точки зору стійкості це означає, що точка (N', B') – стійка, але не асимптотично стійка. Звідси випливає, що в моделі Вольтерра відсутні механізми, які б старалися зберегти її стан рівноваги. Останнє означає, що зовнішнє середовище Φ та стан імунітету I впливає як на зміну стану рівноваги (4), так і на зміну фазової траєкторії (N, B) . При цьому великі зміни Φ та I можуть вивести систему з стану рівноваги та перетворити її в нерівноважну.

Якщо $A > 0$, що відповідає випадку $B' < B^*$ (у хворої людини рівень бактеріальної флори нижче рівня здорової людини при відсутності інфекції). Тоді корені характеристичного рівняння є дійсними і різними за знаками, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{A}$. Стаціонарний розв'язок (4) виявляється сідловою точкою, отже є нестійким [2]. Тоді в асимптотиці при $t \rightarrow \infty$ зникає або N або B . Це випадок або повного одужання або смерті.

Наша задача полягає в моделюванні такого "природного" стану рівноваги, за якого організм людини залишається здоровим – тобто безпосереднє проникнення інфекції в середину організму не відбувається, але повсякчас йде боротьба, де головним бар'єром, що захищає організм людини, є саме бактеріальна флора організму. Положення такої "специфічної рівноваги" в стані (4) може підтримуватися лікуванням (керуванням параметрами $\tilde{\mu}_N$, $\tilde{\mu}_L$, γ_1 та γ_2 , що є залежними від стану імунітету I та зовнішнього середовища Φ).

2. Коли ж усередину організму людини потрапляє інфекція, яка може спричинити хворобу людини, то у цьому випадку спочатку починає працювати природжений імунітет, а потім до нього "підключається" й надбаний імунітет.

У цьому пункті розглянемо детально, як працюють ці імунітети. Отже, перший етап, коли **природжений імунітет $\rightarrow$ надбаний імунітет**:

певні типи фагоцитів здатні після захвату антигенів подати їх Т-лімфоцитам у формі, що підходить до розпізнання [3]. Цей процес названий представленням (презентацією) антигену. Розпізнавши антиген, Т-лімфоцит у свою чергу виділяє розчинні фактори (цитокіни), що активують фагоцити та спричиняють руйнування поглинутих ними мікробів.

Другий етап, коли **надбаний імунітет $\rightarrow$ природжений імунітет**:

фагоцити використовують утворені В-лімфоцитами антитіла для особистого більш ефективного розпізнавання збудників.

Тепер представимо математичне описання цих процесів:

$$\begin{cases} \dot{N} = N(\tilde{\mu}_N - \gamma_1 L(f(S_C))) - \gamma_2 X(f(S_C)) \\ \dot{L} = (L^* - L)(\tilde{\mu}_L(N, f(S_C), G)) - \mu_L - \gamma_3 N - \gamma_4 G \end{cases} \quad (5)$$

Пояснимо нові позначення та нові доданки системи рівнянь (5). Отже,

L – кількість специфічних лімфоцитів, які приймають участь у фагоцитозі; L^* – природна кількість специфічних лімфоцитів в організмі

здорової людини; $f(S_C)$ – функція системи комплементу, що містить близько 20 видів білків; X – хімічні фактори, що входять до бактерицидних ферментів, які "працюють" набагато ефективніше при активації системи комплементу, що відображається математичною залежністю $f(S_C)$; G – вміст глюкокортикоїдів – гормону, що регулює вироблення лімфоцитів.

Тоді $\gamma_1 NL$ – швидкість зміни концентрації інфекції за рахунок взаємодії з лімфоцитами; $\gamma_2 NX$ – швидкість знищення інфекції за рахунок дії на неї розчинних хімічних факторів; $\tilde{\mu}_L(L^* - L)$ – зростання лімфоцитів, що залежить від кількості інфекції та активності системи комплементу і має межу насичення; $\mu_L(L^* - L)$ – швидкість природної загибелі лімфоцитів; $\gamma_4(L^* - L)G$ – зменшення лімфоцитів при збільшенні вмісту гормону (глюкокортикоїдів).

Система диференціальних рівнянь (5) допускає стаціонарні розв'язки, що знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} N(\tilde{\mu}_N - \gamma_1 L - \gamma_2 X) = 0, \\ (L^* - L)(\tilde{\mu}_L - \mu_L - \gamma_3 N - \gamma_4 G) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Одним із стаціонарних розв'язків є тривіальний, що описує стан здорового організму людини:

$$N^* = 0, L^* = L^* \quad (7)$$

Нетривіальний стаціонарний розв'язок системи (6), а саме

$$L^* = \frac{\tilde{\mu}_N}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} X, \quad N^* = \frac{\tilde{\mu}_L - \mu_L}{\gamma_3} - \frac{\gamma_4}{\gamma_3} G \quad (8)$$

існує при умові $\tilde{\mu}_N - \gamma_2 X > 0$, що означає, що коефіцієнт росту інфекції перевищує коефіцієнт вироблення хімічних факторів, та при умові $\tilde{\mu}_L - \mu_L - \gamma_4 G > 0$, що означає, що коефіцієнт росту лімфоцитів перевищує коефіцієнт вироблення глюкокортикоїдів.

Дослідимо цей розв'язок на стійкість.

В околі стаціонарного розв'язку (N', L') маємо

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{N}(N', L')}{\partial N} & \frac{\partial \dot{N}(N', L')}{\partial L} \\ \frac{\partial \dot{L}(N', L')}{\partial N} & \frac{\partial \dot{L}(N', L')}{\partial L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 N' \\ -\gamma_3 (L^* - L') & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\gamma_1 N' \\ -\gamma_3 (L^* - L') & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто рівняння

$$\lambda^2 - \gamma_1 \gamma_3 N' (L^* - L') = 0.$$

Введемо позначення $\gamma_1 \gamma_3 N' (L^* - L') = A$ і розглянемо детально два різні випадки.

Нехай $A < 0$, що відповідає випадку $L' > L^*$ (у людини рівень лімфоцитів перевищує рівень здорової людини при відсутності інфекції). Тоді корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-A}$ є чисто уявними і стаціонарний розв'язок (8) є стійким. При умові, що вміст глюкокортикоїдів G , бактерицидні ферменти X та стан імунітету людини I є сталими, у розглянутому випадку $A < 0$ фазові траєкторії (N, L) в околі нерухомої точки (N', L') утворюють сім'ю замкнутих кривих, що мають назву "еліпсів Вольтерра". Відповідна модель (5) в цьому випадку є моделлю типу "хижак-жертва".

Модель Вольтерра "хижак-жертва" володіє вище вказаними властивостями. При будь-яких, навіть досить малих, збуреннях фазових координат система переходить з одного циклу на інший новий цикл. З точки зору стійкості це означає, що точка (N', L') – стійка, але не асимптотично стійка. Звідси випливає, що в моделі Вольтерра відсутні механізми, які б старалися зберегти її стан рівноваги. Останнє означає, що вміст глюкокортикоїдів G ,

бактерицидні ферменти X та стан імунітету I впливає як на зміну стану рівноваги (8), так і на зміну фазової траєкторії (N, L) . При цьому великі зміни G, X та I можуть вивести систему з стану рівноваги та перетворити її в нерівноважну.

Якщо $A > 0$, що відповідає випадку $L' < L^*$ (у хворої людини рівень бактеріальної флори нижче рівня здорової людини при відсутності інфекції). Тоді корені характеристичного рівняння є дійсними та різними за знаками, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{A}$. Стаціонарний розв'язок (8) виявляється сідловою точкою, отже є нестійким. Тоді в асимптотиці при $t \rightarrow \infty$ зникає або N або L . Це випадок або повного одужання або смерті.

Наша задача полягає в моделюванні такого "природного" стану рівноваги, за якого організм людини залишається здоровим – тобто безпосереднє проникнення інфекції всередину організму не відбувається, але повсякчас йде боротьба, де головним внутрішнім бар'єром, що захищає організм людини, є саме специфічні лімфоцити організму. Положення такої рівноваги в стані (8) може підтримуватися лікуванням (керуванням параметрами $\bar{\mu}_N, \bar{\mu}_L, \gamma_1$ та γ_3 , що є залежними від вмісту гормону G та концентрації хімічних факторів X).

Література.

1. Н. Грин и др. Биология. – Москва, Мир, том 1, 1993. – 210с.; том 2, 1993. – 223с.
2. Ляшенко І.М., Мукоєд А.П. Моделювання біологічних та екологічних процесів. Навчальний посібник. – Видавництво Київського університету, 2002. – 340 с.
3. Дж. Плейфер. Наглядная иммунология. – Москва, Медицина, 2000. – 54с.

Надійшло до редколегії 25.12.2007

УДК 519.633

Мартинюк* П.М., к.ф.-м.н., доц.

Метод радіальних базисних функцій в крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами спряження

Описано безсітковий метод знаходження наближеного розв'язку першої мішаної крайової задачі для параболічного рівняння з умовами спряження ідеального контакту в тривимірному випадку. Він базується на методі колокацій з використанням радіальних базисних функцій. Проведено ряд числових експериментів, які засвідчили ефективність запропонованого підходу.

Ключові слова: метод радіальних базисних функцій, умови спряження.

P. M. Martinyuk*, Candidate of physics and mathematics sciences

The radial basis function method for parabolic partial differential equation with adjoint boundary conditions

A meshless method for the 3-dimensional parabolic partial differential equation with adjoint boundary conditions had been described. One is based on collocation methods with use of radial basis functions. The numerical experiments have been lead. There has been shown that meshless methods gives acceptable accuracy and can be alternative to mesh methods for the boundary-value problems for the parabolic partial differential equations with adjoint boundary conditions.

Key Words: radial basis function method; adjoint boundary conditions.

*E-mail: P.M.Martinyuk@rstu.rv.ua

1. Вступ. Радіальні базисні функції (РБФ) знайшли широке застосування в числовому розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). Зокрема, вони використовуються: в методі подвійної взаємності відшукування часткового розв'язку при розв'язуванні крайових задач методом граничних елементів [1]; в методі колокації [2]; в методі фундаментального розв'язку [3].

Перші кроки по розв'язуванню крайових задач для нестационарних ДРЧП методом колокації з використанням РБФ (який отримав назву „метод радіальних базисних функцій”) були зроблені в роботах [4, 5].

РБФ з компактним носієм були вперше запропоновані в 1995 році [6-8]. Основна мета застосування даних РБФ – зменшення числа обумовленості матриці СЛАР, до розв'язування якої зводиться крайова задача.

В роботах [9, 10] запропоновано новий підхід в застосування РБФ до розв'язування крайових задач для ДРЧП. Його автори назвали непрямим методом РБФ. В непрямому методі похідна найвищого порядку шуканої функції апроксимується безпосередньо через лінійну комбінацію РБФ. А похідні нижчих порядків і сама функція отримуються через інтегрування.

В роботі [11] застосовано мультіквадратичні РБФ до розв'язування безсітковим методом нелінійних еліптичних рівнянь. Як свідчать висновки авторів, при однаковій кількості вузлів

метод РБФ дає точність на кілька порядків кращу, ніж метод скінченних різниць (МСР). Для досягнення ж однакової точності обома методами в МСР потрібно використати невідомих в десятки разів більше, ніж в методі РБФ.

Крайові задачі якими описуються математичні моделі процесів фільтрації, тепло- та масопереносу, фільтраційної консолидації, вологоперенесення виводяться у випадку просторових змінних. І лише потім (або під час побудови математичної моделі), на основі певних спрощуючи припущень, дані задачі зводяться до двовимірного або тривимірного випадків. Природно, що найбільш адекватний прогноз для реального фізичного процесу ми отримаємо, розв'язавши відповідну крайову задачу в заданих областях тривимірного простору. Крім того, реальні фізичні процеси мають місце в неоднорідних областях, що приводить до необхідності розв'язання крайових задач з умовами спряження.

Метод скінченних елементів вимагає побудови геометричної сітки в заданій області. Досить часто задача побудови такої сітки за складністю перевершує саму крайову задачу. Крім того, в тривимірному випадку застосування МСЕ значно ускладнюється, МСР теж вимагає наявності геометричної сітки і безпосередньо застосовний лише в областях форми прямокутника, або паралелепіпеда. Застосування

МСР в областях складної геометрії вимагає побудови геометричної сітки, використовуючи відображення [12, 13], або побудови трикутної сітки [14]. В той же час метод РБФ вимагає наявності лише вузлової сітки, побудувати яку набагато простіше.

В роботі [15] показано застосування методу РБФ до розв'язування крайових задач з умовами спряження для стаціонарних ДРЧП лише в двовимірному випадку. Тому метою даної роботи є застосування методу РБФ для розв'язування крайових задач для нестационарних ДРЧП у випадку просторових змінних.

2. Постановка задачі. Розглянемо наступну першу мішану крайову задачу для параболічного рівняння в тривимірній області Ω з умовами спряження ідеального контакту [16]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(X, t) \Delta u(X, t) + f(X, t), \quad X = (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(X, t)|_{\partial\Omega} = g(X, t), \quad X \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$[u]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$u(X, t)|_{t=0} = u_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

де $t \in [0, T]$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ - деяка область з межею $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, причому $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$, $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \Gamma$; Γ - межа спряження; $k(X, t)$, $f(X, t)$, $g(X, t)$, $u_0(X)$ - задані функції; $u(X, t)$ - невідома функція; причому,

$$f(X, t) = \begin{cases} f_1(X, t), & X \in \Omega_1, \\ f_2(X, t), & X \in \Omega_2; \end{cases} \quad g(X, t) = \begin{cases} g_1(X, t), & X \in \partial\Omega_1, \\ g_2(X, t), & X \in \partial\Omega_2; \end{cases}$$

$$u_0(X) = \begin{cases} (u_0)_1(X), & X \in \Omega_1, \\ (u_0)_2(X), & X \in \Omega_2; \end{cases} \quad u(X, t) = \begin{cases} u_1(X, t), & X \in \Omega_1, \\ u_2(X, t), & X \in \Omega_2. \end{cases}$$

3. Числове розв'язання крайової задачі (1)-(4) методом РБФ. Покриємо область $\Omega \cup \partial\Omega$ вузловими точками $X_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, де: n^{Ω_1} вузлів лежать в області Ω_1 ; $n^{\partial\Omega_1}$ - на границі $\partial\Omega_1$; n^{Γ} - на межі спряження Γ зі сторони області Ω_1 ; n^{Ω_2} вузлів лежать в області Ω_2 ; $n^{\partial\Omega_2}$ - на границі $\partial\Omega_2$; n^{Γ} - на межі спряження Γ зі сторони області Ω_2 . На межі спряження Γ розміщення вузлів та їх кількість в обох підобластях співпадає. Отже,

$$n = n^{\Omega_1} + n^{\Omega_2} + n^{\partial\Omega_1} + n^{\partial\Omega_2} + 2n^{\Gamma} =$$

$$= n^{\Omega} + n^{\partial\Omega} + 2n^{\Gamma} = s + 2n^{\Gamma},$$

де $n^{\Omega} = n^{\Omega_1} + n^{\Omega_2}$, $n^{\partial\Omega} = n^{\partial\Omega_1} + n^{\partial\Omega_2}$, $s = n^{\Omega} + n^{\partial\Omega}$.

Для вузла $X_i \in \bar{\Omega}_1$ радіальну базисну функцію визначимо наступним чином [15]:

$$\varphi_i(r_i, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(r_i, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{\Omega}_1; \\ 0, & (x, y) \notin \bar{\Omega}_1; \end{cases} \quad \text{а для вузла } X_i \in \bar{\Omega}_2:$$

$$\varphi_i(r_i, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(r_i, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{\Omega}_2; \\ 0, & (x, y) \notin \bar{\Omega}_2. \end{cases} \quad \text{Тут } \varphi(r_i, \varepsilon) - \text{деяка}$$

відома РБФ, причому

$$r_i = |X - X_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

Наближений розв'язок задачі (1)-(4) шукаємо у вигляді

$$u(X, t) \approx u_n(X, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon),$$

де $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, - деякі невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу. Тоді з рівняння (1), граничної умови (2), умов спряження (3) та початкової умови (4) отримаємо наступну задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно вектора невідомих

$$A(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^n:$$

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + L \cdot A(t) = F, \quad (5)$$

$$G \cdot A^{(0)} = B, \quad (6)$$

де

$$A^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^n, \quad M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

$$G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad F = \{f_i\}_{i=1}^n, \quad B = \{b_i\}_{i=1}^n,$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i = \overline{1, n^{\Omega}}; \\ 0, & i = \overline{n^{\Omega}+1, s}; \\ 0, & i = s+1, s+2n^{\Gamma}; \end{cases} \quad f_i = \begin{cases} f(X_i), & i = \overline{1, n^{\Omega}}; \\ g(X_i), & i = \overline{n^{\Omega}+1, s}; \\ 0, & i = s+1, s+2n^{\Gamma}; \end{cases}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} k(X_{ji}, t) \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i = \overline{1, n^{\Omega}}; \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i = \overline{n^{\Omega}+1, s}; \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon) - \varphi_j(r_{ji+\Gamma}, \varepsilon), & i = s+1, s+n^{\Gamma}; \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(r_{ji}, \varepsilon) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(r_{ji+\Gamma}, \varepsilon), & i = s+n^{\Gamma}+1, s+2n^{\Gamma}; \\ g_{ij} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon), & i = \overline{1, n}, \quad b_i = u_0(X_i), \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$$r_{ij} = |X_j - X_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Тут вузли з номерами з 1 по n^{Ω} лежать в області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Вузли з номерами з $n^{\Omega}+1$ по $s = n^{\Omega} + n^{\partial\Omega}$ лежать на межі $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Вузли з номерами з $s+1$ по $s+n^{\Gamma}$ лежать на межі спряження Γ з боку області Ω_1 , а відповідні їм спряжені вузли на межі Γ з боку області Ω_2 мають номери з $s+n^{\Gamma}+1$ по $s+2n^{\Gamma}$.

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (5), (6), поділимо часовий відрізок $[0, T]$ на m однакових частин з кроком $\tau = \frac{T}{m}$. Позначимо через $A^{(j)}$ - наближені розв'язки задачі Коші (5), (6) при $t = j\tau$, $j = \overline{0, m}$; $A^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(A^{(j+1)} + A^{(j)})$.

Наближений розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (5) отримаємо за допомогою схеми Кранка-Ніколсона [16]

$$M^{(j+1/2)} \cdot \frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau} + L^{(j+1/2)} \cdot A^{(j+1/2)} = F^{(j+1/2)},$$

$$j = \overline{0, m-1},$$

або за допомогою чисто неявної різницевої схеми

$$M^{(j+1)} \cdot \frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau} + L^{(j+1)} \cdot A^{(j+1)} = F^{(j+1)},$$

$$j = \overline{0, m-1}.$$

4. Результати числових експериментів. Для проведення числових експериментів в якості розрахункової області Ω візьмемо одиничний паралелепіпед, де межа спряження паралельна до площини Oxy і задається рівнянням $z = 0.5$. Загальна кількість вузлів 432, причому 232 вузли розміщені на межі $\partial\Omega$, а 72 на межі спряження Γ .

Числові експерименти були проведені для крайової задачі (1)-(4) при:

$$k(X, t) \equiv 1, u_0(X) = \begin{cases} (x+y)^2 e^{0.5-z}, & X \in \Omega_1; \\ (x+y)^2 (1.5-z), & X \in \Omega_2; \end{cases}$$

$$g(X, t) = \begin{cases} (x+y)^2 e^{0.5-z} e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \partial\Omega_1; \\ (x+y)^2 (1.5-z) e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \partial\Omega_2; \end{cases}$$

$$f(X, t) = \begin{cases} (-4 + (x+y)^2 (-1 + \frac{1-t^2}{1+t^2})) e^{0.5-z} e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \Omega_1; \\ (-4 + (x+y)^2 \frac{1-t^2}{1+t^2}) (1.5-z) e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тоді точний розв'язок даної крайової задачі має вигляд

$$u(X, t) = \begin{cases} (x+y)^2 e^{0.5-z} e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \Omega_1; \\ (x+y)^2 (1.5-z) e^{\frac{t}{t^2+1}}, & X \in \Omega_2. \end{cases}$$

Для дискретизації в часі використовувалась чисто неявна різницева схема при $t \in [0, 1]$.

Для проведення числових експериментів використовувались наступні РБФ: MQ – мультіквадратична РБФ $\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$; IMQ – обернена мультіквадратична РБФ

$$\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}}; \text{ IQ – обернена квадратична}$$

$$\text{РБФ } \phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + (r\varepsilon)^2}; \text{ GA – гаусівська РБФ}$$

$$\phi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}. \text{ У вищенаведених функцій } \varepsilon > 0 - \text{ деякий параметр.}$$

В таблиці 1 наведено максимальні значення відносних похибок (у відсотках) при різних РБФ, різних значеннях константи ε та при $t=1$, $\tau=0.1$. В таблиці 2 наведено аналогічні значення при $\tau=0.2$.

Таблиця 1

РБФ	Значення максимальної відносної похибки			
	0.6	0.8	1.0	1.2
MQ	0,747	0,255	0,256	0,293
IMQ	0,195	0,168	0,264	0,521
GA	213,90	0,148	3,035	$4 \cdot 10^{11}$
IQ	0,161	0,341	0,475	0,586

Таблиця 2

РБФ	Значення максимальної відносної похибки			
	0.6	0.8	1.0	1.2
MQ	0,549	0,542	0,518	0,549
IMQ	0,440	0,408	0,386	0,556
GA	93,998	0,799	0,288	0,816
IQ	0,404	0,328	0,295	0,587

5. Висновки. Аналіз результатів проведених числових експериментів дозволив зробити наступні висновки:

- 1) метод РБФ у застосуванні до досліджуваного класу задач дає прийнятні результати;
- 2) всі максимальні відносні похибки досягаються у вузлах на межі спряження. Тому потрібні спеціальні методи та прийоми для апроксимації умов спряження з кращою точністю;
- 3) при $\varepsilon=1$ значення похибки не перевищує кількох відсотків, однак, існує таке значення константи ε при якому величина відносної похибки менша, ніж при $\varepsilon=1$. І як показують числові експерименти таке оптимальне значення ε залежить від кількох факторів: способу покриття області вузлами; кількості вузлів; виду РБФ, яка використовується. Найкращі результати при всьому розглянутому спектрі значень константи ε отримані для оберненої квадратичної радіальної базисної функції;
- 4) значення мінімальної відносної похибки при $\tau=0.1$ приблизно в два рази менше, ніж

при $\tau = 0.2$. Це показує лінійну залежність між точністю та кроком по часу (що доведено для неявної різницевої схеми теоретично).

Слід відмітити, що в даній статті ми не торкаємося питання теоретичного встановлення точності отриманих числових розв'язків. Також варто було б порівняти розв'язки, отримані методом РБФ із числовими розв'язками, отриманими іншим методом, наприклад методом скінченних елементів.

Список використаних джерел

1. Golberg M.A., Chen C.S. The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations // *Bound. Elements Communications*. – 1994. – 5. – Pp. 57-61.
2. Franke C., Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions // *Appl. Math. Comp.* – 1998. – 93. – Pp. 73-82.
3. Fairweather G., Karageorghis A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems // *Adv. Comput. Math.* – 1998. – 9. – Pp. 69-95.
4. Kansa E. J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – 19. – Pp. 127-145.
5. Kansa E. J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – 19. – Pp. 147-161.
6. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // *Adv. Comput. Math.* – 4. – 1995. – Pp. 389-396.
7. Wu Z. Multivariate compactly supported positive definite radial functions // *Adv. Comput. Math.* – 4. – 1995. – Pp. 283-292.
8. Buhmann M.D. Radial functions on compact support // *Proc. Edinburg Math. Soc.* – 1998. – 41. – Pp. 33-41.
9. Mai-Duy N., Tran-Cong T. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks // *Neural Networks*. – 2001. – 14. – Pp. 185-199.
10. Mai-Duy N., Tran-Cong T. Numerical solutions of Navier-Stokes equation using multiquadric radial basis function networks // *Int. J. Num. Meth. Fluids*. – 2001. – 37. – Pp. 65-86.
11. Fedoseyev A. I., Friedman M. J., Kansa E. J. Improved multiquadric method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary // *Comput. Math. Appl.* – 2002. – 43(3). – Pp. 439-455.
12. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами: Препр./АН Украины. Ин-т математики; 89.79. – Киев: 1989. – 55 с.
13. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трёхсвязных областей: Препр./АН Украины. Ин-т математики; 91.57. – Киев: 1991. – 56 с.
14. Вабищевич П.Н., Самарський А.А. Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках // *Журнал выч. математики и матем. физики*. – 2002. – Т.42, №9. – С. 1368-1382.
15. Мартинюк П.М. Числове розв'язання крайових задач з умовами спряження методом радіальних базисних функцій // *Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув.* – 2007. – Вип. 2(38). – С. 324-331.
16. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.

Надійшла до редколегії 25.06.2007

УДК 519.9

Вікторія Н. Омардирірова*

**Система підтримки прийняття рішень
керуючого інвестиційними фондами
Серія: фізико-математичні науки**

Стаття присвячена опису СППР керуючого інвестиційними фондами. СППР побудована з використанням розробленої моделі багатовимірної класифікації, моделі поведінки фінансових інструментів та методу Монте-Карло для моделювання поведінки інвестиційного портфелю.

*E-mail: vika1301@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

Вступ

Важливе місце серед сучасних фінансових інституцій посідають інститути спільного інвестування: корпоративні та пайові інвестиційні фонди. Основною задачею таких фондів є залучення та інвестування коштів з метою отримання інвестиційного прибутку. Інвестування здійснюється шляхом формування інвестиційного портфелю з акцій, облігацій, дорогоцінних металів, тощо на певний період часу (період інвестування) та подальшого керування сформованим портфелем. Організаційно, формування таких портфелів та керування ними покладається на спеціальних менеджерів, так званих керуючих інвестиційними фондами.

Діяльність цих менеджерів є надзвичайно складною, зважаючи на комбінаторне різноманіття варіантів формування портфелю, та необхідність оцінки їхньої інвестиційної привабливості з точки зору очікуваної дохідності та ризикованості на періоді інвестування.

Формування портфелю здійснюється в два етапи: на першому відбираються акції-кандидати до зарахування у портфель на основі аналізу наявної інформації про їхню поведінку в минулому з метою виділення тих, що мають «найбільший потенціал зростання»; на другому - оцінюється очікувана дохідність та ризикованість портфелю, сформованого з відібраних кандидатів, на періоді інвестування.

Перший етап пов'язаний з розв'язанням задачі класифікації в тому чи іншому вигляді:

Victoria N. Omardybirova*

**Decision Support System for manager of the
investment funds
Series: Physics & Mathematics**

The article is devoted to the description of DSS system for manager of the investment funds. Designed DSS is built with usage of modern classification model, financial instruments behavior model and Monte-Carlo method for investment portfolio modeling.

формалізованому або за допомогою експертів. Другий етап вимагає побудови моделі ціноутворення для елементів портфелю на досліджуваному інтервалі інвестування з метою оцінки очікуваної дохідності та ризикованості.

Зауважимо, що очікувана дохідність та ризикованість може оцінюватись один раз на момент формування портфелю на весь період інвестицій (інвестиції без керування або так звана стратегія «купив і тримай» - пасивне інвестування), чи здійснюватися періодично на періоді інвестування (інвестиції з керуванням - активне інвестування). У цьому останньому випадку склад портфелю змінюється у відповідності до оцінюваної інвестиційної привабливості на досліджуваному інтервалі дискретизації інвестиційного періоду. Можливі і інші варіанти керування портфелем для максимізації дохідності і мінімізації ризикованості.

В статті представлений опис СППР керуючого інвестиційним фондом, яка дозволяє забезпечити підтримку у розв'язанні більшості з типових задач керуючого інвестиційним фондом, зокрема:

1) автоматично проводити класифікацію наявних на ринку акцій за їхньою інвестиційною привабливістю;

2) відбирати до інвестиційного портфелю найбільш перспективні з точки зору потенціалу майбутнього зростання;

3) вибирати модель поведінки ціни відібраних у портфель акцій;

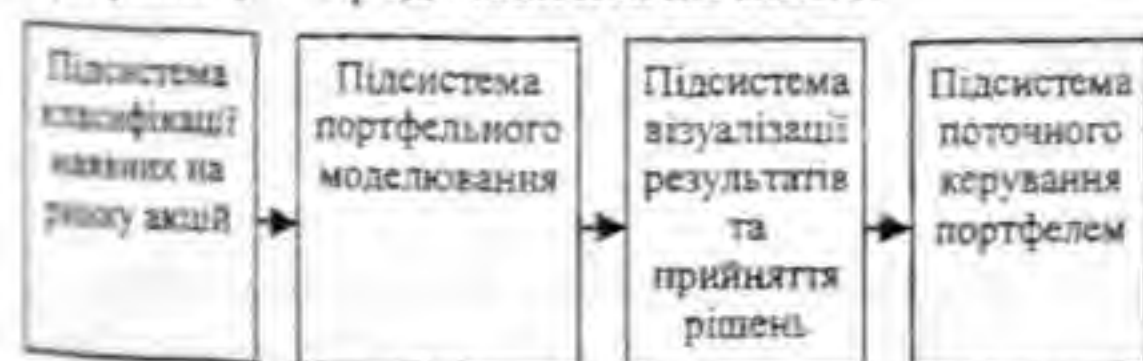
4) формувати оптимальності набір інвестиційних портфельів для заданих обмежень та критеріїв;

5) моделювати їх поведінку за допомогою методу Монте-Карло у відповідності з вибраною моделлю поведінки ціни акцій, і оцінювати очікувану дохідність і показники ризику для кожного з них;

6) виконувати постійний моніторинг показників інвестиційного портфелю і генерувати рекомендації щодо керування складом інвестиційного портфелю в залежності від відхилення поточних показників від очікуваних.

Структура та опис основних підсистем СППР.

Розроблена СППР складається з чотирьох підсистем, що відповідають основним етапам діяльності керуючого інвестиційним фондом: підсистема класифікації наявних на ринку акцій, підсистема портфельного моделювання, підсистема візуалізації результатів та прийняття рішень, підсистема поточного керування портфелем, - і представлена на мал.1.



Мал 1. Загальна схема СППР

Входом СППР є історичні дані по акціях, що котируються на біржі, фундаментальні показники економічної діяльності компаній. На виході СППР користувач має сформований з декількох відібраних акцій інвестиційний портфель, його очікувані характеристики та обрану стратегію керування портфелем.

Підсистема класифікації наявних на ринку акцій.

Підсистема реалізує розв'язок задачі класифікації першого етапу формування портфелю, за математичним формалізмом, який використовує теорію збурення псевдообернених матриць [1,2].

Вектор ознак для класифікатора, побудованого згаданим чином, будується за характеристиками, які включають показники фінансової діяльності компанії-емітента, елементи технічного аналізу, елементи статистичної моделі оцінки вартості акцій,

модель оцінки капітальних активів (CAPM) Вільяма Шарпа.

Алгоритм класифікації, детально описаний в [3]. У відповідності з ним, віднесення акцій до одного з k класів, здійснюється за мінімумом «відстаней відповідності» m_k , $k = \overline{1, K}$, які обчислюються за формулою:

$$m_k = (b - \bar{a}^{(k)})^T \cdot R_k \cdot (b - \bar{a}^{(k)}), \quad k = \overline{1, K}, \quad (1)$$

де R_k , $k = \overline{1, K}$ - квадратні матриці, які представляють собою R-оператори ($R(A) = A^+ (A^+)^T$, де A^+ - псевдообернення за Муром-Пенроузом [4]), і будуються засобами псевдообернення за центрованими середніми векторами $\bar{a}_k$, $k = \overline{1, K}$

$\bar{a}_j(k)$, $j_k = \overline{1, J_k}$, $k = \overline{1, K}$ навчальних вибірок кожного з класів у відповідності з виразами:

$R_k = R(A(k))$, де

$A(k) = (\bar{a}_1(k), \dots, \bar{a}_{J_k}(k))$,

$\bar{a}_j(k) = a_j(k) - \bar{a}(k)$,

$a_j(k)$, $j = \overline{1, J_k}$, $k = \overline{1, K}$ - навчальні вибірки з k класів.

Слід відзначити, що підсистема класифікації, побудована у відповідності із згаданим алгоритмом, характеризується гнучкістю, яка полягає в тому, що інвестиційний керуючий має з одного боку змогу формувати вектор ознак виходячи з власних експертних знань шляхом відбору до вектора ознак тих характеристик, значення яких найбільше втілюють перспективи подальшої поведінки ціни акції. З іншого боку - має можливість формувати навчальні вибірки кожного з класів та й вибирати саму кількість класів, виходячи з власного досвіду. Подальший розвиток запропонованого алгоритму можна знайти в [5].

Підсистема портфельного моделювання.

Підсистема реалізує можливість формування декількох варіантів інвестиційних портфельів та дослідження їхньої поведінки методом Монте-Карло з розрахунком очікуваної дохідності та показників ризику для кожного з них. Моделювання методом Монте-Карло поведінки відібраних акцій є дифузійно-стохастична модель запропонована Самуельсоном [6] вигляду (2) нижче, з параметрами μ та σ , які оцінюються за методом максимуму правдоподібності за наявними історичними даними:

$$S(t) = x + \mu \int_0^t S(\tau) d\tau + \sigma \int_0^t S(\tau) dW(\tau) \quad (2)$$

де μ , σ - відповідно коефіцієнт зросту (росту) та волатильності акцій,

$W(t)$ - вінерівський процес.

Моделювання методом Монте-Карло цінової поведінки $S_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, що є процесами з неперервним часом, здійснюється за (2) для дискретних моментів часу по цінах на момент закриття торговельних сесій на біржі.

Кожне із $S_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ в (2) визначається набором параметрів (μ_j, σ_j) та набором вінерівських процесів $W_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ для кожного із $S_j(t)$ - своїх.

Важливим для моделювання методом Монте-Карло цінової поведінки акцій, що складають портфель на періоді інвестиції є врахування взаємної залежності - корельованості їх дохідностей $r_i(t_k)$, $r_j(t_k) = \ln \left(\frac{S_j(t_k)}{S_j(t_{k-1})} \right)$, яка визначає кореляцію $W_j(t_k)$, $j = \overline{1, n}$ в (2) [7].

Моделювання методом Монте-Карло поведінки ціни акцій портфелю на інвестиційному інтервалі вимагає побудови векторних реалізацій вінерівських процесів корельованих між собою для одного і того самого моменту часу з кореляцією ρ_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, $i > j$. Коефіцієнти кореляції визначаються стандартними статистичними методами на основі аналізу історичних даних для дохідностей r_j , $j = \overline{1, n}$.

Таке застосування методу Монте-Карло, наведене в [7] і передбачає отримання значень гаусівських векторів методом Холецкого.

Описаний підхід дозволяє ефективно розв'язати задачу моделювання методом Монте-Карло майбутньої поведінки інвестиційного портфелю, який складається з акцій, дохідності яких корелюють між собою.

При генерації можливих інвестиційних портфелів інвестиційний керуючий має змогу задати обмеження на кількість акцій того чи іншого типу в портфелі. Встановлення таких обмежень є стандартним кроком на шляху досягнення необхідного рівня диверсифікації портфелю, а отже, як наслідок, - і зниження його ризику.

Підсистема візуалізації результатів та прийняття рішень.

Як вже відзначалося, ця підсистема відповідає за візуалізацію результатів роботи СППР та прийняття рішень керуючим інвестиційним фондом з вибору одного з варіантів інвестиційних портфелів, який найбільш точно відповідає його інвестиційній стратегії на основі результатів роботи вище описаних підсистем. При виборі одного з портфелів керуючий інвестиційним фондом має змогу прослідкувати всі вихідні дані та етапи створення кожного з можливих портфелів, порівняти окремі можливі портфелі між собою по їх розрахованих характеристиках.

Підсистема поточного керування портфелем.

Підсистема відповідає за поточне керування інвестиційним портфелем, яке полягає в постійному контролі показників обраного інвестиційного портфелю для дотримання прийнятої стратегії керування портфелем, та генеруванні рекомендацій по зміні складу інвестиційного портфелю при критичному відхиленні поточних показників портфелю від очікуваних.

Приклад роботи СППР на реальних даних.

Результати застосування СППР можуть бути продемонстровані на реальних даних взятих з сайту <http://finance.yahoo.com> для американського фондового ринку. Такий вибір об'єкту дослідження зумовлений тим фактом, що американський фондовий ринок є найбільш розвинутим фондовим ринком світу з обсягом торгів, що перевищує 90 мільярдів доларів США на день і, отже, може бути використаний для тестування розробленої СППР.

З поміж близько 10 000 акцій, що котуються на основних фондових біржах США, таких як NYSE, NASDAQ, AMEX, за результатами роботи підсистеми класифікації було відібрано 9 акцій, які за її оцінкою належали до класу зростання, з тікерами (позначення під якими вони фігурують в котирувальному листі біржі): CVH, PRU, MUR, NSC, ACV, EOG, UNH, EIX, ROK. Вони утворюють той набір акцій, з яких буде формуватися майбутній портфель.

Наступна підсистема: підсистема портфельного моделювання для відібраних акцій буде реалізації цільової поведінки акцій методом Монте-Карло, які складають портфель, на інвестиційному інтервалі в залежності від типу керування портфелем.

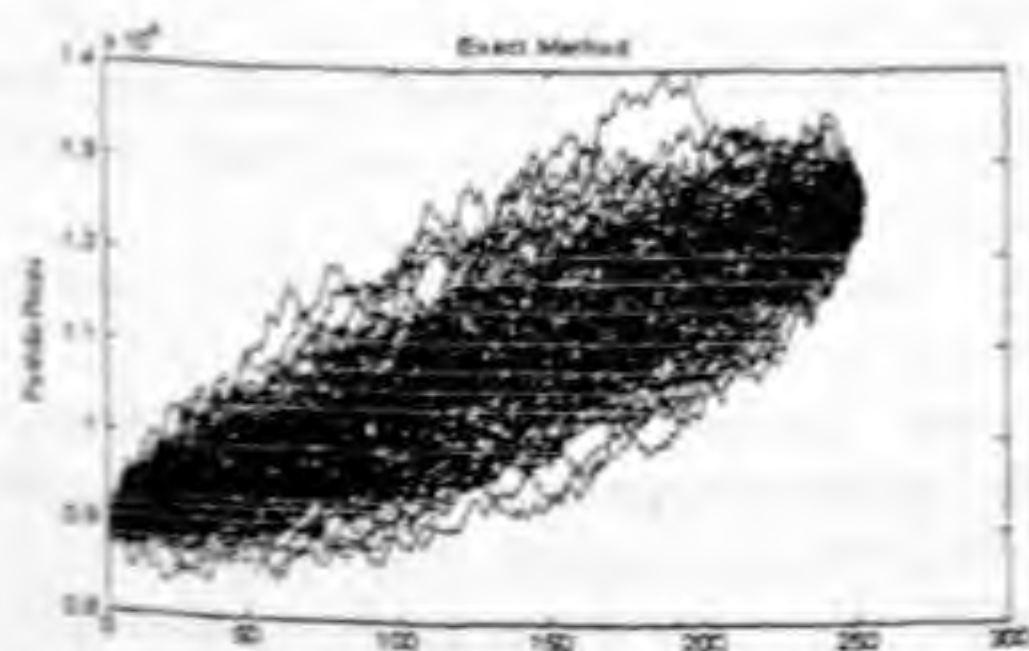
Додатковими даними для застосування методу Монте-Карло є історичні дані поведінки відібраних акцій. За цими історичними даними, взятими із згаданого вище сайту, в підсистемі здійснено оцінювання коефіцієнтів кореляцій дохідностей та $\mu_j, \sigma_j, j = \overline{1,9}$ для відібраних підсистемою класифікації 9 акцій, про які йшлося вище.

У досліджуваному прикладі таке моделювання поведінки портфелю стосується дев'яти відібраних акцій на один рік вперед або на 252 торгових дні 2005 року.

Додатковим параметром моделювання є розмір інвестицій, що припадають (виділяються) на кожний з типів акцій. У прикладі, що розглядався, вважається, що такими початковими інвестиціями є 100 тисяч доларів США на кожну з 9 акцій (разом 900 000\$).

Слід також відзначити, що розподіл наявних коштів між акціями, що входять до складу портфелю, може не бути рівномірним (однаковим). Отже, керуючий інвестиційним фондом має змогу за допомогою підсистеми портфельного моделювання моделювати поведінку портфелю акцій на періоді інвестування з різними варіантами розподілу коштів між акціями портфелю. Таке варіювання розподілу коштів між акціями портфелю дозволяє проаналізувати декілька варіантів портфелю з різними співвідношеннями очікуваної дохідності та ризику, дає змогу портфельному керуючому обрати той з варіантів портфелю, який має найбільш прийнятне співвідношення ризик/дохідність.

Результати моделювання методом Монте-Карло 100 реалізацій можливої поведінки вартості портфелю на періоді інвестування, наведені на малюнку 2.

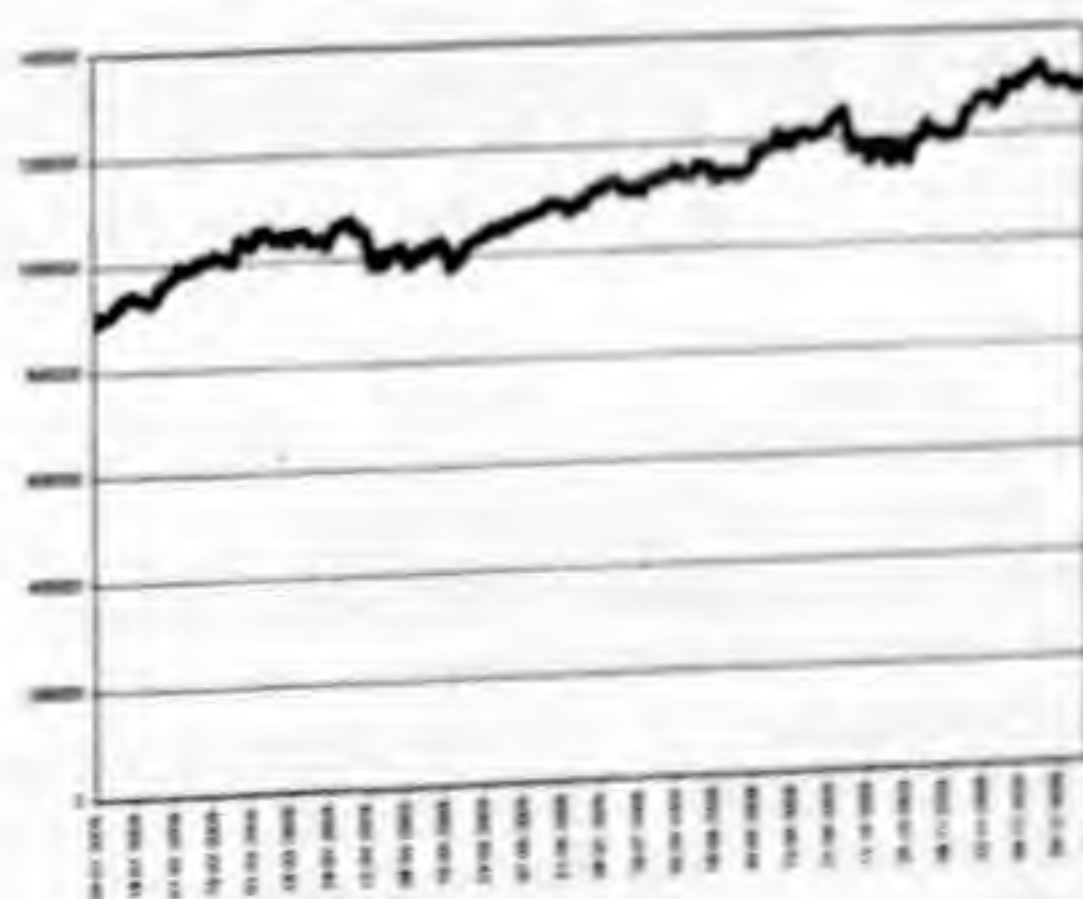


Мал 2. Результат моделювання вартості портфелю методом Монте-Карло по днях на 2005 рік

Згідно з розрахунками очікувана дохідність (середнє за реалізаціями) портфелю складає 39.91%, мінімальна можлива дохідність - 36.26%, максимальна можлива дохідність - 43.01%, стандартне відхилення дохідності портфелю - 6.58%.

Ефективність застосування системи в наведеному прикладі та загалом, може визначатися за допомогою різних критеріїв. Одним з них може бути співставлення реальних результатів, продемонстрованих створеним портфелем на періоді інвестування, з результатами моделювання очікуваних характеристик портфелю методом Монте-Карло, іншим, який є стандартним вимірюванням ефективності керування інвестиційним портфелем, - співставлення реальних результатів продемонстрованих створеним портфелем на періоді інвестування з результатами пасивної стратегії інвестування всіх коштів, так званої стратегії "купив та тримай", в один з фондових індексів, наприклад, такий як S&P500, який є одним з "барометрів" американського фондового ринку, тому що до його складу входять 500 найбільших за рівнем ринкової капіталізації компаній.

На малюнку 3 представлена динаміка поведінки вартості створеного у досліджуваному прикладі інвестиційного портфелю на основі реальних даних по цінах акцій, що входять до складу портфелю, за 2005 рік.



Мал 3. Динаміка зміни вартості портфелю на реальних даних за 2005 рік.

В таблиці 2 представлені розрахунки дохідності по кожній з акцій портфелю за 2005 рік.

Таблиця 2. Дохідність кожної акції портфелю за 2005 рік

Тікер акції	Дохідність за 2005 рік, %
CVH	63.33
PRU	35.88
MUR	40.87
NSC	26.17
ACV	-5.5
EOG	120.49
UNH	43.47
EIX	37.31
ROK	21.35

З таблиці 2 можна зробити висновок, що збитковими були інвестиції тільки в одну акцію, а саме ACV, усі інші відібрані акції, що входять до портфелю, показали додатню дохідність на протязі 2005 року.

Прибуток всього портфелю на реальних даних склав 382 418.1\$, а дохідність за 2005 рік відповідно 42.49%. Порівняння результатів моделювання очікуваних характеристик портфелю методом Монте-Карло на періоді інвестування з реальними результатами інвестування у створений портфель демонструє, що отримане значення дохідності портфелю у 42.49% на реальних даних дуже близьке до очікуваної дохідності у 39.91%, отримане для створеного портфелю при моделюванні методом Монте-Карло.

Якщо співставити дохідність створеного портфелю на реальних даних за 2005 рік з дохідністю пасивної інвестиції всіх коштів у такий фондовий індекс як S&P500 то можна побачити, що за 2005 рік дохідність від інвестиції у S&P500 склала 4.6% проти дохідності у 42.49% від створеного портфелю, що свідчить про високу ефективність застосування СППР.

Вихідні дані для всіх підсистем, з яких складається розроблена СППР, отримуються з таких джерел глобальної мережі Інтернет як: www.reuters.com, www.bloomberg.com, www.dowjones.com, <http://finance.yahoo.com>, www.zacks.com, <http://finance.google.com> та інших.

Описана в статті СППР реалізована у вигляді кінцевого програмного продукту, створеного за допомогою середовища розробки Borland C++ Builder версії 5.0.

Висновки

Зважаючи на бурхливий розвиток вітчизняного фондового ринку у останні роки, і як наслідок, стрімке зростання кількості інститутів спільного інвестування та обсягів залучених ними інвестиційних коштів, розроблена СППР має високу актуальність і практичну цінність. Розроблена СППР реалізує повний цикл діяльності керуючого інвестиційним фондом. Перевірка роботи розробленої СППР на модельних прикладах за реальними даними показала її високу ефективність.

Література

1. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98-107.
2. Кириченко Н.Ф., Куц Р., Лепеха Н.П. Распознавание трехмерных объектов по ультразвуковым эхо-сигналам // Проблемы управления и информатики. – 1999. – №5. – С.110-122.
3. Донченко В.С., Кириченко М.Ф., Омардибірова В.Н. Класифікація акцій за критерієм інвестиційної привабливості // Вісник Київського університету. – 2005. – №2.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука. 1977. – 223с.
5. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации // Кибернетика и системный анализ. – 2007г. – №4. – С.73-92.
6. Омардибірова В.Н. Моделювання процесів ціноутворення на основі фінансових інструментів: оцінювання параметрів та прогноз // Вісник Київського університету. – 2006. – №3.
7. The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables //
8. Peter Jaeckel Monte Carlo Methods in Finance. – Wiley Finance Series, ISBN 047149741X
9. Ричард Брейли, Сьюарт Майерс. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: ЗАО "Олимп – Бизнес", 1997. – 1120с.
10. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М. 2001. – XII, 1028с.
11. <http://finance.yahoo.com>

Надійшла до редакції 06.12.2007

УДК 681.3

Панченко Т.В., к.ф.-м.н.*

Доведення коректності паралельного додавання до спільної змінної в IPCL

Подано приклад детального доведення коректності класичної задачі паралельного додавання до спільної комірки пам'яті за допомогою методу доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL. Надано опис методу та його порівняння з іншими.

Ключові слова: композиційне програмування, верифікація програм, модель виконання програм, часткова коректність, паралельне програмування, інваріант, транзитивні системи, спільна змінна, спільна пам'ять.

*E-mail: tpanchenko@issvsystems.com.ua.

Статтю представив д.ф.-м.н. Нікітченко М.С.

Метод доведення критичних властивостей програм в композиційних мовах IPCL

Методологію доведення (критичних) властивостей програм в композиційних мовах IPCL [1,2] побудовано на фундаменті композиційно-номінативних методів [3-6] для спеціального – але досить широкого – класу програм. Відмінності методу від інших підходів детально проаналізовано в [1]. Сформульований метод має на меті побудувати “місток” між реальними програмами, написаними на звичайних імперативних мовах програмування, та математичними об'єктами (твердження, формули, властивості, доведення тощо), відсутність якого ми спостерігаємо в більшості відомих методів – вони стартують одразу від математичних формул та систем (алгебр, транзитивних систем тощо).

Закладена в основу методу модель дозволяє оперувати програмами, запущеними в паралельній кількості разів (багато одночасно виконуваних екземплярів в режимі паралельного почергового виконання – класичне клієнт-серверне середовище). Явно така модель не використовується в жодному з відомих підходів, всі підходи вимагають точної кількості програм та операторів, заданої наперед [1] – особливо це стосується методів перевірки моделей (model checking). Метод базується на композиційно-номінативних системах, що дозволяє вільно обирати найбільш підходящий рівень для моделювання тієї чи іншої задачі та доведення критичних властивостей систем [1]. Метод

Panchenko T.V., PhD*

Parallel Addition to Shared Variable Correctness Proof in IPCL

The example of detailed correctness proof for classical task of parallel addition to shared variable using the method for program properties proof in compositional languages IPCL is given here. The method is described and compared to others in this paper.

Key Words: compositional programming, program verification, program execution model, partial correctness, safety, parallel programming, shared memory concurrency, invariant, transition system, shared variable, shared memory.

допускає автоматизацію більшості етапів доведення властивостей [1]. Запропонований метод верифікації має лінійну складність доведення відносно кількості операторів програми замість експоненційної, як в більшості методів перевірки моделей, тобто він позбавлений “проблеми вибуху” кількості станів [1].

Викладений метод було апробовано на реальних системах. Один з таких прикладів – доведення критичних властивостей системи виплати міжнародних грошових переказів Vigo Remittance Corp., реалізованої для ВАТ “Державний ощадний банк України” – докладно розглянуто в [1].

Паралельне додавання до спільної комірки. Постановка задачі

Розглянемо приклад, який де-факто (див. [7,8] та інші) є “стандартним” для перевірки “працездатності” паралельних програм та методик, пов'язаних з їх моделюванням та виконанням. Нехай програма двічі (окремо, незалежно) паралельно інкрементує деяку глобальну змінну. В нотатії IPCL така програма P матиме вигляд $x:=x+1 \parallel x:=x+1$, де x – глобальна змінна, а множина $F=\{f_i\}$, де $f_i(d) \equiv d \vee [x \mapsto (d)+1]$ (тут синтаксичним позначенням семантичної функції $f_i \in x:=x+1$). Зрозуміло, що кожна дія є атомарною (тут – читання, додавання та запис значення змінної разом). Задача формулюється наступним чином: довести, що коли початкове значення глобальної

змінної $x \in 0$, то заключне (після завершення програми) значення x буде дорівнювати 2.

Аналіз задачі

Не вдаючись в подробиці, "чистим" методом Овіцкі-Гріса [9] формулюються та перевіряються властивості для кожного оператора з урахуванням їх можливого "перехресного" впливу. Нагадаємо, що кількість перевірок є квадратичною по відношенню до кількості операторів програм в цьому методі.

В розширеному варіанті *rely-guarantee* [10,11] методу Овіцкі-Гріса ця властивість доводиться шляхом введення двох (для такої тривіальної програми!) додаткових змінних і за допомогою нетривіально (!) сформульованих *rely*- та *guarantee*- умов-предикатів для застосування методу до цієї задачі. Формулювання та доведення займає більше сторінки [8].

В TLA [7] Лемпорт пропонує (розглядаючи досить споріднену задачу) побудувати модель, яка не є суттєво простішою за перші дві, а формулювання моделі та, власне, саме доведення (з поясненнями) займає знов-таки не менше сторінки. Більш того, метод TLA характеризується істотним розривом між програмою та формулою для доведення [1].

Розглянемо *детальне* доведення *узагальнення* зазначеної властивості в *IPCL*.

Доведення

Дослідимо *узагальнений* варіант. Отже, маємо програму $P = Inc^n$ (для деякого фіксованого $n \in \mathbb{N}$), де $Inc = x := x + 1$. Маємо семантичну модель, описану вище, з $F = \{f_1\}$. Будемо розглядати спрощену модель [12], оскільки у нас немає локальних змінних. Алгоритм розстановки міток (очевидно) дасть наступний результат для Inc : $Inc = [M1] x := x + 1 [M2]$, $SStates = \{(s_1, s_2, d) \mid s_1 \in N, s_2 \in N, d \in D\}$, де s_1 – кількість програм (з усіх паралельно виконуваних) з управлінням в мітці [M1] в поточний момент часу, s_2 – кількість програм з управлінням в мітці [M2], d – глобальне дане (що містить змінну x). Зрозуміло, що $SStep = \{((s_1, s_2, d), (s_1 - 1, s_2 + 1, f_1(d))) \mid s_1 > 0 \ \& \ s_1 \in N \ \& \ s_2 \in N\}$, $SStartStates = \{(n, 0, [x \mapsto 0])\}$, $SStopStates = \{s \mid s = (0, n, d') \ \& \ \exists s_1, s_2, \dots, s_l \bullet (s_1 \in SStartStates \ \& \ s_l = s \ \& \ (\forall i \in N_{k+1} \bullet (s_i, s_{i-1}) \in SStep))\}$ – за означенням.

Нехай $PreCond(SS) \equiv (x \Rightarrow (d) = 0)$ та $PostCond(SS) \equiv (x \Rightarrow (d) = n)$, де $SS = (s_1, s_2, d) \in SStates$ – спрощений стан [12]. Розглянемо $Inv(SS) \equiv (s_2 = x \Rightarrow (d))$. Перевіримо, чи буде

$$InvCond(Inv, PreCond, PostCond) = \\ \forall S \in StartStates \bullet (PreCond(S) \rightarrow Inv(S)) \ \& \\ \forall S \in StopStates \bullet (Inv(S) \rightarrow PostCond(S)) \ \& \\ \forall (S, S') \in Step \bullet (Inv(S) \rightarrow Inv(S')) = True.$$

Так, $\forall S \in SStartStates \bullet (PreCond(S) \rightarrow Inv(S)) = PreCond((n, 0, [x \mapsto 0])) \rightarrow Inv((n, 0, [x \mapsto 0])) = True \rightarrow True = True$, $\forall S \in SStopStates \bullet (Inv(S) \rightarrow PostCond(S)) = \forall S = (s_1, s_2, d) = (0, n, d') \in SStopStates \bullet ((s_2 = x \Rightarrow (d)) \rightarrow (x \Rightarrow (d) = n))$, оскільки $s_2 = n$, то імплікація є *True*, і весь предикат буде *True*, $\forall (S, S') \in SStep \bullet (Inv(S) \rightarrow Inv(S')) = \forall (S, S') = ((s_1, s_2, d), (s_1 - 1, s_2 + 1, f_1(d))) \in SStep \bullet ((s_2 = x \Rightarrow (d)) \rightarrow (s_2 + 1 = x \Rightarrow (f_1(d)))) = \forall (S, S') \in SStep \bullet True$, оскільки очевидно, що $x \Rightarrow (f_1(d)) = x \Rightarrow (d) + 1$.

Звідси, *Inv* – дійсно інваріант програми *P*, до того ж на початкових станах він є логічним наслідком передумови, а на заключних станах з нього випливає постумова.

Таким чином, доведено *узагальнену* властивість. Сформульована ж спочатку отримується з більш загальної при $n=2$.

Результат. Подібна задача

Зауважимо, що в деяких зі згаданих тут джерел розглядається варіант прикладу $P' = x := x + 1 \parallel x := x + 2$ з передумовою $x=0$. Для розв'язання такої задачі запропонованим методом слід використати (очевидний) інваріант $Inv(SS) \equiv (s_2 + 2 * s_3 = x \Rightarrow (d))$, де $SS = (s_1, s_2, s_3, s_4, d) \in SStates$ – спрощений стан, для узагальненої програми $P' = (x := x + 1)^n \parallel (x := x + 2)^m$ з розставленими мітками [M1] $x := x + 1$ [M2], [M3] $x := x + 2$ [M4], та початковими станами $SStartStates = \{(n, 0, m, 0, [x \mapsto 0])\}$ (при $n=m=1$).

Нагадаємо також, що кількість перевірок для доведення є лінійною по відношенню до кількості операторів програм в обох прикладах (взагалі, для довільної програми).

Висновки

З усіх кроків доведення за методом – креативним є лише знаходження (формулювання) відповідного інваріанта. Один з можливих інваріантів сформульований при доведенні твердження в явному вигляді [1], але він надто складний для практичних доведень – має лише теоретичний зміст – адже він є, фактично, функціоналом вищого порядку. На практиці необхідно знаходити інваріант, який якомога точніше відображав би поведінку програми – для цього розроблений ряд підходів, зокрема С. Л. Кривим [13] та ін., але в загальному

випадку проблема залишається частково розв'язною. Інші кроки методу є механічними, і тому можуть бути автоматизовані.

Доведення за наведеним методом можна проводити для вказаного вигляду (класу) програм ($P \in SeqILProgs$), де кількості паралельно виконуваних (під)програм є довільними натуральними (з 0) числами, фіксованими є тільки їх типи, причому складність таких доведень буде лінійною (за кількістю кроків) відносно кількості операторів в (під)програмах, на відміну від багатьох інших методів [1]. В такому випадку отримаємо свого роду символічні доведення над загальною формою програми, тобто реально викладений метод може оперувати "узагальненим виглядом програми". Він не може бути зведений до простої перевірки моделей (model checking), адже по-перше, всі стани не можна перелічити, бо не є фіксованою кількість (ступінь) кожної з паралельних підпрограм, по-друге, в кожному конкретному випадку – при великих кількостях паралельних підпрограм – кількість станів буде також значною. Також цей метод не є варіантом символічної перевірки моделей (symbolic model checking), адже не використовує ні евристики, ні інші покращення, викладені в літературі. Також зрозуміло, що запропонований метод не є варіантом доведення теорем (theorem proving) в чистому вигляді, адже останні вимагають суттєве людське втручання [14], натомість в даному методі необхідно лише один раз спочатку сформулювати інваріант – все решта (інші кроки методу), може бути виконано автоматично. До того ж, доведення теорем спирається на логіку і є математичним підходом, в той час як даний метод спирається на текст програми, семантику та моделюючи транзитивну систему, і є змішаним підходом. Щодо порівняння з методами перевірки моделей, то запропонований метод позбавлений "проблеми вибуху" кількості станів (адже залежність складності доведення є лінійною по відношенню до кількості операторів в нотації програми).

Як і в більшості методів, що базуються на станах, в запропонованому методі вводиться поняття стану та використовується операційна семантика для моделювання поведінки програми. Поняття стану тут включає як стан пам'яті, так і стан керуючого пристрою (стан управління – позиції в контрольних точках програми). Моделювання програми проводиться, як і в методиці ASM (Abstract State Machines) [15,16] Гуревича, за допомогою деякої абстрактної машини над цими станами (машинна –

"перетворювач станів"), фактично – транзитивної системи, аналог дискретних перетворювачів Глушкова. Поняття інваріанта, яке бере корені в роботах Флойда [17] й Хоара [18], а згодом і Ешкрофта [19] – для паралельних програм, та широко використовується в TLA (Лемпорт, нагадаємо, наголошує на важливості інваріанта для доведень та суджень над паралельними програмами), відіграє в методі одну з ключових ролей. Метод спирається на базові ідеї щодо коректності програми, сформульовані Хоаром у вигляді перед- та постумов. Доведення в загальному випадку схожі на доведення в TLA, хоча базуються на простішій та ближчій до тексту програми моделі. В методі не передбачено введення додаткових допоміжних змінних (як, наприклад, в методах Овіцкі-Гріса) в судження, а, отже, він позбавлений недоліків, згадуваних у [20,21] (як мінімум, складнощів з розумінням ролі та смислового навантаження таких змінних, а також з їх вигадуванням), натомість можна використовувати явно стан управління програми. Це дозволяє зв'язувати передумову та післяумову (і взагалі, стани та судження про них) в єдиний інваріант для доведення явно, а не за допомогою "незрозумілих змінних" [21].

Разом з тим запропонований метод має відмінності від усіх перелічених. По-перше, він базується на композиційній семантиці, тобто базові функції повинні бути задані в термінах композиційно-номінативної семантики, сама семантика мов *IPCL* є композиційною – отже метод має композиційно-номінативну природу. По-друге, на відміну від TLA, метод суттєво прив'язаний до тексту програми на мові *IPCL*, яка схожа на звичайні мови імперативного програмування (на яких, власне, і пишеться переважна більшість реального програмного забезпечення). Переваги такого підходу обговорювались вище. Метод пропонує іншу, аніж в ASM, модель виконання, більш схожу на операційну семантику звичайних мов програмування (нагадаємо, в ASM моделлю є нескінченний цикл з паралельно виконуваних умовних операторів). Те ж саме зауваження відноситься і до мови Unity Ченді та Місри [22]. Мова, яка розглядається в роботі Ешкрофта, Мова, яка розглядається в роботі Ешкрофта, містить конструкцію *fork*, яка має іншу семантику, ніж композиція паралельного виконання в режимі чергування, введена тут. Щодо робіт Хоара, то в них розглядаються лише паралельні середовища з обміном повідомленнями (розподілені системи) та розвиваються відповідні моделі та методи. Відмінність від методу Овіцкі-Гріса (та його

композиційного або rely-guarantee [10,11] розширення Джонсом чи assumption-commitment [22] розширення Ченді та Місри) полягає в моделі – вона базується на аксіоматичній семантиці та її розширенні, в той час як даний метод є ближчим до операційної семантики та моделювання (належить до методів, що базуються на станах). Врешті, клас програм, які розглядаються в рамках наведеного методу, в явному вигляді не розглядається в жодному іншому підході, а в деяких (напевно, в більшості) взагалі не матиме адекватного представлення.

Список використаних джерел

1. Панченко Т.В. Композиційні методи специфікації та верифікації програмних систем. – Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня канд.фіз.-мат.наук. – К., 2006 – 17 с.
2. Панченко Т.В. Методологія доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL // Тези доповідей Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2004). – Київ, 2004. – С. 62–67.
3. Nikitchenko N. A. Composition Nominative Approach to Program Semantics. – Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
4. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – № 5. – С. 3–24.
5. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – № 3. – С. 3–13.
6. Басараб И.А., Никитченко Н.С., Редько В.Н. Композиционные базы данных. – К.: Либідь, 1992. – 191 с.
7. Lamport L. Verification and Specification of Concurrent Programs // deBakker J., deRoeve W., Rozenberg G. (eds.) A Decade of Concurrency, Vol. 803. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 347–374.
8. Xu Q., de Roeve W.-P., He J. The Rely-Guarantee Method for Verifying Shared Variable Concurrent Programs // Formal Aspects of Computing. – 1997. – Vol. 9, № 2. – P. 149–174.
9. Owicki S., Gries D. An Axiomatic Proof Technique for Parallel Programs // Acta Informatica. – 1976. – Vol. 6, № 4. – P. 319–340.
10. Jones C.B. Development Methods for Computer Programs Including a Notion of Interference: DPhil. Thesis. – Oxford University Computing Laboratory, 1981. – 315 p.
11. Jones C.B. Specification and Design of (Parallel) Programs // Information Processing Letters: IFIP Information Processing’83 (In IFIP 9th World Congress). – 1983. – P. 321–331.
12. Панченко Т. В. Модель спрощеного стану для методу доведення властивостей в мовах IPCL та її застосування і переваги // Тези міжнародної наукової конференції TAAPSD’2007, 4-9 September, Berdyansk, pp. 319-322.
13. Кривий С.Л., Матвеева Л.Е. Формальні методи аналізу властивостей систем // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 2. – С. 15–36.
14. Edmund M. Clarke, Jeannette M. Wing et al. Formal methods: state of the art and future directions // ACM Computing Surveys. – 1996. – Vol. 28, № 4. – P. 626–643.
15. Reisig W. The Expressive Power of Abstract-State Machines // Computing and Informatics. – 2003. – Vol. 22, № 3–4. – P. 209–219.
16. Gurevich Y. Sequential Abstract-State Machines Capture Sequential Algorithms // ACM Transactions on Computational Logic. – 2000. – Vol. 1, № 1. – P. 77–111.
17. Floyd R.W. Assigning Meanings to Programs // Proc. Symposium on Applied Mathematics. Vol. 19: Mathematical Aspects of Computer Science. – American Mathematical Society, 1967. – P. 19–32.
18. Hoare C.A.R. An Axiomatic Basis for Computer Programming // Communications of the ACM. – 1969. – Vol. 12, № 10. – P. 576–583.
19. Ashcroft E.A. Proving assertions about parallel programs // Journal of Computer and System Sciences. – 1975. – № 10. – P. 110–135.
20. Dijkstra E.W. A personal summary of the Gries-Owicki theory // Dijkstra E.W. (ed.) Selected Writings on Computing: A Personal Perspective. – Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982. – P. 188–199.
21. Lamport L. Control predicates are better than dummy variables for reasoning about program control // ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS). – 1988. – Vol. 10, № 2. – P. 267 – 281.
22. Chandy K.M., Misra J. Parallel Program Design: A Foundation. – Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1988. – 493 p.

Надійшла до редколегії 3.12.2007

УДК 519.3

В. В. Семенов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Типовість розв'язності деяких неопуклих екстремальних задач

Нехай E дійсний банахів простір, X непорожня слабо компактна підмножина простору E , B замкнена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \text{int } B$, функціонал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ обмежений зверху та слабо напівнеперервний зверху. Доведено, що множина $y \in E$ таких, що задача $f(x) + \mu_B(x-y) \rightarrow \sup_{x \in X}$, де μ_B – функціонал Мінковського множини B , має розв'язок, містить щільну в E G_δ -множину.

Ключові слова: теорема Бера, типовість, екстремальна задача, існування.

E-mail: snakkar@univ.kiev.ua

Нехай (X, ρ) – повний метричний простір і $x \in X$. Властивість $P(x)$ називаємо типовою, якщо множина $A \subseteq X$, де вона виконується, містить зліченний перетин відкритих скрізь щільних підмножин.

З теореми Бера про категорію випливає, що в повному метричному просторі довільна множина, що містить зліченний перетин відкритих скрізь щільних підмножин, є скрізь щільною. Такі множини ще часто називають масивними. Структура масивних множин багатша, ніж просто скрізь щільних підмножин. Наприклад, дві скрізь щільні множини можуть не перетинатись, тоді як перетин двох (навіть зліченної кількості) масивних множин завжди непорожній, більше того, масивний. Цим і пояснюється назва *типова властивість*.

У статті мова йде про деяку сім'ю неопуклих задач, які залежать від параметра. Доведено, що існує масивна множина значень параметра для яких задачі мають розв'язок, тобто властивість розв'язності задачі типова.

Нехай X – обмежена підмножина банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Однією з класичних задач максимізації є пошук найвіддаленіших точок у множині X . Точніше, для $y \in E$ слід знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$\|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \|y - x\|_E.$$

V. V. Semenov, PhD, associate professor

Generic solvability for some nonconvex extremal problems

Let E be a real Banach space, X a nonempty weak compact subset of E , B a closed convex subset of E such that $0 \in \text{int } B$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded from above weak upper semicontinuous functional. It is proved that the set of all $y \in E$ for which the problem $f(x) + \mu_B(x-y) \rightarrow \sup_{x \in X}$, where μ_B is the Minkowski functional of B , has a solution contains a dense in E G_δ -set.

Key Words: Baire theorem, generic, extremal problem, existence.

Розглянемо множину точок $y \in E$ для яких існує найвіддаленіша в X точка:

$$E(X) = \left\{ y \in E : \exists \bar{x} \in X \quad \|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \|y - x\|_E \right\}.$$

М. Едельштейн [1] довів, що якщо X непорожня замкнена й обмежена підмножина рівномірно опуклого банахова простору E , то множина $E(X)$ щільна в E . Е. Асплунд [2] розширив цей результат, показавши, що якщо X непорожня замкнена й обмежена підмножина рефлексивного локально рівномірно опуклого банахова простору E , то множина $E(X)$ містить щільну в E підмножину типу G_δ .

Нарешті, К.-С. Лау у роботі [3] отримав подібний результат для слабо компактною підмножини довільного банахова простору.

У [4] Р. Девіль та В. Зізлер показали, що результат К.-С. Лау не можна поширити на $\sigma(E^*, E)$ -компактні підмножини спряженого банахова простору.

Наприклад, $\forall \alpha > 1$ множина

$$X_\alpha = \left\{ x = (x_n) \in l_1 : \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |x_n|^\alpha) \leq 1 \right\} \subseteq l_1$$

опукла та компактна в топології $\sigma(l_1, c_0)$, але для довільної точки $y \in l_1$ не існує точки $\bar{x} \in X_\alpha$ такої, що

$$\|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} \|y - x\|_E$$

Нехай f – заданий на X функціонал. Ж. Баранже [5] розглянув узагальнення задачі про найвіддаленішу точку: для $y \in E$ знайти точку $\bar{x} \in X$ таку, що

$$f(\bar{x}) + \|y - \bar{x}\|_E = \sup_{x \in X} (f(x) + \|y - x\|_E) \quad (P)$$

Він довів, що якщо X – непорожня замкнена й обмежена підмножина рівномірно опуклого банахова простору E , функціонал $f: X \rightarrow R$ – обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху, то множина $y \in E$ таких, що задача (P) має розв'язок, є масивною.

У [6, 7] цей результат перенесено на випадок задачі (P), поставленої у рефлексивному локально рівномірно опуклому банаховому просторі.

С. Кобзаш у статті [8] узагальнює на задачу (P) результат К.-С. Лау, довівши масивність множини $y \in E$ таких, що задача (P) має розв'язок, якщо X – слабко компактна підмножина банахова простору E , а функціонал f – обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху.

У статті [9] розглянуто задачу узагальнення найкращого наближення. Відмінність від класичної задачі полягає у використанні для оцінки відхилення елементів функціонала Мінковського замкненого опуклого околу нуля банахова простору. Дослідженню існування узагальнених найвіддаленіших точок присвячено роботу [10].

Нашою метою є доведення типовості розв'язності описаного нижче узагальнення задачі (P).

Постановка задачі та допоміжні факти

Розглянемо дійсний банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ із спряженим $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$. Нехай B – замкнена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \text{int } B$. Очевидно, що множина B поглинаюча, але не обов'язково симетрична.

Нагадаємо, що функціонал Мінковського $\mu_B: E \rightarrow R$ множини B задається таким чином

$$\mu_B(x) = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda B \}, \quad \forall x \in E.$$

Сформулюємо добре відомі властивості функціонала Мінковського, які впливають безпосередньо з його означення.

Твердження 1. Для довільних $x \in E$ і $y \in E$ маємо:

$$1) \quad \mu_B(x) \geq 0 \text{ і } \mu_B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2) \quad \mu_B(\alpha x) = \alpha \mu_B(x) \quad \forall \alpha \geq 0;$$

$$3) \quad \mu_B(x + y) \leq \mu_B(x) + \mu_B(y);$$

$$4) \quad -\mu_B(y - x) \leq \mu_B(x) - \mu_B(y) \leq \mu_B(x - y);$$

$$5) \quad \mu_B(-x) = \mu_B(x);$$

$$6) \quad \mu_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \text{fr } B;$$

$$7) \quad \mu_B(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \text{int } B;$$

$$8) \quad \mu_{\alpha B}(x) = \frac{1}{\alpha} \mu_B(x) \quad \forall \alpha > 0;$$

$$9) \quad m_0 \|x\|_E \leq \mu_B(x) \leq m_1 \|x\|_E, \text{ де}$$

$$m_0 = \inf_{x \in B, \|x\|_E = 1} \mu_B(x),$$

$$m_1 = \sup_{x \in B, \|x\|_E = 1} \mu_B(x).$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що одинична замкнена куля $B_1(E)$ є підмножиною B .

Нагадаємо, що субдиференціалом опуклого функціонала $f: E \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ у точці $x_0 \in E$ (такій, що $f(x_0) < +\infty$) називається множина $\partial f(x_0) \subseteq E^*$ лінійних неперервних функціоналів x_0^* таких, що

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x_0^*, x - x_0 \rangle_{E^*, E} \quad \forall x \in E.$$

Якщо функціонал f неперервний в $x_0 \in E$, то $\partial f(x_0)$ – непорожня опукла та компактна в топології $\sigma(E^*, E)$ множина [7].

Нехай $X \subseteq E$ – непорожня обмежена множина. Для обмеженого зверху функціонала $f: X \rightarrow R$ та точки $y \in E$ розглянемо задачу максимізації

$$f(x) + \mu_B(x - y) \rightarrow \sup_{x \in X} \quad (1)$$

Якщо $B = B_1(E)$, то $\mu_B(\cdot) = \|\cdot\|_E$ і задача (1) співпадає з задачею (P).

У наступному пункті ми отримаємо для задачі (1) теорему про типовість розв'язності, яка узагальнює результати К.-С. Лау та С. Кобзаша.

Теорема про типовість розв'язності

У цьому пункті доведемо таку теорему.

Теорема 1. Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ – банахів простір. X – непорожня компактна в топології $\sigma(E, E^*)$ підмножина простору E . B – замкнена опукла підмножина простору E така, що

$0 \in \text{int } B$, функціонал $f: X \rightarrow R$ обмежений зверху та напівніперервний зверху в топології $\sigma(E, E^*)$. Тоді множина таких $y \in E$, що задача (1) має розв'язок, містить щільну в E G_δ -підмножину.

Зауваження 1. Наведене в роботі доведення використовує ідеї С. Кобзаша та К.-С. Лау.

Для точки $y \in E$ покладемо

$$r(y) = \sup_{x \in X} (f(x) + \mu_B(x - y)). \quad (2)$$

Вивчимо властивості функціонала $r: E \rightarrow R$, визначеного за допомогою (2).

Лема 1. Функціонал $y \mapsto r(y)$ опуклий та задовольняє умову Ліпшица з константою 1.

Доведення. Для кожного $x \in X$ функціонали $E \ni y \mapsto f(x) + \mu_B(x - y)$ опуклі. Тому опуклим буде і їх супремум – функціонал $y \mapsto r(y)$.

Для довільних точок $y_1, y_2 \in E$ і $x \in X$ маємо

$$\begin{aligned} f(x) + \mu_B(x - y_1) &\leq \\ &\leq f(x) + \mu_B(x - y_2) + \mu_B(y_2 - y_1) \leq \\ &\leq r(y_2) + \mu_B(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Оскільки $B_1(E) \subseteq B$, то $\mu_B(y) \leq \|y\|_E$ для всіх $y \in E$. Отже, отримаємо

$$r(y_1) \leq r(y_2) + \|y_2 - y_1\|_E$$

або

$$r(y_1) - r(y_2) \leq \|y_2 - y_1\|_E.$$

Змінивши порядок y_1 і y_2 , отримаємо

$$|r(y_1) - r(y_2)| \leq \|y_2 - y_1\|_E. \blacksquare$$

Лема 2. Якщо $y^* \in \partial r(y)$, тоді

$$\forall x \in E: \langle y^*, x \rangle_{E^*, E} \leq \mu_{-B}(x).$$

Доведення. Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді $\forall y' \in E$ маємо

$$\begin{aligned} \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} &\leq r(y') - r(y) \leq \\ &\leq \mu_B(y - y') = \mu_{-B}(y' - y). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\forall x \in E$ має місце нерівність $\langle y^*, x \rangle_{E^*, E} \leq \mu_{-B}(x)$. $\blacksquare$

Зауваження 2. З леми 2 випливає, що $\forall y^* \in \partial r(y): \|y^*\|_{E^*} \leq \sup_{-B} y^* \leq 1$.

Лема 3. Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді має місце нерівність

$$\sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E}) \leq r(y).$$

Доведення. Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді за лемою 2, маємо $\forall x \in E$:

$$\langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E} \leq \mu_{-B}(y - x) = \mu_B(x - y).$$

Звідки, $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E} &\leq \\ &\leq f(x) + \mu_B(x - y) \leq r(y). \end{aligned}$$

Перейшовши до точної верхньої межі по $x \in E$, отримаємо нерівність

$$\sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E}) \leq r(y). \blacksquare$$

Для кожного $n \in N$ введемо множину

$$\begin{aligned} F_n = \{y \in E: \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E}) \leq \\ \leq r(y) - \frac{1}{n} \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y)\}. \end{aligned}$$

Покладемо $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, що

$$F = \{y \in E: \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E}) < r(y) \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y)\}$$

Покажемо, що множина $F \subseteq E$ є множиною першої категорії та має тип F_σ .

Лема 4. $\forall n \in N$ множина F_n замкнена

Доведення. Розглянемо довільну послідовність точок $y_k \in F_n$, яка сильно збігається до точки $y \in E$. Покажемо, що $y \in F_n$. Для кожного $k \in N$ обираємо такий функціонал $y_k^* \in \partial r(y_k)$, що $\sup_{x \in X} (f(x) + \langle y_k^*, y_k - x \rangle_{E^*, E}) \leq r(y_k) - \frac{1}{n}$.

За лемою 2 $\forall x \in E$ має місце нерівність $\langle y_k^*, x \rangle_{E^*, E} \leq \mu_{-B}(x)$. А з вкладення $B_1(E) \subseteq B$ випливає, що $\forall k \in N: \|y_k^*\|_{E^*} \leq 1$.

Отже, не зменшуючи загальності можна вважати, що існує функціонал $y^* \in E^*$ такий, що $y_k^* \rightarrow y^*$ в топології $\sigma(E^*, E)$.

Для функціоналів $y_k^* \in E^*$ виконуються нерівності

$$f(x) + \langle y_k^*, y_k - x \rangle_{E^*, E} \leq r(y_k) - \frac{1}{n} \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Доведемо, що $\forall y' \in E$

$$\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*, E} \rightarrow \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Дійсно, $\forall y' \in E$ маємо

$$\begin{aligned} & \left| \langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*, E} - \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \right| \leq \\ & \leq \left| \langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*, E} - \langle y_k^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \right| + \\ & + \left| \langle y_k^*, y' - y \rangle_{E^*, E} - \langle y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \right| = \\ & = \left| \langle y_k^*, y - y_k \rangle_{E^*, E} \right| + \left| \langle y_k^* - y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \right| \leq \\ & \leq \|y_k^*\|_{E^*} \|y - y_k\|_E + \left| \langle y_k^* - y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} \right|. \end{aligned}$$

Урахувавши сильну збіжність (y_k) до y та слабку* збіжність (y_k^*) до y^* , з останньої оцінки отримаємо (4).

Здійснивши граничний перехід в (3) при $k \rightarrow \infty$, отримаємо

$$f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E} \leq r(y) - \frac{1}{n} \quad \forall x \in X. \quad (5)$$

Покажемо, що $y^* \in \partial r(y)$. За означенням субдиференціала, $\forall k \in N$ маємо

$$\langle y_k^*, y' - y_k \rangle_{E^*, E} + r(y_k) \leq r(y') \quad \forall y' \in E. \quad (6)$$

Здійснивши граничний перехід в (6) при $k \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\langle y^*, y' - y \rangle_{E^*, E} + r(y) \leq r(y') \quad \forall y' \in E,$$

тобто, $y^* \in \partial r(y)$.

Таким чином, для точки $y \in E$ має місце нерівність (5) з $y^* \in \partial r(y)$, тобто, $y \in F_n$ і множина F_n замкнена. ■

Лема 5. $\forall n \in N$ множина F_n має порожню внутрішність.

Доведення. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що для деякого $n \in N$ внутрішність множини F_n непорожня. Тобто, існує відкрита куля O з центром в точці $y_0 \in F_n$ і радіусом $2\lambda d$ (де $d = \sup_{x \in X} \|x - y_0\|_E < +\infty$) для деякого $\lambda > 0$, така що

$$O \subseteq F_n.$$

$$\text{Покладемо } \varepsilon = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)n}.$$

Оберемо точку $z_0 \in X$ так, що

$$r(y_0) - \varepsilon \leq f(z_0) + \mu_B(z_0 - y_0) \leq r(y_0) \quad (7)$$

і покладемо

$$x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0). \quad (8)$$

На відрізку $[x_0, y_0]$ візьмемо точку $x_1 \in E$ так, що

$$\|x_0 - x_1\|_E = \varepsilon. \quad (9)$$

Оскільки

$$\|x_0 - y_0\|_E = \lambda \|y_0 - z_0\|_E \leq \lambda d < 2\lambda d,$$

то x_0 і, звичайно, x_1 лежать в кулі $O \subseteq F_n$.

З того, що $x_1 \in F_n$ випливає існування $x_1^* \in \partial r(x_1)$ такого, що

$$\sup_{x \in X} \left(f(x) + \langle x_1^*, x_1 - x \rangle_{E^*, E} \right) \leq r(x_1) - \frac{1}{n}. \quad (10)$$

З (7) випливає, що

$$\begin{aligned} r(y_0) - r(x_1) & \leq f(z_0) + \\ & + \mu_B(z_0 - y_0) + \varepsilon - r(x_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Урахувавши (2), отримаємо

$$z_0 - y_0 = \frac{1}{1+\lambda}(z_0 - x_0) \quad (12)$$

та

$$\mu_B(z_0 - y_0) = \frac{1}{1+\lambda} \mu_B(z_0 - x_0). \quad (13)$$

Оцінимо різницю $r(y_0) - r(x_1)$ зверху, використовуючи (9), (11), (12) та (13)

$$\begin{aligned} r(y_0) - r(x_1) & \leq \\ & f(z_0) + \frac{1}{1+\lambda} \mu_B(z_0 - x_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \\ & \leq \frac{1}{1+\lambda} r(x_0) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \\ & \leq \frac{1}{1+\lambda} \{ r(x_1) + \mu_B(x_1 - x_0) \} + \\ & + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leq \\ & \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_E}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - \frac{\lambda}{1+\lambda} r(x_1) < \\ & < \frac{\lambda}{1+\lambda} \{ f(z_0) - r(x_1) \} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

З (10) випливає, що

$$f(z_0) - r(x_1) \leq \langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*, E} - \frac{1}{n}.$$

Таким чином, маємо

$$r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda} \left\{ \langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*, E} - \frac{1}{n} \right\} + 2\varepsilon.$$

Оскільки $z_0 - x_1 = z_0 - x_0 + x_0 - x_1$ і $\|x_1^*\|_E \leq 1$, то

$$r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda} \left\{ \langle x_1^*, z_0 - x_0 \rangle_{E^*, E} - \frac{1}{n} \right\} + 3\varepsilon.$$

З (2) випливає, що

$$r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_0 \rangle_{E^*, E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 3\varepsilon.$$

Нарешті отримаємо

$$\begin{aligned} r(y_0) - r(x_1) &< \\ &< \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*, E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 4\varepsilon \leq \\ &\leq \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*, E}. \end{aligned}$$

Отже,

$$r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*, E},$$

що суперечить тому, що $x_1^* \in \partial r(x_1)$. Це й доводить лему. ■

Доведення теореми 1. Нехай $D = E \setminus F$, де

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

З лем 4, 5 та теореми Бера про категорію випливає, що множина $D \subseteq E$ скрізь щільна в E та має тип G_δ .

Покажемо, що для кожного $y \in D$ задача (1) має розв'язок. Нехай $y \in D$ та $y^* \in \partial r(y)$. Оскільки $\forall n \in \mathbb{N} \quad y \notin F_n$, то

$$\sup_{x \in X} \left(f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E} \right) = r(y).$$

З $\sigma(E, E^*)$ -компактності множини X і $\sigma(E, E^*)$ -напівнеперервності зверху функціонала f випливає існування точки $\bar{x} \in X$ такої, що

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + \langle y^*, y - \bar{x} \rangle_{E^*, E} &= \\ &= \sup_{x \in X} \left(f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*, E} \right) = r(y). \end{aligned}$$

З іншого боку, за лемою 2, маємо

$$\begin{aligned} r(y) &= f(\bar{x}) + \langle y^*, y - \bar{x} \rangle_{E^*, E} \leq \\ &\leq f(\bar{x}) + \mu_{-B}(y - \bar{x}) = \\ &= f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x} - y) \leq r(y). \end{aligned}$$

Таким чином, $\bar{x} \in X$ – розв'язок задачі (1). ■

Висновки

У статті досліджено деяку сім'ю неопуклих задач, які залежать від параметра. Доведено, що існує масивна множина значень параметра для яких задачі мають розв'язок, тобто властивість розв'язності задачі типова.

Отримані результати узагальнюють результати К.-С. Лау [3] та С. Кобзаша [8] про типовість існування найвіддаленіших точок та існування розв'язків задач максимізації із збуренням типу норми, відповідно.

Список використаних джерел

1. M. Edelstein Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966), 171–176.
2. E. Asplund Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966), 213–216.
3. K.-S. Lau Farthest points in weakly compact sets, Israel J. Math. 22 (1975), 168–174.
4. R. Deville, V. Zizler Farthest points in w^* -compact sets, Bull. Austral. Math. Soc. 38 (3) (1988), 433–439.
5. J. Baranger Existence de solutions pour des problemes d'optimisation non convexes, J. Math. Pures Appl. 52 (1973), 377–406.
6. J. Baranger, R. Temam Nonconvex optimization problems depending on a parameter, SIAM J. Control 13 (1975), 146–152.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – Москва: Мир, 1979. – 399 с.
8. S. Cobzas Nonconvex optimization problems on weakly compact subsets of Banach spaces, Anal. Numer. Theor. Approx. 9 (1980), 19–25.
9. F.S. De Blasi, J. Myjak On a generalized best approximation problem, J. Approx. Theory 94 (1998), 54–72.
10. R.X. Ni Derivatives of generalized farthest functions and existence of generalized farthest points, J. Math. Anal. Appl. 316 (2006), 642–651.

Надійшла до редколегії 22.11.07

УДК 517.958

М.В. Сидоров, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
В.І. Ляшко, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
І.М. Александрович, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Обернення деяких інтегральних рівнянь з ядром Бесселя

Отримано формули обернення інтегрального зображення розв'язків для узагальненого осесиметричного рівняння Гельмгольца для областей двох типів. Паралельно розв'язано відповідні інтегральні рівняння типу згортки з функцією Бесселя в ядрі.

Ключові слова: інтегральне зображення розв'язків, інтегральне перетворення, аналітична функція.

E-mail: vm214@dcp.kiev.ua

Розглядаються формули обернення інтегрального зображення розв'язків рівняння Гельмгольца та узагальненого осесиметричного рівняння Гельмгольца через аналітичні функції для областей двох різних типів. Одночасно розв'язуються відповідні інтегральні рівняння типу згортки з функцією Бесселя в ядрі.

Інтегральне зображення розв'язків рівняння Гельмгольца

$$L_{0,1}u_0 = u_{0x} + u_{0y} + ku_0 = 0, \quad (1)$$

$$k - \text{const} > 0,$$

а також узагальненого асиметричного рівняння Гельмгольца

$$L_{0,1}u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\nu}{y}u_y + ku = 0, \quad (2)$$

$$\nu, k - \text{const} > 0$$

та формули їх обернення можна вивчати як розв'язування інтегральних рівнянь типу Вольтерра.

Розглянемо області таких двох типів:

Означення 1. Область G , симетрична відносно дійсної осі, належить класу A , якщо вона містить повністю відрізок, що з'єднує дві будь-які її точки з однаковими абсцисами.

Означення 2. Область G , симетрична відносно дійсної осі, належить класу B , якщо вона містить повністю відрізок прямої, проведеної з нескінченно віддаленої точки в довільну її точку z паралельно осі y .

M. V. Sidorov, PhD, associate professor,
V. I. Lyashko, PhD, associate professor,
I. M. Alexandrovich, PhD, associate professor

Inversion of some integral equations with the Bessel kernel

Formulae for inversion of integral representation of solutions of the Helmholtz equation for regions of two kinds are obtained. Corresponding integral equations of convolution type with the Bessel function in a kernel are solved.

Key Words: integral representation, integral conversion, analytical function.

1°. Відновивши пропущений в [1] (формула (11)) множник k перед інтегралом третього доданку і покладаючи $n=1$, $j=0$, одержимо формулу інтегрального зображення розв'язків $u_0(x, y)$ рівняння (1) через аналітичні функції $f_m(z) = \varphi_m(x, y) + i\psi_m(x, y)$ ($m = \overline{0,1}$), які на дійсній осі набувають дійсних значень $z = x + iy$:

$$u_0(x, y) = \varphi_0(x, y) -$$

$$-ky \int_0^y \frac{J_1(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)})}{\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}} \varphi_0(x, \tau) d\tau - \quad (3)$$

$$+ \int_0^y J_0(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}) \varphi_1(x, \tau) d\tau.$$

Формула (3) становить загальне інтегральне зображення в області G класу A всіх регулярних дійсних розв'язків рівняння (1) через дві довільні аналітичні у цій області функції.

Якщо ж $f_m(z)$ – аналітичні функції в області G класу B , які на нескінченності задовольняють умову

$$f_m(z) \cos \sqrt{k} z z^{-\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{|z|^r}\right), \quad (4)$$

то функція

$$\begin{aligned} u_0(x, y) = \varphi_0(x, y) - \\ -ky \int_y^\infty \varphi_0(x, \tau) \frac{I_1(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)})}{\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}} d\tau + \\ + \int_y^\infty \left(\frac{\partial \varphi_1(x, \tau)}{\partial x} + \sqrt{k} \varphi_1(x, \tau) \right) I_0 \sqrt{k(\tau^2 - y^2)} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

задовольняє рівняння (1).

Зауваження 1. Надалі вважатимемо в інтегральному зображенні (3) та (5) $f_1(z) = 0$.

Зауваження 2. Якщо область G є одночасно областю як класу A так і класу B (наприклад, півплощина), $f_0(z)$ – аналітична в G функція, що задовольняє умову $\operatorname{Im} f_0(z)|_{z=\pm i} = 0$, а на нескінченності умову (4), то розв'язки рівняння (1), визначені відповідно рівностями (3) і (5), співпадають. Цей факт дуже важливий при розв'язуванні крайових задач.

2°. Теорема 1 (про розв'язок інтегрального рівняння).

Інтегральне зображення (3) становить інтегральне рівняння типу Вальтерра, розв'язок якого має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) = u_0(x, y) + \\ + ky \int_0^y u_0(x, \tau) \frac{I_1(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)})}{\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Доведення. До формули (3) застосуємо інтегральне перетворення Карсона-Лапласа [2], а також теорему про згортку для перетворення Карсона-Лапласа.

Теорема 2. Якщо

$$f_0(z) \cos \sqrt{k} z \cdot z^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{|z|^\varepsilon}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (4')$$

то розв'язок інтегрального рівняння (5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) = u_0(x, y) - \\ -ky \int_y^\infty u_0(x, \tau) \frac{J_1(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)})}{\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}} d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi_0(x, y) = \operatorname{Re} f_0.$$

Доведення. Для одержання формули (7) досить до формули (5) застосувати інтегральне

перетворення Карсона-Лапласа, а також теорему про згортку для перетворення Карсона-Лапласа у випадку нескінченного проміжку, тобто

$$\int_z^\infty f(y) g(y-x) dy \leftrightarrow -\frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{p}.$$

Теорема 3. Нехай інтегральне зображення розв'язків $u(x, y)$ рівняння (2) через аналітичну в області G класу A функцію $\tilde{f}_0(z)$ має вигляд

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} y^{1-2\nu} k^{\frac{1-\nu}{2}} 2^\nu \times \\ \times \int_0^y \operatorname{Re} \tilde{f}_0(x + i\tau) J_{\nu-1}(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}) \times \\ \times (y^2 - \tau^2)^{\frac{\nu-1}{2}} d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $\nu > 0$, $u(x, y) \in C^2(y \neq 0)$, $u(x, \pm 0)$

обмежена, а при $0 < \nu < \frac{1}{2}$ маємо

$$\lim_{y \rightarrow 0} |y|^{2\nu} u_y(x, y) = 0.$$

Тоді розв'язок інтегрального рівняння (8) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{f}_0(x + iy)) = \\ = \left[\frac{2^{m-\nu} k^{\frac{\nu-m}{2}}}{\Gamma(\nu) C_\nu} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} u(x, \tau)]}{(d\tau^2)^m} \times \right. \\ \times (y^2 - \tau^2)^{\frac{m-\nu}{2}} \tau I_{m-\nu}(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}) d\tau, \\ \left. m = [\nu], \quad \nu - 1 \neq n; \right. \\ \left. + \frac{1}{n! C_\nu} y \frac{d^{n+1} [y^{2\nu-1} u(x, y)]}{(dy^2)^{n+1}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{ky}}{n! C_\nu} \int_0^y \frac{d^{n+1} [\tau^{2\nu-1} u(x, \tau)]}{(d\tau^2)^{n+1}} \times \right. \\ \left. \times \frac{I_1(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)})}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} \tau d\tau, \quad \nu - 1 = n. \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Доведення. Обернений до формули (8) інтегральний оператор можна побудувати, попередньо ввівши:

якщо в області класу A $u_0(x, y)$ – розв'язок рівняння (1), то

$$u(x, y) = 2C_\nu y^{1-2\nu} \times \int_0^y u_0(x, \tau) (y^2 - \tau^2)^{\nu-1} d\tau \quad (10)$$

є розв'язком рівняння (2).

Теорема 4. Якщо область G належить класу B , а $\tilde{f}_0(z)$ задовольняє умову

$$\tilde{f}_0(z) z^{\frac{2\nu-1}{2}} \cos \sqrt{k} \left(z - \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = O\left(\frac{1}{|z|^\epsilon}\right), \quad (11)$$

$$|z| \rightarrow \infty,$$

то функція

$$u(x, y) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^\nu y^{1-2\nu} k^{\frac{1-\nu}{2}} \times \int_0^y \operatorname{Re}[\tilde{f}_0(x + i\tau) e^{-i\pi(\nu-1)}] \times I_{\nu-1}\left(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}\right) (\tau^2 - y^2)^{\frac{1-\nu}{2}} d\tau \quad (12)$$

відображає аналітичні в області G класу B функції $\tilde{f}_0(z)$ у розв'язки рівняння (2).

Розв'язок рівняння (12) має вигляд:

$$\operatorname{Re}[\tilde{f}_0(x + iy) e^{-i\pi(\nu-1)}] =$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(-1)^m 2^{m+\nu} k^{\frac{\nu-m}{2}}}{\Gamma(\nu) C_\nu} \frac{d}{dy} \int_y^\infty \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} u(x, \tau)]}{(d\tau^2)^m} \times \right. \\ & \times (\tau^2 - y^2)^{\frac{m-\nu}{2}} \tau I_{m-\nu}\left(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}\right) d\tau, \\ & m = [\nu], \quad \nu - 1 \neq n; \\ & = \frac{(-1)^n}{n! C_\nu} y \frac{d^{n+1} [y^{2\nu-1} u(x, y)]}{(dy^2)^{n+1}} + \\ & + \frac{(-1)^n \sqrt{k} y}{n! C_\nu} \int_y^\infty \frac{d^{n+1} [\tau^{2\nu-1} u(x, \tau)]}{(d\tau^2)^{n+1}} \otimes \\ & \otimes \frac{I_1\left(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}\right)}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} \tau d\tau, \quad \nu - 1 = n. \end{aligned} \quad (13)$$

Доведення. Обернення формули (12) одержано на основі (7), а також на основі того, що коли в області класу B $u_0(x, y)$ - розв'язок рівняння (1), то

$$u(x, y) = 2C_\nu y^{1-2\nu} \times \int_y^\infty u_0(x, \tau) (\tau^2 - y^2)^{\nu-1} d\tau \quad (14)$$

є розв'язком рівняння (2).

3°. Замінімо в рівнянні (2) $\sqrt{k}$ на $i\sqrt{k}$ і візьмемо $\nu = \frac{1}{2}$.

Одержимо рівняння

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - k \tilde{u} = 0, \quad k > 0. \quad (15)$$

Формули (8), (9) та (12), (13), в цьому випадку стають інтегральним зображенням розв'язків рівняння (15) та їх оберненням і мають, відповідно, вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^y \operatorname{Re}[\tilde{f}_0(x + i\tau)] \frac{ch\left(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}\right)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\tilde{f}_0(x + iy)] = & \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \tilde{u}(x, y) \cdot \tau \frac{\cos\left(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}\right)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_y^\infty \operatorname{Im}[\tilde{f}_0(x + i\tau)] \times \\ & \times \frac{\cos\left(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}\right)}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\tilde{f}_0(x + iy)] = & -\frac{\partial}{\partial y} \int_y^\infty \tilde{u}(x, y) \cdot \tau \frac{ch\left(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)}\right)}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{Тут } ch \frac{\alpha}{2} z \cdot \tilde{f}_0(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\epsilon}\right). \quad (20)$$

Задача електростатики в надпровідному середовищі.

Нехай надпровідне середовище заповнює простір $X > 0$. Як відомо з фізики низьких температур, рівняння, що описує надпровідник у статичному полі, має вигляд

$$\vec{E} = 0, \quad (21)$$

$$k \operatorname{rot} \Lambda \vec{j}_s = -\vec{H}, \quad (22)$$

$$k \operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{j}_s, \quad (23)$$

де $\vec{E}$ і $\vec{H}$ - вектори електричного і магнітного полів, $\vec{j}_s$ - вектор надпровідного струму, Λ - числовий коефіцієнт. Для $\vec{H}$ і $\vec{j}_s$ маємо:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\vec{H}}{\lambda^2}, \quad (24)$$

$$\nabla^2 \vec{j}_s = \frac{\vec{j}_s}{\lambda^2}, \quad (25)$$

де $\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda k}{4\pi}}$ - глибина проникнення, k - швидкість світла.

Задача:

Знайти вектор магнітного поля $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$, кожна компонента якого є розв'язком рівняння (24) в півпросторі $X > 0$ за граничними умовами:

$$H_y = H_0, \quad X = 0, \quad Y^2 + Z^2 \leq a^2, \quad (26)$$

$$j_{sz} = 0, \quad X = 0, \quad Y^2 + Z^2 \geq a^2, \quad (27)$$

$$H_x = H_z = H_0, \quad X = 0, \quad (-\infty < Y < \infty), \quad (-\infty < Z < \infty). \quad (28)$$

З умови (28) випливає, що $H_x = H_z = 0$ всюди в півпросторі $X > 0$, а умову (27) можна записати у вигляді

$$j_{sz} = \frac{k}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial X}.$$

Отже, задача звелась до встановлення однієї компоненти H_y вектора магнітного поля як розв'язку змішаної граничної задачі для рівняння Гельмгольца (15). В силу осьової симетрії граничних умов (26) - (28) шукана компонента H_y знаходиться як розв'язок $H_y = \tilde{u}(x, y)$ рівняння (15) за граничними умовами:

$$H_y = \tilde{u}(0, y) = H_0, \quad -a \leq y \leq a; \quad (29)$$

$$j_z = \frac{k}{4\pi} \frac{\partial \tilde{u}(0, y)}{\partial x} = 0, \quad |y| > a.$$

Тут $x = X$, $y = \sqrt{Y^2 + Z^2}$.

Отже, знайдемо розв'язок рівняння Гельмгольца (15) в півпросторі $x > 0$, що справджує крайові умови:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, y) &= H_0, & |y| \leq a, \\ \frac{\partial \tilde{u}(0, y)}{\partial x} &= 0, & |y| > a. \end{aligned} \quad (30)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді (16). Із (17) та (19) одержуємо

$$\tilde{\varphi}_0(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y H_0 \frac{\cos \sqrt{k(y^2 - \tau^2)}}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} \tau d\tau, \quad (31)$$

$$0 \leq y \leq a.$$

Припускаємо, що

$$\tilde{f}_0(x + iy) = \tilde{\varphi}_0(x, y) + i\tilde{\beta}_0(x, y)$$

при підході до нескінченності справджує умову (20), з формули обернення (19) маємо

$$\tilde{\varphi}_0(0, y) = - \int_y^\infty H_0 \frac{ch(\sqrt{k(\tau^2 - y^2)})}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} \tau d\tau, \quad (32)$$

$$a \leq y < \infty.$$

Введемо до розгляду функцію

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \Phi_0(x, y) + i\Psi_0(x, y) = \\ &= \tilde{f}_0(z) ch(\sqrt{k}z). \end{aligned} \quad (33)$$

Із (31), (32) одержуємо:

$$\Phi_0(0, y) = \begin{cases} H_0 \cos^2 \sqrt{ky}, & -a \leq y \leq a; \\ 0, & a < |y|. \end{cases} \quad (34)$$

Покладаючи $\Phi_0(0, -y) = \Phi_0(0, y)$ і

припускаючи, що при підході до ∞

$$|\Phi_0(0, y)| \leq \frac{M}{|y|^\epsilon}, \quad (35)$$

$$M = \text{const}, \epsilon = \text{const} > 0,$$

функція $\Omega(z)$ визначається рівністю

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \Phi_0(x, y) + i\Psi_0(x, y) = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi_0(0, t)}{t + iz} dt = \\ &= -\frac{H_0}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\cos^2 \sqrt{kt}}{t + iz} dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Тоді розв'язок задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & \frac{2}{\pi^2} H_0 x \times \\ & \times \int_0^y \frac{ch\sqrt{k}x \cos \sqrt{k}\tau}{ch^2\sqrt{k}x \cos^2 \sqrt{k}\tau + sh^2\sqrt{k}x \sin^2 \sqrt{k}\tau} \times (37) \\ & \times \frac{ch\sqrt{k}(y^2 - \tau^2)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau \int_0^a \cos^2 \sqrt{k}t \times \\ & \times \left(\frac{1}{(t-\tau)^2 + x^2} + \frac{1}{(t+\tau)^2 + x^2} \right) dt - \frac{2}{\pi^2} H_0 \times \\ & \times \int_0^y \frac{sh\sqrt{k}x \sin \sqrt{k}\tau}{ch^2\sqrt{k}x \cos^2 \sqrt{k}\tau + sh^2\sqrt{k}x \sin^2 \sqrt{k}\tau} \times \\ & \times \frac{ch\sqrt{k}(y^2 - \tau^2)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau \cdot \int_0^a \cos^2 \sqrt{k}t \times \\ & \times \left(\frac{t-\tau}{(t-\tau)^2 + x^2} + \frac{t+\tau}{(t+\tau)^2 + x^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Нехай величина $H_0 \rightarrow +\infty$, а величина $a \rightarrow 0$ так, що $aH_0 \rightarrow h$, де $h = \text{const}$. Фізично це означає, що граничне значення магнітного поля зосереджене в одній точці. Знайдемо розподіл магнітного поля $H = \bar{u}(x, y)$ у півпросторі $x > 0$ в цьому випадку. Здійснюючи в (37) граничний перехід

$$H_0 \rightarrow \infty,$$

$$a \rightarrow 0,$$

$$aH_0 \rightarrow h,$$

одержимо вираз, що описує шуканий розподіл магнітного поля:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & \frac{4}{\pi^2} xh \times \\ & \times \int_0^y \frac{ch\sqrt{k}x \cos \sqrt{k}\tau}{ch^2\sqrt{k}x \cos^2 \sqrt{k}\tau + sh^2\sqrt{k}x \sin^2 \sqrt{k}\tau} \times \\ & \times \frac{ch\sqrt{k}(y^2 - \tau^2)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} \frac{\tau d\tau}{\tau^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що до сих пір досліджувалась тільки однорідна задача електростатики в надпровідному середовищі. Розглянута вище

задача дозволяє розв'язати осесиметричну змішану задачу електростатики у надпровідному середовищі. Вздовж $y=0$ для півпростору $x \geq 0$, заповненого надпровідною речовиною, одержуємо розв'язок у вигляді:

$$u(x, 0) = H(x) = \frac{h_0}{x ch\sqrt{k}x},$$

де

$$h_0 = \frac{2H_0}{\pi} \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{4\sqrt{k}} \sin 2a\sqrt{k} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right],$$

що відповідає уточненню експоненціального падіння поля в середину надпровідника, тобто, приходимо до ефекту Мейсснера.

Висновки

Побудовані обернення інтегральних рівнянь, які становлять інтегральне зображення розв'язків осесиметричного рівняння Гельмгольца, дозволяють розв'язувати змішані крайові задачі для цього рівняння методом інтегральних перетворень.

Список використаних джерел

1. Ляшко І.І., Александрович І.М., Сидоров М.В. Інтегральний оператор Рімана стаціонарних та нестаціонарних процесів для ітераційного осесиметричного випадку, // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №1 (87) (2002), с. 49-55.
2. Поль Ван-дер и Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
3. Ляшко І.І., Сидоров М.В., Александрович І.М. Обернення деяких інтегральних рівнянь, // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2 (91) (2002), с. 25-30.

Надійшла до редколегії 20.09.07

УДК 681.3.06

Сільвейструк Л.М.*

Модель „сутність-зв'язок” – популярна семантична модель: історія, формалізація, бібліографія

Зроблено стислий екскурс в історію виникнення та розвитку моделі „сутність-зв'язок”, наведено короткий огляд моделі та зроблено спробу систематизувати велику кількість навчально-наукової літератури, присвяченої цій моделі.

Ключові слова: модель „сутність-зв'язок”, діаграма сутностей та зв'язків, концептуальна модель.

*E-mail: slm-klm@rambler.ru

Статтю представив: д.ф.-м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Семантичне моделювання стало предметом інтенсивних досліджень з кінця 1970-х років. Семантичні моделі призначені для відображення змісту інформації, яка циркулює у предметній області. Однією з найпопулярніших семантичних моделей є модель „сутність-зв'язок” (російською – „сущность-связь”), або ER-модель (*Entity-Relationship model*). На використанні різновидів даної моделі базується більшість сучасних підходів до проектування баз даних (головним чином, реляційних).

Виникнення та призначення моделі

Модель „сутність-зв'язок” – це модель даних, яка використовується при проектуванні моделей (інформаційних систем, баз даних, архітектури комп'ютерних додатків та інших систем) і являється високорівневою концептуальною моделлю. Дана модель ґрунтується на деякій важливій семантичній інформації про реальний світ. Вона представляє графічну нотацію, за допомогою якої можна описувати об'єкти та відношення між ними логічних моделей даних. В даному контексті модель „сутність-зв'язок” є мета-моделлю даних, тобто засобом опису логічних моделей даних.

Модель „сутність-зв'язок” запропонував Пітер Чен з метою впорядкування задачі проектування моделей, і її проект був опублікований у 1976 році [1]. Дана модель задовольняє двом важливим умовам:

– потужність її засобів дозволяє досить адекватно формалізувати структуру різноманітних предметних областей;

– розрив між можливостями моделі і CASE-засобів (*Computer Aided Software Engineering* –

Silveystruk L.N.*

Model „entity-relationship” – popular semantic model: history, formalization, bibliography

The short digression is done in history of model „entity-relationship” origin and development, the brief review of model is resulted and an attempt to systematize a plenty of the educational and scientific literature devoted to this model is done.

Key Words: model „entity-relationship”, entity-relationship diagram, conceptual model.

програмні засоби, які підтримують процеси автоматизованого проектування моделей, створення та супроводу програмного забезпечення та баз даних, генерацію кода, тестування, документування та управління проектом), що її підтримують, не є надто великим.

Модель „сутність-зв'язок” постійно розширюється і модифікується (про деякі з цих змін, читай нижче). У зв'язку з наглядністю представлення концептуальних схем дана модель увійшла до складу багатьох CASE-засобів, які також внесли свій вклад в її еволюцію.

Детальний огляду історії виникнення та розвитку моделі можна знайти, наприклад, у роботах Чена [2-6] та Тхалхеїма [7].

Модель „сутність-зв'язок” у своїй еволюції пройшла декілька етапів:

– модель „сутність-зв'язок” (*entity-relationship model*);

– розширена модель „сутність-зв'язок” (*extended entity-relationship model* або *EER model*);

– часова модель „сутність-зв'язок” (*temporal entity-relationship model* або *timeER model*);

– модель „сутність-зв'язок” високого порядку (*higher-order entity-relationship model* або *HERM*).

Існують різні види моделі „сутність-зв'язок”, які виникали у зв'язку з потребами моделювання, і Чен у роботі [8] запропонував класифікацію моделей „сутність-зв'язок”, базуючись на обмеженнях, що накладаються на зв'язки та атрибути. Було продемонстровано еквівалентність між моделями побудованими засобами різних видів моделі „сутність-зв'язок”.

Розширена модель „сутність-зв'язок” з'являється у 1980-х роках у результаті введення в модель категорії абстракції [9, 10]. Причиною стало швидке розповсюдження нових типів додатків баз даних (мультимедійні додатки, інструменти автоматизованої підготовки виробництва, інструменти автоматизованого проектування), і для того, щоб створювати моделі даних для цих баз даних, стало недостатньо понять моделі „сутність-зв'язок”. Розширена модель „сутність-зв'язок” має засоби для безпосередньої підтримки об'єктно-орієнтованих концепцій. Дана модель включає всі поняття моделі „сутність-зв'язок” плюс власні поняття, а саме *тип сутності суперклас (superclass entity type)*, *тип сутності підклас (subclass entity type)*, *тип зв'язку суперклас/підклас (superclass/subclass relationship type)*, *тип зв'язку isa (isa relationship type)*, *концепції уточнення/узагальнення (specialization/generalization conceptions)* і *категоризації (categorization conception)*.

Широкий діапазон відомих моделей керують інформацією, яка змінюється у часі. Тому багато моделей фокусуються не тільки на структурному аспекті інформації, а й на поведінковому аспекті. Дані вимоги до відображення інформації стали причиною появи часової моделі „сутність-зв'язок”, яка є надбудовою розширеної моделі „сутність-зв'язок”, за визначенням Елмасрі і Наватхе [11]. Часова модель „сутність-зв'язок” забезпечує вбудовану підтримку для збору часових аспектів сутностей, зв'язків, атрибутів, сутностей суперклас, сутностей підклас.

У 1992 році Тхалхеім запропонував модель „сутність-зв'язок” високого порядку, як точно засновану на теорії [12]. Схему даної моделі можна автоматично транслювати в класичні моделі даних (реляційну, ієрархічну та мережеву схеми моделі). Модель „сутність-зв'язок” високого порядку містить всі концепції попередніх моделей та власні, а саме *типи зв'язків високого порядку (higher-order relationship types)*, *оператори (наприклад, insert, delete, update, conditional operations)* та *обмеження цілісності узагальненої складності (integrity constraints the generalized complexity)*. В даній моделі використовуються абстрактні типи даних і вона базується на об'єктно-орієнтованому моделюванні.

У зв'язку з активними дослідженнями в області концептуального моделювання у 1979 році було організовано першу Міжнародну Конференцію „Підхід Сутність-Зв'язок” (International Conference on the Entity Relationship

Approach), яка відбулась в США у Лос Анжелесі. З 1996 року вона проходить під назвою Міжнародна Конференція „Концептуальне Моделювання” (International Conference on Conceptual Modeling). Дана конференція в період з 1979 по 1985 роки проходила раз в два роки, а з 1986 року стала щорічною. На сьогоднішній день відбулось 26 міжнародних конференцій, які приймали 14 різних держав на 3 континентах. Наступна конференція запланована на жовтень 2008 року і відбудеться в Барселоні (Іспанія).

З 1994 року почали працювати веб-сайти, які супроводжували відповідні конференції. Також є веб-сайт моделі „сутність-зв'язок”, який містить загальну інформацію: про Міжнародні Конференції „Концептуальне Моделювання”, історію розвитку моделі, бібліографію [13].

Основні поняття моделі та їх формалізація

На сьогоднішній день не існує єдиного загальноприйнятого стандарту для моделі „сутність-зв'язок”, але є набір загальних конструкцій, які лежать в основі більшості варіантів моделі. Спроба описати ці загальні конструкції була проведена у роботах [14-17].

Модель „сутність-зв'язок” будується з використанням трьох основних елементів: *сутність (entity)*, *атрибут (attribute)* і *зв'язок (relationship)*.

Сутності та зв'язки. З об'єктами деякої моделі „сутність-зв'язок” пов'язані поняття: тип – набір однорідних предметів, явищ, які виступають як єдине ціле, екземпляр – конкретний елемент набору, який визначає деякий тип, множина – конкретний набір екземплярів типу в деякий момент часу. Очевидно, що ототожнення понять тип та множина – це суттєва помилка, особливо під час розгляду моделей, які пов'язані з часовими аспектами. При розгляді сутностей та зв'язків необхідно розрізняти поняття сутності (екземпляру сутності), типу сутності і множини сутності та зв'язку (екземпляру зв'язку), типу зв'язку і множини зв'язку.

Сутність – це абстрактний об'єкт визначеного виду. Тип сутності визначає набір однорідних сутностей деякого виду. Колекція всіх сутностей деякого типу сутностей в будь-який момент часу називається множиною сутності.

Взаємовідношення сутностей виражається зв'язками. Тип зв'язку – це осмислена асоціація між двома або більшим числом типів сутностей. Зв'язок – це асоціація між сутностями, яка включає по

одній сутності з кожного типу сутностей, що приймають участь у даному типі зв'язку. Множина зв'язку – це колекція всіх зв'язків деякого типу зв'язку в будь-який момент часу.

Ролі. Семантичне значення входження типу сутності у тип зв'язку називається її *ролю*. Входженням типів сутностей у тип зв'язку можна надавати *рольові імена* – для уточнення призначення кожного входження (більш неформально: для уточнення призначення кожної сутності-учасниці у зв'язку). Тут треба говорити саме про входження, тому що n -арний тип зв'язку, де $n=2,3,\dots$, задається на n необов'язково різних типах сутностей. Особливе значення мають рольові імена в типах зв'язків на одному типу сутності. В цьому випадку нема інших засобів крім рольових імен для розрізнення різних входжень одного типу сутності в тип зв'язку. Отже, зміст рольових імен полягає в синтаксичному розрізненні входжень одного і того ж типу сутності в тип зв'язку.

Серйозно говорити про семантичний аспект рольових імен, тобто про визначення функцій учасників зв'язку рольовими іменами, не приходить, оскільки вся „семантика” полягає в виборі „мнемонічних” рольових імен, які і повинні відображати семантику.

Можна сказати, що поняття ролі часто допоміжне, воно існує для зручності користувача; тому ролі (рольові імена) можна навіть не вводити, особливо в випадку, коли явне введення цих імен нічого не додає до розуміння моделі.

Слабкі та сильні типи зв'язків, слабкі та сильні типи сутностей. В моделі „сутність-зв'язок” існує два види типів сутностей: *слабкий тип сутності* (*weak entity type*) та *сильний тип сутності* (*strong entity type*). Слабкий тип сутності вводиться до розгляду деяким слабким типом зв'язку (дивись, наприклад, [17]).

Слабким типом сутності називають такий тип сутності, існування якого залежить від інших типів сутностей. Тип зв'язку, який з'єднує дані типи сутностей, називається *слабким типом зв'язку* (*weak relationship type*), тобто це такий тип зв'язку, який вводить до розгляду слабкий тип сутності. Сильним типом сутності називають такий тип сутності, існування якого не залежить від інших типів сутностей.

В роботі [17] вводиться поняття *слабкого і сильного типу сутностей в моделі*. Слабкий тип сутності в моделі – це такий тип сутності, який вводиться за допомогою деякого слабкого типу зв'язку моделі. Сильний тип сутності в моделі –

це такий тип сутності, який не є слабким типом сутності в моделі.

Необхідність даних уточнень обумовлена відносністю понять сильного та слабкого типу сутностей, якщо їх розглядати для окремих слабких типів зв'язку (локальний розгляд). Для моделі в цілому (глобальний розгляд), поняття слабкого і сильного типу сутностей в моделі є сталими.

Присутність слабкого типу сутності в моделі „сутність-зв'язок” може бути проблематична: 1) проблема розуміння моделі, тобто слабкий тип сутності може складно ідентифікуватися, якщо уточнюється іншими слабкими типами сутностей у моделі; 2) при відображенні моделі „сутність-зв'язок” у логічну модель в якій немає аналогів слабкому типу сутності.

Деякі автори пропонують, щоб слабкі типи сутностей були присутні у моделі тільки на початкових етапах, фінальна ж модель „сутність-зв'язок” не повинна містити їх. Так, у роботі [18] був запропонований алгоритм для визначення положення слабких типів сутностей (алгоритм складається з чотирьох кроків). В процесі його застосування слабкий тип сутності може бути перетворений у сильний тип сутності з деякими *посилковими атрибутами* (*reference attribute*), або стати атрибутом свого „найближчого” сильного типу сутності. Вибір шляху трансформації слабкого типу сутності залежить від проєктанта та вимог до моделі.

Обмеження кардинальності. Для забезпечення цілісності моделі до типів зв'язку застосовують *обмеження кардинальності* (*cardinality constraints*) – це число зв'язків деякого типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать відповідним типам сутностей даного типу зв'язку (кількість типів сутностей залежить від виду обмеження кардинальності).

Існує декілька різновидів обмежень кардинальності, які можна знайти, наприклад, у роботах Ферга [19], Тхелхеїма [20], Лензеріні [21], Хартмана [22]. Зауважимо, що в доступній нам російськомовній навчальній літературі [23-27] не зустрічаються чітко окреслені дані різновиди. Тобто автори розглядають обмеження кардинальності тільки для бінарних типів зв'язку (для бінарних типів зв'язку різниця між різновидами обмежень кардинальності полягає у питанні виду, вони легко транслюються один в одного (дивись, наприклад, [22])), або розглядають лише один з підходів для будь-яких типів зв'язку (дивись, наприклад, [26]).

Декомпозиція. Моделі „сутність-зв'язок” під силу відображати типи зв'язків, які охоплюють більше двох типів сутностей, але не всі логічні моделі підтримують багатосторонні типи зв'язків; тому існує процедура переходу від багатостороннього типу зв'язку до бінарних типів зв'язку – *декомпозиція*. Теоретичні і практичні основи декомпозиції можна знайти у роботах [24, 28-29]. Існує два шляхи *декомпозиції без втрат*: 1) декомпозиція *n*-арного типу зв'язку на *n* бінарних типів зв'язку; 2) декомпозиція *n*-арного типу зв'язку в *з'єднуючий тип сутності* (*connecting entity type*) та *n* бінарних типів зв'язку.

В моделі „сутність-зв'язок” застосовують саме другий шлях декомпозиції типів зв'язку, так як перший призводить до появи надлишкової інформації. Можливо здійснювати також декомпозицію типів сутностей (тип сутності представляють у вигляді декількох типів сутностей).

Атрибути. Засіб, за допомогою якого визначаються властивості типу сутності або типу зв'язку, є атрибути. Типу сутності і типу зв'язку відповідає певний набір атрибутів.

Має місце поняття множини значень, які можуть приймати атрибути – *домен атрибуту* (*domain*). Домен визначає всі потенціальні значення, які можуть бути присвоєні атрибуту. Різні атрибути можуть разом використовувати один домен.

Як зазначалось вище, можна розміщувати атрибути на типі зв'язку, але не потрібно зловживати такою можливістю, в якості альтернативи можна запропонувати наступне: ввести в модель тип сутності з тим же атрибутом та з'єднати цей тип із типом зв'язку і знищити відповідний атрибут типу зв'язку (дивись, наприклад, [24]).

Розглядаючи атрибути, необхідно розглянути різні класи атрибутів (*прості та складові атрибути, однозначні та багатозначні атрибути, базові та похідні атрибути, ключі*).

Складові атрибути вводяться в результаті застосування до простих атрибутів деяких конструкцій [7]. Такі взаємозв'язки вказують на існування ієрархії атрибутів. Рішення про моделювання атрибута у вигляді простого чи складового залежить лише від проектанта.

В більшості реалізацій моделі „сутність-зв'язок” багатозначні атрибути необхідно перетворювати в типи сутності. Причому багатозначні атрибути представляються у моделі шляхом створення нового слабкого типу сутності

і побудови відповідного бінарного типу зв'язку виду „один до багатьох”.

Слід зазначити, що серед похідних атрибутів потрібно розрізняти атрибути, які використовують значення декількох атрибутів однієї сутності та значення одного атрибуту всіх сутностей в межах одного типу сутності. В другому випадку ми можемо сказати, що даний похідний атрибут є атрибутом типу сутності, так як використовує всі значення сутностей цілого типу. Також похідні атрибути можуть обраховуватися на основі декількох взаємопов'язаних атрибутів різних типів сутностей. В даному випадку, необхідно уточнити типи зв'язків між даними типами сутностей.

Серед ключів виділяють такі види – *потенціальний ключ* (*candidate key*) та *первинний ключ* (*primary key*). Відповідно, тип сутності або тип зв'язку має один первинний ключ, а потенціальних ключів може бути декілька.

Ніякі дві сутності (два зв'язки) у межах типу сутностей (типу зв'язку) не можуть мати однакові комбінації значень атрибутів, які складають ключ.

Як і у випадку типів зв'язку на атрибути накладаються також обмеження кардинальності у вигляді діапазону можливої кількості значень даного атрибуту. За допомогою обмеження кардинальності атрибута можна вказати на *обов'язкові та необов'язкові* атрибути, а також деталізувати багатозначні атрибути.

Типи сутностей суперклас та підклас. В розширеній моделі „сутність-зв'язок” з'являються типи сутностей суперклас та підклас. Тип сутності суперклас – тип сутності, який включає одну або декілька різних допоміжних груп сутностей, які повинні бути представлені у моделі даних. Тип сутності підклас – допоміжна група сутностей деякого типу сутності (типу сутності суперклас), яка повинна бути представлена у моделі даних.

Під час створення типу сутності суперклас та відповідних йому типів сутностей підклас на ці типи сутностей накладаються *обмеження степені участі* (*participation constraint*) та *обмеження неперетину* (*disjoint constraint*). Так як дані обмеження є логічно-незалежними характеристиками утворення типів сутностей суперклас та підклас, тому при їх сумісному використанні виділяють чотири різні види обмежень: *обов'язковий та неперетинаючий, необов'язковий та неперетинаючий, обов'язковий*

та перетинаючий, необов'язковий та перетинаючий.

Розглядаючи типи сутностей супертип та підтип, необхідно звернути увагу на різні механізми наслідування: *одиничне*, *множинне* та *вибіркове*, які покладено в основу концепцій уточнення/узагальнення і категоризації (дані механізми пояснюють відмінність цих концепцій (дивись, наприклад, [25])).

В часовій моделі „сутність-зв'язок” виділяють наступні часові аспекти: *дійсний час* (*valid time*), *ресурс* (*lifespan*), *час транзакції* (*transaction time*) та *час, визначений користувачем* (*user-defined time*). Дані часові аспекти застосовують не тільки до об'єктів моделі (типу сутності, типу зв'язку, атрибутів, типу сутності суперклас, типу сутності підклас), а й до обмежень кардинальності. В даній моделі вводяться два нових типи обмежень кардинальності: *кардинальність часу життя* (*lifetime cardinality*) та *миттєва кардинальність* (*snapshot cardinality*).

В моделі „сутність-зв'язок” високого порядку з'являється тип зв'язку високого порядку, який є розширенням поняття тип зв'язку. Тип зв'язку високого порядку – це осмислена асоціація між двома або більшим числом типів сутностей і (або) інших типів зв'язку високого порядку. Для кожного типу (типу сутності, типу зв'язку високого порядку) можуть бути визначені деякі оператори та обмеження цілісності (*статичні* (*static*) та *динамічні* (*dynamic*)). Серед статичних обмежень цілісності виділяють *структурні* (*structural*), *семантичні* (*semantic*), *проекування* (*design*) та *репрезентативні* (*representational*) підвиди, а серед динамічних – *еволюції* (*transition*) та *часові* (*temporal*).

В моделі „сутність-зв'язок” високого порядку слабкий тип сутності та тип зв'язку іса представляється декларативно, а тип сутності розглядається як *тип зв'язку нульового порядку* (*0-order relationship type*). Для представлення типу зв'язку суперклас/підклас з більш ніж одним типом сутностей підклас використовують конструкцію, яку називають *кластером* (*cluster*).

Уточнення моделі. Необхідно зазначити, що модель „сутність-зв'язок” не є формальною моделлю, або є такою не в першу чергу. Фактично вона складається з набору переважно неформальних концепцій, але в ній присутні і формальні аспекти, які уточнюються за допомогою математичних понять, наприклад теорії множин, теорії відношень, логіки, теорії решіток (дивись, наприклад, [7, 14-17, 30-36]).

У роботах [14-17] було уточнено наступні поняття: тип сутності, тип зв'язку, обмеження кардинальності, слабкий тип зв'язку, ієрархію типів типу сутності, ключ.

Діаграми сутностей та зв'язків

Концептуальна модель даних, спроектована засобами моделі „сутність-зв'язок”, складається з документації до моделі, в якій відображені основні об'єкти та їх властивості, і її схеми (графічного зображення).

Схема моделі – це графічне представлення сукупності типів сутностей з визначеною для кожного з них скінченною непорожньою множиною атрибутів і сукупності типів зв'язків, для кожного з яких визначена скінченна (можливо, порожня) множина атрибутів.

Дану схему ще називають *діаграмою сутностей та зв'язків* (*entity-relationship diagram*) або *ER-діаграмою* (*ER-diagram*), яка була запропонована Ченом в роботі [1]. Такі діаграми стандартизовані, але не надто жорстко; існують різні систем позначень, наприклад, нотація Чена [1], нотація Баркера [26], нотація IDEF1 [37], система позначень UML [38].

Взагалі, всі варіанти діаграм сутностей та зв'язків мають за основу одну ідею – малюнок завжди наочніше текстового опису. Усі такі діаграми використовують графічні зображення елементів моделі „сутність-зв'язок”.

Процес побудови моделі „сутність-зв'язок”

Існують різні підходи до процесу проектування засобами моделі „сутність-зв'язок”. Загальним для всіх підходів є набір з чотирьох основних проектних рішень або кроків:

- визначення типів сутностей;
- визначення типів зв'язків між типами сутностями;
- визначення атрибутів типів сутностей та типів зв'язків;
- ідентифікація ключових атрибутів типів сутностей та типів зв'язків.

Хоча є деяка узгодженість у необхідності цих кроків для побудови моделі, але не має загальної домовленості відносно порядку їх виконання. Найголовніше, щоб початкова інформаційна структура була б хоча б частково незалежною від процесу обробки, що дозволить забезпечити гнучкість процесу моделювання.

Процес побудови конкретної моделі кожен користувач визначає індивідуально, так у навчальних посібниках [25-27] автори наводять

можливі варіанти даних процесів і демонструють їх на конкретних прикладах.

Моделювання даних засобами моделі „сутність-зв'язок” підкорюється деяким правилам, які називаються *метаправилами (meta-rules)*. Метаправила описують загальні концепції і не залежать від області застосування. Наприклад, розглянемо декілька метаправил:

- кожен тип сутності має хоча б один атрибут;

- кожен тип сутностей, який приймає участь у типі зв'язку, повинен супроводжуватися обмеженнями кардинальності.

Не дивлячись на те, що модель „сутність-зв'язок” є високорівневим представленням, вона не дає однозначного рішення для визначення користувачем своїх вимог до об'єктів моделі. Відсутня абсолютна різниця між типами сутностей, типами зв'язків та атрибутами. Атрибут є таким тільки у зв'язку з типом сутностей, в іншому контексті атрибут може виступати як самостійний тип сутностей.

У залежності від точки зору користувача різна інформація може бути представлена як зв'язок, сутність чи атрибут. Дана неоднозначність суттєво ускладнює роботу під час злиття локальних моделей в єдину глобальну модель (дивись наприклад, [25-26, 39-40], в яких вказані методи злиття локальних моделей (ідентичність, агрегація, узагальнення) та шляхи виходу з різних неоднозначностей, які виникають під час даного злиття).

Аналізуючи питання проектування моделі, Голстейн [41] вказує на те, що поняття моделі „сутність-зв'язок” не такі вже й легкі для розуміння і застосування початківцями (людьми, які не є професіоналами в сфері проектування, або тими, що тільки починають вчитися проектувати). Дану працю корисно опрацювати для того, щоб ознайомитися з типами невідповідностей між проектом та концептуальною моделлю проекту, наприклад:

- пропущені елементи проекту у концептуальній моделі;

- у концептуальній моделі присутні елементи, які не мають аналогів у проекті;

- використання менш „підходящих” понять моделі „сутність-зв'язок” для відображення елементів проекту (часто ця невідповідність носить суб'єктивний характер).

У статті проаналізовані різні типи невідповідностей та показані шляхи їх виправлення.

Розробка моделей даних у рамках моделі „сутність-зв'язок” значно спростилась в останні роки, оскільки тепер інструменти для їх побудови входять до складу багатьох популярних CASE-засобів. До таких продуктів відносяться ERWin [42, 43], Rational Rose [44] та CASE Studio [45]. Діаграми сутностей та зв'язків, створені за допомогою CASE-засобів, зазвичай мають більш гарний вид, і їх простіше змінювати та адаптувати. Дані засоби використовують різні нотації для створення даних діаграм, деякі з нотацій з'явилися саме завдяки CASE-засобам.

Взаємозв'язок моделі з природними мовами та іншими моделями

При побудові концептуальної моделі необхідно обробити інформацію, яка містить вимоги до даної моделі. Зазвичай вона викладена на природній мові. Тому перед дослідниками постало питання трансляції деякої природної мови (наприклад, англійської) в концептуальну модель. Саме Чен [46-47] розпочав розглядати дане питання, тобто відображати *структуру речень на англійській мові (english sentence structure)* в базову модель „сутність-зв'язок”. Останні дослідження, стосовно даної теми, можна знайти у роботах Омар і Ханна [48], Хартманна [49].

Всі вищевказані роботи містять як теоретичні так і практичні аспекти процесу трансляції природної мови в різні види моделей „сутність-зв'язок”. Так у роботі Хартманна [49], розглянуто вплив нових характеристик моделі „сутність-зв'язок” (спеціалізації, генералізації, типів зв'язків високого порядку та інших) на правила трансляції. Вводяться нові правила трансляції та аналізуються попередні правила (опубліковані раніше) і змінюються відповідно до нових понять моделі.

На етапі переходу до реалізації деякої моделі „сутність-зв'язок” у вигляді реальної інформаційної системи або програми, відбувається відображення даної концептуальної моделі „сутність-зв'язок” у логічну модель. Питання даної трансляції було підняте Ченом в його класичній статті [1], де він розглянув перехід від моделі „сутність-зв'язок” до реляційної, мережевої моделей та моделі множини сутностей. З появою різних розширень моделі автоматично розглядалось і питання їх трансляції в моделі даних.

Підсумовуючи, модель „сутність-зв'язок” є потужним, гнучким засобом моделювання.

Відсутність єдиного загальноприйнятого стандарту для моделі та наявність в її складі неформальних понять потребує подальшого розвитку формальної основи для повної та несуперечливої інтерпретації моделі „сутність-зв'язок”.

Список використаних джерел

1. *Chen P. P.* The entity-relationship model – towards a unified view of data // *ACM Transactions on Database Systems*. – March 1976. – Vol. 1, No. 1. – P. 9-36 (Переклад на російську мову можна знайти за адресою <http://www.osp.ru/dbms/1995/03/271.htm>).
2. *Chen P. P.* ER – a historical perspective and future directions // *Entity-Relationship Approach to Software Engineering*. – 1983. – P. 71-77.
3. *Chen P. P.* Entity-relationship modeling: historical events, future trends, and lessons learned // *Entity-Relationship Approach to Software Engineering*. – 2001. – P. 71-77.
4. *Chen P. P.* Recent Literature on the entity-relationship approach // *Entity-Relationship Approach to Software Engineering*. – 1979. – P. 3-12.
5. *Chen P. P.* English, Chinese and ER Diagrams // *Data & Knowledge Engineering*. – June 1997. – Vol. 23, No. 1. – P. 5-16.
6. *Chen P. P.* From ancient Egyptian language to future conceptual modeling // *Conceptual Modeling*. – Berlin, Springer-Verlag, Lecturing Notes in Computer Sciences. – 1998. – No. 1565. – P. 57-66.
7. *Thalheim B.* Fundamentals of entity-relationship modeling. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 519 p.
8. *Chen P. P.* A preliminary framework for entity-relationship models // *Entity-Relationship Approach to Information Modeling and Analysis*. – 1981. – P. 19-28.
9. *Navathe S., Cheng A.* A methodology for database schema mapping from extended entity relationship models into the hierarchical model // *Entity-Relationship Approach to Software Engineering*. – 1983. – P. 12-20.
10. *Elmasri R., Hevner A., Weldreyer J.* The category concept: An extension to the entity-relationship model // *Data & Knowledge Engineering*. – 1985. – Vol. 1, No.1. – P. 75-116.
11. *Elmasri R., Navathe S.* Fundamentals of database systems, 2 edition. – Benjamin: Cummings Publishing Company, INC. – 1994. – 372 p.
12. *Thalheim B.* Foundations of entity-relationship modeling // *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. – 1992. – Vol. 6. – P. 1-34.
13. www.conceptualmodeling.org
14. *Buy D., Silvestruk L.* Formalization of structural constraints of relationships in model „entity-relationship” // *Proceedings of the Seventh International Scientific Conference „Electronic Computers and Informatics’2006”*. – Kosice. – 2006. – P. 96-101.
15. *Буй Д.Б., Сильвейструк Л.М.* Модель „сутність-зв'язок”: формалізація сутностей та зв'язків // *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. – 2006. – Вип. 3. – С. 143-152.
16. *Буй Д.Б., Сильвейструк Л.Н.* Формализация структурных ограничений связей в модели „сущность-связь” // *Труды IX международной конференции „Интеллектуальные системы и компьютерные науки”*. – Москва: МГУ. – 2006. – Т. 1, Ч.1. – С 76-79.
17. *Буй Д., Сильвейструк Л.* Модель “сущность-связь”: роли, сильные и слабые типы сущностей и типы связей // *Proceedings of the XIII-th International Conference “Knowledge-Dialogue-Solution”*. – Sofia. – 2007. – P. 316-322.
18. *Balaban M., Shoval P.* Resolving the „weak status” of weak entity types in entity relationship schemas. Technical report, Information Systems Program, Department of industrial Engineering and Management, Ben-Gurion University of the Negev, ISRAEL. – 2000. – 15 p.
19. *Ferg S.* Cardinality concepts in entity-relationship modeling // *Proceeding of the 10th International Conference on Entity-Relationship Approach*. – 1991. – P. 1-30.
20. *Thalheim B.* Fundamentals of cardinality constraints // *Proceeding of the 11th International Conference on the Entity-Relationship Approach*. – 1992. – P. 7-23.
21. *Lenzerini M., Santucci G.* Cardinality constraints in the entity-relationship model // *Proceeding International Conference on the Entity-Relationship Approach to Software Engineering* – 1983. – P. 529-549.
22. *Hartmann S.* Reasoning about participation constraints and Chen’s constraints // *Conferences in Research and Practice in*

- Information Technology. – 2003. – Vol.17. – P. 8-16.
23. Дейт Дж. Введение в системы баз данных, 8-е издание.: пер. с англ. – Москва: „Вильямс”, 2005. – 1328 с.
24. Гарсиа-Молина Г., Ульман Дж., Уидом Дж. Системы баз данных. Полный курс.: пер. с англ. – Москва: „Вильямс”, 2004. – 1088 с.
25. Коннолли Т., Бегг К., Страчан А. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика, 2-е изд.: пер. с англ. – Москва: „Вильямс”, 2000. – 1120 с.
26. Коннолли Т., Бегг К., Страчан А. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика, 3-е изд.: пер. с англ. – Москва: „Вильямс”, 2003. – 1440 с.
27. Крёмке Д. Теория и практика построения баз данных. 8-е изд. – Санкт-Петербург: „Питер”, 2003. – 800 с.
28. Chung I., Nakaiuura F., Chen P. A decomposition of relations using the entity-relationship approach // Entity-Relationship Approach to Information Modeling and Analysis. – 1981. – P. 72-85.
29. Jones T., Song I.-Y. Binary equivalents of ternary relationships in entity-relationship modeling: a logical decomposition approach // Database Management. – 2000. – Vol. 11. – P. 12-19.
30. Chen P. P., Li M. The lattice structure of entity sets // Proceedings of the 5th International Conference on Entity-Relationship Approach. – 1987. – P. 217-229.
31. Chen P. P., Yang A. The application of Boolean lattice to data manipulation on entity types and their subtypes. Technical report, Computer Science Department, Louisiana State University. – 1988. – 14 p.
32. Chen P. P., Yang A. Efficient data retrieval and manipulation using Boolean entity lattice // Data & Knowledge Engineering. – 1996. – Vol. 20. – P. 211-226.
33. Chen P. P. An algebra for a directional binary entity-relationship model // Proceedings of the 1st International Conference on Data Engineering. – 1984. – P. 24-27.
34. Paren C., Spaccapietra S. An entity-relationship algebra // Proceedings International Conference on Data Engineering. – 1984. – P. 500-507.
35. Paren C., Spaccapietra S. An algebra for a General Entity-Relationship Model // IEEE Transactions on Software Engineering. – 1985. – Vol. 11, No.7. – P. 634-643.
36. Paren C., Rolin H., Yetongnon K., Spaccapietra S. An ER calculus for the entity-relationship complex model // Entity-Relationship Approach to Database Design and Querying. – 1990. – P. 361-384.
37. IDEF1 Information Modeling. A Reconstruction of the Original Air Force Wright Aeronautical Laboratory. Technical Report AFWAL-TR-81-4023 / www.edef.ru
38. Буч Г., Рамбо Д., Джекобсон А. UML. Руководство пользователя: пер. с англ. – Москва: ДМК, 2000. – 432 с.
39. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных: в двух книгах, кн. 1: пер. с англ. – Москва: Мир, 1985. – 287 с.
40. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных: в двух книгах, кн. 2: пер. с англ. – Москва: Мир, 1985. – 320 с.
41. Goldstein R. C., Storey V. C. Some findings on the intuitiveness of entity-relationship constructs // Entity-Relationship Approach to Database Design and Querying. – 1990. – P. 9-23.
42. Маклаков С.В. ВРwin и ERwin. CASE-средства разработки информационных систем. – Москва: „ДИАЛОГ-МИФИ”, 1999. – 256 с.
43. Маклаков С.В. Создание информационных систем с AllFusion Modeling Suite. – Москва: „ДИАЛОГ-МИФИ”, 2005. – 432 с.
44. Кумсков М. Rational Rose 98 – CASE-продукт нового поколения / <http://www.interface.ru/public/rose98/rose98.htm>
45. www.casestudio.com
46. Chen P. P. Entity-relationship diagrams and english sentence structure // Entity-Relationship Approach to Software Engineering. – 1979. – P. 13-14.
47. Chen P. P. English sentence structure and entity-relationship diagrams // Journal of Information Science. – 1983. – Vol. 2, No. 3. – P. 127-149.
48. Omar, N., Hanna, P., Kevitt, P. Heuristics-based entity-relationship modeling through natural language processing // Proceedings in 15th Irish Conference on Artificial Intelligence and Cognitive Science. – 2004. – P. 302-313.
49. Hartmann S., Link S. English sentence structures and EER modeling // Proceedings International Conference on Conceptual Modeling, Conferences in Research and Practice in Information Technology. – 2007. – Vol. 67. – P.37-45.

Надійшла до редколегії 1.11.2007

УДК 551.4

Терещенко Л.М. *, канд.фіз.-мат.наук
Хомицький В.В. *, канд. техн. наук
Абрамова Л. П. *

**Фізичне моделювання динаміки наносів,
стійкості захисних споруд та території
для будівництва і експлуатації місць
збереження та відстою плавзасобів.**

В данній роботі проведено фізичне моделювання взаємодії вітрових хвиль з захисними огорожувальними спорудам. В дослідках отримані результати вказують - характер взаємодії хвиль зі спорудами відповідає прийнятій в СНиП області розрахунків

Ключові слова: хвилі, тиск вітрових хвиль, вздовжберегова течія, гідротехнічні споруди

Статтю представив професор Мольченко Л.В.

Фізичні дослідження хвильового потоку на обмежених глибинах вимагають проведення трудомістких підготовчих робіт з налагодження дослідної установки, контролю за ходом експерименту та збору вихідної інформації. Успішне виконання зазначених операцій можливо тільки при забезпеченні дослідної установки засобами автоматизації та поточного контролю. З цією метою розроблена та виконана вимірювальна апаратура, що реєструє, дозволяє вести безперервний контроль за хвильовими потоками, що поширюються в каналі, і роботою хвильової установки, а також змінювати режим роботи цієї установки без відключення. Поряд з виготовленою для цієї мети застосовувалася також стандартна апаратура, що реєструє. Застосування цих пристроїв підвищує надійність дослідницької роботи та допомагає чітко реєструвати.

Висота хвиль, які створюються хвилепродуктором, регулювалася шляхом зміни кута відхилення площини щита від вертикального положення. Частота коливань щита від хвилепродуктора (відповідно і довжина хвиль) змінювалася шляхом регулювання опору в ланцюзі обмоток якоря. Діапазон періоду коливання щита становить 0,7с...2,5с. Кут підходу хвиль до берега змінюється шляхом перестановки хвилепродуктора. Підведення хвильового потоку з розрахунковими елементами хвиль до моделі берега здійснювався по

L. M. Tereshchenko* k.ph.-m.n.
V. V. Homicky*, k.t. n.
L. P. Abramova*

**Physical modelling of deposits dynamics,
stability of protective constructions and
territory for ship sediment and storage locators
construction and exploitation**

In this work physical modelling of wind wave interaction with protective constructions is presented. Obtained experimental results shows that character of waves interactions with construction is corresponding to accepted in SNiP calculations area

Key Words: wave, pressure windwave, alongshore current, hydraulic structure.

*E-mail: lida_tereschenko@mail.ru

загороженому хвильовому каналі. Циркуляція водних мас із зони хвильового нагону в зону знижених рівнів у просторі за хвильовими щитами здійснювалася через прорізи у хвильовому каналі.

Для реєстрації висот і довжин хвиль використовувалися ємнісні датчики, що забезпечують можливість одержання в межах діапазону відтворених хвиль прямолінійної тарувальної характеристики. В окремих випадках висоти хвиль визначалися за допомогою датчиків тиску. Для визначення швидкості вздовжберегового й компенсаційного плинів використовувалися мікровертушки; тиску хвиль - датчики тензорезистивного типу. Якісна індексація картини циркуляції водних мас здійснювалася за допомогою використання барвників.

При виконанні вимірів висот хвиль в одній або декількох точках застосовувалася звичайна методика: таріровка датчика - запис у даній точці 10...15 хвиль - розшифровка запису відповідно до таріровки. Однак при вимірі поля хвиль, тобто вимір висот хвиль у багатьох точках моделі при одній і тій ж вихідній (перед моделлю) висоті хвилі дана методика неприйнятна. Причина полягає в тому, що висота хвилі перед моделлю постійно міняється у зв'язку з появою відбитих хвиль, автоколивальних явищ маси води між хвилепродуктором і моделлю, вплив вітру, зміна режиму роботи

хвилепродуктора при короткочасних коливаннях живильної мережі і т.п. Причому всі ці процеси зв'язані між собою та не бувають регулярними. Коефіцієнт трансформації хвиль у даній точці моделі дорівнює

$$K_{\Pi} = \frac{A_{2cp}}{A_{1cp}} K_{\Delta} \quad (1)$$

Провівши подібні виміри у всіх заданих точках моделі, одержимо поле коефіцієнтів трансформації хвиль. При заданій середній висоті вихідної хвилі $h_{всх}$ можна одержати поле висот хвиль, помноживши коефіцієнт трансформації в заданих точках на $h_{всх}$.

Дана методика дозволяє значно зменшити погрішності вимірів за рахунок нестабільності каналу ресстрації, тому що сигнали з обох датчиків записуються по черзі по одному каналі короткий час, за який параметри каналу не міняються.

Склад і методика експериментальних досліджень.

Фізичне моделювання, як правило, робиться на моделях, виконаних у малих масштабах. При цьому, важливого значення набувають питання оцінки отриманих результатів і вірогідність переносу їх у натуру.

При моделюванні завдань хвильового руху рідини необхідно дотримувати умов автомодельності по числу Рейнольдса [1], що може бути визначене по залежності

$$R_{\tau} = \frac{V_{\tau} H}{\nu} \quad (2)$$

де V_{τ} - усереднене значення горизонтальної тринадцятимільйонної орбітальної швидкості по глибині потоку H та за період хвилі

$$V_{\tau} = \frac{h\lambda}{\pi\tau H} + \frac{\text{sh}^2 \text{ch} \frac{2\pi H}{\lambda}}{A\tau H \text{sh}^3 \frac{2\pi H}{\lambda}} \quad (3)$$

При виборі масштабу моделювання руху хвильового потоку на обмежених глибинах рекомендується вважати, що автомодельна зона настає при $Re \geq (0,8...1,0) \cdot 10^5$ [1]. Проведені

підрахунки по залежностям (2)-(3) показують, що в наших експериментах значення числа Рейнольдса становить $Re = (1...10) \cdot 10^6$, що більше критичного значення, наведеного вище.

Таким чином, розрахункові залежності, отримані за дослідними даними, можуть бути використані для натурних умов.

Загальний вид моделі показаний на мал.1, а його взаємодія з вітровим хвилюванням на мал.2. У роботі розглядався варіант захисту у вигляді банкету-опояски.



Рис.1 Загальний вид моделі банкету-опояски.

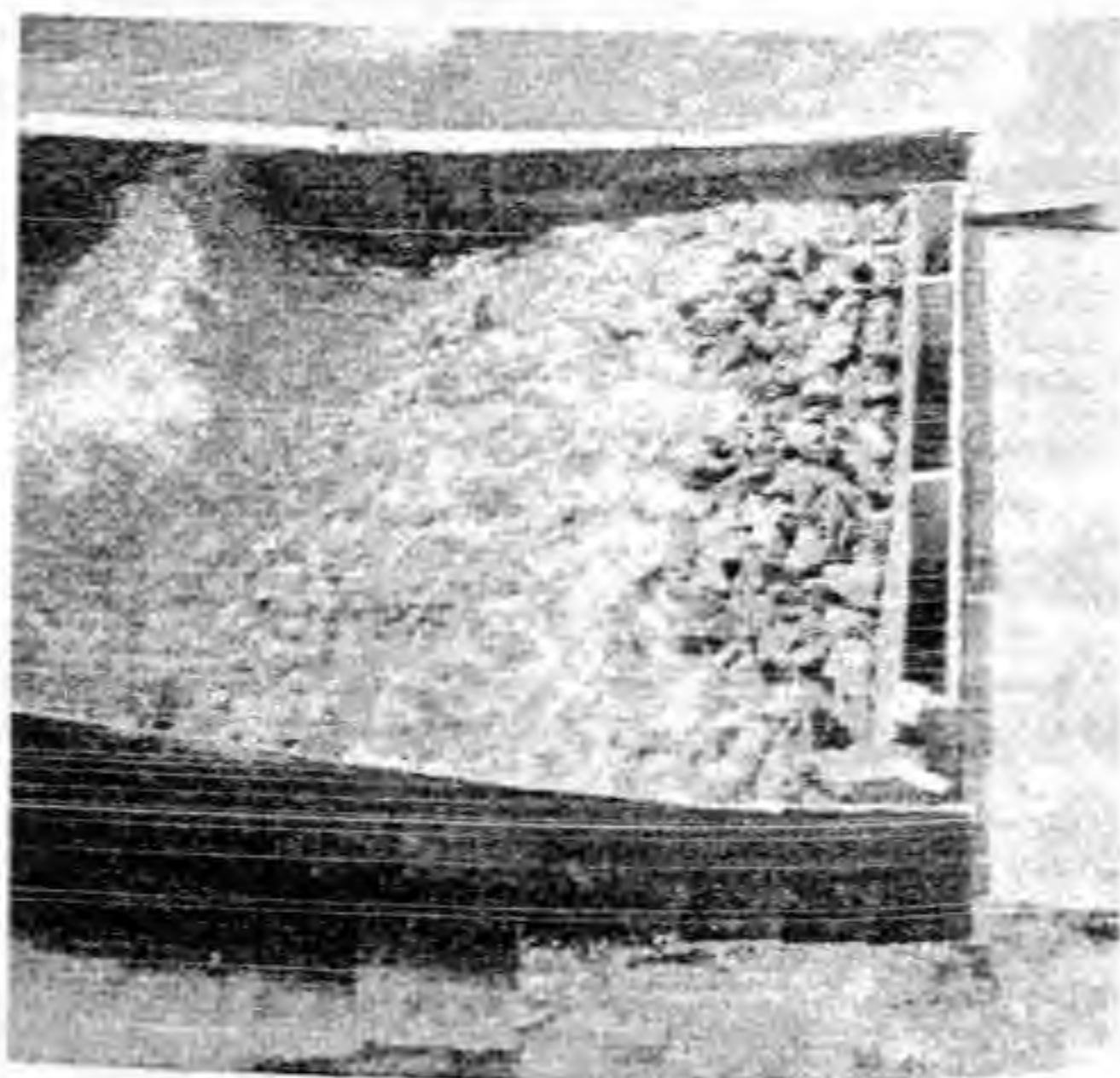


Рис. 2 Взаємодія вітрового хвилювання з елементами конструкції банкету-опояски.

Висота вихідної хвилі та спектральна щільність потужності хвильового тиску на глибокій воді показана на рис.3. Профілі вихідної хвилі для датчиків повного тиску показані на рис.4. На рис.3-4 величини L та H відповідно віддалення та занурення датчика під рівень води.

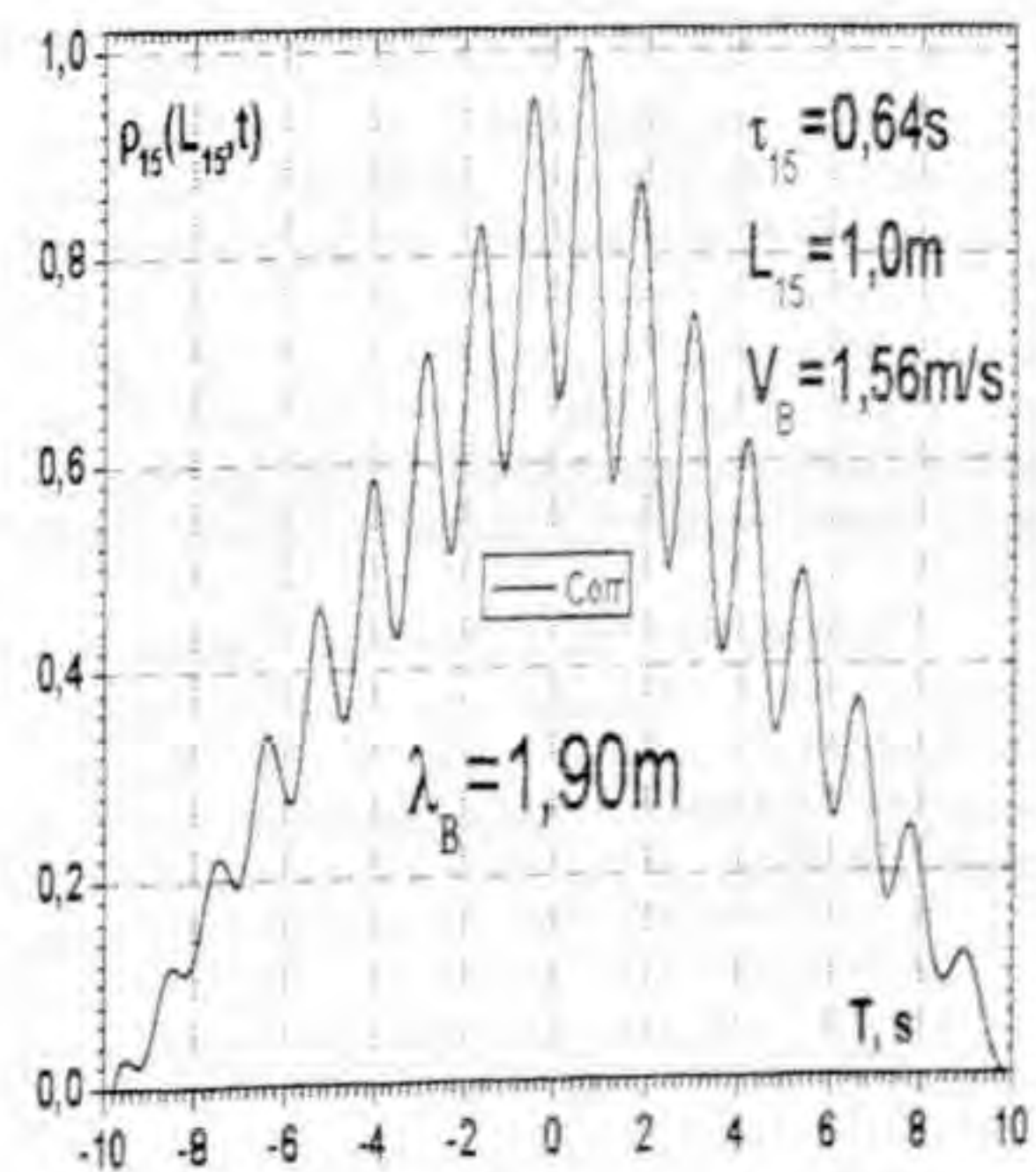
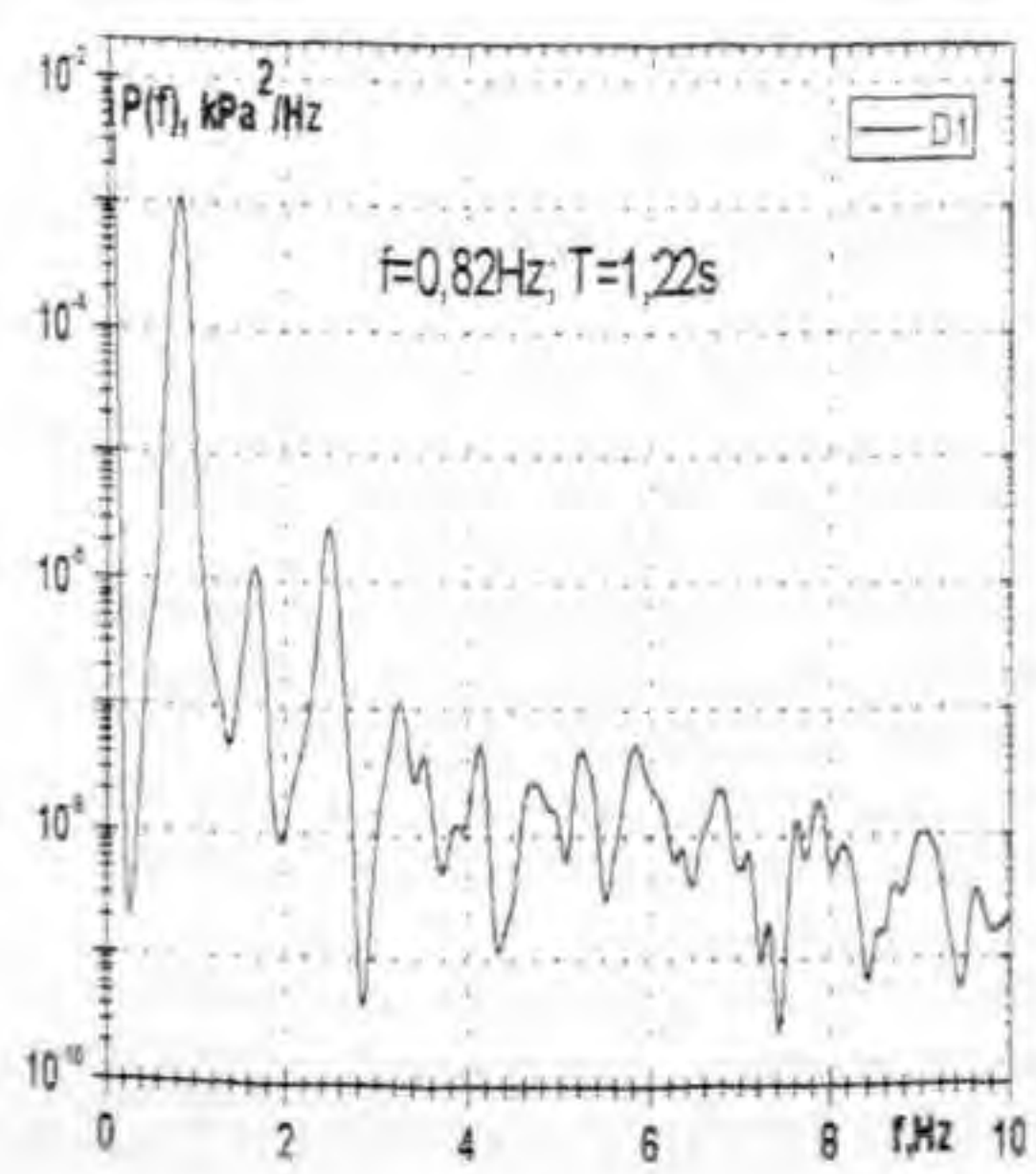
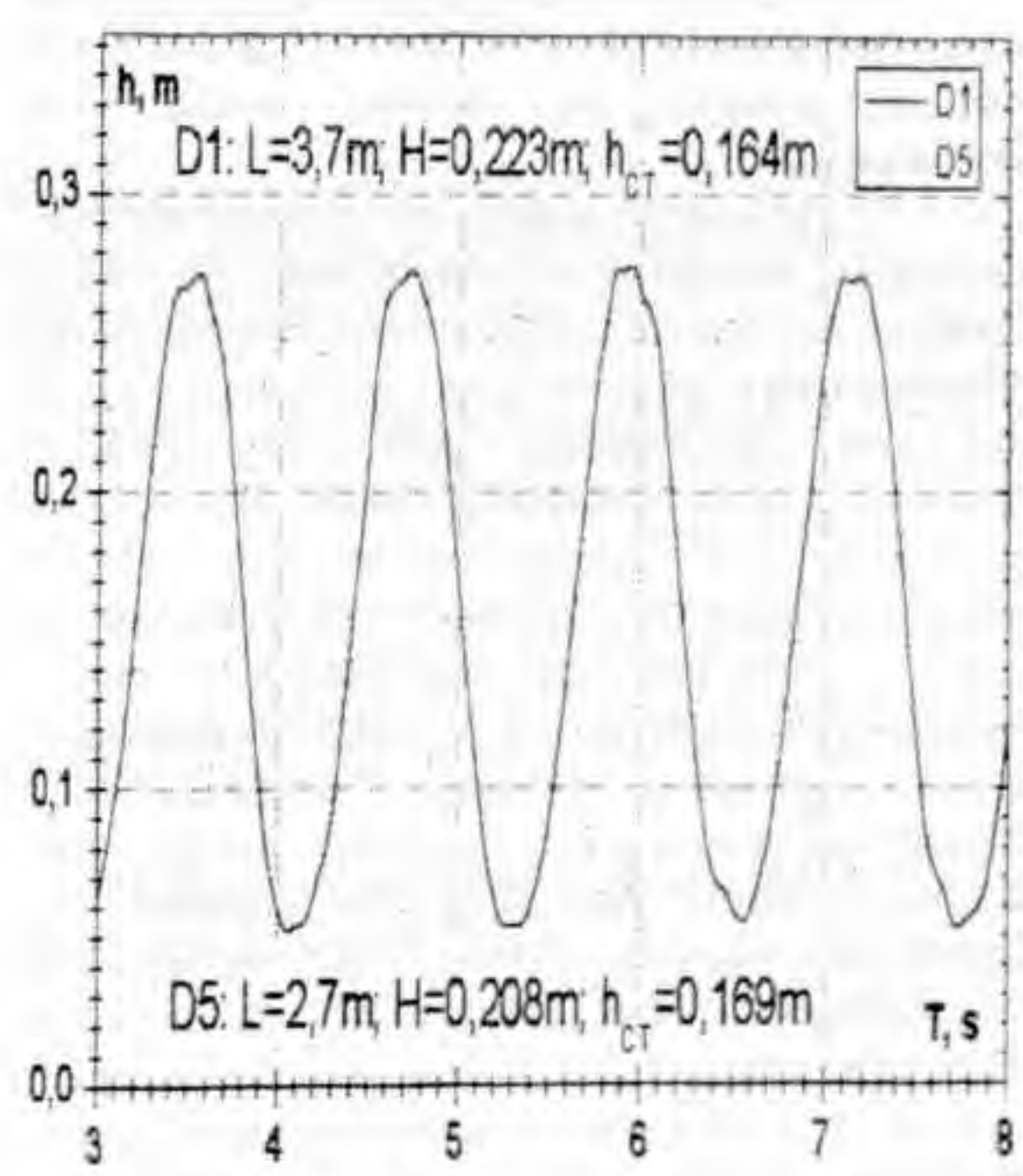
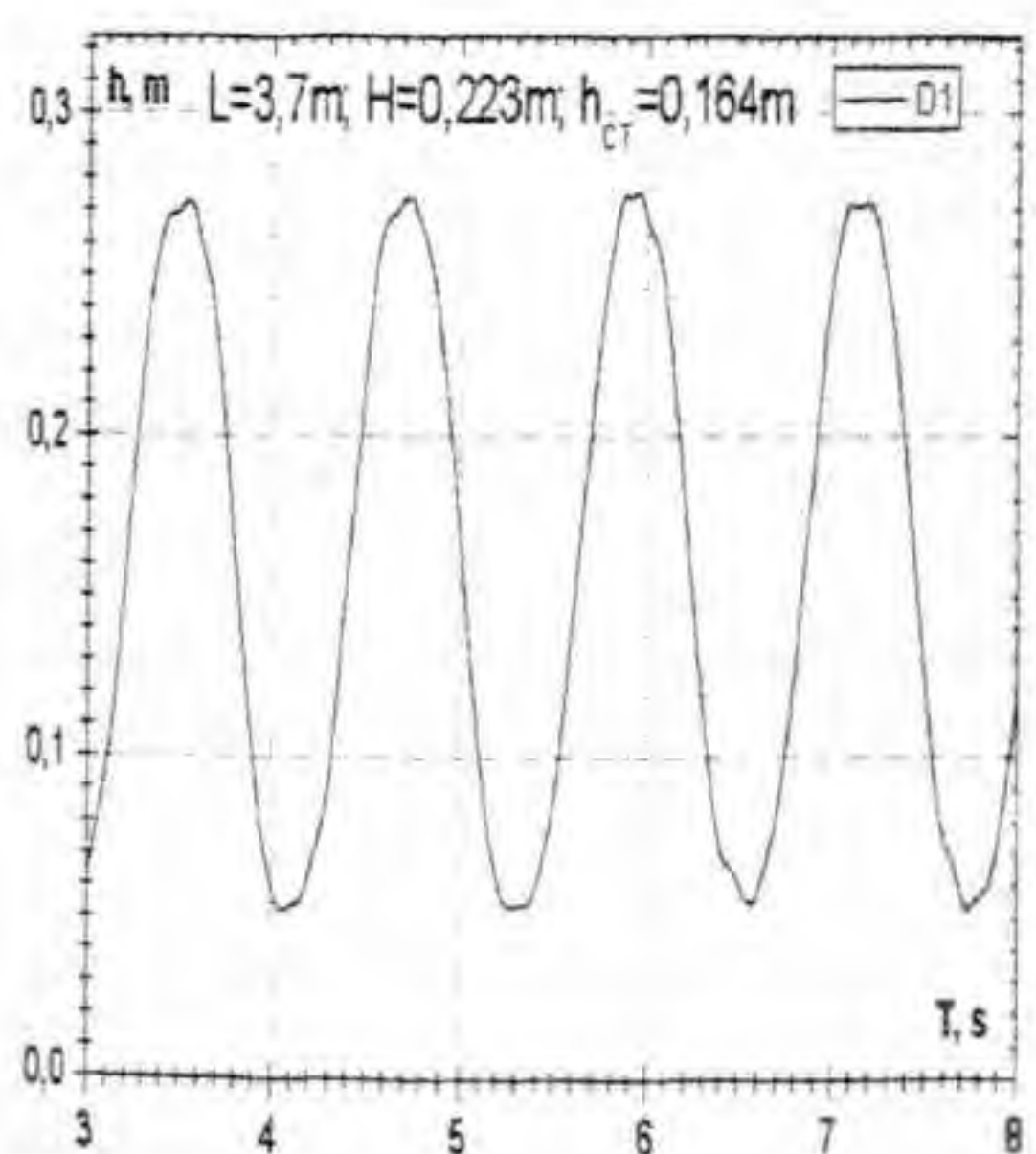


Рис.3 Висота вихідної хвилі та спектральна щільність потужності хвильового тиску на глибокій воді.

Рис.4 Профілі вихідної хвилі для датчиків повного тиску, що перебувають на відстані 1м один від одного на глибокій воді, і функція кореляції поля тиску між цими датчиками.

Представлені матеріали показують, що:

1) характер взаємодії хвиль зі спорудами відповідає прийнятій в СНіП області розрахунків, укісних споруд на впливи хвиль, що розбиваються;

2) параметри хвиль, що руйнуються біля накидання, при фронтальному підході практично однакові. Величини розбитої хвилі при взаємодії з накиданням в дослідках були рівні 4,8...5...5 м. В результаті руйнування хвиль у записах хвильового тиску з'являються вищі гармоніки та частоти, що не відповідають основній несучій частоті хвильового коливання. При русі потоку накату в напрямку до набережної в повну енергію хвильової дії на споруди переважний внесок дають більше високочастотні тридцятимільйонні поля пульсацій тисків, хоча максимум енергії передається на основній, що відповідає періоду хвилі та частоті. З поглибленням точки вимірів під рівень води криві хвильового тиску більше наповнені, вище рівня води датчики реєструють хвильові ударні імпульси. Вплив хвилі брижі приводять до збільшення величин тиску;

3) у всіх проведених дослідках не зафіксовано деформацій, що загрожують цілісності конструкції: границя видимого проникнення накату хвилі по поверхні накидного тіла кріплення відзначалася на відстані 7,5 м від стінки набережної. Видимий підйом рівня води при впливі хвиль біля стінки набережної не перевищував оцінки границі (1,6м). Закладення віртуального укусу, що відповідає цьому стану $m_k=3,5$.

Виконаємо перевірочний розрахунок крупності каменю гірської маси банкету для умов досліджуваної ділянки берега та випадку статичної рівноваги розрахункового розміру каменю [2-3]:

$$h_{1/2}=4,75\text{ м}; \bar{\lambda}=12h=57\text{ м}; \lambda_0=12; m_k=3,5;$$

$$\eta = \frac{d_{85}}{d_{15}} = 1,5; \gamma_k = 2,7\text{ т/м}^3; \gamma_0 = 1,0\text{ т/м}^3.$$

Тоді крупність каменю

$$d_k = 0,23 \frac{\gamma_0}{\gamma_k - \gamma_0} h_{1/2}^3 \sqrt[3]{\frac{\lambda_0 m_k}{m_h^2 - m_0}} \sqrt[4]{\eta} \approx 1,15\text{ м}, \quad (4)$$

де γ_k - щільність каменю; γ_0 щільність води.

Аналогічний розрахунок згідно СНіП має вагу та діаметр каменю розрахункового розміру 2,65 т і 1,23 м. Таким чином, призначений у проекті розмір розрахункового каменю гірської маси можна вважати обґрунтованим.

На підставі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

1) при обраних режимах хвиль конструкції бун, підводних банкетів і бERM стійкі до дії хвильових навантажень : руйнувань елементів конструкцій в дослідках не спостерігається при дії хвиль;

2) передача хвильових тисків здійснювалася на основній частоті, що відповідає періоду хвиль. Формування поля тиску відповідає мінливості поля хвиль: з наближенням до голів бун і верхньої хвилезахисної берми спостерігається руйнування хвилі та зменшення її амплітуди. Процес руйнування супроводжується появою вищих гармонік і частот, що не відповідають основній несучій частоті хвильового коливання. Тут у повну енергію хвильового впливу особливий внесок дають більше високочастотні (імпульсні) тридцятимільйонні поля пульсацій тиску. Нерівномірність поля висот хвиль у точках вимірів викликає мінливість поля тисків. Значення хвильового тиску в дослідках не перевищують розраховані по СНіП [4].

Список використаних джерел

1. Лаппо Д.Д., Жуковец А.М., Міщенко С.С. Умови автотельності в дослідженнях хвильового руху рідини. - Изв. ВІНІТ ім. Веденєєва, 1979, 132, с.59...65.
2. Рекомендації з гідравлічного моделювання хвилювання і його впливу на піщані береги морів і водоймищ. - 14. ЦНИИС, 1987, -і 83с.
3. Сокольніков Ю.Н. Цайтц Е.С. Хомицький В.В. Захист берегів водоймищ банкетами з гірської маси.- К.: Наукова думка, 1974.- 142с.
4. СНіП 2.06.04-82. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). - М.: Госстрой СССР. 1983. - 38с.

Надійшла до редколегії 15.12.07

УДК 517.929

Д.Я. Хусайнов, доктор фіз.-мат. наук, професор,
М.Б.Вереїкіна, кандидат. фіз.-мат. наук.

Зображення розв'язків задачі Коші одного класу систем рівнянь з частинними похідними із запізнюванням

Для систем двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з чистим запізнюванням отримано зображення розв'язку у випадку дійсних коренів характеристичного рівняння, коли власні числа різні. Проведено порівняльний аналіз зображення розв'язків для такого класу систем із запізнюванням та без запізнювання.

Ключові слова: диференціальні рівняння, розв'язок, задача Коші, запізнювання.

Представлено проф. д.ф.-м.н. Беловим Ю.А.

E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua vereik@mail.kar.net

Вступ

Досліджується система двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Отримано розв'язок задачі Коші у випадку дійсних коренів характеристичного рівняння. Розв'язана задача Коші для системи з чистим запізнюванням у частинному випадку кратних власних чисел.

Система без запізнювання

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1)$$

визначених при $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}$. Як відомо [1], завжди існує неособлива матриця S , що приводить матрицю A до жорданової форми Λ

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \Lambda.$$

D.Ya. Khusainov, Doctor of Science, Professor,
M.B. Vereikina, P.D.Doctor.

Representation of the solutions of Cauchy problem of one class of the systems partial differential equations with delay

For system of two of the partial differential equations with delay the representation of the solutions for real distinct root of a characteristic equation is represented. Compared analysis of the representation of the solutions for such class systems with delay and without one is develop.

Key Words: differential equations. solutions, Cauchy problem, delay

Тому перетворенням

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi(x,t) \\ \eta(x,t) \end{pmatrix}$$

систему (1.1) можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Розглянемо можливість отримання загального розв'язку системи (1.2) залежно від вигляду жорданової форми Λ , якщо її власні числа дійсні, тобто у термінології [2,3] система є гіперболічною. Відмітимо, що у [4] також досліджувався клас гіперболічних систем, але більш простого вигляду та з нелінійними граничними умовами, коли розв'язки будувалися за допомогою дискретних динамічних систем, а саме – косого добутку відображень інтервалів.

1. Нехай власні числа матриці A , тобто корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

дійсні, різні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді матриця Жордана Λ має діагональний вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

і система (2) розщеплюється на два рівняння

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}.$$

Розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \quad (1.3)$$

шукатимемо методом розділення змінних у вигляді добутку двох функцій $\xi(x,t) = X(x)T(t)$.

Після підстановки в рівняння (1.3) отримуємо

$$X(x)T'(t) = \lambda_1 X'(x)T(t),$$

Звідси, розділивши змінні, маємо

$$\frac{T'(t)}{\lambda_1 T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} = \mu.$$

Розділимо отриманий вираз на два рівняння

$$T'(t) = \lambda_1 \mu T(t), \quad X'(x) = \mu X(x).$$

Інтегруючи ці рівняння, запишемо

$$T(t) = c_1 e^{\lambda_1 \mu t}, \quad X(x) = c_2 e^{\mu x}.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння з частинними похідними (1.3) має вигляд

$$\xi(x,t) = X(x)T(t) = c e^{\mu(x + \lambda_1 t)},$$

а загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$\xi(x,t) = \Phi[c e^{\mu(x + \lambda_1 t)}] = F_1(x + \lambda_1 t),$$

де $F_1(\bullet)$ - довільна неперервно диференційована функція. Аналогічно одержується $\eta(x,t)$.

Отже, загальний розв'язок системи (1.2) має вигляд

$$\xi(x,t) = F_1(x + \lambda_1 t), \quad \eta(x,t) = F_2(x + \lambda_2 t), \quad (1.4)$$

де $F_1(\bullet)$, $F_2(\bullet)$ - довільні неперервно диференційовані функції.

2. Нехай корені характеристичного рівняння кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Можливі два випадки.

2.1. Матриця Жордана має чисто діагональний вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Тоді система (1.2) записується, як і в першому випадку, у вигляді

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}$$

і розщеплюється на два незалежні рівняння. Загальний розв'язок має вигляд

$$\xi(x,t) = F_1(x + \lambda t), \quad \eta(x,t) = F_2(x + \lambda t).$$

2.2. Матриця Жордана має нижній трикутний вигляд, тобто

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Тоді перетворена система (1.2) має вигляд

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x},$$

а її загальний розв'язок

$$\xi(x,t) = F_1(x + \lambda t),$$

$$\eta(x,t) = F_2(x + \lambda t) + t \frac{\partial F_1(x + \lambda t)}{\partial x},$$

де $F_1(\bullet)$ - двічі неперервно диференційована функція, а $F_2(\bullet)$ - неперервно диференційована функція.

Повертаючись до початкових змінних, отримуємо, що загальний розв'язок системи (1.1) має вигляд.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні, різні, то

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} F_1(x + \lambda_1 t) \\ F_2(x + \lambda_2 t) \end{pmatrix}.$$

2.1. Якщо корені кратні, а жорданова форма матриці чисто діагональна, то

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} F_1(x + \lambda t) \\ F_2(x + \lambda t) \end{pmatrix}.$$

2.2. Якщо корені кратні, а жорданова форма нижнього трикутного вигляду, то

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} F_1(x + \lambda t) \\ F_2(x + \lambda t) + t \frac{\partial F_1(x + \lambda t)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Задача Коші для системи лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку ставиться таким чином. Потрібно знайти розв'язки, тобто вид функцій $F_1(\bullet)$, $F_2(\bullet)$, при яких задовольняються початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad v(x,t)|_{t=0} = \psi(x).$$

Це означає, що треба знайти поверхні, що цілком складаються з перших інтегралів рівнянь характеристик, які проходять через задані криві.

1. Для випадку дійсних, різних коренів характеристичного рівняння $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отримуємо, що умови Коші для перетвореної системи (1.2) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi(x,0) \\ \eta(x,0) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}.$$

Нехай матриця S і обернена до неї S^{-1} мають вигляд

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \beta_2 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Тоді отримуємо

$$\xi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \eta(x, 0) = \psi_0(x),$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\Delta} [\beta_2 \varphi(x) + \alpha_2 \psi(x)],$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\Delta} [-\beta_1 \varphi(x) + \alpha_1 \psi(x)].$$

Розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}, \quad \xi(x, 0) = \varphi_0(x)$$

має вигляд

$$\xi(x, t) = \varphi_0(x + \lambda_1 t) =$$

$$\frac{1}{\Delta} [\beta_2 \varphi(x + \lambda_1 t) + \alpha_2 \psi(x + \lambda_1 t)],$$

а задачі Коші

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}, \quad \eta(x, 0) = \psi_0(x)$$

має вигляд

$$\eta(x, t) = \psi_0(x + \lambda_2 t) =$$

$$\frac{1}{\Delta} [-\beta_1 \varphi(x + \lambda_2 t) + \alpha_1 \psi(x + \lambda_2 t)].$$

Повертаючись до початкових змінних, остаточно отримуємо

$$u(x, t) = \frac{1}{\Delta} \{ \alpha_1 [\beta_2 \varphi(x + \lambda_1 t) - \alpha_2 \psi(x + \lambda_1 t)] +$$

$$+ \alpha_2 [-\beta_1 \varphi(x + \lambda_2 t) + \alpha_1 \psi(x + \lambda_2 t)] \},$$

$$v(x, t) = \frac{1}{\Delta} \{ \beta_1 [\beta_2 \varphi(x + \lambda_1 t) - \alpha_2 \psi(x + \lambda_1 t)] +$$

$$+ \beta_2 [-\beta_1 \varphi(x + \lambda_2 t) + \alpha_1 \psi(x + \lambda_2 t)] \}.$$

2.1. Для випадку кратних коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і матриці Жордана, чисто діагонального вигляду, остаточний розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = \varphi(x + \lambda t), \quad v(x, t) = \psi(x + \lambda t).$$

2.2. Якщо корені кратні, але матриця Жордана має піддіагональну одиницю, то, повторюючи приведені вище перетворення, для функцій $\xi(x, t)$, і $\eta(x, t)$ отримаємо, відповідно

$$\xi(x, t) = \varphi_0(x + \lambda t),$$

$$\eta(x, t) = \psi_0(x + \lambda t) + t \frac{\partial \varphi_0(x + \lambda t)}{\partial x}.$$

А розв'язок вихідної системи має вигляд

$$u(x, t) = \varphi(x + \lambda t) + \frac{t}{\Delta} \alpha_2 \left[\beta_2 \frac{\partial \varphi(x + \lambda t)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \psi(x + \lambda t)}{\partial x} \right]$$

$$v(x, t) = \psi(x + \lambda t) + \frac{t}{\Delta} \beta_2 \left[\beta_2 \frac{\partial \varphi(x + \lambda t)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \psi(x + \lambda t)}{\partial x} \right]$$

Система із запізнюванням

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами і сталим запізнюванням вигляду в припущенні, що власні числа матриці A кратні, а відповідна матриця Жордана чисто діагональна. Нехай вихідна система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u(x, t - \tau)}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v(x, t - \tau)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u(x, t - \tau)}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v(x, t - \tau)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1)$$

Вона визначена в області $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. На відміну від системи без запізнювання, початкові умови задані на проміжку $-\tau \leq t \leq 0$ [5]. Розглянемо знаходження частинного розв'язку, для якого початкові умови мають вигляд

$$u(x, t) = e^{\mu t} \theta_1(t), \quad v(x, t) = e^{\mu t} \theta_2(t),$$

$$-\tau \leq t \leq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

де μ – деяка стала, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ – довільні неперервно диференційовані функції.

Як і у попередньому випадку, існує неособлива матриця S , що приводить матрицю A до жорданової форми і система (2.2) розщеплюється на два рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \xi(x, t - \tau)}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \eta(x, t - \tau)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.2)$$

При цьому початкові умови для отриманих рівнянь будуть мати вигляд

$$\xi(x, 0) = e^{\lambda x} \Theta_1(t), \quad \eta(x, 0) = e^{\lambda x} \Theta_2(t),$$

$$\Theta_1(t) = \frac{1}{\Delta} [\beta_2 \theta_1(t) + \alpha_2 \theta_2(t)],$$

$$\Theta_2(t) = \frac{1}{\Delta} [-\beta_1 \theta_1(t) + \alpha_1 \theta_2(t)].$$

Розглянемо перше рівняння. Для знаходження його розв'язку знов використовуватимемо метод розділення змінних, тобто шукатимемо рішен

ня у вигляді добутку двох функцій $\xi(x, t) = X(x)T(t)$. Підставляємо в рівняння $X(x)T'(t) = \lambda X'(x)T(t - \tau)$,

Звідси, розділивши змінні, маємо
$$\frac{T'(t)}{\lambda T(t - \tau)} = \frac{X'(x)}{X(x)} = \mu.$$

Розділимо отриманий вираз на два рівняння $T'(t) = \lambda \mu T(t - \tau)$, $X'(x) = \mu X(x)$. Розв'язок другого рівняння має, як і раніше вигляд, $X(x) = ce^{\mu x}$, μ , c – довільні сталі.

Розглянемо перше рівняння

$$T'(t) = \lambda \mu T(t - \tau) \quad (2.3)$$

з початковими умовами $T(t) = \Theta_1(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Маємо диференціальне рівняння з чистим запізнюванням. Отримаємо розв'язок задачі Коші рівняння (2.4) в аналітичному вигляді. Використаємо результати роботи [6]

Означення. Назвемо функцію $E^{\lambda \mu}(t, \tau)$, яка має вигляд

$$E^{\lambda \mu}(t, \tau) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < t < -\tau, \\ 1 & , \quad -\tau \leq t < 0, \\ 1 + \lambda \mu \frac{t}{1!} + (\lambda \mu)^2 \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!} & , \quad (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases} \quad (2.4)$$

полінома ступеня k на проміжках $(k-1)\tau \leq t < k\tau$, «склеєного» у вузлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$, запізнілим експоненціалом рівняння (2.3).

Лема. При довільній величині $\lambda \mu$ справедливо наступне правило диференціювання

$$\frac{d}{dt} E^{\lambda \mu}(t, \tau) = (\lambda \mu) E^{\lambda \mu}(t - \tau, \tau),$$

тобто запізнілий експоненціал є розв'язком рівняння (2.3), що задовольняє одиничній початковій умові $T(t) = 1$, $-\tau \leq t \leq 0$.

За допомогою таким чином введеній функції розв'язок задачі Коші для рівняння (2.3) можна зобразити в компактному вигляді [6].

Теорема. Розв'язок $T(t)$ рівняння (2.3), що задовольняє початковим умовам $T(t) = \Theta_1(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, де $\Theta_1(t)$ довільна неперервно диференційована функція, має вигляд

$$T(t) = E^{\lambda \mu}(t, \tau) \Theta_1(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - \tau - s, \tau) \Theta_1'(s) ds. \quad (2.5)$$

Зауваження. У початкових умовах теореми потрібна неперервна диференційованість функції $\Theta_1(t)$. Якщо брати інтеграл по частинах, то отримаємо

$$T(t) = E^{\lambda \mu}(t - \tau, \tau) \Theta_1(0) + (\lambda \mu) \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - 2\tau - s, \tau) \Theta_1(s) ds$$

інтегральне зображення розв'язку в припущенні лише неперервності функції $\Theta_1(t)$.

Таким чином розв'язок першого рівняння (2.2), який задовольняє початковим умовам, $\xi(x, t) = e^{\lambda x} \Theta_1(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, має вигляд

$$\xi(x, t) = e^{\lambda x} \left[E^{\lambda \mu}(t, \tau) \Theta_1(-\tau) + \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - \tau - s, \tau) \Theta_1'(s) ds \right]$$

а розв'язок другого рівняння $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = e^{\lambda x} \left[E^{\lambda \mu}(t, \tau) \Theta_2(-\tau) + \int_{-\tau}^0 E^{\lambda \mu}(t - \tau - s, \tau) \Theta_2'(s) ds \right]$$

де μ – задана стала. Розв'язки $u(x, t)$, $v(x, t)$ вихідної системи визначаються шляхом множення на матрицю S .

Список використаних джерел

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., Наука, 1967. – 766 с.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., Гос. изд. Тех.-теорет. литературы, 1953. – 360 с.
3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1971. – 416 с.
4. Верейкина М.Б. Нелинейные краевые задачи: теория и компьютерная графика // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.5, 2001. – С.17-31.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1971. – 296 с.
6. Хусаинов Д.Я., Шуклин Г.В. Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием // Прикладная механика, Т.41, в.2, 2005. – С.118-130.

Надійшла до редколегії 18.12.07

УДК 517.929

Д. Я. Хусаїнов¹, доктор, фіз.-мат. наук,
професор,
Й. Діблік^{1,2}, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Я. Лукачова², аспірант.

Керування системою рівнянь коливань

У розглянутій статті досліджено керування системою диференціальних рівнянь другого порядку, що описує коливальні процеси. За рахунок введення функцій матричного косинуса та матричного синуса вдається отримати конструктивний вигляд функції керування.

Ключові слова: диференціальні рівняння, керування, матричний косинус, матричний синус.

D.Ya. Khusainov¹ Doctor of Science, Professor,
J.Diblik^{1,2}, Doctor of Science, Professor,
J. Lukachova², PhD Student.

Control of Systems of Oscillations Equations

In the article, the control of systems of oscillation equations is analyzed. The matrix functions called the matrix cosine and the matrix sine are defined. The control criterion is proved and the control function is constructed using the matrix cosine and matrix sine.

Key Words: differential equation, control, matrix cosine, matrix sine.

Представлено проф., д.ф.-м.н. Беловим Ю.А.

E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua josef.diblik@fpv.utc.sk jana.lukacova@fpv.uniza.sk

¹ This research was supported by Slovak-Ukrainian project No SK-UA-0028-07.

² This research was supported by Grant No.1/3238/06 of the Grant Agency of Slovak Republic (VEGA).

Вступ

У розглянутій статті дослідження питання керування системою диференціальних рівнянь другого порядку, що описує коливальні процеси. За рахунок введення функцій матричного косинуса і матричного синуса вдається отримати конструктивний вигляд функції керування.

1. Керування скалярним рівнянням другого порядку без запізнення

Розглянемо керовану систему, що описується скалярним диференціальним рівнянням другого порядку вигляду

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = bu_2(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \quad (1.1)$$

Треба знайти керування $u_0(t)$, при якому замкнута система

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = b_2 u_0(t) \quad (1.2)$$

має розв'язок, що задовольняє крайовим умовам

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x'(t_1) = x'_1,$$

де x_0, x'_0, x_1, x'_1 - довільні наперед задані величини, t_1 довільний фіксований момент

часу. Якщо ввести векторний-матричний позначення

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$
$$x^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

то диференціальне рівняння другого порядку (1.1) можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x_1^0. \quad (1.4)$$

Критерій керованості системи (1.4) має вигляд

$$\det S_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{або} \quad b_2 \neq 0. \quad (1.4)$$

Нормована фундаментальна матриця для відповідної однорідної системи має вигляд

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Побудувати керування, при якому замкнута система матиме розв'язок, що задовольняє наперед заданим краєвим умовам (1.3). можна неоднозначно. Один з варіантів побудови керування полягає в тому, що воно шукається у вигляді [1]

$$u_0(t) = b^T (e^{A(t_1-t)})^T \xi \quad (1.6)$$

де $\xi^T = (\xi_1, \xi_2)$ - вектор невідомих сталих. Як випливає з формули Коші, довільний розв'язок неоднорідної системи (1.4) можна представити у вигляді

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} b u(s) ds.$$

Підставивши кінцеву умову, отримаємо

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b u(s) ds.$$

Якщо потрібне керування $u_0(t)$ шукати у вигляді (1.6), то в кінцевий момент часу отримуємо

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T \xi ds.$$

І знаходження потрібного керування зводиться до розв'язку системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right] \xi = x(t_1) - e^{At_1} x(0).$$

Доведено, що при виконанні умови керованості (1.4), матриця

$$\Psi(t_1) = \left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right]$$

невироджена. Таким чином шукане керування має вигляд

$$u_0(t) = b^T (e^{A(t_1-t)})^T \left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right]^{-1} \times \\ \times \{x(t_1) - e^{At_1} x(0)\}.$$

Оскільки в даному випадку фундаментальна матриця розв'язків e^{At} має вигляд (1.5), а вектор b визначається з (1.3), то функція керування має вигляд

$$u_0(t) = (0, b_2) \begin{bmatrix} \cos \omega(t_1-t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(t_1-t) \\ -\omega \sin \omega(t_1-t) & \cos \omega(t_1-t) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{b_2}{\omega} \xi_1 \sin \omega(t_1-t) + b_2 \xi_2 \cos \omega(t_1-t),$$

де

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ = \left\{ \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} \cos \omega(t_1-s) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(t_1-s) \\ -\omega \sin \omega(t_1-s) & \cos \omega(t_1-s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} (0 \quad b_2) \times \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \cos \omega(t_1-s) & -\omega \sin \omega(t_1-s) \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega(t_1-s) & \cos \omega(t_1-s) \end{bmatrix} ds \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \frac{1}{\omega} \sin \omega t_1 \\ -\omega \sin \omega t_1 & \cos \omega t_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Або, обчисливши інтеграли, отримаємо

$$u_0(t) = \frac{b_2}{\omega} \xi_1 \sin \omega(t_1-t) + b_2 \xi_2 \cos \omega(t_1-t),$$

де

$$\xi_1 = \frac{b_2^2}{2\Delta} \left\{ \left[t_1 + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t_1 \right] (x_1 - x_0 \cos \omega t_1 - \right. \\ \left. - \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t_1) - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega t_1 (x'_1 + x_0 \omega \sin \omega t_1 - x'_0 \cos \omega t_1) \right\}, \\ \xi_2 = \frac{b_2^2}{2\omega^2 \Delta} \left\{ -\sin^2 \omega t_1 (x_1 - x_0 \cos \omega t_1 - \right. \\ \left. - \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t_1) + \left[t_1 - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t_1 \right] (x'_1 + x_0 \omega \sin \omega t_1 - \right. \\ \left. x'_0 \cos \omega t_1) \right\}, \\ \Delta = \frac{b_2^4}{4\omega^2} \left[t_1^2 - \frac{1}{4\omega^2} \sin^2 2\omega t_1 \right] - \frac{b_2^4}{4\omega^4} \sin^4 \omega t_1.$$

2. Системи диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f(t), \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Отримаємо розв'язок задачі Коші, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.

Як відомо, матричні функції $\sin \Omega t$, $\cos \Omega t$, що мають вигляд матричних рядів

$$\sin \Omega t = \Omega \frac{t}{1!} - \Omega^3 \frac{t^3}{3!} + \Omega^5 \frac{t^5}{5!} - \dots \\ \dots + (-1)^k \Omega^{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \cos \Omega t &= I - \Omega^2 \frac{t^2}{2!} + \Omega^4 \frac{t^4}{4!} - \Omega^6 \frac{t^6}{6!} + \dots \\ &\dots + (-1)^k \Omega^{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

називаються матричним синусом і матричним косинусом [2].

Для таким чином введених матричних функцій справедливі наступні результати.

Лема 2.1. Для матричного косинуса і синуса справедливо наступне правило диференціювання

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \Omega t &= -\Omega \sin \Omega t \\ \frac{d}{dt} \sin \Omega t &= \Omega \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Лема 2.2. Для матричного косинуса і синуса справедливо наступне правило інтегрування

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos \Omega s ds &= \Omega^{-1} \sin \Omega t, \\ \int_0^t \sin \Omega s ds &= I - \Omega^{-1} \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тут I – одинична матриця. Справедливість приведених тверджень підтверджується безпосередньою перевіркою.

Відповідно, лінійне однорідне матричне диференціальне рівняння

$$\ddot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = 0$$

має два лінійно незалежних розв'язки – матричний косинус $X_1(t) = \cos \Omega t$ і матричний синус $X_2(t) = \sin \Omega t$. І розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = 0, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0$$

можна записати у вигляді

$$x(t) = X_1(t)c_1 + X_2(t)c_2,$$

де c_1, c_2 – вектори довільних сталих, $X_1(t) = \cos \Omega t$, $X_2(t) = \sin \Omega t$. Якщо підставити початкові дані (розв'язувати задачу Коші), то отримуємо залежність

$$x(t) = (\cos \Omega t)x_0 + \Omega^{-1}(\sin \Omega t)x'_0. \quad (2.6)$$

Означення 2.1. Назвемо пару матриць $\{\cos \Omega t, \Omega^{-1} \sin \Omega t\}$ фундаментальною системою розв'язків для рівняння (2.1).

Лема 2.3. Частинний розв'язок неоднорідної системи

$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f(t)$, $x(t) \in R^n$, $f(t) \in R^n$, $t \geq 0$, що задовольняє нульовим початковим умовам $x_{\text{част}}(0) = 0$, має вигляд

$$x(t) = \Omega^{-1} \int_0^t \sin \Omega(t-s) f(s) ds. \quad (2.7)$$

Доведення. Розв'язок шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді

$$x_{\text{част}}(t) = \int_0^t \sin \Omega(t-s) c(s) ds,$$

де $c(s)$ невідома векторна функція. Для її визначення двічі продиференціюємо функцію $x_{\text{част}}(t)$. Маємо

$$\begin{aligned} x_{\text{част}}(t) &= \sin \Omega(t-s) c(s) \Big|_{s=t} + \Omega \int_0^t \cos \Omega(t-s) c(s) ds = \\ &= \Omega \int_0^t \cos \Omega(t-s) c(s) ds, \\ x_{\text{част}}''(t) &= \Omega \cos \Omega(t-s) c(s) \Big|_{s=t} - \\ &\quad - \Omega^2 \int_0^t \sin \Omega(t-s) c(s) ds = \\ &= \Omega c(t) - \Omega^2 \int_0^t \sin \Omega(t-s) c(s) ds. \end{aligned}$$

Підставивши отримані вирази в вихідну неоднорідну систему, отримуємо

$$\Omega c(t) = f(t).$$

Звідси

$$c(t) = \Omega^{-1} f(t)$$

А, оскільки матриці Ω^{-1} та $\sin \Omega t$ комутують, то розв'язок задачі Коші для неоднорідної системи (2.1) з нульовими початковими умовами має вигляд (2.7).

Лема 2.4. Розв'язок неоднорідної системи (2.1), що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, має вигляд

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos \Omega t)x_0 + \Omega^{-1}(\sin \Omega t)x'_0 + \\ &\quad + \Omega^{-1} \int_0^t \sin \Omega(t-s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доведення. Висновок твердження випливає з тверджень двох попередніх лем.

3. Керування системами диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо керовану систему другого порядку вигляду

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = b_2 u(t), \quad x'(t_0) = x'_0. \quad (3.1)$$

Як і для скалярної керованої системи потрібно знайти функцію керування $u_0(t)$, при якій замкнута система

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = b_2 u_0(t) \quad (3.2)$$

має розв'язок, що задовольняє крайовим умовам

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x'(t_1) = x'_1,$$

де, x_0, x'_0, x_1, x'_1 - довільні, наперед задані вектори, t_1 - довільний фіксований момент часу.

Введемо векторно-матричні позначення

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad x(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

і перепишемо систему рівнянь другого порядку (3.1) у вигляді системи першого порядку

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta & I \\ -\Omega^2 & \Theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t). \quad (3.4)$$

Критерій керованості системи (3.1) має наступний вигляд.

Лема 3.1. Система (3.1) керована тоді і тільки тоді, коли виконується ранговий критерій

$$\text{rank} S_n^* = n,$$

$$S_n^* = \{b, \Omega^2 b, (\Omega^2)^2 b, \dots, (\Omega^2)^{n-1} b\} = n. \quad (3.5)$$

Доведення. Очевидно, що система (3.1) керована тоді і тільки тоді, коли керована система (3.4). Критерієм керованості системи (3.4) є виконання умови

$$\text{rank} S_{2n} = 2n, \quad S_{2n} = \{b, Ab, A^2 b, \dots, A^{2n-1} b\},$$

$$A = \begin{bmatrix} \Theta & I \\ -\Omega^2 & \Theta \end{bmatrix}.$$

Обчислимо матрицю S_{2n} . Отримуємо

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{bmatrix} \Theta & I \\ -\Omega^2 & \Theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega^2 b_2 \end{pmatrix}, \dots$$

$$A^{2n-1} b = \begin{bmatrix} \Theta & I \\ -\Omega^2 & \Theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{n-1} (\Omega^2)^n b_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$S_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} & 0 & s_{16} & \dots & s_{1,2n} \\ s_{21} & 0 & s_{23} & 0 & s_{25} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$s_{21} = b_2,$$

$$s_{12} = b_2,$$

$$s_{23} = -\Omega^2 b_2,$$

$$s_{14} = -\Omega^2 b_2,$$

$$s_{25} = \Omega^4 b_2,$$

$$s_{16} = \Omega^4 b_2, \dots,$$

$$s_{1,2n} = (-1)^{n-1} \Omega^{2(n-1)} b_2.$$

Тому

$$\text{rank} S_{2n} =$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} & 0 & s_{16} & \dots & s_{1,2n} \\ s_{21} & 0 & s_{23} & 0 & s_{25} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & s_{12} & s_{14} & \dots & s_{1,2n} \\ s_{21} & s_{23} & \dots & s_{2,2(n-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \times \text{rank} [s_{12}, s_{14}, \dots, s_{1,2n}] = 2 \text{rank} S_n^*.$$

Система (3.4) керована тоді і тільки тоді, коли $\text{rank} S_{2n} = 2n$. Тому система (3.1) керована тоді і тільки тоді, коли $\text{rank} S_n^* = n$.

Побудуємо керування, при якому замкнута система матиме розв'язок, що задовольняє наперед заданим крайовим умовам (3.3). Можна перевірити, що нормована фундаментальна матриця і її транспонована для однорідної системи (3.3) мають вигляд

$$e^{A(t_1-s)} = \begin{bmatrix} \cos \Omega(t_1-s) & \Omega^{-1} \sin \Omega(t_1-s) \\ -\Omega \sin \Omega(t_1-s) & \cos \Omega(t_1-s) \end{bmatrix},$$

$$(e^{A(t_1-s)})^T =$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos \Omega(t_1-s))^T & -(\Omega \sin \Omega(t_1-s))^T \\ (\Omega^{-1} \sin \Omega(t_1-s))^T & (\cos \Omega(t_1-s))^T \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Побудуємо функцію керування у вигляді

$$u_0(t) = b^T (e^{A(t_1-t)})^T \xi \quad (3.7)$$

де $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T)$ - вектор невідомих сталих.

Підставивши значення фазових координат при $t = t_1$ у формулу Коші, отримаємо

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b u(s) ds.$$

Таким чином, якщо керування $u_0(t)$ шукати у вигляді (3.7), то при $t = t_1$ отримуємо

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T \xi ds.$$

І знаходження необхідного керування зводиться до розв'язку системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь $2n$ -го порядку.

$$\left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right] \xi = x(t_1) - e^{At_1} x(0).$$

У роботі [1] доведено, якщо система керована, то матриця

$$\Psi(t_1) = \left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right] \xi$$

невироджена. Тому при будь-якому векторі $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T)$ розмірності $2n$, де

$$\xi = x(t_1) - e^{At_1} x(0)$$

система алгебраїчних рівнянь

$$\Psi(t_1) \xi = \xi$$

має єдиний розв'язок

$$\xi = \Psi^{-1}(t_1) \xi.$$

І шукане керування має вигляд

$$u_0(t) = b^T (e^{A(t_1-t)})^T \left[\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} b b^T (e^{A(t_1-s)})^T ds \right]^{-1} \times \\ \times [x(t_1) - e^{At_1} x(0)].$$

Розглянемо систему (3.4). Як було відмічено, фундаментальна матриця має вигляд

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \Omega^{-1} \sin \Omega t \\ -\Omega \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}.$$

Тому функція керування має вигляд

$$u_0(t) = (0, b_2^T) \begin{bmatrix} \cos \Omega(t_1 - t) & \Omega^{-1} \sin \Omega(t_1 - t) \\ -\Omega \sin \Omega(t_1 - t) & \cos \Omega(t_1 - t) \end{bmatrix}^T \times \\ \times (\xi_1^T, \xi_2^T)^T =$$

$$= b_2^T (\Omega^{-1} \sin \Omega(t_1 - t))^T \xi_1 + b_2^T (\cos \Omega(t_1 - t))^T \xi_2$$

де

$$\begin{pmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{pmatrix}^T = \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} \cos \Omega(t_1 - s) & \Omega^{-1} \sin \Omega(t_1 - s) \\ -\Omega \sin \Omega(t_1 - s) & \cos \Omega(t_1 - s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} (0 \ b_2) \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos \Omega(t_1 - s) & \Omega^{-1} \sin \Omega(t_1 - s) \\ -\Omega \sin \Omega(t_1 - s) & \cos \Omega(t_1 - s) \end{bmatrix}^T ds \Bigg\}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Omega t_1 & \Omega^{-1} \sin \Omega t_1 \\ -\Omega \sin \Omega t_1 & \cos \Omega t_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \Bigg\}. \quad (3.8)$$

Таким чином, як і для скалярного випадку, остаточний вид функції керування має вигляд

$$u_0(t) = b_2^T (\Omega^{-1} \sin \Omega(t_1 - t))^T \xi_1 + \\ + b_2^T (\cos \Omega(t_1 - t))^T \xi_2,$$

де сталі вектори ξ_1, ξ_2 визначені в (3.8).

Приклад. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x}(t) + x(t) + 3y(t) = f_1(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = f_2(t).$$

Введемо наступні векторно-матричні позначення

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Тоді систему можна записати в уніфікованому вигляді

$$\ddot{z}(t) + \Omega^2 z(t) = f(t).$$

Знайдемо матричні косинус і синус системи таким чином. Перепишемо початкову систему диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) + x_1(t) + 3y_1(t) = f_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) + 4y_1(t) = f_2(t),$$

або у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda I & I \\ -\Omega^2 & -\lambda I \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin t & \cos t & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 0 & 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Відкинувши перші похідні, одержимо

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

Перепишемо одержаний вираз у вигляді лінійної комбінації систем

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

тобто у вигляді

$$z(t) = X_1(t)C_1 + X_2(t)C_2,$$

де

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо матриці $X_1(t)$ і $X_2(t)$ до виду матричного косинуса і матричного синуса. Очевидно, якщо матриця

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) \\ X'_1(t) & X'_2(t) \end{bmatrix}$$

є розв'язком лінійного однорідного диференціального матричного рівняння з сталими коефіцієнтами, то при множенні її на сталу матрицю

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, L_{11} = \begin{bmatrix} l_{11}^1 & l_{12}^1 \\ l_{21}^1 & l_{22}^1 \end{bmatrix},$$

$$L_{12} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 \end{bmatrix}, L_{21} = \begin{bmatrix} l_{11}^3 & l_{12}^3 \\ l_{21}^3 & l_{22}^3 \end{bmatrix},$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} l_{11}^4 & l_{12}^4 \\ l_{21}^4 & l_{22}^4 \end{bmatrix}$$

вона знов залишиться розв'язком цього ж рівняння. Сталі матриці L_{11} , L_{12} , L_{21} , L_{22} знаходитимемо з початкової умови

$$X(t)L_{i=0} = \begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) \\ X'_1(t) & X'_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \Omega^{-1} \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix}.$$

І матричні косинус і синус початкової системи шукатимемо у вигляді

$$\cos \Omega t = X_1(t)L_{11}^T + X_2(t)L_{21}^T,$$

$$\sin \Omega t = \Omega \{X_1(t)L_{12}^T + X_2(t)L_{22}^T\},$$

де сталі матриці L_{11} , L_{12} , L_{21} , L_{22} задовольняють системам рівнянь

$$\begin{cases} X_1(0)L_{11}^T + X_2(0)L_{21}^T = I \\ X'_1(0)L_{11}^T + X'_2(0)L_{21}^T = \Theta, \\ X_1(0)L_{12}^T + X_2(0)L_{22}^T = \Theta \\ X'_1(0)L_{12}^T + X'_2(0)L_{22}^T = I. \end{cases}$$

Підставивши замість $X_1(0)$, $X_2(0)$, $X'_1(0)$, $X'_2(0)$ їх значення, одержимо

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

І, остаточно

$$\cos \Omega t = \begin{bmatrix} \cos t & -\cos t + \cos 2t \\ 0 & \cos 2t \end{bmatrix},$$

$$\sin \Omega t = \begin{bmatrix} \sin t & -\sin t + \sin 2t \\ 0 & 0,5 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Таким чином розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\cos t + \cos 2t \\ 0 & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & -\sin t + \sin 2t \\ 0 & 0,5 \sin 2t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \sin(t-s) & -\sin(t-s) + \frac{3}{4} \sin 2(t-s) \\ 0 & \frac{1}{4} \sin 2(t-s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds$$

А розв'язок задачі керування системою згідно залежностей (3.7), (3.8), де

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \left\{ \int_0^t \begin{bmatrix} \omega_{11}(t-s) & \omega_{12}(t-s) \\ \omega_{21}(t-s) & \omega_{22}(t-s) \end{bmatrix} ds \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Omega t_1 & \Omega^{-1} \sin \Omega t_1 \\ -\Omega \sin \Omega t_1 & \cos \Omega t_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\omega_{11}(t_1-s) = -\Omega^{-1} \sin \Omega(t_1-s) b_2 b_2^T [\Omega \sin \Omega(t_1-s)]^T$$

$$\omega_{12}(t_1-s) = \Omega^{-1} \sin \Omega(t_1-s) b_2 b_2^T [\cos \Omega(t_1-s)]^T,$$

$$\omega_{21}(t_1-s) = -\cos \Omega(t_1-s) b_2 b_2^T [\Omega \sin \Omega(t_1-s)]^T,$$

$$\omega_{22}(t_1-s) = \cos \Omega(t_1-s) b_2 b_2^T [\cos \Omega(t_1-s)]^T.$$

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основи теорії управління. – К., Вища школа, 1975.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., Наука, 1967.

Надійшла до редколегії 12.12.07

УДК 519.21

Чечельницький О.А. канд. ф.-м. н., доц.,
Кучеренко О.В.

Властивості мережевої моделі паралельної структури в стаціонарному режимі

Досліджено стаціонарний режим мережевої моделі паралельної структури. Отримана асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування.

Ключові слова: мережева модель обслуговування, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.,
Є.О.Лебедєв.

Chechelnitsky O.A.,
Kucherenko O.V.

The properties of a network model with the parallel structure in the stationary regime.

The stationary regime of a network model with the parallel structure is investigated here. A limit normal distribution was obtained for the service process in the stationary regime.

Key Words: network's model, bivariate input flow, stationary distribution.

*E-mail: alex che@voliacable.com

1. Стаціонарні характеристики моделі.

Сучасні комп'ютерні мережі та мережі стільникового зв'язку проектується з максимальним застосуванням принципів паралельного функціонування своїх складових частин. Очевидно, що паралельність обробки масивів інформації, запитів, паралельність обчислень та інших операцій, які виконуються в сучасних мережевих системах, дозволяють досягати найбільшої швидкості роботи та економії часу. Ось чому, велике значення має аналіз властивостей математичних моделей мережевих структур з паралельно функціонуючими елементами. У даній статті ми розглянемо модель паралельної структури, елементами якої є системи масового обслуговування типу $M/M/\infty$ з двовимірним вхідним потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай $\mu_i > 0, i = 1, 2$ параметри показникових розподілів часу обслуговування відповідно в першій та другій системі. Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі $M/M/\infty$ в момент часу t , а через $X_2(t)$ - число вимог у другій системі в момент часу t . Кожна вимога обслуговується тільки на одній системі обслуговування.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в

рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Очевидно, що найбільш повним успіхом на цьому шляху є випадки, коли вдається знайти стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ в моделі $(M/M/\infty)^2$ з паралельною структурою та двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2) &= Mz_1^{X_1} z_2^{X_2} = \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + b \frac{\mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - z_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} + b \frac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - z_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{\mu_1 + \mu_2} (1 - z_1 z_2) \right\}. \end{aligned}$$

Доведення. В силу зроблених для нашої моделі припущень процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ є двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом та зліченною множиною станів. Ергодичний розподіл для цього процесу співпадає з єдиним розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь для стаціонарних ймовірностей. Але знаходження цього розв'язку

є задачею досить непростою з причини зліченного числа алгебраїчних рівнянь та двовимірності нашого процесу. В даній статті ми запропонуємо інший підхід, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t), X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на входних пуассонівських потоках, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. Введемо до розгляду три сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами. Двовимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0)$ з ймовірністю $e^{-\mu_1 t}$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $1 - e^{-\mu_1 t}$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(0,1)$ з ймовірністю $e^{-\mu_2 t}$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $1 - e^{-\mu_2 t}$. В свою чергу випадкова величина $\chi_k^3(t)$ приймає значення $(1,1)$ з ймовірністю $e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}$, значення $(1,0)$ з ймовірністю $e^{-\mu_1 t}(1 - e^{-\mu_2 t})$, значення $(0,1)$ з ймовірністю $e^{-\mu_2 t}(1 - e^{-\mu_1 t})$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $(1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t})$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t), X_2(t)) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi_k^1(t) + \sum_{k=1}^{m_2} \chi_k^2(t) + \\ + \sum_{k=1}^{y_1(t)} \chi_k^1(t - t_k^1) + \sum_{k=1}^{y_2(t)} \chi_k^2(t - t_k^2) + \sum_{k=1}^{y_3(t)} \chi_k^3(t - t_k^3),$$

де $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ є незалежними пуассонівськими потоками з параметрами λ_1, λ_2, b відповідно і такими що, $\nu_1(t) = y_1(t) + y_3(t)$, $\nu_2(t) = y_2(t) + y_3(t)$, $t_k^i, i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t), i = 1, 2, 3$. У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо $m_i = 0, i = 1, 2$. Введемо до розгляду двовимірну генератрису величини $(X_1(t), X_2(t))$: $\varphi(z_1, z_2, t) = M z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}$. Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M \left\{ M \left\{ z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)} / t_1^1, \dots, t_{y_1(t)}^1, i = 1, 2, 3 \right\} \right\} =$$

$$= M \left\{ \prod_{k=1}^{y_1(t)} \left((1 - e^{-\mu_1 t}) + z_1 e^{-\mu_1(t-t_k^1)} \right) \times \right. \\ \times \prod_{k=1}^{y_2(t)} \left((1 - e^{-\mu_2(t-t_k^2)}) + z_2 e^{-\mu_2(t-t_k^2)} \right) \times \\ \times \prod_{k=1}^{y_3(t)} \left((1 - e^{-\mu_1(t-t_k^1)}) (1 - e^{-\mu_2(t-t_k^2)}) + z_1 e^{-\mu_1(t-t_k^1)} \times \right. \\ \times (1 - e^{-\mu_2(t-t_k^2)}) + z_2 e^{-\mu_2(t-t_k^2)} (1 - e^{-\mu_1(t-t_k^1)}) + \\ \left. \left. + z_1 z_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2)(t-t_k^3)} \right) \right\}.$$

Для знаходження генератриси з останнього виразу знову скористаємося умовним математичним сподіванням стосовно величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$. Тоді можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M \left\{ M \left\{ \prod_{k=1}^{y_1(t)} \left((1 - e^{-\mu_1 t}) + z_1 e^{-\mu_1(t-t_k^1)} \right) \times \right. \right. \\ \times \prod_{k=1}^{y_2(t)} \left((1 - e^{-\mu_2 t}) + z_2 e^{-\mu_2(t-t_k^2)} \right) \times \\ \times \prod_{k=1}^{y_3(t)} \left((1 - e^{-\mu_1(t-t_k^1)}) (1 - e^{-\mu_2(t-t_k^2)}) + z_1 e^{-\mu_1(t-t_k^1)} \times \right. \\ \times (1 - e^{-\mu_2(t-t_k^2)}) + z_2 e^{-\mu_2(t-t_k^2)} (1 - e^{-\mu_1(t-t_k^1)}) + \\ \left. \left. + z_1 z_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2)(t-t_k^3)} \right) / y_i(t), i = 1, 2, 3 \right\} \right\}.$$

При фіксації числа стрибків пуассонівського процесу на довільному інтервалі часу $[0, t]$, моменти стрибків ведуть себе як незалежні випадкові величини, які мають рівномірний на $[0, t]$ розподіл. Скористаємося цим для підрахунку умовного математичного сподівання в останньому виразі. Тоді ми отримаємо:

$$\varphi(z_1, z_2, t) = M \{ A_1(z_1, t) \}^{y_1(t)} M \{ A_2(z_2, t) \}^{y_2(t)} \times \\ \times M \{ A_3(z_1, z_2, t) \}^{y_3(t)}, \text{ де вирази } A_1(z_1, t), \\ A_2(z_2, t), A_3(z_1, z_2, t) \text{ мають наступний вигляд:}$$

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - e^{-\mu_1(t-u)} + z_1 e^{-\mu_1(t-u)}) du;$$

$$A_2(z_2, t) = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - e^{-\mu_2(t-u)} + z_2 e^{-\mu_2(t-u)}) du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \\ = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - (e^{-\mu_1(t-u)} - e^{-(\mu_1 + \mu_2)(t-u)}) (1 - z_1) - \\ - (e^{-\mu_2(t-u)} - e^{-(\mu_1 + \mu_2)(t-u)}) (1 - z_2) - \\ - e^{-(\mu_1 + \mu_2)(t-u)} (1 - z_1 z_2)) du.$$

В останніх виразах для $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0, 1]$ розподілу.

Остаточно, генератрис $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ будуть мати наступний вигляд:

$$A_1(z_1, t) = 1 - \frac{1}{\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) (1 - z_1);$$

$$A_2(z_2, t) = 1 - \frac{1}{\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) (1 - z_2);$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = 1 -$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) - \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2) t} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2) t}) \right) (1 - z_1) -$$

$$\left(\frac{1}{\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) - \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2) t} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2) t}) \right) (1 - z_2) -$$

$$\left(\frac{1}{(\mu_1 + \mu_2) t} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2) t}) \right) (1 - z_1 z_2)$$

Підставивши генератрис $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ в генератрис величин $y_1(t)$, $y_2(t)$ та $y_3(t)$, отримаємо явний вираз генератрис $\varphi(z_1, z_2, t)$:

$$\varphi(z_1, z_2, t) =$$

$$= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + b \frac{\mu_2}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - e^{-\mu_1 t}) (1 - z_1) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} + b \frac{\mu_1}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - e^{-\mu_2 t}) (1 - z_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{\mu_1 + \mu_2} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2) t}) (1 - z_1 z_2) \right\}.$$

Перейшовши в останньому виразі до границі при $t \rightarrow \infty$, ми отримаємо вигляд генератрис стаціонарного розподілу двовимірного процесу числа вимог (X_1, X_2) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(z_1, z_2, t) = \varphi(z_1, z_2) =$$

$$= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + b \frac{\mu_2}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - z_1) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} + b \frac{\mu_1}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right) (1 - z_2) - \right.$$

$\left. - \frac{b}{\mu_1 + \mu_2} (1 - z_1 z_2) \right\}.$

Теорема доведена.

З результату, який ми одержали, можна зробити ряд цікавих висновків та наслідків.

Перш за все слід відзначити, що граничний розподіл процесу обслуговування в нашій моделі є двовимірним пуассонівським розподілом з

параметрами $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + b \frac{\mu_2}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2)},$

$a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + b \frac{\mu_1}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}$ та $a_3 = \frac{b}{\mu_1 + \mu_2}.$

Крім того, якщо вхідний двовимірний потік до нашої моделі будувався на основі трьох незалежних одновимірних пуассонівських потоків $y_1(t)$, $y_2(t)$ та $y_3(t)$ з параметрами λ_1, λ_2 та b відповідно, то структура двовимірного процесу обслуговування налічує вже п'ять незалежних пуассонівських компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі одновимірний розподіл процесу обслуговування має наступну будову: $X_1 = x_1 + x_2 + x^*$, $X_2 = x_3 + x_4 + x^*$, де $x_i, i = 1, 4$ та x^* незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами:

$\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ для x_1 , $b \frac{\mu_2}{\mu_1 (\mu_1 + \mu_2)}$ для x_2 , $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ для x_3 ,

$b \frac{\mu_1}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}$ для x_4 та $\frac{b}{\mu_1 + \mu_2}$ для x^* .

Таким чином, в структурі процесу обслуговування з'являється дві додаткові незалежні компоненти x_2 та x_4 . З цього можна зробити висновок, що наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог. Компоненти x_2 та x_4 описують в побудові процесу обслуговування ті вимоги, які прийшли в парі з потоку $y_3(t)$, але залишилися в нашій моделі на обслуговуванні по одній зі своєї пари. Оскільки інша вимога з пари вже отримала обслуговування і вийшла з системи, пара розпалася, а значить і залежність між компонентами X_1 та X_2 зменшилась на величину залежності, яку вносила до процесу обслуговування дана пара вимог.

Отже, враховуючи той факт, що параметр розподілу Пуассона є одночасно значенням математичного сподівання і дисперсії випадкової величини, яка має цей розподіл, можемо зробити наступні висновки: 1) математичне сподівання та дисперсія загального числа пар вимог, які "розпалися" в результаті обслуговування, дорівнюють величині

$$b \frac{\mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} + b \frac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}$$

2) математичне сподівання та дисперсія повних пар вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, дорівнює $\frac{b}{\mu_1 + \mu_2}$.

Використовуючи явний вигляд генератрис розподілу вектора (X_1, X_2) , можна знайти також вираз коефіцієнта кореляції між компонентами процесу обслуговування вимог у нашій моделі:

$$r(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} b}{\mu_1 + \mu_2 \sqrt{(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}};$$

Коефіцієнт кореляції не тільки показує ступінь лінійної залежності між компонентами процесу обслуговування в стаціонарному режимі, але може бути також використаним для оцінки ймовірності відхилення по абсолютній величині випадкових величин X_1 та X_2 від своїх математичних сподівань:

$$P\{|X_1 - m_1| \geq \varepsilon \sqrt{m_1} \vee |X_2 - m_2| \geq \varepsilon \sqrt{m_2}\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \sqrt{1 - r(X_1, X_2)}),$$

$$\text{де } m_1 = MX_1 = \frac{\lambda_1 + b}{\mu_1}, \quad m_2 = MX_2 = \frac{\lambda_2 + b}{\mu_2},$$

$\varepsilon > 0$.

2. Асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування.

В умовах зростання інтенсивностей вхідних потоків отримаємо наступну теорему.

Теорема 2. Нехай параметри вхідного пуассонівського потоку залежать від номера серії n наступним чином:

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_1 n, \lambda_2^{(n)} = \lambda_2 n, b^{(n)} = bn, \quad n \geq 1.$$

Тоді має місце слабка збіжність вектора

$$(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) = n^{-1/2} (X_1^{(n)} - \alpha_1 n, X_2^{(n)} - \alpha_2 n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2)$$

При цьому вектор (ξ_1, ξ_2) має нормальний розподіл з нульовим вектором середніх значень і матрицею коваріацій

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 \\ a_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_i = (\lambda_i + b) / \mu_i, \quad i = 1, 2.$$

Доведення. Розглянемо характеристичну функцію вектора $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})$:

$$\begin{aligned} \psi_n(t_1, t_2) &= Me^{i(t, \xi^{(n)})} = Me^{i(t_1 \xi_1^{(n)} + t_2 \xi_2^{(n)})} = \\ &= M \exp \left\{ it_1 \frac{X_1^{(n)} - \alpha_1 n}{\sqrt{n}} + it_2 \frac{X_2^{(n)} - \alpha_2 n}{\sqrt{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Використовуючи результат теореми 1, а також зв'язок між генератрисами та характеристичними функціями, отримаємо: $\psi_n(t_1, t_2) =$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ -it_1 \alpha_1 \sqrt{n} - it_2 \alpha_2 \sqrt{n} - a_1 n \left(1 - e^{\frac{it_1}{\sqrt{n}}} \right) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -a_2 n \left(1 - e^{\frac{it_2}{\sqrt{n}}} \right) - a_3 n \left(1 - e^{\frac{i(t_1 - t_2)}{\sqrt{n}}} \right) \right\} \end{aligned}$$

З останнього виразу маємо наступне представлення:

$$\psi_n(t_1, t_2) = \exp \left\{ -\frac{a_1 t_1^2}{2} - \frac{a_2 t_2^2}{2} - \frac{a_3 (t_1 + t_2)}{2} + o(1/n) \right\}$$

З цього виразу й випливає твердження теореми. Отже, асимптотично, коли $n \rightarrow \infty$, вектор (X_1, X_2) має представлення:

$$n(\alpha_1, \alpha_2) + \sqrt{n}(\xi_1, \xi_2).$$

Список використаних джерел

1. Griffiths R.S., Milne R.K. A class of bivariate Poisson process, *жourn. Multivar. Anal.* Issue 8, №3, 1978, P.380-396.
2. Чечельницький О.А., Кучеренко О.В. Дифузійні властивості процесу обслуговування системи з двовимірним пуассонівським вхідним потоком. Тези міжн. конф.(PDMU-2007, Чернівці), С.257-260

Надійшла до редакції 25.12.07.

УДК 621.391 : 519.24

Швець* О.Ф., к.фіз.-мат.н.

Про один адаптивний підхід апроксимації дискретних сигналів

Розвиваються методи апроксимації експериментальних даних за допомогою системи базисних функцій. На основі мінімізації динамічних нев'язок виписуються системи різницевих рівнянь для параметрів, які апроксимують вимірювані дані.

Ключові слова: апроксимація, динамічна система, оптимізація.

*E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Вступ

На даний момент існує багато проблем інформатики, в основі яких лежать задачі апроксимації дискретних сигналів [1, 2]. В реальних ситуаціях ми можемо вимірювати змінні величини лише в дискретні моменти часу.

Виявляється, що для розв'язування таких задач можуть бути запропоновані ефективні алгоритми адаптивної настройки параметрів, які ґрунтуються на динамічній мінімізації деяких нев'язок. Аналіз використання запропонованих підходів при розв'язуванні деяких задач інформатики та прикладної математики показав, що такі ітераційні алгоритми, виписані в формі різницевих динамічних систем, є конструктивними в програмуванні, квазіоптимальні за швидкістю і за їх допомогою можна ефективно розв'язувати задачі в реальному часі. Це, перш за все, стосується задач розпізнавання та класифікації мовних сигналів.

Для аналізу та оцінки збіжності згаданих різницевих схем можна використовувати методи Ляпунова, практичної стійкості та спеціальні критерії, які, зокрема, ґрунтуються на принципі нерухомої точки Банаха [3-5].

В статті методи апроксимації розвиваються з використанням системи базисних функцій. Вивчаються питання апроксимації

O.F. Shvets c. pf. - m. n.

About one adaptive approach of discrete signals approximation

The approximation approaches of experimental data by basis functions system develop. On the basis of minimization dynamic it is nonviscous systems difference equations for parameters which are approximated by the measured data leave.

Key Words: approximating, dynamical system, optimization.

експериментальних даних з допомогою лінійної комбінації базисних функцій. Для відповідних параметрів виписуються системи різницевих рівнянь, які ґрунтуються на мінімізації деяких типів нев'язок.

Постановка задачі.

Припустимо, що в деякі дискретні моменти часу $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$ вимірюємо сигнал $x(t)$, тобто маємо наступні виміри

$$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_N = x(t_N). \quad (1)$$

Задача полягає в тому, щоб адаптивно апроксимувати цю залежність деяким параметрично заданим сімейством

$$x(t) \approx \psi(t, \alpha) = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (2)$$

по мірі надходження експериментальної інформації.

Тобто розглянемо задачу адаптивної корекції вектора параметрів α в момент t_{k+1} таким чином, щоб мінімізувати нев'язку

$$I(\alpha) = (\psi(t_{k+1}, \alpha) - x_{k+1})^2 \quad (3)$$

Алгоритм розв'язування задачі.

Корекцію параметрів α , з метою мінімізації нев'язки (3) на $(k+1)$ -ому кроці, будемо здійснювати згідно ітераційної процедури

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \rho_k \text{grad}_\alpha I(\alpha^{(k)}) = \alpha^{(k)} - \rho_k (\psi(t_{k+1}, \alpha^{(k)}) - x_{k+1}) \text{grad}_\alpha \psi(t_{k+1}, \alpha^{(k)}), k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

з деяким початковим наближенням

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)}. \quad (5)$$

В такому разі, ітераційна процедура (4), (5) повністю визначена, в якій ρ_k - додатні числа вибираються таким чином, щоб записаний ітераційний процес був збіжним. Якщо точки

виміру рівновіддалені, тобто
 $t_{k+1} = t_k + h, k = 1, 2, \dots$, то при розв'язуванні
практичних задач можна покласти
 $\rho_k = 2h, k = 1, 2, \dots$.

Якщо ітераційна процедура (4), (5) являється
збіжною $\alpha^{(k)} \rightarrow \bar{\alpha}, k \rightarrow \infty$, то в деяких випадках
 $\bar{\alpha}$ є шуканим при апроксимації сигналу $x(t)$ по
дискретним вимірам. Це, зокрема, може бути при
умові існування вектора $\bar{\alpha}$ такого, що
 $x(t) = \psi(t, \bar{\alpha})$ та випуклості критерію (3) за α .

Початкові дані в (5) $\alpha^{(0)}$ необхідно вибирати
з умови збіжності ітераційної процедури (4). А ці
питання будемо вивчати на основі аналізу
різницевої схеми (4) на стійкість методами

Ляпунова, практичної стійкості, а також за
допомогою принципу Банаха про нерухому
точку.

Розглянемо задачі більш конкретного
характеру. Припустимо, що маємо систему
базисних функцій [6]

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \quad (6)$$

а функцію $\psi(t, \alpha)$ будемо вибирати у вигляді
лінійної комбінації

$$\psi(t, \alpha) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t). \quad (7)$$

В цьому випадку систему різницевих рівнянь
(4) представимо таким чином

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} - \rho_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(k)} \varphi_j(t_{k+1}) - x_{k+1} \right) \varphi_i(t_{k+1}), i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Систему (8) перепишемо в векторно-
матричній формі

$$\alpha^{(k+1)} = A^{(k+1)} \alpha^{(k)} + f^{(k+1)}, k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

де $\alpha^{(k)}$ – n -вимірні вектори параметрів на k -ій
ітерації, $A^{(k+1)}$ та $f^{(k+1)}$ – матриця та вектор
розмірностей $n \times n$ та n , які обчислюються
наступним чином

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_k \varphi_1^2(t_{k+1}) & -\rho_k \varphi_1(t_{k+1}) \varphi_2(t_{k+1}) & \dots & -\rho_k \varphi_1(t_{k+1}) \varphi_n(t_{k+1}) \\ -\rho_k \varphi_1(t_{k+1}) \varphi_2(t_{k+1}) & 1 - \rho_k \varphi_2^2(t_{k+1}) & \dots & -\rho_k \varphi_2(t_{k+1}) \varphi_n(t_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_k \varphi_1(t_{k+1}) \varphi_n(t_{k+1}) & -\rho_k \varphi_2(t_{k+1}) \varphi_n(t_{k+1}) & \dots & 1 - \rho_k \varphi_n^2(t_{k+1}) \end{pmatrix},$$

$f^{(k+1)T} = \rho_k x_{k+1} (\varphi_1(t_{k+1}), \varphi_2(t_{k+1}), \dots, \varphi_n(t_{k+1}))$,
де T – знак транспонування.

Таким чином, для випадку (7) ітераційна
процедура представляє собою динамічну систему
лінійних різницевих рівнянь (10), яку можна
досліджувати на стійкість за допомогою вище
вказаних методів. Але сама система базисних
функцій (6) може, в свою чергу, залежати від
параметрів. Тоді очевидним чином ставляться
оптимізаційні задачі по оптимальному вибору
самих базисних функцій. Зрозуміло, що знайдені

групи розв'язків оптимальних параметрів можуть
розв'язувати різні задачі цифрової обробки
інформації, розпізнавання та класифікації
образів.

Іноколи може бути корисною і нелінійна
ітераційна процедура, яка передбачає
оптимальний вибір кроку в методі градієнтного
спуску при кожному k . Для запису такої
нелінійної системи різницевих рівнянь запишемо
(8) в наступному вигляді

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \rho_k G_k, k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

де $G_k^T = ((\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t_{k+1}) - x_{k+1}) \varphi_1(t_{k+1}), (\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t_{k+1}) - x_{k+1}) \varphi_2(t_{k+1}), \dots, (\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t_{k+1}) - x_{k+1}) \varphi_n(t_{k+1}))$.

Тоді параметр $\rho_k > 0$ на кожному кроці можна
вибирати з умови мінімізації відповідної нев'язки

$$\min_{\rho_k} I(\rho_k), \quad (11)$$

де $I(\rho_k) = (\alpha^{(k)} - \rho_k G_k)^T (\alpha^{(k)} - \rho_k G_k) = \rho_k^2 G_k^T G_k - 2\rho_k \alpha^{(k)T} G_k + \alpha^{(k)T} \alpha^{(k)}$.

З умови мінімуму

$$\frac{dI}{d\rho_k} = 2\rho_k G_k^T G_k - 2\alpha^{(k)T} G_k = 0 \text{ знаходимо}$$

оптимальне значення кроку градієнтного спуску

$$\rho_k = \frac{\alpha^{(k)T} G_k}{G_k^T G_k}. \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (10) отримаємо

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - G_k \frac{\alpha^{(k)T} G_k}{G_k^T G_k}, k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Ми бачимо, що в ітераційній схемі (13) всі параметри вибрані, але вона виявилась суттєво нелінійною.

Висновки

Отже, в роботі запропонована динамічна різницева схема для апроксимації вимірюваних експериментальних даних у визначені моменти часу на основі мінімізації деякої нев'язки. Для визначення параметрів апроксимації виписано системи різницевих рівнянь. Розроблені ітераційні процедури показали свою ефективність при оптимальному виборі частотно-фазових характеристик в задачах гармонічної апроксимації [6].

Список використаних джерел

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
2. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИАКАП, 1991. – 432 с.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
4. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
5. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наукова думка, 1972. – 246 с.
6. Гаращенко О.Ф. Оптимальный выбор частотно-фазовых характеристик в задачах гармонической апроксимации функций // Вісник КУ. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – №1 – С.145-149.

Надійшла до редколегії 16.11.07

УДК 681.3.062

Шишацька О.В.*

Трьохзначні логіки Кліні та трьохелементні ланцюги

Розглянуто сильну та слабку тризначні логіки Кліні. Показано виникнення сильної логіки зі звичайної булевої логіки шляхом застосування загальнозначущої конструкції розповсюдження операцій з елементів на множини елементів в термінах повного образу. Проілюстровано компактне задання операцій логіки Кліні трьохелементними ланцюгами.

Ключові слова: сильна логіка Кліні, слабка логіка Кліні, ланцюг, повний образ.

*E-mail: shyshatskaja@unicyb.kiev.au.

Статтю представив: д.ф.м.н., с.н.с. Буй Д.Б.

Робота присвячена сильній та слабкій тризначним логікам Кліні, що використовуються в теорії рекурсії [1, частина III, гл. XII, § 64, с. 296-303]. Сильна логіка використовується також в системах алгоритмічних алгебр Глушкова [2, гл. 4 § 4.1, с. 117; § 4.2, табл. 4 на с. 127], сучасних SQL-подібних мовах табличних (реляційних) баз даних (див., наприклад, [3, підрозділ 3.6, с. 169-170]) та сучасних мовах специфікацій UML/OCL при роботі з булевим типом, поповненим третім спеціальним значенням (див., наприклад, [4, 5]). Зауважимо, що слабка логіка Кліні¹ виникає шляхом природного розширення в розумінні [6] стандартних булевих операцій, цей підхід повністю відповідає принципам роботи зі спеціальним значенням (UNDEFINED) стандарту об'єктних баз даних ODMG, зокрема, мові запитів OQL [7, 8].

Зробимо декілька загальних зауважень. Огляди розвитку логік представлені в [9, 10]. Адекватність використання багатозначних логік є дискусійною, про що свідчать форуми [11-13], присвячені даній проблематиці в галузі баз даних. Використання багатозначних логік, зокрема, невизначених значень та тризначних логік в базах даних має своїх прихильників [14-16] та противників [17-18].

Побудова сильної логіки Кліні на основі звичайної булевої логіки

Застосуємо загальнозначущу конструкцію розповсюдження операцій з елементів на

¹ Тут і далі під сильною та слабкою логіками Кліні будемо розуміти сильну та слабку тризначні логіки Кліні.

Shyshats'ka O.V.*

The three-valued Kleene logics and the three-element chains

Strong and weak three-valued Kleene logics are considered. The origin of strong logic from ordinary Boolean logic by application of generally valid construction of extension operations from elements on the sets of elements in terms of full image is shown. The compact representation of logic Kleene operations by the three-element chains is illustrated.

Keywords: strong Kleene logic, weak Kleene logic, chain, full image.

множини елементів в термінах повного образу, саме така конструкція застосовувалася в [3, підрозділ 1.3, с. 23-24] при дослідженні операцій табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодда; загальним властивостям повного образу присвячена робота [19].

Повний образ дозволяє природно поширювати унарні (бінарні) операції на універсумі на булеан універсуму. Через $[f]$ позначимо унарну тотальну операцію на булеані $P(D)$ універсуму D , яка індукується частковою операцією f на універсумі

і задається рівністю $[f](X) \stackrel{\text{def}}{=} f[X]$; тут і далі

$f[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \wedge y \approx f(x))\}$ – повний образ множини X відносно операції f , де, з огляду на частковість функції, $\approx$ – узагальнена рівність.

Аналогічно, нехай F – бінарна часткова операція на D ; вона також породжує бінарну тотальну операцію $[F]$ на булеані універсуму D , яка задається рівністю $[F](X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} F[X \times Y]$.

Застосуємо вказану схему розширення до сигнатурних операцій алгебри стандартної логіки $\langle \{T, F\}; \wedge, \vee, \neg \rangle$, де $\{T, F\}$ – логічні значення істини і хибності відповідно. Результат розширення операції кон'юнкції $\wedge$ і заперечення $\neg$ на булеан $P(\{T, F\})$ приведені в таблицях 1, 2 (розширення диз'юнкції будується аналогічно). В таблиці 1 першому аргументу відповідають стовпці, другому аргументу – рядки.

Таблиця 1. Операція $[\wedge]$ на булеані $P(\{T, F\})$

	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{T\}$	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\{F\}$	$\emptyset$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T, F\}$	$\emptyset$	$\{T, F\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$

Таблиця 2. Операція $[-]$ на булеані $P(\{T, F\})$

аргумент	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
значення	$\emptyset$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T, F\}$

Відзначимо, що розширення бінарних операцій комутативні; тому таблиця 1 "симетрична" (відносно головної діагоналі), і зіставлення аргументам стовпців або рядків насправді неістотно.

Зауважимо, що властивості комутативності та асоціативності розширень кон'юнкції і диз'юнкції успадковуються; цей факт випливає із загальних результатів ([3, підрозділ 1.3, твердження 1.3.1, п. 8, с. 24; 19, твердження 5]).

Оскільки декартів добуток та повний образ зберігають порожню множину, то і операції $[\wedge]$, $[\vee]$, $[-]$ зберігають порожню множину. Саме тому в таблиці 1, наприклад, присутні константні рядок та стовпець, заповнені $\emptyset$.

Розглянемо відображення $\psi: \{T, F, \omega\} \rightarrow P(\{T, F\})$, де ω – третє логічне значення логік Кліні (змістовно інтерпретується як невизначеність): $\psi(T) = \{T\}$, $\psi(F) = \{F\}$, $\psi(\omega) = \{T, F\}$. Очевидно, це відображення ін'єктивно, але не сюр'єктивно (порожня множина не входить в область значень відображення ψ).

За операціями алгебри сильної логіки Кліні залишимо позначення, прийняті для операцій алгебри стандартної логіки, вводячи нижній індекс k ; домовимося про однойменні операції: операціям $\wedge_k$, $\vee_k$ та $\neg_k$ співставляються відповідно операції $[\wedge]$, $[\vee]$ та $[-]$.

Твердження 1 (побудова алгебри сильної логіки Кліні). Відображення ψ – однозначний гомоморфізм алгебри сильної логіки Кліні $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$ в алгебру $\langle P(\{T, F\}); [\wedge], [\vee], [-] \rangle$, тобто це відображення є вкладенням алгебри сильної логіки Кліні в алгебру $\langle P(\{T, F\}); [\wedge], [\vee], [-] \rangle$. $\square$

Доведення. Дійсно, замінюючи в таблицях 1-2 значення $\{T\}, \{F\}, \{T, F\}$ на T, F, ω відповідно (згідно відображення ψ) і видаляючи константні стовпець і рядок, заповнені значенням $\emptyset$,

приходимо до табличного задання операцій сильної кон'юнкції і заперечення алгебри сильної логіки Кліні. Випадок сильної диз'юнкції розглядається повністю аналогічно. $\square$

Таким чином, алгебру сильної логіки Кліні можна отримати шляхом застосування до алгебри класичної булевої логіки конструкції розширення (в термінах повного образу) її сигнатурних операцій.

Компактне задання операцій сильної логіки Кліні

Ідея полягає в переході від алгебри $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_k, \vee_k \rangle$ до відповідної структури (решітки)².

Справді, безпосередньо перевіряється, що ці сигнатурні операції комутативні, асоціативні та ідемпотентні; крім того виконуються два закони поглинання: $x \vee_k (x \wedge_k y) = x$ та $x \wedge_k (x \vee_k y) = x$ для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Отже, за стандартною процедурою, поклавши $\stackrel{\text{def}}{x \leq_k y} \Leftrightarrow x = x \wedge_k y$ (або в еквівалентній формі $\stackrel{\text{def}}{x \leq_k y} \Leftrightarrow y = x \vee_k y$), можна перейти до структури, точні грані двохелементних множин якої знаходяться за формулами: $\inf\{x, y\} = x \wedge_k y$, $\sup\{x, y\} = x \vee_k y$ (див., наприклад [20, гл. II, § 8, теорема 3, с. 154]).

Відношення $\leq_k$ в загальному випадку є частковим порядком [20, гл. II, § 8, теорема 1, с. 151-152]. Для конкретного випадку алгебри сильної логіки Кліні воно проілюстровано в таблиці 3 (значенням аргументу x відповідають рядки, значенням аргументу y – стовпці; в наступних таблицях будемо притримуватися цієї ж угоди); знак "+" в клітинці означає, що відповідні елементи знаходяться з відношенням, знак "-" – що не знаходяться.

Для випадку структури, яка відповідає алгебрі сильної логіки Кліні, її порядок є лінійним (див. рис. 1, побудований на основі таблиці 3), а саме $F \leq_k \omega \leq_k T$ (для компактності на рис. 1 не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі що відповідають рефлексивності порядку).

² На даний момент більш вживаним є термін "решітка" ("гратка"), однак користуватимемося терміном "структура", оскільки послуговуємося результатами [20], де використовується саме цей термін.

Таблиця 3. Порядок $\leq_k$ на $\{T, F, \omega\}$

	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$
$x \backslash y$	T		F		ω	
T	+	+	-	-	-	-
	+		-		-	
F	+	+	+	+	+	+
	+		+		+	
ω	+	+	-	-	+	+
	+		-		+	

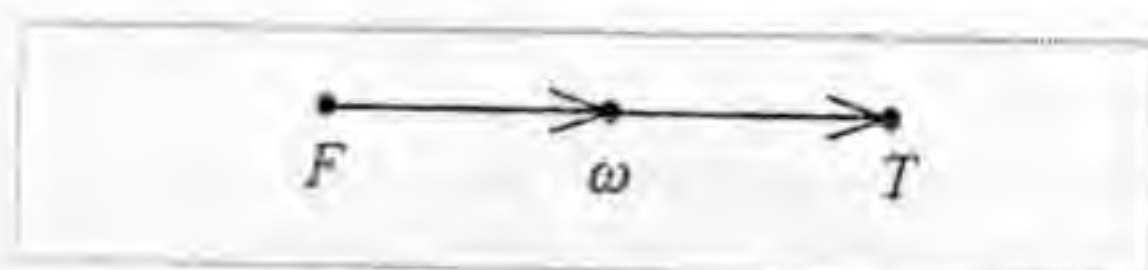


Рис.1. Лінійний порядок $\leq_k$ на множині $\{T, F, \omega\}$

Таким чином, загальна ситуація суттєво спрощується: структура насправді є ланцюгом та $x \wedge_k y$ є найменшим ($x \vee_k y$ – найбільшим) з елементів x, y для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Аналіз процедури побудови структури (нагадаємо, що $x \leq_k y \Leftrightarrow x = x \wedge_k y \Leftrightarrow y = x \vee_k y$), показує, що лінійність, загалом, часткового порядку забезпечується такою властивістю сильних кон'юнкції та диз'юнкції – $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Сформулюємо загальний результат для комутативних ідемпотентних півгруп. В формулюванні наступного твердження вважаємо відомим зв'язок між комутативними ідемпотентними півгрупами та нижніми півструктурами. (див., наприклад, [20, гл. II, § 8, теорема 1, с. 151-152]).

Твердження 2 (критерій лінійності порядку півструктури, побудованої по комутативній ідемпотентній півгрупі). Нехай $\langle D, + \rangle$ – комутативна ідемпотентна півгрупа, а $\leq$ – частковий порядок відповідної нижньої півструктури, тобто $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = x + y$. Порядок $\leq$ лінійний (тобто $\langle D, \leq \rangle$ є ланцюгом) тоді і тільки тоді, коли $x + y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in D$. □

Доведення. Необхідність. Нехай порядок $\leq$ лінійний, встановимо належність $x + y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in D$.

Нехай x, y – довільні елементи, оскільки порядок лінійний, то $x \leq y$ або навпаки $y \leq x$. В першому випадку $x = x + y$, в другому – $y = y + x$. Оскільки операція комутативна, то в обох випадках виконується належність $x + y \in \{x, y\}$.

Достатність. Нехай виконується належність $x + y \in \{x, y\}$ для всіх x, y ; покажемо, що порядок лінійний.

Нехай x, y – довільні елементи, тоді за припущенням $x + y = x$ або $x + y = y$. В першому випадку $x \leq y$ за означенням порядку, в другому – $y \leq x$ (дійсно, $y = x + y = y + x$). □

З цього твердження і випливає лінійність порядку структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні.

Крім того, те, що структура $\langle \{T, F, \omega\}; \leq_k \rangle$ є ланцюгом, можна показати і іншим елементарним шляхом. Справді, вказана структура скінченна, тобто вона має найменший (нуль) та найбільший (одиницю) елементи, які позначимо через $0_k, 1_k$ відповідно. Оскільки структура трьохелементна, то, очевидно, що $0_k <_k 1_k$ та для третього елемента z (тобто елемента, відмінного від найменшого та найбільшого елементів) виконується нерівність $0_k <_k z <_k 1_k$. Отже, структура $\langle \{T, F, \omega\}; \leq_k \rangle$ є ланцюгом.

Таким чином, можна зробити висновок, що лінійність порядку структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні, впливає, з одного боку, з властивостей операцій (з належностей $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$), а, з іншого боку, просто з трьохелементності структури.

Підкреслимо, що саме трьохелементність тут суттєва, бо кожна n -елементна структура буде ланцюгом при $n=1, 2, 3$; що не виконується,

загалом, при $n \geq 4$ (найпростіший приклад – булеан двохелементної множини з стандартним порядком $\leq$).

В наступному твердженні підсумуємо вищенаведену інформацію про компактне задання операцій сильної логіки Кліні.

Твердження 3 (компактне задання бінарних операцій алгебри сильної логіки Кліні). Відношення $\leq_k$ перетворює множину $\{T, F, \omega\}$ в ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \wedge_k y$ є найменшим (відповідно, $x \vee_k y$ – найбільшим) з елементів x, y для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$ згідно цього (лінійного) порядку. $\square$

Доведення випливає з вказаних загальних результатів теорії структур (зокрема, з погляду на структуру як на алгебру, кожна з двох сигнатурних операцій якої ідемпотентна, комутативна та асоціативна, а самі ці операції пов'язані законами поглинання) та лінійності відповідного порядку (див. рис. 1). $\square$

Цікаво відзначити, що по суті саме таке компактне задання операцій (алгебри) сильної логіки Кліні використовується в популярній літературі з мови SQL: F інтерпретується як число 0, T – як 1, ω – як $\frac{1}{2}$; тоді

$x \wedge_k y = \min(x, y)$, $x \vee_k y = \max(x, y)$ при природному порядку – $0 < \frac{1}{2} < 1$, більш того, $\neg x = 1 - x$ (див., наприклад, [21]).

Слабка логіка Кліні, що виникає при природному розширенні булевої логіки

Розглянемо слабку логіку Кліні та почнемо з алгебри (групоїда) $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_\omega \rangle$, де операція кон'юнкції відмінна від розглянутої вище сильної кон'юнкції Кліні та задана наступним чином: у випадках, коли хоч один з аргументів дорівнює третьому (новому) значенню ω , результатом буде саме це значення, в усіх інших випадках операція веде себе як операція $\wedge$ стандартної логіки (таблиця 4). Таку операцію $\wedge_\omega$ називатимемо слабкою кон'юнкцією Кліні [1].

Таблиця 4. Операція $\wedge_\omega$ на $\{T, F, \omega\}$ (зберігає ω)

$\wedge_\omega$	T	F	ω
T	T	F	ω
F	F	F	ω
ω	ω	ω	ω

Отже, мова йде про розширення стандартної кон'юнкції, яке зберігає третє логічне значення. Зауважимо, що операції кон'юнкції та диз'юнкції алгебри сильної логіки Кліні, на відміну від операції заперечення цієї ж алгебри, третє логічне значення ω не зберігають (див. таблиці 1, 2; наприклад, $T \vee \omega = T$, $F \wedge \omega = F$, але $\neg \omega = \omega$).

Так введена операція асоціативна, комутативна та ідемпотентна (що перевіряється безпосередньо); тобто $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_\omega \rangle$ комутативна ідемпотентна півгрупа і можна застосувати загальну процедуру побудови по ній півструктури (верхньої чи нижньої).

Визначимо два бінарних відношення

$$x \leq (\wedge_\omega) y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_\omega y \quad \text{та} \quad x \preceq (\wedge_\omega) y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = x \wedge_\omega y.$$

Тоді кожне з цих відношень є порядком, і множина $\{T, F, \omega\}$ з порядком $\leq (\wedge_\omega)$ (з порядком $\preceq (\wedge_\omega)$) є нижньою (верхньою) півструктурою, причому $\inf_{\leq} \{x, y\} = x \wedge_\omega y$ (відповідно $\sup_{\preceq} \{x, y\} = x \wedge_\omega y$) (див., наприклад, [20, гл. II, § 8, с. 152-152, теорема 1]).

Очевидно, порядки $\leq (\wedge_\omega)$ та $\preceq (\wedge_\omega)$ взаємноінверсні, тобто $x \leq y \Leftrightarrow y \preceq x$. Отже, згідно принципу двоїстості, не має значення, який саме порядок з цих двох розглядати (див., наприклад, [22, § 1, с. 10]).

Порядки $\leq (\wedge_\omega)$ та $\preceq (\wedge_\omega)$ проілюстровані в таблиці 5 та на рис. 2 (на якому не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі, що відповідають рефлексивності порядку).

Таблиця 5. Порядки $\leq (\wedge_\omega)$ та $\preceq (\wedge_\omega)$ на $\{T, F, \omega\}$

$x \backslash y$	$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge_\omega y$			$x \preceq y \Leftrightarrow y = x \wedge_\omega y$		
	T	F	ω	T	F	ω
T	+	-	-	+	+	+
F	+	+	-	-	-	-
ω	+	+	+	-	-	+

³ Використовуватимемо позначення вигляду $\leq (\wedge_\omega)$. Бажаючи підкреслити, що відношення $\leq$ індукується операцією $\wedge_\omega$, аналогічно, для інверсного відношення (ноді в таких випадках операцію явно вказувати не будемо).



Рис. 2. Порядки $\leq(\wedge_\omega)$ (зліва) та $\leq(\wedge_\omega)$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Аналогічно, групоїд $\langle \{T, F, \omega\}; \vee_\omega \rangle$, операція якого є розширенням стандартної операції диз'юнкції та зберігає третє логічне значення ω (таблиця 6), є комутативною ідемпотентною півгрупою (операція $\vee_\omega$ асоціативна, комутативна та ідемпотентна, що перевіряється безпосередньо). Знову можна застосувати загальну процедуру побудови півструктури.

Таблиця 6. Операція $\vee_\omega$ на $\{T, F, \omega\}$ (зберігає ω)

$\vee_\omega$	T	F	ω
T	T	T	ω
F	T	F	ω
ω	ω	ω	ω

Визначимо два відношення

$$x \leq (\vee_\omega) y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = x \vee_\omega y$$

$$x \preceq (\vee_\omega) y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = x \vee_\omega y$$
 (як і для випадку кон'юнкції ці два відношення взаємноінверсні).

Тоді кожне з цих відношень є порядком, і множина $\{T, F, \omega\}$ з порядком $\leq(\vee_\omega)$ (з порядком $\preceq(\vee_\omega)$) є нижньою (верхньою) півструктурою, причому $\inf_{\leq} \{x, y\} = x \vee_\omega y$ (відповідно $\sup_{\preceq} \{x, y\} = x \vee_\omega y$ [20, гл. II, § 8, с. 151-152, теорема 1]. Порядки проілюстровані в таблиці 7 та на рис. 3 (не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі, що відповідають рефлексивності порядку).

Таблиця 7. Порядки $\leq(\vee_\omega)$ та $\preceq(\vee_\omega)$ на $\{T, F, \omega\}$

$x \backslash y$	$x \leq (\vee_\omega) y \Leftrightarrow x = x \vee_\omega y$			$x \preceq (\vee_\omega) y \Leftrightarrow y = x \vee_\omega y$		
	T	F	ω	T	F	ω
T	+	+	-	+	-	+
F	-	+	-	+	+	+
ω	+	+	+	-	-	+

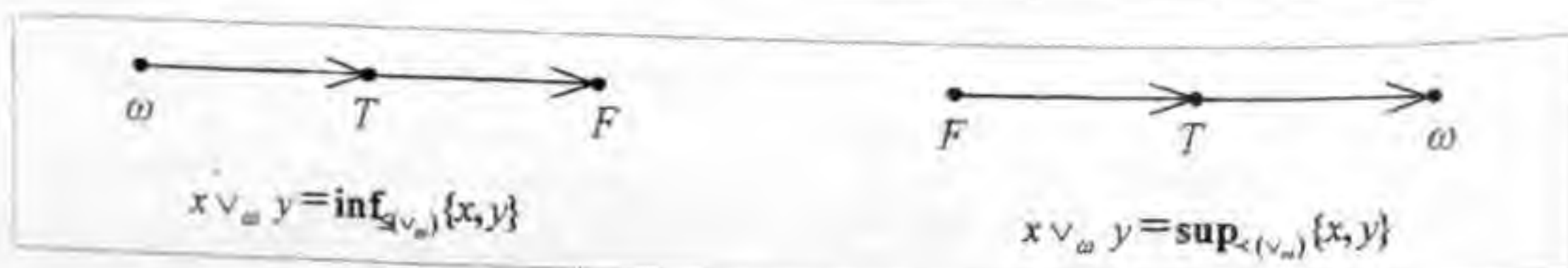


Рис. 3. Порядки $\leq(\vee_\omega)$ (зліва) та $\preceq(\vee_\omega)$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Аналіз процедури побудови півструктур (нагадаємо, що, наприклад, $x \leq (\wedge_\omega) y \Leftrightarrow x = x \wedge_\omega y$), показує, що лінійність, загалом, часткового порядку забезпечується такою властивістю слабкої кон'юнкції та слабкої диз'юнкції – $x \wedge_\omega y, x \vee_\omega y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Отже, ситуація з лінійністю порядків аналогічна сильній логіці Кліні та навіть дещо

спрощується: належності $x \wedge_\omega y, x \vee_\omega y \in \{x, y\}$ у випадку, коли хоча б один з аргументів $x, y \in \omega$, автоматично випливають зі збереження значення ω операціями.

Відмінність полягає у тому, що встановити лінійність порядку як наслідок трохелементності не можна, оскільки працюємо в півструктурах (зауважимо, що існує простий приклад трохелементної півструктури, яка не є

ланцюгом; разом з тим зрозуміло, що двохелементні півструктури є ланцюгами).

Підсумуємо інформацію про півструктури (насправді, структури, оскільки порядок лінійний), індуковані двома розглянутими комутативними ідемпотентними підгрупами.

Твердження 4 (структури, індуковані слабкою кон'юнкцією та слабкою диз'юнкцією). Відношення $\leq(\wedge_\omega)$ та $\leq(\vee_\omega)$ перетворюють множину $\{T, F, \omega\}$ в ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \wedge_\omega y$ є найменшим (найбільшим) з елементів x, y згідно порядку $\leq(\wedge_\omega)$ (відповідно $\leq(\vee_\omega)$) для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Відношення $\leq(\vee_\omega)$ та $\leq(\wedge_\omega)$ також перетворюють множину $\{T, F, \omega\}$ в ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \vee_\omega y$ є найменшим (найбільшим) з елементів x, y згідно порядку $\leq(\vee_\omega)$ (відповідно $\leq(\wedge_\omega)$) для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$. □

Доведення випливає з вказаних загальних результатів теорії півструктур (з погляду на півструктуру як на комутативну ідемпотентну підгрупу) та лінійності відповідних порядків (див. рис. 2-3). □

Очевидно, що вказані в останньому твердженні два (взаємноінверсні) порядки для слабкої кон'юнкції відрізняються від двох (знову ж взаємноінверсних) порядків для слабкої диз'юнкції. Отже, серед вказаних чотирьох порядків немає порядку, який би відповідав одночасно слабкій кон'юнкції та слабкій диз'юнкції (на відміну від випадку сильної логіки Кліні, де такий "спільний" порядок існує, див. рис. 1).

Тому для алгебри $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_\omega, \vee_\omega \rangle$ поставимо загальне питання: чи існує на множині $\{T, F, \omega\}$ порядок (позначимо його $\triangleleft$), що перетворює її в структуру, причому для довільних x, y виконуються рівності $x \wedge_\omega y = \inf_{\triangleleft} \{x, y\}$, $x \vee_\omega y = \sup_{\triangleleft} \{x, y\}$ (або, що еквівалентно, двоїсті рівності $x \wedge_\omega y = \sup_{\triangleleft} \{x, y\}$, $x \vee_\omega y = \inf_{\triangleleft} \{x, y\}$)?

Відповідь негативна. Дійсно, припустимо, що такий порядок існує, тоді повинні виконуватися закони поглинання для операцій слабкої кон'юнкції та слабкої диз'юнкції [20, гл. II § 8, с. 152-153, теорема 2]. Але результати безпосередньої перевірки цих законів, наведені в таблиці 8, показують, що у випадках, коли тільки y співпадає з ω , обидва закони поглинання не виконуються. Отже, такого порядку не існує.

Таблиця 8. Виконуваність законів поглинання для операцій $\vee_\omega, \wedge_\omega$

$x \backslash y$	$(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x = x$			$(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x = x$		
	T	F	ω	T	F	ω
T	-	+	-	+	+	-
F	-	+	-	+	-	-
ω	+	+	+	+	+	+

Невиконання законів поглинання є цілком природним. Дійсно, суть цих законів: значення виразів $(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x$, $(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x$ не залежать від значення елемента y , а визначаються лише значенням елемента x . Зрозуміло, що ця вимога не виконується, якщо операції зберігають значення ω , y співпадає з ним, а x навпаки відмінний від ω .

Висновки

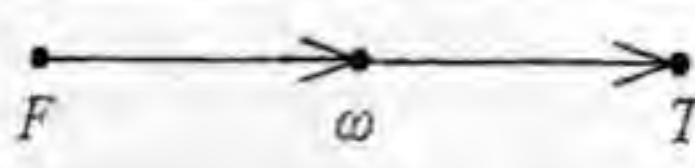
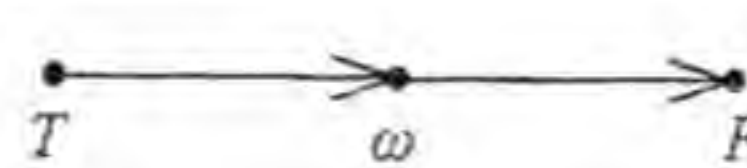
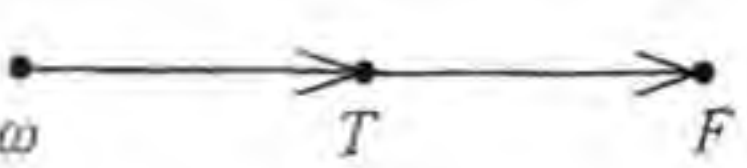
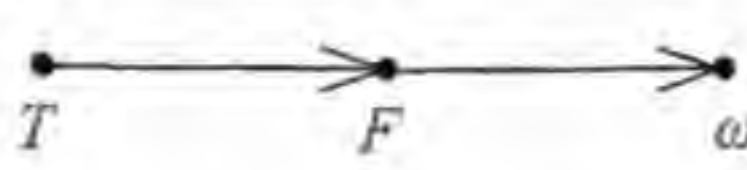
Підсумовуючи, на множині $\{T, F, \omega\}$ існує 6=3! можливих лінійних порядків, зв'язок яких з операціями диз'юнкції та кон'юнкції двох розглянутих логік наведений в таблиці 9.

Порядок 1 (інверсний йому порядок 2) відповідає одночасно диз'юнкції і кон'юнкції сильної логіки Кліні. Це порядки структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні.

Порядок 3 (інверсний йому порядок 4) відповідає диз'юнкції, але не кон'юнкції слабкої логіки Кліні. Дуально, порядок 5 (інверсний йому порядок 6) – відповідає кон'юнкції, але не диз'юнкції слабкої логіки Кліні. Це порядки півструктур, асоційованих з двома підгрупами слабкої логіки Кліні⁴.

⁴ Сигнатура однієї підгрупи складається з слабкої диз'юнкції, іншої підгрупи – з слабкої кон'юнкції.

Таблиця 9. Усі можливі лінійні порядки на $\{T, F, \omega\}$ та їхній зв'язок з логіками Кліні

1.  $x \wedge_k y = \min(x, y)$ $x \vee_k y = \max(x, y)$	2.  $x \wedge_k y = \max(x, y)$ $x \vee_k y = \min(x, y)$
3.  $x \vee_\omega y = \max(x, y)$	4.  $x \vee_\omega y = \min(x, y)$
5.  $x \wedge_\omega y = \min(x, y)$	6.  $x \wedge_\omega y = \max(x, y)$

Список використаних джерел

1. Клини С. К. Введение в метаматематику. – Москва: ИЛ, 1957. – 526 с.
2. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. – Киев: Наукова думка, 1978. – 318 с.
3. Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
4. Cook S., Kleppe A., Mitchell R., Rumpe B., Warmer J., Wills A. The Amsterdam Manifesto on OCL. – UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF, 1999 // http://www.trireme.com/whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.
5. www.omg.org/05-06-06.pdf.
6. Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 15. – Москва: Мир, 1978. – С. 38-100.
7. The Object Data Standard: ODMG 3.0 / Edited by R.G.G. Cattel, Douglas K. Barry. – Morgan Kaufmann Publishers, 2000.
8. <http://www.omg.org/docs/omg/04-07-02.pdf>.
9. Кондаков Н.И. Логический словарь – Москва: Издательство "Наука", 1971. – 656 с.
10. Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия // Логические Исследования. – 2000. – Вып. 7. – С. 7-60.
11. <http://www.dbpd.com>.
12. <http://www.citforum.ru>.
13. www.intelligententerprise.com.
14. E.F. Codd. Extending the Relational Database Model to Capture More Meaning: IBM Research Report RJ2599/ ACM Transactions on Database Systems. – 1979. – No. 4.
15. Брусенцов Н.П. Ущербность двоичности // <http://ternarycomp.narod.ru/SPb.doc>.
16. Кузнецов С.Д. Неопределенная информация и трехзначная логика // Системы управления базами данных. – 1997. – № 05-06. – С.65-67.
17. Date C.J. Faults and Defaults (in five parts) // C.J.Date, Hugh Darwen and David McGoveran. Relational Database Writings 1994-1997. – Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1998.
18. Ненеѣвода Н.Н. Прикладная логика: Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 521 с.
19. Буй Д. Б., Кахута Н. Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
20. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.
21. <http://www.sql-ex.ru/help/select2.php>.
22. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.

РАДІОФІЗИКА

APPENDIX

УДК 519.9

Анісімов¹ І.О., д-р. фіз.-мат. наук, проф.,
Літошенко² Т.Є., аспірант

Резонансна взаємодія тонкого модульованого електронного пучка з неоднорідною неізотермічною плазмою

За допомогою методу частинок в
комірках (PIC) досліджено взаємодію
тонкого модульованого електронного пучка з
неоднорідною плазмою.

Показано, що така взаємодія
відбувається у три етапи: збудження ВЧ
електричного поля в резонансній області,
деформація початкового профілю
концентрації плазми під дією цього поля та
подальша еволюція плазмового збурення.

Встановлено, що на пізній стадії
взаємодії збурення іонної концентрації
поширюється від області взаємодії у вигляді
імпульсу кільцеподібної форми зі швидкістю
близькою до швидкості іонного звуку.
Електричне поле на цій стадії збуджується у
вигляді окремих дрібномасштабних спалахів.

Ключові слова: плазмово-пучкова
взаємодія, ОЛПР, каверна іонної густини.

¹ E-mail: ioa@univ.kiev.ua

² E-mail: taras.litoshenko@gmail.com

1. Вступ

Взаємодія модульованих електронних
пучків (МЕР) з плазмою становить значний
науковий та прикладний інтерес [1,2].
Випромінювання електромагнітних хвиль при
взаємодії МЕР з неоднорідною плазмою може
бути використане для генерації та підсилення
НВЧ [2], для перенесення інформації через
бар'єри закритичної плазми [3] тощо.
Прискорення заряджених частинок у полях
кільватерних хвиль, збуджених у плазмі
електронними згустками, розглядається як
альтернатива традиційним методам
прискорення [4].

Взаємодія МЕР з неоднорідною плазмою
вивчалася як аналітичними [5], так і числовими
[6-8] методами. За допомогою методу великих
частинок в комірках (PIC) для одновимірної
геометрії в [6] було показано, що під дією ВЧ
електричного поля пучка в області локального
плазмового резонансу (ОЛПР) утворюється
каверна густини плазми. В [7] досліджувалась

Anisimov¹ I.O., Dr. Sci., prof.,
Litoshenko² T.Eu., post. grad. student

Resonant interaction of thin modulated electron beam with inhomogeneous nonisothermal plasma

Interaction of thin modulated electron beam
with inhomogeneous nonisothermal plasma was
investigated using particles-in-cells (PIC)
method.

It was shown that the interaction has three
stages: excitation of HF electric field in
resonance region, deformation of initial density
profile under the action of this field and
subsequent evolution of plasma perturbation.

It was established that on the last interaction
stage ion density perturbation propagates from
the region of interaction in form of pulse with
ring-like shape. Electric field is excited as a
number of small-scale bursts on this stage.

Key words: beam-plasma interaction, RLPR,
cavern of ion density.

взаємодія модульованого пучка з
неоднорідною плазмою з гарячими
елекtrонами. Було встановлено, що в
резонансній області збуджується пара іонно-
звукових імпульсів, що поширюються в
протилежні сторони. Сплески електричного
поля на пізній стадії взаємодії локалізувались в
областях плазми, де її концентрація була
близькою до критичної.

В [8] за допомогою двовимірного методу
PIC проводилось моделювання взаємодії
тонкого модульованого електронного пучка з
неоднорідною плазмою. В роботі було
показано, що аналогічно до одновимірного
випадку, з час порядку $(1-2)T_i$ в ОЛПР
утворюється каверна густини. Відзначалося,
що на виникнення каверни суттєво впливають
збуджені пучком поперечні плазмові
коливання.

Проте в [8] досліджено тільки початкові
етапи взаємодії тонкого МЕР з неоднорідною
плазмою. Нез'ясованими залишилися
особливості релаксації плазмового збурення

Представлено Левитським С.М.,
проф., докт. фіз.-м. н.

після зменшення ВЧ електричного поля в ОЛПР, а також можливість збудження такого поля на пізніх етапах взаємодії.

В представленій роботі за допомогою двовимірного методу РІС досліджується пізня стадія взаємодії тонкого МЕР з неоднорідною неізотермічною плазмою. Вивчається динаміка початкового плазмового збурення за відсутності сильних ВЧ полів. Аналізуються умови, за яких спостерігаються локальні спалахи ВЧ електричного поля на деформованому профілі концентрації.

2. Опис програми та параметрів моделювання

Моделювання проводилося за допомогою програми [9], яка реалізує двовимірний електростатичний метод РІС. Параметри моделювання наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Параметри моделювання.

Довжина системи, м	0.6
Ширина системи, м	0.1
Густина плазми ($x=0.3m$), m^{-3}	$3.2 \cdot 10^{14}$
Маса іонів, m_e	1836
Температура електронів, eV	2.0
Температура іонів, eV	0.15
Початкова ширина пучка, м	0.01
Швидкість пучка, м/с	$3.0 \cdot 10^7$
Частота модуляції пучка, s^{-1}	$1.0 \cdot 10^9$
Початкова густина електронів пучка, m^{-3}	$1.0 \cdot 10^{12}$
Глибина модуляції пучка	100%
Кількість комірок сітки	2048x256
Крок за часом, с	$5.0 \cdot 10^{-11}$
Кількість крупних частинок	$1.0 \cdot 10^7$

На ліву та праву границі області моделювання були накладені граничні умови типу Діріхле, а на верхню та нижню – періодичні граничні умови.

3. Результати моделювання

В [8] розглядалась початкова стадія взаємодії ($0 < t < 3T_i$) тонкого МЕР з неоднорідною плазмою. Було встановлено, що в ОЛПР збуджується інтенсивне ВЧ електричне поле, і під дією пондеромоторної сили цього поля початковий профіль концентрації плазми деформується. В цьому розділі представлені результати моделювання для пізньої стадії взаємодії ($3T_i < t < 8T_i$).

3.1. Взаємодія сильного МЕР з неоднорідною плазмою. Динаміка іонного збурення

На рис.1 зображено просторово-часові залежності інтенсивності електричного поля (а) та збурення іонної концентрації (б) на осі системи ($y=0.05m$). Можна бачити, що інтенсивне ВЧ електричне поле, збуджене в резонансній області на початковому етапі взаємодії, швидко спадає у моменти часу $t = (1-2)T_i$. Як видно із порівняння рис.1а та рис.1б, це відбувається тоді, коли початковий профіль концентрації іонів починає деформуватися. Причиною ж зміни густини іонів є дія пондеромоторної сили неоднорідного ВЧ поля.

З рис.1 а видно, що розподіл інтенсивності електричного поля в області взаємодії у момент часу $t = 2T_i$ є періодичним. Такий розподіл можна інтерпретувати як інтерференційну картину між вимушеною хвилею електричного поля, що рухається праворуч разом з пучком, та власною ленгмюрівською хвилею, що поширюється від центру системи ліворуч. Відповідно до розподілу інтенсивності поля набуває періодичного розподілу і концентрація іонів. Із порівняння рис. 1а та рис. 1б видно, що максимумам поля відповідають мінімуми іонної густини. Зазначимо, що подібні просторово-часові залежності були отримані і в моделюванні для одновимірної геометрії [7].

У моменти часу $2T_i < t < 8T_i$ плазмове збурення еволюціонує за відсутності інтенсивного ВЧ поля. На рис. 2а-г зображені просторові розподіли збурення іонної концентрації в різні моменти часу. Можна бачити, що у момент часу $t=2.3T_i$, тобто через короткий час після зникнення поля в ОЛПР, збурення густини плазми являє собою каверну, оточену ущільненою плазмою (рис. 2а). В середині каверни наявні також кілька острівців високої концентрації, які є частиною згаданого вище періодичного розподілу плазми (порівняти рис. 1б та рис. 2а).

В наступні моменти часу ущільнена плазма, що утворилася по периметру каверни, поширюється в слабко збурену плазму у вигляді кільцеподібного імпульсу (рис. 2б-г).

За кутом нахилу ліній на рис. 1б можна встановити швидкість поширення імпульсу $v_{\text{exp}} = 1.4 \cdot 10^5$ м/с. Це значення близьке до швидкості іонного звуку для параметрів моделювання: $c_s = \sqrt{k_B T_i / m_e} = 1.6 \cdot 10^5$ м/с.

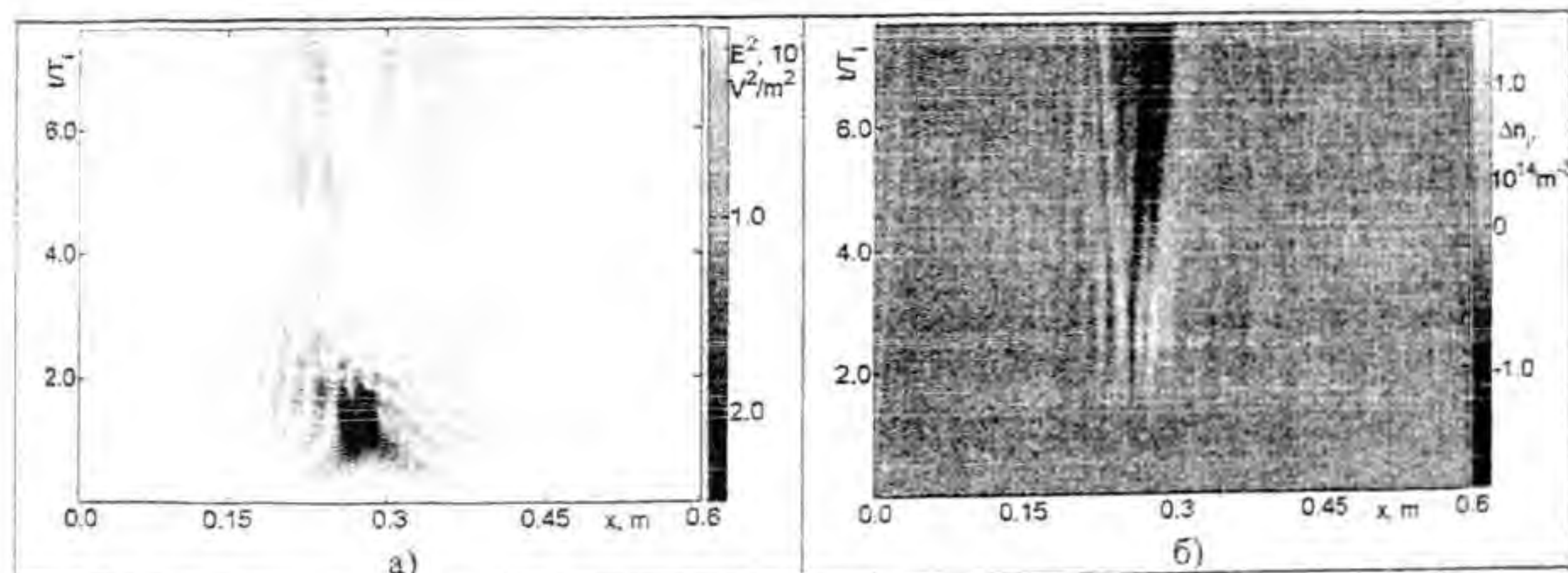


Рис. 1. Залежність інтенсивності електричного поля (а) та збурення іонної концентрації (б) на осі області моделювання від часу.

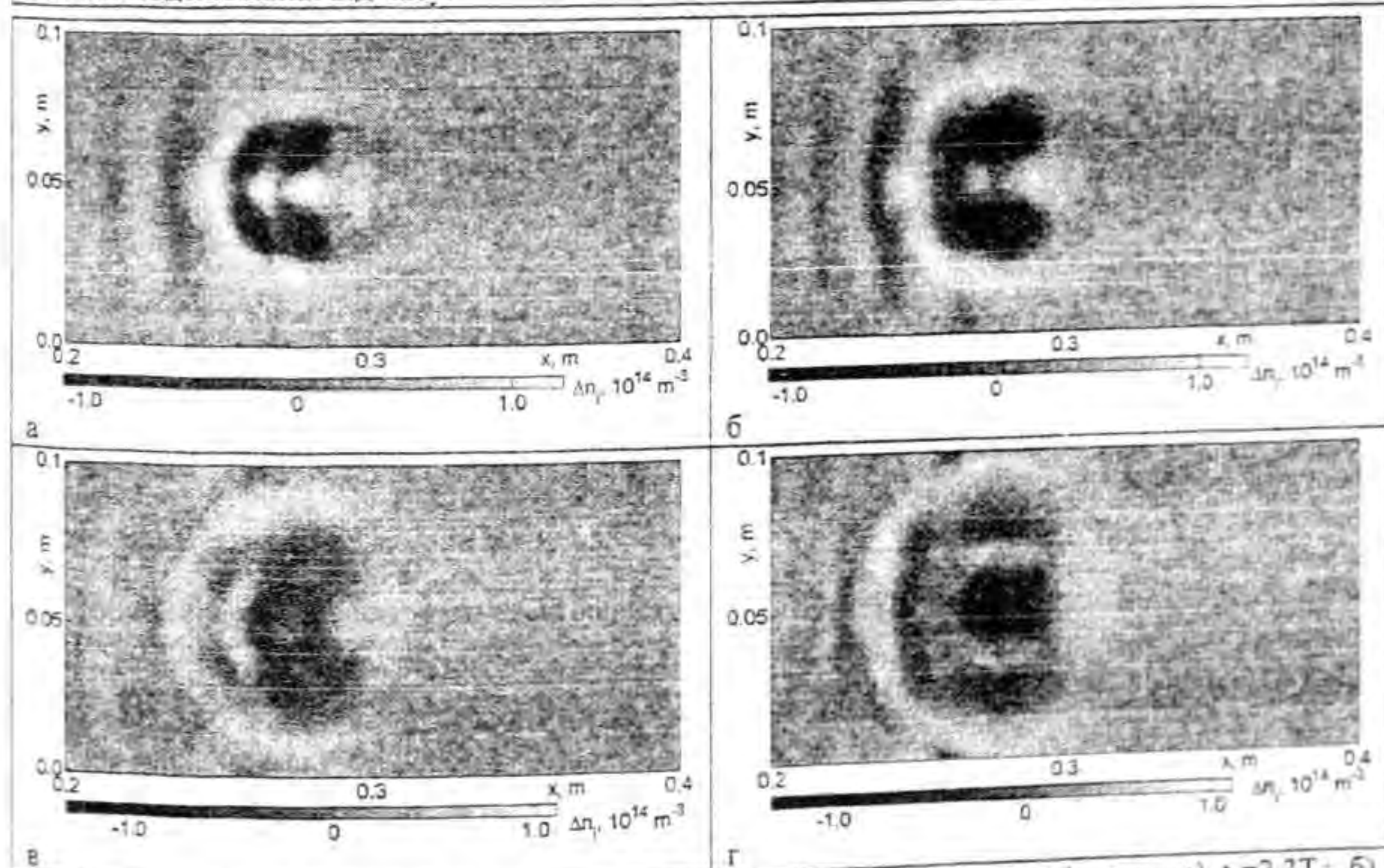


Рис. 2. Просторовий розподіл збурення іонної компоненти для моментів часу а) $t_1=2.3T_i$; б) $t_2=3.5T_i$; в) $t_3=4.6T_i$; г) $t_4=7.0T_i$.

Разом із поширенням зовнішнього імпульсу в середині каверни релаксують острівці високої концентрації плазми. Можна думати, що така релаксація відбувається за механізмом амбіполярної дифузії. В результаті на місці острівців формується мінімум концентрації плазми, а самі вони перетворюються на ще один імпульс іонної густини (рис. 2г). Раніше поширення іонно-звукових імпульсів від ямки густини, утвореної локальними максимумами інтенсивності ВЧ електричного поля, було зафіксоване в одновимірному моделюванні [7].

3.2. Взаємодія сильного МЕР з неоднорідною плазмою. ВЧ електричне поле в плазмі на пізній стадії взаємодії

З рис. 1а видно, що після деформації початкового профілю концентрації плазми електричне поле не зникає повністю в системі. Проте тепер воно локалізоване здебільшого за межами резонансної області. На рис. 3 зображені просторові розподіли концентрації іонів (а) та інтенсивності електричного поля (б) в момент часу $t=4.4T_i$. Можна бачити (рис. 3а), що електричне поле на пізній стадії взаємодії існує у вигляді окремих інтенсивних спалахів. Із порівняння рис. 3а та рис. 3б видно,

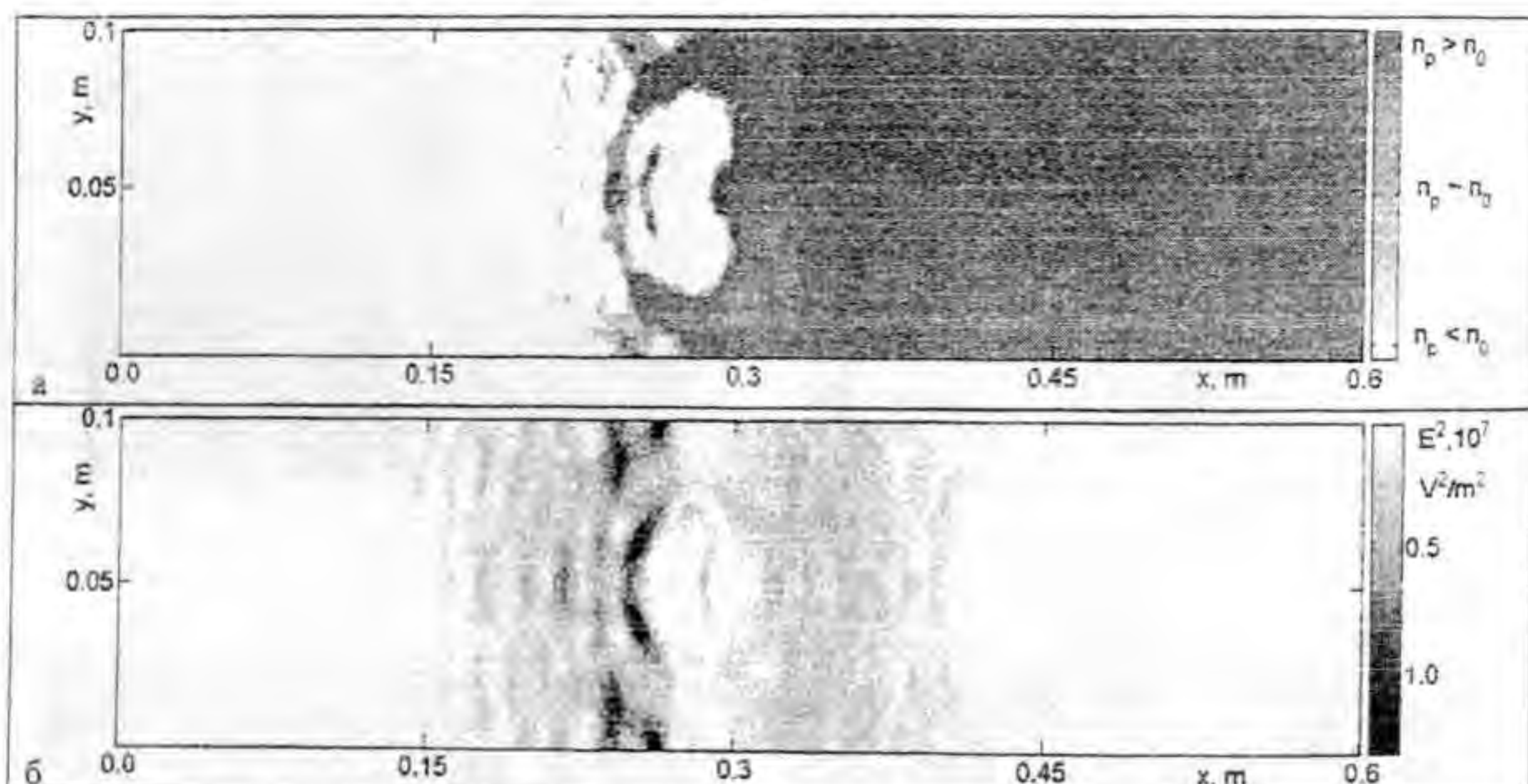


Рис.3. Просторовий розподіл концентрації іонів (а) та інтенсивності електричного поля (б) в момент часу $t=4.4T_i$.

що спалахи поля локалізуються в областях з докритичною плазмою, що повністю або частково оточені закритичною плазмою.

Можна бачити, що протяжність всіх спалахів поля в напрямку осі x є однаковою. Цей розмір, отриманий прямим вимірюванням, складає $L_{bur} = 1.3 \text{ см}$. Середня густина плазми в місці спалаху складає $n_{p,bur} = 2.9 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$. Довжина відповідної ленгмюрівської хвилі з частотою ω_0 , що поширюється в плазмі з густиною $n_{p,bur}$

$$\lambda_L = 6\pi v_T / (\omega_0^2 - \omega_{p,bur}^2) = 2.1 \text{ см}.$$

Таким чином $L_{bur} = \lambda_L/2$ і можна говорити, що спалахи ВЧ електричного поля, що виникають в плазмі на пізній стадії взаємодії, є стоячими ленгмюрівськими хвилями, що збуджуються в областях оточених закритичною плазмою (локальних резонаторів). Цей результат істотно відрізняється від результатів одновимірного моделювання [7], де сплески електричного поля спостерігалися на локальних максимумах густини докритичної плазми.

Зазначимо, що розподіл поля, зображений на рис.3, не є стаціонарним. Спалахи зникають і виникають в інших точках простору відповідно до зміни розподілу густини плазми в системі.

4. Висновки

1. Резонансна взаємодія модульованого електронного пучка з плазмою відбувається в

три етапи: збудження інтенсивного ВЧ електричного поля в резонансній області, деформація профілю концентрації плазми під дією цього поля та подальша еволюція збурення плазми як пакету іонно-звукових хвиль.

2. Внаслідок деформації профілю концентрації плазми поле в резонансній області зникає, а викликане ним збурення поширюється у вигляді кільцеподібного фронту зі швидкістю близькою до швидкості іонного звуку c_s .

3. На пізній стадії взаємодії електричне поле в плазмі збуджується у вигляді окремих спалахів. Збудження відбувається в областях докритичної плазми, повністю або частково оточених закритичною плазмою. Розмір таких областей (локальних резонаторів) в повздовжньому напрямку є близьким до $\lambda_L/2$.

Література

1. Кондратенко А.Н., Куклин В.М. Основы плазменной электроники. Москва: Энергоатомиздат, 1988.
2. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. Москва: из-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2002.
3. Анісімов І.О., Зубарев О.А., Левитський С.М., Палець Д.Б., Опанасенко О.В., Романюк Л.І. Дослідження просвітлення плазмових бар'єрів для електромагнітних хвиль за допомогою електронних пучків. 1. Існування

ефекту просвітлення. // Укр. фіз. журн. – 40. – №3. – 1995. – С. 198-203.

4. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц. // Физика плазмы. – 20. – № 7,8. – 1994. – С. 613 - 622.

5. Anisimov I.O., Borisov O.A.. Electrical Field Excitation in Non-Uniform Plasma by a Modulated Electron Beam. // Physica Scripta. – 62. – 2000. – P.375-380.

6. Анісімов І.О., Сорока С.В., Взаємодія неоднорідної плазми з модульованим електронним пучком: утворення ямки густини в області локального плазмового резонансу. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 2. – 2004. – С. 385-394.

7. Анісімов І.О., Кельник О.І., Сорока С.В., Збудження іонно-звукових хвиль

модульованим електронним пучком у неоднорідній плазмі з гарячими електронами. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 1. – 2004. – С. 297-305.

8. Анісімов І.О., Літошенко Т.Є. Нелінійна взаємодія модульованого електронного пучка з областю локального плазмового резонансу: двовимірне моделювання. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 4. – 2006. – С. 251-256.

9. Anisimov I.O., Litoshenko T.Eu. 2D electrostatic simulation of the modulated electron beam interaction with inhomogeneous plasma. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. – 12. – № 6. – 2006. – P.175-177.

Надійшла до редакції 14.02.2008

УДК 577.322:537.622:539.22

Барановська* І.М., студ., Дудченко Н.О.,
канд.біол.наук.

Типи магнітного упорядкування феритину в біологічних зразках

Феритин – заліздепонуючий білок, багатий на магнітні феномени. Його фізичні, хімічні та магнітні властивості й досі залишаються інтригуючими. Метою нашої роботи було дослідження залежності форми та положення резонансних ліній спектрів ЕСР феритину від температури для виявлення типу магнітного упорядкування феритину в зразках крові, гліальних клітин та плацентарного феритину. Температурні залежності інтегральної інтенсивності спектрів ЕСР феритину зареєстровано в діапазоні температур 105 – 313 К. В результаті роботи встановлено залежність магнітного упорядкування від типу досліджуваного зразка.

Ключові слова: магнітне упорядкування, феритин, електронний спіновий резонанс.

* E-mail: untc3074@iptelecom.net.ua

Вступ

Залізо є дуже важливим мікроелементом для всіх форм життя. Воно відіграє важливу роль практично у всіх живих організмах – перш за все через електронний транспорт завдяки його здатності змінювати валентність [2]. Шляхом заміни лігандів, які воно координує, залізо має доступ до широкого діапазону окисно – відновних потенціалів та може брати участь у широкому діапазоні реакцій електронного переносу, у транспорті кисню, активації, детоксифікації, у фіксації нітрогену та багатьох реакціях фотосинтезу [1]. У вільному стані залізо може бути токсичним. Тому організму необхідно мати білки для зберігання заліза у нетоксичній та водночас легкодоступній формі для його подальшого використання, зокрема для синтезу гемоглобіну. Такими білками є феритин (гемосидерин).

Феритин (гемосидерин) – заліздепонуючі білки, фізичні, хімічні та магнітні властивості яких вивчалися протягом останніх 50 років. Але й досі його властивості викликають багато питань [3].

Baranovska I.M., stud., Dudchenko N.O., PhD.

Nature of ferritin magnetic ordering in biological samples

Ferritin is the iron deposit protein, rich on magnetic phenomena. It's physical, chemical and magnetic properties remain intriguing. The aim of our study was to investigate the temperature dependence of the form and position of electron spin resonance spectra components of ferritin to determine the nature of ferritin magnetic ordering in blood, glial cells and placental ferritin samples. Temperature dependencies of ferritin ESR spectra integral intensity were detected in the range of temperatures 105 – 313 K. As a result of the work the nature of ferritin magnetic ordering depending of the investigated sample was determined.

Key words: magnetic ordering, ferritin, electron spin resonance.

Запасання заліза відбувається всередині білкової оболонки заліздепонуючих білків у вигляді кристалічного ядра (феригідриту), яке має магнітний момент.

І досі триває полеміка стосовно магнітних властивостей заліздепонуючих білків. В одних роботах ядра таких білків вважають антиферромагнетиками [4, 5], в інших – це ферромагнетики чи суперпарамагнетики [6].

Виміри магнітних властивостей показують, що на дуже ранніх стадіях формування «ядра» атоми заліза агрегують, утворюючи кластери з обмінною взаємодією, внаслідок чого ефективний магнітний момент атома зменшується від 5,92 магнетонів Бора для ізолюваного атома заліза до 3,8 магнетонів Бора у феритині кінської селезінки [7]. Намагніченість феритину лінійно зростає з підсиленням магнітного поля при досить сильних магнітних полях при низьких температурах, що є характерним для антиферромагнетиків з досить високим полем обмінної взаємодії.

Магнітні властивості ізолюваних атомів феритину є більш – менш зрозумілими, але результат магнітного упорядкування на

макроскопічному рівні в кристалах залишається відкритим питанням [8]. Магнітне упорядкування – це не просто суперпозиція взаємодій окремих атомів, але й їх сукупна Кулонівська взаємодія з дотриманням принципу Паулі. Ці взаємодії можуть призводити до вирівнювання чергування (феромагнетизму), чи більш складних упорядкувань магнітних моментів. Магнітні кластери проводять паралель між магнетизмом на рівні мікроскопічних атомів і макроскопічним станом (будовою). Такі кластери можуть робити внесок в наше розуміння магнетизму в обох випадках.

Особливість магнітної сприйнятливості тканин, які містять залізо, використовують у галузі неінвазивних вимірювань концентрацій заліза. Загалом прийнято вважати, що концентрація заліза для всіх тканин і типів захворювань однакова. Вважають, що концентрація заліза в печінці людини – вірний показник навантаження організму залізом. Більш ніж 20 років тому було розроблено неінвазивні методи визначення концентрації заліза в печінці, де використовують порівняння великих додатних значень магнітної сприйнятливості тканин, що містять залізо, з малими негативними значеннями інших компонент тканини організму.

Майже для всіх протоколів ЯМР-томографічної оцінки вмісту заліза, були досліджені загальні якісні кореляції між вимірними параметрами часів релаксації та концентрацією заліза. Ці виміри були дуже чутливими до експериментальних процедур та фізіологічних даних (тип органу, вміст заліза, деградація тканин і т.д.), що не дозволяє їх загальнодоступного використання в лікарнях [9]. Ці труднощі безумовно пов'язані з досі не поясненими суттєвими відмінностями між феритин-індукованою релаксацією у водневих розчинах і в тканинах. Це можна пояснити наступним:

структурними відмінностями між феритином кіньської селезінки (використовується для досліджень водневих розчинів) та феритином людини;

кластеризацією феритину *in vivo*, що впливає на властивості поперечної релаксації, яка, як було показано, залежить від типу органу.

Було зроблено висновок, що суттєві відмінності феритину в розчинах і тканинах пов'язані з кластеризацією білка в тканинах. Це не спостерігається в стійких водневих розчинах феритину та *in vivo* залежить від типу органу.

При дослідженні кривих намагніченості, було виявлено, що кожне ядро феритину має невеликий вектор намагніченості ($\sim 300 \mu_B$). Взагалі магнітні властивості антиферомагнітної частинки залежать від її фізичних параметрів: розмір, орієнтація кристалу, число некомпенсованих спінів і т.д.

Внаслідок проведених досліджень вчені зробили висновок, що з підвищенням кількості магнітних носіїв в тканини її магнітна сприйнятливості не є співрозмірною з такою ж для звичайного вмісту в ній заліза.

Метод спектроскопії електронного спінового резонансу дає можливість досліджувати магнітні властивості феритину завдяки тому, що інтегральна інтенсивність сигналу ЕСР пропорційна кількості магнітних моментів (магнітній сприйнятливості) ядер феритину.

Метою нашої роботи було дослідження залежності форми та положення резонансних ліній спектрів ЕСР феритину від температури в діапазоні температур 105-313K для виявлення типу магнітного упорядкування феритину в зразках крові, клітин та плацентарного феритину.

Матеріали та методи

Для дослідження температурних залежностей інтегральної інтенсивності спектрів ЕСР феритину в якості досліджуваних зразків було обрано кров пацієнтів, хворих на діабет, суспензію клітин мозку новонароджених шурів, ізолюваний феритин плаценти людини. Досліджувані зразки були негайно заморожені в рідкому азоті з метою збереження нативної структури агрегатів феритину та ліофільно висушені з метою проведення ЕСР вимірів в діапазоні температур 105 – 313 K.

ЕСР спектри були зареєстровані за допомогою ЕСР спектрометра ESR-10 mini spectrometer (St. Petersburg Instruments, Ст.-Петербург, Росія).

Результати та обговорення

Останнім часом зростають спроби дослідження хімічного утворення запасів заліза в тканинах при надлишку в них заліза, особливо за допомогою ефектів Мессбауера та ЕСР спектроскопії [10]. Встановлено, що залізовмісне депо складається з наночастинок оксигідроксиду заліза в білковій оболонці, хоча їх структура та склад, які точно не були охарактеризовані, сильно залежать від типу патології та зразків тканин тварин. Нещодавно було проведено

виміри динамічної початкової магнітної сприйнятливості. Очевидно, що дуже важко виконувати систематичну характеристику тканин людини, і тому зазвичай, досліджують моделі перевантаження залізом тканин тварин [11, 12].

Завдяки своїй структурі, феритин поводить себе як суперпарамагнетик, у якого одиничний момент (однієї частинки) виникає за рахунок неповної компенсації антиферомагнітних спінів. З експериментів із сприйнятливості було показано, що такий феритин має ефективний момент (на один іон заліза) $3,4 \mu_B$. У той час як гемосидерин може проявляти як парамагнітні, так і суперпарамагнітні властивості [3]. Месбауерівські спектри ізольованого феритину та тканин, які його містять, трактують як спектри суперпарамагнетиків [3].

При дослідженні суспензій феритину *in vitro* на різних стадіях насичення залізом за допомогою ЕСР було виявлено вузьку резонансну лінію при $g=4,3$, яка була віднесена до ізольованих атомів високоспінового заліза (III), зв'язаних з білковою оболонкою. Дослідження суспензій феритину кінської селезінки при більшому насиченні залізом виявило наявність двох широких спектральних ліній з $g=2$ та $g=4$ [13]. Останню пов'язували з резонансом антиферомагнітно впорядкованих іонів заліза в ядрі. Широка низькопольова компонента інтенсивніша при високому ступені насичення ядра залізом і, вважається, може бути віднесена до магнітно – упорядкованої системи, якій притаманний слабкий феромагнетизм.

В наших дослідженнях залежностей інтегральної інтенсивності спектрів ЕСР феритину крові та плаценти від температури виявлено наявність двох широких спектральних ліній в області $g=2$ та $g=4$. Як бачимо, інтегральна інтенсивність низькопольової компоненти спектру феритину крові різко зменшується, починаючи з температури 105 К, та зникає при $T=173$ К (рис. 1) (у випадку плацентарного феритину низькопольова компонента ($g=4$) спектру присутня в діапазоні температур 123-195 К). Це може свідчити про зміну характеру магнітного упорядкування в ядрі феритину, насиченого залізом.

Було також отримано залежність спектрів ЕСР суспензії клітин мозку новонароджених щурів від температури. Було виявлено, що спектр ЕСР складається лише з однієї – високопольової ($g=2$) компоненти. Це підтвердило наше припущення про відсутність зміни характеру упорядкування феритинових ядер.

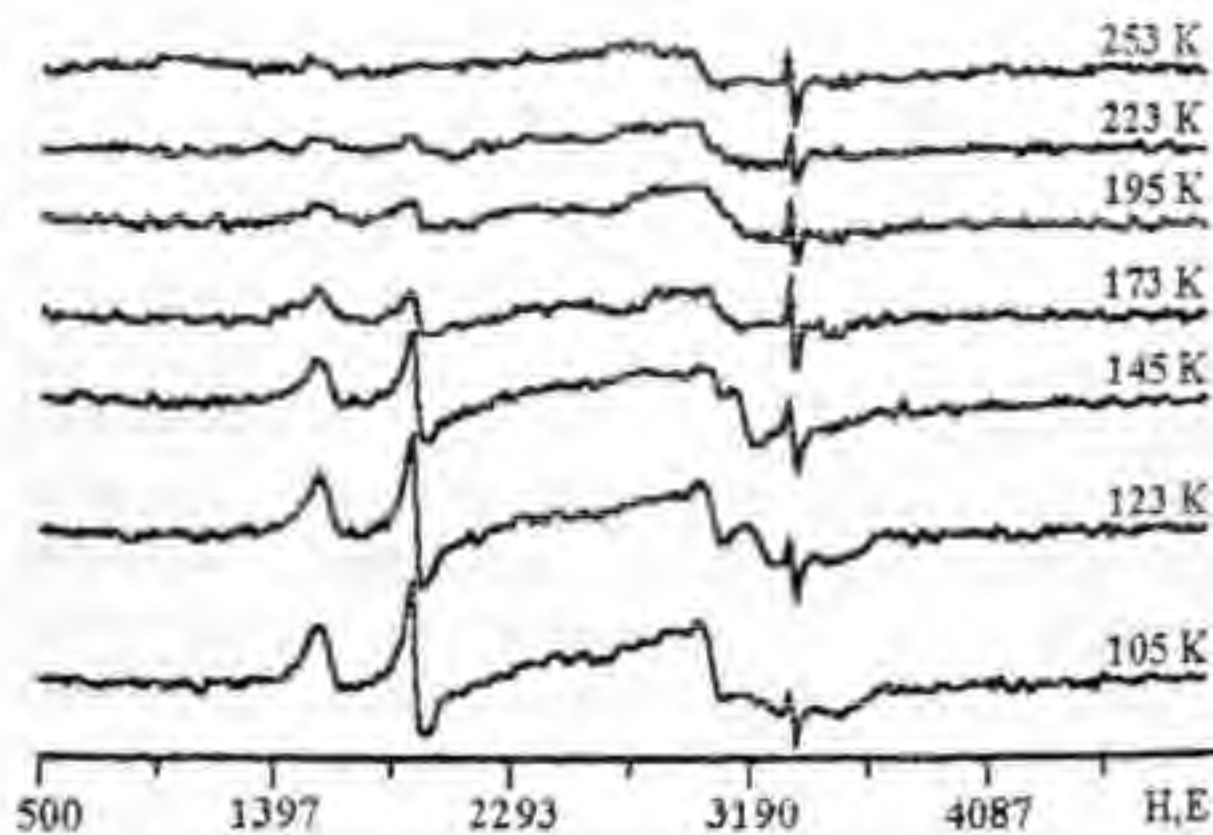


Рис. 1. Спектри ЕСР феритину крові в діапазоні температур 105 – 253 К, НВ-частота 9,30 ГГц, мікрохвильова потужність 20 мВт, амплітуда модуляції 10 Е.

Гіллес і співробітники [14] провели експеримент по вимірюванню намагніченості і магнітної сприйнятливості антиферомагнітних частинок феритину в температурному діапазоні 2,5 – 250 К при магнітному полі 30×10^4 Е. Отримавши криві для намагніченості і магнітної сприйнятливості, побудували квадратичну їх залежність від температури для оцінки температури Нееля. Таким чином, отримали температуру Нееля $T_N=500$ К. Було виявлено, що крива намагніченості відповідає суперферомагнетизму, передбачену в 1961 році Неелем, що характеризується зростанням антиферомагнітної сприйнятливості малих частинок навіть з парним числом ретикулярних взаємодіючих граней.

Початкова комплексна магнітна сприйнятливість за даними авторів [11] є сумою парамагнітної, суперпарамагнітної, сприйнятливості магнітних наночастинок, антиферомагнітної сприйнятливості матеріалу та сумою всіх діамагнітних внесків. За допомогою метода ЕСР ми маємо можливість вимірювати дві складові цього рівняння, а саме: парамагнітну сприйнятливість та суперпарамагнітну сприйнятливість магнітних наночастинок завдяки тому, що поглинута зразком потужність за рахунок енергії високочастотного поля при магнітному резонансі (інтегральна інтенсивність спектру ЕСР), пропорційна магнітній сприйнятливості цієї системи. Тому, вимірявши інтегральну інтенсивність спектру ЕСР, ми можемо побудувати графічні залежності магнітної сприйнятливості від температури.

Температурні залежності інтегральної інтенсивності спектрів ЕСР феритину крові, клітин та плаценти наведені на рис. 2, 3, 4.

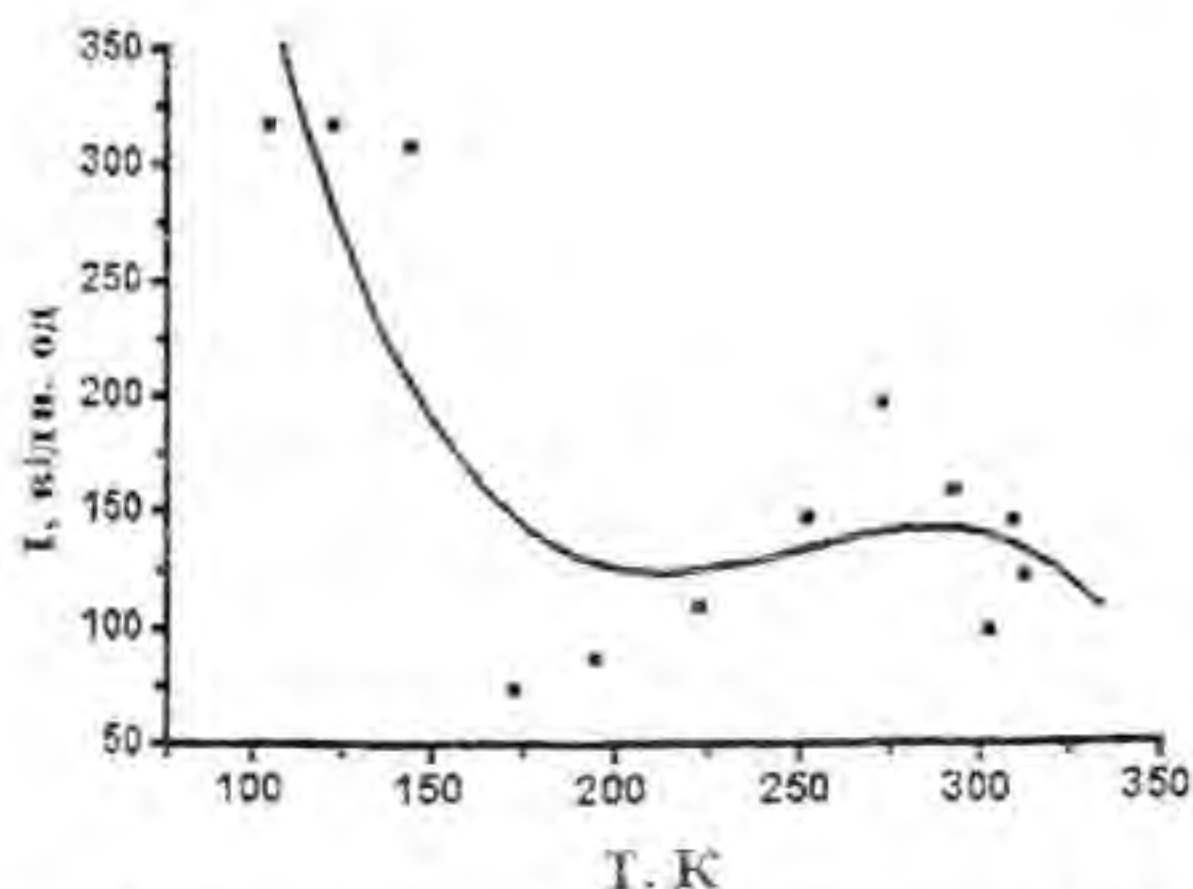


Рис. 2. Температурна залежність інтегральної інтенсивності ЕСР спектру феритину крові пацієнта. Температурний діапазон: 105 – 313 К, НВ-частота 9.30 ГГц, мікрохвильова потужність 20 мВт, амплітуда модуляції 10 Е.

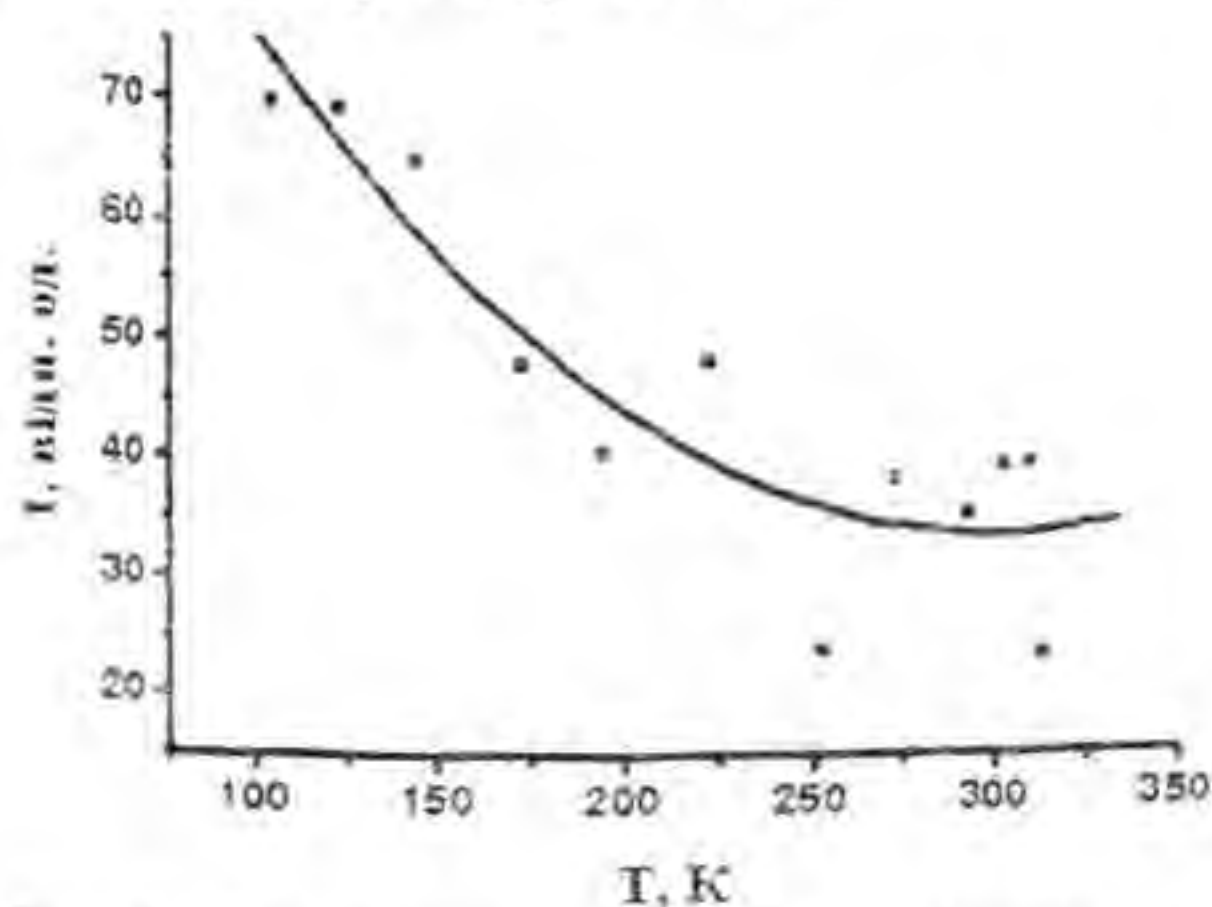


Рис. 3. Температурна залежність інтегральної інтенсивності ЕСР спектру феритину суспензії клітин мозку. Температурний діапазон: 105 – 313 К, НВ-частота 9.30 ГГц, мікрохвильова потужність 20 мВт, амплітуда модуляції 10 Е.

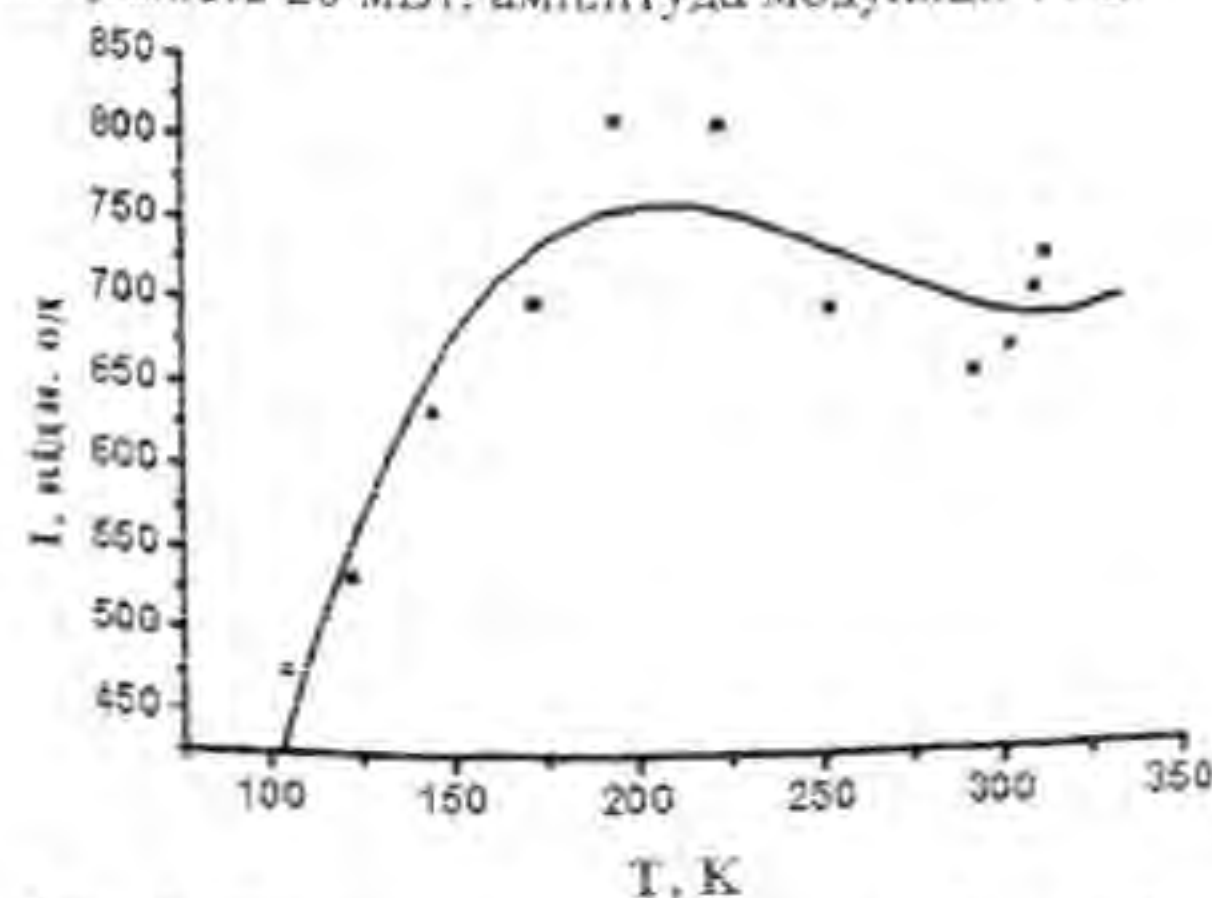


Рис. 4. Температурна залежність інтегральної інтенсивності ЕСР спектру плацентарного феритину. Температурний діапазон: 105 – 313 К, НВ-частота 9.30 ГГц, мікрохвильова потужність 20 мВт, амплітуда модуляції 10 Е.

Порівнявши температурні залежності інтегральної інтенсивності ЕСР спектрів досліджуваних зразків від температури, можна зробити наступні припущення. Температурна залежність інтегральної інтенсивності спектру феритину крові (рис. 2) є характерною для парамагнетика, що переходить в антиферомагнітний стан при $T = T_N$.

Малонасиченому залізом феритину, який міститься в суспензії клітин, не властивий перехід в упорядкований стан. Така залежність дає змогу віднести досліджуваний зразок до класу парамагнетиків.

Температурна залежність інтегральної інтенсивності спектру плацентарного феритину відповідає такій для полікристалічного антиферомагнетика.

Отже, в результаті проведених експериментальних досліджень було встановлено, що відсутність низькопольової компоненти в спектрі ЕСР малонасиченого залізом зразка клітин мозку та відповідність його температурної залежності закону Кюри-Вейсса вказує на парамагнітне упорядкування ядер феритину.

ЕСР спектр високонасиченого зразка плацентарного феритину містить низькопольову компоненту в діапазоні температур 123-195 К. Температурна залежність магнітної сприйнятливості цього зразка відповідає антиферомагнітному упорядкуванню.

Температура, при якій можливе магнітне упорядкування залежить від вмісту заліза в ядрі феритину.

Список використаних джерел

1. Crichton R.R. and Ward R.J. Structure and molecular biology of iron – binding proteins and regulation of free iron pools. In: Iron and human diseases. – Boca Raton, USA: CRC Press, 1992. – P. 40 – 63.
2. Dobson J. Nanoscale biogenic iron oxides and neurodegenerative disease // FEBS Letters. – 2001. – 496. – P. 1 – 5.
3. P. Allen and T. St. Pierre. Magnetic properties of iron oxides in the protein ferritin // J. Biochim. Biophys. Acta. – 2000. – 1500. – P. 186.
4. Hilty S., Webb B., Frankel L. B. et al. Iron core formation in horse spleen ferritin // J. Inorg. Biochem. – 1994. – 56. – P. 173 – 182.
5. Shi J., Gider S., Babcock K. et al. Magnetic clusters in molecular beams, metals, and

- semiconductors // *Science*. – 1996. – 271. – P. 937 – 941.
6. Михайлик О.М., Панкратов Ю.В., Разумов О.М. та ін. Магнітні властивості білків, що запасують залізо в тканинах, за даними ЕСР та месбауерівської спектроскопії // *Доповіді НАНУ*. – 2003. – 10. – С. 179 – 186.
 7. Hilty S., Webb B., Frankel L. B. et. al. Iron core formation in horse spleen ferritin // *J. Inorg. Biochem.* – 1994. – 56. – P. 173 – 182.
 8. Shi J., Gider S., Babcock K. et. al. Magnetic clusters in molecular beams, metals, and semiconductors // *Science*. – 1996. – 271. – P. 937 – 941.
 9. Y. Gossuin, R. N. Muller, P. Gillis et. al. Relaxivities of human liver and spleen ferritin // *J. MRI*. – 2005. – 23. – P. 1001-1004.
 10. F. J. Lazaro, L. Gutierrez, Ana R. Abadia, et. al. Biological tissue magnetism in the frame of iron overload diseases // *JMMM*. – 2007. – 316. – P.126-131.
 11. F. J. Lazaro, L. Gutierrez, A. R. Abadia et. al. Bioinorganic transformations of liver iron deposits observed by tissue magnetic characterisation in a rat model // *J. Inorg. Biochem.* – 2006. – 100. – P. 1790 - 1799.
 12. Francisco J. Lazaro, Lucia Gutierrez, Ana R. Abadia, et. al. Magnetic characterisation of rat muscle tissues after subcutaneous iron dextran injection// *J. Biochem. Biophys. Acta*. – 2005. – 1740. – P. 434-445.
 13. Boas J. F., Troup G. J. Electron spin resonance and Mössbauer effect studies of ferritin // *J. Biochim. Biophys. Acta*. – 1985. – 828. – P. 298 – 305.
 14. C. Gilles, P. Bonville, H. Rakoto, et. al. Magnetic hysteresis and superantiferromagnetism in ferritin nanoparticles // *JMMM*. – 2002. – 241. – P. 430-440.

Надійшла до редколегії 07.12.2007

УДК 621.386.834; 622.383

Бунак С.В., аспірант, Ільченко В.В., кандидат
фіз.-мат. наук, доцент, Окоронко О.М.,
студент, Шкавро А.Г., кандидат фіз.-мат.
наук, доцент

Проста реалізація методу підрахунку фотонів для дослідження спектрів поверхневобар'єрних наногетеро- структур

Розроблено та реалізовано простий
метод підрахунку фотонів для застосування в
автоматизованій установці дослідження
спектрів фото – та електролюмінесценції
напівпровідників та напівпровідникових
структур. Метод заснований на програмному
аналізі імпульсів струму фотоелектронного
помножувача, виміряних за допомогою
швидкодіючого аналого-цифрового перетво-
рювача, та забезпечує достатньо високу
чутливість без застосування не-
стандартизованого обладнання. Розроблене
програмне забезпечення дозволяє проводити
вимірювання інтенсивності одночасно
методом підрахунку фотонів та методом
середнього струму.

Ключові слова: фотоелектронний
помножувач, метод підрахунку фотонів,
наногетероструктура, квантова яма.

Bunak S.V., post. grad. stud., Ilchenko V.V.,
Ph.D., Okoronko O.M., stud., Shkavro A.G.,
Ph.D.

The simple accomplishment of the method of photons counting for the surface-barrier nanoheterostructures

There was designed and accomplished the
simple method of photons counting for their
utilization in automatic setup for the photo- and
electro- luminescence spectrums of
semiconductors and semiconductors structures
investigation. The method was based on the
program analysis of the current pulses of the
photomultiplier measured by means of fast-acting
analog-digital converter. This method can provide
sufficiently increased sensitivity without any
supplementary nonstandard instruments use. The
software designed here is capable to perform the
intensity measurements by method of the photons
counting and method of the average current
simultaneously.

Key Words: photomultiplier, method of
photons counting, nanoheterostructure, quantum
well.

E-mail: shkavro@univ.kiev.ua

Вступ. Одним з основних приймачів
оптичного випромінювання, що застосовуються у
приладах фотоспектроскопії та фотометрії, є
фотоелектронний помножувач (ФЕП). Він
працює на основі зовнішнього фотоефекту. На
відміну від звичайного вакуумного фотодіода
імпульс струму, який виникає внаслідок
фотоemisії електрона, підсилюється у ФЕП в
 10^3 – 10^4 разів, що цілком достатньо для його
реєстрації. Квантова ефективність (відношення
числа народжених фотоелектронів до числа
квантів, що впали на фотоприймач) для ФЕП
становить близько 10%. Останнім часом в якості
фотоприймачів досить часто використовуються
ПЗЗ матриці, які мають більш високу квантову
ефективність та володіють координатною
чутливістю. Однак незаперечною перевагою
ФЕП є великий динамічний діапазон, висока

часова роздільна здатність та краща, ніж у ПЗЗ,
чутливість у короткохвильовій області. [1]

Існує два методи вимірювання сигналу з
ФЕП: метод середнього струму та метод
підрахунку фотонів. [2] Метод підрахунку
фотонів дає кращу чутливість та лінійність, але
вимагає додаткового обладнання, яке
вітчизняною промисловістю серійно не
випускається. Тому розробкою, налагодженням
та впровадженням такого обладнання займається
сам експериментатор. Крім того, відмінність
апаратної реалізації методу вимірювання
середнього струму та методу підрахунку фотонів
не дозволяє швидко переходити від одного
методу до іншого.

Метою даної роботи була розробка простої
реалізації методу підрахунку фотонів без
використання не стандартизованої апаратури.

Аналіз методів вимірювання інтенсивності випромінювання за допомогою ФЕП.

Будову, принцип дії та схему включення ФЕП розглянемо на прикладі одного з найбільш широко застосованих приладів — ФЕП-79 (рис. 1).

Фотоелектронний помножувач складається з фотокатоду, катодної камери (Д), динодної системи (Д1÷Д11) та аноду, розміщених

у середині вакуумного об'єму. Живлення ФЕП здійснюється від стабілізованого джерела високої напруги $U = -(1 \div 2) \text{ кВ}$ через резисторний подільник $R1 \div R13$ (рис. 1). Зазвичай резистори подільника вибираються однаковими, а його загальний опір становить $2 \div 10 \text{ МОм}$. Світловий потік Φ поглинається фотокатодом, який за рахунок фотоэффекту емітує у вакуум електрони.

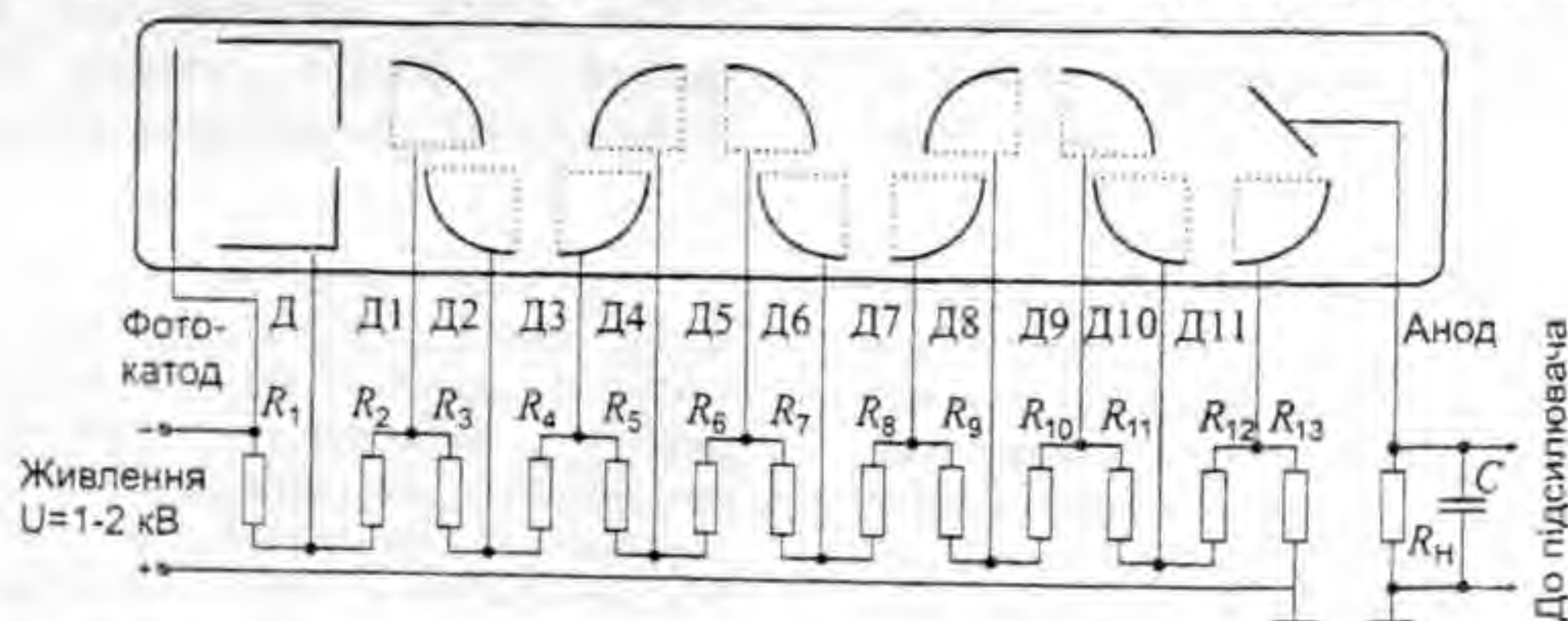


Рис. 1 Конструкція та типова схема включення ФЕП-79

В електростатичному полі, створюваному електродами катодної камери, фотоелектрони прискорюються й фокусуються на перший динод (Д1). Прискорений фотоелектрон здатний вибити з поверхні диноду декілька (до 10) вторинних, повільних електронів. Вибиті з першого диноду вторинні електрони прискорюються й фокусуються на другий динод. Далі цей процес повторюється на всіх каскадах і з останнього диноду підсилений електронний потік збирається анодом. На аноді такий електронний потік створює імпульс струму, який реєструється шляхом вимірювання падіння напруги на резисторі навантаження R_H .

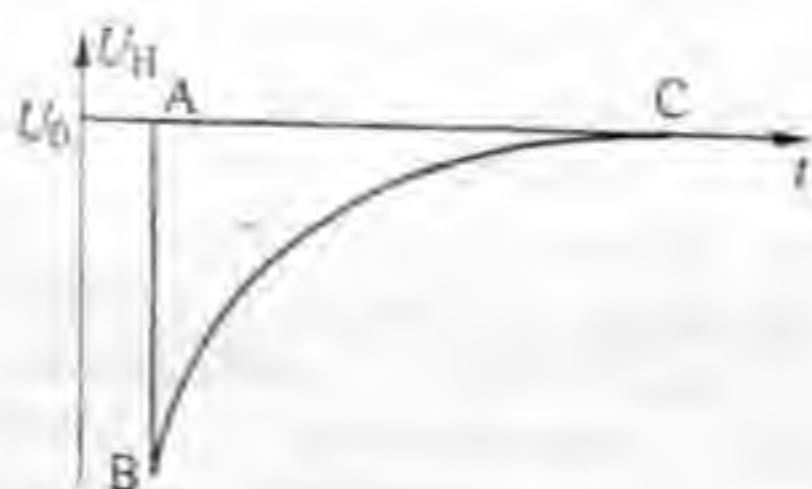


Рис. 2. Типова форма імпульсу напруги, що падає на резисторі навантаження R_H

На рис. 2 представлено типову форму імпульсу напруги, що падає на резисторі R_H . Тривалість імпульсу напруги залежить від сталої часу RC -кола, сформованого резистором R_H та ємністю C . Ємність C може бути як вхідною

ємністю реєструючого приладу, так і спеціально під'єднаною. Мінімально можливе значення тривалості імпульсу становить порядку декількох наносекунд і визначається тими процесами, які відбуваються в самому ФЕП.

Вибір методу реєстрації електричного сигналу з ФЕП залежить від інтенсивності світлового потоку.

При великій інтенсивності світла, коли середній інтервал часу між імпульсами фотоструму порівняний з їх тривалістю, більш зручним є метод середнього струму. У цьому методі використовують достатньо великі значення сталої часу RC і вимірювальна система інтегрує наявні на виході ФЕП імпульси напруги. Таким чином, вимірюється середнє значення кількості електрики, яка перенесена з динодів на анод за одиницю часу. Обмежень зверху на частоту надходження фотонів тут не виникає. В області слабких світлових потоків усереднення струму стає не ефективним, бо зменшується кількість фотонів, що потрапляють до ФЕП за одиницю часу.

За умови слабких світлових сигналів для їх реєстрації застосовується метод підрахунку фотонів. У цьому методі вимірюється не середнє значення струму, який тече з аноду, а кількість електричних імпульсів, спричинених фотоелектронами. Оскільки швидкість емісії фотоелектронів пропорційна інтенсивності світлового потоку, що падає на катод, а кожен

фотоелектрон спричиняє імпульс струму в опорі навантаження ФЕП, кількість цих імпульсів також буде пропорційною інтенсивності падаючого на катод світлового потоку.

За умови великої інтенсивності світлового потоку зростає ймовірність того, що двом фотонам на вході ФЕП відповідає один імпульс на виході. Це призводить до порушення лінійності залежності кількості імпульсів струму від кількості фотонів, що потрапили на катод ФЕП, а отже до необхідності робити відповідні поправки [3]. Однак заряд, що переноситься в імпульсі, який є результатом „злиття” двох імпульсів, буде приблизно вдвічі більше, ніж у випадку звичайного імпульсу, тому в області високої інтенсивності світлового потоку коректніше використовувати метод середнього струму. Для реалізації методу середнього струму опір навантаження R_H обирають достатньо великим, що дозволяє: по-перше, дістати достатньо велику амплітуду напруги при протіканні малих імпульсів струму i , по-друге, збільшити сталу часу $\tau = R_H C$, і тим самим покращити усереднення сигналу.

Для реалізації методу підрахунку фотонів, навпаки, R_H треба вибирати достатньо малим задля зменшення сталої часу τ , і, відповідно, зменшення ймовірності „злиття” імпульсів. Але в цьому випадку амплітуда імпульсів напруги на опорі навантаження виявляється недостатньою для їх безпосередньої реєстрації електронним лічильником. Тому імпульси напруги з опору навантаження R_H необхідно підсилювати за допомогою широкосмугового підсилювача. Але, крім імпульсів струму, спричинених фотоелектронами, на опорі навантаження спостерігаються „шумові” імпульси малої амплітуди. Заряд, який переноситься цими імпульсами, малий, і вони не дають суттєвого внеску в середній струм, але їх кількість, за умови малої інтенсивності світлового потоку, може виявитись порівняною з кількістю фотоімпульсів. Отже для забезпечення коректного підрахунку фотонів треба використати дискримінацію імпульсів за амплітудою.

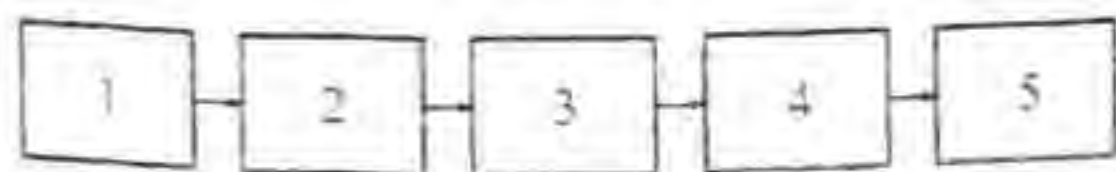


Рис. 3 Загальна блок-схема реалізації методу підрахунку фотонів: 1 — ФЕП; 2 — підсилювач; 3 — дискримінатор; 4 — лічильник; 5 — пристрій індикації.

Типова блок-схема реалізації методу підрахунку фотонів представлена на рис. 3.

Електричні імпульси з виходу ФЕП (1) підсилюються широкосмуговим підсилювачем (2), після чого потрапляють на дискримінатор (3). Дискримінатор аналізує імпульси за амплітудою і у разі перевищення заданого порогового значення формує на виході імпульс напруги заданої амплітуди. Кількість таких імпульсів напруги з виходу дискримінатора підраховується лічильником (3). Результат підрахунку за встановлений проміжок часу відображається пристроєм індикації (5).

Зазвичай підсилювач та дискримінатор виготовляють у виді єдиної схеми [4]. В якості резистора навантаження використовується вхідний опір підсилювача, який становить приблизно 50 Ом. Підсилювач підключається до ФЕП дуже коротким кабелем, або взагалі розміщується в одному з ним екрані. В останньому випадку зміна методу вимірювання серйозно ускладнюється. Часто, наприклад, для дослідження спектрів світловипромінюючих структур виникає необхідність вимірювань як в області великої інтенсивності, так і в області відносно малої інтенсивності світлового потоку. В таких випадках, окрім методу середнього струму, бажано мати і метод підрахунку фотонів, але виготовлення та налаштування складного підсилювача-дискримінатора не виправдане.

Опис експериментальної установки.

В даній роботі запропоновано та застосовано більш просту реалізацію методу підрахунку фотонів. Ця реалізація ґрунтується на програмній обробці оцифрованого сигналу з ФЕП. Блок-схема програмної реалізації методу підрахунку фотонів представлена на рис. 4.

Електричний сигнал з ФЕП (1), пройшовши підсилювач (2), вимірюється швидкодіючим АЦП (3). Результат вимірів з АЦП у вигляді часової послідовності значень напруги обробляється спеціальною програмою на комп'ютері (4).



Рис. 4. Блок-схема програмної реалізації методу підрахунку фотонів: 1 — ФЕП; 2 — підсилювач; 3 — швидкодіючий АЦП; 4 — програма обробки і підрахунку.

Для надійної ідентифікації фотоімпульсу необхідно, щоб його тривалість була приблизно

на порядок (мінімум у 4-5 разів) більша, ніж дискретність АЦП. Верхня межа тривалості імпульсу менш критична, головне, щоб зміна напруги за час дискретизації перевищувала рівень квантування АЦП. Тривалість фотоімпульсу по суті визначається сталою часу $R_H C$ - кола навантаження ФЕП. Тому значення опору R_H можна обирати достатньо великим, щоб збільшити тривалість електричного імпульсу, а разом із тим — збільшити його амплітуду.

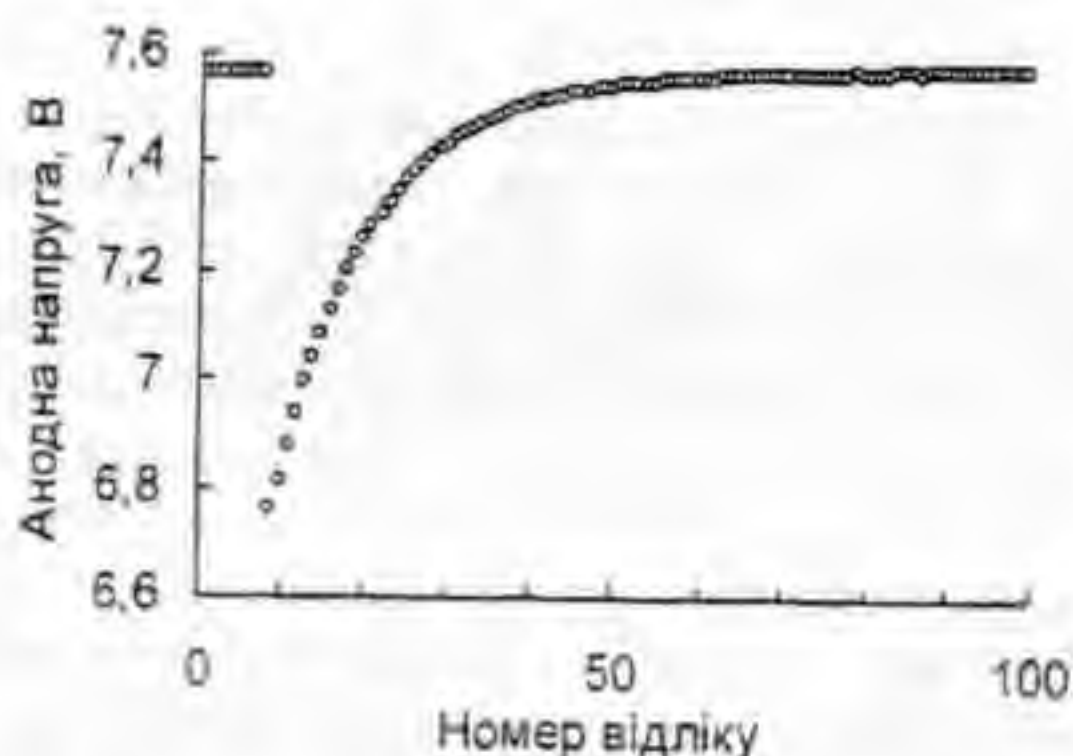


Рис. 5 Типовий електричний імпульс з ФЕП, виміряний АЦП плати NQDAC PCI 9112 з частотою 110 кГц.

В даній роботі використовується серійна плата фірми ADLINK Technology NQDAC PCI 9112, АЦП якої в режимі прямого доступу до пам'яті забезпечує вимірювання напруги з частотою 110 кГц. Для даної швидкодії АЦП цілком прийнятним значенням тривалості імпульсу напруги з ФЕП є 0,1 мс. На рис. 5 представлено типовий електричний імпульс з ФЕП, виміряний АЦП плати NQDAC PCI 9112. Частота вимірів АЦП — 110 кГц. Підсилення імпульсів — 20 Дб.

З графіку видно, що на один імпульс припадає не менше 25 відліків, що цілком достатньо для реєстрації імпульсу.

При вимірюванні електролюмінесценції на світловипромінюючу структуру (1) подається напруга з блоку живлення (6), керування яким здійснюється за допомогою аналогового сигналу від цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) з плати NQDAC PCI 9112 (9.2). Світло від об'єкту, пройшовши фокусуючу систему (2), монохроматор (3), потрапляє на вхід ФЕП (4). Програмне керування монохроматором здійснюється за допомогою плати ET 3401 фірми „Терекс” (9.1) та блоку керування

монохроматором (7). Електричні імпульси з ФЕП, пройшовши підсилювач (5), реєструються АЦП плати NQDAC PCI 9112. Виміри з АЦП обробляються програмою на ПК (9).

На рис. 6 наведена спрощена блок-схема автоматизованої установки вимірювання фото- та електролюмінесценції.

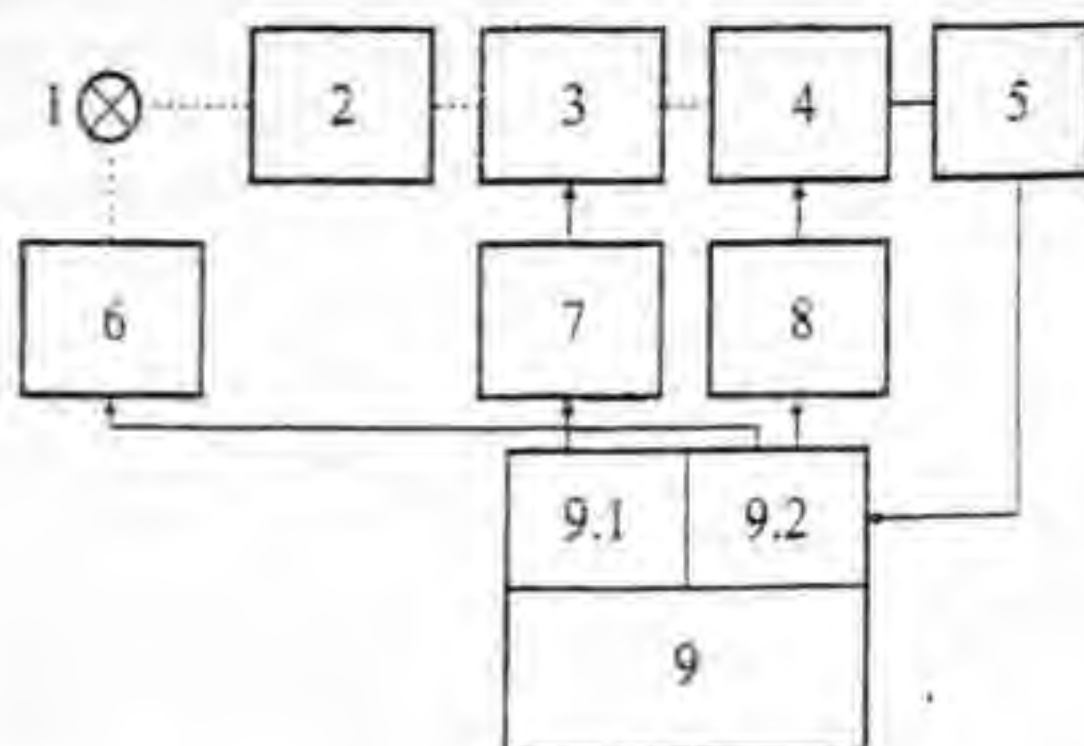


Рис. 6. Експериментальна установка вимірювання спектрів електролюмінесценції: 1 — зразок; 2 — фокусуюча система; 3 — монохроматор; 4 — ФЕП; 5 — підсилювач; 6 — джерело живлення зразка; 7 — блок керування монохроматором; 8 — блок термостабілізації ФЕП; 9 — комп'ютер; 9.1 — плата ET 3401; 9.2 — плата NQDAC PCI 9112.

Блок-схема програми, яка керує цією установкою та проводить виміри, представлена на рис. 7. Алгоритм підрахунку імпульсів ідентифікує імпульс за наявністю точки перегину на послідовності 5 вимірів. Тобто послідовно для кожної експериментальної точки перевіряється умова, відповідно до якої по дві сусідні точки ліворуч і праворуч повинні мати значення, більше за значення цієї точки. Якщо така умова виконується, то знайдена точка вважається вершиною імпульсу. Така реалізація алгоритму дає можливість розрізняти імпульси, які відстоять в часі один від одного не менше, ніж на 0,02 мс. За умови рівномірного надходження імпульсів алгоритм ефективно працює до значення швидкості надходження імпульсів 22000 імпульсів за секунду.

Як відзначалось вище, крім фото імпульсів, у ФЕП виникають і шумові імпульси, зокрема, обумовлені термоелектронною емісією, інтенсивність якої сильно залежить від температури. При тривалій роботі ФЕП розігрівається, в основному, через виділення Джоулевої теплоти у резисторах подільника напруги, що спричинює зростання рівня

тньогового сигналу. Тому, щоб зменшити вплив термоємисті ФЕП необхідно охолоджувати.



Рис. 7. Блок-схема програми для вимірювання спектральної залежності електролюмінесценції об'єкту методом підрахунку фотонів.

В даній установці застосовано програмно-керований блок термостабілізації (8), який підтримує температуру ФЕП на заданому рівні. При пониженні температури до 0°C рівень фонового сигналу спадає в десятки разів.

Для коректної роботи методу підрахунку фотонів в установці реалізовано програмну дискримінацію імпульсів за амплітудою. Критерій дискримінації обирається на основі аналізу експериментальної часової послідовності значень напруги на опорі навантаження та через

інтерфейс користувача записується як параметр програми. Для зручності точки, ідентифіковані програмою як вершини імпульсів, на залежності відмічаються кольоровим кружечком.

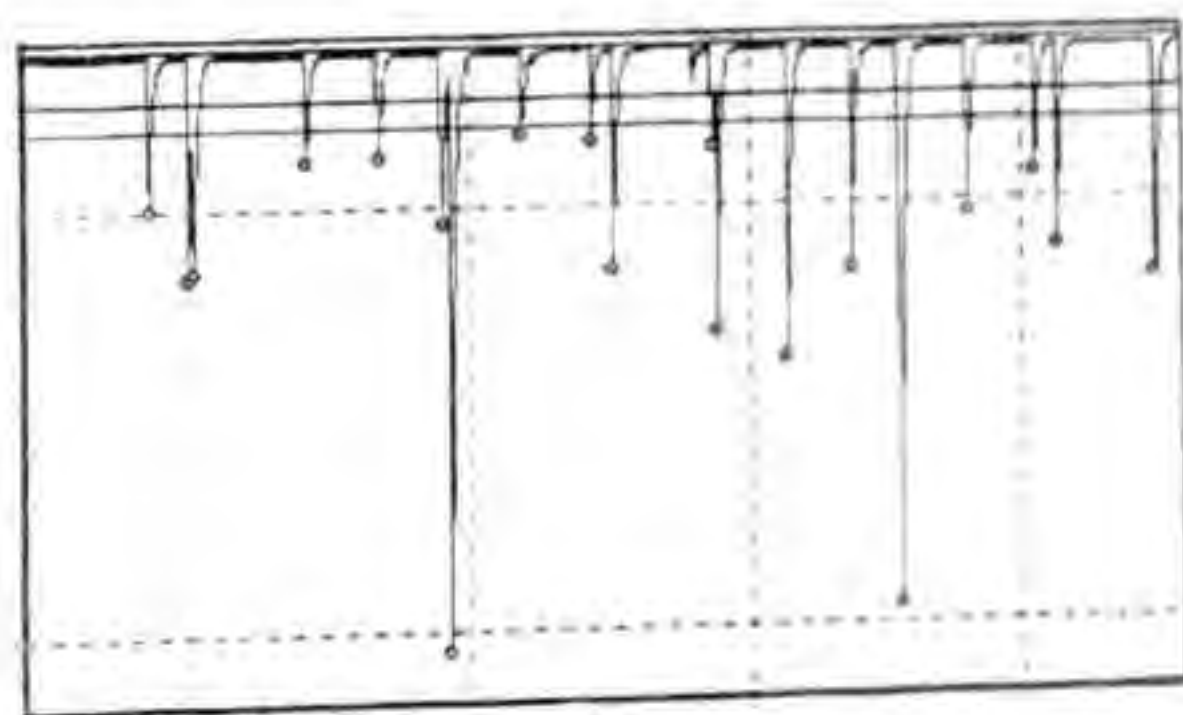


Рис. 8. Типова часова залежність напруги резистора навантаження ФЕП та опрацювання її за допомогою описаного алгоритму (точками позначені вершини опрацьованих імпульсів). Значення швидкості надходження імпульсів — 8000 імпульсів за секунду.

На рис. 8 представлено типову часову залежність падіння напруги на резисторі навантаження ФЕП та опрацювання її за допомогою описаного алгоритму (значення швидкості надходження імпульсів — 330 імпульсів за секунду). З графіку видно, що обрані значення параметрів алгоритму шліком реалізують покладену на нього функцію визначення та підрахунку імпульсів.

При вимірюванні спектральних характеристик випромінювання програма забезпечує послідовне налаштування монохроматора на чергове значення довжини хвилі, прикладання заданої напруги зміщення на світловипромінюючу структуру, вимірювання інтенсивності світлового потоку методом підрахунку фотонів. Для підвищення точності значення інтенсивності визначається шляхом усереднення по заданій кількості спостережень. Результати вимірювань записуються у файл та відображаються у графічному виді на екрані монітору. Паралельно з обробкою часової послідовності значень напруги на резисторі навантаження за описаним вище алгоритмом проводиться її інтегрування, що забезпечує реалізацію методу середнього струму. Результати цієї обробки також записуються у файл та відображаються на моніторі у графічному виді. Таким чином, установка забезпечує вимірювання інтенсивності світлового потоку одночасно двома методами: методом середнього струму та

методом підрахунку фотонів. В програмі також передбачено можливість проведення вимірювання та відображення на моніторі значень інтенсивності фону — значень сигналу від ФЕП за умови, коли напруга зміщення на структуру не подається (на рисунку не наведені).

Експериментальне дослідження спектру випромінювання наногетероструктур GaN/InGaN.

На рис. 9 наведено нормовані спектри електролюмінесценції $p-i-n$ - структур на основі GaN з квантовими InGaN ямами, виміряні за допомогою описаної вище установки методом підрахунку фотонів та методом середнього струму. Вибір даного типу структур для проведення досліджень був спричинений тим, що спектри електролюмінесценції для таких наноб'єктів, якими є квантові ями, можуть дуже суттєво залежати від величини струмів інжекції та, відповідно, суттєвої зміни заселення квантових рівнів в квантових ямах. При цьому може суттєво змінюватись сама форма спектрів. Така особливість спектрів наногетероструктур висуває найбільш жорсткі вимоги як до динамічного діапазону, в якому повинна реєструватися інтенсивність люмінесцентного випромінювання, так і до співвідношення сигнал-шум. Саме за таких умов для забезпечення достовірності експериментальних результатів виникає необхідність проводити виміри спектрів електролюмінесценції одночасно обома описаними вище методами та порівнювати отримані результати між собою.

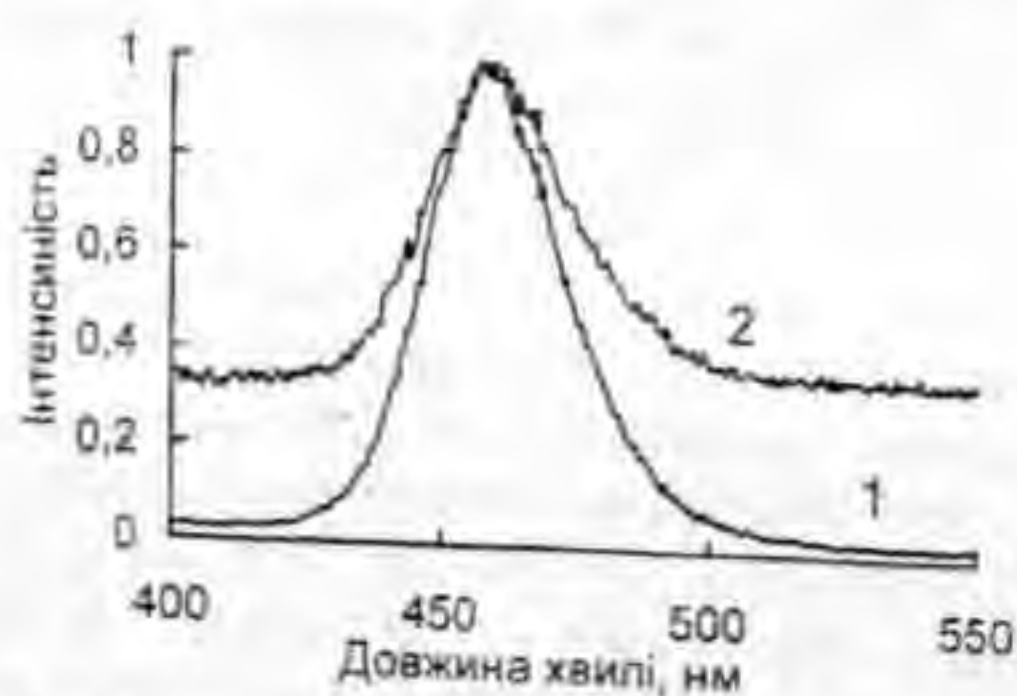


Рис. 9. Спектри електролюмінесценції структур GaN/InGaN при напрузі зміщення 3 В, виміряні методом підрахунку фотонів — крива (1) та методом середнього струму — крива (2).

З рис. 9 видно, що в області відносно малої інтенсивності випромінювання метод середнього струму дає завищені значення інтенсивності. Це обумовлено вищим рівнем фонового сигналу, у якому, як відзначалось вище, враховано внесок імпульсів струму, що не були спричинені фотоелектронами, вибитими з катоду. В області середніх значень інтенсивності випромінювання метод підрахунку фотонів та метод середнього струму дають практично однакові значення. Експериментально показано, що ці результати також добре співпадають з результатами, отриманими методом фізичного усереднення сигналу ФЕП.

Висновки.

В даній роботі застосовано програмну обробку сигналу фотоелектронного помножувача, яка дозволила без додаткових витрат реалізувати одночасно метод підрахунку фотонів та метод середнього струму. Ці методи застосовані в автоматизованій установці для дослідження спектрів електролюмінесценції наногетероструктур з квантовими ямами. Встановлено, що в області малої інтенсивності світлового потоку метод підрахунку фотонів забезпечує більш високу чутливість та точність вимірювання, достатні для дослідження спектрів світловипромінюючих структур.

Дана робота була виконана за підтримки Україно-Російської наукової програми „Нанофізика та Наноелектроніка” грант МОНУ М/175-2007р.

Список використаних джерел

1. Мартынов Д.Я. Курс практической Астрофизики. М.: Наука. 1977. с.230-263.
2. Young A.T. Photomultipliers, in: Methods of Experimental Physics. V.12, Part A. NY.: Acad Press. 1974.
3. В. Корнилов и А. Крылов. Четырёхканальный спектроанализатор для исследования яркости звезд// Астрон. Ж., 1991, Т.67.

Надійшла до редколегії 20.12.07

УДК 621.385.833

Коваль І.П., канд.ф.-м.н., доцент, Ленъ Ю.А.,
провідний інженер, Находкін М.Г., д.ф.-м.н.,
проф., академік НАН України.

Початкові стадії взаємодії молекулярного кисню з поверхнею Si(001), вкритою субмоношаром хрому

В даній роботі проведено дослідження
взаємодії молекулярного кисню з поверхнею
кремнію вкритою субмоношаровим
покриттям Cr в діапазоні експозицій O_2 від
1 до 10^3 Л при кімнатній температурі за
допомогою методів електронної оже-
спектроскопії та іонізаційної
спектроскопії.

Ключові слова: кремній, хром, окислення.

e-mail: len@mail.univ.kiev.ua

Вступ

Надтонкий термічний оксид на Si все ще
залишається матеріалом, який найбільш широко
використовується як затворний діелектрик в
інтегральних схемах із ступенем інтеграції вище
надвисокої. Із напівпровідників, які широко
використовуються в сучасній електроніці, тільки
кремній має хімічно стабільний і структурно
щільний власний оксид SiO_2 . В свій час саме
відпрацювання надійного технологічного
процесу нанесення шарів SiO_2 на поверхню
кремнію дало поштовх до розвитку планарної
технології, яка є основою при створенні сучасних
інтегральних мікросхем.

Одним з найбільш розповсюджених методів
отримання оксиду кремнію є так зване термічне
окислення, що протікає при температурі в
інтервалі 900-1200°C. Але існує також і інший
спосіб отримання SiO_2 , який не потребує
застосування високих температур і
характеризується тим, що оксид утворюється
безпосередньо при кімнатній температурі.
Зокрема, дослідження проведені авторами [1]
експериментально показали, що германій
стимулює процеси окислення кремнію і
накопичення кисню відбувається набагато
швидше ніж на чистому кремнії. Головну роль в
цьому процесі відіграють поверхневі
напруження, що призводять до стимуляції
процесів окислення кремнію. Тому все ще
важливим з технічної і наукової точок зору є

Koval I.F., Ph.D., docent, Len Yu.A., engineer,
Nakhodkin M.G., Dr. Sci., Professor, Academician
of NAS of Ukraine.

Initial stages of molecular oxygen interaction with Si (001) surface covered with chromium submonolayers

The investigation of the molecular oxygen
interaction with Si(001) surface with the pre-
adsorbed submonolayer coverages of chromium at
exposures from 1 to 10^3 L (Langmuir) at room
temperature have been made by the methods of
Auger Electron Spectroscopy and Ionization Loss
Spectroscopy.

Key words: silicon, chromium, oxidation.

вивчення поверхневої реакції кисню з
напівпровідниковими матеріалами.

В даній роботі проведено дослідження
взаємодії молекулярного кисню з поверхнею
кремнію вкритою субмоношаровим покриттям Cr
в діапазоні експозицій O_2 від 1 до 10^3 Л (1Л = 10^{-6}
мм рт.ст.с) при кімнатній температурі за
допомогою методів електронної оже-
спектроскопії та іонізаційної спектроскопії.
Систему типу Cr/Si було вибрано як об'єкт
дослідження через те, що вона характеризується
низкою цікавих властивостей. Такий сплав є
напівпровідником, на відміну від більшості
подібних з'єднань, що проявляють металічні
властивості. Дані матеріали характеризуються
узгодженістю з кремнієвою технологією,
високою термічною та хімічною стабільністю.

Слід також зазначити що про взаємодію
системи Cr/Si з молекулярним киснем до цього
часу отримано дуже мало інформації, тому існує
потреба в розширенні знань про кінетику даного
процесу.

Методика досліджень

Експериментальні дослідження виконувались
у робочій камері надвисоковакуумної установки з
безмасляною відкачкою, яка виготовлена на базі

серійного оже-спектрометра 09ИОС-2, з базовим тиском $5 \cdot 10^{-10}$ Торр. Контроль за складом атмосфери залишкових газів та чистотою кисню та аргону, які напускалися в процесі експериментів в робочу камеру надвисоковакуумної установки здійснювався за допомогою квадрупольного мас-спектрометра MS-7303.

Для запобігання появи біля зразка неконтрольованих потоків іонів та збуджених атомів кисню при проведенні експозицій в кисні вимикались нитки розжарювання іонізаційного манометра, електронної гармати, мас-спектрометра тощо.

При проведенні досліджень як підкладка використовувався зразок кремній р-типу, легований бором, з питомим опором $10 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ і розмірами $5 \times 30 \times 0,3 \text{ мм}^3$. Зразки Si(001) вирізали із пластини Si і після хімічної обробки встановлювали у вакуумну камеру. Відсутність забруднень на поверхні контролювали методом електронної оже-спектроскопії. Очищення поверхні зразка від поверхневих плівок здійснювалась шляхом іонного розпорошення пучком іонів аргону з енергією 1 кеВ і дозами $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ з наступним високотемпературним відпалом методом спалаху, коли температура раптово піднімалась до 1200°C , а далі з інтервалом 5 хв знижувалась на 100°C до 700°C і потім поступово до кімнатної.

Хром наносився на поверхню Si(001) методом термічного напилення із прямонакального джерела.

Результати і їх обговорення

В роботі проведено порівняння взаємодії молекулярного кисню з вкритою моношаровим ($1,0 \text{ МШ}$) покриттям Cr та чистою поверхнею кремнію при експозиціях в молекулярному кисні від $0,5$ до 10^3 Л при кімнатній температурі за допомогою методів електронної оже-спектроскопії та іонізаційної спектроскопії.

Залежність відношення інтенсивностей оже-ліній кисню і кремнію ($I_{\text{OKLL}}/I_{\text{SiLVV}}$) від експозиції в молекулярному кисні моношарового покриття хрому на кремнії та чистій поверхні Si(001) наведено на рис. 1 в логарифмічному масштабі. З рисунку видно, що накопичення кисню на поверхні кремнію, вкритою моношаровим покриттям хрому відбувається на декілька порядків величини швидше порівняно з чистою поверхнею кремнію Si(001).

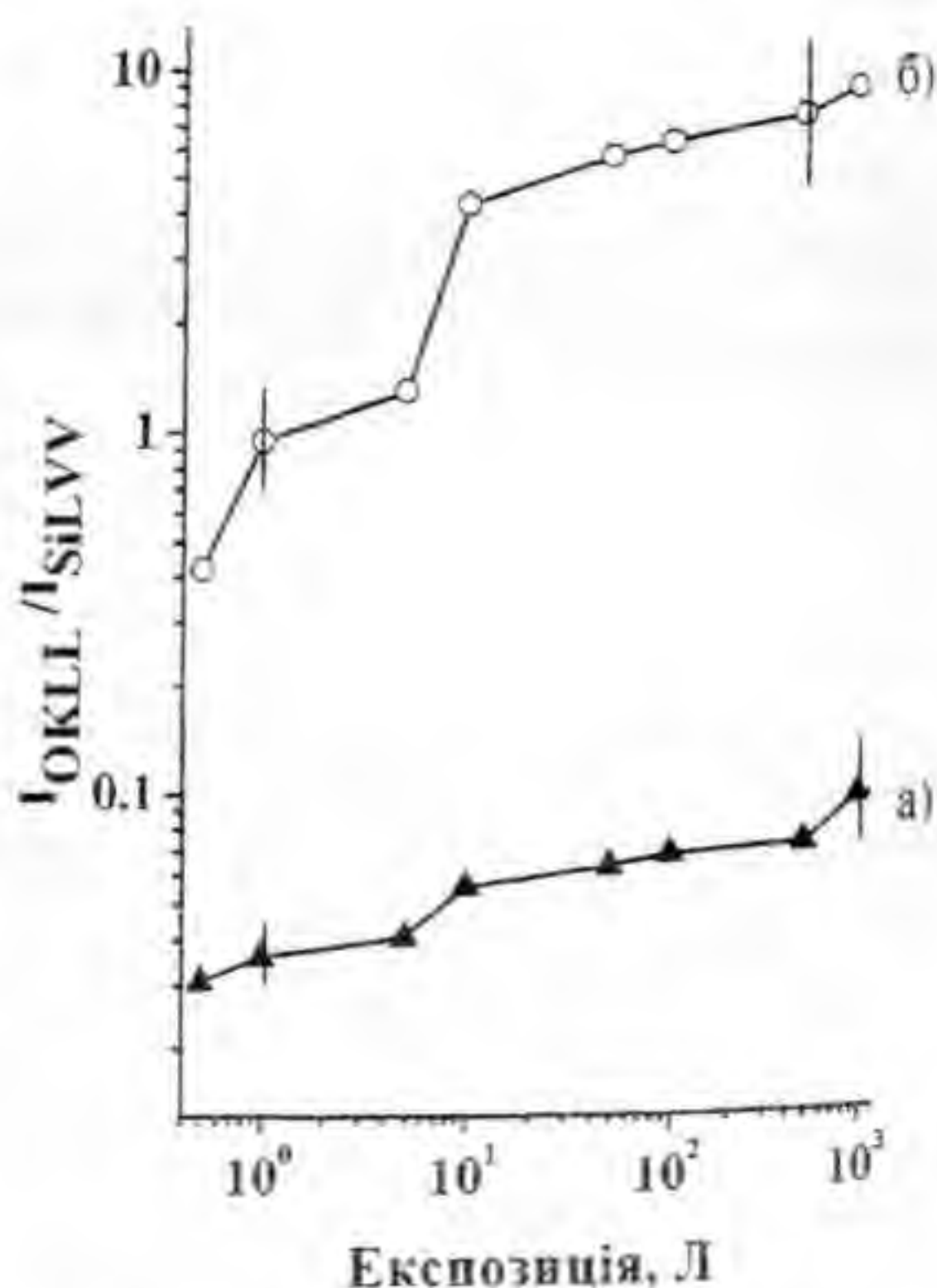


Рис. 1 Залежність відношення інтенсивностей оже-ліній $I_{\text{OKLL}}/I_{\text{SiLVV}}$ від експозиції в O_2 в логарифмічному масштабі а) - чиста поверхня Si(001), б) - чиста поверхня Si(001), вкрита моношаровим покриттям хрому.

На рис. 2 наведено ділянки $dN(E)/dE$ іонізаційних спектрів з $L_{2,3}$ лінією кремнію для чистої поверхні Si(001) (а), кремнію під моношаровим покриттям хрому, напиленим при кімнатній температурі (б) і кремнію під моношаровим покриттям хрому після експозицій $0,5 \text{ Л} \div 10 \text{ Л}$ (в-д) в молекулярному кисні відповідно.

Звертає на себе увагу факт надзвичайно швидкого утворення шару оксиду на поверхні кремнію під моношаровим покриттям хрому. Формування шару діоксиду кремнію товщиною, що перевершує $0,5 \div 0,6 \text{ нм}$ в атмосфері молекулярного кисню при кімнатній температурі практично завершується при експозиціях 10 Л , що менше принаймні на 5 порядків [2], ніж необхідна експозиція для чистої поверхні кремнію. Схожий результат, але в менш контрольованих умовах, отримано нещодавно в роботі [3].

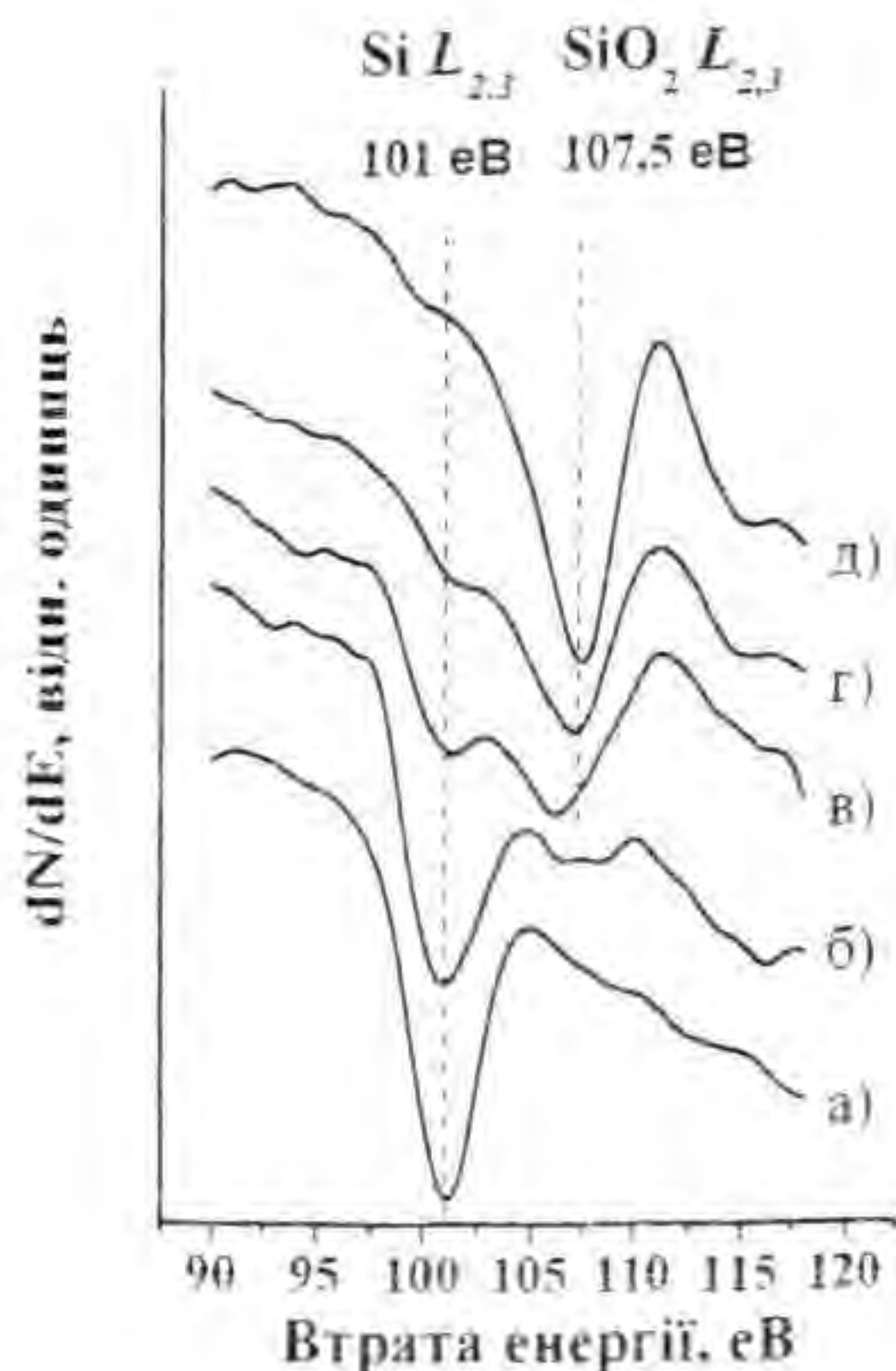


Рис.2 Ділянки $dN(E)/dE$ іонізаційних спектрів з $L_{2,3}$ лінією кремнію для чистої поверхні Si(001) (а), кремнію під моношаровим покриттям хрому, напиленим при кімнатній температурі (б) і кремнію під моношаровим покриттям хрому після експозицій 0,5Л (в), 1Л (г) та 10Л (д) у молекулярному кисні.

На рис 3 – 4 наведено M_1 та $M_{2,3}$ іонізаційні спектри хрому відповідно для моношарового покриття хрому, напиленого при кімнатній температурі до і після експозицій в молекулярному кисні.

Порівняння змін, що відбуваються в іонізаційних спектрах хрому після експозицій в молекулярному кисні демонструє суттєво різну поведінку M_1 та $M_{2,3}$ іонізаційних ліній. Видно що ані форма, ані енергетичне положення ($\Delta E = 75$ eV) лінії M_1 не потерпає помітних змін після окислення навіть при таких експозиціях, як 1000Л, в той час, як біля лінії $M_{2,3}$ ($\Delta E = 43,5$ eV) з'являється високоенергетичний сателіт ($\Delta E = 47$ eV) вже при експозиціях 1+10 Л. На користь походження цього сателіта, як такого, що з'являється внаслідок хімічного зсуву свідчить те, що за даними [4] в $M_{2,3}$ лінії хрому енергія зв'язку збільшується на 1,3 – 1,8 eV в Cr_2O_3 та 6,0 – 6,2 eV в CrO_3 відносно енергії зв'язку в металі.

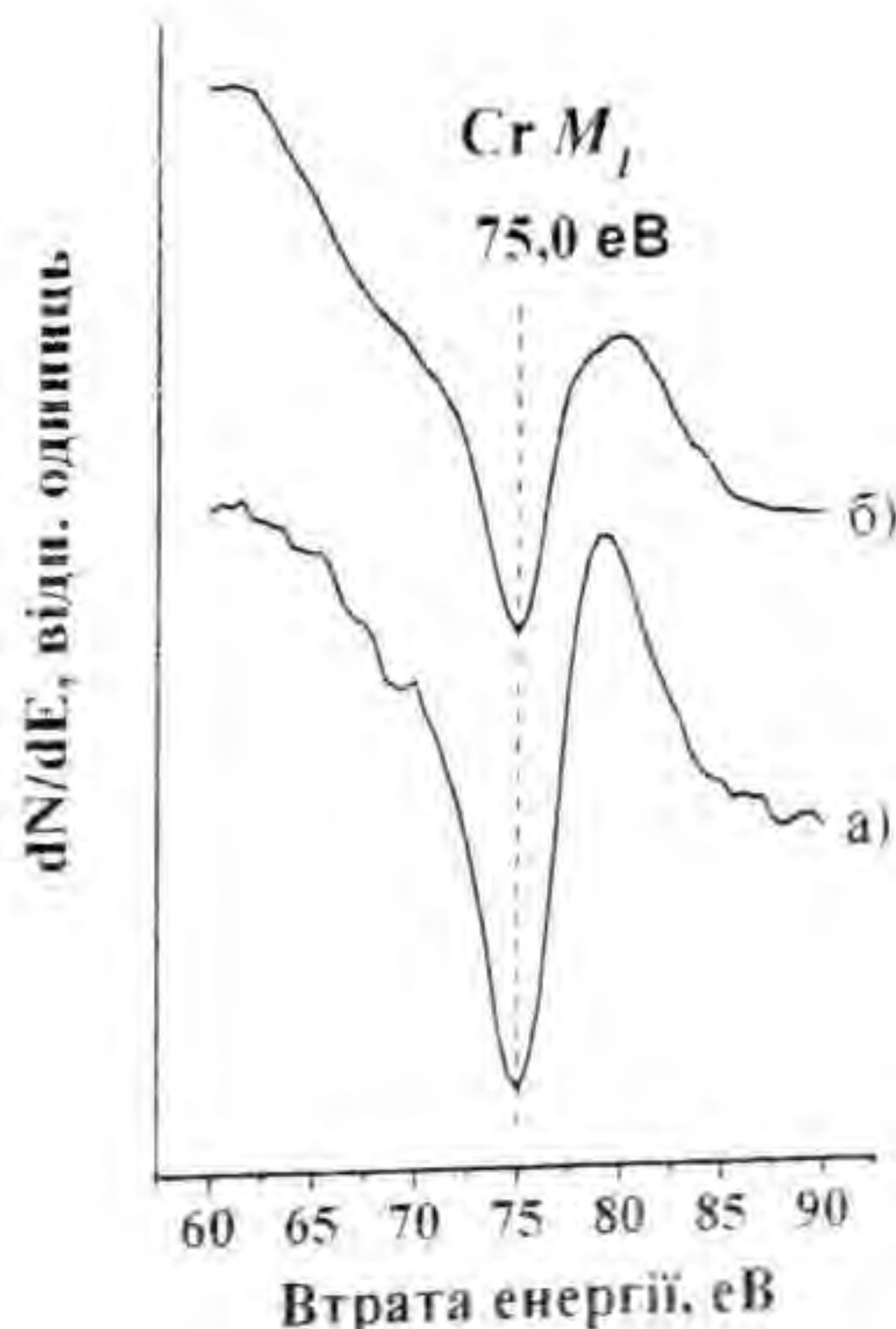


Рис.3 Ділянки $dN(E)/dE$ іонізаційних спектрів з M_1 лінією Cr для моношарового покриття хрому, напиленого при кімнатній температурі до (а) і після експозицій 1000Л (б) в молекулярному кисні

Поява хімічного зсуву в $M_{2,3}$ іонізаційній лінії хрому свідчить про те, що крім оксидів кремнію на досліджуваній поверхні існують також оксиди хрому. Можлива роль субмоношарового покриття хрому в пришвидшенні окислення поверхні Si(001) на початкових етапах окислення може полягати в тому, що хром є каталізатором дисоціації молекулярного кисню, утворюючи проміжні оксиди на поверхні кремнію, які в подальшому стають джерелом атомарного кисню для утворення оксидів кремнію.

Висновки

Вперше спостережено факт появи оксидів кремнію та хрому в системі 1 МШ Cr/Si(100) при витримках в молекулярному кисні на багато порядків менших, ніж на чистих поверхнях Si(100) та на поверхнях товстих плівок хрому.

Висловлено вірогідну гіпотезу, що Cr виступає в ролі каталізатора процесу окислення кремнію

Показано, що в якості аналітичної для визначення хімічного стану атомів хрому може бути використано іонізаційну лінію Cr $M_{2,3}$.

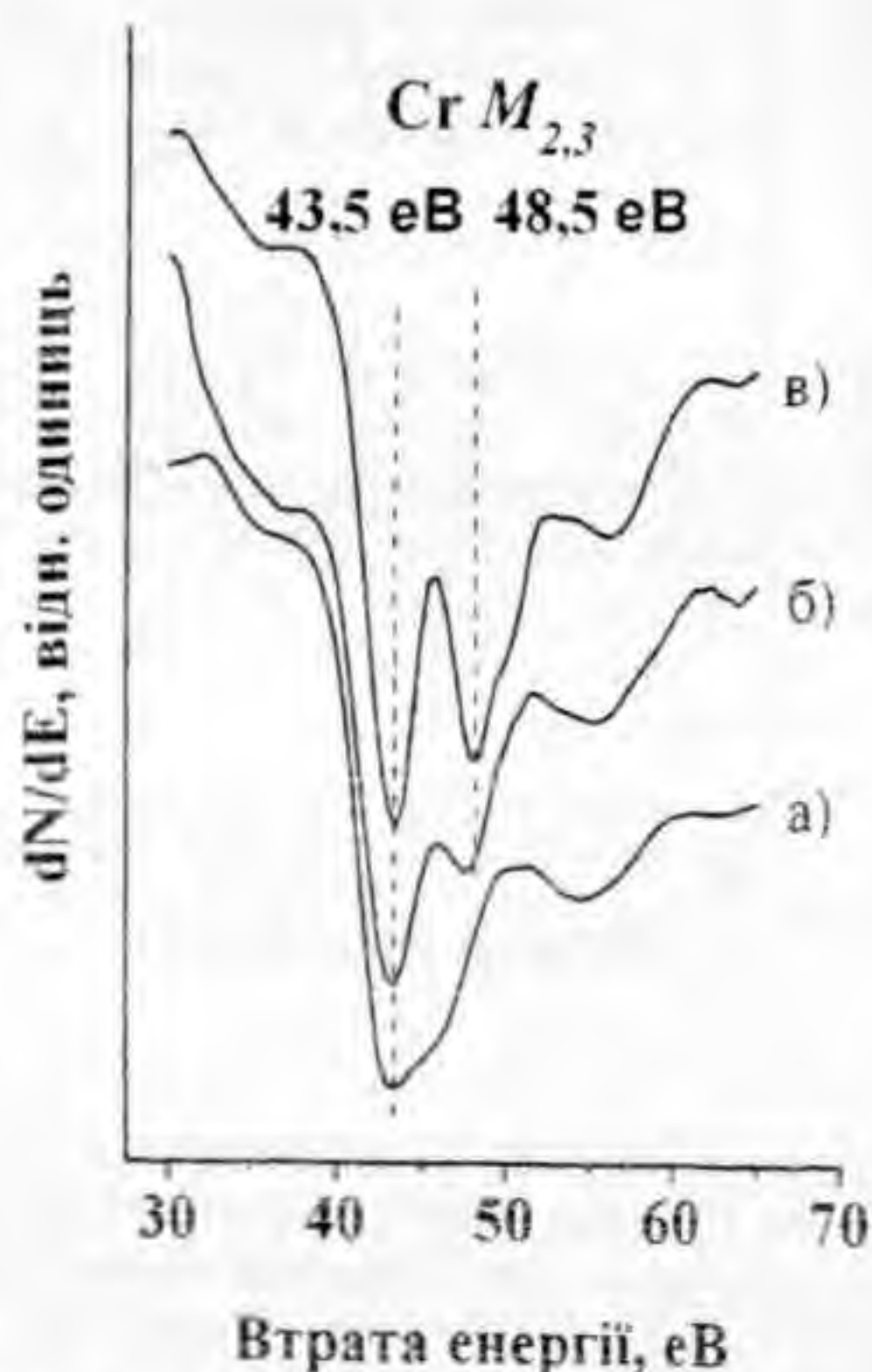


Рис.4 Ділянки $dN(E)/dE$ іонізаційних спектрів з $M_{2,3}$ лінією Cr для моношарового покриття хрому, напilenого при кімнатній температурі до (а) і після експозицій 1Л (б) та 10Л (в) в молекулярному кисні

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки МОН України (грант №М/175-2007).

Список використаних джерел

1. Коваль І.П., Лапоша В.В., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Адсорбція молекулярного кисню на поверхні Sb/Si(001). // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – № 4. – С.307 – 314.
2. Коваль І.П., Лень Ю.А., Находкін М.Г. Дослідження взаємодії кисню з поверхнею сплаву германій-кремній методами електронної спектроскопії // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – № 1 – С.275 – 283.
3. Shimizu H., Sato T. Influence of Cr on initial thermal oxidation and its kinetics on Si(001) surfaces // Surf. Interface Anal. – 2006 – 38. – P.506 – 509.
4. NIST X-ray Photoelectron Spectroscopy Database. Standard Reference Database 20, Version 3.4 (Web Version) / C.D. Wagner, A.V. Naumkin, A. Kraut-Vass, J.W. Allison, C.J. Powell, J.R. Rumble Jr. – <http://srdata.nist.gov/xps/>

Надійшла до редколегії 28.12.2007

УДК 519.9

Коронівський В.Є., канд. фіз.-мат. наук

Магнітоелектричний ефект в структурах, які містять феримагнітну та п'єзоелектричну компоненти

Магнітоелектричні (МЕ) властивості гібридної структури, яка складається з механічно з'єднаних магнітострикційної та п'єзоелектричної пластин, на прикладі плівка залізоітрієвого гранату (ЗІГ) - п'єзоелектрик. досліджувались з використанням методу оптичної лазерної поляриметрії (електромагнітооптичний (ЕМО) ефект). ЕМО ефект зареєстровано у повздовжньому електричному полі. Величина ЕМО сигналу залежала від зовнішнього магнітного поля.

Ключові слова: ЕМО ефект, плівки ЗІГ, електричне поле.

E-mail: koron@univ.kiev.ua

Ефект зміни магнітного стану кристалу під дією електричного поля – магнітоелектричний ефект (МЕЕ) вперше експериментально був виявлений Астровим в антиферромагнетик Cr_2O_3 , при цьому реєструвався змінний магнітний момент, який виникав у кристалі під дією прикладеного Е поля [1]. На сьогоднішній день досліджено багато однофазних матеріалів, у яких спостерігається МЕЕ, серед яких і монокристали ферит-гранатів [2,3,4]. Однак, широкому використанню МЕ монокристалів в електроніці перешкоджає мала величина МЕЕ. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є розвиток технології виготовлення композитних МЕ структур на основі феритової та п'єзоелектричної компонент. Такі матеріали мають всі властивості фериту та п'єзоелектрика і, крім того, МЕ властивості [5]. Приклад ферит-п'єзоелектричного композиту – структура монокристалічний залізоітрієвий гранат (ЗІГ)-п'єзокераміка.

Одним з методів дослідження МЕЕ є метод оптичної поляриметрії. В основі методу лежить реєстрація змін фарадеївського повороту площини поляризації світла під дією Е поля, прикладеного до зразка. Появу таких змін назвали електромагнітооптичним ефектом (ЕМОЕ) [2].

Koronovskyy V.E., Ph.D

Magnetoelectric effect in structures which consist from ferrimagnetic and piezoelectric components

Magnetoelectric (ME) properties of the structure which consists from mechanically connected magnetostriction and piezoelectric plates were investigated on example of the yttrium-ferrite-garnet (YIG) - piezoelectric. The laser polarimeter is using (electromagneto-optical (EMO) effect (EMOE). EMOE registered in longitudinal electric field. The value of EMO signal depends on an external magnetic field.

Key Words: EMO effect, YIG films, electric field.

У даній роботі представлено результати експериментальних досліджень ЕМОЕ у структурі, яка складається з механічно з'єднаних магнітострикційної та п'єзоелектричної пластин, на прикладі структури ЗІГ-п'єзоелектрик, яка була розміщена в повздовжньому Е та Н полях.

Експериментальна установка детально описана в [3]. Суть методу – реєстрація індукованих електричним полем змін Фарадеївських поворотів у досліджуваній структурі – $\alpha_{\text{ЕМО}}$ (ЕМОЕ). Досліджуваний зразок являв собою структуру, склеєну з п'єзоелектричної пластинки (МФТ-4|Т-1.0А| на основі цирконату титанату свинцю) і магнітострикційної пластинки (епітаксійна плівка ЗІГ, вирощена на $\text{Gd}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ підкладинці, товщина плівки – біля 3 мкм). Намагніченість доменів ЗІГ плівки – нормальна до площини плівки. На поверхні п'єзоелектричної пластинки було нанесено струмопровідні контакти. Змінна напруга U , частотою $\omega = 1000$ Гц була підведена до структури. Величина електричного поля становила до 7 кВ/см. Зондувались локальні області зразків (діаметр лазерного променя до 2 мм). Експерименти виконувались при кімнатній температурі в геометрії $\mathbf{H} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, де $\mathbf{k}$ – хвильовий вектор.

На Рис.1 показано отриману магнітопольову залежність ЕМОЕ для досліджуваної структури.

поля, при яких плівка ЗІГ знаходиться в монодоменому стані.

Аналізуючи отримані експериментальні результати для досліджуваної структури необхідно зазначити наступне. Природа МЕ ефекту в монокристалічних плівках ЗІГ обумовлена зміною в них під дією E поля магнітної анізотропії [4]. У структурах, що складаються з механічно затиснутих магнітострикційної та п'єзoeлектричної компонент на базі ЗІГ-п'єзокераміка, його природа інша і обумовлена взаємодією електричної та магнітної фаз, що входять до складу гібридних зразків. Виникнення в зазначених структурах МЕЕ (і відповідно ЕМОЕ) пов'язане з механічною взаємодією феритової та п'єзoeлектричної підсистем. При підведенні E поля, внаслідок п'єзoeфекту, в п'єзoeлектричній фазі виникають механічні напруження, які передаються в магнітну компоненту і за рахунок магнітострикції відбуваються зміни магнітного стану магнітної фази. Вказані зміни в магнітній фазі і були зареєстровані нами ($\alpha_{\text{ЕМО}}$). Спостереження ЕМОЕ в полях 250-400 Е свідчить про те, що вище зазначені виникаючі механічні напруження призводять до зміни намагніченості магнітної компоненти досліджуваної структури.

Таким чином, результати експериментів показали, що величина МЕ взаємодії ($\alpha_{\text{ЕМО}}$) у досліджуваній структурі, більш ніж на порядок перевищує величину ЕМОЕ в епітаксійних плівках ЗІГ. Виникнення ЕМОЕ пов'язане з механічною взаємодією феритової та п'єзoeлектричної підсистем структури.

Список використаних джерел

1. D.N. Astrov, Sov. Phys. JETP., **38**, 984 (1960).
2. Кричевцов Б.Б., Писарев Р.В., Селицкий А.Г. Электромагнитооптический эффект в феррите-гранате иттрия // Письма в ЖЭТФ. 1985. - Т.41, №6. - С.259-261.
3. Коваленко В.Ф., Короновський В.Є. Особливості електромагнітооптичного ефекту в епітаксійних плівках феритів-гранатів // УФЖ.- 2002.- 47, №10.- С.960-965.
4. V. E. Koronovskyy, S. M. Ryabchenko, and V. F. Kovalenko. Electromagneto-optical effects on local areas of a ferrite-garnet film // Phys. Rev. B **71**, 172402 (2005).
5. G. Srinivasan and Y. K. Fetisov, Ferroelectrics. **342**, 65 (2006).

Надійшла до редакції 24.01.2008

$\alpha_{\text{ЕМО}}$ кут. сек

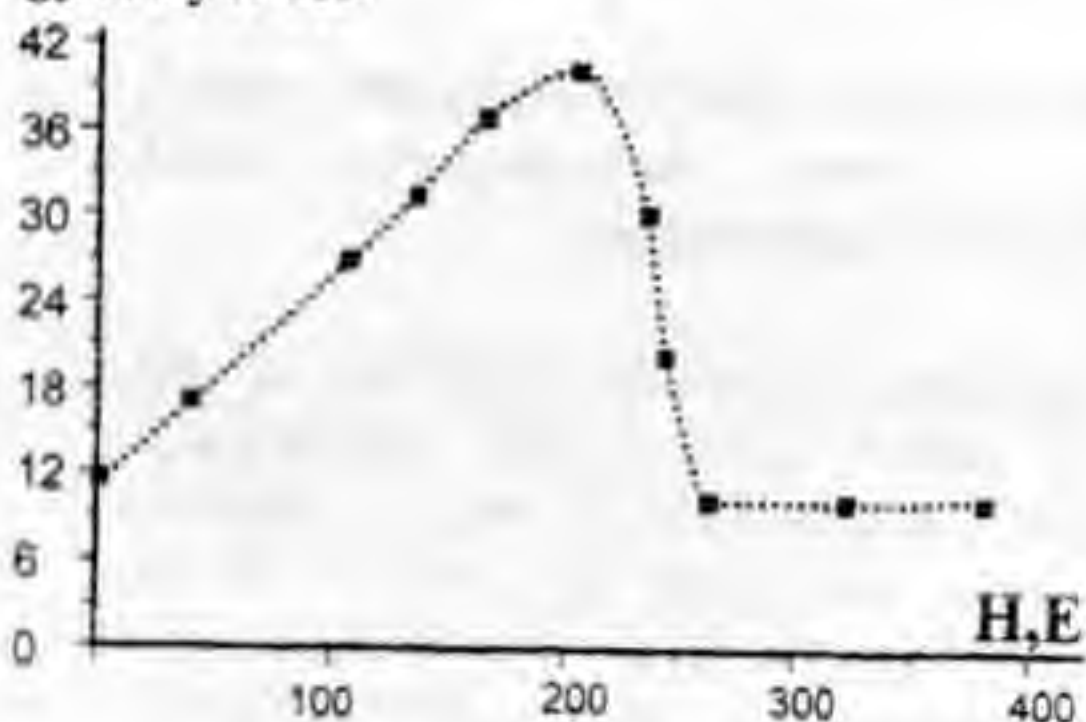


Рис. 1 Магнітопольова залежність величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$, виміряна на основній гармоніці електричного поля в геометрії $E \parallel H \parallel k$.

Ефект зареєстровано на основній частоті електричного поля. На Рис.2 представлено електропольові залежності величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$ для трьох значень магнітного поля ($H_1=0$ Е, $H_2=100$ Е та $H_3=210$ Е). Як видно з графіків, ЕМОЕ залежить лінійно від величини зовнішнього E поля, тобто спостерігається лінійний за E -полем ЕМОЕ.

З представлених залежностей видно принципові відмінності в результатах, порівнюючи з результатами досліджень ЕМОЕ в плівках ЗІГ, отриманими нами раніш. Зокрема, ЕМОЕ в досліджуваній структурі спостерігається на основній частоті E -поля (квадратичний ефект не зареєстровано); ефект проявляється і у відсутності зовнішнього H поля; ЕМОЕ спостерігається також при значеннях магнітного

$\alpha_{\text{ЕМО}}$ кут. сек

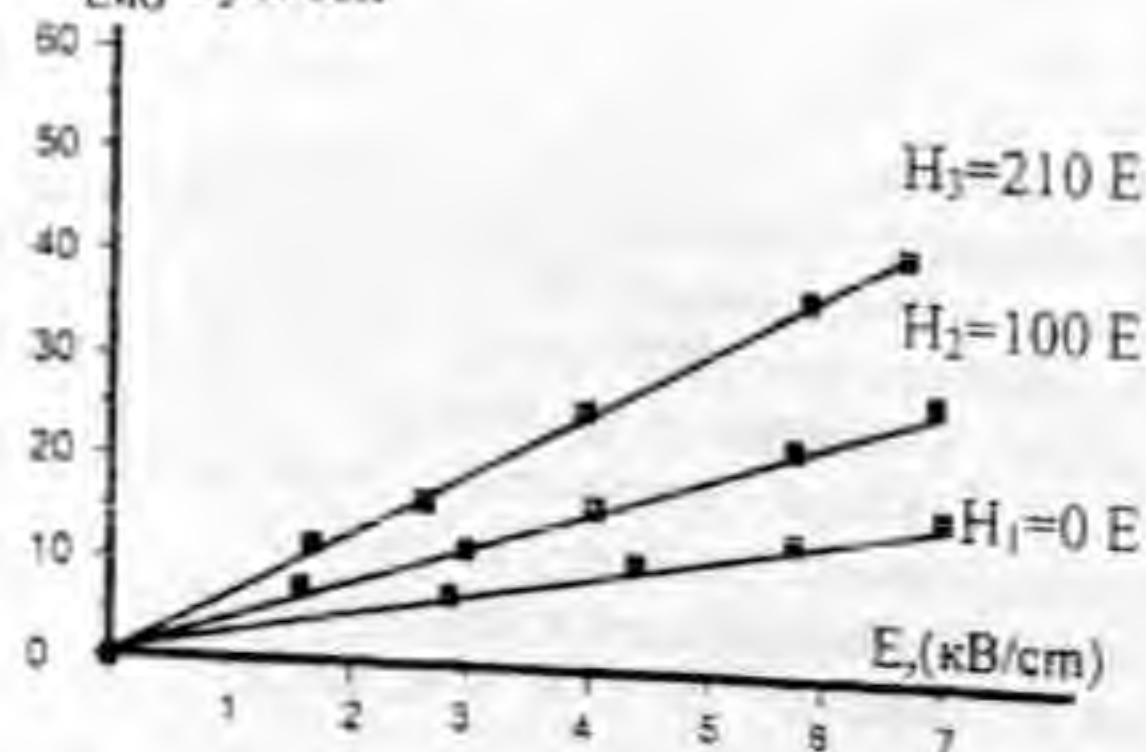


Рис. 2 Електропольові залежності величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$, виміряні для трьох значень магнітного поля: $H_1=0$ Е, $H_2=100$ Е та $H_3=210$ Е.

УДК 621.385.833

Мельник П.В., канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Находкін М.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
академік НАН,
Федорченко М.І., канд. фіз.-мат. наук

Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) при адсорбції Sb на аморфізовану поверхню α - Ge(111) та відпалі системи до упорядкування

За допомогою методів дифракції повільних
електронів, фото- та оже-електронної
спектроскопії досліджені зміни структури та
електронних властивостей інтерфейсів Sb/ α -
Ge(111) при їх відпалі до температури
упорядкування. Встановлено, що при перших
ознаках упорядкування формується електронна
структура поверхневих електронних станів,
пов'язаних з напруженнями в приповерхневому
шарі.

Ключові слова: Sb, α -Ge(111), інтерфейс,
упорядкування, поверхневі стани, робота
виходу, загин зон

*E-mail: mif@univ.kiev.ua

Вступ

Застосування моношарових покриттів
атомами Sb поверхонь Ge(111) для виготовлення
дельта-легованих структур, а також для
покращення процесів епітаксialного росту
гетероструктур Si/Ge [1-8] стимулювали і
продовжують стимулювати розвиток
фундаментальних та прикладних досліджень цих
систем, бо залишаються нез'ясованими ряд
питань. Зокрема, недостатньо даних, які б
дозволили однозначно ідентифікувати
електронну структуру валентної зони інтерфейсу
Sb/Ge(111) поблизу рівня Фермі (E_F). Попередні
наші дослідження [8, 14] встановили, що відпал
поверхонь Sb/Ge(111) призводить до утворення
структур з дальнім порядком: раніш відомої 2×1
при $\theta_{\text{Sb}} = 1$ моношар (МШ) і (7×7) при $0,4 \text{ МШ} \leq$
 $\theta_{\text{Sb}} \leq 0,8 \text{ МШ}$, що вперше спостерігалась нами на
поверхні Sb/Ge(111) [14]. В розподілі густини
електронних станів на відстані $\approx 1,5 \text{ eV}$ нижче E_F
був виявлений максимум, природа якого
залишається дискусійною. Нами була висунута
робоча гіпотеза, що цей максимум обумовлений
поверхневими станами, які утворюються
внаслідок значних напружень в приповерхневій
області, таких, наприклад, як у системі

Melnik P.V., Ph.D., prof.
Nakhodkin M.G., D.Sc., prof., acad. of NAS of
Ukraine,
Fedorchenko M.I., Ph.D.

Formation of the Sb/Ge(111) interface under adsorption Sb on α -Ge(111) surface and annealing of the interface to ordering

The modification of the structure and electronic
properties of the Sb/ α -Ge(111) interfaces have been
investigated using Auger electron spectroscopy,
ultraviolet photoelectron spectroscopy and low
energy electron diffraction. It is established, that at
the first features of ordering the electronic structure
of the surface electronic states related with strain in
subsurface area is formed.

Keywords: Sb, α -Ge(111), interface, ordering,
surface states, work function, band-bending

Si(111) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} R30^\circ$ -В [7]. Значні латеральні
напруження виникають через різницю
міжатомних відстаней у шарах Sb і Ge, внаслідок
чого утворюються надструктури, і має місце
обмін зарядами між об'ємом та поверхнею.
Гіпотеза про роль латеральних напружень вже
успішно використовувалась для пояснення появи
реконструкції в тонких шарах Ge на підкладці
Si(111)-(7x7) [9], де було також показано, що під
впливом іонів Ar реконструкція (7x7) поверхні
інтерфейсу Ge/Si(111) зникала, а після відпалу
знову відновлювалась. У випадку Sb на поверхні
Ge(111) латеральні напруження повинні бути ще
більшими, ніж у системі Ge/Si(111), бо
збільшується різниця між атомними відстанями
 $a_{\text{Sb-Ge}}$. Для отримання додаткових доказів
справедливості гіпотези про значну роль
латеральних напружень ми вирішили дослідити
як змінюється структура інтерфейсів, утворених
осадженням атомів Sb на аморфізовану іонами
інертного газу поверхню α -Ge(111). Імовірно, що
в цьому випадку утворюється розупорядкована
система з меншими механічними напруженнями
поблизу поверхні, й при наступному
упорядкуванні такої системи, внаслідок прогріву.

можливе збільшення цих напружень та відповідна зміна електронних властивостей.

Інтерес до дослідження інтерфейсу Sb/a-Ge пов'язаний також з тим, що в технологічних процесах виготовлення електронних приладів можуть відбуватись розупорядкування поверхонь Ge, зміну властивостей яких необхідно при цьому враховувати.

Метою цієї роботи було дослідження структури та електронних властивостей інтерфейсу Sb/a-Ge(111) при різних температурах відпалу, в тому числі й до температур, при яких відбувається впорядкування інтерфейсу, внаслідок якого можуть виникати напруження в приповерхневій області.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакуумній камері з базовим тиском $\sim 2 \times 10^{-10}$ тор, яка була оснащена пристроями для оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС). В камері містилась іонна гармата для аморфізації поверхонь іонами Ar та система для контрольованого нанесення *in situ* на досліджувану поверхню шарів Sb заданої товщини. ДПЕ використовувалась для визначення атомної структури системи та її реконструкції. За допомогою фотоелектронних спектрів (ФЕС), що збуджувались квантами з енергіями $h\nu = 7,7 - 10,2$ еВ, отримувалась інформація про електронну структуру валентної зони поверхонь інтерфейсів, що досліджувались, їх роботу виходу (ϕ) та загин зон поблизу поверхонь [10]. Зразки Ge(111) вирізались із спеціально нелегованої пластини германію (п-типу, $\rho = 16$ Ом·см). Після попередньої обробки (промивка в перекисі водню та в деіонізованій воді) зразок очищався за допомогою декількох циклів бомбардування іонами Ar та наступного прогріву при 700°C , як і в попередній нашій роботі [8]. Вибраний стандартний метод очищення зразків дозволяв отримувати кристалічні поверхні зразків Ge(111) без ознак домішок в спектрах ОЕС та з контрастними картинками ДПЕ, що відповідали надструктурі $c\text{-}2 \times 8$. Для розупорядкування поверхні зразків використовувалось бомбардування іонами Ar з енергією $E_i = 800$ еВ. Потік парів Sb отримувався за допомогою джерела Кнудсена, а ступінь

покриття поверхні атомами Sb (θ_{Sb}) визначався за допомогою спеціально проградуєваних кварцових терезів. Швидкість нанесення Sb вибиралася такою, що дорівнювала $0,03$ МШ за хвилину для зменшення ймовірності сублімації Sb у вигляді кластерів.

Результати експериментів та їх інтерпретація

Дослідження методом ОЕС встановили, що плівкоутворення Sb на поверхні a-Ge(111) при кімнатній температурі відбувається за механізмом Странського-Крастанова. За допомогою ДПЕ було також показано, що ці плівки Sb не мають дальнього порядку.

На рис. 1 та 2 представлені ФЕС, виміряні відповідно при $h\nu_1 = 7.7$ еВ та $h\nu_2 = 10.2$ еВ; для аморфізованої a-Ge(111) поверхні (криві а), для a-Ge(111) поверхні з напиленими 9 моношарами атомів Sb (криві б), для інтерфейсу Sb/a-Ge(111), відпаленого при $\approx 120^\circ\text{C}$ протягом 2 хвилин (криві в). Видно, що напилення атомів Sb не змінює монотонності ФЕС, й на них не з'являються нові максимуми, тобто вони залишаються практично безструктурними. Адсорбція атомів Sb на поверхню a-Ge(111) не змінює ступеня розупорядкування її приповерхневого шару, що перевірялось за допомогою ДПЕ, та призводить до таких змін вигляду кривих ФЕС: їх розширення внаслідок зміщення низькоенергетичного краю на ≈ 0.27 еВ від E_F , що свідчить про зменшення роботи виходу системи ϕ на ≈ 0.27 еВ, збільшення квантового виходу системи. Зменшення ϕ відбувається через перерозподіл зарядів унаслідок хімічного зв'язку між атомами Sb та Ge у відповідно до значень їх електровід'ємності згідно зі шкалою Оллреда - Рохова (Sb-1.82, Ge-2.02) [11]. Перехід заряду від атомів Sb до атомів Ge зменшує ϕ і при $\theta_{\text{Sb}} \geq 1$ МШ $\phi \approx 4,5$ еВ, що збігається зі значенням ϕ для масивної плівки Sb [12, 13]. Після прогріву системи до $T \approx 120^\circ\text{C}$ кількість напиленого Sb (за даними ОЕС) залишається незмінною, але її ФЕС трансформуються: у валентній зоні з'являються максимуми та особливості, пов'язані зі збільшенням густини електронних станів поблизу E_F , хоча ϕ поверхні залишається практично незмінною. Плівка Sb після такого відпалу, згідно даних, одержаних нами з протяжної структури пружно відбитих електронів, частково упорядковується і

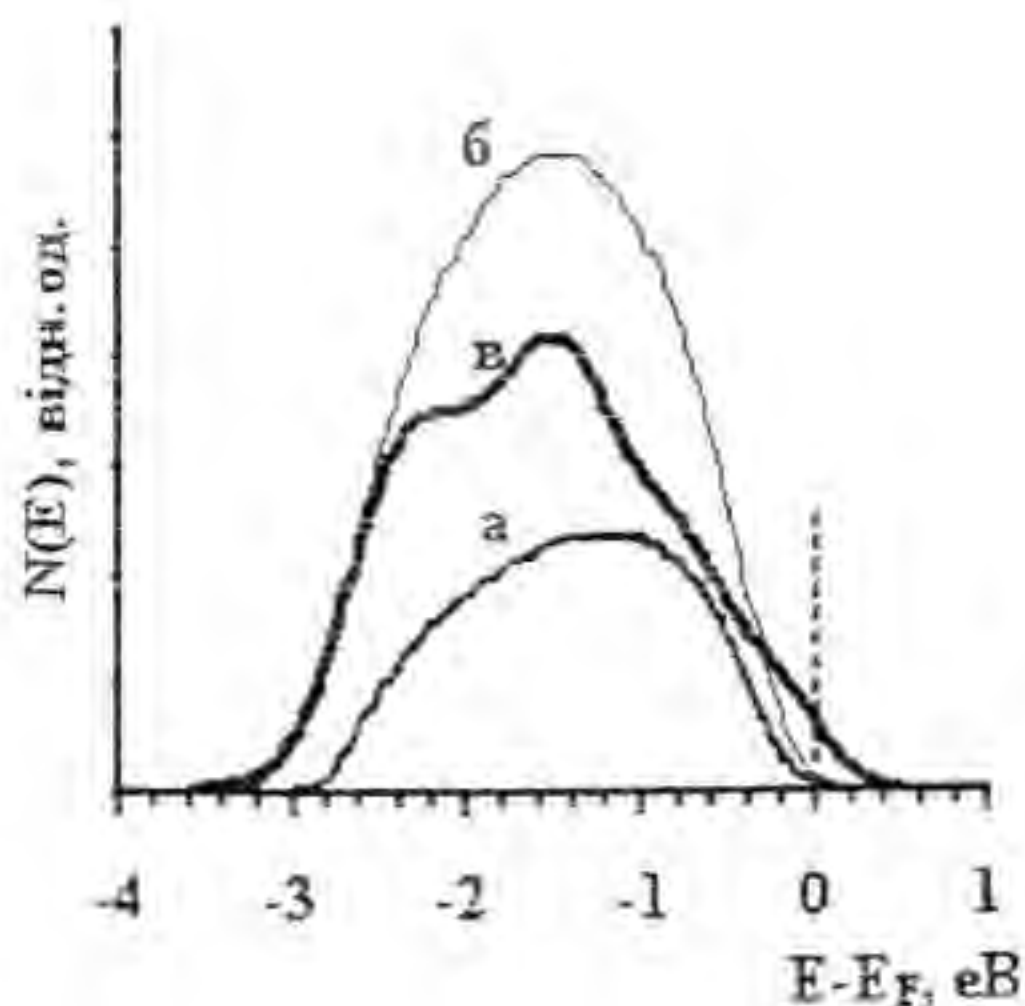


Рис. 1 Фотоелектронні спектри ($h\nu = 7.7\text{eV}$) поверхні $a\text{-Ge}(111)$ (крива а) при напыленні на неї 9 МЛ Sb при кімнатній температурі (крива б) та при відпалі системи до 120 С (крива в).

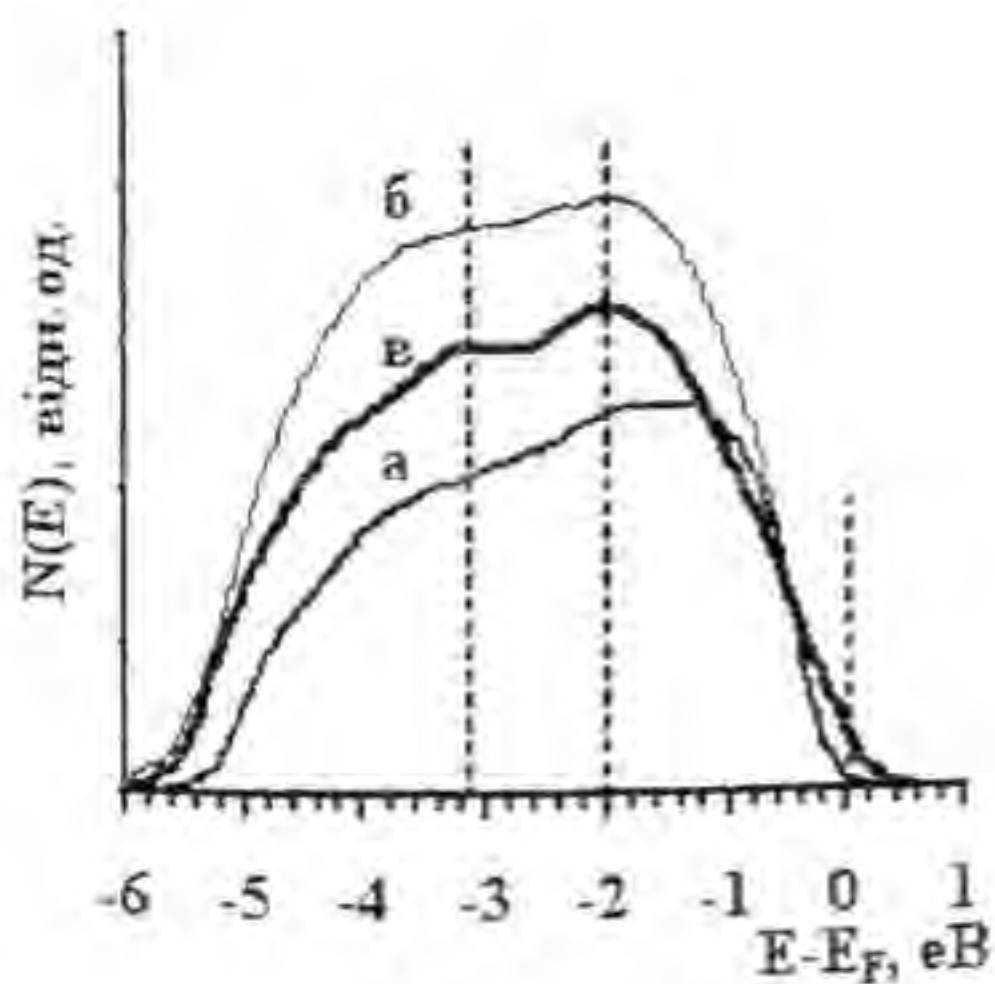


Рис. 2 Фотоелектронні спектри ($h\nu = 10.2\text{eV}$) поверхні $a\text{-Ge}(111)$ (крива а) при напыленні на неї 9 МЛ Sb при кімнатній температурі (крива б) та при відпалі системи до 120 С (крива в).

переходить із аморфного напівпровідникового стану до упорядкованого напівметалічного [13]. Наприклад, при $h\nu=10.2\text{eV}$ на кривій в (рис. 2), яка відображає густину станів верха валентної зони Sb у напівметалічному стані, з'являються особливості, пов'язані зі зміною розподілу електронної густини в приповерхневому шарі інтерфейсу, розташовані на 2eV і 3.2eV нижче E_F .

Ступінь упорядкування такої плівки ще порівняно незначний, бо ДПЕ не дозволяє реєструвати чіткі дифракційні рефлекси.

Після прогріву інтерфейсу $\text{Sb}/a\text{-Ge}(111)$ до температур $T>120^\circ\text{C}$ має місце часткова десорбція атомів Sb та впорядкування Ge підкладки разом із залишком адсорбованих атомів Sb. На рис. 3 наведена залежність відношення інтенсивностей оже піків $I_{\text{SbMNN}}/I_{\text{GeMMV}}$ від температури прогріву інтерфейсу $\text{Sb}/a\text{-Ge}$ при початковому покритті $\Theta_{\text{Sb}}=3\text{ML}$. Видно, що в інтервалі температур $20^\circ\text{C}\leq T\leq 140^\circ\text{C}$ відношення інтенсивностей оже піків $I_{\text{SbMNN}}/I_{\text{GeMMV}}$ практично не змінюється, що свідчить про незмінність концентрації атомів Sb на поверхні інтерфейсу. Зі збільшенням температури прогріву до $T\approx 160^\circ\text{C}$ відношення $I_{\text{SbMNN}}/I_{\text{GeMMV}}$ різко падає до значення, характерного для моношарового покриття поверхні Ge атомами Sb, і залишається практично незмінним у всьому діапазоні більших температур відпалу ($T\leq 400^\circ\text{C}$), використаних у наших дослідженнях. При температурі переходу від багатшарового покриття атомами Sb до моношарового ($T\approx 160^\circ\text{C}$) поверхня аморфізованого Ge залишається ще неупорядкованою. Подальше збільшення температур відпалу, коли $T>160^\circ\text{C}$, стимулює початок як упорядкування системи $\text{Sb}_{6\text{Sb-1}}/a\text{-Ge}(111)$, так і зміну її електронних властивостей. При $T\approx 265^\circ\text{C}$ на картині рефлексів ДПЕ з'являються розмиті рефлекси надструктури 2×1 , які при подальшому збільшенні температури стають більш чіткими і стабілізуються при $T\approx 400^\circ\text{C}$.

На рис. 4 показано зміни ϕ , які обумовлені відпалом системи $\text{Sb}/a\text{-Ge}(111)$. З рисунка видно, що ϕ збільшується зі збільшенням температури відпалу досить складним чином. Загальновідомо, що зміни роботи виходу системи адсорбат-напівпровідник можуть бути обумовлені, в основному, двома факторами. Це зміна ефективної електронної спорідненості (χ) і зміна величини загину зон біля поверхні (ΔY). Якщо вважати, що при адсорбції моношару атомів Sb при кімнатній температурі на аморфізовану поверхню Ge ϕ зменшується, в основному, за рахунок зменшення χ внаслідок утворення хімічного зв'язку між атомами Sb та Ge, то збільшення ϕ при прогріві системи, внаслідок збільшення χ , може бути лише при вбудовуванні атомів Sb в матрицю атомів Ge (при відхиленні напрямку зв'язку Sb-Ge від нормалі до поверхні). При температурі $\approx 265^\circ\text{C}$ в залежності ϕ від

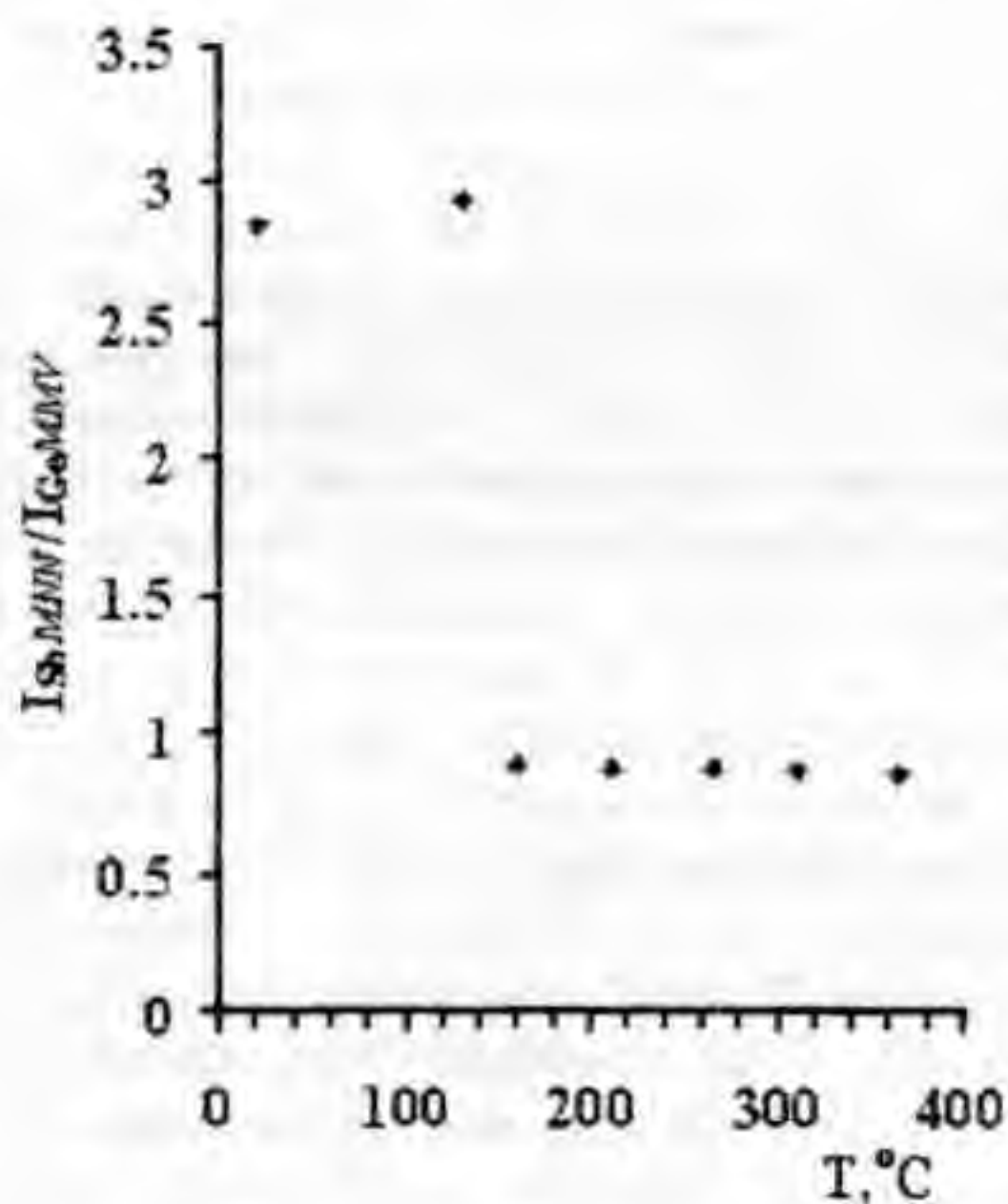


Рис. 3 Залежність співвідношення інтенсивностей оже піків $I_{Sb MNN} / I_{Ge MMV}$ від температури прогріву інтерфейсу Sb/a-Ge при початковому покритті $\Theta_{Sb}=3 \text{ МШ}$

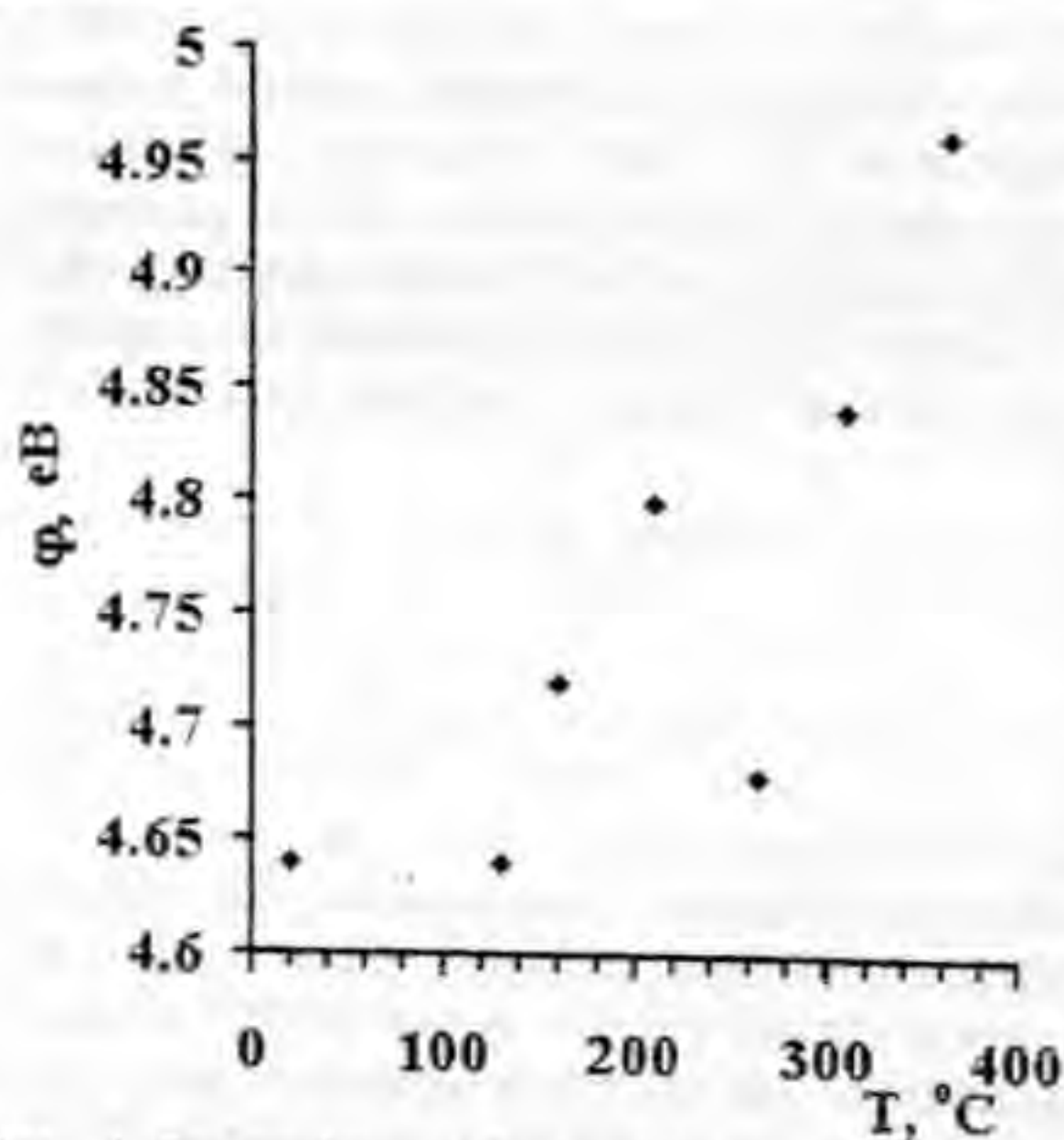


Рис. 4 Залежність роботи виходу поверхні a-Ge(111) з покриттям $\Theta_{Sb}=3 \text{ МШ}$ від температури прогріву інтерфейсу.

температури має місце провал, який повторювався в цілому ряді додаткових експериментів. Природа цього факту буде досліджена в наступних роботах.

Про можливий вплив ΔY , на залежність ϕ від

температури прогріву можна судити за зміною ФЕС при упорядкуванні системи. На рис. 5 наведено декілька типових ФЕС аморфізованої поверхні a-Ge(111) при нанесенні на неї 3МШ Sb при кімнатній температурі та прогріві системи в діапазоні температур від 130°C до 365°C. З рисунка видно, що форма ФЕС змінюється, починаючи з температури $T \geq 160^\circ\text{C}$. При $T \approx 265^\circ\text{C}$ в спектрах з'являються всі основні особливості, притаманні добре впорядкованій системі Sb/Ge(111). Домінуючою особливістю, яка з'являється у фотоелектронному спектрі є максимум густини станів А, розташований на відстані $\approx 1.8 \text{ eV}$ нижче E_F . Поява цієї особливості ФЕС збігається з появою розмитих рефлексів надструктури 2×1 у картині ДПЕ. При подальшому підвищенні температури рефлекси ДПЕ стають більш чіткими, а максимум А, домінуючий в ФЕС, збільшується за інтенсивністю й зміщується на $\approx 0.3 \text{ eV}$ у напрямку до E_F (до $\approx 1.5 \text{ eV}$ нижче E_F). Після повного упорядкування системи спектр ФЕС стає ідентичний тому, який можна отримати, адсорбуючи Sb на атомарно чистій і найкращим чином упорядкованій поверхні Ge(111)-c(2×8) [8]. Потрібно відмітити, що максимум А на ФЕС не пов'язаний з особливостями електронної структури Sb. Це впливає з порівняння ФЕС від упорядкованої плівки Sb нанометрових розмірів (крива г рис. 2) та від моношарової плівки Sb, упорядкованої на поверхні Ge(111) (крива з рис.5). Одночасна поява максимуму А на ФЕС рис.5 та ознак упорядкування на картині ДПЕ дозволяє стверджувати, що максимум А пов'язаний з поверхневими станами, обумовленими напруженнями, які виникають при утворенні надструктури Sb/Ge(111)- 2×1 . Цей висновок збігається з висновком роботи [6], у якій автори довели, що у системі Sb/Ge(111)- 2×1 ($\Theta_{Sb}=1 \text{ МШ}$) атоми Sb насичують обірвані зв'язки поверхневих атомів Ge й утворюють ідеальну подібність до обрізаного об'єму Ge без помітної релаксації його поверхневого шару. Одержані нами результати дають можливим вважати, що підвищення ϕ на $\Delta\phi \approx 0.3 \text{ eV}$ при відпалі інтерфейсу при T в інтервалі від 265°C до 365°C відбувається переважно через зміну загину зон. Це твердження впливає з того, що при згаданій зміні ϕ відбувається ще й зсув енергетичних положень максимумів А і Б на ФЕС відносно E_F , що є доказом зміни загину зон поблизу поверхні. Але максимум електронної густини А зсувається в напрямку до рівня Фермі на $\approx 0.3 \text{ eV}$, а максимум Б лише на $\approx 0.2 \text{ eV}$. Враховуючи те, що

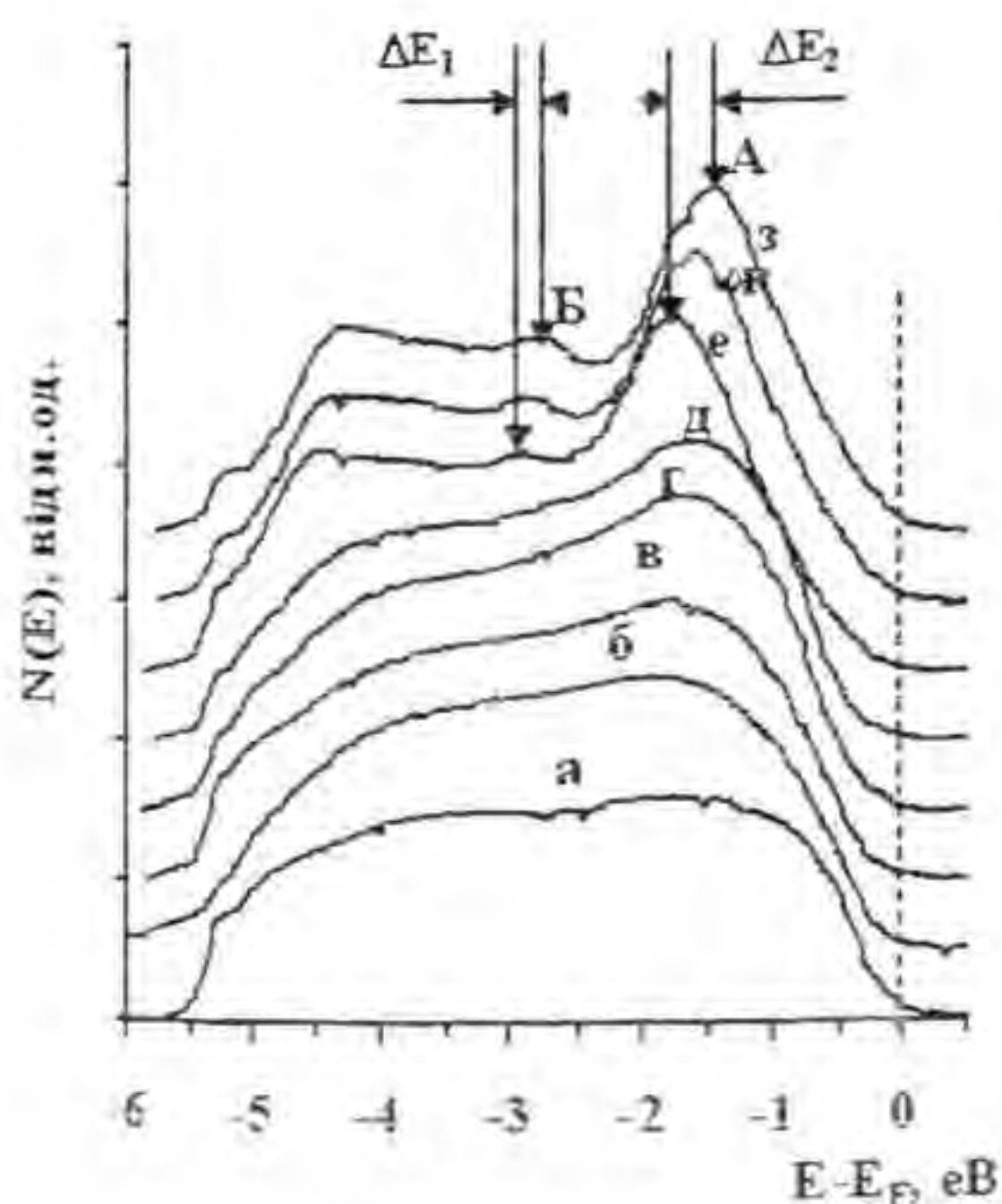


Рис. 5. ФЕС поверхні а-Ge(111) (крива а) при нанесенні на неї 3 МЛ Sb при кімнатній температурі (крива б) та прогріві: в- 130 С; г- 160С; д- 210С; е- 265 С; ж- 310 С; з- 365 С.

форми максимумів А і Б на ФЕС практично не змінюються зі збільшенням температури відпалу, а кінетична енергія фотоелектронів, що формують максимум А, більша за кінетичну енергію фотоелектронів максимуму Б, ми припустили, що глибина виходу фотоелектронів максимуму А менша, ніж у фотоелектронів максимуму Б. З цього випливає, що зміна величини загину зон на поверхні в більшій мірі визначається енергетичними зсувами максимуму А. Зміна загину зон може відбуватися лише при зміні структури поверхневих станів. Отже, різка зміна загину зон є додатковим доказом зміни структури поверхневих станів при упорядкуванні інтерфейсу Sb/a-Ge(111).

Висновки

Показано, що плівка Sb інтерфейсу Sb/a-Ge(111) при температурах відпалу $T \geq 120^\circ\text{C}$ починає упорядковуватися і переходити з напівпровідникового стану до металічного.

При температурі $T \approx 160^\circ\text{C}$ кількість атомів Sb, яка перевищує моношарове покриття,

десорбується, і на поверхні Ge підкладки залишається моношар атомів Sb.

При температурах, більших 200°C , починається упорядкування приповерхневого шару атомів Ge та адсорбованих атомів Sb. При перших ознаках упорядкування формується електронна структура валентної зони з домінуючим максимумом густини електронних станів (максимум А на ФЕС), що знаходиться на ≈ 1.5 еВ нижче E_F . Цей максимум електронної густини не пов'язаний з електронною структурою жодного з компонентів (Ge та Sb), а обумовлений напруженнями, які виникають при вбудовуванні Sb в приповерхневий шар Ge при формуванні упорядкованої структури Sb/Ge(111)2x1. Він, зокрема, може бути використаний для якісного встановлення початку утворення упорядкованої структури інтерфейсів Sb/Ge за допомогою методу УФЕС.

Робота виконувалась за бюджетного фінансування та часткового фінансування Міністерства та науки України, грант М/175-2007.

Список використаних джерел

1. Aart A. van Gorkum, Kiyokazu Nakagawa and Yasuhiro Shiraki. Controlled Atomic Layer Doping and ALD MOSFET Fabrication in Si //Jpn. J. Appl. Phys. - 1987.- 26, - P. 1.1933-1.1936.
2. Antons A., Cao Y., Voigtlander B., Schroeder K., Berger R. and S. Blügel S. Strain-induced surface structures on Sb-covered Ge(111). Epitaxial Ge films on Si(111):Sb// Europhys. Lett. - 2003 -62, N4.-P. 547-553.
3. Schmidt Th., Kröger R., Clausen T., and Falta J., Janzen A., Kammler M., Kury P., Zahl P. and Horn-von Hoegen M. Surfactant-mediated epitaxy of Ge on Si(111). Beyond the surface //Appl.Phys. Lett.- 2005.-86.- P. 1119-1126.
4. Kendelewicz T., Woicik J.C., Miyano K.E., Yoshikawa S.A., Pianetta P., Spicer W.E. Structural study of monolayers of Sb on Ge(111) with different surface reconstructions //J. Vac. Sci. & Technol. A: Vacuum, Surfaces, and Films. - 1994. -A12, N4.- P. 1843-1847.
5. Cao Yi-Gang, Jio Zheng-Kuan, Antos A., Schroeder K. and Blügel S. Stable Structure of the Sb Monolayer on a Strained Ge(111) Substrat// Chinese Phys. Lett.-2002. -19.-P. 259-261.
6. Kuzmin M., Laukkanen P., Perala R.E., Ahola-Tuomi M., Vayrynen I.J. Atomic geometry and electronic properties of the Ge(111)2x1-Sb

- surface studied by scanning tunneling microscopy /spectroscopy and core-level photoemission // *Surface Science*. -2007. -**601**.- P. 837-843.
7. Shi H.Q., Radny M.W., Smith P.V. Electronic structure of the Si(111) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ R30°-B surface // *Phys. Rev.* -2002.- **B66**.- P.-085329.
8. Находкін М.Г., Федорченко М.І. Формування інтерфейсу Sb/Ge(111) // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.- 2006.-вип. 4. -С. 323-332.
9. Gosmann H.-J., Bean J.C., Feldman L.C., McRae E.G. and Robinson I.K. 7×7 Reconstruction of Ge(111) Surfaces under Compressive Strain // *Phys. Rev. Lett.*- 1985.-**55**, №10.- P. 1106-1109.
10. Находкін М.Г., Федорченко М.І. Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступені покриття її вісмутом // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.-2004.-вип. 4. -С.373-378.
11. Олред А., Рохов Е.В. Взаимосвязь электроотрицательности и строения элементов // *Журнал неорганической химии*.- 1958.-**5**, №6.-С. 264-272.
12. Городецкий Д.А., Мельник Ю.П., Проскурин Д.П., Усенко В.А. Структура и электронные свойства пленок сурьмы на Mo(110) // *Физика твердого тела*. -2004. -**46**, вып. 10.-С.1873-1880.
13. Apker L., Taft E. and Dickey J. Some Semimetallic Characteristics of the Photoelectric Emission from As, Sb, and Bi // *Phys.Rev.* - 1949.-**76**, N2.-P. 270-272.
14. Fedorchenko M. I. and Nakhodkin M. G. Formation and properties of the antimony germanium (111) interfaces // *Праці II Міжнародної конференції "Електроніка та прикладна фізика"*, 11-14 жовтня 2006 року, Київ, Україна. С. 54.

Надійшла до редколегії 10.11.2007р

УДК 621.37.

Можировський М. студ., Олійник В., к.ф.-м. н.

Особливості розрахунку характеристик шаруватих діелектричних структур у хвилеводі

У роботі розглянуто відмінності поширення електромагнітних хвиль у звичайних шаруватих діелектричних структурах та поміщених в хвилевід. Запропоновано підхід для врахування особливостей характеристик таких структур в хвилеводі, який базується на представленні електромагнітного випромінювання у вигляді суперпозиції позовжньої та поперечної хвиль. Цей підхід дозволяє розрахувати амплітудно-частотні характеристики в структурах, що являють собою періодичну послідовність різних діелектриків вздовж вісі хвилеводу (НВЧ брегівські структури, аналоги 1-D фотонних кристалів в оптиці, тощо) будь-яким із методів розрахунку звичайних шаруватих структур. Також у роботі представлені експериментальні дані для характеристик фотонно-кристалічної структури, які добре узгоджуються із теоретичними розрахунками.

Ключові слова: заборонена зона, пік пропускання, діелектричні пластини, прямокутний хвилевід.

E-mail: mozhynovskiy@mail.ru

Вступ

Відомо, що електромагнітна хвиля в більшості ліній передач не є поперечною ТЕМ-хвилею, тобто електричне E , магнітне H поля та хвильовий вектор k не утворюють праву трійку векторів. Для фізичного тлумачення цього явища використовується концепція парціальних хвиль [1], відповідно якої в хвилеводі поширюються дві (або більше, залежно від геометрії хвилеводу) плоскі ТЕМ хвилі симетрично до вісі хвилеводу, інтерференція яких і забезпечує виникнення ТЕ або ТМ хвиль. Цей підхід дозволяє пояснити розповсюдження хвиль у хвилеводах з фазовою швидкістю, більшою швидкості світла, та зрозуміти фізичний зміст критичної довжини хвилі [1].

При дослідженні розповсюдження хвиль в середовищах з одновимірною періодичністю існує ряд методів для теоретичного розрахунку їх властивостей [2,3,4]. Зокрема, для обчислення

Mozhyrovskiy N. student, Oliynyk V., PhD

Peculiarities of layer dielectric structures properties calculation in the waveguide

In this paper difference between electromagnetic waves propagation in ordinary layer dielectric structures and these structures, imbedded into waveguide is viewed. An approach for peculiarities taking into account of such structures in a waveguide is suggested, that is based on electromagnetic radiation representation as a superposition of longitudinal and transverse waves. This approach allows to calculate amplitude-frequency characteristics for structures, which consist of different dielectrics sequence along the waveguide axis (microwave Bragg structures, optic photonic crystals analogs, etc.) using any methods for ordinary array structures. Also in the paper the experimental data of the photonic crystals structure with defect are presented. These data correspond to the theoretical calculations well.

Key Words: band-gap, transmission peak, dielectric plates, rectangular waveguide

коефіцієнта пропускання таких структур використовуються методи зв'язаних хвиль [5], метод імпедансів [2], тощо. Проте в реальних експериментальних установках (особливо в НВЧ-діапазоні) такі структури часто поміщаються в хвилевід, де характер розповсюдження електромагнітної хвилі зовсім інший. Зокрема, при відбитті хвилі від стінок хвилеводу змінюється її фаза, знаки деяких її компонент, тощо. Тому використання методів обрахунку шаруватих діелектричних структур звичайної конфігурації шляхом лише заміни параметрів ТЕМ хвилі, параметрами хвилі в хвилеводі (довжина хвилі, хвильовий опір, тощо) не є коректним. У даній роботі запропоновано підхід, який дає можливість врахувати особливості розповсюдження хвилі в хвилеводі. Зокрема, запропоновано розклад парціальної електромагнітної хвилі на позовжню і поперечну компоненти, відповідно до геометрії шаруватих діелектричних структур. І це представлення дозволяє безпосередньо описувати поширення випромінювання в таких структурах, поміщених в хвилевід тими

Представлено Даниловим В.В., проф., д.ф.-м. н.

методами, які застосовуються для звичайних періодичних діелектричних середовищ.

Представлення електромагнітного випромінювання через поздовжню та поперечну хвилі

Розглянемо поширення електромагнітної хвилі між двома плоскопаралельними металевими пластинами в середовищі з довільною послідовністю діелектричних пластин (див. рис.1). Для того, щоб розгляд мав більш загальний характер, не будемо задавати

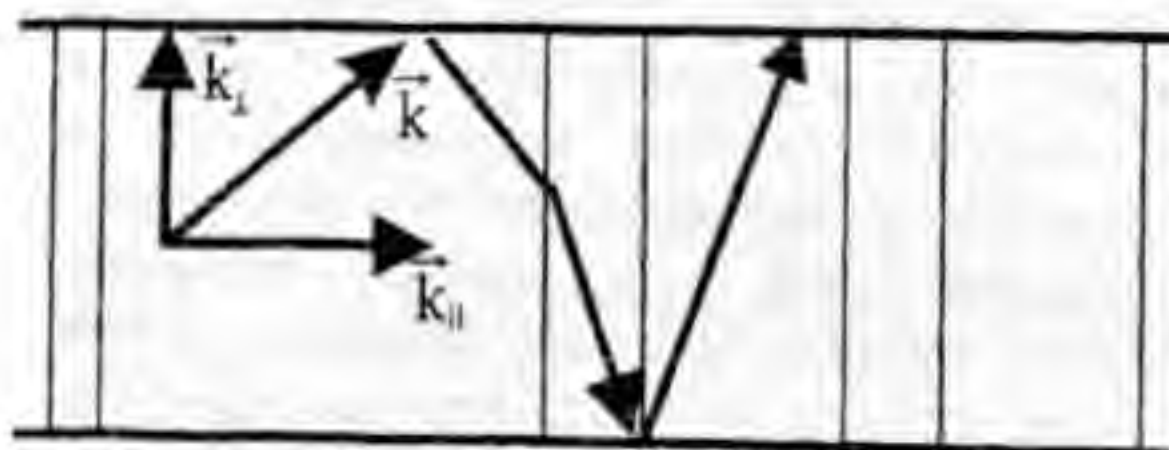


Рис.1 Хвиля з хвильовим вектором $\vec{k}$, що поширюється між двома плоскопаралельними металевими пластинами в шаруватій речовині, та представлення її через суперпозицію хвиль з хвильовими векторами $\vec{k}_{\perp}$ та $\vec{k}_{\parallel}$.

напрямки електричного та магнітного полів (залежно від того, яка хвиля розповсюджується – ТЕ чи ТМ, ці напрямки будуть різними). Тоді представимо це випромінювання через суперпозицію двох хвиль, одна з яких поширюється вздовж стінок хвилеводу, падаючи нормально до поверхонь пластин, а інша – перпендикулярно до першої хвилі, так щоб виконувалась умова:

$$\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + \vec{k}_{\perp}; \quad (1)$$

Неважко переконатись, що ця рівність буде виконуватись у будь-якій частині хвилеводу, якщо

$$k_{\perp} = 2\pi f_{\perp} \sqrt{\epsilon\mu} / c; \quad (2)$$

$$k_{\parallel} = 2\pi f_{\parallel} \sqrt{\epsilon\mu} / c; \quad (3)$$

$$f_{\perp} = k_{\perp} c / 2\pi; \quad (4)$$

$$f_{\parallel} = \sqrt{f_0^2 - (k_{\perp} c / 2\pi)^2}, \quad (5)$$

де f_0 – частота хвилі у вільному просторі, c – швидкість світла у вакуумі, ϵ, μ відносні діелектрична та магнітна проникності пластини,

в якій поширюється хвиля, $k_{\perp}$ – критичне хвильове число (у випадку прямокутного хвилеводу $k_{\perp} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$, ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), a, b – внутрішні розміри хвилеводу).

Поздовжню хвилю з вектором $k_{\parallel}$ можна вже розглядати як звичайну хвилю, падаючу нормально до поверхонь послідовності діелектричних пластин без хвилеводу, що значно полегшує опис її розповсюдження. А для опису хвилі з вектором $\vec{k}$, яку ми й вивчаємо, у виразах для коефіцієнта відбиття, пропускання, тощо, достатньо скористатись підстановкою

$$f_0 \rightarrow f_{\parallel} \equiv \sqrt{f_0^2 - (k_{\perp} c / 2\pi)^2}. \quad (6)$$

Даний розгляд виконаний для плоскопаралельного хвилеводу, проте його можна застосувати і для інших хвилеводів з тою лише різницею, що поперечну хвилю з вектором $\vec{k}_{\perp}$ слід розуміти як результуюче поперечне коливання. Воно утворюється при накладанні декількох хвиль, що розповсюджуються перпендикулярно до вісі хвилеводу. А всі рівності (1)-(6) зберігають силу.

Розрахунок коефіцієнта передачі методом імпедансів

Для обчислення коефіцієнтів пропускання та відбиття в періодичних діелектричних структурах часто використовується метод зв'язаних хвиль [3,5], згідно з яким діелектрична проникність ϵ представляється у вигляді гармонійної залежності від координати. Проте в більш складних – неперіодичних або квазіперіодичних структурах – зручніше користуватись методом імпедансів [2], який дозволяє обчислити коефіцієнт пропускання довільної дискретно-неоднорідної діелектричної структури. До недоліків цього методу слід віднести ускладнення його застосування при надто великій кількості діелектричних пластин, через значний час обрахунку відповідних величин за допомогою ЕОМ.

Відповідно до цього методу, коефіцієнт відбиття хвилі, падаючої на послідовність із $N-1$ діелектричних пластин, має вигляд:

$$R = \left| \frac{Z_2^{(n)} - Z_1}{Z_2^{(n)} + Z_1} \right|^2 \quad (7)$$

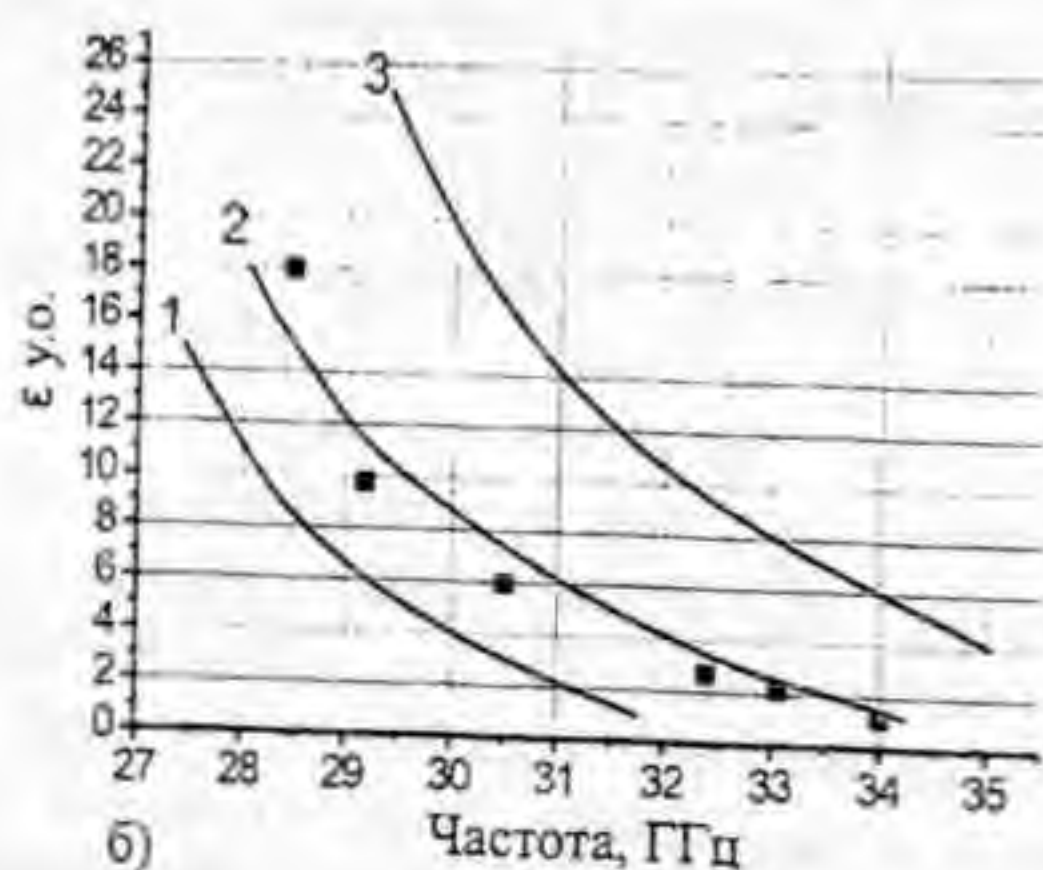
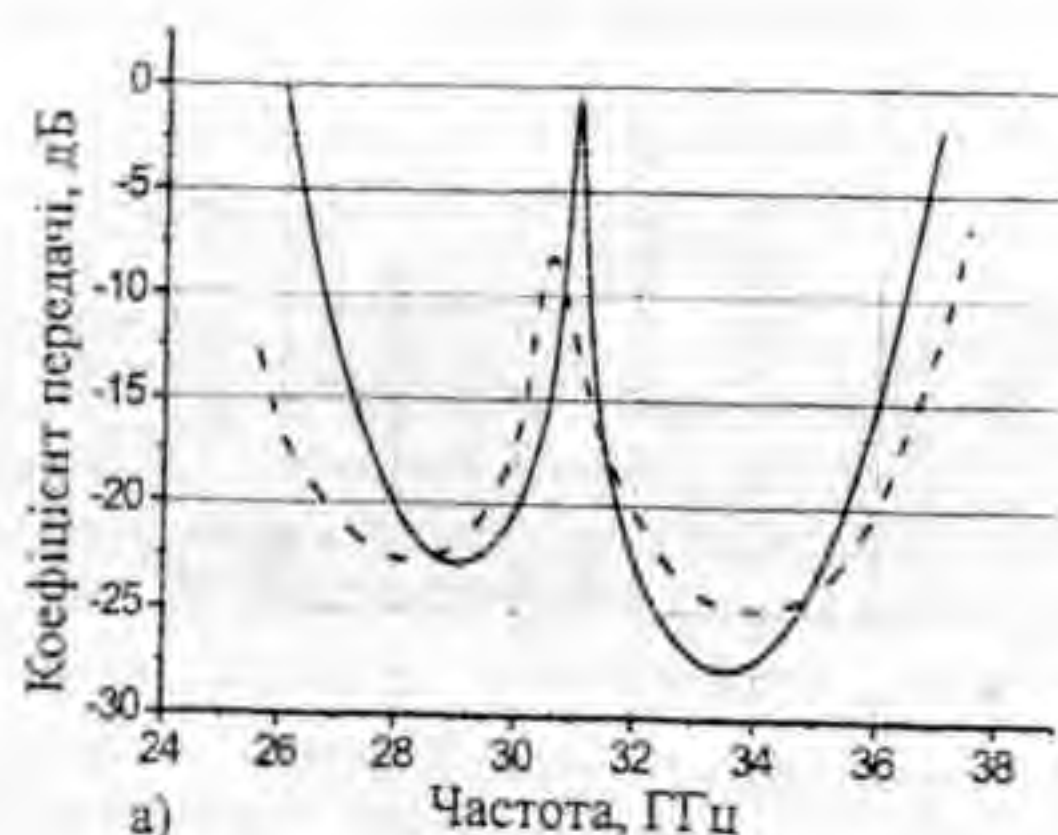


Рис.5 а) Пік пропускання всередині забороненої зони фотонної структури з $\epsilon = 6$ (суцільна лінія – розрахунок, пунктирна – експериментальні дані);

б) Зміщення піка пропускання всередині забороненої зони з різними розмірами “дефектного” шару (1 – 7мм, 2 – 5,65мм, 3 – 4мм) та з різними значеннями ϵ (суцільні лінії – розрахунок, точки – експериментальні дані (для випадку 2 з розміром “дефектного” шару 5,65 мм)).

експериментальні для “дефекту” з розміром 5,65мм показані на рис.5(б).

Висновки

Запропонований підхід представлення електромагнітного випромінювання через суперпозицію двох хвиль дозволяє проводити розрахунки в хвилеводі, заповненому шаруватою

діелектричною структурою, використовуючи будь-який метод розрахунку для звичайних дискретно-неоднорідних середовищ. Згідно цього підходу, використовуючи метод імпедансів, можна обчислити будь-які параметри амплітудно-частотної характеристики таких структур у хвилеводі. Порівняння теоретичних даних з експериментальними дослідженнями показали задовільне співпадіння результатів.

Теоретичні результати та експериментальні дані дозволяють зробити висновки, що отримані співвідношення можуть бути використані для розрахунків та аналізу реальних як періодичних, так і довільних структур з метою оптимізації та управління забороненими зонами для потреб високочастотної техніки та фізики фотонних кристалів в оптиці.

Список використаних джерел

1. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ: В 2т. – М.: Высшая школа, 1970. – Т.1. – 439 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. – 343 с.
3. Карпов С.Ю., Столяров С.Н. Распространение и преобразование волн в средах с одномерной периодичностью// УФН, М. – 1993. – 163, - №1. – С.63-89.
4. Лаунець В.Л., Олійник В.В. Дослідження взаємодії електромагнітної хвилі з довільною структурою діелектричних пластин у хвилеводі// Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – № 1. – С. 267-270.
5. Акиба С., Утака К. Динамические одночастотные полупроводниковые лазеры// Физика полупроводниковых лазеров. – М.: Мир. – 1989. – С. 137-158.
6. Данилов В.В., Макаров Д.Г., Олейник В.В. Измерение диэлектрической проницаемости с использованием волноводной брэгговской структуры// Меж. конференция “СВЧ техника и коммуникационные технологии”. Материалы конференции. Украина, Севастополь, – 2005. – С. 785-786.

Надійшла до редколегії 24.12.2007

УДК 621.396.67

Скрипка С. Л., асп., Данилов В.В., докт. фіз.-мат. наук, проф., Осіюк Р. В., студ., Нечипорук О.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Планарний ТЕ ближньопольовий зонд

Розглянута можливість створення ТЕ планарного ближньопольового зонду на основі TEM стрічкової лінії передачі. Структури ближньопольових зондів різної геометрії досліджені експериментально та чисельно за допомогою Finite Different Time Domain алгоритму.

Ключові слова: FDTD метод, рівняння Максвелла, ближньопольовий зонд.

*E-mail: chipa@univ.kiev.ua

I. Introduction

Development and creation of wide-band planar integrated wave-guiding structures are one of the most urgent directions in modern physics and electronics. The simplicity of a planar waveguides makes them very useful for creation of a geometrically complex waveguiding structures with surface mounted elements for integrated circuits. One of the waveguides of such type is two-strip waveguide which consists of two flat conducting surfaces parted by a layer of non-conductor. Electrodynamics characteristics of this waveguide were investigated in [1, 6].

A possibility of development of near-field probe on the basis this structure is very interesting due to TEM wave configuration of spreading within signal. As well known many of the conventional near-field probes for mm-, sub-mm and optic wave bands on the basis of coaxial, round waveguides, non-conductor round or rectangular waveguides or optical fiber have a major drawback. It's the existence of supercriticality at the probe apex where near-field is formed [2, 3]. It leads to exponential reduction of near-field at the probe sampling area, and to sensitivity reduction as follows. Furthermore, if probe is utilized for data recording amplitude of incoming signal must be set higher to compensate near-field reduction. Such compensations are not always acceptable.

In the case of using two-strip waveguide such drawback is eliminated and no near-field reduction at the probe apex arises [6].

A possibility of development of near-field probe based on two-strip waveguide, are discussed

Skripka S.L., post-grad. stud., Danilov V.V., Dr. Sci. Prof., Osiyuk R.V., Stud., Nechiporuk O.Y., assoc. prof., Ph. D.

Planar TE near-field probe

The possibilities of development of a planar TE near-field probe based on the TEM two-strip waveguide are discussed. Electrodynamics process running within planar TE near-field probes of different geometry are investigated numerically and experimentally. Finite Different Time Domain algorithm is used for computations.

Key Words: FDTD-method, Maxwell's equation, near-field probe.

in [6]. As shown in [6], in the case of single-mode probe when width of waveguide is less than wavelength divided by two the amplitude of near field near apex is almost the same as amplitude of within propagating signal. But electrodynamic characteristics of a near-field probe with TE-mode of within propagating signal are not investigated.

Therefore, the objectives of current work are to define difference between single-mode TEM probe and TE probes amplitude of near field at the probe apex.

II. Basic part

The numerical calculation and experimental results of wave process within planar near field probes of different geometry is presented and compared. All computations were done by using FDTD algorithm [4]. Experimental results were obtained on the P2-65 network analyzer.

FDTD

To obtain time field evolution in structure it is common to use FDTD-method. This method gives the opportunity to solve time-dependent Maxwell's equations [4]. The main point of the method is following: all investigated volume G is divided into elementary spatial cells $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ (for 3D geometry of the problem) and time intervals Δt . In the certain cell of obtained lattice the starting condition must be set. The starting condition is recalculating on the recurrent low in the nearest cells. After large quantity of such recalculations the

Представлена Даниловим В.В., проф. д-р.м.н.

field distribution in arbitrary cell of the lattice at arbitrary moment of time can be obtained.

In the case of current calculations distance steps Δx , Δy and Δz been choosing to be equal and set to $\Delta l = 0.25$ mm. Time step was set in line with the Current ratio:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} = 4 \cdot 10^{-13} \text{ s where } c \text{ is}$$

electromagnetic wave velocity in current structure. Investigated volume was set to $25 \times 20 \times 75$ mm. Duration of calculated wave process was set larger then transients time $t = 8$ ns.

To simulate open space within finite lattice and to prevent stationary wave origination "Perfectly Matched Layers" (PML) [5] were utilized as an absolute absorbing boundary condition.

Near-field probe

The schematics of a near-field probe based on a TEM two-strip waveguide with triangular aperture apex are shown in figure 1.

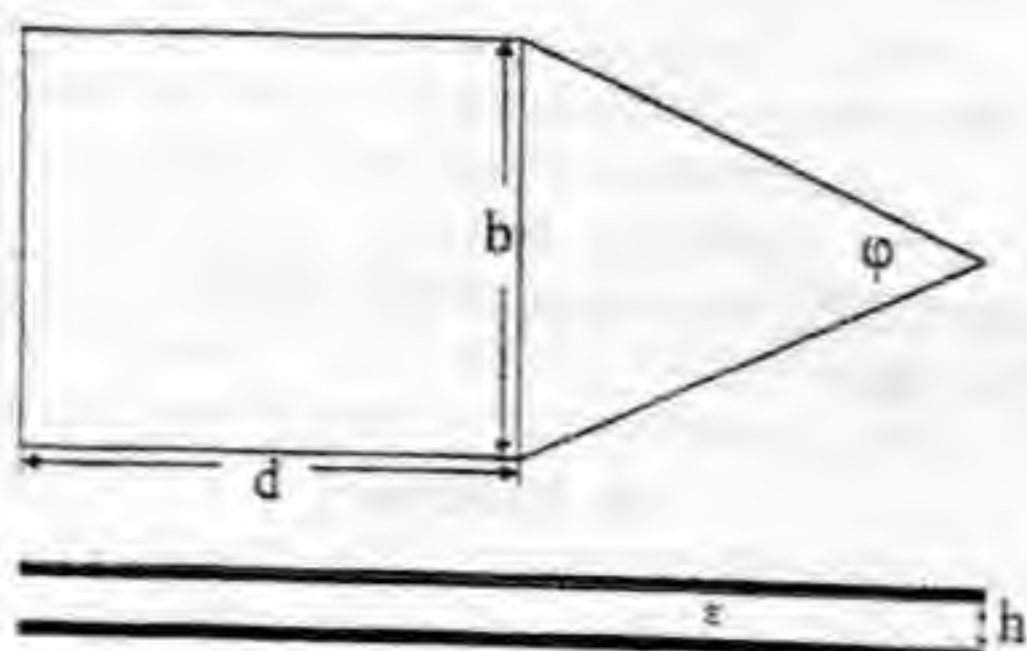


Fig.1. Schematics of a near-field probe based on a two-strip waveguide. h – height, b – width, φ – front corner angle, d – length of a waveguide, ε – nonconductor layer permittivity.

Numerical and experimental investigations were performed to compare probes of different configurations with TEM and TE-mode of within propagating waves. To create TE-mode in the waveguide the width b was set several times greater than wavelength divided by two, when the height h remained invariable. Front corner angle φ has been varied as well to fined near-field amplitude dependence on it.

Therefore, numerical calculation and experimental investigation were performed on the basis of the following parameters:

1. To obtain minimal radiation signal loss the height has been chosen less than wavelength of within propagating wave divided by eight [1], and set to $h = 125$ μm .
2. To obtain approximately plane wave front of propagating wave waveguide length d was set significantly greater then wavelength ($d = 10 \cdot \lambda$).
3. Nonconductor layer permittivity value was $\varepsilon = 2.35$ due to the properties of the experimental sample.
4. Conductivity of metal surfaces was equal to conductivity of copper $\sigma = 5.88 \cdot 10^7$ S/m.
5. Losses in nonconductor have not been taken into account.

To perform an experiment with utilization of a network analyzer with a standard waveguide test-set the sample should have been constructed on the basis of rectangular waveguide. Therefore, tested sample consisted of rectangular waveguide which was coupled to a two-strip waveguide with help of special type of junction, which has a loss value at $L \approx 0.3$ dB. To measure near field amplitude near the probe apex the detector on the basis of detector-diode without shell was utilized.

Sample which consists of a rectangular waveguide which was coupled to a TEM single-mode probe is shown in figure 2.

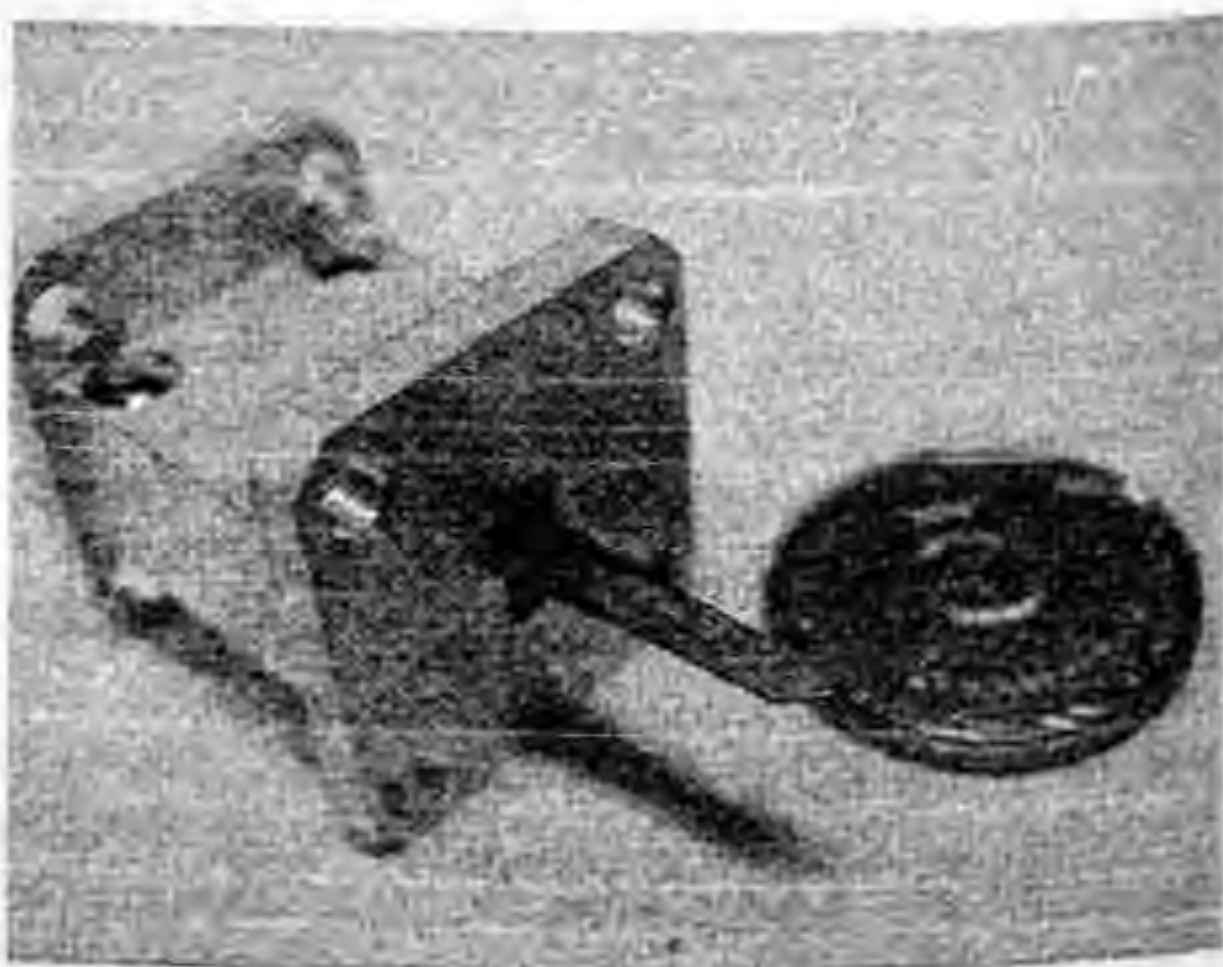


Fig.2. Picture of sample which consists of a rectangular waveguide which is coupled to a TEM single-mode probe.

Experimental investigations were performed at the frequency range of 25-38 GHz.

Investigation results

First of all computations were performed to determine probe apex near field amplitude dependence on front corner angle. It was shown in

[6] that under the condition of single-mode TEM probe absence of amplitude dependence on front corner angle can be obtained. Amplitude dependence on front corner angle for near-field TE probes with width b greater than wavelength was investigated in the current work.

Numerical calculation was performed on the basis of the following parameters:

1. TE probe with width equal to $b = 1.5\lambda$ was investigated.
2. Front corner angle was discretely varied from 33 to 150 deg.

Computation results of near-field amplitude dependence on front corner angle are shown in figure 3.

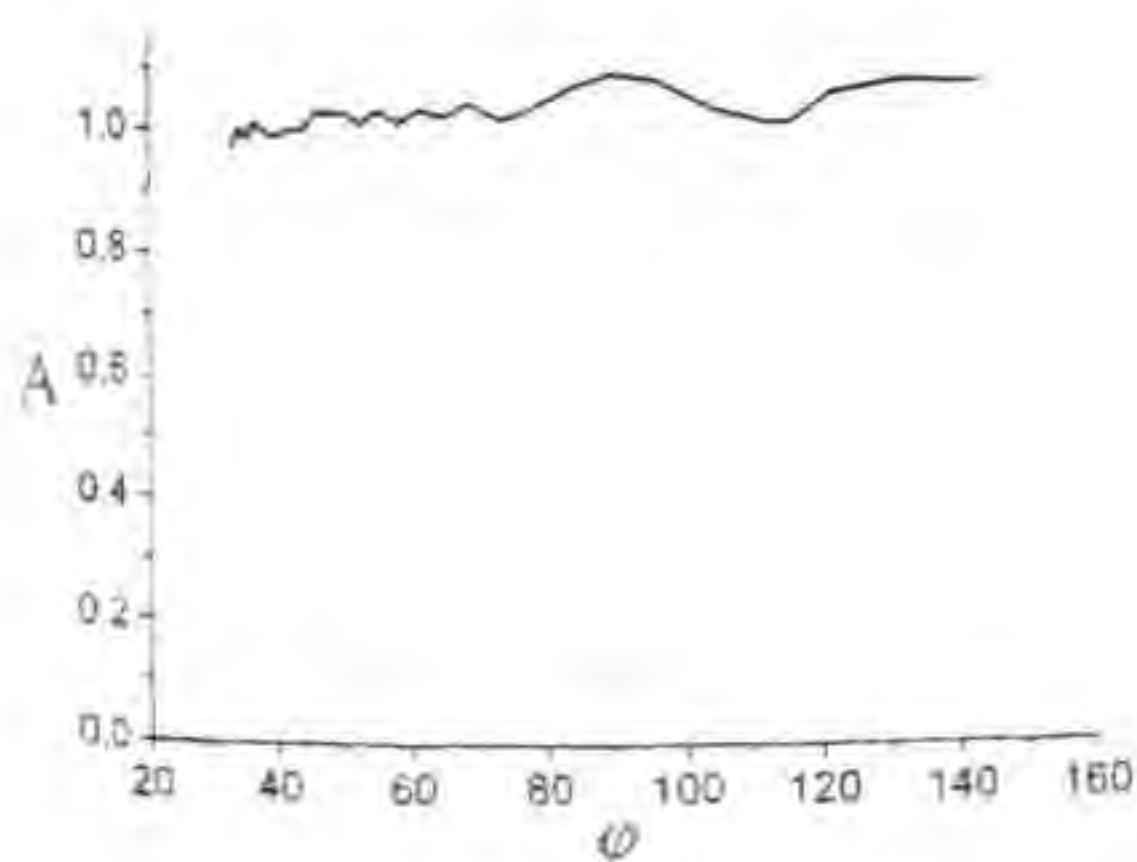


Fig.3. Probe near field amplitude dependence as a function of front corner angle, where A – normalized near field amplitude. Probe width equals to $b = 1.5\lambda$.

The computation results display that as well as for TEM single-mode near-field probe, the amplitude dependence on front corner angle for the TE probe is almost absent. A further investigation of probes with higher TE-modes display almost equal amplitude dependences where the higher near-field amplitude has been obtained when φ is equal to $\varphi = 90$ deg.

The second task was to determine near-field amplitude dependence on distance from probe apex for TE probes, and to compare the results for probes with different width b , so with different modes of within propagating wave.

Computation and experimental investigation were performed on the basis of the following parameters:

1. Probe front corner angle was set to $\varphi = 90$ deg to maximize near-field amplitude.

2. Distance from probe apex was varied from $l = 0$ to $l = 0.16\lambda$.
3. Three different configurations of probes were investigated: probes with width $b = 0.5\lambda$ (TEM), $b = \lambda$ (TE_{10}) and $b = 1.5\lambda$ (TE_{20}).

The results of near-field amplitude dependence on distance from probe apex for three different probes are shown in figure 4.

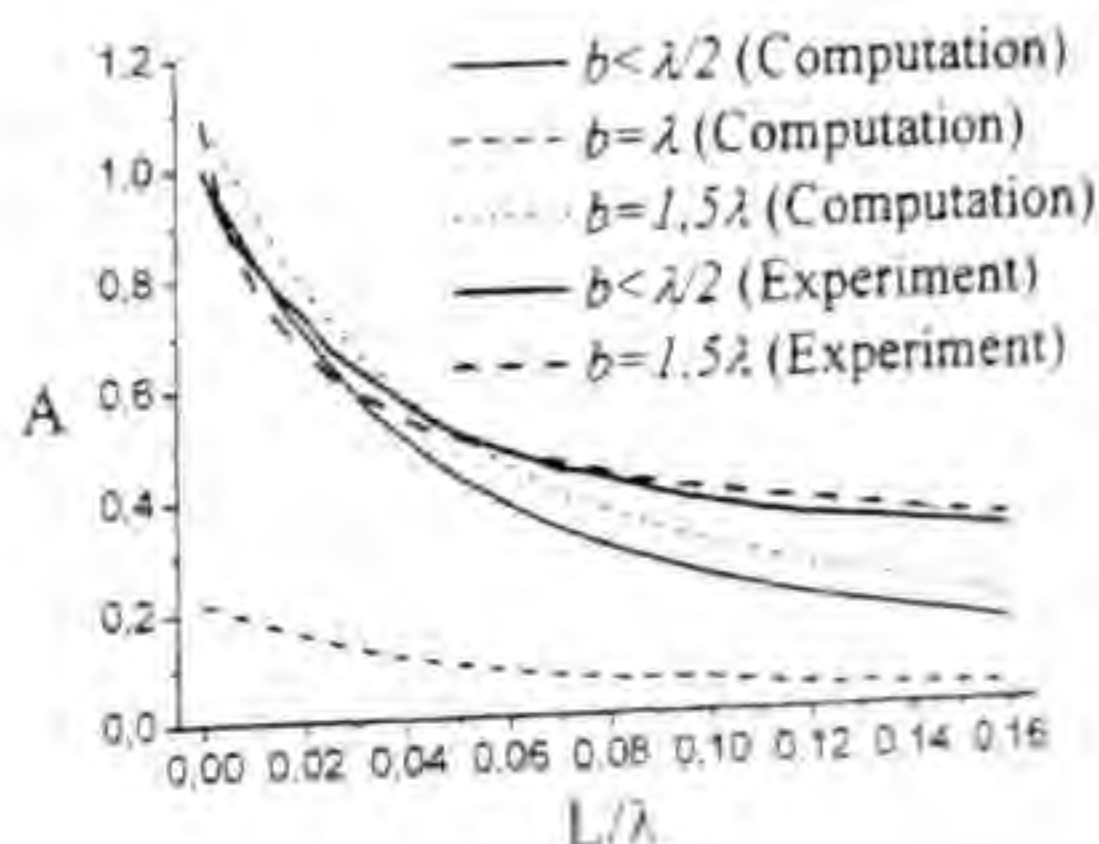


Fig.4. Near field amplitude dependence as a function of distance from probe apex for three different probes, where A – normalized near field amplitude.

The results display that near field amplitude values at the apex of TEM and TE_{20} probes is almost the same. Obtained difference between them is approximately 8%. However amplitude value at the apex of TE_{10} probe with width $b = \lambda$ is significantly lower due to node existence directly in the middle of a waveguide, so at the probe apex.

A further investigation of probes with higher TE-modes display that for even TE modes near-field amplitude is rising on 8% with each increase of a waveguide width on one λ , so with each increase of mode index on 2.

Experimental results also have displayed that probe radiation level is at $L = -35$ dB with respect to amplitude of within propagating wave, and resolution can be at least $D = \lambda/12$, what is in the aggregate with such high near-field amplitude makes this probe very useful for data recording and spectroscopy.

III. Conclusions

Thus, investigations have displayed that a near-field probes with TE-mode can be created on the basis of planar two-strip waveguide.

Results have displayed that a near-field amplitude boost for TE probes is equal to $n \cdot 1.09/2$ where n – is mode index. It leads to significant increase of a complete structure size what is not always acceptable.

However near-field probes with TE-mode can be very useful if it's critical to obtain high near field amplitude and a size of the complete structure is not important.

References

1. Скрипка С. Л., Данилов В. В., Нечипорук А. Ю. Планарный ТЕМ фильтр с кольцевым резонатором // Известия Вузов Радиоэлектроника, – 2006 – 49, 11-12 – С. 54-57.
2. Hirota K., Milster T. D., Zhang Y., Erwin J. K. Design of Near-Field Probe for Optical Recording Using a 3-Dimensional Finite Difference Time Domain Method // Japanese Journal of Applied Physics – 2000 – 39, 2B – P. 973-975.
3. McGowan R. W., Gallot G., Grischkowsky D. Propagation of ultra-wideband, short pulses of THz radiation through sub-mm diameter circular waveguides, // Opt. Lett – 1999 – 24, P. 1431-1433.
4. Yee K. S. Numerical solutions of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation – AP-14, 3 – P. 302-307.
5. Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics – 1994 – 114, 2 – P. 185-200.
6. Danilov V. V., Skripka S. L., Nechiporuk O. U. Planar Waveguides and Resonators of Mm- And Submm Bands // Proceedings of the Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Wave and Workshop on Terahertz Technologies. – 2007 – 1, June 25-30 – Kharkov – P. 234-236.

Надійшла до редколегії 13.12.2007

УДК 539.2:53.05:[546.11-123:546.289]:620.193.199

Ткаченко А.В., асп., Ананьїна О.Ю., канд фіз.-мат. наук, доц., Яновський О.С., канд фіз.-мат. наук, доц.

Теоретичне дослідження корозійної дії атомарного водню на моногідридній поверхні Ge(100)-(2×1)

В роботі представлені результати квантово-хімічного моделювання процесів взаємодії атомарного водню з моногідридними поверхнями Ge(100). Показано, що при взаємодії моногідридної поверхні Ge(100) з атомарним воднем можливе утворення летючих гідридів германія. Розраховано енергетичні характеристики можливих фізичних і хімічних процесів в системі "кластер - водень".

Ключові слова: кластер, МЗДП, водень, моногідридна поверхня Ge(100).

E-mail: avt@mail.zp.ua

Атомарний водень з одного боку це найпростіший адсорбат, з другого - водень присутній в численних технологічних процесах сучасної електроніки: газофазному осадженні, епітаксії, тощо. Відомо, що взаємодія поверхонь Si та Ge із атомарним воднем призводить до утворення на ній моно- і дигідридних станів [1-3]. У моногідридному стані водень насичує один обірваний зв'язок димерного атома поверхні. Дигідридні стани утворюються при насиченні воднем двох зв'язків атомів поверхні, поверхневі димери при цьому руйнуються. При взаємодії германія з атомарним воднем однією з можливих реакцій є утворення летючих гідридів, про що свідчать експериментальні дані [4]. Однак до кінця не зрозумілим залишається механізм взаємодії поверхонь Ge(100) з атомами газової фази (H, OH, O), що передують утворенню германів.

За даними роботи [5] при адсорбції атомарного водню на чистій поверхні Ge(100) енергія активації складає 0.2 eV, що пояснюється необхідністю руйнування слабого π -зв'язку між атомами поверхневих димерів германія. Розраховані значення енергій активації адсорбції для утворення дигідридних станів з моногідридних становить $E_a = 1.8$ eV для поверхні Ge(100), що пов'язано з

Tkachenko A.V., post. grad. stud., Ananyina O.Y., Ph.D., assistant prof., Yanovsky O.S., Ph.D., assistant prof.

Theoretical study of corrosion effect of atomic hydrogen on the monohydride Ge(100)-(2×1) surface

The results of quantum-chemical simulation of hydrogen interaction with monohydride Ge(100) surfaces are presented in this work. The possibility of volatile germanium hydrides formation during such an interaction is demonstrated. Energy characteristics for possible physical and chemical processes in "cluster - hydrogen" system are calculated.

Key Words: cluster, dihydride surface, monohydride surface.

витратами на руйнування димерного зв'язку і зміну положення поверхневих атомів.

Згідно експериментальним даним [6], дигідридні стани на чистій упорядкованій поверхні Ge(100) не утворюються. Стани GeH_2 виникають тільки після попереднього дефектоутворення, наприклад, за допомогою іонного опромінення. Так в спектрах ТД водню з упорядкованих поверхонь Ge(100), витриманих у водні, спостерігається тільки один пік В, наявність якого свідчить про десорбцію водню із моногідридних станів. Пік А, який свідчить про десорбцію із дигідридних станів, з'являється тільки після попереднього дефектоутворення. Розрахунки взаємодії атомарного водню з моногідридними станами на поверхні Ge(100) указують на те, що утворення дигідридної фази на впорядкованих поверхнях Ge(100)-(2×1) ускладнено, на відміну від поверхонь Si(100)-(2×1) [7]. Для поверхні Ge(100) значення енергії активації десорбції ($E_d = 0.6$ eV) молекули водню при зв'язуванні одного з адсорбованих на поверхні атомів H з атомом H газової фази є значно меншим за значення енергії активації, необхідної для утворення дигідриду ($E_a = 1.8$ eV).

Метою роботи є дослідження механізмів взаємодії поверхонь Ge(100) з атомарним

воднем, оцінка енергій активації можливих реакцій у системі „атомарний водень – поверхня” і моделювання корозійної дії атомарного водню на поверхні $\text{Ge}(100)-(2 \times 1)$.

При проведенні досліджень був використаний напівемпіричний метод квантово-хімічного моделювання МЗДП (модифікована зневага диференціальним перекриттям). Цей метод орієнтований на коректне відтворення електронних, енергетичних характеристик і геометричних параметрів молекул (кластерів). Завдяки параметризації, для деяких класів сполук саме цей метод дає більш точні результати в порівнянні з іншими, в тому числі *ab initio*.

Характеристикою чистої впорядкованої поверхні $\text{Ge}(100)-2 \times 1$ є ряди асиметричних димерів (рис.1) [3, 8]. Поверхня $\text{Ge}(100)-2 \times 1$

моделювалася за допомогою кластера Ge_{63} . Розрахунки оптимізованої геометрії поверхні проводилися при мінімумі повної енергії кластера.

Значення енергії активації адсорбції E_a та теплоти адсорбції q (енергії зв'язку водень-поверхня) знаходилися з розрахунків залежності повної енергії системи „кластер-водень” від відстані між атомом водню та атомом поверхні (координати реакції).

При взаємодії моногідридної поверхні $\text{Ge}(100)-2 \times 1$ з атомарним воднем можлива десорбція молекулярного водню з поверхні, розрив димерних зв'язків поверхневих атомів, що призводить до утворення дигідриду, дифузія атомів водню в приповерхневі шари та утворення летючих гідридів германію.

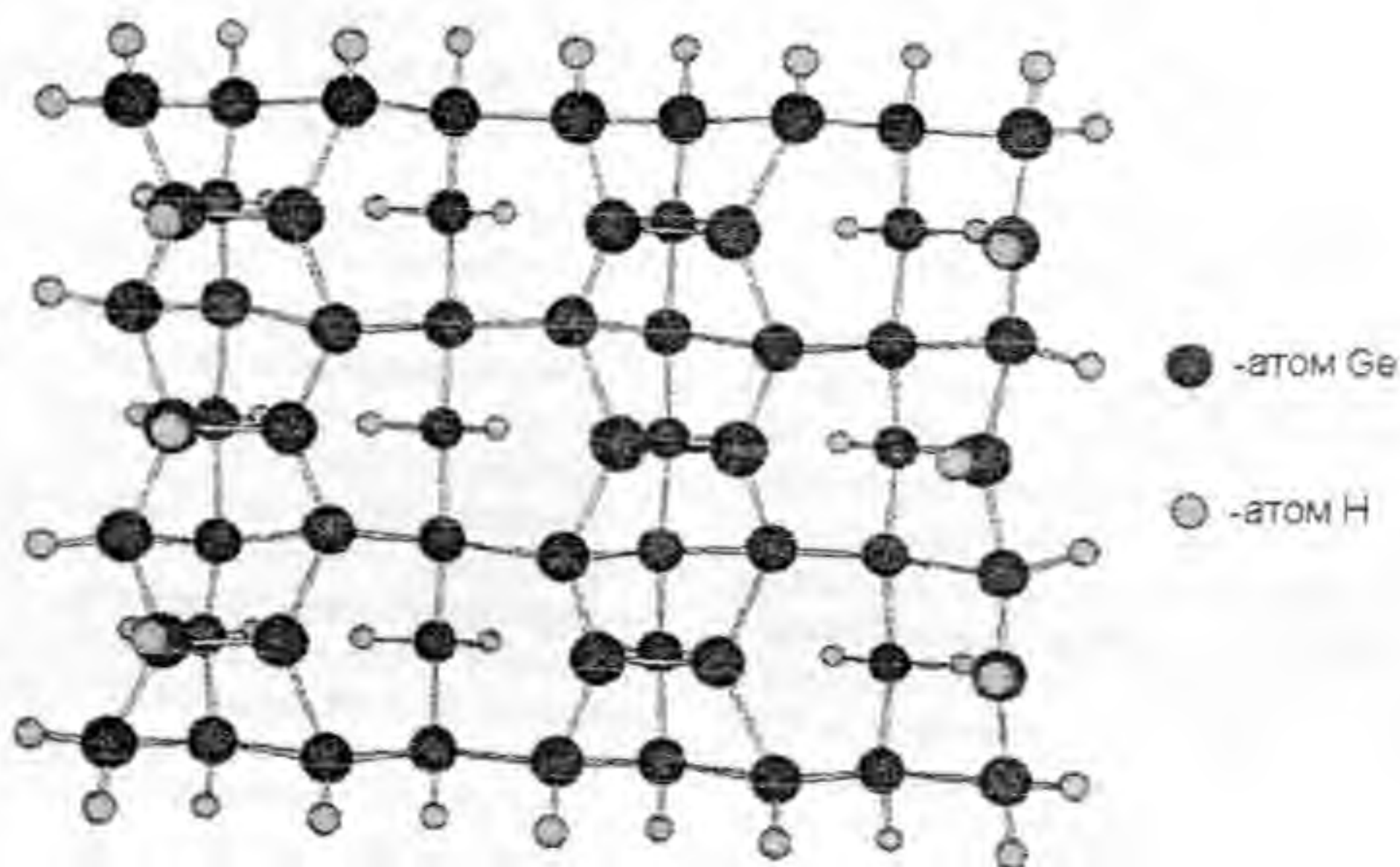


Рис.1. Кластер Ge_{63} , що моделює чисту впорядковану поверхню $\text{Ge}(100)-2 \times 1$

За оцінками значень енергій активації вище вказаних процесів, більш ймовірним є процес десорбції молекулярного водню, (енергія активації $E_a=0.6$ eV). Утворення дигідридного стану GeH_2 (що виникає в результаті розриву під дією атомів Н димерного зв'язку Ge-Ge і приєднання двох атомів Н до кожного поверхневого атома Ge), на упорядкованій поверхні $\text{Ge}(100)$ експериментально не спостерігається, що обумовлено великим значенням активаційного бар'єру.

На відміну від поверхонь $\text{Si}(100)$, на поверхнях $\text{Ge}(100)$ утворення летючих гідридів у результаті взаємодії з атомарним воднем є більш ймовірним.

Руйнування зв'язку поверхневого атому Ge з атомом другого шару кластера (рис.2а) атомарним воднем вимагає енергії активації $E_a=0.8$ eV, що є значно меншою за значення енергії активації утворення дигідриду (розриву димерного зв'язку в моногідридному стані) на упорядкованій поверхні. При руйнуванні зв'язку між атомом центрального димера Ge1 та атомом другого шару Ge5 атом Ge1 піднімається над поверхнею кластеру на $0.7\text{\AA}$ в порівнянні із моногідридним станом. Атом Ge1 зв'язаний із атомом димера Ge2 та з атомом другого шару Ge3 і атомом водню H2 . Довжина зв'язку Ge1-Ge3 складає $2.49\text{\AA}$.

Аналіз валентностей та порядків зв'язків атома Ge1 показує, що він проявляє валентність 3.8.

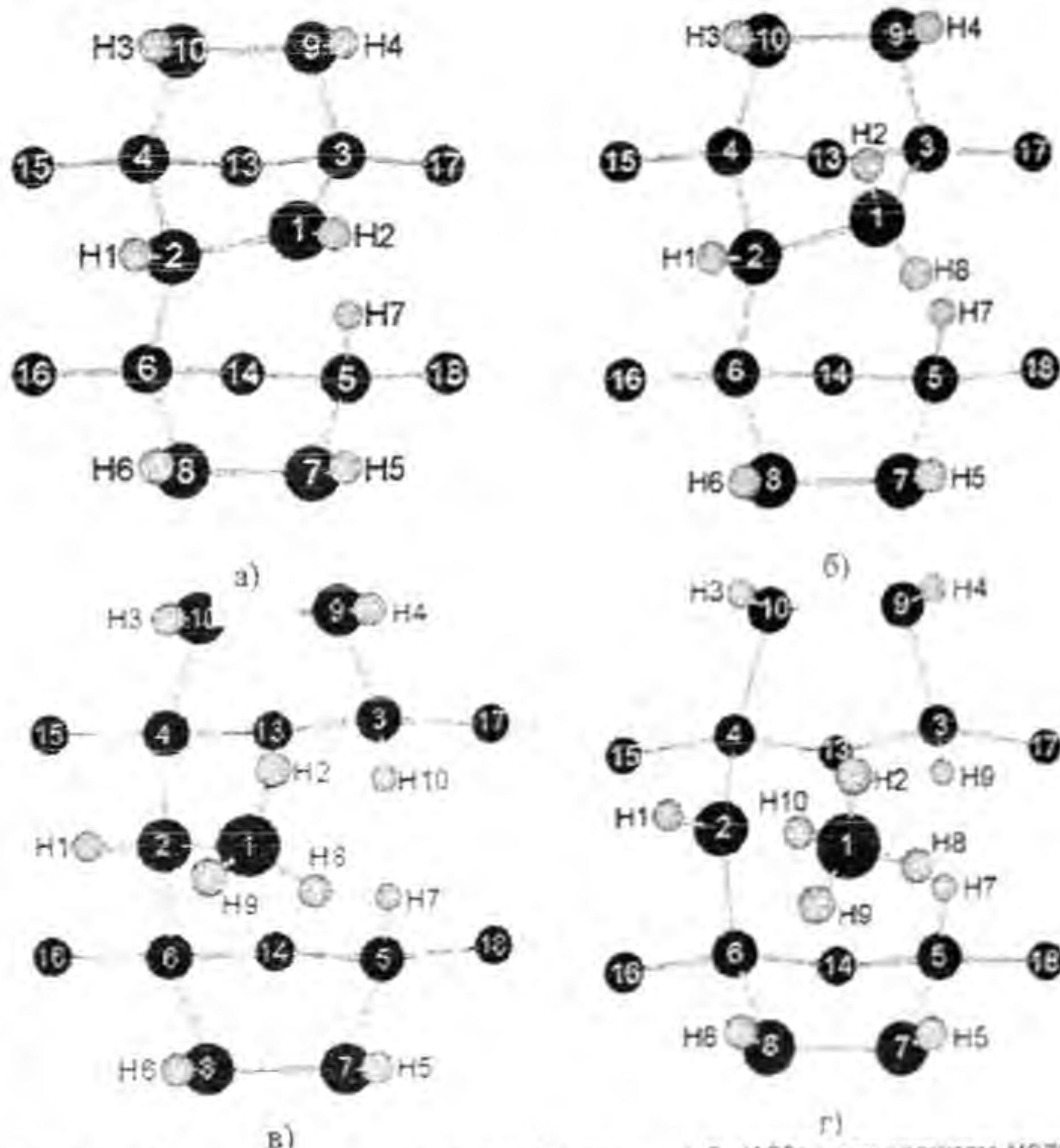


Рис. 2. Результат адсорбції водню на моногідридній поверхні Ge(100) з утворенням молекули герману GeH_4

Порядок зв'язку атомів Ge1-Ge3 склав 0.98; Ge1-Ge2 0.99, Ge1-H2 0.92 (таб. 1), ці зв'язки є досить міцними.

У зв'язках приймають участь три низькоенергетичні орбіталі атома Ge1, гібридизація яких близька до sp^2 (s-складова орбіталей відповідно дорівнює 40.3%, 41.3%, 32.8%). Однак, атом Ge1 має один обірваний зв'язок, його високоенергетична p-орбіталь є напівзаповненою. Таким чином атом Ge1 можна розглядати як потенційний адсорбційний центр.

У результаті подальшої взаємодії поверхні з атомарним воднем обірваний зв'язок атома германію Ge1 (рис. 2б) насичується воднем, тобто утворюється дигідрид GeH_2 . Атом Ge1 ще більше підіймається над поверхнею. При цьому довжина зв'язків між атомами Ge1-Ge2,

Ge1-Ge3 збільшується в порівнянні із попереднім станом і становить 2.51 Å і 2.59 Å

відповідно. Про послаблення цих зв'язків говорить і зменшення порядку зв'язків (порядок зв'язку порівняно з попереднім станом зменшився від 0.99 і 0.98 до 0.85 і 0.80). Спостерігається перерозподіл заряду між даними атомами пов'язаний з переносом від'ємного заряду (-0.81e) з атома Ge1 на сусідні атоми. Заселеність орбіталей атомів Ge2, H2 і H8 збільшується, атома Ge1 зменшується.

Подальша взаємодія атомарного водню з дигідридним станом на поверхні може призвести до руйнування зв'язку Ge1-Ge3 та утворенню тригідриду германію GeH_3 (рис. 2в). Енергія активації реакції адсорбції водню з утворенням тригідриду германію складас 1.0 eV. Атом Ge1 значно піднімається над

сусідніми атомами поверхні, його зв'язок з атомом Ge2 послаблюється (таб. 2).

Потім атомарний водень насичує обірваний зв'язок атома другого шару Ge3. Ця реакція не потребує енергії активації. В результаті атом Ge3 має насичені зв'язки і гібридизацію

орбіталей близьку до sp^3 . Взаємодія атомарного водню з тригідридом германія GeH_3 може призводити до десорбції молекули германа GeH_4 , значення енергії активації для цієї реакції складає 1,1 еВ (рис. 2г).

Геометричні і електронні характеристики поверхні $Ge(100)-2 \times 1$ у стані показаному на рис. 2а

Таблиця 1

N	Q_N , e	P_{NN}	M	P_{MM}	Q_M , e	P_{NM}	R_{NM} , Å	Е ЛО, еВ	s-склад. ЛО _N , %	s-склад. ЛО _M , %
1	+0.35	3.89	3	3.9	+0.33	0.98	2.49	-11.35	40.35	28.46
			2	3.93	+0.16	0.99	2.48	-11.43	41.35	28.39
			H2	0.93	-0.26	0.92	1.49	-13.1	32.82	100
2	+0.16	3.93	1	3.89	+0.35	0.99	2.48	-11.43	28.39	41.35
			4	3.9	+0.4	0.98	2.47	-11.24	25.59	27.69
			6	3.86	+0.46	0.97	2.49	-11.36	28.96	29.69
			H1	0.94	-0.24	0.92	1.49	-13.21	24.23	100
3	+0.33	3.90	1	3.9	+0.35	0.98	2.49	-11.35	28.46	40.35
			9	3.91	+0.02	0.98	2.45	-11.12	24.11	25.53
			13	3.36	-1.40	0.88	2.40	-11.20	21.88	20.94
			17	3.87	-0.31	0.98	2.49	-11.36	33.65	27.65
6	+0.46	3.86	2	3.93	+0.16	0.97	2.49	-11.36	29.69	28.96
			8	3.91	+0.17	0.99	2.48	-11.26	28.48	27.69
			14	3.13	-1.66	0.83	2.39	-11.49	23.06	22.07
			16	3.86	-0.37	0.98	2.49	-11.37	31.54	26.83
7	-0.31	3.87	5	3.51	+1.21	0.94	2.45	-11.59	24.99	37.8
			8	3.90	+0.17	0.99	2.51	-10.86	24.49	26.52
			H5	0.97	-0.18	0.96	1.5	-12.99	23.38	100
			11	3.44	+1.33	0.90	2.46	-11.37	25.05	38.85
8	+0.17	3.90	7	3.87	-0.31	0.99	2.51	-10.86	26.52	24.49
			6	3.86	+0.46	0.99	2.48	-11.26	27.69	28.48
			H6	0.93	-0.25	0.93	1.49	-13.17	24.29	100
			12	3.5	+1.21	0.93	2.52	-11.50	29.94	40.72
5	+1.21	3.51	14	3.13	-1.66	0.77	2.39	-11.56	32.5	19.86
			18	3.74	-0.68	0.91	2.43	-11.67	38.28	24.35
			H7	0.85	-0.38	0.78	1.48	-14.17	25.01	100
			7	3.87	-0.31	0.94	2.45	-11.59	37.8	24.99
4	+0.4	3.9	2	3.9	+0.4	0.98	2.47	-11.24	27.69	25.59
			10	3.91	+0.04	0.99	2.47	-11.21	28.19	26.65
			15	3.86	-0.37	0.98	2.44	-11.46	31.72	26.07
			13	3.36	-1.40	0.88	2.41	-11.24	22.99	20.99

Позначення в таблиці 1: N, M – номер атома в кластері; Q_N , Q_M – заряд на атомі; P_{NN} , P_{MM} – валентність; R_{NM} – міжатомна відстань; P_{NM} –

порядок зв'язку, $E_{ЛО}$ – енергія локалізованої орбіталі.

Таблиця 2

Геометричні і електронні характеристики
поверхні Ge(100)-2×1 у стані показаному на
рис. 2в

N	Q_N, e	P_{NN}	M	P_{MM}	Q_M, e	P_{NM}	$R_{NM}, \text{\AA}$	E ЛО, eV	s-склад ЛО _N , %	s-склад ЛО _M , %
1	+1.54	3.29	2	3.78	-0.54	0.80	2.47	-11.28	42,77	23,65
			H2	0.84	-0.40	0.81	1.48	-13.49	34,82	100
			H8	0.84	-0.40	0.81	1.48	-13.48	34,66	100
			H9	0.84	-0.40	0.81	1.47	-13.45	34,0	100
2	-0.54	3.78	1	3.29	+1.54	0.85	2.47	-11.28	23,65	42,77
			4	3.73	+0.83	0.94	2.46	-11.37	24,39	31,38
			6	3.72	+0.84	0.94	2.46	-11.38	24,25	31,38
			H1	0.97	-0.17	0.96	1.50	-13.23	28,54	100
4	+0.83	3.73	2	3.78	-0.54	0.94	2.46	-11.37	31,38	24,39
			13	3,03	-1,77	0,78	2,39	-11,55	27,03	21,25
			15	3,81	-0,53	0,95	2,47	-11,40	32,76	25,63
			10	3,91	-0,02	0,98	2,48	-11,36	32,1	26,98
6	+0.84	3.72	2	3.78	-0.54	0.94	2.46	-11.38	31,38	24,25
			8	3.9	-0.02	0.97	2.48	-11.36	32,17	21,91
			16	3,81	-0,54	0,94	2,47	-11,42	32,98	25,55
			14	3,03	-1,77	0,79	2,39	-11,57	27,17	21,60
3	+1.25	3.48	10	3,88	-0,25	0,94	2,45	-11,48	37,25	25,16
			13	3,03	-1,77	0,74	2,39	-11,47	32,40	18,59
			17	3,73	-0,72	0,90	2,45	-11,63	39,39	24,85
			H10	0,86	-0,37	0,84	1,47	-13,72	26,61	100
5	+1,24	3,48	14	3,03	-1,77	0,73	2,39	-11,43	32,30	18,40
			7	3,89	-0,22	0,94	2,46	-11,47	38,19	25,45
			18	3,73	-0,71	0,89	2,44	-11,57	38,67	24,46
			H7	0,86	-0,37	0,84	1,47	-13,66	26,42	100

Позначення в таблиці 2: N, M – номер атома в кластері; Q_N, Q_M – заряд на атомі; P_{NN}, P_{MM} – валентність; R_{NM} – міжатомна відстань;

P_{NM} – порядок зв'язку, E ЛО – енергія локалізованої орбіталі.

Таким чином, за результатами квантово-хімічного моделювання показано, що взаємодія атомарного водню з моногідридними поверхнями, які моделювалися кластером Ge₆₃, може призводити до утворення летючих германів. Значення енергій активації етапів взаємодії, які призводять до корозійної дії атомарного водню на поверхні Ge(100) склали близько 8-1.0 eV. Таким чином, за оцінками енергій

активації процесів, корозійна для водню може конкурувати з реакціями десорбції молекулярного водню з поверхні германія. Отже, на нашу думку, корозійна для атомарного водню можлива, наприклад, при витримці поверхні Ge(100)-2×1 в середовищі з високою концентрацією атомарного водню або при взаємодії її з атомами Н, що мають значну кінетичну енергію.

Список використаних джерел

1. *Аппельбаум Дж., Хамман Д.* Хемосорбция на поверхности полупроводников // Теория хемосорбции / Под ред. Дж. Смита. – М.: Мир, 1983. – С. 60-101.
2. *Papagno L., Shen X.Y., Anderson J., Schirripa Spagnolo G., Lapeyre G.J.* Hydrogen adsorption on Ge(100) studied by high - resolution energy - loss spectroscopy // *Phys. Rev. B.* - 1986, - 34, № 10. - P. 7180–7191.
3. *Schaefer J.A.* Hydrogen interaction with semiconductor surfaces // *Surface Sci.* – 1986. - 178, № 1-3. - P. 90-100.
4. *Ромашин С.Н., Седов А.В., Касаткин Э.В.* Самоорганизация при осаждении пленок полупроводников в среде атомарного водорода, Журнал технической физики. - 2004. - 74, вып. 8.
5. *Ананьїна О.Ю.* Квантово-хімічне моделювання процесів взаємодії водню, силану, атомів та іонів фосфору і бору з упорядкованими та дефектними поверхнями Si(100) і Ge(100), автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, Ужгород, 2006. С.20.
6. *Яновский А.С., Герчиков М.Ю., Панеш А.М.* Адсорбционные свойства кремния и германия после ионного облучения // *Поверхность. Физика, химия, механика.* – 1989. - №8. - С. 5-16.
7. *Ананьїна О.Ю., Яновський О.С., Котляров А.П.* Моделювання взаємодії атомарного водню з вакансійним дефектом на поверхні Ge(100) // *Фізика і хімія твердого тіла.* - 2003. - №4. - С. 638-642.
8. *Ананьїна О., Бабко С., Яновський О.* Моделювання поверхонь Ge(100) і Si(100) за допомогою кластерів, Вісник Львівського університету, Серія фізична. - 2006. - №39, с.10-16.

Надійшла до редколегії 20.11.06.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532

Адаменко І.І., доктор фіз.-мат. наук, професор,
Григор'єв А.М., канд. фіз.-мат. наук,
Кузовков Ю.Г., канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. сп.,
Мироненко О.К., студент

Чутливість теплофізичних властивостей рідин до потенціалу сил відштовхування

Методом Монте-Карло досліджені теплофізичні властивості двовимірної модельної системи частинок, які взаємодіють за допомогою оберненого степеневого потенціалу (модель м'яких дисків) з показниками $m=4$ та $m=12$ в широкому інтервалі температур і густин. Встановлено, що густина, коефіцієнт теплового розширення та ізохорна теплоємність є величинами, які нечутливі до показника степені потенціалу сил відштовхування. Модулі ізотермічної та адіабатичної пружності, ізобарна теплоємність та відношення теплоємностей суттєво залежать від m . Серед них найбільш придатною характеристикою для визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії є модуль адіабатичної пружності.

Ключові слова: м'які диски, теплофізичні властивості, чутливість до показника степені сил відштовхування

*E-mail: agnoriev@univ.kiev.ua

Теплофізичні властивості рідин використовують як одне з джерел інформації про потенціал міжмолекулярної взаємодії [1]. Зокрема, аналіз залежності густини ρ від тиску P і температури T за допомогою статистично обґрунтованого рівняння стану рідини дозволяє визначити характер сил відштовхування між частинками [2-4]. При виводі рівняння стану автори [2] використовували потенціальну модель м'яких сфер:

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^m} \quad (1)$$

де r – відстань між частинками, m – показник, що характеризує „крутизну” потенціалу. При заданій функціональній формі потенціалу задача полягає у підборі такого m , яке дозволило б найкращим чином описати експериментальні P - ρ - T дані. Слід підкреслити, що параметри виведеного рівняння стану залежать, у свою чергу, від показника „крутизни” потенціалу.

I.I. Adamenko, professor
A.N. Grigoriev,
Yu.I. Kuzovkov
O.K. Myronenko

Sensitivity of thermophysical properties of liquids to repulsive force potential

Thermophysical properties of two-dimensional system of particles interacting through inverse power potential (soft discs) with exponents $m=4$ and $m=12$ have been studied by Monte-Carlo simulation in a wide range of temperatures and pressures. Density, thermal expansion coefficient and isochoric heat capacity are proved to be insensitive to repulsive force potential exponent. Isothermal and adiabatic elasticity moduli, isobaric heat capacity and capacities ratio essentially depend on m . Among them adiabatic elasticity module K_S is the most suitable for potential parameters determination.

Key Words: soft discs, thermophysical properties, sensitivity to repulsive force potential exponent.

Відомості про показник сил відштовхування можна отримати також з даних по розсіянню світла [4] та температурній залежності одночастинкового внеску γ коефіцієнт самодифузії рідин [5]. Вибір тих чи інших макрочарактеристики обумовлений можливістю її точного експериментального визначення з одного боку, а з іншого – її чутливістю до того параметру, що визначається. Так, в роботі [6] був проаналізований коефіцієнт самодифузії системи частинок, які взаємодіють за допомогою потенціалу Леннарда-Джонса ($m=6$). Показано, що коефіцієнт самодифузії не чутливий до показника потенціалу сил відштовхування. Тому цю характеристику недоцільно використовувати для визначення m .

Виникає питання, які макроскопічні властивості є надійним джерелом інформації про відштовхувальну частину потенціалу міжмолекулярної взаємодії, а які ні?

Намн були досліджені теплофізичні властивості двовимірної модельної системи

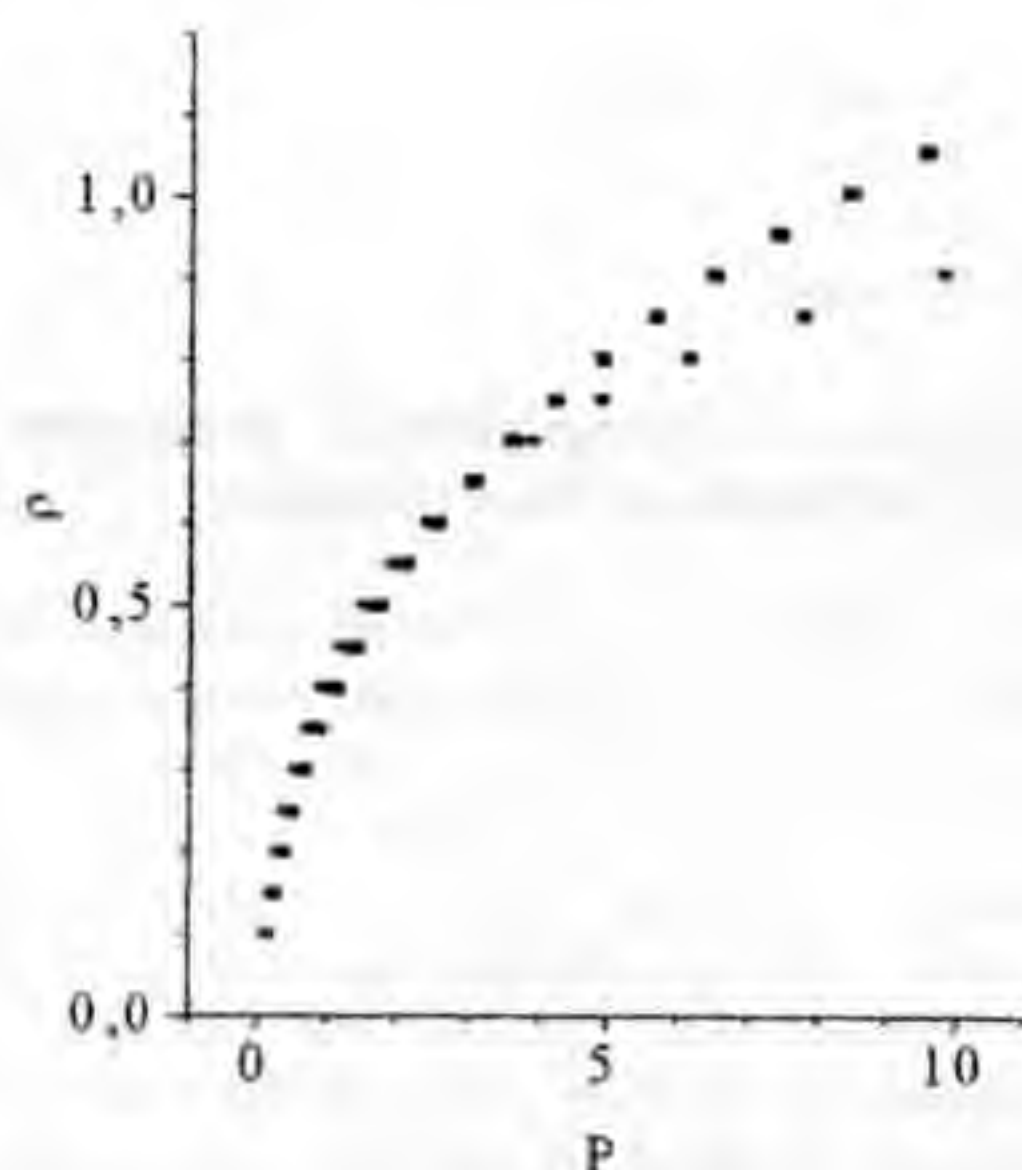


Рис. 1. Барична залежність густини системи м'яких дисків (■ – $m=4$, ○ – $m=12$).

частинок, які взаємодіють за допомогою оберненого степеневого потенціалу (1) з різними показниками m (модель м'яких дисків). Моделювання виконувалося методом Монте-Карло в канонічному ансамблі за допомогою алгоритма Метрополіса [7] для приведених температур $T=1.0, 1.5$ і 2.0 в інтервалі приведених густин ρ від 0.1 до значень, що відповідають твердій фазі. Максимальна величина пробного зміщення підбиралася так, щоб кількість прийнятих конфігурацій складала наближено 30%.

Внутрішня енергія E , тиск P , ізотермічний модуль пружності K_T , ізохорна теплоємність C_V , коефіцієнт теплового розширення α_P , адіабатичний модуль пружності K_S , відношення теплоємностей γ та ізобарна теплоємність C_P розраховувалися за формулами, наведеними в монографії [7]:

$$E = NT + \langle U \rangle, \quad U = \sum_{i < j} \phi(r_{ij}), \quad (2)$$

де N – кількість частинок в основній комірці, U – потенціальна енергія системи, $\phi(r)$ – парний потенціал взаємодії між частинками,

$$P = \frac{NT + \langle W \rangle}{S}, \quad W = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} r_{ij} \frac{d\phi}{dr_{ij}}, \quad (3)$$

де S – площа комірки, W – віріал сил;

$$\langle \delta W^2 \rangle = T(NT + \langle W \rangle - SK_T + \langle X \rangle),$$

$$X = \frac{1}{4} \sum_{i < j} r_{ij} \frac{d}{dr_{ij}} \left(r_{ij} \frac{d\phi}{dr_{ij}} \right), \quad (4)$$

де X – гіпервіріал сил;

$$\langle \delta U^2 \rangle = T^2(C_V - C_V^{id}), \quad C_V^{id} = N, \quad (5)$$

де C_V^{id} – кінетична частина теплоємності;

$$\langle \delta U \delta W \rangle = T^2(V\gamma_V - N), \quad (6)$$

де

$$\gamma_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad (7)$$

– термічний коефіцієнт;

$$\alpha_P = \frac{\gamma_V}{K_T}; \quad K_S = K_T + \frac{T\gamma_V^2}{\rho C_V}; \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{K_S}{K_T}, \quad C_P = C_V \gamma. \quad (9)$$

Результати розрахунків для двох систем м'яких дисків з $m=4$ і $m=12$ при $T=1.0$ представлені на Рис.1 – 6.

В таблиці представлені відношення

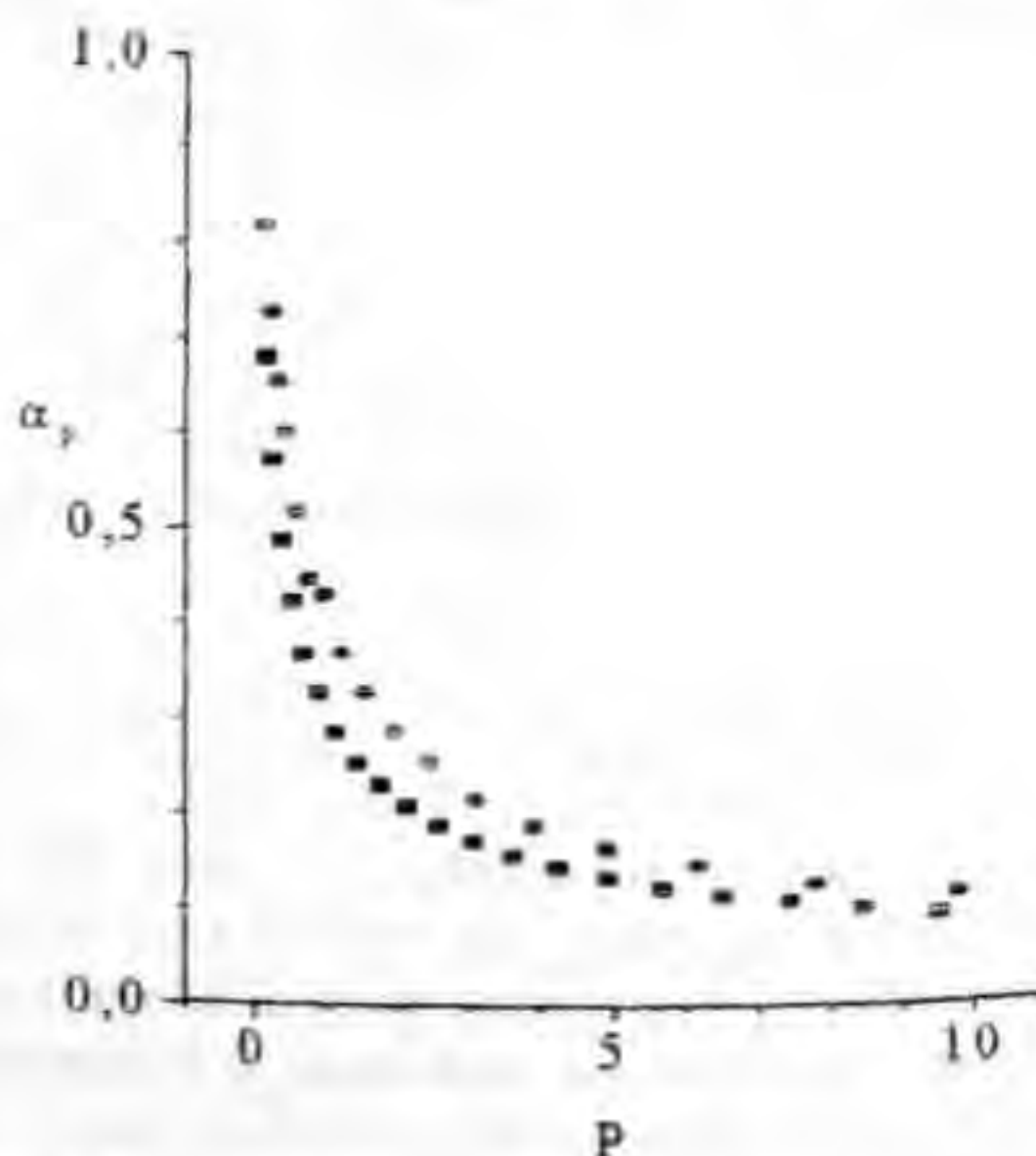


Рис.2. Барична залежність коефіцієнта теплового розширення системи м'яких дисків (■ – $m=4$, ○ – $m=12$).

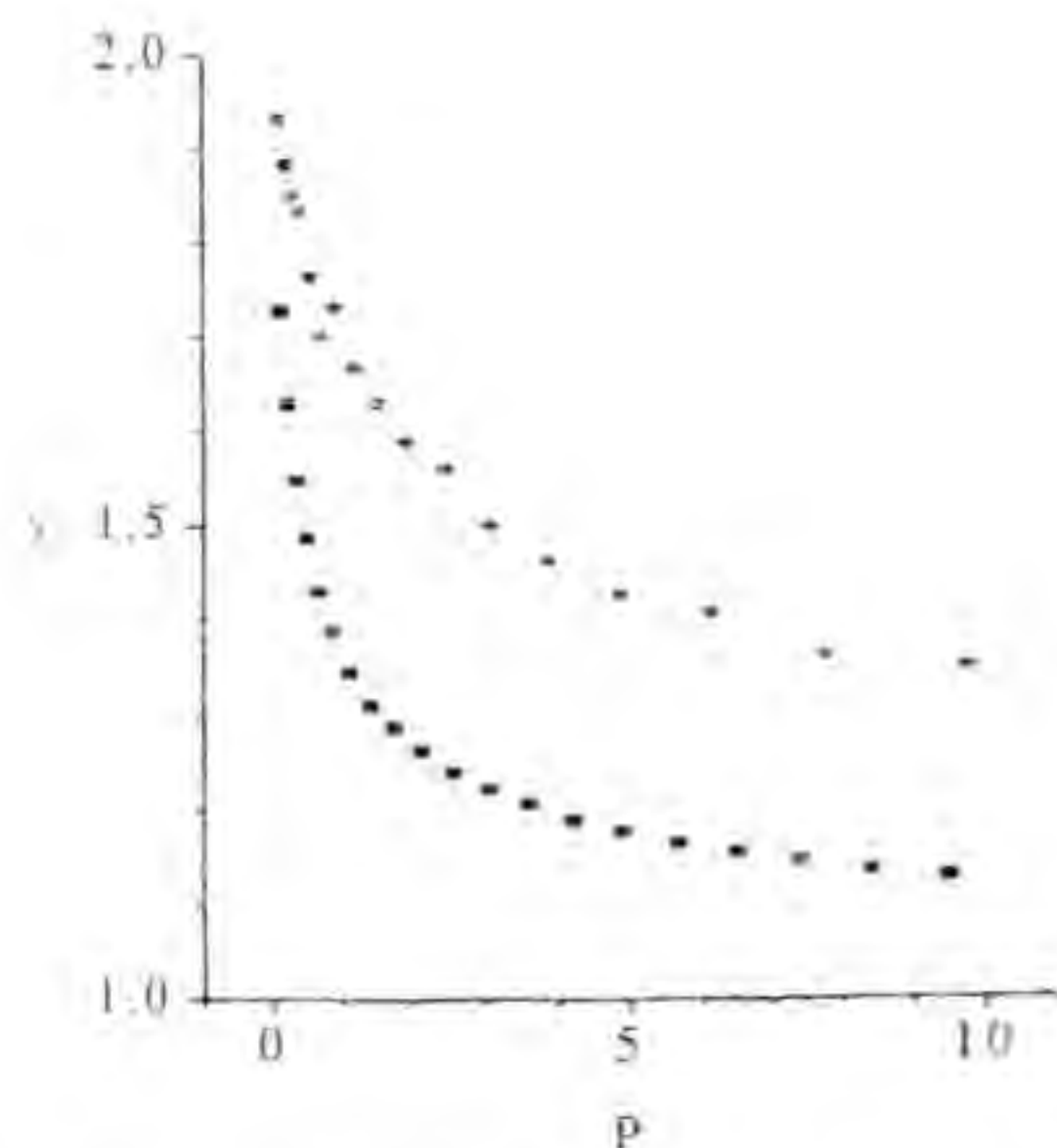


Рис. 3. Барична залежність відношення теплоємностей системи м'яких дисків ($\blacksquare$ – $m=4$, $-$ – $m=12$)

досліджених теплофізичних величин для двох систем м'яких дисків з $m=4$ та $m=12$ при $T=1.0$ в інтервалі тисків P від 1 до 9. Можна виділити дві групи теплофізичних характеристик – з малою та високою чутливістю до m . До першої входять ρ і C_p . Слід відмітити, що при високих тисках ($P > 7$) чутливість ρ до m дещо зростає. Але цей інтервал тисків є малодоступним для експерименту, до того ж похибка вимірювання ρ при високих P збільшується.

До другої групи входять K_T , K_S , C_p і γ . На

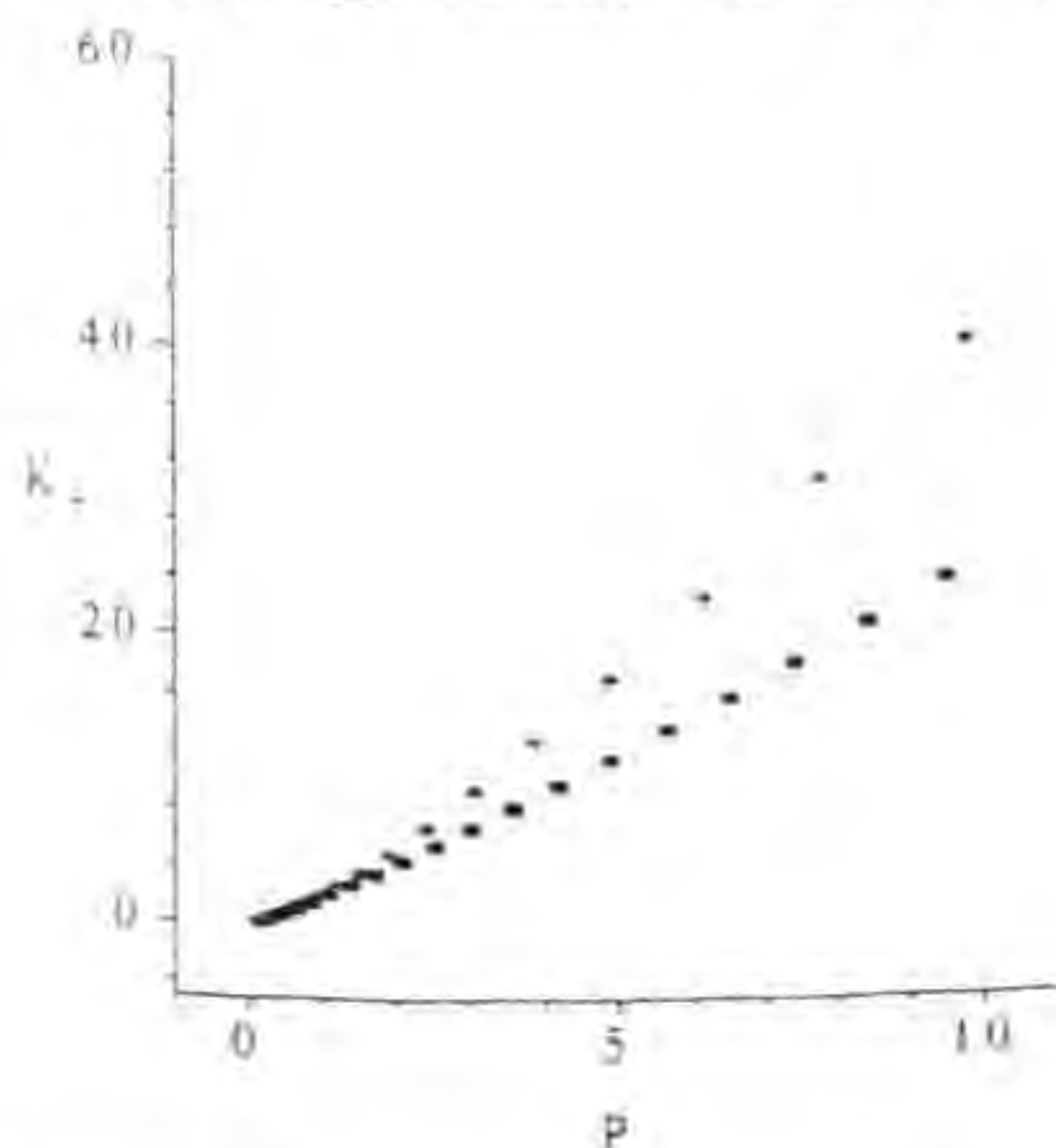


Рис. 5. Барична залежність ізотермічного модуля пружності системи м'яких дисків ($\blacksquare$ – $m=4$, $-$ – $m=12$)

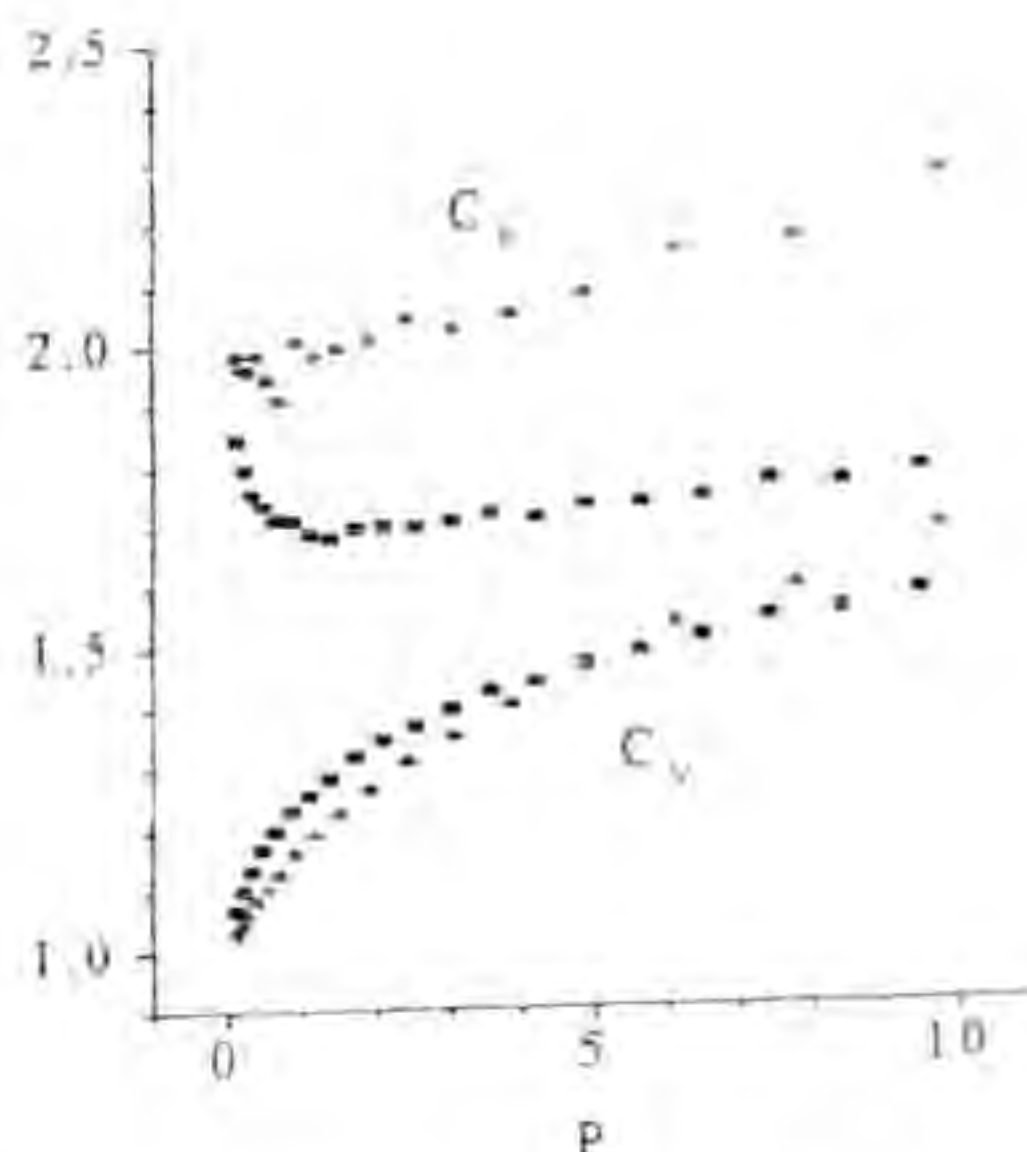


Рис. 4. Барична залежність ізохорної та ізобарної теплоємностей системи м'яких дисків ($\blacksquare$ – $m=4$, $-$ – $m=12$)

перший погляд здається, що α_P також належить до цієї групи. Відношення $\alpha_P^{12} / \alpha_P^4$ досягає 1.3, як і у випадку, наприклад, $C_p^{12} / C_p^4 \approx \gamma^{12} / \gamma^4$. Але при цьому не враховується похибка віднесення. Як видно з рис. 2, барична залежність коефіцієнта теплового розширення має такий характер, що навіть невелике відхилення по P викликає значну зміну α_P , особливо в області малих та помірних тисків. Тому визначення m з даних по α_P не є коректним.

Серед інших досліджених теплофізичних

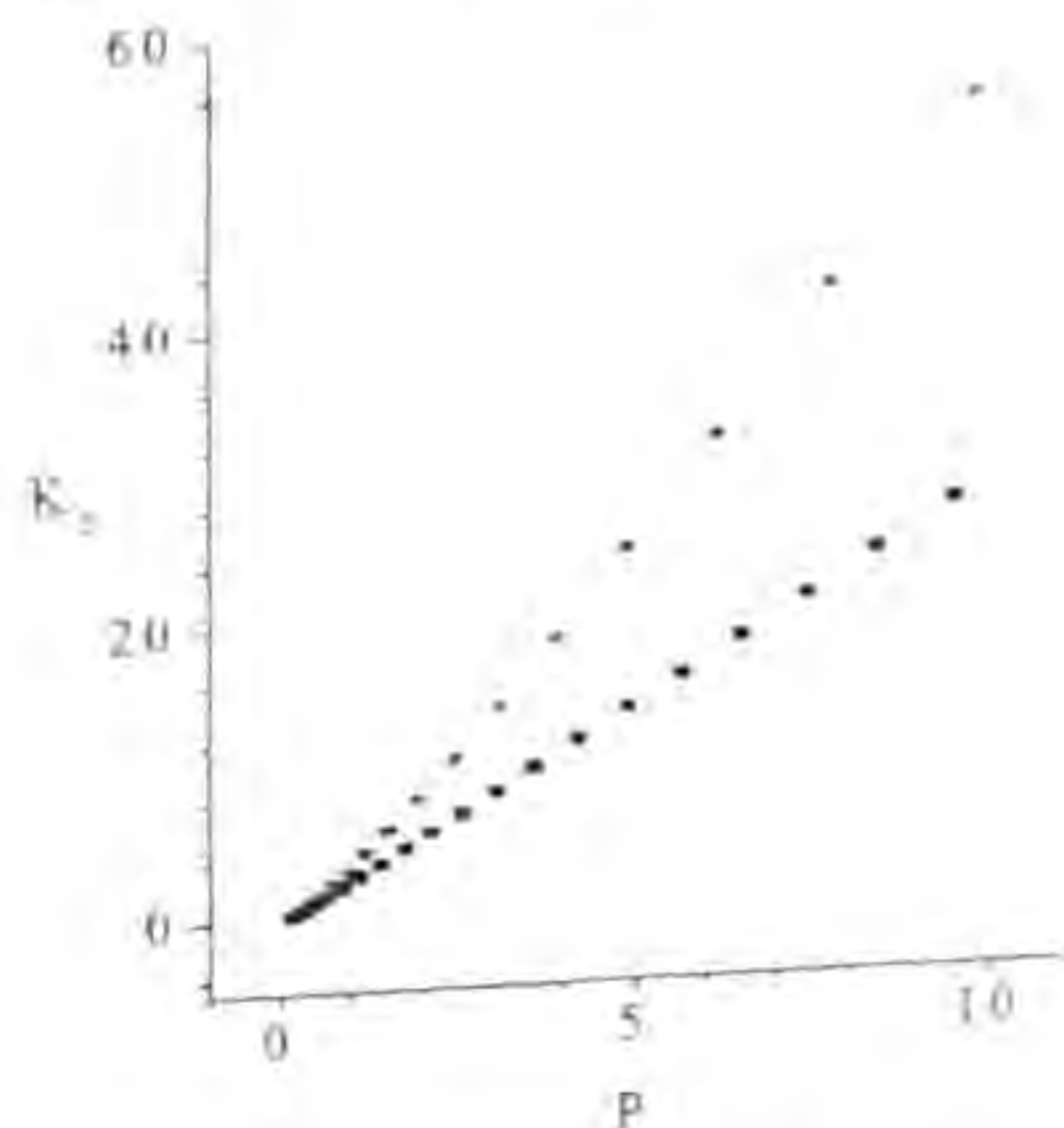


Рис. 6. Барична залежність адіабатичного модуля пружності системи м'яких дисків ($\blacksquare$ – $m=4$, $-$ – $m=12$)

Таблиця

Відносна чутливість теплофізичних величин до m

P	ρ^{12}/ρ^4	α_p^{12}/α_p^4	K_T^{12}/K_T^4	K_S^{12}/K_S^4	C_p^{12}/C_p^4	C_v^{12}/C_v^4	γ^{12}/γ^4
1	1.08	1.32	1.00	1.33	1.16	0.94	1.26
2	1.02	1.27	1.20	1.54	1.18	0.95	1.24
3	1.00	1.29	1.36	1.67	1.19	0.97	1.24
4	0.96	1.20	1.43	1.73	1.18	0.98	1.22
5	0.94	1.23	1.49	1.81	1.21	1.00	1.21
6	0.92	1.25	1.53	1.84	1.22	1.02	1.22
7	0.89	1.27	1.58	1.89	1.23	1.02	1.20
8	0.88	1.20	1.62	1.91	1.24	1.04	1.19
9	0.85	1.20	1.63	1.95	1.26	1.06	1.19

характеристик найбільш чутливими до m є K_T і K_S . Максимальні відношення K_T^{12}/K_T^4 і K_S^{12}/K_S^4 досягають, відповідно 1.63 і 1.95. При цьому баричні залежності модулів пружності близькі до лінійних, отже похибка віднесення майже не впливає на точність визначення m . Але слід відмітити, що знаходження ізотермічного модуля пружності з експериментальних P - ρ - T даних вимагає здійснення математично некоректної операції чисельного диференціювання, що помітно позначається на точності результату. На відміну від K_T адиабатичний модуль пружності K_S виражається через точно вимірювані в експерименті величини [1]: $K_S = \rho c^2$ (c – швидкість поширення ультразвуку).

Що стосується C_p і γ , то вони визначаються з точністю, як мінімум, на порядок гірше порівняно з K_S . Крім того, залежність теплоємностей від „крутизни” сил відштовхування може маскуватися їхньою досить сильною залежністю від сил притягання [1], які завжди діють між молекулами в реальних рідинах. На відміну від C_p і γ модулі пружності визначаються переважно силами відштовхування. Отже, саме K_S є, на наш погляд, найбільш придатною характеристикою для експериментального визначення параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії.

Таким чином, можна зробити висновок про те, що густина, коефіцієнт теплового розширення та ізохорна теплоємності є величинами, які нечутливі до показника степені потенціалу сил відштовхування. Модулі ізотермічної та адиабатичної пружності, ізобарна теплоємність та відношення теплоємностей суттєво залежать від показника степені сил відштовхування m . Враховуючи простоту і точність експериментального визначення K_S порівняно з K_T , C_p і γ , саме ця теплофізична характеристика є

найкращою для визначення параметрів потенціалу сил відштовхування між молекулами.

Список використаних джерел

1. Адаменко І.І., Булавін Л.А. Фізика рідин та рідинних систем. – К.: АСМІ, 2006. – 660 с.
2. Атамась А.А., Бардик В.Ю., Сисоєв В.М. Корекція параметрів потенціалу міжмолекулярної взаємодії сил відштовхування // УФЖ. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1184-1187.
3. V.Yu. Bardic, V.M. Sysoev, N.P. Malomuzh, K.S. Shakun. Modification of an inverse-power potential for simple liquids and gases // Journal of molecular liquids. – 2006. – Vol. 127, #1-3. – P.96-98.
4. Bardik V.Yu., Shakun K.S. Investigations of the steepness of a repulsive potential in accordance with the equation of state and light-scattering spectra // УФЖ. – 2005. – Т. 50, № 4. – С. 405-407.
5. Бардик В.Ю., Шакурн К.С. Дослідження функціональної форми міжмолекулярного потенціалу на основі самодифузії молекул рідини // УФЖ. – 2005. – 2005. – Т. 50, № 7. – С. 659-661.
6. Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г., Салюк О.А. Відштовхувальна частина потенціалу міжмолекулярної взаємодії та коефіцієнт самодифузії рідин // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – С. 329-331.
7. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer simulation of liquids. – Oxford, Clarendon Press, 1986. – 385 p.

Надійшла до редколегії 29.11.07

УДК 532.536

Альошин О.Д., доктор ф.-м. наук, професор
Абдікарімов Б.Ж., кандидат ф.-м. наук
Рудніков С.Г., кандидат ф.-м. наук
Наконечний Є.П., аспірант

Температурні залежності теплоємності неоднорідних рідин у гравітаційному полі поблизу критичної точки

У роботі на основі флуктуаційної теорії фазових переходів та з використанням лінійної моделі параметричного рівняння стану речовини знайдене рівняння ліній екстремумів немонотонних температурних залежностей ізохорної теплоємності неоднорідної речовини при постійних полях у гравітаційному полі поблизу критичної точки. Така немонотонна поведінка теплоємності підтверджується експериментальними дослідженнями теплоємності як у полі гравітації Землі, так і в умовах мікрогравітації космічного польоту.

Ключові слова: критична точка, гравітаційний ефект, лінійна модель, теплоємність, обмежені системи, мікрогравітація

* E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

Раніше у роботах [1,2] на базі флуктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [3] і теорії гравітаційного ефекту [4] було показано, що в закритичній області при постійних температурах ($t > 0$) має місце немонотонна польова $\Delta\mu \sim h$ (висотна) залежність теплоємності неоднорідної речовини з максимумами на висотах $h \neq 0$. Лише при $t = 0$ максимальне значення висотних залежностей теплоємності відповідає критичній точці. $t = (T - T_c)/T_c$, $\Delta\mu = (\mu - \mu_c)/\mu_c$, $h = \rho_c g z / P_c$. Тут T_c , μ_c , ρ_c , P_c – критичні значення температури, хімічного потенціалу, густини, тиску відповідно; g – прискорення земного тяжіння; z – висота неоднорідної рідини, відрахована від рівня із критичною густиною.

Зроблений також висновок про немонотонну температурну залежність теплоємності речовини при постійних полях $\Delta\mu \sim h$ з максимумами у закритичній області температур. Цей висновок підтверджується експериментальними дослідженнями теплоємності подвійного розчину 2,6 – дутидин-вода у малих порах при постійних лінійних

УДК 532.536

Alekhin A.D., Dr. of Sci., Prof.
Abdikarimov B.Zh., Ph.D.
Rudnikov E.G., Ph.D.

Nakonechnyj E.P., Postgraduate Student

Temperature dependencies of heat capacity for inhomogeneous liquid under gravity near the critical point

The equation of state for extremum line of nonmonotonous temperature dependencies of heat capacity at constant volume for inhomogeneous substance at fixed fields under gravity near the critical point has been obtained in the work by fluctuation theory of phase transitions and linear model of parametric equation of state. Such inhomogeneous behavior is corroborated by experimental investigations of heat capacity both under Earth's gravity and under microgravity conditions of space flight.

Keywords: critical point, effect of gravity, linear model, heat capacity, confined systems, microgravity

розмірах L цих пор поблизу критичної температури розшарування (рис. 1) [5]. У цьому випадку згідно з М. Фішером [6] постійний лінійний розмір пор відповідає постійному полю $\Delta\mu$: $(\Delta\mu_\phi(L) \sim L^{-1/\xi}, \xi = 0.4)$

Мета даної роботи – на базі параметричного рівняння стану речовини [7] розробити рівняння теплоємності неоднорідної речовини в гравітаційному полі уздовж цієї лінії екстремумів температурних залежностей $C_v(t)$.

Для цього умова максимумів температурних залежностей ізохорної теплоємності на висотах $h \sim \Delta\mu \neq 0$ представимо у вигляді

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial t} \right)_h = \left(\frac{\partial \Phi(z^*)}{\partial z^*} \right)_h \left(\frac{\partial z^*}{\partial t} \right)_h = 0 \quad (1)$$

Тут $\Phi(z^*)$ і $z^* = \Delta\mu/t^{1/\xi}$ – масштабна функція та масштабний параметр відповідно. Згідно ФТФП [3], теплоємність речовини $C_v = (\partial^2 F / \partial t^2)_{\mu, h}$ пов'язана із радіусом кореляції $R_\xi = t^{-\nu} \Phi(z^*)$ та флуктуаційною

частиною вільної енергії одиниці об'єму
 $F_\phi = C_0 R_c^{-3}$.

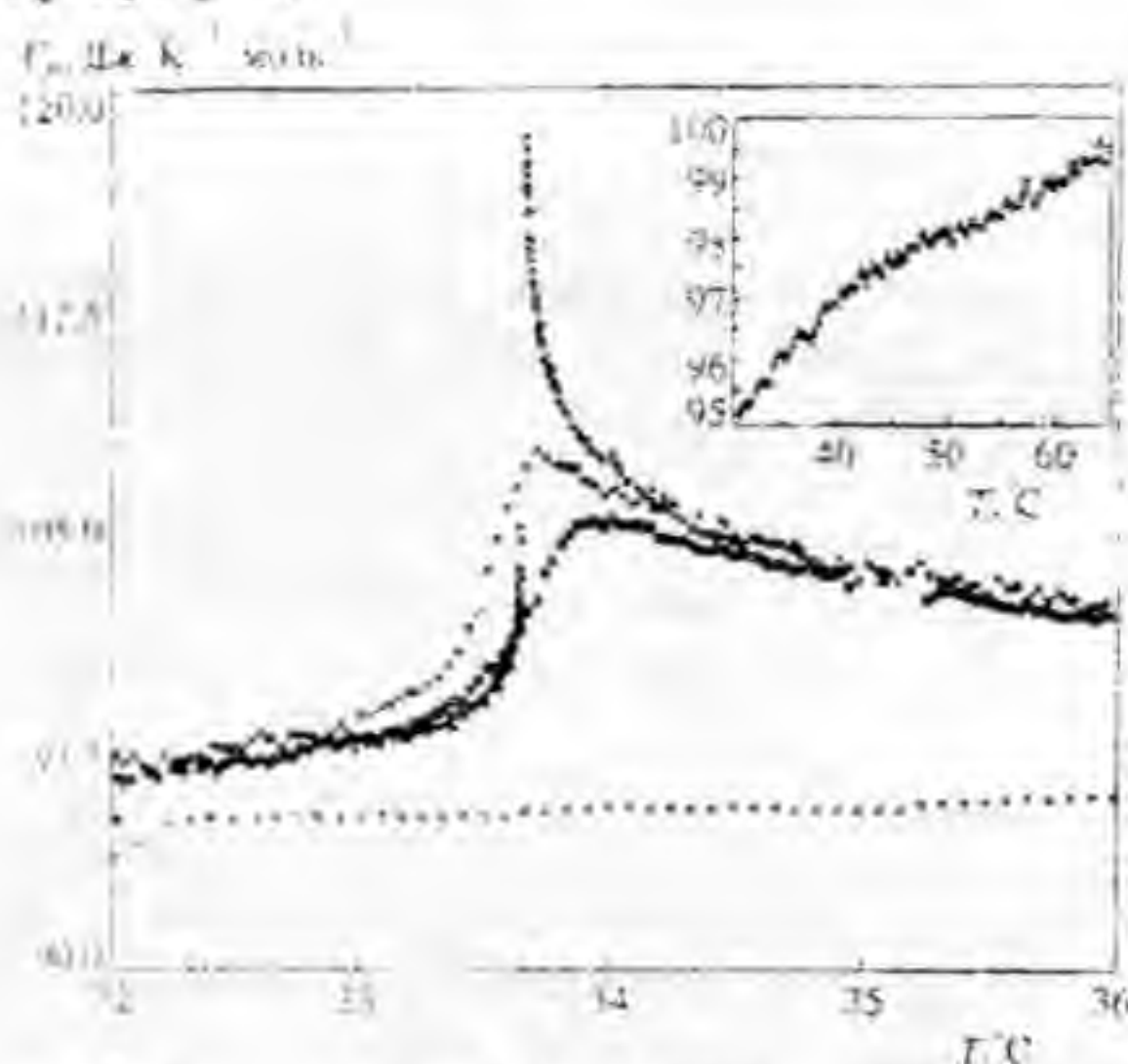


Рис. 1. Температурні залежності теплоємності в малих обмежених системах поблизу критичної температури розшарування подвійного розчину 2,6- лутидин-вода [5].

Тоді умова екстремуму (1) на базі лінійної моделі параметричного рівняння стану [7] записується у формі

$$\frac{\partial^3 F_\phi}{\partial t^3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_\mu \right)_\mu = \left(\frac{\partial C_v(\theta, r)}{\partial t(\theta, r)} \right)_\mu =$$

$$= \frac{(\partial C_v / \partial \theta)_r + (\partial C_v / \partial r)_\theta (\partial r / \partial \theta)_\mu}{(\partial t / \partial \theta)_r + (\partial t / \partial r)_\theta (\partial r / \partial \theta)_\mu} = 0 \quad (2)$$

Похідну $(dr / d\theta)_\mu$ в (2) отримано з умови $\Delta\mu = ar^{\beta\delta} \theta(1 - \theta^2) = \text{const}$. З (1), (2) слідує, що уздовж лінії екстремальних значень теплоємності речовини є справедливою умова $\theta_{ml} = \text{const}$.

Співвідношення для ізохорної теплоємності неоднорідної речовини в гравітаційному полі можна представити на базі отриманих нами співвідношень для радіуса кореляції $R_c(r, \theta)$ і флуктуаційної частини вільної енергії системи одиниці об'єму в параметричному представленні $F_\phi(r, \theta) \sim R_c^{-3}(r, \theta)$. Спочатку для цієї мети було знайдено рівняння ентропії неоднорідної речовини у гравітаційному полі:

$$s(r, \theta) = \partial F_\phi / \partial t = a \cdot k \cdot r^{1-\alpha} (1 - c^2 \theta^2) \cdot k(\theta) \approx$$

$$\approx a \cdot k \cdot r^{1-\alpha} (1 - c^2 \theta^2) \quad (3)$$

Тут параметр c^2 є функцією критичних індексів. Вираз для цього параметра слідує з розв'язку рівняння критичної адіабати $s = (\partial F_\phi / \partial t)_\mu = 0$ і має вигляд:

$$c^2 = \frac{(1 - \alpha)(\gamma - 2\beta)}{(\gamma - 1)\gamma} \quad (4)$$

Потім, використовуючи (3), (4) було отримано співвідношення для ізохорної теплоємності:

$$C_v(r, \theta) = C_0 r^{-\alpha} / (1 + G\theta^2). \quad (5)$$

Тут G – універсальна стала, розрахована в [2]:

$$G = b^2 (2\beta \cdot \delta - 1) +$$

$$\frac{2\chi [3\beta\delta + 3(1 - \alpha)]}{\chi(1 + 3\beta\delta - 2 - \alpha\delta - \eta) + \left[\chi(1 + 3\beta\delta - 2 - \alpha\delta - \eta)^2 + \frac{4}{3} \chi [3\beta\delta + 3(1 - \alpha)] (2 - \alpha\delta - \eta) \right]^{1/2}} \cdot \left(1 - \frac{3\beta\delta}{1 - \alpha} \right) \quad (6)$$

Тут $\chi = 2\gamma \cdot b^2 - 3$.

Розраховуючи в (2) вираз для теплоємності C_v (5) знаходимо, що розв'язок рівняння (2) при $\theta_{ml} = \text{const}$ існує лише при $T > T_c$, і визначається формулою

$$A\theta_{ml}^4 + B\theta_{ml}^2 + 1 = 0, \quad A = 2G\beta\delta/\alpha, \quad B = -3 - A. \quad (7)$$

Як бачимо, параметри цього рівняння A і B залежать лише від величин критичних показників [3]. Оскільки універсальний параметр $\chi = 2(\gamma - 2\beta)/(1 - 2\beta) - 3 \approx 0,4$ (10) є різницею порівнянних величин, він істотно залежить від використаних значень критичних індексів. Для знаходження координати лінії екстремумів теплоємності θ_m у даній роботі використані значення критичних показників $\gamma = 1,233$, $\delta = 4,635$, $\beta = 0,337$, $\alpha = 0,091$, отримані методом введення

малих параметрів [8] у співвідношення ФТФП [3]. Використання даного методу дозволило знайти величини критичних показників з помилкою меншою 1%. Як видно, величини цих показників близькі до їхніх значень у тривимірній моделі Ізінга [3]. Вони найкращим чином відповідають експериментальним даним, отриманим для неоднорідних речовин у гравітаційному полі поблизу КТ [9].

Використовуючи в (7) вказані значення критичних показників [8], знаходимо розв'язок цього рівняння: величина параметра лінійної моделі $\theta_{m1}=0,78 \pm 0,08$ уздовж лінії екстремумів температурних залежностей C_v . Отриманий результат свідчить про те, що при цьому постійному значенні параметра θ_{m1} властивості речовини уздовж лінії екстремумів температурних залежностей C_v одночасно поєднують у собі властивості речовини уздовж трьох граничних критичних напрямків: критичної ізохори, критичної ізотерми та межі поділу фаз.

Отримані нами немонотонні температурні залежності теплоємності неоднорідної речовини можна очікувати не тільки у земних умовах (рис. 1.), але й в умовах мікрогравітації космічного польоту.

Дійсно, експериментальні дослідження властивостей рідин на навколоземних орбітальних станціях свідчать про значну неоднорідність речовини в цих умовах поблизу критичної точки. В умовах мікрогравітації космічного польоту виявлені також і немонотонні температурні залежності теплоємності речовини (^4He) при постійних лінійних розмірах L системи, рис. 2. [10].

Ці результати за умови взаємозв'язку $\Delta\mu_\phi(L) \sim L^{-1/5}$ [5] підтверджують наші висновки про немонотонну температурну поведінку теплоємності неоднорідної речовини поблизу критичної точки, зроблені у роботі [2].

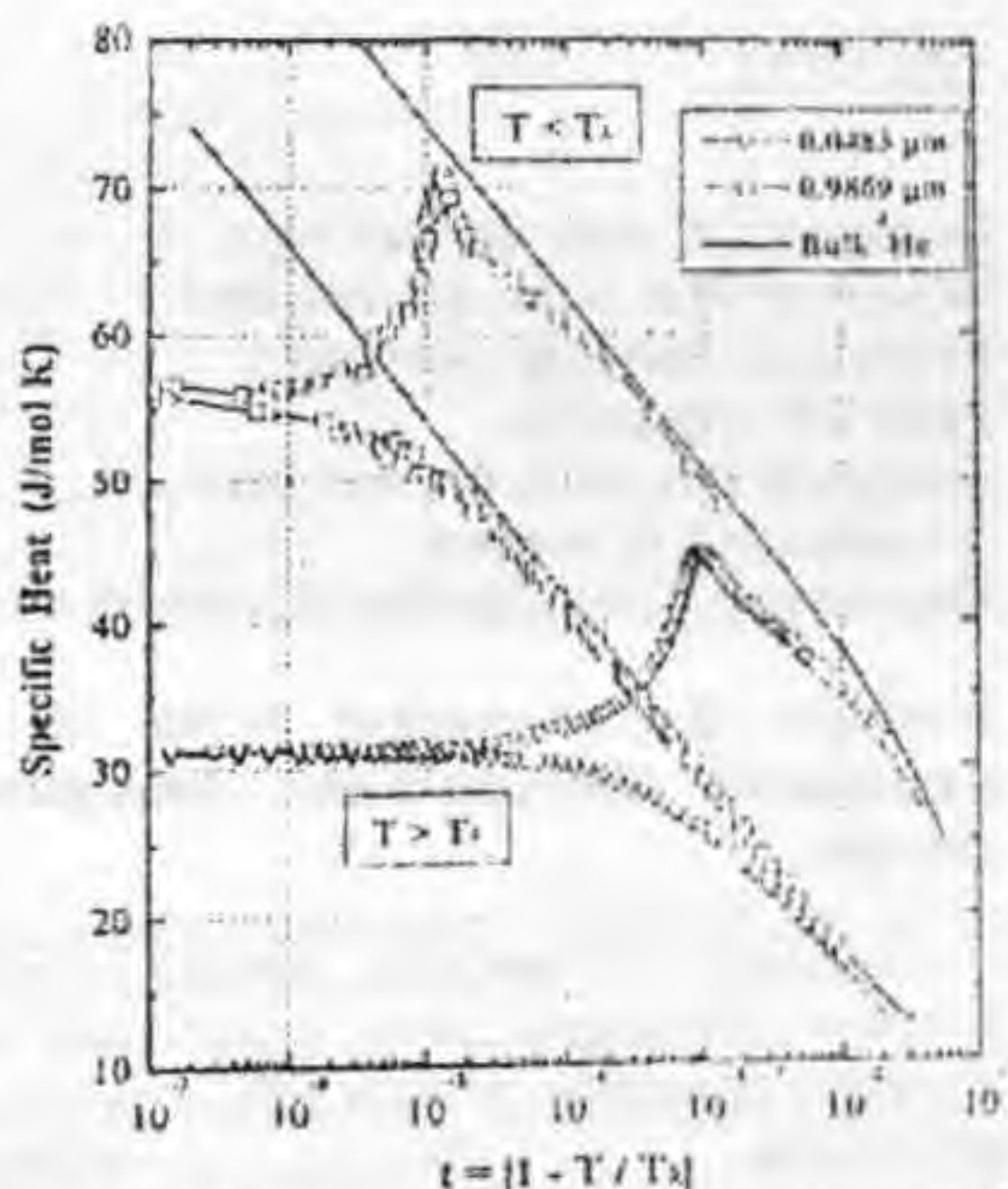


Рис. 2. Залежність аномалії теплоємності для системи ^4He від температури

Список використаних джерел

1. Альохін О.Д., Рудніков Є.Г. // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки. № 4, (2005).
2. Альохін О.Д., Рудніков Є.Г. // Физика Аэродисперсных систем. Межведомственный научный сборник. 2006. – Вып. 43. – С. 67-74.
3. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 2-е изд., перераб. 1982. – 382 с.
4. Алехин А.Д., Крупский Н.П., Чалый А.В. // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 63, вып. 4(10). – С. 1417-1420.
5. Воронов В.П., Булейко В.М. // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 113, № 3. – С. 1071.
6. M.E. Fisher, M.N. Barber. // Phys. Rev. Lett. 1972. – 28 – 1516.
7. Schofield P. Parametric representation of the equation of state near a critical point // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V.22, № 12. – P.606.
8. Alekhin A.D. // Journal of Molecular Liquids. – 2005. – 120 – P. 43-45.
9. Альохін О.Д., Рудніков Є.Г. // Журнал фізичних досліджень. 2004, Т.8, № 2. С. 103-121.
10. J.A. Lipa, M. Goleman D.A. Striker // J. Low. Temp. Phys. 124 (3-4) 443-460, 2001.

Надійшла до редколегії 15.01.2008

УДК 577.32

Барабаш Ю.М., канд. фіз.-мат. наук,
Заболотний М.А., канд. фіз.-мат. наук,
Куліш М.П., доктор фіз.-мат. наук,
Галяс О.В., студентка,
Дмитренко О.П., канд. фіз.-мат. наук
Комаревська Т.В., інженер,
Мартинчук Е.Л., молодший наук. співробітник.

Повільні фотоіндуковані зміни об'єму комплексів бактеріальних реакційних центрів.

Методом голографічної інтерферометрії виміряно структурні зміни в молекулярному комплексі реакційних центрів (РЦ) *Rhodobacter sphaeroides*, які викликані внутрішньомолекулярним переносом електронів.

Проаналізовано фактори впливу на показник заломлення розчинів РЦ. Встановлено, що зміни показника заломлення, які спостерігались, можуть бути викликані лише зміною питомого об'єму молекул РЦ (0,1 – 1%).

Ключові слова: реакційний центр, електронний транспорт, голографічний інтерферометр

Barabash Y.M., Ph.D.
Zabolotny M.A., Ph.D.
Kylish M.P., Ph.D.
Galyas O.V., student.
Dmitrenko O.P. Ph.D.
Komarovskaya T.V., engineer,
Martinchuk E.L., younger research worker

Slow photo-induced changes of the bacterial reaction centers complexes volume

This paper concerns with our measurements of structural changes in reaction centers (RC) *Rhodobacter sphaeroides* molecular complex, which caused by intermolecular electron transfer by the method of holographic interferometry. The factors, which can influence on the RC solution refraction index has been analyzed. It was established, that observable changes in refraction index can be caused only by the changes in specific volume of RC molecules (0,1 – 1%).

Key Words: reaction center, electron transfer, holographic interferometer.

E-mail: ogalyas@ukr.net

Фотосинтез – процес утворення органічної речовини із неорганічної, що є характерним для рослин. Він є початком узгоджених реакцій метаболізму, який забезпечує ріст та розвиток рослин у відповідності з генетичною програмою. Весь процес фотосинтезу може бути умовно розділений на дві стадії. В первинній (світловій) стадії енергія поглинутих квантів світла використовується для розриву хімічних зв'язків, для фотолізу води, а частина енергії запасується в нових хімічних зв'язках. В наступній (темновій) стадії фотосинтезу запасання енергії використовується для відновлення вуглекислоти до цукрів [1]. В цьому ланцюжку реакцій важливе місце відведене процесам поглинання квантів світла і

наступному фотохімічному розділенню зарядів, які відбуваються в реакційних центрах (РЦ).

Молекулярний комплекс РЦ - це трьохсубодинична М, L, N глобула з кофакторами (чотири молекули бактеріохлорофіла Бхл, дві молекули бактеріофеофетіна Бфф, атом заліза Fe). Відомо [1-3], що при поглинанні кванту світла в РЦ відбувається фотоокислення первинного донора електрона – димера бактеріохлорофілу (P). Збуджений електрон через ряд проміжних переносників попадає на первинний (Qa) хіновний акцептор, а потім на кінцевий (Qb). Структура молекулярного комплексу РЦ і схема фотопереносу електрона представлені на Рис.1(а,б) [4].

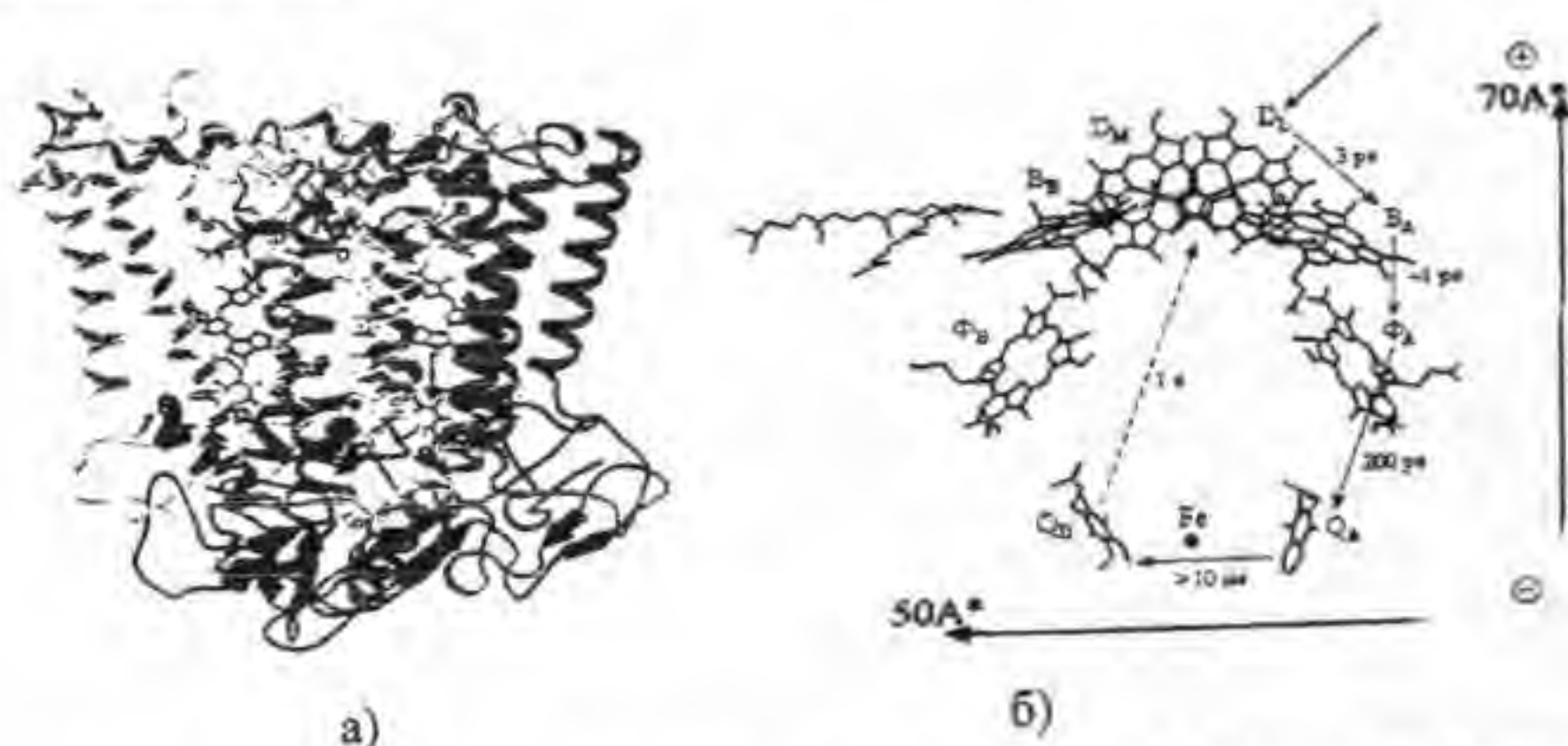


Рис. 1. Структура молекулярного комплексу РЦ (а) та схема фотопереносу електрона в РЦ (б).

На кожному із кофакторів ланцюжка переносу електрона, його стабілізація викликана структурно-динамічною організацією молекулярного комплексу РЦ. Так, процес локалізації електрона на хінонних акцепторах визначається станом всередині білкових кисневих зв'язків (які утворюються із участю молекул води розчину), протонуванням іоногенними групами найближчих амінокислотних залишок і, можливо, супроводжується конформаційними перебудовами молекулярного комплексу РЦ [2-6]. Із наведеної схеми видно, що найдовше у фотоактивованому стані електрон знаходиться на редокс кофакторі Q_b . При цьому димер бактеріохлорофілу залишається додатньо зарядженим, потенціальний рівень кінцевого акцептора (Q_b) знижується, а рівень первинного акцептора (Q_a) залишається сталим. Це викликає сповільнення процесу інактивації електрону, тобто його повернення на донор (Р) відбувається через акцептор (Q_a). Чим більше часу електрон знаходиться на акцепторі (Q_b), тим сильніше понижується його рівень. При цьому молекулярний комплекс РЦ довше знаходиться під дією внутрішньомолекулярного електростатичного поля.

В даний час особливості електронного транспорту в РЦ досліджено недостатньо. Не визначені типи молекулярних конформаційних переходів, супутніх електронному транспорту. Відсутність необхідної інформації про типи молекулярних конформаційних переходів в РЦ визначає актуальність проведених досліджень.

Відмітимо, що властивості РЦ вивчалися і результати проведених досліджень були відзначені Нобелівською премією (Міхель, Дейзенхофер, Хубер). Не дивлячись на великий об'єм отриманого матеріалу, зацікавленість РЦ тільки збільшується, особливо після

встановлення можливості використання їх в молекулярній електроніці.

Як правило, динаміку електронного транспорту в цих РЦ досліджують, вивчаючи динаміку оптичного спектру поглинання на довжині 865 нм [1-8]. В даній роботі пропонується та обгрунтовується метод дослідження фотоіндукованих структурних переходів в РЦ за допомогою дослідження коефіцієнта заломлення розчинів. Використаний метод практично виключає теплові та багатофотонні ефекти, на відміну від методів рефрактивного аналізу [3], який звичайно використовують.

Метою роботи є дослідження фотоіндукованих змін в РЦ, які зумовлені внутрішньомолекулярним переносом електрону, за допомогою методів голографічної інтерферометрії [9,10].

МЕТОДИКА

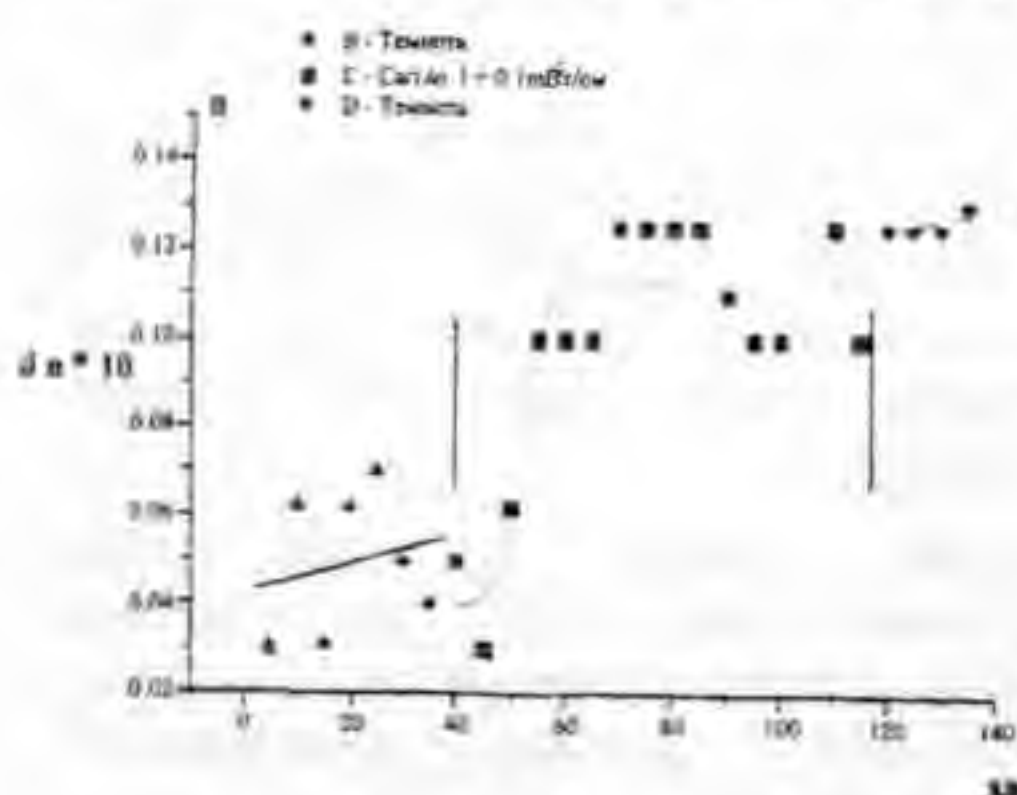
В якості об'єктів використовувались ізольовані білково-пігментні комплекси РЦ, виділені із фотосинтетичних мембран клітин *Rhodobacter sphaeroides* за допомогою детергенту лаурідиметиламіноксиду (ЛДАО). Для забезпечення довгочасової стабільності параметрів РЦ використовувався водний розчин 0,01М натрій-фосфатного буферу з рН 7,2, який утримував 0,05% детергенту. Розчин з РЦ поміщували в одній частині кювети, а в другу половину кювети наливали водний розчин буферу такого ж складу, але без РЦ. Розчин РЦ утримувався в темноті на протязі 12 годин при кімнатній температурі, а потім на протязі 2 годин на голографічному столі. Регістрували голограму кювети (час реєстрації голограми складав 1с, інтенсивність предметного променя 0,5мкВт/см², опорного променя 50мкВт/см²). Потім вводили

фазовий зсув в предметному промені, повертаючи пластинку. В площині відновленого зображення кювети виникали інтерференційні смуги, які реєструвались ПЗС камерою з ПК. Кювету з розчинами додатково витримували в темноті на протязі 30 с, після чого її освітлювали світлом $\lambda=630\text{nm}$ з інтенсивністю $0,1\text{mВт/см}^2$. Отриманні зображення інтерференційних смуг опрацьовувались на ПК, що дозволило визначати положення інтерференційних смуг з точністю $\pm 0,01$ їх ширини. При формуванні інтерференційної картини фіксувалась зміна її контрасту.

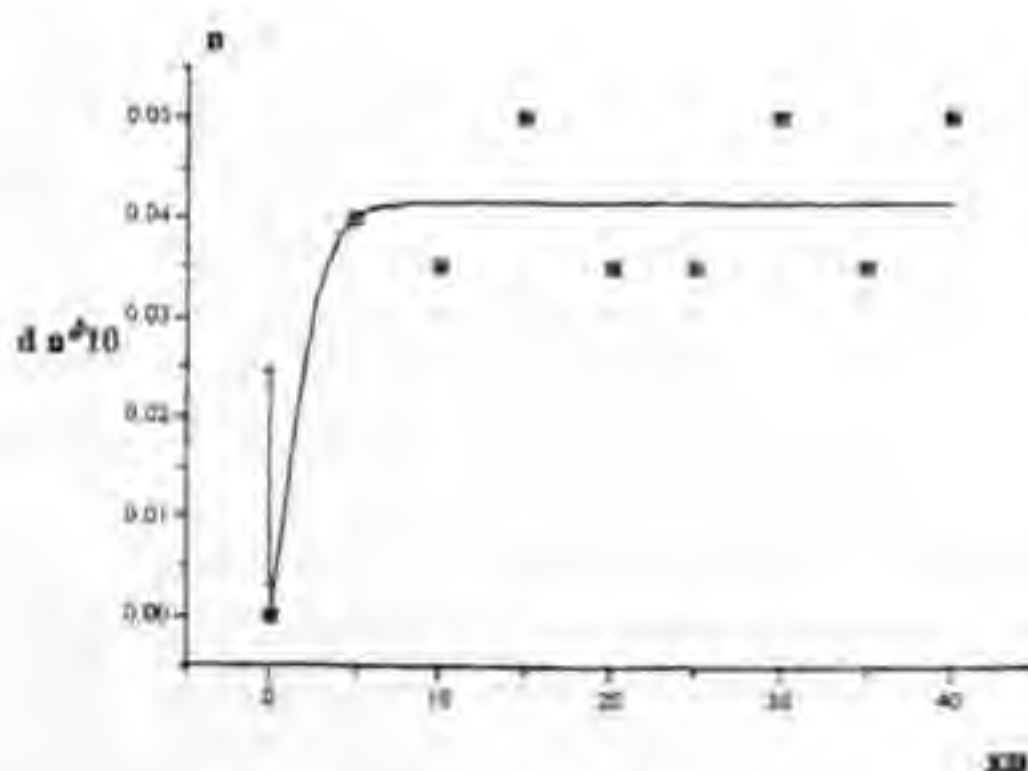
РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Результати експериментального дослідження приведені на Рис.2-5. Були досліджені два сорти РЦ Rb., sphaeroides R-26, які відрізнялися один від одного лише типом застосованого детергенту при їх екстрагуванні із

мембрани. На Рис.2,а показані дані вимірювань показника заломлення при освітленні розчину РЦ, отриманого за допомогою іонного детергенту – холату натрію (дезоксихолату натрію). На Рис.2,б показані дані вимірювань показника заломлення при освітленні розчину РЦ, отриманого за допомогою не іонного детергенту – Тритон Х-100. Для співставлення цих даних з даними про електронний транспорт були проведені вимірювання динаміки спектрів поглинання цих РЦ на довжині хвилі 865nm при опроміненні розчинів РЦ світлом з $\lambda=865\text{nm}$ з використанням твердотільних джерел світла [7]. Результати таких вимірювань представлені на рис.3. Рис.3,а представляє дані про динаміку спектру для РЦ, які були отримані за допомогою детергенту холату натрію, Рис.3,б, для РЦ, отриманих за допомогою детергенту Тритон Х-100.

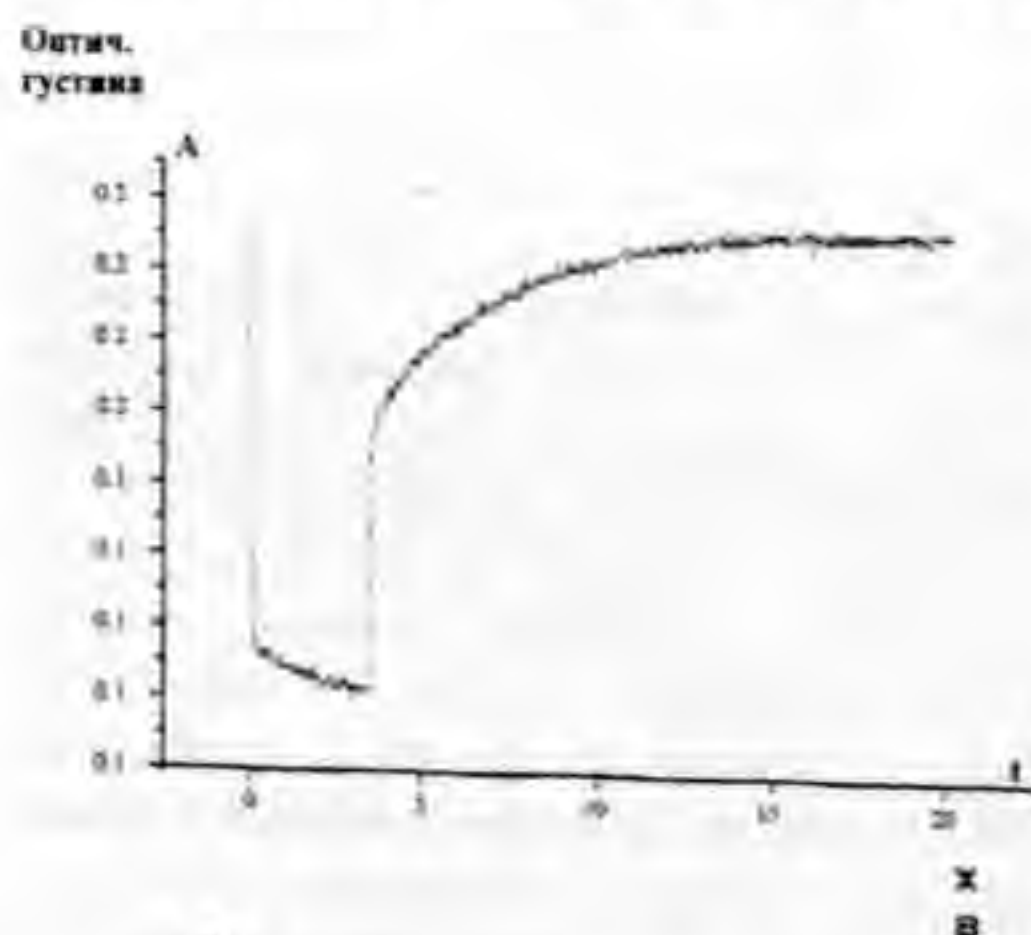


а)

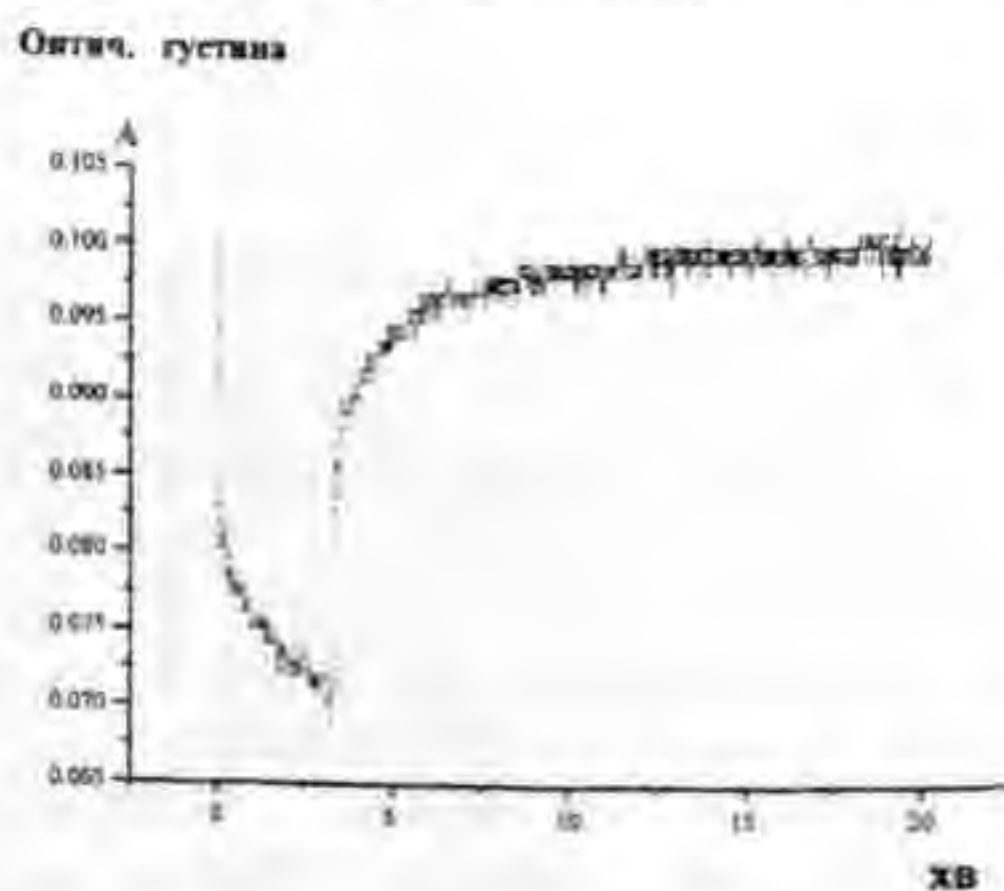


б)

Рис.2 Зміна показника заломлення при освітленні розчину РЦ, отриманого за допомогою іонного детергенту – холату натрію (а) та не іонного детергенту – Тритон Х-100 (б).



а)



б)

Рис.3. Відновлення ділянки спектра поглинання в області $\lambda=865\text{nm}$ РЦ, отриманого за допомогою холату натрію (а) та Тритон Х-100 (б) після виключення збуджуючого світла.

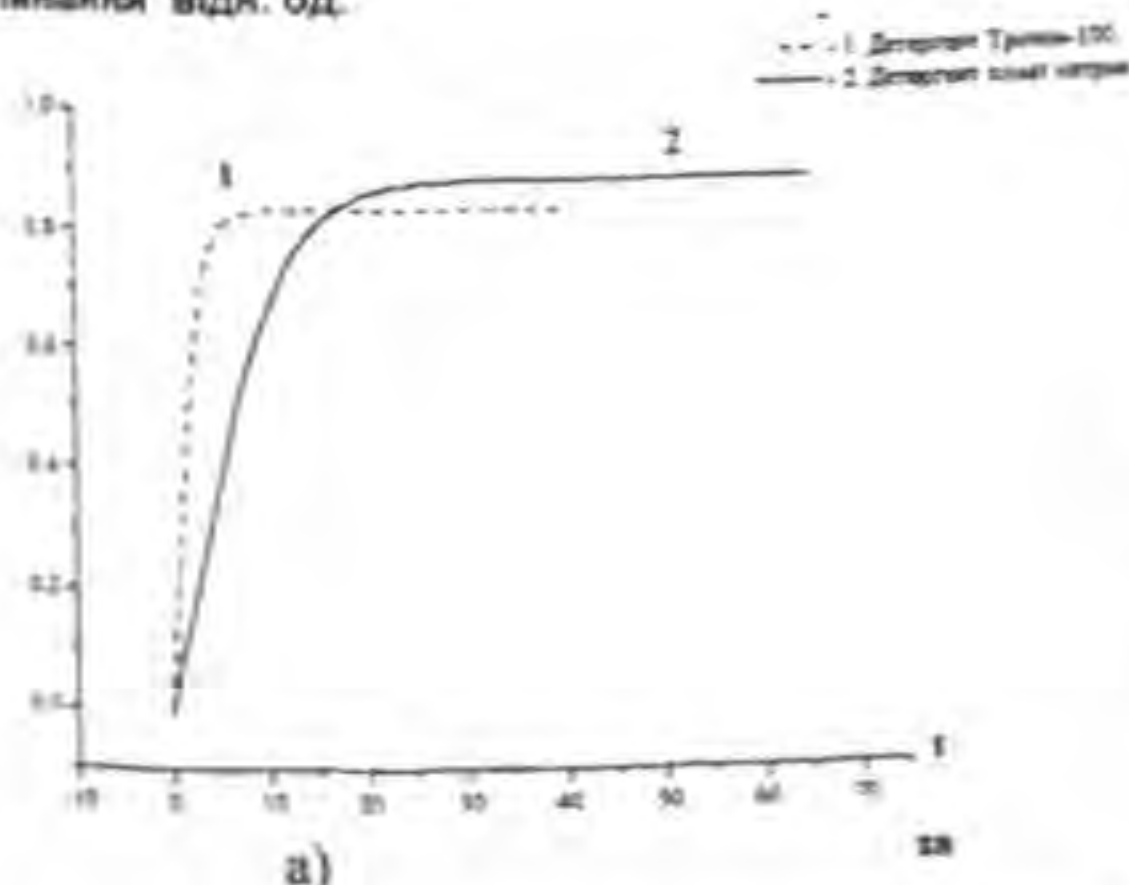
ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

На початковому етапі, після реєстрації інтерферограми кювети, інтерференційні смуги покривають зображення обох частин кювети без відносного зміщення. З часом, при подальшому освітленні кювети збуджуючим світлом, виникало відносне зміщення інтерференційних смуг між двома частинами кювети. Зміщення інтерференційних смуг, які належать тій частині кювети, в якій знаходиться розчин РЦ, направлено в сторону, яка вказує на збільшення оптичної густини розчину РЦ. Воно складає ~ 0.1 ширини смуги для РЦ, виділених за допомогою холату натрію, і ~ 0.05 ширини смуги для РЦ, виділених за допомогою детергенту Тритон Х-100. Порівняння рис.2,а і рис.2,б показують, що РЦ, виділені за допомогою детергенту Тритон Х-100, мають менший характерний час зміни показника заломлення, чим РЦ, виділені за допомогою холату натрію.

На рис.4,а приведені опрацьовані дані (рис.3), які показують відновлення спектрів

поглинання РЦ на $\lambda=865\text{nm}$, після виключення збуджуючого світла. Видно, що в РЦ, отриманих за допомогою холату натрію, відновлення електронного транспорту проходить повільніше, чим в РЦ, отриманих за допомогою Тритон Х-100 (криві 2 і 1). На рис.4,б приведені опрацьовані дані (рис.2) про зміну показника заломлення для обох типів РЦ при їх освітленні. Ці графіки також показують, що зміна показника заломлення в РЦ, отриманих за допомогою холату натрію, йде повільніше, чим в РЦ, отриманих за допомогою Тритон Х-100 (криві 2 і 1). Таким чином, спостерігається якісне співпадіння кінетики відновлення спектрів поглинання із зміною показника заломлення обох типів РЦ при їх освітленні. Як правило, повільну кінетику спектрів поглинання РЦ пов'язують із змінами в їх структурі [5,7]. Тому необхідно оцінити можливий вклад конформаційних змін в зміни показника заломлення розчинів РЦ при їх освітленні.

Поглинання відн. од.



Поглинання відн. од.

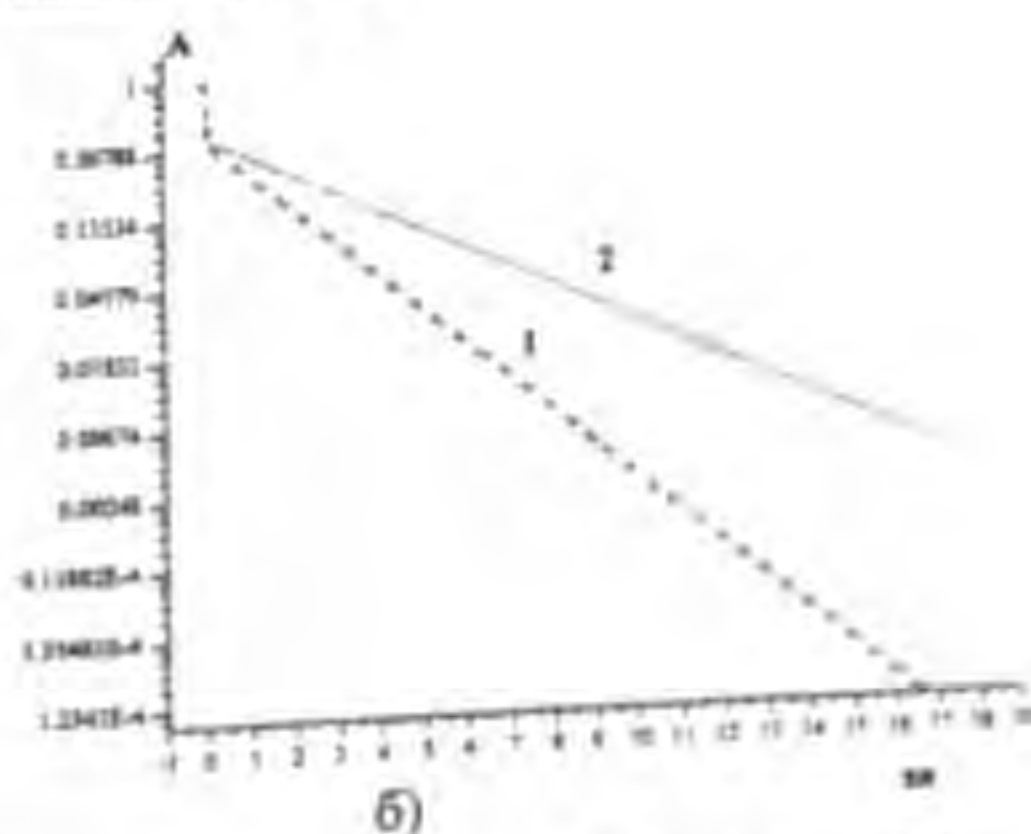


Рис.4. Кінетика відновлення ділянки спектру поглинання РЦ в області $\lambda=865\text{nm}$, після виключення (а) та включення (б) збуджуючого світла.

Розглянемо ряд факторів, які впливають на величину зміщення інтерференційних смуг. Зміщення Δ інтерференційних смуг залежить від зміни показника заломлення dn досліджуваного розчину:

$$\Delta = \frac{dn \cdot d}{\lambda} \quad (1)$$

де:

d – товщина кювети, λ – довжина хвилі світла, на якій реєструється голограма кювети.

В аналізі, який наведений нижче, згідно з [10] допускається, що на зміну показника заломлення впливають три фактори:

$$dn = dn_c + dn_T + dn_{el} \quad (2)$$

де dn_c – зміни показника заломлення, зумовлені можливими конформаційними змінами молекул РЦ; dn_T – зміна показника заломлення за рахунок нагріву розчину РЦ при його освітленні збуджуючим світлом; dn_{el} – зміни показника заломлення, викликані електронними

де dn_c – зміни показника заломлення, зумовлені можливими конформаційними змінами молекул РЦ; dn_T – зміна показника заломлення за рахунок нагрівання розчину РЦ, при його освітленні збудженим світлом; dn_{abs} – зміни показника заломлення, викликані електронними переходами в РЦ, відображенні в диференціальному спектрі поглинання. Оцінка впливу цих факторів показала, що найбільший внесок можуть давати температурні ефекти, їм приділялась найбільша увага. Мінімізація впливу величини dn_T забезпечувалась як за рахунок довготривалої витримки розчинів РЦ на голографічному столі, так і за рахунок того, що вимірювався відносний зсув смуг між двома частинами кювети. В одній частині кювети знаходився натрій-фосфатний буфер, а в другій частині кювети знаходився розчин РЦ. Крім цього, були проведені вимірювання зміщення відносного зсуву смуг при освітленні кювети збуджуючим світлом, коли в обидві частини кювети поміщували один і той же натрій-фосфатний буфер. Вони показали, що на протязі часу проведення експерименту відносний зсув інтерференційних смуг не перевищував 0.02 ширини інтерференційної смуги. Необхідно зазначити, що введення молекул РЦ в натрій-фосфатний буфер збільшує коефіцієнт оптичного поглинання розчину РЦ [11]. Це викликає лише додаткове нагрівання і теплове розширення розчину і, відповідно, приводить до зменшення величини показника заломлення. Але приведені дані (рис.2,3) показують збільшення показника заломлення водяного розчину РЦ під дією випромінювання гелій-неонового лазера. Відповідно, впливом температурних факторів не можна пояснити ефекти, які спостерігаються. Максимальне значення dn_{abs} може бути визначено за допомогою співвідношення Крамерса-Кроніга, яке пов'язує дійсну ϵ' і уявну $-\epsilon''$ частини діелектричної проникливості середовища.

$$\epsilon(\lambda_0) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon'(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (3)$$

Інтеграл (3) приймається в розумінні головного значення. Із останнього співвідношення виходить, що зміна $\Delta\epsilon$ на довжині хвилі λ_0 пов'язана із зміною уявної частини $\Delta\epsilon''$ діелектричної проникливості в усьому частотному діапазоні наступним чином:

$$\Delta\epsilon'(\omega_0) = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon''(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (4)$$

В свою чергу зміна уявної частини $\Delta\epsilon''$ пов'язана із зміною показника поглинання $\Delta\alpha$ на тій же частоті наступним співвідношенням [12]:

$$\Delta\epsilon'' = \frac{n\Delta\alpha\lambda}{2\pi} \quad (5)$$

Як відомо [3], під дією випромінювання показник поглинання зразку $\Delta\alpha$ змінюється в частотному інтервалі ($\lambda_{min}=230nm$; $\lambda_{max}=1350nm$). Різниця спектрів поглинання приведена на рис.5 [3]. Відповідно:

$$\Delta\epsilon'(\lambda_0) = \frac{n\lambda_0}{2\pi^2} P \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{\Delta\alpha(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (6)$$

На рис. 6 приведений графік чисельного інтегрування виразу (6). З нього видно, що $|\Delta\epsilon'(\lambda_0)| \leq 0,28 \cdot 10^{-8}$ і $\Delta\epsilon'(\lambda_0)$ менше нуля. В поглинаючих середовищах зміна показника заломлення визначається співвідношенням:

$$dn_{abs} = \frac{1}{4n} (\Delta\epsilon' + \frac{\epsilon'\Delta\epsilon' + \epsilon''\Delta\epsilon''}{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}) \quad (7)$$

Використовуючи тепер знайдене значення $\Delta\epsilon'(\lambda_0)$ і значення $\Delta\epsilon''(\lambda_0)$, знайдене за допомогою співвідношення (5), можна обрахувати dn_{abs} , яке приблизно рівне $-2 \cdot 10^{-8}$. Отже, експериментально спостережена зміна $dn \sim 10^{-6}$ перевищує можливі значення $dn_{abs} \sim 10^{-8}$ і не співпадає за знаком як з dn_T так з dn_{abs} . Відповідно, зміни показника заломлення, які спостерігалися можуть бути викликані тільки зміною питомого об'єму розчинених молекул РЦ. Величина відносної зміни об'єму молекул $\Delta v/v$ визначається зміною показника заломлення розчину, його величиною та об'ємною концентрацією X молекул РЦ в досліджуваному розчині [11].

$$\Delta v/v = dn/nX \quad (8)$$

В розчині, який використовували РЦ $X=5 \cdot 10^{-4}$, а $10^{-6} \leq dn \leq 10^{-3}$. Відповідно, відносна зміна об'єму молекул РЦ в розчині складає $10^{-3} - 10^{-2}$.

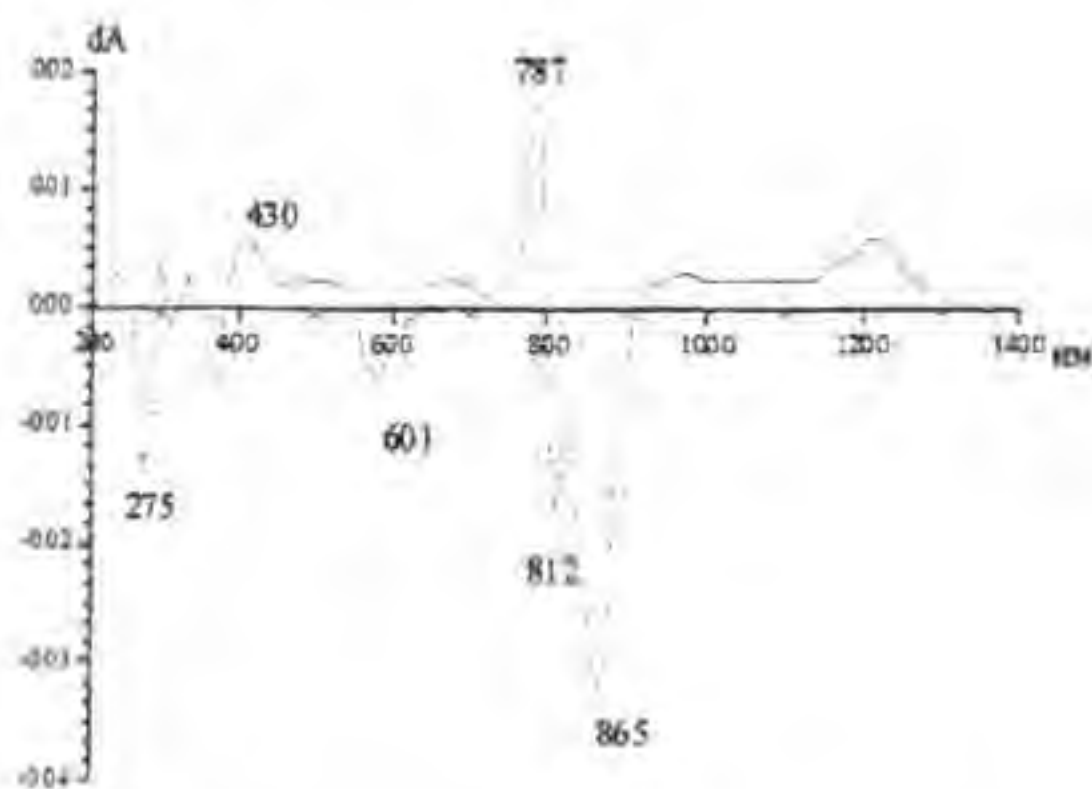


Рис.5. Фотоіндуковані зміни спектру поглинання РЦ.

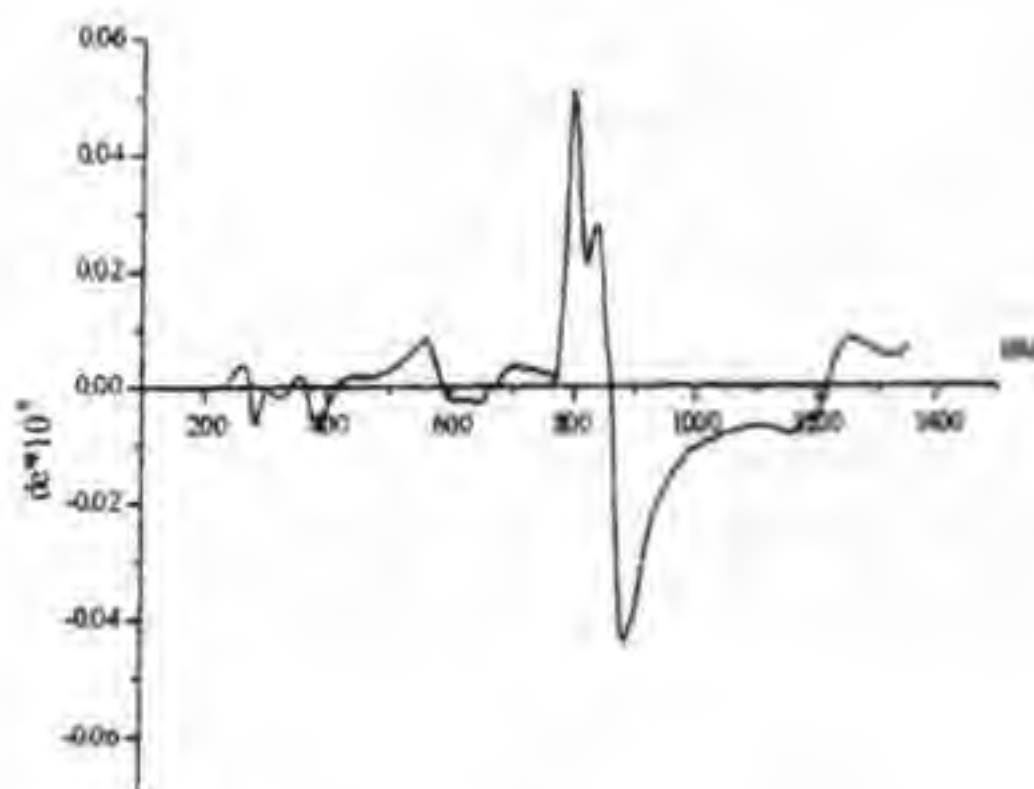


Рис.6. Графік чисельного розрахунку зміни дійсної частини діелектричної проникливості.

ВИСНОВКИ

1. При вмиканні та вимиканні освітлення розчину РЦ Rb. sphaeroides R-26 зміна показника заломлення і поглинання розчину відбувається узгодженим чином, що говорить про можливу однакову причину їх зміни.

2. Зміни показника заломлення розчину РЦ Rb., sphaeroides R-26, які спостерігалися залежать від конформаційних змін в молекулярному комплексі РЦ. Вони не залежать від зміни температури розчину РЦ і динаміки електронних переходів, які характеризують спектр поглинання РЦ.

3. Зміни оптичної густини розчинів РЦ залежать від типу детергенту, який використовується, що вказує на суттєву роль молекул оточення РЦ.

4. При виключенні збуджуючого світла показник заломлення розчину повертається в початковий стан, тобто фотоіндуковані зміни в молекулярному комплексі РЦ є оборотними. Вони викликають зміну об'єму молекулярного комплексу РЦ на 0,1% - 1%.

Список використаних джерел

1. Рубін А.Б. Біофізика т.2, вид. Університет, М., 2000.
2. Olson J.M., Trornber J.P. // Membrane Proteins in Energy Transduction / Eds. by

R.A.Capaldi. New.York.: Marcel Dekker, 1978.

3. T. Gensch, C. Viappiani, and S.E. Braslavsky. *Journal of the American Chemical Society* vol.121:10573-10582 (1999).
4. Г. Тринкунас, Л. Валкунас. Фізичні явища у фотосинтезі. – М.1986.
5. Goushcha A.O., Kharkyanen V.N., Scott G.W., Alfred R. Holzwarth A.R. // *Biophysical Journal*. 2000. vol 79.
6. Zakharova, N.I., Fabion M.Ya., Uspenskaya N.Ya, Kononenko A. A., Rubin A. B. // *Biokhimiya* (Moscow) 1981. vol. 46.
7. Ю.М. Барабаш, Н.М.Березецкая, М.Т.Капустина, В.Н.Харкянен. // *Біофізичний вісник*. 2000. Т.488, В.6(1).
8. Гуцко Ю.П., Фазова рел'сфографія. М.; 1974.
9. Заболотний М.А., Загородній А.Г. Полімерні напівпровідники та голографія. Київ; 1987.
10. Schulenberg P.J., Gartner W., Braslawsky S.E., // *J. Phys.Chem.* 1995, vol. 99.
11. Y.Barabash, V.Kharkyanen, M.Zabolotny, N.Prochur, N.Sokolov, *Proc. of SPIE*, 2006, vol.6254.
12. Макомбер Дж.Д., Динаміка спектроскопічних переходів. М.; Мир, 1979.

Надійшла до редколегії 21.01.08.

УДК 539.144.7

Безшийко О.А.^{1*}, кандидат фіз.-мат. наук,
Голінка-Безшийко Л.О.¹,
Каденко І.М.¹, доктор фіз.-мат. наук,
Кулаков І.С.¹,
Водін О.М.², кандидат фіз.-мат. наук,
Довбня А.Н.², доктор фіз.-мат. наук,
Кушнір В.А.³, доктор фіз.-мат. наук,
Мітроченко В.В.³, кандидат фіз.-мат. наук,
Олійник С.М.²,
Туллер Г.Е.²

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка

²Інститут фізики високих енергій та ядерної
фізики ННЦ ХФТІ

³НДК «Прискорювач» ННЦ ХФТІ

**Ізотопні відношення продуктів реакції
 $^{107}\text{Ag}(\gamma, 3n)^{104\text{m.g}}\text{Ag}$ для енергії гамма-
квантів 35 MeV**

Проведено вимірювання ізотопних відношень
для ядра $^{104\text{m.g}}\text{Ag}$ – продукту реакції
 $^{107}\text{Ag}(\gamma, 3n)^{104\text{m.g}}\text{Ag}$ для максимальної енергії
гамма-квантів 35 MeV. Джерелом γ -
квантів слугував лінійний прискорювач
електронів ЛУ-40 з танталовою мішенню.

Експериментальні величини порівнюються з
результатом теоретичних розрахунків,
проведених з використанням коду TALYS.

Ключові слова: ізотопні відношення,
фотоядерні реакції, множинний виліт
нейтронів, лінійний прискорювач електронів.

*E-mail: obezsh@univ.kiev.ua

Використання високоенергетичних гамма-
квантів як налітаючих частинок у вхідному
каналі ядерних реакцій має цілий ряд переваг при
вивченні перебігу фотоядерних реакцій,
особливостей структури ядра, тощо, оскільки
гамма-кванти не вносять великого кутового
моменту в ядро, в енергії збудження складеного
ядра відсутня енергія зв'язку налітаючої
частинки, використовується апаратне реалізоване
плавне регулювання енергії гамма-квантів у
прискорювачі.

Остання особливість спричинила детальне
дослідження діапазону енергій в околі
гігантського дипольного резонансу (ГДР) та
області енергій вище порогу утворення піонів.

O.A. Bezshyyko^{1*},
L.O. Golinka-Bezshyyko¹,
I.M. Kadenko¹,
I.S. Kulakov¹,
A.N. Vodin²,
A.N. Dovbnya²,
V.A. Kushnir³,
V.V. Mitrochenko³,
S.N. Olejnik²,
G.E. Tuller²

¹KNU

²NSC KIPT

³R&D PE "Accelerator" NSC KIPT

**Isomer ratios of reaction $^{107}\text{Ag}(\gamma, 3n)^{104\text{m.g}}\text{Ag}$
products for bremsstrahlung X-rays with
energy 35 MeV**

Isomer ratios have been obtained for nuclei
 $^{104\text{m.g}}\text{Ag}$ – product of $^{107}\text{Ag}(\gamma, 3n)^{104\text{m.g}}\text{Ag}$ reaction for
bremsstrahlung γ -rays with maximum energy 35
MeV. Linear accelerator LU-40 was used as a
bremsstrahlung source.

Experimental data are compared with
theoretical values calculated with code TALYS.

Key Words: isomer ratio, isomeric ratio,
photoneuclear reactions, multiple neutron emission,
linac.

Область енергій вище ГДР (приблизно від 30 до
100 MeV) досліджена набагато гірше як з
теоретичної, так і з експериментальної точки
зору, оскільки це пов'язано з низькими
значеннями перерізів в цій області енергій,
малою кількістю інтенсивних джерел гамма-
квантів з плавним регулюванням по енергії при
 $E_\gamma > 30$ MeV, а також рядом інших історичних
причин.

За останні роки відбувся великий прогрес в
розвитку теоретичних та модельних підходів в
описі фотоядерних реакцій в цій області енергій
– отримала значний розвиток квазі-дейтронна
модель, було розвинено цілий ряд модельних
підходів до опису перебігу передрівноважних

процесів та множинного вильоту частинок. Зростаючий інтерес до розвитку джерел енергії з використанням прискорювачів, а також суттєвий прогрес у створенні високоінтенсивних джерел квазімоноенергетичних гамма-квантів у світі [1] також спонукає до проведення подібних робіт.

Практично повна відсутність детальних експериментальних даних з взаємодії гамма-квантів з ядрами в області енергій 30-100 MeV сильно обмежує як перевірку модельних підходів, так і загальне розуміння процесів взаємодії гамма-квантів з ядрами в цьому діапазоні енергій.

Метою даної роботи було отримання експериментальних даних для розрахунку ізомерного відношення для ядра ^{104}Ag в високопороговій фотоядерній реакції $^{107}\text{Ag}(\gamma, 3n)^{104}\text{Ag}$ з множинним вильотом нейтронів та порівняння з теоретичними розрахунками з використанням сучасних модельних підходів.

Для визначення ізомерного відношення застосовувалася методика з використанням вимірювань наведеної активності зразків. Опромінювання проводилося гамма-квантами гальмівного спектру лінійного прискорювача ЛУ-40 з максимальною енергією гамма-квантів 35 MeV, який знаходиться в Національному науковому центрі Харківський фізико-технічний інститут.

Блок схема прискорювача наведена на рис.1. На виході прискорювача був встановлений танталовий конвертор товщиною 1.05 мм, за нею знаходився поглинач з алюмінію циліндричної

форми, товщина поглинача становила 5.5 см, діаметр – 9.5 см, відстань від танталового конвертора до поглинача – 4 см. Відстань від конвертора до досліджуваного зразка срібла складала 30 см. Електрони, які не загальмувалися в танталовому конверторі, втрачали енергію і зупинялися в алюмінієвому поглиначі.

Зразок представляв собою диск із срібла з природним ізотопним складом діаметром 10 мм та висотою 2 мм, що опромінювався протягом 20 хвилин під пучком, після чого виводився із пучка в зону вимірювання із застосуванням пневматичної системи, час виведення складав не більше 3 секунд. Виміри наведеної активності опроміненого зразка проводилися на напівпровідниковому спектрометрі з детектором із надчистого германію з роздільною здатністю < 2.0 KeV для γ -лінії 1332 KeV ^{60}Co . Вимір представляв собою серію послідовних наборів спектрів, що проводилися через різні інтервали часу. Витримка зразка від моменту опромінення до набору спектрів складала від 5 секунд до кількох годин. Час набору кожного спектру становив 900 секунд.

Набір спектрів проводився на різних відстанях зразок - детектор, оскільки велика кількість та інтенсивність ліній від заважаючих реакцій відразу після опромінення призводила до великого завантаження спектрометру з одного боку, з іншого боку переріз досліджуваної реакції складав декілька мб, що потребувало оптимізації часу вимірів та вхідного завантаження спектрометра.

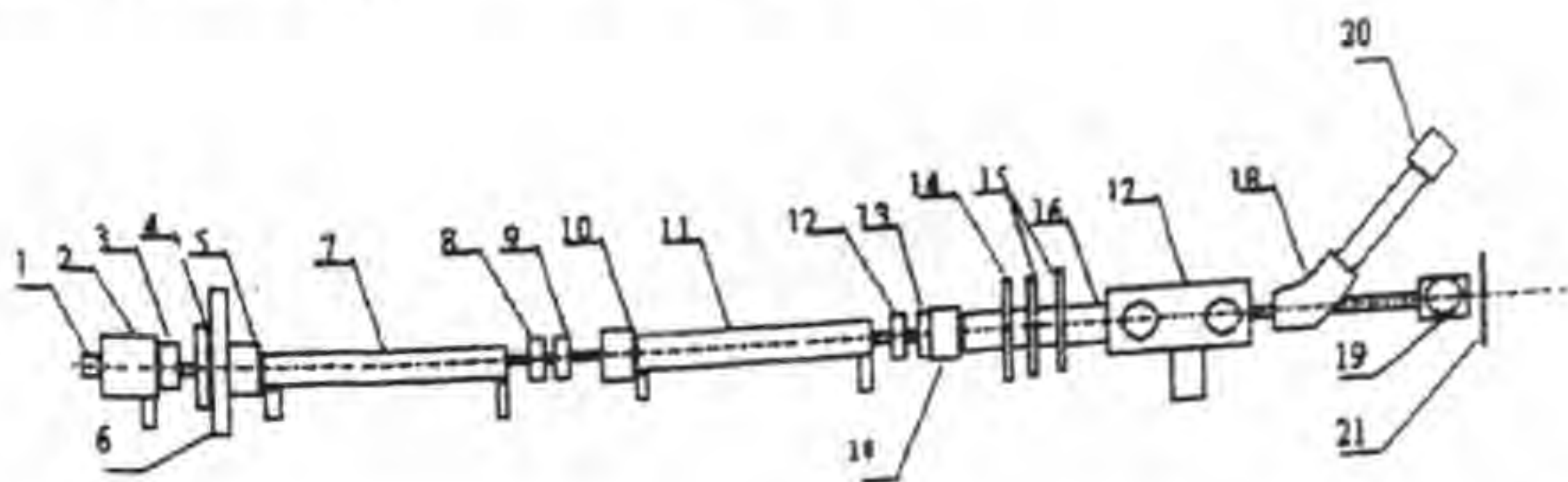


Рис. 1 Структурна схема прискорювача ЛУ-40. 1 – електронна гармата, 2 – резонаторна система інжектора, 3, 9, 13 – струмові трансформатори, 4 – аксіальні лінзи, 5, 10 – затвори, 6 – іонопровід, 7, 11 – прискорюючі секції, 8, 12 – монітори розташування пучку, 14, 15 – регульований коліматор, 16 – іонопровід, 17 – коліматори та циліндр Фарадея, 18 – магнітний аналізатор пучку, 19 – циліндр Фарадея з вихідним вікном, 20 – танталовий конвертер, 21 – циліндр Фарадея магнітного аналізатора.

Калібровка по ефективності детектора була проведена для всіх відстаней від зразка до

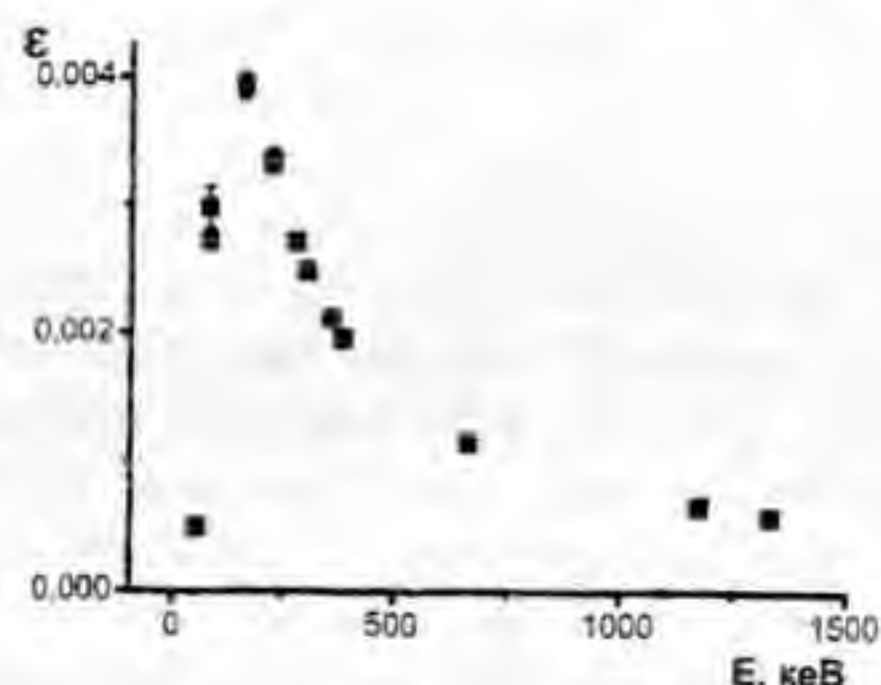


Рис. 2. Калібрувальна залежність ефективності реєстрації γ -випромінювання від енергії для спектрометру IMCA InSpector фірми Canberra на відстані 15 см зразок – детектор.

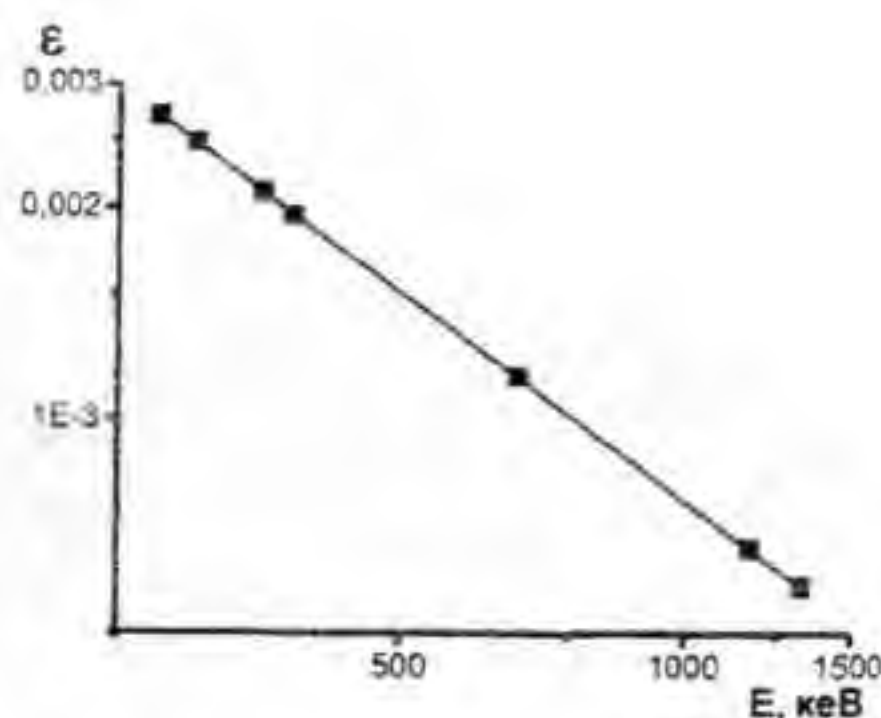


Рис. 3. Калібрувальна залежність ефективності від енергії для відстані між зразком та детектором 15 см (проміжок лінійної залежності у логарифмічному масштабі).

детектора, на яких проводився набір досліджуваних спектрів. Калібрувальні залежності спектрометра по ефективності в лінійному та логарифмічному масштабі наведено на рис. 2, 3.

Приклад спектру та аналітичні лінії в спектрах, що використовувалися для визначення ізомерного відношення наведено на рис. 4.

При розрядці збудження ядер γ -каскадом часи переходу між рівнями складають, як правило, менше ніж 10^{-13} с. В деяких випадках такі переходи загальмовуються внаслідок великої

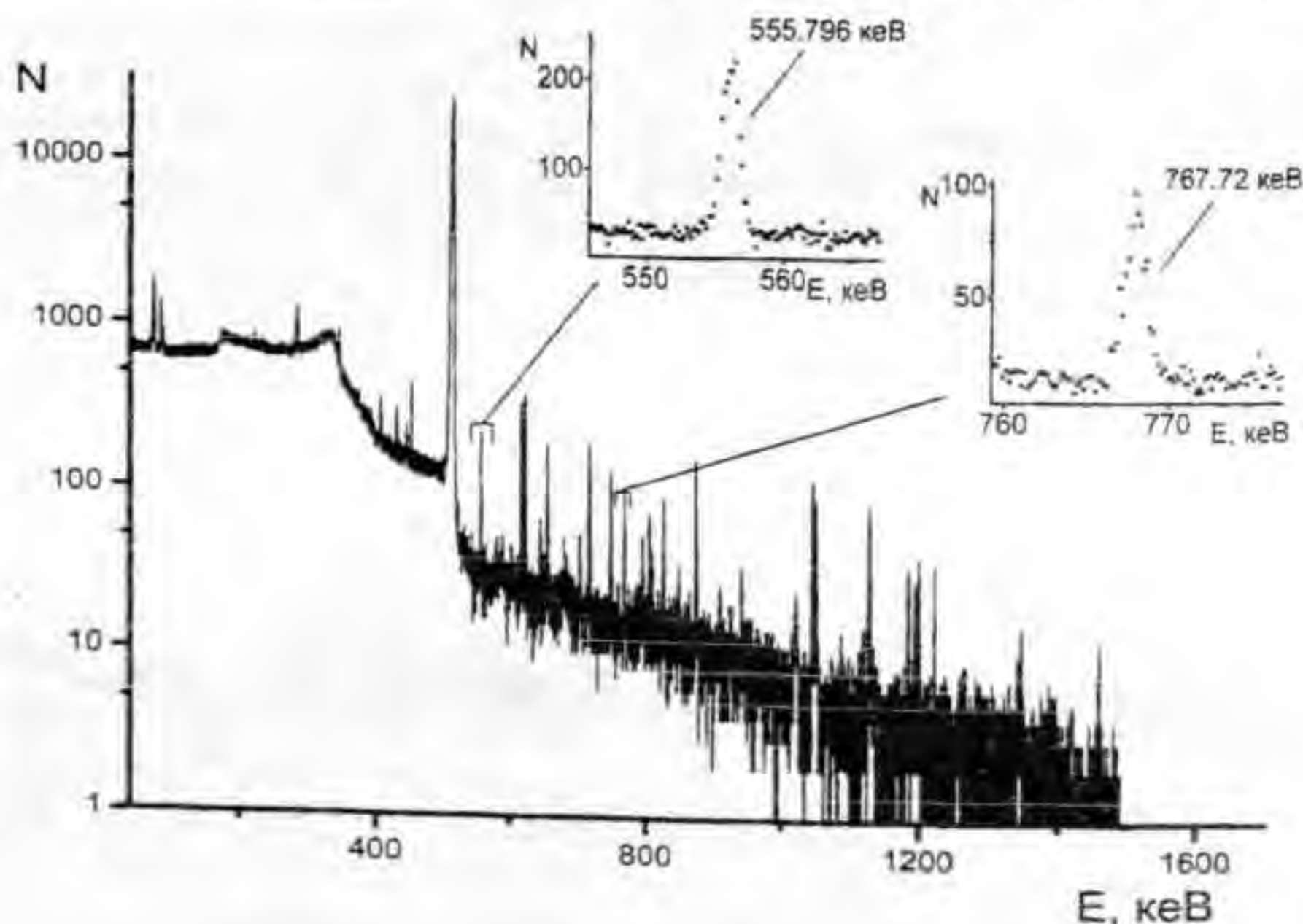


Рис. 4. Гамма спектр продуктів активації після опромінення зразка срібла гамма-квантами гальмівного спектру з максимальною енергією 35 MeV.

різниці спінів між рівнями. Як правило, такі ізомерні рівні мають не дуже високі енергії та

відносно великі спіни у порівнянні із основними станами ядер. Заселяються ізомерні рівні переважно із високозбуджених станів, що мають високі значення спінів. Гамма розрядка збудження із станів з меншими значеннями спінів більш імовірна на низькоспіновий основний стан ядра. Саме тому вивчаючи відношення заселення ізомерного рівня до заселення основного стану ядра при розрядці збудження ядра шляхом випромінювання γ -квантів можна оцінювати середні величини спінів початкових збуджених станів ядер-продуктів реакцій, а також досліджувати механізми розрядки збуджених ядер [2, 3]. Якщо переріз утворення ядра в основному стані позначити як σ_g , а переріз утворення ядра в ізомерному стані позначити як σ_m , а повний переріз $\sigma_0 = \sigma_g + \sigma_m$, тоді ізомерне відношення

можна визначити двома шляхами: 1) $\frac{\sigma_m}{\sigma_g}$; 2) $\frac{\sigma_m}{\sigma_0}$. Також часто замість величини $\frac{\sigma_m}{\sigma_g}$

використовується інший вираз для ізомерного відношення $\frac{\sigma_H}{\sigma_L}$, де σ_H - переріз утворення ядра в стані із більшим спіном, а σ_L - переріз утворення ядра в стані з меншим спіном. Це пов'язано з тим, що для ряду ядер спін ізомерного рівня менший за спін основного стану. Також у деяких ядер є більше, ніж один ізомерний рівень. Тому відношення $\frac{\sigma_H}{\sigma_L}$ зручно

використовувати в загальному випадку, оскільки воно завжди має прямо пропорційну залежність від величини спіну початкового стану збудженого ядра незалежно від особливостей його схеми рівнів. У випадках, коли спектр налітаючих частинок суттєво відрізняється від моноенергетичного (особливо в експериментах з гальмівними γ -квантами), також використовують ізомерне відношення виходів $d(E_{\max})$.

$$d(E_{\max}) \equiv \frac{Y_m}{Y_g} = \frac{\int_{E_{\text{пор}}}^{E_{\max}} \sigma_m(E) \cdot W(E, E_{\max}) dE}{\int_{E_{\text{пор}}}^{E_{\max}} \sigma_g(E) \cdot W(E, E_{\max}) dE}$$

де $Y_m(Y_g)$ - вихід реакції із утворенням кінцевого ядра в метастабільному (основному) стані, $E_{\max}$ - максимальна енергія налітаючих частинок, $W(E, E_{\max})$ - енергетичний спектр налітаючих частинок, $\sigma_m(E)[\sigma_g(E)]$ - переріз реакції із утворенням кінцевого ядра в метастабільному (основному) стані для енергії налітаючих частинок E , $E_{\text{пор}}^m(E_{\text{пор}}^g)$ - поріг реакції із утворенням кінцевого ядра в метастабільному (основному) стані.

У випадках, коли заважаючі внески відсутні для простої схеми розрядки ізомерного рівня шляхом ізомерного переходу на основний рівень та β -розпаду, а основного рівня - шляхом β -розпаду, можна записати просту систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dN_m}{dt} = N \cdot \sigma_m \cdot \Phi(t) - \lambda_m \cdot N_m(t) \\ \frac{dN_g}{dt} = N \cdot \sigma_g \cdot \Phi(t) + p \cdot \lambda_m \cdot N_m(t) - \lambda_g \cdot N_g(t) \end{cases}$$

де N - кількість ядер мішені, з яких в результаті реакції при опроміненні утворюються ядра ізомера в основному N_g чи ізомерному стані N_m , $\Phi(t)$ - потік налітаючих частинок, λ_g, λ_m - сталі розпаду основного та ізомерного стану, p - коефіцієнт розгалуження (відношення імовірності переходу з ізомерного рівня на основний до повної імовірності розпаду ізомерного рівня).

В загальному випадку розв'язок системи рівнянь достатньо громіздкий і суттєво залежить від форми залежності $\Phi(t)$. Випадок коли потік налітаючих частинок не змінюється з часом розглянуто в [4, 5].

При опроміненні досліджуваного зразку срібла нестабільність потоку налітаючих гамма-квантів не перевищувала 2%. При отриманні ізомерних відношень виходів для ядра ^{104m}Ag нами використовувались методики, аналогічні наведеним в [4, 5] та вираз для ізомерного відношення $IR(E_g) = \frac{Y_H(E_g)}{Y_L(E_g)}$, де $Y_H(E_g)$ - вихід

реакції із утворенням кінцевого ядра з більшим спіном (основний стан, спін 5^+), $Y_L(E_g)$ - вихід реакції із утворенням кінцевого ядра з меншим спіном (метастабільний стан, спін 2^- , енергія 6.9 keV). Схему розпаду ядра ^{104m}Ag наведено на

рис. 5. Період напіврозпаду метастабільного стану для ядра ^{104m}Ag складає 33.5 хвилини, а основного стану – 69.2 хвилини. Для визначення

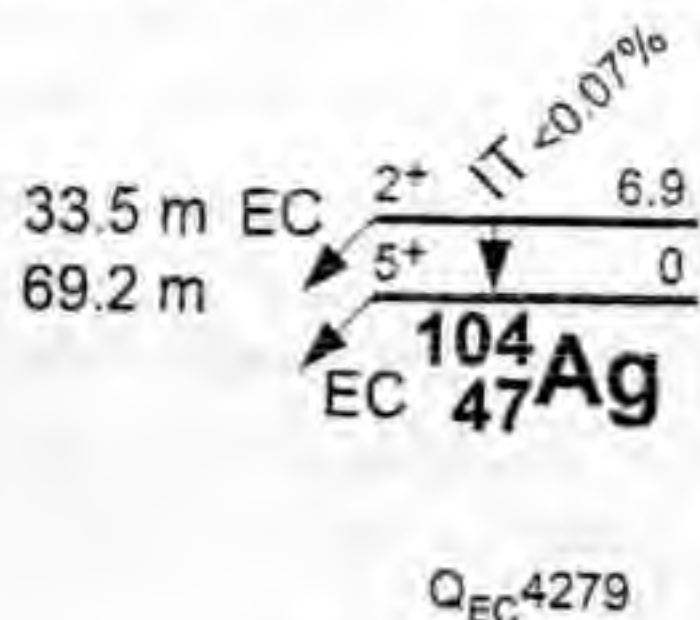


Рис. 5. Схема розпаду $^{104m,g}\text{Ag}$.

ізомерного відношення використовувалися лінії 767.7 keV (β^- розпад з основного стану) та 555.8 keV (спільна лінія для розпаду з основного та ізомерного рівнів). В результаті було отримано величину ізомерного відношення виходу для ядра $^{104m,g}\text{Ag}$ – $IR(E_\gamma) = (0.88 \pm 0.14)$.

На сьогоднішній день розроблені потужні та ефективні коди для опису перебігу ядерних реакцій, та лише деякі з них мають відкритий доступ. Серед таких кодів є код TALYS [6], що має відкритий вихідний код та дозволяє в деталях розраховувати перерізи, ізомерні відношення та інші характеристики ядерних реакцій. Ми використовували код TALYS для перевірки узгодженості теоретичних розрахунків з експериментально отриманими даними. При розрахунку відношення перерізів для ядра $^{104m,g}\text{Ag}$ використовувались стандартні параметри та установки програмного пакету TALYS з підключенням передрівноважних процесів для опису взаємодії гамма-квантів з ядрами. Для енергії налітаючих гамма-квантів 35 MeV нами було отримано при розрахунках величину ізомерного відношення перерізів для ядра ^{104}Ag – 0.52. Ця величина відрізняється від експериментально отриманого значення

ізомерного відношення виходів для даного ядра. Ці дані знаходяться добре узгоджуються з раніше отриманими результатами [7].

Робота частково підтримана грантом НАН України ЯМРТ Х-9-535.

Список використаних джерел

1. <http://higs.tunl.duke.edu>.
2. Ишханов Б.С., Капитонов И.М. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. – М.: МГУ, 1979. – 215 с.
3. Гангрский Ю.П., Тончев А.П., Балабанов Н.П. Возбуждение изомерных состояний в фотоядерных реакциях // ЭЧАЯ. – 1996. – Т. 27, Вып. 4. – С. 1043-1098.
4. Vänskä R., Rieppo R. The experimental isomeric cross-section ratio in the nuclear activation technique // Nucl. Instr. and Meth. – 1981. – Vol. 179. – P. 525-532.
5. Kolev D., Dobrev E., Nenov N., Todorov V. A convenient method for experimental determination of yields and isomeric ratios in photonuclear reactions measured by the activation technique // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A. – 1995. – Vol. 356. – P. 390-396.
6. Koning A.J., Hilaire S., Duijvestijn M.C. TALYS: Comprehensive nuclear reaction modeling // Proc. of International Conf. on Nuclear Data for Sci. and Technology "ND2004". Sept. 26-Oct. 1, 2004. – Santa Fe (USA). – N.-Y., 2005. – AIP Conf. Proc. Vol. 769. – P. 1154-1159. <http://www.talys.eu>.
7. Безшыйко О.А. Дослідження фотоядерних реакцій на ядрах ^{238}U , ^{237}Np , ^{232}Th , ^{123}Sb , ^{121}Sb , ^{118}Sn з використанням методу ізомерних відношень. Дис. канд. фіз.-мат. Наук – Київ., 2005. – С. 139.

Надійшла до редколегії 29.12.07

УДК 532.73

Біляєв С.В.¹, наук. співробітник
Велешук В.П.¹, мол. наук. співробітник
Ляшенко О.В.², канд. фіз.-мат. наук, доцент
Гнатюк В.А.¹, канд. фіз.-мат. наук

Вплив рівня фонового забруднення на електричні неоднорідності в розплавних монокристалах CdTe та Cd_{1-x}Zn_xTe.

В роботі розглянуто ростові та чисто кристалізаційні причини нерівномірного розподілу фонових домішок у розплавних монокристалах. Аналізуються особливості високоомного стану монокристалів CdTe з утворенням каналної провідності. Показано незастосовність діагностики високоомних монокристалів методами ефекту Холла та термозонду. Запропоновано безконтактні методи діагностики рівня фонового забруднення та визначення типу провідності. Проаналізовано типові види точкових дефектів та вказані шляхи зменшення їх загальної концентрації.

Ключові слова: CdTe, Cd_{1-x}Zn_xTe, розплавні монокристали

S.V. Belyaev¹, researcher
V.P. Veleschuk¹, researcher
O.V. Lyashenko², Phys. D., assoc. prof.
V.A. Gnatyuk¹, Phys. D.

Influence of a background pollution level on electric heterogeneity in monocrystals CdTe and Cd_{1-x}Zn_xTe grown from fusion.

In this paper are considered growth and it is pure crystalline reasons of non-uniform distribution background impurity at monocrystals grown from fusion. Features of high ohmic conditions monocrystals CdTe with formation of channel conductivity are analyzed. It is shown inapplicability of diagnostics high ohmic monocrystals by methods to the Hall effect and thermoprobe. Are offered noncontact methods of diagnostics of a background pollution level and definition of conductivity type. Typical kinds of dot defects are analysed and shown ways of reduction of their concentration.

Key Words: CdTe, Cd_{1-x}Zn_xTe, monocrystals grown from fusion.

¹Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України.

²Київський національний університет ім. Т. Шевченка, фізичний факультет.

Основними умовами використання промислових монокристалів Cd_{1-x}Zn_xTe у якості підкладкового матеріалу для епітаксії Cd_{1-x}Hg_xTe та досягнення високого ІЧ-пропускання є високий питомий опір ρ [1-3], електрична й оптична однорідність та значення оптичного ІЧ-пропускання на рівні 66,5 – 66,9 % для запобігання можливого шунтування окремих елементів низькоомного Cd_{1-x}Hg_xTe [2,3]. Використання монокристалів в якості детекторів рентгенівського та гамма випромінювання окрім того додатково вимагає максимально високого значення добутку рухливості на час життя носіїв $\mu\tau$ [1-3].

При цьому особливу роль відіграє стан поверхні через значний вклад у загальну провідність поверхневої провідності, а також врахування того, що поверхня є одним з каналів неконтрольованого забруднення [1-3]. Тому необхідною умовою для практичного використання є висока чистота промислових кристалів.

Проте розплавні монокристали безпосередньо після кристалізації мають низьку електричну й оптичну однорідність, що зумовлено декількома обставинами, зокрема високою в'язкістю розплаву з переважно ковалентною складовою зв'язку, що утруднює дифузійні процеси, що ведуть до вирівнювання складу; температурними нестабільностями по фронту кристалізації, які призводять до захоплення мікрообластей переохолодженого розплаву та наявністю повздовжніх та радіальних температурних градієнтів, які призводять у процесі тривалого зниження температури після вирощування до виникнення в злитку полів локальних механічних напруг (ЛМН). При цьому, згідно [4], коефіцієнт дифузії домішок зростає до 30 разів при 700° С в області ділянок з ЛМН, залишаючись незмінним в іншій частині монокристалу. Крім того, у [5] було з'ясовано, що при витягуванні монокристалів утворюються декілька домішкових каналів, які відповідають своїм пірамідам росту й розрізняються не тільки

по концентрації, але й по складу захоплених домішок.

Метою роботи було з'ясування ростових та кристалізаційних причин нерівномірного розподілу домішок у високоомних розплавних монокристалах, а також особливостей електропровідності вказаних монокристалів.

Зазначені вище особливості високоомного стану розплавних монокристалів $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$ призводять до виникнення додаткових локальних неоднорідностей в розподілі фонових домішок різної хімічної природи. Згідно [6] звичайне фонове забруднення домішками різної хімічної природи перебуває на рівні $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. У кращих найбільш чистих розплавних зразках неконтрольоване забруднення може бути знижене до мінімально досяжної концентрації на рівні $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

Оцінимо величину флуктуації рівня фонового забруднення в найбільш чистих зразках. У невідпалених зразках флуктуації складу призводять згідно [7] до випадкових відхилень концентрації в об'ємі кристалу на рівні 0,0001 – 0,01%. Звідси абсолютне значення флуктуації домішкового складу в найбільш чистих зразках перебуває на рівні $1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, а в забруднених кристалах значно перевищує зазначену величину.

Це означає, що в низькоомних кристалах з рівноважною концентрацією носіїв $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ флуктуації домішкового складу становлять соті частки відсотка, тобто відіграють роль незначних поправок. У високоомних же монокристалах з величиною питомого опору $5 \cdot 10^6 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ і вище випадкові відхилення фонових домішок порівняні або навіть перевищують рівноважну концентрацію вільних носіїв. Нерівномірний розподіл концентрації фонових домішок у такому монокристалі викликає дифузійні потоки електронів і призводить до утворення бар'єрів, які локалізуються на неоднородностях і мають сильне електричне поле.

У низькоомному стані довжина бар'єрів в кристалі порівняна або менше від довжини вільного пробігу електронів. У високоомному стані дебаєвська довжина екранування

$$l_D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 kT}{e^2 n_0}}$$

в багато разів перевищує довжину вільного пробігу електронів, внаслідок чого функція розподілу носіїв по станах істотно відрізняється від рівноважної, що призводить до порушення умов, при яких справедливе кінетичне рівняння Больцмана $f = f_0 + f_1$. f – Нерівноважна функція розподілу електронів по

станам при наявності зовнішнього поля з напруженістю $\mathcal{E}$, яке звичайно набагато менше внутрішнього поля кристалу, f_0 – рівноважна функція розподілу електронів по станах при відсутності зовнішнього поля. f_1 – Відносно мала добавочна величина, що визначає процеси переносу при наявності зовнішнього слабкого електричного поля $\mathcal{E}$. e – Заряд електрону, E – енергія, τ – визначається як час релаксації, що характеризує процес відновлення рівноважного стану, порушеного наявністю зовнішнього електричного поля, після виключення останнього. v_x – дрейфова швидкість руху електронів під дією зовнішнього поля $\mathcal{E}$.

$$f = f_0 + e \epsilon \tau v_x \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \right)$$

При таких умовах дослідження електричних властивостей на основі ефекту Холу позбавлені фізичного змісту.

Розповсюджене визначення типу провідності методом термозонду по полярності термо - е.д.с. неприйнятно при підході до області власної електропровідності, бо для напівпровідника, що містить акцептори, спостерігається інверсія знаку термо-е.д.с.

$$\alpha = \frac{\alpha_p \mu_p p_0 + \alpha_n \mu_n n_0}{\mu_p p_0 + \mu_n n_0} \quad \text{при умові } \mu_n > \mu_p,$$

тобто якщо рухливість електронів більше рухливості дірок, причому $\alpha_n < 0$, та $\alpha_p < 0$. Окрім того, необхідно відзначити наступне: у високоомному стані мінімум надлишкової поверхневої провідності зміщується в область малих абсолютних значень електростатичного поверхневого потенціалу. Нагрівання поверхні термозондом викликає додатковий зсув зазначеного мінімуму в тому ж напрямку. При цих умовах навіть незначні відхилення поверхневого потенціалу, обумовлені зміною початкового стану поверхні при механічному контакті з електродом, призводять до неконтрольованого виникнення шару інверсної провідності.

На рис.1 представлено типову залежність надлишкової поверхневої провідності від безрозмірного поверхневого потенціалу для зразків n- та p- типу провідності. Проаналізуємо основні особливості даної залежності: 1- мінімуми надлишкової поверхневої провідності для CdTe розміщуються при різних значеннях безрозмірного поверхневого потенціалу в залежності від типу провідності: n- типу – в області від'ємних значень, а p- типу – в області позитивних значень. З цього випливає

можливість діагностики визначення типу провідності високоомних CdTe. 2 – із зменшенням концентрації вільних носіїв в високоомних монокристалах CdTe мінімуми n- та p-типу зближуються та розміщуються в області малих абсолютних значень безрозмірного поверхневого потенціалу. 3 – При пониженні температури зразка мінімуми віддаляються один від одного та знаходяться в областях підвищених абсолютних значень. 3 – При зростанні температури досліджуваних кристалів вказані мінімуми зближуються в області малих абсолютних значень безрозмірного поверхневого потенціалу. 4 – Гілка надлишкової поверхневої провідності, співпадаюча з об'ємним типом провідності, завжди знаходиться в області малих значень, а гілка з інверсним типом надлишкової поверхневої провідності завжди знаходиться в області більш високих абсолютних значень. Ця особливість дозволяє використовувати вказану залежність для діагностики типу провідності високоомних монокристалів.

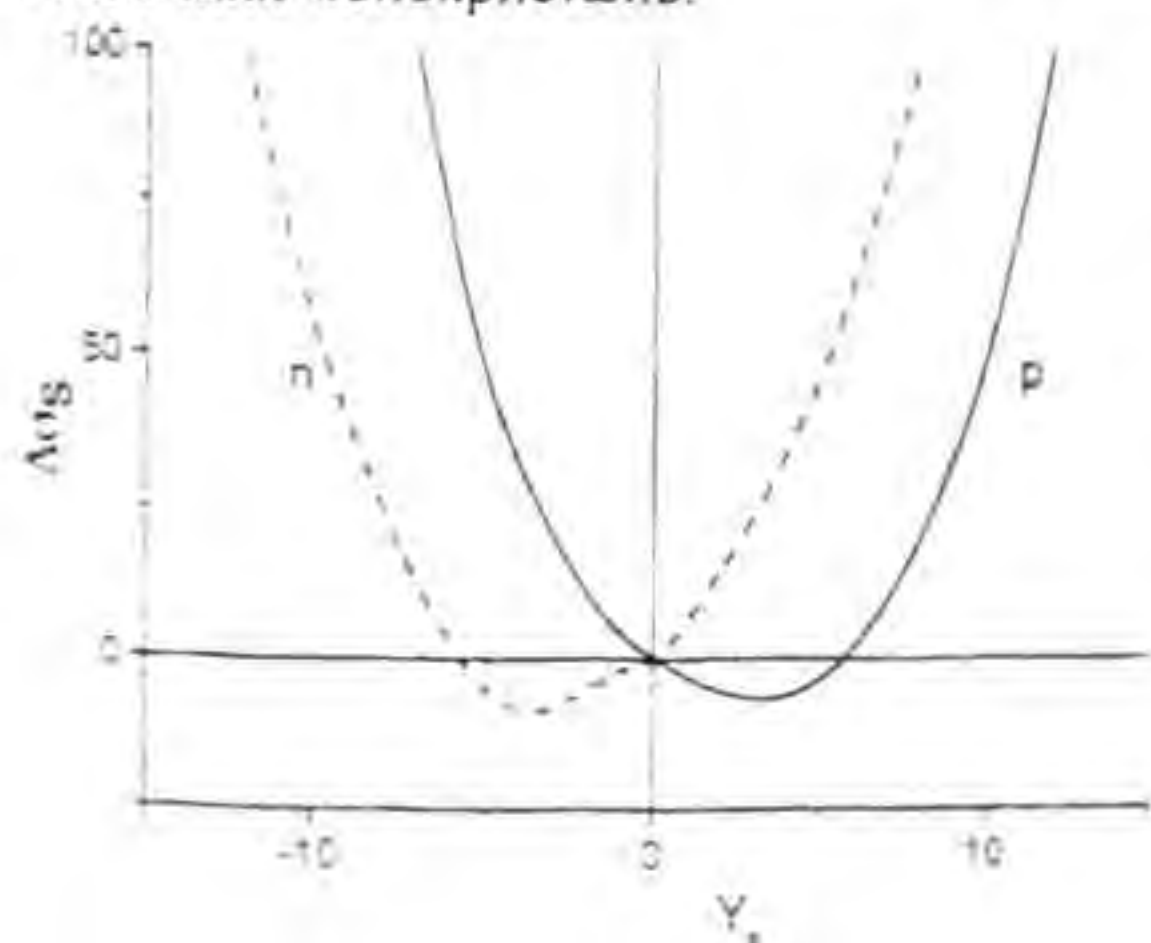


Рис.1 Залежність надлишкової поверхневої провідності від безрозмірного поверхневого потенціалу.

Існує і інший, безконтактний, спосіб визначення типу провідності – по співвідношенню інтенсивностей лінії екситонів, зв'язаних на нейтральних донорах та лінії екситонів, зв'язаних на нейтральних акцепторах. В CdTe p-типу домінує друга лінія, а в матеріалі n-типу провідності – перша лінія. У високоомних кристалах, близьких до власної провідності, інтенсивності двох вказаних ліній порівняні по абсолютній величині.

Крім екситонної ФЛ, в спектрах розплавних монокристалів CdTe в спектральному діапазоні 1,50 – 1,57 eV спостерігається також крайова люмінесценція [8].

Для діагностики рівня фонового забруднення досліджуваних монокристалів може бути використано особливості домішкової фотолюмінесценції в діапазоні 1,3 – 1,5 eV та в більш довгохвильовій частині спектру. Смуга в околі 1,45 eV пов'язана з випромінювальною рекомбінацією донорно-акцепторних пар за участю повздовжніх оптичних фононів. Одночасно в більш довгохвильовій частині спектру спостерігаються окремі піки ФЛ, обумовлені ізольованими точковими дефектами неконтрольованих домішок різної хімічної природи, що не пов'язані в комплекси [8]. В високочистих кристалах не повинно бути будь-яких широких структурних смуг з помітною інтенсивністю у всьому вказаному діапазоні спектру.

Враховуючи чутливість люмінесцентного методу аналізу, що знаходиться на рівні 10^{11} центрів/см³, впливає наступне: у випадку, коли люмінесценція в домішковій області відсутня взагалі, то забруднення домішками по концентрації не перевищує межі 10^{12} см⁻³.

Відмітимо, що промислові монокристали Cd_{1-x}Zn_xTe (x=0.02 та 0.04), вирощені з розплаву методом Бріджмена-Стокбаргера, містять підвищену концентрацію точкових дефектів ґратки, а також їх локально-неоднорідний розподіл по об'єму кристала. Це обумовлено розходженням летючості вихідних компонентів, несиметричністю діаграми стану й неможливістю підтримувати контрольований тиск парової фази в процесі вирощування, а також досить високою температурою плавлення.

Відомо, що основні характеристики напівпровідникових кристалів визначаються точковими дефектами. Типові їх види, що виникають в розплавних монокристалах CdTe, це дефекти атомного розупорядкування кристалічної ґратки, зокрема термодинамічно нерівноважні дефекти структури – тобто атоми, зміщені з правильних кристалографічних позицій, а також бінарні стехіометричні вакансії в обох підґратках. Окрім цього, це – власні дефекти ґратки, обумовлені стехіометричними відхиленнями хімічного складу (заряджені вакансії у відповідній підґратці), а також фонове забруднення чужорідними атомами домішок.

Концентрація термодинамічно нерівноважних дефектів структури визначається співвідношенням $C = A \exp(-E_f / kT)$, де E_f – енергія дефектоутворення f-го типу дефектів.

Рівень фонового забруднення для можливості практичного застосування [1-3] розплавних монокристалів залежить від області

їх використання. При використанні CdTe в якості детекторного або підкладкового матеріалу допустима концентрація неконтрольованих домішок знаходиться в околі 10^{11} см^{-3} [4]. В той же час в літературних даних приводиться мінімальний рівень забрудненості 10^{16} см^{-3} [1-6]. Цим пояснюються причини ускладнення практичного застосування монокристалів CdTe.

Просторово неоднорідний розподіл заряджених фонових донорів та акцепторів у кристалічній ґратці супроводжується відповідною модуляцією електростатичного потенціалу в об'ємі кристалу. Наявність протяжних електричних бар'єрів із сильно збідненими областями, які поведуться як діелектрик, та горбів електростатичного потенціалу в об'ємі $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$ суттєво змінює характер провідності. Зокрема, в монокристалах з'являються рівні протікання, тобто значення енергії, при яких електрони провідності, що рухаються під кутом до силових ліній зовнішнього поля, не тунелюють, а огинають горби електростатичного потенціалу.

Врахування наявності вільних електронів з енергією, яка дещо перевищує рівні протікання, призведе до ще однієї складової електропровідності за рахунок тунелювання крізь горби модульованого домішковими неоднорідностями електростатичного потенціалу.

Бар'єри, локалізовані на локальних неоднорідностях різної природи, можуть бути у вигляді високоомних прошарків і запираючих шарів, товщина й ступінь збіднення яких залежать, зокрема, від напруженості та частоти електричного поля.

Це означає, що сумарна електропровідність у розплавних високоомних монокристалах повинна мати змішаний характер, тобто, окрім набору складових (зокрема – через локальні неоднорідності хімічного складу домішок, тощо) з постійною густиною струму повинні існувати окремі канали провідності, в яких, зокрема, електрони огинають горби електростатичного потенціалу або тунелюють крізь них.

Процеси формування запираючих шарів, які відносяться до релаксацийних, у зв'язку з великими часами максвелівської релаксації можуть спричиняти струмову нестабільність. При наявності зовнішнього електричного поля, дрейфовий зсув нерівноважних носіїв у процесі рекомбінації супроводжується просторовою асиметрією їхнього захоплення на глибокі електронні пастки, які згідно [8] по своїй природі є неконтрольованою фоновією домішкою.

Зазначені процеси захоплення на глибокі електронні центри захвату призводять до виникнення додаткового внутрішнього поля в кристалі і явища поляризації, що підсилює електричну неоднорідність.

Застосування високоомних монокристалів $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$ в якості детекторів рентгенівського й гама- випромінювання висуває додаткову вимогу підвищеної радіаційної стійкості до вихідного напівпровідникового матеріалу. Елементарним радіаційним дефектом у неорганічних кристалах є пара Френкеля - вакансія й атом у міжвузлі, а також динамічний краудіон [10, 11]. В комп'ютерному моделюванні, а потім теоретично [10] було показано, що поблизу кожної вакансії існує область, названа зоною нестійкості – така, що коли міжвузловий атом виявився в межах цієї області, то він безактиваційно, при якій завгодно низькій температурі рекомбінує зі своєю вакансією за час, що не перевищує 10^{-10} с . Характерні розміри зони нестійкості в неметалічних кристалах становлять 6 міжатомних відстаней. Це дозволяє сформулювати кристалохімічний критерій радіаційної стійкості неорганічних напівпровідників та діелектриків: розмір зони нестійкості в будь-якому даному кристалографічному напрямку повинен бути більше довжини пробігу динамічного краудіона [10]. Іншими словами, розмір зони нестійкості повинен бути максимально більшим, щоб забезпечувати безактиваційну рекомбінацію (тобто анігіляцію) елементарних радіаційних дефектів у момент їхнього народження. Така умова забезпечення радіаційної стійкості має виконуватись до застосовуваних напівпровідникових кристалів. Забруднення фоновими домішками призводить до зменшення розмірів зони нестійкості в околі кожної вакансії та суттєво знижує радіаційну стійкість матеріалу.

Для отримання гранично допустимих фізичних параметрів кристалів CdTe, зокрема оптичного ІЧ- пропускання (рис.2), необхідно використання післяростового багатоетапного відпалу в парах легких компонентів. Коректний вибір параметрів прецизійного відпалу в парах летючих компонентів з врахуванням біваріантності фізико-хімічної рівноваги в закритій системі передбачає подолання труднощів, пов'язаних з вибором робочої температури та визначенням величини парціального тиску, а також його регулюванням у випадку багатоетапності процесу.

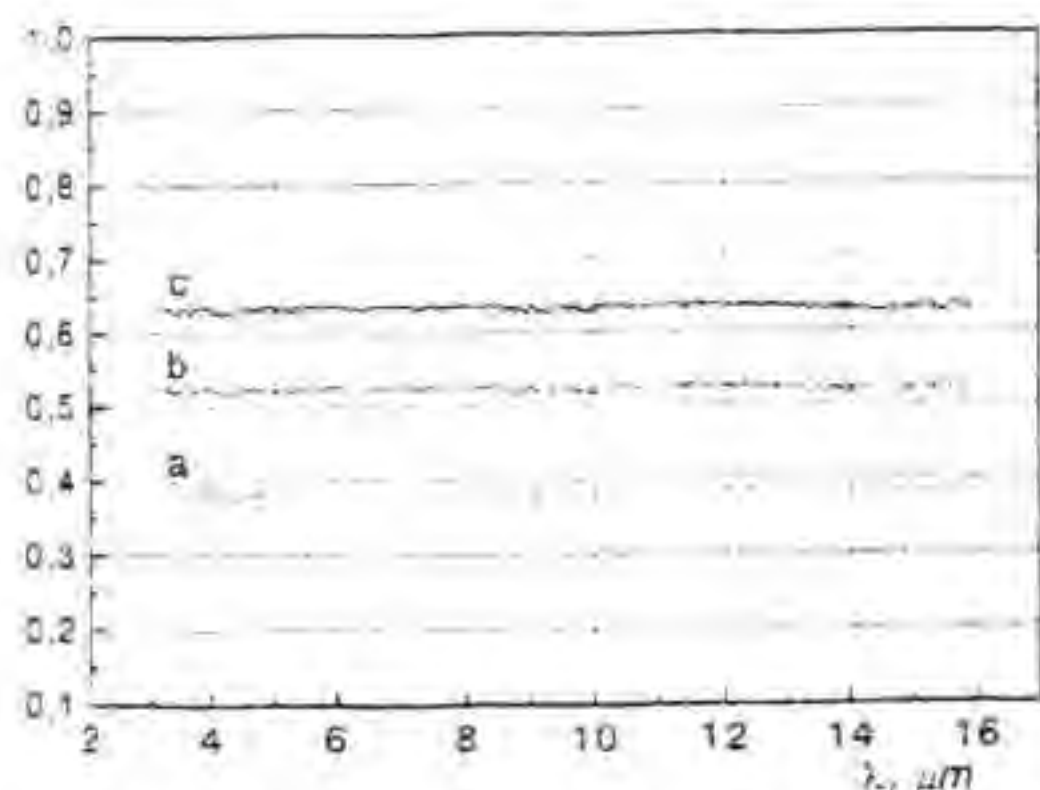


Рис.2 оптичне ІЧ-пропускання промислових монокристалів CdTe, вирощених методом Бріджмена-Стокбаргера: (а) — з використанням компонентів без застосування методів глибокої очистки, (б) — високочистого розплавного кристалу безпосередньо після кристалізації, (с) — високочистого монокристалу після двохетапного відпалу.

Був використаний двохетапний дифузійний відпал при контрольованому тиску та складі парової фази. В результаті серії виконаних робіт були експериментально встановлені оптимальні температури відпалу в двох вказаних діапазонах. Використовуваний аналіз особливостей залежності спектру фотолюмінесценції від рівня неконтрольованого фонового забруднення дозволили з високою надійністю діагностувати степінь придатності невідпалених кристалів CdTe для отримання гранично допустимих фізичних параметрів.

Таким чином, характер фізико-хімічної та адсорбційної рівноваги, що встановлюється при довготривалому рівноважному дифузійному відпалі, однозначно визначає систему власних дефектів решітки в отримуваних після відпалу промислових монокристалах $Cd_{1-x}Zn_xTe$ та CdTe.

З'ясовано, що низька концентрація вільних носіїв та локально-неоднорідний розподіл фонових домішок у розплавних монокристалах призводить до зміни їх фізичних характеристик, зокрема зростають дебаєвська довжина екранування та час максвелівської релаксації, виникають протяжні електричні бар'єри, горби електростатичного потенціалу, явище поляризації та перехід до каналної провідності [9].

Список використаних джерел

1. Клевков Ю.В., Колосов С.А., Плотников А.Ф. Влияние пассивации поверхности р- CdTe в $(NH_4)_2S_x$ на вольт-амперные характеристики контактов // ФТП. — 2006. — 40, вып. 9. — С. 1074-1078.
2. Попович В.Д., Григорович Г.М., Пелещак Р.М., Ткачук П.Н. Физические свойства полуизолирующих монокристалов CdTe:Cl, выращенных из газовой фазы // ФТП. — 2002. — 36, вып. 6. — С. 674-678.
3. Кутний Д.В., Прохоре И.М., Рыбка А.В., Наконечный Д.В. и др. Методика измерения электромагнитного излучения полупроводниковыми детекторами // ВАНТ. — 2006. № 1. — С.163 — 169
4. Ормонт Б.Ф. Введение в физическую химию и кристаллохимию полупроводников. М.: "Высшая школа", 1968. — С. 344-345.
5. Строителев С.А. Кристаллохимический аспект технологии полупроводников. Новосибирск. Наука. Сибирское отделение. 1976. — С. 154.
6. Матвеев О.А., Терентьев А.И. Основные принципы послеростового отжига CdTe:Cl для полуизолирующих кристаллов // ФТП. — 2000. — 34, вып.11. — С. 23 — 27.
7. Болтакс Б.И. Диффузия в полупроводниках. Москва. Изд-ство физ.-мат. литературы. 1961. — С. 226-227.
8. Квит А.В., Клевков Ю.В., Медведов С.А. и др. Динамика и изменения спектров фотолюминесценции CdTe в зависимости от чистоты исходных компонентов // ФТП. — 2000. — 34, вып.1. — С.19-23.
9. Аметов Б., Байдуллаева А., Беляев С.В., Даулетмуратов Б.К., Исмаилов К.А., Фанкич А.М. Особенности высокоомного состояния $Cd_{1-x}Zn_xTe$. Материалы IV Республиканской конференции "Рост, свойства и применение кристаллов". РСПК-2005. Нукус. 27-29 октября 2005.
10. Кошкин В.М., Забродский Ю.Р. Радиационностойкие кристаллические фазы и теория естественного отбора в радиационной физике. V Всесоюзная конференция «Тройные полупроводники и их применение». Ивано-Франковск, 2-5 октября 1987. Т.1. — С.68-69.
11. Косевич А.М. Физическая акустика реальных кристаллов. К.: Наукова думка 1981. — С.328.

Надійшла до редколегії 19.12.2007

УДК 532

Л.А.Булавін, академік НАНУ,
М.М.Маломуж, аспірант Київського університету

Властивості квадрупольної фази двовимірного кулонівського газу

Досліджуються особливості внутрішніх теплових збуджень квадрупольних кластерів, які утворюються у двовимірному кулонівському газі. Показано, що із п'яти незалежних мод теплових збуджень три з них є м'якими, а дві інші мають жорсткий характер. Одна з м'яких мод є гармонічною, тоді як дві інші є суттєво нелінійними. Детально досліджується окремий випадок гармонічних коливань – так звані контактні коливання. Встановлено, що характерна температура руйнування квадрупольних кластерів практично співпадає з температурою Костерліца-Таулеса переходу діелектрик-провідник.

Властивості двовимірного кулонівського газу є об'єктом теоретичних досліджень [1-7] і молекулярно-динамічних симуляцій [8,9] вже на протязі останніх двох десятиріч. Найбільш суттєвий прогрес було досягнуто у дослідженні системи твердих дисків, які порівно заряджені позитивно і негативно. Якісно встановлено, що крім природного переходу діелектрик-провідник в такій системі відбувається фазовий перехід пара-рідина. Проте теоретичний розрахунок точних деталей фазової діаграми гальмується використанням в [1-7] не зовсім адекватного нульового наближення, а саме, наближення ідеальної плазми.

Молекулярно динамічні експерименти виявили одну важливу особливість поведінки системи: в області розташування кривих співіснування рідина-пара і переходу діелектрик-провідник більшість іонів і катіонів об'єднані в квадрупольні кластери. Крім них зустрічаються дипольні пари, а також гексагональні кластери.

Процеси кластеризації у двовимірному кулонівському газі були об'єктом ретельного дослідження в роботах [10-12]. Використовуючи методи хімічної кінетики [13,14], в ній побудовано сімейство ізоконцентраційних кривих, які задають розподіл дипольних пар та квадрупольних кластерів в площині (n, t) , де $n_+ = n_- \sigma^2 = n \sigma^2$ – безрозмірна густина дисків, а $t = T/T_*$ – безрозмірна температура (тут σ –

L.A.Bulavin, academician of NASU,
M.M.Malomuzh, aspirant of Kyiv University

Peculiarities of the quadrupole phase of two-dimensional Coulombi gas

Peculiarities of the internal thermal excitations of quadrupole clusters in two-dimensional Coulombic gas are investigated. It is shown that among five modes of excitations three modes are soft and two ones have the hard character. One of soft modes is harmonic and two other are determined by quadratic forces. The partial case of the harmonic oscillations – so called contact ones – is studied in details. It is established that the characteristic temperature for the disintegration of quadrupole clusters is practically coincided with the Kosterlitz-Thouless temperature.

діаметр аніону або катіону, $T_* = q^2$ – температура розвалу дипольних пар, q – заряд іонів). Але в одному відношенні це дослідження є неповним. Квадрупольні кластери не є абсолютно жорсткими. Вони мають внутрішні степені свободи, які збуджуються внаслідок зіткнень між частинками. Це повинно супроводжуватись певною зміною ізоконцентраційних кривих і лінії співіснування пара-рідина, а також специфічним внеском у теплоємність системи.

В представленій роботі основна увага зосереджується на дослідженні теплових збуджень квадрупольних кластерів. Аналізується значення граничної температури їх стійкості.

Енергія збудження квадрупольних кластерів. Рівноважна конфігурація квадрупольного кластеру представлена на Рис.1а.

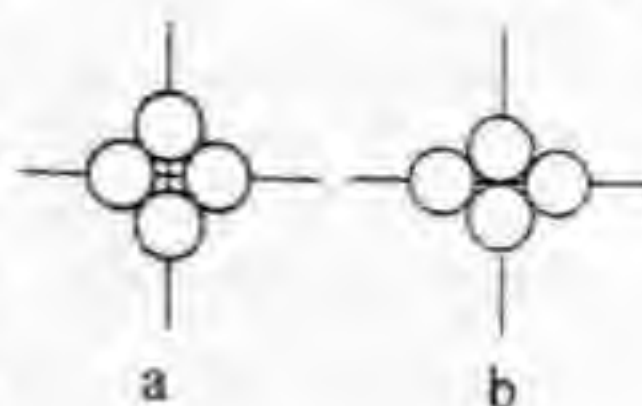


Рис.1. Рівноважна (а) і гранична контактна (б) конфігурації квадрупольного кластеру (світлі і сірі диски позначають катіони і аніони відповідно).

Неважно впевнитись, що електростатична енергія квадрупольного кластера $U_{ij} = - \sum_{i,j=1}^4 q_i q_j \ln \frac{r_{ij}}{\sigma}$, де $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, в його основному стані приймає значення:

$$U_{ij}^{(0)} = -q^2 \left(\ln \frac{r_{13}^{(0)}}{\sigma} + \ln \frac{r_{24}^{(0)}}{\sigma} \right) = -\ln 2 \cdot q^2 \approx -0.693 q^2 \quad (1)$$

Відхилення від $U_{ij}^{(0)}$ відбувається внаслідок теплових збуджень кластерів і електростатичної взаємодії між ними. Нехай відповідні координати іонів дорівнюють:

$$x_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \delta x_1, \quad y_1 = \delta y_1,$$

$$x_2 = \delta x_2, \quad y_2 = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \delta y_2,$$

$$x_3 = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \delta x_3, \quad y_3 = \delta y_3,$$

$$x_4 = \delta x_4, \quad y_4 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \delta y_4.$$

Оскільки диски вважаються жорсткими, прирости координат катіонів і аніонів повинні задовольняти нерівностям:

$$\begin{aligned} & (x_1^{(0)} + \delta x_1 - x_3^{(0)} - \delta x_3)^2 + \\ & + (y_1^{(0)} + \delta y_1 - y_3^{(0)} - \delta y_3)^2 \geq (r_{13}^{(0)})^2 \end{aligned} \quad (3)$$

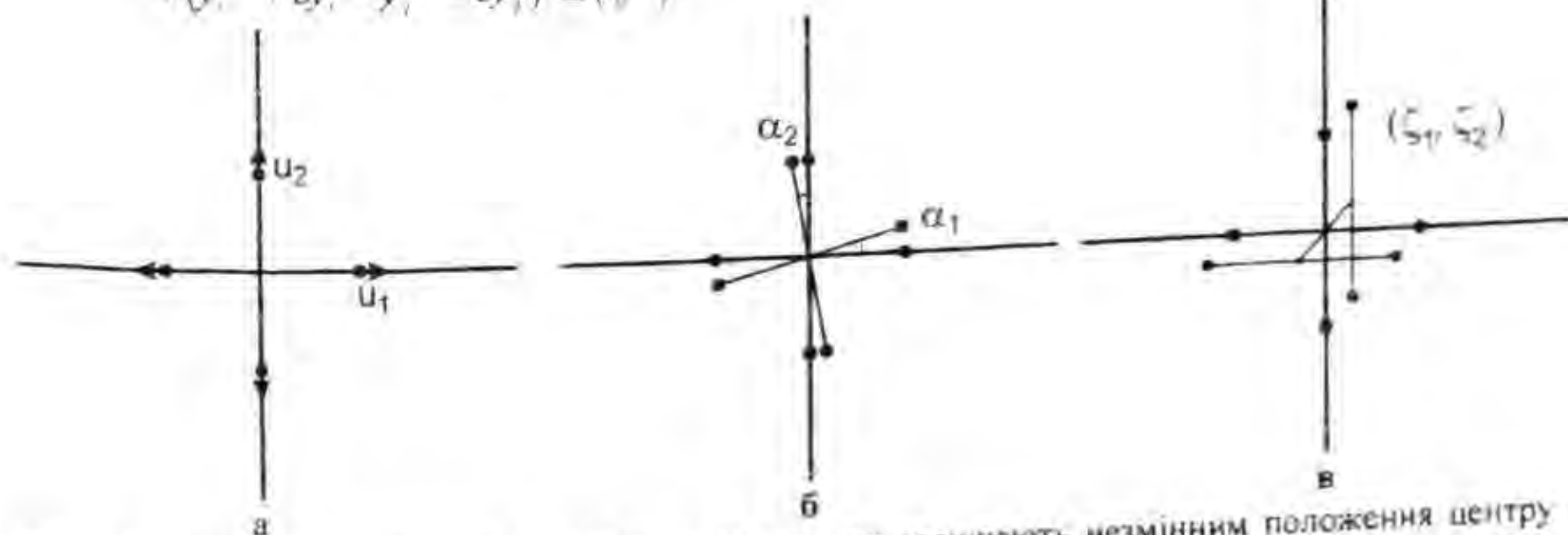


Рис.2. Найпростіші незалежні варіації координат, які залишають незмінним положення центру мас квадрупольного кластера: а відповідає варіаціям 1) і 2), б – варіаціям 3) і 4), в – варіації типу 5).

$$3) \quad \delta y_1 = -\delta y_3 = \alpha_1 \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + o(\alpha_1^2), \quad \delta x_1 = -\delta x_3 = o(\alpha_1^2),$$

а всі інші варіації дорівнюють нулю;

$$4) \quad \delta x_2 = -\delta x_4 = \alpha_2 \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + o(\alpha_2^2), \quad \delta y_2 = -\delta y_4 = o(\alpha_2^2),$$

а всі інші варіації дорівнюють нулю. Неважно

При побудові приросту енергії кластера ($\delta \tilde{U} = \delta U / q^2$) внаслідок малих відхилень частинок від їх рівноважних положень додатково треба враховувати незмінність положення центру мас кластера. У згоді з цим, варіації координат повинні задовольняти рівнянням:

$$\delta \tilde{x}_1 + \delta \tilde{x}_2 + \delta \tilde{x}_3 + \delta \tilde{x}_4 = 0. \quad (4)$$

В загальному випадку, варіації координат частинок, які не змінюють положення центру мас, можна розглядати як комбінацію найпростіших варіацій наступного виду:

1) $\delta \tilde{x}_1 = -\delta \tilde{x}_3 = u_1$, $u_1 > 0$, а всі інші варіації дорівнюють нулю;

2) $\delta \tilde{y}_4 = -\delta \tilde{y}_2 = u_2$, а всі інші варіації дорівнюють нулю. Допустимими значеннями u_2 є тільки ті, що узгоджуються з умовою непроникненості дисків, тобто $-\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{1 - 2^{1/2} u_1^2} - 2u_2^2 - 1 \right| \leq u_2$.

(2) Варіації цих перших двох типів відповідають зміні відстаней між катіонами і аніонами і умові, що напрямки ліній, які їх зв'язують, залишаються фіксованими. Дві наступні умови відповідають малим поворотам цих ліній навколо початку координат (центру мас) при умові, що положення катіонів і аніонів на них залишається незмінним:

бачити, що самі по собі варіації 3) і 4) входять в протиріччя з умовою непроникненості (5).

Тут слід додати, що випадок, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, відповідає повороту квадрупольного кластера як цілого на кут α . Зрозуміло, що енергія кластера при цьому залишається

незмінною. Тому в подальшому ми будемо покладати $\alpha_2 = 0$ і $\alpha_1 = \alpha$.

Ще один тип незалежних елементарних варіацій відповідає зсувам центрів мас пар аніонів і катіонів так, щоб центр мас кластеру залишався незмінним:

5) $\delta x_4 = \delta x_2 = \zeta_1$, $\delta y_4 = \delta y_2 = \zeta_2$, $\delta x_1 = \delta x_3 = -\zeta_1$, $\delta y_1 = \delta y_3 = -\zeta_2$. Ці варіації самі по собі також не задовольняють умові (5).

Неважко бачити, що серед незалежних варіацій координат дисків умові (4) задовольняють тільки варіації типу 1) і 2): $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$. Їм відповідають наступні лінійні внески в енергію збудження квадрупольного кластера:

$$\delta \tilde{U}_e(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} u_1 + \dots; \quad \delta \tilde{U}_e(2) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} u_2 + \dots$$

Довільні варіації координат дисків є лінійними комбінаціями елементарних варіацій:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= u_1 - \zeta_1, \quad \delta x_2 = \zeta_1 \\ \delta x_3 &= -u_1 - \zeta_1, \quad \delta x_4 = \zeta_1; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta y_1 = \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \zeta_2, \quad \delta y_2 = -u_2 + \zeta_2,$$

$$\delta y_3 = -\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \zeta_2, \quad \delta y_4 = u_2 + \zeta_2.$$

Можна впевнитись, що відстані між найближчими дисками будуть задовольняти умові (4) при виконанні наступних нерівностей:

$$12: \quad u_1 + u_2 - 2(\zeta_1 + \zeta_2) + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \alpha \geq 0,$$

$$34: \quad u_1 + u_2 + 2(\zeta_1 + \zeta_2) + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \alpha \geq 0, \quad (6)$$

$$14: \quad u_1 + u_2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \alpha \geq 0,$$

$$23: \quad u_1 + u_2 + 2(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \alpha \geq 0.$$

Приріст енергії кластера включає лінійні і квадратичні за варіаціями координат внески. Перші з них мають вигляд:

$$\delta \tilde{U}_e = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} (u_1 + u_2) + \dots \quad (7)$$

і виникають внаслідок того, що електростатична енергія кластера в його рівноважному стані не є мінімальною. Лінійний внесок обертається до нуля тільки при умові:

$$u_1 + u_2 = 0, \quad (8)$$

яку разом з (6) можна задовольнити, коли елементарні варіації кутів обмежуються нерівностями:

$$\alpha \geq 0 \quad \text{і} \quad -\alpha \geq 0.$$

Це можна зробити тільки при $\alpha = 0$, тобто при відсутності кутових деформацій. Так само, рівняння (8) і нерівності (6) задовольняються при умові, що $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$.

Таким чином, лінійні внески до енергії збудження обертаються до нуля тільки у випадку хрестоподібних коливань квадрупольного кластера, коли подовженню відстані між катіонами відповідає точно таке ж скорочення відстані між аніонами. Теплові коливання кластерів збуджуються внаслідок зіткнень між ними. В загальному випадку зіткнення кластерів відбуваються при їх довільних взаємних орієнтаціях, тому разом з хрестоподібними коливаннями збуджуються і всі інші типи коливань кластера.

Підставляючи (5) у вираз для електростатичної енергії кластера, в квадратичному за елементарними варіаціями наближенні для енергії збудження отримусмо:

$$\delta \tilde{U}_e = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} (z_1 + z_2) + \frac{1}{4\sigma^2} [6r^2 - z_1^2 - z_2^2] + \dots \quad (9)$$

де

$$z_1 = u + s \quad \text{і} \quad z_2 = u - s$$

і

$$u = u_1 + u_2, \quad r = u_1 - u_2, \quad s = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \alpha.$$

Нерівності (6) приймають вигляд:

$$z_1 \geq 0 \quad \text{і} \quad z_2 \geq 0,$$

і з них, вочевидь, випливає, що $\delta \tilde{U}_e$, як і повинно бути, є позитивно означеною функцією.

Зазначимо, що незалежність $\delta \tilde{U}_e$ від змінних ζ_1 і ζ_2 в квадратичному наближенні є дещо несподіваною. Але в більш високих наближеннях, починаючи з кубічного, залежність від ζ_1 і ζ_2 відновлюється. Коливання, які описуються координатою r , залишають конфігурацію кластера хрестоподібною. Величину r/σ можна розглядати як міру деформації вихідної конфігурації кластера, яка є хрестоподібною і симетричною по обох напрямках. Узагальнені координати z_1 і z_2 описують відхилення від хрестоподібних конфігурацій.

Кінетичної енергії кластера визначається внесками від усіх степенів свободи:

$$T = \frac{1}{8} m (3\dot{z}_1^2 - 2\dot{z}_1\dot{z}_2 + 3\dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + 2m(\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2) \quad (10)$$

Зі структури гамільтоніану системи $H = T + \delta U_e$, таким чином, випливає, що внаслідок зіткнень між кластерами збуджуються, перш за все, одне гармонічне коливання хрестоподібного типу (P) і двоє квазівільних відносних зсувів пар катіонів і аніонів, які описуються координатами ζ_1 і ζ_2 . Часова залежність таких зсувів є близькою до періодичної, хоча і не є гармонічною.

Контактні коливання квадрупольного кластера. Серед нерівноважних конфігурацій, які узгоджуються з умовами (3) і (4), найпростішою є та, коли кожний диск певного знаку контактує з двома сусідніми дисками протилежного знаку. Утворюються ромбоподібні конфігурації, які є найбільш наближеними до квадрату у вихідній конфігурації кластера. Можна сказати і інакше: прями, які з'єднують центри дисків, утворюють хрестоподібну конфігурацію, властивості якої повністю визначаються одним параметром u :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + u, \quad y_1 = 0; \\ x_2 &= 0, \quad y_2 = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2^{3/2} u' - 2u'^2}; \quad (10) \\ x_3 &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} - u, \quad y_3 = 0; \\ x_4 &= 0, \quad y_4 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2^{3/2} u' - 2u'^2}, \end{aligned}$$

де $u' = u/\sigma$. З (10) випливає, що варіації координат, які відповідають малим контактним коливанням, задаються виразами:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\delta x_3 = u, \quad \delta y_2 = -\delta y_4 = u + \frac{\sqrt{2}}{\sigma} u^2 + \dots, \\ \delta x_2 &= \delta x_4 = \delta y_1 = \delta y_3 = 0. \end{aligned}$$

Ім відповідає наступний приріст електростатичної енергії квадрупольного кластера:

$$\delta \bar{U} = 4 \frac{u^2}{\sigma^2}, \quad \bar{U} = U/q^2. \quad (11)$$

Цей тип коливань квадрупольного кластера є дуже близьким до несиметричних хрестоподібних коливань, коли

$z_1 + z_2 = u_1 + u_2 = 0$, але все-таки не співпадає з ними. В останньому випадку: $u_1 = u$,

$$u_2 = -u - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} u^2, \text{ так що } u_1 + u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} u^2.$$

Повна енергія δE малих контактних коливань кластеру приймає вигляд:

$$\delta E = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \frac{1}{2} k u^2,$$

де $M = 4m$ і $k = 8T_e/\sigma^2$ ($m = m_+ = m_-$ - маса іонів). Цим значенням ефективної маси та константи пружності відповідають частота коливань $\omega_0 = \sqrt{2T_e/m}$ і енергія збудження $E_1 = \hbar \omega_0$ найнижчого коливального стану. Контактні коливальні збудження можна описувати у квазікласичному наближенні, якщо $T > T_0$, де

$$T_0 = \hbar \omega_0 = \sqrt{T_0 T_e}.$$

Тут $T_0 = \hbar^2/m\sigma^2$ є температурою квантового виродження системи дисків (нагадаємо, що ми покладемо $k_B = 1$).

Із зростанням температури контактні коливання стають ангармонічними і повинні описуватись більш точним виразом для енергії збудження кластера у порівнянні з (11).

Зазначимо, що контактні коливання квадрупольного кластера не порушують хрестоподібну симетрію у розташуванні зарядів і тому не приводять до виникнення у нього дипольного моменту.

Характерна температура розвалу квадрупольного кластера. Збудження m -яких мод коливань кластерів супроводжується накопиченням внутрішньої енергії, яка дорівнює

$$E_m = 2T_e m.$$

Тут прийнято, що гармонічним коливанням кластера відповідає енергія T_e , а на кожний ступінь свободи хрестоподібних збуджень

припадає по $\frac{1}{2} T_e$, оскільки в квадратичному

наближенні енергія збудження визначається тільки його кінетичною складовою (див. (9) і (10)). При кожному зіткненні і додатковому припущенні, що такі зіткнення є непружними, кластер в середньому отримує, або віддає, частку енергії $\frac{1}{2} T_e$ від поступальних степенів свободи і

$\frac{1}{4} T_e$ - від обертальних. В обох випадках береться тільки половина відповідної енергії через

геометричні чинники зіткнення. Максимальне значення внутрішньої енергії, яке може акумулюватись м'якими модами, досягає $E_m = \frac{11}{4} T_c$. Кластер буде залишатись цілим до тих

пір, поки $E_m \leq U_{cl}^{(0)}$ або $t \leq t_d = \frac{4}{11} \ln 2$.

Наближенне значення $t_d \approx 0.252$ майже не відрізняється від температури фазового переходу Костерліца-Таулеса $t_{KT} = 0.25$ [1].

Врахування збуджень внутрішніх степенів свободи квадрупольного кластера є також дуже важливим для побудови послідовної теорії кластеризації у двовимірному кулонівському газі [12].

Список використаних джерел

1. Kosterlitz J.M. and Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // J.Phys.C – 1973. – 6. – P.1181–1203.
2. Levine Y., Li X. and Fisher M.E. Coulombic Criticality in General Dimensions // PRL – 1994. – 73. – P.2716–2719.
3. Levine Y. and Fisher M.E. *Criticality in the hard-sphere ionic liquids* // Physica – 1996. – 225. – P.164–220.
4. Villain J. Theory of one- and two-dimensional magnets with an easy magnetization plane. II. The planar, classical, two-dimensional magnet // J. Phys. (Paris) – 1975. – 36. – P.581–589.
5. Young A.P. Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions // Phys.Rev.B – 1979. – 19. – P.1855–1866.
6. Minnhagen P. The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films // Rev. Modern Phys. – 1987. – 50. – P.1001–1066.
7. Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. – Москва: Наука, 1987.
8. Orkoulas G. and Panagiotopoulos A.Z. Phase diagram of the two-dimensional Coulomb gas: A thermodynamic scaling Monte Carlo study // J.Chem.Phys. – 1996. – 104. – P. 7205–7209.
9. Gaillol J.M. and Levesque D. Low-density phase diagram of the two-dimensional Coulomb gas // Phys.Rev.B – 1986. – 33. – P.499–509.

10. Malomuzh M.N. Statistical Theory of the Equation of State for 2D Coulombic Gas near its Critical point // J.Mol.Liq. – 2006. – 127. – P. 40–43.
11. Malomuzh M.N. Phase diagram of two-dimensional Coulombic gas // Ukr.J.Phys. – 2007. – 52. – p.1108–1115.
12. Маломуж М.М. Кластерна структура та її прояв в особливостях фазової діаграми двовимірного кулонівського газу // Вісник КУ. Сер. фіз.-мат. науки. 2008. № 1.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физка, часть I. – Москва: Наука, 1976.
14. Guillot B. & Guissani Yv. Towards a theory of coexistence and criticality in real molten salts // Mol.Phys. – 1996. – 87. – P.37–86

Надійшло до редакції 10.12.2007

УДК 530.182

Гічан О.І. *, м.н.с.

Гречко Л.Г., д-р фіз.-мат. наук, професор

Змішані режими моделі ФітцХ'ю – Нагумо: взаємодія та конкуренція біфуркацій Хопфа та Тюрінга

Досліджуються змішані режими канонічної реакційно-дифузійної моделі типу активатор-інгібітор, що виникають внаслідок взаємодії та конкуренції двох основних біфуркацій порушення симетрії у нерівноважних системах.

Ключові слова: структуроутворення, біфуркації Хопфа та Тюрінга, модель ФітцХ'ю-Нагумо.

*E-mail: gichan@meta.ua

Вступ. Парадигма взаємодії дифузійних та реакційних процесів адекватно пояснює просторово-часову еволюцію багатьох нерівноважних систем, допомагає зрозуміти шляхи, що ведуть їх до нестійкостей. У цьому контексті динамічний аналіз реакційно-дифузійних моделей, зокрема моделі ФітцХ'ю-Нагумо [1, 2], є предметом інтенсивних досліджень, особливо того, що стосується біфуркаційного аналізу і умов виникнення нестійкостей. Модель ФітцХ'ю-Нагумо (ФХН) початково була запропонована як емпірична модель збудливих біологічних мембран, сьогодні ж вона розглядається як канонічна реакційно-дифузійна система типу активатор-інгібітор. Н-подібна форма нулькліни активатора дозволяє їй адекватно відтворювати такі важливі властивості нерівноважних систем, як збудливість та бістабільність.

Питання взаємодії біфуркацій Хопфа та Тюрінга розглядалося для різних реакційно-дифузійних моделей, а саме: моделі типу хижак-жертва [3], таких моделей автокаталітичних реакцій, як модель брюсселятора [4, 5, 6] та модель Грея-Скотта [7], напівпровідникової моделі [8] та інших [9-12]. У цих моделях були отримані різноманітні режими в тому числі змішані моди – модульовані у часі просторові структури.

Ця робота присвячена дослідженню розвитку поверхневих просторово-часових структур, що виникають у двовимірній системі ФХН як при реалізації біфуркацій Хопфа та Тюрінга, так і при їхніх порогах. Показано, що у обох цих випадках присутня взаємодія та конкуренція біфуркацій, а

Gichan O.I., Junior researcher

Grechko L.G., Dr. Ph., professor

Mixed modes of the FitzHugh – Nagumo model: interaction and competition of the Hopf and Turing instabilities

Mixed modes of a canonical reaction-diffusion system of activator-inhibitor type caused by interaction and competition of two main symmetry-breaking bifurcations, the Hopf and the Turing bifurcations, are investigated.

Key Words: pattern formation, the Hopf and Turing bifurcations, the FitzHugh-Nagumo model.

режими, що при цьому виникають, є результатом їх спільної дії. Досліджено утворення структур у системі ФХН з єдиною стаціонарною точкою. Розрахунки базувалися на раніше отриманих аналітичних результатах для значень параметра зовнішньої постійної сили, при яких у системі ФХН реалізуються біфуркації Хопфа та Тюрінга [13], та чисельному моделюванні (Matematica 5.1, Wolfram Research Inc., 1988 – 2004, trail version).

1. Модель ФітцХ'ю-Нагумо. Модель ФХН описує просторово-часову поведінку дійсних скалярних функцій активатора u та інгібітора v , що у двовимірному випадку запишеться як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \Delta v \quad (1)$$

де $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – лапласіан у декартових координатах, t, x, y – безрозмірні часова і просторові змінні. Реакційними членами системи є функції $f(u, v) = u(n - u)(u - 1) - v$ та $g(u, v) = \varepsilon(u - av + b)$. Параметри D_u та D_v є відповідно коефіцієнтами дифузії активатора та інгібітора. Через просторові та часові константи системи вони запишуться як $l = \sqrt{D_u T_u}$ та $L = \sqrt{D_v T_v}$, де l і L є відповідно просторовими константами активатора та інгібітора, а T_u, T_v – їх часовими константи. Локальну динаміку системи визначають дійсні параметри n, a, b . Від них залежить кількість стаціонарних точок системи. Параметр a є завжди додатним.

Параметр μ відповідає рівню збудження системи. Параметр b є зовнішньою силою, що діє на систему. Малий параметр ε визначає відносні швидкості (зміну у часі) активатора та інгібітора, а саме $\varepsilon = T_u / T_v$. Цей малий параметр та коефіцієнти дифузії не впливають на кількість стаціонарних точок системи ФХН, але від них залежить стійкість стаціонарних станів.

У якості початкового збурення було вибрано імпульс малої амплітуди, що прикладався до стаціонарної точки системи. Граничні ж умови відповідали відсутності потоку через границю області інтегрування.

2. Пороги біфуркацій. Спочатку розглянемо ситуацію, коли параметри системи ФХН є такими, що досліджувані біфуркації близькі до порогу своєї реалізації. При значеннях параметрів системи ФХН: $a = 2,3$; $b = -0,04$; $\mu = -0,4$; $\varepsilon = 0,05$; $D_v = 0,9$; $D_u = 0,01$ у ній реалізується ситуація, коли єдина стаціонарна точка системи ФХН $(0,59; 0,24)$ є нестійкою до біфуркації Тюрінга, і є близькою до порогу біфуркації Хопфа. Це видно з рис. 1, на якому представлена дисперсійна залежність уявної (пунктирна лінія) та дійсної частини (суцільна лінія) найбільшого власного значення матриці Якобі лінеаризованої системи ФХН від хвильового числа для цієї єдиної стаціонарної точки.

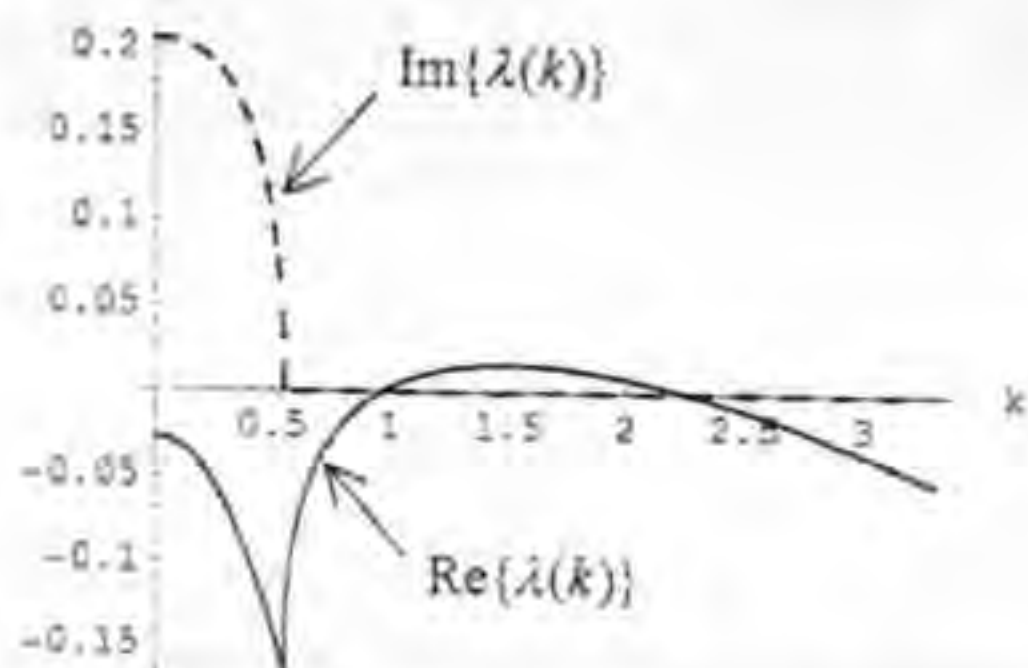


Рис. 1. Дисперсійна залежність уявної (пунктирна лінія) та дійсної частини (суцільна лінія) найбільшого власного значення матриці Якобі лінеаризованої системи ФХН з однією стаціонарною точкою, що є нестійкою до біфуркації Тюрінга. Параметри системи наведені в тексті.

Як відомо [14], біфуркація Хопфа потребує виконання таких умов: $\text{Im}\{\lambda(k_0)\} > 0$, $\text{Re}\{\lambda(k_0)\} > 0$, де $k_0 = 0$, а для біфуркації Тюрінга необхідно, щоб $\text{Im}\{\lambda(k_c)\} = 0$,

$\text{Re}\{\lambda(k_c)\} > 0$, де $k_c > 0$ – значення хвильового числа, що відповідає другому максимуму кривої $\text{Re}\{\lambda(k)\}$. У розглядуваному випадку маємо: $\text{Im}\{\lambda(k_0)\} \approx 0,2$, $\text{Re}\{\lambda(k_0)\} \approx -0,03$ та $\text{Im}\{\lambda(k_c)\} = 0$, $\text{Re}\{\lambda(k_c)\} \approx 0,015$, де $k_0 = 0$, а $k_c \approx 1,5$.

На рис. 2 представлена еволюція поверхневої структури (вигляд зверху профілю активатора $u(x, y, t)$), що виникає у такій системі ФітцХ'ю-Нагумо. Активатор $u(x, y, t)$ приймає і негативні, і позитивні значення. На рис. 2 це відображається за допомогою кольору. Темний колір відповідає меншому значенню активатора, світлий – його більшому значенню.

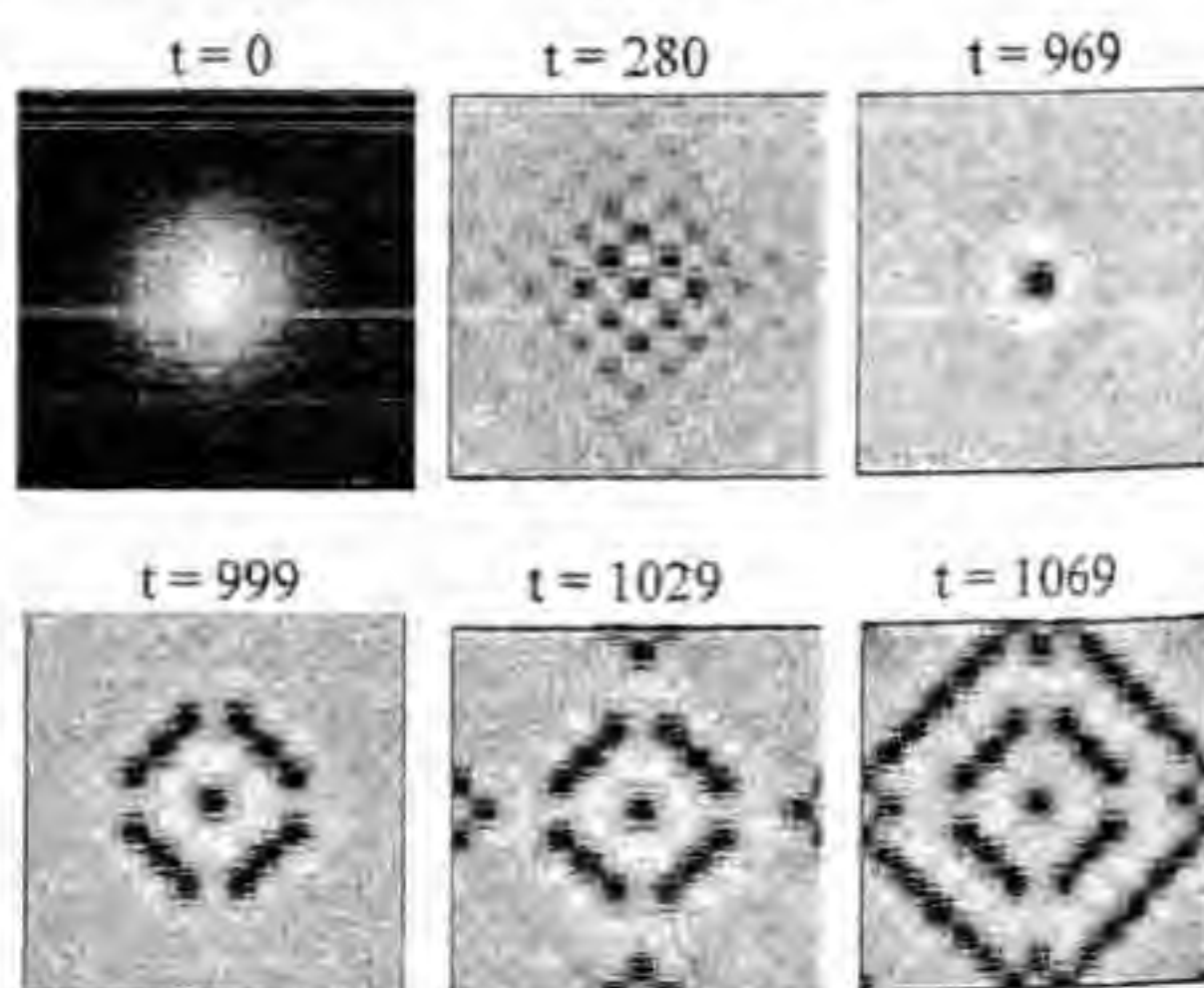


Рис. 2. Розвиток поверхневої структури при реалізації біфуркації Тюрінга і порогу біфуркації Хопфа у системі ФХН з однією стаціонарною точкою. Вигляд зверху профілю активатора $u(x, y, t)$ на просторовому домені $-20 < x < 20$, $-20 < y < 20$ у моменти часу, вказані над кожним знімком у безрозмірних одиницях.

Вибрані моменти часу, вказані над кожним знімком у безрозмірних одиницях, відповідають найбільш виразній зміні у поведінці системи ФХН. Незначне збурення у стаціонарній точці веде до автоколивань системи. Згодом вони дають початок складній періодичній структурі, розмір якої ритмічно змінюється, розширюючись та звужуючись, а амплітуда поступово наростає. Цю структуру із серії впорядкованих піків можна розглядати як модульовану структуру Тюрінга з певним кінцевим хвильовим числом. Пізніше біля границь області з'являються окремі локалізовані структури у вигляді обернених по амплітуді стоячих хвиль. Взаємодіючи між

собою і границями, вони заповнюють всі вільні від структури Тюрінга області.

Якщо розглянути випадок системи ФХН з однією стаціонарною точкою нестійкою до біфуркації Хопфа, але стійкою до біфуркації Тюрінга, матимемо ще більш різноманітні поверхневі структури. При значеннях параметрів: $a=2,4$; $n=-0,04$; $b=-0,015$; $\varepsilon=0,03$; $D_v=0,04$; $D_u=0,01$ у системі ФХН з єдиною стаціонарною точкою $(0,0178; 0,001)$ маємо реалізацію біфуркації Хопфа та поріг біфуркації Тюрінга (рис. 3).

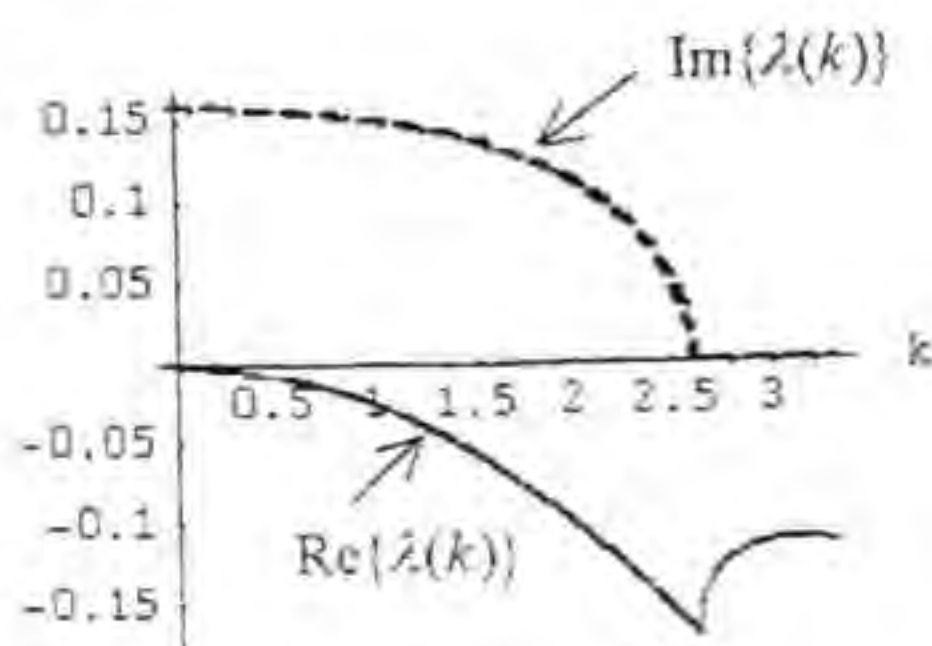


Рис. 3. Випадок дисперсійної залежності уявної (пунктирна лінія) та дійсної частини (суцільна лінія) найбільшого власного значення матриці Якобі лінеаризованої системи ФХН при реалізації біфуркації Хопфа та порогу біфуркації Тюрінга. Параметри вибраної системи наведені в тексті.

При цьому $\text{Im}\{\lambda(k_0)\}=0,15$, $\text{Re}\{\lambda(k_0)\}\approx 0$ та $\text{Im}\{\lambda(k_c)\}=0$, $\text{Re}\{\lambda(k_c)\}<0$, де $k_0=0$, а $k_c\approx 3,3$. Тоді при збуренні цієї єдиної стаціонарної точки матимемо картину розвитку поверхневої просторово-часової структури, зображену на рис. 4.

Перший знімок відповідає моменту часу, коли прості початкові автоколивання всієї системи вже змінюються періодичним процесом утворення та руйнування різноманітних поверхневих структур, від простих до більш складних, і навпаки. Ці поверхневі структури можуть складатися або із піків, або із більш складних видовжених елементів з вираженими границями, які можуть змінюватися з часом. Автоколивання системи відображаються на знімках як зміна кольору їх фону. Темний колір, як і раніше, відповідає меншому значенню активатора, світлий – його більшому значенню.

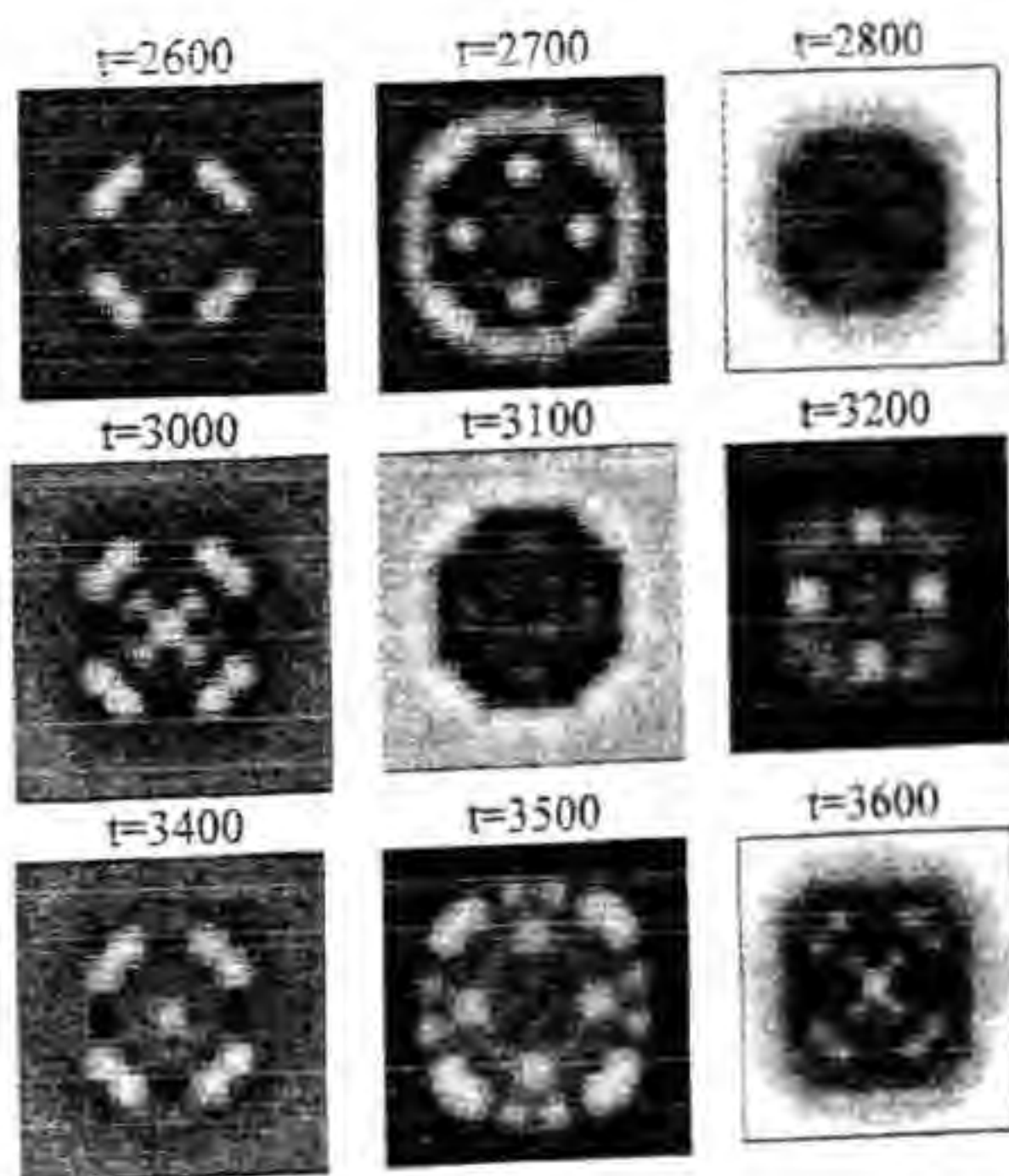


Рис. 4. Розвиток поверхневої структури при реалізації біфуркації Хопфа та порогу біфуркації Тюрінга у системі ФХН з однією стаціонарною точкою. Вигляд зверху профілю активатора $u(x, y, t)$ на просторовому домені $-50 < x < 50$, $-50 < y < 50$ у моменти часу, вказані над кожним знімком у безрозмірних одиницях.

3. Реалізація біфуркацій. Найбільш складною за формою поверхневою структурою, отриманою у роботі, є структура, що виникає у моностабільному випадку системи ФХН, коли у ній виконуються умови для обох біфуркацій (рис. 5). Значеннями параметрів системи ФХН були: $a=3,4$; $n=-0,03$; $b=-0,03$; $\varepsilon=0,026$; $D_v=0,7$; $D_u=0,01$

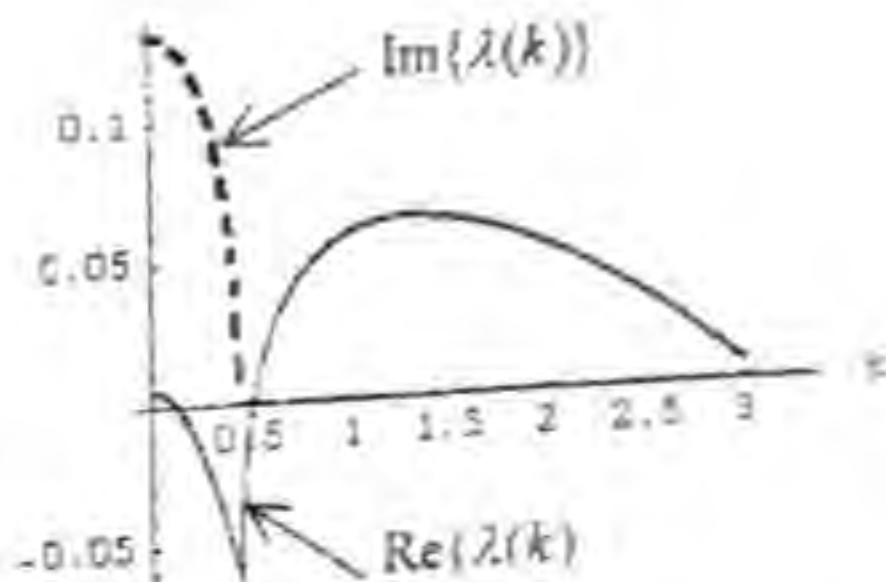


Рис. 5. Випадок дисперсійної залежності уявної (пунктирна лінія) та дійсної частини (суцільна лінія) найбільшого власного значення матриці Якобі лінеаризованої системи ФХН при реалізації у ній обох біфуркацій. Параметри системи наведені в тексті.

Вони дають необхідні для реалізації обох біфуркацій умови: $\text{Im}\{\lambda(k_0)\} = 0,13$, $\text{Re}\{\lambda(k_0)\} \approx 0,005$ та $\text{Im}\{\lambda(k_c)\} = 0$, $\text{Re}\{\lambda(k_c)\} \approx 0,065$, де $k_0 = 0$, а $k_c \approx 1,43$. У процесі автоколивань системи відбувається народження стаціонарних структур, кількість яких поступово збільшується, а форма ускладнюється, на противагу періодичному процесу ускладнення-спрощення з рис. 4. Це видно зі знімків представлених на рис. 6.

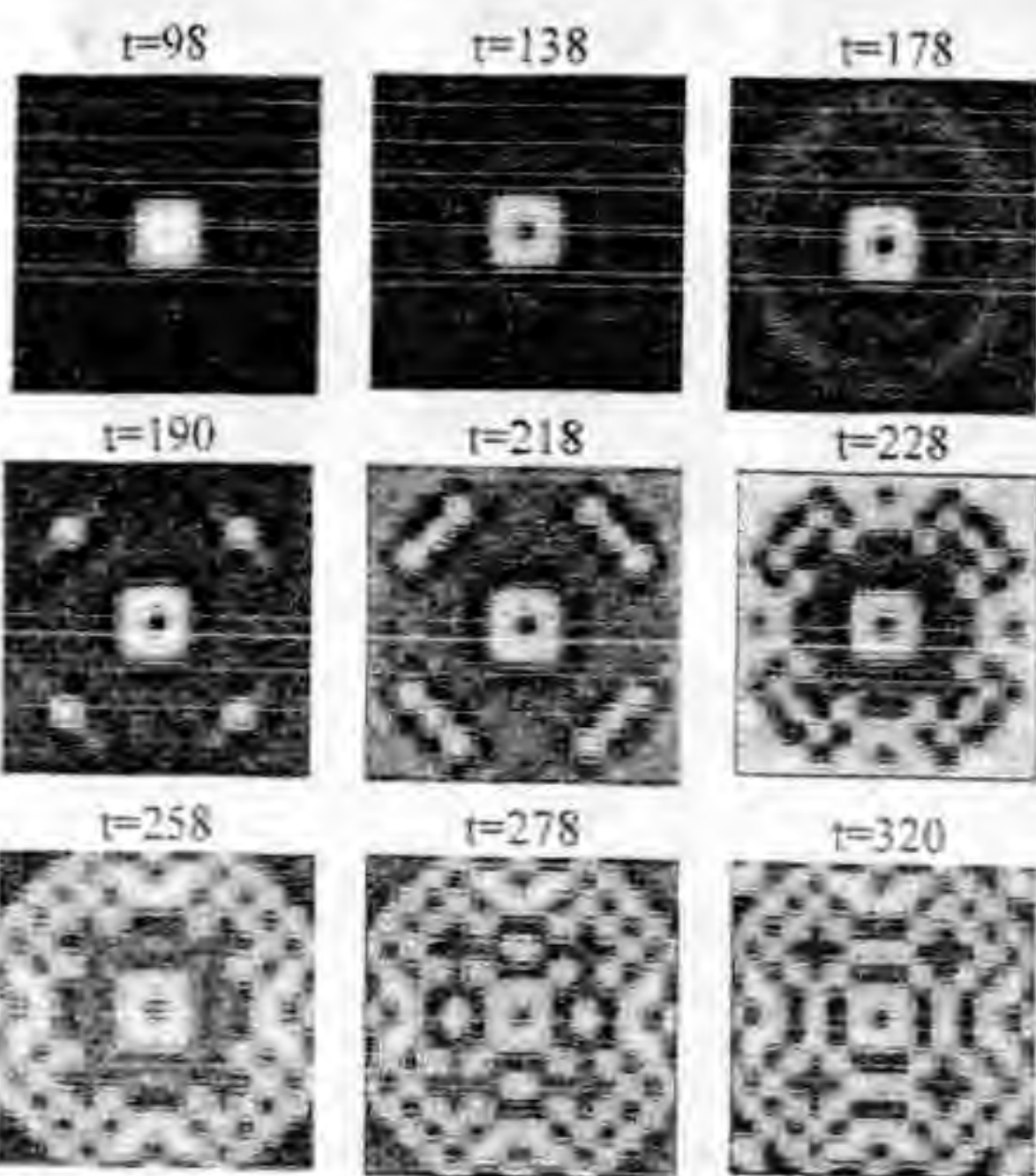


Рис. 6. Розвиток поверхневої структури при реалізації біфуркацій Хопфа та Тюрінга у системі ФХН з однією стаціонарною точкою. Вигляд зверху профілю активатора $u(x, y, t)$ на просторовому домені $-50 < x < 50$, $-50 < y < 50$ у моменти часу, вказані над кожним знімком у безрозмірних одиницях.

Спочатку, внаслідок збурення стаціонарної точки $(0,038; 0,0025)$ у системі формується єдина локалізована стаціонарна структура у вигляді піку зі зміненою вершиною. Потім навколо неї у процесі автоколивань системи утворюються більш складні поверхневі структури. Вибрані моменти часу, як і для випадку з рис. 2, відповідають найбільш виразній зміні у поведінці системи ФХН.

Період автоколивань розглянутих поверхневих структур та хвильове число, яке б їх характеризувало, знайти складно. Існує певна залежність остаточного вигляду структури від вибраного розміру просторового домену та

початкових умов. Крім того, вибір параметрів для отримання певної картини не є однозначним. Існує широкий діапазон значень параметрів, що дають одну і ту ж просторову картину розподілу. Тому на даний момент ми не можемо представити карту можливих типів структур в залежності від значень параметрів системи.

Зазначимо, що структури у вигляді локалізованих стаціонарних та осцилюючих плям (осцилонів), плям з періодично змінюваним діаметром (брейзерів), локалізованих осцилюючих кластерів та інші останнім часом інтенсивно досліджуються на основі нової експериментальної реакційно-дифузійної системи. Це так звана зворотня мікросмультія з нанорозмірних крапельок води з компонентами автокаталітичної реакції Белоусова-Жаботинського (БЖ), оточених моношаром поверхнево-активної речовини, розосереджених в маслянистій речовині – октані [12, 15]. Таку надзвичайно різноманітну поведінку можна отримати завдяки двом властивостям системи, а саме: (і) розмір крапельок води (5-10 nm) і відстань між ними можна контролювати, змінюючи концентрації води, поверхнево-активної речовини та маслянистої речовини; (ii) більшість компонентів реакції БЖ є полярними, тому вони залишаються у крапельках води, бо їх швидкість дифузії є відносно малою порівняно з характерною швидкістю самої краплі, в той же час, деякі основні проміжні продукти є неполярними, тому вони можуть виходити у маслянисту речовину, бо їх швидкість дифузії є високою.

Експериментальні приклади локалізованих структур є поширеними і у фізичних системах, серед них: дисипативні усамітнені поверхневі хвилі [16], локалізовані мікроструктури при солідифікації [17], усамітнені структури у вигляді стрічок та кластерів у газорозрядних системах [18], автосолітони у напівпровідниках [19], осцилони у гранулярних матеріалах [20] та на поверхні плазми [21], оптичні солітони [22]. Деякі з цих експериментів, наприклад, структури у 3D газорозрядних системах та напівпровідниках, можуть бути описані реакційно-дифузійними рівняннями.

Висновки. Модель ФітцХ'ю-Нагума є базовою реакційно-дифузійною моделлю типу активатор-інгібітор, проте її динамічні режими є дуже різноманітними. Це дозволяє використовувати її для моделювання складної поведінки реальних реакційно-дифузійних систем, зокрема бістабільних та збудливих. Система ФХН є чудовою базовою моделлю для

аналізу нових потенційно можливих структур у живих системах. Двовимірні просторово-часові структури моделі ФХН не можна розглядати як концентраційний розподіл речовини у хімічних реакційно-дифузійних системах, так як у моделі ФХН активатор та інгібітор приймають і позитивні, і негативні значення. Ми розглядаємо їх як певні біологічні сигнали. Підняти значення активатора та інгібітора у позитивну область можна, наприклад, ввівши ще одну динамічну змінну. Остання може відтворювати поведінку субстрату у хімічних системах. Часто результати чисельного моделювання не тільки відтворюють основні експериментальні дані, а й передбачають можливість отримання нових цікавих явищ.

Список використаних джерел

1. *FitzHugh R.* Impulses and Physiological States in Models of Nerve Membrane // *Biophys. J.* – 1961, № 1. – P. 445.
2. *Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S.* An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon // *Proc. IRE.* – 1962, **50**. – P. 2061.
3. *Baurmann M., Gross T., Feudel U.* Instabilities in spatially extended predator-prey systems: spatio-temporal patterns in the neighborhood of Turing-Hopf bifurcations // *J. Theor. Biol.* – 2007. – **245**. – P. 220-229.
4. *De Wit A., Lima D., Dewel G., and Borckmans P.* Spatiotemporal dynamics near a codimension-two point // *Phys. Rev.* – 1996. – **E54**. – P. 261-271.
5. *Dilão R.* Turing instabilities and patterns near a Hopf bifurcation // *Appl. Mathem. and Computation.* – 2005. – **164**. – P. 391-414.
6. *Yang L.L., Zhabotinsky A.M., and Epstein I.R.* Stable squares and other oscillatory Turing patterns in a reaction-diffusion model // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – **92**, № 19. – P. 198303-1-198303-4.
7. *Mazin W., Rasmussen K.E., Mosekilde E., Borckmans P., and Dewel G.* Pattern formation in the bistable Gray-Scott model // *Mathematics and computers in simulation* – 1996. – **40**, № 3-4. – P. 371-396.
8. *Just W., Bose M., Bose S., Engel H., Scholl E.* Spatiotemporal dynamics near a supercritical Turing-Hopf bifurcation in a two-dimensional reaction-diffusion system // *Phys. Rev.* – 2001. – **E64**. – P. 026219-026222.
9. *Bouzat S. and Wio H.S.* Pattern formation in inhomogeneous active media: a localized bistable domain immersed in an oscillatory medium // *Phys.Lett.* – 2000. – **A268**, № 4-6. – P. 323-329.
10. *Meixner M., Bose S., Schöll E.* Analysis of complex and chaotic patterns near a codimension-2 Turing-Hopf point in a reaction-diffusion model // *Physica.* – 1997. – **D109**, № 1-2. – P. 128-138.
11. *Tlidi M., Haelterman M.* Robust Hopf-Turing mixed-mode in optical frequency conversion systems // *Phys.Lett.* – 1998. – **A239**, № 1-2. – P. 59-64.
12. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Localized patterns in reaction-diffusion systems // *Chaos.* – 2007. – Vol. **17** (3): Art. No. 037110.
13. Булавін Л.А., Гічан О.І., Гречко Л.Г. Нові типи динамічних структур у системі ФітцХ'ю-Нагумо // *Доповіді НАНУ.* – 2006. – № **10**. – С. 69-74.
14. *Cross M.C. and Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* – 1993. – **65**. – P. 851-1112.
15. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Localized patterns in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – **87**. – P. 228301.
16. *Lioubashevski O., Arbell H., Fineberg J.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – **76**. – P. 3959.
17. *Jamgotchian H., Bergeon N., Benielli D., Voge Ph., Billia B., Guerin R.* // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – **87** – P. 166105.
18. *Astrov Yu. A., Ammelt E., Purwins H.-G.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – **78**. – P. 3129.
19. *Niedemostheide J., Kemer B.S., Purwins H.-G.* // *Phys. Rev.* – 1992. – **B46** – P. 7559.
20. *Umbanhowar P.B., Melo F., Swinney H.L.* // *Nature.* – 1996. – **382**. – P. 793.
21. *Stenflo L., Yu M.Y.* // *Phys. Plasmas.* – 2003. – **10**. – P. 912.
22. *Rozanov N.N.* // *Opt. Spectrosc.* – 2007. – **102** – P. 255.

Надійшла до редколегії 29.10.07

УДК 535:537:539:546

Л.Г. Гречко, докт. фіз.-мат. наук, проф., О.Ю. Гришук, аспірант, Клименко В. Є., канд. фіз.-мат наук, Л.Б. Лерман, канд. техн. наук

Розрахунок енергії взаємодії малих частинок в розчинах електролітів

Розв'язана задача визначення енергії взаємодії малих кульових частинок в розчинах електролітів із врахуванням іон-електростатичної, дисперсійної та структурної складових поверхневих сил.

На основі точних розв'язків задач теорії потенціалу для довільного числа кульових частинок в електроліті отримані замкнуті вирази для знаходження іон-електростатичної та структурної складових енергії парної взаємодії двох куль. Для іон-електростатичної та структурної складових енергії взаємодії результати узгоджуються з результатами інших авторів і уточнюють їх в області малих відстаней між частинками.

Ключові слова: електроліт, поверхнева енергія, поверхневі сили, малі частинки.

*E-mail: llerman@yandex.ru

Вступ

При вивченні взаємодії малих частинок в розчинах електролітів основною задачею є розрахунок трьох складових енергії взаємодії, або трьох складових поверхневих сил: іон-електростатичної V_i , дисперсійної V_m та структурної V_s [1]. Енергію взаємодії V можна подати як суму трьох незалежних доданків

$$V = V_i + V_m + V_s, \quad (1)$$

Починаючи з робіт Б.В. Дерягіна [1] проблемі іон-електростатичної взаємодії було приділено велику увагу [2-6], причому вона і дотепер є актуальною [6], особливо при розгляді взаємодії малих неорганічних частинок як між собою, так і з біологічними клітинами або мікроорганізмами. При розгляді іон-електростатичної взаємодії дифузних поверхневих шарів, що виникають навколо частинок, зазвичай розраховувалася на основі методу зон Б.В. Дерягіна [1]. Проте використання такого наближення може, при певних умовах, призвести до хибних результатів, як це відзначалося в [3-6].

L.G. Grechko, professor, O. Yu. Grischuk, post gradient student, V.E. Kimenko, Ph. D., L. Lerman, Ph. D.

Calculation of interaction energy of small particles in solutions of electrolytes

A problem of determination of interaction energy of small particles in solutions of electrolyte has solved. Ion-electrostatic, disperse and structure surface forces' components are take into account.

On the base of the exact solutions of potential tasks for arbitrary number of spherical particles, the handy analytical formulae for calculating pair-interaction energy of two spheres are derived. Also For ion-electrostatic and disperse components of interaction energy our results correspond to the results of another authors and generalize ones in range of small distances between particles.

Key Words: electrolyte, surface energy, surface forces, small particles.

Дисперсійна (Ван-дер-Вальсова) складова вперше була детально вивчена в роботах Е.М. Лівшиця і в подальших роботах (див. [1,2]). В роботі [7] викладено цікавий метод знаходження таких сил, виникаючих при взаємодії двох куль, і отримані формули за деяких додаткових припущеннях співпадають з відомими результатами Гамахера [1,2]. Важливі результати по сумарній взаємодії дисперсійної та іон-електростатичної складових поверхневих сил було отримано в роботах [7-13].

Відносно структурної складової поверхневих сил відзначимо, що за останні два десятиріччя питання про вплив структурних сил на стійкість дисперсних систем перестало бути дискусійним. Експериментальні дослідження, що свідчать про наявність сил відштовхування не електростатичної природи, досить численні [13-14]. Часто розходження, що спостерігаються між результатами розрахунків по теорії Дерягіна-Ландау-Фервея-Овербека (ДЛФО) та експериментальними даними по стійкості дисперсій у водному середовищі, пояснюються з позиції гідратації поверхні частинок та утворення граничних шарів (ГШ) води, які мають

структуру, відмінну від її структури в об'ємі. Ці уявлення є досить обґрунтованими, оскільки гідрофільність таких поверхонь неодноразово підтверджена незалежними паралельними дослідженнями границі фаз із застосуванням різноманітних фізико-хімічних методів. Однак, слід відмітити, що кількісне врахування внеску структурної складової в сумарну енергію взаємодії дисперсних частинок проводиться досить рідко, а літературні дані про залежність параметрів структурної складової від рН розчину вкрай малочислені. Найбільш точно ГШ води вивчені для поверхні кварцу. На даному етапі численними дослідженнями із застосуванням широкого спектру фізичних методів (ЯМР, еліпсометрії, вимірювань теплоємності, електропровідності, в'язкості, температури замерзання і т. д.) показано, що структурні зміни води охоплюють область, що прилягає до поверхні SiO_2 , завтовшки в десятки та більше нанометрів. Встановлено, що вклад структурної складової залежить від природи та концентрації електроліту [15].

В цій статті ми обмежимося розглядом парної взаємодії і отримаємо потрібні співвідношення для розрахунку трьох складових енергії взаємодії. Для цього розглянемо дві довільні частинки з ансамблю, які знаходяться в розчині електроліту. Будемо вважати, що частинки мають сферичну форму з радіусами a_1 і a_2 . Нехай відстань між центрами куль буде d , найкоротша відстань між кулями H , і тоді $d = H + a_1 + a_2$. Діелектричні проникності частинок і середовища позначимо через ϵ_1, ϵ_2 та ϵ_m відповідно. Діелектричну проникність електроліту вважаємо

частотно-залежною, тобто $\epsilon_m = \epsilon_m(\omega)$, де ω – частота електромагнітного поля. Визначення складових енергії взаємодії зводиться до розрахунку відповідних потенціалів [1-13].

Знаходження іон-електростатичної складової

У випадку іон-електростатичної взаємодії потенціали зовні куль $\phi_k^>$ ($k=1,2$) в електростатичному наближенні при використанні моделі ДЛФО знаходяться з розв'язків зовнішніх задач Дирихле для рівнянь Дебая-Х'юккеля

$$\Delta \phi_k^> - \kappa^2 \phi_k^> = 0 \quad (2)$$

при граничних умовах

$$\phi_k^>|_{S_k} = \Psi_k, \quad \phi_k^> \rightarrow 0, \text{ коли } r_k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

де κ – величина, обернена до дебайвського радіусу екранування, S_k – поверхня кулі, r_k – полярний радіус, Ψ_k – заданий розподіл потенціалів на поверхні куль.

Із застосуванням теореми додавання [16], застосованої до фундаментальних розв'язків рівняння Дебая-Х'юккеля для сумарного потенціалу в попередніх роботах [10 – 12] (у випадку заданих постійних потенціалів на поверхні куль) було отримано вираз у вигляді розкладу за скалярними сферичними гармоніками $Y_{lm}(\theta_k, \phi_k)$ [17] у локальних сферичних координатах r_k, θ_k, ϕ_k , пов'язаних з k -ю кулею

$$\begin{aligned} \phi^> = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(k)} k_l(\kappa r_k) Y_{lm}(\theta_k, \phi_k) + \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-l_j}^{l_j} B_{l_j m_j}^{(j)} \sum_{l'_j=0}^{\infty} \sum_{m'_j=-l'_j}^{l'_j} (-1)^{l'_j-m'_j} Y_{l'_j m'_j}(\theta_k, \phi_k) i_{l'_j}(\kappa r_k) \times \\ & \times \left\{ \sum_{\substack{l''_j+m''_j \\ l''_j-l'_j-m''_j}}^{|l_j+m_j|} Y_{l''_j m''_j}(\theta_{jk}, \phi_{jk}) k_{l''_j}(\kappa R_{jk}) \phi_{m'_j-m''_j, m_j-m'_j}^{l'_j l'_j l''_j} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$\phi_{m-m', m-m'}^{l l' l''} = \left[\frac{4\pi(2l+1)(2l'+1)}{2l''+1} \right]^{1/2} C_{l 0 l' 0}^{l'' 0} C_{l m l' -m'}^{l'' m-m'}$
 $C_{l m l' m'}^{l'' m-m'}$ – коефіцієнти Клебша-Гордона [18],
 $k_l(z)$, $i_l(z)$ – модифіковані сферичні функції Бесселя [16, 17], $B_{lm}^{(k)}$ – коефіцієнти розкладів, які $B_{lm}^{(k)}$ знаходяться з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь [11, 12].

Для симетричного електроліту при постійних потенціалах Ψ_1, Ψ_2 на поверхні частинок енергія парної взаємодії $F \equiv F_{ij}$ i -ї та j -ї частинок $i, j=1,2; i \neq j$ запишеться в вигляді [3, 11, 12]

$$\begin{aligned} F = & -\frac{\epsilon_m a_i^2 \Psi_i}{2} \left[\int_{S_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \phi^>(P_i) dS_i \right]_{r_i=a_i} - \\ & - \frac{\epsilon_m a_j^2 \Psi_j}{2} \left[\int_{S_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \phi^>(P_j) dS_j \right]_{r_j=a_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

де P_k – точка поверхні k -ї кулі, інтегрування виконується по поверхні S_k , $\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$ – сумарний потенціал, який створюють обидві частинки в оточуючому середовищі.

Потенціальна енергія взаємодії V_i подвійних шарів визначається співвідношенням $V_i = F - F_0$, де F_0 – вільна енергія двох окремих куль. При постійних поверхневих потенціалах Ψ_1, Ψ_2 буде

$$F_0 = -\epsilon_m a_1 \Psi_1^2 (1 + \kappa a_1) - \epsilon_m a_2 \Psi_2^2 (1 + \kappa a_2). \quad (6)$$

$$V(H) = -\frac{\epsilon_m \Psi_1 \Psi_2 a_1 a_2}{2} \left[\frac{1 + \kappa a_1}{\kappa a_1} (1 - e^{-2\kappa a_1}) + \frac{1 + \kappa a_2}{\kappa a_2} (1 - e^{-2\kappa a_2}) \right] \frac{\exp(-\kappa H)}{H + a_1 + a_2}. \quad (7)$$

Для однакових куль, коли $a_1 = a_2 = a$ і $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$, з (4) знаходимо

$$V_i(H) = \frac{\epsilon_m a \Psi^2 (1 + \kappa a)}{\kappa (H + 2a)} (1 - e^{-2\kappa a}) e^{-\kappa H}. \quad (8)$$

Формули (7), (8) зручні для застосування в практичних розрахунках.

Знаходження молекулярної складової

Потенціали дисперсійних (Ван-дер-Ваальсових) сил, які визначають молекулярну складову енергії взаємодії, можуть бути знайдені різними методами. Використаємо метод фіктивних потенціалів [7]. Він заснований на тому факті, що нормальна складова електричного поля $E_r = \partial\Phi / \partial r$ при переході через поверхні куль має розрив. Це еквівалентно присутності деякого заряду на поверхні куль. Отже до розгляду вводяться фіктивні заряди з невідомими щільностями розподілу $\sigma_k = \sigma_k(\theta_k, \varphi_k)$, і тоді знаходження потенціалів зводиться до розв'язання задач Неймана для рівняння Лапласа для k -ї кулі

$$\Delta\Phi_k = 0 \quad (7)$$

за умов

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r_k} \right|_{S_k} = \sigma_k. \quad (8)$$

В [7] задача розглянута у біполярних координатах і зведена до розв'язання однорідної системи інтегральних рівнянь відносно невідомих щільностей зарядів. Із врахування частотної залежності $\epsilon_m = \epsilon_m(\omega)$ умова існування

З точністю до членів вищого порядку малості у порівняння з величиною

$$k_0^2(z) = \frac{\pi^2}{4z^2} \exp(-2z),$$

в нульовому наближенні отримана [11, 12] наступна формула для обчислення енергії парної взаємодії

нетривіальних розв'язків цієї системи дає деяке дисперсійне рівняння, після чого вже знаходяться потенціали і обчислюється енергія.

Нами пропонується застосувати метод, аналогічний розвинутому при знаходженні іон-електростатичної складової енергії. Для довільного розподілу щільності зарядів неважко виписати розв'язок задачі Неймана у вигляді розкладу за сферичними гармоніками

$$\Phi_k = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{r_k} \right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(k)} Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k). \quad (10)$$

Застосування відповідної теореми додавання [16] дозволяє записати розклади у локальних координатах кожної кулі, після чого неважко знайти вирази для нормальних похідних, потрібних для запису граничних умов. В результаті отримаємо нескінченну однорідну лінійну алгебраїчну систему відносно невідомих коефіцієнтів розкладів щільностей розподілу зарядів за сферичними гармоніками. Умова існування нетривіальних розв'язків дає дисперсійне рівняння у вигляді нескінченного визначника. Послідовне збільшення утриманих членів в розкладах дозволяє отримати результат з потрібною точністю.

Оскільки в [7] для розв'язання системи інтегральних рівнянь теж були застосовані розклади за сферичними гармоніками, то обидва методи приводять до того ж самого результату (в певному наближенні).

В результаті знаходимо, що дисперсійна складова потенціальної енергії парної взаємодії може бути обчислена за формулою

$$V_m(H) = -\frac{\hbar}{16\pi} \left[\frac{a}{H} + 2 \ln \frac{H}{a} \right] \int_0^\infty \Delta_{12}(i\zeta) \Delta_{13}(i\zeta) d\zeta. \quad (11)$$

де $\hbar$ – стала Планка, поділена на 2π ,

$$a = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}, \quad \Delta_{km} = \frac{\epsilon_k - \epsilon_m}{\epsilon_k + \epsilon_m}, \quad \epsilon_k(i\zeta) \text{ та } \epsilon_m(i\zeta) -$$

діелектричні функції від частоти при $\omega = i\zeta$ частинок та електроліту відповідно.

У випадку однакових частинок близько розташованих одна до одної, тобто за умови $H \ll 2a$ з (11) отримаємо

$$V_m(H) = -\frac{\hbar}{16\pi} \left[\frac{a}{H} + 2 \ln \frac{H}{a} \right] \int_0^\infty \Delta_{12}^2(i\zeta) d\zeta, \quad (12)$$

Для водних розчинів при обчисленні інтегралів, що входять до формул (11), (12)

діелектричну проникність $\epsilon_m(\omega)$ можна знайти за формулою

$$\epsilon_m(\omega) = 1 + \frac{d}{1 - i(\omega/\nu)} + \frac{4\pi n_e e^2}{m(\omega^2 + i\omega/\nu)} + \sum_{n=1}^{11} \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - ig_n\omega}, \quad (13)$$

де d – параметр, ν – частота затухання Дебаївського типу, f_n, ω_n – сили осциляторів та частоти затухання n -го осцилятора ($n = 1, 2, \dots$).

Значення параметрів, що входять до формули (13) у випадку води наведені в таблиці.

Таблиця.

Спектральні характеристики води

Мікрохвильовий діапазон (дебаївська релаксація)

$$d = 74,8, \quad \nu = 1,05 \times 10^{11} \text{ с}^{-1} = 6,5 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (1 \text{ с}^{-1} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ eV})$$

Інфрачервоний діапазон:

$\omega_n, \text{ eV}$	$f_n, (\text{eV})^2$	$\nu_n, \text{ eV}$
$2,07 \times 10^{-2}$	$6,25 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-2}$
$6,09 \times 10^{-2}$	$3,5 \times 10^{-3}$	$3,8 \times 10^{-2}$
$9,02 \times 10^{-2}$	$1,28 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{-2}$
$2,0 \times 10^{-1}$	$5,69 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-2}$
$4,2 \times 10^{-1}$	$1,35 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$

Ультрафіолетовий діапазон:

$\omega_j, \text{ eV}$	$f_j, (\text{eV})^2$	$\nu_j, \text{ eV}$
8.25	2.68	0.51
10.0	5.67	0.88
11.4	12.0	1.54
13.0	26.3	2.05
14.9	33.8	2.96
18.5	92.8	6.25

Як вказувалось в [7], наведені формули дають той самий порядок точності визначення енергії, що і відомі результати Гамахера [1, 7].

Знаходження структурної складової

Не зупиняючись докладно на методах визначенні структурної складової енергії взаємодії частинок наведемо кінцеві результати. Згідно з [1], енергію, що виникає при перекриванні граничних шарів біля поверхні сферичних частинок, можна визначити за допомогою однієї з формул

$$V_s = \pi a K l^2 \exp(-H/l), \quad (14)$$

$$V_s = \pi a K l^2 \exp(-H/l) + \pi a K_0 l_0^2 \exp(-H/l_0), \quad (15)$$

де K і K_0 – параметри інтенсивності, l та l_0 – довжини кореляції.

Параметри K_0 та l_0 характеризують короткодійні сили, а K та l – далекодіючі сили структурного відштовхування. Значення констант можна знайти у довідниках і мають порядок $l = 0,3 \dots 1,0 \text{ нм}$, $K = 10^6 \dots 10^{13} \text{ Дж/м}^2$.

Дослідження поведінки сумарної енергії взаємодії

Отже ми маємо всі потрібні розрахункові формули для знаходження трьох складових парної енергії взаємодії малих частинок в розчині електроліту. Як видно з формул (4)–(5), (10) – (13) та (15)–(16), сумарна енергія за умови

незмінності констант, що входять в ці формули, є функцією від відстані між частинками $V = V(H)$. Мінімум цієї функції визначається з необхідної умови існування екстремуму при розв'язанні рівняння

$$\frac{\partial V(H)}{\partial H} = 0. \quad (17)$$

Розв'язки цього рівняння будуть залежати від параметрів конкретної системи і визначати поведінку залежності потенціальної енергії взаємодії. Як показують розрахунки і експериментальні дослідження [19 – 21], в різних випадках функція $V(H)$ може мати, а може і не мати мінімуму. Поведінка цієї функції для частинок кварцу розміром 0,7 мкм при різних концентраціях (в Молях) електроліту (розчину KCl) показана на рисунку. Результати відповідають кислотності електроліту рН 6,2 і значенням параметрів $K = 10^6$ Дж/м³, $l = 1$ нм.

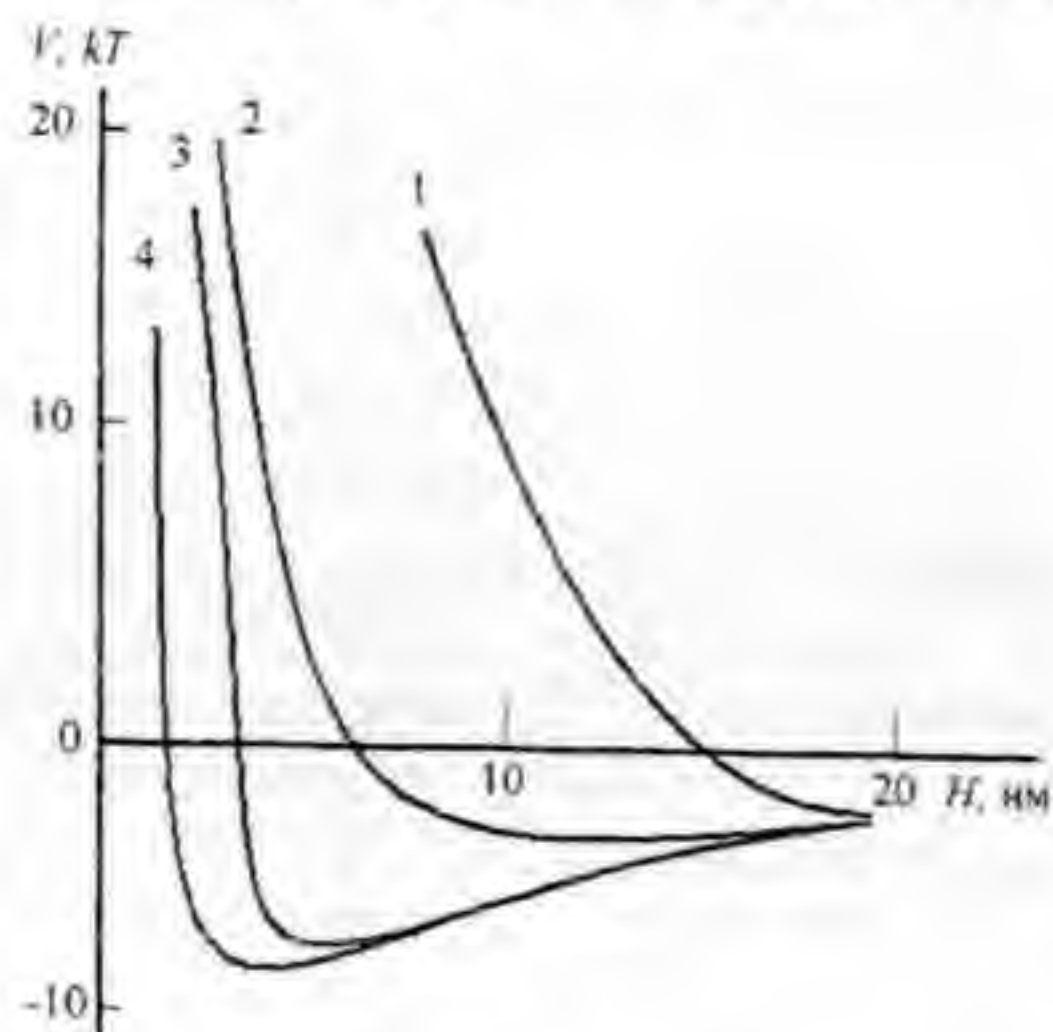


Рисунок. Залежності енергії взаємодії частинок кварцу від відстані між ними при різній концентрації KCl (М): 10^{-2} (1); $3 \cdot 10^{-2}$ (2); $5 \cdot 10^{-2}$ (3); 10^{-1} (4).

З рисунку видно, що зі збільшенням концентрації електроліту спостерігається збільшення глибини мінімуму по мірі зростання концентрації KCl, а сама координата досягнення мінімуму зменшується. При цьому криві 3, 4 на рисунку мають мінімум, а криві 1, 2 його не мають. Така поведінка кривої пояснюється зміною вкладів різних складових поверхневих сил.

Подалі планується детально дослідити поведінку функції $V(H)$ при різних значеннях та параметрах структурної складової поверхневих

сил з метою визначення меж стійкості золів розчинів малих частинок та тлумачення результатів експериментальних досліджень [19 – 21].

Висновки

Розв'язана задача визначення енергії взаємодії малих частинок в розчинах електролітів із врахуванням іон-електростатичної, дисперсійної та структурної складових поверхневих сил.

На основі точного розв'язку задачі взаємодії системи малих сферичних частинок в електроліті отримані замкнуті вирази для знаходження іон-електростатичної та структурної складових енергії парної взаємодії двох куль. Отримані результати узгоджуються з результатами інших авторів і уточнюють їх в області малих значень параметра ka .

Результати можуть бути уточнені, якщо врахувати додаткові члени в розкладах потенціалів. Це відкриває можливість визначення енергії взаємодії довільного числа частинок з високою точністю при встановленні меж стійкості різних золів. Більш того, при незначній модифікації алгоритму виявляється можливим урахувати шарувату (неоднорідну) структуру частинок.

Список використаних джерел

1. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
2. Verwey E.J.W., Overbeek J.Th.G. Theory of the Stability of Lyophobic Colloids. – Elsevier: Amsterdam, 1948. – 345 p.
3. Bell G.M., Levine S., McCartney. Approximate method of determining the Double-layer Free Energy of Interaction between Two Charged Colloidal Spheres // J. Colloid and Interface Science. – 1970. – V. 33, No. 3. – P.335-359.
4. Духин С.С., Лессик Н.Д., Глазман Ю.М. Расчет энергии отталкивания частиц в трехмерной модели концентрированных коллоидных растворов // Коллоидный журнал. – 1974. – Т. 37, № 2. – С.451-456.
5. Ohshima H. Diffuse double layer interaction between two spherical particles with constant surface charge density in an electrolyte solution // Colloid & Polymer Sci. – 1975. – V. 263. – P.158-163.

6. Hsu J.P., Lin S.-H. Electrical Interaction between Two planar, Parallel Dissimilar Surfaces in a General Electrolytic Solution // *Langmuir*. – 2003. – V. 19. – P.10610–10616.
7. Mitchel D.J., Ninham B.W. Van der Waals forces between two spheres // *J. Chem. Phys.* – 1972. – V. 56, N 3. – P.1117–1126.
8. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Покотило О.Я., Шкода Н.Г. Взаємодія малих кульових частинок в електроліті // *Вісник Київс. у-ту. Сер.: фіз. - мат. науки.* – 2005. – Вип. 3. – С.483–490.
9. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Покотило О.Я., Шкода Н.Г. Іонно-електростатична взаємодія малих кульових частинок в розчині електроліту. Частина I. Обчислення енергії взаємодії при заданих щільностях поверхневих зарядів // *Вісник Київ. у-ту. Сер.: фіз. - мат. науки.* – 2005. – Вип. 4. – С.351–358.
10. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Водоп'янов Д.Л., Шкода Н.Г., Шостак С.В. Іонно-електростатична взаємодія малих кульових частинок в розчині електроліту. Частина II. Обчислення енергії взаємодії при заданих щільностях поверхневих потенціалів // *Вісник Київс. у-ту. Сер.: фіз. - мат. науки.* – 2006. – Вип. 1. – С.341–349.
11. Гречко Л.Г., Грищук Е.Ю., Лерман Л.Б., Покотило О.Я. Ион-електростатическая составляющая поверхностных сил при взаимодействии частиц в электролите // *Химия, физика и технология поверхности.* – 2006. – Вып. 11–12. – С. 41–52.
12. Grechko L.G, Lerman L.B, Pokotylo O.Ya., Shkoda N.G, Chuiko A.A., Wites K.W. Ion-electrostatic interaction systems of inorganic nanoparticles and biological cells in electrolyte solution // *Surface Chemistry in Biomedical and Environmental Science*. Edited by J.P. Blitz and V. Gun'ko. – Science Series. II, Mathematics, Physics and Chemistry. – Vol. 228. Springer, 2006. P. 113–122.
13. Кучук В.И., Голикова Е.В., Молчанова Л.Л., Чернобережский Ю.М. Современные проблемы физической химии растворов. – Л.: ЛГУ, 1981, с.44.
14. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. Смачивающие пленки. – М.: Наук, 1986. С.160.
15. Churaev N.V. // *Adv. Colloidal Interface Sci*, 1995. – V.58, No 2–3. – P. 87–92.
16. Chew W.C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. App. D. – New York: IEEE Press. – 1995. – P. 591–596.
17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Перевод с английского. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
18. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория угловых моментов. – М.: Наука, 1975. – 457 с.
19. Чернобережский Ю.М., Гирфанов Т.Ф., Лабунец Л.М., Голикова Е.В. // *Поверхностные силы в тонких пленках*. М.: Наука, 1979, с.67.
20. Чернобережский Ю.М., Голиков Е.В., Малекс Е.В. и др. Поверхностные силы и граничные слои жидкостей. М.: Наука, 1983. С.117.
21. Голиков Е.М., Чернобережский Ю.М., Иогансон О.М., Высоковская Н.А., Григорьев В.С. Влияние структурной составляющей поверхностных сил на устойчивость золь // *Коллоидный журнал*, 2003, т.63, №4, с.460–467.

Надійшла до редколегії 20.12.07

УДК 535.41

Держипольський А.Г*, Поперенко Л.А., доктор
фіз.-мат. наук, професор

Фазовий дифузор як стабілізатор розподілу інтенсивності, відновлюваного з Фур'є-голограми.

В роботі розглядається вплив застосування випадкового фазового модулятора на відновлення Фур'є-голограми пучком з абераціями хвильового фронту. Представлено результати комп'ютерного моделювання та реальних дослідів з синтезованими голограмами на пристрої SLM (просторовий модулятор світла), які демонструють сильний стабілізуючий ефект випадкового фазового модулятора. Отримані результати дають підстави для застосування синтезованих Фур'є-голограм з випадковим фазовим модулятором в таких прикладних задачах, як стабілізація на мішені просторового розподілу енергії випромінювання лазерних джерел з нестационарними просторово-кутовими характеристиками.

Ключові слова: випадковий фазовий модулятор, аберації хвильового фронту, стабілізація розподілу інтенсивності, когерентна та некогерентна згортка.

A.G.Derzhypolsky*, Poperenko L.A., PhD,
professor

Random phase modulator as the stabilizer of intensity distribution restored from Fourier hologram.

In this work considered is the effect from applying a random phase modulator when restoring a Fourier-hologram by a beam with wavefront aberrations. Presented are the results of computer modeling and of real experiments with synthesized holograms on SLM (spatial light modulator), which demonstrate a significant stabilizing effect of random phase modulator. The obtained results give a cause to use the Fourier-holograms with random phase modulator in such an applications as the stabilization of spatial distribution of radiation energy of laser sources with non-stationary angular and spatial characteristics.

Key Words: random phase modulator, wavefront aberrations, intensity distribution stabilization, coherent and non-coherent convolution.

*E-mail: shaman@univ.kiev.ua

Традиційно роль фазового дифузора при записі Фур'є-голограми зводиться до розподілу інформації про записуване зображення і енергії лазерного променя по спектру просторових частот. Завдяки чому голограма стає менш чутливою до пошкоджень (зокрема, втрат її частин) при відновленні зображення, а також значно зменшується динамічний діапазон записуваних в реєструючому середовищі інтенсивностей [1]. В голографічних кореляторах значно загострюється кореляційний пік [2]. Значно покращуються властивості схем оптичного шифрування [3]. Однак, розглянуто лише випадки, коли відновлення зображення з голограми відбувається можливо діафрагмованим пучком, але з безабераційним плоским хвильовим фронтом (точкове опорне джерело). Та як доповідалось в [5], застосування фазового дифузора також дає сильний стабілізуючий ефект при відновленні зображення зчитуючим пучком з абераціями хвильового фронту.

1. Теоретичні обґрунтування стабілізуючого ефекту.

Феноменологічне пояснення стабілізуючого ефекту дифузора полягає в наступному. Відновлюване зображення, в силу властивостей Фур'є-голограми, є результатом згортки функції амплітудного пропускання записуючого транспаранта і апаратної функції системи "відновлююча хвиля – голограма – Фур'є-об'єктив". При відсутності фазового дифузора транспарант, що формує записуване зображення є просторово когерентним джерелом. Завдяки інтерференції при згортці останнього з апаратною функцією може відбуватись значний перерозподіл енергії в полі відновлюваного зображення у порівнянні з записуванням (цікавим є розподіл енергії, тобто інтенсивності). При спряженні з фазовим дифузором записуючий транспарант стає просторово некогерентним джерелом, і його згортка з апаратною функцією також стає некогерентною, тобто без інтерференції. Це призведе до значно меншого перерозподілу енергії (саме завдяки відсутності

інтерференції), а отже структуру зображення буде збережено. Таки чином досягається стабілізуючий ефект фазового дифузора. Приведене пояснення спирається на ключові поняття когерентної і некогерентної згортки, які є предметом подальшого розгляду. Згадувана апаратна функція визначається зокрема і відновлюючою хвилею: при наявності аберацій хвильового фронту відновлюючої хвилі, вони є найбільш вагомим фактором деградації апаратної функції. Однак, слід зауважити, що для подальшого розгляду не має значення які саме фактори її формують, оскільки розгляд стосуватиметься апаратної функції як такої (тобто результату сумарної дії всіх можливих факторів).

Для початку розгляду введемо наступні позначення:

$a=a(x)$ – функція амплітудного пропускання записуючого транспаранта;

$d=d(x)=e^{i\varphi(x)}$ – функція амплітудного пропускання фазового дифузора ($\varphi(x)$ – випадкова функція координати);

$h=h(x)$ – апаратна функція системи, що відновлює зображення;

$c=c(x)$ – амплітуда оптичного поля відновленого зображення;

$I_c=I_c(x)$ – інтенсивність оптичного поля відновленого зображення;

$*$ – операція згортки.

Надалі фазовим дифузором будемо називати будь-яку комплексну функцію з модулем, що

$$g(\xi, \eta) = d(\xi)d^*(\eta) = e^{i\varphi(\xi)}(e^{i\varphi(\eta)})^* = e^{i(\varphi(\xi)-\varphi(\eta))} = \begin{cases} 1, & \xi = \eta \\ e^{i\varphi(\xi, \eta)}, & \xi \neq \eta \end{cases} \quad (5)$$

Тобто функція $g(\xi, \eta)$ дорівнює 1 вздовж лінії $\xi=\eta$ і є фазовим дифузором в області, де $\xi \neq \eta$, оскільки, як неважко переконатись, модуль її дорівнює одиниці, а фаза є випадковою функцією аргументів. Тоді інтеграл (4) можна розписати наступним чином:

$$\begin{aligned} I_c(x) &= \iint f(x, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi = \\ &= \iint_{\xi=\eta} f(x, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi + \iint_{\xi \neq \eta} f(x, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi = (6) \\ &= \int f(x, \xi, \xi) d\xi + \iint_{\xi \neq \eta} f(x, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi \end{aligned}$$

Перший доданок являє собою ні що інше, як *некогерентну згортку* записаного зображення і апаратної функції відновлюючої системи:

дорівнює 1 і фазою, що є випадковою функцією своїх аргументів. Одновимірні аналоги всіх функцій використовуються для скорочення записів. Кінцевий результат легко узагальнюється на двовимірний випадок. Отже:

- при відсутності дифузора

$$c(x) = a * h = \int a(\xi) h(x - \xi) d\xi \quad (1)$$

$$I_c(x) = |c(x)|^2 = \left| \int a(\xi) h(x - \xi) d\xi \right|^2 \quad (2)$$

інтенсивність відновленого зображення (2) визначається когерентною згорткою;

- при наявності дифузора

$$c(x) = (ad) * h = \int a(\xi) d(\xi) h(x - \xi) d\xi \quad (3)$$

$$I_c(x) = |c(x)|^2 = c(x)c^*(x) =$$

$$= \int a(\xi) d(\xi) h(x - \xi) d\xi \int a^*(\eta) d^*(\eta) h^*(x - \eta) d\eta =$$

$$= \iint a(\xi) a^*(\eta) h(x - \xi) h^*(x - \eta) d(\xi) d^*(\eta) d\eta d\xi = (4)$$

$$= \int \int a(\xi) a^*(\eta) h(x - \xi) h^*(x - \eta) d(\xi) d^*(\eta) d\eta d\xi =$$

$$= \int \int f(x, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

Для осмислення цього інтегралу і приведення його до більш природного вигляду, розглянемо, що являє собою функція $g(\xi, \eta)$. Згідно введених позначень:

$$\begin{aligned} \int f(x, \xi, \xi) d\xi &= \int a(\xi) a^*(\xi) h(x - \xi) h^*(x - \xi) d\xi = (7) \\ &= \int |a(\xi)|^2 |h(x - \xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Другий же доданок може бути завгодно малим, якщо радіус кореляції функції $\varphi(x)$ прямує до нуля. Однак будь-який реальний фазовий дифузор має скінченний радіус кореляції, що призводить до появи у відновленому зображенні спектрів з характерним розміром порядку радіуса кореляції фазового дифузора.

Таким чином підсумкові результати приведенного вище розгляду представимо в наступному вигляді:

- розподіл інтенсивності у відновленому зображенні при відсутності дифузора

$$I_c = |a * h|^2 \quad (8)$$

когерентна згортка, значний перерозподіл інтенсивності за рахунок інтерференції;

- розподіл інтенсивності у відновленому зображенні при наявності дифузора

$$I_c = |a|^2 * |h|^2 \quad (9)$$

некогерентна згортка, незначний перерозподіл інтенсивності через відсутність інтерференції.

2. Експериментальні підтвердження необхідності дифузора.

Для перевірки теоретичних висновків і спостереження стабілізуючого ефекту фазового дифузора було зроблено серію комп'ютерних та реальних експериментів по відновленню зображення з Фур'є-голограми при абераціях у хвильовому фронті відновлюючої хвилі.

На Рис.1 зображено традиційну позаосьову схему запису Фур'є-голограми, як більш наочну, хоча в усіх експериментах для простоти застосовувалась осьова схема.

На Рис.2 проілюстровано відновлення Фур'є-голограми за осьовою схемою за наявності аберацій та без них.

На Рис.3 зображено форму хвильового фронту відновлюючої хвилі, застосовуваної в експериментах. Величина аберації змінювалась через масштаб по осі Z. Експерименти було зроблено для масштабів 1, 2, 5, 10 та 20. Зміст масштабу наступний: якщо при масштабі 1 розмах зміни фази в межах робочої ділянки хвильового фронту відповідає приблизно $\lambda/2$ (на Рис.3 числа на шкалі праворуч), то при масштабі 5 він становить приблизно $\lambda/2 * 5 = 2.5\lambda$ і т.д.

Комп'ютерне моделювання виконувалось в математичному пакеті MatLab v6.5.0.13 із зображеннями розміром 512x512 точок. Реальні експерименти проводились з синтезованими фазовими голограмами розміром 512x512 точок, що виводились на пристрій просторової модуляції світла (SLM).

Результати моделювання і реальних експериментів приведено на Рис.4.

Верхня серія зображень на Рис.4 представляє результати комп'ютерного моделювання відновлення Фур'є-голограми без ВФМ з абераціями різної величини (зростає зліва направо). Середня серія представляє результати моделювання з ВФМ. І, нарешті, нижня серія зображень представляє результати реального експерименту з синтезованими голограмами на просторовому модуляторі світла (SLM). Аберація додавалась до голограми прямо в пристрої SLM.

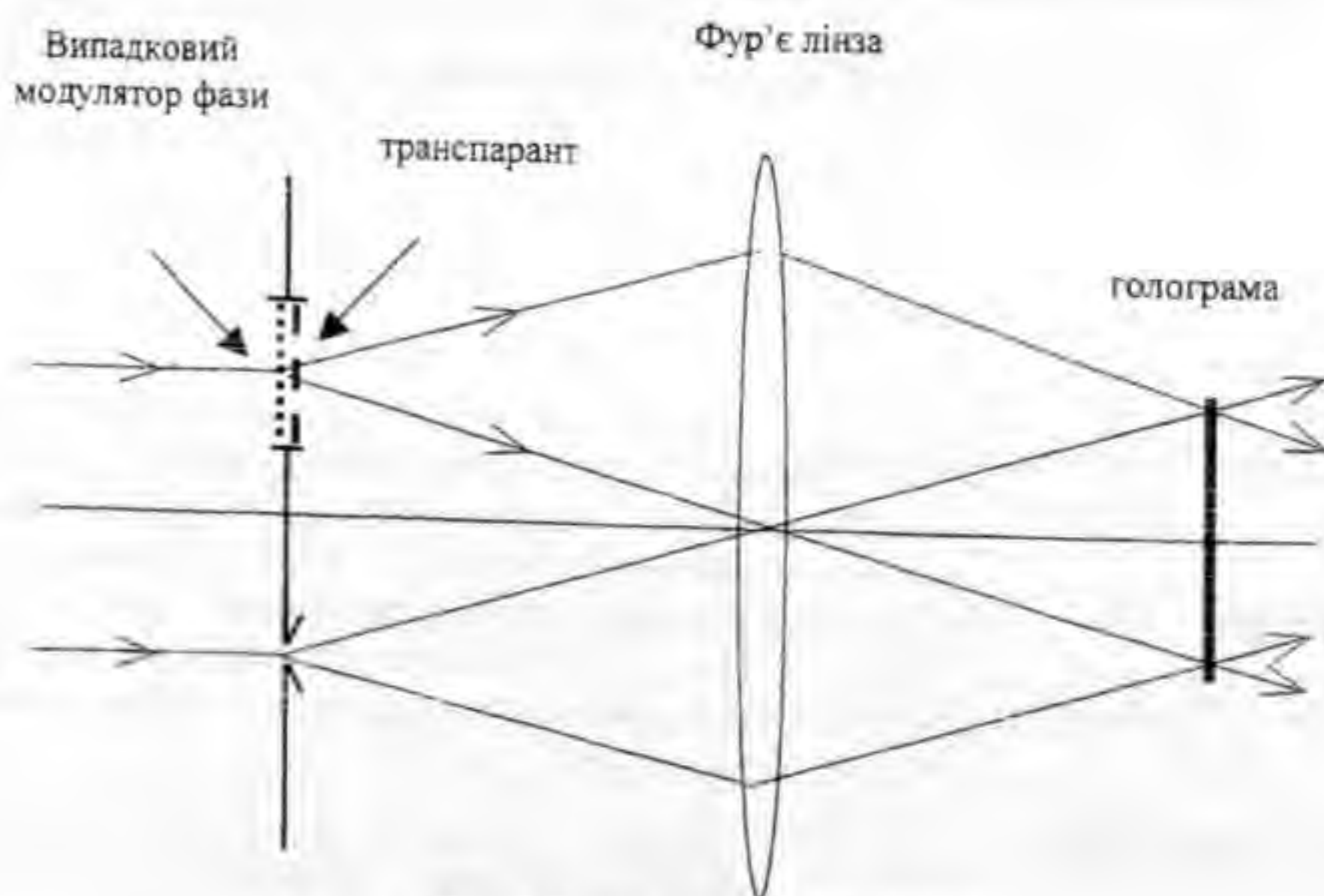


Рис.1 Позаосьова схему запису Фур'є-голограми

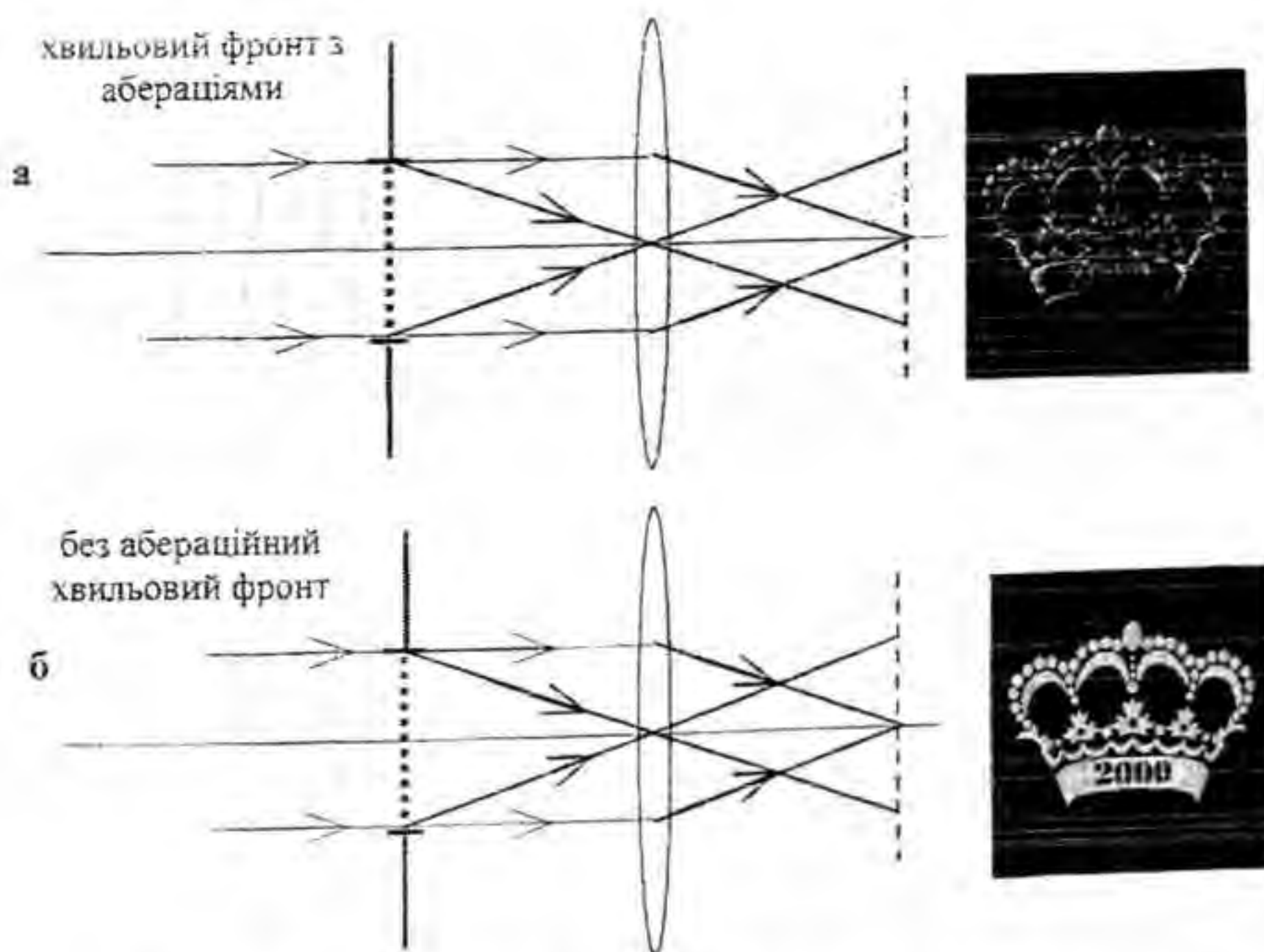


Рис.2 Відновлення Фур'є-голограми за осьовою схемою а) за наявності аберацій та б) без них.

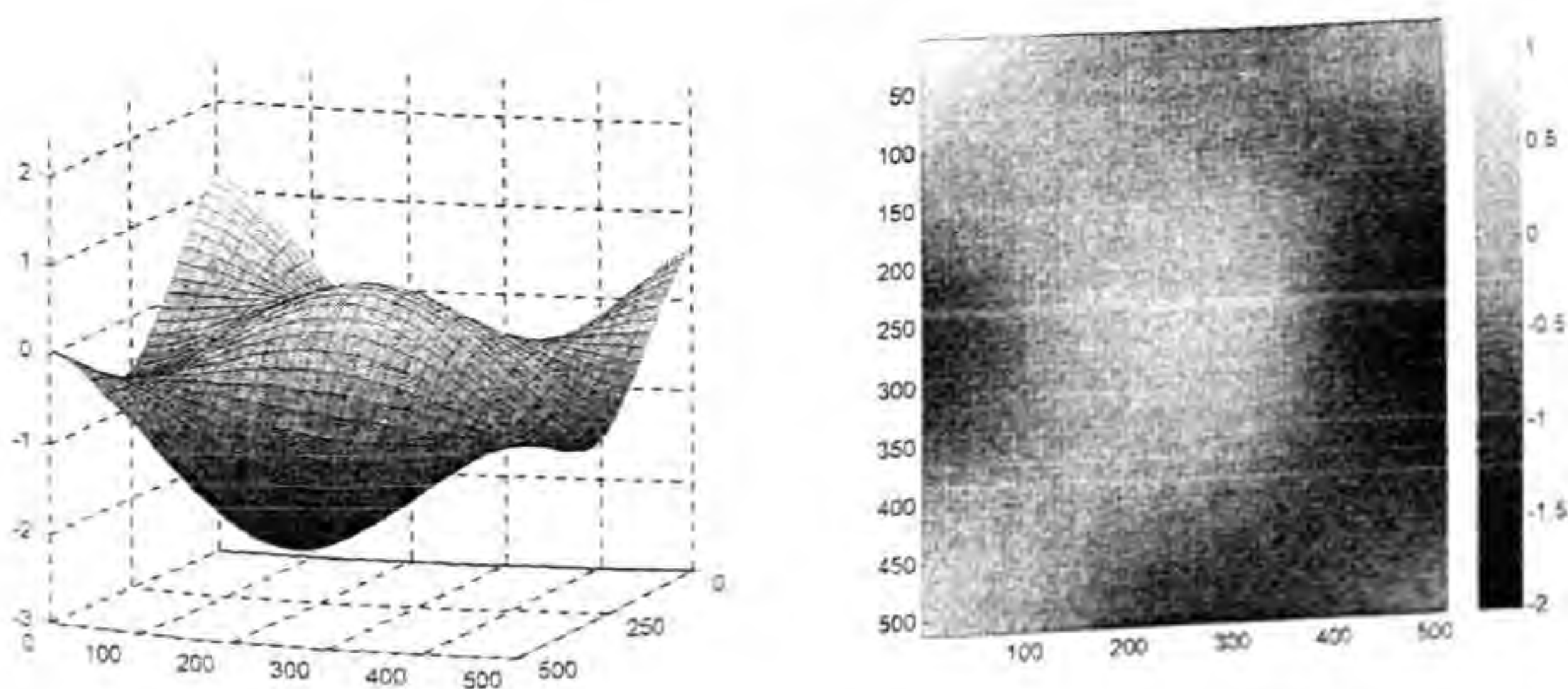


Рис.3. Форма хвильового фронту відновлюючої хвилі з абераціями.

На ілюстраціях видно, що зображення, відновлене з голограми без ВФМ помітно спотворене навіть при масштабі 1, в той час як голограма з ВФМ зберігає структуру зображення навіть при аберації масштабу 5 як у модельованому, так і в реальному експериментах. На Рис.5 можна бачити графіки залежності

кореляції відновленого і оригінального зображень від масштабу аберації. Лінії, проведені між точками не мають фізичного змісту і нанесені лише для покращення візуального сприйняття. Приведені графіки демонструють сильний стабілізуючий ефект ВФМ. Завдяки цьому можливе застосування синтезованих

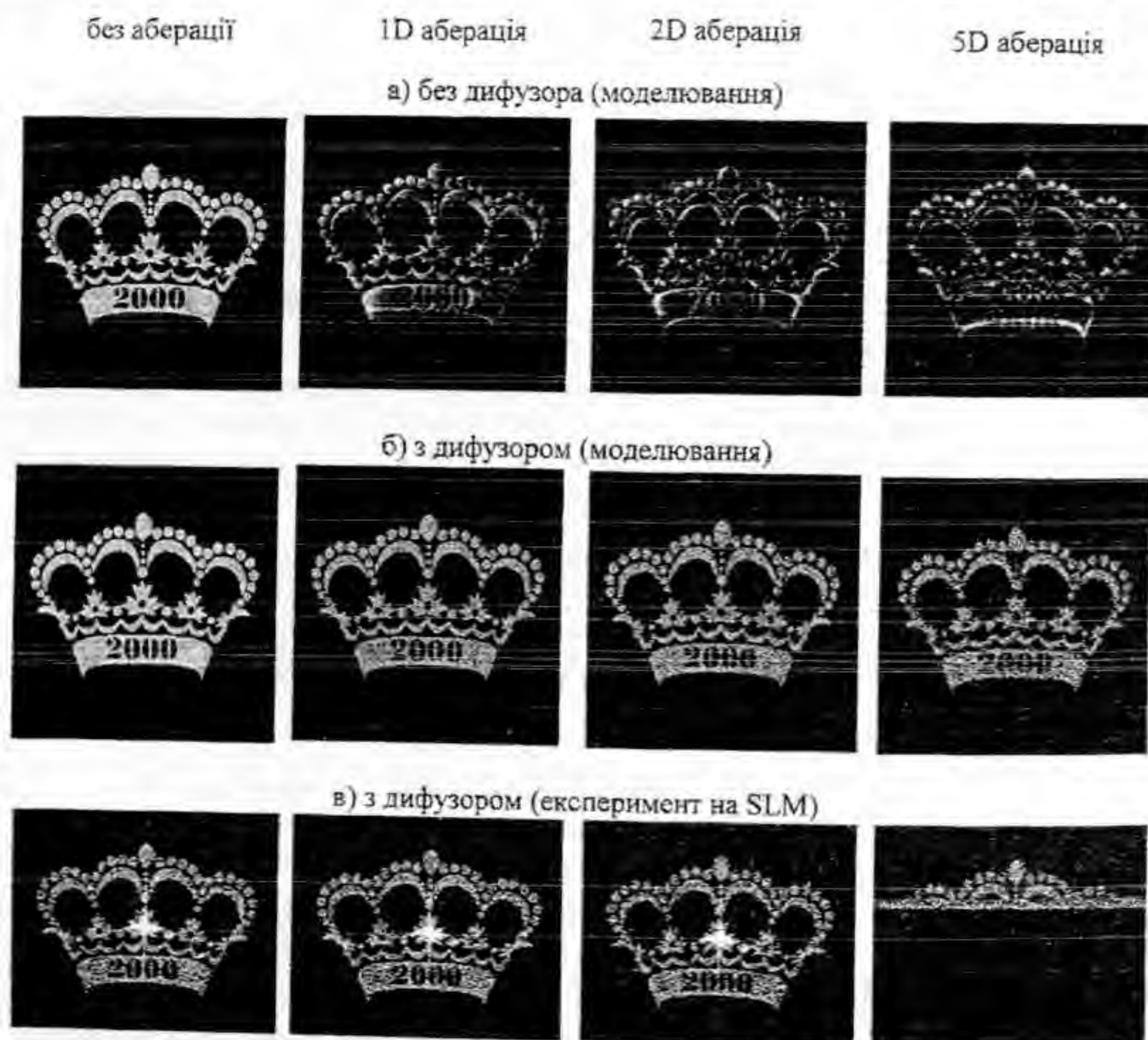


Рис.4. а) та б) результати комп'ютерного моделювання відновлення Фур'є-голограм без та з ВФМ з абераціями різної величини (зростає зліва направо) відповідно, в) результати реального експерименту.

Фур'є-голограм в задачах стабілізації розподілу енергії випромінювання на різного роду мішенях, зокрема технологічних [4].

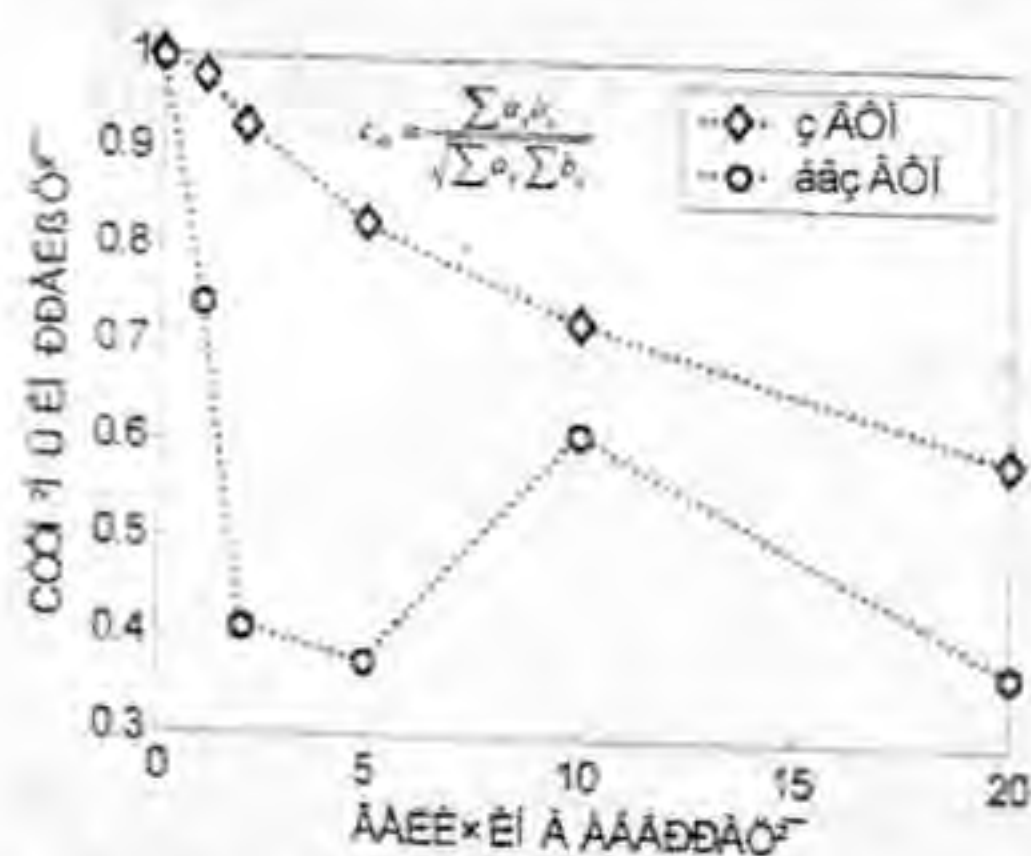


Рис.5 Графіки залежності кореляції відновленого і оригінального зображень від масштабу аберації.

Список використаних джерел

1. Кольер Р., Беркхард К., Лін Л. Оптическая голография. – М.: "Мир", 1973. – 688 с.
2. X. Song et al. Necessity analyses of phase masks in joint fractional Fourier transform correlator // Optics Communications 259 (2006) 526–531
3. A. Mita, A. Okamoto and H. Funakoshi Effect of random phase mask on input plane in photorefractive authentic memory with two-wave encryption method.// Proc. of SPIE, vol. 5362, 61 (2004)
4. Блонський І.В., Гнатівський О.В., Держипольський А.Г., Медвідь Н.В. Метод стабілізації просторового розподілу лазерного випромінювання на технологічній мішені.// Доповіді НАНУ, №6, 2006, ст. 69-72
5. A.G. Derzhypolsky The role of random phase modulator in stabilization of the images reconstructed from the synthesized Fourier-hologram under phase aberrations in the reconstructing beam // 6th Young Sci. Conf. in Problems of Optics and High Technology Material Science (SPO 2006).

Надійшла до редакції 10.12.2007р

УДК 539.213

Захаренко* М. І., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Носенко** А. В., аспірант,
Семенко*** М. П., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Вплив температурно-часових режимів обробки розплаву на транспортні властивості швидкозагартованого сплаву $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$

Проведено дослідження магнетопору та резистивних характеристик АМС $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$, одержаних гартуванням з розплавів з різною температурно-часовою обробкою. Виявлено, що вплив обробки розплаву досить слабо впливає на електроопір, однак знаходить більш сильне відображення на феромагнітній анізотронії електроопору.

Ключові слова: аморфні сплави, температурно-часова обробка, транспортні властивості.

*E-mail: *zakharenko@univ.kiev.ua; **itrij@ukr.net; ***smp@univ.kiev.ua

Аморфні металеві сплави (АМС) та захисні покриття на їх основі викликають великий науковий та прикладний інтерес, насамперед завдяки унікальній комбінації їх фізичних характеристик [1,2]. Вони являють собою надзвичайно цікавий клас матеріалів як з точки зору практичного використання, так і в плані розвитку теоретичних уявлень про природу конденсованого стану. До таких цінних властивостей належить висока міцність цих матеріалів, що наближається до теоретичної, висока корозійна стійкість [1]. Цей клас матеріалів має відносно великі значення електроопору, часто з близьким до нуля його термічним коефіцієнтом. Особливо цікавими та цінними в прикладному відношенні є АМС на основі заліза, які характеризуються надзвичайно високими магнітними властивостями [1,2].

Однак, на сьогоднішній день недостатньо вивченими є питання взаємозв'язку між умовами одержання та структурними характеристиками аморфного стану, які, власне, і визначають рівень функціональних характеристик АМС та їх відтворюваність. На даний час існує обмаль прямих експериментальних даних щодо успадкування металевими сплавами при їх аморфізації мікрогетерогенної структури розплавів та її можливих особливостей, обумовлених температурно-часовими обробками перед гартуванням. Це питання є досить важливим з точки зору нових можливостей впливу на властивості АМС

M. I. Zakharenko*, assoc. prof.,
A. V. Nosenko**, Ph.D. student,
M. P. Semen'ko***, assoc. prof.

The influence of temperature-temporal conditions of melt treatment on the transport properties of rapidly quenched $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$ alloy

The magnetoresistance and resistivity of $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$ metallic glasses prepared by rapid solidification of the melts after different temperature-temporal conditions. The conditions of melt treatment were found to influence significantly on ferromagnetic anisotropy of magnetoresistance rather than the resistivity.

Key Words: amorphous alloys, temperature-temporal treatment, transport properties.

поряд з таким досить традиційним шляхом, як легування.

Основною метою роботи було вивчення впливу режимів температурно-часової обробки розплаву перед гартуванням на такі важливі у прикладному плані характеристики АМС $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$, як резистивні.

Об'єктами досліджень були аморфні стрічки сплаву $\text{Fe}_{80}\text{Si}_6\text{B}_{14}$, виготовлені гартуванням розплавів із швидкістю охолодження близько $5 \cdot 10^5 \text{ K/s}$ від одної температури ежекування $T_{\text{eq}} = 1340 \pm 10^\circ \text{C}$, після витримки розплаву певний час τ_b при різних температурах T_b в інтервалі від 1350 до 1650°C .

Для отримання температурної залежності електроопору використовували чотирьохточкову схему вимірювання. Температурні залежності електроопору $R(T)$ визначали в інтервалі температур $77\text{--}400 \text{ K}$ та $300\text{--}900 \text{ K}$ у двох незалежних установках. Швидкість нагрівання у обох випадках підтримували рівною 20 K/h .

Магнетоопір зразків стрічок вимірювався на зразках прямокутної форми довжиною 20 mm та шириною $\sim 1.5 \text{ mm}$. Магнітне поле створювали електромагнітом з полюсними наконечниками діаметром 10 cm та відстанню 20 mm між ними, що забезпечувало однорідність магнітного поля в області, яка значно перевищувала розміри зразка.

Характер кривих $R(T)$ для всіх досліджуваних АМС виявився подібним. На рис. 1 представлені

температурні залежності приведенного електричного опору $R(T)/R_{300}$ для всіх АМС. Залежності $R(T)$ є практично лінійними в межах стабільності аморфного стану. При наближенні до температури кристалізації T_c спочатку спостерігається деяке відхилення від лінійності, а потім – різке зменшення R , зумовлене кристалізацією зразків. Зазначимо, що в кристалічній фазі питомий електроопір змінюється з температурою у відповідності із закономірністю, типовою для впорядкованих сплавів: спостерігається лінійна залежність R до максимальних температур досліджень (~ 900 K).

Слід також відзначити, що на кривих $R(T)$ поблизу температури Кюрі T_c АМС, значення якої наведене в табл. 1, не спостерігається жодних особливостей. Цей факт свідчить про те, що електроопір досліджених зразків визначається, в основному, фононим розсіянням носіїв. Вплив же магнітної компоненти розсіяння очевидно є малим.

Лінійна залежність електричного опору від температури для аморфних матеріалів добре узгоджується з теорією Фабера-Займана [1,2], якщо вважати, що температура Дебая АМС має значення близьке до кімнатної температури, або нижче неї. Така теорія, і її модифікації, зокрема підхід Еванса-Грінвуда-Ллойда [2], була з успіхом використана нами для пояснення особливостей електропровідності АМС на основі заліза [3]. Згідно з цією теорією питомий електричний опір аморфних металевих сплавів на основі перехідних металів можна описати рівнянням Еванса-Грінвуда-Ллойда:

$$\rho = \left(\frac{30 \pi^3 \hbar^2}{m e^2 \Omega_0 K_F^2 E_F} \right) \sin^2(\eta_2 [E_F]) S(2K_F) \quad (1)$$

де, Ω_0 – атомний об'єм, K_F – фермівський хвильовий вектор, E_F – енергія Фермі, η_2 – d-фазовий зсув, $S(K)$ – структурний фактор АМС. Оскільки єдиним залежним від температури параметром в цьому рівнянні є структурний фактор $S(K)$, то температурний коефіцієнт опору (ТКО) можна записати у вигляді:

$$\alpha = \frac{1}{S(2K_F)} \left(\frac{dS}{dT} \right)_{K=2K_F} \quad (2)$$

Безпосередній аналіз величин ρ і α за рівняннями (1) і (2) є досить складним, перш за все, по тій причині, що значення хвильового вектора K_F точно не відоме. В той же час, згідно з оцінками, наведеними в [2], кількість спелектронів на атом для АМС на основі заліза є близькою до 1, що дає значення $K=2K_F \approx 2,8$ Å, тобто, його величина є меншою значення хвильового вектору, яке відповідає положенню першого максимуму структурного фактору [4], тому ТКО даних АМС є додатний і порівняно малий.

В табл.1 наведені значення електроопору та ТКО для всіх досліджених АМС. Видно, що ніяких чітких кореляцій між резистивними характеристиками АМС при 300 K і режимами температурно-часової обробки розплаву не спостерігається, що скоріше зумовлено не-монотонною зміною ρ та α зі зміною t_h та T_h . Однак ТКО при 120 K виявляє тенденцію до зменшення з ростом T_h при фіксованому t_h . На нашу думку це вказує на слабкий вплив режимів температурно-часової обробки розплаву на структурну складову електроопору АМС, хоча вони більш суттєво впливають на внесок інших

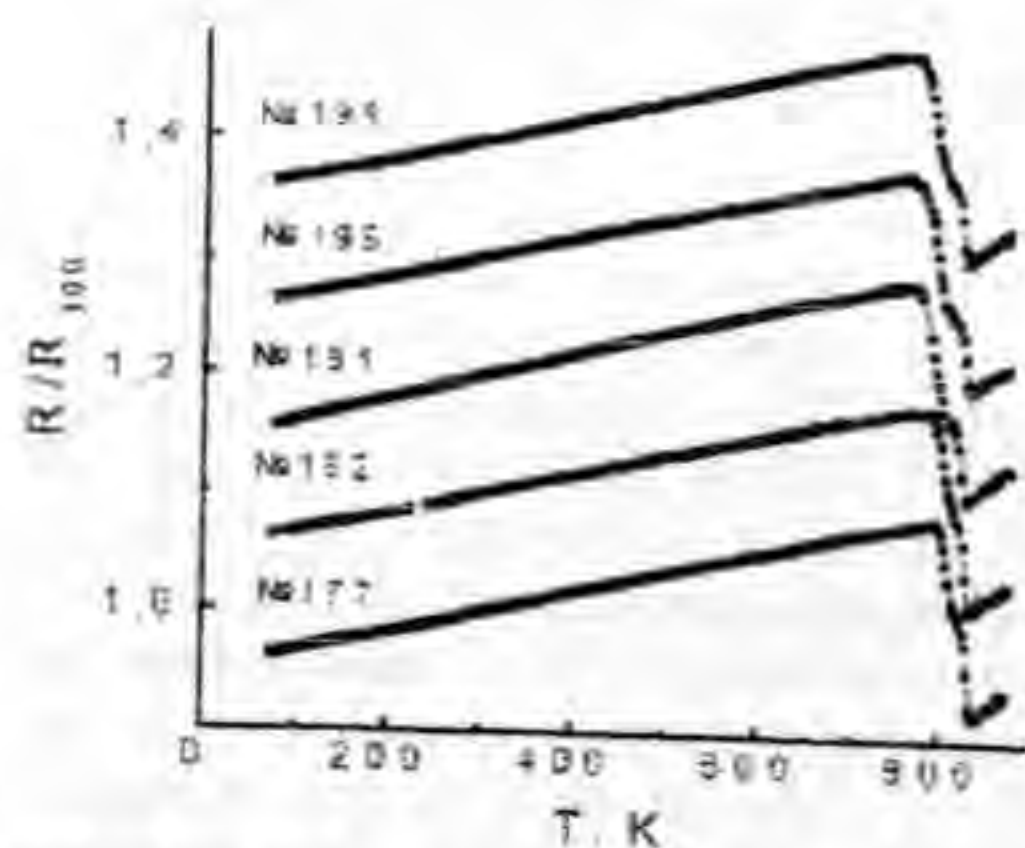


Рис.1. Температурні залежності електроопору АМС $Fe_{30}Si_{14}B_{14}$ (шкала наведена для АМС №177, кожна наступна крива зміщена відносно попередньої на +0,1).

© М.І. Захаренко, А.В. Носенко, М.П. Семенюк. 2007

Таблиця 1
Резистивні характеристики та T_c АМС $Fe_{30}Si_{14}B_{14}$, одержаних при різних режимах температурно-часової обробки розплаву.

№ зразка	T_h , °C, t_h , хв.	ρ , $\mu\Omega \cdot \text{см}$	α_T , 10^{-4} K^{-1}		T_c , K
			120 K	300 K	
177	1350, 5	144	1.64	1.81	665
182	1450, 6	164	1.53	1.95	666
195	1450, 20	175	1.69	1.82	648
191	1550, 5	134	1.43	1.83	645
199	1650, 1	161	1.50	1.84	644

механізмів розсіювання, які суттєві лише при низьких T .

Експериментальні залежності магнетоопору $\beta = (R_H - R_0)/R_0$ для АМС №177 в поздовжньому ($H \parallel j$ та осі зразка) та перпендикулярному ($H \perp j$ та осі зразка) магнітних полях представлені на рис.2. Ці залежності повністю симетричні відносно інверсії напрямку магнітного поля, що однозначно обумовлено парністю даного ефекту по степенях H , а точніше – по степенях намагніченості J [5], тому на рисунках представлена лише одна вітка такої залежності. Для інших зразків були одержані якісно подібні зкриті.

Всі залежності характеризуються додатним значенням поздовжнього магнетоопору ($\beta_{\parallel}$) та від'ємним – поперечного ($\beta_{\perp}$), причому за абсолютною величиною $|\beta_{\perp}|$ є більшим, порівняно з $\beta_{\parallel}$. У всіх випадках залежності $\beta_{\parallel}(H)$ і $\beta_{\perp}(H)$ досягають насичення, причому перша з цих величин досягає насичення в полях, які значно менших за поле насичення іншої величини. Така відмінність зумовлена різними значеннями розмагнічуючого фактора η при різній геометрії вимірювання. Значення величин $\beta_{\parallel}$ та $\beta_{\perp}$ наведені в табл.2.

В цілому одержані польові залежності подібні до залежностей, притаманних не лише іншим феромагнітним АМС типу "метал-металоїд" [6,7], але й кристалічним аналогам [8]. При високих полях зміни як $\beta_{\parallel}$, так і $\beta_{\perp}$ (незначне їх зменшення з ростом H) зумовлені ізоотропним внеском в магнетоопір [7]. Однак відносно малі зміни опору в цьому випадку при наявній

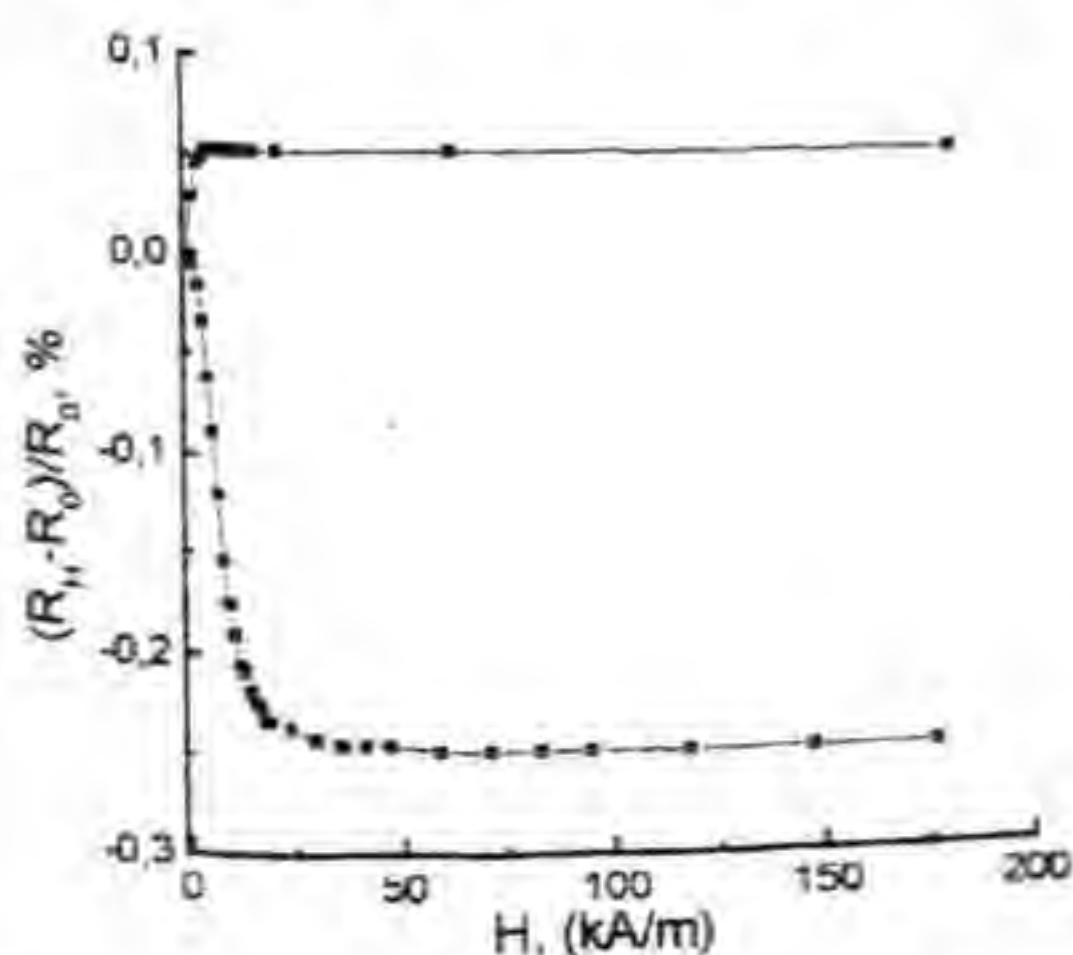


Рис. 2. Залежність магнетоопору $\beta = (R_H - R_0)/R_0$ від напруженості магнітного поля H . ($\beta > 0$ відповідає геометрії $H \parallel j$, а $\beta < 0$ $H \perp j$).

Таблиця 2.

Величина поздовжнього $\beta_{\parallel}$ та поперечного $\beta_{\perp}$ магнетоопорів у полі насичення, феромагнітна анізотропія електроопору γ та кут θ між напрямком спонтанної намагніченості та віссю стрічки.

Номер зразка	$\beta_{\parallel}, \%$	$\beta_{\perp}, \%$	$\gamma, \%$	θ°
177	0.055	-0.248	0.30	29
182	0.123	-0.245	0.37	22
191	0.100	-0.381	0.48	24
195	0.110	-0.251	0.44	20
199	0.119	-0.329	0.45	18

чутливості методики не дозволяють детально проаналізувати залежності $\rho(H)$ у використаному інтервалі H .

Як відмічалось, магнетоопір є парним явищем відносно інверсії напрямку магнітного поля [5]. У першому наближенні залежність електричного опору від намагніченості має вигляд:

$$\rho = A J^2, \quad (3)$$

де, $J = J(H)$ – намагніченість зразка, яка залежить від магнітного поля, A – певна постійна. Тому електричний опір, так само, як і магнетоопір будуть зв'язані з кривими намагнічування.

У феромагнетиках, в яких намагніченість окремих доменів має ізоотропний розподіл за напрямками, $\beta_{\parallel}/\beta_{\perp} \approx -2$. Однак у нашому випадку це відношення є меншим майже на порядок. Згідно з [6] це зумовлено тим, що вектори намагніченості окремих доменів орієнтовані переважно вздовж напрямку, що складає певний кут θ з віссю стрічки, який визначається з рівняння:

$$\tan^2 \theta = -\beta_{\parallel}/\beta_{\perp}. \quad (4)$$

Значення θ для кожного з досліджених АМС, наведені в табл.2, добре узгоджуються зі значеннями для близьких за складом АМС [6].

Наявність додатного поздовжнього та від'ємного поперечного магнетоопору зумовлена існуванням у феромагнітних матеріалах феромагнітної анізотропії опору (ФАО), причиною якої є зниження симетрії намагніченого матеріалу порівняно з його немагнітним станом, яке викликане наявністю намагніченості та впливом спин-орбітального зв'язку [8,9]. Величина ФАО дорівнює:

$$\gamma = \frac{\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}}{\rho_0} = \beta_{\parallel} - \beta_{\perp}. \quad (5)$$

Значення γ для досліджених АМС наведені в табл.2. Як видно, γ проявляє тенденцію до зростання при зростанні температури та часу витримки розплаву перед гартуванням. Крім цього, проявляється чітка кореляція між температурою Кюрі цих матеріалів (табл.1) та значенням γ . Згідно з [8], ця величина пов'язана зі спин-орбітальною взаємодією та залишковим електричним опором, який вносить кожна з енергетичних підзон з різним напрямком спінів, що визначається обмінним розщепленням. Вона дорівнює:

$$\gamma = \nu \left(\frac{\rho_{0\downarrow}}{\rho_{0\uparrow}} - 1 \right), \quad (6)$$

де, ν – константа спин-орбітальної взаємодії, $\rho_{0\downarrow}$ та $\rho_{0\uparrow}$ – залишкові електричні опори кожної з підзон.

У кристалічних аналогах ФАО зумовлена різною величиною sd-розсіювання електронів провідності різної спінової орієнтації через відмінність густини електронних станів (ГЕС) обох d-підзон, яка виникає внаслідок обмінного розщеплення. Особливості електронної структури навіть кристалічного Fe, а саме – висока ГЕС на рівні Фермі для обох підзон, суттєво ускладнюють аналіз результатів ФАО [8]. Крім цього, для кристалічних аналогів sd-розсіювання є досить значним і може перевищувати електрон-фононне ss-розсіювання. Незважаючи на те, що для АМС електрон-фононне ss-розсіювання робить основний внесок, існування ФАО та кореляції між γ і T_C (яка пропорційна енергії обмінної взаємодії) свідчить про те, що sd-розсіювання є тим додатковим механізмом, який разом з механізмом Фабера-Займана зумовлює резистивні властивості АМС. Однак при порівняно високих T цей внесок дуже малий, що виявляється у відсутності кореляцій між ρ та α при T_{300} та режимами температурно-часової обробки, а прояв цієї кореляції при низьких T зумовлений зростанням питомого внеску sd-розсіювання електронів провідності у температурну залежність ρ .

Таким чином, результати досліджень показують, що структурний стан АМС, який досягається в результаті різних температурно-часових режимів, відображається на електричному опорі лише при низьких T . Проте його вплив є більш суттєвим на магнетопір. Отримані результати свідчать, що при розгляді транспортних властивостей АМС слід брати до уваги і притаманне їм sd-розсіювання електронів провідності.

Список використаних джерел

1. Аморфные металлические сплавы/ Под ред. Ф.Е. Люборского – М.: Металлургия 1987. – 582 с.
2. *Glassy Metals: Magnetic, chemical and structural properties/* R.Hasegawa (ed.) – Boca Raton, Florida: CRC Press, 1983. – 280 p.
3. Semen'ko M.P., Stelmakh O.I., Zakharenko M.I. Evolution of electrical resistivity Fe-B-based amorphous alloys at crystallization// High Temp. – High Press. – 2001 – 33. – P.279-283.
4. Бровко А.П., Власенко (Михайлова) Л.Е., Романова А.В. Взаимосвязь структуры аморфного и кристаллического состояний: 1. Аморфно-кристаллические порошковые смеси// Металлофиз. и новейш.технол. – 1994. – 16, №1. – С.10-20.
5. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М.: Наука, 1976. – 1032 с.
6. Singhal R., Majumdar A.K. Magnetic scattering in the amorphous ferromagnets $Fe_{80}B_{20-x}Si_x$ ($0 \leq x \leq 12$)// Phys. Rev. – 1991. – B44, №6. – P.2673-2680.
7. Olivier M., Strom-Olsen J.O., Altounian Z. Disorder and magnetic effects on the electron-transport properties of iron-chromium-boron metallic glasses// Phys.Rev. – 1987 – B35, №1. – P.333-341.
8. Berger L. Theory of magnetoresistance in concentrated ferromagnetic alloys// J.Appl. Phys. – 1990 – 67, №9 – P.5549-5554.
9. Campbell J. Hall effect and resistivity anisotropy in Ni alloys// Phys.Rev.Lett. – 1970. – 24, №6. – P.269-271.

Надійшла до редколегії 29.10.2007

УДК 538.97

Кизима О.А., аспірант, фізичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка, Булавін Л.А., академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, фізичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка, Авдєєв М.В., кандидат фіз.-мат. наук, Об'єднаний інститут ядерних досліджень, Снегір С.В., аспірант Інститут хімії поверхні ім. Чуйка, Аксьонов В.Л., доктор фіз.-мат. наук, професор, Об'єднаний інститут ядерних досліджень.

Ефект додавання води в систему C_{60} /N-метил-2-пірролідон

Методом мас-спектрометрії та спектрофотометрії було досліджено ефект додавання води в систему C_{60} /N-метил-2-пірролідон. Показано, що додавання води в таку систему приводить до кластерної реорганізації, яка відбувається шляхом руйнування кластерів фулерену, за рахунок відщеплення мономерів.

Ключові слова: фулерен, мас-спектрометрія, спектрофотометрія.

*E-mail: kizima@nf.jinr.ru

Вступ

Відкриття сольватохромізму в азотовмісних розчинах фулерену (піридин, N-метил-2-пірролідон, бензонітрил, ацетонітрил) викликало інтерес до вивчення таких систем [1-3]. Відомо, що розчини фулерену в таких розчинниках характеризуються специфічною взаємодією між фулереном та молекулами розчинника [4]. Останні, маючи в одному з вузлів свого кільця електронегативний атом азоту, який виступає в якості донора електронів, формує з молекулами фулерену C_{60} комплекси з переносом заряду. Утворення таких донорно-акцепторних комплексів приводить до підвищення розчинності фулерену. З іншого боку висока полярність розчинника приводить до агрегації C_{60} . Дана робота присвячена дослідженню ефекту додавання води в систему C_{60} /N-метил-2-пірролідон (NMP). Як раніше було показано, в системі C_{60} /NMP через місяць після приготування формуються кластери фулерену з розміром більше 100 нм [5,6]. Додавання води в систему C_{60} /NMP приводить до реорганізації кластерів фулерену. Зокрема, методом малокутового розсіяння нейтронів було спостережено різку появу кластерів з розмірами в діапазоні 10 – 100 нм. Такий ефект можна пояснити як руйнуванням

O.A. Kyzyma, PhD student, Kyiv Taras Shevchenko National University, L.A. Bulavin, professor, Kyiv Taras Shevchenko National University, M.V. Avdeev doctor, Joint Institute for Nuclear Research, Snegir S.V., PhD student, Institute of surface chemistry, V.L. Aksenov, professor, Joint Institute for Nuclear Research

Effect of water addition to the C_{60} /N-methyl-2-pyrrolidone system

Effect of water addition to the C_{60} /N-methyl-2-pyrrolidone system was studied by mass spectroscopy and UV-Vis spectroscopy. It was shown that water addition to this system leads to clusters reorganization. This reorganization occurs as decomposition of fullerene clusters by monomer detachment.

Key Words: fullerene, mass spectroscopy, UV-Vis spectroscopy.

великих кластерів, з розмірами більше 100 нм, так і формуванням нових кластерів з поодиноких молекул фулерену, реєстрування яких не можливо в зв'язку з їх малими розмірами. Останнє твердження добре погоджується з тим фактом, що збільшення полярності розчинника повинно приводити до додаткової агрегації. Метою даної роботи було вивчення кластерної реорганізації в системі C_{60} /NMP після додавання води методами спектрофотометрії та мас-спектрометрії.

Експериментальна частина

Для отримання системи C_{60} /NMP, фулерен ("Фулеренові технології", чистота > 99.5%) розчиняли в NMP ("Merck", чистота > 99.5%) та перемішували протягом чотирьох діб при кімнатній температурі. Трьохкомпонентна система C_{60} /NMP/ H_2O була отримана шляхом додавання дистильованої води (Millipore) в розчин C_{60} /NMP. В розчинах C_{60} /NMP/ H_2O вміст води перевищував 40% від загальної об'єму системи.

Спектрофотометричні виміри були проведені на спектрофотометрі Hitachi U-2000, діапазон довжин хвиль 200-1000 нм.

Мас-спектрометричні виміри проводились на приборі Autoflex II (Bruker Daltonics, Німеччина)

Представлено:
д.ф.-м.н., проф. Адамєнко І.І.

з використанням методу лазерної десорбції/іонізації (LDI) з довжиною хвилі $\lambda = 337$ нм. Розділення іонів проходило в рефлекторному режимі. В якості носія зразка була використана стандартна металева підкладка MTP 384 (Bruker Daltonics, Німеччина), на поверхню якої наносили еквівалентні об'єми зразку.

При отриманні мас-спектрів для кожного нанесеного зразку був використаний принцип накопичення мас-спектрометричної інформації шляхом опромінення 10 зон висохлої краплі. Такій підхід використовувався з метою усереднення отриманих даних і, відповідно, зменшення статистичної помилки, викликаной нерівномірним розподілом зразку від центру краплі до країв.

Результати

На рис. 1 представлені спектри поглинання системи C_{60} /NMP до та після додавання в систему води. Як видно в спектрі системи C_{60} /NMP присутній пік в області 330 нм, характерний для C_{60} . Розбавлення такої системи приводить до різкого сольватохромного ефекту, зокрема з'являється плато в області 450 та 600 нм. Слід зауважити, що аналогічне плато присутнє і в спектрі поглинання водного розчину фулерену, а також в суміші піридин/вода [1].

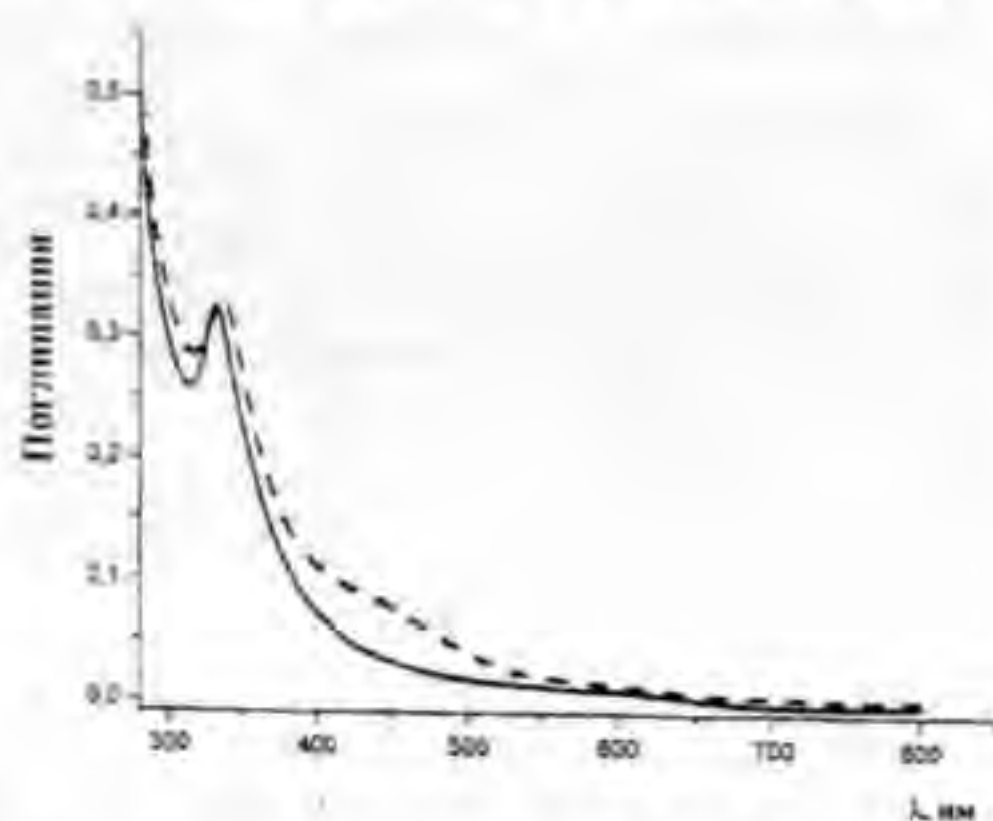


Рис. 1. Оптичні спектри C_{60} /NMP до та після додавання в систему води. Суцільна лінія – C_{60} /NMP, пунктирна – C_{60} /NMP/ H_2O .

Мас-спектр свіжої системи C_{60} /NMP представлений на рис. 2. Як видно, в системі присутні мономери фулерену C_{60} та кластери з кількістю мономерів в них від 2 до 5. Повторні експерименти для зразків через місяць показали відсутність піків, які відповідають мономерам фулерену або його кластерам, а також типових фрагментів (C_{58} , C_{56} , ..., C_{46}), що утворюються під лазерним опроміненням. Такі результати були отримані як для негативних так і для позитивних

іонів. Цей факт свідчить про те, що фулерени формують великі кластери з сильними зв'язками між молекулами, спостереження яких неможливо у зв'язку з технічними обмеженнями методу. Такі агрегати в багатьох відношеннях співпадають з кластерами фулерену в водних системах C_{60} [7].

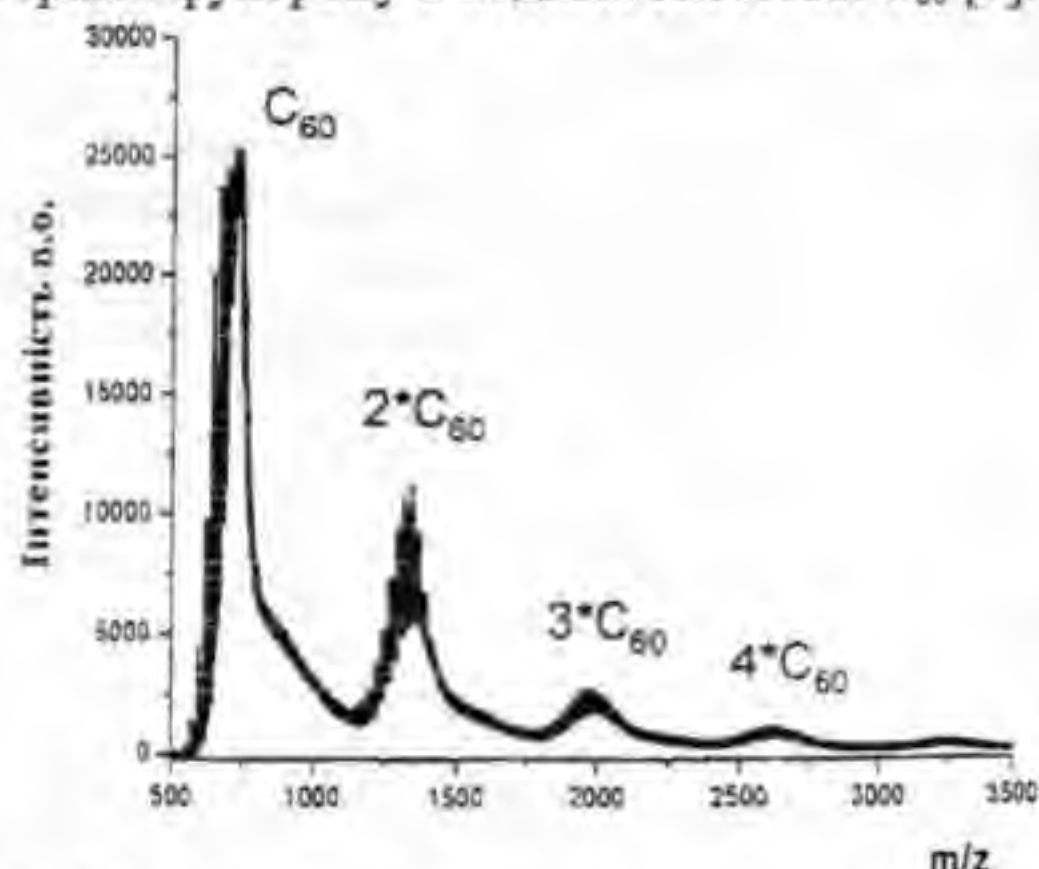


Рис. 2. Мас-спектр негативних іонів системи C_{60} /NMP.

Були проведені експерименти для свіжої системи C_{60} /NMP після розбавлення розчину водою таким чином, щоб об'ємна доля води в системі складала 0,5. Мас-спектр системи C_{60} /NMP після її розведення водою представлений на рис. 3. Спектр трьохкомпонентної системи C_{60} /NMP/ H_2O містить лише кластери з двома мономерами фулерену у своєму складі. Цей факт свідчить, що додавання в систему C_{60} /NMP води приводить до руйнування кластерів, яке може відбуватися декількома способами: розвалом кластерів на декілька частин різної маси та відщепленням мономерів.

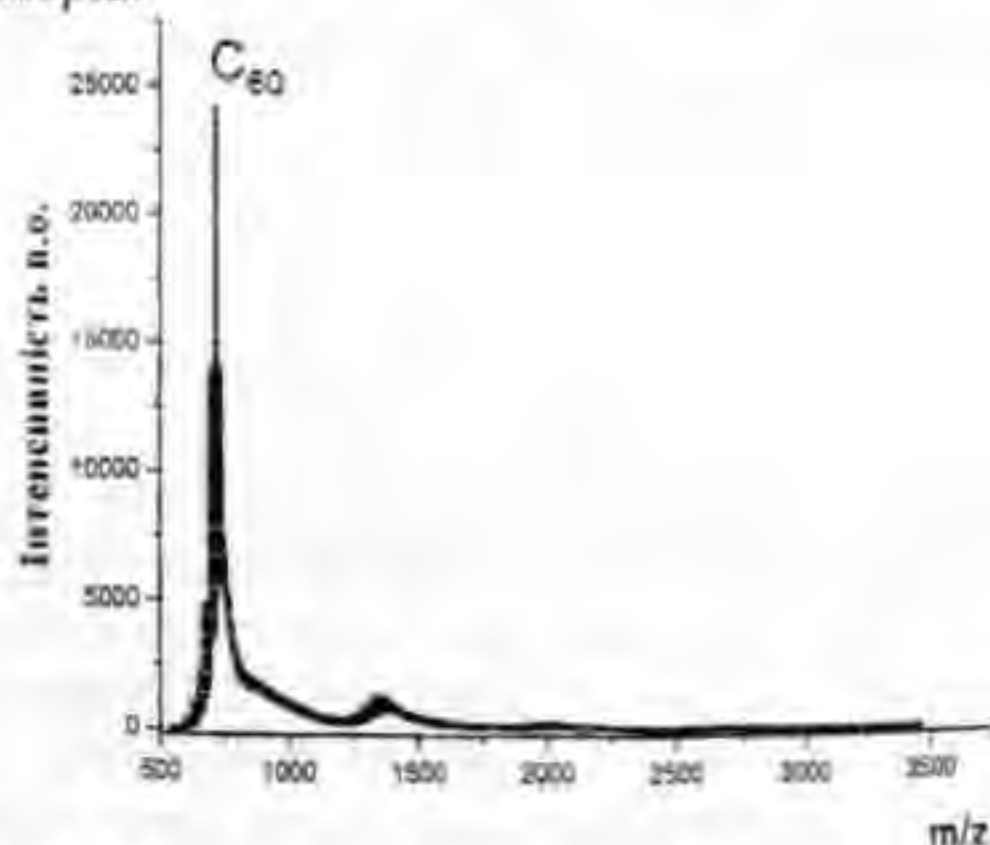


Рис. 3. Мас-спектр негативних іонів системи C_{60} /NMP/ H_2O .

З метою встановлення яким саме чином відбувається руйнування кластерів в системі, проведено дослідження розчину C_{60} /NMP, розбавленого водою через місяць після

приготування. Відповідний спектр системи $C_{60}/NMP/H_2O$ представлений на рис. 4. Спектр показав відсутність піків, що відповідають кластерам фулерену. Наявність піка, що відповідає мономеру фулерену указує, що реорганізація кластерів відбувається за рахунок відщеплення мономерів, при цьому відщеплення агрегатів з кількістю мономерів від 2 до 14 не спостерігається.

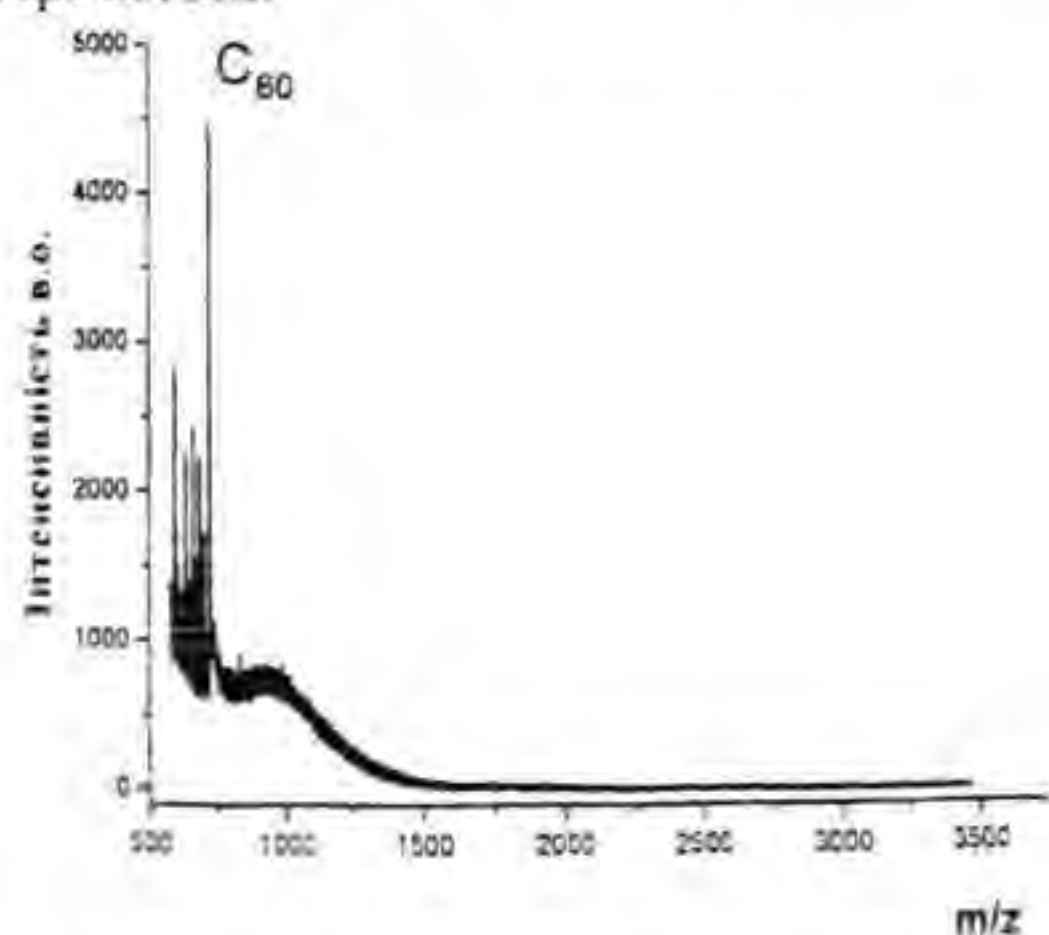


Рис. 4. Мас-спектр негативних іонів системи $C_{60}/NMP/H_2O$, отриманої шляхом додавання води до системи C_{60}/NMP через місяць після приготування.

Висновки

Сольватохромний ефект, який спостерігається в спектрі поглинання системи C_{60}/NMP після додавання води, відповідає кластерній реорганізації. Результати мас-спектрометричних

вимірів показали, що в системі C_{60}/NMP через місяць після приготування, формуються великі кластери з сильними зв'язками між молекулами. Додавання води в таку систему приводить до руйнування кластерів фулерену, яке відбувається за рахунок відщеплення мономерів, при цьому відщеплення агрегатів з кількістю мономерів від 2 до 14 не спостерігається.

Список використаних джерел

1. Mrzel A., Mertelj A., Omerzu A. et al. // J. Phys. Chem. B, 1999. - 103. - P. 11256.
2. Yevlampieva N.P., Biryulin Yu.F., Melenevskaja E.Yu. et al. // Colloids Surf. A, 2002. - 209. - P. 167.
3. Aksenov V.L., Avdeev M.V., Mihailovic D. et al. // AIP Conf. Proc., 2001. - 591. - P. 66.
4. Alfe M., Apicella B., Barbella R. et al. // Chem. Phys. Lett., 2005. - 405. - P. 193.
5. Aksenov V.L., Avdeev M.V., Tropin T.V. et al. // Physica B: Condensed Matter, 2006. - 385-386. - P. 795-797.
6. Aksenov V.L., Avdeev M.V., Kyzyma O.A. et al. // Crystallography Report, 2007. - 52. - P. 523.
7. Avdeev M.V., Khokhryakov A.A., Tropin T.V. et al. // Langmuir, 2004. - 20. - P. 4363.

Надійшла до редколегії 12.12.2007р

УДК 539.266

О.В. Коломієць*, інженер,
О.Б. Мельник, д.ф.-м.н.

Використання моделей випадкового щільного пакування твердих сфер для прогнозування термічної стабільності та склоутворюючої здатності аморфних сплавів

Описано методику побудови полідисперсних моделей випадкового щільного пакування твердих сфер (ВЩПТС). За допомогою неї створено моделі ВЩПТС ряду аморфних сплавів (АС) систем Fe-B, Ni-Nb, Al-Gd-Ni. Показано, що щільність пакування ВЩПТС можна використовувати для характеристики склоутворюючої здатності АС, а із збільшенням щільності пакування атомів розчинника в моделях зростає термічна стабільність відповідних АС.

Ключові слова: аморфні сплави, термічна стабільність, склоутворююча здатність, випадкове щільне пакування твердих сфер, щільність пакування.

*E-mail: kolomiets@ukr.net melabronia@gmail.com

1. Вступ

Спостерігається певна спорідненість між структурними станами розплаву й аморфного матеріалу, який одержують з нього шляхом гартування. Тому рідку й аморфну фазу доцільно розглядати у гомологічному зв'язку в рамках неупорядкованого стану (НС) речовини і розвивати для їх опису спільні підходи. Складність інтерпретації НС обумовлюється відсутністю такого нульового модельного наближення, як наприклад, моделей досконалого кристала та ідеального газу, які служать для опису, відповідно, кристалічного і газоподібного станів речовини. В якості базової моделі НС можна розглядати модель випадкового щільного пакування твердих сфер ВЩПТС. Різні модифікації ВЩПТС застосовуються в процесі вивчення НС вже досить тривалий час. Треба відзначити, що найбільшій адекватності вдалося досягти при моделюванні однокомпонентних розплавів, які мають низьку щільність пакування. ВЩПТС також успішно застосовувалася для опису структури бінарних аморфних систем, утворених атомами з близькими розмірами [1].

O.V. Kolomiyets, engineer,
O. B. Melnick, Dr.Sc.

Using of the random dense packing of hard spheres models for predicting of thermal stability and glass-forming ability of the amorphous alloys

The method of constructing polydisperse models of random dense packing of hard spheres (RDPHS) was described. Using the method, RDPHS models were created for amorphous alloys (AA) of Fe-B, Ni-Nb, Al-Ni-Gd systems. It has been shown that RDPHS packing density can be used to describe the glass forming ability of AA, and with increasing packing density for solvent atoms in the models thermal stability of corresponding AA growing also.

Key Words: amorphous alloys, thermal stability, glass forming ability, random dense packing of hard spheres, packing density.

Однак більшість практично важливих, стабільних аморфних сплавів є багатоконпонентними матеріалами, які складаються з елементів, що мають значні розходження в атомних радіусах. Побудова ВЩПТС моделей таких об'єктів стримується відсутністю ефективних алгоритмів.

Перші твердосферні моделі будувалися або механічно [2], або на комп'ютері шляхом послідовного приєднання куль до зародку з дотриманням певних геометричних критеріїв [3,4]. Основний недолік зазначених методів полягає в нещільності отриманих пакувань та їх неоднорідності від центру до периферії та існування вільної поверхні. Для усунення викладених проблем в [5,6] були запропоновані методики моделювання систем твердих сфер різних розмірів з використанням молекулярної динаміки (МД), за допомогою яких будувалися ВЩПТС моделі з періодичними граничними умовами. Проте основним недоліком відомих ВЩПТС моделей аморфних сплавів є їх занижена в порівнянні з експериментом густина.

Істотним моментом при розгляді конкретних АС є урахування хімічної взаємодії між

компонентами, що може задаватися в ВЦПТС моделях за допомогою введення різних мінімальних міжатомних відстаней, що відхиляються від суми радіусів сфер. Для розв'язання зазначеної проблеми нами розроблена універсальна методика, що дозволяє побудувати ВЦПТС багатокомпонентних систем з урахуванням хімічної взаємодії [7]. Розглянемо її докладніше.

2. Моделювання

Для одержання ВЦПТС використано метод молекулярної динаміки (МД). МД моделювання проводилося в рамках NPT ансамблю, для якого кількість частинок N у базовій комірці й зовнішній тиск P залишалися постійними. Міжатомна взаємодія між i й j сортами атомів задавалася парними потенціалами вигляду:

$$\phi_{ij} = \begin{cases} a(r/\sigma_{ij} - 1)^{12} & \text{при } r \leq \sigma_{ij} \\ 0 & \text{при } r > \sigma_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

де параметри σ_{ij} рівні мінімальним міжатомним відстаням, які беруться з відповідних кристалічних фаз. У такий спосіб описується хімічна взаємодія, оскільки $\sigma_{ii} + \sigma_{jj} \neq 2\sigma_{ij}$. Потенціали (1) мають вигляд близький до жорсткосферного. Величина a помітний вплив на результати моделювання не робить, вона приймалася рівною 3 еВ.

Частинки ($N=2000$ атомів) розміщалися в кубічній комірці, на яку накладалися періодичні граничні умови. Значення зовнішнього тиску бралось $P=10^8$ Па. Інтегрування рівнянь руху частинок провадилося за методом Верле [8] з часовим кроком $\Delta t=5 \cdot 10^{-16}$ с. У початковий момент часу атоми розміщалися хаотично, потім протягом 60000 кроків проводилася термічна стабілізація системи й досягався рівноважний стан для $T=2500$ К. Наступний етап моделювання полягав в охолодженні зі швидкістю 10^{12} К/с до температури $T=0$ К масштабуванням швидкостей через кожні 100 кроків. Шляхом здійснення вищеописаної процедури були побудовані моделі для яких спостерігається незначне перекриття сфер, оскільки потенціали типу (1) мають більш пологий, ніж у твердих сферах відштовхувальну гілку. Наявні перекриття повністю усувалися методом статичної релаксації й збільшенням розмірів комірки. У такий спосіб одержували моделі ВЦПТС із найкоротшими міжатомними відстанями відповідними до σ_{ij} .

За допомогою описаного алгоритму побудовано ВЦПТС моделі аморфних сплавів систем Fe-B, Ni-Nb, Al-Gd-Ni.

3. Результати та обговорення

Розглядалися ВЦПТС моделі АС $\text{Fe}_{100-x}\text{B}_x$ наступних складів ($x=8, 10, 12, 15, 18, 20, 23, 25, 30\%$). Для системи бралися наступні мінімальні міжатомні відстані σ_{ij} : (Fe-Fe - 0,248 нм, як у кристалічному α -Fe); (Fe-B - 0,211 нм, B-B - 0,31 нм, як у кристалічному Fe_3B). Слід зазначити, що фази α -Fe й Fe_3B першими утворюються при кристалізації аморфних сплавів Fe-B.

Атомні густини побудованих моделей близькі до експериментальних густин реальних АС, вони відрізняються менш ніж на 1%.

Необхідно відзначити, що аморфний стан є нерівноважним і його стабільність пов'язана з рухливістю атомів, що згідно [9] визначається розподілом вільного об'єму. Важливим параметром для характеристики ступеня заповнення атомами простору і їхньої рухливості є щільність пакування, що у ВЦПТС моделях дорівнює відношенню власного об'єму сфер до займаного ними об'єму. АС Fe-B можна розглядати як сплави, що складаються з підсистеми атомів розчинника (Fe) і розчинених у ній атомів В, які не мають прямого контакту між собою [10]. Розчинені атоми змінюють властивості сплаву за допомогою свого впливу на підсистему розчинника. Приймаючи вищевикладені міркування до уваги проаналізуємо взаємозв'язок концентраційних залежностей щільності пакування для атомів розчинника в ВЦПТС моделях й експериментальних температур кристалізації T_c АС Fe-B [11]. Об'єм, що займають атоми, визначався за допомогою побудови багатогранників Вороного, утвореними радикальними площинами [12]. Концентраційні залежності ρ_{Fe} і T_c зображені на рис. 1, демонструють гарну кореляцію: при збільшенні значення ρ_{Fe} зростає термічна стабільність сплаву.

У випадку сплавів $\text{Ni}_{100-x}\text{Nb}_x$ бралися концентрації $x=30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65\%$. Найменші міжатомні відстані для Ni та Nb ($\sigma_{\text{NiNi}}=0,255$ нм, $\sigma_{\text{NiNb}}=0,270$ нм, $\sigma_{\text{NbNb}}=0,298$ нм) визначалися по положенню головних максимумів експериментальних парціальних функцій радіального розподілу атомів (ФРРА), які отримані для аморфного $\text{Ni}_{44}\text{Nb}_{56}$ в [13].

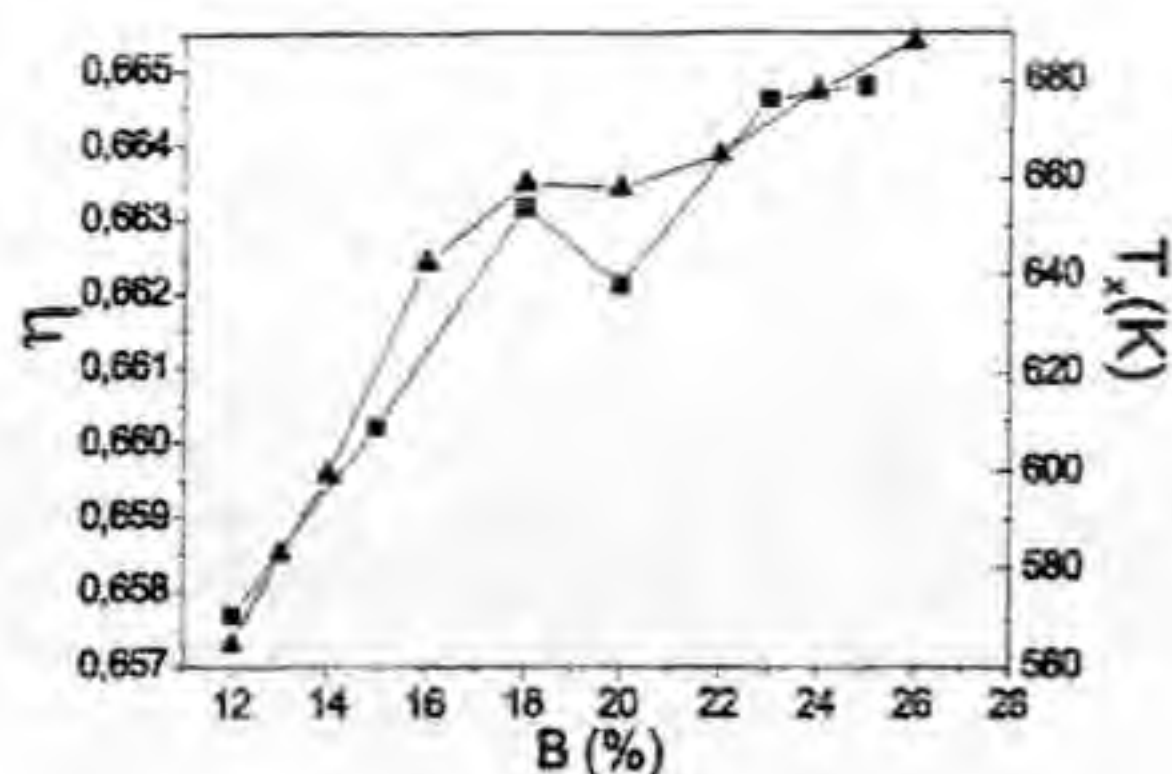


Рис. 1 Концентраційні залежності експериментальних температур кристалізації T_c (Δ) і щільності пакування для атомів заліза ($\square$) в АС Fe-B.

Густини отриманих упаковок близькі до експериментальних атомних густин АС Ni-Nb. Важливим параметром для опису ВЦПТС є щільність упаковки η , що характеризує ступінь заповнення атомами простору й дорівнює відношенню об'єму зайнятого атомами до всього об'єму моделі. На рис. 2 наведена концентраційна залежність цієї величини для систем. Крива має максимум для складу $Ni_{60}Nb_{40}$. Ця концентрація відповідає евтектичній точці на діаграмі стану Ni-Nb [14]. Для евтектичної концентрації досягається найбільш ефективне пакування атомних сфер у просторі (рис. 3). Слід зазначити, що для $Ni_{60}Nb_{40}$ спостерігається максимальна схильність до аморфізації [15]. Таким чином, видно, що щільність упаковки ВЦПТС є зручним параметром для прогнозування склоутворюючої здатності аморфних сплавів.

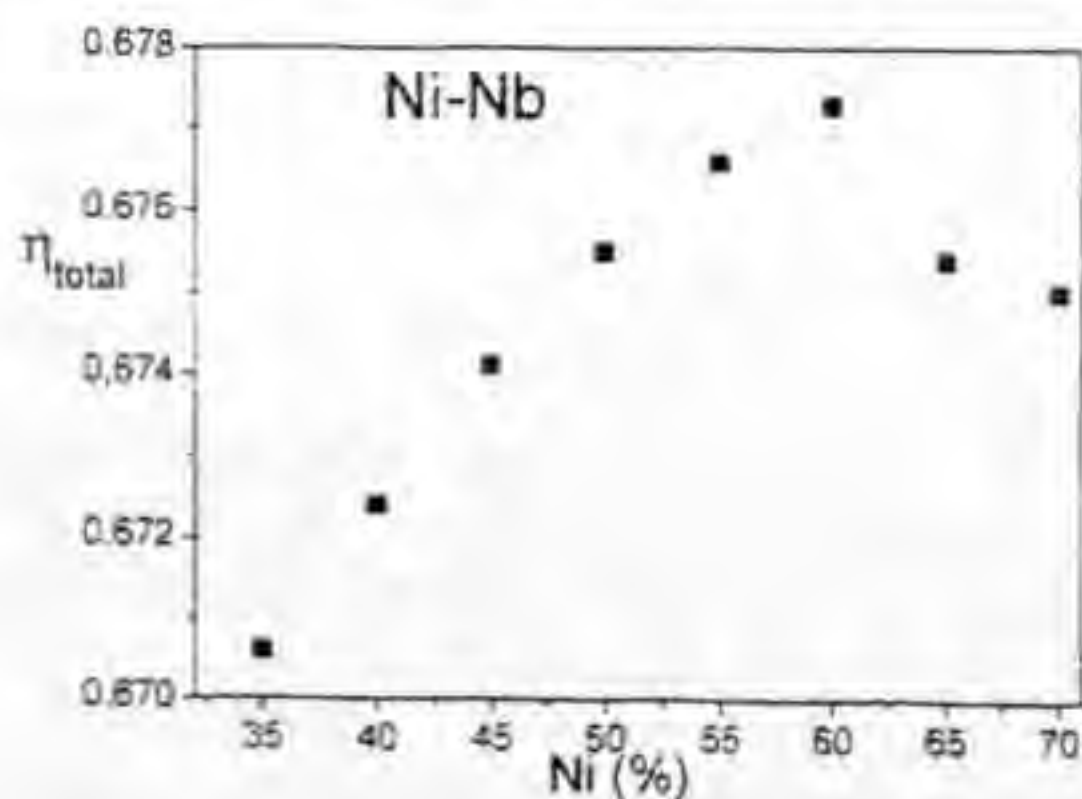


Рис. 2 Концентраційна залежність щільності упаковки для ВЦПТС моделей аморфних сплавів Ni-Nb

Розгляд системи Al-Gd-Ni в якості модельної, пов'язаний з тією великою увагою, що тепер приділяється аморфним сплавам типу Al-ПМ-РЗМ, які вміщують 80-90 ат. % Al, легованого 3d-перехідними (ПМ: Ni, Fe, Co, Mn, Cr) і рідкоземельними елементами (РЗМ: Y, La, Ce, Sm, Lu, Ho). Аморфні сплави цього сімейства, які одержують гартуванням з розплаву, характеризуються міцністними характеристиками, що істотно вищі в порівнянні з кристалічними Al-сплавами [16].

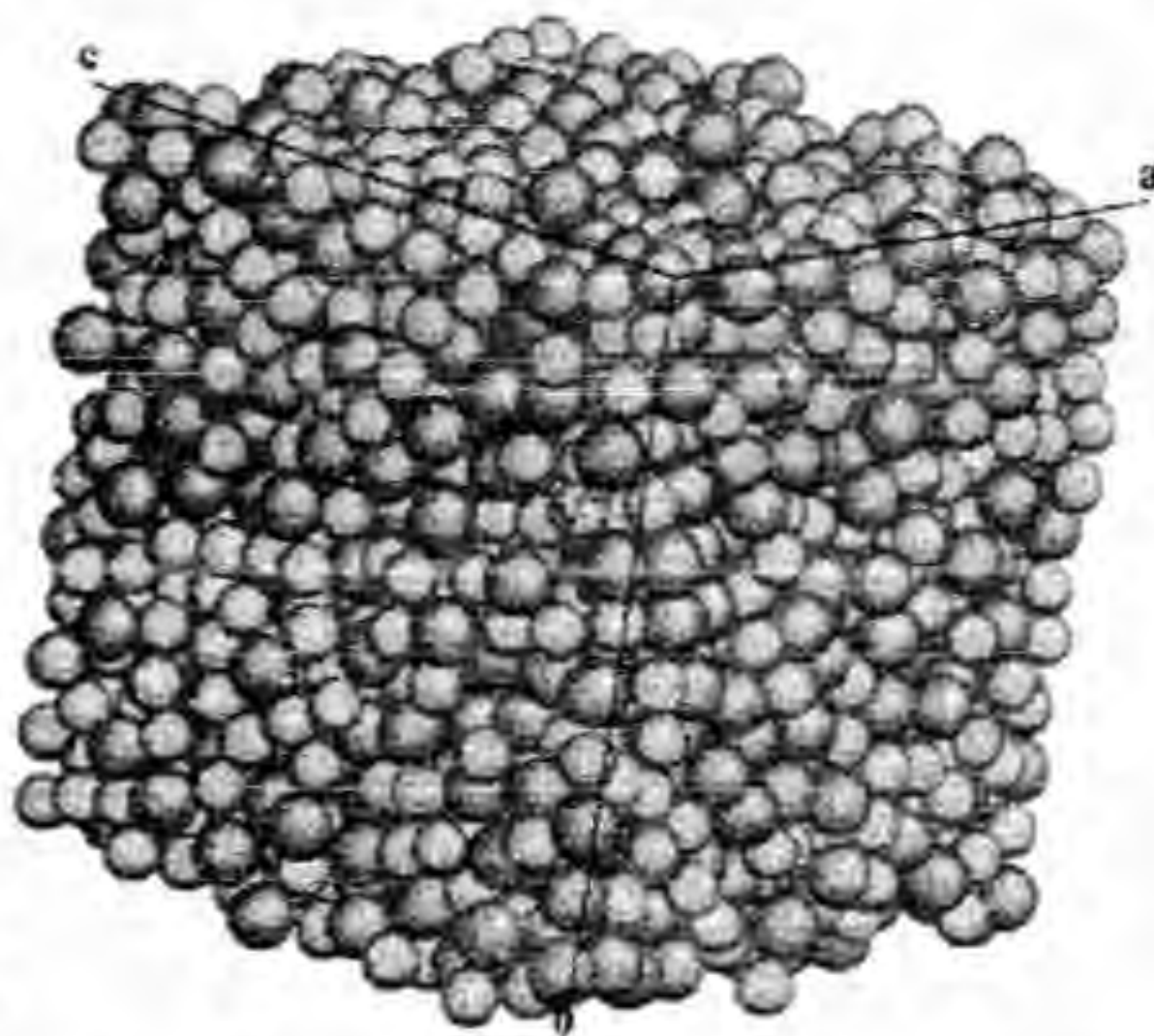


Рис. 3 ВЦПТС модель аморфного $Ni_{60}Nb_{40}$

У даний час ведуться інтенсивні дослідження зі створення нових, ефективних за своїми механічними властивостями багатокомпонентних аморфних композицій на основі Al. Особливе місце при цьому приділяється пошуку способів підвищення термічної стабільності аморфних і нанокристалічних структур.

ВЦПТС моделі AMC Al-Gd-Ni будувались згідно до описаної вище процедури. При моделюванні брались відповідні мінімальні міжатомні відстані: Al-Al- 0.286 нм (як в кристалічному Al); Al-Gd- 0.2938 нм (як в кристалічному Al_3Gd); Al-Ni-0.250 нм (як в кристалічному AlNi); Gd-Gd-0.360 нм (як в кристалічному Gd); Gd-Ni-0.299 нм (як в кристалічному $GdNi_2$); Ni-Ni-0.248 нм (як в кристалічному Ni). В таблиці 1 наведено склади сплавів, які розглядалися, щільність пакування для атомів розчинника - η_{Al} та експериментальні температури кристалізації T_c , одержані при нагріванні з постійною швидкістю 10 К/хв [17].

Таблиця 1
Параметри ВЩПТС для АС Al-Gd-Ni

N	Склад	η_{Al} модель	T_x (K) експ.
1	Al ₈₂ Gd ₁₁ Ni ₇	0,69062	601
2	Al ₈₂ Gd ₇ Ni ₁₁	0,68606	585
3	Al ₈₅ Gd ₈ Ni ₇	0,68071	550
4	Al ₈₅ Gd ₇ Ni ₈	0,67975	542
5	Al ₈₆ Gd ₈ Ni ₆	0,67898	541
6	Al ₈₆ Gd ₇ Ni ₇	0,67759	527
7	Al ₈₆ Gd ₆ Ni ₈	0,67699	509
8	Al ₈₇ Gd ₈ Ni ₅	0,6777	518
9	Al ₈₇ Gd ₇ Ni ₆	0,67553	507
10	Al ₈₇ Gd ₆ Ni ₇	0,67517	488
11	Al ₈₇ Gd ₅ Ni ₈	0,67446	475
12	Al ₈₈ Gd ₅ Ni ₇	0,6731	452

На рис.4 зображено концентраційні залежності η_{Al} та T_x . Вони демонструють хорошу кореляцію, підтверджуючи тезу про те, що щільність пакування для атомів розчинника є надійним критерієм для прогнозування термічної стабільності аморфного стану.

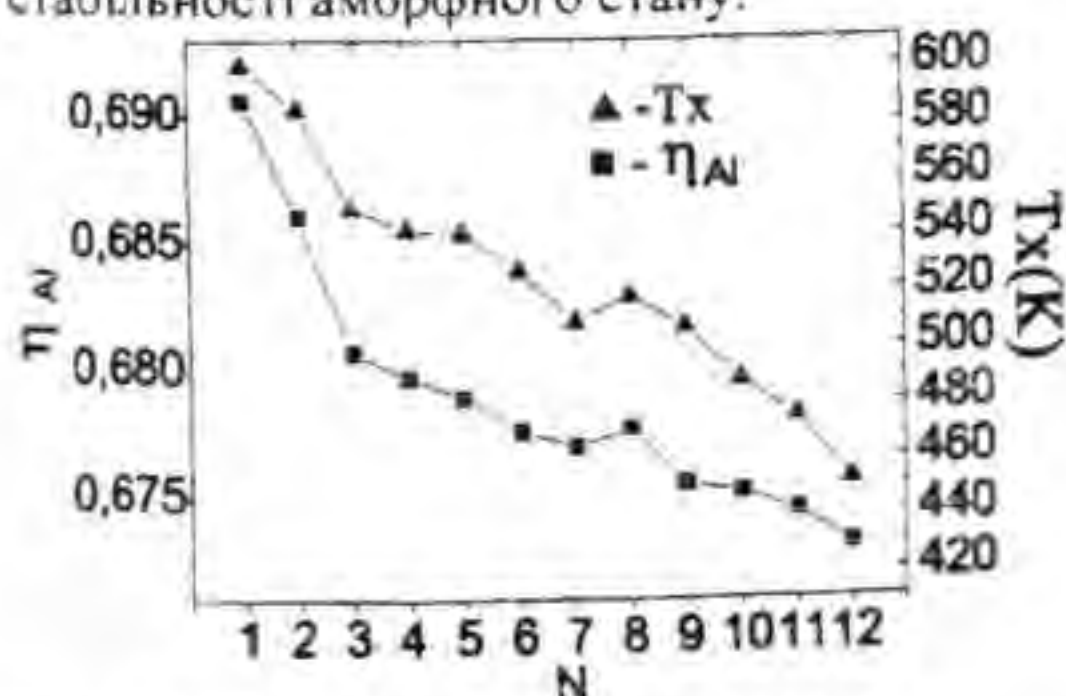


Рис. 4 Концентраційні залежності експериментальних температур кристалізації T_x (Δ) і щільності пакування для атомів алюмінію ($\square$) в АС Al-Gd-Ni

4. Висновки

На основі проведеного аналізу ВЩПТС для досліджуваних систем встановлено, що щільність пакування ВЩПТС є зручним параметром для прогнозування склоутворюючої здатності, а із збільшенням щільності пакування атомів розчинника в моделях зростає термічна стабільність відповідних аморфних сплавів.

Список використаних джерел

1. Cargill G.S. Dense random packing of hard spheres as a structural model for noncrystalline metallic solids // J.Appl.Phys. - 1970. - 41, №5. - P.2248-2250.
2. Finney J.L. Random packing and the structure of simple liquids. 1. The geometry of random close

- packing // Proc. Roy. Soc. - London: A. - 1970. - 319, №1539. - P. 479-495.
3. Ichikawa T. The assembly of hard spheres as a structure model of amorphous iron. // Phys. stat. sol., (a). - 1975. - 29, №1. - P.292-302.
4. Polk D.E. Dense random packing of hard spheres of two different sizes. // J.Non-Cryst.Sol. - 1973. - 11, №4. - P.381-394.
5. Clarke A.S., Wiley J.D. Numerical simulation of the dense random packing of a binary mixture of hard spheres: Amorphous metals. // Phys. Rev. - 1987. - 35, № 14. - P.7350-7356.
6. Kansal A.R., Torquato S., Stillinger F.H. Computer generation of dense polydisperse sphere packings // J. chem. phys.. 2002. - 117, №18. - P.8212-8218.
7. Шнак А.П., Мельник А.Б., Сульженко В.К., Коломиец О.В. Моделирование аморфных сплавов с использованием случайных плотных упаковок твердых сфер // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. - 2004. - 2, №2. - С.689-694.
8. Verlet L. Computer experiments on classical fluids. // Phys.Rev. - 1967. - 159. - P.98-103.
9. Cohen M.H., Turnbull D. Free volume in liquids. // J. Chem.Phys. - 1961. - 34. - P.120-127.
10. Lamparter P., Nold E., Rainer-Harbach G. et al. X-ray and neutron diffraction studies on amorphous transition metal-boron alloys (Fe-B, Co-B, Ni-B) // Z.Naturforsch. A. - 1981. - 36, №2. - P.165-172.
11. Hasegawa R., Ray R. Investigation of crystallization and thermal stability of Fe-B metallic glasses // J Appl. Phys. - 1978. - 49, № 7. - P.4174-4179.
12. Watson R.E., Bennett L. H. Crystalline and glassy phases of transition-metal-metalloid systems // Phys. Rev. B. - 1991. - 43, №4. - P. 11642-11652.
13. Svab E., Meszaros Gy., Takacs J., Ishmaev S.N., Isakov S.L., Sadikov I.P. Partial correlations in Ni-Nb amorphous alloys // J. Non-Crystalline Solids. - 1992. - 144. - P.99-106.
14. Эллиот Р.П. Структуры двойных сплавов. Том 1. - М.: Металлургия, 1970. - 454 с.
15. Choi-Yim H., Xu D.H., Johnson W.L. Ni-based bulk metallic glass formation in the Ni-Nb-Sn and Ni-Nb-Sn-X (X = B, Fe, Cu) alloy systems // Applied Physics Letters. - 2003. - 82. - P.1030-1035.
16. Inoue A. New aluminum base alloys. // Advances in Physical Metallurgy. Amsterdam. - 1996. - P.127-134.
17. Guo F.Q., Poon S.J., Shiflet G.J. Investigation of glass formability in Al-based multinary alloys // Script. Mater. - 2000. - 43. - P.1089-1095.

Надійшла до редакції 07.12.2007

УДК 537.32

Копань В.С.,
Хуторянська Н.В.,
Копань Ю.В.

Деформація аморфних сплавів і наношаруватих композицій шліфуванням

В процесі шліфування одної поверхні фольги вона згортається в циліндр. Радіус кривини $R > 0$ для аморфних сплавів W, Mo, Ta, Ti; $R < 0$ для наношаруватих композиційних матеріалів Al-Cu, Al, Cu, Ni, Fe; $R = -(17-20)$ мм для слюди. Деформування шліфуванням може бути фізичною базою для розробки методів виготовлення виробів складної форми з крихких матеріалів.

Ключові слова: аморфний сплав, пластична деформація, шліфування.

*E-mail: kopa@pulsary.com.ua

Недоліки аморфних металевих сплавів: вони нестійкі при нагріванні, не зварюються, з них важко виготовляти вироби штампуванням. Тому необхідно шукати методи деформації сплавів без нагрівання. В статтях [1, 2] повідомлялось, що при зворотньо-поступальному шліфуванні паралельно довільно вибраному напрямку ОХ стрічка аморфного сплаву згортається в циліндр з твірною, паралельною ОХ, причому шліфувана поверхня розташовується на зовнішній поверхні циліндру. Стрічки аморфного металевих скла (АМС) виготовляються переважно методом швидкого охолодження розплаву на мідному диску [3]. З пластичних АМС штампують без нагрівання вироби складної форми. Крихкі стрічки не штампуються. Тому з них виготовляють магнітопроводи класичної форми намотуванням [3]. Методом шліфування АМС ми виготовили циліндри (діаметром до 2 мм), спіральні пружини, сегменти сфер, конуси, "сідла" тощо. АМС хімічно інертні, тому вироби складної форми з них можна використати в медицині, мікроелектроніці, аналітичній хімії, в образотворчому мистецтві. Вироби можна виготовити, деформуючи стрічки шліфуванням.

Метою роботи є дослідження явища деформування стрічок шліфуванням. АМС номінального складу $Fe_{73.6}Si_{15.8}B_{7.2}Cu_1Nb_{2.4}$ та ін.

V. Kopań,
N. Hutoryanska,
U. Kopań

The deformation of amorphous alloy and nanolayered composite materials by grinding

In the process of grinding one surface of the foil roll up in an cylinder. The crookedness radius $R > 0$ for amorphous alloy, W, Mo, Ta, Ti; $R < 0$ for nanolayered composite materials Al-Cu, Al, Cu, Ni, Fe; $R = -(17-20)$ mm for mica. The deformation by grinding may be by physical basis for making method of manufactured articles of complicated form from frail materials.

Key Words: amorphous alloy, plastic deformation, grinding.

(див. табл.1) були виготовлені у формі стрічок шириною 9 мм і товщиною 0,023 мм методом спінінгування розплаву. Автори висловлюють вдячність Маслову В.В. і Носенку В.К. (ІМФ НАНУ) за надані нам зразки АМС. Шаруваті композиції нами виготовлені методом вальцювання пакету, складеного з фольг двох металів, що чергуються. Цей метод дозволяє робити композиції з товщиною шару до 10 нм [4, 5].

Експериментальні результати та їх обговорення

Деформація шліфуванням здійснювалась наступним чином. Відрізок стрічки АМС, фольги багатошарової композиції (БШК) чи іншого металу прикріплювали на одному кінці механічним затискачем до латунної пластини товщиною 5 мм. Вона служила опорою і радіатором. Тому середня температура зразка при шліфуванні не перевершувала 80°C. Шліфування фетровим кругом, на який наносилась алмазна паста, чи інший абразив, здійснювалось впоперек поздовжньої вісі стрічки або напрямку вальцювання фольги. Внаслідок цього стрічка закручувалась у циліндр так, що мікроканавки шліфування були паралельні твірній циліндру. Якщо шліфувана поверхня залипилась зовні циліндру, то деформацію згинання вважали

додатною (з додатнім радіусом кривини R). В роботі [2] було показано, що R зменшується при збільшенні часу шліфування t та зростанні погонної густини ρ канавок, що виникають на

мкм) має деформацію, адитивну деформаціям компонент Al і Cu.

На рис. 1 наведено залежність радіуса кривини R фольги багат шарової композиції Al-

Таблиця 1

Радіуси кривини фольг R товщиною 20-25 мкм при густині канавок шліфування ρ для різних речовин (БШК- багат шарова композиція, h – товщина шару в БШК).

№ пп	Матеріал	R , см	$\rho \cdot 10^3$, см ⁻¹	Товщина фольги, мкм
1	Fe ₇₃ Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb ₃ (аморфний)	1±0,2	1,8±0,1	23
2	Fe ₇₃ Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb ₃ (кристалічний)	1,6±0,2	1,7±0,1	23
3	Fe _{73,6} Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb _{2,4} (аморфний)	0,9±0,1	1,9±0,1	23
4	Fe _{73,6} Si _{15,8} B _{7,2} Cu ₁ Nb _{2,4} (кристалічний)	1,8	1,9	23
5	Fe ₇₅ Ni ₄ Mo ₃ Si ₂ B ₁₆	1,5	1,9	23
6	Ti	4	1,7	50
7	Ta	5	1,8	50
8	W	5	1,8	40
9	Mo	10	1,8	30
10	Слюда	-(17-20)	1,9	20
11	БШК Al-Cu, $h=2$ мкм	-(2-5)	1,9	30
12	БШК Al-Cu, $h=0,01$ мкм	-3	1,8	30
13	Cu	-5	1,7	12
14	Al	-2,5	1,9	12
15	Ni	-6	1,8	25
16	Fe	-10	1,8	25
17	X18H9 (нержавіюча сталь)	-10	1,8	25

поверхні під дією абразивних зерен. Тому в таблиці 1 наведені значення R для різних матеріалів, прошліфованих в однакових умовах: діаметр алмазних зерен $d=10\pm2$ мкм, частота обертання диску $\nu=5$ об/с, радіус диску $r=15$ мм, швидкість зміщення диску у напрямку, паралельному його вісі обертання, $v=10$ см/с, $t=60$ с.

Аналізуючи таблицю 1, робимо такі висновки:

1. Аморфні матеріали і тугоплавкі метали згортаються шліфуванням в циліндр так, що шліфована поверхня є зовнішньою поверхнею циліндру ($R>0$).
2. Деформація шліфуванням металевих скла зменшується після кристалізації.
3. Слюда слабо деформується шліфуванням $R=-(17-20)$ см.
4. Традиційні метали (Al Cu Fe) і нержавіюча сталь деформуються так, що шліфована поверхня є внутрішньою поверхнею циліндру ($R<0$).
5. Наносарувата композиція Cu-Al (товщина шару $h=0,01$ мкм) деформується як і слюда, слабо, а мікросарувата ($h=2$

Cu від середньої товщини шару h . Відношення товщин алюмінієвих шарів до мідних в БШК $h_1/h_2=12/17$. Бачимо, що при $h<1$ мкм криві 2 і 3

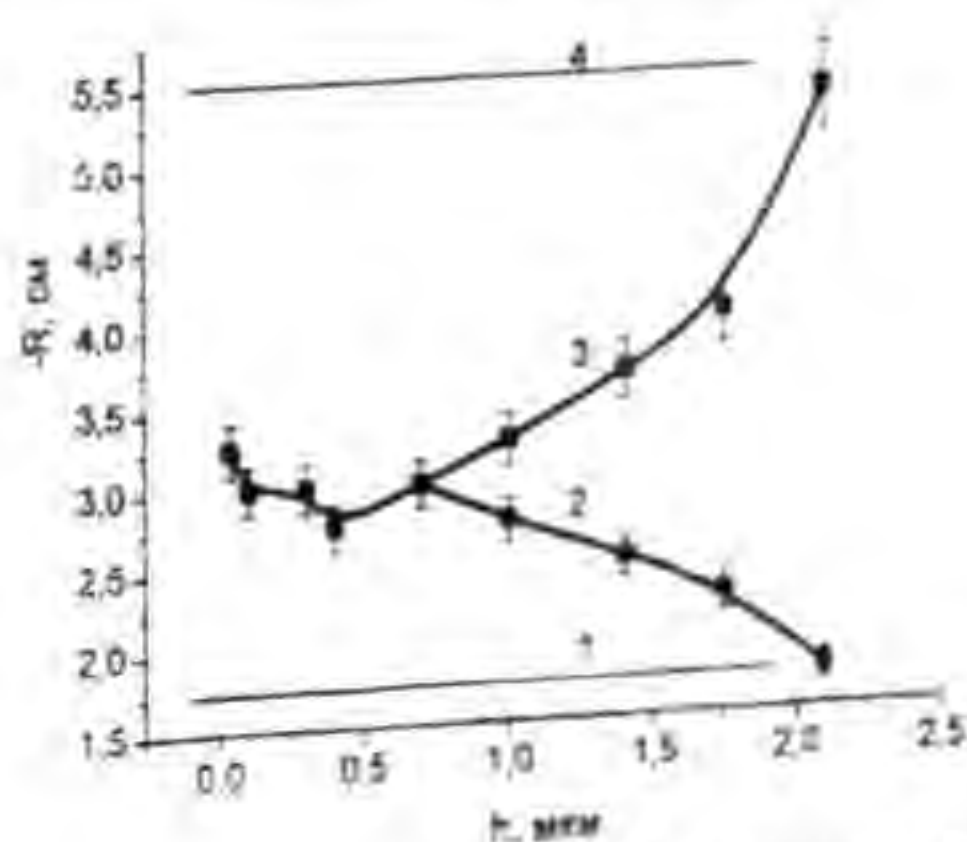


Рис. 1 Залежність радіуса кривини фольги багат шарової композиції Al-Cu від середньої товщини шару h . 1, 4 - рівень R для Al та Cu фольг відповідно.

сходяться. Коли $h>1$ мкм, то шліфується або алюмінієвий шар (крива 2), або мідний (крива 3).

Це залежить від того, який шар є зовнішнім в БШК. При $h < 1$ мкм фольга прошліфовується на глибину кількох шарів, тому R має значення, близьке до адитивного значення R , вираховане по кривим 2 і 3. Товщину пошкодженого шліфуванням шару Δh алюмінієвої або мідної фольги визначали, електролітично поліруючи прошліфовану поверхню. Товщину знятого шару визначали методом зважування. Кривина фольги круто зменшується (R зростає) при $\Delta h \sim 1$ мкм (рис.2).

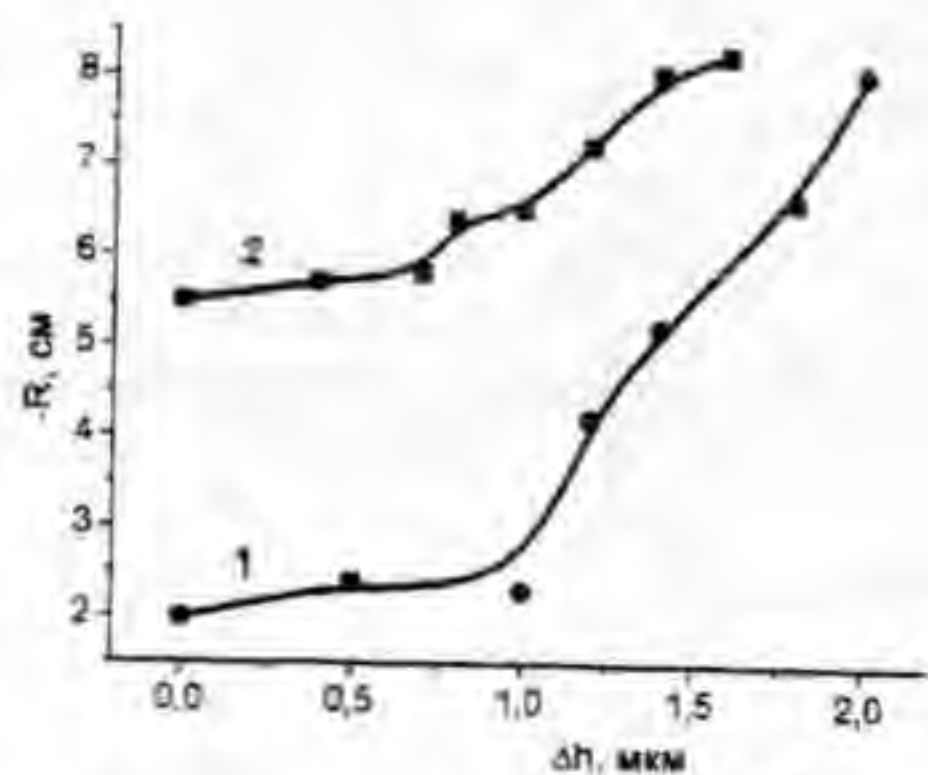


Рис. 2 Залежність радіуса кривини R фольг Al (1) та Cu (2) від товщини електрохімічно зполірованого шару Δh

Фольга стає плоскою при $\Delta h \sim 2$ мкм. Тому приходимо до висновку, що при нашому методі шліфування глибина пошкодженого шару $\Delta h \sim 1,5$ мкм. В роботі [2] доведено, що в аморфному сплаві $\Delta h = 4-5$ мкм. Полірування чистим фетром, алмазним абразивом з величиною зерна $d = 1-3$ мкм, полірування фольги металевим порошком того ж металу, з якого виготовлена фольга, не зумовлює викривлення фольги. Шліфування фольги порошком твердішого матеріалу (наприклад, з вольфрамового сплаву WC-Co) зумовлює вигинання фольги.

Профіль канавок шліфування досліджували за допомогою оптичного іммерсійного мікроскопу, фокусуючи його послідовно на дно канавки і на її схили. На рис. 3 наведено типові поперечні перерізи канавок шліфування. Слюда шліфується шляхом утворення канавок рваного типу, коли порівняно великі ділянки верхніх шарів слюди відриваються від нижніх. Фольги з $R < 0$ мають канавки з напливами ("брустверами") вище поверхні фольги. Фольги з $R > 0$ мають канавки, характерні для крихких матеріалів. Слюда "мусковіт", яку ми шліфували, є представником твердих тіл з іонним типом зв'язку і складається

з шарів. В ній слабкою компонентою є прошарки металу [5].

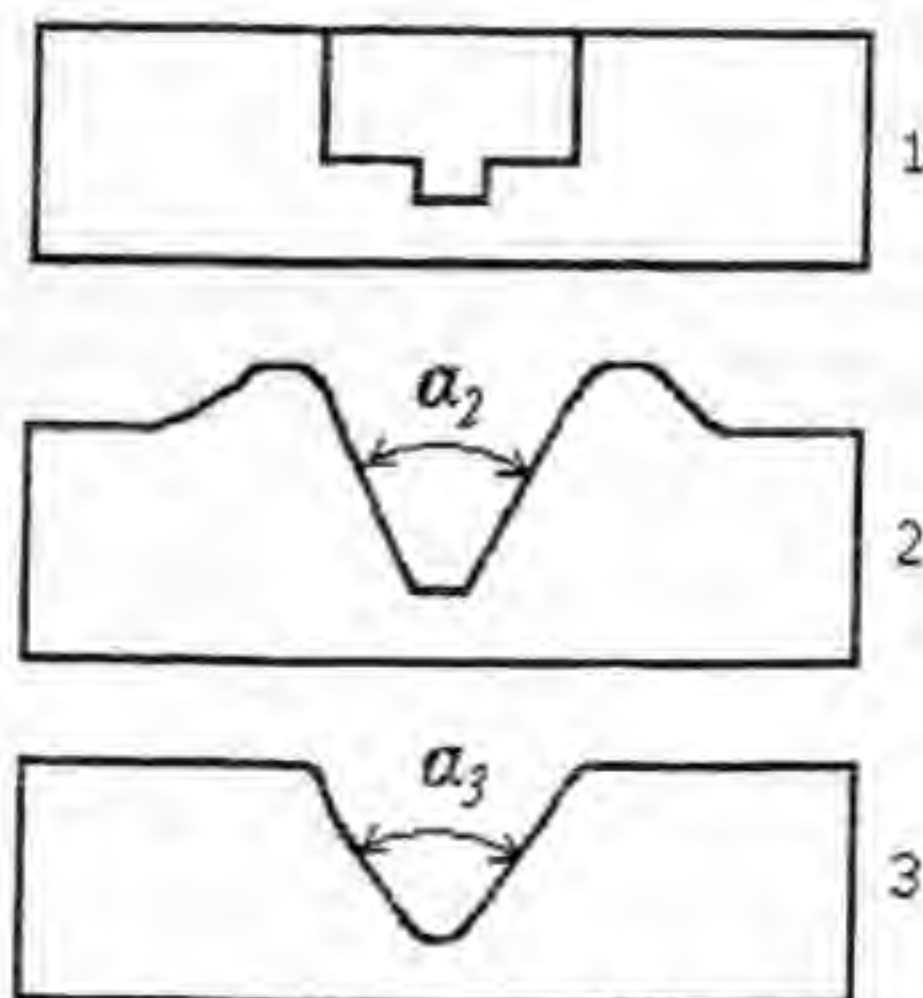


Рис. 3 Поперечні перерізи типових канавок шліфування слюди (1) та фольг з $R < 0$ (2) і $R > 0$ (3)

Вони блокують поширення мікротріщин шліфуванням всередину зразка. Тому мікротріщини затуплені (рис.3.1), напруги в шарах відсутні, зразок, практично, плоский ($R = -17-20$ см, табл.1). В фольгах м'яких кристалічних матеріалів абразивне зерно частково видавлює речовину з канавки, у вершині канавки утворюються дислокації і мікротріщини, що є енергетично не вигідними. Тому мікротріщини намагаються закритись. Цьому сприяє дифузія атомів.

При високих температурах коефіцієнт дифузії

$$D = D_0 e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (1)$$

де U – енергія активації. При температурі шліфування ($T \sim 350$ K) D незначне. Але при шліфуванні виникають напруги. Тому для дифузії понижується потенційний бар'єр U . І справедливим є рівняння

$$D = D_0 e^{-\frac{(U - \Delta U)}{kT}} \quad (2)$$

Поки напруги великі, доти мале $(U - \Delta U)$. Тому дислокації рухаються у вершині тріщини фольг з легкоплавких металів, тріщини частково закриваються і за рахунок дифузії (кут α зменшується). Фольга деформується по радіусу кривини $R < 0$. В тугоплавких металах велика енергія активації дифузії U , крім того, високі бар'єри Пайєрлса для руху дислокацій. Тому

важко зменшити $U-\Delta U$, щоб активізувати дифузію і рух дислокацій у вершинах канавок шліфування. Кут α_3 (рис.3.3) не зменшується, канавки не закриваються, фольга вигинається шліфуванням додатньо ($R>0$). Відсутність «брустверів» на поверхні фольги засвідчує, що фольги з $R>0$ шліфуються як крихкі матеріали.

В шаруватих композиціях адгезія між шарами значно більша за адгезію між шарами слою «мусковіт» [6]. Тому композиційні фольги деформуються шліфуванням як метали. Незрозумілим є механізм деформації внаслідок шліфування металевих стекл. Які дефекти зникають при релаксації напруг в аморфному сплаві – сказати важко, бо немає єдиної теорії його деформації [7, 8]. Існує багато моделей механізмів пластичності. Найбільшої уваги заслуговують наступні: моделі вільного об'єму, адіабатичної деформації, дислокаційні,

$$R = \frac{l^2 + 4H^2}{8H}, \quad (3)$$

де l і H – довжина і висота сегмента кола, форму якого має зразок. Висоту H вимірювали мікроскопом з похибкою $\Delta H=3$ мкм, а l – компаратором мікроскопу з похибкою $\Delta l=0,1$ мм. Енергію активації зміни R при відпалі зразка розраховували за формулою

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_1 / \left(\frac{dR}{dt}\right)_2 = \exp\left(\frac{\Delta U - U}{RT_1} - \frac{\Delta U - U}{RT_2}\right), \quad (4)$$

де t – час відпалу при температурах T_1 та T_2 ,

$\left(\frac{dR}{dt}\right)_1$ та $\left(\frac{dR}{dt}\right)_2$ – похідні на ізотермах $R(T_1)$ і

$R(T_2)$ в точці зміни температури. Зміну $U-\Delta U$ в залежності від зміни R в металевих стеклах при їх відпалі після шліфування відображає таблиця 2. Енергія активації $U-\Delta U$ на початку процесу

Таблиця 2

Залежність $U-\Delta U$ від R при відпалі прошліфованих стрічок сплавів $\text{Fe}_{73}\text{Si}_{15,8}\text{B}_{7,2}\text{Cu}_1\text{Nb}_3$ (колонки 1 і 2) та $\text{Fe}_{73,6}\text{Si}_{15,8}\text{B}_{7,2}\text{Cu}_1\text{Nb}_3$ (колонки 3 і 4), колонки 1 і 3 – аморфний стан, 2 і 4 – кристалічний

№ пп	R , см	$U-\Delta U$, КДж/моль			
		1	2	3	4
1	1-2	50±20	60±30	45±15	55±17
2	2-4	100±25	120±40	110±25	140±23
3	4-6	210±15	280±30	200±15	260±30
4	6-8	290±40	340±30	250±40	350±35
5	8-10	295±40	360±30	260±40	360±40

дез'юнкції [7].

В аморфній фазі дислокація – це витягнутий прошарок між сусідніми групами атомів, що рухаються одна відносно одної як намагнічені зерна в купі сталюого порошку. В аморфній фазі товщина ядра дислокації, величина і напрямок вектора Бюргера змінюються вздовж дислокації. В такій структурі між двома групами атомів можуть зустрічатись і дефекти дез'юнкції, тобто, дефекти розриву міжатомних зв'язків. Як би то не було, аморфна фаза метастабільна, сама насичена надлишковою енергією. Це повинно впливати на енергію активації $U-\Delta U$. Величину $U-\Delta U$ визначали, вимірюючи зміну R в часі при відпалі фольг. Щоб зменшити повзучість за рахунок гравітації, разок горизонтально встановлювали в печі на дві опори, розташовані на відстані $\frac{1}{4}$ від його кінців кожна. Радіус кривини R визначали за формулою

відпалу мала, бо велике ΔU , а в кінці відпалу – велика, бо релаксовані напруги в зразку (фольга стала плоскою), отже і $\Delta U=0$. В кристалічному стані (колонки 2 і 4 в таблиці 2) значення $U-\Delta U$ більші, ніж в аморфному, бо для атомів у склі більше можливостей для перегрупування, адже в них багато розмірних пустот, аналогів скупчень вакансій в полікристалах.

Для кращого розуміння фізичного механізму деформації фольг шліфуванням необхідно враховувати і явище групового переміщення матеріалу при дії алмазного зерна на поверхню. В пластичних металах якась частка матеріалу видавлюється з канавки на поверхню, утворюючи «бруствер» (рис.3.2), якась зрізається алмазним зерном і потрапляє в пил (при сухому шліфуванні), чи рідину. В крихких металах здійснити видавлювання матеріалу на поверхню важко, можна «впресувати» частину його

алмазним зерном в стінки канавки, а частину – перевести в пил. Така дія призведе до згортання фольги в циліндр з $R > 0$.

Ми розглянули явище деформації фольг шліфуванням, яке може бути покладено за основу розробки нових способів виготовлення деталей з крихких матеріалів. Принагідно нагадуємо, що явище деформації шліфуванням не завжди корисне. Наприклад, воно ускладнює виробництво мікросхем з тонких напівпровідникових кристалів [9].

Висновки

1. При шліфуванні фольги аморфного металевго скла (а також W, Mo, Ta, Ti) вздовж вісі OX вона згортається навколо вісі OX у циліндр, шліфована поверхня якого є зовнішньою (радіус кривини $R > 0$).
2. Радіус кривини циліндру, утвореного шліфуванням фольг Al, Cu, Ni, Fe нержавіючої і наношаруватої композиції Al-Cu $R < 0$.
3. Енергія активації $U - \Delta U$ процесу випрямлення фольг металевго скла на початкових етапах відпалу у 5 разів менша за $U - \Delta U$ в кінці відпалу. Це вказує на те, що випрямлення фольг здійснюється за рахунок релаксації механічних напруг.
4. Методом деформації шліфуванням крихких аморфних стрічок виготовлені циліндри діаметром до 2 мм і спіральні пружини, а також доведена принципова можливість виготовлення інших виробів складної форми.

Список використаних джерел

1. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Вплив магнітного поля і механічних

наруг на термо-е.р.с. аморфного сплаву $Fe_{78.5}Ni_1Mo_{0.5}Si_6B_{14}$ // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2006. – № 3. – С. 484–488.

2. Копань Ю.В., Хуторянська Н.В., Копань В.С. Деформування металевго скла шліфуванням // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 374–377.
3. Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. П'єзотермо-е.р.с. міді та алюмінію // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005. – № 2. – С. 421–427.
4. Копань В.С. Жаропрочность волокнистой алюминиевой проволоки // УФЖ – 1965. – №10. – С.1147–1149.
5. Копань В.С. Композиційні матеріали. – К.: університетське видавництво "Пульсари", 2004. – 198 с.
6. Копань В.С. Микрослоистые композиционные материалы на основе алюминия, меди и железа. Автореферат докторської дисертації, Київ, 1988.
7. Судзуки К., Фудзимори, Х.Хасимото К. Аморфные металлы. М. Металлургия. – 1987. – 328 с.
8. Носенко В.К. Формування аморфних сплавів та наноструктурних станів на основі Fe і Al. Автореферат докторської дисертації Київ. – 2005.
9. Макара В.А. Эволюция дислокационной структуры и механизмы деформации многослойных полупроводниковых систем. Автореферат докторської дисертації, Київ, 1986.

Надійшла до редколегії 14.12.07.

УДК 534.286-8

Корнієнко М.Є., ст. наук. співр.

Зв'язок температурного максимуму швидкості звуку в воді з колективними коливальними модами

Встановлено взаємозв'язок температурного максимуму швидкості звуку в воді з її колективними коливальними модами. Показано існування резонансного та нерезонансного внесків у швидкість звуку в водних середовищах. Обговорюється новий нелінійний механізм поширення звуку в рідинах, пов'язаний зі спільним розповсюдженням в середовищі звукових хвиль і високо-частотних мод сітки водневих зв'язків і їх нелінійною взаємодією.

Ключові слова: вода, швидкість звуку, колективна мода, резонансний внесок, нелінійна взаємодія.

E-mail: nik Korn@mail.univ.kiev.ua

1. Вступ

Колективні коливальні моди багатьох рідин добре спостерігаються методами спонтанного і вимушеного комбінаційного і гіперкомбінаційного розсіювання, а також методами ІЧ поглинання [1-11] і їх необхідно враховувати в багатьох явищах макрофізики. Акустика є однією з найдавніших наук, але незважаючи на це, проблема встановлення зв'язку між колективними коливальними модами в рідкому стані речовини і звуковими хвилями до цього часу, наскільки нам відомо, не ставилася. Для більшості рідин швидкість звуку зменшується з ростом температури T , в газах відповідно до молекулярно-кінетичної теорії швидкість звуку зростає при збільшенні T . Це вказує на істотні відмінності механізмів поширення звуку в газах і рідинах, але до теперішнього часу природа цих відмінностей була мало вивчена. Для води і водних розчинів електролітів і неелектролітів, на відміну від інших рідин, існує добре виражений температурний максимум швидкості звуку, а отже, мінімум стисливості. Максимум швидкості звуку $c_{\max} = 1555.5$ м/с спостерігається при температурі 74°C , що істотно перевищує швидкість звуку при 0°C . Дистильована вода часто застосовується як стандартна рідина при настроюванні та калібруванні установок для вимірювання швидкості звуку [12], тому виміри для води проводилися неодноразово і з

M. Ye. Korniyenko, senior res.

Connection of temperature maxima of sound speed in water with collective variation modes

Connection of a temperature maximum of sound speed in water with its collective variation modes is established. The existence of the resonant and nonresonant contributions for sound speed in water environments is shown. The new nonlinear mechanism of a sound propagation in liquids, connected with nonlinear interaction of acoustic and high-frequency modes of a hydrogen bond's net and their is discussed.

Key Words: water, speed of a sound, collective mode, resonant contribution, nonlinear interaction.

особливою ретельністю [13,14]. Природа існування максимуму швидкості звуку в водних середовищах цікава ще і тому, що в кристалах швидкість звуку як і теплопровідність зменшується при підвищенні температури. Крім температурних максимумів швидкості звуку в теплопровідності λ відомі також концентраційні екстремуми λ . Наприклад, у сумішах води зі спиртами, кислотами, ацетоном і піридіном спостерігаються концентраційні максимуми, а в розчинах CS_2 з метиловим спиртом і ацетоном спостерігаються мінімуми швидкості звуку [12]. Були спроби пояснити закономірності, що спостерігаються, двофазною моделлю води, а також гідратацією іонів і їх дією на структуру вільної води та взаємодією іонів, але в цій проблемі є дуже багато незрозумілого [12,15-17].

Необхідно відзначити подібність максимуму швидкості звуку та температурного максимуму теплопровідності води при $120-130^{\circ}\text{C}$ [18]. Встановити природу максимумів теплопровідності рідин виявилось легше в зв'язку з тим, що такі максимуми існують не тільки у воді, але й у гліколях і гліцерині, а також ряді криогенних рідин (He , H_2) і рідких металів (Li , Hg , Cs). У роботі [18] вперше було встановлено, що максимуми теплопровідності рідин обумовлені існуванням у них колективних коливальних мод. Вони спостерігаються при рівності середньої теплової енергії коливаних частинок kT енергії відповідних оптичних

Представлено:
д.ф.-м.н., проф. Адаменко І.І.

фононів, тобто при резонансі індивідуальних і колективних теплових рухів молекул у рідинах. У даній роботі ця концепція переноситься на поширення звуку в водних середовищах. Проведено порівняння результатів різних авторів по вимірюванню швидкості звуку у воді та встановлено взаємозв'язок температурного максимуму швидкості звуку з високочастотними акустичними модами води. Встановлено існування резонансного u_R та нерезонансного u_0 внесків у швидкість звуку в воді. Вивчено зміну резонансних властивостей швидкості звуку при високих тисках. Крім положень максимумів $u_{\max}$ розглянуто також зміну резонансних і нерезонансних внесків $u_{R,0}$ і напівширин максимумів δT з тиском, що надає додаткову інформацію для інтерпретації результатів. Виявлено існування трьох резонансів у швидкості звуку, пов'язаних з різними коливальними модами води. Розглядається новий додатковий механізм поширення звуку в рідинах.

2. Зв'язок температурного максимуму швидкості звуку в воді

з високочастотною акустичною модою

Для аналізу резонансних властивостей поширення звуку в воді ми використовуємо відомі табличні дані для температурних залежностей швидкості звуку $u(T)$ в інтервалі температур існування рідкої фази при нормальних умовах (0-100°C) і широкої області тисків P [13,14,16,17]. Експериментальні

залежності $u(T)$ для води в області максимуму досить добре апроксимуються параболою, а у всій області експериментальних вимірів - поліномом п'ятого ступеня [12,13]. Аналогічну процедуру ми використовували при аналізі резонансних властивостей теплопровідності рідин [18]. Таке наближення можна використовувати для більш точного визначення температурного положення максимумів швидкості звуку чи теплопровідності. Приклади параболічної апроксимації для максимумів швидкості звуку в воді показані на рис.1а. З рисунка видно, що з ростом тиску швидкість звуку в воді зростає, максимум розширюється і зміщується в сторону більш високих температур. Зокрема, при тиску ~950 атм і температурі 87.7°C швидкість звуку досягає величини ~1730 м/с. Параболічна апроксимація експериментальних даних дозволяє аналітично знаходити температури максимумів $T_{\max}$ швидкості звуку. Обчисленим значенням $T_{\max}$ відповідають певні енергії термічно збуджуваних коливальних станів, як це розглядається в теорії теплоємностей газів. Як встановлено в [18] для максимуму теплопровідності води середня теплова енергія коливаних частинок kT дорівнює енергії поздовжних оптичних фононів $\hbar c v_{LO}$ для колективних коливальних мод сітки водневих зв'язків (ВР). Відповідно до результатів спектральних вимірів при тиску 1 атм частота поздовжньої оптичної моди $v_{LO}=270 \text{ cm}^{-1}$ [7-9].

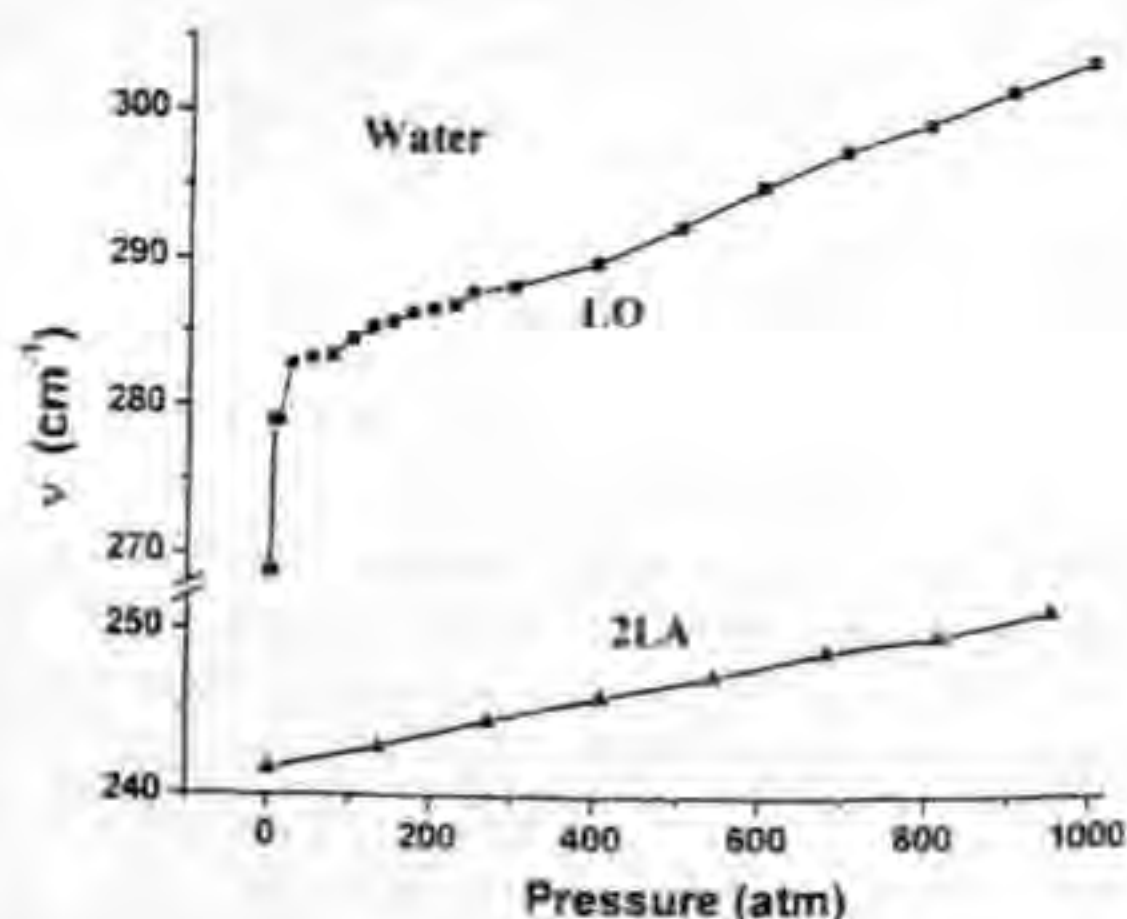
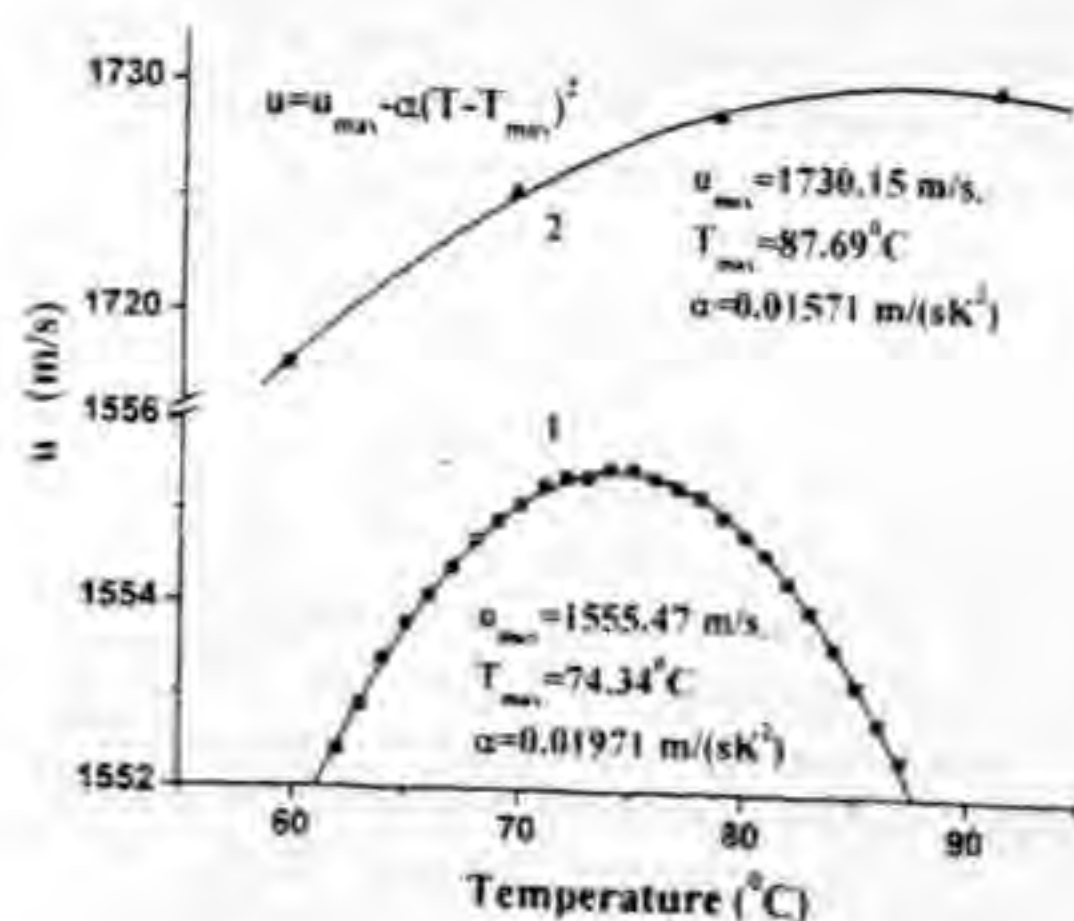


Рис.1. (а) Параболічна апроксимація температурних максимумів швидкості звуку в воді при тиску 1 атм (крива 1) і 952,35 атм (крива 2). (б) Залежність від тиску частот колективних

коливальних мод води, які визначають температурні максимуми швидкості звуку у воді (нижня крива) і її теплопровідності (верхня крива).

Використовуючи умову $h\nu = kT$, легко знайти хвильові числа ν для коливальних мод, відповідаючих максимумам швидкості звуку в воді при різних тисках [18]. Зростання частот відповідних коливальних мод у воді з ростом тиску ілюструється нижньою кривою на рис.1б. Тут же для порівняння показана залежність $\nu_{LO}(P)$, розрахована в [18] по температурним максимумам теплопровідності. Відповідно до результатів спектральних досліджень води максимум швидкості звуку відповідає обертоном 2LA граничної частоти поздовжньої акустичної моди ($\nu_{LA} \sim 120-125 \text{ cm}^{-1}$). Зростання частот коливальних мод 2LA і LO з ростом тиску вказує на зміцнення сітки ВР. Слід відзначити, що частота більш високочастотної оптичної LO моди змінюється швидше, причому з ростом тиску частота оптичної моди спочатку різко зростає приблизно на 20 cm^{-1} , а для акустичної LA моди такий швидкий ріст не спостерігається і її частота підвищується плавно. Отже тиск в більшій мірі впливає на посилення колективних властивостей більш високочастотних мод. Таким чином, температурні максимуми швидкості звуку і теплопровідності води, існування яких дуже довгий час не мало правильного фізичного пояснення, обумовлені проявом поздовжніх акустичних і оптичних мод.

3. Про існування трьох резонансів у температурному максимумі швидкості звуку в воді

Використання поліноміальних апроксимацій для максимумів швидкості звуку в водних середовищах не дуже відповідає фізичній суті задачі. Використання типових гаусової чи лоренцевої форм резонансних кривих для апроксимації експериментальних залежностей $u(T)$ дозволяє отримувати істотно більше корисної інформації. Це дозволяє крім температурних положень максимумів T_{max} визначати також амплітуди та напівширини δT досліджуваних резонансів. Максимум $u(T)$ для дистильованої води досить плавний, але не дуже добре приближається гауссовою чи лоренцевою функціями. У зв'язку з цим ми провели додаткові дослідження прихованої внутрішньої структури широкого максимуму швидкості звуку в воді. Для цього ми використовували різниці різних експериментальних даних для швидкості звуку в воді, а також результати вимірів залежностей $u(T)$ при різних тисках. Для прикладу на рис.2 показані різниці Δu експериментальних даних для швидкості звуку в воді за даними робіт

[14,16,17]. Видно, що для кривої 1 спостерігаються виражені максимуми біля 30°C і 60°C , а також крило високотемпературного резонансу з максимумом при $T > 100^\circ\text{C}$. Швидкість звуку в більшості випадків вимірюється методом ультразвуково-го інтерферометра чи оптичним

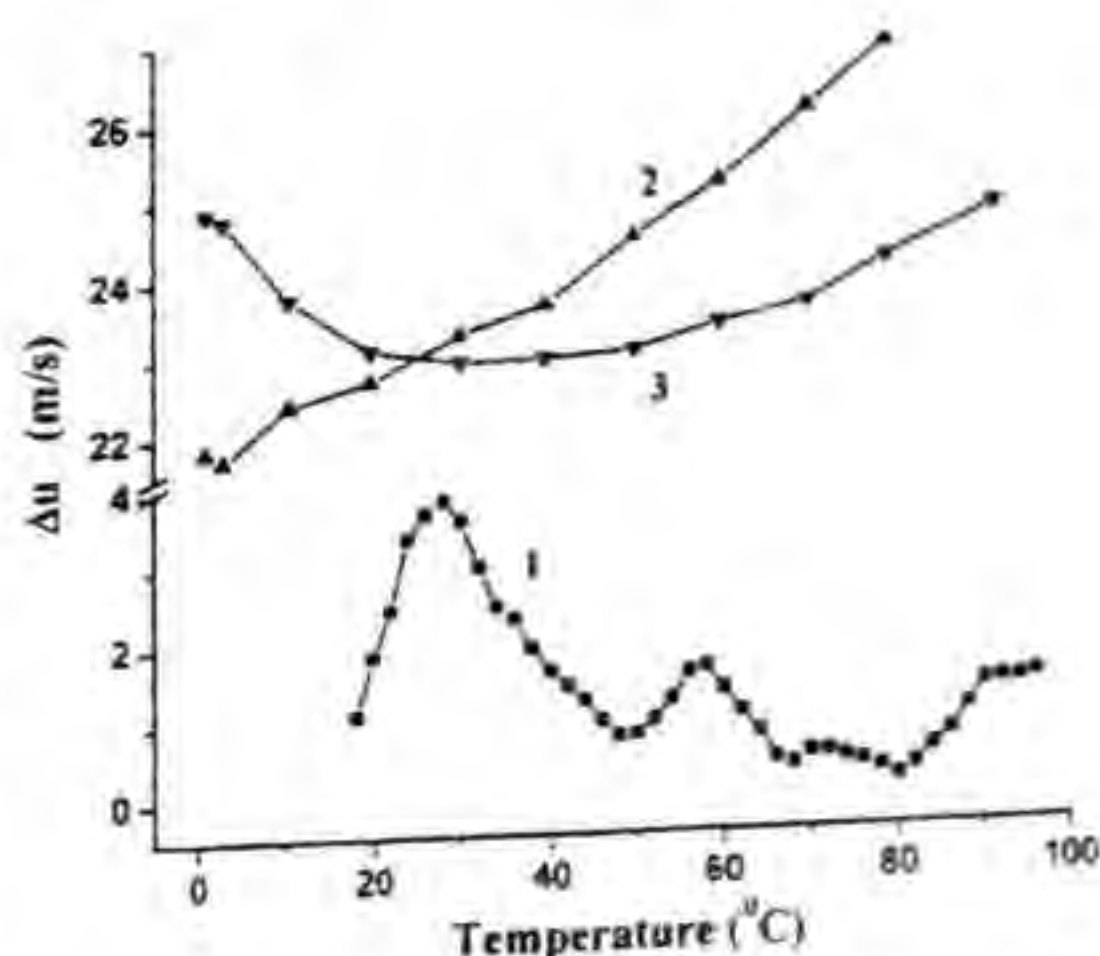


Рис.2. Залежності різниць швидкості звуку в воді при нормальних умовах згідно даним робіт [17] і [16] (крива 1) і при тисках 136.05 і 1 атм (крива 2), а також 688.25 і 544.2 атм (крива 3) за даними роботи [14].

методом і має точність близько 0,01-0,05% [16,17]. Тому на рис.2 відхилення в області низьких температур істотно перевищує похибки вимірювань. Такі відмінності результатів можна пояснити наявністю декількох резонансів в максимумі швидкості звуку і невеликою зміною співвідношення їх амплітуд при неконтрольованих змінах стану води. Аналогічні різниці Δu , екстремуми яких не співпадають з максимумом u , можна отримати при відніманні залежностей $u(T)$ у випадку підвищених тисків P [14]. Спочатку з ростом P різниця Δu монотонно зростає при підвищенні T , що показано кривою 2 на рис.2. Це вказує на внесок у зміну швидкості звуку високочастотної коливальної моди, аналогічної LO моді, максимум якої розташований при $T > 100^\circ\text{C}$ подібно максимуму теплопровідності води. В області підвищених тисків, незважаючи на загальне збільшення швидкості звуку, в різниці Δu починає формуватися мінімум, обумовлений зменшенням внеску низькотемпературного резонансу (див. криву 3 на рис.2). Цей мінімум істотно ширший максимумів на кривій 1, тому в нього можуть давати внески два низькотемпературні резонанси.

Таким чином, в температурний максимум швидкості звуку в воді дають внески три резонанси, обумовлені впливами різних коливальних мод. Наявність декількох резонансів підтверджується також явним спостереженням окремих резонансів швидкості звуку в водних розчинах кислот і лугів, що буде розглянуто в окремій публікації. Зміни трьох резонансних внесків з ростом тиску детально буде проаналізовано в наступному розділі.

Результати розкладання температурної залежності швидкості звуку в воді на три компоненти гауссової чи лоренцевої форми показані на рис.3а,б і частково приведені в табл.1. Ці розкладання показують, що температурне положення окремих компонент слабо залежить від форми кривих. Для розглянутих розкладань характерне зростання амплітуд елементарних складових з ростом температури їх максимумів, що корелює з

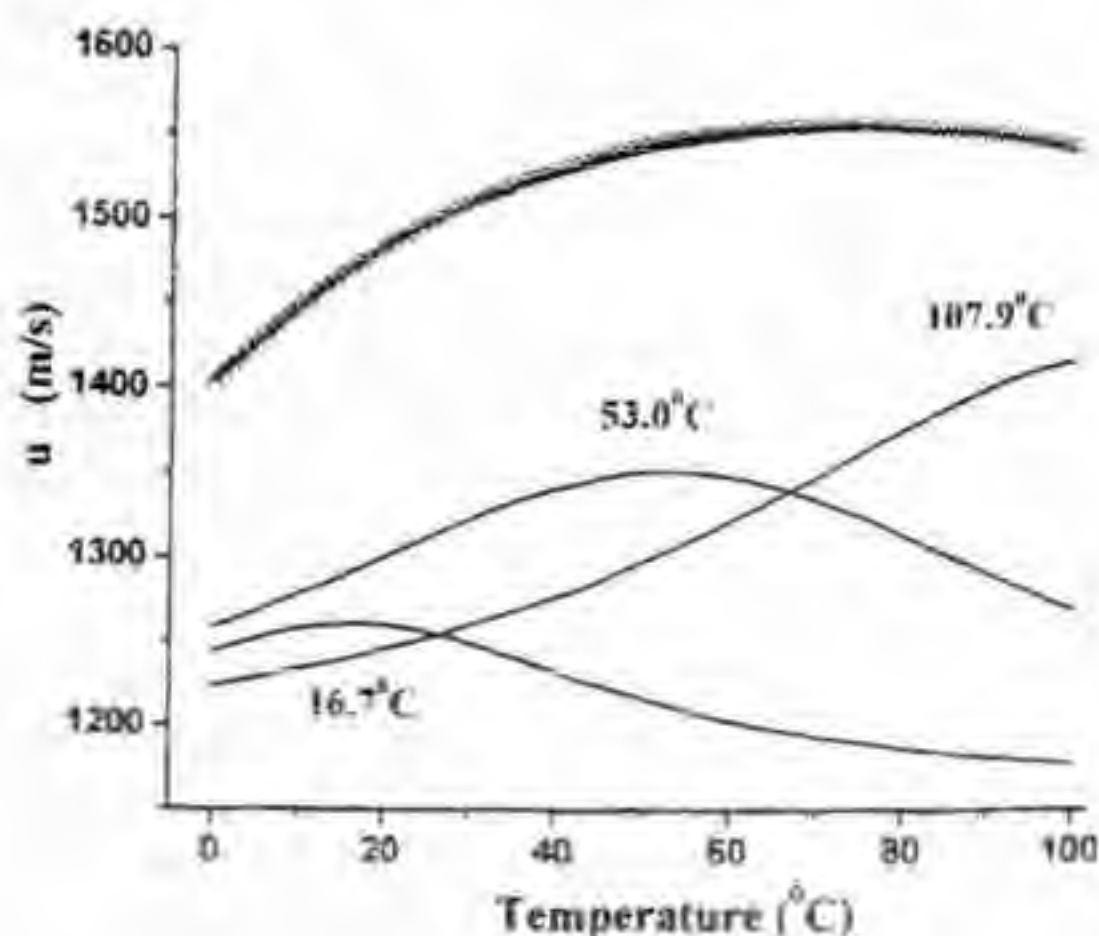
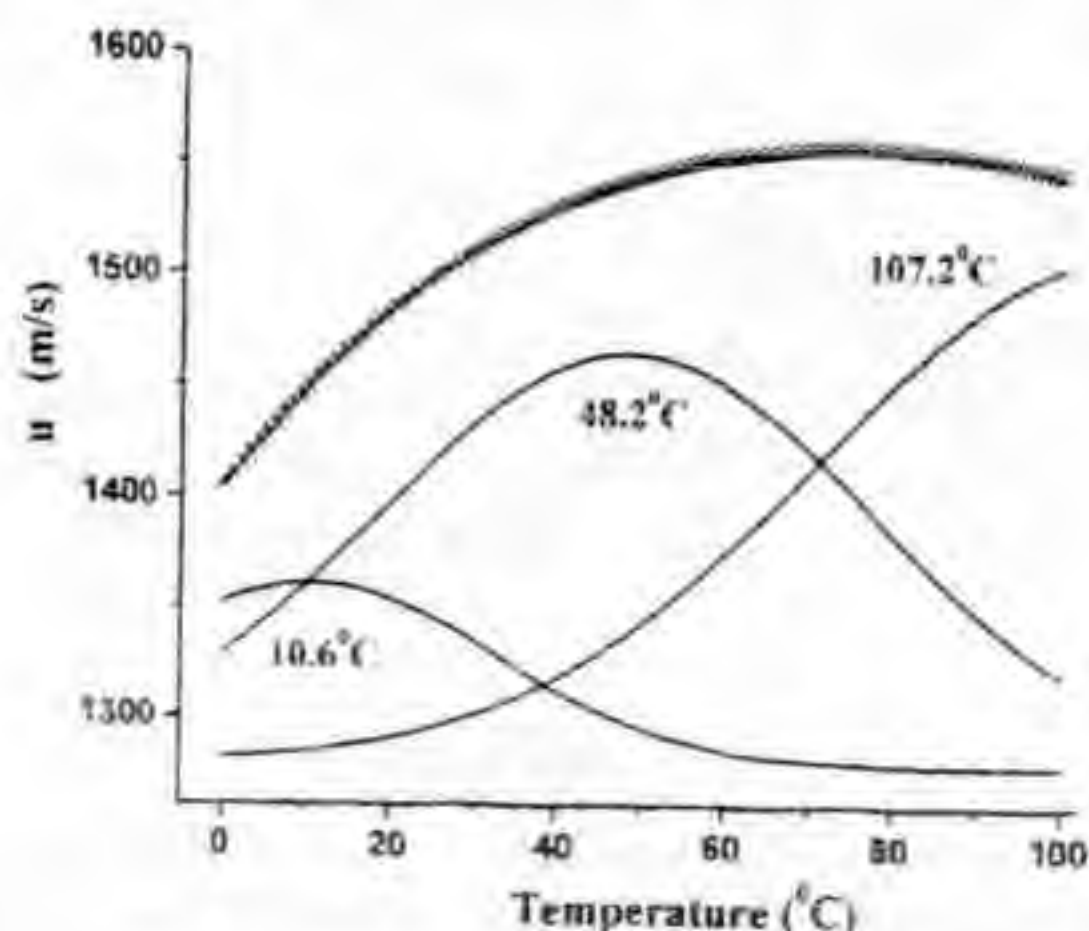


Рис.3а,б. Розкладання температурного максимуму швидкості звуку в воді при тиску 1

атм [13] на три компоненти гауссової (а) та лоренцевої форми (б).

посиленням колективних властивостей мод з ростом частоти. В результаті більш сильного перекриття далеких крил лоренціанів їх амплітуди менші. Важливо також, що нерезонансні внески u_0 істотно перевищують резонансні u_R . Цим поширення звуку різко відрізняється від явища теплопровідності водних середовищ, де резонансний внесок є домінуючим. Вкажемо, що величини u_0 характеризують швидкість поширення звуку в воді без внеску колективних коливальних мод. Згідно розкладанню залежності $u(T)$ на складові гауссової форми $u_0 = 1278.5$ м/с, а для лоренцевої

форми окремих резонансів $u_0 = 1161$ м/с, що значно менше, ніж швидкість звуку при 0°C . Отже, при всіх температурах колективні коливальні моди вносять істотний вклад у швидкість звуку в воді і з ростом температури цей внесок в основному підсилюється. Слід відзначити, що для гауссіанів максимальне відхилення обчисленої сумарної кривої від експериментальних даних менше 0,8 м/с, а відносна точність розкладання менше 0,04%, що порівняно з точністю експерименту. При розкладанні на компоненти лоренцевої форми це відхилення виявляється трохи більшим.

Таблиця 1.
Параметри розкладання температурного максимуму швидкості звуку в воді на коливальні резонанси гауссової форми

№ п/п	Мода	$T_{\max}, ^\circ\text{C}$	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	ν, cm^{-1}	$\delta\nu, \text{cm}^{-1}$	$u_R, \text{м/с}$	$u_0, \text{м/с}$
1	LA+TA	10.6	43.9	197.2	30.5	81.9	
2	2LA	48.2	59.6	223.3	41.4	184.8	1278.5
3	LO	107.2	71.6	264.4	49.8	227.9	

Перейдемо до фізичного аналізу проведеного розкладання на компоненти максимумів швидкості звуку. По положенням по осі температур окремих резонансів у швидкості звуку відповідно до умови $h\nu = kT_{\max}$ були розраховані частоти трьох коливальних мод. Аналогічним чином за температурними напівширинами δT окремих резонансів можна визначити ефективні напівширини резонансних мод $\delta\nu = k\delta T/h$. Відповідні значення ν , а також напівширини резонансів $\delta\nu$ наведені в табл.1. Ясно, що найбільш високочастотна мода відповідає LO моді, що домінує в максимумі теплопровідності води. Середня мода найбільш близька до максимуму швидкості звуку у воді. Для неї $\nu = 223-227 \text{ см}^{-1}$, і вона без сумніву відповідає обертому 2LA поздовжньої акустичної моди, що відзначалося в попередньому розділі. Прояв у максимумі швидкості звуку обертому, а не основного тону акустичної моди не є несподіваним. Це пов'язано з тим, що колективні властивості рідин підсилюються при підвищенні частоти. Зокрема, у [10] встановлено, що колективні моди рідин можуть бути добре вираженими в області сумарних тонів і обертонах і бути відсутніми в області низьких частот і різницевих тонів. Низькотемпературний резонанс у швидкості звуку при $\nu = 197-201 \text{ см}^{-1}$ близький до частоти сумарного тону LA+TA. Дійсно, віднімаючи від частоти сумарного тону LA+TA відому величину $\nu_{LA} = 125 \text{ см}^{-1}$, знаходимо частоту $\nu_{TA} \sim 75 \text{ см}^{-1}$. Ця величина добре узгоджується з результатами прямих спектральних досліджень [7-9].

Ефективні напівширини окремих

резонансів відповідають внеску всіх колективізованих станів відповідних дисперсійних віток $\omega(k)$ при довільних хвильових векторах. Тому розширення області існування колективних коливальних мод буде приводити до збільшення відповідних напівширин $\delta\nu$. Відповідно до проведених розкладань напівширини мод і амплітуди окремих резонансів зростають з ростом частоти, що вказує на підсилення їх колективних властивостей.

3. Зміна резонансів швидкості звуку в воді з ростом тиску

Зміни температурних максимумів швидкості звуку в воді з ростом тиску було досліджено в роботі [14]. Використовуючи чисельні дані цієї роботи ми детально вивчили зміну резонансних властивостей швидкості звуку шляхом розкладання залежностей $u(T)$ при фіксованому P на дві чи три складові гауссової форми. Приклади такого розкладання для областей низьких і високих тисків показані на рис.4а,б. З ростом тиску до 950 атм максимум швидкості звуку в воді зростає приблизно від 1555 м/с до 1730 м/с [14] (див.також рис.1а). Істотно більше підвищення швидкості звуку досягається у водних розчинах лугів при нормальному тиску [17]. З рис.4 видно, що з ростом P амплітуди двох більш низькотемпературних резонансів приблизно рівні на відміну від тиску 1 атм, коли внесок сумарного тону LA+TA мінімальний, що добре видно на рис.3. Імовірно, це можна інтерпретувати як підсилення з ростом тиску колективних властивостей води в області більш низьких частот.

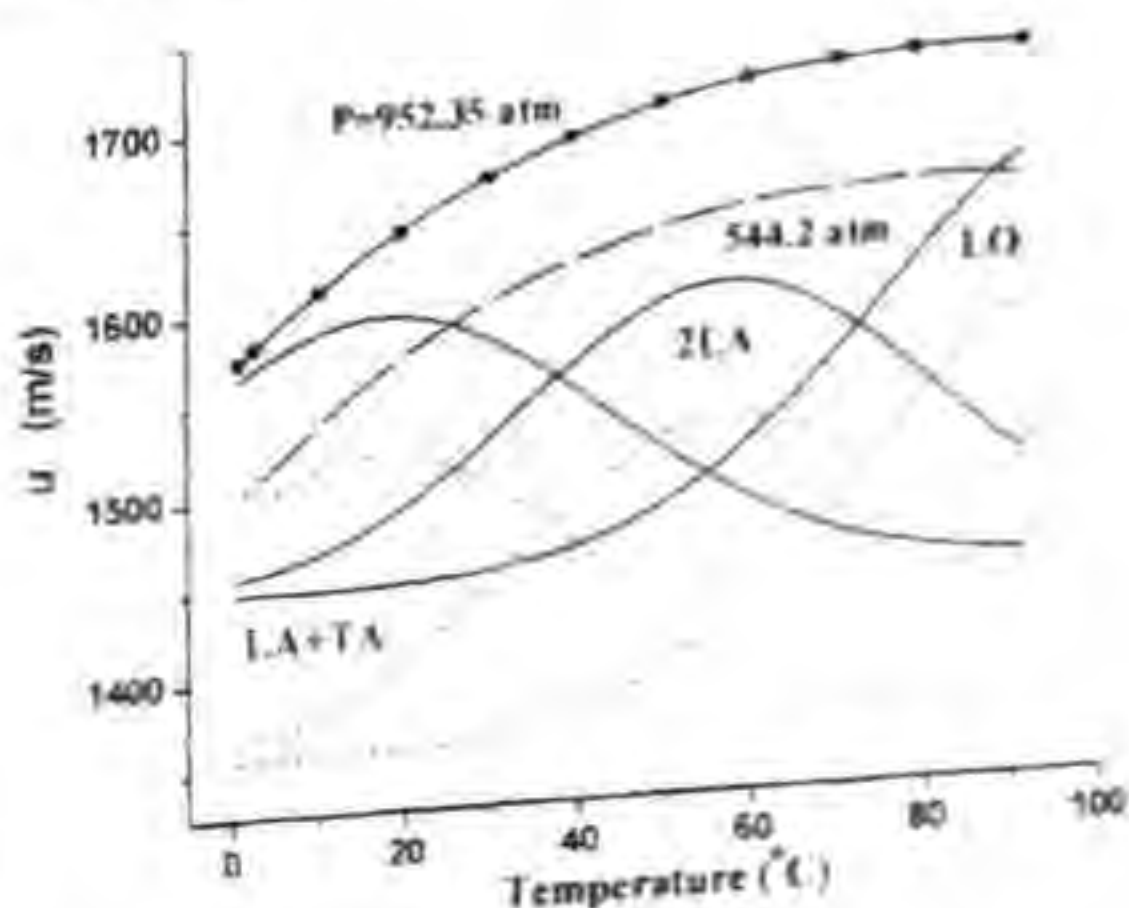
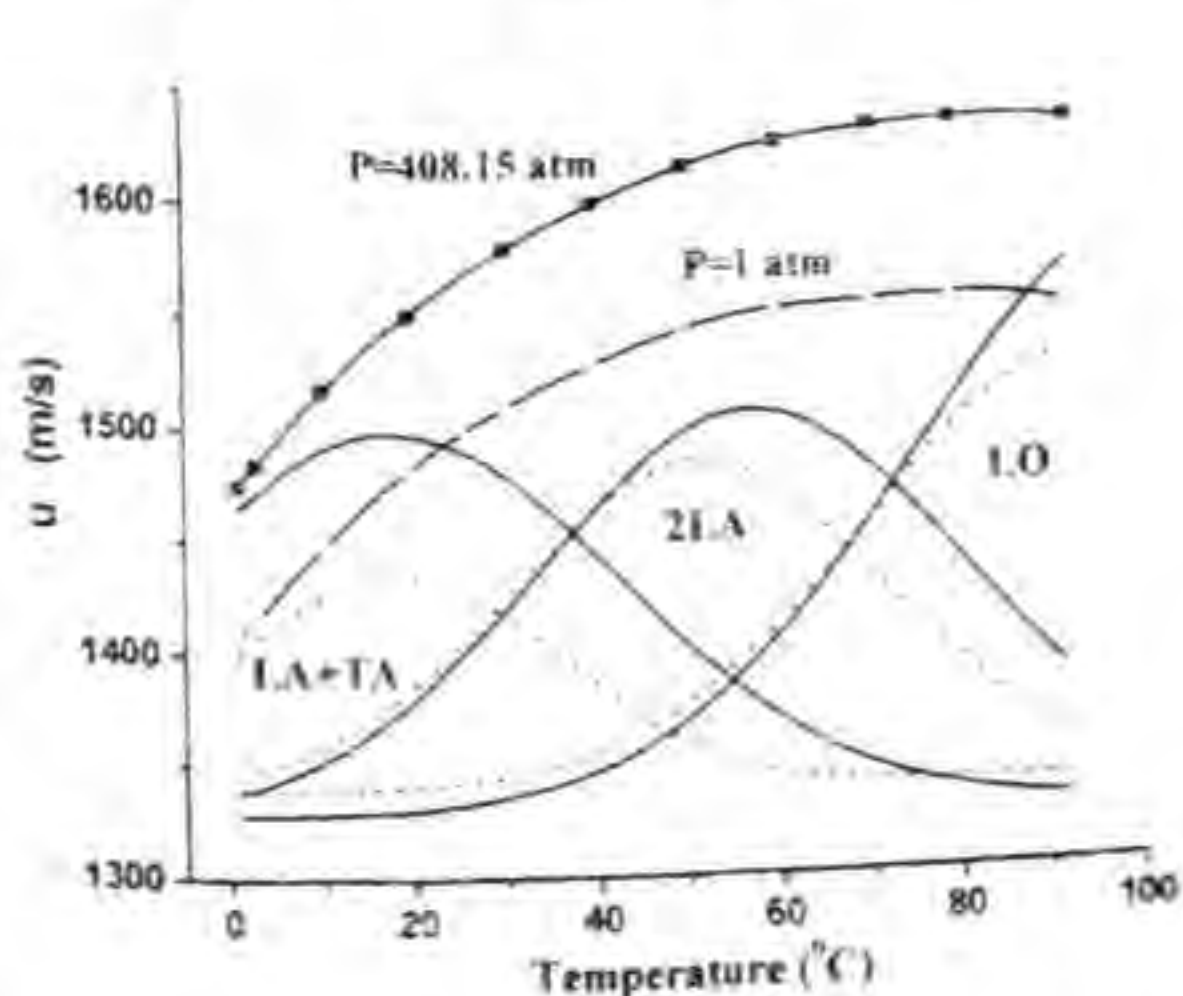


Рис 4. Розкладання температурних максимумів швидкості звуку в воді $u(T)$ в області більш низьких (а) і високих (б) тисків на три резонанси гауссової форми. Для більш високих значень тиску окремі складові показані суцільними кривими, а при більш низьких тисках - крапковими кривими.

За визначеними температурами трьох максимумів $T_{\max j}$ ($j=1,2,3$) розглянутих коливальних резонансів і їх температурними напівширинами δT_j були розраховані частоти відповідних коливальних мод $\nu_j = kT_{\max j}/hc = \alpha T_{\max j}$, де $\alpha = 0.69502 \text{ cm}^{-1}/\text{K}$, а також їх напівширини $\delta \nu_j = \alpha \delta T_j$. Отримані залежності резонансних частот і їх напівширин від тиску P показані на рис.5а,б. Частоти мод LA+TA, 2LA і LO мало змінюються при зростанні тиску майже до 10^3 атм, тому їх інтерпретація з ростом тиску не змінюється. Для порівняння на рис.5а показана також залежність $\nu_{\max}(P)$, отримана шляхом параболічної апроксимації максимумів швидкості.

Слід відзначити ще деякі причини, що вимагають розкладання температурного

максимуму швидкості звуку в воді на три коливальні складові. Як уже зазначалося, експериментальні дані погано наближаються одним гауссіаном. Отримувані при цьому положення максимумів компонент помітно відхиляються в область низьких частот від положень максимумів експериментальних кривих. При наближенні експериментальних даних двома гауссіанами частоти мод (див. криві 1,2а) зменшуються в області великих тисків після невеликого збільшення при тисках 200-400 атм. Точність розкладання, що досягається при цьому, також недостатня, тому що така поведінка частот компонент суперечить росту частоти максимума експериментальних даних. І тільки при розкладанні залежностей $u(T)$ на три гауссіана -

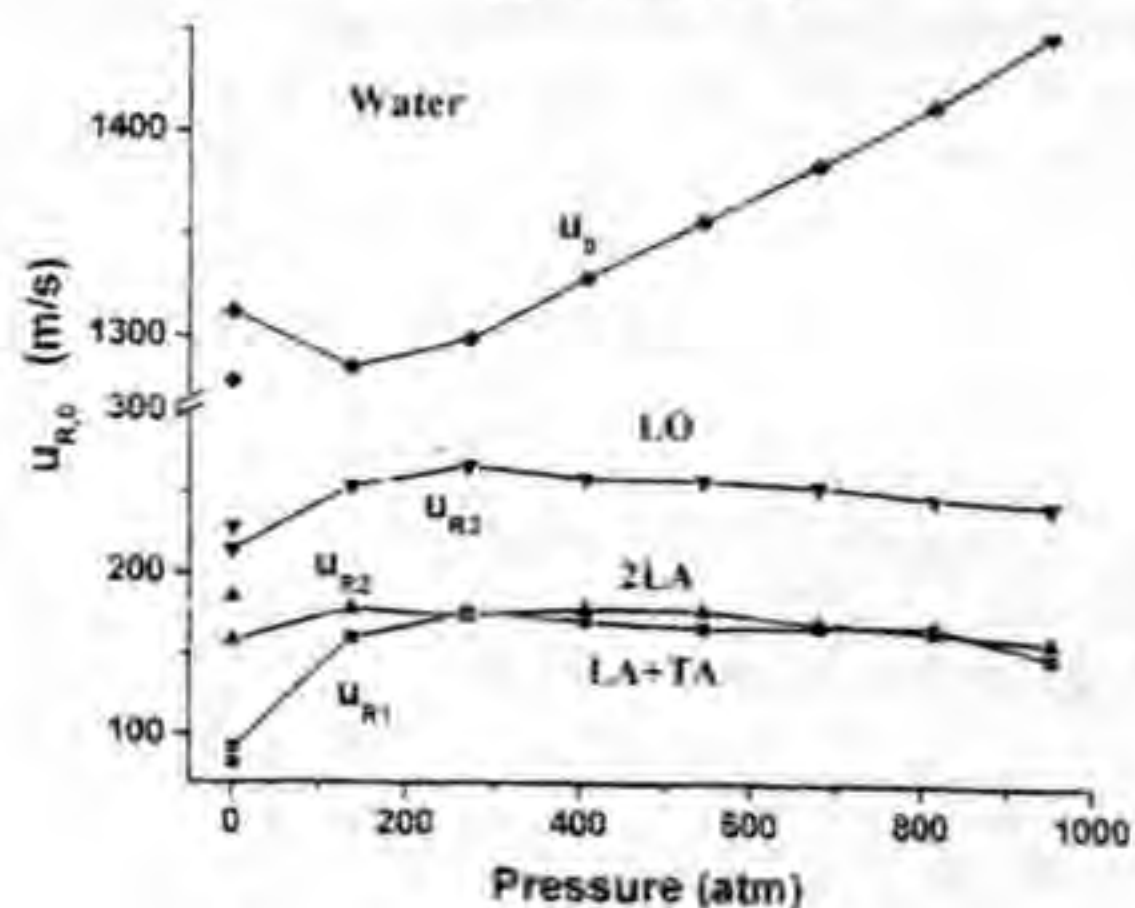
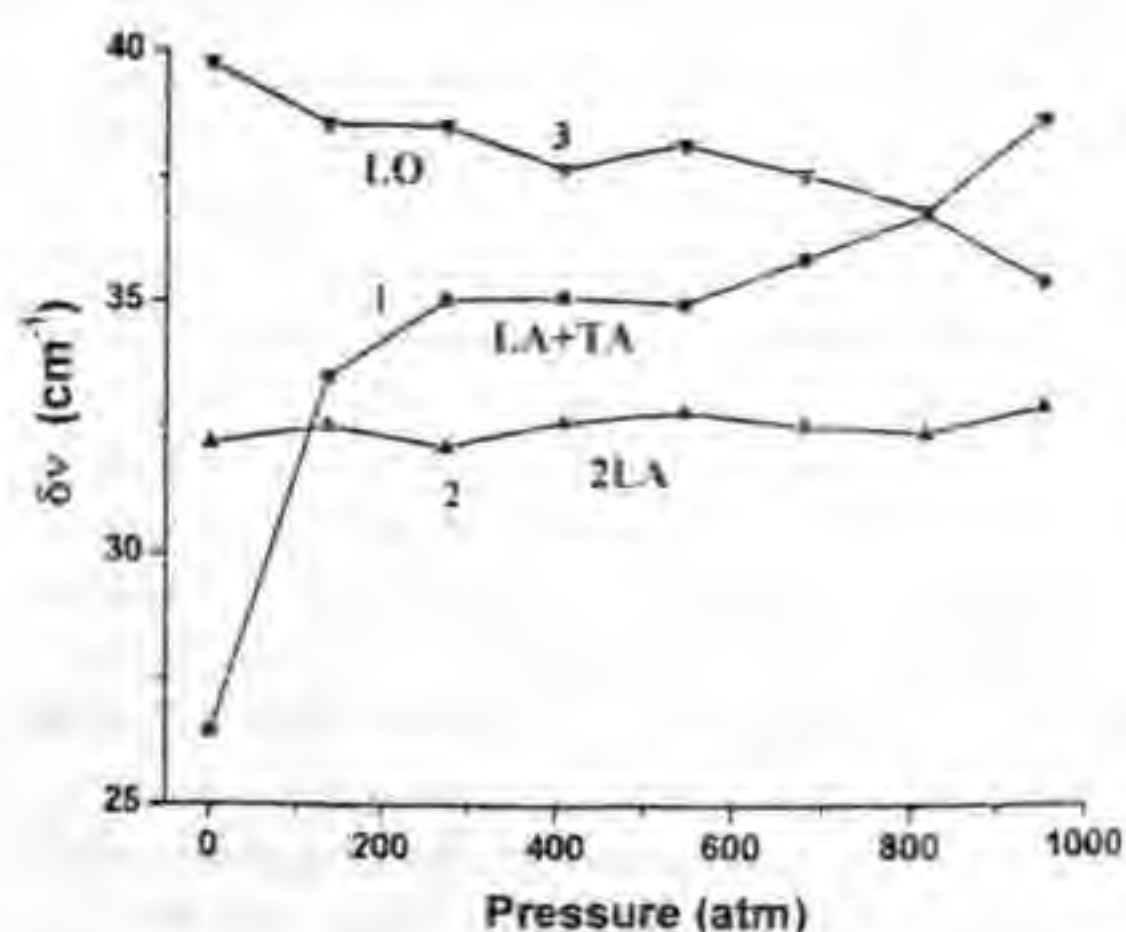
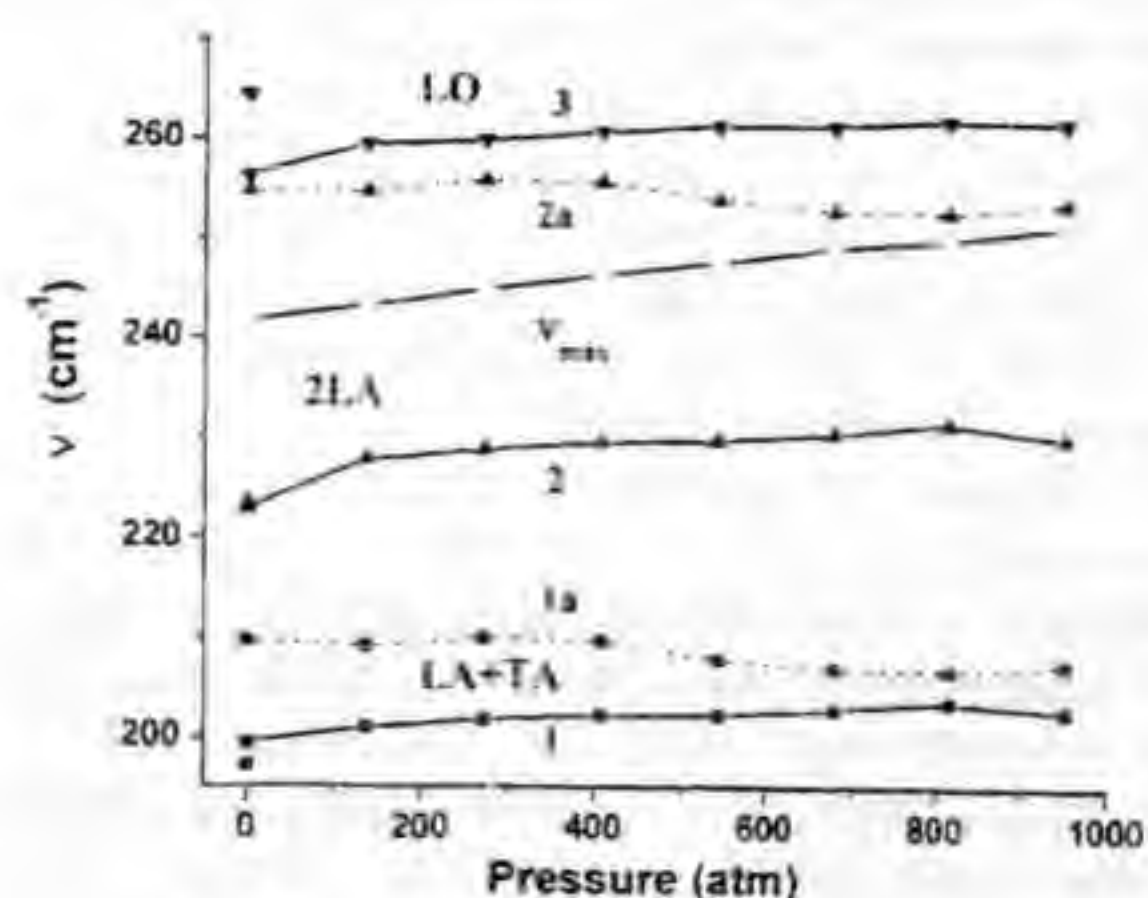


Рис.5. Залежності від тиску частот трьох колективних коливальних мод, що вносять резонансний внесок у збільшення швидкості звуку в воді (криві 1,2,3), а також частот при розкладанні на дві компоненти (криві 1,2а) (а) і їх напівширин (б), а також резонансних u_{Rj} і нерезонансного u_0 внесків у швидкість звуку (с).

частоти всіх компонентів в середньому плавно зростають з ростом тиску. В ідейному відношенні необхідність розкладання на три компоненти обумовлена тим, що в цьому випадку послідовно враховуються всі коливальні резонанси першого і

другого порядку LA+TA, 2LA і LO, що попадають у смугу широкого максимуму швидкості звуку в воді. При цьому в розкладанні з'являється найбільш важливий середній компонент 2LA. Крім того перший і третій

компоненти (LA+TA і LO) краще узгоджуються зі спектральними даними по частотах колективних коливальних мод. В результаті обмеженості експериментальних даних в області високих температур, точність визначення частоти LO моди по швидкості звуку менша, ніж по теплопровідності води. Зокрема, для найбільш детальних даних по швидкості звуку в воді при 1 атм [13] LO мода має більш високу частоту, а частоти інших мод практично не змінюються. Цим значенням частот коливальних мод відповідають додаткові знаки в лівій частині рис.5а.

Розглянемо зміну з P ефективних напівширин аналізованих мод (рис.5b). Напівширина моди 2LA практично не змінюється, а для моди LO вона навіть трохи зменшується, що може бути пов'язане з послабленням її колективних властивостей. В найбільшій мірі змінюється напівширина низькочастотної LA+TA моди. Її розширення з ростом тиску може бути викликано розширенням області колективізованих станів, що узгоджується з ростом амплітуди низькочастотної моди в розкладаннях максимуму швидкості на рис.4. Але в цілому найбільш колективізованою виявляється високочастотна LO мода, бо її напівширина залишається найбільшою. Напівшини всіх мод більш ніж у п'ять разів менше їхніх частот, що вказує на хорошу вираженість розглядуваних колективних мод.

Зміни з ростом P резонансних і нерезонансних внесків у швидкість звуку в воді показані на рис.5с. Як уже вказувалося вище у швидкості звуку в воді домінує нерезонансний внесок u_0 , що слабо залежить від температури. Цей внесок в u_{max} перевищує 80% і в області високих тисків зростає приблизно по лінійному закону. На низьких частотах ($\sim$ кГц- МГц), на яких проводилися вимірювання швидкості звуку, поперечні коливальні моди води відсутні і основний внесок у процес поширення звуку в рідкому середовищі, аналогічно газам, вносять поздовжні хвилі, що існують завдяки пружним властивостям суцільного середовища. Внесок колективних коливальних мод у швидкість звуку не перевищує 15%, однак саме він забезпечує існування вираженого температурного максимуму швидкості звуку в воді. Внески коливальних мод у величину швидкості звуку з ростом P спочатку зростають і після досягнення максимумів зменшуються. При підсиленні колективних властивостей коливальних мод в області середніх тисків нерезонансний внесок

зменшується і досягає мінімуму (рис.5с). На закінчення відзначимо, що в широкій області тисків внески 2LA і LA+TA мод приблизно рівні, хоча в області низьких тисків внесок обертопу 2LA істотно більший, що видно на рис.3.

4. Обговорення результатів

Задача про поширення механічного збурення в багаточастинковому конденсованому молекулярному середовищі є досить складною. Її коректна постановка до формування уявлень про колективні коливальні моди рідких середовищ навряд чи була можлива. Спроби наближеного розв'язку цієї задачі пов'язані з використанням певних моделей. Для формування правильних фізичних уявлень про природу акустичних явищ найбільше значення має теоретичний розгляд поширення звукових хвиль в ідеальному газі й ідеальних кристалічних ґратках. Слід відзначити, що в газових середовищах існування колективних акустичних хвиль пов'язано з хаотичним тепловим рухом молекул. Тому швидкість звуку близька до середньої швидкості теплового руху молекул, що обумовлено їх переміщенням з областей згущення в області розрідження [12]. У випадку, коли довжина акустичної хвилі значно перевищує довжину вільного пробігу молекул застосовне наближення суцільного пружного середовища і хвильовий підхід. Для кристалічних ґраток, зокрема, для одномірних атомарних ґраток добре відомі дисперсійні вітки акустичних і оптичних фононів. Зокрема, дисперсійні вітки акустичних мод проходять від нульової частоти до гранично високих частот, що відповідають краю зони Бриллюена. Для неупорядкованих конденсованих середовищ ці дисперсійні вітки погіршуються і трансформуються в менш виражені і розпливчаті дисперсійні зони. Для рідин на низьких частотах дисперсійні хвилі зникають, але їхні сліди зберігаються в області високих частот. В високочастотній області рідини як конденсовані середовища за властивостями істотно ближче до твердих тіл, ніж до газів. В області граничних акустичних і оптичних мод у рідинах існують колективні коливальні моди. Колективні коливальні моди багатьох рідин добре спостерігаються методами коливальної спектроскопії [1-11]. Виявлення колективних властивостей коливальних збуджень в рідинах в значній мірі пов'язане з їх поляритонним характером і зв'язком з електромагнітним полем [5-7]. Особливістю рідин є те, що в них хвильові збудження існують як в області низьких акустичних частот так і гранично високих. Причому на низьких частотах, у зв'язку з

відсутністю модуля зсуву, у рідинах як і в газах можливе поширення тільки поздовжніх хвиль. Раніше при аналізі акустичних явищ у рідинах не враховувалося існування високочастотних колективних мод. Вони можуть проявлятися в багатьох явищах макрофізики, зокрема в теплопровідності і поширенні звуку, що і розглядається в даній роботі.

Високочастотна LO мода в воді характеризується частотою $8,1 \cdot 10^{12}$ Гц і саме коливальні моди з такими частотами дають найбільший внесок у поширення тепла у воді. І тільки невелика частина тепла переноситься в результаті індивідуального руху молекул, добре відомого для газів. Як показано в даній роботі поширення звуку в воді в значній мірі зумовлене пружними властивостями суцільного середовища. Це обумовлено тим, що в інтервалі частот $\sim 10^3 - 10^7$ Гц, на яких найбільше часто вивчається поширення звуку, квазіграткові коливальні моди в воді практично відсутні. Завдяки пружності води як суцільного середовища швидкість звуку в воді визначається нерезонансним внеском u_0 і при нормальному тиску повинна складати 1280 м/с, а при тиску близько 950 атм - 1450 м/с, що на 275-280 м/с менше ніж відповідні максимальні швидкості 1555 і 1730 м/с. Надлишкова швидкість звуку в температурному максимумі визначається високочастотними колективними модами, що ефективно збуджуються при відповідних температурах. Температурний максимум швидкості звуку в воді при $74,3^\circ\text{C}$ визначається в основному обертоном $2LA$ поздовжньої акустичної моди на частоті $\sim 6,8 \cdot 10^{12}$ Гц. Як же такі високочастотні коливальні моди можуть брати участь у поширенні звуку з істотно меншою частотою ($\sim 10^6$ Гц)?

Суть у тім, що в неворядкованих середовищах звук добре поширюється на низьких частотах, а колективні коливальні моди існують на високих частотах. І такі колективні моди, аналогічно електромагнітним хвилям, можуть бути носіями звуку при модуляції високочастотних хвиль звуковими коливаннями. Цей процес аналогічний модуляції світла акустичними хвилями чи коливаннями молекул при розсіянні Мандельштама-Бриллюена чи комбінаційному розсіянні. На нашу думку, модуляція автоматично реалізується в протяжному нелінійному середовищі завдяки генерації сумарних і різницевих частот з участю граткових мод і звукових хвиль. Відомо, що рідкі середовища характеризуються значними нелінійностями і навіть використовуються для

нелінійно-оптичного перетворення частот [19]. Таким чином, поширення звуку в воді і водних середовищах являє собою взаємозалежний процес поширення низько- і високочастотних хвиль і їх нелінійної резонансної взаємодії. Звукове збудження розповсюджується як би одночасно на низьких і високих частотах, у результаті чого його швидкість резонансно зростає в областях існування високочастотних колективних мод води. Цей процес можна описати системою зв'язаних нелінійних хвильових рівнянь, які традиційно використовуються у резонансній нелінійній оптиці [20,21]. Величина резонансного зростання швидкості звуку у водному середовищі визначається як проявом колективних коливальних мод так і ефективністю їх взаємодії зі звуковими хвилями. Тому процес поширення звуку в водних середовищах складніший, ніж процес теплопровідності, де частота поширення збудження не фіксується.

Прояв у максимумі швидкості звуку обертоном, а не основного тону акустичної моди може бути обумовлений тим, що в макроскопічно ізотропних середовищах домінуючою є кубічна нелінійність, відповідальна за генерацію сумарних і різницевих частот $2\omega_{LA} \pm \omega_{ac}$, де ω_{ac} - частота акустичної хвилі. Через наявність центру інверсії макроскопічна квадратична нелінійна сприйнятливість дорівнює нулю. Крім того частота LA моди досить низька, а колективні властивості рідин підсилюються з ростом частоти.

Зупинимось ще на проблемі термічного збудження колективних коливальних мод. Як показує детальний аналіз максимумів швидкості звуку і теплопровідності води, для протяжних конденсованих середовищ ця проблема істотно ширша, ніж в теорії теплоємностей газів. Відомо, що при термічному збудженні певних коливань молекул, теплоємність виходить на більш високий постійний рівень. На відміну від цього у водних середовищах після досягнення максимуму швидкості звуку чи теплопровідності при збудженні відповідної колективної моди, при подальшому підвищенні температури досягнутий рівень не зберігається, а резонансно зменшується. Існування такого феномена можна пояснити на основі розгляду резонансу індивідуальних і колективних рухів частинок у рідкому стані речовини. При перевищенні температури максимуму швидкості звуку чи теплопровідності і порушенні умов резонансу, ефективність взаємозв'язку колективних мод з поширенням звуку та передачею теплоти

послаблюється. Аналогічні закономірності спостерігаються в лампах біжучої хвилі і лазерах на вільних електронах, де потрібне узгодження швидкостей електронних пучків з фазовими швидкостями електромагнітних хвиль.

Підсилення з ростом тиску найбільш низькочастотного резонансу, що показано на рис.4а, може бути пов'язане як з посиленням колективних властивостей поперечної ТА моди, так і з ростом відповідної нелінійності, що забезпечує взаємодію моди LA+TA з акустичною хвилею, що важливо для додаткового механізму поширення звуку в рідких середовищах. Варто також більш детально обговорити виникнення максимумів резонансних внесків $u_{1,2,3}$ в області середніх тисків (рис.5с). Напівширини всіх актуальних мод в широкій області тисків $P > 200$ атм залишаються майже постійними, що вказує на майже незмінний рівень колективних властивостей мод. Тому зменшення резонансних внесків в області високих тисків і існування їхніх максимальних значень може бути зумовлене зменшенням нелінійності з ростом P . Це можна пояснити тим, що з ростом тиску підсилюється міжмолекулярна взаємодія, що викликає зменшення ангармонізма коливальної підсистеми. Дійсно, при переході від рідин до кристалів інтенсивності сумарних тонів коливальних мод істотно зменшуються. Максимум швидкості звуку в області високих тисків зростає, в основному, в результаті зростання нерезонансного внеску u_0 . Це вказує на посилення пружних властивостей середовища в результаті його стиску.

5. Висновки

1. З використанням параболічної апроксимації максимумів швидкості звуку в воді показано, що при атмосферному тиску максимум спостерігається при $74,3^\circ\text{C}$ і з ростом тиску понад 950 атм він плавно зміщується до $87,7^\circ\text{C}$. Такому положенню максимуму швидкості відповідає термічне збудження обертопу поздовжньої акустичної моди 2LA в області $240\text{--}250\text{ см}^{-1}$, що відповідає результатам спектральних вимірювань граничної частоти акустичної моди $\nu_{LA} = 120\text{--}125\text{ см}^{-1}$. Зростання частоти LA моди з ростом тиску узгоджується з ростом частоти LO моди згідно з даними по теплопровідності води і вказує на посилення системи водневих зв'язків. Прояв у максимумі швидкості звуку обертопу, а не основного тону обумовлене тим, що в макроскопічно ізотропному середовищі найбільшою є кубічна нелінійність.

2. Встановлено, що в температурній залежності швидкості звуку в воді можна виділити два

внески: резонансний u_R та нерезонансний u_0 . Внесок u_0 складає не менш 80% і обумовлений пружністю суцільного середовища для низькочастотних поздовжніх звукових хвиль. Резонансний внесок u_R пов'язаний з впливом колективних коливальних мод води на поширення звуку й зумовлює існування температурного максимуму швидкості. Додатковий механізм поширення звуку зв'язаний зі спільним розповсюдженням в середовищі звукових і високочастотних колективних хвиль і їх нелінійною взаємодією, що аналогічно процесам модуляції-демодуляції. Цей механізм важливий для рідких середовищ у зв'язку з їх великим ангармонізмом у порівнянні з кристалами. Величина резонансного зростання швидкості звуку в водному середовищі визначається як амплітудою термічного збудження колективної моди, так і ефективністю її нелінійної взаємодії зі звуковою хвилею. Новий напрямок в акустиці рідких середовищ відкриває багаті можливості вивчення внутрішніх процесів у рідинах і одержання додаткової інформації.

3. Шляхом аналізу різниць температурних залежностей швидкості звуку $u(T)$ з використанням різних табличних даних встановлено, що максимумами швидкості звуку складаються з трьох резонансних складових, розташованих при температурах -20 і 50°C і більше 100°C . Наявність трьох резонансних складових підтверджується їх роздільним спостереженням в водних розчинах деяких кислот і лугів, високою точністю наближення експериментальних даних, а також послідовним врахуванням всіх відомих колективних коливальних мод першого і другого порядків LA+TA, 2LA і LO, що попадають у смугу максимуму швидкості звуку в воді.

4. Шляхом розкладання максимумів швидкості звуку на компоненти гауссової форми вивчені зміни параметрів трьох резонансів з ростом тиску P . Резонансні внески коливальних мод в поширення звуку з ростом тиску спочатку зростають в результаті підсилення сітки водневих зв'язків, досягають максимальних значень в області середніх значень P і далі зменшуються, що може вказувати на послаблення нелінійних властивостей середовища з ростом тиску. Нерезонансний внесок u_0 в області тисків більше 400 атм лінійно зростає з P .

5. Частоти трьох розглянутих резонансів плавно зростають з ростом тиску, чого немає при розкладанні на два окремих резонанси. В напівширини окремих резонансів дають внески

колективізовані стани відповідних дисперсійних віток $\omega(k)$ при довільних хвильових векторах. Тому посилення колективних властивостей збуджень приводить до збільшення ефективних напівширин резонансів $\delta\nu$. Спостерігається також тенденція зростання напівширин резонансів з ростом частоти, що вказує на зростання колективних властивостей відповідних коливальних мод.

Дана робота відкриває новий етап в дослідженні швидкості звуку в рідкому стані речовини. В ній вперше розглядається можливість одночасного прояву різних механізмів поширення звуку в рідинах. На існування додаткового механізму поширення звуку в водних середовищах вказує існування високочастотного максимуму швидкості звуку. В результаті цього рідкі середовища функціонально більш багаті в порівнянні з газами і кристалами, що потрібно додатково досліджувати. Розвиток нових уявлень про взаємозв'язок поширення звуку в рідинах з колективними властивостями збуджень в них, а також про резонанс індивідуальних і колективних рухів молекул важливий для фізики рідкого стану речовини.

Список використаної літератури

1. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Природа частотно-угловой структуры излучения при ВКР в жидкостях// Доклады АН УССР, сер.А-1983.- № 4.- с.65-68.
2. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Антистоксово комбинационное рассеяние на поляритах в жидкости, индуцированное ВКР// Оптика и спектроскопия – 1986. – т. 60, № 6.- с. 1171-1174.
3. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Генерация возбужденных колебательных состояний при ВКР и поляритонный механизм релаксации в жидкостях// Оптика и спектроскопия –1986.- т.61, № 1.- с.174-177.
4. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Федорченко А.М. Тонкая структура и аномальное уширение спектров при вынужденном комбинационном рассеянии// Сб."Физика жидкого состояния", Киев,-1986.- вып. 14. - с. 41-54.
5. Корниенко М.Є., Спостереження позовжньо-поперечного розщеплення в спектрах комбінаційного розсіяння рідкого хлороформу// УФЖ – 2001.-Т.46, № 5- 6. – с.546-552.
6. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е., Гиперкомбинационное рассеяние и правила отбора по волновому вектору и матричному элементу в колебательных спектрах стекол и жидкости// ЖЭТФ – 1983.- т. 84, вып. 4.- с. 1266-1278.
7. Корниенко М.Є., Низькочастотні колективні моди системи водневих зв'язків води// УФЖ. – 2002.- Т.47, № 4. - с.361-364.
8. Kornienko N., Low-frequency collective vibrational modes of water, International Bunsen Discussion Meeting "Metastable Water", Schloss Nordkirchen, Germany, September 22-26, 1999, Abstract, p. 42.
9. Kornienko N., Transverse-longitudinal split up of acoustic and optical modes of hydrogen bonds system of water, 15th International Conference on Spectral Line Shapes ICSLS XV, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Berlin, 10- 14 July 2000, Program and Abstracts, P. 107.
10. Корнієнко М.Є., Круть О.В., Спостереження ґраткових мод рідкого CS₂ в області сумарних коливальних смуг ІЧ поглинання// Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№1- с.345-357.
11. Корнієнко М.Є., Кутувий С.Ю., Піддубецька О.В., Смоляр Н.П., Колективні коливальні моди сітки водневих зв'язків як показник станів води в рослинних соках та листках// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – № 1. – с. 367-376.
12. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П., Основы молекулярной акустики. М., Наука. 1964. 514 с.
13. Greenspan M., Tschiege C.E., Tables of the Speed of Sound in Water// The Journal of the Acoustical Society of America -1959.-v.31, N 1-p.75-76.
14. Wilson W.D., Speed of Sound in Distilled Water as a Function of Temperature and Pressure//The Journal of the Acoustical Society of America -1959.-v.31, N 8.-p.1067-1072.
15. Михайлов И.Г., Сырников Ю.П., Сжимаемость растворов электролитов и влияние ионов на структуру воды// Вестник Ленинградского университета, сер. Физика и химия, 1958, № 10. с.9-14.
16. Михайлов И.Г., Шутилов В.А., Скорость звука и сжимаемость водных растворов неорганических кислот // Вестник Ленинградского университета, сер. Физика и химия, 1956, № 16, с.16-28.
17. Михайлов И.Г., Жау Фэн, Скорость звука и сжимаемость водных растворов LiOH, NaOH и KOH// Вестник Ленинградского университета, сер. Физика и химия, 1960, № 16, с.22-35.
18. Корнієнко М.Є., Про колективну природу теплопровідності води і деяких інших рідин// Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№3- с.511-519.
19. Райнтжес Дж. Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах. М., Мир, 1987. 510 с.
20. Корниенко Н.Е., Пространственная эволюция амплитуд волн, устойчивость решений и бифуркации при генерации суммарных и разностных частот в условиях двухфотонного резонанса// Квантовая электроника, Москва, 1985, т.12, №8, с.1595-1601.
21. Корнієнко М.Є., Міхніський С.І. Хвильове просвітлення речовини і високоефективна генерація випромінювання при вимушеному комбінаційному розсіянні світла на поляритах. Український фізичний журнал, 2002, т. 47, № 8, С. 726-737

Надійшла до редколегії 29.09.2005

УДК 669.85/86: 621.78.083

Кравець О.Л., асистент, Лисенко* О.Б., к.ф.-м.н.,
доцент, Борисова Г.В., к.ф.-м.н., доцент, Рево
С.Л., д.ф.-м.н., с.н.с.

Умови формування та структура метастабільної модифікації неодиму

Досліджено структуру неодиму, виготовленого гартуванням з рідкого стану зі швидкостями від $6 \cdot 10^4$ до $3 \cdot 10^6$ К/с. Показано, що при швидкостях гартування понад $\sim 3 \cdot 10^5$ К/с в структурі металу, разом з рівноважною α -модифікацією, фіксується метастабільна політипна фаза (μ -Nd), що має семишарову гексагональну компактну ґратку (7R) з чергуванням атомних шарів ABCABAC... Запропоновано механізм формування μ -Nd, згідно з яким ґратка α -Nd трансформується в ґратку 7R за рахунок утворення у швидкозагартованих фольгах дефектів пакування віднімання.

Ключові слова: Загартування з рідкого стану, метастабільна модифікація, семишарова гексагональна ґратка, дефекти пакування.

O.L. Kravets, assistant, A.B. Lysenko*, Ph.D.,
G.V. Borisova, Ph.D., Revo S.L. D.Sc.

Shaping conditions and metastable modification structure of neodymium

The structure of the neodymium prepared by a quenching from a liquid state with cooling rates $6 \cdot 10^4$ to $3 \cdot 10^6$ K/c is investigated. It is shown, that at rates of a quenching from above $\sim 3 \cdot 10^5$ K/s in metal structure, along with equilibrium α -modification, the metastable polytypic phase (μ -Nd) is fixed, having a sevenlayer hexagonal compact lattice (7R) with an interchange of atomic layers ABCABAC... The shaping mechanism μ -Nd according to which the lattice α -Nd is converted to a lattice 7R occurs due to formation in rapid quenching foils a package subtraction defect, is offered.

Key Words Quenching from a liquid state, metastable modification, sevenlayer hexagonal lattice, packing flaws.

*E-mail: ablysenko@bigmir.net

Вступ

Для розробки та виробництва нових функціональних матеріалів останнім часом усе частіше використовується технологія загартування з рідкого стану (ЗРС), котра полягає у охолодженні розплавів зі швидкостями, які перевищують 10^4 К/с. За такими режимами охолодження фіксуються різні типи нерівноважних структур з унікальними комплексами властивостей [1–3], що передумовлює широкі перспективи застосування швидкозагартованих сплавів у сучасній техніці.

Одним з найменш вивчених аспектів швидкого загартування є отримання метастабільних модифікацій чистих металів. Щонайчастіше ці метастабільні фази утворюються у поліморфних елементах і характеризуються щільноупакованими кристалічними ґратками [4–6]. Зокрема, дослідженнями групи легких лантановидів (La, Ce, Pr) встановлено, що при ЗРС зі швидкостями охолодження понад $\sim 10^5$ К/с в структурі металів фіксуються метастабільні μ -модифікації, які мають семишарову гексагональну ґратку 7R з послідовністю укладання щільноупакованих атомних шарів ABCABAC... [7–9].

Запропоновано механізм формування μ -модифікацій, який ґрунтується на уявленнях щодо політипізму [10] рідкісноземельних металів (РЗМ), що досліджуються, а також експериментальних даних відносно схильності металевих розплавів до глибоких переохолоджень при ЗРС [1]. Згідно з цим механізмом, в умовах високошвидкісного охолодження розплаву найконкурентоспроможнішими виявляються рівноважні (La, Ce) або метастабільна (Pr) ГЦК – модифікації металів, котрі грають роль фази, що веде кристалізацію. В процесі росту кристалів структуроутворюючої фази у її ґратці накопичуються дефекти пакування втілення (ДП.), котрі виникають внаслідок елементарних зсувів у двох суміжних атомних площинах. При впорядкованому розташуванні ДП. через 7 атомних шарів базова ГЦК-ґратка трансформується у семишарову типу 7R.

На відзнаку від La, Ce та Pr, для яких експериментально встановлено наявність ГЦК-модифікацій, неодим має лише одну щільноупаковану структурну форму з подвійною гексагональною компактною (ПГК) ґраткою типу α -La (A3'). Це означає, що механізм

структурування РЗМ, який був запропонований у роботах [7–9], стосовно до Nd може бути використаний лише у тій частині, котра стосується імовірного пригнічення кристалізації високотемпературної ОЦК-фази. Однак структура швидкоохолодженого неодиму та деталі її формування потребують спеціального вивчення.

Об'єкт та методика досліджень

Об'єктами досліджень були швидкозагартовані фольги неодиму чистотою не менше 99,5 мас.%, котрі отримували зіткненням невеликої (50–100 мг) порції рідкого металу з внутрішньою поверхнею мідяного циліндру, що швидко обертається. В залежності від швидкості обертання циліндру, тиску транспортуючого газу (Ar) та ступеня поперельного перегріву розплаву відносно температури плавлення товщина фольг змінювалася від 20 до 150 мкм. Отримані у такий спосіб зразки Nd мали чисті поверхні і досить однорідну товщину, що дозволяло використовувати їх як для структурного, так і для резистометричного аналізів. За товщиною фольг оцінювали швидкість охолодження розплаву, використовуючи методику роботи [11].

Структурні дослідження виконували рентгенографічним методом з реєстрацією картин розсіювання на дифрактометрі ДРОН-3 у монохроматизованому $\text{CuK}\alpha$ -випромінюванні. Фазовий склад масивних зразків визначали порівнянням експериментальних наборів міжплосинних відстаней з даними картотеки ASTM для рівноважних модифікацій неодиму. Структуру метастабільної модифікації, що утворюється в умовах швидкого загартування, моделювали з урахуванням результатів робіт [7–9] в припущенні її політипної природи. З цією метою теоретично розраховували штрих-рентгенограми для багат шарових гексагональних компактних ґраток, які відрізняються кількістю та послідовністю укладання щільноупакованих атомних шарів.

Термічну стійкість структури швидкозагартованих фольг вивчали методами побудови температурних залежностей питомого електроопору (ПЕО) та рентгеноструктурного аналізу зразків, які були нагріті до різних температур. Зразки для вимірювань ПЕО виготовляли у вигляді смуг шириною 2 мм та довжиною 15 мм, які вирізали з найоднорідніших за товщиною бездефектних ділянок фольг. Нагрів зразків зі швидкістю $\sim 0,17$ К/с проводили у робочій камері універсального вакуумного поста ВУП-5М при залишковому тиску $\sim 10^{-3}$ Па.

Внаслідок шорсткості вільної поверхні фольг, точність вимірювання абсолютних значень ПЕО не перевищувала $\pm 10\%$. Однак відносні змінення електроопору, які є наслідком структурних перетворень при нагріві, фіксувалися з похибкою $\pm 0,04\%$.

Результати досліджень та їх обговорення

На рис.1 зображені малюкутові фрагменти дифракційних картин масивного зразка неодиму, котрий вирізали із зливка (а), а також швидкозагартованих фольг різної товщини (б–д), які отримували при швидкостях охолодження розплаву від $6 \cdot 10^4$ до $3 \cdot 10^6$ К/с. Аналіз наведених експериментальних даних свідчить, що масивний зразок має структуру рівноважної α -модифікації з ПГК-ґраткою. Загартування з рідкого стану зі швидкостями охолодження до $\sim 10^5$ К/с не спричиняє якісних змін дифракційної картини (рис.1б). Однак при досягненні рівня швидкості охолодження $\sim 3 \cdot 10^5$ К/с у дифракційному спектрі по обидва боки від лінії (102) α -Nd з'являється пара додаткових максимумів, котрі не можуть бути віднесені до рівноважних модифікацій металу (на рис.1в ці лінії помічені стрілками). При цьому у інших деталях картина дифракції зберігає ознаки базової α -фази. Подальше збільшення швидкості охолодження супроводжується зростанням інтенсивності додаткових ліній (рис.1 в–д). Ці факти дають підстави для припущення щодо формування метастабільної структурної форми неодиму та підвищення її об'ємної частки в структурі відносно α -Nd з прискоренням режиму ЗРС.

З метою перевірки останнього припущення швидкозагартовані фольги піддавали термічній обробці: безперервному нагріву до 873К зі швидкістю 0,17 К/с та ізохрональним (0,5 год.) відпуском при температурах від 373 до 673К. Відповідні структурні змінення вивчали за допомогою резистометричного та рентгенофазового аналізів.

На рис.2 наведені температурні залежності ПЕО для швидкоохолоджених зразків неодиму товщиною ~ 30 мкм. Видно, що гілка первинного нагріву складається з двох ділянок, які відрізняються темпом зростання ПЕО: в температурному інтервалі 300–673К відносне збільшення величини ρ складає лише 35% від загального приросту, який фіксується при 873К. Навпаки, гілка охолодження задовільно апроксимується лінійною залежністю, котра відтворюється при повторних циклах термообробки.

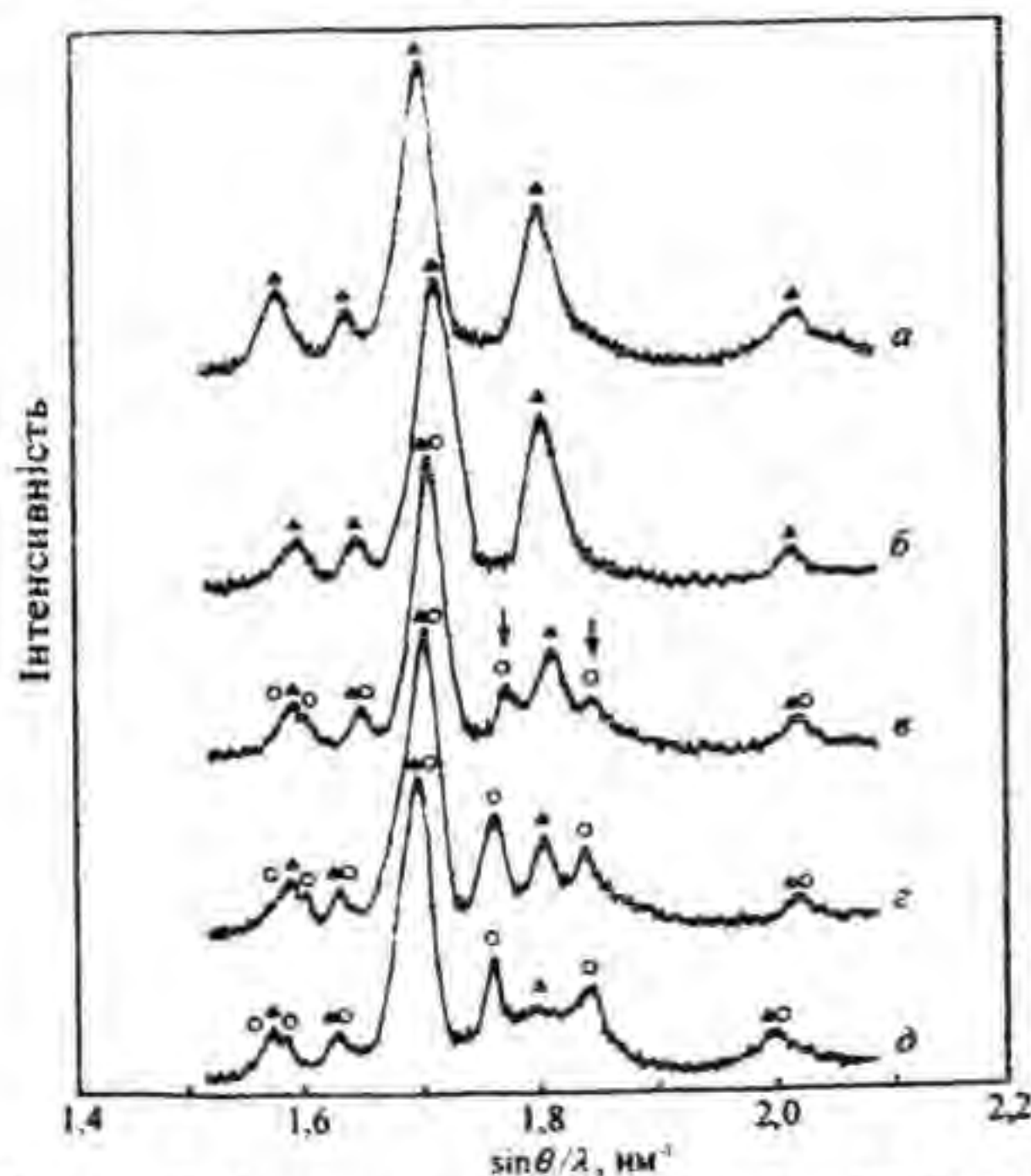


Рис. 1 Дифрактограми неодиму: *a* – масивний зразок, що був вирізаний із зливка; *b-d* – фольги, отримані загартуванням з рідкого стану зі швидкостями охолодження (K/c): $6 \cdot 10^4$ (*b*); $5 \cdot 10^5$ (*c*); $7 \cdot 10^5$ (*d*); $3 \cdot 10^6$ (*d*). ▲ – α -Nd (ПГК); ○ – μ -Nd (7R).

Такий характер політерм питомого електроопору можна пояснити тим, що при первинному нагріві швидкозагартованих фольг в області температур, що не перевищують ~ 673 K, відбуваються процеси розпаду метастабільної модифікації неодиму. Зниження ПЕО за рахунок цього перетворення відбивається на ході початкової ділянки температурної залежності $\rho(T)$. Помітне збільшення приросту ПЕО на високотемпературній ділянці гідки нагріву є наслідком двох ефектів: завершення структурного перетворення і, крім того, взаємодії фольг Nd з залишковою атмосферою камери для резистометричного аналізу. Про можливість такої взаємодії свідчить поява на зразках, які зазнали повного циклу термообробки, поверхневої плівки синього кольору, а також підвищена відносно вихідного швидкозагартованого стану остаточно величина ρ (рис.2). Оборотний та близький до лінійного перебіг залежності $\rho(T)$ на гілках, які відповідають охолодженню після первинного нагріву та повторним циклам термообробки, свідчить про незмінність структури фольг, котрі зазнали попереднього нагріву до 873K.

Для інтерпретації результатів резистометричних досліджень швидкозагартовані фольги завтовшки 30 мкм відпускали в інтервалі 373–673K, змінюючи температуру через 25K, і

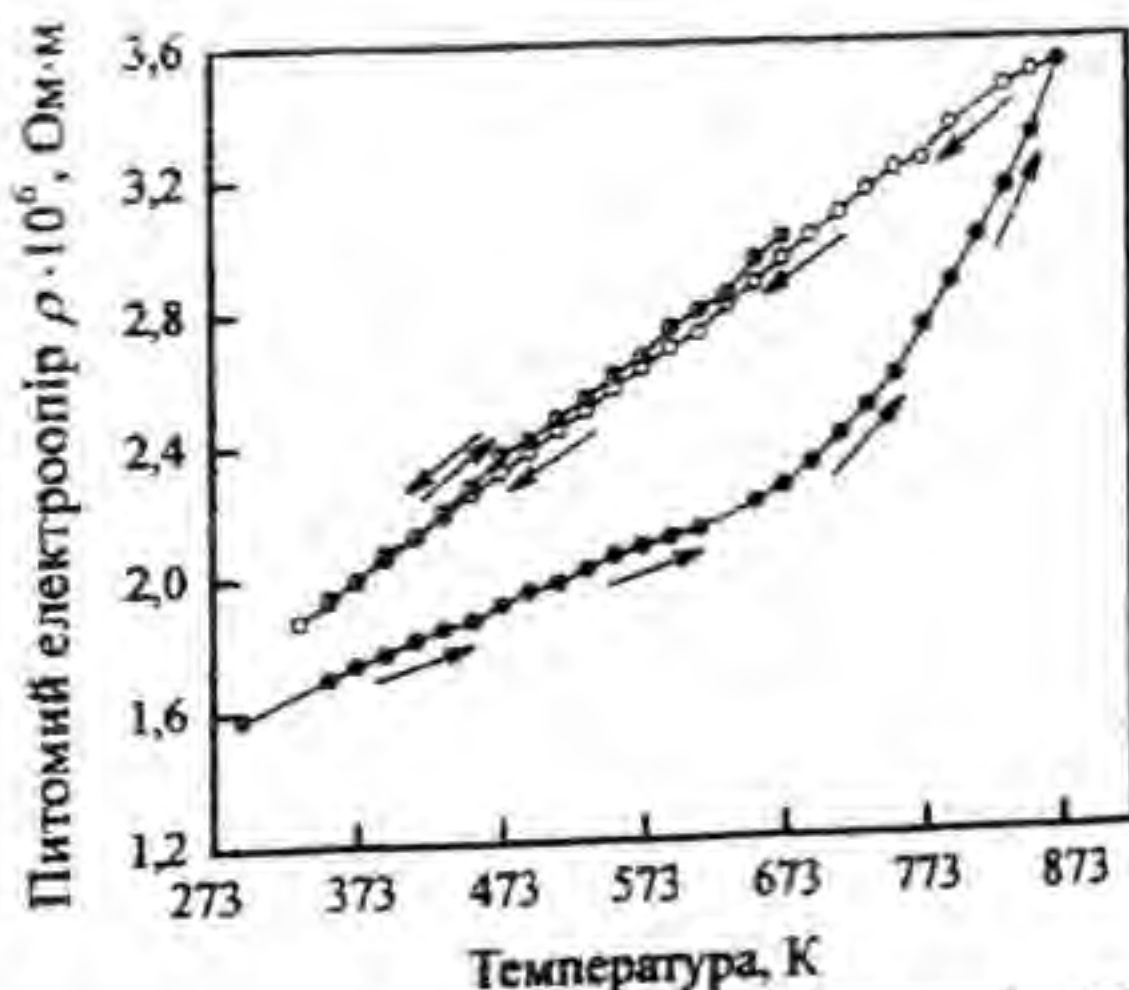


Рис. 2 Температурні залежності ПЕО швидкозагартованих фольг неодиму 30 мкм завтовшки: ● – первинний нагрів; ○ – охолодження після первинного нагріву; ◐ – повторні цикли нагріву-охолодження.

після кожного чергового циклу обробки піддавали рентгенофазовому аналізу. Як можна бачити з серії дифрактограм на рис.3, при збільшенні температури відпуску від 373 до 498 K інтенсивність максимумів, котрі згодом були віднесені до метастабільної модифікації Nd, знижується, а інтенсивність розташованої поміж ними лінії (102) α -Nd – зростає. Після відпуску при 523K, а також при більш високих температурах (рис. 3в, з) дифрактограма набуває вигляду, котрий є ідентичним картині рівноважної α -модифікації з ПГК-граткою (рис.1а).

Результати досліджень, що були виконані, свідчать, що при загартуванні з рідкого стану зі швидкостями охолодження понад $3 \cdot 10^5$ K/c в структурі фольг Nd, поряд з рівноважною α -модифікацією, фіксується невідома раніше метастабільна μ -модифікація, котра в процесі подальшого нагріву зазнає перетворення $\mu \rightarrow \alpha$. Ураховуючи близькість дифракційних спектрів масивного та швидкозагартованих зразків неодиму (рис.1), а також високу імовірність того, що в умовах швидкого охолодження розплавлю фаза, що веде кристалізацію, є α -Nd, логічно припустити, що μ -модифікація утворюється внаслідок змінення характерного для ПГК-гратки порядку чергування найщільніших атомних шарів. Тому при створенні структурної моделі μ -Nd розраховували картини дифракції для гексагональних щільноупакованих політипів металу з числом шарів N , більшим, ніж у гратці α -Nd, а саме, від 5 до 12.

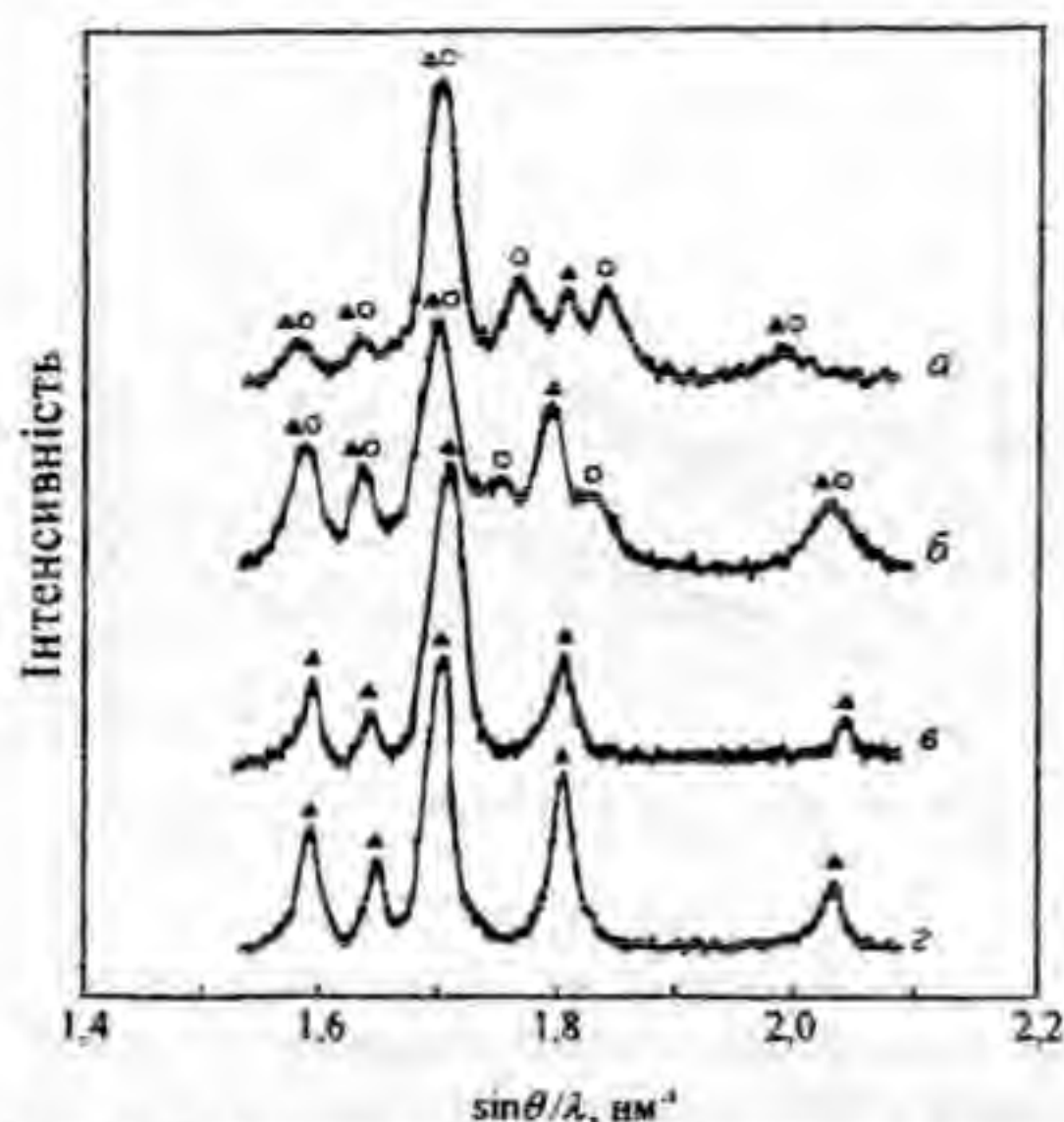


Рис. 3 Змінення дифракційної картини в процесі ізохрональних (0,5 год) відпусків швидкозагартованих фольг Nd товщиною 30 мкм ($\sim 3 \cdot 10^6$ K/c): а – 373 К; б – 498 К; в – 523 К; г – 673 К

Координати базисних атомів для шарів А, В, С задавали таким чином [12]:

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & n_A/N \\ 1/3, & 2/3, & n_B/N \\ 2/3, & 1/3, & n_C/N \end{pmatrix} \quad (1)$$

де n_A, n_B, n_C – цілі числа (0, 1, 2, ..., $N-1$), що відповідають номерам щільноупакованих шарів А, В, С.

Періоди елементарних комірок модельних багатошарових структур визначали, виходячи з припущення, що в процесі перетворення ПГК-гратки у N -шарову (NR) щільність упаковки атомів та найкоротші міжатомні відстані не змінюються. У цьому випадку є справедливими співвідношення:

$$\begin{aligned} a^{NR} &= a^{ПГК}, \\ c^{NR} &= \frac{N}{4} c^{ПГК} \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки параметри ґратки базової ПГК-фази зазнають впливу домішок та дефектів, які фіксуються швидким загартуванням, величини a^{NR} та c^{NR} , що розраховували за формулами (2) з використанням довідкових значень $a^{ПГК}$, $c^{ПГК}$ [13], на стадії аналізу результатів моделювання

коректували, досягаючи найкращого узгодження експериментальних та розрахованих наборів d_{HKL} .

Згідно з отриманими результатами, з усіх випробуваних моделей структури швидкозагартованого неодиму найімовірнішою є модель суміші метастабільної μ -модифікації, яка має семишарову ґратку $7R$ з чергуванням атомних шарів ABCABAC..., з базовою α -фазою. Періоди ґраток α - та μ -модифікацій, а також кількісні параметри експериментального та модельних дифракційних спектрів наведені в таблиці. Як видно, результати дифрактометричного аналізу швидкозагартованих фольг Nd задовільно узгоджуються з варіантом структурної моделі, що пропонується.

Для пояснення взаємозв'язку структури та механізму утворення метастабільної модифікації Nd відзначимо, що ПГК-ґратка не може бути перетвореною в ґратку $7R$ шляхом накопичення та упорядкування дефектів пакування втілення, як це відбувається у більш легких лантаноїдах (La, Ce, Pr), у котрих структуроутворюючою фазою є ГЦК-модифікації [7–9]. Тому у даному випадку однією з імовірних причин структурного перетворення ПГК $\rightarrow 7R$ може бути насичення швидкозагартованих фольг вакансіями [14], котрі скупчуються в щільноупакованих площинах у вигляді дисків. При досягненні вакансійними дисками деяких критичних розмірів вони зплескуються з утворенням у ґратці материнської фази дефектів пакування віднімання (ДП). Цей ефект є рівнозначним вилученню з ПГК-ґратки однієї з атомних площин, внаслідок чого в місці залягання ДП змінюється властивий цій ґратці порядок пакування. У разі утворення дефектів пакування у площинах А та їх закономірного розташування через 7 атомних шарів (рис.4), послідовність укладки змінюється таким чином: ABC... $\rightarrow$ ABCABAC... В результаті здійснюється якісне змінення типу кристалічної ґратки ПГК $\rightarrow 7R$.

Як видно з рис.4, поряд з ділянками, що набувають структури $7R$, зберігається вихідна закономірність пакування, яка є властивою для рівноважної α -модифікації Nd. Звідси виходить, що розглянутий вище механізм структуроутворення завбачає отримання у швидкозагартованих фольгах Nd метастабільного політипу з семишаровою гексагональною ґраткою, котрий співіснує з рівноважним ПГК-різновидом металу.

Результати розшифровування швидкозагартованої ($\sim 3 \cdot 10^5$ К/с) фольги неодиму товщиною 30 мкм

Експериментальні дані			Фази, що виявляються					
			α -Nd (ПГК) $a=0,3650$ нм; $c=1,1618$ нм			μ -Nd (7R) $a=0,3650$ нм; $c=2,0629$ нм		
№	I	d_{HKL} , нм	HKL	I	d_{HKL} , нм	HKL	I	d_{HKL} , нм
1	15	0,3148	100	27	0,3152	100	<1	0,3161
2	12	0,3123				101	21	0,3125
3	16	0,3048	101	21	0,3042	102	4	0,3022
4	100	0,2947	004	100	0,2905	007	100	0,2947
5	34	0,2852				103	11	0,2872
6	41	0,2786	102	54	0,2771	104	10	0,2695
7	20	0,2725						
8	5	0,2460	103	18	0,2445			
9	7	0,1825	110	9	0,1820	110	1	0,1825
10	9	0,1549	114	15	0,1542	117	3	0,1552
11	6	0,1527	202	6	0,1521	203	2	0,1540
12	10	0,1466	107	6	0,1469	205	1	0,1474

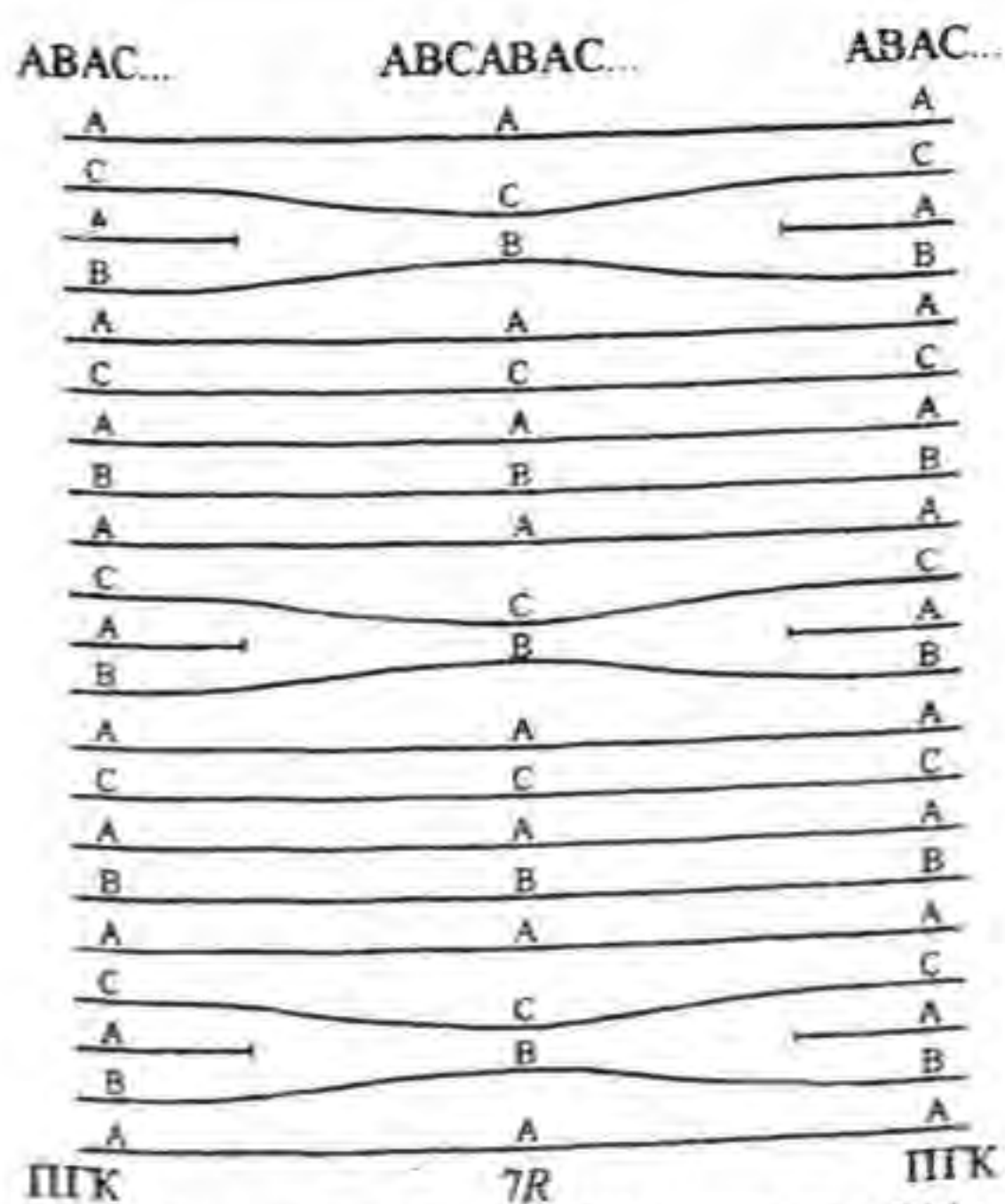


Рис. 4 Схема перебудови ПГК-гратки α -Nd у семишарову гратку 7R метастабільної μ -модифікації.

Із збільшенням товщини фольг до 100 – 150 мкм ступінь їх насиченості вакансіями, а, значить, і кількість ДП, що утворюються, знижуються. Внаслідок цього, навіть у локальних ділянках гратки α -Nd концентрація ДП не досягає рівня, необхідного для перетворення ПГК $\rightarrow$ 7R, що робить таку перебудову неможливою. Тому в масивних фольгах Nd

фіксується структура рівноважної α -фази, що підтверджується експериментальними даними.

Висновки

1. Методами рентгеноструктурного та резистометричного аналізів встановлено, що при загартуванні з рідкого стану зі швидкостями охолодження понад $3 \cdot 10^5$ К/с в структурі неодиму фіксується метастабільна μ -модифікація, котра при подальшому нагріві перетворюється у стійку нижче 1137 К α -модифікацію металу.
2. Метастабільний структурний різновид неодиму, що був виявлений у швидкозагартованих фольгах, має семишарову гексагональну компакту гратку з послідовністю укладання атомних шарів ABCABAC... та періодами $a=0,3650$ нм; $c=2,0629$ нм.
3. Імовірною причиною формування структури μ -Nd є насичення гратки базової α -модифікації дефектами пакування віднімання, котрі утворюються в місцях зіпсування вакансійних дисків.

Список використаних джерел

1. Мирошніченко Н.С. Закалка из жидкого состояния. – М.: Металлургия, 1982. – 168с.
2. Быстрозакаленные металлы. Сб. научн. трудов. Под ред. Б. Кантора – М.: Металлургия, 1983. – 472с.
3. Маслово В.В., Носенко В.К. Материаловедение быстро закаленных сплавов в ИМФ им. Г.В. Курдюмова НАН

- Украины // Вестник Днепропетровского университета. Физика. Радиоэлектроника. – 2002. – 8. – С.5-13
4. Якунин А.А., Ткач В.И. Структура сплавов Мп-Sn, закристаллизованных с большой скоростью охлаждения // В сб.: Рост и дефекты металлических кристаллов. – К.: Наукова думка, 1973, – С.385-401
 5. Ткач В.И., Башев В.Ф., Лысенко А.Б., Мирошниченко И.С. Формирование метастабильной модификации самария при закалке из расплава // ФММ. – 1979. – 48, №1. – С.213-215
 6. Bucher E., Chu C., Maitu J., Anders K. Electronic properties of two new elemental ferromagnets: fcc Pr and Nd // Phys. Rev. Letters. – 1969. – 22. – P.1260-1263
 7. Лысенко А.Б., Борисова Г.В., Кравец О.Л. Структура и механизм образования метастабильных политипов легких редкоземельных элементов // ФТВД. – 2005. – 15, №2. – С.96-104
 8. Lysenko A.B., Kravets O.L., Lysenko A.A. Structure of Lanthanum Prepared by Quenching from a Liquid State // Cryst. Rep. – 2005. – 50. – P. S10-S15
 9. Lysenko A.B., Borisova G.V., Kravets O.L., Lysenko A.A. Condition for the Formation and Structure of Metastable Cerium Modification // Phys. Metals and Metallography. – 2006. – 101, №5. – P. 484-490
 10. Николин Б.И. Многослойные структуры и политипизм в металлических сплавах. – Киев: Наукова думка, 1984, – 292 с.
 11. Лысенко А.Б., Борисова Г.В., Кравец О.Л. Расчет скорости охлаждения при закалке сплавов из жидкого состояния // ФТВД. – 2004. – 14, №1. – С.44-53
 12. Лысак Л.И., Николин Б.И., Устинов А.И. Фазовые превращения в сплаве медь-кремний // ФММ. – 1976. – 42, №3. – С.601-608
 13. Alstetter Carl J. Transformations in rare earth metals // Met. Trans. – 1973, – 4. – P. 2723-2730
 14. Jones H. Microstructure of rapidly solidified materials // Mater. Sci. Eng. – 1984, – 65, – P.145-156

Надійшла до редколегії 10.11.07

УДК 548:539.32

Онанко А.П., зав. лаб., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Вказівна поверхня непружно-пружного тіла сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$

Досліджувалась температурна залежність внутрішнього тертя і модуля пружності (вказівної поверхні непружно-пружного тіла) сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$. Визначено релаксацийний максимум внутрішнього тертя при ~ 400 К, обумовлений процесом переорієнтації втілених атомів H в гантельних конфігураціях.

Ключові слова: внутрішнє тертя, модуль пружності, структурні дефекти.

E-mail: onanko@mail.kiev.ua

Вивчення мікроскопічних механізмів впливу дефектів кристалічної структури на механічні властивості сплавів дозволяє створювати функціональні матеріали з наперед заданими характеристиками. Міцність сплавів пов'язана з взаємодією дислокацій з точковими дефектами. У вікнах виводу електронів використовуються титанові фольги, котрі при виводі значної щільності потоку електронів гріються, при цьому межа міцності σ_m при температурі більше 670 К падає. Наступна робота є продовженням [1].

Експеримент

Для виміру температурних залежностей внутрішнього тертя (ВТ) і модуля пружності E сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ після механічного різання і шліфування використовувалися методики згінних резонансних коливань на частоті ~ 1 кГц і чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті ~ 118 кГц при знакозмінній деформації $\varepsilon \sim 10^{-6}$ у вакуумі не гірше 10^{-3} Па [1]. Погрішність виміру ВТ дорівнювала 3%, а виміру відносної зміни модуля пружності $\Delta E/E - 0,1\%$. З метою більш точнішого визначення температурного положення максимумів ВТ по релаксації модуля пружності $\Delta E/E$ вимірювалась температурна залежність E . Насичення зразків воднем відбувалося електролітичним методом. В якості аноду

Onanko A.P., Sen. Sci. Res., PhD

Indicator surface of inelasticity-elasticity state of $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ alloy

Temperature dependence of internal friction and elastic module (indicator surface of inelasticity-elasticity state) of $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ alloy were explored. There was the relaxation maximum of internal friction at ~ 400 K, conditioned by the mechanism caused by reorientation interstitial atoms of H in dumbbell configurations.

Key words: internal friction, elastic module, structural defects.

використовувалася платинова фольга, зразок був катодом. В якості електроліту використовувався однонормальний розчин H_2SO_4 .

Результати і їх обговорення

На рис.1 наведено температурну залежність внутрішнього тертя сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ у початковому стані після механічної обробки і відпалу при $T_B \approx 870$ К на протязі $t_B \approx 3600$ сек.

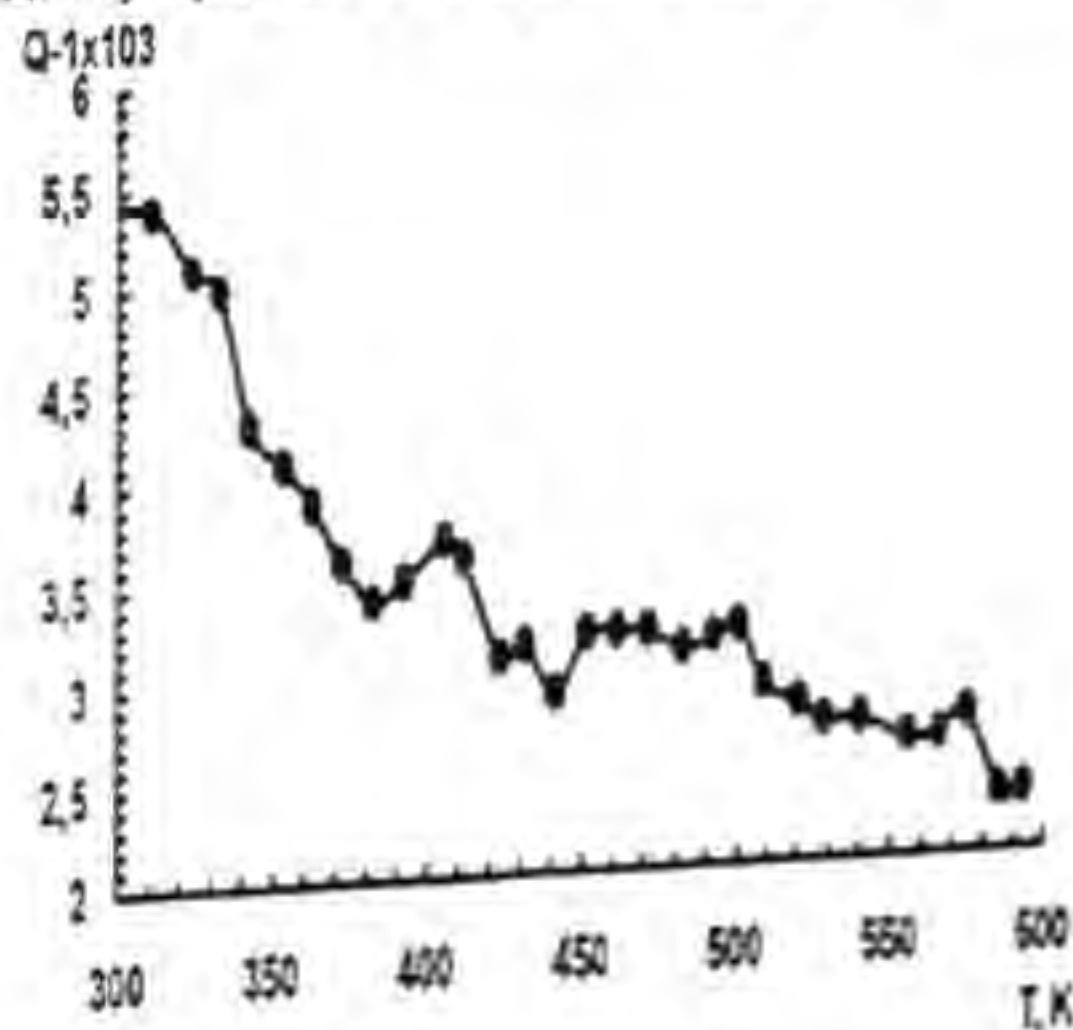


Рис. 1. Температурна залежність внутрішнього тертя Q^{-1} сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ у початковому стані після механічної обробки і відпалу при $T_s \approx 870$ К протягом $t_s \approx 3600$ сек.

Спостерігалася висока величина фону ВТ $Q_f^{-1} \sim 5,4 \cdot 10^{-3}$. Аномальний хід фону ВТ на рис.1 свідчить про наявність полів термопружних напружень σ_t , які виникають внаслідок термомеханічної обробки, та про зменшення величин цих напружень у процесі нагріву. При відпалі має місце ухід нерівноважних вакансій, домішок.

Визначено максимум ВТ в сплаві $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ при $T_m \approx 400$ К. Міграція структурних дефектів здійснюється шляхом послідовних дискретних переходів з одного положення в кристалічній решітці в інше. Для здійснення перескоку, в результаті котрого змінюється властивість, структурному дефекту потрібно додати енергію активації H .

Для максимуму ВТ умова його існування записується у вигляді [2]:

$$\omega \tau_0 \exp(H/k_B T_m) = 1. \quad (1)$$

З наведеного співвідношення випливає, що $H = k_B T_m \ln(1/f_m \tau_0)$. Підставивши $\tau_0 = 1/f_0 = h/k_B T_m$, одержуємо формулу для визначення енергії активації максимуму ВТ

$$H = k_B T_m \ln(k_B T_m / h f_m) + \Delta S, \quad (2)$$

де T_m і f_m – температура і частота максимуму відповідно. Ентропійна добавка ΔS лежить в межах погрішності експерименту, точність оцінки H залежить в основному від точності підтримки температури нагріву зразка ($1-2$ К) $\approx (2-3\%)$. Використання для визначення H температури максимуму ВТ T_m і частоти коливань зразка f_m не вимагає виконання спеціальних умов. При накладенні процесів релаксації температурне положення T_m кожного максимуму легко вимірюється, а частота f_m задається експериментально.

Енергію активації H максимуму ВТ оцінювалася за формулою Верта-Маркса (2) без врахування ентропійного члену. Була отримана величина енергії активації $H_1 \approx 0,4 \pm 0,1$ еВ, з умови існування релаксацийного максимуму ВТ

формули (1) $\omega \tau = 1$ визначена постійна часу релаксації $\tau_{01} \approx 14,5 \cdot 10^{-10}$ сек та частотний фактор релаксації $f_{01} \approx 6,9 \cdot 10^8$ Гц

На температурній залежності E сплаву на рис.2 спостерігалась релаксація модуля пружності $\Delta E/E$ в області існування максимуму ВТ $T_m \approx 400$ К. Після відпалу спостерігалось збільшення абсолютних значень модуля пружності E , що свідчило про зміцнення сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$.

Спостерігався також малий максимум ВТ при $T_m \approx 500$ К з енергією активації $H_2 \approx 0,6 \pm 0,1$ еВ, з постійної часу релаксації $\tau_{02} \approx 7,7 \cdot 10^{-11}$ сек і частотним фактором релаксації $f_{02} \approx 1,3 \cdot 10^{10}$ Гц. Цій максимум ВТ можливо обумовлений процесом зміни числа вакансій в вакансійних комплексах під впливом змінної деформації.

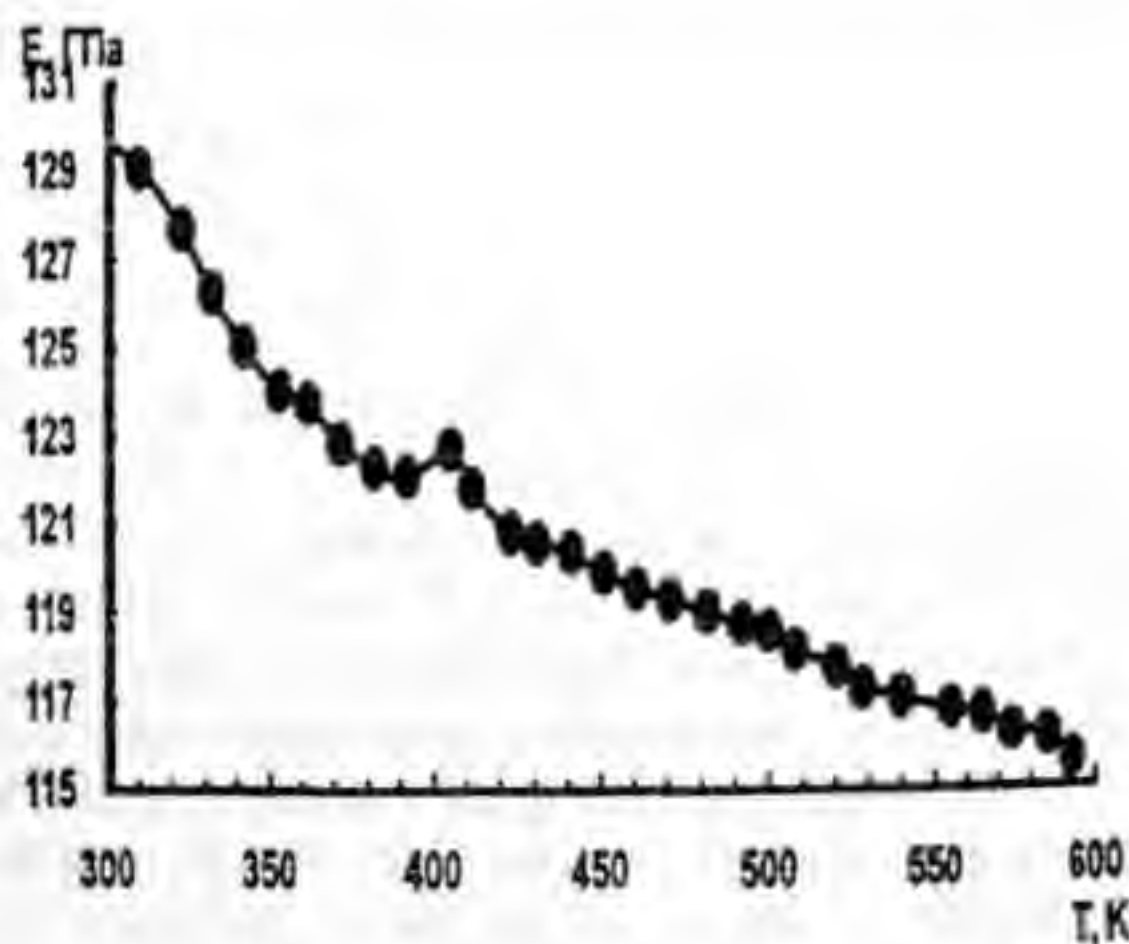


Рис. 2. Температурна залежність модуля пружності E сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ у початковому стані після механічної обробки і відпалу при $T_s \approx 870$ К.

На рис.3 представлена температурна залежність вказівної поверхні непружно-пружного тіла сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$.

полегшеного формування мікротріщини. Н підсилює металічний характер міжатомних зв'язків, що не може бути причиною крихкого руйнування.

Релаксація модуля пружності $\Delta E/E$ в області існування максимуму ВТ в сплаві $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ при $T_{\max} \approx 400$ К дозволяє припустити відповідний механізм, обумовлений релаксативним процесом переорієнтації втілених атомів Н в гантельних конфігураціях під впливом ультразвукової змінної деформації.

Список використаних джерел

1. Онанко А.П. Вказівна поверхня пружно-непружного тіла $Al_{0.5}Be_{0.5}$ // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – с.531–533.
2. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.
3. Колачев Б.А., Ливанов В.А., Буханова А.А. Механические свойства титана и его сплавов. – М.: Металлургия, 1974. – 544 с.
4. Колачев Б.А. Физическое металловедение титана. – М.: Металлургия, 1976. – 276 с.

Надійшла до редакції 13.12.07

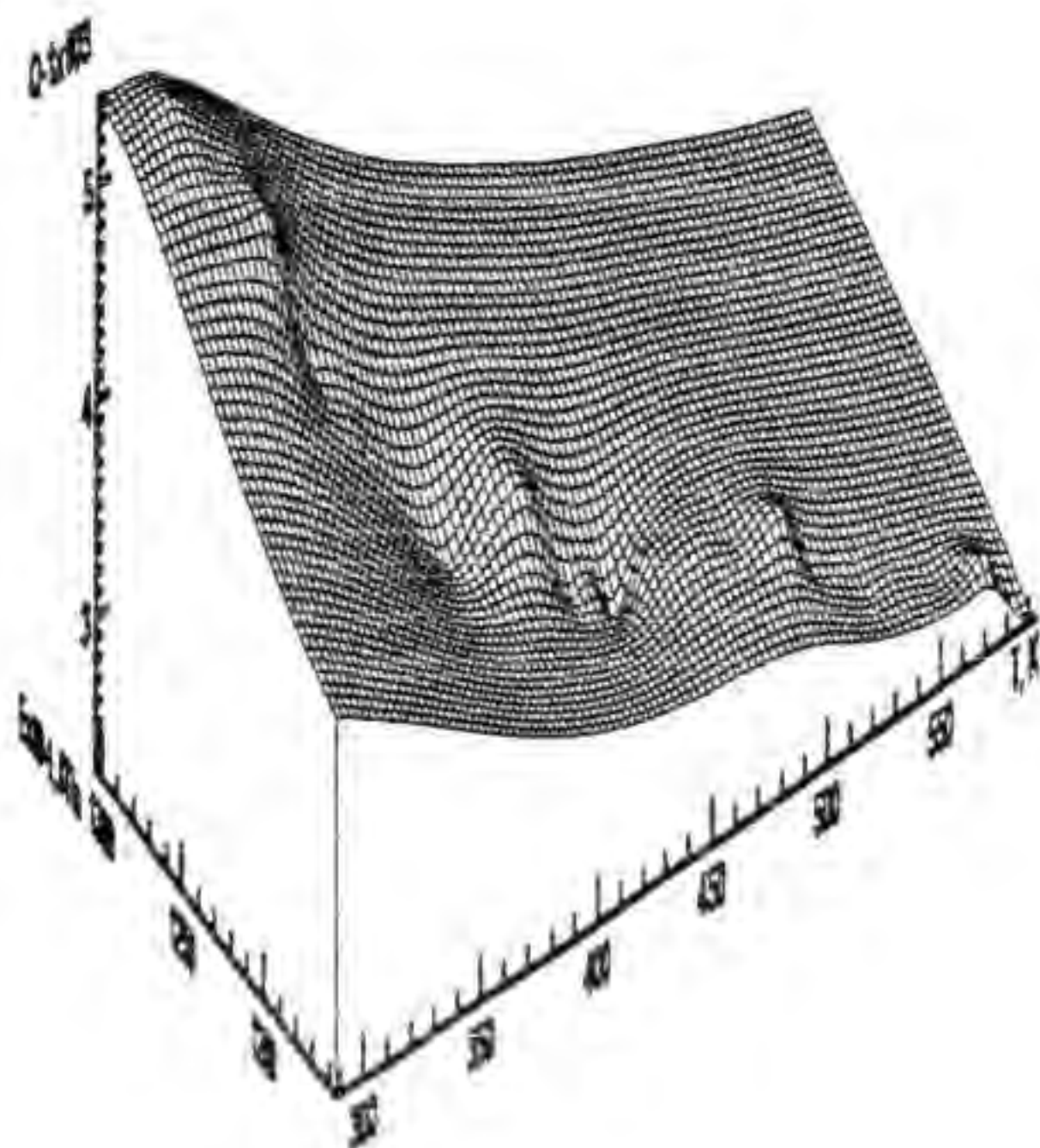


Рис. 3. Температурна залежність внутрішнього тертя Q^{-1} і модуля пружності E (вказівної поверхні непружно-пружного тіла) сплаву $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ у початковому стані після механічної обробки і відпалу.

Причиною індукованої Н локалізованої пластичності є підвищена концентрація електронів провідності – підсилений Н металічний характер міжатомних зв'язків. Локальне збільшення концентрації електронів провідності в водневих хмарах навколо дислокацій призводить до зменшення модулю зсуву G і напруги активації джерел дислокацій σ_d [3,4]:

$$\sigma_d \approx 2Gb/L_N, \quad (3)$$

де G – модуль зсуву, b – вектор Бюргерса, L_N – відстань між точками закріплення дислокацій. Зменшення відстані між дислокаціями L_d в скупченнях завдяки Н призводить до збільшення дислокацій в них і до збільшення напруження на провідну дислокацію σ_d , що є причиною

УДК 538.97

Петренко* В.І., аспірант, фізичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка, Булавін Л.А., академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, фізичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка, Авдєєв М.В., кандидат фіз.-мат. наук, Об'єднаний інститут ядерних досліджень, Аксьонов В.Л., доктор фіз.-мат. наук, професор, Об'єднаний інститут ядерних досліджень, Векаш Л., професор, Центр фундаментальних та прикладних досліджень, Рошта Л., професор, Дослідницький інститут фізики твердого тіла та оптики, Будапешт, Угорщина.

Аналіз структури магнітних рідинних систем методом нейтронного розсіювання

Методом малокутового розсіювання нейтронів проведені структурні порівняння водних магнітних рідинних систем, стабілізованих з використанням різноманітних комбінацій поверхнево-активних речовин (ПАР). Виявлені комбінації ПАР, які дають найкращі, з точки зору структури, результати стабілізації. Визначені функції розподілу за розмірами магнітних наночастинок, диспергованих у воду. Проаналізовані різні організації кластерів у ферорідинах.

Ключові слова: ферофлюїди, магнітні рідинні системи, малокутове розсіювання нейтронів.

*E-mail: vip@nf.jinr.ru

Вступ

Магнітні рідинні системи (ферофлюїди) представляють собою колоїдні розчини магнітних матеріалів, стабілізованих за допомогою поверхнево-активних речовин (ПАР). Ферофлюїди мають як фундаментальний, так і великий практичний інтерес для технічних [1] та медичних застосувань [2]. Унікальною рисою магнітних рідинних систем є поєднання властивостей звичайних рідин з суперпарамагнітними властивостями.

Варіація складу магнітних рідинних систем надає можливість розширення областей застосування ферофлюїдів [2, 3].

Метою роботи було проведення експериментів по малокутовому розсіюванню нейтронів в рамках дослідження стабільності ферофлюїдів. Задачею даної роботи було знаходження структурних властивостей водних

V.I. Petrenko, PhD student, Kyiv Taras Shevchenko National University, L.A. Bulavin, professor, Kyiv Taras Shevchenko National University, M.V. Avdeev, doctor, Joint Institute for Nuclear Research, V.L. Aksenov, professor, Joint Institute for Nuclear Research, L. Vekas, professor, Center of Fundamental and Advanced Technical Research, Timisoara, Romania, L. Rosta, professor, Research Institute for Solid State Physics and Optics, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary

Analysis of the structure of ferrofluids by neutron scattering

The structures comparisons of water based magnetic fluids stabilized by various surfactants combinations are performed by small-angle neutron scattering. Combination of surfactants with the best stabilization characteristics from the viewpoint of structure was found. The size distribution functions of magnetic nanoparticles dispersed in water were determined. The different cluster organizations in ferrofluids are analyzed.

Key Words: ferrofluids, magnetic fluids, small-angle neutron scattering.

магнітних рідинних систем, стабілізованих різноманітними ПАР.

Експериментальна частина

Водні ферофлюїди були отримані шляхом диспергування магнітних наночастинок, отриманих з реакції конденсації солей двох та трьох-валентного заліза та кобальту, та при додаванні в розчин надлишку ПАР (одного або двох видів). Інформація та деякі характеристики досліджуваних магнітних рідинних систем представлені в таблиці 1. Ферофлюїди були синтезовані в Центрі Фундаментальних та Прикладних Технічних Досліджень (Center of Fundamental and Advanced Technical Research), Тімішоара, Румунія.

Експерименти були проведені на установці малокутового розсіювання нейтронів "Yellow Submarine" в Будапештському Нейтронному Центрі (Budapest Neutron Center), Угорщина. Диференційний переріз розсіювання на одиницю

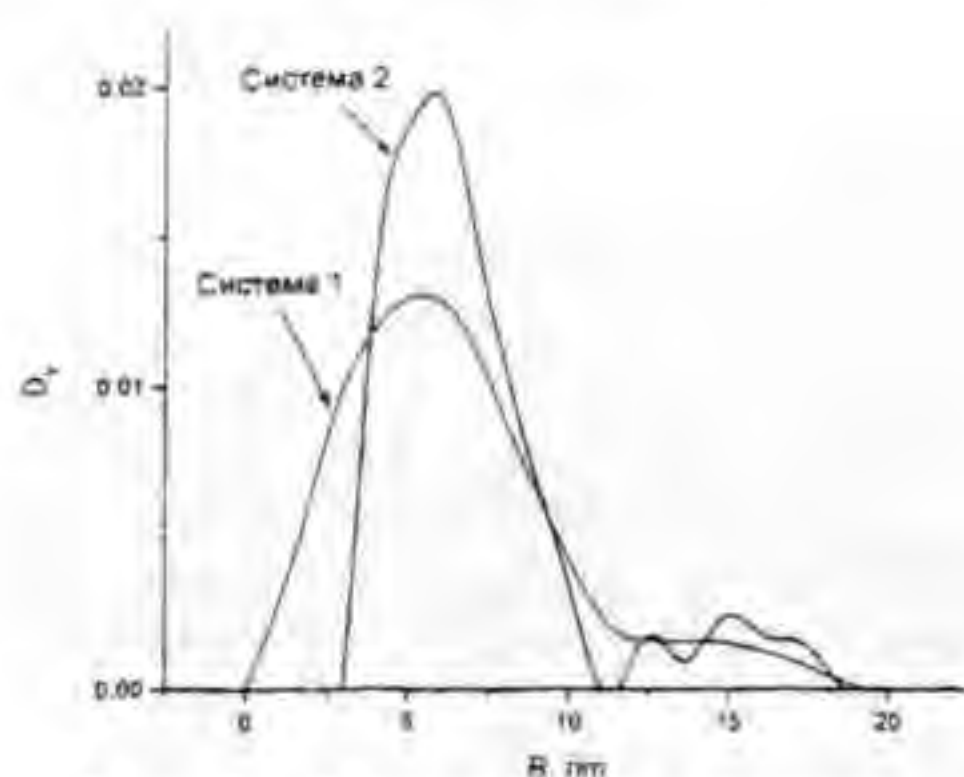


Рис. 2. Відновлені по експериментальним кривим малокутового розсіяння нейтронів функції розподілу частинок за розмірами в системах 1 та 2.

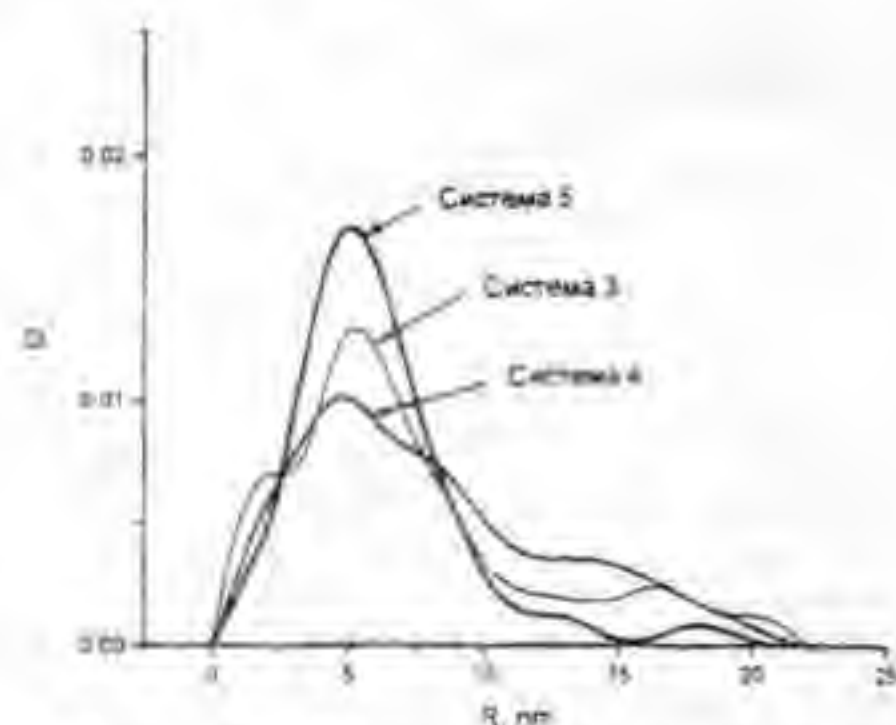


Рис. 3. Відновлені по експериментальним кривим малокутового розсіяння нейтронів функції розподілу частинок за розмірами в системах 3 – 5. Пунктирною лінією показано модельний розподіл частинок наномангнетиту, який отримують при реакції конденсації.

Для систем 3 – 5, в яких для утворення подвійного шару використовують монокарбоксильні кислоти, ситуація більш близька до загальної концепції магнітних рідинних систем – систем ізольованих магнітних наночастинок, вкритих оболонкою ПАР. Цей висновок впливає з порівняння відновлених функцій розподілу за розмірами з модельною функцією $D_1(R)$, яка відповідає утвореному при реакції конденсації наномангнетиту (рис. 3) [7]. З рис. 3 видно, що наряду з окремими частинками (характерний радіус 5 нм) у ферофлюїдах присутня деяка кількість великих кластерів з розмірами 10 – 20 нм. З даних трьох систем найбільш близька до бажаного розподілу $D_1(R)$ система 5 з подвійною стабілізацією лауриновою кислотою.

Для системи 6 кластерна організація виявляється більш складною ніж в попередніх

випадках. Надійно відновити функцію $D_1(R)$ не вдається, що свідчить про більш широкий розподіл первинних та вторинних кластерів за розмірами.

Висновки

При дослідженні водних магнітних рідинних систем, можна зробити висновок що у випадку використання при стабілізації різноманітних магнітних матеріалів (CoFe_2O_4 , Fe_3O_4) DBS у ферофлюїді утворюється складна кластерна організація. Первинні кластери (радіус 6 нм) утворюють вторинні агрегати (характерний радіус 16 нм). Використання монокарбоксильних кислот призводить до більш стабільних, з точки зору структури, магнітних рідинних систем. Спостережуваний характерний радіус у даних системах 5 нм співпадає з характерним радіусом для магнітних наночастинок, які утворюються в ході реакції конденсації. Лише деяка доля (в залежності від кислоти) частинок знаходиться у кластерах з розміром 10 – 20 нм.

Список використаних джерел

1. Berkovski B. Magnetic Fluids and Applications Handbook – Beggel House, New York, 1996.
2. Book of abstracts of the 6th International Conference on Clinical and Scientific Applications of Magnetic Carriers, Krems, 2006.
3. Сборник научных трудов 12-ой Международной Плесской конференции по магнитным жидкостям, Плес, 30 августа – 2 сентября 2006.
4. Jacrot B. The study of biological structures by neutron scattering from solution // Rep. Prog. Phys. – 1976. – 39. – P.911-953.
5. Свєргун Д.И., Феїгин Л.А. Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние. – Москва: Наука, 1986.
6. Балашою М., Авдєєв М.В., Аксєнов В.Л. Исследование кластеров в водных магнитных жидкостях методом малоуглового рассеяния нейтронов // Кристаллография. – 2007. – 52. – P.551-558
7. Avdeev M.V., Bica D., Vėkās L. et al. On the possibility of using short chain length monocarboxylic acids for stabilization of magnetic fluids // J. Mag. Mag. Mater. – 2007. – 311. – P.6-9.

Надійшла до редколегії

УДК 543.423.574

В.В. Пророк, к.ф.-м.н., ст.н.с.

Механізми надходження калію та цезію до рослин

Досліджені рослини, що вирости у зоні відчуження Чорнобильської АЕС. Встановлено, що надходження калію до рослини по низькоспорідненому чи високоспорідненому каналу залежить від концентрації розчиненого калію у ґрунті. Надходження цезію до рослини було приблизно пропорційне концентрації розчиненого цезію у ґрунті для всіх досліджених зразків.

Ключові слова: калій, цезій, ґрунтовий розчин, надходження радіонуклідів до рослин

E-mail: prorok@univ.kiev.ua

Вступ

На сьогоднішній день вже майже ніхто не ставить під сумнів існування щонайменше двох систем (каналів) надходження калію до рослин – low affinity (низькоспоріднена) та high affinity (високоспоріднена). Як правило, надходження калію до рослини відбувається по цим каналам одночасно. Вважається, що низькоспоріднений канал переважає при високій концентрації калію у ґрунтовому розчині (вищий за $0,039 - 0,012 \text{ mg/sm}^3$), а високоспоріднений при низькій (меншій за $0,039 - 0,012 \text{ mg/sm}^3$). Низькоспоріднений калієвий канал (канали) є низькоселективним відносно лужних йонів, а високоспоріднений – високоселективним. Більшість дослідників вважають встановленим, що корені рослини відчують концентрацію калію у ґрунтовому розчині й при концентрації калію, меншій за $0,039 - 0,012 \text{ mg/sm}^3$, переважає високоспоріднений канал надходження калію до рослини [1-3].

Різними дослідниками було запропоновано багато моделей надходження цезію до рослини (див., наприклад [4-11]). На жаль, жодна з цих моделей не описує цей процес достатньо адекватно. Останнім часом було встановлено, що надходження цезію до рослини пропорційне концентрації розчиненого цезію у ґрунті у даний момент часу (добутку концентрації цезію у ґрунтовому розчині та

V.V. Prorok, senior researcher

Mechanisms of potassium and cesium uptake by plant

Plants from the Chornobyl Exclusion Zone were investigated. It was installed that plant low affinity and high affinity potassium uptake depends on concentration of dissolved potassium in the soil. The plants' cesium uptake was approximately proportional to concentration of dissolved cesium in the soil for all investigated samples.

Key Words: potassium, cesium, soil solution, uptake radionuclides by plant

вмісту ґрунтового розчину у одиниці об'єму ґрунту) [12-14].

Мета цієї роботи – встановити, які фактори дійсно детермінують використання вказаних каналів надходження калію до рослини та порівняти механізми надходження калію та цезію до рослини.

Опис експерименту та обговорення отриманих результатів

Рослини для досліджень вирощувалися у польових умовах на трьох експериментальних ділянках, розташованих у зоні відчуження Чорнобильської АЕС: ділянка А – дерено-підзолистий середньоопідзолений глеюватий піщаний ґрунт; ділянка В – торф'яно-болотний низинного типу ґрунт; ділянка С – дерено-підзолистий середньоопідзолений ґрунт.

Для дослідження надходження цезію з ґрунту до рослин ми використовували метод змішаного висіву, що описаний у роботах [12-14]. Вміст ^{137}Cs у зразках визначався за допомогою гамма-спектрометра "Капбета" з експериментальною похибкою 10%. Вміст калію у зразках вимірювався оптичним методом за допомогою ІСР-спектрометра "Спектро" з похибкою 0,5%. Вологість ґрунту h визначалася як відношення маси води у зразку до маси сухого ґрунту в цьому зразку з експериментальною похибкою 10 %. Більш докладно методика експерименту описана в роботах [12-14].

Результати експерименту для експериментальних ділянок А, В та С можна побачити у таблицях 1-3 відповідно. В цих таблицях представлені вологість ґрунту h на момент відбору зразків (рослини), на момент екстракції ґрунтового розчину (ґрунтовий розчин), вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту h_1 , вміст К та ^{137}Cs у зразках ґрунтових розчинів та висушених рослин, величина $r = (^{137}\text{Cs}/\text{K})_p / (^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$ для всіх досліджуваних рослин та ґрунтових розчинів, де $(^{137}\text{Cs}/\text{K})_p$ – відношення вмісту ^{137}Cs та К у рослині, $(^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$ – відношення вмісту ^{137}Cs та К у ґрунтовому розчині, концентрація розчиненого калію у ґрунті C_K (добуток концентрації калію у ґрунтовому розчині та вмісту ґрунтового розчину в одиниці об'єму ґрунту). Легко показати, що величина r є також відношенням концентраційних коефіцієнтів рослина:ґрунтовий розчин для цезію та калію.

З наведених таблиць можна бачити, що при концентрації розчиненого калію у ґрунті $C_K > 0,002 \text{ mg/sm}^3$ величина r для всіх досліджених

рослин та ґрунтів змінюється не більше, ніж у кілька разів, тобто вказані вище концентраційні коефіцієнти приблизно рівні. Таким чином, при концентрації розчиненого калію у ґрунті $C_K > 0,002 \text{ mg/sm}^3$ надходження калію та цезію до рослини відбувається по низькоселективним каналам. Можливо, що це один і той же канал (канали).

При концентрації розчиненого калію у ґрунті $C_K < 0,002 \text{ mg/sm}^3$ величина r різко зменшується - концентраційний коефіцієнт рослина:ґрунтовий розчин для калію стає набагато більшим, ніж для цезію – інколи у 40 - 50 разів. Вміст цезію у рослинах при цьому стає у багато разів меншим. Надходження цезію залишається пропорційним концентрації розчиненого у ґрунті цезію. Він надходить до рослини по тому ж самому низькоселективному каналу (каналам), у той час як для забезпечення себе калієм рослина у цьому випадку використовує також й інший – високоселективний канал.

Причиною недостатнього надходження калію

Таблиця 1

Поле А. Вологість ґрунту h на момент відбору зразків (рослини), на момент екстракції ґрунтового розчину (ґрунтовий розчин), вміст вологи у одиниці об'єму ґрунту h_1 , вміст К та ^{137}Cs у зразках ґрунтових розчинів та висушених рослин, величина $r = (^{137}\text{Cs}/\text{K})_p / (^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$, концентрація розчиненого калію у ґрунті C_K

h	$h_1 \text{ g/sm}^3$	Date	Sample	Sample №	K mg/g	^{137}Cs Bq/kg	r	$C_K \text{ mg/sm}^3$
0,11	0,12	09June2002	Soil solution	26	0,0070	8,0		
-- " --	-- " --	09June2002	<i>Phleum pratense</i>	58	20,96	5276	0,220	0,00084
0,65	0,73	22June 2002	Soil solution	18	0,0292	8,0		
0,062	0,069	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	55	64,70	1746	0,099	0,00201
-- " --	-- " --	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	65	43,49	2018	0,169	0,00201
-- " --	-- " --	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	67	48,30	4540	0,343	0,00201
0,65	0,73	14July 2002	Soil solution	22	0,0282	7,9		
0,094	0,17	14July 2002	<i>Phleum pratense</i>	75	12,15	5725	1,682	0,00479
-- " --	-- " --	14July 2002	<i>Stachys palustris</i>	76	27,67	10206	1,317	0,00479
0,29	0,32	08June 2003	Soil solution	5	0,0214	4,9		
0,016	0,018	08June 2003	<i>Raphanus sativus</i>	35	52,34	216	0,018	0,000385
-- " --	-- " --	08June 2003	<i>Lepidium sativum</i>	36	38,28	265	0,030	0,000385
-- " --	-- " --	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	37	52,617	672	0,056	0,000385
-- " --	-- " --	08June 2003	<i>Stachys palustris</i>	38	29,774	606	0,089	0,000385
0,30	0,34	13July 2003	Soil solution	8	0,0217	3,2		
0,035	0,039	13July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	21	47,39	585	0,084	0,000846
-- " --	-- " --	13July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	22	34,07	679	0,135	0,000846
-- " --	-- " --	13July 2003	<i>Stachys palustris</i>	24	32,35	1722	0,361	0,000846

Таблиця 2

Поле В. Вологість ґрунту h на момент відбору зразків (рослини), на момент екстракції ґрунтового розчину (ґрунтовий розчин), вміст води у одиниці об'єму ґрунту h_1 , вміст К та ^{137}Cs у зразках ґрунтових розчинів та висушених рослин, величина $r = (^{137}\text{Cs}/\text{K})_p / (^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$, концентрація розчиненого калію у ґрунті C_K

h	h_1 g/sm ³	Date	Sample	Sample №	K mg/g	^{137}Cs Bq/kg	r	C_K mg/sm ³
2,35	0,59	09June 2002	Soil solution	24	0,0045	61		
-- " --	-- " --	09June 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	59	11,42	609400	3,937	0,00266
-- " --	-- " --	09June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	60	23,56	606600	1,899	0,00266
3,20	0,80	22June 2002	Soil solution	19	0,007	40,8		0,00448
2,6	0,64	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	54	39,29	240760	1,051	0,00448
-- " --	-- " --	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	64	26,84	414700	2,651	0,00448
-- " --	-- " --	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	68	39,8	758800	3,271	0,00448
-- " --	-- " --	22June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	69	18,71	305700	2,803	0,00448
3,20	0,80	14July 2002	Soil solution	23	0,0047	95		
1,46	0,36	14July 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	72	6,704	230900	1,704	0,00169
-- " --	-- " --	14July 2002	Motley grass	73	9,522	617500	3,208	0,00169
1,38	0,35	08June 2003	Soil solution	6	0,0217	44,3		
0,45	0,12	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	39	31,28	35911	0,562	0,00260
-- " --	-- " --	08June 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	41	17,03	47741	1,373	0,00260
-- " --	-- " --	08June 2003	<i>Urticaceae dioica</i>	42	12,79	55260	2,116	0,00260
-- " --	-- " --	08June 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	43	17,5	118888	3,328	0,00260
0,72	0,18	13July 2003	Soil solution	9	0,020	27		
0,72	0,18	13July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	26	40,25	64924	1,195	0,0036
-- " --	-- " --	13July 2003	<i>Raphanus sativus</i>	27	49,78	26130	0,389	0,0036
-- " --	-- " --	13July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	28	24,06	54348	1,673	0,0036
-- " --	-- " --	13July 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	29	27,18	36505	0,995	0,0036

Таблиця 3

Поле С. Вологість ґрунту h на момент відбору зразків (рослини), на момент екстракції ґрунтового розчину (ґрунтовий розчин), вміст води у одиниці об'єму ґрунту h_1 , вміст К та ^{137}Cs у зразках ґрунтових розчинів та висушених рослин, величина $r = (^{137}\text{Cs}/\text{K})_p / (^{137}\text{Cs}/\text{K})_{ss}$, концентрація розчиненого калію у ґрунті C_K

h	h_1 g/sm ³	Date	Sample	Sample №	K mg/g	^{137}Cs Bq/kg	r	C_K mg/sm ³
0,34	0,47	09June 2002	Soil solution	12	0,0475	4,8		
0,069	0,095	09June 2002	<i>Barbarea vulgaris</i>	61	32,26	5212	1,599	0,00451
-- " --	-- " --	09June 2002	<i>Convolvulus arvensis</i>	62	36,52	7772	2,106	0,00451
0,15	0,21	08June 2003	Soil solution	4	0,0475	1,9		
	<0,014	08June 2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	31	40,203	82	0,051	<0,000665
	<0,014	08June 2003	<i>Lepidium sativum</i>	32	25,675	65	0,063	<0,000665
	<0,014	08June 2003	<i>Convolvulus arvensis</i>	34	34,455	93	0,067	<0,000665
0,12	0,17	13July 2003	Soil solution	7	0,0528	7,1		
	<0,031	13July 2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	16	50,7	164	0,024	<0,00163
	<0,031	13July 2003	<i>Convolvulus arvensis</i>	19	38,09	165	0,032	<0,00163
	<0,031	13July 2003	<i>Barbarea vulgaris</i>	20	31,61	105	0,025	<0,000846

до рослини по низькоселективному каналу може бути не тільки низька концентрація К у ґрунтовому розчині, але й низька вологість ґрунту. З наших експериментальних результатів можна побачити, що інколи надходження К по високоселективному каналу може переважати при доволі високій концентрації К у ґрунтовому розчині (але при малій вологості ґрунту). Ми вважаємо, що рослина регулює використання каналів, виходячи з своїх потреб у калії. Добуток концентрації К у ґрунтовому розчині на вміст води у одиниці об'єму ґрунту набагато точніше вказує на момент початку переважування того чи іншого каналу, ніж концентрація калію у ґрунтовому розчині, як це вважалось раніше [1].

Список використаних джерел

1. Maathuis, F.J.M., Sanders, D. Mechanisms of potassium absorption by higher plant roots. // *Physiol. Plant.* 1996. **96**, P.158 – 168.
2. Maathuis, F.J.M., Ichida, A.M., Sanders, D et.al. Roles of High Plant K^+ Channels. *Plant Physiol.* 1997. **114**, P.1141 - 1149.
3. Anderson J.A., Huprikar S.S., Kochian L.V. et.al. Functional expression of a probable *Arabidopsis thaliana* potassium channel in *Saccharomyces cerevisiae*. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1992. **89**, P.3736 – 3740.
4. Ehlken S., Kirchner G. Environmental processes affecting plant root uptake of radioactive trace elements and variability of transfer factor data: a review. *J. Environ. Radioact.*, 2002, **58**, P.97 - 112.
5. Frissel M.J. et al. Generic values for soil-to-plant transfer factors of radiocesium. // *J. Environ. Radioact.* - 2002. **58**. -P. 113-128.
6. Йохансон К.Й., Долгилевич М.И., Васенков Г.И. Функции органического вещества, определяющие поведение радиоцезия в системе почва-растение. // *Вісник аграрної науки*, березень - 1997. -С.52 – 54.
7. Nisbet, A.F., & Woodman, R.F.M. Soil-to-plant transfer factors for radiocesium and radiostrontium in agricultural systems. // *Health Physics*. -2000. -**78**. -P. 279-288.
8. Smolders E., Van den Brande K., and Merckx R. Concentration of ^{137}Cs and K in Soil Solution Predict the plant availability of Cs-137 in Soils. // *Environ. Sci. Technol.* -1997. **31**. -P.3432-3438.
9. Протас Н.М., Штинар Л.И., Ясковец И.И. Механизмы, контролирующие миграцию радионуклидов в системе почва-растение. // *Агроэкологический журнал*. -2004. -№2. - С.67-72.
10. Пристер Б.С., Бизольд Г., Девиль-Ковелин Ж. Способ комплексной оценки свойств почвы для прогнозирования накопления радионуклидов растениями. // *Радиационная биология. Радиозкология*. -. 2003. -**43**. -№.6. -С.688-696.
11. Коноплев А.В., Коноплева И.В. Параметризация перехода ^{137}Cs из почвы в растения на основе ключевых почвенных характеристик. // *Радиационная биология. Радиозкология*. -1999. -**39**. -№.4, С.455-461.
12. Пророк В.В., Масон К.Ф.В., Тимофеев С.Ф. та ін. Залежність вмісту ^{137}Cs у рослині від параметрів ґрунту // *Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат.*, 2004. - Вип. 3. - С. 407 - 416.
13. Пророк В.В., Булавін Л.А., Агеев В. А., та ін. Закономірності надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини.// *Ядерна фізика та енергетика*, 2007.-**19**, №1.-С.115 – 122
14. Prorok V.V., Mason C.F.V., Ageyev V.A., та ін. The Transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants.//*Proceeding of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006*. -Tucson, 2006. -WM06/66.html

Надійшла до редколегії 08.11.07 р.

УДК 539.211

Семко¹ Л.С., д.т.н., ст.н.с., Кручек¹ О.І., аспірант,
Горбик¹ П.П., д.ф.-м.н., проф., Рево^{2*} С.Л., д.ф.-
м.н., ст.н.с., Іваненко² К.О., к.ф.-м.н., Оранська¹
О.І., к.х.н.

Одержання, структура та магнітні властивості порошків нанокристалічного нікелю та нанокомпозиційних матеріалів нікель/декстран

Одержано порошки аморфного і нанокристалічного нікелю, а також шаруваті нанокомпозити Ni / декстран. Досліджено структуру та магнітні властивості одержаних матеріалів, визначена їх точка Кюрі. Установлено взаємозв'язок між особливостями структури та магнітними характеристиками матеріалів. Показано, що перехід від мікрокристалічного Ni до нанокристалічного призводить до зниження його магнітних характеристик. Виявлено, що термоциклювання сприяє підвищенню магнітної сприйнятливості одержаних матеріалів.

Ключові слова: магнітні характеристики, нікель, наноматеріали

L.S. Semko¹, D.Sc., O.I. Kruchek¹, Ph.D. student,
P.P. Gorbyk¹, D.Sc., S.L. Revo², D.Sc., K.O. Iva-
nenko², Ph.D., O.I. Oranskaya¹, Ph.D

Production, structure and magnetic properties of nanocrystalline nickel powder and nickel/dextran nanocomposite materials

Amorphous and nanocrystalline nickel powders and Ni/dextran layered nanocomposites have been produced. The structure and magnetic properties, in particular, the Curie points have been study. The correlation between the structural peculiarities and magnetic characteristics has been revealed for these materials the transition from microcrystalline to nanocrystalline structure was found to be accompanied by the weakening of Ni magnetic properties. Thermocycling promotes the improvement of the magnetic properties of the obtained materials

Key Words: magnetic characteristics, nickel, nanomaterials

¹Інститут хімії поверхні НАН України

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка

*E-mail: revo@univ.kiev.ua

Останнім часом, значна увага дослідників приділяється створенню наноструктурних і нано-кластерних матеріалів із використанням перехідних металів. Серед них поряд із залізом і кобальтом перспективним компонентом для створення електропровідних і магнітних наноматеріалів є нанокристалічний нікель із різноманітною побудовою кластерів [1-3]. Нанокомпозиційні матеріали (НКМ) на його основі використовуються в мікроелектроніці, сенсорних системах, каталізі, медицині [4-9]. Поєднання в одній часточці НКМ магнітного ядра і біосумісної оболонки з різними поліфункціональними властивостями відкриває широкі можливості для створення лікарських препаратів нового покоління [10].

Для утворення біосумісної немагнітної оболонки на поверхні магнітного ядра застосовують полімери (полівініловий спирт, желатину, полівінілпіролідон, декстран), а також неорганічні сполуки (оксиди кремнію та титану) [11, 12]. Особливий інтерес у цьому випадку викликає декстран, який використовують у медицині в композиції замінника плазми крові [13]. Слід зазначи-

ти, що в процесі утворення немагнітної оболонки на поверхнях магнітних ядер, тобто в процесі модифікування магнітних частинок і створення НКМ можлива зміна розмірів частинок, характеристик поверхні та взаємодії [7]. Насамперед, наявність поверхневого шару може впливати на магнітні властивості НКМ. Однак аналіз робіт різних авторів [1-9] свідчить, що структура і магнітні властивості композицій на основі перехідних металів і полімерів недостатньо вивчені. Окрім того, немає чітких уявлень як змінюється структура та властивості нанокристалічного нікелю при зміні розмірів кристалітів і як вирізняються ці властивості в порівнянні із мікрокристалічним нікелем.

Мета роботи: встановлення впливу структурних особливостей нанокристалічного нікелю та НКМ нікель-декстран на їх магнітні характеристики.

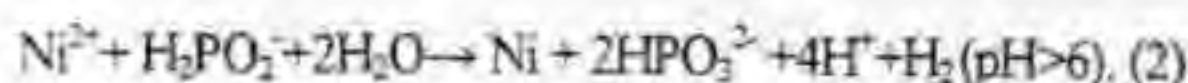
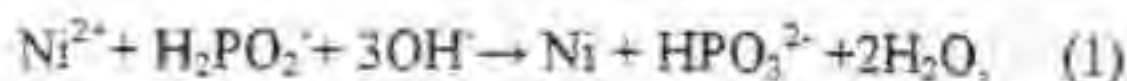
Методика експерименту

Дослідження структури і магнітних властивостей проведено на зразках порошків нанокристалічного й аморфного нікелю, а також шарува-

того наноконпозиційного матеріалу нікель/декстран. Цей полімер має молекулярну масу 50000. Для порівняння магнітних властивостей зразків з нанокристалічного нікелю із зразками з мікротристалічного Ni використано його порошок, одержаний із монолітного зразка нікелю (вміст Ni 99,9 %). Нанокристалічний і аморфний нікель виготовляли методом хімічного відновлення його солі.

На сьогодні, існує багато методів отримання нанорозмірних частинок [1-3, 10]. Ми вибрали метод відновлення солі нікелю в розчині із застосуванням, як відновника, гіпофосфіту натрію. Цей метод менш енергоємний, ніж інші і приваблює своєю доступністю і достатньо великою швидкістю реакцій відновлення. Проте, відомо [1,10], що застосування гіпофосфіту натрію при синтезі нікелю приводить до утворення сторонніх фаз сполук фосфору. Однак вищенаведений метод доцільно було б використати, так як він широко використовується в промисловості для одержання порошків Ni технічного призначення та формування покриттів (нікелювання). Хімічне відновлення хлориду нікелю проводили гіпофосфітом натрію в лужному середовищі (pH=9) за умови нагрівання до 90-95 °C у присутності цитрату натрію та хлориду амонію.

Процес синтезу нанокристалічного й аморфного нікелю можна представити наступною схемою:



Нами встановлено, що при співвідношенні Ni до гіпофосфіту натрію - 1:3, а Ni до цитрату натрію - 3:1 утворюється нанокристалічний нікель, а при наявності значного надлишку гіпофосфіту натрію та цитрату натрію - аморфний нікель.

Одержання НКМ на основі нанокристалічного нікелю з декстраном виготовляли, змішуючи нікель з 10 % водним розчином декстрану в ультразвуковому диспергаторі УЗДН-2 із наступною сушкою за температури 90 °C. Уміст декстрану змінювали від 0,2 до 0,5 г на 1 г нікелю. Зшивку декстрану проводили за допомогою епіхлоргідрину в лужному середовищі. Оптимальна кількість епіхлоргідрину в реакційній суміші складала 1 %.

Для вивчення характеристик порошків Ni та одержаних НКМ застосовували наступні методики. Дослідження морфології порошків нікелю та НКМ проводили за допомогою растрового електронного мікроскопа JEOS JSM-35 (Японія) за

умови збільшення до 5000 разів. Зразки фіксували в утримувачі за допомогою срібної пасти. Для вивчення структури вищезазначених матеріалів використовували рентгенівський аналіз. Дифрактограми зразків реєстрували на дифрактометрі ДРОН-4-07 із геометрією зйомки за Бреггом-Брентано у мідному $\text{K}_{\alpha 1,2}$ випромінюванні та Ni фільтром у відбитих променях. При цьому вводили такі позначення: I – інтенсивність, с^{-1} ; 2θ – значення кута відбитого променя. Розмір кристалів розраховували за допомогою формули Шерера [11] із використанням автоматизованої методики [12].

Для дослідження магнітних властивостей порошків Ni та наноконпозицій використовували вібраційний магнітометр (частота коливання мембрани 70 Гц). Дослідження проведено на компактованих порошках цих матеріалів в сталих магнітних полях з напруженістю до 150 кА/м. На основі експериментальних результатів будували циклічні залежності значень питомої намагніченості (σ_r) від напруженості магнітного поля (петлі гістерезису). Використовуючи ці залежності, визначали наступні магнітні характеристики порошків нікелю та НКМ: значення питомої намагніченості при насиченні (σ_s), залишкової питомої намагніченості (σ_r), коерцитивної сили H_c . Магнітну сприйнятливості χ визначали за стандартним методом Фарадея в інтервалі температур 293 – 900 К, описаним у роботі [14].

Результати та їх обговорення

Одержані результати наведено на рис. 1 – 6.

Дані рентгенофазового аналізу дозволили ідентифікувати фазу Ni в отриманих порошках (рис. 1).

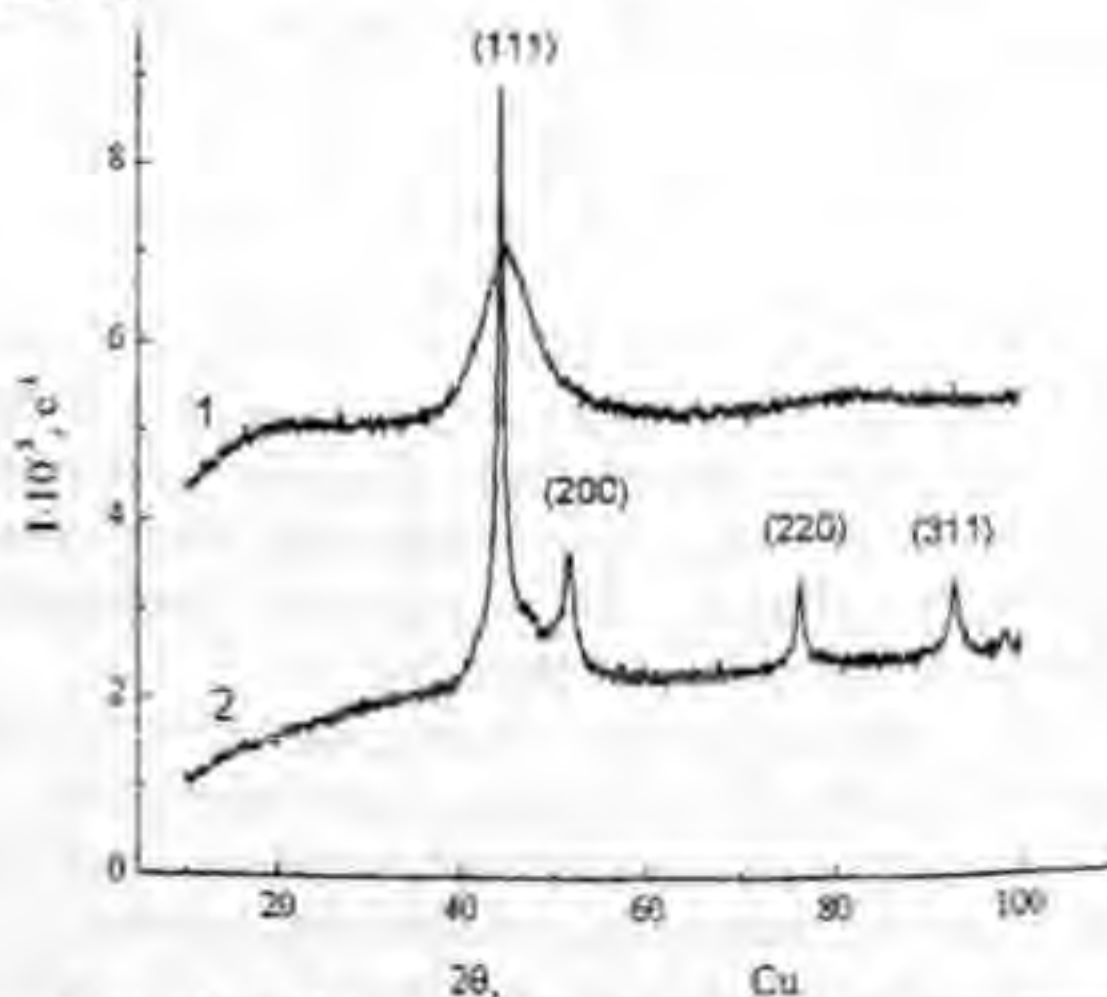


Рис. 1 Дифрактограми порошків аморфного (крива 1) та нанокристалічного (крива 2) нікелю.

З вигляду дифрактограм (рис. 1) бачимо, що перша з них (крива 1) являє собою дифузне гало, яке відповідає аморфному стану зразка. Друга (крива 2), що містить відповідні дифракційні рефлекси кристалічної фази Ni з кубічною граткою (просторова група $Ch^5 - Fm\bar{3}m$) та з параметром елементарної комірки, що дорівнює 3,5238 Å. З напівширини лінії (111) оцінено середній розмір кристалітів Ni, що склав для цього зразка $(20 \div 25)$ нм. Рентгенограми НКМ Ni/декстран містять відбиття, аналогічні таким, що відповідають вихідним порошкам нікелю (рис. 2).

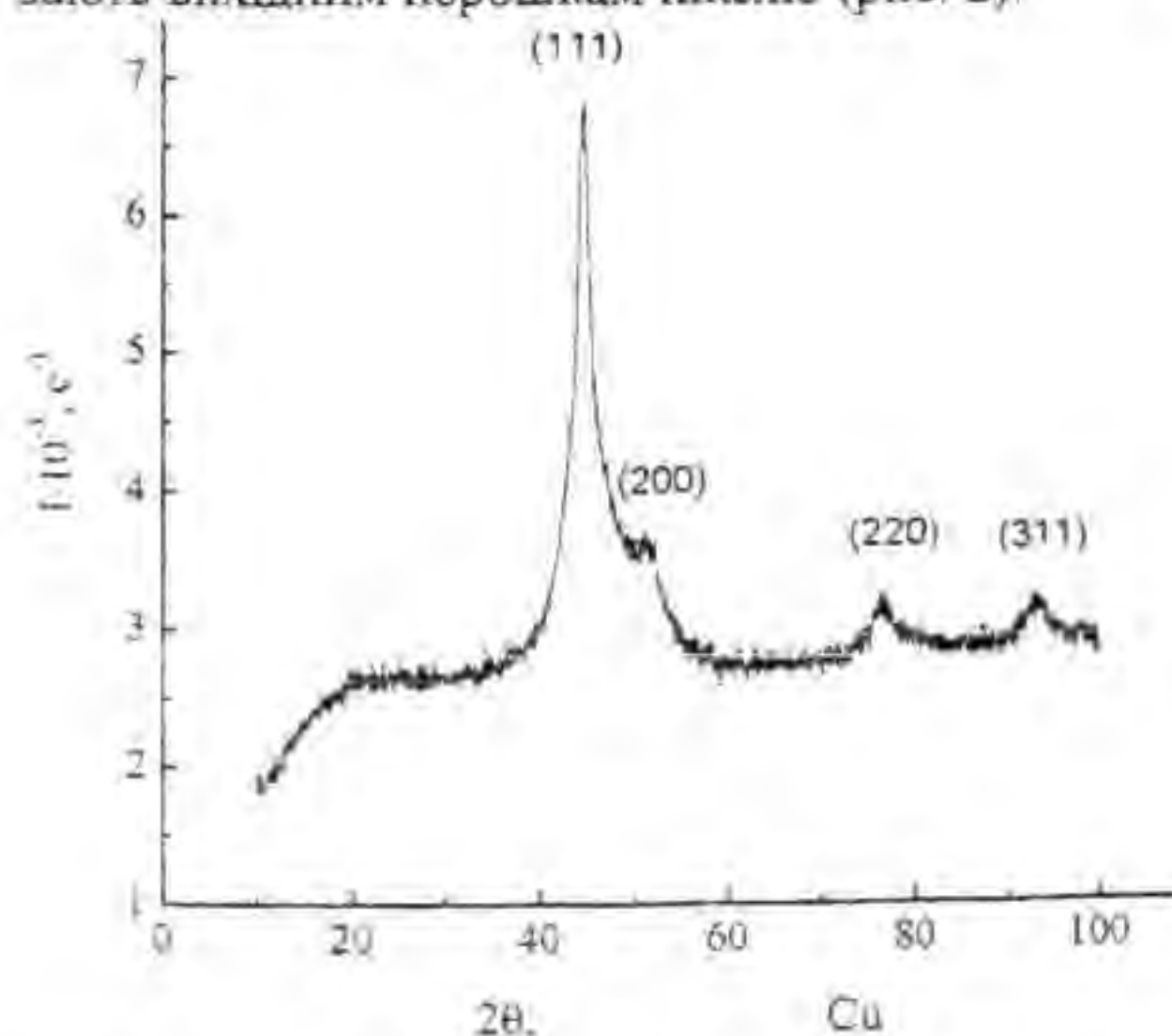


Рис. 2 Дифрактограма нанокompозиту нікель/декстран.

Для визначення фазового складу зразків, ступеню кристалізації, зразки аморфного і нанокристалічного Ni нагрівали до температури 360 °C і витримували за цієї температури 1 годину. Аналіз одержаних рентгенограм свідчить, що таке нагрівання приводить до появи нових рефлексів. Так, на дифрактограмах нанокристалічного нікелю, поряд з дифракційними лініями Ni (при $2\theta = 44, 51, 76, 93$ кутових градусів), що належать фазі Ni (JC PDS № 4-850), з'являються рефлекси при $2\theta = 41$ та 46 кутових градусів, що притаманні фазі домішки Ni_3P (JC PDS № 34-501) (рис. 3).

Вищенаведена термообробка приводить також до зміни вигляду дифрактограм аморфного Ni. Так, поява рефлексів при $2\theta = 44, 51, 76, 93$ кутових градусах, що відповідають нанокристалічному Ni, є свідченням кристалізації аморфного Ni. Рефлекси при $2\theta = 36, 37, 41, 43, 46$ кутових градусах – про наявність фази фосфіду нікелю. При цьому, як встановлено з одержаних даних, зразок аморфного Ni має більший вміст Ni_3P у порівнянні з нанокристалічним. Про можли-

вість появи при синтезі Ni вищенаведеним способом сторонніх фаз сповіщалося також в роботі [10].

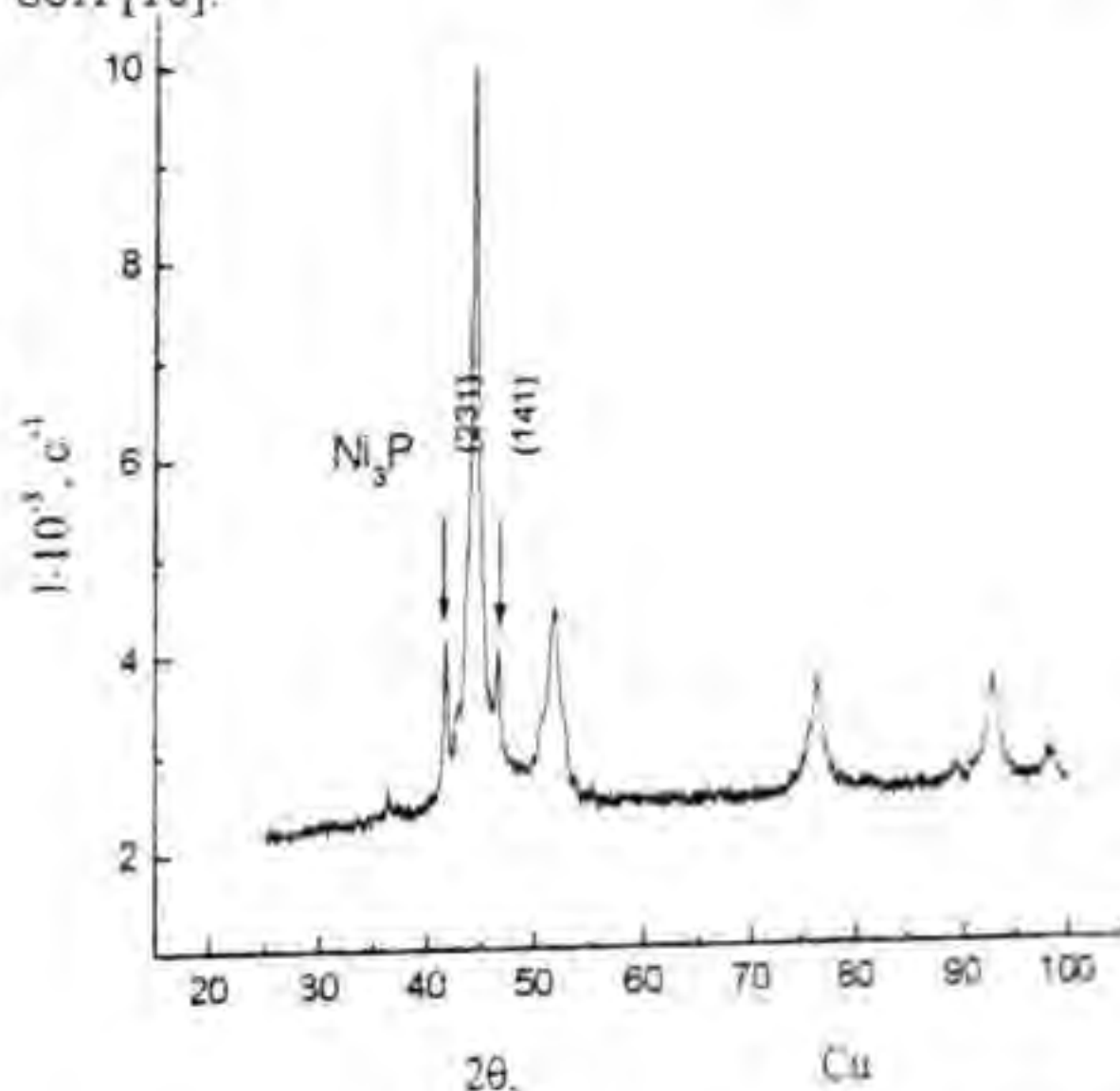


Рис. 3 Дифрактограма порошку нанокристалічного нікелю після термообробки за температури 360 °C

За допомогою електронної мікроскопії досліджено структуру та форму частинок у нанокристалічному та аморфному нікелі (рис. 4).

Встановлено, що розмір частинок нанокристалічного нікелю змінюється від 1 до 4 мкм їх середній розмір складає 2,2 мкм. При цьому, кожна частинка складається з більш дрібніших. Це свідчить про значну агломерацію частинок уже в процесі синтезу.

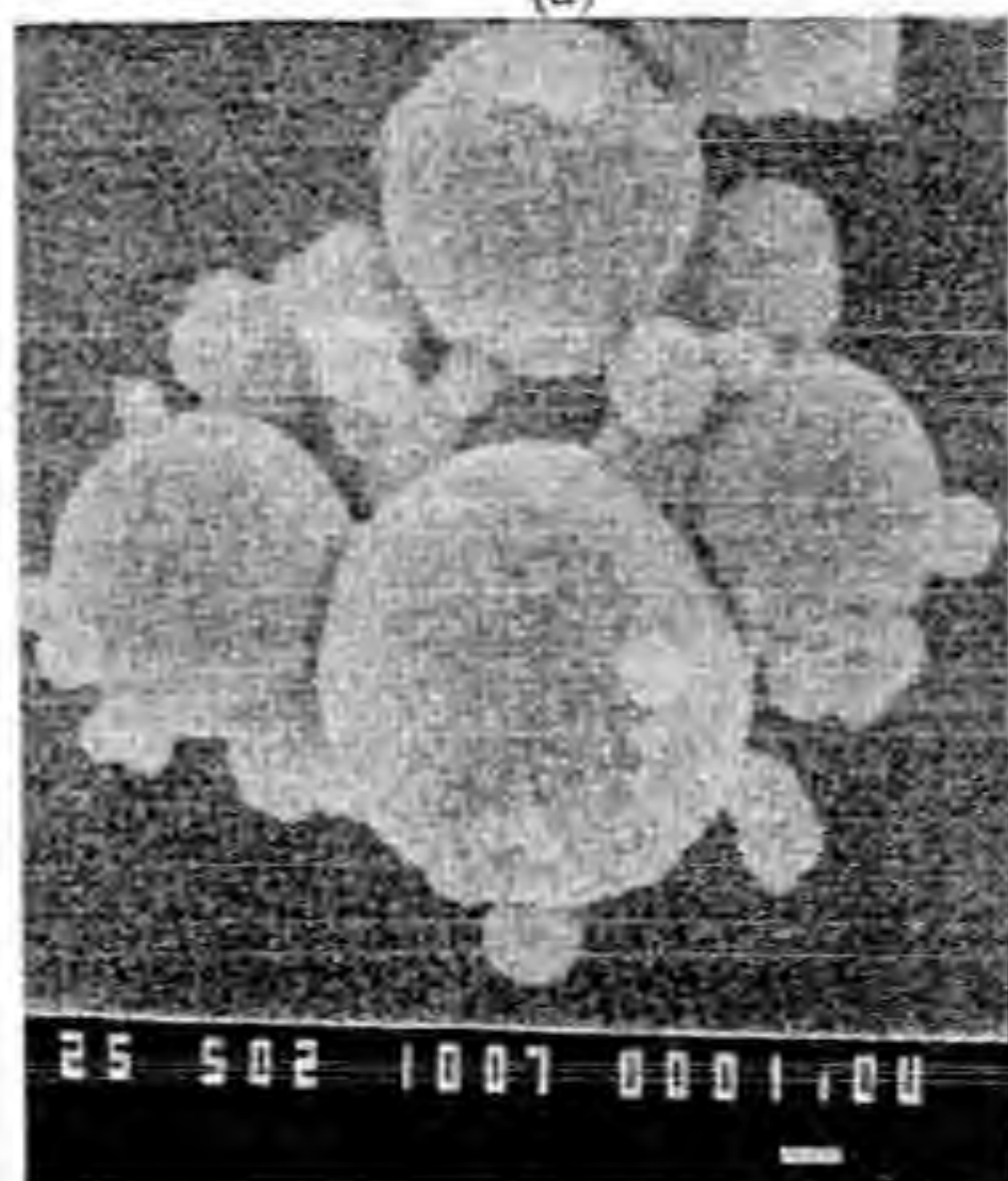
Проте, агрегати частинок нанокристалічного нікелю можуть бути подрібнені в ультразвуковому диспергаторі при формуванні НКМ. Форма частинок аморфного Ni – сферична із розмірами, які варіюються від 0,5 до 10 мкм. Середній розмір часток аморфного нікелю становить 6 мкм.

Раніше [9, 18] за допомогою методу повного термічного аналізу були вивчені процеси окислення порошків мікрокристалічного та нанокристалічного Ni, а також структурні перетворення їх при нагріванні. Було встановлено, що підвищення температури $T > 300$ °C для мікрокристалічного Ni приводить спочатку до появи на кривій диференційного термічного аналізу (DTA) для нахилу, паралельної осі ординат, а потім при температурі 360 °C спостерігали зміну нахилу на цій кривій. Встановлене явище викликано фазовим переходом другого роду і пов'язано з втратою нікелем своїх феромагнітних властивостей (точка Кюрі). З літературних джерел відомо, що температура Кюрі Ni $T_K = 358$ °C [19]. Отже, одержані

експериментальні результати збігаються з літературними даними. Слід зазначити, що фазовий перехід не супроводжується тепловим ефектом, відбувається тільки аномальна зміна теплоємності.



(а)



(б)

Рис. 4 Фотографії зразків порошків нікелю, одержаних за різних умов синтезу (а-нанокристалічний; б-аморфний). Збільшення: а, б – 5000. Довжина мітки дорівнює 1 мкм.

На відміну від кривих ДТА для порошків мікрокристалічного Ni для зразків порошків нанокристалічного Ni в області температур 380–415 °C відбувається зміщення кривої ДТА відносно осі абсцис, що характерно для переходу другого роду. Проте початок цього переходу чітко не проявляється. Це пояснюється тим, що на перехід Ni

із магнітного в немагнітний стан накладається кінцева частина екзотермічного ефекту кристалізації Ni.

На основі даних ДТА та термогравіметрії по дослідженню НКМ нікель/декстран встановлено, що при температурах вище 300°C відбувається термодеструкція поверхневого шару декстрану, а при $T > 580^\circ\text{C}$ його розклад. Виявлено також, що при температурах $T > 400^\circ\text{C}$ відбувається окислення нанокристалічного Ni як у вигляді порошку, так і в складі НКМ.

Одержані дані стосовно структури порошків Ni і НКМ нікель/декстран добре корелюють з даними по дослідженню магнітних властивостей одержаних матеріалів. На рис.5 наведено залежності питомої намагніченості зразків мікрокристалічного Ni (1), нанокристалічного Ni (2), та шаруватих НКМ нікель/декстран із вмістом декстрану в поверхневому шарі 0,2 г на 1 г нікелю (3) (16,7 % від загальної маси зразків).

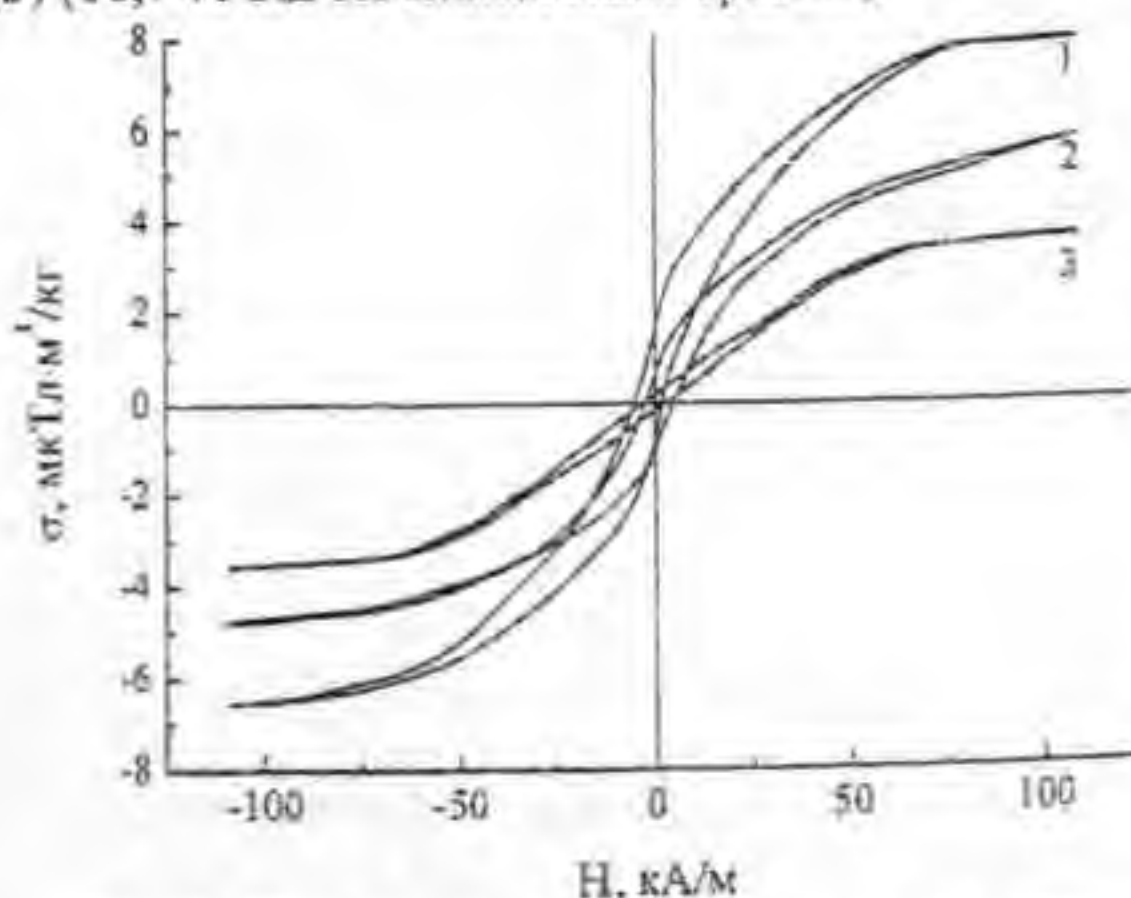


Рис.5 Петлі магнітного гістерезису зразків мікрокристалічного Ni (1), нанокристалічного Ni (2), та шаруватих НКМ нікель/декстран (3). Вміст декстрану в поверхневому шарі 16,7 % від загальної маси зразка.

З рис. 5 бачимо, що магнітні властивості зразків скомпактованого нанокристалічного Ni і НКМ проявляються слабкіше, ніж зразків мікрокристалічного Ni. Окрім того, форма петель гістерезиса для цих зразків стає більш вузькою, що свідчить про можливе зменшення магнітних втрат у зразках в процесі перемагнічування. Відомо, що вузькі петлі гістерезису притаманні нанокристалічним матеріалам [7, 8], а значення σ_s , σ_i і H_c залежать від розміру кристалітів [19]. При співставленні магнітних характеристик зразків компактованих порошків мікрокристалічного нікелю, нанокристалічного і НКМ нікель/декстран спостерігали зменшення значень σ_s

від 7,9 до 3,6 мкТл·м³/кг, σ_c від 1,63 до 0,67 та 0,2 мкТл·м³/кг, H_c від 4,0 до 2 кА/м, відповідно.

Має інтерес розглянути залежності магнітної сприйнятливості вищезгаданих зразків від температури (цикли нагрівання – охолодження) (рис.6).

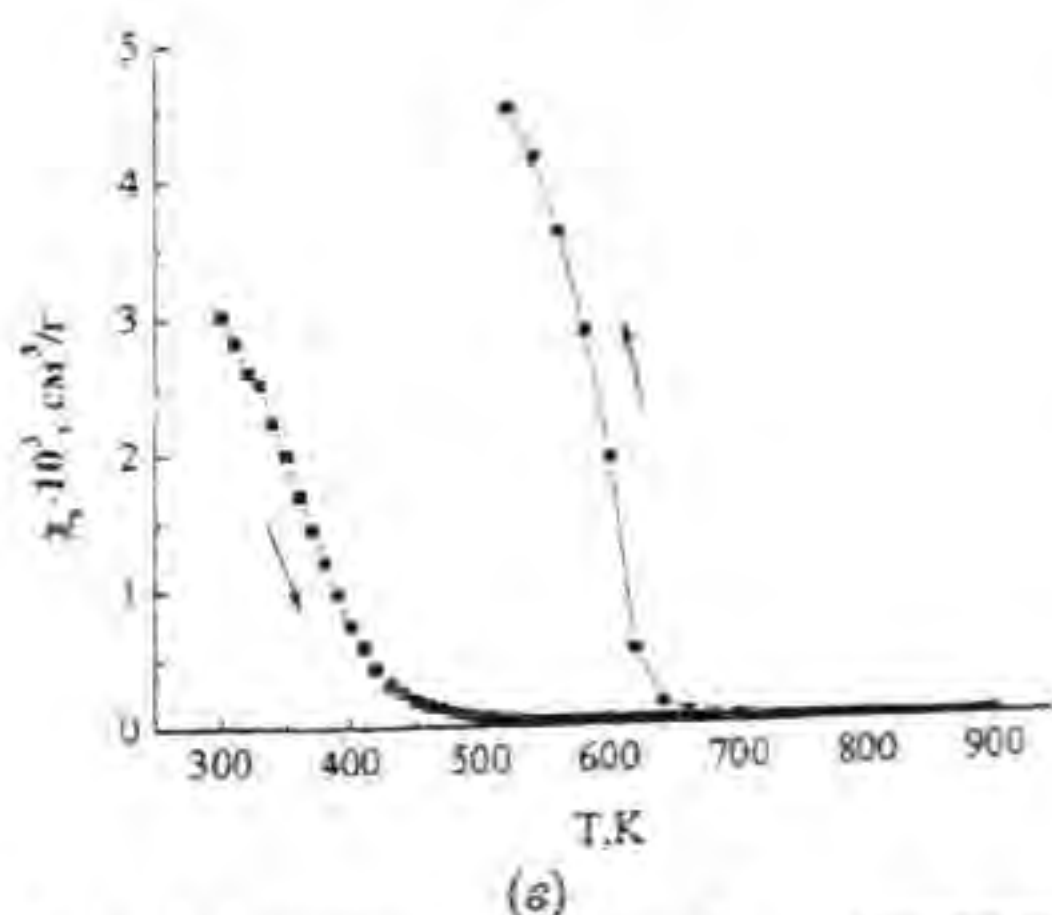
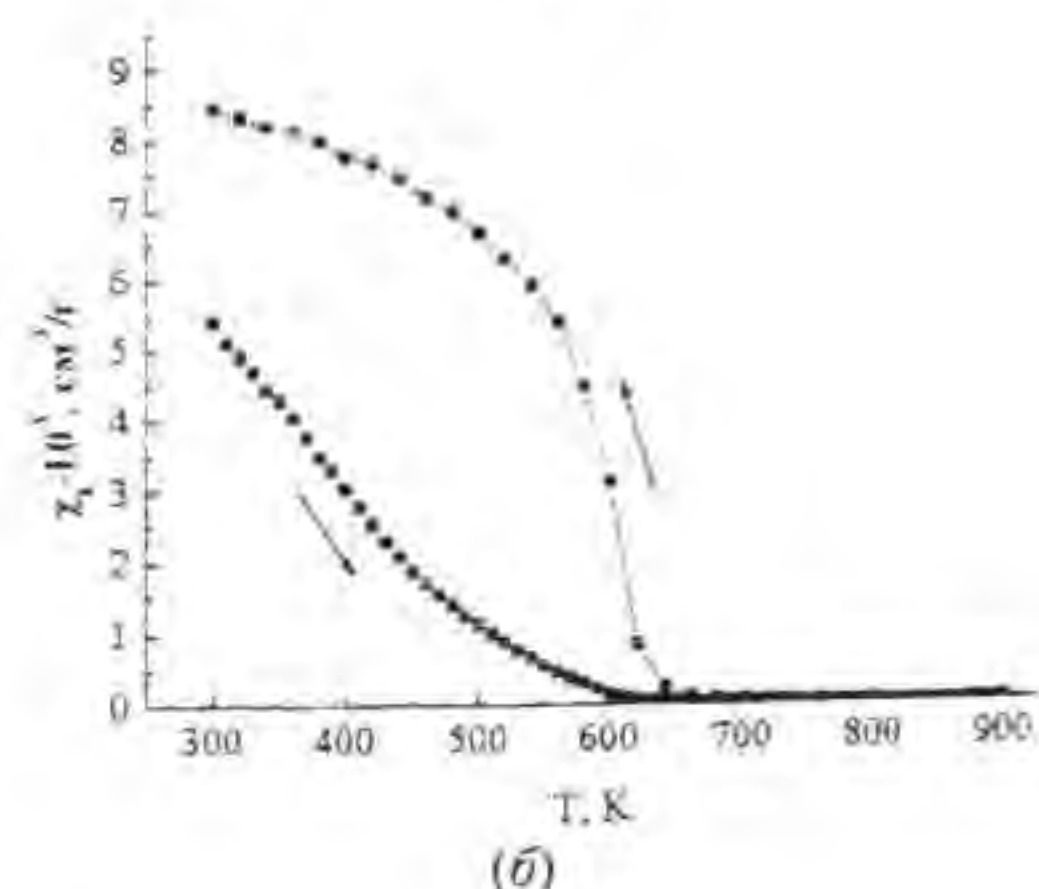
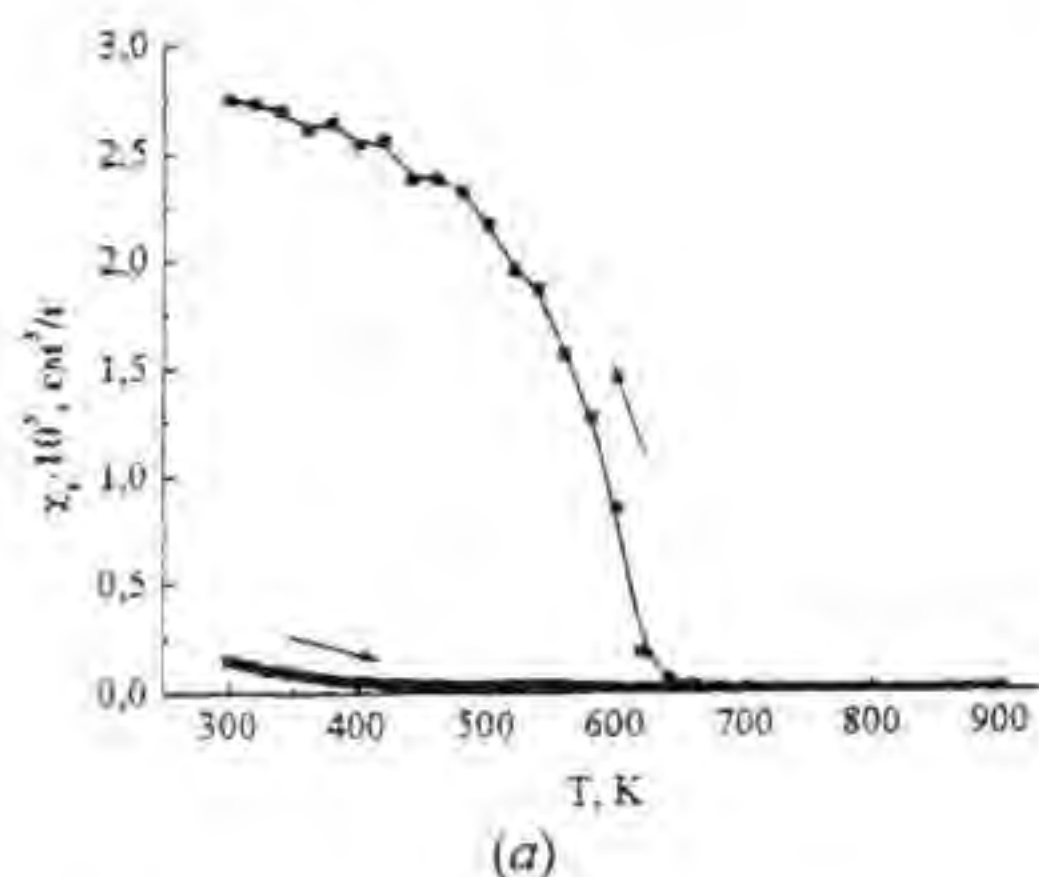


Рис. 6 Залежність магнітної сприйнятливості від температури для аморфного Ni (а), нанокристалічного Ni (б) та НКМ нікель/декстран (в).

З рис.6 бачимо, що нагрівання нанокристалічного нікелю і НКМ до 631 – 633 К (точка Кюрі) приводить до втрати ними феромагнітних влас-

тливостей. Проте після подальшого нагрівання до 903 К і наступного охолодження спостерігається значне підвищення їх магнітних характеристик. Так значення χ_v для нанокристалічного нікелю зростають від $5,5 \cdot 10^{-3}$ см³/г до $8,5 \cdot 10^{-3}$ см³/г. У НКМ, де поверхневий шар декстрану зруйнувався після термодеструкції також спостерігали збільшення значень χ_v у порівнянні із зразком, який не піддавали нагріванню. Отже, одержані результати представляють особливості структурної релаксації аморфного і нанокристалічного нікелю при нагріванні, і розкривають причини зміни їх магнітних характеристик і характеристик НКМ після термоцикування.

Висновки.

Встановлено взаємозв'язок між структурою та магнітними характеристиками НКМ порошків нанокристалічного і аморфного Ni та НКМ нікель/декстран. Проаналізовані особливості процесу кристалізації аморфного і нанокристалічного Ni при підвищених температурах і виявлено, що в процесі термоцикування (вище температури Кюрі) відбувається підвищення магнітної сприйнятливості вищезгаданих матеріалів.

Список використаних джерел

1. Помогайло А. Д., Розенберг А. С., Уфленд И. Е. Наночастицы металлов в полимерах – Москва. Химия, 2000. – С. 672.
2. Шпак А. П., Куницкий Ю. А., Карбовский В. Л. Кластерные и наноструктурные материалы. – Киев. Академперіодика, 2001. – т. 1. – С. 588.
3. Сергеев Г. Б. Успехи химии. – 2001. – Т. 70, № 10. – С. 913 – 933.
4. Cook D., Monroy R. Use of high density microparticles for removal of pathogens, Патент США № 6730230, MKI G 01 N 033/569, may 4, (2004)
5. Busmann H. G., Gunther B., Meyer U. Fourth International Conf. on Nano'98, Book of Abstracts, June 14-19, (Stockholm, Sweden 1998), p.296.
6. Суздальев И. П. Успехи химии. – 2001. – Т. 70, № 3. – с. 204-240.
7. Semko L. S., Ogenko V. M., Revo S. L., Mishchenko V. N. Functional Materials. – 2002. – 9, № 3. с. 513-518.
8. Семко Л. С., Шевляков Ю. А., Чуйко О. О., Горбик П. П. Металлофиз. новейшие технологии – 2006 – Т. 28, № 6. – с. 729-737.
9. Semko L. S., Dzubenko L. S., Ogenko V. M., Revo S. L. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 200270, p. 621-631.

10. Горбик П.П., Петрановська А.Л., Сторожук Л.П., Дубровін І.В., Семко Л.С., Чехун В.Ф. Медико-біологічні нанокмпозити на основі магнетиту: синтез, модифікація, функціолізація поверхні для застосування *in vitro* // *Химия, физика и технология поверхности*. – Выпуск 11-12. – Киев : Наукова думка, 2006. – 22 с.
11. Семко Л.С., Горбик П.П., Чуйко О.О., Сторожук Л.С., Дубровін І.В., Оранська О.І., Рево С.Л. Модифікування магнетиту діоксидом титану та властивості одержаних композитів // *Доповіді НАН України*. – 2007. – № 2. – с.150-157.
12. Семко Л.С., Горбик П.П., Сторожук Л.С., Дубровін І.В., Чуйко О.О., Оранська О.І., Скрипка О.І. Синтез та властивості нанокмпозитів на основі магнетиту, модифікованого оксидом кремнію // *Доповіді НАН України*. – 2007. – № 3. – с.153-160.
13. Вирник А.Д., Хомяков К.П., Скокова И.Ф. *Успехи химии*. – 1975. – Т.44, №7. – с.1280-1307.
14. Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения: Пер. с японского. – М.: Мир, 1987. – 419 с.
15. Шалкаускас М.И., Вашкялис П.А. Химическая металлизация пластмас (3-е издание переработаное). – Ленинград: Химия, 1985. – с.144.
16. Гинье А. Рентренография кристаллов. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – с. 392-394, с.604.
17. Оранська Е.И., Горников Ю.И., Фесенко Т.В. Автоматизированная методика определения средних размеров кристаллов поликристаллических твёрдых тел // *Заводская лаборатория*. – 1994. – Т.60, №1. – с.28.
18. Семко Л.С., Дзюбенко Л.С., Огенко В. Процессы термодеструкции в композиционных материалах на основе полиэтилена и нанокристаллического никеля // *Book of abstracts of International conf. „ Functionalized materials: synthesis, properties and application”* (Kyiv, Ukraine, 24 – 29 september, 2002). – Kyiv: Ed. Zaitsev, 2002. – P. 191 – 193.
19. *Таблицы физических величин*. Справочник. (под ред. Академика И.К. Кикоина). (Москва, Атомиздат. 1976), с.1006.

Надійшла до редколегії 12.11.07

УДК 519.9

Костянтин В. Усенко¹, канд. фіз-мат. наук,
доцент, Наталія О. Черкашина²

Електромагнітне поле пари когерентних електронів

Дослідження відокремлюваної частини електричного поля переплутаного стану (наприклад, стану пари електронів) є вельми важливим для задач, що стосуються інтерференції електронів. В даній роботі досліджено властивості електромагнітного поля пари когерентних електронів, знайдено скалярний та векторний потенціали цього поля.

Ключові слова: пара когерентних електронів, електромагнітне поле, скалярний потенціал, векторний потенціал

¹ E-mail: usenko@univ.kiev.ua

² E-mail: ncherkashyna@ukr.net

Дослідження інтерференції електронів, які оточують магнітний потік, становлять інтерес ще з часів Ааронова-Бома [1-1]. Результати цих досліджень знаходять застосування у багатьох задачах, зокрема тих, що стосуються осциляцій провідності в мезоскопічних кільцях, нейтронної інтерферометрії, та експериментах з визначення траєкторії [2]. Подальший розвиток досліджень полягає у заміні магнітостатичного потоку нестационарним електромагнітним полем.

В результаті таких досліджень може бути сконструйований нелінійний пристрій, де взаємодія між електронами, які інтерферують, і фотонами приводить до появи цікавих нелінійних явищ [3], таких, як посилення та конверсія частоти [4].

В цих експериментах ставлять за мету використання неklasичних мікрохвиль, де строго контролюють появу квантового шуму. В даному випадку досліджується вплив квантового шуму на інтерференцію електронів [5], наприклад, вплив квантової статистики фотонів на квантову статистику електронів, переплутаності неklasичних мікрохвиль на інтерференцію електронів [6].

Експерименти з дослідження інтерференції електронів, що знаходяться далеко один від іншого, пояснюються завдяки корельованим

Costyantyn V. Usenko¹, candidate of science,
associate professor, Nataliia O. Cherkashyna²

Electromagnetic field of coherent electron pair

The investigation of separated part of electromagnetic field of entangled state (for example, the state of coherent electron pair) is very important especially for the tasks which concern the interference of electrons. In this work, properties of electromagnetic field of coherent electron pair are investigated. Values of scalar and vector potentials of electromagnetic field produced by coherent electron pair were obtained.

Key Words: coherent electron pair, electromagnetic field, scalar potential, vector potential

неklasичним електромагнітним полем. Врахування матриці густини електромагнітного поля дозволяє визначити кількість інтерференційних смуг. Обидва випадки, такі, як класично корельоване (розділюване) та квантовомеханічно корельоване (переплутане) електромагнітні поля розглядаються в задачах, що стосуються інтерференції електронів. Отже, дослідження відокремлюваної частини електричного поля переплутаного стану (наприклад, стану пари електронів) є вельми важливим. Для дослідження інтерференції електричних зарядів за наявності класичного та неklasичного електромагнітних полів [7].

Зазвичай вважається, що для пари електронів можна означити оператори положення та імпульсу центра мас і подібні до них оператори відносної відстані та відносного імпульсу

$$\hat{x} = x_1 - x_2, \quad \hat{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \hat{p} = \frac{p_1 - p_2}{2}$$

$\hat{P} = p_1 + p_2$, але обидва набори величин використовують для свого означення окремі оператори для координати та імпульсу одного та другого електронів.

Експериментальне визначення таких величин, як відносна координата та відносний імпульс може бути здійснене вимірюванням електромагнітного поля пари електронів, а саме

скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля.

Надалі ми вважатимемо, що стан кожного з електронів, якби він був окремим, був би

когерентним і характеризувався б гаусівським хвильовим пакетом

$$\varphi(\vec{p}_1, \vec{r}_1; \vec{p}_{01}, \vec{r}_{01}) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi(1 + \omega^2(t - t_0)^2)}\right)^3} \exp \left(- \frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_{01} - \frac{\vec{p}_{01}}{m}(t - t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} + i \frac{\vec{p}_{01} \vec{r}_1}{\hbar} \right),$$

$$\varphi(\vec{p}_2, \vec{r}_2; \vec{p}_{02}, \vec{r}_{02}) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi(1 + \omega^2(t - t_0)^2)}\right)^3} \exp \left(- \frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_{02} - \frac{\vec{p}_{02}}{m}(t - t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} + i \frac{\vec{p}_{02} \vec{r}_2}{\hbar} \right).$$

Тут σ – невизначеність координати, однакова для обох електронних станів. Їй відповідає невизначеність імпульсу $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma}$.

Це спрощення дозволяє повністю обчислити електромагнітне поле розглядуваної пари, а водночас враховує найважливішу властивість хвильових пакетів різних частинок – перекриття хвильових функцій.

Надалі ми використовуватимемо систему координат центру мас. В ній центри пакетів відхилені від початку координат на однакову відстань в протилежні боки $\vec{r}_0 = \vec{r}_{01} = -\vec{r}_{02}$, $\vec{r}_0 = \vec{r}_{01} = -\vec{r}_{02}$, $\vec{p}_0 = \vec{p}_{01} = -\vec{p}_{02}$.

Внаслідок тотожності спільна хвильова функція пари електронів є антисиметричною комбінацією одночастинкових хвильових пакетів:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1) - \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1 - N^2}}$$

для електронів, спіни яких паралельні, або симетричною комбінацією одночастинкових хвильових пакетів:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1) + \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1 + N^2}}$$

для електронів, спіни яких антипаралельні.

Тут через N позначено інтеграл перекриття. Величина цього інтегралу швидко спадає від одиниці, як тільки відстань між центрами хвильових пакетів або відносний імпульс перевищують відповідну міру невизначеності.

Параметри двочастинкової хвильової функції, що становлять інтерес для нас, є величини $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$, оскільки неможливо визначити величини $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$, $\vec{p}_{01}$, $\vec{p}_{02}$, що стосуються кожного з електронів, коли мова йде про стан пари.

Внутрішні властивості пари електронів (як і всі інші властивості), проявляються в електромагнітній взаємодії системи електронів з оточенням. Тому з'ясування питання про спостережуваність відносних координат та імпульсу можна здійснити, якщо дослідити електромагнітне поле такої пари електронів. Це поле повністю визначається значеннями скалярного та векторного потенціалів, а з властивостей їхньої поведінки можна зробити висновки щодо інших характеристик пари когерентних електронів.

Якщо мова йде про класичну пару електронів, то їх характеристикою є електромагнітне поле, ними створене. Це поле визначається координатами та імпульсами частинок. За розподілом скалярного потенціалу можна визначити координати, а з розподілу векторного потенціалу напрямок вектора швидкості. Для частинок, що мають квантові властивості, такі твердження справедливі лише в тому випадку, коли невизначеності координат та імпульсів є незначними, а самі частинки можна вважати майже класичними. Для того, щоб застосувати такі міркування до квантової пари електронів, потрібно з'ясувати, чи можна визначати відносні координати та імпульси і за характеристиками поля.

2. Електромагнітне поле одного когерентного електрона

2.1 Хвильова функція когерентного електрона

Досліджуючи електромагнітне поле когерентного електрона, (а також пари когерентних електронів), ставимо за мету дослідження впливу невизначеностей координати та імпульсу вільної частинки. Враховуючи це, бачимо, що плоска хвиля як інструмент для опису стану когерентного електрона, нас не влаштовує. Це ж саме стосується і функцій, локалізованих у просторі, що мають вигляд типу

$$j(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{1}{mc} \cdot \frac{1}{2} \left[\int \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) \nabla \Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) d^3r + \int \Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) \nabla \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) d^3r \right]. \quad (3)$$

Такі розподіли імовірностей характеризуються невизначеностями координати σ_x та імпульсу σ_p . Користуючись співвідношенням невизначеностей Гайзенберга, яке для когерентних станів є мінімальним в певний момент часу, можемо записати:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}, \quad (4)$$

звідки невизначеність координати

$$\sigma_x = \frac{\hbar}{2\sigma_p}.$$

$\delta(x - x_0(t))$. Замість таких функцій, будемо розглядати суперпозицію плоских хвиль:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(p) \exp\left(i \frac{px}{\hbar}\right) dp \quad (1)$$

Амплітуди імовірностей $\Psi(x)$ та $\Psi(p)$ дають у результаті гаусів розподіл імовірностей координати та імпульсу відповідно:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = |\Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0)|^2. \quad (2)$$

Залежність хвильового пакету від часу така, що рівність (4) порушується, тобто хвильовий пакет з часом "розпливається".

Для вільної частинки невизначеність імпульсу є сталою величиною, $\sigma_p = \text{const.}$, в той час, як невизначеність координати залежить від часу.

Невизначеності координати та імпульсу є однаковими для всіх напрямків.

Отже, беручи до уваги наведені властивості параметрів хвильової функції, можемо записати хвильову функцію когерентного електрона у вигляді:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi(1 + \omega^2(t - t_0)^2)}\right)^3} \exp \left[-\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} + i \frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar} \right]. \quad (5)$$

де σ - невизначеність координати електрона, r - координата електрона, r_0 - середнє значення координати електрона, p_0 - середнє значення імпульсу електрона, t_0 - момент кульмінації (момент, коли відсутня кореляція між

координатою та імпульсом частинки), t - час, m - маса електрона.

Можемо перенести початок відліку координат в точку, яка описується радіус-вектором $\vec{r}_0$, тож, переписати хвильову функцію когерентного електрона у вигляді:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{p}_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi(1 + \omega^2(t - t_0)^2)}\right)^3} \exp \left[-\frac{\left(\vec{r} - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} + i \frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar} \right] \quad (6)$$

Розглядаючи електрон в момент кульмінації (тобто в момент часу $t = t_0$), отримаємо таке значення хвильової функції когерентного електрона:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{p}_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi}\right)^3} \exp \left[-\frac{\vec{r}^2}{4\sigma^2} + i \frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar} \right]. \quad (7)$$

Величина $\vec{p}_0$ для вільної частинки характеризує швидкість її руху $\vec{v} = \frac{\vec{p}_0}{m}$, що буде визначати векторний потенціал електромагнітного поля.

2.2 Потенціали електромагнітного поля одного когерентного електрона

Розглядаючи електромагнітне поле когерентного електрона, запишемо вирази для

скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля за визначенням, що має місце в електростатиці:

$$\varphi(r) = e_0 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad (8)$$

$$\vec{A}(r) = e_0 \int \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (9)$$

Вирахувавши відповідні значення густини імовірності розподілу координати для такого електрона та густини імовірності розподілу струму за формулами (2) та (3), отримаємо:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi}})^3} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4\sigma^2}\right), \quad (10)$$

$$j(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi}})^3} \frac{\vec{p}_0}{mc} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4\sigma^2}\right). \quad (11)$$

Підставивши останні вирази у (8) та (9), отримаємо значення для скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля одного когерентного електрона:

$$\varphi(r) = e_0 \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} Na(r) \quad (12)$$

$$\vec{A}(r) = e_0 \frac{\vec{p}_0}{mc} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} Na(r). \quad (13)$$

при цьому

$$Na(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{1}{|\vec{x}|} \operatorname{erf}\left(\frac{|\vec{x}|}{\sqrt{2\sigma}}\right).$$

Цей же результат можна отримати при застосуванні Лоренцевих перетворень поля точкового заряду при застосуванні його до системи відліку, яка рухається зі швидкістю $\frac{\vec{p}_0}{m}$.

На рис. 1 зображено залежність скалярного потенціалу одного електрона від відстані між центром заряду та точкою спостереження потенціалу. Послідовність точок відповідає випадку класичного кулонівського потенціалу, а лінія – потенціалу когерентного електрона.

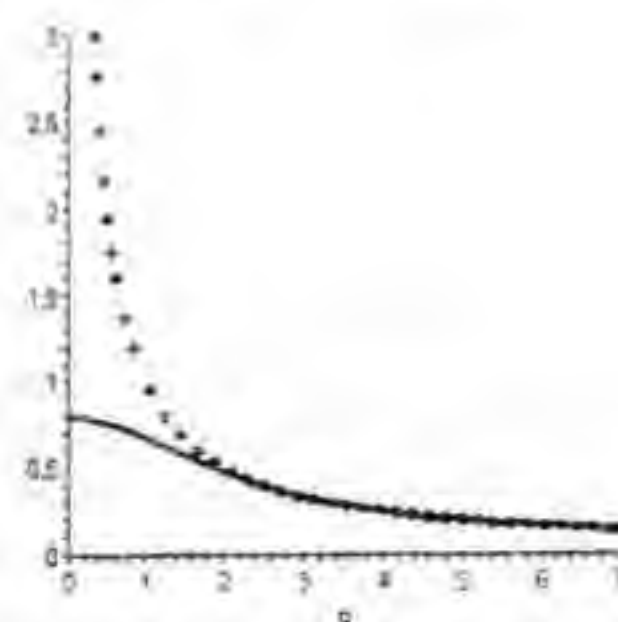


Рис. 1

Потенціал електромагнітного поля когерентного електрона не зростає до нескінченності, як це видно з рис. 1, а набуває сталого значення. Це можна пояснити наступним чином. Інтеграл похибок $\operatorname{erf}(x)$ швидко прямує до 1, коли x перевищує 1, що можна побачити з розкладу:

$$\operatorname{erf}(x) \cong 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \exp(-x^2). \quad (14)$$

Другий член розкладу нехтовно малий за рахунок $\exp(-x^2)$ (як і всі наступні члени розкладу), тож отримуємо $\operatorname{erf}(x) = 1$. За таких умов значення скалярного та векторного потенціалів дорівнюють

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{|\vec{r}|}, \quad (15)$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\vec{p}_0}{mc} \frac{e_0}{|\vec{r}|}. \quad (16)$$

В області, розмір якої менший за невизначеність координати, імовірність реєстрації електрона є малою, тому поле, створюване електроном, теж буде зменшуватись з розмірами області.

Таким чином, поле когерентного електрона за межами області в декілька невизначеностей координати співпадає з полем точкового заряду.

В особливому випадку, коли значення середнього імпульсу електрона $p_0 = 0$, густина розподілу струму набуває нульового значення, а отже, і векторний потенціал електричного поля $\vec{A}(r) = 0$.

3. Електромагнітне поле пари когерентних електронів

3.1. Хвильова функція пари когерентних електронів.

Хвильова функція пари когерентних електронів є комбінацією добутків хвильових

функцій кожного з електронів. У випадку, коли електрони мають антисиметричні спіни, хвильова функція повинна бути симетричною комбінацією, а у випадку, коли спіни паралельні – антисиметричною комбінацією (відповідно до принципу Паулі).

Можемо вирахувати середні значення координат:

$$\langle \vec{r}_1 \rangle + \langle \vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \rangle.$$

Отже, можемо визначити параметр, який в класичній механіці є середнім значенням координати центра мас.

Вибираємо систему відліку, що співпадає з системою центра мас. Отже, $\vec{r}_{01} = \vec{r}_0$, $\vec{r}_{02} = -\vec{r}_0$, $\vec{p}_{01} = -\vec{p}_0$, $\vec{p}_{02} = \vec{p}_0$, а момент кульмінації $t_{01} = t_{02} = t_0$.

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm N^2}} \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \cdot \left[\exp\left(-\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(\vec{r}_2 + \vec{r}_0)^2}{4\sigma^2} + i\frac{\vec{p}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\hbar}\right) \pm \exp\left(-\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(\vec{r}_1 + \vec{r}_0)^2}{4\sigma^2} + i\frac{\vec{p}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\hbar}\right) \right] \quad (18)$$

3.2 Потенціали електромагнітного поля пари когерентних електронів

Розглядаючи електромагнітне поле пари когерентних електронів, можемо вирахувати скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля за формулами (6) та (7). При цьому враховуємо, що значенні густини імовірності для двочастинкової функції:

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2$$

Тоді густина розподілу однієї координати:

$$\rho(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\vec{r} + \vec{r}_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{r^2 + 2r_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \left[\exp\left(\frac{2i\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) + \exp\left(-\frac{2i\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \right] \quad (21)$$

Ми розглядатимемо випадок, коли $\vec{p}_0 \parallel \vec{r}$. Відповідно до формул (8) та (9) за такої умови отримаємо наступні значення для

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\Psi_1(\vec{r}_2)\Psi_2(\vec{r}_1) \pm \Psi_1(\vec{r}_1)\Psi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1 \pm N^2}}, \quad (17)$$

де N – інтеграл перекривання, що представляє собою скалярний добуток хвильових функцій, визначається наступним чином:

$$N = \int \Psi_1^*(r)\Psi_2(r)d^3r = \langle \Psi_1(r) | \Psi_2(r) \rangle. \quad (18)$$

Характеристики двочастинкової хвильової функції $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$ набувають нульового значення для пари когерентних електронів внаслідок їх тотожності.

Розглядатимемо пару когерентних електронів, як і окремий когерентний електрон, в момент кульмінації, тобто в момент часу $t = t_0$. Тоді двочастинкову хвильову функцію запишемо у вигляді:

$$\rho(\vec{r}_1) = -e_0 \int \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3r_2 \quad (19)$$

$\rho(\vec{r}_1) = \rho(\vec{r}_2)$ – внаслідок тотожності частинок. Отже, для потенціалу отримаємо:

$$\varphi(\vec{r}) = 2 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (20)$$

Залишемо явний вигляд для густини імовірності координати:

скалярного потенціалу пари когерентних електронів:

$$\varphi_s(r) = \frac{e_0}{1+N^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r-r_0) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r+r_0) + N^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r + \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2ip_0}{\hbar}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r - \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{2ip_0}{\hbar}\right) \right\} \right] \quad (22)$$

$$\varphi_a(r) = \frac{e_0}{1-N^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r-r_0) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r+r_0) - N^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r + \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2ip_0}{\hbar}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r - \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{2ip_0}{\hbar}\right) \right\} \right] \quad (23)$$

, де $N = \exp\left(-\frac{2p_0^2\sigma^2}{\hbar^2} - \frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right)$, $\varphi_s(r)$ - скалярний потенціал пари когерентних електронів, спіни яких антипаралельні, а $\varphi_a(r)$ - скалярний потенціал пари когерентних електронів, спіни яких паралельні.

На Рис. 2. суцільна лінія відповідає потенціалу пари когерентних електронів як з паралельними, так і з антипаралельними спінами (для великих значеннях відносної координати вони збігаються, $x=3$), а послідовність точок відповідає потенціалу класичної пари когерентних електронів.

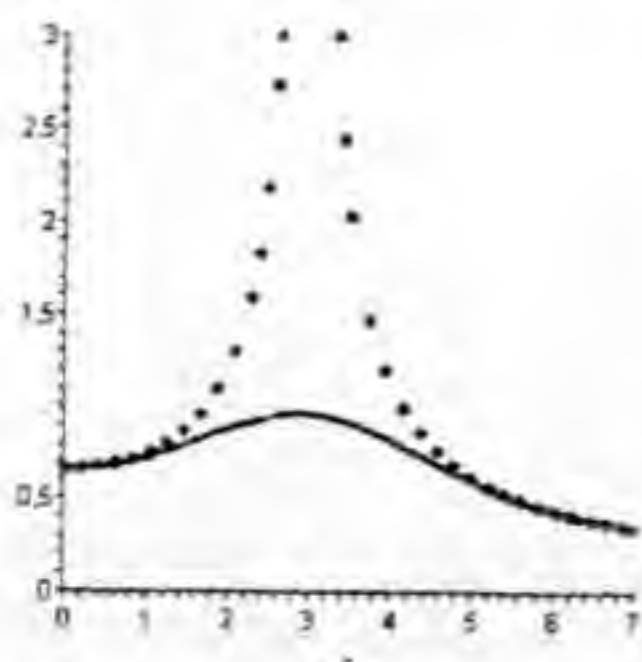


Рис. 2.

Векторні потенціали пари когерентних електронів, що мають антипаралельні та паралельні спіни, відповідно дорівнюють:

$$\vec{A}_s(r) = \frac{\vec{p}_0}{m} \frac{1}{c} \frac{e_0}{1+N^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r-r_0) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r+r_0) + N^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r + \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2ip_0}{\hbar}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r - \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{2ip_0}{\hbar}\right) \right\} \right] \quad (24)$$

$$\vec{A}_a(r) = \frac{\vec{p}_0}{m} \frac{1}{c} \frac{e_0}{1-N^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r-r_0) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r+r_0) - N^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r + \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{2ip_0}{\hbar}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na\left(r - \frac{2ip_0\sigma^2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{2ip_0}{\hbar}\right) \right\} \right] \quad (25)$$

Розглядаючи загальний випадок взаємної орієнтації векторів $\vec{r}$ та $\vec{p}_0$, вирахуємо потенціали електромагнітного поля для пари когерентних електронів, густина імовірності яких записується у вигляді (24).

Для знаходження потенціалів електромагнітного поля пари когерентних електронів в загальному випадку потрібно

$$I = \pi^{3/2} \exp(-a^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2\Gamma(k+3/2)} = Na(a^2).$$

Математичні розрахунки, що були виконані при отриманні цієї формули, наведено в Додатку 1.

Висновки

Вплив невизначеностей координати та імпульсу особливо помітний в найближчому околі зарядів. Навіть у випадку окремого електрона, електричний та магнітний потенціали не прямують до нескінченності. Натомість вони є обмеженими величиною порядку $\frac{e_0}{\sigma}$ (див. рис.3).

Для пари когерентних електронів поведінка в околі центра (див. рис.2).

Відносна координата повністю визначають електричний квадрупольний момент класичної пари частинок, а відносний імпульс характеризує їх магнітний момент. Така залежність зберігається і у випадку, коли мова йде про квантові частинки, за умови, що відносні координата та імпульс пари частинок значно перевищують відповідні невизначеності.

Список використаних джерел

1. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
2. A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. 74, 4047 (1995).
3. M. Buttiker, Phys. Rev. B 46, 12485 (1992).
4. R. Deblock, Phys. Rev. B 65, 075301 (2002).
5. A. Vourdas, Phys. Rev. A 64, 053814 (2001).
6. C.C. Chong, D.I. Tsomokos, A. Vourdas, Phys. Rev. A 66, 033813 (2002).
7. D.I. Tsomokos, C.C. Chong, A. Vourdas, Phys. Rev. A 69, 013810 (2004).

вирахувати значення інтегралів які можна представити у вигляді звести до вигляду:

$$I = \int \exp(-(\vec{r} - \vec{a})^2) \frac{d^3r}{|\vec{r}|}$$

Проінтегрувавши, отримаємо

Додаток 1

Для вирахування

$$I = \int \exp\left(-(\vec{r} - \vec{a})^2\right) \frac{d^3 r}{|\vec{r}|}, \text{ слід зазначити, що}$$

вектор $\vec{a}$ є комплексним у загальному випадку, $\vec{a} = \vec{a}' + i\vec{a}''$. При цьому напрямок осі z неможливо вибрати так, щоб $z \parallel \vec{a}$, тож обираємо площину векторів $\vec{a}'$ та $\vec{a}''$ за координатну площину.

$$\int \exp\left(-(\vec{r} - \vec{a})^2\right) \frac{d^3 r}{|\vec{r}|} =$$

$$\int \exp\left(-r^2 - a^2\right) \exp(2\vec{r}\vec{a}) \frac{d^3 r}{|\vec{r}|}$$

при цьому вектори $\vec{r}$ та $\vec{a}$ дорівнюють:

$$\vec{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta),$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$. Скалярний добуток цих векторів:

$$\vec{r}\vec{a} = r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot a_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \cdot a_y =$$

$$r \sin \vartheta (a_- e^{i\varphi} + a_+ e^{-i\varphi})$$

Тоді I набуває вигляду:

$$I = \exp(-a^2) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \sin \vartheta \times \\ \times \exp\left[2r \sin \vartheta (a_- e^{i\varphi} + a_+ e^{-i\varphi})\right] dr d\vartheta d\varphi$$

можемо записати його у вигляді:

$$I = \exp(-a^2) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \sin \vartheta \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2r \sin \vartheta)^n}{n!} (a_- e^{i\varphi} + a_+ e^{-i\varphi})^n dr d\vartheta d\varphi$$

Індекс n , за яким проводиться підсумовування, повинен приймати лише парні значення, інакше результатом інтегрування за змінною φ буде 0, тож $n = 2k$.

$$I = \exp(-a^2) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \sin \vartheta \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2r \sin \vartheta)^{2k}}{(2k)!} (a_- e^{i\varphi} + a_+ e^{-i\varphi})^{2k} dr d\vartheta d\varphi$$

Провівши інтегрування за змінною φ , отримаємо:

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} (a_- e^{i\varphi} + a_+ e^{-i\varphi})^{2k} d\varphi = 2\pi (a_- a_+)^{2k} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

Розглянемо інтеграл

$$I_\vartheta = \int_0^\pi \sin \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2r \sin \vartheta)^{2k}}{(k!)^2} d\vartheta = \\ = 2 \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}$$

а провівши інтегрування за змінною r для інтегралу, дістанемо

$$I_r = \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{2k+1} dr = \frac{1}{2} k!$$

Повертаючись до інтегралу I , можемо записати:

$$I = e^{-a^2} I_\varphi I_\vartheta I_r = \pi \exp(-a^2) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left((\vec{a})^2\right)^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}$$

або, провівши підсумовування за індексом m ,

$$I = \pi^{3/2} \exp(-a^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2\Gamma(k+3/2)}$$

Введемо функцію

$$Na(\vec{a}^2) = \pi^{3/2} \exp(-a^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2\Gamma(k+3/2)}$$

За її допомогою скалярний та векторний потенціали поля когерентного електрона представляється виразом:

$$\varphi(r) = e_0 \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r),$$

$$\vec{A}(r) = e_0 \frac{\vec{p}_0}{mc} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} Na(r).$$

Підписано до друку 21.02.2008.

Формат 70x100^{1/16}.

Папір офсетний.

Ум. друк. арк. 30,79.

Обл.-вид. арк. 40,72.

Наклад 350 прим. Зам. № 110.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
01001, Київ – 1, вул. Еспланадна, 4–6 оф.419-2.
Тел./факс (044) 287-03-79

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13360JB

45-чит зал періодики та друк

2010

